

Université des Sciences et Technologies de LILLE
Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Johann Guillemint

Soutenue le 9 décembre 2008

**Modélisation stochastique mésoscopique de milieux aléatoires :
application à un polymère renforcé de fibres longues**

JURY

<i>Président :</i>	M. C. SOIZE	Professeur, Université Paris-Est
<i>Rapporteurs :</i>	M. D. CLOUTEAU	Professeur, Ecole Centrale Paris
	M. R. G. GHANEM	Professeur, University of Southern California
<i>Examineurs :</i>	M. M. BORNERT	Professeur, Ecole Polytechnique
	M. K. SAB	Professeur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
<i>Directeur de thèse :</i>	M. D. KONDO	Professeur, Université des Sciences et Technologies de Lille
<i>Co-Directeur :</i>	M. C. BINETRUY	Professeur, Ecole des Mines de Douai

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

En premier lieu, je souhaite remercier mon directeur de thèse Djimédo Kondo, pour m'avoir accompagné durant ces trois années de recherche, années durant lesquelles j'ai pu bénéficier de son enthousiasme, de son ouverture d'esprit et toute sa rigueur scientifique. Je remercie chaleureusement mon co-directeur de thèse Christophe Binétruy, dont l'intérêt pour les travaux réalisés aura toujours été manifeste, pour nos nombreuses discussions ainsi que pour avoir mis à disposition un ensemble conséquent de moyens techniques.

Merci à Mademoiselle Patricia Krawczak pour m'avoir permis d'effectuer cette thèse au sein de son laboratoire.

Je témoigne ma sincère gratitude à Messieurs Didier Clouteau et Roger Ghanem qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce travail. J'exprime également mes remerciements à Messieurs Michel Bornert et Karam Sab, qui ont accepté de participer à l'évaluation de cette recherche.

Je tiens à remercier Monsieur Christian Soize, pour avoir accepté de présider le jury de soutenance. Plus encore, je le remercie sincèrement pour m'avoir initié à la problématique, large et complexe, de la modélisation probabiliste en mécanique. Il aura toujours manifesté confiance, disponibilité, gentillesse et intérêt. Qu'il trouve en ces quelques mots le témoignage de ma reconnaissance.

Merci également à celles et ceux avec qui j'ai pu échanger au quotidien et plus spécifiquement, Sébastien Comas-Cardona et Caroline Demoucron.

Enfin, je remercie ma famille et ma compagne Nathalie, pour leur encouragement et soutien.

Table des matières

Introduction	5
Chapitre 1 Etude bibliographique sur la modélisation stochastique mésoscopique de milieux aléatoires	9
1.1 Méthodologie générale de modélisation probabiliste	10
1.2 Simulations multi-échelles stochastiques : approche par “fenêtres glissantes” . . .	12
1.2.1 Principe de la méthode	12
1.2.2 Influence des paramètres de la modélisation	15
1.3 Modélisation mésoscopique stochastique d’un milieu aléatoire élastique anisotrope	17
1.3.1 Construction de la densité de probabilité de la matrice aléatoire à l’aide du Principe du Maximum d’Entropie	17
1.3.2 Définition du champ aléatoire normalisé et des germes stochastiques . . .	19
1.3.3 Propriétés du champ normalisé et du champ aléatoire tenseur d’élasticité	21
1.3.4 Remarques	22
1.4 Problématique de la thèse	23
Chapitre 2 Construction d’un modèle probabiliste de la fraction volumique à l’échelle mésoscopique	25
2.1 Définition d’une classe de champs aléatoires	26
2.2 Réduction statistique du champ aléatoire	27
2.3 Interpolation statistique	28
2.3.1 Propriétés et détermination des valeurs expérimentales	28
2.3.2 Projection du vecteur aléatoire sur les Chaos Polynômiaux Gaussiens . .	29
2.3.3 Identification des coefficients de la projection	31
2.4 Conclusion	36
Chapitre 3 Analyse expérimentale	37
3.1 Description du matériau étudié	38
3.2 Définition de l’ensemble des données expérimentales	40

3.3	Mesure des champs de vitesse longitudinale	41
3.3.1	Principe des mesures de vitesse de propagation par émission-réception . .	41
3.3.2	Dispositif expérimental	45
3.3.3	Qualité de l'acquisition	49
3.3.4	Résultats : trajectoires expérimentales et propriétés statistiques	53
3.4	Conclusion	55
Chapitre 4 Identification et mise en oeuvre du modèle probabiliste de la fraction volumique		57
4.1	Formulation du problème inverse	58
4.2	Détermination des réalisations expérimentales du champ de fraction volumique mésoscopique	59
4.2.1	Schéma d'homogénéisation pour l'élasticité mésoscopique	60
4.2.2	Détermination des réalisations expérimentales du champ de fraction volumique mésoscopique	62
4.2.3	Trajectoires et densités marginales expérimentales	63
4.3	Etude du champ aléatoire de fraction volumique	67
4.3.1	Stationnarité	67
4.3.2	Ergodicité en moyenne	68
4.4	Réduction statistique	70
4.5	Identification des coefficients Chaos	72
4.6	Synthèse sur la représentation du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique	75
4.7	Simulations du champ aléatoire tenseur d'élasticité	78
4.8	Conclusion	80
Chapitre 5 Modélisation probabiliste directe et identification du champ aléatoire du tenseur d'élasticité		83
5.1	Identification des réalisations expérimentales	84
5.2	Identification des paramètres du modèle probabiliste	91
5.3	Synthèse sur la modélisation directe	97
5.4	Éléments de comparaison entre les deux approches	97
5.5	Estimation de la taille du VER	102
5.6	Conclusion	105
Conclusions générales et perspectives		107
Annexe A Rappels en théorie des probabilités		111

Annexe B Exemple de résultats issus de l'identification inverse directe	115
Annexe C Comparaison entre les densités marginales expérimentales et simulées	117
Annexe D Base de Walpole	121
Table des figures	123
Liste des tableaux	127
Bibliographie	129

Introduction

L’usage de matériaux hétérogènes, tels que les matériaux composites notamment, n’a cessé de croître ces cinquante dernières années. Il repose en particulier sur la possibilité de fonctionnaliser de tels matériaux, en introduisant par exemple des gradients de concentration dans des directions privilégiées. De ce développement grandissant est né le besoin de disposer de modélisations mécaniques prédictives adaptées à ces matériaux multiphasiques, favorisant la maîtrise de la relation entre la définition microstructurale des matériaux et leurs propriétés macroscopiques. Dans ce cadre, les approches d’homogénéisation occupent une place somme toute privilégiée en Mécanique des Matériaux et ont démontré leur efficacité dans de nombreuses applications. L’initiation d’une modélisation multi-échelles requiert la définition précise des différentes échelles d’analyse. On distingue classiquement trois échelles, à savoir les échelles *microscopique*, *mésoscopique* et *macroscopique*.

L’échelle microscopique est définie par une longueur caractéristique l proche de la taille des hétérogénéités. Elle constitue traditionnellement l’échelle d’analyse la plus fine, pour laquelle les champs de propriétés (mécaniques notamment) sont discontinus.

L’échelle macroscopique est définie par le concept de Volume Élémentaire Représentatif (VER) et par une longueur caractéristique L_{ver} . Il s’agit de l’échelle à laquelle peuvent être définies les propriétés mécaniques homogénéisées. Celles-ci sont par définition déterministes et indépendantes des conditions aux limites imposées (i.e. en déformations ou contraintes homogènes au contour, dans le cas des milieux aléatoires).

Enfin, il existe en général une infinité d’échelles intermédiaires, qualifiées de mésoscopiques. En pratique, on raisonne sur une échelle mésoscopique unique, dont la longueur caractéristique est imposée par des conditions expérimentales, par exemple. Une procédure d’homogénéisation déterministe classique peut être conduite si et seulement si les conditions usuelles de séparation d’échelles sont satisfaites (cf. [Bornert *et al.*, 2001] par exemple) :

$$l \ll L_{\text{ver}} \ll L_0 \tag{1}$$

où L_0 est la longueur caractéristique de la structure considérée. Sous la double condition de séparation des échelles (1), la prédiction au terme du calcul d’homogénéisation est indépendante de la réalisation du milieu aléatoire. Le concept de VER est donc particulièrement adapté

à certaines classes de matériaux hétérogènes tels que les matériaux polycristallins ou certains matériaux composites (renforcés par des inclusions micrométriques), pour lesquels la taille des hétérogénéités est très petite par rapport à l'échelle d'analyse macroscopique.

Toutefois, il existe une large classe de matériaux pour lesquels la taille supposée du VER est telle qu'elle dépasse significativement la capacité d'identification des moyens expérimentaux actuels¹ [Huet, 1990]. C'est typiquement le cas de certains bétons ou de certains matériaux composites, comme les matrices thermoplastiques renforcées de fibres longues auxquelles nous nous intéresserons dans notre recherche. Dans ce cas, il est intéressant de souligner que les caractérisations expérimentales normalisées sont effectuées sur des domaines mésoscopiques de longueur caractéristique L . Afin de fixer les idées sur ce cadre d'analyse, les ordres de grandeur associés à notre application et à ces différentes échelles sont reportés au tableau (3.1).

Echelle	Long. caractéristique	Nature	Ordre de grandeur dans la recherche
Microscopique	l	Stochastique	8 à 10 mm
Mésoscopique	L	Stochastique	14 mm
VER	L_{ver}	Déterministe	≥ 50 mm

TABLE 1: Définition des différentes échelles dans le cadre de notre étude : nature de l'information et ordre de grandeur.

Pour de tels volumes, le tenseur des rigidités est dépendant de la réalisation du milieu aléatoire. Le volume considéré est alors qualifié de Volume Élémentaire Statistique (VES) et les propriétés mécaniques prédites sont dites *apparentes*. A ce niveau, il est important de souligner que le procédé d'élaboration peut également être à l'origine de fluctuations statistiques additionnelles, dues par exemple à la création d'amas fibreux dans le cas de matrices renforcées par des fibres longues (mises en oeuvre par injection) [Advani, 2002]. Les relations entre les tenseurs effectifs et apparents ont été étudiées par Huet [Huet, 1990] et interprétées dans un cadre probabiliste par Sab [Sab, 1992] (voir également [Ostoja-Starzewski, 2006] [Ostoja-Starzewski, 2008]). Lorsque la taille du volume mésoscopique tend vers la taille du VER, les moyennes des propriétés apparentes tendent vers les propriétés effectives déterministes, tandis que les variances deviennent négligeables : cette caractéristique permet d'effectuer naturellement une étude paramétrique probabiliste de la définition du VER, en étudiant la convergence de certaines propriétés statistiques (moyenne, variance) du tenseur homogénéisé en fonction du facteur d'échelle. Cette technique a été utilisée par de nombreux auteurs (voir par exemple [Kanit *et al.*, 2003]).

1. Notons également que pour ce type de matériaux, l'hypothèse classique d'ergodicité devient une hypothèse forte.

Ces éléments soulignent la nécessité de proposer une modélisation probabiliste du tenseur d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique. L'objectif de notre recherche est la construction, l'identification expérimentale et la mise en oeuvre d'un tel modèle. On soulignera dès à présent qu'une telle modélisation permet la simulation numérique des champs de propriétés élastiques à l'échelle mésoscopique, à partir de laquelle il est possible de déterminer la taille du VER associé à la microstructure aléatoire considérée.

Le mémoire de thèse comporte cinq chapitres.

Le chapitre 1 est consacré à un état de l'art sur les modélisations multi-échelles stochastiques. Après avoir introduit quelques aspects généraux et fondamentaux d'une démarche de modélisation probabiliste, nous discuterons différentes contributions à la problématique considérée, au travers notamment de techniques de simulations stochastiques multi-échelles et d'un modèle probabiliste récemment proposé dans la littérature. Ces éléments nous permettront alors de positionner plus précisément notre recherche.

L'objectif du chapitre 2 est la construction d'un modèle probabiliste associé à la fraction volumique mésoscopique. Après avoir justifié ce choix de modélisation, nous introduirons le modèle probabiliste en nous appuyant d'une part, sur une représentation de Karhunen-Loève du champ aléatoire (ce qui en permettra la réduction statistique) et d'autre part, sur une projection sur les Chaos Polynômes Gaussiens. La technique d'identification de paramètres par le Principe du Maximum de Vraisemblance sera alors rappelée et la stratégie de résolution du problème d'optimisation en découlant sera discutée.

L'analyse expérimentale par ultrasons permettant l'identification des paramètres du modèle probabiliste fait l'objet du chapitre 3. Après avoir rappelé le cadre théorique permettant l'interprétation des résultats, nous présenterons le dispositif et le protocole expérimentaux. Nous discuterons ensuite la qualité de l'acquisition.

Le chapitre 4 porte sur la mise en oeuvre du modèle probabiliste proposé au chapitre 2. La combinaison des résultats expérimentaux avec un schéma d'homogénéisation classique nous permettra tout d'abord de déterminer les réalisations expérimentales du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique. Forts de ces résultats, nous identifierons les paramètres du modèle probabiliste. Nous réaliserons ensuite des simulations numériques du champ, afin d'extraire quelques propriétés probabilistes fondamentales, telles que les longueurs de corrélation du champ mésoscopique.

Une démarche alternative, proposée au chapitre 5, consiste en la construction directe d'un modèle probabiliste associé au champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique, tel que récemment développé par ([Soize, 2008]). Après avoir identifié l'ensemble des paramètres de ce second modèle probabiliste, nous présenterons des éléments de comparaison entre les deux approches. Une première étude sur la taille du VER associé à la microstructure considérée sera également pro-

posée.

Ce mémoire s'achève sur quelques conclusions et perspectives.

Chapitre 1

Etude bibliographique sur la modélisation stochastique mésoscopique de milieux aléatoires

Ce chapitre est consacré à une synthèse bibliographique dédiée à la modélisation stochastique de milieux aléatoires à l'échelle mésoscopique.

Dans un premier temps, nous introduirons quelques concepts de base pour une modélisation probabiliste, à savoir la représentation des quantités aléatoires et la stratégie de propagation des aléas. Cette introduction est complétée par l'annexe A.

Nous identifierons ensuite deux types de contribution à notre problématique générale proposés dans la littérature. Comme nous le verrons, ces deux types d'approche se distinguent principalement par la nature de l'information probabiliste utilisée : l'une se base sur une analyse statistique de microstructures numérisées, l'autre étant dédiée à la construction complète d'un modèle probabiliste permettant l'étude à l'échelle mésoscopique de milieux élastiques aléatoires anisotropes.

Nous dégagerons enfin, à partir de ces éléments, le positionnement de notre recherche.

1.1 Méthodologie générale de modélisation probabiliste

De façon générale, une modélisation probabiliste est élaborée à partir de deux aspects fondamentaux :

- la construction de modèles probabilistes, permettant une représentation adéquate des paramètres aléatoires ;
- la stratégie de résolution du problème mécanique stochastique, i.e. l'étude de la propagation des aléas.

Il existe dans la littérature plusieurs méthodes efficaces pour représenter un paramètre aléatoire (variable ou champ) : celles-ci seront introduites au besoin dans la suite du mémoire (voir les sections (2.2) et (2.3.2) ; une liste non exhaustive des différentes techniques est proposée dans [Schueller, 1997], par exemple)².

D'un point de vue numérique, la propagation peut être accomplie suivant plusieurs méthodes :

- la méthode de Monte-Carlo [Rubinstein, 1981] : elle consiste en l'analyse statistique des réalisations de la réponse d'un système, calculées à partir des réalisations indépendantes des grandeurs aléatoires d'entrée. Par définition, la méthode est donc applicable quelle que soit la complexité du problème, pour peu que celui-ci puisse être résolu dans un cadre déterministe. Cette technique souffre naturellement d'un coût numérique prohibitif

2. A titre d'information, on souligne qu'il existe deux types de modélisation probabiliste. Un premier type, qualifié de paramétrique et dédié aux incertitudes de données, constitue l'approche la plus répandue et a été employé dans de nombreuses applications. Récemment, un second type d'approche, non-paramétrique, a été introduit et permet le traitement simultané des incertitudes de données et de modélisation [Soize, 2000] [Soize, 2005]. Des applications sont fournies dans [Arnst *et al.*, 2006] [Cottureau *et al.*, 2007].

pour des problèmes complexes. Toutefois, l'approche permet une parallélisation triviale et plusieurs techniques ont été proposées afin d'accélérer la convergence de la technique (réduction de variance, etc.). Enfin, la méthode de Monte-Carlo constitue, lorsqu'elle est disponible, la solution de référence pour un cadre d'analyse probabiliste.

- la méthode de perturbation : elle repose sur le développement des quantités aléatoires en série de Taylor, autour de leur valeur moyenne. L'utilisation de cette technique est limitée au cas de faibles fluctuations. D'autre part, il s'avère délicat en pratique d'augmenter l'ordre des développements, du fait de la complexité du système d'équations résultant.
- la méthode spectrale, appelée plus communément Méthode des Eléments Finis Stochastiques Spectraux (M.E.F.S.S.) et introduite dans [Ghanem et Spanos, 1991], est basée sur la représentation spectrale des quantités aléatoires. Elle permet notamment une représentation d'ordre élevé et sa souplesse a favorisé son large développement : elle constitue de nos jours l'approche la plus employée et bénéficie toujours d'une forte attention (en raison notamment d'un coût d'analyse que l'on souhaite diminuer dans le cas de structures complexes) [Schueller, 1997] [Keese, 2004].

Dans le cadre plus particulier de la thématique de notre recherche, deux types de contribution peuvent être identifiés.

Un premier type d'approche repose sur un ensemble d'analyses statistiques, utilisées afin de décrire les quantités aléatoires d'intérêt à partir d'images numérisées de microstructures. Dans ce cadre, deux catégories de techniques ont été développées dans la littérature :

- la première correspond à la situation où l'analyse probabiliste est utilisée afin de décrire la microstructure aléatoire, via l'utilisation d'une approche morphologique (voir à ce sujet [Serra, 1982], [Jeulin, 2001] et [Torquato, 2002]) : la description est obtenue par une transformation (érosion, etc.) de la représentation de la microstructure puis par l'application d'une mesure ad-hoc. La combinaison de cette description et de simulations numériques de Monte-Carlo (les milieux aléatoires multiphasés pouvant par exemple être simulés par des ensembles fermés aléatoires) permet alors d'obtenir la caractérisation de la réponse probabiliste du milieu. Dans ce type de méthode, les analyses statistiques sont donc effectuées avant l'utilisation d'un solveur mécanique.
- dans la seconde, l'analyse probabiliste est conduite afin de caractériser les propriétés statistiques de champs de grandeurs mécaniques, i.e. après la résolution du problème d'homogénéisation sur chaque réalisation du milieu aléatoire. Une illustration de ce type d'approche est proposée à la section (1.2), dans laquelle nous introduirons l'approche par "fenêtres glissantes" développée par Baxter et Graham [Baxter et Graham, 2000]. On notera d'autre part que le couplage de simulations de microstructures aléatoires avec une méthode d'éléments finis stochastiques a été proposée par Ostoja-Starzewski, afin (i) d'obtenir des

champs aléatoires de propriétés mécaniques apparentes (ii) d’investiguer la relation entre les tenseurs apparent et effectif [Ostoja-Starzewski, 1999] [Ostoja-Starzewski, 1998].

Fondamentalement, de telles méthodes (i) reposent sur la capacité du mécanicien à renseigner de façon raisonnable les modèles statistiques utilisés (c’est-à-dire en particulier à fournir des estimateurs statistiques convergés) (ii) reposent en pratique sur une information probabiliste partielle. D’autre part, on notera que les propriétés probabilistes des modèles sont en général identifiées à partir d’hypothèses (d’homogénéité ou d’ergodicité en moyenne, par exemple) plus ou moins fortes.

Une seconde approche consiste en la construction de modèles probabilistes associés aux quantités mécaniques d’intérêt (en l’occurrence ici, le tenseur d’élasticité mésoscopique). Récemment, [Soize, 2006] [Soize, 2008] a proposé une modélisation probabiliste des champs des tenseurs aléatoires avec l’application à la modélisation mésoscopique d’un milieu élastique anisotrope aléatoire : ce modèle probabiliste sera détaillé à la section 1.3.

1.2 Simulations multi-échelles stochastiques : approche par “fenêtres glissantes”

1.2.1 Principe de la méthode

L’approche dite des “fenêtres glissantes” (MW-GMC, pour *Moving Window-Generalized Method of Cells*) a été développée par Baxter et Graham [Baxter et Graham, 2000]. L’objectif est de produire des trajectoires de champs de propriétés mécaniques aléatoires mésoscopiques. L’idée de base consiste en l’analyse micromécanique de microstructures numérisées, afin de produire des champs de propriétés mécaniques apparentes.

Son principe général est le suivant :

1. Pour chaque image numérisée :
 - (a) l’image totale est divisée en un certain nombre de “cellules” ou “fenêtres” ;
 - (b) pour chaque fenêtre, une analyse micromécanique est conduite numériquement et permet de déterminer les propriétés homogènes de la cellule ;
 - (c) ces propriétés sont assignées au centre de la fenêtre.

Cette étape est résumée schématiquement sur la figure (1.1). Un exemple de résultat est reporté sur la figure (1.2).

On notera que la procédure d’homogénéisation locale (i.e. sur chaque cellule) est utilisée afin de réduire la représentation, trop complexe à l’échelle microscopique. En effet, une

représentation à cette échelle, bien que précise, fournit un résultat bruité ainsi que des champs pour lesquels (i) le coût d’une analyse mécanique (par éléments finis par exemple) peut être prohibitif, en raison de sa résolution élevée (ii) l’analyse statistique est problématique [Baxter *et al.*, 2001].

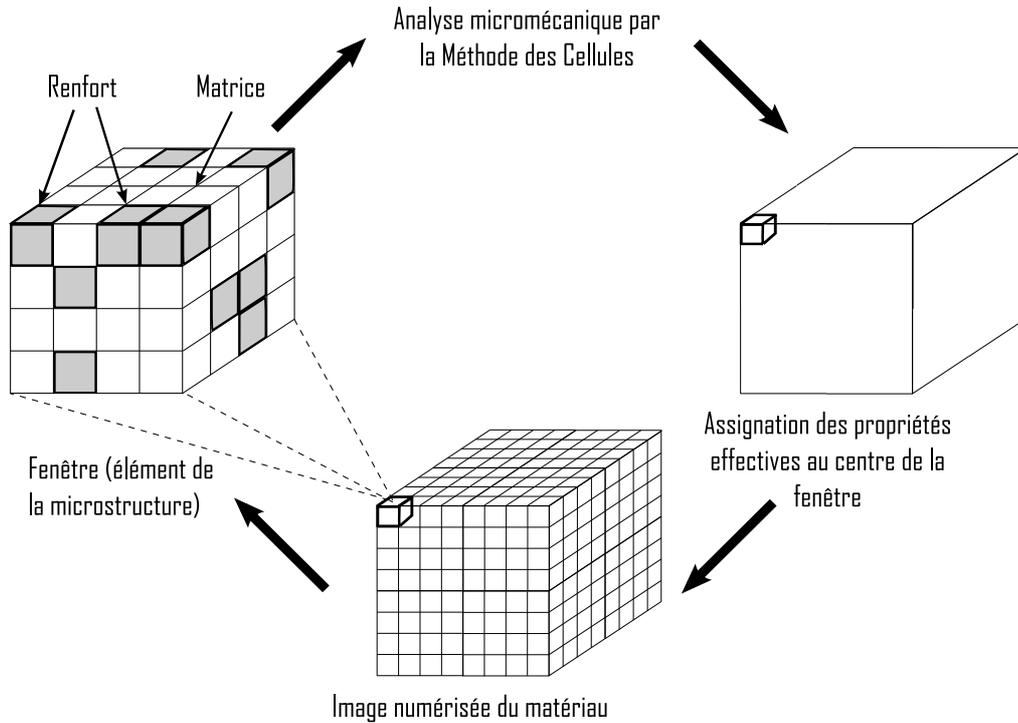


FIGURE 1.1: Schéma général de l’approche par fenêtres glissantes : détermination du champ de propriétés effectives à partir d’une microstructure numérisée (d’après [Baxter *et al.*, 2001]).

2. Les propriétés statistiques du champ de tenseur d’élasticité sont alors estimées en considérant l’ensemble des trajectoires (images).
3. A partir de ces estimations, des simulations numériques de Monte-Carlo sont ensuite effectuées afin d’obtenir une base de données simulée. Bien que les simulations aient été dans un premier temps restreintes aux processus Gaussiens, une extension au cas non-Gaussien a été proposée [Graham *et al.*, 2003] (des détails techniques concernant la procédure de simulation peuvent être trouvés dans [Shinozuka et Deodatis, 1996] et [Graham *et al.*, 2003]).

Cette technique permet également l’étude de paramètres décrivant la microstructure, tels que la fraction volumique en renforts, par exemple.

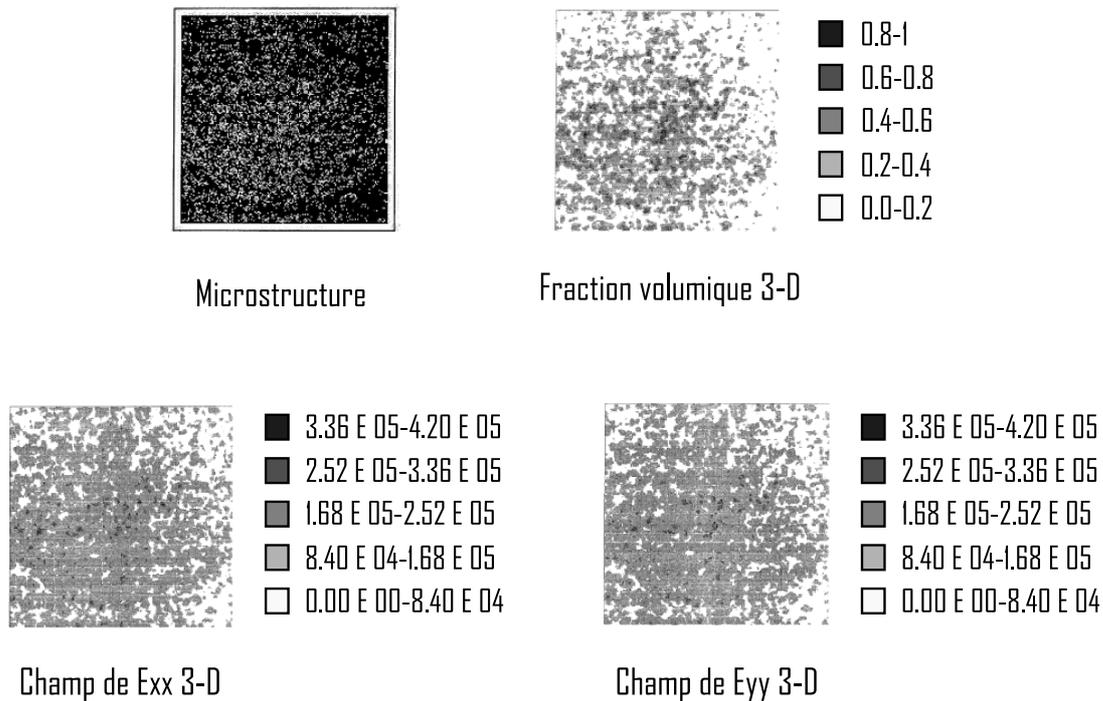


FIGURE 1.2: Exemple (application à la microstructure simulée d’un composite aluminium/carbures de silicium) : champs de propriétés élastiques (en [MPa]) obtenus par une approche MW-GMC avec fenêtrage 3-D (d’après [Baxter *et al.*, 2001]).

Il convient de noter que l’analyse micromécanique est effectuée à l’aide de la méthode des cellules généralisées (G.M.C.), introduite par Aboudi [Aboudi, 1989] et généralisée dans [Paley et Aboudi, 1992] (des détails techniques concernant cette méthode sont par ailleurs reportés dans [Pindera et Bednarczyk, 1999]). Il est important de souligner que la G.M.C. est formulée dans un cadre de microstructures périodiques. Notons par ailleurs que dans ce cadre, il est possible d’exploiter l’analyse pour étudier grâce à des calculs par éléments finis les propriétés statistiques des champs de contraintes et déformations locales aléatoires, comme illustré sur la figure (1.3). On pourra alors, sous réserve de la considération d’un critère d’état-limite, effectuer une analyse fiabiliste du système. La technique des fenêtres glissantes reste en pratique limitée à la caractérisation d’un domaine de faibles dimensions et à un nombre restreint de réalisations expérimentales.

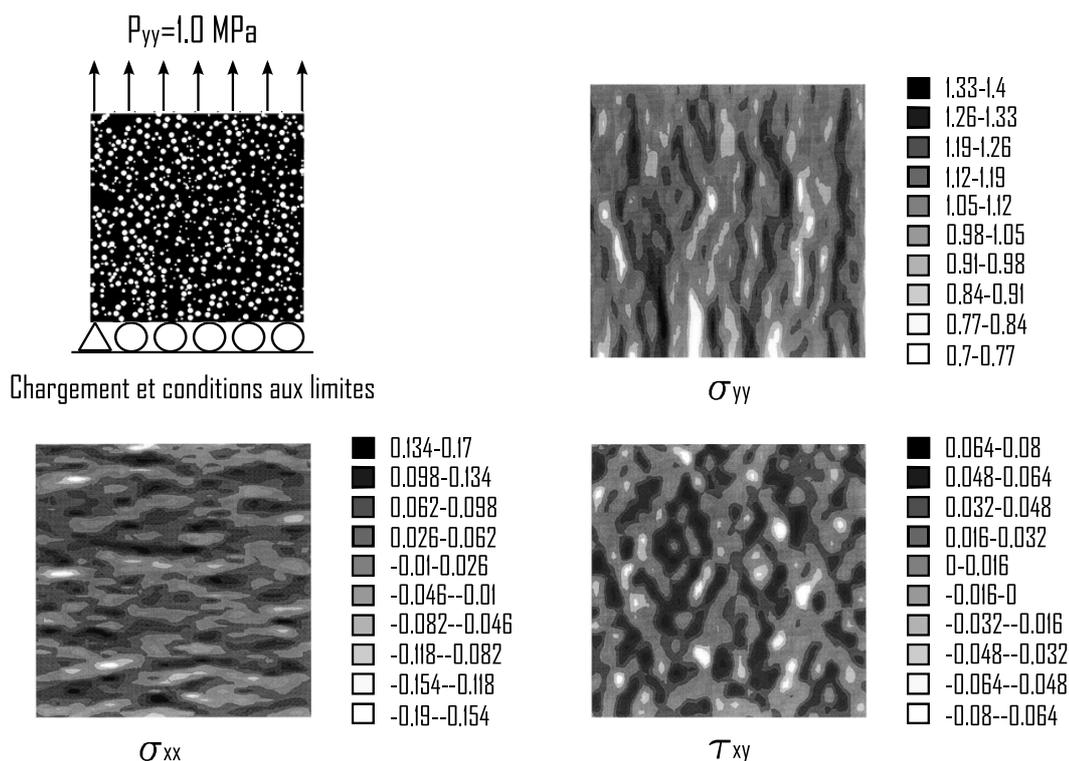


FIGURE 1.3: Exemple (application à la microstructure simulée d’un composite unidirectionnel titane/carbures de silicium) : champs de contraintes locales (en [MPa]) obtenus par une approche MW-GMC (le plan représenté correspond au plan d’isotropie transverse ; d’après [Graham et Baxter, 2001]).

1.2.2 Influence des paramètres de la modélisation

Une étude quantitative de l’influence du fenêtrage a été réalisée par Baxter *et al.*, dans le cas d’une microstructure à renforts particuliers [Baxter *et al.*, 2001]. On observe que les informations microstructurales contenues hors du plan d’une fenêtre 2-D peuvent avoir une influence significative (en fonction du type de microstructure) sur les résultats (valeurs minimale et maximale, valeur moyenne). D’autre part, la taille de la fenêtre apparaît comme le paramètre le plus critique, de par la sensibilité des résultats obtenus :

- lorsque la fenêtre est trop petite, les résultats sont bruités et délicats à traiter d’un point de vue numérique ;
- lorsque la taille de la fenêtre est trop importante, les informations sont lissées et la variance diminuée.

Ce phénomène est illustré sur la figure (1.4), sur laquelle on observe clairement l'évolution de l'histogramme (en particulier, le lissage et la symétrisation progressive de la distribution) en fonction de la taille de la fenêtre 3-D (traduite en nombre de pixels).

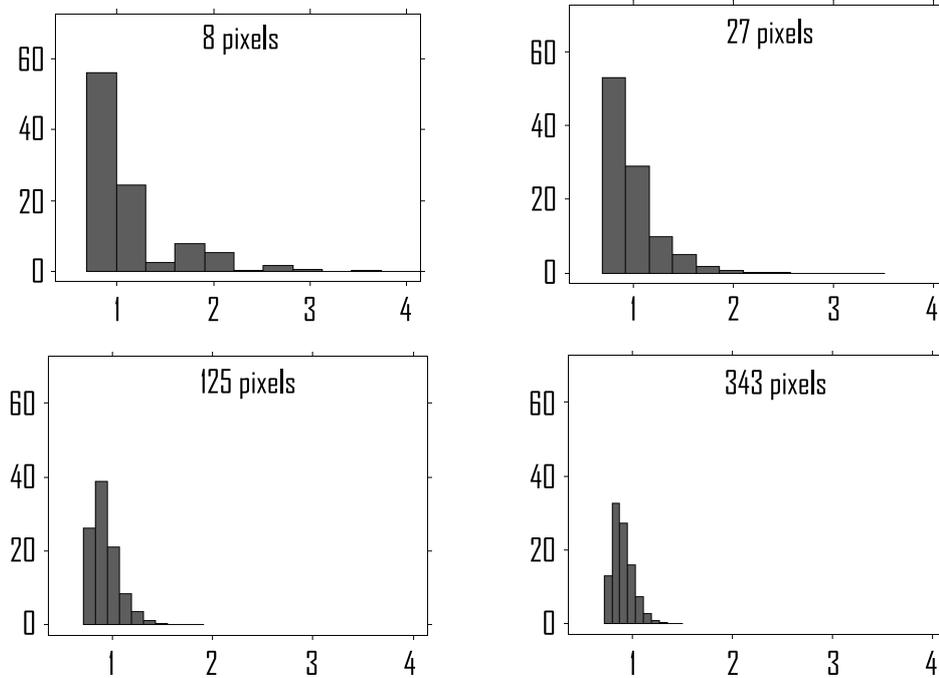


FIGURE 1.4: Influence de la taille de fenêtre (cas 3-D) sur les propriétés statistiques du module E_{yy} (abscisse : $\times 10^5$ [MPa], ordonnée : pourcentage; d'après [Baxter *et al.*, 2001]).

Notons enfin que cette approche repose uniquement sur une analyse statistique de données issues des images expérimentales numérisées et qu'en particulier, les modèles probabilistes associés ne sont pas construits, contrairement à l'approche présentée à la section (1.3). L'objectif de celle-ci est précisément la construction d'un modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique.

1.3 Modélisation mésoscopique stochastique d'un milieu aléatoire élastique anisotrope

Cette section est donc dédiée à une brève présentation du modèle probabiliste proposée dans [Soize, 2006] [Soize, 2008] pour la modélisation mésoscopique d'un milieu élastique aléatoire anisotrope.

Soit $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$ le champ aléatoire à valeur tensorielle correspondant au modèle probabiliste d'une microstructure aléatoire d'un milieu élastique anisotrope.

Dans ce qui suit, nous adopterons la représentation matricielle, notée $[\mathbf{C}(\mathbf{x})]$, du tenseur d'ordre quatre $\mathbb{C}(\mathbf{x})$. La correspondance s'écrit : $[\mathbf{C}(\mathbf{x})]_{IJ} = \mathbb{C}_{ijkl}(\mathbf{x})$, où $(I, J) \in (1..6)^2$ sont tels que $I = (i, j)$ et $J = (k, l)$, avec $1 = (1, 1)$, $2 = (2, 2)$, $3 = (3, 3)$, $4 = (1, 2)$, $5 = (1, 3)$, $6 = (2, 3)$.

Pour \mathbf{x} dans Ω (borné de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$), $[\mathbf{C}(\mathbf{x})]$ est donc une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices 6×6 réelles symétriques définies positives).

Soit $\mathbf{x} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ la fonction moyenne de $[\mathbf{C}(\mathbf{x})]$, supposée connue. Puisque $[\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{x})] \in \mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$, une décomposition de Cholesky fournit :

$$[\underline{\mathbf{C}}(\mathbf{x})] = [\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{x})]^T [\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{x})] \quad (1.1)$$

avec $[\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{x})]$ matrice 6×6 triangulaire supérieure inversible dans $\mathbb{M}_6(\mathbb{R})$. Pour \mathbf{x} fixé dans Ω , on introduit le champ aléatoire normalisé $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{G}(\mathbf{x})]$, défini sur un espace de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) , indexé par \mathbb{R}^d et à valeurs dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$, tel que pour \mathbf{x} fixé :

$$\begin{cases} [\mathbf{C}(\mathbf{x})] = [\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{x})]^T [\mathbf{G}(\mathbf{x})] [\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{x})] \\ E\{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]\} = [\mathbf{I}] \end{cases} \quad (1.2)$$

où $[\mathbf{I}]$ est la matrice identité d'ordre 6. Dans le cas stationnaire, on écrira donc :

$$[\mathbf{C}(\mathbf{x})] = [\underline{\mathbf{L}}]^T [\mathbf{G}(\mathbf{x})] [\underline{\mathbf{L}}]$$

1.3.1 Construction de la densité de probabilité de la matrice aléatoire à l'aide du Principe du Maximum d'Entropie

Pour \mathbf{x} fixé, la mesure de probabilité $P_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}$ de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ peut être définie par la densité de probabilité $[\mathbf{G}] \rightarrow p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}([\mathbf{G}])$:

$$P_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]} = p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}([\mathbf{G}]) \tilde{d}\mathbf{G} \quad (1.3)$$

où $\tilde{d}\mathbf{G}$ est la mesure définie par :

$$\tilde{d}\mathbf{G} = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d[\mathbf{G}]_{ij} \quad (1.4)$$

et $d[\mathbf{G}]_{ij}$ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . L'expression de la densité de probabilité peut être construite en utilisant le Principe du Maximum d'Entropie : celui-ci permet de construire le modèle probabiliste le plus *objectif* vis-à-vis de l'*information disponible* (en l'occurrence ici, le fait que pour $\mathbf{x} \in \Omega$, $E\{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]\} = [\mathbf{I}]$ par exemple). Le principe, énoncé par Jaynes [Jaynes, 1957a] [Jaynes, 1957b], repose sur la notion d'entropie introduite par Shannon dans le cadre de la théorie de l'information [Shannon, 1948]. On montre alors que la fonction densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}([\mathbf{G}])$ s'écrit :

$$p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}([\mathbf{G}]) = \mathbf{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}]) c_G (\det [\mathbf{G}])^{(n+1)(1-\delta^2)/(2\delta^2)} \exp \left\{ -\frac{n+1}{2\delta^2} \text{tr} [\mathbf{G}] \right\} \quad (1.5)$$

où $[\mathbf{G}] \rightarrow \mathbf{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([\mathbf{G}])$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, \det et tr sont le déterminant et la trace matriciels, la constante c_G est telle que

$$c_G = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \left(\frac{n+1}{2\delta^2}\right)^{n(n+1)(2\delta^2)^{-1}}}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)} \quad (1.6)$$

et $v \rightarrow \Gamma(v) = \int_0^{+\infty} x^{v-1} e^{-x} dx$ est la fonction Gamma.

La construction du champ aléatoire normalisé $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ est effectuée comme suit :

1. Considérons $n(n+1)/2$ champs aléatoires du second ordre $\{\mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x})\}_{1 \leq j < j' \leq n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (ces champs seront définis par la suite)
2. Soit δ le réel, indépendant de \mathbf{x} et de n , tel que :

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{n+1}{n+5}} < 1 \quad (1.7)$$

3. Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, on pose :

$$[\mathbf{G}(\mathbf{x})] = [\mathbf{L}(\mathbf{x})]^T [\mathbf{L}(\mathbf{x})] \quad (1.8)$$

où $[\mathbf{L}(\mathbf{x})]$ est la matrice aléatoire $n \times n$, réelle triangulaire, telle que :

- (i) Pour $1 \leq j \leq j' \leq n$, les champs aléatoires $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{L}(\mathbf{x})]$ sont indépendants.
- (ii) Pour $j < j'$, le champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{jj'}$, indexé par \mathbb{R}^d , est défini par : $[\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{jj'} = \sigma \mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x})$ avec $\sigma = \delta/\sqrt{n+1}$.
- (iii) Pour $j = j'$, le champ $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{jj}$ est défini par : $[\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{jj} = \sigma \sqrt{2\mathcal{H}(\alpha_j, \mathbf{U}_{jj}(\mathbf{x}))}$, où $\alpha_j = (n+1)/2\delta^2 + (1-j)/2 \in \mathbb{R}$. La fonction $u \rightarrow \mathcal{H}(\alpha, u)$, paramétrée par le réel $\alpha \in \mathbb{R}^+$, de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$, est définie par :

$$\mathcal{H}(\alpha, u) = F_{\Gamma_\alpha}^{-1}(\Phi(u)) \quad (1.9)$$

où $u \rightarrow \Phi(u)$ et $v \rightarrow F_{\Gamma_\alpha}^{-1}(v)$ sont la fonction de répartition Gaussienne et la fonction de répartition Gamma inverse, respectivement : la quantité $\mathcal{H}(\alpha, u)$ est donc une variable aléatoire gamma de paramètre α .

