Numéro d'ordre : 4227

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ LILLE I

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR LILLE

Présentée pour obtenir
le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Discipline : Mathématiques

Par

Ihab AL ALAM

sous la direction de Pascal LEFÈVRE et Hervé QUEFFÉLEC

Géométrie des espaces de Müntz et opérateurs de composition à poids

soutenue le 21 Novembre 2008 devant le jury composé de :

M. Pascal LEFÈVRE	(Univ. d'Artois)	Directeur
M. Hervé QUEFFÉLEC	(Univ. Lille I)	Co-directeur
M. Gilles GODEFROY	(Univ. Paris VI)	Rapporteur
M. Gilles LANCIEN	(Univ. Franche Comté)	Rapporteur
Mme Isabelle CHALENDAR	(Univ. Lyon I)	Examinatrice
M. Daniel LI	(Univ. d'Artois)	Examinateur

Remerciements

C'est pour moi un réel plaisir de remercier toutes les personnes qui m'ont, de près ou de loin, d'une manière ou d'une autre, permis, par leur collaboration, leur soutien et leur avis judicieux, de mener à bien ce travail.

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude envers Pascal Lefèvre, qui a dirigé cette thèse avec beaucoup de bienveillance et de disponibilité, pour tout ce qu'il m'a appris, pour l'énergie qu'il m'a consacrée, pour sa gentillesse. J'ai pu, pendant quatre ans, profiter de sa grande culture mathématique et apprécier ses qualités d'écoute lors des périodes difficiles. Il a toujours su me guider et m'encourager. Ses conseils avisés, ses critiques pertinentes et ses qualités humaines m'ont été d'une très grande utilité pour mener à terme ce travail.

Je tiens tout particulièrement à remercier Hervé Queffélec, Co-Directeur de cette thèse, qui m'a accompagné depuis le début avec la compétence et la générosité que nous lui connaissons tous. Ses conseils judicieux et sa disponibilité ont toujours été pour moi une source d'encouragement. Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude et de ma reconnaissance.

Je suis très reconnaissant à Gilles Godefroy et à Gilles Lancien, pour avoir accepté d'être rapporteurs et pour leurs précisions et leur remarques. Je suis également très honoré que Isabelle Chalendar et Daniel Li, aient accepté d'être membres de mon jury de thèse.

Mes remerciements envers Hervé Queffélec, Daniel Li et Pascal Lefèvre seront ceux d'un ancien élève : leur enseignement agréable de l'analyse fonctionnelle, il y a quelques années, m'avait donné le goût de ce qui allait devenir le cadre de ma thèse. Qu'ils soient donc ici doublement remerciés.

J'adresse aussi mes remerciements aux membres de l'équipe administrative et technique du laboratoire Paul Painlevé, pour leur disponibilité et leur efficacité, qui m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions.

Je dois à tous mes amis et les autres thésards une grande reconnaissance pour les encouragements et le soutien qu'ils m'ont apportés.

Enfin, je n'oublie évidemment pas ma famille. Je voudrais exprimer ma reconnaissance à mes parents, mon frère, mes deux sœurs, mes grands-parents, et tous les membres de ma famille pour leur soutien inconditionnel par tous les temps.

J'ai une pensée particulière pour ma mère que j'aime profondément, pour les sacrifices qu'elle a fait pour moi, sans lesquels rien de tout cela ne serait arrivé, pour son soutient permanent. Merci maman !

Introduction

Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite croissante de réels :

$$0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Soient $M_\Lambda = vect\left\{x^{\lambda_k}; k \in \mathbb{N}\right\}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions x^{λ_k} définies sur l'intervalle $[0, 1]$, et M_Λ^E la fermeture de M_Λ dans un espace de Banach E contenant M_Λ. L'espace M_Λ^E est appelé espace de Müntz.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux cas, $E = C := C([0, 1])$, l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur $[0, 1]$, muni de la norme usuelle, et $E = L^p := L^p([0, 1]), 1 \leq p < \infty$, l'espace des classes de fonctions complexes mesurables sur $[0, 1]$ avec

$$||f||_{L^p} = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

On notera plus simplement M_Λ^∞ au lieu de M_Λ^C et M_Λ^p au lieu de $M_\Lambda^{L^p}$.

L'objet de cette thèse est d'étudier quelques aspects géométriques des espaces de Müntz. Nous commençons par le fameux Théorème de Müntz, [Mü14] :

Pour $E = C$ ou $E = L^p$, $1 \leq p < \infty$, on a

$$M_\Lambda^E \neq E \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty\,.$$

(Plus de détails et de généralisations sur ce théorème seront donnés dans le chapitre 1)

Donc si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$, on obtient une nouvelle famille d'espaces de Banach M_Λ^E. Ces espaces constituent la matière de notre thèse, qu'on étudie dans les chapitres 2, 3 et 4 :

Quel type d'espace de Banach M_Λ^E obtient-on à partir de la suite Λ si elle satisfait la condition $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$?
A vraie dire, cette question est loin d'être résolue et le programme est ambitieux.

Dans le chapitre 1, nous discuterons un peu de l'historique du problème puis nous présenterons certains résultats généraux qui nous seront utiles dans la suite.

Dans le chapitre 2, nous étudierons plusieurs propriétés élémentaires des espaces de Müntz. Ces propriétés aident à comprendre la nature géométrique de ces espaces. Dirk Werner [We] a démontré que les espaces de Müntz M_Λ^∞ sont isomorphes à des sous-espaces de c_0 et il y a un résultat similaire dans le cas $E = L^p([0,1])$. On étend ce résultat aux espaces d'Orlicz ($E = L^\psi$), ce qui généralise le cas $L^p([0,1])$. Signalons que très récemment, Gilles Godefroy a précisé le phénomène dans le cas $E = L^1$ [Go08]. Il prouve notamment que les espaces M_Λ^1 sont isométriques au dual d'un espace lui-même presque isométrique à un quotient de c_0.
On montrera que les espaces de Müntz sont des sous-espaces riches de $C([0,1])$, cette propriété va impliquer d'autre propriétés géométriques, par exemple la propriété (V) de Pełczyński, la propriété de Dunford-Pettis ainsi que leur dual aient la propriété de Schur. On s'intéresse aussi à une nouvelle généralisation des espaces de Müntz en considérant les polynômes de Müntz à coefficients dans un Banach quelconque X et on démontre qu'on peut passer du cas où $X = \mathbb{C}$ au cas X Banach de dimension infinie. Par exemple dans le cas où Λ est lacunaire, on retrouve les mêmes propriétés dans un cadre plus général.

Dans le chapitre 3, nous démontrerons de nouveaux résultats dans cette direction. Ce chapitre se compose de deux parties.
Dans la première partie, nous produisons des espaces de Müntz non complémentés dans $L^1([0,1])$. En fait, nous construisons une suite Λ non-quasilacunaire pour laquelle l'espace de Müntz associé n'est pas complémenté dans $L^1([0,1])$. Nous donnerons aussi des exemples d'espaces de Müntz M_Λ^1 complémentés dans $L^1([0,1])$. Comme application de ce travail, nous retrouvons certains résultats qui ont était récemment obtenus dans le livre de Vladimir I.Gurariy et Wolfgang Lusky [GuLu05], mais avec une méthode complètement différente. Par exemple, nous démontrerons que M_Λ^1 est isomorphe à ℓ^1 pour certaines familles des suites Λ quasilacunaires, mais ce n'est pas toujours le cas. Pour les suites

non-quasilacunaires, on savait déjà que, dans le cas continu il existe des espaces de Müntz M_Λ^∞ qui ne sont pas isomorphes à c_0 [Ne84]. Nous donnons aussi une base de Schauder explicite équivalente à la base canonique de ℓ^1 pour certains espaces de Müntz M_Λ^1, où Λ est une suite non lacunaire.
Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudions le cas $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$, nous verrons que certains phénomènes passent du cas $p = 1$ au cas p quelconque. Nous construisons un espace de Müntz possédant une FDD (Finite dimensional decomposition) dont les parties sommantes sont isométriquement isomorphes à $F_n = sp\left\{x^k\right\}_{k=1}^n$ précisément on a : $M_\Lambda^p \equiv (\sum_{n=1}^\infty F_n)_{(\ell^p)}$. En particulier, on peut construire des espaces de Müntz dans $L^p([0,1])$, isomorphes à ℓ^p, et ainsi possédant une base (inconditionnelle) de Schauder. Nous construisons aussi une base de Schauder explicite équivalente a la base canonique dans ℓ^p pour certains espaces de Müntz M_Λ^p, avec Λ une suite non lacunaire.

Le chapitre 4 étudie les opérateurs de composition à poids sur les espaces de Müntz classiques. Notre résultat principal donne une estimation précise de la norme essentielle de l'opérateur $\mathcal{T}_\psi o C_\varphi$ agissant sur M_Λ^∞ en termes de valeur de φ et ψ. On établit l'equivalence entre compacité, faible-compacité et complète continuité des opérateurs sur les espaces de Müntz, qui proviennent directement de la géométrie de ces espaces. Dans la deuxième partie de ce dernier chapitre on étudie les opérateurs de composition à poids, définis sur les espaces de Müntz M_Λ^1 dans L^1. On considère une fonction $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continue, où $E = \varphi^{-1}(\{1\})$ est un ensemble fini et $\psi \in C$ et on cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les opérateurs $C_\varphi : M_\Lambda^1 \mapsto L^1$ et $\mathcal{T}_\psi o C_\varphi$ soient bien définis, bornés et compacts. On tente de répondre à ces questions et de calculer la norme essentielle en fonction des valeurs de φ et ψ.

Tous les théorèmes démontrés dans les chapitres 2, 3 et 4 sont originaux. Certains d'entre eux sont extraits de

[1] I. Al Alam, *A Müntz space having no complement in L_1*, Proc. Am. Math. Soc. 136 (2008), No. 1, 193-201.

[2] I. Al Alam, *Essential Norms Of Weighted Composition Operators On Müntz Spaces*, (soumis).

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

L'objet de ce chapitre est d'aborder les notions étudiées dans cette thèse et les outils utilisés. Nous introduisons d'abord les espaces de Müntz qui apparaissent naturellement, suite au Théorème de Müntz-Szász [Mü14 , Sz16]. Ensuite nous rappelons les principaux résultats sur les espaces de Müntz ainsi que plusieurs généralisations et variations autour de ce problème. Nous terminons par certains résultats généraux qui seront utiles par la suite. Nous ne donnons ici aucune preuve des résultats énoncés qui - pour la plupart - sont classiques ; nous renvoyons pour cela à la riche littérature sur le sujet.

1.1 Théorème de Müntz-Szász classique

1.1.1 Historique du problème

Dans son papier [Be12] de 1912, le mathématicien Russe S. N. Bernstein a demandé sous quelle condition une suite croissante $\Lambda = (0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ...)$ garantit que l'espace vectoriel

$$M_\Lambda = vect\left\{x^{\lambda_k} : k = 0, 1, ...\right\}$$

engendré par les monomes x^{λ_k} est un sous-ensemble dense de $C([0, 1])$. Il a démontré que la condition

$$\sum_{\lambda_k>0} \frac{1+\log \lambda_k}{\lambda_k} = +\infty$$

est nécessaire et la condition

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{k \log \lambda_k} = 0$$

est suffisante, et il a conjecturé qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{M_\Lambda} = C([0,1])$ est

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty.$$

Cette conjecture a été démontré par le mathématicien Allemand Ch. F. Müntz [Mü14] en 1914. Dans sa démonstration, il utilise la méthode du déterminant de Gram pour calculer la distance de x^{λ_k} à $M_{(\lambda_0,\dots,\lambda_n)}$ dans $L^2([0,1])$. Les déterminants qui apparaissent dans ce problème sont de la forme

$$\det\left(1/(a_i+a_j)\right)_{0\leq i,j\leq n},$$

dont la valeur explicite a été obtenue au 19ème siècle par Cauchy.

Pour plus de précision, nous donnons une formulation précise du théorème classique de Müntz.

1.1.2 Théorème de Müntz

Théorème 1.1.1 (Müntz, 1914)**.** *Soit* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \dots$, *une suite croissante de nombres réels positifs.*
Alors $M_\Lambda = vect\left\{x^{\lambda_k} : k = 0,1,\dots\right\}$*, l'espace de Müntz associé à* Λ*, est un sous-ensemble dense de* $C([0,1])$ *si et seulement si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty. \tag{1}$$

Quelques applications élémentaires :

Dans cette sous-section on présente quelques applications très simples du théorème de Müntz dont nous donnerons les preuves (car elles ne se trouvent pas dans la littérature). On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes complexes définis sur $[0,1]$, $B_c = \{x^n : n \geq 0\}$ est la base canonique de $\mathcal{P}$, et Γ désigne l'ensemble des sous-espaces de $\mathcal{P}$ qui possèdent une base formée d'éléments de B_c.

Proposition 1.1.2 (Ma03). *Soit Δ_∞ la classe des sous-espaces vectoriels de $C([0,1])$ qui sont denses dans $C([0,1])$. Alors $\bigcap_{X\in\Delta_\infty} X = \{0\}$.*

Démonstration. Notons $X_0 = \bigcap_{X\in\Delta_\infty} X$. On identifie $\mathbb{C}$ au sous-espace des fonctions constantes.
Pour montrer que $X_0 = \{0\}$, il suffit de montrer que $X_0 \subset \mathbb{C}$ et $X_0 \cap \mathbb{C} = \{0\}$. Notons X_1 et X_2 les sous-espaces de $C([0,1])$ engendrés par $\{x^{2n} : n \geq 0\}$ et $\{x^{2n+1} : n \geq 0\} \cup \{1\}$. D'après le Théorème de Müntz, X_1 et X_2 sont denses dans $C([0,1])$. On a donc : $X_0 \subset X_1 \cap X_2 = \mathbb{C}$.
Soit Y le sous-espace de C([0,1]) engendré par $\{f_n : n \geq 1\} \cup \{x^n : n \geq 1\}$, où $f_n = e^{-\frac{x}{n}}$ ($(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers 1), donc Y est dense dans $C([0,1])$ et $1 \notin Y$ par suite $1 \notin X_0$ donc $X_0 = \{0\}$. □

Proposition 1.1.3 (Ma03). *Soit Y un sous-espace de $\mathcal{P}$. On suppose : $Y \neq \{0\}$. Notons Δ_Y l'ensemble des éléments de Γ qui contiennent Y, et soit $X_Y = \bigcap_{X\in\Delta_Y} X$.*
Si Y est dense dans $C([0,1])$ alors X_Y est dense dans $C([0,1])$.
On a : $X_Y \in \Gamma$ et de plus, pour toute base B de Y, X_Y est engendré par l'ensemble des éléments de B_c intervenant dans la décomposition canonique des éléments de B.

A l'aide de ce résultat, on peut facilement montrer en utilisant le théorème de Müntz, qu'un sous-espace de $\mathcal{P}$ n'est pas dense dans $C([0,1])$.

Exemple 1.1.4 (Ma03). *Si Y est le sous-espace $C([0,1])$ engendré par les fonctions $x^{(2n)^2} + x^{(2n+1)^2}$ $(n \geq 0)$, alors X_Y est engendré par $\left\{x^{(n)^2} : (n \geq 0)\right\}$.*
Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, Y n'est pas dense dans $C([0,1])$.

Démonstration. Si on désigne par B_X une base de $X \in \Delta_Y$ formée d'éléments de B_c, alors $B_Y = \bigcap_{X\in\Delta_Y} B_X$ est une base de X_Y.
Montrons que X_Y admet une base de la forme annoncée.
Notons X'_Y le sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$ engendré par l'ensemble des fonctions intervenant dans la décomposition canonique des éléments de B, pour B base quelconque de Y.
Il s'agit de montrer que $X_Y = X'_Y$.

Clairement : $Y \subset X'_Y$, d'où : $X_Y \subset X'_Y$ d'après la definition de X_Y.
Soit $n \geq 0$ tel que la fonction x^n intervienne dans la décomposition canonique d'un élément p de Y. Le polynôme p admet aussi une décomposition dans la base de X_Y, qui est contenue dans B_c. Par unicité de la décomposition de p dans B_c, on a $x^n \in X_Y$, d'où : $X'_Y \subset X_Y$.

On remarque que l'ensemble des fonctions de la base canonique de $\mathcal{P}$ intervenant dans la décomposition des éléments d'une base de Y ne dépend pas du choix de cette base. □

1.1.3 Théorème de Szász

Théorème 1.1.5 (Szász, 1916). *Soit* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ *et* $M_\Lambda = vect\left\{x^{\lambda_k}; k \in \mathbb{N}\right\}$. *Si* $\lambda_0 = 0$ *et* $Re(\lambda_k) > 0$ *pour tout* $k > 0$, *alors* M_Λ *est dense dans* $C([0,1])$ *si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Re(\lambda_k)}{1+|\lambda_k|^2} = \infty. \qquad (2)$$

En plus, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+Re(\lambda_k)}{1+|\lambda_k|^2} < \infty,$$

alors M_Λ *n'est pas dense dans* $C([0,1])$.
En particulier, si

$$\liminf_{k\to\infty} Re(\lambda_k) > 0$$

alors M_Λ *est dense dans* $C([0,1])$ *si et seulement si la condition (2) est satisfaite.*

Notons que le théorème de Szász n'est pas conclusif dans tous les cas. Par exemple, la suite $\lambda_k = \frac{1}{k} + i\sqrt{k}$ vérifie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Re(\lambda_k)}{1+|\lambda_k|^2} < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+Re(\lambda_k)}{1+|\lambda_k|^2} = +\infty.$$

1.1.4 Théorème de Clarkson-Erdös et Schwartz

En 1943, J.A Clarkson et P. Erdös [ClEr43] découvrirent un théorème offrant une caractérisation des espaces de Müntz, qui révèle à la fois l'originalité et la

richesse de ces espaces. Ce résultat fut découvert aussi par L. Schwartz [Sc43, Sc59] durant la même année.
Dans cette section, Λ désigne une suite croissante d'entiers positifs $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ avec $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$, et $M_\Lambda = vect\left\{x^{\lambda_k} : k = 0, 1, ...\right\}$.

Théorème 1.1.6 (Clarkson-Erdös, 1943). *Soit $(P_n)_n \subset M_\Lambda$, une suite de polynômes uniformément convergente vers f sur $[0, 1]$. Alors f se prolonge en une fonction analytique dans le disque unité du plan complexe. Son développement en série entière fait seulement intervenir les puissances x^{λ_k} : $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda_k}$. De plus les coefficients de P_n convergent vers les coefficients de cette série entière.*

D'après le théorème précédent, chaque élément $f \in M_\Lambda^\infty$ est développable en série entière sur $[0, 1)$. Il serait particulièrement intéressant que la série d'applications associée converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.
D'après le théorème d'Abel, une condition nécessaire et suffisante pour que cette condition soit réalisée est que la série numérique $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge.

C'est le cas si la suite $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ est lacunaire ($\inf\{\lambda_{k+1}/\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} > 0$). On a :

$$M_\Lambda^\infty = \left\{ f \in C([0, 1]) : f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda_k}, \ \ x \in [0, 1] \right\}.$$

Si $(\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ n'est pas lacunaire, il existe une fonction $f \in M_\Lambda^\infty$ de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda_k}, \qquad x \in [0, 1)$$

telle que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda_k}$ ne converge pas en 1 ; cf. Clarkson et Erdös [ClEr43].

1.2 Théorème de Müntz complet

Le théorème de Müntz a vu un regain d'intérêt ces dernières années ([Bl92], [Bo91], [BoEr91], [BoEr95], [BoEr96], [BoEr97], [BoEr98], [BE95], [ErJo01], [GuLu05], [Kr94], [Op96], [Sp08], [Tr81]), spécialement avec Borwein et Erdélyi. Il y a plusieurs variations et généralisations du théorème de Müntz dans ces papiers. Par exemple, dans [BoEr95], [BoEr97] et [BoEr98], on établit une généralisation du Théorème de Müntz à $C(A)$ où $A \subset [0, +\infty)$ est un compact quelconque de mesure positive, et dans [Tr81], le théorème 1.1.1 est généralisé à $C(\overline{\mathbb{D}})$ où $\overline{\mathbb{D}}$ est le disque unité fermé dans le plan complexe. Dans [BoEr96] et [Op96], le théorème de Müntz est généralisé à $L^p([0,1])$, $1 \leq p \leq \infty$. Plus récemment, Erdélyi et Johnson ([ErJo01]), ont étendu plusieurs de ces résultats à $L^p(A)$, $0 < p < \infty$. Pour des généralisations en plusieurs variables (dans $C(\mathbb{R}^n)$ par exemple), voir Bloom ([Bl92]) et Kroó ([Kr94]). Dans [BoEr97] la densité des ensembles

$$\left\{p_1 p_2 : p_1, p_2 \in vect\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, ...\}\right\}$$

dans $C([0,1])$ est caractérisée en utilisant des inégalités de type-Remez. Très récemment dans [Sp08] on trouve un nouveau type de généralisation du théorème de Müntz. Dans son papier, A. Spalsbury présente une nouvelle technique d'interpolation qui permet d'étudier la densité des ensembles

$$vect\left\{f(x^{\lambda_1}), f(x^{\lambda_2}), ...\right\}.$$

pour des fonctions f dans l'espace de Banach

$$C_1 := \left\{f \in C^1([0,1]) : f(0) = 0\right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C_1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Son résultat qui généralise une partie du théorème de Müntz est le suivant.

Théorème 1.2.1 (Spalsbury, 2008). *Soit $s > 1$. Pour tout $f \in C_1$:*

$$\overline{vect}\left\{f(x), f(x^s), f(x^{s^2}), ...\right\} \neq C_1.$$

En plus, si $f \in C_1$ avec $f'(0) \neq 0$, alors pour tout $1 < \gamma < s$,

$$x^\gamma \notin \overline{vect}\{f(x), f(x^s), ...\}.$$

Ici on présente quelques généralisations qui nous intéressent dans la suite (cf., [Er05]). Ce papier contient une preuve élémentaire du théorème de Müntz complet dans $L^p(A)$, et $C(A)$, avec le "phénomène de Clarkson-Erdös-Schwartz", pour tout $p \in (0, +\infty)$, et pour tous les compacts $A \subset [0, +\infty)$, de densité faible positive en 0. Ceci étend les résultats antérieurs de Müntz [Mü14], Szász [Sz16], Clarkson et Erdös [ClEr43], L. Schwartz [Sc59], P. Borwein et T. Erdélyi [BE05] et [BoEr96], V. Operstein [Op96] et T. Erdélyi et W. B. Johnson [ErJo01].

1.2.1 Théorème de Müntz complet dans $C([0,1])$

Théorème 1.2.2 (Théorème de Müntz complet dans C). *Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs distincts.*
Alors vect $\left\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, ...\right\}$ est dense dans $C([0,1])$ si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + 1} = +\infty.$$

En outre, si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + 1} < +\infty.$$

alors toute fonction dans la fermeture de M_Λ = vect $\left\{1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, ...\right\}$ dans $C([0,1])$ peut être représentée comme la restriction à $(0,1)$ d'une fonction analytique sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : |z| < 1\}$.

Notons que, si $\inf_k \lambda_k > 0$, on retrouve le théorème de Müntz classique car

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + 1} = +\infty \quad \text{si et seulement si} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = +\infty.$$

1.2.2 Théorème de Müntz complet dans $L^p([0,1])$

Maintenant nous formulons le théorème général du type-Müntz dans $L^p([0,1])$, qui contient les cas $C([0,1])$, $L^2([0,1])$, et $L^1([0,1])$ comme cas particuliers.

Théorème 1.2.3 (Théorème de Müntz complet dans L^p). *Soit $p \in (0, +\infty]$. Supposons que $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ est une suite de nombres réels distincts $> -(1/p)$.*

Alors vect $\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$ est dense dans $L_p([0,1])$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k + \frac{1}{p}}{\left(\lambda_k + \frac{1}{p}\right)^2 + 1} = +\infty.$$

En outre, si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k + \frac{1}{p}}{\left(\lambda_k + \frac{1}{p}\right)^2 + 1} < +\infty$$

alors toute fonction dans la fermeture de $M_\Lambda = vect\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$ *dans* $L_p([0,1])$ *peut être représentée comme la restriction à* $(0,1)$ *d'une fonction analytique sur l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : |z| < 1\}$.

1.2.3 Théorème complet de Clarkson-Erdös-Schwartz

Théorème 1.2.4. *Soit* $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ *une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ *et* $\inf_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$. *Soit* $E = L^p$, $1 \leq p < \infty$, *ou* $E = C$. *Alors* $f \in M_\Lambda^E$ *si et seulement si* $f \in E$ *et il existe une suite* $(a_k)_k \subset \mathbb{C}$ *tel que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda_k}, \qquad x \in [0,1),$$

où la série converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$.

En plus si $p_n(x) = \sum_{k=0}^{l_n} a_{k,n} x^{\lambda_k} \in vect\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$, *tel que* $\lim_{n\to\infty} \left\|p_n - f\right\|_{[0,1]} = 0$, *alors* $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{k,n}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Remarque 1.2.5. *Les conclusions du théorème précédent ne sont pas valables sans la gap condition* $\inf_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$, *par contre toute fonction dans la fermeture de* $M_\Lambda = vect\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$ *dans* E *peut être représentée comme la restriction à* $(0,1)$ *d'une fonction analytique sur l'ensemble* $\{z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] : |z| < 1\}$ *(voir théorème 1.2.2 et théorème 1.2.3).*

Un contre-exemple.

Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ tel que,

$$\lambda_{2k-1} := k^2, \qquad \lambda_{2k} := k^2 + 2^{-k^2}, \qquad k = 1, 2, ...,$$
$$a_{2k-1} := 2^{k^2}, \qquad a_{2k} := -2^{k^2}, \qquad k = 1, 2, ...$$

On considère la fonction $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{2k-1} x^{\lambda_{2k-1}} + a_{2k} x^{\lambda_{2k}}\right)$.

La série $\sum_k \left(a_{2k-1} x^{\lambda_{2k-1}} + a_{2k} x^{\lambda_{2k}}\right)$ est normalement convergente car,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|a_{2k-1} x^{\lambda_{2k-1}} + a_{2k} x^{\lambda_{2k}}\right\|_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k^2} \left\|x^{k^2} - x^{k^2 + 2^{-k^2}}\right\|_\infty$$

$$\lesssim \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k^2}\left(\frac{k^2+2^{-k^2}}{k^2}-1\right)=\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k^2}\left(\frac{2^{-k^2}}{k^2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\infty,$$

donc f est une fonction bien définie, continue sur $[0,1]$ et $f \in M_\Lambda^\infty$. Mais la série $\sum_{k=1}^\infty a_k x^{\lambda_k}$ ne converge en aucun point $x \in (0,\infty)$ alors f ne peut pas être représentée par une fonction analytique au voisinage de 0.

1.2.4 Applications du théorème de Clarkson-Erdös et Schwartz

Dans cette sous-section, on présente certains résultats sur le comportement d'un polynôme de Müntz sur un sous-ensemble de $[0,1]$ (cf. [GuLu05] 8.4). On désigne par Ω un sous-ensemble compact de $[0,1]$, et E est l'un des espaces $L^p([0,1])$, $1 \le p < \infty$, ou $C([0,1])$. $E(\Omega)$ est l'espace correspondant $L^p(\Omega)$, ou $C(\Omega)$. Soit $\overset{\circ}{\Omega}$ l'intérieur de Ω dans $[0,1]$. En outre, on considère $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ et $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$.

Proposition 1.2.6. *Supposons que* $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ *et* $\inf_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k) > 0$. *Si* $1 \in \overset{\circ}{\Omega}$ *alors il existe une constante* $c > 0$ *tel que*

$$||f||_{E(\Omega)} \le ||f||_E \le c||f||_{E(\Omega)}$$

pour tout $f \in M_\Lambda^E$.

Comme conséquence directe de la proposition 1.2.6, on obtient un théorème de Müntz sur Ω.

Corollaire 1.2.7. *Supposons que* $\inf_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k) > 0$. *Soit* $\Omega \subset [0,1]$ *un compact tel que* $\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset$. *Alors* $M_\Lambda^{E(\Omega)} \neq E(\Omega)$ *si et seulement si* $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$. *De plus si* $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$, *alors pour tout* $\rho \in \overset{\circ}{\Omega}$, *pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $K > 0$ *tel que*

$$|a_k| \le \left(\frac{1+\delta}{\rho}\right)^{\lambda_k} ||f||_{E(\Omega)} \quad \forall\, k \ge K$$

pour tout $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^{\lambda_k} \in M_\Lambda^{E(\Omega)}$.

