Université des sciences et techniques de lille 1

N° d'ordre : 4168

SUR LA 2-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE : CORPS DES MODULES

THÈSE

présentée par

Bénaouda DJAMAI

pour obtenir

Le Titre de Docteur de l'Université

Spécialité : Mathématiques Pures

Rapporteurs

J.-M. Couveignes	Professeur	Université de Toulouse II, Le Mirail.
Z. Wojtkowiak	Professeur	Université de Nice - Sophia-Antipolis.

Soutenue le 16 mai 2008 devant le jury composé de :

J.C. Douai	Professeur, Université de Lille 1	Directeur de Thèse.
J.M. Couveignes	Professeur, Université de Toulouse II	Rapporteur.
Z. Wojtkowiak	Professeur, Université de Nice Sophia-Antipolis	Rapporteur.
P. Dèbes	Professeur, Université de Lille 1	Examinateur
B. Deschamps	Professeur, Université du Maine	Examinateur.
M. Emsalem	Professeur, Université de Lille 1	Examinateur
M. Florence	Professeur, Université de Paris-Sud	Examinateur

N° d'ordre: 4168

Résumé Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas et G un Y-schéma en groupes. Lorsque G est abélien, l a suite spectrale de Leray associée à f, $E^{p,q} = H^p(Y, R^q, f_*G_X) \Longrightarrow H^{p+q}(X, G_X)$, nous donne une suite exacte en basses dimensions :

$$0 \longrightarrow H^1(k, f_*G_X) \xrightarrow{u_1} H^1(X, G_X) \xrightarrow{v_1} H^0(k, R^1 f_*G_X) \overset{d_2^{0,1}}{\dashrightarrow} H^2(k, f_*G_X)$$

$$\xrightarrow{u_2} H^2(X, G_X)^{tr} \xrightarrow{v_2} H^1(k, R^1 f_*G_X) \xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(k, f_*G_X)$$

Le but de ce travail est d'étudier l'analogue de cette situation lorsque G n'est plus abélien. La notion de gerbe introduite par Grothendieck permet de construire un substitut au cobord $d^{0,1} : H^0(Y, R^1 f_*G_X) \longrightarrow H^2(Y, f_*G_X)$. Ici nous étudions plus particulièrement l'obstruction à descendre une G_X-gerbe sur X en une f_*G_X-gerbe sur Y. Pour cela, à partir de l'interprétation de Giraud du $R^1 f_*G_X$, nous donnons un substitut non abélien au $H1(Y, R1f * GX)$ et au cobord $d^{1,1} : H^1(Y, R^1 f_*G_X) \longrightarrow H^3(Y, f_*G_X)$, en termes de condition de corps des modules et de 2-gerbes.

Nous donnerons ensuite deux exemples de descente de gerbes dans le cas non abélien: le premier, considéré par Grothendieck, est celui des surface fibrées sur des droites, le deuxième, de nature arithmétique, concerne l'extension maximale abelienne d'un corps des fractions d'un anneau local, excellent, henselien de dimension 2.

Mots-clefs: Théorie de la descente, groupes algébriques linéaires, suite spectrale.

Abstract— Let $f : X \longrightarrow Y$ be a morphism of schemes and G a group scheme over Y. If G is abelian, the Leray spectral sequence $E^{p,q} = H^p(Y, R^q, f_*G_X) \Longrightarrow H^{p+q}(X, G_X)$, associated to f gives rise to an exact sequence in low dimensions :

$$0 \longrightarrow H^1(k, f_*G_X) \xrightarrow{u_1} H^1(X, G_X) \xrightarrow{v_1} H^0(k, R^1 f_*G_X) \overset{d_2^{0,1}}{\dashrightarrow} H^2(k, f_*G_X)$$

$$\xrightarrow{u_2} H^2(X, G_X)^{tr} \xrightarrow{v_2} H^1(k, R^1 f_*G_X) \xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(k, f_*G_X)$$

In this thesis, we consider the case of a non abelian group G.

The notion of a gerb, due to Grothendieck , allows us to get an equivalent morphism to $d^{0,1} : H^0(Y, R^1 f_*G_X) \longrightarrow H^2(Y, f_*G_X)$. Here, we study the obstruction for a G_X-gerb on X to be the image of a f_*G_X-gerb on Y.

For this aim, we use the Giraud's interpretation of $R^1 f_*G_X$, to build an equivalent object to $H^1(Y, R^1 f_*G_X)$ and an equivalent morphism to $d^{1,1} : H^1(Y, R^1 f_*G_X) \longrightarrow H^3(Y, f_*G_X)$, by means of filed of moduli condition and 2-gerbs.

We give then two results in the non abelian case : a cohomological one, which is the case of a surface fibred on a curve, studied by Grothendieck, and an arithmetical one which deals with the maximal abelian extension of the fractions field of a local, heselian excellent ring of dimension 2.

Key-words: Descent theory, linear algebraic groups, spectrale sequence.

Bénaouda DJAMAI

SUR LA 2-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE : CORPS DES MODULES

Bénaouda DJAMAI

Mots clefs. — Théorie de la descente, groupes algébriques linéaires, suite spectrale.

SUR LA 2-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE : CORPS DES MODULES

Bénaouda DJAMAI

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Jean Claude DOUAI. Sa disponibilité, sa passion de découvrir et sa très grande culture mathématique m'ont permis de vivre une expérience passionnante.

Je suis très reconnaissant à Jean-Marc COUVEIGNES et Zdzislaw WOJTKOWIAK qui ont bien voulu rapporter ce travail. Qu'ils en soient remerciés.

Je remercie particulièrement Michel EMSALEM pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Le temps qu'il lui a consacré et les remarques dont il m'a fait part m'ont été très précieux.

Mes remerciement vont aussi à Pierre DEBES, Bruno DESCHAMPS et Mathieu FLORENCE qui ont bien voulu examiner ce travail et faire partie du jury.

Enfin, je ne veux pas oublier Stéphane ZAHND, mon camarade de jeu en cohomologie étale (comme il le dit lui-même) : sa passion pour la géométrie algébrique, sa rigueur mathématique, sa gentillesse, sa disponibilité et son enthousiasme permanent ont été un formidable moteur pour moi. Je voudrais aussi associer à ces remerciements Driss LAADDAR: nos longues discussions, sa culture mathématique et son amitié m'ont permis d'entretenir ma passion pour les mathématiques.

INTRODUCTION

Soient k un corps de caractéristique 0, X un k-schéma quasi-compact et quasi séparé et G un k-groupe algébrique linéaire.

Notons $\pi : X \longrightarrow \mathrm{Spec}(k)$ le morphisme structural de X.

Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de $\overline{k}/k$.

Définissons $\overline{X}$, G_X et $\overline{G}_X$ à l'aide du cube suivant, où chaque face est un carré cartésien:

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{G}_X \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & G_X \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\overline{X} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] & \\
 & \overline{G} \arrow[rr] \arrow[dl] & & G \arrow[dl] \\
\mathrm{Spec}(\overline{k}) \arrow[rr] & & \mathrm{Spec}(k) &
\end{tikzcd}$$

Nous supposerons que $\overline{G}_X(\overline{X}) = \overline{G}(\overline{k})$, condition qui est vérifiée en particulier dans les cas suivants:

- G est un k-groupe algébrique linéaire, et X est une k-variété projective géométriquement connexe;
- G est un k-groupe multiplicatif, et X est un k-schéma propre géométriquement connexe;
- G est un groupe fini, et X est un k-schéma géométriquement connexe;

Dans cette situation, nous avons d'une part $\pi_*(G_X) = G$ et d'autre part, lorsque G est abélien, une suite spectrale de Leray associée à f :

$$E_2^{pq} = H^p(k, R^q\pi_*G_X) \Longrightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(X, G_X)$$

de laquelle nous déduisons la suite exacte suivante, dite *suite exacte en basses dimensions*:
(1)

$$0 \longrightarrow H^1(k,G) \xrightarrow{u_1} H^1(X,G_X) \xrightarrow{v_1} H^0(k,R^1\pi_*G_X) \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(k,G)$$

$$\xrightarrow{u_2} H^2(X,G_X)^{tr} \xrightarrow{v_2} H^1(k,R^1\pi_*G_X) \xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(k,G)$$

Dans toute la suite, la cohomologie considérée est la cohomologie étale.

Sous les hypothèses du début, on a :

$$(R^1\pi_*G_X)_{\mathrm{Spec}(\overline{k})} = H^1_{et}(\overline{X},\overline{G}_X)$$

et le cobord:

$$d_2^{0,1} : H^0(k, H^1_{et}(\overline{X},\overline{G}_X)) \longrightarrow H^2(k,G)$$

associe à tout $\overline{G}_X$-torseur $\overline{P}$ de corps de modules k la k-gerbe de ses modèles « locaux ». C'est la k-gerbe « résiduelle » en le point, à valeur dans Spec(k), du champ $\pi_*Tors(G_X)$ correspondant au torseur $\overline{P}$.

Dans ce travail nous voulons interpréter le cobord:

$$d_2^{1,1} : H^1(k,R^1\pi_*G_X) \longrightarrow H^3(k,G)$$

et étudier l'analogue de la suite exacte (1) lorsque G n'est plus abelien.

Le premier obstacle provient du fait que les H^2 non abeliens peuvent avoir *plusieurs classes neutres*, ce qui rend la notion de noyau, et par conséquent celle de suite exacte, caduque.

Le deuxième obstacle, et non le moindre, est la non existence du $H^1(k,R^1\pi_*G_X)$ lorsque G n'est plus abelien, $R^1\pi_*G_X$ n'ayant plus de structure de groupe...

Plus précisément, nous nous intéresserons aux obstructions, en particulier, à relever une classe de $H^2(X,G_X)$ en une classe dans $H^2(k,G)$ pour G un k-groupe réductif.

Pour cela, si $[\mathcal{G}] \in H^2(X,G_X)$ est la classe d'une X-gerbe $\mathcal{G}$, nous noterons, suivant Giraud dans cette démarche, $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ le faisceau des sous-gerbes maximales de $\pi_*\mathcal{G}$, image directe de $\mathcal{G}$ par π.

Par exemple:

- si $\mathcal{G}=$ Tors(G_X) est la gerbe des X-torseurs sous G_X, $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ est isomorphe à $R^1\pi_*G_X$ ([**Gir71**], Chapitre V, Lemme 3.1.5);
- si $[\mathcal{G}] \in H^2(X,G_X)$ est la classe d'une X-gerbe *quelconque* et G est abelien, $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ est un $R^1\pi_*G_X$-*pseudo-torseur*, i.e un $R^1\pi_*G_X$-torseur qui peut être *vide*;
- si $[\mathcal{G}] \in H^2(X,G_X)^{tr}$ est la classe d'une X-gerbe *transgressive* et G est abelien, $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ est un $R^1\pi_*G_X$-*torseur* ([**Gir71**, Ex. 3.1.9.2]).

L'existence d'une section du faisceau $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ permet de relever $[\mathcal{G}]$ en une classe dans $H^2(k,G)$. Nous étudierons des cas où une telle section existe, remplaçant éventuellement Spec(k) par un schéma de base Y plus général.

Nous étendrons ensuite, en un certain sens, la notion de corps des modules au degré supérieur, l'analogue de la gerbe des modèles introduite précédemment devient alors une 2-gerbe qui vit dans $H^3_{et}(k, G)$.

Cette 2-gerbe peut être vue comme la k-2-gerbe résiduelle d'un point dans un certain 2-champ: elle mesure l'obstruction à ce que ce point soit défini sur k.

Lorsque G n'est plus abélien, le faisceau des sous-gerbes maximales $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ continue d'exister alors que $H^1(k, R^1\pi_* G_X)$ n'existe plus. La condition corps des modules nouvellement introduite nous permet d'obtenir un substitut du $H^1(k, R^1\pi_* G_X)$: *c'est un espace de modules grossier de données locales sur k de corps de modules k.*

L'objectif étant décrit, voici le plan que nous allons suivre pour l'atteindre:

Chapitre 1. — Notre problème étant typiquement un problème de *descente*, nous rappellerons brièvement les notions de catégories fibrées et de descente dans icelles. Les gerbes, qui sont des catégories fibrées particulières jouissant, entre autres, de propriétés "faisceautiques" , s'imposent naturellement car leurs classes d'équivalences forment justement le H^2. Pour plus de détails, hormis [**Gir71**] qui est l'ouvrage de référence, nous conseillons [**Zah03**].

