N° d'ordre : 4184

UNIVERSITE' DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : **Mathématiques Pures**

Présentée par : **Marco ANTEI**

EXTENSION DE TORSEURS

Jury

M. José BERTIN	Professeur, Université Grenoble 1, *Rapporteur*
M. Niels BORNE	Maître de conférence, Université Lille 1
M. Pierre DÈBES	Professeur, Université Lille 1
M. Michel EMSALEM	Professeur, Université Lille 1, *Directeur de Thèse*
M. Carlo GASBARRI	Professeur, Università Roma 2, *Rapporteur*
M. Matthieu ROMAGNY	Maître de conférence, Université Paris 6

Soutenue le : 29 Mai 2008

Ai miei genitori,
a mio fratello
e a Paolino.

Ringraziamenti

Questa sezione della tesi è decisamente importante in quanto l'unica ad essere scritta in Italiano. Tormentato dal timore di dimenticare qualcuno mi scuso con tutti coloro che dovrebbero di diritto apparire in questa pagina ma non appaiono.

Innanzitutto è un vero piacere ringraziare il relatore di questa mia tesi, Prof. Michel Emsalem, con cui ho lavorato per anni, con cui ho trascorso piacevoli momenti anche al di fuori dell'ambito universitario e con cui ho intavolato impegnatissime discussioni passando dalla politica alla preparazione di una semplice salsa di pomodoro il tutto mescolato con squisite nozioni di Geometria Aritmetica.

Facciamo ora un tuffo nel (recente) passato e concedetemi di ringraziare i professori dell'Università degli Studi di Milano che hanno creduto in me e che hanno reso questo mio progetto possibile : Antonio Lanteri, Marino Palleschi, Lambertus Van Geemen e un caro ringraziamento va anche a quei docenti che mi hanno sostenuto fin dagli inizi dei miei studi in Matematica : Maria Grazia Bianchi, Simonetta Di Sieno e Franco Cazzaniga senza dimenticare la professoressa Luciana Laura del mio liceo.

Tornando a Lille un sincero ringraziamento va a tutto il gruppo GTEM dell' Université de Lille 1, di cui voglio senz'altro ricordare Pierre Dèbes, Jean Claude Douai, Lorenzo Ramero e in particolare Niels Borne che ha risposto sempre in maniera esaustiva e entusiasta alle mie numerose richieste. Inoltre, tra i matematici che mi hanno accompagnato in questo percorso, non solo matematico, ringrazio Yann, Séverine, Stéphane e in particolare Romain con cui ho passato gran parte del mio tempo libero a Lille. Ringrazio anche Matthieu Romagny e Dajano Tossici i cui consigli sono stati preziosi per il mio lavoro.

Vorrei ringraziare infine tutti i miei amici (oltre a coloro che già ho citato), tutti coloro che aggiorno costantemente della mia vita attraverso la mia mailing list, tutti coloro che di persona, o con un messaggio o una telefonata mi sono stati vicini in questi anni di dottorato. Vorrei ricordare in particolare (in ordine cronologico) Sara (Svezia), Manuela, Lilli, Laura, Valentina, Paolo (Stellari), Daniele, Giuseppe, Simone, Mari Carmen, Ingrid, la fedelissima Francesca, Jérémy e Lila, Raffaele, Raluca, Filippo Alessandra e Andrea, Rémi, Federica, Sara (Etiopia), Pietro, Fofo, Youmi, Yeon Hwa, il sempreverde Tonino, il sempre abbronzato Christian, la bellissima Luisa e tutti gli altri amici che ho sparsi nel mondo e ancora Angela, Romain (il rital), Serafina e Jung Kyu che hanno subìto senza fiatare il mio stress di questi ultimi mesi. Un ringraziamento particolare va anche alla mia numerosa famiglia.

Infine grazie a te, Paolino, per essere sempre presente, grazie a te, caro Flavio, grazie di cuore a voi, cari mamma e papà.

Introduction

Ce travail est principalement consacré à l'étude du schéma en groupes fondamental, du problème de l'extension des torseurs et de la clôture galoisienne de torseurs. On s'est d'abord occupé du problème de l'extension de torseurs : soient R est un anneau de valuation discrète, K son corps des fractions, X un R-schéma et X_η sa fibre générique. Soient G' un K-schéma en groupes fini et Y' un G'-torseur au dessus de X_η comme dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{cccc} G' \circlearrowright & Y' & & \\ & \downarrow & & \\ & X_\eta & \rightarrow & X \\ & \downarrow & \square & \downarrow \\ & Spec(K) & \rightarrow & Spec(R) \end{array} \qquad (1)$$

On se demande si on est capable de trouver un X-schéma Y et un R-schéma affine en groupes G fini et plat tel que $G \times_R K \simeq G'$ et tel que Y soit un G-torseur au dessus X de fibre générique isomorphe au G'-torseur Y', afin d'avoir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G' \circlearrowright & Y' & \rightarrow & Y & \circlearrowleft G \\ & \downarrow & \square & \downarrow & \\ & X_\eta & \rightarrow & X & \\ & \downarrow & \square & \downarrow & \\ & K & \rightarrow & R & \end{array} \qquad (2)$$

Dans le cas particulier où R a égale caractéristique $p > 0$, X est la droite affine et Y' est un $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$-torseur, Saidi et Romagny (dans, respectivement et chronologiquement, [29] et [27]) ont montré que si Y est la normalisation de X dans Y' alors Y ne possède aucune structure de torseur qui étende celle donnée sur Y'. Or, comme on l'a déjà précisé, la question qu'on se pose est plus faible, en effet on ne se demande pas si la normalisation di Y' dans X a une structure de torseur qui étende celle donnée sur Y'. On ne fixe pas Y et, au contraire, on se demande si il existe un X-schéma Y qui a une structure de torseur qui étende celle donnée. Cependant, quelle que soit la question qu'on se pose, si X est un R-schéma propre aucun exemple est connu, à présent, de G'-torseur Y' au dessus de X_η non étendable en un torseur au dessus de X. De plus, si on admet l'existence d'une section $x \in X(R)$ (donc $x_\eta \in X_\eta(K)$) et quitte à considérer des torseurs pointés, à savoir des torseurs Y au dessus de X (resp.

Y' au dessus de X_η) munis d'une section $y \in Y(R)$ au dessus de x (resp. munis d'une section $y' \in Y'(K)$ au dessus de x_η), alors on peut lier l'étude des torseurs à l'étude du schéma en groupes fondamental dans ses deux version : celle donnée par Nori (cf. [25]) sur un corps et celle donnée par Gasbarri sur un schéma de Dedekind (cf. [12]). En effet, par exemple, le schéma en groupes fondamental $\pi_1(X,x)$ est la limite projective de tous le schémas en groupes qui agissent sur des torseurs pointés. Ce n'est donc pas étonnant qu'on puisse lier le problème de l'extension de torseurs à l'étude du morphisme $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to \pi_1(X,x)_\eta$, où $\pi_1(X,x)_\eta$ est la fibre générique de $\pi_1(X,x)$. Notamment on montre que $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to \pi_1(X,x)_\eta$ est toujours surjectif pour la topologie *fpqc* et qu'on sait étendre tout G'-torseur (pointé) et dominant (à savoir t.q. G' est un quotient de $\pi(X_\eta, x_\eta)$) au dessus de X_η en un torseur au dessus de X si et seulement si φ est un isomorphisme, quelle que soit la dimension de X.

On pourrait aller plus loin et trouver un certain X pour que φ soit un isomorphisme. On pourrait se borner, pour commencer, au cas où X est une surface arithmétique. Or, le schéma en groupes fondamental $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$ est le schéma en groupes associé à la catégorie tannakienne neutre sur K des fibrés essentiellement finis $EF(X_\eta)$ sur X_η de foncteur fibre x_η^* (si $car(K) = 0$ les objets de $EF(X_\eta)$ sont les fibrés finis au sens de Weil). De plus, si $f' : Y' \to X_\eta$ est un G'-torseur dominant alors $EF(X_\eta, \{f'_*(\mathcal{O}_{Y'})\})$ munie du foncteur fibre x_η^* est une catégorie tannakienne neutre sur K équivalente à $Rep_K G'$. On pourrait essayer de construire une catégorie $\mathcal{C}$ sur X dont la catégorie fibre générique est équivalente à $EF(X_\eta, \{f'_*(\mathcal{O}_{Y'})\})$. A cette catégorie $\mathcal{C}$ (munie du foncteur fibre x^*) on voudrait associer un G-torseur au dessus de X de fibre générique isomorphe au G'-torseur de départ $f : Y' \to X_\eta$. Ça serait le cas si $\mathcal{C} \simeq Rep_R(G)$ pour un certain R-schéma en groupes G fini et plat. D'où le besoin d'une théorie *tannakienne* sur un anneau, théorie qui a été élaborée par Wedhorn dans [34] et Bruguières dans [5]. La catégorie candidate est la suivante : on considère la normalisation Y de Y' dans X, de morphisme structural $f : Y \to X$, on considère le faisceau $f_*(\mathcal{O}_Y)$ et on appelle $\mathcal{C}$ la catégorie abélienne engendrée par tous les éléments de type $f_*(\mathcal{O}_Y)^{\otimes n} \otimes f_*(\mathcal{O}_Y)^{\vee \otimes m}$. A présent c'est un travail en cours : on essaye de démontrer que $\mathcal{C}$ est effectivement équivalente à la catégorie des représentations $Rep_R(G)$ pour un certain R-schéma en groupes fini et plat G. A ce moment là on trouve le G-torseur souhaité au dessus de X en considérant l'image dans $\mathcal{C}$ de la représentation régulière de G via l'équivalence $Rep_R(G) \simeq \mathcal{C}$.

Dans cette thèse on s'occupe aussi de déterminer une clôture galoisienne de tours de torseurs : la théorie de Galois nous dit que si L/K et F/L sont des extensions galoisiennes alors il existe un corps E qui les contient tous et qui est galoisien sur K, sur L et sur F. On essaye de construire un analogue pour les tours de torseurs : on se donne un k-schéma X où k est un corps, on se donne un G-torseur $f : Y \to X$ et un G'-torseur $f' : Y' \to Y$ (plus certaines hypothèses supplémentaires) et on construit un $\widetilde{G}$-torseur $p : \widetilde{Y} \to X$ qui *domine* Y au moyen d'un X-morphisme $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$, où $\widetilde{G}$ est un k-schéma en groupes fini. Dans [11] Garuti décrit une méthode pour déterminer une clôture galoisienne d'une tour de torseurs ne suivant pas un point de vue tannakien et qui peut être définie pour des tours de torseurs au dessus d'un schéma X qui vit sur un schéma de base B quelconque.

Dans la suite on décrit brièvement le conténu des quatre chapitres :

Dans le premier chapitre on fixe des notations et on introduit des objets et des définitions qu'on utilisera dans la suite, notamment les algèbres de Hopf sur un anneau, les schémas affine en groupes sur un anneau, les torseurs sous l'action d'un schéma en groupes et les représentations linéaires d'un schéma en groupes.

Dans le deuxième chapitre on introduira les catégories tannakiennes (neutres) sur un corps pour que le lecteur puisse comprendre la construction du schéma en groupes fondamental, selon Nori, d'un schéma X propre et réduit sur un corps parfait (cf. déf. 2.2.31). Les preuves des résultats qui concernent cette construction seront plus détaillées que celle qu'on peut trouver dans [25] où souvent les démonstrations sont à peine esquissées. On décrira aussi la construction du schéma en groupes fondamental, selon Gasbarri, d'un schéma X sur un schéma de Dedekind (cf. déf. 2.2.45) introduit pour la première fois dans [12].

Dans le troisième chapitre on s'occupera du problème de l'extension de torseurs : dorénavant soient E un schéma affine de Dedekind, X un schéma réduit, irréductible (donc connexe) et $j : X \to E$ un morphisme fidèlement plat. On suppose l'existence d'une section $x : E \to X$. Soient $\eta \in E$ le point générique de E, K le corps des fonctions de E. On note X_η la fibre générique de X. Soit G' un schéma en groupes affine fini sur η et soit Y' un G'-torseur sur X_η. Dans cette situation on espère trouver un X-schéma Y et un schéma affine en groupes G fini et plat sur E tel que $G \times_E \eta \simeq G'$ et tel que Y soit un G-torseur sur X de fibre générique le G'-torseur Y', afin d'avoir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G' \circlearrowright & Y' & \rightarrow & Y & \circlearrowleft G \\ & \downarrow & \square & \downarrow & \\ & X_\eta & \rightarrow & X & \\ & \downarrow & \square & \downarrow & \\ & \eta & \rightarrow & E & \end{array} \tag{3}$$

On donne une réponse partielle à cette question en liant d'abord le problème de l'extension des torseurs à la théorie du schéma en groupes fondamental.

Dans [12] Gasbarri construit le schéma en groupes fondamental de X comme une limite projective de E-schémas en groupes G_i finis et plats qui agissent sur un X-schéma Y_i de telle sorte que Y_i ait une structure de G_i-torseur (pour plus de détails voir le chapitre 2, section 2.2.2). Soit $\pi_1(X,x)$ ce schéma en groupes profini. Si, en particulier, $E = Spec(k)$ (où k est un corps parfait) et $j : X \rightarrow E$ est un morphisme propre, le schéma en groupes fondamental $\pi_1(X,x)$ est donc isomorphe au schéma en groupes fondamental introduit par Nori dans [25] et [26] définit comme le schéma affine en groupes associé à la catégorie tannakienne neutre (plus de détails seront donnés dans le chapitre 2, section 2.2.1) des fibrés vectoriels essentiellement finis sur X. Dans la situation décrite dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X_\eta & \rightarrow & X \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ \eta & \rightarrow & E \end{array} \tag{4}$$

on se pose de façon naturelle la question suivante : soit $\pi_1(X,x)$ le E-schéma en groupes défini précédemment, on pose $x_\eta := x \times_E \eta$ et soit $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$ le K-schéma en groupes fondamental de la fibre générique de X ; on se demande si il y a des relations naturelles entre le K-schéma en groupes fondamental $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$ et le schéma en groupes $\pi_1(X,x)_\eta := \pi_1(X,x) \times_E \eta$, à savoir la fibre générique du schéma en groupes fondamental construit sur X. La première réponse est donnée par la simple existence d'un morphisme

$$\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \rightarrow \pi_1(X,x)_\eta. \tag{5}$$

Bien sûr on peut se demander si ce morphisme φ est, par exemple, surjectif ou bien

injectif. On prouve le résultat suivant :
Théorème. 3.3.6. Le morphisme de K-schéma en groupes $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to \pi_1(X, x)_\eta$ est surjectif pour la topologie *fpqc*.

Pour démontrer le théorème 3.3.6 on doit d'abord remarquer que la donnée d'un G-torseur Y et un point $y \in Y(E)$ sur x est équivalent à la donnée d'un morphisme $\rho : \pi_1(X, x) \to G$, où G est un E-schéma affine en groupes fini et plat (cf. rem. 2.2.46). De plus, on remarque que $\pi_1(X, x)$ peut être obtenu comme limite projective de schémas en groupes qui sont quotients de $\pi_1(X, x)$ (comme on expliquera dans la proposition 3.2.1) ce qui nous donnera une deuxième description de $\pi_1(X, x)$. Il s'ensuit de même que on a deux description pour la fibre générique de $\pi_1(X, x)$. Soient maintenant A et D deux algèbres de Hopf telles que $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \simeq Spec(A)$ et $\pi_1(X, x)_\eta \simeq Spec(D)$. Il nous faut des lemmes préliminaires (cf. lemmes 3.1.5, 3.1.7, 3.1.11) concernant les limites inductives de algèbres de Hopf pour pouvoir montrer que le morphisme $\varphi^* : D \to A$ est injectif, ce qui revient à dire que φ est un morphisme schématiquement dominant ou, ce qui revient au même, que φ est surjectif pour la topologie *fpqc* puisque les schémas en groupes considérés sont sur un corps (cf. théorème 3.1.2).

On revient maintenant au problème de l'extension des torseurs et on peut enfin décrire le lien entre l'extension des torseurs et le théorème 3.3.6.

On définit le K-schéma affine en groupes $N := ker(\varphi)$ et on énonce le résultat principal de la section 3.4 :
Théorème 3.4.2 Soient G' un schéma affine en groupes fini sur K, $\rho' : \pi(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow G'$ un morphisme de K-schémas affines en groupes. Soit (Y', G', y') le triplet naturellement associé à ρ' (cf. rem. 2.2.46)). Il existe un morphisme ρ qui étend ρ' ou, ce qui revient au même, il existe un triplet (Y, G, y) sur E dont la fibre générique est (Y', G', y'), si et seulement si $ker(\rho') < N$, où G est un schéma affine en groupes fini et plat sur E, Y est un G-torseur sur E et $y \in Y(E)$ un point sur x.

Un triplet (Y, G, y) est tout simplement un G-torseur pointé (cf. déf. 2.2.43). Une conséquence du théorème 3.4.2 est le corollaire suivant qui explique sous quelles conditions sur $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to \pi_1(X, x)_\eta$ on peut étendre tout torseur dominant.

Corollaire. 3.4.3. Tout triplet dominant (c'est-à-dire un triplet (Y', G', y') dont le morphisme associé $\rho' : \pi(X_\eta, x_\eta) \to G'$ est schématiquement dominant) sur X_η peut être étendu à un triplet (dominant) sur X si et seulement si φ est un isomorphisme $\pi_1(X_\eta, x_\eta) \simeq \pi_1(X, x)_\eta$.

Dans le quatrième et dernier chapitre on construit une clôture galoisienne de tours de torseurs au dessus d'un k-schéma X : on se donne un G-torseur $f : Y \to X$ et un G'-torseur $f' : Y' \to Y$ (plus certaines hypothèses supplémentaires) et on construit un $\widetilde{G}$-torseur $p : \widetilde{Y} \to X$ qui *domine* Y au moyen d'un X-morphisme $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$ (cf. corollaire 4.2.6). Il suffit pour cela de remarquer, d'abord, que $(f \circ f')_*(\mathcal{O}_{Y'})$ est un fibré vectoriel fini au sens de Weil (cf. déf. 2.2.10), ce qui est un conséquence du résultat suivant :

Théorème. 4.1.2. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe et réduit. Soient G un k-schéma en groupes fini et $f : Y \to X$ un G-torseur. Soient $x : Spec(k) \to X$ une section et $y : Spec(k) \to Y$ une section au dessus de x. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-faisceau de modules localement libre, fini au sens de Weil alors le faisceau $f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_X$-faisceau de modules localement libre, fini au sens de Weil.

L'existence de ce X-morphisme $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$ est assurée par le dernier résultat de cette thèse :

Théorème. 4.2.4. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe, réduit et localement de type fini. Soient Y un schéma irréductible et $f : Y \to X$ un morphisme de schémas fini et plat t.q. $f_*(\mathcal{O}_Y)$ soit un fibré vectoriel essentiellement fini. On suppose l'existence d'un point k-rationnel $x \in X(k)$ et d'un point k-rationnel $y \in Y(k)$ au dessus de x. Soit $\widetilde{Y}$ le torseur universel associé à la catégorie tannakienne neutre sur k engendrée par $f_*(\mathcal{O}_Y)$ alors il existe un X-morphisme de schémas surjectif $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$.

Table des matières

Chapitre 1

Préliminaires

Comme le titre le dit, dans ce chapitre il n'y aura rien de nouveau. On introduit cependant des objets qui seront utilisés dans la suite et on fixera des notations. Le but de ce chapitre est donc de introduire les schémas en groupes, leurs représentations et les torseurs sous l'action d'un schéma en groupes, notamment d'un schéma affine en groupes sur un corps ou sur un anneau. Dorénavant tous les anneaux et algèbres considérés seront commutatifs, unitaires et tout morphisme d'anneaux ou algèbres envoie l'unité dans l'unité.

1.1 Cogèbres, bigèbres et algèbres de Hopf

Dans cette section on décrit brièvement des objets qui intéresseront les autres sections de ce chapitre mais aussi, de plus près, la section 3.1. La définition de cogèbre est, en quelque sorte, la définition *duale* de celle de algèbre. Il existe aussi une notion de comodule qui dualise celle de module et qu'on introduira plus loin (cf. définition 1.5.5).

Définition 1.1.1. Soit k un anneau. Une k-**cogèbre** C est la donnée d'un k-module C muni de deux morphismes de k-modules

$$\begin{array}{rccc} \Delta_C : & C & \longrightarrow & C \otimes_k C \\ \varepsilon_C & C & \longrightarrow & k \end{array}$$

tels que les deux diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_k C \otimes_k C & & C \otimes_k C \arrow[ll, "id_C \otimes_k \Delta_C"'] \\
C \otimes_k C \arrow[u, "\Delta_C \otimes_k id_C"] & \circlearrowleft & C \arrow[u, "\Delta_C"'] \arrow[ll, "\Delta_C"]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
k \otimes_k C & & C \otimes_k C \arrow[ll, "\varepsilon_C \otimes_k id_C"'] \\
C \arrow[u, "\wr"] & \circlearrowleft & C \arrow[u, "\Delta_C"'] \arrow[ll, "id_C"]
\end{tikzcd}$$

commutent. Le morphisme Δ_C est dit **comultiplication** et ε_C est dit **counité**. La propriété décrite par le premier diagramme est appelée la **coassociativité**.

□

Définition 1.1.2. Soient C et D deux k-cogèbres. Un morphisme $\varphi : C \to D$ de k-modules est dit **k-morphisme de cogèbres** si

$$\Delta_D \circ \varphi = (\varphi \circ \varphi) \circ \Delta_C \quad \text{et} \quad \varepsilon_D \circ \varphi = \varepsilon_C$$

ce qui se traduit en les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes_k C \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"'] & D \otimes_k D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
& k &
\end{tikzcd}$$

□

Définition 1.1.3. Soient C une k-cogèbre et D un k-sous-module de C. Le module D est dit **sous-cogèbre** de C si

$$\Delta_C(D) \subseteq D \otimes_k D,$$

donc D est une k-cogèbre.

□

Définition 1.1.4. Soit k un anneau et C une k-cogèbre. Soit I un k-sous module de C. On dit que I est un **k-coideal** de C si

– a) $\Delta(I) \subseteq I \otimes_k C + C \otimes_k I$
– b) $\varepsilon(I) = 0$.

□

Or, on se souvient que un k-module H est une k-algèbre si il existe une loi de multiplication associative, à savoir un morphisme $m : H \otimes_k H \to H$ qui satisfait le diagramme[1]

$$\begin{tikzcd} H \otimes_k H \otimes_k H \arrow[r, "id_H \otimes_k \Delta_H"] \arrow[d, "\Delta_H \otimes_k id_H"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \otimes_k H \arrow[d, "\Delta_H"] \\ H \otimes_k H \arrow[r, "\Delta_H"'] & H \end{tikzcd}$$

et s'il existe un morphisme (dit structural) $\eta : k \to H$ t.q. $m \circ (\eta \otimes id_C) = id_C$. On énonce un résultat qui concerne les objets qu'on a considérés :

Théorème 1.1.5. Soient k un anneau, H un k-module, $m : H \otimes_k H \to H$, $\eta : k \to H$, $\Delta : H \to H \otimes_k H$ et $\varepsilon : H \to k$ des morphismes de k-modules tels que (H, m, η) est une k-algèbre et (H, Δ, ε) est une k-cogèbre. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1 m et η sont des k-morphismes de cogèbres.

2 Δ et ε sont des k-morphismes d'algèbres

□

Définition 1.1.6. Soient k un anneau, H un k-module, $m : H \otimes_k H \to H$, $\eta : k \to H$, $\Delta : H \to H \otimes_k H$ et $\varepsilon : H \to k$ des morphismes de k-modules tels que (H, m, η) est une k-algèbre et (H, Δ, ε) est une k-cogèbre. Si en plus H satisfait les propriétés 1) et 2) du théorème 1.1.5 alors on dit que H est une **k-bigèbre**.
□

Définition 1.1.7. Soient C et D deux k-bigèbres. Un morphisme $\varphi : C \to D$ de k-modules est dit **k-morphisme de bigèbres** si φ est au même temps un **k-morphisme**

[1] Ce qui suit montre dans quel sens on dit que la définition de cogèbre est duale à celle d'algèbre.

de algèbres et un **k-morphisme de cogèbres**.

□

<u>Définition</u> 1.1.8. Soient C une k-bigèbres et D un k-sous-module de C. Le module D est dit **sous-bigèbre** de C si D est une sous-algèbre de C mais aussi une sous-cogèbre de C (et donc D est une k-bigèbre).

□

Soient maintenant k un anneau, H une k-bigèbre avec Δ, ε, m et η comme dans la définition 1.1.6 et $S : H \to H$ un morphisme de k-algèbres tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} H & H \otimes H \arrow[l, "m\circ(S,id_H)"'] \\ k \arrow[u, "\eta"'] & H \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

commute. Un tel morphisme sera appelé **antipodal** ou **coinverse**.

<u>Définition</u> 1.1.9. Soit k un anneau et H une k-bigèbre. Soit I un k-coideal de H (cf. déf 1.1.4). On dit que I est un **k-biideal** de C si I est un ideal de A.

□

<u>Définition</u> 1.1.10. Une k-bigèbre H munie d'un morphisme antipodal S est dite **k-algèbre de Hopf**.

□

<u>Définition</u> 1.1.11. Soient H une k-algèbre de Hopf D un k-sous-module de H. Le module D est dit **sous-algèbre de Hopf** de H si D est une sous-bigèbre de H (cf. déf. 1.1.8) et en plus $S(D) \subseteq D$ où $S : H \to H$ est le morphisme antipodal de H (donc D est une k-algèbre de Hopf).

□

<u>Définition</u> 1.1.12. Soit k un anneau et H une k-algèbre de Hopf. Soit I un k-biideal de H (cf. déf 1.1.9). On dit que I est un **k-ideal de Hopf** de C si $S(I) \subseteq I$.

□

Définition 1.1.13. Soit k un anneau et H une k-algèbre de Hopf, alors $I := ker(\varepsilon)$ est un k-ideal de Hopf de H qu'on appellera **ideal d'augmentation**.

□

1.2 Schémas affines en groupes

Cette section est tirée essentiellement de [33] (premiers chapitres) mais aussi de [8] Ch, I, §1. On définit d'abord les k-foncteurs et les k-foncteurs en groupes, pour introduire en suite les k-schémas affines en groupes.

Définition 1.2.1. Soit k un anneau. Un **k-foncteur** F est un foncteur de la catégorie des k-algèbres $k\text{-}\mathcal{A}lg$ vers la catégorie des ensembles $\mathcal{E}ns$. Un **morphisme entre deux k-foncteurs** F et H est un morphisme entre F et H en tant que foncteurs.

□

Définition 1.2.2. On vient de définir, cf. déf. 1.2.1, la **catégorie des k-foncteurs** qu'on note $k\text{-}\mathfrak{F}onct$.

□

Définition 1.2.3. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}ns$ un foncteur (covariant). F est dit **représentable**[2] s'il existe un objet X de $\mathcal{C}$ tel que F soit isomorphe au foncteur $Hom_{\mathcal{C}}(X, \bullet)$ (on dira donc que F est **représenté par X**). Si F est un foncteur contravariant on dit q'il est représentable s'il est isomorphe à $Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, X)$.

□

Définition 1.2.4. Soit F un k-foncteur (cf. définition 1.2.1) représentable. Il existe donc une k-algèbre A telle que F est isomorphe au foncteur $Hom_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(A, \bullet)$. On notera dorénavant ce foncteur $Sp_k(A)$ qu'on appelle **spectre** de A. De plus on appelle **schéma affine sur** k ou k**-schéma affine** tout k-foncteur représentable.

□

[2] On peut parfois parler de foncteur coreprésentable lorsque, comme ici, il s'agit de foncteur covariant.

<u>Définition</u> 1.2.5. Un **morphisme entre k-schémas affines** est un morphisme entre k-foncteurs (cf. déf. (1.2.1)). On notera $Hom(Sp_k(A), Sp_k(B))$ l'ensemble des morphismes entre deux tels foncteurs.

□

<u>Définition</u> 1.2.6. Dans les définitions 1.2.4 et 1.2.5 on a donc défini une catégorie qu'on appellera la **catégorie des k-schémas affines** qu'on note k-$\mathcal{A}ff$.

□

<u>Exemple</u> 1.2.7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour toute k-algèbre R, et pour tout morphisme $\varphi : R \to S$ on définit le k-foncteur $\mathbb{A}_k^n$ donné par $\mathbb{A}_k^n(R) := R^n$ et $\mathbb{A}_k^n(\varphi) := \varphi^n : (r_1, .., r_n) \mapsto (\varphi(r_1), .., \varphi(r_n))$ que l'on appelle **n-espace affine sur** k. Cet espace $\mathbb{A}_k^n$ est isomorphe à $Sp_k(k[T_1, .., T_n])$ où $T_1, .., T_n$ sont n indéterminées.

□

Ce premier exemple est une conséquence du

<u>Théorème</u> 1.2.8. Soit F un k-foncteur. Si pour toute k-algèbre R les éléments de $F(R)$ correspondent aux solutions d'une famille (fixée et indépendante de R) d'équations, alors F est un schéma affine sur k. La réciproque est encore vraie.

<u>Preuve</u>. (voir [33], 1.2).

□

Un cas particulier et très important pour nous de k-foncteur est donné par la définition suivante :

<u>Définition</u> 1.2.9. Un k**-foncteur en groupes** G est un foncteur de la catégorie des k-algèbres vers la catégorie des groupes. Un **morphisme** $\varphi : G \to H$ entre deux k-foncteurs en groupes G et H est un morphisme en tant que k-foncteurs, où en plus le morphisme $\varphi_A : G(A) \to H(A)$ est, $\forall A$, un homomorphisme de groupes.

□

On peut enfin donner la définition de k-schéma affine en groupes :

Définition **1.2.10.** Un k-**schéma affine en groupes** G est un k-foncteur en groupes représentable.

□

Définition **1.2.11.** Un **morphisme** entre k-schémas affines en groupes est un morphisme entre k-foncteurs en groupes (cf. définition (1.2.9)).

□

Définition **1.2.12.** On définit k-$\mathfrak{F}on\mathfrak{G}r$ et k-$\mathcal{A}ff\mathfrak{G}r$, respectivement les catégories des k-foncteurs en groupes et k-schémas affines en groupes avec leurs morphismes.

□

Définition **1.2.13.** On dira que deux k-schémas affines en groupes G et H sont isomorphes s'il existe un morphisme $f : G \to H$ inversible.

□

Dorénavant on omettra d'écrire l'anneau k si ça ne crée pas de confusion et R sera pour nous toujours une k-algèbre.

Maintenant on décrira rapidement les plus importants exemples de schémas affines en groupes. On donnera plus de détails dans la prochaine section.

Exemple **1.2.14.** Soit $G_{a,k}$ t.q. $G_{a,k}(R) = G_a(R) := \mathbb{A}^1(R)$, c'est-à-dire le groupe additif de l'anneau R. Le schéma G_a est évidemment représenté par $k[X]$.

□

Exemple **1.2.15.** Soit $G_{m,k}$ t.q. $G_{m,k}(R) = G_m(R)$ est donné par les éléments inversibles de R et sa loi de multiplication, à savoir les $x \in R$ tels que il exist un $y \in R$ qui satisfait l'équation $xy = 1$, c'est ce qui nous dit que le schéma en groupes G_m est représenté par $k[X,Y]/(XY-1)$.

