

Couplage de codes en interaction fluide-structure et applications aux instabilités fluide-élastiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 Juin 2008

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille
(spécialité mécanique)

par

Fabien HUVELIN

Composition du jury

Rapporteurs : Jean-Frédéric GERBEAU
Patrice LAURE

Examineurs : Franck BAJ
Aziz HAMDOUNI (Président du jury)
Elisabeth LONGATTE
Didier LUCOR
Jean-François SIGRIST
Mhamed SOULI (Directeur de thèse)

Mis en page avec la classe thloria.

Table des matières

1	Problématique	5
1.1	Motivations	5
1.2	Les mécanismes des instabilités liées aux interactions fluide-structure	8
1.2.1	L'oscillateur mécanique	8
1.2.2	Les forces fluide-structure	9
1.2.3	Les excitations aléatoires	10
1.2.4	Le couplage fluide-élastique	11
1.3	Objectifs	12
2	Méthodologie pour le couplage de codes externes	15
2.1	Le couplage de codes	15
2.1.1	Algorithmes monolithiques	16
2.1.2	Algorithmes partitionnés	16
2.2	Contexte industriel	19
2.3	Description des milieux continus	21
2.3.1	Systèmes de coordonnées	21
2.3.2	Lemme fondamental de la physique des milieux continus	22
2.3.3	Conservation de la masse	22
2.3.4	Conservation de la quantité de mouvement	23
2.3.5	Formulation des problèmes fluide et structure	24
2.4	Formulation ALE des équations de Navier-Stokes	25
2.4.1	Introduction	25
2.4.2	Description ALE des équations de Navier-Stokes	25
2.5	Discretisations temporelle et spatiale	31
2.5.1	Code de mécanique des fluides	31
2.5.2	Code de mécanique des structures	32
2.6	Projection de maillage	33
2.6.1	Introduction	33
2.6.2	Méthodes d'interpolation par les points de Gauss	34

2.7	Algorithme du couplage des codes fluide et structure	39
3	Deux cylindres dans un fluide parfait au repos	41
3.1	Algorithme partitionné	41
3.2	Description du cas et solution analytique	42
3.2.1	Equations	44
3.2.2	Energie du système	45
3.2.3	Données numériques	46
3.3	Résolution monolithique	46
3.4	Résolution partitionnée semi-analytique	48
3.4.1	Décomposition du problème	48
3.4.2	Quantification de l'erreur induite par les schémas de couplage explicites .	49
3.4.3	Quantification de l'erreur induite par les schémas de couplage implicites .	50
3.5	Résolution partitionnée numérique	54
3.5.1	Décomposition du problème	54
3.5.2	Modélisation	54
3.5.3	Quantification de l'erreur du solveur fluide en prédiction imposée	54
3.5.4	Quantification de l'erreur du solveur fluide pour les schémas explicites . .	56
3.5.5	Quantification de l'erreur du solveur fluide pour les schémas implicites . .	63
3.6	Conclusion	63
4	Vibration de structure soumise à un écoulement axial interne	65
4.1	Introduction	65
4.2	Description du modèle	65
4.3	Modélisation	68
4.4	Résultats	69
4.5	Modélisation de l'aléatoire et propagation de l'incertitude par la méthode des polynômes du chaos	74
4.5.1	Introduction	74
4.5.2	Formulation <i>non intrusive</i> des méthodes du Chaos Polynomial	75
4.5.3	Application	78
4.6	Conclusion	82
5	Vibrations de structures soumises à un écoulement transverse	83
5.1	Critère d'ingénierie pour le départ en instabilité	83
5.2	Modélisation des faisceaux de tubes	86
5.2.1	Description de la maquette AMOVI	86
5.2.2	Modélisation numérique de la maquette	86

	3
5.3 Tube mobile dans un fluide au repos	89
5.3.1 Loi de Rogers	89
5.3.2 Résultats numériques	90
5.4 Benchmark 2D	94
5.4.1 Données numériques	94
5.4.2 Un tube mobile	96
5.4.3 Faisceau de tubes mobiles	96
5.5 Première approche de la simulation de la maquette AMOVI	101
5.6 Conclusion	107
6 Conclusions et perspectives	111
Bibliographie	113
A Formulaire mathématique	121
A.1 Jacobien	121
A.1.1 Interprétation du jacobien	121
A.1.2 Equation du jacobien	122
A.2 Dérivée particulière d'une intégrale	123
A.2.1 Cas général	123
A.2.2 Cas particulier avec la masse volumique	124
B Extrapolation de Richardson	125

1

Problématique

1.1 Motivations

Les phénomènes d'interaction fluide-structure sont présents dans de nombreux secteurs de l'ingénierie moderne. Les effets de ces interactions ont des conséquences très variables selon le domaine d'application. D'un côté, ils sont source d'énergie pour les éoliennes, les voiles des bateaux et de fonctionnement pour les hélices. De l'autre, ils peuvent entraîner des dégâts irréremédiables sur les structures. Le plus connu est probablement l'effondrement du pont de Tacoma le 1er Juillet 1940 (fig. 1.1). Mais ces interactions sont également présentes dans des secteurs très divers tels que le domaine du génie biomédical où des études portent sur la compréhension de la rupture d'anévrisme (fig. 1.2) ou le domaine pétrolier avec les enjeux économiques liés à la vibration des risers soumis aux écoulements marins (fig. 1.3).



FIG. 1.1 – Effondrement du pont de Tacoma [Smi74]

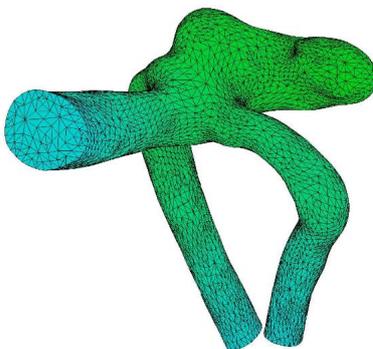


FIG. 1.2 – Modélisation des vaisseaux sanguins [FGG05]

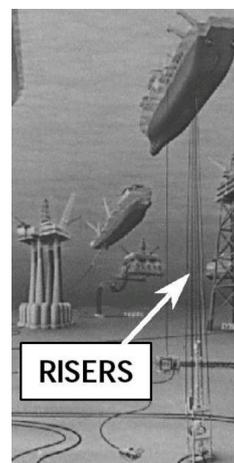


FIG. 1.3 – Schématisation d'un riser

Le présent travail est consacré aux interactions fluide-structure présentes dans le domaine du nucléaire. Pour un producteur d'électricité ayant un parc diversifié de sources d'énergies, ces phénomènes sont présents sur les différents moyens de productions tel que les digues des centrales en bord de mer soumises à la houle, le fonctionnement des éoliennes, les lignes hautes tensions soumises aux effets du vent et du givre ou certains composants de centrales nucléaires. Dans ce dernier cas (fig. 1.4), nombre de composants élancés et ou flexibles sont impactés

par ces phénomènes. Cela va des tours réfrigérantes, dont les tours en amont peuvent créer