Corollaire 1.2.8. *Supposons que* $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ *et* $\inf_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k) > 0$. *Soit* $\Omega \subset [0,1]$ *un compact tel que* $\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset$. *Alors il existe une constante* $c > 0$ *tel que pour tout* $x \in$

$[0, \inf \Omega]$, *et pour tout polynôme de Müntz* f, *on a*

$$|f(x)| \leq c\|f\|_{E(\Omega)}.$$

1.3 Différentes classes d'espaces de Müntz

Définition 1.3.1. Soit $(e_k)_{k=0}^{+\infty}$ une suite (de vecteurs non nuls) dans un espace de Banach E. Nous disons que cette suite est séparée si

$$\inf_{i \neq j} \left\| \frac{e_i}{\|e_i\|} - \frac{e_j}{\|e_j\|} \right\| > 0;$$

La suite est dite uniformément minimale si la distance d'un élément $\frac{e_i}{\|e_i\|}$ à l'espace vectoriel engendré par les éléments restants est plus grand qu'un certain $\rho = \rho(\{e_i\}) > 0$ qui dépend seulement de la suite.

Définition 1.3.2. On dit qu'une suite de nombres positifs $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ est lacunaire (ou parfois aussi Hadamard-lacunaire) si $\inf_k \{\lambda_{k+1}/\lambda_k : k \in \mathbb{N}\} = r > 1$.

Théorème 1.3.3 (GuMa66). *Soit $E = L^p$, $1 \leq p < \infty$, ou $E = C$. Soit $(\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ une suite croissante de nombres réels positifs. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. $(\lambda_k)_k$ *est lacunaire.*
2. $(x^{\lambda_k})_k$ *est séparée dans E*
3. $(x^{\lambda_k})_k$ *uniformément minimale dans E*
4. $\left(\frac{x^{\lambda_k}}{\|x^{\lambda_k}\|_E}\right)_k$ *est une base de Schauder dans* M_Λ^E
5. $\left(\frac{x^{\lambda_k}}{\|x^{\lambda_k}\|_E}\right)_k$ *est équivalente à la base canonique de ℓ^p (respectivement la base usuelle de c si $E = C$)*

Où c désigne l'espace des suites convergentes indexées par $\mathbb{N}$. La base usuelle de c, est la suite $(g_i)_{i=0}^{\infty}$:

$$g_i = (x_k^{(i)})_{k=0}^{\infty} \quad avec \quad x_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & si\ k \geq i. \\ 0, & si\ k < i. \end{cases}$$

Notons que dans le cas $E = L^p$, $1 \leq p < \infty$, on peut supposer que $\lambda_k > -1/p$.

Définition 1.3.4. On dit qu'une suite de nombres positifs $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{+\infty}$ est quasilacunaire, s'il existe une suite d'entiers $\overline{n} = (n_k)_{k=1}^{\infty}$ et $q > 1$ tel que

$$\lambda_{n_k+1}/\lambda_{n_k} \geq q, \; k = 1, 2, ..., \quad et \quad \sup_k (n_{k+1} - n_k) < \infty.$$

Proposition 1.3.5. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Λ est quasilacunaire*
2. *Il existe un nombre fini de suites lacunaires $\Lambda_1, ..., \Lambda_m$ telles que $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{m} \Lambda_i$.*

Théorème 1.3.6 (GuLu05, 9.3)**.** *Si Λ est quasilacunaire alors M_Λ^∞ est isomorphe à c_0. En particulier, M_Λ^∞ admet une base de Schauder.*

Théorème 1.3.7 (GuLu05, 9.3)**.** *Soit $E = L^p$, $1 \leq p < \infty$. Soient $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{+\infty}$ une suite quasilacunaire et des indices $0 = n_0 < n_1 < ...$ vérifiant*

$$n_{m+1} - n_m \leq N, \; m = 0, 1, ..., \quad et \quad \inf_{m \geq 1} \lambda_{n_m+1}/\lambda_{n_m} \geq q$$

où N est un entier positif et $q > 1$.
Soit $F_m = vect \left\{ x^{\lambda_{n_m}+1}, ..., x^{\lambda_{n_{m+1}}} \right\}$.
Alors il existe $d_1, d_2 > 0$ tel que, pour tout $f_m \in F_m$, on a

$$d_1 \left(\sum_m \|f_m\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_m f_m \right\|_{L^p} \leq d_2 \left(\sum_m \|f_m\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

En particulier, M_Λ^p est isomorphe à ℓ^p et M_Λ^p admet une base de Schauder.

Chapitre 2

Propriétés géométriques élémentaires des espaces de Müntz

Introduction et Notations

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés élémentaires des espaces de Müntz. Ces propriétés aident à comprendre la nature géométrique de ces espaces. On se place toujours dans la suite sous l'hypothèse que la condition de Müntz $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$ est remplie. Ainsi l'espace M_Λ^E est un sous-espace propre de E (Théorème de Müntz).

Dirk Werner [WE95] a démontré que les espaces de Müntz M_Λ^∞ sont isomorphes à des sous-espaces de c_0 et il y a un résultat similaire dans le cas $E = L^p([0,1])$ (il était annoncé sans preuve par Dirk Werner). On étend ce résultat aux espaces d'Orlicz ($E = L^\psi$), ce qui généralise le cas $L^p([0,1])$. Signalons que très récemment, Gilles Godefroy a précisé le phénomène dans le cas $E = L^1$ [Go08]. Il prouve notamment que les espaces M_Λ^1 sont isométriques au dual d'un espace lui-même presque isométrique à un quotient de c_0.

On montrera aussi que les espaces de Müntz dans $C[0,1]$ sont des espaces riches, cette propriété va impliquer d'autres propriétés géométriques, par exemple la propriété (V) de Pełczyński, la propriété de Dunford-Pettis, ainsi que leur dual aient la propriété de Schur. On s'intéresse aussi à une nouvelle généralisation des espaces de Müntz en considérant les polynômes de Müntz à coefficients dans un Banach quelconque X et on démontre qu'on peut passer du cas où $X = \mathbb{C}$ au cas X Banach de dimension infinie. Par exemple dans le cas où Λ est lacunaire, on retrouve les mêmes propriétés dans un cadre plus général.

2.1 Espaces de Müntz isomorphes aux sous-espaces de c_0, ℓ^p, ℓ^ψ_ω

Wojtaszczyk [Wo] a récemment prouvé le théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit X un sous-espace de $C([0,1])$ tel que tout $f \in X$ est continûment différentiable sur $[0,1)$, alors X est isomorphe à un sous-espace de c_0.*

La preuve qui suit est due à Dirk Werner [We], qui s'inspire de la preuve de Wojtaszczyk.

Théorème 2.1.2. [*We*] *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1, alors X est presque isométrique à un sous-espace de c. Autrement dit, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un opérateur $J_\epsilon : X \to c$ tel que*

$$(1-\epsilon)\|f\|_\infty \leq \|J_\epsilon f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \qquad \forall f \in X$$

où c désigne l'espace des suites convergentes indexées par $\mathbb{N}$.

Remarque 2.1.3. .

1. *Les espaces de Müntz constituent des exemples naturels satisfaisant aux hypothèses du Théorème 2.1.2.*
2. *Notons que l'opérateur $T : c \to c_0$, défini par $T((a_n)_n) = (l, a_1 - l, a_2 - l, \ldots)$ avec $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ est un isomorphisme surjectif de c dans c_0 ; par suite les espaces de Müntz sont isomorphes à des sous-espaces de c_0.*

On désigne par ℓ^p l'espace des suites $(a_n)_n$ avec $\|(a_n)_n\|_{\ell^p} = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Théorème 2.1.4. [*We*] *Soit $X \subset L^p([0,1])$ $(1 \leq p < \infty)$ un sous-espace fermé tel que tout $f \in X$ est continûment différentiable sur $[0,1)$, alors X est presque isométrique à un sous-espace de ℓ^p. Autrement dit, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un opérateur $J_\epsilon : X \to \ell^p$ tel que*

$$(1-\epsilon)\|f\|_p \leq \|J_\epsilon f\|_\infty \leq \|f\|_p \qquad \forall f \in X.$$

Remarque 2.1.5. *Les espaces de Müntz dans $L^p([0,1])$ sont des exemples naturels vérifiant les hypothèses du théorème précédent.*

2.1.1 Espace de Müntz dans les espaces d'Orlicz

Dans cette sous-section, on considère des espaces de Müntz associés aux espaces d'Orlicz sur $[0,1]$ (voir [LiTz77]), et nous allons généraliser le résultat précédent au cas des espaces d'Orlicz. Nous commençons par rappeler la définition des espaces d'Orlicz et le théorème de Müntz dans les espaces d'Orlicz.

Définition 2.1.6. Soit $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une fonction d'Orlicz c'est à dire une fonction convexe croissante avec $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors l'espace d'Orlicz $L^\varphi([0,1])$ est l'espace de toutes les (classes d'equivalence des) fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que la norme d'Orlicz

$$\|f\|_{L^\varphi([0,1])} = \inf\left\{\delta > 0 : \int_0^1 \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\delta}\right)dx < 1\right\} < +\infty.$$

De même on définit les espaces d'Orlicz ℓ^φ, qui est l'analogue séquentiel.

Définition 2.1.7. Soit $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ une fonction convexe croissante avec $\varphi(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors l'espace d'Orlicz ℓ^φ est l'espace de toutes les suites réelles $(a_n)_n$ tel que la norme d'Orlicz

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell^\varphi} = \inf\left\{\delta > 0 : \sum_{n=1}^\infty \varphi\left(\frac{|a_n|}{\delta}\right)dx < 1\right\} < +\infty.$$

Définition 2.1.8. Soit le poids $\omega = (\omega_n)_{n=1}^\infty$; $\omega_n > 0$ avec $\sum_{n=1}^\infty \omega_n < +\infty$. Alors l'espace d'Orlicz à poids ℓ^φ_ω est l'espace de toutes les suites réelles $(a_n)_n$ tel que la norme d'Orlicz à poids

$$\|(a_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell^\varphi_\omega} = \inf\left\{\delta > 0 : \sum_{n=1}^\infty \omega_n\varphi\left(\frac{|a_n|}{\delta}\right)dx < 1\right\} < +\infty.$$

Propriétés :

. La notion d'espaces d'Orlicz $L^\varphi([0,1])$ généralise les espaces L^p car : $\varphi(x) = |x|^p$, alors $\|f\|_{L^\varphi([0,1])} = \|f\|_{L^p}$, donc $L^\varphi([0,1]) = L^p$. De même dans le cas séquentiel.

. Les espaces d'Orlicz $L^\varphi([0,1])$, ℓ^φ et ℓ^φ_ω sont des espaces de Banach, pour en savoir plus sur les espaces d'Orlicz on renvoie à [LiTz77].

Ici on présente des résultats dus à V. I. Gurariy et W. Lusky (cf. [GuLu05, 6]), qui généralisent les théorèmes de Müntz-Szász et de Clarkson-Erdös-Schwartz

à des espaces de Banach E, vérifiant certain propriétés (en particulier les espaces d'Orlicz).
Comme hypothèse générale, on suppose : $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite strictement croissante avec $\lambda_0 = 0$, $C_0 := C_0([0,1])$, le sous-espace de C composé de toutes les fonctions continues qui s'annulent en 0, E est le complété de l'espace vectoriel C_0 par rapport à une seminorme donnée $\|.\|_E$ avec $\|x^{\lambda_k}\|_E \neq 0$ pour tout $\lambda_k \in \Lambda$. Nous supposons en outre que les opérateurs (de blow-up) $T_\rho : M_\Lambda^E \to M_\Lambda^E$ définis par $(T_\rho f)(x) = f(\rho x)$ pour $x \in [0,1]$ et $f \in M_\Lambda$, sont bornées par rapports à $\|.\|_E$ pour tout $0 < \rho < 1$ et que

$$\sup_{\rho_0 \leq \rho < 1} \|T_\rho\| < +\infty, \quad \text{pour tout} \quad \rho_0 \in (0,1).$$

Par exemple la norme sup, les norme L^p sur $[0,1]$ et la norme d'Orlicz vérifient les conditions au-dessus pour la norme $\|.\|_E$.

Théorème 2.1.9. [GuLu05, 6] *Supposons qu'il existe une constante $\kappa > 0$, tel que $\|f\|_E \leq \kappa\|f\|_C$, $\forall f \in C_0$. En outre supposons qu'il existe $\mu > 0$, $\mu \notin \Lambda$, avec $\|x^\mu\|_E \neq 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\lambda_k < \infty$
2. $M_\Lambda^E \neq E$
3. $(x^{\lambda_k})_{k=1}^{\infty}$ *est un système minimal dans* M_Λ^E.

Théorème 2.1.10. [GuLu05, 6] *Supposons que* $\liminf_{n\to\infty} \|x^{\lambda_n}\|_E^{\frac{1}{\lambda_n}} \geq 1$. *En outre supposons que* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\lambda_k < \infty$ *et* $\inf_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$. *Alors pour tout* $f \in M_\Lambda^E$ *il existe une suite* $(\alpha_k)_k \subset \mathbb{R}$ *tel que*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x^{\lambda_k}, \quad x \in [0,1),$$

Lemme 2.1.11. *supposons que* $\sum_{k=1}^{\infty} 1/\lambda_k < \infty$ *et* $\inf_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$. *Alors la conclusion du théorème 2.1.10 s'applique aux espaces de Müntz* $(M_\Lambda^{L^\varphi})$ *dans les espaces d'Orlicz.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que $\liminf_{n\to\infty} \|x^{\lambda_n}\|_E^{\frac{1}{\lambda_n}} \geq 1$ puis d'appliquer le théorème 2.1.10.
Fixons $0 < \epsilon < 1$, alors il existe $c > 0$ tel que $\varphi(x) \geq cx$, pour $x \in [\epsilon, 1]$ ainsi

$$\|x^{\lambda_n}\|_{L^\varphi} = \inf\left\{\delta > 0 : \int_0^1 \varphi\left(\frac{x^{\lambda_n}}{\delta}\right) dx < 1\right\} \geq \inf\left\{\delta > 0 : \int_\epsilon^1 \varphi\left(\frac{x^{\lambda_n}}{\delta}\right) dx < 1\right\}$$

$$\geq \inf\left\{\delta > 0 : \int_\epsilon^1 c\frac{x^{\lambda_n}}{\delta}dx < 1\right\} = c\left(\frac{1-\epsilon^{\lambda_n+1}}{\lambda_n+1}\right)$$

par suite $\liminf_{n\to\infty} \|x^{\lambda_n}\|_E^{\frac{1}{\lambda_n}} \geq \liminf_{n\to\infty} c^{\frac{1}{\lambda_n}}\left(\frac{1-\epsilon^{\lambda_n+1}}{\lambda_n+1}\right)^{\frac{1}{\lambda_n}} = 1$ d'où le résultat. □

Théorème 2.1.12. *Soit φ une fonction d'Orlicz et $X \subset L^\varphi([0,1])$ un sous-espace fermé tel que tout $f \in X$ est continûment différentiable sur $[0,1)$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un poids ω (qui ne depend que de X et ϵ) tel que X soit $(1+\epsilon)$-isomorphe à un sous-espace de ℓ^φ_ω. Autrement dit, pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un poids ω et un opérateur $J_\epsilon : X \to \ell^\varphi_\omega$ tel que*

$$(1-\epsilon)\|f\|_{L^\varphi} \leq \|J_\epsilon f\|_{\ell^\varphi_\omega} \leq \|f\|_{L^\varphi} \qquad \forall f \in X.$$

Démonstration. L'idée est de définir $J_\epsilon(f) = (f(s_n))_n$ et $\omega = (s_{n+1} - s_n)_n$, pour une suite convenablement choisie.

Soit $\epsilon > 0$. Pour $0 < a < 1$, l'opérateur

$$D : X \to C([0,a]), \qquad f \to f'_{|[0,a]}$$

est bien défini, et continu par le théorème du graphe fermé. Alors, il existe une constante $K(a)$ telle que

$$\sup_{0\leq t\leq a} |f'(t)| \leq K(a)\|f\|_{L^\varphi} \qquad \forall f \in X.$$

Maintenant, on fixe une suite $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < 1$ convergente vers 1. On choisit des points $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n_1} = a_1 < s_{n_1+1} < \ldots < s_{n_2} = a_2 < \ldots$ de façon à ce que $(n_0 = 0)$

$$s_{j+1} - s_j \leq \frac{\epsilon}{K(a_{k+1})} \quad \textit{pour } n_k \leq j < n_{k+1},$$

c'est-à-dire que deux points consécutifs de (s_n) dans $[a_k, a_{k+1}]$ sont au plus distants de $\epsilon/K(a_{k+1})$.

On définit $J_\epsilon(f) = (f(s_n))_n$.
Soit $f \in X$ et $i_n \in [s_n, s_{n+1}]$ telle que $f(i_n) = \min_{x\in[s_n,s_{n+1}]} \left|f(x)\right|$, disons $a_{k_n} \leq i_n \leq a_{k_n+1}$ alors on a

$$\begin{aligned}
\left|f(s_n)-f(i_n)\right| &\leq (s_{n+1}-s_n)\sup_{a_{k_n}\leq s\leq a_{k_n+1}}\left|f'(s)\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{K(a_{k_n+1})}K(a_{k_n+1})\left\|f\right\|_{L^\varphi} = \epsilon\left\|f\right\|_{L^\varphi}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\left|f(s_n)\right| \leq \left|f(s_n)-f(i_n)\right| + \left|f(i_n)\right| \leq \epsilon\left\|f\right\|_{L^\varphi} + \left|f(i_n)\right|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire dans ℓ^φ_ω et le fait que φ est croissante nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left\|J_\epsilon(f)\right\|_{\ell^\varphi_\omega} &= \inf\left\{\delta>0:\sum_{n=1}^{\infty}(s_{n+1}-s_n)\varphi\left(\frac{|f(s_n)|}{\delta}\right)<1\right\} \\
&\leq \inf\left\{\delta>0:\sum_{n=1}^{\infty}(s_{n+1}-s_n)\varphi\left(\frac{\epsilon\|f\|_{L^\varphi}}{\delta}\right)<1\right\} \\
&\qquad + \inf\left\{\delta>0:\sum_{n=1}^{\infty}(s_{n+1}-s_n)\varphi\left(\frac{|f(i_n)|}{\delta}\right)<1\right\} \\
&\leq \epsilon'\left\|f\right\|_{L^\varphi} + \inf\left\{\delta>0:\int_0^1\varphi\left(\frac{|f(s)|}{\delta}\right)ds<1\right\} \\
&= (1+\epsilon')\left\|f\right\|_{L^\varphi}.
\end{aligned}$$

Alors on a $\left\|J_\epsilon(f)\right\|_{\ell^\varphi_\omega} \leq 1+\epsilon'$

Inversement. En utilisant l'inégalité

$$|f(s)| \leq \epsilon\|f\|_{L^\varphi} + |f(s_n)|, \quad \forall s\in[s_n,s_{n+1}],$$

le fait que φ est croissante et l'inégalité triangulaire dans ℓ^φ_ω, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\|f\right\|_{L^\varphi} &= \inf\left\{\delta>0 : \int_0^1 \varphi\left(\frac{|f(s)|}{\delta}\right)ds<1\right\}\\
&\le \inf\left\{\delta>0 : \sum_{n=1}^{\infty}\int_{s_n}^{s_{n+1}} \varphi\left(\frac{\epsilon\|f\|_{L^\varphi}+|f(s_n)|}{\delta}\right)ds<1\right\}\\
&= \inf\left\{\delta>0 : \sum_{n=1}^{\infty}(s_{n+1}-s_n)\varphi\left(\frac{\epsilon\|f\|_{L^\varphi}+|f(s_n)|}{\delta}\right)<1\right\}\\
&\le \inf\left\{\delta>0 : \sum_{n=1}^{\infty}(s_{n+1}-s_n)\varphi\left(\frac{\epsilon\|f\|_{L^\varphi}}{\delta}\right)<1\right\}\\
&\qquad + \inf\left\{\delta>0 : \sum_{n=1}^{\infty}(s_{n+1}-s_n)\varphi\left(\frac{|f(s_n)|}{\delta}\right)<1\right\}\\
&= \epsilon'\left\|f\right\|_{L^\varphi}+\left\|J_\epsilon(f)\right\|_{\ell^\varphi_\omega}.
\end{aligned}$$

Donc $\left\|J_\epsilon(f)\right\|_{\ell^\varphi_\omega} \ge (1-\epsilon')\left\|f\right\|_{L^\varphi}$ d'où le résultat. □

Corollaire 2.1.13. *Soit φ une fonction d'Orlicz et $X \subset L^\varphi([0,1])$ un sous-espace fermé tel que tout $f \in X$ est continûment différentiable sur $[0,1)$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\varphi(a)\varphi(b) \le \varphi(\alpha ab)$ (respectivement $\varphi(x) = x^p$), alors X est isomorphe à un sous-espace de ℓ^φ (respectivement X est presque isométrique à un sous-espace de ℓ^φ).*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'application

$$J : \ell^\varphi_\omega \to \ell^\varphi, \qquad (a_n)_n \to \left(\varphi^{-1}(s_{n+1}-s_n)a_n\right)_n,$$

est un isomorphisme si φ vérifie la condition : $\varphi(a)\varphi(b) \le \varphi(\alpha ab)$ pour certain $\alpha > 0$ (respectivement une isométrie si $\varphi(x) = x^p$). □

2.2 Espaces riches

Dans cette section on établit que les espaces de Müntz dans $C[0,1]$ sont des espaces riches (au sens de Wojtaszczyk), on discute aussi des conséquences de cette propriété sur les espaces de Müntz.

Définition 2.2.1. Soit E un espace de Banach de dimension finie et S est un compact. On dit qu'un espace de Banach $X \subset C(S, E)$ est riche s'il existe une mesure de probabilité σ sur S tel que pour tout $h \in C(S)$ et toute suite bornée $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ vérifiant $\int_{[0,1]} |f_n| d\sigma \to 0$ quand $n \to \infty$ alors $\text{dist}(h.f_n, X) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Théorème 2.2.2. *Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs distincts. Alors l'espace de Müntz $M_{\Lambda}^{\infty} = \overline{span}\{x^{\lambda_k}; k = 0, 1, ...\}$ est un sous-espace riche de $C = C([0, 1])$.*

Démonstration. Soit $\sigma = dx$ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset M_{\Lambda}^{\infty}$ tel que, $\|f_n\|_{[0,1]} \leq 1$ et $\int_{[0,1]} |f_n| d\sigma \to 0$ quand $n \to \infty$. En utilisant le Théorème de Stone-Weierstrass il suffit de prouver que $\text{dist}(x^k.f_n, X) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (voir [Le04, Lemma 0.4]).
Soit $0 < \epsilon < 1$ et $x_0 = (1 - \epsilon)^{\frac{1}{k}}$, alors $\|x^k - 1\|_{[x_0,1]} \leq \epsilon$. La proposition 3.1.2 implique qu'il existe une constante γ_0 tel que

$$\|f_n\|_{[0,x_0]} \leq \gamma_0 \int_{[0,1]} |f_n| d\sigma, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\int_{[0,1]} |f_n| d\sigma \leq \frac{\epsilon}{\gamma_0}$. Alors pour tout $n \geq n_0$ on a $\|f_n\|_{[0,x_0]} \leq \epsilon$ et donc

$$\begin{aligned} dist(x^k.f_n, X) &\leq \|x^k.f_n - f_n\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)||x^k - 1| \\ &\leq \max(\|f_n\|_{[0,x_0]}, \|x^k - 1\|_{[x_0,1]}) \leq \epsilon \end{aligned}$$

pour tout $n \geq n_0$, donc $\text{dist}(x^k.f_n, X) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors M_{Λ}^{∞} est un sous-espace riche de C. □

Le théorème suivant caractérise les sous-ensembles faiblement compact de X, où X est un sous-espace riche de C. Pour la preuve de ce théorème, voir [Wo91, III.D.31].

Théorème 2.2.3. *Soient $X \subset C(S, E)$ un sous-espace riche, et K est une partie bornée de X^*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *K est non relativement faiblement compact.*
2. *Il existe une suite $(k_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$ équivalente à la base canonique de ℓ^1.*

3. *Il existe une constante c tel que pour tout N il exists un sous-ensemble de K, c-equivalent à la base canonique de ℓ_N^1.*
4. *Il existe une série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ faiblement inconditionnellement convergente dans X telle que*
$$\limsup_{n\to\infty} \sup\{|k(\varphi_n)| : k \in K\} > 0.$$
5. *Il existe une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x_n \rightharpoonup 0$ tel que*
$$\limsup_{n\to\infty} \sup\{|k(x_n)| : k \in K\} > 0.$$

Dans cette section, nous allons justifier l'équivalence entre compacité, faible-compacité et complète continuité des opérateurs sur les espaces de Müntz, qui proviennent directement de la géométrie de ces espaces. D'abord rappelons les concepts suivants.

Définition 2.2.4. On dit qu'un opérateur $T : X \to Y$ est un opérateur de Dunford-Pettis (ou un opérateur complètement continu) si T transforme les suites faiblement Cauchy sur des suites fortement Cauchy.
On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Dunford-Pettis (DP) s'il vérifie l'une de ces deux propriétés équivalentes :

1. Pour tout $x_n \stackrel{w}{\to} 0$ dans X et $x_n^* \stackrel{w}{\to} 0$ dans X^* on a $x_n^*(x_n) \to 0$.
2. Tout opérateur faiblement compact $T : X \to Y$ est un opérateur de Dunford-Pettis.

Définition 2.2.5. On dit qu'un espace de Banach X a la propriété (V) de Pełczyński s'il vérifie l'une de ces deux propriétés équivalentes :

1. Pour tout sous-ensemble $K \subset X^*$ non relativement faiblement compact, il existe une série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ faiblement inconditionnellement convergente dans X tel que $\inf_n \sup_{x^* \in K} |x^*(x_n)| > 0$.
2. Pour tout opérateur $T : X \to Y$ qui n'est pas faiblement compact, il existe un sous-espaces $X_1 \subset X$ tel que $X_1 \sim c_0$ et $T_{|X_1}$ soit un isomorphisme.

Remarque 2.2.6. *Il est clair que le théorème 2.2.3 implique que tout sous-espace riche de $C(S,E)$ a la propriété de Dunford-Pettis (DP) et la propriété (V) de Pełczyński. En particulier les espaces de Müntz dans C ont les propriétés (V) de Pełczyński et Dunford-Pettis (DP).*

Corollaire 2.2.7. *Le dual $(M_\Lambda^\infty)^*$ d'un espace de Müntz a la propriété de Schur.*

Démonstration. Pour la preuve, voir le livre de P. Wojtaszczyk [Wo91, III.D.Ex19] où il démontre que tout dual séparable d'un espace de Banach possédant la propriété de Dunford-Pettis a la propriété de Schur. Ce qui s'applique au dual $(M_\Lambda^\infty)^*$ d'un espace de Müntz, car M_Λ^∞ est un sous-espace riche de C donc son dual a la propriété de Dunford-Pettis (voir [Wo91, III.D.Ex22]) et il est séparable car M_Λ^∞ est isomorphe à un sous-espace de c_0 d'après la remarque de D. Werner.

Autre méthode : On peut utiliser un résultat de Grothendieck disant que le dual de tout sous-espace de c_0 a Schur (voir [Di80] p.29). □

Théorème 2.2.8. *Soit $(\lambda_k)_{k=0}^\infty$ une suite de nombres réels positifs distincts vérifiant $\sum_{k=1}^\infty 1/\lambda_k < \infty$. Soit Y un espace Banach et $T : M_\Lambda^\infty \to Y$ est un opérateur borné. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *T est un opérateur faiblement compact.*
2. *T est un opérateur compact.*
3. *T est un opérateur de Dunford-Pettis.*

Démonstration. I. Condition (1) implique (2). Soit $T : M_\Lambda^\infty \to Y$ un opérateur faiblement compact, alors son adjoint $T^* : Y^* \to (M_\Lambda^\infty)^*$ est faiblement compact. Par le corollaire 2.2.7, $(M_\Lambda^\infty)^*$ a la propriété de Schur donc T^* est compact et T aussi.

