



THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET
TECHNOLOGIES DE LILLE

Discipline : Mécanique

présentée par

Honoré GNANGA

ANALYSE NUMERIQUE D'ECOULEMENTS
TURBULENTS ANISOTROPES A L'AIDE DE MODELES
NON-LINEAIRES DE TURBULENCE

Soutenue publiquement le 30 septembre 2008
devant le jury composé de:

Rapporteurs :	Abdelhak Ambari	ENSAM d'Angers
	Emmanuel Leriche	Université de Saint Etienne
Examineurs :	Larbi Labraga	Université de Valenciennes
	Bertrand Aupoix	ONERA Toulouse
Président :	Gilmar Mompean	Université de Lille 1 - Polytech'Lille
Directeur :	Hassan Naji	Université de Lille 1 - Polytech'Lille



THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET
TECHNOLOGIES DE LILLE

Discipline : Mécanique

présentée par

Honoré GNANGA

ANALYSE NUMERIQUE D'ECOULEMENTS
TURBULENTS ANISOTROPES A L'AIDE DE MODELES
NON-LINEAIRES DE TURBULENCE

Soutenue publiquement le 30 septembre 2008
devant le jury composé de:

Rapporteurs :	Abdelhak Ambari	ENSAM d'Angers
	Emmanuel Leriche	Université de Saint Etienne
Examineurs :	Larbi Labraga	Université de Valenciennes
	Bertrand Aupoix	ONERA Toulouse
Président :	Gilmar Mompean	Université de Lille 1 - Polytech'Lille
Directeur :	Hassan Naji	Université de Lille 1 - Polytech'Lille

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein de l'Ecole Polytechnique Universitaire de Lille (EPUL) et du Laboratoire de Mécanique de Lille (LML). Je tiens donc tout d'abord à remercier l'ensemble du personnel enseignant et administratif pour leur accueil et leur convivialité.

*Je tiens à manifester ma plus profonde et sincère reconnaissance envers mon directeur de thèse Monsieur **Hassan NAJI** pour m'avoir offert la possibilité de réaliser ce travail. Sa rigueur scientifique, ses conseils avisés et ses précieuses remarques m'ont aidé et motivé dans la réalisation de cette thèse. Il a su m'orienter et m'apporter l'optimisme et la confiance nécessaire à la réalisation d'un tel projet. Pour tout cela, merci.*

*Je remercie également Monsieur **Gilmar MOMPEAN**, professeur à l'USTL/Polytech'Lille, pour ses orientations scientifiques, son aide et pour m'avoir fait l'honneur d'être président du jury.*

*Je souhaite remercier très sincèrement Monsieur **Abdelhak AMBARI**, professeur à l'ENSAM Angers et Monsieur **Emmanuel LERICHE**, professeur à l'Université de Saint Etienne, pour avoir consacré une partie de leurs temps comme rapporteurs.*

*J'adresse un remerciement particulier à Monsieur **Larbi LABRAGA**, professeur à l'Université de Valenciennes et Monsieur **Bertrand AUPOIX**, directeur de recherche à l'ONERA-CERT Toulouse, pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury.*

*Je tiens à exprimer toute ma gratitude au **gouvernement gabonais** pour avoir financé toutes mes années d'études universitaires.*

Enfin, un grand merci à :

*Mon défunt père **TONDA Jérôme**, pour m'avoir poussé à faire des études doctorales et pour la confiance qu'il m'a accordé;*

*Ma mère **LOMBA Martine**, pour sa persévérance, sa patience et pour son soutien sans faille malgré la tristesse de voir partir son fils à l'étranger;*

*Ma famille et plus particulièrement à mes frères et sœurs (**Micheline, Ess, Lookas, Claudine, Donys, Stéphanie, J-Claude, Maygot, ...**) pour leur soutien moral et leur patience;*

*Ma femme **Estelle**, pour sa patience, son soutien et ses encouragements sans faille avant et durant cette thèse. Sans elle je n'aurais peut être pas surmonté les périodes de stress et de doutes. Puisse cette thèse être le début de la réalisation de nos rêves...;*

*Ma fille **Loreena Maélice**, née pendant la réalisation de cette thèse.*

Tous ceux qui m'ont aidé à Matsatsa, Koula-Moutou, Libreville, Marseille, Orléans, Paris et Lille.

*« Je dédie cette thèse à mon défunt père **Tonda Jérôme**, à ma défunte grand mère **Ngoudou Flavienne** et à mes deux défunts frères **Tonda Frédérique** et **Nzamba John Boris**, qui m'ont quitté prématurément ».*

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
1 MODÉLISATION PHYSIQUE DE LA TURBULENCE.....	6
1.1 Équations de Navier–Stokes instantanées.....	7
1.2 Principales modélisations de la turbulence	7
1.2.1 Simulation numérique directe–DNS	9
1.2.2 Simulation des grandes échelles–LES.....	10
1.2.3 Simulation des équations de Navier–Stokes moyennées–RANS.....	10
1.3 Équations pour la simulation moyennée.....	11
1.3.1 Notion de moyenne de Reynolds	11
1.3.2 Equations du mouvement moyen	12
1.4 Modélisation statistique de la turbulence	13
1.4.1 Classification des modèles de turbulence	13
1.4.2 Modélisation à concept de viscosité turbulente	15
1.4.3 Modélisation au second ordre	19
1.4.3.1 Équation de transport des contraintes de Reynolds.....	19
1.4.3.1.1 Termes de diffusion turbulente d_{ij}	21
1.4.3.1.2 Corrélation pression–déformation	22
1.4.3.1.3 Termes de destruction des contraintes turbulentes	25
2 MODÈLES NON-LINÉAIRES À CONTRAINTES ALGÈBRIQUES.....	27
2.1 Relations constitutives et turbulence	28
2.1.1 Représentation générale du tenseur des contraintes de Reynolds	28
2.2 Développement des modèles algébriques.....	30
2.2.1 Equation d’évolution du tenseur d’anisotropie des contraintes de Reynolds.....	30
2.2.2 Technique de Pope.....	30
2.2.2.1 Technique des invariants.....	32
2.2.2.2 Développement en série de Taylor	33
2.3 Modèle EASM quadratique de Shih et al.	40

2.3.1	Théorie de la distorsion rapide	40
2.3.2	Hypothèse de réalisabilité.....	41
2.4	Modèle EASM cubique de Craft et al.....	46
3	ÉVALUATION « A PRIORI » DES MODÈLES EASM À PARTIR DE LA SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE	49
3.1	Introduction	50
3.2	Procédure numérique utilisée et test a priori	50
3.3	Simulation Numérique Directe	51
3.4	Résultats numériques et discussion.....	52
3.4.1	Prise en compte des effets de paroi.....	52
3.4.2	Vérification des hypothèses de réalisabilités	56
3.4.3	Caractérisation de la turbulence par le tenseur d'anisotropie	61
3.4.4	Distribution des tensions de Reynolds.....	63
3.4.4.1	Intensité de la turbulence.....	63
3.4.4.2	Tensions de cisaillement turbulent.....	65
3.5	Conclusion	68
4	ÉTUDE A POSTERIORI DE MODELES EXPLICITES ALGEBRIQUES NON-LINEAIRES	69
4.1	Traitement numérique.....	70
4.1.1	Discrétisation spatiale.....	70
4.1.1.1	Localisation des variables	71
4.1.1.2	Équation de conservation pour une quantité scalaire.....	72
4.1.1.3	Schéma numérique pour le terme convectif	73
4.1.1.4	Équation de quantité de mouvement.....	74
4.1.1.5	Équations d'énergie cinétique de turbulence et de sa dissipation....	77
4.1.2	Discrétisation temporelle	78
4.1.3	Initialisation des calculs et conditions aux limites	81
4.2	Résultats numériques	82
4.2.1	Topographies et profils des vitesses moyennes de l'écoulement	83
4.2.2	Carte d'anisotropie	88
4.2.3	Vecteurs du flux secondaire	89

4.2.4 Topographie des composantes du tenseur de Reynolds.....	90
4.2.5 Profils des contraintes de Reynolds	94
4.2.6 Topographies de la vorticité longitudinale	97
4.2.7 Topographies et profils de l'énergie cinétique turbulente k et de son taux de dissipation	98
CONCLUSION GÉNÉRALE	103
BIBLIOGRAPHIE.....	106
RÉSUMÉ.....	112
ABSTRACT.....	113

TABLE DES FIGURES :

1.1 : Approche DNS/LES/RANS rapportées dans l'espace spectral	8
1.2 : Type d'informations obtenues suivant le modèle employé	14
1.3 : Hiérarchie des modèles de fermeture en un point.....	15
3.1 : Schéma numérique du « test a priori »	51
3.2 : Système de coordonnées et géométrie de la conduite carrée	51
3.3 : Topographies de la contrainte de Reynolds normale $\langle u^2 \rangle$.	
(a) : Modèle de Shih et al. ; (b) : Modèle de Craft et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	57
3.4 : Topographies de la contrainte de Reynolds normale $\langle w^2 \rangle$.	
(a) : Modèle de Shih et al. ; (b) : Modèle de Craft et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	58
3.5 : Topographies de la quantité $\langle uv \rangle^2 / (\langle u^2 \rangle \cdot \langle v^2 \rangle)$.	
(a) : Modèle de Shih et al. ; (b) : Modèle de Craft et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	59
3.6 : Topographies de la quantité $\langle vw \rangle^2 / (\langle v^2 \rangle \cdot \langle w^2 \rangle)$.	
(a) : Modèle de Shih et al. ; (b) : Modèle de Craft et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	60
3.7 : Domaine admissible d'anisotropie dans le plan des invariants II_b et III_b	61
3.8 : Carte des second et troisième invariants de Lumley.....	62
(a) : Modèle de Shih et al., Shih _f et al. et DNS de Gavrilakis	
(b) : Modèle de Craft et al., Craft _f et al. et DNS de Gavrilakis	
3.9 : Profils des tensions normales de Reynolds : Modèle de Shih et al. et Shih _f et al.....	63
3.10: Profils des tensions normales de Reynolds. Modèle de Craft et al. et Craft _f et al.....	64
3.11: Profils des tensions de cisaillement : Modèle de Shih et al. et Shih _f et al.....	66
3.12: Profils des tensions de cisaillement : Modèle de Craft et al. et Craft _f et al.....	67
4.1 : Position des variables dans un volume de contrôle.....	72
4.2 : Maillage entrelacé, bilan pour $U_{(i-1,j,k)}$	75
4.3 : Géométrie et maillage 63×63 du quadrant de la conduite carrée	82
4.4 : Contours de la vitesse longitudinale U normalisée par la vitesse au centre U_0 .	
(a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	83
4.5 : Vitesse longitudinale U normalisée à différentes sections de la conduite.	
($y/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 1.0)	84
4.6 : Loi logarithmique de la vitesse longitudinale sur la médiane de la paroi à $y/h = 1.0$...	85
4.7 : Contours de la vitesse transversale W normalisée par la vitesse au centre U_0 .	
(a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	86

4.8 : Vitesse transversale W normalisée à différentes sections de la conduite. ($y/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 1.0)	87
4.9 : Carte des second et troisième invariants de Lumley (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle Craft _f et al.....	88
4.10: Vecteurs du flux secondaire. (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	89
4.11: Contours de la contrainte de Reynolds normalisée $\langle u^2 \rangle$. (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	91
4.12: Contours de la contrainte de Reynolds normalisée $\langle v^2 \rangle$. (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	92
4.13: Contours de la contrainte de Reynolds normalisée $-\langle uw \rangle$. (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	93
4.14: Comparaison des profils des intensités turbulentes longitudinale (u_{rms}) et transversales (v_{rms} et w_{rms}) le long de la paroi bissectrice $y/h = 1.0$	94
4.15: Comparaison des profils des tensions de cisaillement de Reynolds le long de la paroi bissectrice $y/h = 1.0$: (a) : $-\langle uv \rangle$; (b) : $-\langle uw \rangle$	96
4.16: Contours de la vorticité longitudinale. (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	98
4.17: Contours l'énergie cinétique turbulente moyennée $\langle k \rangle$. (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis	99
4.18: Evolution de l'énergie cinétique turbulente $\langle k \rangle$ le long de la paroi bissectrice.....	100
4.19: Contours du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente $\langle \varepsilon \rangle$. (a) : Modèle de Shih _f et al. ; (b) : Modèle de Craft _f et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis ...	101
4.20: Evolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente $\langle \varepsilon \rangle$	102
4.21: Canal de Devis et Gessner	105

LISTE DES TABLEAUX

1.1 : Constantes des équations de transport proposées par Launder.....	18
2.1 : Coefficients des équations de transport k et ε	33
2.2 : Constantes de modèles classiques.....	40
2.3 : Coefficients proposés par Craft et al.....	48
3.1: Valeurs des constantes a et b des fonctions d'amortissement f que nous proposons...	53
4.1 : Expression des différents termes de l'équation (4.2).....	71
4.2: Etudes considérées dans la littérature.....	82

INTRODUCTION

La simulation numérique des écoulements turbulents est un formidable outil aussi bien pour essayer de mieux comprendre les mécanismes physiques que pour la conception et le développement dans l'industrie. L'extraordinaire essor du développement des méthodes de prédétermination par voie numérique a été rendu possible par les progrès réalisés dans le domaine de la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides et surtout par l'explosion des moyens de calculs. Aujourd'hui, la simulation numérique est un véritable complément aux études expérimentales et permet de prédire les écoulements sans recourir systématiquement à l'expérience, en entraînant une limitation d'essais en soufflerie, une réduction des coûts et des délais de conception. Malgré la puissance des calculateurs, l'approche numérique de toutes les échelles spatio-temporelles actives au sein d'un écoulement turbulent, depuis les plus grandes imposées par la taille du problème jusqu'aux plus petites dissipatives (échelle de Kolmogorov (1941) [78]), ne peut être envisagée à l'heure actuelle. Cette approche, appelée Simulation Numérique Directe ou DNS (Direct Numerical Simulation), est en pratique limitée à des cas d'écoulements très simples à faible nombre de Reynolds, éloignés des situations industrielles. Dès lors, pour prédire les écoulements turbulents complexes dans des configurations réelles, une solution consiste à résoudre les équations de Navier–Stokes sur une gamme restreinte d'échelles et modéliser l'action des autres. Cette séparation des échelles débouche sur différents niveaux d'approximation de la turbulence, comme la simulation des grandes échelles ou LES (Large Eddy Simulation) et l'approche moyennée ou RANS (Reynolds Averaged Navier–Stokes). La première approche (LES) est une approximation par filtrage en espace. Elle résout la dynamique des grandes et moyennes échelles porteuses d'énergie et utilise un modèle, dit de sous-maille, pour représenter l'action des échelles dont la taille est inférieure à celle de la maille du calcul, sur les échelles résolues. Cette méthode requiert un maillage très fin et est encore très coûteuse. La seconde approche (RANS), quant à elle, est une approche par traitement statistique, dont l'intérêt a été présenté dès 1895 par O. Reynolds [10] et qui est désormais classique. C'est l'approche la plus couramment utilisée dans l'industrie et dont le succès est fortement lié à la modélisation du tenseur de Reynolds. En effet, l'application d'une opération de moyenne sur les équations du mouvement introduit, du fait du caractère non-linéaire des termes de convection, des quantités inconnues associées à des moyennes de produits de fluctuations, qui, lorsqu'elles sont évaluées en un point, forment le tenseur de Reynolds.

Dans la littérature, il existe une grande variété de modèles de turbulence, qui se distinguent en fonction de leurs capacités à prédire tel ou tel écoulement. Cependant, Il est maintenant admis que, sans modification, les modèles conventionnels à viscosité turbulente sont incapables de reproduire fidèlement le comportement des écoulements secondaires alors que les modèles au second ordre ou RSM (Reynolds Stress Models) se sont avérés capables prédire de tels écoulements. Ces modèles au second ordre ont été, initialement, proposés par Launder, Reece et Rodi (1975) [29]. L'une des caractéristiques principales des fermetures au second ordre réside dans la possibilité de représenter les différents mécanismes qui régissent l'évolution des corrélations doubles. Les équations du tenseur de Reynolds assurent en outre une représentation exacte des termes de production, qui résultent de l'interaction des contraintes de Reynolds et des gradients du mouvement moyen. Cette propriété est intéressante dans la mesure où les niveaux de contraintes turbulentes sont en première approximation gouvernés par leurs taux de production respectifs. Les modèles au second ordre apparaissent ainsi comme le niveau d'approximation le plus naturel dans le contexte d'un traitement statistique des équations de Navier–Stokes en un point. Mais, ces modèles sont très difficiles à résoudre, numériquement, pour des écoulements complexes tridimensionnels, car les termes modélisés requièrent une variété de fonctions de paroi et, les coefficients des modèles sont estimés de manière empirique (Voir par exemple les modèles de : Launder et al. (1975) [29], Gibson and Launder (1978) [32], Speziale et al. (1991) [79]). C'est pourquoi, dans le but de combiner la simplicité et l'efficacité, plusieurs modèles explicites à contraintes algébriques ou EASM (Explicit Algebraic Stress models) ont été proposés. Ces modèles s'appuient sur une expression algébrique explicite du tenseur de Reynolds qui dépend des taux de déformation et de rotation moyens, et d'échelles scalaires caractéristiques de la turbulence. Comme pour les modèles à deux équations, ces modèles EASM sont complétés par deux équations d'échelle, généralement l'équation de transport de l'énergie cinétique k et celle de son taux de dissipation ε . Ces modèles EASM constituent une alternative intéressante aux modèles RSM.

Historiquement, Rodi (1976) [40] a été le premier à proposer un modèle algébrique non–linéaire (implicite), obtenu à partir de fermeture du second ordre par le moyen d'une hypothèse d'équilibre. Cette méthodologie a, depuis, été reprise par plusieurs auteurs, dont Speziale (1987) [43], Taulbee (1992) [80], Gatski et Speziale (1993) [39], Jongen et al. (1998) [81], etc..., qui ont proposé des modèles EASM. Notons qu'il existe deux méthodes de dérivation des modèles EASM. La première méthode est basée sur une hypothèse d'équilibre

convection–diffusion du tenseur de Reynolds. Cela consiste à négliger les termes de convection et de diffusion dans l'équation de transport pour le tenseur d'anisotropie. Les modèles EASM de Taulbee (1992) [80], Wallin et Johansson (2000) [82] et Gatski et Lumley (2001) [83], par exemple, sont issus de cette méthode. La deuxième méthode consiste à formuler une relation constitutive à l'aide des hypothèses de réalisabilité et de distorsion rapide. En effet, la forme de l'équation algébrique permet de supposer que le tenseur d'anisotropie peut s'exprimer comme une fonctionnelle dépendant des gradients de vitesses moyennes et d'échelles caractéristiques turbulentes basées sur k et ε . Les modèles EASM développés par Yoshizawa (1984) [44], Rubinstein et Barton (1990) [45], Shih et Lumley (1995) [46] et Craft et al. (1996) [48], etc.... appartiennent à cette technique.

Cette étude porte sur l'évaluation a priori et a posteriori des fermetures EASM. L'évaluation est menée pour des écoulements turbulents tridimensionnels d'un fluide newtonien et incompressible dans une conduite à section carrée. Contrairement aux apparences, cet écoulement est difficile à prédire numériquement et/ou expérimentalement. Cette configuration a été souvent choisie par plusieurs auteurs [3, 4, 5, 8, 9, 56, 57, 58, 59, 60], car elle constitue un bon cas test pour l'évaluation et l'amélioration des modèles de turbulence.

Dans le premier chapitre, nous présentons une étude bibliographique générale sur les modèles de turbulence. D'abord, nous décrivons les équations de Navier–Stokes, qui constituent le support mathématique de la représentation de la physique des écoulements. Ensuite, une brève revue est consacrée à la présentation des principales modélisations de la turbulence. La motivation de cette revue est de souligner les limites et de choisir une approche capable de répondre aux contraintes de notre problème. A l'issue de cet inventaire, nous retenons l'approche RANS. Enfin, nous rappelons la méthodologie des fermetures statistiques en un point. Dans un premier temps, une description statistique du mouvement, ainsi que la notion de moyenne de Reynolds, est donnée. Dans un deuxième temps, nous faisons un large bilan bibliographique sur la modélisation statistique de la turbulence. Les différents mécanismes présents dans les modèles au second ordre sont décrits et les expressions classiques de leur modélisation sont présentées.

Le second chapitre est consacré aux développements des modèles non–linéaires à contraintes algébriques. Premièrement, nous exposons les mécanismes mis en jeu pour le

développement d'une relation constitutive, qui est une représentation approchée des équations de transport des tensions de Reynolds. Cette notion de relation constitutive est directement issue de la mécanique des milieux continus, qui permet d'exprimer chaque terme comme une fonctionnelle locale dont les arguments sont essentiellement choisis par la physique à représenter et dont la forme est imposée par l'expression exacte du tenseur de Reynolds dont il convient de respecter les propriétés mathématiques. Deuxièmement, nous nous intéressons à la construction des modèles à contraintes algébriques. L'équation d'évolution du tenseur d'anisotropie, qui est le point de départ de la formulation de ces modèles, est présentée. Les détails du traitement de cette équation en utilisant la technique de Pope et le développement en série de Taylor sont exposés. Enfin, nous présentons les deux modèles EASM que nous avons retenus pour ce travail. Le premier modèle EASM est le modèle quadratique proposé par Shih et al. (1993) [47], (1995) [46] et, le second modèle, qui est cubique, est celui mis au point par Craft et al. (1996) [48], (1999) [49].

Le troisième chapitre traite de l'évaluation a priori des modèles EASM (Shih et al., et Craft et al.). L'aptitude de ces modèles à prédire des écoulements turbulents tridimensionnels de fluide incompressible dans une conduite à section carrée est étudiée. Premièrement, nous présentons la procédure numérique utilisée et les fonctions de prise en compte des effets de paroi et du coin. En effet, afin de mieux prédire ces effets, nous avons modifié les modèles EASM initiaux en y introduisant des fonctions de paroi dont les coefficients sont propres à chaque contrainte de Reynolds. Ces modèles modifiés ($EASM_f$) sont notés « Shih_f et al. » et « Craft_f et al. ». Deuxièmement, nous vérifions les hypothèses de réalisabilité employées dans la formulation de ces modèles algébriques. Enfin, les résultats prédits avec les modèles initiaux et modifiés sont comparés à ceux de la simulation numérique de Gavrilakis (1992) [3] et aux données des tests a priori des modèles de Speziale (1987) [43] et de Gatski et Speziale (1993) [39] obtenus par Mompean et al. (1996) [59]. A l'issue de cette étude, nous retenons les modèles corrigés ($EASM_f$) pour des tests a posteriori.

Le dernier chapitre est dédié à l'évaluation a posteriori des modèles $EASM_f$. Dans un premier temps, nous présentons la méthode numérique utilisée pour résoudre le système d'équations. Celle-ci est une procédure de volumes finis qui s'appuie sur un maillage non uniforme très fin au voisinage des parois et relâché ailleurs. Dans un second temps, nous présentons les prédictions numériques issues des modèles $EASM_f$. Ces prédictions sont comparées à la fois aux données des simulations numériques directes de Gavrilakis (1992)

[3], de Huser et Biringen (1993) [4], aux simulations des grandes échelles de Madabhushi et Vanka (1991) [8] et Xu et Pollard (2001) [74] et aux expériences de Niederschulte (1989) [75] et de Gessner et Emery (1981) [76].

CHAPITRE 1

MODÉLISATION PHYSIQUE DE LA TURBULENCE

1.1 Equations de Navier – Stokes instantanées

Les équations de Navier–Stokes constituent le support mathématique de la représentation de la physique des écoulements turbulents, et sont basées sur le principe de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Elles traduisent l'évolution au cours du temps, des grandeurs macroscopiques de l'écoulement, soumises aux différents mécanismes tels que la convection, la production et la destruction. Si on considère un fluide incompressible, newtonien, et en suivant la convention de sommation des indices répétés, on peut écrire de façon générale ces équations comme suit :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.2)$$

où u_i est la i ème composante de vitesse dans la direction x_i , p la pression, ρ la densité volumique constante et ν la viscosité cinématique.

La simulation numérique d'écoulements turbulents en tout point de l'espace et du temps est difficile à réaliser en générale. La simulation numérique directe des équations instantanées de Navier–Stokes est l'approche qui semble la plus naturelle. Mais, cette approche est pour l'instant uniquement limitée à des écoulements à faible nombre de Reynolds et pour des configurations géométriques simples par rapport aux préoccupations industrielles. Une alternative consiste à ne s'intéresser qu'aux quantités moyennes ou aux grandes échelles turbulentes.

1.2 Principales modélisations de la turbulence

Il existe trois principales approches de modélisation d'un écoulement turbulent :

- La simulation numérique directe, dite DNS, dans laquelle on cherche à représenter la totalité des phénomènes physiques.
- La simulation des grandes échelles, dite LES, dans laquelle on représente seulement les grandes structures en fonction du temps.
- La simulation moyennée, dite RANS, dans laquelle on représente seulement l'écoulement moyen.

Sur la sur la figure 1.1 suivante, on illustre schématiquement les trois approches, dans l'espaces spectrale.

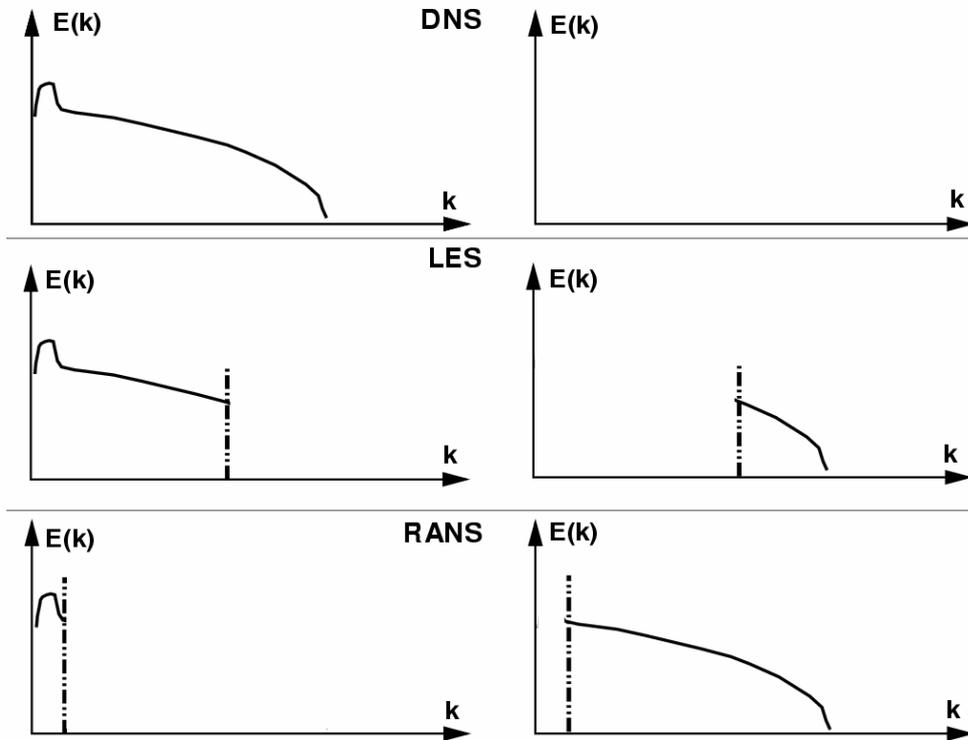


Figure 1.1 : Approche DNS/LES/RANS rapportées dans l'espace spectral : résolu à gauche, modélisé à droite.

L'objectif principal de ces simulations est d'obtenir des renseignements fiables et quantitatifs sur les propriétés d'un écoulement turbulent. Mais, le caractère turbulent introduit des échelles spatiales et temporelles très larges qui, sont difficilement résolues numériquement à l'heure actuelle. En effet, l'échelle temporelle de Kolmogorov, qui est la plus petite échelle turbulente, décroît en $Re^{1/2}$ et l'échelle spatiale en $Re^{3/4}$. La simulation numérique des écoulements turbulents reste donc un compromis entre de nombreux éléments :

- le choix du modèle de turbulence
- la complexité de la géométrie
- les délais d'obtention de la solution
- les contraintes numériques (schémas et maillages)
- la précision des schémas, le temps de calcul, la stabilité de calcul, etc.

Le choix de l'approche numérique sera donc fonction des résultats recherchés et/ou de l'enjeu industriel.

1.2.1 Simulation numérique directe – DNS

La simulation numérique directe (DNS) résout les équations de Navier–Stokes instantanées sans aucune modélisation supplémentaire des effets de la turbulence (cf. figure 1.1). Elle doit donc calculer toutes les échelles turbulentes. Les caractères tridimensionnel et instationnaire de la turbulence et la présence d’un large spectre de tourbillons conduisent d’une part à des calculs coûteux sur supercalculateurs et, d’autre part à des simulations numériques d’écoulements académiques à nombre de Reynolds encore modeste par rapport aux situations industrielles. En effet, le nombre de points dans un maillage pour capturer toutes ces informations est de l’ordre de $Re^{9/4}$, où Re est le nombre de Reynolds basé sur la longueur intégrale L , et le coût associé varie comme le cube du nombre de Reynolds $Re = U \cdot L / \nu$ de l’écoulement, où U est la vitesse moyenne de l’écoulement. Ainsi, compte tenu des capacités informatiques actuelles, les écoulements complexes à grand nombre de Reynolds ne peuvent pas être traités par la DNS.

Cependant, les calculs DNS restent une base de données très fiable pour la comparaison, et la validation des calculs utilisant des modèles de turbulence. On peut par exemple citer les DNS de Kim et al. [1] et Hoyas et al. [2] réalisées respectivement à $Re_\tau = 180$ et $Re_\tau = 2000$ dans des canaux plans. Le nombre de Reynolds $Re_\tau (= u_\tau H / \nu)$ est basé sur la vitesse de frottement u_τ et la hauteur H du canal. On trouve aussi, dans la littérature, plusieurs simulations numériques directes réalisées dans des conduites à section carrée, configuration géométrique retenue pour ce travail. On peut citer les DNS suivantes, dont la simulation concerne des écoulements incompressibles avec un nombre de Reynolds $Re_b (= U_b H / \nu)$ en fonction de la vitesse débitante U_b et un nombre de Reynolds en fonction de la vitesse de frottement : la DNS de Gavrilakis [3] à $Re_b = 4410$ et $Re_\tau = 300$, la DNS de Huser et Biringen [4] à $Re_b = 10320$ et $Re_\tau = 600$ et la DNS de Joung et al. à $Re_b = 4440$ [5].

L’approche DNS étant limitée à des écoulements simples, on peut envisager d’appliquer un filtrage fréquentiel aux échelles de turbulence afin de ne résoudre directement que les grandes échelles.

1.2.2 Simulation des grandes échelles – LES

La simulation des grandes échelles (LES), à l'inverse de la DNS qui représente sans modélisation l'ensemble des tourbillons présents dans l'écoulement, repose sur une séparation d'échelles. En effet, la LES ne résout que les échelles de l'écoulement supérieur à une taille arbitrairement fixée. Les plus petites structures (supposées isotropes) sont prises en compte au moyen d'un modèle statistique appelé modèle de sous-maille (cf. figure 1.1). La qualité des résultats est donc conditionnée par celle du modèle sous-maille. On note toutefois que le modèle de sous-maille le plus utilisé est celui proposé par Smagorinsky en 1963 [6]. Une description assez complète de l'ensemble des modèles existants est présentée dans l'ouvrage de Pierre Sagaut [7].

L'approche LES permet à l'heure actuelle d'effectuer des calculs sur des géométries complexes relativement réalistes à des nombres de Reynolds entre 1000 et 50000 environ. Mais cette approche s'avère trop coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi plusieurs travaux visent à diminuer le coût de cette approche. Ces travaux portent sur : l'optimisation des méthodes numériques (Schéma spatiale hybride, intégration temporelle implicite, maillage adaptatif, ...), le développement des modèles physiques, l'extension vers le couplage RANS/LES, la modélisation des conditions aux limites, ...

Il n'en reste pas moins que l'approche LES, en l'état actuel des méthodes, des modèles et des supercalculateurs, constitue un outil important aux techniques de mesures qui a, par exemple, permis une meilleure compréhension de certains phénomènes aérodynamiques fondamentaux. De nombreuses simulations des grandes échelles ont été effectuées dans des conduites à section carrée. On peut citer les travaux de Madabhushi et Vanka [8] et de Xu [9].

1.2.3 Simulation des équations de Navier – Stokes moyennées – RANS

La simulation moyennée est aujourd'hui l'approche la plus utilisée dans la plupart des calculs industriels. L'approche RANS consiste à ne simuler que l'écoulement moyen en temps. L'ensemble des structures de la turbulence est modélisé, comme schématisé sur la figure 1.1.

Les deux types de moyenne possibles sont :

- La moyenne d'ensemble ou stochastique sur N réalisations d'un même écoulement d'une grandeur φ fonction aléatoire en espace et en temps, prenant la valeur φ_m pour la

réalisation m :

$$\overline{\varphi(x_i, t)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \varphi_m(x_i, t) \quad (1.3)$$

- La moyenne temporelle, où l'on effectue une expérience pendant un temps très long et on moyenne les données obtenues :

$$\overline{\varphi(x)} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi(x, t) dt \quad (1.4)$$

Dans le paragraphe suivant, on décrit la démarche d'obtention des équations de Navier-Stokes de la simulation moyennée.

1.3 Equations de la simulation moyennée

1.3.1 Notion de moyenne de Reynolds

Le traitement de l'écoulement turbulent par des outils statistiques fut introduit par O. Reynolds en 1895 [10]. La méthode consiste à décomposer toute variable de l'écoulement $\varphi(\vec{x}, t)$ en une partie moyennée $\overline{\varphi(\vec{x}, t)}$ et une partie fluctuante $\varphi'(\vec{x}, t)$ selon l'équation (1.5) suivante :

$$\varphi(\vec{x}, t) = \overline{\varphi(\vec{x}, t)} + \varphi'(\vec{x}, t) \quad (1.5)$$

où la fluctuation φ' peut être déterminée en retranchant $\overline{\varphi}$ et φ , et la moyenne de la fluctuation est nulle ($\overline{\varphi'} = 0$).