Nous aborderons ensuite succinctement les 2-catégories fibrées, et plus particulièrement les 2-catégories fibrées sur un site. Ceci nous conduira aux 2-gerbes, objets classifiés par le H^3, que nous aurons à considérer dans une moindre mesure que les gerbes. Pour une étude approfondie de ces notions *cf* [**Hak72**] et [**Bre94**].

Chapitre 2. — Nous étudierons en détail la suite exacte (1) et plus particulièrement les trois derniers termes. Nous introduirons la notion de corps de modules pour des gerbes définies localement sur k et montrerons comment relier les cobords de cette suite aux espaces de modules.

Signalons au passage que les trois premiers termes, qui subsistent en tant qu'ensemble pointés dans le cas non abelien, ainsi que les morphismes qui s'y rapportent sont très bien décrits dans la thèse de Stéphane Zahnd [**Zah03**], dont le thème central est la "descente de torseurs" , objets dont les classes d'isomorphies forment le H^1.

Chapitre 3. — Nous donnerons deux applications dans le cas non abélien: l'une de nature arithmétique, l'autre dans le cas des surfaces fibrées sur les courbes (cas considéré par Grothendieck et Tate dans le calcul du groupe de Brauer). Plus précisément, nous utiliserons les notions et résultats des chapitres précédents pour déterminer les obstructions à relever des gerbes lorsque G_X est un groupe réductif.

CHAPITRE 1

GERBES ET 2-GERBES

1.1. Catégories fibrées

***Définition* 1**. — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Une $\mathcal{E}$-catégorie $\mathcal{F}$ est une catégorie, munie d'un foncteur covariant:

$$p : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$$

On dit aussi que $\mathcal{F}$ est *une catégorie au dessus* de $\mathcal{E}$. On appellera $\mathcal{E}$-foncteur d'une $\mathcal{E}$-catégorie $\mathcal{F}$ dans une $\mathcal{E}$-catégorie $\mathcal{G}$, un foncteur :

$$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

tel que $qf = p$, où p et q sont les foncteurs de projection de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

***Définition* 2**. — Soit $p : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ une $\mathcal{E}$-catégorie et soit $S \in Ob(\mathcal{E})$. On appelle catégorie-fibre de $\mathcal{F}$ en S la sous-catégorie $\mathcal{F}_S$ de $\mathcal{F}$ image réciproque de la sous-catégorie ponctuelle de $\mathcal{E}$ définie par S. On a donc $Ob(\mathcal{F}_S) = p^{-1}(S)$ et $Fl(\mathcal{F}_S) = p^{-1}(id_S)$.

***Définition* 3**. — Soit $p : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ une $\mathcal{E}$-catégorie, $\eta, \xi \in Ob(\mathcal{F})$ et

$$\alpha : \eta \to \xi$$

un morphisme dans $\mathcal{F}$. Désignons par $S = p(\xi)$, $T = p(\eta)$ et $f = p(\alpha)$:

$$\begin{tikzcd}
\eta \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & \xi \arrow[d, "p"] \\
T \arrow[r, "p(\alpha)"] & S
\end{tikzcd}$$

On dit que α est un morphisme cartésien si pour tout $\eta' \in Ob(\mathcal{F}_T)$ et tout f-morphisme $u : \eta' \to \xi$, il existe un unique T-morphisme $\overline{u}$:

$$\begin{tikzcd} \eta' \arrow[d, dotted, "\overline{u}"'] \arrow[dr, "u"] & \\ \eta \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "p"'] & \xi \arrow[d, "p"] \\ T \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

tel que $\alpha \circ \overline{u} = u$, autrement dit l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_T(\eta', \eta) & \to & \mathrm{Hom}_f(\eta', \xi) \\ v & \mapsto & \alpha \circ v \end{array}$$

est bijective, auquel cas le couple (η, α) représente le foncteur $\mathcal{F}_T^0 \to \mathrm{Ens}$ en η'.

***Définition* 4**. — Une $\mathcal{E}$-catégorie $\mathcal{F}$ est appelée catégorie fibrée si elle satisfait les deux axiomes suivants:

(i) Pour tout morphisme $f : T \longrightarrow S$, le foncteur image inverse par f dans $\mathcal{F}$ existe.

***Définition* 5**. — Une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\mathcal{E}$ est formée:

- d'une catégorie $\mathcal{E}$.
- pour tout $S \in Ob(\mathcal{E})$, d'une catégorie fibre F_S.
- pour tout couple d'objets $S, T \in Ob(\mathcal{E})$ et tout $\mathcal{E}$-morphisme $f : S \longrightarrow T$, d'un foncteur covariant:

$$f^* : \mathcal{F}_T \longrightarrow \mathcal{F}_S$$

tel que :

- Pour tout objet $X \in \mathcal{F}_S$, il existe un morphisme cartésien

$$\alpha_X : f^*(X) \longrightarrow X$$

au dessus de f,

- Le composé de deux morphisme cartésiens est cartésien. (Cette condition entraîne,pour deux morphismes composables $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U$, l'existence d'un "isomorphisme de foncteurs":

$$c_{f,g} : (gf)^* \longrightarrow f^* g^*$$

ces données étant assujetties aux conditions suivantes:

(i) $id^* = id$

(ii) $c_{f,g}$ est l'isomorphisme identique, si f ou g est un isomorphisme identique

(iii) Étant donnés trois morphismes composables $S \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} U \xrightarrow{h} V$, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(h(gf))^* = ((hg)f)^* \arrow[r, "c_{f,hg}"] \arrow[d, "c_{gf,h}"'] & f^*(hg)^* \arrow[d, "f^* \star c_{g,h}"] \\
(gf)^*h^* \arrow[r, "c_{f,g} \star h^*"] & (f^*g^*)h^* = f^*(g^*h^*)
\end{tikzcd}$$

Exemple 1. — Si $\mathcal{E}$ est une catégorie où les produits fibrés existent, on définit alors une catégorie fibrée $\mathcal{F}$ de base $\mathcal{E}$ comme suit:

– Pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$, $\mathcal{F}_S$= catégories des objets de $\mathcal{E}$ au dessus de S;
– Pour tout $\mathcal{E}$-morphisme $f : S \longrightarrow T$, le foncteur $f^* : F_T \longrightarrow F_S$ est défini comme le *produit fibré*: $X \longmapsto X \times_T S$.

1.1.1. Descente dans les catégories fibrées. — Afin d'illustrer cette section, considérons le cas de la construction d'un fibré vectoriel à partir de données sur la somme disjointe d'espaces topologiques.

Soit X un espace topologique muni d'un recouvrement ouvert $(X_i)_{i \in I}$ et Y la somme disjointe des X_i de sorte que l'on ait une application naturelle:

$$P : Y \longrightarrow X$$

Dans ces conditions Y est vu comme étant « au dessus » de X, muni des projections des X_i vers X. Avec ce langage, un problème de **descente** consiste en la donnée d'un fibré vectoriel sur Y, i.e un fibré sur chaque X_i . Le but étant de recoller ces fibrés vectoriels V_i afin d'obtenir un seul fibré V sur X tout entier, dont la restriction à chaque X_i redonne V_i, à un isomorphisme près.

Nous avons besoin donc sur chaque $X_{ij} = X_i \cap X_j$ d'une application f_{ij} pour identifier V_i et V_j fibre par fibre. Ces f_{ij} doivent satisfaire des conditions de reflexivité, de symétrie et de transitivité basées sur les propriétés d'une relation d'équivalence (**conditions de recollement**)

– La reflexivité est donnée par la condition $f_{ii} = Id_{X_i}$.
– La symétrie signifie que les f_{ij} sont inversibles, i.e des isomorphismes sur chaque fibre.
– La transitivité est donnée par la composition $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$.

Pour généraliser cette construction à des catégories abstraites, nous devons interpréter la somme disjointe des X_{ij} comme le produit fibré

$$Y \times_X Y,$$

puisque Y est un espace fibré sur X, car muni d'une application continue $p : Y \longrightarrow X$.

La donnée des fibrés V_i s'interprète à son tour comme un espace fibré V' sur Y et lesf_{ij} comme des isomorphismes entre les images inverses , par les projections canoniques , de V' sur $Y' = Y \times_X Y$,.

Avec ce point de vue, on peut maintenant abandonner le coté combinatoire, i.e en oubliant les indices, et généraliser cette construction pour p quelconque et non plus nécessairement une projection, en ayant au préalable redéfini les conditions de recollement.

Soit $\mathcal{F}$ une $\mathcal{E}$-catégorie fibrée et $\beta_1, \beta_2 : S'' \longrightarrow S'$ deux $\mathcal{E}$-morphismes. On appelle donnée de recollement sur un objet $\xi' \in S'$ (relativement au couple (β_1, β_2)), un isomorphisme φ de $\beta_1^*(\xi')$ sur $\beta_2^*(\xi')$.
Soit $\alpha : S' \longrightarrow S$. Cette donnée de recollement sur ξ' est dite effective (relativement à α) s'il existe $\xi \in \mathcal{F}_S$, tel que $\alpha^*(\xi)$ soit isomorphe à ξ'. Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe au cas où $S'' = S' \times_S S'$, les β_i étant les deux projections sur les facteurs (on suppose que les produits fibrés existent dans la catégorie $\mathcal{E}$).

On a alors deux conditions nécessaires pour qu'une donnée de recollement soit effective:

Si $\Delta : S' \longrightarrow S' \times_S S'$ désigne le morphisme diagonal , et si on identifie $\Delta^* p_i^*(\xi')$ à $(p_i\Delta)^*(\xi') = \xi'$

(i) $\Delta^*(\varphi) = id_{\xi'}$

(ii) $p_{31}^*(\varphi) = p_{32}^*(\varphi) p_{21}^*(\varphi)$

***Définition* 6**. — On appelle donnée de descente sur $\xi' \in \mathcal{F}_{S'}$, relativement au morphisme $\alpha : S' \longrightarrow S$, une donnée de recollement relativement au couple (p_1, p_2) des projections canoniques $S' \times_S S' \longrightarrow S'$ satisfaisant les conditions ci-dessus.

1.1.2. Champs et gerbes. — Dans un sens que nous préciserons, un champ est une catégorie fibrée en groupoïdes qui est un faisceau. Pour cela, on munit notre catégorie base, d'une topologie au sens de Grothendieck, ce qui en fera un *site*.

***Définition* 7**. — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. On appelle crible de $\mathcal{E}$ une sous-catégorie pleine $\mathcal{R}$ de $\mathcal{E}$, telle que pour toute flèche $f : S \longrightarrow T$ de $\mathcal{E}$, $T \in Ob(\mathcal{R})$ entraîne $S \in Ob(\mathcal{R})$.

Pour tout $S \in Ob(\mathcal{E})$, on appelle cribles de S les cribles de la catégorie $\mathcal{E}_S$, catégorie des objets de $\mathcal{E}$ au dessus de S. Si $F : \mathcal{E}' \longrightarrow E$ est un foncteur et si $\mathcal{R}$ est un crible de $\mathcal{E}$, on notera

$$\mathcal{R}^F = \{T' \in Ob(\mathcal{E}'),\ F(T') \in Ob(\mathcal{E})\}$$

c'est un crible de $\mathcal{E}'$ que l'on appellera image inverse de $\mathcal{R}$.

Une fleche $f : T \longrightarrow S$ de $\mathcal{E}$ induit un foncteur $\mathcal{E}_f : \mathcal{E}_T \longrightarrow \mathcal{E}_S$. Si $\mathcal{R}$ est un crible de $\mathcal{E}_S$ on notera encore R^F son image inverse par $\mathcal{E}_f$.

***Définition* 8**. — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. On appelle **topologie de Grothendieck** sur $\mathcal{E}$ la donnée pour chaque $S \in Ob(\mathcal{E})$ d'un ensemble $J(S)$ *non vide* de cribles de S, appelés *cribles couvrants* ou *raffinements* de S, donnée verifiant les axiomes suivants:

(TG1) Pour toute flèche $f : T \longrightarrow S$ de $\mathcal{E}$ et tout $\mathcal{R} \in J(S)$ on a $R^f \in J(T)$ ("stabilité par changement de base").

(TG2) Pour tout $S \in Ob(\mathcal{E})$, tout $\mathcal{R} \in J(S)$ et tout crible $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{E}_S$, on a $\mathcal{R}' \in J(S)$ dès que, pour tout objet $f : T \longrightarrow S$ de $\mathcal{R}$, on a $(\mathcal{R}')^f \in J(T)$ ("caractère local").

(TG3) Pour tout objet S de $\mathcal{E}$, $S \in J(S)$

On appelle **site** une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck.