On montre que le champ ainsi défini est un champ aléatoire homogène du second ordre, continu en moyenne d'ordre deux et ayant ses trajectoires continues sur \mathbb{R}^d presque sûrement (p.s.).

De plus, il est prouvé que le paramètre réel δ , introduit à l'Eq. (1.7), est tel que :

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{n} E \left\{ \left\| [\mathbf{G}(\mathbf{x})] - [\mathbf{I}] \right\|_F^2 \right\}} \quad (1.10)$$

Le paramètre δ , indépendant de \mathbf{x} et de n , permet donc de contrôler le niveau de fluctuation du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{G}(\mathbf{x})]$. De l'Eq. (1.10), on déduit :

$$E \left\{ \left\| [\mathbf{G}(\mathbf{x})] \right\|_F^2 \right\} = n (\delta^2 + 1) \quad (1.11)$$

1.3.2 Définition du champ aléatoire normalisé et des germes stochastiques

Le champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{G}(\mathbf{x})]$, indexé par \mathbb{R}^d et à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, est construit comme la transformation non-linéaire de $n(n+1)/2$ champs aléatoires du second ordre $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x})$ (avec $1 \leq j \leq j' \leq n$), Gaussiens homogènes centrés indépendants, définis sur (Θ, \mathcal{F}, P) , indexés par \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R} . Les champs aléatoires $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x})$ sont appelés *germes stochastiques* de $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ et sont définis ci-dessous.

Les germes $\{\mathbf{U}_{jj'}\}_{1 \leq j \leq j' \leq n}$ sont tels que :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, E \left\{ \mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x}) \right\} = 0, E \left\{ \mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x})^2 \right\} = 1 \quad (1.12)$$

Ils sont donc définis par les $n(n+1)/2$ fonctions d'autocorrélation $R_{\mathbf{U}_{jj'}}(\tau)$, définies par :

$$R_{\mathbf{U}_{jj'}}(\tau) = E \left\{ \mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x} + \tau) \mathbf{U}_{jj'}(\mathbf{x}) \right\}$$

avec $\tau \in \mathbb{R}^d$ et $R_{\mathbf{U}_{jj'}}(0) = 1$. Plusieurs choix de fonctions d'autocorrélation sont possibles et il a été proposé de retenir la forme suivante :

$$R_{\mathbf{U}_{jj'}}(\tau) = \prod_{k=1}^d r_{jj'}^k(\tau_k) \quad (1.13)$$

avec

$$r_{jj'}^k(\tau_k) = \frac{4 \left(l_{jj'}^k \right)^2}{\pi^2 \tau_k^2} \sin^2 \left(\frac{\pi \tau_k}{2 l_{jj'}^k} \right) \quad (1.14)$$

où les $\{l_{jj'}^k\}$ sont des paramètres réels du modèle, représentant les longueurs de corrélation spatiale des germes stochastiques.

Le graphique de la fonction $\tau_x \rightarrow r^x(\tau_x)$ pour $l^x = 10$ est représenté sur la figure (1.5).

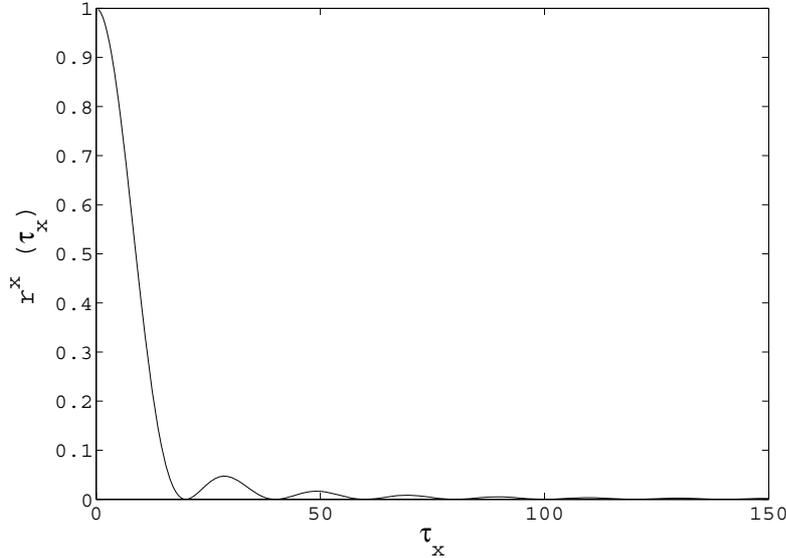


FIGURE 1.5: Représentation graphique de la fonction $\tau_x \rightarrow r^x(\tau_x)$ pour $l^x = 10$.

Le choix de la fonction (1.13) permet d'une part une paramétrisation minimale du modèle (afin notamment de réaliser une identification inverse à partir de résultats expérimentaux) et d'autre part, de garantir certaines propriétés mathématiques des germes stochastiques (par exemple, le fait que les trajectoires des germes soient continues de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} p.s.).

Il existe deux principales stratégies de simulation des germes, en fonction du nombre de points N où les germes doivent être évalués. Soit $\mathbf{V} = [\mathbf{U}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{U}(\mathbf{x}_N)]$, pour un germe \mathbf{U} donné.

Une première méthode repose sur la technique classique de simulation de champs aléatoires homogènes Gaussiens, introduite dans [Shinozuka, 1971] (voir également [Poirion et Soize, 1995]) et adaptée à de grandes valeurs de N . Afin de simplifier les notations, nous considérons ici le cas de la fonction d'autocorrélation (1.13) ainsi qu'une indexation sur \mathbb{R} (i.e. dans une seule direction de l'espace; le cas général est détaillé dans les références citées). L'approximation du vecteur \mathbf{V} à l'ordre p s'écrit :

$$\mathbf{V}_p = \sum_{i=1}^p \sqrt{2S_i} \sqrt{-\log(\psi_i)} \cos\left(\Phi_i + \frac{\pi}{l} \tau_i \mathbf{x}\right) \quad (1.15)$$

où l est la longueur de corrélation du germe et \mathbf{x} est le vecteur des coordonnées des points dans la direction considérée. Les quantités S_i et τ_i sont respectivement définies pour tout $i \in [1..p]$

par

$$S_i = \Pi(\tau_i)$$

$$\tau_i = -1 + \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{2}{p}$$

où $\tau \rightarrow \Pi(\tau)$ est la fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ , de support compact $[0, 1]$, telle que :

$$\Pi(\tau) = 1 - \tau \text{ si } \tau \in [0, 1], \Pi(-\tau) = \Pi(\tau) \quad (1.16)$$

Le vecteur Φ_i est tel que $\Phi_i = [\phi_i, \dots, \phi_i]$. Les ensembles de variables aléatoires indépendantes $\{\psi_i\}_{i=1}^p$ et $\{\phi_i\}_{i=1}^p$ sont tels que ψ_i et ϕ_i sont distribuées uniformément et respectivement sur $[0, 1]$ et $[0, 2\pi]$. On montre alors que \mathbf{V}_p est un vecteur aléatoire Gaussien dont la matrice de covariance tend vers la matrice de covariance de \mathbf{V} lorsque $p \rightarrow +\infty$.

Une seconde technique de simulation efficace est obtenue en utilisant la relation :

$$\mathbf{V} = L_{\mathbf{V}}^T \tilde{\mathbf{V}} \quad (1.17)$$

où $\tilde{\mathbf{V}} = (\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_N)$ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^N de composantes indépendantes \tilde{V}_i Gaussiennes centrées réduites et $L_{\mathbf{V}}^T$ est la matrice issue de la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance du germe \mathbf{U} (calculée à partir de l'Eq. (1.13)). Naturellement, cette technique requiert de réaliser une décomposition de Cholesky sur une matrice pleine ce qui, en pratique, limite son utilisation à des valeurs modérées de N .

1.3.3 Propriétés du champ normalisé et du champ aléatoire tenseur d'élasticité

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , de fermeture $\bar{\Omega}$. On montre alors que :

$$E \left\{ \left(\sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \left\| [\mathbf{G}(\mathbf{x})]^{-1} \right\| \right)^2 \right\} < +\infty \quad (1.18)$$

La propriété fondamentale (1.18) (i) permet de formuler une condition d'ellipticité non-uniforme pour le problème d'élasticité stochastique (ii) implique que ce problème associé possède une solution du second ordre.

Soit $\delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{x})$ le paramètre de dispersion lié au champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{C}(\mathbf{x})]$, défini par :

$$\delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \frac{E \{ \left\| [\mathbf{C}(\mathbf{x})] - \underline{[\mathbf{C}(\mathbf{x})]} \right\|_{\mathbf{F}}^2 \}}{\left\| \underline{[\mathbf{C}(\mathbf{x})]} \right\|_{\mathbf{F}}^2} \quad (1.19)$$

On montre que :

$$\delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\sqrt{n+1}} \sqrt{1 + \frac{(\text{tr} \underline{[\mathbf{C}(\mathbf{x})]})^2}{\text{tr} \underline{[\mathbf{C}(\mathbf{x})]}^2}} \quad (1.20)$$

Dans le cas stationnaire, on écrira donc $\delta_{\mathbf{C}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathbf{C}}$ et on pourra raisonner indifféremment sur le paramètre δ ou $\delta_{\mathbf{C}}$. D'autre part, soit $\tau = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) \rightarrow r^{\mathbf{C}}(\tau)$ la fonction, définie de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} par la relation :

$$r_{\mathbf{C}}(\tau) = \frac{\text{tr } E \{(\mathbf{C}(\mathbf{x} + \tau) - [\mathbf{C}]) (\mathbf{C}(\mathbf{x}) - [\mathbf{C}])\}}{E \{ \|\mathbf{C}(\mathbf{x}) - [\mathbf{C}]\|_{\text{F}}^2 \}} \quad (1.21)$$

Les longueurs de corrélation spatiale du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow [\mathbf{C}(\mathbf{x})]$, associées aux directions x , y et z , sont alors respectivement données par³ :

$$\begin{aligned} l_{\mathbf{C}}^x &= \int_0^{+\infty} |r_{\mathbf{C}}((\tau_x, 0, 0))| d\tau_x \\ l_{\mathbf{C}}^y &= \int_0^{+\infty} |r_{\mathbf{C}}((0, \tau_y, 0))| d\tau_y \\ l_{\mathbf{C}}^z &= \int_0^{+\infty} |r_{\mathbf{C}}((0, 0, \tau_z))| d\tau_z \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.3.4 Remarques

On notera que le modèle probabiliste introduit est entièrement défini, dans le cas stationnaire, par :

- la connaissance de la matrice moyenne $[\mathbf{C}]$,
- la connaissance des longueurs de corrélation des germes stochastiques,
- la connaissance du paramètre de dispersion δ .

De façon pratique, pour $d = 2$ et $n = 6$ (ces paramètres correspondant au cas de notre recherche), l'identification inverse à partir de données expérimentales concerne donc 44 paramètres. Plus spécifiquement, il s'agit d'identifier une matrice, un paramètre de dispersion et 42 longueurs de corrélation dans l'ensemble $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times]0, \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}[\times \mathbb{R}^+ \times \dots \times \mathbb{R}^+$.

Plusieurs méthodes permettant cette identification sont disponibles dans la littérature (méthodes des moindres carrés, du maximum de vraisemblance).

Ce modèle probabiliste mésoscopique a été utilisé pour investiguer la taille du VER (via une analyse probabiliste paramétrique) en fonction du paramètre de contrôle des fluctuations $\delta_{\mathbf{C}}$ et des longueurs de corrélation spatiale, dans le cas d'un milieu aléatoire élastique anisotrope simulé. En particulier, il a été mis en évidence que :

- pour des longueurs de corrélation spatiale fixées, la taille de VER augmente avec le paramètre $\delta_{\mathbf{C}}$;
- pour un paramètre $\delta_{\mathbf{C}}$ fixé, la taille du VER augmente avec les longueurs de corrélation ;
- la taille du VER peut être définie à partir des longueurs de corrélation du champ aléatoire à l'échelle mésoscopique (un ratio de 5 entre ces deux longueurs ayant été observé dans l'application proposée).

3. Notons que le modèle permet également de définir de façon générale une matrice des échelles de corrélation [Soize, 2008].

Enfin, il convient de souligner que ce modèle probabiliste intègre directement et implicitement, au travers de la matrice moyenne, les aléas liés aux propriétés des matériaux.

1.4 Problématique de la thèse

L'analyse bibliographique présentée dans ce chapitre a porté sur deux types de contribution à la modélisation stochastique des milieux aléatoires à l'échelle mésoscopique.

Un premier type d'approche repose sur l'utilisation d'images de microstructures numérisées, à partir desquelles la combinaison d'analyses statistiques et d'une modélisation micromécanique permet la caractérisation du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique. Toutefois, de telles techniques ne sont applicables en pratique qu'à des microstructures présentant un contraste suffisant entre les différentes phases constitutives. Cette caractéristique s'avère limitante pour notre analyse.

Une seconde approche consiste en la construction d'un modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité (pour des microstructures élastiques anisotropes aléatoires), basée sur l'utilisation du Principe du Maximum d'Entropie (et reposant donc sur une maximisation des incertitudes). Ce type d'approche permet une description probabiliste complète et s'avère particulièrement fécond. Ce cadre d'analyse constitue donc celui retenu pour notre recherche.

L'objectif de ce travail est ainsi la construction et l'identification expérimentale d'un modèle probabiliste du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique. Pour cela, nous proposons un modèle probabiliste de la fraction volumique à l'échelle mésoscopique, combiné à un schéma micromécanique. Ce modèle sera élaboré en s'appuyant sur deux représentations particulières et identifié en exploitant des résultats issus de techniques de mesures ultrasonores. La mise en oeuvre de ce modèle pour obtenir des réalisations du tenseur d'élasticité mésoscopique aléatoire sera présentée. Les prédictions du modèle proposé seront comparées à celles du modèle probabiliste direct.

Chapitre 2

Construction d'un modèle probabiliste de la fraction volumique à l'échelle mésoscopique

La construction d'un modèle probabiliste du tenseur d'élasticité aléatoire s'avère en général délicate, particulièrement en raison de la dépendance statistique entre ses différentes composantes. Notons dès à présent qu'une contribution à cette problématique, introduite au chapitre 1, sera identifiée et mise en oeuvre au chapitre 5. Dans de nombreux cas, les fluctuations statistiques du champ du tenseur d'élasticité mésoscopique sont principalement induites par celles de propriétés microstructurales, telles que la fraction volumique : en d'autres termes, les propriétés des différentes phases constitutives peuvent être raisonnablement considérées comme homogènes et constantes à l'issue de l'élaboration. Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéressons précisément à des matériaux injectés de faible épaisseur, pour lesquels cette hypothèse peut être retenue.

Le présent chapitre vise à construire un modèle probabiliste du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique. La détermination du champ aléatoire du tenseur d'élasticité peut alors être effectuée à l'aide d'une procédure d'homogénéisation. Notons que cette approche permet une description physique et mesurable des fluctuations statistiques présentes à l'échelle microscopique du matériau, contrairement à la description globale du tenseur d'élasticité aléatoire dont la mesure, dans le cas non homogène et anisotrope, peut s'avérer délicate.

Dans un premier temps, nous définirons la représentation de Karhunen-Loève du champ aléatoire, ainsi que la technique de projection sur les Chaos Polynômiaux Gaussiens : la combinaison de ces deux représentations nous fournira alors le modèle probabiliste de la fraction volumique. Nous exposerons ensuite la stratégie d'identification des paramètres du modèle, en introduisant le Principe du Maximum de Vraisemblance à partir duquel nous formulerons le problème d'optimisation associé à cette identification.

2.1 Définition d'une classe de champs aléatoires

Soit $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega$ un champ aléatoire du second ordre défini sur un espace de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) , indexé par un borné Ω dans \mathbb{R}^2 à valeurs dans $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Pour $\theta_k \in \Theta$, la fonction $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \theta_k)$ de Ω dans $[0, 1]$ définit une trajectoire du champ aléatoire et donc, une réalisation du milieu aléatoire. Soit $\mathbf{x} \mapsto \underline{f}(\mathbf{x}) = E\{f(\mathbf{x})\}$ sa fonction moyenne de Ω dans $[0, 1]$. Soit $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mapsto R_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = E\{f(\mathbf{x})f(\mathbf{x}')\}$ sa fonction d'autocorrélation de $\Omega \times \Omega$ dans \mathbb{R} . Enfin, soit $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mapsto C_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = E\{(f(\mathbf{x}) - \underline{f}(\mathbf{x}))(f(\mathbf{x}') - \underline{f}(\mathbf{x}'))\} = R_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') - \underline{f}(\mathbf{x})\underline{f}(\mathbf{x}')$ sa fonction de covariance de $\Omega \times \Omega$ dans \mathbb{R} .

Nous supposons que la fonction de covariance vérifie la condition suivante :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |C_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|^2 d\mathbf{x}d\mathbf{x}' < +\infty \quad (2.1)$$

L'équation (2.1) implique que l'opérateur intégral de noyau C_f est de Hilbert-Schmidt, permettant ainsi une réduction statistique du champ aléatoire (voir [Soize, 1993] par exemple).

2.2 Réduction statistique du champ aléatoire

Afin de construire le modèle probabiliste, on s'appuie dans un premier temps sur un développement de Karhunen-Loève du champ aléatoire. Celui-ci, dérivé par Karhunen [Karhunen, 1947] et Loève [Loève, 1948] (voir également [Loève, 1977] [Ghanem et Spanos, 1991]), est une représentation mathématique du champ aléatoire en fonction d'un ensemble dénombrable de variables aléatoires décorréelées et de fonctions déterministes orthogonales. Plus précisément, les propriétés de l'opérateur de noyau C_f (symétrique, positif et de Hilbert-Schmidt) impliquent qu'il possède un spectre dénombrable de valeurs propres réelles positives noté $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^{+\infty}$, tel que :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{+\infty} \rightarrow 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \lambda_\alpha^2 < +\infty \quad (2.2)$$

et que les fonctions propres associées $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^{+\infty}$ forment une base complète orthonormale :

$$\int_{\Omega} \psi_\alpha(\mathbf{x}) \psi_\beta(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

La représentation de Karhunen-Loève de $f(\mathbf{x})$ s'écrit alors :

$$f(\mathbf{x}) \approx \underline{f}(\mathbf{x}) + \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \sqrt{\lambda_\alpha} \eta_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

où l'ensemble $\{\eta_\alpha\}_{\alpha=1}^{+\infty}$ est un ensemble dénombrable de variables aléatoires centrées et orthogonales. Soulignons que les variables aléatoires η_α sont généralement mutuellement dépendantes. Dans le cas d'un processus Gaussien, les variables aléatoires sont Gaussiennes, centrées, de variance l'unité et indépendantes.

Les valeurs et fonctions propres satisfont donc l'équation intégrale (*équation homogène de seconde espèce de Fredholm*) suivante :

$$\int_{\Omega} C_f(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \psi_\alpha(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

L'équation (2.5) peut être résolue analytiquement dans un nombre limité de cas. De façon générale, une résolution numérique (par une méthode de collocation ou par une méthode de Galerkin, par éléments finis notamment -voir par exemple [Ghanem et Spanos, 1991]-) est adoptée.

D'un point de vue pratique, la représentation (2.4) est tronquée à un ordre M , selon :

$$f_M(\mathbf{x}) \approx \underline{f}(\mathbf{x}) + \sum_{\alpha=1}^M \sqrt{\lambda_\alpha} \eta_\alpha \psi_\alpha(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

On montre que le développement (2.6) est optimal, en ce sens qu'il minimise au sens L^2 l'erreur résultant de la troncature [Ghanem et Spanos, 1991]. La troncature du développement introduit une erreur d'approximation. On peut alors prouver que la norme de l'erreur s'écrit :

$$E \left\{ \|f - f_M\|_H^2 \right\} = \int_{\Omega} \text{tr} [C_f(\mathbf{x}, \mathbf{x})] d\mathbf{x} - \sum_{\alpha=1}^M \lambda_k \quad (2.7)$$

L'équation (2.7) permet de déterminer un ordre optimal de développement pour une norme d'erreur fixée.

Par exemple, la méthode de collocation en N^{colloc} points (i.e. en considérant la représentation discrète $\mathbf{f}_M = [f_M(\mathbf{x}_1), \dots, f_M(\mathbf{x}_{N^{\text{colloc}}})]$) permet de réécrire l'équation (2.5) sous la forme d'un problème matriciel aux valeurs propres :

$$\widehat{C}_f \Psi = \Lambda \Psi \quad (2.8)$$

où Ψ et Λ sont respectivement la matrice des vecteurs propres (notés $\vec{\psi}_\alpha$) et la matrice diagonale des valeurs propres de \widehat{C}_f . On a donc nécessairement : $\max M = N^{\text{colloc}}$. Il est alors possible de réduire le développement à un ordre $M^{\text{réduction}}$ (d'où le terme de *réduction statistique*) en étudiant la convergence de la fonction $p \mapsto \epsilon^{\text{Conv-KL}}(p)$ de $\{1, \dots, N^{\text{colloc}}\}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\epsilon^{\text{Conv-KL}} : p \rightarrow \epsilon^{\text{Conv-KL}}(p) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i}{\sum_{i=1}^M \lambda_i} \quad (2.9)$$

Il est intéressant de noter que la procédure consiste à discrétiser l'opérateur de dimension infinie en un opérateur de dimension finie représenté par sa matrice, puis à construire une approximation réduite de dimension finie, ramenant ainsi le nombre de termes du développement de $+\infty$ à M , puis de M à $M^{\text{réduction}}$.

2.3 Interpolation statistique

2.3.1 Propriétés et détermination des valeurs expérimentales

Soit $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_M)$ le vecteur aléatoire intervenant dans la représentation de l'Eq. (2.6), dont les composantes sont telles que :

$$E \{ \eta_\alpha \} = 0, \quad E \{ \eta_\alpha \eta_\beta \} = \delta_{\alpha\beta} \quad (2.10)$$

L'orthogonalité de la base $\{\psi_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ dans l'équation (2.6) permet le calcul des réalisations indépendantes $\eta_\alpha(\theta_j)$:

$$\eta_\alpha(\theta_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \left\langle \mathbf{f}(\theta_j) - \widehat{\mathbf{f}}, \vec{\psi}_\alpha \right\rangle \quad (2.11)$$

où $\mathbf{f}(\theta_j) = (f(\mathbf{x}_1, \theta_j), \dots, f(\mathbf{x}_N, \theta_j))$, $\widehat{\mathbf{f}} = (\widehat{f}(\mathbf{x}_1), \dots, \widehat{f}(\mathbf{x}_N))$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^N .

La distribution de probabilité du vecteur aléatoire η dépend de la loi de probabilité du champ aléatoire et peut être décrite soit en suivant la méthodologie détaillée dans [Soize et Ghanem, 2004], soit en considérant une représentation sur les Chaos Polynômes.

2.3.2 Projection du vecteur aléatoire sur les Chaos Polynômes Gaussiens

Mathématiquement, le développement d'une variable aléatoire du second ordre \mathbf{Y} à valeurs dans \mathbb{R}^M sur les Chaos Polynômes Gaussiens consiste en la représentation de celle-ci sur la base des polynômes orthogonaux d'Hermite multidimensionnels de variables aléatoires centrées Gaussiennes [Ghanem et Spanos, 1991] [Wiener, 1938]. On notera que l'extension à des mesures de probabilité quelconques est proposée dans [Soize et Ghanem, 2004].

La représentation de \mathbf{Y} sur les Chaos Polynômes Gaussiens, de dimension m et d'ordre q , s'écrit :

$$\mathbf{Y} = \sum_{\gamma, |\gamma|=0}^q \mathbf{y}_\gamma \frac{H_\gamma(\xi)}{\sqrt{\gamma!}} \quad (2.12)$$

où

– γ est un multi-indice $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{N}^m$ tel que

$$|\gamma| = \sum_{k=1}^m \gamma_k \leq q$$

et

$$\gamma! = \prod_{k=1}^m \gamma_k!$$

– ξ est un vecteur aléatoire Gaussien de longueur m , appelé *germe*, tel que

$$E \{ \xi_i \xi_j \} = \delta_{ij}$$

– \mathbf{y}_γ est un vecteur déterministe de \mathbb{R}^M , représentant les coefficients de la projection.

Le polynôme d'Hermite multidimensionnel $H_\gamma(\xi)$, défini sur \mathbb{R}^m , est tel que :

$$H_\gamma(\xi) = \prod_{k=1}^m h_{\gamma_k}(\xi_k) \quad (2.13)$$

où $h_{\gamma_k}(x)$ est le polynôme d'Hermite unidimensionnel sur \mathbb{R} d'ordre γ_k . Celui-ci peut être construit par la relation de récurrence :

$$h_0(x) = 1$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, h_{j+1}(x) = xh_j(x) - \frac{d}{dx}h_j(x)$$

Il vient donc, par exemple :

$$\begin{cases} h_0(x) = 1 \\ h_1(x) = x \\ h_2(x) = x^2 - 1 \\ h_3(x) = x^3 - 3x \\ h_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3 \\ \vdots \end{cases} \quad (2.14)$$

En pratique, les polynômes d'Hermite multidimensionnels sont obtenus par une procédure de dérivation formelle, détaillée dans [Ghanem et Spanos, 1991]. D'autre part, en notant ϕ_m la densité normale canonique de dimension m , l'orthonormalité de la base s'écrit :

$$E \left\{ \frac{H_\alpha(\xi)}{\sqrt{\alpha!}} \frac{H_\beta(\xi)}{\sqrt{\beta!}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\alpha! \beta!}} \int_{\mathbb{R}^m} H_\alpha(\xi) H_\beta(\xi) \phi_m(\xi) d\xi = \delta_{\alpha, \beta} = \prod_{k=1}^m \delta_{\alpha_k \beta_k} \quad (2.15)$$

et fournit l'expression des coordonnées de la projection :

$$\mathbf{y}_\gamma = E \left\{ \mathbf{Y} \frac{H_\gamma(\xi)}{\sqrt{\gamma!}} \right\} \quad (2.16)$$

L'Eq. (2.16) peut être résolue par la méthode classique de Monte-Carlo. Soit Q le nombre de termes intervenant dans l'Eq. (2.12), défini par :

$$Q = \frac{(m+q)!}{m!q!} \quad (2.17)$$

Afin de fixer les idées, les valeurs de Q obtenues pour divers ordres et dimensions sont indiquées dans le tableau (2.1).

m	q			
	0	1	2	3
2	1	3	6	10
4	1	5	15	35
6	1	7	28	84

TABLE 2.1: Valeurs du paramètre Q pour différents ordres de développement q et longueurs de germe m .

On constate que le nombre de termes (et donc, la taille du problème d'optimisation à résoudre pour l'identification des coefficients) augmentent rapidement avec la dimension et l'ordre du développement Chaos.

Suivant les développements précédents, la projection sur l'axe statistique du vecteur aléatoire centré η est effectuée par l'intermédiaire d'un développement sur les Chaos Polynômiaux

Gaussiens et s'écrit, à l'ordre q :

$$\eta = \sum_{\gamma, |\gamma|=1}^q \mathbf{z}_\gamma \frac{H_\gamma(\xi)}{\sqrt{\gamma!}} \quad (2.18)$$

Par ailleurs, la combinaison de la relation $E\{\eta_\alpha \eta_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$ avec l'équation (2.18) fournit la contrainte algébrique :

$$\sum_{\gamma, |\gamma|=1}^q \mathbf{z}_\gamma \mathbf{z}_\gamma^T = I_M \quad (2.19)$$

où I_M désigne la matrice unité de dimensions $M \times M$. L'Eq. (2.19) implique la condition nécessaire :

$$M \leq Q - 1 \quad (2.20)$$

où l'on rappelle que Q est défini par l'Eq. (1.3.3). L'Eq. (2.20) fournit une inégalité entre la taille m du germe gaussien ξ , l'ordre du développement Chaos et l'ordre de troncature M de la représentation de Karhunen-Loève. Puisqu'il est connu que l'addition de termes dans la représentation Chaos n'améliore pas nécessairement l'approximation (on rappelle ici que la convergence du développement Chaos n'est pas monotone et que seule une étude de convergence permet de statuer sur la qualité de l'approximation ; voir à ce sujet [Field Jr. et Grigoriu, 2004]) et puisqu'une valeur optimale de M peut être estimée à l'aide de la relation (2.7), l'équation (2.20) permet donc la détermination d'une taille adéquate pour le germe.

2.3.3 Identification des coefficients de la projection

Formulation du problème d'optimisation

L'interpolation implique la détermination de l'ensemble des coefficients $\{\mathbf{z}_\gamma\}_{\gamma, |\gamma|=1}^q$ de la projection Chaos. Pour ce faire, considérons p^{exp} réalisations expérimentales $\{\Xi^1, \Xi^2, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}\}$ du vecteur aléatoire η (avec $\Xi^i = \eta(\theta_i)$ et $\Xi_j^i = \eta_j(\theta_i)$), calculées à partir de l'ensemble \mathcal{S}^{exp} par l'équation (2.11). Soit \mathbf{Z} la matrice de dimensions $M \times Q$ dont les colonnes sont les vecteurs \mathbf{z}_γ . L'équation (2.19) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = I_M \quad (2.21)$$

Soit p_η la fonction densité de probabilité de η . Enfin, soit \mathcal{C} la variété définie par l'équation (2.19). L'estimation de \mathbf{Z} est effectuée par la méthode du Maximum de Vraisemblance. Le problème d'identification est formalisé comme suit :

$$\mathcal{R}_1 : \max_{\mathbf{Z} \in \mathcal{C}} \mathcal{L}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z}) \quad (2.22)$$

où \mathcal{L} désigne la fonction de vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z}) = \prod_{i=1}^{p^{\text{exp}}} p_\eta(\Xi^i, \mathbf{Z}) \quad (2.23)$$

En pratique, un tel problème d'optimisation est très consommateur en ressources de calcul, à cause de l'estimation des fonctions de densité conjointe. Suivant [Desceliers *et al.*, 2006], on substitue alors à \mathcal{L} la fonction $\tilde{\mathcal{L}}$ définie par :

$$\tilde{\mathcal{L}}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z}) = \prod_{i=1}^{p^{\text{exp}}} \prod_{j=1}^M p_{\eta_j}(\Xi_j^i, \mathbf{Z}) \quad (2.24)$$

Il convient de noter que l'approximation (2.24) est relativement efficace dans la mesure où les variables aléatoires η_α , bien que dépendantes, sont décorrélées. Il s'en suit l'approximation \mathcal{R}_2 du problème initial \mathcal{R}_1 :

$$\mathcal{R}_2 : \max_{\mathbf{Z} \in \mathcal{C}} \tilde{\mathcal{L}}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z}) \quad (2.25)$$

De plus, pour des raisons de précision numérique, on considère classiquement la fonction Log-vraisemblance, définie par $\tilde{\mathcal{L}}_{\log} = \log_{10}(\tilde{\mathcal{L}})$, fournissant ainsi l'approximation finale \mathcal{R}_3 du problème d'optimisation \mathcal{R}_1 :

$$\mathcal{R}_3 : \max_{\mathbf{Z} \in \mathcal{C}} \tilde{\mathcal{L}}_{\log}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z}) \quad (2.26a)$$

où

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\log}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{p^{\text{exp}}} \sum_{j=1}^M \log_{10}[p_{\eta_j}(\Xi_j^i, \mathbf{Z})] \quad (2.26b)$$

et

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T = I_M \quad (2.26c)$$

Stratégie de résolution

Pour des systèmes réels, le problème d'optimisation est de grande dimension, principalement parce que la réduction statistique est contrainte par la réalité physique (l'ordre de développement est donc très supérieur ici à ce qui pourrait être obtenu à partir de données entièrement simulées) et qu'il est nécessaire de raisonner sur un nombre important de réalisations expérimentales. Typiquement, le système d'équations non linéaires comporte plusieurs milliers d'inconnues. Les techniques classiques de résolution, déterministes, ne permettent pas de résoudre un tel problème.

Théoriquement, celui-ci pourrait être résolu par une technique de type Algorithmes Génétiques (AG), dont nous indiquons ici brièvement le principe. Un algorithme évolutionnaire s'inspire du principe d'évolution de Darwin, selon lequel seuls les individus les mieux adaptés à leur environnement, c'est-à-dire à un ensemble de contraintes de diverses natures, subsistent [Goldberg, 1989] [Tomassini, 1995].

Dans le cas des AGs, à partir d'une population initiale d'objets (souvent appelés individus, faisant écho à la terminologie de l'évolution naturelle), une nouvelle génération *a priori* mieux adaptée est créée suivant les étapes ci-dessous :

1. L'évaluation du niveau d'adaptation des individus de la population initiale (évaluation d'une fonction objectif);
2. La sélection des individus de la population initiale devant se reproduire;
3. La mutation, i.e. la perturbation aléatoire éventuelle de certains individus de la population initiale;
4. La génération (par crossing-over par exemple).

Afin d'étudier la faisabilité d'une stratégie de résolution par AG, considérons deux matrices, supposées sélectionnées, \mathbf{Z} et \mathbf{Z}^* telles que $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Soit \mathbf{Z}^{gen} la nouvelle matrice générée, dont les composantes sont définies, pour $(i_c, j_c) \in \mathbb{N}^2$ fixés (aléatoirement), par :

$$\forall (i, j) \in M \times Q, \mathbf{Z}_{ij}^{\text{gen}} = \begin{cases} \mathbf{Z}_{ij} & \text{si } (j < j_c) \text{ ou } (j = j_c, i \leq i_c) \\ \mathbf{Z}_{ij}^* & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.27)$$

L'équation (2.27) constitue la formalisation de la procédure de crossing-over, à une éventuelle mutation près. On constate que bien que $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^*) \in \mathcal{C}^2$, il est très probable que $\mathbf{Z}^{\text{gen}} \notin \mathcal{C}$. Dès lors, on peut conclure que les AGs peuvent s'avérer inefficaces dans la résolution du problème considéré ici, de par l'incapacité du processus de génération à engendrer des individus satisfaisant à la contrainte d'appartenance à \mathcal{C} .

En conclusion, il convient de privilégier une stratégie de résolution purement aléatoire du problème \mathcal{R}_3 , telle qu'utilisée dans [Desceliers *et al.*, 2006]. Cela revient à **(i)** générer aléatoirement un ensemble de matrices $\mathcal{Z} = \{\mathbf{Z}_i\}_{i=1}^{\text{N}^{\text{OPT}}}$ (où N^{OPT} devra être le plus grand possible) satisfaisant à l'équation (2.21), **(ii)** évaluer pour chaque \mathbf{Z} la pseudo-fonction de vraisemblance $\tilde{\mathcal{L}}_{\log}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z})$.

L'algorithme général est résumé ci-dessous :

(i) Procédure de génération de l'ensemble $\{\mathbf{Z}_i\}_{i=1}^{\text{N}^{\text{OPT}}}$:

1. Générer aléatoirement une matrice \mathbf{Z}_0 dont les composantes sont des variables aléatoires indépendantes uniformes dans $[-1, 1]$.
2. Soit $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Z}_0 \mathbf{Z}_0^{\text{T}}$; déterminer sa décomposition de Cholesky : $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{L}^{\text{T}} \mathbf{L}$.
3. Définir \mathbf{Z}_i par : $\mathbf{Z}_i = \mathbf{L}^{-\text{T}} \mathbf{Z}_0$.

(ii) Procédure d'estimation de la pseudo-fonction de vraisemblance

1. Générer aléatoirement des réalisations du germe Gaussien ξ .
2. Calculer les réalisations correspondantes du vecteur aléatoire η par l'Eq. (2.18).

3. Estimer l'ensemble $\{p_{\eta_j}(\Xi_j^i, \mathbf{Z})\}_{i,j}$.
4. Calculer $\tilde{\mathcal{L}}_{\log}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z})$.

Estimation des densités marginales

L'objectif est à présent de déterminer l'ensemble $\{p_{\eta_j}(\Xi_j^i, \mathbf{Z})\}_{i,j}$ des valeurs des densités de probabilité marginales prises aux valeurs expérimentales. Pour ce faire, considérons N tirages du germe Gaussien ξ et, pour $\mathbf{Z} \in \mathcal{C}$ fixé, soient $\{\Xi^{\text{sim}^1}, \dots, \Xi^{\text{sim}^N}\}$ les N réalisations simulées du vecteur aléatoire η . Dans ce qui suit, la dépendance $\Xi^{\text{sim}} = \Xi^{\text{sim}}(\mathbf{Z})$ sera omise afin de ne pas alourdir l'écriture.

Une première méthode consiste en un comptage direct à partir des cumulatives, selon un schéma de différence finie centrée (de pas Δ , $\Delta \rightarrow 0$) :

$$p_{\eta_j}^N(\Xi_j^i, \mathbf{Z}) \approx \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{]-\infty; \Xi_j^i + \Delta]}(\Xi_j^{\text{sim}^k}) - \sum_{k=1}^N \mathbf{1}_{]-\infty; \Xi_j^i - \Delta]}(\Xi_j^{\text{sim}^k})}{2\Delta N} \quad (2.28)$$

où avec des notations générales, $\mathbf{1}_E(x)$ désigne la fonction indicatrice de E , i.e. $\mathbf{1}_E(x) = 1$ si $x \in E$, 0 sinon. La notation $p_{\eta_j}^N(\Xi_j^i, \mathbf{Z})$ traduit la dépendance de l'estimation vis-a-vis du nombre de tirages du germe N . Le pas du schéma Δ devient alors un paramètre dont la calibration peut s'avérer délicate.

Une autre méthode consiste à utiliser un estimateur à noyau continu de la densité marginale considérée (voir [Silverman, 1986] pour une description générale). Celui-ci prend la forme générale :

$$\hat{p}_{\eta_j}^N(\Xi_j^i, \mathbf{Z}) = \frac{1}{Nh} \sum_{k=1}^N \mathcal{K}\left(\frac{\Xi_j^i - \Xi_j^{\text{sim}^k}}{h}\right) \quad (2.29)$$

où h est un paramètre appelé largeur de fenêtre (les terminologies "largeur de bande" et "paramètre de lissage" sont également fréquemment employées) et \mathcal{K} est la fonction noyau de support \mathbb{R} , classiquement symétrique, telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{K}(x) \geq 0 \\ \int \mathcal{K}(x) dx = 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

Du choix de la fonction noyau et de la valeur de h , celui du paramètre de lissage est considéré comme le plus critique. En particulier, une valeur trop faible conduit à une somme de fonctions de Dirac, tandis qu'une largeur de bande trop grande lisse les détails de la distribution (en particulier, une éventuelle bimodalité, par exemple). Il existe plusieurs expressions "optimales" (e.g. au sens de la minimisation d'une erreur quadratique intégrale moyenne; on pourra se

référer à [Silverman, 1986] pour une étude détaillée), selon l'allure générale de la densité de probabilité estimée. Lorsque celle-ci est proche d'une densité Gaussienne, la forme suivante peut être retenue :

$$h = 1.06 \hat{\sigma} N^{-1/5} \quad (2.31)$$

où $\hat{\sigma}^2$ est l'estimateur de la variance de l'échantillon. Une forme plus générale, valable pour des densités unimodales ou modérément bimodales, a été proposée :

$$h = 0.9 \min(\hat{\sigma}, I_Q/1.34) N^{-1/5} \quad (2.32)$$

où I_Q désigne l'écart interquartile. La règle (2.32) sera appliquée dans le cadre de cette recherche. En ce qui concerne le choix d'une fonction noyau, plusieurs choix sont possibles et quelques exemples sont fournis ci-dessous (voir la figure (2.1)) :

- noyau d'Epanechnikov : $\mathcal{K}(x) = 3/4 (1 - 1/5 \cdot x^2) / \sqrt{5}$ si $|x| < \sqrt{5}$, 0 sinon ;
- noyau bimodale : $\mathcal{K}(x) = 15/16 (1 - x^2)^2$ si $|x| < 1$, 0 sinon ;
- noyau Gaussien : $\mathcal{K}(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \exp(-1/2 \cdot x^2)$;
- noyau rectangulaire : $\mathcal{K}(x) = 1/2$ si $|x| < 1$, 0 sinon ;
- noyau triangulaire : $\mathcal{K}(x) = 1 - |x|$ si $|x| < 1$, 0 sinon.