Cette description statistique est adaptée aux écoulements stationnaires, dont les propriétés sont indépendantes du temps, ou du moins évoluent beaucoup plus rapidement en espace qu'en temps. Ainsi, la période d'intégration T de l'équation (1.4) doit tendre vers l'infini. Mais on ne dispose jamais de l'historique complet des évolutions d'une variable. On se contente donc d'effectuer la moyenne sur une période T suffisamment grande par rapport au temps caractéristique des fluctuations de φ .

On rappelle ci-dessous quelques propriétés de la moyenne de Reynolds. Si χ désigne le temps ou l'espace, $\zeta = \overline{\zeta} + \zeta'$ une autre variable de l'écoulement, et λ un scalaire quelconque, la moyenne de Reynolds vérifie :

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \chi} \quad (1.6)$$

$$\overline{\lambda \varphi + \zeta} = \lambda \overline{\varphi} + \overline{\zeta} \quad (1.7)$$

$$\overline{\varphi \zeta} = \overline{\varphi} \overline{\zeta} \quad (1.8)$$

De plus, il est clair que la moyenne du produit est définie par l'équation (1.9) suivante :

$$\overline{\varphi \zeta} = \overline{\varphi} \overline{\zeta} + \overline{\varphi' \zeta'} \quad (1.9)$$

1.3.2 Equations du mouvement moyen

On notera dans la suite les décompositions de Reynolds suivantes:

$$\begin{aligned} u(\vec{x}, t) &= U(\vec{x}, t) + u'(\vec{x}, t) \\ p(\vec{x}, t) &= P(\vec{x}, t) + p'(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

En introduisant ces décompositions de Reynolds dans l'équation de continuité (1.1) et les équations de quantité de mouvement (1.2) et en prenant la moyenne d'ensemble on obtient les équations de Navier–Stokes moyennées suivantes :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (1.12)$$

La condition d'incompressibilité sur les vitesses fluctuantes implique que $\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$.

Ainsi l'équation (1.12) devient:

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (1.13)$$

Le terme $\frac{D(\cdot)}{Dt}$ désigne la dérivée matérielle qui s'écrit :

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + U_j \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_j} \quad (1.14)$$

Les équations du champ moyen de vitesse ne diffèrent des équations instantanées que par l'apparition des corrélations doubles des fluctuations de vitesses. Ce nouveau terme inconnu $\overline{u_i u_j}$ (noté dans la suite R_{ij}) est le tenseur des contraintes de Reynolds, qui introduit six inconnues supplémentaires. Notons alors que le système d'équations à résoudre n'est plus fermé.

1.4 Modélisation statistique de la turbulence

Il s'agit maintenant de fermer le système d'équation (1.11)–(1.13) en introduisant des modèles de turbulences pour les inconnues supplémentaires. Il convient alors de choisir judicieusement les schémas de fermeture pour qu'ils réintroduisent les informations perdues lors du passage à la moyenne des équations de Navier-Stokes.

1.4.1 Classification des modèles de turbulence

On distingue généralement deux grandes classes de modèles :

- Les modèles de premier ordre ou modèles à viscosité turbulente basés sur l'hypothèse de Boussinesq qui consiste à modéliser directement les tensions de Reynolds à l'aide d'une viscosité turbulente. Ces modèles de premier ordre se classifient selon le nombre d'équations de fermeture supplémentaires :
 - modèle à zéro équations (l , longueur de mélange)
 - modèle à une équation (k , énergie cinétique turbulente)
 - modèle à deux équations ($k - \varepsilon$, $k - \omega$, $k - l$, ...)
- Dans les fermetures au second ordre, les tensions de Reynolds font l'objet d'équations à résoudre, au même titre que celles du champ moyen. Ces fermetures conviennent mieux, pour être plus réalistes, aux écoulements complexes avec tourbillons, à forte anisotropie, et permettent de ne pas surestimer l'énergie cinétique dans le cas de forts cisaillements.

Les différences entre les modèles de turbulence résident dans leurs capacités à reproduire fidèlement le comportement des écoulements turbulents sur différentes

configurations, dans les difficultés liées à leur implémentation et leur résolution dans des codes de calcul. Aucun modèle n'est satisfaisant pour tous les types de configurations. Le choix du modèle sera donc subordonné au type d'information que l'on souhaite obtenir à partir de la simulation numérique. La figure 1.2 montre que les informations recherchées dépendent du type de modèle employé. Aussi, le choix du modèle sera fonction de la capacité des méthodes numériques à le supporter.

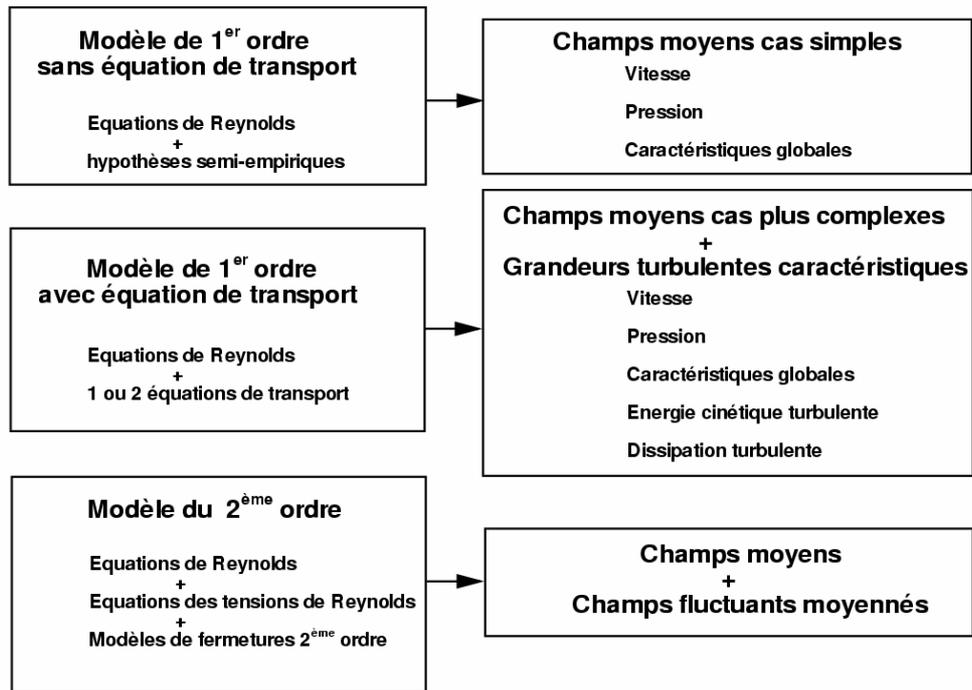


Figure 1.2 : Type d'informations obtenues suivant le modèle employé.

On représente sur la figure 1.3 la position occupée par les modèles de turbulence dans la hiérarchie des systèmes de fermeture en un point quand on prend en compte le nombre d'équations aux dérivées partielles à résoudre et le nombre de classes d'écoulements que l'on peut prédire correctement sans calibrer les coefficients du modèle [11].

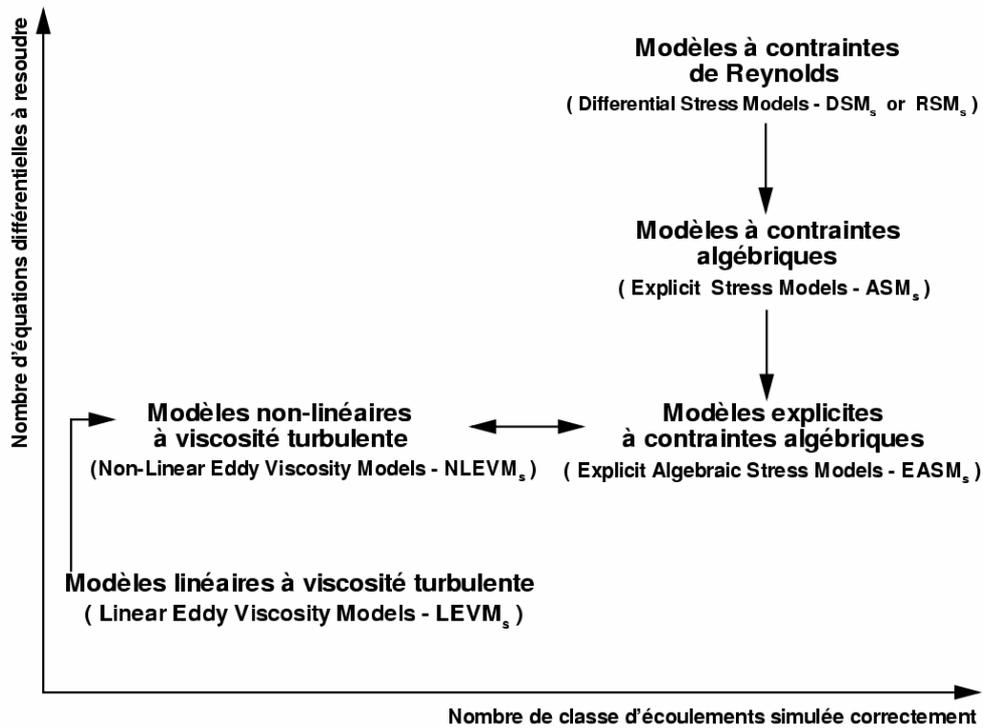


Figure 1.3 : Hiérarchie des modèles de fermeture en un point.

1.4.2 Modélisation à concept de viscosité turbulente

Par similitude avec la loi de comportement des fluides visqueux reliant le tenseur des contraintes visqueuses au champ de vitesse, Boussinesq [12] a proposé de relier le tenseur de Reynolds au champ moyen de vitesse. Il obtient :

$$R_{ij} = -2\nu_t S_{ij} \tag{1.15}$$

où S_{ij} est le taux de déformation moyen défini par :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{1.16}$$

Le but de la modélisation de la turbulence dans ce cadre est d'avoir une relation entre ν_t et les autres inconnues du problème afin de fermer le système d'équations à résoudre. Mais, exprimée telle quelle, cette relation fournit une énergie cinétique turbulente nulle. En effet, si on prend la trace de ce tenseur et compte tenu de l'incompressibilité du champ moyen on obtient $k = 0$. La solution à ce problème est d'utiliser la relation suivante :

$$R_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij} \quad (1.17)$$

On remarquera que cette dernière relation implique la colinéarité des directions principales du tenseur des vitesses de déformation moyennes et du tenseur d'anisotropie turbulent $b_{ij} (= R_{ij} - 2/3k - \delta_{ij}/3)$, ν_t étant un scalaire ce qui n'est pas toujours vérifié en général.

En substituant l'équation (1.17) dans l'équation (1.13), on obtient :

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.18)$$

où P^* est la pression modifiée :

$$P^* = p + \frac{2}{3}k \quad (1.19)$$

On note que la pression résolue n'est pas la vraie pression moyenne mais la pression modifiée P^* .

On dispose maintenant d'une nouvelle inconnue ν_t que l'on peut modéliser par diverses méthodes :

- **Modèles à zéro équation** : En générale, cette méthode consiste à relier les flux turbulents et les grandeurs moyennes sans introduire de nouvelles équations. On peut, par exemple, relier linéairement pour un écoulement cisailé simple, les tensions de Reynolds et le gradient de vitesse, le coefficient de proportionnalité étant la viscosité turbulente. On peut citer les schémas dits de longueur de mélange où ν_t est obtenu directement par une expression algébrique en fonction d'une vitesse caractéristique et d'une longueur caractéristique :

$$\nu_t = \kappa u_\tau l \quad (1.20)$$

où u_τ est la vitesse de friction qui peut être définie par :

$$u_\tau^2 = \nu \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (1.21)$$

La longueur de mélange l est donnée par la loi de Van Driest [13] :

$$l = \kappa y \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right) \quad (1.22)$$

où $\kappa (=0.41)$ est la constante de Von Karman, $A^+ (=26)$ une constante, et $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$ la distance en unité de paroi.

- **Modèles à une équation** : Ces modèles sont simples à mettre en œuvre. En effet, ν_t peut être directement obtenu grâce à la formulation de Prandtl – Kolmogoroff :

$$\nu_t = C_\mu^1 l \sqrt{k} \quad (1.23)$$

On écrit alors une équation supplémentaire pour obtenir k . Cette dernière peut s'écrire comme suit :

$$\frac{Dk}{Dt} = -R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_k \frac{k^{3/2}}{l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (1.24)$$

Les constantes C_μ^1 , C_k et σ_k sont déterminées empiriquement à partir des données de quelques expériences physiques académiques judicieusement choisies.

Bien que ces modèles aient pour avantages d'être assez simples et de prendre (un peu) en compte l'histoire de la turbulence, leur principale difficulté réside dans la détermination d'une loi pour les échelles de longueur, surtout pour des écoulements complexes inconnus a priori. Signalons néanmoins les applications de ce type de modèles développées dans le cas des écoulements compressibles par Rubesin et al. [14].

- **Modèle à deux équations**: Dans ces modèles de fermeture à deux équations, la première équation est généralement l'équation de l'énergie cinétique de turbulence. La deuxième équation peut porter sur diverses grandeurs caractéristiques et il existe une grande variété de formulations :

- **Le modèle $k - \varepsilon$** :

Le modèle $k - \varepsilon$ a été développé à l'origine par Jones et Launder [15], pour prévoir le phénomène de relaminarisation des couches limites turbulentes en présence de gradients de

pression favorables. C'est le modèle qui a été le plus largement testé et utilisé, non seulement dans des études à caractère théoriques, mais également dans des grands codes industriels en CFD (Computational Fluid Dynamics). Pour ce modèle, la viscosité turbulente ν_t est exprimée en fonction de k et de son taux de dissipation de la turbulence ε :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (1.25)$$

avec

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \quad (1.26)$$

On introduit alors deux équations supplémentaires pour le transport de k et de ε . Celles-ci peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{Dk}{Dt} = -R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (1.27)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon 1} \nu_t \frac{\partial U_i}{\partial x_j} 2S_{ij} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (1.28)$$

On observe l'apparition de cinq constantes C_μ , σ_k , $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$ et σ_ε . Ces constantes peuvent être calées sur des considérations théoriques (cascade de Kolmogorov), sur des comparaisons avec des données expérimentales ou en faisant varier ces constantes jusqu'à obtenir un écoulement moyen satisfaisant. Les valeurs des constantes figurant dans le tableau 1.1 sont qualifiées de standards. Elles ont été fixées par Jones et Launder [15, 16] :

Table 1.1 : Constantes des équations de transport proposées par Launder.

C_μ	σ_k	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_ε
0.09	1.0	1.44	1.92	1.30

Dans sa version de base, le modèle $k - \varepsilon$ donne en général de bons résultats dans des écoulements simples mais ne peut reproduire de façon satisfaisante les caractéristiques des écoulements complexes (zones de re-circulation, écoulements secondaires, ...). C'est pour cela que d'autres auteurs tels que Yakhot et al. [17], Rodi [18], Pope [19] et Hanjalic et

Launder [20] ont cherché à re-normaliser ces constantes de manière à ce que certains principes de la physique ne soient pas violés, notamment le fait que k doit toujours rester positive. On parle ainsi de modèle $k - \varepsilon$ RNG (Re-Normalization Group).

- Le modèle $k - \omega$:

Les équations de transport de k et $\omega (= \varepsilon / k)$ proposées par Wilcox et Rubesin [21, 22] peuvent s'écrire :

$$\frac{Dk}{Dt} = -R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (1.29)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\alpha \frac{\omega}{k} R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \quad (1.30)$$

où $\nu_t = k / \omega$ et les constantes sont définies par :

$\alpha = 5/9$	$\beta = 3/40$	$\beta^* = 0.09$	$\sigma^* = 0.5$	$\sigma = 0.5$
----------------	----------------	------------------	------------------	----------------

Afin de combiner les avantages des modèles $k - \varepsilon$ et ceux de Wilcox, Menter [23, 24] a proposé deux modèles. Le premier modèle, dit BSL, utilise le modèle $k - \omega$ de Wilcox dans la zone interne de la couche limite, et se raccorde au modèle $k - \varepsilon$ dans la zone externe et dans les écoulements libres. Le second, dit « SST » (Shear Stress Transport Model), introduit une modification de l'expression de la viscosité de la turbulence qui tient compte de l'influence du transport de la tension de cisaillement turbulent.

Notons également l'existence des modèles $k - kl$ et $k - l$ de Smith [25, 26].

1.4.3 Modélisation au second ordre

Dans toute la suite et pour plus de clarté, l'exposant « ' » sera omis des quantités fluctuantes.

1.4.3.1 Equation de transport des contraintes de Reynolds

En soustrayant aux équations de quantité de mouvement instantané les équations de quantité de mouvement moyen, on obtient les équations d'évolution du mouvement fluctuant, qui s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.31)$$

$$\frac{Du_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - R_{ij}) - \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (1.32)$$

A partir de ces équations, on déduit l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds $R_{ij} (= \overline{u_i u_j})$. Cette dernière peut s'écrire, dans le cas d'une turbulence incompressible sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{DR_{ij}}{Dt} = & - \left[R_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + R_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \frac{p}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} - \nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \end{aligned} \quad (1.33)$$

et sous la forme compacte elle devient :

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + d_{ij} + d_{ij}^v \quad (1.34)$$

où P_{ij} , Π_{ij} , ε_{ij} , d_{ij} et d_{ij}^v désignent respectivement les tenseurs de production par les gradients de vitesse moyenne, de redistribution par les corrélations pression-déformation, de dissipation, de diffusion turbulente et de diffusion visqueuse. Ils s'écrivent :

$$P_{ij} = - \left[R_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + R_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right] \quad (1.35)$$

$$\Pi_{ij} = \frac{p}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \quad (1.36)$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \quad (1.37)$$

$$d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{u_i u_j u_k} + \frac{p}{\rho} (\delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j) \right] \quad (1.38)$$

$$d_{ij}^v = \nu \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial x_k^2} \quad (1.39)$$

Dans le cadre d'une fermeture au second ordre, les termes de production P_{ij} et de diffusion visqueuse d_{ij}^v sont directement liés aux fonctions inconnues principales du problème et ne nécessitent donc pas de modélisation. Cependant, les termes P_{ij} jouent un rôle important, essentiellement dans la représentation des divers mécanismes de création des contraintes turbulentes. Les quatre autres termes sont à schématiser.

1.4.3.1.1 Termes de diffusion turbulents d_{ij}

Plusieurs études consacrées à la modélisation de la corrélation triple se sont traduites par une grande variété de propositions. Parmi elles, on peut citer l'équation proposée par Daly et Harlow [27]. Cette dernière relie les corrélations triples aux corrélations doubles et est défini par :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s^1 \frac{k}{\varepsilon} R_{kl} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l} \quad (1.40)$$

Cependant, cette approche ne respecte pas la symétrie des indices (i, j, k) du tenseur des corrélations triples. Ainsi, pour respecter cette symétrie Hanjalic et Launder [28] ont proposé la relation suivante :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s^1 \frac{k}{\varepsilon} \left[R_{il} \frac{\partial R_{jk}}{\partial x_l} + R_{jl} \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_l} + R_{kl} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l} \right] \quad (1.41)$$

La valeur du coefficient C_s^1 , généralement retenue, a été fixée par Launder et al. [29] et vaut 0.11.

Pour modéliser le terme de corrélation vitesse – pression $\overline{p u_i}$, Lumley [30] a proposé de ramener ce dernier au calcul d'une corrélation triple. En s'appuyant sur une pseudo – relation de Bernoulli en écoulement turbulent, il obtient la relation suivante :

$$\overline{p u_i} = -\frac{2}{5} \overline{u_i u_j u_k} \quad (1.42)$$

et propose de conserver la formulation initiale du terme de Daly et Harlow (1.40) qui a l'avantage d'être plus simple que l'équation (1.41), au moins sur le plan numérique.

1.4.3.1.2 Corrélation pression – déformation

Le terme de redistribution par corrélation pression – taux de déformation joue un rôle central dans la modélisation au second ordre. Un bon traitement de ce terme est l'une des clefs assurant une bonne représentation d'un écoulement turbulent.

Le traitement du tenseur des corrélations pression – déformation s'inspire de la forme de la solution de Poisson pour la fluctuation de pression. Cette équation est obtenue en prenant la divergence de l'équation de la quantité de mouvement du mouvement fluctuant et s'écrit :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} = -2 \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} - \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (u_l u_m - R_{lm}) \quad (1.43)$$

En intégrant, sur tout le domaine de calcul, cette équation on obtient:

$$\begin{aligned} p = & -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} 2\rho \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{dv}{r} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (u_l u_m - R_{lm}) \frac{dv}{r} \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial s} 2\rho \frac{\partial U_l}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_l} \frac{ds}{r} - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial s} \rho \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} (u_l u_m - R_{lm}) \frac{ds}{r} \end{aligned} \quad (1.44)$$

où Ω désigne le volume total de l'écoulement, ∂s sa frontière et r la distance qui separe deux points courants d'intégration. L'expression du tenseur des corrélations pression – déformation est obtenue en multipliant cette dernière équation (1.44) par le taux de déformation du mouvement fluctuant et en prenant ensuite la moyenne. On obtient sous forme compacte l'expression suivante :

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^r + \Pi_{ij}^s + \Pi_{ij}^w \quad (1.45)$$

où le terme Π_{ij}^r désigne la contribution volumique linéaire, proportionnelle au gradient de vitesse moyen, c'est le terme rapide. Le terme Π_{ij}^s représente la contribution volumique non – linéaire, nulle dans un écoulement homogène. Ce terme porte les noms de 'Rotta' [31] à cause de son auteur ou, de 'terme lent' et de 'terme quadratique' à cause de sa nature. Le

terme Π_{ij}^w est le terme de bord qui traduit le rôle de la frontière du domaine sur le champ de pression (qualifié de terme d'écho de paroi). Tous ces termes doivent être modélisés.

Pour traiter le terme Π_{ij}^r , deux modèles ont été proposés dans la littérature. Le premier, qualifié de modèle « Quasi Isotrope » (Q.I), a été proposé par Launder et al. [29]. Il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Pi_{ij}^r = \alpha \left[IP_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right] + \beta \left[Q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right] + \gamma k \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \quad (1.46)$$

où

$$Q_{ij} = - \left(R_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + R_{jk} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right), \quad P_{kk} = -R_{mi} \frac{\partial U_m}{\partial x_i}$$

et où les constantes α , β et γ sont définies par :

$$\alpha = -\frac{C_1 + 8}{11}, \quad \beta = -\frac{8C_1 - 2}{11}, \quad \gamma = -\frac{30C_1 - 2}{55}$$

La constante C_1 est une constante numérique dont la valeur est fixée en comparant les résultats expérimentaux avec ceux obtenus par la résolution de l'ensemble des équations de transport.

Le deuxième, qualifié de modèle d'« Isotropisation de la production », est l'œuvre de Gibson et al. [32, 33] et de Naot et al. [34]. Il peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\Pi_{ij}^r = -C_1 \left[P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right] \quad (1.47)$$

où la C_1 doit être comprise entre 0.3 et 0.6.

L'expression la plus simple pour approcher le terme Π_{ij}^s a été proposée par Rotta [31]. Elle s'écrit :

$$\Pi_{ij}^s = -C_2 \varepsilon b_{ij} \quad (1.48)$$

où C_2 est la constante de Rotta comprise entre 3.0 et 3.6 et b_{ij} est le tenseur d'anisotropie des contraintes du tenseur de Reynolds défini par :

$$b_{ij} = \frac{1}{2k} \left[R_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \quad (1.49)$$

Afin d'avoir une constante C_2 unique, plusieurs auteurs, tels que Lumley et Newman [35], ont proposé des modèles dont la formulation générale peut se mettre sous la forme fonctionnelle suivante :

$$\Pi_{ij}^s = \varepsilon \left[\beta_1^s b_{ij} + \beta_2^s (b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II_b \delta_{ij}) \right] \quad (1.50)$$

où II_b est le second invariant du tenseur d'anisotropie. Notons qu'il existe un autre invariant appelé troisième invariant, noté III_b . Ces deux invariants sont définis comme suit :

$$II_b = -\frac{b_{ij} b_{ji}}{2}, \quad III_b = \frac{b_{ij} b_{jk} b_{ki}}{3} \quad (1.51)$$

Les coefficients β_1^s et β_2^s de l'équation (1.50) peuvent dépendre de II_b , III_b , du nombre de Reynolds turbulent Re_t et des taux de déformation S_{ij} et de rotation Ω_{ij} du mouvement moyen. Rappelons que ces taux de déformation et de rotation moyen sont définis par :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.52)$$

La schématisation du terme Π_{ij}^w est principalement due à Launder, Reece et Rodi [29]. Ces derniers ont proposé une expression qui s'inspire de la modélisation de l'intégrale de volume, c'est à dire comprenant une partie rapide et une partie quadratique, associées à un rapport des échelles l/\underline{x} destiné à annuler cet effet de paroi lorsqu'on s'éloigne de cette paroi. Le modèle final adopté par Hanjalic et Launder [36] peut s'écrire comme suit :

$$\Pi_{ij}^w = \left[0.125 \frac{\varepsilon}{k} (R_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k) + 0.15 (P_{ij} - Q_{ij}) \right] \frac{k^{3/2}}{\varepsilon \underline{x}} \quad (1.53)$$

où \underline{x} représente la distance normale par rapport à la paroi et l est une échelle de longueur caractéristique de la viscosité turbulente de type $l = k^{3/2} / \varepsilon$. Les valeurs numériques de cette expression proviennent des résultats expérimentaux existants. Elles peuvent donc varier en fonction du choix de la position où les données ont été choisies.

1.4.3.1.3 Termes de destruction des contraintes turbulentes

Le terme de destruction des contraintes turbulente est assuré par le tenseur du taux de dissipation. Ce tenseur est souvent modélisé par sa forme isotrope, en se basant, pour des écoulements à grands nombres de Reynolds, sur l'isotropie locale des petites structures, responsables des mécanismes dissipatifs. Ainsi on adopte comme schéma :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (1.54)$$

où ε est le taux de dissipation. Mais, lorsque le nombre de Reynolds diminue, les structures porteuses d'énergie et les mouvements dissipatifs tendent à se chevaucher et ne sont plus aussi distinctes. On adopte dans ce cas l'approximation proposée par Rotta [31] :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{R_{ij}}{2k} \varepsilon \quad (1.55)$$

Lumley [30] introduit dans cette dernière équation une fonction de pondération qui tient compte de l'état de la turbulence. Il obtient la formulation générale suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \left[(1 - f_s) \delta_{ij} + \frac{R_{ij}}{\frac{2}{3}k} f_s \right] \quad (1.56)$$

La fonction de pondération f_s doit, selon Hanjalic et Launder [36], satisfaire aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} f_s &= (1.0 + 0.10 R_{et})^{-1} \\ \left. \begin{array}{l} R_{et} \rightarrow 0 \\ R_{et} \rightarrow \infty \end{array} \right\} &\Rightarrow \begin{array}{l} f_s \rightarrow 1 \\ f_s \rightarrow 0 \end{array} \\ R_{et} &= k^2 / (\nu \varepsilon) \end{aligned}$$

Malgré toutes ces propositions, l'imprécision dans la prédétermination des contraintes de Reynolds près des parois provient principalement de la difficulté d'appréhender correctement les termes de destruction visqueuses de ces contraintes.

Le chapitre suivant présente les modèles non – linéaires à contraintes algébriques, qui sont des simplifications les plus courantes des fermetures du second ordre. Ces modèles reposent sur des approximations fortes et constituent une alternative intéressante à la résolution complète des équations de transport du tenseur de Reynolds.

CHAPITRE 2

MODÈLES NON-LINÉAIRES À CONTRAINTES ALGÈBRIQUES

2.1 Relations constitutives et turbulence

Les relations constitutives sont des représentations approchées des équations d'évolution des contraintes de Reynolds. Ces contraintes y sont exprimées en fonction des quantités connues de l'écoulement moyen (ou mouvement turbulent) et des grandeurs turbulentes tels que l'énergie cinétique et le taux de dissipation turbulent. Pour établir ces relations constitutives, la théorie des invariants en mécanique des milieux continus est utilisée. C'est Lumley, en 1970 [37], qui fut le premier à discuter de la possibilité d'appliquer cette notion aux corrélations turbulentes.

2.1.1 Représentation générale du tenseur des contraintes de Reynolds

Plusieurs généralisations du schéma linéaire de Boussinesq ont été obtenues par extension du deuxième terme qui représente le taux de déformation de l'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** La formulation générique de cette représentation peut s'écrire :

$$R_{ij} = f_{ij}(k, \varepsilon, U_{m,n}) \quad (2.1)$$

où $U_{m,n} = \frac{\partial U_m}{\partial x_n}$ et f_{ij} est une fonctionnelle tensorielle isotrope qui est fonction d'arguments scalaires et des gradients de vitesse. En tenant compte du caractère symétrique du tenseur R_{ij} et en regroupant les arguments comme l'impose l'analyse dimensionnelle, la relation précédente peut s'écrire comme suit :

$$\frac{R_{ij}}{2k} = f_{ij}\left(\frac{k}{\varepsilon} U_{m,n}\right) \quad (2.2)$$

En introduisant les taux de déformation S_{ij} et de rotation Ω_{ij} du mouvement moyen dans cette équation, on obtient :

$$\frac{R_{ij}}{2k} = f_{ij}\left(\frac{k}{\varepsilon} \bar{S}_{mn}, \frac{k}{\varepsilon} \bar{\Omega}_{mn}\right) \quad (2.3)$$

où $\bar{S}_{mn} = \frac{k}{\varepsilon} S_{mn}$ et $\bar{\Omega}_{mn} = \frac{k}{\varepsilon} \Omega_{mn}$ sont respectivement les tenseurs adimensionnels des taux de déformation et de rotation du mouvement moyen.

En 1975, Pope [38] a proposé d'utiliser onze tenseurs $(T^{(0)}, T^{(1)}, \dots, T^{(10)})$ pour former une relation explicite cohérente. Etant donné que $b_{ij} = b_{ij}(S_{mn}, \Omega_{mn})$ et à l'aide du théorème de Cayley–Hamilton, le nombre des invariants indépendants et le nombre des tenseurs linéairement indépendants pouvant être formés avec S_{mn} et Ω_{mn} est fini. En effet, le tenseur d'anisotropie b_{ij} est symétrique et de trace nulle. Alors, la fonctionnelle $R_{ij}/2k$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{R_{ij}}{2k} = \sum_{m=0}^{10} G_m T_{ij}^{(m)} \quad (2.4)$$

où les termes G_m sont des coefficients scalaires à déterminer. Les onze tenseurs $T^{(m)}$ qui forment la base fonctionnelle sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} T^{(0)} &= Id \\ T^{(1)} &= \bar{S} & T^{(2)} &= \bar{S}\bar{\Omega} - \bar{\Omega}\bar{S} \\ T^{(3)} &= \bar{S}^2 - \frac{1}{3}\{\bar{S}^2\}Id & T^{(4)} &= \bar{\Omega}^2 - \frac{1}{3}\{\bar{\Omega}^2\}Id \\ T^{(5)} &= \bar{\Omega}\bar{S}^2 - \bar{S}^2\bar{\Omega} & T^{(6)} &= \bar{S}\bar{\Omega}^2 + \bar{\Omega}^2\bar{S} - \frac{2}{3}\{\bar{S}\bar{\Omega}^2\}Id \\ T^{(7)} &= \bar{\Omega}\bar{S}\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}^2\bar{S}\bar{\Omega} & T^{(8)} &= \bar{S}\bar{\Omega}\bar{S}^2 - \bar{S}^2\bar{\Omega}\bar{S} \\ T^{(9)} &= \bar{\Omega}^2\bar{S}^2 + \bar{S}^2\bar{\Omega}^2 - \frac{2}{3}\{\bar{S}^2\bar{\Omega}^2\}Id & T^{(10)} &= \bar{\Omega}\bar{S}^2\bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}^2\bar{S}^2\bar{\Omega} \end{aligned} \quad (2.5)$$

où l'opérateur $\{\cdot\}$ désigne la trace.

Si cette brève analyse fonctionnelle a permis d'obtenir la forme généralisée du tenseur des contraintes de Reynolds, il reste à déterminer les dix coefficients de développement (G_1, \dots, G_{10}) . Le premier coefficient G_0 est généralement fixé à $1/3$. La détermination de ces coefficients s'appuie principalement sur deux méthodologies. La première est basée sur des calibrages avec des données expérimentales ou numériques et des contraintes physiques. Dans la seconde, les coefficients sont dérivés mathématiquement à partir des équations différentielles complètes des contraintes de Reynolds. Ici, ces coefficients de développement G_1, \dots, G_{10} sont déterminés à la sous-section 2.2.2.1.

2.2 Développement des modèles algébriques

Dans cette sous section, on passe brièvement en revue les différentes techniques de développement des modèles algébriques explicites non-linéaires. Mais auparavant, on présente l'équation de transport du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds b_{ij} .

2.2.1 Equation d'évolution du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds

Le point de départ pour le développement des modèles algébriques est la modélisation de l'équation de transport du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds. Cette équation d'évolution peut s'écrire comme suit :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = \frac{1}{2k} [P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}] - \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{P}{\varepsilon} - 1 \right) \left[b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \quad (2.6)$$

On rappelle que $P_{ij} (= -R_{ik}U_{jk} - R_{jk}U_{ik})$ est le terme de production, Π_{ij} le terme des corrélations pression-déformation, et $P (= -R_{mm}S_{mm})$ le terme de production d'énergie cinétique turbulente. En explicitant la production d'énergie cinétique turbulente, cette dernière équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{Db_{ij}}{Dt} = & -\frac{2}{3} S_{ij} + 2\{bS\}b_{ij} + \frac{k}{\varepsilon} b_{ij} \\ & - \left[b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}\{bS\}\delta_{ij} \right] - \left[\Omega_{ik}b_{jk} + \Omega_{jk}b_{ik} \right] + \frac{1}{2k} \Pi_{ij} \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2.2 Technique de Pope

L'obtention d'un modèle pour le tenseur de Reynolds repose sur des hypothèses physiques. Parmi ces hypothèses, on peut citer la négligeabilité des phénomènes de transport devant les autres mécanismes mis en jeu. Le principe de ce calcul, initialement exposé par Pope [38] et repris par Gatski et Speziale [39] dans le cas tridimensionnel, est brièvement rappelé ici.