Remarque 1. — On déduit de cette définition que tout crible de E_S qui contient un raffinement est un raffinement et que l'intersection de deux raffinements est un raffinement. Cette dernière propriété fait de $J(S)$ un ensemble filtrant décroissant, propriété qui nous servira pour construire le faisceau associé à un préfaisceau.

Exemple 2. — Soit X un espace topologique. La catégorie $Ouv(X)$ des ouverts de X est munie d'une topologie de Grothendieck: les raffinements d'un ouvert de X sont les parties $\mathcal{R}$ de de l'ensemble es ouverts de U telles que $V \in \mathcal{R}$ et $W \subset V$ entraîne $W \in \mathcal{R}$ et telles que la réunion des $V \in \mathcal{R}$ soit égale à U.

***Définition* 9**. — Soit $\mathcal{E}$ un site. Un $\mathcal{E}$-champ $\mathcal{C}$ est une catégorie fibrée en groupoïdes au dessus de $\mathcal{E}$ vérifiant les deux conditions supplémentaires suivantes:

(i) Pour tout objet $S \in \mathcal{E}$, et tout couple d'objets η, ξ de $\mathcal{C}_S$, $\mathrm{Hom}_S(\eta, \xi)$ est un faisceau (les isomorphismes se recollent);

(ii) Dans la catégorie $\mathcal{C}$ toute donnée de descente sur les objets est effective (les objets se recollent).

Pour des exemples de champs, *cf* [**Dou01**] et à [**Zah03**].

***Définition* 10**. — Une $\mathcal{E}$-gerbe $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{E}$-champ tel que:

(i) $\mathcal{G}$ *est localement non vide*: il existe un raffinement R de $\mathcal{E}$, tel que pour tout $S \in Ob(R)$, la fibre $\mathcal{G}_S$ soit non vide.

(ii) $\mathcal{G}$ est *localement connexe*: pour tout $S \in Ob(\mathcal{E})$ deux objets quelconques de la fibre $\mathcal{G}_S$ sont localement isomorphes.

L'exemple le plus simple de gerbe est le $\mathcal{E}$-champ $Tors(G)$ des G-torseurs associé un faisceau de groupes G sur $\mathcal{E}$. En effet, ce champ est (globalement) non vide: il contient toujours le G-torseur trivial:

$$G \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

Il est aussi localement connexe, puisque tout G-torseur est localement trivial.

Réciproquement, toute $\mathcal{E}$-gerbe $\mathcal{G}$ dont la fibre au dessus de $\mathcal{E}$ est non vide est dite neutre, et le choix d'un $x \in \mathcal{G}_{\mathcal{E}}$ définie une équivalence:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\longrightarrow Tors(Aut(x)) \\ g &\longmapsto Isom(x, g) \end{aligned}$$

entre $\mathcal{G}$ et une gerbe de torseurs.

Remarquons que par définition même, toute gerbe est localement neutre, i.e, localement équivalente à une gerbe de torseurs.

Pour d'autres exemples, riches et instructifs, nous renvoyons encore une fois à [**Zah03**].

1.1.3. Faisceau des sous-gerbes maximales d'un champ. — Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, cet objet va jouer un rôle central dans ce travail. Introduisons d'abord la notion de faisceau sur une catégorie:

***Définition* 11**. — Soit $\mathcal{E}$ une catégorie. Un préfaisceau d'ensembles $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{E}$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{E}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles Ens. La catégorie $\widehat{\mathcal{E}} = Hom(\mathcal{E}^0, Ens)$ est appelée catégorie des préfaisceaux sur $\mathcal{E}$

Par exemple, si $T \in Ob(\mathcal{E})$, le foncteur représenté par T, noté h_T et définie par:

$$\begin{aligned} h_T : \mathcal{E}^0 &\longrightarrow Ens \\ T' &\longmapsto Hom_{\mathcal{E}}(T', T) \end{aligned}$$

est un préfaisceau sur $\mathcal{E}$, appelé *préfaisceau représenté par T*.

La proposition suivante justifiera l'abus de langage qui identifie un objet de $\mathcal{E}$ et le foncteur contravariant correspondant.

***Proposition 1* (SGA4-I.Pop 1.4)**. — *Soient $\mathcal{E}$ une catégorie, $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur $\mathcal{E}$ et S un objet de $\mathcal{E}$. Il existe un isomorphisme fonctoriel en S et en $\mathcal{F}$:*

$$i : \mathcal{F}(S) \simeq Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(h_S, \mathcal{F})$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est représenté par $T \in Ob(\mathcal{E})$, i est l'application :

$$h : Hom(h_S, h_T) \longrightarrow Hom(S, T)$$

En particulier le foncteur h est pleinement fidèle.

***Définition* 12**. — Si $\mathcal{E}$ est munie d'une topologie, un préfaisceau $\mathcal{P}$ est dit séparé (resp. est un faisceau) si pour tout raffinement $\mathcal{R}$ de $U \in Ob(\mathcal{E})$ l'application canonique:

$$\mathcal{P}(U) = Hom(U, P) \longrightarrow Hom(\mathcal{R}, \mathcal{P})$$

est injective (resp. bijective).

Nous allons maintenant construire le " faisceau associé à un préfaisceau". Soient $\mathcal{P}$ un préfaisceau et S un objet de $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{R} \supset \mathcal{R}'$ sont deux raffinements de S , on a un diagramme:

$$\begin{tikzcd} Hom(S,\mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[dr] & Hom(\mathcal{R},\mathcal{P}) \arrow[d] \\ & Hom(\mathcal{R}',\mathcal{P}) \end{tikzcd}$$

L'ensemble ordonné $J(S)$ est filtrant comme nous l'avons remarqué précédemment, et comme S est un élément de $J(S)$, on a un morphisme:

$$Hom(S, \mathcal{P}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{R} \in J(S)} Hom(\mathcal{R}, \mathcal{P})$$

On pose:

$$\mathcal{LP}(S) = \varinjlim_{\mathcal{R} \in J(S)} Hom(\mathcal{R}, \mathcal{P})$$

***Proposition 2* (SGA3-I.Prop 4.3.11)**. — *Soit $\mathcal{E}$ un site.*

1. *Si $\mathcal{P}$ est un préfaisceau quelconque, LP est un préfaisceau séparé.*
2. *Si $\mathcal{P}$ est un faisceau, $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{LP}$ est un isomorphisme.*
3. *Si $\mathcal{P}$ est un préfaisceau séparé, $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{LP}$ est un monomorphisme couvrant, i.e $\mathcal{P}$ est un crible de $\mathcal{LP}$, et $\mathcal{LP}$ est un faisceau.*

Passons maintenant à la construction du faisceau des sous-gerbes maximales d'un champ.

Soit S un objet de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ un $\mathcal{E}$-champ. Posons

$$\mathsf{ObIs}(\mathcal{C}_S)$$

l'ensemble des classes S-*isomorphisme* près d'objets de $\mathcal{C}_U$ et

$$\mathsf{ObLocIs}(\mathcal{C}_S)$$

l'ensemble des classes à d'objets de $\mathcal{C}_U$ *localement* S*-isomorphes*. Les foncteurs de changement de base

$$f^* : \mathcal{C}_S \longrightarrow \mathcal{C}_T,\ T, S \in Ob(E),\ f : T \longrightarrow S$$

en font deux préfaisceaux d'ensembles $ObIs(\mathcal{C})$ et $ObLocIs(\mathcal{C})$, avec un morphisme entre iceux:

$$\mathsf{ObIs}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{ObLocIs}(\mathcal{C}) \tag{2}$$

D'autre part, pour tout $S \in Ob(\mathcal{E})$, désignons par:

$$\mathsf{Ger}(\mathcal{C}_S)$$

l'ensemble des sous-gerbes maximales du $\mathcal{E}_S$-champ $\mathcal{C}_S = \mathcal{C} \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}_S$.

Proposition 3 **([Gir71] Prop III-2.1.4)**. — *Soit $\mathcal{E}$ un site et $\mathcal{C}$ un $\mathcal{E}$-champ.*

1. *Le morphisme 2 fait de $\mathsf{ObLocIs}(\mathcal{C})$ un préfaisceau séparé associé à $\mathsf{ObIs}(\mathcal{C})$.*
2. *En associant à tout $s \in Ob(\mathcal{C}_S)$, $S \in Ob(\mathcal{E})$, la sous-gerbe de $\mathcal{C}_S$ engendrée par x, on définit un morphisme de préfaisceaux d'ensembles*

$$\mathsf{Obis}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Ger}(\mathcal{C})$$

   qui fait de $\mathsf{Ger}(\mathcal{C})$ faisceau associé à $\mathsf{ObIs}(\mathcal{C})$.
3. *On a un monomorphisme de préfaisceaux d'ensembles*

$$\mathsf{ObLocIs}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Ger}(\mathcal{C})$$

4. *On a un isomorphisme canonique entre l'ensemble des sous-gerbes maximales de $\mathcal{C}$ et $H^0(\mathcal{E}, \mathsf{Ger}(\mathcal{C}))$.*

Définition **13**. — Soit $\mathcal{E}$ un site et $\mathcal{C}$ un $\mathcal{E}$-champ. On appelle sous-gerbe de $\mathcal{C}$ une sous-catégorie $\mathcal{G}$ de $\mathcal{C}$ telle que la restriction de la projection $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ fasse de $\mathcal{G}$ une $\mathcal{E}$-gerbe et telle que l'inclusion $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{C}$ soit un foncteur E-cartésien.

On dit qu'une sous-gerbe de $\mathcal{C}$ est pleine, si pour tout $S \in Ob(\mathcal{E})$, et tout couple (x, y) d'objets de $\mathcal{G}_S$, tout S-isomorphisme $x \longrightarrow y$ de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{G}$. Une sous-gerbe est dite maximale si elle l'est pour l'inclusion.

Soit $\mathcal{G}$ une sous-gerbe d'un $\mathcal{E}$-champ $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{R}$ un raffinement de $\mathcal{E}$ tel que pour tout $U \in Ob(\mathcal{R})$, $\mathcal{G}(U) \neq \emptyset$. Pour chaque $U \in Ob(\mathcal{R})$, choisissons $x_U \in \mathcal{G}(U)$ et considérons la $\mathcal{E}$-catégorie $\mathcal{G}'$ dont les objets dessus de chaque $U \in Ob(\mathcal{R})$ sont les $y \in \mathcal{C}(U)$ localement U-isomorphe à x_U, i.e, tels qu'il existe un raffinement $\mathcal{R}_U$ de U et pour tout $V \in Ob(\mathcal{R}_U)$, $x_U/V \simeq y/V$.

Lemme 1. — *La catégorie fibrée $\mathcal{G}'$ ainsi définie est une sous-gerbe maximale de $\mathcal{C}$. En particulier, elle contient la sous-gerbe $\mathcal{G}$.*

Ce lemme, nous permet par la suite de ne considérer que les sous-gerbes maximales.

***Définition* 14**. — Soit T un objet de $\mathcal{C}$. On appelle gerbe engendré par T la sous-gerbe maximale $\mathcal{G}_T$ de $\mathcal{C}$ dont les objets au dessus de $U \in Ob(\mathcal{E})$ sont les objets de $\mathcal{C}(U)$ qui sont localement U-isomorphes à T/U.

Cette gerbe set évidemment triviale, et si T est localement isomorphe à T', on a $\mathcal{G}_T = \mathcal{G}'_T$.

1.2. 2-Catégories fibrées

Lorsqu'on s'intéresse à la 2-cohomologie, on est amenés naturellement à prendre en compte les structures de 2-catégorie. Pour faire de la descente dans ce contexte, il devient alors nécessaire de remplacer la notion de catégorie fibrée par celle de 2-catégorie fibrée. En ce qui nous concerne, nous n'aurons pas à utiliser cette dernière dans sa généralité, i.e , dans le cas où les catégories fibre et base sont toutes les deux des 2-catégories: seul le cas où la base est un site et la fibre une 2-catégorie nous intéresse.

La notion de champ, introduite par Grothendieck et Giraud se généralise alors en celle de 2-champ.

Pour une étude plus détaillée des 2-catégories et 2-catégories fibrées, *cf* [**Hak72**].

***Définition* 15**. — Une 2-catégorie $\mathfrak{B}$ consiste en la donnée de:

(i) une collection d'objet Ob $(\mathfrak{B})$.

(ii) pour tout couple d'objets (A, B) de $\mathfrak{B}$, d'une catégorie $\mathcal{HOM}_{\mathfrak{B}}(A, B)$.