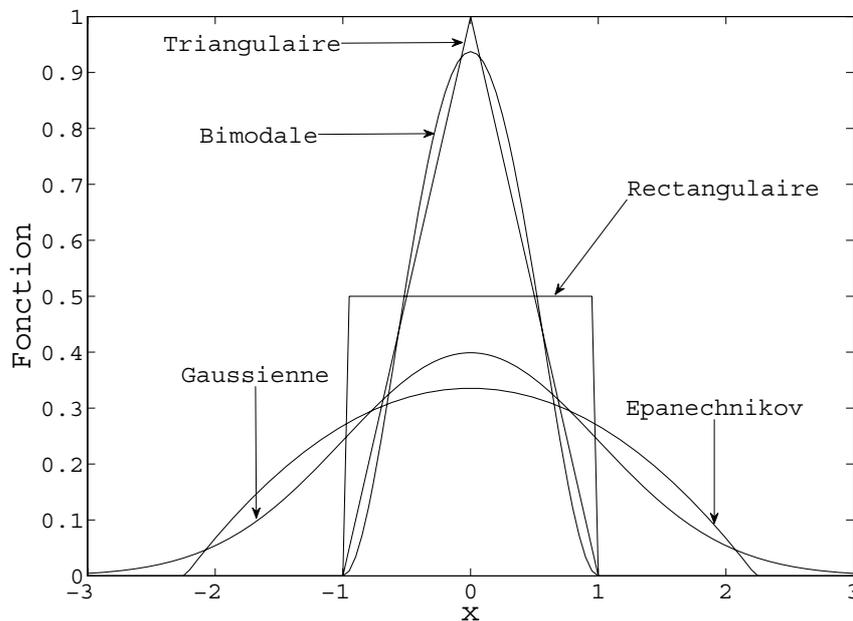


FIGURE 2.1: Représentation graphique de différentes fonctions noyau.

La stratégie d'identification que nous envisageons étant basée sur une recherche purement aléatoire, celle-ci implique que le temps de calcul de la fonction de vraisemblance (et donc de

l'évaluation des $M \times p^{\text{exp}}$ valeurs des densités marginales) soit le plus faible possible. Lorsque le nombre de tirages du germe est important, il est numériquement avantageux de considérer une fonction noyau à support compact, afin de limiter le nombre d'évaluations de la fonction. On notera toutefois que dans ce cas, le gain ainsi obtenu reste pénalisé par l'opération de tri des réalisations simulées.

2.4 Conclusion

Un modèle probabiliste du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique a été présenté [Guilleminot *et al.*, 2008]. Celui-ci s'appuie sur deux représentations probabilistes classiques, à savoir une représentation de Karhunen-Loève (R.K.L.) du champ aléatoire et sur une projection sur les Chaos Polynômiaux Gaussiens du vecteur aléatoire introduit par la R.K.L..

La stratégie d'identification des paramètres du modèle (c'est-à-dire des coefficients du développement Chaos) à l'aide du Principe du Maximum de Vraisemblance est précisée. Il importe de souligner que le problème d'optimisation ainsi formulé doit être résolu à l'aide d'une stratégie de recherche purement aléatoire. Cette procédure d'identification requiert par ailleurs la connaissance d'un nombre suffisant de trajectoires expérimentales. Cette caractérisation expérimentale constitue précisément l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Analyse expérimentale

Afin de procéder à la caractérisation expérimentale du champ aléatoire, nous considérons un matériau biphasé modèle, constitué d'une matrice thermoplastique renforcée par des fibres longues et élaboré par un procédé d'injection, dans des conditions proches de celles rencontrées en milieu industriel.

Dans un premier temps, nous nous attacherons à définir l'ensemble des données expérimentales. Plus particulièrement, nous justifierons la considération de la mesure d'une vitesse de propagation d'ondes, plutôt qu'une caractérisation directe de l'élasticité mésoscopique aléatoire. Nous introduirons alors la procédure d'analyse expérimentale par la méthode non destructive ultrasonore. La technique de mesure par réflexion sera notamment introduite. Après avoir brièvement décrit le dispositif expérimental, nous discuterons et démontrerons ensuite la qualité de la stratégie de mesure au travers de l'analyse statistique du ratio des amplitudes des signaux utilisés pour la détermination de la vitesse de propagation.

Nous illustrerons enfin les résultats obtenus au travers de deux réalisations expérimentales du champ aléatoire de la vitesse de propagation des ondes longitudinales, ainsi que des champs moyen et du coefficient de variation de la vitesse.

3.1 Description du matériau étudié

Le matériau considéré est constitué d'une matrice thermoplastique de type Polypropylène (PP) renforcée par des fibres longues de verre E (de longueur moyenne 8 mm et de diamètre 12 μm). Ce type de matériau est mis en oeuvre par un procédé classique d'injection, dont le principe est schématisé sur la figure (3.1) (voir par exemple [Binétruy, 2007]). Les renforts fibreux se présentent sous la forme de granulés renforcés, intégrant les deux phases dans un dosage préétabli. Les granulés sont dans un premier temps déposés dans un doseur (qui réalise le dosage final en fonction de la consigne de fraction massique), puis extrudés par l'intermédiaire d'une vis d'Archimède qui assure, outre l'homogénéité de la répartition des renforts dans le moule, une fluidification suffisante de la matrice (par l'intermédiaire d'un système de chauffage additionnel). La température du moule ainsi que la pression d'injection sont adaptées en fonction des matières utilisées. Ce type de procédé est dédié à la production en grandes séries, pour des secteurs d'application variés (industrie automobile, secteur de l'énergie, etc.).

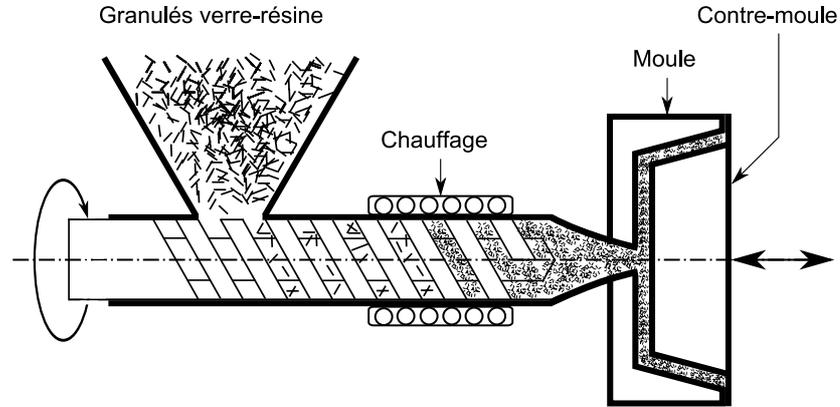


FIGURE 3.1: Schéma de principe du moulage de granulés par injection (d'après [Berbain et Chevalier, 2007]).

Les propriétés des constituants sont reportées sur le tableau (3.1), où les propriétés de la matrice ont été estimées à partir d'essais mécaniques (les données concernant les fibres sont issues d'une base de données et correspondent à des valeurs usuelles).

	Fibres (verre E)	Matrice (PP)
E [GPa]	73	1.535
ν	0.21	0.41
ρ [$\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$]	2600	900

TABLE 3.1: Définition du matériau d'étude : propriétés de la matrice et du renfort fibreux.

On notera que les fibres sont quasi-rigides par rapport à la matrice. Un ensemble de 110 plaques a été injecté sur une presse DK (de type industriel), avec une vitesse d'injection de $35 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ et une pression de 4.5 MPa (avec un refroidissement de 25 secondes dans le moule chauffé à 50°C) : ces 110 plaques sont considérées comme 110 réalisations expérimentales indépendantes du milieu aléatoire. Afin de n'intégrer dans la modélisation que les fluctuations issues du procédé en régime permanent, un lot de 30 plaques a été préalablement injecté.

La consigne de fraction massique en fibres est d'environ 24 %. On rappelle que le taux massique

en fibres M_f est lié au taux volumique V_f par la relation

$$V_f = M_f \frac{\rho_c}{\rho_f}$$

où $\rho_c = V_f \rho_f + (1 - V_f) \rho_m$, ρ_m et ρ_f étant respectivement la masse volumique de la matrice et de la fibre. La consigne d'injection en en taux volumique vaut donc 10 %. Les plaques sont de dimensions initiales (en sortie de moule) $L_x = 400$ mm, $L_y = 150$ mm et $L_z = 3$ mm. Le choix de ces dimensions a été conditionné :

- par la taille du moule disponible, lui même défini en fonction des applications usuelles,
- par la longueur des fibres.

Etant donné les dimensions de la cuve utilisée pour la caractérisation expérimentale (voir la section (3.3.2)), la dimension suivant la direction x a été réduite à $L_x = 260$ mm par une découpe mécanique.

3.2 Définition de l'ensemble des données expérimentales

La modélisation probabiliste requiert la détermination d'un ensemble de données expérimentales sur laquelle l'identification des paramètres du modèle puisse être réalisée. Il importe de souligner que la pertinence de la mise en oeuvre du modèle probabiliste repose en partie sur la capacité à obtenir des estimateurs statistiques convergés. L'idée ici est d'utiliser une mesure indirecte des propriétés élastiques, au travers de la caractérisation de la vitesse de propagation de certaines ondes dans le milieu. Un avantage d'une telle approche non destructive est qu'elle permet notamment de réaliser d'autres caractérisations expérimentales sur le même lot d'échantillons *a posteriori*.

Dans le cadre de notre application, les fluctuations statistiques des propriétés mécaniques élastiques induites par le procédé d'élaboration sont dues à la présence d'amas fibreux, dont la taille est supposée constante et d'ordre de grandeur sensiblement supérieur à la taille des fibres. En conséquence, les volumes mésoscopiques constituent, schématiquement, des zones plus ou moins riches en fibres : localement, le matériau peut donc être considéré comme isotrope.

On montre d'autre part que de la propagation d'onde dans un solide élastique illimité fait intervenir deux types d'ondes fondamentales [Royer et Dieulesaint, 1999] :

- les ondes “longitudinales”, pour lesquelles la polarisation (i.e. la direction de déplacement des particules du solide) est colinéaire au vecteur d'onde (d'où le terme d'ondes de “compression”, également employé) ;
- les ondes “transversales”, pour lesquelles la polarisation est orthogonale au vecteur d'onde (on parle alors d'ondes de “cisaillement”).

Pour un milieu de tenseur d'élasticité \mathbb{C} , on montre que les vitesses de propagation et les polarisations des ondes planes se propageant suivant une direction \underline{n} s'obtiennent par la détermination des valeurs et vecteurs propres d'un tenseur Γ , appelé tenseur de Christoffel, dont les composantes sont définies par :

$$\Gamma_{il} = \mathbb{C}_{ijkl} n_j n_k \quad (3.1)$$

Dans le cas d'un milieu isotrope, il vient :

$$\Gamma_{il} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} n_i n_l + \frac{E}{2(1+\nu)} \delta_{il} \quad (3.2)$$

où E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du milieu, respectivement. La résolution du problème aux valeurs propres, associé à l'Eq. (3.2), met en évidence deux solutions :

- une première correspondant à une onde transversale, se propageant à une vitesse V_t ;
- une seconde, correspondant à une onde longitudinale se propageant à une vitesse V_l .

En particulier, ces vitesses s'écrivent :

$$V_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (3.3)$$

et

$$V_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (3.4)$$

où ρ désigne la masse volumique du solide⁴. Classiquement, les Eqs. (3.3) et (3.4) sont utilisées pour caractériser, à partir de mesures expérimentales des vitesses V_l et V_t , les propriétés élastiques d'un milieu. Cependant, la mesure des vitesses d'ondes transverses requiert l'extraction du volume mésoscopique considéré (dans le cas contraire, l'onde se propage dans la totalité de la plaque et une mesure locale n'est de fait pas possible). L'objectif étant de favoriser une analyse expérimentale automatisée, ces vitesses d'ondes transverses ne seront pas utilisées ici.

L'ensemble des données expérimentales est donc :

$$\mathcal{S}^{\text{exp}} = \{V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, \theta_j), i \in \{1, \dots, N\}, j \in \{1, \dots, p^{\text{exp}}\}\} \quad (3.5)$$

La relation entre la vitesse de propagation d'une onde longitudinale et la fraction volumique en renforts dans un domaine sera étudiée au chapitre 4.

3.3 Mesure des champs de vitesse longitudinale

3.3.1 Principe des mesures de vitesse de propagation par émission-réception

Nous considérons ici une technique de mesure dite par "pulse-écho"⁵, dans laquelle le palpeur ultrasonore est utilisé à la fois pour l'émission et la réception des signaux (il s'agit de la méthode

4. D'un point de vue des unités, V , E et ρ sont respectivement exprimés en $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, Pa et $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

5. Le terme de "mesure en réflexion" est également utilisé.

de caractérisation la plus fréquente).

On rappelle que le champ sonore produit par le transducteur ultrasonore est composé de deux zones. La première est appelée *champ proche* : il s'agit d'une zone dans laquelle il existe de fortes variations d'amplitude du signal et qui peut se révéler inadaptée à la prise de mesure. La seconde zone, caractérisée par une divergence du faisceau, est appelée *champ éloigné* et constitue, lorsque les conditions expérimentales le permettent, la zone pratique de caractérisation.

Afin d'automatiser la mesure, nous considérons un sondage en immersion (l'agent de couplage étant l'eau) : cette technique d'acquisition est appelée *C-Scan*⁶. Son principe est schématisé sur la figure (3.2).

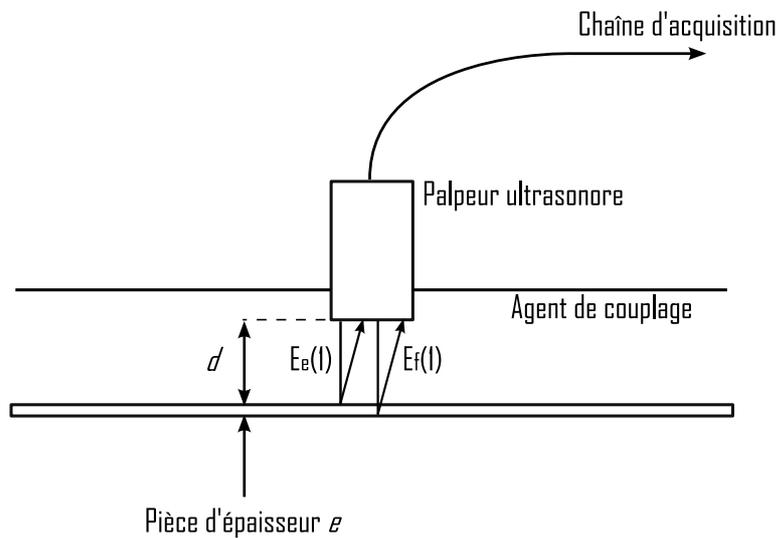


FIGURE 3.2: Principe d'une mesure de vitesse de propagation d'onde par réflexion en immersion.

Un oscillogramme est constitué d'une série d'échos, chaque écho étant lui-même constitué d'une suite d'arches négatives et positives. La schématisation d'un oscillogramme obtenu par cette méthode est représentée sur la figure (3.3), où les échos E_e et E_f correspondent respectivement au premier écho d'entrée et de fond.

6. Ce type d'analyse multidimensionnelle et automatisée est une technique de contrôle industrielle usuelle, utilisée par exemple pour la détection de défauts après l'élaboration d'une pièce.

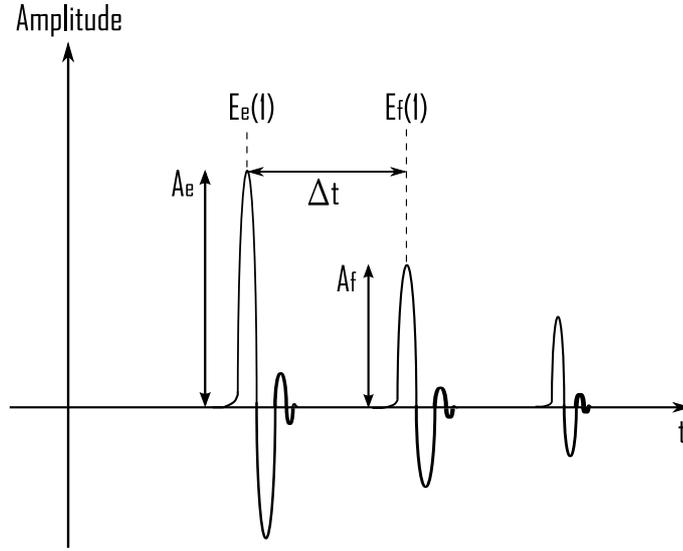


FIGURE 3.3: Schématisation d'un oscillogramme obtenu dans le cas d'une mesure par pulse-écho.

Dans le cas présent, nous appelons écho d'entrée l'écho correspondant au premier écho de réflexion sur la face de l'échantillon, et non à l'écho d'émission. En écrivant les expressions des temps de parcours (i) palpeur-interface (écho E_e) (ii) palpeur-fond d'échantillon (écho E_f), on obtient :

(i)

$$t_1 = \frac{2d}{V_{\text{eau}}}$$

(ii)

$$t_2 = \frac{2d}{V_{\text{eau}}} + \frac{2e}{V_{\text{échantillon}}}$$

où d est l'épaisseur d'eau située entre le palpeur et l'échantillon, e est l'épaisseur de la pièce, V_{eau} et $V_{\text{échantillon}}$ sont les vitesses de propagation de l'onde dans l'eau et dans l'échantillon respectivement. La différence de temps Δt entre ces deux trajets s'écrit donc :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2e}{V_{\text{échantillon}}} \quad (3.6)$$

La relation (3.6) permet, à partir de la mesure de la différence des temps de vol Δt et lorsque l'épaisseur de la pièce est connue *a priori*, de déterminer la vitesse de propagation des ondes dans le milieu considéré :

$$V_{\text{échantillon}} = \frac{2e}{\Delta t} \quad (3.7)$$

La problématique expérimentale est donc ramenée à la détermination du paramètre Δt , appelé *différence des temps de vol*, pour laquelle plusieurs techniques sont disponibles.

Remarque : afin de permettre une identification précise des échos, il est nécessaire d'adapter l'épaisseur d'eau d à l'épaisseur de la pièce e , selon la relation :

$$d > e \left(\frac{V_{\text{eau}}}{V_{\text{échantillon}}} \right) \quad (3.8)$$

En utilisant les propriétés du tableau (3.1), on obtient les vitesses de propagation des ondes dans les matériaux constitutants :

$$V_{\text{Verre}} = 5621.9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_{\text{PP}} = 1991.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse de propagation dans l'échantillon étant nécessairement bornée par les deux vitesses V_{Verre} et V_{PP} , on obtient donc la condition (avec $V_{\text{eau}} = 1500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$d > 2.26 \text{ mm}$$

Le choix de la stratégie de détermination de Δt est basé sur celui d'une méthode d'analyse des signaux permettant d'assurer à la fois la précision et le caractère reproductif des mesures. Plusieurs méthodes sont fournies dans la littérature, selon le domaine d'analyse retenu (voir par exemple [Chaki, 2003]). On retiendra notamment :

- l'analyse *temporelle*,
- l'analyse *fréquentielle*,
- l'analyse *temps-fréquence*.

De façon pratique, le choix de la méthode d'analyse est guidé par la nature des signaux à traiter et par les caractéristiques du milieu propagatif (atténuation, dispersion), chacune des techniques citées possédant un cadre d'application relativement bien identifié. L'analyse fréquentielle (dont la méthode par intercorrélation [Max, 1972], fréquemment utilisée) est dédiée à l'étude de signaux dont la forme et l'amplitude varient de façon significative (distorsion). Lorsque le signal n'est pas stationnaire, une analyse temps-fréquence peut être conduite, permettant notamment de caractériser l'évolution temporelle du contenu fréquentiel. Enfin, une analyse temporelle peut être mise en oeuvre lorsque les signaux ne présentent pas de distorsion particulière. Cette situation correspondant à notre cas d'étude, son principe est introduit ci-dessous.

Le principe de base d'une analyse temporelle, représenté sur la figure (3.4), repose sur l'étude d'un point particulier d'une arche de l'écho (ce point étant défini par une valeur seuil d'amplitude) . Un écho étant constitué d'arches négatives et positives, la valeur 0 est souvent retenue (la position du 0 peut par ailleurs être définie par rapport à une autre valeur seuil) : on parle alors d'*analyse par passage à zéro*.

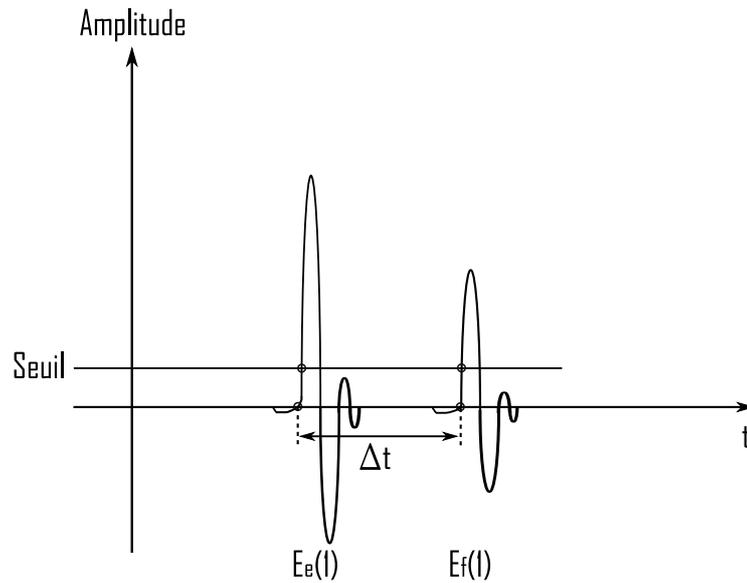


FIGURE 3.4: Détermination de la différence des temps de vol Δt à l'aide d'une méthode d'analyse temporelle par passage à zéro.

3.3.2 Dispositif expérimental

Les plaques injectées nécessitant d'être lestées au fond de la cuve, un cadre rigide en acier a été conçu et usiné. Il est composé de trois parties en acier soudées à angle droit et reposant sur deux structures triangulaires qui assurent l'appui du cadre. Afin de pouvoir insérer facilement chaque plaque, trois rails en NoFix sont intégrés sur les parties latérales et de fond de pièce. Ce dispositif permet, outre le lestage et le positionnement reproductible de la plaque, la rectification éventuelle d'un gauchissement⁷. Différentes vues du cadre en phase de conception sont proposées sur la figure (3.5), tandis qu'une photographie du dispositif final est présentée sur la figure (3.6).

Le système de caractérisation expérimentale est composé :

- d'une cuve en plexiglas remplie d'eau, dans laquelle la plaque fichée dans le cadre est déposée ;
- d'un système tri-axe de tables de déplacement robotisées Microcontrolle (courses dans les directions x et y : 200 mm ; précision : 1 μm) ;
- d'un transducteur piézoélectrique plan (fréquence : 5 MHz ; diamètre de la pastille : 14 mm) ;
- d'une carte Ultrasons IPR-AD-1210 (génératrice-réceptrice) ;

⁷. Un gauchissement de la plaque est en pratique souvent observé lorsque la fraction volumique en renfort est trop faible pour que l'élasticité des fibres compense le retrait de la matrice. Dans le cas présent, aucun gauchissement n'a été mis en évidence.

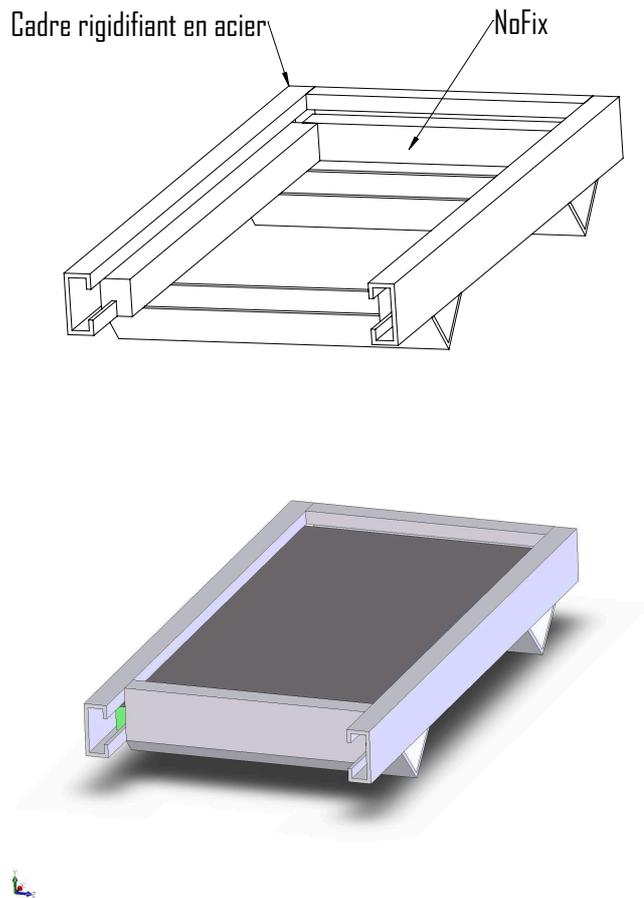


FIGURE 3.5: Vues 3D du cadre rigide (phase de conception). Haut : vue du dispositif, Bas : vue du dispositif avec plaque insérée.

- du logiciel de contrôle et d'analyse EPA UTWIN.

Il convient de remarquer que l'échelle mésoscopique est alors définie par une longueur caractéristique égale à la taille du domaine caractérisé par ultrasons, soit $L = 14$ mm. Afin d'assurer la précision et le caractère reproductif du placement des plaques, quatre appuis cylindriques en plexiglas ont été insérés. Le dispositif expérimental est représenté sur les figures (3.7) et (3.8).

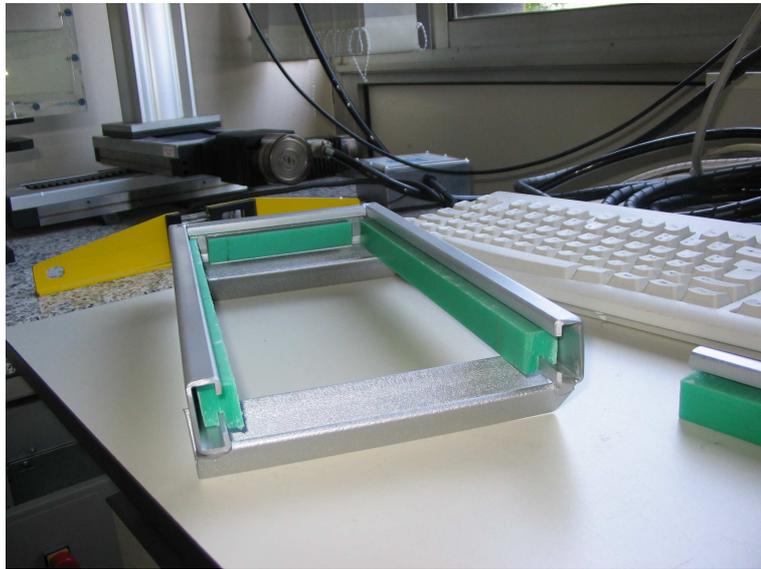


FIGURE 3.6: Photographie du cadre rigide utilisé pour le placement des plaques injectées.

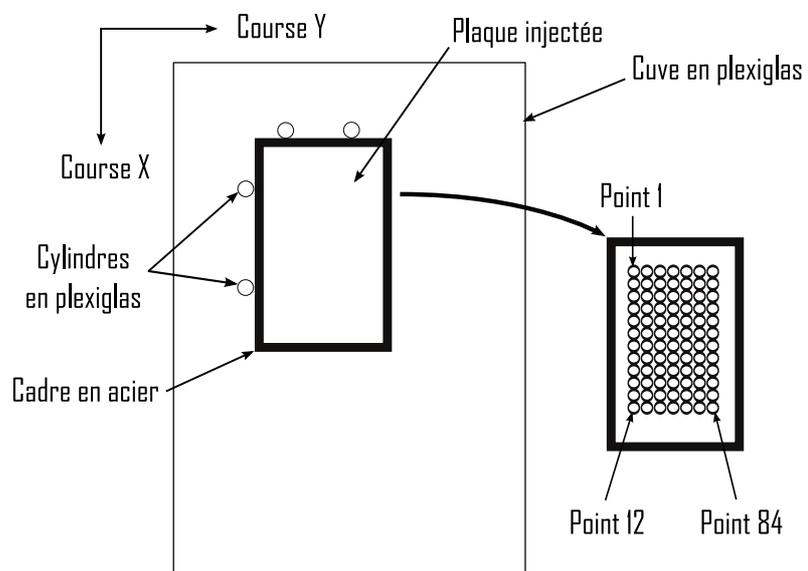


FIGURE 3.7: Schématisation du dispositif expérimental : positionnement du cadre et définition des points de mesure.

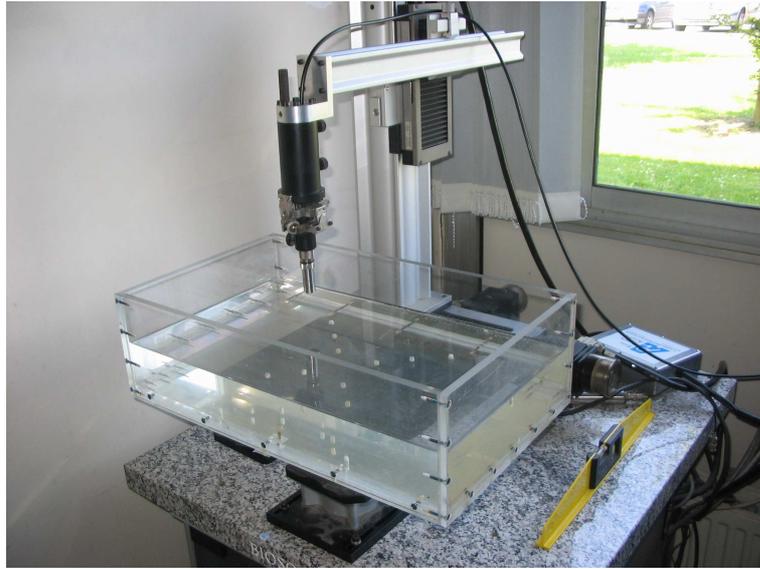


FIGURE 3.8: Photographie du dispositif expérimental : table de déplacement et palpeur ultrasonore.

Par ailleurs, on montre que la taille de la zone du champ proche t_{ZCP} peut être estimée selon la relation :

$$t_{ZCP} = \frac{D^2}{4\lambda}$$

où D et λ sont respectivement la taille de la pastille du palpeur et la longueur d'onde dans le matériau. Dans l'eau et pour le transducteur considéré, on obtient une taille de champ proche de l'ordre de 163 mm, qui dépasse la hauteur d'eau permise dans la cuve. Dans le cas présent, nous avons donc dû travailler dans la zone de champ proche, en prenant soin de déterminer la distance d (cf. figure (3.2) et Eq. (3.8)) de telle façon que (i) la forme des échos d'entrée et de fond soit suffisamment régulière pour qu'une analyse temporelle par passage à zéro puisse être conduite (ii) les amplitudes A_e et A_f (cf. figure (3.3)) soient maximisées. Soulignons que la meilleure stratégie permettant de satisfaire à cette dernière condition consiste à assigner deux gains différents, un pour chaque écho (le second écho de fond étant naturellement de plus faible amplitude) : ce choix d'adaptation a donc été retenu dans le cas de notre application. On retiendra finalement :

$$d^{\text{exp}} = 15 \text{ mm} > 2.26 \text{ mm} \quad (3.9)$$

Notons que si le fait de travailler dans le champ proche ne permet vraisemblablement pas de déterminer une vitesse *absolue*, il permet néanmoins d'obtenir des mesures *relatives*⁸ suffisantes pour raisonner sur les fluctuations de propriétés.

8. Au fur et à mesure que l'échantillon s'éloigne du champ proche, la vitesse relative tend naturellement vers la vitesse absolue.

En tenant compte des capacités de déplacement du palpeur, 84 points de mesure (sans recouvrement) ont été échantillonnés sur chaque plaque :

- 12 dans la direction x (i.e., celle de l'écoulement lors de l'injection),
- 7 dans la direction transverse.

La durée de caractérisation d'une plaque est de trois minutes environ : cette durée permet de réaliser l'ensemble des mesures sur une période relativement courte de deux jours, afin de limiter l'influence de l'environnement (et notamment de la température, qui influe sur les mesures par ultrasons). La température de l'eau dans la cuve au premier et second jour a été constante et respectivement de 19.9°C et 19.8°C : dans ces conditions, l'influence des fluctuations de température est considérée comme négligeable.

3.3.3 Qualité de l'acquisition

Nous avons vu précédemment que la qualité de l'acquisition en analyse temporelle dépend de la forme des signaux traités et en particulier, de l'amplitude de l'écho de fond. Celui-ci peut en effet subir une atténuation importante, dûe aux propriétés du matériau (hétérophasé, dispersif) ainsi qu'au fait que les plaques ne sont pas parfaitement planes (cette propriété est caractéristique des plaques injectées renforcées de fibres longues, pour lesquelles le renfort fibreux peut affleurer à la surface de la pièce).

Une méthode pour caractériser l'acquisition consiste donc en l'étude des champs d'amplitude de l'écho de fond, au travers de plusieurs grandeurs :

- le champ d'amplitude moyen : il traduit la qualité globale de la caractérisation ;
- le champ d'amplitude minimal : il met en évidence la présence éventuelle de mesures peu fiables ;
- le champ des coefficients de variation de l'amplitude : celui-ci est caractéristique de la distorsion du signal. En effet, un coefficient de variation élevé en un point traduit une variation importante de l'amplitude et vraisemblablement, de la forme de l'écho.

En pratique, la mesure d'amplitude est exprimée en fonction de l'amplitude du signal de référence avec lequel la différence des temps de vol doit être estimée, au travers de la grandeur ϵ_A définie par :

$$\epsilon_A = \frac{A_f}{A_e} \tag{3.10}$$

où A_f et A_e sont les amplitudes maximales respectivement des échos de fond et d'entrée, telles qu'introduites sur la figure (3.3). Les deux premières réalisations expérimentales du champ du ratio d'amplitude $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon_A(\mathbf{x})$ sont représentées sur les figures (3.9) et (3.10).

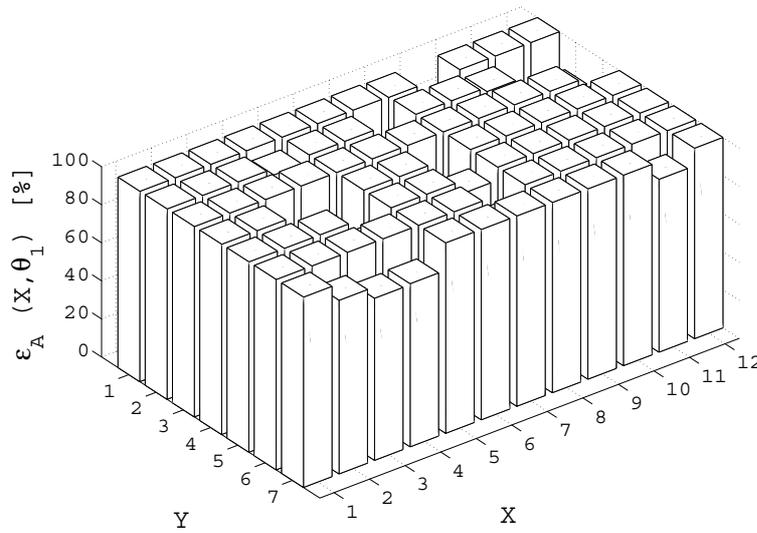


FIGURE 3.9: Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon_A(\mathbf{x}, \theta_1)$.

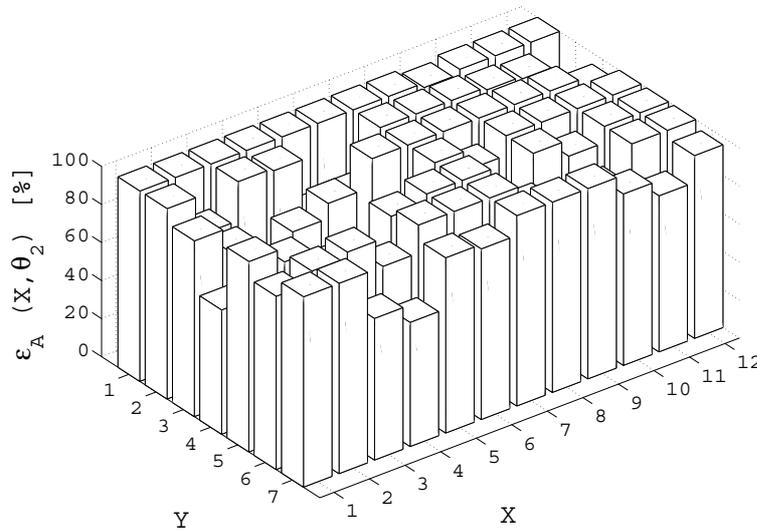


FIGURE 3.10: Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon_A(\mathbf{x}, \theta_2)$.

On constate que le ratio d'amplitude est, dans le cas de ces deux premières réalisations expérimentales, hétérogène et de valeur élevée. Les figures (3.11), (3.12) et (3.13) représentent respectivement les champs minimal, moyen et des coefficients de variation du ratio en amplitude.

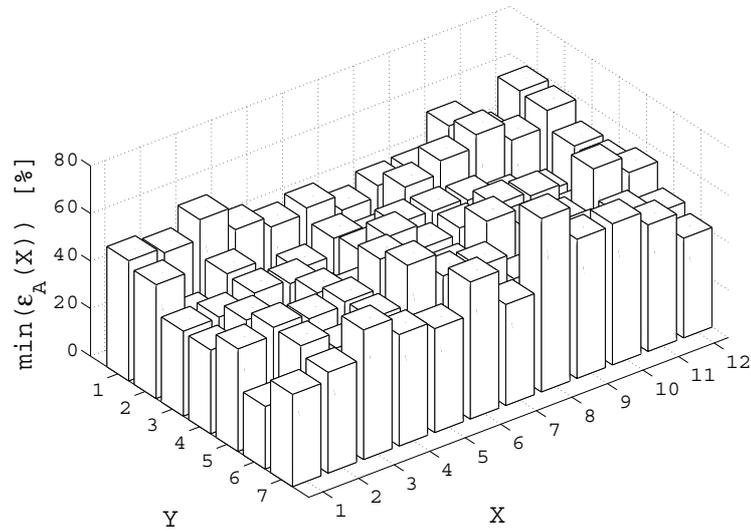


FIGURE 3.11: Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow \min \{ \epsilon_A(\mathbf{x}) \}$ du ratio d'amplitude minimal.

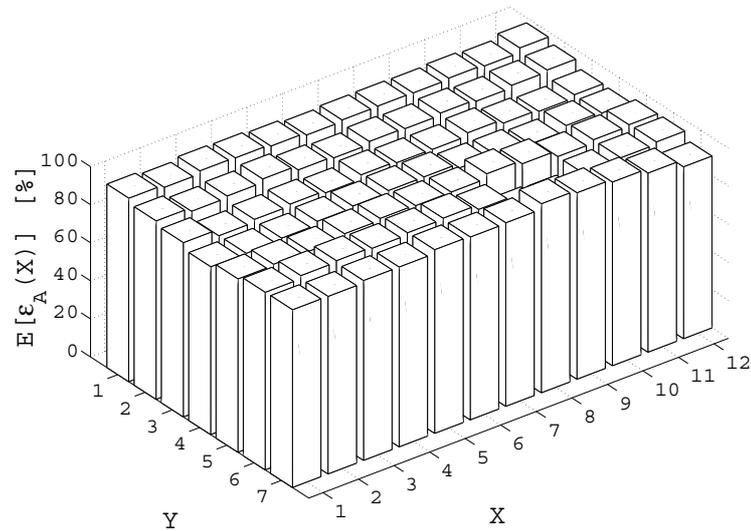


FIGURE 3.12: Représentation du champ moyen $\mathbf{x} \rightarrow E \{ \epsilon_A(\mathbf{x}) \}$ du ratio d'amplitude.

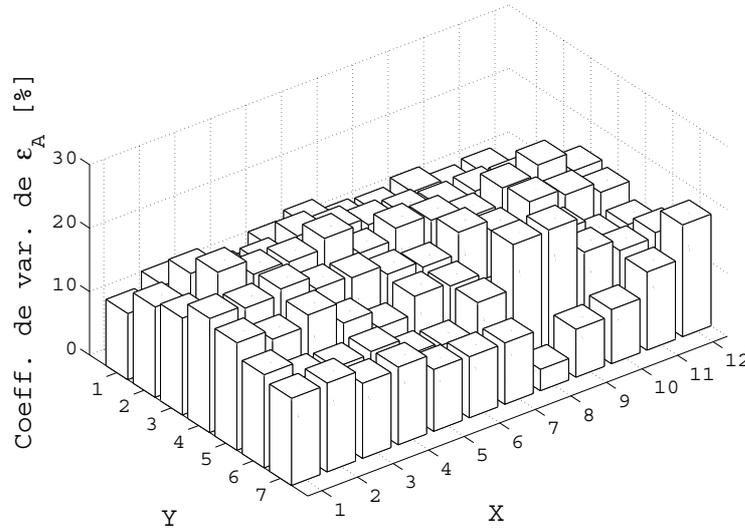


FIGURE 3.13: Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow CV \{\epsilon_A(\mathbf{x})\}$ des coefficients de variation du ratio d'amplitude (en %).

