UNIVERSITE DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE LILLE

Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Laboratoire Paul Painlevé - U.M.R. CNRS 8524

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 17 novembre 2008

par :

BOUZARI Abdelmalek

pour l'obtention du :

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE LILLE
(**Spécialité : Histoire des mathématiques**)

Mention : Très honorable

La géométrie des coniques dans la tradition de l'Occident Musulman à travers le *Kitāb al-Istikmāl* [Livre de l'accomplissement] d'al-Mu'taman (m. 1085)

Volume I

Introduction générale-Transcription mathématique-Annexes-Index

Composition du Jury :

AUSEJO Elena, Université de Saragosse (Rapporteur)

BKOUCHE Rudolf, Université de Lille1 (Examinateur)

DJEBBAR Ahmed, Université de Lille1 (Directeur de thèse)

HOGENDIJK Jan Pieter, Université d'Utrecht (Examinateur)

SESIANO Jacques, Ecole polytechnique de Lausanne (Rapporteur)

TAZZIOLI Rossana, Université de Lille1 (Présidente)

A la mémoire de ma mère et mon père

A ma femme Souad

A mes enfants Nadine, Meriem, Makine et Fériel

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma gratitude au Professeur Ahmed DJEBBAR (Université de Lille1) pour m'avoir initié à l'histoire des mathématiques, à ses méthodes et à ses outils, en dirigeant d'abord mon Magister, avant de me proposer ce sujet de recherche et d'accepter d'en assurer la direction. Tout au long de ces années de préparation, il n'a cessé de m'orienter avec beaucoup de patience en me prodiguant de précieux conseils. Je lui en serai toujours reconnaissant.

Mes remerciements vont aussi au Professeur Jan HOGENDIJK (Université d'Utrecht), le découvreur de la partie géométrique de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman, pour l'aide qu'il m'a fournie, indirectement, grâce à ses importants travaux sur cette partie et, en particulier, sur les chapitres traitant des coniques.

Je remercie également les Professeurs Elena AUSEJO (Université de Zaragoza), et Jacques SESIANO (Ecole Polytechnique de Lausanne) d'avoir accepté, en tant que rapporteurs, d'évaluer mon travail avant de le soumettre à l'appréciation du Jury.

Je tiens aussi à remercier la Professeur Rossana TAZZIOLI d'avoir accepté de présider le Jury et le Professeur Rudolf BKOUCHE (Université de Lille1) d'en faire partie.

Comme je dois exprimer mes remerciements au Professeur Bernard VITRAC (Directeur de recherche au CNRS) qui a accepté de lire la partie de la thèse qui traite de la tradition grecque des coniques et de m'avoir fait bénéficier de ses précieux conseils pour en améliorer le contenu.

Je remercie enfin le Professeur Mostefa M'BEKHTA (Directeur de l'UFR de Mathématiques de Lille1) et le professeur Bernard MAITTE (Directeur du Centre d'Histoire des Sciences et d'Epistémologie de Lille1) pour m'avoir accueilli dans leurs structures respectives durant mes stages de recherche à Lille1 et pour m'avoir accordé, durant la préparation de ce travail, toutes les facilités pour le mener à bien.

TRANSCRIPTION LATINE DES LETTRES ARABES

ʻ	ء	ḍ	ض	bā	با
b	ب	ṭ	ط	bū	بو
t	ت	ẓ	ظ	bī	بي
th	ث	c	ع		
j	ج	gh	غ		
ḥ	ح	f	ف		
kh	خ	q	ق		
d	د	k	ك		
dh	ذ	l	ل		
r	ر	m	م		
z	ز	n	ن		
s	س	h	هـ		
sh	ش	w	و		
ṣ	ص	y	ي		

TABLE DES MATIERES

Volume I

VOLUME II

AVANT-PROPOS

Le travail que nous présentons ici comprend l'édition critique, la traduction française et l'analyse mathématique de l'un des deux chapitres du *Kitāb al-Istikmāl* [Livre de l'accomplissement] du mathématicien andalou al-Mu'taman (XI^{e} siècle). Ce sont les deux seuls chapitres qui traitent des sections coniques et de certaines de leurs applications. Ils seront numérotés ainsi : IV.3.1 et IV.3.2.

Leur importance vient du fait qu'ils sont, avec un fragment et un résumé attribués à deux autres auteurs de la même époque, les seuls témoins d'un double phénomène : la circulation d'Orient vers l'Occident musulman d'une partie de la tradition grecque et arabe des coniques et la naissance puis le développement partiel d'une activité géométrique incluant l'étude des coniques et la résolution de problèmes utilisant ces courbes.

Les trois parties de notre travail sont précédées par une introduction générale dans laquelle nous présentons un panorama des deux traditions géométriques, antérieures à la fin du XI^{e} siècle, qui ont produit des travaux sur les sections coniques. Il s'agit, d'abord, de la partie de la tradition grecque qui a pu être exhumée au IX^{e} siècle et qui a bénéficié d'une traduction en arabe. Puis tous les écrits qui ont été produits en Orient et en Andalus et dont le contenu a pu circuler et a pu alimenter, d'une manière ou d'une autre, le projet d'al-Mu'taman. Ces écrits nous sont parvenus essentiellement en arabe mais dont certains éléments existent en persan et en hébreu.

Dans ce travail, nous avons adopté les conventions, abréviations et symboles suivants :

CONVENTIONS DE L'EDITION CRITIQUE :

* Les points diacritiques ont été rétablis sans être signalés

* L'écriture ancienne de certains mots a été actualisée sans que la modification soit signalée.

* Le changement de page est signalé ainsi :

//**و 3**// = début du recto du 3^{e} folio

//**ظ 3**// = début du verso du 3^{e} folio

* Pour les figures nous avons procédés de la manière suivante :

- Lorsque la figure existe dans le texte d'al-Mu'taman et qu'elle est illisible, ou bien lorsqu'elle est totalement effacée, nous avons préféré la refaire plutôt que de reprendre celle d'Ibn-Sartāq, en particulier pour respecter le lettrage d'al-Mu'taman.

CONVENTIONS DE LA TRADUCTION FRANÇAISE :

<…> : Pour ajouter un mot ou une phrase qui manque au texte.

CONVENTIONS DE LA TRANSCRIPTION MATHEMATIQUE

[…] : Mot, phrase, ou référence ajoutés dans la traduction pour faciliter la compréhension du texte ou compléter le raisonnement.

Compte tenu du fait qu'une grande partie du texte de la section IV.3.1. de l'*Istikmal* ne nous est accessible qu'à travers la rédaction d'Ibn Sartaq, qui semble s'écarter souvent à la fois du style et de la démarche d'al-Mu'taman, nous n'avons pas jugé utile de mettre le stemma de chaque proposition par crainte qu'il ne soit pas toujours fidèle aux références implicites de la rédaction d'al-Mu'taman.

[M: IV.3.1(x)] : Proposition n° x de la 1^e^ sous section de la 3^e^ section de la 4^e^ espèce du *Kitāb al-Istikmāl* d'al-Mu'taman.

[IS: IV.3.1(x)] : Proposition n° x de la 1^e^ sous section de la 3^e^ section de la 4^e^ espèce du *Kitāb al-Ikmāl* d'Ibn Sartāq.

[C: I; x] : Proposition n° x du Livre I des *Coniques* d'Apollonius.

[S: I; x] : Proposition n° x du Livre I de *La section du cylindre*, de Sérénus d'Antinoë.

[T: x] : Proposition n° x du *Livre sur les sections du cylindre et sur sa surface latérale* de Thabit Ibn Qurra.

[IH: x] : Proposition n° x des fragments du *Grand livre de géométrie* d'Ibn as-Samḥ.

[SI: x] : Proposition n° x du *Livre sur la quadrature de la parabole* d'Ibrāhīm Ibn Sinān.

SYMBOLISME DE LA TRANSCRIPTION MATHEMATIQUE :

P(ABG) = plan ABG
T(ABG) = triangle ABG
∠ABG = angle ABG
AB ⊥ CD = AB perpendiculaire à CD
AB // CD = AB parallèle à CD
S(AB) = surface (AB)
Q(AB) = quadrilatère de sommets opposés AB
Q(ABGC) = quadrilatère de sommets A, B, G, D.

CORRESPONDANCE ENTRE LES LETTRES LATINES ET LES LETTRES ARABES UTILISEES DANS LE LETTRAGE DES FIGURES

ا A	ب B	جـ G	د D	ه E	و W	ز Z	ح H	ط T
ي I	ك K	ل L	م M	ن N	س S	ع O	ف F	ص C
ق Q	ر R	ش J	ت T'	ث U	غ X	ذ V	ظ D'	ض Y
خ P	لا λ							

1- DESCRIPTION DES MANUSCRITS UTILISES POUR L'EDITION.

La copie de l'*Istikmāl* utilisée pour cette édition est composée de trois fragments du manuscrit de Copenhague (Royal Library, Or. 82). Chaque page contient 31 lignes d'une écriture maghrebo-andalouse. Toutes les figures sont dessinées sauf une seule (ff.105r), mais un certain nombre d'entres elles sont d'une lecture difficile. Les gloses marginales sont d'une autre main, manifestement celle d'un mathématicien connaisseur du contenu des *Coniques* d'Apollonius et de celui de l'*Istikmāl.*

La copie de l'*Ikmāl* utilisée est celle du manuscrit du Caire (Bibliothèque de l'Université, n° 23029). Chaque page contient 25 lignes d'une écriture *naskhi* très fine. Les figures y sont clairement dessinées. Il n'y a aucun commentaire dans les marges. Seuls les numéros des propositions y sont indiqués en lettres arabes, selon la numérotation alphabétique. Nous n'avons pas utilisé la copie d'Istanbul parce que nous n'avons pas pu en acquérir une copie.

A-INTRODUCTION GENERALE

A. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le volume qui nous est parvenu du *Kitāb al-Istikmāl* [Livre de l'accomplissement] d'al-Mu'taman (m. 478/1085), la partie géométrique est, de loin, la plus importante[1]. L'auteur y consacre deux chapitres à l'étude et à l'application des coniques. Dans le premier, qui fait l'objet de cette thèse, il traite des définitions et propriétés de ces courbes. Parmi ces propriétés, certaines sont nécessaires à la résolution des problèmes du second chapitre. D'autres devaient servir dans les chapitres consacrés à l'astronomie et à l'optique que l'auteur avait prévu d'insérer dans le second volume de son ouvrage qui ne nous est pas parvenu mais dont nous avons la table des matières[2]. Dans le second chapitre, al-Mu'taman poursuit l'exposé des propriétés des coniques en y ajoutant des contributions d'autres auteurs.

Comme pour les chapitres qui traitent de la théorie des nombres et de la géométrie euclidienne, al-Mu'taman ne fait aucune référence explicite aux contributions antérieures au XI^e^ siècle lorsqu'il expose les différents thèmes concernant les coniques. Mais l'analyse de ces thèmes a montré - et cela sera explicité dans le travail que nous présentons plus loin, - le lien étroit du texte de l'*Istikmāl* avec le contenu de certains chapitres des *Coniques* d'Apollonius. Cette même analyse révèle des liens avec des écrits sur le même sujet produits après le IX^e^ siècle dans le cadre des activités mathématiques arabes.

Dans ce qui suit, nous allons présenter brièvement les aspects essentiels de ces traditions antérieures. Si nous n'évoquons pas d'autres apports sur ce thème, comme ceux qui pouvaient provenir des pratiques géométriques d'autres traditions mathématiques, c'est tout simplement parce que, dans l'état actuel de nos connaissances, nous n'avons pas de témoignage sur l'existence de ces pratiques spécifiques aux courbes du second degré. Par ailleurs, toutes les sources arabes connues, qu'elles soient de nature bibliographique ou purement mathématique, évoquent exclusivement la tradition grecque et son héritière arabe du IX^e^ au XV^e^ siècle.

---

[1]- HOGENDIJK, J.P. : Discovery of an 11th century geometrical compilation : The Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, King of Saragossa, *Historia Mathematica* **13** (1986), p. 43-52.

[2]- DJEBBAR, A. : La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XI^e^ s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e^-XIV^e^ siècles, *Historia Mathematica*, n° 24 (1997), p. 185-192. Par la suite, cet article sera cité ainsi : *La rédaction de l'Istikmāl…*

I. LES CONIQUES DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE GRECQUE

Contrairement à l'histoire de la géométrie plane euclidienne et pré euclidienne, celle des coniques de la tradition grecque est relativement moins bien connue, du moins en ce qui concerne la phase d'élaboration antérieure au III^e siècle avant J.-C. La situation n'est pas meilleure pour la période allant du II^e siècle avant J.-C. au VII^e siècle après J.-C. à cause du caractère très lacunaire des témoignages fiables qui concernent cette période.

I.1. Les coniques avant Apollonius

La plus ancienne source grecque qui nous informe sur l'origine des coniques est un texte d'Eutocius (m. 497). Dans ses *Commentaires Sur le Second Livre du Traité d'Archimède*, il attribue à Ménechme (ca. 360 av. J.-C.) l'utilisation de ces courbes sans que lui, ni un autre auteur ne dise explicitement qui est l'initiateur de cette nouvelle démarche[3].

Dès cette époque, les propriétés essentielles de la parabole et de l'hyperbole équilatère semblent être connues puisque Ménechme les aurait utilisées pour résoudre le fameux problème de la duplication du cube[4], c'est-à-dire la construction d'un cube de volume double d'un cube donné.

D'une manière plus précise, Eutocius nous rapporte que, d'après Eratosthène (ca 276-194 av. J.-C.) Hippocrate de Chios (ca. 450-430 av. J.-C.) fût le premier à transformer le problème de la duplication du cube en un problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données, en énonçant que, si nous pouvons insérer deux lignes droites moyennes proportionnelles entre le côté du cube donné et le double

[3]- HEATH, Th. : *A History of Greek Mathematics,* New York, Dover, 1981, Vol.I, p. 251-252. Pour le commentaire d'Eutocius, voir : HEIBERG, I.-L. : *Apollonii Pergaei quae graece exstant, cum commentariis antiquis*, Leipzig, B.G. Teubner 1891-93. Reprint, Stuttgart, B.G. Teubner 1974, p. 168-361.

[4]- GILLISPIE, Ch. (édit.) : *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's Son, 1970-1980, vol. IV, p. 488-480. Cette référence sera notée, par la suite : *D. S. B*.

de ce côté, la première de ces deux lignes serait le côté du cube cherché[5]. Puis, c'est Ménechme qui aurait donné une solution à ce problème, par l'intersection d'une hyperbole équilatère et d'une parabole. Une seconde solution nous est parvenue, peut-être d'un autre auteur, qui fait intervenir l'intersection de deux paraboles[6].

Cette théorie des coniques et ses applications a continué à intéresser les mathématiciens grecs et son étude s'est concrétisée par la publication, au III[e] siècle av. J.-C., de deux importants traités. Le premier, intitulé *Les Lieux Solides*, rédigé par Aristée l'Ancien, était constitué de cinq Livres. Les seules informations qui nous sont parvenues sur cet ouvrage sont celles que rapporte Pappus (ca. 320) dans le Livre VII de la *Collection mathématique*. Voici ce qu'il en dit : "*(...) Aristée, auteur des cinq volumes qui avaient été publiés sur les* Lieux Solides, *à la suite des* Coniques*, avait toutefois [comme les prédécesseurs d'Apollonius] appelé l'une des sections coniques la section de cône acutangle, l'autre la section de cône rectangle et l'autre la section de cône obtusangle*"[7].

Le second traité est celui des *Coniques* d'Euclide (ca. 295 av. J.-C.). Ce traité ne nous est pas parvenu mais Pappus rapporte qu' " *Apollonius nous a transmis huit livres sur les coniques en ayant complété les quatre livres des* Coniques *d'Euclide… Au reste Euclide, estimant qu'Aristée était digne d'éloges en raison de ce qu'il avait publié jusque là sur les coniques, c'est, sans prendre les devants ni vouloir recommencer le même ouvrage… qu'il a écrit tout ce qu'il pouvait démontrer ".*

Le traité perdu d'Euclide est en quatre Livres, il semble contenir une compilation ou une synthèse des éléments de la théorie des coniques, à partir de ce qui a été élaboré par ses prédécesseurs[8]. Ces *Coniques* d'Euclide semblent avoir été un ouvrage de référence jusqu'à la parution du traité d'Apollonius.

---

[5]- La formulation algébrique moderne est : Connaissant a, déterminer x tel que $x^3 = 2a^3$. Hippocrate de Chios aurait démontré que cela revenait à trouver deux grandeurs, x et y, vérifiant : $\frac{2a}{y} = \frac{y}{x} = \frac{x}{a}$. Ce qui entraînait alors : $\left(\frac{x}{a}\right)^3 = \left(\frac{2a}{y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{a}\right) = 2$.

[6]- En termes modernes, les courbes fournissant les solutions sont les suivantes : $\{(x,y);\ xy = ab$ et $y^2 = bx\}$ et $\{(x,y);\ x^2 = ay$ et $y^2 = bx)$, a et b étant donnés.

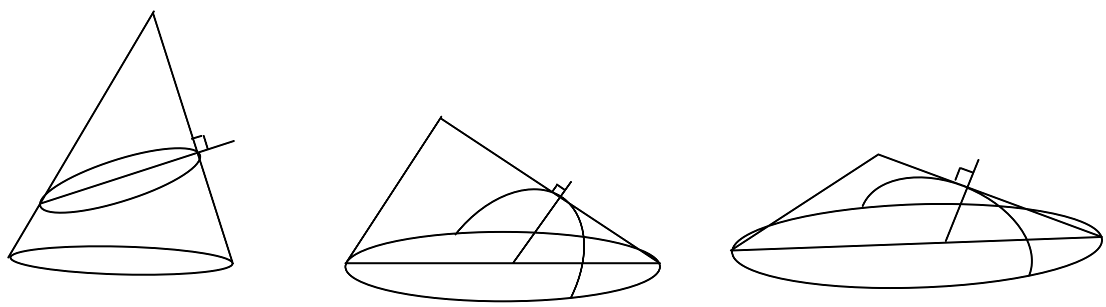
[7]- PAPPUS : *La collection mathématique*, VER EECKE, P. (trad.), Paris, Blanchard, 1982, p. 502-503.

[8]- HEATH, Th . : *A History of Greek Mathematics,* op.cit., Vol. I, p. 121-126.

A la même période, c'est-à-dire vers le milieu du IIIe siècle avant notre ère, des travaux sur les applications de cette théorie sont signalés par Apollonius dans la préface du livre IV des *Coniques*. Il nous rapporte que Conon de Samos et Nicotelès se sont préoccupés de l'intersection des sections coniques[9]. Parmi les préoccupations pratiques qui ont stimulé l'intérêt de certains mathématiciens grecs pour ces courbes, il y aurait eu celle de la résolution des problèmes posés par la conception et la réalisation concrète des miroirs ardents[10].

Jusqu'à l'époque d'Archimède (m. 212 av. J.-C.)[11], la génération des sections coniques était obtenue à partir de trois cônes droits distincts que l'on coupait par un plan perpendiculaire à leur génératrice. Le premier cône, dit "*acutangle*" est un cône circulaire droit dont les intersections de sa surface et d'un plan mené par l'axe, entourent un angle aigu. Le second cône, dit "*droit"* ou *"rectangle"* est celui dont les intersections entourent un angle droit. Le troisième cône, dit "*obtusangle"* est celui dont les intersections entourent un angle obtus. Ainsi, selon l'angle au sommet du cône, nous obtenons l'une ou l'autre des trois sections coniques :

- La *section de cône acutangle* (ellipse) est obtenue à partir d'un cône acutangle que l'on coupe par un plan perpendiculaire à une génératrice. [Fig.1]
- La *section de cône rectangle* (parabole) est obtenue à partir d'un cône droit que l'on coupe par un plan perpendiculaire à une génératrice. [Fig.2]
- La *section de cône obtusangle* (hyperbole) est obtenue à partir d'un cône obtusangle que l'on coupe par un plan perpendiculaire à une génératrice[12]. [Fig.3]



[Fig.1] [Fig.3] [Fig.2]

[9]- APOLLONIUS : *Les Coniques*, VER EECKE, P. (trad.), Paris, Blanchard, 1959, Livre IV, p. 281.
[10]- RASHED, R. : *Histoire des sciences arabes*, Paris, Seuil, Vol. II, p. 293-295.
[11]- SARTON, G. : *Introduction to the history of science : from Homer to Omar Khayyām*, Baltimore, Williams and Wilkins, 1927, p. 169.
[12]- PAPPUS : *La collection mathématique,* op. cit., p. 503.

Le traité "*Des Conoïdes et sphéroïdes*" d'Archimède est une source indirecte et précieuse des travaux sur les coniques établis par ses prédécesseurs. Dans cet ouvrage, qui est plutôt un traité d'application de ces courbes, Archimède se réfère à un écrit intitulé *Les Coniques* ou *Les Eléments pour les coniques* sans en mentionner l'auteur. Cet ouvrage pourrait être celui d'Euclide[13]. La formulation "*Cette proposition a été démontrée dans les* Eléments des Coniques" est courante dans son traité. Dans la proposition 3, après avoir affirmé que : "*les carrés des droites menées de la parabole parallèlement à AE sur ΔZ sont équivalents aux rectangles qui, appliqués à une droite N, ont pour largeur les droites que ces parallèles découpent sur la droite ΔZ à partir de son extrémité"*, il ajoute : "*car cela est démontré dans les propositions sur les coniques"*[14]. Nous retrouvons la même expression dans la proposition 26, lorsqu'il étudie l'hyperbole[15]. Par ailleurs Archimède utilise la terminologie des coniques que nous avons déjà évoquée et qui est associée à l'angle au sommet du cône. A titre d'exemple, il dit, pour définir l'ellipse : " *Si un cône est coupé par un plan qui rencontre tous les côtés du cône, la section sera soit un cercle soit une section de cône acutangle*"[16].

I.2. Les coniques chez Apollonius

I.2.1. La vie d'Apollonius

Nous n'avons que peu d'informations sur la biographie de ce grand mathématicien. Tout ce qui nous est parvenu sur sa vie est tiré de deux sources. La première est le *Commentaire sur les Coniques* d'Eutocius (VIe s.). L'auteur y rapporte les écrits d'un certain Héraclios, biographe d'Archimède, qui avait écrit : « *Le géomètre Apollonios, mon cher compagnon Anthémius, originaire de Perge en Pamphylie, est né (à vécu ?) au temps de Ptolémée Evergète* »[17]. En se basant, d'une part, sur la période de règne de Ptolémée Evergète, qui se situe entre 246 à 221 av. J.-C. et, d'autre part, sur les

13- CAVEING, M. : La tradition euclidienne dans la Grèce antique. In VITRAC, B. : *Euclide, Les Éléments*, Presses Universitaires de France, Paris, Vol. 1, 1990, p. 25.
14- ARCHIMEDE : *Des Conoïdes et des Sphéroïdes*. In "*Les œuvres complètes d'Archimède*", VER EECKE, P. (trad.), Paris, Blanchard, 1960, vol. I, p. 149-150.
15- Op. cit., Vol. I, p. 207-211.
16- Op. cit., Vol. I, p. 142.
17- DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé.* Thèse de Doctorat d'Etat, Clermont-Ferrand, 1994, p. 2.

informations recueillies par les études récentes faites sur le papyrus d'Herculanum n°1044, la date de naissance d'Apollonius est estimée aux environs de 240 av. J.-C[18].

La seconde source est le livre des *Coniques* lui-même. Dans son introduction au Livre I, Apollonius nous informe qu'il a enseigné à Alexandrie et a séjourné à Pergame alors que dans celle du Livre II, il dit avoir rencontré son ami Eudème, le destinataire des deux lettres, à Ephèse[19]. Ces trois villes citées par Apollonius sont connues pour avoir été des centres intellectuels de l'époque hellénistique.

I.2.2. Les travaux géométriques d'Apollonius

La source grecque qui contient le plus d'informations sur les travaux mathématiques d'Apollonius est le Livre VII de la *Collection mathématique.* Pappus y évoque sept traités du mathématicien : *Les Coniques (8 Livres)*, *La Section de rapport (2 Livres)*, *La Section d'aire (2 Livres)*, *La Section déterminée (2 Livres)*, *Les Contacts* ou *Les Cercles tangents (2 Livres), Les Inclinaisons, (2 Livres)* et *Les Lieux plans (2 Livres)*[20]. A cette liste, il faut ajouter des titres évoqués par tel ou tel auteur ancien : *La comparaison du dodécaèdre à l'icosaèdre*, le *Traité général* qui concernerait les fondements des mathématiques, le *Traité sur l'hélice cylindrique*, un écrit sur l'approximation de π et un autre sur les "*Irrationnelles non ordonnées*"[21].

Dans la tradition arabe, le premier biobibliographe qui mentionne les écrits d'Apollonius est Ibn an-Nadīm (ca. 380/990), dans son *Fihrist* [Le Catalogue]. Voici ce qu'il dit à ce sujet : "*Apollonius a <écrit> le* Traité des coniques*, sept livres et une partie du huitième; le* Traité sur la division des lignes selon un rapport*, deux livres; le* Traité sur la section déterminée*, deux livres dont Thābit <Ibn Qurra> a révisé le premier, le second ayant été traduit en arabe mais étant incompréhensible; Le* Traité de la division des surfaces selon un rapport*, un livre*[22]*; le* Traité sur les cercles tangents. *Et Thābit Ibn Qurra a indiqué qu'il avait un livre sur les deux droites qui <si> elles se prolongent selon <un angle> inférieur à deux angles droits, elles se rencontrent* ".

---

[18]- GALLO, I. : *Frammenti biografici da papiri*, Rome, 1980, Vol. II, p. 23-166. Pour plus de détails sur l'analyse de cette datation, voir DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., p. 1-5.

[19]- APOLLONIUS : *Les Coniques*, VER EECKE, P. (trad.), op. cit., p. 1, 117.

[20]- PAPPUS : *La collection mathématique,* op.cit., p. 479-503.

[21]- HEATH, Th. : *A History of Greek mathematics*, op. cit., Vol. II, p. 192-194.

[22]- Le fait qu'Ibn an-Nadīm ne signale qu'un seul Livre pourrait signifier que ce traité n'a pas bénéficié d'une traduction arabe complète.

Ibn an-Nadīm ajoute ceci à propos des Coniques *: "Les <frères> Banū Mūsā ont dit que le traité est en huit Livres et il en existe sept et une partie du huitième. Les quatre premiers Livres ont été traduits par Hilāl ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī et les trois derniers par Thābit Ibn Qurra al-Ḥarrānī; et ce qui existe du huitième Livre, c'est quatre propositions"*[23].

Dans leur introduction à la version arabe des *Coniques*, les frères Banū Mūsā précisent que la traduction des quatre premiers Livre a bénéficié grandement de la recension qu'en avait faite Eutocius [24].

Aux éléments fournis par Ibn an-Nadīm, il faudrait ajouter quelques informations concernant des écrits d'Apollonius non évoqués par le bibliographe du X^e^ siècle et que l'on trouve dans des textes mathématiques arabes. L'ouvrage sur "*Les irrationnelles non ordonnées*" est évoqué dans la traduction arabe du *Commentaire au Livre X* de Pappus, et c'est ce dernier qui en explicite le contenu[25]. La seconde référence est donnée d'une manière non explicite par al-Bīrūnī dans son ouvrage sur les cordes, il dit : "*Archimède, dans son livre sur les cercles, et Sérénus, ont une troisième démonstration. Et j'ai trouvé la même dans des problèmes grecs et qu'il convient <d'attribuer> à Apollonius et qu'a traduits Yūḥannā Ibn Yūsuf*"[26].

Voici maintenant un résumé du contenu de certains des écrits d'Apollonius, à partir des informations qui nous sont parvenues, soit à travers la *Collection mathématique* de Pappus soit à travers des ouvrages arabes publiés ou analysés au cours de ces dernières décennies.

---

[23]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist,* FLÜGEL, G. (édit.), Leipzig, 1871, p. 267.

[24]- APOLLONIUS : *Conics, Books V to VII*, TOOMER, G.-J. (édit. & trad.), Springer-Verlag, Vol. II, p. 627.

[25]- WOEPCKE, F. : Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Vol. 14 (1856), p. 676; VITRAC, B. : *Les irrationnelles non ordonnées d'Apollonius*. In *Euclide, Les Éléments*, Presses Universitaires de France, Paris, Vol. 3, 1998, p. 399-411.

[26]- AL-BĪRŪNĪ : *Istikhrāj al-awtār fī d-dā'ira* [Détermination des cordes dans le cercle], DAMIRDASH, A. D. (édit.), Le Caire, ad-Dār al-miṣriya li t-ta'līf wa t-tarjama, 1965, p. 53. Il s'agit du problème suivant : Etant donné un arc ABG d'un cercle et AB, BG des cordes inégales, la perpendiculaire menée du milieu de l'arc sur AB divise (AB + BG) en deux moitiés.

1. Le traité sur la *Section de rapport* :

Son contenu, qui nous est parvenu dans une version arabe[27], concerne la résolution du problème suivant : Etant donné deux points A et B respectivement sur deux droites quelconques, C un point non situé sur les deux droites et k un rapport donné, mener, du point C, une droite qui coupe les deux droites données aux point M et N, respectivement, de telle sorte que : $\frac{AM}{BN} = k$.

On retrouve ce genre de problème dans la tradition arabe. Ibrāhīm Ibn Sinān (m. 335/946) en donne une solution particulière dans son *Livre sur l'analyse et la synthèse* en étudiant le cas où les points A et B sont placés sur l'intersection des deux droites données[28]. Puis il reprend le problème dans son *Kitāb al-massā'il al-mukhṭāra* [Livre des problèmes choisis], où il étudie un cas particulier puis le cas général[29].

2. Le traité sur la *Section d'aire*

Il s'agit, avec les mêmes données que pour le problème de la section de rapport, de déterminer M et N qui vérifient : $AM.BN = s$, avec s une aire donnée.

Ibrāhīm Ibn Sinān expose, dans son *Livre des problèmes choisis*, deux problèmes (n° 13 et 14) qui correspondent, respectivement, à un cas particulier et au cas général du problème d'Apollonius[30].

3. Le traité sur la *Section déterminée*

Il s'agit, selon les termes de Pappus, de *"Couper une droite indéfinie en un point tel que le carré construit sur une des droites ainsi découpées jusqu'à des points donnés sur cette droite, ou le rectangle compris sous les droites découpées, ait un rapport donné soit avec le carré des droites découpées [soit avec le rectangle compris sous l'une des droites découpées] et une droite donnée ailleurs, soit avec le rectangle compris sous deux droites découpées de l'un ou de l'autre côté qu'on voudra des points donnés"*[31].

---

[27]- SEZGIN, F. : *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, Vol. V, Mathematik bis ca. 430 H, Leide, Brill, 1974, p. 142. Par la suite il sera désigné par : *G. A. S.*

[28]- IBN SINĀN : *Rasā'il*, SAÏDAN, A. S. (édit.), Koweit, as-silsila at-turāthiya, 1983, p. 113-114.

[29]- Op. cit., p. 210-211, 213.

[30]- HOGENDIJK, J.P. : Arabic Traces of Lost Works of Apollonius, *Archive for History of Exact Sciences* 35 (1986), p. 223-224.

[31]- PAPPUS : *La collection mathématique*, op. cit., p. 483-485.

Dans le même ouvrage que nous avons cité de lui, Ibrāhīm Ibn Sinān a résolu un problème qui fait penser à celui de d'Apollonius. Il s'agit, étant donné trois points alignés *A, B, C*, de déterminer un point *Q* sur la droite (*ABC*) tel que : $\frac{AQ.BQ}{CQ^2}=k$, k donné[32]. Quelques décennies plus tard, al-Kūhī (IVe/Xe s.) a traité un problème semblable dans son *Livre sur la production des points sur des lignes selon des rapports de surfaces*[33].

4. Le traité sur les *Contacts*

Les plus anciennes informations sur le contenu mathématique du traité nous proviennent de Pappus qui en formule le problème général ainsi : *Trois éléments quelconques étant successivement donnés de position parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle qui passe par chacun des points donnés et qui est tangent à chacune des lignes ou à chacun des cercles données*[34].

Le *Kitāb fī d-dawā'ir al-mutamāssa* [Traité sur les cercles tangents][35] d'Ibrāhīm Ibn Sinān, qui n'a pas encore été retrouvé, semble avoir contenu un certain nombre de problèmes traités par Apollonius dans son ouvrage. On en trouve d'autres dans ses *Problèmes choisis*. As-Sijzī (IVe/Xe s.) a également étudié l'ouvrage et lui a même consacré un livre intitulé *Preuve des propositions du livre d'Apollonius sur les cercles tangents*[36].

5. Le traité sur les *Inclinaisons*

L'information essentielle sur son contenu mathématique nous est rapportée par Pappus. Il traite du problème général suivant : Etant données deux lignes, données de position, placer une droite donnée de grandeur dans leur intervalle qui s'incline vers un point donné de position.

32- IBN SINĀN : *Rasā'il*, op. cit., p. 235-236.
33- HOGENDIJK, J.P. : *Arabic Traces of Lost Works of Apollonius*, op.cit., p. 227.
34- PAPPUS : *La collection mathématique*, op. cit., p. 483-485.
35 - G.A.S., Vol V, op.cit., p. 393.
36- HOGENDIJK, J.P. : *Arabic Traces of Lost Works of Apollonius*, op. cit., p. 218-219.

Ceci est un problème solide qui ne se résout pas toujours par la règle et le compas. D'après Pappus, Apollonius a décomposé ce problème en quatre cas dont il a étudié toutes les solutions[37].

Hogendijk a montré que les méthodes de résolution de ces problèmes ont été conservées dans un ouvrage d'as-Sijzī, intitulé *Taᶜliqāt handasīya* [Annotations géométriques][38].

6. Le traité des *Lieux plans*

Il est composé de deux Livres. Le premier concerne les problèmes de transformation du plan et la recherche d'images par ces transformations de certaines parties du plan (droites ou cercles), le second livre concerne la recherche de lieux géométriques ou ce que nous appelons aujourd'hui les lignes de niveaux. Des traces de ces problèmes sont signalées dans le *Livre des problèmes choisis* d'Ibrāhīm Ibn Sinān[39].

7. Le traité des *Coniques*

Le traité des *Coniques* d'Apollonius est écrit suivant le modèle Euclidien[40]. Les propositions, qui sont parfois posées comme problèmes, lorsqu'il s'agit d'une construction à effectuer, sont formulées dans un énoncé littéral, suivi de leur formulation à travers un exemple puis démontrées. Le schéma du stemma des propositions est implicite c'est-à-dire que les résultats acquis sont utilisés sans référence aux propositions antérieures à celles d'autres ouvrages antérieurs.

Résumé des sept premiers livres des *Coniques* d'Apollonius :

Selon Apollonius lui-même, les livres I à IV rassemblent, coordonnent et enrichissent les connaissances acquises par ses prédécesseurs sur les sections coniques. Quant au reste du traité, il ne renferme, essentiellement, que des contributions originales pour son époque.

Nous présentons, ci-dessous, quelques aspects essentiels du contenu de l'ouvrage :

Dans les premières définitions du Livre I, on trouve une nouvelle manière de concevoir la génération du cône. Il considère un cercle C et un point A dans deux plans différents. Par le point A il fait passer une droite à la circonférence du cercle. Il fait

[37]- PAPPUS : *La collection mathématique*, op. cit., p. 501-503.
[38]- HOGENDIJK, J.P. : *Arabic traces of lost works of Apollonius*, op. cit., p. 194-201.
[39]- IBN SINĀN : *Rasā'il*, op. cit., p. 206-213.
[40]- Nous avons utilisé la traduction des *Coniques* de Ver Eecke et le manuscrit arabe Ms Mashhad, Holy Shrine Library, n° 5391.

mouvoir cette droite autour de la circonférence de C jusqu'à ce qu'elle revienne à son point de départ. Il définit ainsi la surface conique. Il appelle cône la surface délimitée par la surface du cercle C, la surface conique située comprise entre le sommet et la circonférence de C. Il distingue le cône droit du cône oblique par le fait que la droite (ou axe) issue de A au centre du cercle (base) est perpendiculaire ou non.

Cette nouvelle manière d'engendrer le cône, le démarque de ses prédécesseurs qui considéraient le cône comme étant le solide engendré par un triangle rectangle tournant autour de l'un des côtés de l'angle droit.

Avec sa nouvelle définition Apollonius unifie, pour la première fois, la génération de toutes les sections coniques à partir d'un seul cône - et pas forcément droit - en coupant sa surface conique (qui est constituée de deux nappes) par des plans quelconques non nécessairement perpendiculaires à l'une des nappes, il obtient ainsi les trois sections coniques que nous connaissons et qu'il appelle : Ellipse, parabole et hyperbole (avec ses deux sections opposées). Puis il expose les définitions et les propriétés des éléments caractéristiques de ces trois courbes : Les diamètres, les lignes ordonnées, les sommets, les centres des courbes…etc.

La nouvelle terminologie introduite par Apollonius pour désigner les trois courbes semble être liée au procédé d'application des aires et non à la génération de courbes comme sections de cône[41]. C'est du moins l'explication admise dans la tradition arabe, comme cela est confirmé par la terminologie utilisée pour les trois courbes. En effet, *al-qaṭ ᶜ al-mukāfī* [la parabole] signifie "*la section équivalente*", *al-qaṭ ᶜ az-zā ͨid* [l'hyperbole] signifie "*la section excédante*" et *al-qaṭ ᶜ al-nāqiṣ* [l'ellipse] signifie "*la section déficiente*".

Pour expliciter ces termes, revenons aux caractérisations des trois courbes.

Soit une conique de sommet O et de diamètre (D), soit M un point de cette conique tel que MN soit une ligne ordonnée par rapport au diamètre (D) et soit OR une longueur donné (paramètre).

Apollonius caractérise la parabole dans la proposition [C; I : 11] par [Fig. 4] :

---

[41]- Voir les différentes interprétations émises par les historiens des sciences au sujet de cette terminologie dans DESCORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., p. 21.

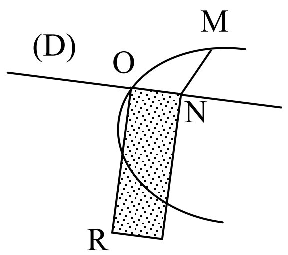
$MN^2 = ON.OR$. Ce qui signifie que si on applique le carré de côté MN sur la droite OR, la largeur produite est ON.

Apollonius caractérise dans la proposition [C; I : 12] l'hyperbole par [Fig. 5] :

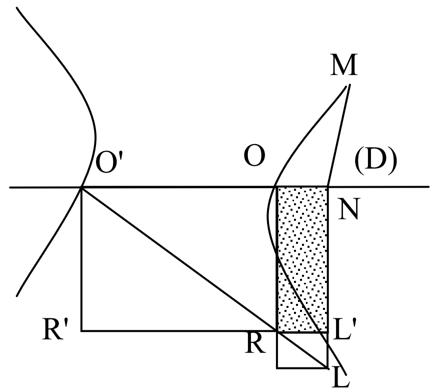
$MN^2 = ON.OR + ON.LL'$. Ce qui signifie que la surface du carré de côté MN est égale à une surface qui excède le rectangle ON.OR d'une surface (ON.LL') semblable à la surface (OO'RR') dont les côtés sont le diamètre transverse et le diamètre droit de la courbe considérée.

Apollonius caractérise dans la proposition [C; I : 13] l'ellipse par [Fig. 6]:

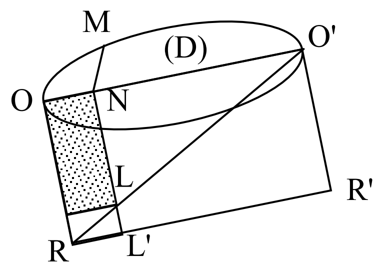
$MN^2 = ON.OR – ON.LL'$. Ce qui signifie que la surface du carré de côté MN est égale à une surface qui est déficiente par rapport à ON.OR d'une surface (ON.LL') semblable à la surface (OO'RR') dont les côtés sont le diamètre transverse et le diamètre droit de la courbe considérée.



[Fig.4]



[Fig.5]



[Fig.6]

Après avoir défini les tangentes, prouvé leur unicité et montré qu'il n'y a aucune droite entre la tangente et la courbe, il termine le livre I par des problèmes de construction des sections coniques.

Le Livre II commence par la définition de l'asymptote puis une caractérisation de l'hyperbole par les asymptotes. Dans les propositions [C; II: 8, 12], Apollonius donne une caractérisation de l'hyperbole très utile pour la résolution des fameux problèmes non constructibles à la règle et aux compas[42].

[42]- BOUZARI, A. : *Les coniques dans les mathématiques arabes à travers un traité attribué à al-Khāzin (X^e S.)*, Thèse de Magister présentée à l'E. N. S., Alger, 1999, p. 45. Cette référence sera citée, par la suite, ainsi : *Les coniques dans les mathématiques arabes…*

Dans le livre III, la proposition [C; III : 45] est consacrée "*aux points issus de l'application*" de l'ellipse et l'hyperbole. Elle révèle d'une manière subsidiaire, et pour la première fois, la notion de foyers.

Quant à la proposition [C ; III : 48], elle présente les propriétés focales de l'ellipse et de l'hyperbole. Si ABC est une tangente au point B d'une conique centrée et soit F et F' les foyers de cette conique alors $\angle ABF = \angle CBG$ [fig. 7].

[fig. 7]

Le livre III se termine par les propriétés bifocales de l'ellipse et de l'hyperbole [C; III : 52-53] qui permettent de tracer les courbes d'une manière continue.

Le livre IV est consacré à l'étude des intersections des courbes coniques.

Le livre V traite des lignes maxima et minima, c'est à dire aux droites les plus longues et les plus courtes que l'on puisse mener d'un point au périmètre d'une section conique. Dans ce Livre, Apollonius résout un grand nombre de problèmes sur les maxima et les minima en distinguant les cas où le point considéré est situé sur l'axe de la conique ou bien il est situé hors de cet axe.

Le Livre VI concerne l'égalité et la similitude des sections coniques et se termine par des problèmes de construction de cônes semblables à un cône droit donné, capables respectivement d'une parabole, d'une hyperbole ou d'une ellipse donnée.

Le livre VII est présenté par Apollonius comme étant un ouvrage de préparation au livre VIII qui est, malheureusement, perdu. Il y démontre des propositions sur les diamètres conjugués. Dans la proposition [C; VII : 12] il démontre pour la première fois, la constance de la somme des carrés des diamètres conjugués pour l'ellipse et dans la proposition [C; VII : 13] il démontre la constance de la différence des carrés des diamètres conjugués pour l'hyperbole.

I..3. Les coniques après Apollonius

En dehors de quelques éléments épars, l'histoire de la circulation directe du texte des *Coniques* depuis sa publication jusqu'au VI^e siècle nous est pratiquement inconnue. Elle commence en fait avec la recension réalisée par Eutocius d'Ascalon et dont une copie sera découverte au début du IX^e siècle, par Aḥmad, l'un des trois frères Banū Mūsā.

Les traces des sources indirectes sont un peu plus consistantes. Il s'agit de lemmes, de variantes à des démonstrations ou des références à des propositions des *Coniques*.

Parmi ces sources, il y a, en premier lieu, le traité de Sérénus (IV^e s.) composé de deux Livres intitulés, respectivement, *De la section du cylindre* et *De la section du cône*[43], les *Lemmes* que Pappus a ajoutés à certaines propositions des *Coniques*[44], le *Commentaire* d'Eutocius au traité *Sur la Sphère et le cylindre* d'Archimède[45] et le *Commentaire* d'Eutocius aux *Coniques*[46].

I.3.1. Le traité de Sérénus

Nous avons peu d'informations sur la vie et l'œuvre de ce mathématicien. Il semble avoir vécu à Antinopolis (Egypte) entre le III^e et le IV^e siècle[47]. En plus de ses deux ouvrages déjà évoqués et qui sont les seuls dont une copie nous est parvenue[48], Sérénus est l'auteur d'un *Commentaire* aux *Coniques*. C'est lui-même qui évoque cet écrit, dans la démonstration de la proposition 17 du livre *De la section du cylindre* , en précisant : " C*ar tout ce qui a été démontré comme étant propre à cette section est également propre à l'ellipse du cône, ainsi que cela a été démontré dans les* Coniques*, au quinzième théorème pour ceux qui sont à même de constater la justesse de ce théorème,*

43- SERENUS : *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*, VER EECKE, P. (trad.), Paris, Blanchard, 1969, Livre I, p. 2-64, Livre II, p. 64-167. Cette référence sera citée, par la suite, ainsi : *Le livre de la section du cylindre…*
44- PAPPUS : *La collection mathématique*, op. cit., p. 718-750.
45- ARCHIMEDE : *La Sphère et le Cylindre*. In "*Les œuvres complètes d'Archimède*", VER EECKE, P. (trad.), Paris, Blanchard, 1960.
46- DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., p. 17-18; SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 186.
47- SERENUS : *Le livre de la section du cylindre…*, op. cit, p. IX-XV; DECORPS-FOULQUIERS, M : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé,* op.cit., p. 24-26. Cf. aussi DECORPS-FOULQUIER, M. : L'époque où vécut le géomètre Sérénus d'Antinoé. In GUILLAUMIN, J.-Y. (dir.) : *Mathématiques dans l'Antiquité*, Saint Etienne, Publications de l'Université de Saint-Etienne, 1992, p. 51-58.
48- Ms. Vaticanus gr. 206, ff. 161r-239v.

et ainsi que nous l'avons démontré géométriquement nous-mêmes dans des commentaires relatifs à cette proposition."[49].

Les deux livres de Sérénus ne semblent pas avoir été traduits en arabe bien que leur auteur soit cité dans un livre perdu d'al-Bīrūnī (m. 440/1048), intitulé *Kitāb al-uṣūl al-handasiyya* [Livre des fondements géométriques][50]. Pourtant nous avons cru déceler quelques traces de ces deux livres dans deux propositions du *Kitāb al-Istikmāl* d'al-Mu'taman.

Le livre sur *la section du cylindre* contient trente trois propositions (composées de théorèmes et de problèmes), précédées de huit définitions. Les définitions relatives à l'ellipse et ses propriétés caractéristiques sont reprises, presque entièrement, du premier Livre des *Coniques.* Dans les propositions 16 à 18, Sérénus renvoie aux propositions des *Coniques* avec une numérotation identique à celle de la version arabe qui nous est parvenue[51].

Dans ce livre, Sérénus résout sept problèmes liés à la construction de l'ellipse à partir d'un cylindre ou d'un cône. Nous citons ces problèmes afin de pouvoir les comparer avec ceux d'une proposition d'al-Mu'taman :

[S : I; 21] : Etant donné un cône et une ellipse dans celui-ci, trouver un cylindre qui soit coupé par cette même ellipse du cône[52].

[S : I; 22] : Etant donné un cylindre et une ellipse dans celui-ci, trouver un cône qui soit coupé par cette même ellipse du cylindre[53].

[S : I; 23] : Un cône étant donné, trouver un cylindre, les couper tous deux par un plan dont la section détermine des ellipses semblables dans chacun d'eux[54].

[S : I; 24] : Un cylindre étant donné, trouver un cône, et les couper tous deux par un seul plan déterminant par sa section des ellipses semblables dans chacun d'eux[55].

---

[49]- SERENUS : *Le livre de la section du cylindre…*, op. cit., p. 29-30.
[50]- Al-BĪRŪNĪ : *Istikhrāj al-awtār fī d-dā'ira*, op. cit., p. 53.
[51]- DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonius de Pergé*, op. cit., p. 29.
[52]- SERENUS : *Le livre de la section du cylindre…*, op. cit., p. 37-38.
[53]- Op. cit., p. 38-39.
[54]- Op. cit., p. 39-41.
[55]- Op. cit., p. 42.

[S : I; 26] : Etant donné un cylindre coupé par une ellipse, établir sur la même base du cylindre et sous la même hauteur, un cône coupé par le même plan, déterminer une ellipse semblable à l'ellipse du cylindre[56].

[S : I; 27] : Il est possible de couper d'une infinité de manières un cylindre ou un cône oblique donné, à partir de l'un ou l'autre côté, par deux plans, non parallèlement disposé, déterminant des ellipses semblables[57].

[S : I; 28] : Il est possible de couper d'une infinité de manières un cylindre ou un cône oblique donné par deux plans menés de parties opposées, et de déterminer ainsi des ellipses semblables[58].

Dans le second livre, Sérénus consacre soixante neuf propositions à l'étude des propriétés de l'ellipse engendrée comme section de cône. Nous reviendrons à certains résultats de ce livre lorsque nous exposerons le contenu de l'une des propositions de *l'Istikmāl*.

I.3.2. Les *Commentaires* d'Eutocius

Le peu d'information que nous avons sur Eutocius est tiré des préfaces de ses *Commentaires* sur les traités d'Archimède et sur les quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius. Il serait originaire d'Ascalon et sa période d'activité se situerait entre 450 et 497[59]. Il a été mathématicien et philosophe. Parmi les écrits qui nous sont parvenus, trois ont été consacrés par lui à des ouvrages d'Archimède : Des commentaires à la S*phère et le cylindre*, à la *Mesure du cercle* et aux *Equilibres des figures planes*. Le quatrième est sa fameuse *Recension* commentée des quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius.

Dans son *Fihrist*, Ibn an-Nadīm évoque, en plus de son commentaire sur la *Sphère et le cylindre*, un traité intitulé *Kitāb fī l-khaṭṭayn* [Traité sur les deux droites] concernant la détermination de deux moyennes entre deux grandeurs données et qui a été traduit en arabe par Thābit Ibn Qurra (m. 289/901)[60]. Mais il s'agirait d'une partie du

---

[56]- Op. cit., p. 44-46.
[57]- Op. cit., p. 46-49.
[58]- Op. cit., p. 49-54.
[59]- Voir les conjectures de DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., p. 89-92. Voir également les notes de HEATH, Th. : *A History of Greek Mathematics*, op. cit., vol. II, p. 540.
[60]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 429.

Commentaire sur la sphère et le cylindre. Ibn an-Nadīm précise aussi qu'Eutocius a reproduit, dans cet écrit, toutes les solutions anciennes au problème des moyennes proportionnelles. Au X^e siècle, al-Khāzin (m. 349/960) a évoqué cet écrit dans la conclusion de son livre *Mā yuhtāju ilayhi fī rasm l-quṭū^c al-makhruṭiyya wa muqaddimāt al-muwassaṭayn wa qismat az-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi thalāthat aqsām* [*Ce qui est nécessaire dans la construction des sections coniques et les prémisses des deux moyennes et la division de l'angle à côtés rectilignes en trois parties <égales>*][61]. Pour justifier l'originalité de sa solution sur la détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données, al- Khāzin dit : " *Et Eutocius d'Ascalon a rédigé un livre et y a dénombré onze géomètres ayant parlé de la détermination de deux lignes entre deux lignes, et parmi eux Platon le philosophe. Et il a noté, <avec précision>, ce qu'ils ont découvert comme propositions et instruments"*[62].

Les informations sur les *Coniques*, que nous rapporte Eutocius dans son *Commentaire Sur la Sphère et le cylindre*, semblent avoir été connues d'une manière partielle par les mathématiciens de l'Islam[63]. Mais dans sa recension des *Coniques*, qui a servi aux Frères Banū Mūsā pour comprendre les quatre premiers Livres du traité d'Apollonius, on trouve à la fois des informations historiques, la manière avec laquelle Eutocius a édité le texte de son illustre prédécesseur et les corrections qu'il y a apportées[64].

I.3.3 Les *Lemmes* de Pappus

Pappus a vécu à Alexandrie au début du IV^e siècle. De son œuvre, il nous est parvenu le commentaire aux livres V et VI de l'*Almageste* de Ptolémée et la plus grande partie de son ouvrage connu sous le titre *La Collection mathématique* qui correspond à la moitié du livre II et aux livres III à VIII[65].

---

[61]- BOUZARI, A. : *Les coniques dans les mathématiques arabes…*, op. cit. p. 170.
[62]- Op. cit., p. 170.
[63]- Quelques fragments de ce *Commentaire* étaient connus, notamment les commentaires aux propositions II. 1 et II. 4 de la *Sphère et du cylindre*.
[64]- DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., p. 19.
[65]- Le Livre VIII a circulé indépendamment dans l'Antiquité sous le titre "*Introduction mécanique*" et il a été traduit en arabe. Voir SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 175.

Dans le Livre VII de ce dernier traité, Pappus distingue un groupe d'ouvrages de géométrie qui constitue un corpus qu'il appelle le "*trésor de l'analyse*". Les *Coniques* d'Apollonius en font partie.

Comme il l'avait fait pour tous les autres livres du Corpus, il fait précéder sa présentation des *Coniques* d'un certain nombre de lemmes qui visent à faciliter la compréhension de son contenu. Ces lemmes concernent tous les chapitres de l'ouvrage à l'exception du Livre IV[66].

[66]- HOJENDIJK, J.P. : *Ibn al Haytham's completion of the conics*, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, Springer-Verlag, 1984, p. 43-47.

II. LA DIFFUSION DU TRAITE DES CONIQUES D'APOLLONIUS EN OCCIDENT CHRETIEN

Il ne semble pas qu'il y eut, à Byzance, entre le VII^{e} et le VIII^{e} siècle, des mathématiciens qui se soient préoccupés du contenu des *Coniques*[67]. Mais la société byzantine comprenait nombre d'érudits à qui l'on doit la préservation d'ouvrages philosophiques ou scientifiques. A cela, il faudrait ajouter les besoins de l'enseignement qui ont favorisé certaines initiatives, comme le regroupement d'écrits géométriques anciens dans des recueils destinés aux futurs astronomes. Mais les spécialistes notent qu'entre le IX^{e} et la fin du XII^{e} siècle, l'intérêt pour la géométrie en général a considérablement faibli et que la matière des *Coniques* disparaît purement et simplement des programmes d'enseignement[68].

Il faut attendre la fin du XIIe siècle pour que se manifeste, en Occident chrétien cette fois, un nouvel intérêt pour ce corpus : Gérard de Crémone (ca.1114 -1187) traduit, de l'arabe, le chapitre des *Préliminaires* du Traité des *Coniques* qui se trouve dans l'édition des Banū Mūsā, accompagné des définitions du Livre I. Ces deux textes ont circulé avec la traduction en arabe du traité des *Miroirs ardents* d'Ibn al-Haytham (m. 433/1041)[69]. Ils furent à l'origine des études sur le sujet effectuées en Europe[70] et ils restèrent les seules sources informant sur les *Coniques* avant l'arrivée en Europe, en 1427, des quatre premiers Livres de ce traité dans une version grecque rapportée d'Orient par Francesco Filelfo (1398-1481)[71]. C'est sur la base de ce manuscrit que Giovanni Battista Memmo (1466–1536) prépara sa traduction latine éditée après sa mort, à Venise, en 1537. Cette édition de Memmo fût le premier texte complet des Livres I à IV qui était mis à la disposition des mathématiciens européens.

Partant de cette traduction, le mathématicien de la fin du XV^{e} siècle, Francesco Maurolico (1494-1575) entreprit de restaurer le texte des Livres I à IV et tenta de

---

[67]- HEATH, Th. : *A History of Greek Mathematics*, Vol. II, op. cit., p. 518-561.

[68]- Pour plus de détails voir : DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les coniques d'Apollonios de Pergé*, op.cit, p. 220-236.

[69]- Voir le texte du manuscrit *Parisinus Lat. 9335*, ff. 85b-86a, daté du XIII^{e} siècle dans CLAGETT, M. : *Archimede in the Middle Ages*, University of Wisconsin Press, 1964-84, IV, p. 4-12.

[70]- Une liste de 23 manuscrits contenants les textes des Livres I à IV se trouve dans DECORPS-FOULQUIER, M.: *Les coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., Vol. 1, Fascicule 2, p. 264.

[71] Probablement le *Vaticanus gr.2606*. Pour plus de détails, voir DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., Vol. 1, Fascicule 2, p. 333-338.

reconstituer le contenu des Livres V-VI. Ce travail ne fût publié qu'en 1654, bien après la mort de son auteur.

Et c'est en 1566, qu'à Bologne, Commandino (1509-1575) a édité la traduction des quatre premiers Livres des *Coniques* complétée par la traduction des lemmes de Pappus et les commentaires d'Eutocius. En 1661, Abraham Ecchelensis (1605-1664) traduisit, de l'arabe, un résumé des Livres V-VII des *Coniques*, daté de 1119, et attribué au mathématicien Abū l-Fatḥ al-Isfahānī (VIe/XIIe s.)[72]. Ces deux éditions furent un instrument de travail sûr et fiable aux mains des scientifiques de l'époque[73] et eut une influence certaine sur les travaux mathématiques et astronomiques du début du XVIIe siècle, comme en témoignent les écrits de Kepler (1571-1630), Desargues (1591-1661), Huygens (1629-1695) et Descartes (1596-1650)[74].

Ce n'est qu'aux environs de 1630 que les mathématiciens européens apprennent l'existence de la version arabe des livres I-VII des *Coniques*. Et, 80 ans plus tard, c'est à dire en 1710, le mathématicien et astronome Edmond Halley (1656-1743) traduisit l'œuvre d'Apollonius de l'arabe en latin, en se basant sur plusieurs copies de l'édition des Banū Mūsā.

Et à partir de cette date, toutes les traductions et les études des livres des *Coniques*, en Europe, ont été faites à partir de cette édition[75], à l'exception de deux travaux: une édition d'une petite partie du Livre V faite en 1889 par Ludwig Nix à partir de la traduction de Thābit Ibn Qurra[76], et la traduction des Livres V-VII par Toomer[77].

[72]- SEZGIN, F. : G.A.S., Vol. V, op. cit., p. 139-140.
[73]- Sur l'historique de ces éditions, voir : ITARD, J. : L'angle de contingence chez Borelli, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 14 (1961), p. 201-224.
[74]- APOLLONIUS : *Conics Books V to VII*, op. cit., vol. I, p. xxi.
[75]- APOLLONIUS : *Les Coniques d'Apollonius*, P. Ver Eeke (trad.), op. cit.; BALSAM : *Des Apollonius von Perga seiben Bücher über Kegelschnitte*, Berlin, 1861 ; HEATH, Th. : *Apollonius of Perga, Treatise on Conics Sections*, Cambridge, 1896. Réimpression, New york, 1961.
[76]- LUDWIG NIX, L.-M. : *Das fünfte Buch des Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Übersetzung des Thabit ibn Corrah*, Leipzig, 1889.
[77]- APOLLONIUS : *Conics Books V to VII*, op. cit; APOLLONIUS DE PERGE : *Coniques*, Tome 1.1 : Livre I, RASHED, R. (édit.); Tome 1.2 : Livre I, Decorps-Foulquier, M. & Federspiel, M. (édit.), Berlin-New York, De Gruyter, 2008.

III. LES CONIQUES DANS LA TRADITION MATHEMATIQUE ARABE

Dans le but de mieux situer la contribution d'al-Mu'taman dans les chapitres qu'il a consacrés aux sections coniques, nous allons présenter les éléments essentiels connus de l'histoire des *Coniques* d'Apollonius dans l'empire musulman, depuis leur traduction en arabe, à Bagdad au début du IX^e^ siècle, jusqu'à la fin du XV^e^ siècle.

Compte tenu de la faiblesse relative des recherches sur ce domaine important de la géométrie grecque et sur ses prolongements au cours de la phase arabe des sciences, notre présentation sera basée essentiellement sur les éléments bibliographiques aujourd'hui disponibles.

III.1. Les coniques dans la tradition arabe d'orient

Nous savons que, dès le milieu du VIII^e^ siècle et jusqu'au début du X^e^, la recherche, la traduction et la copie d'ouvrages scientifiques produits dans le cadre des civilisations antérieures à celle de l'Islam, ont connu une dynamique aux aspects multiformes. Initiées et financées par des hommes du pouvoir ou très proches de lui, ces activités furent progressivement prises en charges par des groupes sociaux qui avaient intérêt à accompagner ce phénomène et à y participer activement, d'une manière ou d'une autre (recherche des copies, financement, traduction, utilisation du contenu pour les enseignements et les premières recherches)[78].

Dans cette quête du savoir, les anciens pôles scientifiques de la région du Croissant Fertile, d'Egypte et de Perse semblent avoir joué un rôle important. Il y avait d'abord Alexandrie qui était restée plus ou moins active jusqu'au VII^e^ siècle et qui conservait dans ses bibliothèques privées des ouvrages de différentes disciplines et plus particulièrement ceux de médecine et de philosophie. Parmi les témoignages allant dans ce sens, il nous suffit d'évoquer celui de Ḥunayn Ibn Isḥāq (m. 260/873)[79] qui a eu à visiter cette ville à la recherche de manuscrits grecs dont la traduction lui avait été commandée par des personnages importants ou des scientifiques (comme Muḥammad

[78] - GUTAS, D. : *Pensée grecque, culture arabe*, A. Cheddadi (trad.), Paris, Aubier, 2002.
[79]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 462-463.

Ibn Mūsā, qui était intéressé par le *Kitāb al fuṣūl* [Livre des saisons] de Paul Égine (ca. 625))[80].

Le second pôle de la région, qui était, semble-t-il, encore en activité au moment des conquêtes musulmanes, est la ville de Gundishapūr en Perse. En plus de la tradition scientifique locale (évoquée par les biobibliographes arabes mais dont le contenu nous reste, en grande partie, inconnu), cette ville avait été, un certain temps, un pôle de la pensée grecque en accueillant des penseurs qui avaient été contraints d'émigrer après la fermeture de l'Ecole d'Athènes par Justinien (527-565). Parmi eux, il y avait Simplicius, le célèbre commentateur des œuvres d'Aristote (ca. 322 av. J.-C.) et d'Euclide.

La ville d'Edesse, en Asie Mineure (dans les frontières actuelles de la Turquie), a été un pôle important de la culture et de la science à la fois grecque et syriaque. Après l'arrêt de ses activités, vers la fin du Ve siècle, ses hommes de sciences, ses philosophes et ses théologiens ont créé un nouveau centre, Nisibe qui sera relayé, pour certaines activités, par des villes comme Antioche et Ḥarrān, ou des monastères, comme Rās al-ᶜayn et Kenesrin[81].

III.1.1. La transmission de la théorie des sections coniques

Le vaste domaine théorique grec relatif aux sections coniques est parvenu aux scientifiques des pays d'Islam essentiellement à travers les *Coniques* d'Apollonius[82]. Les autres écrits, qui se rattachent à cette tradition et qui ont bénéficié d'une version arabe, sont des textes d'application. C'est le cas de l'écrit attribué à Archimède sur l'inscription de l'heptagone régulier, qui a été traduit par Thābit Ibn Qurra[83] et qui nous est parvenu sous le titre suivant : "*Kitāb ᶜamal aᶜdāira al maqsūma bi sabᶜat aqsām*

[80]- Op. cit., p. 456.

[81]- Pour plus de détails sur ces pôles scientifiques préislamiques, voir : GUTAS, D. : *Pensée grecque et culture arabe*, op. cit.; DJEBBAR, A. : *Le phénomène de traduction et son rôle dans le développement des activités scientifiques en Pays d'Islam*, In : ÖNEN, S. & PROUST, C. : *Les Ecoles savantes en Turquie : Sciences, philosophie et arts au fil des siècles*, Actes des journées d'Ankara (24-29 Avril 1995), Istanbul, Editions Isis, 1996, p. 93-110.

[82]- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 136-142. L'auteur y signale, en particulier, une copie autographe du grand mathématicien Ibn al-Haytham (m. 1041), réalisée en 1024 : Ms. Istanbul, Aya Sofya n° 2762.

[83] - Sur la vie et l'œuvre de Thābit Ibn Qurra, voit SEZGIN, F. : *G. A. S.,* Vol. V, op. cit., p. 268-272, Vol. VII, 1979, p. 404-405.

mutasāwiya [Livre sur la construction du cercle divisé en sept parties égales][84]. C'est aussi le cas du *Kitāb sharḥ al-maqāla al-thāniya min Kitāb Arshimīdis fī l-kūra wa l-usṭuwāna* [Commentaire sur le second Livre du traité d'Archimède sur la sphère et le cylindre]. Une partie de ce manuscrit a été traduit par Thābit Ibn Qurra[85].

Comme nous le verrons plus loin, les mathématiciens des pays d'Islam ont très vite été intéressés et inspirés par ces textes dont l'étude a été à l'origine d'une orientation particulière en géométrie, celle dont les problèmes étaient déjà, dans la tradition mathématique grecque, englobés dans l'appellation générale de "*problèmes solides*".

Les premiers mathématiciens connus qui se sont préoccupés de ces problèmes et qui ont entrepris l'étude des sections coniques sont les frères Banū Mūsā, Aḥmad, al-Ḥasan et Muḥammad. A la mort de leur père, Mūsā Ibn Shākir, ils auraient été élevés par al-Ma'mūn (198-218/813-833) qui aurait assuré leur formation scientifique avant de les intégrer peut-être au Bayt al-ḥikma [Maison de la sagesse][86]. Devenus adultes, ces trois frères se sont distingués par leur compétence dans différents domaines scientifiques (géométrie, mécanique, musique et astronomie), par leur persévérance dans la recherche des manuscrits[87] et, surtout, par leur financement généreux de traductions d'ouvrages scientifiques grecs en langue arabe[88].

C'est précisément sous leur direction que la traduction qui nous est parvenue des *Coniques*, a été réalisée. Dans leur préface à l'édition de cette traduction, les Banū Mūsā évoquent, dans le détail, les conditions dans lesquelles ils ont découvert l'ouvrage et la manière avec laquelle ils ont dirigé la traduction de son contenu.

---

[84]- Pour la traduction en anglais de ce traité voir : HOGENDIJK. J.P. : Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon, *Archive for the History of Sciences*, Vol. 30 (1984), p. 176-185.

[85]- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 130.

[86]- BALTY-GUESDON, M.-G. : *Le Bayt al Ḥikma de Bagdad*, Mémoire de D.E.A., Paris, Université Paris III-Sorbonne Nouvelle, 1986, p. 32, 46, 70.

[87]- IBN AN-NADĪM dit des Banū Musā : *Ils étaient parmi ceux qui se sont dépensés dans la recherche des sciences anciennes, en y consacrant des fortunes et en épuisant leurs énergies. Ils sont dépêchés dans le territoire byzantin ceux qui les ont trouvés pour eux et ils ont fait venir les traducteurs de différents contrées et lieux en les gratifiants généreusement et ils ont ainsi exhumé les merveilles de la science*". *Al-Fihrist*, op. cit., p. 434-435.

[88]- IBN AL-QIFṬĪ : *Ikhbār al-ʿulamā' bi akhbār al-ḥukamā'*, Beyrouth, Dār al-āthār, non datée, p. 438-439.

A une date inconnue, ils acquirent une copie de l'ouvrage dont les chapitres, précisent-ils, avaient "*la forme dans laquelle Apollonius les avait composés"*. Cette indication laisse supposer que le contenu de la version qu'ils avaient entre les mains n'avait pas fait l'objet de restauration ou d'une intervention quelconque. Partant de là, nous supposons que cette version était pré-eutocienne et nous l'appellerons "*le manuscrit A*".

Nous avons deux témoignages différents sur les conditions dans lesquelles le manuscrit *A* a été acquis. Le premier est celui du biobibliographe Ibn an-Nadīm qui rapporte que les Banū Mūsā, ont financé, eux même, une mission en territoire byzantin pour la recherche et l'achat de manuscrits. Cette mission aurait abouti à la découverte de cette première copie composée des Livres I-VII des *Coniques*[89]. Mais, selon Ibn al-Qifṭī (m. 646/1248), le mécène qui aurait initié cette mission n'est autre que le calife al-Ma'mūn (813-833)[90].

III.1.2. Les traductions arabes des Coniques

De leur propre aveu, les Banū Mūsā eurent de grandes difficultés à mener à bien la traduction du manuscrit *A*, parce que son contenu était corrompu et donc difficile à comprendre. Ils laissent entendre aussi qu'ils ne pouvaient pas espérer une aide d'un quelconque "professionnel" des mathématiques. En effet, c'était alors l'époque de l'étude et de l'assimilation des *Eléments* d'Euclide, tâche qui n'était donc pas si aisée que cela et à laquelle s'était attelé une minorité de leurs contemporains. Ces derniers n'étaient donc pas armés pour le contenu des *Coniques*. Mieux encore, certains d'entre eux, compte tenu de leur faible niveau, étaient même "*incapables de comprendre l'introduction du livre d'Euclide, à fortiori ce qui vient après elle. Ils ont remplacé les propos d'Euclide par des propos d'une totale ignorance et très éloignés de la vérité. Certains d'entre eux sont mêmes allés jusqu'à établir des propositions géométriques à l'aide desquelles ils ont démontré des choses contraires à ce qu'avait démontré Euclide au point où quelqu'un a même démontré que le cône d'un cylindre est < égal à > la moitié du cylindre*"[91].

---

[89]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 434.

[90]- IBN AL-QIFṬĪ : *Ikhbār al-ʿulamā' bi akhbār al-ḥukamā'*, op. cit., p. 45.

[91]- TOOMER, G. : *Apollonius, Conics Book V-VII. The Arabic translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banu Musa,* New York, Springer Verlag, 1990, Vol. II, p. 623-634.

Cet intérêt des frères Banū Mūsā pour les sections coniques ne s'est pas limité à exhumer et à faire traduire le Traité d'Apollonius. En effet, Ibn an-Nadīm ajoute, à propos d'al-Ḥasān Ibn Mūsā que, grâce à ses qualités en géométrie, entreprit d'étudier les sections du cylindre par des plans non parallèles à sa base. Il découvrit ainsi les propriétés fondamentales de l'ellipse, c'est-à-dire celles des diamètres, des axes et des cordes, ainsi que la manière de déterminer l'aire de la section de cylindre lorsque le pourtour de la section est une ligne fermée[92]. Al-Ḥasan aurait conçu son étude comme une introduction à la théorie des sections coniques. Ses résultats avaient été jugés par lui suffisamment substantiels pour qu'il en fît un ouvrage, intitulé. *Kitāb ash-shakl al-mudawwar al-mustaṭīl* [Traité de la figure arrondie et allongée][93]. Par ailleurs, ce travail, apparemment pionnier dans la tradition arabe naissante, lui aurait facilité la compréhension de la théorie des sections coniques.

De son côté, la préface à la traduction des *Coniques* nous rapporte qu'après la mort d'al-Ḥasan, son frère Aḥmad est allé s'installer en Syrie comme administrateur des postes. Il profita de son séjour dans la région pour se mettre à la recherche de manuscrits. Sa persévérance dans les investigations lui a alors permis de découvrir une recension des Livres I-IV des *Coniques*. Cette recension est attribuée par les Banū Musā à Eutocius, nous l'appellerons "*le manuscrit B*".

Toujours selon cette préface, ce manuscrit contenait un texte moins corrompu que celui du *manuscrit A*. Cela aurait permis à Aḥmad d'entreprendre un premier travail de correction et d'analyse mathématique des quatre premiers Livres. A son retour à Bagdad il aurait poursuivi ce même travail sur le contenu des Livres V à VII.

La préface nous rapporte aussi qu'après sa compréhension complète du contenu du Traité des *Coniques*, et afin d'en faciliter la lecture aux futurs chercheurs, Aḥmad a

---

[92]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 379.

[93]- Dans l'introduction à son *Kitāb quṭū ᶜ al-usṭuwāna wa basīṭuḥā* [Livre sur les sections de cylindre et sa surface], Thābit Ibn Qurra nous fournit une autre confirmation de la paternité de cet ouvrage. En effet, on peut y lire la remarque suivante : *"Cela sera suivi par les propos sur l'aire de la section de cylindre qu'avait calculée Abū Muḥammad al-Ḥasan Ibn Mūsā"*. Ms. Istanbul, Aya Sofya, n° 4832, f. 4r.

établi des lemmes nécessaires aux démonstrations des propositions qu'il jugea difficiles et il a signalé tous les endroits du livre où ces lemmes pouvaient intervenir.

A partir de ces éléments, et dans la mesure où ils sont un jour confirmés, on peut avancer deux remarques. Tout d'abord, le fait qu'Aḥmad ait pu lire, analyser et comprendre le contenu de la copie qui était à sa disposition, on peut en déduire qu'il avait une connaissance suffisante du grec. Il est possible aussi que les Banū Mūsa aient disposé, pour leur strict usage personnel, d'une première traduction arabe qui devait être suffisante pour la compréhension du contenu mathématique de l'ouvrage mais qui ne répondait pas au canon de la traduction tel qu'il était admis à cette époque. Une troisième hypothèse serait de concevoir l'existence, au moment où les Banū Mūsā ont commencé à s'intéresser aux coniques, d'une version en syriaque. Ce fait a été établi pour des ouvrages de philosophie, comme *L'Herméneutique* d'Aristote[94], des ouvrages de médecine, comme ceux de Galien (m. vers 200)[95], et même des ouvrages de mathématiques comme les *Eléments* d'Euclide[96]. Mais cela suppose que l'un des trois frères maîtrisait cette langue. Cela n'est pas impossible, pour les membres de l'élite de Bagdad au IX^e^ siècle, multiconfessionnelle et cosmopolite, où le syriaque est encore un vecteur de la pensée religieuse chrétienne et païenne et, pour un temps encore, un outil d'enseignement et de formation en logique et en médecine. Cela dit, aucun élément de la biographie de ces scientifiques ne vient confirmer cette hypothèse.

La préface nous apprend aussi que les frères Banū Mūsā avaient confié la traduction des Livres I-IV des *Coniques* à Hilāl Ibn Abī Hilāl al-Ḥimṣī (III^e^/IX^e^ s.) et celle des Livres V-VII à Thābit Ibn Qurra. Pourquoi cette répartition des tâches et pourquoi avoir choisi un premier traducteur dont la stature n'est pas comparable à celle d'Ibn Qurra ?

---

[94]- Ce texte a d'abord été traduit du grec en syriaque par Ḥunayn Ibn Isḥāq puis du syriaque en arabe par son fils Isḥāq Ibn Ḥunayn (m. 298/910). SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 88, note 4. Pour d'autres traductions en syriaque, voir DE LIBERA, A. : *La philosophie médiévale*, Paris, Presses Universitaires de France, 1993, p. 66-67.

[95]- JACQUART, D. & MICHEAU, F. : *La médecine arabe et l'Occident médiéval*, Paris, Maisonneuve & Larose, 1990, p. 37.

[96]- BAUDOUX, C. : *La version syriaque des "Eléments" d'Euclide*. In Deuxième Congrès National des Sciences, Bruxelles, 1935, I, p. 73-75.

Les sources biobibliographiques directes ou indirectes connues ne fournissent que peu d'informations sur la vie, la formation et les contributions d'Ibn Abī Hilāl. Ibn an-Nadīm le classe dans la seule catégorie des traducteurs[97] et les Banū Mūsā laissent entendre qu'il a été chargé de faire la traduction des Livres I-IV, à partir des manuscrits *A* et *B*[98].

Quant à Thābit, qui est connu pour avoir été un des plus importants mathématiciens du IXe siècle, il a eu plusieurs fois l'occasion de réaliser des traductions du grec à l'arabe ou des révisions de textes scientifiques traduits par d'autres[99]. Il était donc tout à fait qualifié pour mener à bien la traduction complète des *Coniques*. Mais on sait qu'il a été chargé de traduire uniquement les trois derniers livres; ce qu'il a fait en utilisant uniquement le manuscrit *B*.

Mais, si l'on se souvient de la remarque des Banū Mūsā qui disaient que le texte de la seconde partie des *Coniques* était, dans la copie dont ils disposaient, "*corrompu et difficile à la compréhension*", cela pourrait expliquer leur choix, à savoir faire appel à un mathématicien chevronné doublé d'un fin connaisseur du grec. Sachant comment il a travaillé, lorsqu'il a eu à réviser la traduction d'Isḥāq Ibn Ḥunayn (m. 298/910) des *Eléments* d'Euclide[100], on peut raisonnablement penser qu'il a eu à intervenir dans le texte grec de cette partie des *Coniques*, non seulement comme traducteur mais également comme mathématicien pour rendre le contenu compréhensible. Mais, en l'absence de la version grecque des Livres V-VII, cela reste du domaine de l'hypothèse.

Cela dit, et quelle que fût la nature de l'intervention de Thābit Ibn Qurra dans la seconde partie de l'ouvrage d'Apollonius, les frères Banū Mūsā ont considéré qu'il était

[97]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 399.
[98]- TOOMER, G. : *Apollonius, Conics Book V to VII*, op. cit., p. 629.
[99]- Voir, en particulier, IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 244-294; SESIANO, J. : Un complément de Ṭābit Ibn Qurra au *Περι΄ διαιρε΄σεων* d'Euclide, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften,* Band 4 (1988), p. 149.
[100]- Sur la version originale d'Isḥāq Ibn Ḥunayn, voir DJEBBAR, A. : *Quelques commentaires sur les versions arabes des Eléments d'Euclide et sur leur transmission à l'Occident musulman*. In Actes du Colloque International "*Mathematische Probleme im Mittelalter, der lateinische und arabische Sprachbereich*" (Wölfenbüttel, 18-22 Juin 1990), FOLKERTS, M. (édit.) : Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 1996, p. 104-111. Sur la nature des interventions de Thābit Ibn Qurra dans la version "Isḥāq-Thābit" des *Eléments*, voir ROMMEVAUX, S., DJEBBAR, A. & VITRAC, B. : Remarques sur l'histoire du texte des Eléments d'Euclide, *Archives for the History of Sciences*, n° 55 (2001), p. 221-295.

nécessaire d'ajouter à la version arabe des lemmes utiles à la compréhension du texte et, parfois, des commentaires pour éclairer le contenu de certaines propositions.

En dehors de la version arabe des *Coniques* que nous venons d'évoquer, les sources postérieures au IX^{e} siècle évoquent, parfois d'une manière très explicite, d'autres traductions (partielles ou complètes) ou peut être de simples révisions. C'est ainsi qu'au X^{e} siècle, al-Khāzin[101] parle de la correspondance entre les numérotations des propositions des *Coniques* dans les versions dont il disposait en disant : "*Et si nous nous référons à l'une des propositions du traité < des Coniques> par un numéro et que l'on n'y trouve pas ce dont on a besoin, on rétrograde, dans la traduction de Thābit, de deux propositions ou trois, car il lui manque ce nombre par rapport au nombre de propositions du Traité dans la traduction de Isḥāq Ibn Ḥunayn et de Hilāl Ibn Abī Hilāl* "[102].

De son côté, le mathématicien as-Sijzī se réfère *"à la quatrième <proposition> du second <Livre> du traité du noble Apollonius sur les coniques et à la première <proposition du même Livre> de la traduction d'Isḥāq"*[103].

Compte tenu du caractère explicite des références de ces deux mathématiciens et de leur concordance partielle, cela nous amène à faire deux déductions par ailleurs complémentaires. En premier lieu, il semble qu'Isḥāq Ibn Ḥunayn a eu à intervenir, d'une manière ou d'une autre, dans le texte des *Coniques*, soit en révisant la traduction d'Ibn Abī Hilāl, soit en traduisant de nouveaux les Livres I-IV. En second lieu, l'intervention de Thābit semble avoir concerné, peut-être dans un deuxième temps, les quatre premiers Livres dont il aurait réalisé une traduction ou une révision. Mais, nous n'avons pas trouvé de nouvelles sources permettant de confirmer ces hypothèses.

---

[101]- Sur la vie et l'œuvre de ce mathématicien, voir SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 298-299; ROSENFELD, B. A. & IHSANOGLU, E. : *Mathematicians, Astronomers & other Scholars of Islamic Civilisation and their works (7^{th}-19^{th} c.)*, Istanbul, IRCICA, 2003, p. 81-82.
[102]- BOUZARI, A. : *Les coniques dans la tradition mathématique arabe,…*Op. cit., p.130.
[103]- HOGENDIJK, J.P. : *Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon*, op. cit., p. 295-296.

III.1.3. Le dernier Livre des Coniques

Quant au Livre VIII des *Coniques*, qui est évoqué par différentes sources grecques et arabes, nous n'avons trouvé, à ce jour, aucune référence permettant d'affirmer qu'une copie complète a circulé et a été utilisée dans l'empire musulman.

C'est d'abord Apollonius qui évoque ce Livre à deux reprises, dans la préface du Livre I, en précisant que cette partie du traité concernait les "*problèmes sur les coniques qui prêtent à discussion*"[104]. Dans la préface du Livre VII, il ajoute : "*Toutes les propositions ont leur utilité dans de nombreuses catégories de problèmes et principalement dans les discussions de ces problèmes. Les exemples de cette utilité se présenteront d'ailleurs souvent dans les problèmes déterminés sur les sections coniques que j'ai résolus et démontré dans le huitième Livre, lequel constitue, pour ainsi dire, la suite de ce Livre-ci*"[105].

La seconde source grecque est la *Collection mathématique* de Pappus. Dans son Livre VII, ce dernier expose soixante dix lemmes qu'il propose d'ajouter à certaines propositions des *Coniques*, dont quatorze qui concerneraient les Livres VII et VIII. Mais, malheureusement, toutes les études faites à ce jour sur les correspondances, entre ces lemmes et les propositions perdues du Livre VIII, n'ont pas permis de reconstituer le contenu mathématique de ce chapitre[106].

Quant aux sources arabes, la plus ancienne est la fameuse préface des Banū Mūsā à l'édition des *Coniques*. Il y est précisé que la première version du traité qu'ils ont eu entre les mains comprenait "*sept Livres parmi les huit Livres qu'a composés Apollonius*"[107].

La seconde référence, plus explicite que la précédente, est dans le *Fihrist* d'Ibn an-Nadīm où on peut lire ceci : "*Les Banū Mūsā ont dit que le traité était en huit Livres. Il en existe sept Livres et une partie du huitième (...), et ce qui existe du huitième Livre est constitué de quatre propositions*"[108]. Ibn an-Nadīm, qui est le seul biobibliographe à

[104]- APOLLONIUS : *Les coniques*, op. cit., p. 3.
[105]- Op. cit., p. 549.
[106]- HOGENDIJK, J.P. : Ibn al Haytham's *Complétion of the Conics*, New York, Springer Verlag, 1985, p. 43-47; DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*, Op. cit., p. 52-59.
[107]- TOOMER. G. : *Apollonius, Conics Book V to VII*, op. cit., vol. II, p. 625.
[108]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 373.

rapporter cette information très précise, ne donne pas sa source qui est manifestement différente de celle des Banū Mūsā.

La seconde référence bibliographique qui évoque cette question est le *Ikhbār al-ḥukamā'* d'Ibn al-Qifṭī. Il n'apporte aucun élément nouveau sur le contenu du Livre VIII. Mais on y apprend que "*Quand le Livre fut ramené de l'Empire Byzantin à al-Ma'mūn, seulement la première partie du Traité fût ramené, pas plus, et qui contenait les sept <premiers> Livres. Quand le traité fût traduit, sa préface indiqua un huitième Livre (...). Et, jusqu'à présent, les personnes concernées par ce sujet continuent à chercher ce Livre* "[109].

Parmi les rédacteurs ou les commentateurs des *Coniques*, qui appartiennent à la tradition arabe, Ibn Abī Shukr al-Maghribī (m. 668/1270) est le seul connu qui donne une information nouvelle. Dans son *Sharḥ Kitāb Abulūniyūs fī al-Makhrūṭat* [Commentaire au Traité d'Apollonius sur les *Coniques*], il affirme que le Livre VIII n'a pas été découvert et il ajoute : "*Concernant le Livre < huit >, il est inexistant, mais des propositions [ou figures ?] <de ce Livre> ont été trouvées, mais sans énoncés. Les traducteurs n'ont pas compris à quels problèmes cela pouvaient correspondre, ils les ont donc négligées, et il n'est resté du traité que sept Livres*"[110].

Il faut enfin ajouter que le contenu du Livre VIII a sérieusement préoccupé les géomètres des pays d'Islam pour que l'un d'entre eux ait tenté de le reconstituer à partir des informations données par Apollonius dans les sept Livres qui le précèdent et en se basant sur sa profonde connaissance de leur contenu. Il s'agit du grand mathématicien Ibn al-Haytham[111]. Dans sa tentative de reconstitution, intitulée *Maqāla fī itmām kitāb al-makhrūṭāt* [Livre sur la complétion du Traité des *Coniques*], il énonce et établit un certain nombre de propositions qui lui semblent être dans le prolongement de ce qu'Apollonius a établies au cours des sept premiers Livres. Il dit à ce propos : " *Nous supposons que les notions qui manquent aux sept Livres sont les notions contenues dans le huitième Livre. Ces notions ont été renvoyées à la fin du traité parce*

109- IBN AL-QIFṬĪ : *Ikhbār al- ʿulama' bi akhbār al-ḥukamā'*, op. cit., p. 44-45.

110- IBN ABĪ ASH-SHUKR : *Sharḥ Kitāb Abulūniyūs fī l-makhrūṭāt* [Commentaire au Traité d'Apollonius sur les coniques], Ms. Téhéran n° 12022, Holy Shrine Library (Mashhad), fol. 2v.

111- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 358-374.

qu'Apollonius n'a pas eu besoin de les utiliser dans les sept Livres. Ces notions que nous citons sont des notions requises par des notions déjà introduites dans les sept Livres."[112] Dans cette complétion, Ibn al-Haytham s'intéresse particulièrement aux constructions de certains éléments associés aux sections coniques : tangentes, diamètres, cotés droits, etc…, en supposant connus les rapports, les produits, les sommes et les différences entre deux de ces segments.

III.1.4. Les travaux orientaux sur les Coniques

La première contribution arabe aux *Coniques* a été la traduction de ses sept Livres.

La seconde contribution, non moins importante, a été l'adjonction, par les frères Banū Mūsā, de préliminaires qui deviendront, à partir du IXe siècle, un élément constitutif de la version arabe de l'ouvrage d'Apollonius.

Par la suite, le Traité a bénéficié de rédactions complètes ou partielles, de commentaires, de résumés et même de gloses marginales. C'est ce que nous allons maintenant évoquer mais sans toujours pouvoir donner des informations sur leurs contenus respectifs et ce pour deux raisons essentielles : La première parce que, en dehors de quelques travaux importants publiés dans les décennies 80 et 90, la recherche sur la tradition arabe des coniques reste, quantitativement modeste. La seconde est liée à la difficulté que nous avons eu de disposer de copies de certains écrits liés à cette tradition.

Pour les rédactions complètes ou partielles, aucune n'est signalée pour les IXe-XIe siècles; ce qui est, à première vue, surprenant. La plus ancienne est du XIIe siècle et elle a été réalisée par Abū l-Ḥusayn ash-Shīrāzī (ca. 554/1160). Elle est intitulée *Kitāb taṣaffuḥ l-makhrūṭāt* [Le livre de l'étude des *Coniques*][113]. La seconde est le *Taḥrīr al-makhrūṭāt* [Rédaction des *Coniques*] de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī[114]. Ces deux ouvrages nous sont parvenus à travers plusieurs copies mais, à notre connaissance, ils n'ont pas encore fait l'objet d'une étude complète.

Compte tenu de la complexité du contenu d'un grand nombre de propositions des *Coniques*, il n'est pas étonnant que se soit imposée très vite la nécessité de rédiger des commentaires pour en expliciter le contenu. Les plus anciens cités par les sources sont

[112]- HOGENDIJK. J.P. : *Ibn al-Haytham's Completion of the Conics*, op. cit., p. 135.
[113]- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 141.
[114]- Op. cit.

du X^e siècle. Il s'agit du *Sharḥ kitāb al-makhrūṭāt* [Commentaire du livre des *Coniques*] et du *Tafsīr al-maqāla al-ūlā min Kitāb l-makhrūṭāt* [Explication du premier Livre des *Conique*s] d'Ibrāhīm Ibn Sinān, qui ne nous sont pas parvenus[115]. Au XIII^e siècle, Ibn Shukr al-Maghribī, un des astronomes de l'observatoire de Maragha, a publié un *Sharḥ Kitāb Abulūnyūs fī l-makhrūṭāt* [Commentaire du traité d'Apollonius sur les coniques].

C'est peut-être pour mettre à la disposition des étudiants des outils plus maniables que des auteurs ont pensé aussi rédiger des résumés des *Coniques*. Le plus ancien connu est le *Kitāb al-makhrūṭāt* [Livre des coniques] d'al-Khāzin dont le titre est trompeur parce qu'il s'agit d'un abrégé qui se limite aux outils qui permettent de résoudre les problèmes de la trisection d'un angle et de la détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données[116]. Quelques décennies plus tard, Ibn al-Haytham a publié, au Caire, un *Talkhīs maqālāt Abulūniyūs fī quṭū ^c al-makhrūṭāt* [Résumé du livre d'Apollonius sur les sections coniques]. Et, probablement après lui, al-Isfahānī (ca. 512/1119) a publié un abrégé portant le même titre, *Talkhīṣ al makhrūṭāt*[117]. Dans le même ordre d'idées, on peut considérer que les deux chapitres du *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman (dont un est édité dans notre thèse) contiennent, essentiellement, une présentation abrégée de la plus grande partie de l'ouvrage d'Apollonius.

Quant aux gloses marginales connues, elles sont au nombre de deux[118], celles d'un anonyme, portant le même titre[119] et celles de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī qu'il aurait ajoutée, vers 1247, à sa propre rédaction des *Coniques*[120].

L'étalement dans le temps de la production de commentaires, de résumés et de gloses qui étaient sensés facilités la compréhension du contenu est probablement un

---

[115]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 436-437.
[116]- BOUZARI, A : *Les Coniques dans la tradition mathématique arabe…*, op. cit., traduction française voir p. 118-180, édition arabe voir p. 1-85.
[117]- Ms. Istanbul, Aya Sofia, n° 2724.
[118]- SEZGIN, F. : *G. A. S.,* Vol. V, op. cit., p. 136-142.
[119]- Op. cit., p. 142.
[120]- Ms. Oxford, Bodl., Marsh n° 667 où ces gloses ont été reprises par un certain Ibn al-Bawwāb qui pourrait avoir étudié sous la direction d'aṭ-Ṭūsī, à l'observatoire de Maragha.

indice de la présence durant cette longue période, qui va du IXe siècle au XIIIe, d'un enseignement de tout ou partie du contenu de l'ouvrage d'Apollonius. Une des conséquences de cet enseignement a été l'introduction de corrections ou de compléments jugés indispensables pour rendre compréhensible la version des coniques éditée par les Banū Mūsā. Parmi les écrits qui nous sont parvenus et qui ciblent cet aspect particulier, il y a celui Kamāl ad-Dīn Ibn Yūnus (m. 640/1242), intitulé la *Risāla fī bayān muqaddimatayn muhmalatay al-bayān istaʿmalahā Abulūnyūs* [Epître sur la démonstration de deux prémisses non démontrées utilisées par Apollonius][121]. Elles concernent les propositions I; 55 et I; 58 des *Coniques*.

En relation avec ce qui vient d'être dit, il faut signaler que des ajouts ont concerné également la fameuse *Introduction* des Banu Musa aux *Coniques* parce que la tradition mathématique arabe l'a pratiquement intégrée à l'ouvrage d'Apollonius. C'est d'ailleurs dans cet esprit que des mathématiciens ultérieurs ont étudié ces préliminaires, les ont soumises à la critique et sont intervenus parfois pour en améliorer la présentation ou la cohérence[122]. Parmi les références à ce sujet qui nous sont parvenues, il y a une étude intitulée *Qawl li l-Ḥasan ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham fī shakl Banī Mūsā* [Propos d'al-Ḥasan ibn al-Ḥasan Ibn al-Haytham sur la proposition des Banū Mūsā][123].

On constate aussi que la lecture et l'assimilation du contenu des *Coniques* a inspiré de nouvelles investigations orientées vers des thèmes nouveaux. L'initiateur du premier thème est al-Ḥasan, l'un des frères Banū Mūsā, avec son livre non encore retrouvé, intitulé *Kitāb ash-shakl al-mudawwar al-mustaṭīl* [traité de la figure arrondie et allongée][124]. Le but de cette étude était de montrer comment engendrer une ellipse par intersection d'un cylindre et d'un plan, et d'en déduire les propriétés fondamentales de ladite courbe[125]. La plus ancienne information sur ce livre se trouve dans la préface aux *Coniques* des Banū Mūsā. Elle est confirmée par Thābit Ibn Qurra dans un de ses

---

[121]- Ms. Istanbul, Manisa Genel, n° 1706, ff. 255r-256r.

[122]- Dans l'ouvrage *Taṣḥīḥ zīj aṣ-ṣafā'iḥ*, l'auteur dit ceci : "*Les frères Banū Mūsā, dont on ne peut nier la position éminente et l'apport, se sont trompés dans une partie de ce qu'ils ont introduit comme prémisses au livre d'Apollonius sur les coniques*". Voir toute la citation dans SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 137, note 1.

[123]- IBN AL-HAYTHAM : *Rasā'il*, Hayderabad, 1357/1938, p. 2-14.

[124]- IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 271.

[125]- TOOMER, G. : *Apollonius, Conics Book V to VII*, op. cit., vol. II, p. 627.

ouvrages, celui qui s'intéresse, précisément, à la même problématique. Il s'agit de son *Kitāb quṭū ͨ al-usṭuwāna wa basiṭuhā* [Traité sur les sections des cylindres et leur surface] où il évoque "*l'aire de la section de cylindre qu'avait calculée Abū Muḥammad al-Ḥasan ibn Mūsā"*. Dans cette étude, qui ne contient pas moins de 37 propositions, Ibn Qurra traite, dans le détail, les différentes caractérisations des éléments de l'ellipse en tant que courbe tracée sur un cylindre et établit d'autres propriétés et d'autres résultats[126].

Un second thème, apparu essentiellement au Xe siècle, peut-être en relation avec le renouveau d'intérêt pour l'étude des miroirs ardents[127], a concerné les propriétés des trois sections coniques. Dans ce domaine, nous relevons la *Risāla fī waṣf al-quṭū ͨ al-makhrūṭiya* [Epître sur la description des sections coniques][128] et la *Risāla fī khawāṣṣ al-qaṭ ͨ an-nāqiṣ* [Epître sur les propriétés de l'ellipse] d'as-Sijzī[129]. De son côté, al-ͨAlā Ibn Sahl (m. 348/970) a écrit une *Risāla fī khawāṣṣ al-quṭū ͨ ath-thalātha* [Epître sur les propriétés des trois sections] qui nous est parvenue[130]. Dans l'une des deux listes dans lesquelles Ibn al-Haytham a consigné lui-même ses publications, on trouve mentionnées une *Maqāla fī khawāṣṣ al-qaṭ ͨ al-mukāfī* [Epître sur les propriétés de la parabole] et une *Maqāla fī khawāṣṣ al-qaṭ ͨ az-zā'id* [Epître sur les propriétés de l'hyperbole][131]. Au vu de ces titres qui, à une exception, se ressemblent dans leur formulation, nous pouvons supposer qu'il s'agit là d'études qui ne se préoccupent plus

---

126- KARPOVA, L. M. & ROSENFELD, B. : The treatise of Thābit ibn Qurra on Sections of a Cylinder and of its Surface, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 24 (1974), p. 66-72; RASHED, R. : *Les Mathématiques Infinitésimales du IXe au XIe siècle*, Londres, Al-Furqān, Vol. I, 1996, p. 458-673.

127- Ibn Sahl et Ibn al-Haytham, deux des auteurs qui se sont préoccupés de ce thème, sont considérés comme ayant été les meilleurs spécialistes de leur époque dans l'étude des aspects théoriques des miroirs ardents. Voir RASHED, R. : *Géométrie et dioptrique au Xe siècle : Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, Paris, Les Belles Lettres, 1993.

128- Ms. Leiden, University Library, n° Or. 168, ff. 1-22.

129- Qui semble être le même texte que celui qui est intitulé *Risāla ilā Abī Sahl Wayjan ibn Rustum al-Kūhī fī tabyīn khawāṣṣ al-qat ͨ al-nāqiṣ min quṭū ͨ al-makhrūṭāt* [Epître à Abū Sahl Wayjan ibn Rustum al-Kūhī sur l'explicitation des propriétés de l'ellipse, une des sections coniques]. Voir QURBANI, A. *Biographies des mathématiciens de l'époque islamique*, Téhéran, Presses Universitaires d'Iran, 1375/1955, p. 259 (en persan).

130- Ms. Paris, BnF, n° 2457/29, ff. 139-141.

131- IBN ABĪ UṢAYBIͨA : ͨ*Uyūn ul-anbā`fī ṭabaqāt al-aṭibbā`*, NIZĀR, R. (édit.), Beyrouth, Manshūrāt Dār maktabat al-ḥayāt, non datée, p. 559.

de la manière dont les courbes ont été engendrées mais uniquement de leurs propriétés intrinsèques.

Parmi les propriétés particulières à telle ou telle section conique, celle des asymptotes à l'hyperbole a bénéficié d'une attention particulière de la part d'un certain nombre de mathématiciens. Au X^e siècle, al-Qummī a écrit une *Risāla fī imkān wujūd al-khaṭṭayn alladhayn yaqtaribān abadan wa lā yaltiqiyān* [Epître sur la possibilité de trouver les deux lignes qui se rapprochent indéfiniment et qui ne se rencontrent pas][132]. Toujours au cours de ce siècle, as-Sijzī s'est penché sur le problème et a publié une *Risāla fī kayfiyyat taṣawwur al-khaṭṭayn al-ladhayn yaqrubān wa lā yaltaqiyān* [Epître sur la manière de concevoir les deux lignes qui se rapprochent et qui ne se rencontrent pas][133]. A peu près à la même époque, Ibn al-Haytham aurait réalisé une *Maqāla fī intizā^c al burhān ^calā anna l-qaṭ^c az-zā'id wa-l-khaṭṭayn alladhayn lā yaltaqiyān yaqtaribān abadan wa lā yaltaqiyān* [Epître sur l'extirpation de la démonstration sur le fait que l'hyperbole et les lignes qui ne se rencontrent pas se rapprochent indéfiniment et ne se rencontrent pas][134].

Dans le prolongement de l'étude des propriétés des sections coniques, il faut évoquer tous les écrits, eux aussi originaux, qui ont étudié les solides engendrés par la rotation de chacune des sections coniques. C'est le mathématicien as-Sijzī qui s'est le plus intéressé à cette question. Il l'a traitée dans trois opuscules (qui nous sont parvenus) : *Risāla fī khawāṣṣ ash-shakl al-mujassam al-ḥādith min idārat al-qat^c az-zā'id wa l-mukāfi'* [Epître sur les propriétés de la figure solide engendrée par la rotation de l'hyperbole et de la parabole][135], *Kitāb fī khawāṣṣ al-mujassam an-nāqiṣ wa z-zā'id wa l-mukāfi'* [Livre sur les propriétés de l'ellipsoïde, de l'hyperboloïde et du

132- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 336.
133- Ms. Mashhad, Riḍā, n° 5521/3, p. 17-22; Ms. Istanbul, Reshit, n° 1191/7, ff. 73-79; Ms. New York, Columbia, n° Or. 45/12.
134- IBN ABĪ UṢAYBI^cA : ^c*Uyūn ul-anbā`fī ṭabaqāt al-aṭibbā`*, op. cit., p. 555.
135- Ms. Paris, BnF, n° 2657/28, ff. 137-139.

paraboloïde] et *Risāla fī khawāṣṣ al-qubba az-zā'ida wa l-mukāfi'a* [Epître sur les propriétés des coupoles hyperbolique et parabolique][136].

III.1.5. Les sections coniques dans l'enseignement des mathématiques

Dans la tradition grecque, les *Coniques* sont classées par Pappus dans le *Corpus Analytique*[137]. Dans la tradition arabe, nous n'avons pas trouvé d'informations précises concernant la place de cet ouvrage ou de certains de ses chapitres dans l'enseignement des mathématiques, sauf ce qui est suggéré par l'ouvrage attribué à al-Khāzin et intitulé : *"Le cinquième des Intermédiaires : ce qui est nécessaire pour le tracé des sections coniques et les préliminaires aux deux moyennes <proportionnelles>, et à la division de l'angle à côtés rectilignes en trois parties <égales>"*. L'ajout d'un écrit arabe du Xe siècle dans les *Mutawassiṭāt* [<Livres> intermédiaires], qui est un corpus répondant à un programme de formation des futurs astronomes, n'est pas étonnant en soi. Comme on le sait, le noyau du premier recueil de *Mutawassiṭāt* arabes était constitué des ouvrages grecs de la *Petite Collection*[138]. A ce recueil ont été ajoutés des écrits arabes du IXe siècle comme *Tashīl al-Majisṭī* [La facilitation de l'*Almageste*] de Thābit Ibn Qurra, *Kitāb fī misāḥat al-ashkāl al-basīṭa wa l-kuriyya* [Livre sur la mesure des figures planes et sphériques] des frères Banū Mūsā et le *Kitāb fī sh-Shakl al-qaṭṭā* ͨ [Livre sur la figure sécante] d'un auteur anonyme. Il semble que, jusqu'au XIIIe siècle, le contenu de ces *Mutawassiṭāt* n'ait pas cessé d'évoluer en particulier par l'adjonction de nouveaux écrits[139]. Un premier exemple est la Collection qui contient le texte d'al-Khāzin. Aux extraits de textes habituels de la *Petite Collection*, ont été ajoutés deux

---

136- Ms. Istanbul, Reshit, n° 1191/3, ff. 63-65 et 1191/4, ff. 66-68.

137- Pour plus de détails sur ce corpus, voir HEATH, Th. : *A History of Greek Mathematics*, op.cit., Vol. I, p. 431-438, 439-440; Vol. II, pp. 175-192, 399-424. Voir aussi DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*, op. cit., Vol. I, fascicule 2.

138- Ce corpus, appelé aussi "*Petite astronomie*" par l'Ecole d'Alexandrie, comprenait les *Données*, l'*Optique*, la *Catoptrique* et les *Phénomènes* d'Euclide; les *Sphériques*, les *Habitations* et les *Jours et les nuits* de Théodose; la *Sphère en mouvement* et les *Couchers et les levers des astres* d'Autolycos; les *Ascensions* d'Hypsiclès; les *Grandeurs et les distances du soleil et de la lune* d'Aristarque; et les *Sphériques* de Ménélaüs.

139 - Sur la comparaison du contenu des *Mutawassiṭāt* avec celui de la *Petite Collection*, voir CARMODY, F.-J. : *The Astronomical Works of Thābit Ibn Qurra*, Los Angeles, University of California Press, 1956.

écrits de la tradition arabe : celui que l'on vient d'évoquer et le *Kitāb misāḥat al-kura* [Livre sur le volume de la sphère] d'Ibn al-Haytham. Au XIII^e siècle, le recueil de *Mutawassiṭāt* composé par Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 672/1274)[140] contient de nouveaux textes comme *Kitāb al-mafrūḍāt* [Livre des hypothèses] de Thābit Ibn Qurra. et la *Risāla ash-shāfiya ᶜan ash-Shakk fī l-khuṭūṭ al- mutawāziya* [L'Epître qui dissipe le doute relatif aux lignes parallèles][141].

III.1.6. Les coniques dans les domaines appliques

III.1.6.1. La construction des sections coniques

Il est tout à fait possible que ce soit l'intervention de plus en plus grande des courbes coniques dans des domaines appliqués, comme l'astronomie et l'optique, qui a amené les scientifiques des pays d'Islam à se préoccuper d'un aspect tout à fait pratique qui est, à la fois, celui de construire chacune des sections coniques et d'optimiser cette construction, c'est-à-dire de la réaliser de la manière la plus précise possible mais également la plus rapide et la plus aisée. Une première initiative dans ce domaine a été celle des frères Banū Mūsā qui ont exposé un procédé ancien de construction d'une ellipse en utilisant la propriété de ses foyers[142]. A peu près à la même époque, Ibrāhīm Ibn Sinān, publie une épître, intitulée *Maqāla fī rasm al-quṭū ᶜ ath-thalātha* [épître sur le tracé des trois sections <coniques>][143]. L'auteur y expose une procédure de détermination de la parabole, de l'hyperbole et de l'ellipse point par point, en ne faisant intervenir que la règle et le compas[144].

Par la suite, des mathématiciens ont tenté de concevoir et de réaliser un instrument qui devait leur permettre de tracer, d'une manière continue cette fois, n'importe quelle parabole, hyperbole et ellipse. Cette idée, très ancienne, va se concrétiser par une première publication au X^e siècle, la *Risāla fī l-burkār at-tāmm wa l- ᶜamal bihī* [Epître

---

140 - GILLISPIE, Ch. (édit.) : *D. S. B.*, op. cit., vol. 13, p. 509.

141- AṬ-ṬŪSĪ : *Rasā'il*, op. cit.

142- YOUSCHEKEVITHCH, A.-P. : *Les mathématiques arabes* (VIII^e-XV^e siècles), Paris, Vrin, 1976, p.169

143- IBN SINĀN : *Rasā'il*, op. cit., p. 35-40.

144- Sur l'attribution de cette construction au géomètre allemand J. Werner (1468-1528), voir COOLIDGE, J.-L. : *History of the conic sections and quadratic surfaces,* Dover, New York, 1968, p. 27.

sur le compas parfais et son utilisation] d'al-Kūhī[145]. A la même époque, as-Sijzī expose le principe, la description, et l'utilisation du compas parfait, dans sa *Risāla fī waṣf al-quṭū ͨ al-makhrūṭiya* [Epître sur la description des sections coniques][146]. A la fin du X^e^ siècle ou au début du XI^e^, Ibn al-Haytham s'intéresse au même sujet et lui consacre un *Kitāb fī burkār al-quṭū ͨ* [Livre sur le compas des sections <coniques>][147]. Au XII^e^ siècle, Muḥammad Ibn al-Ḥusayn (ca.719/1320), un mathématicien peu connu, publie une *Risālat al-burkār at-tām* [Epître sur le compas parfais] qui ne contient pas d'éléments nouveaux par rapport à celle d'al-Kūhī[148]. Il faut enfin signaler un autre ouvrage perdu traitant du même sujet, celui de l'astronome d'al-Ḥasan al-Murrākushī (VII^e^/XIII^e^ s.)[149].

Mais il semble que la maîtrise des aspects théoriques du compas parfait n'ait pas abouti à la réalisation d'instruments suffisamment maniables et fiables qui pouvaient permettre de tracer aisément les différentes sections coniques[150]. En tout cas, les nombreuses figures que nous avons pu rencontrer dans différents manuscrits de différentes époques ne donnent pas l'impression d'avoir été tracées par un compas parfait. Pour un grand nombre d'elles, il n'est même pas sûr qu'elles aient été construites par la méthode exposée par les frères Banū Mūsā ou par celle d'Ibrāhīm Ibn Sinān. Les

---

[145]- RASHED, R. : Al-Qūhī et al-Sijzī : sur le compas parfait et le tracé continu des sections coniques, *Arabic Sciences and Philosophy,* 13 n° 1 (2003), p. 9-44.

[146]- Ms. Leiden, University Library, n° Or. 168, ff. 1-22; WOEPCKE, F. : Trois traités arabes sur le compas parfait, *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale*, 22 (1874), Addition, p. 112-115. Reproduit en fac-similé dans WOEPCKE, F. : *Etudes sur les mathématiques arabes,* SEZGIN, F. (édit.), Frankfurt, 1984, Vol. I, p. 671-674.

[147]- IBN ABĪ UṢAYBIͨA : *ͨUyūn ul-anbā`fī ṭabaqāt al-aṭibbā`*, op. cit., p. 559. Il s'agit peut-être du même ouvrage que celui qui lui est également attribué et qui est intitulé *Fī istikhrāj jamī ͨ al-quṭu ͨ bi ṭarīq al-āla* [Sur la détermination de toutes les sections coniques à l'aide de l'instrument]. Voir RASHED, R. : *Mathématiques infinitésimales*, op.cit., Vol. II, Tableau n° 37, p. 520.

[148]- WOEPCKE, F. : *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques*, Vol. 22 (1874), p. 1-175. Reproduit en fac-similé dans WOEPCKE, F. : *Etudes sur les mathématiques arabes*, op. cit., Vol. I, p. 560-734.

[149]- AL-MURRĀKUSHĪ : *Kitāb al-mabādi' wa l-ghāyāt fī ͨilm al-mīqāt* [Livre des principes et des buts sur la science du temps], Ms. Istanbul, Ahmet III, n° 3343. In Fac simile, SEZGIN, F. (édit.), Frankfurt, Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 1984, Vol. I, p. 223. L'auteur dit à ce sujet : "*Et il est possible de déterminer le méridien du lieu à l'aide de cette méthode lorsque le soleil n'est pas sur le cercle méridien sauf qu'on y a alors besoin d'un ajout. Et cet ajout est traité par le compas parfait parce que cela <concerne> les sections coniques. Et j'ai évoqué cela dans le livre que j'ai réalisé sur ce que l'on fait avec le compas parfait*".

[150]- BENRABIA, Y. : *Les instruments géométriques dans la tradition mathématiques arabe médiévale (IX^e^-XVI^e^ s.),* Magister en histoire des mathématiques, Ecole Normale Supérieure, Alger, 1998.

ellipses sont construites par juxtaposition de deux arcs de cercle, parfois rabotés aux extrémités et pour la parabole et l'hyperbole on combine une portion de cercle et deux droites tangentes aux extrémités de la portion.

III.1.6.2. Les problèmes solides et autres constructions

La trisection de l'angle (avec comme prolongement la construction de l'ennéagone régulier), la recherche de deux moyennes proportionnelles à deux grandeurs données, la duplication du cube et l'inscription de l'heptagone dans un cercle, sont des problèmes hérités de l'antiquité grecque. Les solutions mécaniques et théoriques données à ces problèmes durant la période hellénistique avaient été décrites dans un certain nombre d'ouvrages[151].

Mais, les écrits sur ces différents sujets, qui sont parvenus aux premiers mathématiciens des pays d'Islam, sont peu nombreux. Pour le problème de la trisection de l'angle (qui permet de résoudre celui de l'inscription de l'ennéagone régulier), deux textes ont été exhumés : Le premier correspond à la proposition 8 du *Livre des lemmes* du Pseudo Archimède qui a été traduit par Thābit Ibn Qurra[152]. Le second, reconnu comme appartenant à cette tradition, a été publié pour la première fois par J.-P. Hogendijk. Il est intitulé *Qawl li Aḥmad Ibn Shākir fī tathlīth az-zāwiya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn* [Propos de Aḥmad Ibn Shākir sur la trisection de l'angle à côtés rectilignes][153].

Sur le problème des deux moyennes, la tradition arabe connue évoque un certain nombre de textes d'auteurs grecs. La plupart leur sont parvenus à travers le commentaire d'Eutocius au livre d'Archimède, *La Sphère et le cylindre*[154]. Selon Ibn an-

---

[151]- HEATH, Th. : *A History of Greek Mathematics*, op. cit., Vol. I, p. 218-270; KNORR, W.-R. : *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Boston, Birkhäuser, 1989, p. 11-213.
[152]- HOGENDIJK, J.P. : How Trisections of the Angle were Transmitted from Greek to Islamic Geometry, *Historia Mathematica* 8 (1981), p. 418.
[153]- Op. cit., p. 417-438.
[154]- Onze preuves sont rapportées par Eutocius, dont celles attribuées par lui à Platon, Héron, Apollonius et Dioclès. Voir HEATH, Th. : *A History of Greek Mathematics*, op. cit., Vol. II, p. 540. Voici ce qu'en dit le mathématicien du X^e siècle al-Khāzin : " *Les géomètres les <plus> éminents parmi les Anciens et les Modernes se sont <largement> étendus sur ces deux problèmes. Et Eutocius d'Ascalon a rédigé un livre et y a dénombré onze géomètres ayant parlé de la détermination de deux lignes entre deux lignes, et parmi eux Platon le philosophe; et il a noté <avec précision> ce qu'ils ont découvert comme propositions et instruments. Et quiconque étudie ce livre, en vue de <le> comprendre, sera persuadé de la puissance de chacun d'entre eux et saura que la plupart d'entre eux ont cherché ce <problème> par la méthode de l'instrument* ". Voir la citation complète dans BOUZARI, A. : *Les coniques dans la tradition mathématique arabe…*, op. cit. p. 170-171.

Nadīm, une traduction de ces démonstrations a été réalisée par Thābit Ibn Qurra dans un écrit indépendant, intitulé *Kitāb Ūṭūqiyūs fī ḥikāyat mā stakhrajahū l-qudamā' min khaṭṭayn bayna khaṭṭayn ḥattā yatawāliyā l-arba ͨ mutanāsiba* [Livre d'Eutocius sur la présentation de ce que les Anciens ont déterminé au sujet des deux lignes entre deux lignes que les quatre se succèdent <d'une manière> proportionnelle][155]. Deux d'entre elles ont été reprises par aṭ-Ṭūsī, comme lemmes à la première proposition du Livre II[156]. A cela, il faut ajouter la démonstration attribuée à Ménélaüs (Ier s.) par les frères Banū Mūsā[157].

Quant aux problèmes de l'inscription de l'heptagone régulier dans un cercle, la tradition arabe évoque une seule source grecque, la *Risāla fī ͨamal ad-dā'ira al-maqsūma bi sab ͨat aqsām mutasāwiya* [Epître sur la construction du cercle divisé en sept parties égales], attribuée à Archimède et traduite par Thābit Ibn Qurra[158].

A partir du IXe siècle, ces différents problèmes grecs et les solutions qui les accompagnaient sont étudiées, critiqués et souvent redémontrées. Les plus anciens textes arabes de ce domaine, qui nous sont parvenus, sont ceux des frères Banū Mūsā qui ont écrit un traité, intitulé *Qismat az-zāwiya bī thalāthat aqsām mutasāwiya* [Division de l'angle en trois parties égales][159]. Malheureusement ce traité ne nous est pas parvenu. Leur seconde contribution est insérée dans leur *Livre sur la connaissance des surfaces planes et sphériques*. On y trouve deux propositions, l'une sur les deux moyennes qu'ils attribuent explicitement à Ménélaüs et l'autre sur la trisection de l'angle (utilisant la géométrie mobile) dont ils revendiquent implicitement la paternité[160].

155- Ms. Paris, BnF, n° 2457/44, ff. 191-192. Le titre est emprunté à cette copie; IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist*, op. cit., p. 267. Ici, l'ouvrage est simplement intitulé *Kitāb fī l-khaṭṭayn* [Livre sur les deux lignes].

156- Elles sont reproduites par aṭ-Ṭūsī dans son *Taḥrir Kitāb al-kura wa l-usṭuwāna* [Rédaction du Livre de la sphère et du cylindre]. Voir AṬ-ṬŪSĪ : *Rasā'il*, op. cit., Vol. 2/1, p. 81-82.

157- BANŪ MŪSĀ : *Kitāb ma ͨrifat misāḥat al-ashkāl al-basīṭa wa l-kuriya* [Livre sur la connaissance des aires des figures planes et sphériques]. In RASHED, R. : Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, op. cit., p. 117.

158- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 133-134.

159- IBN AL-QIFṬĪ : *Ikhbār al ͨulamā bī akhbār al Ḥukamā*, op. cit., p. 208.

160- BANŪ MŪSĀ : *Kitāb ma ͨrifat misāḥat al-ashkāl al-basīṭa wa l-kuriya*, op. cit., p. 117-133. Ils concluent leur livre ainsi : "*Et tout ce que nous avons décrit dans notre livre est de notre œuvre, sauf la*

Leur contemporain Thābit Ibn Qurra s'est également intéressé au problème de la trisection en lui consacrant une épître. Il serait même, selon les témoignages d'al-Khāzin et d'as-Sijzī, le premier à avoir résolu le problème en faisant intervenir des sections coniques[161]. Après lui, toute une tradition s'est développée et de nombreuses méthodes de résolution utilisant les sections coniques ont été élaborées[162]. Les solutions proposées étaient soit mécaniques soit géométriques et, dans ce cas, elles utilisaient les résultats des *Coniques* d'Apollonius. Quant aux méthodes grecques qui utilisaient les courbes transcendantes et les "inclinaisons", elles deviennent rares.

Parmi les mathématiciens postérieurs qui ont publié sur la trisection de l'angle et sur la construction de l'ennéagone, il y eut ceux qui se sont préoccupés de la recherche de solutions géométriques, à l'aide des sections coniques, comme al-Kūhī[163], Al-Khāzin[164], aṣ-Ṣaghānī (X^e s.)[165], Ibn al-Haytham[166] et as-Sijzī qui, en plus de sa propre contribution, a publié celles d'un certain nombre de ses prédécesseurs ou contemporains[167]. En relation étroite avec la trisection d'un angle, la construction de l'ennéagone régulier a intéressé aussi certains mathématiciens, comme l'anonyme du X^e siècle[168], al-Bīrūnī[169] et Abū l-Jūd[170]. Ces deux derniers, intéressés par la recherche de solutions numériques approchées, se sont orientés vers la résolution des équations du 3^e degré qui exprimaient ce problème.

Ce sont également les Banū Mūsā qui ont été les premiers, à notre connaissance, à étudier le problème des moyennes entre deux grandeurs, en reproduisant une solution grecque déjà évoquée. A partir de là, des études sur le sujet ont été initiées puis

---

connaissance du périmètre à partir du diamètre qui est l'œuvre d'Archimède et sauf la connaissance de la position de deux grandeurs entre deux <autres> grandeurs pour qu'elles se succèdent selon un même rapport, qui est l'œuvre de Ménélaüs, comme cela a déjà été évoqué".

[161]- HOGENDIJK, J.P. : How Trisections of the Angle were Transmitted from Greek to Islamic Geometry, op. cit., p. 432.

[162]- HOGENDIJK, J.P. : *On the trisection of angle an the construction of a regular nonagon by means of conic sections in medieval Islamic*, University Utrecht, Preprint n° 113, 1979, p. 5-12.

[163]- KNORR, W.-R. : *Textual studies in ancient and medieval geometry,* op. cit., p. 339-340.

[164]- BOUZARI, A. : *Les coniques dans la tradition mathématique arabe…*, op. cit., p. 166-168.

[165]- Contribution évoquée par as-Sijzī.

[166]- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. I, op. cit., p. 373.

[167]- Ms. Leiden, University Library, n° Or. 168/2, ff. 23r-40v.

[168] - BERGGREN, J.-L. : An Anonymous treatise on the regular Nonagon, *Journal for History of Arabic Science*, Vol. 5, n° 1-2 (1981), p. 37-41.

[169]- AL-BĪRŪNĪ : *Al-Qānūn al-masᶜūdī* [Le canon masᶜudien], Hayderabad, 1373/1954, Vol. I, p. 286-291.

[170]- YOUSCHEKEVITHCH, A.-P. : *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*, op. cit., p. 93.

poursuivies jusqu'au XI[e] siècle et au-delà, comme celles d'al-Khāzin[171] et d'al-Kūhī[172]. Certaines de ces contributions sont tout à fait originales tout en restant dans la problématique des deux moyennes. Celle d'Ibn al-Haytham est allée plus moins puisqu'il s'est proposé, dans une étude non encore retrouvée, de généraliser le problème en établissant l'existence de quatre grandeurs proportionnelles entre deux grandeurs données. Cette publication circulait encore à l'époque d'al-Khayyām (m. 526/1131) et c'est lui qui l'évoque dans son Traité d'algèbre[173].

Le domaine des applications des coniques va encore prendre de l'ampleur lorsque les scientifiques des pays d'Islam vont s'intéresser aux solutions d'un problème qui ne semble pas avoir suscité beaucoup d'intérêt dans la tradition mathématique grecque[174]. Il s'agit de l'inscription de l'heptagone régulier dans un cercle. Partant de la seule source qui leur est parvenue, et qu'ils ont attribuée à Archimède, les géomètres de la tradition arabe se sont passionnés pour ce problème et ont réalisé un grand nombre d'études[175]. Il y eut même, au début du XI[e] siècle, une véritable polémique sur la priorité de tel ou tel mathématicien dans l'établissement de la première démonstration utilisant les sections coniques[176]. Ces travaux sont partis de la constatation que le texte grec était incomplet. Cela d'ailleurs est visible dans l'intitulé de certaines contributions, comme le *Qawl fī muqaddimat dil ᶜ al-musabba ᶜ* [Propos sur le lemme relatif au côté de l'heptagone] d'Ibn

171- CARRA DE VAUX : *Une solution du problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données*, Bibliotheca Mathematica 12 (1898), p. 3-4. Cet écrit a été édité dans BOUZARI, A. : *Les coniques dans la tradition mathématique arabe…*, op .cit., p. 85-86, pour la traduction et la transcription voir p.181-184.

172- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. I, op. cit., p. 318.

173- DJEBBAR, A. & RASHED, R. *: L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*, édition critique, traduction française et analyse, Alep, Institut for the History of Arabic Sciences, 1981, p. 65-66. Al-Khayyām dit ceci, à propos de cette contribution : "*Si on dit : 'un carré quelconque est égal à un nombre de parties du cube de son côté', la solution de ceci n'est pas possible par les méthodes que nous avons exposées, car il est besoin de faire apparaître quatre droites entre deux droites pour que les six soient en proportion continue. Ceci a été démontré par Abū ᶜAlī Ibn al-Haytham; seulement, c'est très difficile, aussi ne pouvons-nous le joindre à notre livre*".

174- HOGENDIJK, J.P. : Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon*, Archive for History of Exact Sciences*, 30 (1984), p. 189-330.

175 - ANBOUBA, A. : Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4[ème] siècle de l'Hégire, *Archive for History of Arabic Science*, Vol. 2, n° 2 (1978), p. 264-269. Voir aussi HOGENDIJK. J.P.: *Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon*, op.cit.

176- AL-BĪRŪNĪ : *Kitāb maqālīd ᶜilm al-hay'a*, La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'Est à la fin du X[e] siècle, DEBARNOT, M.-Th. (édit. & trad.), Damas, Institut Français de Damas, 1985, p. 94. Sur certains aspects de cette polémique, exposés par les mathématiciens eux-mêmes, voir HOGENDIJK, J.P. : *Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon*, op. cit., p. 317-327.

al-Haytham[177] et la *Risāla fī l-burhān ᶜala l-muqaddima allatī ahmalahā Arshimīdis fī kitābihī tasbīᶜ ad-dāᶜira wa-kayfīyat ittikhādh dhālika* [Epître sur la preuve du lemme qu'Archimède a omise dans son livre sur la division du cercle en sept parties égales et la manière dont cela est achevée] d'Ibn Yūnus (m. 639/1242)[178]. Il n'est pas possible de citer, ici, tous les écrits produits avant le milieu du XIe siècle, en Orient, sur la question de l'heptagone. Il nous suffit d'évoquer les contributions des pionniers (Abū l-Jūd, al-Kūhi, as-Sijzī, aṣ-Ṣaghānī et Ibn Sahl), et de renvoyer aux deux publications de A. Anbouba et J.-P. Hogendijk déjà référencées. Mais il est utile de préciser que les résultats qui ont été établis vont susciter d'autres interrogations et encourager d'autres investigations qui sont dans le prolongement du problème de l'heptagone. Il s'agit de l'inscription dans un cercle des polygones réguliers à 11, à 13 et à 17 côtés qui ont préoccupé les mathématiciens d'Orient au moins jusqu'au XIIe siècle comme nous le confirme as-Samaw'al al-Maghribī (m. 570/1175), dans l'introduction à son *Kitāb kashf aᶜwār al munajjimīn* [Livre sur le dévoilement des travers des astrologues][179].

III.1.6.3. Les coniques et la géométrie archimédienne

Partant d'une connaissance partielle de l'œuvre d'Archimède concernant le mesurage des aires et des volumes, mais ayant assimilé les propriétés des coniques d'Apollonius et maîtrisé l'utilisation des outils géométriques euclidiens, des mathématiciens ce sont engagés dans une voie nouvelle pour eux, celle de la détermination des aires de quelques figures non rectilignes et non circulaires et des volumes de certains solides de révolution.

Ces travaux, ont débuté, au IXe siècle, avec deux contributions de Thābit Ibn Qurra, le *Kitāb fī Misāḥat qaṭᶜ al-makhrūṭ allaḍī yusamma l-mukāfī* [Livre sur l'aire de

---

177- HOGENDIJK, J.P. : *Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon*, op. cit., p. 279; RASHED, R : La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham, *Journal for th history of the arabic Science*, Vol. 3, n° 2 (1979), p. 309-387.

178- HOGENDIJK, J.P. : *Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon*, op. cit., p. 224-226.

179- Voici comment s'exprime as-Samaw'al au sujet de ces problèmes : "*Il reste, maintenant, <à résoudre> la division de l'angle en cinq parties <égales>, l'inscription dans un cercle d'un polygone <régulier> à onze côtés, à treize côtés et à dix sept côtés, les équations cubiques trinômes, les équations quadrinômes et <celles d'ordre> supérieur ainsi que d'autres <choses> qui sont, jusqu'à ce jour, non résolues alors que les démonstrations ont établi leur existence et le fait qu'elles ne sont pas impossibles*". Voir Ms. Leiden, University Library, n° Or. 98, f. 1v.

la section conique appelée parabole][180] et le *Kitāb fī misāhat al-mujassamāt al-mukāfi'a* [Livre sur le volume des solides paraboliques]. Ils ont été suivis par l'étude perdue d'al-Māhānī (m. 275/888)[181]. Au X^{e} siècle, Ibrāhīm Ibn Sinān propose, dans sa *Risāla fī misāḥat al-qaṭ^{c} al-makhrūṭ al-mukāfī* [Epître sur l'aire de la section de cône parabolique], de déterminer l'aire d'une portion de parabole en introduisant des simplifications notables grâce, en particulier, à une réduction significative du nombre de propositions préliminaires[182]. C'est également dans un souci de simplification qu'al-Kūhī rédige, quelques décennies plus tard, sa *Risala fī istikhrāj misāhat al-mujassam al-mukāfī* [Epître sur la détermination de l'aire du solide parabolique][183]. Les dernières contributions connues produites en Orient sont celles d'Ibn al-Haytham. La première traite du volume du "solide parabolique", déjà étudié par ses prédécesseurs que nous venons d'évoquer[184]. La seconde est originale puisqu'elle concerne la détermination du volume d'un solide parabolique "rhomboïde", obtenu par la rotation d'une portion de parabole autour de la perpendiculaire à son axe[185].

III.1.6.4. Les coniques en algèbre

Le dernier domaine mathématique où les sections coniques sont intervenues d'une manière significative, est celui de la résolution géométrique des équations de degré supérieur à deux. Les recherches dans ce domaine, sont parties de deux problèmes

---

180- SUTER, H. : Über die Ausmessung der Parabel von Thābit b. Kurra al-Ḥarrānī, *Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät in Erlangen*, 48/49 (1916-1917), p. 65-86; RASHED, R. : *Les Mathématiques Infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, op. cit., Vol. I, p. 139-271.

181- IBN SINĀN : *Kitāb ḥarakāt ash-shams* [Livre sur les mouvements du soleil]. In *Rasā'il Thābit Ibn Qurra wa Ibn Sinān*, Hayderabad, 1366/1947, p. 69.

182- IBN SINĀN : *Rasā'il*, op. cit., p. 55-65; SUTER, H. : Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von ibrāhīm b. Sinān b. Thābit. Aus dem Arabischen überetzt und kommentiert, *Vierteljahrschrift der Naturforshenden Gesellschaft in Zürich*, 63 (1918), p. 214-228; RASHED, R. : *Les Mathématiques Infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, op. cit., Vol. I, p. 675-735.

183- SUTER, H. : Die Abhandlungen Thābit b. Kurras und Abū Sahl al-Kūhi über die Ausmessung der Paraboloïde, *Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät*, Erlangen, 48-49 (1916-1917), p. 186-227; RASHED, R. : *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, op. cit., Vol. I, p. 835-883.

184- SUTER, H. : Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloïdes von el-Ḥasan b. al-Ḥasan b. el-Haitham, *Bibliotheca Mathematica*, 3, Folge 12 (1911-1912), p. 289-332; RASHED, R. : *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, op. cit., Vol. II, p. 208-267.

185- RASHED, R. : *Les mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, op. cit., Vol. II, p. 267-279.

hérités des grecs : la duplication du cube et le lemme de la proposition 4 du Livre II de *La Sphère et du Cylindre.*

Pour le premier problème, les mathématiciens de Bagdad disposaient déjà, dès le début du IX^{e} siècle, et grâce aux textes grecs traduits relatifs aux deux moyennes, de solutions faisant intervenir l'intersection de deux sections coniques. Mais il n'est pas absurde de penser que ce problème a été à l'origine d'une généralisation des équations du troisième degré en incitant à construire des problèmes faussement "concrets" ou à adapter des problèmes de l'héritage préislamique, comme ceux dits "*des dizaines*".

Le second problème est purement géométrique puisqu'il s'agit de déterminer l'endroit sur le diamètre d'une sphère par où passe le plan qui coupe cette sphère de sorte que le rapport des deux portions obtenues soient dans un rapport donné. Selon le témoignage de ^{c}Umar al-Khayyām, al-Māhānī a été le premier à avoir "algébrisé" ce problème et à l'exprimer sous forme d'une équation du 3^{e} degré. C'est, apparemment, l'échec de la résolution de ce problème par les méthodes algébriques (telles qu'elles étaient alors enseignées dans le *Mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa l-muqābala* [L'abrégé du calcul par la restauration et la comparaison] d'al-Khwārizmī (m.236/850)) qui stimulèrent les recherches et qui permirent, grâce à l'utilisation des sections coniques, de résoudre les premières équations du troisième degré. Dans son ouvrage d'algèbre, al-Khayyām affirme que c'est al-Khāzin qui a été le premier mathématicien à avoir résolu l'équation d'al-Māhānī à l'aide des sections coniques[186]. Après lui, des équations différentes ont été résolues, successivement, par al-Kūhī[187], Ibn al-Haytham[188] et, surtout, Abū l-Jūd[189].

A partir de ces tentatives réussies mais éparses, al-Khayyām réalisera une étude complète sur le sujet en élaborant une théorie générale des équations de degré inférieur

[186]- DJEBBAR, A. & RASHED, R. : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*, op. cit., p. 11-12.

[187]- AṬ-ṬŪSĪ : *Rasā'il*, op. cit., Vol. 2/1, p. 115-122.

[188]- SESIANO, J. : Un mémoire d'Ibn al-Haytham sur un problème arithmétique solide, *Centaurus*, Vol. 20 (1976), p. 189-195.

[189]- DJEBBAR, A. & RASHED, R : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*, op. cit., p. 44, 51, 53, 68, 69, 71, 72, 83

ou égal à trois. Son travail sera enrichi, un siècle plus tard, par Sharaf ad-Dīn aṭ-Ṭūṣī (m. 609/1213)[190].

On s'est également préoccupé de résoudre des problèmes aboutissant à des équations du quatrième degré et il nous est parvenu une résolution d'une équation de ce type. Ce qui a probablement encouragé des mathématiciens à poursuivre la résolution de ces équations, mais sans succès puisque, au XIVe siècle, à Samarkand, al-Kashī (m. 833/1429) annonce, dans son *Miftāḥ al-ḥisāb* [La clé du calcul], qu'il prévoit de publier un livre consacré à la résolution de toutes les équations de degré inférieur ou égal à quatre[191].

III.1.6.5. Les coniques dans d'autres domaines appliquées

En optique, les scientifiques des pays d'Islam ont été, relativement tôt, en possession d'une grande partie des travaux grecs[192]. Parmi les orientations qui ont découlé de l'étude de ces textes, celle qui concernait les miroirs ardents a amené certains mathématiciens à réaliser quelques études particulières faisant intervenir, d'une manière ou d'une autre, les propriétés des sections coniques. Au Xe siècle, Ibn Sahl s'intéresse à ces courbes, étudie leurs propriétés, conçoit un procédé pour les construire mécaniquement et ce dans le but de réaliser des miroirs paraboliques et elliptiques ainsi que des lentilles hyperboliques[193]. Après lui, Ibn al-Haytham exploite ses connaissances sur les sections coniques en reprenant l'étude du problème des miroirs paraboliques, dans son ouvrage, intitulé *Fī l-marāyā al-muḥriqa bi l-quṭū c* [Sur les miroirs ardents à l'aide des sections <coniques>][194]. Mais sa contribution la plus importante dans ce domaine a été l'utilisation des sections coniques pour la résolution du fameux "*problème d'al-Hazen*" : déterminer, sur un miroir, un point par où doit se réfléchir un

---

[190]- RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre*, Paris, les Belles Lettres, 1984, p. 147-193.

[191]- AL-KĀSHĪ : *Miftāḥ al-ḥisāb* [La clé du calcul], DAMIRDASH, A. S. & Al-ḤAFNĪ, M. H. (édit.), Le Caire, 1968, p. 198-199.

[192]- En particulier les contributions d'Euclide, de Ptolémée, de Héron, de Théon, de Dioclès et d'Anthémius de Tralle.

[193]- RASHED, R. : *L'optique géométrique*. In RASHED, R. (édit.) : *Histoire des sciences arabes*, Op. cit., Vol. II, p. 305-309.

[194]- IBN ABĪ UṢAYBIcA : *cUyūn al-anbā' fī ṭabaqāt al-aṭibbā'*, op. cit., p. 559; WIEDEMANN, E. : Ibn al Haitams schrift über parabolische Hohlspiegel, *Bibliotheca Mathematica*, 3, Folge 10 (1909-10), p. 201-237. Reproduit en fac simile in WIEDEMANN, E. : *Gesammelte Schriften zur Arabish-Islamischen Wissenschaftsgeschichte,* SEZGIN, F. (édit.), Frankfurt, 1984, Vol. I, p. 369-405.

rayon lumineux provenant d'un point donné et aboutissant à un autre point donné extérieur au miroir[195].

En astronomie, Les coniques interviennent, en particulier, dans la réalisation des cadrans solaires, à propos du tracé de la trajectoire de l'ombre du gnomon pour une localité donnée. Le tracé de ces trajectoires, au moyen de tables, avait révélé à Thābit Ibn Qurra puis à son petit fils Ibrāhīm Ibn Sinān qu'elles ne pouvaient pas être des lignes droites. C'est Ibn al-Haytham qui confirmera cette observation par une étude théorique dans un texte peu connu[196].

Le second domaine où les astronomes ont eu besoin des sections coniques est celui des études théoriques relatives à la conception de nouveaux types d'astrolabes. Il ne nous est parvenu aucun exemplaire de ces instruments et nous ne savons même pas s'ils ont été effectivement réalisés par leurs concepteurs. Mais nous savons, d'après le témoignage d'al-Bīrūnī (m. 440/1048) dans son *Kitāb istīᶜāb al wujūh al mumkina fī ṣanaᶜt al-asṭurlāb*, [Livre exhaustif sur les procédés possibles de construction de l'astrolabe] que c'est aṣ-Ṣaghānī, un mathématicien du X^e siècle, qui a inventé le type de projection qui fait intervenir les coniques[197].

Un troisième champ d'activité, en apparence éloigné des sciences, a eu recours aux sections coniques. Il s'agit des décorations géométriques et de ce qui concerne l'architecture ou les constructions. Pour le premier domaine, il nous est parvenu un témoignage indirect, du XIII^e siècle, sur la construction, par Ibn al-Haytham (dans le but de réaliser des mosaïques) d'un triangle rectangle dont la somme du côté le plus petit et de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est égale à l'hypoténuse. Cette construction aurait été réalisée en faisant intervenir une parabole et une hyperbole[198].

195- NAZIF, M. : *Al-Ḥasan Ibn al-Haytham, buḥūthuhū wa kushūfuhū al-baṣariya* [Al-Ḥasan Ibn al-Haytham, ses recherches et ses découvertes en optique], Le Caire, 1942. Reproduit en facsimile, sous le même titre, dans SEZGIN, F. (édit.), Frankfurt, Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 2001, p. 487-521.

196- Pour plus de détails sur les contributions de Thābit Ibn Qurra, d'Ibrāhīm Ibn Sinān et d'Ibn al-Haytham à l'étude de ces trajectoires, voir HOGENDIJK, J.P. : Le traité d'Ibn al-Haytham sur les lignes horaires. In *Cahier du Séminaire Ibn al-Haytham*, Alger, Bulletin de l'Association Algérienne d'Histoire des Mathématiques, **4** (1994), p. 5-7.

197 - LORCH R. : Al-Saghani's treatise on projecting the sphere, in KING, D. A. & SALIBA, G. (édit.) : *From deferent to Equant, a Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in honor of E.S. Kennedy*, New York, The New York Academy of Science, 1987, p. 237-252.

198 - BOLATOV, N. : *Geometrichskaya garmonizastsia v architekture srednei Azii*, Moscou, 1978, p. 331. Cité dans HOGENDIJK, J.P. : *Les coniques dans la tradition mathématiques arabes*, Actes du Colloque Maghrébin

Pour le second domaine, c'est encore Ibn al-Haytham qui donne, dans une des deux listes contenant ses travaux, le titre d'un ouvrage qu'il avait consacré à ce problème et qu'il a intitulé *Maqāla fī injāzāt al-ḥufūr wa l-abniya bi jamī^{c} al-ashkāl al-handasiya* [Livre sur la réalisation des excavations et des constructions à l'aide de toutes les figures géométriques] et qu'il accompagne du commentaire suivant : "*Je suis arrivé dans cela jusqu'aux figures des trois sections coniques, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse*"[199].

Ainsi, à partir du début du IX^{e} siècle, la géométrie des coniques a connu, en Orient musulman (Croissant Fertile, Egypte, Asie Centrale) une réactivation décisive avec l'appropriation de l'œuvre majeure d'Apollonius par la traduction, l'enseignement, le commentaire. Puis, avec le développement d'autres disciplines (astronomie, algèbre, optique), de nouvelles préoccupations ont vu le jour et de nouveaux problèmes se sont posés. Certains ont trouvé leur résolution en ayant recours aux objets et aux outils de la théorie des coniques d'autres ont profité de l'enrichissement de cette théorie au cours des siècles de développement des mathématiques arabes.

A ce stade, il est donc légitime de s'interroger sur la circulation de tout ce contenu vers la partie occidentale de l'empire et plus particulièrement vers l'Andalus. Comme on doit s'interroger aussi sur l'importance quantitative de cette circulation et sur son impact. Malgré la rareté des sources scientifiques et la pauvreté des ouvrages biobibliographiques lorsqu'il s'agit d'activités mathématiques, les recherches de ces dernières décennies ont permis de collecter un certain nombre d'informations sur la tradition des coniques en Occident musulman que nous allons maintenant présenter.

---

sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Tipaza, 1-3 décembre 1990), Alger, Office des Publications Universitaires, 1998, p. 155.

[199]- IBN ABĪ UṢAYBI^{c}A : *ᶜUyūn al-anbā' fī ṭabaqāt al-aṭibbā'*, op. cit., p. 554.

IV. LES CONIQUES EN OCCIDENT MUSULMAN

Le plus ancien biobibliographe andalou qui évoque les *Coniques* d'Apollonius est Ṣā^{c}id al-Andalusī, dans son *Kitāb Ṭabaqāt al-umam* [Livre des catégories des nations][200], qui écrit ceci, en évoquant les scientifiques grecs : "*Et parmi leurs savants mathématiciens, il y a Apollonius le charpentier, l'auteur du livre des* Coniques *qui a été composé sur la science des propriétés des lignes courbes qui ne sont ni droites ni arquées*". C'est presque dans les mêmes termes qu'il décrit le contenu d'un ouvrage d'Ibn as-Samḥ (m. 426/1035) en parlant de : "*son grand livre sur la géométrie dans lequel il s'est étendu sur ses parties relatives à la ligne droite, à la <ligne> arquée et à la <ligne> courbe*".[201] On verra plus loin qu'il s'agit en effet d'un livre contenant des éléments sur les sections coniques. La troisième et dernière information de Ṣā^{c}id ayant un lien avec ces courbes est son évocation du "*Livre de l'heptagone*" qu'il attribue à Archimède[202].

Aucun des autres bibliographes de l'Occident musulman ne mentionne les *Coniques* et il faudra attendre le XIV^{e} siècle pour trouver, dans la *Muqaddima* [Prolégomènes] d'Ibn Khaldūn, une évocation de ce sujet en des termes vagues qui montrent que l'auteur n'était pas au fait du contenu du livre d'Apollonius : "*Quant aux <sections> coniques, elles sont aussi une des branches de la géométrie. C'est une science qui étudie ce qui advient dans les solides coniques comme figures et sections et qui démontre ce qui résulte comme phénomènes, à l'aide de preuves géométriques*"[203]. Dans un autre passage, il donne une information sur les équations du troisième degré qui, comme on l'a vu dans le chapitre précédent, avaient été résolues à l'aide des

---

[200]- ṢĀ^{c}ID : *Kitāb Ṭabaqāt al-umam* [Livre des catégories des nations], BŪ^{c}ALWĀN, Ḥ. (édit.), Beyrouth, Dār aṭ-ṭalī^{c}a li ṭ-ṭibā^{c}a wa n-nashr, 1985, p. 85.
[201]- Op. cit., p. 170.
[202]- Op. cit., p. 87.
[203]- IBN KHALDŪN : *Al-Muqaddima* [Les Prolégomènes], CHEDDADI, A. (édit.), Casablanca, Bayt al-funūn wa l-^{c}ulūm wa l-ādāb, 2005, Vol. III, p. 86.

sections coniques. Mais, il ne précise pas la nature des outils géométriques utilisés pour leur résolution[204].

Le même Ibn Khaldūn nous donne, dans son *Kitāb al-ᶜibar* [Le livre des sentences] une dernière information qui suggère l'existence probable, au XI[e] siècle, de travaux sur l'optique. Ce qui, compte tenu de ce qui a été dit dans le chapitre précédent, laisse à penser que les sections coniques ont pu intervenir comme outil dans un domaine appliqué. En évoquant al-Mu'taman, un des rois de la petite dynastie des Banū Hūd qui régnait à Saragosse au XI[e] siècle, Ibn Khaldūn semble lui attribuer un ouvrage sur l'optique[205].

Jusqu'aux années 80 du siècle dernier, les sources que nous venons d'évoquer étaient les seules qui renseignaient sur une éventuelle présence des coniques en Andalus. Puis de nouvelles recherches ont exhumé des écrits scientifiques qui ont éclairé d'un jour nouveau cette tradition géométrique, en révélant des écrits importants et en explicitant une partie de leurs contenus respectifs. Dans ce qui suit nous allons en faire une brève description.

IV.1. La contribution d'Ibn as-Samḥ

Son nom complet est Abū l-Qāsim Aṣbagh ibn Muḥammad Ibn as-Samḥ al-Mahrī. Peu de choses nous est parvenu sur sa vie et sur sa formation. Il serait né à Cordoue et, à une époque indéterminée, il s'est installé à Grenade où il a peut-être fréquenté la cour de l'émir Ḥabūs Ibn Maksān (ca. 409-429/1019-1038). Il mourut dans cette ville en 426/1035, à l'âge de 56 ans[206].

Il eut, parmi ses professeurs, le célèbre mathématicien et astronome Maslama al-Majrīṭī (m. 397/1007). On sait aussi qu'il s'était spécialisé en théorie des nombres, en géométrie, en astronomie théorique et appliquée[207]. Il s'est également intéressé à la médecine. Ses publications en mathématique ont concerné la géométrie euclidienne, la

[204]- Op. cit., p. 81. On y lit ceci : "*Il nous est parvenu qu'une sommité parmi les mathématiciens d'Orient a étendu <le nombre> des équations au-delà de ces six types et qu'il est arrivé à plus de vingt. Et il a déterminé, pour toutes <ces équations>, des résolutions solides à l'aide de preuves géométriques*".

[205]- IBN KHALDŪN : *Kitāb al-ᶜibar* [Livre des sentences], Beyrouth, 1983, Dār al-kitāb al-lubnānī, Vol. VII, p. 351-352.

[206]- ṢĀᶜID : *Ṭabaqāt al-umam*, op. cit., p. 169-170.

[207]- Op. cit., p. 167-172.

science du calcul appliquée aux problèmes de transaction, la théorie des nombres et la géométrie des coniques[208]. Ce dernier aspect de son travail devait se trouver dans le quatrième ouvrage cité par Ṣāᶜid. C'est du moins ce qu'autorisent à penser des fragments qui nous sont parvenus dans une traduction hébraïque, réalisée en 1312 par Qalonymos ibn Qalonymos, et qui ont été découverts récemment.

Le recueil est intitulé *Ma'amar ba-iṣṭewanot we-hameḥuddadim* [Le traité sur les cylindres et les cônes][209]. Il est composé de deux parties. La première semble être une introduction dans laquelle l'auteur a rassemblé des définitions et des résultats sans démonstrations. Nous y trouvons d'abord la définition de la sphère et de ses différents éléments avec l'annonce de l'étude, dans un chapitre non encore retrouvé, de ses sections planes, de son aire et de son volume. Puis sont présentées les définitions du cylindre et de ses éléments, en distinguant deux espèces : les cylindres droits, à base circulaire ou elliptique, et le cylindre oblique subdivisé de la même manière. On y trouve enfin les deux définitions du cône, celle d'Euclide et celle d'Apollonius.

La seconde partie de ce texte est composée de 21 propositions qui sont toutes consacrées à l'étude du cylindre et de ses sections planes. L'auteur y démontre, en particulier, que l'ellipse obtenue par la section d'un cylindre par un plan non parallèle aux bases peut être identifiée à la "figure circulaire allongée" par la rotation du sommet d'un triangle dont la base est fixe et dont la somme des deux autres côtés est constante, ce qui correspond à la définition bifocale de l'ellipse.

IV.2. Le projet inachevé d'Ibn Sayyid

La seconde contribution andalouse dans le domaine des sections coniques est celle de ᶜAbd ar-Rahmān Ibn Sayyid (Vᵉ/XIᵉ)[210]. Comme pour son prédécesseur, les biobibliographes ont retenu peu de choses sur sa vie, sa formation et sa production. Ibn

---

[208]- Voici les titres fournis par Ṣāᶜid : *Kitāb al-mudkhal ilā l-handasa* [Livre sur l'introduction à la géométrie], *Kitāb al-muᶜāmalāt* [Livre sur les transactions], *Kitāb Ṭabīᶜat al ᶜadad* [Livre sur la nature du nombre] et *al-Kitāb al-kabīr fī l-handasa* [Le grand livre sur la géométrie].

[209]- LEVY, T. : Fragment d'Ibn al-Samḥ sur le cylindre et sur ses sections planes (édition et traduction française). In RASHED, R. : *Les Mathématiques infinitésimales du IXᵉ au XIᵉ siècle,* Vol. I, op. cit., p. 885-895.

[210]- Les informations sur ce mathématicien ont été tirées de DJEBBAR, A. : *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XIᵉ siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, Colloque International sur "*Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVIIe siècle*" (Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984). In FOLKERTS, M. & HOGENDIJK, J.P. (édit.) : *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*, Amsterdam-Atlanta, GA 1993, p. 84-91.

al Abbār nous informe qu'en 1063, il était encore étudiant à Jativa et qu'il y suivait alors des cours sur la science des héritages[211]. Au cours de cette même décennie, il est remarqué par Ṣāᶜid al Andalūsi qui en parle en le présentant comme un jeune plein de promesse qui avait déjà une formation solide en science[212]. Ibn al-Abbār explicite ce jugement en précisant qu'Ibn Sayyid "*était un savant éminent en théorie du nombre et en <science du> calcul*", et il ajoute que "*aucun de ses contemporains ne l'égalait en géométrie*"[213].

Les sources scientifiques, tout en étant plus explicites, confirment les appréciations de Ṣāᶜid et d'Ibn al-Abbār. Un premier témoignage se trouve dans le *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul] d'Ibn Munᶜim (m. 626/1228), un scientifique andalou de Dénia qui a vécu et enseigné à Marrakech[214]. Ce dernier évoque une contribution d'Ibn Sayyid à un chapitre de la théorie des nombres, d'origine grecque, celui des *nombres figurés*[215]. Notre mathématicien est également mentionné en marge d'un manuscrit contenant une partie de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman[216] et dans le texte d'un commentateur des *Eléments* d'Euclide[217].

Mais la source la plus importante, parce qu'elle est de nature mathématique et que son contenu concerne directement notre sujet, est une lettre d'Ibn Bājja (m. 532/1138), adressée à un de ses amis de Grenade[218]. Le philosophe présente, d'une manière très succincte, le contenu des recherches d'Ibn Sayyid, en précisant qu'il avait suivi ses

---

211- IBN AL-ABBĀR : *At-Takmila li kitāb aṣ-Ṣila* [Le complément au livre *aṣ-Ṣila*], CODERA & ZAYDIN (édit.), Madrid, 1886, Vol. II, p. 550, n° 1553.

212- ṢĀᶜID : *Ṭabaqāt al-umam*, op. cit, p. 138.

213- IBN AL-ABBĀR : *At-Takmila li kitāb aṣ-Ṣila*, op. cit.

214- DJEBBAR, A. : *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Munᶜim (XIIe-XIIIe siècles)*, Paris, Université Paris-Sud, 1985, n° 85-01.

215- DJEBBAR, A. : *Les nombres figurés dans la tradition mathématique de l'Andalousie et du Maghreb*, Paris, Université de Paris-Sud, Prépublications Mathématiques d'Orsay, n° 85 T 44, p. 4.

216- Ms. Copenhague, n° Or. 82, f. 26v.

217- Ms. Hyderabad, Osmaniye, n° 992, f. 46r.

218- IBN BĀJJA : *Maqāla fī ibanāt faḍl ᶜAbd ar-Raḥmān Ibn Sayyid al muhandis*. In ALAOUI, J. : *Rasā'il falsafiya li Abī Bakr Ibn Bājja*, Beyrouth, Dār ath-thaqāfa-Casablanca, Dār an-nashr al-maghribiyya, 1983. DJEBBAR, A. : Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe-XVIe s.), Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1990, Vol. II. Les citations sont tirées de la traduction de la lettre insérée dans cette Thèse.

cours en mathématique et qu'il avait étudié le contenu de ses travaux[219]. D'ailleurs les informations géométriques insérées par Ibn Bājja dans certaines de ses lettres montrent que ce dernier avait une formation mathématique solide. En effet, les aspects techniques qu'il aborde sont présentés à la manière d'un spécialiste du sujet[220].

Les travaux d'Ibn Sayyid ont concerné la théorie des sections coniques et certaines de ses applications, avec des prolongements à des thèmes nouveaux. On peut les répartir en trois thèmes principaux.

Le premier concerne les *Coniques* d'Apollonius, c'est-à-dire les définitions des courbes étudiées, le nombre et l'agencement des propositions dans chaque Livre et même la structure globale du traité, le but étant d'en donner une version simplifiée mais répondant aux besoins de la recherche. C'est en tout cas ce que laisse entendre Ibn Bājja lorsqu'il précise : "*Dès lors, un grand nombre de propositions aux démonstrations longues sont supprimées, l'attention se portant sur la découverte d'autres choses dont l'intérêt est plus grand et les utilisations plus nombreuses*"[221].

Le second thème, tout à fait original au vu de ce qui est connu des traditions grecque et arabe d'Orient, concerne l'étude de nouvelles courbes planes qu'on nommerait aujourd'hui des "courbes de degré supérieur à deux" et qu'il obtient selon une démarche itérative. D'une manière plus précise, Ibn Sayyid considère deux sections coniques quelconques S_1 et S_2 se coupant dans un plan (P). Il construit les deux cônes $C(O_1, S_1)$, et $C(O_2, S_2)$, de sommets, respectivement, O_1 et O_2 extérieurs à (P) et de bases S_1 et S_2. Il démontre que l'intersection de $C(O_1, S_1)$ et $C(O_2, S_2)$ est nécessairement une courbe gauche. Puis il démontre que la projection de cette courbe sur un plan, et selon une direction déterminée par l'analyse, sera une courbe plane autre que les sections coniques classiques et "*dont la puissance (...) sera alors égale à la puissance réunies des deux sections*"[222] . Puis il réitère la procédure en construisant un premier cône de base la courbe plane obtenue et un second de base une section conique

[219]- Op. cit.

[220]- DJEBBAR, A. : *Abū Bakr Ibn Bājja et les Mathématiques de son temps*. In *Etudes Philosophiques et Sociologiques dédiées à Jamal Eddine Alaoui*, Publications de l'Université de Fès, Département de Philosophie, Sociologie et Psychologie, n° 14, Fès, Infoprint, 1998, p. 5-26.

[221]- DJEBBAR, A. : *Abū Bakr Ibn Bājja et les Mathématiques de son temps*, Annexe. In DJEBBAR, A. : Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe-XVIe s.), Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1990, Vol. II.

[222]- Op. cit.

quelconque. A la fin de l'opération, il démontre qu'il obtient une courbe plane différente de la première dans le sens où sa "*puissance*" sera égale à la "*puissance*" réunie des deux courbes à la base du second couple de cônes.

Le troisième et dernier thème, évoqué dans la lettre d'Ibn Bājja, concerne les applications des résultats précédents. Ibn Sayyid se propose de généraliser les deux célèbres problèmes hérités de la tradition grecque, que nous avons déjà évoqués, c'est-à-dire la trisection de l'angle et la détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données. Il aurait ainsi, grâce à ses nouveaux outils, réalisé la division d'un angle en n parties ($n > 3$) et la détermination d'un nombre quelconque de grandeurs proportionnelles entre deux grandeurs données. Cette contribution est évoquée en ces termes par Ibn Bājja : "*<Ibn Sayyid> a déterminé n'importe quel nombre de segments entre deux segments, de sorte qu'ils se succèdent tous selon un même rapport (...). Il a également divisé l'angle selon un rapport numérique quelconque*"[223].

Ibn Bājja avait promis, dans sa lettre, de reprendre le travail de son professeur, d'en améliorer le contenu et d'y ajouter ses propres résultats. Mais aucun écrit de ce type n'est évoqué par les bibliographes andalous ou maghrébins postérieurs. Quant au livre qui a pu contenir les travaux d'Ibn Sayyid, il ne semble pas avoir circulé. Comme sa réalisation devait être, probablement, contemporaine ou légèrement postérieure à celle du *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman (que nous allons évoquer plus longuement), il pourrait renfermer de précieuses informations sur le projet de ce dernier à propos des aspects théoriques et appliquées des coniques. Cette remarque est suggérée par le premier thème du propre projet d'Ibn Sayyid qui visait à "*réformer* " l'enseignement des coniques.

[223]- Op. cit.

IV.3. Les coniques dans l'ouvrage d'al-Mu'taman et chez ses lecteurs postérieurs

Le troisième mathématicien andalou connu qui s'est intéressé à la théorie des sections coniques n'est autre qu'al-Mu'taman. Il est contemporain d'Ibn Sayyid et a succédé à Ibn as-Samḥ. Les écrits scientifiques et les témoignages indirects qui nous sont parvenus confirment que son époque a été, en Andalus, celle de la consolidation d'une tradition mathématique, qui avait connu un premier développement au Xe siècle, et celle de la production d'œuvres originales. D'une manière générale, la seconde moitié du XIe siècle a été une période faste pour tous les domaines scientifiques pratiqués à cette époque et un début d'essor de la philosophie. En tant qu'observateur de ces communautés scientifiques, Ṣāʿid al-Andalusī est même capable de recenser les valeurs sûres et de repérer des profils prometteurs. En effet, voici ce qu'il écrit à leur sujet : "*A notre époque, un groupe de jeunes se distinguent par la recherche de la science. Ils ont des intelligences solides et des ambitions élevées. Ils ont déjà acquis dans les <différents> domaines <de la science> une partie importante. Parmi <ceux> d'entre eux qui habitent Tolède et ses environs, il y a (...) Ibn an-Naqqāsh, plus connu sous le nom de fils d'az-Zarqiyāl (...) et Ibn Khalaf al-istijī (...). Parmi <ceux> de Saragosse, il y a le ḥājib Abū ʿĀmir <al-Mu'taman> (...) et Abū Jaʿfar Ibn Jawshan. Et, parmi ceux de Valence, il y a Abū Zayd ʿAbd ar-Raḥmān Ibn Sayyid*"[224].

Jusqu'au début des années 80 du siècle dernier, on ne savait rien du rôle d'al-Mu'taman dans les activités scientifiques, en dehors des éléments consignés par Ṣā'id dans ses *Ṭabaqāt* et, beaucoup plus tard, par Ibn Khaldūn, dans son *Kitāb al-ʿibar* [Livre des sentences]. Dans ce qui suit, nous allons présenter les éléments essentiels de la vie de ce roi mathématicien, tels qu'ils ont été rapportés par les historiens andalous, et rappeler le contenu du seul ouvrage qui nous est parvenu, en partant des travaux qui lui ont été consacrés au cours des deux dernières décennies.

---

[224]- ṢĀʿID : *Ṭabaqāt al-umam*, op. cit., p. 179-180.

IV.3.1. La vie et l'œuvre d'al-Mu'taman

Abū ᶜĀmir Yūsuf Ibn Aḥmad Ibn Sulaymān Ibn Muḥāmmad Ibn Hūd al-Judhāmī as-Saraqusṭī, plus connu par son titre honorifique d'al-Mu'taman [Le dépositaire de la confiance <de Dieu>] était destiné à régner sur la province de Saragosse, qualifiée de *ath-Thaghr al-aôlā* [Marche supérieure], et qui constituait l'un des nombreux petits *Etats des Taïfa* qui avaient fleuri après la chute du califat de Cordoue[225]. Il fût aussi mathématicien et philosophe et il est considéré aujourd'hui, après l'exhumation d'une partie de sa contribution, comme un des savants les plus représentatifs de la tradition scientifique de l'Andalus du XIe siècle.

Les sources biobibliographiques et historiques accessibles ne nous rapportent que peu d'informations sur sa vie, et celles qui sont fournies concernent essentiellement son profil de dauphin puis de roi de Saragosse. On sait ainsi qu'il était le troisième prétendant de la dynastie des Banū Hūd[226]. Il régna sur sa province de 473/1081 jusqu'à sa mort en l'an 478/1085. Il avait alors succédé à son père Aḥmad al-Muqtadir (437-473/1046-1081) qui a eu un très long règne. Le père d'al-Mu'taman a lui-même acquis la réputation d'un savant, doublé d'un mécène, qui s'était passionné pour les mathématiques et la philosophie. Il n'est donc pas étonnant qu'il soit devenu, plus tard, une sorte de référence, comme on peut le lire chez al-Maqqarī (m. 1041/1631) qui rapporte un échange entre un Andalou et un Maghrébin, le premier disant au second, pour le convaincre de la prééminence de sa patrie en science : "*Avez-vous, dans la science des étoiles, en philosophie et en géométrie, un roi comme al-Muqtadir Ibn Hūd, le maître de Saragosse ? C'était une référence dans <tout> cela*"[227].

---

[225]- DUNLOP, D. M. : Hūdides. In *Encyclopédie de l'Islam II*, p. 560-562; ᶜINĀN, M. A. : Duwal aṭ-ṭawā'if [Les Etats des Taïfa], Le Caire, 1960, p. 65-66, 216, 219-220, 272-285; TURK, A. : *El reino de Zaragoza en el siglo XI de Cristo (V de la Hégira),* publicacions del instituto egipcio de Estudios esla'micos en Madrid, Madrid, 1978.

[226]- La dynastie des Banū Hūd a régné durant 72 ans sur la province de Saragosse. Son premier roi est Sulaymān Ibn Muḥamad Ibn Hūd al-Judhāmi (430-437/1039-1046) et le dernier est ᶜAbd al malik Ibn Aḥmad Ibn Yūsuf (503/1110).

[227]- AL-MAQQARĪ : *Nafḥ aṭ-ṭīb min ghuṣn al-Andalus ar-raṭīb* [Exhalaison du parfum de la tendre branche d'al-Andalus], ᶜABBĀS, I. (édit.), Beyrouth, 1968, Vol. III, p. 193. Par la suite, il sera cité ainsi : *Nafḥ aṭ-Ṭīb…*

Cet intérêt pour les sciences et la philosophie a permis à Saragosse de devenir, en quelques décennies, un des foyers scientifiques les plus importants d'al-Andalus. Parmi les représentants du dynamisme de la ville dans ce domaine, Ṣāᶜid évoque longuement, mais avec précision, l'astronome ᶜAbdallah ibn Aḥmad as-Saraqusṭī (m. 448/1056)[228], qualifié par lui "*d'éminent en science du nombre et en géométrie*". Il ajoute à son sujet qu'il a enseigné ces matières à Saragosse et qu'il a formé des étudiants. L'un d'eux est ᶜAlī Ibn Najda et il est tout a fait possible qu'al-Mu'taman ait été également son élève ou bien ait suivi certains de ses cours, en particulier en géométrie. On peut également évoquer des spécialistes d'autres domaines, comme Menakhīm Ibn al-Fawwāl et Ibn Gabirol (m. 450/1059), qui étaient versés dans les différentes branches de la philosophie et, en particulier, la Logique[229], al-Kirmānī (m. 458/1065), bon connaisseur en calcul et en géométrie, qui a eu l'opportunité d'étudier, un certain temps, en Orient avant de s'installer à Saragosse jusqu'à la fin de sa vie[230]. Parmi les hommes de sciences qui ont sûrement fréquenté al-Mu'taman, on peut citer Ibn al-Ḥaddād (m. ca 461/1068), auteur d'écrits philosophiques et qui a vécu, un certain temps, à la cour royale des Banū Hūd[231] et Ḥasdāy ibn Yūsuf qui la géométrie, la musique et la philosophie tout en exerçant la charge de ministre au service d'al-Muqtadir, le père d'al-Mu'taman[232]. A ces hommes de science originaire de la ville, il faudrait ajouter tous ceux qui s'y sont réfugiés pendant la *Fitna* [guerre civile] de Cordoue, comme Muḥammad an-Najjād (m. 429/1038)[233], qui y a enseigné le calcul et la science des héritages, ou Ibn al-Kattānī (m. ca 420/1030), spécialisé en Logique[234].

---

[228]- ṢĀᶜID : *Ṭabaqāt al-umam*, op. cit., p. 175; BALTY-GUESDON, M.-G. : *Médecins et hommes de sciences en Espagne musulmane (IIᵉ/VIIIᵉ-Vᵉ/XIᵉ s.)*, Thèse de Doctorat, Paris, Université de la Sorbonne Nouvelle-Paris III, 1992, Vol. III, p. 648-649; SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit., p. 391.
[229]- BALTY-GUESDON, M.-G. : *Médecins et hommes de sciences en Espagne musulmane*, op. cit., Vol. III, p. 642, 665.
[230]- Op. cit., p. 643.
[231]- IBN SAᶜĪD : *Al-Mughrib fī ḥulā al-Maghrib* [Le livre extraordinaire sur les parures du Maghreb], ḌAYF, Sh. (édit.), Le Caire, Dār al-maᶜārif, 3ᵉ édition, 1978, p. 143-145.
[232]- BALTY-GUESDON, M.-G. : *Médecins et hommes de sciences en Espagne musulmane*, Vol. III, op. cit., p. 669.
[233]- Op. cit., Vol. III, p. 642.
[234]- Op. cit., Vol. III, p. 636.

Al-Mu'taman ne pouvait que profiter de ce contexte très favorable aux activités intellectuelles qu'offrait la capitale de son petit royaume. De plus, et indépendamment de ses aptitudes personnelles, son statut de prince lui a permis d'avoir une formation de base solide dans les différentes sciences enseignées à cette époque. Il pouvait, en effet, disposer, à tout instant, des richesses de la bibliothèque de son père et pouvait acquérir, grâce à la fortune familiale, n'importe quelle publication scientifique accessible sur les marchés des livres d'Al-Andalus et même d'Orient.

Comme on l'a déjà vu à travers le témoignage de Ṣāᶜid, les aptitudes d'al-Mu'taman et ses orientations se sont révélées alors qu'il était adolescent. On sait ainsi que, "*tout en étant mathématicien, il s'est spécialisé dans la Logique et s'est intéressé à la physique et à la métaphysique*"[235].

Nous avons peu d'informations sur ses éventuels écrits dans ces différents domaines. Ibn Khaldūn est le seul à lui attribuer plusieurs ouvrages. Il dit explicitement : "*Il s'occupait de sciences mathématiques et il y a produit des ouvrages, comme* l'Istikmāl *et* l'Optique"[236]. En dehors d'al-Maqqarī (qui ne fait que reprendre, mot pour mot, la phrase d'Ibn Khaldūn), les autres sources connues n'évoquent que le premier titre[237].

Le second ouvrage, s'il a existé, ne nous est pas parvenu. Mais, comme al-Mu'taman était considéré, déjà dans son jeune âge, comme quelqu'un de féru en sciences physiques et comme nous savons désormais, grâce à certaines parties de *l'Istikmāl*, qu'il avait dans sa bibliothèque le fameux *Kitāb al Manāẓir* d'Ibn al Haytham et qu'il connaissait son contenu[238], il paraît tout à fait plausible qu'il ait consacré un ouvrage indépendant à l'optique ou que ses étudiants ou ses collègues aient extrait, d'un de ses ouvrages, le chapitre de l'optique qu'il renfermait. Cela est fortement suggéré par ce que l'on peut lire dans l'introduction du *Kitāb al-Ikmāl* d'Ibn Sartāq (XIII^{e}–XIV^{e} s.). Il y est écrit qu'al-Mu'taman avait prévu de traiter, dans un chapitre indépendant, "*La*

235- Op. cit., Vol. III, p. 180.

236- IBN KHALDŪN, ᶜA. : *Kitāb al-ᶜibar,* op. cit., Vol. VII, p. 351-352.

237- AL-MAQQARĪ : *Nafḥ aṭ-Ṭīb…*, op. cit., Vol. I, p. 441.

238- HOGENDIJK, J.P. : *Le roi-géomètre al-Mu'taman ibn Hūd et son livre de la perfection (Kitāb al-Istikmāl).* Actes du premier colloque sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 1-3 décembre 1986), Alger, Maison des livres, 1988, p. 51-66.

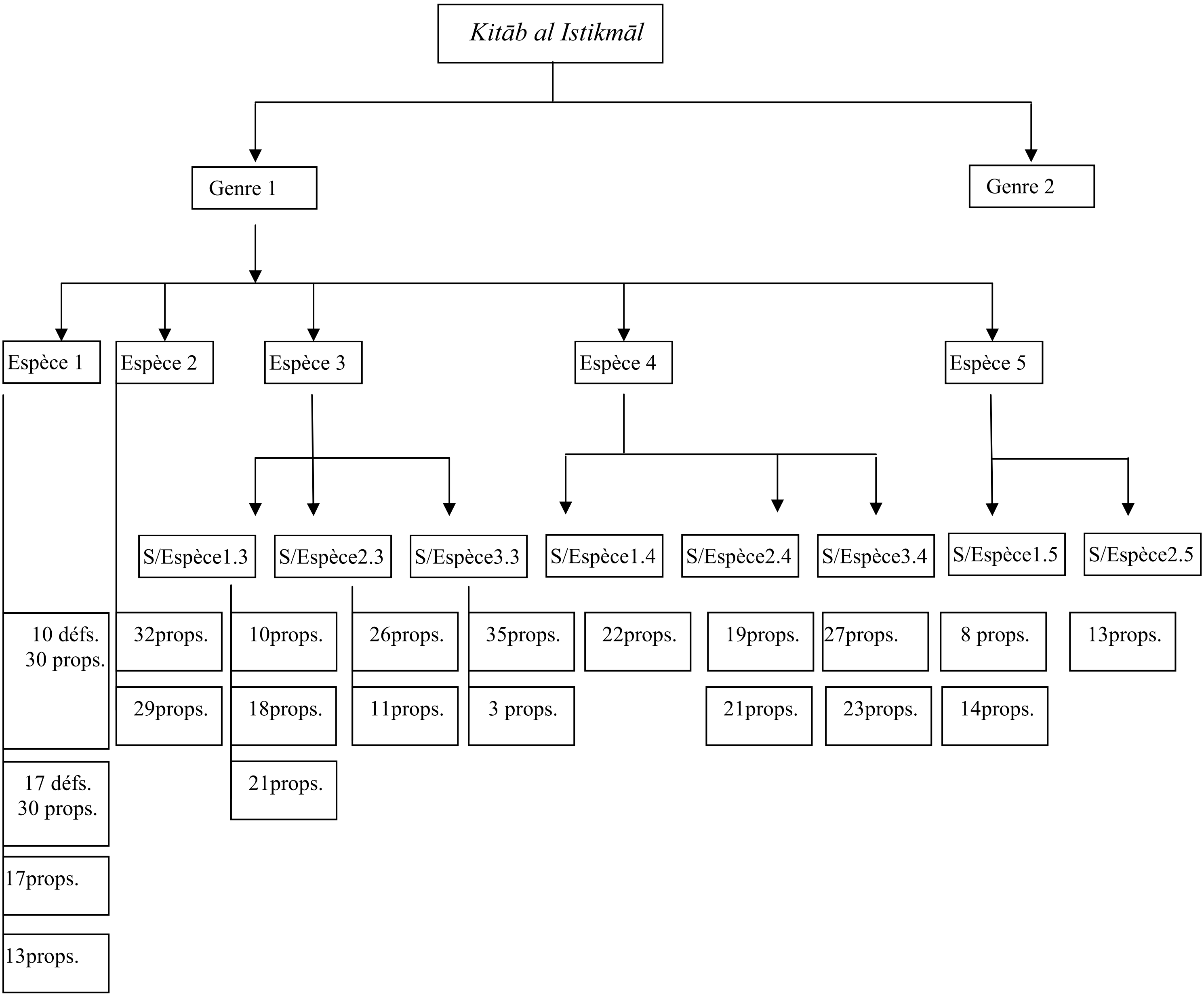
science de l'optique, des lumières et des rayons lumineux selon les objets sur lesquels ils tombent"[239].

IV.3.2. Le *Kitāb al-Istikmāl*

Al-Mu'taman avait imaginé son contenu en deux parties matérialisées, chacune, par un volume indépendant. Cette division devait correspondre aux deux "*genres*", théorique et pratique, des sciences mathématiques. La matière du premier volume nous est désormais connue dans le détail et nous disposons de la table des matières du second[240]; ce qui nous permet d'en décrire le contenu.

La première partie, intitulée *al-Jins al-awwal min al-ᶜulūm al-riyāḍiyya* [Premier genre des sciences mathématiques][241], est divisé en espèces, chaque espèce en sous espèces, chaque sous espèce en sections et chaque section comporte en moyenne vingt propositions et parfois des définitions, des axiomes ou des notions communes[242]. Voici le contenu du premier genre : (a) *Sur la connaissance des propriétés des nombres <considérés> séparément et en relation mutuelle*; (b) *Sur les propriétés des lignes, des angles et des surfaces sans relations mutuelles*[243]; (c) *Sur les propriétés des lignes, des angles et des surfaces selon leurs relations mutuelles*[244]; (d) *Sur les propriétés des solides et des sections qui y sont engendrées sans relations mutuelles*[245]; (e) *Sur les relations mutuelles entre les solides et leurs surfaces*.

239- DJEBBAR, A. : *La rédaction de l'Istikmāl…*, op. cit., p. 189.
240- Op. cit.
241- Voici le contenu du premier genre : *(a) Sur la connaissance des propriétés des nombres <considérés> séparément et en relation mutuelle; (b) Sur les propriétés des lignes, des angles et des surfaces sans relations mutuelles; (c) Sur les propriétés des lignes, des angles et des surfaces selon leurs relations mutuelles; (d) Sur les propriétés des solides et des sections qui y sont engendrées sans relations mutuelles; (e) Sur les relations mutuelles entre les solides et leurs surfaces.*
242- Pour la description de la structure interne du premier genre, voir HOGENDIJK, J.P. : *Discovery of an 11th-Century Geometrical Compilation: The Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, King of Saragossa*, op.cit., pp.44-46. Pour le détail de son contenu et l'explicitation de ses sources grecques et arabes orientales, voir HOGENDIJK, J.P. : The Geometrical Part of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (11th century), op. cit., p. 214; HOGENDIJK, J.P. : The lost geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century) in the redaction of Ibn Sartāq (14th century) : An Analytical Table of Contents, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 53 (2004), p. 19-34.
243- Pour l'édition, la traduction française et l'analyse du contenu de cette section, voir GUERGOUR, Y *: La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m.1085) : Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb*, Thèse de Doctorat, Université d'Annaba, 2006.
244- Pour l'édition des propositions III.1.2 (9 et 15) de cette section, voir RASHED, R. : *Les Mathématiques Infinitésimales du IXe au XIe siècle*, op. cit., Vol. IV, p. 870-899.
245- Pour l'édition des propositions IV.3.2 (18-21) de cette section, voir RASHED, R. : *Les Mathématiques Infinitésimales du IXe au XIe siècle*, op. cit., Vol. I, p. 1000-1027.



Structure du premier volume

Espèce 1	Arithmétiques	90 propositions
Espèce 2	Géométrie plane	61 propositions
Espèce 3	Géométrie plane	124 propositions
Espèce 4	Géométrie stéréométrique	134 propositions
Espèce 5	Géométrie stéréométrique	35 propositions

Le second genre est intitulé " *La géométrie matérielle*". On ne sait pas si sa rédaction avait été commencée, si des chapitres ont été achevés et s'ils ont circulé en même temps que le premier volume de *l'Istikmāl*. Les écrits bibliographiques et mathématiques de l'Occident musulman qui nous sont parvenus sont silencieux sur ce point. La seule source qui évoque explicitement cette partie du projet d'al-Mu'taman est orientale. Il s'agit du *Kitāb al-Ikmāl ar-riyāḍī* [Livre de l'achèvement mathématique] d'Ibn Sartāq (VIII^e/XIV^e s.) qui en donne la table des matières dans les termes suivants :

" *(a) La science des graves et des automates et les propriétés dont ils font montre lorsqu'ils sont considérés individuellement ou en corrélation. (b)La sciences de la musique et la mise en évidence des particularités des notes selon qu'elles sont considérées individuellement ou en corrélation et en fonction de leurs [différentes] catégories.(c) La science de l'optique, des lumières et des rayons [lumineux] selon les objets sur lesquels ils tombent. (d) La science de la structure de l'univers et de l'étude des mouvements des corps célestes jusqu'au point où l'homme peut y parvenir. (e) La science de l'analyse et de la synthèse selon un point de vue global* "[246].

Une première remarque concerne l'agencement de la matière traitée de *l'Istikmāl*. Il semble refléter une conception pythagoricienne de la science, telle qu'elle est affirmée par Ikhwān aṣ-Ṣafā' (IVe/Xe s.) dans leurs *Epîtres*[247]. C'est en effet un ouvrage essentiellement géométrique mais qui commence par un chapitre, appelé "*première espèce*", consacré exclusivement à la théorie des nombres et plus précisément au contenu (arithmétisé) d'une partie des Livres II et V et d'une grande partie (abrégée) des Livres VII, VIII et IX des *Eléments* d'Euclide[248]. La dernière partie du chapitre reprend le contenu de la *Risāla fī l-aᶜdād al-mutaḥābba* [Epître sur les nombres amiables] de Thābit Ibn Qurra[249]. Les quatre autres espèces traitent, dans un certain nombre de sections, elles-mêmes subdivisées en sous sections, de la géométrie euclidienne, de la géométrie des coniques, de la géométrie de la sphère et de la géométrie archimédienne.