II. Condition (2) implies (3). Soit $(x_n)_n$ une suite faiblement convergente à x dans M_Λ^∞ et supposons que $(T(x_n))_n$ ne converge pas à $T(x)$, alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ tel que $\|T(x_{n_k}) - T(x)\| \geq \delta$ pour un $\delta > 0$. T est compact, alors il existe une sous-suite $(x_{n_{k_l}})_l$ tel que $(T(x_{n_{k_l}}))_l$ converge en norme vers $T(x)$, donc $\|(T(x_{n_{k_l}}))_l - T(x)\| \to 0$, quand $l \to \infty$ donne une contradiction alors T est un opérateur de Dunford-Pettis.

III. Condition (3) implies (1). Par l'absurde, supposons que $T : M_\Lambda^\infty \to Y$ est un opérateur de Dunford-Pettis qui n'est pas faiblement compact, alors comme M_Λ^∞ a la propriété (V) de Pełczyński, il existe une copie de c_0 dans M_Λ^∞ tel que $T_{|c_0}$ soit un isomorphisme, cela donnerait une contradiction au fait que T est Dunford-Pettis parce que la base naturelle $(e_n)_n$ de c_0 est faiblement convergente et $(T(e_n))_n$ n'est pas convergente en norme. □

Remarque 2.2.9. *En fait, le théorème précédent reste vrai si l'on remplace les espaces de Müntz par un espace de Banach isomorphe à un sous-espace de c_0 parce qu'un sous-espace de c_0 a les propriétés (V) de Pełczyński et Dunford-Pettis et son dual a Schur (cf.* [*Di*80]).

2.3 Espace de Müntz à coefficients dans un Banach quelconque

Dans cette section on présente une nouvelle généralisation des espaces de Müntz, on considère les polynômes de Müntz à valeurs dans un espace de Banach quelconque.

Hypothèse Générale :
Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach, on définit $C([0,1], X)$ l'espace des fonctions définies continues sur $[0,1]$ à valeurs dans X, muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty,X} = \sup_{t\in[0,1]} \left\|f(t)\right\|_X \ ; \quad f \in C([0,1], X).$$

De même on définit l'espace $L^p_X := L^p([0,1], X), 1 \leq p < \infty$, l'espace des classes des fonctions mesurables sur $[0,1]$ à valeur dans X, intégrables au sens de Bochner avec

$$\|f\|_{p,X} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note par $\mathcal{P}_n(X) = vect_X\left\{t^i : i \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\sum_{i=0}^n a_i t^i : a_i \in X\right\}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes définies sur $[0,1]$ à valeurs dans X, de degré $\leq n$ et $\mathcal{P}(X) = \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(X)$.

Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^\infty$ une suite croissante de nombres réels positifs , alors on définit les espaces suivants :

$M_n(\Lambda)(X) = \left\{\sum_{i=0}^n a_i t^{\lambda_i} : a_i \in X\right\}$,

$M_\Lambda(X) = \bigcup_{n=0}^\infty M_n(\Lambda)(X)$,

$M_\Lambda^\infty(X) = \overline{M_\Lambda(X)}^{C([0,1],X)}$.

2.3.1 Théorème de Müntz

Théorème 2.3.1. *$\mathcal{P}(X)$ est dense dans $C([0,1],X)$.*

Démonstration. Soit $f \in C([0,1],X)$, on considère les polynômes de Bernstein

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) t^k (1-t)^{n-k}.$$

Comme dans le cas classique, on a

$\left\|f - B_n(f)\right\|_{\infty,X} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\overline{\mathcal{P}(X)}^{\|.\|_{\infty,X}} = C([0,1],X)$. □

Théorème 2.3.2. *Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ une suite croissante de nombres réels positifs , alors $M_\Lambda(X)$ est dense dans $C([0,1],X)$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$.*
En plus si $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ alors $at^\lambda \notin M_\Lambda^\infty(X)$, pour tout $a \in X$ non nul, et tout $\lambda \notin \Lambda$.

Démonstration. Supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$. Fixons $a \in X$ non nul, et $\lambda \notin \Lambda$, $\mathbb{K}a$ est complémenté dans X donc il existe une projection $P : X \to \mathbb{K}a$ et $X = \mathbb{K}a \oplus Y$. Soit $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{\lambda_i} \in M_\Lambda(X)$, alors

$$\left\|at^\lambda - p(t)\right\|_X \geq \frac{\|a\|}{\|P\|} \left|t^\lambda - q(t)\right| \quad \forall\, t \in [0,1],$$

où $q \in M_\Lambda$. Ce qui implique

$$\left\|at^\lambda - p(t)\right\|_{\infty,X} \geq \frac{\|a\|}{\|P\|} \left\|t^\lambda - q(t)\right\|_\infty \geq \epsilon_0 > 0,$$

d'après le théorème de Müntz classique.
Donc $at^\lambda \notin M_\Lambda^\infty(X)$, par suite $M_\Lambda(X)$ n'est pas dense dans $C([0,1],X)$.

Inversement supposons que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$.
Soit $N \in \mathbb{N}$, alors d'après le théorème classique de Müntz, il existe un polynôme $p(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} \in M_\Lambda$ tel que $\left\|t^N - P\right\|_\infty \leq \epsilon$, donc si $a \in X$ on a, $\left\|at^N - a\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i}\right)\right\|_{\infty,X} \leq \epsilon\|a\|$, alors $M_\Lambda(X)$ est dense dans $\mathcal{P}(X)$ et d'après le théorème 2.3.1, on déduit que $M_\Lambda(X)$ est dense dans $C([0,1],X)$. □

2.3.2 Théorème de représentation

Lemme 2.3.3. *Soit* $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ *une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant* $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ *et la gap condition*

$$\inf\{\lambda_i - \lambda_{i-1} : i \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$*, il existe une constante positive* $c(\epsilon, \Lambda)$ *dépendant uniquement de* ϵ *et* $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ *telle que*

$$||a_i||_X \leq c(\epsilon, \Lambda)(1+\epsilon)^{\lambda_i} ||p||_{2,X}$$

pour tout $p \in M_\Lambda(X)$ *de la forme* $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{\lambda_i}$, $a_i \in X$.

Démonstration. Soit $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^{\lambda_i}$, $a_i \in X$. Fixons $k \in \{1, ..., n\}$, et $P_k = P : X \to \mathbb{K}a_k$ une projection avec $||P|| = 1$.

Pour majorer $||a_k||_X$, on écrit p de la forme $p(t) = ||a_k||_X \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{||a_k||_X} t^{\lambda_i}$.

Écrivons $P(a_i) = \alpha_i a_k$, $i = 0, .., n$, si bien que $\alpha_k = 1$.
Alors,

$$\begin{aligned} ||a_k||_X &= \frac{||p||_{2,X}}{\left\| \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{||a_k||_X} t^{\lambda_i} \right\|_{2,X}} \\ &= \frac{||P||\, ||p||_{2,X}}{\left\| \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} \right) \frac{a_k}{||a_k||_X} \right\|_{2,X}} \leq \frac{||p||_{2,X}}{\left\| t^{\lambda_k} + \displaystyle\sum_{i=0, i\neq k}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} \right\|_2}. \end{aligned}$$

Puisqu'on a $\inf\{\lambda_i - \lambda_{i-1} : i \in \mathbb{N}\} > 0$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$, alors on a la majoration suivante (cf. [BE95, p.156])

$$\left\| t^{\lambda_k} + \sum_{i=0, i\neq k}^{n} \alpha_i t^{\lambda_i} \right\|_2 \geq e^{-\lambda_k \gamma_k} \ \ \textit{avec} \ \ \gamma_k \to 0 \ \ \textit{quand} \ \ k \to \infty$$

Par suite on a

$$||a_k||_X \leq ||p||_{2,X}\, e^{\lambda_k \gamma_k} \leq c(\epsilon, \Lambda)(1+\epsilon)^{\lambda_k} ||p||_{2,X}.$$

□

Théorème 2.3.4 (Théorème de représentation). *Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ et la gap condition*

$$\inf\{\lambda_i - \lambda_{i-1} : i \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Alors $f \in M_{\Lambda}^{\infty}(X)$ si et seulement si $f \in C([0,1], X)$ et il existe une suite $(a_i)_i \subset X$ telle que

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}, \qquad t \in [0,1),$$

où la série converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$.

De plus si $p_n(t) = \sum_{i=0}^{l_n} a_{i,n} t^{\lambda_i} \in vect_X \left\{t^{\lambda_0}, t^{\lambda_1}, \ldots\right\}$, avec $\lim_{n\to\infty} \left\|p_n - f\right\|_{\infty,X} = 0$, alors $a_i = \lim_{n\to\infty} a_{i,n}, \ \ i = 0, 1, \ldots$.

Démonstration. Soit $f \in M_{\Lambda}^{\infty}(X)$, alors il existe une suite de polynômes de la forme $p_n(t) = \sum_{i=0}^{l_n} a_{i,n} t^{\lambda_i} \in M_{\Lambda}(X)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \left\|p_n - f\right\|_{\infty,X} = 0$, donc p_n est une suite de Cauchy. D'après le lemme précédent, on a pour tout $\epsilon > 0$, l'existence d'une constante positive c_ϵ tel que :

$$\|a_{i,n} - a_{i,m}\|_X \leq c_\epsilon (1+\epsilon)^{\lambda_i} \|p_n - p_m\|_{2,X}$$

Ainsi, pour chaque i, la suite $(a_{i,n})_n$ est de Cauchy dans X donc elle converge vers $a_i \in X$. Soit $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}$. La fonction g est bien définie, en effet :
D'après le lemme précédent, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $c_\epsilon > 0$ telle que,

$$\|a_{i,n}\|_X \leq c_\epsilon (1+\epsilon)^{\lambda_i} \|p_n\|_{2,X}$$

pour tous i et $n \in \mathbb{N}$.
En passant à la limite quand $n \to \infty$ alors on a pour tout i,

$$\|a_i\| \leq c_\epsilon (1+\epsilon)^{\lambda_i} \|f\|_{2,X}$$

Alors le rayon de convergence de la série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}$ est $\geq \frac{1}{1+\epsilon}$ avec $\epsilon > 0$ arbitraire, donc la série converge uniformément vers g sur tout compact de $[0,1)$.

Reste à démontrer que $g = f$ sur $[0, 1)$, pour cela il suffit de démontrer que p_n converge simplement vers g sur $[0, 1)$.

Soient $t \in [0, 1)$, $\delta > 0$.
On choisit $\epsilon > 0$ tel que $t(1 + \epsilon) < 1$ et on pose $u = t(1 + \epsilon)$.
D'après l'inégalité : $\|a_{i,n}\|_X \leq c_\epsilon(1 + \epsilon)^{\lambda_i}\|p_n\|_{2,X}$, et le fait que p_n est une suite de Cauchy donc bornée, il existe $M > 0$ tel que :

$$\|a_{i,n}\|_X t^{\lambda_i} \leq M u^{\lambda_i}, \quad \textit{pour tous } i, \textit{et } n \in \mathbb{N}.$$

Comme $u < 1$, il existe $N > 0$ tel que : $2M \sum_{i=N+1}^{\infty} u^{\lambda_i} \leq \frac{\delta}{2}$.

Fixons I assez grand tel que pour tout $n \geq I$, on a : $\sum_{i=0}^{N} \|a_{i,n} - a_i\|_X t^{\lambda_i} \leq \frac{\delta}{2}$.

Pour tout $n \geq I$:

$$\begin{aligned} \|p_n(t) - g(t)\|_X &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|a_{i,n} - a_i\|_X t^{\lambda_i} \\ &= \sum_{i=0}^{N} \|a_{i,n} - a_i\|_X t^{\lambda_i} + 2M \sum_{i=N+1}^{\infty} t^{\lambda_i} \leq \delta. \end{aligned}$$

Ainsi $p_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(t)$. Ceci étant valable pour tout t dans $[0, 1)$, on a le résultat.

Réciproquement, Soit f une fonction continue admettant un développement : $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}$, pour $t \in [0, 1)$.
Soit $0 < \theta < 1$, on considère la fonction f_θ, définie pour $t \in [0, 1]$ par $f_\theta(t) = f(\theta t)$.
En utilisant le fait que f est uniformément continue sur $[0, 1]$, on peut verifier facilement que : $f_\theta \underset{\theta\to 1}{\longrightarrow} f$ dans $C([0, 1], X)$.

La série $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \theta^{\lambda_i} t^{\lambda_i}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f_θ, à θ fixé. Ainsi la suite d'application $\sum_{i=0}^{N} a_i \theta^{\lambda_i} t^{\lambda_i} \in M_\Lambda^\infty(X)$, converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f_θ, alors $f_\theta \in M_\Lambda^\infty(X)$ par suite $f \in M_\Lambda^\infty(X)$. □

Remarque 2.3.5. *Les conclusions du théorème précédent ne sont pas valables sans la gap condition* $\inf_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) > 0$ (*déjà dans le cas scalaire*).

2.3.3 Suites lacunaires

Définition 2.3.6. On dit que $(t^{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $M_\Lambda^\infty(X)$ si pour tout $f \in M_\Lambda^\infty(X)$, il existe une unique $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}$.

Définition 2.3.7. Soit $(X_j)_{j=1}^\infty$ une suite d'espaces de Banach.
On définit l'espace

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} X_j\right)_{c_0} = \left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in X_j \;\; et \;\; \|x_j\| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\} = \oplus_{c_0} X_j$$

muni de la norme $\|(x_j)\|_\infty = \sup_j \|x_j\|$.

Théorème 2.3.8. *Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^\infty$ une suite croissante de nombres réels positifs . Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Λ est lacunaire.*
2. *$(t^{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $M_\Lambda^\infty(X)$.*
3. *Il existe un isomorphisme*

$$T : M_\Lambda^\infty(X) \longrightarrow c_0(X) = \oplus_{c_0} X_j$$

tel que $T(p) = (\sum_{i=0}^\infty a_i, \sum_{i=1}^\infty a_i, \ldots)$ pour tout $p \in M_\Lambda(X)$ de la forme $p(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^{\lambda_i}$.

Démonstration. Nous allons démonter (2) ⇒ (1) ⇒ (3) ⇒ (2).

I. Condition (2) implique (1). Supposons que $(t^{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$ soit une base de $M_\Lambda^\infty(X)$. Soit $a \in X$ non nul, on considère l'espace $M_\Lambda^\infty(\mathbb{K}a) \subset M_\Lambda^\infty(X)$, alors $(t^{\lambda_i})_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $M_\Lambda^\infty(\mathbb{K}a)$. Comme $M_\Lambda^\infty(\mathbb{K}a)$ est isométriquement isomorphe à M_Λ^∞, alors, d'après le théorème 1.3.3, Λ est une suite lacunaire.

II. Condition (1) implique (3). Supposons Λ lacunaire, et soit $f(t) = \sum_{i=0}^\infty a_i t^{\lambda_i} \in M_\Lambda^\infty(X)$. D'après le théorème de Hardy et Littlewood ([Ha49]), la série $\sum_{i=0}^\infty a_i$ est convergente vers $f(1)$, en plus il existe une constante C_Λ, qui ne dépend que de Λ, tel que $\left\|\sum_{i=0}^N a_i\right\|_X \le C_\Lambda \|f\|_{\infty,X}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ (voir [Ko04] Théorème 23.1 et Proposition 23.4, notons que ces résultats sont démontrés dans le cas où $a_i \in \mathbb{C}$, mais ils restent vrais dans le cas des séries à coefficients dans un Banach X, il suffit de refaire la même preuve en remplaçant $|\cdot|$ par $\|\cdot\|_X$).

Maintenant on considère l'application

$$T : M_\Lambda^\infty(X) \longrightarrow c_0(X) = \oplus_{c_0} X_j$$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i} \longrightarrow \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \ldots \right)$$

Alors d'après ce qui précède T est un opérateur bien défini, continu et injectif. Pour $b \in \oplus_{c_0} X_j$, on définit $T^{-1}((b_i)_i) = \sum_{i=0}^{\infty}(b_{i+1}-b_i)t^{\lambda_i}$. Comme la série $\sum_{i=0}^{\infty}(b_{i+1}-b_i)$ est convergente, alors la série $\sum_i (b_{i+1}-b_i)t^{\lambda_i}$ est uniformément convergente sur $[0,1]$ par le théorème d'Abel ([Ha49]). D'après le théorème 2.3.4, on obtient $T^{-1}((b_i)_i) \in M_\Lambda^\infty(X)$. Donc T est un isomorphisme par le théorème d'isomorphisme de Banach.

III. Condition (3) implique (2). Supposons que T soit un isomorphisme alors il existe deux constantes C_Λ^1, C_Λ^2 qui ne dépendent que de Λ, telles que

$$C_\Lambda^1 \sup_{m \geq 0} \left\| \sum_{i=0}^{m} a_i \right\|_X \leq \|p\|_{\infty,X} \leq C_\Lambda^2 \sup_{n \geq 0} \left\| \sum_{i=0}^{n} a_i \right\|_X \qquad (*)$$

pour tout $p \in M_\Lambda(X)$ de la forme $p(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^{\lambda_i}$.

D'abord, on va démontrer que Λ est lacunaire.
Soit $i \neq j$; d'après $(*)$, on a

$$C_\Lambda^1 \leq \left\| t^{\lambda_i} - t^{\lambda_j} \right\|_\infty = \left\| t - t^{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} \right\|_\infty .$$

Si la suite $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ n'est pas lacunaire alors l'expression au-dessus peut prendre des valeurs arbitrairement petites, en contradiction avec le fait que $C_\Lambda^1 > 0$, donc Λ est lacunaire ce qui implique que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ et par suite, tout $f \in M_\Lambda^\infty(X)$ est de la forme $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}$ pour $t \in [0,1)$ (Théorème de représentation).

Maintenant on va démontrer que $T(f) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{i=1}^{\infty} a_i, \ldots)$ pour tout $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i} \in M_\Lambda^\infty(X)$. Ce qui prouvera l'unicité des a_i, $i \geq 0$. Il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C_\Lambda > 0$ $\left(C_\Lambda = \frac{1}{C_\Lambda^1}\right)$ telle que

$$\left\| \sum_{i=0}^{m} a_i \right\|_X \leq C_\Lambda \|f\|_{\infty,X}, \quad \forall m \geq 0.$$

A cet effet, soit $\epsilon > 0$ et $r \in (0, 1)$. Alors la série $\sum_i a_i r^{\lambda_i} t^{\lambda_i}$ converge uniformément vers $f(rt)$ sur $[0, 1]$. Alors il existe $N_0 = N_0(\epsilon, r)$ tel que pour tout $N \geq N_0$, on a :

$$\left\| f(rt) - \sum_{i=0}^{N} a_i r^{\lambda_i} t^{\lambda_i} \right\|_X \leq \epsilon, \forall t \in [0, 1].$$

En particulier on a

$$\left\| \sum_{i=0}^{N} a_i r^{\lambda_i} t^{\lambda_i} \right\|_X \leq \|f\|_{\infty,X} + \epsilon, \forall t \in [0, 1].$$

Donc d'après $(*)$ on a

$$\left\| \sum_{i=0}^{N} a_i r^{\lambda_i} \right\|_X \leq C_\Lambda(\|f\|_{\infty,X} + \epsilon) \quad \forall m \leq N \; et \; N \geq N_0(\epsilon, r).$$

Maintenant pour $\epsilon \to 0$ et $r \to 1$ nous obtenons l'inégalité désirée. $\square$

Chapitre 3

Espaces de Müntz non complémentés dans L^1

Introduction et Notation

Dans ce chapitre, $\|\cdot\|_p$ désigne la norme dans $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$. On suppose que $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ est une suite de nombres réels positifs distincts, vérifiant $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$ et on considère l'espace vectoriel fermé M_Λ^p engendré par les monômes x^λ, $\lambda \in \Lambda$. Par le théorème de Müntz (Théorème 1.1.1), M_Λ^p est un sous-espace propre de $L^p([0,1])$, et par le théorème de Clarkson-Erdös-Schwartz (Théorème 1.2.4), M_Λ^p se compose uniquement des series entières de la forme $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda x^\lambda$ convergente sur $[0,1)$ si Λ vérifie la gap condition $\inf\{\lambda_i - \lambda_{i-1} : i \in \mathbb{N}\} > 0$.

Dans son papier, Newman [Ne84] donne un exemple d'espace de Müntz non complémenté dans $C([0,1])$. Le résultat principal de ce chapitre est de construire un espace de Müntz non complémenté dans $L^1([0,1])$ (voir Théorème 3.3.3). Dans le Théorème 3.2.2, on obtient une ℓ^1-décomposition de Schauder de l'espace de Müntz $M_{\Lambda_\epsilon}^1$, où $\Lambda_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ est une suite non quasilacunaire. Mais la suite $\{N_1, N_2, ...\}$ des termes initiaux des blocs qui composent Λ_ϵ est très lacunaire, et si on considère $\Lambda'_\epsilon = \{N_1, N_2, ...\}$, alors la suite $(x^{N_k})_k$ est une base de Schauder de $M_{\Lambda'_\epsilon}^1$, qui est $(1+\epsilon)$-équivalente à la base canonique de ℓ^1. Ainsi, dans un certain sens, notre résultat contient le résultat de Gurariy et Macaev [GuMa66].

Dans le monographe de Gurariy et Lusky [GuLu05], ils démontrent un résultat similaire à notre théorème 3.2.2 mais uniquement pour les suites Λ quasilacunaire (cf. [GuLu05, Theorem 9.3.3]).

Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [1].

3.1 Propriétés élémentaires des espaces de Müntz

Dans cette section, nous rappelons quelques propriétés des espaces de Müntz qui interviendront de façon cruciale.

Proposition 3.1.1. [BE95, p.177, E.3.c] *Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$ et la gap condition*

$$\inf\{\lambda_i - \lambda_{i-1} : i \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante positive $c(\epsilon, \Lambda)$ dépendant uniquement de ϵ et $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ tel que

$$|a_i|(1-\epsilon)^{\lambda_i} \leq c(\epsilon, \Lambda)\|p\|_2$$

pour tout $p \in span\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$ de la forme $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{\lambda_i}$.

Proposition 3.1.2. [BE95, p.185, E.8.a] *Supposons que $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < ....$ avec $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$. Alors, pour tout $\epsilon \in (0,1)$, il existe une constante $\gamma(\epsilon, \Lambda)$ dépendant uniquement de ϵ, et $(\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ tel que*

$$\|p\|_{[0,1-\epsilon]} \leq \gamma(\epsilon, \Lambda) \int_{1-\epsilon}^{1} |p(x)| dx.$$

pour tout $p \in span\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$.

Proposition 3.1.3. (Inégalité de Newman dans L^p, [BE95, p.279]) *Soit $p \in [1, \infty)$. Si $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ est une suite de nombres réels positifs distincts supérieure à $-1/p$, alors*

$$\|xP'\|_p \leq \left(\frac{1}{p} + 12\sum_{i=0}^{n}\left(\lambda_i + \frac{1}{p}\right)\right)\|P\|_p.$$

pour tout $P \in M_n(\Lambda) = span\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ..., x^{\lambda_n}\right\}$.

Dans les espaces de Müntz, nous obtenons de meilleures estimations.

Lemme 3.1.4. *Soit* $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$, *une suite d'entiers positifs distincts satisfaisant* $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$. *Alors il existe une constante* $C(\Lambda) > 0$ (*dépendant seulement de* Λ) *avec*

$$\|p'\|_1 \leq C(\Lambda)\left(\sum_{i=m}^{n} \lambda_i\right)\|p\|_1$$

pour tout $p(x) = \sum_{i=m}^{n} \alpha_i x^{\lambda_i}$ (*pour tout* m *et* n).

Démonstration. Soit $p(x) = \sum_{i=m}^{n} \alpha_i x^{\lambda_i}$.
L'inégalité de Newman dans L^1 implique que

$$\|xP'\|_1 \leq \left(\frac{1}{p} + 12\sum_{i=m}^{n}\left(\lambda_i + \frac{1}{p}\right)\right)\|P\|_1.$$

Puisque le cardinal des λ_i qui sont inférieurs à 1 est fini, alors il existe une constante $C_1(\Lambda)$ tel que

$$\|xP'\|_1 \leq C_1(\Lambda)\left(\sum_{i=m}^{n} \lambda_i\right)\|P\|_1. \tag{1}$$

D'après la proposition 3.1.2 il existe $\gamma(\Lambda)$ tel que

$$\|P'\|_1 \leq \gamma(\Lambda)\|xP'\|_1. \tag{2}$$

Par suite en combinant (1) et (2) on obtient,

$$\|P'\|_1 \leq C(\Lambda)\left(\sum_{i=m}^{n} \lambda_i\right)\|P\|_1$$

avec $C(\Lambda) = \gamma(\Lambda)C_1(\Lambda)$. □

Le prochain corollaire est une conséquence directe des deux propositions précédentes.

Corollaire 3.1.5. *Soit* $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$, *une suite d'entiers positifs distincts satisfaisant* $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$. *Alors il existe une constante* $K(\Lambda) > 0$ (*dépendant seulement de* Λ) *tel que*

$$\|p\|_\infty \leq K(\Lambda)\left(1 + \sum_{i=m}^{n} \lambda_i\right)\|p\|_1$$

pour tout $p(x) = \sum_{i=m}^{n} \alpha_i x^{\lambda_i}$ (*pour tout* m *et* n).

Démonstration. En écrivant $p(x) = p(0) + \int_0^x p'(t)dt$, on a $|p(x)| \leq |p(0)| + \int_0^1 |p'(t)|dt$.

Par la proposition 3.1.2 il existe $\gamma(\Lambda)$, tel que $|p(0)| \leq \gamma(\Lambda) \int_0^1 |p(t)|dt$.

L'inégalité de Newman appliquée à p implique : $\|p'\|_1 \leq C(\Lambda)\left(\sum_{i=m}^{n} \lambda_i\right)\|p\|_1$.

Ainsi

$$\|p\|_\infty \leq \gamma(\Lambda)\|p\|_1 + C(\Lambda)\left(\sum_{i=m}^{n} \lambda_i\right)\|p\|_1$$

$$\leq \max\left(\gamma(\Lambda), C(\Lambda)\right)\left(1 + \sum_{i=m}^{n} \lambda_i\right)\|p\|_1.$$

Nous prenons $K(\Lambda) = max\left(\gamma(\Lambda), C(\Lambda)\right)$. □

3.2 Décomposition-ℓ^1 de Schauder

Le lemme suivant est le point-clé de notre construction.

Lemme 3.2.1. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier positif $N = N(\epsilon, m)$ dépendant seulement de ϵ et m (mais pas de p ou q) tel que*

$$\left\|p(x)\right\|_1 + \left\|q\left(x^N\right)\right\|_1 \leq (1+\epsilon)\left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_1$$

pour tout p, $q \in span\{1, x, x^2, ..., x^m\}$ avec $q(0) = 0$.

Démonstration. Soit $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite croissante d'entiers positifs vérifiant $N_1 > m$ et $N_{k+1} > kN_k$. Notons $\Lambda_m = \{1, 2, ..., m\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$.