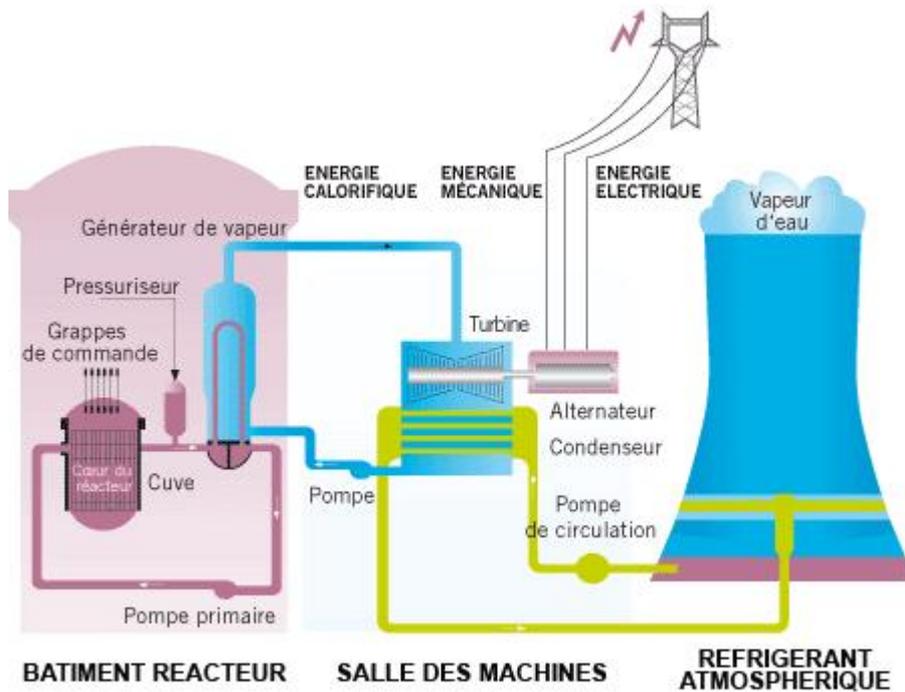


FIG. 1.4 – Schéma de principe de fonctionnement d'une centrale nucléaire

un écoulement tourbillonnaire du vent et ainsi impacter les tours en aval, aux problèmes de robinetterie. Le coupleur présenté ci-après a pour but d'étudier les phénomènes de départ en instabilité liés aux interactions fluide-structure. Les composants visés sont principalement les générateurs de vapeurs, et en particulier la partie basse soumise à des écoulements transverses à caractère monophasique (fig. 1.5). On peut également mentionner les problèmes liés aux grappes de commandes et aux assemblages combustibles de cœurs de Réacteurs à Eau Pressurisée (REP) où les écoulements sont axiaux (fig. 1.6). Les générateurs de vapeurs et le cœur sont le siège d'écoulements plutôt complexes. Les écoulements y atteignent souvent des vitesses moyennes de l'ordre de 5 à 10 m.s^{-1} dans certaines zones. Il est à noter qu'un écoulement d'eau en phase liquide de 2 m.s^{-1} a une pression dynamique du même ordre de grandeur qu'un vent d'ouragan se déplaçant à 230 km.h^{-1} . Il est facile de s'imaginer ce que de tels vents peuvent infliger à des structures de génie civil. Les conséquences possibles pour les générateurs de vapeur et les grappes de contrôle sont une vibration excessive des tubes qui peut entraîner une usure prématurée des tubes suite à des contacts répétés avec des structures voisines ou suite à une fatigue vibratoire (fig 1.7).

Ces études sont donc importantes d'un point de vue de conception, de dimensionnement et de sûreté. Il faut tout de même souligner que jusqu'à présent ces risques ont été assez bien maîtrisés du point de vue industriel grâce aux études qui sont conduites pour limiter leurs effets.

De nombreuses expériences ont été conduites à EDF R&D pour prédire les forces d'origine thermohydraulique responsables des problèmes vibratoires induits par les écoulements. Par la mesure directe de ces chargements fluides, il est souvent difficile de distinguer les différents mécanismes physiques mis en jeu en configuration couplée. Des méthodes indirectes basées sur des mesures expérimentales ont été développées et ont trouvé de nombreuses applications en

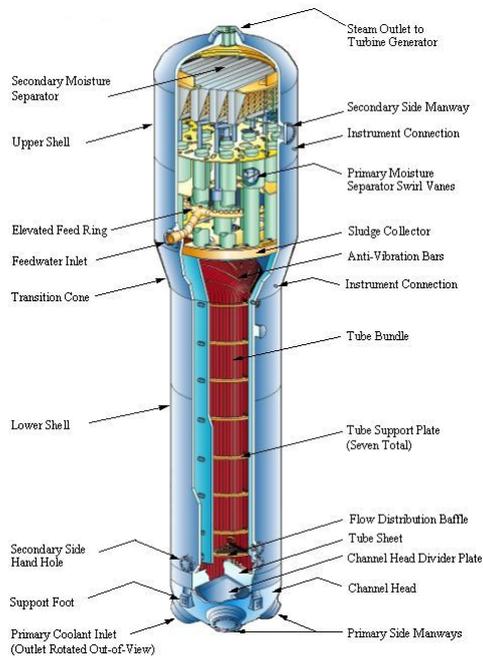


FIG. 1.5 – Générateur de vapeur

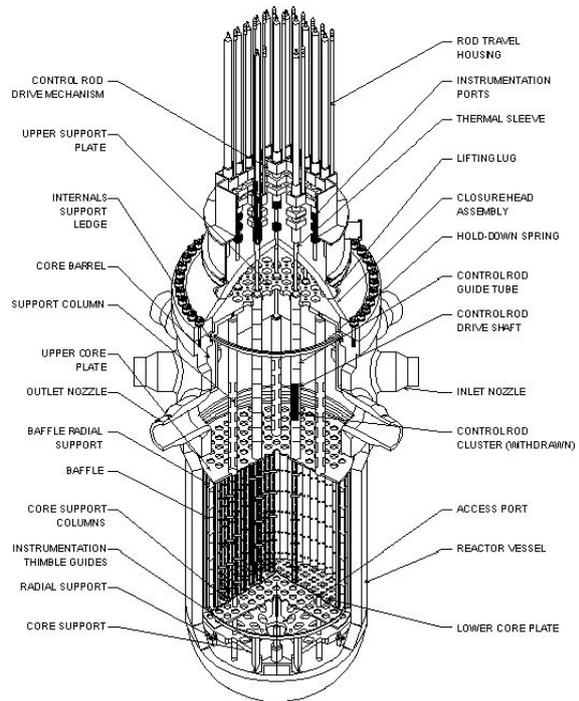


FIG. 1.6 – Cœur de réacteur nucléaire



FIG. 1.7 – Visualisation d'un tube de générateur de vapeur endommagé par vibrations [Che87]

particulier pour l'étude des structures tubulaires. La plupart de ces méthodes s'appuient sur des modèles analytiques reliant les forces fluides à des paramètres d'échelles pertinents. Le système mécanique est étudié sur base modale et les forces sont décomposées suivant leurs modes propres normaux par un processus assurant la fermeture du système. Cette dernière approche est efficace et a été utilisée pour prédire les forces fluides s'exerçant sur un tube seul et sur des composants comme les grappes de commandes, les assemblages combustibles [LNW00], les faisceaux de tubes des échangeurs de chaleur [AGB01]. Toutefois cette technique alimentée par des mesures expérimentales adaptées à chaque configuration étudiée a un coût important. D'où la nécessité de recourir à des méthodes numériques pour être à même d'étudier un grand nombre de configurations industrielles sièges de phénomènes vibratoires induits par les écoulements. Grâce aux développements récents introduits dans les codes de thermohydraulique fine (*i.e.* 3D local), la simulation numérique des couplages fluide structure semble désormais possible sur des cas quasi-industriels. Un couplage a donc été initié par [Ben05] pour des structures à un degré de liberté et un écoulement monophasique. Le but est d'étendre la méthodologie à des structures à plusieurs degrés de libertés. Il existe dans le commerce des outils qui ont fait leurs preuves dans le domaine de l'interaction fluide-structure. L'inconvénient majeur de ces logiciels est leur utilisation sous forme de boîte noire. Dans un domaine d'activité où il faut justifier auprès des autorités de sûreté le comportement des moyens de production, EDF se doit de posséder ses propres outils de calculs qualifiés sur ses applications du domaine nucléaire.

1.2 Les mécanismes des instabilités liées aux interactions fluide-structure

1.2.1 L'oscillateur mécanique

Une structure mécanique se caractérise par une masse et une rigidité, c'est-à-dire une capacité à se déformer. Il existe un lien entre ces paramètres, via un échange entre l'énergie de déformation, qui correspond au travail créé par l'application d'un chargement sur la structure, et l'énergie cinétique, qui est le travail nécessaire pour faire passer la structure d'un état au repos à un état en mouvement. Cet échange entraîne un comportement oscillant de la structure semblable à celui d'une masse accrochée à un ressort. Lorsqu'il n'y a pas de dissipation d'énergie, la vibration de cette dernière se décompose en une somme de sinusoidales (les déformées modales) dont la fréquence de chacune est appelée fréquence propre. Lorsqu'il y a dissipation d'énergie, ce qui est le cas dans la réalité, la structure est caractérisée par un paramètre supplémentaire, l'amortissement, qui est la capacité de la structure à atténuer les oscillations.