On observe tout d'abord sur la figure (3.11) que les valeurs minimales sont situées au-dessus de 25 % (avec une valeur moyenne de 45 %) : ce seuil, bien que faible, permet l'identification de l'arche principale et ainsi une mesure fiable de la différence des temps de vol. On peut donc conclure que l'ensemble des mesures peut être utilisé dans l'identification des trajectoires expérimentales du champ aléatoire.

On constate par ailleurs sur la figure (3.12) que les ratios moyens sont remarquablement élevés (avec une valeur moyenne globale supérieure à 90 %). Ce résultat valide la stratégie d'analyse du signal (choix des échos, etc.).

Enfin, on remarque sur la figure (3.13) une hétérogénéité relativement forte du champ de coefficient de variation : celle-ci traduit le caractère non plan de la surface des échantillons et souligne à nouveau la nécessité d'adopter un gain variable selon l'écho considéré.

Remarque :

La technique de mesure des vitesses de propagation nécessite la connaissance *a priori* de l'épaisseur de l'échantillon. Pour notre recherche, celle-ci est considérée comme uniforme et constante d'une plaque à l'autre. En pratique, il convient de noter que des écarts de l'ordre de 10^{-2} mm (sur une valeur moyenne de 3 mm) ont été observés.

3.3.4 Résultats : trajectoires expérimentales et propriétés statistiques

Les deux premières réalisations $\mathbf{x} \rightarrow V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_1)$ et $\mathbf{x} \rightarrow V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_2)$ du champ aléatoire de vitesse de propagation des ondes longitudinales sont représentées sur les figures (3.14) et (3.15).

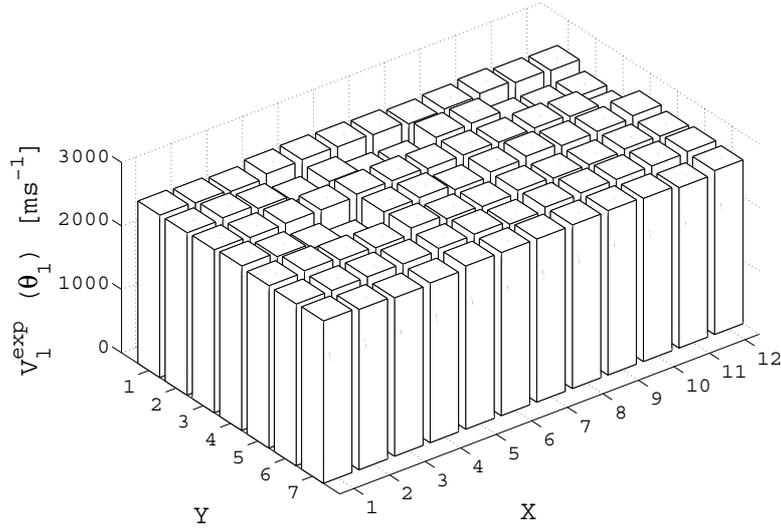


FIGURE 3.14: Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_1)$.

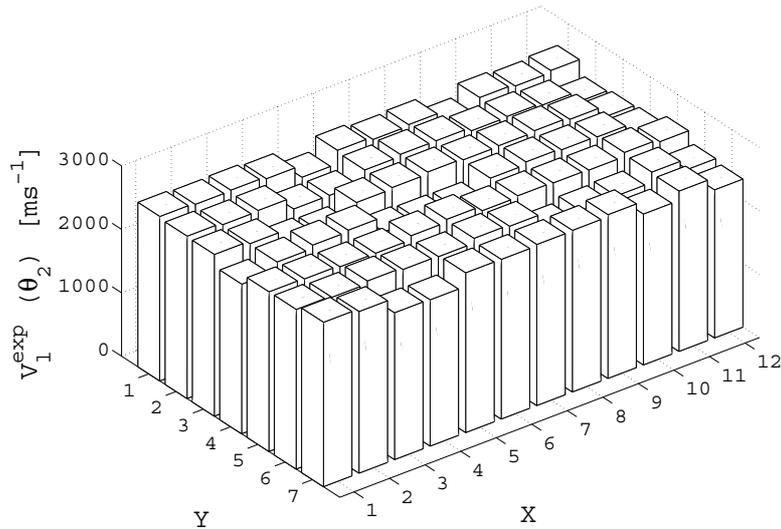


FIGURE 3.15: Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_2)$.

Les figures (3.14) et (3.15) mettent en évidence les fluctuations spatiales et statistiques du champ de la vitesse de propagation. Les champs respectivement moyen $\mathbf{x} \rightarrow E \{V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x})\}$ et des coefficients de variation $\mathbf{x} \rightarrow CV \{V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x})\}$ sont illustrés sur les figures (3.16) et (3.17).

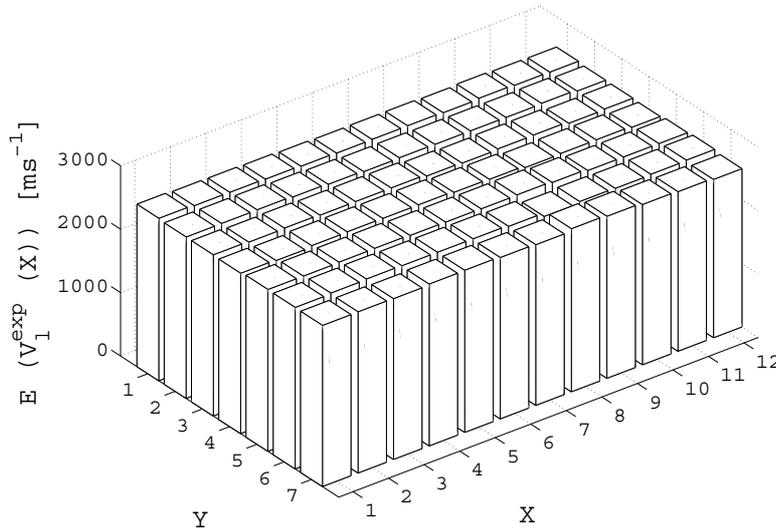


FIGURE 3.16: Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow E \{V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x})\}$.

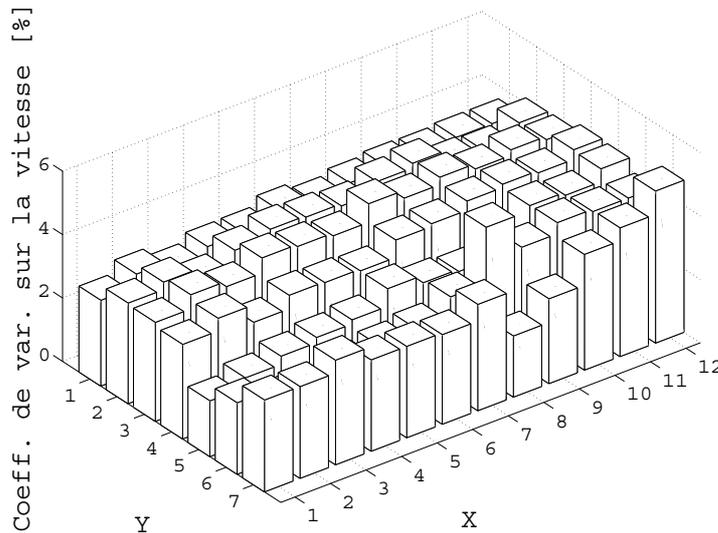


FIGURE 3.17: Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow CV \{V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x})\}$.

On constate sur la figure (3.16) l'uniformité du champ moyen, tandis que les fluctuations

statistiques semblent faibles, avec un coefficient de variation maximal de 5 % environ (voir la figure (3.17)). Il est intéressant de noter que les réalisations expérimentales ne présentent aucun effet de bord, ce qui confirme que le domaine testé expérimentalement est situé suffisamment loin des bords de la plaque (voir la figure (3.7)).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une caractérisation expérimentale du champ aléatoire de vitesse de propagation des ondes longitudinales a été menée. Comme nous l'avons vu, cette mesure de vitesse permet la détermination, de façon indirecte, des propriétés élastiques du milieu, supposé localement isotrope.

L'analyse a nécessité dans un premier temps le développement d'un dispositif expérimental, garantissant d'une part la rectification d'un éventuel gauchissement des échantillons et d'autre part, leur placement reproductif. Il est par ailleurs important de souligner que l'analyse a été conduite (i) sur un nombre suffisamment important de réalisations pour que les estimateurs statistiques que nous utiliserons par la suite soient raisonnablement supposés convergés (ii) sur un domaine étendu par rapport à la longueur moyenne des fibres. La qualité d'une mesure par ultrasons étant en général fortement dépendante des conditions dans lesquelles la caractérisation est effectuée (température, planéité de la surface des échantillons), nous avons été amenés à caractériser et démontrer la qualité de la stratégie expérimentale, au travers d'une analyse statistique du champ du ratio d'amplitude. Il est constaté que les réalisations expérimentales du champ de vitesse présentent un niveau moyen uniforme et des fluctuations statistiques relativement faibles, tandis qu'aucun effet de bord (qui aurait pu être généré par la présence trop proche des parois du moule, par exemple) n'est observé.

Sur la base de ces résultats, une identification des paramètres du modèle peut être conduite. Cette dernière, de même que la mise en oeuvre du modèle, sont exposées au chapitre 4.

Chapitre 4

Identification et mise en oeuvre du modèle probabiliste de la fraction volumique

Ce chapitre est dédié à la mise en oeuvre et à l'identification, à partir des résultats expérimentaux obtenus au chapitre 3, du modèle probabiliste de la fraction volumique à l'échelle mésoscopique, introduit au chapitre 2 (section (2.1)).

Dans un premier temps, nous exposerons le schéma d'homogénéisation permettant de construire la relation liant la vitesse de propagation d'une onde longitudinale et la fraction volumique à l'intérieur d'un échantillon : cette relation sera mise à profit afin de déterminer les trajectoires expérimentales du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique.

Nous étudierons alors les propriétés probabilistes du champ aléatoire ainsi obtenu (stationnarité, ergodicité, etc.) et procéderons à sa réduction statistique. Les résultats concernant l'identification des coefficients de la projection Chaos seront ensuite présentés : une comparaison entre les densités de probabilité marginales expérimentales et simulées sera proposée.

Forts de cette représentation, nous estimerons les longueurs de corrélation du champ aléatoire mésoscopique.

4.1 Formulation du problème inverse

Nous avons vu à la section (3.2) que lorsque la microstructure d'un milieu élastique est connue, il est possible de lier la vitesse de propagation des ondes longitudinales se propageant dans le solide aux composantes du tenseur d'élasticité du milieu (cf. Eq. (3.3)). Soit \mathcal{A} la fonction $(E, \nu, \rho) \rightarrow V_l = \mathcal{A}((E, \nu, \rho))$, de $\mathbb{R}^+ \times]-1, -\frac{1}{2}[\times \mathbb{R}^+$ sur \mathbb{R}^+ , ainsi définie dans le cas isotrope. Par ailleurs, l'information microstructurale permet d'établir, par une procédure d'homogénéisation, une relation entre la fraction volumique en renforts f à l'intérieur du domaine considéré et les propriétés élastiques du milieu. On notera \mathcal{M} la fonction $f \rightarrow (E, \nu, \rho) = \mathcal{M}(f)$ définie de $[0, 1]$ sur $\mathbb{R}^+ \times]-1, -\frac{1}{2}[\times \mathbb{R}^+$, formalisant cette transformation (toujours dans le cas isotrope). La fonction $f \rightarrow V_l = \Lambda(f)$, avec $\Lambda = \mathcal{A} \circ \mathcal{M}$, définie de $[0, 1]$ sur le sous-ensemble $S_\Lambda \subset \mathbb{R}^+$ d'intérêt, établit et constitue le problème mécanique direct, schématisé à la figure (4.1) : elle permet l'estimation, pour une microstructure donnée, d'une vitesse de propagation des ondes longitudinales à partir de l'information de fraction volumique.

La fonction $f \rightarrow V_l = \Lambda(f)$ admet une fonction réciproque $V_l \rightarrow f = \Lambda^{-1}(V_l)$, définie de S_Λ dans $[0, 1]$: le problème inverse consiste donc en la détermination de cette fonction Λ^{-1} . Celle-ci est accomplie par une résolution directe de l'équation algébrique (voir la section (4.2)). Il est important de noter que le modèle mécanique assure d'une part l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse, et d'autre part la cohérence physique de la solution.

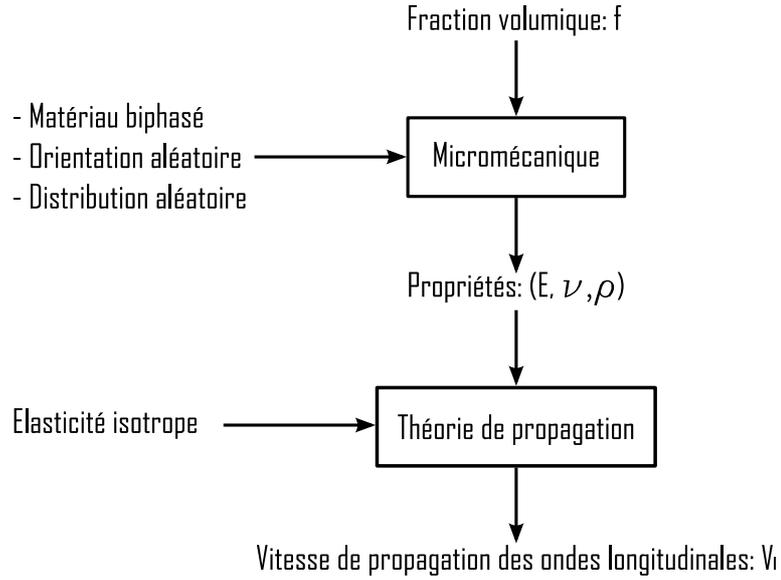


FIGURE 4.1: Formulation du problème direct : détermination de la vitesse de propagation des ondes longitudinales à partir de la fraction volumique.

La méthodologie globale est résumée ci-dessous :

- **Etape 1** : mesure des réalisations expérimentales du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x})$;
- **Etape 2** : construction du modèle probabiliste associé au champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$;
- **Etape 3** : détermination des réalisations expérimentales du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique, noté $\mathbf{x} \rightarrow f^{\text{exp}}(\mathbf{x})$ (voir section (2.1)), selon

$$f^{\text{exp}}(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}))$$

- **Etape 4** : étude du champ aléatoire du tenseur d'élasticité $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$, dont les réalisations simulées sont calculées par la relation :

$$\mathbb{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}(f(\mathbf{x}))$$

4.2 Détermination des réalisations expérimentales du champ de fraction volumique mésoscopique

L'objectif est ici de déterminer la fonction $V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}) \rightarrow f^{\text{exp}}(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}))$, définie de $S_\Lambda \subset \mathbb{R}^+$ dans $[0, 1]$ pour tout \mathbf{x} de Ω .

Le milieu auquel nous nous intéressons est constitué d'une matrice élastique dans laquelle sont plongées N_f familles de fibres, chacune d'elles étant définie par une normale \underline{n} (voir figure (4.2)).

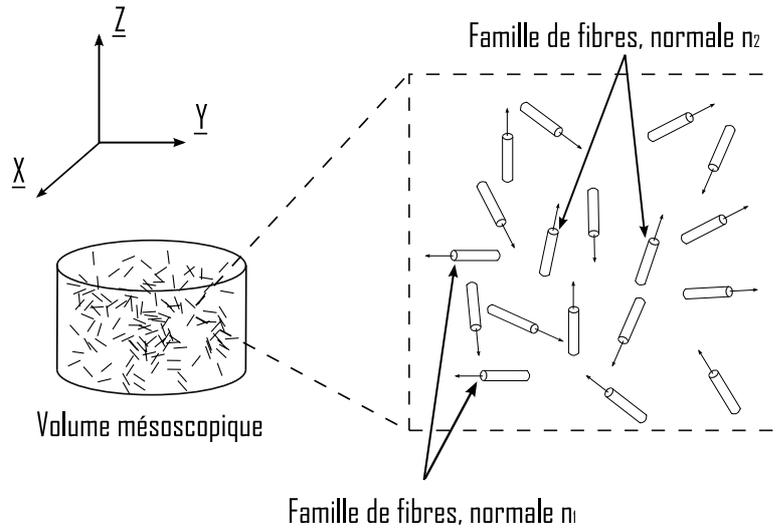


FIGURE 4.2: Schématisation de la matrice polymère renforcée par des fibres longues.

L'hypothèse retenue d'isotropie locale implique que pour un mésovolume donné, les normales $\{\underline{n}^r\}_{r=1}^{N_f}$ sont orientées aléatoirement, c'est-à-dire balayent la surface de la sphère unité.

Nous formulons 2 hypothèses :

- *Hypothèse 1* : les modules déterminés par la méthode ultrasonore, qualifiés de *modules dynamiques*, sont équivalents aux *modules statiques* classiques ;
- *Hypothèse 2* : le problème micromécanique peut être résolu par une approche en champs moyens.

La première hypothèse permet de formuler le problème mécanique direct (voir section (4.1)), tandis que la seconde implique l'unicité de la solution mésoscopique et autorise une résolution algébrique directe du problème inverse. Il est intéressant de noter que cette dernière hypothèse est licite, dans la mesure où les réalisations du tenseur d'élasticité sont calculées en utilisant la fonction inverse de la transformation mécanique retenue. En d'autres termes, l'utilisation d'un autre modèle mécanique conduirait *a priori* à d'autres réalisations expérimentales pour la fraction volumique, mais à des réalisations identiques pour le tenseur d'élasticité.

4.2.1 Schéma d'homogénéisation pour l'élasticité mésoscopique

Le choix d'un schéma micromécanique est guidé, entre autres, par la nature de la microstructure du milieu ainsi que par le taux volumique en renforts. Dans notre cas, la morphologie "matrice-inclusions" du milieu, ainsi que la valeur de la fraction volumique attendue (on rappelle

que la consigne en fraction volumique lors de l'injection a été fixée à 10 %), justifie l'emploi du schéma de Mori-Tanaka. D'un point de vue micromécanique, cela revient à considérer la matrice comme étant le milieu de référence, soumis à sa propre déformation [Mori et Tanaka, 1973] [Benveniste, 1987] [Bornert *et al.*, 2001]. Notons que :

- pour une microstructure plus particulière, le schéma de Ponte Castañeda et Willis permettrait d'améliorer la prédiction micromécanique en introduisant une distinction entre la forme géométrique des renforts et leur distribution spatiale [Ponte Castañeda et Willis, 1995] ;
- les différents schémas d'homogénéisation classiques convergent pour de faibles valeurs de fraction volumique, si bien que dans le cadre de notre application, le choix d'un schéma particulier semble moins critique.

Pour l'estimation de Mori-Tanaka, le tenseur des rigidités \mathbb{C}^{hom} s'écrit :

$$\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{(0)} + \sum_{r=1}^{N_f} f^{(r)} \left[\left(\mathbb{C}^{(r)} - \mathbb{C}^{(0)} \right)^{-1} + \mathbb{P}_i^{(r)} \right]^{-1} \left(\sum_{s=0}^{N_f} f^{(s)} \mathbb{A}_i^{(s)} \right)^{-1} \quad (4.1)$$

où pour la phase s , le tenseur $\mathbb{A}_i^{(s)}$ est défini par :

$$\mathbb{A}_i^{(s)} = \left[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{(s)} \left(\mathbb{C}^{(s)} - \mathbb{C}^{(0)} \right) \right]^{-1} \quad (4.2)$$

avec :

- $\mathbb{C}^{(0)}$ le tenseur d'élasticité du milieu de référence, en l'occurrence ici de la matrice ;
- $f^{(r)}$ et $\mathbb{C}^{(r)}$ respectivement la fraction volumique et le tenseur d'élasticité de la phase r ;
- $\mathbb{P}_i^{(r)}$ est le tenseur de Hill de l'inclusion r , lié au tenseur d'Eshelby de l'inclusion $\mathbb{S}_{\text{ESH}}^r$ par la relation $\mathbb{P}_i^{(r)} = \mathbb{S}_{\text{ESH}}^r : (\mathbb{C}^{(0)})^{-1}$ [Mura, 1987] ;
- \mathbb{I} est le tenseur identité symétrique d'ordre quatre, tel que $I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Une phase r correspondant à la famille de fibres définie par la normale \underline{n}^r , on a donc :

$$\forall k \in [1, N_f], \mathbb{C}^{(k)} = \mathbb{C}^{(f)} \quad (4.3)$$

où $\mathbb{C}^{(f)}$ est le tenseur d'élasticité de la fibre.

En raison de la distribution continue en orientation supposée pour les fibres, l'évaluation de l'Eq. (4.1) requiert une intégration sur toutes les orientations de l'espace. Ceci est facilité par la considération de la base de Walpole [Walpole, 1981] (voir également [Kunin, 1981]), spécifiquement dédiée aux milieux isotropes transverses et présentée en annexe D.

Ce procédé fournit l'estimation de Mori-Tanaka du tenseur d'élasticité effectif $\mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{hom}}$ et donc, des propriétés effectives $E_{\text{MT}}^{\text{hom}}$ et $\nu_{\text{MT}}^{\text{hom}}$ (dont les expressions ne seront pas reportées ici, étant donné leur complexité). Enfin, la densité du composite est obtenue par l'estimation suivante :

$$\rho^{\text{hom}} = f\rho^f + (1 - f)\rho^0 \quad (4.4)$$

où ρ^0 et ρ^f sont les densités de la matrice et des fibres, respectivement.

4.2.2 Détermination des réalisations expérimentales du champ de fraction volumique mésoscopique

En substituant les prédictions micromécaniques dans l'Eq. (3.3), on obtient finalement la fonction $\Lambda : f \rightarrow V_l = \Lambda(f)$, de $[0, 1]$ dans $S_\Lambda = [V_{PP}, V_{Verre}]$. L'inversion numérique de cette fonction est aisément conduite à l'aide d'outils de calcul formel, en l'occurrence ici du logiciel commercial Maple. Le graphique de la fonction $V_l \rightarrow f = \Lambda^{-1}(V_l)$ est représenté sur la figure (4.3), où l'on a également reporté l'estimation diluée d'Eshelby (dont on rappelle qu'elle néglige les interactions entre les phases).

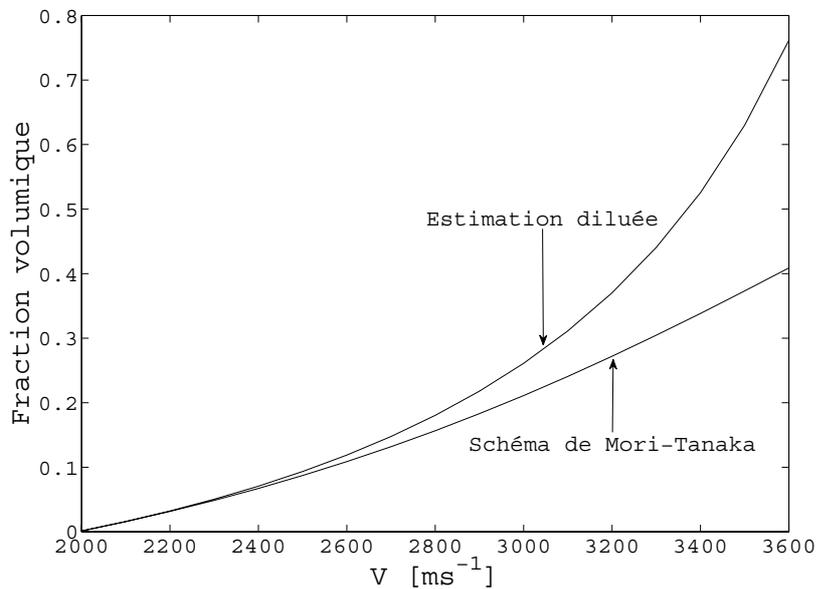


FIGURE 4.3: Représentation de la fonction $V_l \rightarrow f = \Lambda^{-1}(V_l)$ pour les schémas dilué et Mori-Tanaka.

On constate que l'estimation diluée diverge nettement de la solution Mori-Tanaka lorsque la vitesse est supérieure à $2500 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ (ou de façon équivalente, lorsque la fraction volumique est supérieure à environ 10 %) et semble surestimer la fraction volumique. Il s'agit d'un résultat micromécanique tout à fait attendu qui traduit la plage d'application réduite du schéma d'Eshelby (valable uniquement pour un faible taux de renforcement).

C'est en pratique le schéma de Mori-Tanaka qui a donc été mis en oeuvre pour le reste de notre étude, afin d'estimer les trajectoires expérimentales du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$.

4.2.3 Trajectoires et densités marginales expérimentales

La première trajectoire expérimentale est représentée sur la figure (4.4), sur laquelle on visualise clairement les fluctuations de la fraction volumique mésoscopique. L'étude de la fonction moyenne ainsi que d'autres propriétés sera abordée dans les sections suivantes.

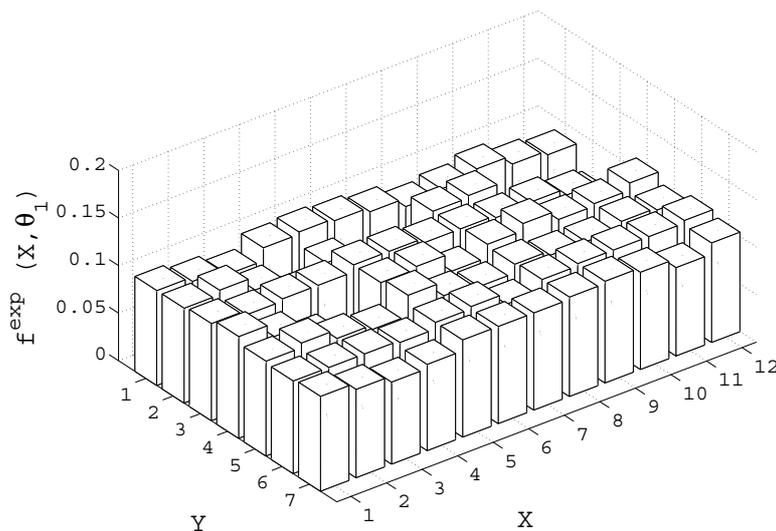


FIGURE 4.4: Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow f^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_1)$ du champ aléatoire de fraction volumique.

La représentation graphique des densités de probabilité expérimentales des variables aléatoires $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_1)$, $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_2)$, $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_3)$ et $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_4)$ est reportée sur les figures (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8).

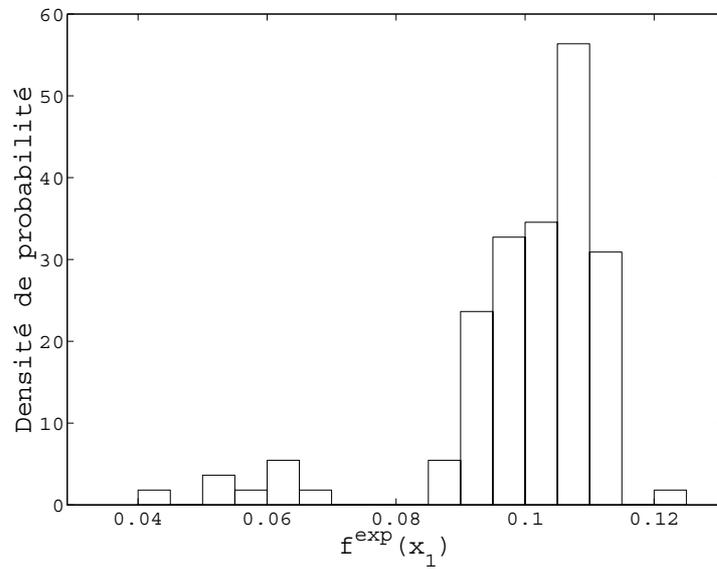


FIGURE 4.5: Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_1)$.

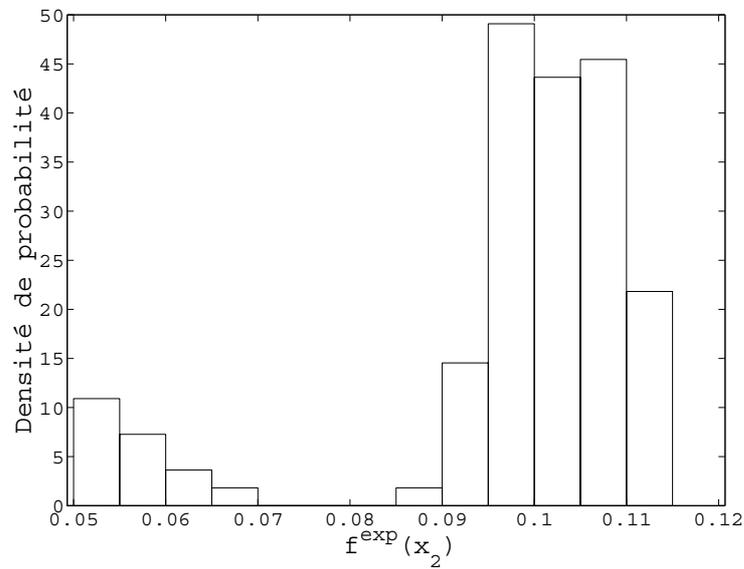


FIGURE 4.6: Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_2)$.

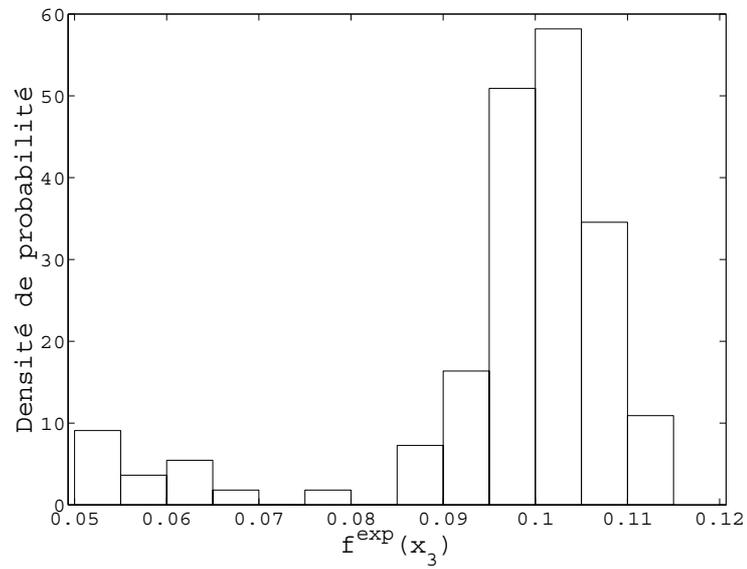


FIGURE 4.7: Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_3)$.

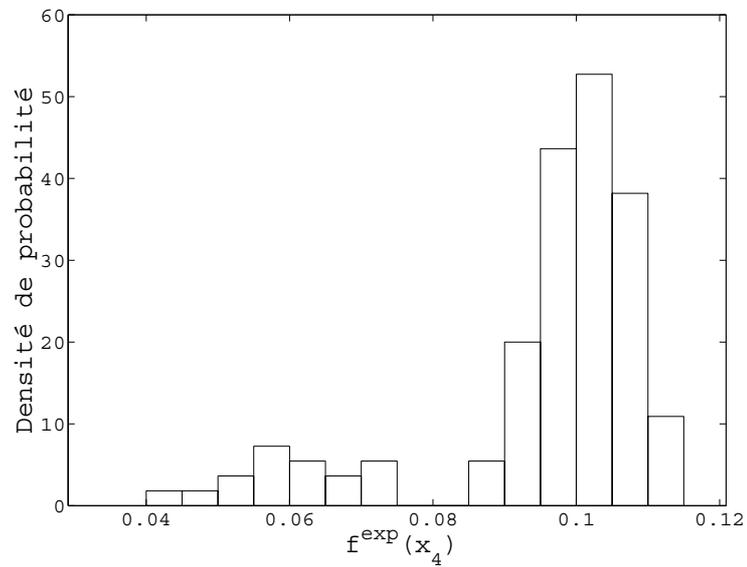


FIGURE 4.8: Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_4)$.

Il est intéressant de remarquer que pour une très grande majorité de points de mesure, les densités marginales expérimentales présentent une légère bimodalité. Un premier pic de distribution est en effet observé pour des valeurs de fraction volumique très faibles et ne concerne qu'un faible pourcentage de la population (en général moins de 5 %). Cette caractéristique peut être expliquée par la sensibilité de la mesure expérimentale par ultrasons au caractère légèrement non-plan de la surface des échantillons. Lorsque la direction de l'onde réfléchi n'est pas collinéaire à la direction de l'onde émise initialement, la différence des temps de vol augmente significativement. En raison de l'hypothèse d'épaisseur uniforme et constante, ce phénomène conduit à une diminution de la vitesse calculée, et donc à une diminution de la fraction volumique.

Le champ $\mathbf{x} \rightarrow \text{CV} \{f^{\text{exp}}(\mathbf{x})\} / \text{CV} \{V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x})\}$ du ratio des coefficients de variation de la fraction volumique et de la vitesse est représenté sur la figure (4.9).

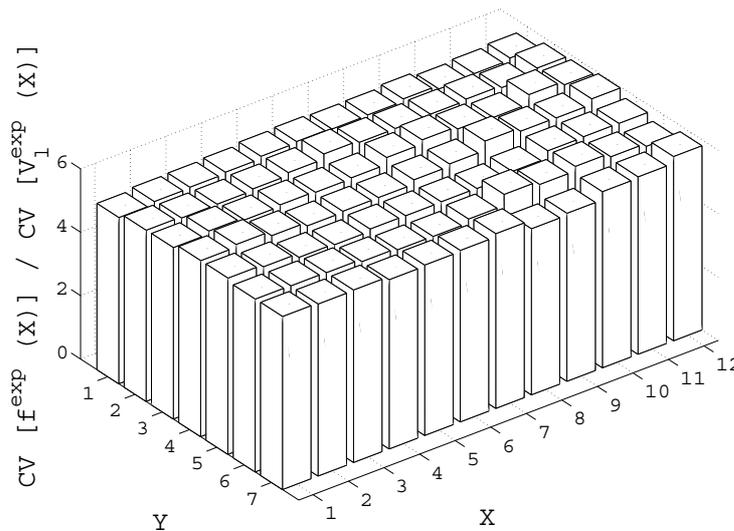


FIGURE 4.9: Représentation du champ du ratio entre les coefficients de variation de la fraction volumique et de la vitesse de propagation.

L'analyse de la figure (4.9) montre que la transformation induite par la résolution du problème inverse amplifie le niveau de fluctuation statistique (l'amplification étant pratiquement constante, de moyenne 5.3 et de coefficient de variation 0.8 %). Il est difficile de déterminer avec certitude la cause de cette amplification. Clairement, l'hypothèse d'isotropie locale pourrait induire une erreur de modèle : toutefois, on notera qu'un modèle plus complet (en introduisant par exemple des vitesses de propagation d'ondes transverses) introduirait également des sources

de fluctuations.

4.3 Etude du champ aléatoire de fraction volumique

4.3.1 Stationnarité

La considération d'un champ aléatoire stationnaire en moyenne d'ordre deux (m.o.d.) est en général postulée sur la base de justifications physiques (absence d'effets de bord, etc.). En pratique, il s'avère en effet délicat de tester une telle propriété. Nous supposons dans ce qui suit que le champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$ peut être considéré comme la restriction d'un champ aléatoire stationnaire en m.o.d., indexé sur \mathbb{R}^2 , au domaine Ω . On rappelle que cette propriété implique (i) que la fonction moyenne est indépendante de \mathbf{x} , $\underline{f}(\mathbf{x}) = \underline{f}$; (ii) que la corrélation entre deux points de l'espace ne dépend que de la distance entre ces deux points. La valeur moyenne expérimentale $\underline{\hat{f}}^{\text{exp}}$ est obtenue par l'estimateur usuel :

$$\underline{\hat{f}}^{\text{exp}} = \langle \underline{f}^{\text{exp}}(\mathbf{x}) \rangle \approx \frac{1}{N^{\text{colloc}} \nu^{\text{exp}}} \sum_{i=1}^{N^{\text{colloc}}} \sum_{j=1}^{\nu^{\text{exp}}} f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, \theta_j) \quad (4.5)$$

où $N^{\text{colloc}} = 84$ et $\nu^{\text{exp}} = 110$ sont respectivement le nombre de points d'échantillonnage et le nombre de réalisations expérimentales. La convergence de l'estimateur $\underline{\hat{f}}^{\text{exp}}$ est représentée graphiquement sur la figure (4.10), en fonction du nombre de réalisations (compris entre 1 et $N^{\text{colloc}} \times \nu^{\text{exp}} = 9240$).

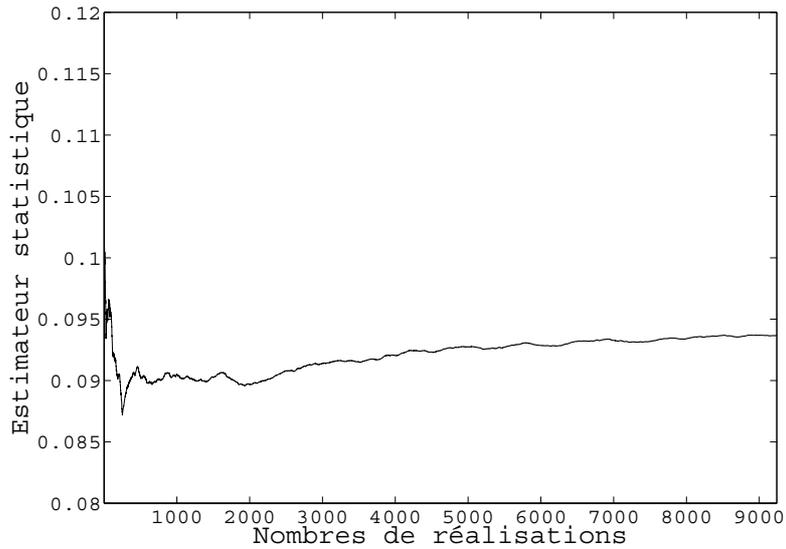


FIGURE 4.10: Convergence de l'estimateur $\underline{\hat{f}}^{\text{exp}}$ en fonction du nombre de réalisations.

On obtient :

$$\underline{\hat{f}}^{\text{exp}} = 0.0936 \quad (4.6)$$

En introduisant l'erreur relative

$$\left| \left(f^{\text{consigne}} - \underline{\hat{f}}^{\text{exp}} \right) / f^{\text{consigne}} \right| = 0.064$$

(où f^{consigne} est la fraction volumique consigne lors de l'élaboration), on constate donc que la fraction volumique moyenne identifiée expérimentalement est proche de la consigne d'injection. L'impact de l'hypothèse d'homogénéité peut être illustrée dans le cas de la fonction moyenne, en considérant la fonction $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon^{\text{Smod}}(\mathbf{x})$, définie de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R} par :

$$\epsilon^{\text{Smod}}(\mathbf{x}) = 1 - \frac{f^{\text{exp}}(\mathbf{x})}{\underline{f}} \quad (4.7)$$

et dont le graphique est représenté sur la figure (4.11).

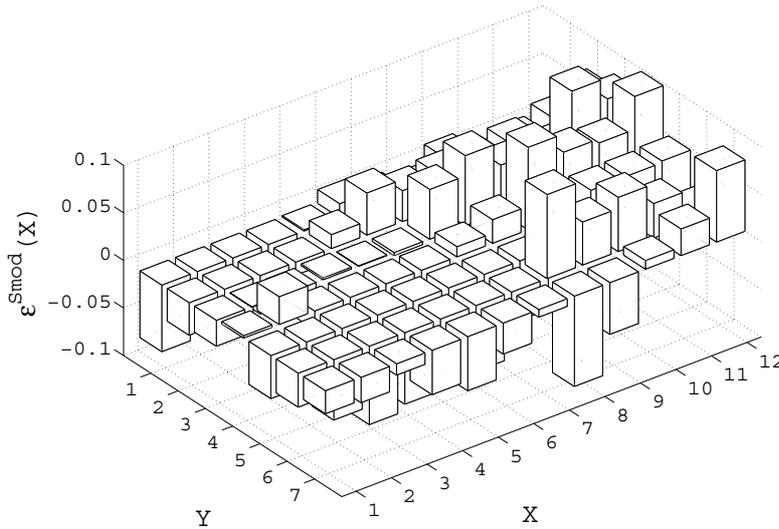


FIGURE 4.11: Représentation de la fonction $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon^{\text{Smod}}(\mathbf{x})$.

On constate que les valeurs prises par la fonction $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon^{\text{Smod}}(\mathbf{x})$ restent de faible amplitude (valeur absolue maximale : $\approx 10\%$). Du point de vue de l'estimation de la fonction moyenne, l'erreur résultant de l'approximation reste donc faible.