Soient p, $q \in span\{1, x, x^2, ..., x^m\}$ avec $q(x) = \sum_{j=1}^{m} q_j x^j$, alors pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et tout $N \in \{N_m, N_{m+1}, ...\}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\alpha} \left|q(x^N)\right| dx &\leq \sum_{j=1}^{m} |q_j| \int_0^{1-\alpha} x^{jN} dx \\ &\leq \tfrac{m}{N} \sup_{1\leq j\leq m} |q_j|(1-\alpha)^{jN} \\ &\leq c(\alpha, m)\tfrac{m}{N} \left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_2\end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que q_j est le coefficient de x^{jN} dans $p(x) + q\left(x^N\right) \in M(\Lambda_m)$ et de la proposition 3.1.1. Donc

$$\int_0^{1-\alpha} \left|q(x^N)\right| dx \leq c(\alpha, m)\frac{m}{N} \left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_\infty^{\frac{1}{2}} \left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_1^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, soit $Q(x) = p(x) + q\left(x^N\right)$, $Q(x) \in M(\Lambda_m)$, alors, par le corollaire 3.1.5 nous avons

$$\|Q\|_\infty \leq K(\Lambda_m)\left(1 + \sum_{j=1}^{m} j + N\sum_{j=1}^{m} j\right)\|Q\|_1 \leq K(\Lambda_m)m^2N\|Q\|_1$$

et donc, si nous posons $\delta(\alpha, m) = m^2 c(\alpha, m)\sqrt{K(\Lambda_m)}$, nous avons

$$\int_0^{1-\alpha} \left|q(x^N)\right| dx \leq \frac{\delta(\alpha, m)}{\sqrt{N}} \left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_1 \qquad (*)$$

De la même manière, par le corollaire 3.1.5, nous obtenons

$$\|p\|_\infty \leq K(\Lambda_m)\left(1 + \sum_{j=0}^{m} j\right)\|p\|_1 \leq m^2K(\Lambda_m)\|p\|_1.$$

Et donc, nous avons $\displaystyle\int_{1-\alpha}^{1} |p(x)|dx \leq \alpha \left\|p\right\|_\infty \leq \alpha m^2K(\Lambda_m) \left\|p\right\|_1 \qquad (**)$

Maintenant, nous retournons à la preuve de notre inégalité. Nous pouvons écrire :

$$\int_0^1 \left|p(x) + q\left(x^N\right)\right| dx$$

$$\geq \left(\int_0^{1-\alpha} |p(x)|dx - \int_0^{1-\alpha} \left|q\left(x^N\right)\right| dx\right) + \left(\int_{1-\alpha}^{1} \left|q\left(x^N\right)\right| dx - \int_{1-\alpha}^{1} |p(x)|dx\right)$$

$$\geq \int_0^1 |p(x)|dx + \int_0^1 \left|q\left(x^N\right)\right| dx - 2\int_{1-\alpha}^1 |p(x)|dx - 2\int_0^{1-\alpha} \left|q\left(x^N\right)\right| dx$$

En combinant (∗) et (∗∗), nous obtenons que

$$\int_0^1 \left|p(x) + q\left(x^N\right)\right| dx$$
$$\geq (1 - 2\alpha m^2 K(\Lambda_m))\left(\|p\|_1 + \left\|q\left(x^N\right)\right\|_1\right) - 2\frac{\delta(\alpha, m)}{\sqrt{N}} \left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_1$$

Ainsi

$$\|p(x)\|_1 + \left\|q\left(x^N\right)\right\|_1 \leq \left(\frac{1 + 2\frac{\delta(\alpha,m)}{\sqrt{N}}}{1 - 2\alpha m^2 K(\Lambda_m)}\right)\left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_1 .$$

Fixons α tel que $2\alpha m^2 K(\Lambda_m) \leq \frac{\epsilon}{2+\epsilon}$, ensuite fixons $N \in \{N_m, N_{m+1}, ...\}$ tel que $2\frac{\delta(\alpha,m)}{\sqrt{N}} \leq \frac{\epsilon}{2+\epsilon}$, alors on obtient :

$$\|p(x)\|_1 + \left\|q\left(x^N\right)\right\|_1 \leq (1 + \epsilon)\left\|p(x) + q\left(x^N\right)\right\|_1 .$$

□

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section, nous obtenons une ℓ^1-décomposition de Schauder de l'espace $M^1_{\Lambda_\epsilon}$, où $\Lambda_\epsilon = \bigcup_{k=1}^\infty \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ est une suite non quasilacunaire $\left(\frac{kN_k}{(k-1)N_k} \to 1\right)$. Mais, pour tout ensemble de la forme $\Lambda'_\epsilon = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, où $A_k \subset \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ vérifiant $\max_k \text{card} A_k < \infty$, Λ'_ϵ est quasilacunaire et $M^1_{\Lambda'_\epsilon}$ est isomorphe à ℓ^1. De toute évidence, la suite $\{N_1, N_2, ...\}$ des termes initiaux des blocs qui composent Λ_ϵ est lacunaire ($N_{k+1} > kN_k$). Fixons $\Lambda''_\epsilon = \{N_1, N_2, ...\}$, alors la suite $(x^{N_k})_k$ est une base de Schauder de $M^1_{\Lambda''_\epsilon}$, $(1 + \epsilon)$-équivalente à la base canonique dans ℓ^1. Donc, en un sens, notre résultat contient le théorème de Gurariy et Lusky [GuLu05, Théorème 9.3.3].

Théorème 3.2.2. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite croissante d'entiers positifs, $(N_k)_{k=1}^\infty$ avec $N_{k+1} > kN_k$, dépendant seulement de ϵ telle que si $\Lambda_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ on a,*

$$M^1_{\Lambda_\epsilon} \equiv \left(\sum_{k=1}^\infty F_k\right)_{(\ell^1)}$$

où $F_k = sp\{x^{N_k}, x^{2N_k}, ..., x^{kN_k}\}$.
Plus précisément, nous avons : $\sum_{k=1}^{\infty} \left\| p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1 \leq (1+\epsilon)\|f\|_1$
pour tout $f \in M^1_{\Lambda_\epsilon}$ *avec une décomposition d'Erdös :*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\left(x^{N_k}\right), \qquad x \in [0,1), \qquad p_k \in span\left\{1, x, x^2, ..., x^k\right\}.$$

Démonstration. Soit $\epsilon_k > 0$, $k = 1, 2, ...$ tel que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\epsilon_k) = (1+\epsilon)$.
Maintenant on fixe $N_1 \geq 0$ et on définit $N_{k+1} = N(\epsilon_{k+1}, kN_k)$ comme dans le lemme précédent.

Nous allons utiliser l'induction sur n pour prouver :

$$\sum_{k=1}^{n} \left\| p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1 \leq \prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k) \left\| \sum_{k=1}^{n} p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1 \qquad (1)$$

pour tout n, et tout $p_k \in span\left\{1, x, x^2, ..., x^k\right\}$.
Le résultat est trivial pour $n = 1$. Maintenant, on peut supposer que le résultat est vrai pour $n-1$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\| p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1 \leq \prod_{k=1}^{n-1}(1+\epsilon_k) \left\| \sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1 .$$

Nous allons maintenant appliquer le lemme 3.2.1 avec

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right), \qquad q(x) = p_n(x) \qquad et \qquad m = (n-1)N_{n-1}.$$

Les degrés de p et q sont nettement inférieurs à m, de sorte que les hypothèses du lemme 3.2.1 sont satisfaites. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\| p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1 &\leq \prod_{k=1}^{n-1}(1+\epsilon_k) \left\| \sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1 + \left\| p_n\left(x^{N_n}\right) \right\|_1 \\
&\leq \prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k) \left\| \sum_{k=1}^{n} p_k\left(x^{N_k}\right) \right\|_1
\end{aligned}$$

et l'induction est complète.

Maintenant, fixons $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\left(x^{N_k}\right) \in M^1_{\Lambda_\epsilon}$, où $p_k \in span\left\{1, x, x^2, ..., x^k\right\}$.

Fixons $\rho \in (0,1)$, et on considère $f_\rho(x) = f(\rho x) \in M^1_{\Lambda_\epsilon}$.

Par (1), nous avons pour tout $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \left\|p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_1 \leq (1+\epsilon)\left\|\sum_{k=1}^{n} p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_1 .$$

Et nous pouvons maintenant laisser $n \to \infty$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_1 \leq (1+\epsilon)\|f_\rho\|_1.$$

Et puis $\rho \to 1$, ceci conduit à :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_1 \leq (1+\epsilon)\left\|f\right\|_1 .$$

Ceci termine la preuve du Théorème 3.2.2 .

□

Corollaire 3.2.3. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe Λ_ϵ tel que $M^1_{\Lambda_\epsilon}$ soit $(1+\epsilon)$-isomorphe à ℓ^1 et complémenté dans $L^1([0,1])$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, on considère la suite $\Lambda_\epsilon = (N_k)_k$ donnée par le théorème précédent. Donc $M^1_{\Lambda_\epsilon}$ est $(1+\epsilon)$-isomorphe à ℓ^1, donc en choisissant ϵ tel que $(1+\epsilon) \leq \sqrt{2}$, nous avons d'après [Do75, Theorem A], que $M^1_{\Lambda_\epsilon}$ est complémenté dans $L^1([0,1])$. □

3.3 Résultat principal

Nous aurons besoin de ce qui suit :

Théorème 3.3.1. [GöRo95, Théorème 1.1] *Il existe une constante $c > 0$ tel que pour toute projection de $L^1([-1,1])$ sur l'espace vectoriel engendré par $1, x, x^2, ..., x^n$, possède une norme supérieure à $c \log n$.*

Notons que ce théorème reste vrai si l'on remplace $L^1([-1,1])$ par $L^1([0,1])$, parce que l'isométrie $\theta : L^1([-1,1]) \mapsto L^1([0,1])\,;\ f(x) \to 2f(2x-1)$ envoie $sp\{1,x,x^2,...,x^n\}$ sur lui même.

Lemme 3.3.2. *Il existe une constante $c>0$ tel que pour tout $N \geq 1$ et toute projection P de $L^1([0,1])$ sur vect $\left\{x^{N-1},x^{2N-1},...,x^{kN-1}\right\}$, on a $\|P\| > c\log k$.*

Démonstration. Soit P une telle projection et T_N désigne l'application

$$\begin{aligned} T_N : L^1([0,1]) &\mapsto L^1([0,1]). \\ f(x) &\mapsto Nx^{N-1}f\left(x^N\right). \end{aligned}$$

T_N est une isométrie surjective avec, $T_N^{-1}(f)(x) = \frac{1}{N}x^{\frac{1}{N}-1}f\left(x^{\frac{1}{N}}\right)$ pour $x \in (0,1]$, et $T_N\left(sp\{1,x,...,x^{k-1}\}\right) = sp\left\{x^{N-1},x^{2N-1},...,x^{kN-1}\right\}$. Alors $T_N^{-1}PT_N$ est une projection de $L^1([0,1])$ sur l'espace engendré par $\left\{1,x,x^2,...,x^{k-1}\right\}$. Le théorème 3.3.1 implique que $\|T_N^{-1}PT_N\| \geq c\log(k-1)$. Finalement, comme T_N est une isométrie nous avons que $\|P\| = \|T_N^{-1}PT_N\| \geq c\log(k-1)$ et le lemme est établi. □

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.3. *Il existe un espace de Müntz, isomorphe à $(\sum_{k=0}^{\infty} R_k)_{(\ell^1)}$ où $R_k = span\left\{1,x,x^2,...,x^k\right\}$, et qui n'est pas complémenté dans $L^1([0,1])$.*

Démonstration. Soit $\Lambda_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k,2N_k,...,kN_k\}$ la suite donnée par le théorème 3.2.2, et $\Lambda' = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k-1,2N_k-1,...,kN_k-1\}$.

Par la proposition 3.1.2 , l'application

$$\begin{aligned} T : M^1_{\Lambda'} &\mapsto M^1_{\Lambda_\epsilon} \\ f(x) &\mapsto xf(x) \end{aligned}$$

est un isomorphisme surjectif. Alors, par le théorème 3.2.2 et la preuve du lemme 3.3.2, on a $M^1_{\Lambda'}$ isomorphe à $(\sum_{k=0}^{\infty} R_k)_{(\ell^1)}$ $\left(R_k = span\left\{1,x,x^2,...,x^k\right\}\right)$, donc si Π_k est l'application définie par $\Pi_k(f) = x^{-1}p_k(x^{N_k})$, où $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x^{-1}p_j(x^{N_j}) \in M^1_{\Lambda'}$ (sa décomposition d'Erdös), on a $\|\Pi_k\| \leq c$ indépendamment de k. L'application Π_k, toutefois, est une projection de $M^1_{\Lambda'}$ sur $F_k = sp\{x^{N_k-1},x^{2N_k-1},...,x^{kN_k-1}\}$. Ainsi, s'il existe une projection bornée P de $L^1([0,1])$ sur $M^1_{\Lambda'}$ alors Π_kP serait une projection de $L^1[0,1]$ sur $sp\left\{x^{N_k-1},x^{2N_k-1},...,x^{kN_k-1}\right\}$. La majoration $\|\Pi_kP\| \leq c\|P\|$ nous donnerait une contradiction au Lemme 3.3.2 ! □

3.4 Suites équivalentes à la base canonique de ℓ^1

Ici, nous donnons une autre application du lemme 3.2.1 . On construit un espace de Müntz possédant une base équivalente à la base canonique de ℓ^1. D'abord nous avons besoin du point clé suivant, qui est un peu technique.

Lemme 3.4.1. *Soit k un entier positif, et soit $X_k = sp\left\{x^{k-1}, x^k\right\} \subset L^1([0,1])$, alors la constante de la base $(x^{k-1}, x^k - x^{k-1})$ est bornée indépendamment de k, ainsi $(x^{k-1}, x^k - x^{k-1})_k$ est une base de l'espace $\left(\sum_{k=1}^{\infty} sp\left\{x^{k-1}, x^k\right\}\right)_{(\ell^1)}$ équivalente à la base canonique de ℓ^1.*

Démonstration. Il suffit de prouver que, pour un certain $C > 0$, indépendant de k, et pour tous a, b $\in \mathbb{C}$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\left\|ax^{k-1}\right\|_1 \leq C\left\|ax^{k-1} + b\left(x^k - x^{k-1}\right)\right\|_1$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $a = 1$ et $b > 0$.

Soit $f(x) = x^{k-1} + b\left(x^k - x^{k-1}\right) = (1-b)x^{k-1} + bx^k$, pour estimer $\|f\|_1$ nous considérons deux cas :

(1) $b \in (0,1]$; cela implique que $f(x) > 0$, pour $x \in [0,1]$. Alors

$$\|f\|_1 = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1-b}{k} + \frac{b}{k+1} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{2}\left\|x^{k-1}\right\|_1.$$

(2) $b > 1$. Alors $f(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{b-1}{b} \in (0,1)$. Donc on a

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= -\int_0^{\frac{b-1}{b}} f(x)dx + \int_{\frac{b-1}{b}}^1 f(x)dx \\ &= \tfrac{1}{k(k+1)}\left(2b\left(1-\tfrac{1}{b}\right)^{k+1} - b + k + 1\right). \end{aligned}$$

Dans ce cas, il suffit de prouver qu'il existe une constante $C \in (0,1)$ tel que

$$2b\left(1-\frac{1}{b}\right)^{k+1} - b + k \geq Ck \qquad (*)$$

(La constante C sera choisie ci-dessous).

Si on effectue le changement de variable $X = 1 - \frac{1}{b} \in [0,1]$, alors l'inégalité $(*)$ est équivalente à :

$$2X^{k+1} + (C-1)kX + (1-C)k - 1 \geq 0 \qquad (**)$$

Soit $p(X) = 2X^{k+1} + (C-1)kX + (1-C)k - 1 \geq 0$, alors il suffit de démonter que $p(X) \geq 0$ pur tout $X \in [0,1]$.

$p'(X) = 2(k+1)X^k + (C-1)k = 0$. Donc $p'(X) = 0$ implique que $X = \left(\frac{1-C}{2}\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} \in]0,1[$. Notons que $p(0) = (1-C)k > 0$ et $p(1) = 1 > 0$, donc il suffit de prouver que $p\left(\left(\frac{1-C}{2}\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}\right) > 0$.

$$\begin{aligned} p\left(\left(\tfrac{1-C}{2}\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}\right) &= 2\left(\tfrac{1-C}{2}\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k}} + (C-1)k\left(\tfrac{1-C}{2}\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} + (1-C)k - 1 \\ &= (1-C)\left[\left(\tfrac{1-C}{2}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k}} - k\left(\tfrac{1-C}{2}\right)^{\frac{1}{k}}\left(\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} + k\right] - 1. \end{aligned}$$

En écrivant le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\left(\frac{1-C}{2}\right)^{\frac{1}{k}} = e^{\frac{1}{k}\ln\frac{1-C}{2}}$; $\left(\frac{1-C}{2}\right)^{\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k}\ln\frac{1-C}{2} + \frac{1}{k}o(\frac{1}{k})$, alors on a pour k assez grand

$$\begin{aligned} p\left(\left(\tfrac{1-C}{2}\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}\right) &= (1-C)\Bigg[\left(1 + \tfrac{1}{k}\ln\tfrac{1-C}{2} + \tfrac{1}{k}o(\tfrac{1}{k})\right)\left(\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k}} \\ &\qquad -k\left(1 + \tfrac{1}{k}\ln\tfrac{1-C}{2} + \tfrac{1}{k}o(\tfrac{1}{k})\right)\left(\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} + k\Bigg] - 1 \\ &= (1-C)\left[\left(\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} - \ln\tfrac{1-C}{2} + \left(\tfrac{k}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k}}\left(\tfrac{1}{k}\ln\tfrac{1-C}{2} + \tfrac{1}{k}o(\tfrac{1}{k}) - o(\tfrac{1}{k})\right)\right] - 1 \\ &\approx_{k\to+\infty} (1-C)\left[1 + \ln\frac{2}{1-C}\right] - 1. \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons $C \in (0,1)$ telle que $(1-C)\left[1 + \ln\frac{2}{1-C}\right] > 1$, par exemple pour $C = \frac{1}{2}$, on a

$$p\left(\left(\frac{1-C}{2}\frac{k}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}\right) \geq \frac{1}{2}[1 + \ln 4] - 1 > 1,$$

pour k assez grand, et donc le lemme est établi. $\square$

Dans leur papier [GuMa66], Gurariy et Macaev ont démontré que la suite $(x^\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de Schauder de M^1_Λ, équivalente à la base canonique de ℓ^1 si et seulement si, Λ est lacunaire. Dans la proposition suivante, on donne une base équivalente à la base naturelle de ℓ^1, pour certains espaces de Müntz M^1_Λ, où Λ n'est pas lacunaire.

Proposition 3.4.2. *Soit la suite* $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ *définie par la relation de récurrence* $N_{k+1} = N(\epsilon_{k+1}, kN_k)$ *(comme dans la preuve du théorème 3.2.2), avec* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\epsilon_k) = (1+\epsilon)$ *et soit* $\Lambda = N_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty}\{(k-1)N_k, kN_k\}$. *Alors* M^1_Λ *est isomorphe à* ℓ^1 *et la suite* x^{N_1}, $\left(x^{(k-1)N_k},\ x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)_{k=2}^{\infty}$ *est une base de Schauder de* M^1_Λ, *équivalente à la base naturelle de* ℓ^1.

Démonstration. On définit l'application

$$T_{N_k} : L^1([0,1]) \to L^1([0,1]).$$
$$f(x) \mapsto N_k x^{N_k-1} f\left(x^{N_k}\right).$$

T_{N_k} est une isométrie surjective, avec $T_{N_k}\left(span\{x^{k-1}, x^k\}\right) = span\left\{x^{kN_k-1}, x^{(k+1)N_k-1}\right\}$.
En effet, en effectuant le changement de variable $u = x^{N_k}$, on a :

$$\left\|T_{N_k}(f)\right\|_1 = \int_0^1 \left|N_k x^{N_k-1} f\left(x^{N_k}\right)\right| dx = \int_0^1 |f(u)| du = \|f\|_1.$$

On définit l'application $T^{-1}_{N_k}$ par $T^{-1}_{N_k}(f)(x) = \frac{1}{N_k} x^{\frac{1}{N_k}-1} f\left(x^{\frac{1}{N_k}}\right)$ pour $x \in (0,1]$.
De même, on a $\left\|T^{-1}_{N_k}(f)\right\|_1 = \|f\|_1$, donc $T^{-1}_{N_k}$ est bien définie.
Elle vérifie $T^{-1}_{N_k} o T_{N_k} = T_{N_k} o T^{-1}_{N_k} = I$; donc T_{N_k} est une isométrie surjective.

Maintenant, Soit $X = \left(span\{1\} + \sum_{k=1}^{\infty} span\left\{x^{k-1}, x^k\right\}\right)_{(\ell^1)}$
et
$Y = \overline{span}^{\|.\|_1}\left\{x^{N_1-1}, x^{(k-1)N_k-1}, x^{kN_k-1} ; k \geq 2\right\}$.

On définit T par

$$T : X \to Y$$
$$(p_k)_{k=0}^{\infty} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} T_{N_k}(p_{k-1}).$$

D'après le théorème 3.2.2, T est un isomorphisme, et par la Proposition 3.1.2, xT est un isomorphisme de $\left(sp\{1\} + \sum_{k=1}^{\infty} sp\left\{x^{k-1}, x^k\right\}\right)_{(\ell^1)}$ sur M_Λ^1 et donc, par le lemme 3.4.1, la suite $\left(x^{N_1}, \left(x^{(k-1)N_k}, x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)_{k=2}^{\infty}\right)$ est une base de Schauder de M_Λ^1 équivalente à la base canonique de ℓ^1. □

3.5 Espaces de Müntz complémentés dans L^1, et isomorphes à ℓ^1

Définition 3.5.1. On dit qu'une famille des fonctions de $L^1([0,1])$, $F = \{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ est relativement disjointe si

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|f_j\|_1 < \infty$$

et s'il existe des constantes $0 < \epsilon < \delta$, et une famille d'ensembles mesurables disjoints $E_j \subset [0,1]$ telle que

$$\int_{E_j} |f_j(x)|dx > \delta \qquad et \qquad \sum_{i=1, i\neq j}^{\infty} \int_{E_i} |f_j(x)|dx < \epsilon, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Lemme 3.5.2 (Ro73, Prop.3.1)**.** *Soit $F \subset L^1([0,1])$ une famille des fonctions relativement disjointes. Alors F est équivalente à la base naturelle de ℓ^1. En plus $\overline{span}(F)$ est complémenté dans $L^1([0,1])$.*

Le résultat suivant a déjà été prouvé lorsque $\lambda_j = m^j$, $m \geq 8$ (voir [GöRo98, Lemma 11]). Nous allons améliorer légèrement ce résultat :

Théorème 3.5.3. *Supposons que $\Lambda = (\lambda_j)_{j=0}^{\infty}$ soit une suite de nombres réels positifs vérifiant $\lambda_{j+1}/\lambda_j \geq r \geq 4.5$. Alors, il existe $j_0 > 0$ tel que la famille des fonctions $\{(\lambda_j + 1)x^{\lambda_j} : j > j_0\}$ soit relativement disjointe dans $L^1([0,1])$ et donc M_Λ^1 est complémenté dans $L^1([0,1])$.*

Démonstration. Soit $E_j = \left(e^{-\frac{2}{\lambda_j}}, e^{-\frac{2}{r\lambda_j}}\right)$, alors

$$\begin{aligned}\int_{E_j} (\lambda_j + 1)x^{\lambda_j}dx &= e^{-\frac{2(\lambda_j+1)}{r\lambda_j}} - e^{-\frac{2(\lambda_j+1)}{\lambda_j}} \\ &\geq e^{\frac{2(\lambda_j+1)}{r\lambda_j}} - e^{-2} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{2}{r}} - e^{-2}.\end{aligned}$$

Comme $e^{-\frac{2}{r}} - e^{-2} \in]\frac{1}{2}, 1[$, donc il existe $\delta \in]\frac{1}{2}, 1[$ et $j_0 > 0$ tel que pour tout $j > j_0$, on a

$$\int_{E_j} (\lambda_j + 1) x^{\lambda_j} dx > \delta \quad et \quad \sum_{i=1, i\neq j}^{\infty} \int_{E_i} (\lambda_j + 1) x^{\lambda_j} dx < 1 - \delta.$$

En choisissant $\epsilon = 1 - \delta$, alors $\left\{(\lambda_j + 1)x^{\lambda_j} : j > j_0\right\}$ est(δ, ϵ)-relativement disjointe, ensuite par le lemme 3.5.2, M^1_Λ est complémenté dans $L^1([0, 1])$. $\square$

3.6 Espaces de Müntz dans L^p

Dans cette section, on considère les espaces de Müntz M_Λ^p dans $L^p([0,1])$, $p \in \mathbb{N}^*$, on généralise au cas $L^p([0,1])$ certains des résultats précédents. Nous construisons un espace de Müntz possédant une FDD (Finite Dimensional Decomposition) dont les sous-espaces sommés sont isométriquement isomorphes à $F_n = sp\left\{x^k\right\}_{k=1}^n$, plus précisément

$$M_\Lambda^p \equiv \left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\right)_{(\ell^p)}.$$

En particulier on peut construire des espaces de Müntz dans $L^p([0,1])$ isomorphes à ℓ^p, et ainsi possédant une base de Schauder.

On commence par un lemme technique qui généralise le lemme 3.2.1 de la section 2.

Lemme 3.6.1. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier positif $N = N(\epsilon, m, p)$ qui dépend seulement de ϵ, m and p (mais pas de P ou Q) tel que*

$$(1-\epsilon)\left(\|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|P(x) + Q\left(x^N\right)\right\|_p \qquad (1)$$

$$\left\|P(x) + Q\left(x^N\right)\right\|_p \leq (1+\epsilon)\left(\|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

pour tous P, $Q \in span\{1, x, x^2, ..., x^m\}$ avec $Q(0) = 0$.

Démonstration. Soit $(N_k)_{k=1}^\infty$ une suite croissante d'entiers positifs vérifiant $N_1 > m$ et $N_{k+1} > kN_k$.

On fixe $\Lambda_m = \{1, 2, ..., m\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$.

Soit P, $Q \in span\{1, x, x^2, ..., x^m\}$ avec $Q(x) = \sum_{j=1}^{m} q_j x^j$. Alors pour tout $\alpha \in (0,1)$ et tout $N \in \{N_m, N_{m+1}, ...\}$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\alpha} \left|Q(x^N)\right|^p dx &\leq 2^{m(p-1)} \sum_{j=1}^{m} |q_j|^p \int_0^{1-\alpha} x^{pjN} dx \\ &\leq 2^{m(p-1)} \tfrac{m}{pN} \sup_{1\leq j\leq m} \left(|q_j|(1-\alpha)^{jN}\right)^p \\ &\leq c(\alpha,m) 2^{m(p-1)} \tfrac{m}{pN} \left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_1^p\end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que q_j est le coefficient de x^{jN} dans $P(x) + Q\left(x^N\right)$ qui est un élément de $M(\Lambda_m)$ et du théorème 6.2.2 de [GuLu05, p.79]. Par conséquent

$$\int_0^{1-\alpha} \left|Q(x^N)\right|^p dx \leq \frac{\delta(\alpha,m,p)}{N} \left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_1^p \qquad (*)$$

En revanche, nous avons

$$\int_{1-\alpha}^{1} |P(x)|^p dx \leq \alpha \, \|P\|_\infty \leq \alpha K^p(m) \, \|P\|_1 \qquad (**)$$

La deuxième inégalité provient du fait que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont équivalentes sur $\operatorname{span}\{1, x, x^2, ..., x^m\}$.