(iii) pour tout triplet (A, B, C) d'objets de $Ob(\mathfrak{B})$, d'un foncteur « accouplement »:

$$\mu_{X,Y,Z} : \mathcal{HOM}(X, Y) \times \mathcal{HOM}(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{HOM}(X, Z)$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

(a) pour tout couple $(X, Y,)$ d'objets de $Ob(\mathfrak{B})$:

$$\mu_{X,X,Y}(id_X, \ ) = \mu_{X,Y,Y}(\ , id_Y) = id_{\mathcal{HOM}(X,Y)}.$$

(b) pour tout quadruplet (X, Y, Z, T) d'objets de $Ob(\mathfrak{B})$ on a (« associativité des accouplements »):

$$\mu_{X,Z,T} \circ (\mu_{X,Y,Z} \times id_{\mathcal{HOM}(Z,T)}) = \mu_{X,Y,T} \circ (id_{\mathcal{HOM}(X,Y)} \times \mu_{Y,Z,T}).$$

Exemple 3. — Les catégories forment une 2-catégorie notée $\mathfrak{Cat}$.

Si $\mathfrak{C}$ est une 2-catégorie et (X, Y) un couple d'objets de $\mathfrak{C}$, un objet f de $\mathcal{HOM}(X, Y)$ est appelé 1-flèche de $\mathfrak{C}$ de source X et de but Y et est noté :

$$f : X \longrightarrow Y.$$

Soient f et g deux objets de $\mathcal{HOM}(X, Y)$. Une flèche α de f dans g de la catégorie $\mathcal{HOM}(X, Y)$ est appelée 2-flèche de $\mathfrak{C}$ et est notée :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Y \end{tikzcd} \quad \text{ou} \quad \alpha : f \longrightarrow g$$

1.2.1. Soit $\mathfrak{C}$ une 2-catégorie. Si, pour tout couple (X,Y) d'objets de $Ob(\mathfrak{C})$, on remplace la catégorie $\mathcal{HOM}(X, Y)$ par son ensemble sous-jacent, et pour tout triplet (X, Y, Z) on remplace l'accouplement $\mu_{X,Y,Z}$ par son application sous-jacente, on obtient une catégorie ordinaire notée

$$\mathsf{Cat}(\mathfrak{C})$$

qu'on appellera catégorie sous-jacente à $\mathfrak{C}$.

Réciproquement, toute catégorie $\mathcal{C}$ définit une 2-catégorie dont les objets et les 1-flèches sont respectivement les objets et flèches de $\mathcal{C}$ et dont les deux flèches sont les 2-flèches identités. On la note

$$2\text{-}\mathfrak{Cat}(\mathcal{C})$$

et nous avons la relation $\mathcal{C} = \mathsf{Cat}(2\text{-}\mathfrak{Cat}(\mathcal{C}))$.

***Définition* 16 (2-foncteur)**. — Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ deux 2-catégories. On appelle *2-foncteur*

$$\mathsf{F} : \mathfrak{C} :\longrightarrow \mathfrak{C}'$$

l'ensemble des données suivantes:

(i) une application:

$$F : Ob(\mathfrak{C}) \longrightarrow Ob(\mathfrak{C}'),$$

(ii) pour tout couple (X, Y) d'objets de $Ob(\mathfrak{C})$, un foncteur

$$F_{X,Y} : \mathcal{HOM}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{HOM}(F(X), F(Y)),$$

(iii) pour tout triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathfrak{C}$, un 2-isomorphisme $\epsilon_{X,Y,Z}$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{HOM}(X,Y)\times\mathcal{HOM}(Y,Z) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "F_{X,Y}\times F_{Y,Z}"'] & \mathcal{HOM}(X,Z) \arrow[d, "F_{X,Z}"] \\
\mathcal{HOM}(F(X),F(Y))\times\mathcal{HOM}(F(Y),F(Z)) \arrow[r, "\mu'"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow\varepsilon_{X,Y,Z}"] & \mathcal{HOM}(F(X),F(Z))
\end{tikzcd}$$

de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

(a) pour tout objet $X \in Ob(\mathfrak{C})$, on a

$$F_{X,X}(id_X) = id_{F(X)},$$

(b) pour tout couple (X,Y) d'objets de $\mathfrak{C}$, on a

$$\varepsilon_{X,Y,Y}(\ ,id_Y) = id_{F_{X,Y}}$$

et

$$\varepsilon_{X,X,Y}(id_X,\ ) = id_{F_{X,Y}},$$

(c) pour tout quadruplet (X,Y,Z,T) d'objets $\mathfrak{C}$, on a l'égalité des 2-isomorphismes de $\mathfrak{Cat}$

$$\varepsilon_{X,Y,T} * (id_{F_{X,Y}} \times \varepsilon_{X,X,Z}) = \varepsilon_{X,Z,T} * (\varepsilon_{X,Y,Z} \times id_{F_{Z,T}}),$$

où $*$ désigne la composition de deux 2-flèches d'une 2-catégorie dans des diagrammes adjacents du type

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow"] & \cdot \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow"] & \cdot
\end{tikzcd}$$

Remarque 2. — Il résulte de la définition qu'un 2-foncteur transforme tout diagramme commutatif à isomorphisme naturel près en un diagramme commutatif à isomorphisme naturel près. Un 2-foncteur n'induit un foncteur sur les catégories sous-jacentes que si $\varepsilon_{X,Y,Z} = id$ pour tout triplet (X,Y,Z). Un tel foncteur sera dit *strict*.

Soit $p : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un 2-foncteur et soit $U \in Ob(\mathfrak{D})$. On désigne par

$$\mathfrak{C}_U$$

la 2-catégorie «fibre au dessus de U» qui a pour objets, 1-flèches et 2-flèches les objets, 1-flèches et 2-flèches de $\mathfrak{C}$ dont l'image par p est respectivement U, id_U, id_{id_U}.

Soit $V \longrightarrow U$ une 1-flèche de $\mathfrak{D}$ et soient $X \in Ob(\mathfrak{C}_U)$, $Y \in Ob(\mathfrak{C}_V)$, on note

$$Hom_\varphi(Y,X)$$

la sous-catégorie de $Hom(Y, X)$ dont les objets sont au dessus de φ et dont les flèches sont au dessus de id_φ. Si on a $V = U$ et $\varphi = id_U$, on note cette catégorie

$$Hom_U(Y, X)$$

Soit $v : Y \longrightarrow X$ une flèche de $\mathfrak{C}$ au dessus de $\varphi : V \longrightarrow U$. Par composition v définit une flèche de $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}_U^0, \mathfrak{Cat})$

$$\widetilde{v} : Hom_V(\cdot, Y) \longrightarrow Hom_\varphi(\cdot, X)$$

On dit que v est une flèche cartésienne de $\mathfrak{C}$ si $\widetilde{v}$ est une équivalence de $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{C}_U^0, \mathfrak{Cat})$.

***Définition* 17 (2-catégories fibrées)**. — Soit $p : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un 2-foncteur. On dit que p est fibrant ou que $\mathfrak{C}$ est une 2-catégorie fibrée sur $\mathfrak{D}$ par p si:

(i) p est un foncteur strict,

(ii) pour toute 1-flèche $\varphi : V \longrightarrow U$ de $\mathfrak{D}$ et pour tout $X \in ob(\mathfrak{C}_U)$, il existe une 1-flèche cartésienne $v : Y \longrightarrow X$ de but X au dessus de φ.

(iii) la composée de deux 1-flèches cartésiennes composables est une 1-flèche cartésienne.

1.2.2. Les 2-foncteurs «restriction», ou changement de base. — Soient $p : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ un 2-foncteur fibrant et $u : U' \longrightarrow U$ une flèche fixe de $\mathfrak{D}$. Si $\mathfrak{Fl}(\mathfrak{C})$ désigne la 2-catégorie dont les objets sont les 1-flèches $X \longrightarrow Y$ de $\mathfrak{C}$, les 1-flèches les 2-flèches de $\mathfrak{C}$ et les 2-flèches les identités, la restriction du "2-foncteur but":

$$b : \mathfrak{Fl}(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathcal{C}$$
$$(X \longrightarrow Y) \longmapsto Y$$

à la fibre au dessus de U définit un 2-foncteur:

$$b_U : \mathfrak{Fl}(\mathfrak{C})_U \longrightarrow \mathcal{C}_U$$

A la 1-flèche u on associe un 2-foncteur

$$\gamma_u : \mathfrak{C}_U \longrightarrow \mathfrak{Fl}(\mathfrak{C})_U$$

qui vérifie $b_U \circ \gamma_u = id_{\mathfrak{C}_U}$ de la façon suivante: pour $X \in Ob(\mathfrak{C}_U)$, on choisit une 1-flèche cartésienne

$$u_X : X' \longrightarrow X$$

au dessus de u; pour toute 1-flèche $\lambda : X \longrightarrow Y$ de $\mathfrak{C}_U$, on choisit un couple (λ', ε) formé d'une 1-flèche $\lambda' : X' \longrightarrow Y'$ et d'un 2-isomorphisme ε rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u_X"] \arrow[d, "\lambda'"'] & X \arrow[d, "\lambda"] \\ Y' \arrow[r, "u_Y"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow \varepsilon"] & Y \end{tikzcd}$$

Il résulte des définitions que, pour tout X, la 1-flèche u_X est déterminée à équivalence près et que, pour tout $\lambda : X \longrightarrow Y$, le couple (λ', ε) est déterminé à un 2-isomorphisme unique près. Pour tout $X \in Ob(\mathfrak{C}_U)$, on associera à la 1-flèche id_X le couple (id_X, id_{id_X}). A toute 2-flèche $\alpha : \lambda_1 \longrightarrow \lambda_2$ de $\mathfrak{C}_U$ est alors associée une 2-flèche unique $\alpha' : \lambda'_1 \longrightarrow \lambda'_2$ de $\mathfrak{C}_U$ telle que

$$\varepsilon_2 \circ (u_X * \alpha') = (\alpha * u_Y) \circ \varepsilon_1$$

Ayant ainsi défini le 2-foncteur γ_u, en le composant avec le 2-foncteur source

$$s : \mathfrak{Fl}(\mathfrak{C}) \longrightarrow \mathfrak{C},$$

on obtient un 2-foncteur dit *2-foncteur de changement de base*:

$$\Delta : \mathfrak{C}_U \longrightarrow \mathfrak{C}_{U'}$$

$$\begin{tikzcd} & \begin{array}{c} Ob(\mathfrak{Fl}\mathfrak{C}) \\ \Cup \\ \left(X' \xrightarrow{u_X} X\right) \end{array} \arrow[dl] & \\ \begin{array}{c} Ob(\mathfrak{C}_{U'}) \\ \Cup \\ X' \end{array} \arrow[d] & & \begin{array}{c} Ob(\mathfrak{C}_U) \\ \Cup \\ X \end{array} \arrow[ul] \arrow[d] \\ U' \in Ob(\mathfrak{D}) \arrow[rr, "u"] & & U \in Ob(\mathfrak{D}) \end{tikzcd}$$

1.2.3. 2-catégories fibrées sur un site. 2-champs et 2-gerbes. — Soit $(S, \mathcal{T})$ un site où S est une catégorie et où $\mathcal{T}$ est un topologie sur S, et soit $(\mathfrak{C}, p)$ une 2-catégorie fibrée sur la 2-catégorie associée à S. On peut alors définir l'analogue des notions de préchamp et de champ introduites par Giraud. Nous utiliserons une terminologie qui nous permettra d'utiliser le fait que les 2-catégories que nous rencontrerons satisfont les propriétés de recollement attendues.

Recollement et descente dans les 2-catégories fibrées. — Soit U un ouvert de S et $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement ouvert de U. On suppose donnés:

- pour chaque $\alpha \in I$, un objet $x_\alpha \in \mathfrak{C}_\alpha$, où $\mathfrak{C}_\alpha = \mathfrak{C}_{U_\alpha}$
- une famille de 1-flèches $\phi_{\alpha\beta} : x_\alpha/U_{\alpha\beta} \longrightarrow x_\beta/U_{\alpha\beta}$ entre les restrictions des objets x_α et x_β à $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.
- une famille de 2-flèches

  $$\psi_{\alpha\beta\gamma} : \phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\gamma} \Longrightarrow \phi_{\alpha\gamma}$$

  satisfaisant, au dessus de chaque ouvert $U_{\alpha\beta\gamma\delta} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\delta$ la condition suivante :

(3) $$\psi_{\alpha\gamma\delta} \circ (\phi_{\gamma\delta} * \psi_{\alpha\beta\gamma}) = \psi_{\alpha\beta\delta} \circ (\psi_{\beta\gamma\delta} * \phi_{\alpha\beta})$$

qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
& & x_\alpha \arrow[dl] \arrow[ddd] \arrow[ddr] \arrow[dr] & & \\
& x_\beta \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[r, Rightarrow, "\psi_{\alpha,\beta,\delta}"] & {} & x_\beta \arrow[dr] \arrow[l, Rightarrow, "\psi_{\alpha,\beta,\gamma}"] & \\
x_\gamma \arrow[d] \arrow[r, Rightarrow, "\psi_{\beta,\gamma,\delta}"] & {} & {} & x_\gamma \arrow[d] \arrow[l, Rightarrow, "\psi_{\alpha,\gamma\delta}"] & x_\gamma \arrow[d] \\
x_\delta & x_\delta & x_\delta & x_\delta & x_\delta
\end{tikzcd}$$

La donnée $(\phi_{\alpha\beta}, \psi_{\alpha\beta\gamma})$ avec la condition de compatibilité (3) est appelée une *donnée de 2-descente* pour la collection d'objets $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$.