Si la structure étudiée est supposée être un corps rigide, alors la description de son mouvement est possible grâce aux trois variables précédemment décrites : la masse M_s , l'amortissement C_s et la raideur K_s . L'équation du mouvement d'un corps rigide selon un degré de liberté se traduit par :

$$M_s \ddot{u}_s(t) + C_s \dot{u}_s(t) + K_s u_s(t) = F(t) \quad (1.1)$$

où $F(t)$ sont les forces appliquées sur la structure, $u_s(t)$, $\dot{u}_s(t)$ et $\ddot{u}_s(t)$ sont, respectivement, le déplacement, la vitesse et l'accélération de la structure. Il est d'usage de réécrire (eqn. 1.1) en simplifiant tous les termes par la masse :

$$\ddot{u}_s(t) + 2\xi\omega_n \dot{u}_s(t) + \omega_n^2 u_s(t) = \frac{F(t)}{M_s} \quad (1.2)$$

avec :

- $\omega_n = \sqrt{\frac{K_s}{M_s}}$, la pulsation de la structure,
- $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$, la fréquence propre de la structure,
- $\xi = \frac{C_s}{2\sqrt{M_s K_s}}$, l'amortissement réduit de la structure.

L'équation (1.2) admet comme solution lorsque qu'aucune force extérieure n'est présente :

$$u_s(t) = e^{-\xi\omega_n t} (A \cos(\omega\sqrt{1-\xi^2}t) + B \sin(\omega\sqrt{1-\xi^2}t)) \quad (1.3)$$

où A et B sont des constantes dépendantes des conditions initiales.

Le comportement d'une structure, et donc son déplacement (eqn. 1.3), peuvent être considérablement modifiés par la présence d'un fluide. Les efforts produits par un écoulement fluide autour d'une structure fixe peuvent se décomposer en une composante moyenne et une composante fluctuante. En fonction des phénomènes mis en jeu agissant sur ces fluctuations, il est possible d'établir une hiérarchisation des interaction fluide-structures [NR94] résumée sur la figure 1.8 (les interactions dues à la composante moyenne des efforts fluides ne sont pas présentées ici). En fonction de cette classification, les instabilités peuvent intervenir pour certains types d'excitations tandis que pour d'autres elles n'apparaissent jamais.

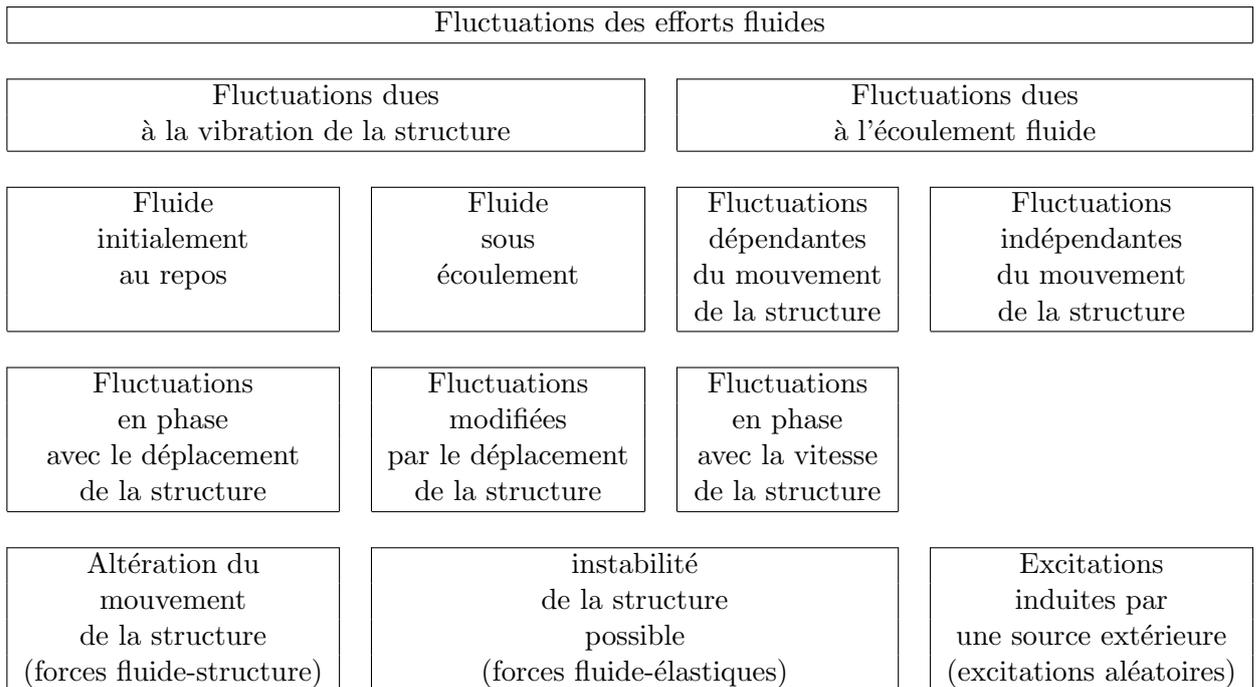


FIG. 1.8 – Schématisation des conséquences sur la structure des excitations dues aux fluctuations du fluide

1.2.2 Les forces fluide-structure

Les excitations liées aux efforts fluide-structure correspondent à une interaction entre une structure vibrante et un fluide au repos en moyenne (*i.e.* le mouvement est uniquement dû à une oscillation induite par la vibration de la structure). La vibration de la structure induit un

mouvement du fluide proportionnel au mouvement de la structure. Les énergies cinétiques de la structure et du fluide sont donc liées puisqu'elles s'expriment en fonction des mêmes variables. D'un point de vue mathématique, la masse apparente de la structure est modifiée puisqu'elle est composée de la masse de la structure et d'une masse provenant de la mise en mouvement du fluide, appelée masse ajoutée. Il est à noter que la masse ajoutée n'est pas la masse de fluide mise en mouvement à cause de l'effet de confinement. Soit un piston poussant un fluide dans un canal composé de deux sections (fig. 1.9). L'énergie cinétique totale du système s'écrit :

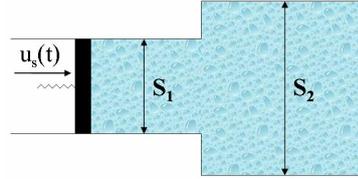


FIG. 1.9 – Description d'un piston poussant un fluide dans un canal composé de deux sections

$$E_c = \frac{1}{2}M_s\dot{u}_s^2 + \frac{1}{2}M_{f1}\dot{u}_s^2 + \frac{1}{2}M_{f2}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\dot{u}_s^2 \quad (1.4)$$

avec : M_{f1} , la masse de fluide dans la première partie du canal de section S_1 et M_{f2} , la masse de fluide dans la seconde partie du canal de section S_2 . La masse ajoutée se définit alors par : $M_a = M_{f1} + M_{f2}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2$ qui peut être supérieure ou inférieure à la masse de fluide déplacée $M_f = M_{f1} + M_{f2}$ selon les valeurs des deux sections du canal.

L'effet de confinement intervient également en relation avec le comportement du fluide. Le profil d'écoulement dans un canal n'est pas le même si le fluide est visqueux (profil parabolique) ou non visqueux (profil front). L'énergie cinétique, et donc la masse ajoutée, en seront affectées. Un troisième effet peut intervenir sur la modification de la masse ajoutée, c'est l'effet inertiel. Il traduit le fait que plusieurs structures en contact du même fluide influent sur le champ de pression fluide qui réciproquement crée des efforts pariétaux influençant le mouvement des structures.

A ce terme de masse ajoutée, s'ajoute un terme lié à l'effet dissipatif que peut avoir le fluide sur la vibration de la structure. Cela est dû à la viscosité du fluide qui "absorbe" et donc implique une diminution de l'énergie de la structure. Deux mécanismes entrent en jeu pour cela : d'une part la contrainte visqueuse à la paroi freine les mouvements tangentiels de la paroi et, d'autre part, dans le reste du domaine la contrainte visqueuse, à travers le champ de pression, agit sur les mouvements normaux de la paroi. L'échange d'énergie entre la structure et le fluide étant plus important du premier vers le second qu'inversement, la structure ne pourra jamais partir en instabilité dans une telle configuration.

Et enfin, dans certains cas, le fluide peut influencer la structure à travers un terme de raideur (tel que la modification de la gravité dans le cas d'une surface libre).