Dans la dérivation des modèles algébriques, on s'appuie principalement sur l'hypothèse de Rodi [40]. Elle peut s'écrire comme suit :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = 0 \quad (2.8)$$

Cette hypothèse signifie que la turbulence a atteint un état d'équilibre. En appliquant cette hypothèse l'équation (2.6) peut s'écrire comme suit :

$$\left[P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} \right] = \frac{R_{ij}}{k} [P - \varepsilon] \quad (2.9)$$

Cette dernière équation suppose que l'anisotropie du transport turbulent et de diffusion visqueuse est proportionnelle à l'anisotropie des contraintes de Reynolds. Autrement dit, cette condition suppose que l'équilibre convection – diffusion du tenseur de Reynolds s'effectue de façon similaire à celui de l'énergie cinétique turbulente.

Avec l'hypothèse de Rodi, l'expression algébrique implicite du tenseur d'anisotropie ou relation algébrique de Rodi [40] peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} b_{ij} \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{P}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \beta_1^s - 1 \right) = & -(\beta_3 - \frac{2}{3}) S_{ij} \\ & + (\beta_4 - 1) \left[b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ & + (\beta_6 - 1) \left[b_{ik} \Omega_{jk} + b_{jk} \Omega_{kj} \right] \\ & + \beta_7 \left[b_{ik}^2 \Omega_{jk} + b_{jk}^2 \Omega_{ik} \right] \\ & + \beta_8 \left[b_{ik} \Omega_{kp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 \Omega_{pk} b_{jp} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

où les coefficients β_1^s , β_3 , β_4 , β_6 , β_7 et β_8 dépendent des invariants du tenseur de l'anisotropie. Rappelons que ces invariants sont définis par :

$$II_b = -\frac{b^2}{2}, \quad III_b = \frac{b^3}{3} \quad (2.11)$$

La résolution numérique de cette équation algébrique implicite est complexe et nécessite des moyens informatiques assez lourds. De plus, l'absence de ces termes peut entraîner des problèmes de stabilité dans la résolution des équations ou une convergence relativement lente. Dans ce cas, l'effort de calcul ne rend pas une telle approche nécessairement avantageuse par rapport à la résolution complète de modèles du second ordre [41]. Pour remédier à ces difficultés, plusieurs modèles algébriques explicites ont été développés. La construction ces derniers repose principalement sur l'exploitation des fonctionnelles présentées précédemment.

2.2.2.1 Technique des invariants

En adimensionnalisant b_{ij} , k et ε , et en se limitant aux termes quadratiques, l'équation implicite (2.10) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$b_{ij}^* = -S_{ij}^* - \left(b_{ik}^* S_{kj}^* + S_{ik}^* b_{kj}^* - \frac{2}{3} b_{mn}^* S_{mn}^* \delta_{ij} \right) + \left(b_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* b_{kj}^* \right) \quad (2.12)$$

où $S_{ij}^* = g\tau(1-\beta_4)S_{ij}$ et $\Omega_{ij}^* = g\tau(1-\beta_6)\Omega_{ij}$ avec $g = 1/(\frac{p}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\beta_1^s - 1)$ et $\tau = \frac{k}{\varepsilon}$.

La solution complète de cette dernière équation est donnée par la théorie des invariants exposée par Spencer [42]. Elle s'écrit :

$$b_{ij}^* = \sum_{\lambda=1}^{10} G_{\lambda} T_{ij}^{(\lambda)} \quad (2.13)$$

avec

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= S^* & T^{(2)} &= S^* \Omega^* - \Omega^* S^* \\ T^{(3)} &= S^{*2} - \frac{1}{3} \{S^{*2}\} Id & T^{(4)} &= \Omega^{*2} - \frac{1}{3} \{\Omega^{*2}\} Id \\ T^{(5)} &= \Omega^* S^{*2} - S^{*2} \Omega^* & T^{(6)} &= S^* \Omega^{*2} + \Omega^{*2} S^* - \frac{2}{3} \{S^* \Omega^{*2}\} Id \\ T^{(7)} &= \Omega^* S^* \Omega^{*2} - \Omega^{*2} S^* \Omega^* & T^{(8)} &= S^* \Omega^{*2} S^{*2} - S^{*2} \Omega^{*2} S^* \\ T^{(9)} &= \Omega^{*2} S^{*2} + S^{*2} \Omega^{*2} - \frac{2}{3} \{S^{*2} \Omega^{*2}\} Id & T^{(10)} &= \Omega^* S^{*2} \Omega^* - \Omega^{*2} S^{*2} \Omega^* \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les dix coefficients du développement (G_1, \dots, G_{10}) sont déterminés en substituant la solution (équation (2.13)) dans l'équation algébrique (2.12). On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{1}{2}(6 - 3\{S^{*2}\} - 21\{\Omega^{*2}\} - 2\{S^{*3}\} + 30\{S^* \Omega^{*2}\}) / D \\ G_2 &= -(3 + 3\{S^{*2}\} - 6\{\Omega^{*2}\} + 2\{S^{*3}\} + 6\{S^* \Omega^{*2}\}) / D \\ G_3 &= (6 - \{S^{*2}\} - 12\{\Omega^{*2}\} - 2\{S^{*3}\} + 6\{S^* \Omega^{*2}\}) / D \\ G_4 &= -3(3\{S^{*2}\} + 2\{S^{*3}\} + 6\{S^* \Omega^{*2}\}) / D \\ G_5 &= G_7 = G_8 = 9 / D, G_6 = -9 / D, G_9 = 18 / D, G_{10} = 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

où

$$\begin{aligned}
 D = & 3 - \frac{7}{2} \{S^{*2}\} + \{S^{*2}\}^2 - \frac{15}{2} \{\Omega^{*2}\} - 8\{S^{*2}\}\{\Omega^{*2}\} + 3\{\Omega^{*2}\}^2 \\
 & - \{S^{*3}\} + \frac{2}{3} \{S^{*2}\}\{S^{*3}\} - 2\{\Omega^{*2}\}\{S^{*3}\} + 21\{S^* \Omega^{*2}\} \\
 & + 24\{S^{*2} \Omega^{*2}\} + 2\{S^*\}\{S^* \Omega^{*2}\} - 6\{\Omega^{*2}\}\{S^* \Omega^{*2}\}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Rappelons que l'opérateur $\{\cdot\}$ désigne la trace.

Les coefficients G_1, \dots, G_{10} de ce modèle dépendent de façon complexe des invariants, et peuvent dans le cas tridimensionnel conduire dans certains cas à des valeurs localement singulières. Afin de résoudre ce problème de singularité, Gatski et Speziale [39] ont approché ces coefficients par une approximation de Padé. Ils obtiennent la relation suivante :

$$b_{ij}^* = -\frac{1}{2k} \alpha \frac{3(1+\eta^2)}{3+\eta^2+6\eta^2\xi^2+6\xi^2} \left[S_{ij}^* + \left(S_{ij}^{*2} - \frac{1}{3} \{S^{*2}\} \delta_{ij} \right) + \Omega_{ik}^* S_{kj}^* - S_{ik}^* \Omega_{kj}^* \right] \tag{2.17}$$

où

$$\eta = (S_{ij}^* S_{ij}^*)^{\frac{1}{2}}, \quad \xi = (\Omega_{ij}^* \Omega_{ij}^*)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \alpha = (\beta_3 - \frac{2}{3}) / (\beta_4 - 1)$$

Cette équation est associée aux équations de transport suivantes:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \tag{2.19}$$

où les coefficients sont définis dans le Tableau 2.1 suivant :

Tableau 2.1 : Coefficients des équations de transport k et ε .

$\beta_1^s = -6.8$	$\beta_3 = 0.18$	$\beta_4 = 0.625$	$\beta_6 = 0.2$	$g = 0.233$
$C_\mu = 0.09$	$\sigma_k = 1.0$	$\sigma_\varepsilon = 1.44$	$C_{\varepsilon 1} = 1.44$	$C_{\varepsilon 2} = 1.83$

Une solution alternative à la résolution de l'équation algébrique implicite de Rodi (Cf. (2.10)) consiste à calculer le tenseur d'anisotropie par une approximation successive.

2.2.2.2 Développement en série de Taylor

La solution de l'équation algébrique de Rodi (2.10) peut être cherchée sous la forme d'une série :

$$b_{ij} = \tau b_{ij}^{(1)} + \tau^2 b_{ij}^{(2)} + \tau^3 b_{ij}^{(3)} + O(\tau^4) \quad (2.20)$$

- Développement polynomial des coefficients

Les coefficients $(\beta_1^s, \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_7, \beta_8)$ de l'équation (2.10) sont développés polynomialement comme suit :

$$\begin{aligned} \beta_1^s &= \beta_{10}^s + \sqrt{F} \beta_{11}^s + II_b \beta_{12}^s + III_b \beta_{13}^s + O(b^4) \\ \beta_1 &= \beta_1^{(1)} \{bS\} + \beta_1^{(2)} \{b^2S\} \\ \beta_j &= \beta_{j0} + \sqrt{-II_b} \beta_{j1} + II_b \beta_{j2} + III_b \beta_{j3} + O(b^4) \quad \text{pour } j = 3, 4, 6, 7, 8 \end{aligned} \quad (2.21)$$

où F est une notation introduite par Lumley et elle est définie par:

$$F = 1 + 9II_b + 27III_b \quad (2.22)$$

et

$$\begin{aligned} \beta_1^{(1)} &= \beta_{10}^{(1)} + \sqrt{-II_b} \beta_{11}^{(1)} + II_b \beta_{12}^{(1)} + III_b \beta_{13}^{(1)} + O(b^4) \\ \beta_1^{(2)} &= \beta_{10}^{(2)} + \sqrt{-II_b} \beta_{11}^{(2)} + II_b \beta_{12}^{(2)} + III_b \beta_{13}^{(2)} + O(b^4) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les invariants II et III , ainsi que F , peuvent être développés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} II_b &= -\frac{1}{2} \tau^2 b_{nn}^{(1)2} + \tau^3 b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(3)} + O(\tau^4) \\ III_b &= \frac{1}{3} \tau^3 b_{nm}^{(3)} + O(\tau^4) \\ F &= 1 - \frac{9}{4} \tau^2 b_{nn}^{(1)2} + \frac{9}{2} \tau^3 [b_{nm}^{(3)} - b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}] + O(\tau^4) \\ \sqrt{F} &= 1 - \frac{9}{2} \tau^2 b_{nn}^{(1)2} + 9\tau^3 [b_{nm}^{(3)} - b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}] + O(\tau^4) \\ \sqrt{-II_b} &= \frac{1}{2} \sqrt{2\tau} \sqrt{b_{nn}^{(1)2}} + \sqrt{2\tau^2} \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(3)}}{\sqrt{b_{pp}^{(1)2}}} + O(\tau^3) \end{aligned} \quad (2.24)$$

- Développement en série de Taylor des coefficients

Les coefficients $(\beta_1^s, \beta_3, \beta_4, \beta_6, \beta_7, \beta_8)$ du modèle (2.10) peuvent être aussi développés en série de Taylor. On obtient :

$$\begin{aligned} \beta_1^s &= (\beta_{10}^s + \beta_{11}^s) \\ &+ \tau^2 \left[-\frac{9}{4} \beta_{11}^s - \frac{1}{2} \beta_{12}^s \right] b_{nn}^{(1)2} \\ &+ \tau^3 \left[\left(\frac{9}{2} \beta_{11}^s + \frac{1}{3} \beta_{13}^s \right) b_{nn}^{(1)3} - \left(\frac{9}{2} \beta_{11}^s + \frac{1}{3} \beta_{12}^s \right) b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)} \right] \\ &+ O(\tau^4) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \tau \left[\beta_{10}^{(1)} \right] b_{nm}^{(1)} S_{mn} \\
 &+ \tau^2 \left[\beta_{10}^{(1)} b_{nm}^{(2)} S_{mn} + \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{11}^{(1)} \right) \sqrt{b_{nm}^{(1)2}} b_{nm}^{(1)} S_{mn} + \beta_{10}^{(2)} b_{nm}^{(1)2} S_{mn} \right] \\
 &+ O(\tau^3)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

et pour $j = 3, 4, 6, 7, 8$

$$\begin{aligned}
 \beta_j &= \beta_{j0} \\
 &+ \tau \left[\frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{j1} \right] \sqrt{b_{nm}^{(1)2}} \\
 &+ \tau^2 \left[\left(-\frac{1}{2} \beta_{j2} \right) b_{nm}^{(1)2} + \left(\frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{j1} \right) \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{pp}^{(1)2}}} \right] \\
 &+ O(\tau^3)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

En posant:

$$\begin{aligned}
 C_{10}^s &= \beta_{10}^s + \beta_{11}^s, \quad C_{12}^s = -\frac{9}{4} \beta_{11}^s - \frac{1}{2} \beta_{12}^s, \quad C_{131}^s = \frac{9}{2} \beta_{11}^s + \frac{1}{3} \beta_{13}^s \\
 C_{132}^s &= -\frac{9}{2} \beta_{11}^s + \frac{1}{3} \beta_{12}^s, \quad C_{10}^{(1)} = \beta_{10}^{(1)}, \quad C_{11}^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{11}^{(1)} \\
 C_{10}^{(2)} &= \beta_{10}^{(2)}, \quad C_{j1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{j1}, \quad C_{j21}^{(1)} = -\frac{1}{2} \beta_{j2}^{(1)}, \quad C_{j22}^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{11}^{(1)}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ces développements deviennent :

$$\beta_1^s = C_{10}^s + \tau^2 C_{12}^s b_{nm}^{(1)2} + \tau^3 \left[C_{131}^s b_{nm}^{(1)3} + C_{132}^s b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)} \right] + O(\tau^4) \tag{2.29}$$

$$\beta_1 = \tau C_{10}^{(1)} b_{nm}^{(1)} S_{mn} + \tau^2 \left[C_{10}^{(1)} b_{nm}^{(2)} S_{mn} + C_{11}^{(1)} \sqrt{b_{nm}^{(1)2}} b_{nm}^{(1)} S_{mn} + C_{10}^{(2)} b_{nm}^{(1)2} S_{mn} \right] + O(\tau^3) \tag{2.30}$$

et pour $j = 3, 4, 6, 7, 8$

$$\beta_j = \beta_{j0} + \tau C_{j1} \sqrt{b_{nm}^{(1)2}} + \tau^2 \left[C_{j21} b_{nm}^{(1)2} + C_{j22} \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{pp}^{(1)2}}} \right] + O(\tau^3) \tag{2.31}$$

- Développement en série Taylor l'équation de transport du tenseur d'anisotropie

Le développement en série de Taylor de l'équation d'évolution du tenseur d'anisotropie peut s'écrire comme suit :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = \frac{Db_{ij}}{Dt} \Big|_0 + \frac{Db_{ij}}{Dt} \Big|_1 \tau + \frac{Db_{ij}}{Dt} \Big|_2 \tau^2 + O(\tau^3) \tag{2.32}$$

où les termes $\frac{Db_{ij}}{Dt} \Big|_0$, $\frac{Db_{ij}}{Dt} \Big|_1$ et $\frac{Db_{ij}}{Dt} \Big|_2$ sont respectivement les développements à l'ordre zéro,

un et deux de la dérivée matérielle $\frac{Db_{ij}}{Dt}$. Ces derniers sont définis comme suit :

$$\left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_0 = \left(1 + \frac{1}{2} C_{10}^s\right) b_{ij}^{(1)} + \left(C_{30} - \frac{2}{3}\right) S_{ij} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_1 &= \left(1 + \frac{1}{2} C_{10}^s\right) b_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2} C_{20}^s {}^D b_{ij}^{(1)2} \\ &+ C_{31} \sqrt{b_{mn}^{(1)2}} S_{ij} \\ &+ (C_{40} - 1) \left[b_{ik}^{(1)} S_{jk} + b_{jk}^{(1)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ &+ (C_{20} - 2) \left[b_{ik}^{(1)} \Omega_{jk} + b_{jk}^{(1)} \Omega_{kj} \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_2 &= \left(1 + \frac{1}{2} C_{10}^s\right) b_{ij}^{(3)} + \frac{1}{2} C_{12}^s b_{ij}^{(1)2} \\ &+ \frac{1}{2} C_{10}^s \left[b_{ik}^{(2)} b_{jk}^{(1)} + b_{jk}^{(2)} b_{kj}^{(1)} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(2)} b_{mn}^{(1)} \delta_{ij} \right] \\ &+ (2 + C_{10}^{(1)}) b_{mn}^{(1)} S_{mn} b_{ij}^{(1)} \\ &+ \left[C_{321} b_{mn}^{(1)2} + C_{322} \frac{b_{mn}^{(1)} b_{mn}^{(2)}}{\sqrt{b_{pp}^{(1)2}}} \right] S_{ij} \\ &+ (C_{40} - 1) \left[b_{ik}^{(2)} S_{jk} + b_{jk}^{(2)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(2)} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ &+ C_{41} \sqrt{b_{mn}^{(1)2}} \left[b_{ik}^{(1)} S_{jk} + b_{jk}^{(1)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ &+ C_{50} \left[b_{ik}^{(1)2} S_{jk} + b_{jk}^{(1)2} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)2} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ &+ (C_{60} - 2) \left[b_{ik}^{(2)} \Omega_{jk} + b_{jk}^{(2)} \Omega_{ik} \right] \\ &+ C_{61} \sqrt{b_{mn}^{(1)2}} \left[b_{ik}^{(1)} \Omega_{jk} + b_{jk}^{(1)} \Omega_{ik} \right] \\ &+ C_{70} \left[b_{ik}^{(1)2} \Omega_{jk} + b_{jk}^{(1)2} \Omega_{ik} \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ainsi, l'approximation au second ordre de l'équation d'évolution du tenseur d'anisotropie (2.32), peut s'écrire comme suit :

$$\frac{Db_{ij}}{Dt} = b_{ij}^{(1)} \frac{D\tau}{Dt} + \left[\frac{Db_{ij}^{(1)}}{Dt} + 2b_{ij}^{(2)} \frac{D\tau}{Dt} \right] \tau + \left[\frac{Db_{ij}^{(2)}}{Dt} + 3b_{ij}^{(3)} \frac{D\tau}{Dt} \right] \tau^2 + O(\tau^3) \quad (2.36)$$

où $\frac{D\tau}{Dt}$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{D\tau}{Dt} = (C_{\varepsilon_2} - 1) - \frac{P}{\varepsilon} (C_{\varepsilon_1} - 1) \quad (2.37)$$

avec:

$$\begin{aligned} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_0 &= (C_{\varepsilon_2} - 1) \\ \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_1 &= 0 \\ \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_2 &= 2(C_{\varepsilon_1} - 1)b_{mn}^{(1)}S_{mn} \\ \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_3 &= 2(C_{\varepsilon_1} - 1)b_{mn}^{(2)}S_{mn} \end{aligned} \quad (2.38)$$

En développant l'équation (2.36), il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_0 - b_{ij}^{(1)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_0 \\ &+ \left[\left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_1 - \left(\left. \frac{Db_{ij}^{(1)}}{Dt} \right|_0 + 2b_{ij}^{(2)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_0 \right) \right] \tau \\ &+ \left[\left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_2 - \left(\left. \frac{Db_{ij}^{(2)}}{Dt} \right|_0 + 3b_{ij}^{(2)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_0 + b_{ij}^{(1)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_2 \right) \right] \tau^2 \\ &+ O(\tau^3) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Pour que cette dernière équation soit vérifiée quelque soit le taux τ , il suffit que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_0 - b_{ij}^{(1)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_0 &= 0 \\ \left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_1 - \left(\left. \frac{Db_{ij}^{(1)}}{Dt} \right|_0 + 2b_{ij}^{(2)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_0 \right) &= 0 \\ \left. \frac{Db_{ij}}{Dt} \right|_2 - \left(\left. \frac{Db_{ij}^{(2)}}{Dt} \right|_0 + 3b_{ij}^{(2)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_0 + b_{ij}^{(1)} \left. \frac{D\tau}{Dt} \right|_2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Cela signifie que chaque coefficient du développement doit être égal à zéro.

On obtient finalement :

- à l'ordre zéro :

$$b_{ij}^{(1)} = - \frac{C_{30} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2} C_{10}^s - \frac{D\tau}{Dt} \Big|_0} S_{ij} \quad (2.41)$$

En posant :

$$C_\mu = \frac{C_{30} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2} C_{10}^s - \frac{D\tau}{Dt} \Big|_0} \quad (2.42)$$

on retrouve une expression dont la forme est identique aux modèles de type Boussinesq.

- au premier ordre :

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(2)} = & - \left[C_\mu \right] f_\mu C_{31} \sqrt{\{S^2\}} S_{ij} \\ & + C_\mu f_\mu (C_{60} - 2) \left[S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj} \right] \\ & + C_\mu f_\mu \left[2(C_{40} - 1) - \frac{1}{2} C_\mu C_{20}^s \right] {}^D S_{ij}^2 \\ & - C_\mu f_\mu \frac{DS_{ij}}{Dt} \end{aligned} \quad (2.43)$$

avec

$$f_\mu = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} C_{10}^s - 2 \frac{D\tau}{Dt} \Big|_0} \quad (2.44)$$

- au second ordre :

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{2} C_{10}^s - 3 \frac{D\tau}{Dt} \Big|_0 \right] b_{ij}^{(3)} = & \left[\frac{1}{2} C_{12}^s b_{nn}^{(1)2} + \frac{D\tau}{Dt} \Big|_2 - (C_{10}^s + 2) \{b^{(1)} S\} \right] b_{ij}^{(1)} \\ & - \left[C_{321} b_{nn}^{(1)2} + C_{322} \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{pp}^{(1)2}}} \right] S_{ij} \\ & - C_{41} \sqrt{b_{nn}^{(1)2}} \left[b_{ik}^{(1)} S_{jk} + b_{jk}^{(1)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ & - C_{50} \left[b_{ik}^{(1)2} S_{jk} + b_{jk}^{(1)2} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)2} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ & - C_{61} \sqrt{b_{nn}^{(1)2}} \left[b_{ik}^{(1)} \Omega_{jk} + b_{jk}^{(1)} \Omega_{ik} \right] \\ & - C_{70} \left[b_{ik}^{(1)2} \Omega_{jk} + b_{jk}^{(1)2} \Omega_{ik} \right] \\ & - \frac{1}{2} C_{20}^s \left[b_{ik}^{(1)} b_{jk}^{(2)} + b_{jk}^{(1)} b_{kj}^{(2)} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} b_{mn}^{(2)} \delta_{ij} \right] \\ & + \frac{Db_{ij}}{Dt} \\ & - (C_{40} - 1) \left[b_{ik}^{(2)} S_{jk} + b_{jk}^{(2)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(2)} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ & - (C_{60} - 2) \left[b_{ik}^{(2)} \Omega_{jk} + b_{jk}^{(2)} \Omega_{ik} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

En se contentant du développement au second ordre, l'équation générale explicite du tenseur d'anisotropie peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 b_{ij} = & G_1 \frac{k}{\mathcal{E}} S_{ij} \\
 & + G_2 \frac{k^2}{\mathcal{E}^2} \left[S_{ik} \Omega_{kj} + S_{jk} \Omega_{ik} \right] \\
 & + G_3 \frac{k^2}{\mathcal{E}^2} \left[S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{nm} \delta_{ij} \right] \\
 & + G_4 \frac{k^2}{\mathcal{E}^2} \left[\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{nm} \Omega_{nm} \delta_{ij} \right]
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

La forme complète et minimale, au sens des extensions de produits de matrices, du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds s'écrit :

$$\begin{aligned}
 b_{ij} = & G_1 \frac{k}{\mathcal{E}} S_{ij} \\
 & + G_2 \frac{k^2}{\mathcal{E}^2} \left[S_{ik} \Omega_{kj} + S_{jk} \Omega_{ik} \right] \\
 & + G_3 \frac{k^2}{\mathcal{E}^2} \left[S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{nm} \delta_{ij} \right] \\
 & + G_4 \frac{k^2}{\mathcal{E}^2} \left[\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{nm} \Omega_{nm} \delta_{ij} \right] \\
 & + G_5 \frac{k^3}{\mathcal{E}^3} \left[\Omega_{ip} S_{pk} S_{kj} + S_{ip} S_{pk} \Omega_{jk} \right] \\
 & + G_6 \frac{k^3}{\mathcal{E}^3} \left[\Omega_{ip} \Omega_{pk} S_{kj} + S_{ip} \Omega_{pk} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} \Omega_{np} \Omega_{pk} S_{kn} \delta_{ij} \right] \\
 & + G_7 \frac{k^4}{\mathcal{E}^4} \left[\Omega_{ip} S_{pq} \Omega_{qk} + \Omega_{ip} \Omega_{pq} S_{qk} \Omega_{jk} \right] \\
 & + G_8 \frac{k^4}{\mathcal{E}^4} \left[S_{ip} \Omega_{pq} S_{qk} S_{kp} + S_{ip} S_{pq} \Omega_{kq} S_{jk} \right] \\
 & + G_9 \frac{k^4}{\mathcal{E}^4} \left[\Omega_{ip} \Omega_{pq} S_{qk} S_{kj} + S_{ip} S_{pq} \Omega_{qk} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} \Omega_{np} \Omega_{pq} S_{qk} S_{kn} \delta_{ij} \right] \\
 & + G_{10} \frac{k^5}{\mathcal{E}^5} \left[\Omega_{ip} S_{pq} S_{qn} \Omega_{nk} \Omega_{kj} + \Omega_{ip} \Omega_{pq} S_{qn} S_{nk} \Omega_{jk} \right]
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

où les coefficients G_i dépendent des invariants qui sont :

$$\{S^2\}, \quad \{\Omega^2\}, \quad \{S^3\}, \quad \{S\Omega^2\}, \quad \{S^2\Omega^2\} \tag{2.48}$$

On donne dans le tableau 2.2 ci-dessous les constantes G_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de l'équation (2.46) de quelques modèles classiques.

Tableau 2.2 : Constantes de modèles classiques

	G_1	G_2	G_3	G_4
Speziale [43]	-0.09	-0.027	0.027	0.
Yoshizawa [44]	-0.09	-0.032	-0.142	-0.092
Rubinstein et Barton [45]	-0.0845	-0.023	0.110	0.094

Dans les sections suivantes nous présentons les deux modèles explicites algébriques non-linéaires retenus pour cette étude. Le premier est le modèle proposé par Shih et al [46, 47] et le second est celui suggéré par Craft et al. [48, 49]. Ces deux modèles sont évidemment des cas particuliers de l'équation (2.47).

2.3 Modèle EASM quadratique de Shih et al. [46, 47]

La détermination des coefficients de la fonctionnelle liée à l'hypothèse de Rodi peut se faire directement par calibrage sur des écoulements de base. Shih, Zhu et Lumley [46, 47] ont adopté cette approche, combinée avec des contraintes de réalisabilité et de distorsion rapide. Le modèle recherché est une approximation quadratique de la fonctionnelle complète, soit :

$$\begin{aligned}
 R_{ij} = & \frac{2}{3} k \delta_{ij} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S_{ij}^* + C_1 \frac{k^3}{\varepsilon^2} 2[S_{ij}^{(2*)} + \Omega_{ij}^{(2*)}] \\
 & + C_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} [S_{ij}^{(2*)} - \Omega_{ij}^{(2*)} - S_{ik}^* \Omega_{kj}^* + \Omega_{ik}^* S_{kj}^*] \\
 & + C_3 \frac{k^3}{\varepsilon^2} [S_{ij}^{(2*)} - \Omega_{ij}^{(2*)} + S_{ik}^* \Omega_{kj}^* + \Omega_{ik}^* S_{kj}^*]
 \end{aligned} \quad (2.49)$$

où

$$S_{ij}^* = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}, \quad \Omega_{ij}^* = \Omega_{ij}, \quad S_{ij}^{(2*)} = S_{ij}^2 - \frac{1}{3} S_{kk}^2 \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \Omega_{ij}^{(2*)} = \Omega_{ij}^2 - \frac{1}{3} \Omega_{kk}^2 \delta_{ij} \quad (2.50)$$

Pour une utilisation ultérieure, on donne les définitions suivantes :

$$\begin{aligned}
 S^* &= (S_{ij}^* S_{ij}^*)^{1/2} & \Omega^* &= (\Omega_{ij}^* \Omega_{ij}^*)^{1/2} & S^{(2*)} &= (S_{ij}^{(2*)} S_{ij}^{(2*)})^{1/2} \\
 W^* &= (S_{ij}^* S_{jk}^* S_{ki}^*) / (S^*)^3 & W^{(2*)} &= (S_{ij}^{(2*)} S_{jk}^{(2*)} S_{ki}^{(2*)}) / (S^{(2*)})^3 \\
 U^* &= (S_{ij}^* S_{ij}^* + \Omega_{ij}^* \Omega_{ij}^*)^{1/2} & U^{(2*)} &= (S_{ij}^{(2*)} S_{ij}^{(2*)} + \Omega_{ij}^{(2*)} \Omega_{ij}^{(2*)})^{1/2}
 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Les coefficients C_i ($i=1, 2, 3$) de l'équation (2.49) sont déterminés à l'aide de deux conditions. La première est basée sur la théorie de la distorsion rapide ou RDT (Rapid Distorsion Theory) et la seconde est la contrainte de réalisabilité.

2.3.1 Théorie de la distorsion rapide

Mansour et al. [50] ont étudié, en utilisant la RDT, l'effet de la rotation rapide sur un écoulement turbulent. Ils montrent que la rotation rapide, imposée à une turbulence initialement isotrope, n'affecte pas la turbulence dans la limite des grands nombres de Reynolds. Ce résultat constitue ici une contrainte.

Pour un écoulement en rotation avec $S_{ij} = 0$, l'équation (2.49) devient :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \frac{R_{ij}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ &= \frac{k^2}{2\varepsilon^2} \Omega_{ij}^{(2*)} [2C_1 - C_2 - C_3] \end{aligned} \quad (2.52)$$

D'après le résultat de la RDT sur l'écoulement turbulent isotrope, le tenseur d'anisotropie est nul sous l'effet de la rotation moyenne rapide. Ainsi, d'après l'équation (2.52) on obtient :

$$2C_1 - C_2 - C_3 = 0 \quad (2.53)$$

et l'équation (2.49) devient :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{2}{3} k \delta_{ij} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S_{ij}^* \\ &+ C_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} [2S_{ij}^{(2*)} - S_{ik}^* \Omega_{kj}^* + \Omega_{ik}^* S_{kj}^*] \\ &+ C_3 \frac{k^3}{\varepsilon^2} [2S_{ij}^{(2*)} + S_{ik}^* \Omega_{kj}^* + \Omega_{ik}^* S_{kj}^*] \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.3.2 Hypothèse de réalisabilité

La forme des coefficients est ensuite déterminée à partir de la condition de réalisabilité. Cette condition a été initialement introduite par Du Vachat [51], Schumann [52] et Lumley [53] afin d'éviter d'avoir des solutions non physiques. Elle stipule que les composantes normales du tenseur de Reynolds doivent rester positives et que l'inégalité de Schwarz entre deux quantités quelconques doit être vérifiée. Mathématiquement, cette contrainte s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{\alpha\alpha} &\geq 0 & \forall \alpha \in IN_3 \\ R_{\alpha\beta}^2 &\leq R_{\alpha\alpha} R_{\beta\beta} & \forall (\alpha, \beta) \in IN_3, \alpha \neq \beta \end{aligned} \quad (2.55)$$

Notons qu'ici la convention de sommation sur l'indice répété ne s'applique pas.