La seconde remarque concerne le rôle qu'al-Mu'taman voulait peut-être assigner au premier volume de son ouvrage. Au vu de son contenu, il donne l'impression d'avoir été

---

[246]- DJEBBAR, A. : *La rédaction de l'Istikmāl…,* op. cit., p.189.

[247]- IKHWĀN AṢ-ṢAFĀ' : *Rasā'il* [Epîtres], Beyrouth, Dār Ṣādir, non datée.

[248]- VITRAC, B. : *Euclide, les Eléments*, op. cit., Vol. II, 1994, p. 247-466.

[249]- DJEBBAR, A. : *La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb*, Actes du 5^e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Tunis, 1-3 Décembre 1996, Tunis, A.T.S.M., 1998, p. 62-84; DJEBBAR, A. : Les livres arithmétiques des *Eléments* d'Euclide dans une rédaction du XI^e siècle : le *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman (m. 1085), Revue *Lull*, Saragosse, Vol. 22, n° 45 (1999), p. 589-653.

conçu comme un "*Livre intermédiaire*" au sens des *Mutawassiṭāt* que nous avons déjà évoquées dans le chapitre sur la tradition mathématique arabe d'Orient. En fait, avec le *Kitāb al-Istikmāl*, on est en présence d'un concentré de "*Mutawassiṭāt*" qui, tout en se limitant aux outils strictement mathématiques, vise à fournir au futur chercheur les outils et les méthodes théoriques qui lui permettront de résoudre des problèmes posés par d'autres disciplines, comme l'astronomie, la physique, la mécanique et la musique.

En tout cas, il semble avoir été perçu, par un certain nombre d'auteurs, comme un ouvrage qui devait combler une lacune. Ibn al-Qifṭī le qualifie de "*belle somme qui a besoin d'une édition*"[250]. Dans son "*Ṭibb an-nufūs* [la médecine des âmes], Ibn ᶜAqnīn (m. 622/1226) conseille d'étudier le *Kitāb al-Istikmāl* en même temps que les autres Livres des "*Intermédiaires*"[251]. Un siècle plus tard, Ibn Akfānī (m. 749/1348), bibliographe et mathématicien, affirme, après avoir énuméré un certain nombre d'écrits de géométrie : "*Et, jusqu'à maintenant, je n'ai pas vu un livre englobant ces dix parties <de la géométrie>. Mais si l'ouvrage* al-Istikmāl *d'al-Mu'taman Ibn Hūd, que Dieu lui soit miséricordieux, avait été achevé, il aurait été satisfaisant et suffisant*"[252]. A la même époque ou un peu plus tard, un auteur oriental anonyme reprend, mot pour mot, la première phrase d'Ibn al-Akfānī en ajoutant "*Al-Mu'taman (...) visait cela dans son Livre appelé* al-Istikmāl *et il était capable de faire cela. Mais le temps ne lui a pas été donné pour le compléter. Alors il y a mis un point final*"[253].

IV.3.3. L'*Istikmāl* dans la tradition mathématique d'al-Andalus et du Maghreb après le XIe siècle

Nous ne savons pas comment a circulé le *Kitāb al-istikmāl* du vivant de son auteur ni au cours des dernières décennies de l'existence du royaume de Saragosse. Après 1110, l'année de la prise de Saragosse par les Almoravides, il est possible que le

[250]- IBN AL-QIFṬĪ : *Ikhbār al-ᶜulamā' bi akhbār al-ḥukamā'*, op. cit., p. 210.

[251]- IBN ʻAQNĪN : *Tibb an-Nufūs*, in Güdemann, *Das Jüdische Unterrichtswesen Wärend des Spanisch-Arabischen Period*, Vienne 1875. Réimpression, Amesterdam, Philo Press, 1968, p. 87.

[252]- IBN AL-AKFĀNĪ : *Irshād al-qāṣid ilā asnā al-maqāṣid*, [Guide de celui qui vise les plus nobles buts], M. Al-ḤURR, M. & ᶜABDARRAḤMĀN, A. H. (édit.), Le Caire, 1990, p. 74.

[253]- HOGENDIJK, J.P. : The Geometrical Part of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (11th century), An analyical Table of Contents, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, Vol. 41 (1991), p. 214.

contenu de la bibliothèque de la famille royale des Banū Hūd ait été dispersé et qu'une partie des ouvrages se soit retrouvée chez des familles chrétiennes de Castille[254]. Mais aucun élément ne nous permet de dire que cela a été une opportunité pour des traductions latines ou hébraïques des ouvrages d'al-Mu'taman et leur diffusion en Europe, comme ce fut le cas pour certains écrits scientifiques andalous des XI^{e}-XII^{e} siècles[255].

Pour ce qui est de cette diffusion vers le Sud et l'Est, il nous est parvenu quelques informations dispersées dans des écrits de la tradition arabe du Maghreb et d'Orient et dans la tradition hébraïque. La plus ancienne référence à *l'Istikmāl*, qui nous soit parvenue, est celle attribuée à Maimonide (m. 600/1204). Elle nous est rapportée par Ibn al-Qifṭī qui affirme que ce savant " *a révisé le livre de* l'Istikmāl *d'Ibn Hūd dans la science mathématique (...). Il l'a étudié, corrigé et édité...*"[256]. Malheureusement aucun écrit contenant cette contribution n'a été exhumé. De son côté, Ibn ^{c}Aqnīn, qui a suivi certains cours de Maimonide au Caire, donne des informations suffisamment détaillées et concordantes sur le contenu de *l'Istikmāl* pour nous permettre de dire que la tradition mathématique hébraïque des XII^{e}-XIII^{e} siècles avait intégré tout ou partie de cet ouvrage dans son corpus mathématique[257]. Cela suppose d'ailleurs une bonne connaissance de la tradition mathématique grecque, en particulier celle de la géométrie euclidienne et celle de la géométrie des coniques. C'est ce que confirment plusieurs

---

[254]- SAMSO, J. : La circulation des sciences arabes en Europe. In DJEBBAR, A. (édit.) : L'âge d'or des sciences arabes, Catalogue de l'exposition de l'Institut du Monde Arabe (Paris, 25 octobre 2005-19 mars 2006), Paris, Actes Sud-I. M. A., 2005, p. 302. L'auteur y donne les précisions suivantes "*Quand en 1110 les Almoravides ont conquis Saragosse, les Banū Hūd se sont réfugiés à Rueda del Jalón et c'est là que la bibliothèque d'al-Mu'taman devait se trouver lorsque le roi Alphonse 1^{e} a conquis la région. L'évêque Michel de Tarazona (en fonction en 1119-1151) s'est intéressé à certains des manuscrits qui se trouvaient à Rueda et a soutenu les traductions de Hugo de Santalla ainsi que, probablement, celles de ses contemporains Hermann de Carinthie (actif en 1138-1143) et Robert de Ketton (actif en 1141-1157), qui tous deux travaillaient à Tudela, près de Tarazona*".

[255]- Nous pensons en particulier aux écrits sur le calcul et le mesurage d'Abrahām Bar Ḥiyya, d'Ibn Ezra, d'Abū Bakr. Voir MOYON, M. : *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, Thèse de Doctorat, Lille, Université de Lille 1, 2008.

[256]- IBN AL-QIFṬĪ : *Ikhbār al-^{c}ulamā' bi akhbār al-ḥukamā*, op. cit., p. 54. -

[257]- HOGENDIJK, J.P. : *Discovery of an 11th century geometrical compilation : The Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, King of Saragossa*, op. cit., p. 43-45; Ibn ^{c}Aqnīn, *Ṭibb an-nufūs*, in Güdemann, *Das Jüdische Unterrichtswesen Wärend der Spanisch-Arabisch Periode*, Vienne 1873. Réimpression, Amsterdam, Philo Press, 1968, p. 87.

sources révélées par des recherches relativement récentes[258]. On apprend ainsi que Maimonide a été l'auteur de *Ḥawāshī ᶜalā baᶜḍ ashkāl kitāb al-makhrūṭāt* [Gloses sur certaines propositions du livre des coniques][259]. Il s'est également intéressé à la propriété asymptotique de l'hyperbole, dans le cadre des débats philosophiques et théologiques de son époque[260]. Ce qui a d'ailleurs initié une véritable tradition hébraïque dans ce domaine. Parallèlement, une tradition latine a commencé à se constituer à partir de textes arabes traitant ce thème des asymptotes[261].

Dans la tradition arabe de l'Occident musulman, le plus ancien mathématicien connu qui s'est référé au livre de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman est Ibn Munᶜim. Il évoque son prédécesseur une première fois pour conseiller au lecteur d'utiliser, comme lui, les outils de l'analyse et de la synthèse pour établir les résultats mathématiques. Puis, tout au long de son ouvrage, il se réfère explicitement à des propositions établies par al-Mu'taman, en donnant leur numéro, leur sous section, leur section, leur espèce et même leur genre. Comme l'ouvrage d'Ibn Munᶜim ne traite pas de géométrie, toutes ses références renvoient à la première espèce qui est, comme on l'a déjà dit, consacrée à la théorie des nombres. Mais le biobliographe Ibn ᶜAbd al-Malik (VIIᵉ/XIIIᵉ s.) nous informe que le mathématicien de Marrakech était un grand connaisseur de la géométrie et qu'il avait consacré au moins un livre à ce sujet, intitulé *Tajrīd akhbār kutub al-handasa ᶜalā ikhtilāfi maqāṣidihā* [L'abstraction des matériaux des livres de géométrie sans distinction de leurs buts <respectifs>][262]. Cet ouvrage, qui n'a pas encore été retrouvé, pourrait contenir des références à la partie géométrique de *l'Istikmāl*. Après lui, Ibn al-Bannā (m. 721/1321) s'est, à son tour, référé, avec précision, au livre d'al-Mu'taman dans sa *Risāla fī t-taksīr* [Epître sur le mesurage][263]. Malheureusement ce mathématicien n'est pas connu pour avoir été un spécialiste en géométrie, même si le

[258]- LEVY, T. : *L'étude des sections coniques dans la tradition médiévale hébraïque : Ses relations avec les traditions arabe et latine*, Revue d'Histoire des Sciences, XLII/3 (1989), p. 193-239.
[259]- LANGERMANN, Y.-T. : The Mathematical Wrintings of Maïmonides, *The Jewish Quaterly Review*, LXXV, 1 (1984), p. 57-65.
[260]- MUNK, S. : *Le guide des égarés*, Paris, 1856, Vol. I, p. 409-410.
[261]- CLAGETT, M. : A Medieval Latin Translation of a Short Arabic Tract on the Hyperbola, *Osiris*, 11 (1954), p. 359-385.
[262]- DJEBBAR, A. : *La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence hors d'al-Andalus*, Colloque international sur *Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat* (Toulouse, 10-13 Décembre 1992), J. Cassinet (édit.), Toulouse, C. I. H. S. O., 1995, p. 35-46.
[263]- Ms. Tunis, Bibliothèque Nationale, n° 9002, ff. 131a-132b.

témoignage d'un de ses étudiants, al-Ābilī (qui lui rendit visite en 1310), le montre en train d'étudier les *Coniques*[264]. Nous ne pouvons donc pas affirmer que, par son intermédiaire, la partie des sections coniques de *l'Istikmāl* a été enseignée à Marrakech où a longtemps vécu ce mathématicien. Quoi qu'il en soit, des copies de l'ouvrage d'al-Mu'taman sont encore attestées jusqu'à la seconde moitié du XIVe siècle, comme le montre la référence explicite que l'on trouve dans le *Kitāb at-tamḥīs fī sharḥ at-Talkhīṣ* [Livre de l'étude approfondie sur le commentaire de *l'Abrégé*] d'Ibn Haydūr (m. 815/1413)[265]. Après lui, aucun écrit mathématique connu n'évoque *l'Istikmāl*. Ce qui n'est pas vraiment étonnant lorsqu'on sait, qu'à partir de la seconde moitié du XIVe siècle, la géométrie "supérieure" a été de moins en moins étudiée et que le contenu de son enseignement en Andalus puis au Maghreb, après la reconquête de Grenade, s'est réduit à la géométrie pratique du mesurage[266]. Ce qui n'a pas été le cas dans une autre région de l'empire musulman, celle où a vécu Ibn Sartāq, un mathématicien inconnu jusqu'au début des années 80 du siècle précédent, même auprès des spécialistes de l'histoire des mathématiques.

IV.3.4. Ibn Sartāq et son *Kitāb al-Ikmāl*

Le nom complet de ce géomètre est Shams ad-Dīn Muḥammad ibn Sartāq ibn Jūbān ibn Sharkīr ibn Muḥammad Ibn Sartāq al-wararqī (ou al-Wararqaynī) al-Marāghī. Sur sa vie et sa formation, nous n'avons aucune information sauf que certains éléments de son nom laissent à penser qu'il serait d'origine turque ou mongole. D'après des indications contenues dans l'une des deux copies de *l'Ikmāl*, il semble qu'il ait

---

[264]- DJEBBAR, A. & ABALLAGH, M. : *Ḥayāt wa mu'allafāt Ibn al-Bannā al-Murrākushī* [La vie et l'œuvre d'Ibn al-Bannā al-Murrākushī], Rabat, Université Mohamed V, Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines, 2001, p. 61.

[265]- IBN HAYDŪR : *At-Tam-hīṣ fī sharḥ at-Talkhīṣ* [Livre de l'étude approfondie sur le commentaire de *l'Abrégé*], Ms. Rabat, al-Ḥasaniyya, n° 252, Livre I, p. 72.

[266]- AL-MANŪNĪ, M. : Asātidhat al-handasa wa mu'allifīhā fī l-Maghrib as-saᶜdī [Les professeurs de géométrie et ses auteurs dans le Maghreb saadide], *Revue Daᶜwat al-ḥaqq*, Rabat, 9e année, n° 2 (1965), p. 101-104. Cité par DJEBBAR, A. : *Les activités mathématiques au Maghreb à l'époque ottomane (XVIe-XIXe siècles),* Actes du Symposium sur "*Science, Technology and Industry in the Ottoman World*" (XXe Congrès International d'Histoire des Sciences, Liège, 20-26 Juillet 1997), Liège, 2000, p. 49-66.

fréquenté la Madrasa (collège supérieur) de la ville de Nakīsār en Asie Mineure[267]. Avant la réalisation de *l'Ikmāl*, il a publié une épître sur la théorie des rapports, intitulée *al-Uṣūl al-handasiyya* [Les fondements de la géométrie]. Son contenu se rattache à la fois à la tradition euclidienne du Livre V et à celle développée par certains mathématiciens des pays d'Islam, comme al-Māhānī et ᶜUmar al-Khayyām et qui repose sur le procédé de l'anthyphérèse. L'auteur signale deux fois cette épître dans son ouvrage[268].

On sait aussi, grâce au titre originel de l'*Ikmāl* et à la dédicace encore lisible dans la copie d'Istanbul, qu'il a été l'élève de Aṣīl ad-Dīn (m. 715/1315), l'un des fils de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 673/1274)[269]. Selon toute vraisemblance, nous sommes donc en présence d'un mathématicien qui s'est formé à Maragha et qui a fréquenté les cours de certains professeurs éminents qui ont travaillé dans l'observatoire de cette ville. Ce qui expliquerait sa très bonne connaissance de la géométrie des *Eléments* et de celle des *Coniques*. On peut supposer aussi que, comme étudiant, il a bénéficié du contenu des nouvelles rédactions de certains ouvrages grecs. Ce fut en particulier le cas pour les *Coniques* d'Apollonius qui connaîtront, à son époque, deux *Taḥrīr* [Rédaction], celle de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī et celle d'Ibn Abī Shukr al-Maghribī[270]. Ce n'est donc pas étonnant qu'il se soit engagé dans un projet similaire mais, cette fois, avec un ouvrage de la tradition mathématique arabe, le *Kitāb al-Istikmāl* d'al-Mu'taman.

La comparaison de la structure globale de l'*Ikmāl* avec celle de l'*Istikmāl*, confirme le fait qu'il s'agit bien d'une rédaction, sans aucune proposition supplémentaire. Par contre, l'auteur prend, parfois, beaucoup de liberté dans sa manière de traiter le contenu de chaque proposition, en introduisant, sans toujours les signaler au moment voulu, des ajouts sous forme de lemmes, des anticipations au niveau des définitions des objets

---

267- DJEBBAR, A. : *La rédaction de l'Istikmāl…,* op. cit., p. 186-187.
268- DJEBBAR, A. : *Un témoin de la tradition arabe relative à la théorie des rapports : L'épître d'Ibn Sartāq* (XIVe s.). A paraître.
269- DJEBBAR, A. : *La rédaction de l'Istikmāl…,* op. cit., p. .
270- SEZGIN, F. : *G. A. S.*, Vol. V, op. cit, p. 141.

étudiés, des développements dans une démonstration et, parfois, des commentaires ou des digressions éloignés du sujet mathématique étudié[271].

Quoi qu'il en soit, c'est grâce à cette rédaction que nous disposons aujourd'hui de l'ensemble du contenu du premier volume de *l'Istikmāl* et, en particulier, de la partie qui traite des propriétés des sections coniques.

IV.3.5. Les sections coniques dans le *Kitāb al-Istikmāl*

Al-Mu'taman à consacré 50 propositions aux sections coniques. Elles occupent les deux sections du troisième chapitre de la quatrième partie du premier volume. Le chapitre en question est intitulée "*la troisième <sous-espèce> de la quatrième espèce sur les sections de cylindre et de cônes circulaires*". La première de ses deux sections traite de "*l'existence des sections <coniques> et sur leurs premières propriétés, sans relations des unes avec les autres*". Les propositions, qui sont au nombre de 27, précédées par 23 définitions, sont actuellement réparties dans trois fragments distincts de l'*Istikmāl*, qui se trouvent dans le manuscrit de Copenhague, ainsi que dans l'*Ikmāl* d'Ibn Sartāq qui en a conservé l'ordre et donc la numérotation[272]. Voici cette répartition entre les deux manuscrits (sachant que la rédaction d'Ibn Sartāq contient toutes les propositions).

Définitions	*Istikmāl*	ff. 90v-91v.
Propositions 1 à 2 :	*Istikmāl*	ff. 91v-92r, *l.* 24
Proposition 3	*Istikmāl* *Ikmāl*	ff. 92r, *l.* 25-92v, *l.* 31 = Première partie de la proposition ff.118r, *l.* 17-118r, *l.* 20 = Seconde partie de la proposition
Propositions 4- 10	*Ikmāl*	ff. 119r, *l.* 7-134r, *l.* 1
Proposition 11	*Ikmāl* *Istikmāl*	ff. 132r, *l.* 12-134r, *l.* 11 = Première partie de la proposition ff. 93r, *l.* 1-93v, *l.* 31 = Seconde partie de la proposition
Propositions 12-24	*Istikmāl*	ff. 94r-120v, *l.* 2
Proposition 25	*Istikmāl* *Ikmāl*	ff. 120v, *l.* 3-130v, *l.* 31 = Première partie de la proposition ff. 153r, *l.* 17-153r, *l.* 20 = Seconde partie de la proposition
Propositions 26-27	*Ikmāl*	ff. 153r, *l.* 20-158r, *l.* 16

[271]- Il a toutefois pris soin d'avertir une fois pour toute le lecteur, au début de son exposé, en disant : "*S'il m'arrive, à l'avenir, d'introduire certains éclaircissements, je dirais à la fin de ces éclaircissements :* 'ceci est une remarque utile'. *Et s'il m'arrive de compléter une proposition (...), je dirais à la fin de cette addition :* 'ceci est un complément' *ou, plus simplement, je dirais :* 'ceci a été rédigé autrement' *ou quelque chose de semblable"*. Ms. Le Caire, Bibliothèque de l'Université, n° 23029, ff. 9v-10r.

[272]- *Kitāb al-Istikmāl* : Ms. Copenhague, Royal Library, Or. 82; *Kitāb al-Ikmāl* : Ms. Le Caire, Bibliothèque de l'Université, n° 23029.

La seconde section traite des "*propriétés des lignes, des angles et des surfaces des sections <coniques> en relation entre les uns avec les autres*". Elle contient 23 propositions qui se trouvent toutes dans le manuscrit de Copenhague[273]. Nous avons regroupé leurs énoncés, traduits en français, dans l'annexe II, à la fin de ce volume.

L'analyse du contenu de la première section et sa comparaison avec celui d'une partie des *Coniques* d'Apollonius nous permet de faire quelques remarques sur les énoncés des définitions et des propositions, sur les méthodes de démonstration et sur certaines particularités qui distinguent le travail d'al-Mu'taman d'autres projets de la tradition arabe ayant concerné un grand classique du corpus mathématique grec.

Au niveau des définitions, 23 d'entre elles précèdent les propositions. 7 autres, insérées dans la proposition 4, concernent spécifiquement l'ellipse et ne font que répéter certaines déjà énoncées. Ce qui laisse à penser que c'est un ajout d'Ibn Sartāq. Une 30^e^ définition précède l'énoncé de la proposition 20 et concerne les hyperboles conjuguées.

Ces définitions ont été comparées à celles de cinq écrits antérieurs au XI^e^ siècle qui ont eu à traiter, d'une manière ou d'une autre, le thème des sections coniques : *Les Eléments* d'Euclide (III^e^ s. av. J.-C.), *Les Coniques* d'Apollonius (III^e^ s. av. J.-C.), Le *Livre de la section de cylindre* et le *Livre de la section de cône* de Sérénus (IV^e^ s.), le *Kitāb fī quṭū ^c^ al-usṭuwāna wa basīṭuhā* [Livre sur les sections du cylindre et sa surface] de Thābit Ibn Qurra (m. 289/901) et les fragments du *Kitāb al-kabīr fī l-handasa* [Le grand livre sur la géométrie] d'Ibn as-Samḥ (m. 426/1035).

Nous avons retenu l'ouvrage de Sérénus alors qu'il ne semble pas avoir été traduit en arabe, parce qu'il est tout à fait possible que son contenu ait circulé, totalement ou partiellement, à travers des citations, des rédactions ou des commentaires[274]. Le traité d'Ibn Qurra est le plus ancien texte arabe sur le sujet qui nous soit parvenu. Son intérêt tient aussi au fait que son auteur a été l'un des traducteurs des *Coniques* d'Apollonius. Même si le livre d'Ibn as-Samḥ ne nous est parvenu qu'à travers des fragments (qui ont survécu dans une version hébraïque), l'origine andalouse de son auteur et l'époque où il

---

[273]- HOGENDIJK, J.P. : *The Geometrical Part of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (11^th^ century)*, op. cit., p. 259-269.
[274]- Pour notre comparaison, seul le premier livre nous intéresse ici. En effet, pour les éléments du cône, Sérénus lui-même renvoie aux définitions d'Apollonius.

a vécu rend tout à fait probable la circulation de cet important ouvrage et sa présence à Saragosse au cours de la seconde moitié du XI^{e} siècle.

Il découle du tableau comparatif de ces différents groupes de définitions (que nous donnons dans l'annexe I) les remarques suivantes :

- A l'exception de la première phrase de la première définition[275], les formulations de toutes les définitions de l'*Istikmāl*, relatives aux sections de cône, ainsi que l'ordre de leur exposition, sont identiques aux formulations et à l'ordre des définitions des *Coniques* d'Apollonius telles qu'elles nous sont parvenues à travers l'une des traductions arabes. Les noms des objets définis sont également identiques dans les deux textes.

- Si on prend en compte les autres sources traitant des sections coniques, on constate que l'ordre dans lequel al-Mu'taman définit les éléments du cylindre diffère de celui de Thābit Ibn Qurra. La formulation de la définition du cylindre chez ce dernier n'est pas identique à celle d'al-Mu'taman. Le premier décrit un mouvement qui génère uniquement la surface latérale du cylindre puis il définit le cylindre lui-même. Le second décrit un mouvement qui génère directement le cylindre, à partir du mouvement des deux diamètres des cercles parallèles et une arête qui joint une de leur extrémité. Par ailleurs, pour définir le cylindre droit et oblique, al-Mu'taman utilise l'axe et la base du cylindre alors que Thābit les définit à partir de la hauteur. Dans les *Eléments*, le cylindre est obtenu par rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés. Chez Ibn as-Samḥ, il y a une première définition à partir de la rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés et une seconde, plus générale, à partir d'une "*figure ronde d'un contour quelconque*"[276]. Ces quelques différences laissent à penser que, pour sa définition du cylindre droit et oblique, al-Mu'taman ne s'est pas inspiré de ses prédécesseurs (au cas où il aurait connu leurs écrits).

En ce qui concerne les propositions présentées dans les deux sections de l'*Istikmāl* consacrées aux sections coniques, l'exposé qu'en fait al-Mu'taman s'éloigne de celui des *Coniques* de plusieurs manières. Un certain nombre d'entre elles sont tout

[275]- Dans la version arabe des Coniques, on lit ceci : "*Si on joint, entre un point quelconque et une ligne entourant un cercle, à l'aide d'une ligne droite, et que le cercle et le point ne soient pas dans un même plan, et que l'on prolonge la ligne droite dans les deux directions, et que l'on fixe le point afin qu'il ne se détache pas*". La formulation d'al-Mu'taman est celle-ci : "*Et si <on a> un cercle et un point fixe qui n'est pas dans son plan et qu'on le joigne au périmètre du cercle à l'aide d'une ligne droite sortant <au-delà> du point fixe*".

[276]- LEVY, T. : *Fragment d'Ibn al-Samḥ sur le cylindre et sur ses sections planes*, op. cit., p. 885-895.

simplement abandonnées : 9 du Livre I, 23 du Livre II, 43 du Livre III, toutes celles du Livre IV, 56 du Livre V, 19 du Livre VI et 35 du Livre VII. Parmi celles qui sont traitées, certaines sont énoncées comme corollaires et sans démonstration. Les autres sont présentées de la manière la plus concise possible. Cela se fait, par exemple, en regroupant plusieurs propositions en une seule (voir, ci-dessous, le tableau comparatif). C'est en particulier le cas lorsqu'il s'agit d'établir une propriété commune aux trois sections coniques. Mais, il lui arrive aussi de démontrer un résultat pour une seule courbe alors qu'il est valable pour les deux autres. C'est ce qu'il a fait, par exemple, dans son étude des foyers qui aurait dû concerner également l'hyperbole et la parabole.
Au niveau des méthodes de démonstration, al-Mu'taman cherche également la concision, mais sans innover au niveau des outils utilisés. Cette démarche est manifeste dans la 22^{e} et la 26^{e}, dans lesquelles le mathématicien de Saragosse ne retient que la partie de la démonstration d'Apollonius qui correspond à la *synthèse* du problème, et il abandonne son *analyse*. Pourtant, c'est avec cette méthode de démonstration qu'il établit certains résultats, dans d'autres chapitres de son ouvrage et même, une fois dans cette section (proposition IV.3.1(5))[277]. Une seconde manière de rendre les démonstrations plus concises est celle qui consiste à proposer une autre preuve, originale, qui utilise des résultats antérieurs. On en a un exemple avec la proposition IV.3.1(10) qui utilise III.1.2(7) et qui évite, ainsi, quelques longueurs.

Parmi les éléments de cette section qui pourraient être des contributions d'al-Mu'taman ou bien des reprises de résultats établis par d'autres mathématiciens de la tradition arabe, il y a quelques ajouts à des résultats d'Apollonius, comme dans les propositions 1 et 11. Il y a aussi, chaque fois que cela lui paraît possible, un souci de généralisation des résultats ou des propriétés. C'est le cas dans la proposition 3, qui traite des mêmes problèmes que les propositions 4, 5 et 9 du Livre I des *Coniques*. Dans la proposition 12, il énonce, comme corollaire, une généralisation, à des triangles, du résultat établi pour des quadrilatères associés à l'hyperbole et à l'ellipse; mais il ne la démontre pas.

277- HOGENDIJK, J.P. : The Geometrical Part of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, op. cit., p. 217.

Correspondance entre les propositions de *l'Istikmāl* et celles d'ouvrages antérieurs grecs ou arabes traitant des *coniques*

Istikmāl Section IV.3.1	*Ouvrages antérieurs sur les coniques*
[M : IV. 3. 1(1)]	[C : I ; 2, 3], [S : I; 2], [T : 4]
[M : IV. 3. 1(2)]	[C : I; 6, 7], [S : I; 11, 12]
[M : IV. 3. 1(3)]	[C : I; 4, 5, 9], [T: 8, 9, 11], [S: I; 5, 6, 9]
[M : IV. 3. 1(4)]	[C : I; 13, 21]
[M : IV. 3. 1(5)]	[S: I; 20, 21, 22]
[M : IV. 3. 1(6)]	[C : I; 11, 20]
[M : IV. 3. 1(7)]	[C : I; 12, 14, 21]
[M : IV. 3. 1(8)]	[C : I ; 29, 30]
[M : IV. 3. 1(9)]	[C : I ; 18, 19, 22-27, 31]
[M : IV. 3. 1(10)]	[C : I ; 17, 32-36]
[M : IV. 3. 1(11)]	[C : I ; 37-40], [C : III; 42]
[M : IV. 3. 1(12)]	[C : I ; 41]
[M : IV. 3. 1(13)]	[C : I ; 15, 46, 47, 49, 50]
[M : IV. 3. 1(14)]	[C : II ; 5, 6, 27, 28, 29, 31, 36, 37, 44, 45]
[M : IV. 3. 1(15)]	[C : II ; 46, 47, 48]
[M : IV. 3. 1(16)]	[C : III ; 2, 11, 37, 38]
[M : IV. 3. 1(17)]	[C : III ; 45-50, 52]
[M : IV. 3. 1(18)]	[C : II ; 1-3, 8-10]
[M : IV. 3. 1(19)]	[C : II ; 12], [C : III ; 43]
[M : IV. 3. 1(20)]	[C : II ; 17]
[M : IV. 3. 1(21)]	[C : II ; 11, 16]
[M : IV. 3. 1(22)]	[C : II ; 49]
[M : IV. 3. 1(23)]	[C : II ; 50]
[M : IV. 3. 1(24)]	[C : II; 13, 14]
[M : IV. 3. 1(25)]	[C : II ; 52]
[M : IV. 3. 1(26)]	[C : II ; 51, 53]
[M : IV. 3. 1(27)]	[C : I ; 52-60], [C : II ; 4]

Istikmāl Section IV.3.2	*Ouvrages antérieurs sur les coniques*
[M : IV. 3. 2(1)]	[C : V; 1, 3, 4, 6]
[M : IV. 3. 2(2)]	[C : V; 8-10, 13-15, 27-29]
[M : IV. 3. 2(3)]	[C : V; 7, 12]
[M : IV. 3. 2(4)]	[C : V; 34]
[M : IV. 3. 2(5)]	[C : V; 58-63]
[M : IV. 3. 2(6)]	[C : VII; 4]
[M : IV. 3. 2(7)]	[C : VII; 6-7, 12-13, 15]
[M : IV. 3. 2(8)]	[C : VII ; 21-23, 25]
[M : IV. 3. 2(9)]	[C : VII ; 24, 26]
[M : IV. 3. 2(10)]	[C : VII ; 32-35]
[M : IV. 3. 2(11)]	[C : VI ; 1-2, 3a]
[M : IV. 3. 2(12)]	[C : VI ; 6]
[M : IV. 3. 2(13)]	[C : VI ; 11]
[M : IV. 3. 2(14)]	[C : VI ; 12]
[M : IV. 3. 2(15)]	[C : VI ; 13, 18, 23]

[M : IV. 3. 2(16)]	[C : VI ; 26, 27]
[M : IV. 3. 2(17)]	[C : VI ; 4, 5, 7]
[M : IV. 3. 2(18)]	[SI : 2]
[M : IV. 3. 2(19)]	
[M : IV. 3. 2(20)]	[SI : 3]
[M : IV. 3. 2(21)]	
[M : IV. 3. 2(22)]	
[M : IV. 3. 2(23)]	

Quant aux propositions complètement originales par rapport au contenu des *Coniques*, la section IV.3.1 en renferme une seule, la cinquième. Elle nous est parvenue sous la forme et avec le contenu donnés par Ibn Sartāq dans son *Ikmāl*. Nous ne pouvons donc repérer avec précision ce qui a été ajouté, dans cette rédaction, à la version originale d'al-Mu'taman.

Cette proposition est importante pour deux raisons. La première tient au fait qu'elle permet d'étudier l'ellipse indépendamment de la manière avec laquelle elle a été générée, c'est-à-dire comme section de cylindre ou comme section de cône. La seconde est liée à l'histoire des textes. En effet son contenu rappelle celui de certaines parties du *Livre de la section du cylindre* de Sérénus. Dans les propositions 21 et 22, ce dernier étudie l'existence d'une ellipse inscrite dans un solide (respectivement cylindre ou cône) et congruente à une ellipse donnée dans un solide donné (respectivement cône ou cylindre)[278]. Les autres propositions (23, 24, 25, 26 et 27) traitent du même sujet mais pour des ellipses semblables, thème qui n'est abordé ni par al-Mu'taman ni par Ibn Sartāq.

Il est donc légitime de se poser la question d'une éventuelle circulation de tout ou partie d'une version arabe de l'ouvrage de Sérénus. Mais pour les raisons suivantes cette hypothèse ne nous parait pas fondée.

En premier lieu, nous n'avons aucun témoignage en faveur d'une traduction arabe et donc d'une connaissance directe du contenu de ce Livre par les premiers mathématiciens d'Orient et à fortiori par leurs successeurs d'al-Andalus. Bien sûr, on peut concevoir la circulation d'une version grecque complète ou partielle, dont les résultats se seraient retrouvés dans l'un des premiers ouvrages géométriques arabes. Mais, dans ce cas, et malgré le caractère particulier du résultat des trois propositions de Sérénus, on ne comprend pas pourquoi elles n'ont pas été incluse sous forme de corollaires, démarche que nous rencontrons souvent dans le livre d'al-Mu'taman.

[278]- Voir plus haut les énoncés de ces propositions en page 20.

Une autre hypothèse, qui nous emble plus raisonnable et celle d'une éventuelle circulation du premier livre arabe connu ayant traité des sections coniques, Le *Kitāb ash-shakl al-mudawwar al-mustaṭīl* de l'un des frères Banū Mūsā. Cette hypothèse est d'autant plus séduisante qu'il nous est parvenu certaines informations sur le contenu de ce livre, et en particulier sur le fait que son auteur a traité un problème semblable à celui de la proposition IV.1.3.(5). Cela est clairement dit dans le passage suivant de l'introduction aux *Coniques* d'Apollonius, insérée par les frères Banū Mūsā au début de la première version arabe de ce traité : "*Puis, il étudia la science de la section conique du cylindre lorsque la ligne périmètre est une ligne qui entoure complètement <la section>. Il a trouvé que la forme de la section de cylindre, dont il avait découvert la théorie, est la forme de la section de cône. Et il a découvert la preuve que, pour toute section située dans un cylindre, selon la manière que nous avons décrite, <il y a> un certain cône dans lequel est située une section identique à cette section, et que, pour toute section elliptique de ce type-ci, <il y a> un certain cylindre qui contient une <section> identique à cette section*"[279].

La troisième hypothèse à ne pas exclure est que nous sommes en présence d'une proposition tout à fait originale ajoutée par al-Mu'taman comme il a eu l'occasion de le faire dans d'autres parties de son livre[280].

Quant à la section IV.3.2, on y trouve plus de résultats distincts de ceux des *Coniques* d'Apollonius. Il y a d'abord des résultats nouveaux (corollaires ou théorèmes) qui sont des outils devant servir pour établir d'autres propositions. Il y a aussi l'exposé et l'établissement de résultats anciens mais qui sont empruntés à la tradition mathématique d'Orient. C'est le cas des propositions 18 et 20, sur l'aire de la portion de parabole, qui reprennent des résultats et des méthodes provenant de l'*Epître sur la mesure de la parabole* d'Ibrāhīm Ibn Sinān. Il y a enfin des propositions que l'on ne trouve pas dans les corpus grec et arabe antérieurs. Il s'agit des trois dernières de la section IV.3.2 qui, comme d'autres dans les chapitres précédents du *Kitāb al-istikmāl*, ne sont pas revendiquées par l'auteur.

---

[279]- APOLLONIUS : *Conics, Books V to VII*, TOOMER, G.-J. (édit. & trad.), op. cit., p. 627.

[280]- HOGENDIJK, J.-P. : Le roi-géomètre al-Mu'taman ibn Hūd et son livre de la perfection (Kitāb al-Istikmāl). Actes du premier colloque International d'Alger sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 1-3 déc. 1986), Alger, Maison des livres, 1988, pp.53-66.

Au niveau de la terminologie qui intervient dans la section qui nous intéresse ici, al-Mu'taman reprend celle de la version arabe des *Coniques*, sauf pour deux termes. Le premier est celui qui exprime la notion de "*produit*". Pour parler de "l'aire" d'un rectangle de côtés *a* et *b*, il utilise en effet l'expression "*musaṭṭaḥ a fī b*, " [surface de *a* par *b*]. Or, dans la version arabe des *Coniques* qui nous est parvenue, et qui a été révisée par les frères Banū Mūsā, on ne trouve que les deux expressions *"ḍarb a fī b"* [produit de *a* par *b*] et *"a maḍrūb fī b*" [*a* multiplié par *b*], comme on les trouve d'ailleurs dans leurs prémisses à l'ouvrage d'Apollonius[281]. Mais, il faut signaler que dans leur "*Kitāb maᶜrifat misāḥat al-ashkāl al-basīṭā wa l-kuriya*" [Livre sur la connaissance de la surface des figures planes et sphériques], ces auteurs utilisent, indifféremment les expressions "*ḍarb a fī b*" et "*saṭḥ a fī b*" pour désigner cette opération[282]. En comparaison, la version grecque des *Coniques* utilise l'expression, plus géométrique, de "*rectangle délimité par les droites a et b*"[283]. Nous ne savons pas si al-Mu'taman a repris le terme utilisé dans une autre version arabe des *Coniques* ou s'il a délibérément choisi celui déjà utilisé par les Banū Mūsā pour sa connotation géométrique.

Le second terme est celui qui désigne le "*côté droit*" de chacune des trois courbes étudiées. Dans la traduction arabe des *Coniques* qui nous est parvenue, il y a deux expressions pour la même notion : *khaṭṭ qā'im* [ligne élevé perpendiculairement] et *ḍalᶜ qā'im* [côté élevé perpendiculairement]. On retrouve bien ces deux termes chez al-Mu'taman mais avec une nette préférence pour le second qui est utilisé 34 fois dans la section IV.3.1, alors que le premier n'y apparaît que trois fois.

Quant à l'expression imagée "*shakl ṣanawbarī*" [figure en forme de pin] qui désigne le cône dans la version arabe, elle n'est plus utilisée par al-Mu'taman qui lui préfère le terme de "*makhrūṭ*".

281- APOLLONIUS : *Conics, Books V to VII*, TOOMER, G.-J., op. cit., Vol. II, p. 633, 635.

282 - Banū Mūsā : *Kitāb maᶜrifat misāḥat al-ashkāl al-basīṭā wa l-kuriya* [Livre sur la connaissance de l'aire des figures planes et solides], In R. Rashed (édit.) : *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, Volume I, op. cit., p. 1054, 1058.

283 - Apollonius : *Les Coniques*, op. cit., p. 11, 20.

Comme une partie non négligeable de la section IV. 3. 1 du *Kitāb al-Istikmāl* n'existe aujourd'hui que dans la rédaction de l'*Ikmāl* d'Ibn Sartāq, il nous faut dire quelques mots sur les spécificités de cette rédaction. Son auteur affirme, au début de son ouvrage, que son but était d'expliciter et de compléter le travail d'al-Mu'taman. Et, de fait, il ne manque aucune occasion pour développer certains aspects, proposer de nouvelles démonstrations ou faire des commentaires qui vont au-delà du sujet traité. Cette démarche est bien illustrée par la proposition 12 où le corollaire concernant les triangles, énoncé par al-Mu'taman à la fin de sa démonstration, est intégré dans l'énoncé de la proposition. Il est même démontré en même temps que la proposition d'Apollonius qui ne concernait que le quadrilatère[284]. On la retrouve aussi dans sa rédaction de la proposition IV.3.1(4) dans laquelle il consacre les deux tiers de son exposé à des développements concernant les propriétés de l'ellipse. On peut supposer que ces longues explications et les commentaires qui ont enrichi d'autres propositions, étaient motivés par la difficulté du sujet à une époque, le XIII^e^ siècle, où les *Coniques* n'étaient peut-être plus un objet d'étude aussi central pour les géomètres, les algébristes et les astronomes, qu'il ne l'a été aux IX^e^-XI^e^ siècles.

Dans le même ordre d'idée, c'est peut-être la nature même de ce type de "*rédaction-commentaire*", renforcée par le style particulier d'Ibn Sartāq, qui a éloigné ce dernier de la démarche adoptée par al-Mu'taman plus fidèle à la structure interne d'une proposition, héritée de la tradition grecque : énoncé général de la proposition (*protase*), exposé du même énoncé à l'aide des éléments d'une figure (*ectèse*), justification déductive de la propriété à démontrer (*apodeixis*) ou de la construction de l'objet cherché (*kataskeué*) et, enfin, conclusion reformulant l'énoncé de la proposition (*symperasma*)[285]. Cela dit, c'est cette différence de style qui permet parfois de distinguer ce qui est une rédaction, plus ou moins détaillée du texte d'al-Mu'taman de ce qui est un véritable exposé d'Ibn Sartāq, même lorsque ce dernier n'avertit pas le lecteur de ces compléments.

Au niveau de la terminologie, l'auteur de l'*Ikmāl* se distingue aussi par certains aspects, donnant l'impression de se conformer à une autre tradition d'enseignement des

---

284- IBN SARTĀQ : *Kitāb al-Ikmāl*, op. cit., ff. 135b-136a.

285- EUCLIDE : *Les Eléments*, B. Vitrac (trad.), Volume 1, Paris, Presses Universitaires de France, 1990, p. 137.

Coniques. Ainsi, il utilise essentiellement "*quṭr qā'im*" [diamètre droit] pour désigner le côté droit de l'une des trois courbes, alors que ce terme n'intervient, chez Apollonius et chez al-Mu'taman, que pour nommer un élément particulier de l'hyperbole (définition 19). Mais il évoque une autre dénomination, "*ligne dont les lignes sont en puissance d'elles*" dont il dit qu'elle est également utilisée, sous-entendu à son époque[286]. Il signale aussi que le diamètre transverse avait, chez certains mathématiciens, une signification plus large que celle de la définition 7.

Au niveau des définitions, Ibn Sartāq reste fidèle au contenu de l'*Istikmāl*, même si sa présentation est plus succincte et ne correspond pas complètement à l'ordre d'exposition d'al-Mu'taman. Mais, il ajoute deux définitions sous forme d'explicitation : celle du "*cylindre infini*", donc sans base, et celle du "*cône solide fini*". Le premier est défini ainsi : "*Si on imagine que la ligne en rotation est infinie dans les deux directions, le cylindre sera alors infini aux deux extrémités et il n'aura pas de bases*"[287]. La définition du second, qui permet de le distinguer de la "*surface conique infinie*" d'Apollonius, est exprimée ainsi : "*Un corps entouré par une surface circulaire - aboutissant à un point- et un cercle"*. Pour valider le mouvement qui engendre les solides, il introduit la notion de "*tashābuh*" [similitude]. Ce qui assure, selon lui, le parallélisme de l'arête et de l'axe du cylindre. Il faut enfin remarquer, qu'à ce niveau déjà, son exposé est encombré de digressions qui sont des anticipations sur les définitions des sections coniques et sur certaines de leurs propriétés.

On ne peut rien conclure à partir de ces quelques éléments de comparaison, mais ils montrent qu'une étude exhaustive de la terminologie de l'*Istikmā*l et de l'*Ikmāl*, étude qui sort du cadre de notre travail, apporterait des éléments utiles à la connaissance de l'histoire des coniques dans la tradition mathématique arabe.

Il nous reste à dire un mot sur notre travail d'édition du contenu de la section IV.3.1. Notre travail étant centré sur le contenu de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman, comme un témoin exceptionnel de l'étude des coniques en Andalus au XI[e] siècle, il n'était pas nécessaire de conserver dans cette édition les nombreux compléments d'Ibn Sartāq qui semblent parfois encombrer et même perturber le texte originel d'al-Mu'taman. Mais, nous avons décidé de les garder pour deux raisons. En premier lieu, leur contenu

[286]- IBN SARTĀQ : *Kitāb al-Ikmāl*, op. cit., 114v.
[287]- Op. cit., f. 113v.

pourrait aider le lecteur à suivre l'exposé d'al-Mu'taman qui est souvent d'une grande concision. En second lieu, les compléments d'Ibn Sartāq ont un intérêt pour eux-mêmes dans la mesure où ils font partie des témoins d'une tradition des *Coniques*, celle de l'Asie Centrale des XIII^{e}-XIV^{e} siècles. Cette tradition n'a pas encore fait l'objet d'études détaillées mais, au vu des seules indications bibliographiques, elle semble représenter une phase de renouveau des études sur la géométrie en général et sur les sections coniques en particulier. Les références bibliographiques disponibles évoquent, en particulier, des contributions de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī et d'Ibn Abī Shukr al-Maghribī (XIII^{e} s.)[288]. A cela, il faut ajouter le témoignage du mathématicien et physicien, Kamāl ad-Dīn al-Fārisī (m. 719/1319). Il s'était décidé à faire une révision des *Coniques* sur les conseils de son professeur Quṭb ad-Dīn ash-Shīrāzī (m. 711/1311), un autre membre éminent de l'équipe de l'observatoire de Maragha que dirigeait aṭ-Ṭūsī. Ash-Shīrāzī en voyait la nécessité à son époque et avait pensé réaliser lui-même le projet avant d'en faire la proposition à son étudiant[289].

288- Ms. Téhéran, Sipahsālār n° 556.

289- AL-FĀRISĪ : *Tanqīh al-manāẓir li dhawī al-abṣār wa l-baṣā'ir* [Livre de la révision de l'Optique pour les gens qui ont une bonne vue et un esprit pénétrant], HIJĀZĪ, M. (édit.), Vol. I, Le Caire, al-Hay'a al-miṣriya al-^{c}āmma li l-kitāb, 1983, p. 46. Ash-Shīrāzī aurait dit à son étudiant : "*J'avais, depuis un certain temps, l'intention de réviser le livre d'Apollonius sur les coniques. Pour cela, j'avais rassemblé, comme publications rares et comme résultats géométriques, ce que personne n'aurait pu rassembler. Et maintenant, il s'est ajouté à cette <intention> le désir de réviser ce livre <de l'optique d'Ibn al-Haytham>. Mais je ne peux pas me libérer pour eux, occupé que je suis par le commentaire du Colligé de la médecine <d'Ibn Sīnā> qui m'accapare suffisamment <pour me détourner> de tous les autres projets, à cause de l'attente exprimée par les gens les plus nobles et par les plus grandes personnalités du moment. Mais, je te conseille de t'en occuper et tu atteindras ce qui est ton <but> le plus cher* ". Nous avons repris la traduction française de DJEBBAR, A. : Kamâl Eddîn Fârsî, Physicien et mathématicien novateur, *Târikh-e'Elm*, Téhéran, 2005, n° 3, p. 9-38. Article reproduit dans *Découverte* (Revue du Palais de la découverte), Paris, n° 334, janvier 2006, p. 14-32.

B-TRANSCRIPTION ET COMMENTAIRES

DEFINITIONS :

[1] Soit deux plans donnés, $(P_1) // (P_2)$, deux cercles égaux $C_1 \in (P_1)$ et $C_2 \in (P_2)$, D_1 et D_2 leurs diamètres respectifs, avec $D_1 // D_2$. Si Δ est la droite qui joint les extrémités des deux diamètres situés d'un même côté, la rotation complète de Δ et des deux diamètres autours de leurs centres respectifs engendrera un solide appelé **cylindre**.

[2] C_1 et C_2 sont les deux **bases** du cylindre.

[3] Δ est **l'arête** du cylindre.

[4] La droite D qui joint les deux centres des deux cercles **est l'axe** du cylindre**.**

[5] Le cylindre est dit **droit** lorsque l'axe D est perpendiculaire à la base (P_1). Il est dit **oblique** dans le cas contraire.

[6] Si C est un cercle, A un point extérieur au plan de C, Δ une droite passant par A et aboutissant au périmètre de C. La rotation complète de Δ autour du périmètre engendre une surface, avec deux nappes se faisant face par le sommet A et pouvant être prolongées indéfiniment. Cette surface est dite **surface conique**

[7] A est dit **sommet** de chacune des deux nappes.

[8] La droite D qui traverse A et aboutit centre du cercle C est dite **axe de la surface conique**.

[9] La surface située entre A et le cercle C est dite un **cône**.

[10] A est dit **sommet du cône**.

[11] La droite D d'extrémités A et le centre du cercle C est dite **axe du cône**.

[12] Et j'appelle le cercle : **base du cône**.

[13] Le cône est dit **à angle droit** lorsque son axe est perpendiculaire à sa base. Il est dit **incliné** dans le cas contraire.

[14] Si dans une courbe plane, une droite D coupe en deux moitiés toutes les droites, parallèles entre elles, menées du périmètre de la courbe et y aboutissant, la droite D est dite **diamètre** de la courbe plane.

[15] Chaque extrémité du diamètre est dite **sommet** de la courbe.

[16] Les droites parallèles coupées en leur milieu par le diamètre sont dites **lignes ordonnées** de ce diamètre.

[17] Si la courbe à deux branches, la partie de son diamètre situé entre les deux branches est dite **diamètre transverse**.

[18] Les deux extrémités du diamètre transverse sont dit **sommets des deux branches**.

[19] La ligne droite passant par le milieu du diamètre transverse et coupant en deux moitiés toutes les lignes droites parallèles au diamètre transverse, est dite **diamètre droit**.

[20] Ces lignes parallèles sont dites **lignes ordonnées** de ce diamètre.

[21] Si deux droites sont deux diamètres à une courbe plane ou à deux branches d'une courbe plane, et que chacune coupe en deux moitiés les lignes parallèles, elles sont dites **diamètres conjugués**.

[22] La droite qui est un diamètre à une courbe plane ou aux deux branches d'une courbe plane et qui coupe perpendiculairement les droites parallèles qui sont ses ordonnées, est dite **un axe** de la courbe ou des deux branches de la courbe**.**

[23] Si deux diamètres sont conjugués et que chacun des deux coupe perpendiculairement les lignes ordonnées de l'autre, ils sont dit **axes conjugués** de la courbe ou des deux branches de la courbe.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

Les définitions de la section IV.3.1 de l'*Istikmāl* ont été comparées à la rédaction qu'en a faite Ibn Sartāq dans son *Ikmāl* et à celles des cinq écrits antérieurs au XI^e siècle qui nous sont parvenus :
- Euclide (III^e s. av. J.-C.) : *Les Eléments*;
- Apollonius (III^e s. av. J.-C.) : *Les Coniques*;
- Sérénus (IV^e s.) : Le *Livre de la section de cylindre* et le *Livre de la section de cône*;
- Thābit Ibn Qurra (m. 289/901) : *Kitāb fī quṭū^c al-usṭuwāna wa basīṭuhā* [Livre sur les sections du cylindre et sa surface].
- Ibn as-Samḥ (m. 426/1035) : *al-Kitāb al-kabīr fī l-handasa* [Le grand livre sur la géométrie].

L'ouvrage de Sérénus ne semble pas avoir été traduit en arabe. Mais il est tout à fait possible que son contenu ait circulé totalement ou partiellement à travers des citations, des rédactions ou des commentaires. Pour notre comparaison, seul le premier livre nous intéresse ici. En effet, pour les éléments du cône, Sérénus lui-même renvoie aux définitions d'Apollonius.
Le traité d'Ibn Qurra est le plus ancien texte arabe sur le sujet qui nous soit parvenu. Son intérêt tient aussi au fait que son auteur a été l'un des traducteurs des *Coniques* d'Apollonius.
Le livre d'Ibn as-Samḥ n'a pas encore été retrouvé. Seul un fragment a survécu dans une version hébraïque.
L'étude comparative nous a suggéré les remarques suivantes (voir, en annexe, les définitions données par ces différentes sources) :

1. Les 23 énoncés se répartissent comme suit : 5 sur le cylindre et ses éléments, 8 sur le cône et ses éléments. Les 10 restants concernent les éléments des courbes obtenues comme sections de cylindres et de cônes.

2. Les sections de cône

Le tableau comparatif de l'annexe, montre que, à l'exception de la première phrase de la première définition[290], les formulations de toutes les définitions de l'*Istikmāl*, relatives aux sections de cône, ainsi que l'ordre de leur exposition, sont identiques aux formulations et à l'ordre des définitions des *Coniques* d'Apollonius telles qu'elles nous sont parvenues à travers l'une des traductions arabes. Les noms des objets définis sont également identiques dans les deux textes.

3. Les sections de cylindre

- L'ordre dans lequel al-Mu'taman définit les éléments du cylindre est différent de celui de Thābit Ibn Qurra.

- La formulation de la définition du cylindre chez Thābit est différente de celle d'al-Mu'taman. Le premier décrit un mouvement qui génère uniquement la surface latérale du cylindre puis il définit le cylindre lui-même. Le second décrit un mouvement qui génère directement le cylindre, à partir du mouvement des deux diamètres des cercles parallèles et une arête qui joint une de leur extrémité.
- Pour définir le cylindre droit et oblique, al-Mu'taman utilise l'axe et la base du cylindre. Thābit les définit à partir de la hauteur.
- Dans les *Eléments*, le cylindre est obtenu par rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés.
- Chez Ibn as-Samḥ, il y a la définition à partir de la rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés et celle, plus générale, à partir d'une "*figure ronde d'un contour quelconque*"[291].

Ces quelques différences laissent à penser que, pour sa définition du cylindre droit et oblique, al-Mu'taman ne s'est pas inspiré de ses prédécesseurs (au cas où il aurait connu leurs écrits).

4. La rédaction d'Ibn Sartāq

- Il ajoute les définitions du "*cylindre infini*" et du "*cône infini*". Le premier est défini ainsi : "*Si on imagine que la ligne en rotation est infinie dans les deux directions, le cylindre sera alors infini aux deux extrémités et elle n'aura pas de bases*"[292].
- Il introduit la notion de "*tashābuh*" [similitude] dans le mouvement engendrant le cylindre. Ce qui assure, selon lui, le parallélisme de l'arête et de l'axe du cylindre.

---

[290]- Dans la version arabe des Coniques, on lit ceci : "*Si on joint, entre un point quelconque et une ligne entourant un cercle, à l'aide d'une ligne droite, et que le cercle et le point ne soient pas dans un même plan, et que l'on prolonge la ligne droite dans les deux directions, et que l'on fixe le point afin qu'il ne se détache pas*". La formulation d'al-Mu'taman est celle-ci : "*Et si <on a> un cercle et un point fixe qui n'est pas dans son plan et qu'on le joigne au périmètre du cercle à l'aide d'une ligne droite sortant <au-delà> du point fixe*".

[291]- LEVY, T. : *Fragment d'Ibn al-Samḥ sur le cylindre et sur ses sections planes*, op. cit., p. 885-895.

[292]- Ms. Le Caire, op. cit., f. 113v.

- L'exposé des définitions ne correspond pas complètement à l'ordre d'exposition d'al-Mu'taman. Leur formulation est plus succincte.
- Les définitions sont truffées de digressions qui sont des anticipations sur les définitions des sections coniques et certaines de leurs propriétés.

* * *

Proposition IV. 3. 1(1) :

Soit *(S)* une surface cylindrique ou conique de base le cercle *(AB)* et [dans le cas d'un cône] de sommet le point *G.*

1. Soit *(GAB)* un plan sécant qui passe par l'arête *AG* ou par l'axe de *(S),* alors la section générée dans la surface circulaire est entourée par des lignes droites.
2. Si la surface circulaire est coupée par un plan ne passant pas par l'une de ses arêtes, la section commune ne sera pas entourée par des lignes droites.

Preuve de cela :

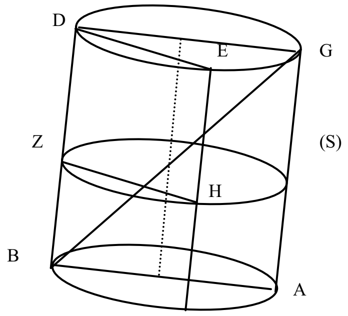
1. Puisque le cercle *(AB)* et le plan *(GAB)* sont des surfaces planes alors :

AB = cercle (AB) ∩ *plan (GAB)* est une droite

- Si *(S)* est un cylindre :

Nous menons de *B* une arête *BD*. Donc *BD//AG* car toutes les arêtes sont parallèles à l'axe. Donc *BD* ∈ *plan (GAB)* car deux droites parallèles sont dans un même plan.

Alors *BD* ∈ *(GAB)* ∩ *(S).*

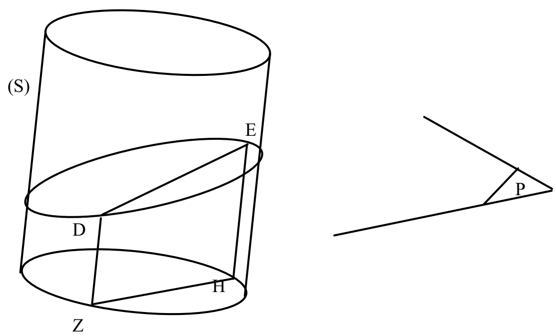


[Fig.1]

2. Soit *(P)* un plan qui ne passe pas par une arête de la surface circulaire. Soit deux points *D, E* sur *(P)* ∩ *(S).* Soit *DZ* et *EH* deux arêtes de *(S).* Nous joignons *Z* et *H*.

Les droites *DZ, EH* et *ZH* sont alors dans le même plan *(P)*.

Comme la droite *ZH* est à l'intérieur de *(S),* la ligne joignant *E* à *D* est à l'intérieur de *(S)*. Donc *(S)* ∩ *(P)* ne pourrait être une ligne droite car *ED* est une droite située à l'intérieur du plan *(EZ)* qui est à l'intérieur de *(S).*



[Fig.2]

[Corollaire :]

Si deux points situés sur une surface circulaire ne sont pas disposés dans le prolongement du sommet, la ligne les joignant est alors à l'intérieur de la surface circulaire. Et si elle est prolongée d'une manière rectiligne, elle tombera à l'extérieur de cette surface.

REMARQUES ET COMMENTAIRES :

1. [M : IV. 3. 1(1)] = [C : I ; 2, 3], [S : I; 2], [T : 4]

2. Enoncé

- La première partie de l'énoncé de [M : IV. 3. 1(1)] correspond aux énoncés de [C : I ; 3], [S : I; 2] et [T : 4].
- La seconde partie est un ajout d'al-Mu'taman.
- L'énoncé du corollaire concerne le cône et correspond à celui de [C : I ; 2]. Le cas du cylindre n'est pas évoqué par al-Mu'taman.

3. Démonstration

- La preuve de la première partie de l'énoncé est, comme celle [C : I; 3], directe. Mais elle est différente. Celle de Sérénus utilise le raisonnement par l'absurde.
- Le corollaire n'est pas démontré.
- Al-Mu'taman n'indique pas la forme de l'intersection du plan avec le solide (qui est un triangle dans le cas de la section du cône (signalée en marge) et un parallélogramme dans le cas de la section du cylindre.

4. Références

- [M : Déf. 1], [E : I; 30], [E: XI ; 2, 3, 11].

5. Gloses marginales

"Il est déduit de cette proposition:

a- <que> les droites qui sont menées du sommet du cône vers un point quelconque sur la surface [circulaire] sont aussi sur sa surface [circulaire].

b- et que [si] dans un cône quelconque, un plan passe par son sommet, cette section est un triangle

c- et que si nous marquons deux points sur la surface circulaire, la ligne qui les joint sera à l'intérieur de la surface et son prolongement rectiligne tombera à l'extérieur de cette surface [circulaire]."

Proposition IV. 3. 1(2) :

Soit *(S)* une surface cylindrique ou conique de sommet *A* et de base le cercle *(BG)*. Soit *(ABG)* un plan qui passe par l'axe de *(S)* [et perpendiculaire au cercle *(BG)*]. Soit *BG* le diamètre du cercle *(BG)*. Notons *N* un point sur $BG = plan\ (ABG) \cap cercle\ (BG)$, ou sur son prolongement. Menons *NM* une perpendiculaire à *BG* dans la surface du cercle *(BG)*. Notons *D* un point de *(S)*, qui ne soit pas sur les arêtes menées de *B* et *G*. Du point *D*, nous menons la ligne *DE* telle que *DE//NM*. Prolongeons *DE*, soient alors le point $Z = DE \cap (ABG)$ et le point *H* sur l'autre intersection de *DE* et *(S)*.

La droite *DH* est alors partagée par le plan *(ABG)* en deux parties égales.

Preuve de cela :

Nous menons du point *D* l'arête *DK* de *(S)* avec $DK \cap (BG) = K$

Nous menons du point *K*, la droite $KTL \perp BG$ avec $KTL \cap BG = T$

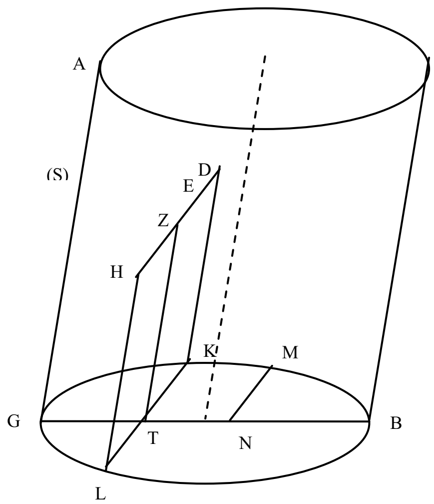
Donc *KTL//NM* et *NM //DE*. D'où *KTL//DE* [E: XI; 9].

Nous menons du point *T* la ligne *TZ*.

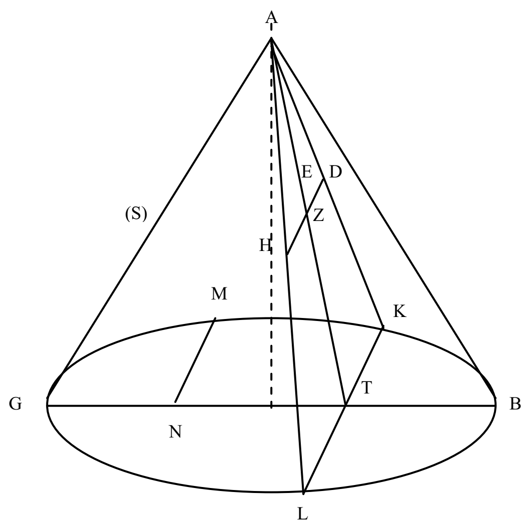
- Dans le cas du cylindre : *TZ // DK.*

- Dans le cas du cône : Nous joignons le point *T* au sommet du cône *A*. Le prolongement de *ED* rencontre *TZ* car ils sont dans le même plan [M: IV.1 (2 & 7)][293]. Soit $Z = TZ \cap DE$.

Nous sortons du point *L*, l'arête *LH* alors $LH \in plan\ (ADKT)$, < *(DKT)* pour le cas du cylindre>. Prolongeons *DZ* et soit $H = DZ \cap LH$.



[Fig.1]



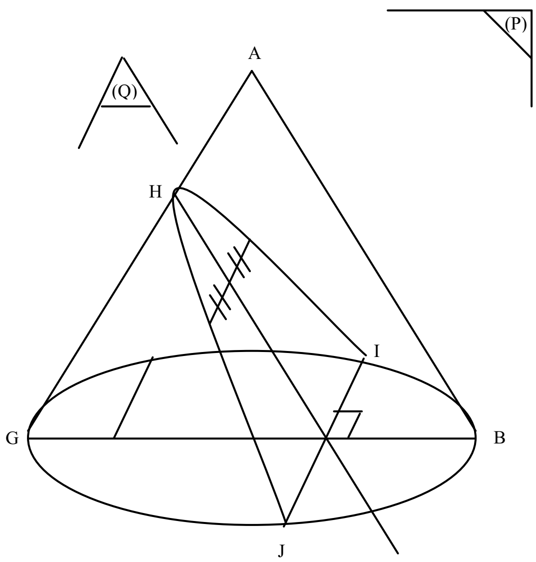
[Fig.2]

[293]- Comme le signale une remarque en marge. Ces deux propositions correspondent au deux propositions suivantes des Eléments d'Euclide : [E.XI; 2] : "*Si deux droites se coupent l'une l'autre, elles sont dans un plan et un seul et tout triangle est dans un plan et un seul*". [E.XI; 7] : "*Si deux droites sont parallèles et que des points soient pris au hasard sur chacune d'elle, la droite joignant les points est dans le même plan que les parallèles*". [op. cit., pp. 110, 124].

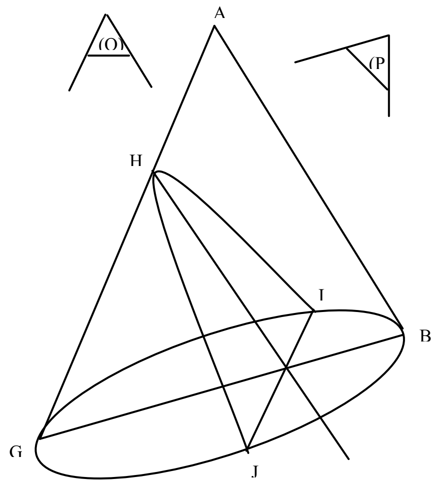
- Dans le cas du cylindre :
(DKLH) est un parallélogramme. Donc : $TL = ZH$ et $TK = ZD$. Or $KT = TL$. Donc $ZH = ZD$.

- Dans le cas du cône :
Nous avons : $\frac{TK}{ZD} = \frac{TL}{ZH}$. En permutant, nous avons : $\frac{KT}{TL} = \frac{DZ}{ZH}$
Or $KT = TL$. Donc $DZ = ZH$.

[Corollaire :]
1- Soit *(S)* un solide cylindrique ou conique coupé par un plan *(P)* qui passe par son axe et qui coupe la base selon le diamètre *BG*. Soit *(Q)* un autre plan coupant le solide [et passant par un autre point que le sommet *A* de *(S)*]
Soit $IJ = (Q) \cap (BG)$ tel que IJ soit perpendiculaire ~~à~~ au diamètre *BG* . Alors les droites menées, entre deux points de la courbe *(HIJ),* parallèlement à *IJ*, seront divisées en deux parties égales par $(P) \cap (Q)$.
2- a) Si la surface circulaire est droite, les lignes menées sur *B* lui sont perpendiculaires.
b) Si la surface circulaire est oblique, ces lignes ne lui seront pas perpendiculaires sauf si le plan *(P)* est perpendiculaire à la base de la surface circulaire.



[Fig.3]



[Fig.4]

REMARQUES ET COMMENTAIRES :

1. [M : IV. 3. 1(2)] = [C : I; 6, 7], [S : I; 11, 12]

2. Enoncé

- L'énoncé de [M : IV. 3. 1(2)] correspond à ceux de [C : I; 6] et [S : I; 11].
- L'énoncé du corollaire correspond à ceux de [C : I; 7] et [S : I; 12].

3. Démonstration

- Pour le cas du cône, la preuve de la proposition est abrégée mais elle suite celle d'Apollonius et utilise le même lettrage.
- La preuve pour le cas du cylindre est trop abrégée pour pouvoir être comparée à celle de [S : I; 11].
- Le corollaire est énoncé sans démonstration.

4. Références

- [E : I; 25], [E : III; 3], [E : XI; 9], [C : I; 3], [M : IV.1(2, 7)]

5. Gloses marginales

- L'auteur des gloses marginales signale que l'un des résultats utilisé dans la démonstration "*a été démontré dans la deuxième proposition et dans la septième de la première espèce de la quatrième espèce*".

Proposition IV. 3. 1(3) :

Soit *(S)* une surface cylindrique ou conique de sommet *A* et de base le cercle *C(BGK).*

Soit *P(ABG)* un plan sécant à *(S)* selon son axe, perpendiculaire à *C(BGK)* et le coupant suivant le diamètre *BG* [E : XI; 3].

Soit *(P)* $\perp$ *(ABG)* et *(P)* $\cap$ *(ABG)* = *DE*, avec :

$$\angle D = \angle B\ ;\ \angle E = \angle G$$

ou bien :

$$\angle D = \angle G\ ;\ \angle E = \angle B$$

Alors :

(1) Si *(P)* coupe *(S)* selon une direction parallèle ou antiparallèle, *(P)* $\cap$ *(S)* est un cercle.

(2) Si *(P)* $\cap$ *(S)* n'est ni parallèle ni antiparallèle à *C(BG), (P)* $\cap$ *(S)* n'est pas un cercle.

Preuve :

(1a) *(P)* $\cap$ *(S) // C(BG)*

Donc : $\angle D = \angle B\ ;\ \angle E = \angle G$

On a : *P(DTE) // P(BGK); P(DTE)* $\perp$ *P(ABG) et P(BGK)* $\perp$ *P(ABG)*

Soient *Z = (DTE)* $\cap$ *AH et H = (BGK)* $\cap$ *AH.*

Soit *T* un point quelconque sur *(DTE)* et *ATK* l'arête passant par *T* qui coupe le cercle *(BG)* en *K.*

Joignons les points *T, Z* et *H, K.*

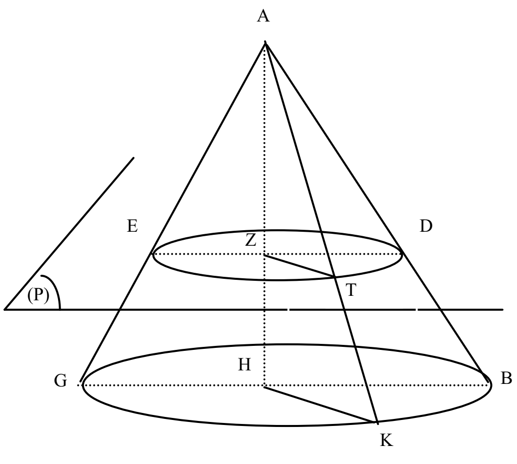
Dans le cas du cylindre [Fig. 1a] :

Nous avons : *TK //ZH* et *TK = ZH*

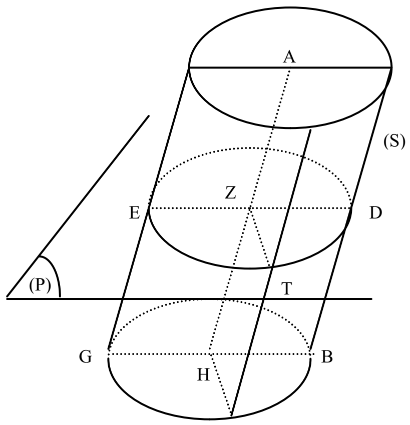
Donc : *TZ//HK* et *TZ = HK*

Or : *HK = HB* et *HB = ZD*

Donc : *ZD = ZT.*



[Fig. 1b]



[Fig. 1a]

Dans le cas du cône [Fig. 1b] :

ATK étant une arête du cône, on :

$$\frac{HA}{AZ} = \frac{HK}{ZT} \text{ et } \frac{HA}{AZ} = \frac{BH}{ZD} \quad \text{[E : VI; 4]}$$

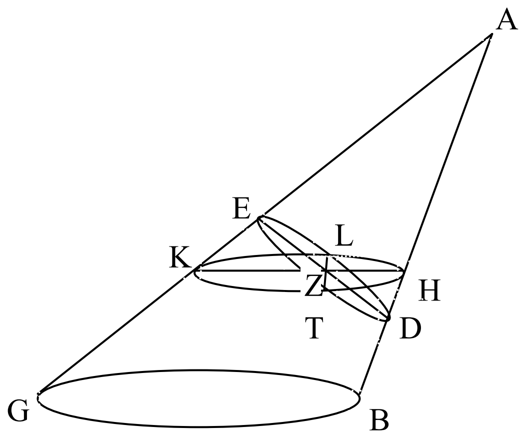
Or : $KH = BH$,

Donc : $ZT = ZD$ [E : V; 4].

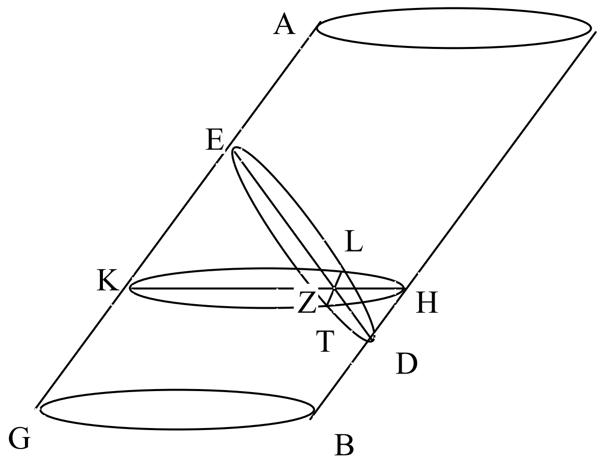
La section *(DTE)* est donc un cercle.

(1) $(P) \cap (S)$ est antiparallèle à $C(BG)$ [Fig. 2a & 2b]

Donc : $\angle D = \angle G$; $\angle E = \angle B$, par antiparallélisme de *P(DTE)* et *P(BGK)*.



[Fig. 2b]



[Fig. 2a]

Soit *T* un point quelconque sur *(DTE),*

Soit $TZ \perp P(ABG)$, avec : $TZ \cap DE = Z$.

Par *TZ,* on mène un plan parallèle à *P(BG)* et qui coupe le solide selon le cercle *(HTK)* de diamètre *HK*.

On a : *T(DZH)* semblable à *T(KZE),*

Car, par hypothèse : $\angle D = \angle G$; $\angle E = \angle B$; $\angle K = \angle G$ (parallélisme); et *Z* sommet commun

D'où :

$$\frac{DZ}{ZK} = \frac{HZ}{ZE} \quad \text{[E : VI; 4]}$$

Donc : $DZ.ZE = HZ.ZK$

Or : $HZ.ZK = ZT^2$ [E: III; 35]

Nous avons donc $DZ.ZE = ZT^2$

Or *T* a été pris quelconque sur la section *(DTE)*. Donc *(DTE)* est un cercle [Réciproque de E: III; 35].

(2) *(P)* $\cap$ *(S)* n'est ni parallèle ni antiparallèle à *C(BGK)*
Donc :

$$\angle D \neq \angle G;\ \angle E \neq \angle B$$

ou :

$$\angle D \neq \angle B;\ \angle E \neq \angle G$$

Si *P(DTE)* = *(P)* $\cap$ *(S)* était un cercle, on aurait :

$$DZ.ZE = TZ.ZL = KZ.ZH \text{ [E : III; 35]}$$

Donc :

$$\frac{DZ}{ZK} = \frac{HZ}{ZE}.$$

Comme les deux angles opposés de sommet *Z* sont égaux, *T(KZE)* est semblable à *T(DZH)* [E : VI; 6].

Donc : $\hat{D} = \hat{K} = \hat{G}$ et $\hat{E} = \hat{H} = \hat{B}$.

La section serait alors antiparallèle. Or, on a supposé le contraire. Ce qui est absurde.

Donc *(P)* $\cap$ *(S)* n'est pas un cercle.

Remarques d'Ibn Sartaq [Fig. 3a & 3b]

Remarque 1

Si : $\angle A = \angle E$ et $\angle B = \angle D$, d'une manière antiparallèle et *P(GDE)* $\perp$ *P(DE).*
Comme *ZH* $\perp$ *DTZ*, alors *ZH* $\perp$ *P(GDE).*
Donc $\angle AZH = \angle DZH = 1$ *droit.*
Donc : $\angle AKY = 1$ *droit* et *YK* $\perp$ *AB.*
Mais : *YK* $\perp$ *MN.*
Or, comme *P(AYB)* passe par *ZH*, on a : *P(AYB)* $\perp$ *P(GDE).*
D'autre part, comme : $AK.KB = YK^2 = KL^2$ et $\angle K = 1$ *droit,*
On a :

$$\frac{AK}{YK} = \frac{YK}{KB} \quad \text{et} \quad \frac{AK}{KL} = \frac{KL}{KB}$$

Si on joint *AY, YB* et *AL, LB*, les triangles *(AYB)* et *(ALB)* sont rectangles, respectivement en *Y* et en *L*.

Donc le cercle circonscrit à *T(AYB)* passe par *L* et est circonscrit aux deux triangles.

Remarque 2

On démontre aussi que toute ligne passant par un point quelconque du périmètre de la section (*AYB)* aboutit à AB.

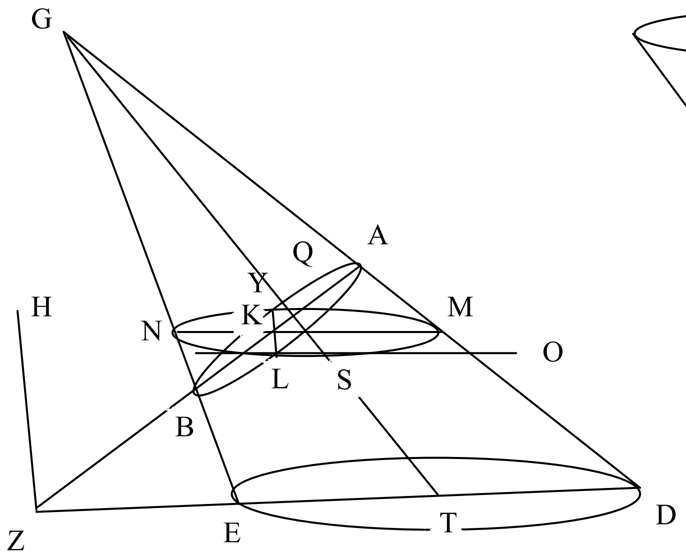
Si la section est antiparallèle et si *P(GDE)* $\perp$ *P(GDE),* on a, [*CF* étant le segment joignant le périmètre et le diamètre] :

$$AC.BC = CF^2$$

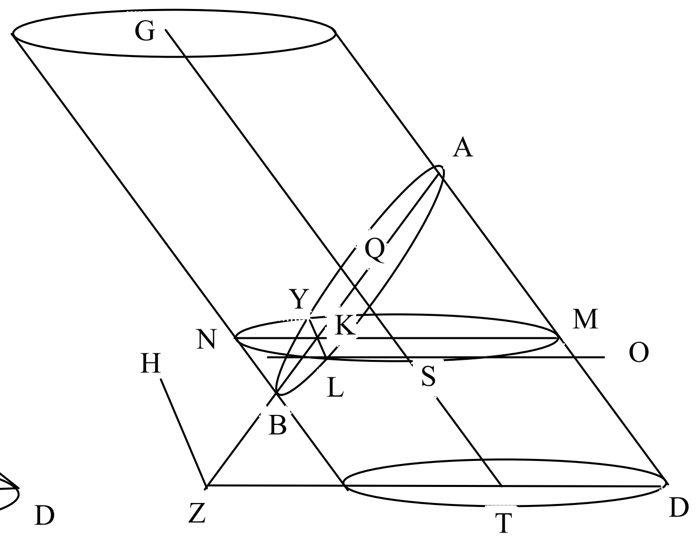
Et les deux triangles sont rectangles.

Donc le cercle circonscrit à *T(AYB)* l'est aussi à tous les autres triangles imaginés.

Comme il n'est pas possible d'imaginer une ligne ordonnée qui serait au-delà ou en deçà du périmètre du cercle circonscrit à *T(AYB),* alors ce cercle coïncide avec la section. Donc la section est un cercle de diamètre *AB* puisqu'il passe par le milieu de toutes les cordes qui lui sont perpendiculaires.



[Fig. 3a]



[Fig. 3b]

Remarque 3

Soit *BSO // DTE* et *GT* l'axe.

Soit $S = BS \cap GT$ et $Q = AB \cap GT$

Dans le cylindre :

L'axe étant parallèle aux arêtes, on a :

$$BS = SO \quad \text{et} \quad \frac{BS}{SO} = \frac{BQ}{QA}$$

Donc : $BQ = QA$

Donc *Q* est le centre et il est sur l'axe.

Dans le cône :

On a :

$$\frac{DT}{OS} = \frac{TE}{SB}$$

Donc :

$$BS = SO$$

Et si :

$$BQ = QA,$$

On aurait :

$$\frac{BQ}{QA} = \frac{BS}{SO}$$

Alors :

$$SQ \,//\, OA$$

Or OA coupe SQ en G. Ce qui est absurde.

Donc, dans un cône, le centre de la section n'est pas sur l'axe. Il est sur AB mais ce n'est pas Q.

Remarque 4

Si $P(GDE)$ n'est pas perpendiculaire à $P(DE)$, et si :

$$\angle A = \angle E \text{ et } \angle B = \angle D,$$

La section (AYB) ne peut pas être un cercle.
En effet, comme $P(GDE)$ est incliné sur $P(DE)$, ZH sera incliné sur $P(GDE)$,
car si $ZH \perp P(GDE)$, on aurait : $P(DE) \perp P(GDE)$. Ce qui est absurde.
Donc ZH est incliné sur (ABZ) parce que si $ZH \perp ABZ$, comme $ZH \perp DEZ$ alors $ZH \perp P(GDE)$. Ce qui est absurde.
Or si ZH est incliné sur (ABZ), tout segment parallèle à ZH sera incliné sur AB.
D'où, grâce à l'égalité des angles par antiparallélisme, on :

$$AK.KB = YK^2$$

Mais comme $\angle K$ n'est pas droit, $T(AKY)$ et $T(BKY)$ ne seront pas semblables. Donc $\angle Y$ ne sera pas droit.
La section ne peut donc être un cercle.

Remarque 5

* AB, le diamètre de la section, peut être entre DE et le sommet ou en dessous de lui. Il peut aussi couper DE.

* La position antiparallèle peut avoir lieu dans les cônes et les cylindres inclinés.

En effet, comme $\angle A = \angle E$ et $\angle B = \angle D$, si le solide était droit, $\angle T$ serait droit; Mais GT est commun et $DT = TE$.
Donc : $\angle D = \angle E$.
D'où : $\angle A = \angle D$
De même : $\angle Q = \angle E$.
Donc : $AB \,//\, DE$.
Or AB coupe DE en Z par hypothèse. Ce qui est absurde.
Donc le solide GDE n'est pas droit.

REMARQUES ET COMMENTAIRES :

1. [M: 4.3.1 (3)] = [C: I; 4, 5, 9], [T: 8, 9, 11], [S: I; 5, 6, 9]

2. Enoncé

- La formulation des différentes parties de l'énoncé de [M: 4.3.1 (3)] est identique à celles d'Apollonius (pour les sections de cône) et de Sérénus (pour les sections de cylindre).

- Suivant en cela Apollonius, al-Mu'taman ne précise pas, comme le fait Ibn Qurra, que lorsque l'intersection n'est ni parallèle ni antiparallèle à la base, elle est une ellipse.

3. Démonstration

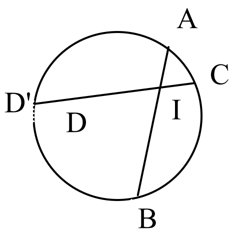
- Dans la preuve de la première partie de l'énoncé, la preuve d'al-Mu'taman est identique à celle d'Apollonius mais le lettrage est différent.

- Dans la seconde partie, La preuve et le lettrage sont identiques à ceux des Coniques.

- La troisième partie, qui est la rédaction d'Ibn Sartāq, propose une preuve différente et beaucoup plus concise que celle d'Apollonius. Le lettrage est également différent.

- Dans une partie de sa démonstration, al-Mu'taman admet la réciproque de la proposition [E: III; 35] (qui n'existe pas dans les *Eléments* d'Euclide)[294] et qui s'énoncerait ainsi : "*Si deux segments AB et CD, qui se coupent en I, vérifient la relation AI.IB = CI.ID, alors les points A, B, C, D sont sur un même cercle*".

Cette réciproque est en fait une conséquence immédiate de [E : III; 35] : Soit (ACB) le cercle circonscrit au triangle ACB. Il coupe le prolongement de CD en D'. D'après [E : III; 35], on a : IA.IB = IC.ID'.



Mais, par hypothèse : IA.IB = IC.ID.
D'où : IC.ID' = IC.ID et, par conséquent : ID' = ID.
D est donc sur le cercle passant par A, C et B.
C'est la simplicité de la preuve qui a probablement amené al-Mu'taman à ne pas l'évoquer.

4. Terminologie

- Au niveau de la terminologie, al-Mu'taman reprend celle de la version arabe des *Coniques*, sauf pour un terme, celui qui exprime la notion de "*produit*". Pour parler de "l'aire" d'un rectangle de côtés *a* et *b*, il utilise en effet l'expression "*musaṭṭaḥ a fī b*, " [surface de *a* par *b*]. Or, dans la version arabe des *Coniques* qui nous est parvenue, et

[294] - Vitrac : *Les Eléments*, Vol. 1, op. cit., p. 464.

qui a été révisée par les frères Banū Mūsā, on trouve l'expression "*ḍarb a fī b*" [produit de *a* par *b*]. Il faut également rappeler que dans leur "*Kitāb maʿrifat misāḥat al-ashkāl al-basīṭā wa l-kuriya*", ces auteurs utilisent, indifféremment les expressions "*ḍarb a fī b*" et "*saṭḥ a fī b*" pour désigner cette opération[295]. En comparaison, la version grecque des *Coniques* utilise l'expression, plus géométrique, de "*rectangle délimité par les droites a et b*"[296].

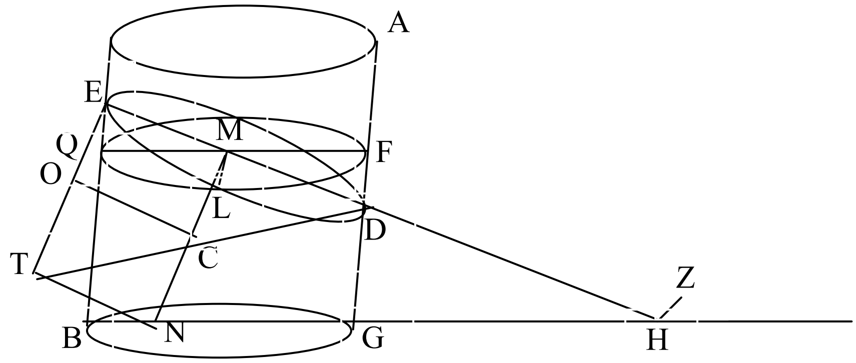
5. Références

- [E: I; 15], [E : III; 35], [E : V; 9], [E : VI; 4, 6], [E : XI; 3], [M: 4.3.1(1, 2)].

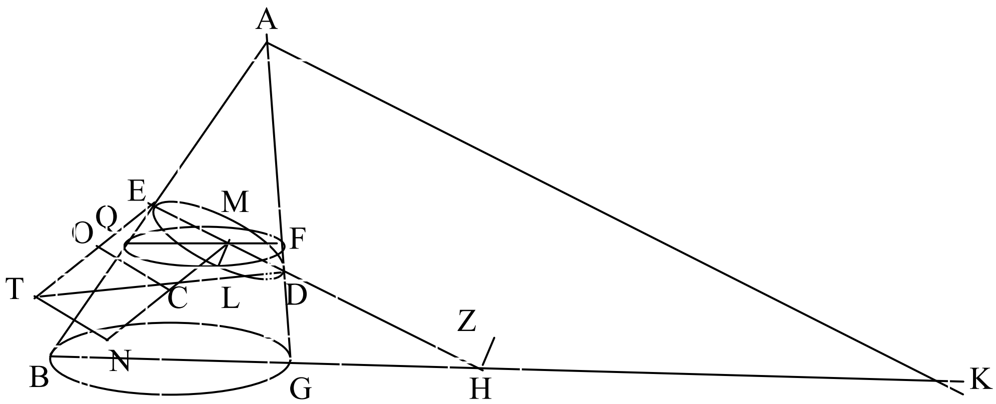
[295] - Banū Mūsā : *Kitāb maʿrifat misāḥat al-ashkāl al-basītā wa l-kuriya* [Livre sur la connaissance de l'aire des figures planes et solides], In R. Rashed (édit.) : *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, Volume I, op. cit., p. 1054, 1058.
[296] - Apollonius : *Les Coniques*, op. cit., p. 11, 20.

Proposition IV. 3. 1(4) :

Soit *(ELD)* un plan sécant à un cône ou à un cylindre *(ABG)* de base *(BG),* tel que *(ELD)* ne contient pas d'arêtes du cône ou du cylindre, n'est pas parallèle <ou antiparallèle> à la base et coupe, d'un même côté du sommet, les deux côtés *AB, AG* du triangle ou du quadrilatère *(ABG)* passant par l'axe.[Fig. 1a & 1b]



[Fig. 1a]



[Fig. 1b]

Soit *ZH* l'intersection du plan *(ELD)* avec la base *(BG)*. On a $ZH \perp BG$.

Soit *ED* l'intersection du plan *(ELD)* avec le triangle ou la quadrilatère *(ABG)*.

Nous prolongeons *ED* jusqu'en *H* sur le prolongement de *BG*.

Soit *L* un point quelconque sur le périmètre de la section obtenue par l'intersection du plan sécant et du solide

Soit *M* sur *ED* tel que : $LM // ZH$.

Soit $AK // ED$ et coupant *BG* en *K*.

Du point *E* nous menons *ET* dans le plan *(ELD)*, tel que : $ET \perp EM$ et tel que :

- dans le cas du cylindre : $\dfrac{ED}{ET} = \dfrac{ED^2}{BG^2}$

- dans le cas du cône : $\dfrac{ED}{ET} = \dfrac{AK^2}{KG.KB}$

On joint DT et on mène $MCN // ET$. Il coupe DT en C. On mène $CO // EM$ et $NT // EM$.

Alors : $LM^2 = MC.CO$.

Définitions :

[1]La section obtenue est appelée *ellipse*.

[2] La ligne commune à l'ellipse et au plan passant par l'axe est son *diamètre transverse*.

[3] Les lignes parallèles au diamètre transverse sont les *lignes ordonnées*.

[4] La ligne menée à partir de l'extrémité du diamètre transverse, perpendiculairement à lui, est le *diamètre droit*, elle est aussi appelé la *ligne dont les lignes ordonnées lui sont en puissance*.

[5] l'extrémité du diamètre qui porte le diamètre droit est le *sommet* de la section

[6] Le milieu du diamètre transverse et le *centre* de la section.

[7] la ligne ordonnée menée du centre de la section est le *diamètre conjugué*. Si elle est perpendiculaire au diamètre transverse, elle est dite *axe conjugué* ou *petit diamètre*.

Preuve :

Soit $FMQ // BG$

Comme $LM // ZH$ et $MQ // HB$, la section (FLQ) sera un cercle.

Donc : $FM.MQ = ML^2$

- Dans le cylindre [Fig. 1a] :

On a : $\dfrac{ED}{ET} = \dfrac{DM}{MC}$ [similitude des triangles *(EDT) et (MDC)*]

Or, par hypothèse : $\dfrac{ED}{ET} = \dfrac{ED^2}{BG^2}$.

Donc : $\dfrac{DM}{MC} = \dfrac{ED^2}{BG^2}$

Mais : $\dfrac{ED^2}{BG^2} = \dfrac{ED}{BG}\left(\dfrac{ED}{BG}\right) = \dfrac{ED}{BG}\left(\dfrac{DH}{GH}\right)$ [E, VI,4]

et : $\dfrac{ED}{BG} = \dfrac{EM}{MQ}$, car $BG = QF$ et $EQ // FD$ [similitude des triangles *(MEQ)* et *(MDF)*]

et $\dfrac{DH}{GH} = \dfrac{DM}{MF}$ car $MF // GH$ [similitude des triangles *(HDG)* et *(MDF)*]

[Donc : $\dfrac{DM}{MC} = \dfrac{ED}{BG}\left(\dfrac{DH}{GH}\right) = \dfrac{EM}{MQ}\left(\dfrac{DM}{MF}\right) = \dfrac{DM.ME}{LM^2}$

D'où : $LM^2 = MC.EM = (MO)$]

- Dans le cône nous avons [Fig. 1b] :

$$\frac{ED}{ET} = \frac{AK^2}{KG.KB} \text{ [par hypothèse]}$$

$$= \frac{AK}{KB}\left(\frac{AK}{KG}\right)$$

et $\frac{ED}{ET} = \frac{DM}{MC}$ [similitude des triangles *(EDT)* et *(MDC)*] (1)

Mais : $\frac{AK}{KB} = \frac{EH}{HB}$ [similitude des triangles *(ABK)* et *(EBH)*]

Et : $\frac{EH}{HB} = \frac{EM}{MQ}$ [similitude de (EHB) et (EMQ)].

Donc : $\frac{AK}{KB} = \frac{EM}{MQ}$ (2)

D'autre part : $\frac{AK}{KG} = \frac{DH}{HG}$ [similitude des triangles *(DHG)* et *(AKB)*]

Et : $\frac{DH}{HG} = \frac{DM}{MF}$ [similitude des triangles *(DHG)* et *(DMF)*]

D'où : $\frac{AK}{KG} = \frac{DM}{MF}$ (3)

Finalement : $\frac{DM}{MC} = \frac{EM}{MQ}\left(\frac{DM}{MF}\right)$ [d'après (1), (2) et (3)]

Or : $\frac{DM}{MC} = \frac{DM.ME}{CM.ME} = \frac{DM.ME}{(MO)}$

Et : $\frac{DM}{MF}\left(\frac{ME}{MQ}\right) = \frac{DM.ME}{(MO)}$

Or : $\frac{DM}{MF}\left(\frac{ME}{MQ}\right) = \frac{DM.ME}{FM.MQ} = \frac{DM.ME}{LM^2}$

D'où : $\frac{DM.ME}{CM.ME} = \frac{DM.ME}{(MO)} = \frac{DM.ME}{LM^2}$

Donc : $LM^2 = CM.ME$

Remarques d'Ibn Sartāq:

Toutes les propriétés des lignes ordonnées dans le cercle sont valables dans l'ellipse sauf que dans le cercle :

[1] Le diamètre droit est égal au diamètre transverse car les lignes ordonnées sont les cordes perpendiculaires au diamètre et les carrés des moitiés sont égaux au produit des parties du diamètre, obtenues par l'intersection de chaque ligne ordonnée.

[2] Chacune des extrémités de son diamètre, est un sommet.

[3] La largeur de la surface appliquée est la ligne qui tombe entre le pied de la perpendiculaire au diamètre et son extrémité.

[4] La ligne à laquelle est rapporté le diamètre est aussi le diamètre.

[5] Si de l'extrémité du diamètre nous lui menons une perpendiculaire qui lui est égal alors ce serait le diamètre droit et le rapport des deux est l'unité.

[6] Les lignes ordonnées ne peuvent être que des perpendiculaires au diamètre transverse alors qu'elles peuvent être autrement dans les autres sections.

[7] Dans le cercle parallèle à la base ou non antiparallèle, la ligne *ZH* n'existe pas. Mais, on peut considérer n'importe quelle perpendiculaire menée sur *BG* alors que, dans le cercle antiparallèle, la ligne *ZH* existe.

< Corollaire :>

Si *TE* et *ED* sont, respectivement le diamètre droit et le diamètre transverse de l'ellipse, si *LM* est une ligne ordonnée, *EM, MD* les deux parties du diamètre transverse, alors, on a :

$$\frac{TE}{ED}=\frac{LM^2}{EM.MD}$$

< **Preuve :** >

Nous avons : $\frac{LM^2}{EM.MD}=\frac{(MO)}{EM.MD}=\frac{CM}{MD}=\frac{TE}{ED}$ car la hauteur *EM* est commune

<Corollaire 2 :>

L'M' est une autre ligne ordonnée de l'ellipse et *EM', M'D* les deux parties correspondantes du diamètre transverse, on a :

$$\frac{LM^2}{L'M'^2}=\frac{EM.MD}{EM'.M'D}$$

< **Preuve:**>

Nous avons $\frac{LM^2}{EM.MD}=\frac{TE}{ED}=\frac{L'M'^2}{EM'.M'D}$

Donc $\frac{LM^2}{EM.MD}=\frac{L'M'^2}{EM'.M'D}$

D'où, en permutant : $\frac{LM^2}{L'M'^2} = \frac{EM.MD}{EM'.M'D}$

Remarques d' Ibn Sartāq sur certaines propriétés des sections coniques

Soit *(ABGD)* un cône ou un cylindre droit, de base *(AB)*. Soit *(AD) // (AB)*. *(AD)* est donc un cercle.

Soit *(AHT)* un plan coupant le solide selon la section *(AH)* et tel que :
$TI = (BG) \cap (AHT)$.

Soit *(EZT),* un plan contenant l'axe *EZ* du solide et coupant ce dernier en *(ABGD)* et *(BG)* en *TI*, avec $TI \perp BG$.

Comme $\angle B = \angle G$, la section *(AH)* ne peut pas être antiparallèle.

R.1 - Les lignes ordonnées parallèles à TI sont perpendiculaires au diamètre transverse.

Preuve :

On a : $EZ \perp (BG) \Rightarrow (ABGD) \perp (BG)$

Et : $TI \perp BG \Rightarrow TI \perp (ABGD)$

Donc : $\angle ATI = \angle BTI = \frac{\pi}{2}$

Donc toutes les lignes ordonnées parallèles à *TI* sont perpendiculaires à *AH*, le diamètre de la section *(AH)*.

R.2- Le diamètre transverse est plus grand que le diamètre droit

Dans le cylindre [Fig. 2a] :

$\frac{AH}{BG} = \frac{HT}{GT}$ [similitude des triangles *(GTH)* et *(BGA)*]

et : $HT > GT$

car *HT* est la corde de $\angle G = \frac{\pi}{2}$.

Donc : $AH > BG$ et $AH^2 > BG^2$

Or, si *AM* est le diamètre droit de la section, on a :

$$\frac{AH}{AM} = \frac{AH^2}{BG^2} \Rightarrow \text{AH} > \text{AM}$$

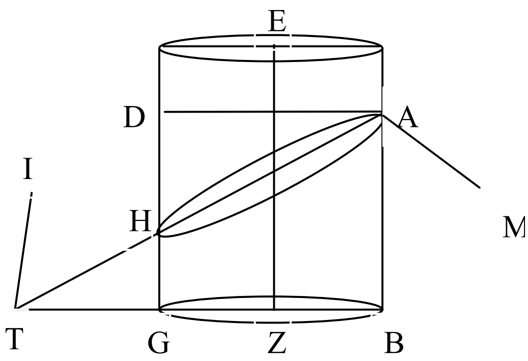
Dans le cône [Fig. 2b] :

* Montrons d'abord que *EK* coupe nécessairement le cercle *(BEG)*

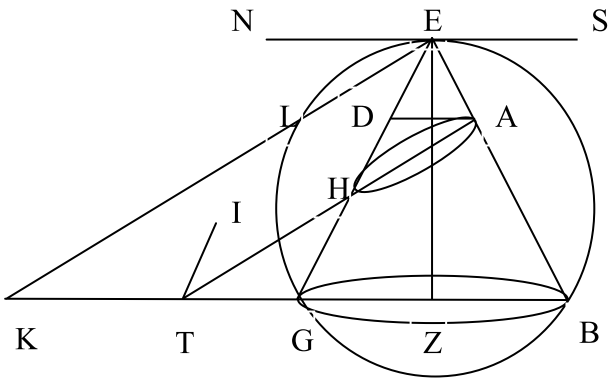
Soit *(BEG),* le cercle circonscrit au triangle *(BEG)* et $EK // AH$.

En effet : EZ est un diamètre du cercle. Donc, si EK était tangent à *(BEG),* on aurait :

$$\angle ZEK = \frac{\pi}{2}$$



[Fig. 2a]



[Fig. 2b]

Or *:* $\angle EZK = \frac{\pi}{2}$

Donc : $EK // BG$

Ce qui est absurde car EK coupe BG en K puisque : $EK // AT$ et AT coupe BG;

Donc EK coupe (BEG) sur l'arc (EG) ou sur l'arc (EB).

Soit NES la tangente en E au cercle *(BEG).* On a :

$NES // BG$ (car $EZ \perp BG$)

Et ES est de l'autre côté de BG, par rapport à EK, parce que EK coupe l'arc *(EG).*

Car, si EK coupait l'arc *(BE), ES* serait du même côté que BG par rapport à EK.

Donc FK coupe ES puis BK. Donc, une surface serait entourée par deux [EK, ES]. C'est absurde.

* Montrons que $AH > AM$

Comme : $\frac{AH}{AM} = \frac{EK^2}{KG.KB}$ [propriété de l'ellipse]

et : $KG.KB = KL.KE$ [E : III; 36]

D'où : $\frac{AH}{AM} = \frac{EK^2}{KL.KE}$

Mais : $KL < KE$

Donc : $KE^2 > KL.KE$

d'où : AH > AM

Anticipation sur les paraboles et les hyperboles :

Si la section est une parabole ou une hyperbole :

1. Ses lignes ordonnées sont aussi perpendiculaires à son diamètre transverse parce qu'elles sont perpendiculaires à *TI.*

2. Son diamètre transverse se prolonge indéfiniment en conservant une même distance par rapport à une arête du cône pour la parabole et en l'accroissant pour l'hyperbole.

R.3- Dans le cône, on a $\dfrac{AK^2}{BK^2} \neq \dfrac{AT^2}{BT.TG}$

Preuve :
Sinon, on aurait :

$[\dfrac{BK^2}{BT.TG} =]\ \dfrac{EK^2}{AT^2} = \dfrac{BK^2}{BT^2}$ [Similitude des triangles (*EBK)* et *(ABT)*]

Donc *: BT = TG.*
Ce qui est absurde[297].

PROPRIETES DES SECTIONS DE CONE OU DE CYLINDRE INCLINES [Fig. 3a & 3b]

R-1 L'intersection d'un cylindre (respectivement) d'un cône incliné avec un plan passant par son axe est un parallélogramme non droit (respectivement) un triangle isocèle.

Preuve :
Soit le cône ou le cylindre *(ABG), AZ* son axe, non perpendiculaire à la base *(BG).* Soit *ZH* perpendiculaire à *(BG)* et *(EZH)* le plan engendré par *EZ, ZH*.
On a :

$$(EZH) \perp (BG) \text{ car } EZ \perp (BG)$$

et on a : $\angle HZB = \dfrac{\pi}{2}$ et $\angle EZB \neq \dfrac{\pi}{2}$.

Supposons : $\angle EZB < \dfrac{\pi}{2}$

Alors :

- Dans le cône :

$\angle EBZ < \dfrac{\pi}{2}$

- Dans le cylindre :

$\angle G > \dfrac{\pi}{2}$ et *(ABG)* est un parallélogramme non rectangle.

[297] - Nous n'avons pas reproduit la démonstration du manuscrit qui nous semble fautive et compliquée. La voici :

$\dfrac{EK^2}{AT^2} = \dfrac{BK^2}{BT^2} = \dfrac{BK.KG}{BT.TG}$. Mais : $\dfrac{BK.BG}{BK.KG} = \dfrac{BG}{GK} = \dfrac{TB.BG}{TB.TG}$. Donc : $\dfrac{EK^2}{AT^2} = \dfrac{BK^2}{BT^2} = \dfrac{BK^2}{BT.TG}$. D'où : $BT = TG$.

- Dans le cône :

Comme $ZB = ZG$ et EZ est commun aux triangles *(EZB)* et *(EZG),* on a : $\angle EZB > \angle EZG$.

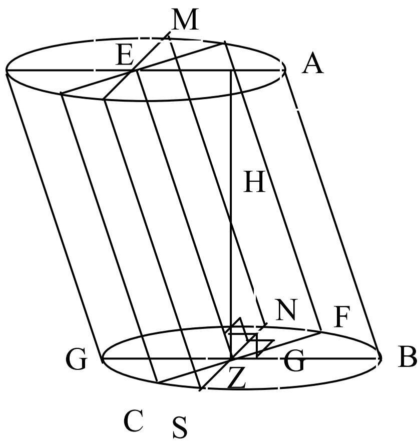
Donc : $EG < EB$. D'où : $\angle EGB > \angle EBG$

Et *(EBG)* est un triangle à côtés et à angles inégaux.

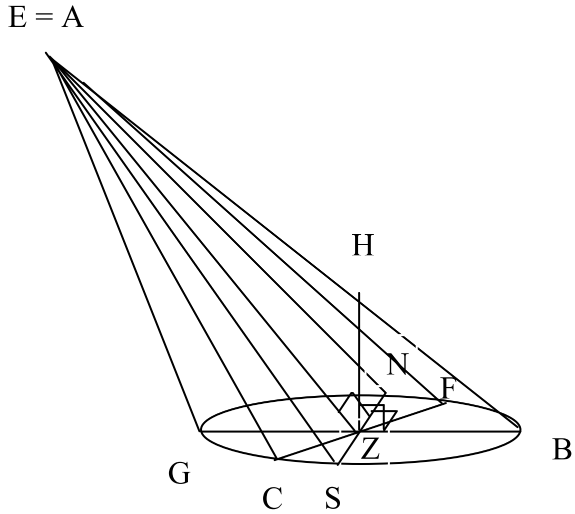
R-2 Soit $NZS \in (BG)$ tel que $NZS \perp BG$. Soit ***(****MNS)* le plan contenant *EZ, ZN* (*M* sur le sommet du cylindre ou confondu avec le sommet du cône). Son intersection avec le solide est un rectangle dans le cylindre et un triangle isocèle dans le cône.

Preuve :

Soit $NZS \perp BG$ dans le plan *(BG),* et



[Fig. 3a]



[Fig. 3b]

Comme : $\angle NZH = \angle NZB = \dfrac{\pi}{2}$, on a : $ZN \perp (BZH)$.

On a aussi : $\angle NZE = \dfrac{\pi}{2}$ et $EZ \perp NS$ et $(MNS) \perp (ABG)$.

Par ailleurs, comme $\angle EZN = \angle EZS$, on a : $\angle N = \angle S$

Donc *(MSN)* est un rectangle dans le cylindre et un triangle isocèle dans le cône.

R-3 : Soit *FZC* sur la base et non perpendiculaire à *BG*. Soit *(EFC)* le plan passant par *EZ* et *FC.* Il engendre le triangle *(EFC)* ou le parallélogramme *(QFC).*

Alors *(EFC)* n'est pas isocèle et *(QFC)* n'est pas rectangle.

Preuve [Fig. 4a et 4b] :

EZH est l'inclinaison de *(MNS)* sur la base car *NS* est leur section commune et :

$ZH \perp NS$; $GZ \perp NS$

$NZ \perp BZH$. Donc *ZF* est non perpendiculaire à *BZH*.

$\angle FZH = \dfrac{\pi}{2}$. Donc : $\angle FZE \neq \dfrac{\pi}{2}$. Sinon : $FZ \perp (BZH)$

Ce qui est absurde.

Comme : $\angle EZF \neq \angle EZC$, on a : $\angle F \neq \angle C$

Donc le triangle *(EFC)* n'est pas isocèle et le quadrilatère *(QFC)* n'est pas rectangle.

Et comme ils ne passent pas par la verticale *ZH*, ils seront alors inclinés.

R-4 : Détermination de l'inclinaison du plan *(MNS)* sur le plan *(BG)* [Fig. 4] :

Soit la sphère de diamètre *GB*, coupée par *EZ* en *T* et par *ZH* en *H*. Soit le grand cercle passant par *H, T.*

Alors : *arc(HT) = complément de l'inclinaison de (MNS) sur (BG).*

Preuve :

Comme $\angle HZT$ est aigu, le cercle *(TK)* est un petit cercle.

Soit les grands cercles engendrés par les plans *(ABG), (MNS), (FCQ).*

Soit le cône de sommet *Z* et de base *(TK).*

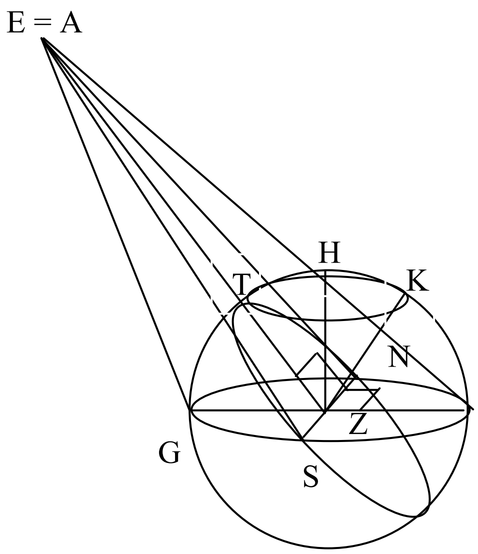
Comme $ZH \perp (BG)$, *H* est un pôle du grand cercle *(BG).*

Or : $(HKT) \perp (MNS)$.

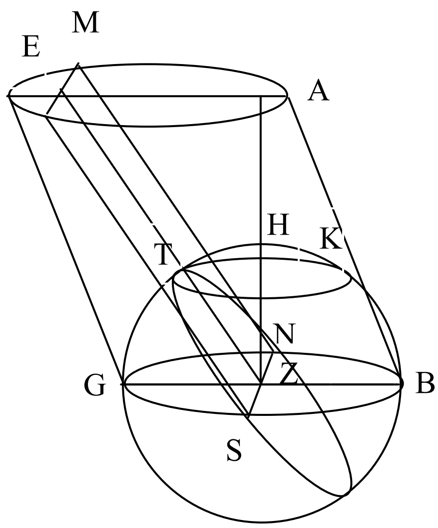
Donc *(HKT)* passe par le pôle de *(MNS).*

Donc arcHT = complément de l'inclinaison de (MNS) sur (BG).

Comme le grand cercle *(MNS)* et le petit cercle *(TK)* coupent *(HT)* en un seul point *T*, ils sont tangents en *T*.



[Fig. 4a]



[Fig. 4b]

R-5 : Détermination de l'inclinaison des deux cercles *C(Z, (FL)), C(Z, (FH)).* [Fig. 4]:

Et tous les autres plans de grands cercles λ, en nombre infini, qui contiennent *ZT* coupent le petit cercle *(TK)*. Car si l'un d'eux *(P)* était tangent à *(TK),* ce serait en *T*.

Donc, le grand cercle *(THK)* qui passe par le pôle *H*, s'il était tangent à *(TK)* en *T* serait perpendiculaire à *(P)* car il passe par son pôle. Or le grand cercle *(THK)* n'est pas perpendiculaire au plan *(MNS)*. Ce qui est absurde.

Soit *(QFC)* un plan passant par l'axe *ZE*. Soit $TK = (QFC) \cap (TK)$. On joint *ZK*. Soit *I* milieu de *TK*. On joint *ZI.*

Comme $TK \subset (TK)$ et *(TK)* est intérieur à la sphère, *I* est à l'intérieur de la sphère.

On prolonge *ZI* jusqu'à *L* sur la surface de la sphère. Soit *HL*, un arc de grand cercle. On a:

$$(TK) // (BG)$$

parce qu'ils ont un pôle commun.

On a : $TK = (TZK) \cap (TK)$. Donc : $TK // FC$

Dans le grand cercle *(TKZ), ZI* joint le centre *Z* de la sphère et *I* le milieu de *TK*. Donc :

$$ZI \perp TK$$

Donc : $\angle KIZ = \frac{\pi}{2}$. D'où : $\angle IZF = \frac{\pi}{2}$ et $\angle HZF = \frac{\pi}{2}$, car $HZ \perp BG$.

Donc : *FZ* perpendiculaire au grand cercle *(HZL)*.

Donc : *F* = pôle de *(HZL)*.

Comme les deux cercles *(FZH)* et *(FZL)* passent par les pôles du cercle *(HL), HL* passe par les pôles de *(FZH) et (FZL)*.

Donc *(HL)* mesure exactement l'inclinaison entre *(FZH)* et *(FZL),* comme *(HT)* mesure exactement l'inclinaison entre *(NZH)* et *(NZT).*

R-6 : Inclinaison de deux plans par rapport à la base.

Si deux plans passent par l'axe *EZ* et sont situés des deux côtés de la perpendiculaire *ZH* à la base *BG,* et si les deux angles formés par leurs intersections respectives avec la base et par l'intersection du plan passant par l'axe, sont égaux, alors leurs inclinaisons par rapport à la base sont égales.

Preuve [Fig. 5]:

Traçons *DZO* sur *(BG)* tel que : $\angle BZO\ \angle GZC$.

Soit *(EZO)* le plan passant par *EZ, ZO*. Soit : $TP = (EZO) \cap (TK)$, *V* milieu de *TP*. On joint *ZV*. Soit *R* le centre du petit cercle *(TK)*. On joint *VR* et *TR*. Comme *(TK) // (BG),* on a:

$$TP // OZ \;\; ; \;\; TR // BZ \;\; ; \;\; TK // FZ$$

Et : $\angle OZF = \angle PTK$; $\angle PTZ = \angle OZB$; $\angle ZTK = \angle BZF$

Donc : $\angle PTZ = \angle ZTK$

Et : $\angle ZIT = \angle ZVT = \frac{\pi}{2}$; et *ZT* est commun. Donc : $ZI = ZV$

Or : $RZ = RV$

Et : $\angle R = \frac{\pi}{2}$, car ZR est un axe.

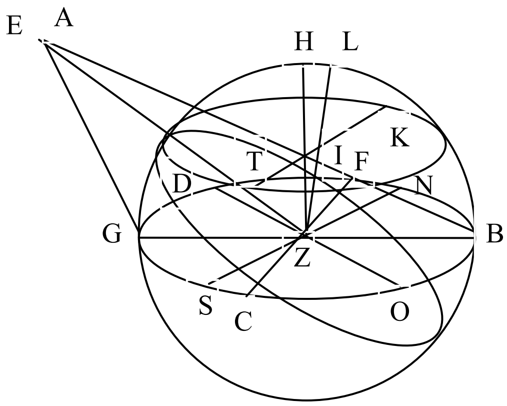
Donc : $\angle RZI = \angle RZV$.

Et : $\angle RZV$ = *complément de l'inclinaison du plan passant par EZ.*

Et $OZD \in (BG)$

Donc : Complément de l'inclinaison de *(EZO)* = complément de l'inclinaison de *(EZF).*

Donc : *Inclinaison de (EZO) = Inclinaison (EZF).*



[Fig. 5]

R-6 : Génération des cercles et des ellipses

Soit *(ABG)* un plan coupant les arêtes d'un cône ou d'un quadrilatère *(DEZ)* inclinés, de base *(ZE).*

Soit $GH = (ABG) \cap (ZE)$, T le centre du cercle de base *(ZE)*, $TG \perp GH$ et DT l'axe du solide.

Alors le plan (ABGH) engendre dans le solide un cercle ou une ellipse. Et, selon le cas, le diamètre droit est égal, plus petit ou plus grand que le diamètre transverse.

Preuve :

Comme le solide est incliné, le triangle ou le quadrilatère engendré par DT et TG peut avoir trois positions.

1e cas : Triangle ou quadrilatère à angles inégaux et passant par la perpendiculaire à la base.

On suppose $\angle E$ aigu et $DE > DZ$. Soit *(ZH)* la base et G sur le prolongement de *ZE.*

Soit AG tel que : $\angle AGZ = \angle BZE - \angle AEZ$ et AG coupant, en B et A, les côtés *DZ, DZ* du cône ou les deux arêtes du cylindre.

Soit $HG \perp EG$; et soit le plan *(AGH).*

Construction d'un cercle antiparallèle à la base dans un cylindre ou un cône

a) Dans le cylindre
On a : $\angle E + \angle Z = 2$ droits ; $\angle E + \ + \angle A = 2$ droits ; $\angle E + \angle G = \angle Z$
Car, par hypothèse : $\angle G = \angle Z - \angle E$

[$\Rightarrow \angle Z + \angle \mathrm{A} = \angle E + \angle Z$]
Donc : $\angle A = \angle E$. Donc le triangle *(AGE)* est isocèle.

Mais : $\angle B = \angle A = \angle E = \angle Z$
Donc le triangle *(BGZ)* est isocèle. D'où : $AB = EZ$.
Donc *(AB)* est antiparallèle à *(EZ)*

b) Dans le cône [Fig. 6b]
Comme : $\angle G + \angle E = \angle BZE$ [par hypothèse]

Et : $\angle G + \angle ZBG = \angle BZE$

On a : $\angle ABD = \angle ZBG = \angle E$.

Donc : $\angle ABD + \angle ADB = \angle E + \angle ADB$

D'où : $\angle BAD = \angle DZE$
Donc *(BA)* est antiparallèle à *(ZE)*.

D'autre part, comme le triangle ou le quadrilatère est perpendiculaire à la base, les lignes ordonnées parallèles à *GH* sont perpendiculaires au diamètre *AB*. La section est donc un cercle.

CONSTRUCTION D'UNE ELLIPSE DANS UN CYLINDRE OU UN CONE

Construisons $\angle EGI > \angle Z - \angle E$.
GI coupe *EA* en *I* et *ZB* en *K*, avec $I \neq D$ dans le cône.
Construisons $\angle EGI < \angle Z - \angle E$.
GL coupe *EA* en *L* et *ZB* en *M*.
Comme :

$\angle EZK = \angle ZKG + \angle KGZ$

et : $\angle ZKG + \angle KGZ < \angle EGK + \angle GEA$

car : $\angle EZK < \angle EGK + \angle GEA$, par hypothèse. D'où :

$\angle GKZ < \angle GEA$

Donc : $\angle KIE < \angle GEA$ (1)

Il reste : $\angle I$ externe

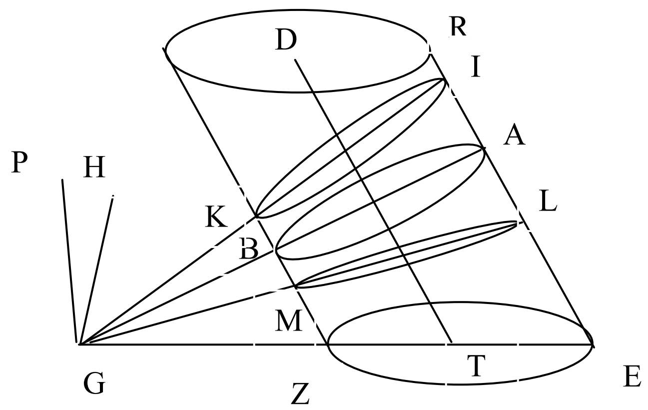
Mais : $\angle Z = \angle M + \angle G$ et $\angle Z = \angle E + \angle \mathrm{MGE}$.

Donc : $\angle LMK > \angle E$ (2)

et il reste : $\angle ALM < \angle Z$

Dans le cylindre [Fig. 6a]
Comme : $\angle I < \angle E$ [d'après (1)], on a : $IG > GE$

Et : $KG > GZ$ [similitude des triangles *(GKZ)* et *(GIE)*]



[Fig. 6a]

Et puisque : $\dfrac{EK}{EZ} = \dfrac{KG}{GZ}$ [similitude des triangles *GKZ* et *GIZ*], on a :

$IK > EZ$ (3)

Par ailleurs, on a : $\angle L > \angle E$ [d'après (2)]. D'où : $LG < GE$

De même : $MG < GZ$ et $\dfrac{LG}{GE} = \dfrac{LM}{EZ}$ entraînent : $IM < EZ$ (4).

Et il est clair que les plans *(IGH)* et *(LGH)* engendrent des ellipses de diamètres, respectivement, *IK* et *LM*, de lignes ordonnées perpendiculaires, respectivement, à *IK* et *LM.*

[Si on note d_{IK} et d_{LM} les diamètres droits des ellipses *(IK)* et *(LM)],* on a :

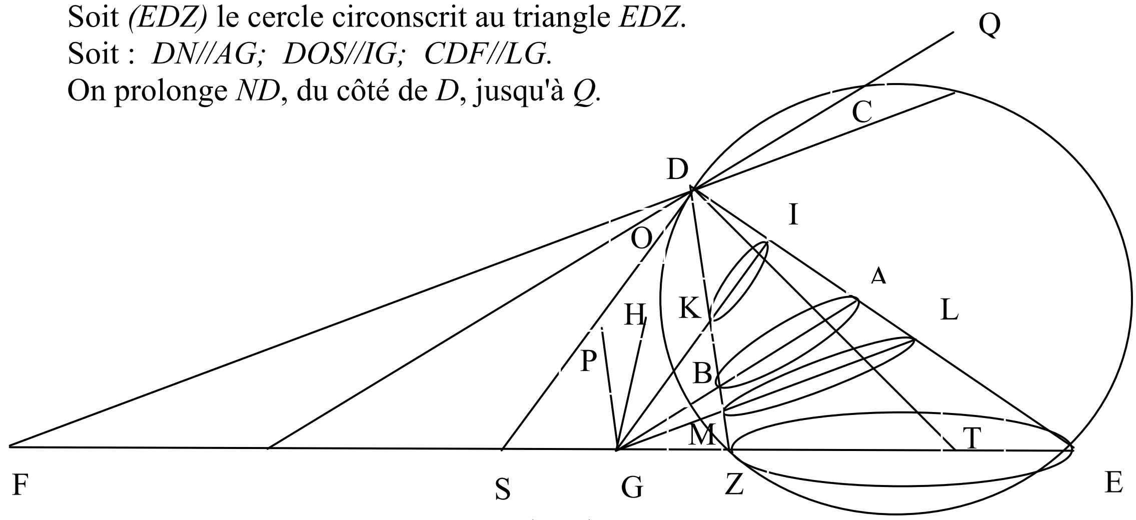
$$\frac{IK}{d_{IK}} = \left(\frac{IK}{EZ}\right)\left(\frac{IK}{EZ}\right) \quad \text{et} \quad \frac{LM}{d_{LM}} = \left(\frac{LM}{EZ}\right)\left(\frac{LM}{EZ}\right) \quad \text{[propriété de l'ellipse]}$$

D'où :

$d_{IK} < KI$ [d'après (3)] et $d_{LM} < MI$ [d'après (4)]

Et on a vu que : $d_{AB} < AB$

Dans le cône [Fig. 6b] :
Soit *(EDZ)* le cercle circonscrit au triangle *EDZ*.
Soit : *DN//AG; DOS//IG; CDF//LG.*
On prolonge *ND*, du côté de *D*, jusqu'à *Q*.



[Fig. 6b]

Comme :

$$\angle ADQ = \angle DAG \text{ et } \angle BDN = \angle DBA,$$

on a :

$$\angle EDQ = \angle EZD \text{ et } \angle ZDN = \angle ZED \quad (5)$$

Comme $\angle QDN$ est extérieur aux arcs (*DE*) et (*DZ*), on a :

Arc*(EZD)* = arc capable de $\angle EDQ$ et arc*(ZED)* = arc capable de $\angle ZDN$

Donc *DN* est tangent au cercle *(DEZ)* [d'après (5)]. D'où :

$$DN^2 = EN.NZ \quad \text{[puissance de } N \text{ par rapport au cercle } (DEZ)]$$

Et comme $AB = GH$, on a :

$$\frac{DN^2}{EN.NZ} = \frac{AB}{GH}$$

De même : *GKI* est entre *DN* et *GBA*; et *DOS* est entre *DN* et *GBA*. Donc *DOS* coupe l'arc *DZ* en *O*.

Comme : $\dfrac{DS^2}{ES.SZ} = \dfrac{DS^2}{DS.SO} = \dfrac{IK}{GH}$ et $DS > SO$, on a : $IK > GH$

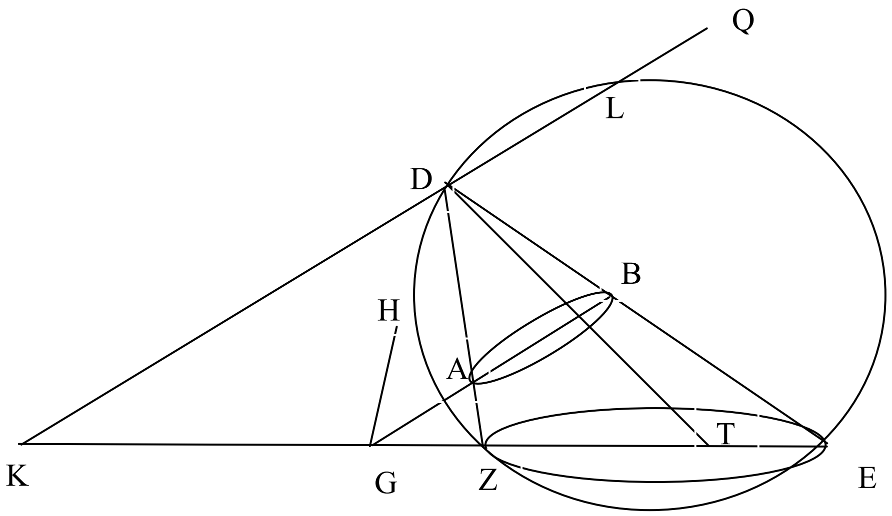
De même : *GML* est entre *GBA* et *EZ;* et *DN* est entre *CDF* et *DS.*
Donc *(CDF)* coupe *DE* en *C*.
Mais :

$$\frac{DF^2}{EF.FZ} = \frac{DF^2}{CF.FD} = \frac{LM}{GH}$$

et : $DF^2 < CF.FD$ [car $DF < CF$].
Donc : $LM < GH$

[Problème] :
Soit un cône ou un cylindre *(DEZ),* avec les données précédentes.
Alors, on a : $BA > GH$

Preuve [dans le cas du cône] [Fig. 7] :
Soit *(DEZ)* le cercle circonscrit au triangle *(DEZ)*. Soit $DLK \,//\, BAG$.



[Fig. 7]

Comme : $\angle KDA = \angle DAB$, on a : $\angle DAB < \angle AEZ$ $[\angle AEZ = \angle KDA + \angle EKD]$

Et : $\angle DAB < \angle EZD$ $[arc(LG) < arc(DE)]$

Donc *KD* ne peut être tangent au cercle *(EDZ)* et ne peut couper l'arc *DZ*. Sinon on aurait :

$$\angle KDE \geq \angle KZD$$

Ce qui est absurde.
Donc *DK* coupe l'arc *DE* en *L*.
Et :

$$\frac{BA}{GH} = \frac{KD^2}{ZK.EK} = \frac{KD^2}{DK.KL}$$

Donc :

$$BA > GH \quad [\text{car } KD > KL]$$

2e cas : Triangle ou quadrilatère incliné sur la base et à angles égaux**.**
Comme $\angle E = \angle Z$, la section *(AB)* ne peut être antiparallèle.
Comme le plan passant par l'axe est incliné, les lignes ordonnées sont inclinées sur le diamètre transverse.

Dans le cylindre :

Comme : $\frac{AB}{EZ} = \frac{BG}{ZG}$,

On a :

$$AB > EZ \text{ et } AB > GN \text{ [car } EZ > GH]$$

Dans le cône incliné :

On construit le cercle (DEZ) circonscrit au triangle DEZ. On mène DK // BG [avec $BG = DEZ \cap$ (plan coupant)].

Et on montre de même que : $AB > GH$.

3e cas : Triangle ou quadrilatère incliné sur la base et à angles inégaux.

* La section antiparallèle existe comme dans le 1e cas

* Les lignes ordonnées ne sont pas perpendiculaires au diamètre transverse comme pour les triangles et les quadrilatères inclinés à angles égaux.

* La section antiparallèle ne peut pas être un cercle parce que ses lignes ordonnées ne sont perpendiculaires au diamètre transverse.

* Parmi les sections antiparallèles du cône ou du cylindre à angles inégaux, il existe une ellipse dont les lignes ordonnées sont inclinées sur le diamètre et dont le diamètre transverse est égal au diamètre droit.

* Il existe des ellipses dont les lignes ordonnées sont inclinées sur le diamètre et dont les transverses sont inférieurs aux droits; et d'autres dont les transverses sont supérieurs aux droits.

Problème : Relation entre les angles ordonnés des sections et leurs distances angulaires à GH [Fig. 8a et 8b]

Soit *(DEZ)* un cône ou un cylindre. Soit *P(DEZ)* le plan incliné par rapport à la base et passant par l'axe. Soit *(IKG), (ABG), (LMG),* trois sections et $GH \perp EG$.

Preuve :

Comme *P(DEZ)* est incliné et $GH \perp EG$, GH n'est perpendiculaire ni à GL, ni à GA, ni à GI.

Donc $\angle HGP \neq 1\text{droit}$, car *P(DEZ)* est incliné.

Donc $\angle HGP$ = inclinaison de *P(DEZ)*.

Soit une sphère de centre G.

Comme : $\angle EGP = \angle EGH = 1\text{droit}$, on a : $EG \perp (HGP)$ et $G(HGP) \perp G(KGE)$

Mais : $arc(HP) < (PGH)/2$, car $\angle HGP$ est un angle aigu.

Donc [si on $d(A,B)$ la plus courte distance entre A et B] : $HP = d(H$, périmètre(KGZ).

Donc : $d(H$, $KG \cap$Périm(KGZ)) $<$ $d(H$, $BG \cap$Périm(KGZ)) $<$ $d(H$, $GM \cap$Périm(KGZ)).

Comme les rayons de GH, GK, GB, GM sont égaux et que $arc(HK)$, $arc(HB)$, $arc(HM)$ sont des arcs de grands cercles croissants, on a :

$$\angle HGK < \angle HGB < \angle HGM$$

[Si on note α_{AB} l'angle de la ligne ordonnée AB].

Mais, on a :

$$\alpha_{AK} = \angle HGK \text{ ; } \alpha_{AB} = \angle HGB \text{ ; } \alpha_{LM} = \angle HGM$$

donc :

$$\alpha_{AK} < \alpha_{AB} < \alpha_{LM}$$

Différences entre sections coniques en fonction du degré d'inclinaison de leurs solides respectifs :

1. Différence d'inclinaison des triangles et des quadrilatères associés;
2. Différence entre les sections associées à une même inclinaison :

- Pour une même inclinaison, il existe 3 types de sections en fonction de la longueur du diamètre droit [D_d] par rapport au diamètre transverse [D_t] : $D_d = D_t$; $D_d < D_t$; $D_d > D_t$.
- Il existe 2 types de sections en fonction de : $D_d \perp D_t$; D_d non $\perp D_t$.
- Il existe une infinité de sections différentes en fonction l'inclinaison

(1) Ellipse :

a) $L_0 \perp D_t$:

- $D_d = D_t \Rightarrow$ Ellipse = cercle;
- $D_d \neq D_t \Rightarrow$ Ellipse $\neq$ cercle;

b) L_0 *non* $\perp D_t$:

- Si la section est antiparallèle $\Rightarrow D_d = D_t$;
- Sinon : $D_d = D_t$.

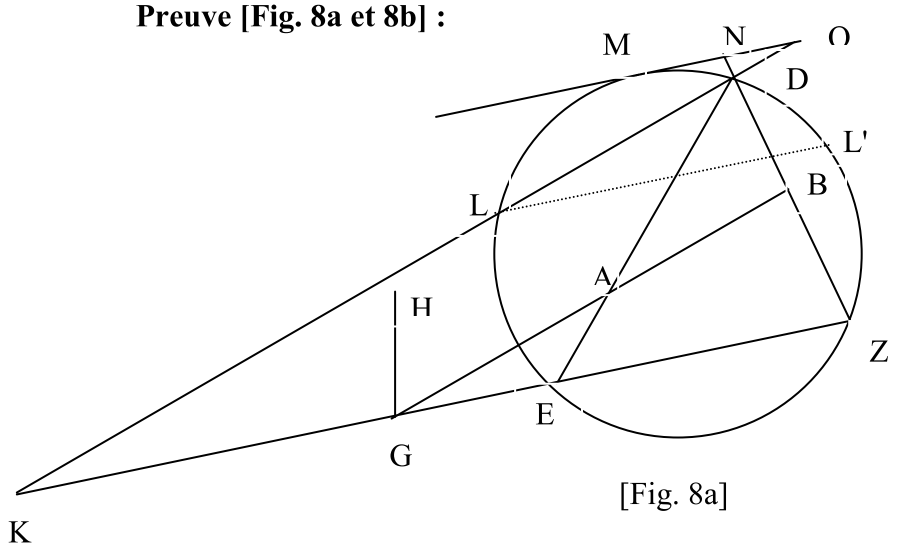
c) Pour toute ellipse :

Soit DE un côté quelconque du triangle associé. Soit MSN tangent en M au cercle circonscrit à DEZ et parallèle à EZ. Soit $S = DE \cap MNS$.

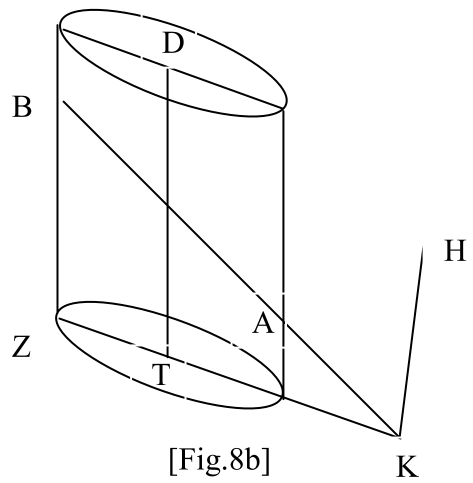
Alors :

$$\frac{D_t}{D_d} > \frac{DE}{DS}$$

Preuve [Fig. 8a et 8b] :



[Fig. 8a]



[Fig.8b]

Comme : $\dfrac{D_t}{D_d} = \dfrac{AB}{D_d} = \dfrac{KD^2}{KE.KZ} = \dfrac{KD^2}{KL.KD} = \dfrac{KD}{KL}$

Et :

$$\frac{KD}{KL} \geq \frac{DE}{DS} \quad \text{ou} \quad \frac{KD}{KL} \geq \frac{DZ}{ZN}$$

d'après les études sur les cordes et les cercles.

Donc :

$$\frac{AB}{D_d} \geq \frac{DE}{DS} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{D_d} \geq \frac{DZ}{ZN}$$

REMARQUES ET COMMENTAIRES :

1. [M: 4.3.1 (4)] = [C : I; 13, 21].

2. Enoncés

- L'énoncé de [M: 4.3.1 (4)] correspond à celui de [C : I; 13], pour la section de cône, et à celui de [S : I; 17] pour la section de cylindre.

- L'énoncé du corollaire 1 correspond à celui de [C : I; 21], pour la section de cône, et à celui de [S : I; 17] pour la section de cylindre.

- Dans sa rédaction, Ibn Sartāq a énoncé de nombreux petits résultats qui semblent être des compléments de sa part.

- Le texte d'Ibn Sartāq contient six définitions. Elles concernent les différents éléments de l'ellipse. Elles correspondent à celles d'Apollonius : cinq appartiennent au premier groupe des définitions des *Coniques* (celles qui précèdent les propositions) et une, la cinquième, appartient au second groupe qui est exposé après la proposition.

3. Démonstration

- La rédaction d'Ibn Sartāq contient deux parties bien distinctes : la première correspond, au-delà du style de ce mathématicien, au texte d'al-Mu'taman. La structure mathématique, les figures et les définitions de cette partie, qui correspondent à celles de [C : I; 13, 21], sont identiques ou semblables à celles des *Coniques*.

- On peut s'interroger sur les raisons qui ont amené Ibn Sartāq à consacrer les deux tiers de son exposé à des développements concernant les propriétés de l'ellipse. Elles peuvent avoir été motivées par la difficulté du sujet à une époque, le XIII^e siècle, où les *Coniques* n'étaient peut-être plus un objet d'étude aussi central pour les géomètres, les algébristes et les astronomes, qu'il ne l'a été aux IXe-XIe siècles.

- Comme notre travail est centré sur le contenu de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman, comme un témoin exceptionnel de l'étude des coniques en Andalus, au XIe siècle, il n'était peut-être pas nécessaire de conserver, dans notre édition de la rédaction d'Ibn Sartāq, les nombreux compléments ajoutés par ce dernier et qui sont étrangers au texte originel d'al-Mu'taman. Mais, nous avons décidé de les garder pour deux raisons. En premier lieu, leur contenu pourrait aider le lecteur à suivre l'exposé d'al-Mu'taman qui est souvent d'une grande concision. En second lieu, les compléments d'Ibn Sartāq ont un intérêt pour eux-mêmes dans la mesure où ils sont les témoins d'une tradition des *Coniques*, celle de l'Asie Centrale des XIIIe-XIVe siècles, qui n'a pas encore fait l'objet d'étude.

Les références bibliographiques disponibles évoquent, en particulier, des contributions de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī et de Muḥyī ad-Dīn al-Maghribī (XIIIe s.)[298]. Mais, ces écrits n'ont pas encore fait l'objet d'une étude détaillée et d'une analyse comparative[299].

- La partie de la proposition [M : IV.3.1(4)], qui traite de la génération de l'ellipse par intersection d'un cylindre et d'un plan non parallèle à la base et non parallèle à l'axe, suggère les remarques suivantes :

La caractérisation de l'ellipse est identique à celle de Sérénus dans sa proposition [I : 17][300].

Le reste de la rédaction correspond aux propositions [I : 15, 16, 19] du même ouvrage. Mais, on constate que les deux textes diffèrent au niveau de la formulation de l'énoncé, au niveau de la figure et du lettrage qui l'accompagne.

La démonstration, exposée par Ibn Sartāq, semble s'inspirer de la démarche d'Apollonius dans le cas du cône.

Quoi qu'il en soit, cette caractérisation de l'ellipse diffère de celle que donne Thābit Ibn Qurra (m. 901) dans son "*Traité sur les sections de cylindre*"[301]. La rédaction d'al-Mu'taman pourrait donc être, soit une adaptation, au cas du cylindre, de la démarche d'Apollonius, soit une reprise de l'une ou l'autre des contributions de l'un des frères Banū Mūsā (IXe s.) ou d'Ibn as-Samḥ (m. 1035)[302].

Comparée à celle d'al-Mu'taman dans les propositions qui nous sont parvenues, la rédaction d'Ibn Sartāq ne respecte pas la structure grecque habituelle : l'énoncé général de la proposition (*protase*), l'exposé du même énoncé à l'aide des éléments d'une figure (*ectèse*), la justification déductive de la propriété à démontrer (*apodeixis*) ou la construction de l'objet cherché (*kataskeué*) et, enfin, la conclusion qui

---

[298] - Ms. Téhéran, Sipahsālār n° 556.

[299] - Cette partie du § 5 devrait être déplacée dans le chapitre de l'introduction qui contiendra tous les commentaires sur le contenu et le style de la rédaction d'Ibn Sartaq.

[300] - Sérénus : *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*, P. Ver Eecke (trad.), Paris, Blanchard, 1969, pp. 27-30.

[301] - Thābit Ibn Qurra : *Risāla fī quṭūᶜ al-usṭuwāna wa basīṭuhā* [Epître sur les sections de cylindre et sur leurs surfaces], R. Rashed (édit.). In Les mathématiques infinitésimales, Londres, al-Furqān, pp. .

[302] - T. Levy & R. Rashed : *Ibn al-Samḥ, les sections planes du cylindre et la détermination de leurs aires*. In R. Rashed : *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, Volume I, Londres, Al-Furqān, pp. 885-973.

reformule l'énoncé de la proposition (*symperasma*). Ce sera le cas aussi dans les autres propositions rédigées par Ibn Sartāq[303].

4. Les compléments d'Ibn Sartāq

- Les deux autres parties de la rédaction de la proposition IV. 3 .1(4) sont un long complément au texte d'al-Mu'taman. Il s'agit d'un ensemble de rappels, de remarques, de compléments et d'explicitations concernant les propriétés du cercle et de l'ellipse obtenus comme intersection d'un cône ou d'un cylindre par un plan d'inclinaison donnée.

Dans la première de ces deux parties, Ibn Sartāq :

a) Explicite certaines propriétés de l'ellipse, selon qu'elle est engendrée par intersection de solides droits ou obliques.

b) Précise la forme des quadrilatères et des triangles engendrés par l'intersection du cylindre et du cône par un plan passant par leur axe.

Dans la seconde, il commence par montrer comment mesurer l'inclinaison d'un plan par rapport un autre. Puis il utilise les inclinaisons des plans qui engendrent des ellipses pour comparer les diamètres des ellipses, comparer les angles de leurs lignes ordonnées et donner une classification des différents types d'ellipses en fonction de l'inclinaison de leur plan et ce qui en découle en ce qui concerne leurs diamètres droits et leurs diamètres transverses.

5. Références

- [E : VI; 4, 23], [C : I; 4] .

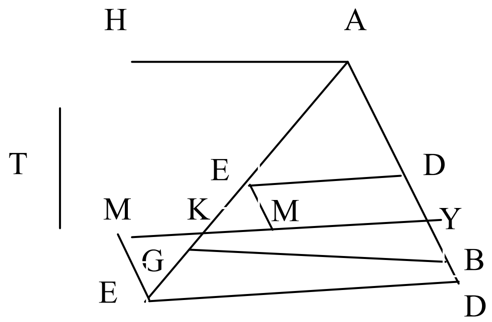
[303] - Euclide : *Les Eléments*, B. Vitrac (trad.), Volume 1, Paris, Presses Universitaires de France, 1990, p. 137.

Proposition IV. 3. 1(5) :

I- Etant donnée une section conique dans un cône donné, déterminer, dans un cylindre donné, une section conique identique à celle du cône, c'est-à-dire dont tous les éléments sont égaux à ceux de la section de cône donnée.

Lemme 1

On se donne un triangle *(ABG)* et un segment *T*. Mener entre les deux côtés *AB* et *BG* un segment $DE \,//\, AH$ et tel que $DE = T$



[Fig. 1]

Preuve

Soit $YK \,//\, AH$. Si $YK = T$, c'est le segment cherché.

Si $YK \neq T$, soit *M* sur *KY* tel que $YM = T$.

Soit $ME \,//\, AB$ tel que *E* soit sur *AG*.

Menons $ED \,//\, AH$

Comme le quadrilatère *(YE)* est un parallélogramme, on a :

$$ED \,//\, AH \text{ et } ED = YM = T$$

Lemme 2

Soit *(ABG), (DEZ)* deux triangles semblables, soit leurs cercles circonscrits de centres respectifs *F* et *Q*.

Soit *THK* et *NMS* deux tangentes respectivement à *C(F, ABG)* et *C(Q, DEZ)* au point *H* et *M* respectivement les *arcs(BG) et (EZ)* et telles que $THK \,//\, BG$ et $NMS \,//\, EZ$

Soit $T = THK \cap AB$, $K = THK \cap AG$, $N = NMS \cap DE$ et $S = NMS \cap DZ$

Alors : $\dfrac{AB}{BT} = \dfrac{DE}{EN}$

Preuve [Fig. 2] :

Menons *FH* et *QM* alors $FH \perp TK$ et $QM \perp NS$. Donc $FH \perp BG$ et $QM \perp EZ$

Soit *L* et *O* les milieux respectifs des cordes *BG* et *EZ*.

Joignons *BH* et *EM*.

Alors, on a :

$$\angle HLG = \angle MOZ$$

On a aussi : *arc(BHG)* semblable à *arc(EMZ), arc(HG)* = $\frac{1}{2}$ *arc(BHG)* *et* *arc(MZ)* = $\frac{1}{2}$ *arc(EMZ).*

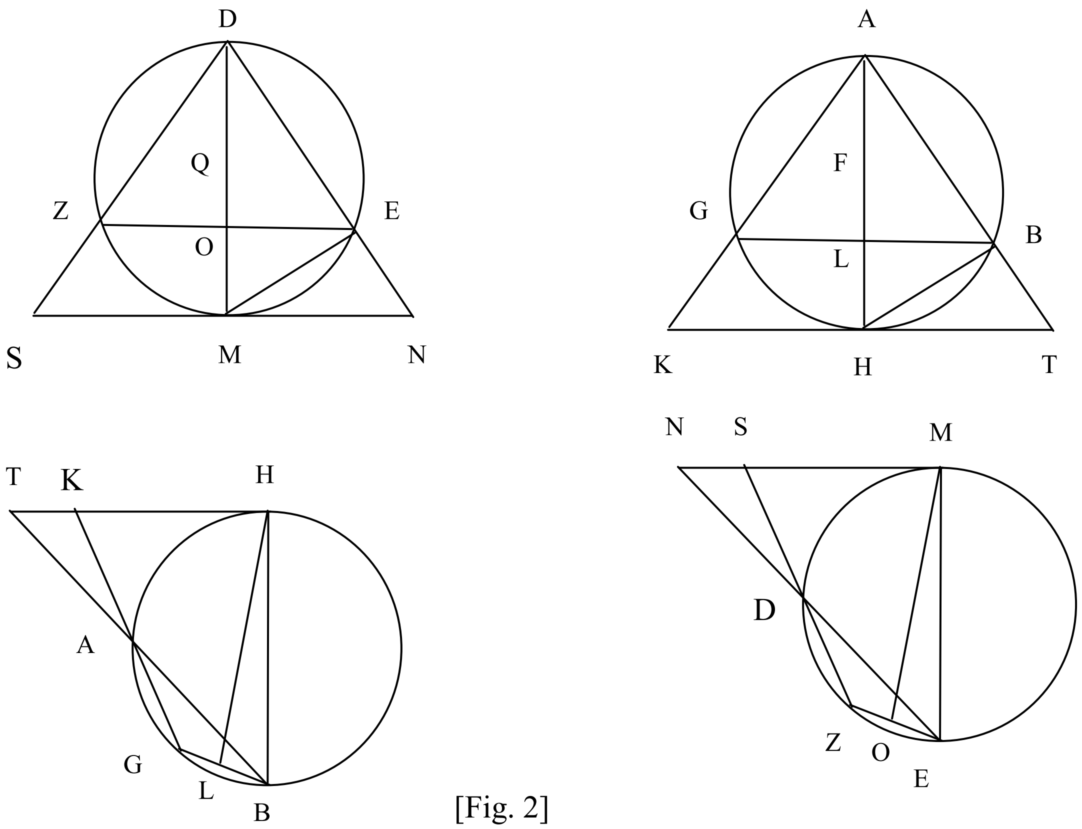
Donc *arc(HG)* semblable à *arc(MZ).*

Donc $\angle HBL = \angle MEO$.

Mais : $\angle HLG = \angle MOZ$.

Donc : $\angle BHL = \angle EMO$.

Donc les triangles *T(HBL)* et *T(MEO)* sont semblables.



[Fig. 2]

On a aussi :

$\angle TBL = \angle NEO$

Donc : $\angle THB = \angle NME$ et $\angle T = \angle N$.

Donc : *T(TBH)* et *T(NEM)* sont semblables.

D'où :

D'où : $\frac{BH}{EM} = \frac{BT}{EN} = \frac{BL}{EO} = \frac{BG}{EZ} = \frac{AB}{DE}$

Donc : $\frac{AB}{DE} = \frac{BT}{EN}$

D'où, après permutation : $\frac{AB}{BT} = \frac{DE}{EN}$

Lemme 3 :
Soit *T(ABG)* et *T(DEZ)* deux triangles rectangles, respectivement en *B* et *E*, avec $AB = DE$. Soit *H* et *T* respectivement sur *AB* et *DE*, tels que : $BH = ET$ ou $BH = DT$.
Soit $HY // BG$ et $TK // EZ$ [avec *Y* sur *AG* et *K* sur *DZ*].
Soit $YM // BA$ et $KN // ED$ [avec *M* sur *BG* et *N* sur *EZ*].
Alors : $BG = EZ \Leftrightarrow (BY) = (EK)$

Preuve [Fig. 3a et 3b] :

(1) $BG = EZ \Rightarrow (BY) = (EK)$

a) Si $BH = ET$

Supposons $BG = EZ$. Donc : $\frac{AB}{BG} = \frac{DE}{EZ}$, car $AB = ED$ par hypothèse.

Or : $= \frac{YM}{MG} = \frac{AH}{HY} = \frac{AB}{BG} = \frac{DE}{EZ} = \frac{KN}{NZ} = \frac{DT}{TK}$

[Fig. 3a et 3b]

Mais : $BH = ET$ [par hypothèse]. Donc $KN = YM$ à cause du parallélisme.
On a aussi : $\frac{YM}{MG} = \frac{KN}{NZ}$ [similitude des triangles]. Donc : $MG = NZ$.
D'où : $BM = EN$
Donc : $(BY) = (EK)$

b) Si $BH = DT$

Alors $MG = EN$ [car : $\frac{YM}{MG} = \frac{DT}{EN}$ et $YM = BH = DT$]

On a aussi : $BM = HY = NZ$ et $\frac{HY}{HA} = \frac{KT}{TD}$.
Donc $(BY) = HY.\ BH = HY.\ TD = = HA\ .TK = ET.TK = (\ EK)$

Autre preuve :

On a : $\frac{GM}{MY} = \frac{ZN}{NK}$

Donc : $GM.\ NK = EN.\ NK = ZM.\ ZN = BM.\ MY.$
D'où : $(EK) = (BY)$

(2) $(BY) = (EK) \Rightarrow BG = EZ$

Preuve :
On a : $YH.YM = (BY) = (EK) = NK.KT.$
Donc :

$$\frac{YH}{NK} = \frac{KT}{YM}$$

D'où :

$$\frac{YM}{KT} = \frac{KN}{YM}$$

a) Si $BH = ET$
On a : $YH = TK$.
Donc :

$$\frac{YH}{TK} = \frac{HA}{TD} \text{ et } HA = TD$$

D'où :

$$\frac{GB}{BA} = \frac{ZE}{ED}$$

[car : $\frac{YH}{TK} = \frac{HA}{TD} \Rightarrow \frac{YH}{HA} = \frac{TK}{TD}$,

et $\frac{GB}{BA} = \frac{YH}{HA}$; $\frac{ZE}{ED} = \frac{TK}{TD}$]

Mais : $BA = ED$. Donc : $BG = EZ$

b) Si $BH = TD$
On a :

$$\frac{YH}{ET} = \frac{YH}{HA} = \frac{KT}{BH} = \frac{KT}{TD}$$

[car $BH.HY = ET.KT \Rightarrow \frac{YH}{ET} = \frac{KT}{BH}$;

mais : $ET = HA$ et $BH = TD$. D'où : $\frac{YH}{HA} = \frac{KT}{TD}$]

D'où : $\frac{GB}{BA} = \frac{ZE}{ED}$.

Donc : $BG = EZ$

Soit (*C*) un cylindre et (*C'*) un cône donnés, (*E*) une ellipse de (*C*). Existe-t-il une ellipse (*E'*) de (*C'*) identique à (*E*) ?

ANALYSE DU PROBLEME:

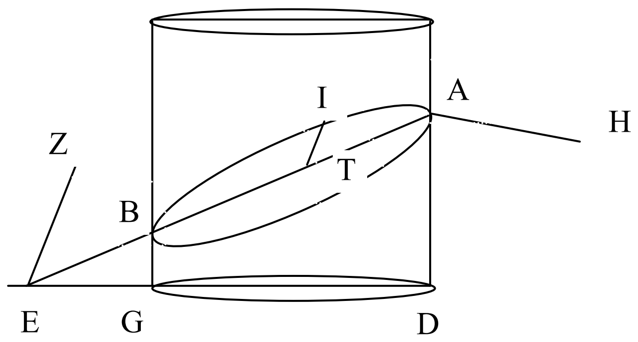
On suppose que (*E*) = *(E')* **:**

Soit *(AB) = (E),* l'ellipse donnée dans le cylindre *(ABGD)* de base *(GD).*
Soit $ZE = P(AB) \cap P(GD)$, avec *E* sur *GD* et $ZE \perp GD$.
Soit $AH = D_d(E)$, le diamètre droit de *(AB)* et *TI* une ligne ordonnée de *(E)*
Soit *(KLM),* le cône donné et *(NS) = (E').*
Soit $NR = D_d(E')$, le diamètre droit de la section *(NS).*
Soit *J* sur *(NS)* tel que *NJ = AT*. Soit *JT'* la ligne ordonnée issue de J.
Alors, si *(E) = (E'),* il en découle

- *P(AB) = P(NS)*
- *AB = NS*
- $\angle ATI = \angle NJT'$
- *TI = JT'*

Et si nous posons le point *A* sur le point *N* et nous superposons le diamètre *AB* sur le diamètre *NS*, alors tous les éléments de (*E)* se superposent aux éléments correspondants de (*E'):*

B sur *S, T* sur *J,* $\angle ATI$ sur *NJT', I* sur *T',* Périmètre de (*E)* sur Périmètre de (*E')*, et toute ligne ordonnée de la section du cylindre qui est à une certaine distance du sommet de la section se superposera à la ligne ordonnée de la section de cône qui est à la même distance de son sommet.



[Fig. 4]

AUTRES PROPRIETES DE LA SECTION DU CONE DECOULANT DE L'EGALITE DES DEUX SECTIONS

(1) $C_d(E) = C_d(E')$

Preuve : [Fig 5 et Fig.6]

On a : $AT = NJ$, $\angle BAH = \angle SNR = \dfrac{\pi}{2}$, $NS = AB$ et $TI = JT'$.

D'où : $JN.NR = TI^2 = JT'^2 = AT.AH$ [M; IV.3.1(4)]

Donc : $AH = NR$ (1)

Dans le cône

Soit (LM) la base du cône. Soit $OF = (LM) \cap (NS)$, avec O sur le prolongement de LM.

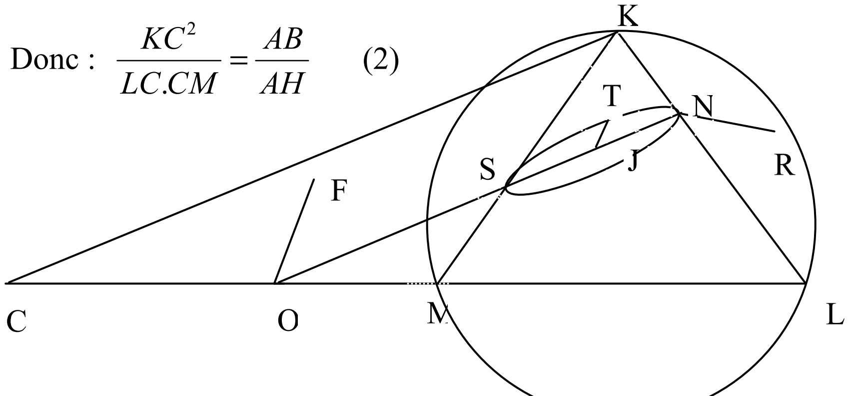
Soit $KC \,//\, NO$, $T(KLM)$ le triangle du cône (KLM) et $C(KLM)$ le cercle circonscrit à $T(KLM)$.

On a :

$$\frac{KC^2}{LC.CM} = \frac{NS}{NR} \text{ [M; IV.3.1(4)]}$$

et : $\dfrac{NS}{NR} = \dfrac{AB}{AH}$ [d'après (1)]

Donc : $\dfrac{KC^2}{LC.CM} = \dfrac{AB}{AH}$ (2)



[Fig. 5]

[1. a] Si $AB = AH$ alors KC est tangent au cercle [au point K]

Preuve [Fig. 5] :

$AB = AH \Rightarrow KC^2 = LC.CM$ [d'après (2)]

Supposons que KC coupe le cercle en un autre point Q

Donc : $KC.CQ = LC.CM$ [puissance de C par rapport à $C(KLM)$]

Alors : $KC.CQ = KC^2$.

Ce qui est absurde car :

$KC.CQ < KC^2$ ou bien $KC.CQ > KC^2$ [selon le cas de figure]

[1.b] Si Q est sur K, le triangle $T(KLM)$ n'est pas isocèle

Preuve [Fig. 5]:

Soit U milieu de LM. On joint et KU
Si $T(KLM)$ était isocèle, alors $\angle KUL = 1droit$, et KU serait sur un diamètre.
Donc : ∠UKC = 1droit, car CK est une tangente. Donc KC // LM.
Ce qui est absurde.

[1. c] : Dans le triangle (KLM), MK < LK

Preuve [Fig. 5] :

$LC.CM = KC^2 \Rightarrow$ donc $\dfrac{LC}{KC} = \dfrac{KC}{CM}$ et $\angle C$ est commun.

Donc : $T(LCK)$ et $T(KCM)$ sont semblables et $\angle CKM = \angle CLK$ [interception de *l'arc(MK)]*.

Mais $\angle LMK > \angle CKM$ [$\angle LMK = \angle CKM + \angle MCK$,
Donc : $MK < LK$

[2] Si $AB > AH$, alors KC coupe le cercle en un point Q du côté de KM

Preuve :

$AB > AH \Rightarrow KC^2 > LC.CM$

- Si KC est tangent au point K alors $KC^2 = LC.CM$. Ce qui est absurde.
- Si KC coupe le cercle en un point Q, compris entre les deux points K et L, avec $KC^2 > LC.CM$ alors $KC^2 > KC.CQ$. Ce qui est absurde.

[3. a] Si $AB < AH$, KC coupe le cercle en un point Q du côté de KL

Preuve :

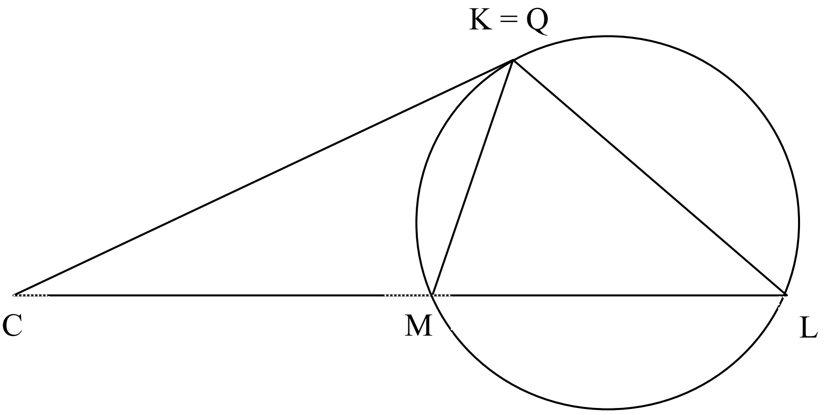
Supposons le contraire : KC est tangent ou sécant en un point Q entre les points K et M.

Donc :

$KC^2 \geq KC.CQ$

Or : $KC^2 < KC.CQ$

Ce qui est absurde.



[Fig. 6]

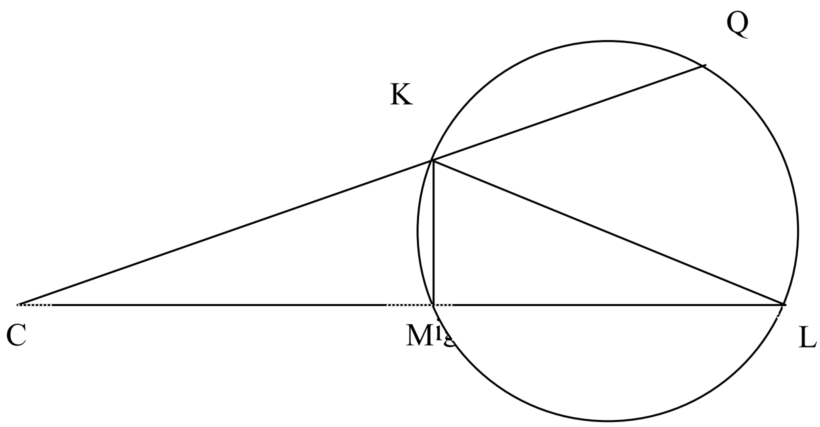
[3. b] Si Q est sur $arc(LK) \Rightarrow MK < LK$

Preuve [Fig. 6] :

Soit les deux triangles $T(KCM)$ et $T(LCQ)$, de bases non parallèles. Ils ont l'angle $\angle C$ commun et deux de leurs côtés vérifient :

$$\frac{LC}{CQ} = \frac{KC}{CM}$$

Car : $LC.CM = QC.KC$
Donc : $\angle MKC = \angle CLQ$.
Mais $\angle CLQ > \angle CLK$.
D'où : $\angle MKC > \angle CLK$.
Donc : $\angle LMK > \angle MLK$ [car : $\angle MLK = \angle CLK$ et $\angle LMK > \angle MKC$, parce que $\angle LMK = \angle MKC + \angle KCM$]
Donc : $MK < LK$



[Fig.7]

Remarque :

Supposons : $\angle FON = \angle ZEA$

- Si $\angle ZEA = \pi/2$

Alors $\angle FON = \frac{\pi}{2}$. Or $\angle FOL = \frac{\pi}{2}$. Donc $FO \perp P(KLM)$. Le plan sécant et le plan de la base sont perpendiculaires au plan du triangle.

- **Si $\angle ZEA \neq \pi/2$**

Supposons $\angle FON < \frac{\pi}{2}$

Soit $OP \in P(KLM)$ et $OP \perp LM$. Soit $FO \in P(LM)$ et $FO \perp LM$.

Donc $\angle FOP$ est l'angle d'inclinaison du $P(KLM)$ sur $P(LM)$.

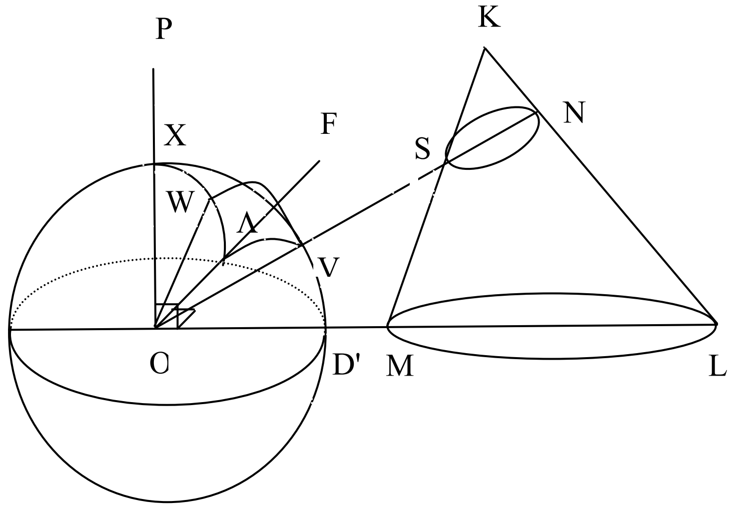
Donc l'angle$\angle FOP$ est le plus petit angle engendré par FO et une ligne quelconque appartenant à $P(KLM)$.

Donc : $\angle FOP \leq \angle FON$

[4. a] Si OP est sur l'un des deux côtés de ON : $\angle NOP < \angle FON$

Preuve [Fig. 7]:

Imaginons une sphère de centre O qui coupe les lignes NO, MO, PO aux points V, D', X et la ligne OF au point Λ. [Pour deux points A et B de la sphère, on note $G(A, B)$ le grand cercle passant par A et B; et $arc(A, B)$, l'arc passant A et B].



[Fig. 8]

Soit $arc(\Lambda, V)$, l'arc de $\angle FON$ et $arc(\Lambda, X)$ l'arc de $\angle FOP$ (qui est l'angle d'inclinaison).

On a : $MO \perp FO$ et $MO \perp PO$.

Donc : $MO \perp G(\Lambda, X)$. Donc D' est le pôle de $G(\Lambda, X)$.

Par ailleurs, *arc(X, D')* et *arc(D', Λ)* sont des quarts de cercle et *arc(Λ, V)* et *arc(Λ, X)* sont plus courts que des quarts de cercle.

On a aussi :
- Section *(XV)* $\perp$ *XO*, le rayon de *G(ΛX);*
- *Arc(XV) < arc(XD').*

Donc *XV* est le plus court segment joignant *V* au périmètre de *G(Λ, X).*
Donc : *XV < VΛ.* D'où : *arc(XV) < arc(VΛ).*
Donc : $\angle NOP < \angle FON$ (3)

Corollaire :

$\angle NOM > \frac{\pi}{2} - \angle FON$

Preuve :

En effet : $\angle NOM = \angle KCM = \frac{\pi}{2} - \angle NOP > \frac{\pi}{2} - \angle FON$ [d'après (3)]

[5] Soit $\angle YEZ$ l'inclinaison du quadrilatère *(ABGD)* sur le plan de la base du cylindre et $\angle PO\Lambda$ l'inclinaison de *T(KLM)* sur la base du cône. Alors :

$$\angle PO\Lambda = \angle YEZ \Leftrightarrow \angle NOM = \angle BED$$

Preuve [Fig. 8 & 9] :

a) $\angle PO\Lambda = \angle YEZ \Rightarrow \angle NOM = \angle BED$

Soit une autre sphère de centre *E*, associée au cylindre, et égale à la sphère de centre *O*, associée au cône.
Soit $EY \in P(ABGD)$ et $EY \perp ED$.
Soit *T'* l'intersection de *EA* avec la sphère.
On a : $ED \perp P(YZE)$ et $OL \perp P(X\Lambda O)$.
Les deux cercles *C(YZ)* et *C(XΛ)* sont égaux et *arc(XΛ) = arc(ZY).*
D'où : *corde(ΛV) = corde(ZT').*
Donc : *arc(YT') = arc(VX).*
D'où : $\angle VOX = \angle BEY$.
[Mais : $\angle BED = \frac{\pi}{2} - BEY$ et $\angle NOM = \frac{\pi}{2} - VOX$]
Donc : $\angle NOM = \angle BED$.

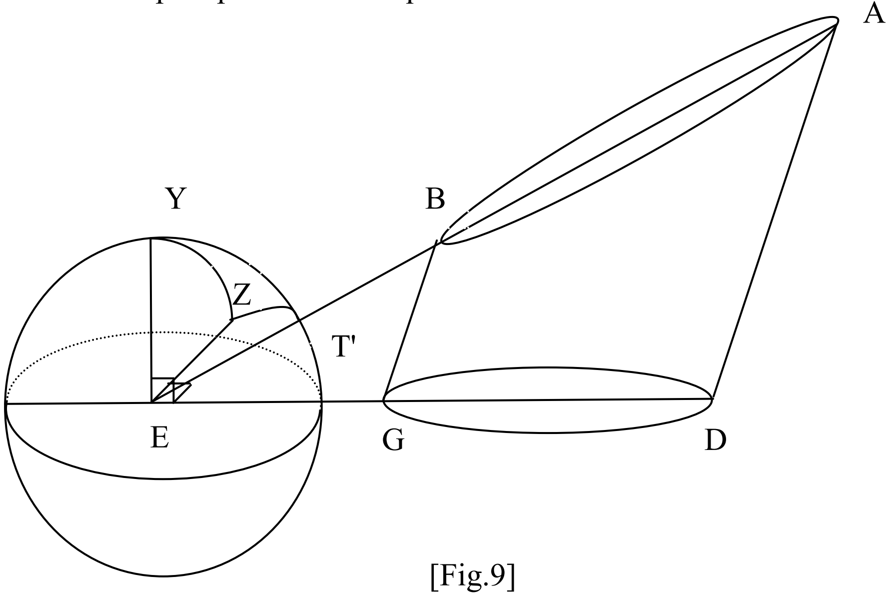
b) $\angle NOM = \angle BED \Rightarrow \angle PO\Lambda = \angle YEZ$

Soit $P(VX) \perp P(\Lambda X)$ et $P(T'Y) \perp P(ZY)$.
Soit *arc(VX)* et *arc(T'Y)* égaux et inférieurs à des quarts de cercle.
Soit *ΛV = ZT'*. Donc : *arc(ΛX) = arc(ZY).*
D'où : $\angle PO\Lambda = \angle YEZ$
Si : $\angle PO\Lambda > \angle YEZ$, on a : $\angle VOX < \angle BEY$.

[6]
a) Si $\angle PO\Lambda \neq \angle YEZ$ et les deux angles ordonnés sont égaux, alors $\angle BED \neq SOM$.
b) Si $\angle BED \neq SOM$ et les deux angles ordonnés sont égaux, alors $\angle PO\Lambda \neq \angle YEZ$.

Preuve :

a) Supposons $\angle PO\Lambda > \angle YEZ$
Soit W tel que $arc(XW) = arc(ZY)$. On joint WV.
Alors : $arc(WV) < arc(V\Lambda)$.
Or : $arc(V\Lambda) = arc(ZT')$.
Donc : $arc(WV) < arc(ZT')$.
Ainsi VW est plus proche de VX que $V\Lambda$



[Fig.9]

De W, on mène $arc(WW')$, un arc [de grand cercle] vers $arc(D'V)$, tel que :

$$arc(WW') = arc(ZEB).$$

Alors : $\angle(WW') = \angle BEY$.
D'où : $\angle VOX < \angle BEY$
[Donc : $\angle SOM > BED$].
Donc : $\angle SOM \neq BED$.

b) $\angle BED \neq SOM \Rightarrow \angle PO\Lambda \neq \angle YEZ$.

Preuve :
Si $\angle PO\Lambda = \angle ZEB$, alors $\angle VOX = \angle BEY$. Ce qui est une contradiction.
Et si $\angle PO\Lambda > \angle ZEB$ alors $\angle VOX < \angle BEY$. Ce qui est une contradiction

c) Si les angles d'inclinaisons sont égaux et $\angle VOX = \angle BEY$ alors les angles ordonnés sont égaux

Preuve :
On a : $\angle BEZ = \angle SOF$.
Soit $(\Lambda X) \perp (VX)$ en XO et $(ZY) \perp (T'Y)$ en EY.
Soit $arc(VX) = arc(T'Y)$ inférieurs à des quarts de cercle.
Donc : $\Lambda V = ZT'$.
D'où : $arc(\Lambda X) = arc(ZY)$.
Donc les deux angles d'inclinaison sont égaux.

Conclusion :
Les angles d'inclinaison, les angles ordonnées et l'angle compris entre le diamètre de la section et la base du triangle de la section du cône, sont égaux, respectivement, aux angles d'inclinaison, aux angles ordonnés et à l'angle compris entre le diamètre de la section et la base du cylindre.

SYNTHESE DU PROBLEME

Remarques d'Ibn Sartāq :
Pour la synthèse, on doit tenir compte de 12 situations différentes :
- Les angles ordonnés de la section peuvent être droits ou non droits,
- Pour chacun de ces cas, le diamètre transverse peut-être plus grand, plus petit ou égal au diamètre droit.
- Et pour chacun des six cas précédents, le cône peut être droit ou oblique.

1. Si la section *(AB)* du cylindre est un cercle, alors la section *(NS)* du cône est un cercle, que le cône soit droit ou oblique.

Preuve :
1.1. Dans le cas du cône droit [Fig. 10] :
Nous menons entre deux côtés d'un triangle quelconque passant par l'axe, une ligne égale au diamètre du cercle donné et parallèle à la base du triangle. Sur cette ligne, menons un plan parallèle au plan de la base du cône, ce plan génèrera, sur le cône, un cercle qui sera égal au cercle donné car ils sont de même diamètre.

1.2. Dans le cas du cône oblique
Il est possible de trouver un cercle, de position antiparallèle, égal au cercle donné.

Preuve [Fig. 11] :
Soit $T(KLM)$ un triangle du cône, perpendiculaire au plan de la base.
On suppose : $MK < LK$.
Soit $C(KLM)$ un cercle circonscrit au triangle $T(KLM)$.
Soit KC la tangente à $C(KLM)$ au point K.
On a : $\angle MKC = \angle MLK$.
On a aussi : $\angle MLK + \angle KMC < \pi$ car $\angle MLK < \angle LMK$ $[MK < LK]$.
Donc : $\angle MLK + \angle KMC < LMK + KMC$.
Mais : $\angle LMK + \angle KMC = \pi$.
Donc : $\angle KMC + \angle MKC < \pi$.

Le point C sera alors sur le prolongement de LM du côté de M.
Soit $NS \parallel KC$ et $NS = AB$ (1)
D'un point J sur NS, on mène $JT' \perp P(KLM)$.
On a : $P(T'JN) \perp P(KLM)$ et $P(KLM) \perp P(ML)$.
Donc, les lignes ordonnées sont perpendiculaires au diamètre NS.
Et : $\angle NSK = \angle SKC$ (angles alternes internes)
Mais : $\angle SKC = \angle KLM$
D'où : $\angle NSK = \angle KLM$ et $\angle KNS = KML$.

Donc la section (NS) est de position antiparallèle, de lignes ordonnées perpendiculaires au diamètre. C'est donc un cercle égal au cercle (AB).

2. Si la section *(AB)* n'est pas un cercle et si les lignes ordonnées sont perpendiculaires au diamètre de *(AB)* et le diamètre transverse plus grand que le diamètre droit.

Preuve [Fig. 11] :

Si le cône est droit, on considère un triangle quelconque passant par l'axe. S'il est oblique, on considère un triangle perpendiculaire au plan de la base. Dans les deux cas, soit $T(KLM)$ ce triangle.

Soit $C(KLM)$ le cercle circonscrit à $T(KLM)$. Soit KC une droite qui rencontre $arc(KM)$ en Q entre K *et* C[304], avec C dans le prolongement de la corde LM du côté de M et tel que :

$$\frac{KC}{CQ} = \frac{AB}{AH} \quad (2)$$

Comme $AB > AH$, cette égalité est possible
Soit $NS \parallel KC$ et $NS = AB$ [M : 5, Lemme 1]
Soit $JT' \perp T(KLM)$ et $(NT'S)$ la section.
Soit $NR \perp NS$ et tels que :

$$\frac{KC^2}{LC \text{ x } CM} = \frac{NS}{NR}$$

NR est donc le diamètre droit.
Mais :

$$\frac{AB}{AH} = \frac{KC}{CQ} = \frac{KC^2}{KC \text{ x } CQ} = \frac{\mathrm{KC}^2}{\mathrm{LC \text{ x } CM}}$$

[Puissance d'un point par rapport à un cercle]

Donc : $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{NS}{NR}$

Or : $AB = NS$
Donc : $AH = NR$
Soit : $NJ = AT$

On a, par hypothèse : $\angle N = \angle A = \dfrac{\pi}{2}$, $SN =\ AB$ et NR = AH.

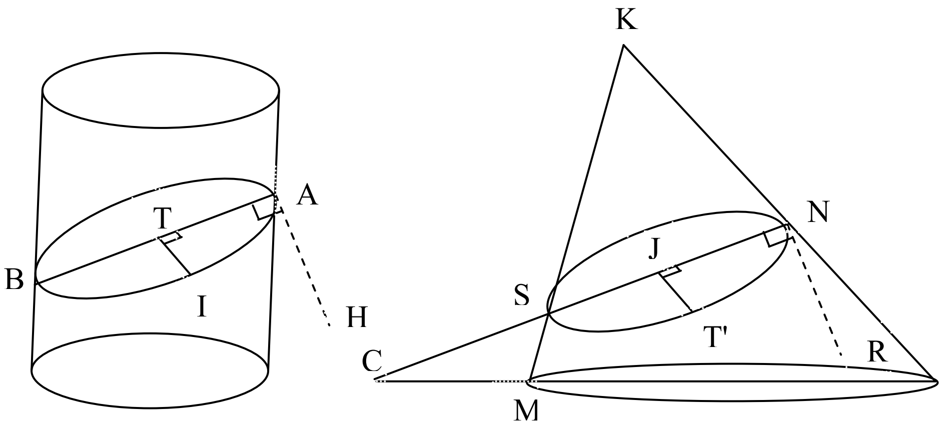
Donc :

$$JT'^2 = NJ\ x\ NR = AT\ x\ AH = TI^2$$

D'où : $JT' = IT\ \ et\ \angle T = \angle J = \dfrac{\pi}{2}$

De même, toute paire de lignes ordonnées à égales distance de *N* et *A* seront égales.

Donc, la section *(AB)* est identique à la section *(NS)* ainsi que tous leurs éléments homologues deux à deux.



[Fig. 11]

3. Si les angles ordonnés sont droits et si le diamètre transverse est plus petit que le diamètre droit.

3.1. Dans le cône droit :

La construction n'est pas possible, car nous savons que pour toute section du cône droit, son diamètre transverse et plus grand que son diamètre droit.