Ce type de couplage est très intéressant d'un point de vue de la validation de code de calcul, puisqu'il existe des cas avec des solutions analytiques. Cela permet en particulier de valider le comportement du code et de vérifier son aptitude à reproduire des effets de masses et d'amortissements ajoutés par un fluide sans écoulement permanent.

1.2.3 Les excitations aléatoires

Ce type d'excitation est indépendant de toutes instabilités du fluide et du mouvement de la structure. Les sources peuvent être très variables. Lorsqu'un écoulement est suffisamment

rapide, il est le siège de fluctuations aléatoires de la vitesse et de la pression, son comportement pouvant devenir turbulent. Au contact d'une structure, les pressions pariétales excitent des vibrations aléatoires dont le niveau peut devenir excessif. De même, certains écoulements diphasiques excitent de façon aléatoire les structures en raison des fluctuations du taux de vide. Ces mécanismes sont généralement étudiés sous la forme d'un spectre d'excitation prédéfini et imposé à la structure (fig 1.10). Cette thèse n'est pas consacrée à cette démarche, ces excitations ne n'y sont donc pas étudiées.

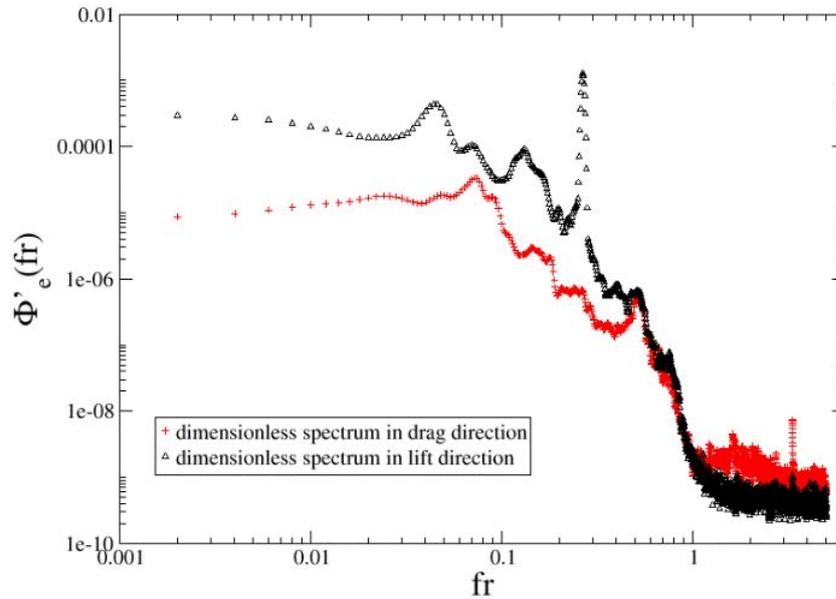


FIG. 1.10 – Spectre d'excitation adimensionné d'un tube rigide sous écoulement transverse [JAPB08]

1.2.4 Le couplage fluide-élastique

Les excitations fluide-élastiques dépendent directement de l'état dynamique de la paroi et donc de la structure. C'est la grande différence avec les forces vues précédemment, car ce mécanisme peut avoir un caractère autoexcitateur ayant pour conséquence une croissance exponentielle des vibrations de la structure selon la théorie linéaire des corps rigides. Ce couplage est donc non conservatif car il autorise un échange irréversible d'énergie mécanique entre l'écoulement moyen et la structure vibrante. Il est alors possible de définir trois comportements de la structure. Dans les applications étudiées par la suite (*i.e.* les instabilités fluide-élastiques), ces mouvements sont dépendant de l'amortissement apparent de la structure, ξ_{fsi} , différent de l'amortissement mécanique, ξ , défini précédemment. L'amortissement apparent est modifié en fonction du comportement du fluide et en particulier par la vitesse d'écoulement. D'un point de vue mathématique, la force fluide va créer un amortissement supplémentaire, qui selon sa nature, permet à la structure de revenir vers un état d'équilibre (fig. 1.11), d'entrer en résonance (fig. 1.12) ou de partir en instabilité (fig. 1.13). La fréquence de la structure peut également être modifiée par des effets de masse ajoutée et de raideur ajoutée.

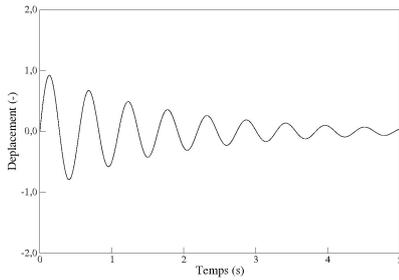


FIG. 1.11 – Cas stable

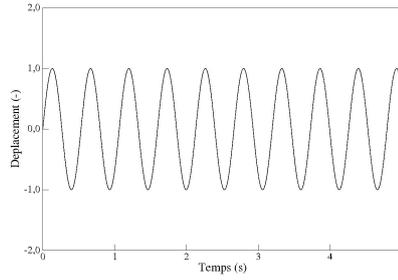


FIG. 1.12 – Cas harmonique

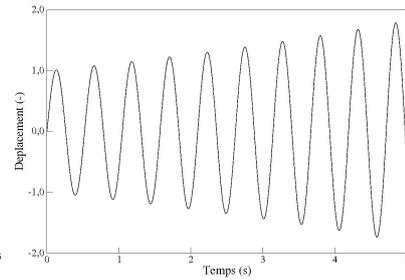


FIG. 1.13 – Cas instable

Différents comportements d'une structure rigide à un degré de liberté

Parmi les différents types d'instabilité fluide-élastiques traduisant ce phénomène, on peut citer :

- l'instabilité statique de flambage où la force statique repousse la masse du système étudiée au lieu de l'attirer vers sa position d'équilibre,
- l'instabilité de flottement par confusion de fréquence qui est le résultat d'un couplage de modes lorsque la vibration de plusieurs structures ou de structures à plusieurs degrés de liberté est étudiée,
- l'instabilité dynamique par annulation de l'amortissement apparent de la structure soumise à un écoulement de fluide.

D'un point de vue mathématique, une variable complexe est définie à partir de la fréquence et de l'amortissement : $\Omega = \omega\sqrt{1 - \chi^2} + j\chi\omega$ en accord avec l'équation 1.2. L'instabilité fluide-élastique apparaît lorsque la partie imaginaire de la variable Ω devient négative, c'est à dire lorsque l'amortissement apparent de la structure devient négatif (la pulsation étant toujours positive). Les autres instabilités apparaissent lorsque Ω devient imaginaire pur. Ce critère sera utilisé dans les résultats des simulations numériques afin de caractériser le départ en instabilité des structures.

1.3 Objectifs

L'objectif de cette thèse est de développer un prototype de couplage entre un outil de CFD (Computational Fluid Dynamic) et un outil de CSD (Computational Structure Dynamic) afin de pouvoir modéliser le départ en instabilité d'une structure soumise à un chargement fluide-élastique.

Dans le chapitre 2, la méthodologie de couplage est présentée. Dans un premier temps, les modèles de couplage sont présentés. Il est, en particulier, expliqué la façon de résoudre le décalage lié à une résolution partitionnée des équations fluide et structure et les conséquences sur les conditions aux limites à l'interface entre les deux domaines. Dans un second temps, les équations de la mécanique des milieux continus sont introduites. Leur formulation est modifiée afin d'introduire la méthode Arbitraire Euler Lagrange (ALE) dans les équations du fluide. Cette méthode a la particularité de permettre une déformation du maillage. Le but est ainsi de permettre au domaine fluide de pouvoir suivre l'interface fluide-structure, puisque la structure est résolue sur un domaine mobile. Et dans un dernier temps, une méthode de projection de données est introduite afin de pouvoir imposer les conditions aux limites sur chaque domaine à partir des données de l'autre code. La raison est que les maillages fluide et structure n'ont pas

toujours les mêmes raffinements ou n'ont pas besoin des valeurs des variables à l'interface au même lieu sur la maille.

Dans le chapitre 3, une étude semi-analytique sur le couplage partitionné est menée. Le cas de deux cylindres vibrant dans un fluide parfait au repos est étudié. Dans un premier temps, une solution analytique en termes de conservation de l'énergie est obtenue. Dans un second temps, les schémas de couplages sont introduits dans le système d'équations fluide-structure afin d'obtenir une formulation semi-analytique. Cela permet de tester un ensemble de schémas et de vérifier leur bon comportement quant à la conservation de l'énergie du domaine étudié. Et enfin, une étude similaire est menée à partir du couplage de codes. Le but est de vérifier que le comportement obtenu avec les différents schémas de couplage est similaire à l'étude semi-analytique. L'erreur liée au schéma de couplage et au code de calcul peut ainsi être quantifiée de manière énergétique.