□

Exemple 1.2.16. Soit $GL_{n,k} = GL_n$, le schéma affine en groupes des matrices $n \times n$ inversibles, à savoir le foncteur qui associe à toute k-algèbre R le groupe $GL_{n,k}(R) := \{$matrices $(n \times n)$ à coéfficients dans R inversibles$\}$ où le produit est le produit usuel entre matrices. Soit, de plus, $SL_{n,k} = SL_n$ le foncteur qui associe à toute k-algèbre R le sous-groupe de $GL_n(R)$ donné par les matrices $(n \times n)$ inversibles dont le déterminant est égal à 1. Le schéma en groupes GL_n est représenté par $k[X_{11}, .., X_{nn}, 1/det(X_{ij})]$ alors que SL_n est représenté par $k[X_{11}, .., X_{nn}]/(det(X_{ij})-1)$. Évidemment $G_m \simeq GL_1$.
$\square$

Exemple 1.2.17. Le schéma en groupes $\mu_{n,k} = \mu_n$ est le foncteur qui associe à toute k-algèbre R le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans R. Ce schéma est représenté par $k[X]/(X^n - 1)$.
$\square$

Exemple 1.2.18. Si $car(k) = p$ on a de même que $car(R) = p$ pour toute k-algèbre R. Dans ce cas on peut définir $\alpha_{p,k}$ t.q. $\alpha_{p,k}(R) = \alpha_p(R) := \{x \in R | x^p = 0\}$, qui est un groupe, si on considère l'addition. Le schéma affine en groupes α_p est donc représenté par $k[X]/(X^p)$.
$\square$

On rappelle maintenant l'important lemme de Yoneda. La version qu'on présente est parfois considérée un corollaire du Lemme (cf. par exemple [32], Ch. 2 §2.1.2).

Lemme 1.2.19. (de Yoneda.) Soient A et B deux k-algèbres. Il existe une bijection

$$Hom_{k\text{-}\mathcal{A}lg}(B, A) \simeq Hom_{k\text{-}\mathcal{A}ff}(Sp_k(A), Sp_k(B)).$$

La correspondance

$$A \mapsto Sp_k(A)$$

est une anti-équivalence entre la catégorie des k-schémas affines et celle des k-algèbres.
$\square$

Ici de suite on présente, avec un exemple, la correspondence décrite par le lemme de Yoneda :

Exemple 1.2.20. Considérons le morphismes $det : GL_2 \to G_m$ entre k-schémas affines en groupes (et donc en particulier un morphisme entre k-schéma affines), c'est-à-dire pour toute k-algèbre R le morphisme de groupes

$$\begin{array}{ccc} GL_2(R) & \to & G_m(R) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & ad - bc \end{array}$$

correspond au morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & k[X, 1/X] & \to & k[X_{11}, .., X_{22}, 1/det(X_{ij})] \\ & X & \mapsto & X_{11}X_{22} - X_{21}X_{12}. \end{array}$$

□

Remarque 1.2.21. Dans cette remarque on expliquera pourquoi on a appelé *k-schémas affines* les objets de type $Sp_k(A)$. Soient A un anneau commutatif avec unité et $Spec(A)$ (cf., par exemple, [16], II, §2) l'ensemble des idéaux premiers da A muni de la topologie de Zariski et d'un faisceau d'anneau $\mathcal{O}_{Spec(A)}$. On sait que (voir par exemple [16], II, prop. 2.3) il existe une bijection

$$Hom_{k-alg}(B, A) \simeq Hom_{Spec(k)}(Spec(A), Spec(B))$$

qui, d'après le lemme 1.2.19 nous dit qu'il y a une équivalence entre la catégorie des k-schémas affines (définition (1.2.4)) et celle des schémas affines sur $Spec(k)$ au “sens usuel” (voir [16], II). En effet, si on construit le foncteur T entre les deux catégories citées qui associe à $Sp_k(A)$ le schéma $Spec(A)$, celui-ci est sûrement pleinement fidèle d'après la remarque qu'on vient de faire. Il est aussi essentiellement surjectif parce que si on prend n'importe quel schéma affine X (au sens usuel) sur $Spek(k)$, X est isomorphe (par définition, cf. [16], pag. 74) à $Spec(A)$ pour une certaine k-algèbre A ; alors $Sp_k(A)$ est le schéma source auquel T associe $Spec(A)$. On pourra donc, si on le souhaitera, identifier $Sp_k(A)$ avec $Spec(A)$ sur $Spec(k)$.

□

Continuons avec d'autres remarques :

Remarque 1.2.22. Soit F un k-foncteur tel que $F(R) = \{e\}$ (un seul élément) pour toute k-algèbre R, alors $F \simeq Sp_k(k)$ et F est trivialement un schéma affine en groupes.

□

Remarque 1.2.23. Considérons $Sp(A) = Sp_k(A)$, $Sp_k(B)$, $Sp_k(C)$ des k-schémas affines et deux morphismes $\phi_1 : Sp(A) \to Sp(C)$, $\phi_2 : Sp(B) \to Sp(C)$. Si on construit pour toute k-algèbre R le foncteur **produit fibré** $(Sp(A) \times_{Sp(C)} Sp(B))(R) := \{(a, b) | a \in Sp(A)(R), b \in Sp(B)(R), \phi_1(a) = \phi_2(b)\}$ il s'ensuit que $Sp(A) \times_{Sp(C)} Sp(B) = Sp(A \otimes_C B)$. Lorsque $C = k$ on a tout simplement $Sp(A) \times_{Sp(C)} Sp(B) = Sp(A) \times Sp(B)$.
□

1.3 Schémas affines en groupes et algèbres de Hopf

On va d'abord "traduire" en diagrammes la notion de groupe pour un groupe abstrait Γ : Γ est un ensemble avec une loi interne qu'on appelle multiplication et qu'on note $mult$ dans la suite :

$$\begin{array}{rccc} mult: & \Gamma \times \Gamma & \to & \Gamma \\ & g, h & \mapsto & gh \end{array} \tag{1.1}$$

Γ possède un élément neutre :

$$\begin{array}{rccc} unit: & \{e\} & \to & \Gamma \\ & e & \mapsto & 1_\Gamma \end{array} \tag{1.2}$$

et bien sûr tout élément de Γ possède un inverse :

$$\begin{array}{rccc} inv: & \Gamma & \to & \Gamma \\ & g & \mapsto & g^{-1} \end{array} \tag{1.3}$$

ces morphismes doivent satisfaire certaines propriétés : l'associativité

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \Gamma \times \Gamma & \xrightarrow{id \times mult} & \Gamma \times \Gamma \\ {\scriptstyle mult \times id} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow {\scriptstyle mult} \\ \Gamma \times \Gamma & \xrightarrow[mult]{} & \Gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (g, h, l) & \mapsto & (g, hl) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (gh, l) & \mapsto & (gh)l = g(hl) \end{array} \tag{1.4}$$

l'élément neutre est unité à gauche (et à droite où on aurait un diagramme symétrique)

$$\begin{array}{ccc} \{e\} \times \Gamma & \xrightarrow{unit \times id} & \Gamma \times \Gamma \\ {\scriptstyle pr_2} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow {\scriptstyle mult} \\ \Gamma & \xrightarrow[id]{} & \Gamma \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (e, g) & \mapsto & (1, g) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g & \mapsto & g = 1 \cdot g \end{array} \tag{1.5}$$

tout élément on a son inverse gauche (à droite c'est pareil)

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma & \xrightarrow{inv,id} & \Gamma\times\Gamma & & g & \mapsto & (g^{-1},g) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{}^{mult} & & \downarrow & & \downarrow \\ \{e\} & \xrightarrow[unit]{} & \Gamma & & e & \mapsto & 1=g^{-1}\cdot g \end{array} \tag{1.6}$$

Si maintenant on ne considère plus des groupes abstraits Γ mais des k-schémas affines en groupes G (k étant un anneau) on a les mêmes diagrammes où on aura remplacé Γ avec G et où on demandera que les morphismes $mult : G \times G \to G$, $unit : Sp_k(k) \to G$ et $inv : G \to G$ soient des morphismes de k-schémas affines en groupes, à savoir des morphismes de k-foncteurs.

On résume ce qu'on vient de dire dans la remarque suivante :

Remarque 1.3.1. Se donner un k-schéma affine en groupes G (cf. déf. 1.2.10) équivaut à se donner un k-schéma affine G qui possède les morphismes de k-foncteurs $mult$ (cf. 1.1) $unit$ (cf. 1.2) inv (cf. 1.3), qui satisfont les diagrammes 1.4, 1.5 et 1.6. On pourra dire que G est un **objet groupe** dans la catégorie des k-schémas affines (cf. [32], Ch. 2, §2.2).

□

Remarque 1.3.2. De façon plus générale si S est un schéma quelconque, on peut définire un S-schéma en groupes (non nécessairement affine) comme un S-schéma G qui est un *objet groupe* dans la catégorie des S-schémas (cf. [32], Ch. 2, §2.2), ce qui veut dire que G satisfait les diagrammes 1.4, 1.5 et 1.6 où on aura remplacé Γ avec G et $\{e\}$ avec S. Ceci revient à dire que pour tout S-schéma T, l'ensemble $G(T) := Hom_S(T, G)$ a une structure de groupe, fonctorielle en T.

□

Après avoir décrit les diagramme que $G := Sp_k(A)$ doit satisfaire pour être un k-schéma affine en groupes on va étudier le comportement de la k-algèbre A.

Remarque 1.3.3. Soit A une k-algèbre. Soit $G := Sp_k(A)$ le k-schéma affine naturellement associé à A. On se demande quelles conditions il faut imposer à l'algèbre A pour que G soit un k-schéma affine en groupes. On suppose alors que G est un k-schéma affine en groupes. D'après le lemme de Yoneda (cf. lemme 1.2.19), on peut traduire les morphismes qui donnent à G sa structure de k-schéma affine en groupes en morphismes de k-algèbres. On cherche donc les morphismes de k-algèbres correspondant à *mult*, *unit* et *inv*) ; on obtient respectivement :

- $\Delta : A \to A \otimes_k A$,
- $\varepsilon : A \to k$,
- $S : A \to A$;

or, traduire les diagrammes 1.4, 1.5 et 1.6 revient à se donner les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k A \otimes_k A \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & A \otimes_k A \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\
A \otimes_k A \arrow[u, "\Delta\otimes id"] & A \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes_k A \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & A \otimes_k A \arrow[l, "\varepsilon\otimes id"'] \\
A \arrow[u, "\wr"] & A \arrow[l, "id"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowleft"] & A \otimes_k A \arrow[l, "per\circ(S,id)"'] \\
k \arrow[u] & A \arrow[l, "\varepsilon"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd} .$$

où $per : A \otimes_k A \to A$ est la multiplications dans A ; on écrit souvent (S, id) au lieu de $per \circ (S, id)$.

□

On voit tout de suite que

Remarque 1.3.4. Une k-algèbre A avec Δ, ε, S comme dans la remarque (1.3.3) est une k-algèbre de Hopf (cf. déf. 1.1.10). Un k-schéma affine $Sp_k(A)$ est un k-schéma affine en groupes ssi A est une k-algèbre de Hopf.

□

Il s'ensuit qu'il y a une correspondence bijective entre les k-algèbres de Hopf et les k-schémas affines en groupes. Plus précisément :

Théorème 1.3.5. La correspondance

$$A \to Sp_k(A)$$

établit une antiéquivalence de catégories entre la catégorie des k-algèbres de Hopf et celle des k-schémas affines en groupes.

□

On présente maintenant les exemples classiques, dont certains qu'on a déjà définis, de k-schémas affines en groupes en décrivant leurs k-algèbres de Hopf.

Exemple 1.3.6. Soit G_a le schéma affine en groupes représenté par $A := k[X]$ (cf. exemple 1.2.14). On cherche Δ, ε, S qui donnent à A sa structure d'algèbre de Hopf. On cherche d'abord Δ en rappelant que $mult : G(R) \times G(R) \to G(R)$ peut être explicitée (cf. déf. 1.2.4) de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccc} mult: & Hom_k(A,R) \times Hom_k(A,R) & \to & Hom_k(A,R) \\ & (f,g) & \mapsto & f * g \end{array}$$

où $*$ dans $Hom_k(A,R)$ correspond à $mult$ dans $G(R)$,[3] ce qui revient à donner, d'après la remarque (1.2.23), le morphisme

$$\begin{array}{ccc} Hom_k(A \otimes A, R) & \longrightarrow & Hom_k(A,R) \\ & & \\ (A \otimes A \xrightarrow{(f,g)} R) & \mapsto & (A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \xrightarrow{(f,g)} R) \end{array}$$

tel que $\forall a \in A$ on ait donc $(f,g)\Delta(a) = f(a) * g(a)$ où $(f,g)(a \otimes b) := f(a) \cdot g(b)$. Dans cet exemple il sera suffisant de le montrer pour X, qui engendre A. Dans G_a la loi $*$ est tout simplement la somme $+$ (en effet $G_a(R)$ est le groupe additif de l'anneau R). Soient donc $r := f(X)$ et $s := g(X)$ on cherche Δ tel que $(f,g)\Delta(X) = r + s$. On pose $\Delta(X) := X \otimes 1 + 1 \otimes X$ et l'on vérifie que c'est le bon choix, en effet

$$(f,g)(X \otimes 1 + 1 \otimes X) = f(X) \cdot g(1) + f(1) \cdot g(X) = f(X) + g(X).$$

De façon analogue on trouve $\varepsilon : A \to k$ en étudiant le morphisme $unit : Sp_k(k) \to G$, c'est-à-dire pour toute k-algèbre R le morphisme

$$\begin{array}{ccc} Hom_k(k,R) & \longrightarrow & Hom_k(A,R) \\ & & \\ (k \xrightarrow{\varphi} R) & \mapsto & (A \xrightarrow{\varepsilon} k \xrightarrow{\varphi} R) \end{array}$$

[3] Pour $f, g \in Hom_k(A,R)$ on peut construire les lois de somme et multiplication en posant $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$ et $(fg)(a) := f(a)g(a)$, $\forall a \in A$ qui donnent une structure de k-algèbre à $Hom_k(A,R)$ mais à priori $*$ n'est ni l'une ni l'autre, c'est par exemple le cas de GL_2.

tel que $\forall a \in A$ on ait donc $\varphi(\varepsilon(a)) = 1_{G(R)}$.
Dans cet exemple si on pose $\varepsilon(X) = 0$ on vérifie que c'est le bon choix, en effet $\varphi(\varepsilon(X)) = 0 = 1_{G_a(R)}$.
Pour terminer cet exemple il ne nous reste qu'à trouver $S : A \to A$ en étudiant le morphisme $inv : G(R) \to G(R)$, à savoir

$$\begin{array}{ccc} Hom_k(A,R) & \longrightarrow & Hom_k(A,R) \\ \\ (A \xrightarrow{\varphi} R) & \mapsto & (A \xrightarrow{S} A \xrightarrow{\varphi} R) \end{array}$$

tel que $\forall a \in A$ on ait donc $\varphi(S(a)) = inv(\varphi(a)) = (\varphi(a))^{*-1}$.
On constate que $S(X) = -X$ est le bon choix puisque, pour $r := \varphi(X)$, $\varphi(S(X)) = -r$.
$\square$

Exemple 1.3.7. En singeant l'exemple (1.3.6), dont on garde les mêmes notations, on trouve Δ, ε, S pour G_m (cf. exemple 1.2.15) le k-schéma affine en groupes représenté par $A = k[X, 1/X] = k[X,Y]/(XY - 1)$. Juste pour donner une idée on se borne à la recherche de Δ, en supposant $\Delta(X) = X \otimes X$ et en vérifiant que $(f,g)(\Delta(X)) = (f,g)(X \otimes X) = f(X)g(X) = rs$, qui est exactement la loi de groupe dans G_m. Pour compléter on donne les deux autres morphismes : $\varepsilon(X) := 1$ et $S(X) := 1/X$. Pour finir observons que, en tenant compte de l'isomomorphisme (en tant que groupes) entre $\mathbb{Z}$ et $(\{e_m\}_{m\in\mathbb{Z}}, \cdot)$ où $e_m \cdot e_n = e_{m+n}$, on peut écrire $k[\mathbb{Z}] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i e_i$, $b_i \in k$, ce qui revient à dire que la groupe-algèbre $k[\mathbb{Z}]$ est isomorphe à $k[X, 1/X]$ (il suffit de poser $X = e_1$ et remarquer que $e_i = X^i$).
$\square$

Exemple 1.3.8. Toujours en gardant les notations des exemples précédents, on focalise l'attention sur μ_n le k-schéma affine en groupes des racines n-ièmes de l'unité (cf. exemple 1.2.17) représenté par $A = k[X]/(X^n - 1)$, plus précisément pour toute k-algèbre R on a le groupe $\mu_n(R) = \{x \in R | x^n = 1\}$ dont la loi de groupe est la multiplication, l'unité est l'unité de R et l'inverse de chaque élément x est x^{-1}. Il est en fait un sousgroupe de $G_m(R)$. Ça ne nous étonne pas donc que on retrouve les même Δ, ε et S de $G_m(R)$. Observons encore que, en considérant multiplicativement le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ engendré par e_1, on peut écrire $k[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} b_i e_1^i$, $b_i \in k$, ce qui revient à dire que la groupe-algèbre $k[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ est isomorphe à $k[X]/(X^n - 1)$ (il suffit de poser

$X = e_1$ et remarquer que $e_1^n = 1$).

□

Exemple 1.3.9. Comme dans l'exemple 1.2.18, le k-schéma affine en groupes α_p où $car(k) = car(R) = p$ est le schéma $Spec(k[X]/(X^p))$; $\alpha_p(R)$ est un sous-groupe de $G_a(R)$. Ce n'est pas étonnant qu'on retrouve les même Δ, ε et S que ceux de $G_a(R)$.

□

Dans l'exemple suivant on donne une structure de k-schéma affine en groupes à tout groupe abstrait Γ et c'est moins trivial que l'on puisse imaginer. La construction qui suit ne considère que les groupes abstraits finis.

Exemple 1.3.10. Soit Γ un groupe abstrait, fini et non trivial que à l'occurrence on utilisera avec notation multiplicative. La première idée qu'on a en tête est d'utiliser le foncteur G t.q. $G(R) := \Gamma$ pour toute k-algèbre R ; malheureusement ce foncteur G n'est pas toujours représentable (le théorème(1.2.8) peut aider à en comprendre la raison). Donc on oublie le foncteur G et on cherche un k-schéma affine en groupes qui soit le plus proche possible de G. Soit donc $A := k^\Gamma = \{\text{fonctions } f : \Gamma \to k\}$, qui est engendrée par $\{e_\sigma\}_{\sigma\in\Gamma}$ où $e_\sigma(\sigma) = 1$ mais $e_\sigma(\delta) = 0$ pour $\delta \neq \sigma$; en effet $\forall\gamma \in \Gamma$ on peut écrire $f(\gamma) = \sum_{\sigma\in\Gamma} f(\sigma)e_\sigma(\gamma)$. On note que $e_\sigma^2 = e_\sigma$, $e_\sigma e_\delta = 0$, $\sum_\sigma e_\sigma = 1$ (où $(e_\sigma e_\delta)(x) = e_\sigma(x)e_\delta(x)$ et $(e_\sigma + e_\delta)(x) = e_\sigma(x) + e_\delta(x)$) ce qui revient à dire que en tant que anneau $A \cong k \times .. \times k$, évidemment $|\Gamma|$ fois).

On aimerait que A soit une k-algèbre de Hopf et que le k-schéma affine en groupes qui lui correspond (théorème (1.3.5)) ne soit pas trop different de G. D'abord on voit que le k-schéma affine $H := Hom_k(A, \cdot)$ est presque comme G, voyons comment : on ne prend pas n'importe quelle k-algèbre R mais seulement celles dont les seuls idempotents sont 0 et 1, ainsi un morphisme $\varphi : A \to R$ est obligé d'envoyer un seul e_σ en 1 et tous les autres en 0. On appelle ce morphisme φ_σ. Il est donc clair qu'on a une bijection entre $Hom_k(A, R)$ et $\Gamma = G(R)$ pour R comme ci-dessus. De plus, en définissant $(\varphi_a * \varphi_b) := \varphi_{ab}$ on a un isomorphisme entre $(Hom_k(A, R), *)$ et Γ. On a donc trouvé un bon candidat. On vérifie maintenant que A est une k-algèbre de Hopf[4]. On prend :

- $\Delta : e_\gamma \mapsto \sum_{\gamma=\sigma\delta} e_\sigma e_\delta$,
- $\varepsilon : e_1 \mapsto 1$, ($\mapsto 0$ autrement),

[4]Ça nous permettra de conclure que $Spec(A)$ est un k-schéma affine en groupes.

– $S(e_\sigma) = e_{\sigma^{-1}}$,

ce sont les morphismes qui donnent à A la structure souhaitée.

□

Définition 1.3.11. On appelle **schéma en groupes constant pour** Γ et on le note encore Γ_k le k-schéma affine en groupes associé à un groupe abstrait Γ quelconque.

□

On termine cette section avec une dernière définition qu'on utilisera souvent dans la suite :

Définition 1.3.12. Soit $G := Sp_k(A)$ un k-schéma affine en groupes. On dira que G est un **k-schéma affine en groupes fini** si A est un k-module projectif de type fini (e.g. Γ_k de la définition 1.3.11 où Γ est fini). Si A est k-libre on appellera **ordre de** G le rang de A sur k.

□

1.4 Torseurs

Dans cette section on définira les torseurs sous l'action d'un k-schéma affine en groupes et leurs principales propriétés. Pour approfondir le sujet on vous renvoie à [8], mais encore [23] et [35]. Commençons donc par la definition de l'action d'un foncteur en groupes sur un k-foncteur :

Définition 1.4.1. Soient k un anneau, G un k-foncteur en groupes (cf. definition (1.2.9)) et X un k-foncteur (cf. definition (1.2.1)). Une **action** (à droite) **de** G **sur** X est une application naturelle $X \times G \to X$ telle que pour toute k-algèbre R l'application $X(R) \times G(R) \to X(R)$ soit une action (à droite) de groupe[5]. On dira que G **agit sur** X.

□

On passe tout de suite au cas plus intéressant et donc on définit l'action d'un k-schéma affine en groupes sur un k-schéma X quelconque. Pour cela on fera appel à

[5]Un groupe abstrait G agit sur un ensemble X si on a une application $X \times G \to X$ telle que $(x, 1_G) \mapsto x$ et $(xg)h = x(gh)$, $\forall x \in X$ et $\forall g, h \in G$.

la remarque 1.3.2 qui nous permet d'interpreter un k-schéma affine en groupes G non pas comme un foncteur covariant de la catégorie des k-algèbre vers la catégorie des groupes mais plutôt comme un foncteur contravariant de la catégorie des k-schémas vers la catégorie des groupes :

$$\begin{aligned} G: \quad & k\text{-}\mathcal{S}ch \to \mathcal{G}r \\ & T \mapsto Hom_{k\text{-}\mathcal{S}ch}(T, G) \end{aligned}$$

Si on voulait considérer G comme un objet groupe dans la catégorie des k-schémas affines alors il en résulterait un foncteur

$$\begin{aligned} G \quad & k\text{-}\mathcal{A}ff \to \mathcal{G}r \\ & T \mapsto Hom_{k\text{-}\mathcal{A}ff}(T, G) \end{aligned}$$

Or, la donnée d'un k-schéma X quelconque est équivalente à la donnée d'un foncteur contravariant (cf. [10], Ch. VI §1)

$$\begin{aligned} X: \quad & k\text{-}\mathcal{S}ch \to \mathcal{E}ns \\ & T \mapsto Hom_{k\text{-}\mathcal{S}ch}(T, X) \end{aligned}$$

On écrira dorénavant $Hom(T, X)$ au lieu de $Hom_{k\text{-}\mathcal{S}ch}(T, X)$.

Définition 1.4.2. Soient k un anneau, G un k-schéma affine en groupes et X un k-schéma. Une **action** (à droite) **de** G **sur** X est une application naturelle $X \times G \to X$ tel que pour tout k-schéma T l'application $X(T) \times G(T) \to X(T)$ soit une action de groupe. On dira que G **agit sur** X.
□

Soit X toujours un k-schéma quelconque, on construit maintenant un foncteur en groupes contravariant qu'on note $\underline{Aut}_k(X)$ qui associe à un k-schéma T les automorphismes de $T \times_k X$ qui commutent avec la projection $pr_1 : T \times_k X \to T$:

$$\underline{Aut}_k(X)(T) := Aut_T(T \times_k X)$$

Proposition 1.4.3. Soient G un k-schéma affine en groupes et X un k-schéma. Soit $X \times G \to X$ une action comme dans la définition 1.4.2. Se donner une telle action revient à se donner une application naturelle entre G et le foncteur en groupes $\underline{Aut}_k(X)$.

Preuve. (cf. [32], Proposition 2.18) .
□

On a maintenant tous les ingrédients pour définir un torseur. On commence par un cas plus simple qui sera un cas particulier de la définition 1.4.6 qu'on verra plus tard.

Définition 1.4.4. (*Provisoire*) Soient k un corps, G un k-schéma affine en groupes (cf. definition 1.2.4) et X un k-schéma. Si G agit (à droite) sur X (cf. déf. 1.4.2) on dit que l'action est **simplement transitive** si pour tout k-schéma T et $\forall x, y \in X(T)$ il existe un unique $g \in G(T)$ tel que $x \cdot g = y$, ce qui revient à dire que l'application $X(T) \times G(T) \to X(T) \times X(T)$ telle que $(x, g) \mapsto (x, x \cdot g)$ est bijective. On dira aussi que X est un **G-torseur au dessus de k (ou $Spec(k)$).**

□

Après avoir défini des objets on définit, comme d'habitude, les morphismes entre ces objets :

Définition 1.4.5. Soient X et X' deux G-torseurs comme dans la définition (1.4.4). Un morphisme de k-schémas $\varphi : X \to X'$ est un **morphisme entre G-torseurs au dessus de k** si pour tout k-schéma T, $\forall x \in X(T)$ et $\forall g \in G(T)$

$$\varphi(xg) = \varphi(x)g.$$

On dit que φ est **G-équivariant** ou que φ commute avec l'action de G.

□

On vient donc de décrire la catégorie des G-torseurs au dessus d' un corps k.

Considérons un cas plus général : soit k dorénavant un anneau. De plus, il est naturel de se demander ce qui se passe si on considère comme base non pas k mais un k-schéma[6] S. On demandera que X soit un S-schéma :

Définition 1.4.6. (*Définitive*) Soient S un k-schéma et G un k-schéma affine en groupes plat. Soient X un k-schéma, $p : X \to S$ un morphisme de k-schémas, Φ : $X \times G \to X$ une action à droite comme dans la définition 1.4.2. On dit que p est un **G-torseur au dessus de S** si :

[6]Bien sûr au lieu de prendre S sur $Spec(k)$ on pourrait prendre S un D-schéma où D n'est pas forcément affine et puis on prendrait G un schéma en groupes affine sur D etc. Ou encore on pourrait prendre S un schéma absolu et non relatif (cf. [23], Ch. III, §4), G un S-schéma etc. Puisque dans le chapitre III un tel D sera toujours affine on a décidé d'utiliser ces notations.

- i) le morphisme p est un morphisme affine et fidèlement plat ;
- ii) le morphisme $\Psi := (pr_1, \Phi) : X \times G \to X \times_S X$ est un isomorphisme, ce qui se traduit en le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\Phi} & X \\ {\scriptstyle pr_1} \downarrow & \square & \downarrow {\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[p]{} & S \end{array}$$

à savoir, pour tout k-schéma T, $\forall x \in X(T)$ et $\forall g \in G(T)$, la donnée d'un diagramme cartésien comme suit :

$$\begin{array}{ccc} X(T) \times G(T) & \xrightarrow{action} & X(T) \\ {\scriptstyle pr_1} \downarrow & \square & \downarrow {\scriptstyle p} \\ X(T) & \xrightarrow[p]{} & S(T) \end{array} \quad .$$

□

Une conséquence évidente est la remarque suivante :

<u>Remarque</u> 1.4.7. Les definitions 1.4.4 et 1.4.6 coincident, comme on l'avait anticipé, lorsque k est un corps et $S := Spec(k)$.

□

<u>Définition</u> 1.4.8. Considérons le S-schéma en groupes $G_S := G \times_{Spec(k)} S$. On dit que un G-torseur X au dessus de S est **trivial** si $X \simeq G_S$. Évidemment si $S := Spec(k)$ alors un G-torseur au dessus de k est trivial ssi il est isomorphe à G.

□

<u>Définition</u> 1.4.9. Un **morphisme entre deux G-torseurs** X **et** X' **au dessus de S** est un morphisme $\varphi : X \to X'$ de S-schémas qui commute avec les actions $\Phi : X \times G \to X$ et $\Phi' : X' \times G \to X'$.

□

On vient donc de décrire la catégorie $G\text{-}Tors_S$ des G-torseurs au dessus d'un k-schéma S, k étant un anneau.

Voyons une caractérisation de la notion de torseurs tiré de [23], III, Proposition 4.1 que je reprend ici de suite dans les notation qu'on a utilisé :

Proposition 1.4.10. Soient S un k-schéma et G un k-schéma affine en groupes de type fini et plat[7]. Soit X un k-schéma et soient $p : X \to S$ un morphisme localement de type fini et $\Phi : G \times X \to X$ une action de G sur X. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- a) p est un G-torseur au dessus de S ;
- b) il existe un recouvrement $\{U_i \to S\}_{i \in I}$ de S pour la topologie plate tel que, $\forall i \in I$, $X_{U_i} \cong G_{U_i}$.

□

1.5 Représentations

Dans cette section on introduira les représentations linéaires d'un k-schéma affine en groupes où k est un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.5.1. Soient k un anneau, G un k-foncteur en groupes (cf. déf. 1.2.9), V un k-module fixé et X_V le foncteur (de la catégorie des k-algèbres à la catégorie des R-modules)

$$\begin{aligned} X_V : \quad & k\text{-}\mathcal{A}lg \to R - \mathcal{M}od \\ & R \mapsto V \otimes_k R. \end{aligned}$$

Soit $G \times X_V \to X_V$ une action (cf. déf. 1.4.1). On suppose de plus que pour toute k-algèbre R l'action $\rho : G(R) \times X_V(R) \to X_V(R)$ soit R-linéaire. On dira que (V, ρ) est une k-**représentation linéaire de G** (ou plus simplement k-**représentation de G**).
□

Remarque 1.5.2. Soit $GL_V(\bullet) = Aut_R(V \otimes \bullet)$ un k-foncteur en groupes. La donnée d'une représentation (V, ρ) d'un foncteur en groupes G est équivalente à la donnée d'un morphisme $\phi : G \to GL_V$. Il suffit, pour tout $g \in G(R)$, de poser $\phi(g) := \rho(g, \bullet)$.
□

[7]Et donc fidèlement plat car il existe la section unité $Spec(k) \to G$.

Définition 1.5.3. Soient k un anneau, G un k-foncteur en groupes, (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux k-représentations linéaires de G. Un **morphisme de représentations** $\varphi : (V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$ est la donnée d'un morphisme de k-modules $\varphi : V_1 \to V_2$ qui commute aux actions linéaires, à savoir, pour toute k-algèbre R le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G(R) \times X_{V_1}(R) & \to & X_{V_1}(R) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G(R) \times X_{V_2}(R) & \to & X_{V_2}(R). \end{array}$$

□

On définit une catégorie qui sera utilisée dans la suite :

Définition 1.5.4. Soit k an anneau. On note $Rep_k(G)$ la catégorie des k-représentations linéaires (V, ρ) de G où V est un k-module de type fini et les morphismes entre deux représentations sont comme dans la définition 1.5.3. Si k est un corps alors V est un k-espace vectoriel de dimension finie.