Dans le cas où la turbulence est soumise à une déformation rapide, la composante du tenseur de Reynolds dans la direction de la déformation décroît brutalement, ce qui peut amener certains modèles à prédire un niveau d'énergie cinétique turbulente négatif. Aussi, dans le cas où un cisaillement élevé est imposé à l'écoulement, cela conduit à des niveaux de cisaillement du tenseur de Reynolds très grands et pour lesquels certains modèles ne respectent pas les inégalités de Schwarz. Parmi ces deux cas extrêmes, le cas de la déformation pure permet de se placer en axes principaux de la déformation. Sur ces axes, S_{ij}^* peut s'écrire comme suit :

$$S_{ij}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-a}{2} \end{pmatrix} S_{11}^*, \quad S_{ij}^{(2*)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-b}{2} \end{pmatrix} S_{11}^{(2*)} \quad (2.56)$$

et dans ce cas les invariants définis par les équations (2.51), peuvent être calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} S^* &= |S_{11}^*| \left(\frac{3+a^2}{2} \right)^{1/2} & S^{(2*)} &= |S_{11}^{(2*)}| \left(\frac{3+b^2}{2} \right)^{1/2} \\ W^* &= \frac{\frac{3}{4}(1-a^2)}{\left(\frac{3+a^2}{2} \right)^{3/2}} & W^{(2*)} &= \frac{\frac{3}{4}(1-b^2)}{\left(\frac{3+b^2}{2} \right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Il vient, d'après ce qui précède que, la première composante normale du tenseur de Reynolds s'écrit dans le repère principal de S_{ij}^* comme suit :

$$R_{11} = \frac{2}{3}k - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S_{11}^* + (C_2 + C_3) \frac{k^3}{\varepsilon^2} 2S_{11}^{(2*)} \quad (2.58)$$

En considérant le cas d'un écoulement en contraction dans lequel $S_{ij}^* \geq 0$, $S_{ij}^{(2*)} \geq 0$ et où la contrainte R_{11} diminue, l'équation (2.58) devient :

$$R_{11} = \frac{2}{3}k - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S^* \left(\frac{2}{3+a^2} \right)^{1/2} + (C_2 + C_3) \frac{k^3}{\varepsilon^2} 2S^{(2*)} \left(\frac{2}{3+b^2} \right)^{1/2} \quad (2.59)$$

En appliquant la contrainte de réalisabilité et en permettant à R_{11} de tendre vers zéro quand S^* et $S^{(2*)}$ tendent vers l'infini, on obtient :

$$C_\mu = \frac{A}{A_0 + \sqrt{\frac{18}{3+a^2}} U^* \frac{k}{\varepsilon}}$$

$$C_2 + C_3 = \frac{B}{A_1 + \sqrt{\frac{18}{3+b^2}} U^{(2*)} \left(\frac{k}{\varepsilon} \right)^2} \quad (2.60)$$

$$A - B = 1$$

En notant [54]:

$$A_s^* = \left(\frac{18}{3+a^2} \right)^{1/2}, \quad A_s^{(2*)} = \left(\frac{18}{3+b^2} \right)^{1/2} \quad (2.61)$$

et en utilisant les équations (2.57), A_s^* et $A_s^{(2*)}$ peuvent être déterminées par les équations suivantes :

$$\left(A_s^* \right)^3 - \frac{9}{2} A_s^* - 9W^* = 0$$

$$\left(A_s^{(2*)} \right)^3 - \frac{9}{2} A_s^{(2*)} - 9W^{(2*)} = 0 \quad (2.62)$$

Les racines positives de ces équations sont déterminées pour les valeurs de W^* et $W^{(2*)}$ comprises entre $-1/\sqrt{6}$ et $1/\sqrt{6}$, ce qui correspond respectivement à une expansion axisymétrique et une contraction symétrique de la turbulence. Les racines appropriées sont :

$$A_s^* = \sqrt{6} \cos(\varphi_1), \quad A_s^{(2*)} = \sqrt{6} \cos(\varphi_2) \quad (2.63)$$

où

$$\varphi_1 = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W^*), \quad \varphi_2 = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W^{(2*)}) \quad (2.64)$$

Notons que, les équations (2.63) montrent que les valeurs de A_s^* et $A_s^{(2*)}$ sont comprises entre $\sqrt{6}/2$ et $\sqrt{6}$. Ainsi, les coefficients du modèle s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} C_\mu &= \frac{A}{A_0 + A_s^* U^* \frac{k}{\varepsilon}} \\ C_2 + C_3 &= \frac{B}{A_1 + A_s^{(2*)} U^{(2*)} \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2} \\ A - B &= 1 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Les coefficients supplémentaires A , B , A_0 et A_1 sont déterminés en appliquant l'inégalité de Schwarz, et en utilisant des données expérimentales existantes. Dans le but de proposer un modèle simple pouvant être appliqué à des écoulements turbulents d'intérêt technologique, Shih, Zhu et Lumley [47] ont choisi de prendre $A=1$. Ainsi, d'après les équations (2.65) on doit avoir $B=0$ et $C_3 = -C_2$.

A la suite de ces résultats, le modèle (voir (2.54)) devient :

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S_{ij}^* + 2C_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} (-S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*) \quad (2.66)$$

Pour appliquer l'inégalité de Schwarz, on considère un écoulement de cisaillement pur avec seulement $\partial U_1 / \partial x_2 \neq 0$ (c'est-à-dire $S_{12}^* = \Omega_{12}^* > 0$). Cet écoulement peut être considéré comme le cas le plus extrême pour satisfaire l'inégalité de Schwarz. On peut écrire dans ce cas :

$$\begin{aligned} R_{12} &= -C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} 2S_{12}^* \\ R_{11} &= \frac{2}{3} k + 4C_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} S_{12}^* \Omega_{12}^* \\ R_{22} &= \frac{2}{3} k - 4C_2 \frac{k^3}{\varepsilon^2} S_{12}^* \Omega_{12}^* \end{aligned} \quad (2.67)$$

Pour respecter l'inégalité de Schwarz $R_{12}^2 \leq R_{11}R_{22}$, on doit avoir :

$$C_2 = \frac{\sqrt{1 - 9C_\mu^2 \left(\frac{k}{\varepsilon} S^*\right)^2}}{C_0 + 6 \left(\frac{k}{\varepsilon} S^*\right) \left(\frac{k}{\varepsilon} \Omega^*\right)} \quad (2.68)$$

avec

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s^* \left(\frac{k}{\varepsilon} U\right)} \quad (2.69)$$

Les constantes A_0 et C_0 sont déterminées en utilisant les équations (2.67) dans le cas d'un écoulement de cisaillement homogène. On obtient ainsi : $A_0 = 6.5$, $C_0 = 1.0$

Pour être complet, il reste à déterminer l'énergie cinétique turbulente k et son taux de dissipation ε . Les équations de transport standards de k et ε sont utilisées. Elles s'écrivent :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (2.71)$$

où les différentes valeurs des coefficients sont :

$C_{\varepsilon 1} = 1.44$	$C_{\varepsilon 2} = 1.92$	$\sigma_k = 1.0$	$\sigma_\varepsilon = 1.3$
----------------------------	----------------------------	------------------	----------------------------

avec $\nu_t (= C_\mu k^2 / \varepsilon)$ est la viscosité turbulente.

Notons que, les auteurs de ce modèle proposent, dans le cas où l'écoulement est décrit dans un repère tournant, de remplacer le tenseur taux de rotation Ω_{ij} par un tenseur absolu $\Omega_{ij}^a = \Omega_{ij} - \varepsilon_{ijm} \theta_m$, où θ_m est le vecteur de rotation des axes du repère, et de remplacer le facteur d'échelle du mouvement moyen par :

$$U^* = (S_{ij} S_{ij} + \tilde{\Omega}_{aij} \tilde{\Omega}_{aij})^{1/2}, \text{ avec } \tilde{\Omega}_{ij}^* = \Omega_{ij}^* - 2\varepsilon_{ijm} \theta_m \quad (2.72)$$

2.4 Modèle EASM cubique de Craft et al. [48, 49]

Le modèle EASM cubique proposé par Craft et al. [48, 49] représente la synthèse des travaux réalisés à l'UMIST (Manchester, UK), qui ont montré qu'un développement contenant des termes cubiques était nécessaire pour atteindre un niveau de généralité suffisant afin de pallier aux principales insuffisances des modèles classiques. En effet, d'après ces auteurs, ce modèle prend en compte les effets de courbures des lignes de courant et est applicable dans la sous-couche visqueuse adjacente à la paroi. Pour rendre compte des effets visqueux, certaines constantes empiriques sont considérées comme des fonctions du nombre de Reynolds turbulent Re_t .

L'expression explicite cubique générale des contraintes de Reynolds qui tient compte des propriétés de symétrie et de contraction, peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 R_{ij} = & \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2\nu_t S_{ij} \\
 & + C_1 \nu_t \frac{k}{\tilde{\mathcal{E}}} \left[S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right] \\
 & + C_2 \nu_t \frac{k}{\tilde{\mathcal{E}}} \left[\Omega_{ik} S_{jk} + \Omega_{jk} S_{ik} \right] \\
 & + C_3 \nu_t \frac{k}{\tilde{\mathcal{E}}} \left[\Omega_{ik} \Omega_{jk} - \frac{1}{3} \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij} \right] \\
 & + C_4 \nu_t \frac{k^2}{\tilde{\mathcal{E}}} \left[S_{ki} \Omega_{li} + S_{kj} \Omega_{lj} \right] S_{kl} \\
 & + C_5 \nu_t \frac{k^2}{\tilde{\mathcal{E}}} \left[\Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lj} + \Omega_{jk} \Omega_{kl} S_{li} - \frac{2}{3} S_{kl} \Omega_{lm} \Omega_{mk} \delta_{ij} \right] \\
 & + C_6 \nu_t \frac{k^2}{\tilde{\mathcal{E}}} S_{ij} S_{kl} S_{kl} + C_7 \nu_t \frac{k^2}{\tilde{\mathcal{E}}} S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl}
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

où ν_t est la viscosité. Elle est définie comme suit :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \tilde{\mathcal{E}} \tag{2.74}$$

Le terme $\tilde{\mathcal{E}}$ désigne la partie isotrope de la dissipation [55] et peut s'écrire :

$$\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j} \right)^2 \tag{2.75}$$

Cette dernière quantité, qui s'annule à la paroi, a été introduite pour faciliter la résolution des termes ε/k et ε^2/k de l'équation du taux de dissipation. En effet ε tend vers une valeur finie à la paroi alors que k tend vers zéro, ε/k et ε^2/k tendraient donc vers l'infini, ce qui n'est pas acceptable.

Les coefficients empiriques de l'équation (2.73) sont réglés et optimisés sur un certain nombre d'écoulements, que nous décrirons plus tard. Les résultats obtenus pour les expressions de C_μ et f_μ sont :

$$C_\mu = \frac{0.3}{1 + 0.35 [\max(\tilde{S}, \tilde{\Omega})]^{3/5}} \times \left(1 - \exp \left[\frac{-0.36}{\exp(-0.75 \max(\tilde{S}, \tilde{\Omega}))} \right] \right) \quad (2.76)$$

$$f_\mu = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\text{Re}_t}{90} \right)^{1/2} - \left(\frac{\text{Re}_t}{400} \right)^2 \right] \quad (2.77)$$

où le nombre de Reynolds turbulent Re_t est défini par :

$$\text{Re}_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (2.78)$$

et

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}}, & \tilde{S} &= \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} \\ \Omega &= \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}}, & \tilde{\Omega} &= \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} \Omega_{ij} \Omega_{ij}} \end{aligned} \quad (2.79)$$

La détermination des coefficients C_1, \dots, C_7 est basée sur des calibrages, avec des données expérimentales obtenues dans des écoulements cisailés. On présente brièvement ci-dessous les hypothèses qui ont permis d'obtenir les coefficients donnés dans le tableau 2.3.

Dans un écoulement de cisaillement, les coefficients C_2 et $(C_1 + C_3)$ sont les seuls qui affectent l'anisotropie des contraintes normales de Reynolds. Les valeurs données dans le tableau 2.2 ont été donc réglées en considérant les données de la DNS et de l'expérience obtenues pour ce type d'écoulement, avec l'hypothèse que les contraintes normales de Reynolds ne soient pas négatives.

Le comportement des contraintes de cisaillement de Reynolds dans un écoulement de cisaillement simple a conduit ces auteurs [48] à poser que la quantité $-C_5 + C_6 + C_7$ était égale à zéro. Aussi, dans ce type d'écoulement, le terme linéaire est le seul à contribuer aux tensions de cisaillements. Ainsi, l'équation (2.73) qui donne $R_{12} = -\nu_t dU_1 / dx_2$ permet d'obtenir $C_6 = -C_7$ et donc d'avoir $C_5 = 0$.

Les coefficients C_4 et C_7 sont réglés sur un écoulement tourbillonnaire. En effet, les écoulements tourbillonnaires en conduite sont reconnus pour produire une nette variation de vitesse de tourbillon sur le même rayon de courbure et pour un écoulement bien développé. Dans cette situation, seuls les termes des coefficients C_4 et C_5 de l'équation (2.73) peuvent produire de telles variations. De plus, pour un écoulement 2D en surface convexe les termes des coefficients C_5 et C_7 de l'équation (2.73) sont les seuls qui affectent les courbures des lignes de courant.

Notons que l'expression du coefficient C_μ a été réglée sous forme de fonction des taux de déformation et de rotation moyen dans le cas d'un écoulement de cisaillement simple homogène à haut nombre de Reynolds, afin que la variation de la quantité R_{12} / k en fonction de S soit en bon accord avec les données expérimentales et celles des simulations numériques directes.

Tableau 2.3 : Coefficients proposés par Craft et al.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
-0.1	0.1	0.26	$-10C_\mu^2$	0	$-5C_\mu^2$	$5C_\mu^2$

Le modèle de Craft et al. a été appliqué notamment aux cas complexes du canal courbe et du jet pariétal axisymétrique et il a permis une amélioration décisive par rapport aux modèles classiques.

CHAPITRE 3

ÉVALUATION A PRIORI DE MODÈLES EASM À PARTIR DE LA SIMULATION NUMÉRIQUE DIRECTE

3.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude a priori des modèles non-linéaires retenus dans le chapitre précédent pour la prédiction des écoulements tridimensionnels de fluide Newtonien et incompressible dans une conduite à section carrée. Rappelons que cette configuration présente une anisotropie importante entre les composantes du tenseur de Reynolds et un écoulement secondaire, qui rendent la prédiction numérique et/ou expérimentale de cet écoulement difficile. De plus, cette configuration a été souvent choisie par plusieurs auteurs [3, 4, 5, 8, 9, 56, 57, 58, 59, 60].

L'évaluation des capacités prédictives des modèles EASM est faite en comparant nos prédictions aux données de la DNS de Gavrilakis [3] et à d'autres travaux de la littérature. Afin de prendre en compte les effets de parois, ces modèles ont été améliorés via l'introduction de fonctions correctrices. De nombreux auteurs se sont aussi intéressés à cette technique d'amélioration des modèles EASM. Parmi ceux-ci, on peut citer les références [56, 57, 58].

3.2 Procédure numérique utilisée et test a priori

La démarche de tout test a priori est la suivante : les valeurs moyennes du champ de vitesse (U, V, W) et les grandeurs turbulentes telles que l'énergie cinétique k et son taux de dissipation turbulent ε issues de la simulation numérique directe de Gavrilakis [3] sont injectées dans les équations explicites algébriques des modèles EASM. Cette procédure est illustrée sur la figure (3.1) ci-dessous.

Pour cette étude, un maillage bidimensionnel s'avère suffisant, puisque l'écoulement dans la conduite est périodique suivant la direction principale. De plus, compte tenu des axes de symétrie de la configuration, cette étude est réalisée sur le quart de la conduite (Cf. figure 3.2 (b)). Sur cette figure, un maillage de 63×63 nœuds non-uniforme très fin au voisinage des parois, respectant l'échelle de Kolmogorov $(1.5\nu/u_\tau)$, est utilisé.

Les équations des modèles EASM et $EASM_f$ sont discrétisées spatialement à l'aide d'un schéma mixte basé sur les différences finies.

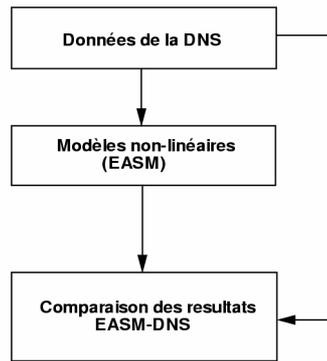


Figure. 3.1 : Schéma numérique du test a priori

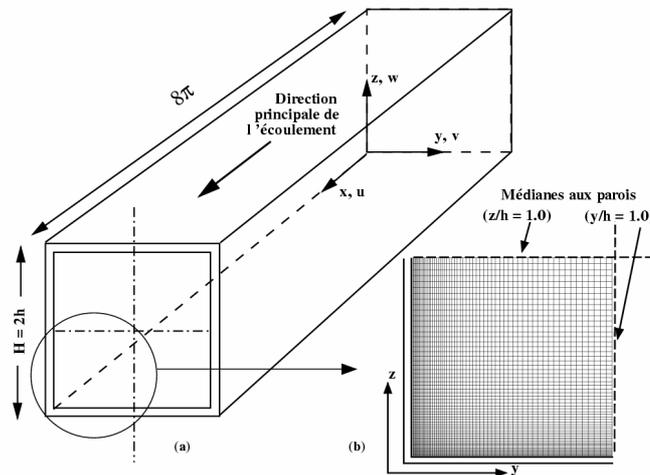


Figure. 3.2 : Système de coordonnées et géométrie de la conduite carrée.

3.3 Simulation numérique directe (DNS)

Dans ce travail, les évaluations directes des modèles EASM s'appuient sur les données numériques de Gavrilakis [3]. La géométrie de cette conduite et le système de coordonnées sont exposés sur la figure 3.2(a).

Dans la mise en œuvre de cette DNS, les approximations spatiales et temporelles des équations qui gouvernent l'écoulement ont été dérivées en utilisant des techniques standards des différences finies. Les équations de Navier Stokes sont discrétisées spatialement à l'aide d'un schéma mixte basé sur les différences finies pour les variables de l'écoulement selon les directions (y, z) et sur les développements en série de Fourier selon la direction principale (x) de l'écoulement moyen. La discrétisation temporelle s'appuie sur une méthode

d'Adams – Basforth du second ordre. Ce choix permet de calculer toutes les échelles de temps convective et visqueuse des simulations et d'assurer que des erreurs dues aux pas de temps soient négligeables. Pour plus de détails sur la mise en œuvre de cette DNS, le lecteur pourra consulter la référence [3].

3.4 Résultats numériques et discussions

3.4.1 Prise en compte des effets de paroi

Dans la zone proche de la paroi, la dynamique de l'écoulement est régie par la viscosité moléculaire. Ainsi, dans cette zone, l'écoulement et le développement de la turbulence sont modifiés par quelques actions principales. Parmi ces actions on peut citer:

- L'adhérence du fluide à la paroi qui rend les effets de la viscosité prédominants sur la turbulence et conduit à un amortissement de toutes les composantes turbulentes
- La présence de la paroi qui génère un terme d'écho de la fluctuation de pression qui modifie la redistribution d'énergie cinétique entre les composantes normales du tenseur de Reynolds par l'intermédiaire des corrélations pression – déformation.

Les effets de la viscosité sur le processus de transport turbulent, due à la présence de deux parois perpendiculaire de la conduite, sont beaucoup plus importants, surtout dans le coin. Plusieurs formulations des fonctions d'amortissement, disponibles dans la littérature [15, 61, 62, 63] sont souvent utilisées pour atténuer ces effets de parois. Moin et Kim [64], et Horiuti [65] ont, par exemple, utilisé des fonctions d'amortissement en proche paroi pour des simulations des grandes échelles.

Par contre, au stade actuel, il n'existe pas d'expression mathématique pour le coin. Cependant, Launder et Sharma [66], et Myong et Kasaga [67] ont proposé une fonction d'amortissement des effets du coin. Cette fonction est obtenue sous la forme d'une combinaison simple des effets de chaque paroi. En effet, si on note f_z (respectivement f_y) la fonction d'amortissement liée à la paroi de direction z (respectivement à la paroi de direction y) alors la fonction du coin peut s'écrire :

$$f_{zy} = f_z \cdot f_y \quad (3.1)$$

Les fonctions f_z et f_y sont des fonctions simples de Van Driest [13] et peuvent s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned}
 f_z &= 1 - \exp\left(-\frac{z^+}{A}\right) \\
 f_y &= 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A}\right)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

où u_τ est la vitesse de frottement pariétale, $z^+ = u_\tau z / \nu$ et $y^+ = u_\tau y / \nu$ sont les coordonnées en unité de paroi et A est une constante qui vaut 12.8 d'après Nisizima [68], 26 d'après Van Driest [13] et varie entre 18 et 37 d'après So et al [69].

Pour cette étude, nous avons choisi d'utiliser la fonction d'amortissement visqueuse suivante :

$$f = \left(1 - a \exp(-b z^+)\right) \left(1 - a \exp(-b y^+)\right)
 \tag{3.3}$$

où a et b sont des constantes spécifiques à chaque tension de Reynolds.

Dans le tableau 3.1 ci-dessous nous proposons les valeurs de a et b . Ces valeurs ont été calibrées lors des différents tests a priori et les valeurs retenues ici sont celles qui ont le mieux la DNS de Gavrilakis [3]. En effet, les différentes confrontations des résultats prédits avec cette DNS ont permis à chaque fois d'ajuster et caler ces constantes.

Table. 3.1: Valeurs des constantes a et b des fonctions d'amortissement f que nous proposons

	$\langle u^2 \rangle$	$\langle v^2 \rangle$	$\langle w^2 \rangle$	$-\langle uv \rangle$	$-\langle uw \rangle$	$-\langle vw \rangle$
a	-4.5	0.34	-0.51	1.01	-0.25	0.68
b	0.038	0.025	0.05	0.04	0.015	0.043

Notons que, les quantités $\langle u_i u_j \rangle = R_{ij} / u_\tau^2$ représentent les contraintes de Reynolds adimensionnelles basées sur la vitesse de frottement pariétale u_τ .

Il est clair qu'il faut chercher une loi unique pour aboutir à des constantes a et b identiques pour toutes les tensions de Reynolds. Ici, la constante b peut être fixée à une valeur moyenne de 0.0351. Par contre pour la constante a le regroupement n'est pas évident. Néanmoins nous proposons pour l'instant de réduire le nombre de cette constante de 6 à 3 en prenant une valeur moyenne $a = -4.5$ pour la tension $\overline{u'^2}$, $a = 0.676$ pour les tensions $\overline{v'^2}$, $\overline{u'v'}$ et $\overline{v'w'}$ puis $a = -0.38$ pour les tensions $\overline{u'w'}$ et $\overline{w'^2}$.

Dans la littérature, plusieurs résultats intéressants ont été obtenus en utilisant ce type de fonction d'amortissement pour la prédiction d'écoulements turbulents dans des conduites à section carrée. On peut, par exemple, citer les travaux de Naji et al. [56, 57] et ceux de Rechia et al. [58].

Il est à noter que, le modèle EASM cubique de Craft et al. [46, 47], dans son développement initial intègre déjà des fonctions d'amortissement f_μ . En effet, ce modèle fait parti des modèles, comme le modèle de Shima [70], qui sont basés sur des termes d'écho de paroi et des paramètres d'amortissement dépendant du nombre de Reynolds et des invariants du tenseur d'anisotropie.

Dans la suite de ce travail, on notera par « Shih_f et al. » et « Craft_f et al. » les modèles EASM que l'on a adjoint les fonctions d'amortissement f (EASM_f) et dont les équations s'écrivent comme suit :

- Modèle Craft_f et al.

$$\begin{aligned}
 R_{ij} = & \frac{2}{3}k\delta_{ij} - f\nu_t S_{ij} + C_1 f \frac{\nu_t k}{\tilde{\varepsilon}} (S_{ik} S_{jk} - 1/3 S_{kl} S_{kl} \delta_{ij}) + C_2 f \frac{\nu_t k}{\tilde{\varepsilon}} (\Omega_{ik} S_{jk} + \Omega_{jk} S_{ik}) \\
 & + C_3 f \frac{\nu_t k}{\tilde{\varepsilon}} (\Omega_{ik} \Omega_{jk} - 1/3 \Omega_{kl} \Omega_{kl} \delta_{ij}) + C_4 f \frac{\nu_t k^2}{\tilde{\varepsilon}^2} (S_{ki} \Omega_{lj} + S_{kj} \Omega_{li}) S_{kj} \\
 & + C_5 f \frac{\nu_t k^2}{\tilde{\varepsilon}^2} (\Omega_{il} \Omega_{lm} S_{mj} + S_{il} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - 2/3 S_{lm} \Omega_{mn} \Omega_{nl} \delta_{ij}) \\
 & + C_6 f \frac{\nu_t k^2}{\tilde{\varepsilon}^2} S_{ij} S_{kl} S_{kl} + C_7 f \frac{\nu_t k^2}{\tilde{\varepsilon}^2} S_{ij} \Omega_{kl} \Omega_{kl}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\nu_t = C_\mu k^2 / \tilde{\varepsilon}$.

- Modèle Shih_f et al.

$$R_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - 2C_\mu f \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} S_{ij}^* + 2C_2 f \frac{k^3}{\tilde{\varepsilon}^2} (-S_{ik}^* \Omega_{kj}^* + \Omega_{ik}^* S_{kj}^*) \tag{3.5}$$

Ces modèles EASM_f (« Shih_f et al. » et « Craft_f et al. ») ne diffèrent des modèles EASM standards (« Shih et al. » et « Craft et al. ») que par la fonction d'amortissement f qui multiplie les termes non-linéaires.

Dans ce chapitre, outre les données de la DNS de Gavrilakis, celles des évaluations directes menées par Mompean et al. [59] avec les modèles EASM non-linéaires de Speziale [43] et de Gatski et Speziale [39] sont aussi considérées ici pour comparaison avec nos prédictions. Ci-après, nous rappelons brièvement ces deux modèles :

- Modèle EASM de Gatski et Speziale [39]

$$\begin{aligned}
 R_{ij} = & \frac{2}{3}k\delta_{ij} - C_{\mu}\frac{k^2}{\varepsilon}2S_{ij} + F_1\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_n}\frac{\partial U_n}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_n}\frac{\partial U_n}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial U_m}{\partial x_n}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\delta_{ij}\right) \\
 & + F_2\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_n}\frac{\partial U_j}{\partial x_n} - \frac{1}{3}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\delta_{ij}\right) + F_3\frac{k^3}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial U_n}{\partial x_i}\frac{\partial U_n}{\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\frac{\partial U_n}{\partial x_m}\delta_{ij}\right)
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned}
 C_{\mu} &= 0.680r, \quad F_1 = 0.030r, \quad F_2 = 0.093r, \quad F_3 = -0.034r \\
 r &= (1 + 0.0038\eta^2)/D, \quad D = 3 + 0.0038\eta^2 + 0.0008\eta^2\zeta^2 + 0.2\zeta^2 \\
 \eta &= \frac{k}{\varepsilon}(2S_{ij}S_{ij})^{1/2}, \quad \zeta = \frac{k}{\varepsilon}(2\Omega_{ij}\Omega_{ij})^{1/2}
 \end{aligned} \quad (3.7)$$

- Modèle EASM de Speziale [43]

$$R_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} - C_{\mu}\frac{k^2}{\varepsilon}2S_{ij} - C_D C_{\mu}^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2}(S_{im}S_{mj} - \frac{1}{3}S_{mn}S_{mn}\delta_{ij}) - C_E C_{\mu}^2 \frac{k^3}{\varepsilon^2}(\overset{\circ}{S}_{ij} - \frac{1}{3}\overset{\circ}{S}_{mn}\delta_{ij}) \quad (3.8)$$

où C_D et C_E sont des constantes dimensionnelles toutes les deux égales à 1.68, et $\overset{\circ}{S}_{ij}$ est la dérivée d'Oldroyd, définie par :

$$\overset{\circ}{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial t} + U \cdot \nabla S_{ij} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k} S_{kj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k} S_{ki} \quad (3.9)$$

3.4.2 Réalisabilité des modèles EASM

La plus part des modèles de turbulence explicites à contraintes algébriques non-linéaires ont été développés en s'appuyant sur une condition de réalisabilité. Celle-ci a été énoncée dans le cadre des fermetures au second ordre, pour la première fois, par Du Vachat [51], Schumann [52] et Lumley [53]. Rappelons qu'elle impose que la turbulence ne produise pas de résultats physiquement non acceptables. Autrement dit, elle exige que les composantes normales du tenseurs de Reynolds soient positives et que l'inégalité de Schwarz soit vérifiée entre deux quantités fluctuantes quelconques. Mathématiquement, cette condition peut s'exprimer par les inéquations (3.10) et (3.11) suivantes :

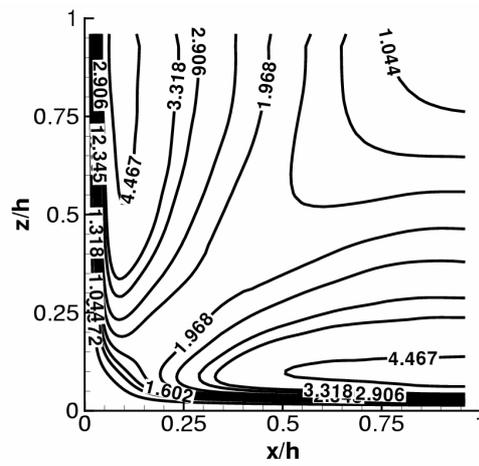
$$\langle u_i^2 \rangle \geq 0 \quad (3.10)$$

$$\langle u_i u_j \rangle^2 / (\langle u_i^2 \rangle \cdot \langle u_j^2 \rangle) \leq 1 \quad (3.11)$$

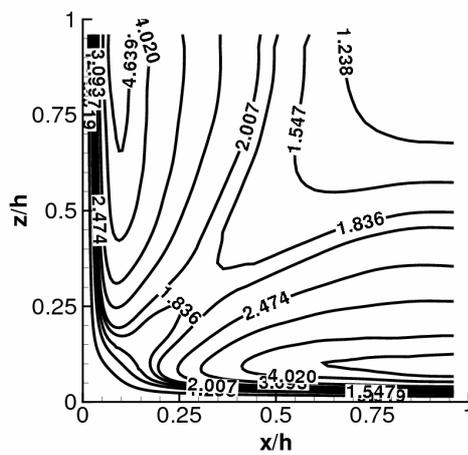
Les figures 3.3 et 3.4 ci-dessous montrent les topographies, dans la section transversale de la conduite, des contraintes de Reynolds normales $\langle u_i^2 \rangle$ obtenues, respectivement, avec le modèle de Shih et al. et, Craft et al. Les contours issus des données la DNS [3] sont également présentés sur ces figures. Un examen de ces dernières montre que la condition (3.10) est vérifiée.

La deuxième condition de réalisabilité (inéquation (3.11)) est validée en exploitant les iso-valeurs des contours des quantités $\langle u_i u_j \rangle^2 / (\langle u_i^2 \rangle \cdot \langle u_j^2 \rangle)$ représentées sur les figures 3.5 et 3.6 ci-dessous. On constate sur ces figures que la condition (3.11) est bien validée. De plus on constate que la quantité $\langle vw \rangle^2 / (\langle v^2 \rangle \cdot \langle w^2 \rangle)$ est très faible par rapport aux autres quantités.

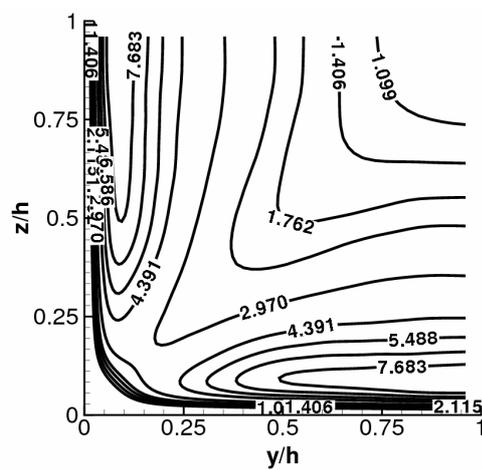
Notons que la carte topographique, dans le plan transversal, de la contrainte normale $\langle v^2 \rangle$, non représentée ici, peut être obtenue par une rotation de 90° des contours $\langle w^2 \rangle$ de des contours. En effet, compte tenu de la géométrie carrée de l'écoulement on a $\langle w^2(y) \rangle = \langle v^2(z) \rangle$. Pour les mêmes raisons, la topographie de la quantité $\langle uw \rangle^2 / (\langle u^2 \rangle \cdot \langle w^2 \rangle)$ se déduit de celle de $\langle uv \rangle^2 / (\langle u^2 \rangle \cdot \langle v^2 \rangle)$.



(a)

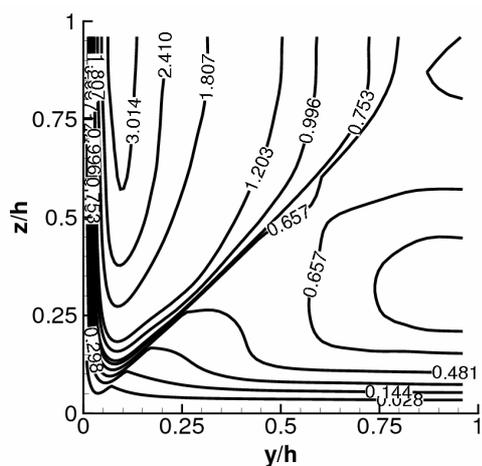


(b)

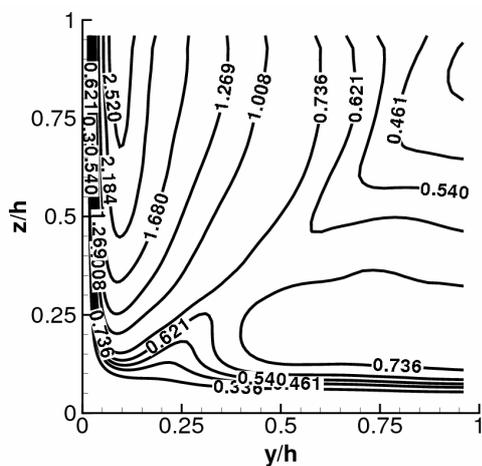


(c)

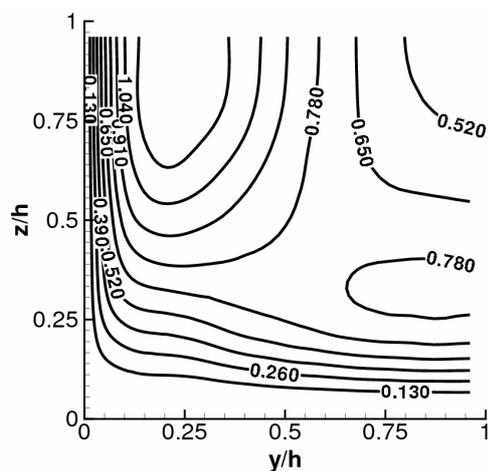
Figure. 3.3 : Topographies de la contrainte de Reynolds normale $\langle u^2 \rangle$.
 (a) : Shih et al. ; (b) : Craft et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis



(a)



(b)



(c)

Figure. 3.4 : Topographies de la contrainte de Reynolds normale $\langle w^2 \rangle$.
 (a) : Shih et al. ; (b) : Craft et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis.