3. 2. Dans le cône oblique :

La construction est possible si $P(KLM) \perp P(LM)$.

Remarques d'Ibn Sartāq:

(1) Si la construction de la section est possible sur le cône alors :

$$\frac{AB}{AH} > \frac{KM}{CM}$$

Donc, si = $\dfrac{AB}{AH} < \dfrac{KM}{CM}$, cette construction est impossible.

(2) Le prolongement de *KM* et de la base *ML* ne rend pas la construction possible. En effet, on aura dans ce cas : *T(KM'L)* dans le même plan que *(KML)* et :

$$\frac{KM'}{C'M'} = \frac{KM}{CM},$$

car les deux triangles sont semblables. D'où : $\frac{AB}{AH} < \frac{KM'}{C'M'}$

Donc la construction est impossible.

Preuve [Fig. 12] :

Les éléments du problème étant les mêmes que précédemment, soit $NR \perp NS$ et tel que :

$$\frac{KC^2}{LC.CM} = \frac{NS}{NR} \quad (3)$$

[Comme : $LC.CM = CQ.KC$], on a :

$$\frac{KC^2}{LC.CM} = \frac{KC^2}{CQ.KC} = \frac{KC}{CQ}$$

D'où : $\frac{KC^2}{LC.CM} = \frac{AB}{AH}$ [d'après (2)].

Donc : $\frac{AB}{AH} = \frac{NS}{NR}$ [d'après (3)]

D'où : $AH = NR$ [d'après (1)]

Et $NJ = AT \Rightarrow JT' = TI$

Les angles ordonnés étant droits, donc les deux sections *(AB)* et *(NS)* sont identiques en grandeur, en diamètres et en lignes ordonnées.

4. Si les angles ordonnés ne sont pas droits

4.1 Dans le cône droit :

La construction est impossible. En effet, toute section d'un cône droit a des angles ordonnés droits.

4.2 Dans le cône oblique :

1- Si le triangle est droit, il n'est pas possible de construire une telle courbe car les angles ordonnés doivent être droits.

2. Si le triangle est isocèle et oblique :

2.1- Si $D_t \leq D_d$, la construction est impossible pour les mêmes raisons.

2.2- Si $D_t > D_d$, la construction est possible.

3. Si le triangle est non isocèle et oblique, la construction est possible quelle que soit la relation d'ordre entre D_t et D_d.

Preuve :

Soit *T(KLM)* un triangle oblique au plan de la base d'un cône oblique avec *KM* < *LM, C(KLM)* le cercle circonscrit à *T(KLM)* et :

$$\frac{KC}{CQ} = \frac{AB}{AH}$$

Si *T(KLM)* est isocèle et $AB > AH$ alors *Q* est entre *K* et *C*.

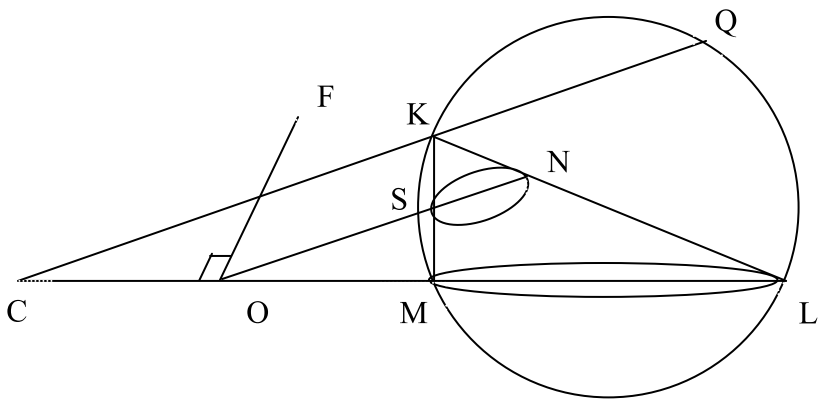
Si *T(KLM)* n'est pas isocèle, alors Q est sur K ou bien d'un côté ou de l'autre de K.

Soit $NS \,//\, KC$ et $NS = AB$. On prolonge *NS* au point *O* sur *LM*.

Soit $OF \perp OL$ dans le plan de la base du cône.

On a : $OF \perp LM$, car $OF = P(FON) \cap P(LM)$.

La section *(NS)* est une ellipse qui coupe les côtés *KL* et *KM*.



[Fig. 12]

[Si on note : $\angle[Q, Q']$, l'angle d'inclinaison du plan *Q* par rapport au plan *Q'*], nous avons trois cas :

1- $\angle[T(KLM), P(LM)] = \angle[Q(AGD), P(LM)]$
2- $\angle[T(KLM), P(LM)] < \angle[Q(AGD), P(LM)]$
3- $\angle[T(KLM), P(LM)] > \angle[Q(AGD), P(LM)]$

Et chacun de ces trois cas fournit trois autres cas suivant que :

a) $\angle NOM = \angle AEG$; b) $\angle NOM < \angle AEG$ ou c) $\angle NOM > \angle AEG$.

D'où :

* *(1 + a)* $\Rightarrow$ les lignes ordonnées de *(AB)* sont égales aux lignes ordonnées de *(NS)*.

* *(1 + b* ou *c)* $\Rightarrow$ les lignes ordonnées de *(AB)* sont différentes des lignes ordonnées de *(NS)*.

* (*2* ou *3* + *a*) $\Rightarrow$ les lignes ordonnées de *(AB)* sont différentes aux lignes ordonnées de (NS).

* (*2* ou *3* + *b* ou *c*) $\Rightarrow$ on ne peut rien dire sur l'égalité des lignes ordonnées.

II- Problème :

Etant donné une ellipse, dans un cylindre donné, construire, dans un certain cône, une ellipse égale à cette ellipse donnée, ou trouver un cône qui engendre une telle ellipse.

Preuve : [Fig.13 et Fig.14]

Soit *(AB)* l'ellipse donnée dans un cylindre, *(ABGD)* le quadrilatère passant par l'axe du cylindre, *AH* le diamètre droit de l'ellipse, *EZ* l'intersection du plan de l'ellipse avec la base du cylindre.

Soit *KC* une droite quelconque et *Q* sur *KC* vérifiant : $\frac{KC}{CQ} = \frac{AB}{AH}$.

Q peut être soit du côté de *C*, soit sur le point *K*, soit à l'opposé de *C* :

$\angle ZEA$ étant l'angle ordonné de l'ellipse associée au cylindre, soit *KL* tel que

$$\angle KCL < \frac{\pi}{2} \text{ et } \angle KCL > \frac{\pi}{2} - \angle ZEA$$

- Si le point *Q* est sur le point *K*, menons la perpendiculaire *QU*.
- Sinon, posons α le milieu de *KQ* et menons la perpendiculaire *IU*.

$\angle KCL$ étant un angle aigu, *U* est sur la droite *CL*.

Soit β le milieu de αU. On joint βQ.

Soit le cercle de centre β et de rayon βQ ou le cercle de centre *Y*, un point quelconque entre β et *U* et de rayon *YQ*.

Puisque $\beta Q > \beta U$ ou $YQ > YU$, on a : $\beta Q = \beta K$ ou $YQ = YK$ et $JQ < JC$ ou $YQ < YC$.

Donc, le cercle passe par le point *K*, coupe la droite *CL* aux points *L* et *M* et le point *C* est à l'extérieur. On note *C(KQML)* ce cercle.

Soit NS compris entre les deux côté *KL* et *KM*, avec :

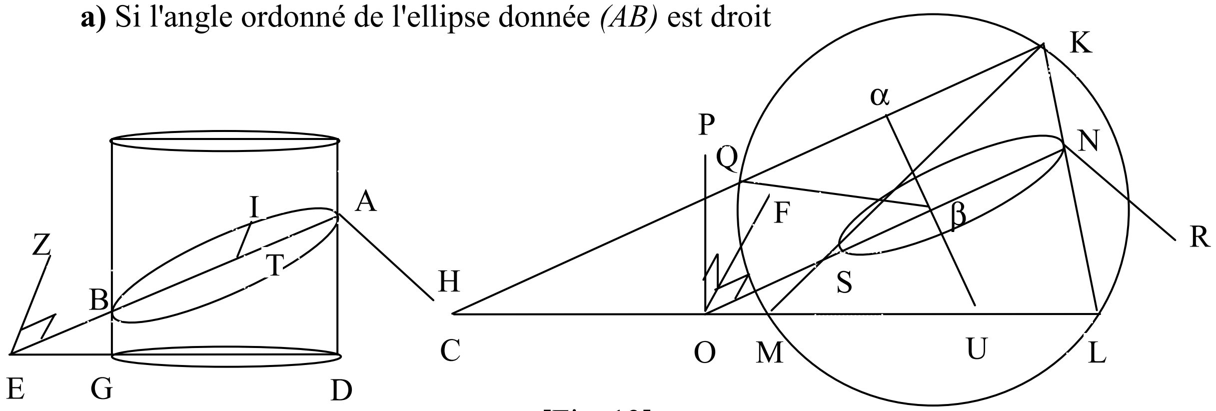
$$NS = AB \text{ et } NS \,//\, KC$$

Soit $NR \perp NS$ et vérifiant : $\frac{KC^2}{LC \text{ x } CM} = \frac{NS}{NR}$.

NR est donc le diamètre droit et il vérifie : $NR = AH$.

On prolonge *NS* jusqu'à *O* sur *LC*. Soit $OP \perp LC$ dans le plan du triangle *T(KLM)*.
Soit $OF \perp T(KLM)$.

a) Si l'angle ordonné de l'ellipse donnée *(AB)* est droit



[Fig. 13]

LM est le diamètre d'un cercle dans *P(FOL)*.

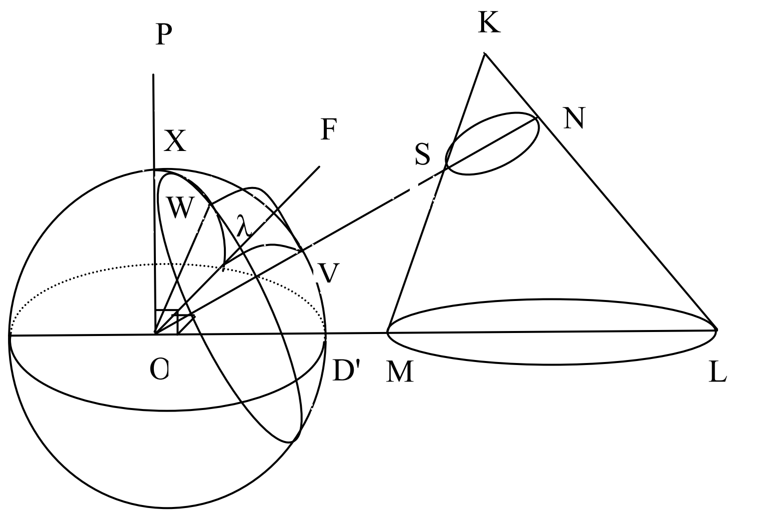
En faisant pivoter un des deux côtés *KL, KM* autour de ce cercle, on engendre un cône.

(FON) étant le plan sécant à ce cône, on obtient alors une ellipse identique à l'ellipse donnée *(AB)*.

b) Si l'angle ordonné de l'ellipse *(AB)* est aigu

Puisque $\angle NOL > \frac{\pi}{2} - \angle ZEA$ et $\angle NOL = \frac{\pi}{2} - \angle NOP$,

alors : $\angle NOP < \angle ZEA$.



[Fig. 14]

Dans la sphère imaginée [Fig. 14] :

Soit *arc(VX)* égal à l'arc de l'angle ordonné.

Soit le cercle de pôle *V* et de longueur égale à *l'arc (VX)*. Ce cercle rencontre *arc(VΛ)* qui est un quart [du grand cercle], entre les points *V* et *Λ*.

Le plan *(ΛOX)* dont la perpendiculaire est *OL* rencontre le cercle en *W* entre les points *Λ* et *X*.

Joignons *OW*.

Puisque *LO* est perpendiculaire au plan *(ΛOX)*, *∠WOL = 1 droit* et *arc(VW)* = arc ordonné.

Dans le plan *(OWL)*, traçons le cercle *C(LM)* de diamètre *LM*.

K étant fixé, faisons tourner *KM* ou *KL* sur *C(LM)*, et menons le plan *P(WON)*.

P(WON) génère, dans le cône de sommet *K* et de base *(LM)*, la section *(NS)*.

On a donc construit une ellipse dans le cône *(KLM)* égale à l'ellipse *(AB)* donnée.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [M : IV. 3. 1(5)] :

- Cette proposition ne correspond aucune de celles traitées par Apollonius. Elle n'existe pas non plus dans les textes de la tradition géométrique arabe qui nous sont parvenus. Mais des propositions semblables mais non identiques sont dans le livre de Sérénus (voir plus haut dans l'introduction).
- La proposition est précédée de trois lemmes concernant des éléments d'un ou de deux triangles : le premier sur une construction et les deux autres établissant des propriétés.

2. L'énoncé :

- L'énoncé de [M : IV. 3. 1(5)] est en deux parties. Seule la première est présentée au début de la proposition. Il est donc possible que la seconde ait été ajoutée par Ibn Sartāq.

3. La démonstration :

- La première partie de la proposition est démontrée selon la méthode de l'analyse et de la synthèse. La seconde partie est établie d'une manière directe.
- Ibn Sartāq ne fait aucun commentaire sur la portée de cette proposition, en particulier sur le fait qu'elle permet d'étudier les sections coniques d'une manière intrinsèque, sans référence au type de solide qui a permis de les engendrer.

4. Les références :

- [M : IV.3.1(1, 2, 3, 4)].

Proposition IV. 3. 1(6) :

Soit *(ABG)* le triangle engendré par l'intersection d'un cône [quelconque] et d'un plan passant par son axe.

Soit *(DEZ)* un autre plan qui coupe le cône et sa base *(BG)* de sorte que :

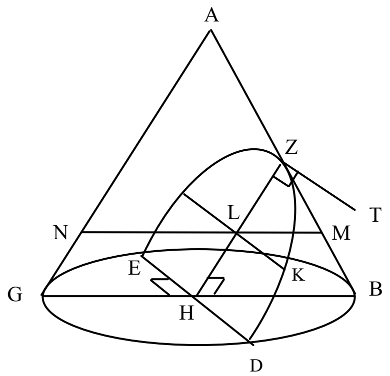
$(DEZ) \cap (BG) = DE$, $(DEZ) \perp BG$, $(ABG) \cap (DEZ) = ZH$, avec $Z \in AB$ et $ZH // AG$

et $H = (BG) \cap (DEZ) \cap (ABG)$

Soit K sur la courbe *(DEZ)* et $KL // DH$, avec $L \in ZH$ [C: I;19]

Soit $ZT \perp ZH$ et tel que : $\dfrac{ZT}{ZA} = \dfrac{BG^2}{AB.AG}$ (1)

Alors : $KL^2 = LZ.ZT$



Preuve de cela :

Du point L, on mène $MLN // BG$.

D'où :

Plan (KLM) // plan (BEGD) car $KL // DH$ [E: XI ; 15]

et $\angle KLN = \angle DHG = \dfrac{\pi}{2}$

Donc *(KLM)* est un cercle de diamètre MN [M: 1]

Par conséquent: $ML.LN = LK^2$ [puissance d'un point par rapport à un cercle] (2)

Mais, on a : $\dfrac{ZT}{ZA} = \dfrac{BG^2}{AB.AG}$ [par hypothèse]

D'autre part : $\dfrac{BG^2}{AB.AG} = \left(\dfrac{BG}{AB}\right)\left(\dfrac{BG}{GA}\right)$ [E: VI; 23]

et : $\dfrac{BG}{AB} = \dfrac{BG}{AG} = \dfrac{MN}{MA}$ [E: VI; 4]

Mais : $\dfrac{MN}{MA} = \dfrac{NL}{ZA}$ [E: VI; 2] [similitude des triangles (MZL) et (MAN)] (3)

et : $\frac{MN}{NA} = \frac{ML}{LZ}$ [similitude des triangles (BGA) et (MAN)]

Donc : $\frac{BG^2}{AB.BG} = \frac{ML.LN}{LZ.ZA}$ (4)

[$\frac{BG^2}{AB.BG} = \left(\frac{BG}{AB}\right)\left(\frac{BG}{GA}\right) = \left(\frac{MN}{MA}\right)\left(\frac{BG}{AB}\right) = \left(\frac{NL}{ZA}\right)\left(\frac{BG}{GA}\right) = \left(\frac{NL}{ZA}\right)\left(\frac{ML}{LZ}\right)$] [d'après (3)]

Mais : $\frac{ML.LN}{LZ.ZA} = \frac{LK^2}{LZ.ZA}$ [d'après (2)]

Et : $\frac{ML.LN}{LZ.ZA} = \left(\frac{ML}{LZ}\right)\left(\frac{LN}{ZA}\right)$ [E: VI; 23]

Donc : $\frac{TZ}{ZA} = \frac{LK^2}{LZ.ZA}$ [d'après (1) et (4)]

Et : $\frac{TZ}{ZA} = \frac{TZ.ZL}{AZ.ZL}$

Donc $\frac{TZ.ZL}{AZ.ZL} = \frac{LK^2}{LZ.ZA}$

D'où $KL^2 = LZ.ZT$ [E:V; 9]

Corollaire 1 :

Si KL et DH sont deux lignes ordonnées quelconques, alors : $\frac{DH^2}{KL^2} = \frac{HZ}{LZ}$

[car $DH^2 = HZ.ZT$]

Corollaire 2 :
La parabole se prolonge d'une manière infinie, du côté de *ED*, par le prolongement du côté *AG* du cône et celui du diamètre *ZH*. Et le prolongement du diamètre ZH reste toujours à l'intérieur du plan de la section.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [IS: IV.3.1(6)] = [C: I; 11, 20].

2. L'énoncé

- L'énoncé de la proposition correspond à celui de [C: I; 11].
- L'énoncé du corollaire est semblable à celui de [C: I; 20].
- Le corollaire 2 ne correspond à aucun corollaire semblable des *Coniques*.

3. La démonstration

- La preuve de la proposition suit celle d'Apollonius et utilise le même lettrage.
- Le corollaire 1 n'est pas accompagné d'une démonstration.
- Ibn Sartāq n'explique pas comment construire le segment ZT qui vérifie :

$$\frac{ZT}{ZA}=\frac{BG^2}{AB.AG}.$$

On peut donc en déduire qu'al-Mu'taman avant lui n'a pas éprouvé le besoin de justifier la détermination de ce segment. Il s'agit là en fait du "*postulat de la quatrième proportionnelle*" qui admet l'existence d'une quatrième grandeur proportionnelle à trois grandeurs données. Dans la proposition IV.3.1(6), on se donne trois grandeurs $a = BG^2$, $b = AB.AG$ et $ZA = c$ et on doit déterminer $d = ZT$ de sorte que:

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c}.$$

Euclide admet l'existence de la quatrième proportionnelle, en particulier dans la démonstration de la proposition 18 du Livre V des *Eléments*[305].

Dans la tradition arabe, le premier mathématicien connu qui s'est soucié d'établir ce postulat est ᶜUmar al-Khayyām. Il le fait dans la seconde partie de sa *Risāla fī sharḥ mā ashkala min muṣādarāt Kitāb Uqlīdis* [Epître sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide] en utilisant le principe aristotélicien de la divisibilité à l'infini d'une grandeur continue[306].

4. Les références

- [E: VI; 2, 4, 23], [E: V; 9], [E: XI; 15], [C: I; 19], [M: IV.3.1(1)].

---

[305] - Euclide : *Les Eléments*, B. Vitrac (trad.), Paris, Presses Universitaires de France, Vol. 2, 1994, pp. 107-108; 131-132.

[306] - ᶜUmar al-Khayyām, *Muṣādarāt Uqlīdis* [Les prémisses d'Euclide], A. I. Sabra (édit.), Alexandrie, 1961, pp. 47-49; Al-Khayyâm : Epître de ᶜUmar al-Khayyām sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide, A. Djebbar (trad.), *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al-Khayyām (1048-1131) "Sur l'explication des prémisses problématiques du livre d'Euclide"*, introduction et traduction française, Paris, Université Paris-Sud, Prépublications Mathématiques d'Orsay, n° 97-38 (1997). Publiée dans la Revue *Farhang* (Téhéran), Vol. 14, n° 39-40, 2002, p. 113; B. Vahabzadeh (édit. & trad.) : Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide. In R. Rashed & B. Vahabzadeh : Al-Khayyām mathématicien, Paris, Blanchard, 1999, pp. 350-351.

Proposition IV. 3. 1(7) :

Soit *[(P)]*, un plan passant par l'axe d'un cône *[(C)]* et $T(ABG) = (P) \cap (C)$.

[Soit *(BG)* la base circulaire du cône].

Soit *[(Q)]* un autre plan sécant tel que : $(Q) \cap (BG) = DE$ avec $DE \perp BG$.

[Soit la section $(DZE) = (Q) \cap (C)$] telle que : $H(DZE) \cap (ABG) = ZH$, avec $Z \in AB$ et telle que $ZH \cap GA = T$, avec T sur *C(ASJ),* la surface opposée du cône.

Soit $AK \mathbin{//} ZH$ et $ZL \perp ZH$ [avec $ZL \in P(ABG)$], tel que :

$$\frac{TZ}{ZL} = \frac{AK^2}{GK.KB} \qquad (1)$$

Donc $ZL = C_d$ et $ZT = D_t$.

Soit M un point sur *(DZE)* tel $MN \mathbin{//} DH$, avec $N \in ZH$.

MN est une ligne ordonnée.

Soit $NC \mathbin{//} ZL$, avec C dans le prolongement de TL.

Soit $LO \mathbin{//} CF \mathbin{//} ZT$, avec $O \in CN$ et $F \in LZ$

On a : $S(ZC) = ZL \times ZN + S(LC)$,

avec *Q(LC)* semblable *Q(TL)*

Alors, on a : $MN^2 = NC \times ZN = S(ZC)$

Preuve :

Soit $RNQ \mathbin{//} BG$.

$$MN \mathbin{//} DH \Rightarrow \angle MNQ = \frac{\pi}{2};$$

Et $P(RNM) \mathbin{//} P(BG)$

Donc : *(RQM)* est un cercle. D'où : $RN.NQ = MN^2$ (2)

Mais : $\dfrac{TZ}{ZL} = \dfrac{AK^2}{GK.KB}$ [d'après (1)];

et : $\dfrac{AK^2}{GK.KB} = \dfrac{\mathrm{AK}}{\mathrm{GK}}\left(\dfrac{\mathrm{AK}}{\mathrm{KB}}\right)$ [E: VI; 23],

avec : $\dfrac{AK}{GK} = \dfrac{TH}{HG}$ [similitude de *T(AKG)* et *T(THG)*];

et : $\dfrac{TH}{HG} = \dfrac{NT}{NR}$ [similitude de *T(THG)* et *T(TNR)*];

avec : $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{ZH}{HB}$ [similitude de *T(AKB)* et *T(ZHB)*];

et : $\dfrac{ZH}{HB} = \dfrac{ZN}{NQ}$ [similitude de *T(ZHB)* et *T(ZNQ)*].

Mais : $\dfrac{NT.ZN}{NR.NQ} = \dfrac{NT.ZN}{MN^2}$ [d'après (2)]

et : $\dfrac{NT.ZN}{NR.NQ} = \dfrac{NT}{NR}(\dfrac{ZN}{NQ})$ [E : VI; 23]

[Donc : $\dfrac{NT}{NR}\left(\dfrac{ZN}{NQ}\right) = \dfrac{TH}{HG}\left(\dfrac{ZH}{HB}\right) = \dfrac{AK}{GK}\left(\dfrac{AK}{KB}\right) = \dfrac{AK^2}{GK.KB} = \dfrac{TZ}{ZL}$

D'où :

$\dfrac{TN.NZ}{MN^2} = \dfrac{TZ}{ZL}$]

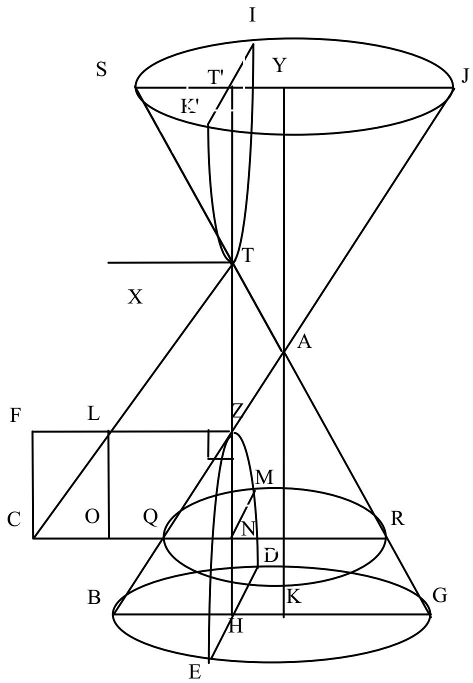
Or : $\dfrac{TZ}{ZL} = \dfrac{TN}{NC}$ [similitude de T(TZL) et T(TNC)]

Donc : $\dfrac{TN}{NC} = \dfrac{TN.NZ}{MN^2}$ (3)

Mais : $\dfrac{TN}{NC} = \dfrac{TN.NZ}{NC.NZ}$

Donc : $\dfrac{TN.NZ}{MN^2} = \dfrac{TN.NZ}{NC.NZ} = \dfrac{TN.NZ}{S(ZC)}$

D'où : $MN^2 = NC \times NZ = S(ZC)$ [E:V; 9]



[Fig. 1]

Corollaire :

Soit MN et DH deux lignes ordonnées alors : $\dfrac{MN^2}{DH^2} = \dfrac{NZ.NT}{HZ.HT}$

Preuve :

On a : $\dfrac{MN^2}{NT.ZN} = \dfrac{NC}{TN}$ [d'après (3)]

Mais : $\dfrac{NC}{TN} = \dfrac{ZL}{TZ} = \dfrac{C_d}{D_t}$ [similitude de *T(TNC)* et *T(TZL)*]

D'autre part : $\dfrac{DH^2}{ZH.HT} = \dfrac{ZL}{TZ}$ [d'après (3) appliqué à *DH, ZH, HT*]

Donc : $\dfrac{MN^2}{NZ.NT} = \dfrac{DH^2}{ZH.HT}$

D'où, après permutation : $\dfrac{MN^2}{DH^2} = \dfrac{NZ.NT}{HZ.HT}$

COMMENTAIRES ET COMPLEMENTS

I. Propriétés de la section opposée d'une hyperbole

[1] Soit *(H)* une section d'hyperbole, de diamètre transverse D_t et de côté droit C_d, et *(H')* sa section opposée, de diamètre transverse D_t' et de côté droit C_d'.
Alors : $D_t' = D_t$ et $C_d' = C_d$.

Preuve :

Soit *C(ASJ)* le cône opposé au cône *C(ABG)*. L'axe de *C(ASJ)* est dans le prolongement de l'axe de *C(ABG)*.

Les côtés *AS* et *SJ* de *T(ASJ)* sont dans le prolongement de *AB, AG*.

Donc : $C(ASJ) \cap P(SJ) = C(SJ)$ qui est un cercle [M : IV.3.1(3)].

Soit $K'T'I = (P) \cap C(SJ)$.

On a :

$$SJ \,//\, GB;\;\; K'I \,//\, DE \text{ et } \angle K'T'S = \angle EHB = \frac{\pi}{2}$$

Et *(K'TI)* est une hyperbole.

On a : $S(K'TI) \cap AS = T$ et $S(K'TI) \cap AJ = Z$.

Soit : $Y = AK \cap SJ$.

Soit : $TX \in P(ASJ)$, $TX \perp TT'$ et vérifiant : $\dfrac{AY^2}{JY.YS} = \dfrac{TZ}{TX}$ (4)

On a : $JS \,//\, GB \Rightarrow \dfrac{AY}{YS} = \dfrac{AK}{KG}$ [E:VI; 2]

Et : $\dfrac{AY}{YJ} = \dfrac{AK}{KB}$ [similitude de *T(AYJ)* et *T(AKB)*]

Donc : $\dfrac{TZ}{TX} = \dfrac{AY}{YS}\left(\dfrac{AY}{YJ}\right) = \dfrac{AK}{KG}\left(\dfrac{AK}{KB}\right)$ [d'après (4)]

Mais : $\dfrac{ZT}{ZL} = \dfrac{AK}{KG}\left(\dfrac{AK}{KB}\right)$ [d'après (1)]

D'où : $\dfrac{TZ}{TX} = \dfrac{TZ}{ZL}$

Donc : $TX = ZL$ (5). C'est-à-dire : $C'_d = C_d$.

[2] Les lignes ordonnées d'une hyperbole, qui sont à égale distance de son sommet, sont égales entre elles.

Lemme :
Soit *Q(AGBD)* un rectangle. On joint *AD* et *BG* et on prolonge *AB* aux points *Z, H*.
Soit $ZL \,//\, HM \,//\, AG$, avec $ZL \cap AD = L$ et $HM \cap BG = M$.
On prolonge *GD* aux points *T* et *K* [sur *ZL* et *HM*, respectivement].
On prolonge *AG* et *BD* [aux points *S* et *N* sur *ML*]. On joint *M, S, N, L*.
On a : $ML \,//\, KT$.
Alors :

$S(AM) = S(AK) + S(GM)$, avec *S(GM)* semblable à *S(AD)*

et :

$S(BL) = S(BT) + S(DL)$, avec *S(DL)* semblable à *S(AD)*.

Alors :

Si $AH = BZ$, $S(AM) = S(BL)$ et réciproquement.
Si $AH > BZ$, $S(AM) > S(BL)$ et réciproquement.

Preuve [Fig. 2] :

a) $AH = BZ \Rightarrow S(AK) = S(BT)$ [$AG = BD$ par hypothèse]

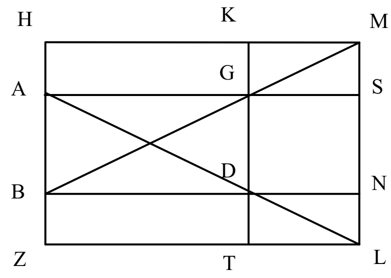
Mais : $\dfrac{TD}{DN} = \dfrac{GK}{GS}$, avec $TD = KG$. D'où : $DN = GS$

Donc : $S(TN) = S(GM)$. D'où : $S(AM) = S(BL)$

b) $AH > BZ \Rightarrow S(AK) > S(BT)$.

Mais :

$$\frac{TD}{DN} = \frac{GK}{GS} \text{ avec } KG > TD$$



[Fig. 2]

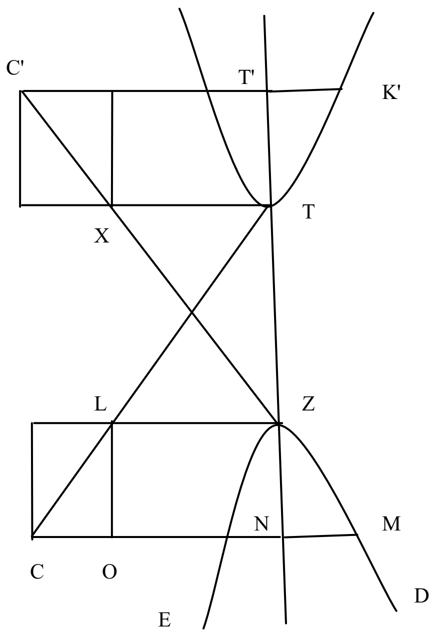
Donc : $GS > DN$. Donc : $S(GM) > S(DL)$
D'où : $S(AM) > S(BL)$.

Réciproquement :
a) Si $S(AM) = S(BL)$ et si $AH \neq BZ$, alors : $AH > BZ$ ou $AH < BZ$.
Donc $S(AM) > S(BL)$ ou $S(AM) < S(BL)$. Ce qui est absurde.
b) Si $S(AM) > S(BL)$,
alors : $AH \leq BZ \Rightarrow S(AM) \leq S(BL)$. Ce qui est absurde.

Preuve de [2] [Fig. :
Soit ZN sur $H(DZE)]$ et TT' sur $H(K'TI)$, tels que : $TT' = ZN$.
[Soit $S(XC') = S(LC)$].
On a :

$$\begin{aligned} MN^2 &= ZN.ZL + S(LC) \\ &= ZN.TX + S(LC) \text{ [d'après (5)]} \\ &= TT'.TX + S(XC') \text{ [d'après le lemme précédent]} \\ &= KT'^2 \end{aligned}$$

Donc : $MN = K'T$



[Fig. 3]

[3] Les lignes ordonnées de la section *(K'TI)* sont parallèles aux lignes ordonnées de la section *(DZE)* et les angles ordonnés homologues sont égaux.

Preuve :
Nous avons : $EH \perp BG$, $K'.T' \perp SJ$ et $BG \,//\, SJ$.
D'où : $EH \,//\, K'T'$.
D'où l'égalité des angles ordonnés homologues.

[4] La section *(K'TI)* est identique à la section *(DZE)*.

On superpose Z de *(DZE)* sur T de *(K'TI)* et ZH sur TT'.
Alors, tous les éléments de *(DZE)* se superposent sur les éléments homologues de *(K'TE)*.

COMPLEMENTS SUR L'ELLIPSE

Soit $E(AB)$ une ellipse de centre G et GE son diamètre transverse. Alors :
a) Si ZH est une ligne ordonnée quelconque, différente de GE, alors : $GE > ZH$.
b) Si FO est une seconde ligne ordonnée, plus proche de GE que ZH, alors : $FO > ZH$

Preuve[307] [Fig. 4] :

a) Soit $AD = C_d$. On joint BD.
Soit : $GT \,//\, OC \,//\, ZK \,//\, AD$ et : $TL \,//\, KM \,//\, CQ \,//\, AB$.
On joint AT. Soit : $N = AT \cap ZK$.
Soit $X = TL \cap ZK$ et $T' = CQ \cap ZK$

Alors : $\frac{BG}{GA} = \frac{BT}{TD}$ [similitude de $T(BGT)$ et $T(BAD)$],

et :

$$\frac{BT}{TD} = \frac{AL}{LD} \text{ [similitude de } T(TLD) \text{ et } T(BAD)]$$

[Donc : $\frac{BG}{GA} = \frac{AL}{LD}$]. Mais : $BG = GA$.

Donc : $AL = LD$ (6)

D'autre part : $\frac{KX}{XT} = \frac{BG}{GT} = \frac{DL}{LT}$ [similitude de $T(KXT)$, $T(TGB)$ et $T(DLT)$]

et :

307 - Dans un souci de généralisation, l'auteur considère deux lignes ordonnées, ZH, de part et d'autre de la ligne ordonnée GE et, dans toute la preuve, il considère les deux cas. Ce qui alourdit considérablement la démonstration. Dans le but d'alléger cet exposé, sans nuire à sa généralité, nous n'avons considéré qu'une seule ligne ordonnée.

$$\frac{NX}{XT} = \frac{AG}{GT}$$ [similitude de *T(NST)* et *T(AGT)*].

Mais :

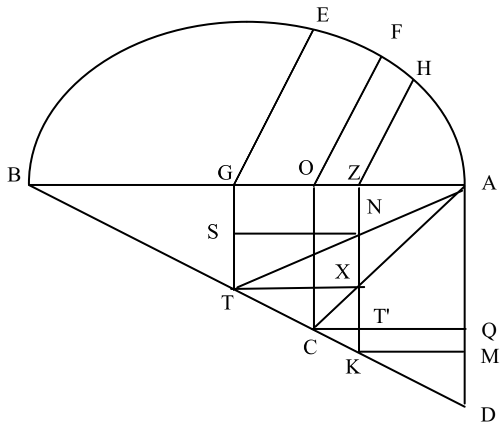
$$\frac{AG}{GT} = \frac{AL}{LT} = \frac{DL}{LT}$$ [d'après (6)].

Donc :

$$\frac{KX}{XT} = \frac{NX}{XT}.$$

D'où :

$$NX = XK \qquad (7)$$



[Fig. 4]

Or $S(NL) = S(NG)$ [E : I; 43]

Donc :

$$S(NG) = S(XM) \quad \text{[d'après (7)]}$$

D'où :

$$S(XG) = S(XM) + S(XS)$$

Donc :

$$S(AT) = S(XG) + S(XA) = S(XM) + S(XS) + S(XA) = S(AK) + S(XS)$$

Donc :

$$S(AT) > S(AK)$$

[Or : $GE^2 = S(AT)$ et $ZH^2 = S(AK)$ (propriété de l'ellipse)].

Donc :

$$GE > ZH$$

b) Soit $T' = CQ \;\; ZK$.

On a :

$$\frac{XT'}{T'K} = \frac{AQ}{QD}$$ [car : $\frac{XT'}{AQ} = \frac{CT'}{T'Q} = \frac{T'K}{QD}$]

Donc :

$$XT' > T'K$$

Et :

$$S(XQ) = S(XO) > S(KQ).$$

Or :

$$S(T'O) > S(XO).$$

Donc :

$$S(T'O) > S(KQ) \Rightarrow S(T'O) + S(T'A) > S(KQ) + S(T'A).$$

D'où :

$$S(OQ) > S(ZM).$$

[Or : $S(OQ) = OF^2$ *et* $S(ZM) = ZH^2$].
D'où :

$$OF^2 > ZH^2$$

Donc : $OF > ZH$.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [IS: IV. 3. 1(7)] = [C: I; 12, 14, 21].

2. L'énoncé

- L'énoncé de [IS: IV. 3. 1(7)] correspond à celui de [C: I; 12], avec le même lettrage.
- Les différentes propriétés qui constituent l'énoncé de [C: I; 14] sont présentées par Ibn Sartāq d'une manière séparées, dans le corps du texte, comme autant de résultats à établir.
- L'énoncé du corollaire correspond à celui de [C: I; 21], mais avec un lettrage différent.

3. La démonstration

- La preuve de la première partie de la proposition est identique à celle de [C: I; 12].
- La preuve du corollaire est différente de celle de [C: I; 21]. Le lettrage est également différent.
- La congruence entre les deux sections opposées d'une hyperbole est établie selon une démarche et avec des outils identique à ceux [C: I; 14], mais d'une manière abrégée.
- Certaines assertions ne correspondent à aucune proposition des *Coniques*. Elles, ainsi que leurs preuves, semblent avoir été ajoutées par Ibn Sartāq.

4. Les références

- [E: V; 9], [E: VI; 23]

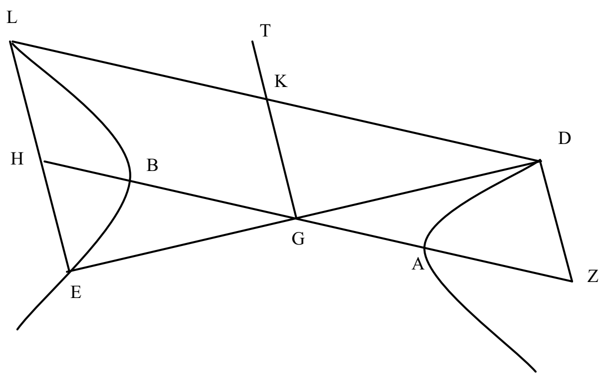
Proposition IV. 3. 1(8) :
Soit *AB* un diamètre de l'hyperbole ou de l'ellipse *(ADEB)*, de centre *G*.
Soit *GT* le diamètre conjugué.
Soit *D* un point sur la section *(ADEB)*.
On joint *DG* et on le prolonge jusqu'en *E* sur le périmètre de la section.
On mène *DK // AB* [avec *K* sur *GT*].

Alors : $DG = GE$ et $DK = KL$.

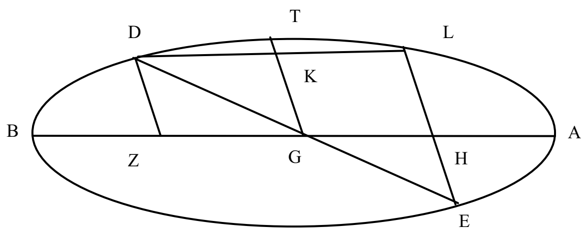
Preuve [Fig. 1a & 1b] :
Soit *DZ* une ligne ordonnée.
Soit *H* sur *BA* tel que tel que : $BH = AZ$.
Soit *HL* une seconde ligne ordonnée :
Alors *DZ // GT* et *LH // GT*.
On a aussi : $TG > DZ$ [M : 7] et *GK // DZ*.
Donc *K* est à l'intérieur de l'ellipse.
[On note C_t et C_d respectivement le côté transverse et le côté droit].
On a :

$$\frac{AH.BH}{EH^2} = \frac{C_t}{C_d} = \frac{BZ.ZA}{ZD^2}$$

Mais : $ZA = BH$ et $BZ = AH$. D'où : $ZD = EH$.
Mais : $ZG = GH$ et $\angle DZG = \angle EHG$.
Donc : $DG = GE$.
Il en découle aussi : $\angle DGZ = \angle EGH$.
Donc : $\angle EGH + \angle HGD = 2$ droits. D'où : *D, G, E* sur une même droite [E : VI; 32]



[Fig. 1a]



[Fig. 1b]

Comme $Q(ZDKG)$ est un parallélogramme, on a : $ZD = KG$ et $DK = ZG$.
Mais : $GK // LH$ et $GK = LH$.
D'où : $KL // GH$. Donc $KL = GH$.
Donc : $\angle DKG = \angle KGH$ et $\angle GKL = \angle KGZ$. D'où : $\angle GKD + GKL = \pi$.
DKL est donc une droite et on a : $DK = ZG$ et $KL = GH$.
D'où : $DK = KL$ [car $ZG = GH$].

Commentaires :

[Montrons autrement que] DL sera partagé en deux moitiés par le diamètre conjugué et DGE en deux moitiés par le centre G.

Preuve :
Soit $DL // AB$ et DGE passant par le centre.
Soit DZ et EH des lignes ordonnées.
Soit le diamètre $GK // ZD$ et qui coupe DL [en K]. On a :

$$\frac{BZ.ZA}{ZD^2} = \frac{AH.BH}{HE^2}$$

Et, après permutation : $\frac{ZD^2}{EH^2} = \frac{BZ.ZA}{AH.BH}$

Mais : $\frac{ZD^2}{EH^2} = \frac{ZG^2}{GH^2}$

Donc : $\frac{ZG^2}{GH^2} = \frac{BZ.ZA}{AH.BH}$

Et, après permutation : $\frac{ZG^2}{BZ.ZA} = \frac{\mathrm{GH}^2}{\mathrm{AH \times HB}}$

[D'où : $\frac{ZG^2 \pm BZ.ZA}{BZ.ZA} = \frac{GH^2 \pm AH.HB}{BZ.ZA}$]

Or, dans l'ellipse, on a : $ZG^2 + BZ.ZA = GB^2$ et $GH^2 + BH.HA = GA^2$

Et dans l'hyperbole, on a : $ZG^2 = AG^2 + BZ.ZA$ et $GH^2 = BG^2 + BH.HA$

D'où : $\frac{GB^2}{AZ.ZB} = \frac{GA^2}{BH.HA}$

Or : $GB^2 = GA^2$
Donc $BZ.ZA = AH.\ HB$

D'où : $\frac{ZB}{BH} = \frac{HA}{AZ}$.

Ce qui donne :

$$\frac{ZH}{BH} = \frac{ZH}{ZA} \text{ et } \frac{ZH}{BZ} = \frac{ZH}{AH}$$

[car : $\frac{ZB}{BH} = \frac{HA}{AZ} \Rightarrow \frac{ZB \pm BH}{BH} = \frac{HA \pm ZA}{ZA}$]

Donc : $ZA = BH$ (1)
Or : $DZ^2 = EH^2$ comme cela a été montré.
Donc : $DZ = EH$
D'où : $DG = GE$
Par ailleurs : $\frac{ZD^2}{BZ.ZA} = \frac{LH^2}{BH.HA}$

Et : $DZ = LH$
Donc : $BH.HA = BZ.ZA$
D'où : $\frac{BZ}{BH} = \frac{AH}{ZA}$

Donc : $BZ = AH$ [d'après (1)].
Mais : $AG = GB$. Donc : $ZG = GH$
D'où : $DK = KL$

Remarques d'Ibn Sartāq:

(1) Relation entre les diamètres
[Si on note : D_c = diamètre conjugué ; D_t = diamètre transverse ; C_d = diamètre droit], on a :

a) Dans l'ellipse : $(D_c)^2 = (D_t)(C_d)$.

D'où : $\frac{D_t}{D_c} = \frac{D_c}{C_d}$ (2)

b) Dans l'hyperbole, on définit D_c par la relation (2).

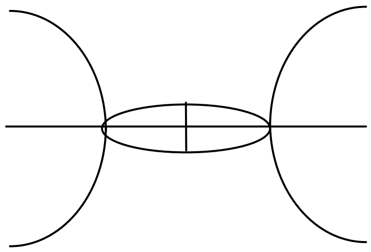
c) D_c est dit « second diamètre » parce que, selon certaines sources, il est le second dans le rapport précédent.

(2) Sections coniques conjuguées [Fig. 2a & 2b]

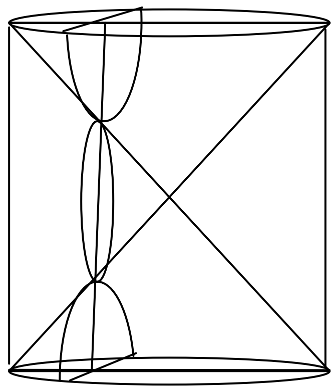
a) Entre les deux sections opposées d'une hyperbole, il est possible de construire une ellipse dont le diamètre transverse est celui de l'hyperbole. Cette ellipse est engendrée par le cône adjacent aux deux cônes opposés de l'hyperbole.

b) Inversement, entre les deux cônes opposés associés à une ellipse, il y a deux sections opposées d'une hyperbole engendrée par les deux cônes adjacents à ceux de l'ellipse.

c) La longueur des lignes ordonnées d'une hyperbole augmente en fonction de leur éloignement du centre alors que la longueur des lignes ordonnées d'une ellipse diminue en fonction de leur éloignement du centre.



[Fig. 2a]



[Fig. 2b]

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **IV.3.1(8) ⊃ C : I ; 29 et 30.**

2. **L'énoncé de la proposition :**

- Chez Apollonius, l'énoncé de C : I ; 29 ne concerne que l'hyperbole. Celui d'al-Mu'taman (ou d'Ibn Sartāq) inclut celui de l'ellipse. Il en est de même pour la démonstration[308].
- La seconde partie de l'énoncé correspond exactement à celui de C : I ; 30[309].
- La troisième partie ne correspond à aucun énoncé des *Coniques*[310].

3. **La démonstration :**

- Ibn Sartāq expose deux démonstrations distinctes de la seconde partie de l'énoncé : une première différente de celles des *Coniques* et une seconde qui correspond exactement à celle de C : I ; 30. Comme Ibn Sartāq suit toujours l'exposé d'al-Mu'taman (quitte à y ajouter des commentaires et à y introduire de longues digressions) et que, dans ce cas précis, il dit explicitement qu'il s'agit d'une autre démonstration, on en déduit que la première est celle qui se trouve dans la partie non encore retrouvée de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman.
- La troisième partie de l'énoncé est également démontrée de deux manières : la première par des arguments géométriques de parallélisme et d'angles ; la seconde à partir d'égalités de rapports.

308- [C : I; 29] : "*Lorsque, dans des sections opposées, une droite rencontre l'une des sections en passant par le centre, son prolongement coupera l'autre section*".
309- [C : I; 30] : "*Lorsque dans l'ellipse ou dans les sections opposées, une droite menée de part et d'autre du centre, rencontre la section, elle sera divisée au centre par deux parties égales*".
310- Celle qui énonce que DK = KL.

4. Les références :

- Aucune référence à d'autres ouvrages n'est explicitée. Mais les démonstrations exposées utilisent, implicitement, les propositions suivantes : [IS: IV.3.1(7)], [C : I; 21], [E : VI ; 32], [E : II ;6].

5. Les compléments d'Ibn Sartaq :

- Enoncé du fait que « *le diamètre conjugué est une moyenne proportionnelle entre le diamètre transverse et le diamètre droit* ».
- Utilisation de l'un des cônes adjacents à deux surfaces coniques opposées par le sommet pour associer à chaque hyperbole une ellipse et réciproquement. Cette mise en relation des deux sections coniques amène l'auteur à faire la remarque suivante : « *les lignes ordonnées du conjugué aux deux <sections> opposées sont plus longues à chaque fois qu'elles s'éloignent du <diamètre> transverse. Et c'est l'inverse pour l'ellipse (...). C'est comme si l'ellipse renfermait ce qui apparaît dans les deux <sections hyperboliques> opposées. Et inversement* ».
- Dans une démarche semblable, il associe à chaque parabole une autre parabole engendrée par le cône adjacent au premier.

Proposition IV. 3. 1(9) :

Si d'un point, situé à l'intérieur d'une section, nous menons une ligne parallèle à une tangente ou à une des sécantes de la section, cette parallèle coupera la section en deux points.

Si du même point, nous menons une ligne parallèle au diamètre transverse de l'hyperbole ou de la parabole, alors elle coupera la section en un seul point.

Preuve:

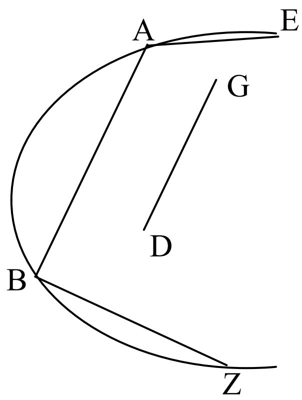
Soit A sur le périmètre de la section, G à l'intérieur de la section, AB une droite et $GD \parallel AB$.

1) AB coupe la section en B [Fig. 1] :

Soit E et Z sur la section. On joint AE et BZ.

$GD \parallel AB \Rightarrow GD$ rencontre AE et BZ.

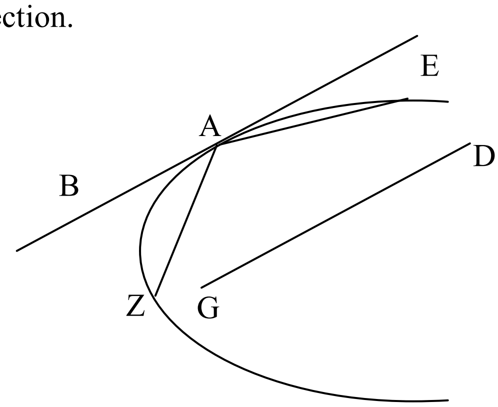
a) GD rencontre AE [en E à intérieur à la section] $\Rightarrow GD$ coupe la section car GD est prolongeable à l'infini et arc(AE) est fini.
b) GD rencontre AE en E $\Rightarrow GD$ rencontre la section.
c) GD rencontre AE [en E] à l'extérieur de la section car elle sera prolongée à partir de E.



[Fig. 1]

2) AB est tangent à la section au point A [Fig. 2] :

Soit E et Z sur la section, des deux côtés de A. On joint AE et AZ. Alors, le prolongement de GD rencontre AE et AZ soit à l'extérieur de la section, soit à l'intérieur, soit sur la section.



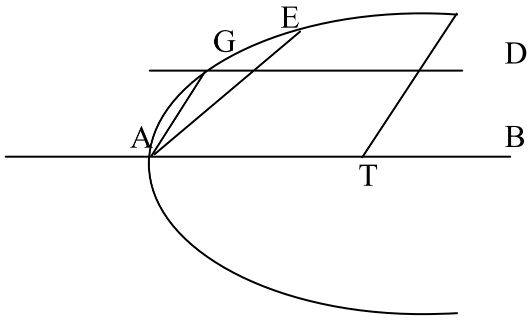
[Fig. 2]

3) Si *AB* est le diamètre transverse de l'hyperbole ou de la parabole [Fig. 3] :

a) *GD* coupe la section

AB rencontrera la section en son sommet et si on le prolonge à l'infini avec la section, il ne la rencontrera pas une seconde fois.

Soit *E* sur la section et *GD* // *AB*. On joint *AE*. Alors *GD* rencontrera *AE*. Donc *GD* rencontrera la portion de courbe *AE* selon les trois cas de figure et ainsi rencontrera la section en une de ses extrémités, qui est *G*.



[Fig. 3]

b) *GD* coupe la section en un seul point [fig.4]

Supposons le contraire : *GD* rencontre la section en un second point *D*.

Soit *GH* et *DT* les lignes ordonnées issues de *G* et *D*.

1. Dans la parabole, on aura :

$$\frac{DT^2}{GH^2} = \frac{AT}{AH} \text{ et } AT > AH$$

Donc $DT > GH$.

2. Dans l'hyperbole, on aura :

$$\frac{DT^2}{GH^2} = \frac{BT.TA}{BH.HL}$$

et :

$$BT.TA > BH.HL.$$

Donc $DT > GH$ (1).

Or *(GDTH)* est un parallélogramme [*GD* // *AT* par hypothèse]. Ce qui est contraire à (1).

Donc *GD* ne coupe la section qu'en un seul point.

Corollaire

Si on mène d'un point extérieur au périmètre de la parabole ou de l'hyperbole une ligne parallèle à au diamètre transverse de l'une ou l'autre, elle rencontrera chacune d'elle en un seul point.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. IV. 3. 1(9) $\supset$ C : I ; 18, 19, 22-27, 31.

2. L'énoncé de la proposition :

- La première partie de l'énoncé de la proposition IV. 3. 1(9) correspond à l'énoncé de C : I ; 18, 19, 27, formulé d'une manière plus générale dans la mesure où la droite (qui doit couper la section conique) peut être parallèle soit à une tangente à la section (comme dans C : I. 18), soit une corde de ladite section.
- La seconde partie correspond à l'énoncé de C : I ; 26.
- Dans ses commentaires et développements, Ibn Sartāq a formulé des énoncés semblables à ceux de C : I ; 22-25, 31.

3. La démonstration :

- Les raisonnements sont semblables à ceux d'Apollonius avec utilisation des propriétés (déjà établies) des trois sections coniques.
- La présentation des preuves est différente dans la partie correspondant à C : I ; 26 :

  * al-Mu'taman (ou Ibn Sartaq) démontre l'unicité du point de rencontre de la droite avec la section avant d'en établir l'existence. Dans C : I; 26, c'est la démarche inverse.
  * Alors qu'Apollonius traite séparément les cas de l'hyperbole et de la parabole, al-Mu'taman, comme à son habitude, expose une seule démonstration pour les deux sections.

4. Les références :

- al-Mu'taman ou Ibn Sartāq utilisent, implicitement, les propositions suivantes : [M : IV.3.1(6), (7)].

5. Les compléments d'Ibn Sartaq :

Toutes les propositions des *Coniques* qui sont formulées dans le corps du texte mais dont le contenu n'est pas évoqué dans l'énoncé semblent être des compléments d'Ibn Sartaq.

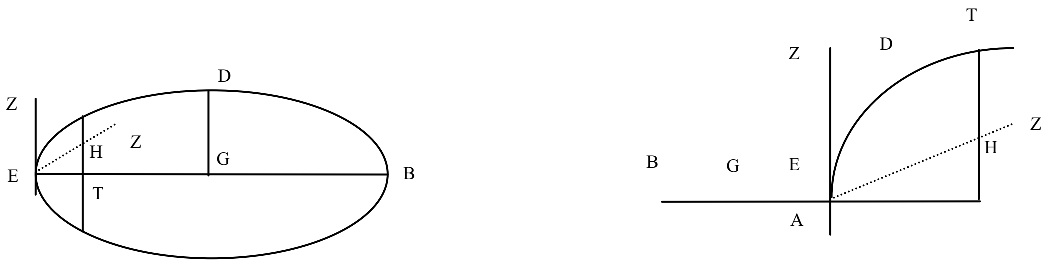
Proposition IV. 3. 1(10) :
Construire une tangente issue d'un point donné sur une section donnée.

Soit une section *(AD)* de sommet *A*, de diamètre transverse *AB*.
Soit *G* le centre de l'ellipse et de l'hyperbole, *GD* le diamètre conjugué de l'ellipse, *E* un point de la section *(AD).*

Remarques d'Ibn Sartāq:
- Dans le cas de l'ellipse, *E* peut être soit sur un des deux sommets, soit sur l'une des extrémités du diamètre conjugué, soit entre les deux diamètres conjugués.
- Dans le cas de l'hyperbole et de la parabole, *E* peut être sur le sommet ou ailleurs.

1. *E* est sur le sommet *A* de la section *(AD)*
Soit *EZ* parallèle aux lignes ordonnées. Alors *EZ* sera tangent à *(AD)* au point E.

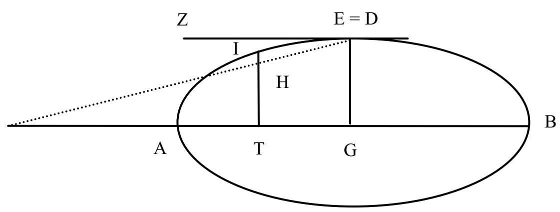
Preuve [Fig. 1a & 1b] :
En effet, supposons le contraire. Soit *H* sur *EZ* et *H* intérieur à *(AD).*
Soit *HT* la ligne ordonnée passant par *H*. Elle coupe *(AD)* en *T.*
Mais, *EH* est parallèle aux lignes ordonnées, par hypothèse. Ce qui est absurde. Donc *EZ* est tangente à (AD).



[Fig. 1a & 1b]

2. *E* sur une des deux extrémités du diamètre conjugué de l'ellipse
Soit *EZ//AB*. Alors *EZ* est une tangente à *(AD)* au point *E.*

Preuve [Fig. 2] :
Supposons le contraire et soit *H* un point de *EZ* à l'intérieur de *(AD).*
Soit *IHT* une ligne ordonnée, avec *I* sur *arc(AD).*
D'où : *IT < GD.*
Donc *EZ* coupera le prolongement de *AB*. Ce qui est absurde.
Donc *EZ* est tangent à *(AB).*



[Fig. 2]

3. E est compris entre les deux diamètres conjugués dans l'ellipse et il est distinct du sommet dans l'hyperbole et la parabole.

Soit EZ une ligne ordonnée. Soit H tel que :

- Dans la parabole : $AH = AZ$
- Dans l'hyperbole et l'ellipse : $\dfrac{BZ}{AZ} = \dfrac{BH}{AH}$

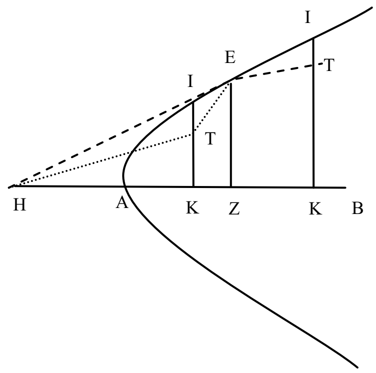
Alors HE est tangent à (AD).

Preuve :

Supposons le contraire. Donc HE coupe (AD). Soit T un point de HE à l'intérieur de la section.

Soit ITK une ligne ordonnée qui coupe le périmètre de la section en I et le diamètre AB en K.

a) Dans le cas de la parabole :



[Fig. 3a]

On a : $\dfrac{EZ^2}{IK^2} = \dfrac{ZA}{AK}$ [M : 7]

Et : $\dfrac{ZA}{AK} = \dfrac{ZA.AH}{AK.AH}$

Or : $4.ZA.AH = ZH^2$ car $ZA = AH$

D'où : $\dfrac{ZH^2}{4.AK.AH} = \dfrac{ZA}{AK}$

Mais : $4.AK.AH = KH^2 - KZ^2$ avec $KZ = KA - AH$

[et : $KH^2 - KZ^2 < KH^2$]

Donc : $\dfrac{EZ^2}{IK^2} > \dfrac{ZH^2}{KH^2}$

Et : $\dfrac{ZH^2}{KH^2} = \dfrac{ZE^2}{TK^2}$ [similitude des triangles (EZH) et (TKH)]

D'où : $\dfrac{EZ^2}{IK^2} > \dfrac{ZE^2}{TK^2}$

Donc : $IK < TK$ or $IK > TK$. Ce qui est absurde.

Donc : EH est alors tangent à (AD).

b) Dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, on a : $\dfrac{BH}{HA} = \dfrac{BZ}{ZA}$

ITK est une ligne ordonnée et *K* est, soit sur *AZ*, soit sur *ZB* [pour l'ellipse], soit à l'extérieur de *AZ* du côté de *A* [pour l'hyperbole].

D'après ce que a précédé [M : III; 1.2(17)], on a :

$$\frac{BZ.ZA}{ZH^2} > \frac{BK.KA}{KH^2}$$

En permutant les moyens, on obtient : $\dfrac{BZ.ZA}{BK.KA} > \dfrac{ZH^2}{KH^2}$

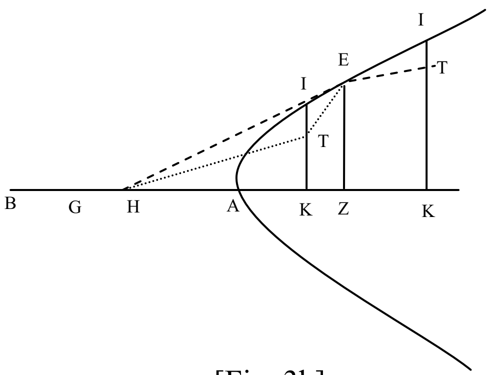
Or : $\dfrac{BZ.ZA}{BK.KA} = \dfrac{ZE^2}{IK^2}$ [M : 7]

Donc : $\dfrac{ZE^2}{IK^2} > \dfrac{ZH^2}{KH^2}$

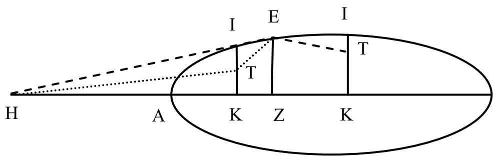
Or : $\dfrac{ZH^2}{KH^2} = \dfrac{ZE^2}{TK^2}$ [similitude de *T(ZHE)* et *T(KHT)*]

D'où : $\dfrac{ZE^2}{IK^2} > \dfrac{ZE^2}{TK^2} \Rightarrow IK < TK$. Ce qui est absurde

Donc *EH* est alors tangent à *(AD)*.



[Fig. 3b]



[Fig. 3c]

Complément 1 :

- Dans le cas de la parabole nous avons : $\dfrac{ZA}{AH} = \dfrac{AH}{ZA}$ car $ZA = AH$
- Dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, on a, par permutation :

$$\frac{ZA}{AH} = \frac{ZB}{BH} \quad \text{[car : } \frac{BH}{HA} = \frac{BZ}{ZA}\text{]}$$

D'où :
$ZA > AH$ pour l'hyperbole;
$ZA < AH$ pour l'ellipse;
$ZA = AH$ pour la parabole.
Dans le cas de l'hyperbole et de l'ellipse, on a :

$$BH > AH \text{ car } \frac{BH}{HA} = \frac{BZ}{ZA} \text{ et } BZ > ZA$$

[par construction de l'hyperbole et, dans l'ellipse, parce que Z est entre le sommet A et le centre]

Complément 2 :
Dans toutes les sections coniques, il n'y a aucune droite qui soit comprise entre la section et sa tangente

Preuve :
Soit *(AD)* une section de sommet A et de diamètre AB et E le point de tangence.

1. E coïncide avec A
Soit EZ la tangente à *(AD)* en E. On suppose qu'il existe EH, entre *(AD)* et EZ.
Soit HIT une ligne ordonnée qui coupe *(AD)* en I et AB en T.

a) Si *(AD)* est une parabole [Fig. 4a] :

Soit K sur AB tel que : $\dfrac{HT^2}{IT^2} = \dfrac{TE}{EK}$

Soit $KLM // TIH$, avec L sur *(AD)* et M sur EH.

On a : $\dfrac{TE}{EK} = \dfrac{TI^2}{KL^2}$ [C : I; 20]

D'où : $\dfrac{HT^2}{IT^2} = \dfrac{TI^2}{KL^2} \Rightarrow \dfrac{HT}{TI} = \dfrac{TI}{KL} \Rightarrow \dfrac{HT}{KL} = \dfrac{TE}{EK}$

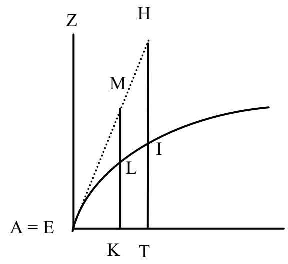
[car $\dfrac{HT.TI}{TI.KL} = \dfrac{HT^2}{IT^2} = \dfrac{TE}{EK}$]

Or : $\dfrac{HT}{MK} = \dfrac{TE}{EK}$ [similitude de $T(HTE)$ et de $T(MKE)$]

Donc : $\dfrac{HT}{KL} = \dfrac{HT}{MK}$.

D'où : $KL = MK$

Or : $KL < KM$ [par construction]. Ce qui est absurde.



[Fig. 4a]

b) Si *(AD)* est une hyperbole ou une ellipse [Fig. 5a et 5b] :
Soit AK le diamètre droit. On joint BK et on mène $TL//AK$, avec $L = TL \cap BK$
Donc : $LT.TA = IT^2$
Soit M sur le prolongement de TL, tel que : $AT.\ TM = HT^2$ (1)
Donc : $TM > TL$ [car $HT > IT$ par hypothèse]
On joint MA. Soit $N = MA \cap BL$, $NS//TL$ et $SOF//TIH$

On a [d'après (1)] : $\dfrac{MT}{TH} = \dfrac{TH}{TA}$ (2)

Or : $\dfrac{MT}{NS} = \dfrac{TE}{ES}$ [similitude de $T(MTE)$ et $T(NSE)$]

Et : $\dfrac{HT}{SF} = \dfrac{TE}{ES}$ [similitude de $T(HTE)$ et $T(FSE)$]

Donc : $\dfrac{MT}{NS} = \dfrac{HT}{SF}$

D'où, après permutation : $\dfrac{MT}{TH} = \dfrac{NS}{SF}$

Mais : $\dfrac{MT}{TH} = \dfrac{TH}{TA}$ [d'après (2)]

Or : $\dfrac{TH}{TE} = \dfrac{FS}{ES}$ [similitude de $T(THE)$ et $T(FSE)$]

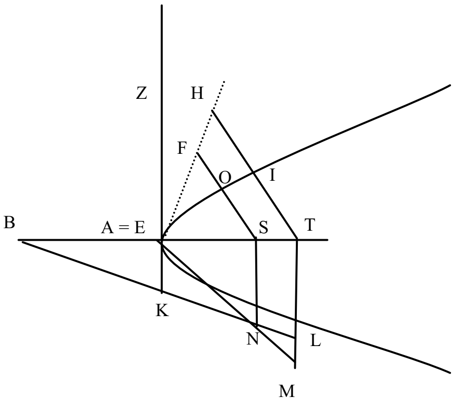
Donc : $\dfrac{NS}{SF} = \dfrac{FS}{ES}$

D'où : $NS.ES = SF^2$ [car $TE = TA$]

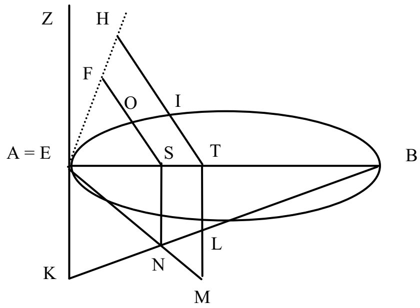
Mais : $NS.ES = SO^2$ [propriété de la section]

D'où : $SO = SF$.

Or : $SF > SO$. Ce qui est absurde.



[Fig. 5a]



[Fig. 5b]

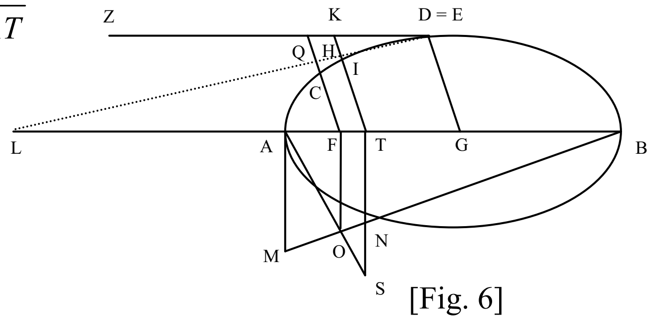
c) *(AB)* est une ellipse, D l'extrémité de son diamètre conjugué et $E = D$ [Fig. 6]

Soit EZ la tangente à *(AB)* en D.
Supposons qu'il existe EH entre *(AB)* et EZ.
De H, menons $KHIT//EG$, avec G le centre de la section.
On a : $KT = EG$ et $HT < KT$.
Donc EH coupe GA. Soit $L = EH \cap GA$. Supposons L du côté de A.
Soit AM le côté droit. Joignons MB
Soit $TN//AM$. Alors : $AT.TN = IT^2$
Soit S [sur le prolongement de TN], tel que : $AT.TS = HT^2$
Donc : $TS > TN$ [car $HT > IT$].
Joignons SA et soit $O = SA \cap NM$. Soit $OF//TN$ et $FCQ//TIH$.
Comme $AT.TS = HT^2$, on a : $\dfrac{ST}{HT} = \dfrac{TH}{AT}$

Et : $\dfrac{ST}{OF} = \dfrac{HT}{FQ}$.

D'où, après permutation : $\dfrac{OF}{FQ} = \dfrac{ST}{TH}$

D'où : $\dfrac{OF}{FQ} = \dfrac{TH}{AT}$



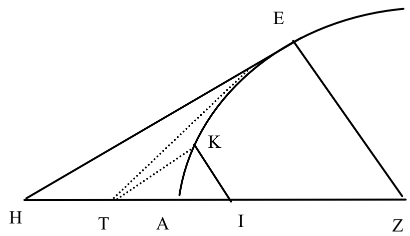
[Fig. 6]

Mais : $\dfrac{TH}{AT} = \dfrac{QF}{FA}$ [similitude de $T(ATH)$ et $T(QFA)$]
Donc : $OF.FA = QF^2$ et $OF.FA = FC^2$
Alors : $QF^2 = FC^2$.
D'où : $QF = FC$.
Or $QF > FC$. Ce qui est absurde.
Donc, il n'y a aucune droite entre la tangente en E et la section.

2. Si E est compris entre les deux conjugués de l'ellipse ou s'il est distinct du sommet de l'hyperbole ou de la parabole [Fig. 7].

Soit EH la tangente à la section *(AD)*. Supposons qu'il existe ET entre *(AD)* et la tangente EH.
Soit $H = EH \cap AB$ et $T = ET \cap AB$
[Soit EZ la ligne ordonnée issue de E]

a) Dans le cas de la parabole :
$AH \neq AT \Rightarrow AZ \neq AH$ ou $AZ \neq AT$
Supposons que $AZ \neq AT$ avec $AZ = AH$ ou $AZ \neq AH$
Soit [I un point à l'intérieur de *(AD),* tel que] : $AI = AT$
Soit IK une ligne ordonnée. On joint KT.
Alors KT est une tangente [M: IV. 3. 1(9)].
Or HE est déjà tangente.



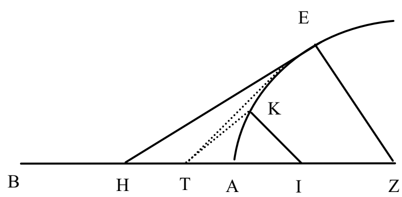
Cas de la parabole : [Fig. 7]

Si K est entre A et E, ou bien si E est entre A et K, TK coupe TE en $L \neq T$.
[Donc TK et TE sont confondus]. Or $TK \neq ET$. Ce qui est absurde.

b) Dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole [Fig. 8a et 8b]:

$$AT \neq HA \Rightarrow \frac{BZ}{ZA} \neq \frac{BH}{HA} \text{ ou } \frac{BZ}{ZA} \neq \frac{BT}{TA}$$

Si $\frac{BZ}{ZA} = \frac{BH}{HA}$ et $\frac{BZ}{ZA} = \frac{BT}{TA}$ (1)



[Fig. 8a]

- Dans le cas de l'hyperbole

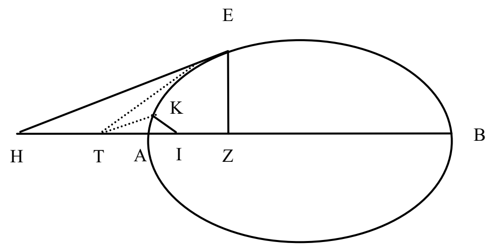
$(1) \Rightarrow \frac{BH}{HA} = \frac{BT}{TA}$

Après permutation, on a : $\frac{BH}{BT} = \frac{AH}{TA}$

Ce qui est absurde car : $\frac{AH}{TA} > 1$ et $\frac{BH}{BT} < 1$

- Dans le cas de l'ellipse

$(1) \Rightarrow \dfrac{BH}{HA} = \dfrac{BT}{TA}$



[Fig. 8b]

Et en composant : $\dfrac{BA + AH}{AH} = \dfrac{BA + AT}{AT}$

D'où : $\dfrac{BA}{HA} = \dfrac{BA}{AT} \Rightarrow HA = AT.$

Ce qui est absurde car $AT \neq HA$.

Si $[\dfrac{BZ}{ZA} = \dfrac{BH}{HA}$ et$] \dfrac{BZ}{ZA} \neq \dfrac{BT}{TA}$ (2)

Dans le cas de l'ellipse : Soit I tel que $\dfrac{BI}{IA} = \dfrac{BT}{TA}$

Dans le cas de l'hyperbole : Soit I tel que : $\dfrac{ZA}{AI} = \dfrac{BT}{TA}$.

D'où : $\dfrac{ZI}{AI} = \dfrac{BT}{TA}$

Car : $\dfrac{ZI + IA}{IA} = \dfrac{BT + TA}{TA}$

Du point I, menons la ligne ordonnée IK, en joignant KT, elle sera alors tangente à la section. Or ET est aussi tangente à la section. D'où une contradiction.

3) Propriétés des sections coniques

Soit EH une tangente à une section tel que le point de tangence soit différent du sommet ou d'une extrémité du diamètre conjugué [pour l'ellipse].

Soit $H = EH \cap AB$

Soit Z sur AB tel que EZ soit une ligne ordonnée.

Alors :

a) Dans le cas de la parabole : $ZA = AH$

b) Dans le cas de l'hyperbole et de l'ellipse : $\dfrac{BZ}{ZA} = \dfrac{BH}{HA}$

Preuve :

Supposons le contraire :

- Dans le cas de la parabole : soit I tel que : $AI = AH$
- Dans le cas l'ellipse et de l'hyperbole : soit I tel que : $\dfrac{BI}{IA} = \dfrac{BH}{HA}$.

Dans l'ellipse, le point I sera entre le centre et le sommet A car $BH > AH$.

Soit K un point sur (AD) tel que IK soit une ligne ordonnée.

On joint KH. KH est tangent à (AD) [C : II; 33], [C : I; 34].

Or EH l'est aussi par hypothèse.

Donc, le prolongement de KH [coupera le prolongement de EH du côté de E]. Donc, KH et EH entourent une surface. Ce qui est absurde.

Problème :

Construire une tangente issue d'un point du diamètre transverse extérieur à la section

1. Dans le cas de la parabole :

Soit *H* un point du diamètre transverse extérieur à la parabole et soit *Z* un point sur le diamètre transverse à l'intérieur de la parabole tel que $HA = AZ$.

Soit *ZE* la ligne ordonnée tel que le point *E* soit sur la parabole.

Alors *HE* est une tangente au point *E* [C : II; 49].

2. Dans le cas de l'ellipse :

Soit *H* un point du diamètre extérieur à l'ellipse, soit *Z* tel que $\frac{BZ}{ZA} = \frac{BH}{HA}$, soit *ZE* une ligne ordonnée telle que le point *E* soit sur l'ellipse.

Alors *HE* est une tangente au point *E*.

3. Dans le cas de l'hyperbole :

Soit *H* un point du diamètre extérieur à l'hyperbole.

Si *G* est le centre de la section et $H = G$, alors il est impossible de mener une tangente à la courbe.

Si $H \neq G$ et compris entre le centre *G* et le sommet *A*, soit *Z* tel que :

$$\frac{BZ}{ZA} = \frac{BH}{HA}$$

Soit *ZE* une ligne ordonnée telle que le point *E* soit sur l'hyperbole.

Alors *HE* est une tangente au point *E*.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M: IV. 3. 1(10)] ⊃ C : I ; 17, 32-36.**

2. **L'énoncé de la proposition :**

- L'énoncé d'al-Mu'taman est général. Il inclut tous les cas de figures qu'il est possible de traiter.

3. **La démonstration :**

- La propriété correspondant à C : I; 17 est établie en tenant compte de plusieurs cas : le point de tangence est soit sur le sommet de la section, soit sur une des deux extrémités du diamètre conjugué (dans le cas de l'ellipse), soit compris entre les deux diamètres conjugués (dans l'ellipse) ou distinct du sommet (dans les deux autres sections).
- A une exception près, les preuves exposées sont semblables à celles d'Apollonius. L'exception concerne la preuve de l'énoncé correspondant à celui de C : I; 34. Chez al-Mu'taman, cette preuve utilise un résultat établi dans une section précédente du *Kitāb al-istikmāl* (III.1.2(17))[311]. Ce qui permet de la rendre plus concise.

4. **Les références :**

- Les propriétés des sections coniques qui sont utilisées sont dans [M : IV.3.1(6, 7)].

5. **Les compléments d'Ibn Sartaq :**

- Comme dans l'énoncé de la proposition, il n'est pas fait mention de *l'impossibilité d'avoir une droite située entre une section et sa tangente*, la démonstration de cette propriété semble être un des compléments d'Ibn Sartaq. Elle est établie pour chacune des trois sections, en tenant compte de la position du point de tangence sur chacune de ces courbes.
- Un second complément traite de la construction, à partir d'un point donné, d'une tangente à une section conique, mais dans le cas particulier où le point donné est sur le diamètre transverse.

[311]- HOGENDIJK, J.P. : *The Lost Geometrical Parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century) in the Redaction of Ibn Sartāq (14th century) : An Analytical Table of Contens*, op. cit., p. 29.

Proposition IV. 3. 1(11) :

Soit *AB* le diamètre transverse d'une ellipse ou d'une hyperbole *(BG)* et *HT* le diamètre conjugué.

Soit *GD* une tangente en *G* à *(BG)* telle que $AB \cap GD = D$ et $HT \cap GD = K$

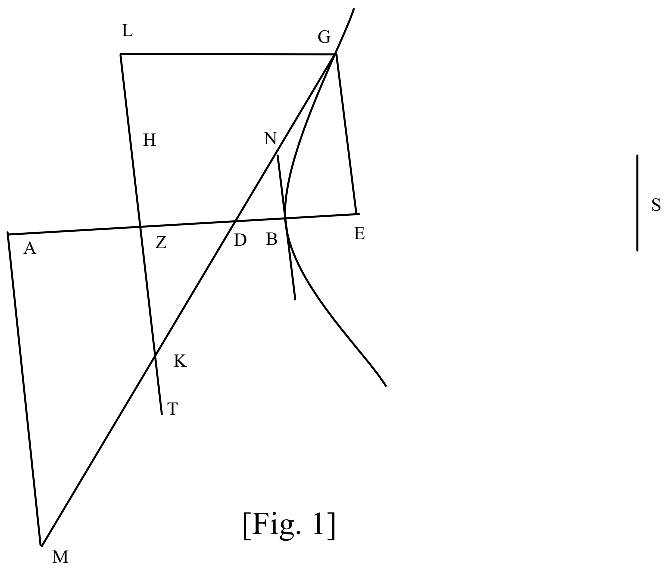
Soit *Z* le centre de *(BG)*

Nous menons les lignes ordonnées du point *G* respectivement sur *AB* et *HT* tel que $GE \cap AB = E$ et $GL \cap TH = L$.

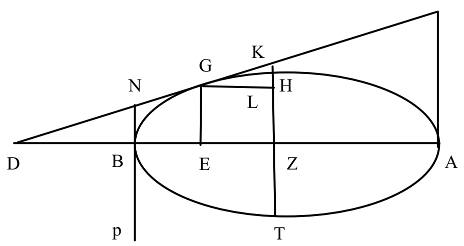
Soit *AM // BN // GE* telles que : $AM \cap GD = M$ et $BN \cap GD = N$.

Alors :

$$EZ \,.\, ZD = ZB^2 \text{ et } \frac{EZ.ED}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d}$$



[Fig. 1]



[Fig. 2]

Preuve :

Nous avons : $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BD}$ [M: IV. 3. 1(10)] [pour les deux sections]

a) Dans le cas de l'hyperbole [Fig. 1] :

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{AE+EB}{EB} = \frac{AD+DB}{BD} = \frac{AB}{BD}$$

$$\Rightarrow \frac{(AE+EB)/2}{EB} = \frac{AB/2}{BD}$$

Or : $\frac{1}{2}(AE + EB) = ZE$ et $BZ = \frac{1}{2}AB$ [car Z est le centre de (BG)]

Donc : $$\frac{ZE}{EB} = \frac{BZ}{BD} \quad (1)$$

D'où :
$$\frac{ZE}{ZB} = \frac{BZ}{ZD}$$

car :
$$\frac{ZE}{ZE - EB} = \frac{BZ}{BZ - BD}, \quad \text{d'après (1)}$$

Donc : $EZ.ZD = ZB^2$ (2)

D'autre part : $EZ^2 = AE \times EB + BZ^2$ [E;II:5]
Et : $EZ^2 = EZ.ED + EZ.ZD$ [E;II:2]
Donc : $AE.EB + BZ^2 = EZ.ED + EZ.ZD$
Et : $EZ.ZD = ZB^2$ [d'après (2)]
Donc : $AE.EB = EZ.ED$
Or [si on notre C_d le côté droit et D_t le diamètre transverse], on a :

$$\frac{AE.EB}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d}, \text{ [C I, 21]}$$

D'où :
$$\frac{EZ.ED}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d}$$

b) Dans le cas de l'ellipse ou du cercle [Fig. 2] :

Nous avons : $\frac{1}{2}(AD + DB) = DZ$ et $\frac{1}{2}AB = BZ$

Donc : $$\frac{DZ}{DB} = \frac{BZ}{EB} \quad (3)$$

D'où :
$$\frac{DZ}{ZB} = \frac{BZ}{ZE}$$

Car, d'après (3) : $$\frac{BZ}{BZ - EB} = \frac{DZ}{DZ - DB}$$

[car : $DZ = DE + EZ$]

D'où : $EZ.DZ = ZB^2$

D'autre part, puisque : $DZ.ZE = DE.EZ + EZ^2$ [E : II; 3]
Et : $ZB^2 = AE.EB + EZ^2$
Donc : $DE.EZ + EZ^2 = AE.EB + EZ^2$
D'où : $DE.EZ = AE.EB$.

Or : $\frac{AE.EB}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d}$ [C I, 21]

D'où : $\frac{EZ.ED}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d}$ (4)

[2] Dans le cas de l'hyperbole et de l'ellipse, on a :

a) $ZK.ZL = ZH^2$
b) $\frac{ZL.LK}{LG^2} = \frac{C_d}{D_c}$

Preuve de a) :

Puisque : $\frac{EZ.ED}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d} = \frac{AB^2}{TH^2}$ car $\frac{TH}{C_t} = \frac{D_c}{TH}$ [$D_c.C_t = TH^2$ et $D_c = AB$]

Et : $\frac{AB^2}{TH^2} = \frac{BZ^2}{ZH^2}$

Ainsi : $\frac{DE\ .\ EZ}{EG^2} = \frac{BZ^2}{ZH^2}$ (5)

Or : $\frac{DE\ .\ EZ}{EG^2} = \frac{EZ}{EG}(\frac{DE}{EG})$ avec $EG = ZL$ et $\frac{DE}{EG} = \frac{ZD}{ZK}$ [similitude des triangles *DEG* et *DZK*].

D'où : $\frac{DE\ .\ EZ}{EG^2} = \frac{EZ}{ZL}(\frac{ZD}{ZK}) = \frac{EZ\ .\ ZD}{ZK\ .\ ZL}$

Donc : $\frac{EZ\ .\ ZD}{ZK\ .\ ZL} = \frac{BZ^2}{ZH^2}$ [d'après (5)]

En permutant les moyens : $\frac{EZ\ .\ ZD}{BZ^2} = \frac{ZK\ .\ ZL}{ZH^2}$

Or : $EZ.ZD = ZB^2$ [d'après (2)]
Donc : $ZK.ZL = ZH^2$ (6)

Preuve de b) pour l'ellipse :
On a : $ZK.ZL = KL.LZ + LZ^2$ [$ZK = ZL + LK$]
Et : $ZH^2 = TL.LH + ZL^2$ [propriété de l'ellipse]
Donc : $<KL.LZ + LZ^2 = TL.LH + ZL^2>$ [d'après (5)]
D'où : $TL.LH = KL.LZ$

Mais : $\frac{EG}{ZE}(\frac{EG}{ED}) = \frac{EG^2}{ZE\ .\ ED} = \frac{C_d}{D_c}$ [d'après (4)]

Or : $\frac{EG}{ZE} = \frac{ZL}{LG}$ et $\frac{EG}{ED} = \frac{KZ}{ZD} = \frac{KL}{LG}$ [similitude des triangles *(EDG), (ZDK)* et *(LGK)*]

Donc : $\frac{Cd}{Dt} = \frac{ZL}{LG} . \frac{KL}{LG} = \frac{ZL\ .\ KL}{LG^2}$

Alors : $\dfrac{ZL.LK}{LG^2} = \dfrac{C_d}{D_t}$ (7)

[3] Corollaire 1 :

Si $ZK.ZL = ZH^2$ ou $\dfrac{ZL\ .\ LK}{LG^2} = \dfrac{C_d}{D_t}$, GDK est une tangente à la section

Preuve :

C'est l'inverse de la démonstration précédente.

Corollaire 2 :

(1) $\dfrac{EG}{EZ} = \dfrac{C_d}{D_t} \cdot \dfrac{ED}{EG}$ ou $\dfrac{EG}{ED} = \dfrac{C_d}{D_t} \cdot \dfrac{EZ}{EG}$ [d'après (4)]

(2) $\dfrac{GL}{LK} = \dfrac{D_t}{C_d} \cdot \dfrac{LZ}{GL}$ ou $\dfrac{GL}{LZ} = \dfrac{D_t}{C_d} \cdot \dfrac{LD}{GL}$ [d'après (7)]

Preuve :

Soit S une grandeur vérifiant : $ZE.ED = S.EG$

On a : $\dfrac{DE\ .\ EZ}{EG^2} = \dfrac{D_t}{C_d}$ [d'après (4)]

Donc : $\dfrac{EG\ .\ S}{EG^2} = \dfrac{D_t}{C_d}$.

Mais : $\dfrac{EG\ .\ S}{EG^2} = \dfrac{S}{EG}$

Donc : $\dfrac{S}{EG} = \dfrac{D_t}{C_d}$

Or : $\dfrac{EZ}{EG} = \dfrac{S}{ED}$

Et : $\dfrac{EG}{ED} = \dfrac{EG}{S} \cdot \dfrac{S}{ED}$

D'où : $\dfrac{EG}{S} = \dfrac{C_d}{D_t}$ et $\dfrac{S}{ED} = \dfrac{EZ}{EG}$

Donc : $\dfrac{EG}{ED} = \dfrac{C_d}{D_t} \cdot \dfrac{EZ}{EG}$

D'où : $\dfrac{EG}{EZ} = \dfrac{C_d}{D_t} \cdot \dfrac{ED}{EG} \cdot \dfrac{EZ}{EG}$

D'autre part, si : $ZL.LK = S.LG$ et : $\dfrac{ZL\ .\ LK}{LG^2} = \dfrac{C_d}{D_t}$

Nous aurons : $ZL.LK = S.LG \Rightarrow$: $\dfrac{S\ .\ LG}{LG^2} = \dfrac{S}{LG} = \dfrac{C_d}{D_t}$

Or : $\dfrac{ZL}{LG} = \dfrac{S}{LK}$

Et : $\dfrac{GL}{LK} = \dfrac{GL}{S} \cdot \dfrac{S}{LK}$

D'où : $\dfrac{GL}{S} = \dfrac{d}{p}$ et $\dfrac{S}{LK} = \dfrac{ZL}{LG}$

Alors : $\dfrac{GL}{LK} = \dfrac{D_t}{C_d} \cdot \dfrac{LZ}{GL}$

Corollaire 3 :
Soit les points M et N tels que :
$AM \,//\, BN \,//\, GE$, où $M = AM \cap GD$ et $N = BN \cap GD$
Alors $AM.BN = ZH^2$

Preuve :

Nous avons : $\dfrac{DZ}{ZB} = \dfrac{BZ}{ZE}$ [d'après (2)]

Donc : $\dfrac{DZ}{ZA} = \dfrac{AZ}{ZE}$,
car : $ZB = ZA$
D'où, par séparation et permutation :

$$\frac{DZ}{ZA} = \frac{DB}{BE}\ [\frac{DZ}{ZA} = \frac{AZ}{ZE} \Rightarrow \frac{DZ}{ZA} = \frac{DZ - AZ}{ZA - ZE}]$$

Puis, par inversion et composition :

$$\frac{AD}{DZ} = \frac{ED}{DB}\ [\frac{ZA}{DZ} = \frac{BE}{DB} \Rightarrow \frac{ZA + DZ}{DZ} = \frac{BE + DB}{DB}]$$

Mais : $\dfrac{AD}{DZ} = \dfrac{AM}{ZK}$ [similitude des deux triangles *(AMD)* et *(DZK)*],

et : $\dfrac{ED}{DB} = \dfrac{GE}{NB}$ [similitude des deux triangles *(DNB)* et *(DEG)*]

Donc : $\dfrac{AM}{ZK} = \dfrac{GE}{NB}$

D'où : $AM.NB = ZK.EG$
Or : $EG = ZL$.
Donc : $AM.NB = KZ.ZL = ZH^2$ [d'après (6)]
D'où : $AM.NB = ZH^2$

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [M : IV. 3. 1(11)] ⊃ [C : I ; 37-40]; [C : III; 42].

2. L'énoncé de la proposition :

- al-Mu'taman se propose d'établir 8 résultats. Mais deux d'entre eux seulement sont évoqués dans l'énoncé préliminaire. 5 autres sont énoncés dans le corps du texte avant d'être démontré. Un seul est énoncé à la fin de son établissement.
- En dehors du cinquième résultat (qui a été ajouté par al-Mu'taman), tous les autres correspondent à des énoncés des *Coniques*[312].

3. La démonstration :

- La démonstration des deux premiers résultats est identique à celle de [C : I ; 37].
- Celle des deux suivants est identique à celle de [C : I ; 38].
- Celles des 6e et 7e sont identiques, respectivement, à celles de [C : I ; 39] et [C : I ; 40], en particulier dans le fait qu'il n'y a pas de justification de l'existence de la quatrième proportionnelle à trois grandeurs données. (Voir la même remarque déjà faite à propos de [M : IV.3.1(6)]).
- Le 8e résultat correspond à [C : I ; 42], avec une démonstration identique.

4. Les références :

- Les propositions utilisées, implicitement, sont : [E : II ; 3, 5], [M : IV. 3. 1(7, 10)].
- Des références à des propositions déjà établies dans l'*Istikmāl* sont signalées en marge du manuscrit : [M : IV.3.1(10)], [M : IV.2.1(15)], [M : IV.2.1(20)], [M : IV.3.1(11, partie 1)]

312- Il s'agit de la relation : $TL.LH = KL.LZ$.

Proposition IV. 3. 1(12) :

Soit *(AG)* une section non parabolique de diamètre transverse *AB* et de centre *E*.

D'un point *D* sur le diamètre, on mène la ligne ordonnée *DG*. Soit *GH* quelconque.

On complète le parallélogramme de côtés *GD* et *GH*.

Sur *AE*, on construit *(AZ)* une surface de mêmes angles que *(DH)* et telle que :

$$\frac{DG}{GH} = \frac{AE}{EZ} \cdot \frac{C_d}{D_t} \quad (1)$$

[On note *(EI)* le parallélogramme construit sur *ED* et semblable à *(AZ)*].

Alors :

a) Dans le cas de l'hyperbole : *S(EI) = S(AZ) + S(DH)*

b) Dans le cas de l'ellipse et le cercle : *S(EI) + S(DH) = S(AZ)*

Preuve [Fig. 1 & 2] :

Soit *GT* tel que :

$$\frac{GD}{GT} = \frac{C_d}{D_t} \quad (2)$$

Or :

$$\frac{GD}{GT} = \frac{GD^2}{DG\,.\,GT} \quad \text{[C : I; 21]}$$

Et : $$\frac{DG^2}{BD\,.\,DA} = \frac{C_d}{D_t}$$

D'où :

$$\frac{DG^2}{DG\,.\,GT} = \frac{DG^2}{BD.DA}$$

[Donc : *BD.DA = DG.GT*] (3)

Et : $$\frac{DG}{GH} = \frac{AE}{EZ} \cdot \frac{C_d}{D_t} = \frac{AE}{EZ} \cdot \frac{GD}{GT} \quad \text{[d'après (1) et (2)]}$$

Mais :

$$\frac{DG}{GH} = \frac{DG}{GT} \cdot \frac{GT}{GH}$$

Donc : $$\frac{AE}{EZ} \cdot \frac{GD}{GT} = \frac{DG}{GT} \cdot \frac{GT}{GH}$$

[D'où : $\dfrac{AE}{EZ} = \dfrac{GT}{GH}$]

Or : $$\frac{GT}{GH} = \frac{GT.GD}{GH.GD} \quad \text{et} \quad : \frac{AE}{EZ} = \frac{AE^2}{AE.EZ}$$

Donc :

$$\frac{GT.GD}{GH.GD} = \frac{AE^2}{AE.EZ}$$

Et, d'après (3) :

$$\frac{BD.DA}{GH.GD} = \frac{AE^2}{AE.EZ}$$

Après permutation, on a :

$$\frac{BD.DA}{AE^2} = \frac{GH.GD}{AE.EZ}$$

Et : $$\frac{GH.GD}{AE.EZ} = \frac{(DH)}{(ZA)}$$

Car, *(DH)* et *(ZA)* étant semblables, on a : $\frac{(DH)}{(ZA)} = \frac{GH}{AE} \cdot \frac{GD}{EZ}$ [E : VI; 23]

D'où : $$\frac{BD.DA}{AE^2} = \frac{(DH)}{(ZA)} \quad (4)$$

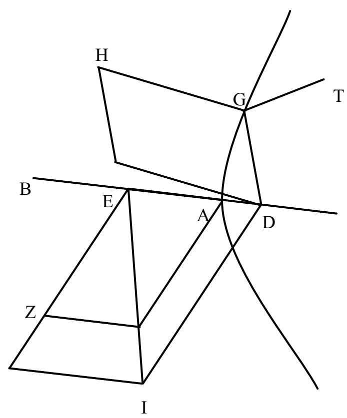
a) Dans le cas de l'hyperbole [Fig. 1]:

On a :

$$\frac{(BD\,.\,DA) + AE^2}{AE^2} = \frac{(DH) + (AZ)}{(AZ)}$$, d'après (4)

Mais :

$BD.DA + AE^2 = DE^2$ [E : II; 4]



[Fig. 1]

On a aussi : $$\frac{DE^2}{AE^2} = \frac{S(EI)}{S(AZ)}$$

[$\frac{S(EI)}{S(AZ)} = \frac{ED}{AI} \cdot \frac{DI}{EZ}$ et $\frac{DI}{EZ} = \frac{ED}{AE}$, car *(EI)* et *(AZ)* sont semblables] (5)

Donc :

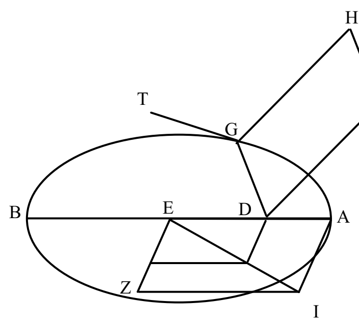
$$\frac{(DH) + (AZ)}{(AZ)} = \frac{S(EI)}{S(AZ)}$$

D'où :

$$S(EI) = S(DH) + S(AZ)$$

b) Dans le cas de l'ellipse et du cercle [Fig. 2] :

On a : $\frac{AE^2}{(AZ)} = \frac{BD \cdot DA}{(HD)}$ [d'après (4)]



[Fig. 2]

D'où : $\frac{AE^2 - AD \cdot DB}{(AZ) - (DH)} = \frac{AE^2}{(AZ)}$ [E : V; 19]

Mais : $AE^2 - AD.DB = ED^2$

Donc :

$$\frac{ED^2}{(AZ) - (DH)} = \frac{AE^2}{(AZ)}$$

Or :

$$\frac{AE^2}{(AZ)} = \frac{ED^2}{S(EI)} \quad \text{[d'après (5)]}$$

Donc :

$$\frac{ED^2}{(AZ) - (DH)} = \frac{ED^2}{S(EI)}$$

D'où :

$$S(EI) + S(DH) = S(AZ)$$

Complément :

Il sera de même pour les triangles décrits de manière semblable.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [M : IV. 3. 1(12)] = [C : I ; 41]

2. L'énoncé de la proposition :

- Il est identique à celui de [C : I ; 41].
- A la fin de la démonstration, al-Mu'taman énonce, sans démonstration, la généralisation suivante : "*Ce <même> résultat <découle> nécessairement si, à la place des surfaces <quadrilatères>, il y avait des triangles*".

3. La démonstration :

- La première partie de la preuve (commune à toutes les sections non paraboliques) est identique à celle de [C : I ; 41].
- La partie concernant l'hyperbole suit la même démarche et utilise les mêmes outils que la partie correspondante de [C : I ; 41]. Mais l'exposé est légèrement différent.
- La partie concernant l'ellipse est identique à celle de [C : I ; 41].

4. Les références :

- Les propriétés des sections coniques qui sont utilisées sont dans [E : II; 4, V; 19, VI; 23], [M : IV.3.1(21)].
- Des remarques et des références explicites à des propositions de l'*Istikmāl* sont mentionnées en marge du manuscrit. Parmi les références on trouve : [M : III.1.2(1)], [M : IV.3.1(10)].

Proposition IV. 3. 1(13) :
Soit la section *(AB)* de sommet *B* et de diamètre *BE*.
Soit *D* sur *(AB)* et *DE* la tangente à *(AB)*, avec : $BE \cap DE = E$.
Si *(AB)* est une parabole, soit $ZDL \,//\, BE$.
Si *(AB)* n'est pas une parabole, soit *G* le centre de *(AB)* et $ZDL \cap BE = G$.
Soit *H* dans le prolongement de *ZDL*, tel que $GH = GD$.
Du point *B*, on mène une ligne ordonnée *BTZ* telle que :

$$BT \cap DE = T,\ BT \cap DZ = Z.$$

Soit $DK \perp DZ$, vérifiant : $\dfrac{DK}{2.DE} = \dfrac{DT}{DZ}$

De *A*, quelconque sur *(AB)*, on mène $AMNCO \,//\, DE$ tel que :

$$AMNCO \cap LD = M,\ AMNCO \cap (AB) = N \text{ et } AMNCO \cap BE = C.$$

Si *(AB)* n'est pas une parabole [Fig. 2 et 3] :
On joint *HK* et on mène $GT' \,//\, HK$.
Du point *M*, on mène :

$$MT'W \,//\, DK \text{ tel que } MT'W \cap HK = W \text{ et } MT'W \cap GH'T' = T'$$

Alors :
[1] $AM = MN$.
[2] Si *(AB)* est une parabole : $AM^2 = KD.DM$.
[3] Si *(AB)* est une hyperbole : $AM^2 = KD.DM + (KW)$
[4] Si *(AB)* est ellipse : $AM^2 = KD.\ DM - (KW)$.

Preuve :
[1] Soit *ALS, DJ* et *NQ* des lignes ordonnées, telles que :

$$ALS \cap DL = L \text{ et } NQ \cap DZ = F$$

Posons $CO = DE$.

[1.1] Si *(AB)* est une parabole [Fig. 1] :
Nous avons $JB = BE$.
Donc [si on note *S(DB)* = aire de la figure *(DB)*] :

$$S(DB) = S(DJE). \text{ [Même hauteur et } JE = 2BJ\text{].}$$

On a aussi :

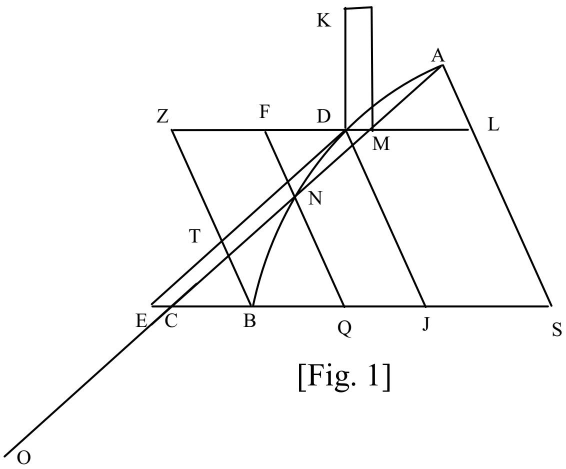
$$\frac{S(ASC)}{S(DJE)} = \frac{AS^2}{DJ^2}. \text{ [Similitude de } T(ASC) \text{ et } T(DJE)\text{]} \quad (1)$$

Et :

$$\frac{AS^2}{DJ^2} = \frac{SB}{BJ} \text{ [propriété de la parabole] (2)}$$
$$= \frac{S(LB)}{S(DB)} \text{ [hauteur commune]}$$

$$\frac{S(ASC)}{S(LB)} = \frac{S(DJE)}{S(DB)} \text{ [d'après (1) et (2)]}$$

Mais, *S(DJE) = S(DB)*. Donc : *S(ASC) = S(LB)* (3)
De la même manière, on montre que : *S(FB) = S(NQC)* [C : I; 42].



[Fig. 1]

D'où *S(LQ) = S(QNAS)*

[*S(LQ) = S(LB) – S(FB)* et *S(QNAS) = S(ACS) – S(NQC)*]

Donc :

$$S(AML) = S(LQ) - S(QNMLS) = S(QNAS) - S(QNMLS) = S(FMN)$$

D'où : *AM = MN.*

[1.2] Si *(AB)* n'est pas une parabole
On a :

$$\frac{DJ}{JE} = \frac{AS}{SC} \quad [AC // DE \text{ et } AS // DJ]$$

et :

$$\frac{GJ}{JD} = \frac{GB}{BZ} = \frac{C_d}{D_t} \text{ [Similitude de } T(GJD) \text{ et } T(GBZ)]$$

[Mais :

$$\frac{AS}{SC} = \frac{GJ}{JD}, \text{ car } T(ASC) \text{ semblable à } T(GJD)]$$

D'où :

$$\frac{DJ}{JE}=\frac{AS}{SC}=\frac{GJ}{JD}=\frac{GB}{BZ}=\frac{C_d}{D_t}$$

D'où :
Dans l'hyperbole :

S(ASC) + *S(ZBG)* = *S(LSG)* [*S(ASC)* = *S(LB),* d'après (3)].

Dans l'ellipse :

S(ASC) + *S(LSG)* = *S(ZBG)*

Et :

$$\frac{NQ}{QC}=\frac{AS}{SC}$$ [Similitude de *T(NQC)* et *T(ASC)*]

[Donc :

S(LB) = *S(ACS)*].

Et, dans les deux cas, on obtient :

S(NQC) = *S(FQBZ)* [C : I; 43] (5)

On a alors :

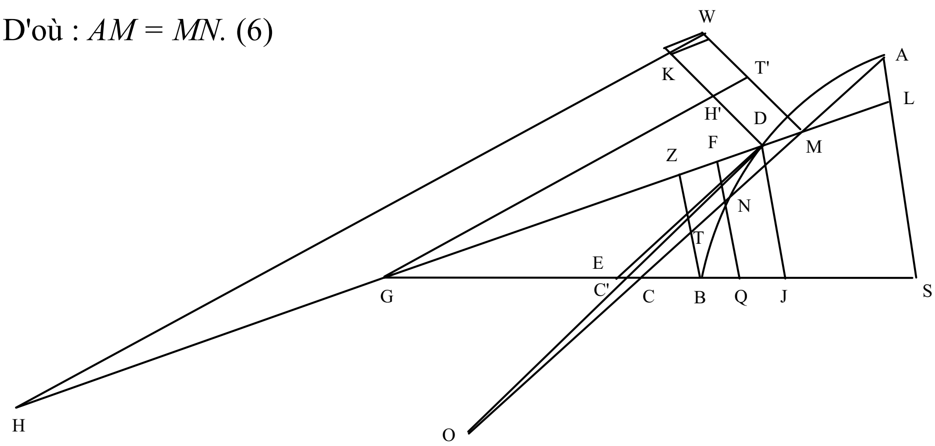
S(QL) = *S(QNAS)* [*S(ASC)* = *S(LB)* et *S(NQC)* = *S(FB)*]

Et : *S(QL)* - *S(QNMLS)* = *S(QNAS)* - *(QNMLS)*.

Donc :

T(AML) et *T(FMN)* sont égaux et semblables.

D'où : *AM* = *MN*. (6)



[Fig. 2]

[2.1] Si *(AB)* est une parabole [Fig. 1]

Nous avons $DZ = BE$ [$BJ = BE$]

Donc : $T(DZT) = T(EBT)$.

Donc : $S(DZT) + S(BTDLS) = S(EBT) + S(BTDLS)$

Donc : $S(EDLS) = S(LB)$

Or : $S(LB)= S(ASC)$ [d'après (3)].

Donc : $S(EDLS) = S(ASC)$

D'où : $S(EDLS) - S(CMLS) = S(ASC) - S(CMLS)$.

Soit : $S(EDMC) = S(AML)$ (4)

Or $CO = DE$ [par hypothèse]

Et : $S(EDMC) = S(DMO)$

[car $S(DMO) = S(DMCC') + S(C'OC)$ et $S(C'OC) = S(DEC') \Rightarrow S(DMO) = S(DMCC') + S(DEC') = S(EDMC)$][313]

[Donc : $S(AML) = S(DMO)$]

[2.2]- Si la section n'est pas une parabole

a) Dans le cas de l'hyperbole :

$S(DJG) = S(DJE) + S(ZBG)$ et $S(DJG)= S(DJE) + S(DEG)$.

Donc : $S(ZBG) = S(DEG)$.

On a aussi : $S(DEG) + S(ASC) = S(LSG)$ [car $S(AML) = S(EM)$, d'après (4)].

Mais : $S(DEG) + S(EDLS) = S(LSG)$.

D'où : $S(EDLS)= S(ASC)$.

b) Dans le cas de l'ellipse :

On a : $S(DJG) + S(DJE) = S(DEG)$ et $S(DJG) + S(DJE) = S(BZG)$.

D'où : $S(DEG) = S(BZG)$.

Mais : $S(DEG) = S(ASC) + S(GSL)$.

D'où : $S(DEG) - S(GSL) = S(ASC)$

Et : $S(DEG) - S(GSL) = S(EDLS)$

D'où : $S(EDLS) = S(ASC)$

[Dans les deux cas, on aura] :

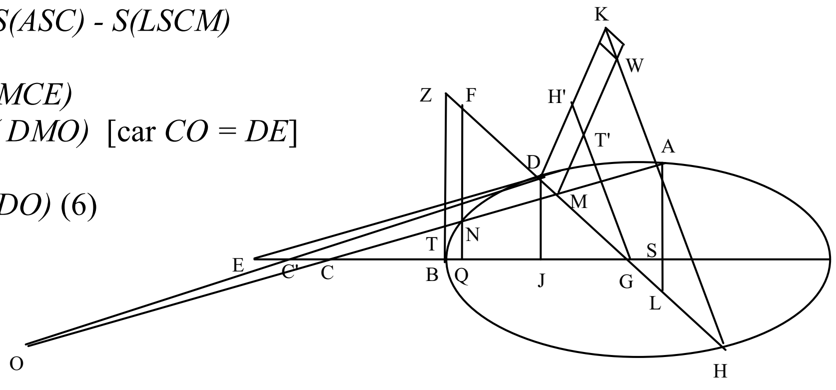
$S(EDLS) - S(LSCM) = S(ASC) - S(LSCM)$

D'où : $S(ALM) = S(DMCE)$

Or: $S(DMCE) = S(DMO)$ [car $CO = DE$]

D'où :

$S(ALM) = S(MDO)$ (6)



[Fig. 3]

313 - Nous avons ajouté C' pour expliciter la justification qui n'a pas été donnée par al-Mu'taman.

[2.1 (suite)] Dans le cas de la parabole :

On a : $\frac{DK}{2.DE} = \frac{DT}{DZ}$ [par hypothèse]

Or : $2.DE = MO$ [$MC = DE = CO$, par hypothèse]

D'où : $\frac{DK}{MO} = \frac{DT}{DZ}$

Mais :

$\frac{DT}{DZ} = \frac{AM}{ML}$ [Similitude de *T(DTZ)* et *T(MAL),* car *AL // ZB*]

D'où :

$$\frac{DK.DM}{MO.DM} = \frac{AM^2}{AM.ML}$$

Mais :

$AM.ML = MO.DM$ [d'après (5)]

D'où : $AM^2 = KD.DM$

[2.2] Si la section n'est pas une parabole

On a : $\frac{MG}{GD} = \frac{T'M}{H'D} = \frac{MC}{DE}$

Et, après permutation :

$$\frac{T'M}{MC} = \frac{H'D}{DE} = \frac{KD}{2DE}$$

car :

$$H'D = \frac{1}{2}DK$$

Mais : $WT' = H'D$ et $DE = CO$

D'où : $\frac{WM}{MO} = \frac{TD}{DZ} = \frac{AM}{ML}$

Donc :

$$\frac{WM.MD}{MO.MD} = \frac{AM^2}{AM.ML}$$

et : $AM.ML = MO.MD$ [d'après 6]

D'où : $AM^2 = MW.MD$ [$= KD.DM$]

[3] Complément [Fig. 4]

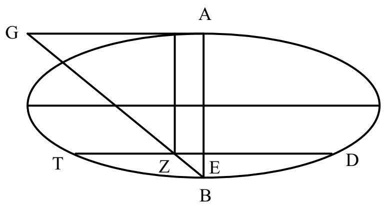
Dans le cas de l'ellipse :

Soit *AB* le petit axe. On mène, du point *A*, la perpendiculaire *AG* à *AB* telle que :

$$\frac{BA}{AG} = \frac{C_d}{D_t}$$

Soit *D* un point sur la section. On mène *DET* parallèlement au grand axe et on joint *GB*.

Soit $Z = DET \cap GB$



[Fig. 4]

Alors :

$$\frac{AE.EB}{ED^2} = \frac{C_d}{D_t}[= \frac{BA}{AG}] = \frac{BE}{EZ}$$ [Similitude de *T(BAG)* et *T(BEZ)*]

D'où : $$\frac{AE.EB}{ED^2} = \frac{BE.EA}{EZ.EA}$$

Donc : $ED^2 = EZ.EA$.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(13)] = [C : I ; 15, 46, 47, 49, 50].**

2. **L'énoncé de la proposition :**

- Quatre résultats sont formulés dans l'énoncé de la proposition. Le cinquième est donné comme complément à la fin du texte.

3. **La démonstration :**

- Le premier résultat correspond à [C : I ; 46] pour le cas de la parabole et à [C : I ; 47] pour l'hyperbole et l'ellipse. Contrairement à Apollonius, al-Mu'taman n'évoque pas le cas du cercle. Les preuves de l'*Istikmāl* suivent celles des *Coniques*.

- Le second résultat correspond à [C : I ; 49] et le troisième à [C : I ; 50]. Les démonstrations sont identiques à celles d'Apollonius, avec une différence de présentation imposée par le fait qu'al-Mu'taman traite en même temps les trois sections coniques : il expose la première partie de la démonstration d'abord pour la parabole puis pour les autres sections et il enchaîne avec la deuxième partie, dans le même ordre.

- Le complément traite d'une propriété des deux axes d'une ellipse que l'on retrouve dans [C : I ; 50]. Là aussi l'existence de la quatrième proportionnelle est admise par les deux auteurs.

4. **Les références :**

- [C : I ; 42, 43] et différents résultats des *Eléments* sur la similitude.
- [M : IV. 3. 1(11)], [M : IV. 3. 1(12)]

5. **Glose marginale :**

- Sur la marge du f. 95a, un ajout, sous forme de corollaire, a été inséré sans que l'on sache si c'est un paragraphe manquant rétabli par le copiste ou s'il s'agit du commentaire d'un lecteur. Le résultat concerne la tangente à la parabole. Ne disposant que d'une photocopie du manuscrit, nous n'avons pas pu déchiffrer le contenu des quatre lignes.

Proposition IV. 3. 1(14) :

Soit *(ABG)* une section et *AD* son diamètre.

[1] Si *AT* est la tangente à la courbe au point *A* et *BG* une droite coupant *AD* en *D* et telle que *BD* = *DG*, alors *BG* // *AT*.

[2] Inversement, si *BG* // *AT* et si elle coupe *AD* en *D* tel que *BD* = *DG*, alors *AD* est un diamètre

Preuve de [1] [Fig. 1 & 2]:

[1] Supposons que *BG* ne soit pas parallèle à *AT*.

Soit *BEZ* tel que $BZ \cap AD = E$ et *BEZ* // *AT*.

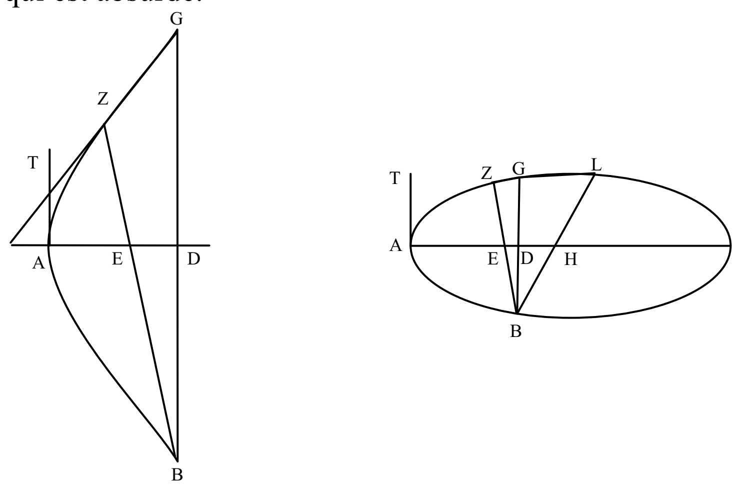
Alors *BE* = *EZ* [C : I; 46, 47].

On joint *GZ*. Alors : *GZ* // *AD* [E;VI:2].

Ce qui est absurde car :

[1. a] Dans le cas où la section n'est pas une ellipse, *GZ* rencontre *AD* [C : I; 22].

[1. b] Dans le cas de l'ellipse : Si nous menons du point *B* une droite *BL* qui passe par le centre *H* alors *BH* = *HL* [C : I:48], *G, Z* et *L* seront alors alignés et *ZGL* // *DE* [E;VI:2]. Ce qui est absurde.



[Fig. 1] [Fig. 2]

[2] Si *AT* est la tangente à la section au point *A*.

Si *BG* // *AT* avec $D = AD \cap BG$ et *BD* = *DG*, alors *AD* est un diamètre.

Preuve :

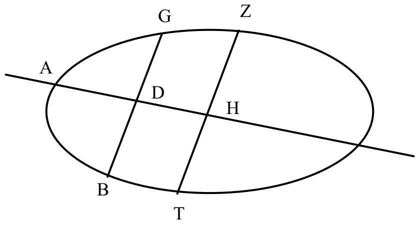
Soit *AD'* le diamètre. Alors *AD'* passe par le milieu de *BG* [donc *AD'=AD]*.

[3] Autres résultats :

[3a] Soit *BG* et *TZ* deux droites parallèles dans une section *(ABG)* et *D, H* leurs milieux respectifs. Soit $A = (ABG) \cap DH$.

Alors *ADH* est un diamètre.

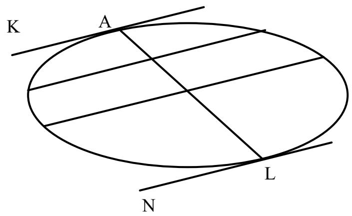
Preuve [Fig. 3] :



[Fig. 3]

Supposons que AD ne soit pas un diamètre de la section, et soit AL le diamètre.
Alors : $AL \cap BG = D$ [C : I; d4] ; et $AL \cap TZ = H$.
Donc : $AD = AL$.

[3b] Soit (ABG) une ellipse ou une hyperbole [Fig. 4]
Soit AK, LN deux tangentes.
Si AK et LN sont parallèles alors AL est un diamètre à (ABG)



[Fig. 4]

Preuve :

Les lignes ordonnées sont parallèles à AK et LN. Et les deux diamètres issus des points A et L partagent les lignes ordonnées en deux parties égales. Donc AL est un diamètre de la section.

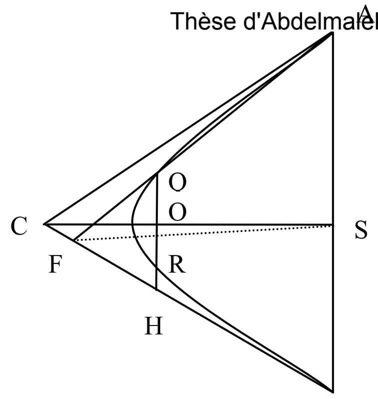
[3c] Si AK et AL ne sont pas parallèles alors elles se rencontrent.

AK coupe toute parallèle à AL puisqu'il coupe les lignes ordonnées parallèles à AL.

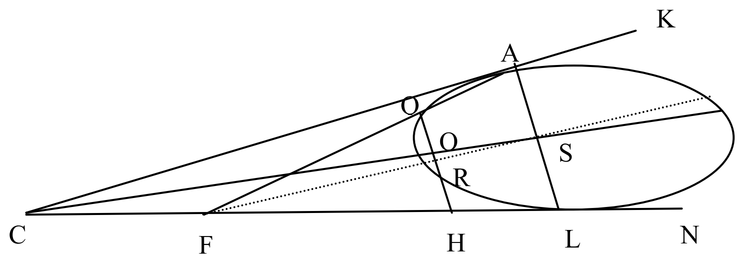
Soit C tel que $AK \cap LN = C$.
Joignons AL.
Soit S tel que $AS = SL$.
Alors SC est un diamètre de la section (ABG).

Preuve : [Fig. 5a & 5b]
Supposons que le diamètre soit $SF \neq SC$ [F sur CL].
Joignons AF et soit $Q = AF \cap (ABG)$.
Soit $QR \mathbin{//} AL$ avec $QR \cap (ABG) = R$ et $QR \cap FL = H$
Soit $O = CS \cap QH$
Nous avons : $\frac{AS}{SL} = \frac{QO}{OH}$ [similitude de $T(QFH)$ et $T(AFL)$] avec $AS = SL$.

Donc : $QO = OH$
Mais, SF est un diamètre. Donc : $QO = OR$
Donc : $OR = OH$. Ce qui absurde.
Donc SC est un diamètre.



[Fig. 5b]



[Fig. 5a]

Corollaires :

1. Si une section est coupée par deux droites parallèles, la droite qui passe par leurs milieux est un diamètre.
2. L'intersection de deux diamètres d'une section est son centre.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(14)] = [C : II ; 5, 6, 27, 28, 29, 31, 36, 37, 44, 45]**

2. **Enoncé de la proposition**

- [M: IV. 3. 1(14), 1a] = [C : II ; 5, 6][314]
- [M: IV. 3. 1(14), 1b] = [C : II ; 7]
- Les énoncés correspondant à ceux des autres propositions des *Coniques* sont dans le corps du texte de l'*Istikmāl*.
- [C : II ; 29] est exposé sous une forme abrégée.
- [C : II ; 44, 45] correspondent, dans l'*Istikmāl* aux deux corollaires. Ces corollaires sont formulés par Apollonius comme des constructions à réaliser alors qu'al-Mu'taman les présente comme des propriétés à établir.

3. **La démonstration :**

- La preuve de [M: IV. 3. 1(14), 1a] est identique à celles de [C : II ; 5, 6]. Dans la première partie al-Mu'taman utilise le même lettrage.
- La preuve de [M: IV. 3. 1(14), 1b] est donnée par al-Mu'taman, mais d'une manière concise. Elle est basée sur un raisonnement par l'absurde. La conclusion n'est pas énoncée.
- La preuve de [3a] est par l'absurde : elle est identique à celle de [C : II ; 28].
- La preuve de [3b] est celle de la seconde partie de [C : II ; 27].
- La preuve de [3c] est diffère en partie de celle de [C : II ; 29] : al-Mu'taman utilise un argument de similitude qui n'est pas formulé par Apollonius.
- Les deux corollaires sont énoncés sans preuve.

4. **Les références implicites:**

- [C : I ; 22, 46, 47, 48], [E : VI; 2]

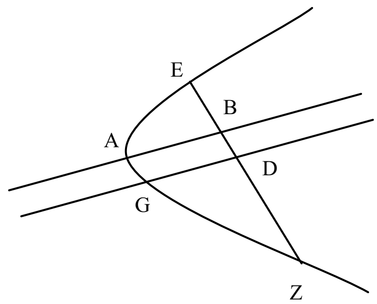
[314]- [C : II ; 5] concerne la parabole et l'hyperbole; [C : II ; 6] concerne l'ellipse et le cercle.

Proposition IV. 3. 1(15) :

Déterminer l'axe d'une parabole, d'une hyperbole ou d'une ellipse, ainsi que leur centre (lorsqu'il existe).

[1] La section est une parabole.

Soit *G* et *Z*, deux points sur cette parabole .
Menons un diamètre *AB* [M: 14]
Menons aussi une perpendiculaire *BE* que nous prolongeons jusqu'au point *Z*.
Si $BE = BZ$, *AB* est alors un axe de la section.
Si $BE \neq BZ$, soit alors *D* un point sur *EZ* tel que $ED = DZ$.[Fig. 1]
Soit $GD \,//\, AB$, *GD* est alors un axe de la section.



[Fig. 1]

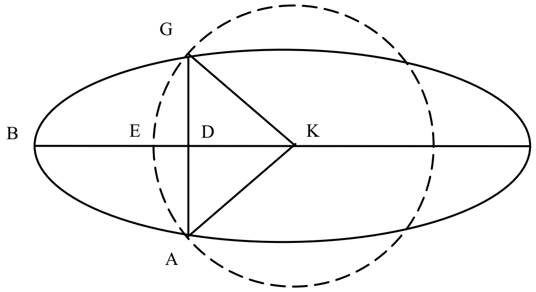
La parabole ne possède qu'un seul axe.

Preuve :

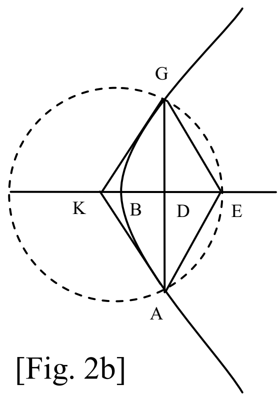
Supposons que *AB* est un second axe, différent de l'axe *GD*. Alors :
$AB \,//\, GD$ et *AB* coupe *EZ* en deux parties égales.
Ce qui est impossible.

[2] La section est une hyperbole ou une ellipse

Soit un point quelconque sur la section [Fig. 2a & 2b].
Soit *K* le centre de la section et *C(GEA)* le cercle de centre *K* et de rayon *KG*.
[Il coupe la section en *K* et *A*].
Joignons *GA* et soit *D* le milieu de *GA*.
Prolongeons *KD* à *E* [sur le cercle].
$AD = DG$, *KD* est commun et $KA = KG$.
Donc les deux triangles *(DGK)* et *(ADK)* sont égaux.
D'où : $\angle GDK = \angle ADK = 1$ droit.
Donc *KD* est un axe de la section.



[Fig. 2a]



[Fig. 2b]

Le second axe de la section

Par K, on mène MKZ // GA. Alors MKZ est aussi un axe de la section, dont le conjugué est KB.

[3] Les sections n'ont pas d'autres axes que ceux mentionnés

Supposons l'existence d'un autre axe KH pour chacune de ces sections.

a) Pour l'hyperbole [Fig 3a] :

Menons ATL tel que : $ATL \perp KH$. On a : $AT = TL$ et $AK = KL$.

Or $AK = KG$.

Ce qui est impossible car le cercle $C(GEA)$ ne coupe la section qu'en deux points.

b) Pour l'ellipse [Fig 3b] :

Supposons que $C(GEA)$ passe par un point L tel que $AK = KL$.

Soit $LZ \perp MN$ et $GQ \perp MN$.

On a : $GK^2 = KL^2$.

Or : $GQ^2 + QK^2 = LZ^2 + ZK^2$ [(LZK) et (GQK) sont des triangles rectangles]

Donc : $GQ^2 - LZ^2 = ZK^2 - QK^2$ (1)

Nous avons $MQ \,.\, QN + QK^2 = KM^2$ et $MZ \,.\, ZN + ZK^2 = KM^2$

Donc $MQ \,.\, QN + QK^2 = MZ \,.\, ZN + ZK^2 \Rightarrow ZK^2 - QK^2 = MQ \,.\, QN - MZ \,.\, ZN$ (2)

D'où : $GQ^2 - LZ^2 = MQ \,.\, QN - MZ \,.\, ZN$, d'après (1) et (2).

Comme GQ et LZ sont des lignes ordonnées, on a :

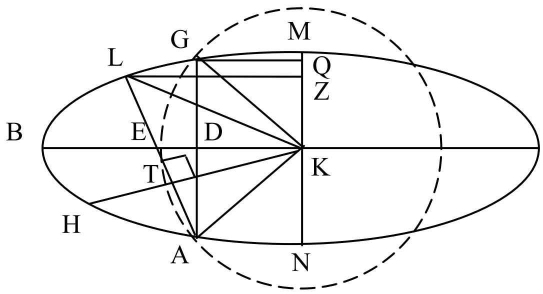
$$\frac{GQ^2}{MQ.QN} = \frac{LZ^2}{MZ.ZN}$$

Or si a, b, c, d sont quatre grandeurs telles que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $a\text{-}c = b\text{-}d$, alors : $a = b$ et $c = d$.

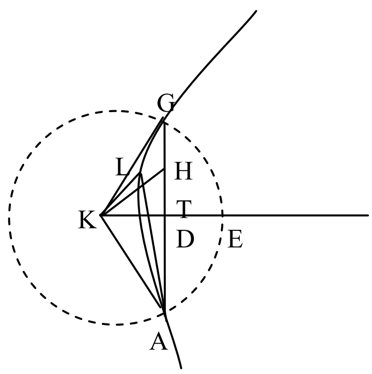
Donc $GQ^2 = MQ.QN$ et $LZ^2 = MZ.\,ZN$.

Donc (GML) est un cercle

Ce qui est impossible puisque c'est une ellipse.



[Fig 3a]



[Fig 3b]

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [M : IV. 3. 1(15)] = [C : II ; 46, 47, 48].

2. L’énoncé de la proposition :

- La partie [1] correspond à l'énoncé de [C : II ; 46] qui concerne la parabole.
- La partie [2] correspond à celui de [C : II ; 47] qui concerne l'hyperbole et l'ellipse.

3. La démonstration :

- Dans la partie [1], al-Mu'taman établit, comme Apollonius, l'existence et l'unicité des axes, mais il n'expose que la synthèse, en reproduisant la preuve des *Coniques*, avec le même lettrage.
- Dans la partie [2], seule l'existence est établie, comme le fait Apollonius. Là aussi il n'expose que la partie "synthèse" de la preuve des *Coniques*.
- Dans la partie [3], al-Mu'taman établit l'unicité des deux axes de l'hyperbole et de l'ellipse en reproduisant, avec le même lettrage, la preuve de [C : II ; 48].

4. Les références implicites :

- [M : IV. 3. 1(14)], [E : I; 4]

Proposition IV. 3. 1(16) :

Soit la section *(AB)* et soit *AG, BG* deux tangentes à *(AB)*.

Joignons *A, B*. Soit *S* milieu de *AB* et *GO // AB*.

Soit *GDEZ* la droite coupant *AB* en *E* et la section en *D*. Soit *ZSHO* la droite coupant *AB* en *S* et la section en *H*.

Alors :

$$\frac{ZG}{GD} = \frac{ZE}{ED} \quad \text{et} \quad \frac{ZO}{OH} = \frac{ZS}{SH}$$

[Lemme 1][Fig. 1]

T(AKL) = Q(LGQZ).

Preuve :

Soit *ZM // AB* et *DT // AB*. *ZM* coupe *GA* en *L* et *GS* en *M*.

DT coupe *GA* en *C* et *GS* en *T*.

Soit D_A le diamètre de la section, mené de *A*. Il coupe *ZM* en *K* et *DT* en *N*.

Soit *ZQ // AG* et *DF // AG*.

Soit *Q, F, J* tels que : $ZQ \cap GM = Q$, $DF \cap GM = F$, $ZQ \cap AK = J$.

Alors : *T(ZJK) = Q(AJQG)* d'après [M : 14]

D'où: *Q(AJZL) + T(ZJK) = Q(AJZL) + Q(AJQG)*

Donc : *T(AKL) = Q(LGQZ).*

[Lemme 2][Fig. 1]

T(ANC) = Q(CGFD)

Preuve :

Soit *H'*, sommet de la section et *H'W//AB*.

Soit *T', I* et *W* tels que : $H'W \cap AK = W$, $H'W \cap DF = T'$ et $H'W \cap AG = I$.

a) Si la section est une parabole :

Nous avons : *T(DFT) = (TW)* comme cela a été montré

D'où [si on note *S(E)* = surface *(E)*] :

$$T(DFT) - S(DTH'T') = S(TW) - S(DTH'T')$$

Donc :

$$S(WT'DN) = T(T'H'F)$$

On a donc :

$$S(WT'DN) + S(FGIT') = T(T'H'F) + S(FGT'I)$$

D'où :

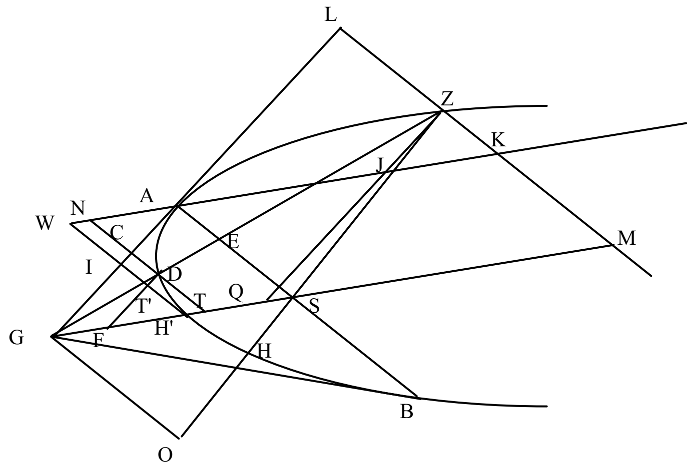
$$S(NDFGIW) = T(H'IG)$$

Mais : $T(H'IG) = T(AIW)$

Donc : $T(AIW) = S(NDFGIW)$

D'où : $S(NDFGIW) - Q(NCIW) = T(AIW) - Q(NCIW)$

Donc : *T(ANC) = Q(CDFG).*



[Fig. 1]

b) Si la section est une hyperbole [Fig 2] :

Soit *R* son centre. On a :

T(DTF) + T(ARG) = T(NTR) [C: I; 43]

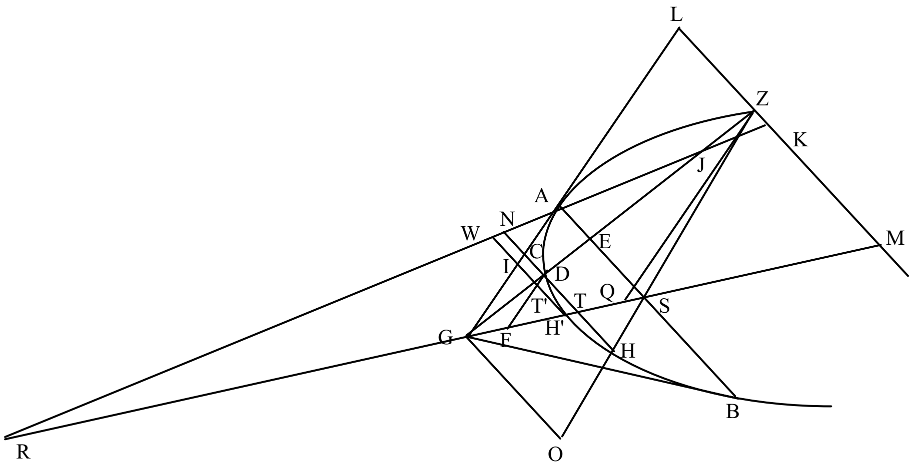
Après suppression de *T(DTF) et S(NCGR)* qui sont communs, on a :

T(NTR) - T(DTF) – Q(NCGR)) = Q(CDFG)

Mais :

T(ARG) – Q(NCGR) = T(ANC)

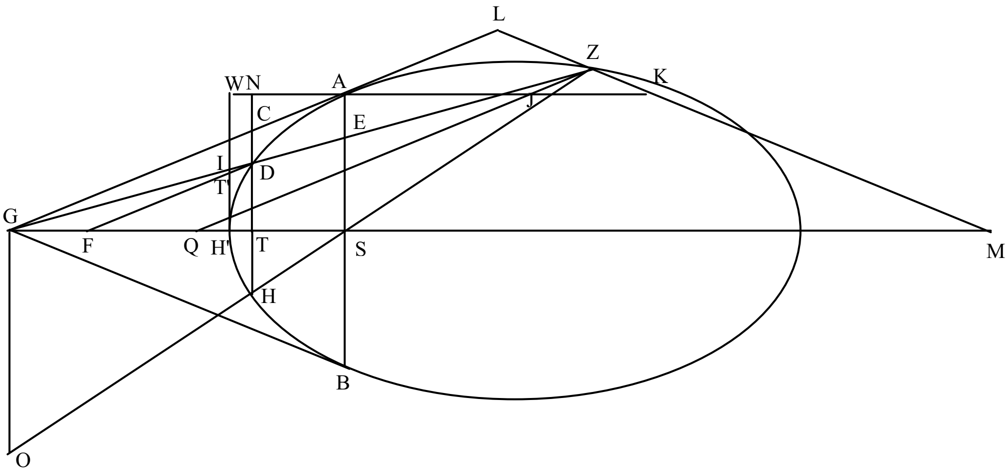
D'où : *T(ANC) = Q(CDFG)*



[Fig. 2]

c) Si la section est une ellipse [Fig. 3] :

La démonstration est semblable à celle de la parabole.



[Fig. 3]

Preuve de : $\dfrac{ZG}{GD} = \dfrac{ZE}{ED}$

Et donc : $\dfrac{ZG^2}{GD^2} = \dfrac{T(ZQM)}{T(DFT)} = \dfrac{Q(LGQZ)}{Q(CGFD)}$ (1)

Mais, d'après les lemmes 1 et 2, on a : *Q(LGQZ)* = *T(LKA)* et *Q(CGFD)* = *T(ANC)*

Or *T(LKA)* et *T(ANC)* sont semblables.

Donc :

$$\frac{LA^2}{AC^2} = \frac{ZE^2}{ED^2}$$

Mais, d'après (1) : $\dfrac{LA^2}{AC^2} = \dfrac{ZG^2}{GD^2}$

D'où : $\dfrac{ZG}{GD} = \dfrac{ZE}{ED}$

Preuve de : $\dfrac{ZO}{OH} = \dfrac{ZS}{SH}$

Menons des deux points *Z, H* les droites *ZM* et *HT*.

On a : $\dfrac{ZM^2}{HT^2} = \dfrac{ZM^2}{TD^2} = \dfrac{MS^2}{ST^2}$

Or : $\dfrac{ZM^2}{TD^2} = \dfrac{T(ZQM)}{T(DFT)}$

Et : $\frac{MS^2}{ST^2} = \frac{LA^2}{AC^2} = \frac{T(LAK)}{T(ANC)} = \frac{Q(LGQZ)}{T(CGFD)}$

Mais :

$$S(LGM) = T(ZQM) + Q(LGQZ)$$

et : $S(CGT) = T(DTF) + Q(CGFD)$

D'où : $\frac{T(LGM)}{T(CGT)} = \frac{MG^2}{GT^2} = \frac{MS^2}{ST^2} = \frac{ZS^2}{SH^2}$

Mais : $\frac{MG}{GT} = \frac{ZO}{OH}$

D'où : $\frac{ZO}{OH} = \frac{ZS}{SH}$

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(16)] = [C : III ; 2, 11, 37, 38].**

2. **L'énoncé de la proposition :**

- L'énoncé de la partie 16a de [M : IV. 3. 1(16)] est identique à celui de [C : III ; 37], avec le même lettrage.
- L'énoncé de la partie 16b est identique à celui de [C : III ; 38], avec un lettrage différent.
- Dans le corps du texte, al-Mu'taman établit deux lemmes dont les énoncés correspondent, respectivement, à [C : III ; 2] et [C : III ; 11].

3. **La démonstration :**

- Les preuves des deux parties de la proposition [M : IV. 3. 1(16)] correspondent à celles de [C : III ; 37] et [C : III ; 38].
- Les preuves des deux lemmes sont celles de [C : III ; 2] et [C : III ; 11].

4. **Les références :**

- [C : I ; 42, 43] et [C : II ; 8, 30, 38, 39].

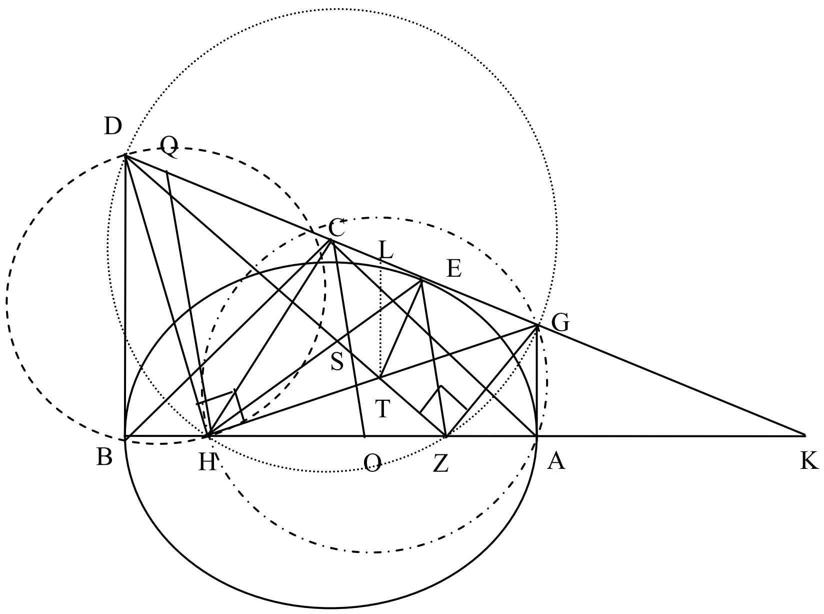
5. **Gloses marginales :**

- Deux gloses marginales justifient des implications en se référant à des propositions antérieures de la même section IV.3.1. Mais leur lecture n'est pas aisée.

Proposition IV. 3. 1(17) :
Soit une ellipse *(AE)* de grand diamètre *AB* [et C_d son côté droit].
Soit les points *H, Z* sur le diamètre *AB* tels que :

$$AH.HB = AZ.ZB = \frac{1}{4}(AB.C_d) \quad (1)$$

Soit *E* un point sur l'ellipse. On joint *EZ* et *EH.*
Alors : $EZ + EH = AB$



[fig.1]

Preuve :
Soit *AG, BD* telles que $AG \perp AB$ et $BD \perp AB$.
Soit *GED* une tangente à *(AE)* en *E* telle que $GED \cap AG = G$ et $GED \cap BD = D$
On joint *GH, GZ, DZ* et *DH.*
Soit $T = GH \cap ZD$.
Alors :

[1] $\angle GZD = \angle GHD = \dfrac{\pi}{2}$

Preuve :

On a : $AG.BD = \dfrac{1}{4}(AB.C_d)$

[d'après (1) et la similitude de *T(AGZ) et T(BZD)*]

et $AZ.ZB = \dfrac{1}{4}(AB.C_d)$ [par hypothèse].

Mais : $\angle GAB = \angle DBA$

[Donc : $\dfrac{AG}{AZ} = \dfrac{ZB}{BD}$ et $\angle A = \angle B$].

Donc : $\angle AGZ = \angle BZD$ [et $\angle AZG = \angle ZDB$]

D'où : $\angle AZG + \angle BZD = \dfrac{\pi}{2}$

Donc : $\angle GZD = \dfrac{\pi}{2}$.

De la même manière, on montre que $\angle GHD = \dfrac{\pi}{2}$.

[2] $\angle DGH = \angle AGZ$ et $\angle GDZ = \angle BDH$

Preuve :
Soit $C(GD)$ le cercle de diamètre GD. Il passe par Z et H [E : III; 31]
On a : $\angle DGH = \angle DZH$ car ils interceptent [*arc (HD)*] [E : III; 21]
Mais : $\angle DZH = \angle AGZ$ [complémentaires au même angle $\angle GZA$]
Donc : $\angle DGH = \angle AGZ$.
De même, on a : $\angle GDZ = \angle BDH$
[$\angle GDZ = \angle GHZ$ (interception de *arc(ZD)* et $\angle GHZ = \angle BDH$ (complémentaire au même angle $\angle BHD$]

[3] a) $GD // AB \Rightarrow TE \perp GD$
b) Si GD coupe AB, alors on aussi : $TE \perp GD$

Preuve :
a) C'est évident [ET passera par l'intersection des diagonales HG et DZ].

b) Si TE n'est pas perpendiculaire à GD, soit L sur DG tel que : $TL \perp GD$

On a : $\angle GDZ = \angle BDH$ et $\angle KBD = \angle TLD$ [$= \dfrac{\pi}{2}$].

Donc : $T(DBH)$ est semblable à $T(DLT)$.

D'où : $\dfrac{HD}{DT} = \dfrac{BD}{DL}$ (2)

Mais : $\dfrac{HD}{DT} = \dfrac{ZG}{GT}$ car $T(HDT)$ et $T(ZGT)$ sont semblables [angles homologues égaux].

Et : $\dfrac{ZG}{GT} = \dfrac{AG}{GL}$ car $T(ZGT)$ et $T(AGL)$ sont semblables [angles égaux].

Donc : $\dfrac{BD}{DL} = \dfrac{AG}{GL}$ [d'après (2)].

Et en permutant les moyens, on obtient : $\dfrac{BD}{AG} = \dfrac{DL}{GL}$

Or : $\dfrac{BD}{AG} = \dfrac{BK}{KA}$ [similitude de $T(KBD)$ et $T(KAG)$]

Donc : $\frac{DL}{GL} = \frac{BK}{KA}$ (3)

De E, on mène $EM//AG$. Donc EM est une ligne ordonnée sur AB.

D'où : $\frac{BK}{KA} = \frac{BM}{MA}$

Mais : $\frac{BM}{MA} = \frac{DE}{EG}$ [Théorème de Thalès]

Donc : $\frac{BK}{KA} = \frac{DE}{EG}$

Mais : $\frac{BK}{KA} = \frac{DL}{GL}$ [d'après (3)]

D'où : $\frac{DE}{EG} = \frac{DL}{GL}$.

Or : $E \neq L$.

Ce qui est absurde [$DE > DL$ *et* $GL > EG \Rightarrow DE.GL > DL.GL$]

Il n'y a donc pas de perpendiculaires issues de T sur GD autre que TE.

[4] $\angle DEH = \angle GEZ$

Preuve :

On a : $\angle TEG = \angle TED = \frac{\pi}{2}$ et $\angle DHG = \angle DZG = \frac{\pi}{2}$.

Donc *C(DT)* passe par E et H et *C(TG)* passe par E et Z.

Donc : $\angle DEH = \angle DTH$ et $\angle GTZ = \angle GEZ$ car ils interceptent un même arc dans leurs cercles respectifs.

Et : $\angle DTH = \angle GTZ$ [opposés par sommet].

D'où : $\angle DEH = \angle GEZ$;

[5] Si O est le centre de la section *(AE)* et si $OC // EZ$, avec C sur DG, on a : $OC = OA = OB$

Preuve :

Soit $OC // EZ$ et $HQ // EZ$.

Soit $C = OC \cap DG$ et $Q = HQ \cap DG$

On a : $ZO = OH$, car : $AZ = HB$

et $EC = CQ$ [Théorème de Thalès].

On joint AC, CH et BC.

On a : $\angle GEZ = \angle HED$ [d'après (3)]

Et : $\angle GEZ = \angle EQH$ car $QH//EZ$

Donc : $EH = HQ$ [*T(EHQ)* est isocèle]

Alors $HC \perp EQ$ (4)

C(DH) passe par C et B. Donc : $\angle BDH = \angle BCH$ car ils interceptent *arc(BH)*.

Et : $\angle BDH = \angle AHG$ [complémentaires de $\angle BHD$]
C(GH) passe par *A* et *C*. Donc : $\angle AHG = \angle ACG$ car ils interceptent *arc(AG)*.
Donc : $\angle ACG = \angle BDH$ [d'après (2)]
D'où : $\angle ACG + \angle ACH = \angle BDH + \angle ACH$ [car $\angle BDH = \angle BCH$]
Donc : $\angle GCH = \angle ACB$
Or : $\angle GCH = \frac{\pi}{2}$ [d'après (4)]
Donc : $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$
Donc *C(BA)* a pour centre *O* et il passe par le point *C*.
D'où : $OC = OA = OB$.

[6] ZE + EH = AB
[Soit $S = OC \cap HE$]
On a : $\angle GEZ = \angle DEH$ [d'après (3)]
Et : $\angle GCO = \angle GEZ$ *[OC//EZ]*.
[Donc : $\angle GCO = \angle DEH$]
Donc : $\angle CES = \angle ECS$.
D'où : $ES = CS$
Or : $ZO = OH$
Donc : $ES = SH$
D'où : $EH = 2CS$
Mais : $\frac{ZH}{OH} = \frac{ZE}{SO}$ [similitude de *T(SOH)* et *T(EZH)]*.
Donc : ZE = 2OS [car $ZH = 2OH$].
D'où : $ZE + EH = 2OC$
Mais : $AB = 2OC$.
Donc : $ZE + EH = AB$.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(17)] ⊃ [C : III ; 45-50, 52].**

2. **L'énoncé de la proposition :**

- [M : IV. 3. 1(17)] ⊃ [C : III ; 52]
- Les énoncé de [1], [2], [3], [4], [5], [6] correspondent, respectivement, à ceux de [C : III ; 45], [C : III ; 46], [C : III ; 47], [C : III ; 48], [C : III ; 50], [C : III ; 52].
- Le résultat "$\angle ACB = \pi/2$" correspond à celui de [C : III ; 49]. Il n'est pas énoncé par al-Mu'taman mais seulement établi, comme un lemme, au de la démonstration de [5].

3. **Les démonstrations :**

- Les assertions de [1] à [5] sont présentées comme des lemmes qui préparent la preuve de [6].
- Les différentes preuves de [1], [2], [3], [4], [5] sont une reprise, abrégée, de celles des propositions correspondantes des *Coniques*.
- La preuve de [6] est semblable à celle de [C : III; 52].

4. **La démonstration :**

- Les preuves des deux parties de la proposition [M : IV. 3. 1(16)] correspondent à celles de [C : III ; 37] et [C : III ; 38].
- Les preuves des deux lemmes sont celles de [C : III ; 2] et [C : III ; 11].

5. **Les références implicites :**

- [E : I; 15], [E : III; 21, 36], Théorème de Thalès, [C : I ; 36].

Proposition IV. 3. 1(18) :
Soit une hyperbole *(HB)* de diamètre HB, de centre G et de côté droit BZ.
Soit DBE une tangente en B à *(HB)*. Soit D et E sur le segment DBE, vérifiant :

$$BD^2 = BE^2 = \frac{1}{4}(AB.BZ) \quad (1)$$

On trace les deux droites passant par GD et GE, respectivement. Alors :

[1] GD et GE ne rencontrent pas la section[315]

Preuve [Fig. 1] :
Supposons que GD rencontre la section au point H.
Soit HT une ligne ordonnée. Donc : HT // DB et on a :

$$\frac{AB}{BZ} = \frac{AB^2}{AB\ .\ BZ}$$

Or : $GB^2 = \frac{1}{4}AB^2$ $\left[GB = \frac{AB}{2}\right.$ par hypothèse]

Et : $BD^2 = \frac{1}{4}(AB.BZ)$, d'après (1)

Donc : $\frac{AB}{BZ} = \frac{GB^2}{BD^2}$ (2) $\left[\frac{AB}{BZ} = \frac{AB^2}{AB.BZ} = \frac{AB^2}{4BD^2} = \frac{GB^2}{BD^2}\right]$

Et : $\frac{GB^2}{BD^2} = \frac{GT^2}{TH^2}$ [similitude de $T(GBD)$ et $T(GTH)$]

Donc : $\frac{AB}{BZ} = \frac{GT^2}{TH^2}$

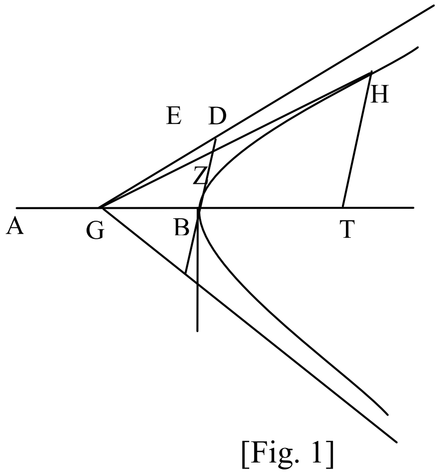
Or : $\frac{AB}{BZ} = \frac{AT\ .\ TB}{TH^2}$ [C : I; 21]

D'où : $GT^2 = AT.TB$.

Or : $AT.TB + BG^2 = GT^2$ $[GT^2 - GB^2 = (GT + GB)(GT - GB) = AT.TB]$

Ce qui est absurde. Donc GD ne rencontre par (HB).
De la même manière, on démontre que GE ne rencontre pas (HB).

315 - pour la clarté de l'exposé, nous avons séparé les six parties de l'énoncé de cette proposition en les numérotant de [1] à [6].



[Fig. 1]

[2] Toute droite passant par G et intérieure à l'angle $\angle DGE$ coupe la section *(HB)*

Preuve [Fig. 2] :

Supposons qu'il existe une droite GS intérieure à $\angle DGE$ et qui ne coupe pas *(HB)*. Soit BS tel que : $BS \cap GS = S$ et $BS \,//\, GD$.

Soit J sur le prolongement de GD tel que : $DJ = BS$.

Soit JS dont le prolongement coupe la section en O, AB en F et GE en Q.

On a : $SJ = DB$ et $DS \,//\, DB$, car : $BS = DJ$ et $BS // DJ$.

Comme : $GA = GB$ et $GF = GB + BF$, on a : $AF.FB + GB^2 = GF^2$ [E : II; 6] (3).

Comme : $JQ \,//\, DE$ et $DB = BE$, on a : $JF = FQ$.

Mais : $JQ = JO + OQ \Rightarrow QO \,.\, OJ + OF^2 = JF^2$ (4)

Or : $JS = DB \Rightarrow JO > DB$

Et : $OQ > BE$ car $FQ > BE$.

Donc : $QO.OJ > BD.BE$.

D'où : $QO.OJ > DB^2$ (5) [DB = BE]

D'autre part, puisque : $\dfrac{AB}{BZ} = \dfrac{GB^2}{BD^2}$ [d'après (2)]

et : $\dfrac{GF^2}{FJ^2} = \dfrac{GB^2}{BD^2}$ [similitude de *T(GBD)* et *T(GFJ)*]

Et que : $\dfrac{AB}{BZ} = \dfrac{AF\,.\,FB}{FO^2}$ [C : I; 21]

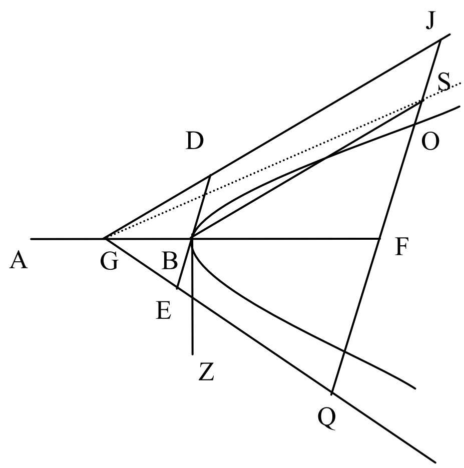
on a : $\dfrac{GF^2}{FJ^2} = \dfrac{AF\,.\,FB}{FO^2}$ (6)

[Or : $GF^2 - AF.FB = GB^2$, d'après (3) ; et : $FJ^2 - OF^2 = QO.OJ$, d'après (4)]

Donc : $\dfrac{GB^2}{QO.OJ} = \dfrac{GB^2}{BD^2}$ [car : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Rightarrow \dfrac{a-c}{b-d} = \dfrac{a}{b}$]

D'où : $BD^2 = QO.OJ$.

Or : $BD^2 < QO.OJ$ [d'après (5)]. Ce qui est absurde. Donc *GS* coupe la section *(HB)*.



[Fig. 2]

[3] Si une droite est tangente à la section [en un point S] et si elle rencontre GD et GE [aux points D et E], alors : SD = SE.

Et on a :

$$\left(\frac{ED}{2}\right)^2 = \frac{D_t.C_d}{4}$$

Preuve [Fig. 3]:

Supposons que ceci n'est pas vrai et qu'il existe ST et SK tels que :

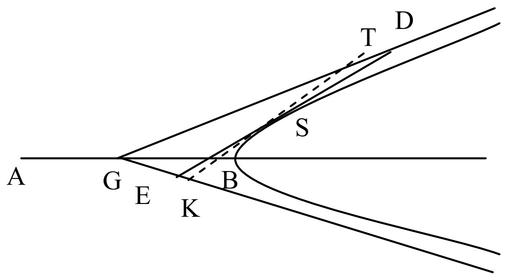
$$ST^2 = SK^2 = \frac{D_t.C_d}{4}$$

Joignons *GT* et *GK*. Alors ce serait des asymptotes [C : II; 2].

Ce qui est contradictoire car alors :

a) Ou bien *GT* ou *GK* serait à l'intérieur de l'angle $\angle DGE$ et leur prolongement rencontrerait la section [M : 18.2].

b) Ou bien *GT* ou *GK* est à l'extérieur de l'angle et il coupera *GE* ou *GD*.



[Fig. 3]

[4] Soit *QMFOS* un ligne telle que :
$QMFOS \cap (HB) = \{M, O\}$, $QMFOS \cap GD = S$ et $QMFOS \cap GE = Q$.
Alors : $SO = MQ$.

Preuve : [fig.4]
Soit F milieu de QS. On joint GF.
Du point B, on mène la tangente DBE.
Alors : $DBE // QS$ [C : II; 5] et DB = BE.

Donc : $\dfrac{DB}{BE} = \dfrac{SF}{FQ}$

Or : $OF = FM$ car GF est un diamètre
D'où : $SO = MQ$

[5] $QO.OS = BD^2 = \dfrac{1}{4}(AB.BZ)$

Preuve [Fig. 4] :

On a : $\dfrac{GB^2}{BD^2} = \dfrac{AB}{BZ} = \dfrac{GF^2}{FS^2}$ [d'après (2)]

Et : $\dfrac{AF\ .FB}{FO^2} = \dfrac{AB}{BZ}$ [C : I; 21 et similitude de T(GBD) et T(GFS)].

[D'où : $\dfrac{AF\ .FB}{FO^2} = \dfrac{GF^2}{FS^2}$

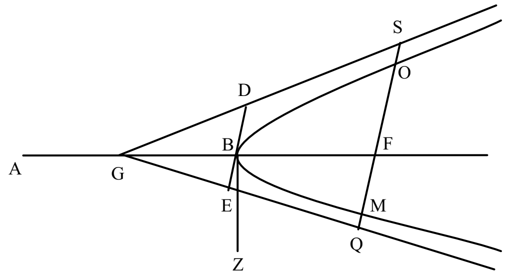
Alors : $\dfrac{GF^2 - AF\ .FB}{FS^2 - FO^2} = \dfrac{GF^2}{FS^2}$

Or : $GF^2 - AF\ .FB = GB^2$ *et* $FS^2 - FO^2 = QO.OS$]

Donc : $\dfrac{GB^2}{QO\ x\ OS} = \dfrac{GF^2}{FS^2} = \dfrac{AB}{BZ} = \dfrac{GB^2}{BD^2}$

Mais : $BD^2 = \frac{1}{4}$ *(AB x BZ)*

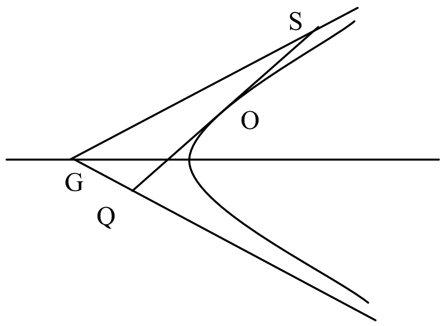
Donc : $QO.OS = \frac{1}{4}(AB.BZ)$.



[Fig. 4]

[6] Lorsqu'une droite rencontre les asymptotes et est coupée en deux parties égales par la section alors elle est tangente à la section.

Preuve [Fig. 5]:
Si la droite [*QS*] coupait la section *(HB),* elle la couperait en deux points *O* et *M*.
Donc [d'après (5)], on aurait : $OS = MQ$.
[Donc : $OS \neq OQ$].
Donc *O* ne couperait pas *QS* en deux parties égales.



[Fig. 5]

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [M : IV. 3. 1(18)] = [C : II ; 1-3, 8-10].

2. L'énoncé de la proposition :

- La partie [1] de l'énoncé de [M : IV. 3. 1(18)] correspond à tout l'énoncé de [C : II ; 1].
- La partie [2] correspond à celui de [C : II ; 2], mais la formulation est différente[316].
- La partie [3] correspond à une partie seulement de celui de [C : II ; 3] : la propriété pour une tangente de couper les deux asymptotes n'est ni énoncée ni démontrée par al-Mu'taman.
- La partie [4] correspond à une partie de celui de [C : II ; 8] : la propriété pour une sécante à l'hyperbole de couper ses deux asymptotes n'est pas énoncée par al-Mu'taman.
- Les parties [5] et [6] correspondent, respectivement, à ceux de [C : II ; 10] et [C : II ; 9].

3. La démonstration :

- La preuve de [1] correspond à celle de [C : II ; 1], avec le même lettrage.
- Les preuves de [2], [4], [5], [6] sont celles, respectivement, de [C : II ; 2], [C : II ; 8], [C : II ; 10], [C : II ; 9] avec, à chaque fois, un lettrage différent.
- La preuve de [3] correspond à la preuve de la seconde partie de [C : II ; 3], avec un lettrage différent.

4. Les références :

- [E : VI ; 2], [C : I ; 2, 17, 46, 47], [C : II ; 1, 2, 5, 6].

[316]- [C : II; 2] : "*Il n'y a pas d'autre asymptote qui découpe l'angle compris sous les droites $\Delta\Gamma$, ΓE*".

Proposition IV. 3. 1(19) :
[1] Soit *(AB)* une section hyperbolique, *DG* et *DE* ses deux asymptotes, *BE//DG, BH//DE.*
Soit *AG, AZ* tels que *AG//BH* et *AZ//BE*
Alors : *AG.AZ = BE.BH.*

Preuve [Fig. 1]:
On joint *AB.* Son prolongement coupe *DG* en *T* et *DE* en *K.*

On a alors :

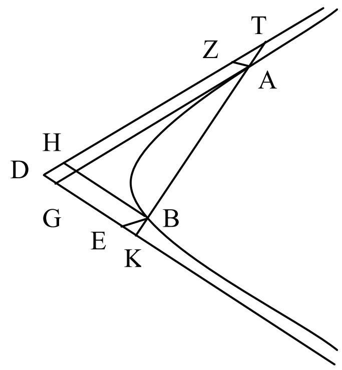
$$\frac{BT}{TA} = \frac{BH}{AG}$$ [similitude de *T(BTH)* et *T(ATG)*],

et : $$\frac{AK}{KB} = \frac{AZ}{BE}$$ [similitude de *T(BKE)* et *T(AKZ)*]

Or : $AT = BK$ [M : 18]

D'où : $$\frac{BH}{AG} = \frac{AZ}{BE}$$

C'est-à-dire : $AG.AZ = BE.BH$ (1)



[Fig. 1]

[2] Soit *LAM* et *FBQ* deux tangentes à la section, *DE* et *DG* ses asymptotes.
Soit *AZ // DE // BH, AG // BE // DG,*
Alors : *LD.DM = FD.DQ*

Preuve [Fig. 2] :
On a : $$\frac{LM}{MA} = \frac{LD}{AZ}$$ [similitude de *T(LMD)* et *T(AMZ)*]

Et : $$\frac{LM}{LA} = \frac{DM}{AG}$$ [similitude de *T(LMD)* et *T(ALG)*]

Or : $LA = MA$ [C: II; 3]

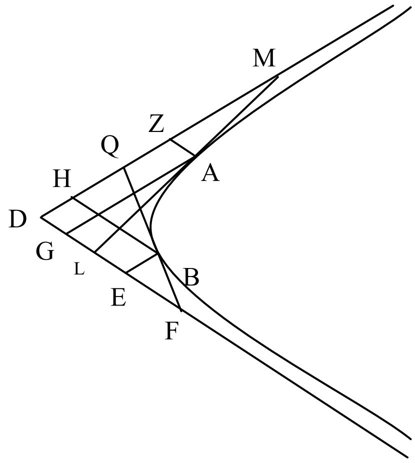
[Donc : $LM = 2MA$]

D'où : $LD = 2.AZ$ et $DM = 2.AG$

Donc : $LD.DM = 4.AG.AZ$

De même : $FD.DQ = 4.EB.BH$

D'où : $LD.DM = FD.DQ$, d'après [M : 19 [1]]



[Fig. 2]

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(19)] = [C : II ; 12], [C : III ; 43].**

2. **L'énoncé de la proposition :**
   - L'énoncé de [M : IV. 3. 1(19)] regroupe les énoncés de [C : III ; 12] et [C : III ; 43].

3. **La démonstration :**
   - Les preuves des deux parties de [M : IV. 3. 1(19)] correspondent, respectivement à celles de [C : III ; 12] et [C : III ; 43], avec des lettrages différents.

4. **Les références :**
   - [C : II ; 3, 12].

Proposition IV. 3. 1(20) :

Définition :

Si un diamètre conjugué de deux sections opposées est un diamètre transverse pour deux autres sections opposées et si le diamètre transverse des deux premières sections est un diamètre conjugué des deux autres sections opposées, alors les deux premières sections opposées seront dites des sections conjuguées aux deux autres sections opposées.

Soit deux sections opposées *(A), (B),* de diamètre transverse *AB*, de centre *E*, de diamètre conjugué *GED.*

On suppose que *GED* est diamètre transverse des sections opposées *(G), (D)* et que *AB* est le diamètre conjugué à *GD* pour les sections opposées *(G), (D).*

AB est donc parallèle aux lignes ordonnées de *(G), (D).*

Si on note $C_d(GD)$ le côté droit de la section *(G), (D)* et $C_d(AB)$ celui de la section *(A), (B),* on a :

$$\frac{GD}{AB} = \frac{AB}{C_d(GD)} \quad \text{et} \quad \frac{GD}{AB} = \frac{GD}{C_d(AB)}$$

Alors, les asymptotes sont communes aux sections opposées conjuguées

Preuve :

Soit *ZAH, KBT, ZGK* et *HDT* les tangentes aux sections aux points *A, B, G* et *D.* Alors *Q(ZHTK)* est un parallélogramme.

Puisque $GE = ED$ et $AE = EB$, alors *Z, E, T* sont alignés.

De même, *H, E, K* sont alignés et $ZA = AH\ [= \frac{GD}{2}]$.

Or : $\frac{AB}{GD} = \frac{GD}{C_d(AB)}$

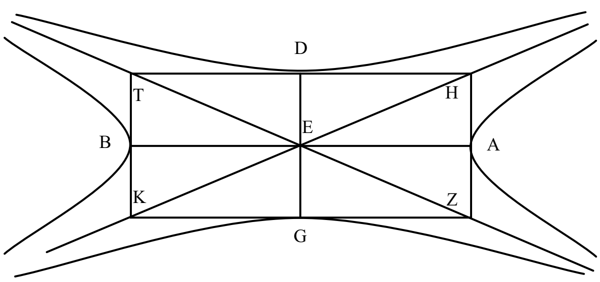
Donc : $ZA^2 = AH^2 = \frac{1}{4} AB.Cd_{(AB)}$

Donc *ZET* et *KEH* sont des asymptotes aux sections *(A), (B).*

On a aussi : $\frac{GD}{AB} = \frac{AB}{C_d(GD)}$

D'où : $ZG^2 = GK^2 = \frac{1}{4} GD.C_d(GD)$.

Donc *ZET* et *EKH* sont des asymptotes aux sections *(G)* et *(D).*



REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(20)] = [C : II ; 17].**

2. **L'énoncé de la proposition :**
- Il est identique à celui de [C : II ; 17] et, comme lui, il est précédé par la définition des *sections conjuguées*.

3. **La démonstration :**
- Al-Mu'taman reproduit la preuve de [C : II ; 17], en utilisant le même lettrage.

4. **Les références :**
- [C : I ; 50], [C : II ; 1, 5].

Proposition IV. 3. 1(21) :

Soit *(A), (B)* les deux sections opposées d'une hyperbole. Soit *GD* et *GZ* ses deux asymptotes. Soit *Δ* une droite quelconque qui coupe *GD* en *D* et *GZ* en *Z*.

Alors : *Δ* coupe chacune des sections *(A)* et *(B)* en un seul point.

Soit *H* et *T* ces deux points et *AB* le diamètre transverse parallèle à *HT*.

Alors :

$$HD = ZT \text{ et } HD.DT = \frac{1}{4}AB^2$$

Preuve :

Soit *AGB//DZ*. Alors *AGB* est un diamètre [C : I; 51].

Soit *EAD* la tangente à *(A)* en *A* et *LHMN//EAD* [avec *L* sur *DG*, *M* sur *AGB* et *N* sur *GE*].

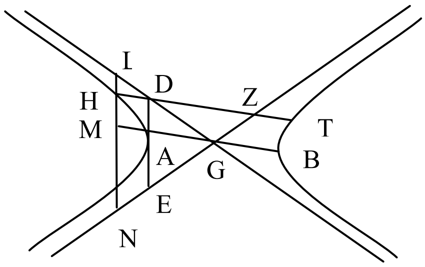
On a : $DA = AE$. [C : II ; 1]

Donc : $\frac{DA^2}{AG^2} = \frac{DA \,.\, AE}{AG^2} = \frac{DA}{AG}\left(\frac{AE}{AG}\right)$

Et : $\frac{DA}{AG} = \frac{LH}{HD}$ [similitude de *T(DAG)* et *T(LHD)*].

Et : $\frac{AE}{AG} = \frac{NH}{HZ}$ [similitude de *T(AEG)* et *T(NHZ)*].

Mais : $\frac{LH}{HD}\left(\frac{NH}{HZ}\right) = \frac{LH \,.\, NH}{HD \,.\, HZ}$



[D'où : $\frac{LH \,.\, NH}{HD \,.\, HZ} = \frac{DA^2}{AG^2}$]

Or : $NH.LH = AD^2$ [C : II ; 10]

D'où : $HD.HZ = AG^2$ (1)

On montre de même que : $DT.TZ = BG^2$

Donc : $HD \times HZ = DT \times TZ$

[D'où : $\frac{HZ}{ZT} = \frac{TD}{HD}$. Donc : $\frac{HZ + ZT}{ZT} = \frac{TD + DH}{HD}$]

Et alors : $ZT = HD$. [Donc : $HZ = DT$].

D'où : $TD \,.\, DH = AG^2$ [d'après (1)]

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(21)] = [C : II ; 11, 16].**

2. **L'énoncé de la proposition :**

- Les parties [1] et [2] de l'énoncé de [M : IV. 3. 1(21)] correspondent, respectivement à ceux de [C : II ; 11] et [C : II ; 16].

3. **La démonstration :**

- La preuve d'al-Mu'taman est une juxtaposition abrégée de celles de [C : II ; 11] et [C : II ; 16].

4. **Les références :**

- [C : II ; 3, 10, 51].

Proposition IV. 3. 1(22) :

Soit *(AB)* une section et *BD* son axe. De *G*, extérieur à *(AB)* et *BD*, mener une tangent à *(AB)*.

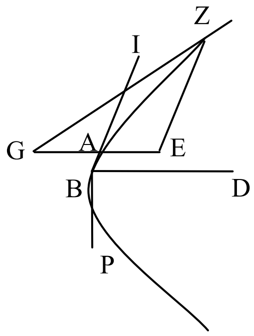
[1] Si *(AB)* est une parabole [Fig. 1] :

Soit *GAE//BD* tel que *GAE*∩*(AB) = A*

Soit *E* tel que : *AE = AG*. [Soit *AI* la tangente à *(AB)* en *A*].

Soit *EZ//AI*, avec *Z* sur *(AB). EZ* est donc une ligne ordonnée.

Alors *GZ* est tangente à *(AB),* d'après ce qui a été démontré [C : I; 35].



[Fig. 1]

[2] Si *(AB)* est une hyperbole [Fig. 2] :

Soit *HT* et *HK* ses asymptotes.

a) *G* est compris entre les asymptotes et la section.

On joint *HG* qui coupe *(AB)* en *A*.

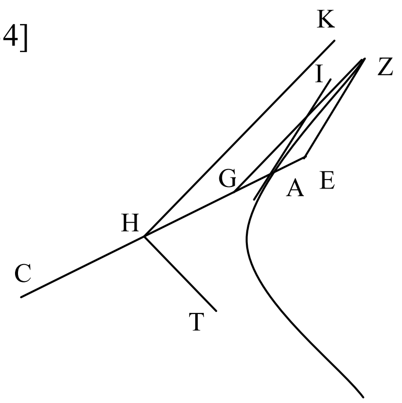
Soit *C*, sur le prolongement de *HA*, tel que : *HC = HA*

Soit *E* sur *CA* tel que :

$$\frac{CG}{GA} = \frac{CE}{EA}$$

[Soit *AI* la tangente à *(AB)* en *A*. Soit *EZ//AI*, avec *Z* sur *(AB)*]

Alors *GZ* est tangente à *(AB)* [C : I; 34]



[Fig. 2]

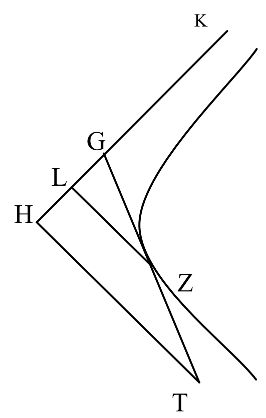
b) *G* est sur *HK*, l'une des deux asymptotes [Fig. 3]

Soit *L* milieu de *GH* et *LZ//HT*, avec *Z* sur *(AB)*.

On joint *GZ*. Il coupe *HT* en *T*. On a donc :

$$\frac{HL}{LG} = \frac{TZ}{ZG} \quad \text{[similitude de } T(GLZ) \text{ et } T(GHT)\text{]}$$

Alors *GT* est tangente à *(AB)* [C : II; 9].



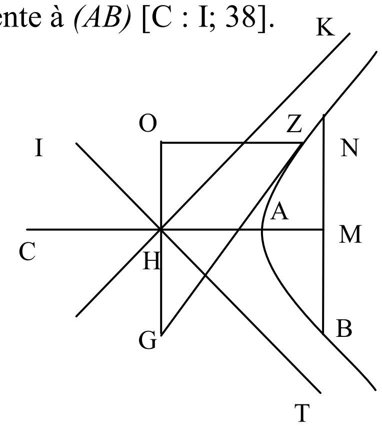
[Fig. 3]

c) *G* est à l'intérieur de ∠*IHT*, adjacent à ∠*KHT* [Fig. 4]

On joint *GH*. Soit *N* un point quelconque sur *(AB), NB//GH* et *M* milieu de *NB*.
Soit *C*, sur le prolongement de *MH*, tel que *AH = HC*.
MC est donc conjugué à *GH*. Il est donc le diamètre transverse.
Soit *O*, sur le prolongement de *GH*, tel que :

$$GH.HO = \frac{1}{4} CA.C_d.$$

Soit *ZO//CA* et *Z* sur *(AB).*
Alors *GZ* est tangente à *(AB)* [C : I; 38].



[Fig. 4]

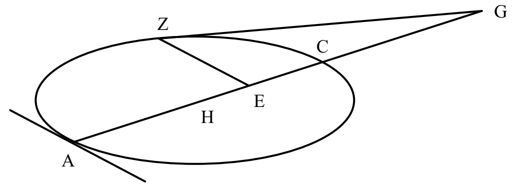
d) *G* est sur l'une des asymptotes de la section opposée à *(AB)* ou entre les asymptotes et la section opposée.

Dans ce cas, il est impossible de mener une tangente à la section. Car toute droite issue de *G* coupe *(AB)* ou ne la rencontre pas.

[3] Si *(AB)* est une ellipse [Fig. 4]
Soit H le centre de *(AB)*. GH coupe *(AB)* en C et A.
Soit E sur CA tel que :

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CG}{GA}$$

Soit AI tangente à *(AB)* en A] et $EZ \,//\, AI$.
Alors GZ est tangente à *(AB)* [C : I; 34]



[Fig. 5]

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(22)] = [C : II ; 49].**

2. **L'énoncé de la proposition :**
   - Celui d'al-Mu'taman est identique à celui d'Apollonius.

3. **La démonstration :**
   - Les structures globales des preuves d'al-Mu'taman et d'Apollonius sont différentes à deux niveaux :

* Les assertions de [C : II ; 49] sont établies par *analyse* et *synthèse* alors que, dans l'*Istikmāl*, l'auteur se contente de la *synthèse*.

* Apollonius envisage tous les cas de figure alors qu'al-Mu'taman ne traite que certains d'entre eux.

- Pour la parabole, al-Mu'taman ne traite pas les cas où le point G (à partir duquel se fait la construction de la tangente) est sur l'axe ou sur la courbe. Il suppose même connue la construction dans le cas où G est sur la courbe. Il est en effet traité dans [C : I; 33] ⊂ [M : IV. 3. 1(10)].
- Pour l'hyperbole, al-Mu'taman suppose connu le cas où G est sur la courbe. Ce cas est établi dans [C : I; 34] ⊂ [M : IV. 3. 1(10)].

Il traite les cas où le point G est :
* a) Entre la courbe et ses asymptotes,
* b) Sur une asymptote,
* c) Dans l'angle adjacent à celui des deux asymptotes,
* d) Dans l'angle opposé à celui des deux asymptotes. Et, dans ce cas, il montre, à la suite d'Apollonius, l'impossibilité de la construction.

- Pour l'ellipse, al-Mu'taman traite uniquement le cas où G est à l'extérieur de la courbe. Le cas où G est sur la courbe est également traité dans [C : I; 34] ⊂ [M : IV. 3. 1(10)].

4. **Les références :**
   - [C : I ; 33, 34, 35, 38] et [C : II ; 9].