□

Définition 1.5.5. Soit k an anneau. Soit $G := Spec(A)$ un k-schéma affine en groupes. Un k-comodule est la donnée d'un k-module V et d'un morphisme $\sigma : V \to V \otimes_k A$ t.q. les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "id_V"'] & V \otimes_k A \arrow[d, "id_V \otimes \Delta"] \\ V \otimes_k A \arrow[r, "\sigma \otimes id_A"'] & V \otimes_k A \otimes_k A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, equal] & V \otimes_k A \arrow[d, "id_V \otimes \varepsilon"] \\ & V \otimes_k k \end{tikzcd}$$

où $\Delta : A \to A \otimes_k A$ est la comultiplication et $\varepsilon : A \to k$ la counité (cf. déf. 1.1.1).

□

Pour justifier l'introduction de cette dernière définition on rappelle le théorème suivant :

Théorème 1.5.6. Soit k an anneau. Soit $G := Spec(A)$ un k-schéma affine en groupes. Se donner un k-comodule revient à se donner une k-représentation linéaire de G.

Preuve (Esquisse) : se donner une représentation linéaire (V, ρ) de G revient à se donner un morphisme $\phi : G \to GL_V$ (cf. remarque 1.5.2). On lui associe le morphisme σ, qui donne à V une structure de comodule, comme suit :

$$\sigma : V \to V \otimes_k A, \qquad v \mapsto \phi(1_{G(A)})(v \otimes 1).$$

Dans l'autre sens, soit $\sigma : V \to V \otimes_k A$ la structure de comodule sur V, d'où

$$\sigma_R : V \otimes_k R \to V \otimes_k R \otimes_k A$$

et

$$\sigma_R(m) := \sum_i^r m_i \otimes a_i, \qquad m, m_i \in V \otimes_k R,$$

on retrouve ϕ en construisant le foncteur $G(\bullet) \to End_\bullet(V \otimes_k \bullet)$ t.q. pour toute k-algèbre R

$$G(R) \longrightarrow End_R(V \otimes_k R)$$

$$(g : A \to R) \longmapsto (m) \mapsto \textstyle\sum_i^r m_i \otimes g(a_i).$$

.

$\square$

Pour une preuve complète et plus de détails sur le sujet voir par exemple [33], Ch. 3 ou [19], Ch. I, §2.7.

Chapitre 2

Le schéma en groupes fondamental

Dans ce chapitre on définira le schéma en groupes fondamental, introduit par Nori dans [25] et [26], associé à un k-schéma X complet, réduit et connexe, k étant un corps parfait. On rappellera aussi la construction du schéma en groupes fondamental d'après Gasbarri (cf. [12]) relatif à un B-schéma X, où B est un schéma de Dedekind, X un schéma réduit, irréductible (donc connexe) et le morphisme structural $j : X \to B$ est fidèlement plat. Dans les deux cas on supposera aussi l'existence d'un point, respectivement $x : Spec(k) \to X$ et $x : B \to X$. On verra que les deux constructions coïncident lorsque B est le spectre d'un corps parfait et j est propre. Pour la première construction (d'après Nori) on aura besoin d'un outil fondamental, à savoir la notion de catégorie tannakienne (neutre) sur un corps k. On aimerait que la présentation de ces catégories soit le plus possible *self-contained*. C'est pour cette raison qu'on a ajouté une petite sous-section (voir 2.1.1) où on rappelle les définitions de catégories additives et abéliennes ; ça évitera au lecteur de les chercher ailleurs. Les informations seront tirées principalement de [6] et [7] mais aussi par [28], [31], Appendix B pour une première introduction et [21], VII, §1, §2 et §7. Aucun résultat original sera présenté dans ce chapitre. Cependant on complétera des démonstrations à peine esquissées dans le travail de Nori. Pour ceci je remercie M. Emsalem et N. Borne pour leur précieuse aide.

2.1 Catégories tannakiennes

2.1.1 Catégories additives et abéliennes

Définition 2.1.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **catégorie additive**[1] si

1) $\mathcal{C}$ possède un **objet zéro** qu'on note $0_{\mathcal{C}}$, (ou 0 si ça ne crée pas de confusion) c'est-à-dire un objet tel que, $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$, les ensembles des morphismes $Hom_{\mathcal{C}}(0, X)$ et $Hom_{\mathcal{C}}(X, 0)$ sont constitués par un et un seul élément[2].

2) Pour tout couple $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ il existe un objet *somme*, qu'on notera $X \oplus Y$.[3]

3) Pour tout couple $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ l'ensemble $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un groupe abélien. De plus, pour tout triplet $X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ la composition

$$\begin{array}{rccc} \psi(\bullet,\bullet): & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ \\ & (f: X \to Y, g: Y \to Z) & \mapsto & \psi(f,g) = g \circ f : X \to Z \end{array}$$

est bilinéaire, c'est-à-dire $\psi_g := \psi(\bullet, g) : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ et $\psi_f := \psi(f, \bullet) : Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ sont des homomorphismes de groupes pour tout $g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ et pour tout $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

$\square$

On rappelle la définition de noyau et co-noyau pour une catégorie qui possède un objet zéro :

Définition 2.1.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie qui possède un objet zéro. Soient $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ et $\varphi : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$. On appelle **noyau** (et l'on notera $\mathbf{ker}(\varphi)$) le couple (K, μ) où $K \in Ob(\mathcal{C})$ et $(\mu : K \to X) \in Hom_{\mathcal{C}}(K, X)$ si

1) $\varphi \circ \mu = 0$.[4]

2) Pour tout $J \in Ob(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $\tau \in Hom_{\mathcal{C}}(J, X)$ tel que $\varphi \circ \tau = 0$, il existe un unique morphisme $\tau' \in Hom_{\mathcal{C}}(J, K)$ tel que $\tau = \mu \circ \tau'$ comme montré

[1] Pour en savoir plus voir par exemple [17], II, §9 ou [21], VIII.

[2] Ça revient à dire que dans $\mathcal{C}$ il y a un objet final, un objet initial et ils coincident.

[3] Il existe donc un objet somme pour un nombre arbitraire fini d'objets de $\mathcal{C}$.

[4] Le morphisme zéro, à savoir l'unique morphisme $K \to 0 \to Y$, 0 étant l'objet zéro. Ce morphisme, dans une catégorie additive, est l'élément neutre du groupe abélien (avec nos notations) $Hom_{\mathcal{C}}(K, Y)$.

par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} J \arrow[d, dashed, "\tau'"'] \arrow[dr, "\tau"] & & \\ K \arrow[r, "\mu"] & X \arrow[r, "\varphi"] & Y. \end{tikzcd}$$

L'objet K sera appelé tout simplement **objet noyau** ou **objet ker**. Avec les mêmes notations on appelle **co-noyau** (et l'on notera **coker**(φ)) le couple (C, μ) où $C \in Ob(\mathcal{C})$ et $(\mu : Y \to C) \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, C)$ si

1) $\mu \circ \varphi = 0$.

2) Pour tout $L \in Ob(\mathcal{C})$ et pour tout morphisme $\tau \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, L)$ tel que $\tau \circ \varphi = 0$, il existe un unique morphisme $\tau' \in Hom_{\mathcal{C}}(C, L)$ tel que $\tau = \tau' \circ \mu$ comme montré par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] & Y \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\tau"'] & C \arrow[d, dashed, "\tau'"] \\ & & L. \end{tikzcd}$$

L'objet C sera appelé tout simplement **objet co-noyau** ou **objet coker**.

□

Définition 2.1.3. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque, $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ et $\varphi : X \to Y$ un morphisme. Si pour tout $A \in Ob(\mathcal{C})$ et pour tout couple de morphismes $\alpha, \beta : A \to X$ on a

$$\varphi \circ \alpha = \varphi \circ \beta \Longrightarrow \alpha = \beta \tag{2.1}$$

on dit que φ est un **monomorphisme**. Si pour tout $B \in Ob(\mathcal{C})$ et pour tout couple de morphismes $\alpha, \beta : Y \to B$ on a

$$\alpha \circ \varphi = \beta \circ \varphi \Longrightarrow \alpha = \beta \tag{2.2}$$

on dit que φ est un **épimorphisme**.

□

Définition 2.1.4. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **catégorie abélienne**[5] si

1) $\mathcal{C}$ est une catégorie additive (cf. définition 2.1.1).

[5]Pour en savoir plus voir [16] III, §1, ou encore et surtout [17], II, §9.

2) Tout morphisme possède un noyau et un co-noyau (cf. définition 2.1.2).

3) Tout monomorphisme est le noyau de son co-noyau : si $\varphi : X \to Y$ est un monomorphisme, soit (C, μ) son co-noyau, on demande que le noyau de $\mu : Y \to C$ soit exactement le couple (X, φ).

4) Tout épimorphisme est le co-noyau de son noyau : si $\varphi : X \to Y$ est un épimorphisme, soit (K, μ) son noyau, on demande que le co-noyau de $\mu : K \to X$ soit exactement le couple (Y, φ).

5) Tout morphisme $\varphi : X \to Y$ peut être exprimé comme composition d'un épimorphisme $e : X \to X'$ et un monomorphisme $m : X' \to Y$.

□

Je cite, sans entrer dans les détails, les premiers exemples de catégories abéliennes.

Exemple 2.1.5. La catégorie $\mathcal{A}b$ des groupes abéliens, la catégorie A-$\mathcal{M}od$ des modules sur un anneau A unitaire et commutatif, la catégorie $\mathcal{A}b(X)$ des faisceaux en groupes abéliens sur un espace topologique X, la catégorie $\mathcal{O}_X$-$\mathcal{M}od$ des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur un schéma X, ainsi que $\mathcal{Q}coh(X)$ et $\mathcal{Q}coh(X)$ les catégories, respectivement, des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents et cohérents sur un schéma X sont toutes des catégories abéliennes.

□

2.1.2 Catégories monoïdales

On commence par introduire la notion de catégorie monoïdale (on suivra dans la suite le point de vue de [7]).

Définition 2.1.6. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **catégorie monoïdale** ou **tensorielle** si :

1) il existe un bi-foncteur

$$\begin{array}{rccc} \bigotimes : & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ & (X, Y) & \mapsto & X \otimes Y := \bigotimes(X, Y) \end{array} \tag{2.3}$$

qu'on appelle **tenseur** ; on appelle **produit tensoriel** le produit $\otimes$.

2) On appelle un objet U de $\mathcal{C}$ **objet unité** s'il existe un isomorphisme $u : U \to U \otimes U$ et si le foncteur $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $X \mapsto U \otimes X$ est une équivalence de catégories[6]. On supposera toujours qu'il existe un **objet unité** qu'on notera $1_{\mathcal{C}}$.

3) Définissons les foncteurs

$$\begin{array}{rccc} F_{(12)3}: & \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (X,Y,Z) & \mapsto & (X\otimes Y)\otimes Z \\ F_{1(23)}: & \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (X,Y,Z) & \mapsto & X\otimes(Y\otimes Z), \end{array} \tag{2.4}$$

il existe les isomorphismes naturels suivants :

a) l' **associateur**[7] :

$$as : F_{(12)3} \longrightarrow F_{1(23)}. \tag{2.5}$$

as est donc la donnée, $\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$, d'un isomorphisme fonctoriel :

$$as_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \longrightarrow X \otimes (Y \otimes Z); \tag{2.6}$$

b) la **loi unité à gauche** :

$$ga : \bigotimes(1_{\mathcal{C}}, \bullet) = 1_{\mathcal{C}} \otimes \bullet \longrightarrow Id_{\mathcal{C}}. \tag{2.7}$$

ga est donc la donnée, $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$, d'un isomorphisme fonctoriel :

$$ga_X : 1_{\mathcal{C}} \otimes X \to X; \tag{2.8}$$

c) La **loi unité à droite** :

$$dr : \bigotimes(\bullet, 1_{\mathcal{C}}) = \bullet \otimes 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow Id_{\mathcal{C}} \tag{2.9}$$

dr est donc la donnée, $\forall X \in Ob(\mathcal{C})$, d'un isomorphisme fonctoriel :

$$dr_X : X \otimes 1_{\mathcal{C}} \to X; \tag{2.10}$$

Les isomorphismes as, ga, dr doivent satisfaire aux conditions (qu'on appellera **conditions de cohérence**) qui, pour des objets $W, X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ sont décrites par les diagrammes commutatifs suivants :

[6] Deux objets unité sont isomorphes (cf. [7] Proposition 1.3 (b)).

[7] On dira plus simplement que $\bigotimes$ est associatif.

i) le **diagramme pentagon** :

$$\begin{tikzcd}
((W \otimes X) \otimes Y) \otimes Z \arrow[r] \arrow[d, "as_{W,X,Y} \otimes Id_Z"'] & (W \otimes X) \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r] & W \otimes (X \otimes (Y \otimes Z)) \\
(W \otimes (X \otimes Y)) \otimes Z \arrow[rr, "as_{W,X \otimes Y,Z}"] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & W \otimes ((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[u, "Id_W \otimes as_{X,Y,Z}"']
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

où les deux isomorphismes horizontaux que je n'ai pas pu écrire sur le diagramme sont, de gauche à droite, $as_{W \otimes X,Y,Z}$ et $as_{W,X,Y \otimes Z}$.

ii) le **diagramme triangle** : comme pour le point i) on choisit deux objets $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ et on écrit :

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes 1_{\mathcal{C}}) \otimes Y \arrow[rr, "as_{X,1_{\mathcal{C}},Y}"] \arrow[dr, "dr_X \otimes Id_Y"'] & \circlearrowleft & X \otimes (1_{\mathcal{C}} \otimes Y) \arrow[dl, "Id_X \otimes ga_Y"] \\
& X \otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

□

<u>**Exemple**</u> **2.1.7.** La catégorie des groupes abéliens $\mathcal{A}b$ (vue comme catégorie $\mathbb{Z}$-$\mathcal{M}od$) munie du produit tensoriel usuel $\otimes$ entre $\mathbb{Z}$-modules est une catégorie monoïdale où $\mathbb{Z}$ joue le rôle d'objet unité.

□

<u>**Remarque**</u> **2.1.8.** Dans l'exemple 2.1.7 on peut comprendre à quoi peut servir le diagramme pentagon. En effet le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & (X \otimes Y) \otimes Z & \rightarrow & X \otimes (Y \otimes Z) \\ & (x \otimes y) \otimes z & \mapsto & -x \otimes (y \otimes z) \end{array}$$

est bien un isomorphisme mais il ne satisfait évidemment pas le diagramme pentagon. On en déduit que un tel α, qui va contre notre idée intuitive d'associativité, ne peut pas être un associateur. □

<u>**Définition**</u> **2.1.9.** Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **catégorie monoïdale symétrique** si $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale (cf. déf. 2.1.6) et s'il existe un isomorphisme naturel

$$\gamma : \bigotimes \longrightarrow \widetilde{\bigotimes} \tag{2.13}$$

où le foncteur $\widetilde{\bigotimes}$ est comme suit :

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\bigotimes}: & \mathcal{C}\times\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & (X,Y) & \mapsto & Y\otimes X. \end{array} \tag{2.14}$$

γ est donc la donnée, $\forall X,Y \in Ob(\mathcal{C})$, d'un isomorphisme dans $\mathcal{C}$:

$$\gamma_{X,Y} : X\otimes Y \longrightarrow Y\otimes X \tag{2.15}$$

où en plus on demande que $\gamma_{Y,X}\circ\gamma_{X,Y} = Id_{X\otimes Y}$.[8] De plus, pour $X,Y,Z \in Ob(\mathcal{C})$ on demande que les deux diagrammes suivants, qu'on appelle **diagrammes hexagon**, commutent. Voilà le premier :

$$\begin{tikzcd} X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "as^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\gamma_{X,Y\otimes Z}"'] & (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "\gamma_{X,Y}\otimes Id_Z"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & (Y\otimes X)\otimes Z \arrow[d, "as_{Y,X,Z}"] \\ (Y\otimes Z)\otimes X \arrow[r, "as_{Y,Z,X}"] & Y\otimes(Z\otimes X) \arrow[r, "Id_Y\otimes\gamma_{X,Z}"] & Y\otimes(X\otimes Z), \end{tikzcd} \tag{2.16}$$

et puis le deuxième :

$$\begin{tikzcd} (X\otimes Y)\otimes Z \arrow[r, "as_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "\gamma_{X\otimes Y,Z}"'] & X\otimes(Y\otimes Z) \arrow[r, "Id_X\otimes\gamma_{Y,Z}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & X\otimes(Z\otimes Y) \arrow[d, "as^{-1}_{X,Z,Y}"] \\ Z\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "as^{-1}_{Z,X,Y}"] & (Z\otimes X)\otimes Y \arrow[r, "\gamma_{X,Z}\otimes Id_Y"] & (X\otimes Z)\otimes Y \end{tikzcd} \tag{2.17}$$

□

Exemple 2.1.10. Soit A un anneau unitaire et comme d'habitude commutatif. Soit A-*mod* la catégorie des A-modules de type fini. La catégorie A-*mod* munie du produit tensoriel $\otimes$ usuel est une catégorie monoïdale symétrique.

□

Définition 2.1.11. Soit $(\mathcal{C},\otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique. Un objet $L \in Ob(\mathcal{C})$ est dit **inversible** si le foncteur

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & X & \mapsto & L\otimes X \end{array} \tag{2.18}$$

est en fait une équivalence de catégories.

□

[8] On dit souvent, plus simplement, que $\otimes$ est commutatif.

Remarque 2.1.12. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique. Si un objet $L \in Ob(\mathcal{C})$ est inversible il s'ensuit que le foncteur $\mathcal{L}$ défini dans la définition 2.1.11 est en particulier essentiellement surjectif, et donc il existe un objet $L' \in Ob(\mathcal{C})$ tel que $L \otimes L' \cong 1_{\mathcal{C}}$. On pose $L^{-1} := L'$ et on dira que L^{-1} est le (seul, à isomorphisme près) **inverse** de L. Le réciproque est vrai aussi : supposons qu'il existe L' t.q. $L \otimes L' \cong 1_{\mathcal{C}}$, alors on considère les foncteurs $\mathcal{L}$ comme dans la définition 2.1.11 et $\mathcal{L}'$ qui associe à tout objet X de $\mathcal{C}$ l'objet $L' \otimes X$; on voit rapidement que $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}' \cong \mathcal{L}' \circ \mathcal{L} \cong Id_{\mathcal{C}}$ et donc $\mathcal{L}$ est une équivalence de catégories.

□

Exemple 2.1.13. Soit A-$\mathcal{M}od$ comme dans l'exemple 2.1.10. Un A-module $L \in Ob(A$-$mod)$ est inversible si et seulement si L est projectif et de rang 1 (cf. [28], §1, 0.2.2.2).

□

Définition 2.1.14. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique. Soient $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ et supposons que le foncteur contravariant

$$\begin{array}{rccc} Hom_{X,Y}: & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{E}ns \\ & T & \mapsto & Hom_{\mathcal{C}}(T \otimes X, Y) \end{array} \tag{2.19}$$

soit representable (cf. déf. 1.2.3) et donc qu'il existe un objet de $\mathcal{C}$, qu'on note $\underline{Hom}(X, Y)$, t.q. les foncteurs contravariants

$$Hom_{X,Y} \qquad \text{et} \qquad Hom_{\mathcal{C}}(\bullet, \underline{Hom}(X, Y)) \tag{2.20}$$

soient isomorphes. On appelle $\underline{Hom}(X, Y)$ le **morphisme intérieur de X vers Y**.

□

Définition 2.1.15. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique. On définit (s'il existe) $X^{\vee} := \underline{Hom}(X, 1_{\mathcal{C}}) \in Ob(\mathcal{C})$ qu'on appelle **objet dual de X**.

□

Exemple 2.1.16. Soit une fois de plus A-mod comme dans les exemples 2.1.10 et 2.1.13 la catégorie des A-modules de type fini. Alors il existe un isomorphisme de A-modules

$$\underline{Hom}(X, Y) \cong Hom_{A\text{-}mod}(X, Y). \tag{2.21}$$

et $X^\vee \cong Hom_{A\text{-}mod}(X, A)$.

□

Remarque 2.1.17. Soient $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique et X, Y un couple d'objets de $\mathcal{C}$ pour lesquelles il existe $\underline{Hom}(X,Y) \in Ob(\mathcal{C})$. Soit

$$Id_{\underline{Hom}(X,Y)} \in Hom_{\mathcal{C}}(\underline{Hom}(X,Y), \underline{Hom}(X,Y)) \cong Hom_{X,Y}(\underline{Hom}(X,Y)). \tag{2.22}$$

où $Hom_{X,Y}(\underline{Hom}(X,Y))$, défini dans la définition 2.1.14, est isomorphe à

$$Hom_{\mathcal{C}}(\underline{Hom}(X,Y) \otimes X, Y).$$

On note enfin $ev_{X,Y} : \underline{Hom}(X,Y) \otimes X \to Y$ le morphisme correspondant à $Id_{\underline{Hom}(X,Y)}$. Plus simplement on notera (si $X^\vee$ existe)

$$ev_{X^\vee} := ev_{X,1_{\mathcal{C}}} : X^\vee \otimes X \to 1_{\mathcal{C}} \tag{2.23}$$

le morphisme correspondant à $Id_{X^\vee}$.
Or, d'après la définition 2.1.14 on a, $\forall T \in Ob(\mathcal{C})$

$$Hom_{\mathcal{C}}(T, X^\vee) \cong Hom_{\mathcal{C}}(T \otimes X, 1_{\mathcal{C}}). \tag{2.24}$$

En remplaçant T avec X et X avec $X^\vee$ on obtient

$$Hom_{\mathcal{C}}(X, (X^\vee)^\vee) \cong Hom_{\mathcal{C}}(X \otimes X^\vee, 1_{\mathcal{C}}). \tag{2.25}$$

Puisque notre catégorie $\mathcal{C}$ est symétrique on a, grâce au foncteur γ défini dans la définition 2.1.9, le morphisme

$$\psi_{X^\vee} := ev_{X^\vee} \circ \gamma : X \otimes X^\vee \longrightarrow X^\vee \otimes X \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}. \tag{2.26}$$

Via l'isomorphisme (2.25) à $\psi_{X^\vee}$ correspond le morphisme

$$i_X : X \longrightarrow (X^\vee)^\vee. \tag{2.27}$$

□

Remarque 2.1.18. La définition de dual qu'on trouve dans [6], §2, (2.1.2) est différente de celle donnée ici.

□

Définition 2.1.19. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique. Si $i_X : X \to (X^\vee)^\vee$, le morphisme introduit dans la remarque 2.1.17 est un isomorphisme on dira que X est un objet **réflexif**. On dit que $\mathcal{C}$ est une **catégorie monoïdale réflexive** si tout $X \in \mathcal{C}$ est réflexif.

□

Exemple 2.1.20. On reprend l'exemple 2.1.16 et on doit malheureusement constater que A-*mod* n'est pas, en général, une catégorie monoïdale réflexive. En effet si par exemple $A := \mathbb{Z}$ et donc les objets de A-*mod* sont en particuliers des groupes abéliens on voit tout de suite que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\vee := Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong 0$. Il s'ensuit que $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\vee)^\vee \cong 0$ et donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas réflexif.

□

Définition 2.1.21. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique. On dit que $\mathcal{C}$ est une **catégorie monoïdale rigide** (ou **catégorie tensorielle rigide**) si

i) $\underline{Hom}(X, Y)$ existe pour tout couple $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ (cf. déf. 2.1.14).

ii) $\mathcal{C}$ est une *catégorie monoïdale réflexive* (cf. déf. 2.1.19).

iii) Considérons les foncteurs

$$T_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ (X_1, X_2, Y_1, Y_2) & \mapsto & \underline{Hom}(X_1, Y_1) \otimes \underline{Hom}(X_2, Y_2) \end{array}$$

et

$$T_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ (X_1, X_2, Y_1, Y_2) & \mapsto & \underline{Hom}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes X_2) \end{array}$$

X_i et Y_i parcourant les objets de $\mathcal{C}$ et soit φ l'application naturelle

$$\varphi : \begin{array}{ccc} T_1 & \longrightarrow & T_2 \\ \underline{Hom}(X_1, Y_1) \otimes \underline{Hom}(X_2, Y_2) & \mapsto & \underline{Hom}(X_1 \otimes X_2, Y_1 \otimes X_2). \\ f_1 \otimes f_2 & \mapsto & g \end{array}$$

où $g(x_1 \otimes x_2) = f_1(x_1) \otimes f_2(x_2)$ (et prolongé par linéarité). On demande que φ soit un isomorphisme naturel.

□

Exemple 2.1.22. La catégorie A-$\mathcal{P}roj$ des A-modules de type fini et projectifs est une catégorie monoïdale rigide (cf. [7], example (1.23)). Par conséquent il en est de même pour la catégorie k-mod des k-espaces vectoriels de dimension finie.
□

Dans la suite on s'occupera quasi exclusivement de catégories monoïdales (au moins) symétriques donc les définitions et propositions qui suivront concerneront ces catégories.

Définition 2.1.23. Soient $(\mathcal{C}, \otimes)$ et $(\mathcal{C}', \otimes')$ deux catégories monoïdales symétriques et soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur. F est dit **foncteur tensoriel** si les conditions suivantes sont satisfaites : soit $\bigotimes$ comme dans la définition 2.1.6, on demande d'abord qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\varphi : F \circ \bigotimes \longrightarrow \bigotimes{}' \circ (F \times F), \tag{2.28}$$

ça revient à dire que pour tout couple $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ on a un isomorphisme

$$\varphi_{X,Y} : F(X \otimes Y) \cong F(X) \otimes' F(Y). \tag{2.29}$$

En plus on demande que φ sot compatible aux contraintes d'associativité et de commutativité :

i) $\forall X, Y, Z \in Ob(\mathcal{C})$ on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) & \leftarrow & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) & \leftarrow & F(X \otimes (Y \otimes Z)) \\ {\scriptstyle as'_{F(X),F(Y),F(Z)}} \uparrow & & \circlearrowleft & & \uparrow {\scriptstyle F(as_{X,Y,Z})} \\ (F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) & \leftarrow & F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) & \leftarrow & F((X \otimes Y) \otimes Z), \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont $Id_{F(X)} \otimes' \varphi_{Y,Z}$ et $\varphi_{X,Y \otimes Z}$ (première ligne, de gauche vers droite) et puis $\varphi_{X,Y} \otimes' Id_{F(Z)}$ et $\varphi_{X \otimes Y,Z}$ (seconde ligne, de gauche vers droite).

ii) $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes' F(Y) & \xleftarrow{\varphi_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle \gamma'_{F(X),F(Y)}} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow {\scriptstyle F(\gamma_{X,Y})} \\ F(Y) \otimes' F(X) & \xleftarrow{\varphi_{Y,X}} & F(Y \otimes X) \end{array}$$

iii) $F(1_{\mathcal{C}}) \simeq 1_{\mathcal{C}'}$.

□

Proposition 2.1.24. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux catégories monoïdales rigides et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur tensoriel alors $F(\underline{Hom}(X,Y)) \simeq \underline{Hom}(F(X), F(Y))$ et en particulier $F(X^\vee) \simeq F(X)^\vee$ (cf. [7], Proposition 1.9).

□

Définition 2.1.25. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales symétriques (pas forcément rigides) et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur tensoriel. On dit que F est une **équivalence de catégories monoïdales symétriques** si, tout simplement, F est une équivalence de catégories.

□

On donne maintenant l'importante définition de morphisme entre foncteurs tensoriels où, encore une fois, on ne demandera pas que les catégories concernées soient rigides :

Définition 2.1.26. Soient $(\mathcal{C}, \otimes)$ et $(\mathcal{C}', \otimes')$ deux catégories monoïdales symétriques et $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ deux foncteurs tensoriels. Soient $\varphi : F \circ \bigotimes \longrightarrow \bigotimes' \circ (F \times F)$ comme dans la définition 2.1.23 et de façon analogue $\gamma : G \circ \bigotimes \longrightarrow \bigotimes' \circ (G \times G)$. Soit $\lambda : F \to G$ une application naturelle. On dit que λ est un **morphisme de foncteurs tensoriels** si on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes' F(Y) & \xleftarrow{\varphi_{X,Y}} & F(X \otimes Y) \\ {\scriptstyle \lambda_X \otimes' \lambda_Y} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow {\scriptstyle \lambda_{X \otimes Y}} \\ G(X) \otimes' G(Y) & \xleftarrow{\gamma_{X,Y}} & G(X \otimes Y), \end{array}$$

ce qu'on peut résumer en disant que λ est un morphisme commutant aux produits tensoriels. On notera $Hom^{\otimes}(F, G)$ l'ensemble des morphismes entre foncteurs tensoriels.

□

Proposition 2.1.27. Soient $(\mathcal{C}, \otimes)$ et $(\mathcal{C}', \otimes')$ deux catégories monoïdales rigides, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ deux foncteurs tensoriels et $\lambda : F \to G$ un morphisme de foncteurs tensoriels. Alors λ est un isomorphisme.

Preuve : d'après la proposition 2.1.24 on a

$$F(X)^\vee \simeq F(X^\vee) \to G(X^\vee) \simeq G(X)^\vee,$$

d'où l'existence d'un morphisme $\mu : G \to F$ qui est, par construction, un quasi-inverse de λ (cf. [7], Proposition 1.13).

$\square$

Or, soit k un corps et R une k-algèbre. Le foncteur

$$\begin{aligned} \psi_R : \quad & k\text{-}\mathcal{M}od \to R\text{-}\mathcal{M}od \\ & V \mapsto V \otimes_k R \end{aligned}$$

est un foncteur tensoriel.

Définition 2.1.28. Soient k un corps, $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique et $F, G : \mathcal{C} \to k\text{-}\mathcal{M}od$ deux foncteurs tensoriels. On définit le foncteur[9]

$$\begin{aligned} \underline{Hom}_k^{\otimes}(F,G) : \quad & k\text{-}\mathcal{A}\text{lg} \to \mathcal{E}\text{ns} \\ & R \mapsto Hom^{\otimes}(\psi_R \circ F, \psi_R \circ G). \end{aligned}$$

où $Hom^{\otimes}$ a été défini dans la définition 2.1.26. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale rigide on notera, motivés par la proposition 2.1.27, $\underline{Isom}_k^{\otimes}(F,G) := \underline{Hom}_k^{\otimes}(F,G)$.

$\square$

Remarque 2.1.29. Soit $(\mathcal{C}, \otimes)$ une catégorie monoïdale symétrique qui soit en plus abélienne (cf. définition 2.1.4). L'ensemble $R := End_{\mathcal{C}}(1_{\mathcal{C}}) := Hom_{\mathcal{C}}(1_{\mathcal{C}}, 1_{\mathcal{C}})$ a une structure d'anneau commutatif et $\mathcal{C}$ a une structure de catégorie R-linéaire, à savoir les groupes $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, (pour $X, Y \in \mathcal{C}$) ont une structure de R-module.

$\square$

2.1.3 Catégories tannakiennes neutres

Dans cette section on définira les catégories tannakiennes neutres sur un corps et on en rappellera leur principales propriétés.

Dorénavant k sera un corps mais on n'oubliera pas de le rappeler si nécessaire.