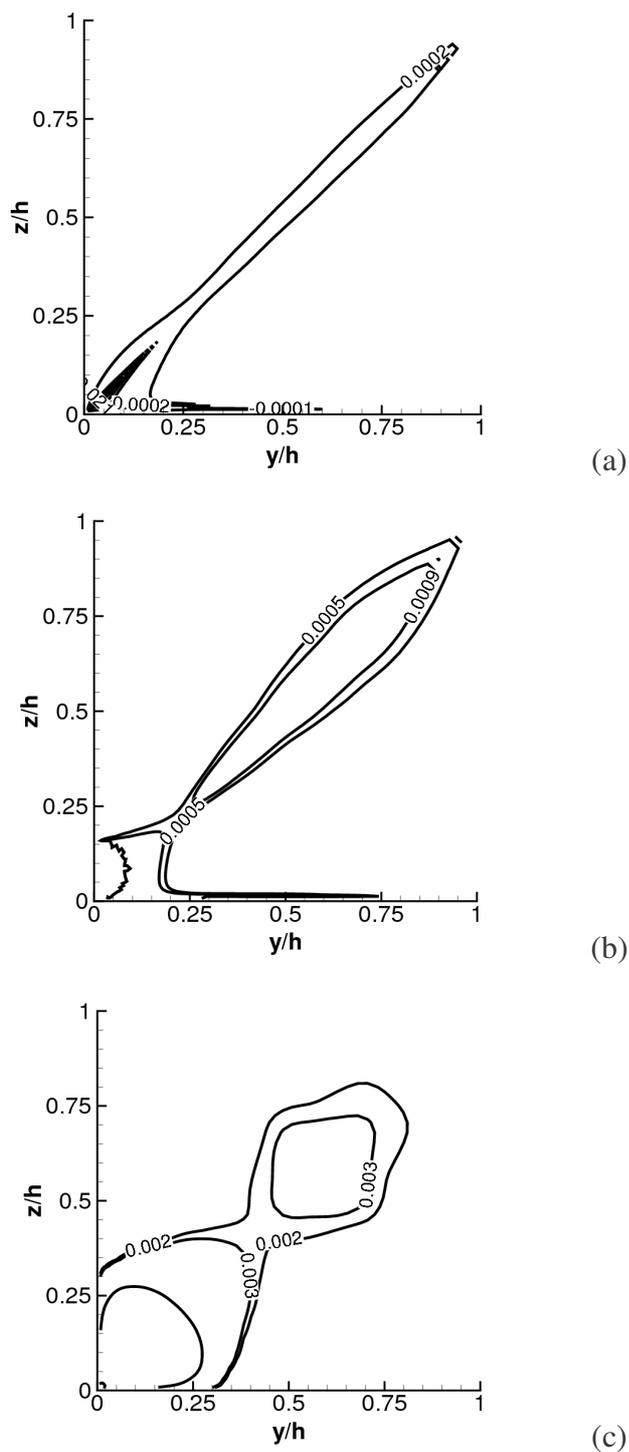


Figure. 3.6: Topographies de la quantité $\langle vw \rangle^2 / (\langle v^2 \rangle \cdot \langle w^2 \rangle)$.
 (a) : Shih et al. ; (b) : Craft et al. ; (c) : DNS de Gavrilakis.

A travers l'analyse qui vient d'être faite, on peut énoncer que les modèles EASM, retenus pour cette étude, sont réalisables.

Dans ce qui suit, on s'intéresse à la capacité de ces modèles EASM à reproduire l'anisotropie de l'écoulement.

3.4.3 Caractérisation de la turbulence par le tenseur d'anisotropie

Pour mettre en évidence le caractère anisotrope de l'écoulement, on exploite les propriétés du tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds b_{ij} . Ce tenseur est un bon indicateur de l'aspect anisotrope de l'écoulement et est souvent retenu. Les propriétés de b_{ij} ont été initialement démontrées par Lumley et Newman [35]. Ces derniers ont notamment établi un domaine de validité de b_{ij} dans le plan des invariants (II_b, III_b) . Ce domaine (Cf. Figure 3.7) est limité par les équations ci-dessous :

$$\begin{aligned} 9II_b + 27III_b + 1 &= 0 \\ III_b &= 2(-II_b/3)^{3/2} \\ III_b &= -2(-II_b/3)^{3/2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sur la figure 3.7, le domaine admissible se réduit à l'intérieur du triangle curviligne. L'origine du plan, de coordonnées $(0, 0)$, représente l'état de turbulence isotrope.

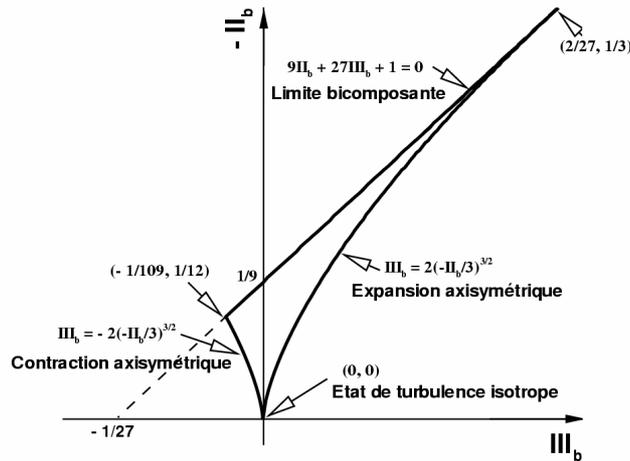


Figure 3.7 : Domaine admissible d'anisotropie dans le plan des invariants II_b et III_b .

La limite supérieure correspond à une turbulence à deux composantes pour laquelle l'une des composantes normales du tenseur de Reynolds est nulle (c'est le cas au voisinage d'une paroi). Les limites inférieures correspondent aux états axisymétriques, de contraction lorsque $III_b \leq 0$ et d'expansion lorsque $0 \leq III_b$. Lorsque la turbulence est fortement cisailée, elle évolue vers un état 1C où toute l'énergie se concentre en axes principaux sur une seule des composantes du tenseur de Reynolds.

La figure 3.8 suivante représente les évolutions du second invariant II_b en fonction du troisième invariant III_b le long de la paroi symétrique ($y/h = 1.0$).

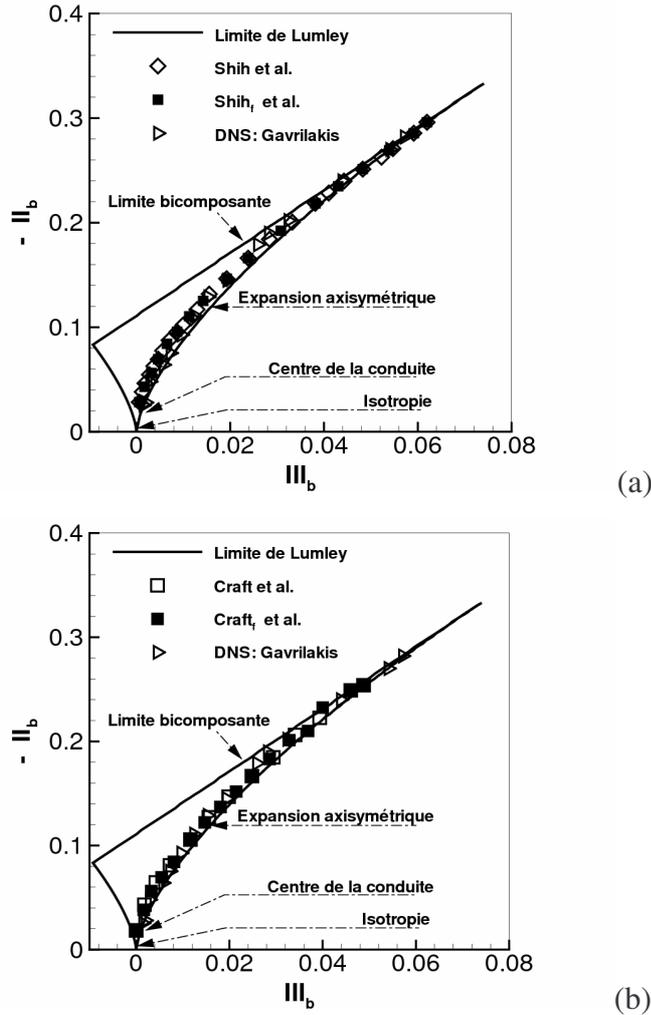


Figure. 3.8 : Carte des second et troisième invariants de Lumley. Comparaison avec la DNS.
 (a) : Shih et al., Shih_f et al. ; (b) : Craft et al., Craft_f et al.

On constate que les modèles EASM, avec ou sans fonctions correctrices, restituent le caractère turbulent de l'écoulement puisque les profils du second invariant en fonction du troisième invariant de ces modèles se situent à l'intérieur du domaine admissible d'anisotropie. Ces profils d'évolution de l'anisotropie se caractérisent par une diminution du troisième invariant et montrent une expansion axisymétrique de la turbulence vers l'état isotrope. De plus la confrontation des profils simulés et ceux de la DNS [3] montre qu'ils sont en bon accord.

3.4.4 Distribution des tensions de Reynolds

Dans cette partie, on compare les tensions de Reynolds prédites avec celles de la simulation numérique directe [3]. Les données des tests a priori des modèles de Speziale [43] et de Speziale et Gatski [39] sont également incluses pour compléter la comparaison.

3.4.4.1 Tensions normales turbulentes

Les figures 3.9 et 3.10 suivantes montrent les distributions des trois composantes normales du tenseur de Reynolds sur la médiane à la paroi ($y/h = 1.0$).

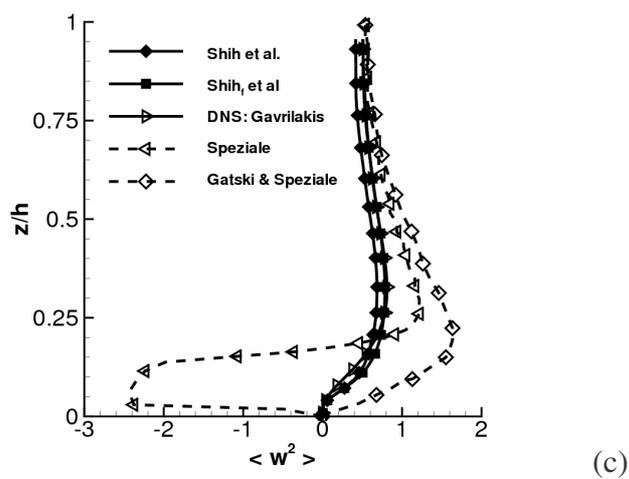
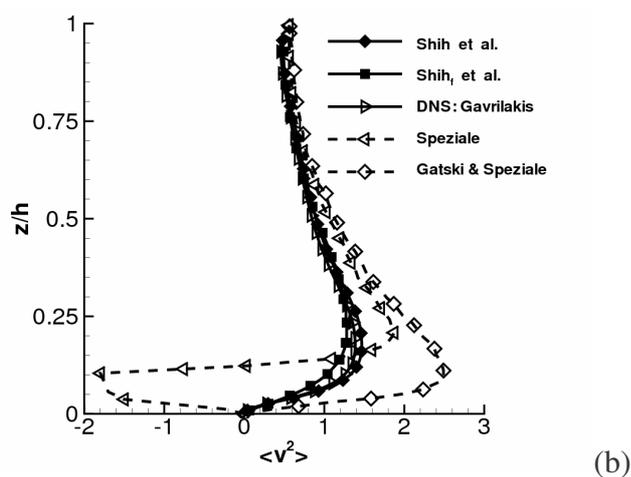
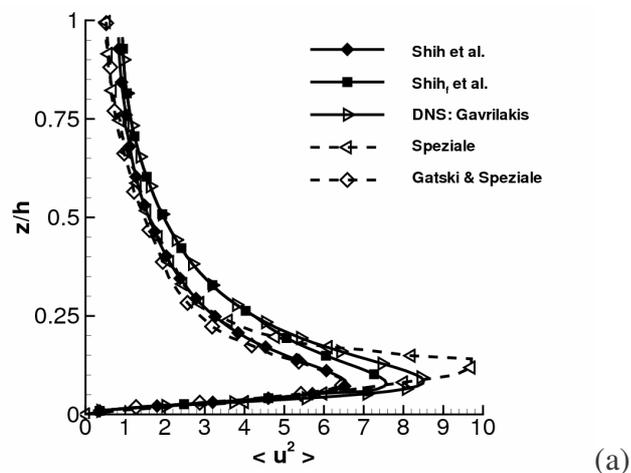


Figure. 3.9: Profils des tensions normales de Reynolds. Modèle de Shih et al. et Shih_f et al.

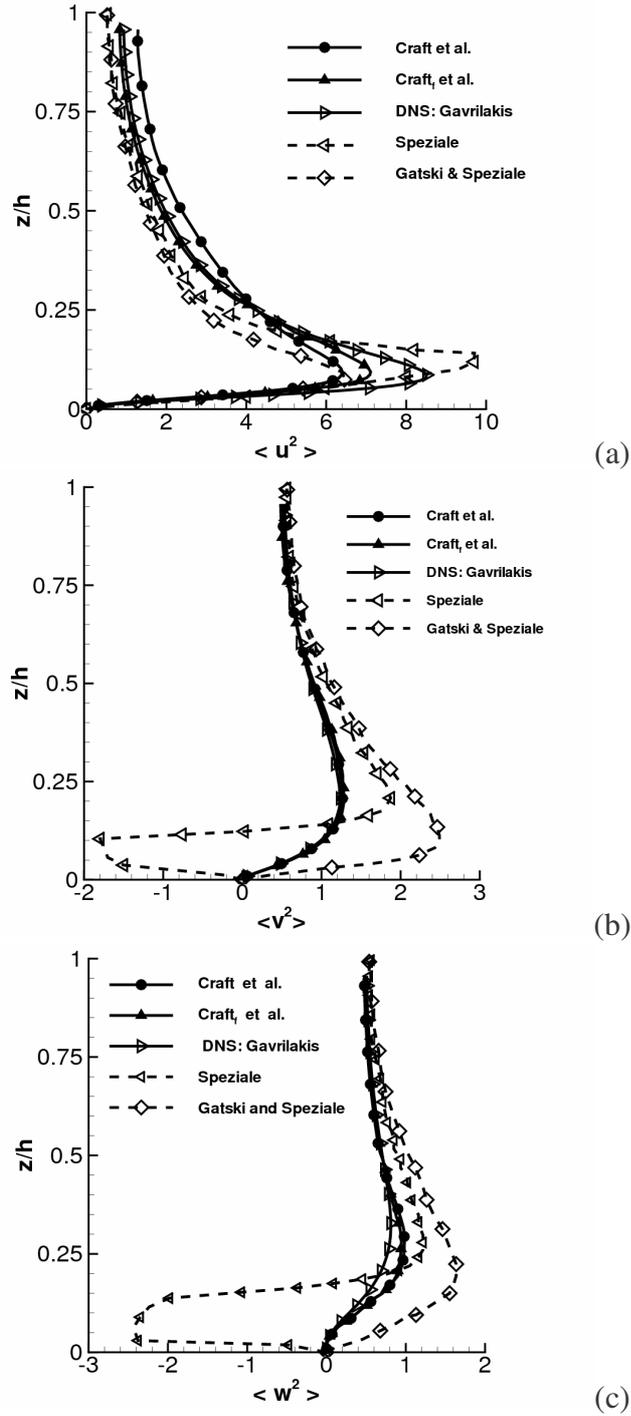


Figure. 3.10 : Profils des tensions normales de Reynolds.
Modèle de Craft et al., et Craft_f et al.

De manière générale, on constate que les contraintes normales prédites sont en bon accord avec la DNS [3]. Cependant, on constate sur les Figures 3.9(a) et 3.10(a) que, les maximums des contraintes normales $\langle u^2 \rangle$ prédites sous-estiment les valeurs de la DNS [3] d'environ 25% pour le modèle Shih et al., 9% pour le modèle Shih_f et al., 24% pour le modèle Craft et al, et 14% pour le modèle Craft_f et al.

Sur les figures 3.9(b), 3.9(c), 3.10(b) et 3.10(c), on constate que le modèle Speziale [43] n'est pas réalisable, car il reproduit des intensités $\langle v^2 \rangle$ et $\langle w^2 \rangle$ négatives pour $z/h \leq 0.2$. Néanmoins pour $z/h \geq 0.35$, les tensions normales $\langle v^2 \rangle$ et $\langle w^2 \rangle$ issues de ce modèle sont en bon accord avec nos prédictions. Concernant la contrainte normale $\langle u^2 \rangle$, on note un désaccord près des parois entre nos prédictions et celles obtenues avec le modèle Speziale [43]. En effet, on peut observer sur les figures 3.9(a) et 3.10(a) que ce modèle surestime les maximums des contraintes simulées d'environ 30% pour les modèles sans fonctions correctrices et 40% pour les modèles avec fonctions correctrices. La comparaison des calculs avec les données issues du modèle de Gatski et Speziale [39] montre que les valeurs des contraintes de Reynolds $\langle v^2 \rangle$ et $\langle w^2 \rangle$ prédites par le modèle de Gatski et Speziale [39] apparaissent plus grands (cf. figures. 3.8(b), 3.9(c), 3.10(b) et 3.10(c)) que celles de nos simulations pour $z/h \leq 0.65$, alors qu'elles sont très proches pour $z/h \geq 0.65$.

A l'issue de cette première analyse sur la prédiction des contraintes de Reynolds normales, on constate que les modèles EASM_f se comportent mieux que les modèles EASM originaux.

En vue de compléter l'analyse sur la prédiction des contraintes, nous présentons ci-après les profils des tensions de cisaillement turbulentes.

3.4.4.2 Tensions de cisaillement turbulentes

On représente sur les figures 3.11 et 3.12 suivantes les distributions des tensions de cisaillement turbulentes $-\langle uv \rangle$, $-\langle uw \rangle$ et $-\langle vw \rangle$ respectivement. Sur ces figures, on compare les profils des quantités prédites à celles de la DNS [3]. Les profils de la contrainte $-\langle uw \rangle$ issus des modèle de Speziale [43] et de Gatski et Speziale [39] sont également présentés pour comparaison avec les modèles EASM et EASM_f (cf. figures.3.11(b) et 3.12(b)). Néanmoins, notons que ces données de la littérature sont absentes dans le cas des contraintes $-\langle uv \rangle$ et $-\langle vw \rangle$.

On constate sur la figure 3.11(a) que les valeurs de la contrainte $-\langle uv \rangle$ produites par les modèles (original et amélioré) de Shih et al. sont plus élevées que celles de la DNS [3], alors que sur la figure 3.12(a) les modèles (original et amélioré) de Craft et al. donnent des valeurs qui semblent concorder avec la DNS [3]. Les figures 3.11(b) et 3.12(b) montrent un très bon accord entre les résultats prédits par les modèles retenus et ceux issus de la DNS [3]. Cependant, on observe sur la figure 3.11(b) que, près des parois l'écart entre le maximum de

la contrainte $-\langle uw \rangle$ prédit par le modèle de Shih et al. et par la DNS [3] est de l'ordre de 15%. Une comparaison des distributions de la tension de cisaillement turbulente $-\langle uw \rangle$ avec celles données par les modèles de Speziale [43] et de Gatski et Speziale [39] montre qu'elles sont en bon accord pour $z/h \geq 0.3$, tandis que près des parois, on observe de grandes différences, surtout avec le modèle de Speziale [43] qui donne des valeurs extrêmement élevées.

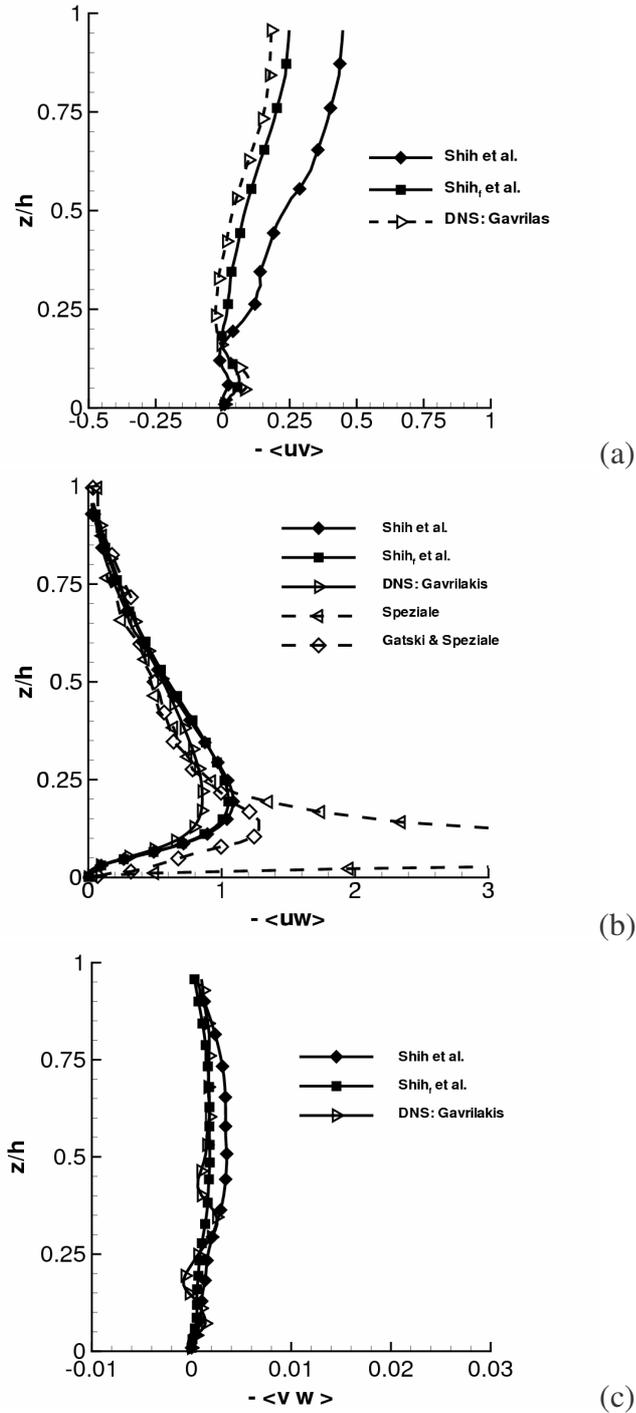


Figure. 3.11 : Profils des tensions de cisaillement. Modèles de Shih et al., et Shih_f et al.

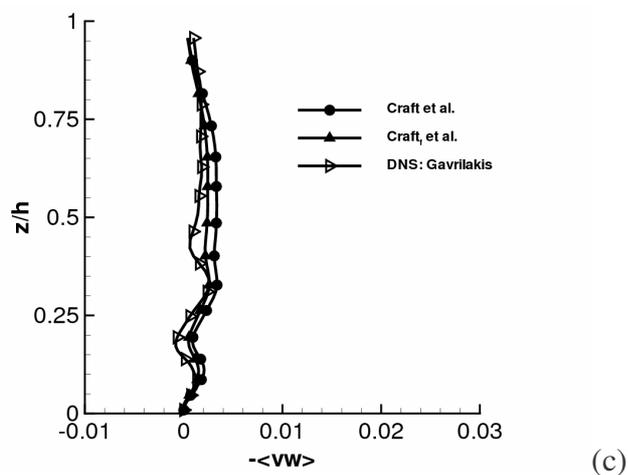
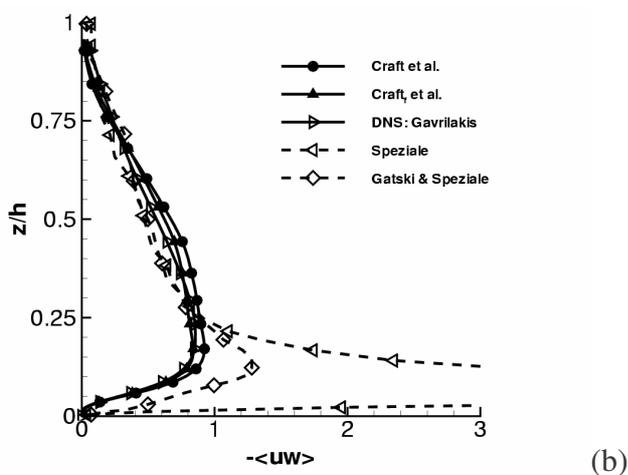
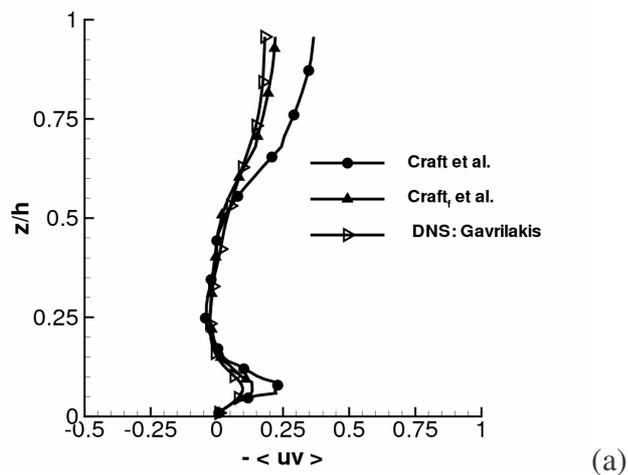


Figure. 3.12 : Profils des tensions de cisaillement.
Modèles de Craft et al., et Craft_f et al.

Sur les figures 3.11(c) et 3.12(c), on constate que les quantités $-\langle vw \rangle$ sont similaires et, surtout très petites voire négligeables. C'est la raison pour laquelle, cette quantité sera omise dans la suite de ce travail.

3.5 Conclusion

Les différents résultats prédits, par nos simulations numériques, corroborent ceux de la DNS [3] et ceux issus des tests a priori présents dans la littérature [43, 39]. Toutefois, l'introduction de fonctions d'amortissement améliore significativement les prédictions. Notons que le travail qui vient d'être réalisé est naturellement généralisable à d'autres modèles non-linéaires de turbulences.

Une démarche logique pour montrer encore la capacité de ces modèles à prédire des écoulements turbulents anisotropes est de procéder à des calculs a posteriori. C'est l'objet du chapitre suivant, où nous ne retenons que les modèles EASM (Shih_f et al. et Craft_f et al.) améliorés.

CHAPITRE 4

ÉTUDE À POSTERIORI DE MODÈLES EXPLICITES ALGÈBRIQUES NON-LINEAIRES

Le présent chapitre est consacré à la simulation numérique, par l'approche RANS, des écoulements turbulents tridimensionnels de fluide Newtonien et incompressible dans une conduite à section carrée. Les modèles de turbulence utilisés sont ceux de Shih et al. [46, 47] et de Craft et al. [48] auxquels on a adjoint des fonctions correctrices (Shih_f et al. et Craft_f et al.). Les principaux résultats issus de cette simulation a posteriori seront présentés et discutés. Auparavant, on décrit le traitement numérique des équations gouvernant le problème.

4.1 Traitement numérique

La méthode utilisée pour résoudre les équations en coordonnées cartésiennes est celle des volumes finis. Les équations de conservation sont intégrées sur un volume de contrôle v , puis le théorème de Gauss est utilisé pour transformer les intégrales de volume en intégrales de surface. L'application de ce théorème à U_j donne:

$$\int_v \frac{\partial U_j}{\partial x_j} dv = \int_A n \cdot U_j d\sigma \quad (4.1)$$

où v est le volume de contrôle, A la surface qui délimite le volume de contrôle, n le vecteur unitaire normal extérieur à la surface A et $d\sigma$ l'élément de surface sur A . On note que, le terme de droite de cette équation représente le flux à travers la surface A .

Le maillage choisi étant orthogonal, le théorème de Gauss sera appliqué sans difficulté puisque les flux sont orthogonaux aux surfaces des volumes de contrôle, qui sont perpendiculaires à la direction principale de l'écoulement.

4.1.1 Discrétisation spatiale

Les équations à discrétiser sont les équations de bilan pour les grandeurs vectorielles et scalaires. Dans un repère fixe cartésien (x, y, z) , la projection des équations vectorielles donne des équations scalaires. L'ensemble de ces dernières peut s'écrire sous la forme d'une équation de transport de la grandeur scalaire ϕ suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (J_\phi) = S_\phi \quad (4.2)$$

où les différents termes ϕ , S_ϕ et J_ϕ sont donnés dans le tableau 4.1.

Table 4.1 : Expression des différents termes de l'équation (4.2).

Termes	ϕ	J_ϕ	S_ϕ
Conservation de la masse	1	0	0
Quantité de mouvement suivant :			
l'axe x	U	$P\delta_{1j} - \nu \frac{\partial U}{\partial x_j} + R_{1j}$	0
l'axe y	V	$P\delta_{2j} - \nu \frac{\partial V}{\partial x_j} + R_{2j}$	0
l'axe z	W	$P\delta_{3j} - \nu \frac{\partial W}{\partial x_j} + R_{3j}$	0
Energie cinétique turbulente	k	$-\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}$	$-R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon$
Dissipation de k	ε	$-\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}$	$-C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$

Après l'intégration sur le volume de contrôle v et l'application théorème de Gauss, l'équation (4.2) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \phi dv + \int_A \overline{U_j} \phi \cdot n d\sigma + \int_A J_\phi \cdot n d\sigma = \int_v S_\phi dv \quad (4.3)$$

Cette dernière constitue un bilan fini de la grandeur scalaire ϕ et est à la base de la discretization spatiale de la méthode des volumes finis.

4.1.1.1 Localisation des variables

On utilisera ici un maillage entrelacé. La pression et les tensions normales de Reynolds sont traitées au centre des volumes de contrôle, les vitesses moyennes sont évaluées aux centres des faces et les contraintes de cisaillement du tenseur de Reynolds sont calculées aux coins des mailles de pression, comme illustré sur la figure 4.1 suivante :

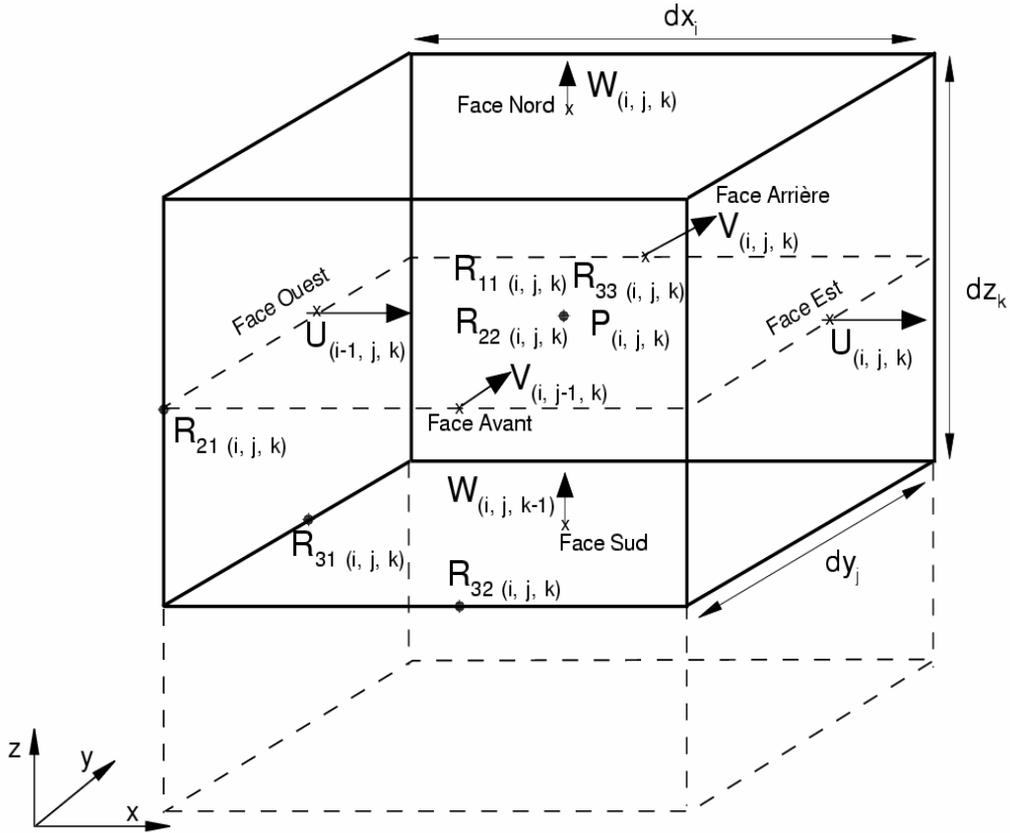


Figure 4.1 : Position des variables dans un volume de contrôle.

Notons que les grandeurs dx_i , dy_j et dz_k représentent les longueurs physiques des frontières du volume de contrôle v centré sur un nœud de pression.

4.1.1.2 Equation de conservation pour une quantité scalaire

Les deux intégrales de volume de l'équation (4.3) sont traitées en utilisant le théorème de la moyenne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_v \phi dv \approx v \frac{\partial \phi_o}{\partial t} \quad (4.4)$$

$$\int_v S_\phi dv \approx v S_\phi \quad (4.5)$$

Le traitement des intégrales de surface se fait comme suit :

- Echange par diffusion :

$$\int_A J_\phi n d\sigma \approx \sum_{\alpha=1}^6 f_\alpha (J_\phi n)_\alpha \quad (4.6)$$

où f_α est la surface de chacune des six faces qui délimitent le volume de contrôle. En développant et en utilisant les notations indicées de la figure 4.1 le flux de diffusion total s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_A J_\varphi n d\sigma &\simeq (J_{\varphi(i,j,k)}^{Est} - J_{\varphi(i-1,j,k)}^{Ouest}) dy_j dz_k \\ &+ (J_{\varphi(i,j,k)}^{Nord} - J_{\varphi(i,j,k-1)}^{Sud}) dx_i dy_j \\ &+ (J_{\varphi(i,j,k)}^{Arr} - J_{\varphi(i,j-1,k)}^{Avant}) dx_i dz_k \end{aligned} \quad (4.7)$$

où $J_{\varphi(m)}^p$ représente les termes J_φ sur la face p et à la position m sur le volume de contrôle.