4.3.2 Ergodicité en moyenne

Ayant considéré le champ aléatoire comme la restriction d'un champ aléatoire stationnaire en m.o.d., il est possible d'introduire et de tester une hypothèse d'ergodicité en moyenne. En

pratique, cette hypothèse peut être testée en comparant la valeur de la moyenne statistique, fournie par l'estimateur (4.5), avec l'estimateur de moyenne spatiale calculé pour une réalisation θ_k :

$$\widehat{f_{<>k}^{\text{exp}}} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_k) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{N^{\text{colloc}}} \sum_{i=1}^{N^{\text{colloc}}} f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, \theta_k) \quad (4.8)$$

Théoriquement, la propriété d'ergodicité en moyenne ne peut être testée que si, pour $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $|\Omega_x| \rightarrow +\infty$ et $|\Omega_y| \rightarrow +\infty$. En pratique, le domaine Ω est borné et la convergence de l'estimateur (4.8) doit être étudiée. Le graphique de convergence de la fonction

$$N_{MS} \rightarrow \frac{1}{N_{MS}} \sum_{i=1}^{N_{MS}} f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, \theta)$$

définie pour $N_{MS} \in \{1, \dots, 84\}$ dans \mathbb{R} est représenté sur la figure (4.12), pour les réalisations expérimentales θ_1, θ_2 et θ_3 .

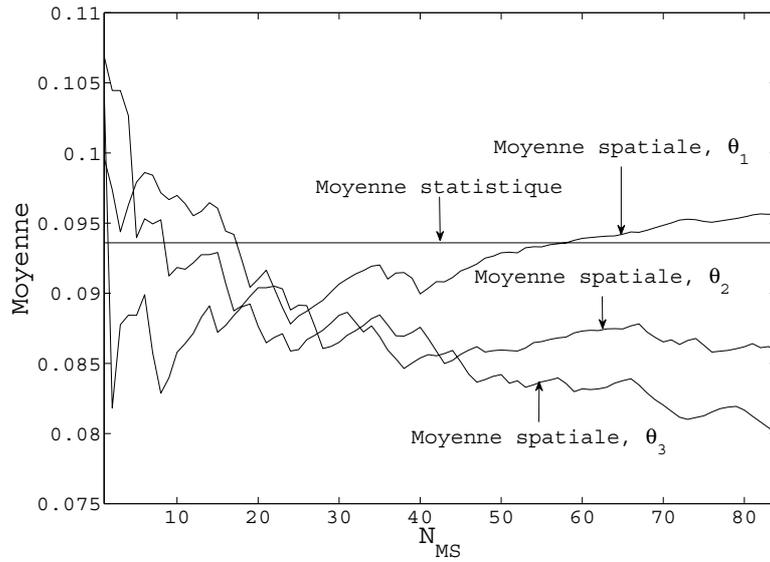


FIGURE 4.12: Convergence des estimations de la moyenne spatiale en fonction du nombre de points expérimentaux N_{MS} et pour les 3 premières réalisations expérimentales.

On constate que la taille du domaine Ω caractérisé expérimentalement est trop petite pour que l'estimateur (4.8) soit convergé. La valeur de celui-ci pour l'ensemble des réalisations expérimentales $\theta_1, \dots, \theta_{110}$ est reportée sur la figure (4.13), sur laquelle nous avons également représenté la moyenne statistique. On conclut donc au fait que l'hypothèse d'ergodicité en moyenne n'est pas vérifiée dans le cas présent.

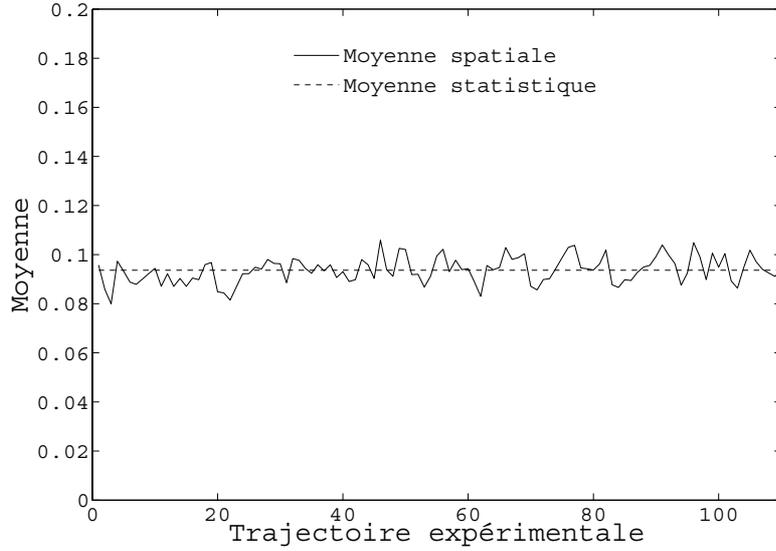


FIGURE 4.13: Comparaison de la moyenne statistique et de la moyenne spatiale estimée pour chaque réalisation expérimentale.

4.4 Réduction statistique

On se propose à présent de procéder à la réduction statistique du champ aléatoire par l'intermédiaire d'un développement de Karhunen-Loève, tel que décrit à la section (2.2).

Pour ce faire, on rappelle qu'il est nécessaire d'étudier la convergence de la fonction $p \mapsto \epsilon^{\text{Conv-KL}}(p)$, définie par l'Eq. (2.9). Cette étude nécessite dans un premier temps la détermination des valeurs propres de la matrice de covariance, de dimensions 84×84 . Celle-ci calculée par l'estimateur usuel non biaisé :

$$[\widehat{C}_f]_{ij} = \frac{1}{1 - \nu^{\text{exp}}} \sum_{k=1}^{\nu^{\text{exp}}} \left(f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_i, \theta_k) - \underline{f}^{\text{exp}} \right) \left(f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_j, \theta_k) - \underline{f}^{\text{exp}} \right) \quad (4.9)$$

pour tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, 84\}^2$.

La représentation graphique de l'estimation de la matrice des coefficients de corrélation est fournie sur la figure (4.14), mettant en évidence une décorrélation rapide du champ.

Le graphique de la première fonction propre $\mathbf{x} \rightarrow \psi_1(\mathbf{x})$ est reporté sur la figure (4.15).

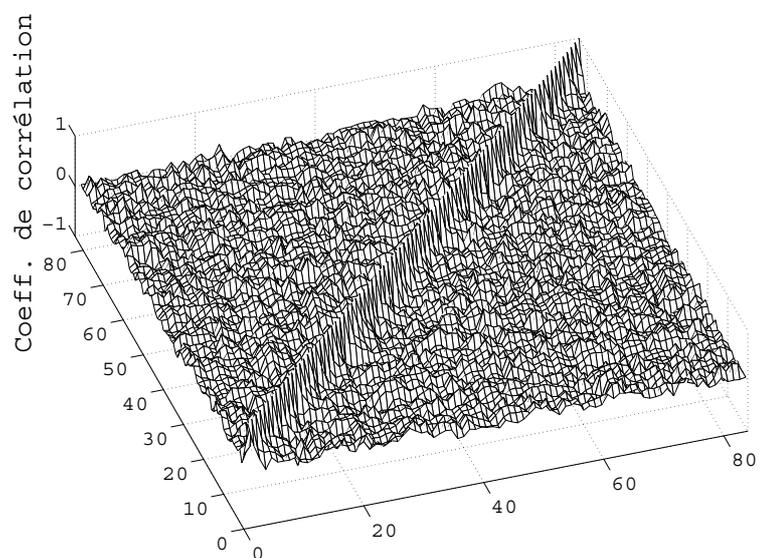


FIGURE 4.14: Représentation graphique de l'estimation de la matrice des coefficients de corrélation.

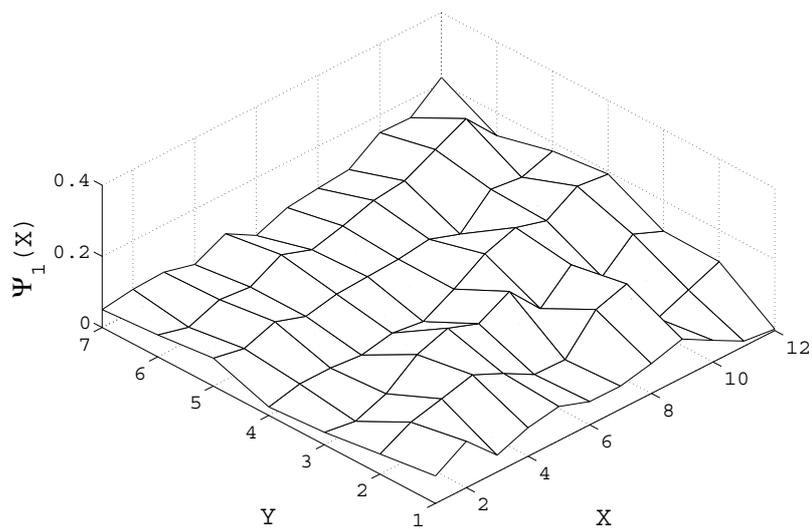


FIGURE 4.15: Représentation graphique de la première fonction propre $\mathbf{x} \rightarrow \psi_1(\mathbf{x})$.

Dans notre application, l'ordre optimal de développement $M^{\text{réduction}}$ est choisi tel que (ce seuil étant fixé en fonction de la finalité de l'analyse) :

$$\epsilon^{\text{Conv-KL}}(M^{\text{réduction}}) \leq 0.1 \quad (4.10)$$

Le graphique de la fonction $p \rightarrow \epsilon^{\text{Conv-KL}}(p)$ est reporté sur la figure (4.16).

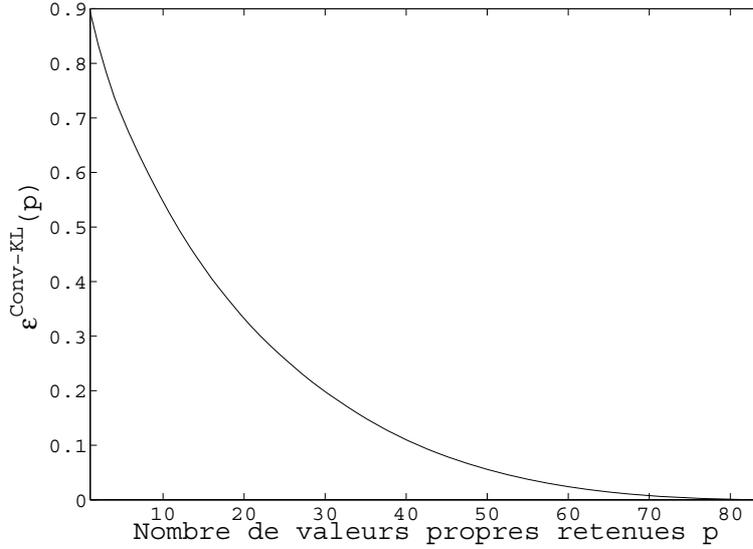


FIGURE 4.16: Analyse de convergence pour la détermination de l'ordre de la représentation de Karhunen-Loève : graphique de la fonction $p \rightarrow \epsilon^{\text{Conv-KL}}(p)$.

D'après la figure (4.16), nous pouvons retenir :

$$M^{\text{réduction}} = 41$$

En notant $\underline{f} = \underline{\hat{f}}^{\text{exp}}$, il vient finalement :

$$f_{41}(\mathbf{x}) \approx \underline{f} + \sum_{\alpha=1}^{41} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \eta_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (4.11)$$

Sur la base de cette représentation, on peut à présent projeter le vecteur aléatoire η sur les Chaos Polynômiaux, comme détaillé à la section (2.3.2).

4.5 Identification des coefficients Chaos

Suite à la réduction statistique qui précède, le vecteur aléatoire η est donc à valeurs dans \mathbb{R}^{41} . On rappelle que la condition sur l'ordre de la représentation q et sur la longueur m du germe,

introduite à la section (2.3.2), s'écrit : $(m+q)!/m!q! - 1 \geq 41$. Le couple d'entiers les plus petits et satisfaisant à cette condition est $(3, 5)$, sans assignation particulière à l'ordre ou à la longueur du germe étant donné la symétrie de la condition. Le nombre de termes dans le développement Chaos vaut alors $Q = 56$. Dans notre application, on retiendra les valeurs : $q = 3$, $m = 5$. Le développement sur les Chaos Polynômiaux Gaussiens s'écrit donc :

$$\eta = \sum_{\gamma, |\gamma|=1}^3 \mathbf{z}_\gamma \frac{H_\gamma(\xi)}{\sqrt{\gamma!}}, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5) \quad (4.12)$$

L'évaluation des coefficients de la représentation $\{\mathbf{z}_\gamma\}_{|\gamma|=1}^q$ est effectuée suivant la méthodologie détaillée à la section (2.3.3), c'est-à-dire par le Principe du Maximum de Vraisemblance couplé à une stratégie de recherche aléatoire. L'estimation des valeurs des densités de probabilité simulées aux points expérimentaux a été conduite en considérant 1000 tirages indépendants du germe Gaussien. Pour un tel nombre, une procédure de tri (i.e. en considérant un noyau à support compact) s'avère trop coûteuse : un noyau Gaussien a donc été utilisé pour l'estimateur. La recherche aléatoire a été réalisée sur un cluster comprenant 8 noeuds de calculs et sous environnement spécifique Matlab : un ensemble d'environ 10^8 matrices a été testé. L'illustration des résultats est représentée sur les figures (4.17) et (4.18), où les densités de probabilité des variables aléatoires η_1 et η_6 sont reportées en fonction de l'ordre du développement Chaos.

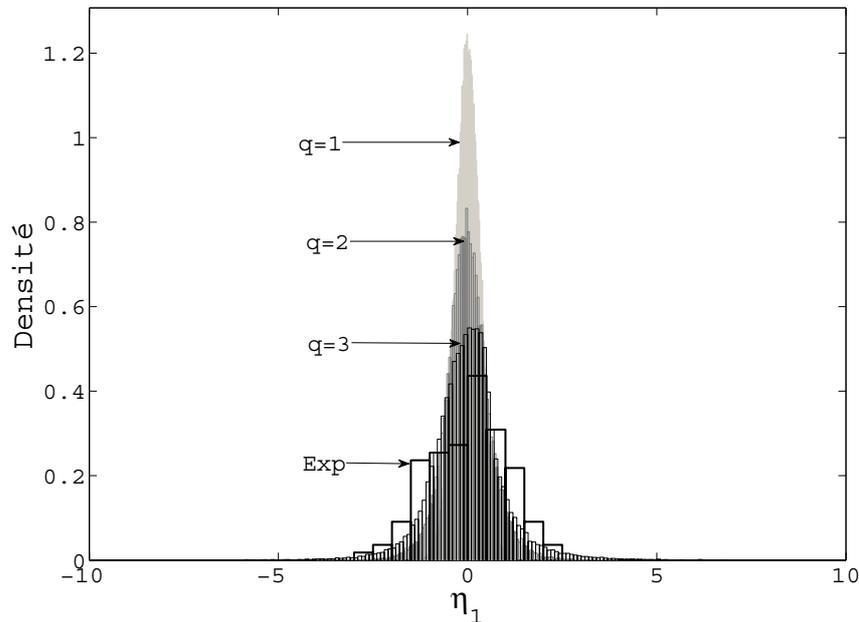


FIGURE 4.17: Convergence de la densité de probabilité de la variable aléatoire η_1 en fonction de l'ordre q de la représentation Chaos.

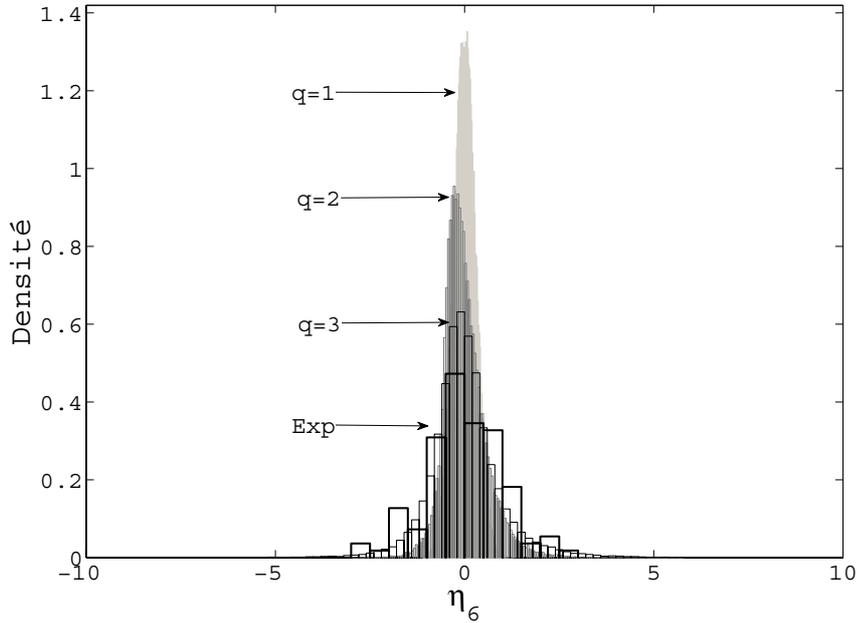


FIGURE 4.18: Convergence de la densité de probabilité de la variable aléatoire η_6 en fonction de l'ordre q de la représentation Chaos.

On constate que :

- les densités de probabilité marginales simulées tendent effectivement vers les densités marginales expérimentales lorsque l'ordre q augmente ;
- la différence entre les densités marginales expérimentales et simulées est faible pour $q = 3$.

Le développement à l'ordre 3 constitue donc une approximation satisfaisante.

On soulignera qu'en toute rigueur, l'ordre du développement doit être déterminé par une analyse de convergence de la densité de probabilité en fonction de cet ordre. Dans le cadre d'une stratégie de résolution purement aléatoire, la vectorialisation du code implique que l'augmentation de l'ordre n'influe pas significativement sur le temps de calcul de la fonction $\tilde{\mathcal{L}}_{\log}(\Xi^1, \dots, \Xi^{p^{\text{exp}}}; \mathbf{Z})$, pour $\mathbf{Z} \in \mathcal{C}$ donné (voir la section (2.3.3)). Cependant, on notera que le nombre d'inconnues à identifier pour les ordres de développements 3, 4, 5 et 6 sont respectivement de 2255, 5125, 10291 et 18901 (pour une longueur de germe fixée : $m = 5$) : la taille de l'espace de recherche à échantillonner, et donc le nombre de calculs nécessaires pour l'identification *a priori*, augmentent très significativement. Pour cette raison, et pour des contraintes de temps, l'étude au-delà de l'ordre 3 n'a pas été réalisée. Enfin, on soulignera que l'ordre 3 est l'ordre de développement le plus utilisé dans la littérature, y compris lorsqu'il est identifié à partir d'une analyse de convergence⁹.

9. Il convient de souligner à nouveau qu'il s'agit là d'une constatation pratique et que seule une analyse de

4.6 Synthèse sur la représentation du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique

En combinant les Eqs. (4.11) et (4.12), on obtient la représentation Chaos :

$$f_{41}(\mathbf{x}) \approx \underline{f} + \sum_{\alpha=1}^{41} \sqrt{\lambda_{\alpha}} \left(\sum_{\gamma, |\gamma|=1}^3 \mathbf{z}_{\gamma}^{\alpha} \frac{H_{\gamma}(\xi)}{\sqrt{\gamma!}} \right) \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) \quad (4.13)$$

pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$, avec $\mathbf{z}_{\gamma}^{\alpha}$ composante α du vecteur \mathbf{z}_{γ} . Afin de simplifier la notation, la dépendance de la représentation vis-à-vis de l'ordre du développement Chaos et de la longueur du germe n'est pas reportée. L'Eq. (4.13) permet, à partir de tirages aléatoires du germe Gaussien ξ , d'obtenir des réalisations indépendantes du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow f_{41}(\mathbf{x})$.

A titre d'illustration, la comparaison entre la densité marginale expérimentale et la densité marginale obtenue pour 50000 tirages du germe est fournie par les figures (4.19), (4.20), (4.21) et (4.22), respectivement pour les points expérimentaux \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 , \mathbf{x}_3 et \mathbf{x}_4 (d'autres exemples sont fournis dans l'annexe C). L'approximation du champ aléatoire par la restriction d'un champ aléatoire homogène introduisant un décalage plus ou moins fort des densités de probabilité (voir la figure (4.11)), la comparaison est également fournie pour la variable aléatoire centrée, afin de visualiser plus facilement le niveau de fluctuations.

On constate en général la bonne adéquation entre les densités marginales simulées par la projection Chaos et les densités marginales expérimentales. On note que les projections Chaos ne captent pas le premier pic, de faible amplitude, des distributions expérimentales (dont on rappelle néanmoins qu'il est vraisemblablement imputable à la technique de mesure expérimentale, et non aux fluctuations statistiques du champ). Il convient de rappeler ici que la projection sur les Chaos Gaussiens est effectuée sur le vecteur aléatoire η (et non directement sur le champ aléatoire de fraction volumique) dont les densités marginales ne présentent pas de caractère bimodal (voir par exemple les figures (4.17) et (4.18)).

convergence permettrait d'identifier rigoureusement l'ordre optimal du développement.

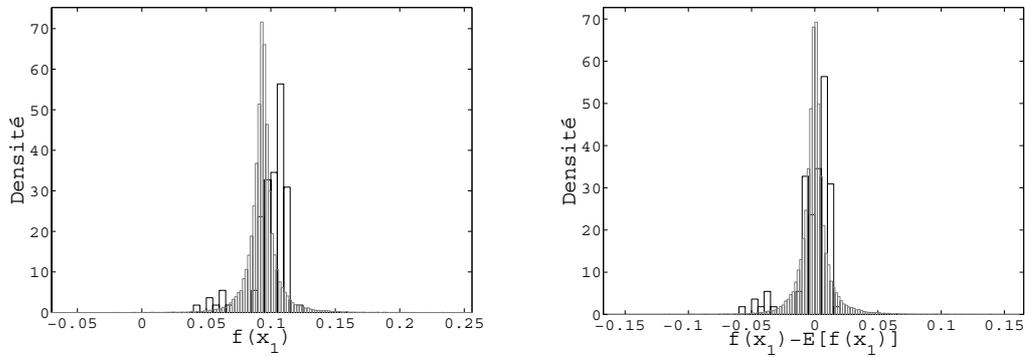


FIGURE 4.19: Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_1)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_1) - E\{f(\mathbf{x}_1)\}$ (droite).

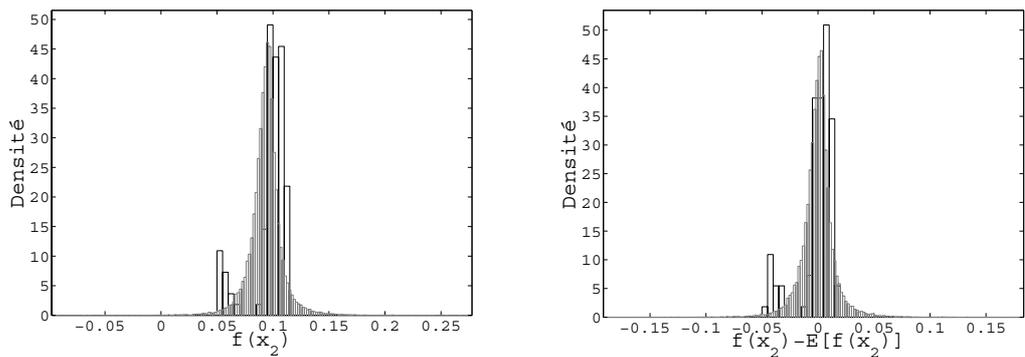


FIGURE 4.20: Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_2)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_2) - E\{f(\mathbf{x}_2)\}$ (droite).

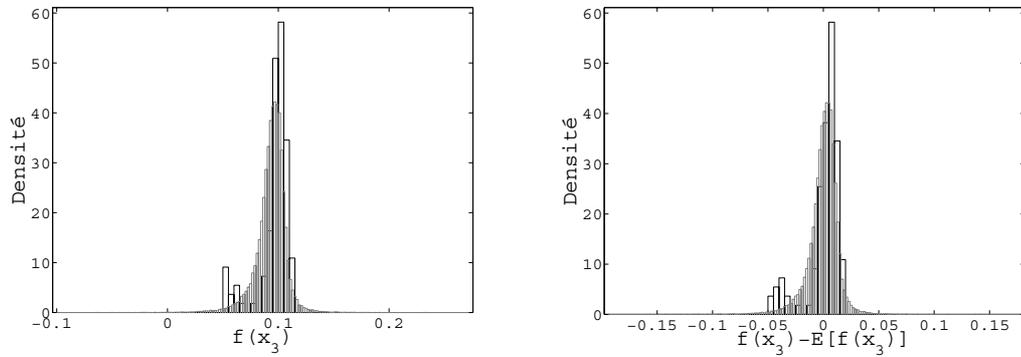


FIGURE 4.21: Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_3)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_3) - E\{f(\mathbf{x}_3)\}$ (droite).

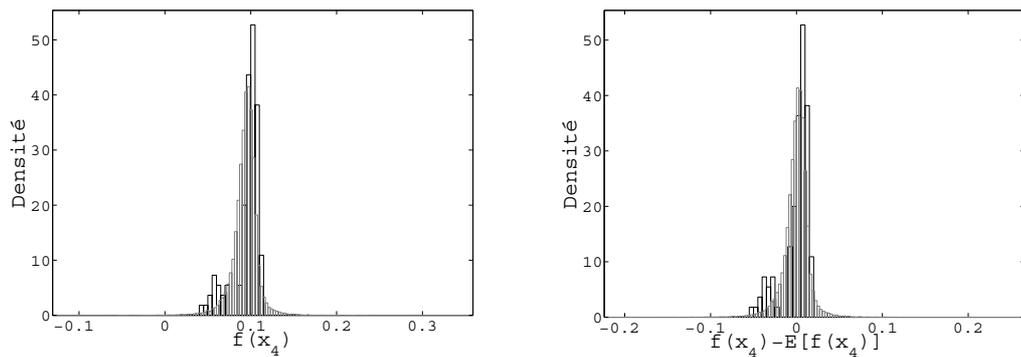


FIGURE 4.22: Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_4)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_4) - E\{f(\mathbf{x}_4)\}$ (droite).

4.7 Simulations du champ aléatoire tenseur d'élasticité

On considère le champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$ comme la restriction d'un champ aléatoire homogène, indexé sur \mathbb{R}^2 , au domaine Ω .

Afin de distinguer les prédictions issues de la modélisation du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$ de celles estimées par le modèle probabiliste introduit à la section (1.3), la notation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{para}}(\mathbf{x})$ est adoptée par la suite.

Suivant les notations introduites au chapitre 2, les trajectoires du champ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{para}}(\mathbf{x})$ sont calculées pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ par la relation :

$$\mathbb{C}^{\text{para}}(\mathbf{x}) = \mathcal{M}(f(\mathbf{x})) \quad (4.14)$$

où la fonction $f \rightarrow \mathcal{M}(f)$ est la fonction définie par le schéma d'homogénéisation retenu à la section (4.2.1).

La matrice moyenne du tenseur d'élasticité est calculée par l'estimateur usuel :

$$\hat{\underline{\mathbb{C}}}^{\text{para}} \approx \frac{1}{N^{\text{colloc}} \nu^{\text{sim}}} \sum_{i=1}^{N^{\text{colloc}}} \sum_{j=1}^{\nu^{\text{sim}}} \mathbb{C}^{\text{para}}(\mathbf{x}_i, \theta_j) = \frac{1}{N^{\text{colloc}} \nu^{\text{sim}}} \sum_{i=1}^{N^{\text{colloc}}} \sum_{j=1}^{\nu^{\text{sim}}} \mathcal{M}(f(\mathbf{x}_i, \theta_j)) \quad (4.15)$$

où ν^{sim} est le nombre de réalisations. Pour $\nu^{\text{sim}} = 50000$, on obtient (en GPa) :

$$\hat{\underline{\mathbb{C}}}^{\text{para}} = \begin{bmatrix} 6.79 & 2.39 & 2.39 & 0 & 0 & 0 \\ 2.39 & 6.79 & 2.39 & 0 & 0 & 0 \\ 2.39 & 2.39 & 6.79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.20 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Les longueurs de corrélation $l_{\mathbb{C}}^{\text{para } x}$ et $l_{\mathbb{C}}^{\text{para } y}$ du champ aléatoire peuvent être estimées en approximant la fonction corrélation du champ aléatoire mésoscopique par la fonction de corrélation exponentielle. Le problème d'optimisation s'écrit alors [Soize, 2006] :

$$\text{Arg min}_{l_k \in \mathbb{R}^+} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left| r_{\mathbb{C}}^{\text{sim}}(0, \dots, x_k^i - x_k^j, \dots, 0) - \exp\left(-\left(x_k^i - x_k^j\right)/l^k\right) \right| \quad (4.17)$$

où la sommation est effectuée pour $x_k^i - x_k^j \geq 0$ (x_k^i désignant la k -ième coordonnée du point x^i , $1 \leq k \leq 3$), $\tau \rightarrow r_{\mathbb{C}}^{\text{sim}}(\tau)$ étant la fonction de corrélation introduite à la section (1.3.3) (voir Eq. (1.21)) simulée (pour 20000 tirages).

Le problème (4.17) est résolu par une méthode de recherche stochastique de type “chemin” [Lewis et Torczon, 1999] [Lewis et Torczon, 2002], sous la contrainte $l^k \in \mathbb{R}^+$. A chaque itération, l'algorithme évalue la fonction coût en un certain nombre de points situés autour d'un point initial. L'ensemble de ces points constitue un maillage : à chaque nouvelle itération, le point qui améliore la solution est choisi comme point initial et un nouveau maillage est déterminé. La taille de celui-ci est adaptée (augmentation ou contraction) en fonction du succès de l'itération précédente. La détermination des points constituant le maillage peut être effectuée soit de façon déterministe, soit de façon aléatoire.

Pour chaque longueur de corrélation, trois points initiaux sont utilisés afin de tester la robustesse de la solution :

- pour $l_{\mathbf{C}}^{\text{para } x}$: $l_0^x = 10$, $l_0^x = 20$ et $l_0^x = 30$ (mm) ;
- pour $l_{\mathbf{C}}^{\text{para } y}$: $l_0^y = 8$, $l_0^y = 16$ et $l_0^y = 24$ (mm).

La solution est jugée satisfaisante si la prédiction converge quel que soit le point initial et pour les deux méthodes de détermination du maillage.

La convergence de l'algorithme (en terme de résidu et de taille du maillage) pour les deux longueurs de corrélation $l_{\mathbf{C}}^{\text{para } x}$ et $l_{\mathbf{C}}^{\text{para } y}$ et pour les points initiaux respectifs $l_0^x = 10$ (mm) et $l_0^y = 8$ (mm) est illustrée sur les figures (4.23) et (4.24)¹⁰.

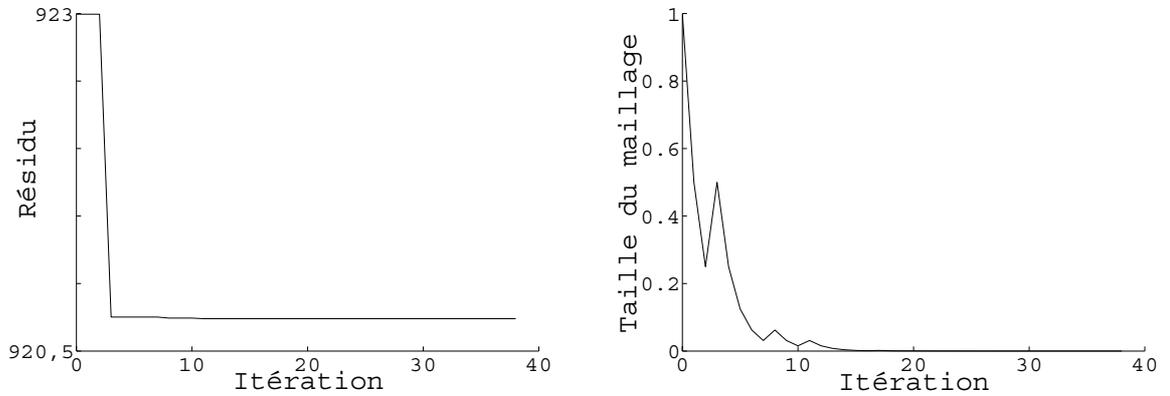


FIGURE 4.23: Convergence de l'algorithme de recherche stochastique pour la détermination de $l_{\mathbf{C}}^{\text{para } x}$: résidu (gauche) et taille du maillage (droite) pour $l_0^x = 10$ (mm).

10. Le résidu représenté à la figure (4.24) est décalé d'une valeur de 1028, afin de faciliter la lecture.

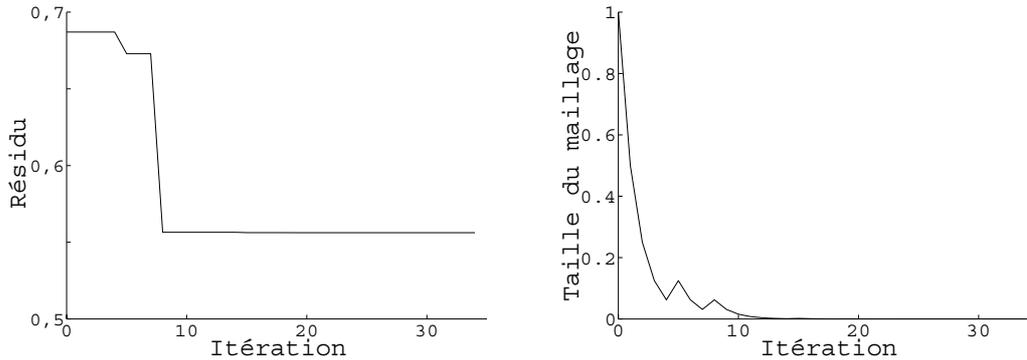


FIGURE 4.24: Convergence de l’algorithme de recherche stochastique pour la détermination de $l_C^{\text{para } y}$: résidu (gauche) et taille du maillage (droite) pour $l_0^y = 8$ (mm).

On observe sur les figures (4.23) et (4.24) une convergence rapide de l’algorithme, une approximation satisfaisante étant obtenue dans les deux cas pour 15 itérations. On obtient finalement les estimations suivantes :

$$l_C^{\text{para } x} = 11.88 \text{ mm}$$

et

$$l_C^{\text{para } y} = 8.26 \text{ mm}$$

Il est important de noter que ces valeurs valident le choix de l’échelle mésoscopique, puisque la longueur caractéristique de celle-ci est de l’ordre de grandeur d’une longueur de corrélation. D’autre part, il a été mis en évidence que la taille du VER peut être définie à partir des longueurs de corrélation du champ aléatoire mésoscopique (avec un ratio qui pourrait être de l’ordre de 5 entre les deux longueurs) [Soize, 2008] : dans notre cas, cette première estimation des longueurs de corrélation suggère donc une taille caractéristique du VER d’environ 60 mm. Ce point sera abordé au chapitre 5.

Il est intéressant de souligner que lorsque le champ peut être considéré comme la restriction d’un champ aléatoire homogène, le modèle probabiliste peut être identifié sur une surface relativement réduite (il est néanmoins nécessaire que celle-ci soit suffisamment étendue pour permettre une estimation des longueurs de corrélation). On pourra alors procéder à la détermination de la taille du VER en ayant recours à des simulations numériques de Monte-Carlo.

4.8 Conclusion

L’objectif visé dans ce chapitre est l’identification des paramètres et la mise en oeuvre du modèle probabiliste du champ aléatoire de fraction volumique, proposé au chapitre 2.

Dans un premier temps, la combinaison des résultats expérimentaux (cf. chapitre 3) avec un

schéma d'homogénéisation classique (en l'occurrence, le schéma Mori-Tanaka) a permis l'identification des trajectoires expérimentales du champ de fraction volumique. Notons qu'il serait intéressant d'investiguer le rôle du schéma d'homogénéisation dans le calcul des réalisations expérimentales du champ de fraction volumique, en utilisant notamment des schémas plus complets comme celui proposé par Ponte Castañeda et Willis [Ponte Castañeda et Willis, 1995]. Les résultats mettent en évidence (i) l'amplification du niveau des fluctuations statistiques (ii) une légère bimodalité des densités marginales expérimentales du champ, dont l'origine réside dans la non-planéité de la surface des échantillons en certains points de mesure. Après avoir considéré le champ de fraction volumique comme la restriction d'un champ homogène, l'hypothèse d'ergodicité en moyenne est testée et ne semble pas vérifiée.

Sur la base des résultats expérimentaux, la réduction statistique du champ est ensuite conduite et permet de réduire significativement l'ordre du développement. Forts de cette représentation, la projection du vecteur aléatoire η sur les Chaos Polynômiaux Gaussiens est effectuée. L'identification des coefficients est accomplie par une recherche aléatoire effectuée à l'aide de calculs parallèles. Une comparaison entre les densités marginales et expérimentales du vecteur aléatoire η montrent que la projection à l'ordre 3 constitue une approximation satisfaisante. Il convient de souligner que, faute de temps, une étude de convergence de la projection Chaos en fonction de l'ordre n'a pas été réalisée et devrait faire l'objet de développements à venir.

L'ensemble des paramètres du modèle ayant été ainsi identifié, nous avons procédé à des simulations numériques de Monte-Carlo du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique, en combinant la représentation de la fraction volumique avec la même technique d'homogénéisation que celle utilisée dans le calcul des réalisations expérimentales. Une analyse de ces simulations a notamment permis :

- de déterminer le tenseur d'élasticité moyen prédit par le modèle,
- d'estimer, par la résolution d'un problème d'optimisation, les longueurs de corrélation du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique.

En particulier, les valeurs des longueurs de corrélation spatiale sont proches de la taille des volumes caractérisant l'échelle mésoscopique, ce qui conforte la définition de cette échelle d'analyse.

Chapitre 5

Modélisation probabiliste directe et identification du champ aléatoire du tenseur d'élasticité

L'objectif de ce dernier chapitre est la mise en oeuvre et l'identification du modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique, proposé dans [Soize, 2008] et brièvement décrit au chapitre 1.

La mise en oeuvre de ce modèle nécessite tout d'abord l'identification des trajectoires expérimentales : nous débuterons donc l'exposé en formulant un problème classique d'optimisation permettant cette identification. La résolution de ce problème sera effectuée à l'aide d'une méthode de recherche stochastique.

A partir des résultats obtenus grâce à l'identification expérimentale, nous identifierons par suite les différents paramètres du modèle, c'est-à-dire :

- la matrice moyenne,
- le paramètre de fluctuation,
- les longueurs de corrélation des germes stochastiques.

Des éléments pratiques concernant la mise en oeuvre du modèle seront proposés. Des pistes de comparaison avec l'approche proposée aux chapitres 2 et 4 seront fournies. Enfin, quelques éléments concernant la détermination de la taille du VER associé à la microstructure considérée seront introduits.

5.1 Identification des réalisations expérimentales

L'objectif de cette section est d'obtenir les réalisations expérimentales du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})$, afin de procéder à l'identification des paramètres du modèle probabiliste du champ aléatoire du tenseur d'élasticité décrit à la section (1.3) et implémenté dans l'environnement Matlab.

Pour ce faire, nous supposons que les fluctuations statistiques anisotropes sont suffisamment faibles pour que l'identification puisse être accomplie en considérant un modèle isotrope. Soit $\mathbf{x} \rightarrow U(\mathbf{x}) = (E(\mathbf{x}), \nu(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}))^T$ un champ aléatoire défini sur un espace de probabilité (Θ, \mathcal{F}, P) , indexé par un borné Ω dans \mathbb{R}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}^3 . Les champs aléatoires $\mathbf{x} \rightarrow E(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \rightarrow \nu(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x} \rightarrow \rho(\mathbf{x})$, indexés par Ω et à valeurs dans \mathbb{R}^+ , $] - 1, \frac{1}{2}[$ et \mathbb{R}^+ respectivement, représentent les champs aléatoires du module d'Young, du coefficient de Poisson et de la masse volumique. Les trajectoires expérimentales $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{exp}}(\mathbf{x})$ sont déterminées à partir des réalisations $\mathbf{x} \rightarrow U^{\text{exp}}(\mathbf{x})$, à partir des relations suivantes (pour une réalisation et \mathbf{x} fixés) :

$$C^{\text{exp}} = \begin{bmatrix} C_{11}^{\text{exp}} & C_{12}^{\text{exp}} & C_{12}^{\text{exp}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{\text{exp}} & C_{11}^{\text{exp}} & C_{12}^{\text{exp}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{\text{exp}} & C_{12}^{\text{exp}} & C_{11}^{\text{exp}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}^{\text{exp}} - C_{12}^{\text{exp}}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}^{\text{exp}} - C_{12}^{\text{exp}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}^{\text{exp}} - C_{12}^{\text{exp}}) \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

avec

$$C_{11}^{\text{exp}} = \frac{E^{\text{exp}}(1 - \nu^{\text{exp}})}{(1 + \nu^{\text{exp}})(1 - 2\nu^{\text{exp}})}, \quad C_{12}^{\text{exp}} = \frac{E^{\text{exp}}\nu^{\text{exp}}}{(1 + \nu^{\text{exp}})(1 - 2\nu^{\text{exp}})}$$

L'identification inverse est réalisée à partir du problème d'optimisation suivant, résolu $\forall \theta_j$, $j \in \{1, \dots, p^{\text{exp}}\}$:

$$\text{Arg min}_{E, \nu, \rho} \left\| V_j^{\text{exp}} - V_j^{\text{sim}} \right\|^2 \quad (5.2)$$

avec $V_j = [V_l(\mathbf{x}_1, \theta_j), \dots, V_l(\mathbf{x}_N, \theta_j)]$ et $(E, \nu, \rho) \in \mathbb{R}^+ \times]-1, \frac{1}{2}[\times \mathbb{R}^+$ (on rappelle que N est le nombre de points expérimentaux échantillonnés : $N = 84$). Il est important de souligner que bien que l'ensemble des données expérimentales ne permette pas une identification objective des trajectoires expérimentales du tenseur d'élasticité (qui nécessiterait la caractérisation des vitesses de propagation transverses), la formulation adoptée ici permet toutefois d'illustrer une stratégie pertinente d'identification des paramètres du modèle probabiliste.