Proposition IV. 3. 1(23) :

Soit une section *(AG)* d'axe AB et $\angle HTK$ un angle donné.
Construire une tangente DG à *(AG),* avec G sur *(AG)* et D sur le prolongement de AB, de sorte que $\angle GDB = \angle HTK$.

[1] Si *(AG)* est une parabole [Fig. 1] :

Soit $HK \perp TK$, et M sur TK tel que : $TM = MK$. On joint MH.
Soit G sur *(AG)* tel que : $\angle GAB = \angle KMH$
Soit GE une ligne ordonnée et D sur AB tel que $AD = AE$. On joint DG.
Alors DG est une tangente à la section [C : II ;10];
Et elle vérifie : $\angle GDB = \angle HTK$.

Preuve :

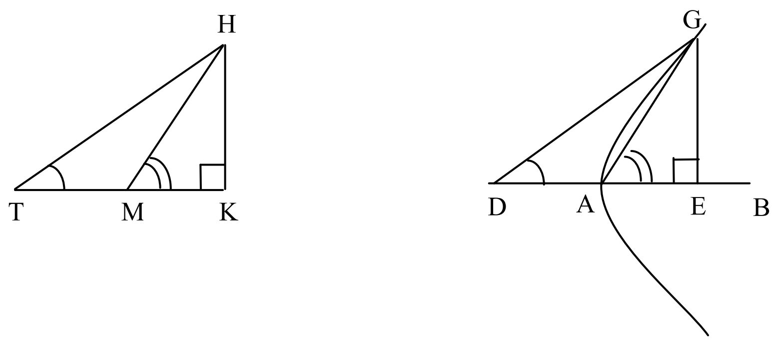
Puisque $\angle GAE = \angle HMK$ et $\angle E = \angle K = \frac{\pi}{2}$.

Donc $T(GEA)$ et $T(HKM)$ sont semblables. D'où : $\frac{AE}{EG} = \frac{MK}{KH}$

Et : $\frac{DE}{EA} = \frac{TK}{KM}$ [$= \frac{1}{2}$, par hypothèse]

Donc : $\frac{DE}{EG} = \frac{TK}{KH}$ [et $\angle E = \angle K = \frac{\pi}{2}$].

D'où : $\angle GDB = \angle HTK$ [car $T(DEG)$ et $T(TKH)$ sont semblables]



[Fig. 1]

[2] Si (AG) est une hyperbole [Fig. 2] :

Soit O le centre de *(AG),* OZ son asymptote.
Soit l'angle $\angle HTK > \angle ZOA$ car la tangente est entre l'asymptote et la section, et l'angle extérieur sera plus grand que l'angle intérieur.
Soit $\angle KTL = \angle ZOA$. Soit ZA la tangente à la section *(AG)* en A.
Soit $HK \perp TK$, tel que $HK \cap TL = L$
[Si on note D_t, le diamètre transverse et C_d le côté droit], on a :

$$\frac{OA^2}{AZ^2} = \frac{D_t}{C_d} \quad \text{[C : II; 10]} \qquad (1)$$

Et : $\frac{OA^2}{AZ^2} = \frac{TK^2}{KL^2}$ [similitude de $T(ZOA)$ et $T(KTL)$]

Mais :

$$\frac{TK^2}{KL^2} > \frac{TK^2}{KH^2} \text{ [car } KH > KL\text{]}$$

[Soit M sur le prolongement de TK, avec $MK>TK$ et tel que :] $\frac{TK^2}{KL^2} = \frac{MK \,.\, KT}{KH^2}$.

D'où :

$$\frac{MK.KT}{KH^2} = \frac{D_t}{C_d} \quad \text{[d'après (1)]} \qquad (2)$$

Mais : $\frac{MK^2}{KH^2} > \frac{MK \,.\, KT}{KH^2}$ [car $MK > KT$]

et : $\frac{MK \,.\, KT}{KH^2} = \frac{\mathrm{OA}^2}{\mathrm{AZ}^2}$

[Donc : $\frac{MK^2}{KH^2} > \frac{OA^2}{AZ^2}$]

Soit [W un point sur AZ], tel que : $\frac{OA^2}{AW^2} = \frac{MK^2}{KH^2}$.

Alors : $AW < AZ$ et $T(OWA)$ et $T(MHK)$ sont semblables (3).

Prolongeons OW jusqu'à G sur (AG). On :

$$\angle AOG = \angle KMH \qquad \text{[d'après (3)].}$$

Donc : $\angle ZOA > \angle HMK$

Soit DG la tangente à (AG) en G qui coupe OA en D. Soit GE une ligne ordonnée. $T(OGE)$ est semblable à $T(MHK)$. Donc :

$$\frac{GE^2}{OE^2} = \frac{HK^2}{KM^2} \qquad (4)$$

Or :

$$\frac{OE \,.\, ED}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d} = \frac{MK \,.\, KT}{KH^2} \quad \text{[d'après (2)]} \qquad (5)$$

On obtient donc :

$$\frac{ED}{OE} = \frac{OE \,.\, ED}{OE^2} = \frac{MK \,.\, KT}{MK^2} = \frac{KT}{MK}$$

$$[\frac{OE.ED}{EG^2}\left(\frac{GE^2}{OE^2}\right)=\frac{MK.KT}{KH^2}\left(\frac{KH^2}{KM^2}\right), \text{d'après (4) et (5)}]$$

D'où :

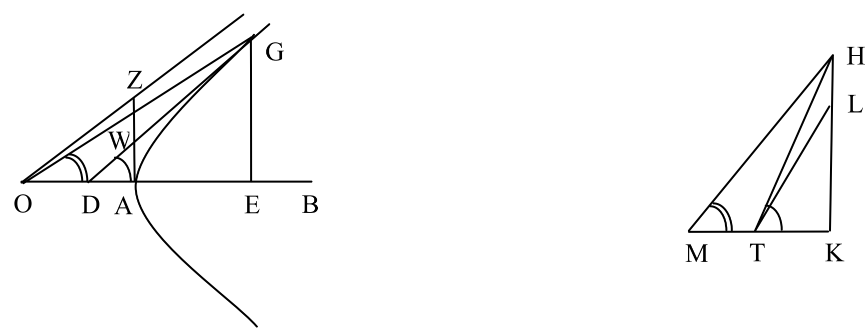
$$\frac{ED}{OE}=\frac{KT}{MK}$$

Or : $$\frac{OE}{EG}=\frac{MK}{KH} \quad \text{[d'après (4)]}$$

D'où :

$$\frac{ED}{EG}=\frac{KT}{KH} \text{ et } \angle E=\angle K=\frac{\pi}{2} \quad [\frac{ED}{OE}\left(\frac{OE}{EG}\right)=\frac{KT}{MK}\left(\frac{MK}{KH}\right)]$$

Donc : $\angle GDE = \angle HTK$ [similitude des triangles *(GDE)* et *(HTK)*]



[Fig. 2]

[3] Si *(AG)* est une ellipse [Fig. 3] :

Soit O son centre. Soit $HK \perp TK$.

Soit M sur le prolongement de TK tel que : $\frac{TK \,.\, LM}{KH^2}=\frac{D_t}{C_d}$

On joint HM. Soit G sur l'ellipse tel que : $\angle EOG = \angle TMH$.

Soit GD la tangente à *(AG)*. Elle coupe OA en D. Soit GE une ligne ordonnée.

Puisque $\angle O = \angle M$ et $\angle E = \angle K = \frac{\pi}{2}$ *T(GOH)* et *T(HMK)* sont semblables.

Donc : $$\frac{OE^2}{EG^2}=\frac{MK^2}{KH^2} \quad (6)$$

Et :

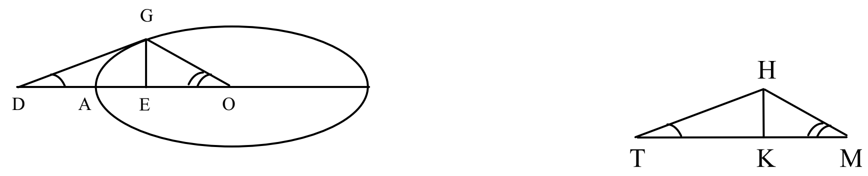
$$\frac{EG^2}{OE.ED}=\frac{C_d}{D_t}$$

Mais :

$$\frac{HK^2}{MK \,.\, KT}=\frac{C_d}{D_t} \quad \text{[par hypothèse]}$$

D'où : $$\frac{OE^2}{OE \,.\, ED}=\frac{OE}{ED}=\frac{MK^2}{MK \,.\, KT}=\frac{MK}{KT}$$

$$\left[\frac{OE^2}{OE.ED} = \frac{OE^2}{EG^2}\left(\frac{EG^2}{OE.ED}\right) \quad \text{et} \quad \frac{MK^2}{MK.KT} = \frac{MK^2}{KH^2}\left(\frac{KH^2}{MK.KT}\right)\right];$$



[Fig. 3]

Donc : $\dfrac{OE}{ED} = \dfrac{MK}{KT}$ (7)

D'où : $\dfrac{GE}{ED} = \dfrac{HK}{KT}$ [d'après (1) et (2)] et $\angle E = \angle K = \dfrac{\pi}{2}$.

[Donc : *T(GED)* et *T(HKT)* sont semblables]
D'où : $\angle GDE = \angle HTK$

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(23)] = [C : III ; 50].**

2. **L'énoncé de la proposition :**
   - L'énoncé de [M : IV. 3. 1(23)] est identique à celui de [C : III ; 50].

3. **La démonstration :**
   - Toutes les preuves d'Apollonius sont par *analyse* et *synthèse*. Al-Mu'taman ne conserve, à chaque fois, que la partie *synthèse* de la démonstration de chacun des cas de [C : III ; 50].
   - Dans le cas de l'hyperbole, al-Mu'taman donne, à la suite d'Apollonius, la condition de possibilité de la construction : l'angle aigu donné doit être plus grand que la moitié de l'angle des deux asymptotes.
   - Les deux auteurs utilisent l'existence de la 4^e proportionnelle à trois grandeurs données, sans justification.

4. **Les références :**
   - [E : V ; 8] et [C : II ; 2, 10, 49].

Proposition IV. 3. 1(24) :

Soit *(AB)* une hyperbole, *GD* et *GE* ses asymptotes.

Soit *Z* un point quelconque sur *GD* et *ZH // GE*.

Alors :

*[1] Le prolongement de ZH rencontre la section (*AB).

[2] La courbe *(AB)* se rapproche de son asymptote chaque fois que les deux lignes sont prolongées; et leur distance peut être rendue inférieure à toute grandeur donnée.

Preuve [Fig. 1] :

[1] Supposons que *ZH* ne rencontre pas la section.

Soit *AD // ZH*. Soit *H* sur *ZH* tel que : $GZ.ZH = AD.DG$. (1)

[Ce qui est possible puisque *ZH* peut être aussi grand que l'on veut].

On joint *GH* qui coupe *(AB)* en *T*. [C : II; 2]

Du point *T*, on mène *TK // GE* et *TL // DG.*

On a :

$$KT.TL = AD.DG \quad [C : II; 12]$$

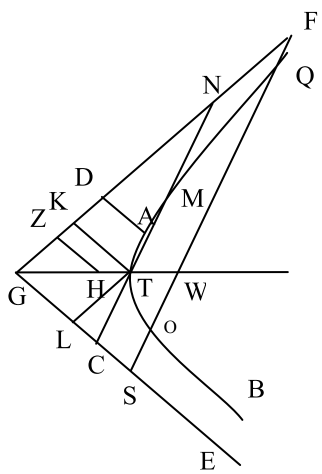
[Comme $KG = TL$], on a : $KT.KG = GZ.ZH$ [d'après (1)] (2)

Or : $KT > ZH$ et $KG > GZ$.

[Donc $KT.KG > GZ.ZH$].

Ce qui est contraire à (2).

Donc *ZH* coupe la section *(AB).*



[Fig. 1]

[2] Du point *T,* on mène *NMTC* tel que $NC \cap GD = N$, $NC \cap (AB) = \{M,T\}$, $NC \cap GE = C$.

Soit *FQWOS // NC* tel que : $FS \cap (AB) = \{Q,O\}$, $FS \cap GE = S$, $FS \cap GD = O$

On joint *GT*. Il coupe *FS* en *W*.

On a : $FO.OS = NT.TC$ [C : II; 10]

$$\text{Donc : } \frac{FO}{NT} = \frac{TC}{OS}$$

Or : $FO > NT$ car $FW > NT$

D'où : $TC > OS$

De même, on démontre que, plus le segment OS est éloigné de G, plus il est petit

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(24)] = [C : II; 13, 14].**

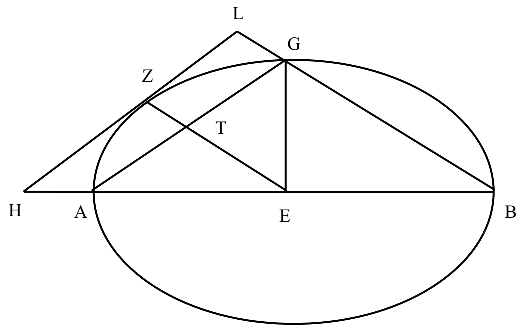
2. **L'énoncé de la proposition :**
   - La partie [1] de l'énoncé de [M : IV. 3. 1(24)] correspond à l'énoncé de [C : II; 13].
   - La partie [2] correspond à celui de [C : II; 14].

3. **La démonstration :**
   - Les parties [1] et [2] correspondent, respectivement aux preuves de [C : II; 13] et de [C : II; 14], mais avec un lettrage différent.

4. **Les références :**
   - [C : II; 2, 10, 12]

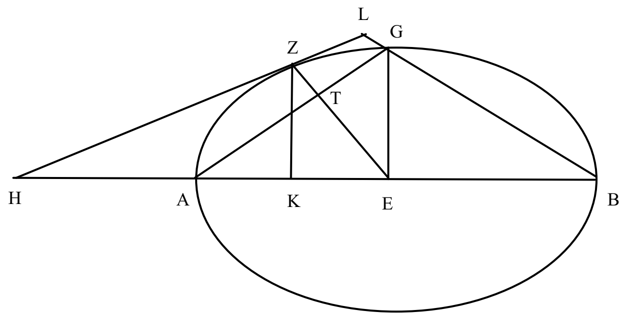
Proposition IV. 3. 1(25) :
Soit *(AB)* une ellipse de grand axe *AB* et de petit axe *GD*. On joint *AG, GB*.
Soit *HZL* une tangente en un point quelconque de *(AB)*.
[*HZL* coupe le prolongement de *BG* en *L* et celui de *BA* en *H*].
On joint *EZ*. Il coupe *AG* en *T*.
Alors : $\angle LZT \geq \angle LGT$.

Preuve :
[1] Si $ZE \,//\, LB$ [Fig. 1]
$BE = EA \;\Rightarrow\; GT = TA$ [similitude de $T(ATE)$ et $T(GAB)$]
Donc *EZ* est un diamètre
Donc : $LH \,//\, AG$ [C : II ; 6]
D'où $\angle LGT = \angle LZT$



[Fig. 1]

[2] Si *ZE* n'est pas parallèle à *LB* [Fig. 2].
Alors, on a : $\angle ZEA \neq \angle GBE$
Soit $ZK \perp AB$, *ZK* ordonnée.
Donc : $\angle E = \angle K = \dfrac{\pi}{2}$.



[Fig. 2]

Donc $T(GEB)$ et $T(ZKE)$ ne sont pas semblables en position.

D'où : $$\frac{BE^2}{EG^2} \neq \frac{EK^2}{KZ^2}$$

Or, on a :

$$\frac{BE^2}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d} = \frac{BE\ .\ EA}{EG^2}$$

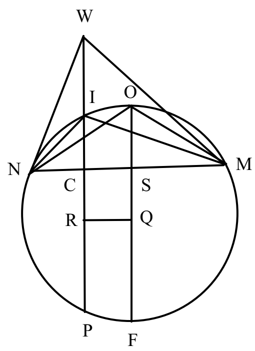
car : $$\frac{BE\ .\ EA}{EG^2} = \frac{D_t}{C_d} = \frac{EK\ .\ KH}{ZK^2}\ \text{[C : I ; 21]}$$

D'où : $\frac{EK^2}{KZ^2} \neq \frac{EK\ .\ KH}{ZK^2}$

Donc : $HK \neq KE$.

On construit l'arc capable (*NOM)*, inférieur à un demi-cercle, d'angle $\angle AGB$ obtus [Fig. 3] [$\angle AGB$ est obtus parce que $AE > EG$ et $EB > EG$]. [C : III ; 31]
On complète le cercle. Soit *C* [sur *NM*], tel que :

$$\frac{NC}{CM} = \frac{HK}{KE} \quad (1)$$



[Fig. 3]

De *C*, on mène $ICP \perp NM$. Soit *S* milieu de *MN*.
De *S,* on mène $OSF \perp NM$.
Soit *Q* milieu de *OF*.
Alors *Q* est le centre de *C(NOM)*. [E : III ;1]
De *Q*, on mène $QR \perp IP$.
Donc : $SQ = CR$ et $SO > CI$

Donc : $\frac{SQ}{SO} < \frac{RC}{CI}$

Et, par composition, on a : $\frac{OQ}{SO} < \frac{RI}{CI}$

Il en est de même pour *2 QO* et *2 RI.*

D'où : $\frac{FO}{OS} < \frac{PI}{IC}$

Car : $FO = 2QO$ et $HI = 2RI$.

Et, après séparation, on a : $\frac{FS}{OS} < \frac{PC}{IC}$ (2)

Or : $\frac{FS}{SO} = \frac{NS.SM}{SO^2}$ [puissance d'un point par rapport à un cercle],

Et :

$\frac{PC}{IC} = \frac{NC.CM}{IC^2}$ [puissance d'un point par rapport à un cercle]

[Donc : $\frac{NS\ .\ SM}{OS^2} < \frac{NC\ .\ CM}{IC^2}$]

Soit alors λ tel que : $\frac{NS\ .\ SM}{OS^2} = \frac{NC.CM}{\lambda^2}$ (3)

Alors : $\lambda > IC$ [car $\frac{NC.CM}{\lambda^2} < \frac{NC\ .\ CM}{IC^2}$, d'après (2)]

Soit W, sur le prolongement E de CI, tel que : $CW = \lambda$.

On joint WN, WM; ON, OM; IN, IM.
Comme $\angle O = \angle G$ et que $T(BGK)$ et $T(MON)$ sont isocèles [Fig. 2 et 3], ils sont semblables].

On a : $T(BGE)$ et $T(GEA)$ sont respectivement semblables à $T(MOS)$ et $T(OSN)$.

D'où : $\frac{MS^2}{SO^2} = \frac{D_t}{C_d}$ et $\frac{HK.KE}{KZ^2} = \frac{D_t}{C_d}$

Or :

$\frac{NC\ .\ CM}{WC^2} = \frac{MS^2}{SO^2}$ [d'après (3)]

Donc :

$\frac{HK\ .\ KE}{KZ^2} = \frac{NC\ .\ CM}{WC^2}$

Comme : $\frac{NC}{CM} = \frac{HK}{KE}$ [par construction]

Et que : $\frac{MC.CN}{MC^2} = \frac{NC}{CM}$ et $\frac{MC.CN}{CN^2} = \frac{MC}{CN}$

on a : $\frac{NC}{CM} = \frac{EK.KH}{EK^2}$ et $\frac{MC}{CN} = \frac{EK.KH}{KH^2}$

D'où : $$\frac{EK^2}{EK\ .\ KH} = \frac{MC^2}{MC\ .\ CN}$$

Or : $$\frac{EK\ .\ HK}{KZ^2} = \frac{MC\ .\ NC}{CW^2}$$

Donc par le rapport d'égalité, on a :

$$\frac{EK^2}{KZ^2} = \frac{MC^2}{CW^2}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{EK}{KZ} = \frac{MC}{CW} \qquad (4)$$

De même : $\frac{HK}{KZ} = \frac{NC}{CW}$ [car : $\frac{HK}{KZ} = \frac{HK}{EZ} . \frac{EK}{KZ} = \frac{NC}{MC} . \frac{MC}{CW}$, d'après (1) et (4)]

et $\angle K = \angle C = \frac{\pi}{2}$

Donc *T(MWC)* et *T(NWC)* sont, respectivement, semblables à *T(EZK)* et *T(HZK)*.

On a aussi : $\angle HZK + \angle EZK = \angle NWC + MWC$.

D'où : $\angle EZH = \angle MWN$ (5)

Or : $\angle MWN < \angle MIN$ et $\angle MIN = \angle BGA$.

D'où : $\angle EZH < \angle BGA$ [d'après (5)].
Il reste donc :

$$\angle EZL > \angle LGT$$

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(25)] = [C : II ; 52].**

2. **L'énoncé de la proposition :**
   - L'énoncé de [M : IV. 3. 1(25)] est identique à celui de [C : II ; 52], avec le même lettrage.

3. **La démonstration :**

- La structure globale de la preuve dans [M : IV. 3. 1(25)] est identique à celle de [C : II ; 52] : le cas ZE parallèle à AB est d'abord traité puis le cas ZE non parallèle à AB.

- Le contenu des deux preuves est identique avec le même lettrage.

- La phrase des Coniques qui affirme que "T(GEB) et T(ZEK) ne sont pas semblables" est considérée comme interpolée dans la mesure où elle n'est pas vraie en général (la similitude étant possible si ZE et GB sont antiparallèles). On la retrouve chez al-Mu'taman mais avec un ajout qui la rend correcte. La phrase devient dans *l'Istikmāl* : "*les deux triangles ne sont pas de positions semblables*" [lam yakun al-muthallathān mutashābihay al-waḍ^{c}]. (Ms. Copenhague, Royal Library, Or. 82, f. 120v).

4. **Les références :**
   - [C : I ; 21], [C : II ; 6], [C : III ; 1, 31].

Proposition IV. 3. 1(26) :

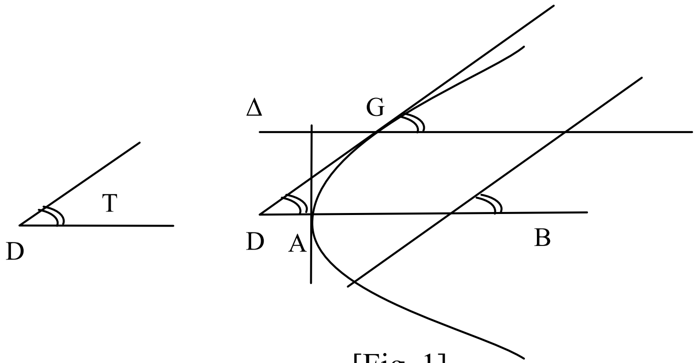
Soit *(AG)* une section conique, *AB* son axe, *E* son centre [pour l'hyperbole et l'ellipse] et $\angle T'$ un angle aigu donné. Construire un diamètre dont l'angle de ses lignes ordonnées soit égal à $\angle T'$.

Preuve :

[1] Si *(AG)* est une parabole [Fig. 1] :

Les diamètres sont parallèles à l'axe. Soit *GD* tangente à *(AG)* en *G* et telle que : $\angle GDA = \angle T'$ [C : II; 50].

Le diamètre cherché est la droite $\Delta G \,//\, DA$. En effet, ce diamètre forme avec *DG* un angle égal à $\angle T'$. Et toute ligne ordonnée est parallèle à DG.



[Fig. 1]

[2] Si *(AG)* est une hyperbole [Fig. 2] :

Soit *ES* une de ses deux asymptotes, *AS* la tangent au sommet *A* de *(AG)*.

On sait que : $\dfrac{EA^2}{AS^2} = \dfrac{D_t}{C_d}$

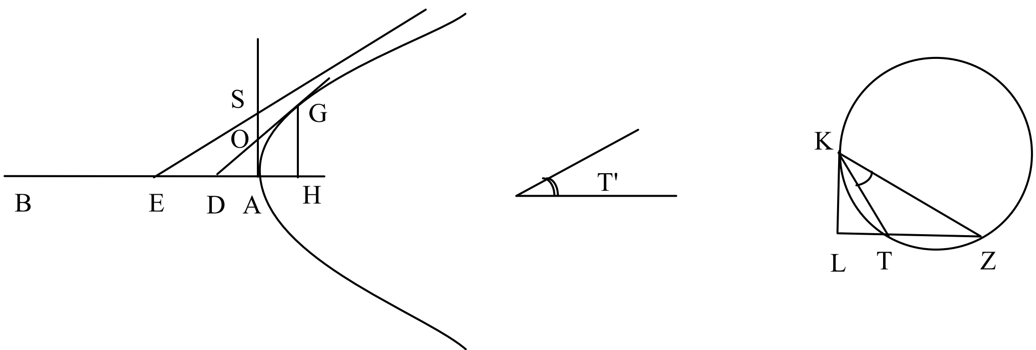
Soit *arc(ZKT),* un arc capable d'angle $\angle T'$. [donc : $\angle ZKT = \angle T'$].

arc(ZKT) est plus grand qu'un demi cercle car $\angle T'$ est aigu [C : III; 33].

Soit *L* sur le prolongement de *ZT*, tel que : $KL \perp ZT$.

D'après [M: III.3.1(3)], on a :

$$\frac{ZL.LT}{LK^2} = \frac{D_t}{C_d} \quad (1).$$



[Fig. 2]

2.1 Si $D_t = C_d$, KL est tangent à (KZT) en K et :

$$LK^2 = ZL.LT \text{ [puissance d'un point par rapport à un cercle]}$$

2.2 Si $D_t \neq C_d$, KL coupera (KZT) en deux points et on a :

$$\frac{ZL.LT}{LK^2} = \frac{D_t}{C_d} = \frac{EA^2}{AS^2} \text{ et } \frac{ZL^2}{LK^2} > \frac{ZL.LT}{LK^2} \text{ [}ZL > LT \text{ par construction].}$$

Donc : $\dfrac{ZL^2}{LK^2} > \dfrac{EA^2}{AS^2}$

Soit O [sur AS] tel que : $\dfrac{EA^2}{AO^2} = \dfrac{ZL^2}{LK^2}$ (2)

On a donc : $\dfrac{EA^2}{AO^2} > \dfrac{EA^2}{AS^2}$.

D'où :

$$AS > AO$$

On joint EO. Il coupe (AG) en G.

Soit GD tangente à (AG) en G et GH une ligne ordonnée passant par G.[C : II; 49]

On a :

$$\frac{ZL^2}{LK^2} = \frac{EA^2}{AO^2} = \frac{EH^2}{HG^2}$$

[d'après (2) et la similitude de $T(OAE)$ et $T(GHE)$].

et : $$\angle L = \angle A = \angle H = \frac{\pi}{2}$$

Donc $T(GHE)$ est semblable à $T(KLZ)$ et à $T(OAE)$.

Et puisque : $\dfrac{EH\ .HD}{HG^2} = \dfrac{D_t}{C_d}$ [C : I; 37]],

on a :

$$\frac{ZL\ .LT}{LK^2} = \frac{EH\ .HD}{HG^2} \text{ [d'après (1)]}$$

Mais : $$\frac{HG^2}{HE^2} = \frac{KL^2}{LZ^2} \text{ [par similitude] (4)}$$

D'où :

$$\frac{ZL\ .LT}{ZL^2} = \frac{EH\ .HD}{EH^2}$$

[car : $\frac{ZL.LT}{ZL^2}.\frac{ZL^2}{KL^2}=\frac{EH.HD}{EH^2}.\frac{EH^2}{HG^2}$, d'après (3) et : $\frac{ZL^2}{KL^2}=\frac{EH^2}{HG^2}$, d'après (4)]

Donc :

$$\frac{LT}{ZL}=\frac{HD}{HE}$$

D'où : $\frac{TL}{LK}=\frac{HD}{HG}$

[car :

$\frac{TL}{LK}=\frac{TL}{ZL}.\frac{ZL}{KL}$, $\frac{HD}{HG}=\frac{HD}{HE}.\frac{HE}{HG}$ et $\frac{HE}{HG}=\frac{LZ}{KL}$, d'après (4)].

Et : $\angle TKL = \angle DGH$.

Donc *T(GHD)* est semblable à *T(TLK)*

Mais : $\angle ZKL = \angle EGH$, car *T(KLZ)* est semblable à *T(GHE)*.
Et : $\angle ZKT = \angle T'$.
D'où, par soustraction : $\angle ZKT = \angle EGD$.
Mais, l'angle des lignes ordonnées est égal à celui de la tangente.
Donc *GE* est le diamètre cherché.

[3] Si *(AG)* est une ellipse

a) Si *(AG)* est un cercle

Tous ses diamètres sont perpendiculaires aux lignes ordonnées.
La construction d'un diamètre faisant un angle aigu est donc impossible.

b) Si *(AG)* n'est pas un cercle

Les deux axes sont différents, sinon les lignes ordonnées leur seraient perpendiculaires. La section *(AG)* serait donc un cercle, comme cela a été déjà montré. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

Lemme 1:

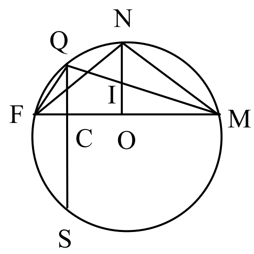
Soit *(MNQFS)* un cercle, avec *(MNQF)* [un demi-cercle et *arc(MSF)* plus grand qu'un demi-cercle]

Construire $QS \perp MF$ tel que : $QS \cap MF = C$ et vérifiant :

$$\frac{SC}{CQ}=\frac{D_t}{C_d}$$

Preuve [Fig. 3] :

Comme : $\dfrac{SC}{CQ} \neq 1$, $FM \neq$ diamètre et $\angle QCM = 1$ droit, la construction est possible, comme cela a été vu dans une proposition précédente.



[Fig. 3]

Et, on a : $\dfrac{SC}{CQ} = \dfrac{SC.\,CQ}{CQ^2} = \dfrac{MC\,.\,CF}{CQ^2}$

[car : $SC.CQ = MC.CF$ (puissance d'un point par rapport un cercle].
Or, on sait construire C vérifiant :

$$\frac{MC\,.\,CF}{CQ^2} = \frac{D_t}{C_d}$$ d'où le résultat cherché :

Lemme 2 :

Soit *T(MON)* et *T(BEK)* deux triangles vérifiant : $\angle BEK = \angle MON$ et $\angle OMN > \angle EBK$.

Alors :

$$\frac{MO}{ON} < \frac{BE}{EK}$$

Preuve :

Soit *I* sur *ON* tel que : $\angle MOI = \angle EBK$. D'où :

$$\frac{BE}{EK} = \frac{MO}{OI}$$

à cause de la similitude de *T(MOI)* et *T(EBK)*.

Mais :

$$\frac{MO}{OI} > \frac{MO}{ON}$$

Donc :

$$\frac{MO}{OI} < \frac{BE}{EK}$$

Preuve du cas b :

Soit *ZEK* le petit diamètre de la section *(AG)*. On joint *BK* et *AK*.
Soit *L* l'intersection de *BK* avec *DG*.

Condition de possibilité :

On doit supposer $\angle T' \geq \angle LKA$ pour que la construction d'une tangente, entre *L* et *K* ou entre *K* et *B*, soit possible

1^{e} cas : $\angle T' = \angle LKA$ [Fig. 4]

Soit *ETG* // *BKL*, avec *T* sur *AK* et *G* sur la section. Soit *DGL* la tangente à la section qui coupe *BA* en *D*. [C : II; 49]

On a : $\frac{AE}{EB} = \frac{AT}{TK}$ [similitude de *T(ATE)* et *T(AKB)*]

Donc : $AT = TK$

Donc *AK* est une ligne ordonnée du diamètre *EG*. [Donc : *AK* // *DGL*][C II; 6].

Donc *Q(KLGT)* est un parallélogramme.

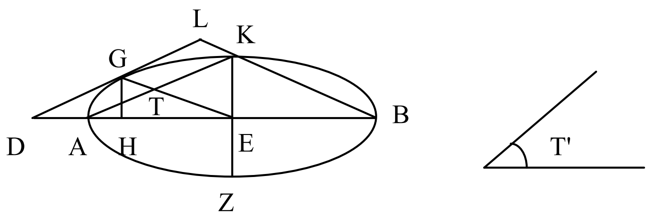
D'où : $\angle LGT = \angle LKA$

Donc : $\angle G = \angle T'$

2^{e} cas : $\angle T' > \angle LKA$

Soit $\angle P = \pi - T'$.

Alors : $\angle P < \angle BKA$ [$\angle T' > \angle LKA \Rightarrow \angle P = \pi - T' < \pi - \angle LKA = \angle BKA$]



[Fig. 4]

Soit *arc(MNF),* un arc de cercle capable de $\angle P$.

L'arc(MNF) est inférieur à un demi-cercle [car $\angle P$ est obtus].

Soit *N* milieu de *arc(MNF),* et $NO \perp MF$. On joint *ON* et *NF*.

On a :

$$\angle BKA > \angle MNF$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\angle BKA > \frac{1}{2}\angle MNF$$

D'où :

$$\angle BKE > \angle MNO \qquad (1)$$

car :

$$\angle BKE = \frac{1}{2} BKA \text{ et } \angle MNO = \frac{1}{2} MNF$$

Mais :

$$\angle BEK > \angle MON = \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$\angle NMO > \angle KBE \quad (2)$$

D'où :

$$\frac{MO}{ON} < \frac{BE}{EK} \quad \text{[d'après (1) et (2)]}$$

Or :

$$MO^2 = MO.OF \text{ et } BE^2 = BE.EA$$

D'où : $\dfrac{MO\ .\ OF}{ON^2} < \dfrac{BE\ .\ EA}{EK^2}$, avec : $\dfrac{BE\ .\ EA}{EK^2} = \dfrac{D_t}{C_d}$

Donc :

$$\frac{MO\ .\ OF}{ON^2} < \frac{D_t}{C_d}$$

Et on a déjà montré que :

$$\frac{MC\ .\ CF}{CQ^2} = \frac{D_t}{C_d} \quad \text{[lemme 1](3)}$$

Joignons MQ et QF

Soit G sur l'ellipse tel que : $\angle AEG = \angle FMQ$

Soit DGL la tangente à l'ellipse en G et GH la ligne ordonnée.

On a :

$$\angle MCO = \angle EHG \text{ et } \angle OMC = \angle HEG \text{ [par hypothèse]}$$

Donc : $\dfrac{MC^2}{CQ^2} = \dfrac{EH^2}{HG^2}$ et : $\dfrac{CQ^2}{MC\ .\ CF} = \dfrac{C_d}{D_t} = \dfrac{GH^2}{EH\ .\ HD}$

Ce qui entraîne :

$$\frac{MC^2}{MC\ .\ CF} = \frac{EH^2}{EH\ .\ HD}$$

D'où :

$$\frac{MC}{CF} = \frac{EH}{HD}$$

et :

$$\frac{GH}{HE} = \frac{QC}{CM}$$

Donc :

$$\frac{QC}{CF} = \frac{HG}{HD} \quad \left[\frac{QC}{CF} = \frac{QC}{CM}.\frac{CM}{CF} \text{ et } \frac{HG}{HD} = \frac{HG}{HE}.\frac{HE}{HD}\right]$$

Mais :

$$\angle GHD = \angle QFC = \frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$\angle HGD = \angle CQF$$

D'où :

$$\angle MQF = \angle EGD$$

Mais :

$\angle MQF = \angle MNF$, parce qu'ils interceptent un même arc.

Donc : $\angle EGL = \pi - \angle EGD = \pi - \angle P = \angle T'$

Donc le diamètre EG et ce que l'on cherche car ses angles ordonnés sont égaux à $\angle$EGL.

Remarques d'Ibn Sartāq :

(1) Cette démonstration contient la preuve des deux lemmes précédents.

(2) *MI* n'est pas dans la proposition originelle. Elle n'a été introduite ici que pour montrer le lemme indiqué.

(3) Dans la proposition originelle : $\angle CMQ = \angle HEG$ *et* $\angle HEG \neq \angle EBK$, dans le deuxième cas.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. **[M : IV. 3. 1(26)] = [C : II ; 51, 53].**

2. **L'énoncé de la proposition :**

- L'énoncé de [M : IV. 3. 1(26)] correspond à celui de [C : II ; 51], avec la même généralité mais avec une formulation différente[317].

3. **La démonstration :**

- Comme Apollonius, al-Mu'taman traite d'abord le cas de la parabole puis celui de l'hyperbole puis celui de l'ellipse (ce dernier cas étant traité par Apollonius d'une manière séparée dans [C : II ; 53].
- Apollonius procède par analyse et synthèse pour les cas de la parabole et de l'hyperbole. Al-Mu'taman ne conserve, à chaque fois, que la synthèse.
- Pour le cas de l'hyperbole, Ibn Sartāq aboutit à la relation $\frac{ZL.LT}{LK^2} = \frac{D_t}{C_d}$ plus rapidement qu'Apollonius en utilisant la proposition [M : III.3.1(3)] du chapitre précédent.
- Pour le cas de l'ellipse, la preuve est semblable à celle des *Coniques* avec une présentation différente dans la mesure où deux parties de cette démonstration sont données sous forme de lemmes.

4. **Les références :**

- [E : III ; 33], [C : I ; 21, 37], [C : II ; 6, 49, 50], [C : III ; 33], [M : III.3.1(3)].

[317]- [C : II ; 51] : "*Mener, à une section de cône donnée, une tangente qui comprenne, avec le diamètre mené par le point de contact, un angle égal à un angle aigu donné*".

Proposition IV. 3. 1(27) :

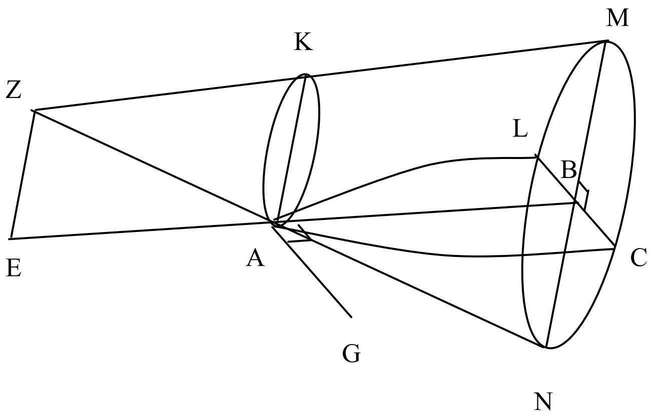
(1) Construire, dans un plan donné, une section conique de diamètre transverse, de côté droit et d'angle ordonné donnés.

(2) Construire, dans un angle donné, une hyperbole qui passe par un point donné intérieur à l'angle donné et ayant pour asymptotes les côtés de l'angle donné.

[1.a] Construction d'une parabole a angles ordonnés droits [Fig. 1]

Soit AB le diamètre transverse et AG le côté droit $[\angle BAG = \frac{\pi}{2}]$

Prolongeons BA au point E tel que $AE > \frac{1}{4}\ AG$ (1)



[Fig. 1]

Soit EZ tel que : $\frac{AG}{EZ} = \frac{EZ}{EA}$

Donc : $\frac{AG}{EA} = \frac{EZ^2}{EA^2}$

D'après (1), on a : $EZ^2 < 4\ EA^2$

Donc : $EZ < 2\ EA$.

Il est donc possible de construire un triangle isocèle de base EZ et de côtés égaux à EA [E : I; 12]

Soit alors (AEZ) ce triangle perpendiculaire au plan considéré (ABG)

On prolonge ZA jusqu'à N. Soit K tel que ZK //AE avec AK // EZ.

Donc : $AE = KZ$

On construit le cercle (AK) de diamètre AK tel que $(AK) \perp P(KE)$.

Donc la rotation de ZA sur le cercle (AK) [Z restant fixe] engendre un droit. L'axe du cône est donc perpendiculaire à (AK).

On prolonge le cône (AZK).

Soit (MN) le disque parallèle à (AK) et passant par B. [C : I; 4]

On a :

$$(MN) \perp T(MZN)$$

Soit : $MN = T(MZN) \cap C(MN)$. MN est le diamètre de $C(MN)$.

Soit *(LAC)* = *(AZK)* ∩ *P(ABG)*;

Et : $LC = P(ABG) \cap C(MN)$. Comme : $P(ABG) \perp T(MZN)$ *et* $C(MN) \perp T(MZN)$,

Alors : $LC \perp T(MZN)$.

D'où : $LC \perp MN$ et $LC \perp AB$ [E : XI; 3]

Et : $AB = T(AZK) \cap (LAC)$

Donc : *AB* est l'axe de *(LAC)*

Et on a déjà vu que : $LB = BC$

La section *(LAC)* est donc une parabole.

Et puisque $\dfrac{AG}{AZ} = \dfrac{AK^2}{AZ^2} = \dfrac{AK^2}{AZ\ .\ ZK}$ [car $AZ = ZK = EA$ et $EZ = AK$]

AG est le diamètre droit de la parabole *(LAC)* , et *AB* son diamètre transverse [C; I:11].

[1.b] Construction d'une parabole a angles ordonnés aigus [Fig. 2]

Soit $DH = \dfrac{AG}{2}$ (1)

Soit $DT \perp DH$, $TF \,//\, DH$ et $HF \perp TF$

Soit *Q* tel que $FQ = QT$

De *Q*, menons *QO* tel que $QO \perp TF$ et $QF.QO = FH^2$

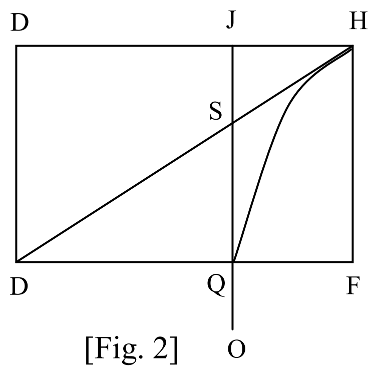
Soit *(P)* la parabole de côté droit *OQ* et d'axe *QF* [C : I; 52].

Alors *(P)* passera par *H*.

Sinon, on aurait : $QF.QO < FH^2$ ou $QF.QO > FH^2$

Or nous avons posé $QF\ .\ QO = FH^2$.

Ce qui est contraire à l'hypothèse.



[Fig. 2]

Soit : $S = OQ \cap HT$ et $J = OQ \cap DH$.

$OQ \perp FT$ et *FT* est l'axe de *(P)*. Donc *QSJ* est une tangente à *(P)*.

Puisque $TQ = QF$ et *FH* est une ligne ordonnée, *HT* est tangente à *(P)* [C : I; 49]

Or $\angle HJS = \angle HTD = \dfrac{\pi}{2}$ et $\angle HTD$ est commun.

Donc *T(HJS)* et *T(DTH)* sont semblables. D'où :

$$\frac{SH}{HJ} = \frac{DH}{HT} = \frac{2\,DH}{2\,HT} = \frac{AG}{2\,HT} \text{ d'après (1)}$$

AG est donc le côté droit de (*P*).

Les angles ordonnés du diamètre *DSH* qui passe par *H* sont égaux à $\angle DHT$. Et si on pose *DH* à la place *AB*, *AB* sera le côté transverse.

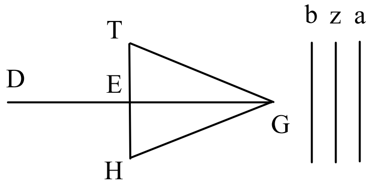
Lemme 1

Soit *a*, *b*, *GD* trois grandeurs données. Construisons un cercle dont le diamètre est coupé perpendiculairement par la corde *GD*, selon un rapport égal à $\frac{a}{b}$.

Preuve [Fig. 3] :

Soit *E* tel que $GE = ED$

Soit *z* une grandeur telle que : $\frac{a}{z} = \frac{z}{b}$ (1)



[Fig. 3]

Prolongeons une perpendiculaire HET

Posons : $\frac{GE}{ET} = \frac{z}{b}$ et $\frac{GE}{EH} = \frac{z}{a}$ (2)

Donc : $\frac{HE}{GE} = \frac{a}{z}$

D'où : $\frac{a}{z} = \frac{GE}{ET}$ [d'après (1)]

Et ainsi : $\frac{HE}{GE} = \frac{GE}{ET}$ (3)

Joignons *GH* et *GT*.

T(HEG) et *T(GET)* sont donc semblables et $\angle HGT = \angle H + \angle T$

Donc : $\angle HGT = \frac{\pi}{2}$ (4)

Le cercle de diamètre *HT* passe donc par *G, D* et c'est le cercle cherché.

[Car :

$$\frac{HE}{ET} = \frac{a}{b}, \text{ d'après (2) et (3)]}$$

Lemme 2

Construire un cercle dont le diamètre est coupé perpendiculairement par la corde GD selon un rapport p^lus petit que $\frac{a}{b}$.

Preuve [Fig. 4] :

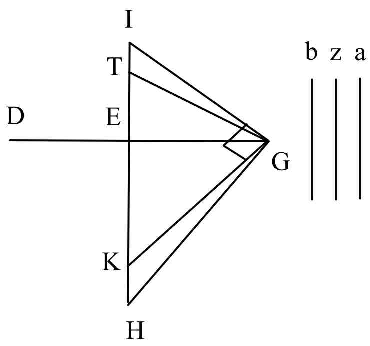
Soit I sur le prolongement de ET et $\angle TGI < \angle EGH$

On a : $EI > ET$.

[Soit K sur EH tel que] : $\angle HGK = \angle TGI$.

Donc : $\angle IGK = \frac{\pi}{2}$ [$\angle IGK = \angle TGI + \angle TGK = \angle HGK + \angle TGK = \frac{\pi}{2}$, d'après (4)].

Donc : $\frac{KE}{EI} < \frac{a}{b}$ [$KE < HE$ et $EI > ET$].



[Fig. 4]

Lemme 3

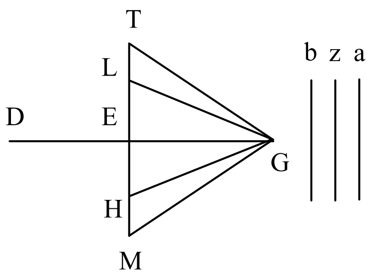
Construire un cercle dont le diamètre est coupé perpendiculairement par la corde GD selon un rapport supérieur à $\frac{a}{b}$.

Preuve [Fig. 5] :

Posons $\angle TGL = \angle HGM$.

Donc : $(\angle TGE - \angle TGL) + (\angle EGH + \angle HGM) = \angle LGM = \frac{\pi}{2}$.

Donc le cercle construit sur ML passe par G et D et $\frac{ME}{EL} > \frac{a}{b}$.



[Fig. 5]

Remarques d'Ibn Sartāq :

* $a = b \Rightarrow z = a = b$ et $GE = EH = ET$ [d'après (1) et (2)].
* $a < b < z \Rightarrow GE < EH < ET.$
* $a > b > z \Rightarrow GE > EH > ET.$

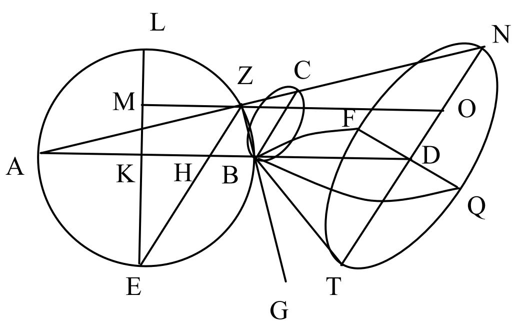
[2.a] Construction d'une hyperbole à angles ordonnés droits [Fig. 6]

Soit *(ABZL)* le cercle de diamètre *EKL* perpendiculaire à *AB* tel que :

$$\frac{EK}{KL} \leq \frac{AB}{BG} = \frac{D_t}{C_d} \text{ [d'après le lemme 1 et 2]}$$

Si $\frac{EK}{KL} = \frac{AB}{BG}$, . Si $\frac{EK}{KL} < \frac{AB}{BG}$, on utilisera KL
soit M sur EL tel que

$$\frac{EK}{KM} = \frac{AB}{BG} \text{ avec } KM < KL \text{ car : } \frac{1}{KM} > \frac{1}{KL}$$



[Fig. 6]

Soit *MZ // AB* alors *MZ*. On joint *ZB, ZA* et *ZE*.
On prolonge *AZ* du côté de *Z*. Soit *C* sur ce prolongement tel que *BC // ZE* et *H* = *ZE* ∩ *AB*
On suppose *P(AEB)* ⊥ *P(AB, BG)*
Comme *arc(AE)* = *arc(EB)*, on a :

$$\angle AZE = \angle ACB = \angle EZB = \angle ZBC \;\; [EZ \,//\, BC]$$

Donc : $ZC = ZB$

Soit *C(BC),* le cercle de diamètre *CB,* perpendiculaire au plan de *T(CZB).*
Soit *(CZB)* le cône de sommet *Z* et de base *C(BC)* engendré par la rotation de *ZC* autour de *C(BC).*
On prolonge *ZB, ZC, MZ* et *AB.*
Soit *C(NT) // C(BC),* un autre cercle du cône, [C : I; 4] avec :

$$NT = C(NT) \cap P(ZNT)$$

On a :

$$NT \,//\, BC$$

Donc :

$$NT \,//\, HZ$$

Soit O et D tels que : $O = NT \cap MZ$ et $D = NT \cap AB$.

Soit section *(FBQ)* = *P(ABG)* $\cap$ cône *(ZNT)*

Soit $FQ = (FBQ) \cap C(NT)$
Soit $D = T(ZNT) \cap C(NT) \cap$ section*(FBQ)*

Donc $FDQ \perp (ZNT)$, $FDQ \perp NT$ et $FDQ \perp BD$.

On a aussi : cône$(ZTN) \cap P(FQB) = BD$, $P(FBQ) \perp P(ZTN)$ et $BD \cap ZN = A$

Donc *(FBQ)* est une hyperbole de sommet B, de lignes ordonnées perpendiculaires à *BD*, car elles sont parallèles à *FDQ* [C I; 12].
On a :

$$\frac{AB}{BG} = \frac{EK}{KM}\text{, par hypothèse.}$$

Et : $$\frac{EK}{KM} = \frac{EH}{ZH} \text{ [similitude de } T(EKH) \text{ et } T(EMZ)]$$

Or :

$$\frac{EH}{ZH} = \frac{EH\;.\,HZ}{ZH^2}$$

Donc : $$\frac{AB}{BG} = \frac{EH\;.\,HZ}{ZH^2}$$

Et : $EH\,.\,HZ = AH\,.\,HB$ [puissance d'un point par rapport à un cercle]

D'où : $$\frac{AB}{BG} = \frac{AH\;.\,HB}{ZH^2} = \frac{AH}{ZH}\left(\frac{HB}{ZH}\right)$$

Or : $$\frac{AH}{ZH} = \frac{AD}{DN} = \frac{ZI}{IN} \text{ [similitude de } T(AHZ), T(ADN) \text{ et } T(ZIN)]$$

Et : $$\frac{HB}{ZH} = \frac{BD}{DT} = \frac{ZI}{IT} \text{ [similitude de } T(HBZ), T(DTB) \text{ et } T(ITZ)]$$

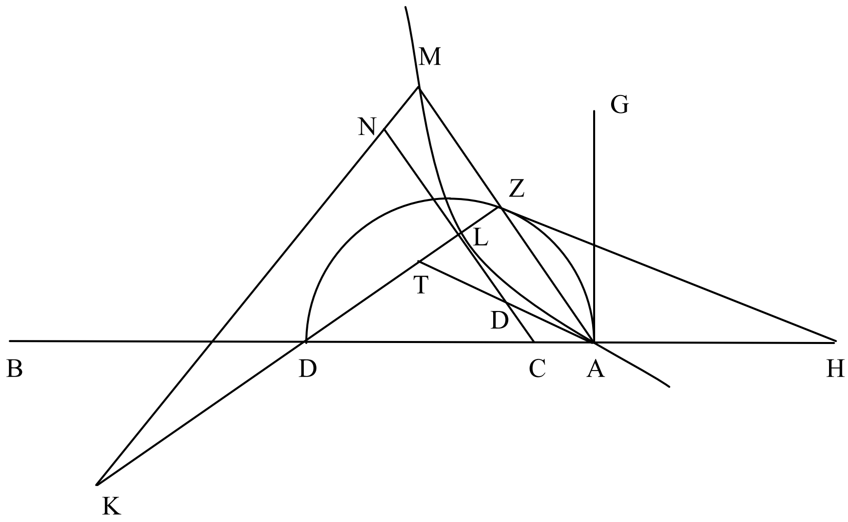
Donc : $\frac{AB}{BG} = \frac{ZI}{IN}(\frac{ZI}{IT}) = \frac{ZI^2}{IN.IT}$

Or *ZI* est la parallèle issue du sommet du cône à l'axe *ABD* de la section *(FBQ)*.
Donc *BG* est le côté droit au côté transverse *AB*.
(FBQ) est donc l'hyperbole cherchée.

[2.b] Construction d'une hyperbole à angles ordonnés aigus [Fig. 7]

Soit α l'angle aigu donné. Soit *P(BAG)* le plan formé par le diamètre transverse *AB* et le côté droit *AG*.
Soit *(AZD)* le demi-cercle de diamètre *AD*.
Soit *AT* tel que : $\angle DAT = \alpha$. *AT* est donc à l'intérieur du cercle.
Soit *ZH* un segment qui coupe *(AZD)* en *Z* et *BA* en *H* et qui vérifie :

$$\frac{DH.AH}{HZ^2} = \frac{AB}{AG} \qquad (1)$$



[Fig. 7]

Rappels :

a) Puissance d'un point par rapport à un cercle, que le point soit intérieur ou extérieur au cercle.

b) $\forall a$ et $\forall b$, on a : $\frac{a^2}{ab} = \frac{ab}{b^2}$.

c) $\forall a$, $\forall b$ et $\forall c$, on a : $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$

On a : $\angle DHZ = \angle DAT$ [d'après (1)]. Donc : *AT // HZ*.

On joint DZ. Soit T = $DZ \cap AT$.

Soit K, sur le prolongement de ZD, tel que $DK = DZ$.
Soit L, sur ZT, tel que :

$$\frac{DZ}{DL} = \frac{DL}{DT}$$

Soit M, sur le prolongement de AZ, tel que : $LZ.ZM = AZ^2$ [C I; 12].
On joint KM.
Soit $NLOC \perp KZ$ en L, avec :

$$NLOC \cap KM = N,\ NLOC \cap TA = I \text{ et } NLOC \cap DA = C$$

[Donc $NLOC \,//\, AM$ car $\angle AZD = \frac{\pi}{2}$]

On construit, dans $P(ABG)$, l'hyperbole (LA) de diamètre transverse KL, de côté droit LN et d'angles ordonnés droits.

Elle passe par A car : $AZ^2 = LZ.ZM$

AT est tangente à (LA) en A car : $ZD.DT = DL^2$
Et AB est un diamètre parce que D est le centre de (LA).
Et les angles ordonnés sont égaux à $\angle DAT$.
On a :

$$\frac{GA}{AB} = \frac{ZH^2}{DH.HA} \quad \text{[d'après (1)]}$$

et :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AG}{2AT}\left(\frac{2AT}{2AD}\right) = \frac{AB}{2AT}\left(\frac{AT}{AD}\right) \text{ [} AB = 2AD \text{ par hypothèse]}$$

Et : $$\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{ZH}}{\mathrm{HD}} \text{ [similitude de } T(ATD) \text{ et } T(HZD)\text{]}$$

Donc : $$\frac{AG}{AB} = \frac{GA}{2AT}\left(\frac{ZH}{HD}\right) \text{ (2)}$$

Et : $$\frac{ZH^2}{DH\,.\,HA} = \frac{ZH}{HD}\left(\frac{ZH}{HA}\right).$$

Donc : $$\frac{GA}{2AT}\left(\frac{ZH}{HD}\right) = \frac{ZH}{HD}\left(\frac{ZH}{HA}\right) \quad \text{[d'après (1)]}$$

D'où :

$$\frac{GA}{2AT} = \frac{ZH}{HA} = \frac{OA}{AC} \text{ [similitude de } T(OAC) \text{ et } T(ZAH)\text{]}$$

Donc *AG* est le côté droit du diamètre *AB*

[3.a] Construction d'une ellipse à angles ordonnés droits

Construire une ellipse de diamètre transverse *AB* et de côté droit *AG*, avec :

$AB \perp AG$

1^e^ cas : *AB* > *AG* [Fig. 8]

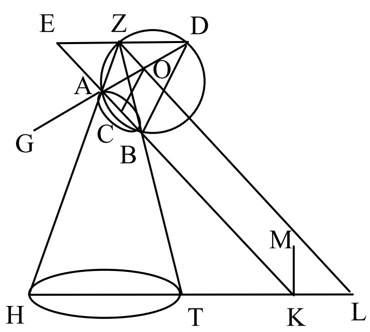
Soit *C(ADB)* une portion de cercle avec : *C(ADB)* $\perp$ *P(BAG)*. Soit *D* milieu de *arc(AB)*. On joint *AD, BD.*

Soit :

$CO \,//\, BD$, avec : $CO \cap AD = O$

Et :

$OZ \,//\, AB$, avec : $OZ \cap \text{arc}(AD) = Z$



[Fig. 8]

On joint *DZ* et on le prolonge jusqu'à couper *BA* [en *E*].
Soit *H* quelconque sur *AZ*, $HT \,//\, DE$ et $HT \cap ZB = T$.
Dans *T(ZAD)*, on a : $\angle AZE = \angle ZAD + \angle ADZ$
On a aussi :

$\angle ZAD = \angle ZBD$ [interception du même *arc(DZ)*]

et :

$\angle ADZ = \angle ZBA$ [interception du même *arc(ZA)*].

Donc : $\angle DBA = \angle AZE.$
Mais : $\angle AZE = \angle ZHT$ [alternes internes]
Et : $\angle DBA = \angle BZD$ car $arc(AD) = arc(BD)$
Et : $\angle BZD = \angle ZTH$ [alternes internes]
[Donc : $\angle ZTH = \angle ZHT$]
D'où : $ZT = ZH.$
Soit *C(HT)* un cercle de diamètre *HT,* perpendiculaire à *P(ZHT).*

Soit le cône droit de sommet *Z* et de base *C(HT)* [$\angle BZA = \dfrac{\pi}{2}$, par hypothèse].

On a : $(ZHT) \perp (BAG)$ *et* $(ZHT) \perp (HT)$.
Donc :

$(BAG) \cap (HT) \;\perp\; (ZHT)$

[Soit $KM = (BAG) \cap (HT)$]

Alors :

$$C(ZHT) \cap (BAG) \perp (HT) \cap T(ZHT)$$

Donc : $C(ZHT)$ engendre l'ellipse d'axe AB.

Mais :

$$\frac{BA}{AG} = \frac{BA}{AQ} = \frac{DA}{AO} = \frac{DE}{EZ}$$

et :

$$\frac{DE.EZ}{EZ^2} = \frac{KE.EA}{EZ^2} = \frac{KE}{EZ}\left(\frac{AE}{EZ}\right)$$

et :

$$\frac{BE}{EZ} = \frac{BK}{KT} = \frac{ZL}{LT}$$

et :

$$\frac{AE}{EZ} = \frac{AK}{KH} = \frac{ZL}{LH}$$

D'où :

$$\frac{BA}{AG} = \frac{ZL}{LT}\left(\frac{ZL}{LH}\right) = \frac{ZL^2}{TL.LH}$$

Donc AG est le côté droit de l'ellipse (AB) [C : I; 13]

2ᵉ Cas : $AB < AG$ [Fig. 9]

Soit D milieu de AB, $EZ \,//\, AG$ *et* EZ passant par D et tel que : $\frac{BA}{ZE} = \frac{ZE}{AG}$ (1)

Soit $DE = DZ$ et $ZH \,//\, AB$.

On a :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{EZ}{ZB} \quad \text{[d'après (1)]}$$

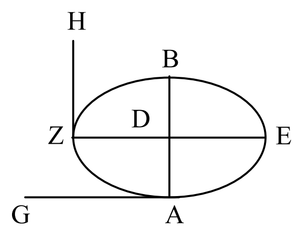
Donc :

$$EZ > ZH$$

On construit l'ellipse d'axe ZE et de côté droit ZH. Elle passera nécessairement par A et B.

Preuve :

Puisque : $\frac{AG}{ZE} = \frac{ZE}{AB}$ [d'après (1)]



[Fig. 9]

On a :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{ZE^2}{AB^2} \quad \left[\frac{AG}{AB} = \frac{AG}{ZE}\left(\frac{ZE}{AB}\right)\right]$$

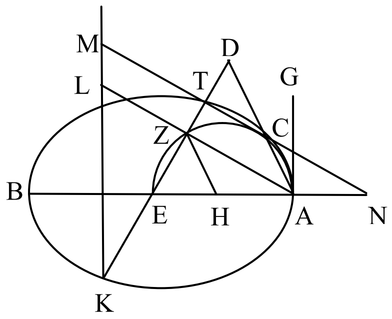
Mais :

$$\frac{ZD^2}{DA^2} = \frac{ZD.DE}{DA^2} = \frac{EZ}{ZH} = \frac{D_t}{C_d} \text{ car } ZD = DE$$

Donc l'ellipse passe par A et B.

[3.b] Construction d'une ellipse à angles ordonnés aigus [Fig. 10]
Supposons que l'angle ordonné soit égal à $\angle BAD$. Soit E milieu de AB.
Soit $C(AZE)$ le demi-cercle de diamètre AE.
Soit H [sur AE] tel que :

$$ZH \,//\, AD \text{ et } \frac{ZH^2}{AH.HE} = \frac{AG}{AB} \quad (1)$$



[Fig. 10]

On joint AE et EZ.

Soit : $D = EZ \cap AD$ et T tel que : $\frac{ZE}{ET} = \frac{ET}{ED}$.

Donc T est entre Z et D.
On prolonge TE jusqu'à K de sorte que : $EK = TE$.
On prolonge AZ jusqu'à L de sorte que : $TZ.ZL = AZ^2$.
On joint K, L, M.
De T, on mène MCN qui vérifie :

$MCN \perp TZ$, [E : III; 31]

Avec : $MCN \cap KL = M$; $MCN \cap AD = C$; $MCN \cap AB = N$.

Donc : $MN \,//\, ZL$ car $\angle Z = \frac{\pi}{2}$

Et KT et TM sont perpendiculaires.

Soit *(ATBK)* l'ellipse à angles ordonnés droits, de diamètre transverse TK et de côté droit TM [C : I; 56, 57]

Comme : $TE = EK$ et TK est un axe de l'ellipse, elle passe par K et son centre est E.

Comme : $LZ.ZT = ZA^2$, l'ellipse passe par A.

Comme AE passe par le centre de l'ellipse et $AE = EB$, alors AE est un diamètre [C: I; 51, corollaire], et l'ellipse passe par B.

Mais : $DE.ZE = ET^2$. Donc AD est tangente à l'ellipse en A et les angles ordonnés sont égaux à $\angle DAB$.

Or : $\dfrac{AG}{AB} = \dfrac{AG}{2AD}\left(\dfrac{2AD}{2AE}\right)$ car $2AE = AB$

D'où :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AG}{2AD}\left(\frac{AD}{AE}\right)$$

Et :

$$\frac{AG}{2AD}\left(\frac{AD}{AE}\right) = \frac{AG}{2AD}\left(\frac{ZH}{EH}\right)$$ [similitude de triangles *T(EZH)* et *T(EDA)*]

D'autre part :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{ZH^2}{AH\ .\ HE}$$ [d'après (1)]

Donc :

$$\frac{ZH^2}{AH\ .\ HE} = \frac{AG}{2AD}\left(\frac{ZH}{EH}\right)$$

Or :

$$\frac{ZH^2}{AH\ .\ HE} = \frac{ZH}{HE}\left(\frac{ZH}{AH}\right)$$

D'où :

$$\frac{AG}{2AD}\left(\frac{ZH}{EH}\right) = \frac{ZH}{HE}\left(\frac{ZH}{AH}\right)$$

D'où, après simplification : $\dfrac{AG}{2AD} = \dfrac{ZH}{HA}$

Mais : $\dfrac{ZH}{AH} = \dfrac{CA}{AN}$ [similitude de *T(ZEH)* et *T(CAN)*]

D'où :

$$\frac{AG}{2AD} = \frac{CA}{AN}$$

Donc AG est le côté droit au diamètre transverse AB.

[4] <Construction de deux sections hyperboliques conjuguées>

Soit (H), les deux branches de l'hyperbole d'angle ordonné aigu, avec $AB = D_t$ son diamètre transverse et $AG = C_d$ son côté droit [C : I; 59].

Soit h une grandeur qui vérifie :

$$\frac{AB}{h} = \frac{h}{AG}$$

h sera le conjugué du diamètre transverse AB.

Si g est une grandeur qui vérifie :

$$\frac{h}{AB} = \frac{AB}{g},$$

On considère l'hyperbole à deux branche (H') de diamètre transverse $D'_t = h$ et de côté droit $C'_d = g$.

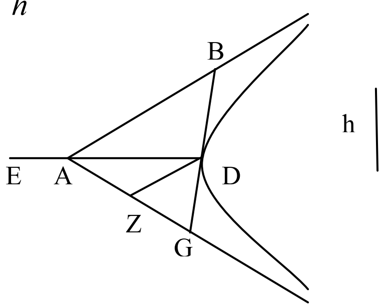
Alors (H') est conjuguée de (H).

[5] <Construction d'une hyperbole passant par un point donné et d'asymptotes données>

Preuve [Fig. 11]:

Soit AB, AG, les deux asymptotes et D un point situé entre AB et AG.
Soit EAD la droite joignant A à D.
Soit DZ //AB, avec Z sur AG.
Soit : $ZG = ZA$ (1)
On joint GD qui coupe AB en B.

Soit h vérifiant : $\frac{ED}{GB} = \frac{GB}{h}$ (2)



[Fig. 11]

Soit (H) l'hyperbole de diamètre transverse ED, de côté droit h et d'angle ordonné $\angle BDA$ [C : I; 55].

On a :

$$\frac{GD}{DB} = \frac{GZ}{ZA} \text{ [similitude de T}(DGZ)\text{ et T}(BGA)]$$

Donc D est milieu de AB [d'après (1)].
D'après (2), (H) est l'hyperbole cherchée.

REMARQUES ET COMMENTAIRES

1. [M : IV. 3. 1(27)] = [C : I ; 52-60] et [C : II ; 4].

2. L'énoncé de la proposition :

- Partie [1.a] (construire une parabole d'angle ordonné = $\frac{\pi}{2}$) = [C : I ; 52].
- Partie [1.b] (construire une parabole d'angle ordonné < $\frac{\pi}{2}$) = [C : I ; 53];
- Partie [2.a] (construire une hyperbole d'angle ordonné = $\frac{\pi}{2}$) = [C : I ; 54];
- Partie [2.b] (construire une hyperbole d'angle ordonné = $\frac{\pi}{2}$) = [C : I ; 55];
- Partie [3.a] : (construire une ellipse d'angle ordonné < $\frac{\pi}{2}$) :
    * 3.a, 1e cas (AB > AG) = [C : I ; 56];
    * 3.a, 2e cas (AB < AG) = [C : I ; 57];
- Partie [3.b] (construire une ellipse d'angle ordonné < $\frac{\pi}{2}$) = [C : I ; 58];
- Partie [4] (construire des hyperboles conjuguées) = [C : I ; 59, 60]
- Partie [5] (construire une hyperbole passant par un point et d'asymptotes données) = [C : II ; 4].
- La rédaction d'al-Mu'taman contient les énoncés de trois lemmes qui ne sont pas formulés dans les *Coniques*.

3. La démonstration :

- Les différentes parties de la preuve sont semblables à celles des propositions correspondantes des *Coniques* avec, la plupart du temps, un même lettrage.
- Dans [2.b] et [3.b] , al-Mu'taman, comme Apollonius, admet le lemme qui valide l'existence du point H vérifiant, respectivement, les conditions :

$$\frac{DH.AH}{HZ^2}=\frac{AB}{AG} \quad \text{ou} \quad \frac{HZ^2}{AH.HE}=\frac{AG}{AB}$$

4. Les références :

- [E : I; 12], [E : XI; 3], [C : I ; 4, 11, 12, 13, 38, 49, 52, 55, 56, 57], [C : III; 31].

C- ANNEXES

ANNEXE I

Comparaison des définitions de la section IV.3.1 du *Kitāb al-Istikmāl* avec d'autres

Tableau 1

Comparaison des définitions d'Al-Mu'taman avec celles de Thābit, Sérénus et Apollonius

Al Mu'taman	**Thābit**	**Sérénus**	**Apollonius**
1-Définition du cylindre	1-Définition du cylindre	2- Définition du cylindre,	
2, 3, 4- Définitions des bases, du côté et de l'axe du cylindre	2- Définition de l'axe, du côté et des bases du cylindre	des bases, du côté du cylindre	
	3- Définition de la surface cylindrique	1- Définition de la surface cylindrique	
	4- Définition de la hauteur du cylindre		
5- Définitions du cylindre à angle droit et à angle non-droit	5- Définition du cylindre à angle droit et à angle non-droit	3- Définition du cylindre droit et oblique	
6, 7, 8- Définitions de la surface conique, du sommet et de l'axe.			I- Définitions de la surface conique, du sommet et de l'axe
9, 10, 11, 12- Définitions du cône, de son sommet, de son axe et de sa base		*Pour définir les éléments du cylindre Sérénus renvoie aux définitions données par Apollonius*	II-Définitions du cône, de son sommet, de son axe et de sa base
13- Définition du cône à angle droit et angle non droit			III-Définition du cône droit et oblique
14, 15, 16- Définition du diamètre d'une ligne courbe, de son sommet et des lignes ordonnées au diamètre			IV- Définition du diamètre d'une ligne courbe, de son sommet et des lignes ordonnées au diamètre
17, 18, 19, 20- Définition du diamètre transverse de deux lignes courbes, des sommets, du diamètre de ces deux lignes et des lignes ordonnées de ce diamètre			V- Définition du diamètre transverse de deux lignes courbes, des sommets, du diamètre de ces deux lignes et des lignes ordonnées à ce diamètre.
21- Définition des diamètres conjugués			VI Définition des diamètres conjugués
22-Défintion de l'axe d'une ligne courbe			VII-Définition de l'axe d'une ligne courbe.
23-Définition des axes conjugués			VIII-Définition des axes des conjugués

Tableau 2
Comparaison des définitions du cylindre et de ses éléments

Al-Mu'taman	**Thābit**	**Sérénus**
1- إذا كان في سطحين متوازيين دائرتان متساويتان ثابتتان وأخرج فيهما قطران متوازيان ووُصل بين طرفي القطرين في جهة واحدة بخط مستقيم ودار القطران على مركزيهما في سطحيهما على توازيهما مع الخط المستقيم الواصل بين طرفيهما على محيطهما إلى أن يرجعا إلى النقطة التي أبتدءا منها بالحركة ، فإني أسمي المجسم الذي تحيط به الدائرتان والبسيط الذي رسمه الخط المدار على محيطهما: **اسطوانة**.	1- اذا كانت دائرتان متساويتان في سطحين متوازيين ووصل فيما بين مركزيهما خط مستقيم وفيما بين الخطين المحيطين بهما خط آخر مستقيم- فكان هذان الخطان المستقيمان في سطح واحد- و أثبتت الدائرتان و الخط الذي فيما بين المركزين و أدير الخط الثاني على الخطين المحيطين بالدائرتين من موضع منهما حتى يعود إلى ذلك الموضع الذي منه بدأ ، وكان في جميع دورانه هو الخط الذي فيما بين المركزين جميعا في سطح واحد ، فان الشكل المجسم الذي يحوزه هذا الخط والدائرتان المتوازيتان, يسمى أسطوانة	2- D'autre part, le cylindre est la figure comprise sous les cercles parallèles et sous la surface cylindrique découpée dans leur intervalle
2- وأسمي الدائرتين اللتين دار عليهما **قاعدتي** الأسطوانة. 3- وأسمي الخط المدار **ضلع** الأسطوانة. 4- وأسمي الخط الواصل بين مركزي الدائرتين **سهم** الأسطوانة.	2- والخط الذي وصل فيما بين مركزي الدائرتين يسمى سهم الأسطوانة. 3- والخط الذي وصل فيما بين الخطين المحيطين بالدائرتين ، وأدير حيثما كان ، فهو يسمى ضلع الأسطوانة. 4- والدائرتان المتوازيتان اللتان ذكرناهما تسميان قاعدتي الأسطوانة.	1-Les bases du cylindre sont ces cercles. L'axe est la droite menée par leurs centres. Et le côté du cylindre est une ligne qui, étant droite et située dans la surface du cylindre, touche chacune des bases ; c'est aussi la droite ayant circulé que nous avons dit avoir décrit la surface cylindrique.
	5- والبسيط الذي فيه كان ضلع الأسطوانة يسمى بسيط الأسطوانة.	1-Si, deux cercles égaux et parallèles restant immobiles, des diamètres constamment parallèles, qui tournent dans le plan des cercles autour du centre resté fixe, et font circuler avec eux la droite reliant leurs extrémités situées d'un même côté, reprennent de nouveau la même position, la surface décrite par la droite qu'ils ont fait circuler est appelée une surface cylindrique, laquelle peut d'ailleurs être augmentée à l'infini si la droite qui la décrit est elle-même prolongée à l'infini.
	6- ولنسم كل ضلعين من أضلاع الأسطوانة-يكونان فيما بين أطراف قطرين من أقطار قاعدتيها- ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة.	
	7- ولنسم العمود الواقع من مركز احدى قاعدتي الأسطوانة على سطح القاعدة الأخرى منهما عمود الأسطوانة.	
5- وأسمي الأسطوانة **قائمة** إذا كان سهمها قائمًا على قاعدتها على زوايا قائمة. وأسميها مائلة إذا لم يكن السهم قائما عليها على زوايا قائمة.	8- فإذا كان سهم الأسطوانة هو عمودها، فان تلك الأسطوانة تسمى الأسطوانة القائمة . وإذا لم يكن سهمها عمودًا لها، سميت الأسطوانة المائلة.	3- Parmi les cylindres, les droits sont ceux qui ont l'axe à angles droits sur les bases. Et les obliques ceux qui n'ont pas l'axe à angles droits sur les bases

ANNEXE II

Enoncés des propositions de la Section IV.3.2
Kitāb al-Istikmāl Enoncés des propositions de IV.3.2

Proposition IV. 3. 2(1)
Si on considère (ta^{c}allamat) un point sur l'axe d'une section <conique> et que sa distance à cette section est égale à la moitié du côté droit et que l'on mène, à partir de lui, des lignes vers la section, la plus petite d'entre elles est la ligne qui est menées vers le sommet de la section et celles qui sont proches d'elles sont plus petites que celles qui en sont éloignées.

Proposition IV. 3. 2(2)
Si une ligne est tangente à une section <conique> autre que le cercle et que l'on mène du lieu de tangence sur la ligne tangente une perpendiculaire qui aboutit à l'axe, ce sera la ligne la plus courte qui est menée du point où la perpendiculaire a rencontré l'axe vers la section. Et celle qui est plus proche d'elle est plus courte que celle qui en est plus loin.
Et si on mène du point de tangence une perpendiculaire à l'axe, alors, dans la parabole, elle séparera de l'axe, entre la ligne la plus courte et le pied de la perpendiculaire, une ligne égale à la moitié du côté droit. Dans l'hyperbole et l'ellipse, ce sera une ligne dont le rapport de ce qui est entre le centre et le pied de la perpendiculaire est comme le transverse au droit.

Proposition IV. 3. 2(3)
Si on considère un point sur la ligne la plus courte, que nous avons évoquée pour chacune des trois sections, et que l'on mène des lignes vers la section, la plus courte d'entre elles est la ligne qui est entre ce point et l'extrémité de la ligne qui est au-delà de la section (mimmā yalī al-qaṭ^{c}). Et celle qui est plus proche d'elle est plus petite que celle qui en est plus loin.

Proposition IV. 3. 2(4)
Si on considère un point, extérieur à une section, sur la ligne qui joint la ligne la plus courte lorsqu'elle est prolongée d'une manière rectiligne, la ligne la plus petite qui est située entre ce point et la section, dans l'ensemble des deux régions, est la ligne joignant d'une manière rectiligne la ligne la plus courte. Et, parmi les lignes restantes, celle qui est plus proche est plus petite que celle plus éloignée.

Proposition IV. 3. 2(5)
Etant <donné> une section connue et un point connu, qui n'est pas sur la section, comment trouver la plus courte ligne qui soit menée à partir de lui vers la section.

Proposition IV. 3. 2(6) (Ibn Sartāq)
Toute ligne tangente à une section non parabolique et qui aboutit à un certain diamètre qui a un transverse et que l'on mène du <point> de tangence une ligne ordonnée vers ce diamètre, le rapport de ce qui est situé de ce diamètre entre les aboutissements à lui de

la ligne ordonnée et de la tangente à ce qui est situé de lui entre l'aboutissement de la ligne ordonnée et le centre est comme le rapport du carré de la tangente, du <point> de tangence à ce diamètre, au carré du second diamètre conjugué avec le diamètre mené à partie du <point> de tangence.

Proposition IV. 3. 2(7) (Ibn Sartāq)

La somme des deux carrés des deux axes de l'ellipse est comme la somme des deux carrés de deux quelconques parmi les diamètres conjugués. Et la différence des deux carrés des deux axes de l'hyperbole, lorsqu'ils ne sont pas égaux, est comme la différence des deux carrés de deux quelconques parmi les autres conjugués.

Proposition IV. 3. 2(8)

Etant <donné> une hyperbole dont l'axe conjugué est plus grand que son axe droit, le diamètre conjugué de tout couple de diamètres restants est plus grand que le rapport du diamètre conjugué parmi les diamètres conjugués restants au diamètre droit; et le rapport du diamètre conjugué qui est proche de l'axe le plus long au diamètre droit qui lui est conjugué est plus grand que le rapport du diamètre conjugué éloigné du diamètre droit qui lui est conjugué. Et si l'axe conjugué de l'hyperbole est plus petit que son axe droit, le diamètre conjugué de tout couple de diamètres parmi les diamètres conjugués restants est plus petit que le diamètre droit et le rapport de l'axe le plus court à l'axe le plus long est inférieur au rapport de tout diamètre conjugué, parmi les diamètres restants, au diamètre droit qui lui est conjugué. Et le rapport de ce qui, parmi les diamètres, est plus proche du diamètre droit qui lui est conjugué, est inférieur au rapport de ce qui est plus éloigné au diamètre qui lui est conjugué. Et si son axe conjugué est égal à son diamètre droit, tout couple de diamètres conjugués, parmi ses diamètres, sont égaux; et la ligne qui est égale à ses deux axes est plus petite que la ligne qui égale à tout couple de diamètres conjugués, parmi ses diamètres. Et la ligne qui est égale à ce qui est proche de l'axe, parmi les diamètres conjugués, est plus petite que la ligne qui est égale à ceux qui est plus éloigné de l'axe, parmi les diamètres conjugués.

Proposition IV. 3. 2(9)

<Pour> toute ellipse, le rapport de son axe le plus long à son axe le plus court est plus grand que le rapport du diamètre le plus grand parmi deux quelconques de ses diamètres conjugués au plus court. Et le rapport du diamètre le plus grand, le plus proche de l'axe le plus long, parmi deux quelconques de ses diamètres conjugués, au plus court qui lui est conjugué, est plus grand que le rappport du diamètre le plus grand, le <plus> éloigné de l'axe le plus long, parmi tout couple de diamètres conjugués au diamètre le plus court qui lui est conjugué. Et la ligne égale à ses deux axes réunis est plus petite que la ligne égale à tout couple de diamètres conjugués parmi ses diamètres. Et la ligne qui est égale à deux diamètres conjugués réunis, parmi ses diamètres qui sont proches des deux axes, est plus petite que la ligne qui est égale à deux diamètres conjugués éloignés réunis. Et les deux diamètres conjugués égaux, parmi ses diamètres, s'ils sont réunis, sont plus grands que deux diamètres conjugués parmi ses diamètres.

Proposition IV. 3. 2(10)

Pour toute parabole, ellipse ou hyperbole, dont le transverse n'est pas plus petit que la moitié de son côté droit, le côté droit à son axe est plus petit que le côté droit de n'importe lequel de ses diamètres. Et ce qui est proche de lui, parmi ses diamètres, son côté droit est plus petit que le côté droit de ce qui est plus éloigné parmi ses diamètres.

Et si le diamètre transverse est plus petit que la moitié de son côté droit, il y aura des deux côtés de l'axe <deux diamètres> dont chacun des deux sera comme la moitié de son côté droit. Et le côté droit de chacun des deux est plus petit que le côté droit de l'axe et que tous les côtés droits de tous les diamètres. Et celui qui est plus proche de lui est plus petit que celui qui en est le plus loin.

Proposition IV. 3. 2(11)
Si les côtés droits des paraboles sont égaux et les angles de leurs lignes ordonnées égaux, les paraboles sont égales et semblables.
Et si les paraboles sont égales et semblables, leurs côtés droits sont égaux.
Et si les sections <coniques> ne sont pas des paraboles et que les figures qui sont construites sur leurs diamètres transverses sont égales et semblables, les sections sont égales et semblables.
Et si les sections sont égales et semblables, les figures qui sont construites sur leurs diamètres transverses sont égales et leurs positions sont semblables.

Proposition IV. 3. 2(12)
Si une partie d'une section <conique> tombe sur une partie d'une section et qu'elle coïncide avec elle, la section est égale à la section.

Proposition IV. 3. 2(13)
Toute parabole est semblable à toute parabole.

Proposition IV. 3. 2(14)
Les sections qui ne sont pas des paraboles et dont les figures construites sur leurs axes sont semblables, sont aussi semblables.
Et si les sections sont semblables, les figures construites sur leurs axes sont semblables.

Proposition IV. 3. 2(15)
Si les figures des sections qui ne sont pas des paraboles, construites sur des diamètres qui ne sont pas des axes sont semblables et que les angles de leurs lignes ordonnées sont égaux, les sections sont semblables.

Proposition IV. 3. 2(16)
Si des plans parallèles coupent un cône, les sections qui y sont engendrées sont semblables.

Proposition IV. 3. 2(17)
Pour toute section, son axe coupe sa surface en deux moitiés; et si une portion en est séparée, il existe en elle une autre portion qui lui est égale et semblable.
Et pour l'ellipse, chacun de ses axes sépare sa surface en deux moitiés et il sépare son périmètre également en deux moitiés.

Proposition IV. 3. 2(18)
Pour deux portions de deux paraboles ou deux portions de deux hyperboles ou de deux ellipses, dont le rapport du transverse de l'une à son diamètre est comme le rapport du transverse de l'autre à son diamètre, le rapport de la surface de l'une des deux portions à la surface de l'autre portion est comme le rapport du triangle dont la base est la base de la portion et dont le sommet est son sommet au triangle qui est dans l'autre portion dont la base est sa base et dont le sommet est son sommet.

Proposition IV. 3. 2(19)
Pour deux portions d'une même section <conique>, si la section est une parabole et si leurs deux diamètres sont égaux, les deux portions sont égales. Et se ce n'est pas une parabole et que le rapport du transverse de l'une des deux à son diamètre comme le rapport du transverse de l'autre à son diamètre, les deux portions sont égales.

Proposition IV. 3. 2(20)
Pour toute portion d'une parabole, sa surface est comme une fois et un tiers de la surface du triangle dont la base est sa base et dont le sommet est son sommet.

Proposition IV. 3. 2(21)
Nous voulons démontrer comment séparer d'une parabole une portion dont la surface est égale à une surface connue, à lignes rectilignes, et dont le sommet est un point connu.

Proposition IV. 3. 2(22)
Nous voulons démontrer comment construire une section <conique> égale à une section connue et semblable à une autre section connue.

Proposition IV. 3. 2(23)
Etant données deux portions semblables de deux sections <coniques> de même genre, le rapport de la partie du périmètre de la section qui <entoure> l'une à la partie du périmètre de <l'autre> section qui <entoure> l'autre est comme le rapport de son diamètre à son diamètre.

ANNEXE III

Terminologie de la section IV.3.1. de l'*Istikmāl*
Arabe-Français

* * *

أقل = inférieur à
أكثر= plus nombreux, plus grand
امتدّ = se prolonger
أمكن= être possible
أميل= plus incliné
انتهى إلى = aboutir (-a)
انحصار= délimitation
أنصف démidier
انطبق = se superposer
أنفذ = mener
انفصل = séparer (se-)
انقسم = diviser (se -)
انقطع = couper (se-)
أوقع = positionner
أيية = quiddité

أ

إبدال = permutation
أبعد= plus éloigné
اتصل= joint à
اجتمع = résulter
أحاط = entourer
إحاطة= circonscription = action d'entourer
أحدث = engendrer
اختلف= être différent
إخراج= prolongement = action de mener
أخرج= sortir, mener
أدار= tourner
ارتفاع = hauteur
استبان= apparaître
استخرج = déterminer
استقامة (على -) = dans le prolongement
استقبال = alignement
اسطوانة، أساطين= cylindre
اسقاط = projection
أسقط = ôter
اشتراك = avoir en commun
أصغر= plus petit
إضافة = relation
أطبق = superposer
أطول = plus long
أعظم = plus grand
أقرب= plus proche
أقصر= plus court

ب

باق = reste
بدل = permuter
بسيط = surface
بسيط مستدي = surface circulaire
بُعْد = éloignement
بَعُدَ = s'éloigner
بقي = rester
بيّن = évident

ت

تبادل = interversion
تحت = sous
تحصّل = obtenir
تحليل = analyse

تخطيط =	traçage
ترتيب (على-) =	d'une manière ordonnée
تركيب =	synthèse
تساوى =	égalité
تصوُّر =	représentation
تطبيق =	mise en superposition
تعلَّم =	marquer
تفاضل =	excès
تفصيل =	séparation
تقارب =	rapprochement
تقارب =	se rapprocher
تقاطع =	se couper
التقى =	rencontrer
تكافؤ (على -) =	complémentarité
تلى =	suivre
تمام الخط =	le complément de la ligne
تناسب =	proportionnalité
تنصُّف =	démidiation
توازي =	parallélisme
توسُّط =	être intermédiaire
توهّم =	imagination

ث

ثابت =	fixe
ثالث في النسبة =	troisième proportionnelle
ثَبَّتَ =	fixer

ج

جاز =	passer
جميع =	tout
جنبة =	côté
جهة =	côté
جيب تمام =	cosinus

ح

حادّ =	aigu
حادث =	engendré
حافظ =	qui conserve
حدّد =	délimiter
حدس =	intuition
حركة =	mouvement

خ

خارج =	extérieur à
خاصة =	particulière
خاصة، خواص =	propriété
خالف =	être opposé
خروج =	prolongement
خط =	ligne
خط الترتيب =	ligne ordonnée
خط مستقيم =	ligne droite
خطَّ =	tracer
خلاف =	à l'opposé de
خلاف الوضع =	position opposée = position antiparallèle,
خلف =	absurde

د

دائرة =	cercle
داخل =	intérieur
داخلة =	intérieur (angle -)
دار =	tourner
دخل =	pénétrer
دعوى =	Affirmation = proposition
دليل =	preuve

ذ

ذو أربعة أضلاع =	quadrilatère
ذيل =	extrémité

ر

رأس =	sommet
رُبْع =	quart

ض

ضرب =	produit
ضرورة =	nécessité
ضعف، أضعاف =	multiple
ضلع، أضلاع =	arête

ط

طرح =	retrancher
طرف ، أطراف =	extrémité
طَوَّل =	allonger

ظ

ظاهر =	clair

ع

عَرْض =	largeur
عظيم، عظام (دوائر-) =	grand cercle
عَكْس =	inverse
عكَسَ =	inverser
عكس النقيض=	inverse de ce qui est nié
عَلَم =	gnomon
عمود، أعمدة =	perpendiculaire

غ

غير استقبال =	non prolongement
غير نهاية =	infini

ف

رجع =	revenir
رسم =	tracer
ركَّب =	composer

ز

زائد =	excédent
زاد =	être en excès
زاوية =	angle
زاوية الترتيب =	angle ordonné
زيادة =	excès

س

ساق =	côté
سطح، سطوح =	surface
سطح ذو أربعة أضلاع =	quadrilatère
سطح ا في ب =	produit de a par b
سطح ذو أربعة أضلاع =	quadrilatère
سطح مستدير =	surface circulaire
سطح مستوٍ=	plan
سطح، سطوح =	surface
سمت =	direction
سهم =	axe
سهم مزدوج =	axe conjugué

ش

شبيه =	semblable
شخص =	forme
شريطة =	condition
شكل =	figure, proposition

ص

صغَر =	se rapetisser
صغيرة =	petite

قطعان مزدوجان = sections conjuguées
قطعة = portion
قوس = arc
قوِّيَ على، قَوِيٌّ على = être en puissance de
قيام = orthogonalité

ك

كرة = sphère
كَمّ = quantité
كيف = qualité

ل

لا نهاية = infini (à l' -)
لازم = nécessaire
لقي = rencontrer

م

مؤلف = composé de
ما لا نهاية = infini
مائل = oblique
مارّ = passant par
ماسّ = tangent à
مال = s'incliner
متّحِد الرأس = de même sommet
متخالفة = antiparallèle
متسامتة = dans la même direction
متساو = égal
متشابه = semblable
متصاغرة = de plus en plus petite
متّصل بـ = rattaché à
مُتَصَوَّرَة = Représentée, imaginée

فرض = supposer
فرضًا = par hypothèse
فصل = intersection
فصل مشترك = intersection commune
فضل = reste

ق

قائم = droit
قائم على = perpendiculaire à
قائمة = la perpendiculaire
قائمية = orthogonalité
قابل لِـ = capable de
قاسم = qui divise
قاطع = coupant
قاعدة = base
قام = dresser (se -)
قام على = perpendiculaire à, élevé sur
قَبِل = être capable
قدر = grandeur
قسم = diviser
قَصُر = se rétrécir
قطب = pôle
قطر = diamètre
قطر قائم = diamètre droit
قطر مجانب = diamètre transverse
قطران مزدوجان = diamètres conjugués
قطع = couper
قطع = section
قطع زائد = hyperbole
قطع مكافئ = parabole
قطع ناقص = ellipse
قطع، قطوع = section
قطعان متقابلان = sections opposées

متعاظمة =	de plus en plus grande
متقابلان =	opposés
متقاطع =	s'entrecoupant
متماسة =	tangent
مُتَمِّم =	complément
متناسبة =	proportionnelle
متواز =	parallèle
متوسط =	Intermédiaire, moyenne
متوسِّعًا =	étendu
مُتوهَّمة =	imaginée
مثل، أمثال =	comme
مثلث =	triangle
مثناة =	doublé
مجانب =	transverse
مجاور =	proche
مجسم =	solide
مجموع =	ensemble
محال =	impossible
محدث =	qui engendre
محدود =	limité
محور =	axe
محيط =	périmètre
مخالف الوضع =	de position antiparallèle
مختلف =	différent
مُخرَج =	mené à
مخروط، =	cône
مخمّس =	pentagone
مدار =	tourné
مرّ =	passer
مربّع =	carré
مرسوم =	dessiné
مركز =	centre
مرور =	passage
مساو =	égal
مساواة =	égalité
مستدير =	circulaire
مستقيم =	droit, rectiligne
مستو =	plan
مسطّح =	Surface, produit
مسقط الخط =	pied
مشترك =	commun
مصادرة =	prémisse
مضاف =	appliqué à
مطلق =	absolu
مطلوب =	recherché
معمول =	construit
مفروض =	supposé
مفصول =	séparé
مقابل =	opposé à
مقاطع =	coupant
مقدار =	grandeur
مقدّمة =	prémisse
مقدّمة، مقدّمات =	antécédent
ملاق =	rencontrant
ملتقى =	intersection
ملزوم =	nécessaire
مماثَلة =	équivalence
مُماسّ لِـ =	tangent à
مماسَّة =	tangente
ممكن =	possible
منتصف =	milieu
مُنتهٍ =	fini
منحن =	courbe
منسوب =	rapport à
منطبقة =	coïncidant
منطقة =	région
منفرجة =	obtus
منفصل =	séparé
منقوص =	retranché
موازاة =	parallélisme
مُوَتّر =	sous tendu par une corde
موضع =	endroit
موضوع =	posé
موقع =	lieu, endroit
ميل =	inclinaison

ن

ناحية =	région
ناقص =	déficient

rapport = نسبة
rapport d'égalité = نسبة المساواة
moitié = نِصْف
démidier = نصَّف
homologue = نظير
prolongement = نفوذ
déficit = نقص
point = نقطة
point de tangence = نقطة التماس
contraposée = نقيض
espèce = نوع

و

être parallèle à = وازى
joignant = واصل
situé = واقع
située = واقعة
corde ordonnée = وتر ترتيب
corde = وتر، أوتار
existence = وجود
moyenne proportionnelle = وسط في النسبة
étendre = وسَّع
joindre = وصل
jonction = وصول
poser = وَضَعَ
position = وَضْع
situer (se -) = وقع
suivre = être à la suite de = ولى، يلي

ANNEXE IV

Terminologie de la section IV.3.1. de l'*Istikmāl*
Français-Arabe

* * *

A

à l'opposé de = خلاف
aboutir (-a) = انتهى إلى
absolu = مطلق
absurde = خلف
Affirmation = proposition = دعوى
aigu = حادّ
alignement = استقبال
allonger = طـوّل
analyse = تحليل
angle = زاوية
angle ordonné = زاوية الترتيب
antécédent = مقدّمة، مقدّمات
antiparallèle = متخالفة
apparaître =استبان
appliqué à = مضاف
arc = قوس
arête = ضلع، أضلاع
avoir en commun = اشتراك
axe = سهم
axe = محور
axe conjugué = سهم مزدوج

B

base = قاعدة

C

capable de = قابل لِـ
carré = مربّع
centre = مركز
cercle = دائرة
circonscription = action d'entourer =إحاطة
circulaire = مستدير
clair = ظاهر
coïncidant = منطبقة
comme = مثل، أمثال
commun = مشترك
complément = مُتَمِّم
complémentarité = تكافؤ (على -)
composé de = مؤلف
composer = ركَّب
condition = شريطة
cône = مخروط،
construit = معمول
contraposée = نقيض
corde =وتر، أوتار
corde ordonnée = وتر ترتيب
cosinus = جيب تمام
côté = جنبة
côté = جهة
côté = ساق
coupant = قاطع
coupant = مقاطع
couper = قطع
couper (se-) = انقطع
courbe = منحن
cylindre =اسطوانة، أساطين

D

dans la même direction	= متسامتة
dans le prolongement	= استقامة (على -)
de même sommet	= متّحِد الرأس
de plus en plus grande	= متعاظمة
de plus en plus petite	= متصاغرة
de position antiparallèle	= مخالف الوضع
déficient	= ناقص
déficit	= نقص
délimitation	=انحصار
délimiter	= حدّد
démidiation	= تنصُّف
démidier	أنصف
démidier	= نصَّف
dessiné	= مرسوم
déterminer	= استخرج
diamètre	= قطر
diamètre droit	= قطر قائم
diamètre transverse	= قطر مجانب
diamètres conjugués	= قطران مزدوجان
différent	= مختلف
direction	= سمت
diviser	= قسم
diviser (se -)	= انقسم
doublé	= مثناة
dresser (se -)	= قام
droit	= قائم
droit, rectiligne	= مستقيم
d'une manière ordonnée	= ترتيب (على-)

E

égal	= متساو
égal	= مساو
égalité	= تساوى
égalité	= مساواة
ellipse	= قطع ناقص
éloignement	= بُعْد
endroit	= موضع
engendré	= حادث
engendrer	= أحدث
ensemble	= مجموع
entourer	= أحاط
équivalence	= مماثَلة
espèce	= نوع
étendre	= وسَّع
étendu	= متوسِّعًا
être capable	= قَبِل
être différent	=اختلف
être en excès	= زاد
être en puissance de	= قوَّى على، قَويٌّ على
être intermédiaire	= توسُّط
être opposé	= خالف
être parallèle à	= وازى
être possible	=أمكن
évident	= بيّن
excédent	= زائد
excès	= تفاضل
excès	= زيادة
existence	= وجود
extérieur à	= خارج
extrémité	= ذيل
extrémité	= طرف ، أطراف
figure, proposition	= شكل

F

fini	= مُنتهٍ
fixe	= ثابت
fixer	= ثَبَّت
forme	= شخص

G

gnomon	= عَلَم
grand cercle	عظيم، عظام = (دوائر-)
grandeur	= قدر
grandeur	= مقدار

H

hauteur	= ارتفاع
homologue	= نظير
hyperbole	= قطع زائد

I

imagination	= توهّم
imaginée	= مُتوهَّمة
impossible	= محال
inclinaison	= ميل
inférieur à	= أقل
infini	= غير نهاية
infini	= ما لا نهاية
infini (à l' -)	= لا نهاية
intérieur	= داخل
intérieur (angle -)	= داخلة
Intermédiaire, moyenne	= متوسط
intersection	= فصل
intersection	= ملتقى
intersection commune	= فصل مشترك
interversion	= تبادل
intuition	= حدس
inverse	= عَكْس
inverse de ce qui est nié	=عكس النقيض
inverser	= عكَسَ

J

joignant	= واصل
joindre	= وصل
joint à	=اتصل
jonction	= وصول

L

la perpendiculaire	= قائمة
largeur	= عَرْض
le complément de la ligne	= تمام الخط
lieu, endroit	= موقع
ligne	= خط
ligne droite	= خط مستقيم
ligne ordonnée	= خط الترتيب
limité	= محدود

M

marquer	= تعلَّم
mené à	= مُخرَج
mener	= أنفذ
milieu	= منتصف
mise en superposition	= تطبيق
moitié	= نِصْف
mouvement	= حركة
moyenne proportionnelle	= وسط في النسبة
multiple	= ضعف، أضعاف

N

nécessaire	= لازم
nécessaire	= ملزوم
nécessité	= ضرورة
non prolongement	= غير استقبال

O

oblique = مائل
obtenir = تحصّل
obtus = منفرجة
opposé à = مقابل
opposés = متقابلان
orthogonalité = قائمية
orthogonalité = قيام
ôter = أسقط

P

par hypothèse = فرضًا
parabole = قطع مكافئ
parallèle = متوازٍ
parallélisme = توازي
parallélisme = موازاة
particulière = خاصة
passage = مرور
passant par = مارّ
passer = جاز
passer = مرّ
pénétrer = دخل
pentagone = مخمّس
périmètre = محيط
permutation = إبدال
permuter = بدل
perpendiculaire = عمود، أعمدة
perpendiculaire à = قائم على
perpendiculaire à, élevé sur = قام على
petite = صغيرة
pied = مسقط الخط
plan =سطح مستو
plan = مستو
plus court =أقصر
plus éloigné =أبعد
plus grand = أعظم
plus incliné =أميل
plus long = أطول
plus nombreux, =أكثر
plus grand
plus petit =أصغر
plus proche =أقرب
point = نقطة
point de tangence = نقطة التماس
pôle = قطب
portion = قطعة
posé = موضوع
poser = وَضَعَ
position = وَضْع
position opposée = position antiparallèle, = خلاف الوضع
positionner = أوقع
possible = ممكن
prémisse = مصادرة
prémisse = مقدّمة
preuve = دليل
proche = مجاور
produit = ضرب
produit de a par b = سطح ا في ب
projection = اسقاط
prolongement = خروج
prolongement = نفوذ
prolongement = action de mener =إخراج
proportionnalité = تناسب
proportionnelle = متناسبة
propriété = خاصة، خواص

Q

quadrilatère = ذو أربعة أضلاع
quadrilatère = سطح ذو أربعة أضلاع
quadrilatère = سطح ذو أربعة أضلاع
qualité = كيف
quantité = كمّ
quart = رُبْع
qui conserve = حافظ
qui divise = قاسم
qui engendre = محدث

quiddité = أيية

R

rapport = نسبة
rapport à = منسوب
rapport d'égalité = نسبة المساواة
rapprochement = تقارب
rattaché à = متّصل بـ
recherché = مطلوب
région = منطقة
région = ناحية
relation = إضافة
rencontrant = ملاق
rencontrer = التقى
rencontrer = لقي
représentation = تصوُّر
représentée, imaginée = مُتَصوَّرَة
reste = باق
reste = فضل
rester = بقي
résulter = اجتمع
retranché = منقوص
retrancher = طرح
revenir = رجع

S

se couper = تقاطع
se prolonger = امتدّ
se rapetisser = صغِرَ
se rapprocher = تقارب
se rétrécir = قَصُرَ
se superposer = انطبق
section = قطع
section = قطع، قطوع
sections conjuguées = قطعان مزدوجان
sections opposées = قطعان متقابلان
s'éloigner = بَعُدَ
semblable = شبيه
semblable = متشابه
s'entrecoupant = متقاطع
séparation = تفصيل
séparé = مفصول
séparé = منفصل
séparer (se-) = انفصل
s'incliner = مال
situé = واقع
située = واقعة
situer (se -) = وقع
solide = مجسم
sommet = رأس
sortir, mener = أخرج
sous = تحت
sous tendu par une corde = مُوَتَّر
sphère = كرة
suivre = تلى
suivre = être à la suite de = ولى، يلي
superposer = أطبق
supposé = مفروض
supposer = فرض
surface = بسيط
surface = سطح، سطوح
surface = سطح، سطوح
surface circulaire = بسيط مستدي
surface circulaire = سطح مستدير
Surface, produit = مسطّح
synthèse = تركيب

T

tangent = متماسة
tangent à = ماسّ
tangent à = مُماسّ لِـ
tangente = مماسَّة
tourné = مدار
tourner = أدار
tourner = دار
tout = جميع
traçage = تخطيط
tracer = خطّ

tracer	= رسم
transverse	= مجانب
triangle	= مثلث
troisième proportionnelle	= ثالث في النسبة
troisième proportionnelle	= ثالث في النسبة

D. INDEX

INDEX DES NOMS

Cet index contient tous les noms des personnes citées dans la thèse à l'exception de ceux et de la bibliographie générale. La page qui signale le nom dans la note est indiquée par Xn.

-H-

-I-

E. BIBLIOGRAPHIE GENERALE

BIBILIOGRAPHIE GENERALE

ANBOUBA, A. : Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4ème siècle de l'Hégire, *Archive for History of Arabic Science*, Vol. 2, n° 2 (1978).

ANBOUBA, A. : L'Algèbre arabe aux IXe et Xe siècles. Aperçu général. *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 2, n° 1 (1978), p. 66-100.

APOLLONIUS : *Kitāb al-makhrūṭāt*, Ms. Mashhad, Astān Quds, n° 5391.

APOLLONIUS : *Les Coniques*, VER EECKE, P. (trad.), Paris, Blanchard, 1959.

APOLLONIUS DE PERGE : *Coniques*, Tome 1.1 : Livre I, RASHED, R. (édit.); Tome 1.2 : Livre I, Decorps-Foulquier, M. & Federspiel, M. (édit.), Berlin-New York, De Gruyter, 2008.

ARCHIMEDE : *La Sphère et le Cylindre, De la mesure du cercle, Des Conoïdes et des Sphéroïdes*, MUGLER, C. (trad.), Paris, Les Belles Lettres, Vol. I, 1970.

BALSAM : *Des Apollonius von Perga seiben Bücher über Kegelschnitte*, Berlin, 1861.

BALTY-GUESDON, G. : *Le Bayt al-Ḥikma de Bagdad*, Mémoire de D.E.A., Paris, Université Paris III-Sorbonne Nouvelle, 1986.

BAUDOUX, C. : *La version syriaque des "Eléments" d'Euclide*. In Actes du Deuxième Congrès National des Sciences, Bruxelles, 1935.

BELLOSTA, H. : *Ibrāhīm Ibn Sinān : Apollonius Arabicus*, Actes du Colloque "*Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque*" (Paris, 31 Mars-3 Avril 1993), HASNAWI, A. - ELAMRANI-JAMAL, A. - AOUAD, M. (édit.), Paris, I. M. A. - Louvain, Peeters, 1997, p. 31-48.

BENRABIA, Y. : *Les instruments géométriques dans la tradition mathématique arabe médiévale (IXe-XVIe s.),* Magister en histoire des mathématiques, Alger, E. N. S., 1998.

BERGGREN, J.-L. : An Anonymous treatise on the regular Nonagon, *Journal for History of Arabic Science*, Vol. 5, n° 1-2 (1981), p. 37-41.

BIRUNI [al-BĪRŪNĪ] : *Istikhrāj al-awtār fī d-dā'ira* [Détermination des cordes dans le cercle], DAMIRDASH, A. D. (édit.), Le Caire, ad-Dār al-miṣriya li t-ta'līf wa t-tarjama, 1965.

BOLATOV, N. : *Geometrichskaya garmonizastsia v architekture srednei Azii*, Moscou, 1978.

BOUZARI, A. : *Les coniques dans les mathématiques arabes à travers un traité attribué à al-Khāzin (Xe S.),* Thèse de Magister en histoire des mathématiques, Alger, E. N. S., 1999.

CARMODY, F.-J. : *The Astronomical Works of Thābit Ibn Qurra*, Los Angeles, University of California Press, 1956.

CARRA DE VAUX, B. : Une solution du problème des deux moyennes proportionnelles entre deux droites données, *Bibliotheca Mathematica* 12 (1898), p.3-4.

CAVEING, M. : *La tradition euclidienne dans la Grèce antique*. In VITRAC, B. : Euclide, Les Éléments, Presses Universitaires de France, Paris, Vol. 1, 1990.

CLAGETT, M. : A Medieval Latin Translation of a Short Arabic Tract on the Hyperbola, *Osiris*, 11 (1954), p. 359-385.

CLAGETT, M. : *Archimede in the Middle Ages*, University of Wisconsin Press, 1964-84, IV.

DE LIBERA, A. : *La philosophie médiévale*, Paris, Presses Universitaires de France, 1993.

DEBARNOT, M.-T. : *al-Bīrūnī, Kitāb maqālīd ʿilm al-hay'a [Les clefs de l'astronomie]. La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'est à la fin du X^e^ siècle*, Damas, Institut Français de Damas, 1985.

DECORPS-FOULQUIER, M. : *L'édition d'Eutocius d'Ascalon des Coniques d'Apollonius de Perge: un exemple du rôle des écoles de l'antiquité tardive dans la transmission des textes scientifiques grecs*, Actes du Colloque "*Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque"* (Paris, 31 Mars-3 Avril 1993), HASNAWI, A. - ELAMRANI-JAMAL, A. - AOUAD, M. (édit.), Paris, I. M. A. - Louvain, Peeters, 1997, p. 49-60.

DECORPS-FOULQUIER, M. : *L'époque où vécut le géomètre Sérénus d'Antinoé*. In GUILLAUMIN, J.-Y. (dir.) : Mathématiques dans l'Antiquité, Saint-Etienne, Publications de l'Université de Saint-Etienne, 1992, p. 51-58.

DECORPS-FOULQUIER, M. : *Les Coniques d'Apollonios de Pergé*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1994.

DJEBBAR, A. & ABALLAGH, M. : *Ḥayāt wa mu'allafāt Ibn al-Bannā al-Murrākushī* [La vie et l'œuvre d'Ibn al-Bannā al-Murrākushī], Université Mohamed V, Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines, 2001.

DJEBBAR, A. & RASHED, R. (édit. & trad.) : *L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*, Alep, Institut for the History of Arabic Sciences, 1981.

DJEBBAR, A. : *Abū Bakr Ibn Bājja et les mathématiques de son temps*. In Etudes Philosophiques et Sociologiques dédiées à Jamal Eddine Alaoui, Publications de l'Université de Fès, Département de Philosophie, Sociologie et Psychologie, n° 14, Fès, Infoprint, 1998, p. 5-26.

DJEBBAR, A. : *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e^ siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, Colloque International sur "*Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVII^e^ siècle*" (Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984). In FOLKERTS, M. & HOGENDIJK, J.-P. (édit.) : *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*, Amsterdam-Atlanta, GA 1993, p. 84-91.

DJEBBAR, A. : Figurate Numbers in the Mathematical Tradition of Andalus and the Maghrib, *Suhayl*, Barcelone, n° 1 (2000), pp. 57-70.

DJEBBAR, A. : Kamāl Eddīn Fārsī, Physicien et mathématicien novateur, *Târikh-e'Elm*, Téhéran, 2005, n° 3, p. 9-38. Article reproduit dans *Découverte* (Revue du Palais de la découverte), Paris, n° 334, janvier 2006, p. 14-32.

DJEBBAR, A. : *La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence hors d'al-Andalus*, Colloque international sur Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat (Toulouse, 10-13 Décembre 1992), J. Cassinet (édit.), Toulouse, C. I. H. S. O., 1995, p. 35-46.

DJEBBAR, A. : La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XI^e^ s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII^e^-XIV^e^ siècles, *Historia Mathematica*, n° 24 (1997), p. 185-192.

DJEBBAR, A. : *La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb*, Actes du 5^e^ Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes (Tunis, 1-3 Décembre 1994), Tunis, A.T.S.M., 1998, p. 62-84.

DJEBBAR, A. : *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Mun^c^im (XII^e^-XIII^e^ siècles)*, Paris, Université Paris-Sud, Prépublication, 1983, n° 83 T 03; Publications Mathématiques d'Orsay, 1985, n° 85-01.

DJEBBAR, A. : *Le phénomène de traduction et son rôle dans le développement des activités scientifiques en pays d'Islam*, in S. ÖNEN & C. PROUST : *Les Ecoles savantes en Turquie, Sciences, philosophie et arts au fil des siècles*, Actes des journées d'Ankara (24-29 Avril 1995), Istanbul, Editions Isis, 1996, p. 93-112.

DJEBBAR, A. : *Les activités mathématiques au Maghreb à l'époque ottomane (XVI^e^-XIX^e^ siècles),* Actes du Symposium sur "*Science, Technology and Industry in the Ottoman World*" (XX^e^ Congrès International d'Histoire des Sciences, Liège, 20-26 Juillet 1997), IHSANOĞLU, E. – DJEBBAR, A. – GÜNERGUN, F. (édit.), Liège, Brepols, 2000, p. 49-66.

DJEBBAR, A. : Les livres arithmétiques des Eléments d'Euclide dans une rédaction du XI^e^ siècle : le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman (m. 1085), *Revue Lull*, Saragosse, Vol. 22, n° 45 (1999), p. 589-653.

DJEBBAR, A. : *Lettre d'Ibn Bājja à Ibn al-Imām*. In DJEBBAR, A. : *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IX^e^-XVI^e^ s.), Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1990, Vol. II.

DJEBBAR, A. : *Quelques commentaires sur les versions arabes des Eléments d'Euclide et sur leur transmission à l'Occident musulman*. In Actes du Colloque International "*Mathematische Probleme im Mittelalter, der lateinische und arabische Sprachbereich*" (Wölfenbüttel, 18-22 Juin 1990), FOLKERTS, M. (édit.) : Wiesbaden, Harrassowitz Verlag, 1996, p. 91-114.

FĀRISĪ (AL-), Kamāl ad-Dīn : *Tanqīh al-manāẓir li dhawī al-abṣār wa l-baṣā'ir* [Livre de la révision de l'Optique pour les gens qui ont une bonne vue et un esprit pénétrant], HIJĀZĪ, M. (édit.), Vol. I, Le Caire, al-Hay'a al-miṣriya al-^c^āmma li l-kitāb, 1983.

GALLO, I. : *Frammenti biografici da papiri*, Rome, 1980, Vol. II.

GILLISPIE, Ch. (édit.) : *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's Son, 1970-1980.

GUERGOUR, Y : *La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m.1085) : Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb*, Thèse de Doctorat, Université d'Annaba, 2006.

GUTAS, D. : *Pensée grecque, culture arabe*, A. Cheddadi (trad.), Paris, Aubier, 2002.

HEATH, Th. : *A History of Greek Mathematics*, New York, Dover, 1981.

HEATH, Th. : *Apollonius of Perga, Treatise on Conics Sections*, Cambridge, 1896. Réimpression, New York, 1961.

HEIBERG, I.-L. : *Apollonii Pergaei quae graece exstant, cum commentariis antiquis*, Leipzig, B.G. Teubner 1891-93. Reprint, Stuttgart, B.G. Teubner 1974, p. 168-361.

HOGENDIJK, J. P. : Al-Kuhi's Construction of an Equilateral Pentagon in a Given Square. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 1 (1985), p. 100-144.

HOGENDIJK, J. P. : *Al-Mu'taman's Simplified Lemmas for Solving Alhazen's problem*. In CASULLERAS, J - SAMSÓ, J. (édit.) : *From Baghdad to Barcelona: Studies in the Islamic Exact Sciences in Honour of Prof. Juan Vernet*, Barcelone, Anuari de Filologia (Université de Barcelone) XIX (1996) B-2, Instituto "Millás Vallicrosa" de Historia de la Ciencia Arabe, 1996, p. 59-101.

HOGENDIJK, J. P. : Discovery of an 11th century geometrical compilation: The Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd, King of Saragossa, *Historia Mathematica* 13 (1986), p. 43-52.

HOGENDIJK, J. P. : Four Constructions of two Mean Proportionals between two given Lines in the Book of Perfection (Istikmāl) of al-Mu'taman Ibn Hūd, *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 10, n° 1-2 (1992-93-94), p. 13-29.

HOGENDIJK, J. P. : Greek and Arabic Constructions of Regular Heptagon, *Archive for the History of Sciences*, Vol. 30 (1984), p. 176-185.

HOGENDIJK, J. P. : Greek and Arabic Constructions of the Regular Heptagon, *Archive for History of Exact Sciences*, 30 (1984), p. 197-330.

HOGENDIJK, J. P. : How Trisections of the Angle were Transmitted from Greek to Islamic Geometry, *Historia Mathematica* 8 (1981), p. 418-466.

HOGENDIJK, J. P. : *Ibn al Haytham's Complétion of the Conics*, New York, Springer Verlag, 1985.

HOGENDIJK, J. P. : Le roi-géomètre al-Mu'taman ibn Hūd et son livre de la perfection (Kitāb al-Istikmāl). *Actes du premier colloque sur l'histoire des mathématiques arabes (Alger, 1-3 décembre 1986),* Alger, Maison des livres, 1988, p. 53-66.

HOGENDIJK, J. P. : Le traité d'Ibn al-Haytham sur les lignes horaires, *Cahier du Séminaire Ibn al-Haytham*, n° 4 (1994), p. 5-7.

HOGENDIJK, J. P. : Le traité d'Ibn al-Haytham sur les lignes horaires. In *Cahier du Séminaire Ibn al-Haytham*, Alger, Bulletin de l'Association Algérienne d'Histoire des Mathématiques, 4 (1994), p. 5-7.

HOGENDIJK, J. P. : Les coniques dans la tradition mathématique arabe, *Actes du 3e Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* (Tipaza, 1-3 décembre 1990), Alger, Office des Publications Universitaires, 1998, p. 147-158.

HOGENDIJK, J. P. : Les coniques dans la tradition mathématiques arabes, *Actes du Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* (Tipaza, 1-3 décembre 1990), Alger, Office des Publications Universitaires, 1998, p. 147-158.

HOGENDIJK, J. P. : *On the trisection of angle and the construction of a regular nonagon by means of conic sections in medieval Islamic*, University of Utrecht, Preprint n° 113, 1979.

HOGENDIJK, J. P. : Sharaf al-Din al-Ṭūsī on the Number of Positive Roots of Cubic Equations. *Historia Mathematica* 16 (1989), p. 69-85.

HOGENDIJK, J. P. : The Geometrical Part of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (11th century), An analyical Table of Contents, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* Vol. 41 (1991), p. 207-281.

HOGENDIJK, J. P. : The lost geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century) in the redaction of Ibn Sartāq (14th century) : An Analytical Table of Contents, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 53 (2003), p. 19-34.

HOGENDIJK, J. P. : Arabic Traces of Lost Works of Apollonius, *Archive for History of Exact Sciences* 35 (1986), p. 223-224.

HOGENDIJK, J. P: Transmission, Transformation and Originality: the Relation of Arabic to Greek Geometry. In RAGEP, F. J. & RAGEP, S. P. (édit.) : *Tradition,* *Transmission, Transformation.* Proceedings of two conferences on pre-modern science held at the University of Oklahoma*,* Leiden: Brill, 1996. , p. 31-64.

HOJENDIJK, J. P. : *Ibn al Haytham's completion of the conics*, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, Springer-Verlag, 1984.

IBN ABĪ ASH-SHUKR : *Sharḥ Kitāb Abulūniyūs fī l-makhrūṭāt*, Ms. Téhéran, Sipahsālār, n° 556.

IBN ABĪ UṢAYBIᶜA *: ᶜUyūn ul-anbā`fī ṭabaqāt al-aṭibbā'* [Les sources de l'information sur les catégories de médecins]*,* NIZĀR, R. (édit.), Beyrouth, Manshūrāt Dār maktabat al-ḥayāt, non datée.

IBN AL-ABBĀR : *At-Takmila li kitāb aṣ-Ṣila* [Appendice au Livre *aṣ-Ṣila*], CODERA & ZAYDIN (édit.), Madrid, 1886.

IBN AL-AKFĀNĪ : *Irshād al-qāṣid ilā asnā al-maqāṣid* [Le guide du chercheur vers les buts les plus élevés], FĀKHŪRĪ, M. - KAMĀL, M. - AṢ-ṢADDĪQ, Ḥ. (édit.), Beyrouth, Maktabat Lubnān Nāshirūn, 1998.

IBN AL-QIFṬĪ *: Ikhbār al- ᶜulamā' bi akhbār al-ḥukamā*' [Livre qui informe les savants sur la vie des sages], Beyrouth, Dār al-āthār, non datée.

IBN AN-NADĪM : *Al-Fihrist* [Le Catalogue], FLÜGEL, G. (édit.), Leipzig, 1871.

IBN BĀJJA : *Maqāla fī ibanāt faḍl ᶜAbd ar-Rahmān Ibn Sayyid al muhandis* [Epître qui montre la prééminence de ᶜAbd ar-Rahmān Ibn Sayyid le géomètre]. In ALAOUI, J.: *Rasā'il falsafiya li Abī Bakr Ibn Bājja* [Lettres philosophiques d'Abū Bakr Ibn Bājja], Beyrouth, Dār ath-thaqāfa-Casablanca – Casablanca, Dār an-nashr al-maghribiyya, 1983.

IBN HAYDŪR : *At-Tamhīṣ fī sharḥ at-Talkhīṣ* [L'étude approfondie sur le commentaire de l'*Abrégé*], Ms. Rabat, al-Ḥasaniyya, n° 252.

IBN KHALDŪN : *Al-Muqaddima* [Les Prolégomènes], CHEDDADI, A. (édit.), Casablanca, Bayt al-funūn wa l-ᶜulūm wa l-ādāb, 2005.

IBN KHALDŪN : *Kitāb al- ᶜibar*, Beyrouth, Dār al-kitāb al-lubnānī, 1983.

IBN ᶜAQNĪN : *Tibb an-Nufūs* [La médecine des âmes]. In GÜDEMANN, M. : Das Jüdische Unterrichtswesen Wärend des Spanisch-Arabischen Period, Vienne, Carl Gerold's Sohn, 1875. Réimpression, Amesterdam, Philo Press, 1968.

IBN SINĀN : *Rasā'il* [Epîtres], SAÏDAN, A. S. (édit.), Koweit, as-silsila at-turāthiya, 1983.

IKHWĀN AṢ-ṢAFĀ' : *Rasā'il* [Epîtres], Beyrouth, Dār Ṣādir, non datée.

ITARD, J. : L'angle de contingence chez Borelli, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 14 (1961), p. 201-224.

JACQUART, D. & MICHEAU, F. : *La médecine arabe et l'Occident médiéval*, Paris, Maisonneuve & Larose, 1990.

JAOUICHE, K. : *La théorie des parallèles en pays d'Islam,* Paris, Vrin, 1986.

KŪHĪ (al-) : *Istikhrāj khaṭṭayn bayna khaṭṭayn tatawālā ᶜalā nisba wa qismat az-zāwiyya bi thalāthat aqsām mutasāwiyya* [Détermination de deux lignes entre deux lignes successivement en proportion et division d'un angle en trois parties égales], Ms. Le Caire, Dār riyāḍa n° 40 m, ff. 226v-227r.

KĀSHĪ (al) : *Miftāḥ al-ḥisāb* [La clé du calcul], DAMIRDASH, A. S. & Al-ḤAFNĪ, M. H. (édit.), Le Caire, 1968.

KARPOVA, L. M. & ROSENFELD, B. : The treatise of Thābit ibn Qurra on Sections of a Cylinder and of Its Surface, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 24 (1974), p. 66-72.

KING, D. A. : *Astronomy in the Service of Islam*, Variorum Reprints, Londres, 1993.

KING, D. A. *: Islamic Astronomical Instruments*, Variorum Reprints, Londres, 1987.

KNORR, W. R. : *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*, Basel, Birkhäuser 1992.

LAMRABET, D. : *Introduction à l'histoire des mathématiques maghrébines,* Rabat, Imprimerie al-Maᶜārif al-jadīda, 1994.

LANGERMANN, Y.-T. : The Mathematical Wrintings of Maïmonides, *The Jewish Quaterly Review*, LXXV, 1 (1984), p. 57-65.

LEVY, T. : *Fragment d'Ibn al-Samḥ sur le cylindre et sur ses sections planes (édition et traduction française)*. In RASHED, R. : *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle*, Vol. I, p. 885-895.

LEVY, T. : L'étude des sections coniques dans la tradition médiévale hébraïque : Ses relations avec les traditions arabe et latine, *Revue d'Histoire des Sciences*, XLII/3 (1989), p. 193-239.

LORCH, R. : *Al-Saghani's treatise on projecting the sphere*, in KING, D. A. & SALIBA, G. (édit.) : *From deferent to Equant, a Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in honor of E.S. Kennedy*, New York, The New York Academy of Science, 1987, p. 237-252.

MANŪNĪ (AL-), M. : *Asātidhat al-handasa wa mu'allifīhā fī l-Maghrib as-saᶜdī* [Les enseignants de la géométrie et ses auteurs dans le Maghreb saadide], Revue Daᶜwat al-ḥaqq, Rabat, 9e année, n° 2 (1965), p. 101-104.

MAQQARĪ (AL-) : *Nafḥ aṭ-ṭīb min ghuṣn al-Andalus ar-raṭīb* [L'exhalaison du parfum de la tendre branche d'al-Andalus], ᶜABBĀS, I. (édit.), Beyrouth, Dār Ṣādir, 1968.

MUNK, S. : *Le guide des égarés*, Paris, A. Franck, 1866.

MURRĀKUSHĪ (AL-) : *Kitāb al-mabādi' wa l-ghāyāt fī ᶜilm al-mīqāt* [Livres des principes et des buts sur la science du temps], Ms. Istanbul, Ahmet III, n° 3343. Reproduit en fac simile, SEZGIN, F. (édit.), Frankfurt, Institute for the History of Arabic-Islamic Science, 1984.

NAẒĪF, M. : *Al-Ḥasan Ibn al-Haytham, buḥūthuhū wa kushūfuhū al-baṣariya* [Al-Ḥasan Ibn al-Haytham, ses recherches et ses découvertes en optique], Le Caire, 1942. Reproduit en facsimile, sous le même titre, dans SEZGIN, F. (édit.), Frankfurt, Institute for the History of Arabic-Islamic Sciences, 2001, p. 487-521.

NIX, L.-M. : *Das fünfte Buch des Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Übersetzung des Thabit ibn Corrah*, Leipzig, 1889.

PAPPUS : *La collection mathématique*, VER EECKE, P. (trad.), Paris, Desclée de Brouwer, 1933. Réimpression, Paris, Albert Blanchard, 1982.

QURBANI, A. : *Biographies des mathématiciens de l'époque islamique*, Téhéran, Presses Universitaires d'Iran, 1375/1955. (En persan).

RASHED, R : La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham, *Journal for th history of the arabic Science,* Vol. 3, n° 2 (1979), p. 309-387.

RASHED, R. (édit.) : Histoire des sciences arabes, Paris, Seuil, 1997.

RASHED, R. : Al-Qūhī et al-Sijzī : sur le compas parfait et le tracé continu des sections coniques, *Arabic Sciences and Philosophy*, 13 n° 1 (2003), p. 9-44.

RASHED, R. : *Entre arithmétique et algèbre*, Paris, Les Belles Lettres, 1984.

RASHED, R. : *Géométrie et dioptrique au Xe siècle : Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham*, Paris, Les Belles Lettres, 1993.

RASHED, R. : Ibn al-Haytham et la mesure du paraboloïde, *Journal for the History of Arabic Science* 5 (1981), p. 262-291.

RASHED, R. : *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle. Volume 1: Fondateurs et* commentateurs, Londres, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1996.

RASHED, R. : Résolution des équations numériques et algèbre: Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, Viète. *Archive for History of Exact Sciences* 12 (1974), p. 244-290.

ROMMEVAUX, S., DJEBBAR, A. & VITRAC, B. : Remarques sur l'histoire du texte des Eléments d'Euclide, *Archives for the History of Sciences*, n° 55 (2001), p. 221-295.

ROSENFELD, B. A. & IHSANOĞLU, E. : *Mathematicians, Astronomers & other Scholars of Islamic Civilisation and their works (7th-19th c.),* Istanbul, IRCICA, 2003.

SABRA, A.I. : Ibn al-Haytham's Lemmas for Solving ``Alhazen's Problem'', *Archive for History of Exact Sciences* 26 (1982), p. 299-324.

SANCHEZ PEREZ, J. A. : *Biografías de Matemáticos Árabes que florecieron en España.* Madrid, Estanislao Maestre, 1921.

SAcID [ṢĀcID], al-Andalusī : *Kitāb Ṭabaqāt al-umam* [Livre des catégories des nations], BUcALWĀN, Ḥ. (édit.), Beyrouth, Dār aṭ-ṭalīca li ṭ-ṭibāca wa n-nashr, 1985.

SARTON, G.: *Introduction to the history of sciences: from Homer to Omar Khayyām,* Baltimore, Williams & Wilkins, 1927.

SERENUS : *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*, VER EECKE, P. (trad.), Paris, Blanchard, 1969.

SESIANO, J. : Les méthodes d'analyse indéterminée chez Abū Kāmil, *Centaurus*, vol. 21, n° 2 (1977), p. 89-105.

SESIANO, J. : Un complément de Ṭābit Ibn Qurra au Περι′ διαιρε′σεων d'Euclide, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, Band 4 (1988), p. 141-159.

SESIANO, J. : Un mémoire d'Ibn al-Haytham sur un problème arithmétique solide, *Centaurus*, Vol. 20 (1976), p. 189-195.

SEZGIN, F. : *Geschichte des arabischen Schrifttums.* Leiden, E. J. Brill, Vol. V, 1974; Vol.VI, 1978; Vol.VII, 1979.

SIJZĪ (as-) : *Kitāb camal al-musabbac fī d-dā'ira wa qismat az-zāwiyya al-mustaqīmat al-khaṭṭayn bi thalāthat aqsām mutasāwiyya*, [Livre sur la construction de l'heptagone dans le cercle et sur la division d'un angle à côtés rectilignes en trois parties égales], Ms. Le Caire, Dar riyāḍa, n° 41m, ff. 115v-116r.

SUTER, H. : Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von ibrāhīm b. Sinān b. Thābit. Aus dem Arabischen überetzt und kommentiert, *Vierteljahrschrift der Naturforshenden Gesellschaft in Zürich*, 63 (1918), p. 214-228.

SUTER, H. : Die Abhandlung des Abu Kamil Shoga` b. Aslam über das Fünfeck und Zehneck. *Bibliotheca Mathematica, dritte Folge* 10 (1909-1910), p. 15-42.

SUTER, H. : Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloïdes von el-Ḥasan b. al-Ḥasan b. el-Haitham, *Bibliotheca Mathematica*, 3, Folge 12 (1911-1912), p. 289-332.

SUTER, H. : Die Abhandlungen Thabit b. Kurras und Abu Sahl al-Kuhi's über die Ausmessung der Paraboloide, *Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen* 48-49 (1916-17), p. 186-227

SUTER, H. : Die Kreisquadratur des Ibn al-Haitam. *Zeitschrift für Mathematik und Physik, historisch-litterarische Abteilung* 44 (1899), p. 33-47.

SUTER, H. : Über die Ausmessung der Parabel von Thabit ibn Kurra al-Harrani. *Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen* 48-49 (1916-17), p. 65-80.

TOOMER, G. J. : *Apollonius Conics, Books V-VII. The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banu Musa*, 2 vols. New York, Springer Verlag, 1990.

TURK, A. : *El reino de Zaragoza en el siglo XI de Cristo (V de la Hégira)*, Madrid, Instituto Egipcio de Estudios Islámicos en Madrid, 1978.

VITRAC, B. : *Les irrationnelles non ordonnées d'Apollonius*. In Euclide : Les Éléments, VITRAC, B. (trad.), Paris, Presses Universitaires de France, Vol. 3, 1998, p. 399-411.

WIEDEMANN, E. : Ibn al Haitams schrift über parabolische Hohlspiegel, *Bibliotheca Mathematica*, 3, Folge 10 (1909-10), p. 201-237. In SEZGIN, F. (édit.) : WIEDEMANN, E. : Gesammelte Schriften zur Arabish-Islamischen Wissenschaftsgeschichte, Frankfurt, Institute for the History of Arabic-Islamic Sciences, 1984, Vol. I, p. 369-405.

WOEPCKE, F. : Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après des indications tirées d'un manuscrit arabe, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, Vol. 14 (1856), p. 658-720.

WOEPCKE, F. : *Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques*, F. Sezgin (édit.), Frankfurt, 1984.

WOEPCKE, F. : *L'Algèbre d'Omar al-khayyāmī*, Paris, Benjamin Duprat, 1851.

WOEPCKE, F. : *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres Bibliothèques*, Vol. 22 (1874), p. 1-175.

WOEPCKE, F. : Trois traités arabes sur le compas parfait, *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale*, 22 (1874), Addition, p. 1-115.

YOUSCHKEVITCH, A.-P. : *Les mathématiques arabes (VIII^e^-XV^e^ siècles)*, Paris, Vrin, 1976.

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE LILLE
Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Laboratoire Paul Painlevé - U.M.R. CNRS 8524

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 17 novembre 2008

par :

BOUZARI Abdelmalek

pour l'obtention du :

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DE LILLE
(Spécialité : Histoire des mathématiques)

La géométrie des coniques dans la tradition de l'Occident Musulman à travers le *Kitāb al-Istikmāl* [Livre de l'accomplissement] d'al-Mu'taman (m. 1085)

Volume II

Traduction française - Edition

Composition du Jury :

AUSEJO Elena, Université de Saragosse (Rapporteur)
BKOUCHE Rudolf, Université de Lille1 (Examinateur)
DJEBBAR Ahmed, Université de Lille1 (Directeur de thèse)
HOGENDIJK Jan Peeter, Université d'Utrecht (Examinateur)
SESIANO Jacques, Ecole polytechnique de Lausanne (Rapporteur)
TAZZIOLI Rossana , Université de Lille1 (Présidente)

TABLE DES MATIERES

Volume I

<u>VOLUME II</u>

F-TRADUCTION FRANÇAISE

La troisième espèce de la quatrième espèce sur les sections de cylindre et de cônes circulaires

Et elle se subdivise en deux sections : La première section sur l'existence des sections et leurs premières propriétés, sans relations des unes avec les autres.

La seconde section sur les propriétés des lignes et des angles des sections en relation les unes avec les autres.

<Définitions> :

[1] Si <on a>, dans deux plans parallèles, deux cercles égaux et fixes et <si> on y mène deux diamètres parallèles et que l'on joigne les deux extrémités des deux diamètres, d'un même côté, avec une ligne droite, et que les deux diamètres tournent, avec la ligne droite qui joint leurs deux extrémités sur leur périmètres, autour de leurs centres dans leurs plans et en <restant> parallèles, jusqu'à ce qu'elle revienne au point d'où a commencé le mouvement, j'appelle le solide entouré par les deux cercles et <par> ce qui est entre elles, et qui a été dessiné par la ligne passant par leurs périmètres, un **cylindre**.

[2] Et j'appelle les deux cercles sur lesquels a tourné <la ligne droite> les deux **bases** du cylindre.

[3] Et j'appelle la ligne qui est tournée **l'arête** du cylindre.

[4] Et j'appelle la ligne qui joint les deux centres des deux cercles **l'axe** du cylindre**.**

[5] Et j'appelle le cylindre **droit** lorsque son axe est perpendiculaire <à la base> et je l'appelle oblique lorsque son axe n'est pas perpendiculaire à la base

[6] Et si <on a> un cercle et un point fixe qui n'est pas dans son plan et qu'on le joigne au périmètre du cercle à l'aide d'une ligne droite sortant <au-delà> du point fixe, et que l'on tourne la ligne droite sur le périmètre du cercle jusqu'à ce qu'elle revienne à l'endroit d'où elle a commencé le mouvement, j'appelle **surface conique** chacune des deux surfaces dessinées par la droite tournée une fois, chacune faisant face à l'autre et pouvant d'être prolongée indéfiniment, lorsque le prolongement de la ligne droite est infini.

[7] Et j'appelle le point fixe **sommet** de chacune des deux surfaces coniques.

[8] Et j'appelle la ligne droite qui passe par ce point et par le centre du cercle : **axe de la surface conique**.

[9] Et j'appelle la figure de la surface conique qui entoure le cercle et qui <est> entre le point du sommet et le cercle : **cône**.

[10] Et j'appelle le point qui est le sommet de la surface supposée : **sommet du cône**.

[11] Et j'appelle la ligne droite qui sort du sommet du cône vers le centre du cercle : **axe du cône**.

[12] Et j'appelle le cercle : **base du cône**.

[13] Et j'appelle le cône **à angles droits** lorsque son axe est perpendiculaire à sa base. <Et je l'appelle **oblique** si son axe n'est pas perpendiculaire à sa base.

[14] <Si> une ligne courbe quelconque est dans une surface plane et que, d'un de ses points, on mène dans son plan une ligne droite qui coupe en deux moitiés toutes les lignes menées de la ligne courbe, dont les extrémités aboutissent à elle et qui sont parallèles à une ligne donnée, j'appelle cette ligne droite un **diamètre** à cette ligne courbe.

[15] Et j'appelle l'extrémité de cette ligne droite qui est sur la ligne courbe **un sommet** de la ligne courbe.

[16] Et j'appelle les lignes parallèles que nous avons décrites : les **lignes ordonnées** de ce diamètre

[17] Et de même, s'il y a deux lignes courbes dans un même plan, j'appelle ce qui est situé entre les deux lignes courbes, de la ligne droite qui coupe en deux moitiés toutes les lignes droites sortant dans chacune des lignes courbes et parallèles à une certaine ligne : **un diamètre transverse**.

[18] Et j'appelle les deux extrémités du diamètre transverse qui sont sur les deux lignes courbes : **sommets des deux lignes courbes**.

[19] Et j'appelle la ligne droite qui est située entre les deux lignes courbes et qui se dresse sur le diamètre transverse et qui coupe en deux moitiés toutes les lignes droites parallèles au diamètre transverse, lorsqu'elles sont menées entre les deux lignes courbes jusqu'à ce qu'elles aboutissent aux deux lignes courbes : **diamètre droit**

[20] Et j'appelle ces lignes parallèles les **lignes ordonnées** de ce diamètre droit.

[21] Et si deux lignes droites sont deux diamètres à une ligne courbe ou à deux lignes courbes et que chacun des deux coupe en deux moitiés les lignes parallèles, je les appelle : **diamètres conjugués**.

[22] Et j'appelle la ligne droite lorsqu'elle est un diamètre à la ligne courbe ou à deux lignes courbes et qu'elle coupe les lignes parallèles qui lui sont des lignes ordonnées, selon des angles droits, **un axe de la ligne courbe ou des deux lignes courbes.**

[23] Et j'appelle les deux diamètres lorsqu'ils sont conjugués et que chacun des deux coupe les lignes parallèles de l'autre selon des angles droits, **axes conjugués** de la ligne courbe ou des deux lignes courbes.

<Proposition IV. 3. 1(1) :>

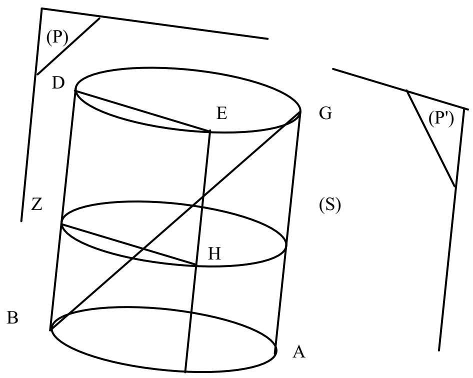
/91b/ <Pour> tout solide cylindrique ou conique coupé par un plan[1] selon son axe ou selon l'une de ses arêtes, la section générée est une surface entourée de ligne droites.

Et il est impossible que la surface circulaire soit coupée par un plan qui ne passe pas par l'une de ses arêtes et dont la section commune à lui et à la surface circulaire soit entourée de lignes droites.

<Exemple de cela :>

Soit une surface cylindrique ou conique de base le cercle (AB) et de sommet le point G; et qu'elle soit coupée par un plan passant par l'une de ses arêtes, et c'est AG; et que le plan soit coupé selon (GAB).

Je dis que la section générée dans la surface circulaire est entourée par des lignes droites. Et la surface circulaire n'est pas coupée par un plan qui ne passe pas par l'une de ses arêtes et qui soit entouré par des lignes droites.



<Preuve de cela : >

Puisque le cercle AB est une surface plane et que la surface sécante est aussi plane, la ligne AB, qui est leur section commune, est donc une droite.

Si la surface circulaire est un cylindre et que l'on sorte du point B une arête, elle sera donc parallèle à la ligne AG, puisque toutes ses arêtes sont parallèles parce qu'elles sont parallèles à l'axe. Son arête issue du point B est donc dans la surface (GAB), puisque deux lignes parallèles quelconques sont dans un même plan. Donc l'arête issue du point B est la section commune à la surface (GAB) et à la surface circulaire.

Et je dis qu'il est impossible qu'un plan qui coupe une surface circulaire et qui ne passe pas par une de ses arêtes soit entouré par des lignes droites.

Preuve de cela :

Nous marquons sur la section commune au plan et à la surface circulaire les deux points D, E. Et d'eux, nous menons deux des arêtes de la surface circulaire, et ce sont les arêtes DZ, EH. Et nous joignons Z, H. Les lignes DZ, EH, ZH sont alors dans un même plan. Et puisque la ligne ZH est à l'intérieur de la surface circulaire, la ligne joignant E, D est donc à l'intérieur de la surface circulaire. La section commune à la surface circulaire et au plan ne sera donc pas

[1] - Al Mu'taman utilise l'expression "*saṭḥ mustawin*" [surface plane]

une <ligne> droite, parce que la ligne DE est rectiligne et elle est dans le plan (EZ) qui est à l'intérieur de la surface circulaire.

[Corollaire] :

Et là, il apparaît que, <pour> deux points quelconques sur une surface circulaire, qui ne sont pas dans l'alignement <par rapport> au sommet de la surface circulaire, la ligne les joignant est à l'intérieur de la surface circulaire. Et si elle est prolongée d'une manière rectiligne, elle sera à l'extérieur de la surface.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<Proposition IV. 3. 1(2) :>

<Pour> tout solide de cylindre ou de cône qui est coupé par un plan qui passe par l'axe, si on repère un point sur l'intersection commune à ce plan et au plan de sa base ou <sur> la ligne qui la prolonge <d'une manière> rectiligne, et qu'on mène à partir d'elle une perpendiculaire dans le plan de la base; puis on repère un point sur la surface de l'enveloppe circulaire <en dehors du> côté du plan passant par l'axe, et on mène de ce point une ligne parallèle à la ligne perpendiculaire à la base ou à son prolongement; alors, la ligne menée de ce point aboutit à la surface menée sur l'axe. Si elle est menée vers l'autre direction jusqu'à ce qu'elle aboutisse à l'enveloppe circulaire, alors elle est divisée sur la surface en deux moitiés.

Exemple de cela :

<Soit> la surface d'un cylindre ou d'un cône <avec> à son sommet le point A, sa base étant le cercle BG. Elle est coupée par un plan qui passe par son axe, et qui est ABG, de sorte que BG soit son diamètre. On repère le point N sur la ligne BG, qui est l'intersection commune à lui et à la surface du cercle BG, ou bien sur la ligne qui prolonge la ligne BG <d'une manière> rectiligne. Et on mène, à partir d'elle, une perpendiculaire à lui dans le plan du cercle, et c'est NM. Et on repère un point D sur la surface du solide ABG en dehors des deux côtés menés des deux points B, G. Et on mène à partir de lui une ligne parallèle à la ligne NM, et c'est la ligne DE. Si DE est prolongée d'une manière rectiligne, elle aboutit à la surface ABG. Et si elle est prolongée jusqu'à ce qu'elle aboutisse à la surface circulaire, de l'autre côté, elle sera alors divisée en deux moitiés par le plan BAG.

Preuve de cela :

Nous sortons du point D l’arête de la surface circulaire. Que ce soit DK qui rencontre le cercle BG au point K. Et nous sortons du point K une perpendiculaire KTL à la ligne BG qui rencontre la ligne BG au point T.

La ligne KTL est alors parallèle à la ligne NM qui est parallèle à DE. DE est donc parallèle à KTL.

Et nous sortons du point T la ligne TZ.

Dans le cylindre, elle est parallèle à la ligne DK.

Dans le cône, nous joignons le point T au point A qui est son sommet. Il est clair que la ligne DE, si elle est prolongée, aboutit à la ligne TZ. Qu’elle aboutisse au point Z parce qu’elles sont sur un même plan.

Et nous sortons également, du point L, l’arête LH. Elle sera dans le plan DKT. Si on prolonge la ligne DZ, elle aboutit à elle. Qu’elle aboutisse au point H.

Dans le cylindre, DKLH est un parallélogramme. TL sera donc égal à ZH, et la ligne TK à la ligne ZL, et la ligne KT à la ligne TL. La ligne ZH est donc égale à la ligne ZD.

Dans le cône, le rapport de TK à ZD sera comme le rapport de TL à ZH. Et si on permute, le rapport de KT à TL sera comme le rapport de DZ à ZH. Or KT est égal à TL. Donc DZ est égale à ZH.

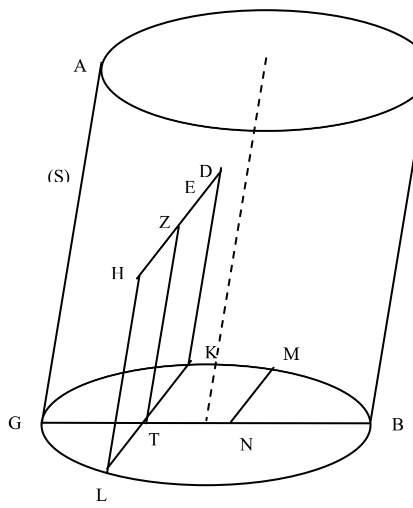
< Corollaire :>

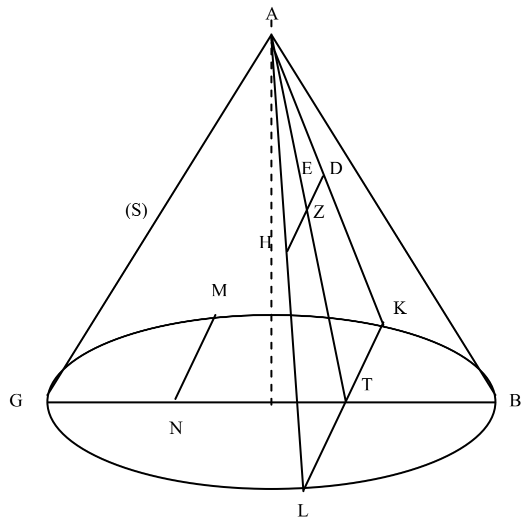
De là, il apparaît que tout solide de cylindre ou de cône qui est coupé par un plan passant par son axe et par un autre plan dont son intersection commune avec le plan de la base du solide est perpendiculaire à l’intersection commune au plan passant par l’axe et au plan de la base, alors les lignes qui sont menées de n’importe quel endroit de la ligne qui entoure la section engendrée dans la surface circulaire, et parallèles à cette ligne perpendiculaire à l'intersection commune au plan passant par l'axe et à la base du solide, si elles sont prolongées d'une manière rectiligne jusqu'à ce qu'elles tombent sur la ligne entourant la section de l'autre côté, elles seront séparées en deux moitiés sur l'intersection commune du plan sécant et du plan passant par l'axe.

Si la surface circulaire est droite, la ligne qui est menée <perpendiculairement> sur l'intersection commune au plan de la base et au plan passant par l'axe, lui est perpendiculaire.

Et si la surface circulaire n'est pas droite mais oblique, cette ligne ne sera pas perpendiculaire à la ligne commune, sauf si le plan passant par l'axe est perpendiculaire à la base de la surface circulaire.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.





<Proposition IV. 3. 1(3) :>

Chaque surface d'un cylindre ou d'un cône qui est coupée par un plan passant par son axe[2] <de sorte> qu'il soit perpendiculaire à sa base[3], et qui est coupée aussi par un plan perpendiculaire au plan qui passe par l'axe <de telle sorte> que son intersection commune avec le plan passant par l'axe sépare du plan passant par l'axe // [92b], du côté de son sommet, une surface et des angles égaux aux angles du plan passant par l'axe, d'une manière parallèle ou antiparallèle[4], alors la section engendrée sur la surface latérale[5] sera un cercle. Et il n'est pas possible que la surface latérale soit coupée par un plan selon une position autre que celle-ci et qui engendrerait un cercle.

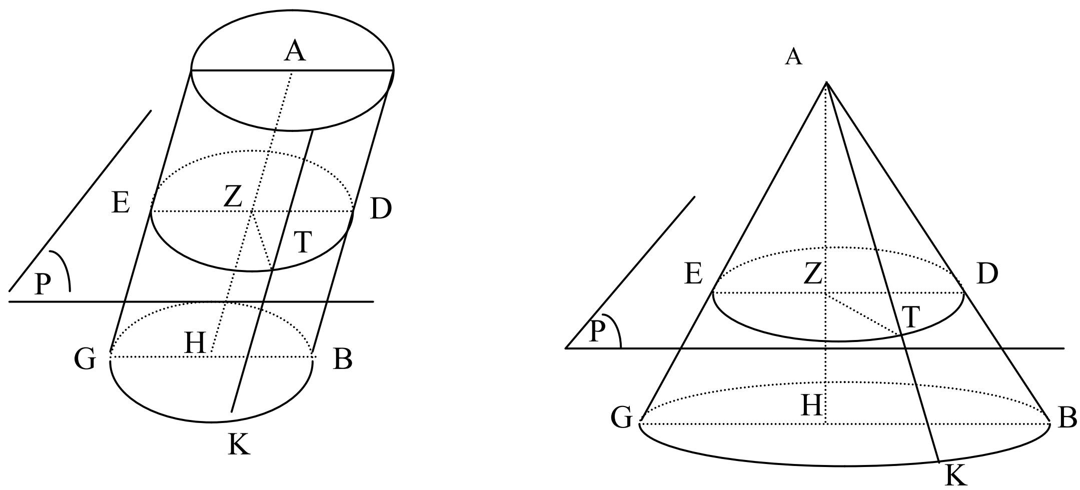
Exemple de cela :

La surface d'un cylindre ou d'un cône sur lequel il y a ABG, son sommet est le point A et sa base le cercle BG. Elle est coupée par le plan ABG passant par son axe et perpendiculaire au cercle BG. L'intersection commune à lui et à la base du solide est la ligne BG. Elle est coupée par un autre plan perpendiculaire au plan qui passe par l'axe. L'intersection commune à lui et au plan ABG, <qui est> la ligne DE, sépare du plan ABG la surface ADE <de sorte> que les deux angles qui sont aux points D, E, du plan ADE, soient égaux aux deux angles B, G, d'une manière parallèle ou antiparallèle.

Je dis :

1- que la section DTE est un cercle;

2- et qu'il n'est pas possible qu'un plan coupe le solide ABG selon une position autre que celles-ci et qu'il en résulte un cercle.



La preuve de cela :

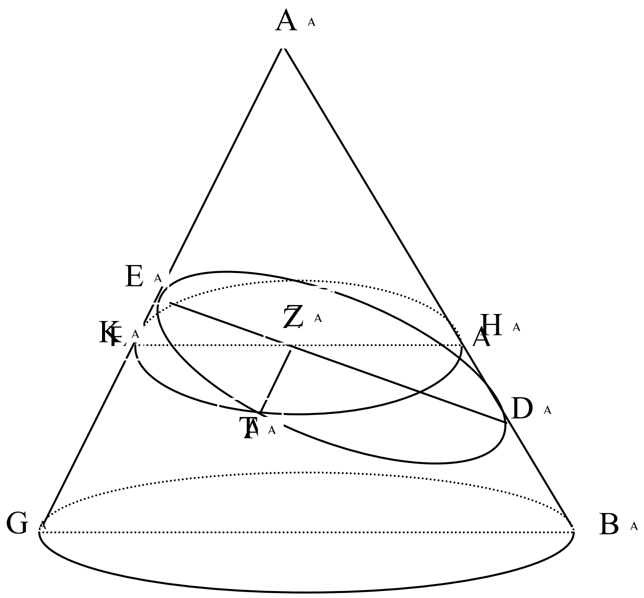
1a- est que si les deux angles D, E du plan DAE sont égaux aux deux angles B, G, par parallélisme, et que chacun des deux plans DTE, BGK est perpendiculaire au plan ABG et qu'ils coupent l'axe <respectivement> aux points Z, H, marquons sur la section DTE le point T, de position quelconque, et menons l'arête[6] sur la surface circulaire. Elle rencontre le cercle BG en K. Joignons les points T, Z <et> H, K.

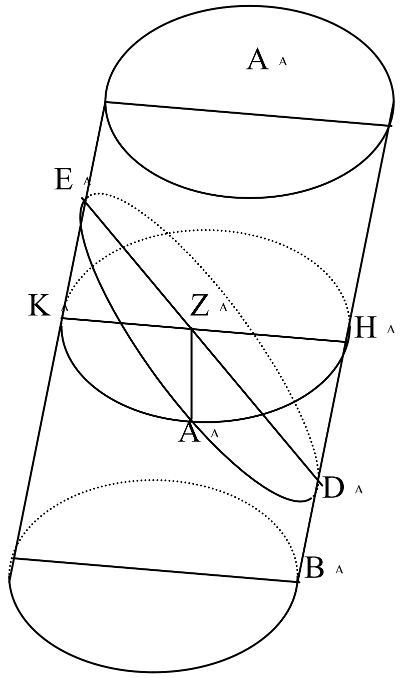
[2] - L'auteur utilise le terme *sahm* [flèche] pour désigner *l'axe*.
[3] - L'auteur utilise l'expression : "*vertical à sa base selon des angles droits*".
[4] - L'auteur utilise le terme *mukhālif* [en <sens> contraire]. Nous l'avons traduit par le terme consacré.
[5] - L'auteur utilise le terme *mustadīr* [circulaire]. Nous l'avons traduit par le terme consacré.
[6] - L'auteur utilise le terme *ḍilᶜ* [côté] pour désigner *l'arête*.

Dans le <cas du> cylindre, la ligne TK est alors parallèle à la ligne ZH et lui est égale. La ligne ZT est donc parallèle à la ligne HK et lui est égale. Et la ligne HK est égale à la ligne HB ; et HB est égale à la ligne ZD. La ligne ZD est donc égale à la ligne ZT.

Dans le <cas du> cône, si on mène l'arête KT, elle passe par le point A. Le rapport de HA à AZ est comme le rapport de HK à ZT. Et le rapport de HA à AZ est comme le rapport de BH à ZD. Et KH est égal à BH. Donc ZT est égal à ZD. La section ZD est donc un cercle.

1b- Et si l'angle D de la surface DAE est égal à l'angle G, et l'angle E y est égal à l'angle B, par antiparallélisme, je dis que la section engendrée est également un cercle.





<La preuve de cela :>

Est que nous marquons sur elle le point T quelle que soit sa position. Et nous menons, à partir d'elle, une perpendiculaire sur le plan BAG. Elle tombe sur la ligne DE. Que ce soit TZ. Menons sur la perpendiculaire TZ un plan parallèle au cercle BG. Il engendre sur la surface latérale un cercle, et c'est HTK. Son diamètre est HK. Puisque l'angle D est égal à l'angle G et l'angle K égal aussi à l'angle G et que les deux angles qui sont au point Z sont égaux, le rapport de DZ à ZK est comme le rapport de HZ à ZE. La surface DZ par ZE est donc égale à la surface HZ par ZK. Or la surface HZ par ZK est égale au carré de ZT. Donc la surface DZ par ZE est égale au carré de ZT.

On montre, de la même <manière> que <pour> tout point marqué sur la section DTE, <si> l'on mène une perpendiculaire sur la ligne DE, le produit de l'une des deux parties du diamètre DE par l'autre est égal au carré de la ligne menée de ce point. La section DTE est donc un cercle.

Et je dis qu'il n'est pas possible que le solide BAG soit coupé par un plan selon une autre position et <tel que> la section engendrée soit un cercle.

Si <cela> était possible, que ce soit le cercle DTE. Et que l'intersection commune à lui et au cercle BG soit la ligne ZH. Et soit le point K le centre du cercle BG. Nous menons de lui une perpendiculaire à la ligne ZH sur laquelle il y a HK. Menons des deux points H, K sur l'axe un plan qui engendre sur la surface circulaire la surface ABG.

Comme les points D, E, H sont sur la surface D[7], si l'angle D n'est pas comme l'angle G, ni l'angle E comme l'angle B, par antiparallélisme, il n'est pas possible que la section DTE soit

[7] - Ici s'arrête le texte de la copie de *l'Istikmāl* du manuscrit de Copenhague. La suite correspond à la rédaction de la partie manquante telle qu'on la trouve dans l'*Ikmāl*, d'Ibn Sartāq.

un cercle parce que, si elle était un cercle, le produit de DZ par ZE serait comme le produit de TZ par ZL, c'est-à-dire comme le produit de KZ par ZH. Donc, le rapport de DZ à KZ serait comme le rapport de ZE à ZH; et les deux angles opposés de K seraient égaux. Le triangle KZE serait alors semblable au triangle DZH; et l'angle D serait comme l'angle K, plutôt comme l'angle G; et l'angle E comme l'angle H, plutôt comme l'angle B. La section serait alors antiparallèle. Or elle a été supposée le contraire <de cela>. Ceci est absurde.

Puis, malgré le fait que l'angle A est comme l'angle E et l'angle B comme l'angle K, par antiparallélisme, que le plan GDE soit perpendiculaire au plan de la base. Puisque GDE est perpendiculaire au plan de la base et que la ligne ZH a été menée du point Z de l'intersection commune à la base et à GDE, perpendiculairement à l'intersection DTZ dans le plan de la base, pour cela la ligne ZH sera perpendiculaire au plan GDE. L'angle AZH sera donc aussi droit comme l'angle DZH. Et, pour cela, l'angle AKY sera droit et YK perpendiculaire également à AB, comme il est perpendiculaire à MN.

Et il est nécessaire aussi, comme cela a été évoqué dans l'énoncé, que le plan AYB soit perpendiculaire au plan GDE parce qu'il passe par la perpendiculaire ZH. Et puisque le produit de AK par KB est comme le carré de YK et aussi comme le carré de KL, et que les deux angles K sont droits, chacun des <segments> est une moyenne proportionnelle entre AK et KB.

Et si nous imaginons de joindre les lignes AY, YB, AL, LB, chacun des deux triangles AYB, ALB sera à angle droit en Y ou L. Et, pour cela, le cercle circonscrit au triangle AYB passe aussi par le point L et il est circonscrit au deux triangles ensemble.

De même, nous démontrons que toute ligne, menée de n'importe quel point situé sur le périmètre de la section AYB, tombera sur la ligne AB. Et si la section est de position antiparallèle et que le plan GDE est perpendiculaire au plan de la base, le produit de ce qui est situé entre A et l'aboutissement de cette ligne sur AB par ce qui est situé entre lui et B, est comme le carré de cette ligne perpendiculaire à AB. Et les deux triangles imaginés sont à angles droits. Et pour cela le cercle circonscrit au triangle AYB lui-même sera circonscrit à l'ensemble de ces triangles imaginés, même s'ils ne sont pas des couples.

Et du moment qu'il n'est pas possible de supposer une ligne du périmètre de la section AYB vers la ligne AB, parmi les lignes ordonnées, de sorte que son extrémité sorte au <delà du> périmètre du cercle, je veux dire <du cercle> circonscrit au triangle AYB, ou bien qu'il n'arrive pas à atteindre son périmètre, le cercle circonscrit au triangle AYB coïncide avec la section et son périmètre avec son périmètre. La section est donc un cercle. Et il est claire que son diamètre est la ligne AB puisqu'elle passe par le milieu de toutes les perpendiculaires qui sont ses cordes.

Menons de B la ligne BSO parallèle au diamètre DTE et rencontrant l'axe en S. Et que l'intersection de l'axe et de la ligne ABQ.

Dans le cylindre, à cause du parallélisme de l'axe et des côtés, BS sera comme SO et le rapport de BS à SO sera comme le rapport de BQ à QA. Donc BQ est comme QA. Donc Q est un centre et il est sur l'axe.

Dans le cône, le rapport de DT à OS est comme le rapport de TE à SB. Donc BS est comme SO. Et si BQ était comme QA, le rapport de BQ à QA serait comme le rapport de BS à SO. SQ serait donc parallèle à OA, alors qu'elle la rencontre en G. Ceci est absurde.

Il n'y a donc pas, dans le cône, le centre du cercle de la section sur l'axe puisqu'il est sur AB et ce n'est pas Q. De même, si le plan GDE n'est pas perpendiculaire au plan de la base et que l'angle A est comme l'angle E et l'angle B comme l'angle D, il n'est pas possible que la section AYB soit un cercle parce que, comme le plan GDE est incliné sur le plan de la bse, la ligne ZH est inclinée sur le plan GDE puisque si ZH était une perpendiculaire au plan GDE, la base serait perpendiculaire à lui. Ceci est absurde.

La ligne ZH sera inclinée sur la ligne ABZ parce que si elle lui était perpendiculaire alors qu'elle est <déjà> perpendiculaire à la ligne DEZ, elle serait perpendiculaire au plan GDE. Ceci est absurde.

Et si ZH s'incline sur ABZ, toutes les lignes parallèles à ZH sortant du périmètre de la section AYB s'inclineront sur la ligne AB. Alors, à cause de l'égalité des angles par antiparallélisme, le produit de AK par KB, par exemple, sera égal au carré de YK. Mais à cause de l'inégalité des deux angles K, si on joint AY, BY, les deux triangles AKY, BKY ne seront pas semblables. Donc, l'angle Y ne sera pas droit. C'est plutôt l'angle Y qui sera antiparallèle à un autre angle qui est sur l'arc AYB résultant d'une autre ligne parmi les lignes ordonnées. Ce sont ces angles qui sont d'un même côté par rapport au diamètre de la section qui seront tous antiparallèles. Et il existe, pour chacun d'eux, un angle égal dans l'autre région, résultant d'une ligne autre que celle qui l'a engendré, et c'est celle dont la distance de son aboutissement par rapport à cette extrémité du diamètre est comme, par exemple, la distance de cette ligne à cette extrémité. Alors, chaque quadrilatère à côtés opposés égaux sera circonscrit par un cercle qui ne passe pas par les deux points des deux angles d'un autre quadrilatère. Et, pour cela, un même cercle n'entoure pas l'ensemble des lignes ordonnées. Donc, la <ligne> courbe qui passe par leurs extrémités n'est pas le cercle. Et la section n'est pas un cercle.

Donc, la négation de l'orthogonalité du plan GDE sur la base est une <conséquence> nécessaire de la négation du fait que la section est un cercle. Et il a été démontré que la négation du fait que la section est dans une position antiparallèle nécessite la négation du fait qu'elle est un cercle. Donc la négation des deux choses nécessite sa négation selon la première démarche. Sauf que dans la démonstration du <fait que> la négation de l'antiparallélisme nécessite la négation du cercle, nous n'avons pas eu à <considérer que> GDE est perpendiculaire ou non à la base. Elle est en fait générale.

Et toi tu sais qu'il est possible que le diamètre de la section, qui est la ligne AB, tombe entre le diamètre de la base, qui est DE, et le sommet. Il est possible qu'il tombe en dessous de lui et il est possible qu'il le coupe comme il a coupé le diamètre du cercle MYN. Quant à la position antiparallèle, elle peut avoir lieu dans les cônes et les cylindres inclinés. Et cela parce que, comme l'angle A est comme l'angle E et l'angle B comme l'angle D, si le solide était droit, les deux angles T seraient droits. Or la ligne GT est commune et DT est comme TE. L'angle D est donc comme l'angle E. L'angle A sera donc, égal à l'angle D comme il est égal à l'angle E. De même, l'angle Q sera égal à l'angle E. Il <découle> nécessairement de chacun des deux <cas> que AB est parallèle à DE. Or elle la rencontre en Z par hypothèse. Ceci est absurde. Donc le solide GDE n'est pas droit. Et c'est ce qui est cherché. Et cette <partie> est une rédaction. Et c'est ce que nous voulions.

<Proposition IV. 3. 1(4) : >

Si un plan coupe un cône ou un cylindre sans passer par l'une des arêtes et sans être parallèle à la base[8], de sorte qu'il coupe d'un même côté du sommet, les deux côtés du triangle ou du quadrilatère et que la perpendiculaire à l'intersection[9] <du triangle ou du quadrilatère> avec la base soit l'intersection de cette <dernière> avec le plan coupant, et <qu'elle soit> sur son diamètre ou sur son prolongement à partir de l'une des deux extrémités, <alors> toute ligne menée du périmètre de la section vers son diamètre, et parallèle à la perpendiculaire indiquée, est en puissance d'une surface appliquée à une ligne dont le rapport du diamètre de la section à elle est, dans <le cas> du cylindre, comme le rapport du carré du diamètre de la section au carré du diamètre de la base. Dans <le cas> du cône, <elle est> comme le rapport du carré d'une ligne menée du sommet du cône parallèlement au diamètre de la section et tombant sur la ligne prolongée du diamètre de la base à l'une de ses extrémités au produit de ce qui est situé entre son lieu et l'un de ses deux côtés par ce qui est situé entre lui et l'autre côté. Et la largeur de la surface appliquée à eux deux est ce qui, du diamètre de la section, est situé entre le pied du côté parallèle et le sommet de la section, déficiente, par rapport à toute la ligne à laquelle est rapporté le diamètre de la section, d'une surface semblable au produit[10] du diamètre de la section par la ligne qui lui est rapportée.

<Définitions>

Tu as l'intuition que cette section est une ellipse et que : la <section> commune à lui et au <plan> passant par l'axe est son diamètre transverse; les lignes parallèles sont ses lignes ordonnées; la ligne qui lui est rapportée, si elle est élevée perpendiculairement sur l'extrémité du diamètre transverse -qui est le sommet de la section- est le diamètre droit, et elle est aussi appelée la ligne dont les lignes ordonnées sont en puissance d'elle; le milieu du diamètre transverse est le centre de la section; la ligne ordonnée menée <par le centre> est le diamètre conjugué; et, si elle lui est perpendiculaire, ce sera l'axe conjugué. On appellera ce diamètre le petit diamètre.

<Démonstration> :

Que le plan ELD coupe un cône ou un cylindre ABG en ne passant pas par l'une des arêtes, en coupant la base sur la ligne ZH. On mène le triangle ou le quadrilatère qui passe par l'axe, et on élève ZH perpendiculairement à son intersection avec la base. Que ce soit le triangle ou le quadrilatère ABG. Que ZH soit perpendiculaire[11] en H à la ligne BG. Nous joignons E, D, H. Ce sera une droite comme cela a été démontré précédemment. Nous supposons le point L n'importe où sur le périmètre de la section entre E et D. Et nous menons LM parallèlement à HZ. Nous menons de E une perpendiculaire ET à ED. Dans le cône, nous menons AK parallèle à EH.

Nous posons le rapport de ED à ET, dans le cylindre, comme le rapport du carré de ED au carré de BG et, dans le cône, comme le rapport du carré de AK au produit de KG par KB. Nous joignons DT et nous menons MCN parallèle à ET. Il rencontrera DT sur C. Nous menons CO, NT parallèles à EM et nous menons FMQ parallèle à BG.

A cause du parallélisme de LM, MQ à ZH, HB, la surface passant par FQL est un cercle, et le produit de FM par MQ est comme le carré de ML.

Et puisque le rapport de ED à ET, c'est-à-dire la rapport DM à MC, est comme le rapport du carré de ED au carré de BG, dans le cylindre, ou comme le rapport du carré de AK au

[8] - Le cas où le plan est antiparallèle n'est pas évoqué.
[9] - Mot à mot : "*à son intersection*".
[10] - Mot à mot : "*à la surface*", que nous traduirons par "*produit*" dans toutes les formulations mathématiques semblables.
[11] - mot à mot : "*élevé perpendiculairement*".

produit de KG par KB, dans le cône, je veux dire qu'il est composé du rapport de ED à BG et du rapport ED à BG, c'est à dire du rapport de DH à GH, dans le cylindre, et composé du rapport de AK à KB et du rapport AK à KG, dans le cône. Et le rapport ED à BG, dans le cylindre, est comme le rapport EM à MF à cause de l'égalité de BG à FQ et du parallélisme de EQ à FD. Et le rapport DH à HG est comme le rapport DM à MQ, à cause du parallélisme de MQ et GH.

Et le rapport de AK à KB, dans le cône, est comme le rapport de EH à HB, c'est-à-dire comme le rapport EM à MF. Et le rapport de AK à KG est comme le rapport de DH à HG, c'est à dire comme le rapport DM à MQ.

Le rapport DM à MC est donc composé du rapport de EM à MF et du rapport DM à MQ. Et le rapport DM à MC est comme le rapport du produit de DM par ME au produit de CM par ME parce que ME est la hauteur commune aux deux surfaces. Le rapport du produit de DM par ME au produit de CM par ME -qui est la surface MO- est donc composé du rapport DM à MQ et du rapport EM à MF.

<On a aussi> le rapport du produit de DM par ME au produit de FM par MQ -je veux dire au carré de LM- <qui> est composé du rapport de DM à MQ et du rapport de EM à MF. Le rapport du produit de DM par ME au produit de CM par ME, je veux dire à la surface MO, est comme le rapport du produit de DM par ME au carré de LM.

Le carré de LM, qui est une ligne ordonnée, est donc comme la surface MO, qui est appliquée à la ligne ET, déficiente de son tout de la surface CT qui est semblable au produit de DE par ET, parce qu'elle se situe sur son diamètre. Et ME, le supposé, est situé sur le diamètre de la section, entre la projection de M et le sommet de la section qui est E.

Et cela se montre ainsi pour toute ligne ordonnée.

Et nous avons dit que ET est le diamètre droit, que le milieu de ED est le centre de la section et que la ligne ordonnée issue de lui est le plus petit diamètre. Que l'on s'en souvienne.

<Remarques>

Et tu sais que les propriétés du cercle relatives aux lignes ordonnées sont celles de l'ellipse sauf que son diamètre droit est égal à son diamètre tranverse et cela parce que ses lignes ordonnées sont les moitiés des cordes perpendiculaires à son diamètre. Et les carrées de ces moitiés sont, pour chaque ligne, comme le produit, l'une par l'autre, des parties du diamètre situées entre son pied et l'extrémité du diamètre. Et chacune des deux extrémités de son diamètre est un sommet de la section. Et ce qui est situé entre le pied d'une perpendiculaire et l'extrémité du diamètre, de n'importe quel côté qu'il soit pris, est la largeur de la surface appliquée. Et la ligne à laquelle est rapporté le diamètre est aussi le diamètre.

Et si nous le voulons, nous menons, de l'extrémité du diamètre, une ligne perpendiculaire à lui et qui lui est égale, et nous la considérons comme son côté droit. Et le rapport du diamètre à elle sera le rapport d'égalité.

Et ce qui ne doit pas surprendre, c'est que les lignes ordonnées dans le cercle ne peuvent être que des perpendiculaires. Dans les autres sections, elles peuvent être perpendiculaires au diamètre transverse et peuvent ne pas lui être perpendiculaires.

Et dans le cercle parallèle, mais pas dans le cercle antiparallèle, il n'y a pas de ligne ZH à cause du parallélisme du plan sécant et de la base. Il y aura, à sa place, une perpendiculaire menée de n'importe quel point sur la ligne BG.

<Corollaire>

Et nous notons aussi, par déduction de cette proposition, que le rapport du carré de n'importe quelle ligne, parmi les lignes ordonnées, au produit des deux parties qui sont entre son pied sur le diamètre et les deux extrémités du diamètre, est comme le rapport du diamètre droit au <diamètre> transverse.

<Démonstration>

Et cela <est ainsi> parce que le rapport du carré de LM, par exemple, qui est comme le rapport de la surface MO, au produit de EM par MD, est comme le rapport de CM à MD, à cause de la hauteur commune EM. Il est donc comme le rapport TE à ED. De même, le rapport du carré d'une autre ligne parmi les lignes ordonnées au produit de l'un des deux segments qui sont entre son extrémité <sur le diamétre> et les deux extrémités du diamètre par l'autre, est comme le rapport ED à ET. Le rapport du carré de toute ligne ordonnée au produit de ses deux parties est comme le rapport du carré d'une autre ligne <ordonnée> au produit de ses deux parties. Et, par permutation, le rapport du carré de toute ligne ordonnée au carré de n'importe quelle autre ligne <ordonnée> est comme le rapport du produit des deux parties de cette ligne-ci au produit des deux parties de celle-là. Et c'est que nous voulions.

Rappels de certains aspects des sections coniques et d'autres prémisses.

Soit ABGD un cône ou un cylindre, <supposés> d'abord droits. Il a été vu que tout plan qui le coupe parallèlement à la base, comme le plan AD par exemple, y engendre un cercle. Qu'il soit coupé par le plan AHT qui rencontre sa base sur la ligne TI et qui coupe toutes les arêtes. Nous menons, du centre de la base, et c'est Z, la perpendiculaire à TI, et c'est ZT. Nous menons le plan EZT qui passe par l'axe EZ et par la perpendiculaire ZT. Il engendre le triangle ou le quadrilatère (ABGD) et l'intersection du plan coupant et de la base, qui est TI, sera perpendiculaire à l'intersection du plan de la base et du quadrilatère ou du triangle, et qui est (BGD). Et du fait que le cône ou le cylindre est droit et que les deux angles Z sont droits, les deux angles B, G, sont égaux, droits dans le cylindre et aigus dans le cône. Pour cela, il n'est pas possible que la section (AH) soit antiparallèle parce que l'angle A ou l'angle H ne sont pas égaux à l'angle G ou à l'angle B, selon ce qui précède.

Et puisque l'axe EZ est perpendiculaire au plan de la base, tout quadrilatère ou triangle qui passe par l'axe sera perpendiculaire au plan de la base. Et puisque la ligne TY est perpendiculaire à la ligne BGT dans le plan de la base, qui est perpendiculaire au plan du triangle ou du quadrilatère, la ligne YT sera perpendiculaire au plan passant par l'axe. L'angle ATY sera donc droit, comme l'angle BTY. Et, pour cela, toutes les lignes ordonnées, parallèles à la ligne YT et qui rencontrent le diamètre AH, seront perpendiculaires au diamètre AH.

Et puisque le rapport de AH à BG, dans le cylindre, est comme le rapport de HT à GT, et que HT est plus grand que GT, parce que c'est la corde de l'angle droit G, AH est toujours plus grand que BG. Le carré de AH est donc plus grand que le carré de BG. Et puisque le rapport de AH au diamètre droit, et que ce soit AM, est comme le rapport du carré de AH au carré de BG, AH est toujours plus grand que AM.

Quant au cône, on trace un cercle autour du triangle BEG et on mène EK parallèle à AH. Puisque ZE est l'axe sortant du milieu de la corde BG, il est un diamètre du cercle BEG. Si la ligne EK était tangente au cercle BEG, l'angle ZEK serait droit. Or l'angle Z est droit. La ligne EK serait alors parallèle à la ligne BG. Or elle la rencontre du côté de T à cause de sa rencontre avec AT qui est parallèle à EK de ce côté-là. Ce qui est absurde.

Il n'est donc pas possible que EK soit tangente au cercle BEG. Donc elle le coupe, ou plutôt elle coupe l'un des deux arcs BE, GE. Menons NES tangente au cercle en E. Elle est parallèle à BG parce que l'angle Z est droit et EZ est un diamètre. Et sa partie ES est située, par rapport à la ligne EK, dans le côté opposé à la ligne ZK. Si la ligne EK coupait l'arc BE, ES serait situé, par rapport à EK du côté de BK. Alors EK couperait ES puis rencontrerait BK. Il en découle que deux droites entourent un plan. Cela est absurde.

Donc EK ne coupe que l'arc EG. Qu'il le coupe en L. Puisque le rapport de AH au diamètre droit, et c'est AM, est comme rapport du carré de EK au produit de KG par KB, et que le produit de KG par KB est comme le produit de KL par KE, le rapport de AH à AM est comme le rapport du carré de EK au produit de KL par KE. Et puisque KL, dans une situation semblable à celle-ci, est toujours une partie de KE, le carré de EK est plus grand que le produit de EK par KL. Donc, le diamètre transverse AH est toujours plus grand que le diamètre droit AM.

Il a donc été démontré que les sections engendrées dans le cylindre droit se limitent au cercle engendré par le parallélisme et non par l'antiparallélisme. Son diamètre droit est toujours égal à son diamètre transverse et ses lignes ordonnées sont des perpendiculaires à son diamètre, comme tu le sais.

Dans le cas de l'ellipse, c'est différent. Ses lignes ordonnées seront aussi perpendiculaires à son diamètre transverse; et son diamètre transverse sera toujours plus grand que sont diamètre droit.

Dans le cône droit, le cercle est engendré aussi par la section parallèle et non par la section antiparallèle à cause de son impossibilité. Autrement, c'est une ellipse qui est engendrée, et ses lignes ordonnées seront également perpendiculaires à son diamètre transverse; et son <diamètre> transverse est plus long que son <diamètre> droit.

Et il est clair que si la section engendrée est une parabole ou une hyperbole, ses lignes ordonnées seront aussi perpendiculaires à son diamètre transverse parce qu'elles sont parallèles à la perpendiculaire au plan, et c'est TI. Et il est clair, dans leur cas, que leurs diamètres transverses se prolongent à l'infini, avec le prolongement des deux arêtes du cône, à cause du fait qu'ils ne rencontrent aucune des deux arêtes, conservant, dans la parabole, une distance déterminée et, dans l'hyperbole, une distance excédente. Et la surface se prolonge aussi jusqu'à l'infini avec le prolongement du diamètre.

Et il est clair aussi que le rapport de AH à AM, dans le cylindre, est comme le rapport doublé de AH à BG, ou plutôt comme le rapport du carré de HT au carré de GT et, dans le cône, comme le rapport de EK à KL.

Or le rapport du carré de EK au produit de BK par KG n'est pas comme le rapport du carré de AT au produit de BT par TG. Sinon, par permutation, le rapport du carré de EK au carré de AT, c'est-à-dire le rapport du carré de BK au carré de BT, serait comme le rapport du produit de BK par KG au produit de BT par TG. Alors, par permutation et séparation, le rapport du produit de BK par BG au produit de BK par KG, je veux dire le rapport de BG à GK, serait comme le rapport du produit de TB par BG au produit de TB par TG, je veux dire le rapport de BG à GT. GK serait donc égal à GT. Cela est absurde.