Maintenant nous revenons à la preuve de notre inégalité.
Tout d'abord, nous allons prouver ceci :

$$\left(\|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p) \left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_p .$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|P(x)+Q\left(x^N\right)\right|^p dx \geq & \left(\frac{1}{2^{p-1}} \int_0^{1-\alpha} |P(x)|^p dx - \int_0^{1-\alpha} \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx\right) \\ & + \left(\frac{1}{2^{p-1}} \int_{1-\alpha}^1 \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx - \int_{1-\alpha}^1 |P(x)|^p dx\right) \\ \geq & \frac{1}{2^{p-1}} \left(\int_0^1 |P(x)|^p dx + \int_0^1 \left|Q\left(x^N\right)\right|^p\right) dx \\ & - \left(1+\frac{1}{2^{p-1}}\right)\left(\int_{1-\alpha}^1 |P(x)|^p dx + \int_0^{1-\alpha} \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx\right).\end{aligned}$$

En utilisant $(*)$ et $(**)$, nous obtenons cela

$$\begin{aligned}\left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_p^p \geq\ & \frac{1}{2^{p-1}}\left(1-\left(1+2^{p-1}\right)\alpha K^p(m)\right)\left(\|P\|_p^p+\left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right) \\ & -\left(1+\frac{1}{2^{p-1}}\right)\frac{\delta(\alpha,m,p)}{N}\left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_p^p.\end{aligned}$$

D'où

$$\|P(x)\|_p^p+\left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p \leq 2^{p-1}\frac{1+\left(1+\frac{1}{2^{p-1}}\right)\frac{\delta(\alpha,m,p)}{N}}{1-\left(1+2^{p-1}\right)\alpha K^p(m)}\left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_p^p.$$

Alors en choisissant ϵ' tel que $(1+\epsilon')^{\frac{1}{p}} \leq (1+\epsilon)$, puis α tel que $\left(1+2^{p-1}\right)\alpha K^p(m) \leq \frac{\epsilon'}{2+\epsilon'}$, et enfin $N \in \{N_m, N_{m+1}, \ldots\}$ tel que $\left(1+\frac{1}{2^{p-1}}\right)\frac{\delta(\alpha,m,p)}{N} \leq \frac{\epsilon'}{2+\epsilon'}$, nous obtiendrons l'inégalité désirée :

$$\left(\|P(x)\|_p^p+\left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1+\epsilon)2^{1-\frac{1}{p}}\left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_p \qquad (***)$$

Nous commençons par la preuve de l'inégalité (1). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\left\|P(x)+Q\left(x^N\right)\right\|_p=1$, et il suffit de démontrer que

$$\left(\|P(x)\|_p^p+\left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1+\epsilon), \quad \left(1+\epsilon \leq \frac{1}{1-\epsilon}\right).$$

Pour cela on a :

$$\begin{aligned} 1 =\ & \int_0^1 \left|P(x)+Q\left(x^N\right)\right|^p dx \\ \geq\ & \int_0^{1-\alpha} |P(x)|^p dx - \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \int_0^{1-\alpha} |P(x)|^k \left|Q\left(x^N\right)\right|^{p-k} dx \\ & + \int_{1-\alpha}^1 \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx - \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \int_{1-\alpha}^1 \left|Q\left(x^N\right)\right|^k |P(x)|^{p-k} dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder

$$
\begin{aligned}
1 \geq\ & \|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p - \int_{1-\alpha}^1 |P(x)|^p dx - \int_0^{1-\alpha} \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx \\
& - \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \left(\int_0^{1-\alpha} |P(x)|^p\right)^{\frac{k}{p}} \left(\int_0^{1-\alpha} \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \\
& - \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \left(\int_{1-\alpha}^1 \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \left(\int_{1-\alpha}^1 |P(x)|^p dx\right)^{\frac{p-k}{p}}.
\end{aligned}
$$

En utilisant $(*)$, $(**)$ et $(***)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
1 \geq\ & \|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p - \alpha K^p(m) C^p(p) - \frac{\delta(\alpha, m, p)}{N} \\
& - \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k C^k(p) \left(\frac{\delta(\alpha, m, p)}{N}\right)^{\frac{p-k}{p}} - \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k C^p(p) \left(\alpha K^p(m)\right)^{\frac{p-k}{p}}.
\end{aligned}
$$

Choisissons α tel que

$$
\alpha K^p(m) C^p(p) \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k C^p(p) \left(\alpha K^p(m)\right)^{\frac{p-k}{p}} \leq \frac{\epsilon}{4}.
$$

Puis $N \in \{N_m, N_{m+1}, ...\}$ tel que

$$
\frac{\delta(\alpha, m, p)}{N} \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k C^k(p) \left(\frac{\delta(\alpha, m, p)}{N}\right)^{\frac{p-k}{p}} \leq \frac{\epsilon}{4}.
$$

On obtient

$$
\left(\|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + \epsilon).
$$

Nous passons maintenant à la preuve de l'inégalité (2). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\left\|P(x) + Q\left(x^N\right)\right\|_p = 1$, donc il suffit de démontrer que

$$
\left(\|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (1 - \epsilon).
$$

Pour cela on a :

$$
\begin{aligned}
1 = & \int_0^1 \left|P(x) + Q\left(x^N\right)\right|^p dx \\
\leq & \int_0^1 |P(x)|^p dx + \int_0^1 \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \int_0^1 |P(x)|^k \left|Q\left(x^N\right)\right|^{p-k} dx.
\end{aligned}
$$

Par l'inégalité de Hölder

$$
\begin{aligned}
1 \leq & \ \|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left(\int_0^{1-\alpha} |P(x)|^p\right)^{\frac{k}{p}} \left(\int_0^{1-\alpha} \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \\
& + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k \left(\int_{1-\alpha}^1 |P(x)|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \left(\int_{1-\alpha}^1 \left|Q\left(x^N\right)\right|^p dx\right)^{\frac{p-k}{p}}.
\end{aligned}
$$

En utilisant $(*)$, $(**)$ and $(***)$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
1 \leq & \ \|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k C^k(p) \left(\frac{\delta(\alpha, m, p)}{N}\right)^{\frac{p-k}{p}} \\
& + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k C^p(p) \left(\alpha K^p(m)\right)^{\frac{k}{p}}.
\end{aligned}
$$

Choisissons α tel que

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k C^p(p) \left(\alpha K^p(m)\right)^{\frac{k}{p}} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

puis $N \in \{N_m, N_{m+1}, ...\}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{p-1} C_p^k C^k(p) \left(\frac{\delta(\alpha, m, p)}{N}\right)^{\frac{p-k}{p}} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

On obtient

$$\left(\|P(x)\|_p^p + \left\|Q\left(x^N\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (1 - \epsilon).$$

Cela termine la preuve du lemme 3.6.1. □

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section, nous obtenons une ℓ^p-décomposition de Schauder de l'espace $M^p_{\Lambda_\epsilon}$, où $\Lambda_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ n'est pas quasilacunaire $\left(\frac{kN_k}{(k-1)N_k} \to 1\right)$. Mais, pour tout ensemble de la forme $\Lambda'_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, où $A_k \subset \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ vérifiant $\max_k \mathrm{card} A_k < \infty$, Λ'_ϵ est quasi-lacunaire et $M^p_{\Lambda'_\epsilon}$ est isomorphe à ℓ^p. De toute évidence, la suite $\{N_1, N_2, ...\}$ des termes initiaux des blocs qui composent Λ_ϵ est lacunaire ($N_{k+1} > kN_k$). Fixons $\Lambda''_\epsilon = \{N_1, N_2, ...\}$, alors la suite $(x^{N_k})_k$ est une base de Schauder de $M^p_{\Lambda''_\epsilon}$, $(1+\epsilon)$-équivalente à la base canonique dans ℓ^p. Donc, en un sens, notre résultat contient la version L^p du théorème de Gurariy et Lusky [GuLu05, Théorème 9.3.3].

Théorème 3.6.2. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite croissante d'entiers positifs $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ avec $N_{k+1} > kN_k$, dépendant seulement de ϵ et p, telle que*

$$M^p_{\Lambda_\epsilon} \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\right)_{(\ell^p)} \quad \text{avec } F_k = sp\{x^{N_k}, x^{2N_k}, ..., x^{kN_k}\} \text{ et } \Lambda_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}.$$

Plus précisément, nous avons :

$$(1-\epsilon)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_p \le (1+\epsilon)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour tout $f \in M^p_{\Lambda_\epsilon}$ avec une décomposition d'Erdös :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\left(x^{N_k}\right), \qquad x \in [0,1), \qquad p_k \in span\left\{1, x, x^2, ..., x^k\right\}.$$

Démonstration. Soit $\epsilon_k > 0$, $k = 1, 2, ...$ tel que

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\epsilon_k) \le (1+\epsilon) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{\infty}(1-\epsilon_k) \ge (1-\epsilon).$$

On fixe $N_1 \ge 0$ et on définit $N_{k+1} = N(\epsilon_{k+1}, kN_k)$ comme dans le lemme précédent.

Nous allons faire une récurrence sur n pour prouver :

$$\prod_{k=1}^{n}(1-\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n}\left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p \le \left\|\sum_{k=1}^{n} p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p \le \prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n}\left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p \tag{1}$$

pour tout n, et tout $p_k \in span\left\{1, x, x^2, ..., x^k\right\}$.
Le résultat est trivial pour $n = 1$. Supposons que le résultat soit vrai pour $n-1$, c'est-à-dire

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n-1} \left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p \leq \left\|\sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p \leq \prod_{k=1}^{n-1}(1+\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n-1} \left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p.$$

Nous allons appliquer le lemme 3.6.1 avec

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right), \qquad q(x) = p_n(x) \qquad et \qquad m = (n-1)N_{n-1}.$$

Les degrés de p et q sont inférieurs à m, de sorte que les hypothèses du lemme 3.6.1 sont satisfaites. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(1-\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n} \left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p &\leq (1-\epsilon_n)^p \left\|\sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p + \prod_{k=1}^{n}(1-\epsilon_k)^p \left\|p_n\left(x^{N_n}\right)\right\|_p^p \\
&\leq (1-\epsilon_n)^p \left(\left\|\sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p + \left\|p_n\left(x^{N_n}\right)\right\|_p^p\right) \\
&\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p \\
&\leq (1+\epsilon_n)^p \left(\left\|\sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p + \left\|p_n\left(x^{N_n}\right)\right\|_p^p\right) \\
&\leq (1+\epsilon_n)^p \left(\prod_{k=1}^{n-1}(1+\epsilon_k)^p \left\|\sum_{k=1}^{n-1} p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p + \left\|p_n\left(x^{N_n}\right)\right\|_p^p\right) \\
&\leq \prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n} \left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p
\end{aligned}$$

et l'induction est complète.
Maintenant, soit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\left(x^{N_k}\right) \in M_{\Lambda_\epsilon}^p$, où $p_k \in span\left\{1, x, x^2, ..., x^k\right\}$.

Fixons $\rho \in (0,1)$, et considérons $f_\rho(x) = f(\rho x) \in M_{\Lambda_\epsilon}^p$.

Par (1), nous avons pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}(1-\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n} \left\|p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_p^p &\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_p^p \\ &\leq \prod_{k=1}^{n}(1+\epsilon_k)^p \sum_{k=1}^{n} \left\|p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_p^p.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant laisser n tendre vers l'infini pour obtenir :

$$(1-\epsilon)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\|p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|f_\rho\right\|_p \leq (1+\epsilon)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\|p_k\left((\rho x)^{N_k}\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Puis en faisant tendre ρ vers 1, nous obtenons :

$$(1-\epsilon)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p \leq (1+\epsilon)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\|p_k\left(x^{N_k}\right)\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On introduit l'application

$$T : M^p_{\Lambda_\epsilon} \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} sp\{x^{N_k}, x^{2N_k}, ..., x^{kN_k}\}\right)_{(\ell^p)}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k\left(x^{N_k}\right) \longmapsto \left(p_k\left(x^{N_k}\right)\right)_k.$$

D'après ce qui précède T est un isomorphisme, et comme ImT est dense dans $\left(\sum_{k=1}^{\infty} sp\{x^{N_k}, x^{2N_k}, ..., x^{kN_k}\}\right)_{(\ell^p)}$, alors T est surjective ce qui termine la preuve du théorème. □

Corollaire 3.6.3. *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent et pour tout ensemble de la forme $\Lambda'_\epsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, avec $A_k \subset \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ vérifiant $\max_k card A_k < \infty$, alors $M^p_{\Lambda'_\epsilon}$ est isomorphe à ℓ^p. En particulier, si $\Lambda''_\epsilon = \{N_1, N_2, ...\}$ la suite des termes initiaux des blocs qui composent Λ_ϵ, alors la suite $(x^{N_k})_k$ est une base de Schauder de $M^p_{\Lambda''_\epsilon}$, $(1+\epsilon)$-équivalente à la base canonique dans ℓ^p.*

3.6.1 Suites équivalentes à la base canonique de ℓ^p

Ici, nous donnons une autre application du lemme 3.6.1 . On construit un espace de Müntz possédant une base équivalente à la base canonique de ℓ^p. Rappelons d'abord le lemme suivant.

On dit qu'une suite des entiers N_k est une suite rapide si elle vérifie

$$\frac{N_k}{\log N_k + 2} \geq 2N_{k-1}^2 k^2 (k-1)^2, \qquad 1 < N_1 < N_2 ...,$$

Lemme 3.6.4 (Ne84, Lemma 3). *Soit N_k une suite rapide avec $N_0 = 0$. Supposons que $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$, alors on a*

$$\left\| \sum_{k=0}^{N} p_k \left(x^{N_k} \right) \right\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty, \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

pour tout $f \in M_\Lambda^\infty$ avec une décomposition d'Erdös :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(x^{N_k} \right), \qquad x \in [0,1), \qquad p_k \in span \left\{ 1, x, x^2, ..., x^k \right\}.$$

Lemme 3.6.5. *Soit N_k une suite rapide avec $N_0 = 0$ et $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(x^{N_k} \right)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f, pour tout $f \in M_\Lambda^\infty$ avec une décomposition d'Erdös :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(x^{N_k} \right), \qquad x \in [0,1), \qquad p_k \in span \left\{ 1, x, x^2, ..., x^k \right\}.$$

Démonstration. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} Q_N : M_\Lambda^\infty &\mapsto M_\Lambda^\infty \\ f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(x^{N_k} \right) &\mapsto \sum_{k=0}^{N} p_k \left(x^{N_k} \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent, Q_N est un opérateur borné avec $\sup_N \|Q_N\| \leq 2$.

Soit $\epsilon > 0$ et $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(x^{N_k}\right) \in M_\Lambda^\infty$, alors il existe un polynôme $P \in M_\Lambda = span\left\{x^\lambda : \lambda \in \Lambda\right\}$ tel que $\|f - P\| \leq \epsilon$, où P est de la forme $P(x) = \sum_{k=0}^{N_0} q_k\left(x^{N_k}\right)$.
Pour tout $N > N_0$ on a donc $P = Q_N(P)$, d'où

$$\left\|f - Q_N(f)\right\| \leq \left\|f - P\right\| + \|P - Q_N(P)\| + \left\|Q_N(f - P)\right\| \leq 3\epsilon.$$

Ainsi $Q_N(f) = \sum_{k=0}^{N} p_k\left(x^{N_k}\right)$ converge vers f uniformément sur $[0,1]$, par suite $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\left(x^{N_k}\right)$, $x \in [0,1]$. □

Remarque 3.6.6. *En fait on peut remarquer que si la suite Λ est lacunaire, alors d'après le théorème de Hardy-Littlewood, le lemme précédent est toujours vrai et la série de la décomposition d'Erdös d'une fonction $f \in M_\Lambda^\infty$, converge vers f uniformément sur $[0,1]$, ce qui n'est pas applicable pour la suite dans le lemme précédent, $\Lambda = \bigcup_{k=1}^\infty \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ car cette suite n'est pas lacunaire (elle n'est même pas quasilacunaire).*

Théorème 3.6.7. *Soit N_k une suite rapide. Supposons que $\Lambda = \bigcup_{k=1}^\infty \{(k-1)N_k, kN_k\}$, alors la suite formée de 1 et de $\left(x^{kN_{k+1}} - x^{(k-1)N_k}, kx^{kN_k} - kx^{(k-1)N_k}\right)_{k=1}^\infty$ est une base de Schauder de M_Λ^∞ équivalente à la base canonique de c_0.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, toute fonction $f \in M_\Lambda^\infty$ s'écrit sous la forme $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ où la convergence est uniforme.

Notons $f_k(x) = a_k x^{(k-1)N_k} + b_k x^{kN_k}$; alors $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(1) < \infty$.

D'abord on veut démontrer que $\frac{b_k}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

La série $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ converge ; donc d'après le théorème d'Abel la série $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)x^{(k-1)N_k}$ converge uniformément sur $[0,1]$; par suite la série $\sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(f_k(x) - (a_k + b_k)x^{(k-1)N_k}\right)$ converge uniformément sur $[0,1]$, on déduit que $\left\|b_k\left(x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)\right\|_\infty \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $Q_k(x) = b_k\left(x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)$, alors

$$\begin{aligned}
\|Q_k\|_\infty &= \left|Q_k\left(\left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1}{N_k}}\right)\right| = |b_k|\left(\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1} - \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k}\right) \\
&= \frac{|b_k|}{k}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-1} \underset{k\to\infty}{\approx} \frac{|b_k|}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad (*)
\end{aligned}$$

Pour $s_k = a_k + b_k$, on définit l'application

$$\begin{aligned}
T: \qquad M_\Lambda^\infty &\mapsto c_0 \\
f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k &\mapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k, b_1, \sum_{k=2}^{\infty} s_k, \frac{b_2}{2}, \dots, \sum_{k=i}^{\infty} s_k, \frac{b_i}{i}, \dots\right).
\end{aligned}$$

Les coefficient a_k et b_k sont uniquement déterminés par f, alors d'après ce qui précède T est une application linéaire bien définie.

T est continue. En effet :

D'après le lemme 3.6.4 on a : $\left\|\sum_{k=1}^{i-1} f_k\right\|_\infty \leq 2\left\|f\right\|_\infty$, donc

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=i}^{\infty} c_k\right| = \left|f(1) - \sum_{k=1}^{i-1} c_k\right| &\leq \left|f(1)\right| + \left|\sum_{k=1}^{i-1} f_k(1)\right| \\
&\leq \left\|f\right\|_\infty + \left\|\sum_{k=1}^{i-1} f_k\right\|_\infty \leq 3\left\|f\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
\frac{|b_i|}{i} &\leq 2\left\|b_i\left(x^{iN_i} - x^{(i-1)N_i}\right)\right\|_\infty \\
&= 2\left\|f_i(x) - (a_i + b_i)\, x^{(i-1)N_i}\right\|_\infty \\
&\leq 2\left(4\left\|f\right\|_\infty + |a_i + b_i|\right) \\
&\leq 8\left\|f\right\|_\infty + 2\left|f_i(1)\right| \leq 16\left\|f\right\|_\infty .
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\|T(f)\|_{c_0} = \max\left(\sup_{i\geq 1}\left|\sum_{k=i}^{\infty} c_k\right|, \sup_{i\geq 1}\frac{|b_i|}{i}\right) \leq 16\|f\|_\infty,$$

Par suite T est continue.

T est trivialement injective.

Soit $T^{-1} : ImT \to M_\Lambda^\infty$, alors T^{-1} est continue. En effet

Comme Λ est une suite quasilacunaire, alors on peut appliquer le résultat de Gurariy et Lusky, ([GuLu05], Théorème 9.3.1) : Il existe une constante $d > 0$, telle que

$$\|f\|_\infty = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|_\infty \leq d\left(\sup_k \left\|f_k(x) - f_k(1)x^{(k-1)N_k}\right\|_\infty + \sup_i \left|\sum_{k=1}^{i} f_k(1)\right|\right),$$

pour tout $f \in M_\Lambda^\infty$ de la forme $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Ce qui implique que

$$\|f\|_\infty \leq d\left(\sup_k \left\|b_k\left(x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)\right\|_\infty + \sup_i \left|\sum_{k=1}^{i}(a_k + b_k)\right|\right)$$

$$\leq d\left(\sup_k \frac{|b_k|}{k} + 2\sup_i \left|\sum_{k=i}^{\infty} c_k\right|\right) \leq 4d\|T(f)\|_{c_0}.$$

Alors T^{-1} est continue.

T est surjective car $T(1) = 1$, et pour tout $i \geq 1$, $T\left(-ix^{(i-1)N_i} + ix^{iN_i}\right) = e_{2i}$, $T\left(-x^{(i-1)N_i} + x^{iN_{i+1}}\right) = e_{2i+1}$ donc $(e_i)_i \subset ImT$. Comme T^{-1} est continue, alors $ImT = c_0$, par suite T est surjective et donc c'est un isomorphisme. □

Proposition 3.6.8. *Fixons $\epsilon > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite définie par la relation de récurrence, $N_{k+1} = N(\epsilon_{k+1}, kN_k)$ (comme dans la preuve du Théorème 3.6.2), avec*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\epsilon_k) \leq (1+\epsilon) \text{ et } \prod_{k=1}^{\infty}(1-\epsilon_k) \geq (1-\epsilon).$$

Soit $\Lambda_\epsilon = N_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty}\{(k-1)N_k, kN_k\}$, alors $M_{\Lambda_\epsilon}^p$ est $(1+\epsilon)$-isomorphe à $\left(\sum_{k=1}^{\infty} sp\left\{x^{(k-1)N_k}, x^{kN_k}\right\}\right)_{(\ell^p)}$, en plus la suite x^{N_1}, $\left(x^{(k-1)N_k},\ x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)_{k=2}^{\infty}$ est une base de Schauder de $M_{\Lambda_\epsilon}^p$, équivalente à la base naturelle de ℓ^p.

Démonstration. D'après le théorème 3.6.2, M_Λ^p est $(1+\epsilon)$-isomorphe à l'espace $\left(\sum_{k=1}^{\infty} sp\left\{x^{(k-1)N_k}, x^{kN_k}\right\}\right)_{(\ell^p)}$. Donc pour démontrer que la suite x^{N_1}, $\left(x^{(k-1)N_k},\ x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)_{k=2}^{\infty}$ est une base de Schauder de $M_{\Lambda_\epsilon}^p$, il suffit de démontrer que la constante de la base $\left(x^{(k-1)N_k}, x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)$ de l'espace $\overline{span}^{L^p}\left\{x^{(k-1)N_k}, x^{kN_k}\right\}$ est bornée indépendament de k.
Autrement dit, il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C > 0$, indépendante de k, telle que pour tout a, b $\in \mathbb{C}$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\left\|ax^{(k-1)N_k}\right\|_p^p \leq C \left\|ax^{(k-1)N_k} + b\left(x^{kN_k} - x^{(k-1)N_k}\right)\right\|_p^p.$$

Comme $\left\|x^{(k-1)N_k}\right\|_p^p = \dfrac{1}{p(k-1)N_k + 1} \underset{k\to\infty}{\approx} \dfrac{1}{(k-1)N_k}$, alors il suffit de démontrer qu'il existe $c > 0$ indépendant de a et b, tel que :

$$(k-1)N_k \int_0^1 \left|ax^{(k-1)N_k} - b\left(x^{(k-1)N_k} - x^{kN_k}\right)\right|^p dx \geq c$$

En effectuant le changement de variable $u = x^{(k-1)N_k}$. Alors on obtient

$$(k-1)N_k \int_0^1 \left|ax^{(k-1)N_k} - b\left(x^{(k-1)N_k} - x^{kN_k}\right)\right|^p dx = \int_0^1 \left|(a-b)u + bu^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}},$$

donc il s'agit de montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{C} : (a, b \neq 0)$.

$$\int_0^1 \left|(a-b)u + bu^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}} \geq c_p\, |a|^p.$$

où c_p est une constante indépendante de a et b.
On distingue deux cas :

(1) Si $|b| \leq |a|$: $\lambda = \dfrac{b}{a} \in \overline{\mathbb{D}}$; donc :

$$\int_0^1 \left|(a-b)u + bu^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}} = |a|^p \int_0^1 \left|(1-\lambda)u + \lambda u^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}},$$

et par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \left|(1-\lambda)u + \lambda u^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 u^{p-1} du = \frac{1}{p} \geq c_p > 0,$$

uniformément en $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$.

(2) Si $|b| \geq |a|$: $\lambda = \frac{a}{b} \in \overline{\mathbb{D}}$; donc :

$$\int_0^1 \left|(a-b)u + bu^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}} = |b|^p \int_0^1 \left|(\lambda-1)u + u^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}},$$

et par le théorème de convergence dominée

$$\int_0^1 \left|(\lambda-1)u + u^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 |\lambda u|^p \frac{du}{u} = \frac{|\lambda|^p}{p} \geq c_p |\lambda|^p > 0,$$

uniformément en $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$.

Alors pour k assez grand, on a l'inégalité désirée

$$\int_0^1 \left|(a-b)u + bu^{1+\frac{1}{k-1}}\right|^p \frac{du}{u^{1-\frac{1}{(k-1)N_k}}} \geq c_p |a|^p ,$$

pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, avec $c_p \approx \frac{1}{p}$.

Maintenant on définit l'opérateur

$$T : M_\Lambda^p \mapsto \ell^p$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k x^{(k-1)N_k} + b_k \left(x^{(k-1)N_k} - x^{kN_k}\right)\right) \mapsto \left(a_k \left\|x^{(k-1)N_k}\right\|_p, b_k \left\|x^{(k-1)N_k} - x^{kN_k}\right\|_p\right)_k .$$

D'après ce qui précède et le théorème 3.6.2, T est continue et

$$\left\|T(f)\right\|_{\ell^p} \leq (1+\epsilon)C \left\|f\right\|_p .$$

Soit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k x^{(k-1)N_k} + b_k \left(x^{(k-1)N_k} - x^{kN_k}\right)\right) \in M_\Lambda^p$, alors

$$\begin{aligned}\left\|f\right\|_p^p &\leq (1+\epsilon)^p \sum_{k=1}^{\infty} \left\|a_k x^{(k-1)N_k} + b_k \left(x^{(k-1)N_k} - x^{kN_k}\right)\right\|_p^p \\ &\leq 2^{p-1}(1+\epsilon)^p \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\|a_k x^{(k-1)N_k}\right\|_p^p + \left\|b_k \left(x^{(k-1)N_k} - x^{kN_k}\right)\right\|_p^p\right)\end{aligned}$$

Donc $\|f\|_p \leq 2(1+\epsilon)\,\|T(f)\|_{l_p}$, et T est un isomorphisme surjectif.

$\square$

Chapitre 4

Norme Essentielle des Opérateurs de Composition à Poids

Le but de ce chapitre est d'étudier les opérateurs de composition à poids, sur les espaces de Müntz. Ce chapitre se compose de deux parties. Dans la première partie on étudie ces opérateurs sur M_Λ^∞ et dans la deuxième partie on on fait une étude similaire dans M_Λ^1.

4.1 Norme Essentielle sur M_Λ^∞

4.1.1 Résumé

Dans cette première partie, on discute du problème de la compacité des opérateurs de compositions à poids, définis sur l'espace de Müntz M_Λ^∞. Nous calculons la norme essentielle de tels opérateurs sur les espaces de Müntz. En corollaire, on obtient la valeur exacte de la norme essentielle des opérateurs de composition et de multiplication.

4.1.2 Introduction et Notation

Partout dans ce chapitre, C désigne l'espace de Banach des fonctions complexes continues sur $[0,1]$, muni de la norme sup, $\|f\|_{[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$; plus généralement si $A \subset [0,1]$ nous écrirons, $\|f\|_A = \sup_{x\in A} |f(x)|$.
Dans tout le chapitre $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ est une application continue, $E = \varphi^{-1}(\{1\})$,

et $\partial E = E \setminus \overset{\circ}{E}$ la frontière de E dans $[0,1]$. L'opérateur de composition C_φ est défini par $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. Étant donné ψ, une fonction continue sur $[0,1]$, on considère l'opérateur de multiplication $\mathcal{T}_\psi$ défini par $\mathcal{T}_\psi(f) = f \cdot \psi$.

La norme essentielle d'un opérateur T est la distance de T à l'espace des opérateurs compacts et il est défini comme suit : $\|T\|_e = \inf \|T - S\|$ où l'inf est pris sur les opérateurs compact S.

Nous allons donner une estimation précise de la norme essentielle de l'opérateur $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ définit sur M_Λ^∞ en terme des valeurs de φ et ψ (voir Théorème 4.1.13). Comme un corollaire nous déduisons que la norme essentielle de C_φ définie sur M_Λ^∞ vaut 0 ou 1, et la norme essentielle de $\mathcal{T}_\psi$ définit sur M_Λ^∞ est $|\psi(1)|$.

4.1.3 Résultats Préliminaires

Dans cette section nous rappelons quelques propriétés sur la géométrie des espaces de Müntz.

Proposition 4.1.1 (Bounded Bernstein-Type Inequality, [BE95], p.182, E.5.b)**.** *Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^\infty$ une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant $\sum_{i=1}^\infty 1/\lambda_i < \infty$, $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 \geq 1$. Alors, pour tout $\epsilon \in (0,1)$, il existe une constante c_ϵ dépendant uniquement de ϵ, et $(\lambda_i)_{i=0}^\infty$ (mais pas du nombre de termes en p) tel que*

$$\|p'\|_{[0,1-\epsilon]} \leq c_\epsilon \|p(x)\|_{L_2}$$

pour tout $p \in span\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$.

En combinant la proposition précédente avec le théorème d'Arzela-Ascoli (voir, par exemple, Rudin [Ru87]), on déduit facilement le corollaire suivant qui sera très utile par la suite.

Corollaire 4.1.2. *Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^\infty$ une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant*

$$\sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} < \infty$$

Supposons que $(f_n)_{n=1}^\infty \subset span\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$ avec $\|f_n\|_{[0,1]} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors il existe une sous-suite n_k, telle que f_{n_k} converge uniformément sur tout compact de $[0,1)$.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty \subset span\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$ telle que $\|f_n\|_{[0,1]} \leq 1$. Soit $\epsilon > 0$. D'après la proposition précédente, $(f_n)_n$ est une suite bornée, équicontinue sur $[0, 1-\epsilon]$, alors par le théorème d'Arzela-Ascoli, on peut extraire une sous-suite uniformément convergente sur $[0, 1-\epsilon]$.