L'Eq. (5.2) est résolue pour chaque réalisation expérimentale par l'algorithme de chemin évoqué à la section (4.7). Afin d'accélérer la convergence du calcul, puisque les propriétés du composite sont nécessairement comprises entre les propriétés de chaque constituant, on impose la contrainte : $(E, \nu, \rho) \in \text{Int}(E) \times \text{Int}(\nu) \times \text{Int}(\rho)$, où $\text{Int}(T) = [\min(T^m, T^f), \max(T^m, T^f)]$ pour toute propriété physique E , ν ou ρ (les indices m et f renvoyant à la propriété de la matrice ou de la fibre, respectivement).

A titre d'exemple, la convergence du résidu $\left\| V_j^{\text{exp}} - V_j^{\text{sim}} \right\|^2$ en fonction du nombre d'itérations de l'algorithme pour les réalisations expérimentales θ_1^{exp} et θ_2^{exp} est reportée sur la figure (5.1). On constate à nouveau une convergence rapide de l'algorithme. L'ensemble des 110 résidus obtenus est illustré sur la figure (5.2).

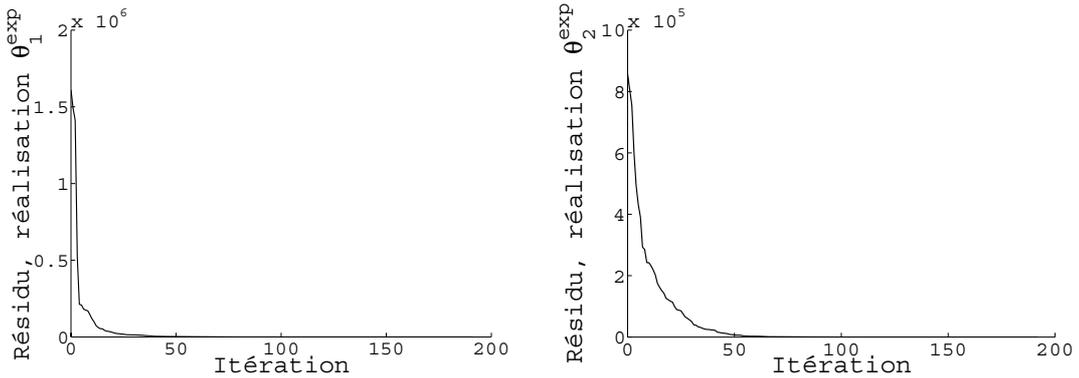


FIGURE 5.1: Convergence du résidu du calcul d'optimisation pour la détermination des réalisations expérimentales θ_1 (gauche) et θ_2 (droite).

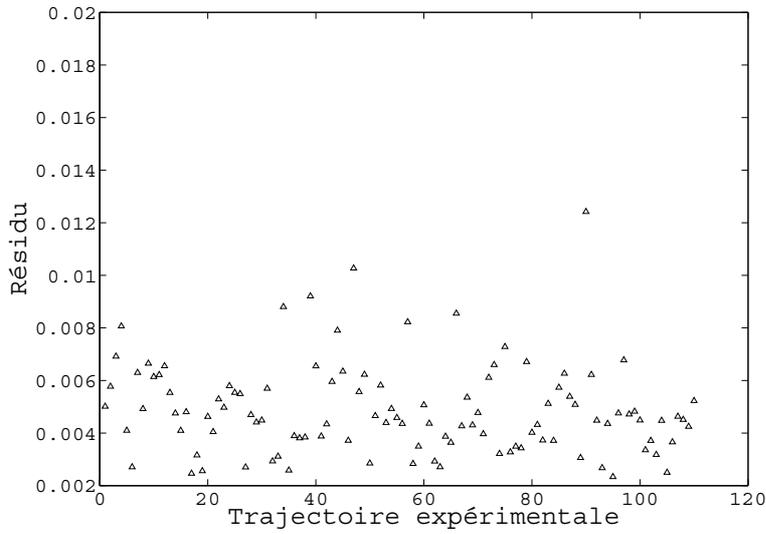


FIGURE 5.2: Résidus du calcul d'optimisation pour l'ensemble des 110 réalisations expérimentales.

La seconde réalisation expérimentale des champs aléatoires $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}_{11}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}_{12}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x} \rightarrow \rho^{\text{exp PS}}(\mathbf{x})$ est reportée sur les figures (5.3), (5.4) et (5.5), respectivement.

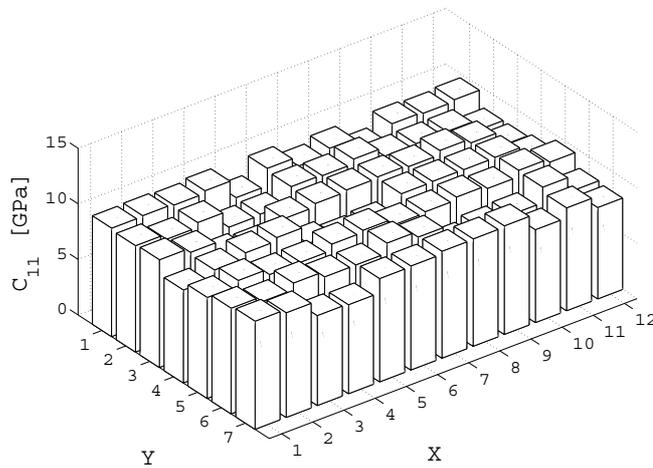


FIGURE 5.3: Représentation de la trajectoire expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}_{11}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x}, \theta_2)$.

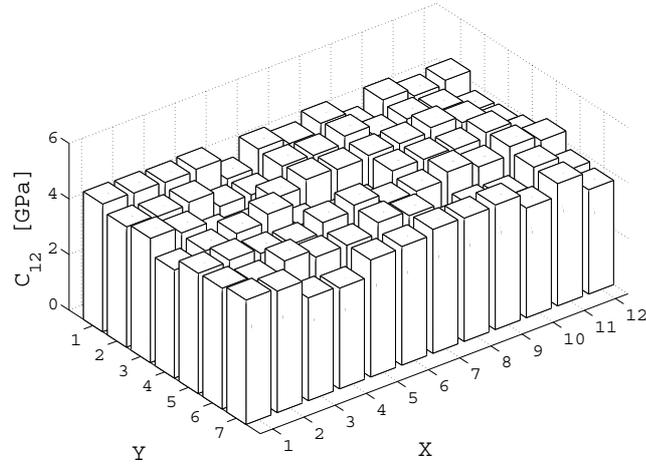


FIGURE 5.4: Représentation de la trajectoire expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}_{12}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x}, \theta_2)$.

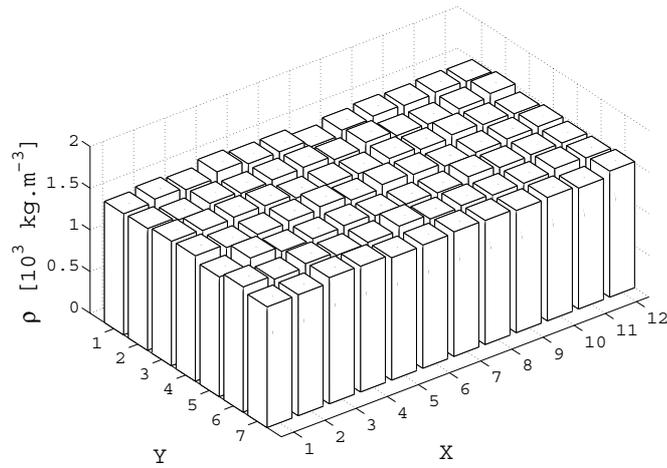


FIGURE 5.5: Représentation de la trajectoire expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \rho^{\text{exp PS}}(\mathbf{x}, \theta_2)$.

Les figures (5.3), (5.4) et (5.5) mettent en évidence les fluctuations des composantes du tenseur d'élasticité, ainsi que de la masse volumique.

La représentation des champs moyens pour les composantes (1, 1) et (1, 2) du tenseur d'élasticité, ainsi que pour le champ de masse volumique, est reportée sur les figures (5.6), (5.7) et (5.8) respectivement.

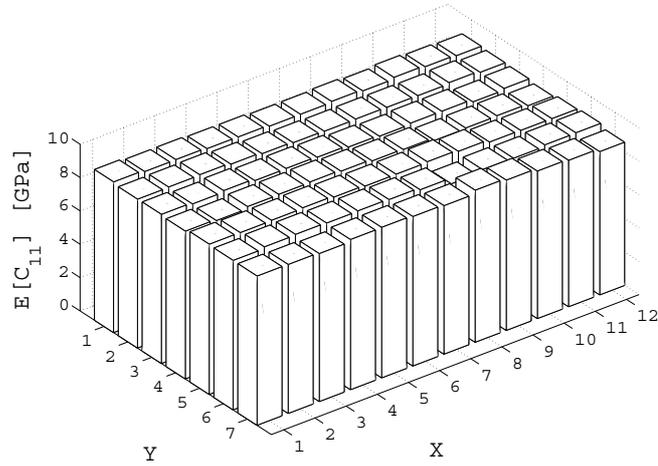


FIGURE 5.6: Représentation du champ moyen $\mathbf{x} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}_{11}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x})$.

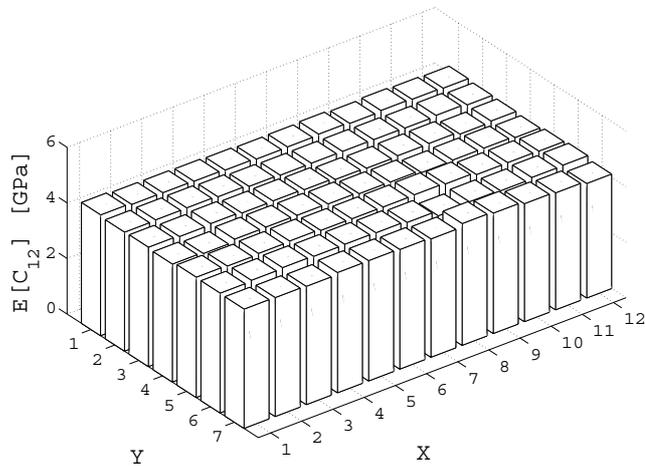


FIGURE 5.7: Représentation du champ moyen $\mathbf{x} \rightarrow \underline{\mathbf{C}}_{12}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x})$.

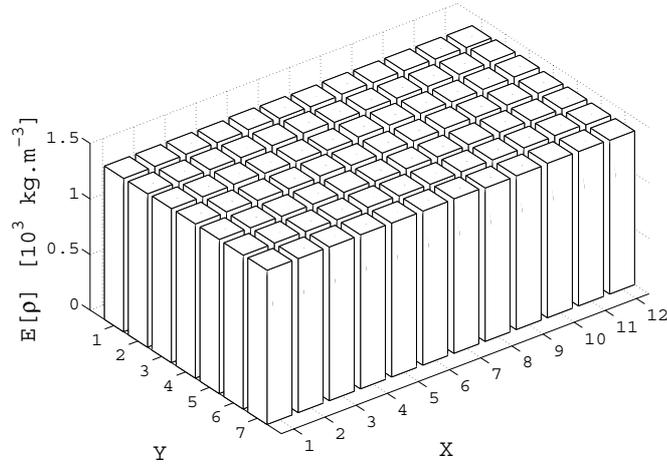


FIGURE 5.8: Représentation du champ moyen $\mathbf{x} \rightarrow \underline{\rho}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x})$.

On constate l'uniformité des champs moyens pour les trois champs aléatoires. Le champ des coefficients de variation des composantes (1,1) et (1,2) du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$ et du champ $\mathbf{x} \rightarrow \rho(\mathbf{x})$ est représenté sur les figures (5.9), (5.10) et (5.11).

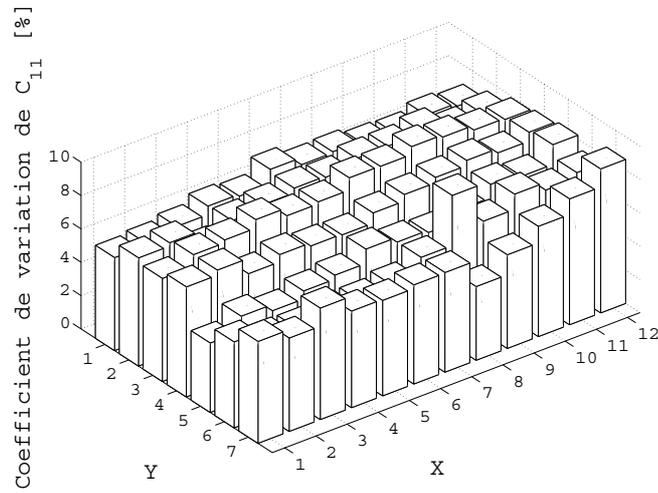


FIGURE 5.9: Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow \text{CV}[\mathbb{C}_{11}(\mathbf{x})]$.

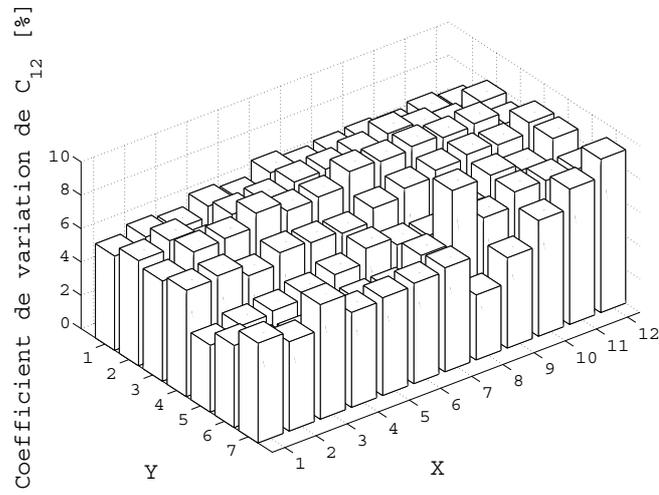


FIGURE 5.10: Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow CV[C_{12}(\mathbf{x})]$.

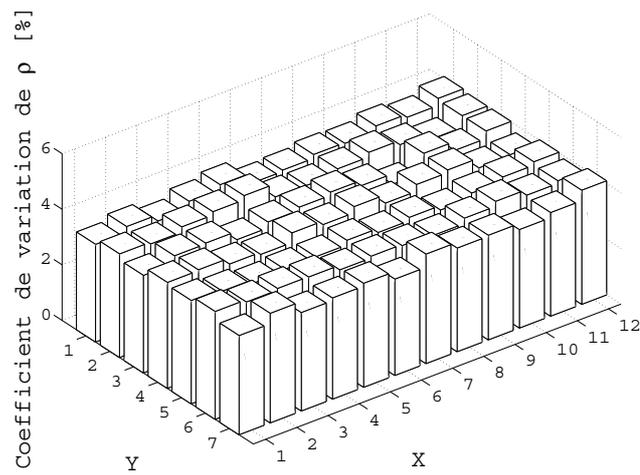


FIGURE 5.11: Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow CV[\rho(\mathbf{x})]$.

Les figures (5.9), (5.10) et (5.11) mettent en évidence un niveau de fluctuations statistiques relativement faible, de l'ordre d'environ 6 % en moyenne. Notons que ce niveau de fluctuation est plus faible que celui mis en évidence par les simulations numériques du tenseur d'élasticité basées sur le modèle de la fraction volumique.

Remarque :

Les données issues de l'identification inverse directe peuvent également être utilisées afin d'effectuer une réduction du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow U(\mathbf{x})$ par une représentation de Karhunen-Loève, combinée à une interpolation Chaos. Ce type d'approche a été utilisé dans [Desceliers *et al.*, 2006] pour l'identification d'un milieu caractérisé par un module d'Young aléatoire (et de coefficient de Poisson déterministe).

5.2 Identification des paramètres du modèle probabiliste

Nous considérons à présent le champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$ comme la restriction du domaine Ω d'un champ aléatoire homogène, indexé par \mathbb{R}^2 .

La matrice moyenne du champ est donc indépendante de \mathbf{x} . Son estimation à partir des mesures expérimentales (identifiées par la résolution du problème d'optimisation (5.2)) est fournie par¹¹ :

$$\hat{\underline{\mathbf{C}}} \approx \frac{1}{N^{\text{colloc}} \nu^{\text{exp}}} \sum_{i=1}^{N^{\text{colloc}}} \sum_{j=1}^{\nu^{\text{exp}}} \mathbb{C}^{\text{PS}}(\mathbf{x}_i, \theta_j) \quad (5.3)$$

Il vient, en GPa :

$$\hat{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 8.86 & 4.25 & 4.25 & 0 & 0 & 0 \\ 4.25 & 8.86 & 4.25 & 0 & 0 & 0 \\ 4.25 & 4.25 & 8.86 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.30 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

La masse volumique moyenne vaut : $\underline{\rho} = 1.3853 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Le paramètre de dispersion du champ est également indépendant de \mathbf{x} : $\delta_{\mathbb{C}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathbb{C}}$. Son

11. Afin d'alléger les notations, la dépendance des estimateurs vis-à-vis du nombre de réalisations expérimentales est omise. En pratique, chaque estimateur dépend des paramètres ν^{exp} et N^{colloc} .

estimation est calculée selon (voir l'Eq. (1.19)) :

$$\widehat{\delta}_{\mathbf{C}} = \frac{1}{\|\widehat{\mathbf{C}}\|_{\mathbf{F}}^2} \left\{ \frac{1}{N^{\text{colloc}} \nu^{\text{exp}}} \sum_{i=1}^{N^{\text{colloc}}} \sum_{j=1}^{\nu^{\text{exp}}} \left\| \mathbf{C}^{\text{PS}}(\mathbf{x}_i, \theta_j) - \widehat{\mathbf{C}} \right\|_{\mathbf{F}}^2 \right\}^{1/2} \quad (5.5)$$

On obtient :

$$\widehat{\delta}_{\mathbf{C}} = 0.076 \quad (5.6)$$

En utilisant l'Eq. (1.20), on en déduit l'estimation du paramètre de dispersion δ :

$$\widehat{\delta} = 0.091 \quad (5.7)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre (1), le modèle probabiliste est également paramétré par les longueurs de corrélation des germes stochastiques. D'un point de vue méthodologique, l'identification de ces paramètres est effectuée en deux étapes :

1. tout d'abord, les longueurs de corrélation du champ aléatoire mésoscopique sont estimées ;
2. les longueurs de corrélation des germes sont ensuite déterminées par une méthode itérative.

L'estimation des longueurs de corrélation mésoscopiques expérimentales est obtenue suivant la méthodologie détaillée à la section (4.7), en considérant le champ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{PS}}(\mathbf{x})$ et la matrice moyenne $\widehat{\mathbf{C}}$ (pour les 110 réalisations expérimentales).

A nouveau, la convergence vis-à-vis du point initial est testée, pour quatre valeurs :

- pour $l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } x}$: $l_0^x = 10$, $l_0^x = 20$, $l_0^x = 30$ et $l_0^x = 80$ (mm) ;
- pour $l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } y}$: $l_0^y = 8$, $l_0^y = 16$, $l_0^y = 24$ et $l_0^y = 64$ (mm).

A titre d'exemple, la convergence de l'algorithme pour le calcul de $l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } x}$ et pour une initialisation $l_0^x = 80$ (mm) est représentée sur la figure (5.12).

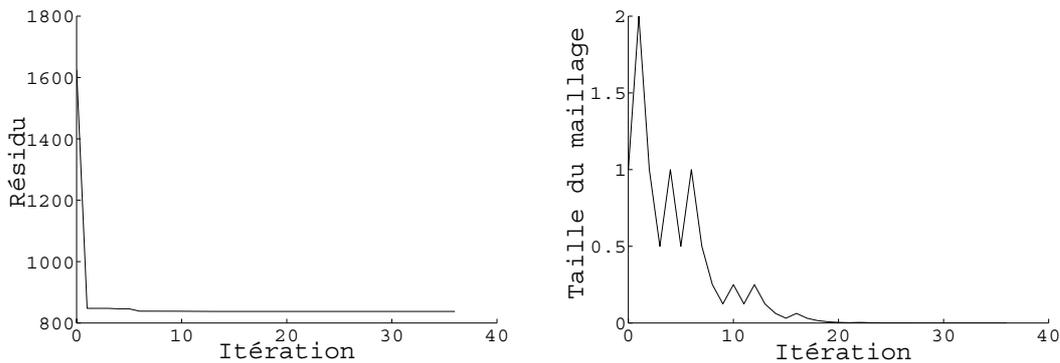


FIGURE 5.12: Convergence de l'algorithme de recherche stochastique pour la détermination de $l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } x}$: résidu (gauche) et taille du maillage (droite) pour $l_0^x = 80$ (mm).

On obtient finalement :

$$l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } x} = 10.74 \text{ mm}$$

et

$$l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } y} = 8.08 \text{ mm}$$

A nouveau, ces résultats :

- confortent le choix de l'échelle mésoscopique considérée dans cette recherche ;
- fournissent une toute première estimation de la longueur caractéristique du VER d'environ 54 mm, sensiblement inférieure à celle obtenue par la méthode reposant sur le modèle probabiliste de la fraction volumique. Ce point est discuté à la section (5.5).

Les longueurs de corrélation des germes stochastiques sont par définition telles que les longueurs de corrélation du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique (définies par l'Eq. 1.22) coïncident avec les longueurs $l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } x}$ et $l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } y}$ identifiées expérimentalement.

Afin de procéder à leur identification, nous formulons l'hypothèse que les longueurs de corrélation $\left\{ l_{jj'}^x \right\}_{1 \leq j \leq j' \leq 6}$ et $\left\{ l_{jj'}^y \right\}_{1 \leq j \leq j' \leq 6}$ sont telles que pour tout couple (j, j') :

$$l_{jj'}^x = l_{\mathbf{U}}^x$$

et

$$l_{jj'}^y = l_{\mathbf{U}}^y$$

L'objectif est donc d'identifier les deux longueurs de corrélation des germes stochastiques $l_{\mathbf{U}}^x$ et $l_{\mathbf{U}}^y$. Cette identification est effectuée par une procédure itérative : pour un choix initial de longueurs de corrélation $(l_{\mathbf{U}}^x(0), l_{\mathbf{U}}^y(0))$, les longueurs de corrélation du champ aléatoire mésoscopique $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$ sont calculées à l'aide de l'Eq. (1.22). Pour plusieurs choix initiaux, il devient alors possible de construire une approximation de la relation $l_{\mathbf{U}}^k \rightarrow l_{\mathbf{C}}^x$.

Le calcul des longueurs de corrélation du champ aléatoire mésoscopique $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$ requiert l'évaluation de l'intégrale définie par l'Eq. (1.22). Ce calcul est effectué :

- en ramenant l'intervalle $[0, +\infty[$ à un intervalle fini $[0, b]$,
- en introduisant l'approximation suivante (pour $b \in \mathbb{R}^+$ fini) :

$$\int_0^b f(x) dx \approx \frac{b}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (5.8)$$

pour N suffisamment grand.

Il a par ailleurs été observé que les longueurs de corrélation $l_{\mathbf{U}}^x$ et $l_{\mathbf{U}}^y$ sont en pratique proches des longueurs de corrélation du champ aléatoire du tenseur d'élasticité, c'est-à-dire de l'ordre de 10 mm et 8 mm pour notre application. Dès lors, il est raisonnable de retenir la valeur $b = 200$,

i.e. une valeur environ vingt fois supérieure à la longueur de corrélation.

D'autre part, comme nous n'avons vu à la section (1.3), deux méthodes de simulation des germes stochastiques sont disponibles. L'évaluation de l'Eq. (5.8) requiert un échantillonnage spatial suffisamment fin : nous retiendrons ici un pas spatial de 1. Ce choix impose d'évaluer le champ aléatoire, et donc les germes, en 200 points. Bien que ce nombre soit en théorie suffisamment faible pour permettre une construction directe à partir d'une décomposition de Cholesky de la matrice de covariance (cf. Eq. (1.17)), on notera que les premiers points présentent un fort niveau de corrélation, ce qui rend la matrice de covariance mal conditionnée pour la décomposition de Cholesky. Dans ce cadre, il est préférable d'adopter la première stratégie de simulation définie par l'Eq. (1.15), pour laquelle il s'agit maintenant de déterminer l'ordre p à retenir. Pour ce faire, nous étudions la convergence de la fonction de corrélation définie par l'Eq. (1.14) pour une longueur de corrélation donnée, en l'occurrence ici 10 mm. Le nombre de simulations de Monte-Carlo nécessaire à l'estimation de la fonction de corrélation est tout d'abord déterminé en étudiant la convergence de la fonction en fonction de différents nombres de tirages et pour un ordre suffisamment grand *a priori*, soit $p = 512$. Cette analyse est reportée sur la figure (5.13), où l'on constate que 20000 tirages sont nécessaires.

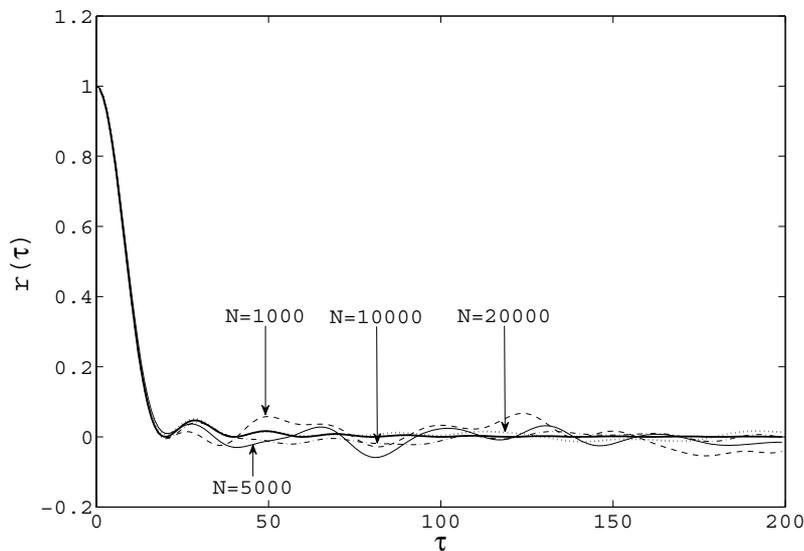


FIGURE 5.13: Convergence de la fonction de corrélation associée au vecteur aléatoire \mathbf{V}_p en fonction du nombre de tirages pour la simulation de Monte-Carlo ($p = 512$). Le trait continu épais représente la fonction de référence.

Forts de cette connaissance, nous pouvons à présent étudier la convergence de la fonction de corrélation (qui est donc estimée à partir de 20000 tirages) en fonction de l'ordre du développement p (en pratique, on notera que p est ici une puissance de 2 (voir [Soize, 2006])). Les résultats de cette analyse de convergence sont illustrés sur la figure (5.14).

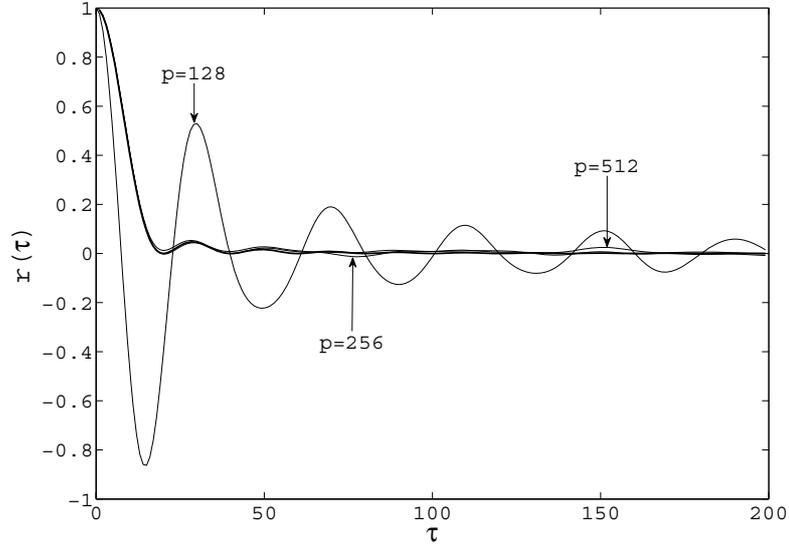


FIGURE 5.14: Convergence de la fonction de corrélation associée au vecteur aléatoire \mathbf{V}_p en fonction de l'ordre p du développement (20000 tirages). Le trait continu épais représente la fonction de référence.

On constate donc que l'approximation définie par l'Eq. (1.15) peut être raisonnablement utilisée lorsque $p \geq 256$: nous retiendrons la valeur $p = 512$ pour les simulations des germes stochastiques.

Finalement, la relation $l_{\mathbf{U}}^k \rightarrow l_{\mathbf{C}}^x$ est estimée à partir de 10 valeurs initiales de longueur de corrélation des germes. La représentation graphique de cette fonction est reportée sur la figure (5.15), sur laquelle on constate la linéarité de la relation (déjà mise en évidence dans [Soize, 2008]).

On obtient

$$l_{\mathbf{C}}^k \approx 1.1 \cdot l_{\mathbf{U}}^k$$

ce qui fournit l'estimation des longueurs de corrélation recherchées :

$$l_{\mathbf{U}}^x = 9.76 \text{ mm}, l_{\mathbf{U}}^y = 7.4 \text{ mm} \quad (5.9)$$

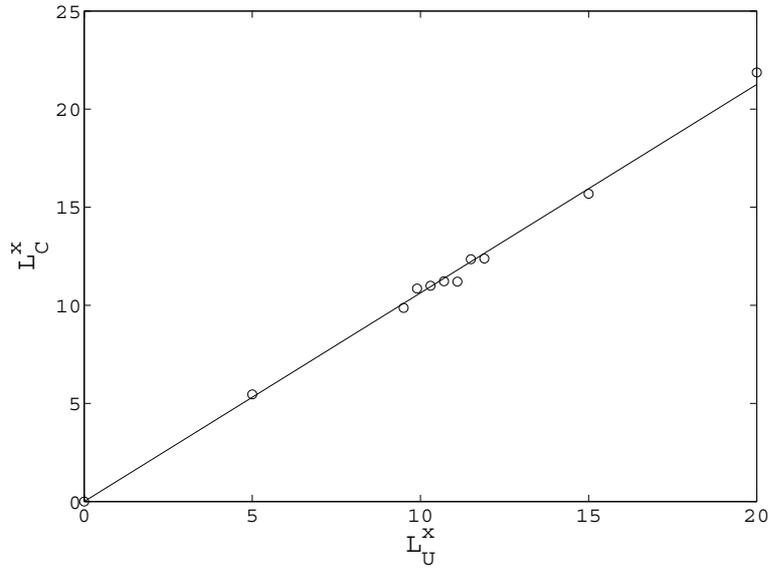


FIGURE 5.15: Interpolation de la relation $l_U^x \rightarrow l_C^x$: comparaison entre le modèle linéaire (trait continu) et les données simulées (symbole \circ).

Le graphique de la fonction de corrélation du champ aléatoire mésoscopique $\tau_x \rightarrow r_C(\tau_x)$ estimée à partir de 20000 tirages est représenté sur la figure (5.16).

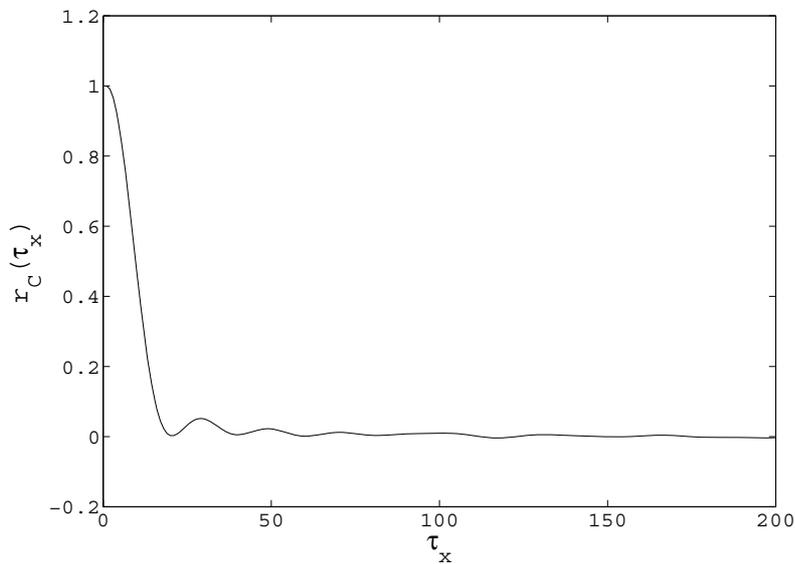


FIGURE 5.16: Représentation graphique de la fonction $\tau_x \rightarrow r_C(\tau_x)$ obtenue pour $l_U^x = 9.76$.

Remarque :

Une seconde stratégie naturelle d'identification des longueurs de corrélation des germes consiste en la résolution, par une méthode de recherche stochastique notamment, du problème d'optimisation traduisant la minimisation de l'écart entre les longueurs de corrélation du champ mésoscopique simulé et celles issues de l'identification expérimentale. Dans ce cadre, il convient de noter qu'il est en pratique délicat d'assurer la stricte reproductibilité de l'estimation des longueurs de corrélation à une précision de plusieurs décimales, en raison des différentes techniques et approximations utilisées (nombre de simulations de Monte-Carlo, domaine et pas d'intégration, etc.).

5.3 Synthèse sur la modélisation directe

Au terme de cette identification, le modèle probabiliste est donc paramétré par :

- la matrice moyenne (en GPa) :

$$\underline{\hat{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} 8.86 & 4.25 & 4.25 & 0 & 0 & 0 \\ 4.25 & 8.86 & 4.25 & 0 & 0 & 0 \\ 4.25 & 4.25 & 8.86 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.30 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

- le paramètre contrôlant le niveau de fluctuation :

$$\hat{\delta} = 0.091 \quad (5.11)$$

- les longueurs de corrélation des germes stochastiques :

$$l_{\mathbf{U}}^x = 9.76 \text{ mm} \quad (5.12)$$

$$l_{\mathbf{U}}^y = 7.4 \text{ mm} \quad (5.13)$$

5.4 Éléments de comparaison entre les deux approches

L'écart entre les deux modèles moyens, définis respectivement par les Eqs. (4.16) et (5.4), est mesuré au travers du paramètre $\epsilon_{\text{mod. moyen}}$, défini par :

$$\epsilon_{\text{mod. moyen}} = 2 \frac{\left\| \underline{\hat{\mathbf{C}}}^{\text{para}} - \underline{\hat{\mathbf{C}}} \right\|_{\text{F}}^2}{\left\| \underline{\hat{\mathbf{C}}}^{\text{para}} + \underline{\hat{\mathbf{C}}} \right\|_{\text{F}}^2} \quad (5.14)$$

où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius¹². On obtient :

$$\epsilon_{\text{mod. moyen}} = 0.1269 \quad (5.15)$$

Cet écart entre les deux matrices moyennes est relativement important et s'explique par le fait que la matrice moyenne $\widehat{\mathbf{C}}^{\text{para}}$ est calculée à partir du modèle probabiliste de la fraction volumique mésoscopique, sur la base d'un modèle (micro)mécanique particulier. Dans le cas de la matrice $\widehat{\mathbf{C}}$, les réalisations expérimentales sont obtenues par une résolution numérique du problème d'optimisation. En particulier, il est important de souligner que cette stratégie peut conduire à des résultats incohérents d'un point de vue mécanique. En effet, étant données les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs (on rappelle dans cette application, $E^0 < E^f$ et $\nu^0 > \nu^f$), la solution peut être jugée physiquement consistante si pour toute suite strictement croissante de fraction volumique, les suites associées du module d'Young et du coefficient de Poisson sont strictement et respectivement croissante et décroissante. Cette propriété peut être facilement testée à partir des résultats de l'optimisation (pour chaque trajectoire expérimentale). Il suffit pour cela d'effectuer un triage croissant sur la réalisation du champ du module d'Young, puis d'effectuer un triage décroissant sur le champ des coefficients de Poisson : la solution est alors physiquement cohérente si les suites indicielles issues des deux procédures de triage coïncident. On note que les résultats obtenus ne vérifient pas cette condition. Cependant, il convient de souligner que sous l'hypothèse d'homogénéité retenue, la matrice moyenne peut être aisément recalée à partir d'autres mesures expérimentales.

Il est également important de noter que le modèle probabiliste de la fraction volumique induit des fluctuations statistiques isotropes, alors que le modèle probabiliste direct du tenseur d'élasticité repose sur un modèle moyen isotrope (dans notre cas) perturbé par des fluctuations statistiques anisotropes.

Afin de quantifier l'influence des fluctuations anisotropes, nous considérons la fonction $C \rightarrow \Delta(C)$, définie par :

$$\Delta(C) = \left\{ \int_{\Omega} E \|C(\mathbf{x}) - E(C(\mathbf{x}))\|_F^2 d\mathbf{x} \right\}^{1/2} \quad (5.16)$$

La fonction $C \rightarrow \Delta(C)$ permet ainsi de mesurer le niveau global de fluctuation statistique d'un champ aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$) sur un domaine Ω .

En notant $d^{\text{iso}} = \Delta(C^{\text{para}})$, il vient :

$$d^{\text{iso}} = 138.3237 \quad (5.17)$$

où l'estimation est conduite à partir de 20000 réalisations du champ aléatoire. Afin de pouvoir comparer l'influence des fluctuations anisotropes, nous procédons dans un premier temps à un

12. Pour tout matrice réelle \mathbf{X} , $\|\mathbf{X}\|_F^2 = \text{tr} \{ \mathbf{X}^T \mathbf{X} \}$.

recalage des fluctuations statistiques sur les composantes du champ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{x})$ qui correspondent aux composantes non nulles du champ isotrope. Soit $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{x})$ le champ aléatoire ainsi défini. La mesure de fluctuation du champ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{x})$ vaut :

$$d^* = \Delta(\mathbf{C}^*) = 128.6764 \quad (5.18)$$

On définit alors le champ aléatoire normalisé $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{aniso norm}}(\mathbf{x})$ par la relation :

$$\mathbf{C}^{\text{aniso norm}}(\mathbf{x}) = \frac{d^{\text{iso}}}{d^*} \mathbf{C} \quad (5.19)$$

La partie diagonale (i.e. les blocs diagonaux supérieur gauche et inférieur droit) du champ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{aniso norm}}(\mathbf{x})$ possède donc par construction le même niveau de fluctuations statistiques que le champ $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}^{\text{para}}(\mathbf{x})$. On note d^{aniso} la mesure de fluctuations du champ anisotrope normalisé :

$$d^{\text{aniso}} = \Delta(\mathbf{C}^{\text{aniso norm}}) = 161.8972 \quad (5.20)$$

L'influence des fluctuations statistiques anisotropes peut finalement être quantifié par l'écart relatif entre d^{iso} et d^{aniso} :

$$\epsilon_{\text{aniso. stat.}} = 2 \frac{|d^{\text{iso}} - d^{\text{aniso}}|}{d^{\text{iso}} + d^{\text{aniso}}} = 0.157 \quad (5.21)$$

On constate donc que l'impact des fluctuations statistiques anisotropes n'est pas négligeable. Il convient par ailleurs de souligner que la solution avec fluctuations statistiques anisotropes est de portée physique plus générale.

Une seconde illustration de la différence entre les deux modèles peut être obtenue en considérant un échantillonnage ordonné des valeurs propres des matrices $\mathbb{C}^{\text{para}}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{C}^{\text{aniso norm}}(\mathbf{x})$, pour \mathbf{x} fixé. On notera que dans le cas du modèle isotrope, la matrice ne possède par définition que trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$. La représentation des fonctions $\mathbf{x} \rightarrow E\{\lambda_i(\mathbf{x})\}$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ est reportée sur la figure (5.17). D'autre part, on montre aisément que dans le cas isotrope, $\lambda_4 = 1/2\lambda_2$, soit $E\{\lambda_4\} = 1/2E\{\lambda_2\}$. On observe un faible niveau de fluctuation spatiale des moyennes des valeurs propres, similaire pour les deux approches. On notera que la différence entre les niveaux moyens est due à l'écart entre les deux modèles moyens.