- Echange par convection

$$\int_A \phi U_j . n d\sigma \simeq \sum_{\alpha=1}^6 f_\alpha \phi_\alpha (U_j . n)_\alpha \quad (4.8)$$

En développant, le flux de convection total s'écrit

$$\begin{aligned} \int_A \phi U_j . n d\sigma &\simeq \overbrace{(\phi_{(i,j,k)}^{Est} U_{(i,j,k)} - \phi_{(i-1,j,k)}^{Ouest} U_{(i-1,j,k)})}^1 dy_j dz_k \\ &+ \overbrace{(\phi_{(i,j,k)}^{Nord} W_{(i,j,k)} - \phi_{(i,j,k-1)}^{Sud} W_{(i,j,k-1)})}^3 dx_i dy_j \\ &+ \overbrace{(\phi_{(i,j,k)}^{Arr} V_{(i,j,k)} - \phi_{(i,j-1,k)}^{Avant} V_{(i,j-1,k)})}^5 dx_i dz_k \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ainsi, l'équation de conservation de la masse ($\phi = 1$) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} &(U_{(i,j,k)} - U_{(i-1,j,k)}) dy_j dz_k \\ &+ (V_{(i,j,k)} - V_{(i,j-1,k)}) dx_i dz_k \\ &+ (W_{(i,j,k)} - W_{(i,j,k-1)}) dx_i dy_j = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le traitement des termes convectifs $U_j \phi$ de l'équation (4.9) est présenté ci-après.

4.1.1.3 Schéma numérique pour le terme convectif

Pour calculer les termes convectifs on utilise le schéma Upwind :

- Face Est (terme 1)

$$U_{(i,j,k)} \phi_{(i,j,k)} = U_{(i,j,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \phi_{(i-1/2,j,k)} & \text{si } U_{(i,j,k)} > 0 \\ \rightarrow \phi_{(i+1/2,j,k)} & \text{si } U_{(i,j,k)} < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

- Face Ouest (terme 2)

$$U_{(i-1,j,k)}\phi_{(i-1,j,k)} = U_{(i-1,j,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \phi_{(i-3/2,j,k)} & \text{si } U_{(i-1,j,k)} > 0 \\ \rightarrow \phi_{(i-1/2,j,k)} & \text{si } U_{(i-1,j,k)} < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

- Face Nord (terme 3)

$$W_{(i,j,k)}\phi_{(i,j,k)} = W_{(i,j,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \phi_{(i,j,k-1/2)} & \text{si } W_{(i,j,k)} > 0 \\ \rightarrow \phi_{(i,j,k+1/2)} & \text{si } W_{(i,j,k)} < 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

- Face Sud (terme 4)

$$W_{(i,j,k-1)}\phi_{(i,j,k-1)} = W_{(i,j,k-1)} \times \begin{cases} \rightarrow \phi_{(i,j,k-3/2)} & \text{si } W_{(i,j,k-1)} > 0 \\ \rightarrow \phi_{(i,j,k-1/2)} & \text{si } W_{(i,j,k-1)} < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

- Face Arrière (terme 5)

$$V_{(i,j,k)}\phi_{(i,j,k)} = V_{(i,j,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \phi_{(i,j-1/2,k)} & \text{si } V_{(i,j,k)} > 0 \\ \rightarrow \phi_{(i,j+1/2,k)} & \text{si } V_{(i,j,k)} < 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

- Face Avant (terme 6)

$$V_{(i,j-1,k)}\phi_{(i,j-1,k)} = V_{(i,j-1,k)} \times \begin{cases} \rightarrow \phi_{(i,j-3/2,k)} & \text{si } V_{(i,j-1,k)} > 0 \\ \rightarrow \phi_{(i,j-1/2,k)} & \text{si } V_{(i,j-1,k)} < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Ce schéma numérique a été retenu pour des raisons de stabilité, car il permet de contourner les difficultés liées aux discrétisations du type centré. En effet, la discrétisation de type centré, où l'on suppose une variation linéaire de ϕ entre deux points, peut amener à une valeur de ϕ non réaliste quand on travaille avec les grands nombres de Reynolds.

4.1.1.4 Equation de quantité de mouvement

Les termes de convection et de diffusion, de l'équation de la quantité de mouvement, après projection (voir tableau 4.1) s'obtiennent de façon identique à ceux de l'équation de conservation pour un scalaire.

- Le terme de pression est traité de manière différente. Sur la face Ouest par exemple, le bilan de $U_{(i-1,j,k)}$ s'écrit de la manière suivante :

$$\int_A P \delta_{1j} n d\sigma \simeq dy_j dz_k (P_{(i-1,j,k)} - P_{(i,j,k)}) \quad (4.17)$$

Afin de mieux comprendre cette approximation, on présente sur la figure 4.2 le maillage entrelacé du bilan de la grandeur $U_{(i-1,j,k)}$ sur la face nord.

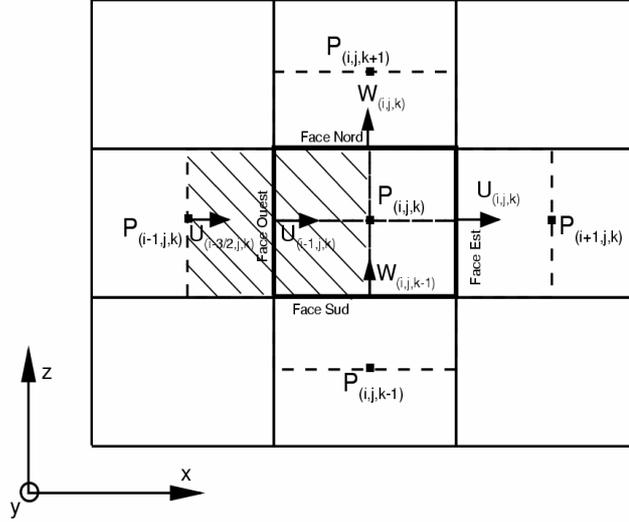


Figure 4.2 : Maillage entrelacé, bilan pour $U_{(i-1,j,k)}$.

Sur les cinq autres faces, les termes de force de pression s'obtiennent de façon similaire à celle de la face Ouest.

Les noeuds de forces de pression sont les mêmes que ceux des grandeurs scalaires, ce qui permet d'avoir une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de quantité de mouvement.

- Les équations de la quantité de mouvement s'écrivent sous la forme suivante :

- Pour la composante $U_{(i-1,j,k)}$ (face Ouest)

$$v \frac{\partial}{\partial t} (U_{(i-1,j,k)}) + Flux(U_{(i-1,j,k)}) = (P_{(i-1,j,k)} - P_{(i,j,k)}) dy_j dz_k \quad (4.18)$$

- Pour la composante $V_{(i,j-1,k)}$ (face Avant)

$$v \frac{\partial}{\partial t} (V_{(i,j-1,k)}) + Flux(V_{(i,j-1,k)}) = (P_{(i,j-1,k)} - P_{(i,j,k)}) dx_i dz_k \quad (4.19)$$

- Pour la composante $W_{(i,j,k-1)}$ (face Sud)

$$v \frac{\partial}{\partial t} (W_{(i,j,k-1)}) + Flux(W_{(i,j,k-1)}) = (P_{(i,j,k-1)} - P_{(i,j,k)}) dx_i dy_j \quad (4.20)$$

où les termes $flux(U_{(i-1,j,k)})$, $flux(V_{(i,j-1,k)})$ et $flux(W_{(i,j,k-1)})$ représentent chacun la somme des termes convectif et diffusif ($flux(U_{(i-1,j,k)}) = conv(U_{(i-1,j,k)}) + Diff(U_{(i-1,j,k)})$). Pour des raisons de clarté, nous n'explicitons ci-dessous que la discrétisation de ces termes que sur la composante $U_{(i,j,k)}$ dans la direction (x). Les expressions pour les autres termes s'obtiennent de façon similaire.

Le terme convectif est discrétisé en utilisant le schéma QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for the Convective Kinematics), proposé par Leonard [71]:

$$\begin{aligned} conv(U_{i,j,k}) = & \frac{1}{2} \left[(U_{(i+1,j,k)} + U_{(i,j,k)})U_{(i+1/2,j,k)} - (U_{(i-1,j,k)} + U_{(i,j,k)})U_{(i-1/2,j,k)} \right] dy_j dz_k \\ & + \frac{1}{2} \left[(V_{(i+1,j,k)} + V_{(i,j,k)})U_{(i,j+1/2,k)} - (V_{(i,j-1,k)} + V_{(i+1,j-1,k)})U_{(i,j-1/2,k)} \right] dx_i dz_k \\ & + \frac{1}{2} \left[(W_{(i+1,j,k)} + W_{(i,j,k)})U_{(i,j,k+1/2)} - (W_{(i,j,k-1)} + W_{(i+1,j,k-1)})U_{(i,j,k-1/2)} \right] dx_i dy_j \end{aligned} \quad (4.21)$$

Cette discrétisation améliore la précision offerte par le schéma Upwind au premier ordre. En effet, le schéma QUICK est basé sur une moyenne du schéma Upwind au second ordre et sur les interpolations centrales des variables.

- Le terme diffusif est discrétisé comme suit :

$$\begin{aligned} Diff(U_{i,j,k}) = & (t_{xx(i,j,k)} - t_{xx(i-1,j,k)}) dy_j dz_k \\ & + (t_{xy(i,j+1,k)} - t_{xy(i,j,k)}) dx_i dz_k \\ & + (t_{xz(i,j,k+1)} - t_{xz(i,j,k)}) dx_i dy_j \end{aligned} \quad (4.22)$$

où

$$\begin{aligned} t_{xx(i,j,k)} &= R_{11(i,j,k)} - \nu \frac{U_{(i+1,j,k)} - U_{(i,j,k)}}{dx_i} \\ t_{xy(i,j,k)} &= R_{12(i,j,k)} - \nu \frac{V_{(i,j,k)} - V_{(i-1,j,k)}}{dx_{i-1/2}} \\ t_{xz(i,j,k)} &= R_{13(i,j,k)} - \nu \frac{W_{(i,j,k)} - W_{(i-1,j,k)}}{dx_{i-1/2}} \end{aligned}$$

Les termes $R_{11(i,j,k)}$, $R_{12(i,j,k)}$ et $R_{13(i,j,k)}$ représentent les composantes du tenseur de Reynolds discrétisées. Ces composantes sont données par les modèles non-linéaires de turbulence retenus dans cette étude. Pour illustration, on donne ici, la composante normale discrétisée $R_{11(i,j,k)}$ pour le modèle de Shih_f et al. amélioré.

$$\begin{aligned} R_{11(i,j,k)} = & \frac{2}{3} k_{(i,j,k)} - 2C_{\mu(i,j,k)} f \frac{k_{(i,j,k)}^2}{\mathcal{E}_{(i,j,k)}} S_{11}^*_{(i,j,k)} \\ & + 2C_{2(i,j,k)} f \frac{k_{(i,j,k)}^3}{\mathcal{E}_{(i,j,k)}^2} (2S_{12}^*_{(i,j,k)} \Omega_{12}^*_{(i,j,k)} + 2S_{13}^*_{(i,j,k)} \Omega_{13}^*_{(i,j,k)}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Rappelons que pour ce modèle, les tenseurs S_{ij}^* et Ω_{ij}^* sont définis par :
 $S_{ij}^* = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}$ et $\Omega_{ij}^* = \Omega_{ij}$. Ces termes, ainsi que les fonctions C_2 et C_μ de ce modèle, sont discrétisés comme suit :

$$S_{11} = \frac{U_{(i+1,j,k)} - U_{(i,j,k)}}{dx_i} \quad (4.24)$$

Notons que pour le modèle Craftt et al., les expressions des composantes du Reynolds discrétisées sont très fastidieuses à écrire ici.

4.1.1.5 Equations d'énergie cinétique de turbulence et de sa dissipation

Les termes de convection–diffusion, qui interviennent dans les équations d'énergie cinétique de turbulence k et de son taux de dissipation ε , s'obtiennent de façon identique à ceux de l'équation de conservation pour un scalaire.

Les termes sources sont les termes de production (Prod) dus au gradient de vitesse moyenne. Ceux-ci peuvent se mettre sous la forme :

$$\text{Prod} = -R_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (4.25)$$

soit

$$\begin{aligned} \text{Prod} = & - \overbrace{\left(R_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + R_{22} \frac{\partial V}{\partial y} + R_{33} \frac{\partial W}{\partial z} \right)}^{\text{Prod 1}} \\ & - \underbrace{R_{12} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)}_{\text{Prod 2}} - \underbrace{R_{13} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right)}_{\text{Prod 3}} - \underbrace{R_{23} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)}_{\text{Prod 4}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le schéma pour la discrétisation est le suivant :

$$\text{Prod 1}_{(i,j,k)} = - \left(R_{11(i,j,k)} \tau_{xx(i,j,k)} + R_{22(i,j,k)} \tau_{yy(i,j,k)} + R_{33(i,j,k)} \tau_{zz(i,j,k)} \right) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Prod 2}_{(i,j,k)} = & -\frac{1}{4} [R_{12(i,j,k)} (\tau_{xy(i,j,k)} + \tau_{yx(i,j,k)}) + \\ & + R_{12(i+1,j,k)} (\tau_{xy(i+1,j,k)} + \tau_{yx(i+1,j,k)}) \\ & + R_{12(i+1,j+1,k)} (\tau_{xy(i+1,j+1,k)} + \tau_{yx(i+1,j+1,k)}) \\ & + R_{12(i,j+1,k)} (\tau_{xy(i,j+1,k)} + \tau_{yx(i,j+1,k)})] \end{aligned} \quad (4.28)$$

où

$$\tau_{yy(i,j,k)} = \frac{V_{(i,j+1,k)} - V_{(i,j,k)}}{dy_j}$$

$$\tau_{yx(i,j,k)} = \frac{U_{(i,j,k)} - U_{(i,j-1,k)}}{dy_{j-1/2}}$$

La discrétisation des deux autres termes (Prod 3 et Prod 4) est analogue à celle de Prod 2.

4.1.2 Discrétisation temporelle

Dans cette section $(n+1)$ est l'indice du temps courant t et (n) est l'indice du temps précédent $t - \Delta t$.

La discrétisation en temps utilisée est le schéma d'Euler explicite au premier ordre. Ainsi pour la variable ϕ au temps (n) on écrit :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^n \approx \frac{\phi^{(n+1)} - \phi^{(n)}}{\Delta t} \quad (4.29)$$

Pour la discrétisation des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, nous utilisons la méthode de projection semi-implicite en pression de Harlow et Welch [72]. On écrit alors :

- Conservation de la masse :

$$\frac{\partial U_i^{(n+1)}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.30)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}}{\Delta t} + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - R_{ij} \right) \right]^{(n)} + \frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial x_i} = 0 \quad (4.31)$$

soit

$$U_i^{(n+1)} = \Delta t \left[S U_i^{(n)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial x_i} \right]^{(n)} \quad (4.32)$$

où $S U_i^{(n)}$ est la partie explicite de l'équation (4.31) regroupant les termes d'advection et de diffusion.

- Equations d'énergie cinétique de turbulence et de sa dissipation :

$$k^{(n+1)} = k^{(n)} + \Delta t \left[-U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + \frac{v_t}{\sigma_k}) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - R_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \varepsilon \right]^{(n)} \quad (4.33)$$

$$\varepsilon^{(n+1)} = \varepsilon^{(n)} + \Delta t \left[-U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - C_{\varepsilon 1} R_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\varepsilon}{k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \right]^{(n)} \quad (4.34)$$

La méthode de résolution de Harlow et Welch [72] consiste à exprimer la vitesse $U_i^{(n+1)}$ en fonction de $P^{(n+1)}$ à partir de l'équation (4.32) et de reporter cette expression dans l'équation de conservation de la masse. On obtient ainsi une équation de Poisson qui permet de calculer les pressions à l'instant $(n+1)$. Ensuite, en utilisant (4.32) on obtient un champ de vitesses à l'instant $(n+1)$. Ce procédé de résolution est détaillé ci-dessous.

Le théorème de Gauss appliqué à l'équation de conservation de la masse (4.30) sur le volume de contrôle donne la discrétisation suivante au temps $(n+1)$:

$$\begin{aligned} 0 = & \left(U_{(i+1,j,k)}^{(n+1)} - U_{(i,j,k)}^{(n+1)} \right) dy_j dz_k \\ & + \left(V_{(i,j+1,k)}^{(n+1)} - V_{(i,j,k)}^{(n+1)} \right) dx_i dz_k \\ & + \left(W_{(i,j,k+1)}^{(n+1)} - W_{(i,j,k)}^{(n+1)} \right) dx_i dy_j \end{aligned} \quad (4.35)$$

En reportant les valeurs de vitesses fournies par l'équation (4.32) dans l'équation de conservation (4.35), on obtient :

$$\begin{aligned} & AW_{(i,j,k)} P_{(i-1,j,k)}^{(n+1)} + AE_{(i,j,k)} P_{(i+1,j,k)}^{(n+1)} + AS_{(i,j,k)} P_{(i,j-1,k)}^{(n+1)} \\ & + AN_{(i,j,k)} P_{(i,j+1,k)}^{(n+1)} + AB_{(i,j,k)} P_{(i,j,k-1)}^{(n+1)} + AT_{(i,j,k)} P_{(i,j,k+1)}^{(n+1)} \\ & - (AW + AE + AS + AN + AB + AT)_{(i,j,k)} P_{(i,j,k)}^{(n+1)} = \rho B_{(i,j,k)}^{(n)} \end{aligned} \quad (4.36)$$

où

$$\begin{aligned} AW_{(i,j,k)} &= \frac{dy_j dz_k}{dx_{i-1/2}}, & AE_{(i,j,k)} &= \frac{dy_j dz_k}{dx_{i+1/2}}, & AS_{(i,j,k)} &= \frac{dx_i dz_k}{dy_{j-1/2}} \\ AN_{(i,j,k)} &= \frac{dx_i dz_k}{dy_{j+1/2}}, & AB_{(i,j,k)} &= \frac{dx_i dy_j}{dz_{k-1/2}}, & AT_{(i,j,k)} &= \frac{dx_i dy_j}{dz_{k+1/2}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

et

$$\begin{aligned} B_{(i,j,k)}^{(n)} &= \left(SU_{(i+1,j,k)}^{(n)} - SU_{(i,j,k)}^{(n)} \right) dy_j dz_k \\ &+ \left(SV_{(i,j+1,k)}^{(n)} - SV_{(i,j,k)}^{(n)} \right) dx_i dz_k \\ &+ \left(SW_{(i,j,k+1)}^{(n)} - SW_{(i,j,k)}^{(n)} \right) dx_i dy_j \end{aligned} \quad (4.38)$$

Pour déterminer la pression à l'instant $(n+1)$, nous sommes amenés à résoudre à chaque pas de temps un système linéaire du type :

$$A \cdot P^{(n+1)} = B^{(n)} \quad (4.39)$$

où A est une matrice définie positive et symétrique dont les coefficients ne dépendent que des données géométriques inhérentes au maillage. Comme elle est définie positive et symétrique, on utilise la méthode de résolution de Cholesky pour résoudre le système linéaire (4.39). En effet, la matrice A est décomposée en un produit :

$$A = L \cdot L^T \quad (4.40)$$

où L est une matrice triangulaire inférieure et L^T sa transposée. La décomposition de la matrice est faite une seule fois, au démarrage du calcul, car ses éléments ne dépendent que des données géométriques inhérentes au maillage. Ensuite, on effectue la résolution du système à chaque pas de temps à l'aide d'un algorithme de monté et de descente.

Le choix du pas de temps est fait en appliquant la condition de stabilité dite CFL (Courant Friedrich-Lewy). Cette condition précise la limite pour le pas de temps de convection Δt_c :

$$\Delta t_c = \frac{1}{\max \left[\frac{|U|}{\Delta x} + \frac{|V|}{\Delta y} + \frac{|W|}{\Delta z} \right]} \quad (4.41)$$

Pour le pas de temps de diffusion Δt_d , la limite est donnée par la condition de Patankar [73]:

$$\Delta t_d = \frac{1}{3\nu \max \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]} \quad (4.42)$$

Pour ces calculs, le pas de temps Δt a été limité à une valeur satisfaisant la condition de CFL suivante:

$$CFL_{\max} = \Delta t \max \left[\frac{|U|}{\Delta x} + \frac{|V|}{\Delta y} + \frac{|W|}{\Delta z} \right] \leq 0.3 \quad (4.43)$$

Cette condition nous permet de choisir $\Delta t_{\max} = 0.0015H / u_\tau$ (où H est la hauteur de la conduite et u_τ est la vitesse de frottement). Ainsi pour les calculs mis en œuvres, la valeur moyenne de CFL_{\max} est de 0.22. Notons que ce critère de convergence avait été aussi retenu par Gavrilakis lors de la réalisation de la DNS [3]. Pour ces simulations la convergence est

atteinte en un temps CPU approximatif de 15 heures à 1,5 jours et au bout d'environ 70000 itérations (66663 avec le modèle de Shih_f et al. et 71295 avec le modèle de Craft_f et al.). Pour précision la station de calcul ici est un PC, Pentium 4 CPU 2.57 Ghz, win XP.

4.1.3 Initialisation des calculs et conditions aux limites

A l'entrée de la conduite, des profils constants pour U , k et ε sont donnés. Notons que les valeurs d'entrée des grandeurs turbulentes sont obtenues à partir de l'intensité de la turbulence (*rms*: *root mean square*), et de la viscosité turbulente issue de la DNS. Les vitesses secondaires moyennes V et W sont initialisées à zéro ($V=0$ et $W=0$) dans tout le domaine. A la sortie, les conditions d'homogénéité de Neumann (gradient nul) sont utilisées pour toutes les variables de l'écoulement à l'exception de la pression qui est considérée comme nulle.

Au pas de temps suivant, les valeurs calculées à la sortie du fluide sont utilisées comme conditions d'entrées. Cette procédure est utilisée pour les pas de temps suivants jusqu'à la convergence.

Les conditions aux limites pour les valeurs k et ε , en un point sur la première maille près de la paroi, ont été calculées en considérant que ce point est dans la sous-couche visqueuse. Sur les parois, les conditions aux limites de ces deux grandeurs sont définies par les conditions de Patel et al. [61], à savoir:

$$\frac{\partial k}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial k}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{\partial^2 k}{\partial z^2} \quad (4.44)$$

Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse moyenne de l'écoulement (U_m) et sur la hauteur de la conduite ($2h$), $Re = U_m 2h/\nu$, est égal à 4600. Les calculs sont effectués à l'aide d'un maillage non uniforme raffiné au voisinage des parois, de 63×63 noeuds dans la section transversale (y, z) (cf. Figure 4.3) et de 120 noeuds dans la direction principale de l'écoulement. Les résultats obtenus avec ce maillage sont très satisfaisants.

La convergence en maille est réalisée avec 61×61 noeuds dans le plan (y, z), car les différences observées entre les deux calculs sont inférieures à 1% (pour la vitesse moyenne principale U près du coin).

L'indépendance des résultats prédits vis à vis du maillage a été vérifiée avec des maillages se composant de $100 \times 21 \times 21$ et $90 \times 41 \times 41$ volumes finis. On observe seulement une différence maximale de l'ordre de 2% avec ces deux maillages pour la vitesse moyenne secondaire V à $z/h \approx 0.2$.

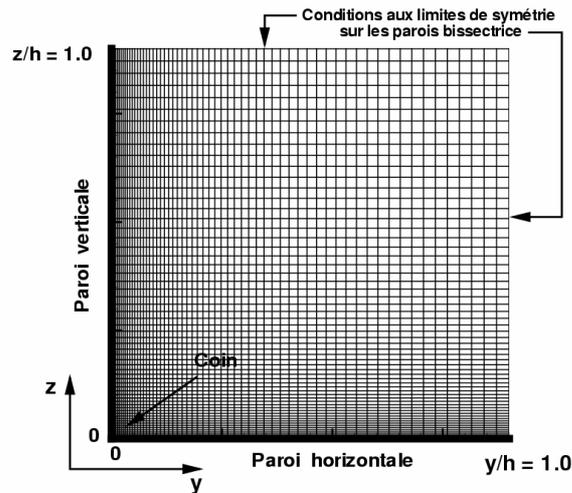


Figure 4.3 : Géométrie et maillage 63×63 du quadrant de la conduite carrée.

4.2 Résultats numériques

Le tableau 4.2 ci-dessous résume les différents paramètres et approches numériques de quelques études existantes dans la littérature scientifique, et que nous avons retenues en vue d'étayer nos résultats numériques. Les abréviations utilisées dans ce tableau sont : SQD : conduite carrée, « Square duct » (en anglais) ; REQ : conduite rectangulaire, « Rectangular duct » ; SQAD : conduite carrée annulaire, « Square annular ». Le nombre de Reynolds Re_τ , basé sur la vitesse de frottement (u_τ) et la hauteur de la conduite ($H=2h$) est défini par $Re_\tau = u_\tau H / \nu$. Le nombre de Reynolds Re_b , basé sur la vitesse débitante U_b et la hauteur de la conduite, est défini par $Re_b = U_b H / \nu$.

Table 4.2: Etudes considérées dans la littérature.

Auteurs	Configurations	Re_b	Re_τ	Modélisations
Gavrilakis (1992) [3]	SQD	4410	300	DNS
Huser & Biringen (1993) [4]	SQD	10320	600	DNS
Madabhushi & Vanka (1991) [8]	SQD	5810	360	LES
Xu & Pollard (2001) [74]	SQAD	3650	400	LES
Niederschulte (1989) [75]	REQ	4914		Experimentation
Gessner & Emery (1981) [76]	REQ	250000		Experimentation

4.2.1 Topographies et profils des vitesses moyennes de l'écoulement

La figure 4.4 montre les contours moyens de la vitesse longitudinale normalisée U/U_0 sur un quart du conduit et dans la section transversale.

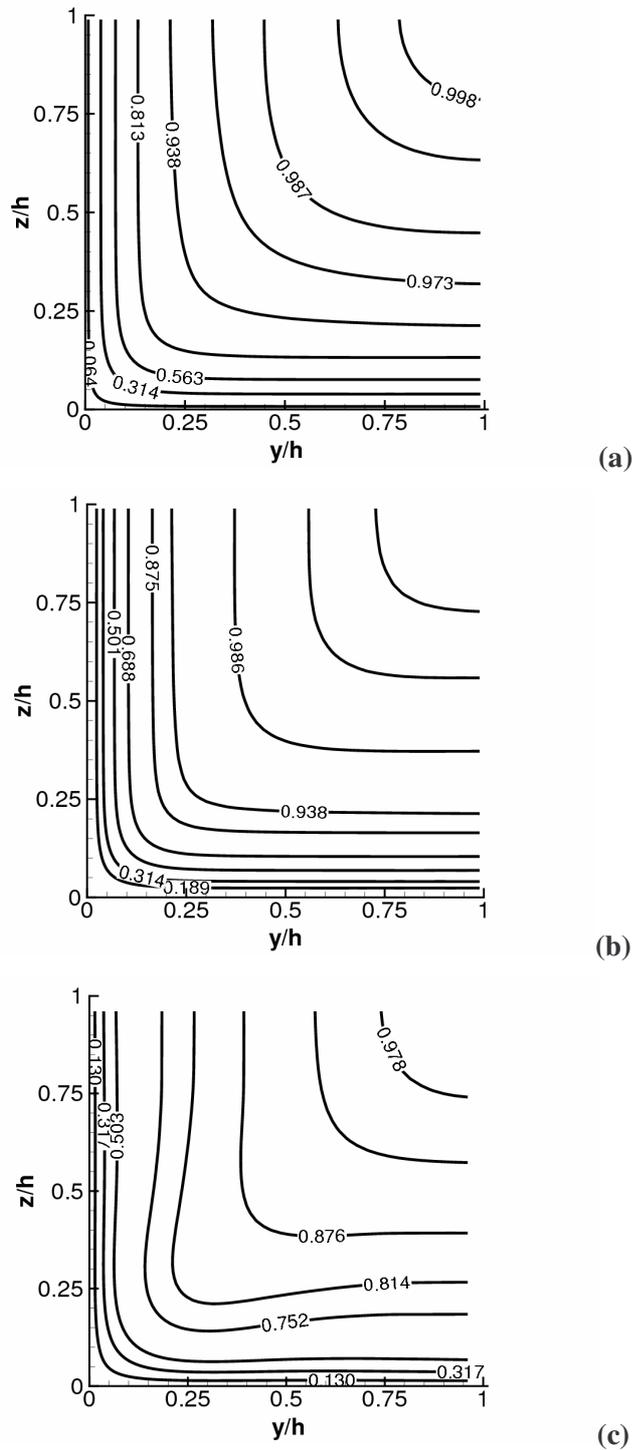


Figure 4.4 : Contours de la vitesse longitudinale U normalisée par la vitesse au centre U_0 .
 (a) Shih_f et al al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrilakis.

Les contours de la vitesse moyenne longitudinale issue de la simulation numérique directe [3] sont également montrés pour comparaison. Un examen de cette figure nous permet

de remarquer que l'écoulement est symétrique par rapport à la première bissectrice ($z = y$) et que les prédictions sont en bon accord avec les résultats de la DNS [3].

La Figure 4.5 présente les profils de la vitesse longitudinale moyenne normalisée U/U_0 à différentes distances de la paroi verticale ($y/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 1.0). Ces profils montrent que l'intensité du flux prédite est en bon accord avec les résultats de la DNS de Gavrilakis [3].

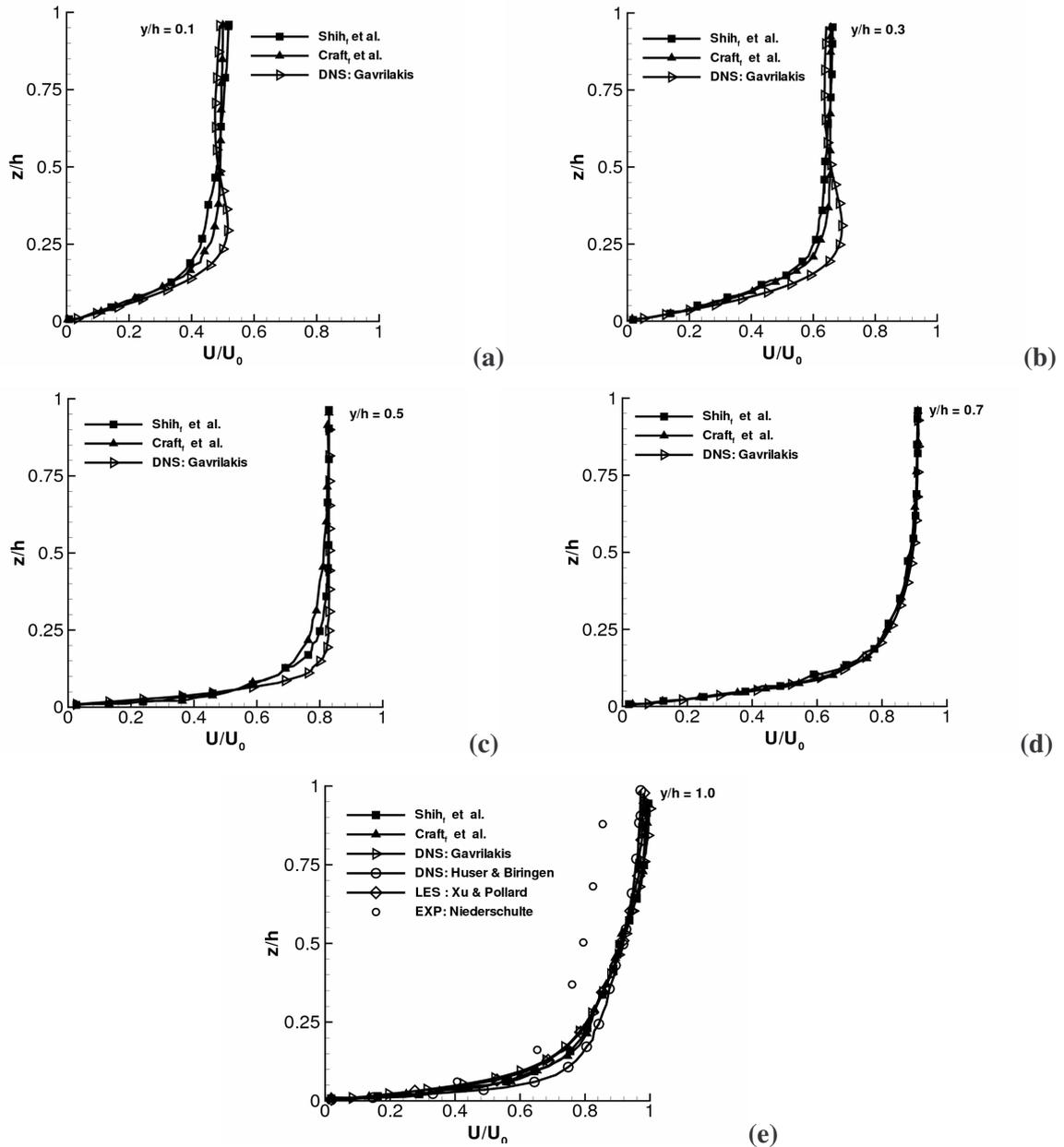


Figure 4.5 : Vitesses longitudinale U normalisée à différentes sections de la conduite ($y/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 1.0)

Sur la figure 4.5(e), les profils de U/U_0 obtenus avec les modèles de Shih_f et al. et Craft_f et al. sont comparés aux données de la DNS de Huser et Biringen [4], de la LES de Xu et Pollard [74] et de l'expérience de Niederschulte [75]. Les profils de U/U_0 se comparent favorablement à ceux issus de la DNS de Huser et Biringen [4] et de la LES de Xu et Pollard [74], et ce malgré la différence entre les nombres de Reynolds (cf. Tableau 4.2). Cependant, les données issues de l'expérience de Niederschulte [75], dont le nombre de Reynolds est très grand par rapport aux simulations numériques, ne sont pas correctement approchées par les modèles Shih_f et al. et Craft_f et al. loin des parois.