Dans le chapitre 4, une étude sur l'instabilité d'une structure soumise à un écoulement interne est menée. Dans un premier temps, un calcul est réalisé pour une configuration donnée. Il y est démontré que la structure flexible part en instabilité à partir d'une certaine vitesse d'écoulement. Ce résultat est comparé à d'autres simulations numériques. Dans un second temps, ce cas est repris afin d'introduire une méthode d'incertitude. Le but est de montrer la possibilité d'utiliser la méthode du chaos polynomial afin d'étudier une probabilité de dépassement de seuil (*i.e.* le départ en instabilité de la structure) lorsqu'une variable en entrée est incertaine.

Dans le chapitre 5, une étude sur les faisceaux de tubes est menée. Dans un premier temps, des simulations avec un unique tube mobile sont obtenues. Dans le cas d'un fluide au repos, les résultats sont comparés à une solution semi-empirique et une solution numérique. Dans le cas d'un fluide sous écoulement, le départ en instabilité du tube mobile est recherché et les résultats sont comparés à une autre simulation numérique. Dans un second temps, la simulation est reprise avec un ensemble de tubes mobiles afin de mettre en évidence le départ en instabilité des structures. Enfin, des calculs préliminaires en trois dimensions sont menés.

2

Méthodologie pour le couplage de codes externes

2.1 Le couplage de codes

La modélisation des phénomènes physiques par une approche numérique connaît un engouement important principalement dû à la croissance des moyens de calculs mis à disposition. Les modélisations monodisciplinaires sont arrivées à un point de maturité tel qu'il est désormais possible d'envisager de les coupler entre elles afin de représenter un modèle plus proche de la réalité physique. Le couplage entre ces multiples modèles physiques peut intervenir à différents stades de la modélisation [FPF01] :

- Au niveau de la modélisation mathématique, où un système d'équations est défini afin de regrouper les différents modèles physiques et de les résoudre simultanément. Il s'agit d'une approche monolithique.
- Au niveau de la modélisation numérique, où le principe consiste à utiliser les codes monodisciplinaires existant et à les faire dialoguer. Dans cette vision, les équations des différents modèles physiques ne sont pas résolues simultanément mais consécutivement. Il s'agit d'une approche partitionnée.

Le choix pour l'une ou l'autre méthode dépend des cas à traiter.

Par exemple, dans le cadre de l'étude de l'impact sur la faune et la flore du stockage des déchets radioactifs en milieu souterrain, la seconde approche est mise en œuvre puisqu'il n'y a pas de rétroaction entre les couplages :

- dans un premier temps l'écoulement de l'eau dans les couches géologiques est simulé,
- dans un second temps la remontée des particules radioactives à la surface est obtenue à partir de la cartographie d'écoulement,
- dans un troisième temps les modèles de décroissance radioactive sont utilisés à partir de la durée de remontée des particules (en milliers d'années),
- dans un quatrième temps les modèles de dosimétrie sont utilisés afin de connaître l'impact de la radioactivité sur la faune et la flore, si la radioactivité n'a pas complètement disparue durant la remontée des particules.

Dans le cadre du développement d'une plate-forme dédiée à un domaine d'activité spécifique, la seconde approche est également intéressante puisqu'elle permet une approche modulaire des différentes physiques. La modélisation d'une rivière en est un bon exemple [HB00, Her03]. L'écoulement de la rivière a un impact sur le fond de celle-ci en l'érodant. La modification du fond de la rivière a un effet rétroactif puisque ce changement de topologie modifie l'écoulement de

la rivière. La difficulté de ce couplage est que les échelles de temps entre l'écoulement et l'érosion sont très différentes. La résolution simultanée des équations des deux modèles physiques est donc déconseillée. Il est préférable d'utiliser des codes monodisciplinaires et d'actualiser les conditions à l'interface entre les deux milieux quand cela est nécessaire.

Dans le cadre de physiques fortement couplées, tel que les phénomènes de départ en instabilité de structures induites par écoulements, le choix entre les deux approches est plus difficile.

Le couplage entre un fluide et une structure a lieu à l'interface entre les deux milieux. Les interfaces fluides et structures doivent toujours rester en contact, cela se traduit par deux conditions :

- les deux interfaces se déplacent à la même vitesse,
- les contraintes normales appliquées par chacun des deux milieux sont égales.

Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{u}}_s & \text{sur } \Gamma_{f/s} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_{f/s} \end{cases} \quad (2.1)$$

où \mathbf{v}_f désigne la vitesse du fluide, $\dot{\mathbf{u}}_s$ désigne la vitesse de la structure, $\Gamma_{f/s}$ représente l'interface fluide-structure, $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f$ et $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s$, sont, respectivement, les contraintes fluide et structure, \mathbf{n}_f et \mathbf{n}_s , sont, respectivement, les normales fluide et structure. Afin d'assurer cette égalité à l'interface, les approches monolithique et partitionnée sont envisageables.

2.1.1 Algorithmes monolithiques

L'approche monolithique consiste à résoudre les équations fluide et structure dans un même système d'équations [EP05], [HWD04]. Dans ce cas, les propriétés de conservation sont assurées à l'interface permettant ainsi une stabilité inconditionnelle du schéma de couplage. Le choix du pas de temps est alors limité uniquement par la précision demandée.[Ben91] modélise le couplage à l'aide des équations d'Euler 2D pour le fluide. Une loi de conservation intégrale, basée sur une description mixte eulérienne et lagrangienne, est utilisée afin de regrouper au sein d'un même système les équations fluide et structure. Des formulations aux différences finis pour le fluide et aux éléments finis pour la structure sont utilisées. Le tout est résolu simultanément à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre explicite. La méthode est illustrée sur des problèmes d'aéroélasticité. [Blo98] développe un algorithme fortement couplé en se basant sur le cas du piston avec des équations d'acoustique linéaire et des équations d'Euler non-linéaires pour un fluide compressible et non-visqueux. Il démontre l'avantage de cette méthode en la comparant à des algorithmes partitionnés. Malgré le bon comportement de ces méthodes, ce type d'algorithme demande le développement complet d'un nouveau code de calcul. De plus, les méthodes numériques employées pour le fluide et la structure sont souvent différentes et il est difficile de les faire cohabiter au sein d'un même solveur. D'où l'utilisation répandue des algorithmes partitionnés.

2.1.2 Algorithmes partitionnés

Les équations sont résolues consécutivement en transférant les conditions à l'interface d'un solveur à l'autre. L'avantage est qu'il est possible d'utiliser les codes existant et tirer parti des formulations optimisées pour chaque problème. L'inconvénient de ce type de résolution est que cela provoque un décalage en temps dans la résolution des problèmes (fig .2.1).

Soit, à un instant t^{n+1} , le déplacement donné de l'interface \mathbf{u}_{ifs}^{n+1} . Il est alors possible de résoudre les équations fluide entre un instant t^n et t^{n+1} et d'en déduire les efforts qui s'appliquent

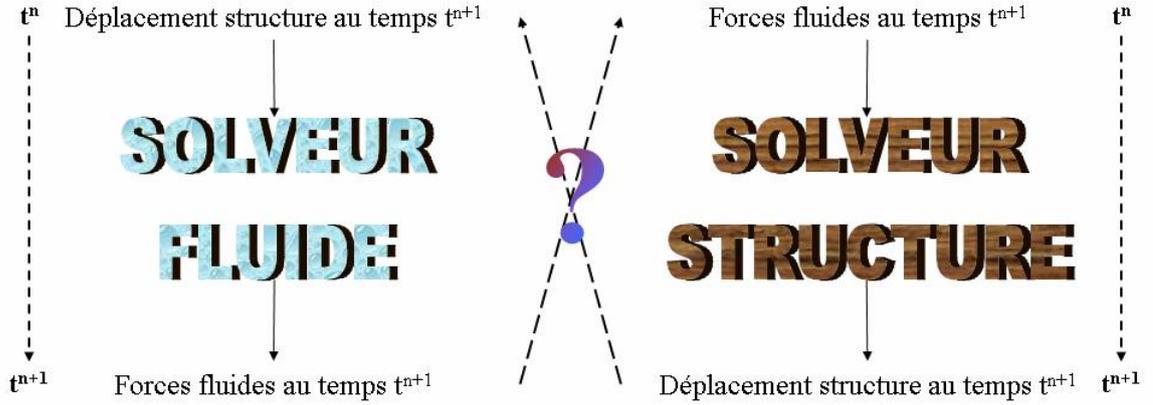


FIG. 2.1 – Problématique de la résolution partitionnée des codes fluide et structure