<Cône et cylindre inclinés>

Soit aussi le cône, ou le cylindre, incliné ABG et son axe EZ. Il n'est pas perpendiculaire au plan de la base. Nous menons, du centre Z, la perpendiculaire ZH au plan de la base et nous menons le plan EZH. Il engendrera le triangle ou le quadrilatère ABG. Puisqu'il passe par la perpendiculaire ZH, il sera élevé perpendiculairement au plan de la base. Puisque l'angle HZB est droit et que l'angle EZB n'est pas droit -qu'il soit, par exemple, obtus- l'angle ABG est donc aigu. Donc, dans le cylindre, l'angle G est obtus et la surface ABG est à côtés parallèles avec des angles non droits.

Dans le cône, puisque les deux côtés EZ, ZB sont égaux aux deux côtés EZ, ZG et que l'angle EZB est plus grand que l'angle EZG, le côté EG est plus court que le côté EAB; et l'angle EGB est plus grand que l'angle EBG. Le triangle EBG a donc les deux côtés et les deux angles différents.

Menons de Z, sur la ligne BG dans le plan de la base, la perpendiculaire ZNS et nous menons la plan EZN. Il engendre le triangle ou le quadrilatère MNS. Comme l'angle NZH est droit, puisque ZH est perpendiculaire au plan <de la base>, et que l'angle NZB est aussi droit, la ligne NZ est perpendiculaire au croisement des deux lignes BZ, HZ. Elle est donc perpendiculaire au plan BZH, je veux dire au plan ABG. L'angle NZE est également droit et l'axe EZ, qui est incliné par rapport au plan de la base, est perpendiculaire à la ligne NZS. Et le plan MNS qui passe par NS, la perpendiculaire à BG, est perpendiculaire au plan ABG.

Puisque l'angle EZN est comme l'angle EZS, les deux angles N, S sont égaux. Le quadrilatère MNS, dans le cylindre, est un rectangle et le triangle ENS, dans le cône, est isocèle. Et l'angle d'inclinaison du plan MNS sur le plan de la base est l'angle EZH parce que la <ligne> commune à la base et à MNS c'est la ligne NS. Et on a mené sur elle, du point Z, la perpendiculaire EZ dans le plan MNS et la perpendiculaire ZG dans le plan de la base; et l'angle EZH est aigu.

Menons aussi, dans le plan de la base, la ligne FZC non perpendiculaire à la ligne BG et menons le plan EZF. Il engendre un triangle ou un quadrilatère QFC. Puisque NZ est perpendiculaire au plan BZE, ou plutôt à BZH, ZF ne lui est pas perpendiculaire. Et puisque l'angle FZH est droit, l'angle FZE est non droit, sinon FZ serait perpendiculaire au plan BZH. Cela est absurde.

Et à cause de l'inégalité des deux angles EZF, EZC, les deux angles F, C sont différents. Dans le cône, le triangle EFC sera donc non isocèle et, dans le cylindre, le quadrilatère QFC ne sera pas un rectangle. Et à cause du passage du plan QFC par le point Z et son non passage par la perpendiculaire ZH, il sera incliné par rapport au plan de la base.

Imaginons que le cercle de la base tourne autour de l'un de ses diamètres, en conservant son centre, engendrant une sphère, et que cette sphère coupe la perpendiculaire ZH et l'axe EZ aux points H, T. Nous traçons l'arc de grand cercle (HT) et nous faisons tourner sur le pôle H, à une distance HT, le petit <cercle> (TK). Ce sera un petit <cercle> parce que l'angle HZT est aigu. Et nous imaginons, <comme> intersections des plans ABG, MNS, FCQ, des grands cercles, parce qu'ils passent par le centre Z. Et imaginons que l'axe ZT tourne autour du cercle TK, le point Z étant fixe, et que soit engendré un cône de sommet Z et de base TK.

Puisque ZH est une perpendiculaire issue du centre Z sur le grand cercle de la base et que H, qui est en lui, est sur la surface de la sphère, H est un pôle pour la base. Et puisque le grand cercle ABG, c'est-à-dire le grand cercle HZT, qui est séparé du plan ABG, est perpendiculaire au grand cercle MNS, comme nous l'avons dit, il passe donc par son pôle. Le grand cercle HT passe donc par les deux pôles de la base et par les deux pôles de MNS. Donc l'arc HT est le complément de l'inclinaison de MNS par rapport à la base.

On a aussi que l'ensemble infini des plans passant par l'axe EZ engendre dans le cône des triangles <en nombre> infini et dans le cylindre des quadrilatères <en nombre> infini, et dans la sphère que l'on a imaginée, il y a des grands cercles <en nombre> infini, intersections de ces plans.

Parmi eux, il y a le plan ABG lui-même et dont le type <de triangle> est celui à angles différents et passant par l'axe ZH en étant perpendiculaire à la base. Il y a aussi le plan MNS lui-même qui est isocèle et qui est incliné par rapport à la base et perpendiculaire au plan ABG qui est perpendiculaire à la base. La base et le plan MNS sont tous les deux perpendiculaires au plan ABG. Et les autres plans sont tous à angles différents et inclinés par rapport au plan de la base et sur le plan ABG.

<On a> aussi : puisque le petit <cercle> TK et le grand cercle MNS coupent, en un même point qui est T, le périmètre du grand cercle HT qui passe par les deux pôles de TK et par les deux pôles MNS, ils sont tangents en T. Et les grands cercles, en nombre infini, qui passent tous par le point Z, ou plutôt par le milieu du diamètre RT, chacun d'eux coupe le petit cercle TK.

Parce que si l'un d'eux lui était tangent, il le serait nécessairement au point T parce que les deux passent par lui. Le grand cercle HT, qui passe par le pôle H et qui touche T, passe aussi par le pôle de ce grand cercle qui est supposé tangent. Sa surface serait alors perpendiculaire à la sienne. Mais, le plan TZH, qui est le plan ABG lui-même n'est élevé perpendiculairement aux cercles qui passent par l'axe EZ que sur le plan MNS. Cela est absurde.

Donc, chacun des plans passant par l'axe, sauf le plan MNS, coupe le petit <cercle> TK. Qu'il le coupe selon le plan QFC sur la ligne droite TK. Nous joignons ZK et nous divisons TK en deux moitiés en I et nous joignons ZI.

Puisque la ligne TK est dans le plan du cercle TK intérieur à la sphère, le point I est à l'intérieur de la sphère. Nous prolongeons ZI jusqu'à L de la surface de la sphère et nous menons l'arc de grand cercle HL. Puisque le petit <cercle> TK est parallèle au grand <cercle> de la base, parce qu'ils ont en commun le point H, et <puisque> la surface TZK, je veux dire la surface QFC les coupe, l'intersection TK est parallèle à l'intersection FC. Et puisque dans le grand cercle TKZ, la ligne RZ sort du centre vers le milieu de la corde KT, elle est perpendiculaire à elle. L'angle KIZ est donc droit. Son complément est un des deux droits, et c'est l'angle IZF, qui est aussi droit. Et l'angle HZF est droit parce que HZ est perpendiculaire à la surface. La ligne FZ est donc perpendiculaire au plan du grand cercle HZL. F en est donc un pôle.

Et puisque chacun des deux cercles FZH, FZL passe par les deux pôles du cercle HL, le cercle HL passe par leurs quatre pôles. L'arc HL est donc l'inclinaison exacte entre les deux cercles FZH et FZL, comme l'arc HT était l'inclinaison exacte entre les deux cercles NZH et NZT.

Ou bien nous disons comme nous l'avons dit là : L'arc HT est celui qui est situé entre le pôle de la base et la région de FZL. Il est donc le complément de son inclinaison sur elle. Et puisque l'arc HT, qui sort du pôle H vers le point T à partir du périmètre du cercle TK, est plus grand que l'arc HL qui sort du pôle, il n'arrive pas au périmètre de TK et au pôle H. Le complément de l'inclinaison de la surface MNS sur la surface de la base est plus grand que le complément de l'inclinaison de la surface QFC sur elle.

L'inclinaison de MNS sur la base est plus grande et plus forte que l'inclinaison de QFC sur elle.

<Récapitulatif>

Il est donc apparu que :

* la surface QFC coupe le cône TZK sur les deux arêtes TZ, ZK et sur la base contenant <la droite> TK et ne passant pas par son axe.

* le plan THK, qui est perpendiculaire à la base, le coupe sur l'arête TI et il passe par l'axe ZH.

* le plan MNS passe par l'arête TZ du cône et il est tangent à sa surface latérale. Sinon, il l'aurait coupé et aurait alors coupé aussi sa base. Et ceci est absurde.

* Tout plan qui passe par l'axe EZ, et qui est autre que ces trois plans, coupe également le cône selon deux arêtes. Et sa base est sur une corde qui est leur base aux deux; et il ne passe pas par son axe.

* l'inclinaison du plan MNS, qui est tangent au petit <cercle> TK sur la base est plus grande et plus forte que son inclinaison sur elle.

<Lemme>

Menons aussi la ligne DZO. Et que l'angle BZO soit comme l'angle GZC. Si nous menons le plan EZO, il en résulte un triangle ou un quadrilatère et il coupe le cône TZH et le cercle TK. Que son intersection avec ce cercle soit la <ligne> droite TP. Nous divisons TP en deux moitiés par V et nous joignons ZV. Que le centre du petit <cercle> TK soit sur l'axe ZHR. Et nous joignons RV, RT.

Puisque le plan du petit cercle et le plan de la base sont parallèles et qu'ils sont coupés par les plans passant par l'axe EZ et par les lignes BZ, FZ, OZ, les lignes TP, TR, TK sont parallèles aux lignes OZ, BZ, FZ. Et l'angle OZF est comme l'angle PTK et les deux angles PTR, RTK sont comme les deux angles OZB, BZF. Les deux angles PTR, RTK sont donc égaux, les deux angles RIT, RVT sont droits et le côtéT est commun. Donc, RY est comme RP.

Et puisque ZR est comme ZV et les deux angles R sont droits, parce que ZR est un axe, les deux angles RZI, RZV sont égaux et l'angle RZV, comme cela a été montré, est le complément de l'inclinaison du plan passant par l'axe EZ et la ligne OZD sur la base. Le complément de l'inclinaison du plan EZO est égal au complément de l'inclinaison du plan EZF. Leurs deux inclinaisons sur la base sont aussi égales.

Donc, si deux <plans> quelconques passent par l'axe EZ des deux côtés de celui qui passe par lui et de la perpendiculaire, et si les angles de leurs deux intersections également avec la base et de l'intersection de celui qui passe par la perpendiculaire sont égaux, leurs deux inclinaisons sur la base sont égales.

Tout <plan> incliné, selon une inclinaison non totale, a un homologue de l'autre côté.

Et il est clair que si l'angle BZO est plus petit que l'angle GZC, l'inclinaison du plan POV sur la base est plus petit que l'inclinaison du plan QFC sur elle, je veux dire que le plan POV est plus proche de l'orthogonalité par rapport à la base que le plan QFC et cela parce que la ligne ZV, qui est le cosinus de l'angle d'inclinaison, serait plus courte que la ligne ZI.

Il apparaît donc clairement que :

* l'espèce du plan AZG qui passe par la perpendiculaire ZH est réduite à un seul élément.

* De même, l'espèce du plan MNS, qui est incliné sur la base d'une inclinaison complète, est réduite à un seul élément.

* Quant aux plans qui passent par l'axe, qui ne passent pas par la perpendiculaire ZH et qui ne sont pas inclinés d'une inclinaison complète sur la base, tous appartiennent à une seule espèce. Et si deux quelconques d'entre eux étaient aux deux extrémités avec des inclinaisons égales, ils se distingueront de deux autres à propos de leur inclinaison sauf que le jugement sur eux à propos des positions des sections sera le même. C'est pour cela que nous considérons l'ensemble comme une seule espèce ayant des éléments en nombre infini.

Ceci ayant été introduit et admis, nous disons : Que le plan ABG coupe le cône ou le cylindre incliné DEZ et rencontre la base sur GH en coupant toutes les arêtes. Nous menons du centre T la perpendiculaire TG à GH et nous menons le plan passant par l'axe DT et la perpendiculaire TG. Il engendre le triangle ou le quadrilatère DEZ avec la condition considérée qui est que l'intersection du <plan> coupant et de la base, qui est GH, soit perpendiculaire à l'intersection de la base et du triangle ou du quadrilatère, et c'est ZE.

Puisque le solide est incliné, le triangle ou le quadrilatère ne peut être que l'une des trois espèces qui a été explicitée.

Qu'il soit en premier le triangle, ou le quadrilatère, qui passe par la perpendiculaire au plan de la base et qu'il soit à angles inégaux. Et soit l'angle E aigu et le côté DE dans le cône plus long que le côté DZ. Il est possible que l'on mène, dans ce triangle ou ce quadrilatère, une base ZE, et nous supposons le point G sur ce qui lui est adjacent. Nous construisons l'angle AGZ, sur le point G de la ligne EG, égal à l'excès de l'angle BZE sur l'angle AZE. La ligne GA rencontre alors les deux côtés AE, BZ aux points A, B parce que les deux <angles> intérieurs Z, G ou E, G sont inférieurs à deux droits. Et nous menons de G sur EG la perpendiculaire GH dans le plan de la base et nous menons le plan AG.

Dans le cylindre : Puisque les deux angles intérieurs E, Z sont comme deux droits, que les trois angles E, G, A sont aussi comme deux droits et que l'ensemble des deux angles E, G est comme l'angle Z, parce que nous avons construit l'angle G comme excès de l'angle Z sur l'angle E, il reste l'angle Z comme l'angle E. Et le triangle AGE sera isocèle.

Il en est de même pour le triangle BGZ à cause de l'égalité des deux <angles> externes B, Z et des deux <angles> internes A, E. Et il reste AB comme EZ.

Et si l'angle BAE est comme l'angle EAB, l'angle externe A sera comme l'angle Z. Et l'angle externe B sera comme l'angle E, d'une manière antiparallèle.

Dans le cône : Puisque l'angle G avec l'angle E sont comme l'angle BZE, et que l'angle G avec l'angle ZBG sont également comme l'angle BZE, l'angle ZBG, ou plutôt l'angle ABD, est comme l'angle E. Et l'angle D est commun. Il reste l'angle A comme l'angle Z d'une manière antiparallèle.

Et puisque le triangle ou le quadrilatère est perpendiculaire à la base, les lignes ordonnées parallèles à GH sont perpendiculaires au diamètre AB. La section, dont le diamètre est AB, est un cercle et son diamètre transverse est comme le <diamètre> droit, comme ce qui a précédé.

Construisons l'angle EGI plus grand que l'excès de l'angle Z sur l'angle E et que GI coupe les deux côtés AE, BZ aux points I, K et qu'ils ne les rencontrent pas, sur le cône, au point D. Nous construisons aussi l'angle EGL plus petit que cet excès; et que GL coupe les deux côtés AE, BZ aux points L, M.

Puisque l'angle EZK est comme les deux angles ZKG, KGZ, et qu'il est plus petit que les deux angles EGK, GEA, l'angle externe K, ou plutôt l'angle KYE alterne-interne <par rapport> à lui, est plus petit que l'angle E. Et il reste, à la fois dans le cylindre et le cône, l'angle externe Y plus grand que l'angle Z.

<On a> aussi l'angle Z comme les deux angles M, G; et il est plus grand que les deux angles E, MGE. L'angle LMK est donc plus grand que l'angle E. Et il reste l'angle ALM plus petit que l'angle Z.

Et dans le cylindre : Puisque l'angle I est plus petit que l'angle E, le coté IG est plus long que le côté GE. De même, KG est plus long que GZ. Et puisque le rapport de IK à EZ est comme le rapport de KG à GZ, IK est plus long que EZ.

<Comme on a> aussi l'angle L qui est plus grand que l'angle E, le côté LG est plus court que le côté GE. De même, MG est plus petit que GZ et le rapport de LG à GE est comme le rapport de LM à EZ. LM est donc plus petit que EZ.

Et il est clair qu'est générée, par le plan IGH, une ellipse dont le diamètre est IK et dont les lignes ordonnées sont perpendiculaires à son diamètre.

Il est également généré par le plan LHG une ellipse dont les lignes ordonnées sont perpendiculaires à son diamètre.

Et puisque le rapport de IK au diamètre droit est comme le rapport de IK à EZ doublé et que, de même, le rapport de LM au diamètre droit est comme le rapport de LM à EZ doublé, le diamètre droit de la section IK est plus petit que son diamètre transverse. Et le diamètre droit de la section LM est plus grand que son diamètre transverse, comme le diamètre droit de la section AB est égal à son diamètre transverse.

Dans le cône : Nous traçons un cercle sur le triangle EDZ, nous menons DN parallèle à AG, DOS parallèle à IG, CDF parallèle à LG et nous menons ND du côté de D jusqu'à Q.

Puisque l'angle ADQ est comme l'angle DAG et que l'angle BDN est comme l'angle DBA, l'angle EDQ est comme l'angle EZD et l'angle ZDN est comme l'angle ZED. Et puisque la ligne QDN sort de chacune des extrémités de la corde DE ou de la corde DZ, la section EZD ou la section ZED sera capable d'un angle comme l'angle EDQ ou comme l'angle ZDN. Pour cela, DN sera tangent au cercle DEZ et le carré de DN sera comme le produit de EN par NZ, et le rapport du carré de DN au produit de EN par NZ, qui est le rapport d'égalité, est comme le rapport du diamètre transverse AB au diamètre droit qui lui est égal.

<On a> aussi, puisque GKI est situé, par rapport à GBA, du côté de DN, DOS qui est parallèle à GKI est situé, par rapport DN, du côté de GBA. Pour cela, il coupe l'arc DZ en O. Et puisque le rapport du carré de DOS au produit de ES par SZ, c'est-à-dire au produit de DS par SO, qui est plus petit que lui, est comme le rapport du diamètre transverse IK à son diamètre droit. Le diamètre transverse IK est donc plus long que son diamètre droit.

<On a> aussi, puisque GML est situé, par rapport à GBA, du côté de EZ, CDF est situé, par rapport à DN, à l'opposé du côté de DS. Et, pour cela, il coupe l'arc DE en C.

Et puisque le rapport du carré de DF au produit de EF par FZ, je veux dire au produit de CF par FD, est comme le rapport de LM au diamètre droit, et que le carré de DF est une partie du produit de CF par FD, le diamètre transverse LM est plus petit que son diamètre droit.

Il a été donc démontré que si un plan coupe toutes les arêtes d'un cône ou d'un cylindre inclinés, en coupant sa base, et si le triangle ou le quadrilatère dont l'intersection avec la base est perpendiculaire à l'intersection du plan coupant avec la base, est le triangle ou le quadrilatère à angles inégaux, perpendiculaire au plan de la base, et si avec cela l'intersection du <plan> coupant avec la base est du côté du plus grand angle, il est possible que la section engendrée soit un cercle; et il est possible qu'elle soit une ellipse dont les lignes ordonnées sont des perpendiculaires à son diamètre transverse. Et son <diamètre> transverse peut être plus long que son <diamètre> droit. Et le contraire est possible.

De même, qu'il y ait, dans ce même triangle ou dans ce même quadrilatère, dans le cône ou dans le cylindre incliné, la rencontre de AB avec EZ du côté de E.

Puisque l'angle E est plus grand que l'angle A, il n'est pas possible que l'angle A soit comme l'angle Z. La section AB ne peut donc absolument pas être antiparallèle. Et puisque le rapport de AB à EZ, dans le cylindre, est comme le rapport de GA à EZ, AB est donc plus long que EZ. AB, le <diamètre> transverse, est donc toujours plus long que le <diamètre> droit.

Et nous traçons, dans le cône, sur le triangle GEZ, un cercle; et nous menons DLK parallèle à BAG. Puisque l'angle KDA, qui est égal à l'angle DAB, lequel est plus petit que l'angle AEZ, est plus petit de beaucoup que l'angle EZD, il n'est pas possible que KD soit tangent au cercle ou qu'il en coupe l'arc DZ, sinon l'angle KDE serait égal ou plus grand que l'angle KZD. Cela est absurde.

Donc DK coupe l'arc DE en L. Et le rapport du carré KD au produit de ZK par EK, je veux dire au produit de DK par KL, est comme le rapport de BA au diamètre droit. BA, le <diamètre> transverse est donc toujours plus grand que le droit <diamètre>. Il apparaît donc que si la rencontre a lieu, avec ce type de triangle ou de quadrilatère, dans le cône ou le cylindre incliné, du côté du plus grand angle, l'ellipse engendrée ne sera jamais un cercle et son diamètre transverse est plus long que son diamètre droit et ses lignes ordonnées sont perpendiculaire à son diamètre transverse.

Et c'est clair que, dans le cône incliné, si le triangle de l'hyperbole ou de la parabole est le triangle perpendiculaire à la base, ses lignes ordonnées seront perpendiculaires à son diamètre transverse.

Deuxièmement : que ce soit le triangle ou le quadrilatère équiangle et incliné sur la base d'une inclinaison complète. A cause de l'égalité des deux angles E, Z, il n'est pas possible que la section AB soit antiparallèle, comme on le sait. Et puisque le <plan> passant par l'axe est incliné sur la base, les lignes ordonnées sont toujours inclinées sur le diamètre transverse. Et puisque le rapport de AB à EZ, dans le cylindre, est comme le rapport de BG à ZG, AB est plus long que EZ. Il est donc toujours plus long que le diamètre droit.

Et comme ce qui a précédé dans le cône droit, si on trace un cercle autour du triangle isocèle DEZ et que l'on mène de D une ligne parallèle à AG, il a été montré et la preuve a justifié que le diamètre transverse AB est toujours plus long que le diamètre droit.

La différence entre cette partie et ce qui a lieu dans le <cas> du cône et du cylindre droit, est que les lignes ordonnées sont, là, perpendiculaires au diamètre transverse alors qu'ici, elles sont inclinée. Et toutes les autres situations et preuves sont communes.

Et il est clair aussi, pour le cône avec ce triangle, que les lignes ordonnées de l'hyperbole et de la parabole sont également inclinées sur leurs diamètres transverses.

Troisièmement : que le quadrilatère ou le triangle à angles inégaux soit incliné sur la base d'une inclinaison qui n'est pas complète.

Du fait qu'il est à angles inégaux, la condition pour l'obtention de la <section> antiparallèle est celle du triangle ou du quadrilatère à angles inégaux, perpendiculaire à la base. Et du fait qu'il est incliné sur la base, la condition pour que les lignes ordonnées n'y soient pas perpendiculaires au diamètre transverse est celle de l'équiangle qui est incliné sur la base d'une inclinaison complète. Et puisque dans le <cas de l'> antiparallélisme, les lignes ordonnées ne sont pas perpendiculaires au diamètre transverse, sa <section> antiparallèle ne sera pas un cercle.

Et puisque la forme de l'antiparallélisme dans le triangle à côtés inégaux nécessite que la ligne menée du sommet du triangle, parallèlement au diamètre de la section, soit tangente au cercle circonscrit au triangle et que, dans le quadrilatère à angles inégaux, cela nécessite que le diamètre transverse soit égal au diamètre de la base, il y a dans les sections de cette espère de triangle et de quadrilatère, une ellipse antiparallèle qui n'est pas un cercle, dont les lignes ordonnées sont inclinées sur son diamètre et dont le <diamètre> transverse est égal à son <diamètre> droit.

Et il y a aussi des ellipses dont les lignes ordonnées sont inclinées sur leurs diamètres et dont les <diamètres> transverses sont plus courts que leurs <diamètre> droits. Et il y en a <où> leurs <diamètres> transverses sont plus longs que leurs <diamètres> droits. Et, en dehors de dette espèce, il n'y a pas d'ellipse autre qu'un cercle avec son diamètre transverse égal à son diamètre droit.

Et la formulation et la preuve sont semblables à ce qui a précédé dans le droit à angles inégaux avec, dans l'incliné équiangle, une combinaison dans l'inclinaison des lignes ordonnées.

Et il est clair que, dans cette espèce de triangle, les hyperboles et les paraboles ont aussi leurs lignes ordonnées inclinées sur leurs diamètres transverses selon <différentes> espèces d'inclinaisons.

Soit aussi un triangle ou un quadrilatère DEZ passant par l'axe, incliné sur la base. Nous menons les sections IKG, ABG, LMG. Et l'intersection GH est perpendiculaire à l'intersection EG. Puisque ce <plan> qui passe par l'axe est incliné sur la base et que GH est perpendiculaire à EG, il n'est pas perpendiculaire à d'autres lignes, comme les lignes GL, GA, GI. Nous menons de G la perpendiculaire GP à EG dans le plan du triangle ou du quadrilatère.

Puisqu'il est incliné sur la base, l'angle HGP n'est pas droit. Qu'il soit aigu. L'angle HGP est donc l'inclinaison sur la base du plan passant par l'axe.

Nous imaginons une sphère de centre G. Puisque chacun des deux angles EGP, EGH est droit, EG est perpendiculaire au plan HGP. Le grand <cercle> HGP sur la sphère imaginée est perpendiculaire au grand <cercle> KGE qui passe par son pôle parce qu'il passe par l'axe GZ. La portion PGH qui est construite sur le diamètre KGZ lui est donc perpendiculaire.

Et l'arc HP a séparé moins de la moitié de la portion parce que l'angle HGP est aigu. La ligne la plus petite menée de H vers le périmètre du cercle KGZ est ce qui joint H, P. Et le plus proche de lui est plus court que le plus éloigné de lui. Donc, ce qui joint H et l'intersection de KG avec le périmètre du grand <cercle> KGZ, est plus court que ce qui joint H et l'intersection de BG avec le périmètre de ce grand <cercle>. Et cette <ligne de> jonction est plus courte que la <ligne de> jonction entre H et l'intersection de GM avec ce périmètre.

Et puisque la moitié du diamètre GH et les moitiés des diamètres GK, GB, GM sont égales et que les cordes HK, HB, HM sont en accroissement, ou plutôt les arcs de ces cordes en accroissement sont en accroissement, les angles HGK, GBH, HGM sont en accroissement, le plus grand <d'entre eux> étant l'angle HGM.

Les angles des lignes ordonnées de la section AK, qui sont égaux à l'angle HGK, sont plus petits que les angles des lignes ordonnées de la section AB, qui sont égaux à l'angle HGB; et ils sont plus petits que les angles des lignes ordonnées de la section LM, qui sont égaux à l'angle HGM.

Les sections engendrées en fonction de l'inclinaison sur la base du triangle et du quadrilatère <ont> leurs lignes ordonnées qui ne sont pas des perpendiculaires et, avec cela, elles sont différentes en fonction de la proximité ou de l'éloignement de la perpendiculaire. Et là, il y a deux types de différences. L'une des deux est la différence entre les inclinaisons des deux triangles ou des deux quadrilatères d'inclinaisons différentes par exemple. L'autre est la différence entre les sections situées dans un même plan.

Chaque section positionnée en fonction d'un de ces triangles ou de ces quadrilatères, son angle ordonné s'obtient en fonction de deux angles. L'un des deux est l'origine de l'angle d'inclinaison du triangle ou du quadrilatère, sur la base, et c'est l'angle HGP. L'autre est l'angle de la position du diamètre de cette section par rapport à la perpendiculaire GP située dans le plan de la base, et c'est, par exemple, l'angle PGB ou PGM. Et la figure est ce qui a précédé avec l'ajout de la ligne GP.

Les sections possibles, en fonction de l'égalité du diamètre transverse et du <diamètre> droit, de son excès sur lui et de son déficit par rapport à lui, sont de trois types. En fonction de l'orthogonalité ou non de l'angle ordonné, <elles sont de> deux types. En fonction de l'ensemble des deux, <elles sont de> six types, alors qu'en fonction de la différence des angles non droits, leurs espèces sont en nombre infini.

Et l'ellipse, dont les lignes ordonnées sont perpendiculaires à son <diamètre> transverse, est un cercle si son <diamètre> transverse est comme son <diamètre> droit; et c'est une autre <ellipse> si son <diamètre> transverse est plus long ou plus court que son <diamètre> droit.

Et celle dont les lignes ordonnées sont inclinées sur son diamètre <transverse> son <diamètre> transverse sera égal à son <diamètre> droit si sa position, par rapport au triangle ou au quadrilatère qui lui est associé, est antiparallèle. Et il sera plus long ou plus court que lui lorsqu'elle ne sera pas comme cela.

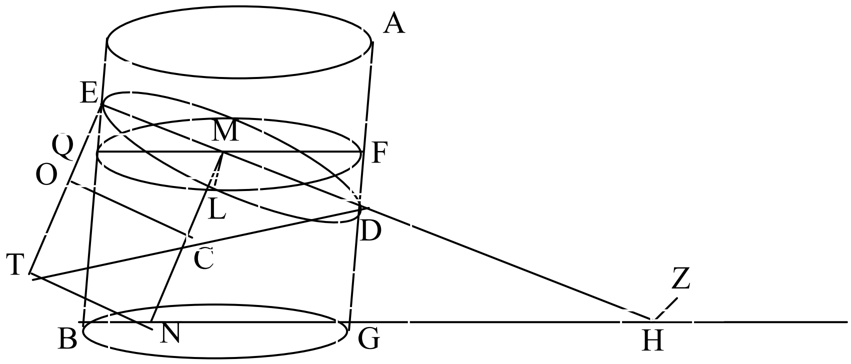
<On a> aussi que, pour toute ellipse située dans un cône droit ou incliné par rapport à l'un quelconque des triangles indiqués, le rapport de son diamètre transverse à son diamètre droit, qu'ils soit égaux ou que le droit soit plus long ou l'inverse, n'est pas plus petit que le rapport de l'un des deux côtés de ce triangle, quel que soit l'angle, à ce qui est situé de lui entre la base et la ligne tangente au cercle circonscrit à ce triangle, du côté du sommet.

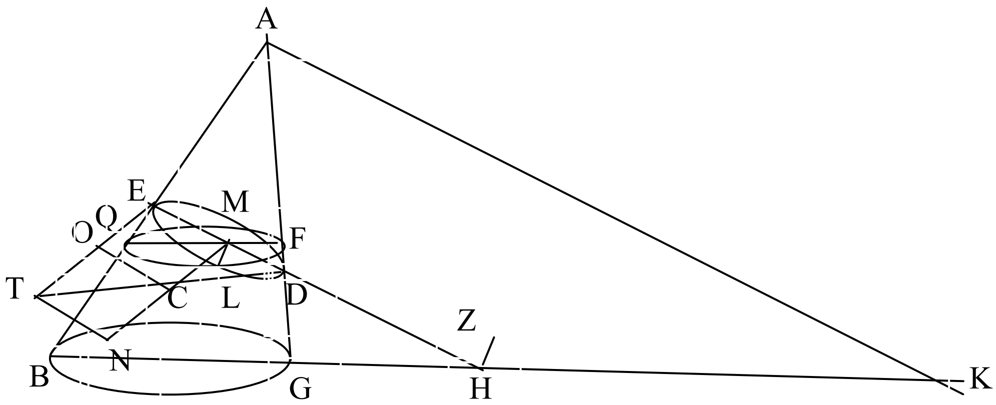
Donnons un exemple pour le triangle précédent : la ligne NMS est une tangente au cercle DEZ, au point M, du côté de D, parallèle à EZ. Nous menons les deux côtés ED, ZD. Ils la rencontrent en S et N. Et M est ou bien sur D ou bien entre D et E ou entre D et Z.

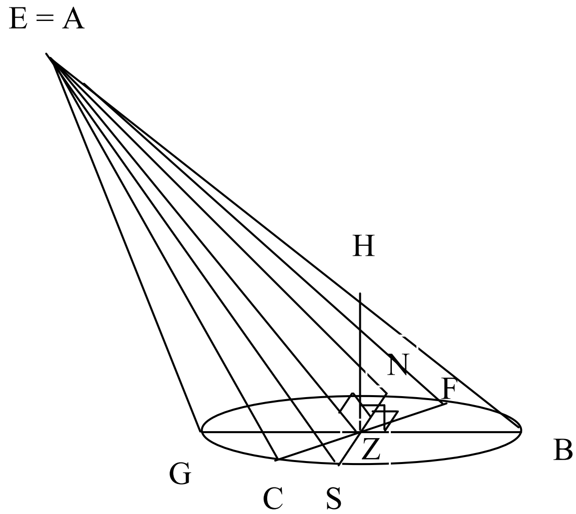
Puisque le rapport de AB, le <diamètre> transverse, au <diamètre> droit est comme le rapport de KD au produit de KE par KZ, c'est-à-dire au produit de KL par KD, ou plutôt comme le rapport de DK à KL. Et le rapport de DK à KL n'est pas plus petit que le rapport de DE à ES ou du rapport de DZ à ZN, d'après ce qui est connu dans les études sur les cordes et les cercles. Donc le rapport de AB, le <diamètre> transverse, au <diamètre> droit, quels qu'ils soient, n'est pas plus petite que le rapport de DE à ES ou du rapport de DZ à ZN.

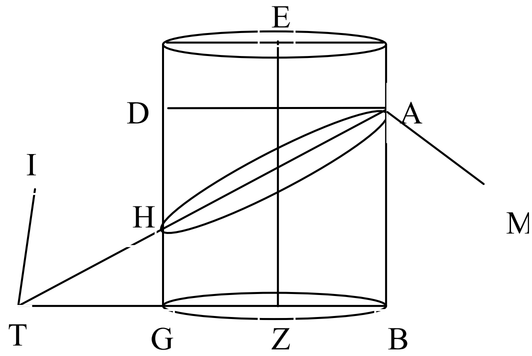
Et si tu veux la preuve sans détour, mène de L une ligne parallèle à EZ, et elle apparaîtra <clairement>. Et c'est ce qui est demandé.

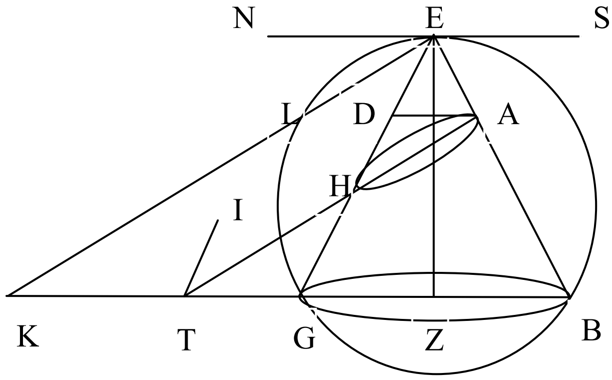
Même si cela est un allongement, c'est un commentaire sur les positions des sections, ou plutôt une anatomie de leurs composantes qui vise ce que nous cherchons. C'est la raison pour laquelle nous l'avons fait.

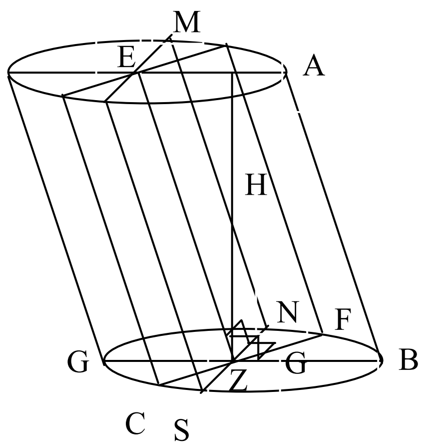


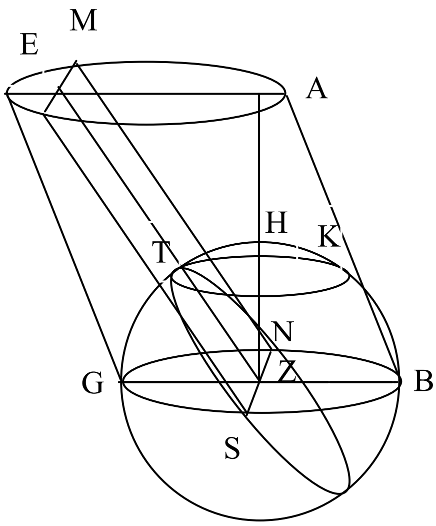


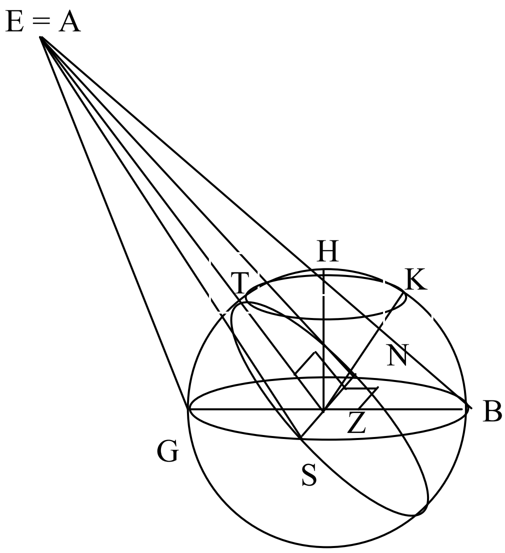


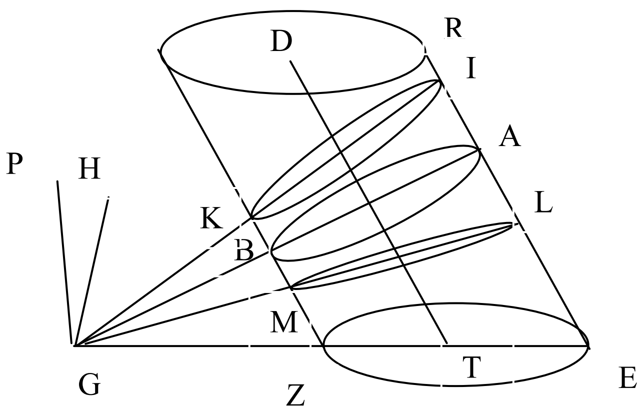

E
D
A
I
H
M
T
G
Z
B

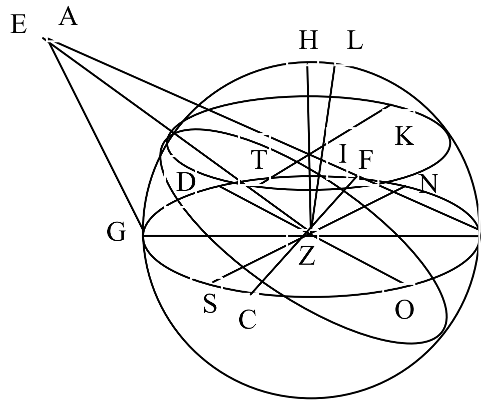

N
E
S
L
D
A
H
I
K
T
G
Z
B

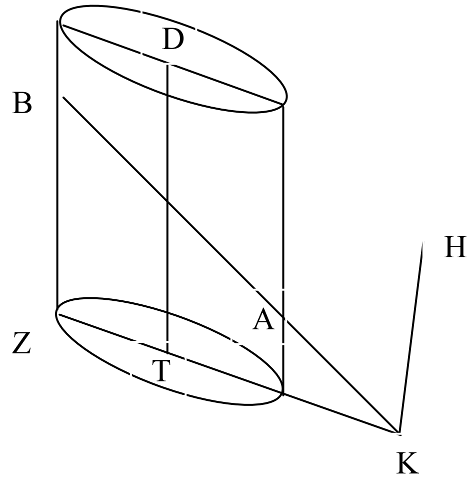

M
E
A
H
N
F
G
G
B
Z
C
S

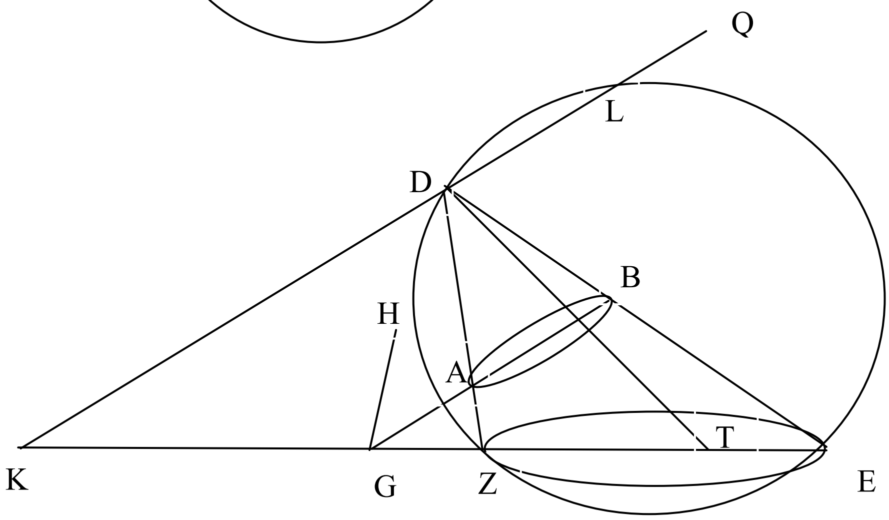

M
E
A
H
K
T
N
G
Z
B
S

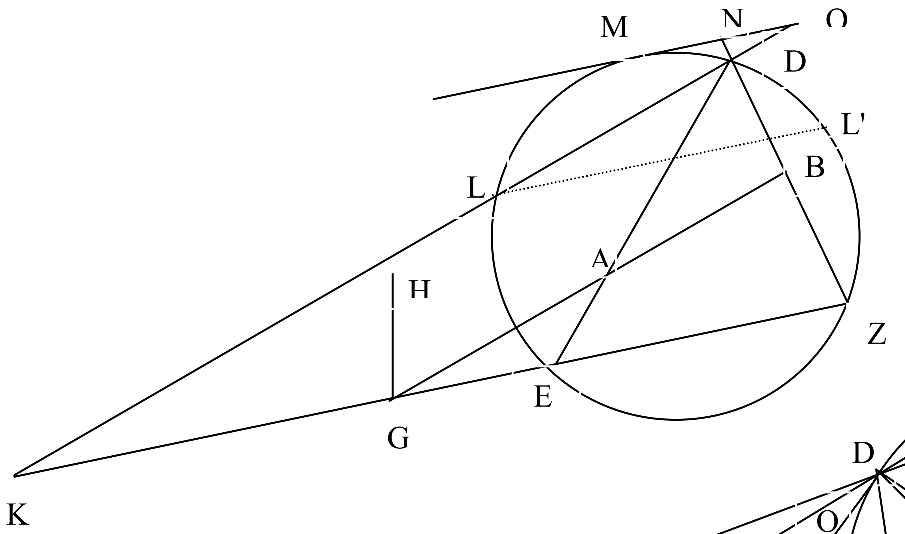

E = A
H
T
K
N
B
Z
G
S

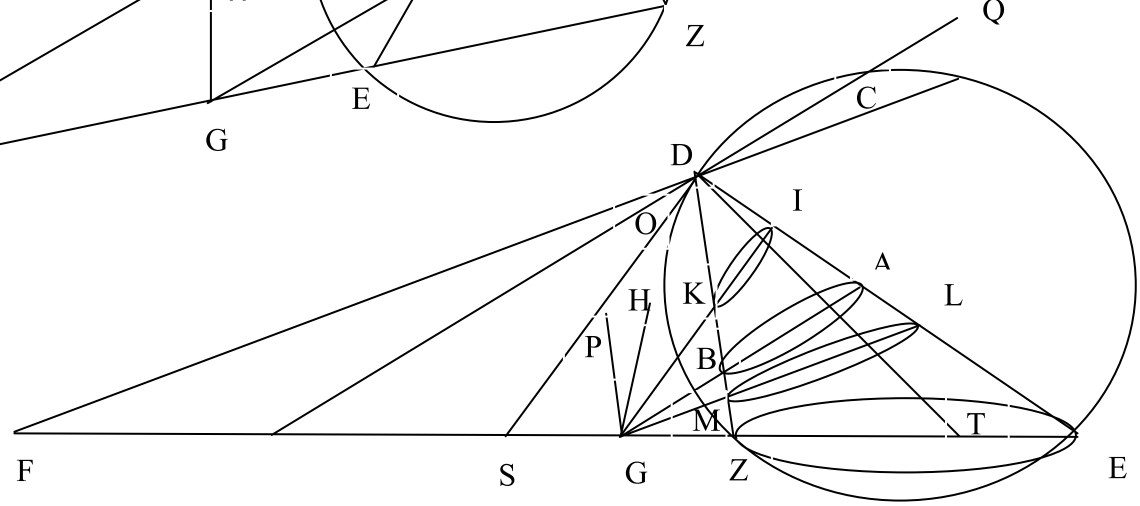

D
R
I
A
P
H
L
K
B
M
G
Z
T
E


E
A
H
L
K
T
I
F
D
N
G
B
Z
S
C
O


D
B
H
A
Z
T
K


Q
L
D
B
H
A
T
K
G
Z
E


M
N
O
D
L'
L
B
A
H
Z
E
G
K


Q
C
D
I
O
A
L
H
K
P
B
M
T
F
S
G
Z
E

<Proposition IV. 3. 1(5) :>

Prémisse[12] :

Nous voulons déterminer entre les deux côtés du triangle ABG une ligne DE parallèle à la ligne AH et égale à la ligne t.

Nous menons du point I donné sur le côté AB <un segment égal à > IK par exemple et parallèle à AH. S'il est égal à t, ce sera <ce qui est cherché>.

Sinon, nous séparons de lui IM comme t et nous menons ME parallèle à AB. Il rencontre AG en E. Nous menons ED parallèle à AH.

Puisque la surface (IM) est à côtés parallèles, ED est parallèle à AH et il est égal à IM, ou plutôt à t. Et c'est ce qui est demandé.

Une autre prémisse :

Soit deux triangles ABG, DEZ, semblables, entourés par deux cercles. Des deux arcs (BG), (EZ), on mène deux lignes THK, NMS, parallèles aux deux côtés BG, EZ, et on prolonge les deux côtés AB, AG qui rencontrent THK aux points T, K, et les deux côtés DE, DZ qui rencontrent NMS en N, S.

Nous disons : le rapport de AB à BT est comme le rapport de DE à EN. Soit F, Q les deux centres. Nous joignons HF, MQ. Ils seront perpendiculaires à TK, NS, ou plutôt à BG, EZ. Les points O, L seront donc les milieux des deux cordes BG, EZ. Nous joignons BH, EM.

Puisque <l'angle> droit L est comme <l'angle> droit O et que l'angle HBL est comme l'angle MEO, parce que l'arc HG -qui et la moitié de l'arc BHG semblable à l'arc EMZ-, est semblable à l'arc MZ qui est la moitié de l'arc EMZ. Et il <résulte>, comme reste ou somme, l'angle BHL comme l'angle EMO. Le triangle HBL est donc semblable au triangle MEO.

Et puisque l'angle TBL est comme l'angle NEO, il <résulte>, comme reste ou somme, l'angle TBH comme l'angle NME. Et l'angle N est comme l'angle T. Le triangle TBH est donc semblable au triangle NEM.

Et puisque le rapport de AB à DE est comme le rapport de BG à EZ, ou plutôt comme le rapport de BL à EO, lequel est comme le rapport de BH à EM qui est comme le rapport de BT à EN, le rapport de AB à DE est comme le rapport de BT à EN. Le rapport de AB à DE est donc comme le rapport de BT à EN. Par permutation, le rapport de AB à BT est comme le rapport de DE à EN. Et c'est ce que nous cherchions.

Une autre prémisse :

Soit l'angle droit ABG et l'angle DEZ également droit et la ligne AB comme la ligne DE. On joint AG, DZ et on sépare de AB, DE deux lignes égales, toutes deux du côté de <l'angle> droit ou à son opposé, comme les deux lignes BH, ET ou DT. On mène HI, TK, parallèles à BG, EZ qui rencontrent AG, DZ aux points I, K. Et on mène, de I, K, IM, NK parallèles à AB, ED.

Nous disons : si BG est comme EZ, la surface (BI) est comme la surface (EK) et inversement, c'est-à-dire que si la surface (BI) est comme la surface (EK), BG est comme EZ. Et puisque, à l'origine, AB est comme ED et BG comme EZ, le rapport de AB à BG est comme le rapport de DE à EZ et le rapport de AB à BG est comme le rapport de IM à MG et comme le rapport de AH à HI. Et le rapport de DZ à EZ est comme le rapport de KN à NZ et comme le rapport de DT à TK. Le rapport de IM à MG, de AH à HI, de KN à NZ et de DT à TK est le même.

[12] - Ces trois prémisses se trouvaient dans la proposition IV.3.1(4) mais pour la cohérence du contenu de la proposition, nous avons jugé utile de les placer dans la proposition IV.3.1(5)

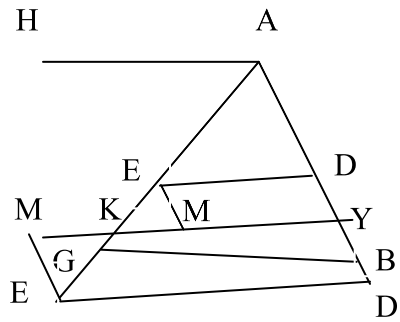
Soit, en premier, BH comme ET. KN est comme IM à cause du parallélisme; et MG est comme NZ à cause de l'égalité des rapports. Il reste BM comme EN. La surface IB sera donc comme la surface EK.

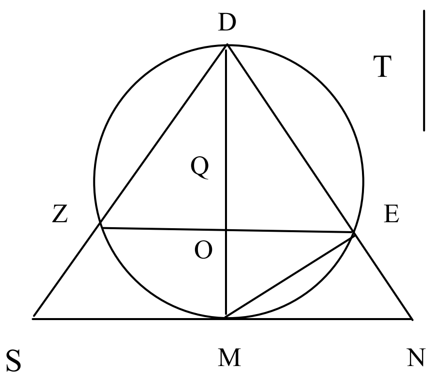
Ensuite, que BH soit comme DT. MG sera alors comme EN et il reste BM, c'est-à-dire HI, comme NZ. Et puisque le rapport de IH à HA est comme le rapport de KT à TD, le produit de IH par TD, c'est-à-dire par BH, et qui est la surface (BI), est comme le produit de HA, c'est-à-dire ET, par TK, lequel est comme la surface EK.

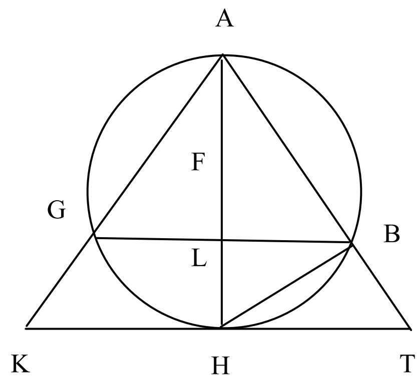
Ou bien nous disons : le rapport de GM à MI est comme le rapport de ZN à NK. Le produit de GM, c'est-à-dire EN, par NK est donc comme le produit de BM par ZN, c'est-à-dire par MI. Et c'est ce qui est cherché.

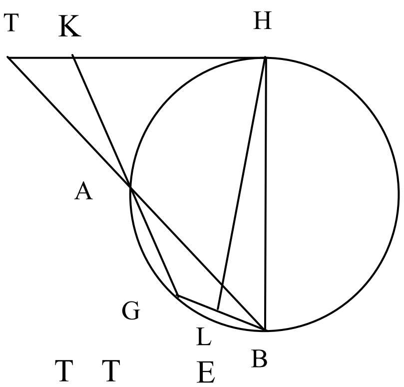
Et puisque le rapport de IH à NK est comme le rapport de KT à IM, par complémentarité, à cause de l'égalité des deux surfaces et de leurs deux angles, ou que le rapport de DH à KT est comme le rapport de KN à IM, alors si BH est comme ET, IH sera comme TK et HA comme TD. Donc, le rapport de IH à TK sera comme le rapport de HA à TD, ou plutôt le rapport de GB à BA sera comme le rapport de ZE à ED. Et BE est comme ED. Donc BH est comme EZ.

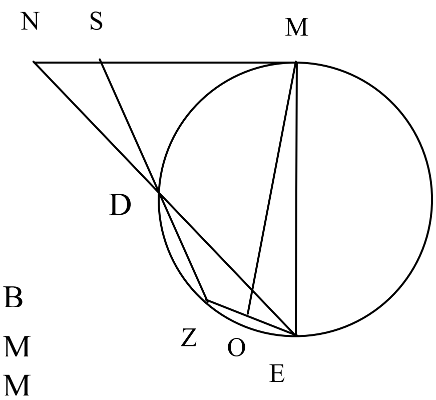
Et si BH est comme KT, le rapport de IH à ET, ou plutôt à HA, est comme le rapport de KT à BH, c'est-à-dire à TD. Et le rapport de GB à BA serait aussi comme le rapport de ZE à ED. Donc BH est comme EZ. Et c'est que nous voulions.

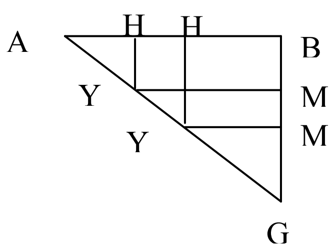


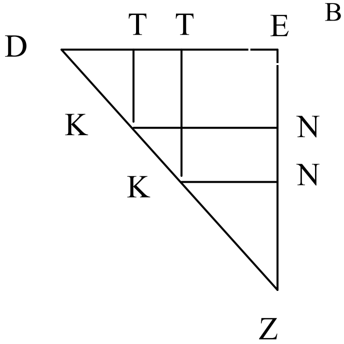












Nous voulons savoir s'il y a dans un cône connu une section comme une section connue d'un cylindre connu, c'est à dire comme lui en quantité et en qualité, c'est à dire du <point de vue> de la grandeur, du diamètre, des lignes ordonnées et de ses angles.

Soit la section AB dans le cylindre (ABGD), et soit (ABGD) le quadrilatère dont l'intersection avec la base est perpendiculaire à l'intersection de la section avec elle. Soit GD son intersection avec la base et EZ l'intersection de la section avec elle, qui est perpendiculaire à GD.

Et soit AH le diamètre droit et TI l'une de ses lignes ordonnées, et KLM le cône supposé. Et <supposons> que, par la voie de l'analyse, il y ait sur lui la section NS comme la section AB, en quantité et en qualité. Et soit le diamètre droit NR. Et nous séparons NJ comme AT et nous menons JT' une ligne ordonnée.

<Analyse du problème> :

Les deux sections étant supposées égales en quantité et en qualité, comme la surface de la section NS et égale à la surface de la section AB, de même le diamètre NS est comme le diamètre AB et l'angle ordonné ATI est comme l'angle ordonné NJT', et la ligne ordonnée JT' est comme la ligne ordonnée TI. Et si elles sont ainsi, si on pose le point A sur le point N et que l'on applique le diamètre AB sur le diamètre NS, le point B tombe sur le point S et T sur J et l'angle ATI sur l'angle NJT' et le point I sur le point T. De même chaque ligne ordonnée tombe sur son égale <qui est> à égale distance du sommet de la section. Pour cela, le périmètre de la section se superpose au périmètre de la section. Ils sont donc égaux et les deux diamètres droits sont aussi égaux;

Et ce parce que, comme la largeur de AT est comme la largeur de NT' et que les deux angles A, N sont droits, que la ligne NS est comme la ligne AB que le produit de TN par NR, déficiente de tout NR d'une surface semblable au produit de SN par NR, est comme la surface NT par AH déficiente de tout AH d'une surface semblable à la surface AB par AH, à cause de l'égalité des deux carrés IT, JT' à ces deux surfaces; pour cela, le diamètre droit AH est comme le diamètre droit NR, et, après application, H tombe sur R. Et nous menons la surface qui est élevée sur son intersection avec la base (?) l'intersection de la section NS avec elle, et c'est OF. Il engendre alors le triangle KLE. Et on prolonge KC parallèlement à ZO et nous traçons un cercle sur le triangle KLM.

Puisque le rapport du carré de KC à la surface LC par CM est comme le rapport de NS, le <côté> transverse, au <côté> droit NR, il est donc comme le rapport de AB à AH. Si AB est égal à AH, le carré de KC est égal à la surface LC par CM. Donc, KC est tangent au cercle, parce que s'il le coupait sur Q par exemple, la surface KC par CQ serait comme la surface de LC par CM, c'est à dire comme le carré de KC. Et la surface CK par CQ, à cause de leur différence, est soit plus grande soit plus petite que la carré de KC. Ceci est absurde.

Et si AB est plus grand que AH, KC coupe le cercle en Q en les deux points K, M, parce qu'alors le carré de KC est plus grand que la surface LC par CM. S'il lui était tangent en K, le carré de KC serait égal à la surface LC par CM; ceci est absurde.

Et s'il le coupe en Q, entre K, L, le carré de KC, qui est plus grand que la surface LC par CM, plus grand que la surface KC par CQ, alors qu'il en est sa partie; ceci est absurde.

Et si AB est plus petit que AH, ce ne sera pas nécessairement (?), du fait de sa situation dans le cône KLM, le rapport de AB à AH est plus petit que le rapport de MK ou LK à ce qui tombe de lui entre A ou M et la ligne tangente au cercle KLM du côté de K. KC coupe alors le cercle entre K, L parce que s'il lui était tangent s'il le coupait entre K, M, le carré de KC serait égal à la surface KC par CQ ou plus grand qu'elle, alors qu'il est plus petit qu'elle; ceci est absurde.

Et il est nécessaire qu'il y ait intersection ou tangence pour qu'il y ait rencontre en K, afin qu'il soit coupé entre K, L.

Puis, si le point Q est entre K, C, il est possible que le triangle ait deux côtés égaux ou différents, KM étant le plus court ou le plus long. Et si Q se superpose à K, il n'est pas possible que le triangle soit isocèle, parce que si nous divisons LM en deux moitiés en H' et que nous menons KH', il est nécessaire dans le <triangle> isocèle, que l'angle H' soit droit, KH' un diamètre et l'angle H'KC également droit, du fait que KC est tangent. KC et LM seraient alors parallèles. Ceci est absurde.

En fait, KM et toujours plus court que KL parce que, comme le produit de CL par CM est comme le carré de KC, le rapport de LC à CK est comme le rapport de KC à CM; et l'angle C est commun. Les deux triangles LCK, KCM sont donc semblables, et l'angle CKM est comme l'angle L.

Ou bien, nous disons : CK est tangent et KM est coupant; MKC est donc comme tout angle situé dans la section MKL, selon le tabâdul; et l'angle M est plus grand que l'angle MQC. Il est donc plus grand que l'angle L. Donc LK est toujours plus long que MK.

Et si le point Q tombait sur l'arc LK, le côté KM serait plus court que KL; et cela parce que la surface LC par CM est comme la surface QC par KC. Si nous joignons LQ, le rapport de LC à CQ est comme le rapport de KC à CM; et l'angle C est commun. Donc, le triangle KCM est semblable au triangle LCQ, selon une position opposée .Donc l'angle // [125a] MKC est comme l'angle CLQ. Il est donc plus grand que l'angle CLK. Donc l'angle LMK est plus grand de beaucoup que l'angle MLK. Donc KM est plus court que LK.

De même, puisque l'angle ordonné FON est comme l'angle ordonné ZEA, si l'angle ZEA est droit, l'angle FON est aussi droit et l'angle ZOL est droit. Donc FO est perpendiculaire au plan KLM et chacun des deux plans –le coupant et la base- est perpendiculaire au plan du triangle.

Et si l'angle ZEA n'est pas droit, l'un des deux angles ordonnés qui sont en E ou O est aigu. Que ce soit FON soit <l'angle> aigu. Nous menons la perpendiculaire OX à la ligne LM dans le plan du triangle, et ZO est perpendiculaire à elle dans le plan de la base. L'angle FOX est l'angle d'inclinaison du plan KLM qui passe par l'axe sur le plan de la base, et il est plus petit que tous les angles entourés par la ligne FO et les lignes menées de O dans le plan du triangle. L'angle FON est soit lui-même l'angle FOX, et ce lorsque OX se superpose à ON, soit il est plus grand que l'angle FOX si OX tombe d'un côté ou de l'autre[13] de ON. Et s'il tombe dans l'un des deux côtés, l'angle NOX est toujours plus petit que l'angle ordonné aigu.

Imaginons alors, sur le centre O, une sphère qui coupe les lignes NO, MO, XO aux points V, D', G', et la ligne OF au point Λ. Nous menons l'arc ΛV –qui est l'arc de l'angle ordonné -, et l'arc ΛG' – qui est l'arc de l'inclinaison -. Puisque MO est perpendiculaire à l'intersection de FO, XO, il est perpendiculaire au plan du grand <cercle> ΛG', et le point D' est son pôle, et les arcs G'D', D'Λ sont deux quarts <de cercle>, et l'arc G'Λ pour l'inclinaison et l'arc ΛV pour l'ordonné, chacun des deux étant inférieur à un quart <de cercle>.

Puisque la section G'V est perpendiculaire au diamètre G'O du grand <cercle> G'Λ, et l'arc G'V est inférieur qu'un quart <de cercle> qui est la moitié de la section, la plus courte des lignes joignant V au périmètre de G'Λ est la ligne VG'. Donc VG' est plus court que VΛ. Donc l'arc VG' est inférieur à l'arc VΛ. Donc l'angle NOX est toujours plus petit que l'angle NOF. Donc l'angle NOM, je veux dire l'angle KCM qui reste du droit est toujours plus grand que le complément de l'angle ordonné au droit.

De même, si l'angle d'inclinaison du carré AGDB sur le plan de la base du cylindre est comme l'angle d'inclinaison du triangle KLM sur la base du plan du cône, l'angle VOG' est comme le complément de l'angle BED au droit. L'angle NOM, ou plutôt l'angle KCM, est

[13] - Ibn Sartaq dit : "*dans l'un des deux côtés de ON*".

donc comme l'angle BED. Inversement, si l'angle BED est comme l'angle NOM, l'inclinaison de G'O est comme l'inclinaison du carré de AG sur le plan de la base du cylindre.

Pour cela, nous imaginons, sur le centre E, une sphère égale à la <sphère> imaginée sur O, et nous menons de E sur DE la perpendiculaire EY dans le plan du carré.

Nous disons, sur les cercles imaginés sur la sphère : puisque le cercle ZY est perpendiculaire au diamètre du cercle YD et que le cercle ΛG' est perpendiculaire au diamètre du cercle G'D', et qu'ils sont égaux et que l'arc ΛG' a été divisé comme l'arc ZY, à cause de l'égalité des deux triangles et qu'ils sont inférieurs aux deux moitiés des deux sections égales construites sur les deux diamètres, et que la corde ordonnée ΛV a été menée comme la corde ordonnée ZB, l'arc séparé BY est comme l'arc VG'. L'angle VOG' est donc comme l'angle BEC. Donc l'angle BED est comme l'angle QCM.

Et si l'angle NOM est comme l'angle BED, nous disons : la portion VO et la portion BY, avec ce qui leur est adjacent, sont perpendiculaires aux deux diamètres G'O, EY des deux cercles ΛG', ZY. Or les deux arcs VG', BY sont égaux et différents (?) aux deux moitiés des deux portions. Et on mène la ligne VΛ comme BZ. L'arc ΛG' est donc comme l'arc ZY. Les deux inclinaisons sont donc égales. Il <découle> nécessairement de cela que si les deux inclinaisons ne sont pas égales, et que les angles ordonnés sont égaux, les deux angles BED, SOM ne sont pas égaux. Sinon, cela nécessiterait l'égalité des deux triangles.

Et si ces deux angles ne sont pas égaux selon cette considération, c'est à dire la considération de l'égalité des angles ordonnés, les deux inclinaisons ne sont pas égales. Sinon cela nécessiterait l'égalité de ces deux angles ou plutôt cela nécessiterait que si le double de l'angle FOX est plus grand que l'angle ZEC, l'angle VOG' serait plus petit que l'angle BEY.

En effet, nous séparons OW comme YZ. Si nous joignons WV, il sera plus court que VΛ, c'est à dire de ZB, parce que le taqdir (?) leur est égal. En effet, VW est plus proche que VG' et de VΛ. Si nous menons de W une ligne jusqu'au périmètre D'V, égal à la ligne de l'angle ZEB, son extrémité tombe entre VT, et de cet endroit à G' il est égal à l'angle BEY. L'angle VOG' est donc plus petit que l'angle BEY.

Et si l'angle VOG' est plus grand que l'angle BEY, l'angle ΛOG' est plus petite que l'angle ZEY, parce qu'alors si l'angle ΛOG' était comme l'angle ZEY, l'angle VOG' serait comme l'angle BEY; ceci est absurde.

Et si l'angle ΛOG' est plus grand que l'angle ZEY, l'angle VOG' est plus petit que l'angle BEY; ceci est absurde.

De même, il découle de l'égalité des deux angles d'inclinaison et de l'égalité des deux angles VOG', BEY, l'égalité des deux angles ordonnés, je veux dire l'égalité des deux angles BEZ, SOF. En effet, les deux portions ΛO, ZY sont alors construites perpendiculaires aux deux diamètres YE, G'O des deux cercles YV, G'O (?). Et on sépare d'eux les deux arcs égaux ΛG', ZY, inférieurs que leurs moitiés, et on sépare les deux arcs égaux VG', BY. Pour cela, les deux cordes adjacentes (?) ΛV, ZB sont égales. Leurs arcs qui sont les mesures des deux angles ordonnés sont égaux. Et c'est ce qui est cherché.

On a donc su que <si>, parmi les angles d'inclinaison et ordonnés, deux quelconques sont égaux et sont entre le diamètre de la section et la base du triangle, leurs homologues en inclinaison et en ordonnée et qui sont entre le diamètre de la section et la base du carré sont égaux aux homologues restants.

<Synthèse du problème > :

Ceci étant, nous disons <à propos> de la synthèse : ou bien les angles ordonnés de la section AB sont droits ou sont autre <chose>. Et quoi qu'ils sont, ou bien son diamètre transverse est plus long que son diamètre droit ou inversement ou égal à lui. Ce sont là six cas. Et le cône KLM ne peut pas autrement que droit ou incliné. L'étude <concerne> donc douze cas.

Si les angles sont droits et le <diamètre> transverse comme le droit, et c'est le cercle, ni plus ni moins, la situation y est la même et facile, que le cône soit droit ou incliné. Nous menons, entre deux côtés d'un triangle quelconque parmi les triangles qui passent par l'axe, une ligne égale à son diamètre parallèle à la base du triangle; et nous menons sur elle une surface parallèle à la base. Elle engendre un cercle égal au <cercle> supposé, à cause de l'égalité de leurs deux diamètres. Et dans le cône incliné, il est possible de trouver un autre cercle, dans la section de position antiparallèle, égale au <cercle> supposé. Menons le triangle perpendiculaire à la base du cône incliné et il est, comme on l'a appris, à côtés inégaux. Que ce soit le triangle KLM, et nous l'entourons d'un cercle et nous menons KU tangente à lui. Puisque l'angle MKU est égal à l'angle MLK. Et l'angle MLK, du fait qu'il est plus petit que l'angle LMK, il est, avec l'angle MLU plus petit que deux droits. Les deux angles KMU, MKU sont donc <ensemble> inférieurs à deux droits. Pour cela, KU rencontre LM du côté de M. Et nous menons NS parallèle à KU et égal à AB, et nous supposons un point sur NS, et c'est J, et nous menons de lui une perpendiculaire sur la surface du triangle, et c'est JV, et nous menons la surface VJN. Elle engendre la section NS. A cause du fait que la surface de la section est perpendiculaire à la surface du triangle et la surface du triangle à la surface de la base, les lignes ordonnées seront des perpendiculaires au diamètre NS. Et parce que l'angle NSK est comme l'angle SKU, par permutation, et qu'elle est comme l'angle KLM, parce que pour tout angle situé dans cette section, l'angle NSK est comme l'angle KLM. Et pour cela, l'angle KNS est comme l'angle KML. La section NS est donc antiparallèle, à lignes ordonnées perpendiculaires. C'est donc un cercle égal au cercle AB à cause de l'égalité de leurs deux diamètres.

Puis, si la section n'est pas un cercle et que les lignes ordonnées sont perpendiculaires à son diamètre et que, avec cela, son diamètre transverse est plus long que son diamètre droit, il est possible qu'il soit, dans le cône droit, en considérant n'importe quel triangle parmi ceux qui passent par l'axe et, dans le cône incliné, <en considérant> le triangle perpendiculaire à la base, à l'exclusion des autres parmi les inclinés sur elle. Soit KLM, le triangle perpendiculaire à la base du cône droit ou incliné. Nous l'entourons d'un cercle et nous menons KU de sorte qu'il rencontre le périmètre du cercle en Q, entre KU de l'arc KM et qu'il rencontre la corde LM à l'extérieur du cercle du côté de M et que le rapport de // [126a] KU à UQ soit comme le rapport de AB, le <diamètre> transverse à AH le <diamètre> droit. Et ceci est possible parce que le rapport de AB à AH a été supposé <comme le> rapport d'un plus grand à plus petit. Et ceci est parmi ce qui a été connu au début des études sur les lignes et les angles selon leur position dans les cercles.

Et nous menons NS parallèle à KU et égal à AB, et de J qui est supposé sur NS, la perpendiculaire JV à la surface. Elle engendre la section NVS. Et nous posons le rapport du carré de KU à la surface LU par UM comme le rapport de NS à NR. Donc NR est le diamètre droit. Et puisque le rapport de KU à UQ, je veux dire le rapport de AB à AH est comme le rapport du carré de KU à la surface de KU par UQ, à cause <du fait que> KU est commun, je veux dire comme le rapport du carré de KU à la surface de LU par UM, alors le rapport de AB à AH est comme le rapport de NS à NR. Or AB est comme NS. Donc AH est comme NR. Et que la largeur NJ soit comme la largeur AT. Puisque les deux angles A, N sont deux droits et que SN est comme AB, et NR est comme AH, la surface de NR -dont le tout est déficient d'une surface semblable à la surface de NS par NR, je veux dire comme le carré de JV-, est comme la surface de AT par AH -dont le tout est déficient d'une surface semblable à une surface semblable à la surface de AB par AH, je veux dire comme le carré de TY. Donc la ligne ordonnée JV est comme la ligne ordonnée TY, et les deux angles T, J sont droits.

Et, de même, deux lignes ordonnées quelconques qui sont supposées à deux distances égales des deux points N, A seront égales. Si on fait coïncider la section sur la section, comme ce qui a précédé, selon une coïncidence sans dépassement, elles sont égales tout à la fois selon la surface, le diamètre, les lignes ordonnées, les angles, le périmètre, le diamètre droit. Et si, avec cela, son diamètre transverse est plus court que son côté droit, il n'est pas possible que cela arrive dans le cône droit d'après ce l'on sait <et qui est que> pour toute section où cela a lieu, son diamètre transverse est plus long que son côté droit.

Quant au cône oblique, il est possible que cela y ait lieu dans le cas du triangle perpendiculaire à la base uniquement. Et la condition est que le rapport du diamètre transverse au côté droit ne doit pas être plus petite que le rapport de l'un des deux côtés de ce triangle à ce qui est, de lui, situé entre sa base et la ligne tangente au cercle qui lui est circonscrit, du côté du sommet, sachant que cela est nécessaire pour toute section située dans un cône. Et si la condition nécessaire disparaît, ce qui en découle disparaît <aussi>.

Si on suppose que le rapport du diamètre transverse au <côté> droit, dans la section de cylindre, est plus petit que le rapport de l'un des deux côtés du triangle, dans un cône, à ce qui est, de lui, situé entre la base et la tangente, du côté du sommet, parallèle à la base, il n'est pas possible que cette section soit dans ce cône avec ce triangle. Et si elle y est c'est avec un autre triangle.

Et on ne doit pas s'imaginer que si nous allongions le côté de ce triangle et que nous élargissions la base du cône, la section supposée pourrait s'y trouver avec ce plus grand triangle qui est dans le même plan que le plus petit. Nous avons démontré que le rapport du côté de ce plus grand triangle à ce qui est situé, de lui, entre sa base et la tangente parallèle, est comme le rapport du côté de ce premier triangle à ce qui est situé, de lui, entre sa base et la tangente parallèle, à cause de la similitude des deux triangles. Tout rapport inférieur à celui-ci est inférieur à celui-là.

<Supposons> que la condition de non petitesse du rapport soit prise en considération. Nous construisons le triangle perpendiculaire à la surface du cône oblique supposé, et c'est KLM et nous l'entourons d'un cercle et nous menons KC qui coupe son périmètre en Q à l'opposé de C par rapport à K. Elle rencontre la corde LM du côté de M, à l'extérieur du cercle, et le rapport de KC à CQ est comme le rapport de AB à AH. Et nous menons NS parallèle à KC et égal à AB. Et nous menons la perpendiculaire DJT' qui coupe NS. Et nous posons le rapport du carré de KC au produit de LC par CM comme le rapport de NS à NR. Le rapport du carré de KC au produit de LC par CM, je veux dire au produit de CQ par KC, est comme le rapport de KC à CQ, je veux dire comme le rapport de AB à AH. Donc, AH est comme NR. Et si nous séparons NJ comme AT, il apparaîtra que la ligne ordonnée JT' est comme la ligne ordonnée TI. Et c'est ainsi pour toute ligne ordonnée ; et les lignes ordonnées dans les deux sections sont <à angle> droit. Donc la section NS est comme la section AB du point de vue de la grandeur, du diamètre et des <lignes> ordonnées.

Si les angles des lignes ordonnées sont aigus, il n'est pas possible qu'il y ait, dans le cône droit, quelque chose de cela parce que chaque section qui s'y trouve, où qu'elle soit, <a> ses lignes ordonnées <à angle> droit.

Dans le cône oblique, cela n'a pas lieu pour un triangle droit parce que cela nécessite l'orthogonalité des lignes ordonnées.

Quant au triangle isocèle oblique, si le diamètre transverse est plus court que le droit ou s'il lui est égal, il n'est pas possible aussi qu'il s'y trouve selon son critère.

Et s'il est plus long, son existence n'est pas impossible rationnellement selon son critère. Mais, il n'y a pas, avec cela, une section qui rende l'existence nécessaire.

Et pour le triangle oblique à côtés inégaux, ce n'est pas impossible non plus, rationnellement, que les trois parties existent selon son critère et ce n'est pas obligatoire catégoriquement.

Soit un triangle KLM dans le cône oblique, incliné sur sa base et KM qui n'est pas plus grand que LM. Nous l'entourons d'un cercle et nous prenons le rapport de KC à CQ comme le rapport de AB à AH. Si le triangle KLM est isocèle, et à cause de la condition de supériorité de AB, le point Q sera entre K et C. Et s'il est à cotés inégaux, il est possible qu'il soit sur K ou hors de lui, sur l'un des deux côtés. Nous menons NS parallèle à KC et égal à AB et nous le prolongeons jusqu'à O de la ligne LM. Et nous menons, de O, la perpendiculaire OF à la ligne OL sur le plan de la base du cône. Et nous menons la surface FON. La séparation entre cette surface et la base, et c'est OF, est perpendiculaire à la séparation entre la base et le triangle KLM, et c'est LM.

NS est donc une ellipse parce qu'elle coupe les deux côtés KL, KM; et son diamètre, qui est NS, est comme le diamètre de AB, et son côté droit, d'après aussi la justification qui a précédé, est comme son côté droit. Quant aux lignes ordonnées, c'est selon évaluation, c'est-à-dire l'évaluation de l'égalité des deux diamètres NS, AB et NR, AH.

Il est possible, par une possibilité extérieure, que l'inclinaison du triangle KLM sur la base soit comme l'inclinaison du quadrilatère AGD sur la base. Et il est possible que le triangle soit plus incliné et l'inverse est possible. Et cela parce que ces trois cas sont possibles dans un même problème. Et la construction indiquée ne dépend pas de l'un d'eux puisqu'il est possible de mener, dans chaque triangle, les deux lignes KC, NS selon la procédure connue, sans prendre en considération la base ni son inclinaison ou sa perpendicularité après avoir établi la non petitesse du rapport indiqué.

Et il est possible, par la capacité rationnelle et imaginative, que l'angle NOM soit comme l'angle AEG ou qu'ils soient différents. Et cela parce que l'angle NOM dépend, dans l'existence, de la procédure indiquée dans un triangle déterminé. Et il n'y a pas encore de preuve de l'impossibilité de l'un des trois cas ni de sa nécessité ni de sa possibilité. Pour chacun d'eux, ou pour deux d'entre eux, il y a impossibilité ou nécessité. Et nous ne connaissons pas sa preuve.

Les cas, selon ces deux possibilités, extérieure et rationnelle, sont <au nombre de> neuf.

Si l'inclinaison du triangle sur la base est comme l'inclinaison du quadrilatère sur l'autre base et si, avec cela, les deux angles NOM, AEG sont égaux, les deux angles ordonnées des deux sections AB, NS sont égaux, d'après ce que l'on sait. Et les lignes ordonnées, à cause de l'égalité des diamètres, sont égales. Alors les deux sections sont égales par l'argument de la superposition.

Si, avec cela, les deux angles NOM, AEG sont différents, les deux angles ordonnés des deux sections ne sont pas égaux.

Si les deux inclinaisons sont différentes et si, avec cela, les deux angles NOM, AEG sont égaux, alors les deux angles ordonnés sont différents. Sinon, ils seraient égaux et il découle nécessairement de l'égalité, l'égalité des inclinaisons. Et cela est absurde.

Si ces deux angles sont également différents, alors s'il y a, à chaque extrémité, un plus grand et un plus petit, l'égalité des deux angles ordonnés n'est pas possible.

Et si les deux plus grands sont à une même extrémité, quelle qu'elle soit, et les plus petites à l'autre <extrémité>, il n'est pas impossible, rationnellement, que les deux angles ordonnés soient égaux, comme il n'est pas impossible qu'ils soient différents.

Dans chaque situation où l'on a l'égalité des deux angles ordonnés, ajoutée à l'égalité des diamètres, c'est une conséquence de l'égalité des deux sections, ou plutôt de leur équivalence. Et, dans chaque situation où l'on a l'égalité des diamètres et l'inégalité des deux angles ordonnés, ou bien où l'on ne connaît ni l'inégalité ni l'égalité, il n'est pas possible d'affirmer l'inégalité en grandeur des deux sections. Il est possible <alors> qu'elles soient égales par un argument autre que la superposition. Mais on n'est pas autorisé à l'affirmer par l'absence d'équivalence alors que l'on <peut> connaître l'inégalité. Et c'est plus général que l'absence d'égalité parce que l'égalité est plus générale que l'équivalence.

De même, si l'angle ordonné de la section AB est plus petite que l'angle d'inclinaison du triangle sur la base, nous sommes en mesure de construire l'angle ordonné NOF comme l'angle ordonné AEZ en séparant de l'arc GP, dans les deux sphères imaginées, un arc égal à l'arc AEZ. Et nous prenons le point F comme pôle et nous traçons autour de lui un cercle, à une distance <égale> à <l'arc> séparé.

Parce qu'il n'est pas plus petit que l'arc d'inclinaison, ce cercle rencontre la surface du triangle en un point. Nous joignons O à ce point par la ligne ON et nous menons le plan FON. Il engendre une section dont l'angle ordonné est égal à l'angle ordonné de la section AB.

Sauf que rien n'interdit, par l'esprit, que le diamètre NS ne soit pas comme le diamètre AB ou bien, s'il arrive que le diamètre NS soit comme le diamètre AB, que NR ne soit pas comme AH. Comme rien n'interdit qu'ils soient comme eux.

Le but complet n'est pas atteint puisque il n'est pas nécessaire, du fait seulement de l'égalité des deux angles ordonnés, <qu'il y ait> égalité des deux sections. Comme cela n'est pas nécessaire, du fait seulement de l'égalité des diamètres.

De même, Si on avait trouvé précédemment, ou si on trouve, une preuve du fait que si nous menons la ligne KC vers la corde LM déterminée, à partir d'un point K déterminé sur la circonférence de sorte qu'elle soit divisée par la corde et la circonférence selon un rapport connue et que, avec cela, l'angle KCM soit comme un angle connu, on aurait eu la preuve du fait que, dans le cas où l'inclinaison du triangle est comme l'inclinaison du quadrilatère, nous menons KC selon le rapport demandé, et que l'angle KCL soit comme l'angle AEG. Et il aurait été possible, dans le cas où les deux inclinaisons diffèrent, à l'aide de l'analyse ou d'autre <chose>, de chercher la valeur de l'angle NOL et de chercher le rapprochement entre lui et l'angle AEG, en fonction du rapprochement entre les deux inclinaisons, selon que les deux dépassements sont dans un même rapport ou bien ne sont pas dans un même rapport.

Mais, rien de cela n'a été <établi> auparavant. Et son étude entraîne l'allongement. Et, si Dieu le Très haut le veut, il apparaîtra clairement, plus tard, avec des preuves, quelles sections sont égales entre elles.

Quant à vouloir construire, dans un certain cône, une section <conique> <qui soit> comme une section connue dans un cylindre connu, c'est-à-dire trouver un cône qui entoure cette section, que la section soit AB, ABGD le quadrilatère associé, son côté droit AH et son intersection avec la base EZ. Et nous supposons une ligne quelconque, que ce soit KC, et nous prenons le rapport de KC à CQ comme le rapport de AB à AH.

Alors, ou bien Q est sur AK du côté de C ou bien il est sur K ou hors de lui du côté opposé à celui de C. Nous construisons sur C un angle aigu KCL, plus grand que le complémentaire[14] de l'angle ZEA, qui est l'angle ordonné, si l'angle ordonné est aigu.

Nous menons du point K, si Q tombe sur K, ou du milieu de KQ, s'il tombe dans l'un des deux côtés, la perpendiculaire L'U à KC. Puisque l'angle de la perpendiculaire est droit et l'angle C est aigu, la perpendiculaire rencontre la ligne CL en U. Nous divisons L'U en deux moitiés par L" et nous joignons L"Q. Nous traçons un cercle autour du centre L" à la distance L"Q, ou bien autour d'un point qui est sur la ligne L"J hors de L" et du côté de J, et à la distance de ce point du point Q.

Puisque L"Q, ou la <ligne> qui joint ce point à Q, est plus longue que L"J ou que la <ligne> qui joint ce point et J, et qu'elle est égal à L"K ou bien à la <ligne> qui joint entre elle et K, et plus courte que L"C ou bien la <ligne> qui joint entre elle et C. Et <puisque> ce cercle passe aussi par le point K et qu'il coupe la ligne CL au deux points L, M, et qu'il n'atteint jamais le point C, elle sera comme le cercle KQML.

[14] - Littéralement : "*plus grand que le complément de l'angle EZA par rapport à un <angle> droit*".

Nous joignons K aux deux points M, L, à l'aide des deux lignes KL, KM. Nous menons entre les deux côtés KL, KM, la ligne NS égale à AB et parallèle à KC. Et nous prenons le rapport du carré de KC au produit de LC par CM comme le rapport de NS par NR qui lui est perpendiculaire. Ce sera lui le côté droit et <il sera> égal à AH, comme on l'a su.

Nous menons NS vers O de LC et nous menons sur le plan du triangle OP perpendiculaire à LC et nous menons OF perpendiculaire au plan du triangle.

Si l'angle ordonné de la section AB est droit, nous considérons la ligne LM diamètre du cercle dans le plan FOL et nous faisons tourner l'un des deux côtés, KL, KM autour de sa circonférence. Il engendrera un cône. Et nous menons le plan FON qui engendrera une ellipse égale à la section AB, au niveau des deux diamètres, des lignes ordonnées et de ses angles.

Si les angles ordonnés de la section AB sont aigus, puisque l'angle NOL est plus grand que le complémentaire de l'angle ordonné, qui est le complémentaire de l'angle NOP, l'angle NOP est plus petit que l'angle ordonné qui est l'angle AEZ.

Dans la sphère imaginée, si nous menons l'arc VX et que nous le prenons comme une partie de l'arc de l'angle ordonné et que nous traçons <un cercle> autour du pôle V à la distance de cet arc, je veux dire celui qui est égal à l'arc ordonné, ce cercle rencontre l'arc VΛ qui est dans le quart, entre les deux points V, Λ. Pour cela, la perpendiculaire sur laquelle il y a la ligne OL rencontre le plan ΛOX en un point entre les deux points Λ, X. Soit W ce point. Nous joignons OW.

Puisque LO est perpendiculaire au plan ΛOX, l'angle WOL sera droit. Et il est clair que l'arc mené de V vers W est comme l'arc de l'angle ordonné.

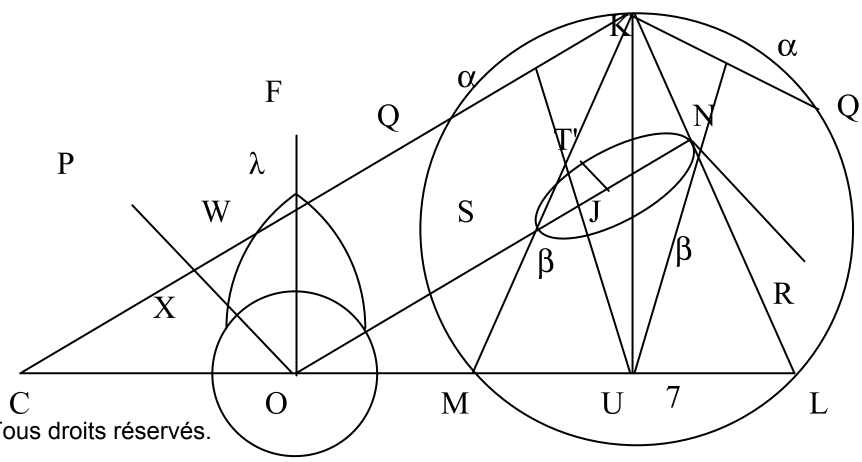
Nous menons le plan situé entre les deux lignes OW, OL et nous traçons, dans ce plan, un cercle de diamètre LM, et nous faisons tourner sur la circonférence de ce cercle l'une des deux lignes KM, KL en fixant le point K; et nous menons le plan WOL. Il engendre sur le cône, de sommet K et de base le cercle LM, dans le plan LOW, la section NS de surface NOW. La condition d'orthogonalité de l'une des deux intersections, et c'est OW, sur l'autre, et c'est OL, est conservée du fait que c'est une section. Et de même pour l'intersection des deux arêtes du fait que c'est une ellipse.

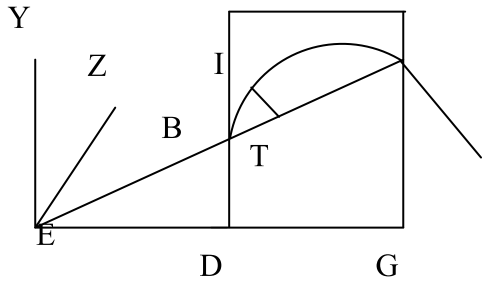
Et l'égalité des deux diamètres et des lignes ordonnées et de ses angles aigus aux deux diamètres de la section AB, à ses lignes ordonnées et à ses angles, est claire. Et cela exprime l'équivalence.

Nous avons donc trouvé un cône KLM entourant une section NS équivalente à la section AB. Et c'est qui était recherché.

Et du moment que la valeur de l'angle KCL, <qui est> aigu intrinsèquement ou bien aigu et excédant au complément de l'angle ZEA, n'a pas de limite déterminée, et que, de même, le centre du cercle, s'il est du côté de U par rapport à L", n'a pas de position déterminée, <sachant que> la détermination du cône portant la section NS (l'équivalente à la section AB), dépend d'eux, il est possible de trouver, à cause de cela, des cônes en nombre infini, tous acceptant une section équivalent à la section cylindrique AB.

Et ceci est un complément. Et c'est ce que nous voulions.





<Proposition IV. 3. 1(6) : >

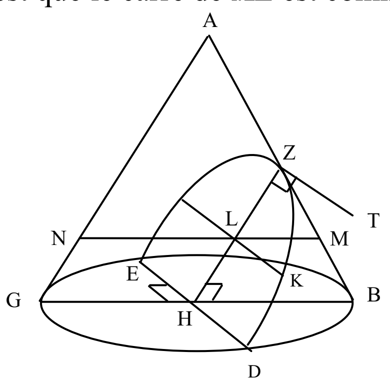
Si un triangle passe par l'axe d'un cône et qu'il est coupé par un plan coupant sa base <tel que> son intersection avec elle soit perpendiculaire à son intersection avec le triangle, et que son intersection avec le triangle, je veux dire le diamètre de la section, soit parallèle à l'un de ses deux côtés, alors toute ligne ordonnée menée de n'importe quel endroit du périmètre de la section vers son diamètre, parallèlement à la perpendiculaire indiquée, est en puissance du produit[15] de ce qui tombe, de son diamètre, entre l'aboutissement de cette ligne et le sommet de la section, par une ligne dont le rapport à ce qui tombe, du côté du triangle, entre le sommet de la section et le sommet du cône, est comme le rapport du carré de la base du triangle au produit de l'un des deux côtés par l'autre.

Et la ligne rapportée, si elle est perpendiculaire à l'extrémité du diamètre transverse, est le diamètre droit. Et tu sauras alors que la section est la parabole.

<Exemple de cela>

Qu'un plan passe par l'axe du cône et qu'il y engendre le triangle ABG et qu'il soit coupé par le plan DEZ coupant sa base sur DE en étant perpendiculaire à BG, et son intersection avec le triangle, qui est ZH, coupe le côté AB en Z, en étant parallèle au côté AG; et le point H est commun aux trois plans. On suppose K sur le périmètre de la section et on mène KL parallèle à DH. Il tombera sur ZH, comme il a été démontré. Et on mène de Z, le sommet de la section, la perpendiculaire ZT au diamètre ZH, rendant le rapport de ZT à ZA comme le rapport du carré de BG au produit de AB par AG.

Alors, l'assertion est que le carré de KL est comme le produit de LZ par ZT.



<Preuve de cela>

De L, menons MLN parallèle à BG, et LK parallèle à DH. Le plan KLM est alors parallèle au plan de la base, et l'angle KLN est comme l'angle DHG; il est donc droit. Et KLM est un cercle et MN est un diamètre. Donc, le produit de ML par LN est comme le carré de LK.

Puisque le rapport de TZ à ZA est comme le rapport du carré BG au produit de BA par AG, il est donc composé du rapport de BG à BA, je veux dire du rapport de MN à MA, ou plutôt du rapport de NL à ZA, et du rapport de BG à GA, je veux dire du rapport de MN à NA, ou plutôt du rapport de ML à LZ.

Et le rapport du produit de ML par LN, c'est-à-dire le carré de LK, au produit de LZ par ZA est aussi composé du rapport du rapport de ML à LZ et du rapport de LN à ZA. Donc, le rapport de TZ à ZA est comme le rapport du carré de LK au produit de LZ par ZA. Et le rapport de TZ à ZA est aussi comme le rapport du produit de TZ par ZL au produit de AZ par ZL parce que la hauteur ZL est commune.

[15] - Nous traduisons par "*produit de a par b*" l'expression arabe "*surface de a par b*" [musaṭṭaḥ a fī b ou saṭḥ a fī b]

Le rapport du produit de TZ par ZL au produit de AZ par ZL est donc comme le rapport du carré de LK au produit de LZ par ZA. Donc, le carré de LK est comme du produit de LZ par ZT. Et c'est ce qui est cherché.

Et nous démontrerons ainsi pour toute autre ligne ordonnée.

Et là, il a été démontré que les rapports des carrés des lignes ordonnées, les uns aux autres, sont comme les rapports des parties du diamètre situées entre leurs intersections avec lui et le sommet de la section et cela parce que la hauteur du diamètre droit, dans les surfaces qui lui sont égales, est commune. Le rapport du carré de DH au carré de KL, par exemple, est comme le rapport de HZ à LZ.

Et il est clair, comme cela a été évoqué, que cette section se prolonge d'une manière infinie vers l'extrémité ED, en fonction du prolongement de l'axe du cône et du prolongement du diamètre ZH avec eux, car ZH là où il est prolongé, ne sort pas du plan de la section.

Et c'est ce que nous voulions.

< Proposition IV. 3. 1(7) : >

Si un triangle passe par l'axe d'un cône et qu'il est coupé par un plan coupant sa base, selon une intersection perpendiculaire à son intersection avec le triangle, et coupant son intersection avec le triangle, et c'est le diamètre de la section à l'un de ses deux côtés, du côté de la base <en partant> du sommet, et de l'autre côté à son opposé, alors toute ligne ordonnée menée de n'importe quel endroit du périmètre de la section vers son diamètre, <en étant> parallèle à la perpendiculaire indiquée, est en puissance d'une surface appliquée à la ligne dont le rapport à ce qui est situé du diamètre de la section entre les deux côtés du triangle, <et qui est> une corde à l'angle extérieur à lui, comme le rapport du carré de la ligne menée du sommet du triangle vers sa base, parallèlement au diamètre de la section, au produit de ce qui est situé d'elle entre son endroit et l'un des deux côtés du triangle par ce qui est situé entre lui et l'autre côté, augmenté d'une surface semblable au produit de ce qui est rapporté par ce qui est rapport à lui, déjà évoqués; et la largeur de ce qui est appliqué, c'est ce qui est situé, du diamètre, est situé entre le pied de cette ligne ordonnée et le sommet de la section.

Et c'est comme si tu as eu l'intuition que c'est là l'hyperbole; et ce qui est situé entre les deux côtés à l'extérieur du triangle, c'est le diamètre transverse; et celui auquel on rapporte, s'il est perpendiculaire à l'extrémité du <diamètre> transverse, c'est le diamètre droit; et le milieu du <diamètre> transverse est le centre <de la section>.

Et si le plan de la section est prolongé, il engendrerait dans le cône opposé une section égale, plutôt identique à cette section-là, <au niveau> de la grandeur, des deux diamètres, des lignes ordonnées, de leurs angles, de leur parallélisme à la perpendiculaire indiquée.

Faisons passer un plan par l'axe d'un cône qui y engendre le triangle ABG et qu'il soit coupé par un plan coupant sa base sur l'intersection DE qui est perpendiculaire à l'intersection BG. Et l'intersection de la section avec le triangle, qui est le diamètre ZH. Il coupe le côté AB en Z, du côté de la base BG, à partir du sommet A, et le côté AG en T, au-dessus de A, sur la surface <latérale> du cône opposé. On mène la perpendiculaire ZL à ZH, et AK parallèle à lui. Et nous prenons le rapport de TZ à ZL comme le rapport du carré de AK au produit de GK par KB. ZL est donc le diamètre droit, et ZT le <diamètre> transverse. Et nous menons de M, supposée sur le périmètre de la section, la ligne ordonnée MN vers le diamètre, parallèlement à ZH; et de N, NS parallèle à ZL. et on sépare TL et on le prolonge jusqu'à U de NS; et nous menons des deux points L, U, LO, UF, parallèles à ZT; et nous menons ZL vers F, et nous achevons le tracé de la figure.

La surface ZU appliquée à ZL, augmentée de la surface UL -qui est semblable à la surface TL, la largeur étant ZN.

Alors l'assertion est que le carré de MN est comme la surface ZU.

Nous menons ZN parallèle à GB et MN parallèle à DH. L'angle MNQ est droit, et la surface ZNM est parallèle à la base et <c'est> un cercle. Donc le produit de ZN par NQ est comme le carré de MN. Et puisque le rapport de TZ à ZL est comme le rapport du carré de AK au produit de GK par KB, il est composé du rapport de AK à KG, c'est-à-dire du rapport de TH à HG, plutôt du rapport de NT à NR et du rapport de AK à KB, c'est-à-dire du rapport du ZH à HB, plutôt du rapport de ZN à NQ. Et le rapport du produit de TN par NZ au produit de NR par NQ, c'est-à-dire au carré de MN, est aussi composé du rapport de TN à NR et du rapport de ZN à NQ. Donc, le rapport de TZ à ZL, c'est-à-dire le rapport de TN à NU est comme le rapport du produit de TN par NZ au carré de MN. De même, le rapport de TN à NU est comme le rapport du produit de TN par NZ au produit de CN à NZ à cause <du fait que> NZ est commun. Donc le rapport du produit de TN par NZ au carré de MN est comme le rapport du produit de TN par NZ au produit de CN à NZ, je veux dire à la surface (ZC). Donc le carré de MN est comme la surface (ZC).

Et ainsi nous démontrons, que pour toute ligne ordonnée, son carré est comme le produit de la <partie de> son diamètre qui est entre lui et le sommet de la section par la ligne ZL avec l'ajout d'une surface semblable à la surface (TL).

Et de là il apparaît que le rapport du carré de chaque ligne ordonnée au carré d'une autre ligne ordonnée est comme le rapport du produit <de la partie> du diamètre de la section <située> entre l'aboutissement de cette ligne sur lui et le sommet de la section par la ligne composée de cette grandeur et le diamètre transverse, en tant qu'une seule ligne, au produit de ce qui est entre l'aboutissement de l'autre ligne sur lui et le sommet de la section par ce qui est composé aussi de cette grandeur et du diamètre transverse.

Par exemple, le rapport du carré de MN au carré de DH est comme le rapport du produit de NZ par NT au produit de HZ par HT.

<Preuve de cela : >

Et cela parce que le rapport du carré de MN au produit de NZ par NT est, toujours, comme le rapport de CN à NT, ou plutôt comme le rapport de LZ, le diamètre droit, à ZT, le transverse. Et de même, le rapport du carré de DH au produit de ZH par HT est comme le rapport de ZL par ZT. Donc, le rapport du carré de MN au produit de NZ par NT est comme le rapport du carré de DH au produit de ZH par HT. Et, par permutation, le rapport du carré de MN au carré de DH est comme le rapport du produit de ZN par NT au produit de ZH par HT.

Et il est clair, comme précédemment, que cette section se prolonge par le prolongement du diamètre ZH, alors que l'extrémité du cône a sa surface qui s'étend et qui s'élargit jusqu'à l'infini.

De même, soit ASJ le cône opposé de même sommet que le cône ABG. Et puisque la surface du triangle passe par l'axe, ou bien nous disons qu'elle passe par deux côtés, l'axe étant commun, c'est-à-dire que les deux axes sont dans le même prolongement et, de même, deux de leurs côtés dans un <même> prolongement. Donc la surface du triangle ABG, si elle est prolongée du côté de A, passera par l'axe du cône ASJ, en y engendrant le triangle ASJ de même sommet que le triangle ABG.

Et nous menons, dans le cône ASJ, la surface (SJ) parallèle à la base (BG). Elle engendre, dans le cône ASJ, un cercle parce que toute surface, qui passe parallèlement à la base, dans n'importe lequel des deux cônes opposés, engendre un cercle.

Et, de même, la plupart des propriétés sont généralisables aux deux <cône> opposés, même s'ils ne sont pas exposés à des situations différentes, à cause du caractère général de la preuve et du peu de différences.

Et nous prolongeons la surface de la section. Puisqu'elle passe par la ligne HT et que HT pénètre dans le cône ASJ, parce qu'il coupe le côté AS en T, la situation est interchangeable. Donc, la surface de la section coupe le cône ASJ et elle ne passe par aucune de ses arêtes parce que toutes les arêtes sont communes aux deux cônes, dans le sens indiqué, comme elle elle ne passe par aucune des arêtes du cône ABG. Et elle n'est pas parallèle à la base (SJ). Sinon, elle serait parallèle à la base (BG). Ceci est absurde. Elle coupe plutôt la base du cône elle-même, c'est-à-dire que ce n'est pas plus général qu'elle la coupe ou qu'elle coupe sa surface en dehors du cône, comme cela a lieu dans certains cas pour les ellipses.

Et cela parce que la ligne HT, lorsqu'elle a coupé les deux arêtes BJ, GS aux deux points Z, T, sa position a changé avec eux et elle s'est limitée, après son passage par le point T, entre les deux arêtes AS, AJ. Elle a donc rencontré SJ entre S et J. Et il est sur la surface de la section quel que soit <l'endroit> où il est. Donc la surface de la section coupera le cercle de la base. Qu'elle le coupe en K, T, I.

Puisque la surface de la section et le triangle ont coupé les deux surfaces des deux bases parallèles, ils ont séparé SJ, KI qui sont parallèles aux deux intersections GB, DE. Et l'angle KTS est comme l'angle EHB. L'angle KTS est donc droit. Donc l'intersection du <plan>

coupant avec la base (SJ) est perpendiculaire à son intersection avec le triangle ASJ. Donc, le triangle ASG, dans le cône opposé, est celui par rapport auquel est considéré la quiddité de la section ITK.

Et il est clair qu'elle est hyperbolique parce qu'elle coupe l'une des deux arêtes, et c'est AS, en T, du côté de la base (SJ), par rapport au sommet A et l'autre arête, qui est AJ, en Z, du côté du cône opposé par rapport à lui.

Et nous menons AK parallèle à ZT jusqu'à Y sur SJ. Et nous menons TX perpendiculaire à TT' et nous considérons le rapport du carré de AY au produit de JY par YS comme le rapport de TZ le transverse, commun aux deux sections opposées, à TX. Alors TX sera le diamètre droit de la section TIK.

<Preuve de cela : >

Et puisque la ligne JS est parallèle à GB, le rapport de AC à CS est comme le rapport de AK à KG. Et le rapport de AC à CJ est comme le rapport AK à KB. Et le rapport de TZ à TY est composé du rapport de AC à CS et du rapport de AC à CJ. Il est donc composé du rapport de AK à KG et du rapport de AK à KB. Et le rapport de ZT à ZL est aussi composé de ces deux rapports. Donc le rapport de TZ à TY, le diamètre droit de la section (TIK), est comme le rapport de TZ à ZL, le <diamètre> droit de la section (DEZ). Ils sont donc égaux.

Et nous séparons ZN, par exemple, comme TT'. Donc, le carré de la ligne ordonnée MN est comme le produit de ZN par ZL, je veux dire par TY, avec l'ajout d'une surface semblable au produit de TZ par TY. Et, de même, le carré de T'K est comme le produit de TT', je veux dire ZN, par TY, avec l'ajout d'une surface semblable au produit de TZ par ZL.

Avec une démonstration semblable celle qui a précédé dans la prémisse de l'ellipse, et nous l'expliquerons, le carré de la ligne ordonnée T'K est comme le carré de MN. Donc, T'K est égale à MN.

Et comme cela, nous démontrons que deux lignes ordonnées quelconques, qui sont à égale distance des sommets des deux sections, sont égales.

Et les lignes ordonnées de la section TIK sont parallèles aux lignes ordonnées de la section DEZ.

<Preuve de cela : >

Puisque les deux sections EH, T'K sont perpendiculaires aux deux sections JS, BG, les lignes ordonnées de chaque section sont parallèles à l'une des deux et qui sont parallèles. Et les angles des lignes ordonnées de la section TIK sont comme les angles des lignes ordonnées de la section DEZ et elles sont positionnées selon leur position à cause du parallélisme des lignes ordonnées.

Et il est clair que la section TIK, comme aussi la section DEZ, se prolonge avec son diamètre jusqu'à l'infini.

Si on imagine que l'on positionne le point Z de la section (DEZ) sur le point T de la section TIK et que l'on positionne le diamètre ZH sur le diamètre TT' de sorte que les angles égaux se positionnent les uns sur les autres, je veux dire que si les angles des deux sections sont aigus et obtus, les aigus se positionnent sur les aigus et non les obtus sur les aigus, alors toute partie du diamètre coïncide avec une partie égale à elle et l'angle qui est à son extrémité, qui est autre que le sommet de la section, <coïncidera> avec son égal qui est à cet endroit. Et les deux lignes ordonnées qui sont là coïncideront l'une avec l'autre, sans aucun excès, à cause de leur égalité. Et, pour cela, les deux parties des deux périmètres des deux sections qui sont entre leurs deux sommets et les deux extrémités de ces deux lignes ordonnées, coïncideront l'une avec l'autre. Alors, les deux parties des deux surfaces des deux sections, de leurs deux diamètres, de leurs lignes ordonnées, de leurs angles et de leurs périmètres, qui sont situées entre leurs deux sommets communs et cet endroit considéré par l'esprit, sont égaux à cause de leur coïncidence sans aucun excès.

Mais <pour> deux surfaces planes, si une partie de l'une des deux coïncide avec une partie de l'autre, il n'est pas possible qu'elles diffèrent par l'autre partie sinon, cela nécessiterait qu'une partie de la ligne droite soit dans la surface et une partie hors d'elle. Ceci est absurde.

Donc les deux surfaces tout entières des deux sections coïncident, l'une avec l'autre.

Et, <à partir> de cela, l'esprit <déduit>, par intuition, que si elles se prolongeaient jusqu'à l'infini, du côté de la base, mais sans que l'on sépare quoi que ce soit des positions supposées, les unes des autres, mais plutôt jusqu'à ce qu'il a considéré pour elles, elles seront unifiées comme une seule chose, sans distinction aucune. Elles sont donc identiques. Et c'est cela le sens de l'identité et de l'égalité pour ce qui est infini des sections. Et c'est ce que nous voulions.

Eclaircissement de ce qui a été <déjà> évoqué :

Soit AB perpendiculaire à AG et à BD, qui sont égaux, dans la situation du transverse pour les deux <sections> conjuguées et leurs <côtés> droits. Nous joignons AD, BG et nous les prolongeons. Et nous prolongeons AB dans les deux directions vers ZH et nous menons NL, HM parallèles à AG et rencontrant AD; BG sur L, M; et nous joignons GD et nous le prolongeons dans les deux directions vers T, K et nous menons AG, BD et LN, MS parallèles à KT et rencontrant AG, BD en S et N.

La surface (AM) est appliquée à la ligne AG, augmentée de la surface GM qui est semblable à la surface AD. Et la surface (BL) lui est appliquée, augmentée de la surface DL qui est semblable à elle également.

Nous disons : si AH est comme BZ, la surface AM est comme la surface BL et inversement. Et si AH, par exemple, est plus grand que BZ, AM sera plus grand que BL et inversement. Que AH soit comme BZ et AG comme BD. La surface AK est donc comme la surface BT; et le rapport de TD à DN est comme le rapport de KG à GS; et TD est comme KG. Donc DN est comme GS. Donc la surface TN est comme la surface GM. Donc l'ensemble de la surface BG est comme l'ensemble de la surface AM.

De même, que AH soit plus grand que BZ. La surface AK est donc plus grande que la surface BT. Et, à cause de la proportionnalité indiquée, GS est plus grand que DN, plutôt la surface GM est plus grande que la surface DL. Donc l'ensemble AM est plus grand que l'ensemble BL.

De même, que la surface AM soit comme la surface BL. Si AH n'était pas comme BZ, AH serait plus grand ou plus petit que BZ. La surface AM serait plus grande ou plus petite que la surface BL. Ceci est absurde.

De même, Si AM était plus grand que BL. Si AH n'était pas plus grand que BZ, la surface AM serait égale à la surface BL ou plus petite qu'elle. Ceci est absurde.

Les assertions ont donc été établies et c'est que l'on cherchait.

Avertissement sur ce qui a précédé d'une manière implicite :

Soit AB une ellipse et G son centre qui est le milieu de BA. On mène la ligne GE d'une manière ordonnée. C'est le diamètre conjugué. Et nous disons que c'est la plus longue ordonnée et celle qui est la plus proche d'elle est plus longue que celle qui est la plus éloignée.

<Preuve de cela :>

Soit AD le diamètre droit. Nous menons les deux lignes ZH, OF d'une manière ordonnée et nous joignons BD. Et nous menons GT, OC, ZK parallèles à AD; et TL, KM, CR parallèles à AB. Et nous joignons les deux diamètres AT, AC, qui rencontrent ZK, ou bien TK, sur N, R.

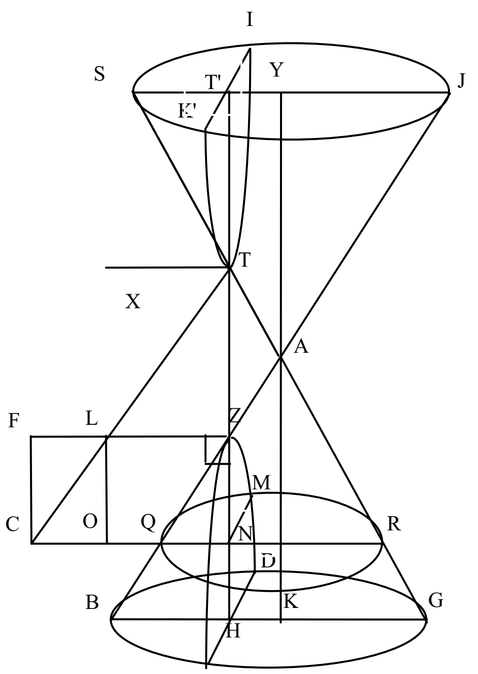
Et nous menons NS, RD' parallèles à AB, ou bien AD. Et que ce soit à la rencontre de TL, ZK ou TGM, KD' et à la rencontre de CQ, ZKT'.

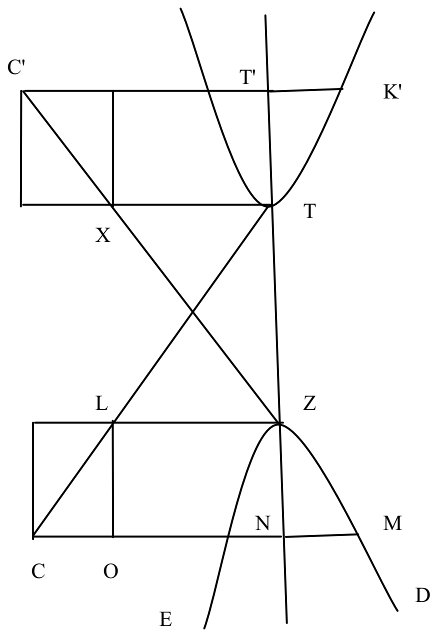
Donc, le rapport de BG à GA est comme le rapport de BT à TD, c'est-à-dire comme le rapport de AL à LD. Et BG est comme GA. Donc AL est comme LD; et le rapport de KY à YT est comme le rapport de BG à GT, ou bien de DL à LT. Et le rapport de NY à YT est comme le rapport de AG à GT, ou bien de AL à LT. Donc, le rapport de KY à XT est comme le rapport de NX à YT. Donc, NX est comme YT.

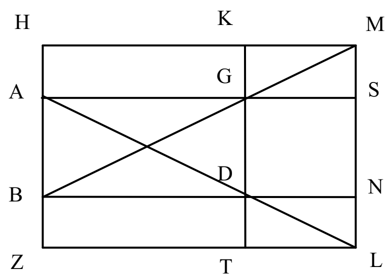
Mais, le complément de NL est comme le complément de NG. Donc la surface (NG), ou bien (NL), est comme la surface (YR), ou bien (YM). Donc, la surface (YL), ou bien (YG) est plus grande que la surface (YR), ou bien (YM) de la surface (YS) située sur le diamètre. Et la surface (YA) est commune. Donc, la surface GE, qui est en puissance de la surface la plus grande, est plus grande que ZH, qui est en puissance de <la surface> la plus petite.

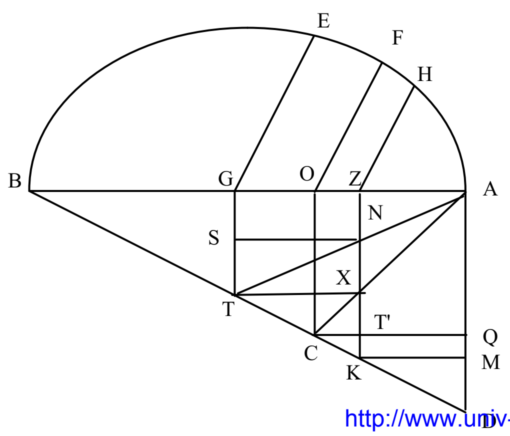
<On a> aussi : le rapport de RB à T'K est comme le rapport de AQ à QD. Donc, RT' est plus grande que T'K. Donc, la surface (RQ), ou plutôt (RO) qui lui égale, est plus grande que la surface (KQ). Donc, (T'O) est beaucoup plus grande qu'elle. Et (T'A) est commune. Donc, (OQ) est plus grande que (RM). Donc, FO, qui est en puissance d'elle, est plus grande que RH. Donc, la <ligne la> plus proche du conjugué est la plus grande.

Et c'est ce qui était cherché.









< Proposition IV. 3. 1(8) : >

Si, d'un point sur le périmètre de l'ellipse, entre les deux diamètres conjugués, ou <sur le périmètre> de l'une des deux sections <hyperboliques> opposées, on mène une ligne aboutissant au centre ou parallèle au <diamètre> transverse, elle aboutira à un autre point du périmètre de l'ellipse ou de la <section> opposée et elle sera divisée en deux moitiés au centre, pour la ligne coupante, et en un autre <point> pour la <ligne> parallèle au diamètre conjugué.

Soit AB le diamètre des deux <branches hyperboliques> opposées AD, EB ou de l'ellipse ADEB, et G son milieu. C'est le centre. Et nous menons GT, parallèle aux lignes ordonnées. C'est le diamètre conjugué. Et nous supposons D entre les deux diamètres sur le périmètre de l'ellipse ou de l'une des deux <branches> opposées <de l'hyperbole>. Nous joignons D et G et nous menons DK parallèle à AB.

L'assertion est que chacun des deux <segments> DG, DK, s'il est prolongé, aboutit à l'autre périmètre ou à un autre point et il est divisé en deux moitiés en G ou en un autre point de GT.

Menons DZ d'une manière ordonnée et séparons BH comme AZ. Et nous menons aussi H L d'une manière ordonnée. Ils sont parallèles à GT. Et DK rencontre DZ. Il rencontre donc GT parce que l'ensemble est dans un même plan. Qu'il le rencontre en K. Puisque la ligne GT est plus longue que DZ et à cause du parallélisme des côtés, GK est comme DZ. K tombe donc à l'intérieur de l'ellipse. Et nous joignons LK, GE.

Puisque le rapport du produit de AH par BH au carré de EH est comme le rapport du transverse au droit; et de même, le rapport du produit de BZ par ZA au carré de ZD est comme le rapport du transverse au droit. Donc, le rapport du produit de AH par BH au carré de EH est comme le rapport du produit de BZ par ZA au carré de ZD. Or le produit de AH par BH est comme le produit de BZ par ZA à cause de l'égalité de ZA à BH et de ZB à AH. Le carré de ZD est donc comme le carré de EH.

Ou bien nous disons : il a été démontré dans l'introduction, à cause de l'égalité de BH à ZA, que le carré de DZ est comme le carré de EH.

Donc ZD est comme EH, et ZG comme GH et les deux angles Z, H sont alterne-internes. Donc, DG est comme GE. Et l'angle DGZ est comme l'angle EGH. Donc, l'angle EGH avec l'angle DHG sont comme deux droits. Donc DGE est une même <ligne> droite. DG a rencontré, par prolongement, un point du périmètre de la <branche hyperbolique> opposée ou un autre point du périmètre de l'ellipse, et elle est divisée en deux moitiés au centre G.

De même, puisque la surface ZDKG est à côtés parallèles, ZD est comme KG et DK comme ZG. Et puisque GK est parallèle et égal à LH et que l'on a joint KL, GH, alors KL est parallèle et égal à GH. Et puisque GK est tombé sur les deux parallèles, l'alterne-interne DKG est comme l'alterne-interne KGH, et l'alterne-interne LKG et comme l'alterne-interne KGZ. Donc les deux angles GKD, GKL sont comme deux droits. Donc DKL est une même <ligne> droite. Et DK, KL sont comme ZG, GH. Donc DK, KL sont aussi égaux. KD a rencontré l'autre périmètre ou un autre point du périmètre et il a été divisé en deux moitiés par le <diamètre> conjugué.

Et il a été également démontré que si une ligne passe par le centre des deux sections <hyperboliques> opposées ou par le centre de l'ellipse et aboutit aux deux extrémités du <diamètre> conjugué sur le périmètre ou sur les deux périmètres, ou bien si on mène une ligne parallèle au diamètre transverse, elle sera également divisée en deux moitiés par le <diamètre> conjugué sur le centre ou sur un <point> autre que lui.

Et cela parce que l'une des deux facettes de cette hypothèse, et qui est l'hypothèse de mener d'un point du périmètre de l'une des deux <sections> opposées ou de l'ellipse, entre les deux conjugués, une ligne parallèle au conjugué ou bien passant par le centre, est nécessaire à l'autre facette, et qui est le passage par l'autre périmètre ou par un autre point.

L'assertion dans cette hypothèse étant la division en deux moitiés au centre, ou en un autre <point>, par le conjugué, comment en serait-il si l'on suppose et que l'on pose l'ensemble des deux facettes, dont chacune est nécessaire à l'autre et à l'assertion. L'assertion est donc nécessaire avec les deux, sous deux formes.

Par exemple, nous supposons DL parallèle à AB et DGE passant par le centre et les deux rencontrant les deux périmètres ou le périmètre aux deux extrémités. Puisque DE, DL sont menés du point D ou bien des deux points L, E du périmètre de l'une des deux <sections> opposées ou bien de l'ellipse, entre les deux conjugués, l'une des deux parallèle au conjugué et l'autre passant par le centre, elles aboutissent à l'autre périmètre ou bien à un autre point. Et elles sont divisées en deux moitiés, au centre, <pour celle> qui passe par lui et en un autre point du conjugué pour la <ligne> parallèle.

Et, après avoir tranché sur la nécessité d'atteindre l'autre périmètre ou bien un autre point, ce qui a lieu par hypothèse et par position, la nécessité de la division en deux moitiés reste dans l'état. Et on ne peut imaginer que deux <lignes> droites soient en continuité avec une <seule ligne> droite. Ceci est absurde.

Et si nous voulons, nous démontrons par une méthode géométrique. Nous disons alors : Nous menons, des deux points D, E, pour la <ligne> passant par le centre, et des deux points D, L, pour la <ligne> parallèle, les deux lignes ordonnées DZ, EH ou bien DZ, LH, et le diamètre GK est parallèle à ZD et rencontre DL. Alors, le rapport du produit de BZ par ZA au carré de ZD est comme le rapport du produit de AH par BH au carré de HE. Et, par permutation, le rapport du carré de ZD au carré de EH, je veux dire le rapport du carré de ZG au carré de GH, est comme le rapport du produit de BZ par ZA au produit de AH par BH. Et, par permutation, le rapport du carré de GZ au produit de BZ par ZA est comme le rapport du carré de GH au produit de AH par HB.

Et puisque AB est divisé en deux moitiés en G et divisé en H ou en Z ou bien augmenté de ZA ou de BH, le carré de ZG, ou bien GH, avec le produit de BZ par ZA, ou bien BH par HA, est comme le carré de GB, ou bien GA, dans l'ellipse. Ou bien <on a> le carré de ZG, ou bien de HG, est comme le carré de AG, ou bien BG, avec le produit de BZ par ZA, ou bien le produit de AH par HB, dans les deux <sections hyperboliques> opposées.

Alors, par composition dans l'ellipse et par séparation dans l'hyperbole, <on a> le rapport du carré de AG au produit de AZ par ZB est comme le rapport du carré de GB au produit de BH par HA. Et les deux carrés sont égaux. Donc, le produit de BZ par ZA est comme le produit de AH par HB. Donc, le rapport de ZB à BH est comme le rapport de HA à AZ.

Alors, par composition dans l'hyperbole et par séparation dans l'ellipse, <on a> le rapport de ZH à BH, ou bien BZ, est comme le rapport de ZH à ZA, ou bien AH. Donc, ZA est comme BH. Donc, le carré de DZ est comme le carré de EH, comme cela a été démontré. Donc, DZ est comme EH, ou plutôt DH est comme GE, par la similitude, <à cause> du parallélisme. Donc DE a été divisé en deux moitiés au centre par lequel elle passe.

<On a> aussi, à cause du parallélisme des côtés de la surface (DH), DZ sera comme GK. Et, parce que DZ est comme LH, d'après ce qui a été démontré dans la prémisse, ZA sera comme BH.

Ou bien nous disons : le rapport du carré de ZD au produit de BZ par ZA est comme le rapport du carré de LH au produit de BH par HA. Et les deux carrés sont égaux. Donc, le produit de BH par HA est comme le produit de BZ par ZA. Donc, le rapport de BZ à BH est comme le rapport de AH à ZA. Donc, d'après ce qui a été démontré, BZ sera comme AH et AG comme GB. Donc, ZG est comme GH. Donc DK est comme KL. DL, qui est parallèle au <diamètre> transverse et qui joint les deux périmètres ou bien le périmètre avec ses deux extrémités a donc été divisé en deux moitiés par <le point> K du conjugué. Et c'est ce qui est cherché.

Et puisque, dans l'ellipse, le carré de la moitié du diamètre conjugué est comme le produit de la moitié du diamètre conjugué par la moitié du diamètre droit. Donc, le carré de tout le diamètre conjugué est comme le produit du conjugué par le droit. Donc, le rapport du transverse au conjugué y est toujours comme le rapport du conjugué au droit. Il est donc le deuxième <dans le rapport> et le droit est le troisième.

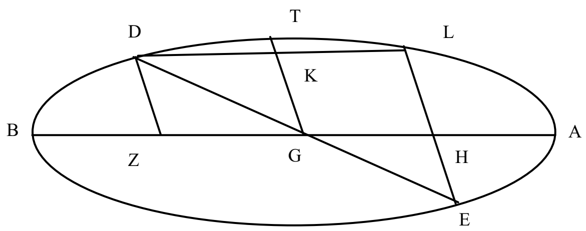
Quant aux deux <sections> opposées <de l'hyperbole>, il n'y a pas de point qui limite le conjugué. Que sa grandeur soit <telle que> le rapport du transverse à lui soit égal à son rapport au droit, c'est-à-dire, qu'il est une moyenne <proportionnelle> entre eux deux, <et cela> dans un <but> utilitaire. Et si sa grandeur est posée ainsi, il sera appelé, pour cela, le second diamètre, c'est-à-dire le second dans le rapport. Et cela a été <déjà> évoqué dans l'introduction.

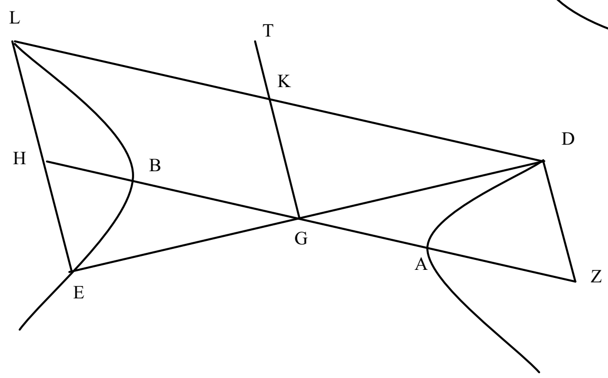
C'est comme si tu imaginais, entre les deux sections opposées, une ellipse dont le diamètre transverse est leur propre diamètre; et elle est engendrée dans un cône qui est entre les deux cônes opposés, dans l'un de leurs deux flancs pour que les deux <cônes> opposés se complètent par ces deux <autres cônes> opposés, comme <le feraient> quatre angles droits au sommet. Ainsi à chaque intersection de deux <lignes> droites, sont réunis quatre sommets pour les cônes. A chaque couple de <sections> opposées est <associée> nécessairement une ellipse; et à chaque ellipse, un couple de <sections> opposés, sauf que les lignes ordonnées du conjugué aux deux <sections> opposées sont plus longues à chaque fois qu'elles s'éloignent du <diamètre> transverse. Et c'est l'inverse pour l'ellipse.

De même, pour chaque parabole, il y a nécessairement une autre parabole dans le cône contigu à son cône. Et ils auront un même sommet et leurs diamètres seront orthogonaux.

Et c'est comme si l'ellipse renfermait ce qui apparaît dans les deux <sections hyperboliques> opposées. Et inversement.

Et, dans cela, il y a un hommage à < Dieu>, l'honoré et le savant.





<Proposition IV. 3. 1(9) : >

Si, d'un point à l'intérieur d'une section, on mène une ligne parallèle à une ligne qui lui est tangente ou <à une ligne> qui le coupe en deux points, elle tombera sur deux points de la section. Et si, à partir du <point>, on mène, dans l'hyperbole et dans la parabole, une ligne parallèle au diamètre transverse, elle tombera sur un seul point de la section.

Soit AB rencontrant une section, et H un point intérieur. On mène GD parallèle à AB. Si AB coupe la section en deux points A et B, nous supposons sur la section, sur les deux flancs des points A, B les deux points E, Z et on joint AE, BZ. Puisque GD est parallèle à AB, et que chacun <des segments> AE, BZ le rencontre, GD rencontre, à chacune de ses deux extrémités, l'une des deux lignes AE, BZ. Si, par exemple, il rencontre AE vers l'extrémité G, entre A et E, l'extrémité G tombera nécessairement sur la section par prolongement à l'infini à cause de la non limitation de ce qui est infini dans ce qui est fini. Et s'il le rencontre sur la section, il rencontre la section. Et s'il le rencontre à l'extérieur, il rencontre d'abord la section puis il le rencontre <lui> à cause de l'infinitude de la longueur de la section et <du fait> qu'il est entre G et la partie de AE située hors de lui.

Et c'est le même propos pour l'extrémité D et la ligne BZ. GD rencontre la section, par ses deux extrémités, en deux points. Et si AB est tangent à la section, en A, nous supposons sur la section, sur les deux flancs de A, les deux points E, Z, et nous joignons AE, AZ. GD sera situé à ses deux extrémités sur les deux lignes AE, AZ, à l'extérieur de la section ou à l'intérieur ou sur elle. Il rencontre la section à ses deux extrémités, comme précédemment.

Si AB est le diamètre transverse dans l'hyperbole et la parabole et qu'il coupe la section au sommet, et qu'il sort avec lui, comme cela a été démontré, jusqu'à l'infini, sans qu'il tombe sur lui une seconde fois, nous supposons le point E sur l'un des deux flancs de A et nous joignons AE. Il rencontre GD, AE selon l'un des trois cas. Il rencontre la section en un point par l'un de ses deux extrémités. Que ce soit G. Et il n'est absolument pas possible qu'il la rencontre par son autre extrémité, même s'il est prolongé jusqu'à l'infini.

Sinon, qu'il la rencontre aussi au point D. On mène des deux points G, D les deux lignes ordonnées GH, DT.

Dans la parabole, le rapport du carré de DT au carré de GH sera comme le rapport de AT à AH; et AT est plus grand que AH. Donc DT est plus long que GH.

Et dans l'hyperbole, le rapport du carré de DT au carré de GH est comme le rapport de la surface de BT par TA à la surface de BH par HA. Or la première surface est plus grande. Donc, DT est plus long que GH. Et puisque la surface GDTH est à côtés parallèles, DT est égal à GH. Ceci est absurde. Donc, dans ces deux sections, GD qui est parallèle au transverse ne rencontre pas <le périmètre> en un autre point, après avoir rencontré la section au point G, même s'il est prolongé du côté de D jusqu'à l'infini. Et c'est ce qui était cherché.

Et là il a été démontré que les lignes ordonnées, chaque fois qu'elles s'éloignent du sommet de la section, dans l'hyperbole et la parabole, elles deviennent plus longues. Et on a vu que, dans l'ellipse, ce qui est plus proche du <diamètre> conjugué est plus long.

Et, à partir de là, il a été démontre que si on mène d'un point qui est sur l'hyperbole ou la parabole une ligne parallèle au transverse, elle tombera dans la section parce que les lignes ordonnées s'accroissent <en longueur> et la distance entre les deux parallèles ne varie pas.

Et il a été également démontré que si on mène, d'un point qui est dans la surface de l'hyperbole ou de la parabole, à l'extérieur de son périmètre, une ligne parallèle au transverse, elle tombe sur un seul point de la section. Et cela en menant, d'un point de cette <ligne> parallèle, une ligne parallèle aux lignes ordonnées; et on applique au diamètre droit une surface plus grande que le carré de cette <ligne> menée sans ajouter ou retrancher, dans <le cas de> la parabole, une surface sur sa longueur; et en ajoutant sur sa longueur, dans <le cas de> l'hyperbole, une surface semblable au produit du <diamètre> conjugué par le <diamètre> droit. Elle engendrera une largeur. On mène alors, de son extrémité qui n'est pas reliée au

<diamètre> droit, une des lignes ordonnées dont le carré est égal, dans la parabole, au produit de la largeur par le <diamètre> droit. Et, dans son <cas>, sa surface <s'obtient> par l'ajout de la surface semblable indiquée dans <le cas de> de l'hyperbole. Dans les deux <cas>, elle sera plus grande que la ligne menée de la parallèle à son conjugué, parallèlement aux lignes ordonnées. Et pour cela, cette <ligne> parallèle coupera cette ligne ordonnée-ci à l'intérieur de la section. Elle coupera donc, nécessairement, la section, et en un seul point parce qu'elle est parallèle au conjugué.

Et toi tu sais que la ligne GD, soit dans <la situation de> l'aboutissement à l'un des deux diamètres conjugués ou aux deux, soit dans la situation du non aboutissement au deux, suit la ligne AB prolongée et lui est parallèle. Si AB rencontre les deux ou l'un des deux ou si elle ne rencontre aucun des deux, GD fera de même.

Et, de fait, elles diffèrent dans la <manière> d'aboutir au deux ou à l'un des deux, selon <la manière> d'entrer dans la section et d'en sortir.

Par exemple, AB abouti sur le diamètre conjugué, à l'extérieur de la section et GD aboutit sur lui à l.

Il y donc similitude dans l'aboutissement <ou> le non aboutissement, à l'intérieur ou à l'extérieur; et cela à cause de leur parallélisme. Donc, l'une des deux aboutit sur les <mêmes> lignes droites auxquelles aboutit l'autre. Sinon, elle lui serait parallèle. Et l'autre lui serait aussi parallèle alors qu'elle le rencontre. Ce qui est absurde.

Et il n'englobe pas la <ligne> courbe ou droit; ce qui ne doit pas étonner.

Et tu sais aussi que AB, qui coupe en deux points, ou bien est parallèle au conjugué, et c'est <le cas> dans l'ellipse; et alors, elle coupera le conjugué à l'intérieur de la section en étant divisée en deux moitiés par lui, parce que c'est l'une de ses lignes ordonnées; ou bien elle est parallèle au conjugué, dans son <cas> et celui de l'hyperbole; et alors, elle coupera le conjugué à l'intérieur de la section, dans les deux <cas>; et elle sera <l'une> de ses lignes ordonnées. Ou bien, elle n'est parallèle à aucun des deux. Alors, elle rencontre toujours le conjugué de l'hyperbole à l'extérieur parce qu'elle lui est extérieure. Et <elle rencontre> le conjugué de l'ellipse et le transverse de l'ensemble, soit à l'extérieur de la section, soit à l'intérieur, soit le transverse à l'intérieur et le conjugué à l'extérieur, soit l'inverse dans l'ellipse.

Et, dans <le cas de> la rencontre du transverse à l'intérieur de la section, les deux extrémités de la <ligne> coupante seront toujours, dans l'hyperbole, aux deux extrémités du transverse, dans le plan des deux angles adjacents qui sont en centre, entre les deux conjugués du côté de la section.

Dans l'ellipse, <elles seront> dans les angles <adjacents> ou bien dans la surface des deux <angles> opposés en le <sommet>. Et, en le rencontrant à l'extérieur, elles aboutissent toujours, dans l'hyperbole, à partir d'une même extrémité, entre les deux conjugués, c'est-à-dire dans la surface de l'un des deux angles indiqués.

Et, dans l'ellipse, elles peuvent aboutir entre les deux conjugués, c'est-à-dire dans la surface de l'un des quatre angles qui sont au centre entre les deux conjugués. Et elles peuvent aboutir dans deux des angles adjacents, comme elles peuvent aboutir sur la parallèle à l'un des deux diamètres.

Quant à AB, la tangente, il est possible que la tangence soit sur le sommet de la section ou bien sur l'une des deux extrémités du conjugué, dans l'ellipse. Et il est possible qu'elle soit sur un autre point de la section. Et il est clair que si les deux extrémités de la coupante AB sont entre les deux conjugués, dans le sens indiqué, AB coupera les deux conjugués, ou plutôt GD qui lui est parallèle les coupera aussi tous les deux; et cela parce que la ligne ordonnée menée de l'extrémité la plus éloignée du sommet de la section sera, dans ce cas, plus longue, dans toutes les sections, que celle qui est menée de l'extrémité qui est la plus proche de lui. Elle coupera donc le <diamètre> transverse parce qu'il si elle lui était parallèle ils seraient égaux.

Et puisqu'elle coupe une ligne ordonnée menée d'un point de l'arc dont elle est la corde, elle coupera aussi le conjugué.

S'il est positionné de sorte que les deux lignes ordonnées menées des deux extrémités de AB sur les deux côtés du conjugué, alors AB sera parallèle au conjugué. De même, s'il est positionné de sorte qu'ils soient égaux et opposés aux deux extrémités du conjugué, elle sera parallèle au conjugué.

Et il est clair aussi que si la tangence est entre les deux conjugués, la tangente, qui est parallèle à lui, rencontre les deux conjugués à l'extérieur de la section parce qu'elle rencontre la ligne ordonnée qui sort de la tangence. Elle rencontre alors le conjugué; et elle le rencontre à l'extérieur de la section, dans l'hyperbole et l'ellipse, parce qu'elle est tangente et ne pénètre donc pas dans la section, et parce que, dans l'hyperbole, le conjugué est extérieur et, dans l'ellipse, <il est> plus long que la ligne ordonnée tangente. Et, pour cela, il y rencontre le conjugué. Et, du fait que tout ligne menée d'un point quelconque, à l'intérieur de la parabole et de l'hyperbole, parallèlement à la tangente, rencontre le périmètre en deux points, alors cette <ligne> tangente qui lui est aussi parallèle, rencontre la conjugué.

Et il est clair aussi que la <ligne> qui coupe en deux points, quelle qu'elle soit, coupe le conjugué, dans l'hyperbole et la parabole, du côté du sommet. Et cela parce que la ligne ordonnée la plus éloignée du sommet est plus longue que la plus proche de lui et parce que aussi la tangente, quelle qu'elle soit, rencontre le conjugué.

Et cela parce que nous menons une ligne qui passe par le point de tangence et par un point de la section qui est, par rapport à lui à l'opposé du côté du sommet. Cette <ligne> coupante rencontre le <diamètre> transverse et l'extrémité de la tangente sera entre la section et l'extrémité qui rencontre le conjugué. Elle passera donc nécessairement par le conjugué.

Sache aussi que toute ligne qui aboutit sur le diamètre de la parabole, à l'intérieur de lui, coupera son périmètre en deux points.

Soit GD qui aboutit sur le diamètre AB au point E à l'intérieur de la parabole. Si GD est parallèle aux lignes ordonnées, on sait qu'il passera par deux points du périmètre. Et s'il les coupe, alors si nous menons du point E une ligne parallèle aux lignes ordonnées, elle rencontre la section en deux points et l'une des deux extrémités de DG sera entre lui et la section. Pour cela, l'un de ses deux extrémités, et que ce soit D, sera sur la section.

Et nous menons DZ d'une manière ordonnée. Le point Z sera toujours entre E et A. Et nous considérons AB <comme> une troisième proportionnelle par rapport à ZA et AE, et nous menons BG parallèle aux lignes ordonnées et rencontrant la ligne GD en D et la section en T.

Puisque le rapport de tout AB à tout AE est comme le rapport de EA tronqué à AZ tronqué, le rapport du reste BE au reste EZ est comme ce rapport, c'est-à-dire comme le rapport de BA à AE ou bien de AE à AZ. Et le rapport du carré de BE au carré de EZ, je veux dire le rapport du carré de BG au carré de DZ est comme le rapport de BA à AE doublé. Il est donc comme le rapport de BA à AZ. <On a> aussi le rapport du carré de BT au carré de DZ comme le rapport de BA à AZ. Donc, BT est comme BG et B est commun. Donc le point G coïncide avec le point T. Donc GD rencontre la section au point G aussi comme elle le rencontre au point D.

Et sache aussi que toute ligne menée vers l'hyperbole à partir de son centre ou bien à partir de la <partie> du conjugué qui est située du côté <qui est> différent de celui de la section, pénètre dans la section.

Soit AB le conjugué pour l'hyperbole et G le centre. Menons, d'abord, la ligne GD passant par le centre et rencontrant la section en D. Si GD ne pénètre pas dans la section, elle lui est tangente. On suppose le point E sur elle du côté qui est différent de celui de G, et nous menons DT d'une manière ordonnée et EZH parallèle à elle.

Puisque AB a été divisée en deux moitiés en G et qu'on lui ajouté AT, ou bien AH, le produit de BH par HA est plus petit que le carré de GH du carré de AG. Et, de même, le produit de ZT par TA avec le carré de AG est comme le carré de GT. Et le rapport du carré de EH au carré de DT, -lequel est plus grand que le rapport du carré de ZH au carré de DT qui est comme le rapport du produit de BH par HA au produit de ZT par TA-, est comme le rapport du carré de HG au carré de TG. Donc, le rapport du carré de HG au carré de TG est plus grand que le rapport du produit de BH par HA au produit de BT à TA.

Par permutation, <on a> le rapport du carré de HG au produit de BH par HA est plus grand que le rapport du carré de TG au produit BT par TA. Par séparation, <on a> le rapport du carré de AG au produit de BH à HA est plus grand que le rapport du carré de AG au produit de BT à TA. Donc, le produit de BH par HA, parce que le rapport du troisième à lui est plus grand, est plus petit que le produit de BT par TA. Or il est beaucoup plus grand que lui. Ceci est absurde.

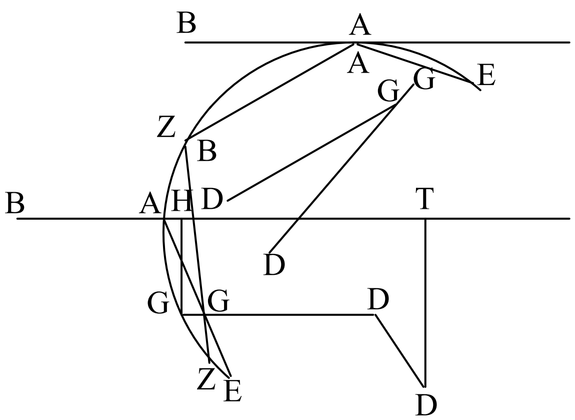
Donc GD n'est pas tangente à la section. Elle la pénètre plutôt par le point D. Et nous de disons pas qu'elle la coupe en deux points pour que l'on ne croit pas cela.

Deuxièmement, que ZD soit mené vers la section à partir du point Z du transverse et qui est, par rapport au centre G, dans un côté différent de celui de la section. Et nous menons GD. Puisque GD pénètre la section à partir de ZD et que la position de ZD s'échange avec <celle de> GD, lorsqu'il y a intersection en D, c'est-à-dire lorsqu'elle est menée du côté de D, alors sa partie représentée par ZD sera située à l'intérieur de la section. Et c'est ce qui est cherché.

Et maintenant qu'il a été démontré que toute ligne menée du centre, ou de <la partie> qui est, par rapport à lui, du côté qui est différent de celui de l'hyperbole, y pénètre et ne lui est pas tangente, on sait, par la démarche de l'inversion de la négation, que si une ligne pouvait être tangente à l'hyperbole, sa tangence serait sur le conjugué, à l'extérieur de la section, comme le sait. Et il y aura toujours, entre elle et la section, <une partie> du transverse plus petite que la moitié du diamètre transverse. Et sa position sur le diamètre transverse est entre le centre et la section. Et ce qui est entre l'extrémité du transverse et cette position est toujours plus long que ce qui est entre le sommet de la section et cette position.

Ce sont là des prémisses qui conviennent à ce sujet.

Et c'est ce que nous voulions.



<Proposition IV. 3. 1(10) : >

Nous voulons mener, d'un point connu, vers le périmètre d'une section connue, une ligne qui lui soit tangente.

Soit AB la section, AB son diamètre transverse, A son sommet, GD le <diamètre> conjugué dans l'ellipse, G le centre de <l'ellipse> et de l'hyperbole, E le point <connu>.

Dans l'ellipse, E est ou bien sur l'un de ses deux sommets, ou bien sur l'une des deux extrémités de son <diamètre> conjugué, ou bien, entre les deux sommets.

Dans l'hyperbole et la parabole, il est ou bien sur le sommet ou sur un <point> autre. S'il est sur le sommet, nous menons EZ parallèle aux lignes ordonnées, dans tous <les cas>. Elle est alors tangente à la section. Sinon, qu'elle y pénètre et qu'elle rencontre la section en deux points ou non. Nous supposons, sur celui qui est intérieur à elle, le point H, et nous menons HT parallèle aux lignes ordonnées.

Puisque HT a été menée à partir d'un point à l'intérieur de la section, parallèle à une ligne la coupant en deux points, et c'est l'une quelconque des lignes ordonnées, HT coupe la section en deux points, c'est plutôt l'un des lignes ordonnées. Il tombe sur le diamètre de la section à l'intérieur d'elle, la divisant en deux moitiés; et HE est aussi parallèle aux lignes ordonnées. Donc, HE est parallèle à HT alors qu'elle le rencontre. Ceci est absurde. EZ ne pénètrent donc pas la section et elle la rencontre en E. Elle lui est donc tangente.

Et si E est sur l'extrémité du <diamètre> conjugué de l'ellipse, nous menons EZ parallèle au transverse. Alors elle est tangente à la section. Sinon, qu'elle la pénètre et nous supposons sur ce qui le pénètre le point H; et nous menons YHT d'une manière ordonnée. Puisque le point Y est entre le sommet et l'extrémité du <diamètre> conjugué, YT est plus court que GD. Donc HT est beaucoup plus courte qu'elle. Donc EZ rencontre AB du côté de EZ, la plus courte, alors qu'elle lui est parallèle. Ceci est absurde. Donc EZ ne pénètre pas la section, elle lui est plutôt tangent en E.

Et Si E est, dans l'ellipse, entre les deux diamètres conjugués et, dans les autres, ailleurs que sur le sommet, nous menons EZ d'une manière ordonnée. Dans la parabole, nous séparons AH comme AZ et, dans l'hyperbole et l'ellipse, nous prenons le rapport de BZ à ZA comme le rapport de ZH à HA, et ce en divisant, dans l'hyperbole, le transverse AB selon le rapport de BZ à ZA, de sorte que BH soit homologue à BZ dans le rapport. Et nous prenons, dans l'ellipse, le rapport de BA à AH comme le rapport de l'excès de BZ sur ZA à ZA. Alors, par composition, le rapport de BZ à ZA sera comme le rapport de ZH à HA.

LB a un excès sur ZA parce que E a été supposé entre les deux <diamètres> conjugués. Z tombe alors toujours, à partir du sommet, vers l'un des deux <diamètres> conjugués. Alors ZB aura sur ZA un excès qui vaut le double de ZG.

Et il en de même dans l'hyperbole, parce que BZ est plus longue que ZA. BH sera donc // [132b] plus longue que HA. Donc H tombe à partir du sommet G vers la région de A; et l'excès de BH sur HA vaut le double de EH. Donc EH est tangent à la section. Sinon, qu'elle la pénètre à partir de l'un des deux flancs de E, coupant en deux points, ou entrant d'une manière quelconque. Et nous supposons sur sa partie entrante le point T; et nous menons YTK parallèle aux lignes ordonnées, rencontrant la section en Y et le diamètre en T.

Quant à la parabole, puisque le rapport du carré de EZ au carré de YK est comme le rapport de ZA à AK, c'est-à-dire comme le rapport du produit de ZA par AH au produit de AK par AH, à cause du <fait que> la hauteur AH est commune, ou plutôt comme le rapport de quatre fois le produit de ZA par AH, c'est-à-dire le carré de ZH, à cause de l'égalité de ZA et AH, à quatre fois le produit de KA par AH, déficient par rapport au carré KG du carré KZ, <qui est> l'excès entre KA et AH. Le rapport du carré EZ au carré KY est plus grand que le rapport du carré de ZH au carré KH, puisque le rapport à un plus petit est plus grand. Mais le rapport du carré de ZH au carré de KH est comme le rapport du carré de ZE au carré de TK. Le rapport du carré de ZE au carré de YK est donc plus grand que le rapport du carré de ZE au carré de TK. Le carré de YK, ou plutôt YK, est plus petit que le carré de TK, ou plutôt TK, parce que celui dont le rapport du troisième à lui est plus grand, est plus petit. Or YK est toujours plus grand que TK. Ce qui est absurde.

Quant à l'ellipse et à l'hyperbole, c'est parce que le rapport de BH à HA est comme le rapport de BZ à ZA, et que le point K a été supposé sur l'une des deux parties BZ, ZA, ou bien sur le prolongement de ZA, ou bien sur ce qui la joint à l'opposé du côté de A, alors, d'après ce qui a été démontré précédemment sur l'étude des lignes selon le rapport, le rapport du produit de BZ par ZA au carré de ZH est plus grand que le rapport du produit de ZK par KA au carré de KH. Par permutation, le rapport du produit de BZ par ZA au produit de BK par KA, je veux dire le rapport du carré de ZE au carré de YK est plus grand que le rapport du carré de ZH au carré de KH, je veux dire le rapport du carré de ZE au carré de TK. Donc, le carré de YK, ou plutôt YK, est plus petit que le carré de TK, ou plutôt TK. Ceci est absurde.

Donc, EH ne pénètre pas la section. Il lui est plutôt tangent en E. Et c'est ce qui est cherché.

Et il est clair que le rapport de ZA à AH est comme son inverse, dans la parabole, à cause de l'égalité <des deux termes> et comme le rapport de ZB à BH, par permutation de l'inverse, dans les autres <sections>. Et, pour cela, ZA est inférieure à AH, dans l'ellipse, et plus grande qu'elle dans l'hyperbole, comme elle lui est égale dans la parabole.

Et l'on a su que, dans l'hyperbole, BH est plus lonue que AH, parce que leur rapport est comme le rapport de BZ à AZ, et que, dans l'ellipse, BZ est plus longue que ZA parce que Z est, par rapport au centre, du côté de A.

De même, <pour> chaque ligne tangente à une section, il n'est pas possible qu'il y ait une autre ligne entre elle et la section.

<Preuve de cela : >

Que la tangente soit, en premier lieu, sur le sommet de la section, le point E étant confondu avec le point A; et soit EZ la ligne tangente.

Si cela était possible, que la ligne EH soit située entre EZ et la section. Nous supposons que le point H est n'importe où sur elle et, à partir de lui, nous menons HYT parallèle aux lignes ordonnées et coupant la section en Y et le diamètre en T.

Dans la parabole, nous considérons le rapport du carré HT au carré de YT comme le rapport de TE à EK et nous menons KLM parallèle à TYH.

Puisque le rapport du carré de TH au carré de TY est comme le rapport de TE à EK et que le rapport de TE à EK est comme le rapport du carré de TY au carré de KL, le rapport du carré de HT au carré de YT est comme le rapport du carré de YT au carré de KL. Le rapport de HT à YT est donc comme le rapport de YT à KL. Le rapport de HT à KL est donc comme le rapport de ET à EK. Et le rapport de HT à MK est aussi comme le rapport de TE à EK. Le rapport de HT à KL est donc comme le rapport de HT à KM. KL est donc comme KM. Or KL est toujours plus court que KM. Ce qui est absurde.

Dans l'hyperbole et l'ellipse, nous considérons AK diamètre droit, nous joignons BK et menons, de T, TL parallèle à AK et rencontrant BK en L. Le produit de LT par TA sera, dans l'hyperbole et l'ellipse ensemble, comme le carré de YT. Et nous considérons le produit de AT par TM comme le carré de HT. TM sera alors toujours plus grand que TL. Et nous joignons MA. Il coupera BL en N. Nous menons NS parallèle à TL et nous menons, du point S, SOF parallèle à TYH.

Puisque le produit de MT par TA est comme le carré de HT, le rapport de MT à TH est comme le rapport de TH à TA. Et puisque le rapport de MT à NS est comme le rapport de TE à ES; et le rapport de ET à SF est comme le rapport de ET à ES, le rapport de MT à NS est comme le rapport de TH à SF. Et, par permutation, le rapport de NS à SF est comme le rapport de MT à TH, c'est-à-dire comme le rapport de TH à TE, ou plutôt comme le rapport de FS à SE. Le produit de NS par SE est donc comme le carré de SF. Mais, le produit de NS par SE est comme le carré de SO. Donc le carré de SO est comme le carré de SF, ou plutôt la ligne SO est comme la ligne SF. Et SF, dans tous ces cas, est plus grand que SO. Ce qui est absurde.

Il n'y a donc pas une autre ligne entre EZ, la tangente au sommet de la section, et la section.

De même, que le point de tangence E, dans l'ellipse, soit à l'extrémité D du conjugué. Et, si cela était possible, qu'une ligne EH soit située entre EZ et la section. Et nous supposons un point H, <situé> sur sa partie intermédiaire, entre la section et EZ. Et nous menons KHYT parallèle au conjugué.

Puisque KT est comme EG et HT est plus petit qu'elle, GA rencontre EK en L, du côté de A. Soit AM le diamètre droit. Nous joignons BM et nous menons TN parallèle au <diamètre> droit. Le produit de AT par TN est comme le carré de YT. Et nous considérons le produit de AT par TS comme le carré de HT. TS sera toujours plus long que TN. Et nous joignons SA. Il coupe NM en O. Et nous menons OF parallèle à TN et FCQ parallèle à TYH.

Puisque le produit de TS par TA est comme le carré de HT, le rapport de ST à TH est comme le rapport de TH à TA. Et le rapport de ST à OF est comme le rapport de HT à FQ, ou plutôt le rapport de OF à FQ est comme le rapport de ST à TH, ou plutôt comme le rapport de TH à TA, ou plutôt comme le rapport de QF à FA, comme cela a été démontré. Donc, le produit de OF par FA est comme le carré de QF; et il est aussi comme le carré de FC. FC est donc comme FQ; et FQ est toujours plus long que FC. Ce qui est absurde.

Il n'y a donc pas une autre ligne entre la tangente à l'extrémité du conjugué et la section.

Que le point de tangence E soit également entre les deux conjugués, dans l'ellipse, et ne soit pas sur le sommet dans les autres <sections>.

Et <soit> la ligne EH la tangente. Et si cela était possible, soit la ligne ET située entre HE et la section.

Puisque toute tangente entre les deux conjugués ou en dehors du sommet rencontre le <diamètre> transverse, ET rencontre le <diamètre> transverse. Qu'elle le rencontre en T.

Dans la parabole, ZA est différente de l'une des deux lignes AH, AT parce qu'elles sont inégales et elle est ou non différente de l'autre.

Qu'elle soit différente de AT. Nous considérons AY comme AT, nous menons YK d'une manière ordonnée et nous joignons KT.

Comme cela a été démontré, KT est tangente à la section. TE lui est tangente <aussi>.

Si K est entre A et E, KT rencontre ET, par prolongement du côté de K, en un <point> autre que le point T, à cause de la non pénétration dans la section.

Si E est entre K et A, ET rencontre TK, par prolongement du côté de E, en un <point> autre que T. Or ils se rencontrent aussi en T. Donc, dans les deux, deux lignes droites entoureraient une surface. Ce qui est absurde.

Quant à l'hyperbole et à l'ellipse, le rapport de BZ à ZA est différent de l'un ou l'autre des deux rapports BH à HA et BT à TA à cause de leur différence.

Dans l'hyperbole, c'est parce que, s'ils étaient égaux, on aurait, par permutation, le rapport de BH à BT comme le rapport de HA à AT. Alors, le rapport du plus grand au plus petit serait comme le rapport du plus petit au plus grand. Et ceci est absurde.

Dans l'ellipse, s'ils étaient égaux, on aurait, par décomposition, le rapport de BA à AH est comme le rapport de BA à AT. Donc AH est comme AT alors qu'ils sont différents. Ce qui est absurde.

Et il n'y a pas d'objection que <la ligne> soit égale ou non à l'autre.

Et que le rapport de BZ à ZA soit différent du rapport de BT à TA.

Dans l'ellipse, nous divisons BA selon le rapport de BT à TA : elle sera divisée" en un autre <point> que Z. Que ce soit I.

Et puisqu'il a été démontré, dans <le cas de> l'hyperbole, que toute ligne tangente tombera sur le conjugué, du côté de la section, par rapport au centre, BT y est donc plus longue que TZ.

Nous prenons le rapport de ZA à AY comme le rapport de l'excès de BT sur TA. Par composition, le rapport de ZI à IA est comme le rapport de BT à TA.

Nous menons, de I vers T, IK d'une manière ordonnée et nous joignons KT.

Comme cela a été démontré, KT sera une tangente. Or TE est une tangent. Donc, comme précédemment, deux <lignes> droites entoureraient un plan. Ce qui est absurde.

Donc, il n'y a pas, entre la tangent et la section, une autre ligne et ce, quelles que soient la section et la tangente <à elle>.

De même, si, par exemple, EH est tangente en un <point> autre que le sommet et l'extrémité du conjugué, elle rencontre le conjugué en H et la ligne ordonnée menée de E, en Z.

Nous disons, dans la parabole, ZA est comme AH.

Dans l'hyperbole et l'ellipse, le rapport de BZ à ZA est comme le rapport de BH à HA.

<Preuve de cela : >

Sinon, nous prenons, dans la parabole, AI comme AH et, dans l'ellipse, on divise BA en I selon le rapport de BH à HA. I sera alors situé, par rapport au centre, du côté de A parce que BH est plus long que AH.

Dans l'hyperbole, nous prenons le rapport de l'excès de BH sur HA à HA comme le rapport de BA à AI. Alors, d'une manière ordonnée, le rapport de BH à AH sera comme le rapport de BI à IA.

Et, de I, nous menons IK d'une manière ordonnée et nous joignons KH. KH sera une tangente. Or HE est tangente.

Alors, ou bien K est entre E et A, ou bien il est entre K et A. Et, quel que soit <l'endroit> où il est, si on prolonge KH ou EH du côté de K ou de E, cela nécessiterait qu'un plan soit entouré par deux <lignes> droites. Ce qui est absurde.

Donc, dans la parabole, ZA est comme AH et, dans les autres <sections>, le rapport de BZ à ZA est comme le rapport de BH à HA. Et c'est ce qui est cherché.

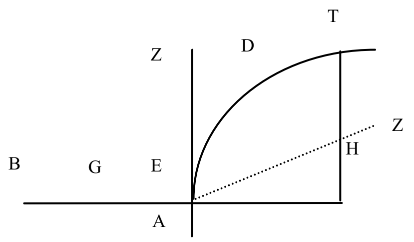
De même, si nous voulons mener, d'un point sur le diamètre conjugué d'une section, à l'extérieur d'elle, une tangente à elle, nous considérons, dans la parabole, <la distance> entre le point du conjugué et le sommet de la section comme <la distance> entre le sommet et un autre point sur lui, à l'intérieur de la section. Et nous menons, <à partir> de lui, une ligne ordonnée et nous joignons son aboutissement sur la section et le point supposé sur le diamètre. Comme on le sait, ce sera une tangente.

Si la section est une ellipse, nous divisons son diamètre conjugué selon le rapport du diamètre avec l'ajout -c'est-à-dire <la distance> jusqu'au point supposé- à l'ajout; et nous menons, à partir du point de division, une ligne ordonnée et nous joignons entre son contact avec la section et le point. Ce sera une tangente.

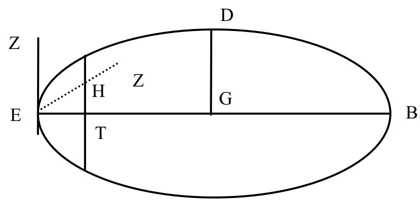
Si la section est une hyperbole, et si le point supposé est sur le centre ou du côté opposé à la section, à partir de lui, on sait qu'il est impossible de mener, à partir de lui, une tangente à la section.

Et s'il est entre le centre et la section, nous prenons le rapport de ce qui est entre l'extrémité du conjugué et ce point à ce qui est entre lui et le sommet de la section comme le rapport de la somme composée du conjugué et d'une certaine ligne, qui est <sa partie> intérieure à la section, à cette grandeur. Et nous menons, dans la section, à partir de l'extrémité de cette grandeur, une ligne ordonnée; et nous joignons sa rencontre avec la section et le point supposé. Ce sera, comme on le sait, une tangente.

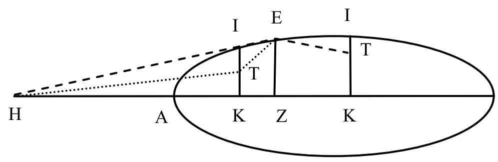
Et c'est ce que nous voulions.



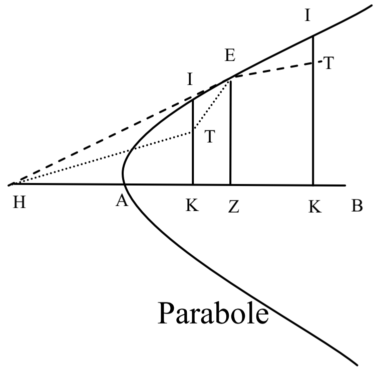
Hyperbole et parabole



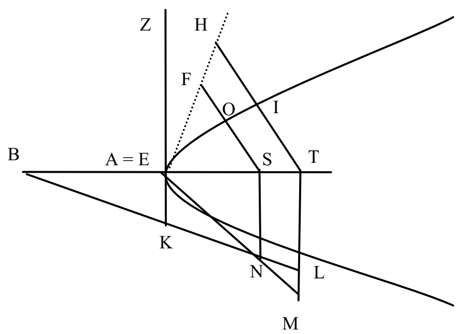
Ellipse



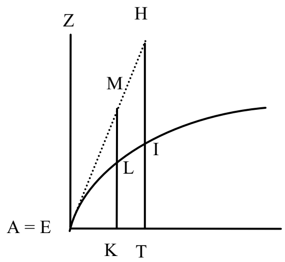
Ellipse



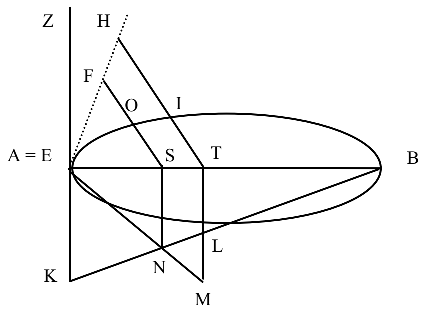
Parabole



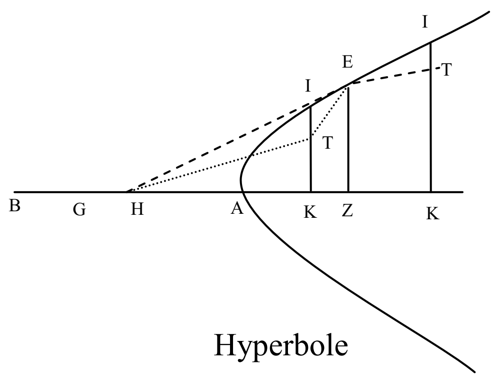
Hyperbole



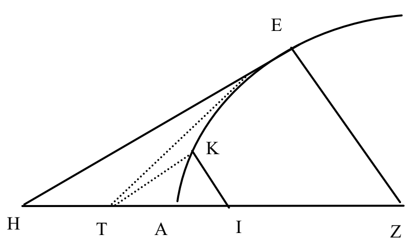
Parabole

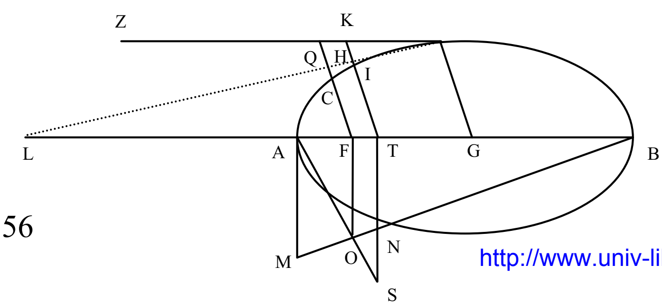


Ellipse

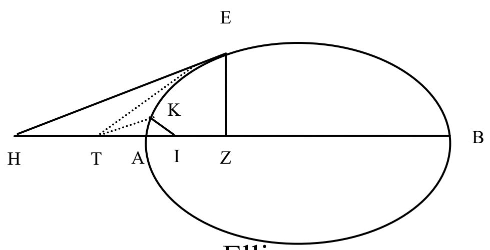


Hyperbole



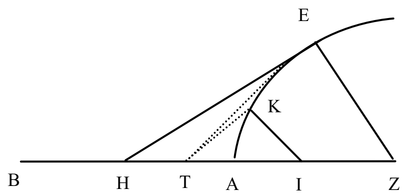


Parabole



Ellipse

Ellipse



Hyperbole

<Proposition IV. 3. 1(11) : >

Si une ligne est tangente à une section non parabolique entre les deux <diamètres> conjugués, et qu'elle les rencontre tous les deux -comme on l'a su- puis que l'on mène de la tangente une ligne à l'un des deux diamètres, d'une manière ordonnée, alors :

La surface de la <partie> de ce diamètre qui est située entre le centre et la ligne ordonnée par ce qui est situé entre le centre également et la tangente, est comme le carré de la moitié du diamètre.

Ceci <étant>, le rapport de la surface de ce qui est situé entre le centre et la ligne ordonnée par ce qui est situé entre la ligne ordonnée et la tangente, au carré de la ligne ordonnée -si le diamètre est transverse- est comme le rapport du transverse au droit;

Et si c'est le second diamètre, c'est comme le rapport du droit au transverse.

Et le rapport de la ligne ordonnée à l'une de ces deux lignes -je veux dire celui qui est situé entre la ligne ordonnée et le centre et <celui> entre la ligne ordonnée et la tangente- est composé du rapport de l'autre ligne parmi les deux à cette ligne ordonnée et du rapport du droit au transverse, si le diamètre est transverse.

Ou l'inverse de cela si c'est la seconde ligne.

Et si on mène des deux extrémités du transverse deux lignes parallèles à ses lignes ordonnées, la tangente y coupe ce dont le produit de l'un des deux par l'autre est comme le carré de la moitié du second diamètre.

<Exemple de cela :>

Soit AB le <diamètre> transverse d'une ellipse ou d'une hyperbole BG, GD la tangente à elle en G qui rencontre le transverse en D et le second <diamètre> en K, Z le centre et HT le second <diamètre>. Nous menons de G les deux lignes GE, GL qui rencontrent AB, HT d'une manière ordonnée. Il est clair que, dans l'ellipse, B est situé entre D et Z et, dans l'hyperbole, D est situé entre B et Z, car on sait que, dans l'hyperbole, l'extrémité de la tangente est située entre son centre et son intersection avec le <diamètre> transverse.

Nous menons AM, BN parallèles à AL et rencontrant la tangente, et nous considérons le produit de EG ou GL par la ligne S comme le produit de ZE par ED ou comme le produit de ZL par LK[16].

<Démonstration : >

(…) B d'une manière ordonnée. Le rapport de AE à EB sera alors comme le rapport de AB à BD.

Dans l'ellipse, le rapport de AB à BE est comme le rapport de AB et BD à BD, par l'ajout des antécédents <aux successeurs> dans ce rapport.

Quant à l'hyperbole, la moitié de AE <plus> EB est ZE, et la moitié de AB est BZ. Donc, le rapport de ZE à EB est comme le rapport de BZ à BD. Si on sépare <les éléments du> rapport, on les permute et on les compose, le rapport de EZ à ZB est comme le rapport de BZ à ZD. Donc le produit de EZ par ZD est égal au carré de BZ.

Et puisque le carré de EZ est comme le produit de AE par EB avec le carré de BZ et comme le produit de EZ par ED et le produit de EZ par ZD, et que le produit de EZ par ZD est égal au carré de BZ, le produit de AE par EB est comme le produit de ZE par ED; et le rapport de le produit de AE par EB au carré de EG est comme le rapport du diamètre

[16] - Ici s'achève le texte d'Ibn Sartāq.

transverse au côté droit, comme cela été <déjà> montré. Donc, le rapport du produit de EZ par ED au carré de EG est comme le rapport du diamètre transverse au côté droit.

Dans l'ellipse ou le cercle, la moitié de AD et DB c'est DZ, et la moitié de AB c'est la ligne BZ. Donc, le rapport de ZD à DB est comme le rapport de ZB à BE. Et si nous séparons, nous intervertissons et nous composons, le rapport de DZ à ZB sera comme le rapport de BZ à ZE. Donc, le produit de DZ par ZE est égale au carré de BZ.

Puisque le produit de DZ par ZE est égal au produit de DE par EZ avec le carré de EZ, et que le carré de ZB est égal au produit de AE par EB avec le carré de EZ, le produit de ED par EZ avec le carré de EZ est égal au produit de AE par AB avec le carré de EZ. Et nous retranchons le carré de EZ qui est commun, il reste le produit de AE par EB égal au produit de ED par EZ. Le rapport du produit de AE par EB au carré de EG est comme le rapport du diamètre transverse au côté droit. Donc, le rapport du produit de ZE par ED au carré de EG est comme le <rapport du> transverse au droit.

De même, puisque le rapport du produit de ZE par ED au carré de EG est comme le <rapport du> transverse au droit -qui est comme le <rapport du> carré du transverse, qui est AB, au carré du second diamètre, qui est TH, parce que TH est moyenne proportionnelle entre AB et son côté droit. Et le rapport du carré de AD au carré de TH est comme le rapport du carré de BZ au carré de ZH. Donc, le rapport du produit de ZE par ED au carré de EG est composé du rapport de EZ à EG, ou à ZL, et du rapport de ED à EG, qui est comme le rapport de ZD à ZK. Et le rapport de ZE à EL doublé du rapport de DZ à ZK est comme le rapport du produit de EZ par ZD au produit de ZK par ZL. Donc, le rapport du produit de EZ par ZD au produit de ZK par ZL est comme le <rapport du> carré de BZ au carré de ZH. Et si on permute, le rapport du produit de EZ par ZD au carré de BZ sera comme le rapport du produit de ZK par ZL au carré ZH. Et le produit de EZ par ZD est égal au carré de BZ. Donc, le produit de ZK par ZL est égal au carré de ZH.

Et le produit de ZK par ZL est comme le produit de KL par LZ avec le carré de LZ; et le carré de LH est égal au produit de TL par LH avec le carré de ZL. Si on retranche le carré de ZL, il reste le produit de TL par LH égal au produit de KL par ZH.

Et puisque le rapport du droit au transverse est comme le carré de EG au produit de ZE par ED, qui est composé du rapport de EG à EZ -qui est comme le rapport de ZL à LG- et <du rapport> de EG à ED -qui est comme le rapport de KZ à ZD-, qui est comme le rapport de KL à LG. Le rapport du droit au transverse est donc comme le rapport de ZL à LG doublé du rapport de KL à LG, et c'est comme le rapport du produit ZL par LK au carré de LG, et aussi comme le rapport du produit de TL par LH au carré de LG. Donc, le rapport du produit de ZL par LK au carré LG est comme le <rapport du> droit au transverse.

Et il a été démontré, à partir de ce que nous avons indiqué, que le produit de ZK par ZL, s'il est égal au carré de ZH ou que le rapport du produit de ZL par LK au carré de LG est comme le <rapport du> du droit au transverse, la ligne GDK est tangente à la section.

Et sa démonstration est l'inverse de cette démonstration.

Et je dis que le rapport de EG à l'une des deux lignes EZ, ED, quel que soit sont lieu, est composé du rapport du côté droit au diamètre transverse et du rapport de l'autre ligne, parmi les deux lignes EZ, ED, à la ligne EG. Et le rapport de GL à l'une des deux lignes LK ou LZ est composé du rapport du diamètre transverse au côté droit et <du rapport> de l'autre ligne, parmi les deux lignes LK, LZ, à la ligne GL.

<Preuve : >

Nous prenons le produit de ZE par ED égal au produit de EG par S, et le rapport du produit de EZ par ED au carré de GE comme le rapport du diamètre transverse au côté droit.

Donc, le rapport du produit de S par EG au carré de EG -qui est comme le rapport de S à EG- est comme le <rapport du> diamètre transverse au côté droit.

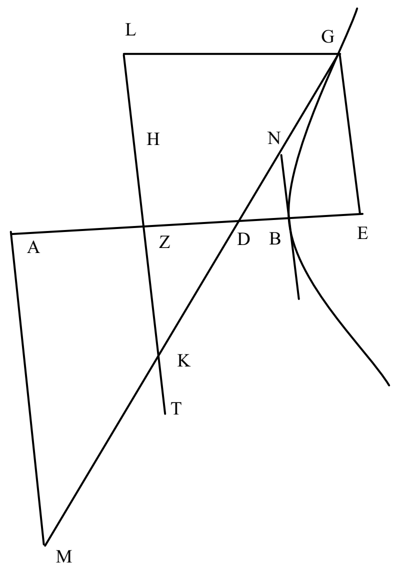
Et puisque le produit de ZE par ED est égal au produit de EG par S, le rapport de EZ à EG est comme le rapport de S à ED et comme le rapport de EG à ED. Si nous considérons la ligne S <moyenne proportionnelle> entre les deux, le rapport de EG à ED est composé du rapport de EG à S et de S à ED. Mais le rapport de EG à S est comme le <rapport du> droit au transverse, et <le rapport de> S à ED est comme le rapport de ZE à EG. Donc, le rapport de EG à ED est composé du rapport du droit au transverse et du rapport de ZE à EG.

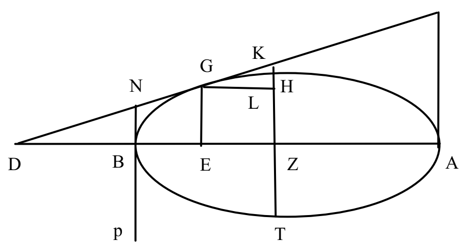
Et nous prenons aussi le produit de ZL par LK comme le produit de S par LG, et le <rapport du> produit de ZL par LK au carré de LG est comme le <rapport du> droit au transverse. Donc, le rapport du produit de S par LG au carré de GL, qui est le rapport de S à GL, est comme le <rapport du> droit au transverse.

Et puisque le produit de LZ par LK est comme le produit de LG par S, le rapport de ZL à LG sera comme le rapport de S à LK; et le rapport de GL à LK, si on prend S moyenne <proportionnelle> entre les deux, est <composé> du rapport de GL à S -qui est comme le <rapport du> transverse au droit- et du rapport de S à LK -qui est comme le rapport de ZL à LG-. Donc, le rapport de LG à LK est composé du rapport du diamètre transverse au côté droit et du rapport de ZL à LG.

Et, de même, si nous menons des deux extrémités du diamètre AB les deux lignes AM, BN, parallèles aux lignes ordonnées, elles rencontrent la ligne GD sur les deux points M, N. Je dis que le produit de AM par BN est égal au carré ZH.

La preuve de cela est que le rapport de DZ à ZB est comme le rapport de BZ à ZE. Et si nous séparons et permutons, le rapport de DZ à ZB -qui est comme ZA- sera comme le rapport de DB à BE. Alors, si nous inversons et composons, le rapport de AD à DZ -qui est comme le rapport de AM à ZK- sera comme le rapport de ED à DB, qui est comme le rapport de GE à NB. Donc, le produit de AM par BN est comme le produit de ZK par EG. Or EG est comme ZL. Donc, le produit de AM par BN est comme le produit de KZ par ZL -qui est égal au carré de ZG. Donc le produit de AM par NB est égal au carré de ZH. Et c'est ce que voulions démontrer.





< Proposition IV. 3. 1(12) : >

<Si>, dans une section non parabolique, on mène une ligne, d'une manière ordonnée vers le diamètre, et que l'on élève sur cette ligne et sur la ligne qui <part> du centre de la figure jusqu'à l'extrémité de son diamètre, sur chacune des deux, une figure à côtés parallèles à quatre côtés, les angles de l'un étant égaux à ceux de l'autre, et que le rapport de la ligne menée d'une manière ordonnée dans sa figure à l'autre côté de sa figure, est composé du rapport de la ligne, qui est à partir du centre jusqu'au sommet de la section, à l'autre ligne de sa figure, et du rapport du diamètre droit à son diamètre transverse, alors la figure élevée sur la ligne dont la longueur va du centre de la figure à l'endroit où tombe la ligne menée d'une manière ordonnée, est semblable à la surface qui est élevée sur la ligne qui va du centre de la figure aux extrémités du diamètre.

Dans l'hyperbole, il est plus grand que la figure élevée sur la ligne menée d'une manière ordonnée de la grandeur de la surface élevée sur la ligne menée du centre vers l'extrémité du diamètre.

Soit une section non parabolique, AB son diamètre transverse et le point E son centre. Nous menons la ligne GD d'une manière ordonnée vers le diamètre et nous élevons sur la ligne GD une surface à côtés parallèles dont le second côté est quelconque; et c'est la surface (DH). Et nous élevons sur la ligne AE une surface dont les angles sont comme les angles de la surface (DH), et c'est (AZ), <de sorte que> le rapport de AE à EZ doublé du rapport du côté droit au diamètre transverse soit comme le rapport de DG à GH.

Je dis que, dans l'hyperbole, la figure élevée sur la ligne ED est semblable à la surface (AZ) et égale aux deux surfaces (AZ), (HD).

Dans l'ellipse et dans le cercle, la figure élevée sur la ligne DE avec la surface HD sont égales à la surface AZ.

<Démonstration : >

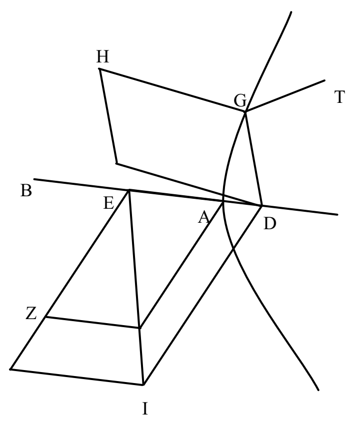
Considérons le rapport de la ligne GD à la ligne GT comme le rapport du côté droit au transverse. Puisque le rapport de DG à GT -qui est comme le rapport du carré de DG au produit de DG par GT- est comme le rapport du côté droit au transverse; et le rapport du côté droit au transverse est comme le rapport du carré de DG au produit de BD par DA. Donc, le produit de BD par DA est égal au produit de DG par GT. Et puisque le rapport de DG à GH est composé du rapport de AE à EZ et du rapport du côté droit au transverse - qui est comme le rapport de DG à GT, et que le rapport de DG à GH est composé du rapport de DG à GT et du rapport de TG à GH, le rapport composé du rapport de AE à EZ et de DG à GT est comme le composé du rapport de DG à GT et de TG à GH. Mais, le rapport de TG à GH est comme le rapport du produit de TG par GD au produit de GH par GD. Et le rapport de AE à EZ est comme le rapport du carré de AE au produit de AE par EZ. Donc, le rapport du produit de TG par GD au produit de GH à GD comme le rapport du carré de AE au produit de AE par EZ. Mais, il a été déjà démontré que le produit de TG par GD est égal au produit de BD par DA. Donc, le rapport du produit de BD par DA au produit de GH par GD est comme le rapport du carré de AE au produit de AE par EZ. Et, par permutation du rapport, le rapport du produit de BD par DA au carré de AE est comme le rapport du produit de GH par GD au produit de AE par EZ. Et le rapport au produit de GH par GD au produit de AE par EZ est comme le rapport de la surface (DH) à côtés parallèles à (ZA) parce qu'elles sont à angles égaux et leurs rapports sont composés du rapport de leurs côtés, et c'est le rapport de GH à AE et du rapport de GD à EZ. Donc, le rapport du produit de BD par AD au carré de AE est comme le rapport de la surface (HD) à la surface (AZ).