Par récurrence, on construit des ensembles infinies S_j d'entiers, $S_1 \supset S_2 \supset ...$, tels que (f_n) converge uniformément sur $[0, 1-\frac{1}{j}]$ lorsque $n \to \infty$ dans S_j. Le procédé diagonal fournit un ensemble infini S tel que lorsque $n \to \infty$ dans S, la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de $[0, 1)$. □

4.1.4 Opérateurs de Composition sur M_Λ^∞

Dans cette sous-section, nous considérons les opérateurs de composition définis sur les espaces de Müntz. Beaucoup de chercheurs ont été intéressés par ces opérateurs. Ils ont été étudiés dans le cas d'un espace Banach X invariant par ces opérateurs. Parmi ces espaces, il y a les espaces de Hardy H^p, les espaces de Bergman, et les espaces de Bergman-Orlicz et récemment les espaces de Hardy Orlicz étudiés par P. Lefèvre, D. Li, H.Queffélec et L. Rodríguez-Piazza [LLQR07]. Nous sommes intéressés par les questions de continuité, faible compacité, compacité et le calcul de la norme essentielle de ces opérateurs et beaucoup d'autres questions.

Dans la suite, nous verrons qu'en général un opérateur de composition n'envoie pas un espace Müntz dans lui-même. Pour cette raison nous considérerons des opérateurs définis sur un espace de Müntz à valeurs dans l'espace de toutes les fonctions continues sur $[0, 1]$. En fait, un espace de Müntz est envoyé (par un opérateur de composition) dans un autre type d'espace de Müntz. Nous spécifierons ce phénomène.

Nous commençons par donner un exemple d'une fonction continue φ tel que $\operatorname{Im} C_\varphi$ n'est pas inclus dans M_Λ.

Lemme 4.1.3. *Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$, une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant $\sum_{k=1}^\infty 1/\lambda_k < \infty$, $\varphi(x) = ax^n$ avec $n \geq 0$ et $0 < a \leq 1$.*

Alors C_φ envoie M_Λ^∞ dans M_Λ^∞ si et seulement si $\Lambda = \Lambda.\{1, n, n^2, n^3, ...\}$, ce qui est équivalent à $n\Lambda \subset \Lambda$.

Démonstration. Pour $n = 0$ ou 1, le résultat est trivial. Donc on suppose que $n \geq 2$.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{N}$ telle que $\Lambda = \Lambda \cdot \{1, n, n^2, n^3, ...\}$. Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^{\lambda_k} \in M(\Lambda) = span\{x^{\lambda_k} : k = 0, 1, ...\}$, alors $C_\varphi(f) = \sum_{k=0}^{N} a_k a^{\lambda_k} x^{n\lambda_k} \in M_\Lambda^\infty$, car $C_\varphi(f) \in C$ et $n\lambda_k \in \Lambda$ pour tout $\lambda_k \in \Lambda$.

Maintenant par la continuité de C_φ et la densité de $M(\Lambda)$ dans M_Λ^∞ on déduit que $C_\varphi(M_\Lambda^\infty) \subset M_\Lambda^\infty$.

Inversement si $C_\varphi(f) \in M_\Lambda^\infty$ pour tout $f \in M_\Lambda^\infty$, alors $C_\varphi(x^{\lambda_k}) = a^{\lambda_k} x^{n\lambda_k} \in M_\Lambda^\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ainsi, par le théorème de Müntz, on a $n\lambda_k \in \Lambda$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ce qui implique que $n\Lambda \subset \Lambda$. □

Lemme 4.1.4. *Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$, une suite croissante d'entiers naturels vérifiant $\sum_{k=1}^\infty 1/\lambda_k < \infty$. Soit $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ une application continue de la forme $\varphi(x) = ax^n + bx^m$ $(a, b \neq 0, n < m)$ et soit $C_\varphi : M_\Lambda^\infty \to C$ l'opérateur de composition défini sur M_Λ^∞.*
Alors il existe $f \in M_\Lambda^\infty$ tel que $C_\varphi(f) \notin M_\Lambda^\infty$.

Démonstration. En écrivant $\varphi(x) = ax^n(1 + \frac{b}{a}x^{m-n})$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\varphi(x) = x^n(1 + \alpha x^l)$ où $l > 0$. Procédons par l'absurde et supposons que $C_\varphi(x^{\lambda_k}) \in M_\Lambda^\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Alors,

$$C_\varphi(x^{\lambda_k}) = x^{n\lambda_k}(1 + \alpha x^l)^{\lambda_k} = x^{n\lambda_k} \sum_{i=0}^{\lambda_k} \binom{\lambda_k}{i} \alpha^i x^{il} = \sum_{i=0}^{\lambda_k} \binom{\lambda_k}{i} \alpha^i x^{il+n\lambda_k} \in M_\Lambda^\infty.$$

Alors d'après le théorème de Clarkson-Erdös, $il + n\lambda_k \in \Lambda$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $i = 0, 1, ..., \lambda_k$.
Maintenant pour λ_k assez grand on a,

$$\sum_{i=0}^{\lambda_k} \frac{1}{il + n\lambda_k} \geq \frac{1}{l} \sum_{i=0}^{\lambda_k} \frac{1}{i + n\lambda_k} \gtrsim \frac{1}{l}\Big(\ln(n+1)\lambda_k - \ln n\lambda_k\Big) \geq \frac{1}{l} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Donc, en choisissant une sous-suite $(\lambda_{k_j})_j$ de $(\lambda_k)_k$ tel que les éléments $il + n\lambda_{k_j}$, $i = 0, 1, ..., \lambda_{k_j}$, $j = 0, 1, ..., \infty$ sont distincts, on a,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\lambda_{k_j}} \frac{1}{il + n\lambda_{k_j}} \gtrsim \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{l} \ln \frac{n+1}{n} = \infty$$

cela conduit à une contradiction. □

Lemme 4.1.5. *Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$, une suite croissante d'entiers naturels vérifiant $\sum_{k=1}^\infty 1/\lambda_k < \infty$. Soit φ un polynôme, $\varphi(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ avec $a_i \geq 0$ pour tout $i \geq 0$ telle que $\|\varphi\|_{[0,1]} \leq 1$ et au moins deux coefficients sont différents de zéro.*
Alors $\operatorname{Im} C_\varphi$ *n'est pas inclus dans l'espace de Müntz M_Λ^∞.*

Démonstration. Soit $r = \inf\{i \geq 0 : a_i \neq 0\}$, et $s = \inf\{i > r : a_i \neq 0\}$. Alors on a $\varphi(x) = a_r x^r + b_s x^s + \ldots\ (a_r, b_s > 0)$, $s > r$.

Supposons que $C_\varphi(x^{\lambda_k}) \in M_\Lambda^\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors $C_\varphi(x^{\lambda_k}) = \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i\right)^{\lambda_k} = (a_0 + a_1 x)^{\lambda_k} + R \in M_\Lambda^\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où R est un polynôme à coefficients positifs. Il n'y a pas de simplification entre les coefficients de $(a_r x^r + b_s x^s)^{\lambda_k}$ et celui de R puisque les a_i sont positifs ; ce qui implique que $(a_r x^r + b_s x^s)^{\lambda_k} \in M_\Lambda^\infty$, par le théorème de Clarkson-Erdös.

Alors C_ψ envoie M_Λ^∞ dans M_Λ^∞ où $\psi(x) = \dfrac{a_r x^r + b_s x^s}{a_r + b_s}$; et par le lemme 4.1.4 cela conduit à une contradiction. □

Notons que si $K \subset [0,1]$ est un compact de mesure positive, le théorème de Müntz reste vrai dans $C(K)$. Plus précisément, l'espace $M(\Lambda) = span\{x^{\lambda_k} : k = 0, 1, \ldots\}$, est un sous-ensemble dense dans $C(K)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < \infty$. En plus, si on a la gap condition $\inf\{\lambda_k - \lambda_{k-1} : k \in \mathbb{N}\} > 0$ et si $r_K = \sup\{x \in [0,\infty) : m(K \cap (x,\infty)) > 0\}$, alors chaque fonction $f \in C(K)$ dans la fermeture de $M(\Lambda)$ sur K est de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k x^{\lambda_k}, x \in K \cap [0, r_K)$, (voir [BE95, Théorème 6.2.1]). En utilisant ce résultat nous pouvons déduire le théorème suivant.

Théorème 4.1.6. *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue non constante, $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^\infty$ une suite croissante de nombres réels positifs avec $\lambda_0 = 0$.*
Alors $M_\Lambda^\varphi = span\{\varphi(x)^{\lambda_k} : k = 0, 1, \ldots\}$, est un sous-ensemble dense dans C si et seulement si φ est strictement monotone et

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty$$

En plus si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} < \infty$ alors, $M_\Lambda^{\varphi,\infty}([0,1]) = \overline{span}\{\varphi(x)^{\lambda_k} : k = 0, 1, \ldots\}$ est isomorphe à $M_\Lambda^\infty([0,1])$.

Démonstration. Soit $[a,b] \subset [0,1]$ $(a < b)$ tel que $\varphi([0,1]) = [a,b]$. Deux cas se présentent :

1. Si φ est strictement monotone alors $C_\varphi : C([a,b]) \to C([0,1])$ est une isométrie surjective, et $C_\varphi\left(M_\Lambda^\infty([a,b])\right) = M_\Lambda^{\varphi,\infty}([0,1])$.
   Donc, $span\{\varphi(x)^{\lambda_k} : k = 0,1,...\}$ est dense dans $C([0,1])$ si et seulement si $span\{x^{\lambda_k} : k = 0,1,...\}$ est dense dans $C([a,b])$ si et seulement si $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k} = \infty$.
2. Si φ n'est pas strictement monotone alors elle n'est pas injective par suite l'isométrie $C_\varphi : C([a,b]) \to C([0,1])$ est non surjective ($f(x) = x$ n'admet pas d'antécédent) alors M_Λ^φ n'est pas dense dans $C([0,1])$.

Maintenant soit $T_b : M_\Lambda^\infty([a,b]) \to M_\Lambda^\infty\left(\left[\frac{a}{b},1\right]\right)$, $f(x) \to f_b(x) = f(bx)$. T_b est une isométrie surjective, et par la Proposition 3.1.2, $M_\Lambda^\infty\left([\frac{a}{b},1]\right)$ est isomorphe à $M_\Lambda^\infty([0,1])$ et donc $M_\Lambda^\infty([a,b])$ est isomorphe à $M_\Lambda^\infty([0,1])$. □

Le théorème suivant montre la trivialité du problème sur l'espace C.

Théorème 4.1.7. *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, $C_\varphi : C \to C$ l'opérateur de composition sur C. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *C_φ est un opérateur faiblement compact.*
2. *C_φ est un opérateur compact.*
3. *φ est constante.*

Démonstration. Les implications $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ sont triviales, donc il suffit de démontrer que $1 \Rightarrow 3$.
Soit $K = \varphi([0,1])$. Nous procédons par l'absurde, supposons que C_φ soit un opérateur compact (respectivement opérateur faiblement compact) et que φ n'est pas une constante, alors il existe $a, b \in [0,1]$ avec $a \neq b$ et $K = [a,b] \subset [0,1]$. On considère l'opérateur $\theta : C(K) \to C$ défini par $\theta(f) = fo\varphi$. C'est une isométrie.
Maintenant si C_φ est un opérateur compact (respectivement opérateur faiblement compact) alors, θ est un opérateur compact (respectivement opérateur faiblement compact), donc la boule unité de $C(K)$ est compacte (respectivement faiblement compacte). Cela impose que $C(K)$ soit de dimension finie (respectivement $C(K)$ est un espace de Banach réflexif). Ainsi $a = b$ et donc $K = \{a\}$, ce qui donne une absurdité et donc φ est une constante. □

4.1.5 Opérateurs Compact sur M_Λ^∞

Dans cette section, nous allons démontrer que l'opérateur $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact si et seulement si $\psi_{|\partial E} = 0$, $E = \varphi^{-1}(\{1\})$. D'abord nous rappelons le théorème 2.2.8 du chapitre 2 qui montre l'équivalence entre la compacité, faible compacité et complète continuité des opérateurs définis sur les espaces de Müntz.

Théorème 4.1.8. *Soit $(\lambda_k)_{k=0}^\infty$ une suite de nombres réels positifs distincts vérifiant $\sum_{k=1}^\infty 1/\lambda_k < \infty$. Soit Y un espace Banach et $T : M_\Lambda^\infty \to Y$ est un opérateur borné. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *T est un opérateur faiblement compact.*
2. *T est un opérateur compact.*
3. *T est un opérateur de Dunford-Pettis.*

Théorème 4.1.9. *Supposons que $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, et $\sum_{i=1}^\infty 1/\lambda_i < \infty$. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, et $\psi \in C$.*
Alors l'opérateur $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi : M_\Lambda^\infty \to C$ est compact si et seulement si $\psi_{|\partial E} = 0$. (par convention $\psi_{|\{\emptyset\}} = 0$).

Démonstration. Supposons que $\psi_{|\partial E} = 0$, nous allons démontrer que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact.
Soit $f_n \in M_\Lambda^\infty$ tel que $\|f_n\|_\infty \le 1$. D'après le corollaire 4.1.2, il existe une sous-suite n_k, tel que f_{n_k} converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de $[0,1)$ vers f, avec $f \in C\big([0,1)\big)$.

Comme $|f_{n_k}(1)| \le 1$, il existe une sous-suite n_{k_l}, tel que $\big(f_{n_{k_l}}(1)\big)_l$ converge vers un certain $\alpha \in \mathbb{C}$. Maintenant on définit $f(1) = \alpha$, de sorte que f est définie sur $[0,1]$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $f_{n_k}(1) \to f(1)$.

Soit $h = (f \circ \varphi) \cdot \psi$. La fonction h est bornée sur $[0,1]$. Nous allons démontrer que $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi (f_{n_k}) - h\right\|_{[0,1]} \to 0$, quand $k \to +\infty$, ce qui impliquera que $h = \lim_{k\to\infty} \mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi (f_{n_k})$ est une fonction continue sur $[0,1]$ et donc $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact.

Soit $\epsilon > 0$. Comme ψ est une fonction continue sur $[0,1]$, elle est uniformément continue sur $[0,1]$: alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0,1]$ avec $|x-y| < \delta$, on a $|\psi(x) - \psi(y)| < \epsilon$. Soit $K_\delta = \{x \in E^c; d(x, \partial E) \ge \delta\}$. Il est clair que $K_\delta = \left\{x \in (\overset{\circ}{E})^c; d(x,\partial E) \ge \delta\right\}$ et donc K_δ est un sous-ensemble compact de $[0,1]$.

$$\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\left(f_{n_k}\right) - h\right\|_{[0,1]} =$$

$$\max\left\{\left\|\left(\left(f_{n_k} - f\right)\circ\varphi\right)\cdot\psi\right\|_{E^c},\ \left\|\left(f_{n_k}(1) - f(1)\right)\cdot\psi\right\|_E\right\}.$$

Le premier terme est majoré par :

$$\begin{aligned}\left\|\left(\left(f_{n_k} - f\right)\circ\varphi\right)\cdot\psi\right\|_{E^c} &\leq \left\|\left(\left(f_{n_k} - f\right)\circ\varphi\right)\cdot\psi\right\|_{K_\delta} + \left\|\left(\left(f_{n_k} - f\right)\circ\varphi\right)\cdot\psi\right\|_{E^c\setminus K_\delta} \\ &\leq \left\|f_{n_k} - f\right\|_{\varphi(K_\delta)} \|\psi\|_\infty + 2\left\|\psi\right\|_{E^c\setminus K_\delta}.\end{aligned}$$

Comme $\varphi(K_\delta)$ est un sous-ensemble compact de $[0,1)$, alors $\left\|f_{n_k} - f\right\|_{\varphi(K_\delta)} \to 0$, quand $k \to \infty$. Si $x \in E^c \setminus K_\delta$, alors il existe $y \in \partial E$ tel que $|x - y| < \delta$ et donc $|\psi(x)| = |\psi(x) - \psi(y)| \leq \epsilon$ car $\psi(y) = 0$.
Ce qui implique que $\left\|\left(\left(f_{n_k} - f\right)\circ\varphi\right)\cdot\psi\right\|_{E^c} \leq 3\epsilon$ pour k assez grand.
Pour le deuxième terme, nous avons :

$$\left\|\left(f_{n_k}(1) - f(1)\right)\cdot\psi\right\|_E \leq \left|f_{n_k}(1) - f(1)\right| \|\psi\|_\infty \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Alors, $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\left(f_{n_k}\right) - h\right\|_{[0,1]} \to 0$ quand $k \to \infty$. Donc $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact.

Inversement, supposons que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ soit compact. La suite $\left(x^{\lambda_n}\right)_n$ appartient à la boule unité de M_Λ^∞, donc il existe une sous-suite n_k tel que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\left(x^{\lambda_{n_k}}\right) \to h$, où $h \in C$. Si $x \in E$ alors $\varphi(x) = 1$ et $h(x) = \psi(x)$. Si $x \in E^c$ alors $\varphi(x) < 1$ et $h(x) = \lim \psi(x)\cdot\varphi(x)^{\lambda_{n_k}} = 0$.

Comme $\partial E = \overline{E^c} \bigcap E$ et $h_{|E^c} = 0$, on a $h_{|\overline{E^c}} = 0$ donc $h_{|\partial E} = 0$, mais $h(x) = \psi(x)$ si $x \in \partial E$, alors $\psi_{|\partial E} = 0$. □

Corollaire 4.1.10. *$C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi$ est un opérateur compact sur M_Λ^∞ si et seulement si $\psi(1) = 0$ ou $1 \notin \operatorname{Im}\varphi$ ou $\varphi = 1$ (c-à-d ssi C_φ compact ou T_ψ compact).*

Démonstration. Soit $f \in M_\Lambda^\infty$, $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi(f) = (f\circ\varphi)\cdot(\psi\circ\varphi) = \mathcal{T}_{\psi\circ\varphi} \circ C_\varphi(f)$, alors $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\psi\circ\varphi} \circ C_\varphi$ et donc par le théorème précédent $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi$ est compact si et seulement si $\psi \circ \varphi_{|\partial\varphi^{-1}(\{1\})} = 0$, ce qui est équivalent à $\psi(1) = 0$ ou $\varphi^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ ou $\varphi^{-1}(\{1\}) = [0,1]$ c-à-d $\varphi = 1$. □

Corollaire 4.1.11. *On a,*

1. *C_φ est compact sur M_Λ^∞ si et seulement si $\|\varphi\|_\infty < 1$ ou $\varphi = 1$.*

2. *$\mathcal{T}_\psi$ est compact sur M^∞_Λ si et seulement si $\psi(1) = 0$.*

Démonstration. Nous appliquons le théorème 4.1.9 avec $\varphi(x) = x$, alors $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi = \mathcal{T}_\psi$, donc $\mathcal{T}_\psi$ est compact si et seulement si $\psi_{|\partial E} = \psi_{|\{1\}} = \psi(1) = 0$.
Si $\psi = 1$, alors $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi = C_\varphi$ donc C_φ est compact si et seulement si $1_{|\partial E} = 0$ équivalent à $\partial E = \emptyset$ équivalent à $\|\varphi\|_\infty < 1$ ou $\varphi = 1$. □

Corollaire 4.1.12. *Soit $C_\varphi : M^\infty_\Lambda \to C$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *C_φ est un opérateur faiblement compact.*
2. *C_φ est un opérateur compact.*
3. *C_φ est un opérateur de Dunford Pettis.*
4. *$\|\varphi\|_\infty < 1$ ou $\varphi = 1$.*
5. *C_φ est un opérateur nucléaire.*
6. *C_φ est un opérateur intégral.*
7. *C_φ est un opérateur absolument sommant.*

Démonstration. Clairement les équivalences $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4$ découlent du Théorème 4.1.8 et le Corollaire 4.1.11.
Nous montrons que la condition 4 implique la condition 5.
Si $\|\varphi\|_\infty < r < 1$, alors $C_\varphi(f)(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k(f)\varphi(x)^{\lambda_k}$; pour tout $f \in M^\infty_\Lambda$ avec une décomposition d'Erdös : $f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k(f)x^{\lambda_k}$; $x \in [0,1)$.
Notons que la série $\sum_{k=0}^\infty a_k(f)\varphi(x)^{\lambda_k}$ converge uniformément sur $[0,1]$ ($\|\varphi\|_\infty < 1$).
Donc $C_\varphi(f) = \sum_{k=0}^\infty a_k(f)\varphi^{\lambda_k}$.

Soit $x_k^* : M^\infty_\Lambda \to \mathbb{C}$ définie par $x_k^*(f) = a_k(f)$.
D'après la proposition 3.1.1, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $c_\epsilon > 0$ tel que

$$|a_k(f)|(1-\epsilon)^{\lambda_k} \le c_\epsilon \|f\|_\infty,$$

pour tout $f = \sum_{k=0}^\infty a_k(f)x^{\lambda_k} \in M^\infty_\Lambda$. En choisissons $\epsilon = \left(1 - \sqrt{r}\right)$, on a

$$\sum_{k=0}^\infty \left\|x_k^*\right\| \left\|\varphi^{\lambda_k}\right\|_\infty \le \sum_{k=0}^\infty c_{1-\sqrt{r}} \left(\frac{r}{1-(1-\sqrt{r})}\right)^{\lambda_k} = c_{1-\sqrt{r}} \sum_{k=0}^\infty r^{\frac{\lambda_k}{2}} < +\infty$$

Alors on a pour tout $f \in M^\infty_\Lambda$, $C_\varphi(f) = \sum_{k=0}^\infty x_k^*(f)\varphi^{\lambda_k}$ avec $\sum_{k=0}^\infty \left\|x_k^*\right\| \left\|\varphi^{\lambda_k}\right\|_\infty < +\infty$, ce qui implique que C_φ est un opérateur nucléaire.

Les implications 5 $\Rightarrow$ 6 $\Rightarrow$ 1 sont toujours vraies pour tout opérateur $T : X \to Y$ (voir [Wo91, III.F 22]). □

4.1.6 Norme Essentielle sur M_Λ^∞

La norme essentielle de $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est

$$\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e = \inf\{\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S\| : S \text{ est un opérateur compact sur } M_\Lambda^\infty\}.$$

Il est clair que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact et si seulement si sa norme essentielle s'annule. Le résultat suivant donne la valeur exacte de la norme essentielle de $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$.

Théorème 4.1.13. *Supposons que* $0 \le \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$, *et* $\sum_{i=1}^\infty 1/\lambda_i < \infty$. *Soit* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue, et* $\psi \in C$.
Alors $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e = \|\psi\|_{\partial E} = \sup\{|\psi(x)| : x \in \partial E\}$.

Démonstration. Pour démontrer l'inégalité : $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e \le \|\psi\|_{\partial E}$, il suffit de démontrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction continue ψ_ϵ tel que $\mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi$ est compact (équivalent à $(\psi_\epsilon)_{|\partial E} = 0$ par le théorème 4.1.9) et $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - \mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi\| \le \epsilon + \|\psi\|_{\partial E}$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme ψ est continue sur $[0,1]$, et donc uniformément continue sur $[0,1]$, alors il existe une constante $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$ avec $|x-y| < \delta$, on a $|\psi(x) - \psi(y)| < \epsilon$.

Soit $\Omega_\delta = (\partial E + (-\delta, \delta)) \cap [0,1]$, Ω_δ est un ouvert de $[0,1]$, et soit $K_\delta = \Omega_\delta^c$. Comme ∂E et K_δ sont deux sous-ensembles fermés disjoints de $[0,1]$, il existe h_δ continue telle que $(h_\delta)_{|\partial E} = 0$, $(h_\delta)_{|K_\delta} = 1$ et $0 \le h_\delta \le 1$.

Par exemple : $h_\delta(x) = \dfrac{d(x, \partial E)}{d(x, K_\delta) + d(x, \partial E)}$.

Maintenant soit $\psi_\epsilon = h_\delta.\psi$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - \mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi\| &= \|\mathcal{T}_{\psi - \psi_\epsilon} \circ C_\varphi\| \\
&\le \|\psi - \psi_\epsilon\|_\infty = \|(1-h_\delta)\psi\|_\infty = \|(1-h_\delta)\psi\|_{\Omega_\delta} \\
&\le \|\psi\|_{\Omega_\delta}.
\end{aligned}$$

Si $x \in \Omega_\delta = (\partial E + (-\delta, \delta)) \cap [0,1]$, alors il existe $y \in \partial E$ et $\alpha \in (-\delta, \delta)$ tel que $x = y + \alpha$, donc $|x - y| \leq \delta$ et par la continuité uniforme de ψ, on a $|\psi(x) - \psi(y)| \leq \epsilon$ donc $|\psi(x)| \leq |\psi(x) - \psi(y)| + |\psi(y)| \leq \epsilon + |\psi(y)|$ et donc $\|\psi\|_{\Omega_\delta} \leq \|\psi\|_{\partial E} + \epsilon$.

Alors $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e = \inf\{\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S\| : S$ est un opérateur compact sur $M_\Lambda^\infty\}$

$$\leq \|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - \mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi\| \leq \|\psi\|_{\partial E} + \epsilon$$

Nous obtenons : $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e \leq \|\psi\|_{\partial E}$.

Inversement nous allons démontrer que $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e \geq \|\psi\|_{\partial E}$.
Si $\partial E = \emptyset$, on a $\varphi = 1$ ou $\|\varphi\|_\infty < 1$ alors d'après le corollaire 4.1.11, C_φ est compact ce qui implique que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact, par suite $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e = 0 = \|\psi\|_{\partial E}$.

Nous supposons maintenant que $\partial E \neq \emptyset$.

Soit $S : M_\Lambda^\infty \to C$ un opérateur compact.
Nous voulons montrer que $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S\| \geq \sup_{x \in \partial E} |\psi(x)|$.

Soit $f_n(x) = 2x^{\lambda_n} - 1 \in M_\Lambda^\infty$. On a : $\|f_n\|_\infty = 1$, f_n fixe 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f_n(x) \to -1$ quand $n \to \infty$ pour tout $x \in [0,1)$. Comme S est compact et $\|f_n\|_\infty = 1$, alors il existe une sous-suite $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^\infty$ et $f \in C$ tel que $\lim_{j\to\infty} \|S(f_{n_j}) - f\| = 0$.

On a : $\limsup_{j\to\infty} \|(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S)(f_{n_j})\|_\infty \geq \sup_{x\in\partial E} |\psi(x)|$. En effet :

$$\|(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S)(f_{n_j})\|_\infty \geq \|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\|_\infty - \|S(f_{n_j}) - f\|_\infty,$$

ce qui implique que

$$\limsup_{j\to\infty} \|(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S)(f_{n_j})\|_\infty \geq \limsup_{j\to\infty} \|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\|_\infty.$$

Maintenant, il suffit de démontrer que $\limsup_{j\to\infty} \|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\|_\infty \geq \sup_{x\in\partial E} |\psi(x)|$.

Comme $\psi \in C$, et ∂E est un sous-ensemble compact de $[0,1]$, alors $|\psi(x_0)| = \sup_{x\in\partial E} |\psi(x)|$ pour un certain point $x_0 \in \partial E$. Le fait que $f_n(x) \to -1$ quand $n \to \infty$ pour tout $x \in [0,1)$ implique que pour tout $x \in E^c$, $f_{n_j}(\varphi(x))\psi(x) \to -\psi(x)$ quand $j \to \infty$, et donc $\lim_{j\to\infty} \left|f_{n_j} \circ \varphi(x)\psi(x) - f(x)\right| = \left|f(x) + \psi(x)\right|$.

Deux cas se présentent :

1) Il existe $x \in E^c$ tel que $|f(x) + \psi(x)| > |\psi(x_0)|$.
On a alors $||(f_{n_j} \circ \varphi)\psi - f||_\infty \geq |f_{n_j}(\varphi(x))\psi(x) - f(x)| \underset{j\to\infty}{\to} |f(x) + \psi(x)| > |\psi(x_0)|$, ce qui implique que $\limsup_{j\to\infty} ||\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f||_\infty \geq \sup_{x\in\partial E} |\psi(x)|$ comme annoncé.
2) Sinon, $|f(x)+\psi(x)| \leq |\psi(x_0)|$ pour tout $x \in E^c$ et donc par continuité $|f(x)+\psi(x)| \leq |\psi(x_0)|$ pour tout $x \in \partial E$ car $\partial E = \partial E^c$.
Nous avons donc

$$\begin{aligned}
||(f_{n_j} \circ \varphi)\psi - f||_\infty &\geq |f_{n_j}(\varphi(x_0))\psi(x_0) - f(x_0)| \\
&= |f_{n_j}(1)\psi(x_0) - f(x_0)| \\
&= |\psi(x_0) - f(x_0)| \\
&\geq 2|\psi(x_0)| - |\psi(x_0) + f(x_0)| \\
&\geq 2|\psi(x_0)| - |\psi(x_0)| = |\psi(x_0)|.
\end{aligned}$$

Alors $\limsup_{j\to\infty} \left\|\left(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S\right)\left(f_{n_j}\right)\right\|_\infty \geq \sup_{x\in\partial E} \left|\psi(x)\right|$, et donc
$\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S\right\| \geq \limsup_{j\to\infty} \left\|\left(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S\right)\left(f_{n_j}\right)\right\|_\infty \geq \sup_{x\in\partial E} \left|\psi(x)\right|$.
Ainsi $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\right\|_e \geq \sup_{x\in\partial E} \left|\psi(x)\right|$ et le résultat est établi. □

Un corollaire immédiat est :

Corollaire 4.1.14. *Soit* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue, et* $\psi \in C$.
Alors,

$$||C_\varphi||_e = \begin{cases} 0, & si\ \ \varphi = 1\ ou\ ||\varphi||_\infty < 1\,; \\ 1, & si\ \ ||\varphi||_\infty = 1\ et\ \varphi \neq 1. \end{cases}$$

Et,

$$||\mathcal{T}_\psi||_e = |\psi(1)|.$$

Corollaire 4.1.15. *Soit* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction continue telle que* C_φ *ne soit pas compact* $(1 \in \mathrm{Im}\,\varphi)$, *et* $\psi \in C$.
La norme essentielle de $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi$ *est égale à* $|\psi(1)|$.