Cette donnée est dite *effective* dans $\mathfrak{C}$, s'il existe un objet $x \in \mathfrak{C}$, et pour chaque $\alpha \in I$, un isomorphisme $x_{/U_\alpha} \longrightarrow x_\alpha$ dans $\mathfrak{C}_{U_\alpha}$, et pour chaque $\alpha, \beta \in I$ une famille de 2-flèches $\chi_{\alpha\beta}$:

$$\begin{tikzcd}
(x_{/U_\alpha})_{/U_{\alpha\beta}} \arrow[r] \arrow[d] & (x_{/U_\beta})_{/U_{\alpha\beta}} \arrow[d] \\
(x_\alpha)_{/U_{\alpha\beta}} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\chi_{\alpha\beta}"] & (x_\beta)_{/U_{\alpha\beta}}
\end{tikzcd}$$

compatibles avec les 2-flèches $\psi_{\alpha\beta\gamma}$.

***Définition* 18**. — On dit que $\mathfrak{C}$ est un 2-préchamp si pour tout $U \in Ob(S)$ et pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathfrak{C}_U$, la catégorie fibrée $\mathcal{HOM}_{\mathcal{S}/U}(X, Y)$ est un champ. Un 2-champ est un 2-préchamp dans lequel toute donnée de 2-descente sur les objets est effective.

Nous avons donc des propriétés analogues à celles des préchamps et des champs: *un 2-préchamp est une 2-catégorie fibrée dans laquelle les*

2-flèches et les 1-flèches se recollent; un 2-champ est un préchamp dans lequel les objets se recollent.

Exemple 4. — La 2-catégorie fibrée $Champ(S)$, dont la fibre au dessus de chaque ouvert $U \in S$ est la catégorie $Champ(U)$ des champs sur U est un 2-champ. En effet, supposons donnés sur U un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$, une famille de champs $\mathcal{C}_i$ sur U_i, avec des foncteurs cartésiens de recollement $\phi_{ij} : U_j \longrightarrow U_i$ et une transformation naturelle ψ_{ijk} : $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} \Longrightarrow \phi_{ik}$ sur U_{ijk} satisfaisant la relation (3).

On définit un champ $\mathcal{C}$ sur U de la manière suivante:

1. Un objet x de $\mathcal{C}$ est une famille d'objet $(x_i)_{i\in I}$, $x_i \in C_i$, munie d'une famille de morphismes $f_{ij} : \phi_{ij}(x_j) \longrightarrow x_i$ au dessus de U_{ij}, compatible avec ψ_{ij}
2. Un morphisme $f : x \longrightarrow y$ dans C est une famille de morphismes $f_i : x_i \longrightarrow y_i$ dans C_i compatibles avec f_{ij}

On "vérifie" que la catégorie fibrée $\mathcal{C}$ ainsi définie est un champ. Par ailleurs, pour tout couple de champs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ la catégorie $\mathcal{HOM}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ des foncteurs cartésiens de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$ est un champ (Giraud), est donc $Champ(S)$ est un 2- champ.

***Définition* 19 (2-Gerbe)**. — Soit (S, T) un site. Une 2-gerbe $\mathfrak{G}$ sur S un 2-champ satisfaisant les conditions supplémentaires suivantes:

1. $\mathfrak{G}$ est localement non vide,
2. $\mathfrak{G}$ est localement connexe,
3. les 1-flèches sont faiblement inversibles, i.e inversibles à une 2-flèche près
4. les 2-flèches sont inversibles.

Exemple 5. — Soit S un site et G_S un S-faisceau en groupes. La 2-catégorie fibrée $\mathfrak{Ger}(S)$, dont la fibre au dessus de chaque ouvert $U \in S$ est la catégorie $\mathfrak{Ger}(U)$ des gerbes sur U de lien isomorphe à $lien(G_S)/U$, est une 2-gerbe, appelée la 2-gerbe des réalisations du lien $lien(G_S)$ ([**Bre94**]. §6).

CHAPITRE 2

DE LA CONDITION «CORPS DES MODULES»

2.1. Cas général

Soit :

$$f : X \longrightarrow Y$$

un morphisme de schémas et G un Y-groupe abélien.

Considérons la suite exacte en basses dimensions déduite de la suite spectrale de Leray associée au morphisme f:

$$0 \longrightarrow H^1(Y, f_*G_X) \xrightarrow{u_1} H^1(X, G_X) \xrightarrow{v_1} H^0(Y, R^1f_*G_X)$$

$$\xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(Y, f_*G_X) \xrightarrow{u_2} H^2(X, G_X)^{tr} \xrightarrow{v_2} H^1(Y, R^1f_*G_X)$$

$$\xrightarrow{d_2^{1,1}} H^3(Y, f_*G_X)$$

où

$$G_X = X \times_Y G$$

et

$$H^2(X, G_X)^{tr} := \ker \left\{ H^2(X, G_X) \longrightarrow H^0(Y, R^2f_*G_X) \right\}$$

Dans la suite, nous nous baserons essentiellement sur l'interprétation, considérée par Giraud, du $R^1f_*G_X$ comme étant le faisceau des sous-gerbes maximales du champ $f_*Tors\ G_X$, image directe par le morphisme f de la gerbe des G_X-torseurs sur X.

De ce point de vue, un élément $\mathcal{G} \in Z^0(Y, R^1f_*G_X)$, est la donnée d'une famille de sous-gerbes maximales locales $(\mathcal{G}_i)$, relativement à un recouvrement étale $\{U_i\}$ de Y, qui se recollent le long des $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Ces données définissent donc, $R^1f_*G_X$ étant un faisceau, une gerbe $\mathcal{G}$ sur Y.

Au degré suivant, un élément de $Z^1(Y, R^1 f_* G_X)$ est une famille $\{\mathcal{G}_i, \theta_{ij}, m_{ijk}\}$ de gerbes définies localement sur Y, où

$$\begin{array}{rl} \theta_{ij}: & \mathcal{G}_i/U_{ij} \longrightarrow \mathcal{G}_j/U_{ij} \\ \theta_{jk}: & \mathcal{G}_j/U_{jk} \longrightarrow \mathcal{G}_k/U_{jk} \\ \theta_{ik}: & \mathcal{G}_i/U_{ik} \longrightarrow \mathcal{G}_k/U_{ik} \end{array}$$

sont des morphismes de recollement des $\mathcal{G}_i$, munis à leur tour d'une donnée de recollement m_{ijk}:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_i \arrow[r, "\theta_{ij}"'] \arrow[rr, bend left, "\theta_{ik}"] & \mathcal{G}_j \arrow[r, "\theta_{jk}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow m_{ijk}"] & \mathcal{G}_k \end{tikzcd}$$

le tout vérifiant :

$$\theta_{jk} \circ \theta_{ij} = m_{ijk}\theta_{ik}$$

La donnée $\{m_{ijk}\}$ ne vérifie pas en général une condition de 2-cocycle. L'obstruction à ce que cette condition soit vérifiée est un 3-cocycle ν_{ijkl}, qui définit à son tour une 2-gerbe vivant dans $H^3(Y, f_* G_X)$ (*cf*[**Bre94**]).

2.2. Cas $Y = \mathrm{Spec}(k)$

Nous allons décrire le 3-cocycle introduit dans la section **2.1**, lorsque Y est le site étale d'un corps k, en termes de cohomologie galoisienne. Ceci nous permettra d'introduire la notion de corps des modules pour les familles $\{\mathcal{G}_i, \theta_{ij}\}$ et relier ainsi la suite exacte 1 (cf page iv) à des espaces de modules.

Posons $Y = Spec(k)$, où k est un corps de caractéristique 0. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ le groupe de Galois absolu de k.

Notons

$$\pi : X \longrightarrow Spec(k)$$

le morphisme structural de X, considéré comme k-schéma. Dans cette situation on a par [**SGA4**, 5.2]:

$$(R^1\pi_* G_X)_{\mathrm{Spec}(\overline{k})} = H^1_{et}(\overline{X}, \overline{G_X})$$

Soit $a \in H^1(k, H^1(\overline{X}, \overline{G}))$. A tout élément $s \in \Gamma$, a associe un élément $[a_s] \in H^1(\overline{X}, \overline{G})$. a étant un 1-cocycle galoisien, on a pour tout $s, t \in \Gamma$, $[a_{st}] = [a_s][{}^s a_t]$, cela veut dire que $a_{st} \simeq a_s^s a_t$. Il existe donc un **isomorphisme** $\gamma_{s,t}$ tel que :

$$a_{st} \overset{\gamma_{s,t}}{\simeq} a_s^s a_t$$

Comme $(\gamma_{s,t})$ n'est pas un 2-cocycle en général, soit $\delta_{s,t,r}$ l'obstruction à ce qu'il le soit. On a donc:

$$\gamma_{st,u} \cdot \gamma_{s,t} = \delta^s_{s,t,r}\gamma_{t,u} \cdot \gamma_{s,tu}$$

En posant:

$$\delta_{s,t,u} =^s \gamma_{t,u}\ \gamma_{s,tu}\ \gamma_{s,t}^{-1}\ \gamma_{st,u}^{-1}$$

on obtient un 3-cocycle, $\delta_{s,t,r}$, et par suite, un morphisme:

$$H^1(k, H^1(\overline{X}, \overline{G})) \longrightarrow H^3(k, \pi_* G_X)$$
$$a \longmapsto [\delta]$$

qui correspond au cobord $d_2^{1,1}$.

2.2.1. «Condition corps des modules» d'ordre supérieur. — Avant de poursuivre, rappelons ce qui se passe au niveau du premier cobord $d_1^{0,1}$. Notons tout d'abord que nous avons

$$H^0(k, H^1(\overline{X}, \overline{G_X})) = H^1(\overline{X}, \overline{G_X})^\Gamma$$

où $H^1(\overline{X}, \overline{G_X})^\Gamma$ désigne l'ensemble des $\overline{G}_X$-torseurs stable par l'action de Γ.

Un objet de $H^1(\overline{X}, \overline{G_X})^\Gamma$ est donc une classe $[\overline{P}]$, où $\overline{P}$ est un $\overline{G}_X$-torseur tel que, pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe un isomorphisme $a_\sigma : \overline{P} \longrightarrow {}^\sigma\overline{P}$. Autrement dit, c'est un torseur muni d'une donnée de recollement $\{a_\sigma\}$, ou encore un torseur de corps de modules k. Cette donnée de recollement n'étant pas en général une donnée de descente, $d_1^{0,1}(\overline{P})$ est l'obstruction à ce qu'elle le soit. C'est un 2-cocycle, et la gerbe qu'il définit est neutre si et seulement si k est le corps de définition de $\overline{P}$.

Cette gerbe est la généralisation de la gerbe des modèles d'un G-revêtement, objet défini et étudié dans [**DD99**].

Au niveau supérieur, l'existence de l'isomorphisme $\gamma_{s,t}$ au dessus du corps k répond à la condition « corps des modules ». Nous allons décrire cette dernière en considérant les faisceaux des sous-gerbes maximales $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ est une X-gerbe, et la cohomologie étale sur $\mathrm{Spec}(k)_{et}$ pour simplifier.

Le passage de la cohomologie galoisienne à la cohomologie étale est du à l'équivalence bien connue (cf par ex [**G.T94**, Corollaire 2.2 p.94]:

$$\mathcal{F} \longmapsto \varinjlim \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(k'))$$

entre la catégorie des faisceaux abeliens sur $\mathrm{Spec}(k)_{et}$ et la catégorie des Γ-ensembles continus, k' parcourant les extensions étales de k. Cette équivalence entraîne les isomorphismes:

$$H^q_{et}(\mathrm{Spec}(k), \mathcal{F}) \simeq H^q_{Gal}\left(\Gamma, \varprojlim \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(k'))\right)$$

Soit $[\mathcal{G}] \in H^2(X, G_X)^{tr}$, la classe d'une G_X-gerbe $\mathcal{G}$ sur X et $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ le k-faisceau des sous gerbes-maximales de $f_*(\mathcal{G})$.