Définition 2.1.30. Soient k un corps et $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, k-linéaire, monoïdale et symétrique. Soit R une k-algèbre et $\omega : \mathcal{C} \longrightarrow R\text{-}\mathcal{M}od$ un foncteur tensoriel (cf. déf 2.1.23). On dit que ω est un **foncteur fibre sur** R s'il est k-linéaire, exact et fidèle. Si

[9] A ne pas confondre avec l'homomorphisme intérieur de la définition 2.1.14.

$\mathcal{C}$ a, en plus, une structure de catégorie monoïdale rigide abélienne et si $End(1_{\mathcal{C}}) \cong k$ alors il suffit de demander que le foncteur tensoriel ω soit k-linéaire et exact pour qu'il soit un foncteur fibre. En effet il est automatiquement fidèle, d'après [7], Proposition 1.19.

□

Remarque 2.1.31. Soient k, R, ω comme dans la définition 2.1.30 et $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, k-linéaire, monoïdale et rigide. D'après [6], 2.8 un tel foncteur ω a valeurs dans la sous-catégorie R-$\mathcal{P}roj$ (cf. exemple 2.1.22) de R-$\mathcal{M}od$.

□

Définition 2.1.32. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **catégorie tannakienne neutre sur k**, k étant un corps, si les axiomes suivants sont satisfaits :

1) $\mathcal{C}$ est une *catégorie abélienne* (cf. définition 2.1.4) ;

2) $\mathcal{C}$ est une *catégorie monoïdale rigide* (cf. définition 2.1.21) munie donc d'un *produit tensoriel* qu'on note $\otimes$ et d'une *unité* qu'on note $1_{\mathcal{C}}$.

3) On demande que $End_{\mathcal{C}}(1_{\mathcal{C}})$ (voir la remarque 2.1.29) soit un corps isomorphe à k.

4) Il existe un foncteur fibre (cf. déf. 2.1.30)

$$\omega : \mathcal{C} \longrightarrow k\text{-}\mathcal{M}od \tag{2.30}$$

On notera une telle catégorie $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$.

□

Définition 2.1.33. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories tannakiennes neutres et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un foncteur tensoriel. Alors F est une **équivalence de catégories tannakiennes neutres** si il est une équivalence de catégories (cf. aussi déf 2.1.25).

□

Exemple 2.1.34. Soit k un corps et G un schéma affine en groupes sur k. La catégorie (cf. définition 1.5.4) $Rep_k(G)$ des k-représentations linéaires (de type fini) de G est une catégorie tannakienne neutre sur k, l'objet unité étant la représentation triviale et le foncteur fibre étant le foncteur oubli $(V, \rho) \mapsto V$. En particulier si $G = Spec(k)$ on a

$Rep_k(G) \simeq k\text{-}mod$, la catégorie des k-espace vectoriels de dimension finie, qui est donc une catégorie tannakienne neutre sur k.

□

Or, une représentation de G est la donnée d'un k-module V et d'un morphisme $\phi_V : G \to GL_V$ (cf. rem. 1.5.2) donc à un élément de $G(R)$ on associe un élément de $GL_V(R)$. On répète ça pour toute représentation (V, ϕ_V). En bref on sait associer à un élément de $G(R)$ un élément de $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)(R)$.

<u>Proposition</u> 2.1.35. Soit k un corps et G un k-schéma affine en groupes. Soit $Rep_k(G)$ la catégories des représentations linéaires de G (dont on a parlé dans l'exemple 2.1.34). Soit

$$\begin{array}{rccc} \omega : & Rep_k(G) & \to & k\text{-}mod \\ & (V, \phi_V) & \mapsto & V \end{array}$$

le foncteur oubli. On pose $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega) := \underline{Isom}_k^{\otimes}(\omega, \omega)$ (cf. déf. 2.1.28). L'application naturelle de foncteurs de k-algèbres :

$$\alpha : G \to \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$$

est un isomorphisme.

<u>Preuve</u> : voir [7], Proposition 2.8.

□

On a plus que ça. En effet on a le théorème suivant (pour une preuve voir [7], Theorem 2.11.) qui est sans doute le résultat plus important de cette section et on l'énonce ici de suite :

<u>Théorème</u> 2.1.36. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k. Alors

- 1) le foncteur $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ est représentable par un k-schéma affine en groupes G.
- 2) le foncteur fibre ω induit une équivalence de catégories tannakiennes neutres (cf. déf. 2.1.33) $\mathcal{C} \simeq Rep_k(G)$.

□

On énonce maintenant un résultat (cf. [7], Corollary 2.9) qui met en relation les foncteurs tensoriels entre catégories tannakiennes neutres sur k et les morphismes entre schémas affine en groupes sur k :

Proposition 2.1.37. Soit $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ et $(\mathcal{C}', \otimes', \omega', 1_{\mathcal{C}'})$ deux catégories tannakiennes neutres sur un corps k. Soient, au moyen du théorème 2.1.36, $G := \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ et $G' := \underline{Aut}_k^{\otimes'}(\omega')$ deux k-schémas affines en groupes. Il existe une correspondance bijective entre les foncteurs tensoriels $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ et les morphismes de k-schémas affines en groupes $G' \to G$.

□

On continue en modifiant légèrement la définition 2.1.28 à un cas (un tout petit peu) plus général. La différence est que dans la définition 2.1.28 on a juste considéré des foncteurs vers la catégorie des k-$\mathcal{M}od$ alors qu'ici on prendra comme *catégorie but* R-$\mathcal{M}od$ pour une k-algèbre R quelconque :

Définition 2.1.38. Soient k un corps, R une k-algèbre, $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale symétrique et $F, G : \mathcal{C} \to R$-$\mathcal{M}od$ deux foncteurs tensoriels ; on définit le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{Hom}_R^{\otimes}(F,G) : \quad & R\text{-}\mathcal{A}\mathrm{lg} \to \mathcal{E}\mathrm{ns} \\ & R' \mapsto Hom^{\otimes}(\psi_{R'} \circ F, \psi_{R'} \circ G), \end{aligned}$$

où $\psi_{R'} : R$-$\mathcal{M}od \to R'$-$\mathcal{M}od$, $M \mapsto M \otimes_R R'$. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale rigide et F, G ont valeurs dans la catégorie monoïdale rigide R-$\mathcal{P}roj$ on notera, toujours motivés par la proposition 2.1.27, $\underline{Isom}_R^{\otimes}(F,G) := \underline{Hom}_R^{\otimes}(F,G)$.

□

Or, soient k un corps, R une k-algèbre et $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k ; en plus de ça on considère un foncteur fibre (cf. déf. 2.1.30) $\eta : \mathcal{C} \to R$-$\mathcal{M}od$. Soit $G \simeq \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ un k-schémas affine en groupes (cf. théorème 2.1.36). Soit $\omega_R := \varphi_R \circ \omega$ où $\varphi_R : k$-$\mathcal{M}od \to R$-$\mathcal{M}od$, $V \mapsto V \otimes_k R$. On considère le foncteur

$$\underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta) : \quad R\text{-}\mathcal{A}lg \quad \to \quad \mathcal{E}ns$$

qu'on a défini dans la définition 2.1.38. On a une action de $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ sur $\underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)$:

$$\underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta) \quad \times \quad \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega) \quad \to \quad \underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta),$$

cette action est la donnée, pour toute R-algèbre R', d'une action au sens usuel comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} \underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)(R') & \times & \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)(R') & \to & \underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)(R'), \\ (x & , & g) & \mapsto & y := x \circ g. \end{array}$$

Or, si on se donne $x, y \in \underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)(R')$, il est clair que l'élément $g := x^{-1} \circ y \in \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)(R')$ et donc $\exists g$ t.q. $y := x \circ g$. De plus, un tel g est unique, ce qui nous garantit que l'action qu'on vient de définir est simplement transitive. Si on pouvait dire que $\underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)$ est representable par un schéma affine fidèlement plat sur $Spec(R)$ on conclurait que $\underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)$ est un $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$-torseur sur $Spec(R)$. C'est effectivement le cas, comme le théorème suivant nous confirme :

<u>Théorème</u> 2.1.39. Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k et R une k-algèbre. Pour tout foncteur fibre $\eta : \mathcal{C} \to R\text{-}\mathcal{M}od$ le foncteur $\underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)$ est representable par un schéma affine fidèlement plat sur $Spec(R)$ et c'est donc un $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$-torseur.

<u>*Preuve*</u> : voir [7], Theorem 3.2. (a).

□

Une conséquence en est le théorème suivant :

<u>Théorème</u> 2.1.40. Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k et R une k-algèbre. Soit $Fib_{Spec(R)}(\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs fibres $\{\eta : \mathcal{C} \to R\text{-}\mathcal{M}od\}$; le foncteur

$$Fib_{Spec(R)}(\mathcal{C}) \to G\text{-Tors}_R$$
$$\eta \mapsto \underline{Isom}_R^{\otimes}(\omega_R, \eta)$$

est une équivalence entre la catégorie des foncteurs fibres sur R et celle de G-torseurs sur $Spec(R)$, où $G := \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$.

<u>*Preuve*</u> : voir [7], Theorem 3.2. (b) mais aussi le théorème 2.1.46 dans cette section.

□

<u>Corollaire</u> 2.1.41. Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k et R une k-algèbre. Deux foncteurs fibres $\eta, \eta' \in Fib_{Spec(R)}(\mathcal{C})$ sont toujours localement isomorphes.

<u>*Preuve*</u> : c'est une conséquence du fait que deux G-torseurs sur $Spec(R)$ sont toujours localement isomorphes pour la topologie plate.

□

Pour une question de clarté et simplicité on n'a traité à présent que le cas affine. On peut cependant remplacer, dans les précédents résultats, le schéma $Spec(R)$ avec un k-schéma quelconque S pour d'étendre le point de vu au cas non affine. C'est l'objet de la dernière partie de cette section.

Soit donc S un k-schéma quelconque, on définit ici de suite un foncteur fibre sur S en remarquant que si $S = Spec(R)$ cette définition est équivalente à la définition 2.1.30. On restreint notre attention aux catégories tannakiennes neutre :

Définition 2.1.42. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k et S un k-schéma. Soit $\omega : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}coh(S)$ un foncteur tensoriel (cf. déf. 2.1.23) où $\mathcal{Q}coh(S)$ est la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur S. On dit que ω est un **foncteur fibre sur** S s'il est exact et k-linéaire. Le foncteur ω est donc automatiquement fidèle d'après [7], Proposition 1.19. Un morphisme entre foncteurs fibres sur S est un morphisme au sens de la définition 2.1.26. On notera $Fib_S(\mathcal{C})$ la catégorie des foncteurs fibres sur S.
$\square$

Remarque 2.1.43. Si X est un objet de $\mathcal{C}$ il s'ensuit en fait que $\omega(X)$ est un faisceau localement libre de rang fini sur S (cf. [6], 2.8).
$\square$

On répète pratiquement tout ce qu'on vient de faire avec des petits changements. La définition suivante sera donc équivalente à la définition 2.1.38 lorsque $S = Spec(R)$.

Définition 2.1.44. Soient k un corps, S un k-schéma, $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne neutre sur k et $\alpha, \beta : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}coh(S)$ deux foncteurs fibres ; on définit le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{Hom}^{\otimes}_S(\alpha,\beta) : \quad & S\text{-}\mathcal{S}\mathrm{ch} \to \mathcal{E}\mathrm{ns} \\ & T \mapsto Hom^{\otimes}(\varphi^* \circ \alpha, \varphi^* \circ \beta), \end{aligned}$$

où $\varphi : T \to S$ et $\varphi^* : \mathcal{Q}coh(S) \to \mathcal{Q}coh(T)$, $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \otimes_k \mathcal{O}_S$ et $Hom^{\otimes}(\varphi^* \circ \alpha, \varphi^* \circ \beta)$ is l'ensemble des morphismes entre les foncteurs fibre $\varphi^* \circ \alpha$ et $\varphi^* \circ \beta : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}coh(S)$. D'après la proposition 2.1.27, on notera $\underline{Isom}^{\otimes}_S(\alpha,\beta) := \underline{Hom}^{\otimes}_S(\alpha,\beta)$.
$\square$

Or, d'après [6] §1.11 et §1.13 on sait que, avec les notations de la définition 2.1.44, $\underline{Isom}^{\otimes}_S(\alpha,\beta)$ est representable par un schéma fidèlement plat et affine sur S. Comme pour la cas où $S := Spec(R)$, soit $\omega : \mathcal{C} \to k\text{-}\mathcal{M}od$ le foncteur fibre sur k donnant à

$\mathcal{C}$ sa structure de catégorie tannakienne neutre et soit $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ le k-schéma affine en groupes qui détermine l'équivalence $\mathcal{C} \simeq Rep_k(\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega))$. Alors $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$ agit de façon simplement transitive sur $\underline{Isom}_S^{\otimes}(\omega_S, \alpha)$ où $\omega_S : p^* \circ \omega$, où p est le morphisme structural $p : S \to Spec(k)$ et $p^* : k\text{-}\mathcal{M}od \to \mathcal{Q}coh(S)$. On a donc le théorème suivant :

Théorème 2.1.45. Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k et S un k-schéma. Pour tout foncteur fibre $\eta : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}coh(S)$ le foncteur $\underline{Isom}_S^{\otimes}(\omega_S, \eta)$ est representable par un schéma affine fidèlement plat sur S et c'est donc un $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$-torseur sur S.

□

On a aussi un analogue du théorème 2.1.40. Ce dernier résultat conclut cette section.

Théorème 2.1.46. Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k et S un k-schéma. Le foncteur

$$F : \eta \mapsto \underline{Isom}_S^{\otimes}(\omega_S, \eta)$$

est une équivalence entre la catégorie des foncteurs fibres $\mathcal{C} \to \mathcal{Q}coh(S)$ et celle des G-torseurs sur S, où $G := \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$.

Preuve (Esquisse) : on veut construire un quasi-inverse de F. On se donne donc un G-torseur P sur S et construit un foncteur fibre sur S. Via l'équivalence (cf. th. 2.1.36, 2)) $\mathcal{C} \simeq Rep_k(G)$, à un objet X de $\mathcal{C}$ on fait correspondre une représentation V_X de G sur k. On considère le faisceau $V_X \otimes_k \mathcal{O}_P$ quasi-cohérent sur P. C'est un G-faisceau au sens de [32], Definition 3.46, donc on lui associe (cf. [32], Theorem 4.46) un faisceau quasi-cohérent sur S qu'on note $[V_X \otimes_k \mathcal{O}_P]^G$. Le foncteur $F_P : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}coh(S)$, $X \mapsto [V_X \otimes_k \mathcal{O}_P]^G$ est le foncteur désiré.

□

On a un résultat analogue au corollaire 2.1.41 :

Corollaire 2.1.47. Soient $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k et S un k-schéma. Deux foncteurs fibres $\eta, \eta' \in Fib_S(\mathcal{C})$ sont toujours localement isomorphes.

□

On ne parlera pas de catégories tannakiennes tout-court (pour lesquelles on renvoie à [7] §3 mais aussi [6]) mais on terminera avec une remarque descriptive et sans détails (où tout ce que je dis et surtout que je ne dis pas sur les champs peut être trouvé par exemple dans [32], §3 et §4) qui peut être vu comme le point de départ pour l'étude de ces catégories. On rappelle d'abord le résultat du théorème 2.1.45 qu'on réécrit ici de suite : soit $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ une catégorie tannakienne neutre sur k et S un k-schéma. Soit $G := \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$. On note $Fib_S(\mathcal{C})$ la catégories des foncteurs fibre sur S (cf. déf. 2.1.42) et $G\text{-}Tors_S$ la catégorie des G-torseurs sur S. D'après le théorème 2.1.46 on a l'équivalence de catégories suivante :

$$Fib_S(\mathcal{C}) \simeq G\text{-}Tors_S$$

Or, soit $Sch/Spec(k)$ la catégorie des k-schémas. L'équivalence précédente nous permet de construire la *catégorie fibrée*

$$\underline{Fib}(\mathcal{C}) \to Sch/k$$

la catégorie fibre étant, pour tout $S \in Ob(Sch/k)$, la catégorie $Fib_S(\mathcal{C})$ des foncteurs fibre sur S. Cette catégorie fibrée est en fait une *gerbe*. De plus, $\underline{Fib}(\mathcal{C}) \to Sch/k$, tout comme $G\text{-}Tors \to Sch/k$, est une *gerbe neutre* (cf. par exemple [9]), la neutralité étant assurée par l'existence du foncteur fibre $\omega : \mathcal{C} \to k\text{-}\mathcal{M}od$.

2.2 Le schéma en groupes fondamental

2.2.1 Le schéma en groupes fondamental d'après Nori

Maintenant on va pouvoir construire le schéma en groupes fondamental, d'un k-schéma X (défini par Nori pour un corps k dans [25] et [26]) sous certaines hypothèses qu'on précisera plus tard. L'idée est de construire une catégorie tannakienne neutre sur k à partir du schéma X. Cette catégorie sera donc équivalente à $Rep_k(G)$, la catégorie des représentations de G pour un certain k-schéma affine en groupes G. Ce G sera le schéma en groupes qu'on cherche. La catégorie tannakienne neutre qu'on cherche sera celle des fibrés vectoriels essentiellement finis qu'on définira dans la déf. 2.2.27.

Pour garder le point de vue de Nori on parlera souvent de fibrés vectoriels sur un schéma X au lieu de faisceaux localement libres de rang fini sur X (ça revient au même, cf. [16], II, §5, ex. 5.18) ; j'utiliserai donc librement, à l'occurrence, les deux terminologies.

Soient dorénavant k un corps parfait et X un k-schéma propre, connexe et réduit.

$Vect(X)$ dénotera l'ensemble des classes d'isomorphisme (V) de fibrés vectoriels sur X. Sur $Vect(X)$ sont bien définies les opérations :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & (V) + (V') := (V \oplus V') \\ \text{ii)} & (V) \cdot (V') := (V \otimes V'). \end{array} \tag{2.31}$$

Ici de suite on rappelle un résultat de type Krull-Schmidt pour la preuve duquel on renvoie à [2] :

Définition 2.2.1. Soient V_i des fibrés vectoriels sur X, $i = 1..n$. On dit que $V_1 \oplus .. \oplus V_n$ est une **décomposition directe** pour un fibré vectoriel V sur X si $V \simeq V_1 \oplus .. \oplus V_n$.

□

Définition 2.2.2. Si toute décomposition directe d'un fibré vectoriel V sur X est triviale (à savoir $n = 1$) on dit que V est **indécomposable**.

□

Définition 2.2.3. Soit V un fibré vectoriel sur X et $V \simeq V_1 \oplus .. \oplus V_n$ une décomposition directe de V. Cette décomposition est dite **décomposition de Remak** si V_i est indécomposable pour tout $i = 1..n$. Les V_i seront appelés **facteurs directs indécomposables**.

□

Théorème 2.2.4. Le énoncé de Krull-Schmidt est vrai pour l'ensemble des fibrés vectoriels sur X : tout fibré vectoriel V sur X a une décomposition de Remak. De plus, si $V \simeq V_1 \oplus .. \oplus V_n$ et $V \simeq V_1' \oplus .. \oplus V_m'$ sont deux décompositions de Remak il s'ensuit que $m = n$ et, quitte à réordonner les indices, $V_i \simeq V_i'$. De plus si $V_1 \oplus W \simeq V_2 \oplus W$ alors $V_1 \simeq V_2$ (loi de simplification).

Preuve : cf. [2], §5, Th. 3.

□

On décrit le groupe de Grothendieck associé au monoïde $Vect(X)$, voyons comment :

Définition 2.2.5. On appelle **groupe de Grothendieck de X** le groupe (abstrait) $K(X)$ qu'on construit comme suit : considérons le produit cartésien $A := Vect(X) \times Vect(X)$ et soient $(x_1, y_1) \in A$ et $(x_2, y_2) \in A$ pour $x_i, y_i \in Vect(X)$. La somme dans

A est celle obtenue en additionnant composante par composante et donc $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. On définit sur A une relation d'équivalence :

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1$$

L'ensemble $K(X) := A/\sim$ est le groupe désiré : si on dénote avec 0 l'élément neutre de $Vect(X)$ on voit tout de suite que pour tout $m \in Vect(X)$ l'élément $(m, m) \sim (0, 0)$ joue le rôle de l'élément neutre de $K(X)$ et l'opposé de (x, y) est donné par l'élément (y, x). Le groupe de Grothendieck $K(X)$ est en fait un anneau unitaire d'unité $(\mathcal{O}_X, 0)$ si on considère le produit $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2, y_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2)$.
□

Notation 2.2.6. Pour tout $(V) \in Vect(X)$ on écrit $[V] := ((V), 0)$ et $-[V] := (0, (V))$ un élément de $K(X)$ représentant respectivement $((V), 0)$ et son opposé.
□

Une conséquence du théorème 2.2.4 est le corollaire suivant

Corollaire 2.2.7. Le groupe de Grothendieck $K(X)$ est un groupe abélien libre et l'ensemble de tous les $[V]$ tels que V est indécomposable forme une base pour $K(X)$.
□

Notation 2.2.8. Soit dorénavant $S(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels W sur X qui sont facteurs directs indécomposables de $V^{\otimes n}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On notera $T_m(V)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels W sur X qui sont facteurs directs indécomposables de $V^{\otimes n}$, pour un certain $n \in \mathbb{N}, n \leq m$.
□

On a le résultat suivant :

Proposition 2.2.9. Soit V un fibré vectoriel sur X. Les propriétés suivantes sont équivalentes[10] :

– i) $[V]$ est un entier sur $\mathbb{Z}$ dans $K(X)$.[11]

[10] Cette démonstration complète celle qu'on trouve dans [25], Lemma 3.1. ou [26].
[11] Tout simplement il existe un polynôme unitaire $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $f([V])$ vaut zéro dans $K(X)$.

- ii) $[V] \otimes 1$ est un entier sur $\mathbb{Q}$ dans $K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.[12]
- iii) Il existe deux polynômes f et g, $f \neq g$, à coefficients dans $\mathbb{N}$ tels que $f(V) \simeq g(V)$.
- iv) $S(V)$ (cf. notation 2.2.8) est fini.

Preuve.

- i) $\Rightarrow$ ii) Évident.

- ii) $\Rightarrow$ iii) Affirmer ii) revient à dire qu'il existe un polynôme $h(t) \in \mathbb{Z}[x]$ t.q. $h([V]) = [0]$ (pas forcément unitaire) ou encore qu'il existe deux polynômes $f(t)$ et $g(t)$ à coefficients entiers positifs ou nuls t.q. $f([V]) = g([V])$ et $h(t) = f(t) - g(t)$. D'après les formules (2.31), on a $f([V]) = [f(V)]$ et $g([V]) = [g(V)]$ d'où l'égalité $[f(V)] = [g(V)]$ dans $K(X)$; d'après la définition 2.2.5 on sait donc que $(f(V)) + (W) = (g(V)) + (W)$ dans $Vect(X)$ pour un certain $(W) \in Vect(X)$; par la propriété de Krull-Schmidt on peut effacer facteurs additifs égaux donc $(f(V)) = (g(V))$ dans $Vect(X)$, ce qui entraîne $f(V) \cong g(V)$.

- iii) $\Rightarrow$ iv) Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux polynômes à coefficients positifs ou nuls tels que $f \neq g$ mais $f(V) \cong g(V)$. Dans cette dernière équation on peut éliminer à droite et à gauche tout ce qu'on a en commun[13], afin d'obtenir une équation (qu'on notera encore $f(V) \cong g(V)$) où un monôme $V^{\otimes s}$ pour s fixé apparaît (s'il apparaît) seulement à droite (ou à gauche) dans l'équation. Sans perte de généralité on suppose donc $m = deg(f) \gneqq deg(g)$. C'est-à-dire $f(V) = \lambda V^{\otimes m} + \ldots$ des termes de degré inférieur. Or, soit $V^{\otimes m} \cong \bigoplus_{i \in I} \alpha_i W_i$, $|I| < +\infty$, l'unique décomposition de Remak pour $V^{\otimes m}$, on a trivialement $\lambda V^{\otimes m} \cong \bigoplus_{i \in I} \lambda \alpha_i W_i$. D'après le théorème de Krull-Schmidt (cf. théorème 2.2.4) les indecomposables W_i (répétés $\lambda \alpha_i$ fois) sont aussi facteurs directs de $g(V)$, à savoir ils appartiennent à $T_{m-1}(V)$, selon la notation choisie (cf. notation 2.2.8). Il suffit maintenant de considérer l'équation $V \otimes f(V) \cong V \otimes g(V)$ pour remarquer que $V^{\otimes m+1} \in T_m(V)$ et donc $V^{\otimes m+1} \in T_{m-1}(V)$ d'après ce qu'on vient de dire. On procède de façon analogue pour tous les $V^{\otimes n}$, $\forall n > m+1$ et on démontre ainsi que $S(V) = T_{m-1}(V)$ (cf. notation 2.2.8) et donc il est fini.

- iv) $\Rightarrow$ i) Appelons B le sous-groupe abélien libre de $K(X)$ engendré par $S(V)$, fini

[12] Il existe un polynôme (unitaire) $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $f([V] \otimes 1)$ vaut zéro dans $K(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

[13] Si par exemple $f(V) = V^{\otimes 2} \oplus 3V$ et $g(V) = V \oplus 2\mathcal{O}_X$ l'équation $f(V) \cong g(V)$ peut être simplifiée à $V^{\otimes 2} \oplus 2V \cong 2\mathcal{O}_X$.

par hypothèse. Montrons d'abord que B est stable par multiplication par V : on se borne à la base de B ; soit donc $W \in S(V)$ on montre que $W \otimes V$ appartienne à B. On sait qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $W \oplus M \cong V^{\otimes n}$ pour un certain fibré vectoriel M. De plus,

$$V \otimes V^{\otimes n} \cong V \otimes (W \oplus M) \cong (V \otimes W) \oplus (V \otimes M) \cong \bigoplus_{j \in J} a_j W_j \tag{2.32}$$

où $W_j \in S(V)$. Il s'ensuit que (cf. théorème 2.2.4)

$$V \otimes W \cong \bigoplus_{i \in I} b_i W_i, \tag{2.33}$$

où $I \subseteq J$ et donc $V \otimes W \in B$. Ceci-dit, si on pose $n := |S(V)|$ on a le système d'équations suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} V \otimes W_1 & = & \lambda_{11} W_1 & \oplus & \dots & \oplus & \lambda_{1n} W_n \\ V \otimes W_2 & = & \lambda_{21} W_1 & \oplus & \dots & \oplus & \lambda_{2n} W_n \\ \vdots & = & \vdots & & & & \vdots \\ V \otimes W_n & = & \lambda_{n1} W_1 & \oplus & \dots & \oplus & \lambda_{nn} W_n. \end{array} \tag{2.34}$$

On pose

$$A := \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.35}$$

et on a

$$A \quad \times \quad \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} V \otimes W_1 \\ \vdots \\ V \otimes W_n \end{pmatrix} \quad = \quad V \otimes \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} . \tag{2.36}$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton il existe un polynôme unitaire (dit caractéristique) $p(t) \in \mathbb{Z}[t]$ t.q. $p(A) = \underline{0}$, où $\underline{0}$ est la matrice nulle. On se place maintenant dans $K(X)$ et on pose

$$\underline{W} := \begin{pmatrix} [W_1] \\ \vdots \\ [W_n] \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

soit encore $p(t) = t^n + .. + a_{n-1} t + a_n$, on a[14]

$$\underline{0} = \underline{0} \times \underline{W} = p(A) \times \underline{W} = A^n \times \underline{W} + .. + a_{n-1} A \times \underline{W} + a_n \underline{W} = \tag{2.38}$$

[14] Le premier $\underline{0}$ qui apparaîtra dans cette équation dénotera le vecteur nul à n éléments, le deuxième sera encore une matrice $(n \times n)$ nulle.

$$[V^n] \cdot \underline{W} + .. + a_{n-1}[V] \cdot \underline{W} + a_n[\mathcal{O}_X] \cdot \underline{W} \tag{2.39}$$

où la dernière égalité est une conséquence de l'équation 2.36. En particulier $p([V]) \cdot [W_i] = 0$ et donc $p(V) \otimes W_i = 0$. Ça entraîne $p(V) = 0$ et donc $p([V]) = 0$ dans $K(X)$.

c.q.f.d.

□

Définition 2.2.10. Un fibré vectoriel sur X satisfaisant les propriétés équivalentes de la proposition 2.2.9 est dit **fini au sens de Weil** ou **fini** (tout court).

□

Lemme 2.2.11. Soient V_1 et V_2 deux fibré vectoriels finis au sens de Weil, alors $V_1 \oplus V_2$, $V_1 \otimes V_2$ et $V_1^\vee$ sont encore finis au sens de Weil.

Preuve : il suffit de manipuler les les propriétés équivalentes de la proposition 2.2.9.

□

Après avoir défini les fibrés vectoriels finis au sens de Weil on va maintenant définir les fibrés essentiellement finis (cf. déf. 2.2.27) comme les objets de la catégorie abélienne $EF(X)$ engendrée (cf. déf 2.2.26) par les fibrés finis, sous-catégorie pleine de la catégorie des fibrés semi-stables sur X (cf. déf. 2.2.19). Pour cela il nous faut quelques notions préliminaires.

Définition 2.2.12. Soit C une courbe intègre et projective sur k et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur C. On définit le **rang** de $\mathcal{F}$ comme la dimension sur $k(\xi) = \mathcal{O}_{C,\xi}$ de $\mathcal{F}_\xi$:

$$rg(\mathcal{F}) := dim_{k(\xi)}(\mathcal{F}_\xi)$$

où ξ est le point générique de C. On définit le **degré** de $\mathcal{F}$ comme suit :

$$deg(\mathcal{F}) := \chi(\mathcal{F}) - rg(\mathcal{F}) \cdot \chi(\mathcal{O}_C)$$

où $\chi(\mathcal{F})$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$. (Pour des définitions plus générales de degré et rang voir par exemple [18], Part I, §1). On appelle la **pente** de $\mathcal{F}$ le rapport

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{deg(\mathcal{F})}{rg(\mathcal{F})}$$

□

Remarque 2.2.13. Étant donnée une suite exacte de faisceaux cohérents sur C

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

on a

$$rg(\mathcal{F}) = rg(\mathcal{F}') + rg(\mathcal{F}'')$$

et

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}''),$$

par conséquent

$$deg(\mathcal{F}) = deg(\mathcal{F}') + deg(\mathcal{F}'').$$

Si en plus $\mathcal{F}$ est de torsion alors $rg(\mathcal{F}) = 0$, $h^1(C, \mathcal{F}) = 0$ donc

$$deg(\mathcal{F}) = h^0(C, \mathcal{F}) = dim_k \mathcal{F}(C).$$

Dans ce cas $Supp(\mathcal{F})$ est fermé dans C et $Supp(\mathcal{F}) \subsetneq C$ (cf. [20], Ch. 5, §1, ex. 1.9 (a) et ex 1.14 (d)) donc $Supp(\mathcal{F})$ est constitué par un nombre fini de points. Le faisceau $\mathcal{F}$ est donc un faisceau gratte-ciel, en particulier (cf. [20], Ch. 2, §2 ex. 2.9)

$$\mathcal{F}(C) = \oplus_{x \in C} \mathcal{F}_x$$

d'où

$$deg(\mathcal{F}) = dim_k(\mathcal{F}(C)) = \sum_{x \in C} dim_k(\mathcal{F}_x) = \sum_{x \in C} (long_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{F}_x) \cdot ([k(x) : k]),$$

cette dernière égalité provenant de [20], Ch. 7, §1 ex. 1.6 (d).[15]

□

Définition 2.2.14. Soit C une courbe projective et lisse sur k et V un fibré vectoriel sur C. Le fibré V est dit **semi-stable de degré zéro** si $deg(V) = 0$ et pour tout sous-fibré $W \subset V$ on a $\mu(W) \leq 0$ (ou, ce qui revient au même, si pour tout quotient W' de V on a $\mu(W') \geq 0$).