Démonstration. Soit $f \in C$, $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi(f) = (f \circ \varphi) \cdot (\psi \circ \varphi) = \mathcal{T}_{\psi\circ\varphi} \circ C_\varphi(f)$, alors $C_\varphi \circ M_\psi = \mathcal{T}_{\psi\circ\varphi} \circ C_\varphi$ et donc par le théorème précédent $\|C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi\|_e = \|\mathcal{T}_{\psi\circ\varphi} \circ C_\varphi\|_e = \|\psi \circ \varphi\|_{\partial E} = |\psi(1)|$. □

Remarque 4.1.16. *Il est facile de voir que la plupart des résultats qui précèdent dans ce chapitre sont toujours valables lorsque M_Λ^∞ est remplacé par un espace de Banach X vérifiant : $M_\Lambda^\infty \subset X \subset C$ et chaque $f \in X$ est continûment différentiable sur* $[0, 1)$. *Les espaces de Müntz sont des exemples naturels de tels espaces.*

4.2 Opérateurs de Composition à Poids sur les Espaces de Müntz M^1_Λ

4.2.1 Introduction et Quelques Exemples

Dans cette section on étudie les opérateurs de composition à poids, définis sur les espaces de Müntz M^1_Λ. On considère une fonction $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ continue avec $E = \varphi^{-1}(\{1\})$ et $\psi \in C$ et on cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les opérateurs $C_\varphi : M^1_\Lambda \mapsto L^1$ et $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ soient bien définis, bornés et compacts. On tente de répondre à ces questions et de calculer la norme essentielle en fonction des valeurs de φ et ψ.

Remarque 4.2.1. .

1. *On peut formuler le problème différamment, en remplaçant la mesure de Lebesgue* (m) *par la mesure image* (m_φ) *de* m *par* φ*, et l'opérateur* C_φ *par l'identité* (Id)*. En effet si* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction mesurable. On a :* $\|C_\varphi(f)\|_1 = \|f\|_{L^1(m_\varphi)}$*. Plus généralement on peut remplacer* (m_φ) *par une mesure borélienne positive quelconque. L'intérêt de cette formulation est de remplacer les conditions sur* φ *par des condition sur* m_φ *pour étudier la continuité et la compacité de l'opérateur de composition.*
2. *Plus généralement si* m_φ *est absolument continue par rapport à* m *avec une densité* h *bornée alors* C_φ *est bornée avec* $\|C_\varphi\| \leq \|h\|_\infty$*.*
3. *Si* φ *est* C^1*-difféomorphisme de* $[0,1]$ *sur lui-même, on a :* $\|C_\varphi(f)\|_1 \leq \|1/\varphi'\|_\infty \|f\|_1$ *et* $\|C_\varphi(f)\|_1 \geq \dfrac{\|f\|_1}{\|\varphi'\|_\infty}$*. Donc* C_φ *est borné et non compact.*

Exemple 4.2.2. *Soit* $\varphi_0(t) = 1 - t$*. Alors* C_{φ_0} *est une isométrie. En effet :*

$$\|C_{\varphi_0}(f)\|_1 = \int_0^1 |f(1-t)|dt = \int_0^1 |f(u)|du = \|f\|_1$$

Remarque 4.2.3. *Une condition nécessaire pour que* C_φ *soit bien défini est que* $m_\varphi(\{1\}) = 0$*, où* m_φ *est la mesure image de la mesure de Lebesgue* m *par* φ*.*

En effet : On considère la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{\lambda_n}$. D'après la condition de Müntz sur Λ, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|x^{\lambda_n}\right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n + 1} < \infty$, alors la série $\sum_n x^{\lambda_n}$ est normalement convergente et par suite $f \in M^1_\Lambda$ (Théorème de representation).
Supposons que $C_\varphi : M^1_\Lambda \mapsto L^1$ est bien définie, alors $C_\varphi(f) \in L^1$ et $\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 < \infty$. D'autre part on a

$$\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 \geq \int_{\{\varphi^{-1}(\{1\})\}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x)^{\lambda_n} dx = \infty.m_\varphi\left(\{1\}\right).$$

Ce qui impose que $m_\varphi\left(\{1\}\right) = 0$.

En général, une telle condition n'est pas suffisante. En fait, il se trouve que la condition $\mathrm{card}\varphi^{-1}(\{1\}) < \infty$ est non suffisante pour que C_φ soit bien définie.
On verra un peu plus loin (lemme 4.2.7) que si C_φ est bien définie alors C_φ est bornée.

Exemple 4.2.4. *Soit $\varphi(x) = \frac{1+2x-x^2}{2}$, $\varphi^{-1}(\{1\}) = \{1\}$, en effectuant le changement de variable $u = \varphi(x)$, alors pour tout $f \in M^1_\Lambda$ on a,*

$$\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 = \int_0^1 \left|f(\varphi(x))\right| dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|f(u)\right| \frac{du}{\sqrt{2}\sqrt{1-u}}.$$

Supposons que C_φ soit définie et bornée, alors pour tout $f \in M^1_\Lambda$ on a,

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left|f(u)\right| \frac{du}{\sqrt{2}\sqrt{1-u}} = \left\|C_\varphi(f)\right\|_1 \leq \left\|C_\varphi\right\| \left\|f\right\|_1.$$

Testons pour $f = f_j = (\lambda_j + 1)x^{\lambda_j}$ et $E_j = \left(e^{-\frac{1}{\lambda_j+1}}, 1\right)$, alors

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi\right\| &\geq \int_{\frac{1}{2}}^1 \left|f_j(x)\right| \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-e^{-\frac{1}{\lambda_j+1}}}} \int_{E_j} (\lambda_j + 1)x^{\lambda_j} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-e^{-\frac{1}{\lambda_j+1}}}} \left(1 - e^{-1}\right) \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \infty.
\end{aligned}$$

Donc C_φ n'est pas bien définie.

Le lemme suivant est une version L^1 du corollaire 4.1.2, il nous sera très utile par la suite.

Lemme 4.2.5. *Soit $\Lambda = (\lambda_i)_{i=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels positifs vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$$

Supposons que $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset span\left\{x^{\lambda_0}, x^{\lambda_1}, ...\right\}$ avec $\|f_n\|_1 \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Alors il existe une sous-suite n_k, telle que f_{n_k} converge vers $f \in B_{M_\Lambda^1}$ uniformément sur tout compact de $[0,1)$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$ et $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_{M_\Lambda^1}$, alors d'après proposition 3.1.2 on a $\|f_n\|_{[0,1-\epsilon]} \leq \gamma_\epsilon$.
On considère la fonction $(f_n)_{1-\epsilon}$, définie pour $t \in [0,1]$ par $(f_n)_{1-\epsilon}(t) = f_n((1-\epsilon)t)$, donc $(f_n)_{1-\epsilon} \in M_\Lambda^\infty$ avec $\|(f_n)_{1-\epsilon}\|_\infty \leq \gamma_\epsilon$ alors par le corollaire 4.1.2 il existe une sous-suite n_l tel que $(f_{n_l})_l$ converge uniformément sur tout compact de $[0, 1-\epsilon[$ vers $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}$, de rayon de convergence $\geq 1-\epsilon$.

Ainsi par le procédé diagonal quand $\epsilon \to 0$, on peut extraire une sous-suite n_k tel que $(f_{n_k})_k$ converge uniformément sur tout compact de $[0,1[$ vers $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{\lambda_i}$ de rayon de convergence ≥ 1.

Soient $\epsilon, \delta > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n_k \geq N$, on a $\|f - f_{n_k}\|_{[0,1-\epsilon]} \leq \delta$, donc pour $n_k \geq N$ on a

$$\int_{[0,1-\epsilon]} |f(t)|dt \leq \int_{[0,1-\epsilon]} |(f - f_{n_k})(t)|dt + \int_{[0,1-\epsilon]} |f_{n_k}(t)|dt \leq 1 + \delta$$

Ceci implique pour $\delta \to 0$, puis $\epsilon \to 0$, que $f \in L^1$ et $\|f\|_1 \leq 1$. Comme f admet une décomposition en série entière qui fait apparaître seulement les termes t^λ ; $\lambda \in \Lambda$, on déduit que $f \in B_{M_\Lambda^1}$. □

Corollaire 4.2.6. *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset M_\Lambda^1$ une suite convergente vers f dans M_Λ^1 alors $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout compact de $[0,1[$.*

Lemme 4.2.7. *Supposons que $\Lambda = (0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < ...)$, et $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et $C_\varphi : M_\Lambda^1 \to L^1$, alors C_φ est borné dès que C_φ est bien définie.*

Démonstration. Supposons que $C_\varphi : M^1_\Lambda \to L^1$ est une application bien définie. Nous allons montrer que le graphe de C_φ est fermé.

Soit $(f,h) \in \overline{G(C_\varphi)}$ alors il existe une suite $(f_j)_j \subset M^1_\Lambda$ tel que $(f_j)_j$ converge vers f dans M^1_Λ et $(C_\varphi(f_j))_j$ converge vers h dans L^1. Alors quitte a extraire une sous-suite, $(f_j \circ \varphi)_j$ converge vers h pour presque tout $x \in [0,1]$.

Par le corollaire 4.2.5 on a $(f_j)_j$ converge vers f uniformément sur tout compact de $[0,1[$ ce qui implique que $(C_\varphi(f_j))_j$ converge vers $C_\varphi(f)$ uniformément sur tout compact de $\varphi^{-1}([0,1[)$.

D'après ce qui précède, C_φ est une application bien définie, implique que $m(\varphi^{-1}\{1\}) = 0$, par suite $(f_j \circ \varphi)_j$ converge vers $f \circ \varphi$ pour presque tout $x \in [0,1]$. Alors $h = f \circ \varphi$ et $G(C_\varphi)$ est fermé, ainsi C_φ est borné (Théorème du graphe fermé). □

Lemme 4.2.8. *Supposons que* $\Lambda = (0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots)$, *et* $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$. *Soit* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction de classe* C^1 *et* $C_\varphi : M^1_\Lambda \to L^1$.
Alors,

$$C_\varphi \text{ est bornée si et seulement si } \begin{cases} 1.\ \varphi([0,1]) \subset [0,1[, \\ ou \\ 2.\ \varphi^{-1}(\{1\}) \subset \{0,1\} \text{ avec } [\varphi(x_0) = 1 \Rightarrow \varphi'(x_0) \neq 0]. \end{cases}$$

Auquel cas : C_φ *est compact si et seulement si* $\|\varphi\|_\infty < 1$.

Démonstration. Supposons que C_φ est borné et $1 \in ImC_\varphi$.

Soit $x_0 \in \varphi^{-1}(\{1\})$, tel que $\varphi'(x_0) = 0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a \in]0, x_0[$ (respectivement $a \in]x_0, 1[$ si $x_0 = 0$) tel que $\varphi(a) < 1$ et $\forall t \in]a, x_0[: |\varphi'(t)| \leq \epsilon$.

Alors pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \|C_\varphi\| &\geq \int_0^1 (\lambda_j + 1) |\varphi(x)|^{\lambda_j} dx \geq \int_a^{x_0} (\lambda_j + 1) |\varphi(x)|^{\lambda_j} \frac{|\varphi'(x)|}{\epsilon} dx \\ &\geq \frac{1}{\epsilon} \left| \int_a^{x_0} (\lambda_j + 1) \varphi^{\lambda_j}(x) \varphi'(x) dx \right| = \frac{1}{\epsilon} \left[\varphi^{\lambda_j + 1} \right]_a^{x_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \varphi(a)^{\lambda_j + 1} \right) \geq \frac{1}{2\epsilon} \end{aligned}$$

pour j assez grand, ce qui contredit l'hypothèse C_φ est borné.

Alors on déduit que pour tout $x_0 \in \varphi^{-1}(\{1\})$, on a $\varphi'(x_0) \neq 0$. Ceci impose que $\varphi^{-1}(\{1\}) \subset \{0,1\}$ car sinon il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $\varphi(x_0) = 1$ est un maximum local, donc $\varphi'(x_0) = 0$ dont on vient de voir l'impossibilité.

Réciproquement :

1. Si $\varphi([0,1]) \subset [0,1[$, alors $\varphi([0,1]) \subset [0,\alpha]$ où $\alpha < 1$ et $C_\varphi : M^1_\Lambda \to C([0,1])$ est borné et compact.

2. Si $\varphi^{-1}(\{1\}) = 1$ et $\varphi'_g(1) > \delta > 0$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi'(x) > \delta$ pour tout $x \in (1-\epsilon, 1)$, donc d'après la proposition 3.1.2. on a,

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 &\leq \left\|f\right\|_{[0,\varphi(1-\epsilon)]} + \int_{1-\epsilon}^1 \left|f(\varphi(x))\right| dx \\
&\leq \gamma(\varphi(1-\epsilon)) \left\|f\right\|_1 + \int_{\varphi(1-\epsilon)}^1 \left|f(u)\right| \frac{du}{\delta} \\
&= \left(\gamma(\varphi(1-\epsilon)) + \tfrac{1}{\delta}\right) \left\|f\right\|_1 .
\end{aligned}$$

Alors C_φ est borné. En plus dans ce cas C_φ est une bijection bicontinue car, $\varphi'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \varphi'(1)$ donc si on choisit $\epsilon_0 > 0$ assez petit tel que $0 < \varphi'(x) \leq 2\varphi'(1)$ pour tout $x \in (1-\epsilon_0, 1)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 &\geq \int_{1-\epsilon_0}^1 \left|f(\varphi(x))\right| dx \geq \frac{1}{2\varphi'(1)} \int_{1-\epsilon_0}^1 \left|f(\varphi(x))\varphi'(x)\right| dx \\
&= \frac{1}{2\varphi'(1)} \int_{\varphi(1-\epsilon_0)}^1 \left|f(x)\right| dx \geq \frac{1}{4\gamma(\varphi(1-\epsilon_0))\varphi'(1)} \left\|f\right\|_1 .
\end{aligned}$$

Alors $\left\|C_\varphi\right\| \geq \dfrac{1}{4\gamma(\varphi(1-\epsilon_0))\varphi'(1)}$.

3. Si $\varphi^{-1}(\{1\}) = 0$ et $\varphi'_d(0) < \delta < 0$, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi'(x) < \delta < 0$ pour tout $x \in (0,\epsilon)$, donc d'après la proposition 3.1.2. on a,

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 &\leq \left\|f\right\|_{[0,\varphi(\epsilon)]} + \int_0^\epsilon \left|f(\varphi(x))\right| dx \\
&\leq \gamma(\varphi(\epsilon)) \left\|f\right\|_1 + \int_1^{\varphi(\epsilon)} \left|f(u)\right| \frac{du}{\delta} \\
&= \left(\gamma(\varphi(\epsilon)) - \tfrac{1}{\delta}\right) \left\|f\right\|_1 .
\end{aligned}$$

Alors C_φ est borné. En plus dans ce cas C_φ est une bijection bicontinue car, $\varphi'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \varphi'(0)$ donc si on choisit $\epsilon_0 > 0$ assez petit tel que $2\varphi'(0) \leq \varphi'(x) < 0$ pour tout $x \in (0, \epsilon_0)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 &\geq \int_0^{\epsilon_0} \left|f(\varphi(x))\right| dx \geq +\frac{1}{2\varphi'(0)} \int_0^{\epsilon_0} \left|f(\varphi(x))\varphi'(x)\right| dx \\
&= -\frac{1}{2\varphi'(0)} \int_{\varphi(\epsilon_0)}^1 \left|f(x)\right| dx \geq -\frac{1}{4\gamma(\varphi(\epsilon_0))\varphi'(0)} \left\|f\right\|_1 .
\end{aligned}$$

4. Si $\varphi^{-1}(\{1\}) = \{0,1\}$ avec $\varphi'_g(1) > \delta_1 > 0$ et $\varphi'_d(0) < \delta_2 < 0$, alors en répétons le même calcul comme dans les cas 2 et 3, on déduit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 \leq \left(\max(\gamma(\varphi(1-\epsilon)), \gamma(\varphi(\epsilon))) + \frac{1}{\delta_1} - \frac{1}{\delta_2}\right) \left\|f\right\|_1 .$$

Alors C_φ est borné. En plus dans ce cas C_φ est une bijection bicontinue, et il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que

$$\left\|C_\varphi(f)\right\| \geq \left(\frac{1}{4\gamma(\varphi(1-\epsilon_0))\varphi'(1)} - \frac{1}{4\gamma(\varphi(\epsilon_0))\varphi'(0)}\right) \left\|f\right\|_1 .$$

□

4.2.2 Compacité des Opérateurs de Composition à Poids sur M_Λ^1

Dans ce qui suit, nous réduisons notre étude des opérateurs de composition C_φ au cas particulier où E est fini.

Définition 4.2.9. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, une fonction continue. On dit que φ vérifie la condition S, si $E = \varphi^{-1}(1)$ est fini et pour tout $x_0 \in \varphi^{-1}(\{1\})$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que : $\varphi \in C^1([x_0 - \epsilon_0, x_0])$ et $\varphi \in C^1([x_0, x_0 + \epsilon_0])$ avec $\varphi'_g(x_0) \neq 0$ et $\varphi'_d(x_0) \neq 0$ (i.e. $\varphi'_g(x_0) > 0$ et $\varphi'_d(x_0) < 0$).

Remarque 4.2.10. *Pour se placer dans un cadre plus général on peut remplacer $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, par une fonction mesurable. Dans ce cas on dit que φ vérifie la condition S, si elle vérifie les hypothèses de la définition précédente, avec en plus $\varphi(K) \subset [0,\alpha[$ où $\alpha < 1$ et $K = \Omega^c$, $\Omega = \bigcup_{x_0 \in E}]x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0[$.*

On précise que tous les résultats qui vont suivre restent valables dans le cas où φ est une fonction mesurable vérifiant la condition S.

Théorème 4.2.11. *Supposons que $\Lambda = (0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots)$, et $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$, une fonction mesurable. Alors la condition S est une condition suffisante pour que $C_\varphi : M_\Lambda^1 \to L^1$ soit bornée. Auquel cas, si E non vide, C_φ est une bijection bicontinue et donc non compacte.*

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que : $\forall x \in [x_0 - \epsilon_0, x_0]$, $0 < \dfrac{\varphi'_g(x_0)}{2} \leq \varphi'(x) \leq 2\varphi'_g(x_0)$, et $\forall x \in [x_0, x_0 + \epsilon_0]$, $\varphi'(x) \leq \dfrac{\varphi'_d(x_0)}{2} < 0$, pour tout $x_0 \in E$. En effet on peut choisir ϵ_0 assez petit.

Soit $\Omega = \bigcup_{x_0 \in E}]x_0 - \epsilon_0, x_0 + \epsilon_0[$, et $K = \Omega^c$, donc d'après la proposition 3.1.2. on a,

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 &\leq \left\|f\right\|_{\varphi(K)} + \sum_{x_0 \in E} \left(\int_{x_0-\epsilon_0}^{x_0} \left|f(\varphi(x))\right| dx + \int_{x_0}^{x_0+\epsilon_0} \left|f(\varphi(x))\right| dx \right) \\
&\leq \gamma(\varphi(K)) \left\|f\right\|_1 + \sum_{x_0 \in E} \left(\frac{2}{\varphi'_g(x_0)} \int_{\varphi(x_0-\epsilon_0)}^{1} \left|f(u)\right| du + \frac{2}{|\varphi'_d(x_0)|} \int_{\varphi(x_0+\epsilon_0)}^{1} \left|f(u)\right| du \right) \\
&= \left(\gamma(\varphi(K)) + 2 \sum_{x_0 \in E} \left(\frac{1}{\varphi'_g(x_0)} + \frac{1}{|\varphi'_d(x_0)|} \right) \right) \left\|f\right\|_1 .
\end{aligned}$$

Alors C_φ est borné avec $\|C_\varphi\| \leq \gamma(\varphi(K)) + 2 \sum_{x_0 \in E} \left(\dfrac{1}{\varphi'_g(x_0)} + \dfrac{1}{|\varphi'_d(x_0)|} \right)$.

En plus si $x_0 \in E$ (non vide), on a

$$\begin{aligned}
\left\|C_\varphi(f)\right\|_1 &\geq \int_{x_0-\epsilon_0}^{x_0} \left|f(\varphi(x))\right| dx \geq \frac{1}{2\varphi'_g(x_0)} \int_{x_0-\epsilon_0}^{x_0} \left|f(\varphi(x))\varphi'(x)\right| dx \\
&= \frac{1}{2\varphi'_g(x_0)} \int_{\varphi(x_0-\epsilon_0)}^{1} \left|f(x)\right| dx \geq \frac{1}{4\gamma(\varphi(x_0-\epsilon_0))\varphi'_g(x_0)} \left\|f\right\|_1 .
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.2.12. *Supposons que $\Lambda = (0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < ...)$, et $\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i < \infty$. Soient $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ vérifiant la condition S, et ψ une fonction continue. Alors l'opérateur $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi : M^1_\Lambda \to L^1$ est compact si et seulement si $\psi_{|E} = 0$. (par convention $\psi_{|\{\emptyset\}} = 0$).*

Démonstration. Supposons que $\psi_{|E} = 0$, nous allons démontrer que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact.
Soit $f_n \in M^1_\Lambda$ tel que $\|f_n\|_1 \leq 1$. D'après le lemme 4.2.5, il existe une sous-suite n_k, tel que f_{n_k} converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de $[0,1)$ vers f, avec $f \in M^1_\Lambda$ et $\|f\|_1 \leq 1$. Alors $f \circ \varphi$ est définie presque partout sur $[0,1]$, car $m(\varphi^{-1}(\{1\})) = 0$ et f est définie partout sur $[0,1[$

Soit $h = (f \circ \varphi) \cdot \psi$, alors h est une fonction mesurable sur $[0,1]$. Nous allons démontrer que $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi (f_{n_k}) - h\right\|_1 \to 0$ quand $k \to +\infty$, ce qui impliquera que $h = \lim_{k\to\infty} \mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi (f_{n_k}) \in L^1$ et on en conclura que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact.
Soit $\epsilon > 0$, $K \subset E^c$; K compact tel que $d(K,E) \geq \epsilon$ et $|\psi|_{|K^c} < \epsilon$.

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi (f_{n_k}) - h\right\|_1 &= \int_0^1 \left|f_{n_k}(\varphi(x))\psi(x) - h(x)\right| dx \\ &\leq \left\|f_{n_k} - f\right\|_{\varphi(K)} \cdot \|\psi\|_\infty + 2\|C_\varphi\| \cdot \sup_{x\in K^c}|\psi(x)|.\end{aligned}$$

Ce qui implique qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi (f_{n_k}) - h\right\|_1 \leq (1 + 2\|C_\varphi\|)\epsilon$, et donc $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi (f_{n_k}) - h\right\|_1 \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Inversement, supposons que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact.
La suite $\left((\lambda_n + 1)x^{\lambda_n}\right)_n$ appartient à la boule unité de M^1_Λ, donc il existe une sous-suite n_k tel que $(\lambda_{n_k} + 1)\psi\varphi^{\lambda_{n_k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} h$ dans L^1, où $h \in L^1$.

Alors (quitte à extraire une sous-suite) $(\lambda_{n_k} + 1)\psi(x)\varphi(x)^{\lambda_{n_k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} h(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$.
Comme $\varphi(x) < 1$ presque partout, alors $h(x) = 0$ presque partout et donc

$$\int_0^1 (\lambda_{n_k} + 1)\varphi(x)^{\lambda_{n_k}}|\psi(x)|dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Soit $x_0 \in \varphi^{-1}(\{1\})$, alors d'après la condition S, et la continuité de ψ, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que :

$0 < \varphi'(x) < 2\varphi'_g(x_0)$ et $|\psi(x)| \geq \frac{1}{2}|\psi(x_0)|$ pour tout $x \in [x_0 - \epsilon_0, x_0]$ (si $x_0 = 0$ on raisonne à droite de x_0). Alors on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\lambda_{n_k}+1)\varphi(x)^{\lambda_{n_k}}|\psi(x)|dx &\geq \frac{1}{2}|\psi(x_0)|\int_{x_0-\epsilon_0}^{x_0}(\lambda_{n_k}+1)\varphi(x)^{\lambda_{n_k}}dx\\ &\geq \frac{|\psi(x_0)|}{4\varphi'_g(x_0)}\int_{x_0-\epsilon_0}^{x_0}(\lambda_{n_k}+1)\varphi(x)^{\lambda_{n_k}}\varphi'(x)dx\end{aligned}$$

Donc en effectuant le changement de variable $u=\varphi(x)$, on obtient,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\lambda_{n_k}+1)\varphi(x)^{\lambda_{n_k}}|\psi(x)|dx &\geq \frac{|\psi(x_0)|}{4\varphi'_g(x_0)}\int_{\varphi(x_0-\epsilon_0)}^{1}(\lambda_{n_k}+1)u^{\lambda_{n_k}}du\\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|\psi(x_0)|}{4\varphi'_g(x_0)}.\end{aligned}$$

Ce qui impose $\psi(x_0)=0$. □

Corollaire 4.2.13. *Soient $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ vérifiant la condition S, et ψ une fonction continue. Alors $C_\varphi\circ\mathcal{T}_\psi$ est un opérateur compact sur M^1_Λ si et seulement si $\psi(1)=0$ ou $1\notin \operatorname{Im}\varphi$ (c-à-d ssi C_φ est compact ou $\mathcal{T}_\psi$ est compact).*

Démonstration. Soit $f\in M^1_\Lambda$, $C_\varphi\circ\mathcal{T}_\psi(f)=(f\circ\varphi)\cdot(\psi\circ\varphi)=\mathcal{T}_{\psi\circ\varphi}\circ C_\varphi(f)$, alors $C_\varphi\circ\mathcal{T}_\psi=\mathcal{T}_{\psi\circ\varphi}\circ C_\varphi$ et donc par le théorème précédent $C_\varphi\circ\mathcal{T}_\psi$ est compact si et seulement si $\psi\circ\varphi_{|\varphi^{-1}(\{1\})}=0$ ce qui est équivalent à $\psi(1)=0$ ou $\varphi^{-1}(\{1\})=\emptyset$, car le cas $\varphi=1$ est exclus (puisque $E=\varphi^{-1}(\{1\})$ est fini). □

Corollaire 4.2.14. *Soient $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ vérifiant la condition S, et ψ une fonction continue. Alors on a*

1. *C_φ est compact sur M^1_Λ si et seulement si $\|\varphi\|_\infty<1$.*
2. *$\mathcal{T}_\psi$ est compact sur M^1_Λ si et seulement si $\psi(1)=0$.*

Démonstration. Nous appliquons le théorème précédent avec $\varphi(x)=x$, alors $\mathcal{T}_\psi\circ C_\varphi=\mathcal{T}_\psi$, donc $\mathcal{T}_\psi$ est compact si et seulement si $\psi_{|E}=\psi_{|\{1\}}=\psi(1)=0$.