à la paroi fluide-structure : $\mathbf{F}_f^{n+1} = \mathcal{F}(\mathbf{u}_{ifs}^{n+1})$. Soit, maintenant, les efforts exercés par le fluide sur l'interface donné au temps t^{n+1} . Il est alors possible de calculer le déplacement de la structure et donc de l'interface entre les instants t^n et t^{n+1} : $\mathbf{u}_{ifs}^{n+1} = \mathcal{U}(\mathbf{F}_f^{n+1})$. Le problème du déplacement de l'interface fluide-structure peut alors se formuler sous forme non-linéaire :

$$\mathbf{u}_{ifs}^{n+1} = \mathcal{U} \circ \mathcal{F}(\mathbf{u}_{ifs}^{n+1}) \quad (2.2)$$

Le développement d'un schéma de couplage porte sur les deux conditions de l'interface fluide-structure : le déplacement et la force. La résolution consécutive des deux codes a pour effet de créer ou de dissiper numériquement de l'énergie à l'interface entre les deux domaines. Le choix des prédictions effectuées pour ces deux variables est donc essentiel, puisqu'un choix trop naïf des prédicteurs a pour conséquence d'imposer l'utilisation d'un très faible pas de temps. De nombreuses études ont été menées sur le sujet [PFD77], [FLSL97], [LBVS05], [PFL95].

Algorithme explicite synchrone

Le principe de cet algorithme consiste à résoudre les problèmes fluides et structure au même instant.

Les prédictions sont issues de considérations énergétiques à l'interface entre les deux milieux [PF01]. D'une manière simplifiée, l'énergie transmise à l'interface par le fluide peut être vue durant un pas de temps, comme :

$$\Delta E_f^{n+1} = F_f^{n+1}(x_f^{n+1} - x_f^n) \quad (2.3)$$

où x_f^{n+1} désigne le déplacement fluide au temps n .

De même, l'énergie transmise à l'interface par la structure peut être vue comme :

$$\Delta E_s^{n+1} = E_s^{n+1} - E_s^n \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{2} \dot{u}_s^{n+1} M_s \dot{u}_s^{n+1} + \frac{1}{2} u_s^{n+1} K_s u_s^{n+1} - \frac{1}{2} \dot{u}_s^n M_s \dot{u}_s^n - \frac{1}{2} u_s^n K_s u_s^n \quad (2.5)$$

D'autre part, il est supposé que le système d'équations structure est résolu par un schéma de Newmark :

$$\begin{aligned} M_s \ddot{u}_s^{n+1} + C_s \dot{u}_s^{n+1} + K_s u_s^{n+1} &= F_s^{n+1} \\ \dot{u}_s^{n+1} &= \dot{u}_s^n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_s^{n+1} + \ddot{u}_s^n) \\ u_s^{n+1} &= u_s^n + \frac{\Delta t}{2} (\dot{u}_s^{n+1} + \dot{u}_s^n) \end{aligned} \quad (2.6)$$

La combinaison de (eqn. 2.4) et (eqn. 2.6) permet de récrire l'énergie transférée par la structure sous la forme :

$$\Delta E_s^{n+1} = (u_s^{n+1} - u_s^n) \frac{F_s^{n+1} + F_s^n}{2} - \dot{u}_s^{n+1/2} C_s \dot{u}_s^{n+1/2} \Delta T \quad (2.7)$$

L'énergie liée à l'amortissement de la structure n'est pas à prendre en compte dans le transfert de l'énergie entre les deux domaines, d'où :

$$\Delta E_s^{n+1} - \Delta E_s^n = (u_s^{n+1} - u_s^n) \frac{F_s^{n+1} + F_s^n}{2} - F_f^{n+1} (x_f^{n+1} - x_f^n) \quad (2.8)$$

L'erreur est minimale lorsque l'expression (eqn. 2.8) s'annule. Par décomposition des variables, deux égalités sont à respecter :

$$\frac{F_s^{n+1} + F_s^n}{2} = F_f^{n+1} \quad (2.9)$$

$$u_s^{n+1} - u_s^n = x_f^{n+1} - x_f^n \quad (2.10)$$

Le premier item (eqn .2.9) permet de définir la prédiction à appliquer sur les efforts :

$$F_s^{n+1,P} \simeq 2F_f^{n+1} - F_s^{n,P} \quad (2.11)$$

La seconde égalité (eqn .2.10) est, quant à elle, impossible à assurer. C'est la raison pour laquelle la prédiction du déplacement est, en général, issue d'un développement :

$$x_f^{n+1,p} \simeq u_s^n + c_{s,0}^{exp} \dot{u}_s^n \Delta t + c_{s,1}^{exp} \ddot{u}_s^{n-1} \Delta t \quad (2.12)$$

L'ordre du développement est dépendant du choix des constantes $c_{s,0}^{exp}$ et $c_{s,1}^{exp}$. Avec des valeurs respectives de $\frac{3}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, la prédiction est à l'ordre 2.

Algorithme explicite asynchrone

Une autre approche consiste à résoudre les deux systèmes en décalage. Pour cela, la prédiction du déplacement est faite à l'instant $n + 1/2$:

$$x_f^{n+1/2,p} \simeq u_s^n + c_{s,0}^{exp} \dot{u}_s^n \frac{\Delta t}{2} \quad (2.13)$$

La prédiction de l'effort est simplifiée, puisqu'elle correspond à l'effort fluide calculé :

$$F_s^{n+1,P} \simeq F_f \quad (2.14)$$

En fonction du schéma temporel de résolution du système fluide, les efforts fluides sont obtenus en fonction des variables de pression et de vitesse au temps n , pour un schéma Euler explicite, au temps $n + 1$ pour un schéma Euler implicite et au temps $n + 1/2$ pour un schéma d'ordre 2 Crank-Nicholson. De plus, cet algorithme a de très bonnes propriétés quant à la conservation de la loi géométrique [TL79] (*i.e.* lorsqu'il est nécessaire de déformer le maillage fluide).

Algorithme implicite

Afin d'améliorer les prédictions explicites, des sous-itérations sont ajoutées à chaque pas de temps afin de faire converger la prédiction de l'interface et la position de la structure. Le principe consiste à faire, dans un premier temps, un calcul avec un algorithme explicite synchrone (eqn. 2.12, eqn. 2.11). Puis, dans un deuxième temps, une série de prédictions est effectuée sur le déplacement à partir des données cinématiques de la structure obtenues au sous pas de temps précédent :

- 1 Prédiction initiale du déplacement de l'interface : $x_f^{n+1,0,p} \simeq u_s^n + \frac{3}{2}\dot{u}_s^n \Delta t - \frac{1}{2}\dot{u}_s^{n-1} \Delta t$
- 2 Résolution des équations fluides,
- 3 Prédiction des efforts s'appliquant sur l'interface : $F_s^{n+1,k,P} \simeq F_f$
- 4 Résolution des équations structures,
- 5 Test de convergence $\frac{\|F_s^{n+1,k,P} - F_s^{n+1,k-1,P}\|}{\|F_s^{n+1,k-1,P}\|} \leq \epsilon ?$
 - Pas de temps suivant si test réussi.
 - Sinon, prédiction du déplacement : $x_f^{n+1,k,p} \simeq c_{s,0}^{imp} u_s^{n+1,k-1,p} + (1 - c_{s,0}^{imp}) x_f^{n+1,k-1,p}$ et retour en 2.

[APH03] utilise cette algorithme en considérant le cas d'une structure rigide où la vitesse de cette dernière est obtenue directement par une méthode de Newton-Raphson. [GV03] propose un modèle réduit d'interaction fluide-structure afin de pouvoir en déduire l'opérateur tangent utilisé dans la prédiction du déplacement des sous-itérations et permettant une accélération de la convergence.