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de k, U_i ouvert étale de k, et

$$\begin{cases} \mathcal{G}_i = & \mathcal{G}/\pi^{-1}(U_i) \\ \mathcal{G}_j = & \mathcal{G}/\pi^{-1}(U_j) \\ \mathcal{G}_k = & \mathcal{G}/\pi^{-1}(U_k) \end{cases}$$

et

$$\left.\begin{array}{rl} \theta_{ij}: & \mathcal{G}_i/\pi^{-1}(U_{ij}) \longrightarrow \mathcal{G}_j/\pi^{-1}(U_{ij}) \\ \theta_{jk}: & \mathcal{G}_j/\pi^{-1}(U_{jk}) \longrightarrow \mathcal{G}_k/\pi^{-1}(U_{jk}) \\ \theta_{ik}: & \mathcal{G}_i/\pi^{-1}(U_{ik}) \longrightarrow \mathcal{G}_k/\pi^{-1}(U_{ik}) \end{array}\right\} \text{les morphismes de recollement}$$

de sorte que les $\mathcal{G}_i$ se recollent en la gerbe $\mathcal{G}$ à l'aide des couples (θ_{ij}, m_{ijk}):

$$\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = m_{ijk}\theta_{ik}$$

Puisque les $\mathcal{G}_i$ se recollent en la gerbe $\mathcal{G}$, les m_{ijk} satisfont à la condition d'une « donnée de 2-descente », i.e le 3-cocycle associé à la donnée des m_{ijk} est trivial.

Lorsque G n'est plus abelien, $H^1(k, R^1 f_* G)$ n'existe pas. Mais le k-faisceau $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ continue d'exister. Plus généralement, nous allons considérer des familles de gerbes $\mathcal{G}_i/U_i$ definies localement sur k qui ne se recollent plus nécessairement en une gerbe. On pose alors:

***Définition* 20**. — Une famille $\{\mathcal{G}_i\}$ est dite de corps de modules de k s'il existe des données de recollement $\{m_{ijk}\}$ au dessus du corps k, rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}_i \arrow[d, "\theta_{ij}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\theta_{ik}"] \\ \mathcal{G}_j \arrow[d, "\theta_{jk}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{m_{ijk}}{\Leftarrow}"] & {} \\ \mathcal{G}_k \end{tikzcd}$$

Le 3-cocycle associé à la donnée des (m_{ijk}) n'étant plus nécessairement trivial, cette donnée de recollement sur les $\{\theta_{ij}\}$ devient **une 2-donnée de recollement** sur les $\mathcal{G}_i$ qui n'est pas **une 2-donnée de descente** en général.

Nous obtenons une interprétation modulaire de cette situation: les données $\{\mathcal{G}_i, m_{ijk}\}$ se regroupent en un 2-champ $\mathfrak{C}$ qui est le substitut naturel du $Z^1(k, R^1f_*G)$ lorsque G n'est plus abelien.

A chaque 2-donnée de recollement $\{\mathcal{G}_i, m_{ijk}\}$ est associé un 3-cocycle ν_{ijkl} qui mesure l'obstruction à ce que (m_{ijk}) soit un 2-cocycle. La k-2-gerbe définie par le 3-cocycle ν_{ijkl} peut etre vue comme la k-2-gerbe résiduelle en le point , à valeurs dans Spec(k), de $\mathfrak{C}$ associé à la donnée $\{\mathcal{G}_i, m_{ijk}\}$.

Les $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ associés à des gerbes $\mathcal{G}$ sur X correspondent a des 2-données de recollement $\{\mathcal{G}_i, m_{ijk}\}$ pour lesquelles le 3-cocycle associé est trivial, $i.e$, ce sont des 2-données de recollement qui sont des 2-données de descente. Dans ce cas, la 2-gerbe correspondante est neutre .

Nous avons donc les correspondances:

$$\underbrace{H^0(Y, R^1f_*G)}_{\text{Modules grossiers des torseurs de corps de modules } k} \xrightarrow{d_0^{0,1}} \underbrace{\bigcup_{\mathcal{L}} H^2(Y, \mathcal{L}),\ \mathcal{L} \text{ lien localement représentable par } G}_{\text{Gerbes résiduelles associées}}$$

$$\underbrace{H^1(Y, R^1f_*G)(\text{Si } G \text{ abelien:})}_{\text{Modules grossiers des classes des}\{\mathcal{G}_i, m_{ijk}\} \text{ définies précédemment}} \xrightarrow{d_2^{1,1}} \underbrace{H^3(Y, G)}_{\text{2-gerbes résiduelles associées}}$$

<u>Conclusion</u>: Les cobords $d^{0,1}$,, $d^{1,1}$,, ... dans la suite spectrale réalisent les passages des modules grossiers aux modules fins.

CHAPITRE 3

2-COHOMOLOGIE NON ABELIENNE: DESCENTE DE GERBES

Dans le chapitre précédent nous avons étudié le cas $Y = \mathrm{Spec}(k)$ pour introduire la notion de corps des modules. Dans ce chapitre, nous allons considérer un schéma Y plus général et considérer des cas dans lesquels le Y-faisceau des sous-gerbes maximales $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ admet une section.

Dans la première section, nous utiliserons les résultats de Artin-Grothendieck et la réduction de la 2-cohomologie des groupes réductifs à celle des tores maximaux pour décrire l'obstruction à la descente de gerbes dans le cas d'une surface fibrée sur une courbe.

Ensuite, nous nous interessons, dans un cas bien précis, à l'extension abelienne maximale d'un corps en nous basant sur un résultat de J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren et R. Parimala.

3.1. Résultats cohomologiques

Soit $f : X \to Y$ un morphisme propre et plat avec :

- X régulier de dimension 2;
- Y est une courbe irréductible lisse définie sur un corps parfait k, ou Y le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres.
- la fibre générique de f, $X_K := X \times_Y \mathrm{Spec}(K)$ est une courbe lisse géometriquement connexe sur K, K désignant le corps des fonctions rationnelles de Y.

On munit X et Y de la topologie étale et on suppose vérifiée l'hypothèse

$$f_*(O_X) \simeq O_Y$$

qui est dans la nature d'une hypothèse de normalisation, car si elle n'est pas satisfaite, on s'y ramène en remplaçant Y par $\mathrm{Spec}(f_*(O_X))$. Cette hypothèse entraîne en particulier:

(4) $f_*(G_{m,X}) \simeq G_{m,Y}$

Soit A un X-groupe abélien.
Rappelons que

$$H^2(X,A)^{tr} := \text{Ker}\left\{H^2(X,A) \longrightarrow H^0(Y,R^2f_*A)\right\}$$

Sous les hypothèses du début, on sait par [**BR-III**, Cor. 3.2] que

$$R^2f_*A = 0$$

Par conséquent:

$$H^2(X,A)^{tr} = H^2(X,A).$$

Par ailleurs, la suite spectrale de Leray associée à f:

$$H^p(Y,R^qf_*(A)) \Rightarrow H^{p+q}(X,A)$$

nous fournit la suite exacte en basses dimensions suivante:

$$0 \longrightarrow H^1(Y,f_*(A)) \longrightarrow H^1(X,A) \longrightarrow H^0(Y,R^1f_*(A))$$

$$\longrightarrow H^2(Y,f_*(A)) \longrightarrow H^2(X,A)^{tr} \longrightarrow H^1(Y,R^1f_*(A))$$

$$\longrightarrow H^3(Y,f_*(A))$$

Dans le cas où $A = G_{m,X}$, cette suite s'écrit:

$$0 \longrightarrow H^1(Y,f_*(G_{m,X})) \longrightarrow H^1(X,G_{m,X}) \longrightarrow H^0(Y,R^1f_*(G_{m,X}))$$

$$\longrightarrow H^2(Y,f_*(G_{m,X})) \longrightarrow H^2(X,G_{m,X}) \longrightarrow H^1(Y,R^1f_*(G_{m,X}))$$

$$\longrightarrow H^3(Y,f_*(G_{m,X}))$$

qui nous donne, avec l'isomorphisme (4) la suite exacte:

$$(5) \quad 0 \longrightarrow Pic(Y) \longrightarrow Pic(X) \longrightarrow Pic(X/Y)$$

$$\longrightarrow Br(Y) \longrightarrow Br(X) \longrightarrow H^1(Y,P)$$

$$\longrightarrow H^3(Y, G_{m,Y}) \longrightarrow H^3(X, G_{m,X})$$

où $P = R^1 f_*(G_{m_X})$ et $Pic(X/Y) = H^0(Y,P)$

qu'on notera plus simplement:

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow Br(Y) \longrightarrow Br(X) \longrightarrow H^1(Y,P) \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

avec:

- $S = \mathrm{Coker}(Pic(X) \longrightarrow Pic(X/Y)$,
- $T = \mathrm{Ker}\,\{H^3(Y, G_m) \longrightarrow H^3(X, G_m)\}$ (par exemple, si f admet une section, $S = T = 0$),

Énonçons la première proposition:

Proposition 4. — *Sous les conditions du début du chapitre, et si f admet une section, i.e X_K admet un point K-rationnel, on a:*

$$H^1(Y,P) \simeq Ш^1(K,P)$$

et

$$Ш^1(K,P) \simeq Ш^1(K,J)$$

où J désigne la Jacobienne de la fibre générique de f.

La démonstration de cette proposition se base sur la suite exacte bien connue:

$$0 \longrightarrow Br(Y) \longrightarrow Br(K) \longrightarrow \bigoplus_v Br(K_v)$$

et sur le lemme suivant:

Lemme 2. — [**Mil82**, Cf Lemme 2.6]*La suite*

$$0 \longrightarrow Br(X) \longrightarrow Br(X_K) \longrightarrow \bigoplus_v Br(X_{K_v})$$

est exacte.

Démonstration de la proposition 4. — Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Br(K) \arrow[r] \arrow[d] & Br(X_K) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(K, Pic(\overline{X}_K)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_v Br(K_v) \arrow[r] & \bigoplus_v Br(X_{K_v}) \arrow[r] & \bigoplus_v H^1(K_v, Pic(\overline{X}_{K_v}))0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel:

- la première ligne provient de la suite exacte cohomologique déduite de la suite spectrale du morphisme générique $f_K : X_K \longrightarrow \mathrm{Spec}(K)$;
- le zéro à droite de la première ligne provient du fait que $H^3(K, \overline{K}^*) = 0$ [**Ser97**, II.§.4], et les zéros restants sont une conséquence de l'existence d'une section de f.

Nous en déduisons, grâce au lemme du serpent, la suite exacte suivante:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Br(Y) \arrow[r] & Br(X) \arrow[r] & Ш^1(K, P) \\
 \arrow[r] & H^3(Y, G_{m,Y}) \arrow[r] & H^3(X, G_{m,X}) \arrow[l, bend right]
\end{tikzcd}$$

qui comparée à la suite exacte:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Br(Y) \arrow[r] & Br(X) \arrow[r] & H^1(Y, P) \\
 \arrow[r] & H^3(Y, G_m) \arrow[r] & H^3(X, G_{m,X}) \arrow[l, bend right]
\end{tikzcd}$$

donne l'isomorphisme

$$Ш^1(K, P) \simeq H^1(Y, P)$$

D'autre part, la suite exacte de $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-modules:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Pic^0(\overline{X}_K) \arrow[r] & Pic(\overline{X}_K) \arrow[r, "deg"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[l, bend right, "r"'] & 0
\end{tikzcd}$$

où r est la rétraction correspondant au point K-rationnel de X_K, donne la suite exacte cohomologique suivante:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(K, Pic^0(\overline{X}_K)) \arrow[r] & H^0(K, Pic(\overline{X}_K)) \arrow[r, "deg"] & H^0(K, \mathbb{Z})) = \mathbb{Z} \arrow[l, bend right, "r"'] \\
 \arrow[r] & H^1(K, Pic^0(\overline{X}_K)) \arrow[r, "h"] & H^1(K, Pic(\overline{X}_K)) \arrow[r] & H^1(K, \mathbb{Z}) = 0
\end{tikzcd}$$

dans laquelle l'application h devient injective, et donc, bijective, i.e:

$$H^1(K, Pic^0(\overline{X}_K)) \simeq H^1(K, Pic(\overline{X}_K))$$

ou encore :

$$H^1(K, J)) \simeq H^1(K, P)$$

et finalement :

$$Ш^1(K, P) = Ш^1(K, J).$$

□

Notre objectif maintenant est d'étudier l'analogue des suites exactes précédentes quand A n'est plus abélien. Nous considérerons le cas d'un groupe réductif G, dont nous réduirons la 2-cohomologie à celle d'un tore maximal T.