Si $\psi=1$, alors $\mathcal{T}_\psi\circ C_\varphi=C_\varphi$ donc C_φ est compact si et seulement si $1_{|E}=0$ ce qui est équivalent à $E=\emptyset$ c'est à dire $\|\varphi\|_\infty<1$. □

4.2.3 Norme Essentielle sur M^1_Λ

Théorème 4.2.15. *Supposons que* $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$, *et* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty$. *Soient* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *vérifiant la condition* S, ψ *une fonction continue, et* $f_n = \lambda_n x^{\lambda_n}$. *Alors on a*

$$\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\right\|_e = \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\right\|_1 = \sum_{x\in E} |\psi(x)| L(x)$$

Où

$$L(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi'_g(x)} + \dfrac{1}{\left|\varphi'_d(x)\right|}, & si\ x \in E \cap]0,1[\,; \\ \dfrac{1}{\varphi'_g(1)}, & si\ x = 1 \in E\,; \\ \dfrac{1}{\left|\varphi'_d(0)\right|}, & si\ x = 0 \in E. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Comme ψ est continue sur $[0,1]$, et donc uniformément continue sur $[0,1]$, et comme φ vérifie la condition S et d'après l'uniforme continuité de φ' sur des voisinages fermés à gauche et à droite de E, il existe une constante $\delta > 0$ (assez petit) tel que :

1. Pour tout $x, y \in [0,1]$ avec $|x-y| < \delta$, on a $|\psi(x) - \psi(y)| < \epsilon$.
2. Pour tout $x_0 \in E$, $\varphi \in C^1([x_0-\delta, x_0])$ et $\varphi \in C^1([x_0, x_0+\delta])$ avec $\varphi'(x) > 0$ $\forall x \in [x_0-\delta, x_0]$, $\varphi'(x) < 0$ $\forall x \in [x_0, x_0+\delta]$ et $|\varphi'(x) - \varphi'(y)| < \epsilon$ pour tout $x, y \in [x_0-\delta, x_0]$ ou $x, y \in [x_0, x_0+\delta]$.
3. Les $x_0 + (-\delta, \delta)$ soient disjoints où $x_0 \in E$, et les $x_0 + (-\delta, \delta)$ soient inclus dans $[0,1]$ où $x_0 \in E \setminus \{0,1\}$.

Pour tout $x_0 \in E$, on définit l'intervalle $J_{x_0} = [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap [0,1]$.
Soit $\Omega_\delta = (E + (-\delta,\delta)) \cap [0,1]$, Ω_δ est un ouvert de $[0,1]$. L'ensemble $K_\delta = \Omega_\delta^c$ est un compact de $[0,1]$ tel que $\varphi(K_\delta) \subset [0,1[$.

Étape I. Nous allons démontrer, $\lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\right\|_1 = \sum_{x_0\in E} |\psi(x_0)| L(x_0)$.

On a :

$$\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\right\|_1 = \int_{K_\delta} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx + \int_{\Omega_\delta} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx.$$

Comme $f_n = \lambda_n x^{\lambda_n}$, converge vers 0 uniformément sur tout compact de $[0,1)$, en particulier sur $\varphi(K_\delta)$, alors on a

$$\int_{K_\delta} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx \leq \left\|\psi\right\|_\infty \sup_{u\in\varphi(K_\delta)} \left|f_n(u)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par suite, comme E fini,

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\,(f_n)\right\|_1 = \sum_{x_0\in E} \lim_{n\to\infty} \int_{J_{x_0}} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx$$

Donc il suffit de démontrer que pour tout $x_0 \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{J_{x_0}} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx = |\psi(x_0)|L(x_0).$$

Dans la suite le raisonnement se fait pour $x_0 \in E \setminus \{0,1\}$. Mais on adapte de façon évidente pour $x_0 = 0$ ou 1.
D'après 1. pour tout $x \in J_{x_0}$, on a : $(1-\epsilon)|\psi(x_0)| \leq |\psi(x)| \leq (1+\epsilon)|\psi(x_0)|$, ce qui implique

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)|\psi(x_0)| \int_{J_{x_0}} \left|f_n(\varphi(x))\right| dx &\leq \int_{J_{x_0}} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx \\ &\leq (1+\epsilon)|\psi(x_0)| \int_{J_{x_0}} \left|f_n(\varphi(x))\right| dx\end{aligned}$$

En effectuant sur chaque demi-intervalle les changements de variable $u = \varphi_1(x)$ et $u = \varphi_2(x)$, où
$\varphi_1 :]x_0-\delta, x_0[\to]\varphi(x_0-\delta), 1[$ $(\varphi_1' > 0)$ et $\varphi_2 :]x_0, x_0+\delta[\to]\varphi(x_0+\delta), 1[$ $(\varphi_2' < 0)$, nous obtenons

$$(1-\epsilon)|\psi(x_0)| \left(\int_{\varphi(x_0-\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} \frac{du}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(u))} - \int_{\varphi(x_0+\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} \frac{du}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(u))} \right)$$

$$\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx$$

$$\leq (1+\epsilon)|\psi(x_0)| \left(\int_{\varphi(x_0-\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} \frac{du}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(u))} - \int_{\varphi(x_0+\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} \frac{du}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(u))} \right)$$

D'après 2. on a : $(1-\epsilon)\varphi_g'(x_0) \leq \varphi_1'(\varphi_1^{-1}(u)) \leq (1+\epsilon)\varphi_g'(x_0)$ pour tout $u \in [\varphi(x_0-\delta), 1]$, et $-(1-\epsilon)\varphi_d'(x_0) \leq -\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(u)) \leq -(1+\epsilon)\varphi_d'(x_0)$ pour tout $u \in [\varphi(x_0+\delta), 1]$, ce qui donne

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}|\psi(x_0)|\left(\frac{1}{\varphi_g'(x_0)}\int_{\varphi(x_0-\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} du + \frac{1}{|\varphi_d'(x_0)|}\int_{\varphi(x_0+\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} du\right)$$

$$\leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx$$

$$\leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}|\psi(x_0)|\left(\frac{1}{\varphi_g'(x_0)}\int_{\varphi(x_0-\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} du + \frac{1}{|\varphi_d'(x_0)|}\int_{\varphi(x_0+\delta)}^1 \lambda_n u^{\lambda_n} du\right)$$

En passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient

$$\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}|\psi(x_0)|L(x_0) \leq \lim_{n\to\infty}\int_{J_{x_0}} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}|\psi(x_0)|L(x_0)$$

Comme ϵ est choisi arbitrairement petit, on en déduit

$$\lim_{n\to\infty}\int_{J_{x_0}} \left|f_n(\varphi(x))\psi(x)\right| dx = \left|\psi(x_0)\right| L(x_0).$$

Étape II. Maintenant nous allons démontrer que $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\right\|_e \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\right\|_1$. Comme E et K_δ sont deux sous-ensembles fermés disjoints de $[0,1]$, alors il existe h_δ continue telle que $(h_\delta)_{|E} = 0$, $(h_\delta)_{|K_\delta} = 1$ et $0 \leq h_\delta \leq 1$.

Soit $\psi_\epsilon = h_\delta \cdot \psi$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - \mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi\| &= \sup_{\|f\|_1 \leq 1}\int_{\Omega_\delta}(1-h_\delta)\left|\psi(x)\right|\left|f(\varphi(x))\right| dx \\
&\leq \sup_{\|f\|_1\leq 1}\sum_{x_0\in E}\int_{J_{x_0}}\left|\psi(x)\right|\left|f(\varphi(x))\right| dx \\
&\leq \sum_{x_0\in E}\sup_{\|f\|_1\leq 1}\|\psi\|_{J_{x_0}}\int_{J_{x_0}}\left|f(\varphi(x))\right| dx.
\end{aligned}$$

Si $x \in J_{x_0}$, alors $|x - x_0| \leq \delta$ et par définition de la continuité uniforme de ψ, on a, $|\psi(x) - \psi(x_0)| \leq \epsilon$ donc $|\psi(x)| \leq |\psi(x) - \psi(x_0)| + |\psi(x_0)| \leq \epsilon + |\psi(x_0)|$ et donc $\|\psi\|_{J_{x_0}} \leq |\psi(x_0)| + \epsilon$.

En effectuant les changements de variable $u = \varphi_1(x)$ et $u = \varphi_2(x)$, où
$\varphi_1 :]x_0 - \delta, x_0[\to]\varphi(x_0 - \delta), 1[$ et $\varphi_2 :]x_0, x_0 + \delta[\to]\varphi(x_0 + \delta), 1[$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{J_{x_0}} \left|f(\varphi(x))\right| dx &= \int_{\varphi(x_0-\delta)}^{1} \left|f(u)\right| \frac{du}{\varphi_1'(\varphi_1^{-1}(u))} - \int_{\varphi(x_0+\delta)}^{1} \left|f(u)\right| \frac{du}{\varphi_2'(\varphi_2^{-1}(u))} \\ &\leq \frac{1}{1-\epsilon} L(x_0) \left\|C_\varphi(f)\right\|_1 .\end{aligned}$$

Alors,

$$\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - \mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi\| \leq \frac{1}{1-\epsilon} \sum_{x_0 \in E} (|\psi(x_0)| + \epsilon)\, L(x_0).$$

Maintenant, comme $(\psi_\epsilon)_{|E} = 0$ et d'après le théorème 4.2.12, $\mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi$ est compact.
Alors,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e &= \inf\{\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - S\| : S \text{ est un opérateur compact sur } M_\Lambda^\infty\} \\ &\leq \|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - \mathcal{T}_{\psi_\epsilon} \circ C_\varphi\| \\ &\leq \frac{1}{1-\epsilon} \sum_{x_0 \in E} (|\psi(x_0)| + \epsilon)\, L(x_0)\end{aligned}$$

Comme ϵ est arbitraire alors nous obtenons :

$$\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e \leq \sum_{x_0 \in E} |\psi(x_0)| L(x_0).$$

Étape III. Reste à démontrer, $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\right\|_e \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\right\|_1$.

Si $E = \emptyset$, on a $\|\varphi\|_\infty < 1$ alors d'après le corollaire 4.2.14, C_φ est compact ce qui implique que $\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi$ est compact, par suite $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e = 0 = \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\right\|_1$.
Nous supposons maintenant que $E \neq \emptyset$.
Soit $K : M_\Lambda^1 \to L^1$ un opérateur compact.
Nous voulons montrer que $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - K\| \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\right\|_1$.

Comme K est compact et $\|f_n\|_\infty = 1$, alors il existe une sous-suite $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ et $f \in L^1$ tel que $\lim_{j\to\infty} \left\|K(f_{n_j}) - f\right\|_1 = 0$.

On a : $\limsup_{j\to\infty} \left\|(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - K)(f_{n_j})\right\|_1 \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\,(f_n)\right\|_1$.

En effet :

$$\left\|(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - K)(f_{n_j})\right\|_1 \geq \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\right\|_1 - \left\|K(f_{n_j}) - f\right\|_1,$$

ce qui implique que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|(\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - K)(f_{n_j})\right\|_1 \geq \limsup_{j\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\right\|_1.$$

Alors, il suffit de démontrer que $\limsup_{j\to\infty} \|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\|_1 \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\,(f_n)\right\|_1$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme $f \in L^1$ alors il existe $\delta > 0$ tel que $\int_{\Omega_\delta} |f(x)|dx \leq \epsilon$ où $\Omega_\delta = \left(\varphi^{-1}(1) + (-\delta, \delta)\right) \cap [0,1]$, alors,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\|_1 &\geq \int_{\Omega_\delta} \left|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\left(f_{n_j}\right)\right| dx - \int_{\Omega_\delta} \left|f(x)\right| dx \\
&\geq \int_{\Omega_\delta} \left|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\left(f_{n_j}\right)\right| dx - \epsilon.
\end{aligned}$$

D'après l'étape I, la suite $\left(\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_n)\|_1\right)_n$ est convergente, alors en passant à la limite quand $j \to \infty$, on obtient,

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi(f_{n_j}) - f\right\|_1 \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\,(f_n)\right\|_1 - \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on en déduit que

$$\limsup_{j\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi o C_\varphi(f_{n_j}) - f\right\|_1 \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\,(f_n)\right\|_1.$$

Par suite on a $\left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi - K\right\| \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\,(f_n)\right\|_1$, pour tout $K : M^1_\Lambda \to L^1$ un opérateur compact.

Ainsi $\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\|_e \geq \lim_{n\to\infty} \left\|\mathcal{T}_\psi \circ C_\varphi\,(f_n)\right\|_1$, ce qui termine la preuve du Théorème. □

Un corollaire immédiat est :

Corollaire 4.2.16. *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue vérifiant la condition S, et $\psi \in C$.*
Alors,

$$\|C_\varphi\|_e = \begin{cases} 0 & si \ \|\varphi\|_\infty < 1\,; \\ \displaystyle\sum_{x\in E} L(x), & si \ \|\varphi\|_\infty = 1. \end{cases}$$

Et,

$$\|\mathcal{T}_\psi\|_e = |\psi(1)|.$$

Remarque 4.2.17. *Si on note par $\|\cdot\|_e^\infty$ (respectivement $\|\cdot\|_e^1$) la norme essentielle d'un opérateur défini sur M_Λ^∞ (respectivement sur M_Λ^1), on remarque que : $\|\mathcal{T}_\psi\|_e^\infty = \|\mathcal{T}_\psi\|_e^1$, par contre on a :*

$$1 = \|C_\varphi\|_e^\infty \neq \|C_\varphi\|_e^1 = \sum_{x\in E}\left(\frac{1}{\varphi'_g(x)} - \frac{1}{\varphi'_d(x)}\right).$$

Corollaire 4.2.18. *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue vérifiant la condition S, telle que C_φ ne soit pas compact ($1 \in \operatorname{Im}\varphi$), et $\psi \in C$.*
Soit l'opérateur $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi : M_\Lambda^\infty \to C$.
Sa norme essentielle est égale à

$$|\psi(1)| \cdot \sum_{x\in E}\left(\frac{1}{\varphi'_g(x)} - \frac{1}{\varphi'_d(x)}\right).$$

Démonstration. Soit $f \in C$, $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi(f) = (f\circ\varphi)\cdot(\psi\circ\varphi) = \mathcal{T}_{\psi\circ\varphi}\circ C_\varphi(f)$, alors $C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi = \mathcal{T}_{\psi\circ\varphi} \circ C_\varphi$ et donc par le théorème précédent

$$\|C_\varphi \circ \mathcal{T}_\psi\|_e = \|\mathcal{T}_{\psi\circ\varphi} \circ C_\varphi\|_e = |\psi(1)| \sum_{x\in E}\left(\frac{1}{\varphi'_g(x)} - \frac{1}{\varphi'_d(x)}\right).$$

□

Remarque 4.2.19. *Il est facile de voir que la plupart des résultats de la deuxième partie de ce chapitre sont toujours valables lorsque M_Λ^1 est remplacé par un espace de Banach X vérifiant : $M_\Lambda^1 \subset X \subset L^1$ et chaque $f \in X$ est continûment différentiable sur $[0,1)$. Les espaces de Müntz sont des exemples naturels de tels espaces.*

Problèmes

Nous concluons cette thèse avec un certain nombre de problèmes ouverts.

1. Soit Λ, Γ deux suites de nombres réels positifs croissantes vérifiant la condition de Müntz $\sum_{\lambda\in\Lambda} 1/\lambda < \infty$ et $\sum_{\gamma\in\Gamma} 1/\lambda < \infty$. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur Λ et Γ pour que les espaces M_Λ^E et M_Γ^E soient isomorphes entre eux ($E = C$, ou $E = L^p$, $1 \leq p < \infty$). Caractériser les Λ tel que les espaces M_Λ^E soient isomorphes entre eux.

2. Soit Λ une suite non-quasilacunaire. Les espaces de Müntz M_Λ^p ont-ils des bases de Schauder ? des bases inconditionnelles ? Existe-t-il un espace de Müntz non-quasilacunaire ne possédant pas une base de Schauder ? Il y a un exemple d'espace de Müntz M_Λ^∞, Λ non-quasilacunaire avec une base inconditionnelle (voir [GuLu05, 10.3]).

3. Soit $\Lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$ une suite croissante de nombres réels positifs vérifiant $\sum_{k=1}^\infty 1/\lambda_k < \infty$. Soit $M_n(\Lambda) = span\left\{x^{\lambda_k}\right\}_{k=1}^n \subset C([0,1])$. Les espaces $M_n(\Lambda)$, $n = 1, 2, ...$, possèdent-ils des bases de Schauder tel que les constantes de ces bases soient uniformément bornées ? Soit $L_n = span\left\{x^k\right\}_{k=1}^n \subset L^1([0,1])$. Existe-il des bases de Schauder des espaces L_n avec des constantes de bases uniformément bornées ? Si oui, ca nous permet de construire un espace de Müntz $M_\Lambda^1 \subset L^1([0,1])$ non quasilacunaire possédant une base de Schauder et qui n'est pas complémenté dans $L^1([0,1])$ (voir Théorème 3.2.2 et Théorème 3.3.3). Ce résultat est vrai dans le cas infini, il existe un espace de Müntz $M_\Lambda^\infty \subset C([0,1])$ non quasilacunaire possédant une base de Schauder et qui n'est pas isomorphe à c_0 (voir [GuLu05, 10.3], voir aussi [Boč85] et [Bou89]).

4. Nature des espaces M_Q^p et M_Q^∞ où $Q = \{n^2\}_{n=1}^\infty$? Ces espaces possèdent-ils des bases ? Est-ce-que M_Q^∞ est isomorphe à c_0 ? (B. Shekhtman a conjecturé que M_Q^∞ ne possède pas de base).

5. Problème de complémentarité des espaces de Müntz M_Λ^p pour $1 < p < \infty$.

6. Existe-t-il M_Λ^1 non complémenté dans L^1 mais tel que M_Λ^1 soit isomorphe à ℓ^1 ? Existe-t-il M_Λ^1 non complémenté dans L^1 et M_Λ^1 n'est pas isomorphe à ℓ^1 ? (voir chapitre 3). On sait qu'il existe des sous-espaces de $L^1(\mu)$ isomorphe à $L^1(\nu)$ qui ne sont pas complémenté dans $L^1(\mu)$ (voir [Bou80] et [Bou81]).

7. Pour $1 \leq p < \infty$, existe-t-il Λ tel que M_Λ^p ne soit pas isomorphe à ℓ^p ? (voir l'exemple du chapitre 3, Théorème 3.3.3).

8. Pour $1 < p < \infty$, existe-t-il Λ tel que M_Λ^p n'est pas complémenté dans L^p ? (pour $p = 1$, voir l'exemple du chapitre 3, Théorème 3.3.3).

9. Soit M_Λ^1 l'exemple du Théorème 3.3.3 avec $\Lambda = \bigcup_{k=1}^\infty \{N_k, 2N_k, ..., kN_k\}$ et M_Λ^1 n'est pas complémenté dans L^1. Est-ce-que M_Λ^1 est isomorphe à ℓ^1 ?
   On rappelle que Bourgain [Bou81] à construit un exemple d'un sous espace de $L^1([0,1])$ isomorphe à un espace $L^1(\mu)$ mais n'est pas complémenté dans $L^1([0,1])$.

10. Si Λ est lacunaire, M_Λ^φ est-il isomorphe à ℓ^φ ?

11. Est-ce-que M_Λ^1 est Lipschitz-isomorphe à ℓ^1 ? Caractériser les Λ tels que ce soit le cas.

12. Produire un M_Λ^1 Lipschitz-isomorphe à ℓ^1 qui le lui soit pas linéairement isomorphe à ℓ^1.

Bibliographie

[1] I. Al Alam, *A Müntz space having no complement in L_1*, Proc. Am. Math. Soc. 136 (2008), No. 1, 193-201.

[2] I. Al Alam, *The Essential Norms Of Weighted Composition Operators On Müntz Spaces*, (soumis).

[Be12] S. N. Bernstein, *Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes*, in Proc. of 5th Inter. Math. Congress Vol. 1, 1912, 256-266.

[Bl92] T. Bloom, *A multivariable version of the Müntz-Szász theorem*, in : Contemporary Mathematics, vol. 137, The Madison Symposium on Complex Analysis, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, pp. 85-92.

[Boč85] S.V. Bočarev, *Construction of polynomial bases in finite dimensional spaces of functions analytic in the disk*, Proc. Steklov Inst. Math., 2, 55-81, (1985).

[Bo91] P. Borwein, *Variations on Müntz's theme*, Canad. Math. Bull. 34 (1991) 305-310.

[BoEr91] P. Borwein, T. Erdélyi, *Notes on lacunary Müntz polynomials*, Israel J. Math. 76 (1991) 183-192.

[BoEr95] P. Borwein, T. Erdélyi, *Müntz spaces and Remez inequalities*, Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1) (1995) 38-42.

[BE95] P. Borwein and T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 161. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, (1995).

[BoEr96] P. Borwein, T. Erdélyi, *The full Müntz theorem in $C[0,1]$ and $L_1[0,1]$*, J. London Math. Soc. (2) 54 (1996) 102-110.

[BoEr97] P. Borwein, T. Erdélyi, *Generalizations of Müntz's theorem via a Remez-type inequality for Müntz spaces*, J. Amer. Math. Soc. 10 (1997) 327-349.

[BoEr98] P. Borwein, T. Erdélyi, *Müntz's theorem on compact subsets of positive measure*, Monograph and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 212, Dekker, NewYork, 1998, pp. 115-131.

[Bou80] J. Bourgain, *Complémentation de sous-espaces L^1 dans les espaces L^1*, Séminaire Analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz") (1979-1980), Exposé No. 27, 7 p.

[Bou81] J. Bourgain, *A counterexample to a complementation problem*, Compositio Mathematica, 43 no. 1 (1981), p. 133-144.

[Bou89] J. Bourgain, *Homogeneous polynomials on the ball and polynomial bases*, Israel J. Math., 68, 327-347, (1989).

[Do75] L. E. Dor, *On projection in L_1*, Ann. of Math.(2) **102** (1975), no. 3, 463-474.

[ClEr43] J. A. Clarkson, P. Erdös, *Approximation by polynomials*, Duke Math. J., 10 (1943) 5-11.

[Di80] Joe Diestel, *A survey of results related to the Dunford-Pettis property*, Proceedings of the Conference on Integration, Topology, and Geometry in Linear Spaces (Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C., 1979) (Providence, R.I.), Contemp. Math., vol. 2, Amer. Math. Soc., 1980, pp. 15-60.

[Er05] T. Erdélyi, *The full Müntz Theorem revisited*, Constr. Approx. 21 (2005), 319-335.

[ErJo01] T. Erdelyi, W. Johnson, *The full Müntz theorem in $L_p[0,1]$ for $0 < p < \infty$*, J. Analyse Math. 84 (2001) 145-172.

[Go08] G. Godefroy, *Unconditionality in spaces of smooth functions*, Preprint (2008).

[GöRo95] E. Görlich and A.P. Rohs, *Asymptotic bounds for projection operators on lebesgue spaces*, Integral Transforms Spec. Funct. **3** (1995), no. 2, 85-98.

[GöRo98] E. Görlich and A.P. Rohs, *Bounds for relative projection constants in* $L^1(-1,1)$, Constr. Approx. **14** (1998), no. 4, 589-597.

[GuMa66] V. I. Gurariy and V. Macaev, *Lacunary power sequences in C and L_p*, Izvestiya Acad. Nauk SSSR, **30** (1966), 3-14.

[GuLu05] V. I. Gurariy and W. Lusky, *Geometry of Müntz spaces and related questions*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin Heidelberg New York, (2005).

[Ha49] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford University Press, (1949).

[Ko04] J. Korevaar, *Tauberian Theory. A Century of Developments*, Grundl. math. Wiss. vol. 329, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR 2073637.

[Kr94] A. Kroó, *A geometric approach to the multivariate Müntz problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1) (1994) 199-208.

[Le04] P. Lefèvre, *Some new rich subspaces of C. Applications*, Bull. Sci. math. 128 (2004) 789-801.

[LLQR07] P. Lefevre, D. Li, H. Queffélec and L. Rodriguez-Piazza, *Opérateurs de composition sur les espaces de Hardy-Orlicz*, Comptes rendus Mathématique (C. r. Math.) ISSN 1631-073X, 2007, vol. 344, no1, pp. 5-10.

[LiTz77] J. Lindenstrauss, L. Tzafiri, *Classical Banach spaces I and II*, Springer, Berlin Heidelberg New York, (1977).

[Ma03] Y. Manouvrier, *Espaces de Müntz*, Mémoire de Maîtrise, Université d'artois, (2003).

[Mü14] Ch. H. Müntz, *Über den Approximationssatz von Weierstrass*, H. A. Schwarz's Festschrift, Berlin, 1914, pp. 303-312.

[Ne84] D. J. Newman, *A Müntz space having no complement*, J. Approx. Theory **40** (1984), 351–354.

[Op96] V. Operstein, *The full Müntz theorem in* $L_p[0,1]$, J. Approx. Theory 85 (1996) 233-235.

[Ro73] H. P. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory*, Studia Math. **37** (1973), 13-36.

[Ro74] H. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containing* ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974), 2411-2413.

[Ru87] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, NY, 1987.

[Sc43] L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles réelles*, Act. Sci. Ind., no. 959. Hermann et Cie., Paris, 1943. 89 pp.

[Sc59] L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles*, Hermann, Paris, 1959.

[Sp08] A. Spalsbury, *Perturbations in Müntz's theorem*, J. Approx. Theory 150 (1) (2008) 48-68.

[Sz16] O. Szász, *Über die Approximation steliger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen*, Math. Ann., 77 (1916) 482-496.

[Tr81] T. Trent, *A Müntz-Szász theorem for* $C(\overline{D})$, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (2) (1981) 296-298.

[We] D. Werner, *A remark about Müntz spaces*,
http ://page.mi.fu-berlin.de/werner/preprints/muentz.pdf.

[Wo91] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 25, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1991.

[Wo] P. Wojtaszczyk. Letter to V. Gurarii., *Letter to V. Gurarii*.

Résumé

L'objet de cette thèse est d'étudier quelques aspects géométriques des espaces de Müntz (M_Λ^∞ et M_Λ^p) dans $C([0,1])$ et $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$. Ce travail comporte quatre chapitres: Le premier est consacré aux préliminaires, et fixe le cadre de cette étude, surtout dans une perspective historique. Dans le deuxième chapitre, nous démontrons plusieurs propriétés élémentaires, de nature géométrique, des espaces de Müntz. On s'intéresse aussi à une généralisation des espaces de Müntz en considérant les polynômes de Müntz à coefficients dans un Banach quelconque. Dans le troisième chapitre, on construit un espace de Müntz non complémenté dans $L^1([0,1])$. Comme application de ce travail, on retrouve certains résultats qui ont été récemment obtenus dans le livre de Vladimir I.Gurariy et Wolfgang Lusky, mais avec une méthode complètement différente. On donne aussi une base de Schauder explicite équivalente à la base canonique de ℓ^1 pour certains espaces de Müntz M_Λ^1, où Λ est une suite non nécessairement lacunaire. Dans une deuxième partie de ce chapitre, on étudie le cas $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$. Nous verrons que certains phénomènes passent du cas $p = 1$ au cas p quelconque. Enfin, dans un quatrième chapitre, on étudie les opérateurs de composition par φ à poids ψ sur les espaces de Müntz classiques. Notre résultat principal donne une estimation précise de la norme essentielle de cet opérateur agissant sur M_Λ^∞ en fonction des valeurs de φ et ψ. Dans la deuxième partie de ce dernier chapitre, on étudie ces opérateurs de composition à poids, mais agissant sur les espaces de Müntz M_Λ^1 dans $L^1([0,1])$.

Abstract

The main subject of this thesis is the study of some geometric aspects of Müntz spaces (M_Λ^∞ and M_Λ^p) in $C([0,1])$ and $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$. This work is divided into four chapters: The first is devoted to preliminaries and introduces the framework of this study, mainly in a historical perspective. In the second chapter, we prove several basic properties of geometric nature of Müntz spaces. There is also a generalization of Müntz spaces by considering the Müntz polynomials with coefficients in any Banach space. The aim of the third one is to construct a Müntz space having no complement in $L^1([0,1])$. As an application of this work, we recover some results recently proved in the monograph of Vladimir I. Gurariy and Wolfgang Lusky, but with a completely different method. We also provide an explicit Schauder basis equivalent to the canonical base in ℓ^1 for some Müntz spaces M_Λ^1, where Λ is a sequence not necessarily lacunary. In a second part of this chapter, we study the case $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$, we will see that some phenomena are still true in the case $1 < p < \infty$. At last, in the fourth chapter, we discuss the problem of compactness for weighted composition operators $\mathcal{T}_\psi o C_\varphi$, defined on a Müntz space M_Λ^∞. We compute the essential norm of such operators in terms of values of φ and ψ. As a corollary, we obtain the exact values of essential norms of composition and multiplication operators. In the second part of this chapter we study these weighted composition operators, defined on a Müntz space M_Λ^1 in $L^1([0,1])$.