□

[15]Si en plus le corps k est algébriquement clos alors $k(x)$, qui est algébrique sur k (cf. [20], Ch. 2 §5 ex. 5.9), est isomorphe à k, ce qui prouve l'ex. 6.12 pag. 149 de [16], le point 1) étant vrai grâce au théorème de Riemann-Roch.

Proposition 2.2.15. Étant donnée une suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$$

sur une courbe C projective et lisse sur k, si $\mathcal{F}'$ est de degré 0 et si $\mathcal{F}$ est un fibré semi-stable de degré 0, il en est de même de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$.

Preuve :

1. Du fait que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ sont de degré 0, il en résulte que $\mathcal{F}''$ est de degré 0 (cf. remarque 2.2.13) et $\mu(\mathcal{F}'') = 0$. Soit $\mathcal{F}'''$ un quotient de $\mathcal{F}''$. C'est aussi un quotient de $\mathcal{F}$ et donc $\mu(\mathcal{F}''') \geq 0$ (cf. déf. 2.2.14). De même si $\mathcal{G}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}'$, c'est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ et $\mu(\mathcal{G}) \leq 0$.
2. Il reste à voir que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont localement libres et comme on est sur une courbe lisse, cela revient à montrer qu'ils sont sans $\mathcal{O}_C$-torsion. C'est clair pour $\mathcal{F}'$. Pour ce qui est de $\mathcal{F}''$, introduisons $\mathcal{F}'_{sat}$ comme l'image réciproque de $\mathcal{F}''_{tors}$ dans $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}'_{sat} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}''_{tors} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{F}''_{libre} \arrow[r] & \mathcal{F}''_{libre} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les rangs de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}'_{sat}$ sont égaux. D'après la definition 2.2.12) on a alors :

$$\chi(\mathcal{F}') = rg(\mathcal{F}')\chi(O_C) + deg(\mathcal{F}')$$

$$\chi(\mathcal{F}'_{sat}) = rg(\mathcal{F}'_{sat})\chi(O_C) + deg(\mathcal{F}'_{sat})$$

Or $\chi(\mathcal{F}'_{sat}) - \chi(\mathcal{F}') = \chi(\mathcal{F}''_{tors})$ et $\chi(\mathcal{F}''_{tors}) = dimH^0(C, \mathcal{F}''_{tors}) \geq 0$. Donc $\chi(\mathcal{F}') \leq \chi(\mathcal{F}'_{sat})$ et $deg(\mathcal{F}') \leq deg(\mathcal{F}'_{sat})$ ce qui entraîne $deg(\mathcal{F}'_{sat}) \geq 0$.

Par ailleurs, $\mathcal{F}'_{sat}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}$ qui est semi-stable de degré 0 et donc $\mu(\mathcal{F}'_{sat}) \leq 0$, ce qui montre que $deg(\mathcal{F}'_{sat}) = 0$. On en déduit que $deg(\mathcal{F}''_{tors}) = 0$. Mais pour $\mathcal{F}''_{tors}$, qui est de torsion, le degré est le suivant

$$deg(\mathcal{F}''_{tors}) = \sum_{x \in C} (long_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{F}''_{tors,x}) \cdot ([k(x) : k])$$

(cf. remarque (2.2.13)). Il s'ensuit que toutes ces longueurs sont nulles et donc $\mathcal{F}''_{tors}$ est nul et finalement $\mathcal{F}''$ est sans torsion.

□

Lemme 2.2.16. Soient V_1 et V_2 deux fibrés vectoriels semi-stables de degré 0 sur une courbe projective lisse C sur k. Soit $f : V_1 \to V_2$ un morphisme de fibrés vectoriels. Alors

$$deg(Ker(f)) = deg(Im(f)) = 0.$$

Preuve : comme $Ker(f)$ est un sous-faisceau de V_1 qui est semi-stable de degré 0, $\mu(Ker(f)) \leq 0$ et donc $deg(Ker(f)) \leq 0$. De même, comme $Im(f)$ est un sous-faisceau de V_2, $deg(Im(f)) \leq 0$. Enfin, comme $0 = deg(V_1) = deg(Ker(f)) + deg(Im(f))$, les inégalités précédentes donnent $deg(Ker(f)) = deg(Im(f)) = 0$.

□

Proposition 2.2.17. Soient V_1 et V_2 des fibrés vectoriels semi-stables de degré 0 sur une courbe projective lisse C sur k. Soit $f : V_1 \to V_2$ un morphisme de fibrés vectoriels. Alors $Ker(f)$, $Im(f)$ et $Coker(f)$ sont des fibrés semi-stables de degré 0.

Preuve : on a la suite exacte

$$0 \to ker(f) \to V_1 \to Im(f) \to 0$$

et d'après le lemme 2.2.16, $deg(Ker(f)) = 0$. On applique alors la proposition 2.2.15, donc $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont semi-stables de degré 0. On procède de même avec la suite exacte

$$0 \to Im(f) \to V_2 \to Coker(f) \to 0.$$

Comme $Im(f)$ est de degré 0, la proposition prouve que $Coker(f)$ est semi-stable de degré 0.

□

Notation 2.2.18. Soient, dorénavant, k un corps parfait et X un k-schéma complet, connexe et réduit.

$\square$

Définition 2.2.19. Un fibré vectoriel V sur X est dit **semi-stable** si pour toute courbe C connexe, complète et lisse sur k et tout morphisme non constant $j : C \to X$ le fibré $j^*(V)$ est semi-stable de degré zéro sur C. On note $SS(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}coh(X)$ dont les objets sont les fibrés semi-stables sur X.

$\square$

Lemme 2.2.20. Soit

$$0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$$

une suite exacte de faisceaux cohérents sur X et $j : C \to X$ un morphisme de schémas. Si $\mathcal{F}_3$ est localement libre, la suite

$$0 \to j^*\mathcal{F}_1 \to j^*\mathcal{F}_2 \to j^*\mathcal{F}_3 \to 0 \tag{2.40}$$

est exacte.

Preuve : pour tout $x \in X$ on a la suite exacte de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules $0 \to \mathcal{F}_{1,x} \to \mathcal{F}_{2,x} \to \mathcal{F}_{3,x} \to 0$, en particulier ça reste vrai pour $x = j(c)$, c parcourant les points de C. Le produit tensoriel étant exact à droite on a, pour tout $c \in C$ la suite exacte

$$.. \to Tor_1^{\mathcal{O}_{X,j(c)}}(\mathcal{F}_{3,j(c)}, \mathcal{O}_{C,c}) \to \mathcal{F}_{1,j(c)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,j(c)}} \mathcal{O}_{C,c} \to$$

$$\to \mathcal{F}_{2,j(c)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,j(c)}} \mathcal{O}_{C,c} \to \mathcal{F}_{3,j(c)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,j(c)}} \mathcal{O}_{C,c} \to 0.$$

Or (cf. [22], Appendix B), $Tor_1^{\mathcal{O}_{X,j(c)}}(\mathcal{F}_{3,j(c)}, \mathcal{O}_{C,c})$ est nul car $\mathcal{F}_{3,j(c)}$ est $\mathcal{O}_{X,j(c)}$-libre et $\mathcal{F}_{i,j(c)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,j(c)}} \mathcal{O}_{C,c} \simeq (j^*(\mathcal{F}_i))_c$, d'où le résultat.

$\square$

Définition 2.2.21. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un schéma X. On appelle

$$e(x) := dim_{k(x)}(\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x))$$

le **rang résiduel** de $\mathcal{F}$ en x.

$\square$

<u>Théorème</u> 2.2.22. La catégorie $SS(X)$ des fibrés semi-stable sur X est abélienne.

<u>Preuve</u> : Soit $j : C \to X$ un morphisme non constant d'une courbe C projective et lisse vers X. Soit

$$f : V_1 \to V_2$$

un morphisme de fibrés semi-stables sur X. Comme j^* est exact à droite, on a $j^*(Im(f)) = Im(j^*f)$ et sur C on a une suite exacte

$$0 \to Ker(j^*f) \to j^*V_1 \to Im(j^*f) = j^*Im(f) \to 0$$

et comme V_1 est semi-stable, j^*V_1 est, par définition, un fibré semi-stable de degré 0 et il résulte alors de la proposition 2.2.17 que $j^*Im(f)$ est un fibré semi-stable de degré 0. En particulier le rang résiduel de $j^*Im(f)$ est localement constant. Or ce rang est le même que le rang résiduel de $Im(f)$ aux points de l'image de j dans X. Autrement dit, le rang résiduel de $Im(f)$ est constant le long de toute courbe tracée sur X, à savoir l'image de toute courbe C connexe, complète et lisse sur k via un morphisme $j : C \to X$ non constant. On montre maintenant que pour tout couple de points x_1 et x_2 de X il existe au moins une courbe propre et lisse sur k et un morphisme $j : C \to X$ t.q. $j(C)$ contienne x_1 et x_2. Si X était projectif sur k on aurait terminé puisque pour deux points passe toujours une telle courbe C (il suffit de prendre l'intersection de C avec certains hyperplans bien choisis du $\mathbb{P}^n_k$ où C est immerse) et j serait donc l'inclusion. Mais X n'est à priori que propre : on peut se ramener au cas projectif grâce au lemme de Chow (cf. par exemple [14], §5.6.1) et en particulier (cf. [14], Corollaire 5.6.2) il existe un k-schéma projectif X', un k-morphisme surjectif et projectif

$$f : X' \to X$$

et un ouvert dense U de X tel que $f^{-1}(U)$ est dense en X' et $f : f^{-1}(U) \to U$ est un isomorphisme. Si x'_1 et x'_2 sont deux points de X' au dessus de x_1 et x_2, on trouve une courbe C passant par x'_1 et x'_2 et $j := f_{|C}$ est le morphisme (évidement non constant) souhaité. D'après ce qui précède le rang résiduel de $Im(f)$ est constant sur toute composante connexe de X, donc sur tout X car il est connexe. Ceci est suffisant (cf. [16], Ch. 2, §5, ex. 5.8 ou, pour plus de détails, [24] Ch. III §2, Souped-up version II où on a besoin que X soit réduit, pour en déduire que $Im(f)$ est localement libre). Or, d'après le lemme 2.2.20, la suite

$$0 \to j^*Ker(f) \to j^*V_1 \to j^*Im(f) \to 0$$

est exacte. En particulier

$$j^* Ker(f) = Ker(j^* f)$$

et en répétant le raisonnement précédant on déduit que $Ker(f)$ est un fibré. On considère maintenant la suite exacte

$$0 \to Im(f) \to V_2 \to Coker(f) \to 0$$

qui nous dit que, de façon analogue, $Coker(f)$ est un fibré.

□

On se donne maintenant un point k-rationnel $x : Spec(k) \to X$ et on se demande si $x^* : SS(X) \to k\text{-}\mathcal{M}od$ est un foncteur fidèle et exact. x^* est sûrement fidèle puisque on a déjà vu que si

$$f : V_1 \to V_2$$

est un morphisme entre fibrés semi-stables sur X alors le rang résiduel de f est constant. Il s'en suit que si $x^*(f) = 0$ alors $f = 0$. De plus, on sait que x^* est toujours exact à droite. On a démontré la première partie de la proposition suivante :

Proposition 2.2.23. Soit X comme dans la notation 2.2.18, $x : Spec(k) \to X$ un point k-rationnel et $x^* : SS(X) \to k\text{-}\mathcal{M}od$ le foncteur associé restreint à la catégorie des fibrés semi-stables. Alors x^* est fidèle et exact.

Preuve : il reste à prouver qu'il est exact à gauche. Soit donc

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

On a les égalités :

$$rg(V_2) = rg(V_1) + rg(V_3)$$

$$rg(x^* V_i) = rg(V_i)$$

et donc

$$rg(x^* V_2) = rg(x^* V_1) + rg(x^* V_3)$$

ce qui prouve que $x^*(f)$ est injective.

□

Proposition 2.2.24. Si un fibré vectoriel V sur C (courbe projective et lisse sur k) est fini au sens de Weil (cf. déf 2.2.10) alors il est semi-stable de degré zéro.

Preuve : soit

$$C(V) = sup\{\mu(W)\}_{0\neq W\subseteq V}$$

on commence par démontrer que si

$$0 \to V_1 \to V_2 \to V_3 \to 0 \tag{2.41}$$

est une suite exacte de fibrés sur C on a

$$C(V_2) \leq sup\{C(V_1), C(V_2)\}.$$

Soit W un sous-fibré de V_2. On a une nouvelle suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V_1\cap W \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & W \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \frac{W}{V_1\cap W} \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V_1 \arrow[r, hook] & V_2 \arrow[r, two heads] & V_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où l'intersection $V_1 \cap W$ est considérée dans V_2. On vérifie aisément que pour toute suite exacte (2.41) on a

$$\mu(V_2) = \frac{rg(V_1)\cdot\mu(V_1) + rg(V_3)\cdot\mu(V_3)}{rg(V_1) + rg(V_3)}$$

et de façon analogue pour la première ligne du diagramme précédant on a

$$\mu(W) = \frac{rg(V_1\cap W)\cdot\mu(V_1\cap W) + rg(\frac{W}{V_1\cap W})\cdot\mu(\frac{W}{V_1\cap W})}{rg(V_1\cap W) + rg(\frac{W}{V_1\cap W})}.$$

On en déduit

$$\mu(W) \leq sup\{\mu(V_1\cap W), \mu(\frac{W}{V_1\cap W})\} \leq sup\{C(V_1), C(V_3)\} \qquad \forall\ W\subseteq V_2$$

et donc

$$C(V_2) \leq sup\{C(V_1), C(V_3)\}.$$

Soit donc V un fibré fini au sens de Weil sur C.[16] D'après la proposition 2.2.9 l'ensemble $S(V)$ (cf. notation 2.2.8) est fini. On pose

$$T(V) := sup\{C(U)\}_{U\in S(V)}.$$

On a

$$C(V^{\otimes n}) \leq T(V),$$

[16]Ce qui suit est l'objet de [25], proposition 3.4.

en effet on montre par récurrence sur le nombre de facteurs directs indecomposables de $\bigoplus_{i=1}^{t} \lambda_i U_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{N}_{>0}$, $U_i \in S(V)$) que

$$C(\bigoplus_{i=1}^{t} \lambda_i U_i) \leq sup\{C(U_i)\}_{i=1..t} \leq T(V)$$

la seconde inégalité étant évidente[17]. Or, $T(V)$ est fini puisque $S(V)$ est fini, donc pour tout sous-fibré $0 \neq W \subseteq V$ il s'ensuit $W^{\otimes n} \subseteq V^{\otimes n}$ ce qui entraîne

$$\mu(W^{\otimes n}) \leq C(V^{\otimes n}) \leq T(V) < \infty.$$

Or[18] $\mu(W^{\otimes n}) = n\mu(W) < T(V)$ ce qui implique $\mu(W) \leq 0$ et ça reste vrai en particulier pour $W = V$ et $W = V^\vee$ donc $-\mu(V) = \mu(V^\vee) \leq 0$. Finalement on a $\mu(V) = deg(V) = 0$ et $\mu(W) \leq 0$ pour tout sous-fibré $W \subseteq V$, ce qui conclut la preuve.

□

Or si V est un fibré fini au sens de Weil sur X alors $j^*(V)$ est encore fini au sens de Weil si $j : C \to X$ est un morphisme non constant et C est une courbe connexe propre et lisse sur k. Par conséquent un corollaire de la proposition 2.2.24 est le suivant :

Corollaire 2.2.25. Un fibré vectoriel sur X fini au sens de Weil est semi-stable.

□

Définition 2.2.26. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne (cf. déf. 2.1.4) et $S \subset Ob(\mathcal{C})$. On note $\overline{S} := \{W \in Ob(\mathcal{C})$ t.q. $\exists t \in \mathbb{N}$ et $P_i \in S, i = 1, .., t$ et $V_1, V_2 \in Ob(\mathcal{C})$ tels que

[17] Si $t = 1 = \lambda_1$ c'est clair. Sinon il suffit de considérer la suite $0 \to U_1 \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{t} \lambda_i U_i \twoheadrightarrow (\lambda_1 - 1)U_1 \oplus \bigoplus_{i=2}^{t} \lambda_i U_i \to 0$ pour conclure.

[18] Une preuve de ce que $\mu(W^{\otimes n}) = n\mu(W)$ est une conséquence de [30], Lemma 1.16 qui affirme que $deg(W_1 \otimes W_2) = rg(W_2)deg(W_1) + rg(W_1)deg(W_2)$ qui repose sur le fait qu'un fibré vectoriel W de rang r est toujours extension d'un fibré vectoriel inversible L_1 et d'un fibré vectoriel W' de rang $r-1$ ([30], Lemma 1.15). On commence par le cas $rg(W_1) = 1$ et on montre par récurrence sur $rg(W_2)$ que $deg(W_1 \otimes W_2) = rg(W_2)deg(W_1) + deg(W_2)$. Si $rg(W_2) = 1$ c'est vrai. Maintenant on considère la suite exacte $0 \to L_1 \to W_1 \to W_1' \to 0$ où $rg(L_1) = 1$ et $rg(W_1') = rg(W_1) - 1$, on la tensorise par W_2 et on obtient $0 \to L_1 \otimes W_2 \to W_1 \otimes W_2 \to W_1' \otimes W_2 \to 0$ qui nous donne, par l'hypothèse de récurrence, $deg(W_1 \otimes W_2) = deg(L_1) + deg(W_2) + deg(W_1') + rg(W_1')deg(W_2)$ d'où le résultat. On passe au cas général qu'on montre par récurrence sur $rg(W_1)$. On vient de montrer le cas $rg(W_1) = 1$, puis on considère à nouveau la suite exacte $0 \to L_1 \to W_1 \to W_1' \to 0$ où $rg(L_1) = 1$ et $rg(W_1') = rg(W_1) - 1$, on la tensorise par W_2 et on conclut. Du fait que $deg(L^\vee) = -deg(L)$ si L est inversible on obtient $deg(W^\vee) = -deg(W)$ pour tout fibré W, en effet il existe $r := rg(W)$ fibrés inversibles $L_1, .., L_r$ (on a déjà L_1 et de façon analogue on trouve les autres L_i) t.q. $deg(W) = deg(L_1) + .. + deg(L_r)$, d'où le résultat, par récurrence sur $rg(W)$.

$V_1 \subset V_2 \subset \oplus_{i=1}^{t} P_i$ et $W \simeq V_2/V_1\}$. On note $\mathcal{C}(S)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ telle que $Ob(\mathcal{C}(S)) = \overline{S}$. La catégorie $\mathcal{C}(S)$ est, par construction, encore abélienne : c'est la plus petite sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ abélienne qui contienne S.

□

Définition 2.2.27. Suivant la définition 2.2.26, si on prend $S := \{$ fibrés finis au sens de Weil sur $X\}$[19] et $\mathcal{C} := SS(X)$ on note $EF(X) := \mathcal{C}(S)$ et on obtient une catégorie abélienne qu'on appelle la catégorie des **fibrés essentiellement finis** sur X.

□

Dans la définition précédente on a choisi S comme étant l'ensemble des fibrés finis. On va prendre maintenant d'autres ensembles. Soit dorénavant $\mathcal{C} := EF(X)$, à savoir la catégorie des fibrés essentiellement finis sur X. On prend donc un ensemble $S \subseteq Ob(EF(X))$ et $S^\vee$ l'ensemble des duaux des éléments de S ; soit $S_1 := S \cup S^\vee$ et encore U l'ensemble de tous les possibles produits tensoriels des éléments de S_1. On note

$$EF(X,S) := \mathcal{C}(U)$$

qu'on notera aussi $< S >$ et on parlera de **catégorie engendrée par** S.

On suppose maintenant l'existence d'un point k-rationel sur X, à savoir un morphisme

$$x : Spec(k) \to X,$$

qui assure, par conséquent, l'existence d'un foncteur

$$\begin{aligned} x^* : \quad \mathcal{Q}coh(X) &\to k\text{-}\mathcal{M}od, \\ \mathcal{F} &\mapsto \mathcal{F}_x. \end{aligned}$$

Soit

$$i_S : \quad EF(X,S) \to \mathcal{Q}coh(X),$$

le foncteur inclusion. Il nous faut un petit lemme avant d'énoncer un résultat fondamental (prop. 2.2.30) :

Lemme 2.2.28. Soit V un fibré vectoriel semi-stable sur X et W un sous-fibré (ou un quotient) de V. Si pour toute courbe C connexe, complète et lisse sur k et tout

[19] Cf. déf. 2.2.10.

morphisme non constant $j : C \to X$ le fibré $j^*(W)$ a degré zéro alors W est semi-stable.

Preuve : soit W un sous fibré[20] de V. Le degré de $(j^*(W))$ est nul par hypothèse et un sous-fibré U de $j^*(W)$ est en particulier un sous-fibré de $j^*(V)$ (d'après le lemme 2.2.20) donc $\mu(U) \leq 0$, d'où le résultat.

□

Lemme 2.2.29. Soit V un fibré vectoriel essentiellement fini sur X et W un sous-fibré (ou un quotient) de V. Si pour toute courbe C connexe, complète et lisse sur k et tout morphisme non constant $j : C \to X$ le fibré $j^*(W)$ a degré zéro alors W est essentiellement fini.

Preuve : soit d'abord W un quotient de V. Il est semi-stable d'après le lemme 2.2.28 et il est quotient d'un sous-quotient[21] d'une somme directe finie de fibrés finis, il est donc lui même sous-quotient de cette somme directe donc il est essentiellement fini. Or, soit W un sous-fibré de V (qui est donc semi-stable d'après le lemme 2.2.28). On considère la suite $0 \to W \hookrightarrow V \twoheadrightarrow V/W \to 0$ donc W est le noyau d'un morphisme entre fibrés essentiellement finis et donc il est lui aussi essentiellement fini car la catégorie $EF(X)$ est abélienne par construction.

□

Proposition 2.2.30. Pour tout $S \subseteq Ob(EF(X))$, la catégorie $(EF(X,S), \otimes, x^* \circ i_S, \mathcal{O}_X)$ est une catégorie tannakienne neutre sur k (voir déf. 2.1.32).

Preuve : d'abord, c'est une catégorie abélienne par construction. Munie de $\otimes_{\mathcal{O}_X}$ elle aussi monoïdale symétrique. Pour montrer ceci on commence par le cas où $S :=$ {fibrés finis au sens de Weil} et donc $EF(X,S) = EF(X)$, la catégorie des fibrés essentiellement finis. On prend deux objets de $EF(X)$, à savoir V_1'/V_1 et V_2'/V_2 où V_1 et V_2 sont semi-stables, puis

$$V_1 \hookrightarrow V_1' \hookrightarrow W_1 := \bigoplus_{i=1}^{t} P_i$$

et

$$V_2 \hookrightarrow V_2' \hookrightarrow W_2 := \bigoplus_{j=1}^{t'} P_j'$$

[20] Si W est un quotient de V il faut juste se rappeler la définition équivalente de fibré semi-stable (cf. déf. 2.2.14)

[21] Avec sous-quotient d'un objet X on entend un objet qui est quotient d'un sous-objet de X.

où W_1 et W_2 (ainsi que $W_1 \otimes W_2$) sont finis au sens de Weil d'après le lemme 2.2.11 puisque les P_i et les P'_j le sont. On a[22]

– i) $V'_1 \otimes V'_2 \hookrightarrow W_1 \otimes W_2$
– ii) $V'_1 \otimes V'_2 \twoheadrightarrow \frac{V'_1}{V_1} \otimes \frac{V'_2}{V_2}$

qui, d'après le lemme 2.2.28, entraînent que $V'_1 \otimes V'_2$ et $\frac{V'_1}{V_1} \otimes \frac{V'_2}{V_2}$ sont semi-stables. De plus, la condition i) nous assure que $\frac{V'_1}{V_1} \otimes \frac{V'_2}{V_2}$ est essentiellement fini ($\frac{V'_1}{V_1} \otimes \frac{V'_2}{V_2}$ étant un quotient de $V'_1 \otimes V'_2$). Dans le cas plus général où $S \subseteq EF(X)$ on répète ce qu'on vient de dire où $P_i, P'_j \in U$ où U est l'ensemble de tous les possibles produits tensoriels des éléments de $S \cup S^\vee$ et il suffit de remarquer que $W_1 \otimes W_2 = \bigoplus_{i,j}(P_i \otimes P'_j)$ et $P_i \otimes P'_j \in U$ par définition. Elle est rigide puisque, pour commencer, les objets sont des faisceaux localement libres (cf. aussi l'exemple 2.1.22) donc le dual d'un dual d'un fibré V est V même. Pour voir que $V^\vee \in EF(X,S)$ si $V \in EF(X,S)$ on se restreint au cas $S :=$ {fibrés finis au sens de Weil} et on écrit $V = V'_1/V_1$ où $V_1 \hookrightarrow V'_1 \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^t P_i$ donc en particulier $V^\vee \hookrightarrow V_1'^\vee$. Or, $V_1'^\vee$ est quotient de $\bigoplus_{i=1}^t P_i^\vee$ où chaque $P_i^\vee$ est fini d'après le lemme 2.2.11 donc $V_1'^\vee$ est semi-stable (cf. lemme 2.2.28) et essentiellement fini par définition. Il en est de même de $V^\vee$ d'après le lemme 2.2.29. De plus $EF(X,S)$ est munie d'un objet unité $\mathcal{O}_X$ dont le groupe des endomorphismes $End(\mathcal{O}_X)$ est égal à k : en effet comme $X \to Spec(k)$ est propre, réduit et connexe (donc géométriquement connexe, cf. [20], Ch. 3, Exercise 2.11, puisque on a supposé l'existence de $x : Spec(k) \to X$) alors $End(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X)$ est un corps k' extension finie de k (cf. [20], Ch. 3, Corollary 3.21). De plus, k est parfait donc (cf. [20], Ch. 3, Example 2.10) X est géométriquement réduit, ce qui entraîne finalement (cf. une fois de plus [20], Ch. 3, Corollary 3.21) $k' = k$. Pour finir le foncteur $x^* \circ i_S$ est exact et fidèle d'après la proposition 2.2.23.

□

<u>Définition</u> 2.2.31. D'après le théorème 2.1.36 la catégorie $EF(X,S)$ est équivalente à la catégorie des représentations du k-schéma affine en groupes $\underline{Aut}_k^{\otimes}(x^* \circ i_S)$ (cf. déf. 2.1.28) qu'on notera $\pi_{Nori}(X,S,x)$. Si en particulier S est l'ensemble de tous les fibrés finis alors on note (motivés par le point 1 de la remarque 2.2.32) $\pi_{Nori}(X,x) := \pi_{Nori}(X,S,x)$ et on l'appelle le **schéma en groupes fondamental de X en x** (ou schéma en groupes fondamental de Nori).

□

<u>Remarque</u> 2.2.32.

[22] Chaque fois qu'on tensorise une injection par un fibré vectoriel on a toujours une injection.

- 1) Si S est l'ensemble des fibrés finis au sens de Weil on reobtient $EF(X) = EF(X,S)$.
- 2) Si S est une collection finie de fibrés essentiellement finis alors $\pi_{Nori}(X,S,x)$ est un schéma affine en groupes fini.

<u>*Preuve*</u> : cf. [25], Concluding Remarks, page 41.

□

Or, soit $F_S : Rep_k(\pi_{Nori}(X,S,x)) \to EF(X,S)$ un foncteur qui réalise l'équivalence de catégories. On considère le foncteur

$$i_S \circ F_S : Rep_k(\pi_{Nori}(X,S,x)) \to \mathfrak{Q}coh(X).$$

C'est un foncteur fibre sur X (cf. déf 2.1.42) ; d'après le résultat présenté dans la section précédente (cf. théorème 2.1.46), au foncteur $i_S \circ F_S$ on associe un $\pi_{Nori}(X,S,x)$-torseur sur X, qu'on notera $\widetilde{X}_S$. De plus, $\widetilde{X}_{S,x} \simeq G$ (cf. [25], page 39) ce qui signifie qu'il existe sur $\widetilde{X}_S$ un point k-rationel qu'on notera $\widetilde{x}_S$ au dessus de x.

<u>Définition</u> 2.2.33. Si en particulier S est la famille des fibrés finis au sens de Weil il s'ensuit que le torseur qu'on obtient est un $\pi_{Nori}(X,x)$-torseur sur X, qu'on notera $\widetilde{X}$ et on l'appellera $\boldsymbol{\pi_{Nori}(X,x)}$**-torseur universel**. On notera simplement $\widetilde{x}$ son point k-rationel.

□

Dans quel sens est-il *universel* ? On essaye de l'expliquer dans ce qui suit : soit (Y,G,y) un triplet où :

- G est un k-schéma affine en groupes fini.
- $f : Y \to X$ est un G-torseur.
- $y : Spec(k) \to Y$ un point t.q. $f(y) = x$.

Il existe une bijection :

$$\begin{array}{ccc} (Y,G,y) & \longleftrightarrow & \textit{homomorphismes} \\ \text{triplets comme ci-dessus} & & \rho : \pi_{Nori}(X,x) \to G. \end{array} \tag{2.42}$$

C'est en effet l'objet de [25], Proposition 3.11. Dans un sens si on a un triplet (Y,G,y) où $f : Y \to X$ est un G-torseur alors, d'après la proposition 2.1.37, le foncteur

$$Rep_k(G) \to EF(X)$$

donne le morphisme $\rho : \pi_{Nori}(X,x) \to G$ souhaité. Dans l'autre sens si $\rho : \pi_{Nori}(X,x) \to G$ est un morphisme de k-schémas affines en groupes on construit Y comme le produit contracté $\widetilde{X} \times^{\pi_{Nori}(X,x)} G$ et le point u est l'image du point $\widetilde{x}$. Pour commodité du lecteur on rappelle la notion de produit contracté :

<u>Définition</u> 2.2.34. Soient A un anneau (commutatif et unitaire) et G un A-schéma affine en groupes plat. Soit Y un G-torseur à droite au dessus de X et $\varphi : G \to H$ un morphisme entre A-schémas affines en groupes. Pour tout A-schéma T on définit une action à gauche de $G(T)$ sur $H(T)$ ($g \cdot h := \varphi(g) \cdot h$) et une action à gauche de $G(T)$ sur $Y(T) \times H(T)$:

$$\begin{array}{rcl} G(T) \times (Y(T) \times H(T)) & \to & Y(T) \times H(T) \\ (g,(y,h)) & \mapsto & (y \cdot g^{-1}, g \cdot h) \end{array}$$

On appelle le A-faisceau des orbites de $Y \times H$ sous G (pour la topologie *fpqc*), et l'on note $Y \times^G H$, le produit contracté de Y via le morphisme $\varphi : G \to H$. C'est un H-torseur au dessus de X (cf. [8], III, §4, 3.2) si muni de l'action (à droite) :

$$(y,h) \cdot h' := (y, h \cdot h').$$

□

Dans la proposition 2.2.36 on montre que la bijection 2.42 est bien définie, c'est-à-dire les deux applications décrites ci-dessus sont l'une l'inverse de l'autre. Il suffit de montrer que si $\rho : \pi_{Nori}(X,x) \to G$ est le morphisme associé au triplet (Y,G,y) alors $\widetilde{X} \times^{\pi_{Nori}(X,x)} G \simeq Y$.