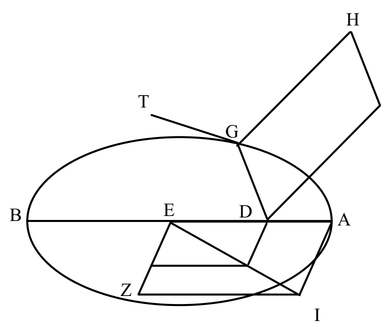
Nous disons que, dans l'hyperbole, le rapport du produit de BD par DA avec le carré de AE au carré de AE est comme le rapport des deux surfaces (HD), (AZ) à la surface (AZ). Mais, le produit de BD par DA avec le carré de AE est égale au carré de DE; et le rapport du carré de DE au carré de AE est comme le rapport de la figure qui est sur la ligne DE - et qui est semblable à la figure (AZ)-, à la figure (AZ). Donc, le rapport des deux surfaces (HD), (AZ) à la surface (AZ) est comme le rapport de la figure qui est sur la ligne ED – et qui est semblable à la figure (AZ)- <et> égale aux deux surfaces (HD), (AZ).

Dans l'ellipse et le cercle, le rapport du carré AE à la surface (AZ) est comme le rapport au produit de AD par DB à la surface (HD). Et si nous retranchons du carré de AE la surface de AD par DB et de la surface (AZ) la surface (DH), le rapport du restant du carré de AB au restant de la surface (AZ) est comme le rapport du carré de AE à la surface (AZ).

Quant au carré de AE, si on lui retranche le produit de BD par DA, il en reste le carré de ED. Donc, le rapport du carré de ED à l'excès de la surface (AZ) sur la surface (DH) est comme le rapport du carré de AE à la surface (AZ). Mais, le rapport du carré de AE à la surface (AZ) est comme le rapport du carré de ED à la surface élevée sur ED, et qui est semblable à la surface (AZ). Donc, le rapport du carré de ED à l'excès de la surface (AZ) sur la surface (DH) est comme le rapport du carré de ED à la surface élevée sur la ligne DE, semblable à la surface (AZ). Et la surface élevée sur la ligne ED, et qui est semblable à la surface (AZ) avec la surface (HD), est égale à la surface (AZ).

Ce même <résultat> <découle> nécessairement, si à la place des surfaces, il y avait des triangles. Et c'est ce que nous voulions démontrer.





< Proposition IV. 3. 1(13) : >

<Si> une ligne quelconque tangente à une section et <qui>, prolongée à partir du point de tangence est, dans la parabole, une ligne parallèle à l'axe et, dans les <sections> autres qu'elle, une ligne qui joint le centre et le point de tangence, alors cette ligne est également un diamètre à cette section.

Et lorsqu'elle est prolongée d'une manière rectiligne, elle divise en deux moitiés toutes les lignes menées dans la section parallèlement à la ligne tangente et qui sont des lignes ordonnées à la section en ce point.

Et le point de tangence est également un sommet à cette section et son côté droit est <tel que> son rapport au double de la ligne tangente est comme le rapport de ce qui est séparé de la ligne tangente menée du sommet de la section vers l'axe entre la ligne tangente du côté du point de tangence et ce que sépare également cette ligne de ce diamètre du côté du <point de> tangence.

Que la section soit la section AB, le point B son sommet et BE son diamètre sur lequel nous marquons un point n'importe où, et c'est le point D; et, <à partir> de lui, nous menons la ligne DE tangente au point D et rencontrant le diamètre au point E.

Si la section est parabolique, nous menons la ligne ZDL parallèle à la ligne BE.

Et si elle n'est pas parabolique, nous joignons le point D au centre, et que ce soit le point G. Et nous prenons GH comme GD. Nous menons, du point B, une ligne parallèle aux lignes ordonnées, sur laquelle il y a B, T, Z, et qui rencontre la ligne DE au point T et la ligne DZ au point Z. Et nous menons du point D une perpendiculaire sur DZ vers K et nous prenons le rapport de DK au double de DE comme le rapport de ED à DZ; et nous marquons un point sur la section n'importe où, et c'est le point A; et nous menons <à partir> de lui la ligne AMNCO parallèle à la ligne DE et rencontrant la ligne DL au point M, la section au point N et le diamètre BE en C. Je dis que AM est égal à MN.

Alors, dans la parabole, le carré de AM est égal au produit de KD par DM; et dans les <sections> autres que la parabole, <il est égal> à une surface appliquée à la ligne DK dont la largeur est la ligne DM, et <telle que>, par rapport à la ligne DK, elle soit par excès dans l'hyperbole et par défaut dans l'ellipse, d'une surface semblable au produit de KD par DM.

<Démonstration : >

La preuve de cela est que nous menons des points A, D, N, des lignes ordonnées. Ce sont ALS, qui rencontre DL au point L, la ligne DJ et la ligne NQ qui rencontre la ligne DZ au point F. Et nous prenons la ligne CO égale à la ligne DE et nous joignons dans <les sections> autres que la parabole, la ligne HK, et nous menons la ligne GT' parallèle à la ligne HK et nous menons du point M une ligne parallèle à la ligne DK, sur laquelle il y a MT'W qui rencontre HK au point W et la ligne GT'U au point T'.

Si la section est parabolique, la ligne JB est égale à la ligne BE. Pour cela, la surface (DB) est égale au triangle (DJE) et le rapport du triangle (ASC) au triangle (DJE) est comme le rapport du carré de la ligne AS au carré de la ligne DJ qui est comme le rapport de SB à BJ qui est comme le rapport de la surface (LB) à la surface (DB). Si nous permutons, le rapport du triangle (ACS) à la surface (LB) est comme le rapport du triangle (DJE) à la surface (DB); et le triangle (DJE) est égal à la surface (DB). Donc, le triangle (ASC) est égal à la surface (LB).

Et de cette manière, nous démontrons que la surface (FB) est égale au triangle (NQC). Il reste donc la surface (LQ), à côtés parallèles, égal à la surface quadrilatère (QNAS). Si nous retranchons d'elle le pentagone (QNMLS), il reste le triangle (AML) égal au triangle (FMN); et ils sont semblables. Donc, la ligne FM est égale à la ligne MN.

Et dans une <section> autre que parabolique, le rapport de DJ à JE, qui est comme le rapport de AS à SC, est comme le rapport de GJ à JD, qui est comme le rapport de GB à BZ doublé du rapport du droit au transverse.

Pour cela, dans l'hyperbole, les deux triangles (ASC), (ZBG) sont égaux au triangle (LSG); et, dans l'ellipse, les deux triangles (ASC), (LSG) sont égaux aux triangles (ZBG). Et le rapport de NQ à QC est comme le rapport de AS à SU. Pour cela, dans l'hyperbole, les deux triangles (NQC), (ZBG) sont égaux au triangle (FQG).

Et, dans l'ellipse, les deux triangles (NQC), (FQG) sont égaux au triangle (ZBG).

Alors, dans les deux <cas>, le triangle (NQC) sera égal à la surface quadrilatère (FQBZ). Il reste la surface quadrilatère (QFLS) égale à la surface quadrilatère (QNSA). Si nous en retranchons le pentagone (QNMLS), il reste le triangle (NFM) égal au triangle (MLA) et ils sont semblables. Donc, la ligne AM est égale à la ligne MN.

De même, si la section est parabolique, la ligne DZ est égale à la ligne BE. Donc, le triangle (DZT) est égal au triangle (ETB). Si nous leur ajoutons le pentagone (BTDLS), la surface quadrilatère (EDLS) est égale à la surface (LB) qui est égale au triangle (ASC). Si on retranche la surface quadrilatère (CMLS), il reste la surface (EDMC) égale au triangle (AML). Or CO a été supposé égal à DE. Donc la surface (EDMC) est égale au triangle (DMO).

Et dans <les sections> autres que la parabole, <pour> l'hyperbole, puisque le triangle (DJG) est égal aux deux triangles (DJE), (ZBG); et il est aussi égal aux deux triangles (DJE), (DEG). Donc, le triangle (ZBG) est égal au triangle (EDG). Donc, le triangle (DEG) avec le triangle (ASC) est égal au triangle (LSG); et le triangle (DEG) avec la surface (DLS) est égal au triangle (LSG); et le triangle (DEG) avec la surface (EDLS) est égal au triangle (LSG); et le triangle (DEG) avec la surface quadrilatère (EDLS) est égal au triangle (ASC).

Quant à l'ellipse, puisque les deux triangles (DJG), (DJE), qui sont comme le triangle (DGE), sont égaux au triangle (BZG). Donc, le triangle (DGE) est égal au triangle (BZG). Donc, le triangle (DGE) est égal aux deux triangles (ASC), (GSL). Et nous retranchons le triangle (GSL), il reste la surface (SLDE) égal au triangle (ASC). Et nous retranchons, dans les deux sections ensemble, la surface (LSCM). Il reste le triangle (ALM) égal à la surface (DMCE) qui est égal au triangle (DMO). Alors, dans la parabole, le rapport de KD au double de DE -qui est MO- est comme le rapport de TD à DZ -qui est comme le rapport de AM à ML-. Si nous prenons la ligne DL comme hauteur commune, le rapport du produit de KD par DM au produit de OM par MD est comme le rapport du carré de AM au produit de AM par ML. Or, le produit de AM par ML est égal au produit de OM par MD. Donc, le carré de DL est égal au produit de KD par DM.

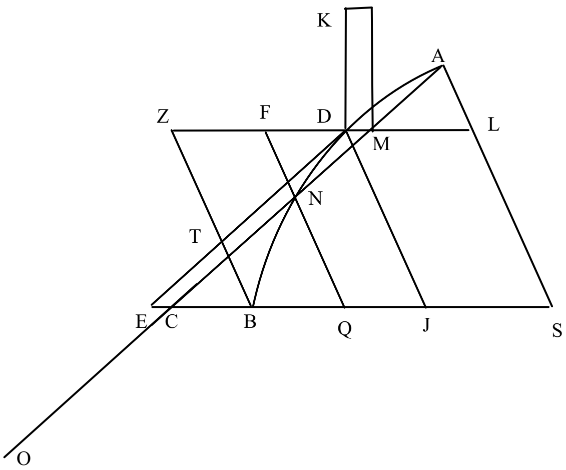
Et dans <les sections> autres que la parabole, puisque le rapport de MG à GD est comme le rapport de CM à UD, ou comme le rapport de MC à DE, si nous permutons, le rapport de T'M à MC est comme le rapport de UD à DE, lequel est comme le rapport de KD au double de DE parce que la ligne UD est la moitié de la ligne DK, et WU est comme UD, et DE est comme CO. Donc, le rapport de WM à MO est comme le rapport de TD à DZ, lequel est comme le rapport de AL à ML. Alors, si nous prenons MD comme hauteur commune, le rapport du produit de WM à MD au produit de OM par MD est comme le rapport du carré de AM au produit de AM par ML; et le produit de AM par LM est égal au produit de MW par MD. Donc, le carré de AM est égal au produit de WM par MD. Donc la ligne KD est le côté droit de la section (AD) dont le sommet est le point D et le diamètre HGDL et sa ligne ordonnée la ligne AM.

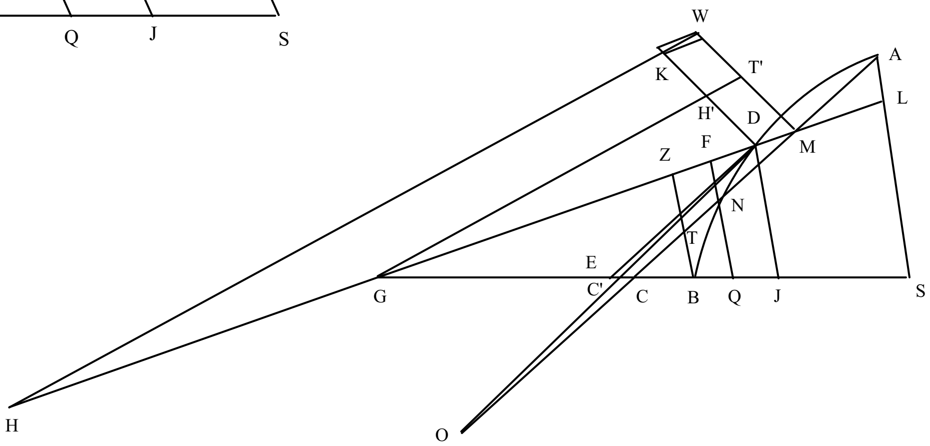
Et si l'axe le plus court de l'ellipse est la ligne AB et que nous menons du point A sur la ligne AB la perpendiculaire AG et que nous prenons le rapport de BA à AG égal au rapport du droit au transverse, la ligne AG sera le côté droit de l'axe AB. Et les lignes ordonnées seront les lignes tombant du périmètre de la section sur l'axe AB, parallèlement à l'axe le plus long; et les lignes ordonnées sont en puissance des surfaces appliquées à la ligne AG, en déficit d'une surface semblable au produit de AG par AB.

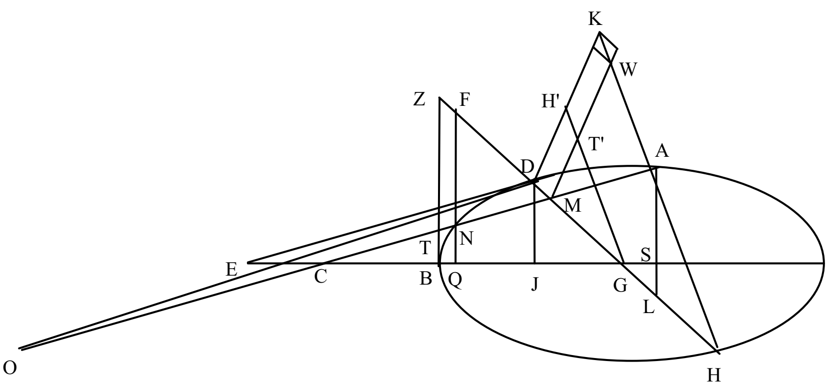
<Preuve : >

Et ce parce que si nous marquons sur la section le point D et que nous menons la ligne DE parallèle à l'axe le plus long, et que nous joignons GB et que nous menons la ligne TDE parallèle à l'axe le plus long jusqu'à ce qu'il rencontre GB au point Z, le rapport du produit de AE par EB au carré de ED est comme le rapport du droit au transverse, selon ce qui a été <déjà> démontré, et c'est le rapport de BE à EZ, qui est comme le rapport du produit de BE par EA au produit de ZE par EA. Donc, le produit de ZE par EA est égal au carré de ED. Donc le carré de ED est en puissance d'une surface appliquée à la ligne AG, dont le tout est déficient d'une surface semblable au produit de BA par AG.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.







<Proposition IV. 3. 1(14) : >

Toute ligne qui coupe une section, sans passer par le centre dans <le cas de> de l'ellipse, et qui est divisée par son diamètre en deux moitiés, est parallèle à la ligne menée du sommet de cette section et tangente <à elle>.

Et si on mène une ligne parallèle à une ligne tangente à une section et qu'on la divise en deux moitiés et que l'on joigne ce point <de division> et le point de tangence, alors cette ligne sera un diamètre.

Et si deux lignes parallèles coupent une section ou lui sont tangentes, alors la ligne qui les sépare en deux moitiés est un diamètre pour cette section.

Et si elles sont tangentes aux deux sections <hyperboliques> opposées ou à l'ellipse, alors la ligne qui joint les deux points de tangence sera aussi un diamètre.

Et si les deux lignes tangentes ne sont pas parallèles et qu'elles se rencontrent, alors si on divise en deux moitiés la ligne joignant les deux points de tangence et que l'on joigne ce point <de division> et le point sur lequel se sont rencontrées les deux lignes tangentes, cette <ligne> sera aussi un diamètre.

<Exemple de cela : >

Que la section soit la section (ABG), AD sont diamètre et que la ligne BG soit divisée en deux moitiés sur le diamètre AD au point D.

Je dis qu'elle est parallèle à la ligne menée du point A et tangente à la section.

Et si la ligne BG est parallèle à la ligne menée du point A, tangente à la section, et qu'elle soit divisée en deux moitiés au point D, alors la ligne AD sera un diamètre.

<Démonstration : >

Sa preuve est que si la ligne BG n'est pas parallèle à la ligne tangente et que nous menons du point B la ligne BEZ parallèle à elle, elle se divise sur le diamètre AD en deux moitiés au point E. Si nous joignons GZ, elle sera parallèle à la ligne AD. Ceci est absurde parce que, dans <les sections> autres que l'ellipse, elle rencontre la ligne AD. Et, dans l'ellipse, si nous menons du point B une ligne passant par le centre, elle se divise en deux moitiés. Donc, son extrémité sera sur une même ligne que les deux points G, Z parce qu'elle est toujours parallèle à la ligne DE. Et ceci est absurde.

Et il est clair que la ligne BG, si elle est parallèle à la ligne menée du point A et tangente à la section et qu'elle soit divisée en deux moitiés en D et que l'on joigne AD, alors AD sera un diamètre, parce que si nous menons du point A un diamètre, il divise la ligne BG en deux moitiés.

Et de même, si les deux lignes BG et TZ sont parallèles et qu'elles soient divisées en deux moitiés aux deux points D, H, et que l'on mène la ligne DH jusqu'à ce qu'elle rencontre la section au point A, je dis que la ligne AD est un diamètre de la section.

Parce que si la ligne AD n'était pas un diamètre et qu'il était possible qu'elle soit autre <chose>, alors si elle est prolongée, elle la divise en deux moitiés. Et il n'est pas possible qu'elle la divise en deux points autres que D, H. Donc, la ligne AD est un diamètre.

Et que les deux lignes AK, LN soient également parallèles et tangentes à une ellipse ou à deux sections <hyperboliques> opposées. Je dis que la ligne joignant les deux points de tangence sera un diamètre, parce que les lignes ordonnées seront parallèles à elles, et les deux diamètres menés des deux points A, L divisent les lignes ordonnées en deux moitiés. C'est pour cela que le diamètre, pour elles, n'est autre que la ligne joignant les deux points A, L.

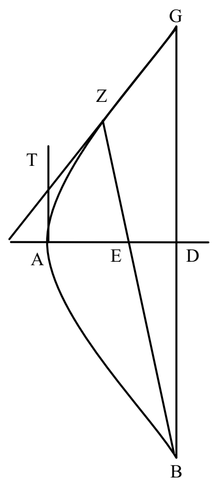
Et il apparaît <à partir> de cela que si les deux lignes AK, LN ne sont pas parallèles, alors elles se rencontrent, parce que chacune d'elles rencontre la ligne parallèle à l'autre, puisqu'elle rencontre les lignes ordonnées parallèles à elle.

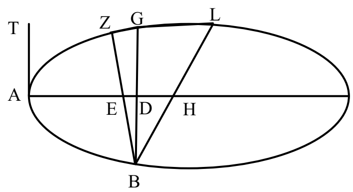
Et je dis que si les deux lignes AK et LN sont tangentes à la section et qu'elles se rencontrent en un point C et que l'on joigne les deux points L, M et que l'on divise la ligne AM au point S et que l'on joigne SC, alors c'est aussi un diamètre à la section.

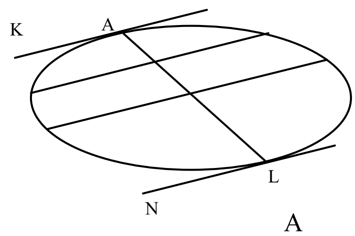
La preuve de cela est que si la ligne SC n'est pas un diamètre, que le diamètre soit SF. Nous joignons AF et qu'elle rencontre la section au point Q et nous menons du point F une ligne parallèle à la ligne AL qui rencontre la section au point R et la ligne FL au point H. Puisque le rapport de AS à SL est comme le rapport de QO à OH et que AS est égal à SL, QO sera égal à OH. Et puisque la ligne FS est un diamètre de la section, il divise la ligne QR en deux moitiés. Donc, la ligne QO est égale à la ligne OR. Or il a été démontré que la ligne QO est égale à la ligne OH. Donc, la ligne OR est égale à OE, alors qu'elle en est une partie. Ceci est absurde. Donc, le diamètre ne peut pas être autre <chose> que CS.

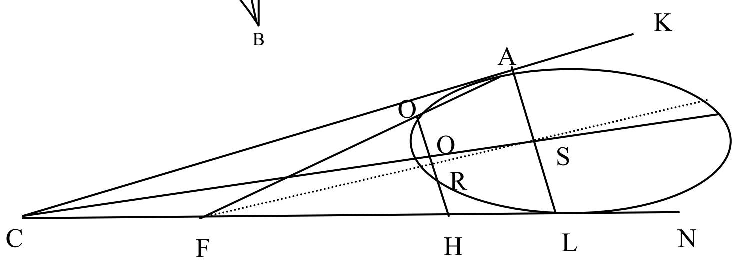
Et il a été <ainsi> démontré comment trouver le diamètre de n'importe quelle section ainsi que son centre, parce que chaque fois que l'on y met deux lignes parallèles, la ligne qui la divise en deux moitiés sera un diamètre pour la section. Et si nous y menons un autre diamètre, le <point> de rencontre des deux diamètres sera le centre de la section.

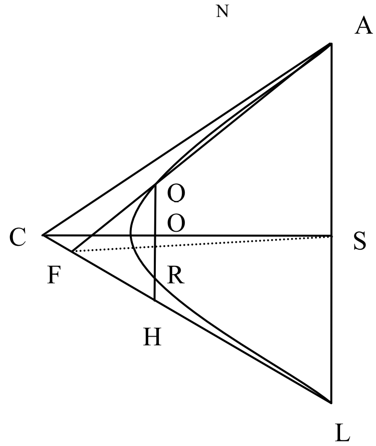
Et c'est ce que nous voulions démontrer.

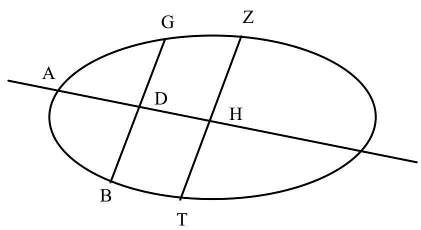












<Proposition IV. 3. 1(15) : >

Nous voulons démontrer comment trouver l'axe de n'importe quelle section et son centre.

Soit, en premier, la parabole sur laquelle il y a GZE. Et nous voulons trouver son axe.

Nous menons d'abord l'un de ses diamètres, et c'est la ligne AZ, et nous menons sur lui la perpendiculaire BE et nous la prolongeons jusqu'au point Z.

Si BE est égal à la ligne BZ, on aura donc démontré que AB est un axe de la section.

S'il n'était pas ainsi, nous divisons EZ en deux moitiés au point D et nous menons de lui une ligne parallèle à la ligne AB sur laquelle il y a GD. Il est clair que la ligne GD est un axe de la section parce qu'elle est parallèle au diamètre de la section et elle coupe EZ en deux moitiés et selon un angle droit. Nous avons donc trouvé l'axe de la parabole, et c'est la ligne GD.

Et la parabole n'a pas d'autre axe autre que celui-là, parce que si elle avait eu un autre axe comme AB, il serait parallèle à la ligne GD et il couperait la ligne EZ en deux moitiés. Or cela n'est pas possible. Donc la parabole n'a qu'un seul axe.

Soit l'hyperbole ou l'ellipse sur laquelle il y a A, B, G., et nous voulons trouver son axe. Soit K, le centre de la section. Nous marquons sur la section un point quelconque G. Sur le centre K et à une distance KG, nous traçons le cercle GEA, nous joignons GA, nous le coupons en deux moitiés au point D, nous joignons KG, KA et nous prolongeons KD jusqu'au point E.

Puisque la ligne AD est égale à la ligne DG et que la ligne DK est commune, les deux lignes DG, DK sont égales aux deux lignes AD, DK. Et la base KA est égale à la base KG. Donc l'angle KDG est comme l'angle KDA. Donc la ligne KD a coupé la ligne AG en deux moitiés et selon des angles droits. Donc la ligne KD est un axe.

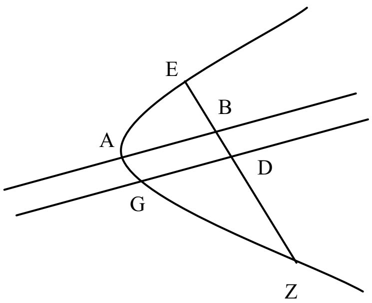
Et nous menons du point K une ligne parallèle à la ligne GA et sur laquelle il y a MKZ. Donc, la ligne MKZ est un axe pour la section. Et la ligne KB est son conjuguée.

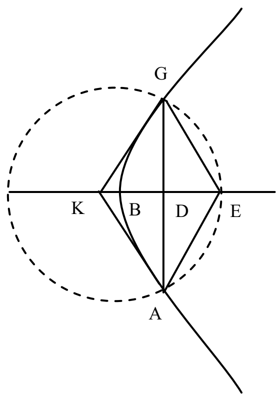
Cela ayant étant démontré, nous montrons qu'il n'est pas possible que ces sections aient des axes autres que ceux que nous avons indiqués. Si cela était possible, qu'il y ait un autre axe sur lequel il y a K, H. Comme ce qui a été dit précédemment, si nous menons la ligne ATL perpendiculaire à KH, la ligne AT sera égale à la ligne TL; et la ligne AK sera égale à la ligne KL. Elle est donc aussi égale à la ligne KG. Donc, la ligne KL est égale à la ligne KG. Or cela n'est pas possible parce que le cercle sur lequel il y a AG ne peut pas tomber sur la section sur un autre point entre A, B, G.

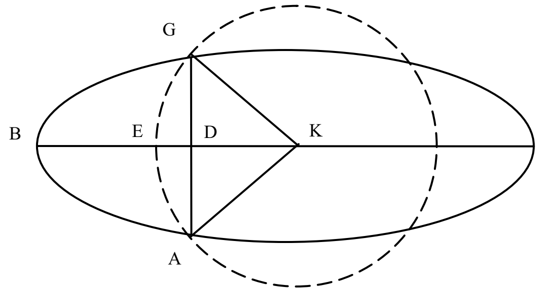
Pour l'hyperbole, cela est clair. Quant à l'ellipse, si cela était possible, qu'il tombe sur le point L; et nous menons deux perpendiculaires sur lesquelles il y a GQ, LZ. Puisque la ligne GK est égale à la ligne KL, parce qu'elles ont été menées du centre du cercle, le carré de GK est égal au carré de KL. Mais, les deux carrés de GQ et de QK sont égaux aux deux carrés de LZ, ZG. Donc la différence entre les deux carrés de GQ, LZ est comme la différence entre les deux carrés de ZK, KQ.

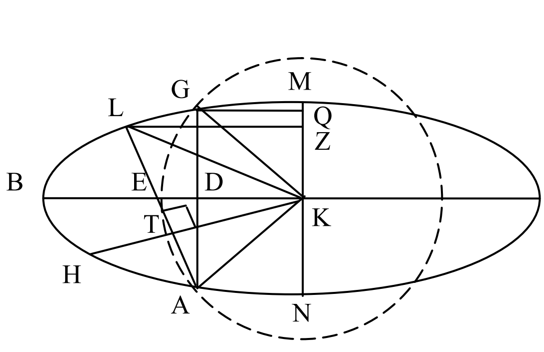
De même, puisque le produit de MQ par QN avec le carré de QK est égal au carré de KM et au produit de MZ par ZN avec le carré de ZK - lequel est égal au carré de KM-, le produit de MQ par QN avec le carré de QK est égal au produit de MZ par ZN avec le carré de ZK. Donc, la différence entre le carré de ZK et le carré de KQ est comme la différence entre le produit de MQ par QN et le produit de MZ par ZN. Or, il a été démontré que la différence entre le carré de ZK et le carré KQ est comme la différence entre le carré de QG et le carré de LZ. Donc la quantité entre le carré de GQ et le carré de ZL est une quantité égale à ce qui est entre le produit de MQ par QN et le produit de MZ par ZN. Et puisque les deux lignes GQ, LZ sont ordonnées, le rapport du carré de GQ au produit de MQ par QN est comme le rapport du carré de LZ au produit de MZ par ZN. Or il a été démontré que la différence entre eux est la même. Donc, le carré de GQ est égal au produit de MQ par QN. Or le carré de LZ est égal au produit de MZ par ZN, parce que lorsqu'on a quatre grandeurs proportionnelles et lorsque l'excès de la première sur la troisième est comme l'excès de la seconde sur la quatrième, le premier est comme le second et le troisième comme le quatrième. Donc, la section GML est un cercle. Et cela n'est pas possible parce qu'elle a été supposée une ellipse.

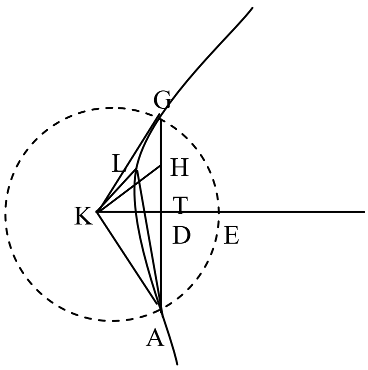
Et c'est ce que nous voulions démontrer.











<Proposition IV. 3. 1(16) : >

<Soit> deux lignes quelconques tangentes à une section et qui se rencontrent. Nous menons une ligne qui joint les deux points de tangence. Si, du point de rencontre des deux lignes tangentes ou bien du point sur lequel s'est divisé en deux moitiés la ligne qui joint les deux points de tangence, nous menons une ligne qui coupe la section en deux endroits, qui coupe la ligne joignant les deux points de tangence et aboutit à la ligne menée du <point de> rencontre des deux lignes parallèles à la ligne qui joint les deux points de tangence, alors le rapport de la ligne coupant la section avec sa partie à l'extérieur de la section à sa partie à l'intérieur (?) de la section est comme le rapport des deux parties que coupent la ligne joignant les deux points de tangence, l'une à l'autre.

Soit AB la section, AG, BG les deux lignes qui lui sont tangentes. Joignons AB et divisons le en deux moitiés au point S et nous menons du point G la ligne GO parallèle à la ligne AB. Je dis que chaque fois que nous menons de l'un des deux points G, S une ligne, elle coupe la section en deux endroits, se divisant en A, B et elle aboutit à la ligne GO. Et que ce soit comme l'une des deux lignes GDEZ et ZSHO.

Je dis que le rapport de ZG à GD est comme le rapport de ZE à ED et que le rapport de ZO à OH est comme le rapport de ZS à SH.

<Démonstration : >

La preuve de cela est que nous menons des deux points Z, D les deux lignes ZM, DT, parallèles aux deux lignes AB. Elles rencontrent la ligne MA aux deux points L, U et elles rencontrent le diamètre GS aux deux points M, T et elles rencontrent le diamètre mené du point A aux deux points K, N. Et nous menons des deux points Z, D deux lignes parallèles à la ligne AG; elles rencontrent le diamètre M ? aux deux points Q, F; et la ligne ZQ rencontre le diamètre AK au point S.

Alors, le triangle (ZSK) est égal à la surface de AS par QG comme cela a été démontré dans la proposition <concernant> la détermination des côtés droits des diamètres des sections. Si nous prenons la surface (ASZL) commune, le triangle (AKL) sera égal à la surface (LGQZ); et le triangle (ANU) sera aussi égal à la surface quadrilatère (UGFD), parce que si le sommet de la section est le point V et que nous menons de lui une ligne parallèle à la ligne AB et qu'elle rencontre la ligne DF au point V et la ligne AG au point B et le diamètre mené du point A au point W, alors si la section est parabolique, le triangle D // [115a]EB est égal à la surface (TW) comme cela a été démontré. Si nous ôtons la surface (VDTB) <qui est> commune, il reste la surface (WBDN) égale au triangle (VBF). Si nous lui ajoutons la surface (BGV?) <qui est> commune, le gnomon (NDFGBW) est égal au triangle (VBG) qui est égal au triangle (BGW). Donc, le triangle (ABW) est égal au gnomon. Et si nous ôtons la surface quadrilatère <qui est> commune (NUBW), il reste le triangle (ANU) égal à la surface quadrilatère (UDFG).

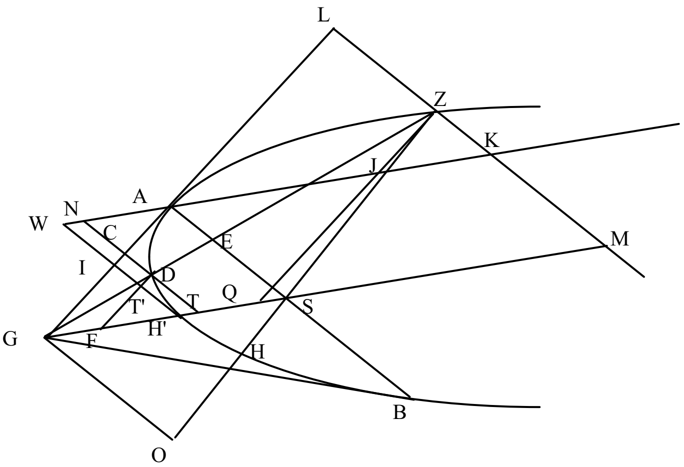
Et si la section n'est pas parabolique, et que le centre est le point R et la section hyperbolique, les deux triangles (DTF) et (ARG) sont égaux au triangle (NTR). Si nous ôtons le triangle (DTF) <qui est> commun et la surface (NFGR) <qui est> aussi commune, il reste le triangle (ANU) égal à la surface (UDFG).

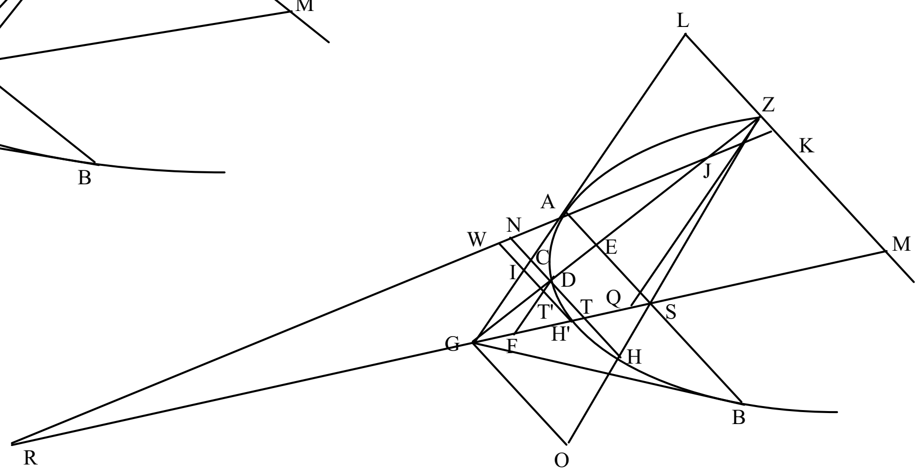
Dans l'ellipse, nous démontrons comme cela a été démontré dans la parabole. Et puisque le rapport du carré de ZG au carré de GD est comme le rapport du triangle (ZQM) au triangle (DFT), il reste les deux surfaces (LGQZ), (UGFD) ayant leur rapport et elles sont égales aux deux triangles (LKA), (ANU); et ils sont semblables. Donc, le rapport du carré de LA au carré de AU -qui est comme le rapport du carré de ZE au carré de ED- est comme le rapport du carré de ZG au carré de GD.

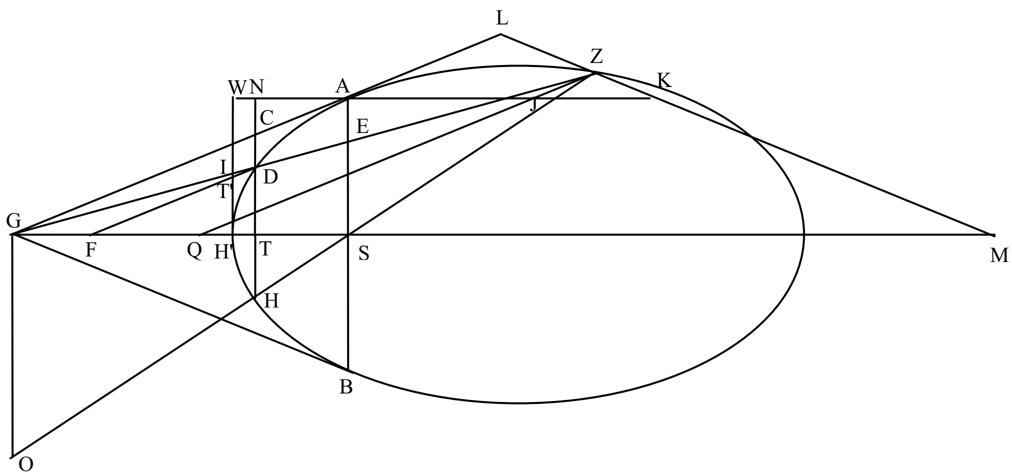
De même, si nous menons la ligne ZSHO, je dis que le rapport de ZO à OH est comme le rapport de la ligne ZS à la ligne SH.

La preuve de cela est que nous menons des deux points Z, H les deux lignes ZM, HT qui rencontrent les lignes de la figure telle qu'elle était. Alors, le rapport du carré de ZM au carré de HT -qui est comme TD- est comme le rapport du carré de MS au carré de ST. Et le rapport du carré de ZM au carré de TD est comme le rapport du triangle (ZQM) au triangle (DFT); et le rapport du carré de MS au carré de ST est comme le rapport de LA au carré de AU, qui est comme le rapport du triangle (LAK) -qui est égal à la surface (LGQZ)- au triangle (ANU) -qui est égal à la surface (UGFD). Si nous additionnons, le rapport du triangle (LGS) au triangle (UGT) est comme le rapport du carré de MG au carré de GU -qui est comme le rapport du carré de MS au carré de ST-. Et le rapport du carré de MS au carré de ST est comme le rapport de la ligne ZS à la ligne SH; et le rapport de MG à GT est comme le rapport de ZO à OH. Donc, le rapport de ZO à OH est comme le rapport de ZS à SH.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.







< Proposition IV. 3. 1(17) : >

Si une ellipse est <donnée>, et si son axe le plus long est divisé en un point de sorte que le produit des deux parties de l'axe, l'une par l'autre, est égale au quart de la surface entourée par l'axe et par son côté droit; et s'il est divisé en deux autres parties égales à elles, alors la somme de chaque couple de lignes menées des deux points qui divisent l'axe le plus long et qui se rencontrent sur le périmètre de la section, est égale à l'axe le plus long.

Soit (AE) la section, AB son axe le plus long, et chacun des deux produits de AH par HB et de AZ par ZB égal au quart de la surface appliquée à AB et dont la largeur est le côté droit. Marquons un point E sur la section. Nous joignons EZ, EH.

Je dis que les deux lignes ZE, EH <ajoutées> sont égales à l'axe AB.

<Preuve : >

La preuve de cela est que nous menons les deux lignes AG, BD sur l'axe selon des angles droits; et du point E, une ligne tangente qui les coupe aux deux points D, G; et nous joignons GH, HD, GZ, ZD; et que les deux lignes GH, ZD se coupent au point T.

Puisque chacun des deux produits de AG par BD et de AZ par ZB est égal au quart de la surface appliquée à AB dont la largeur est le côté droit, alors le rapport de AG à AZ est comme le rapport de ZB à BD; et les deux angles A, B sont droits. Donc l'angle AGZ est égal à l'angle BZD. Donc, les deux angles AZG, BZD sont égaux à un angle droit. Donc, l'angle GZD est droit.

Et, de cette manière, nous démontrons que l'angle GHD est droit.

Si nous traçons un cercle sur le diamètre GD, il passe par les deux points Z, H, et les deux angles DGH, DZH sont égaux parce qu'ils sont sur une même portion; et l'angle DZH est égal à l'angle AGZ. Donc, l'angle DGH est égal à l'angle AGZ. Et pour cela aussi, l'angle GDZ est égal à l'angle BDH.

Si la ligne GD est parallèle à la ligne AB, il est clair que la ligne joignant le point T et le point E est perpendiculaire sur la ligne GD.

Et si elles ne sont pas parallèles et que nous les prolongeons jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point K, je dis qu'elle est aussi perpendiculaire à la ligne GD, et autre chose n'est pas possible.

<Preuve : >

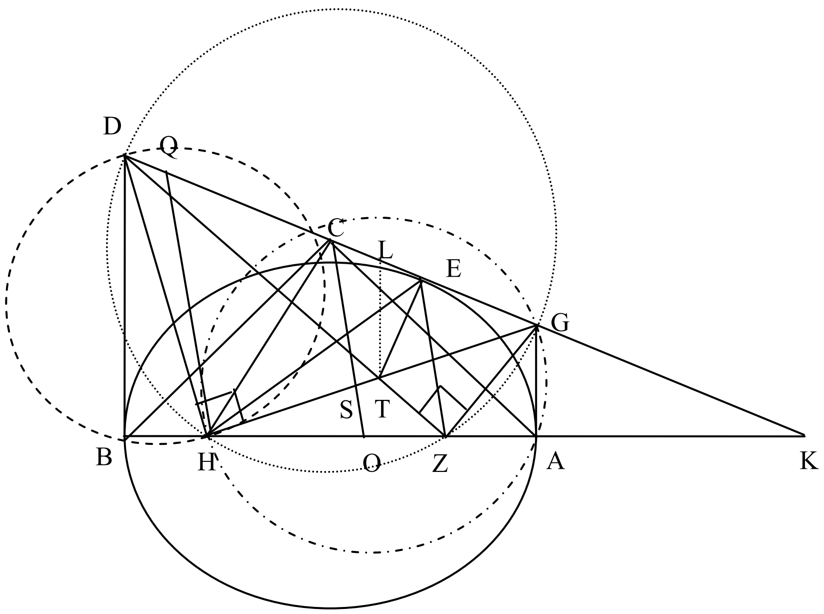
Si cela était possible, Soit TL la perpendiculaire. Puisque l'angle GDZ est égal à l'angle HDB et que l'angle B est comme l'angle TLD, le triangle (DBH) est semblable au triangle (DLT). Donc, le rapport de HD à DT est comme le rapport de BD à DL, et le rapport de HD à DT est comme le rapport de ZG à GT, à cause de la similitude des deux triangles, lequel est comme le rapport de AG à GL également à cause de la similitude des deux triangles. Donc le rapport de BD à DL -qui est comme le rapport de HD à DT- est comme le rapport de AG à GL. Si nous permutons, le rapport de DB à GA est comme le rapport de DL à LG. Mais le rapport de DB à GA est comme le rapport de BK à KA. Donc le rapport de DL à LG est comme le rapport de BK à KA. Et nous menons du point E une ligne parallèle à la ligne AG sur laquelle il y a EM. Ce sera une <ligne> ordonnée sur la ligne AB. Mais, le rapport de BK à KA est comme le rapport de BM à MA, et le rapport de BM à MA est comme le rapport de DE à EG. Or le rapport de BK à KA était aussi comme le rapport de DL à LG. Et cela n'est pas possible. Donc la perpendiculaire à la ligne GB n'est autre que TE.

Puisque chacun des deux angles qui sont au point E est droit et que ceux qui sont aux points Z, H sont droits, si nous prenons les deux lignes DT, GT comme diamètres de deux cercles, alors le cercle qui passe par le point E passe par le point H et celui qui passe par le point Z passe par le point E. Pour cela, les deux angles DEH, DTH sont égaux; et l'angle DTH est égal à l'angle GTZ -qui est égal à l'angle GEZ- parce qu'ils sont aussi sur une même portion. Donc, l'angle DEH est égal à l'angle GEZ.

Soit le point O le centre, et nous menons des deux points O, H deux lignes OC, HQ parallèles à la ligne EZ. Puisque AZ est égal à la ligne HB et que le point O est le centre, la ligne ZO est égale à la ligne OH et, pour cela, la ligne EC est égale à la ligne CQ. Joignons les lignes AC, CH, BC. Puisque l'angle GEZ est égal à l'angle HED et que l'angle GEZ est aussi égal à l'angle EQH, parce que QH est parallèle à la ligne EZ, la ligne EH sera égale à la ligne HQ. Donc, la ligne HC est perpendiculaire à la ligne EQ. Et si nous prenons la ligne DH <comme> diamètre, le cercle tracé sur lui passe par les deux points C, B; et l'angle BDH est égal à l'angle BCH parce qu'ils sont sur une même portion; et l'angle BDH est égal à l'angle AHG. Et si nous prenons la ligne GH <comme> diamètre, le cercle tracé sur lui passe par les deux points A, C et, pour cela, les deux angles AHG, ACG seront égaux parce qu'ils sont sur une même portion. Donc, l'angle ACG est égal à l'angle BCH. Si nous considérons l'angle commun ACH, l'angle GCH sera égal à l'angle ACB, et l'angle GCH est droit. Donc, l'angle ACB est droit. Si on trace, sur le diamètre AB, un cercle dont le centre est le point O, il passe par le point C et la ligne CO sera égale à chacune des deux lignes AO, OB.

Et puisque l'angle GEZ est égal à l'angle DEH et que l'angle GCS est égal à l'angle GEZ, l'angle CES est égal à l'angle ECS. Donc la ligne ES est égale à la ligne CS. Et puisque la ligne ZO est égale à la ligne OH, la ligne ES sera égale à la ligne SH. Donc, la ligne EH est le double de la ligne CS. Et puisque le rapport de ZH à OH est comme le rapport de ZE à SO, la ligne ZE est le double de la ligne OS. Donc, la somme[17] des deux lignes ZE, EH est le double de l'ensemble de la ligne OC. Et le diamètre AB est le double de OC. Donc, les deux lignes ZE, EH sont égales au diamètre AB.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.



[17] - Littéralement : "*l'ensemble*"

<Proposition IV. 3. 1(18) : >

<Si> une ligne quelconque menée d'un point de l'hyperbole est tangente à la section et si elle est prolongée des deux côtés du diamètre qui sort de ce point et si le carré de chacune de ses deux parties est égal au quart de la figure résultant du produit de ce diamètre par le côté droit, alors les deux lignes sortant du centre de la section vers les deux extrémités de la ligne tangente ne tombent pas sur la section. Et il n'est pas possible que l'on mène une ligne du centre de cette section qui touche la section et la ligne qui ne tombe pas sur elle sans qu'elle coupe la section. Et toute ligne tangente à la section qui aboutit aux deux lignes qui ne tombent pas sur elle, est divisée par la section en deux moitiés et le carré de chacune d'elle est égal au quart du produit du transverse par le côté droit. Et si une ligne tombe sur les deux lignes et qu'elle est divisée par la section en deux moitiés, elle sera tangente à la section. Et toute ligne qui coupe la section et qui aboutit aux deux lignes qui ne tombent pas sur elle, alors ses deux extrémités qui sont entre la section et les deux lignes qui ne tombent pas sur elle seront égales, et le produit de l'une des deux par le reste de la ligne est comme le quart du produit du transverse par son côté droit.

<Exemple de cela : >

Soit une hyperbole avec AB son diamètre, le point G son centre, BZ son côté droit. Du point B, nous menons une ligne tangente à la section sur laquelle il y a DBE et nous considérons chacun des deux carrés de BD et BE comme le quart du produit de AB par BZ. Nous joignons GD, GE et nous les prolongeons d'une manière rectiligne.

Je dis qu'elles ne tombent pas sur la section.

<Preuve : >

Si <cela> était possible, que la ligne GD tombe sur la section au point H. A partir d'elle, nous menons une ligne ordonnée HT. Elle est parallèle à la ligne DB. Et puisque le rapport de AB à BZ est comme le rapport du carré de AB au produit de AB par BZ et que le carré de GB est comme le quart du carré de AB et que la carré de BD est comme le quart du produit de AB par BZ, parce qu'il a été supposé ainsi, alors le rapport de AB à BZ est comme le rapport du carré de GB au carré de BD et comme le rapport du carré de GT au carré de TH; et le rapport de AB à BZ, est comme le rapport du produit de AT par TB au carré de TH. Donc, le produit de AT par TB est égal au carré de GT. Or cela n'est pas possible parce que le carré de GT l'excède du carré de BG. Donc la ligne GD, si elle est prolongée d'une manière rectiligne, ne tombe pas sur la section.

Et de cette manière, on démontre également que la ligne GE ne tombe pas sur la section. Donc, les deux lignes DG, GE ne tombent pas sur la section.

Et je dis qu'il n'y a pas d'autre ligne qu'elle qui ne tombe pas sur la section et qui coupe l'angle DGE.

<Preuve : >

Si cela était possible, que ce soit GS. Nous menons du point B une ligne parallèle à la ligne GD qui rencontre la ligne GS au point S, et c'est la ligne BS. Et nous prenons la ligne DJ égale à la ligne BS et nous joignons SJ et nous la prolongeons d'une manière rectiligne jusqu'à ce qu'elle rencontre la section au point O, le diamètre au point F et la ligne GE au point Q.

Puisque les deux lignes BS, DX sont égales, les deux lignes SX, DB seront, pour cela, égales et parallèles. Et puisque le diamètre AB s'est divisé en deux moitiés au point G et que la ligne BF est ajoutée à sa longueur, le produit de AF par FB avec le carré de GB est égal au carré GF.

De même, puisque la ligne JQ est parallèle à la ligne DE et que la ligne DB est égale à la ligne BE, la ligne JF sera égale à la ligne FQ. Et puisque la ligne QJ s'est divisée en deux moitiés au point F et en deux parties inégales au point O, le produit de QO par OJ avec le carré de OF est égal au carré de JF. Puisque la ligne JS est égale à la ligne DB, la ligne JO est plus longue que la ligne DB et la ligne OQ est plus grande que la ligne BE parce que la ligne FQ est plus grande qu'elle. Donc, le produit de QO par OS est plus grand que le produit de DB par BE, lequel est comme le carré de DB.

Puisque le rapport du diamètre AB à ZA est comme le carré de GB au carré de DB, lequel est comme le rapport du carré de GF au carré de FJ, et que le rapport de AB à BZ est comme le rapport du produit de AF par FB au carré de FO, le rapport du carré de GF au carré de FJ est donc comme le rapport du produit de AF par FB au carré de FO. Le rapport du carré de GB, le restant, au produit de QO par OJ, le restant, sera comme le carré de GB au carré de BD. Donc le carré de BD est égal au produit de QO par OS. Or cela n'est pas possible parce qu'il a été démontré qu'il était plus grand que lui. Donc la ligne GS tombe sur la section[18].

Et de la manière dont nous avons démontré, nous démontrons que toute ligne tangente à l'hyperbole et qui tombe sur les deux lignes qui ne tombent pas sur elle, se divise au point de tangence en deux moitiés et le carré de sa moitié est égal au quart du produit du côté droit par le diamètre transverse.

<Preuve : >

Parce que si cela n'est pas ainsi, et que l'on prend de la ligne de tangence deux lignes des deux côtés du point de tangence <et telles que> le carré de chacune des deux <parties> est comme le quart du produit du côté droit par le diamètre transverse, et si leurs deux extrémités sont jointes au point G, il résulte de cela les deux lignes qui ne tombent pas sur la section. Et cela est absurde parce que si l'une des deux tombe à l'intérieur de l'angle DGE, elle tombe sur la section; et si elle est prolongée à l'extérieur, l'une des deux premières lignes tombe sur la section d'après ce qui a été démontré. Et chacun des deux cas est absurde.

Et nous démontrons à partir de cela aussi que si une ligne, comme par exemple SOMQ, coupe une section et qu'elle tombe sur la section aux deux points M, O et sur les deux lignes qui ne tombent pas sur elle aux deux points S, Q, la ligne SO sera égale à la ligne MQ.

Parce que lorsque nous le divisons en deux moitiés au point F et que nous joignons GF et que nous menons du point B une ligne tangente comme DB, elle sera parallèle à la ligne XQ, et elle se divise au point B en deux moitiés, et le rapport de DF à BE –qui lui est égal- est comme le rapport de SF à FQ. Or OF est égal à FM parce que GF est un diamètre. Il reste la ligne SO égale à la ligne MQ.

Et le produit de QO par OS est comme le carré de BD, lequel est égal au quart du produit de AB par BZ.

<Preuve : >

Parce que le rapport du carré de GB au carré de BD est comme le <rapport du> transverse au droit, et c'est comme le rapport du carré de GF au carré de FS. Et le rapport de la surface de AF par FB au carré de FO est comme le <rapport du> transverse au droit. Il reste alors le rapport du carré de BG au produit de QO par OS comme le <rapport du> transverse au droit, lequel est comme le rapport du carré de GB au carré de BD. Donc, le carré de BD –qui est égal au quart du produit de AB par BZ- est égal au produit de QO par OS.

Et on démontre à partir de cela aussi que si une ligne tombe sur les deux lignes qui ne tombent pas sur la section et qu'elle se divise sur la section en deux moitiés, alors elle sera une tangente.

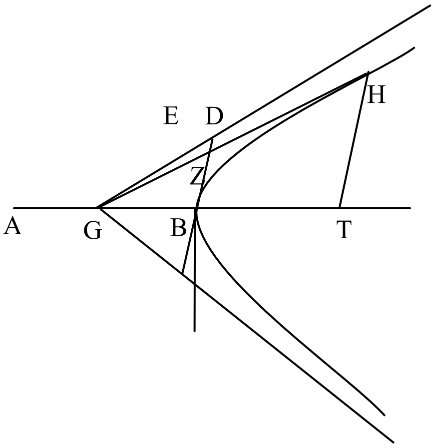
---

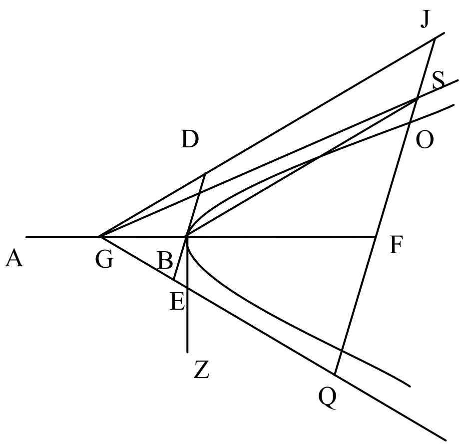
[18] - Littéralement : "*n'est pas non tombante sur la section*".

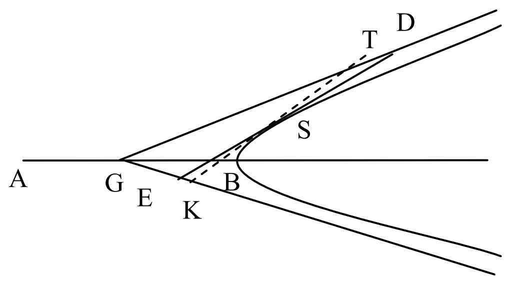
<Preuve :>

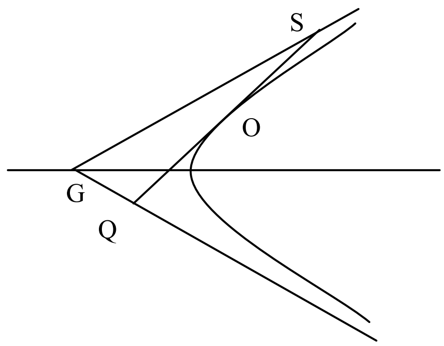
Parce que si elle coupait la section, la <partie> d'elle qui tombe entre la section et ce qui ne tombe sur elle serait égale à la <partie> d'elle qui tombe de l'autre côté entre la section et la ligne qui ne tombe pas sur elle.

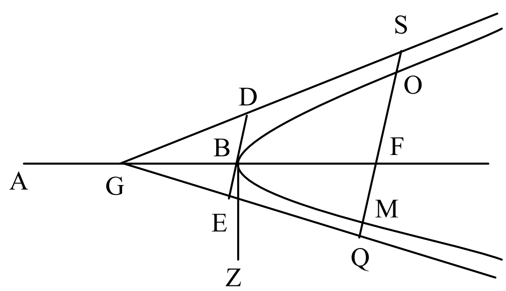
Et c'est ce que nous voulions démontrer.











< Proposition IV. 3. 1(19) : >

Si on marque deux points sur une hyperbole et que l'on mène de chacun d'eux deux lignes parallèles aux deux lignes sortant de l'autre point et qu'elles aboutissent aux deux lignes qui ne rencontre pas <l'hyperbole>, alors le produit de l'une des deux lignes menées de l'un des deux points par l'autre ligne menée de lui est égal au produit des deux autres lignes sortant de l'autre point, l'une par l'autre. Et si on mène des deux points deux lignes tangentes à la section, <de sorte que> chacune d'elles sépare des deux lignes qui ne tombent pas sur la section, en partant de l'angle, deux lignes dont le produit de l'une par l'autre est comme le produit des deux lignes que sépare l'autre ligne, l'une par l'autre.

<Exemple de cela : >

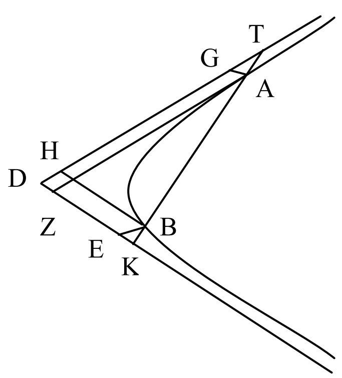
Soit AB la section, GD, DE, les deux lignes qui ne tombent pas sur elle. Nous marquons sur la section les deux points A, B, et nous menons de A les deux lignes AG, AZ qui aboutissent aux deux lignes GD, DE. Nous menons du point B la ligne BH parallèle à la ligne AG et la ligne BE parallèle à la ligne AZ qui aboutissent à la ligne GD. Je dis que le produit de AG par AZ est égal au produit de BE par BH.

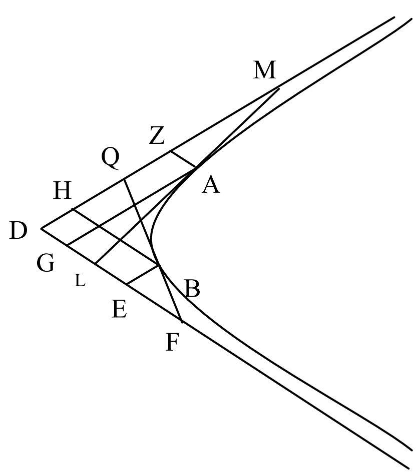
<Preuve : >

La preuve de cela est que nous joignons B, A et nous la prolongeons jusqu'à ce qu'elle rencontre GD en T et DE en K. Alors, le rapport de BT à TA est comme le rapport de BH à AG. Et le rapport de AK à KB est comme le rapport de AZ à BE. Or AB est égale à BK. Donc, le rapport de BH à AG est comme le rapport de AZ à BE. Donc le produit de AG par AZ est égal au produit de BH par BE.

Et si nous menons du point A la ligne LAM tangente à la section et, du point B, la ligne FBQ tangente au point B <de sorte> que les deux lignes AG, AZ soient parallèles aux deux lignes qui ne tombent pas sur la section, ainsi que les deux lignes BE, BH, alors le rapport de LM à MA est comme le rapport de LD à AZ, et le rapport de LM à LA est comme le rapport de DM à AG. Or LA est égal à AM. Donc, la ligne LD est le double de la ligne AZ, et la ligne MD est le double de la ligne AG. Donc, le produit de LD par DM est quatre fois la surface de AG par AZ.

Et d'une <manière> semblable à cela, on démontre que le produit de FD par DQ est quatre fois le produit de EB par BH. Donc, le produit de LD par DM est égal au produit de FD par DQ. Et c'est ce que nous voulions démontrer.





<Proposition IV. 3. 1(20) : >

Si un diamètre conjugué de deux sections <hyperboliques> opposées est diamètre transverse de deux autres sections opposées et que le premier diamètre transverse est diamètre conjugué des deux autres sections opposées, alors chacun des deux <couples> de sections opposées est appelé sections conjuguées aux deux autres sections opposées.

Et les deux lignes qui ne tombent pas sur l'une des quatre sections, si elles sont prolongées du côté de l'angle sur lequel elles se rencontrent, ne tombent pas sur l'une de ces quatre sections conjuguées.

Soit deux sections opposées, la ligne AB leur diamètre transverse, le point E leur centre. Soit la ligne GED le diamètre qui lui est conjugué et qu'il soit un diamètre transverse aux deux sections (G), (D); et que le diamètre AB soit un diamètre conjugué avec le diamètre GD aux deux sections (G), (D). Je veux dire que la ligne AB est parallèle aux lignes ordonnées des deux sections (G), (D). La ligne AB est moyenne proportionnelle entre le diamètre GD et le côté droit des deux sections (G), (D); et la ligne GD est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le côté droit des deux sections (A), (B).

Je dis que les deux lignes qui ne tombent pas sur l'une des sections AB, GD, lorsqu'elles sont prolongées du côté de l'angle sur lequel elles se sont rencontrées, ne tombent pas sur l'une des sections AB, GD.

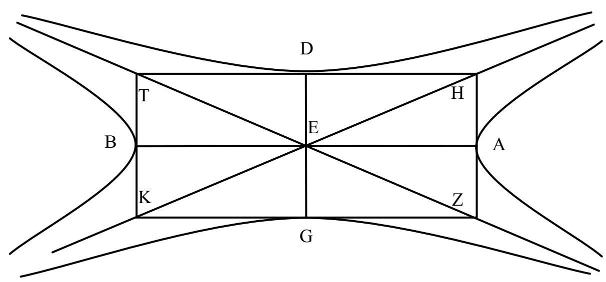
<Preuve : >

La preuve de cela est que nous menons des points A, B, G, D, des lignes tangentes aux sections, et ce sont les lignes ZAH, KBT, ZGK, HDT. Alors la surface (ZHTK) est à côtés parallèles. Et puisque la ligne GE est égale à la ligne ED et que la ligne AE est égale à la ligne EB, alors si nous joignons ZE, EB, ce sera une ligne droite et il en est de même pour EH, EK. Et la ligne ZA est égale à la ligne AH.

Et puisque la ligne GD est moyenne proportionnelle entre le diamètre AB et le côté droit des deux sections (A), (B), chacune des deux lignes ZA, AH est en puissance du quart du produit de AB par le côté droit des deux sections (A), (B). Pour cela, les deux lignes ZE, EH ne tombent pas sur la section (A). Et, pour cela aussi, les deux lignes KE, ET ne tombent pas sur la section (B).

De même, puisque le diamètre AB est moyenne proportionnelle entre le diamètre GD et le côté droit des deux sections (G), (D), chacune des deux lignes ZG, GK est en puissance du quart du produit de GD par le côté droit aux deux sections (G), (D). Pour cela, les deux lignes ZE, EK ne tombent pas sur la section (G). Et pour cela, les deux lignes HE, ET ne tombent pas sur la section (D).

Et c'est ce que nous voulions démontrer.



<Proposition IV. 3. 1(21) : >

Si <on a> deux sections opposées et qu'une ligne coupe les deux lignes qui entourent l'angle adjacent à l'angle des deux lignes qui ne tombent pas sur la section et qu'elle coupe les deux sections, alors elle coupe chacune des deux en un seul point et sa <partie> qui tombe entre l'une des deux sections et la ligne qui ne tombe pas sur elle est égale à ce qui tombe d'elle entre la section qui lui est opposée et la ligne qui ne tombe pas sur elle. Et le produit de l'une des deux parties égales par le reste de la ligne qui aboutit à l'autre section est égal au carré de la moitié du diamètre transverse.

Soit deux sections opposées sur lesquelles il y a A et B. <Soit> DG, EGZ les deux lignes qui ne tombent sur elles. Les deux lignes HD, ZT coupent les deux lignes DG, GZ qui entourent l'angle -celui qui est adjacent à l'angle DGE- et elle coupe les deux sections (A), (B) aux deux points H, T.

Je dis qu'elle ne tombe pas sur elle en d'autres <points> que les deux points H, T, que la ligne HD est égale à la ligne TZ et que le produit de HD par DT est égal au quart du carré du diamètre mené du point G et parallèle à la ligne HT.

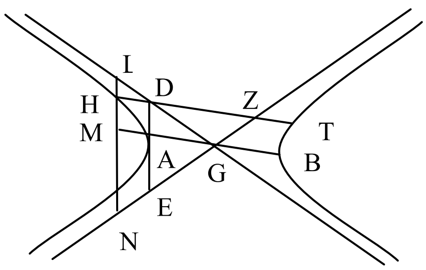
<Preuve : >

La preuve de cela est que nous menons du point G, qui est le centre, la ligne AGB parallèle à la ligne HT. Elle sera alors un diamètre. Et nous menons du point A une ligne EAK tangente et, du point H, la ligne LGM parallèle à la ligne AKE.

Puisque la ligne KE est tangente, KA est égale à AE et le rapport du carré de KA au carré de AG -lequel est comme le rapport du produit de KA par AE au carré de AG-, qui est comme le rapport de KA à AG -lequel est comme le rapport de LH à HD doublé du rapport de EA à AG-, qui est comme le rapport de NH à HZ. Et le rapport de LH à HD doublé du rapport de NH à HZ, est comme le rapport du produit de LH par HN au produit de ZH par HD. Et le produit de NH par HL est égal au carré de AK. Donc, le produit de ZH par HD est égal au carré de AG.

Et de cette manière, on démontre que le produit de DT par TZ est égal au carré de GB. Donc la ligne ZT est égale à la ligne HD. Donc, le produit de TD par DH est égal au carré de AG.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.



Proposition IV. 3. 1(22) : >

Nous voulons démontrer comment mener d'un point qui n'est ni sur la section ni sur l'axe une ligne tangente à une section connue.

Que la section soit la section (AB) et G le point d'où l'on mène.

Si la section est parabolique :

Nous traçons son axe, et c'est BD, et nous menons du point G la ligne GAE parallèle à l'axe BD qui rencontre la section au point A. Nous prenons AE égal à AG et nous menons du point E une ligne parallèle à la ligne tangente menée du point A, et c'est la ligne EZ qui rencontre la section au point Z. La ligne EZ sera alors une des lignes ordonnées. Et si nous joignons la ligne ZG, elle sera tangente, d'après ce qui a précédé.

Que la section soit l'hyperbole :

Et que les deux lignes qui ne tombent pas sur elle soient les deux lignes HT, HK, et que le point G soit entre la section et les deux lignes qui ne tombent pas sur elle. Nous joignons HG et nous la prolongeons jusqu'à ce qu'elle rencontre la section au point A, et nous prenons HC comme HA. Il sera un diamètre et nous prenons le rapport de CG à GA comme le rapport de CE à EA. Et nous menons du point E une ligne parallèle à la ligne tangente menée du point A, qui rencontre la section au point Z. Et nous joignons GZ. Elle sera tangente, d'après ce qui a été démontré.

De même, soit le point G sur l'une des deux lignes, -que ce soit KH. Nous divisons GH en deux moitiés au point L. Nous menons à partir de lui une ligne parallèle à la ligne HT sur laquelle il y a L, Z et nous joignons la ligne GZ, qui rencontre la ligne HT au point T. Alors, le rapport de HL à LG est comme le rapport de TZ à ZG. La ligne GT est donc tangente au point Z.

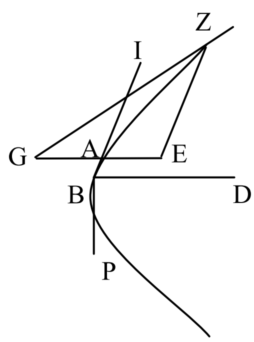
De même, si le point G est dans l'angle adjacent à l'angle entouré par les deux lignes qui ne tombent pas sur la section, nous joignons GH et nous marquons un point sur la section, où qu'il soit, et c'est le point N. Nous menons à partir de lui la ligne NB parallèle à la ligne GH et nous la divisons en deux moitiés au point M et nous joignons MH. Elle sera un diamètre conjugué au diamètre GH, et c'est AHC. Et nous considérons le produit de GH par HO égal au quart du produit du diamètre CA par son côté droit. Et nous menons, du point O, une ligne parallèle au diamètre CA qui rencontre la section au point Z et nous joignons ZG. Elle sera une tangente, d'après ce qui a été démontré.

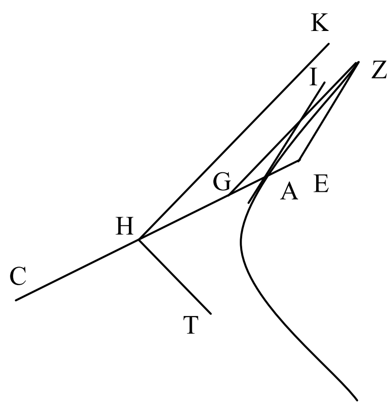
Si le point G est sur les deux lignes entourant l'angle opposé à l'angle entouré par les deux lignes qui ne tombent pas sur la section ou bien dans l'angle entouré par elles, alors il ne <peut> sortir de lui une ligne tangente à la section parce que toute ligne qui est menée de cette manière coupe la section et ne lui est pas tangente, d'après ce qui a été démontré.

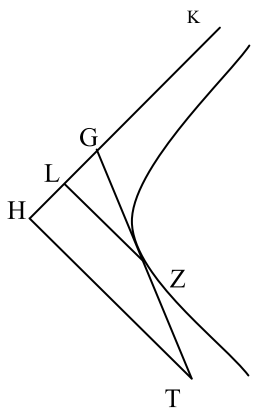
Et si la section est l'ellipse :

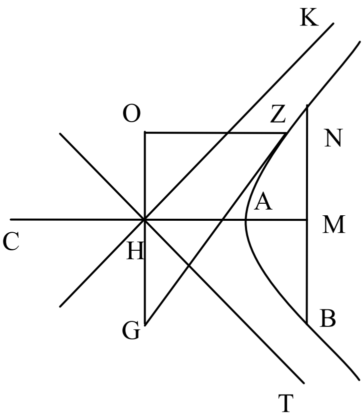
et que H est son centre, nous joignons HG qui rencontre la section aux deux points C, A. Nous prenons le rapport de CE à EA comme le rapport de CG à GA et nous menons du point E une ligne parallèle à la ligne tangente qui sort du point A, et c'est EZ, et nous joignons GZ. Elle sera une tangente, d'après ce qui a été démontré.

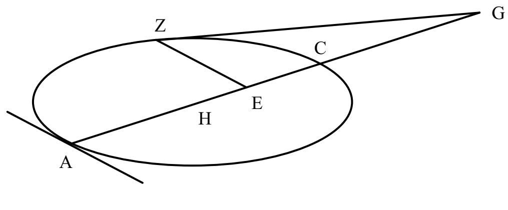
Et c'est ce que nous voulions démontrer.






K
G
L
H
Z
T


K
O
Z
N
A
M
C
H
G
B
T


Z
G
C
E
H
A

<Proposition IV. 3. 1(23) : >

Nous voulons démontrer comment mener une ligne tangente à une section donnée[19] qui engendre, avec son axe, un angle égal à un angle aigu donné, du côté du sommet de la section.

<Exemple de cela : >

Que la section soit la section (AG), AB son axe et HTK l'angle donné. Et nous voulons mener une ligne tangente à la section (AG) qui engendre avec l'axe AB un angle égal à l'angle aigu HTK.

<Preuve : >

Que la section soit, en premier, la parabole. Nous marquons sur la ligne HT le point H et nous menons de lui la perpendiculaire HK. Nous divisons la ligne KT en deux moitiés au point M, nous joignons HM et nous construisons, sur le point A de l'axe AB, l'angle BAG égal à l'angle KMH. Que la ligne AG rencontre la section au point G. Nous menons du point G la ligne GE d'une manière ordonnée, nous prenons AD comme AE et nous joignons DG. Elle sera tangente à la section.

Puisque l'angle GAE est égal à l'angle HMK et que les deux angles qui sont aux deux points E, K sont droits, les triangles GAE, HKM sont semblables. Et le rapport de DE à EA est comme le rapport de TK à KM; et le rapport de AE à EG est comme le rapport de MK à KH. Donc, le rapport de DE à EG est comme le rapport de TK à KH. Donc, l'angle D est égal à l'angle T.

Que la section soit aussi l'hyperbole, le point O son centre, ZO la ligne qui ne tombe pas sur elle; et supposons que l'angle HTK soit plus grand que l'angle ZOA. Puisque la ligne tangente tombe sur la ligne OZ, l'angle extérieur est plus grand que l'<angle> intérieur. Que l'angle KTL soit égal à l'angle AOZ. Nous menons du point A une ligne tangente AZ et nous marquons sur la ligne HT le point H et nous menons de lui la perpendiculaire HK qui rencontre la ligne TL au point L.

Puisque l'angle ZOA est égal à l'angle LTK et que les deux angles qui sont aux deux points A, K sont droits, le rapport du carré de OA au carré de AZ -lequel est comme le <rapport du> transverse au droit- est comme le rapport du carré de TK au carré de KL. Donc, le rapport du carré de TK au carré de KL est plus grand que le rapport du carré de TK au carré de KH. Que le rapport du carré de TK au carré de KL soit comme le rapport du produit de MK par KT au carré de KH. Il sera comme le <rapport du> transverse au droit.

Et nous joignons HM. Le rapport du carré de MK au carré de KH est plus grand que le rapport du produit de MK par KT au carré de KH. Et le rapport du produit de MK par KT au carré KH est comme le rapport du carré de OA au carré de AZ. Si nous prenons le rapport du carré de OA au carré d'une autre ligne comme le rapport du carré de MK au carré de KH, il sera plus petit que le carré de AZ. Si nous séparons de AZ <ce qui est> comme le côté de ce carré, la ligne qui est menée du point O au point d'où il s'est séparé, les triangles deviennent semblables. Et, à cause de cela, l'angle ZOA sera plus grand que l'angle HMK.

Que l'angle AOG soit égal à l'angle KMH. La ligne OG coupe donc la section, comme cela a été démontré. Qu'elle la coupe au point G. Nous menons de lui GD, une ligne tangente à la section et nous menons GE <d'une manière> ordonnée. Le triangle OGE est semblable au triangle MHK. Donc, le rapport du carré de GE au carré de OE est comme le rapport du carré de HK au carré de KM; et le rapport du produit de OE par ED au carré de EG est comme le <rapport du> transverse au droit –lequel est comme le rapport de la surface de MK par KT au carré de KH. Par le <rapport> ex-equali, le rapport du produit de OE par ED au carré de OE – lequel est comme le rapport de DE à EO- est comme le rapport du produit de MK par KT au

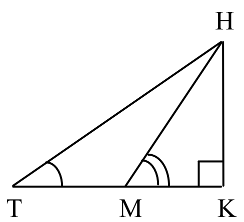
[19] - Littéralement "supposé".

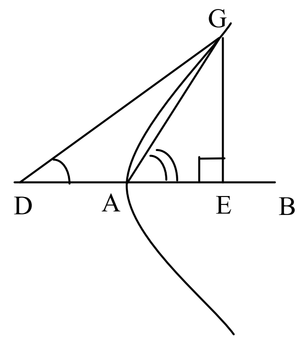
carré de KM –lequel est comme le rapport de KT à KM-. Donc, le rapport de DE à EO est comme le rapport de TK à KM. Et le rapport de OE à EG est comme le rapport de MK à KH. Donc, le rapport de DE à EG est comme le rapport de TK à KH. Et les deux angles qui sont aux deux points E, K, sont droits. Donc, les deux angles GDE, HTK sont égaux.

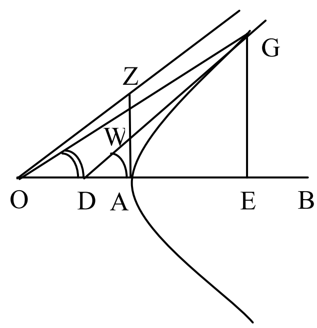
Et que la section soit aussi l'ellipse, et le point O son centre. Nous marquons sur la ligne TH le point H, nous menons de lui la perpendiculaire HK et nous prenons le rapport du produit de TK par KM au carré de KH comme le <rapport du> transverse au droit. Et nous joignons HM et nous construisons sur le centre O de l'axe AB l'angle AOG égal à l'angle TMH et nous menons du point G la ligne GD tangente à la section. Et nous menons du point G la ligne GE d'une manière ordonnée.

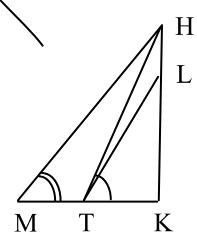
Puisque l'angle O est comme l'angle M et que les deux angles qui sont aux deux points K, E sont droits, les deux triangles GOE, HMK sont semblables. Donc, le rapport du carré de OE au carré de EG est comme le rapport du carré de MK au carré de HK. Et le rapport du carré de GE au produit de OE par ED est comme le <rapport du> transverse au droit, et c'est comme le rapport du carré de HK au produit de MK par KT. Alors par le <rapport> ex-equali, le rapport du carré de OE au produit de OE par ED -lequel est comme le rapport de OE à ED- est comme le rapport du carré de MK au produit de MK par KT –lequel est comme le rapport de MK par KT. Donc, le rapport de OE à ED est comme le rapport de MK à KT et le rapport de GE à EO est comme le rapport de HK à KM. Donc, le rapport de GE à ED est comme le rapport de HK à KT. Et les deux angles qui sont aux deux points E, K sont droits. Donc, l'angle GDE est égal à l'angle HKT.

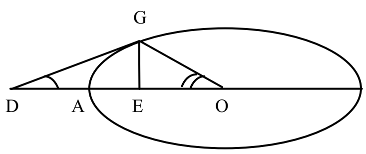
Et c'est ce que nous voulions démontrer.

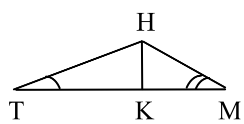












<Proposition IV. 3. 1(24) : >

Si un point est marqué sur l'une des deux lignes qui ne tombent pas sur la section, et que l'on mène de lui une ligne parallèle à l'autre ligne à une distance aussi petite <que l'on veut> du point sur lequel elles[20] se rencontrent, cette ligne tombe sur la section.

Et la ligne de la section et la ligne qui ne tombe pas sur elle, plus elles s'éloignent de l'intersection des deux lignes qui ne tombent pas sur elle, plus elles se rapprochent. Et la distance entre elles sera plus petite que toute grandeur supposée.

<Exemple de cela : >

Que la section soit la section AB, et DG, GE, les deux lignes qui ne tombent pas sur elle. Nous marquons le point M sur la ligne DG sur laquelle il y a Z et nous menons de lui la ligne ZH parallèle à la ligne GE.

Je dis que ZH, si elle menée d'une manière rectiligne, tombe sur la section et que la section AB et la ligne GE, plus elles s'éloignent du point G plus la distance entre elles diminue jusqu'à une <grandeur> plus petite que toute grandeur supposée.

<Preuve : >

La preuve de cela est que rien d'autre n'est possible. Si c'était possible, la ligne ZH ne rencontre pas la section. Nous menons du point A la ligne AD parallèle à la ligne ZH et nous prenons le produit de AD par DG comme le produit de GZ par ZH. Nous joignons GH et nous la prolongeons jusqu'à ce qu'elle rencontre la section au point T et nous menons du point T les deux lignes TK, TL, parallèles, chacune à l'une des deux lignes qui ne tombent pas sur la section.

D'après ce qui a été démontré, le produit de KT par TL est égal au produit de AD par DG. Or le produit de AD par DG est comme le produit de HZ par ZG. Donc, le produit de TK par KG et égal au produit de HZ par ZG. Or TK est plus grand que HZ et KG est plus grand que GZ. Ceci est absurde et n'est pas possible. Donc, le point H est sur la section.

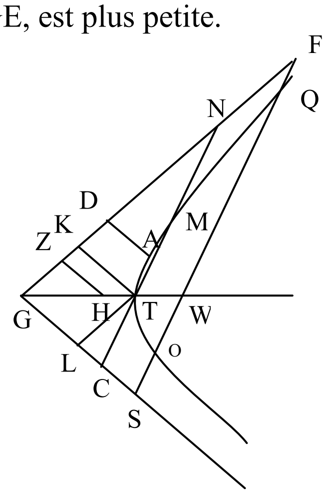
Et je dis que la ligne de la section TB et la ligne GE, plus elles sont prolongées et plus elles se rapprochent jusqu'à ce que la distance entre elles soit inférieure à toute grandeur donnée[21].

La preuve de cela est que nous menons du point T la ligne NMTC qui coupe la section et qui tombe sur les deux lignes qui ne tombent pas sur elle. Nous marquons sur la section le point Q et nous menons de lui la ligne FQWOS parallèle à la ligne MTC qui tombe sur la ligne GT au point W.

Puisque le produit de FO par OS est comme le produit de NT par TC, le produit de FO par OS est égal au produit de NT par TC. Donc, le rapport de FO à NT est comme le rapport de TC à OS. Or FO est plus grand que NT parce que FW est plus grand qu'elle. Donc, TC est plus grand que OS.

Et de cette manière, on démontre que pour toute ligne, dont la distance au point G est plus grande, sa <partie> située entre la section et la ligne GE, est plus petite.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.



[20] - "Elles" désigne les deux asymptotes à la section.

[21] - Littéralement : "supposé" [mafrûd].

<Proposition IV. 3. 1(25) : >

Soit <donnée> une ellipse, AB son axe le plus long, GD le plus court, E son centre. Si on joint AG, GB et que l'on mène la ligne HZL tangente et que l'on joigne la ligne EZ qui rencontre AG au point T.

Je dis que l'angle LZT n'est pas plus petit que l'angle LGT.

<Preuve : >

La preuve de cela est que la ligne ZE est ou bien parallèle à la ligne LB ou bien ne lui est pas parallèle.

Qu'elle soit, en premier, parallèle. Puisque BE est égal à EA, la ligne GT sera égale à TA. Donc, la ligne EZ est un diamètre, et la ligne LH est parallèle à la ligne AG. L'angle LGT est donc égal à l'angle LZT.

Si EZ n'est pas parallèle à BL, l'angle ZEA n'est pas égal à l'angle GBE. Si nous menons, du point Z, la ligne ZK d'une manière ordonnée, les deux angles E, K sont droits et les deux triangles ne sont pas semblables en position. Donc, le rapport du carré de BE au carré de EG n'est pas comme le rapport du carré de EK au carré de KZ. Et le rapport du carré de BE au carré de EG est comme le <rapport du> du transverse au droit, parce qu'il est comme le rapport du produit de BE par EA au carré de EG –lequel est comme le rapport du produit de EK par KH au carré de ZK. Donc, le rapport du carré de EK au carré de KZ n'est pas comme le rapport du produit de EK par KH au carré de KZ. Donc, la ligne HK n'est pas égale à la ligne KE.

Construisons une portion inférieure à un demi-cercle qui soit capable de l'équivalent de l'angle obtus AGB, puisque chacune des deux lignes AE, EB est plus longue que EG, et c'est la portion NOM. Nous complétons le cercle et nous prenons le rapport de NC à CM comme le rapport de HK à KE; et nous menons du point C la perpendiculaire ICJ, et nous divisons la ligne MN en deux moitiés au point S. Et nous menons de lui la perpendiculaire OSF et nous la divisons en deux moitiés au point Q. Il sera le centre du cercle. Nous menons de lui vers la ligne IJ la perpendiculaire QR. La ligne SQ sera alors égale à la ligne CR; et la ligne SO est plus grande que la ligne CI. Donc le rapport de la ligne SQ à la ligne SO est plus petit que le rapport de la ligne RC à la ligne CI. Et si nous composons, le rapport de QO à OS est plus petit que le rapport de RI à IC. Et les doubles des antécédents sont ainsi aussi : le rapport de FO à OS est plus petit que le rapport de HI à IC. Et si nous séparons, le rapport de FS à SO –lequel est comme le rapport du produit de NS par SM au carré de SO- est plus petit que le rapport de JC à CI –lequel est comme le rapport du produit de NC par CM- au carré de IC. Si nous prenons le rapport du produit de NS par SM au carré de SO comme le rapport du produit de NC par CM au carré d'une autre ligne, elle sera plus longue que la ligne IC. Que ce soit CW. Nous joignons WN, NM, OW. Puisque les deux angles O, G sont égaux et que les deux triangles sont isocèles, ils sont semblables[22]. [Le rapport du produit de BE par EA au carré de EG –lequel est comme le rapport du transverse au droit- est donc comme le rapport du carré de MS au carré de SO].

Le rapport du produit de HK par KE au carré de KZ est aussi comme le rapport du transverse au droit; et le rapport du produit de MC par CN au carré de CW est comme le rapport du carré de MS au carré de SO. Donc, le rapport du p de produit HK par KE au carré de KZ est comme le produit de NC par CM au carré de CW.

Et puisque nous avons divisé MN en C selon le rapport de EH à KE, le rapport du produit de MC par CN à chacun des deux carrés de MC, CN –lequel est comme le rapport de NC à CM ou de MC à CN-, est comme le rapport du produit de EK par KH à chaque homologue <parmi> les carrés de EK, KH. Nous disons que le rapport du carré de EK au produit de EK

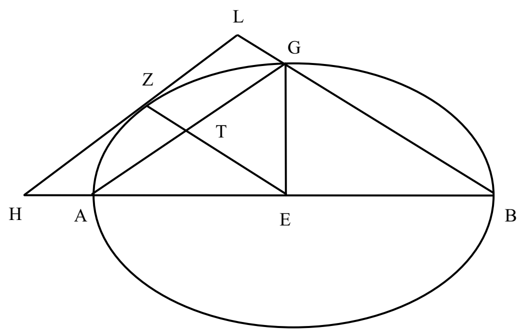
[22]- Ici s'achève le texte d'al-Mu'taman.

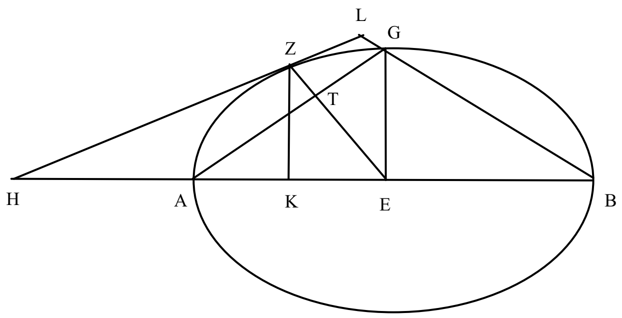
par KH est comme le rapport du carré de MC au produit de MC par CN; et le rapport du produit de EK par KH au carré de KZ est comme le rapport du produit de MC par CN au carré de CW. Donc, par le rapport d'ex-equali, le rapport du carré de EK au carré de KZ est comme le rapport du carré de MC au carré de CW; ou plutôt que le rapport de la ligne EK à la ligne KZ est comme le rapport de MC à CW.

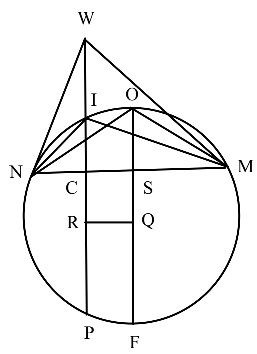
De même, le rapport de HK à KZ est comme le rapport de NC à CW; et les angles K, C sont droits. Donc, les deux triangles MWC, NWC sont semblables aux deux triangles EZK, HZK. Donc, les deux angles <de sommet> Z sont comme les deux angles <de sommet> W, ou plutôt l'angle EZH tout entier est comme l'angle MWN tout entier. Or l'angle MWN est plus petit que l'angle MIN qui est comme l'angle G. Donc, l'angle EZH est plus petit que l'angle BGA. Des deux droits, il reste l'angle EZL plus grand que l'angle LGT.

Il est donc vrai que l'angle LZT n'est pas plus petit que l'angle LGT.

Et c'est ce que nous voulions.







<Proposition IV. 3. 1(26) : >

Nous voulons déterminer, pour une section connue, un diamètre dont les angles de ses lignes ordonnées sont comme un angle aigu connu.

<Le cas de la parabole : >

Dans <le cas de> la parabole, cela est évident parce que tous ses diamètres sont parallèles à son axe. Et si nous menons une ligne tangente qui rencontre son axe selon un angle aigu égal à celui qui est supposé, le diamètre mené de ce point de la tangente est ce qui est cherché parce qu'il coupe la tangente de sorte que <l'angle> externe soit comme <l'angle> interne supposé, et les lignes ordonnées sont parallèles à la tangente.

Quant aux autres <cas>, soit AG la section, AB son axe, E son centre, T' l'angle aigu donné.

<Le cas de l'hyperbole : >

Supposons, en premier, que la section soit l'hyperbole et ES l'asymptote. Nous menons de l'extrémité de l'axe, sommet de la section, la tangente AS qui rencontre ES en S.

Il est clair que le rapport du carré de EA au carré de AS est comme le rapport du transverse de BA à son côté droit. Nous construisons une portion <de cercle> capable d'un angle égal à l'angle T', et c'est la portion ZKT. Elle est plus grande que le demi-cercle parce que son angle est aigu. Nous y menons une ligne qui coupe la corde ZT à l'extérieur du cercle selon un angle droit, par laquelle il se divise et qui sous-tend ZKT en le rencontrant en un point, <comme> tangente, ou bien en deux points en le coupant selon le rapport du transverse au droit, et cela d'après la troisième proposition de la troisième section de la première partie de la troisième espèce.

Si le transverse est comme le droit, le second sera aussi comme l'un des deux, cette ligne sera tangente à l'arc ZKT et perpendiculaire à l'extrémité du diamètre parallèle à la corde ZT; et son carré est comme le produit de ZT avec ce qui est situé de lui à l'extérieur du cercle par ce qui est situé de lui à l'extérieur.

Et si le transverse est plus long ou plus court que le droit –et cela nécessite pour lui qu'il soit aussi plus long ou plus court que le second à cause du fait qu'il est moyenne proportionnelle entre les deux- cette ligne sera sécante à l'arc ZTK en deux points. Dans le premier, la plus longue des deux parties limitées par un point commun qui est à l'opposé à ZT et par deux points qui sont sur l'arc ZTK, est l'homologue du transverse dans le rapport. Dans le second, il est homologue au droit. Et le produit de ZT avec ce qui est situé de lui à l'extérieur du cercle par ce qui est situé de lui à l'intérieur –lequel est comme le produit de l'une de ces deux parties imaginées par l'autre- est plus grande que le carré de la partie qui est homologue au droit du point de vue du rapport, dans le premier <cas>, et plus petit que lui dans le second. Et cela parce que le rapport de l'homologue du transverse à l'homologue du droit est comme le rapport du produit de l'homologue du transverse par l'homologue du droit.

Et il est clair que, dans la première partie, qui précède ces deux parties, les homologues du transverse et du droit s'unissent à cause du fait que la ligne est tangente.

Soit KL, l'homologue du droit de cette ligne, qu'elle soit une avec l'homologue du transverse ou qu'elle ne le soit pas. Quel que soit <KL>, le rapport du produit de ZL par TL au carré de KL est comme le rapport du transverse au droit, ou plutôt comme le rapport du carré de EA au carré de AS. Et le rapport du carré de ZL au carré de LK est plus grand que le rapport du produit de ZL par ZT au carré de LK. Donc, le rapport du carré de ZL au carré de LK est plus grand que le rapport du carré de EA au carré de AS. Nous prenons le rapport du carré de EA au carré de AO comme le rapport du carré de ZL au carré de LK. Donc, le rapport du carré de EA au carré de AO est plus grand que le rapport du carré de EA au carré de AS. Et, pour cela, AS sera toujours plus grand que AO.

Nous joignons EO et nous le prolongeons jusqu'à ce qu'il rencontre la section en G, et nous menons GD tangente et GH d'une manière ordonnée.

Puisque le rapport du carré de ZL au carré de LK est comme le rapport du carré de AE au carré de AO et comme le rapport du carré de EH au carré de HG, et que les angles L, A, H sont droits, les triangles KLZ, OAE, GHE sont semblables. Et puisque le rapport du produit de EH par HD au carré de HG est comme le rapport du transverse au droit, et de même, le rapport du produit de ZL par TL au carré de LK est comme le rapport du transverse au droit, le rapport du produit de ZL par LT au carré de LK est comme le rapport du produit de EH par HD au carré de HG; et le rapport du carré de HG au carré de HE est comme le rapport du carré de KL au carré de LZ. Donc, par le <rapport> d'égalité, le rapport du produit de ZL par LT au carré de ZL, je veux dire le rapport de TL à LZ, est comme le rapport du produit de EH par HD au carré de EH, c'est à dire comme le rapport de HD à HE. Et le rapport de EH à HG est comme le rapport de ZL à LK. Donc, également par le rapport d'égalité, le rapport de TL à LK est comme le rapport de HD à HG. Donc, le triangle GHD est semblable au triangle KLT, et l'angle TKL est comme l'angle DGH. Or l'angle ZKL des deux <triangles> semblables était comme l'angle EGH. Il reste donc l'angle ZKT –lequel est égal à l'angle supposé T'- comme l'angle EGD.

Or, il est clair que les angles des lignes ordonnées du diamètre EG sont comme l'angle de la tangente GD. Donc le diamètre GE est celui qui est cherché.

<Le cas de l'ellipse : >

Puis que ce soit une ellipse. Facilitons <l'étude> en présentant une prémisse, contrairement à ce que nous avons fait pour l'hyperbole.

Nous disons : la section est ou n'est pas un cercle. Si elle est un cercle, tous ses diamètres sont perpendiculaires à ses lignes ordonnées. Il n'est donc pas possible d'y mener un diamètre qui divise ses cordes en deux moitiés d'une manière non perpendiculaire. Et cela est clair.

Si elle n'est pas un cercle, un de ses axes est obligatoirement plus long que l'autre parce que s'ils étaient égaux, leurs <côtés> droits seraient comme eux et les lignes ordonnées des axes leur seraient perpendiculaires. Ce qui nécessiterait, comme nous l'avons évoqué, d'après ce qui a été montré dans la prémisse sur l'explication des positions des sections, que la section soit un cercle alors qu'elle a été supposée autre. Ce qui est absurde.

Donc, le <côté> droit de l'axe le plus long est plus court que lui. Donc le rapport de l'axe EA, qui est le <diamètre> transverse, à son <côté> droit, c'est le rapport d'un plus grand à un plus court.

Et pour le <cas de> l'axe le plus court, c'est l'inverse.

Soit le cercle (MNQFS), l'arc (MNQF) inférieur à un demi <cercle>, et l'arc (MSF) supérieur à lui. Nous voulons y mener une corde qui coupe la corde MF perpendiculairement, qui se divise par lui et par son périmètre d'une manière <telle que> le rapport de la partie du plus long contenue dans la grande portion à la partie du plus petit contenue dans la petite portion,soit comme le rapport du transverse au droit, je veux dire de l'axe le plus long à son <côté> droit.

<Preuve :>

Puisque le rapport n'est pas <un rapport> d'égalité, et que la corde n'est pas un diamètre et que l'angle est droit, cela est possible, comme cela a précédé dans la proposition indiquée. Que ce soit la corde SCQ, le rapport de SC à CQ comme le rapport du transverse au droit et le rapport de SC à CQ comme le rapport du produit de SC par CQ, je veux dire <le rapport du> produit de MC par CF au carré de CQ.

Nous avons su comment mener CQ perpendiculaire à MF de sorte que le rapport du produit de MC par CF au carré de CQ soit comme le rapport du transverse au droit.

Une autre explication : <Supposons> que les deux angles E, O des deux triangles MON, BEK sont égaux et que l'angle M est plus grand que l'angle T'. Nous disons : le rapport de MO à ON est plus petit que le rapport de BE à EK.

Construisons, à partir du point M de la ligne MO, l'angle OMI égal à l'angle EBK. Le côté MI qui en résulte coupe la base ON en I entre O et N.

A cause de la similitude, le rapport de BE à EK est comme le rapport de MO à OI. Et le rapport de MO à OI est plus grand que le rapport de MO à ON. Le rapport de MO à ON est plus petit que le rapport de BE à EK.

Revenons à la proposition : Soit ZEK l'axe le plus court. Nous joignons BK, AK et nous prolongeons BK jusqu'à L. La condition dans ce <cas> précis est que <l'angle aigu> donné ne soit pas plus petit que l'angle LKA, d'après ce que l'on sait de l'impossibilité de mener une tangente entre les deux points K, A ou K, B, de sorte que l'angle situé entre lui et le diamètre passant par cette tangente soit plus petit que l'angle LKA. Et l'on sait que les angles ordonnés sont égaux à l'angle de la tangente.

L'angle T' donné est donc ou bien comme l'angle LKA ou bien plus grand que lui.

S'il est comme lui, nous menons ETG parallèle à BKL et rencontrant KA en T et la section en G, et nous menons la tangente LGD qui rencontre BA en D.

Puisque le rapport de AE à EB est comme le rapport de AT à TK, AK est divisé en deux moitiés en T. C'est donc une des lignes ordonnées du diamètre EG et une parallèle à la tangente LGD. Donc, la surface (KG) est côtés parallèles et l'angle G –lequel est comme les angles ordonnés- est comme l'angle LKA –lequel est comme l'angle supposé T'.

Et si l'angle T' est plus grand que l'angle LKA, l'angle complémentaire à T' –et c'est P- est plus petit que l'angle BKA.

Nous construisons une portion de cercle capable d'un angle égal à l'angle obtus P, et c'est la portion (MNF). Elle est plus petite qu'un demi <cercle>. Nous divisons l'arc MF en deux moitiés en N et, de lui, nous menons la perpendiculaire NO jusqu'à la corde MF, et nous joignons ON, NF.

Puisque l'angle BKA est plus grande que l'angle MNF, sa moitié –est c'est l'angle BKE- est plus grand que l'angle MNO. Et les deux angles E, O sont droits. Il reste, des deux droits l'angle NMO plus grand que l'angle KBE. Pour cela, le rapport de MO à ON est plus petit que le rapport de BE à EK. Et le rapport du carré de MO, je veux dire le produit de MO par OF, au carré de ON est plus petit que le rapport du carré de BE, je veux dire le produit de BE par EA au carré EK, c'est-à-dire <plus petit> que le rapport du transverse au droit.

Or nous avions dit que l'on pouvait mener dans la portion MNF une perpendiculaire d'un point quelconque de la corde MF jusqu'à l'arc MNF <de sorte que> le rapport du produit des deux parties de la corde MF <l'une par l'autre> au carré de cette perpendiculaire soit comme le rapport du transverse au droit. Et puisque cette perpendiculaire n'est pas l'axe ON, qu'elle soit l'axe CQ. La perpendiculaire CQ tombe sur l'axe ON dans l'une des deux régions de MF.

Et il est clair qu'il est aussi possible de mener, à partir de l'autre région, une perpendiculaire comme la perpendiculaire CQ. La construction est possible de deux manières, et il ne <t'> échappera pas qu'il existe deux <lignes> comme le diamètre cherché dans l'ellipse et même quatre dans les deux régions au lieu d'une <seule>.

Et il a été <démontré> précédemment que le rapport du complément du diamètre NO à NO est plus petit que le rapport du complément de n'importe quelle autre perpendiculaire menée de la ligne MF vers le petit arc MNF.

Et cela clarifie aussi le <fait que> puisque MF s'est divisé en deux moitiés en O et que le rapport du produit de FO par MO au carré de ON est plus petit que le rapport du transverse au droit, le rapport de la surface d'une plus longue partie de MO par une plus courte, ou inversement, au carré d'une ligne plus courte que NO est comme le rapport du transverse au droit.

Et nous joignons MQ, QF et nous construisons sur le centre E l'angle AEG comme l'un des deux angles FMQ, MFQ. Qu'il soit comme l'angle FMQ; et nous menons LGD tangente et GH d'une manière ordonnée.

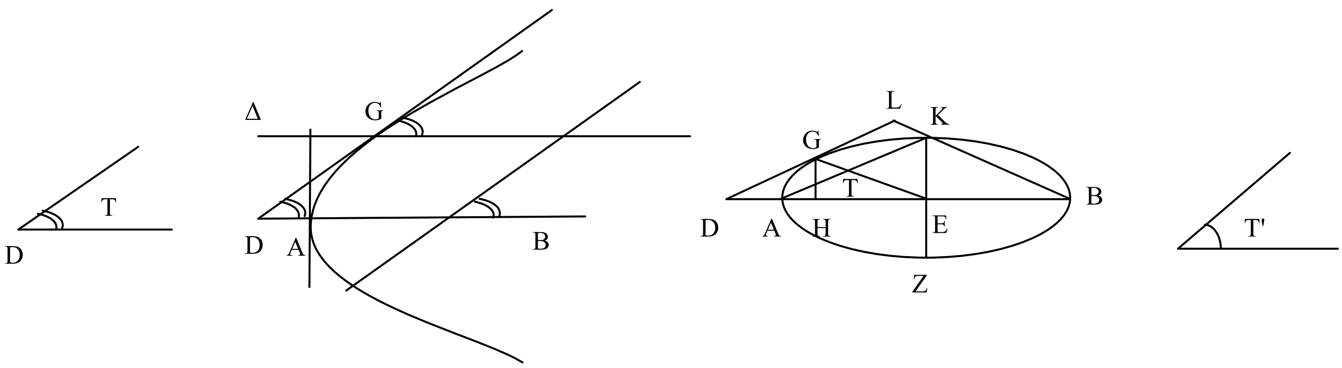
Puisque les deux angles C, M sont comme les deux angles H, E, le rapport du carré de MC au carré de CQ est comme le rapport de EH au carré de HG. Et le rapport du carré de QC au produit de MC par CF –lequel est comme le rapport du droit au transverse- est comme le rapport du carré de GH au produit de EH par HD. Donc, le rapport du carré de MC à la surface de MC par CF est comme le rapport du carré de EH au produit de EH par HD. Mais, le rapport du carré de MC du produit de MC par CF est comme le rapport de MC à CF. Et le rapport du carré de HE au produit de EH par HD est comme le rapport de EH à HD. Donc, le rapport de MC à CF est comme le rapport de HE à HD; et le rapport de GH à HE est comme le rapport de QC à CM. Donc, le rapport de QC à CF est comme le rapport de HG à HD. Et les deux angles H, C sont droits. Donc l'angle HGD est comme l'angle CQF. Donc tout l'angle MQF est comme tout l'angle EGD. Et il reste le complément de l'angle X -lequel est l'angle T' supposé- comme l'angle EGL. Donc le diamètre EG est ce qui est cherché parce que ses angles ordonnés, qui sont égaux à l'angle LGE, sont comme l'angle supposé pour l'ellipse.

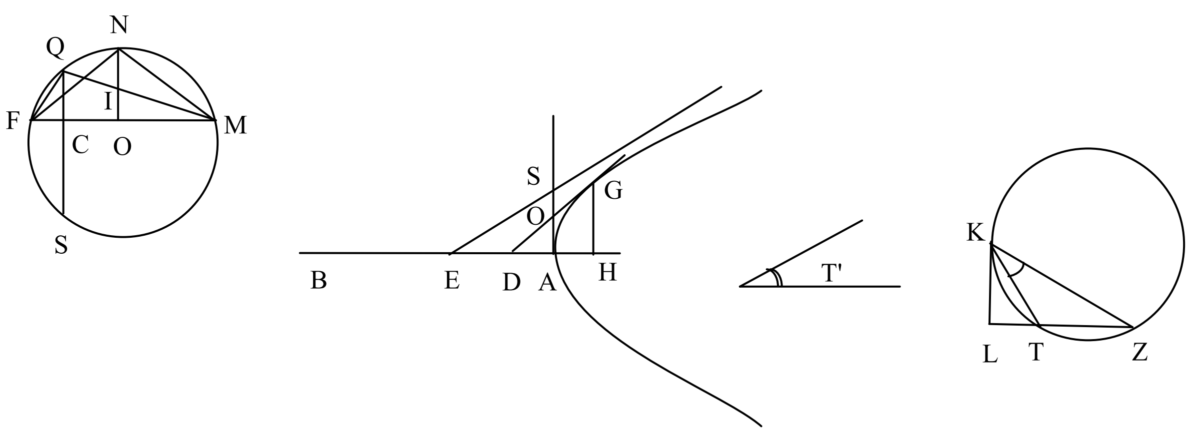
Et cela contient les deux prémisses évoquées.

Et on ne doit pas s'imaginer que l'angle CMQ est l'angle OMY lui-même. Y n'a rien à voir dans la proposition d'origine; et MY a été <introduit> uniquement pour démontrer la prémisse évoquée.

Et l'angle OMY, dans l'introduction, est comme l'angle EBK. Et l'angle CMQ est, dans la proposition d'origine, comme l'angle HEG. Et les deux angles HEG, EBK sont différents dans la seconde estimation. Que l'on sache cela.

Et c'est ce que nous voulions.





<Proposition IV. 3. 1(27) : >

Nous voulons tracer sur un plan donné chacune des quatre sections <de sorte que> son <diamètre> transverse et son <côté> droit soient comme deux lignes connues et que ses angles ordonnés soient comme un angle connu.

Et nous voulons tracer, dans un angle donné, une hyperbole qui passe par un point connu <situé> en lui, <de sorte que> ses deux côtés soient ses deux asymptotes.

Visons d'abord le tracé de la parabole et commençons, en premier, par celle dont les angles ordonnés sont droits.

<Parabole à ordonnées droites : >

Soit AB le transverse et AG le droit et BAG la surface supposée. Prolongeons BA jusqu'à E et prenons AE plus grand que le quart de AG et nous prenons EZ moyenne proportionnelle entre AG et AE.

Le rapport de AG à AE est comme le rapport du carré de EZ au carré de EA; et AG est plus petit que quatre fois AE. Le carré de EZ est donc plus petit que quatre fois le carré de AE. La ligne EZ est donc plus petite que deux fois AE. Il est donc possible de construire un triangle isocèle sur la base EZ, chacun de ses deux côtés <étant> comme AE. Que ce soit le triangle (AEZ), perpendiculaire à la surface supposée (GAB). Nous prenons la ligne AG perpendiculaire à AB dans la surface supposée et nous prolongeons ZA jusqu'à N. Soit ZK parallèle à AE et AK parallèle à EZ. AE est alors égal à KZ. Et nous construisons, sur la ligne AK, un cercle de diamètre AK, perpendiculaire à la surface KE. Si l'un des deux côtés égaux AZ, ZK tourne autour du périmètre du cercle KA jusqu'à ce qu'il revienne à son endroit initial, il <en> résulte un cône droit parce que le plan du triangle isocèle (AZK) sera, pour cela, perpendiculaire au plan du cercle de sa base; c'est-à-dire que son axe est perpendiculaire à lui.

Si nous prolongeons le cône AZK et si nous menons du point B un plan parallèle au cercle AK, il engendre dans le cône le cercle (MN), perpendiculaire au plan du triangle MZN; et la ligne MN sera l'intersection commune au plan du triangle (MZN) et au plan du cercle (MN). Donc la ligne MN sera un diamètre du cercle. Et nous coupons[23] le cône par le plan posé par hypothèse; il engendre en lui la section LAC, et l'intersection commune au cercle (MN) et au plan supposé est la ligne LC; et LC, parce qu'elle est commune aux deux plans –le cercle et le <plan> supposé, qui sont tous deux perpendiculaires au triangle (MZN)- est perpendiculaire au plan du triangle. Pour cela, elle est perpendiculaire à la ligne MN et à la ligne AB –laquelle est commune au plan du triangle et au plan de la section. Quant à son axe, il a été démontré qu'il se divise en deux moitiés au point B.

Puisque le cône (MZN) a été séparé par un plan qui passe par son axe et qu'il y a engendré le triangle (ZMN) et qu'il a été coupé par le plan supposé et qu'il y a engendré la section (LAC), et comme leur intersection commune -qui est AB- est parallèle à l'arête du cône -qui est ZM-, la section (LAC) est une parabole.

Et puisque le rapport de AG à AZ est comme le rapport du carré de AK au carré de AZ -le quel est comme le produit de AZ par ZK-, la ligne AG sera le diamètre droit, d'après ce qui a été démontré. Et il est clair que son transverse est AB.

<Parabole à ordonnées obliques : >

Puis que l'angle soit non droit, et c'est l'angle DHT. Nous prenons la ligne DH comme la moitié de AG et nous abaissons de D la perpendiculaire DT sur l'autre côté de l'angle et, de T, nous menons TF parallèle à DH et de H la perpendiculaire HF à la ligne parallèle. Nous divisons FT en deux moitiés en Q et nous menons de Q la perpendiculaire QO, nous prenons le produit de QF par QO comme le carré de FH, et nous traçons une parabole dont le côté

[23] - Ibn Sartâq utilise le verbe *fasala* [séparer] que nous préférons traduire par "couper".

droit est la ligne OQ et l'axe la ligne QF, selon ce qui a été démontré. Elle passera par le point H parce que si elle passait en dessous de lui ou au dessus, le produit de QF par QO serait comme le carré d'une ligne plus petite ou plus grande que FH, alors qu'il est comme le carré de FH. Cela est absurde.

Que ce soit donc la section QH. Nous menons la ligne OQ jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne HT au point S et DH au point J.

Puisque OQ est une perpendiculaire et que QF est un axe, QSJ sera une tangente. Et puisque TQ est comme QF, que FH est une ordonnée, qu'il joint HT et que la section est une parabole, HT est donc tangente en H, d'après ce qui a été démontré. Et puisque l'angle HJS est droit, que l'angle DTH est droit et que l'angle H est commun, les deux triangles sont semblables et le rapport de SH à HJ est comme le rapport de DH à HT et comme le rapport du double de DH –lequel est AG- au double de HT, la tangente joignant le <diamètre> transverse. Donc, la ligne AG est le côté droit de la section passant par le point H, d'après ce qui a été démontré.

Et il est clair que les angles ordonnés du diamètre DSH, qui passe par le point H, est comme l'angle supposé -qui est l'angle DHT-. Et si on met AB à la place de DH, AB deviendra lui-même le <diamètre> transverse. Et c'est ce qui était cherché.

<Hyperbole à ordonnées droites : >

<Supposons> aussi que ce qui est cherché soit l'hyperbole et que les angles ordonnés soient d'abord droits. Dans ce <cas> et celui de l'ellipse aussi, la ligne transverse a les deux extrémités limitées, contrairement à la parabole qui n'a pas de centre.

<Lemme 1 :>

Explicitons d'abord une prémisse qui y est utilisée. Soit *a*, *b* deux grandeurs connues et GD une troisième. Nous voulons mettre GD comme corde dans un cercle de sorte qu'elle coupe son diamètre selon le rapport a, b et qu'elle lui soit perpendiculaire.

Divisons GD en deux moitiés en E et prenons entre *a*, *b* une moyenne proportionnelle, et c'est *z*. Nous menons la perpendiculaire HET et prenons le rapport de GE à ET comme le rapport de *z* à *b* et le rapport de GE à EH comme le rapport de *z* à *a*.

Le rapport de HE à EG est comme le rapport de *a* à *z* et le rapport de EG à ET est comme le rapport de *z* à *b*. Donc le rapport de *a* à *b* est comme le rapport de HE à ET.

Et puisque *z* est une moyenne proportionnelle, GE est aussi une moyenne proportionnelle entre HE et ET. Et, pour cela, si nous joignons GH, GT, les deux triangles HEG et GET sont semblables et tout l'angle HGT est comme les deux angles H, T. Et, pour cela, l'angle HGT est droit. Le cercle tracé sur le diamètre HT passe par les deux points G, D et c'est <ce qui> est cherché.

<Lemme 2 :>

Et si nous voulons que le rapport de l'une des deux parties du diamètre à l'autre soit plus petit que le rapport de *a* à *b*, nous construisons l'angle TGI plus petit que l'angle GEH. La section (GI) qui résulte de TE au dessus de T et EI devient plus grand que ET. Et on sépare l'angle HGK comme l'angle IGT. Il reste, en retranchant la chose et son égale, l'angle IGK droit. Donc, le cercle tracé sur le diamètre IK passe aussi par les deux points G, D. Et il est clair que le rapport de KE, le plus petit, à EI, le plus grand, est plus petit que le rapport de HE à ET.

Puis, si nous voulons que le rapport soit plus grand, nous retranchons de l'angle TGE l'angle TGL et nous ajoutons à l'angle EGH l'angle HTM comme lui, c'est-à-dire comme le retranché. L'angle LGM sera alors droit. Et le cercle tracé passera sur ML par les deux points

G, D. Et le rapport de ME, le plus grand à EL, le plus petit, est plus grand que le rapport de EH, le plus petit, à ET, le plus grand. Et c'est ce qui est demandé.

Et il est clair que si *a* est comme *b*, *z* sera aussi comme eux et GE, EH, ET seront égaux. Et si *a*, *z*, *b* étaient chacun plus petit que l'autre, HE, GE, ET seraient aussi chacun plus petit que l'autre. Et s'ils étaient chacun plus grand que l'autre, ils seraient aussi chacun plus grand que l'autre.

Construisons sur le <diamètre> transverse AB, un cercle <tel que> le rapport de l'une des deux parties de son diamètre élevé sur le milieu de AB –et que soit K- à son autre partie soit ou bien égale au rapport de AB au <côté> droit BG ou bien plus petit que lui, sans qu'il soit plus grand que lui. Que ce soit ABZL et EKL son diamètre perpendiculaire à AB et le rapport de EK à KL n'est pas plus grand que le rapport de AB à BG, le transverse au droit. Il est soit égal à lui soit plus petit que lui.

S'il est égal à lui, nous utilisons la ligne KL. Sinon, nous prenons le rapport de EK à KM comme le rapport de AB à BG. Alors KM sera plus petit que KL parce que son rapport à lui est plus grande. Et nous menons MZ parallèle à AB. Il coupe l'arc LB en Z entre les deux points L, B. Nous joignons ZB, ZA, ZE; et nous prolongeons AZ du côté de Z et BC parallèlement à BE rencontrant AZ en C. Que ZE rencontre AB en H et que le plan du cercle AEB soit perpendiculaire au plan posé sur des perpendiculaires.

Puisque l'arc AE est comme l'arc EB, l'angle AZE -qui est égal à l'angle ACB- est comme l'angle EZB l'alterne à l'angle ZBC. Donc les deux côtés ZC, ZB sont égaux à cause de l'égalité des deux angles C, B. Si nous tournons sur la base CB un cercle perpendiculaire au plan du triangle CZB –lequel est le plan du cercle AEB lui-même-, et que ce soit le cercle (BC), et si nous tournons l'un des deux côtés ZC, ZB sur son périmètre, en conservant <fixe> le point Z jusqu'à ce qu'il revient à sa position première, il <en> résulte un cône. Son axe sera la perpendiculaire sortant du milieu de CB vers le sommet Z et perpendiculaire au plan de sa base à cause de l'orthogonalité du triangle CZB au plan du cercle CB. Et avec le prolongement des lignes ZB, ZC, MZ, AB, la surface du cône se prolonge en s'élargissant et elle le coupe sous le cercle BC selon un plan parallèle à BC. Elle y engendre le cercle NT. L'intersection commune au cercle NT et au triangle ZNT, et c'est la ligne NT, est parallèle à la ligne BC, plutôt à HZ. Et le diamètre du cercle est NT d'après ce qui a été démontré à sa place; et les deux lignes parallèles AB, MZ situées dans le plan du triangle ZNT coupent la ligne NT aux deux points O, D. Et le plan supposé coupe le cône et il y engendre la section FBQ. Et il le coupe parce qu'il est perpendiculaire au plan du triangle selon la ligne BD. Soit FQ l'intersection commune à lui et au cercle NT. Elle passe par le point D commun aux trois plans : le triangle, le cercle et le <plan> considéré qui engendre la section. Et FDQ est perpendiculaire au plan du triangle ZNT et à chacune des deux lignes NT, BD parce qu'il est commun à deux plans qui lui sont perpendiculaires.

Et puisque le cône ZTN a été coupé par le plan ZTN passant par son axe et qu'il a été coupé aussi par le plan FQB perpendiculaire au plan ZTN et que leur intersection commune, qui est BD, rencontre le côté NZ, au point A, à l'extérieur du cône du côté du sommet, alors, pour cela, la section FBQ est une hyperbole, et son sommet est B, et les lignes ordonnées menées vers BD lui sont perpendiculaires parce qu'elles sont parallèles à la perpendiculaire FDQ qui lui est perpendiculaire.

Et puisque le rapport de AB à BG est comme le rapport de EK à KM, c'est à dire comme le rapport de EH à ZH –lequel est comme le rapport du produit de EH par HZ au carré de ZH, le rapport de AB à BG est comme le rapport du produit de EH à HZ au carré de ZH. Et le produit de EH par HZ est comme le produit de AH par HB. Donc, le rapport de AB à BG est comme le rapport du produit de AH par HB au carré de GZ. Et ce rapport est composé du rapport de AH à HZ, c'est à dire du rapport de AD à DN ou plutôt du rapport de ZO à ON à cause de la similitude, et du rapport de BH à HZ, c'est-à-dire du rapport de BD à DT, ou plutôt du rapport de ZO à OT. Donc, le rapport de AB à BG est composé du rapport de ZO à ON et du rapport de ZO à OT. Et le rapport du carré de ZO au produit de NO par OT est aussi composé de ces deux rapports. Donc, le rapport de AB à BG est comme le rapport du carré de ZO au produit de NO par OT. Mais, la ligne ZO est la <ligne> sortant du sommet du cône parallèlement à l'axe de la section qui est ABD; et NOT y est le diamètre de la base. Donc, pour cela, la ligne BG sera le diamètre droit au diamètre transverse AB.

Nous avons donc trouvé la section cherchée, et c'est la section FBD.

<Hyperbole à ordonnées obliques : >

Que les angles ordonnés soient à présent non droits. Ils sont supposés aigus. Soit AB, le <diamètre> transverse, AG le droit et BAG la surface qu'ils entourent. Nous divisons AB en deux moitiés en D et nous traçons sur DB le demi-cercle AZD et nous construisons sur A l'angle DAT comme l'angle aigu supposé. Parce qu'il est aigu, le côté AT qui en résulte sera à l'intérieur du cercle. Nous menons DA du côté de A et nous menons une ligne, tangente au demi-cercle AZD ou le coupant, qui rencontre le diamètre DA à l'extérieur du cercle de sorte que le rapport de la surface de DA avec ce qui, de lui, est situé à l'extérieur du cercle, vers cette ligne par ce qui, de lui, est situé à l'extérieur du cercle, au carré de cette tangente ou au carré de l'une des deux parties de cette <ligne> coupante, est comme le rapport du transverse AB au droit AG. Et cela est également possible en revenant à la proposition indiquée dans les cercles.

Rappel : les <deux> produits des parties de deux <lignes> concourantes, extérieures ou intérieures au cercle, sont égaux; et le produit de la ligne par la ligne est moyenne proportionnelle entre leurs deux carrés; et le rapport de deux surfaces de hauteurs égales est comme le rapport de leurs bases.

Et en tenant compte <du fait> que la corde est un diamètre et que l'angle est non droit, que le rapport soit ou non un rapport d'égalité, Soit HZ cette ligne, qu'elle soit tangente ou la partie la plus longue de la ligne coupant la plus petite.

Puisque l'angle DHZ supposé est comme l'angle DAT, AT, HZ sont donc parallèles. Et nous joignons DZ. Elle coupe AT en T. Nous menons ZD et nous séparons ZK comme ZD et nous prenons entre DZ, DT une moyenne proportionnelle, et c'est DL.

Donc le point L est situé entre les deux points T, Z[24]. Et nous joignons AZ et nous le prolongeons d'une manière rectiligne jusqu'à M <de sorte> que le produit de LZ par ZM soit égal au carré de ZA. Nous joignons K, M et nous menons, du point L, une perpendiculaire à KZ qui rencontre la ligne KM au point N, la ligne AT au point O et la ligne AD au point C. Donc, les deux lignes KL, LN sont connues.

Si nous traçons une hyperbole dont le diamètre transverse est la ligne KL et son côté droit la ligne LN, ses lignes ordonnées rencontrent l'axe selon des angles droits. Elle passe par le point A parce que le carré de AZ est égal au produit de LZ par ZM. Et la ligne AT est tangente à l'hyperbole, parce que le produit de ZD par DT est égal au carré de DL. Et la ligne AB sera un diamètre parce qu'il sort du centre D au point de tangence. Et les angles des lignes ordonnées sur lui seront égaux à l'angle donné DAT.

Et puisque le rapport de GA au double de AD, qui est AB, est comme le rapport du carré de ZH au produit de DH par HA, si on considère le double de TA une moyenne, le rapport de AG au double de AD sera composé du rapport de AG au double de AT et du rapport du double de AT au double de AD, lequel est comme le rapport de AT à AD et comme le rapport de ZH à HD. Et le rapport de AG à AB est composé du rapport de AG au double de AT et du

[24] - A partir de là, nous traduisons le texte de *l'Istikmâl* qui commence ainsi : "*Entre les deux lignes D, T, jusqu'à Z. Donc le point L est situé ...*" [Ms. Copenhague, f. 53a].

rapport de ZH à HD. Et le rapport du carré de ZH au produit de DH par HA est composé du rapport de ZH à HD et du rapport de ZH à HA. Et le rapport composé de GA au double de AT et du rapport de ZH à HD est le rapport composé du rapport de ZH à HA et du rapport de ZH à HD. Nous retranchons le rapport de ZH à HD, qui est commun, il reste le rapport de AG au double de AT <qui est> comme le rapport de OA à AC. Donc, le rapport de AG au double de AT est comme le rapport de OA à AC. Donc, la ligne AG est le côté droit de la section (AB).

<Construction de l'ellipse : >

Et si nous voulons tracer l'ellipse, soit AB, AG les deux lignes connues et considérons les entourant un angle droit. Si nous voulons que la ligne AB soit l'axe le plus long, nous le supposons plus long que AG. Et nous élevons sur la ligne AB une surface perpendiculaire à la surface supposée, nous y traçons la portion de cercle ADB et nous divisons l'arc AB en deux moitiés au point D et nous joignons AD, DB; et nous séparons AC de AB, égal à la ligne AG et nous menons du point C la ligne CO parallèle à la ligne DB, qui rencontre la ligne AD au point O. Et nous menons, du point O une ligne parallèle à la ligne AB, sur laquelle il y a OZ, qui rencontre l'arc AD au point Z. Nous joignons DZ et nous le prolongeons jusqu'à ce qu'il rencontre AB. Et nous joignons AZ, ZB et nous les prolongeons des deux côtés de A et B. Et nous marquons un point sur la ligne ZA, et c'est le point H. Et nous menons, à partir de lui, la ligne ZB au point T, la ligne AB au point K et la ligne ZO au point L.

Comme l'angle AZE est extérieur au triangle ZAD, il est égal aux deux angles ZAD, ADZ. Et l'angle ZAD est comme l'angle ZBD; et l'angle ZDA est comme l'angle ZBA. Donc, l'angle DBA est égal à l'angle AZE, qui est égal à l'angle ZHT. Et l'angle DBA est égal à l'angle BZD qui est égal à l'angle ZTH parce qu'ils sont sur deux arcs égaux. Donc, la ligne ZT est égale à la ligne ZH.

Si on mène sur la ligne HT une surface perpendiculaire à la surface du triangle ZHT et que nous traçons sur le diamètre HT un cercle et que nous imaginons un cône dont la base est le cercle HT et le sommet le point Z, alors, pour cela, le cône sera droit.

Et puisque la surface du triangle ZHT est perpendiculaire à la surface donnée et que le cercle (HT) est perpendiculaire au triangle ZHT, l'intersection commune à la surface donnée et au cercle (HT) est perpendiculaire à l'intersection du triangle ZHT et de la surface du cercle HT, et c'est KM.

Pour cela, le cône droit ZHT aura été coupé par la surface donnée, l'intersection commune à lui et au cercle THN perpendiculairement à l'intersection commune au cercle HTN et au triangle ZHT. Pour cela, il engendrera l'ellipse, sur la surface demandée; son axe est la ligne AB et les lignes ordonnées sont sur l'axe AB selon des angles droits parce que l'intersection commune, à lui et au cercle (HT) est perpendiculaire à l'intersection commune au cercle (HT) et au triangle ZHT.

Et puisque le rapport de BA à AG est comme le rapport de BA à AQ et comme le rapport de DE à EZ et comme le rapport du produit de DE par EZ au carré de EZ qui est comme le <rapport du> produit de KE par EA au carré de EZ, lequel est comme le rapport de KE à EZ doublé par le rapport de AE à EZ; et le rapport de BE à EZ est comme le rapport de BK à KT et comme le rapport de ZL à LT. Et le rapport de AE à EZ est comme le rapport de AK à KH et comme le rapport de ZL à LH. Le rapport de BA à AG est comme le rapport de ZL à LT doublé par le rapport de ZL à LH, lequel est comme le rapport du carré de ZL au produit de TL par LH. Donc, la ligne LG est le côté droit de la section AB.

Soit également AB plus court que la ligne AG et nous voulons tracer l'ellipse dont la ligne AB est l'axe le plus court. Nous divisons la ligne AB en deux moitiés au point D; et nous menons, du point D, la ligne EZ parallèle à la ligne AG; et nous considérons la ligne ZE moyenne dans le rapport entre les deux lignes BA, AG. Et soit la ligne DE, égale à la ligne

EZ. Et nous menons la ligne ZH parallèle à la ligne AB. Et nous considérons le rapport de AG à AB comme le rapport de EZ à ZB.

La ligne EZ est plus grande que la ligne ZH. Et nous traçons l'ellipse dont l'axe est la ligne ZE et le côté droit la ligne ZH. Elle passe donc par les deux points A, B.

Et parce que le rapport de AG à ZE est comme le rapport du carré du ZE au carré de AB et comme le rapport du carré de ZD –lequel est comme le rapport du produit de ZD par DE au carré de DA- et comme le rapport de EZ à ZH, lequel est comme le rapport du <diamètre> transverse au côté droit. Pour cela, l'ellipse passe par les deux points A, B.

Puis, que l'angle donné ne soit pas droit et qu'il soit comme l'angle BAD. Et nous divisons la ligne AB en deux moitiés au point E et nous traçons, sur AB, un demi cercle sur lequel il y a AZE; et nous y menons une ligne, parallèle à la ligne AD, sur laquelle il y a ZH, de sorte que le rapport du carré de ZH au produit de AH par HE soit comme le rapport de la ligne AG à la ligne AB. Et nous joignons AZ; et nous menons EZ d'une manière rectiligne jusqu'à ce qu'elle rencontre AD en D; et nous déterminons, entre les deux lignes ZE, ED, la ligne ET moyenne proportionnelle entre elles. Donc le point T se situe entre Z et D. Et nous menons la ligne TE jusqu'à K et nous considérons EK égale à TE et nous prolongeons AZ d'une manière rectiligne jusqu'à L et nous considérons le produit de TZ par ZL égal au carré de AZ. Et nous joignons K, L et nous menons, du point T, une perpendiculaire à la ligne TZ sur laquelle il y a MCN qui rencontre la ligne KL au point M, la ligne AD au point C et la ligne AB au point N.

MCN est parallèle à la ligne ZL parce que l'angle en Z est droit. Puisque les deux lignes KT, TM sont connues[25].

Que TC tombe sur AD en C et sur AB en N, et nous joignons KL. Il tombe sur TC en M. Et nous construisons sur le diamètre transverse THG et le côté droit GM une ellipse dont les angles ordonnés sont droits. Et que ce soit ATBK.

Puisque TE est comme EK et TK est un axe, la section passe par le point K, et son centre est E. Et puisque le produit de LZ par ZT est comme le carré de la ligne ordonnée, nous menons du point Z vers la section une perpendiculaire sur TE vers la section. Et il est aussi comme le carré de la perpendiculaire ZA. Donc la perpendiculaire ZA est elle-même la ligne ordonnée menée de Z vers la section, ni plus ni moins. Donc, la section passe par le point A. Et puisque AE passe par le centre de la section et que AE est comme EB, AE est donc un diamètre de la section. Il passe donc aussi par le point B. On a donc tracé une section ATB dont le transverse est AB. Et puisque DA est mené du point D du diamètre TK vers la section jusqu'à son point A, et que AZ est située d'une manière ordonnée de A vers TD, et que le produit de DE par ZE est comme le carré de DT, pour cela AD sera tangent à la section à l'extrémité du diamètre AB. Les angles ordonnés du diamètre AB seront donc comme l'angle DAB supposée.

Et puisque le rapport de AG à AB est composée du rapport de AG au double de AD, la tangente, et du rapport du double de AD au double de AE, c'est à dire AB, ou plutôt du rapport de AD à AE, c'est à dire du rapport de ZH à EH. Et le rapport de AG à AB, à l'inverse, est comme le rapport du carré de ZH au produit de AH à HE. Donc, le rapport du carré de ZH au produit AH par HE est composé du rapport de AG au double de AD, la tangente, et du rapport de ZH à HE. Mais, le rapport du carré de ZH au produit de AH par HE est également composé du rapport de ZH à HE et du rapport de ZH à HA. On ôte le rapport de ZH à HE, qui est commun, et il reste le rapport de AG au double de AD, la tangente, comme le rapport de ZH à HA, plutôt comme le rapport de AC à AN à cause de la similitude et du parallélisme.

Et puisque le rapport de AG à AD est comme le rapport de AC à AN, pour cela, AG sera le côté droit du côté transverse AB, d'après ce qui a été démontré.

[25] - Ici s'achève le texte de l'*Istikmal*. Nous poursuivons avec celui de l'*Ikmal*.

Et toi tu sais qu'une digression comme celle-ci concerne la proposition où l'on détermine les diamètres des sections. Et il est clair aussi pour toi qu'il est possible de déterminer le cercle à l'aide d'une construction semblable à celle qui précède celle-ci pour la réalisation de l'ellipse qui est autre que le cercle. En fait, la construction y est moindre et plus facile.

Prends en compte ce qui a précédé qui est que le triangle isocèle ADB est celui du cône où la section (AB) engendre un cercle, et le triangle ZBA est celui par lequel la section AB engendre autre chose qu'un cercle.

Et parce que nous avons une méthode plus simple que cela pour le cercle en imaginant un cercle sur toute ligne limitée comme dans la célèbre prémisse, on n'a pas besoin de cela dans la recherche du cercle. En fait, si tu avais réalisé le cercle par cette méthode, la preuve aurait tourné <en rond> à cause de l'utilisation du cercle.

Et tu sauras aussi que là intervient une figure semblable au cercle mais qui n'est pas exactement le cercle; et c'est l'ellipse dont le diamètre transverse est comme le <côté> droit et dont les lignes ordonnées sont inclinées sur son <diamètre> transverse.

< Construction de deux sections hyperboliques conjuguées >

De même, que ce qui est cherché soit les deux sections <hyperboliques> opposées. Soit AB le transverse, AG le droit, <avec> des angles ordonnés droits, aigus ou obtus. Nous avons à construire, sur chacune des deux extrémités de AB, une hyperbole de <diamètre> transverse AB, de <côté> droit AG et ses angles <ordonnés> comme ce qui a été supposé : droits ou aigus. Il est clair que les deux <sections> sont opposées du fait que le transverse et le droit sont communs et que les angles ordonnés sont les mêmes. Et si nous menons entre le transverse AB et le droit AG une moyenne proportionnelle, ce sera le conjugué au transverse AB.

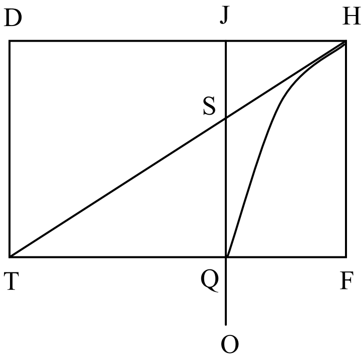
Si nous déterminons pour ce conjugué et pour AB une troisième proportionnelle, de sorte que le rapport de ce conjugué à AB soit comme le rapport de AB à cette troisième <proportionnelle>, et que nous construisons deux sections opposées, <telles que> ce conjugué soit leur <diamètre> transverse et cette troisième leur <côté> droit, il résultera pour nous les quatre sections opposées appelées "conjuguées", <issues> des deux opposées.

Construction d'une hyperbole passant par un point et d'asymptotes données

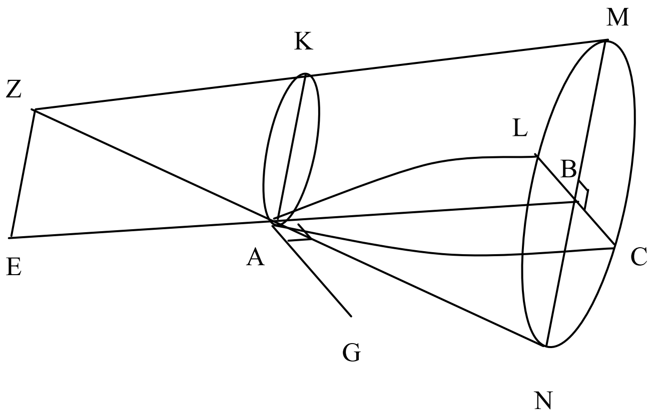
Puis, soit AB, AG entourant un angle quelconque, et soit le point D entre eux deux dans la surface de l'angle. Nous voulons tracer une hyperbole qui passe par D et <telle que> AB, AG soient ses asymptotes. Nous joignons AD et nous le prolongeons du côté de A, et nous séparons AE comme DA et nous menons DZ parallèle à AB, l'un des deux côtés, et coupant l'autre en Z, et nous séparons ZG comme ZA, et nous joignons GD et nous le prolongeons jusqu'à ce qu'il rencontre AB en B, et nous déterminons une troisième proportionnelle aux deux lignes ED, BG, et c'est *h*; et nous construisons sur le transverse ED et le droit *h* une hyperbole dont les angles ordonnés sont comme l'angle BDA, et c'est la section (D).

Puisque le rapport de GD à DB est comme le rapport de GZ à ZA, BG est divisée en deux moitiés entre les deux lignes AB, AG par la section au point D. C'est pourquoi elle est tangente à la section en D. Et puisque BG est, par construction, moyenne <proportionnelle> entre le transverse et le droit, il est le second diamètre. Et, pour cela, AB, AG seront les deux lignes asymptotes à la section. On a donc trouvé ce qui était cherché. Et <ainsi> s'achève la première section. Et voici les figures.

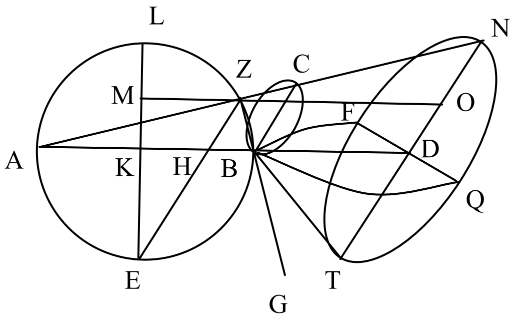
La réussite vient de Dieu.



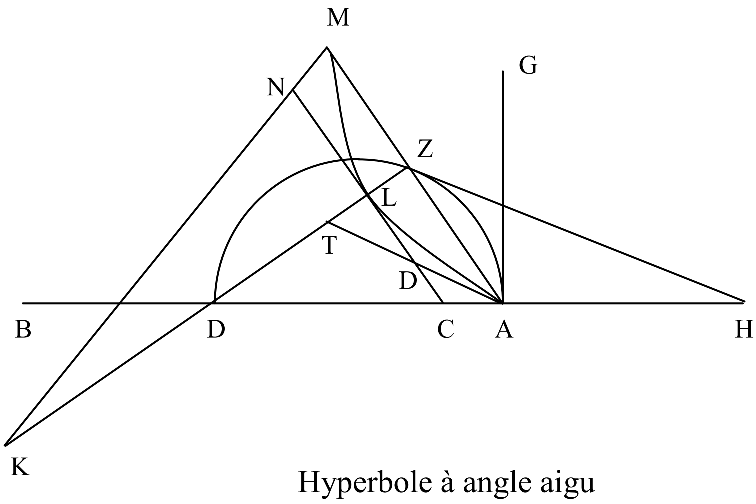
Parabole à angle droit



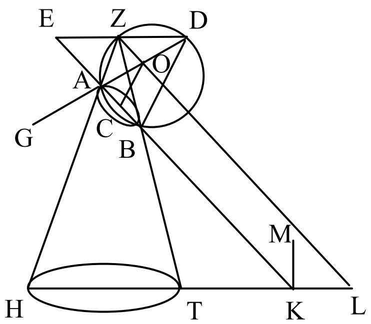
Parabole à angle aigu



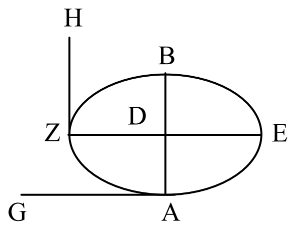
Hyperbole à angle droit



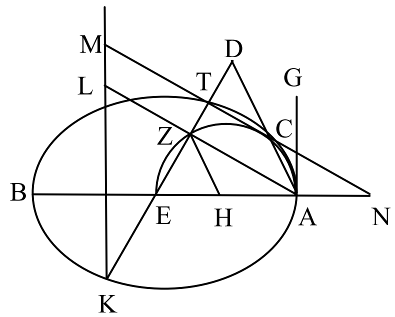
Hyperbole à angle aigu



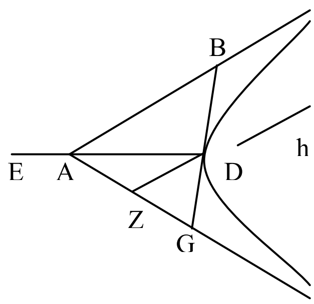
Ellipse à angle droit et grand transverse



Ellipse à angle droit et petit transverse



Ellipse à angle aigu



Hyperbole

G- EDITION

المؤتمن بن هود

كتاب الاستكمال

الفصل الأول من
النوع الثالث من النوع الرابع من الجنس الأول
في

وجود القطوع وخواصها الأُول
من غير إضافة بعضها إلى بعض

(تحقيق)

//90 ظ//

بسم الله الرحمن الرحيم صلى الله على محمد

النوع الثالث من النوع الرابع في قطوع الأساطين والمخروطات المستديرة

وهو ينقسم إلى فصلين:

الفصل الأول: في وجود القطوع وخواصها الأول من غير إضافة بعضها إلى بعض.
الفصل الثاني: في خواص خطوط وزوايا وسطوح القطوع بإضافة بعضها إلى بعض.

< **تعاريف**>

[1] إذا كان في سطحين متوازيين دائرتان متساويتان ثابتتان[1] وأخرج فيهما قطران متوازيان ووُصل بين طرفي القطرين في جهة واحدة بخط مستقيم ودار القطران على مركزيهما في سطحيهما على توازيهما مع الخط المستقيم الواصل بين طرفيهما على محيطهما إلى أن يرجعا[2] إلى النقطة التي[3] //91و// أبتدءا[4] منها بالحركة ، فإني أسمي[5] المجسم الذي تحيط به الدائرتان والبسيط[6] الذي رسمه الخط المُدار على محيطهما **أسطوانة**.

[2] وأسمي الدائرتين اللتين دار عليهما **قاعدتي الأسطوانة**.

[3] وأسمي الخط المدار **ضلع** الأسطوانة.

[4] وأسمي الخط الواصل بين مركزي الدائرتين **سهم** الأسطوانة.

[5] وأسمي الأسطوانة **قائمة**، إذا كان سهمها قائمًا على قاعدتها على زوايا قائمة. وأسميها **مائلة**، إذا لم يكن السهم قائما عليها على زوايا قائمة.

[6] وإذا كانت دائرة ونقطة ثابتة في غير سطحها ووُصل بينها وبين محيط الدائرة بخط مستقيم خارج على النقطة الثابتة وأُدير الخط المستقيم على الخط المحيط بالدائرة حتى يعود إلى الموضع الذي بدأ منه بالحركة، فإني أسمي كل واحد من السطحين اللذين رسمهما الخط المدار[7] بممره[8] وكل واحد منهما[9] مقابل لصاحبه وقابل[10] للزيادة بلانهاية ، إذا[11] كان خروج الخط المستقيم بلا نهاية : **سطحا مخروطا.**

[7] وأسمي النقطة الثابتة **رأسًا** لكل واحد من السطحين المخروطين.

[8] وأسمي الخط المستقيم الذي يمر[12] بهذه[13] النقطة و بمركز الدائرة **سهم** السطح المخروط.

---

[1]- متساويتان ثابتتان : متساويان ثابتان.
[2]- يرجعا : ترجع.
[3]- التي : الكلمة مطموسة.
[4]- ابتدءا : ابتدا.
[5]- اسمي : اسم.
[6]- الدئرتان والبسيط : الكلمتان مطموستان جزئيا.
[7]- المدار : كتب الناسخ "المحيط" ثم شطب عليها المصحح و كتب في الهامش "المدار".
[88]- بممره : بمرة.
[9] - منهما : منها.
[10]- وقابل : مقابل .
[11]- إذ : إذا.
[12]- يمر : الكلمة في الهامش.
[13]- بهذه : بنفاذة . ثم شطب على الكلمة.

[9] وأسمي الشكل الذي تحيط[14] به الدائرة وما بين نقطة الرأس وبين الدائرة من السطح المخروط **مخروطا**.

[10] وأسمي النقطة[15] التي هي رأس السطح المخروط[16] **رأسًا** للمخروط.

[11] وأسمي الخط المستقيم الذي يخرج من رأس المخروط إلى مركز الدائرة **سهم** المخروط.

[12] وأسمي الدائرة **قاعدة** المخروط.

[13] وأسمي المخروط **قائم الزاوية** إذا كان سهمه قائما على قاعدته على زوايا قائمة. وأسميه **مائلا** إذا لم يكن سهمه قائما على قاعدته على زوايا قائمة.

[14] وكل خط منحن[17] يكون في سطح[18] واحد مستو ويخرج من نقطة منه في سطحه خط ما مستقيم يقطع كل الخطوط -التي تخرج في الخط المنحنى وتنتهي أطرافها إليه وتكون موازية لخط ما موضوع- بنصفين نصفين، فإني أسمي ذلك الخط المستقيم **قطرًا** لذلك الخط المنحنى.

[15] وأسمي طرف ذلك الخط المستقيم، الذي عند الخط المنحني، **رأسًا** للخط المنحني.

[16] وأسمي الخطوط المتوازية التي وصَفْنَا **خطوط الترتيب** لذلك القطر.

[17] وكذلك أيضا إذا كان[19] خطان منحنيان[20] في سطح واحد ، فإني أسمي ما كان واقعًا فيما[21] بين الخطين المنحنيين من الخط المستقيم الذي يقطع جميع الخطوط المستقيمة -الخارجة في كل واحد من الخطين المنحنيين الموازية لخط ما- بنصفين نصفين ، **قطرًا مجانبًا**.

[18] وأسمي طرفي القطر المجانب[22] اللذين على الخطين المنحنيين **رأسين** للخطين المنحنيين.

[19] وأسمي الخط المستقيم الذي يقع بين الخطين المنحنيين ويقوم على القطر المجانب ويقطع جميع الخطوط المستقيمة الموازية للقطر المجانب -إذا أخرجت فيما بين الخطين المنحنيين حتى تنتهي أطرافها إلى الخطين المنحنيين- بنصفين نصفين، **قطرا قائما**[23].

[20] و أسمي هذه الخطوط المتوازية **خطوط الترتيب** لذلك القطر القائم[24].

[21] وإذا كان خطان مستقيمان وكانا قطرين لخط منحن أو لخطين منحنيين وكان كل واحد منهما قاطعًا للخطوط الموازية للآخر[25] بنصفين نصفين، فإني أسميهما **قطرين مزدوجين**.

[22] وأسمي الخط المستقيم إذا كان قطرا للخط المنحني أو للخطين[26] المنحنيين وكان قاطعًا للخطوط المتوازية[27] -التي هي خطوط الترتيب له- على زوايا قائمة ، **سهمًا** للخط المنحني أو للخطين[28] المنحنيين.

---

[14]- يحيط : بحيط .
[15]- النقطة : القطعة.
[16]- المخروط : المفروض.
[17]- منحن : الكلمة ساقطة.
[18]- سطح : خط.
[19]- كان : كانت .
[20]- منحنيان : منحنيتان.
[21]- فيما : في ما . وهكذا فيما بعد.
[22]- المجانب : المجنب .
[23]- قطرا قائما : قطرا قطرا.
[24]- القائم : الكلمة في الهامش .
[25]- للآخر : الكلمة مطموسة.

[23] وأسمي القطرين إذا كانا مزدوجين وكان[29] يقطع كل واحد منهما الخطوط الموازية للآخر على زوايا قائمة **سهمين مزدوجين** للخط المنحني أو للخطين[30] المنحنيين //91ظ//.

[26]- للخطين : الخطين.
[27]- المتوازية : الموازية.
[28]- للخطين : الخطين.
[29]- وكان : في الهامش. كتب الناسخ ، في النص، "وكل" ثم شطب عليها.
[30]- للخطين : الخطين.

< قضية 1:>

كل مجسم أسطوانة أو مخروط يقطع بسطح[31] مستو يجوز على سهمه أو على ضلع من أضلاعه، فإن القطع الحادث سطح تحيط به خطوط مستقيمة.

ولا يمكن أن يقطع السطح المستدير بسطح مستو لا يجوز على ضلع من أضلاعه، فيكون الفصل المشترك له وللسطح المستدير تحيط به خطوط مستقيمة.

<مثال ذلك:>

فليكن سطح أسطوانة أو مخروط قاعدته دائرة ألف با ورأسه نقطة جيم.

وليقطع بسطح مستو يمر بضلع من أضلاعه وهو الف جيم، والسطح ينقطع بجيم ألف با.

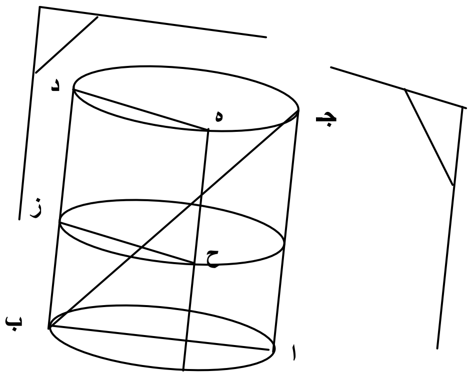
فأقول: إن القطع الحادث في البسيط المستدير تحيط به خطوط مستقيمة.

ولا يقطع السطح المستدير بسطح مستو لا يمر بضلع من أضلاعه، فتحيط به خطوط مستقيمة.

برهان ذلك:

لأن دائرة ألف با سطح مستو، والسطح القاطع أيضا مستو. فخط الف با، الذي هو الفصل المشترك لهما، مستقيم.

فإن كان السطح المستدير أسطوانة وأخرجنا على نقطة با ضلعا، كان موازيا لخط ألف جيم، إذ جميع أضلاعها متوازية لأنها موازية للسهم. فضلعها الخارج من نقطة با في سطح جيم ألف با إذ كل خطين متوازيين فهما في سطح واحد[32]. فالضلع الخارج من نقطة با[33] هو الفصل المشترك لسطح جيم ألف با وللسطح المستدير.



وأقول: إنه لا يمكن أن يقطع السطح المستدير سطح مستو لا يمر بضلع من أضلاعه، فتحيط به خطوط مستقيمة.

برهان ذلك :

أنا نعلّم على الفصل المشترك للسطح المستوي والسطح المستدير نقطتي دال ها، ونخرج منهما[34] ضلعين من أضلاع السطح المستدير، وهما ضلعا دال زاي، ها حا. ونصل زاي حا. فخطوط دال زاي، ها حا، زاي حا في سطح واحد. ولأن خط زاي حا داخل السطح المستدير، يكون الخط الواصل[35] بين نقطتي ها دال داخل[36] السطح المستدير. فالفصل المشترك للسطح المستدير وللسطح[37] المستوي لا يكون[38] مستقيما لأن خط دال ها مستقيم، وهو في سطح ها زاي الذي هو داخل السطح المستدير.

---

[31]- يقطع بسطح : الكلمتان مطموستان .

[32]- ورد في الهامش التعليق التالي : " تبين هذا من الشكل السادس من النوع الأول من النوع الرابع".

[33]- با :ألف.

[34]- منهما : منها.

[35]- الواصل : المواصل.

[36]- بين نقطتي ها دال داخل : الكلمات في الهامش.

[37]- وللسطح : والسطح.

[38]- يكون : يكونان.

39

<**نتيجة :**>

وهنالك استبان أن كل نقطتين تعلّمان[40] على سطح مستدير على غير استقبال رأس السطح المستدير، فإن الخط الواصل بينهما يقع داخل السطح المستدير. وإذا أخرج على استقامته، وقع خارج السطح. وذلك ما أردنا أن نبين[41].

39

[40]- تعلمان : تعلم.

[41]- نجد التعليق التالي في الهامش : "تبين من هذا الشكل أن الخطوط المستقيمة التي تخرج من رأس المخروط إلى نقطة في سطحه حيث كانت فهي أيضا في سطحه ، وأن كل مخروط يقطع بسطح يجوز على رأسه فإن ذلك القطع مثلث، وإنه إذا تعلمت نقطتان على محيط السطح المستدير فإن الخط الواصل بينهما يقع داخل المحيط. وإن أخرج على استقامة، رجع خارجا".

< قضية 2:>

كل مجسم أسطوانة أو مخروط يقطع بسطح يجوز على السهم ونتعلّم نقطة على الفصل المشترك لذلك السطح ولسطح قاعدته أو الخط المتصل به على استقامة ويخرج منها عمود في سطح[42] القاعدة، ثم نتعلّم نقطة على بسيط السطح المستدير على غير ضلع السطح المار بالسهم ويخرج من تلك النقطة خط مواز للخط القائم على القاعدة أو المتصل به، فإن الخط المخرج من تلك النقطة يقع على السطح المخرج على السهم. وإذا أخرج إلى الناحية الأخرى حتى يقع على السطح المستدير، فإنه ينقسم على السطح بنصفين.

مثال ذلك :

سطح أسطوانة أو مخروط على رأسه نقطة ألف وقاعدته دائرة با جيم، قد قُطع بسطح يمر بسهمه وهو ألف با جيم، فكان خط با جيم قطرا لها. وتعلّمت نقطة نون على خط با جيم، وهو الفصل المشترك له ولسطح دائرة با جيم أو على الخط المتصل مع خط با جيم على استقامة. وأخرج منها عمود عليه في سطح الدائرة، وهو نون ميم، وتعلّمت نقطة دال على سطح مجسم ألف با جيم //92و// على غير الضلعين الخارجين من نقطتي[43] با، جيم. وأخرج منها خط مواز لخط نون ميم، وهو خط دال ها، فإن[44] دال ها، إذا أخرج على استقامة، وقع على سطح ألف با جيم. وإذا أنفذ حتى يقع على السطح المستدير من الناحية الأخرى، انقسم بسطح با ألف جيم بنصفين.

برهان ذلك :

أنا نخرج من نقطة دال ضلع السطح المستدير. وليكن دال كاف يلقى[45] دائرة با جيم على نقطة كاف. ونخرج من نقطة كاف عمودا على خط با جيم عليه كاف طا لام يلقى خط با جيم على نقطة طا.

فخط كاف طا لام مواز لخط نون ميم الموازي لـ دال ها. فـ دال ها[46] مواز لـ كاف طا لام.

ونخرج من نقطة طا خط طا زاي.

أما في الأسطوانة : فمواز لخط دال كاف.

وأما في المخروط : فنصل نقطة ط بنقطة ألف التي هي رأسه.

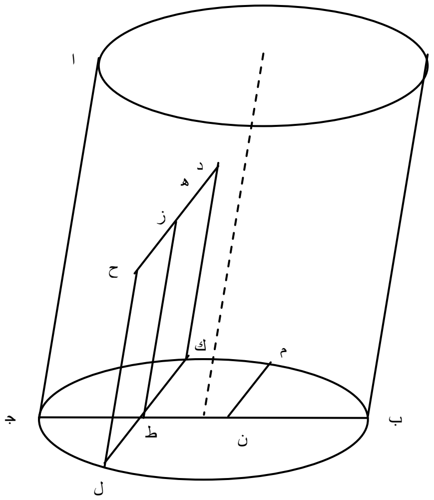
فبين أن خط دال ها، إذا أخرج، وقع على خط طا زاي. فليقع على نقطة زاي لأنهما في سطح واحد.

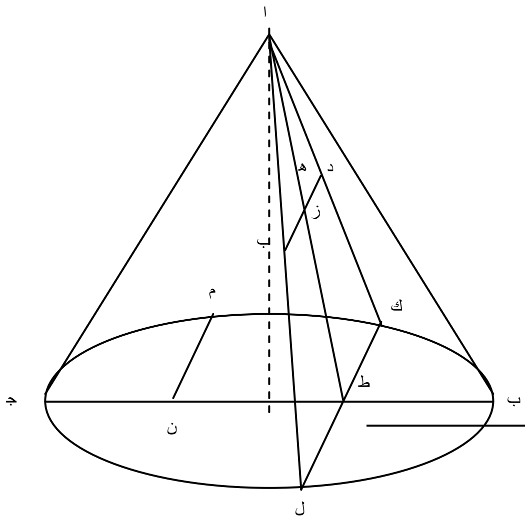
ونخرج من نقطة لام أيضا ضلع لام حا. فيكون في سطح دال كاف طا[47]. فإذا أخرج خط دال زاي، وقع عليه. فليقع على نقطة حا.

فيكون، أما في الأسطوانة : سطح دال كاف لام حا متوازي[48] الأضلاع. فيكون طا لام مساويا لِـ زاي حا، وخط طا كاف لخط زاي دال، وخط كاف طا لخط طا لام.

فخط زاي حا مساو لخط زاي دال.

وأما في المخروط : فتكون نسبة طا كاف إلى زاي دال كنسبة طا لام إلى زاي حا. وإذا بدلنا، كانت نسبة كاف طا إلى طا لام كنسبة دال زاي إلى زاي حا. وكاف طا مساو لِـ طا لام. فـ دال زاي مساو لـ زاي حا.





[42]- سطح : السطح.
[43]- نقطتي : نقطة.
[44]- فإن :فا أن.
[45]- يلقى : يلقا. وهكذا فيما بعد.
[46]- فـ دال ها : في الهامش.
[47] - دال كاف طا : ألف دال كاف طا.
[48]- متوازي : فمتوازي.

< **خاصية :**>

ومن هنالك يستبين:

- أن كل مجسم أسطوانة أو مخروط يُقطع بسطح يجوز على سهمه ويُقطع بسطح آخر يكون الفصل المشترك له ولسطح قاعدة المجسم قائما على الفصل المشترك للسطح المخرج على السهم ولسطح القاعدة على زوايا قائمة، فإن الخطوط التي تخرج من أي موضع كان من الخط المحيط بالقطع الحادث في السطح المستدير موازية لذلك الخط القائم على الفصل المشترك للسطح المخرج على السهم. وقاعدة المجسم إذا أخرجت على استقامة حتى تقع على الخط المحيط بالقطع من الناحية الأخرى ينفصل بنصفين نصفين على الفصل المشترك لسطح القطع وللسطح المخرج على السهم.

- فإن كان السطح المستدير قائما، كانت الخطوط التي تخرج على الفصل المشترك لسطح القاعدة وللسطح المخرج على السهم قائمة عليه على زوايا قائمة.

وإن لم يكن السطح المستدير قائما وكان مائلا، فليس يكون ذلك الخط على زوايا قائمة على الخط المشترك إلا إذا كان السطح المخرج على السهم قائما على قاعدة السطح المستدير.

وذلك ما أردنا أن نبين.

<قضية 3>

كل سطح أسطوانة أو مخروط يقطع بسطح يجوز على سهمه فيكون قائما على قاعدته على زوايا قائمة ويقطع[49] أيضا بسطح قائم على السطح الذي خرج على السهم فيفصل فصله المشترك مع السطح الخارج على السهم من السطح الخارج على السهم //92 ظ// سطحا[50] من جهة رأسه زواياه[51] متساوية لزوايا السطح الخارج على السهم على التوازي أو الخلاف.

1- فإن القطع الحادث في السطح المستدير يكون دائرة[52].

2- ولا يمكن أن يقطع السطح المستدير بسطح على غير هذا الوضع ، فتكون دائرة.

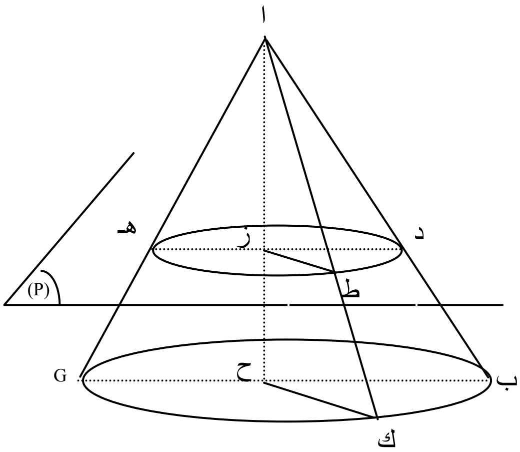
مثال ذلك :

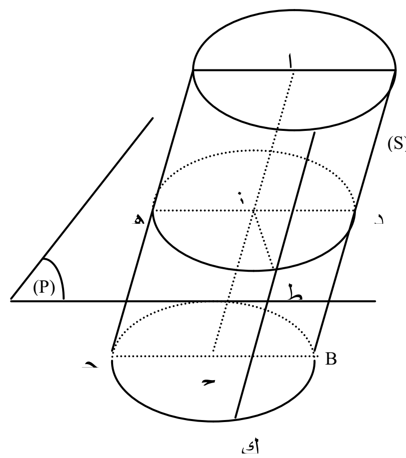
سطح أسطوانة أو مخروط عليه الف با جيم، رأسه نقطة الف وقاعدته دائرة با جيم، قُطع بسطح الف با جيم مار بسهمه، قائم على دائرة با جيم على زوايا قائمة، فكان الفصل المشترك له ولقاعدة المجسم خط با جيم. وقطع بسطح آخر قائم على السطح الذي مر بالسهم. فكان الفصل المشترك له ولسطح الف با جيم خط دال ها يفصل من سطح الف با جيم سطح الف دال ها . فكانت الزاويتان اللتان عند نقطتي دال ها ، من سطح الف دال ها ، مساويتين لزاويتي با جيم على التوازي أو الخلاف.

فأقول:

1- إن القطع دال طا ها دائرة.

2- وإنه لا يمكن أن يقطع مجسم الف با جيم سطح على غير هذا الوضع ، فتكون دائرة.





برهان ذلك :

1a- أن زاويتي[53] دال ها من سطح دال الف ها إن كانتا مساويتين لزاويتي با جيم على الموازاة. وكل واحد من سطحي دال طا ها، با جيم كاف قائم على سطح الف با جيم على زوايا قائمة ويقطعان السهم على نقطتي زاي حا. ولنتعلم على قطع دال طا ها نقطة طا كيف ما وقعت ونخرج عليها ضلع[54] السطح المستدير وليلق دائرة با جيم على نقطة كاف. ولنصل نُقط طا ، زاي ، حا ، كاف.

فيكون خط طا كاف موازيا لخط زاي حا ومساويا له في الأسطوانة. فخط زاي طا مواز لخط حا كاف ومساو له . وخط حا كاف مساو لخط حا با، وحا با مساو لخط زاي دال. فخط زاي دال مساو لخط زاي طا.

---

[49] - ويقطع : ويفصل .
[50] - سطحا : سطحان .
[51] - زواياه : وزوايا .
[52] - دائرة : مديرو .
[53] - زاويتي : دائرتي .
[54] - ضلع : الضلع .

وأما في المخروط، فإذا أخرج ضلع كاف طا مرّ بنقطة الف، فتكون نسبة حا الف إلى الف زاي كنسبة حا كاف إلى زاي طا ونسبة حا الف إلى الف زاي كنسبة با حا إلى زاي دال ، وكاف حا مساو لـ با حا . فزاي طا مساو لزاي دال. فقطع زاي دال دائرة.

1b- وإن كانت زاوية دال من سطح دال الف ها مساوية لزاوية جيم ، وزاوية ها منه مساوية لزاوية با على الخلاف، فأقول إن القطع الحادث أيضا دائرة.

برهان ذلك :

أنا نتعلم عليه نقطة طا، كيف ما وقعت، ونخرج منها عمودا على سطح با الف جيم. فهو يقع على خط دال ها . وليكن طا زاي. ولنخرج على عمود طا زاي سطحا موازيا لدائرة با جيم . فيحدث في السطح المستدير دائرة، وهي دائرة حا طا كاف . ويكون قطرها حا كاف. فلأن زاوية دال مساوية لزاوية جيم وزاوية با مساوية لزاوية جيم أيضا والزاويتان اللتان عند نقطة زاي متساويتان، تكون نسبة دال زاي إلى زاي كاف كنسبة حا زاي إلى زاي ها[55]. فسطح[56] دال زاي في[57] زاي ها مساو لسطح حا زاي في زاي كاف. وسطح حا زاي في زاي كاف مساو لمربع زاي طا. فسطح دال زاي في زاي ها مساو لمربع زاي طا.

وكذلك يتبين أن كل نقطة تتعلم على قطع دال طا ها ويخرج منها عمود على خط دال ها[58]، فإن مسطح أحد قسمي قطر دال ها في الآخر مساو لمربع الخط الخارج من تلك النقطة. فقطع دال طا ها[59] دائرة.

2- وأقول إنه لا يمكن أن يقطع مجسم با الف جيم بسطح على غير هذا الوضع فيكون القطع الحادث دائرة.

<برهان ذلك :>

فإن أمكن، فلتكن دائرة دال طا ها، وليكن الفصل المشترك له ولدائرة با جيم خط زاي حا. ومركز دائرة با جيم نقطة كاف. فنخرج منها عمودا إلى خط زاي حا عليه حا كاف. ولنخرج من نقطتي حا كاف على السهم سطحا يحدث في السطح المستدير سطح الف با جيم.

فلأن نقطة دال ها حا في سطح دال (...) // نهاية نص الاستكمال: 92 و، سطر 31//.

// بداية نص الإكمال: 118و، سطر 17 // فإن لم تكن زاوية ا كزاوية هـ وزاوية ب كزاوية د على الخلاف، لا يمكن أن يكون قطع اب دائرة. لأنه إن كان دائرة كان ضرب[60] ا ك في ك ب كضرب ي ك في ك ل أي كضرب م ك في ك ن. فتكون نسبة ا ك إلى ك ن كنسبة م ك إلى ك ب، وزاويتا ك المتقابلتان متساويتان. فمثلث ا ك م شبيه بمثلث ن ك ب وزاوية ا كزاوية ن بل كزاوية ه وزاوية ب كزاوية م بل كزاوية د. فالقطع على الخلاف وقد فرض خلافه. هذا خُلف.

ثم ليكن، مع أن زاوية ا كزاوية هـ وزاوية ب كزاوية ك، على الخلاف، سطح جـ د هـ عمودًا على سطح القاعدة. فلأن جـ د هـ عمود على سطح القاعدة وخط ز ح قد خرج من نقطة ز من الفصل المشترك بين القاعدة وبين جـ د هـ، عمودًا على فصل د ط ز في سطح القاعدة، فلذلك يكون خط ز ح عمودًا على سطح جـ د هـ. فتكون زاوية ا ز ح أيضا قائمة كزاوية د ز ح. ولذلك زاوية ا ك ي تكون قائمة، وي ك عمودًا على ا ب أيضا، كما هو عمود على م ن.

ويلزم أيضا، كما أشير إليه في الدعوى، أن يكون سطح ا ي ب عمودًا على سطح جـ د هـ لمروره بعمود ز ح. ولأن ضرب ا ك في ك ب كمربع ي ك وأيضا كمربع ك ل، وزاويتا ك قائمتان، فكل من ي ك، ك ل وسط في النسبة بين ا ك، ك ب.

وإذا توهمنا وصل خطوط ا ي، ي ب، ا ل، ل ب، كان كل من مثلثي // 118ظ// ا ي ب، ا ل ب قائم زاوية ي أو ل. ولذلك، تمرّ الدائرة المحيطة بمثلث ا ي ب بنقطة ل أيضا وتحيط بالمثلثين جميعًا.

---

[55] - زاي ها : زاي كاف .
[56]- فسطح : بسطح.
[57] - في : فا .
[58] - دال ها : طا ها .
[59] - دال طا ها : زيدت "طا" في الهامش .
[60]- ضرب : كضرب.

وكذلك نُبيّن، في كل خط يخرج من أي نقطة كانت على محيط قطع ا ي ب، أنه يقع على خط ا ب. وإن كان القطع مخالف الوضع وسطح جـ د هـ قائمًا على سطح القاعدة، فإنه يكون ضرب ما يقع بين ا وموقع ذلك الخط من ا ب فيما يقع بينه وبين ب، كمربع ذلك الخط عمودًا على ا ب. والمثلثان المتوهمان منه قائمي الزاوية. ولذلك تحيط الدائرة المحيطة بمثلث ا ي ب بعينها بجميع تلك المثلثات المتوهمة، وإن كانت غير مثناة.

وإذ لا يمكن أن يفرض خط من محيط قطع ا ي ب إلى خط ا ب، من خطوط الترتيب، بحيث يخرج طرفه عن محيط الدائرة، أعني المحيطة بمثلث ا ي ب أو يقصر عن الوصول إلى محيطها، فالدائرة المحيطة بمثلث ا ي ب منطبقة على القطع ومحيطها على محيطه. فالقطع دائرة. وظاهر أن قطرها هوخط ا ب إذ هو مارّ بمنتصف جميع الأعمدة التي هي أوتارها.

ولنخرج من ب خط ب س ع موازيا لقطر د ط هـ ملاقيًا للسهم على س. وليكن ملتقى السهم وخط ا ب ق. ففي الأسطوانة، لتوازي السهم والأضلاع، يكون ب س كَـس ع، ونسبة ب س إلى س ع كنسبة ب ق إلى ق ا. فَـب ق مثل ق ا. فَـ ق مركز وهو على السهم.

وفي المخروط، نسبة د ط إلى ع س كنسبة ط هـ إلى س ب. فَـب س كَـس ع. ولو كان ب ق كَـق ا، كانت نسبة ب ق إلى ق ا كنسبة ب س إلى س ع. فيكون س ق موازيًا لِـ ع ا، وهو ملاق له على جـ. هذا خلف.

فليس في المخروط مركز دائرة القطع على السهم إذ هو على ا ب وليس بِـق.

وأيضا، فإن لم يكن سطح جـ د هـ قائما على سطح القاعدة وكانت[61] زاوية ا مثل زاوية هـ وزاية ب مثل زاوية د، لا يمكن أن يكون قطع ا ي ب دائرة لأنه لما كان سطح جـ د هـ مائلا على سطح القاعدة، كان خط ز ح مائلا على سطح جـ د هـ إذ لو كان ز ح عمودًا على سطح جـ د هـ، تكون القاعدة قائمة عليه. هذا خلف.

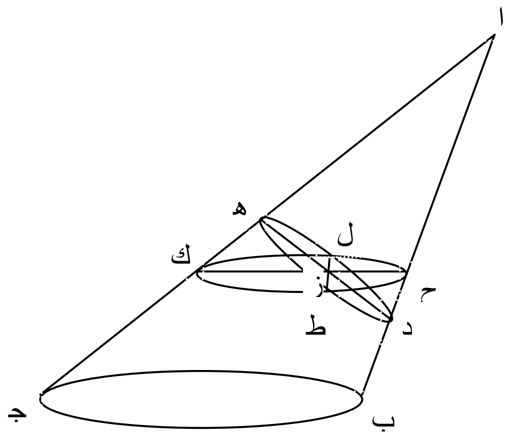
فيكون خط ز ح مائلا على خط ا ب ز لأنه لو قام عليه عمودًا وهو عمود على خط د هـ ز، فيكون عمودًا على سطح جـ د هـ. هذا خلف.

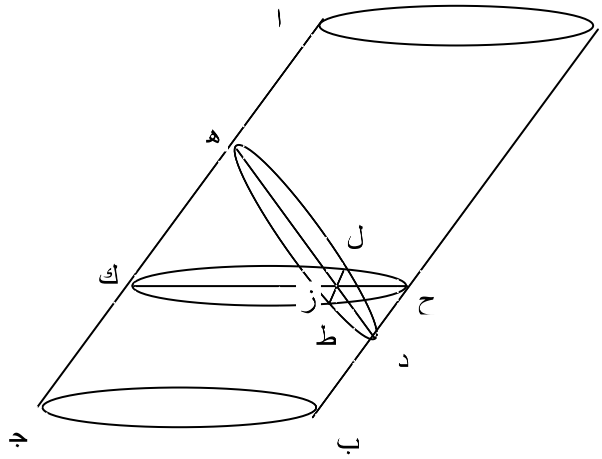
وإذا مال ز ح على ا ب ز، مالت[62] كل الخطوط الخارجة من محيط قطع ا ي ب موازية لِـز ح على خط ا ب. فكان من قبل تساوي الزوايا على الخلاف سطح ا ك مثلا في ك ب كمربع ي ك. ولكن لعدم تساوي زاويتي ك إذا وصل بين ا ي، ب ي، لم يكن مثلثا ا ك ي، ب ك ي متشابهين. فلا تكون زاوية ي قائمة، بل تكون زاوية ي مخالفة لزاوية أخرى هي على قوس ا ي ب حادثة من خط آخر من خطوط الترتيب. بل تكون هذه الزوايا التي في جهة واحدة عن قطر القطع كلها متخالفة. ويوجد لكل واحدة منها زاوية مساوية في الناحية الأخرى حادثة عن خط غير الذي أحدثها وهو الذي بُعد موقعه عن ذلك الطرف للقطر مثلا كبُعد هذا الخط عن هذا الطرف. فيحيط بكل ذي أربعة أضلاع متساوي المتقابلتين منها دائرة بعينها هي لا تمرّ بنقطتي زاويتي ذي أربعة أضلاع آخر. فلذلك، لا تحيط بجميع خطوط الترتيب دائرة واحدة. فلا يكون المنحني المارّ بأطرافها محيط الدائرة. ولا القطع دائرة.

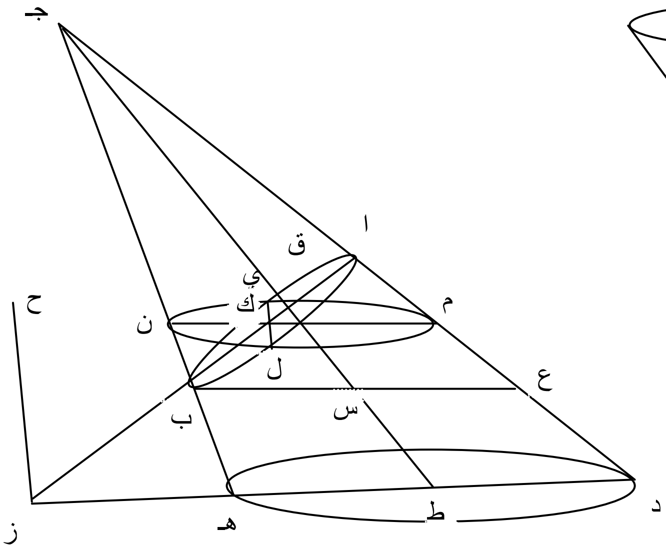
فإذن انتفاء قيام سطح جـ د هـ على القاعدة مستلزم لانتفاء كون القطع دائرة. وقد تبين أن انتفاء كون القطع على خلاف الوضع أيضا يستلزم انتفاء كونه دائرة. فانتفاء كلا الأمرين يستلزم انتفاءه على الطريق الأولى. على أنا في بيان أن انتفاء الخلاف يستلزم انتفاء الدائرة، لم نتعرّض لكون جـ د هـ قائمًا على القاعدة أو لا. فهو عامّ.

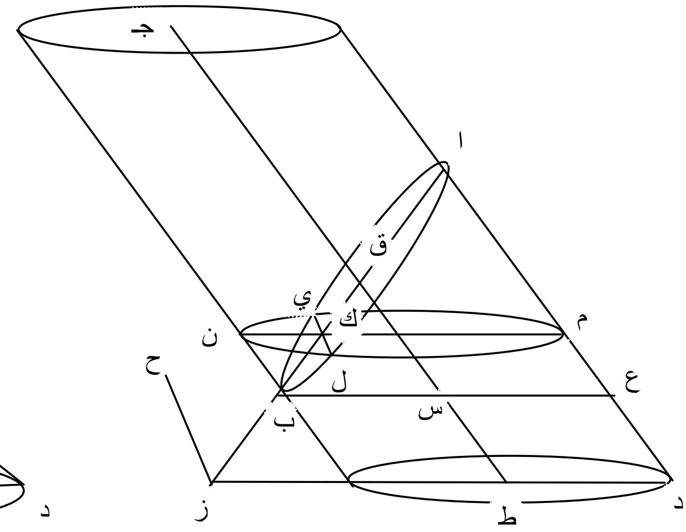
وأنت تعلم أن قطر القطع، وهو خط ا ب، يمكن أن يقع بين قطر القاعدة، وهو د هـ، وبين الرأس. ويمكن أن يقع تحته ويمكن أن يقاطعه كما قاطع قطر دائرة م ي ن. وأن الوضع المخالف إنما يمكن وقوعه في المخروطات والأساطين المائلة. وذلك أنه، لما كانت[63] زاوية ا كزاوية هـ وزاوية ب كزاوية د، فلو كان المجسم قائمًا، كانت[64] زاويتا ط قائمتين //119و// وخط جـ ط مشترك ود ط كَـط هـ. فتكون زاوية د كزاوية هـ. فتكون زاوية ا، كما هي مساوية لزاوية هـ، فمساوية لزاوية د. وكذلك زاوية ق تكون مساوية لزاوية هـ. فيلزم بحسب كل منهما أن يكون ا ب موازيًا لِـد هـ. وهو ملاق له على ز فرضًا. هذا خلف. فليس مجسم جـ د هـ قائمًا. وهو المطلوب. وهذا مُحرّر. وذلك ما أردناه.

[61]- كانت : كان.
[62]- مالت : مال.
[63]- كانت : كان.
[64]- كانت : كان.