2.2 Contexte industriel

Le développement d'un outil numérique dans un contexte industriel a un impact important sur les choix de méthodes utilisés pour le développement de l'outil. Cela est encore plus vrai lorsqu'il s'agit de coupler deux codes monodisciplinaires ayant chacun une logique propre. Il est nécessaire de respecter la rigueur et la démarche propre à chaque logiciel qui sont sources de qualité et de robustesse. Cette vision peut être vue comme très contraignante dans le cadre du développement d'un outil puisque, de facto, un certain nombre de démarches doivent être abandonnées. Mais il faut garder à l'esprit que ces codes ont un retour d'expérience important dans leur discipline respective, et au gré de leurs utilisations, un nombre important d'options et d'améliorations ont été ajoutés. Il est donc très attrayant de pouvoir se reposer sur des codes qui ont déjà fait leurs preuves. La démarche exposée ci-après est motivée par la volonté de minimiser l'impact sur les codes du développement lié au couplage fluide-structure afin de pouvoir utiliser au mieux, par la suite, l'ensemble des fonctionnalités offertes par chacun des codes.

Le choix ayant été fait de faire un couplage de codes externe (ou partitionné), la seule information que les deux codes peuvent s'échanger se traduit par les conditions limites à l'interface qui varient au cours du temps (fig. 2.2) :

- le logiciel fluide envoie les contraintes normales qu'il applique sur l'interface fluide-structure au logiciel structure,
- le code structure envoie la nouvelle position de l'interface au code fluide.

Le premier item est assez simple à vérifier puisque les contraintes normales s'appliquant sur une surface peuvent être traduites en effort :

$$\mathbf{F}_f = \int_{\Gamma_{f/s}} \bar{\sigma}_f \cdot \mathbf{n}_f d\mathbf{S} \quad (2.15)$$

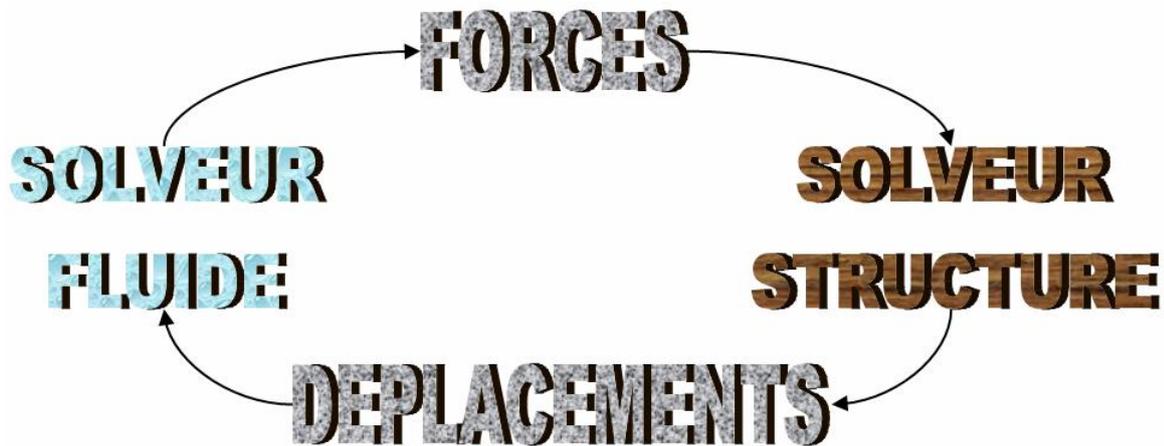


FIG. 2.2 – Couplage fluide-structure partitionné

Il suffit donc de transférer les efforts calculés lors de la résolution du problème fluide au solveur structure tout en respectant la formulation du schéma de couplage choisi.

Le second item est plus difficile à vérifier puisqu'il demande aux deux codes de pouvoir suivre l'interface mobile fluide-structure au cours du temps. La difficulté provient du fait que la résolution du problème structure est réalisée par une formulation lagrangienne (le domaine se déforme au cours du temps) tandis que la résolution du problème fluide est effectuée avec une formulation eulérienne (le domaine reste fixe au cours du temps). Il est donc nécessaire d'adapter la formulation de l'un ou l'autre code afin que l'interface puisse être suivie par les deux solveurs. Il a été choisi de modifier le logiciel fluide en utilisant la méthode Arbitraire Lagrange Euler (ALE) qui a la particularité d'être une formulation hybride entre les formulations eulérienne et lagrangienne. Le grand intérêt de la formulation ALE est de pouvoir utiliser les potentialités de la formulation lagrangienne à proximité de l'interface fluide-structure afin de suivre la déformation de la structure et les potentialités de la formulation eulérienne loin de la structure où le domaine peut rester fixe. Cette formulation a le désavantage d'impacter le code fluide assez lourdement et pose des questions du point de vue de la réécriture des équations fluide et de la déformation du domaine fluide.

Un autre point à traiter pour réaliser un couplage par code externe est le transfert de données. Généralement les discrétisations spatiales des deux codes sont différentes avec un raffinement plus ou moins important pour chacun des codes en fonction de la problématique physique traitée. Il est donc nécessaire d'avoir un algorithme qui puisse transférer les déplacements de la discrétisation spatiale du domaine structure sur la discrétisation spatiale du domaine fluide et inversement pour les efforts (ou les contraintes normales) [MF95, FDKL98].

Pour résumer, la méthodologie choisie pour le développement d'un coupleur fluide-structure nécessite trois axes de développement :

- La prédiction des conditions limites en déplacement et en effort afin de pouvoir résoudre consécutivement les deux solveurs,
- La modification du code fluide afin de pouvoir suivre l'interface structure au cours du temps (formulation ALE),
- Le transfert de données liées aux conditions aux limites à l'interface entre les deux codes afin d'avoir des discrétisations spatiales différentes.

Dans le cadre du développement du présent coupleur, ces points se basent sur les travaux

initiés par [Gui98] et [Ben05].

2.3 Description des milieux continus

2.3.1 Systèmes de coordonnées

Le mouvement d'un milieu continu dans l'espace est connu si la trajectoire de chacun des points matériels du milieu continu est donnée, c'est à dire, si la fonction suivante est connue :

$$L = L(\mathbf{X}, t) \quad (2.16)$$

Soient \mathbf{X} les coordonnées d'un point matériel décrivant son mouvement à un instant t . Ce sont les coordonnées initiales, au temps t^0 , du point matériel considéré. Une telle description d'un milieu continu est appelée description lagrangienne puisqu'elle est fonction des données initiales du milieu continu et du temps.

Une autre description du milieu continu consiste à utiliser des fonctions définies par les coordonnées \mathbf{x} au temps courant t . Dans ce cas, le mouvement d'un milieu continu est décrit par la fonction suivante :

$$E = E(\mathbf{x}, t) \quad (2.17)$$

Cette description est appelée description eulérienne.

La conséquence du choix de l'une ou l'autre des formulations est que dans un cas, la description lagrangienne, le domaine se déplace au cours du temps, tandis que dans l'autre, la description eulérienne, le domaine de calcul reste fixe au cours du temps.

Une description plus générale du milieu continu peut être définie. La vitesse de déplacement du référentiel devient une variable de calcul : lorsque celle-ci est nulle, le référentiel d'étude est le référentiel eulérien ; lorsque la vitesse est égale à la vitesse du domaine considéré, le référentiel d'étude est le référentiel lagrangien. Pour des vitesses autres, le référentiel d'étude est un référentiel arbitraire se déplaçant à une vitesse arbitraire. Pour ce type de formulation, la fonction de description du mouvement suivante est introduite :

$$ALE = ALE(\boldsymbol{\zeta}, t) \quad (2.18)$$

Trois types de coordonnées ont donc été définis : dans le référentiel lagrangien \mathbf{X} , dans le référentiel eulérien \mathbf{x} , dans un référentiel mathématique arbitraire $\boldsymbol{\zeta}$ (fig .2.3).