<u>Lemme</u> 2.2.35. Suivant la définition 2.1.44, soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories tannakiennes neutres sur k, puis $\omega : \mathcal{C} \to k\text{-}\mathcal{M}od$ un foncteur fibre, $\eta : \mathcal{C} \to \mathcal{Q}coh(X)$ et $F : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ deux foncteurs tensoriels. On note $p : X \to Spec(k)$ le morphisme structural et $\omega_X := p^* \circ \omega$. Le $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)$-torseur $\underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X, \eta)$ et le $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega \circ F)$-torseur $\underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X \circ F, \eta \circ F)$ sont liés par la relation suivante :

$$\underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X \circ F, \eta \circ F) \simeq \underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X, \eta) \times^{\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)} \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega \circ F).$$

<u>*Preuve*</u> : (cf. aussi lemme 3.3.1) pour tout X-schéma T on a une flèche canonique :

$$\underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X, \eta)(T) \times \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega \circ F)(T) \to \underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X \circ F, \eta \circ F)(T),$$

$$(g,a) \mapsto (g \circ 1_F) \cdot a$$

qui passe au quotient. On en déduit donc un morphisme de $\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega \circ F)$-torseurs $\underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X, \eta) \times^{\underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega)} \underline{Aut}_k^{\otimes}(\omega \circ F) \to \underline{Isom}_X^{\otimes}(\omega_X \circ F, \eta \circ F)$ au dessus de X qui est donc un isomorphisme, d'où le résultat.

□

Proposition 2.2.36. Soit (Y, G, y) un triplet et soit $\rho : \pi_{Nori}(X, x) \to G$ le morphisme qu'on lui associe au moyen du foncteur $F : Rep_k(G) \to EF(X)$. Alors $\widetilde{X} \times^{\pi_{Nori}(X,x)} G \simeq Y$.

Preuve : on note $p : X \to Spec(k)$ le morphisme structural de X, on note $i_X : EF(X) \to \mathcal{Q}coh(X)$ le foncteur inclusion alors le $\widetilde{X} = \pi_{Nori}(X, x)$-torseur universel est donné par $\underline{Isom}_X^{\otimes}(p^* \circ x^*, i_X)$ alors que $Y = \underline{Isom}_X^{\otimes}(p^* \circ oubli_G, i_X \circ F)$ où $oubli_G : Rep_k(G) \to k\text{-}mod$ est le foncteur oubli. D'après le lemme 2.2.35

$$\widetilde{X} \times^{\pi_{Nori}(X,x)} G \simeq \underline{Isom}_X^{\otimes}(p^* \circ x^* \circ F, i_X \circ F). \tag{2.43}$$

Or $x^*(Y) \simeq x^* \simeq \underline{Isom}_X^{\otimes}(p^* \circ oubli_G, i_X \circ F) \simeq \underline{Isom}_X^{\otimes}(x^* \circ p^* \circ oubli_G, x^* \circ_X \circ F) \simeq \underline{Isom}_X^{\otimes}(oubli_G, x^* \circ_X \circ F)$ d'où un isomorphisme de foncteurs $oubli_G \simeq x^* \circ F$. On remplace ça dans 2.43 et on obtient le résultat.

□

On conclut avec cette dernière remarque :

Remarque 2.2.37. Le k-schéma affine en groupes $\pi_{Nori}(X, x) \simeq \varprojlim \pi_{Nori}(X, S, x)$, limite projective de tous les $\pi_{Nori}(X, S, x)$, S parcourant les collections finies de fibrés vectoriels finis sur X, la flèche qui en résulte $\pi_{Nori}(X, x) \to \pi_{Nori}(X, S, x)$ étant surjective (cf. [7], Proposition 2.21). C'est une conséquence de ce que $EF(X)$ est la limite inductive de toutes les catégories $EF(X, S)$, S parcourant les collections finies de fibrés vectoriels. finis sur X.

□

2.2.2 Le schéma en groupes fondamental d'après Gasbarri

La définition de schéma en groupes fondamental donnée par Nori a une limite assez importante : on ne peut le définir que pour des schémas X sur un corps k. Il nous faudrait une définition plus générale : on aimerait pouvoir définir un schéma en groupes fondamental d'un certain schéma X défini par exemple sur un anneau (on verra plus loin de quel type) qui coïncide avec celui de Nori lorsque cet anneau est un corps parfait. C'est ce que fait Gasbarri dans [12] : il définit un schéma en groupes fondamental d'un schéma X, satisfaisant certaines propriétés qu'on précisera, où X est un E-schéma, E étant un schéma de Dedekind. On commence donc par rappeler la définition de schéma de Dedekind :

Définition 2.2.38. Un schéma de Dedekind est un schéma noethérien normal de dimension ≤ 1.

$\square$

L'idée de Gasbarri reprend l'idée développée par Nori dans [26], Part I, Ch. II où il donne une deuxième description du schéma en groupes fondamental défini précédemment (cf. définition 2.2.31). Les deux description sont équivalentes bien que très différentes l'une de l'autre. Cette nouvelle définition n'utilise plus les outils des categories tannakiennes. On commence par esquisser la deuxième definition de Nori pour son schéma en groupes fondamental :

Définition 2.2.39. Soit X un k-schéma où k est un corps. Soit $x : Spec(k) \to X$ un point. On définit un triplet (Y, G, y) où :

- G est un k-schéma affine en groupes fini.
- $f : Y \to X$ est un G-torseur.
- $y : Spec(k) \to Y$ est un point tel que $f(y) = x$.

Un morphisme $\varphi : (Y_1, G_1, y_1) \to (Y_2, G_2, y_2)$ entre deux tels triplets est la donnée de deux morphismes $\alpha : Y_1 \to Y_2$ et $\beta : G_1 \to G_2$ où β est un morphisme de schémas en groupes, $\alpha(y_1) = y_2$ et t.q. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times Y_1 & \to & Y1 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G_2 \times Y_2 & \to & Y_2 \end{array}$$

commute (les flèches horizontales étant les actions des schémas en groupes). Nori appelle $\mathcal{C}^1$ la catégories dont les objets sont des triplets (Y, G, y) comme ci-dessus sauf que cette fois on demandera que G soit limite projective de k-schémas en groupes finis. Les morphismes sont les couples de morphismes (α, β) qu'on vient de décrire.

$\square$

Définition 2.2.40. Soit X un k-schéma où k est un corps. Soit $x : Spec(k) \to X$ un point. On dira que X possède un schéma un groupes fondamental $\pi_1(X, x)$ si il existe un triplet $(P, \pi_1(X,x), p)$ dans $\mathcal{C}^1$ tel que pour tout objet (Y, G, y) avec G fini, il existe un unique morphisme $(P, \pi_1(X,x), p) \to (Y, G, y)$.

□

Remarque 2.2.41. La schéma en groups fondamental définit précédemment (cf. déf. 2.2.31) possède les propriétés requises pour être un schéma en groupes fondamental selon cette nouvelle définition qui est donc cohérente avec tout ce qui précède.

□

Proposition 2.2.42. Soient k, X et x comme dans la déf 2.2.40. Si X est réduit et connexe alors X possède un schéma en groupes fondamental.

Preuve : (cf. [26], Part I, Ch. II, §1, Proposition 2).

□

On donne quelques détails sur la construction de Gasbarri, dont la construction de Nori résultera un cas particulier. Gasbarri ne se limite donc plus, comme on l'a dit, aux corps mais il prend, comme schéma de base, un schéma de Dedekind. Soient donc E un schéma de Dedekind, X un schéma réduit, irréductible (donc connexe) et $j : X \to E$ un morphisme fidèlement plat. On suppose aussi l'existence d'un point $x : E \to X$. Voyons brièvement comment on construit le schéma en groupes fondamental de Gasbarri :

Définition 2.2.43. Soit $\mathcal{P}(X)$ la catégorie dont les objets sont les triplets (Y, G, y) où :

- G est un schéma en groupes fini et plat sur E.
- $f : Y \to X$ est un G-torseur.
- $y : E \to Y$ un point t.q. $f(y) = x$.

Un morphisme $\varphi : (Y_1, G_1, y_1) \to (Y_2, G_2, y_2)$ entre deux triplets est la donnée de deux morphismes $\alpha : Y_1 \to Y_2$ et $\beta : G_1 \to G_2$ où β est un morphisme de schémas en groupes, $\alpha(y_1) = y_2$ et t.q. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times Y_1 & \to & Y1 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G_2 \times Y_2 & \to & Y_2 \end{array}$$

commute (les flèches horizontales étant les actions des schémas en groupes).

□

On définit l'ensemble $I := Ob(\mathcal{P}(X))$ qu'on munit d'un relation d'ordre : si $i, j \in I$ alors $i \leq j$ ssi il existe un morphisme entre les triplets correspondants. Un tel morphisme est unique. De plus :

Théorème 2.2.44. L'ensemble $I := Ob(\mathcal{P}(X))$ est filtrant (cf. [12], Proposition 2.1), on peut ainsi définir un pro-objet $A := (\tilde{Y}, \pi_{Gasb}(X,x), \tilde{x}) := \varprojlim_{i \in I}(Y_i, G_i, x_i)$. De plus, $\tilde{Y}$ est un schéma et $\pi_{Gasb}(X,x)$ est un E-schéma en groupes.

□

Définition 2.2.45. On appellera le schéma en groupes $\pi_{Gasb}(X,x)$ construit dans le théorème 2.2.44 le **schéma en groupes fondamental de Gasbarri**. On appellera le schéma $\tilde{Y}$ le $\pi_{Gasb}(X,x)$-**torseur universel** sur X.

□

Remarque 2.2.46. Il y a une bijection

$$\begin{array}{ccc} (Y, G, y) & \longleftrightarrow & \textit{homomorphismes} \\ \text{triplets comme ci-dessus} & & \rho : \pi_{Gasb}(X,x) \to G. \end{array}$$

Preuve : dans un sens c'est simple puisque si on se donne un triplet on a automatiquement un morphisme $\rho : \pi_{Gasb}(X,x) \to G$. Dans l'autre sens il suffit de considérer le produit contracté $\widetilde{Y} \times^{\pi_{Gasb}(X,x)} G$ (cf. déf. 2.2.34).

□

Remarque 2.2.47. Si E est le spectre d'un corps parfait k et X est un schéma réduit, irréductible, propre et fidèlement plat sur k alors on peut définir $\pi_{Nori}(X,x)$ ainsi que $\pi_{Gasb}(X,x)$ et $\pi_{Nori}(X,x) \simeq \pi_{Gasb}(X,x)$ (c'est une conséquence de la remarque 2.2.41). Pour cette raison dorénavant on notera $\pi_1(X,x)$ le schéma en groupes fondamental de Nori ou Gasbarri sans créer de confusion.

□

Chapitre 3

Comparaison du schéma en groupes fondamental d'un schéma relatif X avec celui de sa fibre générique

Ce qui nous a poussé à travailler sur les schémas en groupes fondamentaux de Nori et Gasbarri est le strict lien que ces schémas en groupes ont avec la question suivante : peut-on étendre un torseur (sous l'action d'un schéma en groupes fini) au dessus de la fibre générique d'un schéma X défini sur un anneau de valuation discrète R en un torseur sur X même ? En fait on pourra se poser la même question si comme schéma de base on prendra un schéma de Dedekind E au lieu de $Spec(R)$; on montrera comment ce problème est lié à l'étude du schéma en groupes fondamental du schéma X et celui de sa fibre générique. Les résultats principaux sont les théorème 3.3.6 et 3.4.2. Dans cette première section on rappellera ce qui nous servira pour décrire notre problème et ensuite le résoudre.

3.1 Lemmes sur les algèbres de Hopf.

Soit dorénavant E un schéma de Dedekind affine de point générique η. On ne considérera que des E-schémas en groupes affines. Soit K le corps des fonctions de E ; on note $\eta := Spec(K)$.

Définition 3.1.1. Soit $\beta : G' \to G$ un morphisme de schémas en groupes (finis ou pas) où $G' := Spec(R_{G'})$ et $G := Spec(R_G)$. Le morphisme β est dit **morphisme**

schématiquement dominant si le correspondant morphisme $\beta^* : R_G \to R_{G'}$ d'algèbres de Hopf est injectif. On notera un morphisme schématiquement dominant $G' \twoheadrightarrow G$.

□

Cette dernière notation est cohérente avec le théorème qui suit.

Théorème 3.1.2. (cf. [33], Ch. 15, §5) Un morphisme $\beta : G' \to G$ de schémas affines en groupes sur un corps est schématiquement dominant si et seulement si β est surjectif pour la topologie *fpqc*.

□

Pour commodité de lecture on reprend la définition 2.2.43 :

Définition 3.1.3. Un triplet (Y, G, y) est la donnée de :

- un E-schéma en groupes G fini et plat E.
- un G-torseur $f : Y \to X$.
- un point $y : E \to Y$ t.q. $f(y) = x$.

Un morphisme $\varphi : (Y_1, G_1, y_1) \to (Y_2, G_2, y_2)$ entre deux triplets est la donnée de deux morphismes $\alpha : Y_1 \to Y_2$ et $\beta : G_1 \to G_2$ où β est un morphisme de schémas en groupes, $\alpha(y_1) = y_2$ et t.q. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times Y_1 & \rightarrow & Y1 \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G_2 \times Y_2 & \rightarrow & Y_2 \end{array}$$

commute (les flèches horizontales étant les actions des schémas en groupes).

□

Définition 3.1.4. Un triplet (Y, G, y) est dit **triplet dominant**[1] si pour tout triplet (Y', G', y') et tout morphisme $\varphi = (\alpha, \beta) : (Y', G', y') \to (Y, G, y)$, β est un morphisme schématiquement dominant (cf. déf. 3.1.1).

□

[1]N.B. : un tel triplet est appelé dans [26], Part I, Ch. II, un "reduced triple" (triplet réduit). A cause de la confusion que le choix de Nori pourrait créer on a décidé de l'appeler différemment.

Lemme 3.1.5. Soient B un anneau (commutatif et unitaire) quelconque, A et C deux B-algèbres de Hopf et $h : A \to C$ un B-morphisme de algèbres de Hopf. Le morphisme h se factorise de façon unique comme suit : il existe une B-algèbre de Hopf H et deux B-morphismes de algèbres de Hopf $s : A \to H$ et $i : H \to C$ t.q. s est surjectif, i est injectif et $h = i \circ s$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "s"'] & & C \\ & H \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve : soient $\Delta_A : A \to A \otimes A$ et $\Delta_C : C \to C \otimes C$ les morphismes (de B-modules) qui donnent à A et C une structure de cogèbre. On a donc, par définition de h le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & C \arrow[d, "\Delta_C"] \\ A \otimes A \arrow[r, "h \otimes h"'] & C \otimes C \end{tikzcd}$$

Or, soit $H := Im(h)$ le B-sous-module image de C ; pour qu'il soit une B-sous-cogèbre de C il faut et il suffit que $\Delta_C(H) \subseteq H \otimes H$ (cf. déf. 1.1.3). D'après le diagramme précédant on sait que $\Delta_C(h(x)) = (h \otimes h)(\Delta_A(x))$, pour tout $x \in A$. Soit donc $\Delta_A(x) := \sum a_i \otimes a_j$ $(a_i \in A)$ on a $\Delta_C(h(x)) = \sum h(a_i) \otimes h(a_j) \in H \otimes H$ comme on désirait. Pareillement soient $m_A : A \otimes A \to A$ et $m_C : C \otimes C \to C$ les morphismes (de B-modules) qui donnent à A et C une structure de B-algèbre (à savoir les multiplications), on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] & C \\ A \otimes A \arrow[r, "h \otimes h"'] \arrow[u, "m_A"] & C \otimes C \arrow[u, "m_C"'] \end{tikzcd}$$

Exactement comme auparavant on obtient $m_C(h(a_1) \otimes h(a_2)) = h(m_A(a_1 \otimes a_2))$ ce qui nous permet de conclure que $m_C(H \otimes H) \subseteq H$ et donc H a une structure de B-algèbre et donc de B-bigèbre (cf. déf. 1.1.6). Soient, pour conclure, S_A et S_C les morphismes antipodaux qui donnent à A et C une structure de B-algèbre de Hopf, il reste à vérifier que $S_C(H) \subseteq H$ (dans ce cas H est une B-algèbre de Hopf, cf. déf. 1.1.11) : en effet on a le diagramme commutatif suivant (où les morphismes horizontaux sont tous les deux

h et verticalement on a S_A et S_C) :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] & C \\ A \arrow[u, "S_A"] \arrow[r, "h"'] & C \arrow[u, "S_C"'] \end{tikzcd}$$

Trivialement il s'ensuit que, $\forall a \in A$, $S_C(h(a)) = h(S_A(a))$ et donc $S_C(H) \subseteq H$. Le morphisme $s : A \to H$, $a \mapsto h(s)$ est surjectif par définition. De plus H est contenu dans C et on note telle inclusion $i : H \hookrightarrow C$. Les morphismes s et i sont automatiquement morphismes de B-algèbres de Hopf.

□

Corollaire 3.1.6. Grâce au lemme 3.1.5 il s'ensuit que tout morphisme $f : G' \to G$ entre schémas affines en groupes (sur un anneau B) peut être factorisé en un morphisme schématiquement dominant $s : G' \twoheadrightarrow F$ (pour un certain B-schéma en groupes F) et une immersion fermée $i : F \hookrightarrow G$ t.q. $i \circ s = f$:

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, two heads, "s"'] & & G \\ & F \arrow[ur, hook, "i"'] & \end{tikzcd}$$

□

Lemme 3.1.7. Soient $(A_i, f_i^l)_{i\in I}$ un système inductif de B-algèbres (de Hopf) et A une B-algèbre t.q. $A \simeq \varinjlim_{i\in I} A_i$; on a, pour tout couple (i,l), t.q. $i \leq l$ le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i^l"'] & A \\ A_l \arrow[ur, "\alpha_l"'] & \end{tikzcd}$$

On fixe $i \in I$, alors le morphisme α_i est injectif si et seulement si pour tout $l \geq i$ tout $f_i^l : A_i \to A_l$ est injectif.

Preuve : dans un sens c'est trivial. Dans l'autre sens, on suppose que A_i soit telle que $f_i^l : A_i \to A_l$ est injectif $\forall l \geq i$; soit $x \in A_i$ et $\alpha_i(x) = 0$. On pose $y := f_i^l(x) \in A_l$. On sait que $\alpha_l(y) = 0$ d'après le diagramme précédant ; mais α_l est défini comme composition des morphismes suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_l : & A_l & \hookrightarrow & \coprod_{k\in I} A_k & \twoheadrightarrow & \frac{\coprod_{k\in I} A_k}{\sim} \simeq A \\ & y & \mapsto & y & \mapsto & 0 \end{array}$$

ce qui veut dire qu'il existe $r \in I$, $r \geq l$ et $f_l^r : A_l \to A_r$ t.q. $f_l^r(y) = 0$, en particulier le morphisme $f_i^r = f_l^r \circ f_i^l : A_i \to A_r$ envoie x vers 0 ($x \mapsto y \mapsto 0$), mais d'après l'hypothèse sur A_i le morphisme f_i^r est injectif et donc $x = 0$.

$\square$

Or, si on note $E = Spec(R_E)$, $\pi_1(X,x) = Spec(R_{\pi_1(X,x)})$, alors $R_{\pi_1(X,x)}$ est une R_E-algèbre de Hopf et puisque $\pi_1(X,x) \simeq \varprojlim_{i\in I} G_i$ (cf. théorème 2.2.44) alors $R_{\pi_1(X,x)} \simeq \varinjlim_{i\in I} R_{G_i}$, où $G_i := Spec(R_{G_i})$.

Corollaire 3.1.8. Un triplet (Y,G,y) comme dans la définition 2.2.43 est dominant (cf. déf. 3.1.4) ssi le morphisme canonique $\rho : \pi_1(X,x) \to G$ naturellement associé à ce triplet (cf. remarque 2.2.46) est un morphisme schématiquement dominant (cf. déf. 3.1.1).

Preuve : comme on a l'isomorphisme de algèbres de Hopf $R_{\pi_1(X,x)} \simeq \varinjlim_{i\in I} R_{G_i}$ il suffit de considérer le lemme 3.1.7 et de inverser les flèches pour obtenir le résulta souhaité.

$\square$

Notation 3.1.9. Motivés par le corollaire 3.1.8 on dira que le couple (G,ρ) est dominant si le morphisme $\rho : \pi_1(X,x) \to G$, naturellement associé à un triplet (Y,G,y) comme dans la définition 2.2.43, est schématiquement dominant.

$\square$

Lemme 3.1.10. Soit E un schéma de Dedekinf affine. Soit (G,ρ) un couple composé d'un E-schéma affine en groupes G et un morphisme $\rho : \pi_1(X,x) \to G$ (on lui associe donc naturellement un triplet $(Y,G,y) \in Ob(\mathcal{P}(X))$). Il existe un couple (G',ρ') (où G' est un E-schéma affine en groupes et $\rho' : \pi_1(X,x) \to G$ un morphisme de E-schémas affines en groupes) et un morphisme $\beta : G' \to G$ t.q. $\beta \circ \rho' = \rho$ et ρ' est un morphisme schématiquement dominant (cf. déf. 3.1.1).

Preuve : l'existence des morphismes $\rho' : \pi_1(X,x) \twoheadrightarrow G'$ (schématiquement dominant) et $\beta : G' \to G$ t.q. $\beta \circ \rho' = \rho$

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\rho'"'] & & G \\ & G' \arrow[ur, hook, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

est assurée par le corollaire 3.1.6. Le couple (G', ρ') est donc dominant selon la notation 3.1.9.

$\square$

Suivant la notation 3.1.9 et d'après le lemme 3.1.10 on dira donc que tout couple (G, ρ) est *chapeauté* par un couple dominant, ou, ce qui revient au même, tout triplet (Y, G, y) est *chapeauté* par un triplet dominant.

Lemme 3.1.11. Soient, comme dans le lemme 3.1.7, B un anneau commutatif unitaire, $(A_i, f_i^j)_{i\in I}$ un système inductif de B-algèbres (de Hopf) et A une B-algèbre de Hopf t.q. $A \simeq \varinjlim_{i\in I} A_i$ et $\alpha_i : A_i \to A$. Soit J un sous-ensemble filtrant de I et C une B-algèbre telle que $C \simeq \varinjlim_{j\in J} A_j$. On suppose que le morphisme canonique $\gamma_j : A_j \to C$ soit injectif pour tout $j \in J$. Alors le morphisme canonique $\psi : C \to A$ est injectif si et seulement si $\alpha_j : A_j \to A$ est injectif pout tout $j \in J$.

Preuve : pout tout $j \in J$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\psi"] & A \\ A_j \arrow[u, hook, "\gamma_j"] \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

si ψ est injectif alors α_j est injectif $\forall j \in J$ (rien à dire).
Réciproquement, soit α_j injectif $\forall j \in J$ et soit $x \in C$ t.q. $\psi(x) = 0$. Une fois de plus on utilise la factorisation canonique :

$$\gamma_j : A_j \hookrightarrow \coprod_{u\in J} A_u \twoheadrightarrow \frac{\coprod_{u\in J} A_u}{\sim} \simeq C.$$

Soit donc $z \in \coprod_{u\in J} A_u$ un représentant de $x \in C$, il s'ensuit qu'il existe $v \in J$ tel que $z \in A_v$ et $\gamma_v(z) = x$, en particulier on a $0 = \psi(x) = \psi \circ \gamma_v(z) = \alpha_v(z)$, mais puisque on a supposé α_v injectif on a $z = 0$, donc $x = \gamma_v(z) = 0$.

$\square$

3.2 Structure du schéma en groupes fondamental.

On notera dorénavant avec E un schéma de Dedekind affine. Notre point de départ pour cette section est simplement la définition de schéma en groupes fondamental qu'on a déjà donnée (cf. définition 2.2.45) :

$$\boxed{\pi_1(X,x) := \varprojlim_{i\in I} G_i}$$

où $I := Ob(\mathcal{P}(X))$ (voir déf. 2.2.43 pour la définition de $\mathcal{P}(X)$) et en plus on notera

$$\boxed{\rho_i : \pi_1(X,x) \to G_i}$$

les correspondants morphismes canoniques.

Proposition 3.2.1. Soit $J \subseteq I$ l'ensemble de tous les $i \in I$ tels que

$$\rho_i : \pi_1(X,x) \twoheadrightarrow G_i.$$

Le schéma en groupes $\pi_1(X,x)$ est isomorphe à la limite projective de tous les E-schémas affines en groupes G_j finis, $j \in J$, à savoir

$$\boxed{\pi_1(X,x) \simeq \varprojlim_{j\in J} G_j}$$

Preuve : c'est une conséquence du lemme 3.1.10, en effet on part de la définition de schéma en groupes fondamental et on remarque que tout couple (G_i, ρ_i) qui apparaît dans la limite qui le définit est chapeauté par un couple (G_j, ρ_j) dominant, ce qui revient à dire que pour tout $i \in I$ il existe $j \in J$ tel que $j \geq i$; c'est suffisant pour dire que le couple (G_i, ρ_i) devient négligeable dans la limite $\pi_1(X,x) := \varprojlim_{i\in I} G_i$ dans le sens qu'il peut être remplacé par le couple dominant (G_j, ρ_j), d'où le résultat. Il est clair aussi que tout schéma affine en groupes G fini et lié à $\pi_1(X,x)$ au moyen d'un morphisme schématiquement dominant $\pi_1(X,x) \twoheadrightarrow G$, appartient à cette nouvelle limite.
$\square$

Or, soit $\eta := Spec(K)$, le point générique du schéma de Dedekind E (qu'on a supposé affine au début de cette section), on construit $X_\eta := X \times_E \eta$ qui possède un point $x_\eta \in X_\eta(\eta)$ (fibre de $x \in X(E)$). Sur η on peut donc construire le schéma en groupes fondamental $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$ mais aussi le schéma en groupes $\pi_1(X,x)_\eta := \pi_1(X,x) \times_E \eta$. Décrivons donc ces deux schémas en groupes qui nous intéressent de près :

Remarque 3.2.2. Selon la définition 2.2.45, appliqué à X_η, on construit le schéma en groupes fondamental de la fibre générique de X, à savoir

$$\boxed{\pi_1(X_\eta, x_\eta) := \varprojlim_{m\in M} F_m}$$

où $M := Ob(\mathcal{P}(X_\eta))$ (voir définition 2.2.43) et F_m est un schéma affine en groupes fini sur η appartenant à un objet de $\mathcal{P}(X_\eta)$; on utilise la notation suivante pour les morphismes canoniques

$$\boxed{q_m : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to F_m}$$

de plus, d'après la proposition 3.2.1, appliqué à X_η, on obtient aussi l'isomorphisme suivant

$$\boxed{\pi_1(X_\eta, x_\eta) \simeq \varprojlim_{n\in N} F_n}$$

où $N \subset M$ est l'ensemble de tous les $m \in M$ tels que

$$q_m : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow F_m.$$

□

Après avoir parlé du schéma en groupes fondamental $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$ de la fibre générique X_η de X on parlera ici de suite de la fibre générique $\pi_1(X, x)_\eta$ du schéma en groupes fondamental construit sur X. L'étape successive sera la comparaison entre les deux K-schémas en groupes.

Remarque 3.2.3. Les limites inductives d'algèbres commutent aux produits tensoriels, il en est de même pour les limites projectives de schémas affines en groupes. Donc si on examine la définition de schéma en groupes fondamental sur X, à savoir $\pi_1(X, x) := \varprojlim_{i\in I} G_i$, alors la fibre générique $\pi_1(X, x)_\eta$ du schéma en groupes fondamental est isomorphe à la limite suivante :

$$\boxed{\pi_1(X,x)_\eta \simeq \varprojlim_{i\in I} G_{i,\eta}}$$

où $I := Ob(\mathcal{P}(X))$ et $G_{i,\eta} \simeq G_i \times_E \eta$. Pour cohérence avec les précédentes notations on écrira donc les morphismes qui lient la fibre générique $\pi_1(X,x)_\eta$ (fibres des ρ_i précédemment définis) du schéma en groupes fondamental au schéma en groupes $G_{i,\eta}$ de la manière suivante :

$$\boxed{\rho_{i,\eta} : \pi_1(X,x)_\eta \to G_{i,\eta}}$$

De plus, d'après la proposition 3.2.1 on obtient aussi l'isomorphisme suivant

$$\boxed{\pi_1(X,x)_\eta \simeq \varprojlim_{j\in J} G_{j,\eta}}$$

où $J \subset I$ a été précédemment défini, on a un isomorphisme de schémas en groupes $G_{j,\eta} \simeq G_j \times_E \eta$ et les morphismes qui lient $\pi_1(X,x)_\eta$ à $G_{j,\eta}$ sont les morphismes fibres des ρ_j précédemment définis, à savoir

$$\boxed{\rho_{j,\eta} : \pi_1(X,x)_\eta \to G_{j,\eta}}$$

Puisque le morphisme $\eta \to E$ est plat il s'ensuit que $\rho_{j,\eta} : \pi_1(X,x)_\eta \twoheadrightarrow G_{j,\eta}$ est un morphisme schématiquement dominant tout simplement parce que $\rho_j : \pi_1(X,x) \twoheadrightarrow G_j$ est schématiquement dominant. Cependant le morphisme canonique (qui existe) $\pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow G_{j,\eta}$ n'est pas à priori schématiquement dominant.

□

Avec les notations utilisées dans les remarques 3.2.2 et 3.2.3 on énonce la remarque suivante :

Remarque 3.2.4. Soit (G_i, ρ_i) un objet de I et considérons sa fibre $(G_{i,\eta}, \rho_{i,\eta})$. Puisque ce n'est qu'un torseur au dessus de X_η alors c'est un objet de M. Ça détermine une fonction croissante $I \to M$.

□

Une simple conséquence de cette remarque est l'existence d'un morphisme

$$\boxed{\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \longrightarrow \pi_1(X, x)_\eta.}$$

Avant de continuer on récapitule les notations utilisées en se bornant aux schémas en groupes qu'on utilisera dans la suite :

$q_m : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to F_m$	$m \in M$
$q_n : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow F_n$	$n \in N$
$\rho_{i,\eta} : \pi_1(X, x)_\eta \to G_{i,\eta}$	$i \in I$
$\rho_{j,\eta} : \pi_1(X, x)_\eta \twoheadrightarrow G_{j,\eta}$	$j \in J$

où $J \subset I$ et $N \subset M$.

On va maintenant traduire les résultats de cette première partie en termes de algèbres de Hopf ; fixons des notations (qui dualisent le dernier tableau récapitulatif) :

<u>Notation</u> 3.2.5. On pose

$\pi_1(X_\eta, x_\eta) \simeq Spec(A)$
$\pi_1(X, x)_\eta \simeq Spec(D)$

et

$F_m \simeq Spec(A_m)$	$\alpha_m : A_m \to A$	$m \in M$
$F_n \simeq Spec(A_n)$	$\alpha_n : A_n \hookrightarrow A$	$n \in N$
$G_{i,\eta} \simeq Spec(D_i)$	$\delta_i : D_i \to D$	$i \in I$
$G_{j,\eta} \simeq Spec(D_j)$	$\delta_j : D_j \hookrightarrow D$	$j \in J$

où on rappelle, une fois de plus, que $J \subset I$, $N \subset M$ et $I \to M$ est une fonction croissante. Il est clair que les morphismes α_m dualisent les q_m et ainsi de suite. Il est aussi clair on a les imorphismes

$$A \simeq \varinjlim_{m \in M} A_m \simeq \varinjlim_{n \in N} A_n$$

et

$$D \simeq \varinjlim_{i \in I} D_i \simeq \varinjlim_{j \in J} D_j$$

où les isomorphismes sont à entendre comme isomorphismes en tant que K-algèbres de Hopf, K étant le corps de fonction de E.