Soit $\mathcal{L}$ un lien localement, pour la topologie étale, représentable par un groupe réductif G. On sait par [**Dou76**, Prop 3.2 p 75](1) , que $\mathcal{L}$ est représentable par un X-groupe réductif quasi déployé $G_{\mathcal{L}}$, et donc, sur une certaine extension, $G_{\mathcal{L}}$ admet un tore maximal $T_{\mathcal{L}}$ isomorphe à un produit de d copies du groupe multiplicatif G_m.

Si de plus G est simplement connexe, et par conséquent $G_{\mathcal{L}}$ aussi, ce dernier admet un X-tore maximal $T_{\mathcal{L}}$ induit [**SGA3**, Exposé XXIV (3.13)] : sur une certaine extension étale finie de X, il devient isomorphe au groupe multiplicatif G_m.

Nous pouvons donc supposer $G = \widetilde{G}$ un X-schéma en groupes déployé et $\mathcal{L}$ représentable par $\widetilde{G}$. On peut même, si $\widetilde{G}$ est semi-simple simplement connexe et après avoir fait une extension étale finie, supposer que son tore maximal $\widetilde{T}$ est tel que $\widetilde{T} = G_m$.

Pour la suite, on pose:

1. $H^2(\cdot\ , \widetilde{G}) = H^2(\cdot\ , lien\ (\widetilde{G}))$
2. $H^2(X, \widetilde{G})^{tr}$: le sous-ensemble de $H^2(X, \widetilde{G})$ constitué des classes de gerbes $\mathcal{G}$ liées par lien($\widetilde{G}$) telles qu'il existe un raffinement R de Y tel que, pour tout $U \in Ob(R)$, la fibre de $\mathcal{G}$ en $f^{-1}(U)$ est non vide ([**Gir71**], Chapitre V,3.1.9.3).

(1)Soit X un préschéma quelconque. Tout X-lien $\mathcal{L}$ localement représentable pour la topologie étale (resp. f.p.pf, f.p.q.c) par un X-groupe réductif est représentable par un X-groupe réductif quasi-déployé $G_{\mathcal{L}}$.

Notons $Z(\widetilde{G})$ le centre de $\widetilde{G}$ et considérons le diagramme suivant:

(6)

$$\begin{tikzcd}
H^0(Y, R^1 f_* Z(\widetilde{G})) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(Y, f_* Z(\widetilde{G})) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X, Z(\widetilde{G}))^{tr} \arrow[r] \arrow[d, "i_*^{(2)}"] & H^1(Y, R^1 f_* Z(\widetilde{G})) \arrow[d] \\
H^0(Y, R^1 f_* \widetilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(Y, f_* \widetilde{T}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X, \widetilde{T})^{tr} \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Y, R^1 f_* \widetilde{T}) \arrow[d] \\
H^0(Y, R^1 f_* \widetilde{G}) & H^2(Y, f_* \widetilde{G}) \arrow[r] & H^2(X, \widetilde{G})^{tr} \arrow[r] & ?
\end{tikzcd}$$

Rappelons le résultat suivant:

Corollaire 1. — [**Dou81**, *Cor.(3.4) P 74*] *Soit Y une courbe régulière, irréductible, définie sur un corps parfait k ou le spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres. Soient X un schéma de dimension 2, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre dont les fibres sont de dimension 1. Enfin, soit G un X-schéma de Chevalley*[(2)]*. Alors pour tout point géométrique $\overline{y} \in Y$, la fibre $(R^2_{et} f_* G)_{\overline{y}}$ est constituée uniquement de classes neutres.*

Sous les hypothèses du début sur f, on a:

$$R^2 f_* G_m = 0 \qquad \text{[\textbf{BR-III}, Corollaire (3.2)]}$$

$$\Downarrow$$

$$R^2 f_* \widetilde{T} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(R^2_{et} f_* \widetilde{G}) \text{ est composé de classe neutres} \qquad (Corollaire 1)$$

$$\Downarrow$$

$$H^2(X, \widetilde{T})^{tr} = H^2(X, \widetilde{T})$$

Par ailleurs, sachant que $H^2(X, Z(\widetilde{G}))^{tr} = H^2(X, Z(\widetilde{G}))$ (toujours par [**BR-III**, Corollaire (3.2)] et que $H^2(X, \widetilde{G})^{tr}$ est stable par l'action $H^2(X, Z(\widetilde{G}))^{tr}$ pour l'opération simplement transitive de $H^2(X, Z(\widetilde{G}))$ sur $H^2(X, \widetilde{G})$, on a:

Proposition 5. — $H^2(X, \widetilde{G})^{tr} = H^2(X, \widetilde{G})$.

Nous pouvons maintenant compléter la dernière ligne du diagramme (6):

$$\cdots H^2(Y, f_* \widetilde{G}) \longrightarrow H^2(X, \widetilde{G})^{tr} = H^2(X, \widetilde{G})$$

(2) On appelle X -schéma de Chevalley un X-schéma en groupes réductifs déployés.

en définissant un ensemble d'obstruction au relèvement d'une classe de $H^2(X,\widetilde{G})$ dans $H^2(Y,f_*\widetilde{G})$.

Considérons le diagramme:

(7)

$$\begin{tikzcd}
H^2(Y,f_*Z(\widetilde{G})) \arrow[r, "u"] & H^2(X,Z(\widetilde{G}))^{tr} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & H^1(Y,R^1f_*Z(\widetilde{G})) \arrow[d, "\mu"] \\
 & H^2(X,\widetilde{T})^{tr} = Br(X)^d \arrow[r] \arrow[d] & H^1(Y,R^1f_*\widetilde{T}) = H^1(Y,P)^d \arrow[d] \\
H^2(Y,f_*\widetilde{G}) \arrow[r] & H^2(X,\widetilde{G})^{tr} \arrow[r] & ?
\end{tikzcd}$$

Soit $q \in H^2(X,\widetilde{G})^{tr}$.

$q = \alpha \cdot \varepsilon$ où $\varepsilon = [Tors\ \widetilde{G}] \in H^2(X,\widetilde{G})$ et $\alpha \in H^2(X,Z(\widetilde{G})) = H^2(X,Z(\widetilde{G}))^{tr}$.

$$q \rightsquigarrow \lambda(\alpha) \in H^1(Y,R^1f_*Z(\widetilde{G}))$$

Proposition 6. — *L'application*

$$\begin{aligned} H^2(X,\widetilde{G}) &\longrightarrow Im(\lambda) \subset H^1(Y,R^1f_*Z(\widetilde{G})) \\ q &\rightsquigarrow \lambda(\alpha) \end{aligned}$$

définit l'obstruction cherchée, i.e, la suite

$$H^2(Y,\widetilde{G}) \longrightarrow H^2(X,\widetilde{G}) \longrightarrow Im(\lambda) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Remarquons au passage que lorsque $Im(\lambda) = 0$, nous retrouvons la proposition 3.1.10, chapitre V de [**Gir71**], et plus précisément Cor. 3.1.10.3. En particulier:

Proposition 7. — *Avec les hypothèses du début de ce chapitre, si $f : X \longrightarrow Y$ est une fibration en coniques, alors toute classe $q \in H^2(X,\widetilde{G})$ provient d'une classe $q' \in H^2(Y,f_*\widetilde{G})$*

En effet, pour tout point $y \in Y$, en posant $f^{-1}(\overline{y}) = F_{\overline{y}}$, on a:

$$(R_1f_*Z\widetilde{G})_y = \varinjlim_{U \ni y} H^1(f^{-1}(U),Z(\widetilde{G})) = H^1(F_{\overline{y}},Z(\widetilde{G})) \simeq \mathrm{Hom}\left(\pi_1(F_{\overline{y}}), f_*Z(\widetilde{G})\right)$$

où U parcourt les voisinages étales de y.

Mais

$$\mathrm{Hom}\left(\pi_1(F_{\overline{y}}), f_*Z(\widetilde{G})\right) = \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{P}_1), f_*Z(\widetilde{G})\right) = 0$$

La proposition 7, ci-dessus, étend les résultats des corollaires 3.13 et 3.14 de [**Dou81**], dans lesquels le corps résiduel k était supposé algébriquement clos ou fini.

Soit $\mu : H^1(Y, R^1 f_* Z(\widetilde{G})) \longrightarrow H^1(Y, R^1 f_*(\widetilde{T}))$. Nous pouvons aussi prendre comme ensemble d'obstruction l'image $Im(\mu \circ \lambda) \subset H^1(Y, R^1 f_*(\widetilde{T}))$.

Proposition 8. — *La suite*

$$H^2(Y, \widetilde{G}) \longrightarrow H^2(X, \widetilde{G}) \longrightarrow Im(\mu \circ \lambda) \longrightarrow 0$$

est exacte. L'obstruction définie par $Im(\mu \circ \lambda)$ est la même que l'obstruction définie par $Im(\lambda)$.

Cependant, nous verrons dans le théorème (2) ci-dessous et dans la section (3.2) qu'elle est plus souple que celle définie par $Im(\lambda)$.

Démonstration. — Si $q = \alpha \cdot \varepsilon \in H^2(X, \widetilde{G})$ se relève en $q' = \beta \cdot \varepsilon' \in H^2(Y, f_* \widetilde{G})$ avec $\varepsilon' = [Tors(Y, f_* \widetilde{G})]$ et $\beta \in H^2(Y, f_* Z(\widetilde{G}))$ alors $\lambda(\alpha) = \lambda(u(\beta)) = 0 \in H^1(Y, R^1 f_* Z(\widetilde{G}))$ d'où $\mu \circ \lambda(\alpha) = 0$.

Réciproquement, supposons $\mu \circ \lambda(\alpha) = 0$.

Par [**Gir71**, Lemme 3.1.5], on a un isomorphisme canonique de faisceaux d'ensembles entre $R^1 f_*(\widetilde{T})$ et le faisceau des sous-gerbes maximales de l'image directe de la gerbe $Tors(X, \widetilde{T})$ par f.

De plus [**Gir71**, Ex. 3.1.9.2], si $[\mathcal{G}] \in H^2(X, \widetilde{T})$ (resp. $H^2(X, \widetilde{T})^{tr}$ 4)est la classe d'une X-gerbe $\mathcal{G}$, le faisceau $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ des sous-gerbes maximales de l'image directe $f_*(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ par f est un pseudo-torseur (resp. un torseur) sous $R^1 f_*(\widetilde{T})$.

Soit $\mathcal{G}_{\widetilde{T}}$ la gerbe représentant l'image de α dans $H^2(X, \widetilde{T})^{tr} = H^2(X, \widetilde{T})$. Puisque $(\mu \circ \lambda)(\alpha) = 0$, le faisceau $\mathsf{Ger}(\mathcal{G}_{\widetilde{T}})$ des sous- gerbes maximales de l'image directe $f_*(\mathcal{G}_{\widetilde{T}})$ admet une section. Si $\mathcal{G}$ représente la classe q, il existe un Y-morphisme de gerbes :

$$\mathcal{G}_{\widetilde{T}} \longrightarrow \mathcal{G}$$

induit par l'inclusion:

$$\widetilde{T} \hookrightarrow \widetilde{G}$$

Le morphisme de gerbes $\mathcal{G}_{\widetilde{T}} \longrightarrow \mathcal{G}$ induit à son tour un Y-morphisme de faisceaux

$$\mathsf{Ger}(\mathcal{G}_{\widetilde{T}}) \longrightarrow \mathsf{Ger}(\mathcal{G})$$

où $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ est le faisceau des sous-gerbes maximales de $f_* \mathcal{G}$

Donc toute Y-section de $\mathsf{Ger}(\mathcal{G}_{\widetilde{T}})$ induit une Y-section de $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$, i.e q se remonte en une classe dans $H^2(Y, \widetilde{G})$.