La commodité de la représentation des profils de U/U_0 (Cf. figure 4.5) souffre d'un manque de précision dans la zone très proche de la paroi, ce qui nécessite d'introduire une échelle locale ($z^+ = z \cdot u_\tau / \nu$). Sur la figure 4.6 ci-dessous, les profils de vitesse longitudinale moyenne, adimensionnalisée $U^+ (= U / u_\tau)$, dans le plan médian de la paroi du conduit ($y/h = 1.0$) et exprimés en unités de paroi sont comparés aux données de Gavrilakis [3], de Xu et Pollard [74] et de Niederschulte [75]. Les lois logarithmiques standard (Cf. équation (4.46)) d'une couche limite turbulente établie sur une plaque plane et celle proposée par Gavrilakis [3] (Cf. équation (4.47)), ainsi que la loi linéaire, sont également tracées pour comparaison. La sous-couche visqueuse est décrite par un profil de vitesse linéaire :

$$U^+ = z^+ \quad (4.45)$$

et la zone logarithmique, localisée au dessus des $z^+ = 30$, vérifie :

$$U^+ = 2.5 \ln(z^+) + 5.5 \quad (4.46)$$

$$U^+ = 3.2 \ln(z^+) + 3.9 \quad (4.47)$$

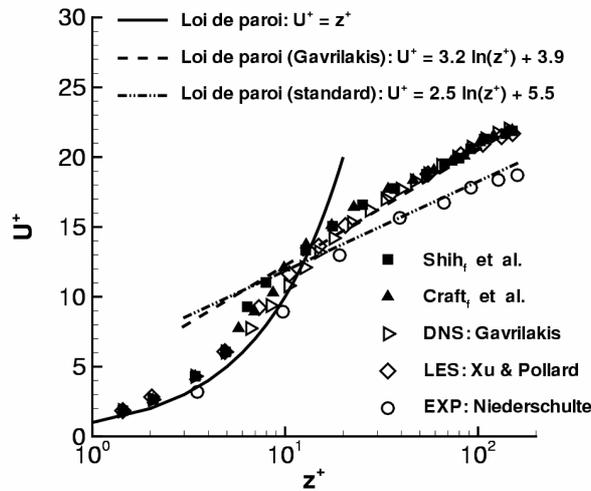


Figure 4.6 : Loi logarithmique de la vitesse longitudinale le long de la paroi bissectrice ($y/h=1.0$).

On constate que, les profils des vitesses longitudinales (U^+) prédits sur la médiane de la paroi ($y/h=1.0$) sont en bon accord avec les données de Gavrilakis [3] et de Xu et Pollard [74] et corroborent les lois logarithmiques classiques et celle proposée par Gavrilakis [3]. Cependant, notons que les profils prédits sont plus proches de la loi de paroi proposée par Gavrilakis. D'après Huser et Biringen [4], la différence entre les profils des conduites carrées sur la médiane de la paroi et la loi logarithmique classique est la conséquence d'une plus grande activité turbulente dans cette zone par rapport au canal plan.

La figure 4.7 suivante montre les contours de la vitesse transversale normalisée W/U_0 .

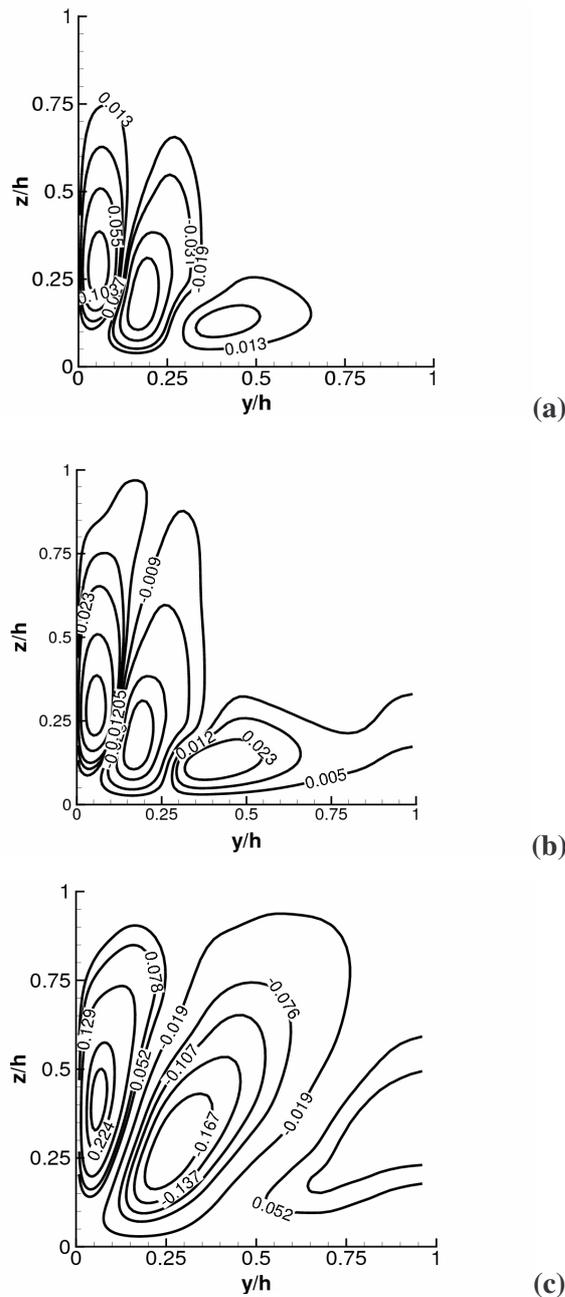


Figure 4.7 : Contours de la vitesse transversale W normalisée par la vitesse au centre U_0 .
 (a) Shih_f et al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrilakis.

Les prédictions obtenues avec le modèle de Craft_f et al. (Figure 4.7-b) sont sensiblement équivalentes à celles de la DNS [3]. Par contre, les contours obtenus avec le modèle de Shih_f et al. (Figure 4.7(a)) sont moins développés et sont cantonnés au voisinage de la paroi verticale. Cependant, on note que ces contours gardent la même structure, en trois blocs que ceux obtenus avec le modèle de Craft_f et al. et la DNS [3].

Les profils de la vitesse transversale W/U_0 , à différentes distances ($y/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 1.0) sont présentés sur la figure 4.8 ci-dessous.

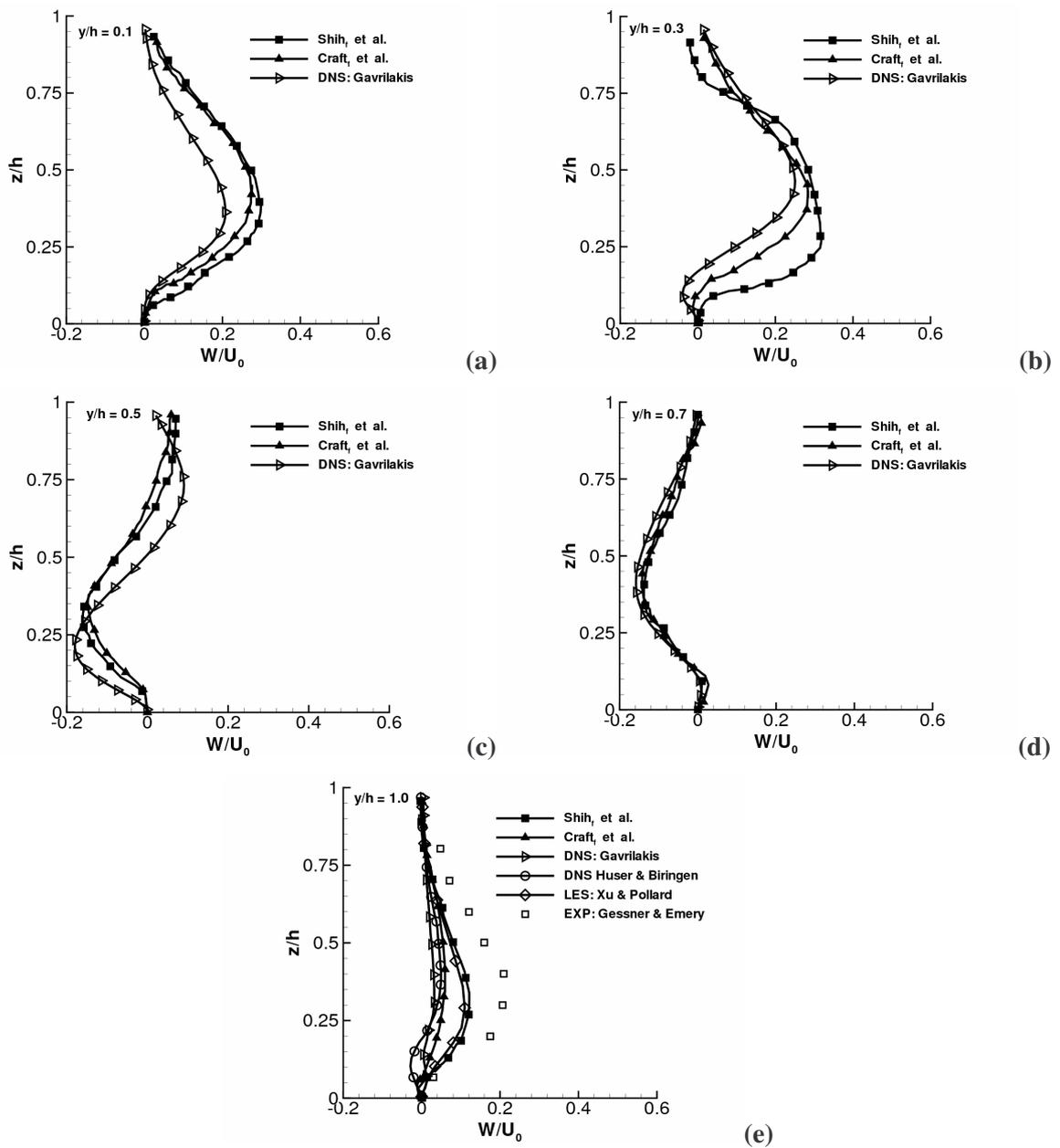
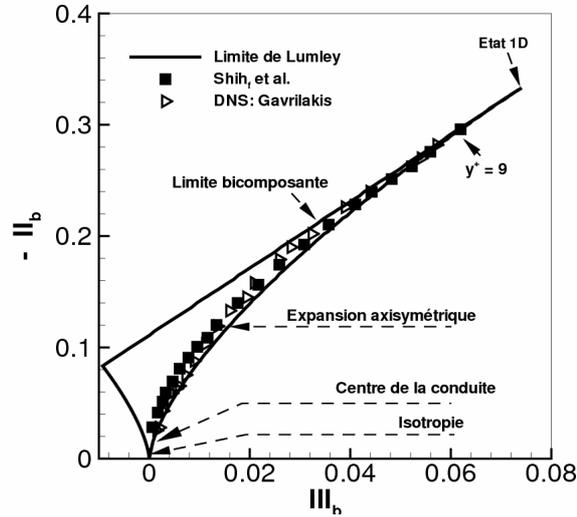


Figure 4.8 : Vitesse transversale W normalisée à différentes sections de la conduite ($y/h = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7$ et 1.0).

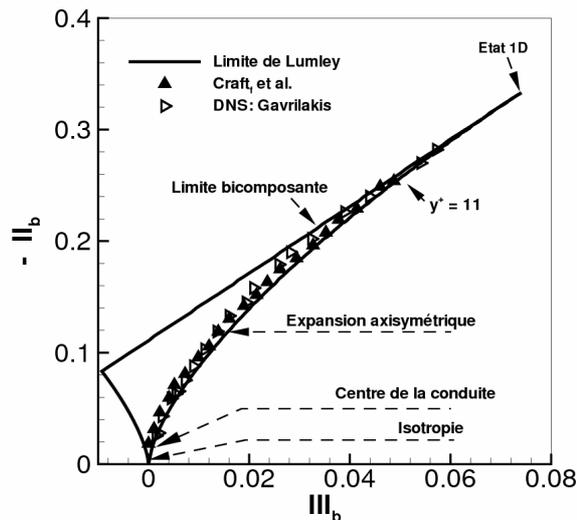
Les tendances générales de ces profils montrent que la forme des flux secondaires est en bon accord avec les résultats de la DNS [3]. A la section $y/h = 1.0$ (Cf. figure 4.8(e)), outre les données de la DNS [3], les profils de W/U_0 sont comparés avec ceux obtenus par Huser et Biringen [4], par Xu et Pollard [74] et par Gessner et Emery [76]. Le même type d'accord est observé, sauf pour les données expérimentales de Gessner et Emery [76]. Une explication possible de ce désaccord est que le nombre de Reynolds de l'écoulement expérimental de Gessner et Emery [76] est très grand par rapport à ceux des simulations numériques adoptées ici.

4.2.2 Cartes d'anisotropie

La figure 4.9 présente les évolutions de l'anisotropie du tenseur b_{ij} dans le plan de Lumley.



(a)



(b)

Figure 4.9 : Cartes des second et troisième invariants. Comparaisons avec la DNS :
 (a) $Shih_f$ et al. ; (b) $Craft_f$ et al.

On constate que, les profils du tenseur d'anisotropie sont pratiquement identiques à celui de la DNS [3] et sont caractérisés par une diminution du troisième invariant le long de la courbe, d'équation $III_b = 2(-II_b/3)^{3/2}$, tendant vers l'état axisymétrique de la turbulence. Près du centre de la conduite, la turbulence devient approximativement isotrope ($II_b = III_b = 0$), alors que dans la région proche parois, l'état de la turbulence est presque bidimensionnel. Aussi, l'état anisotrope de la turbulence obtenu avec le modèle de Shih_f et al. est plus proche de celui obtenu par Antonia et al. [77], alors que la prédiction obtenue avec le modèle de Craft_f et al. l'est moins. En effet, le point le plus anisotrope obtenu avec le modèle de Shih_f et al. se situe à $y^+ = 9$ (Cf. figure 4.9(a)) alors que Antonia et al. [77] le situe dans un canal plan à $y^+ = 8$. Le modèle Craft_f et al., quant à lui, le situe à $y^+ = 11$.

4.2.3 Vecteurs du flux secondaire

La figure 4.10 suivante montre le champ de vecteur vitesse moyenne, associé aux écoulements secondaires dans le quart de la conduite carrée.

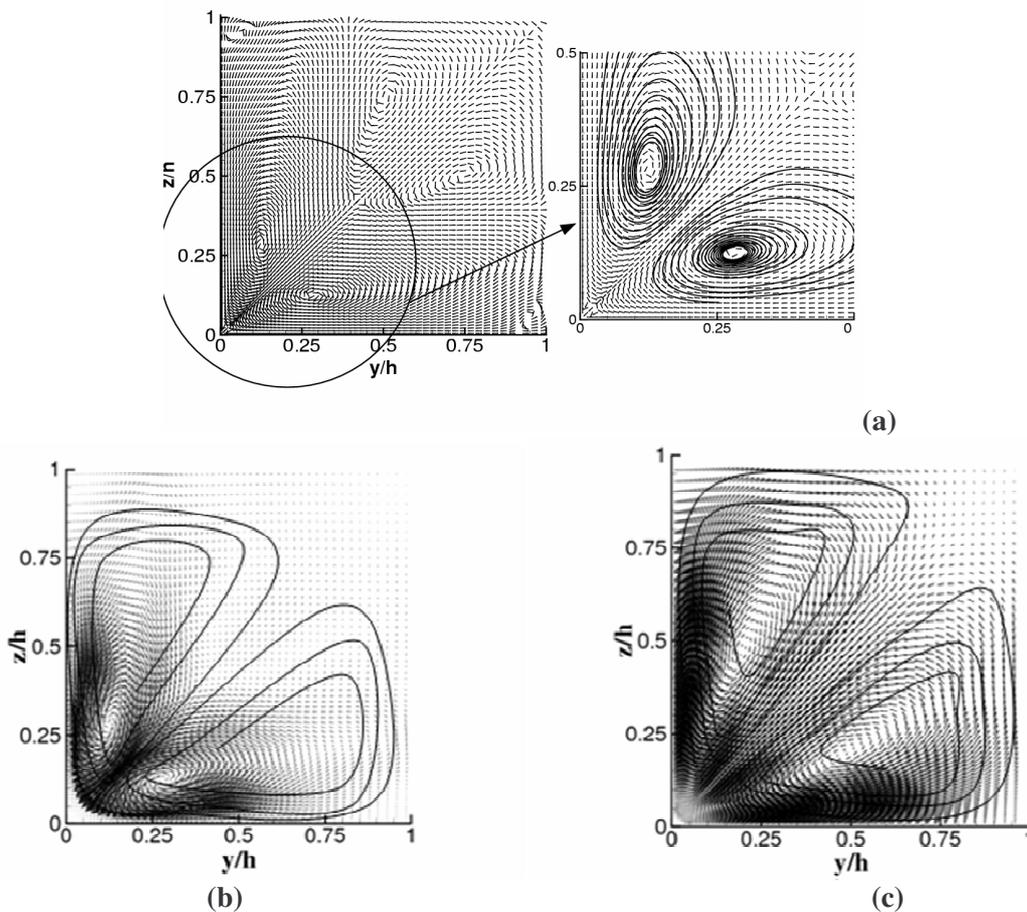


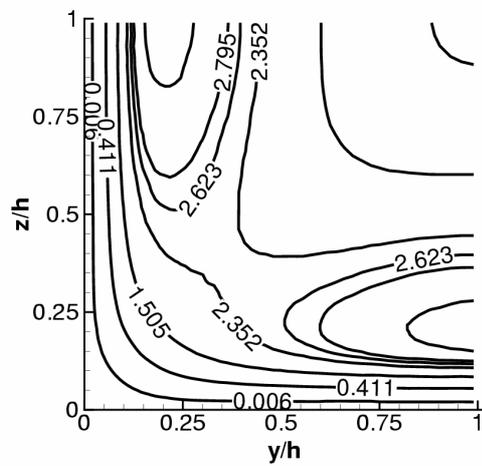
Figure 4.10 : Vecteurs du flux secondaire.

(a) Shih_f et al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrilakis.

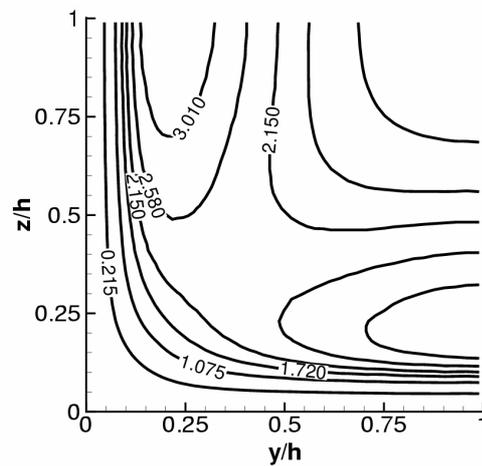
On observe que les vecteurs du flux secondaire prédits avec le modèle de Craft et al. modifié (Cf. figure 4.10-(b)) se comparent très favorablement à ceux issus de la DNS (Cf. figure 4.10-(c)). En effet, on constate la formation d'une paire de tourbillons contra-rotatifs où le fluide à haute vitesse situé au centre du conduit pénètre dans la zone de base vitesse située au voisinage du coin. Par contre, la prédiction issue le modèle de Shih et al. modifié est surprenante (Cf. figure 4.10-(a)). En effet, en plus de la paire de tourbillon contra-rotatif qui se forme près du coin, on observe la formation d'une deuxième paire près du centre. Cette erreur est peut être due au calcul numérique, car il me paraît anormale qu'un modèle quadratique puisse produire plusieurs structures. Ceci mérite d'être approfondi.

4.2.4 Topographies des composantes du tenseur de Reynolds

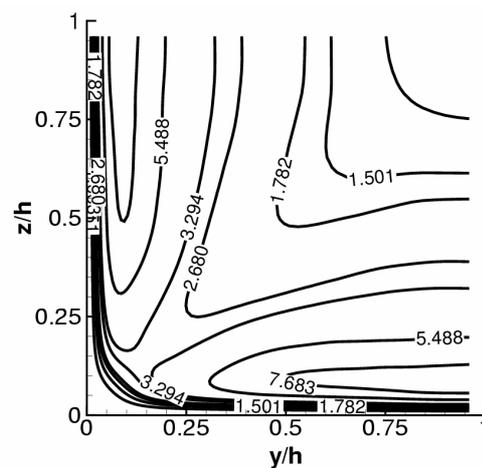
Les figures 4.11, 4.12 et 4.13 ci-dessous montrent les contours des contraintes de Reynolds $\langle u^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle$ et $-\langle uw \rangle$ respectivement. Les contraintes de Reynolds $\langle w^2 \rangle$ et $-\langle uv \rangle$ peuvent être obtenues par une rotation de 90° des contours $\langle v^2 \rangle$ et $-\langle uw \rangle$ respectivement. Rappelons que dans la configuration étudiée ici $\langle v(z)^2 \rangle = \langle w(y)^2 \rangle$ et $\langle uv(z)^2 \rangle = \langle uw(y)^2 \rangle$. On constate sur ces figures que les prédictions des contours obtenues à partir des modèles Shih_f et al. et Craft_f et al. sont très proches de celles issues de la DNS [3]. L'allure des contours de certaines de ces contraintes est facile à comprendre. Par exemple, la diminution de la composante $\langle u^2 \rangle$ près du coin est due à la diminution du gradient de vitesse longitudinale dans cette zone. Le comportement dissymétrique des composantes $\langle v^2 \rangle$ et $\langle w^2 \rangle$ peut s'expliquer par le comportement tangentiel ou normal que peu avoir ces deux composantes par rapport à l'orientation des parois. La composante $\langle v^2 \rangle$, par exemple, est une composante tangentielle par rapport à la paroi horizontale (y) et normale par rapport à la paroi verticale (z). Ainsi, près du coin, l'interaction des parois provoque un comportement dissymétrique.



(a)

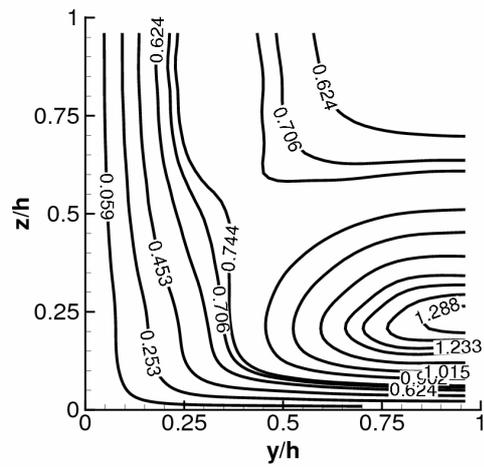


(b)

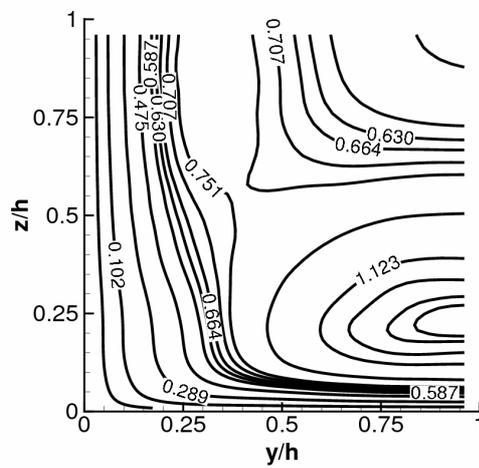


(c)

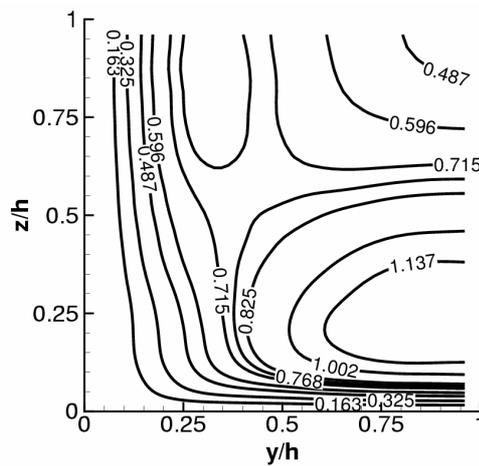
Figure 4.11 : Contours de la tension normale de Reynolds normalisée $\langle u^2 \rangle$.
 (a) Shih_f et al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrilakis.



(a)

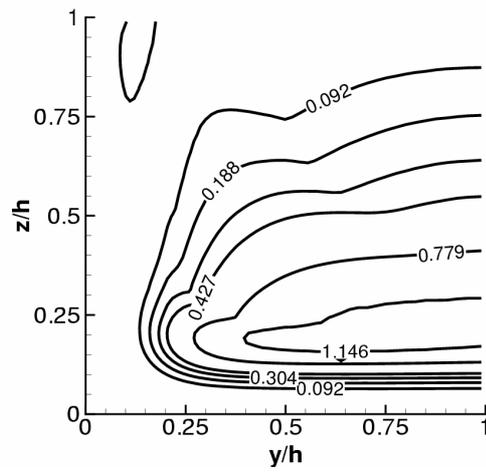


(b)

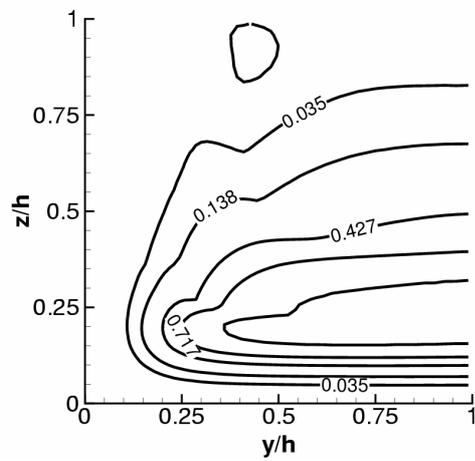


(c)

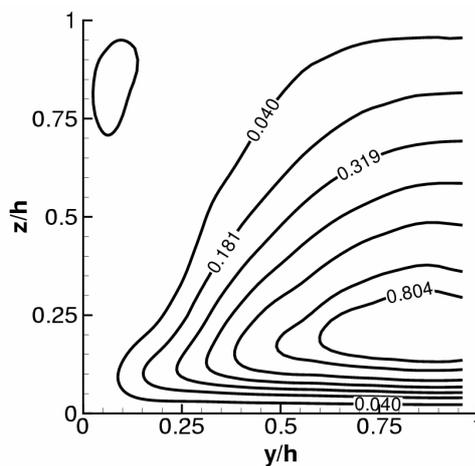
Figure 4.12 : Contours de la tension normale de Reynolds normalisée $\langle v^2 \rangle$.
 (a) Shih_f et al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrilakis.



(a)



(b)



(c)

Figure 4.13 : Contours de la tension de cisaillement de Reynolds normalisée $-\langle uw \rangle$.
 (a) Shih_f et al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrilakis.

4.2.5 Profils des composantes du tenseur de Reynolds

La figures 4.14(a) présente les intensités turbulentes longitudinales $u_{rms} (= \sqrt{\langle u^2 \rangle})$ sur la médiane de la paroi ($y/h = 1.0$).

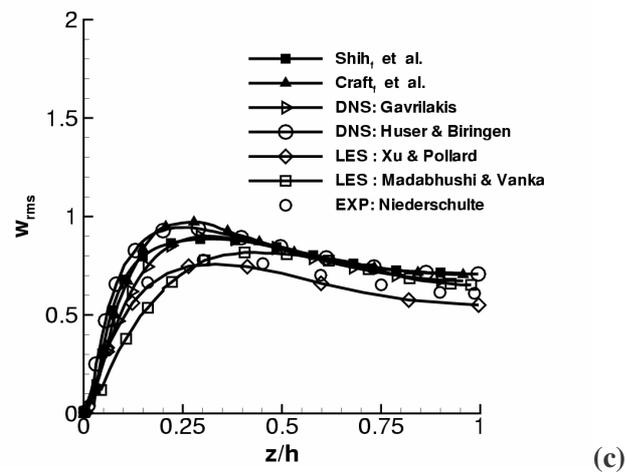
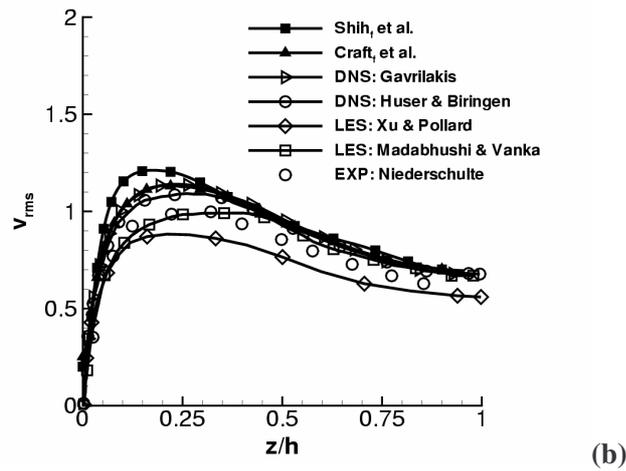
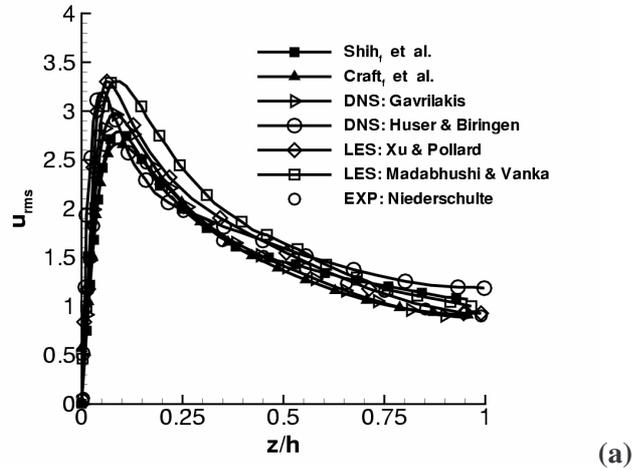


Figure 4.14 : Comparaison des profils des intensités turbulentes longitudinale (u_{rms}) et transversales (v_{rms} et w_{rms}) le long de la paroi bissectrice ($y/h = 1.0$).

Les données numériques de Gavrilakis [3], de Huser et Biringen [4], de Xu et Pollard [74], de Madabhushi et Vanka [8] et les mesures de Niederschulte [75] sont également représentées pour comparaison. Les profils prédits sont pratiquement semblables à ceux des DNS [3, 4], des LES [8, 74] et de l'expérience de Niederschulte [75], et ce même si les nombres de Reynolds utilisés sont différents. Cependant, notons que les modèles Shih_f et al. et Craft_f et al. sous-estiment le maximum de la quantité u_{rms} de près de 20%, par rapport aux résultats LES, et de 7% par rapport aux résultats de la DNS [3, 4]. Aussi, les maximums de la quantité u_{rms} issue des prédictions et des simulations de Madabhushi et Vanka [8] se situent à $z/h = 0.10$, tandis que pour la DNS [3] ce maximum se situe légèrement à droite ($z/h = 0.13$).

Les figures 4.14(b) et 4.14(c) présentent respectivement les comparaisons des intensités turbulentes transversales v_{rms} et w_{rms} sur la médiane de la paroi ($y/h = 1.0$).

En examinant la figure 4.14(b), on constate que l'intensité turbulente transversale v_{rms} prédite avec le modèle Craft_f et al. approche mieux les données DNS [3, 4] que celle obtenue avec le modèle Shih_f et al. En effet, alors qu'on obtient une bonne tendance entre le profil simulé avec le modèle Craft_f et al. et ceux de issus des DNS [2, 3], le modèle Shih_f et al., quant à lui, surestime le maximum de cette intensité d'environ 6% par rapport à aux DNS [3,4]. Aussi, la comparaison des profils de v_{rms} prédits et ceux obtenus à l'aide des données des simulations des grandes échelles [8, 74] montre d'une part que, nos prédictions concordent avec celles de Madabhushi et Vanka [8] pour $z/h \geq 0.43$, tandis que pour $z/h \leq 0.43$ les modèles Shih_f et al. et Craft_f et al. surestiment les données LES [8, 74] respectivement de 18% et 12% environ. D'autre part, les données LES de Xu et Pollard [74] sont sous-estimées par nos prédictions d'environ 22%. Concernant les données expérimentales de Niederschulte [75], on note que celles-ci sont légèrement surestimées, d'environ 4%.

Sur la figure 4.14(c), les intensités turbulentes transversales w_{rms} prédites sont pratiquement équivalentes à celles obtenues par Gavrilakis [3] et Huser et Biringen [4]. La comparaison des prédictions avec les résultats des LES [8, 74] et les données expérimentales [75] montre d'une part, que les prédictions sont en bon accord avec les données LES de Madabhushi et Vanka [8] à partir de $z/h \geq 0.25$ et d'autre part, que les prédictions surestiment les données LES de Xu et Pollard [74] et celles de l'expérience de Niederschulte [75].

La figure 4.15 montre les distributions des tensions de cisailments turbulentes $-\langle uv \rangle$ et $-\langle uw \rangle$ sur la médiane de la paroi ($y/h=1.0$).