Remarque 3.2.6. Soit $\psi : D \to A$ le dual du morphisme $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \longrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$. $\forall j \in J$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\varphi"] & A \\ & D_j \arrow[u, "\alpha_j"'] \arrow[ul, hook, "\delta_j"] \end{tikzcd}$$

donc $\psi \circ \delta_j = \alpha_j$.

$\square$

3.3 Conclusion.

L'objet de cette section est de montrer que le morphisme

$$\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \longrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$$

est un morphisme schématiquement dominant (théorème 3.3.6). Si on garde les notations adoptées dans la section 3.2 (et en particulier dans la remarque 3.2.6) ça revient à démontrer que

$$\psi : D \to A$$

est injectif. Or, on reprend le diagramme de la remarque 3.2.6 où, pour tout $j \in J$ on a :

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\psi"] & A \\ & D_j \arrow[u, "\alpha_j"'] \arrow[ul, hook, "\delta_j"] \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 3.1.11 il est clair que, puisque $\delta_j : D_j \hookrightarrow D$ est une injection pour tout $j \in J$, si on montre que $\forall j \in J$ le morphisme $\alpha_j : D_j \to A$ est lui aussi injectif alors le morphisme $\psi : D \to A$ serait lui aussi automatiquement injectif et on aurait terminé. C'est l'objet de ce qui suit et conclut cette section.

Une fois de plus on utilise le lemme 3.1.5 grâce auquel on peut factoriser α_j comme suit :

$$\alpha_j : D_j \twoheadrightarrow \overline{A} \hookrightarrow A.$$

où $\overline{A}$ est une K-algèbre de Hopf. De plus, puisque on a une inclusion $\overline{A} \hookrightarrow A$ il s'ensuit que le morphisme dual est schématiquement dominant et donc on a $\pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow Spec(\overline{A})$. Il s'ensuit qu'il existe, suivant la notation 3.2.5, $n \in N$ t.q. $\overline{A} \simeq A_n$. De plus, on a une immersion fermée entre schémas affines en groupes :

$$f : Spec(A_n) \hookrightarrow Spec(D_j)$$

qu'on réécrit, selon la notation 3.2.5, comme suit :

$$f : F_n \hookrightarrow F_j$$

On identifie donc F_n avec un sous-schéma en groupes fermé de F_j. Soit maintenant (Y', F_n, y') le triplet (cf. déf. 2.2.43) relatif à (F_n, q_n) ; le triplet (Y, F_j, y) relatif à (F_j, q_j) satisfait la relation suivante :

$$Y \simeq Y' \times^{F_n} F_j$$

à savoir le produit contracté de Y' via le morphisme $f : F_n \hookrightarrow F_j$ (cf. remarque 2.2.46), et y est l'image dans Y de y'. En effet on a le lemme suivant

Lemme 3.3.1. Soient $\alpha : G \to H$ un morhisme entre schémas en groupes, Y un G torseurs au dessus de X, P un H-torseurs au dessus de X et $\varphi : Y \to P$ un morphisme entre torsuers compatible avec les actions de G et H[2]. Alors $P \simeq Y \times^G H$.

Preuve : pour tout X-schéma T on a une flèche canonique :

$$\begin{array}{ccc} Y(T) \times H(T) & \to & P(T) \\ (y, h) & \mapsto & \varphi(y) \cdot h \end{array}$$

qui passe au quotient (sous l'action à gauche de G). On en déduit donc un morphisme de H-torseurs $Y \times^G H \to P$ au dessus de X qui est donc un isomorphisme, d'où le résultat.

□

Lemme 3.3.2. Le morphisme canonique $f' : Y' \to Y$ est une immersion fermée.

Preuve : localement pour la topologie *fpqc* c'est vrai puisque localement les torseurs sont triviaux (cf. [23] Proposition 4.1). On conclut à l'aide de [15], Proposition 2.7.1., que le résultat est vrai aussi globalement.

□

[2]Notamment ça reste vrai pour les morphismes de triplets $(\varphi, \alpha) : (Y, G, y) \to (P, H, p)$.

Or, on se souvient qu'il existe un E-schéma affine en groupes G_j fini et un triplet dominant $(P, G_j, p) \in Ob(\mathcal{P}(X))$ (voir déf. 2.2.43 et 3.1.4) t.q. (Y, F_j, y) en est la fibre générique. On est donc dans la situation suivante :

$$
\begin{array}{ccccc}
F_n \circlearrowright & Y' & & & \\
 & \downarrow & & & \\
F_j \circlearrowright & Y & \rightarrow & P & \circlearrowleft G_j \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & X_\eta & \rightarrow & X & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \eta & \rightarrow & E &
\end{array}
$$

D'après [15], proposition 2.8.5, on peut construire un E-schéma en groupes H, le seul sous-schéma en groupes fermé de G_j qui est plat sur E et tel que $H \times_E \eta \simeq F_n$: c'est l'adhérence schématique de F_n dans G_j. De façon analogue on construit Q, le seul sous-schéma fermé de P qui est plat sur E et tel que $Q \times_E \eta \simeq Y'$. Cette nouvelle situation est décrite dans le diagramme suivant :

$$
\begin{array}{ccccc}
F_n \circlearrowright & Y' & \rightarrow & Q & ?\ H \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
F_j \circlearrowright & Y & \rightarrow & P & \circlearrowleft G_j \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & X_\eta & \rightarrow & X & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \eta & \rightarrow & E &
\end{array}
\tag{3.1}
$$

où le point d'interrogation nous rappelle qu'il faut encore préciser les éventuelles relations entre H et Q. La réponse est donnée dans le lemme qui suit :

Lemme 3.3.3. Q est un H-torseur au dessus de X.

Preuve (Esquisse) : (voir aussi [12], lemma 2.2) L'adhérence schématique commute aux produits fibrés (cf. [15], Corollaire 2.8.6) donc en particulier du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
F_n \times Y' \arrow[r, "action"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\
F_j \times Y \arrow[r, "action"] & Y
\end{tikzcd}
$$

on déduit le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
H \times Q \arrow[r, "action"] \arrow[d] & Q \arrow[d] \\
G_j \times P \arrow[r, "action"] & P
\end{tikzcd}
$$

d'où une action $H \times Q \to Q$. De l'isomorphisme $F_n \times Y' \simeq Y' \times_{X_\eta} Y'$ on déduit l'isomorphisme $\overline{F_n} \times \overline{Y'} \simeq \overline{Y' \times_{X_\eta} Y'} \simeq \overline{Y'} \times_{\overline{X_\eta}} \overline{Y'}$ ou, ce qui revient au même, $H \times Q \simeq Q \times_X Q$ donc Q est un H-torseur au dessus de X.

□

On a un H-torseur Q, mais pour avoir un triplet il nous faut encore un point $q : E \to Q$ qui étend le point $y' \in Y'(K)$.

Lemme 3.3.4. Soient (P, G_j, p), (Y, F_j, y) et (Y', F_n, y') les triplets relatifs au diagramme 3.1 tels que $p \times_E \eta \simeq y$ et $y = f' \circ y'$ où $f' : Y' \hookrightarrow Y$. Il existe un point $q : E \to Q$ tel que le morphisme $u : Q \hookrightarrow P$ satisfait $u \circ q = p$ et $q \times_E \eta \simeq y'$.

Preuve : $y' : \eta \to Y'$ étant une immersion fermée on construit $\overline{y'} : Z \hookrightarrow Q$ le sous-schéma fermé de Q adhérence de y' où Z est plat sur E et $Z \times_E \eta \simeq \eta$ (encore d'après [15], proposition 2.8.5). De plus $u \circ \overline{y'} : Z \hookrightarrow P$ est une immersione fermée, il en résulte que Z est le seul sous-schéma fermé de P qui est plat sur E et tel que sa fibre soit isomorphe à η. Un tel Z est unique, il s'ensuit que $u \circ \overline{y'} \equiv p$ et $Z \simeq E$ puisque $p : E \to P$ satisfait les mêmes propriétés. Cela montre que $q := \overline{y'} : E \to Q$ est le point qu'on cherche.

□

On récapitule avec ce dernier diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (Y', F_n, y') & \to & (Q, H, q) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y, F_j, y) & \to & (P, G_j, p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_\eta & \to & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \eta & \to & E. \end{array} \tag{3.2}$$

Corollaire 3.3.5. Le morphisme $\alpha_j : D_j \to A$, introduit dans la remarque 3.2.6, est injectif.

Preuve : on rappelle d'abord qu'on avait factorisé le morphisme α_j comme suit :

$$\alpha_j : D_j \twoheadrightarrow \overline{A} \hookrightarrow A$$

et on avait noté
$$F_n \simeq Spec(\overline{A}).$$
On remarque maintenant qu'il existe $i \in I$ t.q. $F_n \simeq G_{i,\eta} \simeq Spec(D_i)$ (cf. toujours la notation 3.2.5), en effet il existe un triplet (Q, H, q) dont (Y', F_n, y') est fibre comme dans les lemmes 3.3.3 et 3.3.4 affirment. On a donc le diagramme commutatif suivant :
$$\begin{tikzcd} & D_i \arrow[d, "\delta_i"] \\ D_j \arrow[ur] \arrow[r, hook, "\delta_j"'] & D \end{tikzcd}$$
où le morphisme $\delta_j : D_j \hookrightarrow D$ est injectif par construction (cf. notation 3.2.5) et en plus, d'après le lemme 3.1.7, le morphisme $D_j \to D_i \simeq \overline{A}$ est injectif. Mais par construction il est aussi surjectif (on avait en effet la factorisation $\alpha_j : D_j \twoheadrightarrow \overline{A} \simeq D_i \hookrightarrow A$) et donc $D_j \simeq D_i$, en particulier $\alpha_j : D_j \to A$ est injectif.
□

Théorème 3.3.6. Le morphisme $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \longrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$ est surjectif.

Preuve : d'après le corollaire 3.3.5 et le lemme 3.1.11 le morphisme $\psi : D \to A$ est injectif, ce qui se traduit, en termes de schémas en groupes, en le résultat souhaité.
□

3.4 Applications

On aimerait appliquer le théorème 3.3.6 au problème d'extension de torseurs ou, plus précisément, on souhaite expliquer comment le noyau N du morphisme $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \longrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$ mesure l'obstruction à l'extension d'un torseur au dessus de X_η sous l'action d'un K-schéma en groupes affine fini en un torseur au dessus de X ; on rappelle les hypothèses et on fixe des notations qui reprennent celles des sections précédentes :

Notation 3.4.1. Soient E un schéma de Dedekind (qu'on suppose affine), X un schéma réduit, irréductible (donc connexe) et $j : X \to E$ un morphisme fidèlement plat. On suppose l'existence d'un point $x : E \to X$. On notera η le point générique de E et $N := ker(\varphi)$ où $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \longrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$ où on rappelle brièvement que $X_\eta \simeq X \times_E \eta$, ensuite $\pi_1(X_\eta, x_\eta)$ est le schéma en groupes fondamental construit sur la fibre générique X_η de X alors que $\pi_1(X, x)_\eta$ est la fibre générique du schéma en groupes fondamental construit sur X.

Le résultat qu'on montrera est le suivant :

Théorème 3.4.2. Soient G un schéma affine en groupes fini sur K, $\rho : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow G$ un morphisme schématiquement dominant (cf. déf. 3.1.1) de K-schémas affines en groupes. Soit $(Y, G, y) \in \mathcal{P}(X_\eta)$ le triplet dominant associé à ρ (cf. la remarque 2.2.46). Alors il existe un triplet $(Y', G', y') \in \mathcal{P}(X)$ dont la fibre générique est (Y, G, y) si et seulement si $ker(\rho) > N$.
□

Pour commodité du lecteur on rappelle ici de suite ce que c'est un triplet $(Y, G, y) \in \mathcal{P}(X_\eta)$. C'est la donnée d'un torseur Y au dessus de X_η sous l'action d'un K-schéma affine en groupes G fini où on suppose en plus l'existence d'un point $y \in Y(K)$. De façon analogue un triplet $(Y', G', y') \in \mathcal{P}(X)$ est la donnée d'un torseur Y' au dessus de X sous l'action d'un E-schéma affine en groupes G' fini et plat où on suppose en plus l'existence d'un point $y' \in Y'(E)$.

A partir du théorème 3.4.2 il n'est pas difficile de démontrer le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.3. Tout triplet dominant (cf. déf. 3.1.4) sur X_η s'étend à un triplet (dominant) sur X si et seulement si $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$ est un isomorphisme.
□

Dans le reste de cette section on prouvera le théorème 3.4.2

Preuve (du théorème 3.4.2). Dans un sens c'est simple : supposons en effet qu'il existe un triplet $(Y', G', y') \in \mathcal{P}(X)$ dont la fibre générique soit (Y, G, y). Ça veut dire qu'il existe un morphisme $\rho' : \pi_1(X, x) \to G'$ (c'est l'unique morphisme naturellement associé à (Y', G', y'), cf. rem. 2.2.46) dont on considère la fibre générique $\rho'_\eta : \pi_1(X, x)_\eta \to G' \times_E \eta \simeq G$ et on a $\rho'_\eta \circ \varphi = \rho$, (où φ est encore le morphisme $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow \pi_1(X, x)_\eta$ et $\rho : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \twoheadrightarrow G$) à savoir on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_\eta, x_\eta) \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho"'] & \pi_1(X, x)_\eta \arrow[r] \arrow[d, "\rho'_\eta"] & \pi_1(X, x) \arrow[d, "\rho'"] \\
& G \arrow[r] & G'
\end{tikzcd}$$

L'existence d'un tel ρ'_η est équivalente[3] à la condition $ker(\rho) > N$ (on dira simplement que ρ passe au dominant).

Supposons maintenant que la condition $ker(\rho) > N$ soit satisfaite et donc qu'il existe un morphisme $\gamma : \pi_1(X,x)_\eta \twoheadrightarrow G$ tel que $\gamma \circ \varphi = \rho$, à savoir le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X_\eta, x_\eta) \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\rho"'] & \pi_1(X,x)_\eta \arrow[dl, two heads, "\gamma"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Donc le morphisme γ est obligatoirement surjectif (puisque ρ et φ le sont). Or, on aura besoin de quotienter un schéma en groupes par un autre schéma en groupes, ce qui devient difficile si on veut quotienter un schéma en groupes qui n'est à priori pas de type fini, comme par exemple $\pi_1(X,x)_\eta$. Donc il nous faut le lemme

<u>Lemme</u> 3.4.4. On reprend la notation 3.2.5. On a donc $\pi_1(X,x)_\eta \simeq \varprojlim_{j\in J} G_{j,\eta}$ où $\rho_{j_\eta} : \pi_1(X,x)_\eta \twoheadrightarrow G_{j,\eta}$ $(\forall j \in J)$. Il existe $j \in J$ tel que γ se factorise via $G_{j,\eta}$ ou, ce qui revient au même, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x)_\eta \arrow[r, two heads, "\rho_{j_\eta}"] \arrow[d, two heads, "\gamma"'] & G_{j_\eta} \arrow[dl, two heads, "\gamma_j"] \\ G & \end{tikzcd}$$

commute.

<u>*Preuve*</u> : le morphisme γ correspond au morphisme d'algèbres de Hopf $\gamma^* : K_G \hookrightarrow D \simeq \varinjlim_{j\in J} D_j$ (cf. encore la notation 3.2.5). Soient $\{x_k\}_{k\in W}$ (où $|W| < \infty$) les générateurs de K_G comme K-module. Or, $\forall k \in W$ il existe $j_k \in J$ t.q. l'image de x_k appartient à D_{j_k}. Puisque $|W|$ est fini, il s'ensuit qu'il existe $j \in J$ t.q. l'image de x_k appartient à D_j pour tout $k \in W$, d'où le résultat.

□

Avant de continuer la preuve du théorème on rappelle la définition de quotient (voir [3], Définition 9.1 mais aussi [19], Part I, §5.1 et suivants) de K-schémas en groupes adaptée à notre situation :

[3]Si un tel morphisme ρ'_η existe il est clair que $N < ker(\rho)$; par ailleurs si $N < ker(\rho)$ alors on conclut à l'aide de [33], Ch. 15, Theorem 15.4 que ρ'_η existe.

Définition 3.4.5. Soit A un anneau commutatif unitaire. Soient G et G' deux A-schémas en groupes et $u : G \to G'$ un morphisme de A-schémas en groupes est le faisceau à droite (pour la topologie *fpqc*) G/G' quotient de G par la rélation d'équivalence

$$G \times_A G' \xrightarrow{\delta \circ (id_G \times u)} G \times_A G$$

t.q.

$$(g, g') \mapsto (g, g \cdot u(g'))$$

si $g \in G(T)$ et $g' \in G'(T)$ où T est un A-schéma et $\delta : G \times_A G \to G \times_A G$, t.q. $(g, g') \mapsto (g, g \cdot g')$.

□

On énonce les propriétés de ce quotient qu'on va utiliser dans la suite :

Proposition 3.4.6. Soit A un anneau commutatif unitaire. Soient G et G' deux A-schémas en groupes et $u : G \to G'$ un morphisme de A-schémas en groupes. Soit G/G' le faisceau quotient (pour la topologie *fpqc*) alors :

- i) si G' est un sous-schéma en groupes fermé[4] distingué de G et si G/G' est représentable par un A-schéma G'' alors sur G'' il existe une unique structure de A-schéma en groupes telle que le morphisme canonique $p : G \to G'''$ soit un morphisme de A-schémas en groupes (cf. [3], Proposition 9.2 (iv)).
- ii) Soit B une A-algèbre, on note $G_B := G \times_A B$ et $G'_B := G' \times_A B$. Si G/G' est représentable par un A-schéma G'' alors G'_B/G_B est représentable par le B-schéma en groupes $G'' \times_A B$ (cf. [3], Proposition 9.2 (v)).
- iii) Si A est un corps ou un anneau de Dedekind et G et G' sont de type fini sur A alors G/G' est représentable par un A-schéma G'' (cf. [3], Remarque 9.3 (b)).

Preuve : voir les références données.

□

On revient à la preuve du théorème 3.4.2. Le morphisme $\gamma_j : G_{j,\eta} \to G$ est surjectif pour la topologie *fpqc* (ou schématiquement dominant, ça revient au même d'après le théorème 3.1.2) puisque ρ_{j_η} et γ le sont. Soit G_j le E-schéma en groupes dont la fibre est $G_{j,\eta}$ et $\rho_j : \pi_1(X, x) \to G_j$ le morphisme dont $\rho_{j_\eta} : \pi_1(X, x)_\eta \twoheadrightarrow G_{j,\eta}$ est fibre. On définit

$$N_1 := ker(\gamma_j)$$

[4] Le morphisme u est donc une immersion fermée.

qui est un sous-schéma en groupes fermé de $G_{j,\eta}$. On construit l'adhérence schématique de N_1 dans G_j (cf. [15], Proposition 2.8.5), qu'on note N_2, le seul sous-schéma fermé de G_j qui est un E-schéma affine en groupes fini et plat sur E dont la fibre générique soit $G_{j,\eta}$. De plus, d'après [1], remarque 1.2.5. *b*), N_2 est distingué dans G_j. Or, d'après la proposition 3.4.6, iii) le faisceau (pour la topologie *fpqc*) quotient G_j/N_2 est représentable par un E-schéma en groupes qu'on notera G'. De plus, encore à l'aide de la proposition 3.4.6, ii) il y a un isomorphisme $G_{j,\eta}/N_1 \simeq G' \times_E \eta$. Or on peut identifier (cf. par exemple [19], Part I, §6.1) $G_{j,\eta}/N_1$ avec G. On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & N_2 \arrow[d, hook] \\
G_{j_\eta} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_j"'] & G_j \arrow[d, "\gamma'_j"] \\
G \arrow[r] \arrow[d] & G' \arrow[d] \\
\eta \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

On note γ'_j le morphisme $\gamma'_j : G_j \to G'$; on le compose avec $\rho_j : \pi_1(X,x) \to G_j$ obtenant ainsi un morphisme $\gamma'_j \circ \rho_j : \pi_1(X,x) \to G'$ auquel on associe canoniquement le triplet (Y', G', y') (cf. rem. 2.2.46) qui est le triplet désiré. Avec ceci on termine la preuve du théorème 3.4.2.

□

Exemple 3.4.7. Si $X = E$ alors on montre aisément que $\pi_1(X_\eta, x_\eta) \simeq \pi_1(X,x)_\eta \simeq \{1\}_K$. En effet tout torseur au dessus de E muni d'un E-point est trivial.

□

Dans ces deux énoncés on aimerait effacer le mot "dominant" et donc étendre le résultat à tout triplet mais pour l'instant on n'arrive pas à faire mieux. On part par exemple d'un morphisme $\rho : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to G$ non schématiquement dominant, on peut toujours le factoriser comme suit

$$\pi_1(X_\eta, x_\eta) \overset{s}{\twoheadrightarrow} H \overset{i}{\hookrightarrow} G.$$

La question est la suivante : si on sait étendre le triplet associé à s, peut-on étendre le triplet associé à ρ ? Savoir étendre le triplet associé à s revient à dire qu'il existe un morphisme $s' : \pi_1(X,x) \to H'$ t.q. $s'_\eta : \pi_1(X,x)_\eta \to H'_\eta \simeq H$ fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X_\eta, x_\eta) \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "s"'] & \pi_1(X,x)_\eta \arrow[r] \arrow[d, "s'_\eta"] & \pi_1(X,x) \arrow[d, "s'"] \\
 & H \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"] & H' \\
 & G \arrow[r] & G'
\end{tikzcd}$$

On ne sait pas comment lier H' à un certain schéma en groupes G' dont la fibre générique est isomorphe à G car, même si on considère l'adhérence schématique $\overline{H}$ de H dans G' il n'y a aucun lien évident entre H' et $\overline{H}$.

Chapitre 4

Clôture Galoisienne

Dans ce chapitre on s'occupera de construire une clôture galoisienne d'une tour de torseurs. Si X est un schéma noethérien sur un corps k, si G et G' sont deux k-schémas en groupes finis, Y un G-torseur[1] au dessus X et Y' est un G' torseur au dessus de Y on montrera, sous certaines hypothèses, qu'il existe un k-schéma en groupe fini $\widetilde{G}$, un $\widetilde{G}$-torseur $\widetilde{Y}$ au dessus de X et un morphisme surjectif $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y'$ (cf. corollaire 4.2.6).

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & Y' \arrow[d, "f'"] \\
& Y \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[d] \\
& Spec(k).
\end{tikzcd}$$

Pour ce faire on se place dans les hypothèses de Nori (cf. la sous-section 2.2.1) qu'on rappelle ci-dessous.

4.1 Fibrés vectoriels essentiellement finis

Notation 4.1.1. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe et réduit. On se donne un k-schéma en groupes fini G et un G-torseur $f : Y \to X$. On suppose l'existence d'une section $x : Spec(k) \to X$. On suppose aussi l'existence d'une section $y : Spec(k) \to Y$ au dessus de x. Ça nous donne ainsi un triplet (Y, G, y), au sens de la définition 2.2.43, qu'on ne supposera pas forcément dominant (cf. déf. 3.1.4). Si on se

[1] Le schéma Y est alors noethérien lui aussi en vertu de [16], Ch. II, §3, ex. 3.13 (g).

donne une catégorie tannakienne neutre $(\mathcal{C}, \otimes, \omega, 1_{\mathcal{C}})$ sur un corps k on écrira souvent $\mathcal{C}$ si l'omission des autres données ne crée pas de confusion.

$\square$

On considère le $\mathcal{O}_X$-faisceau de modules localement libre $f_*(\mathcal{O}_Y)$ qui est fini au sens de Weil, cf. définition 2.2.10, puisque il satisfait l'équation suivante :

$$f_*(\mathcal{O}_Y)^{\otimes 2} \simeq d \cdot f_*(\mathcal{O}_Y) \tag{4.1}$$

où la somme est la somme directe de $\mathcal{O}_X$-modules, le produit est le produit tensoriel au dessus de $\mathcal{O}_X$ et avec « $d\cdot$ » on entend la somme directe $f_*(\mathcal{O}_Y) \oplus .. \oplus f_*(\mathcal{O}_Y)$, d fois. En effet il suffit de considérer le foncteur fibre

$$F : Rep_k(G) \to \mathcal{Q}coh(X)$$

associé au G-torseur $f : Y \to X$ (cf. théorème 2.1.46) et remarquer que

- i) $F(A, \Delta) = f_*(\mathcal{O}_Y)$ où (A, Δ) est la représentation régulière de G (c'est une conséquence de [25], Lemme 2.2).
- ii) La représentation (A, Δ) satisfait l'équation

  $$(A, \Delta)\widehat{\otimes}(A, \Delta) \simeq d \cdot (A, \Delta)$$

  où on a noté d l'ordre de $|G|$ (cf. déf. 1.3.12) et $\widehat{\otimes}$ est le produit tensoriel dans $Rep_k(G)$, d'où l'équation (4.1).

Or, soit $\mathcal{F}$ n'importe quel $\mathcal{O}_Y$-faisceau localement libre fini au sens de Weil, alors il existe deux polynômes $p(x) \neq q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ à coefficients non négatifs tels que

$$p(\mathcal{F}) \simeq q(\mathcal{F}) \tag{4.2}$$

où la somme est la somme directe de $\mathcal{O}_Y$-modules et le produit est le produit tensoriel au dessus de $\mathcal{O}_Y$. On considère le $\mathcal{O}_X$-faisceau de modules $f_*(\mathcal{F})$ et on montre le résultat suivant

Théorème 4.1.2. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe et réduit. Soient G un k-schéma en groupes fini et $f : Y \to X$ un G-torseur. Soient $x : Spec(k) \to X$ une section et $y : Spec(k) \to Y$ une section au dessus de x. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-faisceau de modules localement libre, fini au sens de Weil alors le faisceau $f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_X$-faisceau de modules localement libre, fini au sens de Weil.

Preuve : le $\mathcal{O}_X$-faisceau $f_*(\mathcal{F})$ est sûrement localement libre (par exemple c'est une conséquence de [20], Ch. 5, §2 ex. 2.2 et ex. 2.11 (b)). Montrons que $f_*(\mathcal{F})$ est fini au sens de Weil. On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
&f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*(\mathcal{F}) \simeq \\
&\simeq (f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{O}_Y)) \otimes_{\mathcal{O}_X} (f_*(\mathcal{O}_Y) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F})) \simeq \\
&\simeq f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} (f_*(\mathcal{O}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*(\mathcal{O}_Y)) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F}) \simeq \\
&\simeq f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} (d \cdot f_*(\mathcal{O}_Y)) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F})
\end{aligned}$$

cette dernière égalité étant une conséquence de l'équation (4.1). De plus

$$\begin{aligned}
&f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} (d \cdot f_*(\mathcal{O}_Y)) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F}) \simeq \\
&d \cdot (f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F})),
\end{aligned}$$

par récurrence on montre ainsi que

$$\underbrace{f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} .. \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*(\mathcal{F})}_{m \text{ fois}} \simeq d^{m-1} \cdot (\underbrace{f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} .. \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F})}_{m \text{ fois}}). \tag{4.3}$$

Or, sans perte de généralité on suppose $N := deg(p) \geq deg(q) =: M$ et donc on pose

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} n_i x^i \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{M} m_i x^j$$

où $n_M \neq 0 \neq m_M$ et $n_i \geq 0, m_j \geq 0$ pour tout $i \leq N$ et pour tout $j \leq M$. On part donc de l'équation (4.2) qu'on rappelle : $p(\mathcal{F}) \simeq q(\mathcal{F})$. Il s'ensuit que

$$f_*(p(\mathcal{F})) \simeq f_*(q(\mathcal{F}))$$

et encore

$$p(f_*(\mathcal{F})) \simeq q(f_*(\mathcal{F}))$$

où maintenant la somme est la somme directe de $f_*(\mathcal{O}_Y)$-modules et le produit est le produit tensoriel au dessus de $f_*(\mathcal{O}_Y)$. Trivialement on déduit que

$$d^N \cdot (p(f_*(\mathcal{F}))) \simeq d^N \cdot (q(f_*(\mathcal{F}))).$$

Cette dernière égalité équivaut à :

$$\begin{aligned}
&\textstyle\bigoplus_{i=0}^{N}(d^{N-i+1} \cdot n_i \cdot d^{i-1} \cdot \underbrace{f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} .. \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F})}_{i \text{ fois}}) \simeq \\
&\textstyle\bigoplus_{j=0}^{M}(d^{N-j+1} \cdot m_j \cdot d^{j-1} \cdot \underbrace{f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} .. \otimes_{f_*(\mathcal{O}_Y)} f_*(\mathcal{F})}_{j \text{ fois}})
\end{aligned}$$

et d'après l'isomorphisme (4.3) on a

$$\bigoplus_{i=0}^{N}(d^{N-i+1}\cdot n_i\cdot \underbrace{f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{O}_X}..\otimes_{\mathcal{O}_X} f_*(\mathcal{F})}_{i \text{ fois}}) \simeq$$
$$\bigoplus_{j=0}^{M}(d^{N-j+1}\cdot m_j\cdot \underbrace{f_*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{O}_X}..\otimes_{\mathcal{O}_X} f_*(\mathcal{F})}_{j \text{ fois}})$$

ce qui veut bien dire que $f_*(\mathcal{F})$ est fini au sens de Weil.

□

Lemme 4.1.3. Soient k un corps, Y une courbe intègre et projective sur k, X une courbe projective et lisse sur k et $f : Y \to X$ un morphisme fini de degré d tel que $f_*(\mathcal{O}_Y)$ soit fini au sens de Weil. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-faisceau de modules cohérent, alors $deg(f_*(\mathcal{F})) = deg(\mathcal{F})$.

Preuve : dans la définition 2.2.12 on a défini le degré de $\mathcal{F}$ comme suit :

$$deg(\mathcal{F}) := \chi(\mathcal{F}) - rg(\mathcal{F})\cdot\chi(\mathcal{O}_Y),$$

en particulier $deg(\mathcal{O}_Y) = 0$. Or, (cf. [16], Ch. III, §4, ex. 4.1)

$$\chi(\mathcal{F}) = \chi(f_*(\mathcal{F})).$$

De plus, puisque $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est fini au sens de Weil il est en particulier semi-stable (cf. corollaire 2.2.25), mais comme X est une courbe lisse et projective sur k alors $f_*(\mathcal{O}_Y)$ est même semi-stable de degré zéro et de la formule

$$deg(f_*(\mathcal{O}_Y)) := \chi(f_*(\mathcal{O}_Y)) - rg(f_*(\mathcal{O}_Y))\cdot\chi(\mathcal{O}_X)$$

on déduit

$$0 = \chi(\mathcal{O}_Y) - d\cdot rg(\mathcal{O}_Y)\cdot\chi(\mathcal{O}_X)$$

soit, encore,

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = d\cdot\chi(\mathcal{O}_X).$$

De la définition de degré on obtient finalement

$$deg(f_*(\mathcal{F})) = \chi(f_*(\mathcal{F})) - rg(f_*(\mathcal{F}))\cdot\chi(\mathcal{O}_X) =$$

$$= deg(\mathcal{F}) + rg(\mathcal{F})\cdot\chi(\mathcal{O}_Y) - d\cdot rg(\mathcal{F})\cdot\chi(\mathcal{O}_X) = deg(\mathcal{F}),$$

qui conclut la preuve.