ا
هـ
ك
ل
ز
ح
ط
د
جـ
ب


ا
هـ
ل
ك
ز
ح
ط
د
جـ
ب


جـ
ا
ق
ي
ح
ن
ك
م
ل
ع
ب
س
ز
هـ
ط
د

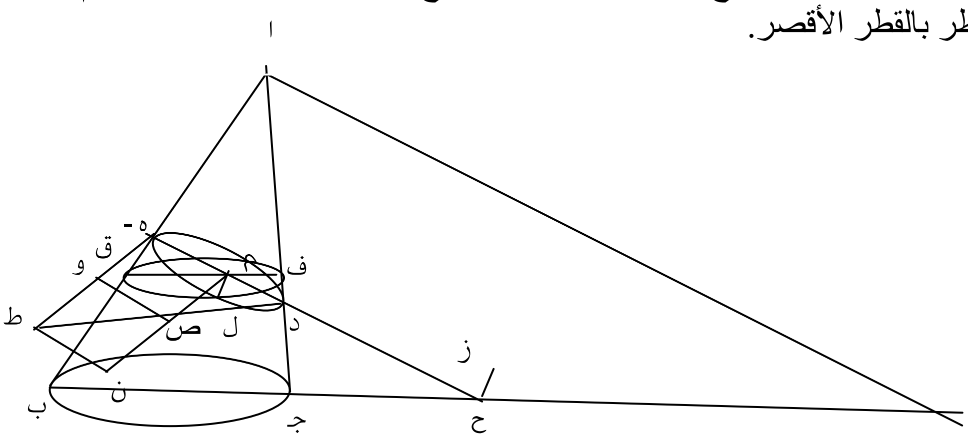

جـ
ا
ق
ي
ك
ن
م
ح
ل
ع
ب
س
ز
ط
د

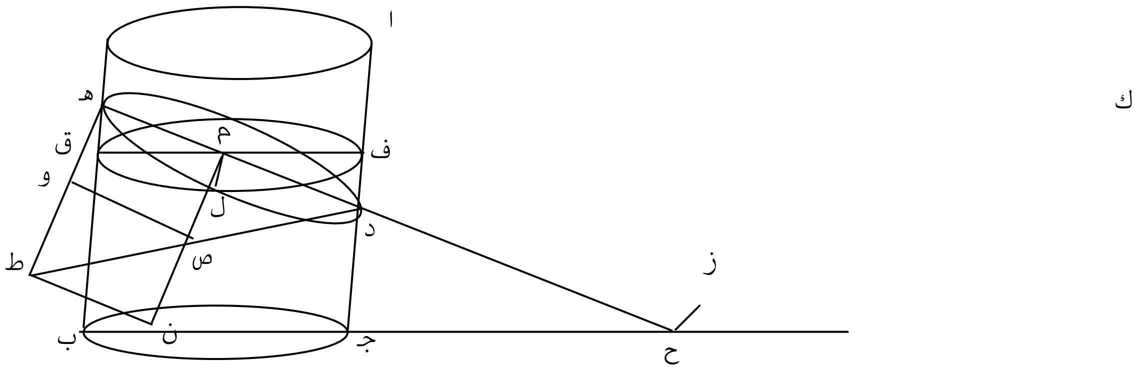
< قضية 4: >

إذا قطع سطح مخروطًا أو أسطوانة، غير مار بشيء من الأضلاع ولا مواز للقاعدة ولا مخالف الوضع[65]، قاطعا في جهة واحدة عن الرأس ضلعي المثلث أو المربع والعمود على فصله مع القاعدة فصلها مع القاطع على القطر منها أو على المتصل به من أحد طرفيه، فكل خط يخرج من محيط القطع إلى قطره موازيًا للعمود المذكور يقوى على سطح مضاف إلى خط نسبة قطر القطع إليه، أما في الأسطوانة، فكنسبة مربع قطر القطع إلى مربع قطر القاعدة، وأما في المخروط، فكنسبة مربع خط يخرج من رأس المخروط موازيًا لقطر القطع واقعًا على الخط المتصل بقطر القاعدة في أحد طرفيه إلى مسطح ما يقع منه بين موقعه وأحد الضلعين فيما يقع بينه وبين[66] الضلع الآخر. وعرض السطح المضاف فيهما ما يقع من قطر القطع بين مسقط الخط الموازي ورأس القطع ناقصًا عن تمام الخط المنسوب إليه قطر القطع سطحًا شبيهًا بسطح قطر القطع في الخط المنسوب إليه.

فلعلك تحدس أن هذا القطع هو القطع الناقص والمشترك بينه وبين[67] المار بالسهم هو قطره المجانب والخطوط الموازية خطوط ترتيبه. والخط المنسوب إليه إذا قام على طرف القطر المجانب، الذي هو رأس القطع، عمودًا عليه، هو القطر القائم. ويسمى أيضًا بالخط القوي عليه خطوط الترتيب. ومنتصف القطر المجانب هو مركز القطع. وخط الترتيب الخارج منه هو القطر المزدوج. وإن كان عمودًا فهو السهم المزدوج. وقد يسمى هذا القطر بالقطر الأقصر.

< مثال ذلك :>





فليقطع سطح هـ ل د مخروط أو أسطوانة ا ب جـ غير مار بشيء من الأضلاع مقاطعًا للقاعدة على خط ز ح. ونخرج المثلث أو المربع الذي يمر بالسهم ونقوم ز ح عمودًا على فصله مع القاعدة. وليكن هو مثلث أو مربع ا ب جـ. وليقم ز ح على نقطة ح من خط ب جـ عمودًا عليه. ونصل هـ، د، ح. فيكون مستقيمًا كما تبين من قبل. ونفرض نقطة ل على محيط القطع بين هـ د، أين كانت. ونخرج ل م موازيًا لـ ح ز ونخرج من هـ عمود هـ ط على هـ د ونخرج في المخروط ا ك موازيًا لـ هـ ح. ونجعل نسبة هـ د إلى هـ ط، في الأسطوانة، كنسبة مربع هـ د إلى مربع ب جـ. وفي المخروط، كنسبة

[65]- ولا مخالف الوضع : الجملة ناقصة.

[66]- بينه : الكلمة ناقصة.

[67]- بينه : الكلمة ناقصة.

مربع ا ك إلى سطح ك جـ في ك ب ونصل د ط ونخرج م ص ن موازيًا لـ هـ ط. فيلقى د ط على ص. ونخرج ص ع ، ن ط موازيين لـ هـ م ونخرج ف م ق موازيًا لـ ب جـ.

فلموازاة ل م، م ق لـ ز ح، ح ب يكون السطح المار بـ ف ق ل دائرة. وضرب ف م في م ق كمربع م ل. ولأن نسبة هـ د إلى هـ ط، أي نسبة د م إلى م ص، كنسبة مربع هـ د الى مربع ب جـ، في الأسطوانة، أو كنسبة مربع ا ك إلى مسطح ك جـ في ك ب، في المخروط، أعني هي مؤلفة من نسبة هـ د إلى ب جـ ومن نسبة هـ د إلى ب جـ، أي ومن نسبة د ح إلى جـ ح، في الأسطوانة، ومؤلفة من نسبة ا ك إلى ك ب ومن نسبة ا ك إلى ك جـ، في المخروط. ونسبة هـ د إلى ب جـ //119 ظ//، في الأسطوانة، هي كنسبة هـ م إلى م ف لتساوي ب جـ و ف ق وتوازي هـ ف و ق د. ونسبة د ح إلى ح جـ هي كنسبة د م إلى م ق لتوازي م ق و جـ ح. ونسبة ا ك إلى ك ب، في المخروط، كنسبة هـ ح إلى ح ب، أي كنسبة هـ م إلى م ف. ونسبة ا ك إلى ك جـ كنسبة د ح إلى ح جـ، أي كنسبة د م إلى م ق.

فنسبة د م إلى م ص، فيهما، مؤلفة من نسبة هـ م إلى م ف ومن نسبة د م إلى م ق. ونسبة د م إلى م ص كنسبة سطح د م في م هـ إلى سطح ص م في م هـ لاشتراك ارتفاع م هـ في السطحين. فنسبة سطح د م في م هـ إلى سطح ص م في م ه، الذي هو سطح م ع، مؤلفة من نسبة د م إلى م ق ومن نسبة هـ م إلى م ف.

وأيضًا، نسبة سطح د م في م هـ إلى سطح ف م في م ق، أعني إلى مربع ل م ، مؤلفة من نسبة د م إلى م ق ومن نسبة هـ م إلى م ف. فنسبة سطح د م في م هـ إلى سطح ص م في م هـ، أعني إلى سطح م ع، كنسبة سطح د م في م هـ إلى مربع ل م.

فمربع ل م، الذي هو خط الترتيب، كسطح م ع، الذي هو مضاف إلى خط هـ ط، ناقصًا عن تمامه سطح ص ط الشبيه بسطح د هـ في هـ ط، لوقوعه على قطره. و م هـ، الفرض، هو الواقع من قطر القطع بين مسقط م ورأس القطع وهو هـ.

وكذلك يتبين في كل خط ترتيب.

وقد قلنا إن هـ ط هو القطر القائم وإن منتصف هـ د هو مركز القطع وخط الترتيب الخارج منه هو القطر الأقصر. فليُتذكر.

وتعلم أن حكم الدائرة في خطوط الترتيب حكم القطع الناقص إلا أن قطرها القائم مساو لقطرها المجانب، وذلك أن خطوط ترتيبها هي أنصاف الأوتار القائمة على قطرها. ومربعات تلك الأنصاف كضرب أقسام القطر في كل خط من مسقطه إلى طرف القطر، بعضها في بعض. ويكون كل من طرفي قطرها رأسًا للقطع. وما يقع بين مسقط عمود وطرف القطر، من أي جانب أخذ، هو عرض السطح المضاف. والخط المنسوب إليه القطر هو أيضًا القطر.

ولو أردنا، أخرجنا، من طرف القطر، خطًا قائمًا عليه مساويًا له وجعلناه قطرها القائم وتكون نسبة القطر إليه نسبة المساواة.

والذي ينبغي أن لا يذهل عنه أن خطوط الترتيب في الدائرة لا يمكن أن تكون إلا أعمدة. وفي القطوع الأُخَر قد تكون أعمدة على القطر المجانب وقد تكون غير أعمدة عليه.

وفي الدائرة الموازية، دون الدائرة المخالفة في الوضع، لا يكون خط ز ح لتوازي السطح القاطع والقاعدة. ويكون بدله عمودًا مُخرجًا من أي نقطة كانت على خط ب جـ.

وتعلم أيضًا، باستبانة من هذا الشكل، أن نسبة مربع أي خط كان من خطوط الترتيب إلى مسطح القسمين، اللذين هما بين مسقطه على القطر وبين طرفي القطر، كنسبة القطر القائم إلى المجانب.

<برهان ذلك>:

وذلك أن نسبة مربع ل م، مثلاً، الذي هو كسطح م ع إلى سطح هـ م في[68] م د هي كنسبة ص م إلى م د، لاشتراك ارتفاع هـ م. فهي كنسبة ط هـ إلى هـ د. وكذلك نسبة مربع خط آخر من خطوط الترتيب إلى مسطح أحد القسمين، اللذين هما من موقعه إلى طرفي القطر، في[69] الآخر، كنسبة هـ د إلى هـ ط. فنسبة مربع كل خط ترتيب إلى مسطح قسميه كنسبة مربع خط آخر منها إلى مسطح قسميه.

---

[68]- في : إلى.

[69]- في : الكلمة ناقصة.

وبالإبدال، نسبة مربع كل خط ترتيب إلى مربع خط آخر كنسبة مسطح قسمي هذا الخط إلى مسطح قسمي ذلك. وذلك ما أردناه.

تنبيه على بعض أحوال القطوع ومقدمات أُخر:

ليكن مخروط //120و// أو أسطوانة أ ب جـ د، أولا قائمة.

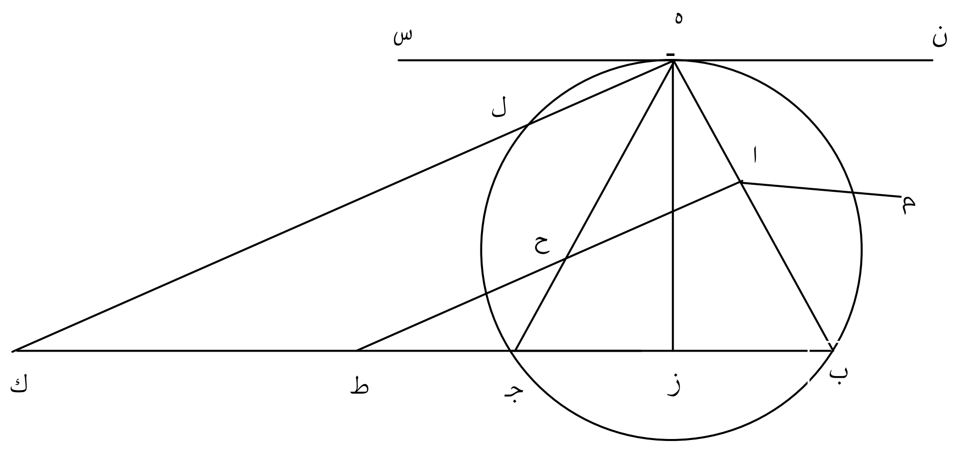
فقد مر أن كل سطح يقطعه، على موازاة القاعدة، كسطح أ د مثلا، يحدث فيه دائرة. وليقطعه سطح أ ح ط ملاقيًا لقاعدته على خط ط ي مقاطعًا جميع الأضلاع. ونخرج من مركز القاعدة، وهو ز، عمودًا على ط ي، وهو ز ط. ونخرج سطح هـ ز ط المار بسهم هـ ز وعمود ز ط. فيحدث مثلث أو مربع ا ب جـ د ويكون فصل السطح[70] القاطع والقاعدة، وهو ط ي، عمودًا على فصل سطح القاعدة والمربع أو المثلث، وهو ب جـ ط. ولكون المخروط أو الأسطوانة قائمًا وزاويتي ز قائمتين أبدًا، تكون أبدًا زاويتا ب، جـ متساويتين قائمتين في الأسطوانة، حادتين في المخروط. ولذلك لا يمكن أن يكون قطع أ ح مخالف الوضع لعدم إمكان كون زاوية ا أو زاوية ح كزاوية جـ أو كزاوية ب، على ما تقدم.

ولأن سهم هـ ز عمود على سطح القاعدة، فكل مربع أو مثلث يمر بالسهم يكون قائما على سطح القاعدة. ولقيام خط ي ط على خط ب جـ ط في سطح القاعدة القائم على سطح المثلث أو المربع، يكون خط ي ط عمودًا على السطح المار بالسهم. فتكون زاوية ا ط ي أبدا قائمة كزاوية ب ط ي. ولذلك تكون جميع خطوط الترتيب الموازية لخط ي ط الملاقية قطر ا ح أبدًا قائمة على قطر ا ح.

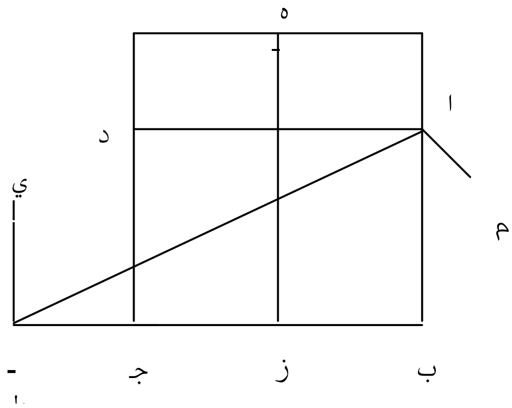
ولأن نسبة ا ح إلى ب جـ في الأسطوانة، كنسبة ح ط إلى جـ ط وح ط أعظم من جـ ط لكونه موترًا لقائمة جـ، فَـ ا ح أعظم من ب جـ أبدًا. فمربع ا ح أعظم من مربع ب جـ. ولأن نسبة ا ح إلى القطر القائم، وليكن ا م، كنسبة مربع ا ح إلى مربع ب جـ، فـ ا ح أعظم من ا م أبدًا.

وأما في المخروط، فندير على مثلث ب هـ جـ دائرة ونخرج هـ ك موازيًا لِـ ا ح. فلأن ز هـ عمود خارج من منتصف وتر ب جـ، فهو قطر لدائرة ب هـ جـ. فلو كان خط هـ ك مماسًا لدائرة ب هـ جـ لكانت زاوية ز هـ ك قائمة. وزاوية ز قائمة. فخط هـ ك مواز لخط ب جـ وهو ملاق له في جهة ط لملاقاة ا ط الموازي له هـ ك إياه في تلك الجهة. هذا خلف.

فلا يمكن أن يماس هـ ك لدائرة ب هـ جـ. فهو إذن يقطعها بل يقطع احدي قوسي ب هـ، جـ هـ. ولنخرج ن هـ س مماسًا للدائرة على هـ. فهو يوازي ب جـ لكون زاوية ز قائمة و هـ ز قطرًا. ويقع قسم هـ س منه عن خط هـ ك في خلاف جهة خط ز ك. فلو قطع خط هـ ك قوس ب هـ، وقع هـ س عن هـ ك إلى جهة ب ك. فصار هـ ك يقطع هـ س ثم يلاقي ب ك. فيلزم إحاطة مستقيمين بسطح. هذا خلف.



[70]- السطح : سطح.



فلا يقطع هـ ك إلا قوس هـ جـ وليقطعها على ل. فلأن نسبة أ ح إلى القطر القائم، وهو ا م، كنسبة مربع هـ ك إلى مسطح ك جـ في ك ب ومسطح ك جـ في ك ب مثل مسطح ك ل في ك هـ، فنسبة ا ح إلى ا م كنسبة مربع هـ ك إلى مسطح ك ل في ك هـ. ولأن ك ل، في مثل هذا الوضع، يكون أبدًا بعضًا من ك هـ، فمربع هـ ك أعظم من مسطح هـ ك في ك ل. فقطر ا ح المجانب أبدًا أعظم من قطر ا م القائم.

فقد تبين أن القطوع الحادثة في الأسطوانة القائمة تنحصر في الدائرة الحادثة من الموازاة لا من المخالفة في الوضع. وقطرها القائم أبدًا مساو لقطرها المجانب وخطوط ترتيبها أعمدة على قطرها كما علمت.

وفي القطع الناقص سواها. وتكون أيضًا خطوط ترتيبه أبدًا أعمدة على قطره المجانب. وقطره المجانب أبدًا أعظم من قطره القائم.

وفي المخروط القائم أيضا تحدث الدائرة من القطع الموازي لا من القطع المخالف لانتفائه فيه أيضًا ويحدث قطع ناقص سواها وتكون خطوط ترتيبه أيضا أبدًا قائمة على قطره المجانب ومجانبه أطول من قائمه.

وظاهر فيه أنه إن كان القطع الحادث مكافئًا أو زائدًا كانت[71] خطوط الترتيب فيه أيضا أعمدة على قطره المجانب لكونها موازية للعمود على السطح وهو ط ي. وظاهر فيهما أن أقطارهما المجانبة ممتدة بامتداد ضلعي المخروط إلى غير نهاية، لعدم تلاقيها أحد الضلعين، حافظا لبعد معين //120ظ// في المكافئ، وزائدًا فيه في الزائد. ويمتد، بامتداد القطر، السطح أيضا إلى غير نهاية.

وظاهر أيضا أن نسبة ا ح إلى ام، في الأسطوانة، كنسبة اح إلى ب جـ مثناة بل كنسبة مربع ح ط إلى مربع جـ ط [72]. وفي المخروط كنسبة هـ ك إلى ك ل.

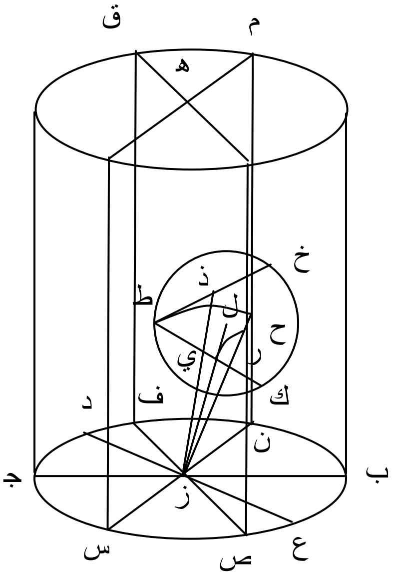
فإن نسبة مربع هـ ك إلى مسطح ب ك في ك جـ ليست كنسبة مربع اط إلى مسطح ب ط في ط جـ. وإلا كانت، بالإبدال، نسبة مربع هـ ك إلى مربع اط، أي نسبة مربع ب ك إلى مربع ب ط، كنسبة سطح ب ك في ك جـ إلى سطح ب ط في ط جـ. فبالإبدال ثم التفصيل، نسبة سطح ب ك في ب جـ إلى سطح ب ك في ك جـ[73]، أعني نسبة ب جـ إلى جـ ك كنسبة[74] سطح ط ب في ب جـ إلى سطح ط ب في ط جـ، أعني كنسبة ب جـ إلى جـ ط. فَ جـ ك كَ جـ ط. هذا خلف.

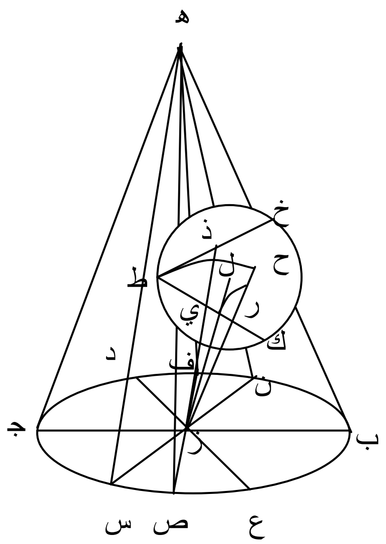
وأيضا فليكن مخروط، أو أسطوانة، ا ب جـ مائلا وسهمه هـ ز، فهو غير قائم على سطح القائدة. ونخرج من مركز ز عمود زح على سطح القاعدة ونخرج سطح هـ ز ح. فيحدث مثلث أو مربع اب جـ. ولمروره بعمود زح، يقوم علىسطح القاعدة، عمودًا عليه.

ولأن زاوية ح زب قائمة وزاوية هـ زب غير قائمة، ولتكن منفرجة مثلا، فزاوية ا ب جـ حادة. ففي الأسطوانة زاوية جـ منفرجة وسطح اب جـ متوازي الأضلاع غير قائم الزاويا.

71- كان : كانت.
72- كتب الناسخ : ا ط أيضا ثم شطب على كلمة أيضا.
73- كتب الناسخ : "إلى جـ ط. فَ جـ ك كَ جـ ط. هذا خلف"، ثم شطب على الجملة.
74- كنسبة : كنسبتي.

وفي المخروط لأن ضلعي هـ ز ، ز ب مساويان لضلعي هـ ز ، ز جـ وزاوية هـ ز ب أعظم من زاوية هـ ز جـ، فضلع هـ جـ أقصر من ضلع هـ ب، وزاوية هـ ج ب أعظم من زاوية هـ ب جـ. فمثلث[75] هـ ب جـ مختلف الضلعين والزاويتين.





ولنخرج من ز على خط ب جـ، في سطح القاعدة، عمود ز ن س ونخرج سطح هـ ز ن. فيحدث مثلث أو مربع م ن س. فلأن زاوية ن ز ح قائمة، إذ ز ح عمود على السطح، وزاوية ن ز ب أيضا قائمة، فخط ن ز عمود على ملتقى خطي ب ز ، ح ز. فهو عمود على سطح ب ز ح، أعني على سطح اب جـ. فزاوية ن ز هـ أيضا قائمة وسهم هـ ز المائل على سطح القائدة قائم على خط ن ز س. وسطح م ن س المار بـ ن س، العمود على ب جـ، قائم على سطح اب جـ. ولأن زاوية هـ ز ن كزاوية هـ ز س، فزاويتا ن، س متساويتان. ومربع م ن س، في الأسطوانة، قائم الزوايا. ومثلث هـ ن س، في المخروط، متساوي الساقين. وزاوية ميل سطح م ن س على سطح القاعدة هي زاوية هـ ز ح لأن المشترك بين القاعدة و م ن س هو خط ن س. وقد خرج من نقطة ز منه عليه عمود هـ ز في سطح م ن س وعمود ز جـ في سطح القاعدة وكانت زاوية هـ ز ح[76] حادة.

وأيضا لنخرج خط ف ز ص غير قائم على خط ب جـ في سطح القاعدة ونخرج سطح هـ ز ف. فيحدث مثلث أو مربع ق ف ص. ولأن ن ز عمود على سطح ب ز هـ، بل ب ز ح، فـ ز ف غير عمود عليه. وإذ زاوية ف ز ح قائمة، فزاوية ف ز هـ غير قائمة وإلا كان ف ز عمودًا على سطح ب ز ح. هذا خلف.

ولعدم تساوى زاويتي هـ ز ف، هـ ز ص، تختلف زاويتا ف، ص. ويكون، في المخروط، مثلث هـ ف ص مختلف الضلعين. وفي الأسطوانة مربع ق ف ص غير قائم الزوايا.

ولمرور سطح ق ف ص بنقطة ز وعدم مروره بعمود ز ح، يكون مائلا على سطح القاعدة.

وليتصور أن دائرة القاعدة دارت على قطر من أقطارها، حافضًا لمركزها، فحدثت كرة وقطعت تلك الكرة عمود ز ح وسهم هـ ز على نقطتي ح، ط. ونخرج قوس ح ط من العظام ونديرعلى قطب ح، ببعد ح ط، صغيرة ط ك. وإنما تكون صغيرة لأن زاوية ح ز ط حادة. ونتوهم منفصلا من سطوح //121و// ا ب ج ، م ن س ، ف ص ق دوائر عظام لمرورها بمركز ز. ولنتوهم أن ضلع ز ط دار حول دائرة ط ك وسكنت نقطة ز، فحدث مخروط رأسه ز وقاعدته ط ك.

فلأن ز ح عمود خارج من مركز ز على سطح عظيمة القاعدة وح منه على محيط الكرة، فـ ح هو قطب للقاعدة. ولأن عظيمة اب جـ، أي عظيمة ح ز ط، المنفصلة عن سطح اب جـ قائمة على عظيمة م ن س عمودا عليها كما قلنا، فهي تمر بقطبها. فعظيمة ح ط مارة بقطبي القاعدة وبقطبي م ن س. فقوس ح ط هي تمام ميل م ن س على القاعدة.

[75]- ومثلث : فمثلث

[76]- هـ ز ح : الحرف الأخير مطموس.

وأيضا جميع السطوح غير[77] المتناهية المارة بسهم هـ ز محدثة[78] في المخروط مثلثات غير متناهية وفي الأسطوانة مربعات غير متناهية وفي الكرة المتوهمة عظام[79] غير متناهية منفصلة عن تلك السطوح. منها سطح اب جـ بعينه وشخصه مختلف الزوايا مار بعمود ز ح قائم[80] على القاعدة. وسطح م ن س بعينه متساوي الزوايا ومائل على القاعدة وقائم على سطح اب جـ القائم على القاعدة. فالقاعدة و سطح م ن س كلاهما يقومان على سطح اب جـ. وسائر السطوح كلها مختلفة الزوايا ومائلة على سطح القاعدة وعلى سطح اب جـ.

أيضا ولأن صغيرة ط ك وعظيمة م ن س قطعتا محيط عظيمة ح ط المارة بقطبي ط ك وبقطبي م ن س على نقطة واحدة هي ط، فهما متماستان على ط.

وسائر العظام غير المتناهية المارة جميعها بنقطة ز بل بنصف قطر ز ط، كل منها يقطع صغيرة ط ك.

لأن واحدة منها لوماستها لماستها على نقطة ط ضرورة لأنهما[81] مارتان بها. فتكون عظيمة ح ط المارة بقطب ح، ومماسة صغيرة ط ك على ط[82]، مارة أيضا بقطب تلك العظيمة المفروضة مماسة. فيكون سطحها قائما على سطحها. لكن سطح ط ز ح الذي هو سطح اب جـ بعينيه لا يقوم عمودًا من الدوائر المارة بسهم هـ ز إلا على سطح م ن س فقط . هذا خلف.

فإذن كل من السطوح المارة بالسهم، غير سطح م ن س، يقطع صغيرة ط ك. وليقطعها سطح ق ف ص على مستقيم ط ك. ونصل ز ك وننصف ط ك على ي ونصل زي.

ولكون خط ط ك في سطح دائرة ط ك الداخل في الكرة، فنقطة ي في داخل الكرة. فنخرج ز ي إلى ل من سطح الكرة ونخرج قوس ح ل من العظام.

فلأن صغيرة ط ك موازية لعظيمة القاعدة، لاشتراكهما في قطب ح، وسطح ط ز ك، أعني سطح ق ف ص، قطعهما، ففصل ط ك مواز لفصل ف ص. ولأن في[83] عظيمة ط ك ز خط ز ي خارج من المركز على منتصف وتر ك ط، فهو عمود عليه. فزاوية ك ي ز قائمة. فتمامها من القائمتين، وهو زاوية ي ز ف، أيضا قائمة. وزاوية ح ز ف، لكون ح ز عمودًا على السطح، قائمة. فخط ف ز عمود على سطح عظيمة ح ز ل. فَـ ف قطب لها.

ولأن كلا من دائرتي ف ز ح ، ف ز ل مارة بقطبي دائرة ح ل، فدائرة ح ل مارة بأقطابهما الأربعة. فقوس ح ل هي غاية الميل بين دائرتي ف ز ح، ف ز ل، كما كانت[84] قوس ح ط هي غاية الميل بين دائرتي ن ز ح، ن ز ط.

أو نقول كما قلنا هناك: قوس ح ط هي الواقعة بين قطب القاعدة ومنطقة ف ز ل. فهي تمام ميلها عليها. ولأن قوس ح ط الخارجة من قطب ح إلى نقطة ط من محيط دائرة ط ك أعظم من قوس ح ل التي خرجت من القطب، لم تصل إلى محيط ط ك وقطب ح. فتمام ميل سطح م ن س على سطح القاعدة أعظم من تمام ميل سطح ق ف ص عليها. فميل م ن س على القاعدة أكثر وأشد من ميل ق ف ص عليها.

فظهر:

أن سطح ق ف ص يقطع مخروط ط زك على ضلعي ط ز، زك وعلى قاعدة مستقيم ط ك غير مار بسهمه.

وأن سطح ط ح ك القائم على القاعدة يقطعه على ضلع ط ي ويمر[85] بسهم ز ح

وأن سطح م ن س يمر بضلع ط ز من المخروط ويماس سطحه المستدير وإلا لقطعه فقطع قاعدته أيضا. هذا خلف.

وأن كل سطح //121ظ// يمر بسهم هـ ز، غير هذه السطوح الثلاثة، فهو أيضا يقطع المخروط على ضلعين وقاعدته على وتر هو قاعدتهما ولا يمر بسهمه.

ويكون ميل سطح م ن س المماس لصغيرة ط ك على القاعدة أكثر وأشد من ميله عليها.

---

[77]- غير : الغير. وهكذا فيما بعد.
[78]- محدثة : المحدثة.
[79]- عظاما : عظام.
[80]- قائم : فقائم.
[81]- لأنهما : انهما.
[82]- ومماسة صغيرة ط ك على ط : ومماسة ط.
[83]- في : الكلمة فوق السطر.
[84]- كانت : كان.
[85]- يمرّ : ومقابله ويمرّ.

وأيضا لنخرج خط د ز ع ولتكن زاوية ب ز ع كزاوية جـ ز ص. فإذا أخرجنا سطح هـ ز ع حدث مثلث أو مربع وقطع مخروط ط ز ح ودائرة ط ك. وليكن الفصل بينه وبين هذه الدائرة مستقيم ط خ. وننصف ط خ على ذ ونصل ز ذ. وليكن مركز صغيرة ط ك على محور ز ح ر ونصل ر ذ، ر ط.

فلأن سطح الصغيرة وسطح القاعدة متوازيان، وقطعهما السطوح المارة بسهم هـ ز وبخطوط ب ز، ف ز، ع ز، فخطوط ط خ، ط ز، ط ك موازية لخطوط ع ز، ف ز، ب ز، وزاوية ع ز ف كزاوية خ ط ك، وزاويتا خ ط ز، ز ط ك كزاويتي ع ز ب، ب ز ف. فزاويتا خ ط ز، ز ط ك متساويتان وزاويتا ز ي ط، ز ذ ط قائمتان وضلع ز ط مشترك. فـَ ز ي كـ ز ذ.

ولأن ز ر كـَ ز ذ وزاويتا ر قائمتان، لكون ز ر محورًا، فزاويتا ر ز ي، ر ز ذ متساويتان وزاوية ر ز ذ، كما تبين، هي تمام ميل السطح المار بسهم هـ ز وخط ع ز د على القاعدة. فتمام ميل سطح هـ ز ع مساو لتمام ميل سطح هـ ز ف. فميلاهما أيضا على القاعدة متساويان.

فكل مارين بسهم هـ ز عن جنبتي المار به والعمود، إذا كانت زاويتا فصلهما مع القاعدة وفصل المار بالعمود معهما متساويتين، كان ميلاهما على القاعدة متساويين.

فلكل مائل، لا غاية الميل، نظير من الجانب الآخر.

وظاهر أنه إن كانت زاوية ب ز ع أصغر من زاوية جـ ز ص، كان ميل سطح خ ع د على القاعدة أقل من ميل سطح ق ف ص عليها، أعني يكون سطح خ ع د إلى القيام على القاعدة أقرب من سطح ق ف ص وذلك أنه حينئذ يكون خط ز ذ الذي هو جيب تمام زاوية الميل أقصر من خط ز ي. فقد اتضح أن :

سطح ا ز جـ المار بعمود ز ح نوعه منحصر في شخص واحد.

وكذلك سطح م ن س المائل على القاعدة غاية الميل نوعه منحصر في شخص.

وأما السطوح المارة بالسهم غير المارة بعمود ز ح وغير المائلة غاية الميل على القاعدة، فجميعها مندرجة تحت نوع واحد. وإن كان كل اثنين منها عن الطرفين المتساويي الميلين يمتاز عن اثنين آخرين بخصوص ميلهما المعين إلا أن حكم جميعها في أوضاع القطوع واحدة. فلذلك نجعل الجميع نوعًا واحدا لها[86] أشخاص غير متناهية.

وإذا تقدم ذلك وتقرر، فنقول:

ليقطع سطح ا ب جـ مخروط أو أسطوانة د هـ ز المائل ملاقيا للقاعدة على جـ ح مقاطعا لجميع الأضلاع. ونخرج من مركز ط عمود ط جـ على جـ ح ونخرج السطح المار بسهم د ط وعمود ط جـ. فيحدث مثلث أو مربع د هـ ز على الشريطة المعتبرة وهي أن الفصل بين القاطع والقاعدة، وهو جـ ح، عمود على الفصل بين القاعدة والمثلث أو المربع، وهو ز هـ.

فلأن المجسم مائل لا يخلو المثلث أو المربع من أحد الأنواع الثلاثة[87] المبينة.

وليكن أولا هو المثلث أو المربع المار بالعمود القائم على سطح القاعدة المختلف الزوايا. ولتكن زاوية هـ حادة وضلع د هـ في المخروط أطول من ضلع د ز. فيمكن في هذا المثلث أو المربع أن نخرج قاعدة ز هـ ونفرض على المتصل بها نقطة جـ. ونعمل زاوية ا جـ ز على نقطة جـ من خط هـ جـ مساوية لفضل زاوية ب ز هـ على زاوية ا هـ ز. فيلقى خط جـ ا ضلعي[88] ا هـ، ب ز على نقطتي ا، ب لكون داخلتي ز، جـ أو هـ، جـ أقل من قائمتين. ونخرج من جـ على هـ جـ عمود جـ ح في سطح القاعدة ونخرج//122و// سطح ا جـ.

ففي الأسطوانة : لأن زاويتي هـ، ز الداخلتين كقائمتين وزوايا هـ، جـ، ا الثلاثة أيضا كقائمتين وجميع زاويتي هـ، جـ منها كزاوية ز، لأنا قد عملنا زاوية جـ كفضل زاوية ز على زاوية هـ، فتبقى زاوية ا كزاوية هـ. ويكون مثلث ا جـ هـ متساوي الساقين.

وكذلك مثلث ب جـ ز لتساوي خارجتي ب، ز وداخلتي ا، هـ. ويبقى ا ب مثل هـ ز.

---

[86]- له : لها.

[87]- الثلاثة : الثلثة. وهكذا فيما بعد.

[88]- ضلعي : لضلع.

وإذا كانت زاوية ب ا هـ كزاوية ا هـ ز[89]، كانت زاوية ا الخارجة كزاوية ز وزاوية ب الخارجة كزاوية هـ على خلاف الوضع.

وفي المخروط : لأن زاوية جـ مع زاوية هـ كزاوية ب ز هـ، وزاوية جـ مع زاوية ز ب جـ أيضا كزاوية ب ز هـ. فزاوية ز ب جـ، بل زاوية ا ب د، كزاوية هـ. وزاوية د مشتركة. فيبقى زاوية ا كزاوية ز على خلاف الوضع.

ولأن المثلث أو المربع قائم على القاعدة، فخطوط الترتيب الموازية لـ جـ ح أعمدة على قطر أ ب. فالقطع الذي قطره ا ب دائرة وقطرها المجانب كالقائم كما مر.

ولنعمل زاوية هـ جـ ي أعظم من فضل زاوية ز على زاوية هـ. وليقطع جـ، ي ضلعي ا هـ، ب ز على نقطتي ي، ك ولا يكونن في المخروط ملاقيا لهما على رأس د. ونعمل أيضا زاوية هـ جـ ل أصغر من ذلك الفضل وليقطع جـ ل ضلعي ا هـ، ب ز على نقطتي ل، م.

فلأن زاوية هـ ز ك كزاويتي ز ك جـ، ك جـ ز، وهي أصغر من زاويتي هـ جـ ك، جـ ه ا، فزاوية ك الخارجة، بل زاوية ك ي هـ المبادلة لها، أصغر من زاوية هـ. ويبقى زاوية ي، الخارجة في الاسطوانة والمخروط كليهما، أعظم من زاوية ز[90].

وأيضا زاوية ز كزاويتي م، جـ وهي أعظم من زاويتي هـ، م جـ هـ. فزاوية ل م ك أعظم من زاوية هـ. ويبقى زاوية ا ل م أصغر من زاوية ز.

وفي الأسطوانة: لأن زاوية ي أصغر من زاوية هـ، فضلع ي جـ أطول من ضلع جـ هـ. وكذلك ك جـ أطول من جـ ز. ولأن نسبة ي ك إلى هـ ز كنسبة ك جـ إلى جـ ز[91]، فـ ي ك أطول من هـ ز.

وأيضا لأن زاوية ل أعظم من زاوية هـ، فضلع ل جـ أقصر من ضلع جـ هـ. وكذلك م جـ أصغر من جـ ز ونسبة ل جـ إلى جـ هـ كنسبة ل م إلى هـ ز[92]. فَـل م أصغر من هـ ز.

وظاهر أنه يحدث من سطح ي جـ ح قطع ناقص قطره ي ك وخطوط ترتيبه أعمدة على قطره.

وكذلك يحدث من سطح ل ح جـ قطع ناقص[93] وخطوط ترتيبه أعمدة على قطره.

ولأن نسبة ي ك إلى القطر القائم كنسبة ي ك الى هـ ز مثناة. وكذلك نسبة ل م الى القطر القائم كنسبة ل م الى هـ ز مثناة، فالقطر القائم لقطع ي ك أصغر من قطره المجانب. والقطر القائم[94] لقطع ل م أعظم من قطره المجانب، كما أن القطر القائم لقطع ب ا مساو لقطره المجانب.

وأما في المخروط : فندير على مثلث هـ د ز دائرة ونخرج د ن موازيا لِـ ا جـ ود ع س موازيا لِـ ي جـ و ص د ف موازيا لِـ ل جـ ونخرج ن د في جهة د الى ق.

فلأن زاوية ا د ق كزاوية د ا جـ وزاوية ب د ن كزاوية د ب ا، فزاوية هـ د ق كزاوية هـ ز د وزاوية ز د ن كزاوية ز هـ د. ولأن خط ق د ن قد خرج من كل طرف وتر د هـ أو وتر د ز، فصارت قطعة هـ ز د أو قطعة ز هـ د قابلة لزاوية كزاوية هـ د ق أو كزاوية ز د ن. فلذلك يكون د ن مماسا لدائرة د هـ ز ومربع د ن كمسطح هـ ن في ن ز ونسبة مربع د ن الى مسطح هـ ن في ن ز، التي هي نسبة المساواة، كنسبة //122ظ// قطر ا ب المجانب الى القطر القائم المساوي له .

وأيضا لأن جـ ك ي واقع عن جـ ب ا إلى جهة د ن، فـ د ع س الموازي لِـ جـ ك ي يقع عن د ن إلى جهة جـ ب ا. ولذلك يقطع قوس د ز على ع. ولأن نسبة مربع دع س إلى مسطح هـ س في س ز، أي إلى مسطح د س في س ع، الذي هو أصغر منه، كنسبة قطر ي ك المجانب إلى قطره القائم. فقطر ي ك المجانب أطول من قطره القائم.

وأيضا لأن جـ م ل واقعة عن جـ ب ا إلى جهة هـ ز، فـ ص د ف يقع عن د ن إلى خلاف جهة د س. ولذلك يقطع قوس د هـ على ص.

ولأن نسبة مربع د ف إلى مسطح هـ ف في ف ز، أعني إلى مسطح ص ف في ف د، كنسبة ل م إلى القطر القائم، ومربع د ف بعض من سطح ص ف في ف د، فقطر ل م المجانب أصغر من قطره القائم.

---

[89]- هـ ا ز : هـ ا ب.
[90]- زاوية ز : زاوية.
[91]- كنسبة ك جـ إلى جـ ز : كنسبة ك جـ جـ ز.

[92]- كنسبة ل م إلى هـ ز : كنسبة ل م هـ ز.
[93]- قطع ناقص : قطع.
[94]- والقطر القائم : الجملة ناقصة.

فقد تبين أنه إذا قطع سطح جميع أضلاع المخروط المائل أو الأسطوانة المائلة مقاطعًا لقاعدته، فإن كان المثلث أوالمربع الذي يقوم فصله مع القاعدة على فصل القاطع مع القاعدة عمودًا هو المثلث أو المربع القائم على سطح القاعدة المختلف الزوايا وكان مع ذلك ملاقاة القاطع للقاعدة في جهة الزاوية العظمى، فإنه يمكن أن يكون القطع الحادث دائرة ويمكن أن يكون قطعا ناقصا خطوط ترتيبه أعمدة على قطره المجانب. ومجانبه قد يكون أطول من قائمه وقد يكون بالعكس.

وأيضا ليكن في هذا المثلث أو المربع بعينه، في المخروط أو الأسطوانة، المائل من ملاقاة اب لـِ ه ز في جهة هـ.

فلأن زاوية هـ أعظم من زاوية ا، لا يمكن أن تكون زاوية ا كزاوية ز. فلا يكون قطع اب مخالف الوضع قطعًا. ولأن نسبة ا ب إلى هـ ز، في الأسطوانة، كنسبة جـ ا إلى هـ جـ، فـ ا ب أطول من هـ ز. فـ ا ب المجانب أطول من القائم أبدًا.

وندير في المخروط، على مثلث ج هـ ز، دائرة ونخرج د ل ك موازيًا لـِ ب ا جـ. فلأن زاوية ك د ا، المساوية لزاوية د ا ب، التي هي أصغر من زاوية اهـ ز، أصغر كثيرا من زاوية هـ ز د، فلا يمكن أن يماس ك د للدائرة أو يقطع قوس د ز منها وإلا كانت زاوية ك د هـ مساوية أو أعظم من زاوية ك ز د. هذا خلف.

فـ د ك يقطع قوس دهـ على ل. ونسبة مربع ك د إلى مسطح زك في هـ ك، أعني إلى مسطح د ك في[95] ك ل، كنسبة ب ا إلى القطر القائم . فـ ب ا المجانب أبدا أعظم من القائم. فظهر أنه إن كانت[96] الملاقاة في مثل هذا المثلث أو المربع في المخروط أو الأسطوانة المائل في جهة الزاوية العظمى، كان القطع الناقص الحادث أبدًا غير دائرة. وقطره المجانب أطول من قطره القائم وخطوط ترتيبه أعمدة على قطره[97] المجانب.

وظاهر، في المخروط المائل، أنه إن كان مثلث القطع الزائد أو المكافئ هو المثلث القائم على القاعدة، كانت[98] خطوط ترتيبه أعمدة على قطره المجانب.

وليكن ثانيا هو المثلث أو المربع المتساوي الزوايا المائل على القاعدة غاية الميل. فلتساوي زاويتي هـ، ز لا يمكن أن يكون قطع ا ب مخالف الوضع كما علم. ولأن المار بالسهم مائل على القاعدة، فخطوط الترتيب مائلة على القطر المجانب أبدًا. ولأن نسبة ا ب إلى هـ ز في الأسطوانة //123و// كنسبة ب جـ إلى ز جـ، فَ اب أطول من هـ ز. فهو أطول من القطر القائم أبدًا.

وكما تقدم في المخروط القائم، إذا أدرنا على مثلث دهـ ز المتساوي الساقين دائرة وأخرجنا من د خطًا موازيًا لـ اجـ، تبين ودلّ البرهان على أن ا ب القطر المجانب أطول من القطر القائم أبدًا.

فالفرق بين هذا القسم وبين ما يكون في القائم من المخروط والأسطوانة أن خطوط الترتيب هنا لك قائمة على القطر المجانب وهي هاهنا[99] مائلة عليه. وباقي الأحول والبيان مشتركة.

وظاهر في القطع الزائد والمكافئ في المخروط في هذا المثلث أن خطوط ترتيبهما أيضا تميل على قطريهما المجانبين.

وليكن، ثالثا، هو المربع أو المثلث المختلف الزوايا المائل على القاعدة ميلا لا في الغاية.

فلكونه مختلف الزوايا، يكون حكمه في وجود المخالف في الوضع حكم المثلث أو المربع القائم على القاعدة المختلف الزوايا. ولكونه مائلا على القاعدة يكون حكمه في عدم قيام خطوط الترتيب فيه على القطر المجانب حكم المتساوي الزوايا المائل على القاعدة غاية الميل. ولأن في وضعه المخالف لا تكون خطوط ترتيبه أعمدة على القطر[100] المجانب، فلا يكون مخالفه دائرة.

ولأن صورة المخالفة في مطلق المثلث المختلف الأضلاع تقتضي أن يكون الخط المخرج من رأس المثلث موازيًا لقطر القطع مماسًا للدائرة المحيطة بالمثلث، وفي مطلق المربع المختلف الزوايا تقتضي أن يكون القطر المجانب مساويًا لقطر القاعدة، فيوجد في قطوع هذا النوع من المثلث أو المربع قطع ناقص مخالف الوضع، غير دائرة، خطوط ترتيبه مائلة على قطره ومجانبه مساو لقائمه.

---

[95]- في : الكلمة ناقصة.
[96]- كانت : كان.
[97]- قطره : قطر.
[98]- كانت : كان.
[99]- هاهنا : ههنا.
[100]- القطر : قطر.

وتوجد أيضا قطوع ناقصة خطوط ترتيبها مائلة على أقطارها ومجانباتها أقصر من قوائمها. ويوجد ذلك ومجانبه أطول من قائمه. فلا يوجد في غير هذا النوع قطع ناقص غير دائرة وقطره المجانب مساو لقطره القائم.

والتشكيل والبرهان على شبه ما تقدم في القائم المختلف الزوايا بامتزاج من المائل المتساوي الزوايا في ميل خطوط الترتيب.

وظاهر أن القطوع الزائدة والمكافئة، في هذا النوع من المثلث أيضا، تكون خطوط ترتيبها مائلة على أقطارها المجانبة أنواعًا من الميل.

وأيضا ليكن مثلث أو مربع دهـ ز مارًا بالسهم مائلا على القاعدة. ونخرج قطوع ي ك جـ، ا ب جـ، ل م جـ. وفصل جـ ح قائم على فصل هـ جـ. فلأن المار بالسهم هذا مائل على القاعدة وجـ ح عمود على هـ جـ، فهو غير عمود على غيره من الخطوط كخطوط جـ ل، جـ ا ، جـ ي. ونخرج من جـ عمود جـ خ على هـ جـ في سطح المثلث أو المربع. ولأنه مائل على القاعدة، لا تكون زاوية ح جـ خ قائمة. ولتكن حادة. فزاوية ح جـ خ هي ميل السطح المار بالسهم على القاعدة.

ونتصور على مركز جـ كرة. فلأن كلا من زاويتي هـ جـ خ ، هـ جـ ح قائمة، فَـ هـ جـ عمود على سطح ح جـ خ. فعظيمة ح جـ خ في الكرة المتوهمة قائمة على عظيمة ك جـ هـ المارة بقطبها لمرورها بمحور جـ ز. فقطعة خ جـ ح معمولة على قطر ك ج ز قائمة عليها.

وقد فصل قوس ح خ أصغر من نصف القطعة لكون زاوية ح جـ خ حادة. فأقصر الخطوط الخارجة من ح إلى محيط دائرة ك جـ ز هو الواصل بين ح، خ. والأقرب منه أقصر من الأبعد عنه. فالواصل بين ح ومتقاطع ك جـ ومحيط عظيمة ك جـ ز أقصر من الواصل بين ح ومتقاطع ب جـ ومحيط تلك العظيمة. وهذا الواصل أقصر من الواصل بين ح ومتقاطع جـ م وذلك المحيط.

ولأن نصف قطر جـ ح وأنصاف أقطار جـ ك، جـ ب، جـ م متساوية وأوتار ح ك، ح ب، ح م متعاظمة أو نقول قِسِي هذه الأوتار المتعاظمة متعاظمة. فزوايا ح جـ ك، جـ ب ح، ح جـ م متعاظمة، أعظمها زاوية ح جـ م.

فزوايا خطوط ترتيب قطع ا ك المساوية لزاوية //123ظ// ح جـ ك أصغر من زوايا خطوط ترتيب قطع ا ب المساوية لزاوية ح جـ ب وهي أصغر من زوايا خطوط[101] ترتيب قطع ل م المساوية لزاوية ح جـ م.

فالقطوع الحادثة بحسب المائل على القاعدة من المثلث أو المربع زوايا ترتيبها غير القوائم وهي، مع ذلك، مختلفة بحسب القرب والبعد عن القائمة. وهنا نوعان من الاختلاف: أحدهما اختلاف ميلي المثلثين أو المربعين المختلف الميلين مثلا. والآخر اختلاف القطوع الواقعة في مثلث واحد.

فكل قطع يقع بحسب مثلث من هذه المثلثات أو مربع من هذه المربعات تتحصل زاوية ترتيبه بحسب زاويتين. أحدهما هي أصل زاوية ميل المثلث أو المربع، هذا على القاعدة، وهي زاوية ح جـ خ. والأخرى هي زاوية وضع قطر هذا القطع عن عمود جـ خ الكائن في سطح القاعدة وهي زاوية خ جـ ب أو خ جـ م مثلا. والشكل ما تقدم بزيادة خط جـ خ.

فالقطوع الممكنة بحسب مساواة القطر المجانب للقائم وزيادته عليه ونقصانه عنه ثلاثة أقسام. وبحسب قائمية زاوية الترتيب وغيرها، قسمان. وبحسبهما جميعًا ستة أقسام. وإن كانت بحسب اختلاف الزوايا غير[102] القائمة أنواعا غير متناهية.

والقطع الناقص، القائم خطوط ترتيبه على مجانبه، يكون دائرة إذا كان مجانبه كقائمه، ويكون غيرها إذا كان مجانبه أطول أو أقصر من قائمه.

والمائل خطوط ترتيبه على مجانبه يكون مجانبه مساويا لقائمه إذا كان وضعه مع المثلث أو المربع المقارن له على الخلاف، ويكون أطول أو أقصر منه إذا لم يكن كذلك.

وأيضا كل قطع ناقص يقع في مخروط قائم أو مائل بحسب أي مثلث كان من المثلثات المذكورة، فنسبة قطره المجانب إلى قطره القائم، سواء كانا متساويين أو القائم أطول وبالعكس، ليست بأصغر من نسبة أحد ضلعي ذلك المثلث، أي ضلع كان، إلى ما يقع منه بين القاعدة والخط المماس للدائرة المحيطة بذلك المثلث في جهة الرأس .

---

[101]- خطوط : الكلمة ناقصة.

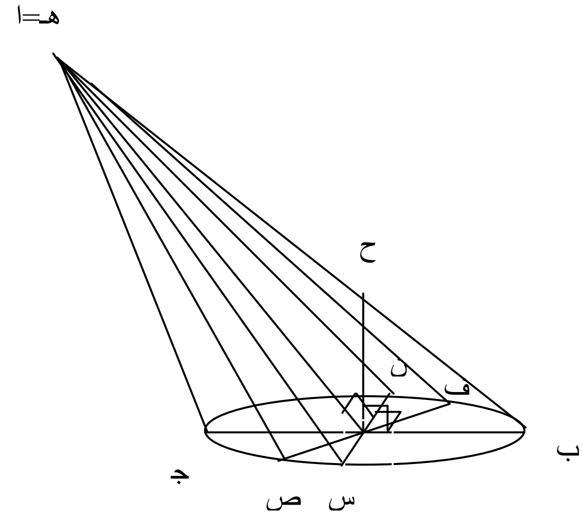
[102]- غير : الغير.

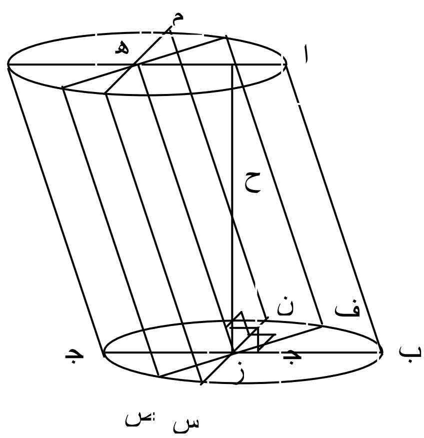
ولنخرج تمثيلا في المثلث المتقدم : خط ن م س مماسًا لدائرة دهـ ز في جهة د على م موازيًا لـ هـ ز. ونخرج ضلعي هـ د ، ز د. فليلقيانه على س، ن. ويقع م إما على د أو بين د، هـ أو بين د، ز.

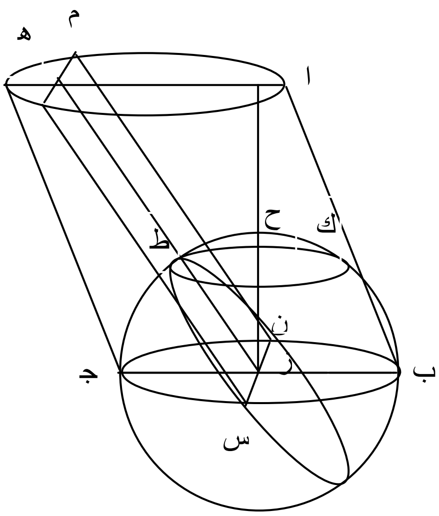
فلأن نسبة ا ب، المجانب، إلى القائم كنسبة مربع ك د إلى سطح ك هـ في ك ز، أي إلى سطح ك ل في ك د، بل كنسبة د ك إلى ك ل، ونسبة د ك إلى ك ل ليست بأصغر من نسبة د هـ إلى هـ س أو نسبة[103] د ز إلى ز ن، لما علم ذلك في مباحث الأوتار والدوائر، فنسبة ا ب، المجانب، إلى القائم كيف كانا ليست بأصغر من نسبة دهـ إلى هـ س أو نسبة[104] دز إلى زن.

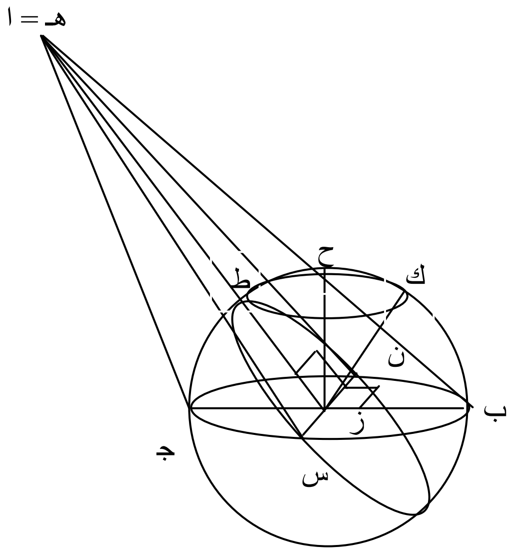
وإن أردت البيان من غير جوالة، فأخرج من ل خطًّا موازيًا لـ ه ز، فيظهر وذلك هو المطلوب.

فهذا، وإن كان تطويلا، لكنه شرح لأوضاع القطوع بل تشريح لأعضائها معين لما نحن بسبيله. فلذلك قصدناه.

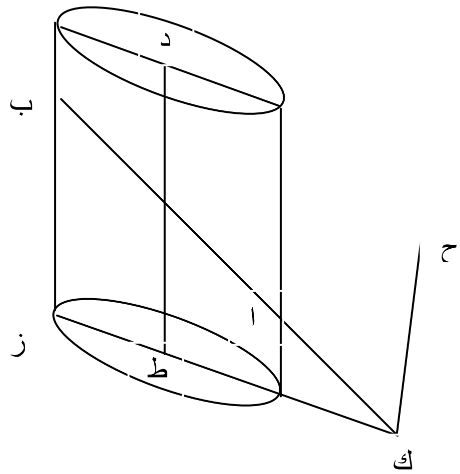


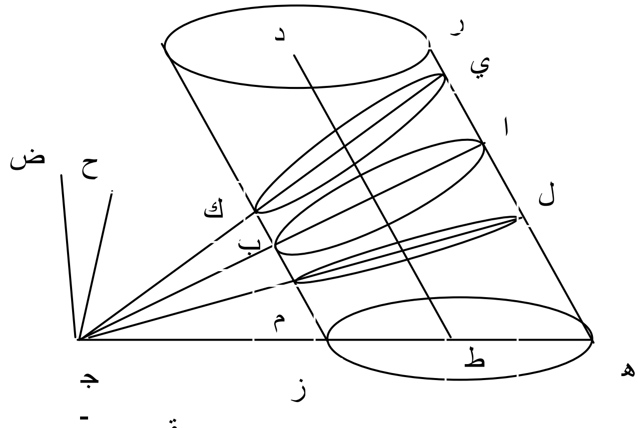


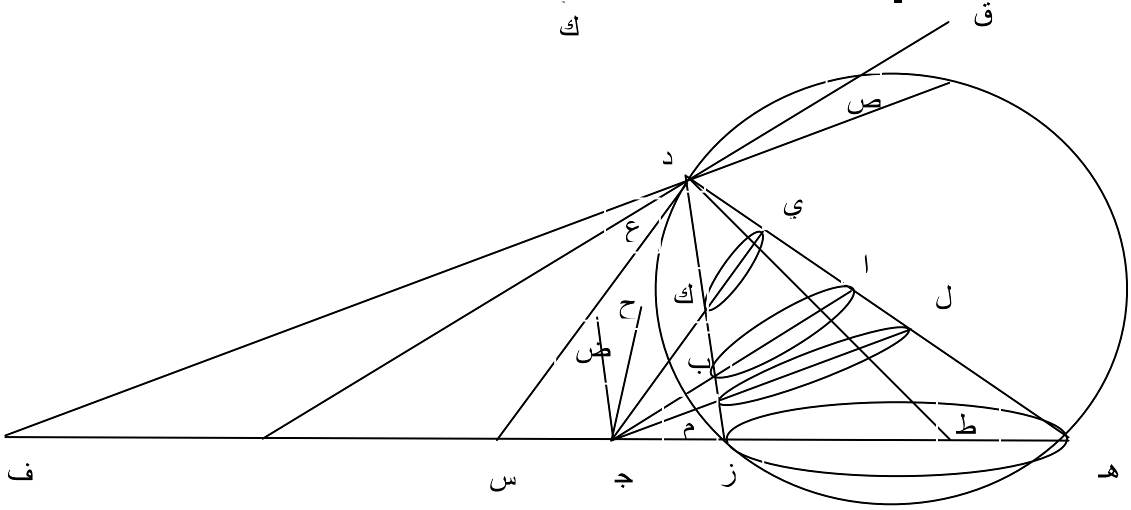


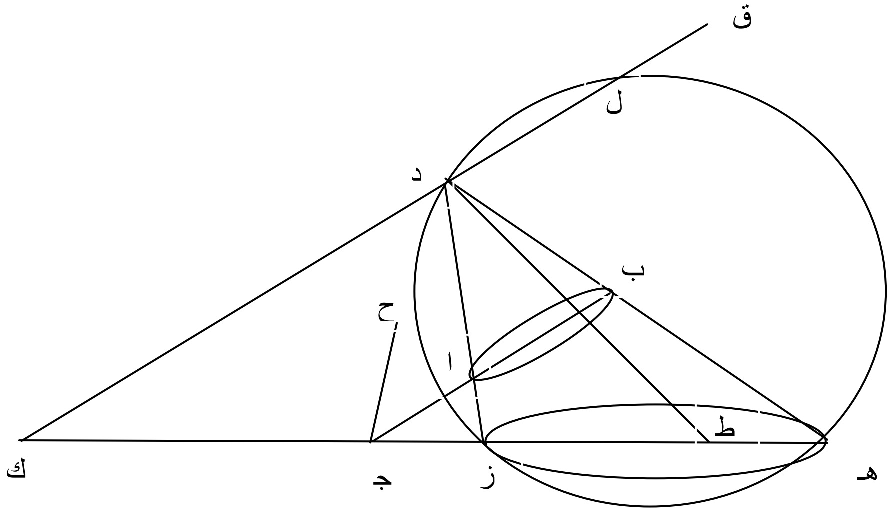


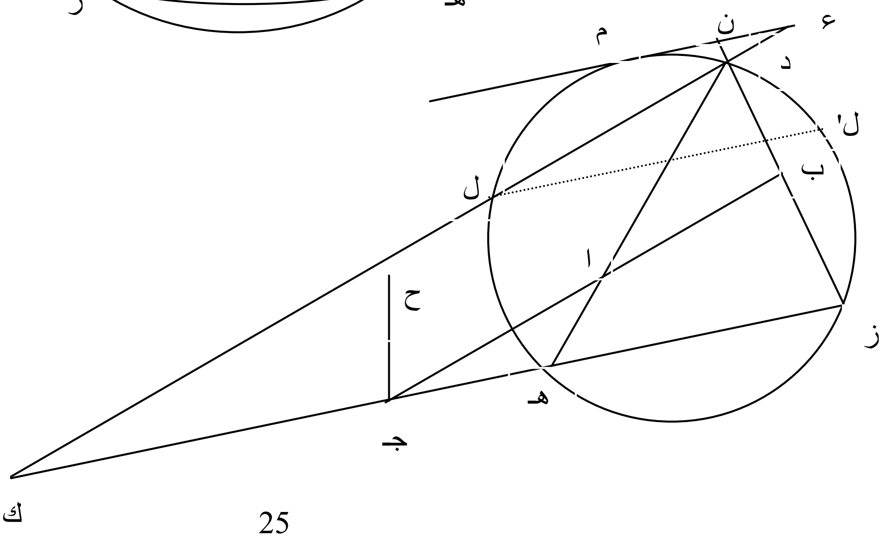
[103] - نسبة : الكلمة ناقصة.
[104] - نسبة : الكلمة ناقصة.


د
ب
ح
ا
ز
ط
ك


د
ر
ي
ا
ض
ح
ك
ل
ب
م
جـ
ز
ط
هـ


ق
ص
د
ي
ع
ا
ل
ح
ك
ص
ب
م
ط
ف
س
جـ
ز
هـ


ق
ل
د
ب
ح
ا
ط
ك
جـ
ز
هـ


م
ن
ع
د
'ل
ل
ب
ا
ح
ز
هـ
جـ
ك

<قضية 5>
مقدمة :
نريد أن نخرج بين ضلعي مثلث اب جـ خط د هـ موازيا لخط ا ح ومساويا لخط ط. فنخرج من نقطة ي المفروضة على ضلع ا ب مثلا ي ك موازيًا لـ ا ح. فإن كان مساويا لـ ط، فذاك. وإلا، نفصل منه ي م مثل ط ونخرج[105] م هـ موازيا لـ ا ب، فيلقى ا جـ على هـ. فنخرج هـ د موازيا لـ ا ح. فلأن سطح ي م متوازي الأضلاع، فـ هـ د مواز لـ ا ح ومساو لـ ي م بل لـ ط وهو المطلوب.

مقدمة أخرى :
ليكن مثلثا اب جـ، د هـ ز متشابهين وأحاط بهما دائرتان وأخرج من قوسي ب جـ، هـ ز خطا ط ح ك، ن م س موازيين لضلعي ب جـ، هـ ز، وأخرج ضلعا اب، اجـ، فلقيا ط ح ك على نقطتي ط، ك، وضلعا د هـ، د ز، فلقيا ن م س على ن، س.
فنقول : نسبة ا ب إلى ب ط كنسبة دهـ إلى هـ ن. وليكن المركزان ف، ق ونصل ح ف، م ق. فيكونان عمودين على ط ك، ن س، بل على ب جـ ، هـ ز. // 124و// فتكون نقطتا ع، ل منتصفي وتري[106] ب جـ، هـ ز. ونصل ب ح، هـ م.
فلأن قائمة ل كقائمة ع وزاوية ح ب ل كزاوية م هـ ع، لأن قوس ح جـ، التي هي نصف قوس ب ح جـ الشبيهة بقوس هـ م ز، شبيهة بقوس م ز التي هي نصف قوس هـ م ز. ويبقى أو يجتمع زاوية ب ح ل كزاوية هـ م ع. فمثلث ح ب ل شبيه بمثلث م هـ ع.
ولأن زاوية ط ب ل كزاوية ن هـ ع، فيبقى أو يجتمع زاوية ط ب ح كزاوية ن م هـ. وزاوية ن كزاوية ط. فمثلث ط ب ح شبيه بمثلث ن هـ م. ولأن نسبة اب إلى د هـ كنسبة ب جـ إلى هـ ز، بل كنسبة ب ل إلى هـ ع التي هي كنسبة ب ح إلى هـ م التي هي كنسبة ب ط إلى هـ ن، فنسبة ا ب إلى د ه كنسبة ب ط إلى هـ ن. فنسبة ا ب إلى د هـ كنسبة ب ط إلى هـ ن. فبالإبدال نسبة ا ب إلى ب ط كنسبة د هـ إلى هـ ن. وذلك ما قصدناه.

مقدمة أخرى :
لتكن زاوية ا ب جـ قائمة وزاوية د هـ ز أيضًا قائمة وخط اب كخط دهـ ووصل ا جـ، د ز وفصل من ا ب، د هـ خطان متساويان كلاهما فيما يلي القائمة أو في خلافه أو على الخلاف، كخطي ب ح، هـ ط أو د ط، وأخرج ح ي، ط ك موازيين لـ ب جـ، هـ ز ملاقيين لـ ا جـ ، د ز على نقطتي ي، ك. وأخرج، من ي، ك، ي م ، ن ك موازيين لـ اب، هـ د.
فنقول إن كان ب جـ، كـ هـ ز، كان سطح ب ي كسطح هـ ك وبالعكس، أي : وإن كان سطح ب ي كسطح هـ ك، كان ب جـ كَ هـ ز. فلأن ا ب كَ هـ د وب جـ كَ هـ ز في الأصل، فنسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة د هـ إلى هـ ز ونسبة ا ب إلى ب جـ كنسبة ي م إلى م جـ وكنسبة ا ح إلى ح ي. ونسبة د هـ إلى هـ ز كنسبة ك ن إلى ن ز وكنسبة د ط إلى ط ك. فنسبة ي م إلى م جـ و ا ح إلى ح ي وك ن إلى ن ز ودط إلى ط ك واحدة.
وليكن أولا ب ح كَ هـ ط. فـ ك ن كَ ي م للتوازي، وم جـ كَ ن ز لتساوي النسبة. فيبقى ب م كَ هـ ن. فيكون سطح ي ب كسطح هـ ك.
ثم ليكن ب ح كَ دط. فيكون م جـ كَ هـ ن ويبقى ب م، أي ح ي، كـ ن ز. ولأن نسبة ي ح إلى ح ا كنسبة ك ط إلى ط د، فضرب ي ح في ط د، أي في ب ح الذي هو سطح ب ي، كضرب ح ا، أي هـ ط، في ط ك الذي هو سطح ه ك.
أو نقول نسبة جـ م إلى م ي كنسبة زن إلى ن ك. فضرب جـ م، أي هـ ن، في ن ك كضرب ب م في زن، أي في م ي. وهو المطلوب.
ولأن نسبة ي ح إلى ن ك كنسبة ك ط إلى ي م على التكافؤ، لتساوي السطحين وزاويتيهما، أو نسبة د ح إلى ك ط كنسبة ك ن إلى ي م، فإن كان ب ح كَ هـ ط، كان ي ح كَ ط ك و ح ا كَ ط د. فنسبة ي ح

---
[105] - نخرج : نحر.
[106] - وتري : وتر.

إلى ط ك كنسبة ح ا إلى ط د، بل نسبة جـ ب إلى ب ا كنسبة ز هـ إلى هـ د. وب ا كَ هـ د. فـ ب ح كَ هـ ز.

و إن كان ب ح كَ ط د، كانت[107] نسبة ي ح إلى هـ ط، بل إلى ح ا، كنسبة ك ط إلى ب ح أي إلى ط د. فكانت أيضا نسبة جـ ب إلى ب ا كنسبة ز هـ إلى هـ د. فـ ب ح كـ هـ ز. وذلك ما قصدناه.

<بداية نص القضية 5 في المخطوط >

نريد أن نعلم هل يقع في مخروط معلوم قطع مثل قطع معلوم الاسطوانة معلومة أي مثله في الكم والكيف أي في القدر والقطر وخطوط الترتيب وزواياه.

فليكن القطع ا ب في اسطوانة ا ب جـ د وليكن المربع الذي يقوم على فصله مع القاعدة فصل القطع معها على قوائم مربع أ جـ د ب وفصله مع القاعدة جـ د وفصل القطع معها القائم على جـ د، هـ ز.

وليكن القطر القائم ا ح ، وواحد من خطوط ترتيبه ط ي.

والمخروط المفروض ك ل م. وليقع فيه على سبيل التحليل، قطع ن س مثل قطع ا ب في الكم والكيف.//124ظ// وليكن قطره القائم ن ر. ونفصل ن ش مثل ا ط، ونخرج خط ترتيب ش ت.

فلأن القطعين فرضا متساويين في الكم والكيف، فكما أن سطح قطع ن س مساو لسطح قطع ا ب فكذلك قطر ن س كقطر أ ب، وزاوية ترتيب أ ط ي كزاوية ترتيب ن ش ت، وخط ترتيب ش ت كخط ترتيب ط ي، وإذ هما كذلك، فلو وضعت نقطة ا على نقطة ن وأطبق قطر ا ب على قطر ن س وقعت نقطة ب على نقطة س وط على ش وزاوية ا ط ي على زاوية ن ش ت ونقطة ي على نقطة ت[108] وكذلك كل خط ترتيب يقع على مساويه المساوي البعد له عن رأس القطع.

فلذلك ينطبق محيط القطع على محيط القطع فيتساويان أيضا. ويتساوى القطران القائمان أيضا.

<برهان ذلك>

وذلك أنه لما كان عرض ا ط كعرض ن ش وزاويتا ا، ن قائمتين وخط ن س كخط ا ب وسطح ش ن في ن ر الناقص عن تمام ن ر سطحا شبيها بسطح س ن في ن ر، هو كسطح ا ط في ا ح الناقص عن تمام ا ح سطحا شبيها بسطح ا ب في ا ح لتساوي مربعي ي ط ش ت المساويين لذلك السطحين فلذلك يكون قطر ا ح القائم كقطر ن ر القائم. ويقع ح على ر عند التطبيق.

ونخرج السطح الذي يقوم على فصله مع القاعدة فصل قطع ن س معها وهو ع ف. فيحدث مثلث ك ل هـ. ونخرج ك ص موازيا لـ ز ع وندير على مثلث ك ل م دائرة.

فلأن نسبة مربع ك ص إلى مسطح ل ص في ص م كنسبة ن س المجانب إلى ن ر القائم فهي كنسبة ا ب الى ا ح. فإن كان ا ب مساويا لـ ا ح كان مربع ك ص مساويا لسطح ل ص في ص م. فكان ك ص مماسا للدائرة لأنه لو قطعها[109] حينئذ على ق مثلا لكان سطح ك ص في ص ق كسطح ل ص في ص م أي كمربع ك ص. وسطح ص ك في ص ق لاختلافهما إما أعظم أو أصغر من مربع ك ص. هذا خلف.

وإن كان ا ب أعظم من اح قطع ك ص الدائرة على ق بين نقطتي ك، م لأن حينئذ يكون مربع ك ص أعظم من مسطح ل ص في ص م. فلو ماسها على ك كان مربع ك ص مساويا لمسطح ل ص في ص م. هذا خلف.

لو قطعها على ق بين ك، ل كان مربع ك ص الذي هو أعظم من مسطح ل ص في ص م أعظم من مسطح ك ص في ص ق وهو بعضه. هذا خلف.

وإن كان ا ب أصغر من ا ح ولم يكن بالضرورة لوقوعه في مخروط ك ل م، فنسبة[110] ا ب إلى ا ح أصغر من نسبة م ك أو ل ك إلى ما يقع منه بين ا أو م. والخط المماس للدائرة ك ل م في جهة ك. فقطع ك ص للدائرة بين ك، ل لأنه لو ماسها أو قطعها بين ك، م كان مربع ك ص مساويا لسطح ك ص في ص ق أو أعظم منه وهو حينئذ أصغر منه. هذا خلف.

---

[107]- كانت : كان.

[108] - ت : ط.

[109]- قطعها : قطعه.

[110]- فنسبة : نسبة.

ولا بد من القطع أو المماسة لوجود الملاقاة على ك. فيقطعها بين ك، ل. ثم إنه إن كانت[111] نقطة ق بين ك، ص أمكن أن يكون مثلث ك ل م متساوي الساقين أومختلفهما وك م هو الأقصر أو هو الأطول. وإن كانت ق منطبقة على ك، لم يمكن أن يكون المثلث متساوي الساقين. لأنا إذا نصفنا ل م على ث وأخرجنا ك ث، يلزم في المتساوي الساقين أن تكون زاوية ث قائمة و ك ث قطرا وزاوية ث ك ص أيضا قائمة، لخروج ك ص مماسا. فيتوازى ك ص، ل م. هذا خلف.

بل يكون أبدا ك م أقصر من ك ل لأنه، لما كان ضرب ص ل في ص م كمربع ك ص، كانت نسبة ل ص إلى ص ك كنسبة ك ص إلى ص م. وزاوية ص مشتركة. فمثلثا ل ص ك، ك ص م متشابهان وزاوية ص ك م كزاوية ل. أو نقول ص ك مماس وك م مقاطع. فزاوية م ك ص ككل زاوية تقع في قطعة م ك ل على التبادل وزاوية م أعظم من زاوية م ق ص. فهي أعظم من زاوية ل. فـ ل ك أبدا أطول من م ك. وإن كانت نقطة ق واقعة على قوس ل ك، كان أيضا ضلع ك م أقصر من ك ل وذلك أن سطح ل ص في ص م كسطح ق ص في ك ص. فإذا وصلنا ل ق كانت نسبة ل ص إلى ص ق كنسبة ك ص إلى ص م وزاوية ص مشتركة. فمثلث ك ص م شبيه بمثلث ل ص ق على خلاف الوضع. فزاوية //125و// م ك ص كزاوية ص ل ق. فهي أعظم من زاوية ص ل ك. فزاوية ل م ك أعظم كثيرا من زاوية م ل ك. فـ ك م أقصر من ل ك.

أيضا فلأن زاوية ترتيب ف ع ن كزاوية ترتيب ز هـ ا، فإن كانت زاوية ز هـ ا قائمة، كانت زاوية ف ع ن أيضا قائمة وزاوية ف ع ل قائمة فـ ف ع عمود على سطح ك ل م وكل من سطحي القاطع والقاعدة عمود على سطح المثلث.

وإن لم تكن زاوية ز هـ أ قائمة، فإحدى زاويتي الترتيب اللتين عند هـ أو ع حادة. فلتكن ف ع ن هي الحادة. ونخرج عمود ع خ على خط ل م في سطح المثلث وف ع عمود عليه في سطح القاعدة. فزاوية ف ع خ هي زاوية ميل سطح ك ل م المار بالسهم على سطح القاعدة وهي أصغر جميع الزوايا التي تحيط بها خط ف ع والخطوط الخارجة من ع في سطح المثلث.

فزاوية ف ع ن، إما أن تكون هي بعينيها زاوية ف ع خ وذلك إذا انطبق ع خ على ع ن، وإما أن تكون هي أعظم من زاوية ف ع خ إذا وقع ع خ في إحدى جهتي ع ن.

وإذا وقع في إحدى الجهتين كانت زاوية ن ع خ أصغر أبدا من زاوية الترتيب الحادة.

<برهان ذلك>

ولنتصور على مركز ع كرة تقطع خطوط ن ع، م ع ، خ ع على نقط ذ، ظ، غ، وخط ع ف على لا ونخرج قوس لا ذ، فهي قوس زاوية الترتيب، وقوس لا غ، فهي قوس الميل. ولأن م ع عمود على ملتقى ف ع، خ ع، فهو عمود على سطح عظيمة لا غ. ونقطة ظ قطب لها وقوسا غ ظ، ظ لا ربعان وقوس غ لا للميل وقوس لا ذ للترتيب، كل منهما أقل من الربع.

ولأن قطعة غ ذ قائمة على قطر غ ع لعظيمة غ لا وقوس غ ذ أقل من نصف[112] القطعة، فأقصر الخطوط الواصلة من ذ إلى محيط غ لا هو خط ذ غ. فـ ذ غ أقصر من ذ لا. فقوس ذ غ أقل من قوس ذ لا. فزاوية ن ع خ أصغر أبدا من زاوية ن ع ف. فزاوية ن ع م، أعني زاوية ك ص م الباقية عن القائمة، أعظم أبدا من تمام زاوية الترتيب من القائمة.

< ملاحظة: >

وأيضا: فإن كانت زاوية ميل مربع ا جـ د ب على سطح قاعدة الأسطوانة كزاوية ميل مثلث ك ل م على سطح قاعدة المخروط، كانت زاوية ذ ع غ كتمام زاوية ب هـ د عن القائمة. فتكون زاوية ن ع م، بل زاوية ك ص م، كزاوية ب هـ د.

وبالعكس، إن كانت زاوية ب هـ د كزاوية ن ع م، كان ميل غ ع لا كميل مربع ب جـ د على سطح قاعدة الأسطوانة.

<برهان ذلك>

---

[111]- كانت : كان. وهكذت فيكت بعد.

[112]- من نصف : من الربع نصف.

وذلك أنا نتصور على مركز هـ كرة مساوية للمتصورة على ع ونخرج من هـ على د هـ عمود هـ ض في سطح المربع.

فتقول، في الدوائر المتوهمة على الكرة :

لأن دائرة ز ض قائمة على قطر دائرة ض د ودائرة لا غ قائمة على قطر دائرة غ ظ وهي متساوية. وقوس لا غ فصلت كقوس ز ض لتساوي المثالين[113] وهما أقل من نصفي القطعتين المتساويتين المعمولتين على القطرين. ووتر ترتيب لاذ، أخرج كوتر ترتيب ز ت . فقوس ت ض المنفصلة كقوس ذ غ. فزاوية ذ ع غ كزاوية ب هـ ض. فزاوية ب هـ د كزاوية ق ص م.

وإن كانت زاوية ن ع م كزاوية ب هـ د، فنقول : قطعة ذ غ وقطعة ت ض مع ما يتصل بهما قائمتان على قطري غ ع، هـ ض من دائرتي لا غ، زض[114] وقوسا ذ غ، ب ض متساويتان[115]، غير نصفي القطعين. وأخرج خط ذ لا كخط ت ز. فقوس لا غ كقوس ز ض. فالميلان متساويان.

ويلزم من هذا أنه إن لم يكن الميلان متساويين وزوايا الترتيب متساوية، لم تكن زاويتا ب هـ د، س ع م متساويتين. وإلا لزم تساوي الميلين[116]. وإن لم تكن هاتان الزاويتان متساويتين على ذلك التقدير، أي تقدير تساوي زوايا الترتيب، لم يكن الميلان متساويين، وإلا لزم تساوي هاتين الزاويتين.

بل يلزم أنه إذا كانت[117]، مثلا، زاوية ف ع خ أعظم من زاوية ز هـ ض، كانت زاوية ذ ع غ أصغر من زاوية ب هـ ض.

وذلك أنا نفصل غ و كـ ض ز. فإذا وصلنا وذ //125ظ// كان أقصر من ذ لا أي من ز ب لأن التقدير يساويهما. وذلك أن ذ و أقرب من ذ غ من ذ لا.

فلو أخرجنا من و خطا إلى محيط ظ ذ مساويا لخط زاوية ز هـ ب وقع طرفه بين ذ، ظ وكان من ذلك الموقع إلى غ مساويا لزاوية ب هـ ض. فزاوية ذ ع غ أصغر من زاوية ب هـ ض.

وإذا كانت زاوية ذ ع غ أعظم من زاوية ب هـ ض، كانت زاوية لا ع غ أصغر من زاوية ز هـ ض لأنه حينئذ إن كانت زاوية لا ع غ كزاوية ز هـ ض كانت زاوية ذ ع غ كزاوية ب هـ ض. هذا خلف.

وإن كانت زاوية لا ع غ أعظم من زاوية ز هـ ض كانت زاوية ذ ع غ أصغر من زاوية ب هـ ض. هذا خلف.

وأيضا يلزم من تساوي زاويتي الميلين وتساوي زاويتي ذ ع غ، ب هـ ض تساوى زاويتي الترتيب ،أعني تساوي زاويتي ب هـ ز، س ع ف.

<برهان : >

وذلك أن قطعتي لا غ، ز ض يكونان حينئذ معمولتين قائمتين على قطري ض هـ، غ ع من دائرتي ض ت، غ ذ[118]. وفصلت منهما قوسا لا غ، ز ض متساويتين أقل من نصفهما. وفصلت قوسا ذ غ، ت ض متساويتين. فلذلك يكون وترا لا ذ، ز ت الموصولين متساويين. فقوساهما اللتان هما قدرا زاويتي الترتيب متساويتان وهو المطلوب.

فقد علم أن كل اثنين ساوتا، من زوايا الميل والترتيب والتي بين قطر القطع وقاعدة المثلث، نظيرتهما من الميل والترتيب والتي بين قطر القطع وقاعدة المربع، تساوت الباقيتان النظيرتان.

وإذ تقدم ذلك وتقرر، فنقول في التركيب :

إما أن تكون زوايا ترتيب قطع أ ب قوائم أو غيرها وكيف كان. فإما أن يكون قطره المجانب أطول من قطره القائم أو بالعكس أو مساويا له، فهذه ستة أقسام. ولا يخلو مخروط ك ل م من أن يكون قائما أو مائلا. فالنظر في اثني عشر قسما.

أما إذا كانت الزوايا قوائم والمجانب كالقائم وهو الدائرة كما علم، ليس إلا.

---

[113]- المثالين : المثلين، وهكذا فيما بعد.

[114]- زض : زض وتلت.

[115]- متساويتان : متساويتين

[116]- الميلين : المثلين.

[117]- كانت : كان.

[118] - ض ت، غ ذ : ض ذ غ غ.

< برهان ذلك: >

فالأمر فيها، سواء كان المخروط قائما أو مائلا، سهل.

فإنا نخرج، بين ضلعين من أي مثلث كان من المثلثات المارة بالسهم، خطا مساويا لقطرها، موازيا لقاعدة المثلث. ونخرج عليه سطحا موازيا للقاعدة. فيحدث دائرة مساوية للمفروضة لتساوي قطرهما.

وفي المائل من المخروط، ممكن أن توجد دائرة أخرى من القطع المخالف في الوضع مساوية للمفروضة. ولنخرج المثلث الذي يقوم على قاعدة المخروط المائل، عمودا. وهو كما علم مختلف الضلعين. وليكن هو مثلث ك ل م. ونُدير عليه دائرة ونخرج ك ص مماسا لها. فلأن زاوية م ك ص مساوية لزاوية م ل ك وزاوية م ل ك، لكونها أصغر من زاوية ل م ك، فهي مع زاوية ك م ص أصغر من قائمتين. فزاويتا ك م ص، م ك ص أصغر من قائمتين. فلذلك يلقى ك ص، ل م في جهة م. ونخرج ن س موازيا لـ ك ص مساويا لـ ا ب. ونفرض نقطة على ن س وهي ش. ونخرج منها عمود على سطح المثلث وهو ش ت. ونخرج سطح ت ش ن. فيحدث قطع ن ص. ولقيام سطح القطع على سطح المثلث وسطح المثلث على سطح القاعدة، تكون خطوط الترتيب أعمدة على قطر ن س. ولأن زاوية ن س ك كزاوية س ك ص، بالتبادل، وهي كزاوية ك ل م، لأنها ككل زاوية تقع في تلك القطعة. فزاوية ن س ك كزاوية ك ل م. ولذلك زاوية ك ن س كزاوية ك م ل. فقطع ن س مخالف الوضع قائم خطوط الترتيب. فهو دائرة ومساوية لدائرة ا ب للمساواة قطريهما.

ثم، إن كان القطع غير دائرة، فإن كانت خطوط ترتيبه قائمة على قطره وكان مع ذلك قطره المجانب أطول من قطره القائم، أمكن وقوعه في المخروط القائم باعتبار أي مثلث كان من المارة بالسهم.

وفي المخروط المائل، بحسب المثلث القائم على القاعدة دون غير من المائلة عليها.

وليكن المثلث القائم على قاعدة المخروط، القائم أو المائل، ك ل م. ونُدير عليه دائرة ونخرج ك ص بحيث يلقى محيط الدائرة على ق بين ك ص من قوس ك م ويلقى وتر ل م خارج الدائرة في جهة م وتكون نسبة //126و// ك ص الى ص ق كنسبة ا ب المجانب الى ا ح القائم. وهذا ممكن لأن نسبة ا ب الى ا ح فرضت نسبة أعظم الى أصغر وذلك مما علم في أول مباحث الخطوط والزوايا بحسب وقوعها[119] في الدوائر.

ونخرج ن س موازيا لـ ك ص مساويا لـ ا ب، ومن ش، المفروضة على ن س، عمود ش ت على السطح. فيحدث قطع ن ت س. ونجعل نسبة مربع ك ص الى سطح ل ص في ص م كنسبة ن س الى ن ر فـ ن ر هو القطر القائم. ولأن نسبة ك ص الى ص ق أعني نسبة ا ب الى ا ح هي كنسبة مربع ك ص الى مسطح ك ص في ص ق، لاشتراك ارتفاع ك ص، أعني كنسبة مربع ك ص الى مسطح ل ص في ص م، فنسبة ا ب الى ا ح كنسبة ن س إلى ن ر وا ب كـ ن س. فـا ح كـ ن ر. وليكن عرض ن ش كعرض ا ط. فلأن زاويتي ن، ا قائمتان و س ن كـ ا ب ون ر كـ ا ح، فسطح ن ش في ن ر، ناقصا عن تمامه سطحا شبيها بسطح ن س في ن ر، أعني مربع ش ت، كسطح ا ط في ا ح، ناقصا عن تمامه سطحا شبيها بسطح ا ب في ا ح، أعني كمربع ط ي. فخط ترتيب ش ت كخط ترتيب ط ي وزاويتا ط، ش قائمتان.

وكذلك كل خطي ترتيب يفرضان على بعدين متساويين عن نقطتي ن، ا، يكونان متساويين، فإذا أطبق القطع على القطع، كما مر، تطابقا من غير تفاوت، فهما متساويان بحسب السطح والقطر وخطوط الترتيب وزواياه والمحيط والقطر القائم جميعا.

وإن كان، مع ذلك، قطره المجانب[120] أقصر من قطره القائم، لم يمكن أن يقع ذلك في المخروط القائم، لما علم من أن كل قطع يقع فيه أينما يكون قطره المجانب أطول من قطره القائم.

وأما في المخروط المائل، فيمكن أن يقع ذلك بحسب المثلث القائم على القاعدة دون غيره. ونشرط أن لا تكون نسبة قطره المجانب الى قطره القائم أصغر من نسبة أحد ضلعي ذلك المثلث الى ما يقع منه بين قاعدته والخط المماس للدائرة المحيطة به في جهة الرأس لما علم من أن ذلك لازم لكل قطع يقع في مخروط. فإذا انتفى اللازم انتفى الملزوم.

فلو فرض أن نسبة القطر المجانب الى القائم في القطع الأسطواني أصغر من نسبة إحدى ضلعي مثلث في مخروط إلى ما يقع منه بين القاعدة والمماس، من جهة الرأس الموازي للقاعدة، لم يمكن أن يقع ذلك القطع في ذلك المخروط بحسب ذلك المثلث. ولعله إن وقع فيه وقع بحسب مثلث آخر.

119- وقوعها : وقوعهما.

120- المجانب : الكلمة ناقصة.

ولا يتوهمن أنا، لو طولنا ضلع ذلك المثلث ووسعنا قاعدة المخروط، أمكن وقوع القطع المفروض. بحسب هذا المثلث الأكبر الذي هو مع ذلك الأصغر في سطح واحد. فإنا بينا أن نسبة ضلع هذا المثلث الأكبر إلى ما يقع منه بين قاعدته والمماس الموازي كنسبة ضلع ذلك المثلث الأول إلى ما يقع منه بين قاعدته والمماس الموازي، لتشابه المثلثين. فكل نسبة هي أصغر من هذه فهي أصغر أيضا من تلك.

فلتكن شريطة عدم أصغرية النسبة مرعية، ونخرج المثلث القائم على سطح المخروط المائل المفروض //126ظ// وهو ك ل م. ونديرعليه دائرة ونخرج ك ص يقطع محيطها على ق عن ك في خلاف جهة ص ويلقى وتر ل م في جهة م خارج الدائرة وتكون نسبة ك ص إلى ص ق كنسبة ا ب إلى ا ح. ونخرج ن س موازيا لـ ك ص ومساويا لـ ا ب. ونخرج عمود ش ت وقطع ن س، ونجعل نسبة مربع ك ص إلى مسطح ل ص في ص م كنسبة ن س إلى ن ر ونسبة مربع ك ص إلى مسطح ل ص في ص م، أعني إلى مسطح ص ق في ك ص، كنسبة ك ص إلى ص ق، أعني كنسبة ا ب إلى ا ح. فـ ا ح كـ ن ر وإذا فصلنا ن ش كـ ا ط، تبين أن خط ترتيب ش ت كخط ترتيب ط ي. وكذلك في كل خط ترتيب. وزوايا الترتيب في القطعين قوائم. فقطع ن س كقطع ا ب في القدر والقطر والترتيب.

وإن كانت[121] زوايا الترتيب حادة، فلا يمكن أن يقع في المخروط القائم شئ من ذلك لأن كل قطع يقع فيه، أينما يكون، زوايا ترتيبه قوائم.

وأما في المخروط المائل، فلا يقع ذلك بحسب المثلث القائم لاستلزامه أيضا قيام خطوط الترتيب.

وأما المثلث المتساوي الساقين المائل، فإن كان القطر المجانب أقصر من القائم أو مساويا له، امتنع أيضا وقوعه فيه بحسبه.

وإن كان أطول منه، لم يمتنع عقلا وقوعه بحسبه. ولكن لا قطع مع ذلك بوجوب الوقوع. والمثلث المختلف الساقين المائل، كذلك لا يمتنع وقوع الأقسام الثلاثة بحسبه عقلا ولا يجب قطعيا.

فليكن مثلث ك ل م في المخروط المائل مائلا على قاعدته و ك م ليس أطول من ل م. ونديرعليه دائرة ونجعل نسبة ك ص الى ص ق كنسبة ا ب إلى ا ح. فإن كان مثلث ك ل م متساوي الساقين، ولشريطة أعظمية أ ب، كانت نقطة ق بين ك، ص. وإن كان مختلف الساقين، أمكن كونها على ك أو عنه في إحدى الجهتين. ونخرج ن س موازيا لـ ك ص مساويا لـ ا ب، ونخرجه إلى ع من خط ل م. ونخرج من ع عمود ع ف على خط ع ل في سطح قاعدة المخروط. ونخرج سطح ف ع ن. فالفصل بين هذا السطح والقاعدة، و هو ع ف، عمود على الفصل بين القاعدة ومثلث ك ل م، وهو ل م.

فـ ن س قطع ناقص[122] لقطعه ضلعي ك ل، ك م. وقطره، وهو ن س، كقطر ا ب، بل قطره القائم، أيضا لما مر من الدليل، كقطره القائم. أما زوايا الترتيب، فعلى هذا التقدير، أي تقدير تساوي قطري ن س، ا ب و ن ر، اح،

يمكن، بالإمكان الخارجي، أن يكون ميل مثلث ك ل م على القاعدة كميل مربع ا جـ د على القاعدة. ويمكن أن يكون المثلث أميل ويمكن بالعكس. وذلك أن هذه الأقسام الثلاثة ممكنة في نفس الأمر. ولا تعلق للعمل المذكور بواحد منها إذ يتهيّأ إخراج خطي ك ص، ن س على الوجه المعلوم في كل مثلث، من غير اعتبار القاعدة وميله أو قيامه بعد وجود شرط عدم أصغريهة النسبة المذكورة.

ويمكن بالإمكان العقلي والتردد الذهني أن تكون زاوية ن ع م كزاوية ا هـ جـ، وأن تكونا مختلفتين. وذلك أن زاوية ن ع م تابعة، في الوجود، للعمل المذكور في مثلث معين. ولم يتهيّأ بعد دليل على امتناع واحدة من الأقسام الثلاثة، ولا على وجوبه أو إمكانه. ولكل واحدة منها أو إثنين ممتنع أو واجب. ولا نعلم دليله.

فالأقسام، بحسب هذين الممكنين الخارجي والعقلي، تسعة.

أما إن كان ميل المثلث على القاعدة كميل المربع على القاعدة الأخرى، فإن تساوت مع ذلك زاويتا ن ع م، ا هـ جـ، تساوت زاويتا ترتيب قطعي ا ب، ن س، لما علم. وخطوط الترتيب، لتساوي الأقطار، متساوية. فيتساوى القطعان بدليل التطبيق.

وإن كانت مع ذلك زاويتا ن ع م، ا هـ جـ مختلفتين، لم تتساو زاويتا الترتيب في القطعين.

وإن اختلف الميلان، فإن تساوت مع ذلك زاويتا ن ع م، ا هـ جـ، اختلفت[123] زاويتا الترتيب. وإلا لتساويا ولزم من المساواتين تساوي الميلين. هذا خلف.

---

[121]- كانت : كان. وهكذا فيما بعد.

[122]- ناقص : وناقص.

[123]- اختلفت : اختلف.

وإن اختلفت[124] هاتان الزاويتان أيضا، فإن وقع في كل طرف أعظم وأصغر لم يمكن تساوي زاويتي الترتيب.

وإن وقع الأعظمان في طرف واحد، أي طرف كان، والأصغران آخر، لم يمتنع عقلا أن تتساويا زاويتا الترتيب. //127و// ولا يمتنع أيضا أن يختلفا.

وكل وضع يعلم مساواة زاويتي الترتيب، مضافا إلى مساواة الأقطار، بحكم مساواة القطعين، بل بمماثلتهما. وفي كل وضع يعلم مساواة الأقطار ومخالفة زاويتي الترتيب أو لا يعلم لا المخالفة ولا المساواة، لم يمكن الجزم بمخالفة القطعين في المقدار. فلعلهما متساويان بدليل غير التطبيق. ولكن يحرم بعدم المماثلة فيما يعلم الاختلاف. وهو أعم من عدم المساواة لكون المساواة أعم من المماثلة.

وأيضا إن لم تكن زاوية ترتيب قطع ا ب أصغر من زاوية ميل المثلث على القاعدة، يتهياء لنا أن نعمل زاوية ترتيب ن ع ف كزاوية ترتيب ا هـ ز بأن نفصل في الكرتين المتوهمتين من قوس ف خ قوسا مساوية لقوس ا هـ ز. ونتّخذ نقطة ف قطبا وندير عليه، ببعد المفصولة، دائرة. فلأنها ليست بأصغر من قوس الميل، تلقى هذه الدائرة سطح المثلث على نقطة. فنصل بين ع وتلك النقطة بخط ع ن، ونخرج سطح ف ع ن. فيحدث قطع مساوية[125] زاوية ترتيبه لزاوية ترتيب قطع ا ب. إلا أنه لا امتناع من العقل في أن لا يكون قطر ن س قطر ا ب أو، إن اتفق، أن كان قطر ن س كقطر ا ب، لكن لم يكن ن ر كـ ا ح. كما لا امتناع أيضا في أن يكونا كهما. فلا يحصل تمام الغرض إذ لا يلزم من مجرد تساوي زاويتي الترتيب تساوي القطعين. كما لم يلزم من مجرد تساوي الأقطار، ذلك.

وأيضا لو كان قد سبق لنا دليل أو تأتى على أن لنا أن نخرج خط ك ص الى وتر ل م المعين من نقطة ك المعينة على المحيط بحيث ينقسم بالوتر والمحيط على نسبة معلومة وتكون مع ذلك زاوية ك ص م كزاوية معلومة، لتأتي الدليل فيما يكون ميل المثلث كميل المربع بأن نخرج ك ص على النسبة المطلوبة. وعلى أن تكون زاوية ك ص ل كزاوية ا هـ جـ. وأمكن أيضا أن يتأتّى، فيما يختلف الميلان، بجملة التحليل أو غيره في طلب كمية زاوية ن ع ل وطلب التقارب بينها وبين زاوية ا هـ جـ بحسب التقارب بين الميلين، سواء كان التفاوتان على نسبة واحدة أو لم يكونا على نسبة. لكن لم يسبق في ذلك شئ. والنظر فيه يجدي إلى التطويل. ويتضح فيما بعد انشاء الله تعالى، أي القطوع يساوي أيها بدلائلها.

وأما إن أردنا أن نعمل قطعًا، مثل قطع معلوم في أسطوانة معلومة[126]، في مخروط ما، أي نجد مخروطًا يحيط بذلك القطع.

<برهان ذلك :>

فليكن القطع ا ب، والمربع الذي هو بحسبه ا ب جـ د وقطره القائم ا ح وفصله مع القاعدة هـ ز. ونفرض خطا ما، وليكن ك ص، ونجعل نسبة ك ص الى ص ق كنسبة ا ب إلى ا ح .

فـ ق، إما أن يقع على ك ا إلى جهة ص أو يقع على ك أو عنه إلى خلا ف جهة ص. ونعمل على ص زاوية ك ص ل حادة، وأعظم من تمام زاوية هـ ز ا، التي هي زاوية الترتيب، عن قائمة، إن كانت زاوية الترتيب حادة.

ونخرج من نقطة ك، إن وقع ق على ك، أو منتصف ك ق إن وقع في إحدي جهتيه، عمود لـب ث على ك ص. فلكون زاوية العمود قائمة وزاوية ص حادة، يلتقي العمود خط ص ل على ث وينصف لـب ث على لجـ. ونصل[127] لجـ ق. وندير على مركز لجـ، ببعد لجـ ق أو على نقطة هي على خط لجـ ش عن نقطة لجـ إلى جهة ث، وببعد تلك النقط عن نقطة ق، دائرة. فلكون لجـ ق أو الواصل بين تلك النقطة و ق أطول من لجـ ث أو من الواصل بين تلك النقطة و ث، ومساويا لجـ ك أو الواصل بينها و ك، وأقصر من لجـ ص أو الواصل بينها و ص. وتمر تلك الدائرة بنقطة ك أيضا، وتقطع خط ص ل على نقطتي ل، م. ولا يصل إلى نقطة ص البتة. فتقع كدائرة ك ق م ل. ونصل بين ك ونقطتي م، ل بخطي ك ل، ك م. ونخرج بين ضلعي ك ل، ك م، خط ن س، مساويا لـ ا ب، موازيا لـ ك ص. ونجعل نسبة مربع ك ص إلى مسطح ل ص في ص م كنسبة ن س في ن ر، القائم عليه. فيكون هو القطر القائم ومساويا لـ ا ح كما علم.

---

[124]- اختلفت : اختلف.

[125]- مساوية : مساو.

[126]- مثل قطع معلوم في أسطوانة معلومة : مثل قطع معلوم الاسطوانة معلومة.

[127]- نصل : نصل على.

ونخرج ن س إلى ع //127ظ// من ل ص. ونخرج في سطح المثلث ع خ عمودا على ل ص ونخرج ع ف عمودا على سطح المثلث.

فإن كانت زاوية ترتيب قطع ا ب قائمة، صيرنا خط ل م قطر الدائرة في سطح ف ع ل وأدرنا أحد ضلعي ك ل، ك م حول محيطها، فحدث مخروط. وأخرجنا سطح ف ع ن، فحدث قطع ناقص مساو في القطرين وخطوط الترتيب وزواياه لقطع ا ب.

وإن كانت زوايا ترتيب[128] قطع ا ب حادة، فلأن زاوية ن ع ل أعظم من تمام زاوية الترتيب من قائمة، وهي تمام زاوية ن ع خ من القائمة. فزاوية ن ع خ أصغر من زاوية الترتيب، التي هي زاوية ا هـ ز.

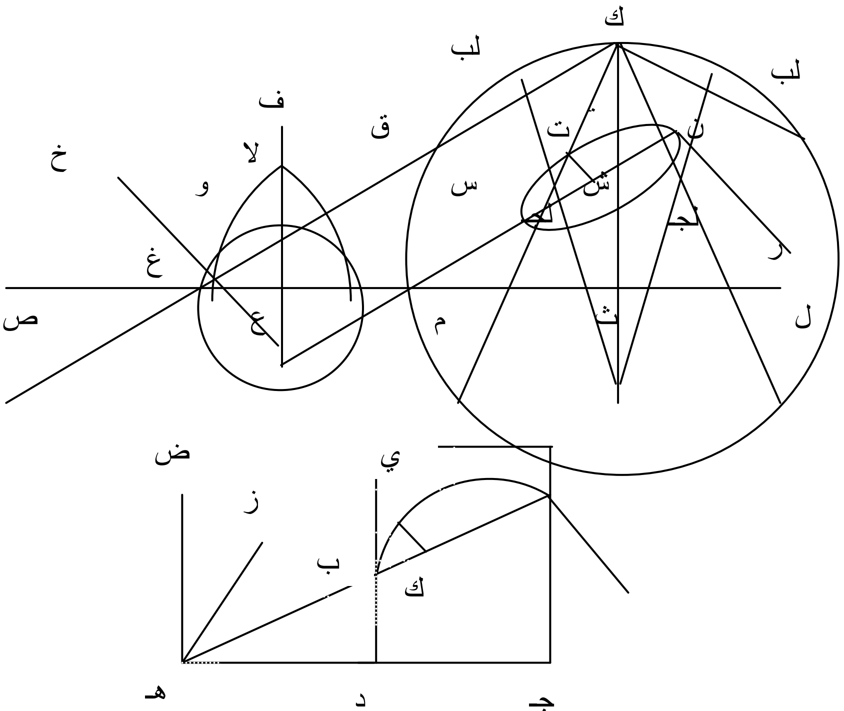
ففي الكرة المتوهمة، اذا أخرجنا قوس ذ غ وصيرناها بعضا من قوس زاوية الترتيب وأدرنا على قطب ذ ببعد تلك القوس، أعني المساوية لقوس الترتيب، لقيت تلك الدائرة قوس ذ لا التي هي في الربع، بين نقطتي ذ، لا. فلذلك يلقى سطح لا ع غ، العمود الذي[129] عليه خط ع ل على نقطة بين نقطتي لا، غ. ولتكن تلك النقطة و. ونصل ع و. فلأن ل ع عمود على سطح لا ع غ، تكون زاوية و ع ل قائمة[130]. وظاهر أن القوس المخرج من ذ إلى و هي كقوس زاوية الترتيب. فنخرج السطح الواقع بين خطي ع و، ع ل وندير في هذا السطح دائرة قطرها ل م وندير على محيط تلك الدائرة إحدى خطي ك م، ك ل مثبتا نقطة ك. ونخرج سطح و ع ل. فيحدث في المخروط الذي رأسه ك وقاعدته دائرة ل م، من سطح ل ع و، قطع ن س من سطح ن ع و. فشرط قيام أحد الفصلين، وهو ع و، على الآخر، وهو ع ل، محفوظ في كونه قطعا. وكذلك قطع الضلعين في كونه ناقصا.

ومساواة القطرين وخطوط الترتيب وزواياه الحادة لقطري قطع ا ب وخطوط ترتيبه وزواياه ظاهرة، وهي تدل على المماثلة.

فقد وجدنا مخروط ك ل م محيطا بقطع ن س المماثل لقطع ا ب وهو المطلوب.

وإذ ليس لمقدار زاوية ك ص ل الحادة مطلقا، أو الحادة الزائدة على تمام زاوية ز هـ ا، حدّ معين، وكذلك ليس لمركز الدائرة إذا كان عن لجـ في جهة ث موضوع معين وتَـعَـيُّن المخروط الواقع على[131] قطع ن س المماثل لقطع ا ب فيه يتعلق بهما، فممكن أن يوجد من قبل ذلك مخروطات بلا نهاية[132] كلها قابلة لقطع مثل قطع ا ب الأسطواني.

وهذا مكمل وذلك ما أردناه.



---

[128]- ترتيب : الكلمة ناقصة.
[129]- عليه : الكلمة ناقصة.
[130]- قائمة : الكلمة ناقصة.
[131]- على : الكلمة ناقصة.
[132]- نهاية : الحرفان الأخيران فوق السطر.

<قضية 6>

إذا جاز مثلث بسهم مخروط وقطعه سطح قاطعًا لقاعدته عمودًا ، فصلـُه معها على فصلها مع المثلث، وموازيًا فصلـُه مع المثلث، أعني قطر القطع، لأحد ضلعيه، فكل خط ترتيب، يخرج من أي موضع كان من محيط القطع إلى قطره، موازيـا للعمود المذكور، يقوى على سطح ما يقع بين موقع ذلك الخط ورأس القطع، من قطره، في خط نسبته إلى ما يقع بين رأس القطع ورأس المخروط من ضلع المثلث كنسبة مربع قاعدة المثلث إلى مسطح أحد الضلعين في الأخر.

والخط المنسوب إذا قام على طرف القطر المجانب فهو القطر القائم[133] وتعلم أن القطع هو المكافئ

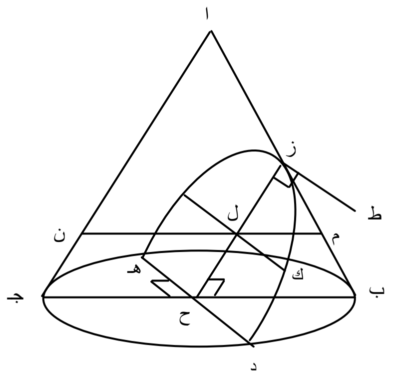
<مثال ذلك: >

فليجز سطح بسهم المخروط وليحدث فيه مثلث ا ب جـ. وليقطعه سطح دهـ ز قاطعا لقاعدته على د هـ وهو قائم على ب جـ عمودا. وفصله مع المثلث، وهو ز ح، مقاطع لضلع ا ب على ز، ومواز لضلع اجـ. ونقطة ح مشتركة بين السطوح الثلاثة[134]. وفرضت ك على محيط القطع. وأخرج ك ل موازيا لـ دح[135]، فهو يقع على ز ح كما تبين. وأخرج من ز ، رأس القطع ، عمود ز ط على قطر ز ح، وصَيَّر نسبة ز ط إلى ز ا كنسبة مربع ب جـ إلى مسطح اب في اجـ.

فالمدعى أن مربع ك ل كسطح ل ز في ز ط

<برهان ذلك: >

وليخرج ، من ل ، م ل ن موازيا لـ ب جـ و ل ك[136] مواز لـ دح. فسطح ك ل م مواز لسطح القاعدة، وزاوية ك ل ن كزاوية دح جـ . فهي قائمة. وك ل م دائرة وم ن قطر. فضرب[137] م ل في ل ن كمربع ل ك.



ولأن نسبة ط ز إلى ز ا كنسبة مربع ب جـ إلى مسطح ب ا في اجـ، فهي مؤلفة من نسبة ب جـ إلى ب ا، أعني من نسبة م ن الى م ا، بل من نسبة ن ل الى ز ا. ومن نسبة ب جـ إلى جـ ا، أعني من نسبة م ن إلى ن ا، بل من نسبة م ل إلى ل ز.

ونسبة سطح م ل في ل ن، أي مربع ل ك، إلى سطح ل ز في ز ا، أيضا مؤلفة من نسبة م ل إلى ل ز ومن نسبة ل ن إلى ز ا. فنسبة ط ز إلى ز ا كنسبة مربع ل ك إلى مسطح ل ز في ز ا//128و// ونسبة ط ز إلى ز ا هي أيضا كنسبة سطح ط ز في ز ل إلى سطح از في ز ل لاشتراك ارتفاع زل.

فنسبة سطح ط ز في زل إلى سطح از في زل كنسبة مربع ل ك إلى سطح ل ز في ز ا. فمربع ل ك كمسطح ل ز في ز ط، وهو المطلوب

وكذلك نبين في كل خط ترتيب آخر.

وهنا يتبين أن نسب مربعات خطوط الترتيب بعضها إلى بعض كنسب أقسام القطر الواقعة بين مواقعها عليه وبين رأس القطع وذلك لاشتراك ارتفاع القطر القائم في السطوح المساوية لها. فنسبة مربع د ح إلى مربع ك ل مثلا كنسبة ح ز إلى ل ز.

---

[133]- القائم : القايم. وهكذا فيما بعد.
[134]- الثلاثة : الثلث. وهكذا فيما بعد.
[135]- د ح : ز ح.
[136]- ل ك : ل.
[137]- فضرب : وضرب.

وظاهر، كما أشير إليه أن هذا القطع يخرج بغير نهاية في طرف ده بحسب خروج ضلع المخروط وخروج قطر زح معهما. فإن زح أينما يخرج لا يخرج عن سطح القطع وذلك ما أردناه.

<قضية 7>

إذا جاز مثلث بسهم مخروط وقطعه سطح قاطعًا لقاعدته على فصل يقوم على فصلها مع المثلث عمودًا وقاطعًا فصله مع المثلث وهو قطر القطع لأحد ضلعيه في جهة القاعدة عن الرأس وللآخر في خلافها، فكل خط ترتيب يخرج من أي موضع كان من محيط القطع إلى قطره، موازيا للعمود المذكور، يقوى على سطح مضاف إلى خط ، نسبته إلى[138] ما يقع من قطر القطع بين ضلعي المثلث موترًا للزاوية الخارجة إليه كنسبة مربع الخط المخرج من رأس المثلث إلى قاعدته موازيا لقطر القطع إلى مسطح ما يقع منها بين موقعه وأحد ضلعي المثلث فيما يقع بينه والضلع الآخر، زائدًا عليه سطحًا شبيهًا بسطح المنسوب في المنسوب إليه المذكورين[139]. وعرض المضاف ما يقع من القطريين مسقط خط الترتيب ذلك ورأس القطع. وكأنك تحدس أن هذا هو القطع الزائد.

وما يقع بين الضلعين خارج المثلث هو القطر المجانب المنسوب إليه. إذا قام عمودًا على طرف المجانب هو القطر القائم، ومنتصف المجانب هو المركز.

وأيضا، فلو أخرج سطح القطع، حدث في المخروط المقابل قطع مساو، بل مماثل، لذلك القطع في القدر والقطرين وخطوط الترتيب وزواياها[140] وموازاتها للعمود المذكور.

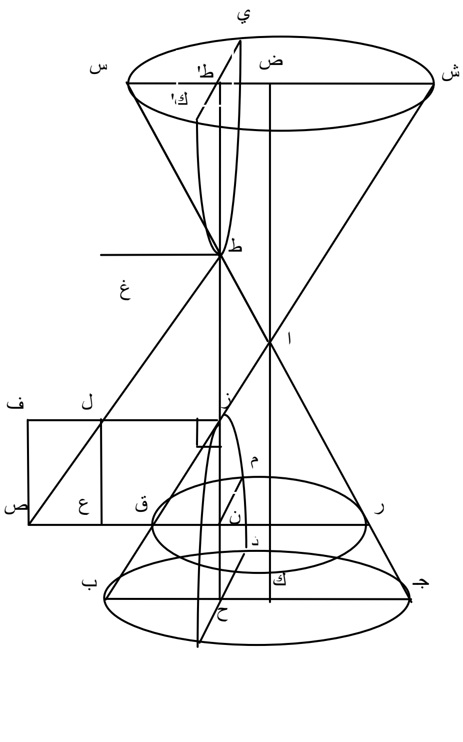
فليجز سطح بسهم مخروط محدثًا فيه مثلث اب جـ وليقطعه سطح قاطعًا لقاعدته على فصل د هـ وهو عمود على فصل ب جـ. وفصل القطع مع المثلث، وهو قطر زح، قاطع لضلع اب على ز، عن رأس ا في جهة قاعدة ب جـ، ولضلع اجـ على ط فوق ا على بسيط المخروط المقابل. ونخرج عمود ز ل على ز ح وا ك موازيًا له، ونجعل نسبة ط ز إلى ز ل كنسبة مربع ا ك إلى مسطح جـ ك في ك ب. فـَ ز ل هو القطر القائم وز ط المجانب. ونخرج من م المفروضة، على محيط القطع، خط ترتيب م ن الى قطر موازيًا لِـ ز ح و من ن، ن ص موازيًا لِـ ز ل ونصل ط ل ونخرجه إلى ص من ن ص ونخرج من نقطتي ل، ص، ل ع، ص ف موازيين لِـ ز ط. ونخرج ز ل إلى ف ونتمم تخطيط الشكل.

فسطح زص مضاف إلى ز ل زائدًا عليه سطح ل ص الشبيه بسطح ط ل والعرض هو زن.

فالمدعى أن مربع م ن كسطح زص.

< برهان ذلك:>

ونخرج ر ن ق موازيًا لِـ جـ ب. وم ن مواز لِـ د ح . فزاوية م ن ق قائمة وسطح رق م[141] مواز للقاعدة ودائرة. فضرب[142] ر ن في ن ق كمربع م ن. ولأن نسبة ط ز ألى ز ل كنسبة مربع ا ك إلى مسطح جـ ك في ك ب، فهي مؤلفة من نسبة ا ك إلى ك جـ، أي من نسبة ط ح إلى ح جـ، بل من نسبة ن ط إلى ن ر ومن نسبة ا ك إلى ك ب، أي من نسبة زح إلى ح ب، بل من نسبة ز ن إلى ن ق.



[138]- إلى : الكلمة ناقصة.
[139]- المذكورين : الذكورين.
[140]- وزواياها : وزواياه.
[141]- ر ق م : ر ن م.
[142]- فضرب : وضرب.

ونسبة سطح ط ن في ن ز إلى سطح ن ر في ن ق، أي إلى مربع م ن أيضا مؤلفة من نسبة ط ن إلى ن ر ومن نسبة ز ن إلى ن ق. فنسبة ط ز إلى ز ل، أي نسبة ط ن إلى ن ص كنسبة سطح ط ن في ن ز إلى مربع م ن.

وأيضًا، نسبة ط ن إلى ن ص كنسبة سطح ط ن في ن ز //128ظ// إلى سطح ص ن في ن ز لاشتراك ارتفاع ن ز. فنسبة سطح ط ن في ن ز إلى مربع م ن كنسبة سطح ط ن في ن ز إلى سطح ص ن في ن ز، أعني إلى سطح زص. فمربع م ن كسطح زص.

وكذلك نبين، في كل خط ترتيب، أن مربعه كمسطح ما يقع بينه ورأس القطع، من قطره، في خط ز ل بزيادة سطح شبيه بسطح ط ل.

ومن هنا يستبين[143] أن نسبة مربع كل خط ترتيب إلى مربع خط ترتيب آخر كنسبة مسطح ما يقع من قطر القطع بين موقع ذلك الخط عليه ورأس القطع في الخط المؤلف من ذلك المقدار والقطر المجانب، مستقيمًا واحدًا، إلى مسطح ما يقع بين موقع الخط الآخر عليه ورأس القطع في المؤلف من هذا القدر والقطر المجانب أيضًا.

مثلا، نسبة مربع م ن إلى مربع دح كنسبة سطح ن ز في ن ط إلى سطح ح ز في ح ط.

< **برهان:**>

وذلك أن نسبة مربع م ن إلى مسطح ن ز في ن ط كنسبة ص ن إلى ن ط، بل كنسبة ل ز، القطر القائم، إلى ز ط، المجانب، أبدًا. وكذلك نسبة مربع د ح إلى مسطح زح في ح ط كنسبة زل إلى زط. فنسبة مربع م ن إلى مسطح ن ز في ن ط كنسبة مربع دح إلى مسطح زح في ح ط. فبالإبدال، نسبة مربع م ن إلى مربع دح كنسبة مسطح زن في ن ط إلى مسطح زح في ح ط.

وظاهر، كما تقدم، أن هذا القطع أيضا يخرج بخروج قطر ز ح وذيل المخروط ممتدًا سطحه متوسعًا إلى غير نهاية.

وأيضًا، ليكن ا س ش المخروط المقابل المتحد الرأس مع مخروط ا ب جـ. ولأن سطح المثلث مارٌّ بالسهم، أو نقول مارٌّ بضلعين، و السهم مشترك، أي السهمان على سمت واحد، وكذا كل ضلعين منهما على سمت. فسطح مثلث اب جـ، إذا أخرج في جهة ا، مرَّ بسهم مخروط ا س ش، محدثًا فيه مثلث ا س ش متحد الرأس مع مثلث ا ب جـ.

ونخرج، في مخروط ا س ش، سطح س ش موازيًا لقاعدة ب جـ. فيحدث في مخروط ا س ش دائرة، لأن كل سطح يمرُّ على موازاة القاعدة في أي مخروط كان من المتقابلين يحدث دائرة.

وكذلك الأحكام الماضية أكثرها عام للمتقابلين وإن لم يتعرض لاختلاف الأوضاع لعموم البرهان وقلة الفرق.

ونخرج سطح القطع. فلأنه مارٌّ بخط ح ط، وح ط داخل في مخروط ا س ش، لأنه قاطع ضلع ا س على ط، فمستبدل وضعه معه. فسطح القطع يقطع مخروط ا س ش ولا يمرُّ بشيء من أضلاعه لاشتراك جميع الأضلاع بين المخروطين بالمعنى المذكور وعدم مروره بشيء من أضلاع مخروط اب جـ. ولا يوازي قاعدة س ش، وإلا لوازى قاعدة ب جـ. هذا خلف. بل هو يقطع قاعدة المخروط بعينها، أي لا أعمَّ من أن يقطعها أو يقطع سطحها خارج المخروط، كما في بعض أوضاع القطوع الناقصة.

وذلك أن خط ح ط، لما قاطع ضلعي ب ش، جـ س على نقطتي ز، ط، فتبدّل وضعه معهما وانحصر[144]، بعد نفوذه عن نقطة ط، بين ضلعي ا س، ا ش. فلقي س ش بين نقطتي س، ش. وهو في سطح القطع أينما كان. فيقطع سطح القطع دائرة القاعدة. وليقطعها على ك ت ي.

فلأن سطح القطع والمثلث قطعا سطحي القاعدتين المتوازيتين، ففصلا س ش، ك ي موازيان لفصلي جـ ب، د هـ. وزاوية ك ت س كزاوية هـ ح ب. فزاوية ك ت س قائمة. ففصل القاطع مع قاعدة س ش عمود على فصلها مع مثلث ا س ش. فمثلث ا س ش في المخروط المقابل هو الذي تعتبر بحسبه أيِيَّة قطع ي ط ك.

فظاهر أنه زائد لأنه يقطع أحد الضلعين وهو ا س عن رأس ا في جهة قاعدة س ش، على ط، والضلع الآخر، وهو ا ش، عنه في جهة المخروط المقابل على ز.

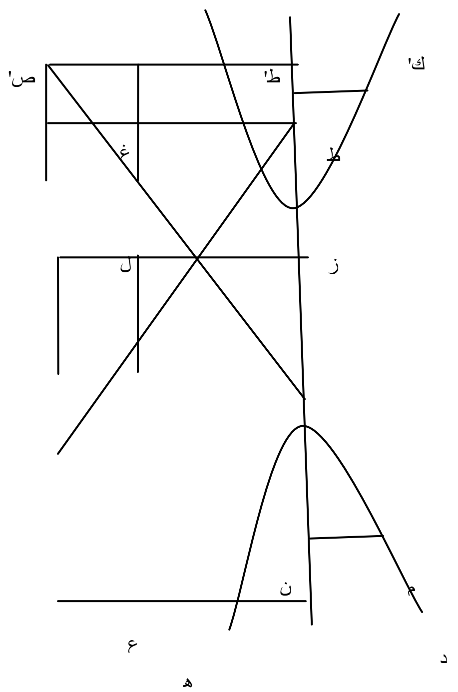
---

[143]- يستبين : يستبان.

[144]- وانحصر : انحصر.

ونخرج ا ك الموازي لِـ زط إلى ض من س ش. ونخرج ط غ عمودًا على ط ت، ونعمل نسبة مربع ا ض إلى مسطح ش ض في ض س كنسبة ط ز المجانب المشترك بين القطعين المتقابلين إلى ط غ. فيكون ط غ هو القطر القائم لقطع ط ي ك.

<**برهان ذلك** :>
ولأن خط ش س مواز لِـ جـ ب //129و// فنسبة ا ض إلى ض س كنسبة ا ك إلى ك جـ. ونسبة ا ض إلى ض ش كنسبة ا ك إلى ك ب. ونسبة ط ز إلى ط غ مؤلفة من نسبة ا ض إلى ض س ومن نسبة ا ض إلى ض ش. فهي مؤلفة من نسبة ا ك إلى ك جـ ومن نسبة ا ك إلى ك ب. ونسبة زط إلى زل أيضًا مؤلفة من هاتين النسبتين. فنسبة ط ز إلى ط غ، القطر القائم لقطع ط ي ك، كنسبة ط ز إلى ز ل القائم لقطع د ه ز. فهما متساويان.
ونفصل زن، مثلا، كَـ ط ت. فمربع خط ترتيب م ن كمسطح زن في زل، أعني في ط غ بزيادة سطح شبيه بسطح ط ز في ط غ. وكذلك مربع ت ك كمسطح ط ت، أعني ز ن في ط غ، بزيادة سطح شبيه بسطح ط ز في زل.
فبمثل البيان المتقدم في مقدمة القطع الناقص، وسوف نوضحه، يكون مربع خط ترتيب ت ك كمربع م ن. فَـ ت ك مساو لِـ م ن.
و كذلك نُبيِّن أن كل خطي ترتيب، متساويي البعد عن رأسي القطعين، متساويان.



وخطوط الترتيب لقطع ط ي ك موازية لخطوط الترتيب لقطع د هـ ز

< **برهان ذلك** :>
لأن فصلي هـ ح، ت ك العمودين على فصلي ش س، ب جـ، توازي خطوط ترتيب كل قطع لواحد منهما وهما متوازيان. وزوايا خطوط[145] ترتيب قطع ط ي ك كزوايا خطوط[146] ترتيب قطع د هـ ز وهي موضوعة كوضعها لتوازي خطوط الترتيب.
وظاهر أن قطع ط ي ك، أيضًا كقطع د هـ ز، يخرج مع قطره إلى ما لا نهاية.

---

[145]- خطوط : الكلمة ناقصة.
[146]- خطوط : الكلمة ناقصة.

فإذا توهم أن قطع د هـ ز قد وضع نقطة ز منه على نقطة ط من قطع ط ي ك ووضع قطر ز ح على قطر ط ت على وجه تقع الزوايا المتساوية بعضها على بعض، أعني إن كانت[147] زوايا القطعين حادة ومنفرجة، تقع الحادة على الحادة لا المنفرجة على الحادة، فكل مقدار من القطر ينطبق على مقدار مساو له تنطبق الزاوية، التي هي عند طرفه الذي هو غير رأس القطع، على مساوايتها التي هناك. وينطبق خطا الترتيب اللذان تم أحدهما على الآخر، من غير تفاضل، لتساويهما. ولذلك ينطبق القدران من محيطي القطعين اللذين[148] هما بين رأسيهما وطرفي ذينك الخطين للترتيب، احدهما على الآخر. فيكون المقداران الواقعان من سطحي القطعين وقطريهما وخطوط ترتيبهما وزواياهما ومحيطهما بين رأسيهما المتحدس، وذلك الوضع[149] هو[150] الذي اعتبره العقل منهما لتطابقهما من غير تفاضل، متساويين. ولكن السطحين المستويين، إذا انطبق بعض أحدهما على بعض الآخر، لا يمكن أن يتفارقا بالبعض الآخر وإلا لزم كون بعض الخط المستقيم في السمك وبعضها في السطح. هذا خلف.

فيتطابق جميع سطحي القطعين، أحدهما على الآخر. ويحدس العقل، من هذا، بأنهما، وإن امتدَّا إلى غير نهاية، في جهة القاعدة، لكن لا يفصل في شيء من المواضع المفروضة أحدهما على الآخر بشيء. بل، إلى حيثما اعتبرهما، يكونان مُتَّحدَين كشيء واحد من غير تمييز. فهما مثلان وهذا هو معنى المماثلة والتساوي في غير المتناهيين من القطعين. و ذلك ما أردناه.

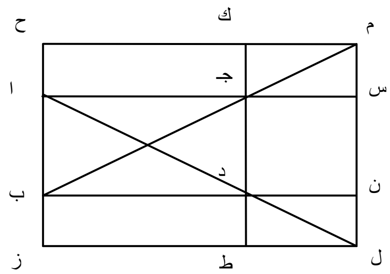
توضيح لما أشير إليه :

ليكن ا ب قائمًا على ا جـ وعلى ب د وهما متساويان بمنزلة المجانب للمتقابلين وقائميهما. ونصل ا د، ب جـ ونخرجهما ونخرج ا ب في الجهتين إلى ز، ح. ونخرج ز ل، ح م موازيين لِـ ا جـ، ملاقيين لِـ ا د، ب جـ على ل، م. ونصل جـ د، ونخرجه في الجهتين إلى ط، ك. ونخرج اجـ، ب د ول ن، م س موازيين لِـ ك ط، ملاقيين لِـ ا جـ، ب د على س، ن.

فسطح ا م مضاف إلى خط ا جـ زائدًا عليه سطح جـ م //129ظ// الشبيه بسطح ا د. وسطح ب ل مضاف إليه زائدًا عليه[151] سطح دل الشبيه به أيضًا. فنقول :

- إن كان ا ح كَـ ب ز، كان سطح ا م كسطح ب ل، وبالعكس.
- وإن كان ا ح، مثلا، أعظم من ب ز، كان ا م أعظم من ب ل، وبالعكس.

<**برهان ذلك :**>



وليكن اح كَـ ب ز وا جـ كَـ ب د. فسطح ا ك كسطح ب ط، ونسبة ط د إلى د ن كنسبة ك جـ إلى جـ س وط د كَـ ك جـ. فَـ د ن كَـ جـ س. فسطح ط ن كسطح جـ م. فجميع سطح ب ل كجميع سطح ا م.

وأيضًا، ليكن ا ح أعظم من ب ز. فسطح ا ك أعظم من سطح ب ط. وللتناسب المذكور، جـ س أعظم من د ن، بل سطح جـ م أعظم من سطح د ل. فجميع ا م أعظم من جميع ب ل.

وأيضًا، ليكن سطح ا م كسطح ب ل. فإن لم يكن ا ح كَـ ب ز، كان ا ح أعظم أو أصغر من ب ز. فيكون سطح ا م أعظم أو أصغر من سطح ب ل. هذا خلف.

---

[147] ـ كانت : كان.

[148] ـ اللذين : اللذان.

[149] ـ الوضع : الموضع.

[150] ـ هو : الكلمة ناقصة.

[151] ـ عليه : الكلمة ناقصة.

وأيضًا، إن كان ا م أعظم من ب ل، فإن لم يكن ا ح أعظم من ب ز، كان سطح ا م مساويًا لسطح ب ل أو أصغر منه. هذا خلف. فثبتت الدعاوى وهو المطلوب.

تنبيه على ما قد تقدم ضمنًا:

ليكن ا ب قطعًا ناقصًا ومركزه، وهو منتصف ب ا، جـ. وأخرج خط جـ هـ على الترتيب. فهو القطر المزدوج. ونقول هو أطول خطوط الترتيب جميعًا والأقرب إليه أطول من الأبعد عنه.

<برهان ذلك>:

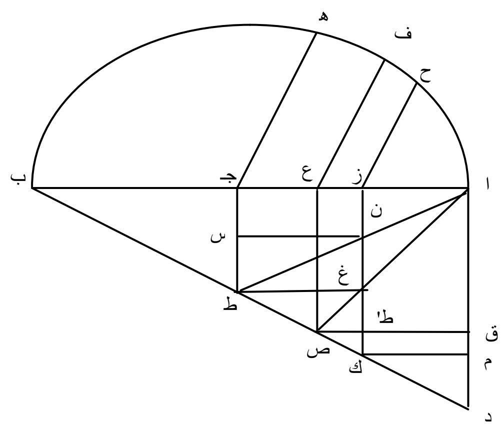
وليكن القطر القائم ا د ونخرج خطي ز ح ، ع ف على الترتيب، ونصل ب د ونخرج جـ ط، ع ص، ز ك موازية لـِ ا د، وط ل، ك م، ص ر موازية لـِ ا ب. ونصل قطري ا ط ، ا ص ملاقيين لـِ ر ك أو ط ك على ن، ر. ونخرج ن س، رظ موازيين لـِ ا ب أو ا د. وليكن، على ملتقى ط ل، ر ك أو ط جـ ، م ك، ض. وعلى ملتقى ص ق، ر ك، ت.

فنسبة ب جـ إلى جـ ا كنسبة ب ط إلى ط د، أي كنسبة ال إلى ل د. وب جـ كَـ جـ ا. فـَ ا ل كـَ ل د، ونسبة ك ض إلى ض ط كنسبة ب جـ إلى جـ ط، أو د ل، إلى ل ط. ونسبة ن ض إلى ض ط كنسبة ا جـ إلى جـ ط أو ا ل إلى ل ط. فنسبة ك ض إلى ض ط كنسبة ن ض إلى ض ط. فـَ ن ض كـَ ض ك.

ولكن متمم ن ل كمتمم ن جـ. فسطح ن جـ، أو ن ل، كسطح ض ر، أو ض م.

فسطح ض ل، أو ض جـ، أعظم من سطح ض ر، أو ض م، بسطح ض س الواقع على القطر. وسطح ض ا مشترك. فسطح ا ط أعظم من سطح اك. فخط ج هـ، القوي على السطح الأعظم، أعظم من ز ح القوي على الأصغر.

وأيضا، نسبة رت إلى ت ك كنسبة ا ق إلى ق د. فـَ رت أعظم من ت ك. فسطح رق، بل سطح ر ع المساوي له، أعظم من سطح ك ق. فـَ ت ع أعظم منه كثيرًا. وت ا مشترك. فـَ ع ق أعظم من ر م. فـَ ف ع، القوي عليه، أعظم من رح. فالأقرب من المزدوج أعظم. و هو المطلوب.



<**قضية 8**>

إذا أخرج من نقطة هـ[152] على محيط القطع الناقص، بين القطرين المزدوجين، أو محيط أحد القطعيين المتقابلين، خط منتهيًا إلى المركز أو موازيًا للمجانب، فهو ينتهي إلى نقطة أخرى من محيط الناقص أو المقابل الآخر وتُنصَّف على المركز في المار وعلى غيره في الموازي بالقطر المزدوج.

فليكن ا ب قطر متقابلي ا د، هـ ب أو ناقص ا د، هـ ب. وجـ منتصفة. فهو المركز. ونخرج جـ ط موازيًا لخطوط الترتيب. فهو القطر المزدوج. ونفرض د بين القطرين على محيط الناقص أو محيط أحد المتقابلين. ونصل بين د وجـ، أو نخرج د ك موازيًا لـ ا ب.

فالمدعى أن كلا من د جـ ، د ك ، إذا أخرج، يصل إلى المحيط الآخر، أو إلى نقطة أخرى، وينتصف على جـ أو على[153] نقطة أخرى من جـ ط.

< **برهان ذالك :**>

ولنخرج د ز على الترتيب. ونفصل ب ح كَـ ا ز ونخرج ل ح أيضًا على الترتيب. فهما موازيان لِـ جـ ط، ود ك ملاق لـ دز. فهو يلاقي لِـ جـ ط، لكون الجميع في سطح واحد. وليلقه على ك. ولأن جـ ط //130و// أطول من دز. ولتوازي الأضلاع، جـ ك كَـ د ز. فيقع ك، في القطع الناقص، داخله. ونصل ل ك، جـ هـ. فلأن نسبة مسطح ا ح في ب ح إلى مربع هـ ح كنسبة المجانب إلى القائم، وكذا نسبة مسطح ب ز في ز ا إلى مربع زد كنسبة المجانب إلى القائم، فنسبة سطح ا ح في ب ح إلى مربع هـ ح كنسبة سطح ب ز في ز ا إلى مربع زد. وسطح ا ح في ب ح كسطح ب ز في ز ا، لتساوي ز ا و ب ح وز ب وا ح. فمربع زد كمربع هـ ح.

أو نقول قد تبين، في المقدمة، لتساوي ب ح، ز ا، أن مربع د ز كمربع هـ ح. فزد كَـ هـ ح وز جـ كَـ جـ ح وزاويتا ز ح متبادلتان. فَـ د جـ كَـ جـ هـ وزاوية د جـ ز كزاوية هـ جـ ح. فزاوية هـ جـ ح مع زاوية د ح جـ كقائمتين، فَـ د جـ هـ مستقيم واحد. فلقى د جـ، بالإخراج، نقطة من محيط المقابل الآخر أو نقطة أخرى من محيط الناقص وتَنصَّف على مركز جـ.

وأيضًا، فلأن سطح زد ك جـ متوازي الأضلاع، فَـ ز د كَـ ك جـ ود ك كَـ ز جـ. ولأن جـ ك مواز ومساو لَـ ل ح ووُصل ك ل، جـ ح، فَـ ك ل مواز ومساو لَـ جـ ح. ولأن جـ ك وقع على المتوازيين، فمُبادل د ك جـ كمبادل ك جـ ح ومبادل ك جـ كمبادل ك جـ ز. فزاويتا جـ ك د، جـ ك ل كقائمتين. فَـ ز ك ل مستقيم واحد ود ك، ك ل كَـ ز ح، جـ ح. فَـ د ك، ك ل أيضًا متساويان. فيلقى ك د المحيط الآخر أو نقطة أخرى من المحيط وينصف على ك من المزدوج.

وهنالك استبان أنه إذا مرَّ خط بمركز[154] القطعين المتقابلين أو بمركز القطع الناقص منتهيًا عن جنبتي المزدوج إلى المحيط أو إلى المحيطين أو خرج خط موازيـًا للقطر المجانب، كذلك فإنه ينتصف بالمزدوج على المركز أو على غيره.

وذلك أن أحد شقـَّـي هذا الفرض، وهو فرض أن نخرج من نقطة من محيط أحد المتقابلين أو الناقص بين المزدوجين خطـًا[155] موازيًا للمجانب أو مارًّا بالمركز، مستلزم للشق الآخر وهو المرور بالمحيط الآخر أو نقطة أخرى. وللدعوى في هذا الفرض، وهو التنصف على المركز أو غيره بالمزدوج. فكيف إذا فرض ووضع مجموع الشقين لملزوم كل واحد منهما للآخر. وللدعاوي، فإنه تلزم الدعوى بهما عن وجهين.

مثلاً، نفرض د ل موازيًا لَـ ا ب ود جـ هـ مارًّا بالمركز وكلاهما ملاقيان للمحيطين أو للمحيط عن الطرفين.

فلأن د هـ د ل قد خرجا من نقطة د أو من نقطتي ل، هـ من محيط أحد المتقابلين أو الناقص بين المزدوجين، أحدهما موازيًا للمجانب والآخر مارًّا بالمركز، فهما يصلان إلى محيط الآخر أو نقطة أخرى وينتصفان المار بالمركز عليه والموازي على نقطة أخرى من المزدوج.

[152]- هـ : هي.
[153]- على : الكلمة ناقصة.
[154]- بمركز : مركز.
[155]- خطا : خط.

وبعد قطع النظر عن لازم الوصول إلى المحيط الآخر أو نقطة أخرى، فإنه، حاصل فرضا ووضعًا، يبقى لازم التنصف بحاله ولا يرد وهم اتصال مستقيمين مستقيم فإنه خلف.

وإذا أردنا بيَّنا بطريق هندسي، فقلنا :

نخرج، من نقطتي د، ه في المار بالمركز ومن نقطتي د، ل في الموازي، خطي ترتيب د ز، هـ ح أو د ز، ل ح وقطر جـ ك موازيًا لِـ زد ملاقيًا لِـد ل. فنسبة سطح ب ز في زا إلى مربع زد كنسبة سطح اح في ب ح إلى مربع ح هـ. فبالإبدال، نسبة مربع ز د إلى مربع هـ ح، أعني نسبة مربع ز جـ إلى مربع جـ ح كنسبة سطح ب ز في ز ا إلى سطح ا ح في ب ح. و بالإبدال، نسبة مربع جـ ز إلى سطح ب ز في زا كنسبة مربع جـ ح إلى سطح ا ح في ح ب. ولأن ا ب منصف على جـ ومقسوم على ح أو ز أو مزاد فيه زا أو ب ح، فمربع زجـ أو جـ ح مع مسطح ب ز في ز ا أو ب ح في ح ا كمربع جـ ب أو جـ ا، في الناقص، أو مربع زجـ أو ح جـ كمربع اجـ أو ب جـ مع سطح ب ز في زا أو سطح اح في ح ب، في المتقابلين. فبالتركيب في الناقص وبالتفصيل في الزائد، نسبة مربع ا جـ إلى سطح ا ز //130ظ// في زب كنسبة مربع جـ ب إلى سطح ب ح في ح ا. والمربعان متساويان. فسطح ب ز في ز ا كسطح ا ح في ح ب. فنسبة زب إلى ب ح كنسبة ح ا إلى ا ز. فبالتركيب في الزائد وتفصيل الخلف في الناقص، نسبة ز ح إلى ب ح، أو ب ز، كنسبة زح إلى زا، أو اح. فَـزا كَـب ح. فمربع د ز كمربع هـ ح، كما تبين. فَـد ز كَـ هـ ح، بل د ح كَـجـ هـ للتشابه، للتوازي. فقد تنصَّف د هـ المار بالمركز عليه.

وأيضًا، لتوازي أضلاع سطح د ح، يكون د ز كَـل ح وكَـجـ ك. ولكون د ز كَـل ح، لما تبين في المقدمة، تكون ز ا كَـب ح.

أو نقول : نسبة مربع ز د إلى سطح ب ز في ز ا كنسبة مربع ل ح إلى سطح ب ح في ح ا. والمربعان متساويان. فسطح ب ح في ح ا كسطح ب ز في ز ا. فنسبة ب ز إلى ب ح كنسبة ا ح إلى ز ا. فعلى ما تبين، يكون ب ز كَـاح و ا جـ كَـجـ ب. فَـزجـ كَـجـ ح. فَـد ك كَـك ل فقد تنصف د ل الموازي للمجانب الواصل إلى المحيطين أو إلى المحيط بطرفيه على ك من المزدوج. وهو المطلوب .

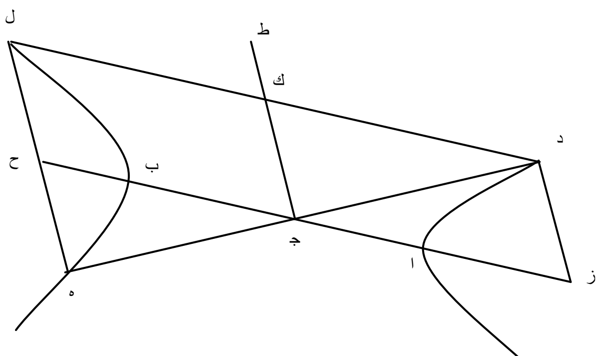
ولأن، في الناقص، مربع نصف القطر المزدوج كمسطح نصف القطر المجانب في نصف القطر القائم، فمربع كل القطر المزدوج كسطح المجانب في القائم. فنسبة المجانب إلى المزدوج فيه كنسبة المزدوج إلى القائم أبدًا. فهو ثان للمجانب والقائم ثالث.

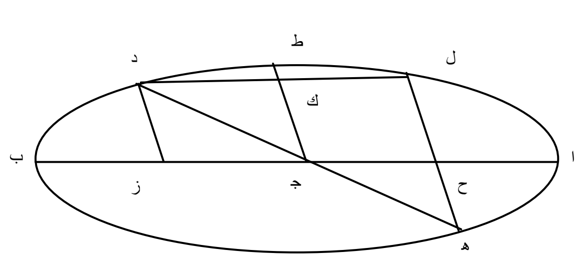
وأما في المتقابلين، فلا نقطة تَحُدُّ المزدوج. فليكن مقداره ما يكون نسبة المجانب إليه كنسبته إلى القائم، أي يكون وسطًا في النسبة بينهما لما فيه من المصلحة. وإذا جعل قدره هذا القدر، فإنه يسمى، لذلك، بالقطر الثاني، أي الثاني في النسبة. وقد مرّ هذا في المصادرة.

وكأنك لا يفوت لك تصور أن بين القطعين المتقابلين قطعًا ناقصًا قطره المجانب هو قطرهما بعينه وهو حادث في مخروط هو بين المخروطين المتقابلين في أحد جنبيهما ليستغرق المتقابلان بذينك[156] المتقابلين مثل أربع زوايا قائمة عند الرأس، فيجتمع عند كل تقاطع المستقيمين أربعة رؤوس[157] للمخروطات. ويلزم لكل متقابلين ناقص ولكل ناقص متقابلان إلا أن خطوط الترتيب لمزدوج المتقابلين كلما بعدت عن المجانب صارت[158] أطول. وفي الناقص بالعكس.

وأيضًا يلزم لكل مكافئ مكافئ آخر في المخروط المجاور لمخروطه. ويكونان مُتَّحدي الرأس متسامتي القطرين. وكأن الناقص يكمن فيه ما يبرز في المتقابلين، وبالعكس.

وفي ذلك تقدير للعزيز العليم.





[156]- بذينك : بتلك.

[157]- رؤوس : رؤس. وهكذا فيما بعد.

[158]- صارت : صار.

<قضية 9>

إذا أخرج في نقطة، من داخل قطع، خط مواز لخط مماس له أو مقاطع على نقطتين، فهو يقع على نقطتين من القطع. وإن خرج منها خط مواز للقطر المجانب، في الزائد و المكافئ، وقع على نقطة واحدة من القطع فقط.

فليكن ا ب ملاقيًا لقطع ونقطة جـ داخله، ونخرج جـ د موازيًا لِـ ا ب. فإن كان ا ب مقاطعًا للقطع على نقطتي ا و ب، فرضنا على القطع، عن جنبتي نقطتي ا، ب نقطتي هـ، ز. ونصل ا هـ ب ز . فلأن جـ د موازٍ لِـ ا ب وكل من ا هـ ب ز ملاقٍ له، فَـ جـ د يلقى لكل من طرفيه واحدًا من خطي ا هـ ، ب ز. فإن لقي ا هـ، مثلا، بطرف جـ بين ا وهـ، وقع طرف جـ على القطع بالإخراج إلى غير نهاية، ضرورة عدم انحصار ما لا يتناهى فيما يتناهى. وإن لقيه على القطع، فقد لقي القطع. وإن لقيه[159] خارج القطع، يلق القطع أولا ثم يلقاه لعدم تناهي طول القطع وتوسطه بين جـ والقسم الواقع من ا هـ خارجه.

وكذا الكلام في طرف د وخط ب ز : فيلقى جـ د بطرفيه القطع على نقطتين.

وإن كان ا ب مماسًا للقطع على ا، فرضنا على القطع، عن جنبتي ا نقطتي هـ ، ز، ووصلنا ا هـ ، ا ز. فيقع جـ د بطرفيه على خطى ا هـ ، ا ز خارج القطع أو داخله أو عليه. فيلقى القطع بطرفيه كما مرّ.

وإن كان ا ب هو القطر المجانب، في الزائد أو المكافئ، وهو مقاطع للقطع[160] على نقطة الرأس ثم خارج معه، كما تبّين، إلى غير نهاية من غير أن يقع عليه مرة أخرى، فنفرض نقطة هـ في إحدي جنبتي ا ونصل ا هـ . فيلقى جـ د، ا هـ[161] على أحد الوجه الثلاثة. فيلقى القطع على نقطة بأحد طرفيه. وليكن جـ. ولا يمكن أن يلقاه بطرفه الآخر أصلا وإن أخرج إلى //131ظ// غير نهاية. وإلا، فليلقه على نقطة د أيضًا. فنخرج من نقطتي جـ، د خطي ترتيب جـ ح، د ط.

فتكون، في المكافئ، نسبة مربع د ط إلى مربع جـ ح كنسبة ا ط إلى ا ح. وا ط أعظم من ا ح. فَـ د ط أطول من جـ ح .

وفي الزائد، نسبة مربع د ط إلى مربع جـ ح كنسبة مسطح ب ط في ط ل إلى مسطح ب ح في ح ا. والمسطح الأول أعظم. فَـ د ط أطول من جـ ح. ولأن سطح جـ د ط ح متوازي الأظلاع، فَـ د ط مساو لِـ جـ ح. هذا خلف.

فلا يلقى جـ د، الموازي للمجانب في هذين القطعين، بعد ما لقي القطع على نقطة جـ، على نقطة أخرى وإن أخرج في جهة د إلى غير نهاية. وهو المطلوب.

وهنالك تبين أن خطوط الترتيب، كلما بعدت عن رأس القطع، في القطعيين، الزائد والمكافئ، صارت أطول. وقد علم، في الناقص، أن الأقرب من المزدوج أطول. ويتبين من هذا أنه إن خرج من نقطة، هي على القطع الزائد أو المكافئ، خط مواز للمجانب يقع في القطع لأن خطوط الترتيب تتعاظم، والبعد بين المتوازيين لا يتغير.

وتبّين أيضًا أنه، إن خرج من نقطة، هي في سطح القطع الزائد او المكافئ في خارج محيطه، خط مواز للمجانب، فهو يقع على نقطة واحدة من القطع. وذلك بأن يُخرَج من نقطة، من ذلك الموازي، خط مواز لخطوط الترتيب، ويضاف إلى القطر القائم سطح أعظم من مربع ذلك المخرج من غير أن يزيد في طوله سطحًا أو ينقص، في المكافئ. وعلى أن يزيد في طوله سطحًا شبيهًا بسطح المجانب في القائم، في الزائد. فيحدث عرض. فيخرج من طرفه الغير المتصل بالقائم، خط من خطوط الترتيب، فيساوي مربعه سطح العرض في القائم، في المكافئ. وسطحه فيه بزيادة السطح الشبيه المذكور، في الزائد. فيكون أعظم، فيهما جميعًا، من الخط المخرج من الموازي للمجانب إليه، موازيًا لخطوط الترتيب. ولذلك يقطع ذلك الموازي خط الترتيب هذا داخل القطع. فيقطع القطع ضرورة، وعلى نقطة واحدة، لموازاته للمجانب[162].

وأنت تعلم أن خط جـ د في الوقوع على أحد القطرين المزدوجين أو كليهما. وفي عدم الوقوع على شيء منهما تابع لخط ا ب المخرج هو مواز[163] له. فإن لقيهما ا ب أو أحدهما أو لم يلق شيئًا منهما، كان جـ د أيضًا كذلك. نعم قد يختلفان في الوقوع عليهما أو على أحدهما بحسب الدخول في القطع والخروج عنه.

159- لقيه : يلقه.
160- للقطع : القطع.
161- ا هـ : لا هـ.
162- للمجانب : المجانب.
163 - مواز : موازيا.

مثلاً، يقع ا ب على القطر المجانب خارج القطع وجـ د يقع عليه داخله فالتبعيّة في مطلق الوقوع لا الوقوع في الداخل أو الخارج وذلك لتوازيهما. فيقع أحدهما على ما يقع عليه الآخر من الخطوط المستقيمة. وإلا يكون موازيًا له. فيكون الآخر أيضًا موازيًا له، وهو ملاق له. وهذا خلف.

ولا يعم المنحنى والمستقيم فلا يذهل عنه.

وتعلم أيضًا أن ا ب المقاطع على نقطتين، إما أن يوازي المجانب، وذلك في الناقص، وحينئذٍ يقطع المزدوج داخل القطع، مُنَصِّفًا عليه لكونه من خطوط ترتيبه. أو يوازي المزدوج، فيه وفي الزائد، فيقطع المجانب داخل القطع فيهما ويكون من خطوط ترتيبه أو لا يوازي شيئًا منهما. فيلاقى مزدوج الزائد أبدًا خارجه، لأنه خارج عنه ومزدوج الناقص ومجانب الكل، إما خارج القطع أو داخله أو المجانب في الداخل والمزدوج في الخارج أو بالعكس في الناقص وفي تلاقي المجانب داخل القطع، يكون طرفا القاطع أبدًا عن طرفي المجانب في سطح الزاويتين المجاورتين اللتين عند المركز بين المزدوجين في جهة القطع، في الزائد، و فيهما أو في سطح المتقابلتين اللتين عنده، في الناقص.

//132و// وفي ملاقته خارجه، يقعان عن طرف واحد، في الزائد، أبدًا بين المزدوجين أي في سطح إحدي الزاويتين المذكورتين. وفي الناقص قد يقعان بين المزدوجين أي في سطح إحدي الزوايا الأربع التي عند المركز بين المزدوجين. وقد يقعان في زاويتين مجاورتين منهما كما يقع في الموازي لإحد القطرين فيهما.

وأمّا ا ب المماس، فممكن أن تكون المماسة على رأس القطع أو على أحد طرفي المزدوج من الناقص. ويمكن ان يكون على غيرها من نقط القطع. وبيّن أن طرفي ا ب المقاطع، إن كانا بين المزدوجين، بالمعنى المذكور، قطع ا ب كلا المزدوجين بل قطع جـ د الموازي له أيضًا كليهما، وذلك لأن خط الترتيب المخرج من الطرف الأبعد عن رأس القطع يكون أطول حينئذٍ، في كل القطوع، عن المخرج من الطرف الأقرب منه. فيقطع المجانب إذ، لو وازاه، لتساويا، ولأنه يقطع خط ترتيب مخرج من نقطة ما من القوس المُوتِّرة به. فيقطع المزدوج أيضًا. فإن وقع بحيث يتساوى خطا الترتيب المخرجان عن طرفي ا ب عن جنبتي المزدوج، وازا ا ب المجانب كما إن وقع بحيث يتساويان متساميتين عن طرفي المجانب وازا المزدوج.

وبيّن أيضًا أنه إن كانت[164] المماسّة بين المزدوجين، لقي المماس والموازي له أيضًا كلا المزدوجين خارج القطع لأنه يلقى خط الترتيب الخارج عن المماسّة، فيلقى المزدوج ويلقاه خارج القطع في الزائد والناقص كليهما لأنه مماسّ، فلا يدخل القطع.

ولأن المزدوج، في الزائد، خارج وفي الناقص أطول من خط ترتيب المماسّة. ولهذا يلقي فيه المجانب. ولكون كل خط يخرج من نقطة، في داخل المكافئ والزائد، موازيًا للمماس، يلقى المحيط على نقطتين، فذلك المخرج و المماس الموازي له أيضًا يلقى المجانب

وبيّن أيضًا أن المقاطع على نقطتين، كيف كان، يقطع المجانب، في الزائد والمكافئ، في جهة الرأس. وذلك لأن خط الترتيب الأبعد عن الرأس أطول من الأقرب منه وأن المماس أيضًا فيهما، كيف كان، يلقى المجانب. وذلك أنا نخرج خطًا يمر بنقطة التماس وبنقطة من القطع عنها في خلاف جهة الرأس. فهذا القطع يلقى المجانب ويقع طرف المماس بين القطع وبين الطرف الملاقي للمجانب من هذا. فيقع على المجانب ضرورة.

واعلم أيضًا أن كل خط يقع على قطر القطع المكافئ، داخله، فهو يقطع محيطه على نقطتين. فليقع جـ د على قطر ا ب على نقطة هـ، داخل المكافئ. فإن كان جـ د موازيًا لخطوط الترتيب، فقد علم أنه يقع على نقطتين من المحيط. وإن كان مقاطعًا لها، فإنا[165] إذا أخرجنا من نقطة هـ خطًا موازيًا لخطوط الترتيب، لقى القطع على نقطتين وانحصر أحد طرفي د جـ بينه وبين القطع. فلذلك يقع أحد طرفيه، وليكن د، على القطع. ونخرج د ز على الترتيب، فتقع نقطة ز أبدًا بين هـ و ا. ونجعل ا ب ثالثًا في النسبة لِـ ز ا، ا هـ، ونخرج ب جـ موازيًا لخطوط الترتيب ملاقيًا لخط جـ د على د وللقطع على ط.

فلأن نسبة مجموع ب ا إلى مجموع ا هـ كنسبة منقوص هـ ا إلى منقوص ا ز. فنسبة باقي ب هـ إلى باقي هـ ز كتلك النسبة، أي كنسبة ب ا إلى ا هـ أو ا هـ إلى ا ز. ونسبة مربع ب هـ إلى مربع هـ ز، أعني نسبة مربع ب جـ إلى مربع دز، كنسبة ب ا إلى ا هـ متناة. فهي كنسبة ب ا إلى ا ز. وأيضًا، نسبة مربع

---

164 ـ كانت : كان.

165 ـ فإنا : فلانا

ب ط إلى مربع د ز كنسبة ب ا إلى ا ز. فـَ ب ط كـَ ب جـ، وطرف ب متحد. فنقطة جـ منطبقة على نقطة ط. فـَ جـ د ملاق للقطع على نقطة جـ أيضًا كما أنه ملاقيه على نقطة د.

واعلم أيضًا أن كل خط يخرج إلى القطع الزائد من مركزه، أو مما يقع من المجانب عنه في خلاف جهة القطع، فهو يدخل في القطع. فليكن المجانب للزائد ا ب والمركز جـ. ولنخرج، أولا، خط جـ د مارًّا بالمركز ملاقيًا للقطع على د. فإن لم يدخل جـ د في القطع، كان مماسًا له. فيفرض نقطة ه عليه، في خلاف جهة جـ، ونخرج د ط على الترتيب وهـ ز ح موازيًا له. فلأن اب نـُصِّف على جـ وزيد فيه ا ط أو ا ح، //132ظ// فسطح ب ح في ح ا أصغر من مربع جـ ح بمربع ا جـ. وكذلك سطح ز ط في ط ا مع مربع ا جـ كمربع جـ ط. ونسبة مربع هـ ح إلى مربع د ط، التي هي أعظم من نسبة مربع زح إلى مربع د ط، التي هي كنسبة سطح ب ح في ح ا إلى سطح ز ط في ط ا، هي كنسبة مربع ح جـ إلى مربع ط جـ. فنسبة مربع ح جـ إلى مربع ط جـ أعظم من نسبة سطح ب ح في ح ا إلى سطح ب ط في ط ا. فبالإبدال، نسبة مربع ح جـ إلى سطح ب ح في ح ا أعظم من نسبة مربع ط جـ إلى سطح ب ط في ط ا. فبالتفصيل، نسبة مربع ا جـ إلى سطح ب ح في ح ا أعظم من نسبة مربع ا جـ إلى سطح ب ط في ط ا. فسطح ب ح في ح ا، لكون نسبة الثالث إليه أعظم، أصغر من سطح ب ط في ط ا. وهو أعظم منه كثيرًا. هذا خلف.

فلا يماس جـ د للقطع بل يدخل فيه من نقطة د ولا نقول يقطعه على نقطتين حتى لا يظنّ ذلك.

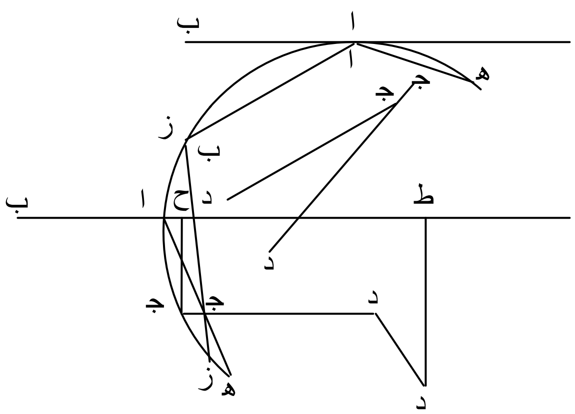
وليكن، ثانيًا، زد خارجًا إلى القطع عن نقطة ز من المجانب، وهي عن مركز جـ في خلاف جهة القطع. ونخرج جـ د.

فلأن جـ د يدخل في القطع عن زد و زد يبدل وضعه مع جـ د عند تقاطع د، أي إذا أخرج في جهة د، فيقع القسم المتمثل بـِ ز د منه على د، داخل القطع. وهو المطلوب.

ولما تبيّن أن كل خط يخرج من المركز أو مما منه في خلاف جهة القطع الزائد إليه، فإنه يدخل فيه ولا يماسه، فقد علم بطريق عكس النقيض أنه إن أمكن أن يماس خط للقطع الزائد فتماسّه[166] يقع على المجانب، خارج القطع، كما علم. ويكون أبدًا، بينه وبين القطع من المجانب، أقل من نصف القطر المجانب. وموقعه على القطر المجانب، بين المركز والقطع وما بين منتهى المجانب ذلك والموقع أطول دائمًا مما بين رأس القطع وذلك الموقع.

هذه مقدمات مناسبة لهذا الموضوع.

وذلك ما أردناه.



[166] ـ فتماسّه : فماسه فإنه.

<قضية 10 : >
نريد أن نخرج من نقطة معلومة، على محيط قطع معلوم، خطـًا مماسًا له.

فليكن قطع ما و قطره المجانب ا ب ورأسه ا، والمزدوج، في الناقص، جـ د والمركز، فيه و في الزائد، جـ، والنقطة هـ فيه.
في الناقص، إما أن يكون على إحدى[167] رأسيه أو على إحدى طرفي مزدوج[168] أو فيما بين المزدوجين.
وفي الزائد و المكافئ، إما أن يكون على الرأس أو على غيره.
فإن كان على الرأس، نخرج هـ ز موازيـًا لخطوط الترتيب في الكل. فهو يماس القطع.

<برهان ذالك : >
وإلا فليدخل فيه ولا يتعرض للقطع على نقطتين أم لا.
فيفرض على ما هو داخل فيه نقطة ح. ونخرج ح ط موازيـًا لخطوط الترتيب.
فلأن ح ط مخرج من نقطة في داخل قطع، موازيـًا لخط قاطع له على نقطتين، وهو خط ما من خطوط الترتيب، فـَ ح ط يقطع القطع على نقطتين، بل يكون خطـًا ما من خطوط الترتيب، فيقع على قطر القطع في داخله منصفـًا عليه. وح هـ أيضـا مواز لخطوط الترتيب. فـَ ح هـ مواز لِـ ح ط وهو ملاق له على ح. هذا خلف.
فـَ هـ ز لا يدخل القطع وهو ملاقيه على هـ. فهو مماس له عليها.

وإن كان هـ على طرفي مزدوج الناقص، أخرجنا هـ ز موازيـًا للمجانب فهو يماس القطع.

<برهان ذالك : >
وإلا، فليدخل فيه ونفرض على الداخل فيه نقطة ح ونخرج ي ح ط على الترتيب. فلأن نقطة ي بين الرأس وطرف المزدوج، فـَ ي ط أقصر من جـ د. فـ ح ط أقصر كثيرًا منه.
فـ هـ ز يلقى ا ب في جهة هـ ز الأقصر وهو مواز[169] له. هذا خلف.
فلا يدخل هـ ز القطع بل يماسه على هـ .
وإن كان هـ بين المزدوجين في الناقص وعلى غير الرأس في غيره، أخرجنا هـ ز على الترتيب وفصلنا ا ح كـَ ا ز في المكافئ وجعلنا نسبة ب ز إلى زا كنسبة ب ح إلى ح ا، في الزائد والناقص. وذلك بأن نقسم ا ب المجانب في الزائد، على نسبة ب ز إلى زا على أن يكون ب ح نظيرا لِـ ب ز في النسبة.
ونجعل نسبة ب ا إلى اح، في الناقص، كنسبة فضل ب ز على زا إلى زا. فتكون، بالتركيب، نسبة ب ز إلى زا كنسبة ب ح إلى ح ا. وإنما كان لـ ب ز فضل على زا لأن هـ فرضت بين المزدوجين. فيقع ز دائمـا عن[170] المركز إلى أحد الجانبين. فيكون لِـز ب على زا فضل بقدر ضعف ز جـ. وكذلك في الزائد، لأن ب ز أطول من زا، يكون ب ح //132ظ// أطول من ح ا فيقع عن مركز جـ إلى ناحية ا ويكون فضل ب ح على ح ا بقدر ضعف ح جـ ونصل هـ ح. فـ هـ ح مماس للقطع.
وإلا فليدخل فيه عن إحدي جنبتي هـ قاطعـًا عل نقطتين أو كيف دخل. ونفرض على الداخل منه نقطة ط. ونخرج ي ط ك موازيـًا لخطوط الترتيب، ملاقيـًا للقطع على ي وللقطرعلى ك.
أما في المكافئ، فلأن نسبة مربع هـ ز إلى مربع ي ك كنسبة زا إلى اك، أي كنسبة سطح زا في ا ح، إلى سطح ا ك في ا ح لاشتراك ارتفاع ا ح، بل كنسبة أربع أمثال سطح زا في ا ح، أي مربع، زح لتساوي زا، اح، إلى أربعة أمثال سطح ك ا في ا ح الناقص عن مربع ك ح بمربع ك ز، الفصل بين ك ا، ا ح. فنسبة مربع هـ ز إلى مربع ك ي أعظم من نسبة مربع زح إلى مربع ك ح. إذ ًا، النسبة إلى الأصغر أعظم.

[167]- إحدى : احدا. وهكذا فيما بعد.
[168]- مزدوج : مزدوجة.
[169]- مواز : موازيا.
[170]- عن : على.

ولكن نسبة مربع ز ح إلى مربع ك ح كنسبة مربع ز هـ إلى مربع ط ك. فنسبة مربع ز هـ إلى مربع ي ك أعظم من نسبة مربع ز هـ إلى مربع ط ك. فمربع ي ك، بل ي ك، أصغر من مربع ط ك، بل من ط ك، لأن نسبة الثالث إليه أعظم فهو أصغر وي ك أعظم من ط ك دائما. وهذا خلف.

وأما في الناقص و الزائد، فلأن نسبة ب ح إلى ح ا كنسبة ب ز إلى زا وقد فرضت نقطة ك على أحد قسمي ب ز، زا أوعلى زيادة زا أو على ما يتصل بهما في خلاف جهة ا. فعلى ما تبين فيما تقدم من مباحث الخطوط بحسب النسبة، تكون نسبة سطح ب ك في ك ا إلى مربع ك ح أقل من نسبة سطح ب ز في ز ا إلى مربع ر ح[171]. فبالإبدال نسبة سطح ب ز في زا إلى سطح ب ك في ك ا، أعني نسبة مربع ز هـ إلى مربع ي ك أعظم من نسبة مربع ز ح إلى مربع ك ح، أعني من نسبة مربع ز هـ إلى مربع ط ك.

فمربع ي ك، بل ي ك، أصغر من مربع ط ك، بل ط ك. هذا خلف.

فلا يدخل ه ح في القطع بل يماسه على هـ وهو المطلوب.

وبَـيِّن أن نسبة زا إلى ا ح كعكسها في المكافئ، للمساواة، وكنسبة ز ب إلى ب ح بإبدال العكس، في غيره. ولذلك يكون ز ا أصغر من ا ح في الناقص وأعظم منه في الزائد، كما أنه مساو له في المكافئ.

وقد علم أن ب ح، في الزائد، أطول من اح لأن نسبتهما كنسبة ب ز إلى از وأن ب ز، في الناقص، أطول من زا لأن زعن المركز في جهة ا.

وأيضا، فكل خط يماسّ[172] قطعًا ما، فإنه لا يمكن أن يقع بينه وبين القطع مستقيم آخر.

<**برهان ذالك :** >

ولتكن المماسة، أولا، على رأس القطع منطبقا نقطة هـ على نقطة ا والخط المماس هو هـ ز.

فإن أمكن، فليقع، بين هـ ز والقطع، مستقيم هـ ح. ونفرض عليه نقطة ح، كيف اتفقت. ونخرج منها ح ي ط موازيًا لخطوط الترتيب، مقاطعًا للقطع على ي وللقطر على ط.

أما في المكافئ، فنجعل نسبة مربع ح ط إلى مربع ي ط كنسبة ط هـ إلى هـ ك. ونخرج ك ل م موازيًا لِـ ط ي ح. فلأن نسبة مربع ط ح إلى مربع ط ي كنسبة ط هـ إلى هـ ك ونسبة ط هـ إلى هـ ك كنسبة مربع ط ي إلى مربع ك ل، فنسبة مربع ح ط إلى مربع ي ط كنسبة مربع ي ط إلى مربع ك ل. فنسبة ح ط إلى ي ط كنسبة ي ط إلى ك ل. فنسبة ح ط إلى ك ل كنسبة هـ ط إلى هـ ك. ونسبة ح ط إلى م ك أيضا كنسبة ط هـ إلى هـ ك. فنسبة ح ط إلى ك ل كنسبة ح ط إلى ك م فـ ك ل كَـ ك م. و ك ل أقصر من ك م أبدًا. هذا خلف.

وأما في الزائد والناقص، فنجعل القطر القائم ا ك. ونصل ب ك ونحرج من ط، ط ل موازيًا لِـ ا ك، ملاقيًا لِـ ب ك على ل . فيكون ضرب ل ط في ط ا، في الزائد والناقص كِلَـيهما، كمربع ي ط . ونجعل ضرب ا ط في ط م كمربع ح ط . فيكون ط م دائمًا أعظم من ط ل. ونصل م ا. فيقطع ب ل على ن . فنخرج ن س موازيا لـ ط ل. ونخرج من نقطة س، س ع ف موازيًا لِـ ط ي ح.

فلأن ضرب م ط في ط ا كمربع ح ط، فنسبة م ط إلى ط ح كنسبة ط ح إلى ط ا. ولأن نسبة م ط إلى ن س كنسبة ط هـ إلى هـ س ونسبة ح ط إلى س ف كنسبة //133و// هـ ط إلى هـ س، فنسبة م ط إلى ن س كنسبة ط ح إلى س ف. وبالإبدال، نسبة ن س إلى س ف كنسبة م ط إلى ط ح، أي كنسبة ط ح إلى ط هـ، بل كنسبة ف س إلى س هـ. فضرب ن س في س هـ كمربع س ف. ولكن ضرب ن س في س هـ كمربع س ع. فمربع س ع، بل خط س ع، كمربع س ف، بل كخط س ف. و س ف، في كل هذه الأوضاع، أعظم من س ع. هذا خلف.

فلا يقع بين هـ ز المماس على رأس القطع و بين القطع خطـ آخر.

ولتكن أيضـا مماسته هـ في الناقص، على طرف د من المزدوج.

وإن أمكن، فليقع، بين هـ ز والقطع، خط هـ ح. ونفرض على القسم المتوسط منه بين القطع و هـ ز، نقطة ح، ونخرج ك ح ي ط موازيا للمزدوج.

171- أقل من نسبة ... مربع ز ح : الجملة ناقصة.

172- يماس : بها بين.

فلأن ك ط كَ هـ جـ وح ط أصغر منه فليلتقي جـ ا، هـ ك على ل في جهة ا. وليكن القطر القائم ا م. ونصل ب م ونخرج ط ن موازيًا للقائم. فسطح اط في ط ن كمربع ي ط . ونجعل سطح اط في ط س كمربع ح ط. فـ ط س يكون أبدًا أطول من ط ن . ونصل س ا. فيقطع ن م على ع . ونخرج ع ف موازيًا لِـ ط ن و ف ص ق موازيًا لـ ط ي ح.

فلأن ضرب ط س في ط ا كمربع ح ط، فنسبة س ط إلى ط ح كنسبة ط ح إلى ط ا. ونسبة س ط إلى ع ف كنسبة ح ط إلى ف ق. بل نسبة ع ف إلى ف ق كنسبة س ط إلى ط ح، بل كنسبة ط ح إلى ط ا، بل كنسبة ق ف إلى ف ا، كما تبين. فضرب ع ف في ف ا كمربع ق ف، وهو أيضا كمربع ف ص. فَـ ف ص كـ ف ق وف ق دائما أطول من ف ص. هذا خلف.

فلا يقع بين المماس على طرف المزدوج، في الناقص، وبين القطع، خط آخر.

ولتكن أيضا مماسة هـ بين المزدوجين في الناقص وعلى غير الرأس في غيره.

والمماس خط هـ ح. وإن أمكن، فليقع بين هـ ح والقطع خط هـ ط .

فلأن كل مماس بين المزدوجين، أو على غير الرأس، يلقى المجانب، فـ هـ ط يلقى المجانب. وليلقه على ط.

أما في المكافئ، فَـ ز ا مخالف لأحد خطي اح، ا ط لاختلافهما. ولا يتعرض لمساواته للآخر أم لا. فليخالف لـ ا ط. ونجعل، أى كَـ ا ط. ونخرج ى ك على الترتيب ونصل ك ط. فيكون، كما تبين، ك ط مماسًا للقطع. وط هـ مماس له. فإن كان ك بين ا و هـ، فـ ك ط يلقى، بالإخراج في طرف ك، لـ هـ ط على غير نقطة ط، لعدم الدخول في القطع .

وإن كان هـ بين ك و ا، فَـ هـ ط يلقى، بالإخراج في طرف هـ، لِـ ط ك على غير ط. وهما متلاقيان أيضا على ط. فيحيط، على كلا التقديرين، مستقيمان بسطح. هذا خلف.

وأما في الزائد والناقص، فنسبة ب ز إلى زا مخالفة لإحدى نسبتي ب ح إلى ح ا أو ب ط إلى ط ا، لاختلافهما .

أما في الزائد، فلأنهما لو تساويا لكان، بالإبدال، نسبة ب ح إلى ب ط كنسبة ح ا إلى ا ط . فتكون نسبة الأعظم إلى الأصغر كنسبة الأصغر إلى الأعظم. هذا خلف.

وأما في الناقص، فلأنهما لو تساويا لكان بالتفصيل نسبة ب ا إلى ا ح كنسبة ب ا إلى اط. فَـ ا ح كـ ا ط وهما مختلفان. هذا خلف .

ولا يتعرض لأنها مساوية للأخرى أم لا.

ولتكن نسبة ب ز إلى زا مخالفة لنسبة ب ط إلى ط ا. فنقسم، في الناقص، ب ا على نسبة ب ط إلى ط ا. فينقسم على غير ز، وليكن ي. ولأنه قد تبين، في الزائد، أن أي خط يماسه فإنما يقع على المجانب عن المركز إلى جهة القطع، فَـ ب ط فيه أطول من ط ز. فنجعل نسبة زا إلى ا ي كنسبة فضل ب ط إلى ط ا . فتكون، بالتركيب، نسبة زي إلى ي ا كنسبة ب ط إلى ط ا. ونخرج من ي إلى ط ي ك على الترتيب ونصل ك ط .

فكما تبين، يكون ك ط مماسًا. وط هـ مماس. فيحيط مستقيمان بسطح كما مر. وهو خلف.

فلا يقع بين المماس والقطع خط آخر إن كانت المماسة في أي قطع كان.

وأيضا، إن كان هـ ح، مثلاً، مماسًا على غير الرأس وغير طرف المزدوج. فيلقى هو المجانب على ح وخط الترتيب المخرج من هـ على ز، فنقول :

في المكافئ : ز ا كـ ا ح.

وفي الزائد و الناقص : نسبة ب ز إلى زا كنسبة ب ح إلى ح ا.

<برهان ذلك :>

وإلا فنجعل، في المكافئ، ا ي كَـ ا ح.

وفي الناقص، نقسم ب ا على نسبة ب ح إلى ح ا على ي. فتقع ي عن المركز إلى جهة ا //133ظ// لأن ب ح أطول من اح.

وفي الزائد، نجعل نسبة فضل ب ح على ح ا إلى ح ا كنسبة ب ا إلى ا ي.

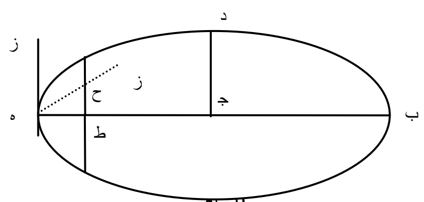
فتكون، بالتركيب، نسبة ب ح إلى ا ح كنسبة ب ي إلى ي ا.

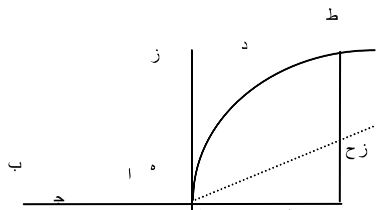
ونخرج من ي، ي ك على الترتيب، ونصل ك ح. فيكون ك ح مماسًا. وح هـ مماس.
فإما أن يقع ك بين هـ، ا أو يقع هـ بين ك و ا. وأيًّا ما كان، إذا أخرج ك ح أو هـ ح في جهة ك أو هـ، لزم إحاطة مستقيمين بسطح. هذا خلف.
فـَ ز ا، في المكافئ، كـَ ا ح، ونسبة ب ز إلى ز ا، في غيره، كنسبة ب ح إلى ح ا. وهو المطلوب.

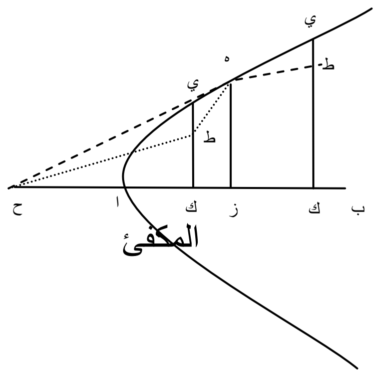
وأيضـا، إن أردنا أن نخرج من نقطة هي على القطر المجانب لقطع، خارجه، خطًا مماسًا له. فإنا نجعل ما بين النقطة من المجانب ورأس القطع مثل ما بين الرأس ونقطة أخرى منه في داخل القطع، في المكافئ . ونخرج منها خطًا على الترتيب، ونصل بين موقعه على القطع وبين النقطة المفروضة على القطر. فيكون ممـاسًا كما علم.

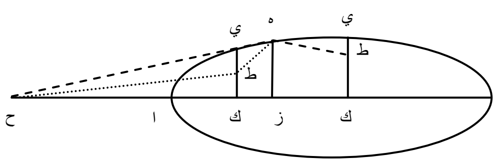
وإن كان القطع ناقصًا يقسم قطره المجانب على نسبة القطر مع الزيادة، أي إلى النقطة المفروضة، إلى الزيادة، ونخرج من موضع القسمة خطًا على الترتيب ونصل بين موقعه على القطع والنقطة. فيكون مماسًا.

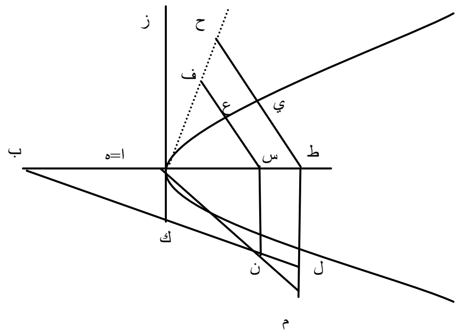
وإن كان القطع زائدًا، فإن كانت النقطة المفروضة على المركز أو منه في خلاف جهة القطع، فقد علم أن إخراج خط منه مماس للقطع محال.
وإن كان بين المركز والقطع، جعلنا نسبة ما بين منتهى المجانب وتلك النقطة إلى ما بينها و رأس القطع، كنسبة المجموع المركب من المجانب وخط ما مما يقع منه داخل القطع، إلى ذالك القدر. ونخرج من طرف ذلك القدر //134و// في القطع خطًا على الترتيب، ونصل بين ملتقاه للقطع وبين النقطة المفروضة. فيكون مماسًا كما علم.
وذلك ماأردناه.