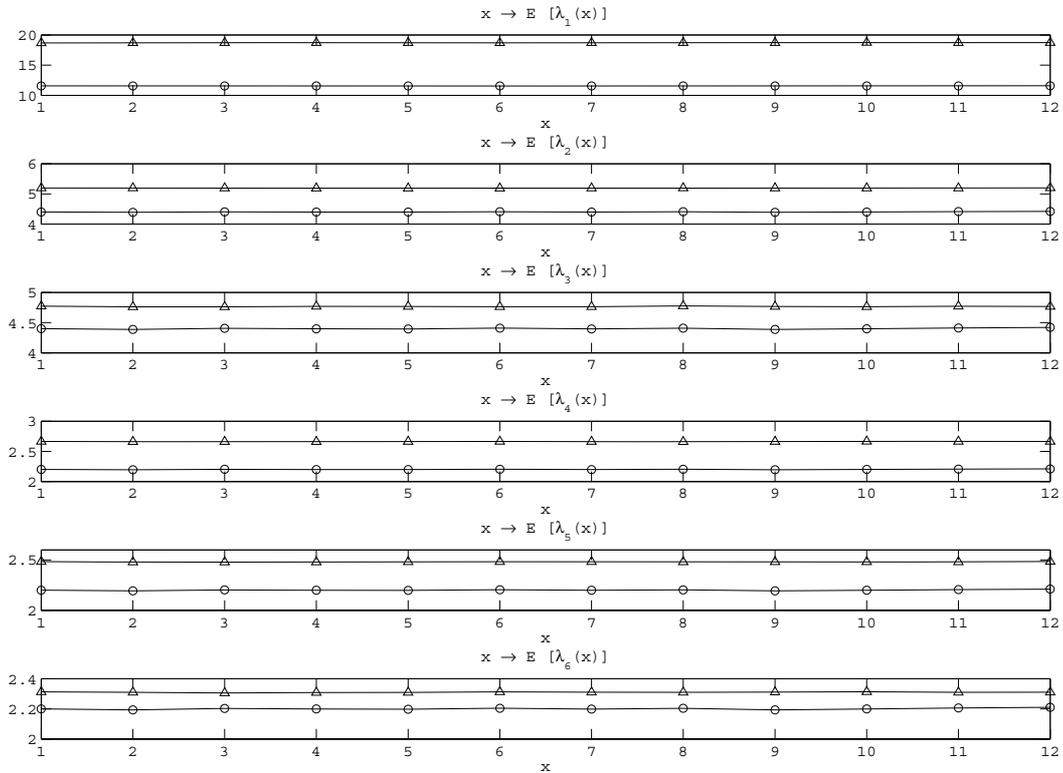


FIGURE 5.17: Représentation des fonctions $\mathbf{x} \rightarrow E\{\lambda_i(\mathbf{x})\}$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ pour $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ (o : modèle isotrope; Δ : modèle anisotrope).

La représentation des fonctions $\mathbf{x} \rightarrow \left[E\{\lambda_i(\mathbf{x})^2\} - (E\{\lambda_i(\mathbf{x})\})^2 \right] / (E\{\lambda_i(\mathbf{x})\})^2$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ (correspondant au carré du coefficient de variation) est reportée sur la figure (5.18). Puisque dans le cas isotrope $\lambda_4 = 1/2\lambda_2$, on en déduit que 5 valeurs propres ont un même coefficient de variation au carré, ce qui est clairement visualisé sur la figure.

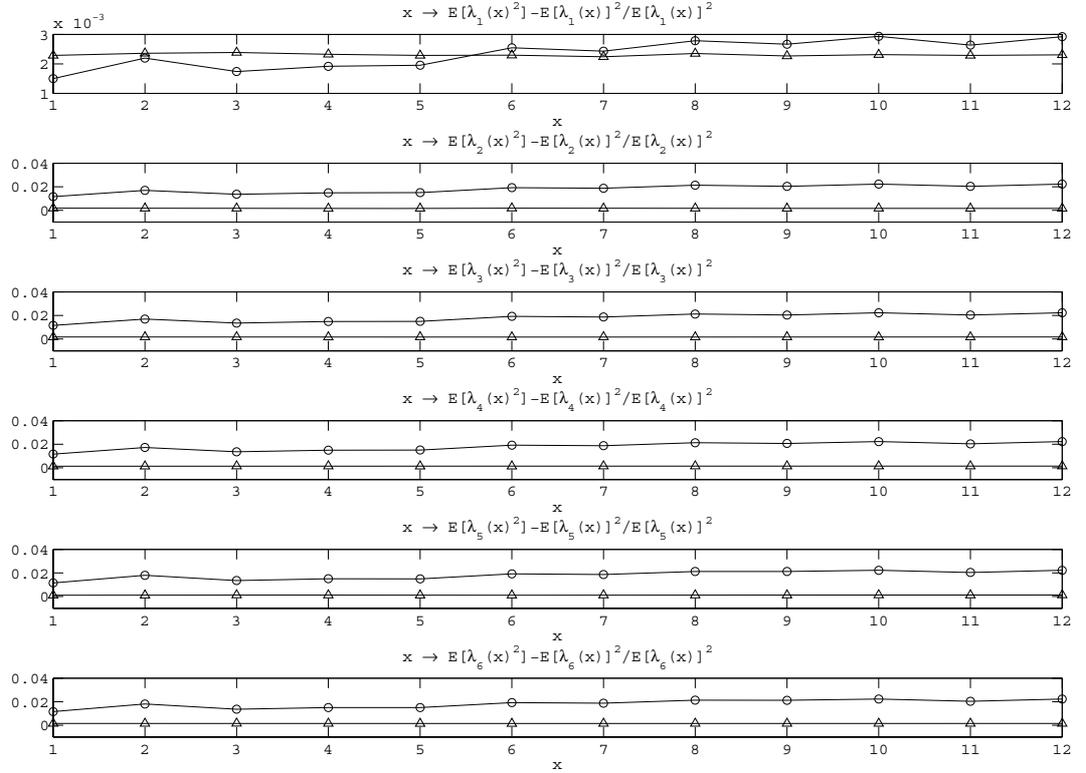


FIGURE 5.18: Représentation des fonctions $\mathbf{x} \rightarrow \left[E \{ \lambda_i(\mathbf{x})^2 \} - (E \{ \lambda_i(\mathbf{x}) \})^2 \right] / (E \{ \lambda_i(\mathbf{x}) \})^2$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ pour $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ (o : modèle isotrope ; Δ : modèle anisotrope).

Les observations à partir de la figure (5.18) indiquent que le niveau de fluctuation statistique varie spatialement de façon plus importante dans le cas du modèle avec fluctuations isotropes (i.e. celui issu de la modélisation de la fraction volume aléatoire).

Il est par ailleurs intéressant de comparer les prédictions des longueurs de corrélation pour les deux approches. Les écarts relatifs sont définis par :

$$\epsilon_l^x = 2 \frac{|l_C^{\text{para } x} - l_C^{\text{exp, PS } x}|}{l_C^{\text{para } x} + l_C^{\text{exp, PS } x}} \quad (5.22a)$$

$$\epsilon_l^y = 2 \frac{|l_C^{\text{para } y} - l_C^{\text{exp, PS } y}|}{l_C^{\text{para } y} + l_C^{\text{exp, PS } y}} \quad (5.22b)$$

soit

$$\epsilon_l^x = 10 \%, \quad \epsilon_l^y = 2.2 \% \quad (5.23)$$

On constate donc que les prédictions des longueurs de corrélation du champ aléatoire sont très proches, bien que dérivées à l'aide de deux approches différentes (l'une basée sur des simulations numériques de Monte-Carlo dans le cas du modèle de fraction volumique aléatoire, l'autre basée sur la résolution d'un problème d'optimisation). Soulignons à nouveau que ces estimations confirment le choix de l'échelle d'analyse mésoscopique, dont on rappelle qu'elle est définie par une longueur caractéristique proche d'une longueur de corrélation spatiale.

5.5 Estimation de la taille du VER

L'objectif de cette section est de fournir une première étude de la taille du VER en fonction des longueurs de corrélation du champ aléatoire mésoscopique.

Soit \mathbf{C}^{eff} la représentation matricielle du tenseur effectif aléatoire. On introduit les statistiques ordonnées

$$\lambda_1^{\text{eff}} \geq \dots \geq \lambda_6^{\text{eff}}$$

des valeurs propres aléatoires de la matrice \mathbf{C}^{eff} . Suivant [Soize, 2008], une analyse de convergence probabiliste de la taille du VER peut être réalisée en étudiant notamment la convergence du coefficient de variation de la v.a. $\|\mathbf{C}^{\text{eff}}\| = \lambda_1^{\text{eff}}$ ¹³.

Pour un nombre de mésovolumes J donné, une première estimation simple de la réalisation du tenseur effectif est effectuée à l'aide du modèle de Voigt :

$$\mathbf{C}^{\text{eff}}(\theta) = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J \mathbf{C}(\mathbf{x}_i, \theta) \quad (5.24)$$

L'analyse de convergence est effectuée en augmentant progressivement le ratio entre la taille du volume considéré pour le calcul du tenseur effectif aléatoire et la longueur de corrélation spatiale du champ aléatoire mésoscopique. Comme nous l'avons vu précédemment, les longueurs de corrélation spatiale du champ mésoscopique dans les directions x et y sont du même ordre de grandeur et voisines de la taille des volumes mésoscopiques, si bien que l'analyse de convergence peut être conduite en étudiant la convergence du coefficient de variation de λ_1^{eff} en fonction du nombre de mésovolumes. En notant N_{meso} le ratio entre la taille du volume et la longueur de corrélation spatiale du champ aléatoire, l'analyse est en pratique réalisée pour $N_{\text{meso}} \in \{1, \dots, 7\}$, i.e. en considérant 1, 4, 9, 16, 25, 36 et 49 mésovolumes. Cette augmentation de la taille du volume considéré dans le calcul du tenseur effectif est illustrée sur la figure (5.19). Le résultat est représenté pour les deux modèles sur la figure (5.20).

13. Pour toute réalisation d'une matrice aléatoire \mathbf{X} définie sur (Θ, \mathcal{F}, P) à valeurs dans l'espace des matrices $m \times m$ réelles, on a : $\|\mathbf{X}\| = \sup_{\|\mathbf{u}\| \leq 1} \|\mathbf{X}\mathbf{u}\|$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$.

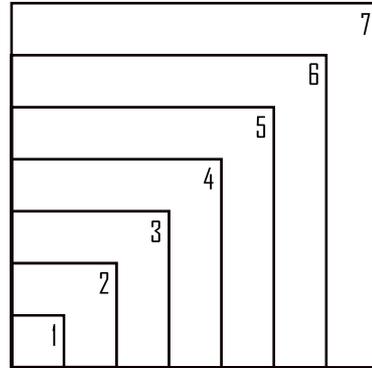


FIGURE 5.19: Schématisation de la taille des volumes utilisés pour le calcul des propriétés effectives.

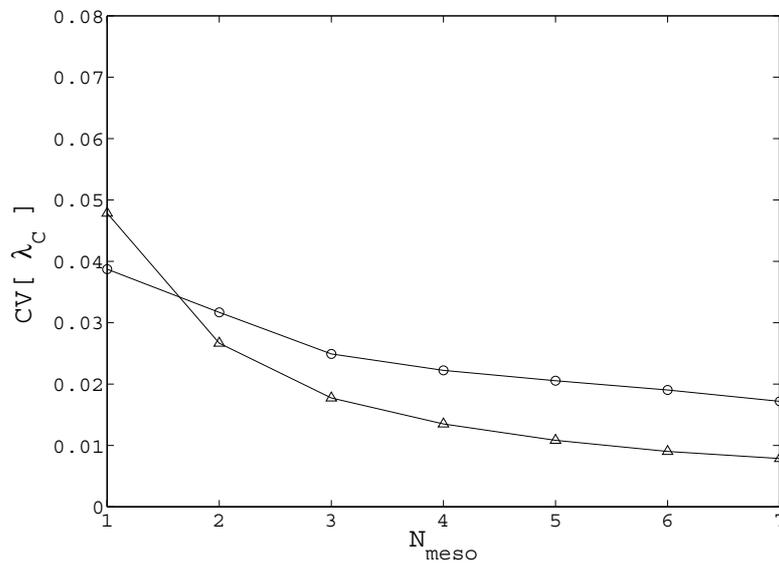


FIGURE 5.20: Convergence du coefficient de variation de la v.a. λ_1^{eff} en fonction du ratio entre la taille du volume et la longueur de corrélation spatiale du champ aléatoire mésoscopique (\circ : modèle du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique ; Δ : modèle direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique).

On constate que le coefficient de variation de la v.a. λ_1^{eff} converge vers 0 pour les deux modèles, cette convergence étant plus rapide dans le cas du modèle probabiliste direct. Il est intéressant de souligner que pour une taille de volume cinq fois supérieure à la longueur de corrélation spatiale du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique, les fluctuations statistiques respectivement pour le modèle direct et le modèle indirect (i.e. celui issu de la modélisation de la fraction volumique) sont de l'ordre de 1.2 % et 2.2 %.

Il est par ailleurs possible d'améliorer cette étude de convergence en considérant la fonction $\beta \rightarrow \mathcal{P}(\beta)$, définie de \mathbb{R}^+ dans $[0, 1]$ par :

$$\mathcal{P}(\beta) = P(1 - \beta < B \leq 1 + \beta) = E\{\mathbf{1}_{B \leq 1 + \beta}\} - E\{\mathbf{1}_{B \leq 1 - \beta}\} \quad (5.25)$$

où B est la v.a. définie par

$$B = \frac{\lambda_1^{\text{eff}}}{E\{\lambda_1^{\text{eff}}\}} \quad (5.26)$$

et $E\{\mathbf{1}_{B \leq b^*}\} = 1$ si $B \leq b^*$, 0 sinon. Le graphique de la fonction $\beta \rightarrow \mathcal{P}(\beta)$ pour $N_{\text{meso}} \in \{1, \dots, 7\}$ est représenté sur la figure (5.21), dans le cas du modèle probabiliste direct.

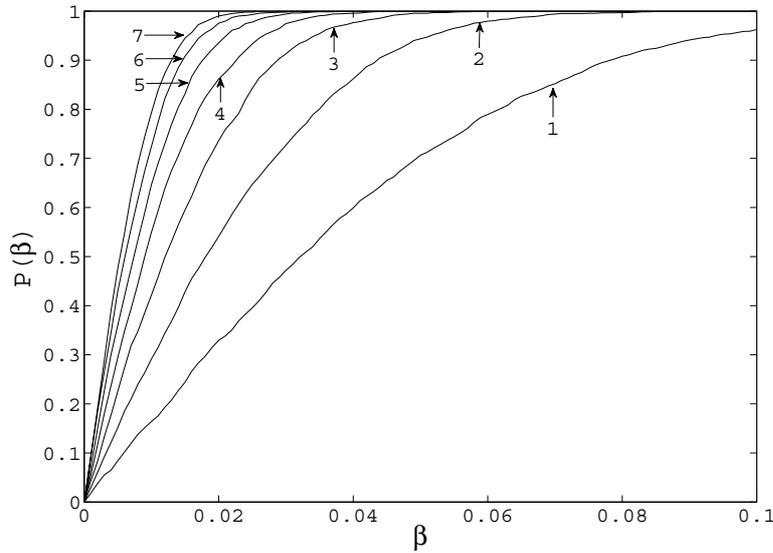


FIGURE 5.21: Représentation graphique de la fonction $\beta \rightarrow \mathcal{P}(\beta)$ pour $N_{\text{meso}} \in \{1, \dots, 7\}$ (cas du modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité).

Par exemple, dans le cas où $N_{\text{meso}} = 5$ (c'est-à-dire que la longueur caractéristique du volume utilisé pour le calcul des propriétés effectives est environ cinq fois supérieure aux longueurs de corrélation du champ aléatoire mésoscopique), on constate donc que : $P(0.982 < B \leq 1.018) = 0.90$. A partir de ces courbes, on peut par ailleurs extraire des courbes de probabilité à des niveaux d'intérêt. La figure (5.22) représente les courbes de probabilité 0.9, 0.95 et 0.99 pour les différentes tailles de volume utilisé pour le calcul des propriétés effectives.

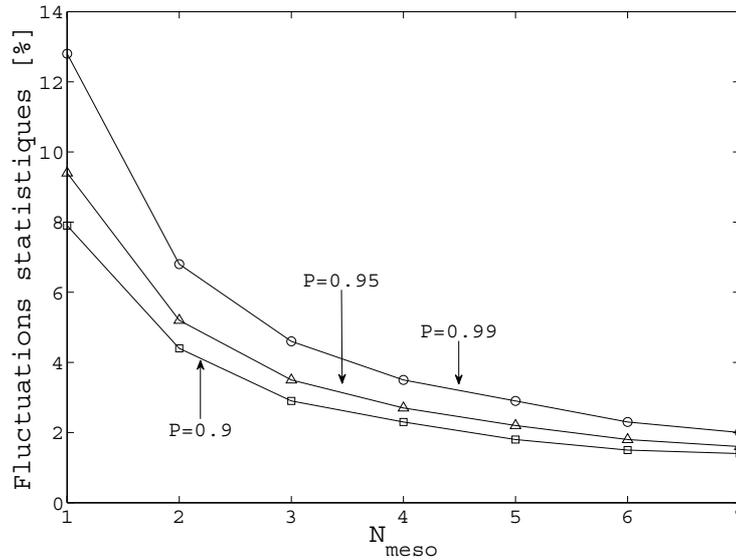


FIGURE 5.22: Evolution des fluctuations statistiques en fonction de N_{meso} pour les niveaux de probabilités 0.9, 0.95 et 0.99.

L'analyse de la figure (5.22) montre que par exemple, dans le cas $N_{\text{meso}} = 5$, la probabilité pour laquelle les fluctuations statistiques du tenseur effectif sont inférieures à 1.8 %, 2.2 % et 2.9 % vaut respectivement 0.9, 0.95 et 0.99. L'ensemble de ces résultats tend à confirmer ceux mis en évidence dans [Soize, 2008]. Naturellement, il est nécessaire de confirmer ces observations en utilisant, à la place du modèle de Voigt, un modèle micromécanique plus adéquat. Enfin, il est important de souligner que l'identification de la taille du VER est en pratique conditionnée par le choix d'un seuil pour le niveau de fluctuations.

5.6 Conclusion

Ce chapitre a été dans un premier temps consacré à l'identification et la mise en oeuvre du modèle probabiliste du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique proposé dans [Soize, 2008].

Nous avons tout d'abord procédé à l'identification des trajectoires expérimentales du processus, à partir des résultats fournis au chapitre 3. Cette identification a été réalisée par la résolution, à l'aide d'un algorithme de recherche stochastique, d'un problème d'optimisation classique. L'analyse de ces résultats nous a permis d'identifier la matrice moyenne du modèle, le paramètre de fluctuation ainsi que les longueurs de corrélation du processus mésoscopique. Il apparaît que la valeur du paramètre de fluctuation est relativement faible (de l'ordre de 9 %), tandis que les longueurs de corrélation estimées sont proches de celles identifiées sur la base des simulations numériques conduites au chapitre 4. Après avoir formulé une hypothèse sur les longueurs de corrélation des germes stochastiques (supposées identiques dans chaque direction x et y pour tous les germes), nous avons procédé à l'identification de ces longueurs de corrélation en estimant la relation entre elles et celles du champ mésoscopique. L'ensemble des paramètres ainsi identifié, nous avons procédé à des simulations numériques du champ aléatoire du tenseur d'élasticité.

Des pistes de comparaison entre les deux modèles sont ensuite évoquées. On soulignera la différence entre les deux matrices moyennes, cette différence résultant des stratégies d'identification des trajectoires expérimentales. L'influence des fluctuations statistiques anisotropes est démontrée au travers d'une analyse sur les fluctuations statistiques du tenseur aléatoire mésoscopique. Une analyse sur les statistiques ordonnées des valeurs propres est également fournie et illustre la différence entre les deux modèles.

La dernière partie de ce chapitre a été dédiée à une première analyse de la taille du VER, définie en fonction de la longueur de corrélation du champ mésoscopique. Pour ce faire, une analyse de convergence probabiliste de la norme du tenseur effectif aléatoire est effectuée. Afin d'illustrer la méthode, les réalisations du tenseur effectif sont estimées à l'aide du modèle de Voigt. Il est montré que (i) les fluctuations statistiques du tenseur effectif aléatoire tendent naturellement vers 0 lorsque la taille du domaine investigué augmente (ii) pour une taille de volume environ cinq (resp. sept) fois supérieure à la longueur de corrélation du champ mésoscopique, les fluctuations statistiques du tenseur effectif aléatoire sont inférieures à 2.9 % (resp. 2 %) avec une probabilité de 0.99. Bien entendu, ces premiers résultats nécessitent une étude plus approfondie et basée en particulier sur un solveur mécanique plus complet.

Conclusions générales et perspectives

La recherche présentée dans ce mémoire a été consacrée à la construction, l'identification expérimentale et la mise en oeuvre d'un modèle probabiliste du champ aléatoire du tenseur d'élasticité à l'échelle mésoscopique.

Une première approche a consisté à considérer le champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique, à partir duquel le champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique peut être déterminé à l'aide d'un schéma d'homogénéisation. Le modèle probabiliste associé au processus de fraction volumique est construit grâce à deux types de représentation probabiliste, à savoir une représentation de Karhunen-Loève et un développement sur les Chaos Polynômiaux Gaussiens. Une procédure d'identification des paramètres du modèle est proposée en utilisant le Principe du Maximum de Vraisemblance. Cette stratégie conduit à un problème d'optimisation de grande dimension devant être résolu à l'aide d'une recherche aléatoire.

Afin d'identifier les trajectoires expérimentales du champ aléatoire, nous avons réalisé une caractérisation expérimentale non destructive par ultrasons d'un matériau modèle (en l'occurrence, une matrice thermoplastique renforcée par des fibres longues), en considérant un nombre important de réalisations et une surface d'analyse étendue (par rapport à la longueur moyenne des fibres). Dans le but de valider la stratégie de détermination de la vitesse de propagation, une analyse statistique sur le ratio des amplitudes des signaux d'intérêt est conduite.

Sur la base de l'hypothèse d'une isotropie locale du matériau, le couplage de la mesure de vitesse de propagation des ondes longitudinales avec un schéma d'homogénéisation permet alors le calcul des trajectoires expérimentales du champ de fraction volumique (via la résolution algébrique d'un problème mécanique inverse). Nous avons alors constaté une amplification du niveau de fluctuations statistiques, de même que l'absence d'effets de bord. Le champ est par suite considéré comme la restriction au domaine d'étude d'un champ aléatoire homogène. Sous cette hypothèse, la propriété d'ergodicité en moyenne a été testée et finalement rejetée. Fort de ces résultats expérimentaux, la réduction statistique du champ par le développement de Karhunen-Loève est effectuée et l'identification des coefficients de la projection Chaos réalisée (à l'aide de calculs parallèles). Une comparaison entre les densités marginales expérimentales et simulées a été effectuée et a permis de valider à la fois la stratégie de résolution et l'ordre

retenu pour le développement Chaos. Les paramètres du modèle ainsi identifiés, des simulations numériques de Monte-Carlo du champ aléatoire de fraction volumique sont combinées à une technique d'homogénéisation par champs moyens afin d'obtenir des réalisations simulées de l'élasticité mésoscopique. Les longueurs de corrélation du champ aléatoire du tenseur d'élasticité sont par ailleurs estimées en approximant la fonction de corrélation par un modèle algébrique exponentiel. Le problème d'optimisation ainsi introduit est résolu par un algorithme de recherche stochastique. Il est montré que les longueurs de corrélation spatiale sont proches de la longueur caractéristique des domaines investigués expérimentalement, ce qui valide le choix de l'échelle d'analyse.

Une seconde partie de cette recherche a été dédiée à l'identification et la mise en oeuvre d'un modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique, récemment proposé dans la littérature. L'identification des réalisations expérimentales est toujours accomplie en considérant les mesures de la vitesse de propagation, mais en privilégiant une méthode de résolution purement numérique.¹⁴ Il est constaté que les réalisations expérimentales exhibent un niveau de fluctuations statistiques plus faible que celui obtenu à partir des simulations de Monte-Carlo du champ aléatoire de fraction volumique (couplées au schéma d'homogénéisation). A l'aide de ces résultats expérimentaux, les paramètres du modèle probabiliste direct sont identifiés. Nous avons noté la valeur relativement faible du paramètre de fluctuation ($\approx 9\%$). L'identification des longueurs de corrélation spatiale expérimentales du champ mésoscopique a été réalisée et a fourni des résultats proches de ceux obtenus par le modèle de la fraction volumique aléatoire, validant à nouveau la définition de l'échelle d'analyse mésoscopique. Ces estimations ont ensuite été utilisées afin de déterminer les longueurs de corrélation spatiale des germes stochastiques. L'ensemble des paramètres du modèle probabiliste ainsi identifié, des simulations numériques de Monte-Carlo sont utilisées afin de générer des réalisations du champ aléatoire. Des éléments de comparaison entre les deux approches sont fournis.

Enfin, une première étude probabiliste paramétrique de la taille du VER, en fonction des longueurs de corrélation du processus mésoscopique, est fournie. Pour cette application, une estimation de Voigt est utilisée pour déterminer les réalisations du tenseur d'élasticité effectif aléatoire. Les analyses suggèrent une taille de VER environ cinq fois plus grande que la longueur de corrélation spatiale du champ mésoscopique et tendent donc à confirmer des résultats de la littérature. Toutefois, il convient de souligner **(i)** qu'il s'agit là d'une première analyse ayant principalement pour objectif d'illustrer la finalité et l'efficacité de la modélisation stochastique mésoscopique proposée; **(ii)** qu'il est nécessaire de procéder à une analyse probabiliste plus complète, basée

14. Bien que cette méthode permette de s'affranchir de certaines hypothèses inhérentes à l'approche suivie dans le cas de la modélisation du champ de fraction volumique (méthode de résolution du problème mécanique inverse, etc.), il a été mis en évidence qu'une résolution numérique sans modèle mécanique peut conduire à des solutions physiquement inconsistantes.

notamment sur une méthode de résolution du problème mécanique plus efficace.

Naturellement, la modélisation probabiliste et les résultats présentés dans ce mémoire ouvrent de nombreuses perspectives. A court terme, il serait intéressant d'étudier l'impact du choix du modèle d'homogénéisation, qu'il s'agisse de celui utilisé pour la détermination des trajectoires expérimentales ou de celui mis en oeuvre pour le calcul des propriétés effectives (dans le cadre de l'analyse de convergence probabiliste sur la taille du VER).

Une seconde piste consisterait à la mise au point d'un protocole d'analyse expérimentale qui autoriserait une caractérisation sans biais du tenseur d'élasticité à l'échelle mésoscopique (en étendant par exemple l'analyse non destructive à la mesure *automatisée* des vitesses de propagation d'ondes transverses, en préservant le contexte d'élasticité isotrope). Une telle approche permettrait d'identifier et de considérer le modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité comme une solution de référence, à laquelle l'approche reposant sur la modélisation de la fraction volumique pourrait être rigoureusement comparée.

A plus long terme, l'approche basée sur la modélisation de la fraction volumique aléatoire mésoscopique pourrait être étendue à un régime de comportement non linéaire (impliquant des mécanismes d'endommagement). Cette extension pourrait notamment s'appuyer sur des méthodes d'homogénéisation non linéaires.

Enfin, la modélisation stochastique du tenseur d'élasticité mésoscopique pourrait être mise en oeuvre dans une chaîne de calculs plus générale, dans laquelle la définition de la microstructure aléatoire pourrait être intégrée afin de prédire le comportement aléatoire d'une structure (en se basant entre autres sur la Méthode des Eléments Finis Stochastiques).

Annexe A

Rappels en théorie des probabilités

Cet annexe est dédié à un bref rappel de notions de base de théorie des probabilités (voir par exemple [Neveu, 1970] [Soize, 1993]).

Espace de probabilité

Soit Θ un ensemble non vide dont chaque élément, appelé *événement élémentaire*, constitue une combinaison des causes dont dépend l'état de la variable considérée. Soit \mathcal{F} une *tribu* (ou σ -algèbre) de parties de Θ (appelés *événements*), c'est-à-dire une famille de parties vérifiant les propriétés suivantes :

- \mathcal{F} contient Θ et l'ensemble vide \emptyset ,
- \mathcal{F} est stable par complémentation : si $A \in \mathcal{F}$, alors $A^c \in \mathcal{F}$ (avec A^c complémentaire de A dans Θ),
- \mathcal{F} est stable pour les réunions dénombrables : si A_1, A_2, \dots, A_n sont dans \mathcal{F} , alors $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

Soit P une *mesure de probabilité* sur (Θ, \mathcal{F}) , i.e. une application de (Θ, \mathcal{F}) vers $[0, 1]$ vérifiant :

- $P(\Theta) = 1$,
- la propriété de σ -additivité : pour toute suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements de \mathcal{F} deux à deux disjoints, $P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Le triplet (Θ, \mathcal{F}, P) est appelé *espace de probabilité* (ou *espace probabilisé*).

Variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n

Soit \mathbf{X} l'application de Θ dans \mathbb{R}^n qui associe à chaque combinaison des causes une combinaison des conséquences. Le principe de causalité consiste :

- à introduire la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ de \mathbb{R}^n ¹⁵ telle que l'application \mathbf{X} est mesurable¹⁶,
- à équiper l'espace probabilisable $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$ avec la mesure de probabilité $P_{\mathbf{X}}$ telle que :
 $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, P_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X}^{-1}(B)) = P(\mathbf{X} \in B)$.

L'application \mathbf{X} est appelée *variable aléatoire* (en abrégé v.a.), définie sur (Θ, \mathcal{F}, P) et à valeurs dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$. La *loi de probabilité* (ou *distribution de probabilité*) de la v.a. \mathbf{X} est la mesure de probabilité $P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x})$ (avec $d\mathbf{x}$ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n) telle que $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$:

$$\int_B P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) = P_{\mathbf{X}}(B) = P(\mathbf{X} \in B) \quad (\text{A.1})$$

On définit la *loi marginale* de la variable aléatoire X_i à valeurs dans \mathbb{R} comme la loi de probabilité $P_{X_i}(dx_i)$ sur \mathbb{R} telle que $\forall B_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$:

$$P_{X_i}(B_i) = P(X_1 \in \mathbb{R}, \dots, X_i \in B_i, \dots, X_n \in \mathbb{R}) \quad (\text{A.2})$$

La loi de probabilité $P_{\mathbf{X}}$ est par ailleurs définie par la *fonction de répartition* $\mathbf{x} \rightarrow F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, de \mathbb{R}^n dans $[0, 1]$, telle que :

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P_{\mathbf{X}}(B_{\mathbf{x}}) = \int_{y \in B_{\mathbf{x}}} P_{\mathbf{X}}(dy) \quad (\text{A.3})$$

où $B_{\mathbf{x}} = \prod_{i=1}^n]-\infty, x_i] \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.

On dit que la mesure de probabilité $P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x})$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue $d\mathbf{x}$ s'il existe une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^+ telle que :

$$P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad (\text{A.4})$$

La fonction $\mathbf{x} \rightarrow p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ est appelée *fonction densité de probabilité* de la loi de probabilité et vérifie $\int_{\mathbb{R}^n} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$.

Pour tout entier $1 \leq q < +\infty$, on dit que la v.a. \mathbf{X} est d'ordre q si :

$$E(\|\mathbf{X}\|^q) = \int_{\Theta} \|\mathbf{X}(\theta)\|^q dP(\theta) = \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{x}\|^q P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x}) < +\infty \quad (\text{A.5})$$

L'ensemble des v.a. d'ordre q définies sur l'espace probabilisé (Θ, \mathcal{F}, P) à valeurs dans \mathbb{R}^n constitue un espace vectoriel noté $\mathcal{L}^q(\Theta, \mathbb{R}^n)$. En introduisant la norme associée $\mathbf{X} \rightarrow E(\|\mathbf{X}\|^q)$, on montre que $\mathcal{L}^q(\Theta, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach. En pratique, on est amené à considérer des variables aléatoires du second ordre : $X \in \mathcal{L}^2(\Theta, \mathbb{R}^n)$. On montre que l'espace $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathbb{R}^n)$ muni du produit scalaire $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rightarrow \langle\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle\rangle$ défini sur $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2(\Theta, \mathbb{R}^n)$ par :

$$\langle\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle\rangle = E(\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle P_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(d\mathbf{x}, d\mathbf{y}) \quad (\text{A.6})$$

est un espace de Hilbert, avec $P_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(d\mathbf{x}, d\mathbf{y})$ loi de probabilité conjointe des v.a. \mathbf{X} et \mathbf{Y} . Pour toute v.a. \mathbf{X} du second ordre, on définit :

15. La tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ est la σ -algèbre engendrée par les ensembles ouverts.

16. L'application \mathbf{X} est dite mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, avec $\mathbf{X}^{-1}(B) = \{\theta \in \Theta | \mathbf{X}(\theta) \in B\}$.

– le vecteur moyen¹⁷ :

$$\underline{\mathbf{X}} = E[X] = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{x} P_{\mathbf{X}}(d\mathbf{x})$$

– la matrice de corrélation $R_{\mathbf{X}}$, symétrique définie positive (de trace finie) :

$$R_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$$

– la matrice de covariance $C_{\mathbf{X}}$, symétrique définie positive (de trace finie) :

$$C_{\mathbf{X}} = E[(X - \underline{\mathbf{X}})(X - \underline{\mathbf{X}})^T]$$

La composante (i, i) de la matrice $C_{\mathbf{X}}$ est appelée *variance* de la variable aléatoire X_i (la racine carrée de la variance est appelée *écart-type*).

Champ aléatoire

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , $1 \leq d \leq 3$. On appelle *champ aléatoire* défini sur (Θ, \mathcal{F}, P) , indexé par Ω et à valeurs dans \mathbb{R}^n l'application $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w}) = [X_1(\mathbf{w}), \dots, X_n(\mathbf{w})]$ de Ω dans $\mathcal{L}^0(\Theta, \mathbb{R}^n)$. Le terme *champ stochastique* est également employé. Pour tout $\theta \in \Theta$, l'application $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w}, \theta)$ de Ω dans \mathbb{R}^n définit une *trajectoire* du champ aléatoire.

Soit I l'ensemble des parties non vides et non ordonnées de Ω . Pour tout $i = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\} \in I$, l'application $\theta \rightarrow \mathbf{X}^i(\theta) = [X(\mathbf{w}_1, \theta), \dots, X(\mathbf{w}_m, \theta)]$ est une v.a. définie sur (Θ, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathbb{R}^n)^m$, de loi de probabilité $P_{\mathbf{X}^i}$. Lorsque i décrit I , l'ensemble des lois de probabilité $\{P_{\mathbf{X}^i}, i \in I\}$ définit le *système de lois marginales* du champ $\{\mathbf{X}(w), w \in \Omega\}$.

On dit qu'un champ aléatoire est du second ordre si $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w}) \in \mathcal{L}^2(\Theta, \mathbb{R}^n)$. Un champ aléatoire du second ordre est qualifié de *continu en moyenne d'ordre deux* (en abrégé, *continu en m.o.d.*) si l'application $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{w})$ est continu de Ω dans $\mathcal{L}^2(\Theta, \mathbb{R}^n)$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus du second ordre soit continu en m.o.d. est que la trace de sa fonction d'autocorrélation soit continue sur $\Omega \times \Omega$.

Stationnarité

Soit G un ensemble de transformations de l'ensemble Ω , telle que G contienne la transformation identique et soit stable par composition. On dit que le processus $\{\mathbf{X}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in \Omega\}$ est *stationnaire* par rapport à G si, pour tout $g \in G$, les processus $\{\mathbf{X}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in \Omega\}$ et $\{\mathbf{X}(g(\mathbf{w})), \mathbf{w} \in \Omega\}$ admettent le même système de lois marginales¹⁸. Le terme *champ aléatoire homogène* est également employé¹⁹.

17. Le vecteur moyen peut être défini dès lors que \mathbf{X} est au moins d'ordre 1.

18. On dit alors que les processus $\{\mathbf{X}(\mathbf{w}), \mathbf{w} \in \Omega\}$ et $\{\mathbf{X}(g(\mathbf{w})), \mathbf{w} \in \Omega\}$ sont *isonomes*.

19. Le terme stationnaire est en général réservé à un processus indexé sur \mathbb{R} , alors que le terme homogène qualifie un champ, indexé sur \mathbb{R}^d .

La stationnarité usuelle sur \mathbb{R}^d est définie par le groupe des translations $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} + \mathbf{u}$.

On dit qu'un champ aléatoire du second ordre $X(\mathbf{w})$, indexé sur \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R}^n , est *stationnaire en moyenne d'ordre deux* (en abrégé, *stationnaire en m.o.d.*) si :

- $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d, E \{ \mathbf{X}(\mathbf{w}) \} = \underline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^n$,
- $\forall \mathbf{w}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d, R_{\mathbf{X}}(\mathbf{w}, \mathbf{w} + \mathbf{u}) = R_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})$.

La stationnarité implique la stationnarité en m.o.d., la réciproque étant fausse.

Annexe B

Exemple de résultats issus de l'identification inverse directe

La seconde trajectoire expérimentale centrée des composantes (1, 1) et (1, 2) du champ aléatoire $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}(\mathbf{x})$ et du champ $\mathbf{x} \rightarrow \rho(\mathbf{x})$ est représentée sur les figures (B.1), (B.2) et (B.3). On rappelle que ces résultats sont issus de la résolution du problème d'optimisation (5.2).

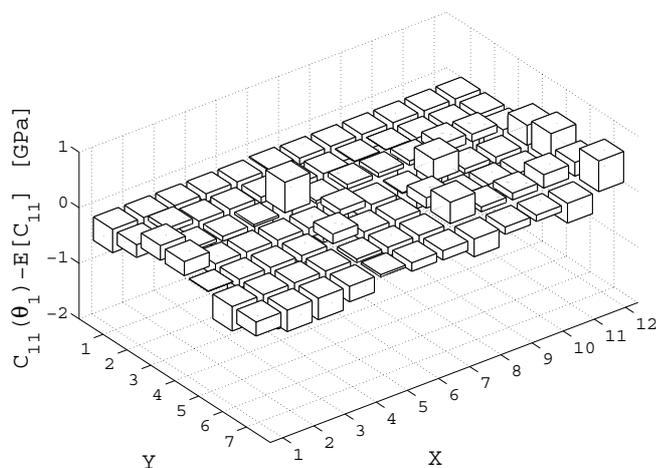


FIGURE B.1: Représentation de la première trajectoire expérimentale du champ aléatoire centré $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}_{11}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbb{C}}_{11}(\mathbf{x})$.

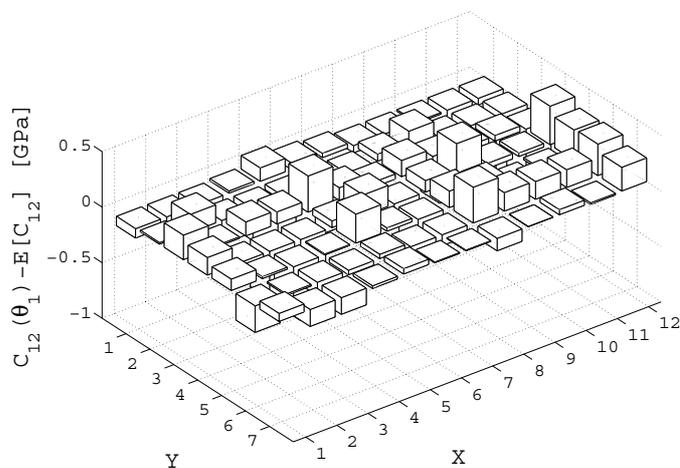


FIGURE B.2: Représentation de la première trajectoire expérimentale du champ aléatoire centré $\mathbf{x} \rightarrow \mathbb{C}_{12}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbb{C}}_{12}(\mathbf{x})$.

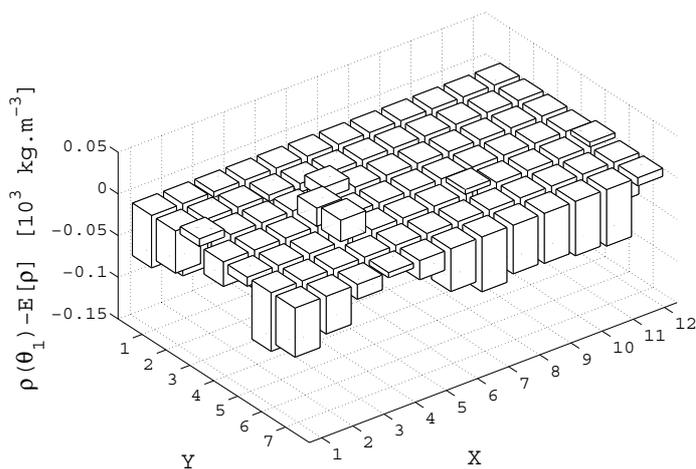
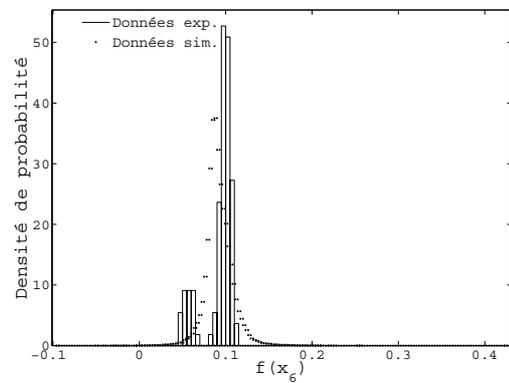
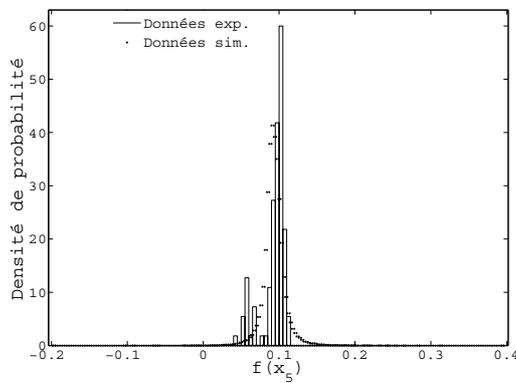


FIGURE B.3: Représentation de la première trajectoire expérimentale du champ aléatoire centré $\mathbf{x} \rightarrow \rho(\mathbf{x}) - \underline{\rho}(\mathbf{x})$.