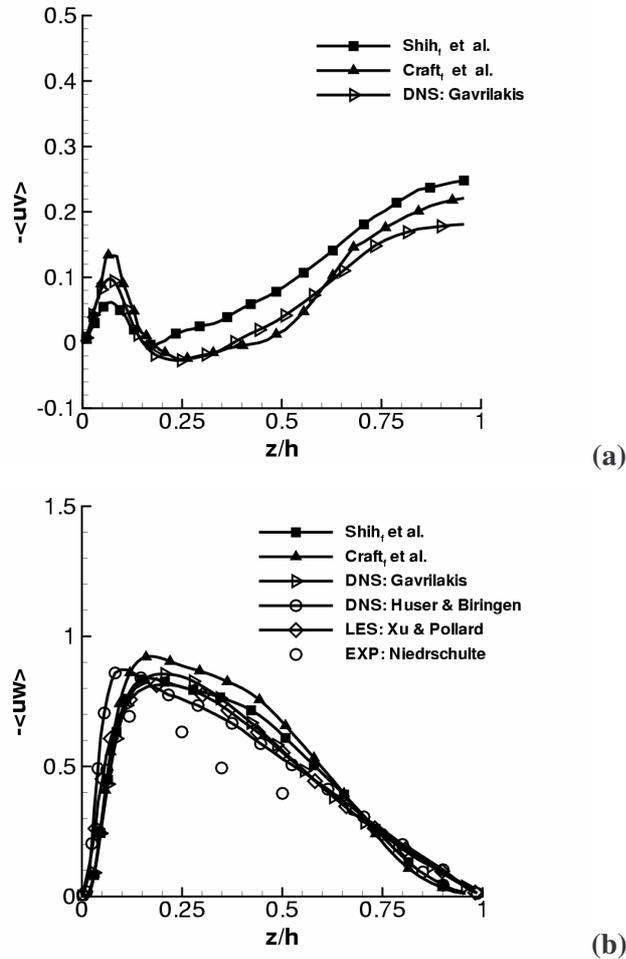


Figure 4.15 : Comparaison des profils des tensions de cisailment de Reynolds le long de la paroi bissectrice $y/h=1.0$: (a) $-\langle uv \rangle$; (b) $-\langle uw \rangle$.

En raison de l'absence de résultats disponibles dans la littérature concernant cette grandeur (Cf. Figure 4.15(a)), nous nous sommes contentés de faire des comparaisons avec la DNS [3].

La prédiction de la tension $-\langle uv \rangle$ obtenue avec le modèle Craft_f et al. approche mieux la DNS [3] que celle obtenue avec le modèle Shih_f et al. En effet, le profil de $-\langle uv \rangle$ prédit par le modèle de Craft_f et al. est sensiblement équivalent à celui obtenu avec la DNS de Gavrilakis [3], alors que celui prédit avec le modèle Shih_f et al. sous-estime cette grandeur dans la zone $z/h \leq 0.10$ puis la surestime pour $z/h > 0.20$ d'environ 24%. Sur la figure 4.15(b), on constate que les profils prédits avec les modèles Shih_f et al. et Craft_f et al. sont pratiquement confondus avec ceux des données numériques [3, 4, 74].

4.2.6 Topographie de la vorticité longitudinale

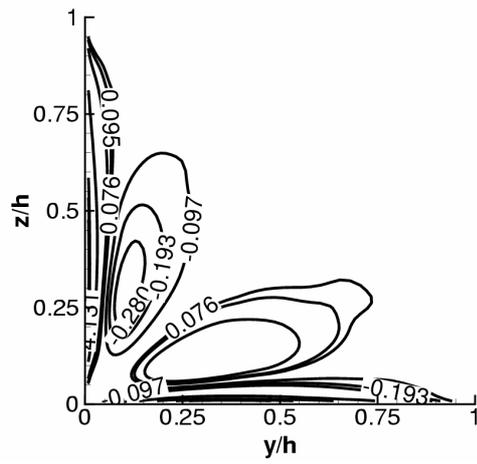
La vorticité peut être générée par deux mécanismes. Le premier est lié à l'action des gradients de pression sur la couche limite. Le second est dû aux tensions de Reynolds. Ces mécanismes sont représentés dans l'équation du mouvement de la vorticité longitudinale, qui s'écrit, pour un écoulement stationnaire :

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} = & \underbrace{\Omega_x \frac{\partial U}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{\Omega_y \frac{\partial U}{\partial y}}_{(2)} + \underbrace{\Omega_z \frac{\partial U}{\partial z}}_{(3)} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial z} \langle uv \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle uw \rangle \right)}_{(4)} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (-\langle uw \rangle)}_{(5)} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\langle uu \rangle - \langle ww \rangle)}_{(6)} + \underbrace{\nu \nabla^2 \Omega_x}_{(7)}
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

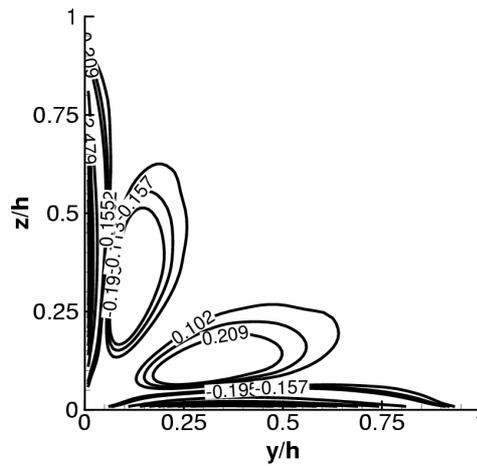
$$\text{où } \Omega_x = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

Le membre de gauche contribue à augmenter la vorticité longitudinale par convection. Le premier terme du membre de droite représente la production de vorticité longitudinale par l'étirement des structures vorticitaires. Les second et troisième termes représentent l'augmentation de la vorticité transversale par l'action des gradients de pressions. Le quatrième terme comprend un gradient longitudinal et peut être supposé négligeable devant les autres. Les cinquième et sixième termes représentent la production de la vorticité longitudinale respectivement par cisaillement secondaire et par les inhomogénéités des anisotropies des contraintes normales du tenseur de Reynolds dans les directions transversales. Le dernier terme représente la diffusion de la vorticité longitudinale par les forces d'origine visqueuse.

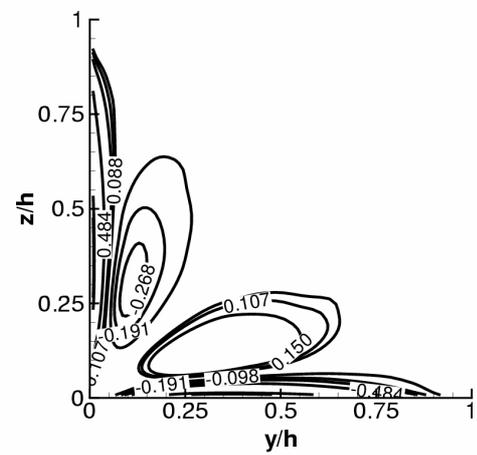
La figure 4.16 montre la comparaison des contours moyens de la vorticité longitudinale Ω_x sur le quart de la conduite carrée, obtenus à partir des modèles Shih_f et al., Craft_f et al. et de la DNS [3]. On constate que les modèles Shih_f et al. et Craft_f et al. capturent la présence des tourbillons longitudinaux caractérisant l'écoulement secondaire. Ces simulations sont en bon accord avec celles de la DNS [3]. Aussi, on constate que les contours de vorticité prédits sont symétriques par rapport à la première bissectrice et que les niveaux de vorticité prédits sont pratiquement semblables à ceux donnés par la DNS [3].



(a)



(b)



(c)

Figure 4.16 : Contours de la vorticité longitudinale.
 (a) Shih_f et al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrilakis.

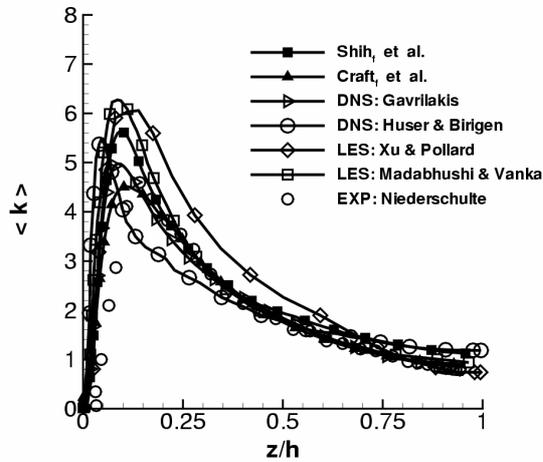
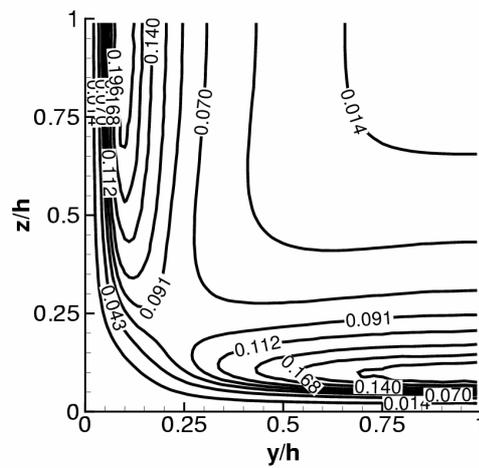


Figure 4.18 : Evolution de l'énergie cinétique turbulente $\langle k \rangle$ le long de la paroi bissectrice $y/h=1.0$.

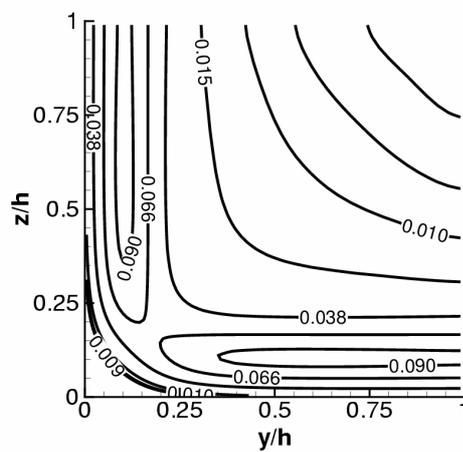
Sur la figure 4.17, on constate que les contours de $\langle k \rangle$ prédits sont sensiblement équivalents à ceux issus de la DNS [3]. De plus, les iso-valeurs sont pratiquement égales dans les mêmes régions du quart de la conduite. Sur la figure 4.18, on constate d'une part, que les profils calculés avec les modèles $Shih_f$ et al. et $Craft_f$ et al. sont plus proches des données de la DNS de Gavrilakis [3], de la LES de Madabhushi et Vanka [8] et de l'expérience de Niederschulte [75]. D'autre part, on constate respectivement que les données issues de la DNS de Huser et Birigen [4] et de la LES de Xu et Pollard [74], qui respectivement sous-estiment et surestiment $\langle k \rangle$ dans l'ensemble de la conduite.

Les contours du taux de dissipation de l'énergie cinétique calculés par les modèles $Shih_f$ et al. et $Craft_f$ et al., ainsi que ceux obtenus à partir de la DNS [3], sont présentés sur la figure 4.19 ci-dessous. Loin des parois et du coin, les prédictions sont en bon accord avec la DNS [3]. On note cependant que, les contours calculés avec le modèle de $Shih_f$ et al. sont plus proches de la DNS [3] que les prédictions issues du modèle $Craft_f$ et al.

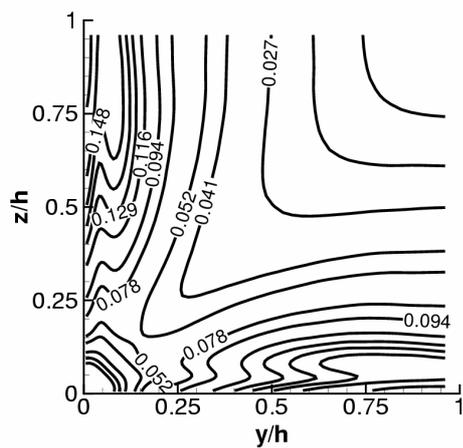
Sur la figure 4.20, on constate que les profils du taux de dissipation de l'énergie cinétique prédits sont bien approchés par les modèles $Shih_f$ et al. et $Craft_f$ et al. Aussi, on constate qu'au voisinage de la paroi les profils de cette quantité décroissent.



(a)



(b)



(c)

Figure 4.19 : Contours du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente $\langle \varepsilon \rangle$.
 (a) Shih_f et al.; (b) Craft_f et al.; (c) DNS de Gavrillakis.

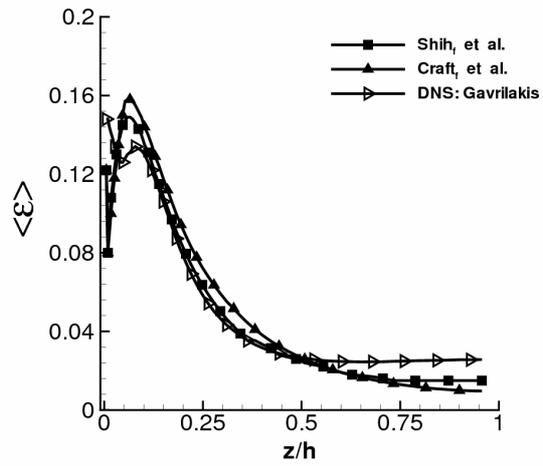


Figure 4.20 : Evolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente moyen $\langle \varepsilon \rangle$ le long de la paroi bissectrice $y/h=1.0$.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

Ce travail concerne l'évaluation et l'amélioration des modèles non-linéaires à contraintes algébriques (EASM). Parmi ces modèles, nous avons retenu principalement deux modèles qui, à l'issue des différents « tests a priori » préalables, ont donné des résultats satisfaisants. Le premier modèle est celui proposé par Shih et al. (1995) et le second est celui proposé par Craft et al. (1996). L'aptitude de ces deux modèles à prédire des écoulements turbulents tridimensionnels de fluide newtonien et incompressible dans une conduite à section carrée est étudiée.

Le travail réalisé au cours de cette thèse et présenté dans ce mémoire se décompose en deux parties.

La première partie de ce travail est consacrée à l'évaluation a priori de modèles EASM. Dans le but d'améliorer leurs comportements au voisinage des parois et du coin, des fonctions d'amortissement de type Van Driest (1956) ont été façonnées. A la lumière des résultats obtenus, nous avons constaté une amélioration substantielle dans ces zones de proche paroi. Aussi, les prédictions obtenues avec les modèles initiaux (EASM) et modifiés ($EASM_f$) sont comparées aux données de la DNS de Gavrilakis (1992) et à celles issues des tests « a priori » des modèles de Speziale (1987), de Gatski et Speziale (1993) obtenus par Mompean et al. (1996). A travers ces prédictions, on peut conclure que:

- Le caractère réalisable des fermetures, qui assure en principe que les solutions des modèles ont un sens physique en permettant de ne jamais produire de contraintes normales négatives du tenseur de Reynolds, est obtenu.
- Les cartes des second et troisième invariants dans le plan de Lumley montrent que les niveaux d'anisotropies obtenus avec les modèles EASM et $EASM_f$ sont bien prédits.
- Les contraintes de Reynolds prédites se comparent favorablement avec les données de la DNS de Gavrilakis. Loin des parois, les résultats obtenus sont en bon accord avec les données issues des tests a priori des modèles de Speziale (1987) et de Gatski et Speziale (1993). Cependant, au voisinage des parois, on constate que ces modèles sous-estiment ou surestiment largement nos prédictions.
- Les fonctions de paroi que nous proposons ont grandement amélioré les prédictions des deux modèles EASM. Cependant, les valeurs des constantes “a” et “b” proposées ici,

notamment en ce qui concerne la constante ‘‘a’’, doivent évoluer pour parvenir à une expression unique pour ces fonctions.

A l’issue de cette étude, nous avons retenu les deux modèles modifiés EASM_f pour la suite de l’étude.

Dans la seconde partie de ce travail, nous avons poursuivi l’étude des modèles modifiés en utilisant une procédure a posteriori. Cette étude a permis de qualifier ces modèles EASM_f en comparaison avec les simulations numériques directes de Gavrilakis (1992), de Huser et Biringen (1993), aux simulations des grandes échelles de Madabhushi et Vanka (1991), de Xu et Pollard (2001) et aux expériences de Niederschulte (1989) et de Gessner et Emery (1981). L’analyse qualitative de ces prédictions montre que :

- Les profils et les contours dans le plan transversal des composantes de la vitesse moyenne prédits par les modèles EASM_f sont semblables à ceux obtenus par Gavrilakis (1992), Huser et Biringen (1993) et Xu et Pollard (2001). Aussi, dans la sous couche visqueuse les prédictions s’accordent avec la loi logarithmique classique et celle proposée par Gavrilakis (1992).
- Les modèles EASM_f reproduisent bien le caractère anisotrope de l’écoulement. L’illustration a été faite en analysant les cartes des second et troisième invariants dans le plan de Lumley.
- Les vecteurs des flux secondaires prédits avec le modèle Craft_f et al. sont relativement semblables à ceux issus de la DNS de Gavrilakis (1992), alors que nos simulations obtenues avec le modèle Shih_f et al. ne sont pas satisfaisantes : en effet, on constate la présence d’une paire de tourbillons contra – rotatifs près du centre de la section.
- Les profils et les contours dans le plan transversal des composantes du tenseur de Reynolds, ainsi que ceux de l’énergie cinétique turbulente et de son taux de dissipation, sont en bon accord avec les données numériques de Gavrilakis (1992), de Huser et Biringen (1993), de Madabhushi et Vanka (1991), de Xu et Pollard (2001) et aux données expérimentales de Niederschulte (1989). De plus, les iso – valeurs des contours prédits sont sensiblement proches de celles de la DNS de Gavrilakis (1992).
- Les niveaux de vorticité prédits par les modèles EASM_f sont en très bon accord avec ceux des données de la DNS de Gavrilakis (1992).

Bien que les deux modèles traités corroborent les résultats de la littérature, on ne peut fournir une conclusion définitive sur chacun de ces modèles. Cependant, on peut dire que c'est le modèle Craft_f et al. qui permet de capter les écoulements secondaires.

Comme perspectives, nous proposons d'étendre ces modèles à la prédiction d'écoulements fortement anisotropes avec rotation et effet de courbure. Aussi, l'écoulement de Davis et Gessner (1992) [84] évoluant dans une conduite de transition entre un canal de section circulaire et un canal de section rectangulaire (Cf. figure 4.21) pourrait constituer un cas test intéressant pour ce type de modèles.

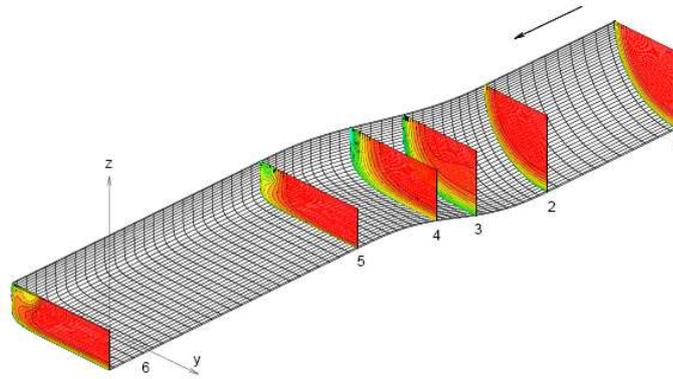


Figure 4.21 : Canal de Davis et Gessner

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kim J., Moin P., and Moser R., Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133-166, 1987.
- [2] Hoyas S. and Jiménez J., Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$, *Phys. Fluids*, 18, n°1, 2006.
- [3] Gavrilakis S., Numerical simulation of low-Reynolds-Number turbulent flow through a straight square duct, *J. Fluid Mech.*, 224:101-129, 1992.
- [4] Huser A. and Biringen S., Direct numerical simulation for turbulent flow in a square duct, *J. Fluid Mech.*, 257:65-95, 1993.
- [5] Joung Y., Choi S. and Choi J., Direct Numerical Simulation of Turbulent Flow in a Square duct: Analysis of Secondary flow, *J. Engrg. Mech.*, 133: 213-221, 2007.
- [6] Smagorinsky J., General circulation experiments with the primitive equations, *Monthly Weather Review*, 91 : 99-164, 1963.
- [7] Sagaut P., Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements incompressibles, 1998.
- [8] Madabhushi R. K. and Vanka S. P., Large-eddy simulation of turbulence-driven secondary flow in a square duct, *Phys. Fluids A*, 3(11), 2734-2745, 1991.
- [9] Xu H., Large Eddy Simulation of turbulent flows in square and annular duct and confined square coaxial jet, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Queen's University, 1997.
- [10] Reynolds O., On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 186:123-161. *JFM* 26.0872.02, 1894.
- [11] Gatski T.B. and T. Jongen T., Nonlinear eddy viscosity and algebraic models for solving complex turbulent flows, *Progress in Aerospace Sciences*, 36: 655-682, 2000.
- [12] Boussinesq, J., Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grandes sections. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, T.72, 1897.
- [13] Van Driest E. R., On turbulent flow near a wall, *J. of Aeronaut. Sci.*, 23:1007-1011, 1956.
- [14] Rubesin, M.W., A one-equation model of turbulence for use with the compressible Navier-Stokes equations, NASA, TM X-73-128, 1976.

-
- [15] Jones W. P. and Launder B. E., The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15: 301-314, 1972.
- [16] Launder B.E., Prediction methods for turbulent flows, IVK Lectures Serie 76, March 3–7–1975, "Progress in the modelling of turbulent transport", 1975.
- [17] Yakhot V., Orszag S.A., Thangam S., Gatski T.B. and Speziale C.G., Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, *Phys. Fluids*, **A4** 1510–1520, 1992.
- [18] Rodi W., The prediction of free turbulent boundary layer by use of a two equations model of turbulence, Ph. D., Thesis, Imp. Coll. London, 1972.
- [19] Pope S.B., An explanation of the turbulent round jet/plane jet anomaly, *A.I.A.A. J.*, 16(3): 279–281, 1978.
- [20] Hanjalic K. and Launder B.E., Sensitizing the dissipation equation to irrotational strain, *J. Fluid Engng.*, *Trans.ASME* , 102, p. 34–40, 1980.
- [21] Wilcox D.C. and Rubesin W.M., Progress in turbulence modeling for complex flow fields including effects of compressibility, NASA Tech. Paper n° 1517, 1980.
- [22] Wilcox D.C., Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models, *A.I.A.A. J.*, 26 (11): 1299-1310, 1988.
- [23] Menter F. R., Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications, *AIAA J.*, 32(8): 1598-1605, 1994.
- [24] Menter F. R., Influence of freestream values on $k-\omega$ turbulent model predictions, *AIAA J.*, 30(6):1657-1659, 1992.
- [25] Smith B. R, The $k-kl$ turbulence and wall layer model for compressible flows, AIAA paper, 90-1483, 21st Fluid Dynamics, plasma dynamics and lasers Conf., Seattle, WA, 1990.
- [26] Smith B. R, A near wall model for $k-l$ two-equation turbulence model, AIAA paper, 94-2386. 25st Fluid Dynamics Conf. Colorado, CO, 1994.
- [27] Daly J.B. and Harlow F.H, Transport equations in turbulence, *Phys. Fluids* **13** (11): 2634–2649, 1970.
- [28] Hanjalic K. and Launder B. E., A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow, *J. Fluid Mech.*, 54(4):609-638, 1972.
- [29] Launder B. E., Reece G. J. and Rodi W., Progress in the development of a Reynolds stress turbulent closure, *J. Fluid Mech.*, 183:63-63, 1975.
- [30] Lumley J. L., The pressure-strain correlations, *Phys. Fluids*, 18(6):750-751, 1975.

-
- [31] Rotta J. C., Statistische theorie nichtomogener, Turbulenz. ZAMM, 5 :136-139, 1951.
- [32] Gibson M. M. and Launder B. E., Ground effects one pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech., 86:491-511, 1978.
- [33] Gibson M. M. and Younis B. A., Calculation of swirling jets with a Reynolds stress closure, Phys. of Fluids, 29(1): 38-48, 1986.
- [34] Naot D., Shavit A. and Wolfshtein M., Interactions between components of the turbulent velocity correlations tensor, Israel J. Tech., 8, 259, 1970.
- [35] Lumley J. L., Newman G. R., The return to isotropy of homogeneous turbulence. Journal of Fluid Mechanics, 82: 161-178, 1977.
- [36] Hanjalic K. and Launder B. E., Contribution towards a Reynolds-stress closure for low Reynolds number turbulence. J. Fluid Mech. 74: 593-610, 1976.
- [37] Lumley J. L., Toward a turbulent constitutive relation, J. Fluid Mech., 41(2):413-434, 1970.
- [38] Pope S.B, A more general effective viscosity hypothesis, J. Fluid Mech., 72:331-340, 1975.
- [39] Gatski T. B. and Speziale C. G., On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows, J. Fluid Mech., 254:59-78, 1993.
- [40] Rodi W., A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, ZAMM, 56:219-221, 1976.
- [41] Speziale C.G., A critical evaluation of two-equation models for near-wall turbulence, Technical Report 90-46, ICASE, 1990.
- [42] Spencer A.J.M, Theory of invariants. In Continuum Physics, vol 1, Academic Press, eringen edition, 1971.
- [43] Speziale C.G., On non-linear $k-l$ and $k-\varepsilon$ models of turbulence. J Fluid Mech 178: 459-475, 1987
- [44] Yoshizawa A., Statistical analysis of the derivation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation, Phys. Fluids, 27:1377-1387, 1984.
- [45] Rubinstein R. and Barton J. M., Non-linear Reynolds models and the renormalisation group, Phys. Fluids, Series A, 2:1472-1476, 1990.
- [46] Shih T.H., Zhu J. and Lumley J. L., A new Reynolds stress algebraic equation model, Comp. Appl. Mech. Eng., vol. 125:287-302, 1995.
- [47] Shih T. H., Zhu J. and Lumley J. L., A realizable Reynolds stress algebraic equation model, NASA Tech. Memo. TM-105993, 1993.

-
- [48] Craft T. J., Launder B. E. and Suga K., Development and application of the cubic eddy-viscosity model of turbulence, *International Journal Heat and Fluid flow*, 17:108-115, 1996.
- [49] Craft T. J., Iacovides H. and Yoon J. H., Progress in the use on non-linear two equation models in the computation of convective heat-transfer in impinging and separated flow, *Flow, Turbulence and Combustion*, 63:59-80, 1999.
- [50] Mansour N. N., Shih T. H. and Reynolds W. C., The effect of rotation on initially anisotropic homogeneous flows, *Phys. Fluids, A* 3(10) 2421-2425, 1991.
- [51] Du Vachat R., Realizability inequalities in turbulent flows, *Phys. Fluids, Series A*, 20:551-556, 1977.
- [52] Schumann U., Realizability of Reynolds stress turbulence models, *Phys. Fluids, Series A*, 20:721-725, 1977.
- [53] Lumley J. L., *Computational Modeling of turbulent flows*, vol 18, *Advances in Applied Mechanics*, 1978.
- [54] Reynolds W. C., *Fundamentals of turbulence for turbulence modelling and simulation*, Notes for Von Karman Institute, AGARD Lectures series n°86, North Atlantic treaty Organization, 1987.
- [55] Jones W. P. and Launder B.E, Some properties of sink-flow turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.* 56, 337-351, 1972.
- [56] Naji H., Mompean G. and El Yahyaoui O., Evaluation of explicit algebraic stress models using direct numerical simulations, *J. of Turbulence*, number 5(1):38-63, 2004.
- [57] Naji H, Mompean G. and Gnanga H. A nonlinear turbulence model for simulating a flow in a square duct. *J. Mach. Dynamics. Problems*, 30, 2006.
- [58] Rechia A., Naji H., Mompean G. and El Marjani A., Numerical simulation of turbulent flow through a straight square duct using a near wall linear $k-\varepsilon$ model, *Int. J. Multiphysics*, 1: 317-336, 2007.
- [59] Mompean G., Gavrilakis S., Machiels L. And Deville M. O., On predicting the turbulence-induced secondary flows using non-linear $k-\varepsilon$ models, *Phys. of Fluids*, 8: 1856-1868, 1996.
- [60] Vasquez M. S. and Métais O., Large eddy simulation of the turbulent flow though a heath square duct, *J. Fluid Mech.*, 453:201-238, 2002.
- [61] Patel V.C., Rodi W. and Scheuerer G., Turbulent models for near-wall and low Reynolds number flows, A Review, *AIAA J.*, 23: 1308-1319, 1984.

-
- [62] Jones W.P and Launder B.E, The calculation of low-Reynolds phenomena with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16, 1119-31130, 1973.
- [63] Lam C.K.G and Bremhorst K., A modified form of $k-\varepsilon$ model for predicting wall turbulence, *J. Fluids Engrg.*, 103: 456-460, 1981.
- [64] Moin P. and Kim J., Numerical investigation of turbulent channel flow, *J. Fluid Mech.*, 188:341-377, 1982.
- [65] Horiuti K., Study of incompressible turbulent channel flow by Large-Eddy Simulation, *Theoret. Applied Mech.*, 31: 407-427, 1981.
- [66] Launder B.E and Sharma B.I, Application of the energy-dissipation model of the turbulence to the calculation of flow near a spinning disc, *Lett. Heat Mass Transfer*, 1: 131-138, 1974.
- [67] Myong H. K and Kasagi N., A new proposal for $k-\varepsilon$ turbulence model and the evaluation (1st Report, development of the model), *Trans. JSME(B)*, 54 (507): 3003-3009, 1988.
- [68] Nisizima S., A numerical study of turbulent square-duct flow using anisotropic $k-\varepsilon$ model, *Theo. and Comp. Fluid Dynamics*, 2: 1432-2250, 1990.
- [69] So R. M. C, Lai Y. G. and Zhang H. S., Second-order near-wall turbulence closures, A review, *AIAA J.*, 1819-1835, 1991.
- [70] Shima N., Prediction of turbulent boundary layers with a second moment closure: Part i-effects of periodic pressure gradient, wall transpiration, and free-stream turbulence, *ASME J. Fluids Eng.*, 115:56-63, 1993.
- [71] Leonard B. P., A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comput. Meth. Mechanics and Engineering*, 19: 59-88, 1979.
- [72] Harlow F. H. et Welch J. E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. Fluids*, 8:2182-2189, 1965.
- [73] Patankar V. S., *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1980.
- [74] Xu H. and Pollard A., Large eddy simulation of turbulence flow in square annular duct, *Phys. Fluids*, 13:3321-3337, 2001.
- [75] Niederschulte M. A., *Turbulent flow through a rectangular channel*, Ph.D. thesis, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, III, 1989.
- [76] Gessner F. B. and Emery A. F., The numerical prediction of developing flow in rectangular ducts, *ASME Trans. J. Fluids Eng.* 103, 445, 1981.

- [77] Antonia R.A., Kim J. and Browne W.B, Some characteristics of small-scale turbulence in turbulence duct flow, *J. Fluid Mech.*, 233, 369, 1991.
- [78] Kolmogorov A. N., Local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number, *Doklady Akad., Nauk SSSR*, 30:299-303, 1941.
- [79] Speziale C. G., Sarkar S. and Gatski T. B., Modelling the pressure-Strain correlation of the turbulence: An invariant dynamical system approach, *J. Fluid Mech.*, 227:245-272, 1991.
- [80] Taulbee D. B., An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model, *Phys. Fluids, A* 4(11), 2555-2561, 1992.
- [81] Jongen T., Mompean G. and Gatski T. B., Predicting S-duct flow using a composite algebraic stress model, *AIAA J.*, 36:327-335, 1998.
- [82] Wallin S. and Johansson A. V., An explicit algebraic Reynolds model for incompressible and compressible turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 403:89-132, 2000.
- [83] Gatski T. B. and Rumsey C. L., Linear and non-linear eddy-viscosity models. In: Launder B.E. and Sandham N.D. (Eds.), *closure strategies for turbulent and transitional flows*, Cambridge University Press, Cambridge, p. 9–46, 2001.
- [84] Davis D. O. and Gessner F. B., Experimental investigation of turbulent flow through a circular-to-rectangular transition duct, *AIAA Journal*, 30:367-375, 1992.

Auteur : Honoré GNANGA

TITRE:

Analyse numérique d'écoulements turbulents anisotropes à l'aide de modèles non-linéaires de turbulence.

RÉSUMÉ:

L'objectif de ce travail est la prédiction numérique d'écoulements turbulents tridimensionnels de fluide newtonien et incompressible à l'aide de modèles non-linéaires de turbulence. Les modèles de turbulence explicites à contraintes algébriques non-linéaires, qui peuvent prendre en compte l'anisotropie de la turbulence avec moins de temps de calculs et moins de place mémoire de stockage que les modèles RSM ou les approches DNS et LES, sont adoptés. Parmi ces modèles, ceux proposés par Shih et al. (1995) et Craft et al. (1996) ont été choisis. Ces deux modèles EASM sont étudiés en utilisant des procédures a priori et a posteriori. L'étude est menée dans une conduite à section carrée, configuration qui présente d'une part, une anisotropie importante entre les composantes du tenseur de Reynolds et d'autre part, un écoulement secondaire. Pour prédire les effets visqueux importants dus à la présence des parois, des fonctions correctrices sont façonnées. La production des cartes des second et troisième invariant dans le plan de Lumley montre les différents états possible de la turbulence et une bonne prédiction de l'anisotropie. La comparaison des grandeurs, moyennes et statistiques de l'écoulement, prédites avec les données numériques et expérimentales présentes dans la littérature montre une bonne performance de ces modèles. En particulier, les vecteurs du flux secondaire et la vortacité longitudinale sont bien prédits.

Mots - clés:

Mécanique des fluides numérique, Méthode des volumes finis, Modèles non-linéaires, Réalisabilité, Ecoulement en conduite carrée.

Author: Honoré GNANGA

TITLE:

Numerical analysis of anisotropic turbulent flows with non-linear turbulence models.

ABSTRACT:

The aim of this work is to predict numerically the three-dimensional turbulent flows of a Newtonian and incompressible fluid using nonlinear stress-strain models. The Explicit Algebraic Stress Models (EASM), which can take into account the anisotropy of turbulence with less CPU time and computer memory than RSM or approach DNS and LES, are adopted as a turbulence model. Among these models, we choosed Shih et al. (1995) and Craft et al.(1996) models. These models are studied using a priori and a posteriori investigations. The study is carried out in square duct. This configuration presents a secondary flow and a significant anisotropy between the Reynolds stress components. To predict the significant viscous effects due to the wall and the corner, the damping functions are implemented. The maps of the second and third invariants in the plan of Lumley exhibited show the various states of turbulence and a good anisotropy level obtained. The mean flow field and the turbulent statistics are compared with existing numerical and experimental data for square and rectangular duct flow. The model performance is shown to be satisfactory. In particular, the mean secondary velocity vectors and streamwise vorticity are well predicted.

Keywords:

Computational fluid mechanics, Finite volume method, non-linear models, Realizability, Square duct flow.