□

Corollaire 4.1.4. Soient k un corps parfait, Y une k-courbe intègre et projective, X une k-courbe projective et lisse. Soient G un k-schéma en groupes fini et $f : Y \to X$ un G-torseur. Soient $x : Spec(k) \to X$ une section et $y : Spec(k) \to Y$ une section au dessus de x. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_Y$-faisceau de modules localement libre, essentiellement fini alors le faisceau $f_*(\mathcal{F})$ est un $\mathcal{O}_X$-faisceau de modules localement libre, essentiellement fini.

Preuve : par définition (cf. déf. 2.2.27),

$$\mathcal{F} \simeq \frac{\mathcal{F}_2}{\mathcal{F}_1}$$

où $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \oplus_{i=1}^t \mathcal{P}_i$, avec $\mathcal{P}_i$ fibré vectoriel sur Y fini au sens de Weil pour tout $i = 1..t$ et avec $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ fibrés vectoriels semi-stables (cf. déf. 2.2.19) sur X. Or, puisque $f : Y \to X$ est un morphisme fini alors d'après [14], Corollaire 5.2.2, le foncteur f_* de la catégorie des $\mathcal{O}_Y$-modules vers la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules est exact. Il s'ensuit que $f_*(\mathcal{F}) \simeq \frac{f_*(\mathcal{F}_2)}{f_*(\mathcal{F}_1)}$ et $f_*(\mathcal{F}_1) \subset f_*(\mathcal{F}_2) \subset \oplus_{i=1}^t f_*(\mathcal{P}_i)$ où $f_*(\mathcal{P}_i)$ est un fibré vectoriel sur X fini au sens de Weil d'après le théorème 4.1.2. En particulier il est semi-stable de degré zéro. Le lemme 4.1.3 nous dit que $f_*(\mathcal{F}_1)$ et $f_*(\mathcal{F}_2)$ ont degré zéro et d'après la proposition 2.2.15 ils sont semi-stables de degré zéro. Ça nous dit que $f_*(\mathcal{F})$ est un fibré vectoriel essentiellement fini sur X.

□

Le théorème 4.1.2 s'applique notamment au cas de tours de torseurs, comme expliqué dans le corollaire suivant :

Corollaire 4.1.5. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe et réduit muni d'un point $x : Spec(k) \to X$. On se donne deux k-schéma en groupes finis G et G', un G-torseur $f : Y \to X$ et un G'-torseur $f' : Y' \to Y$. On suppose l'existence d'un point $y : Spec(k) \to Y$ au dessus de x et d'un point $y' : Spec(k) \to Y'$ au dessus de y. On suppose Y réduit et connexe. Alors $(f \circ f')_*(\mathcal{O}_{Y'})$ est un $\mathcal{O}_X$-faisceau localement libre fini au sens de Weil.

Preuve : il suffit de remarquer que $f'_*(\mathcal{O}_{Y'})$ est fini au sens de Weil et ensuite on applique le théorème pour conclure que $f_*(f'_*(\mathcal{O}_{Y'}))$ est lui aussi fini au sens de Weil.

□

D'après ce qu'on vient de démontrer il est naturel de se demander quel sont les liens entre le $\pi_1(X, (f \circ f')_*(\mathcal{O}_{Y'}), x)$-torseur universel au dessus de X et le schéma Y'. On commence avec une proposition préliminaire :

Proposition 4.1.6. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe et réduit. On se donne un k-schéma en groupes fini G et un G-torseur $f : Y \to X$. On suppose l'existence d'un point k-rationnel $x \in X(k)$ et d'un point k-rationnel $y \in Y(k)$ au dessus de x. Soit $\widetilde{Y}$ le torseur universel associé à la catégorie tannakienne neutre sur k engendrée par $f_*(\mathcal{O}_Y)$ alors le schéma en groupes H qui rend $\widetilde{Y}$ un torseur au dessus de X est un sous-schéma en groupes fermé de G et il est isomorphe à G ssi le triplet (Y, G, y) est dominant. De plus $\widetilde{Y} \hookrightarrow Y$ est une immersion fermée.

Preuve : On notera $\theta : X \to Spec(k)$ le morphisme structural de X. Comme on a déjà fait au début de ce chapitre on considère le foncteur fibre

$$F : Rep_k(G) \to \mathcal{Q}coh(X)$$

associé au G-torseur $f : Y \to X$ (cf. théorème 2.1.46) et on le factorise comme suit

$$Rep_k(G) \overset{s}{\twoheadrightarrow} F(Rep_k(G)) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{Q}coh(X)$$

où en particulier $F(Rep_k(G))$ est une catégorie[2] tannakienne neutre sur k si munie du foncteur fibre $x^*_{|F(Rep_k(G))}$, où $x^* : \mathcal{O}_X\text{-}\mathcal{M}od \to k\text{-}\mathcal{M}od$. De plus s est un foncteur tensoriel essentiellement surjectif, i est un foncteur fibre pleinement fidèle. On note $oubli_G : Rep_k(G) \to k\text{-}mod$ le foncteur oubli alors les foncteurs $x^* \circ s$ et $oubli_G$ sont isomorphes[3] :

$$\begin{tikzcd} Rep_k(G) \arrow[r, "s"] \arrow[dr, bend right, "oubli_G"'] & F(Rep_k(G)) \arrow[d, "x^*"] \\ & k\text{-}mod \end{tikzcd}$$

Or, d'après le lemme 2.2.35 on a $Y = \underline{Isom}^{\otimes}_X(\theta^* \circ oubli_G, F) \simeq$

$$\simeq \underline{Isom}^{\otimes}_X(\theta^* \circ x^* \circ s, i \circ s)\underline{Isom}^{\otimes}_X(x^*_{|F(Rep_k(G))}, i) \times^{\underline{Aut}^{\otimes}_k(x^*_{|F(Rep_k(G))})} \underline{Aut}^{\otimes}_k(oubli_G).$$

On note $H := \underline{Aut}^{\otimes}_k(x^*_{|F(Rep_k(G))})$ et $\widetilde{Y} := \underline{Isom}^{\otimes}_X(x^*_{|F(Rep_k(G))}, i)$. Puisque s est essentiellement surjectif il s'ensuit que (cf. [7], Proposition 2.21) le morphisme $H \to G$ canoniquement associé à s est une immersion fermée et donc on identifie H avec un sous-schéma en groupes fermé de G. De plus, la représentation régulière (A, Δ) de G

[2] Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur on entend par $F(\mathcal{C})$ l'image essentielle de F à savoir la sous catégorie pleine de $\mathcal{C}'$ dont les objets sont tous les objets de $\mathcal{C}'$ qui sont isomorphes à un objet $F(X)$ pour un certain $X \in Ob(\mathcal{C})$.

[3] En effet $x^*(Y) \simeq x^*(\underline{Isom}^{\otimes}_X(\theta^* \circ oubli_G, i \circ s)) \simeq \underline{Isom}^{\otimes}_k(x^* \circ \theta^* \circ oubli_G, x^* \circ i \circ s) \simeq \underline{Isom}^{\otimes}_k(oubli_G, x^* \circ s)$ donc $x^* \circ s$ et $oubli_G$ sont isomorphes.

engendre $Rep_k(G)$ (cf. [33], Ch. 3, Theorem 3.5) il s'ensuit que $F(A,\Delta)=f_*(\mathcal{O}_Y)$ (cf. [25], lemme 2.2) engendre $F(Rep_k(G))$, c'est-à-dire

$$EF(X,\{f_*(\mathcal{O}_Y)\})\simeq F(Rep_k(G))$$

d'où le résultat souhaité. Il s'ensuit immédiatement que $\widetilde{Y}\hookrightarrow Y$ est une immersion fermée (cf. lemme 3.3.2). Si en plus le triplet de départ (Y,G,y) est dominant (cf. déf. 3.1.4), alors $H\simeq G$ et $\widetilde{Y}\simeq Y$. En effet, puisque $\pi_1(X,x)\twoheadrightarrow G$, il suffit de remarquer que le foncteur $s:Rep_k(G)\twoheadrightarrow F(Rep_k(G))$ précédemment introduit est une équivalence.
□

4.2 Clôture Galoisienne de tours de torseurs

On généralise maintenant la situation précédente. Le k-schéma X sera toujours propre connexe et réduit (k étant un corps parfait). Par contre on ne demandera plus que Y soit un G-torseur sur X mais on prendra juste un schéma Y et un morphisme $f:Y\to X$ fini et plat[4] t.q. $f_*(\mathcal{O}_Y)$ soit un fibré vectoriel essentiellement fini (cf. déf. 2.2.27)[5]. On considère la catégorie tannakienne (neutre) sur k engendrée par $f_*(\mathcal{O}_Y)$ à savoir

$$EF(X,\{f_*(\mathcal{O}_Y)\})$$

munie du foncteur fibre $x^*:EF(X,\{f_*(\mathcal{O}_Y)\})\to k\text{-mod}$, d'où le foncteur

$$F:=\theta^*\circ x^*:EF(X,\{f_*(\mathcal{O}_Y)\})\to \mathcal{Q}coh(X)$$

où $\theta:X\to Spec(k)$ est le morphisme structural. A ce foncteur est associé (cf. théorème 2.1.46) un G-torseur $p:\widetilde{Y}\to X$ où $G=\underline{Aut}_k^{\otimes}(x^*)$ et $\widetilde{Y}=\underline{Isom}_X^{\otimes}(F,i_X)$, où $i_X:EF(X,\{f_*(\mathcal{O}_Y)\})\hookrightarrow \mathcal{Q}coh(X)$ est le foncteur inclusion et G est le k-schéma en groupes fini[6] tel que $Rep_k(G)\simeq EF(X,\{f_*(\mathcal{O}_Y)\})$. De cette équivalence on déduit que à $f_*(\mathcal{O}_Y)$ correspond une k-représentation linéaire (V,ρ) (où plus simplement V) qui hérite de $f_*(\mathcal{O}_Y)$ une structure de k-algèbre. C'est un cas plus général que celui présenté dans la proposition 4.1.6 et on ne sait même pas, pour l'instant, si il existe un X-morphisme

[4] Donc fidèlement plat car fini et plat entraîne que f est fermé et ouvert mais puisque X est connexe alors f est surjectif.

[5] On rappelle que un fibré vectoriel fini au sens de Weil est en particulier essentiellement fini.

[6] Le schéma G est fini car $f_*(\mathcal{O}_Y)\simeq V/V'$ où $V'\hookrightarrow V\hookrightarrow \sum_{i=1}^N P_i$ où V et V' sont fibrés semi-stable et les P_i sont finis au sens de Weil. La conclusion suit si on remarque que $EF(X,\{f_*(\mathcal{O}_Y)\})\hookrightarrow EF(X,\{P_1,..,P_N\})$ et on considère [25], Lemma 3.9.

$g : \widetilde{Y} \to Y$. On montre que ce morphisme existe et on en étudiera les propriétés. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[rr, dashed, "\exists g?"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& X \arrow[d, "\theta"] & \\
& Spec(k) \arrow[u, bend left, "x"] &
\end{tikzcd}
$$

D'ailleurs[7] $\widetilde{Y}_x \simeq G$ donc il existe un point $t : Spec(K) \to \widetilde{Y}$ au dessus de X.

<u>Lemme</u> 4.2.1. Un morphisme $g : \widetilde{Y} \to Y$ existe si et seulement si il existe une section $s : \widetilde{Y} \to \widetilde{Y} \times_X Y$.

<u>*Preuve*</u> : si un tel g existe on considère l'identité $id_{\widetilde{Y}} : \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$ et par la propriété universelle du produit fibré il existe un morphisme $s : \widetilde{Y} \to \widetilde{Y} \times_X Y$ qui commute aux projections donc en particulier $pr_{\widetilde{Y}} \circ s = id_{\widetilde{Y}}$.

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[dr, dotted, "s"] \arrow[drr, bend left, "id_{\widetilde{Y}}"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& \widetilde{Y} \times_X Y \arrow[r, "pr_{\widetilde{Y}}"'] \arrow[d, "pr_Y"] & \widetilde{Y} \arrow[d, "p"] \\
& Y \arrow[r, "f"] & X
\end{tikzcd} \tag{4.4}
$$

Dans l'autre sens il suffit de poser $g := pr_Y \circ s$.

$\square$

On reprend V la représentation de G qui correspond à $f_*(\mathcal{O}_Y)$ (donc $V = x^*(f_*(\mathcal{O}_Y))$) qui a, comme on a dit, une structure de k-algèbre. On notera $\mathcal{V}$ le $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$-faisceau de algèbres $(\theta \circ p)^*(V)$ et $j : \mathcal{O}_{\widetilde{Y}} \to \mathcal{V}$ le morphisme naturel.

<u>Lemme</u> 4.2.2. Soit Y_x la fibre de Y en x. Il existe alors un $\widetilde{Y}$-isomorphisme h : $Y_x \times_k \widetilde{Y} \to Y \times_X \widetilde{Y}$.

<u>*Preuve*</u> : puisque $V = x^*(f_*(\mathcal{O}_Y))$ et $\mathcal{V} \simeq p^* \circ \theta^*(V)$ alors

$$\mathcal{V} \simeq p^* \circ \theta^* \circ x^*((f_*(\mathcal{O}_Y))) \simeq p^*(f_*(\mathcal{O}_Y)).$$

[7]En effet $x^*(\underline{Isom}_X^{\otimes}(F, i_X)) \simeq x^*(\underline{Isom}_X^{\otimes}(\theta^* \circ x^*, i_X)) \simeq \underline{Isom}_k^{\otimes}(x^* \circ \theta^* \circ x^*, x^* \circ i_X) \simeq \underline{Aut}_k^{\otimes}(x^*)$.

Soit Y_x la fibre de Y en x

$$\begin{tikzcd} Y_x \arrow[r, "t"] \arrow[d, "f_x"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Spec(k) \arrow[r, "x"'] & X \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

et soient l et q comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Y_x \times_k \widetilde{Y} \arrow[r, "l"] \arrow[d, "q"'] & \widetilde{Y} \arrow[d, "\theta\circ p"] \\ Y_x \arrow[r, "f_x"'] & Spec(k) \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Or, d'après le diagramme 4.4 on a

$$(\mathcal{V} \simeq) \qquad p^*(f_*(\mathcal{O}_Y)) \simeq pr_{\widetilde{Y}*}({pr_Y}^*(\mathcal{O}_Y)) \tag{4.7}$$

ce qui est licite comme rappelé dans [20], Ch. 5, §1 ex. 1.16 (b), mais aussi, d'après, respectivement, les diagrammes 4.5 et 4.6

$$x^*(f_*(\mathcal{O}_Y)) \simeq (f_x)_*(t^*(\mathcal{O}_Y)) \simeq (f_x)_*(\mathcal{O}_{Y,x}) \tag{4.8}$$

et

$$(\theta \circ p)^*((f_x)_*(\mathcal{O}_{Y_x})) \simeq l_*(q^*(\mathcal{O}_{Y_x})) \simeq l_*(\mathcal{O}_{Y_x \times_k \widetilde{Y}}) \tag{4.9}$$

mais puisque

$$\mathcal{V} \simeq p^*(\theta^*(V)) \simeq p^*(\theta^*(x^*(f_*(\mathcal{O}_Y))))$$

de 4.7 et 4.8 on déduit

$$pr_{\widetilde{Y}*}({pr_Y}^*(\mathcal{O}_Y)) \simeq p^*(\theta^*(x^*((f_x)_*(\mathcal{O}_{Y,x})))) \tag{4.10}$$

qui nous donne ainsi, au moyen de 4.9, l'isomorphisme de $\mathcal{O}_{\widetilde{Y}}$-algèbres suivant

$$(\mathcal{V} \simeq) \qquad pr_{\widetilde{Y}*}(\mathcal{O}_{Y \times_X \widetilde{Y}}) \simeq l_*(\mathcal{O}_{Y_x \times_k \widetilde{Y}}). \tag{4.11}$$

Or, d'après [16], Ch. II, §5, ex. 5.17, on sait qu'il existe un unique schéma D et un unique morphisme affine $d : D \to \widetilde{Y}$ tel que $d_*(\mathcal{O}_D) \simeq \mathcal{V}$ et puisque $pr_{\widetilde{Y}} : Y \times_X \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$ et $l : Y_x \times_k \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$ sont de tels morphismes ($pr_{\widetilde{Y}}$ et l sont finis, car f l'est, donc affines) on en déduit un $\widetilde{Y}$-isomorphisme $h : Y_x \times_k \widetilde{Y} \to Y \times_X \widetilde{Y}$.

□

D'après les lemmes 4.2.1 et 4.2.2 on déduit donc que un X-morphisme $g : \widetilde{Y} \to Y$ existe si et seulement si il existe une section du morphisme

$$l : Y_x \times_k \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}.$$

Or, si par exemple on a une section

$$s : Spec(k) \to Y_x$$

alors le morphisme

$$\widetilde{Y} \simeq Spec(k) \times_{Spec(k)} \widetilde{Y} \xrightarrow{s \times_k id_{\widetilde{Y}}} Y_x \times_k \widetilde{Y}$$

est une section de $l : Y_x \times_k \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$ (qui est la projection sur $\widetilde{Y}$) on en déduit donc l'existence d'un X-morphisme $g : \widetilde{Y} \to Y$. D'autre part si on suppose l'existence d'un X-morphisme $g : \widetilde{Y} \to Y$ alors on prend $t : Spec(K) \to \widetilde{Y}$ le point au dessus de $x \in X(K)$ (qui existe toujours, comme on a déjà vu) il est clair que $g \circ t : Spec(K) \to Y$ est un point de Y au dessus de x. On a donc prouvé le résultat suivant :

Proposition 4.2.3. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe et réduit. Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schémas fini et plat t.q. $f_*(\mathcal{O}_Y)$ soit un fibré vectoriel essentiellement fini. On suppose l'existence d'un point k-rationnel $x \in X(k)$. Soit $\widetilde{Y}$ le torseur universel associé à la catégorie tannakienne neutre sur k engendrée par $f_*(\mathcal{O}_Y)$ alors il existe un X-morphisme de schémas $g : \widetilde{Y} \to Y$ si et seulement si il existe un point k-rationnel $y \in Y(k)$ au dessus de x.

□

On supposera dorénavant l'existence une section $Spec(k) \to Y$ au dessus de x, d'où l'existence du X-morphisme $g : \widetilde{Y} \to Y$. On montre maintenant que, sous certaines hypothèses supplémentaires, le morphisme $g : \widetilde{Y} \to Y$, est surjectif. D'abord on remarque que le morphisme $f : Y \to X$, car fidèlement plat et fini, est en particulier quasi-fini et quasi-compact donc d'après [15], Théorème 4.1.2, on a $dimX = dimY$ si X et Y sont localement de type fini. Or, $g(\widetilde{Y})$ est un fermé de Y, en effet :

- i) $p : \widetilde{Y} \to X$ est un morphisme fini[8]. En particulier il est propre donc $pr_Y : Y \times_X \widetilde{Y} \to Y$ est propre.

[8]Localement pour la topologie *fpqc* les G-torseurs sont triviaux (cf. [23] Proposition 4.1) donc finis si G est un k-schéma en groupes fini. On conclut à l'aide de [15], Proposition 2.7.1., que le résultat est vrai aussi globalement.

– ii) La projection $Y \times_X \widetilde{Y} \to \widetilde{Y}$ est propre aussi car $f : Y \to X$ l'est. Donc sa section $s : \widetilde{Y} \to Y \times_X \widetilde{Y}$ est une immersion fermée (cf. [20], Ch. 3, §3, ex. 3.6) ce qui implique que s est un morphisme fini donc propre.

– iii) le morphisme $g := pr_Y \circ s$ est propre car composé de deux morphismes propres, en particulier $g(\widetilde{Y})$ est fermé.

De plus, il est clair que $dim(g(\widetilde{Y})) \leq dimY$ mais il suffit de regarder le diagramme 4.4 pour remarquer que $f(g(\widetilde{Y})) = p(\widetilde{Y}) = X$ (p est fidèlement plat car il a une structure de torseur) donc $dim(g(\widetilde{Y})) \geq dimX$ ce qui entraîne $dim(g(\widetilde{Y})) = dimY = dimX$. Si on prend Y irréductible on déduit $g(\widetilde{Y}) = Y$ donc g est surjectif. On a montré le résultat suivant :

Théorème 4.2.4. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe, réduit et localement de type fini. Soient Y un schéma irréductible et $f : Y \to X$ un morphisme de schémas fini et plat t.q. $f_*(\mathcal{O}_Y)$ soit un fibré vectoriel essentiellement fini. On suppose l'existence d'un point k-rationnel $x \in X(k)$ et d'un point k-rationnel $y \in Y(k)$ au dessus de x. Soit $\widetilde{Y}$ le torseur universel associé à la catégorie tannakienne neutre sur k engendrée par $f_*(\mathcal{O}_Y)$ alors il existe un unique X-morphisme surjectif de schémas, faisant commuter les sections, $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$.

□

Remarque 4.2.5. Les hypothèses sont les mêmes que celles du théorème 4.2.4. Si $f : Y \to X$ a une structure de torseur sous un k-schéma en groupes fini G tel que le triplet (Y, G, y) soit dominant[9] alors le morphisme $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$ est un isomorphisme. En effet dans la proposition 4.1.6 on a déjà montré que tout simplement le torseur universel associé à Y est Y même.

□

Le théorème 4.2.4 peut être appliqué notamment aux tours de torseurs.

Corollaire 4.2.6. Soient k un corps parfait et X un k-schéma propre connexe, réduit de type fini muni d'un point $x : Spec(k) \to X$. On se donne deux k-schéma en groupes finis G et G', un G-torseur $f : Y \to X$ et un G'-torseur $f' : Y' \to Y$. On suppose l'existence d'un point $y : Spec(k) \to Y$ au dessus de x et d'un point $y' : Spec(k) \to Y'$ au dessus de y. On suppose Y réduit et connexe et Y' irréductible. Alors il existe un k-schéma en groupes fini $\widetilde{G}$, un $\widetilde{G}$-torseur $\widetilde{Y}$ et un morphisme surjectif $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$.

[9] Ce qui est toujours vrai si $car(k) = 0$ puisque Y est irréductible donc connexe.

Preuve : d'après le corollaire 4.1.5 le faisceau $(f \circ f')_*(\mathcal{O}_{Y'})$ est localement libre et fini au sens de Weil. Le théorème 4.2.4 nous permet de conclure.

□

Définition 4.2.7. On appelle le $\widetilde{G}$-torseur $\widetilde{Y}$ construit dans le corollaire 4.2.6 la clôture galoisienne de la tour de torseurs

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{Y} \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & Y' \arrow[d, "f'"] \\
& Y \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[d] \\
& Spec(k).
\end{tikzcd}$$

□

Liste des Notations choisies pour les Catégories

Soient

k un corps,

A un anneau commutatif unitaire,

S un A-schéma,

G un A-schéma affine en groupes,

Y un espace topologique,

X un schéma, on note

k-$\mathcal{F}onct$, (déf. 1.2.2) catégorie des k-foncteurs,

k-$\mathcal{A}lg$, (déf 1.2.1) catégorie des k-algèbres commutatives et unitaires,

$\mathcal{E}ns$, (déf 1.2.1) catégorie des ensembles,

k-$\mathcal{A}ff$, (déf 1.2.6) catégorie des k-schémas affines,

k-$\mathcal{F}on\mathcal{G}r$, (déf. 1.2.12) catégorie des k-foncteurs en groupes,

k-$\mathcal{A}ff\mathcal{G}r$, (déf. 1.2.12) catégorie des k-schémas affines en groupes,

$\mathcal{G}r$, (section 1.4) catégorie des groupes,

$\mathcal{S}ch$, (section 1.4) catégorie des schémas,

G-$Tors_S$, (section 1.4) catégorie des G-torseurs au dessus de S,

$Rep_A(G)$ (déf. 1.5.4) catégorie des A-représentations linéaires de G,

$\mathcal{A}b$, (exemple 2.1.5) catégorie des groupes abéliens,

$\mathcal{A}b(X)$, (exemple 2.1.5) catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur Y,

$\mathcal{O}_X$-$\mathcal{M}od$, (exemple 2.1.5) catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules sur X,

$\mathcal{Q}coh(X)$, (exemple 2.1.5) catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents sur X,

$\mathcal{C}oh(X)$, (exemple 2.1.5) catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules cohérents sur X,

A-$\mathcal{M}od$, (exemple 2.1.5) catégorie des A-modules,

A-mod, (exemple 2.1.10) catégorie des A-modules de type fini,

A-$\mathcal{P}roj$ (exemple 2.1.22) catégorie des A-modules de type fini et projectifs.

Bibliographie

[1] ANANTHARAMAN S. *Schémas En Groupes, Espaces Homogènes Et Espaces Algébriques Sur Une Base De Dimension 1.* Mémoires de la S. M. F., tome33, (1973) 5-79.

[2] ATIYAH M., F., *On The Krull-Schmidt Theorem With Application To Sheaves*, Bulletin de la S. M. F., tome 84 (1956), 307-317.

[3] BERTIN J. E., *Généralites Sur Les Préschémas En Groupes.* éxposé VI_B, *Séminaires de Géométrie Algébrique Du Bois Marie.* III , (1962/64)

[4] BOURBAKI N., *Elements De Mathématiques. Algèbre*, Hermann Paris, (1943)

[5] BRUGUIERES A., *On A Tannakian Theorem Due To Nori*, à paraître, (2004)

[6] DELIGNE P., *Catégories Tannakiennes*, in *The Grothendieck Festschrift*, Vol II, Birkhäuser, (1990), 111-195.

[7] DELIGNE P., MILNE J. S., *Tannakian Categories*, in *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, Lectures Notes in Mathematics 900, Springer-Verlag, (1982), 101-227.

[8] DEMAZURE M., GABRIEL P., *Groupes Algébriques*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, (1970).

[9] DOUAI J. C., *Descente, Champs Et Gerbes De Hurwitz*, Séminaires et Congrès 5, (2001), 119-131

[10] EISEMBUD D., HARRIS J., *The Geometry Of Schemes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2000).

[11] GARUTI M., *On The Galois Closure For Torsors*, à paraitre, (2007).

[12] GASBARRI C., *Heights Of Vector Bundles And The Fundamental Group Scheme Of A Curve*, Duke Matematical Journal, Vol. 117, No. 2, (2003) 287-311.

[13] GROTHENDIECK A., *Éléments De Géométrie Algébrique.* I. *Le langage des Schémas.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, 4, (1960).

[14] GROTHENDIECK A., *Éléments De Géométrie Algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, 8, (1961).

[15] GROTHENDIECK A., *Éléments De Géométrie Algébrique. IV. Étude locale des Schémas et des Morphismes de Schémas.* II, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 24, (1965).

[16] HARTSHORNE R., *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1977).

[17] HILTON P. J., STAMMBACH U., *A Course In Homological Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1970).

[18] HUYBRECHTS D., LEHN M., *The Geometry Of Moduli Spaces Of Sheaves*, Aspects of Mathematics E 31, Vieweg (1997).

[19] JANTZEN J. C., *Representations Of Algebraic Groups*, Academic Press, (1987).

[20] LIU Q., *Algebraic Geometry And Arithmetic Curves*, Oxford Science Publications (2002)

[21] MAC LANE S., *Categories For The Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, (1971).

[22] MATSUMURA H., *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, (1980)

[23] MILNE J. S., *Étale Cohomology*, Princeton University Press, (1980).

[24] MUMFORD D., *The Red Book Of Varieties And Schemes* Springer LNM 1358, (1974).

[25] NORI M. V., *On The Representations Of The Fundamental Group*, Compositio Matematica, Vol. 33, Fasc. 1, (1976). p. 29-42.

[26] NORI M. V., *The Fundamental Group-Scheme*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol. 91, Number 2, (1982), p. 73-122.

[27] ROMAGNY M., *Effective Model Of A Finite Group Action*, arXiv :math/0601639, (2006).

[28] SAAVEDRA R., *Catégories Tannakiennes*, Lectures Notes, 265, Springer-Verlag (1972).

[29] SAIDI M., *Cyclic p-Groups And Semi-Stable Reduction Of Curves In Equal Characteristic $p > 0$*, arXiv :math/0405529 (2004).

[30] TEIXIDOR I BIGAS M., *Vector Bundles On Curves*, Notes disponibles à l'adresse http ://www.tufts.edu/ mteixido/files/vectbund.pdf

[31] VAN DER PUT M. ; SINGER M. F., *Galois Theory Of Linear Differential Equations.* Graduate Texts in Mathematics, Springer, (2002).

[32] VISTOLI A., *Notes On Grothendieck Topologies, Fibred Categories And Descent Theory*, arXiv :math.AG/0412512 v3, (2005).

[33] WATERHOUSE W. C., *Introduction To Affine Group Schemes*, GTM, Springer-Verlag, (1979).

[34] WEDHORN T., *On Tannakian Duality Over Valuation Rings*, Journal of Algebra 282, (2004), p. 575-609.

[35] ZAHND S., *Schémas Et Deformations*, à paraitre, (2005).

Résumé

La premier problème dont on s'occupe dans cette thèse est la suivante : soit X un schéma relatif sur un anneau de valuation discrète R et Y' un G'-torseur au dessus de la fibre générique X_η de X. Existe-t-il un R-schéma en groupes G et un G-torseur Y au dessus de X tel que sa fibre générique soit isomorphe au torseur Y' ? On affronte ce problème en étudiant ses liens avec le schéma en groupes fondamental introduit par Nori pour un schéma X réduit et connexe, propre sur un corps parfait et puis généralisé par Gasbarri pour un schéma irréductible, réduit et fidèlement plat sur un schéma de Dedekind. On montre que le morphisme naturel $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to \pi_1(X, x)_\eta$ entre le schéma en groupes fondamental de la fibre générique de X et la fibre générique du schéma en groupes fondamental de X est toujours surjectif pour la topologie fpqc. De plus, on montre que tout torseur peut être étendu ssi φ est un isomorphisme. Dans le quatrième et dernier chapitre on construit une clôture galoisienne de tours de torseurs au dessus d'un k-schéma X, k étant un corps : on se donne un G-torseur $f : Y \to X$ et un G'-torseur $f' : Y' \to Y$ (plus certaines hypothèses supplémentaires) et on construit un $\widetilde{G}$-torseur $p : \widetilde{Y} \to X$ qui *domine* Y au moyen d'un X-morphisme $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$.

Abstract

The first question we try to give an answer in this thesis is the following : let X be a relative scheme over a discrete valuation ring R and Y' a G'-torsor over the generic fibre X_η of X. Does it exist an R-group scheme G and a G-torsor Y over X whose generic fibre is isomorphic to the given torsor ? We face this problem by means of the fundamental group scheme introduced by Nori for a reduced and connected scheme X complete over a perfect field and then generalized by Gasbarri for an irreducible and reduced scheme faithfully flat over a Dedekind scheme. We prove that the natural morphism $\varphi : \pi_1(X_\eta, x_\eta) \to \pi_1(X, x)_\eta$ between the fundamental group scheme of the generic fibre of X and the generic fibre of the fundamental group scheme of X is always surjective for the fpqc topology. Moreover we prove that any torsor can be extended iff φ is an isomorphism. In the last chapter we study the construction of a Galois closure for towers of torsors over a k-scheme X for a field k : we take a G-torsor $f : Y \to X$ and a G'-torsor $f' : Y' \to Y$ (with some further hypothesis) and we construct a $\widetilde{G}$-torsor $p : \widetilde{Y} \to X$ that *dominate* Y by an X-morphism $g : \widetilde{Y} \twoheadrightarrow Y$.