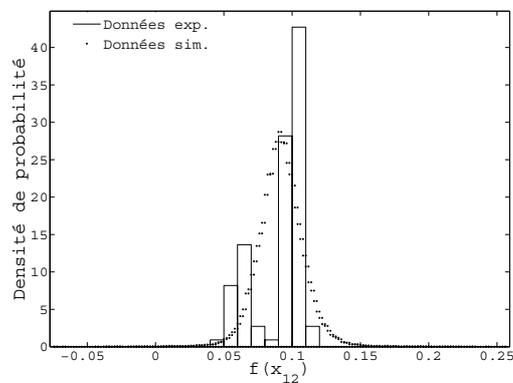
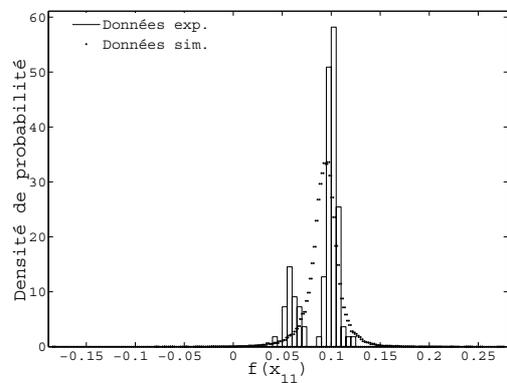
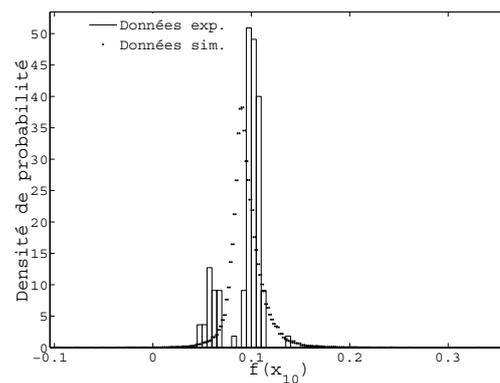
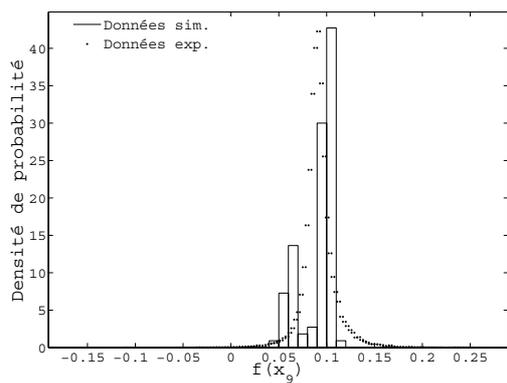
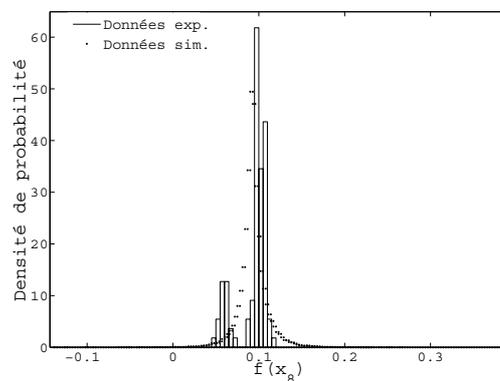
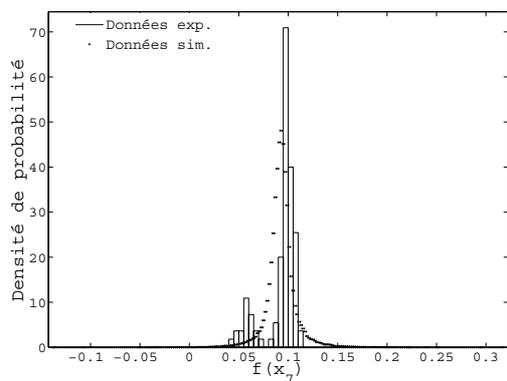
Annexe C

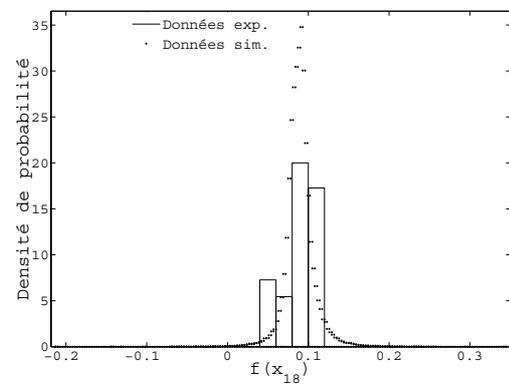
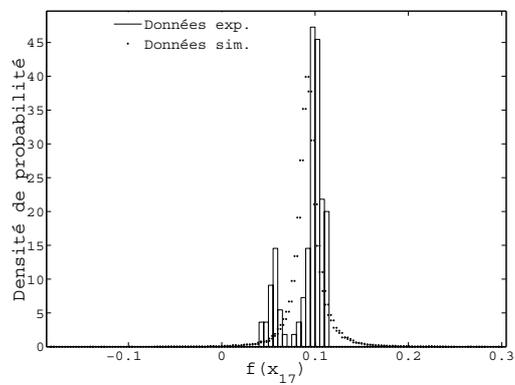
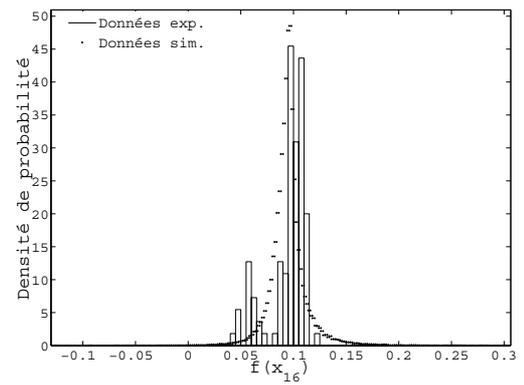
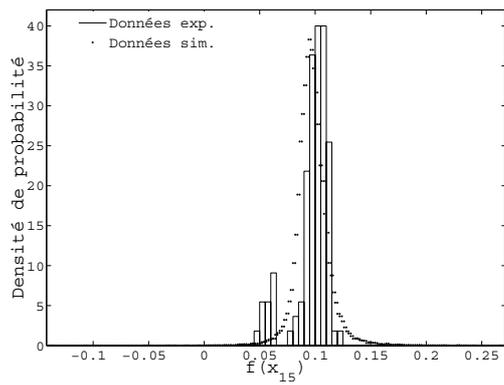
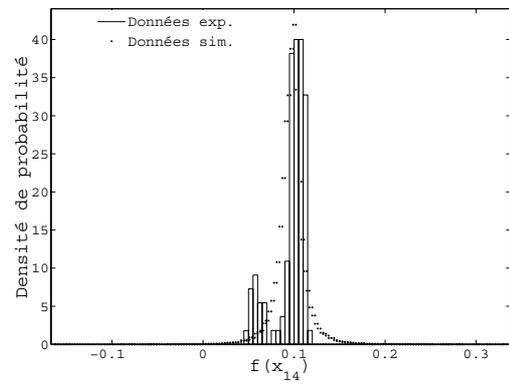
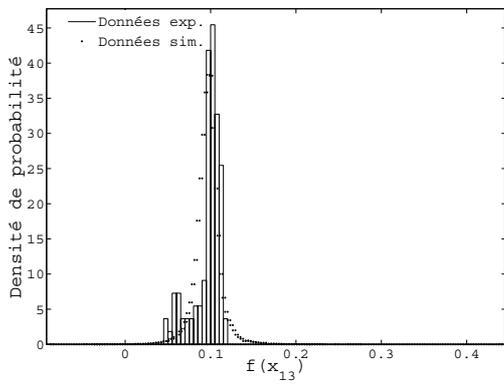
Comparaison entre les densités marginales expérimentales et simulées

La comparaison entre la densité marginale expérimentale et la densité marginale simulée (50000 tirages) est représentée sur les figures suivantes, pour les points \mathbf{x}_5 à \mathbf{x}_{24} .

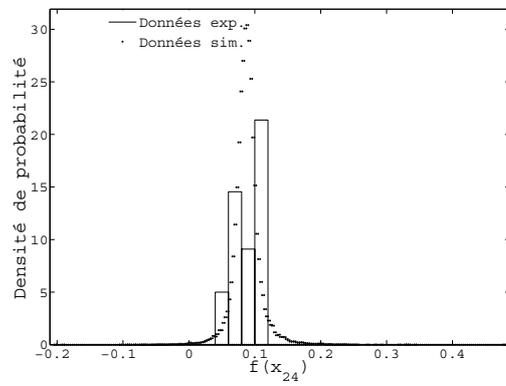
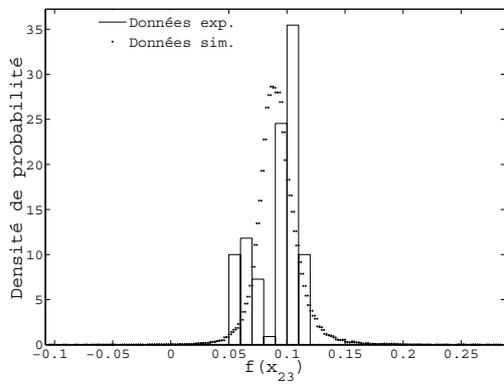
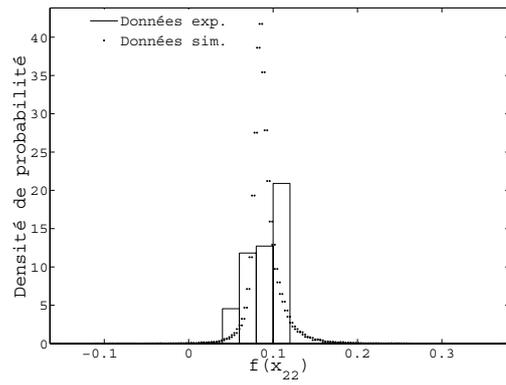
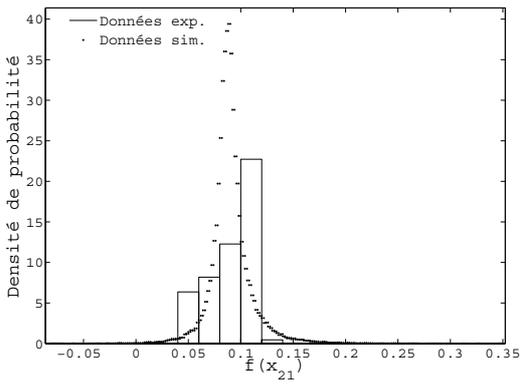
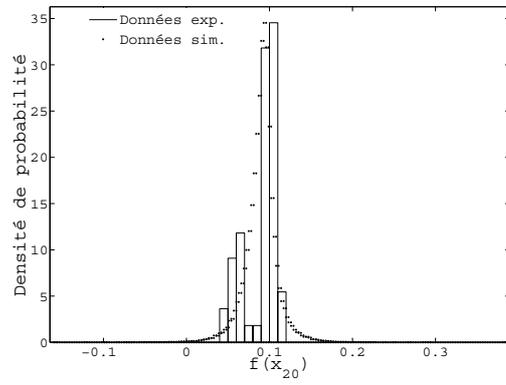
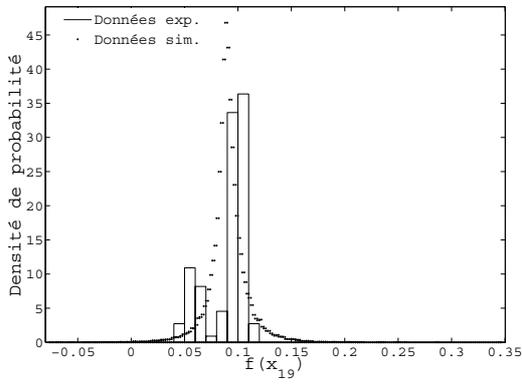


Annexe C. Comparaison entre les densités marginales expérimentales et simulées





Annexe C. Comparaison entre les densités marginales expérimentales et simulées



Annexe D

Base de Walpole

Le tenseur effectif estimé par le schéma de Mori-Tanaka s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{\text{MT}}^{\text{hom}} = \mathbb{C}^{(0)} + \frac{f}{4\pi} \int_{\|\underline{n}\|=1} \left[\left(\mathbb{C}^{(f)} - \mathbb{C}^{(0)} \right)^{-1} + \mathbb{P}_i^{(r)} \right]^{-1} dS \\ \times \left((1-f)\mathbb{I} + \frac{f}{4\pi} \int_{\|\underline{n}\|=1} \mathbb{A}_i^{(s)} dS \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Considérons à présent la base de Walpole $\{\mathbb{E}_i\}_{i=1}^6$ [Walpole, 1981] (voir également [Kunin, 1981]), définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_T \otimes \mathbf{i}_T, \quad \mathbb{E}_2 = \mathbf{i}_N \otimes \mathbf{i}_N \\ \mathbb{E}_3 &= \mathbf{i}_T \underline{\otimes} \mathbf{i}_T - \mathbb{E}_1, \quad \mathbb{E}_4 = \mathbf{i}_T \underline{\otimes} \mathbf{i}_N + \mathbf{i}_N \underline{\otimes} \mathbf{i}_T \\ \mathbb{E}_5 &= \mathbf{i}_N \otimes \mathbf{i}_T, \quad \mathbb{E}_6 = \mathbf{i}_T \otimes \mathbf{i}_N \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

où $\mathbf{i}_N = \underline{n} \otimes \underline{n}$, $\mathbf{i}_T = \mathbf{1} - \mathbf{i}_N$ (avec $\mathbf{1}$ le tenseur identité d'ordre deux : $\mathbf{1}_{ij} = \delta_{ij}$) et $2(\mathbf{a} \underline{\otimes} \mathbf{b})_{ijkl} = a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk}$ pour tout couple de tenseurs d'ordre deux (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Cette base permet de décomposer tout tenseur \mathbb{D} d'ordre quatre présentant la propriété d'isotropie transverse, selon :

$$\mathbb{D} = a_1 \mathbb{E}_1 + a_2 \mathbb{E}_2 + a_3 \mathbb{E}_3 + a_4 \mathbb{E}_4 + a_5 \mathbb{E}_5 + a_6 \mathbb{E}_6 = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6] \quad (\text{D.3})$$

L'intérêt majeur de cette décomposition est que les opérations de calcul tensoriel sont alors réduites à de simples opérations algébriques [Walpole, 1981], permettant ainsi la dérivation de résultats formels. En particulier, en notant $\{\mathbb{E}_i\}^r$ la base associée à la normale \underline{n}^r et à la phase r , on montre que :

$$\mathbb{C}^{(0)} = \frac{E^0}{(1+\nu^0)(1-2\nu^0)} (1, 1-\nu^0, 1-2\nu^0, 1-2\nu^0, \nu^0, \nu^0)_r \quad (\text{D.4})$$

et [Ponte Castañeda et Willis, 1995] :

$$\mathbb{P}_i^{(r)} = \left(\frac{(1+\nu^0)(1-2\nu^0)}{2E^0(1-\nu^0)}, 0, \frac{(3-4\nu^0)(1+\nu^0)}{4E^0(1-\nu^0)}, \frac{1+\nu^0}{2E^0}, 0, 0 \right)_r \quad (\text{D.5})$$

où E^0 et ν^0 sont le module d'Young et le coefficient de Poisson de la matrice isotrope, respectivement. L'indice r signifie que la base de Walpole est définie par la normale \underline{n}^r (soit $\{\mathbb{E}_i\}^r$). L'Eq. (D.5) est dérivée sous l'hypothèse que la courbure des fibres est suffisamment faible pour que le tenseur d'Eshelby associé soit celui d'une fibre longue droite, dont l'expression peut être trouvée dans les ouvrages de référence (voir par exemple [Mura, 1987]).

L'intégration sur la surface de la sphère unité de l'Eq. (D.1) est facilitée par la considération la base de Walpole. On rappelle les identités classiques :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\|\underline{n}\|=1} \underline{n} \otimes \underline{n} dS = \frac{1}{3} \mathbf{1}, \quad \frac{1}{4\pi} \int_{\|\underline{n}\|=1} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} dS = \frac{1}{3} \mathbb{J} + \frac{2}{15} \mathbb{K} \quad (\text{D.6})$$

où (\mathbb{J}, \mathbb{K}) est la base classique des tenseurs symétriques isotropes d'ordre quatre, définie par :

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (\text{D.7})$$

En combinant les Eqs. (D.2) et (D.6), il vient :

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{E}_1 \rangle &= \frac{2}{3} \mathbb{J} + \frac{1}{15} \mathbb{K}, & \langle \mathbb{E}_2 \rangle &= \frac{1}{3} \mathbb{J} + \frac{2}{15} \mathbb{K} \\ \langle \mathbb{E}_3 \rangle &= \langle \mathbb{E}_4 \rangle = \frac{2}{5} \mathbb{K}, & \langle \mathbb{E}_5 \rangle &= \langle \mathbb{E}_6 \rangle = \frac{2}{3} \mathbb{J} - \frac{2}{15} \mathbb{K} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

avec

$$\langle \mathbb{E}_i \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\|\underline{n}\|=1} \mathbb{E}_i dS$$

Table des figures

1.1	Schéma général de l'approche par fenêtres glissantes : détermination du champ de propriétés effectives à partir d'une microstructure numérisée.	13
1.2	Exemple (application à la microstructure simulée d'un composite aluminium/carbures de silicium) : champs de propriétés élastiques (en [MPa]) obtenus par une approche MW-GMC avec fenêtrage 3-D (d'après [Baxter <i>et al.</i> , 2001]).	14
1.3	Exemple (application à la microstructure simulée d'un composite unidirectionnel titane/carbures de silicium) : champs de contraintes locales (en [MPa]) obtenus par une approche MW-GMC (le plan représenté correspond au plan d'isotropie transverse ; d'après [Graham et Baxter, 2001]).	15
1.4	Influence de la taille de fenêtre (cas 3-D) sur les propriétés statistiques du module E_{yy}	16
1.5	Représentation graphique de la fonction $\tau_x \rightarrow r^x(\tau_x)$ pour $l^x = 10$	20
2.1	Représentation graphique de différentes fonctions noyaux.	35
3.1	Schéma de principe du moulage de granulés par injection.	39
3.2	Principe d'une mesure de vitesse de propagation d'onde par réflexion en immersion.	42
3.3	Schématisme d'un oscillogramme obtenu dans le cas d'une mesure par pulse-écho.	43
3.4	Détermination de la différence des temps de vol Δt à l'aide d'une méthode d'analyse temporelle par passage à zéro.	45
3.5	Vues 3D du cadre rigide (phase de conception). Haut : vue du dispositif, Bas : vue du dispositif avec plaque insérée.	46
3.6	Photographie du cadre rigide utilisé pour le placement des plaques injectées.	47
3.7	Schématisme du dispositif expérimental : positionnement du cadre et définition des points de mesure.	47
3.8	Photographie du dispositif expérimental : table de déplacement et palpeur ultrasonore.	48
3.9	Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon_A(\mathbf{x}, \theta_1)$	50
3.10	Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon_A(\mathbf{x}, \theta_2)$	50

3.11	Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow \min \{ \epsilon_A(\mathbf{x}) \}$ du ratio d'amplitude minimal.	51
3.12	Représentation du champ moyen $\mathbf{x} \rightarrow E \{ \epsilon_A(\mathbf{x}) \}$ du ratio d'amplitude.	51
3.13	Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow CV \{ \epsilon_A(\mathbf{x}) \}$ des coefficients de variation du ratio d'amplitude (en %).	52
3.14	Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_1)$	53
3.15	Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_2)$	53
3.16	Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow E \{ V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}) \}$	54
3.17	Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow CV \{ V_l^{\text{exp}}(\mathbf{x}) \}$	54
4.1	Formulation du problème direct : détermination de la vitesse de propagation des ondes longitudinales à partir de la fraction volumique.	59
4.2	Schématisation de la matrice polymère renforcée par des fibres longues.	60
4.3	Représentation de la fonction $V_l \rightarrow f = \Lambda^{-1}(V_l)$ pour les schémas dilué et Mori-Tanaka.	62
4.4	Représentation de la réalisation expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow f^{\text{exp}}(\mathbf{x}, \theta_1)$ du champ aléatoire de fraction volumique.	63
4.5	Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_1)$	64
4.6	Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_2)$	64
4.7	Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_3)$	65
4.8	Représentation de la densité de probabilité expérimentale de la variable aléatoire $f^{\text{exp}}(\mathbf{x}_4)$	65
4.9	Représentation du champ du ratio entre les coefficients de variation de la fraction volumique et de la vitesse de propagation.	66
4.10	Convergence de l'estimateur de la valeur moyenne de fraction volumique en fonction du nombre de réalisations.	67
4.11	Représentation de la fonction $\mathbf{x} \rightarrow \epsilon^{\text{Smod}}(\mathbf{x})$	68
4.12	Convergence des estimations de la moyenne spatiale en fonction du nombre de points expérimentaux N_{MS} et pour les 3 premières réalisations expérimentales.	69
4.13	Comparaison de la moyenne statistique et de la moyenne spatiale estimée pour chaque réalisation expérimentale.	70
4.14	Représentation graphique de l'estimation de la matrice des coefficients de corrélation.	71
4.15	Représentation graphique de la première fonction propre $\mathbf{x} \rightarrow \psi_1(\mathbf{x})$	71

4.16	Analyse de convergence pour la détermination de l'ordre de la représentation de Karhunen-Loève : graphique de la fonction $p \rightarrow \epsilon^{\text{Conv-KL}}(p)$	72
4.17	Convergence de la densité de probabilité de la variable aléatoire η_1 en fonction de l'ordre q de la représentation Chaos.	73
4.18	Convergence de la densité de probabilité de la variable aléatoire η_6 en fonction de l'ordre q de la représentation Chaos.	74
4.19	Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_1)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_1) - E\{f(\mathbf{x}_1)\}$ (droite).	76
4.20	Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_2)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_2) - E\{f(\mathbf{x}_2)\}$ (droite).	76
4.21	Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_3)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_3) - E\{f(\mathbf{x}_3)\}$ (droite).	77
4.22	Comparaison entre la densité marginale expérimentale (trait noir) et la densité marginale simulée (trait gris) par la projection Chaos pour la v.a. $f(\mathbf{x}_4)$ (gauche) et la v.a. centrée $f(\mathbf{x}_4) - E\{f(\mathbf{x}_4)\}$ (droite).	77
4.23	Convergence de l'algorithme de recherche stochastique pour la détermination de $l_{\mathbf{C}}^{\text{para } x}$: résidu (gauche) et taille du maillage (droite) pour $l_0^x = 10$ (mm).	79
4.24	Convergence de l'algorithme de recherche stochastique pour la détermination de $l_{\mathbf{C}}^{\text{para } y}$: résidu (gauche) et taille du maillage (droite) pour $l_0^y = 8$ (mm).	80
5.1	Convergence du résidu du calcul d'optimisation pour la détermination des réalisations expérimentales θ_1 (gauche) et θ_2 (droite).	85
5.2	Résidus du calcul d'optimisation pour l'ensemble des 110 réalisations expérimentales.	86
5.3	Représentation de la trajectoire expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}_{11}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x}, \theta_2)$	86
5.4	Représentation de la trajectoire expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{C}_{12}^{\text{exp PS}}(\mathbf{x}, \theta_2)$	87
5.5	Représentation de la trajectoire expérimentale $\mathbf{x} \rightarrow \rho^{\text{exp PS}}(\mathbf{x}, \theta_2)$	87
5.6	Représentation du champ moyen de la composante (1, 1) identifié par optimisation.	88
5.7	Représentation du champ moyen de la composante (1, 2) identifié par optimisation.	88
5.8	Représentation du champ moyen de masse volumique identifié par optimisation.	89
5.9	Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow \text{CV}[\mathbf{C}_{11}(\mathbf{x})]$	89
5.10	Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow \text{CV}[\mathbf{C}_{12}(\mathbf{x})]$	90
5.11	Représentation du champ $\mathbf{x} \rightarrow \text{CV}[\rho(\mathbf{x})]$	90

5.12	Convergence de l'algorithme de recherche stochastique pour la détermination de $l_{\mathbf{C}}^{\text{exp, PS } x}$: résidu (gauche) et taille du maillage (droite) pour $l_0^x = 80$ (mm).	92
5.13	Convergence de la fonction de corrélation associée au vecteur aléatoire \mathbf{V}_p en fonction du nombre de tirages pour la simulation de Monte-Carlo ($p = 512$). Le trait continu épais représente la fonction de référence.	94
5.14	Convergence de la fonction de corrélation associée au vecteur aléatoire \mathbf{V}_p en fonction de l'ordre p du développement (20000 tirages). Le trait continu épais représente la fonction de référence.	95
5.15	Interpolation de la relation $l_{\mathbf{U}}^x \rightarrow l_{\mathbf{C}}^x$: comparaison entre le modèle linéaire (trait continu) et les données simulées (symbole \circ).	96
5.16	Représentation graphique de la fonction $\tau_x \rightarrow r_{\mathbf{C}}(\tau_x)$ obtenue pour $l_{\mathbf{U}}^x = 9.76$	96
5.17	Représentation des fonctions $\mathbf{x} \rightarrow E \{ \lambda_i(\mathbf{x}) \}$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ pour $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ (\circ : modèle isotrope ; Δ : modèle anisotrope).	100
5.18	Représentation des fonctions $\mathbf{x} \rightarrow \left[E \{ \lambda_i(\mathbf{x})^2 \} - (E \{ \lambda_i(\mathbf{x}) \})^2 \right] / (E \{ \lambda_i(\mathbf{x}) \})^2$, $i \in \{1, \dots, 6\}$ pour $\mathbf{x} = (x, 0, 0)$ (\circ : modèle isotrope ; Δ : modèle anisotrope).	101
5.19	Schématisation de la taille des volumes utilisés pour le calcul des propriétés effectives.	103
5.20	Convergence du coefficient de variation de la v.a. λ_1^{eff} en fonction du ratio entre la taille du volume et la longueur de corrélation spatiale du champ aléatoire mésoscopique (\circ : modèle du champ aléatoire de fraction volumique mésoscopique ; Δ : modèle direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité mésoscopique).	103
5.21	Représentation graphique de la fonction $\beta \rightarrow \mathcal{P}(\beta)$ pour $N_{\text{meso}} \in \{1, \dots, 7\}$ (cas du modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité).	104
5.22	Evolution des fluctuations statistiques en fonction de N_{meso} pour les niveaux de probabilités 0.9, 0.95 et 0.99.	105
B.1	Représentation de la première trajectoire expérimentale du champ aléatoire centré de la composante (1, 1).	115
B.2	Représentation de la première trajectoire expérimentale du champ aléatoire centré de la composante (1, 2).	116
B.3	Représentation de la première trajectoire expérimentale du champ aléatoire centré de masse volumique.	116

Liste des tableaux

1	Définition des différentes échelles dans le cadre de notre étude : nature de l'information et ordre de grandeur.	6
2.1	Valeurs du paramètre Q pour différents ordres de développement q et longueurs de germe m	30
3.1	Définition du matériau d'étude : propriétés de la matrice et du renfort fibreux. .	39

Bibliographie

- [Aboudi, 1989] ABOUDI, J. (1989). Micromechanical analysis of composites by the method of cells. *Appl. Mech. Rev.*, 42(7):193–221.
- [Advani, 2002] ADVANI, S. (2002). *Process Modeling in Composites Manufacturing*. Marcel Dekker, New-York.
- [Arnst *et al.*, 2006] ARNST, M., CLOUTEAU, D., CHEBLI, H., OTHMAN, R. et DEGRANDE, G. (2006). A non-parametric probabilistic model for ground-borne vibrations in buildings. *Prob. Eng. Mechanics*, 21:18–34.
- [Baxter et Graham, 2000] BAXTER, S. C. et GRAHAM, L. L. (2000). Characterization of random composites using a moving window technique. *ASCE J Engng Mech*, 126(4):389–404.
- [Baxter *et al.*, 2001] BAXTER, S. C., HOSSAIN, M. I. et GRAHAM, L. L. (2001). Micromechanics based random material property fields for particulate reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 38:9209–9220.
- [Benveniste, 1987] BENVENISTE, Y. (1987). A new approach to the application of mori-tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6:147–157.
- [Berbain et Chevalier, 2007] BERBAIN, F. et CHEVALIER, A. (2007). Mise en oeuvre des composites. Rapport technique, Techniques de l’Ingénieur.
- [Binétruy, 2007] BINÉTRUY, C. (2007). Physique du moulage des composites avancés : applications. Rapport technique, Techniques de l’Ingénieur.
- [Bornert *et al.*, 2001] BORNERT, T., BRETHEAU, T. et GILORMINI, P. E. (2001). *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1*. Hermès Science Publications.
- [Chaki, 2003] CHAKI, S. (2003). *Etude d’une méthode ultrasonore absolue d’évaluation des contraintes : application au contrôle de serrage des boulons*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée.
- [Cottureau *et al.*, 2007] COTTEREAU, R., CLOUTEAU, D. et SOIZE, C. (2007). Construction of a probabilistic model for impedance matrices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2252–2268.

- [Desceliers *et al.*, 2006] DESCELIERS, C., GHANEM, R. et SOIZE, C. (2006). Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 66:978–1001.
- [Field Jr. et Grigoriu, 2004] FIELD JR., R. V. et GRIGORIU, M. (2004). On the accuracy on the polynomial chaos approximation. *Prob. Eng. Mechanics*, 19:65–80.
- [Ghanem et Spanos, 1991] GHANEM, R. et SPANOS, P. (1991). *Stochastic finite elements : a Spectral Approach*. Springer, New-York.
- [Goldberg, 1989] GOLDBERG, G. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Professional.
- [Graham et Baxter, 2001] GRAHAM, L. L. et BAXTER, S. C. (2001). Simulation of local material properties based on moving-window gmc. *Prob. Eng. Mechanics*, 16:295–305.
- [Graham *et al.*, 2003] GRAHAM, L. L., GURLEY, K. et MASTERS, F. (2003). Non-gaussian simulation of local material properties based on a moving-window technique. *Prob. Eng. Mechanics*, 18:223–234.
- [Guillemintot *et al.*, 2008] GUILLEMINOT, J., SOIZE, C., KONDO, D. et BINÉTRUY, C. (2008). Theoretical framework and experimental procedure for modelling mesoscopic volume fraction stochastic fluctuations in fiber reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 45:5567–5583.
- [Huet, 1990] HUET, C. (1990). Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Materials*, 38(6):813–841.
- [Jaynes, 1957a] JAYNES, E. T. (1957a). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4):620–630.
- [Jaynes, 1957b] JAYNES, E. T. (1957b). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 108(2):171–190.
- [Jeulin, 2001] JEULIN, D. (2001). Caractérisation morphologique et modèles de structures aléatoires. In *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1*, pages 95–132. Hermès Science Publications.
- [Kanit *et al.*, 2003] KANIT, T., FOREST, S., GOURGUES, A.-F. et JEULIN, D. (2003). Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40:3647–3679.
- [Karhunen, 1947] KARHUNEN, K. (1947). Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Amer. Sci. Fennicade Ser. A I*, 37:3–79.
- [Keese, 2004] KEESE, A. (2004). *A general purpose framework for stochastic finite elements*. Thèse de doctorat, Technischen Universität Braunschweig.

-
- [Kunin, 1981] KUNIN, I. (1981). An algebra of tensor operators and its applications to elasticity. *Int. J. Engng Sci.*, 19(12):1551–1561.
- [Lewis et Torczon, 1999] LEWIS, R. M. et TORCZON, V. (1999). Pattern search algorithms for bound constrained minimization. *SIAM J. Optim.*, 9(4):1082–1099.
- [Lewis et Torczon, 2002] LEWIS, R. M. et TORCZON, V. (2002). A globally convergent augmented lagrangian pattern search algorithm for optimization with general constraints and simple bounds. *SIAM J. Optim.*, 12(4):1075–1089.
- [Loève, 1948] LOÈVE, M. (1948). Fonctions aléatoires du second ordre. *In Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Gauthier Villars.
- [Loève, 1977] LOÈVE, M. (1977). *Probability Theory, 4th Ed.* Springer Verlag, New-York.
- [Max, 1972] MAX, J. (1972). *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Tomes I et II.* Masson, Paris.
- [Mori et Tanaka, 1973] MORI, T. et TANAKA, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 21:571–574.
- [Mura, 1987] MURA, T. (1987). *Micromechanics of defects in solids*. M. Nijhoff Publ., The Hague, The Netherlands.
- [Neveu, 1970] NEVEU, J. (1970). *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, Paris.
- [Ostoja-Starzewski, 1998] OSTOJA-STARZEWSKI, M. (1998). Random field models of heterogeneous materials. *International Journal of Solids and Structures*, 35(19):2429–2455.
- [Ostoja-Starzewski, 1999] OSTOJA-STARZEWSKI, M. (1999). Microstructural disorder, mesoscale finite elements and macroscopic response. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 455:3189–3199.
- [Ostoja-Starzewski, 2006] OSTOJA-STARZEWSKI, M. (2006). Material spatial randomness : From statistical to representative volume element. *Prob. Eng. Mechanics*, 21:112–132.
- [Ostoja-Starzewski, 2008] OSTOJA-STARZEWSKI, M. (2008). *Microstructural Randomness and Scaling in Mechanics of Materials*. Chapman & Hall-CRC-Taylor & Francis.
- [Paley et Aboudi, 1992] PALEY, M. et ABOUDI, J. (1992). Micromechanical analysis of composites by the generalized cells models. *Mech. Mater.*, 14:127–139.
- [Pindera et Bednarczyk, 1999] PINDER, M.-J. et BEDNARCYK, B. A. (1999). An efficient implementation of the generalized method of cells for unidirectional, multi-phased composites with complex microstructures. *Composites Part B*, 30:87–105.
- [Poirion et Soize, 1995] POIRION, F. et SOIZE, C. (1995). Numerical methods and mathematical aspects for simulation of homogeneous and nonhomogeneous gaussian vector fields. *In* KRÉE, W. et WEDIG, W., éditeurs : *Probabilistic Methods in Applied Physics, Lecture Notes in Physics*, pages 17–53. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

- [Ponte Castañeda et Willis, 1995] PONTE CASTAÑEDA, P. et WILLIS, J. R. (1995). The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. *Journal of the Mechanics and Physics of Materials*, 43(12):1919–1951.
- [Royer et Dieulesaint, 1999] ROYER, D. et DIEULESAINT, E. (1999). *Elastic Waves in Solids, 2nd Ed.* Springer-Verlag.
- [Rubinstein, 1981] RUBINSTEIN, R. (1981). *Simulation and the Monte Carlo Method.* John Wiley and Sons, New-York.
- [Sab, 1992] SAB, K. (1992). On the homogenization and the simulation of random materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 11(5):585–607.
- [Schueller, 1997] SCHUELLER, G. (1997). A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Prob. Eng. Mechanics*, 12:197–321.
- [Serra, 1982] SERRA, J. (1982). *Image analysis and Mathematical Morphology.* Academic Press, London.
- [Shannon, 1948] SHANNON, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Tech. J.*, 27:379–423/623–659.
- [Shinozuka, 1971] SHINOZUKA, M. (1971). Simulations of multivariate and multidimensional random processes. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 39(1):357–367.
- [Shinozuka et Deodatis, 1996] SHINOZUKA, M. et DEODATIS, G. (1996). Simulation of multi-dimensional gaussian stochastic fields by spectral representation. *ASME Appl Mech Rev*, 49(1):29–53.
- [Silverman, 1986] SILVERMAN, B. W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis.* Chapman & Hall CRC.
- [Soize, 1993] SOIZE, C. (1993). *Méthodes mathématiques en analyse du signal.* Masson, Paris.
- [Soize, 2000] SOIZE, C. (2000). A non parametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Prob. Eng. Mechanics*, 15:277–294.
- [Soize, 2005] SOIZE, C. (2005). A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288:623–652.
- [Soize, 2006] SOIZE, C. (2006). Non-gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:26–64.
- [Soize, 2008] SOIZE, C. (2008). Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size. *Prob. Eng. Mechanics*, 23:307–323.

-
- [Soize et Ghanem, 2004] SOIZE, C. et GHANEM, R. (2004). Physical systems with random uncertainties : Chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):395–410.
- [Tomassini, 1995] TOMASSINI, M. (1995). A survey of genetic algorithms. In STAUFFER, D., éditeur : *Annual Reviews of Computational Physics*, pages 87–118. World Scientific Publishing.
- [Torquato, 2002] TORQUATO, S. (2002). *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer, New-York.
- [Walpole, 1981] WALPOLE, L. J. (1981). Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Adv. Appl. Mech.*, 21:169–242.
- [Wiener, 1938] WIENER, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60:897–936.

Résumé

Modélisation stochastique mésoscopique de milieux aléatoires : application à un polymère renforcé de fibres longues

Pour certaines classes de matériaux de structure, la taille du Volume Élémentaire Représentatif peut être très supérieure à celle du domaine usuellement considéré pour une caractérisation expérimentale. Le tenseur d'élasticité du milieu présente alors des fluctuations spatiales et statistiques qu'il convient de modéliser par un champ aléatoire. Le travail de thèse a consisté en la construction, l'identification expérimentale et la mise en oeuvre d'un modèle probabiliste du champ aléatoire du tenseur d'élasticité à l'échelle mésoscopique. Pour ce faire, deux approches sont privilégiées. La première est basée sur la construction d'un modèle probabiliste associé à la fraction volumique aléatoire mésoscopique, combiné à un schéma d'homogénéisation. Une analyse expérimentale par ultrasons est réalisée sur un matériau modèle et permet, à l'aide de la résolution numérique d'un problème inverse, d'obtenir les trajectoires du champ. L'identification des paramètres du modèle est ensuite effectuée en s'appuyant sur le Principe du Maximum de Vraisemblance. La seconde approche porte sur l'identification et la mise en oeuvre d'un modèle probabiliste direct du champ aléatoire du tenseur d'élasticité, proposé dans la littérature. Les paramètres du modèle sont déterminés grâce à la caractérisation ultrasonore, via la résolution d'un problème d'optimisation. Les deux approches fournissent des estimations semblables pour les longueurs de corrélation spatiale du champ aléatoire et valident le choix de l'échelle d'analyse mésoscopique. Enfin, une analyse de convergence probabiliste permet de discuter de la taille du VER en fonction des longueurs de corrélation spatiale du champ mésoscopique.

Mots clés : chaos polynomial, composite, développement de Karhunen-Loève, homogénéisation, micromécanique, milieux aléatoires, modèle probabiliste, modélisation stochastique.

Abstract

Stochastic modeling of random media at mesoscale : application to a long-fiber reinforced polymer

For some classes of materials, the size of the Representative Volume Element can be much larger than the one of the domain typically used in experimental testing. The elasticity tensor of such media then exhibits both spatial and statistical fluctuations and has to be modelled as a random field. This thesis is dedicated to the construction, experimental identification and use of a probabilistic model of the random elasticity tensor at mesoscale. For this purpose, two kinds of approaches are considered. The first one is based on the construction of a probabilistic model for the mesoscopic volume fraction, combined to a homogenization scheme. An ultrasound-based experimental analysis is performed on a typical material and allows identifying the experimental trajectories of the random field by solving an inverse problem. The identification of the parameters is carried out by using the Maximum Likelihood Principle. The second approach is focused on the identification and use of a probabilistic model for the elasticity tensor random field that was recently proposed in the literature. The parameters of the model are computed by combining the ultrasound data with an optimization problem. Both approaches yield similar predictions of the spatial correlation lengths of the mesoscopic random field and validate the choice of the scale for the mesoscopic analysis. Finally, a probabilistic convergence analysis is performed and allows one to discuss the size of the RVE in terms of the correlation lengths of the mesoscopic random field.

Keywords : composite, homogenization, Karhunen-Loève expansion, micromechanics, polynomial chaos, random media, probabilistic model, stochastic modelling.