الناقص

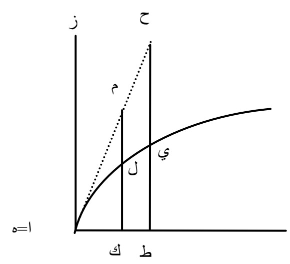

الزائد والمكافئ


المكفئ

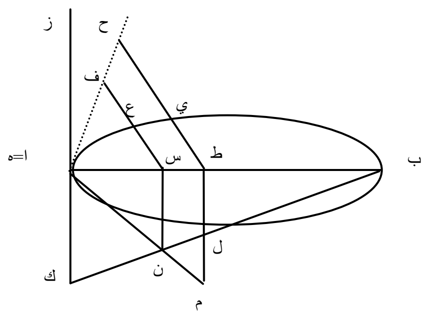

الناقص

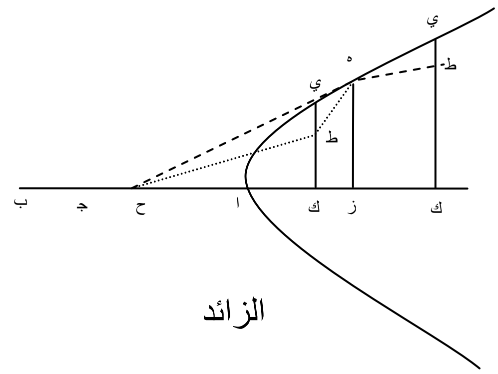


الزائد

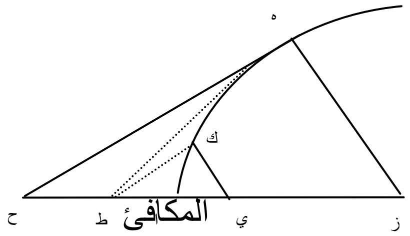


المكافئ

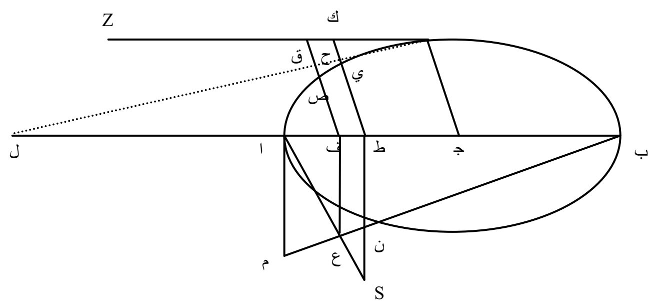




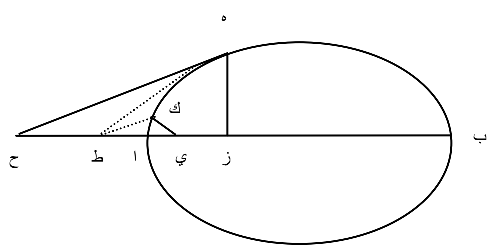
الزائد

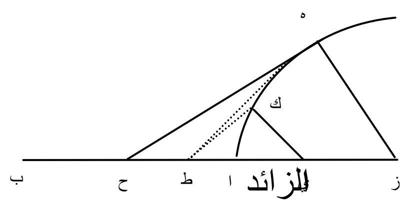


المكافئ



الناقص





الزائد

< قضية 11 >

إذا ماس خط قطعًا غير مكافئ[173]، بين المزدوجين، فلقي كليهما كما علم. ثم أخرج من المماسة خط إلى أحد القطرين على الترتيب. فسطح ما يقع من ذلك القطر بين المركز وخط الترتيب فيما يقع بين المركز أيضـا والمماس كمربع نصف القطر. ذلك ونسبة سطح ما يقع بين المركز وخط الترتيب فيما يقع بين خط الترتيب والمماس إلى مربع خط الترتيب، إن كان القطر هو المجانب، فكنسبة المجانب إلى القائم. وإن كان هو القطر الثاني، فكنسبة القائم إلى المجانب.

ونسبة خط الترتيب إلى أحد هذين الخطين، أعني الواقع بين خط الترتيب والمركز وبين خط الترتيب والمماس، مؤلفة من نسبة الخط الآخر منهما إلى ذلك الخط للترتيب ومن نسبة القائم إلى المجانب، إن كان القطر مجانبـًا، أو من عكس هذه إن كان ثانيـًا.

وإن أخرج من طرفي المجانب خطان موازيان لخطوط ترتيبه، قطع المماس منهما ما يكون ضرب أحدهما في الأخر كمربع نصف القطر الثاني.

فليكن ا ب مجانبًا لناقص أو زائد، ب جـ، وجـ د مماسًا له على جـ ملاقيـا للمجانب على د وللثاني على ك والمركز ز والثاني ح ط. ونخرج من جـ خطي جـ هـ ، جـ ل ملاقيين لـ اب، ح ط على ترتيبهما. و ظاهر أن ب واقع في الناقص بين د و ز، ود واقع في الزائد بين ب و ز لما علم أن طرف المماس يقع في الزائد بين مركزه وقطعه على المجانب. ونخرج ا م ، ب ن موازيين لـ ا ح ملاقيين للمماس. ونجعل سطح ه جـ أو جـ ل في خط س كضرب ز هـ في هـ د أو كضرب ز ل في ل ك. فمن الدعاوي أن سطح ز هـ في هـ د كمربع ز ب //نهية نص الإكمال: 134و : سطر11//.

// بداية نص الاستكمال،93و :سطر1// با على الترتيب. تكون نسبة الف ها إلى ها با كنسبة الف دال[174] إلى با دال.

وفي الناقص نسبة الف با إلى با ها كنسبة الف دال و با دال إلى با دال وأنصاف المقدمات أيضـا على هذه النسبة.

فأما في القطع الزائد، فإن نصف[175] الف ها ،ها با هو زاي ها ونصف الف با هو با زاي. فنسبة زاي ها إلى ها با كنسبة با زاي إلى با دال. فإذا فصلنا وخالفنا وركبنا النسبة، كانت نسبة ها زاي إلى زاي با كنسبة با زاي إلى زاي دال. فسطح ها زاي في زاي دال مساو لمربع با زاي.

ولأن مربع ها زاي هو كسطح الف ها في ها با مع مربع با زاي وكسطح ها زاي في ها دال[176] وسطح[177] ها زاي في زاي دال، وسطح ها زاي في زاي دال مساو لمربع با زاي، فسطح الف ها في ها با مثل سطح زاي ها في ها دال. ونسبة سطح الف ها في ها با إلى مربع ها جيم كنسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم، كما تبين. فنسبة سطح ها زاي في ها دال إلى مربع ها جيم كنسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم.

وأما في القطع الناقص أو الدائرة، فإنه يكون نصف الف دال ودال با هو دال زاي، ونصف الف با هو خط با زاي. فنسبة زاي دال إلى دال با كنسبة زاي با إلى با ها. وإذا فصلنا وخالفنا وركبنا، كانت نسبة دال زاي إلى زاي با كنسبة با زاي إلى زاي ها. فسطح دال زاي في زال ها مساو لمربع با زاي.

فلأن سطح دال زاي في زاي ها مساو لسطح دال ها في ها زاي مع مربع ها زاي. ومربع زاي با مساو لسطح الف ها في ها با مع مربع ها زاي. فسطح ها دال في ها زاي مع مربع ها زاي مساو لسطح الف ها في ها با مع مربع ها زاي. ونطرح مربع ها زاي المشترك، فيبقى سطح الف ها في ها با مساويـًا[178] لسطح ها دال في ها زاي. ونسبة سطح الف ها في هابا إلى مربع ها جيم كنسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم.

فنسبة سطح زاي ها في ها دال إلى مربع ها جيم كالمجانب إلى القائم.

وأيضـا، لأن نسبة سطح زاي ها في ها دال إلى مربع ها جيم كالمجانب إلى القائم، التي هي كمربع المجانب، الذي هو الف با، إلى مربع القطر الثاني، وهو طا حا، لأن طا حا وسط في النسبة بين الف با والضلع القائم له ونسبة مربع الف دال إلى مربع طا حا كنسبة مربع با زاي إلى مربع زاي حا. فنسبة

173- مكافئ : مكاف.
174- دال : با.
175- نصف : نسبة.
176- دال : طا.
177- سطح : الكلمة ناقصة.
178- مساويا : مساو.

سطح زاي ها في ها دال إلى مربع ها جيم[179] مؤلفة من نسبة ها زاي إلى ها جيم، أو إلى زاي لام، ومن نسبة ها دال إلى ها جيم، التي هي مثل نسبة زاي دال في زاي كاف. ونسبة زاي ها إلى زاي لام، مثناة بنسبة دال زاي إلى زاي كاف، هي كنسبة سطح ها زاي في زاي دال إلى سطح زاي كاف في زاي لام. فنسبة سطح ها زاي في زاي دال إلى سطح زاي كاف في زاي لام كمربع با زاي إلى مربع زاي حا. وإذا بدلنا، كانت نسبة سطح ها زاي في زاي دال إلى مربع با زاي كنسبة سطح زاي كاف في زاي لام إلى مربع زاي حا. وسطح ها زاي في زاي دال مساو لمربع با زاي. فسطح زاي كاف في زاي لام مساو لمربع زاي حا.

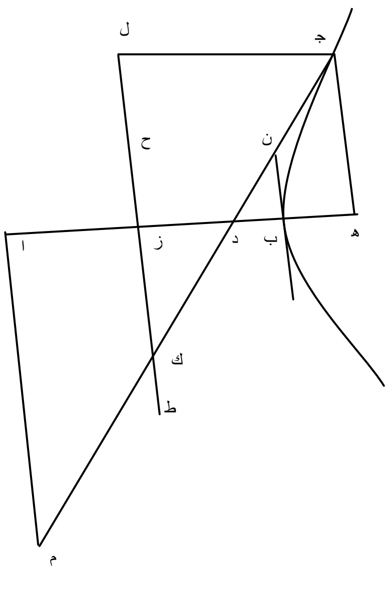
وسطح زاي كاف في زاي لام هو مثل سطح كاف لام في لام زاي مع مربع لام زاي. ومربع زاي حا مساو لسطح طا لام في لام حا مع مربع زاي لام. فإذا طرحنا مربع زاي لام بقي[180] سطح طا لام في لام حا مساويًا[181] لسطح كاف لام في لام زاي.

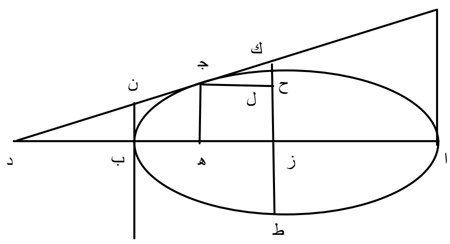
ولأن //93ظ// نسبة القائم إلى المجانب كمربع ها جيم إلى سطح زاي ها في ها دال التي هي مؤلفة من نسبة ها جيم إلى ها زاي، التي هي مثل نسبة زاي لام إلى لام جيم، ومن ها جيم إلى ها دال[182] التي هي مثل نسبة كاف زاي إلى زاي دال التي هي مثل نسبة كاف لام إلى لام جيم. فنسبة القائم إلى المجانب كنسبة زاي لام إلى لام جيم مثناة بنسبة كاف لام إلى لام جيم وهي كنسبة[183] سطح زاي لام في لام كاف إلى مربع لام جيم وأيضا كنسبة سطح طا لام في لام حا إلى مربع لام جيم. فنسبة سطح زاي لام في لام كاف إلى مربع لام جيم كالقائم إلى المجانب.

فقد تبين، مما ذكرنا، أن سطح زاي كاف في زاي لام إن كان مساويًا لمربع زاي حا أو كانت نسبة سطح زاي لام في لام كاف إلى مربع لام جيم كالقائم إلى المجانب، فإن خط جيم دال كاف مماس للقطع.

وبيانه بعكس هذا البرهان.

وأقول إن نسبة ها جيم إلى أحد خطي ها زاي، ها دال، أينما كان، مركبة من نسبة الضلع القائم إلى القطر المجانب ومن نسبة الخط الآخر، من خطي ها زاي، ها دال، إلى خط ها جيم. ونسبة جيم لام إلى أحد خطي لام كاف، لام زاي مركبة من نسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم ومن الخط الآخر، من خطي لام كاف، لام زاي، إلى خط جيم لام.





[179]- كنسبة مربع ... إلى مربع ها جيم : الجملة مكررة.
[180]- بقي : الكلمة مطموسة.
[181]- مساويا : مساو.
[182]- دال : جيم.
[183]- كسطح : كنسبة سطح.

<برهان ذالك>

فنجعل سطح زاي ها في ها دال مساويًا[184] لسطح ها جيم في س[185]. ونسبة سطح ها زاي في ها دال إلى مربع جيم ها كنسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم. فنسبة سطح س في ها جيم إلى مربع ها جيم[186]، التي هي مثل نسبة س إلى ها جيم، كالقطر المجانب إلى الضلع القائم.

ولأن سطح زاي ها في ها دال مساو لسطح ها جيم في س، تكون نسبة ها زاي إلى ها جيم كنسبة س إلى ها دال. و كنسبة ها جيم إلى ها دال. فإذا أخذنا خط س بينهما، كانت نسبة ها جيم إلى ها دال مركبة من نسبة ها جيم إلى س و من س إلى ها دال. لكن نسبة ها جيم إلى س كالقائم إلى المجانب، وس إلى ها دال كنسبة ها زاي إلى ها جيم. فنسبة ها جيم إلى ها دال مركبة من نسبة القائم إلى المجانب و من نسبة زاي ها إلى ها جيم.

ونجعل أيضـا سطح زاي لام في لام كاف مثل سطح س في لام جيم، وسطح زاي لام في لام كاف إلى مربع لام جيم كالقائم إلى المجانب. فنسبة سطح س في لام[187] جيم إلى مربع جيم لام، التي هي نسبة س إلى جيم لام، كالقائم إلى المجانب.

ومن أجل أن سطح لام زاي في لام كاف كسطح لام جيم في س، تكون نسبة زاي لام إلى لام جيم كنسبة س إلى لام كاف. ونسبة جيم لام إلى لام كاف، إذا أخذنا س وسطـا بينهما، هي مؤلفة[188] من نسبة جيم لام إلى س، التي هي كالمجانب إلى القائم، ومن نسبة س إلى لام كاف، التي هي كنسبة زاي لام إلى لام جيم. فنسبة جيم لام إلى لام كاف مركبة من نسبة القطر المجانب إلى الضلع القائم ومن نسبة زاي لام إلى لام جيم.

وأيضـا، إن أخرجنا من طرفي قطر الف با ، خطي الف ميم، با نون موازيين[189] لخطوط الترتيب يلقيان خط جيم دال على نقطتي ميم نون. فأقول إن سطح الف ميم في با نون يكون مساويـا لمربع زاي حا.

برهان ذلك :

أن[190] نسبة دال زاي إلى زاي با كنسبة با زاي إلى زاي ها. وإذا فصلنا وبدلنا، تكون نسبة دال زاي إلى زاي با، الذي هو مثل زاي الف، كنسبة دال با إلى با ها. فإذا عكسنا وركبنا، تكون نسبة الف دال إلى دال زاي، التي هي كنسبة الف ميم إلى زاي كاف، كنسبة ها دال إلى دال با، التي هي كنسبة جيم ها إلى نون با. فمسطح الف ميم في با نون مثل مسطح زاي كاف في ها جيم. وها جيم مثل زاي لام. فمسطح الف ميم في با نون مثل مسطح كاف زاي في زاي لام المساوي لمربع زاي لام.

فمسطح الف ميم في نون با مساو لمربع زاي حا.

وذلك ما أردنا أن نبين.

---

[184]- مساويا : مساو.

[185]- س : نون. وهكذا فيما بعد.

[186]- جيم : الكلمة مكررة.

[187]- لام : الكلمة ناقصة.

[188]- مؤلفة : الكلمة ناقصة.

[189]- موازيين : موازيتين.

[190]- أن : الكلمة مطموسة.

< **قضية 12**:>

//94و// كل خط يخرج في قطع غير مكافئ على الترتيب إلى القطر، ويقام على ذلك الخط وعلى الخط الذي على من مركز الشكل إلى طرف قطره، على كل واحد منهما، شكل متوازي الأضلاع ذو أربعة أضلاع زوايا أحده تساوي الزوايا للآخر، وتكون نسبة الخط المخرج على الترتيب في شكله إلى الضلع الآخر الذي من شكله، مركب من نسبة الخط الذي من المركز إلى رأس القطع إلى الخط الأخر من شكله ومن نسبة ضلع القطع القائم إلى قطره المجانب، فإن الشكل الذي يقوم على الخط الذي طوله من مركز الشكل إلى موضع وقوع الخط المخرج على الترتيب يكون[191] شبيهًا بالسطح الذي قام على الخط الذي من مركز الشكل إلى أطراف القطر.

أما في القطع الزائد : فإنه يكون أعظم من الشكل الذي قام على الخط المخرج على الترتيب بمقدار السطح الذي قام على الخط المخرج من المركز إلى طرف القطر .

فليكن قطع غير مكافئ وقطره المجانب الف با ، ومركزه نقطة ها. ونخرج خط جيم دال على الترتيب، إلى القطر. ونقيم على خط جيم دال سطحا متوازي الأضلاع ، يكون ضلعه الثاني أي ضلع كان، وهو سطح دال حا. ونقيم على خط الف ها سطحا تكون زواياه مثل زوايا سطح دال حا ، وهو الف زاي، وتكون نسبة الف ها إلى ها زاي مثناة بنسبة الخط القائم إلى القطر المجانب كنسبة دال جيم إلى جيم حا .

فأقول إن الشكل الذي يقوم على خط ها دال الشبيه بسطح الف زاي، في القطع الزائد مساو لسطحي الف زاي، حا دال.

وأما في القطع الناقص والدائرة، فإن الشكل الذي يقوم على خط دال ها مع مسطح حا دال، يكون مساويا لسطح الف زاي .

<**برهان ذلك** :>

فلنجعل نسبة خط جيم دال إلى خط جيم طا كنسبة[192] الضلع القائم إلى المجانب. ولأن نسبة دال جيم إلى جيم طا، التي هي كنسبة مربع دال جيم إلى سطح دال جيم في جيم طا، كنسبة الضلع القائم إلى المجانب. ونسبة الضلع القائم إلى المجانب كنسبة مربع دال جيم إلى سطح با دال في دال الف. فسطح با دال في دال الف[193] مساو لسطح دال جيم في جيم طا. ولأن نسبة دال جيم إلى جيم حا مركبة من نسبة الف ها إلى ها زاي ومن نسبة الضلع القائم إلى المجانب، التي هي مثل نسبة دال جيم إلى جيم طا، ونسبة دال جيم إلى جيم حا مركبة من نسبة دال جيم إلى جيم طا ومن نسبة طا[194] جيم إلى جيم حا، فالنسبة المركبة من نسبة الف ها إلى ها زاي ومن دال جيم إلى جيم طا هي كالمركبة من نسبة دال جيم إلى جيم طا ومن طا جيم إلى جيم حا. ولكن[195] نسبة طا جيم إلى جيم حا كنسبة سطح طا جيم في جيم دال إلى سطح جيم حا في جيم دال. ونسبة الف ها إلى ها زاي[196] كنسبة مربع الف ها إلى سطح الف ها في ها[197] زاي. فنسبة سطح طا جيم في جيم دال إلى سطح جيم حا في جيم //94ظ// دال كنسبة مربع الف ها إلى سطح الف ها في ها[198] زاي. ولكن سطح طا جيم في جيم دال قد استبان أنه[199] مساو لسطح با دال في دال الف. فنسبة سطح[200] با دال في دال الف إلى سطح جيم حا في جيم دال كنسبة مربع الف ها إلى سطح الف ها في ها زاي. وعلى تبديل النسبة، تكون نسبة سطح با دال في دال الف إلى مربع الف ها كنسبة سطح جيم حا في جيم دال إلى سطح الف ها في ها زاي. ونسبة سطح جيم حا في جيم دال إلى سطح الف ها في ها زاي كنسبة سطح دال حا المتوازي الأضلاع إلى زاي الف لأنهما متساويا الزوايا ونسبتهما مركبة من نسبة

191- يكون : ويكون.
192- كنسبة : شبيه.
193- فسطح با دال في دال جيم : الجملة ناقصة.
194- طا : دال. الكلمة مصححة في الهامش.
195- لكن : لاكن. وهكذا فيما بعد.
196- الف ها إلى ها زاي : الكلمة غير مفهومة.
197- ها : الكلمة غير مفهومة.
198- ها : الكلمة ناقصة.
199- أنه : الكلمة غير مفهومة.
200- سطح : الكلمة غير مفهومة.

أضلاعهما وهي نسبة جيم حا إلى الف ها ومن نسبة جيم دال إلى ها زاي. فنسبة سطح با دال في الف دال إلى مربع الف ها كنسبة سطح حا دال إلى سطح الف زاي.

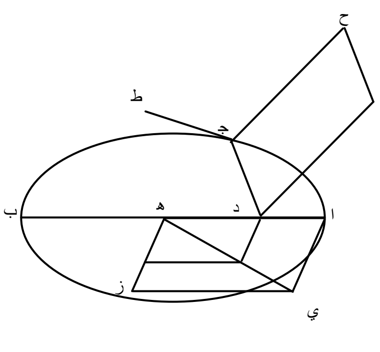
فنقول إن، في القطع الزائد، نسبة سطح با دال في دال الف مع مربع الف ها إلى مربع الف ها كنسبة سطحي حا دال، الف زاي إلى سطح الف زاي. ولكن سطح با دال في دال الف مع مربع الف ها مساو لمربع دال ها. ونسبة مربع دال ها إلى مربع الف ها كنسبة الشكل الذي على خط دال ها الشبيه بشكل الف زاي إلى شكل الف زاي. فنسبة سطحي حا دال الف زاي إلى سطح الف زاي كنسبة الشكل الذي على خط ها دال، الشبيه بسطح الف زاي، مساو لسطحي حا دال الف زاي.

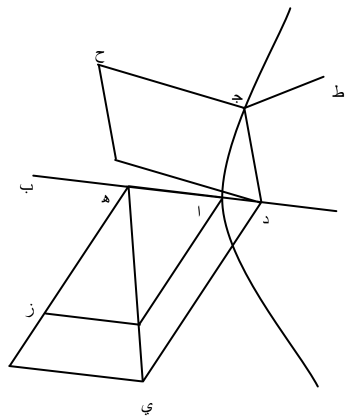
و أما في القطع الناقص والدائرة، فإن نسبة مربع الف ها إلى سطح الف زاي كنسبة سطح الف دال في دال با إلى سطح حا دال. وإذا نقصنا من مربع الف ها، سطح الف دال في دال با، ومن سطح الف زاي سطح دال حا، كانت نسبة الباقي من مربع الف ها إلى الباقي[201] من سطح الف زاي كنسبة مربع الف ها إلى سطح الف زاي.

أما مربع الف ها، إذا أنقص منه سطح با دال في دال الف، فإنه يبقى منه مربع ها دال. فنسبة مربع ها دال إلى فضل سطح الف زاي على سطح دال حا كنسبة مربع الف ها إلى سطح الف زاي. ولكن نسبة مربع الف ها إلى سطح الف زاي كنسبة مربع ها دال إلى السطح الذي قام على ها دال الشبيه بسطح الف زاي. فنسبة مربع ها دال إلى فضل سطح الف زاي على سطح دال حا كنسبة مربع ها دال إلى السطح الذي يقوم على خط دال ها الشبيه بسطح الف زاي. والسطح الذي قام على خط ها دال، الشبيه بسطح الف زاي، هو مساو لفضل[202] سطح الف زاي على سطح حا دال. فالسطح الذي على خط ها دال، الشبيه بسطح الف زاي مع سطح حا دال هو مساو لسطح الف زاي.

وكذلك يلزم إن كان مكان السطوح مثلثات.

وذلك ما أردنا أن نبين.





[201]- من مربع الف ها إلى الباقي : الجملة ناقصة.
[202]- لفضل : لفضله.

< قضية : 13>

كل خط يماس قطعًا ويخرج من موضع التماس، أما في القطع المكافئ، فخط مواز للسهم، وأما في غيره، فخط يصل بين المركز ونقطة التماس.

فإن ذلك الخط قطر أيضا لذلك القطع.

وهو، إذا اخرج على استقامة يفصل جميع الخطوط الخارجة في القطع، موازية للخط المماس، بنصفين نصفين. وهي خطوط الترتيب للقطع على تلك النقطة[203]. ونقطة التماس رأس أيضا لذلك القطع.

والضلع القائم له خط تكون نسبته إلى ضعف الخط المماس كنسبة ما يقع بين[204] الخط المماس الخارج من رأس القطع //95و// على السهم في الخط المماس من جهة نقطة التماس إلى ما يفصله أيضا ذلك الخط من ذلك القطر من جهة التماس.

فليكن القطع قطع الف با ، رأسه نقطة با[205] وقطره[206] با ها ويتعلم عليه نقطة كيف ما[207] وقعت وهي نقطة دال. ونخرج منها خط دال ها مماسا على نقطة دال ويلقى القطر على نقطة ها.

فإن كان القطع مكافئا، أخرجنا خط زاي دال لام موازيًا لخط با ها.

وإن كان غير مكافئ[208] وصلنا نقطة دال بالمركز، ولتكن نقطة جيم. وجعلنا جيم حا مثل جيم دال، وأخرجنا من نقطة با، خطًا موازيًا لخطوط الترتيب، عليه با، طا، زاي، يلقى خط دال ها على نقطة طا وخط دال زاي على نقطة زاي.

وأخرجنا من نقطة دال عمودًا إلى كاف على دال زاي. وجعلنا نسبة دال كاف إلى ضعف دال ها كنسبة ها دال إلى دال زاي. وتعلمنا نقطة على القطع كيف ما وقعت، وهي نقطة الف، وأخرجنا منها خط الف ميم نون صاد عين، موازيًا لخط دال ها، يلقى خط دال لام على نقطة ميم والقطع على نقطة نون وقطر با ها على صاد. فأقول إن الف ميم مساو لـ ميم نون.

فإن مربع الف ميم، أما في القطع المكافئ، فمساو لمسطح كاف دال في دال ميم. وفي غير المكافئ، لسطح مضاف إلى خط دال كاف يكون عرضه خط دال ميم. و يكون في الزائد زائدًا على خط دال كاف. وفي الناقص، ناقصًا عن خط دال كاف بسطح شبيه بسطح كاف دال في دال ميم[209].

برهان ذلك :

أنا نخرج من نقط[210] الف، دال، نون خطوطًا على الترتيب وهي الف لام سين تلقى خط دال لام على نقطة لام، وخط دال شين، وخط نون قاف يلقى خط دال زاي على نقطة فا. ونجعل خط صاد عين مساويا لخط دال ها. ونصل، في غير المكافئ، خط حا كاف[211]، ونخرج خط جيم تا موازيًا لخط حا كاف. ونخرج من نقطة ميم خطًا موازيًا لخط دال كاف عليه ميم تا واو، يلقى حا كاف على نقطة واو، وخط جيم تا ثا على نقطة تا.

فإن كان القطع مكافئا، كان خط شين[212] با مساويا لخط با ها[213]. فيكون لذلك سطح دال با مساويا لمثلث دال شين ها. وتكون نسبة مثلث الف سين صاد إلى مثلث دال شين[214] ها كنسبة مربع خط الف سين إلى مربع خط دال شين التي هي كنسبة سين با إلى با شين التي هي كنسبة سطح لام با إلى سطح دال با. فإذا بدلنا كانت نسبة مثلث الف صاد سين إلى سطح لام با كنسبة مثلث دال شين ها إلى سطح دال با. ومثلث دال شين ها مساو لسطح دال با. فمثلث الف سين صاد مساو لسطح لام با .

وبمثل ذلك، نبين أن سطح فا با مساو لمثلث نون قاف صاد. فيبقى سطح لام قاف المتوازي الأضلاع مساو لسطح قاف نون الف سين ذي الأربعة الأضلاع. فإذا طرحنا منه مخمس قاف نون ميم لام سين بقي مثلث الف ميم لام مساو لمثلث فا ميم نون وهما متشابهان. فخط الف ميم مساو لخط ميم نون .

203- تلك : ذلك.
204- يقع بين : الكلمتان مطموستان.
205- با : الف.
206- قطره : الكلمة مطموسة.
207- كيف ما : الكلمة مطموسة.
208- مكافئ : مكاف.
209- ميم : الكلمة مطموسة.
210- نقط : نقطة.
211- حا كاف : طا حا كاف.
212- شين : سين.
213- با ها : الكلمة غير مقروئة
214- شين : سين.

وأما في غير المكافئ، فتكون نسبة دال شين إلى شين ها التي هي كنسبة الف سين إلى سين صاد كنسبة جيم شين إلى شين دال التي هي كنسبة جيم با إلى با زاي مثناة بنسبة القائم إلى المجانب. فيكون لذلك، أما في القطع الزائد، مثلثا الف سين صاد زاي با جيم مساويين[215] لمثلث لام سين جيم.

وفي الناقص، مثلثا الف سين صاد، لام سين جيم مساويين[216] لمثلث زاي با جيم . ونسبة نون قاف إلى قاف صاد كنسبة الف سين إلى سين صاد.

فيكون، لذلك، في الزائد، مثلثا نون قاف صاد، زاي با جيم مساويين لمثلث فا قاف جيم.

وفي الناقص، مثلثا نون قاف صاد، فا قاف جيم مساويين لمثلث زاي با جيم.

وفي كليهما مثلث نون قاف صاد يكون مساويًا لسطح فا قاف با زاي ذي الأربعة الأضلاع[217] //95ظ//.

فيبقى[218] سطح قاف فا لام سين ذا الأربعة الأضلاع مساو لسطح قاف نون سين الف ذي الأربعة الأضلاع.

فإذا طرحنا منها مخمس قاف نون ميم لام سين، بقي مثلث نون فا ميم مساويًا[219] لمثلث ميم لام الف[220] وهما متشابهان. فخط الف ميم مساو لخط ميم نون .

وأيضـا إن كان القطع مكافئـا، كان خط دال زاي مساويًا لخط با ها. فمثلث دال زاي طا مساو لمثلث ها طا با. فإذا زدنا عليهما مخمس با طا دال لام سين، كان سطح ها دال لام سين، ذو الأربعة الأضلاع مساويًا لسطح لام با المساوي لمثلث الف سين صاد.

فإذا طرحنا سطح صاد ميم لام سين ذا الأربعة الأضلاع بقي سطح ها دال ميم صاد مساويًا لمثلث الف ميم لام. وصاد عين فرض مساويـا لِـ دال ها. فمسطح ها دال ميم صاد مساوي لمثلث دال ميم عين.

وفي غير المكافئ، أما في الزائد: فلأن مثلث دال شين جيم مساو لمثلثي دال شين ها، زاي با جيم، وهو أيضـا مساو لمثلثي دال شين ها، دال ها جيم، فمثلث زاي با جيم مساو لمثلث ها دال جيم.

فمثلث دال ها جيم مع[221] مثلث الف سين صاد مساويان لمثلث لام سين جيم. ومثلث دال ها جيم مع سطح ها دال لام سين مساويان لمثلث لام سين جيم. ومثلث دال ها جيم مع سطح ها دال لام سين مساويان لمثلث لام سين جيم[222]. ومثلث دال ها جيم مع سطح ها دال لام سين[223] ذي الأربعة أضلاع مساو لمثلث الف سين صاد.

وأما في القطع الناقص، فلأن مثلثي دال شين جيم، دال شين ها اللذين هما مثل مثلث دال جيم ها مساويان لمثلث با زاي جيم. فمثلث دال جيم ها مساو لمثلث با زاي جيم. فمثلث دال جيم ها مساو لمثلثي الف سين صاد، جيم سين لام. ونطرح مثلث جيم سين لام. فيبقى سطح سين لام دال ها مساويًا لمثلث الف سين صاد. ونطرح، في القطعين جميعًا، سطح لام سين صاد ميم. فيبقى مثلث الف لام ميم مساو لسطح دال ميم صاد ها، المساوي لمثلث دال ميم عين.

فتكون، في القطع المكافئ، نسبة دال كاف[224] إلى ضعف دال ها، الذي هو ميم عين، كنسبة طا دال إلى دال زاي، التي هي كنسبة الف ميم إلى ميم لام .

فإذا جعلنا خط دال ميم ارتفاعًا مشتركًا، كانت نسبة سطح كاف دال في دال ميم إلى سطح عين ميم في ميم دال كنسبة مربع الف ميم إلى سطح الف ميم في ميم لام. وسطح الف ميم في ميم لام مساو لسطح عين ميم في ميم دال. فمربع الف دال مساو لمسطح كاف دال في دال ميم .

وفي غير المكافئ، لأن نسبة ميم جيم إلى جيم دال كنسبة ضاد ميم إلى ثا دال أوكنسبة ميم صاد إلى دال ها. فإذا[225] أبدلنا كانت نسبة ضاد ميم إلى ميم صاد كنسبة ضاد[226] دال إلى دال ها التي هي كنسبة

215- مساويين : مساويا.
216- مساويين : مساويا.
217- ذي الأربعة أضلاع : الكلمة غير مفهومة.
218- فيبقى : فيبقا.
219- مساويا : مساو.
220- الف : الكلمة مطموسة.
221- مع : الكلمة مكررة.
222- الجملة مكررة.
223- ها دال لام سين : الكلمة ناقصة.
224- كاف : الكلمة مطموسة.
225- فإذا : وإذا.
226- ثا : ضاد.

كاف دال إلى ضعف دال ها لأن خط ثا دال نصف خط دال كاف وواو ثا مثل ثا دال ودال ها مثل[227] صاد عين . فنسبة واو ميم إلى ميم عين كنسبة طا دال إلى دال زاي التي هي كنسبة الف لام ميم إلى ميم لام.

فإذا جعلنا ميم دال ارتفاعا مشتركًا، كانت نسبة سطح واو ميم في ميم دال إلى سطح عين ميم في ميم دال كنسبة مربع الف ميم إلى سطح الف ميم في ميم لام وسطح الف ميم في ميم لام مساو لسطح ميم واو[228] في ميم دال. فمربع الف ميم يساو لسطح واو ميم في ميم دال .

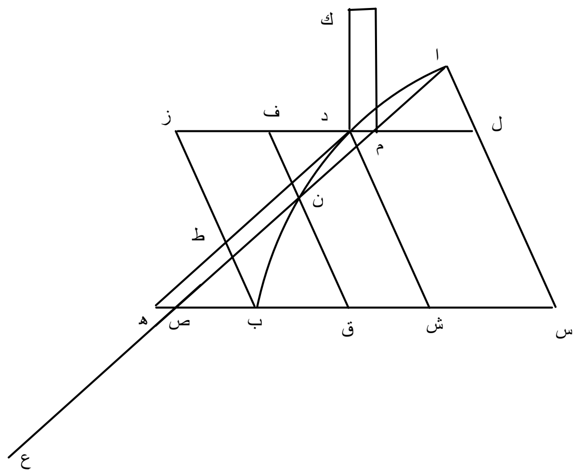
فخط كاف دال، الضلع القائم لقطع الف دال الذي رأسه نقطة دال وقطره حا جيم دال لام، وخط ترتيبه خط الف ميم.

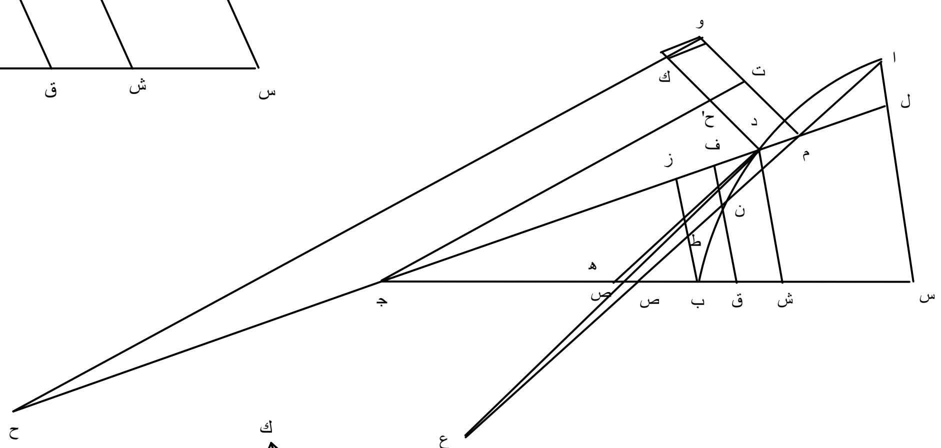
وإن كان السهم الأقصر للقطع الناقص خط الف با وأخرجنا من نقطة الف، على خط الف با، عمود الف جيم وجعلنا نسبة با الف إلى الف جيم كنسبة القائم إلى المجانب، فإن خط الف جيم يكون الضلع القائم لسهم الف با، وتكون خطوط ترتيبه الخطوط الواقعة من محيط القطع على سهم الف با موازية للسهم الأطول. وتقوى خطوط //113و// الترتيب على السطوح المضافة إلى خط الف جيم بنقصان سطح شبيه بسطح الف جيم في الف با.

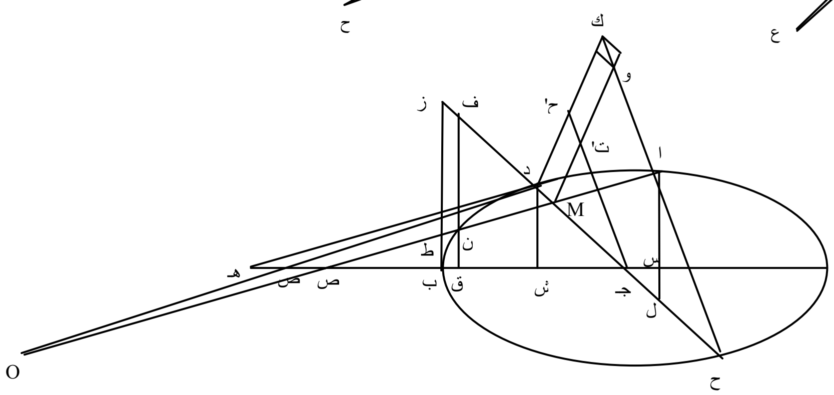
<برهان ذلك :>

وذلك إنا إذا تعلمنا على القطع نقطة دال، وأخرجنا خط[229] طا دال ها موازيًا للسهم الأطول ووصلنا جيم با وأخرجنا خط دال ها موازيًا للسهم الأطول حتى يلقى جيم با على نقطة زاي، كانت نسبة سطح الف ها في ها با إلى مربع ها دال كنسبة القائم إلى المجانب، على ما تبين. وهي نسبة با ها إلى ها زاي التي ها كنسبة مسطح با ها في ها الف إلى مسطح زاي ها في ها الف. فمسطح زاي ها في ها الف مساو لمربع ها دال. فمربع ها دال يقوي على سطح مضاف إلى خط الف جيم وينقص عن تمامه سطحًا شبيهًا بسطح با الف في الف جيم.

وذلك ما أردنا أن نبيِّن.







227- مثل : متصل.
228- ميم واو : الكلمتان مطموستان.
229- خط : الكلمة ناقصة.

< قضية 14 :>

كل خط يقطع قطعـا وينقسم بقطره بنصفين. فإنه مواز للخط الخارج من رأس ذلك القطع مماسـا، إذا لم يمر بالمركز في القطع الناقص.

وإن أخرج خط مواز لخط مماس لقطع، وقسم بنصفين ووصل بين تلك النقطة ونقطة التماس، فإن ذلك الخط يكون قطرا .

وإن كان خطان متوازيان يقطعان قطعا أو يماسانه، فإن الخط الذي يفصلهما بنصفين نصفين قطر لذلك القطع.

وإن كانا مماسين للقطعيين المتقابلين أو للناقص[230]، فإن الخط الواصل بين نقطتي التماس يكون أيضـا قطرا.

وإن لم يكن الخطان المماسان متوازيين و التقيا، فإنه إذا قسم الخط الواصل بين نقطتي التماس بنصفين ووصل بين تلك النقطة والنقطة التي التقى عليها الخطان المماسان، فإن ذلك يكون أيضا قطرا.

<مثال ذلك :>

فليكن القطع، قطع الف با جيم، قطره الف دال وقد قسم[231] خط با جيم على قطر الف دال على نقطة دال بنصفين.

فأقول إنه مواز للخط الخارج من نقطة الف مماس للقطع.

وإن كان خط با جيم موازيـا للخط الخارج من نقطة الف مماسا للقطع وقسم بنصفين على نقطة دال، فإن خط الف دال يكون قطرا.

برهانه :

أنه إن لم يكن خط با جيم موازيًا لخط المماس //113ظ// وأخرجنا من نقطة با خطـ با ها زاي موازيـا له، انقسم على قطر الف دال بنصفين على نقطة ها. فإذا وصلنا جيم زاي كان موازيـا لخط الف دال. وذلك خلف لأنه، في غير الناقص، يلقى خط الف دال، وفي الناقص، إذا أخرجنا من نقطة با خطـا يمر بالمركز انقسم بنصفين. فيكون طرفه مع نقطتي جيم، زاي في خط واحد لأنه يكون أبدًا موازيـا لخط دال ها. وذلك خلف.

وبَيِّن أن خط با جيم، إن كان موازيـا للخط الذي يخرج من نقطة الف، مماسا[232] للقطع وقسم على دال بنصفين، ووصل الف دال، إن الف دال يكون قطرا، لأن إذا أخرجنا من نقطة الف قطرا قسم خط با جيم بنصفين.

وأيضـا إن كان خطا با جيم وطا زاي متوازيين وقسما بنصفين على نقطتي دال، حا وأخرج خط دال حا حتى لقى القطع على نقطة الف، فأقول إن خط الف دال قطر للقطع. لأنه إن لم يكون خط الف دال قطرا وأمكن أن يكون غيره. فإنه إذا أخرج قسمها بنصفين نصفين. ولا يمكن أن يقسمها على غير نقطتي دال حا. فخط الف دال قطر.

وليكن أيضـا خطا الف كاف، لام نون متوازيين مماسين لقطع ناقص أو لقطعين متقابلين. فأقول إن الخط الواصل بين نقطتي التماس يكون قطرا لأن خطوط الترتيب تكون موازية لهما والقطران المخرجان من نقطتي الف لام[233] يقسمان خطوط الترتيب بنصفين نصفين. فلذلك لا يكون القطر لهما غير الخط الواصل بين نقطتي الف لام.

وتبين من ذلك أنه ان لم يكن خطا الف كاف ولام نون متوازيين، فإنهما ملتقيان لأن كل واحد منهما يلقى الخط الموازي للآخر إذ يقطع خطوط الترتيب الموازية له.

وأقول إنه إن كان خطا الف كاف ولام نون مماسين لقطع والتقيا على نقطة صاد، ووصل بين نقطتي الف، لام وقسم خط الف لام على نقطة سين ووصل سين صاد، فإنه قطر للقطع أيضـا.

برهان ذلك :

230- للناقص : الناقص.

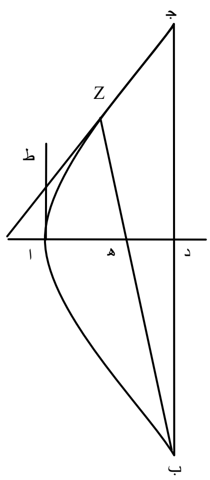
231- وقد قسم : او قد يقسم.

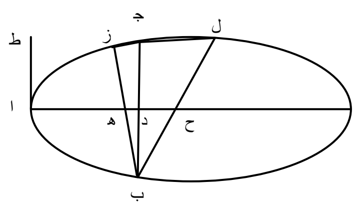
232- مماسا : مماس.

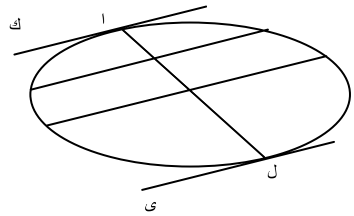
233- لام : كتب الناسخ "سين" ثم صححها في الهامش.

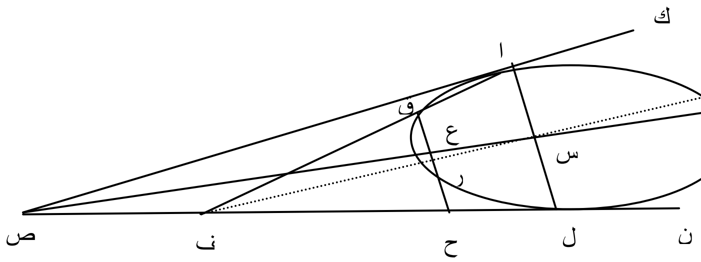
أن لم يكن خط سين صاد قطرا، فليكن القطر سين فا. ونصل الف فا، وليلق القطع على نقطة قاف، ونخرج من نقطة قاف خطًا موازيًا لخط الف لام يلقى القطع على نقطة را وخط فا لام على نقطة حا. فلأن نسبة الف سين إلى سين لام كنسبة قاف عين إلى عين حا، والف سين مساو لـ سين لام، يكون قاف عين مساويـا لـ عين حا. ولأن خط فا سين قطر للقطع فهو يقسم خط قاف را بنصفين. فخط قاف عين مساو لخط عين را. وقد تبين أن خط قاف عين مساو لخط عين حا. فخط عين را مساو لـ عين ها، وهو بعضه. هذا خلف. فلا يمكن أن يكون القطر غير صاد سين.

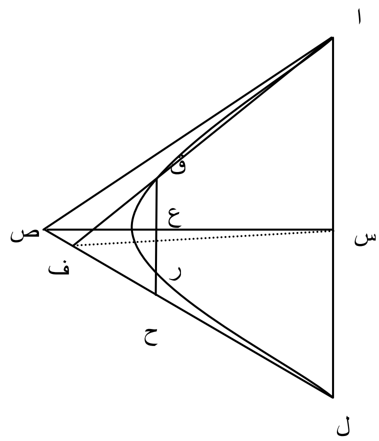
وهناك استبان كيف نجد قطر أي قطع أردنا ومركزه. لأنا متى أوقعنا فيه خطين متوازيين كان الخط القاسم لهما بنصفين نصفين قطرا للقطع. وان أخرجنا له قطرا آخر، كان ملتقى القطرين مركزًا للقطع. وذلك ما أردنا أن نبين.

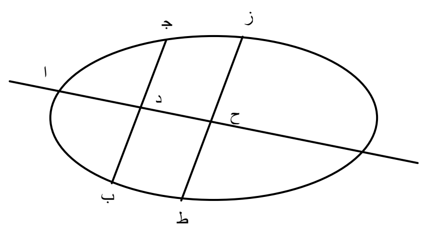












<قضية 15 :>

نريد أن نبين كيف نجد سهم أي[234] قطع أردنا ومركزه.

فليكن أولا القطع المكافئ عليه جيم زاي ها، ونريد أن نجد سهمه. فنخرج أولا أحد أقطاره وهو خط //114و// الف با[235]، ونخرج عليه عمود با ها وننفذه إلى نقطة زاي.

فإن كان با ها مساويًا لخط با زاي، فقد تبين أن الف با سهم للقطع.

وإن لم يكن كذلك، فنقسم ها زاي بنصفين على نقطة دال ونخرج منها خطًا موازيًا لخط الف با، عليه جيم دال.

فبين أن خط جيم دال سهم للقطع لأنه مواز لقطر القطع وهو يقطع ها زاي بنصفين وعلى زاويا قائمة. فقد وجدنا سهم القطع المكافئ وهو خط جيم دال.

وليس للقطع المكافئ سهم آخر غير هذا لأنه إن كان له سهم[236] آخر مثل[237] الف با، كان موازيًا لخط جيم دال وقطع خط ها زاي بنصفين. وذلك ما لا يمكن. فليس للقطع المكافئ إلا سهم واحد.

وليكن القطع الزائد أو الناقص عليه الف، با، جيم ونريد أن نجد سهمه. وليكن مركز القطع نقطة كاف. ونتعلم على القطع نقطة ما عليها جيم. وعلى مركز كاف، وببعد كاف جيم[238]، دائرة جيم ها الف. ونصل جيم الف ونقطعه بنصفين على نقطة دال، ونصل كاف جيم، كاف الف. وننفذ كاف دال إلى نقطة ها.

فلأن خط الف دال مساو لخط دال جيم وخط دال كاف مشترك، فخطا[239] دال[240] جيم، دال كاف مساويان لخطي الف دال، دال كاف. وقاعدة كاف الف مساوية لقاعدة كاف جيم. فزاوية كاف دال جيم مثل زاوية كاف دال الف. فقد قطع خط كاف دال خط الف جيم بنصفين وعلى زوايا قائمة. فخط كاف دال سهم.

ونخرج على نقطة كاف خطًا موازيًا لخط جيم الف عليه ميم كاف زاي. فخط ميم كاف زاي سهم للقطع. والمزدوج[241] له خط كاف با.

وإذ قد استبان هذا، فبَيِّن أنه لا يمكن أن يكون لهذه القطوع سهام سوى التي ذكرنا .

فإن أمكن ذلك، فليكن سهم آخر عليه كاف حا. فعلى مثل ما قد تقدم ذكره، إذا نحن أخرجنا خط الف طا لام عمودًا على كاف حا، يكون خط الف طا مساويًا لخط طا لام وخط الف كاف مساويًا لخط كاف لام. فهو أيضا مساو لخط كاف جيم . فخط كاف لام مساو لخط كاف جيم. وذلك ما لا يمكن لأن الدائرة التي عليها الف جيم لا يمكن أن تقع على القطع، على نقطة أخرى، في ما بين الف با جيم.

أما في القطع الزائد، فذلك بيِّن.

وأما في القطع الناقص، فإن أمكن، فلتقع على نقطة لام ونخرج عمودين عليهما جيم قاف[242]، لام زاي . فلأن خط جيم كاف[243] مساو لخط كاف لام، لأنهما خرجا من مركز الدائرة، فيكون مربع جيم كاف مساويًا لمربع كاف لام . لكن مربعي[244] جيم قاف، قاف كاف مساويان لمربعي لام زاي، زاي كاف[245]. فتفاضل مربعي جيم قاف، لام زاي كتفاضل مربعي زاي كاف، كاف قاف.

وأيضا، لأن سطح ميم قاف في قاف نون مع مربع قاف كاف مساو لمربع كاف ميم وسطح ميم زاي[246] في زاي نون مع مربع زاي كاف مساو لمربع كاف ميم، يكون سطح ميم قاف في قاف نون مع مربع قاف كاف مساويًا لسطح ميم زاي في زاي نون مع مربع زاي كاف.

ففضل ما بين مربع زاي كاف ومربع كاف قاف كفضل ما بين سطح ميم قاف في قاف نون وسطح ميم زاي في زاي نون. وقد استبان أن فضل ما بين مربع زاي كاف ومربع كاف قاف كفضل ما بين مربع

234- أي : الكلمة مطموسة.
235- الف با : الكلمة مطموسة.
236- سهم : الكلمة ساقطة.
237- مثل : بمثل.
238- جيم : الكلمة مكتوبة في الهامش.
239- فخطا : فخطي.
240- دال : جيم.
241- المزدوج : المزاوج.
242- جيم قاف : جيم لا قاف.
243- جيم كاف : جيم.
244- مربعي : مربعا.
245- جيم : كاف.
246- زاي : الكلمة غير مقروءة.

قاف جيم ومربع لام زاي. فمقدار ما بين مربع جيم قاف ومربع زاي لام هو مقدار ما بين سطح ميم قاف في قاف نون وسطح ميم زاي في زاي نون.

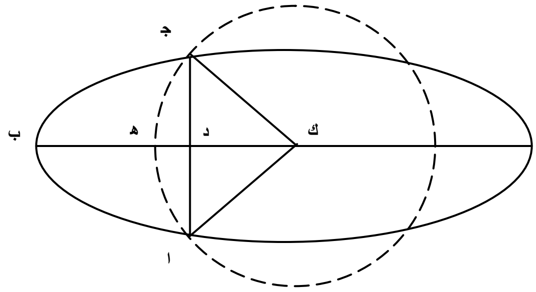
ولأن خطي جيم قاف، لام زاي على الترتيب، تكون نسبة مربع جيم قاف إلى سطح ميم قاف في قاف نون كنسبة مربع لام زاي إلى سطح ميم زاي في زاي نون.

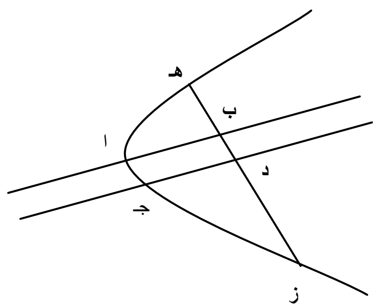
وقد تبين أن التفاضل عليهما واحد.

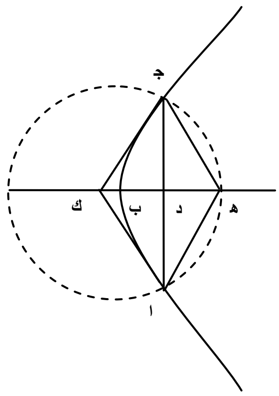
فمربع //114ظ// جيم قاف مساو لسطح ميم قاف في قاف نون. ومربع لام زاي مساو لسطح ميم زاي في زاي نون، لأنه إذا كانت أربعة أقدار متناسبة وكانت زيادة الأول على الثالث مثل زيادة الثاني على الرابع، كان الأول مثل الثاني والثالث مثل الرابع.

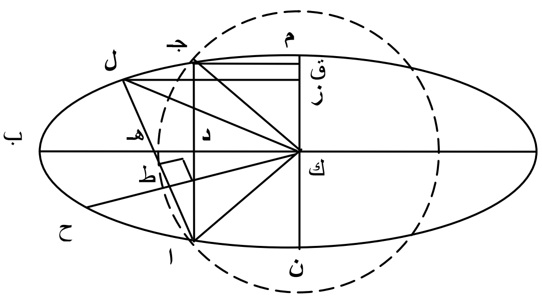
فقطع جيم ميم لام دائرة، وذلك مما لا يمكن لأنه فرض قطعًا ناقصًا.

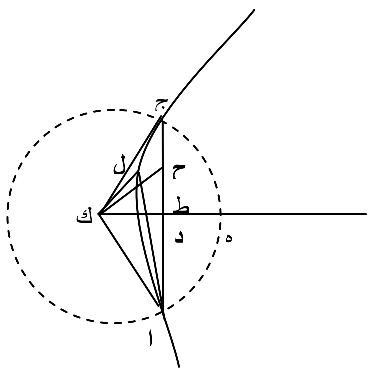
وذلك ما أردنا أن نبين.











< قضية 16 >

كل خطين يماسان قطعًا ويلتقيان ونخرج خطًا يصل بين نقطتي التماس، فإنه إذا أخرج من نقطة التقاء[247] الخطين المماسين[248] أو من النقطة التي انقسم عليها الخط الواصل بين نقطتي التماس بنصفين، خط يقطع القطع على موضعين ويقسم الخط الواصل بين نقطتي التماس وينتهي إلى الخط الخارج[249] الموازي للخط الذي يصل بين نقطتي التماس، فإن نسبة الخط القاطع للقطع، مع ما منه[250] خارج القطع، إلى ما منه خارج القطع كنسبة القسمين اللذين يقسمهما الخط الواصل بين نقطتي التماس، أحدهما إلى الأخر.

< مثال ذلك : >

فليكن القطع قطع الف با والخطان المماسان له خطا الف جيم ، با جيم. ولنصل الف با ونقسمه بنصفين على نقطة سين، ونخرج من نقطة جيم خط جيم عين موازيا لخط الف با.

فأقول إنه متى أخرجنا من إحدى نقطتي جيم، سين خطا يقطع القطع في موضعين وينقسم على الف با وينتهي إلى خط جيم عين، وليكن مثل إحدى خطي جيم دال ، ها زاي وزاي سين ، حا عين.

فأقول إن نسبة زاي جيم إلى جيم دال كنسبة زاي ها إلى ها دال وإن نسبة زاي عين إلى عين حا كنسبة زاي سين إلى سين حا.

برهان ذلك :

أنَّا نخرج من نقطتي زاي دال خطي زاي ميم ، دال طا موازيين لخط[251] الف، با يلقيان[252] خط جيم[253] الف على نقطتي لام، صاد، ويلقيان قطر جيم سين على نقطتي ميم طا، ويلقيان القطر المخرج من نقطة الف على نقطتي كاف نون. ونخرج من نقطتي زاي دا ل خطين موازيين لخط الف جيم ويلقيان قطرجيم ميم[254] على نقطتي قاف فا ويلقي خط زاي قاف قطر الف كاف على نقطة شين. فيكون مثلث زاي شين كاف مساويا لسطح الف شين قاف جيم، كما تبين في شكل استخراج الأضلاع القائمة على أقطار في[255] القطوع.

فإذا جعلنا سطح الف شين زاي لام مشتركا كان مثلث الف كاف لام مساويًا لسطح لام جيم، قاف زاي.

ومثلث الف نون صاد يكون أيضا مساويًا لسطح صاد جيم فا دال ذي الأربعة أضلاع[256] لأنه إن كان رأس القطع نقطة ثا وأخرجنا منه خطًا موازيًا لخط الف با ويلقي خط دال فا على نقطة ثا وخط الف جيم على نقطة يا والقطر المخرج من نقطة الف على نقطة واو.

فإن كان القطع مكافئا، كان مثلث دال // 115و// فا طا مساويًا[257] لسطح طا واو، كما تبين. فإذا أسقطنا سطح ثا دال طا با المشترك، بقي سطح واو تا دال نون مساويًا لمثلث تا ثا فا. فإذا زدنا عليهما سطح فا جيم تا با مشتركا كان عـلَـم نون دال فا جيم با واو مساويًا لمثلث[258] يا با جيم المساوي لمثلث با

[247]- التقا : التقاء.
[248]- المماسين : المماسان.
[249]- الخط الخارج : الخط الخارج مماسا الخطين.
[250]- ما منه : ما فيه.
[251]- لخط : لخطي.
[252]- يلقيان : يلتقيان.
[253]- جيم الف : ميم الف.
[254]- جيم ميم : ا ميم.
[255]- في : الكلمة ناقصة.
[256]- الأربعة أضلاع : الأربعة الأضلاع. وهكذا فيما بعد.
[257]- فا طا مساويا : الكلمات مطموسة.
[258]- المثلث : الكلمة مطموسة.

جيم واو[259]. فمثلث الف با واو مساو للعَلَم. وإذا أسقطنا سطح نون صاد با واو ذا الأربعة أضلاع المشترك، بقي مثلث الف نون صاد مساويًا[260] لسطح صاد دال فا جيم ذي الأربعة أضلاع .

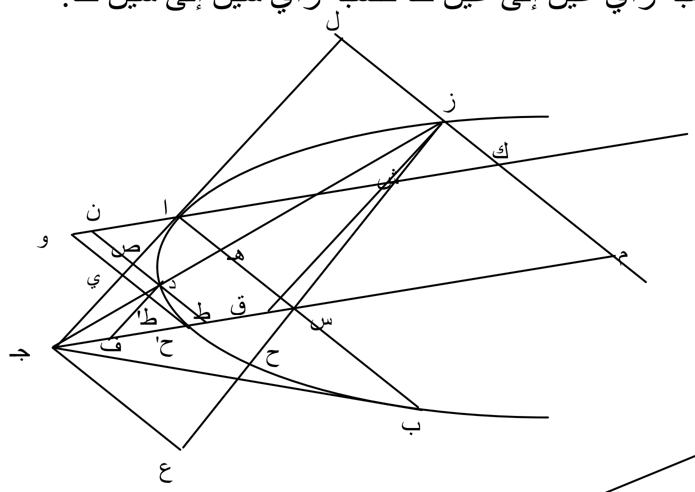
وإن كان القطع غير مكافئ، وكان المركز نقطة را وكان القطع زائدًا، كان مثلثا دال طا واو، الف را جيم مساويين للمثلث نون طا را. فإذا أسقطنا مثلث دال طا فا مشتركًا وسطح نون صاد فا جيم را المشترك أيضـا، بقي المثلث الف نون صاد مساويًا لسطح صاد دال فا جيم.

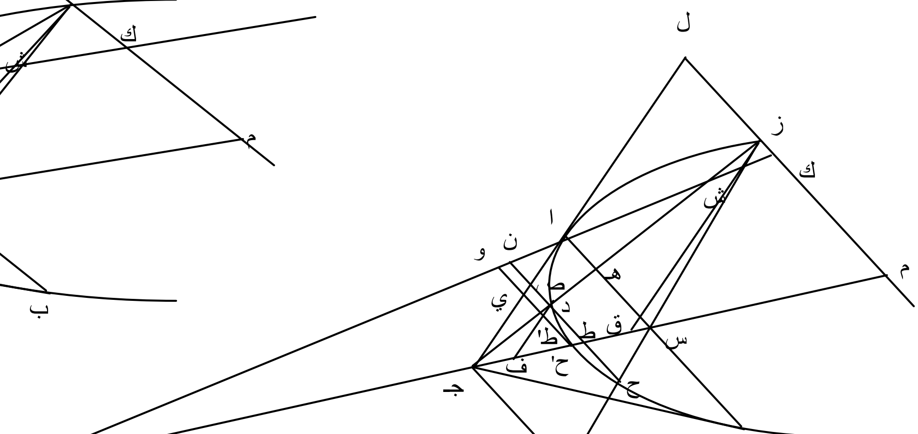
وأما في الناقص، فيتبيَّن كما تبين في المكافئ. ولأن نسبة مربع زاي جيم إلى مربع جيم دال كنسبة مثلث زاي قاف ميم إلى مثلث دال فا طا. فيبقى سطحا لام جيم قاف زاي، صاد جيم فا دال على نسبتهما وهما مساويان لمثلثي لام كاف الف، الف نون صاد وهما متشابهان. فنسبة مربع لام الف إلى مربع الف صاد، التي هي كنسبة مربع زاي ها إلى مربع ها دال كنسبة مربع زاي جيم إلى مربع جيم دال.

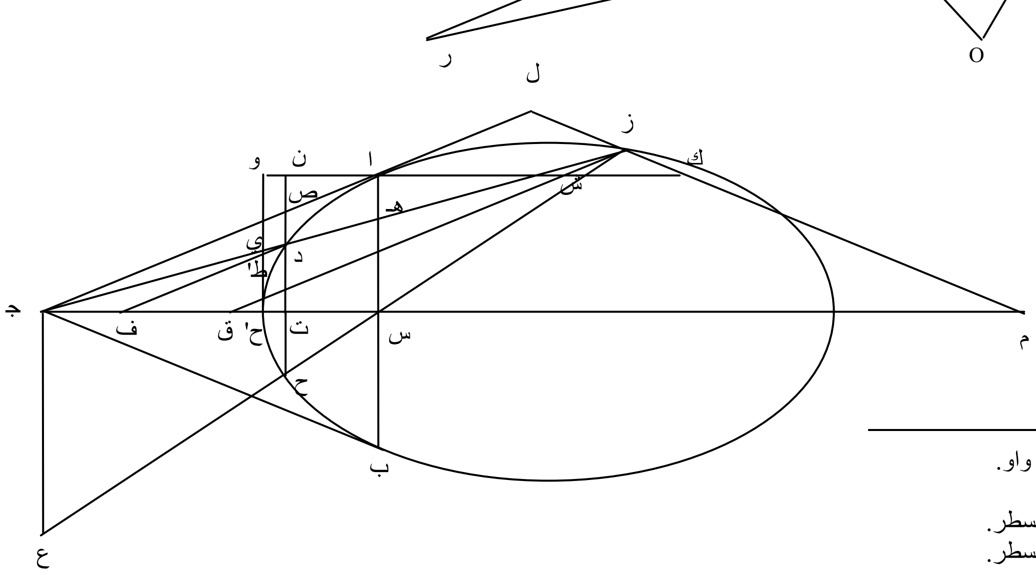
وأيضـا إن أخرجنا خط زاي سين حا عين. فأقول إن نسبة زاي عين إلى عين دال كنسبة خط زاي سين إلى خط سين حا.

برهان ذلك أنا نخرج من نقطتي زاي حا خطي زاي ميم، حا طا يلقيان خطوط الشكل على ما كانت عليه. فتكون نسبة مربع زاي ميم إلى مربع حا طا الذي هو مثل طا دال كنسبة مربع ميم سين إلى مربع سين طا. ونسبة مربع زاي ميم إلى مربع طا دال كنسبة مثلث زاي قاف ميم إلى مثلث دال فا طا. ونسبة مربع ميم سين إلى مربع سين طا كنسبة مربع لام الف إلى مربع الف صاد التي هي كنسبة مثلث لام الف كاف، الذي هو مساو لسطح لام جيم قاف زاي إلى مثلث الف نون صاد الذي هو مساو لسطح صاد جيم فا دال. فإذا جمعنا، كانت نسبة مثلث لام جيم ميم إلى مثلث صاد جيم طا كنسبة مربع ميم جيم إلى مربع جيم طا. ونسبة مربع[261] ميم سين إلى مربع[262] سين طا كنسبة خط زاي سين إلى خط سين حا. ونسبة ميم جيم إلى جيم طا كنسبة زاي عين إلى عين حا. فنسبة زاي عين إلى عين حا كنسبة زاي سين إلى سين حا.

وذلك ما أردنا أن نبين.







259- با جيم واو : با با جيم واو.
260- مساويا : مساو.
261- مربع : الكلمة فوق السطر.
262- مربع : الكلمة فوق السطر.

< **قضية 17:** >

//115ظ// إذا كان قطع ناقص وقسم سهمه الأطول على نقطة حتى يكون مسطح قسمي السهم أحدهما في الآخر مساويًا لربع[263] السطح الذي يحيط به[264] السهم مع الضلع القائم له، وقسم أيضا بقسمين آخرين سطحهما مساو لهما[265]. فإن مجموع كل خطين يخرجان من النقطتين القاسمتين له ويلتقيان على محيط القطع مساويان للسهم الأطول.

فليكن القطع قطع الف ها. وأطول سهمه الف با، وكل واحد من سطحي الف حا في حا با والف زاي في زاي با مساو لربع السطح الذي يضاف إلى الف با ويكون عرضه الضلع القائم.

ولنتعلم نقطة على القطع عليها ها ونصل ها زاي ، ها حا.

فأقول إن خطي زاي ها، ها حا مساويان لسهم الف با.

برهان ذلك :

أنا نخرج خطي الف جيم، با دال[266] على زوايا قائمة على السهم . و من نقطة ها خطا مماسا يقطعهما على نقطتي دال، جيم. ونصل جيم حا، حا دال، جيم زاي، زاي دال. وليتقاطع خطا جيم حا وزاي دال على نقطة ط .

فلأن كل واحد من سطحي الف جيم في با دال والف زاي في زاي با مساويان لربع السطح المضاف إلى الف با الذي عرضه الضلع القائم، تكون نسبة الف جيم إلى الف زاي كنسبة زاي با إلى با دال. وزاويتا الف، با قائمتان. فزاوية الف جيم زاي مساوية لزاوية با زاي دال. فزاويتا الف زاي جيم، با زاي دال[267] مساويتان لزاوية قائمة. فزاوية جيم زاي //116و// دال قائمة.

وبمثل ذلك نبين أن زاوية جيم حا دال قائمة .

فإذا رسمنا على قطر جيم دال دائرة مرت بنقطتي زاي حا. وكانت زاويتا دال جيم حا، دال زاي حا متساويتين لأنهما في قطعة واحدة. وزاوية دال زاي حا مساوية لزاوية الف جيم زاي. فزاوية دال جيم حا مساوية لزاوية الف جيم زاي.

ولذلك أيضا تكون زاوية جيم دال زاي مساوية لزاوية با دال حا.

فإن كان خط جيم دال موازيًا لخط الف با، فبَيِّن أن الخط الواصل بين نقطة طا ونقطة ها يكون عمودا على خط جيم دال.

وإن لم يكونا متوازيين وأخرجناهما حتى يلتقيا على نقطة كاف، فأقول أيضا إنه عمود على خط جيم دال لا يمكن غيره.

<**برهان ذلك :**>

فإن أمكن فليكن العمود طا لام. فلأن زاوية جيم دال زاي مساوية لزاوية حا دال با، وزاوية با مثل زاوية طا لام دال، فمثلث دال با حا شبيه بمثلث دال لام طا. فتكون نسبة حا دال إلى دال طا كنسبة با دال إلى دال لام، ونسبة حا دال إلى دال طا كنسبة زاي جيم إلى جيم طا، من أجل تشابه المثلثين، التي هي كنسبة الف جيم إلى جيم لام ، من أجل تشابه المثلثين أيضا. فنسبة با دال إلى دال لام، التي هي كنسبة حا دال إلى دال طا، كنسبة الف جيم إلى جيم لام. فإذا بدلنا نسبة دال با إلى جيم الف كنسبة دال لام إلى لام جيم. ولكن نسبة دال با إلى جيم الف كنسبة با كاف إلى كاف الف. فنسبة دال لام إلى لام جيم كنسبة با كاف إلى كاف الف[268]. ونخرج من نقطة ها خطا موازيا لخط الف جيم عليه ها ميم. فيكون على الترتيب على خط الف با. ولكن نسبة با كاف إلى كاف الف كنسبة با ميم إلى ميم الف. ونسبة با ميم إلى ميم الف كنسبة دال ها إلى ها جيم. وقد كانت أيضا نسبة با كاف إلى كاف الف كنسبة دال لام إلى لام جيم. وذلك لا يمكن. فليس العمود على خط جيم با غير طا ها.

263- لربع : لمربع.

264- به : الكلمة ناقصة.

265- سطحهما مساو لهما : مساويان لهما.

266- با دال : با دال على با دال.

267- الف زاي جيم، با زاي دال : الف زاي با جيم زاي دال.

268- فنسبة دال لام إلى لام جيم كنسبة با كاف إلى كاف الف : الجملة في الهامش.

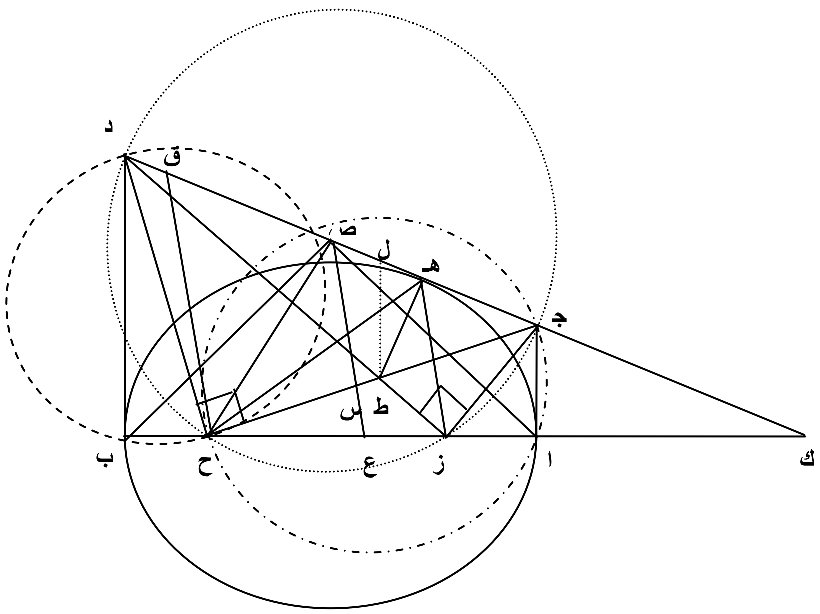
فلأن الزاويتين اللتين عند نقطة ها كل واحدة قائمة، واللتين عند نقطتي زاي، حا قائمتان[269]. فمتى[270] جعلنا خطي دال طا جيم طا قطرين لدائرتين، تكون الدائرة التي تمر بنقطة ها تمر بنقطة حا، والتي تمر بنقطة زاي تمر بنقطة ها. فتكون، لذلك، زاويتا دال ها حا ، دال طا حا متساويتين[271] وزاوية دال طا حا مساوية لزاوية جيم طا زاي المساوية لزاوية جيم ها زاي لأنهما على قطعة واحدة أيضـا فزاوية دال ها حا مساوية لزاوية جيم ها زاي.

وليكن المركز نقطة عين. ولنخرج من نقطتي عين، حا خطين عين صاد ، حا قاف موازيين لخط ها زاي. فلأن الف زاي مساو لخط حا با ونقطة عين المركز، يكون خط زاي عين مساويـا لخط عين حا. ويكون لذلك خط ها صاد[272] مساويًا لخط صاد قاف . ولنصل خطوط الف صاد، صاد حا، با صاد[273].

فلأن زاوية جيم ها زاي مساوية لزاوية حا ها دال وزاوية جيم ها زاي مساوية أيضـا لزاوية ها قاف حا، لأن قاف حا مواز لخط ها زاي، يكون خط ها حا مساويـا لخط حا قاف. فخط حا صاد عمود على خط ها قاف . وإذا جعلنا خط دال حا قطرًا، مرت الدائرة المرسومة عليه بنقطتي صاد ، با. وكانت زاوية با دال حا مساوية لزاوية با صاد حا[274] لأنهما على قطعة واحدة. وزاوية با دال حا مساوية لزاوية الف حا جيم. وإذا جعلنا خط جيم حا قطرا. فإن الدائرة المرسومة عليه تمر بنقطتي الف صاد وتكون لذلك زاويتا الف حا جيم، الف صاد جيم متساويتين لأنهما على قطعة واحدة. فزاوية الف صاد جيم مساوية لزاوية با صاد حا. فإذا أخذنا زاوية الف صاد حا مشتركًا كانت زاوية جيم صاد حا مساوية لزاوية الف صاد با. وزاوية جيم صاد حا قائمة. فزاوية الف صاد با قائمة. فإذا خُطَّ على قطر الف //116ظ// ظ با دائرة مركزها نقطة عين، مرت بنقطة صاد. وكان خط صاد عين مساويا لكل واحد من خطي الف عين، عين با.

ولأن زاوية جيم ها زاي مساوية لزاوية دال ها حا، وزاوية جيم صاد عين مساوية لزاوية جيم ها زاي تكون زاوية صاد ها سين مساوية لزاوية ها صاد سين. فخط ها سين مساو لخط صاد سين. ولأن خط زاي عين مساو لخط عين حا، يكون خط ها سين مساويًا لخط سين حا. فخط ها حا ضعف خط صاد سين. ولأن نسبة زاي حا إلى عين حا كنسبة زاي ها إلى سين عين يكون خط زاي ها ضعف خط عين سين. فجميع خطي زاي ها ها حا[275] ضعف جميع خط عين صاد. وقطر الف با ضعف عين صاد. فخطا زاي ها، ها حا مساويان لقطر الف با.

وذلك ما أردنا أن نبين.



[269]- قائمتان : قائمة.
[270]- فمتى : فكون متى.
[271]- متساويتين : مساويتين.
[272]- خط ها صاد : خط ها دال خط ها صاد.
[273]- با صاد : با.
[274]- با صاد حا : با صاد.
[275]- زاي ها، ها حا : زاي ها حا.

<قضية 18>

كل خط يخرج من نقطة من القطع الزائد مماسًا للقطع، وينفذ على استقامة عن كلتي جهة القطر الذي يخرج من تلك النقطة ويكون مربع كل واحد من قسميه مثل ربع الشكل الذي يكون من ضرب ذلك القطر في الخط القائم له، فإن الخطي الخارجين من مركز القطع إلى طرفي الخط المماس لا يقعان على القطع. ولا يمكن أن يخرج خط من مركز ذلك القطع فيماس القطع. والخط الذي لا يقع عليه إلا ويقطع القطع. وإن كل خط يماس القطع وينتهي إلى الخطين اللذين لا يقعان عليه ، ينقسم بالقطع بنصفين، ويكون مربع كل واحد منهما مساويًا[276] لربع مسطح المجانب في الضلع القائم له.

وإن وقع خط على الخطين وانقسم على القطع بنصفين، فإنه يكون مماسا للقطع. وكل خط يقطع القطع وينتهي إلى الخطين اللذين لا يقعان عليه، فإن طرفيه اللذين بين القطع والخطين اللذين لا يقعان عليه يكونان متساويين ويكون مسطح أحدهما في باقي الخط مثل ربع سطح المجانب في الضلع القائم له.

<مثال ذلك : >

فليكن قطع زائد قطره الف با ومركزه نقطة جيم والضلع القائم له خط با زاي. ونخرج خطًا على نقطة با مماسًا للقطع عليه دال با ها ونجعل كل واحد من مربع با دال، با ها مثل ربع سطح الف با في با زاي. ونصل جيم دال، جيم ها ونخرجهما على استقامة. فأقول إنهما لا يقعان على القطع.

<برهان ذلك : >

فإن أمكن فليقع خط جيم دال على القطع على نقطة حا ونخرج منها خطًا على الترتيب عليه حا طا. فهو مواز لخط دال با.

ولأن نسبة الف با إلى با زاي كنسبة مربع الف با إلى سطح الف با في با زاي، ومربع جيم با هو مثل ربع مربع الف با، ومربع با دال هو مثل ربع سطح الف با في با زاي، لأنه فرض كذلك، فنسبة الف با إلى با زاي كنسبة مربع جيم با إلى مربع حا دال[277] وكنسبة مربع جيم طا إلى مربع طا حا . ونسبة الف با إلى با زاي كنسبة سطح الف طا في طا با إلى مربع طا حا. فسطح الف طا في طا با //117و// يساوي[278] مربع جيم طا. وذلك ما لم يمكن لأن مربع جيم طا يزيد عليه بمربع با جيم[279]. فليس يقع إذًا خط جيم دال، إذا أخرج على استقامة، على القطع.

وبمثل ذلك[280] أيضا يتبين أن خط جيم ها لا يقع على القطع. فكلا خطي دال جيم، جيم ها لا يقعان على القطع.

وأقول إنه لا يكون خط آخر غير[281] واقع على القطع يقطع زاوية دال جيم ها.

<برهان ذلك :>

فإن أمكن، فليكن جيم سين. ونخرج من نقطة با خطًا موازيًا لخط جيم دال يلقى خط جيم سين على نقطة سين وهو خط با سين. ونجعل خط دال شين مساويًا لخط با سين ونصل سين شين ونخرجه على استقامة حتى يلقى القطع على نقطة عين والقطر على نقطة فا وخط جيم ها على نقطة قاف.

فلأن خطي با سين ، دال شين متساويان متوازيان، يكون لذلك خطا سين شين، دال با متساويين متوازيين. ولأن قطر الف با انفصل بنصفين على نقطة جيم وزيد في طوله خط با فا، يكون سطح الف فا في فابا مع مربع جيم با مساويًا لمربع جيم[282] فا.

---

[276]- مساويًا : مساو.
[277]- با دال : الكلمة غير مفهومة.
[278]- يساوي : يساو.
[279]- با جيم : الكلمة مطموسة.
[280]- ذلك : الكلمة غير مفهومة.
[281]- غير : غيره.
[282]-جيم : الكلمة مكررة.

وكذلك أيضــا، لأن خط شين قاف مواز لخط دال ها، وخط دال با مساو لخط با ها، يكون خط شين فا مساويــا لخط فا قاف.
ولأن خط قاف شين انفصل بنصفين على نقطة فا وبقسمين مختلفين على نقطة عين، يكون سطح قاف عين في عين سين مع مربع عين فا مساويا لمربع سين فا، لأن خط شين سين مساو لخط دال با، لِكَون خط شين عين أطول من خط دال با وخط عين قاف أعظم من خط با ها لأن خط فا قاف أعظم منه. فسطح قاف عين في عين سين أعظم من سطح دال با في با ها الذي هو مثل مربع دال با.
فلأن نسبة قطر الف با إلى با زاي القائم كنسبة مربع جيم با إلى مربع دال با التي هي كنسبة مربع جيم فا إلى مربع فا شين، ونسبة الف با إلى با زاي كنسبة سطح الف فا في فا با إلى مربع فاعين، فنسبة مربع جيم فا إلى مربع فا سين كنسبة سطح الف فا في فا با إلى مربع فا عين. فتكون نسبة مربع جيم با الباقي إلى سطح قاف عين في عين سين الباقي كنسبة مربع جيم با إلى مربع با دال. فمربع با دال مساو لسطح قاف عين في عين سين وذلك ما لا يمكن لأنه قد تبين انه أعظم منه. فليس خط جيم سين بغير واقع على القطع.

وبمثل ما بيَّنا، يتبين أن كل خط يماس القطع الزائد[283] ويقع على الخطين اللذين لا يقعان عليه، فإنه ينقسم على نقطة التماس بنصفين وأن مربع نصفه مساو لربع مسطح الضلع القائم في القطر المجانب.

<**برهان ذلك :**>
لأنه إن لم يكن كذلك وأخذ من الخط المماس خطان عن جنبتي نقطة التماس، مربع كل واحد منهما مثل ربع مسطح الضلع القائم في القطر المجانب ووصل طرفاهما بنقطة جيم، كان من ذلك الخطان اللذان لا يقعان على القطع. وذلك خلف. لأنه إن وقع أحدهما داخل زاوية دال جيم ها، وقع على القطع. وإن أخرج خارجًا وقع أحد الخطين الأولين على القطع كما تبين. وكلى الوجهين خلف.

ويتبيَّن من ذلك أيضــا أنه إن قطع القطع خط مثل سين عين ميم قاف، ووقع على القطع على نقطتي ميم عين وعلى الخطين اللذين لا يقعان عليه، مثل نقطتي سين قاف، إن خط سين عين يكون مساويــا لخط ميم قاف.

<**برهان ذلك :**>
لأنا متى قسمناه بنصفين على نقطة فا، ووصلنا جيم فا وأخرجنا من نقطة با خطًا مماسًا مثل دال با ها، كان موازيًا لخط سين قاف[284]، وانقسم على نقطة با بنصفين، وكانت نسبة دال فا إلى با ها المساوي له كنسبة سين فا إلى فا قاف. وعين فا مساو لفا ميم لأن جيم فا قطر. فيبقى خط سين عين مساويًا لخط ميم قاف.

ويكون سطح قاف عين في عين سين مثل مربع با دال المساوي لربع مسطح الف با في با زاي.

<**برهان ذلك :**>
لأن نسبة مربع جيم با إلى مربع با دال كالمجانب إلى القائم. وهي كنسبة //117ظ// مربع جيم فا إلى مربع فا سين. ونسبة مسطح الف فا في فا با إلى مربع فا عين كالمجانب إلى القائم. فتبقى نسبة مربع با جيم إلى مسطح قاف عين في عين سين كالمجانب إلى القائم التي هي كنسبة مربع جيم با إلى مربع با دال. فمربع با دال، المساوي لربع مسطح الف با في بازاي، مساو لمسطح قاف عين في عين سين.

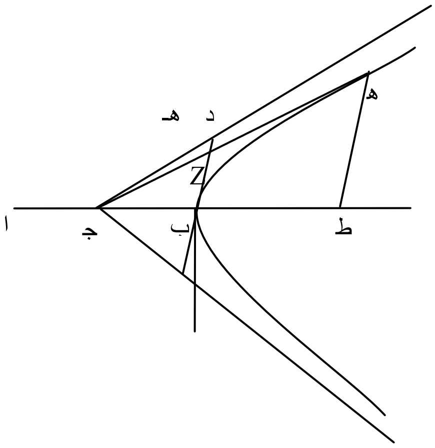
ويتبيَّن من ذلك أيضــا أنه إن وقع خط على الخطين اللذين لا يقعان على القطع وانقسم على القطع بنصفين، فإنه يكون مماسًا له[285].

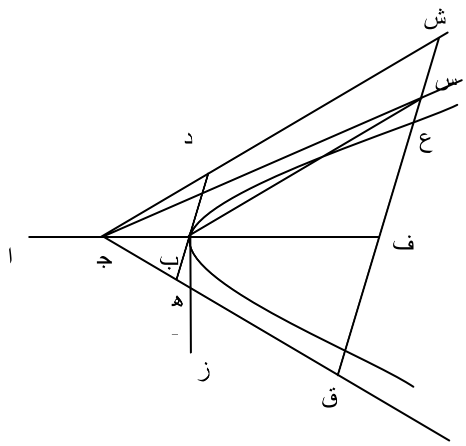
283- الزائد : الكلمة مطموسة.
284- سين قاف : سين كاف.
285- له : الكلمة ناقصة.

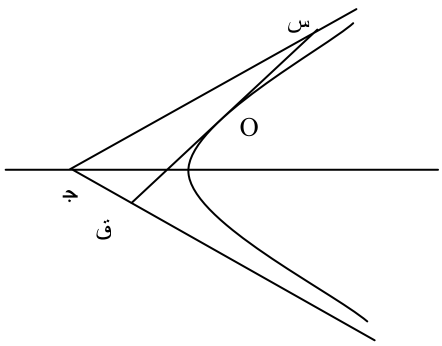
<برهان ذلك :>

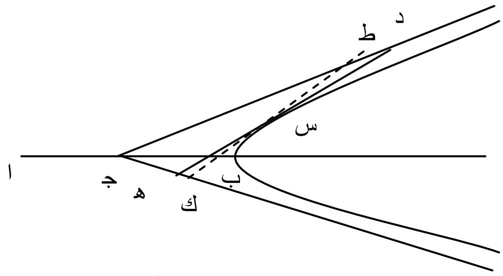
لأنه لو قطع القطع لكان ما يقع منه بين القطع والخط[286] الذي لا يقع عليه مساويًا للذي يقع منه في الجهة الأخرى بين القطع والخط الذي لا يقع عليه.

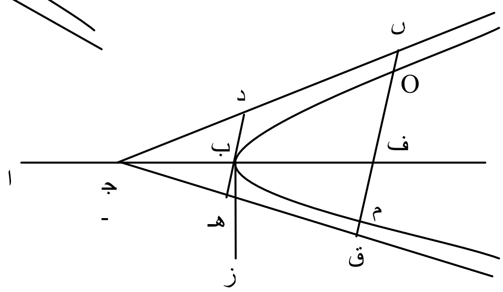
وذلك ما أردنا أن نبين.











286- والخط : الكلمة ناقصة.

<قضية 19>

إذا تعلمت نقطتان على قطع زائد، وأخرج من كل واحدة منهما خطان موازيان للخطين الخارجين من النقطة الأخرى، وينتهيان إلى الخطين اللذين لا يقعان عليه، فإن سطح، أحد الخطين الخارجين من أحدى النقطتين في الخط الآخرالخارج منها، مساو لمسطح الخطين الآخرين الخارجين من النقطة الأخرى، أحدهما في الآخر.

وإن أخرج من النقطتين خطان مماسان للقطع، ففصل[287] كل واحد منهما من الخطين اللذين لا يقعان على القطع مما يلي الزاوية، خطين يكون سطح كل واحد منهما في الآخر مثل سطح الخطين اللذين يفصل الخط الأخر منهما، أحدهما في الآخر.

<مثال ذلك :>

فليكن القطع قطع الف با، والخطان اللذان لا يقعان عليه خطا جيم دال، دال ها. ونتعلم على القطع نقطتي الف، با ونخرج من الف[288] خطي الف جيم، الف زاي ينتهيان إلى خطي جيم دال، دال[289] ها. ونخرج من نقطة با خط با حا موازيًا لخط الف جيم وخط با ها موازيًا لخط الف زاي ينتهيان إلى خط جيم دال.

فأقول إن سطح الف جيم في الف زاي مساو لمسطح با ها في با حا.

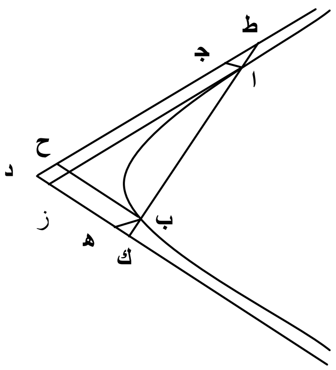
برهان ذلك :

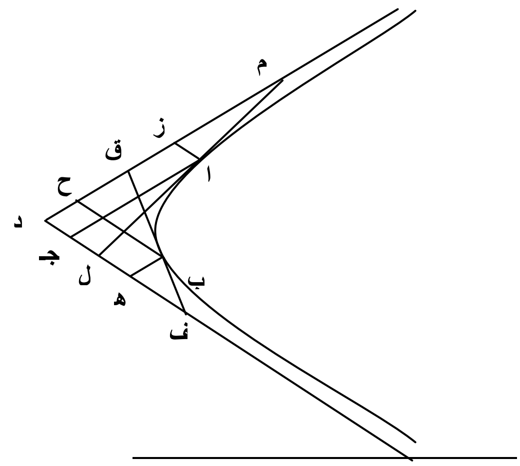
أنا نصل الف با ولنُخْرِجه حتى يلقي جيم دال على طا ودال ها على كاف. فتكون نسبة با طا على طا الف كنسبة با حا إلى الف جيم. ونسبة الف كاف إلى كاف با كنسبة الف زاي إلى با ها. والف با مساو لـ با كاف. فنسبة با حا إلى الف جيم كنسبة الف زاي إلى با ها. فمسطح الف جيم في الف زاي مساو لمسطح با حا في با ها.

وإن أخرجنا من من نقطة الف خط لام الف ميم[290] مماسًا للقطع، ومن نقطة با خط فا با قاف مماسًا على نقطة با. وكان خطا الف جيم، الف زاي موازيين للخطيين اللذين لا يقعان على القطع وكذالك خطا باها، باحا، كانت نسبة لام ميم إلى ميم الف كنسبة لام دال إلى الف زاي، ونسبة ميم لام إلى لام الف كنسبة دال ميم إلى الف جيم. ولام الف مساو لـ الف ميم. فخط لام دال ضعف خط الف زاي وخط ميم دال ضعف خط الف[291] جيم. فمسطح لام دال في دال ميم أربعة أضعاف مسطح الف جيم في الف زاي.

وبمثل ذلك يتبين أن مسطح فا دال في دال قاف أربعة أضعاف //118و// مسطح ها با في با حا. فمسطح لام دال في دال ميم مساو لمسطح فا دال في دال قاف.

وذلك ما أردنا أن نبين.





287- ففصل : فصل.
288- من الف : منهما.
289- دال : والى.
290- ميم : الكلمة ناقصة.
291- الف : ا.

<قضية 20 :>

<تعريف :>

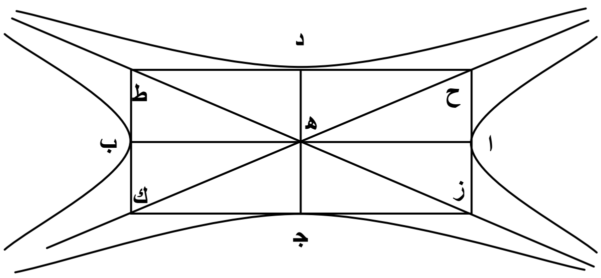
إذا كان قطر مزدوج لقطعين متقابلين قطرًا مجانبـا لقطعين آخرين متقابلين وكان القطر المجانب الأول قطرًا مزدوجًا للقطعين[292] الآخرين المتقابلين، فإن كل قطعين متقابلين منهما يسميان قطعين مزدوجين مع القطعين الآخرين المتقابلين.

والخطان اللذان لا يقعان على أحد القطوع الأربعة، إذا أخرجا في جهة الزاوية التي ألتقيا عليها، لا يقعان على واحد من تلك القطوع الأربعة المزدوجة.

فليكن قطعان متقابلان قطرهما المجانب خط الف با ومركزهما نقطة ها.وليكن قطره المزدوج معه خط جيم ها دال. وليكن قطرًا مجانبًا لقطعي جيم، دال. وليكن قطرالف با قطرًا مزدوجًا مع قطر جيم دال لقطعي[293] جيم، دال أعني أن يكون خط الف با موازيًا لخطوط الترتيب لقطعي[294] جيم، دال ويكون خط الف با وسطـا في النسبة بين قطر جيم دال والضلع القائم لقطعي جيم، دال. ويكون خط جيم دال وسطـا في النسبة بين قطر الف با والضلع القائم لقطعي الف، با.
فأقول إن الخطين اللذين لا يقعان على أحد قطوع الف با، جيم دال، إذا أخرجا في جهة الزاوية التي التقيا عليها، لا يقعان على واحد من القطوع الف با، جيم دال.

برهان ذلك :

أنا نخرج من نقط[295] الف، با، جيم، دال خطوطًا مماسة للقطوع وهي خطوط زاي الف حا وكاف با طا وزاي جيم كاف وحا دال طا. فيكون سطح زاي حا طا كاف متوازي الأضلاع. ولأن خط جيم ها مساو لخط ها دال وخط الف ها مساو لخط ها با، يكون، إذا وصلنا زاي ها ،ها ط، خطًا مستقيمًا. وكذلك ها حا، ها كاف. ويكون خط زاي الف مساويـا لخط الف حا.
ولأن خط جيم دال وسطـا في النسبة بين قطر الف با والضلع القائم لقطعي الف با، يكون كل واحد من خطي زاي الف، الف حا يقوى على ربع مسطح الف با في الضلع القائم لقطعي الف با.
فيكون، لذلك، خطا زاي ها، ها حا[296] لا يقعان على قطع الف. ولذلك أيضـا، لا يقع خطا كاف ها، ها طا على قطع با. وأيضـا، لأن قطر الف با وسطـا في النسبة بين قطر جيم دال والضلع القائم لقطعي جيم، دال، يكون كل واحد من خطي زاي جيم، جيم كاف يقوي على ربع مسطح جيم دال في الضلع القائم لقطعي جيم، دال. فيكون، لذلك، خطا زاي ها، ها كاف لا يقعان على قطع جيم. ولذلك خطا حا ها، ها طا لا يقعان على قطع دال.
وذلك ما أردنا أن نبين.



---

[292]- للقطعين : للقطرين.
[293]- لقطعي : لقطع.
[294]- لقطعي : لقطع.
[295]- نقط : نفطة.
[296]- ها حا : حا حا.

<قضية 21 >

إذا كان قطعان متقابلان وقطع خط الخطين المحيطين بالزاوية التي تتلو زاوية الخطين اللذين لا يقعان على القطع، وقَطَعَ القطعين، فإنه يقطع كل واحد منهما على نقطة واحدة فقط //118ظ//، ويكون ما يقع منه بين أحد القطعين[297] والخط الذي لا يقع عليه مساويًا لما يقع منه بين القطع المقابل له والخط الذي لا يقع عليه.

[3] ويكون مسطح أحد القسمين المساويين في باقي الخط الذي ينتهي إلى القطع الآخر مساويًا لمربع نصف القطر المجانب.

فليكن قطعان متقابلان عليهما الف، با والخطان اللذان لايقعان عليهما خطا دال جيم، ها جيم زاي. وقد قطع خطا[298] حا دال ، زاي طا خطي دال جيم، جيم زاي المحيطين بالزاوية وهي التي تتلو زاوية دال جيم ها، وقطع قطعي الف، با على نقطتي حا، طا.

فأقول إنه لا يقع عليهما على غير[299] نقطتي حا، طا وإن خط حا دال مساو لخط طا زاي وإن سطح حا دال في دال طا مساو لربع مربع القطر المخرج على نقطة جيم الموازي لخط حا طا.

برهان ذلك :

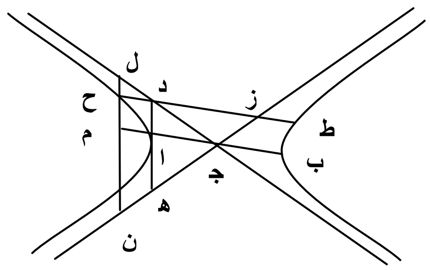
أنا نخرج من نقطة جيم، التي هي المركز، خط الف جيم با موازيًا لخط حا طا. فيكون قطرًا. ونخرج من نقطة الف خطًا مماسًا عليه ها الف كاف، ومن نقطة حا خطًا موازيًا لخط الف كاف ها عليه لام جيم ميم نون.

فلأن خط كاف ها مماس، يكون كاف الف مساو يًا لـالف ها، وتكون نسبة مربع كاف الف إلى مربع الف جيم، التي هي كنسبة سطح كاف الف في الف ها، إلى مربع الف جيم، التي هي كنسبة كاف الف إلى الف جيم، التي هي كنسبة لام حا إلى حا دال، مثناة بنسبة ها الف إلى الف جيم، التي هي كنسبة نون حا إلى حا زاي.

ونسبة لام حا إلى حا دال، مثناة بنسبة نون حا إلى حا زاي، هي كنسبة سطح لام حا في حا نون إلى مسطح زاي حا في حا دال. ومسطح نون حا في حا لام مساو لمربع الف كاف. فمسطح زاي حا في حا دال مساو لمربع الف جيم.

وبمثل ذلك يتبين أن سطح دال طا في طا زاي مساو لمربع جيم با. فخط زاي طا مساو لخط حا دال. فمسطح طا دال في دال حا مساو لمربع الف جيم.

وذلك ما أردنا أن نبين.



[297]- القطعين : الخطين. كتبت الكلمة الصحيحة في الهامش.

[298]- خطا : خط.

[299]- غير : الكلمة في الهامش.

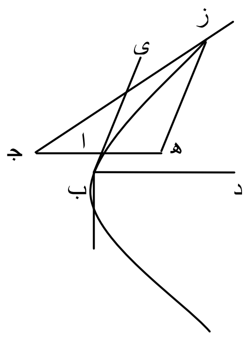
<قضية 22 :>
نريد أن نبين كيف نخرج من نقطة ليست على القطع ولا على السهم خطًا مماسا لقطع معلوم.
فليكن القطع قطع الف با والنقطة الخارجة نقطة جيم.

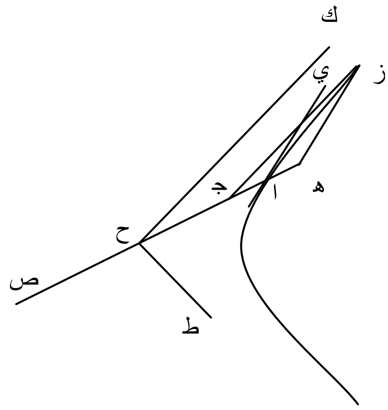
فإن كان القطع مكافئا :
فإنا نخرج سهمه وهو با دال ونخرج من نقطة جيم خط جيم الف ها موازيًا للسهم[300] با دال يلقى القطع على نقطة الف. ونجعل الف ها مساويا لـ الف جيم، ونخرج من نقطة ها خطًا موازيا للخط المماس الخارج على نقطة الف[301]، وهو خط ها زاي، يلقى القطع على نقطة زاي. فيكون خط ها زاي من خطوط الترتيب.
وإذا وصلنا خط زاي[302] جيم كان مماسًا، على ما تبيَّن في ما قبل.

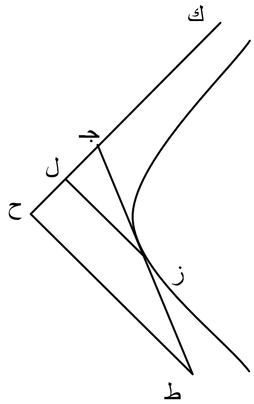
وليكن القطع أيضا القطع الزائد:
وليكن الخطان اللذان لا يقعان عليه خطي حا طا، حا[303] كاف.
ولتكن النقطة[304] جيم فيما بين القطع والخطين اللذين لا يقعان عليه. ونصل حا جيم ونخرجه حتى يلقى القطع على نقطة الف، ونجعل حا صاد مثل حا الف فيكون قطرا. ونجعل[305] نسبة صاد جيم إلى جيم[306] الف كنسبة صاد ها إلى ها الف. ونخرج من نقطة ها خطا موازيا للخط المماس الخارج على نقطة الف يلقى القطع على نقطة زاي. ونصل جيم زاي. فيكون مماسا على ما تبين.

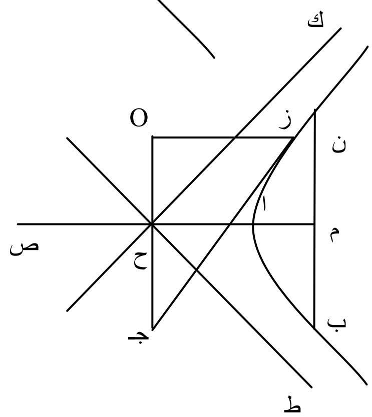
وأيضا فلتكن نقطة جيم //119و// على أحد الخطين، وليكن كاف حا. فنقسم خط جيم حا بنصفين على نقطة لام، ونخرج منها خطًا موازيًا لخط حا طا عليه لام زاي ونصل خط جيم زاي ويلقى[307] خط حا طا على نقطة ط. فتكون نسبة حا لام إلى لام جيم كنسبة طا زاي إلى زاي جيم. فيكون خط جيم طا مماسًا على نقطة زاي.
وأيضا، إن كانت نقطة جيم في الزاوية التي تتلو[308] الزاوية التي تحيط بها الخطان اللذان لا يقعان على القطع، فإنا نصل جيم حا ونتعلم نقطة على القطع كيف ما وقعت ، وهي نقطة نون. ونخرج منها خط نون با موازيًا لخط جيم حا، ونقسمه بنصفين على نقطة ميم، ونصل ميم[309] حا. فيكون قطرًا مزدوجا مع قطر جيم حا، وهو الف حا صاد. ونجعل مسطح جيم حا في حا عين مساويا لربع مسطح قطرصاد الف في الضلع القائم له. ونخرج من نقطة عين خطًا موازيًا لقطر صاد الف يلقي القطع على نقطة زاي. ونصل زاي جيم. فيكون مماسًا، على[310] ما تبين.
وأما إن كانت نقطة جيم على الخطين المحيطين بالزاوية المقابلة للزاوية التي تحيط بها الخطان اللذان لا يقعان على القطع أو في الزاوية التي يحيطان بها فإنه لا يخرج منها خط مماس للقطع، لأن كل خط يخرج على هذه الصفة يقطع القطع ولا يماسه على با تبين
وإن كان القطع ناقصًا[311] :
ومركزه نقطة حا، فإنا نصل حا جيم يلقى القطع على نقطتي صاد، الف. ونجعل نسبة صاد ها إلى ها الف كنسبة صاد جيم إلى جيم الف. ونخرج من نقطة ها خطًا موازيًا للخط المماس الذي يخرج على نقطة الف، وهو ها زاي، ونصل جيم زاي.
فيكون مماسًا على ما تبين.
وذلك ما أردنا أن نبين.

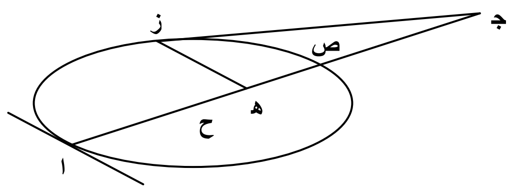
300- للسهم : لسهم.
301- ونجعل الف ها مساويًا لـ الف جيم ونخرج من نقطة ها خطًا موازيًا للخط المماس الخارج على نقطة الف : الجملة في الهامش.
302- زاي : را.
303- حا: الكلمة فوق السطر.
304- النقطة : الطة.
305- قطرا ونجعل : الكلمات مطموسة.
306- جيم : : الكلمة مطموسة.
307- يلقى : الكلمة مطموسة.
308- تتلو : تتلوا.
309- ميم حا : جيم حا.
310- على : وعلى.
311- ناقصًا : ناقص.


ز
ى
ا
ه
ج
ب
د


ك
ي
ز
ج
ا
ه
ح
ص
ط


ك
ج
ل
ح
ز
ط


ك
O
ز
ن
ا
م
ص
ح
ب
ج
ط


ز
ج
ص
ه
ح
ا

<قضية 23>
نريد أن نبين كيف نخرج خطًا مماسًا لقطع مفروض يُحدِث مع سهمه زاوية مساوية لزاوية حادة مفروضة، مما يلي رأس القطع.

فليكن القطع قطع الف جيم، وسهمه الف با، والزاوية المفروضة زاوية حا طا كاف. ونريد أن نخرج خطًا مماسًا لقطع الف جيم يحدث مع سهم الف با زاوية مساوية لزاوية حا طا كاف الحادة.

فليكن القطع، أولا، القطع المكافئ :
ونتعلم على خط حا طا نقطة حا ونخرج منها عمود حا كاف ونقسم خط كاف طا بنصفين على نقطة ميم ونصل حا ميم ونعمل على نقطة الف من سهم الف با، زاوية با الف جيم مثل زاوية كاف ميم حا. وليلق خط الف جيم القطع على نقطة جيم. ونخرج من نقطة جيم خط جيم ها على الترتيب ونجعل الف دال مثل الف ها ونصل دال جيم. فيكون مماسا للقطع.

<برهان ذلك : >
ولأن زاوية جيم الف ها مساوية لزاوية حا ميم كاف والزاويتان اللتان عند نقطتي ها، كاف قائمتان، يكون مثلثا جيم ها الف،حا كاف ميم[312] متشابهين. ونسبة دال ها إلى فا الف[313] كنسبة طا كاف إلى كاف ميم. ونسبة الف ها إلى ها[314] جيم //119ظ// كنسبة ميم كاف إلى كاف حا. فنسبة دال ها إلى ها جيم[315] كنسبة طا كاف إلى كاف حا.
فزاوية دال مساوية لزاوية طا.

وليكن القطع أيضـا القطع الزائد ومركزه نقطة عين و الخط الذي لا يقع عليه خط زاي عين. ولتكن زاوية حا طا كاف أعظم من زاوية زاي عين الف.
لأن الخط المماس يقع على خط عين زاي، فتكون الزاوية الخارجة أعظم من الداخلة. ولتكن زاوية كاف طا لام مساوية لزاوية الف عين زاي. ونخرج من نقطة الف خطـا مماسـا عليه الف زاي. ونتعلم على خط حا طا نقطة حا. ونخرج منها عمود حا كاف يلقى خط طا لام على نقطة لام. فلأن زاوية زاي عين الف مساوية لزاوية لام طا كاف، والزاويتان اللتان عند نقطتي الف، كاف قائمتان تكون نسبة مربع عين الف إلى مربع الف زاي، التي هي كالمجانب إلى القائم، كنسبة مربع طا كاف إلى مربع كاف لام. فنسبة مربع طا كاف إلى مربع كاف لام أعظم من نسبة مربع طا كاف إلى مربع كاف حا. فلتكن نسبة مربع طا كاف إلى مربع كاف لام كنسبة سطح ميم كاف في كاف طا إلى مربع كاف حا. فتكون كالمجانب إلى القائم.
ونصل حا ميم. فنسبة مربع ميم كاف إلى مربع كاف حا أعظم من نسبة سطح ميم كاف في كاف طا إلى مربع كاف حا. ونسبة سطح ميم كاف في كاف طا إلى مربع كاف حا كنسبة مربع عين الف إلى مربع الف زاي. فإذا جعلنا نسبة مربع عين الف إلى مربع خط آخر كنسبة مربع ميم كاف إلى مربع كاف حا، كان أصغر من مربع الف زاي. فإذا فصلنا من الف زاي مثل ضلع ذلك المربع، فإن الخط الذي يخرج من نقطة عين إلى النقطة التي انفصل عليها، تصير المثلثات متشابهة. ومن أجل ذلك، تكون زاوية زاي عين الف أعظم من زاوية حا ميم كاف.
فلتكن زاوية الف عين جيم مساوية لزاوية كاف ميم حا. فخط عين جيم يقطع القطع، كما تبين. فليقطعه على نقطة جيم ونخرج منها خطًا مماسًا للقطع عليه جيم دال. ونخرج جيم ها على الترتيب. فمثلث عين جيم ها يشبه مثلث ميم[316] حا كاف. فنسبة مربع جيم ها إلى مربع عين ها كنسبة مربع حا كاف إلى مربع كاف ميم. ونسبة مسطح عين ها في ها دال إلى مربع ها جيم كالمجانب إلى القائم، التي هي مثل نسبة مسطح ميم كاف في كاف طا إلى مربع كاف حا. فبالمساواة[317] تكون نسبة مسطح عين ها في ها دال

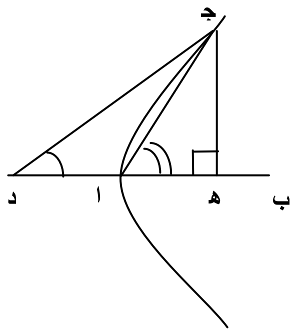
312- حا كاف ميم : حا ميم.
313- دال ها إلى ها الف : دال فا الى فا الف.
314- الف ها إلى ها جيم : الف ب الى با جيم.
315- دال ها إلى ها جيم : دال فا الى با جيم.
316- ميم : الكلمة في الهامش.
317- فبالمساواة : فالمساواة.

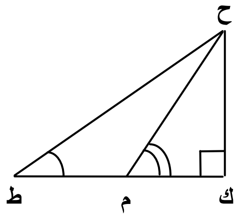
إلى مربع عين ها، التي هي كنسبة دال ها إلى ها عين، كنسبة مسطح ميم كاف في كاف طا إلى مربع كاف ميم، التي هي كنسبة كاف طا إلى كاف ميم. فنسبة دال ها إلى ها عين كنسبة طا كاف إلى كاف ميم. ونسبة عين ها إلى ها جيم كنسبة ميم كاف إلى كاف حا[318]. فنسبة دال ها إلى ها جيم كنسبة طا كاف إلى كاف حا. والزاويتان اللتان عند نقطتي ها كاف قائمتان. فزاويتـا جيم دال ها، حا طا كاف متساويتـان.

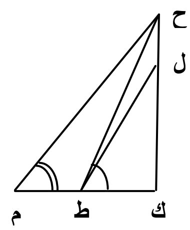
وليكن القطع أيضـا القطع الناقص ومركزه نقطة عين. ونتعلم على خط طا حا نقطة حا ونخرج منها عمود حا كاف. ونجعل نسبة سطح طا كاف في كاف ميم إلى مربع كاف حا كالمجانب إلى القائم. ونصل حا ميم ونعمل على مركز عين من سهم الف با زاوية الف عين جيم مساوية لزاوية طا ميم حا. ونخرج من نقطة جيم خط جيم دال مماسًا للقطع. ونخرج من نقطة جيم خط جيم ها على الترتيب.

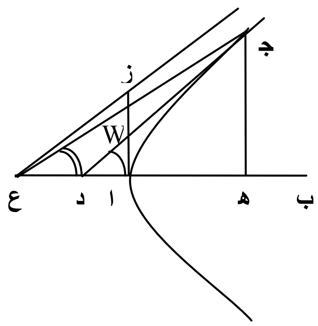
فلأن زاوية عين مثل زاوية ميم والزاويتان اللتان عند نقطتي ها، كاف قائمتان، يكون مثلثا جيم عين ها، حا[319] ميم كاف متشابهين. فتكون نسبة مربع عين ها إلى مربع ها جيم كنسبة مربع ميم كاف إلى //120و// مربع حا كاف. ونسبة مربع جيم ها إلى مسطح عين ها في ها دال كالقائم إلى المجانب. وهي كنسبة مربع حا كاف إلى سطح ميم كاف في كاف طا. فبالمساواة تكون نسبة مربع عين ها إلى مسطح عين ها في ها دال، التي هي كنسبة عين ها إلى ها دال، كنسبة مربع ميم كاف إلى مسطح ميم كاف في كاف طا، التي هي كنسبة ميم كاف إلى كاف طا. فنسبة عين ها إلى ها دال كنسبة ميم كاف إلى كاف طا ونسبة جيم ها إلى ها عين كنسبة حا كاف إلى كاف ميم. فنسبة جيم ها إلى ها دال كنسبة حا كاف إلى كاف طا والزاويتان اللتان عند نقطتي ها كاف قائمتان. فزاوية جيم دال ها مساوية لزاوية حا كاف طا.

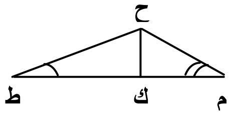
وذلك ما أردنا أن نبين.

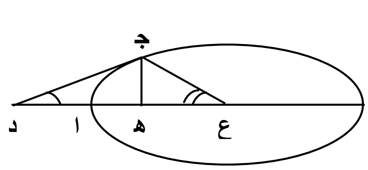












[318]- ونسبة عين ها إلى ها جيم كنسبة ميم كاف إلى كاف حا : الجملة في الهامش.
[319]- حا : الكلمة في الهامش.

< قضية 24>

إذا تعلمت نقطة على أحد الخطين اللذين لا يقعان على القطع، وأخرج منها خط مواز للخط الآخر أي بُعدٍ كان، من النقطة التي يلتقيان عليها، في الصِّغَر، فإن ذلك الخط يقع على القطع.

وإن خط القطع والخط الذي يقع عليه، كُلَّما بـَعُدا من ملتقى الخطين اللذين لا يقعان عليه، تقاربا. ويكون البعد بينهما أقل من كل مقدار مفروض.

<مثال ذلك :>

فليكن القطع قطع الف با والخطان اللذان لا يقعان عليه خطا دال جيم، جيم ها. ونتعلم نقطة ما[320] على خط دال جيم عليها زاي ونخرج منها خط زاي حا موازيًا لخط جيم ها.

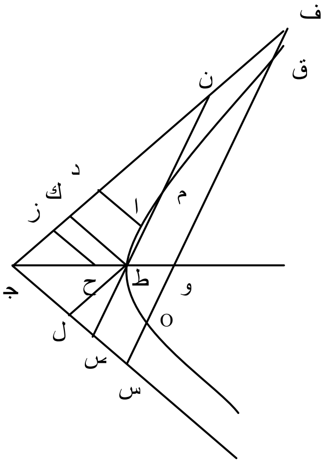
فأقول إن زاي حا، إذا أخرج على استقامة وقع على القطع وإن قطع الف با وخط جيم ها كلما بَعُدا من نقطة جيم تقارب البعد بينهما إلى أقل من كل مقدار مفروض.

برهان ذلك :

أنه لايمكن غيره. فإن أمكن فلا يلقى خط زاي حا القطع. ونخرج من نقطة الف خط الف دال موازيًا لخط زاي حا. ونجعل سطح الف دال في دال جيم مثل سطح جيم زاي في زاي حا ونصل جيم حا ونخرجه حتى يلقى القطع على نقطة طا. ونخرج من نقطة طا، خطي طا كاف[321]، طا لام موازيين لكل واحد من الخطين اللذين لا يقعان على القطع.

فلِما قد تبين، يكون مسطح كاف طا في طا لام مساويًا لمسطح الف دال في دال جيم. وقد كان مسطح الف دال في دال جيم مثل مسطح حا زاي في زاي جيم . فمسطح طا كاف في كاف جيم مساويًا لمسطح حا زاي في زاي جيم. وطا كاف أعظم من حا زاي وكاف جيم أعظم من جيم زاي. هذا خلف لا يمكن. فنقطة حا على القطع.

وأقول[322] إن خط قطع طا كاف وخط جيم ها، كلما خرجا، تقاربا حتى يكون البعد بينهما أقل من كل مقدار مفروض.



[320] - ما : فا.
[321] - كاف : الكلمة في الهامش.
[322] - أقول : أقل.

برهان ذلك :

أنا نـُخرج من نقطة طا خط نون ميم طا صاد يقطع القطع ويقع على الخطين اللذين لا يقعان عليه. ونتعلم على القطع نقطة قاف. ونخرج منها خط فا قاف واو عين سين موازيـًا لخط ميم طا صاد يقع على خط جيم طا على نقطة واو.

فلأن سطح فا عين في عين سين مثل سطح نون طا في طا صاد[323]، يكون مسطح فا عين في عين سين مساويـًا لمسطح نون طا في طا صاد. فنسبة فا عين إلى نون طا كنسبة طا صاد إلى عين سين. وفا[324] عين أعظم من نون طا لأن فا واو أعظم //120و// منه. فـ طا صاد أعظم من عين سين.

وكذلك يستبين في كل خط بُعْدُه، عن نقطة جيم أكثر، فما[325] يَقـَع منه بين القطع وبين خط جيم ها يكون أصغر.

وذلك ما أردنا أن نبين.

[323] ـ صاد : الكلمة في الهامش.
[324] ـ فا : الكلمة مطموسة.
[325] ـ فما : مما.

<قضية 25>

إذا كان قطع ناقص سهمه الأطول الف با والأقصر جيم دال ومركزه ها ووصل الف جيم، جيم با وأخرج خط حا زاي لام مماسًا ووصل خط ها زاي يلقى الف جيم على نقطة ط.

فأقول إن زاوية لام زاي طا ليست بأصغر من زاوية لام جيم طا.

برهان ذلك:

أن خط زاي ها إما أن يكون موازيًا لخط لام با وإما أن يكون غير مواز له.

فليكن أولا موازيًا. فلأن با ها مساو لـ ها الف، يكون خط جيم طا مساويًا لـ طا الف. فخط ها زاي يكون قطرًا ويكون خط لام حا موازيًا لخط الف جيم. فتكون زاوية لام جيم طا مساوية لزاوية لام زاي طا.

وإن لم يكن ها زاي موازيًا لـ با لام، لم تكن زاوية زاي ها الف مثل زاوية جيم با ها. فإذا أخرجنا من نقطة زاي خط زاي كاف على الترتيب، كانت زاويتا ها، كاف قائمتين ولم يكن المثلثان متشابهي الوضع. فليست نسبة مربع با ها إلى مربع ها جيم كنسبة مربع ها كاف إلى مربع كاف زاي. ونسبة مربع با ها إلى مربع ها جيم كالمجانب إلى القائم لأنها كنسبة سطح با ها في ها الف إلى مربع ها جيم، التي هي كنسبة سطح ها كاف في كاف حا إلى مربع زاي كاف. فليست نسبة مربع ها كاف إلى مربع كاف زاي كنسبة سطح ها كاف في كاف حا إلى مربع كاف زاي. فخط حا كاف ليس بمساو لخط كاف ها.

فلنعمل قطعة أقل من نصف دائرة تقبل مثل زاوية الف جيم با المنفرجة لأن كل واحد من خطي الف ها ، ها با أطول من ها جيم . وهي قطعة نون عين ميم . ونُتِم الدائرة. ونجعل نسبة نون صاد إلى صاد ميم كنسبة حا كاف إلى كاف ها ونخرج من نقطة صاد عمود[326] يا صاد خا ونقسم خط ميم نون بنصفين على نقطة سين ونخرج منها عمود عين سين فا ونقسمه بنصفين على نقطة قاف. فتكون مركزًا للدائرة[327]. ونخرج منه، على خط يا خا، عمود قاف را . فيكون خط سين قاف مساويًا لخط صاد را. وخط سين عين أعظم من خط صاد يا. فنسبة خط سين قاف إلى خط سين عين أصغر من نسبة خط را صاد إلى خط صاد يا. وإذا ركبنا، كانت نسبة قاف عين إلى عين سين أصغر من نسبة را يا إلى يا صاد. وأضعاف المقدمات أيضا تكون كذلك: نسبة فا عين إلى عين سين أصغر من نسبة حا يا إلى يا صاد. وإذا فصلنا، كانت نسبة فا سين إلى سين عين، التي هي كنسبة مسطح نون سين في سين ميم إلى مربع سين عين، أصغر من نسبة خا صاد إلى صاد يا، التي هي كنسبة مسطح نون صاد في صاد ميم إلى مربع فا[328] صاد. فإذا جعلنا نسبة سطح نون سين في سين ميم إلى مربع سين عين كنسبة مسطح نون صاد في صاد ميم إلى مربع خط آخر، كان أطول من خط يا صاد. فليكن صاد واو. ونصل واو نون، نون ميم، عين واو. فلأن زاويتي عين، جيم متساويتان والمثلثان متساويا الساقين، يكونان متشابهين، فنسبة سطح با ها في ها الف إلى مربع ها جيم(...) // نهاية نص الاستكمال: 120 و، سطر 31//.

// بداية نص الإكمال: 153و، سطر 17 // [كنسبة مربع ميم سين إلى مربع سين عين] ونسبة سطح ح ك في ك هـ إلى مربع ك ز أيضا كنسبة المجانب إلى القائم. ونسبة سطح م ص في ص ن إلى مربع ص و كنسبة مربع م س إلى مربع س ع. فنسبة سطح حـ ك في ك هـ إلى مربع ك ر كنسبة سطح ن ص في ص م إلى مربع ص و. ولأننا قسمنا م ن على ص على نسبة هـ ح على ك ها، تكون نسبة سطح م ص في ص ن إلى كل واحد من مربعي م ص ، ص ن التي هي كنسبة ن ص إلى ص م او م ص إلى ص ن كنسبة سطح هـ ك في ك ح إلى كل واحد نظير من مربعي هـ ك ، ك ح.

فنقول إن نسبة مربع هـ ك إلى سطح هـ ك في ك ح كنسبة مربع م ص إلى سطح م ص في ص ن. ونسبة سطح هـ ك في ك ح إلى مربع ك ز كنسبة سطح م ص في ص ن إلى مربع ص و. فبالمساواة نسبة مربع هـ ك إلى مربع ك ز كنسبة مربع م ص إلى مربع ص و، بل نسبة خط هـ ك إلى خط ك ز كنسبة م ص إلى ص و.

وكذلك نسبة ح ك إلى ك ز كنسبة ن ص إلى ص و. وزوايا ك، ص قوائم. فمثلثا م و ص، ن و ص يشبهان مثلثي هـ ز ك، ح ز ك. فزاويتا ز كزاويتي و بل جميع زاوية هـ ز ح كجميع زاوية م و ن. وزاوية

---

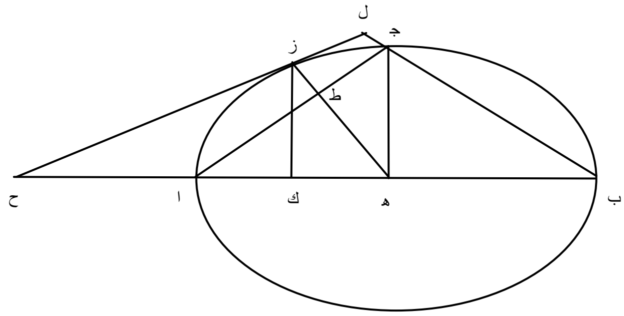
[326]- عمود : عمودي.

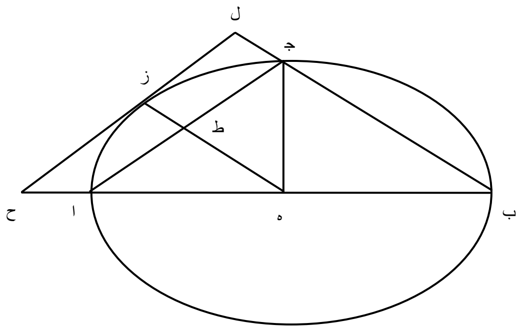
[327]- للدائرة : لدائرة.

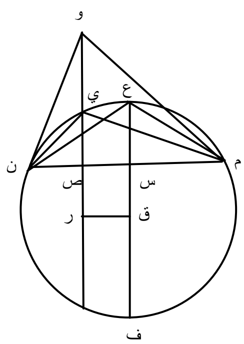
[328]- فا : ـــا.

م ون أصغر من زاوية م ي ن التي هي كزاوية جـ. فزاوية هـ ز ح أصغر من زاوية ب جـ ا وتبقى زاوية هـ ز ل من القائمتين أعظم من زاوية ل جـ ط منها فصحيح أن زاوية ل ز ط ليست بأصغر من زاوية ل جـ ط.

وذلك ما أردناه







<قضية 26>
نريد أن نخرج لقطع معلوم قطرًا تكون زوايا خطوط ترتيبه كزاوية معلومة حادة.

أما في المكافئ، فذلك بَيِّن لأن جميع أقطاره موازية لسهمه. وإذا أخرجنا خطًا مماسًا يلقى سهمه على زاوية حادة كالمفروضة، كان القطر المخرج على تلك النقطة من المماس هو المطلوب لأنه يقطع المماس بحيث تكون الخارجة كالداخلة //153ظ// المفروضة وخطوط الترتيب توازي المماس.
وأما في غيره، فليكن القطع اجـ وسهمه اب ومركزه هـ والزاوية المفروضة الحادة زاوية ت.
وليكن القطع، أولا، الزائد والخط الذي لا يقع عليه هـ س. ونخرج من طرف السهم رأس القطع مماس ا س ملاقيًا لـ هـ س على س. فبين أن نسبة مربع هـ ا[329] إلى مربع اس كنسبة مجانب ب ا إلى قائمه. ونعمل قطعة تقبل زاوية كزاوية ت، وهي قطعة ز ك ط. فهي أعظم من نصف الدائرة لحدة زاويتها. ونخرج فيها خطًا يقطع وتر زط خارج الدائرة على زاوية قائمة. وينقسم بِه وبِقوس زك ط ملاقيًا أياها على نقطة مماسًا أو على نقطتين مقاطعا على نسبة المجانب إلى القائم وذلك بالشكل الثالث من الفصل الثالث من الصنف الأول من النوع الثالث.

وإذا كان المجانب كالقائم فيكون الثاني أيضًا كأحدهما كان ذلك الخط مماسًا لقوس زك ط وعمودًا على طرف القطر الموازي لوتر ز ط، ومربعه كسطح ز ط، مع ما يقع منه خارج الدائرة فيما يقع منه خارجها.

وإذا كان المجانب أطول أو أقصر من القائم، ويلزم منه أن يكون أطول أو أقصر أيضا من الثاني، لتوسطه بينهما في النسبة، كان ذلك الخط مقاطعًا لقوس زط ك على نقطتين، وكان في الأول أطول القسمين المحدودين بنقطة مشتركة لهما هي على مسامتة زط وبنقطتين هما على قوس زط ك هو نظير المجانب في النسبة. وفي الثاني هو نظير القائم فيها. وسطح زط مع ما يقع منه خارج الدائرة فيما يقع منه داخلها[330] الذي هو كسطح أحد ذينك القسمين المتوهمين في الآخر، أعظم من مربع القسم الذي هو نظير القائم في النسبة في الأول وأصغر منه في الثاني.
وذلك لأن نسبة نظير المجانب إلى نظير القائم كنسبة سطح نظيرا المجانب في نظير القائم إلى مربع نظير القائم.
وظاهر أن في القسم الأول السابق على هذين القسمين يَتَّحِد نظير المجانب والقائم لمماسه الخط.
وليكن نظير القائم من ذلك الخط مُتَّحِدًا مع نظير المجانب أو غير مُتَّحِد هو ك ل. فكيف ما كان، تكون نسبة مسطح زل في ل ط إلى مربع ك ل كنسبة المجانب إلى القائم، بل كنسبة مربع هـ ا إلى مربع ا س. ونسبة مربع ز ل إلى مربع ل ك أعظم من نسبة سطح زل في ل ط إلى مربع ل ك. فنسبة مربع زل إلى مربع ل ك أعظم من نسبة مربع هـ ا إلى مربع اس. فنجعل نسبة مربع هـ ا إلى مربع اع كنسبة مربع زل إلى مربع ل ك. فتكون نسبة مربع هـ ا إلى مربع اع أعظم من نسبة مربع هـ ا إلى مربع اس، ولذلك يكون اس أعظم من اع أبدًا.
ونصل هـ ع ونخرجه حتى يلقى القطع على جـ ونخرج جـ د مُماسًا وجـ ح على الترتيب. فلأن نسبة مربع زل إلى مربع ل ك كنسبة مربع اهـ إلى مربع اع وكنسبة مربع هـ ح إلى مربع ح جـ، وزوايا ل، ا، ح قوائم، فمثلثات ك ل ز، ع ا هـ، جـ ح هـ متشابهة. ولأن نسبة سطح هـ ح في ح د إلى مربع ح جـ كنسبة المجانب إلى القائم وكذلك نسبة سطح زل في ط ل إلى مربع ل ك كنسبة المجانب إلى القائم، فنسبة سطح زل في ل ط إلى مربع ل ك كنسبة سطح هـ ح في ح د إلى مربع ح جـ ونسبة مربع ح جـ إلى مربع ح هـ كنسبة مربع ك ل إلى مربع ل ز. فبالمساواة، نسبة مسطح زل في ل ط إلى مربع زل، أعني نسبة ط ل إلى ل ز، كنسبة مسطح هـ ح في ح د إلى مربع هـ ح، بل كنسبة ح د إلى ح هـ. ونسبة هـ ح إلى ح جـ كنسبة زل إلى ل ك. فبالمساواة أيضًا، نسبة ط ل إلى ل ك كنسبة ح د إلى ح جـ. فمثلث جـ ح د شبيه بمثلث ك ل ط وزاوية ط ك ل كزاوية د جـ ح. وكانت زاوية ز ك ل من المتشابهين كزاوية هـ جـ ح. فتبقى زاوية ز ك ط، المساوية للزاوية المفروضة ت، كزاوية هـ جـ د.
وظاهر أن خطوط ترتيب قطر هـ جـ تكون زواياها كزاوية مماس جـ د. فقطر جـ هـ هو المطلوب.

329- هـ ا : هـ س
330- داخلها : خارجها.

ثم ليكن القطع ناقصًا[331] ولنسهله بتقديم مقدمة[332] بخلاف ما فعلناه في الزائد.

فنقول : لا يخلو القطع من أن يكون دائرة أم لا.

- فإن كان دائرة، كانت[333] كل أقطارها //154و// قائمة على خطوط ترتيبها. فلم يمكن إخراج قطر فيها يُنَصِّف أوتارها على غير قوائم وذلك ظاهر.

- وإن لم يكن دائرة، كان البتَّة أحد سهميه أطول من الآخر لأنه لو تساويا لكان[334] قائماهما أيضًا كهما وخطوط ترتيب السهام أعمدة عليها. فيلزم، كما أشرنا إليه، من أنه تبين في مقدمة شرح أوضاع القطوع أن يكون القطع دائرة وقد فرض غيرها. هذا خُلْف.

فيكون قائم السهم الأطول أقصر منه. فنسبة السهم هـ ا، وهو المجانب، إلى قائمه نسبة أعظم إلى أقصر. وفي السهم الأقصر بالعكس.

- ولتكن دائرة م ن ق ف س وقوس م ن ق ف أصغر من النصف وقوس م س ف أعظم منه. ونريد أن نخرج فيها وترًا يقطع وتر م ف على قوائم وينقسم به وبمحيطها على وجه تكون نسبة قسمه الأطول الكائن[335] في القطعة العظمى إلى قسمه الأصغر الكائن في القطعة الصغرى كنسبة المجانب إلى القائم، أعني السهم الأطول إلى قائمه.

فلأن النسبة ليست بالمساواة والوتر ليس بقطر والزاوية قائمة، فذلك ممكن، كما تقدم في الشكل المذكور.

وليكن هو وتر س ص ق. ونسبة س ص إلى ص ق كنسبة المجانب إلى القائم ونسبة س ص إلى ص ق كنسبة سطح س ص في ص ق ، أعني سطح م ص في ص ف، إلى مربع ص ق. فعلمنا[336] كيف نخرج ص ق عمودًا على م ف بحيث تكون نسبة سطح م ص في ص ف إلى مربع ص ق كنسبة المجانب إلى القائم.

توضحة أخرى:

لتكن زاويتا هـ، ع من مثلثي م ع ن، ب هـ ك متساويتين وزاوية م أعظم من زاوية ت.

فنقول: نسبة م ع إلى ع ن أصغر من نسبة ب هـ إلى هـ ك.

فلنعمل على نقطة م من خط م ع زاوية ع م ي مساوية لزاوية[337] هـ ب ك فيقطع ضلع م ي الحادث لقاعدة ع ن بين نقطتي ع، ن على ي، وتكون نسبة ب هـ إلى هـ ك، للتشابه، كنسبة م ع إلى ع ي. ونسبة م ع إلى ع ي أعظم من نسبة م ع إلى ع ن. فنسبة م ع إلى ع ن أصغر من نسبة ب هـ إلى هـ ك.

ولنرجع إلى الشكل. فليكن السهم الأقصر ز هـ ك ونصل ب ك، ا ك. ونخرج ب ك إلى ل. فالشريطة في هذا بخصوصه أن لا تكون الحادة المفروضة أصغر من زاوية ل ك ا، لما علم من أنه لا يمكن أن نخرج مماس بين نقطتي ك، ا أو ك، ب، وتكون الزاوية الواقعة بينه وبين القطر المار بتلك المماسة أصغر من زاوية ل ك ا. ومعلوم أن زوايا الترتيب مساوية لزاوية المماس.

فزاوية ت المفروضة إما أن تكون كزاوية ل ك ا أو أعظم منها.

فإن كانت كهي أخرجنا هـ ط جـ موازيًا لـ ب ك ل ملاقيا لـ ك ا على ط وللقطع على جـ، وأخرجنا مماسًا[338] لِـ جـ د ملاقيًا لِـ ب ا على د.

فلأن نسبة اهـ، هـ ب كنسبة اط، ط ك، فـَ ا ك منصف على ط. فهو من خطوط ترتيب قطر هـ جـ وموازٍ لمماس ل جـ د فسطح ك جـ متوازي الأضلاع وزاوية جـ، التي هي كزاويا الترتيب، كزاوية ل ك ا التي هي كزاوية ت المفروضة.

331- ناقصًا : الناقص.

332- مقدمة : مقدمته.

333- كانت : كان.

334- لكان : كان.

335-الكائن : الكاين. وهكذا فيما بعد.

336- فعلمنا : فعلم انا.

337- مساوية لزاوية : الكلمتان ناقصتان.

338- مماسًا : مماس.

وإن كانت زاوية ت أعظم من زاوية ل ك ا، كانت تمام زاوية ت، ولتكن زاوية خ، أصغر من زاوية ب ك ا.

فنعمل قطعة دائرة تقبل زاوية كزاوية خ المنفرجة، وهي قطعة م ن ف. فهي أصغر من النصف. ونُنَصِّف قوس م ف على ن ونخرج منها عمود ن ع إلى وتر م ف ونصل ع ن، ن ف.

فلأن زاوية ب ك ا أعظم من زاوية م ن ف، فنصفها، وهو زاوية ب ك هـ، أعظم من زاوية م ن ع، وزاويتا هـ، ع قائمتان. فيبقى زاوية ن م ع من القائمتين أعظم من زاوية ك ب هـ. ولذلك تكون نسبة م ع إلى ع ن أصغر من نسبة ب هـ إلى هـ ك. ونسبة مربع م ع، أعني سطح م ع في ع ف، إلى مربع ع ن أصغر من نسبة مربع ب هـ، أعني سطح ب هـ في هـ ا، إلى مربع هـ ك، أي من نسبة المجانب إلى القائم.

وقد قلنا إنه يمكن أن يخرج في قطعة م ن ف عمود من نقطة ما من وتر م ف عليه إلى قوس م ن ف على وجه يكون نسبة مسطح قسمي وتر م ف إلى مربع ذلك العمود كنسبة المجانب إلى القائم. وإذ ليس ذلك العمود هو سهم ع ن، فليكن هو عمود ص ق. فيقع عمود ص ق من سهم ع ن إلى إحدى ناحيتي م ف.

وظاهر أنه يمكن أن يخرج من الناحية الأخرى أيضا //154ظ// عمود كعمود ص ق. فيمكن العمل على وجهين ويوجد مثل القطر المطلوب في القطع الناقص أثنين بل أربعة عن الجهتين مكان الواحد على ما لا يخفى.

وقد تقدم أيضًا أن نسبة تمام قطر ن ع إلى ن ع أصغر من نسبة تمام أي عمود آخر يخرج من خط م ف إلى قوس م ن ف الصغرى عليه.

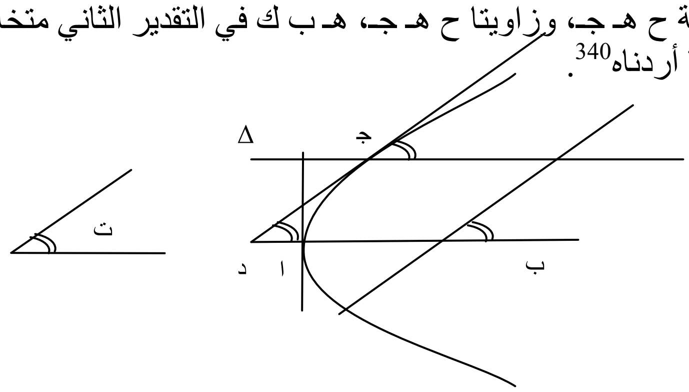
وذلك يوضح أيضا أنه لما انقسم م ف على ع مُنَصَّفًا وكانت نسبة مسطح ف ع في م ع على مربع ع ن أصغر من نسبة المجانب إلى القائم، كانت نسبة مسطح قسم أطول من م ع في قسم أقصر من ع ف، أو بالعكس إلى مربع خط أقصر من ع ن كنسبة المجانب إلى القائم. ونصل م ق، ق ف ونعمل على مركز هـ زاوية اهـ جـ كإحدي زاويتي ف م ق، م ف ق، ولتكن هي كزاوية ف م ق. ونخرج ل جـ د مماسًا وجـ ح على الترتيب.

فلأن زاويتي ص، م كزاويتي ح، هـ، فنسبة مربع م ص إلى مربع ص ق كنسبة مربع هـ ح إلى مربع ح جـ. ونسبة مربع ق ص إلى مسطح م ص في ص ف[339]، التي هي كنسبة القائم إلى المجانب، كنسبة مربع جـ ح إلى مسطح هـ ح في ح د. فنسبة مربع م ص إلى مسطح م ص في ص ف كنسبة مربع هـ ح إلى مسطح هـ ح في ح د. ولكن نسبة مربع م ص إلى مسطح م ص في ص ف كنسبة م ص إلى ص ف. ونسبة مربع ح هـ إلى مسطح هـ ح في ح د كنسبة هـ ح إلى ح د. فنسبة م ص إلى ص ف كنسبة ح هـ إلى ح د. ونسبة جـ ح إلى ح هـ كنسبة ق ص إلى ص م. فنسبة ق ص إلى ص ف كنسبة ح جـ إلى ح د. وزاويتا ح ، ص قائمتان. فزاوية ح جـ د كزاوية ص ق ف. فجميع زاوية م ق ف كجميع زاوية هـ جـ د. ويبقى تمام زاوية خ، الذي هو زاوية ت المفروضة، كزاوية هـ جـ ل. فقطر هـ جـ هو المطلوب لكون زوايا ترتيبه المساوية لزاوية ل جـ هـ كالزاوية المفروضة للناقص.

وفيها بيان المقدمتين المذكورتين.

ولا يتوهمن أن زاوية ص م ق هي بعينها زاوية ع م ي. فإن ي لا مدخل لها في أصل الشكل وخط م ي لبيان المقدمة المذكورة فقط. وزاوية ع م ي في المقدّمة كزاوية هـ ب ك. وزاوية ص م ق في أصل الشكل كزاوية ح هـ جـ، وزاويتا ح هـ جـ، هـ ب ك في التقدير الثاني متخالفتان. فليعلم ذلك.

وذلك ما أردناه[340].



[339]- ص ف : ص ق

[340]- للناقص وفيها بيان المقدمتين المذكورتين ... وذلك ما أردناه : الجملة في الهامش.

<قضية 27>
نريد أن نرسم في سطح مفروض كل واحد من القطوع الأربعة ويكون مجانبه و قائمه كخطين معلومين وزوايا ترتيبه كزاوية معلومة.
ونريد أن نرسم في زاوية معلومة قطعًا زائدًا يمر بنقطة معلومة هي فيها ويكون ضلعاها هما اللذان لا يقعان عليه.

ولنقصد أولا رسم القطع المكافئ ولنقدم منه ما يكون زوايا ترتيبه قوائم.
وليكن المجانب اب والقائم اجـ والسطح المفروض سطح ب ا جـ. فلنخرج ب ا إلى هـ ونجعل اهـ أعظم من ربع اجـ ونأخذ هـ ز وسطًا في النسبة بين اجـ، اهـ.
فنسبة اجـ إلى اهـ كنسبة مربع هـ ز إلى مربع هـ ا واجـ أصغر من أربعة أمثال اهـ. فمربع هـ ز أصغر من أربعة أمثال مربع اهـ. فخط هـ ز أصغر من مثلي اهـ. فيمكن إذن أن نعمل مثلثًا متساوي الساقين على قاعدة هـ ز، كل واحد من ساقيه كـَ ا هـ. وليكن مثلث اهـ ز عمودًا على سطح جـ ا ب المفروض . ونجعل خط اجـ عمودًا على اب في السطح المفروض، ونخرج زا إلى ن وزك موازيًا لـ ا هـ وا ك موازيًا لِ هـ ز. فيكون اهـ مساويًا لِـ ك ز ونعمل على خط ا ك دائرة قطرها ا ك قائمة على سطح ك هـ. فإذا دار أحد ضلعي از، زك المتساويين على محيط دائرة ا ك //155و// حتى عاد إلى موضوعه الأول، حدث مخروط قائم لقيام سطح مثلث ازك المتساوي الساقين على سطح دائرة قاعدته، أي يكون سهمه، لذلك، عمودًا عليها.
فإذا أخرجنا مخروط ازك وأخرجنا على نقطة ب سطحا موازيًا لدائرة ا ك أحدث في المخروط دائرة م ن قائمة على سطح مثلث م ز ن . وكان خط م ن الفصل المشترك لسطح مثلث م ز ن ولسطح[341] دائرة م ن. فيكون خط م ن قطرًا للدائرة. ونفصل المخروط بالسطح الموضوع المفروض، فيحدث فيه قطع ل اص. ويكون الفصل المشترك لدائرة م ن و للسطح المفروض خط ل ص ويكون ل ص، لاشتراكه بين السطحين -الدائرة والمفروض- القائمين كلاهما على سطح مثلث م زن، قائمًا على سطح المثلث عمودًا عليه. ولذالك يكون قائمًا على خط م ن وعلى خط اب، الذي هو المشترك بين سطح المثلث وسطح القطع. وسهمه[342] قد تبين أنه ينقسم على نقطة ب بنصفين. فلأن مخروط م زن فُصِل بسطح يمر على سهمه وأحدث فيه مثلث زم ن وقُطِع بالسطح المفروض وأحدث فيه قطع ل ا ص وكان فصلهما المشترك، الذي هو اب، موازيًا لضلع المخروط الذي هو ز م، يكون قطع ل ا ص مكافئـا.
ولأن نسبة اجـ إلى از كنسبة مربع اك إلى مربع ا ز، الذي هو مثل مسطح از في زك، يكون خط اجـ هو القطر القائم، كما تَـبيَّن. وبـَيِّن أن مجانبة هو ا ب.

ثم لتكن الزاوية غير قائمة:
وهي زاوية دح ط. ونجعل خط دح مثل نصف اجـ ونسقط من د عمود د ط على الضلع الآخر للزاوية، ونخرج، من ط، ط ف موازيًا لـ دح ومن ح عمود ح ف إلى الخط[343] الموازي. وننصف ف ط على ق ونخرج من ق عمود ق ع ونجعل مسطح ق ف في ق ع كمربع ف ح ونرسم قطعًا مكافئًا يكون ضلعه القائم خط ع ق وسهمه خط ق ف، على ما تبين. فهو يمر بنقطة ح.
لأنه لو مرَّ تحته أو فوقه، كان سطح ق ف في ق ع كمربع خط أصغر أو أعظم من ف ح، وهو كمربع ف ح. هذا خلف.
وليكن هو قطع ق ح. ونخرج خط ع ق حتى يلقى خط ح ط على نقطة ش ودح على نقطة س.
فلأن ع ق عمود وق ف سهم، يكون ق س ش مماسًا. ولأن ط ق كـَ ق ف وف ح على الترتيب ووصل ح ط والقطع مكافئ[344]، فـ ح ط مماس على ح، على ما تبين. ولأن زاوية ح س ش قائمة وزاوية ح ط د[345] قائمة وزاوية ح مشتركة، فالمثلثان متشابهان ونسبة س ح إلى ح ش كنسبة دح إلى ح ط

---

[341]- لسطح : السطح.
[342]- قد تبيَّن : وقد تبيَّن.
[343]- الخط : الكلمة ناقصة.
[344]- مكافئ : مكاف. وهكذا فيما بعد.
[345]- ح د ط : د ط ح.

وكنسبة ضعف دح، الذي هو ا جـ، إلى ضعف ح ط المماس الواصل إلى المجانب. فخط اجـ هو الضلع القائم للقطع المار بنقطة ح، على ما تبين.

وظاهر أن زوايا ترتيب قطر دش ح، المار بنقطة ح، هي كالزاوية المفروضة التي هي زاوية د ح ط . وإذا جعل مكان دح، اب صار اب هو المجانب بعينه. وهو المطلوب.

وأيضـا، ليكن المطلوب هو القطع الزائد.

وزوايا الترتيب أولا قوائم.

والخط المجانب يكون[346] فيه وفي الناقص أيضًا محدود الطرفين، خلاف المكافئ :

فإنه لا مركز له يتعين مقدار الأقطار[347] بحسبه وبحسب خط القطع ا ب والقائم ب جـ.

< مقدمة 1>

ولنوضح أولا مقدمة تستعمل فيه.

فليكن ا، ب خطين معلومين و جـ د ثالثا. ونريد أن نجعل جـ د وترا في دائرة ما بحيث يقْطَـع قطرها على نسبة ا، ب، ويقوم عليه.

< برهان : >

فلينصف جـ د على هـ ولنأخذ بين ا، ب وسطًا في النسبة وهو ز ونخرج عمود ح هـ ط ونجعل نسبة جـ هـ إلى هـ ط كنسبة ز إلى ب، ونسبة جـ هـ إلى هـ ح كنسبة ز إلى ا. فنسبة ح هـ إلى هـ جـ كنسبة ا إلى ز ونسبة هـ جـ إلى هـ ط كنسبة ز إلى ب. فنسبة ا إلى ب كنسبة ح هـ إلى هـ ط. ولأن ز وسط في النسبة فـ جـ هـ أيضًا وسط في النسبة بين ح هـ، هـ ط.

ولذلك إذا وصلنا جـ ح، جـ ط، كان مثلثا ح هـ جـ، جـ هـ ط متشابهين وجميع زاوية ح جـ ط كزاويتي ح، ط. ولذلك، تكون زاوية ح جـ ط قائمة. فالدائرة المرسومة على قطر ح ط تمر بنقطتي جـ د وتكون //155ظ// هي المطلوبة.

<مقدمة 2 :>

وإن أردنا أن تكون نسبة أحد قسمي القطر إلى الآخر أصغر من نسبة ا إلى ب.

<برهان:>

عملنا زاوية ط جـ ي أصغر من زاوية هـ جـ ح. فَقَطَـع جـ ي الحادث لـ ط هـ فوق ط وصار هـ ي أعظم من هـ ط. ونفصل زاوية ح جـ ك كزاوية ي جـ ط. فيبقى، بطرح الشيء وأحد مساويه زاوية ي جـ ك قائمة. فالدائرة المرسومة على قطر ي ك تمر أيضـا بنقطتي جـ، د. وظاهر أن نسبة ك هـ، الأصغر، إلى هـ ي، الأكبر، أصغر من نسبة ح هـ إلى هـ ط.

ثم، إن أردنا أن تكون النسبة أعظم، نقصنا من زاوية ط جـ هـ زاوية ط جـ ل وزدنا في زاوية هـ جـ ح زاوية ح جـ م مثلها أي كالمنقوص. فتكون زاوية ل جـ م قائمة. فتمر الدائرة المرسومة على م ل بنقطتي جـ، د. ونسبة م هـ الأعظم إلى هـ ل الأصغر أعظم من نسبة[348] هـ ح الأصغر إلى هـ ط الأكبر. وهو المطلوب.

وظاهر أنه إذا كان ا كـ ب كان ز أيضًا مثلهما وكانت جـ هـ ، هـ ح ، هـ ط متساوية.

وإن كان ا، ر، ب متصاغرة كانت ح هـ، هـ جـ، هـ ط أيضـا متصاغرة. وإن كانت متعاظمة كانت متعاظمة أيضًا.

وإذا عرفت ذلك، فلنعمل، على ا ب المجانب، دائرة تكون نسبة أحد قسمي قطرها القائم على منتصف ا ب. ولتكن نسبة[349] ك، إلى قسمه الآخر إما مساوية لنسبة ا ب إلى قائم ب جـ أو أصغر منها، وليست بأعظم منها.

---

[346]- يكون : ويكون.
[347]- الأقطار : لاقطار.
[348]- من نسبة : مرضية.
[349]- نسبة : الكلمة ناقصة.

ولتكن هي ا ب ز ل وقطرها القائم على ا ب، هـ ك ل ونسبة هـ ك إلى ك ل ليست بأعظم من نسبة ا ب إلى ب جـ، المجانب إلى القائم. فهي إما مساوية لها أو أصغر منها.

فإن كانت مساوية لها، استعملنا خط ك ل. وإلا، جعلنا نسبة هـ ك إلى ك م كنسبة ا ب إلى ب جـ. فيكون ك م أصغر من ك ل لأن النسبة إليه أعظم. ونخرج م ز موازيًا لِـ ا ب. فيقطع قوس ل ب بين نقطتي ل ب على ز. ونصل زب، زا، ز هـ. ونخرج از في جهة ز وب ص موازيًا لِـ ب هـ ملا قيا لـ ا ز على ص. وليلق ز هـ لـ اب على ح. وليكن سطح دائرة اهـ ب قائمًا على السطح الموضوع على قوائم. فلأن قوس اهـ كقوس هـ ب، فزاوية از هـ، المساوية لزاوية ا ص ب، كزاوية هـ ز ب المبادلة لزاوية ز ب ص. فساقا زص، زب متساويان لتساوي زاويتي ص، ب. فإذا أدرنا على قاعدة ص ب دائرة قائمة على سطح مثلث ص ز ب، الذي هو بعينه سطح دائرة اهـ ب، ولتكن دائرة ب ص، وأدرنا أحد ضلعي زص، زب على محيطها حافظًا لنقطة ز حتى يعود إلى وضعه الأول، حدث مخروط. ويكون سهمه هو العمود الخارج من منتصف ص ب إلى رأس ز، وقائما على سطح قاعدته، لقيام مثلث ص ز ب على سطح دائرة ص ب. وبخروج خطوط زب، زص، م ز، اب، يَخرُج سطح المخروط متوسعًا ويقطعه تحت دائرة ب ص بسطح مواز لـ ب ص. فيحدث فيه دائرة ن ط. ويكون الفصل المشترك لدائرة ن ط ولمثلث زن ط، وهو خط ن ط، موازيًا لخط ب ص، بل لـ ح ز. وقطر الدائرة ن ط، على ما تبين في موضعه. ويقطع خطًا اب، م ز، المتوازيان الكائنان في سطح مثلث ز ن ط، لخط ن ط على نقطتي ع، د. ويقطع السطح المفروض للمخروط، فيحدث فيه قطع ف ب ق. وإنما يقطعه لأنه يقوم على سطح المثلث من خط ب د عمودًا عليه. وليكن المشترك بينه وبين دائرة ن ط خط ف ق ويمر بنقطة د المشتركة بين السطوح الثلاثة من المثلث والدائرة والموضوع المحدث للقطع. ويكون ف د ق عمودًا على سطح مثلث زن ط وقائما على كل واحد من خطي ن ط، ب د على قوائم لاشتراكه بين سطحين قائمين عليه.

ولأن مخروط ز ط ن قُطِع بسطح ز ط ن المار بسهمه وقُطِع أيضا بسطح ف ق د القائم على سطح ز ط ن، والفصل المشترك بينهما، وهو ب د، لقي ضلع ن ز خارج المخروط من جهة الرأس على نقطة ا، فيكون لذلك قطع ف ب ق هو الزائد ورأسه ب وتكون خطوط الترتيب الخارجة إلى ب د أعمدة عليه //156و// لأنها موازية لعمود ف د ق القائم عليه. ولأن نسبة اب إلى ب جـ كنسبة هـ ك إلى ك م، أي كنسبة هـ ح إلى زح، وهي كنسبة سطح هـ ح في ح ز إلى مربع زح، فنسبة اب إلى ب جـ كنسبة سطح هـ ح في ح زإلى مربع زح. وسطح هـ ح في ح ز كسطح اح في ح ب. فنسبة اب إلى ب جـ كنسبة سطح اح في ح ب إلى مربع جـ ز. وهذه النسبة مؤلفة من نسبة اح إلى ح ز، أي من نسبة اد إلى دن، بل من نسبة ز ع إلى ع ن، للتشابه، ومن نسبة ب ح إلى ح ز، أي ومن نسبة ب د إلى دط، بل من نسبة ز ع إلى ع ط. فنسبة اب إلى ب جـ مؤلفة من نسبة ز ع إلى ع ن ومن نسبة ز ع إلى ع ط. ونسبة مربع ز ع إلى سطح ن ع في ع ط أيضًا مؤلفة من تينك النسبتين. فنسبة اب إلى ب جـ كنسبة مربع ز ع إلى سطح ن ع في ع ط. ولكن خط ز ع هو الموازي الخارج من رأس المخروط لسهم القطع الذي هو اب د. ون ع ط قسمها قطر القاعدة. فخط ب جـ، لذلك، يكون هو القطر القائم لقطر اب المجانب. فقد وجدنا القطع المطلوب وهو قطع ف ب د.

ولتكن[350] الآن زاويا الترتيب غير قوائم. فهي كحادة مفروضة. والمجانب ا ب والقائم ا جـ والسطح المحاط[351] بهما سطح ب ا جـ. وننصف ا ب على د ونرسم على د ب نصف دائرة ا ز د ونعمل على ا زاوية داط كالزاوية المفروضة الحادَّة.ولحدَّتها، يقع ضلع اط الحادث داخل الدائرة. ونخرج د ا في جهة ا ونخرج خطًّا إما مُماسًا أو مقاطعًا لنصف دائرة ازد ملاقيا لقطر دا خارج الدائرة بحيث تكون نسبة مسطح دا مع ما يقع منه خارج الدائرة إلى ذلك الخط فيما يقع منه خارج الدائرة إلى مربع ذلك المماس، أو مربع أحد قسمي ذلك المقاطع، كنسبة المجانب اب إلى القائم اجـ وذلك ممكن بالرجوع أيضًا إلى الشكل المذكور في الدوائر. واستحضار أن مسطح أقسام المتقاطعين خارج الدائرة أو داخلها متساويان وأن مسطح الخط في الخط موسط في النسبة بين مربعيهما وأن نسبة المسطحين المتساويي الارتفاعين كنسبة قاعدتيهما.

وباعتبار أن الوتر قطر والزاوية غير قائمة سواء كانت النسبة بالمساواة352 أم لا. وليكن ذلك الخط هو ح ز مماسًا أو أطول قسمي المتقاطع أو أقصره كيف كان.

[350]- ولتكن : وليكن.

[351]- السطح المحاط : السطح هو المحاط.

[352]- بالمساواة : مساواة.

ولأن زاوية د ح ز كالمفروضة كزاوية د ا ط، فـ ا ط، ح ز متوازيان. ونصل د ز فيقطع ا ط على ط ونخرج زد ونفصل د ك كَ زد ونتخذ بين د ز، د ط وسطًا في النسبة وهو د ل. (...) // نهاية نص الإكمال: 156 و، سطر 31//.

//بداية الاستكمال : 53و، سطر 1// بين خطَّي دال طا إلى زاي. فنقطة لام تقع بين نقطتي طا زاي. ونصل الف زاي وننفذه على استقامة إلى ميم. وليكن[353] مسطح لام زاي في زاي ميم مساو[354] لمربع زاي الف. ونصل كاف ميم ونخرج من نقطة لام عمودًا[355] على كاف زاي يلقى خط كاف ميم على نقطة نون. وخط الف طا على نقطة عين وخط الف دال على نقطة صاد. فخطا كاف لام، لام نون معلومان. فإذا رسمنا قطعًا زائدًا يكون قطره المجانب خط كاف لام وضلعه القائم خط لام نون وخطوط ترتيبه تلقى السهم على زوايا قائمة، فهو يمر بنقطة الف لأن مربع الف زاي مساو لسطح لام زاي في زاي ميم. فخط الف طا يماس القطع لأن سطح زاي دال في دال طا مساو لمربع دال لام. ويكون خط كاف با قطرًا لأنه خرج من مركز دال إلى نقطة التماس. وتكون زوايا خطوط الترتيب عليه مساوية لزاوية دال الف طا المفروضة. ولأن نسبة جيم الف إلى ضعف الف دال، الذي هو الف يا، كنسبة مربع زاي حا إلى سطح دال حا في حا الف. فإذا صيّرنا ضعف طا الف وسطا، صارت نسبة الف جيم إلى ضعف الف دال مركبة من نسبة الف جيم إلى ضعف الف طا ومن نسبة ضعف الف طا إلى ضعف الف دال، التي هي كنسبة الف طا إلى الف دال، وكنسبة زاي حا إلى حا دال. ونسبة الف جيم إلى الف با مركبة من نسبة الف جيم إلى ضعف الف طا ومن نسبة زاي حا إلى حا دال. ونسبة مربع زاي حا إلى سطح دال حا في حا الف مركبة من نسبة زاي حا إلى حا دال ومن نسبة زاي حا إلى حا الف. والنسبة المركبة من نسبة جيم الف إلى ضعف الف طا ومن نسبة زاي حا إلى حا دال[356] هي النسبة المركبة من نسبة زاي حا إلى حا الف ومن نسبة زاي حا إلى حا دال. فنطرح نسبة زاي حا إلى حا دال المشتركة، فتبقى[357] نسبة الف جيم إلى ضعف الف طا كنسبة زاي حا إلى حا الف، التي هي كنسبة عين الف إلى الف صاد. فنسبة الف جيم إلى ضعف الف طا كنسبة عين الف إلى الف صاد. فخط الف جيم هو الخط القائم لقطع[358] الف با.

وإذا أردنا أن نخط القطع الناقص، فليكن الخطان المعلومان خطي الف با، الف جيم. ولنجعلهما يحيطان بزاوية قائمة. فإذا أردنا أن يكون خط الف با سهما أطول، فرضناه أعظم من الف جيم وأقمنا على خط الف با سطحًا قائمًا على السطح المفروض ورسمنا فيه قطعة دائرة الف دال با وقسمنا قوس الف با بنصفين على نقطة دال ووصلنا الف دال، دال با وفصلنا من الف با الف صاد مساويًا لخط الف جيم وأخرجنا من نقطة صاد خط صاد عين موازيا لخط دال با يلقى خط الف دال على نقطة عين ونخرج من نقطة عين خطا موازيا لخط الف با[359] عليه عين زاي يلقى قوس الف دال على نقطة زاي. ونصل دال زاي ونخرجه حتى يلقى الف با ونصل الف زاي، زاي با ونخرجهما في جهتي الف با ونتعلم نقطة على خط زاي الف، وهي نقطة حا، ونخرج منها خط حا طا موازيا لخط دال ها ويلقى خط زاي با على نقطة طا وخط الف با على نقطة كاف وخط زاي عين على نقطة لام. ولأن زاوية الف زاي ها خارجة عن مثلث زاي الف دال، فهي مساوية لزاويتي زاي الف دال، الف دال زاي. وزاوية زاي الف دال مثل زاوية زاي با دال وزاوية زاي دال الف مثل زاوية زاي با الف. فزاوية دال با الف مساوية لزاوية الف زاي ها المساوية لزاوية زاي حا طا[360]. وزاوية دال با الف مساوية لزاوية با زاي دال المساوية لزاوية زاي[361] طا حا لأنهما على قوسين متساويتين. فخط زاي طا مساو لخط زاي حا. فإذا أخرجنا على خط حا طا سطحا قائما على سطح مثلث زاي حا طا ورسمنا على قطر حا طا دائرة ونتوهم مخروطا قاعدته دائرة حا طا ورأسه نقطة زاي، فيكون لذلك مخروط زاي حا طا قائما. ولإن سطح //53ظ// مثلث زاي حا طا قائم على السطح المفروض ودائرة با طا صاد قائمة على مثلث زاي حا طا، فالفصل المشترك للسطح المفروض ولدئرة حا طا نون عمود[362] على الفصل المشترك لمثلث زاي حا طا ولسطح دائرة حا طا وهو

[353]- وليكن : الكلمة مطموسة.
[354]- مساو: مساويا.
[355]- عمودا : الكلمة في الهامش.
[356]- دال : الكلمة في الهامش.
[357]- فتبقى : فتبقا. وهكذا فيما بعد.
[358]- لقطع : لقطر.
[359]- لخط دال با يلقى ... موازيا لخط الف با : الجملة في الهامش.
[360]- زاي حا طا : زاي طا حا.
[361]- دال با الف مساوية لزاوية با زاي دال المساوية لزاوية زاي : الجملة في الهامش.
[362]- عمود : الكلمة في الهامش.

كاف ميم. فيكون، لذلك، مخروط زاي حا طا القائم قد قُطِع بالسطح المفروض فكان الفصل المشترك له ولدائرة طا حا نون قائمًا على الفصل المشترك لدائرة حا طا نون ولمثلث زاي حا طا. فيحدث، لذلك، في السطح المفروض، القطع الناقص ويكون سهمه خط الف با وتقع خطوط الترتيب على سهم الف با على زوايا قائمة لأن الفصل المشترك له ولدائرة حا طا قائم على الفصل المشترك لدائرة حا طا ولمثلث زاي حا طا.

ولأن نسبة با الف إلى الف جيم كنسبة با الف إلى الف صاد وكنسبة دال الف إلى الف عين وكنسبة دال ها إلى ها زاي وكنسبة مسطح دال ها في ها زاي إلى مربع ها زاي، التي هي كنسبة مسطح با ها في ها الف إلى مربع ها زاي، التي هي كنسبة با ها إلى ها زاي مثناة بنسبة الف ها إلى ها زاي. ونسبة با ها إلى ها زاي كنسبة با كاف إلى كاف طا وكنسبة زاي لام إلى لام طا. ونسبة الف ها إلى ها زاي كنسبة الف كاف إلى كاف حا وكنسبة زاي لام إلى لام حا. فنسبة با الف إلى الف جيم كنسبة زاي لام إلى لام طا مثناة بنسبة زاي لام إلى لام حا، التي هي كنسبة مربع زاي لام إلى مسطح طا لام في لام حا. فخط الف جيم هو الضلع القائم لقطع الف با.

وليكن أيضا الف با أقصر من خط الف جيم ونريد أن نخط القطع الناقص الذي خط الف با سهمه الأقصر. فتقسم خط الف با بنصفين على نقطة دال ونخرج من نقطة دال خط ها زاي موازيًا لخط الف جيم ونجعل خط زاي ها وسطًا في النسبة بين خطي با الف، الف جيم. وليكن خط دال ها مساويًا لخط ها زاي. ونخرج خط زاي حا موازيًا لخط الف با ونجعل نسبة الف جيم إلى الف با كنسبة ها زاي إلى زاي حا. فخط ها زاي أعظم من خط زاي حا. ونخط القطع الناقص الذي سهمه خط زاي ها وضلعه القائم خط زاي حا. فهو يمر بنقطتي الف با. ومن أجل أن نسبة الف جيم إلى زاي ها كنسبة زاي ها إلى الف با، فنسبة الف جيم إلى الف با كنسبة زاي ها إلى مربع الف با وكنسبة مربع زاي دال، الذي هو مثل سطح زاي دال في دال ها، إلى مربع دال الف، وكنسبة ها زاي إلى زاي حا، التي هي كنسبة المجانب إلى القائم. فلذلك يجوز القطع على نقطتي الف، با.

ثم لا تكون الزاوية المفروضة قائمة ولتكن مثل زاوية با الف دال. ونقسم خط الف با بنصفين على نقطة ها ونخط على الف ها نصف دائرة عليها الف زاي ها ونخرج فيها خطًا موازيًا لخط الف دال عليه زاي حا حتى تكون نسبة مربع زاي حا إلى سطح الف حا في حا ها كنسبة خط الف جيم إلى خط الف با. ونصل الف زاي ونخرج ها زاي على استقامة حتى يلقى الف دال على دال. ونستخرج فيما بين خطي زاي ها، ها دال خط ها طا وسطا في النسبة بينهما. فنقطة طا تقع بين زاي دال. ونخرج خط طا ها إلى كاف ونجعل ها كاف[363] مثل طا ها ونخرج الف زاي على استقامة إلى لام ونجعل مسطح طا زاي في زاي لام مساويًا لمربع الف زاي. ونصل كاف لام ونخرج من نقطة طا عمودا على خط طا زاي، عليه ها صاد نون، يلقى خط كاف لام على نقطة ميم وخط الف دال على نقطة صاد وخط الف با على نقطة نون. فيكون موازيًا لخط زاي لام لأن الزاوية التي عند زاي قائمة. فلأن خطي كاف طا[364] طا ميم معلومان // **نهاية الاستكمال** : 53ظ، السطر الأخير //.

// بداية **الإكمال** : 157و، سطر 19// وليقع ط ص على ا د على ص وعلى ا ب على ن، ونصل ك ل. فيقع على ط ص على م ونعمل على قطر ط ح جـ المجانب وضلع ط م القائم قطعًا ناقصًا، زوايا ترتيبه قوائم. وليكن هو ا ط ب ك. ولأن ط هـ كـ هـ ك ، و ط ك سهم، فالقطع يمر بنقطة ك ويكون مركزه هـ. ولأن سطح ل ز في ز ط كمربع خط ترتيب، نخرج من نقطة ز عمودًا على ط هـ إلى القطع. وهو أيضًا كمربع عمود ز ا. فعمود ز ا هو بعينه خط الترتيب الخارج من ز إلى القطع، لا أزيد ولا أنقص. فالقطع يمر بنقطة ا. ولأن ا هـ مار بمركز القطع و ا هـ كَ هـ ب ، فـ ا هـ قطر للقطع. فهو يمر أيضًا بنقطة ب. فقد رُسِم قطع ا ط ب ومجانبه ا ب. ولأن د ا خارج من نقطة د من قطر ط ك إلى القطع إلى نقطة ا منه و ا ز واقع من ا على ط د، على الترتيب، و ضرب د هـ في ز هـ كمربع د ط، فلذلك يكون ا د مماسًا للقطع على طرف قطر ا ب. فتكون زوايا ترتيب قطر ا ب كزاوية د ا ب المفروضة.

ولأن نسبة ا جـ إلى ا ب مؤلفة //157ظ// من نسبة ا جـ إلى ضعف ا د، المماس، ومن نسبة ضعف ا د إلى ضعف ا هـ، أي ا ب، بل ومن نسبة ا د إلى ا هـ، أي ومن نسبة ز ح إلى هـ ح ونسبة ا جـ إلى ا ب،

---

[363]- نجعل ها كاف : نجعله.

[364]- كاف طا : الكلمتان مطموستان.

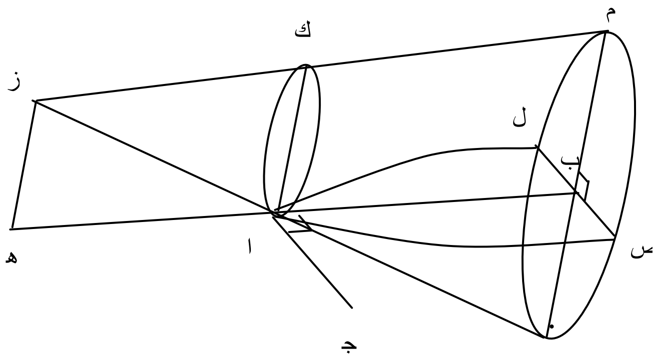
بعكس المعمول، كنسبة مربع ز ح إلى مسطح ا ح في ح هـ . فنسبة مربع ز ح إلى مسطح ا ح في ح هـ مؤلفة من نسبة ا جـ إلى ضعف ا د، المماس، ومن نسبة ز ح إلى ح هـ. ولكن نسبة مربع ز ح إلى سطح ا ح في ح هـ مؤلفة أيضًا من نسبة ز ح إلى ح هـ ومن نسبة ز ح إلى ح ا. فتسقط نسبة ز ح إلى ح هـ المشتركة وتبقى نسبة اجـ إلى ضعف ا د، المماس، كنسبة ز ح إلى ح ا، بل كنسبة ص ا إلى ا ن، للتشابه والتوازي. ولأن نسبة ا جـ إلى ا د كنسبة ا ص إلى ا ن يكون لذلك ا جـ هو الضلع القائم لضلع ا ب المجانب، على ما تبين.

وأنت تعلم أن مثل هذه الجوالة هي إلى الشكل المستخرج فيه أقطار القطوع. وواضح عندك أيضًا أن الدائرة يمكن استخراجها بشبه العمل المتقدم على هذا لتحصيل القطع الناقص الذي هو غير الدائرة، بل ينتقص فيها بأكثر العمل ويكون أسهل. والتفت إلى ما تقدم من أن مثلث ا د ب المتساوي الساقين هو للمخروط الذي يحدث فيه قطع ا ب دائرة. ومثلث ز ب ا هو الذي يحدث بحسبه قطع ا ب غير دائرة. ولأن لنا طريقًا أسهل للدائرة من ذلك من توهم دائرة على كل خط محدود كما هو في المصادرة المشهورة فلذلك لا يحتاج في طلب الدائرة إلى ذلك. بل لو حصّلت الدائرة بذلك الطريق، لدار البرهان لاستعمال الدائرة فيه.

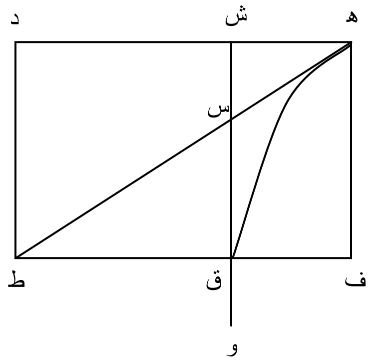
وتعلم أيضًا أن هنا يتأتى شكل هو أشبه شيء بالدائرة لكن ليس هو بعينه الدائرة وهو القطع الناقص الذي قطره المجانب كالقائم وخطوط ترتيبه مائلة على مجانبه.

وأيضًا ليكن المطلوب القطعين المتقابلين والمجانب ا ب والقائم ا جـ وزوايا الترتيب قوائم أو حواد أو[365] منفرجة. فلنا أن نعمل على كل واحد من طرفي ا ، ب قطعا زائدًا ا ب مجانبه و ا جـ قائمه وزواياه كالمفروضة قائمة أو حادة. وظاهر أنهما يتقابلان لاشتراك المجانب والقائم واتحاد زوايا الترتيب. وإن أخرجنا بين مجانب ا ب وقائم ا جـ وسطًا في النسبة كان ذلك هو المزدوج مع مجانب ا ب. فإذا أخرجنا لذلك المزدوج و لـ ا ب ثالثًا في النسبة، بحيث تكون نسبة ذلك المزدوج إلى ا ب كنسبة ا ب إلى ذلك الثالث، وعملنا قطعين متقابلين، يكون ذلك المزدوج مجانبهما وذلك الثالث قائمهما، حصل لنا القطوع الأربعة المتقابلة المسماة بالمزدوجة من المتقابلين.

ثم ليكن ا ب ، ا جـ محيطين بزاوية ما، كيف كانت، ولتكن نقطة د فيما بينهما في سطح الزاوية، ونريد أن نرسم قطعًا زائدًا يمر بـ د ويكون ا ب ، ا حـ هما الخطان[366] اللذان لا يقعان عليه. فنصل ا د ونخرجه في جهة ا ونفصل ا هـ كـَ د هـ ونخرج د ز موازيًا لِـ ا ب، أحد الخطين، ملاقيًا للآخر على ز ونفصل ز جـ كـَ ز ا ونصل جـ د ونخرجه حتى يلقى ا ب على ب ونستخرج لخطي هـ د ، ب جـ ثالثًا في النسبة، وهو ح ، ونعمل على مجانب هـ د وقائم ح قطعًا زائدًا تكون زوايا ترتيبه كزاوية ب د ا، وهو قطع د. فلأن نسبة جـ د إلى[367] د ب كنسبة جـ ز إلى[368] ز ا، فـَ ب جـ مُنَصَّف بين خطي ا ب ، ا جـ بالقطع على نقطة د. ولذلك يماس القطع على د. ولأن ب جـ، بالعمل، وسط بين المجانب والقائم، فهو القطر الثاني. ولذلك يكون ا ب ، ا جـ الخطين اللذين لا يقعان على القطع. فقد وجد المطلوب وتم الفصل الأول وهذه هي الأشكال وبالله التوفيق.



المكافئ القائم الزاوية



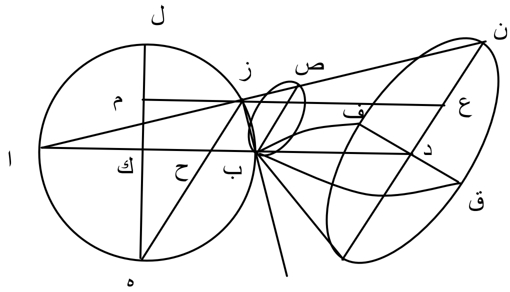
المكافئ الحاد الزاوية

365- أو : و.

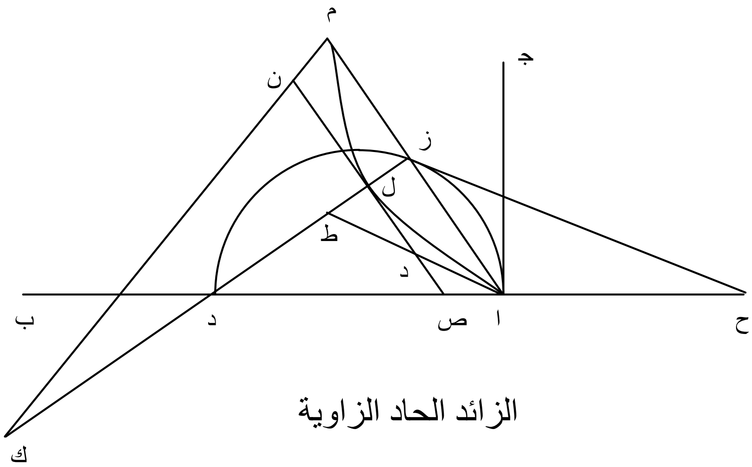
366- الخطان : الكلمة ناقصة.

367- إلى : الكلمة ناقصة.

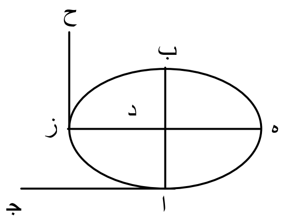
368- إلى : الكلمة ناقصة.



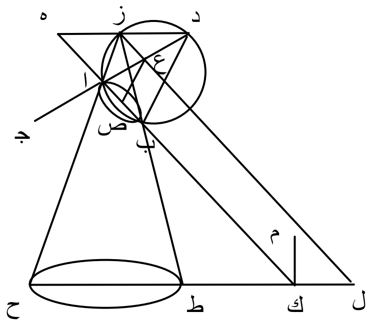
الزائد القائم الزاوية



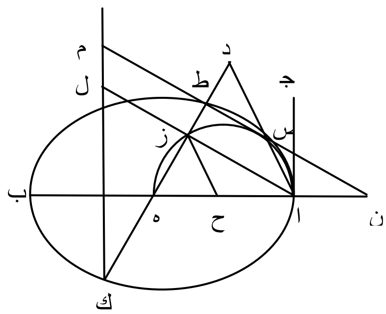
الزائد الحاد الزاوية



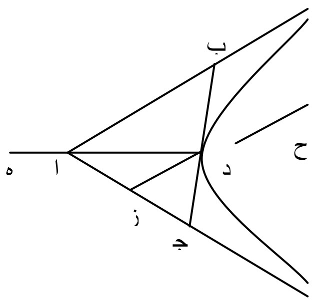
الناقص القائم قصير المجانب



الناقص القائم الزاوية طويل المجانب



القطع الناقص الحاد الزاوية



القطع الزائد