De la suite exacte (5), nous obtenons:

$$Im(\mu \circ \lambda) \subset H^1(Y, R^1 f_*(\widetilde{T}) \simeq H^1(Y, P^d) \simeq Ш^1(K, J)^d$$

où $d = \dim \widetilde{T}$. □

En résumé nous obtenons:

Théorème 1. — *Le sous-groupe $Im(\mu \circ \lambda) \subset Ш^1(K,J)^d$, image de $\mu \circ \lambda : H^2(X, Z(G))^{tr} \to Ш^1(K,J)^d$, où K désigne le corps des fonctions de Y, par l'application composée:*

$$H^2(X, Z(\widetilde{G}))^{tr} \to H^1(Y, R^1 f_* Z(\widetilde{G})) \to H^1(Y, R^1 f_* \widetilde{T}) \simeq Ш^1(K,J)^d$$

est un sous-groupe d'obstruction au relèvement d'une classe $q = \alpha \cdot \varepsilon$ dans $H^2(Y, f_* G)$:

$$H^2(Y, f_* G) \to H^2(X, G) \to Im(\mu \circ \lambda) \to 0$$

L'application

$$H^2(X, \widetilde{G}) \longrightarrow Im(\mu \circ \lambda)$$

s'interprète comme l'application qui à la classe de $\mathcal{G}$ associe la classe du faisceau des sous-gerbes maximales $\mathsf{Ger}(\mathcal{G}_{\widetilde{T}})$ de l'image directe de $\mathcal{G}_{\widetilde{T}}$ par f.

On peut résumer cette situation par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \in H^2(X, \widetilde{G}) \arrow[r] \arrow[dr] & {[\mathsf{Ger}(\mathcal{G}_{\widetilde{T}})] \in Im(\mu \circ \lambda) \subset H^1(Y, R^1 f_* \widetilde{T}))} \arrow[d] \\
& \mathsf{Ger}(\mathcal{G}) \in ?
\end{tikzcd}$$

Rappelons que la conjecture de Artin-Tate stipule que le $Ш^1(K,J)$ est fini. Notre obstruction prend donc ses valeurs dans groupe fini. Par conséquent si l'on considère un groupe $\widetilde{G}$ dont le centre $Z(\widetilde{G})$ est tel que $|Z(\widetilde{G})| = n < \infty$ et n premier à l'ordre de $Ш^1(K,J)$, cette obstruction est nulle. D'où:

Théorème 2. — *Sous la conjecture de Artin-Tate, si $|Z(\widetilde{G})|$ est premier à l'ordre de $Ш^1(K,J)$, où K désigne le corps des fonctions de Y, alors toutes les classes de $H^2(X, \widetilde{G})$ proviennent de $H^2(Y, f_* \widetilde{G})$.*

Exemple 6. — Si $\widetilde{G} = SL_n$, on a: $\widetilde{T} = (G_m)^{n-1}$ et $Z(\widetilde{G}) = \mu_n$. Il y a donc une infinité d'entiers pour lesquels le théorème 2 est vrai.

3.2. Résultats arithmétiques

Citons le résultat de J.-L. Colliot-Thélène, M. Ojanguren et R. Parimala sur les extensions abéliennes maximales, que nous allons utiliser:

Théorème 3. — ([**CTOP**]) *Soit A un anneau local, excellent et henselien de dimension 2, K son corps des fractions et k son corps résiduel. On suppose que k est algébriquement clos et de caractéristique 0. Désignons par $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et par K^{ab} l'extension abélienne maximale de K dans $\overline{K}$.*

Alors K^{ab} est de dimension cohomologique inférieure ou égale à 1.

Considérons maintenant la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K^{ab}\right) \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K\right) \longrightarrow \mathrm{Gal}\left(K^{ab}/K\right) \longrightarrow 0$$

Nous avons alors, pour tout $\mathrm{Gal}\left(\overline{K}/K\right)$-module A, la suite exacte cohomologique suivante:

$$(8)\quad 0 \to H^1\left(\mathrm{Gal}(K^{ab}/K), A^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{ab})}\right) \xrightarrow{\alpha} H^1\left(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), A\right)$$
$$\xrightarrow{\beta} H^1\left(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{ab}), A\right)^{\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)} \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2\left(\mathrm{Gal}(K^{ab}/K), A^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{ab})}\right)$$
$$\xrightarrow{\delta} H^2\left(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K), A\right)^{tr} \xrightarrow{d_2^{0,2}} H^1\left(\mathrm{Gal}(K^{ab}/K), H^1(\mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{ab}), A)\right)$$

Ceci est en effet une conséquence de la suite spectrale de Hochschild-Serre:

$$H^p(M/N, H^q(N,A)) \Longrightarrow H^{p+q}(M,A)$$

où M désigne un groupe profini et N un sous groupe normal de M, qui donne la suite exacte cohomologique:

$$(9)\quad 0 \to H^1(M/N, A^N) \xrightarrow{\alpha} H^1(M,A) \xrightarrow{\beta} H^1(N,A)^{M/N}$$
$$\xrightarrow{\gamma} H^2(M/N, A^N) \xrightarrow{\delta} H^2(M,A) \longrightarrow H^1(M/N, H^1(N,A))$$

où α et δ sont des morphismes d'inflation, β un morphisme de restriction et γ un morphisme de *transgression*.

Nous l'appliquons ici à $M = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et $N = \mathrm{Gal}(\overline{K})/K^{ab}$.

Reprenons les notations du théorème 3 et considérons un K-groupe réductif connexe G.

Proposition 9. — *Sous les hypothèses du théorème 3, l'application*

$$H^2(K^{ab}/K, G^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K^{ab})}) \longrightarrow H^2(\overline{K}/K, G)$$

est surjective. En particulier, pour toute classe $[\mathcal{G}] \in H^2(\overline{K}/K, G)$, $\mathsf{Ger}(\mathcal{G})$ *admet une section.*

Démonstration. — D'après le théorème 3, $cd(K^{ab}) \leq 1$, et donc

$$H^2(\overline{K}/K^{ab}, Z(G)(\overline{K})) = 0$$

Par conséquent le premier terme de la filtration de $H^2(K, Z(G))$, à savoir le sous-groupe:

$$H^2(K, Z(G))^{tr} := ker\left\{H^2(\overline{K}/K, Z(G)(\overline{K})) \longrightarrow H^0(K^{ab}/K, H^2(\overline{K}/K^{ab}, Z(G)(\overline{K}))\right\}$$

coïncide avec $H^2(K, Z(G))$

Par ailleurs, comme G connexe et $cd(K^{ab}) \leq 1$, $H^1(K^{ab}, G) = 0$ (cf par ex. [**Ser97**] theo. 1 p 137). Pour les mêmes raisons, nous avons aussi $H^1(K^{ab}, T) = 0$, où T est un tore maximal de G.

Nous en déduisons alors, dans le diagramme suivant, analogue au diagramme 7 page 29, la surjectivité de l'application v:

$$\begin{tikzcd}
 & H^2(K, Z(G)) \arrow[d, phantom, "\wr"] & \\
H^2(K^{ab}/K, Z(G)) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & H^2(K, Z(G))^{tr} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & H^1(K^{ab}/K, H^1(K^{ab}, Z(G))) \arrow[d, "\mu"] \\
H^2(K^{ab}/K, T) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & H^2(K, T)^{tr} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(K^{ab}/K, G) \arrow[r, "v"] & H^2(K, G)^{tr} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & ? \arrow[d, phantom, "\cup"] \\
 & H^2(K, G) \ni [\mathcal{G}] \arrow[r, mapsto] & \mathsf{Ger}(\mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

$\square$

Aux journées académiques d'Edimbourg (juillet 2007), J.C Douai a montré que si $G = \widetilde{G}$ est semi-simple simplement connexe, alors toutes les classes de $H^2(\overline{K}/K, \mathcal{L}(\overline{K}))$ sont neutres pour $\mathcal{L}$ un K-lien localement représentable par $\widetilde{G}$. K est en fait l'analogue d'un corps de nombres: pour les corps de nombres, la neutralité de toutes classes de $H^2(\overline{K}/K, \mathcal{L}(\overline{K}))$ a été détaillé dans [**Dou75**]. Quand $K = \mathbb{Q}$, $K^{ab} = \mathbb{Q}^{ab}$, $cd.(\mathbb{Q}^{ab}) \leq 1$, et le résultat de la proposition 9 est encore vrai.

Ceci confirme l'analogie entre les corps K considérés précédemment et les corps de nombres.

BIBLIOGRAPHIE

[EGA1] A. Grothendieck. *Eléments de Géometrie Algébrique: I. Le langage des schémas*, *Institut des Hautes Études Scientifiques*. 224 Springer Verlag, 1971.

[SGA1] A. Grothendieck. *Revetements étales et groupe fondamental*, *Lecture Notes in Mathematics*. 224 Springer Verlag, 1971.

[SGA3] M. Demazure and A. Grothendieck. *Propriétés générales des schémas en groupes*, volume 151 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1970.

[SGA4] A. Grothendieck and J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, volume 269 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1972.

[Ami75] Yvette Amice *Les nombres p-adiques.* Le Mathématicien,1975

[Bre90] Lawrence Breen. Bitorseurs et cohomologie non abélienne. *Grothendieck Festchrift*, 1990.

[Bre92] Lawrence Breen. Théorie de Shreier supérieure. *Ann.Scient.Ec.Norm.Sup*, 25, 1992.

[Bre94] Lawrence Breen. *On the classification of 2-gerbes and 2-stacks*, volume 225 of *Astérisque*. 1994.

[Bro82] Kenneth S.Brown *Cohomology of Groups*. Springer Verlag. 1982

[CE56] H.Cartan, S. Eilenberg *Homological Algebra*. Princeton University Press. 1956.

[CTOP] J.-L. Colliot-Thelene, M. Ojanguren, and R. Parimala. Quadratic forms over fraction fields of two-dimensional henselian rings and brauer groups of related schemes.

[DD99] Pierre Dèbes and Jean Claude Douai. Gerbes and covers. *Communications in Algebra*, 27:577–594, 1999.

[DE] Joe Harris David Eisenbud. *The Geometry of Schemes*. Springer.

[Don] Mac Donald. *Algebraic Geometry*. enseignement des sciences. Introduction to schemes.

[Dou75] Jean-Claude Douai. Cohomologie galoisienne des groupes semisimples definis sur les corps globaux. *C.r Acad. Sci*, A 281:1077–1080, 1975.

[Dou76] Jean Claude Douai. *2-cohomolgie galoisienne des groupes semisimples*. Thèse de doctorat, Université de Lille1, 1976.

[Dou81] Jean Claude Douai. Suites exactes déduites de la suite spectrale de leray en cohomoligie non abélienne. *Journal of Algebra*, 79:68–77, 1981.

[Dou01] Jean Claude Douai. Descente,champs et gerbes hurwitz. *SMF*, 5, 2001.

[Dou06] Jean Claude Douai. Sur la 2-cohomlogie galoisienne de la composante résiduellement neutre des groupes réductifs connexe définis sur les corps locaux. *C.R. Acad. Sci. Paris.Ser I 342 (2006) 813-818*

[Ems01] M. Emsalem. Espace de Hurwitz. *SMF*, 5, 2001.

[Gir64] Jean Giraud. Méthode de la descente. *Mémoires de la S.M.F*, 2, 1964.

[Gir71] Jean Giraud. *Cohomologie non abelienne*, volume 179 of *Grundlheren Math. Wiss.* Springer-Verlag, 1971.

[God98] Roger Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hemann, 1998.

[BR-II] A. Grothendieck. Groupe de Brauer II. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 1968.

[BR-III] A. Grothendieck. Groupe de Brauer III. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 1968.

[G.T94] G.Tamme. *Introduction to Etale Cohomology*. Springer Verlag, 1994.

[Hak72] Monique Hakim. *Topos annelés et schémas relatifs*. Springer Verlag, 1972.

[Har83] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer Verlag, 1983.

[HP] Stammbach U Hilton P.J. *A Course in Homological Algebra*. Springer Verlag.

[Laf77] Jean Pierre Lafon *Algèbre Commutative*. Enseignement des Sciences.1977

[Mil] J.S Milne. Lectures on étale cohomology. http://www.jmilne.org/math.

[Mil1] J.S Milne. Algebraic and Arithmetic Groups. http://www.jmilne.org/math.

[Mil82] J.S Milne. *Comparison of the Brauer group with the Tate-Safarevic group*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo (Shintani Memorial Volume) IA 28 (1982), 735-743. .

[Ser68] Jean Pierre Serre. *Corps Locaux*. Hermann, 1968.

[Ser97] Jean Pierre Serre. *Cohomologie Galoisienne*. Lecture Notes in Mathematics. Spinger, 1997.

[Sh72] S.S. Shatz. *Profinite groups, Arithmetic and Geometry*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1972.

[Spr81] T.A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. Birkhaüser, 1981.

[Tat68] J. Tate. On the conjecture of Birch and Swinerton-Dyer and a geometric analog. *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, 1968.

[Zah03] Stephane Zahnd. *Descente de torseurs, gerbes et point rationels*. Thèse de doctorat, Université de Lille1, 2003.