Soit $\boldsymbol{\varphi}$, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme permettant de passer du référentiel lagrangien au référentiel eulérien :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+ \text{ avec } k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ (\mathbf{X}, t) & \rightarrow (\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Soit $\boldsymbol{\Phi}$, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme permettant de passer du référentiel arbitraire au référentiel eulérien :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+ \text{ avec } k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ (\boldsymbol{\zeta}, t) & \rightarrow (\mathbf{x}, t) = (\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\zeta}, t), t) \end{cases} \quad (2.20)$$

Soit $\boldsymbol{\Psi}$, un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme permettant de passer du référentiel arbitraire au référentiel lagrangien :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+ \text{ avec } k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ (\boldsymbol{\zeta}, t) & \rightarrow (\mathbf{X}, t) = (\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\zeta}, t), t) \end{cases} \quad (2.21)$$

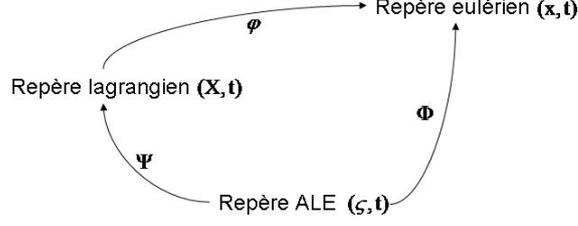


FIG. 2.3 – Changement de coordonnées entre les repères Lagrangien, Eulérien et ALE

2.3.2 Lemme fondamental de la physique des milieux continus

Définition 1 Une famille \mathcal{F} d'ensembles ouverts D d'un domaine \mathcal{D} est dite dense dans \mathcal{D} si, pour tout point M intérieur à \mathcal{D} et pour tout voisinage \mathcal{V} de M , il existe au moins un ensemble D de la famille intérieur à \mathcal{V} .

Lemme 1 Soient $\Phi(M)$ une fonction définie et continue dans le domaine \mathcal{D} et \mathcal{F} une famille dense dans \mathcal{D} . Si pour tout D de \mathcal{F} , l'intégrale de Φ dans D est nulle, alors la fonction Φ est identiquement nulle dans \mathcal{D} .

La conséquence de ce lemme est :

$$\int_{\Omega} \Phi(M) dV = 0 \quad \forall \Omega \Rightarrow \Phi(M) = 0 \quad (2.22)$$

avec Ω un volume, une surface ou une courbe.

2.3.3 Conservation de la masse

Soit $\Omega(t)$ un domaine matériel du milieu continu. Au cours du mouvement, ce domaine varie quant à sa forme mais sa masse ne varie pas. Cela se traduit par :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (2.23)$$

avec M et ρ , respectivement, la masse et la masse volumique du domaine Ω .

La dérivée d'une fonction dépendant du temps peut se récrire sous la forme (annexe A) :

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t)) \right) dV = 0 \quad (2.24)$$

D'après (lem. 1), une formulation locale de l'équation de conservation de la masse est obtenue à partir de (eqn. 2.24) :

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_f(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (2.25)$$

2.3.4 Conservation de la quantité de mouvement

La loi fondamentale de la dynamique traduit le fait que pour tout milieu continu, le torseur des quantités d'accélération est égal au torseur des forces extérieures s'exerçant sur le domaine matériel considéré. Soit le milieu continu décomposé en deux parties. Si l'on considère l'une des deux parties, celle-ci vérifie le principe fondamental de la dynamique si elle fait apparaître sur sa section "coupée" des actions qui traduisent l'action de l'autre partie sur la partie considérée. Ce sont les efforts internes du milieu continu et sont la conséquence des efforts extérieurs déformant le milieu continu. Le principe fondamental se traduit donc sous forme mathématique, pour l'un des deux domaines Ω_1 :

$$[D]_{\Omega_1} = [T]_{\Omega_1} + [T]_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1} \quad (2.26)$$

avec $[D]_{\Omega_1}$, le torseur des quantités d'accélération, $[T]_{\Omega_1}$, le torseur des efforts extérieurs appliqués sur le domaine Ω_1 et $[T]_{\Omega_2 \rightarrow \Omega_1}$ le torseur des efforts internes qu'applique le domaine Ω_2 sur le domaine Ω_1 .

Les résultantes de ces torseurs permettent d'obtenir la formulation intégrale de l'équation de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_1(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\Sigma(t)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dS + \int_{\Omega_1(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.27)$$

L'utilisation du théorème de Green-Ostrogradsky et la permutation dérivée intégrale (annexe A) permet de récrire (eqn. 2.27) sous la forme d'une intégrale de volume :

$$\int_{\Omega_1(t)} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \bullet \left(\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \otimes \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \right) dV = \int_{\Omega_1(t)} \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)) dV + \int_{\Omega_1(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.28)$$

D'après (lem. 1), une formulation locale de l'équation de quantité de mouvement est obtenue à partir de (eqn. 2.28) :

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \bullet \left(\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \otimes \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.29)$$

Une seconde forme de l'équation de quantité de mouvement (eqn. 2.27) peut être obtenue en utilisant (annexe A avec $\phi = \dot{\mathbf{u}}$).

$$\int_{\Omega_1(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \frac{d\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}{dt} dV = \int_{\Omega_1(t)} \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)) dV + \int_{\Omega_1(t)} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.30)$$

D'après (lem. 1), une formulation locale de l'équation de quantité de mouvement est obtenue à partir de (eqn. 2.30) :

$$\rho(\mathbf{x}, t) \frac{d\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.31)$$

2.3.5 Formulation des problèmes fluide et structure

Problème structure

La description du problème structure dans le référentiel lagrangien est effectuée grâce à l'équation (2.31). La formulation locale du problème est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_s \frac{d^2 \mathbf{u}_s}{dt^2} = \mathbf{f}_s + \nabla \bullet (\bar{\bar{\sigma}}_s) & \text{sur } \Omega_s \\ \bar{\bar{\sigma}}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{T}_{impo} & \text{sur } \Gamma_{s, fimpo} \\ \mathbf{u}_s = \mathbf{u}_{impo} & \text{sur } \Gamma_{s, uimpo} \end{array} \right. \quad (2.32)$$

où \mathbf{T}_{impo} représente les efforts surfaciques imposés sur une partie du bord du domaine structure $\Gamma_{s, fimpo}$ et \mathbf{u}_{impo} représente les déplacements imposés sur une partie du bord du domaine structure $\Gamma_{s, uimpo}$.

A cette équation s'ajoute une loi de comportement du matériau étudié. Dans le domaine élastique linéaire, le tenseur des contraintes est défini par la loi de Lamé :

$$\bar{\bar{\sigma}}_s = \lambda_l \theta \bar{\bar{I}} + 2\mu_l \bar{\bar{\varepsilon}}_s \quad (2.33)$$

avec $\bar{\bar{\varepsilon}}_s = \frac{1}{2}(\overline{\nabla \mathbf{u}_s} + {}^t \overline{\nabla \mathbf{u}_s})$ le tenseur de déformation, θ la trace de $\bar{\bar{\varepsilon}}_s$, $\bar{\bar{I}}$ le tenseur unité et λ_l et μ_l les coefficients de Lamé.

Problème fluide

La description du problème fluide dans le référentiel eulérien est effectuée grâce aux équations (2.25) et (2.29). Le fluide est considéré incompressible, la masse volumique est donc indépendante du temps, ce qui permet de simplifier l'équation de conservation de la masse. La formulation locale du problème est :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \bullet (\mathbf{v}_f) = 0 & \text{sur } \Omega_f \\ \frac{\partial \rho_f \mathbf{v}_f}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho_f \mathbf{v}_f \otimes \mathbf{v}_f) = \mathbf{f}_f + \nabla \bullet (\bar{\bar{\sigma}}_f) & \text{sur } \Omega_f \\ \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_{impo} & \text{sur } \Gamma_{f, vimpo} \\ \bar{\bar{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\bar{\sigma}}_{impo} \cdot \mathbf{n}_f & \text{sur } \Gamma_{f, pimpo} \end{array} \right. \quad (2.34)$$

où \mathbf{v}_{impo} représente les vitesses imposées sur une partie du bord du domaine fluide $\Gamma_{f, vimpo}$ et $\bar{\bar{\sigma}}_{impo}$ représente les contraintes imposées sur une partie du bord du domaine fluide $\Gamma_{f, pimpo}$. A ces équations s'ajoute une loi de comportement du fluide modélisé. Pour un fluide newtonien en écoulement laminaire, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\bar{\bar{\sigma}}_f = -p \bar{\bar{I}} + 2\mu \bar{\bar{D}}_f \quad (2.35)$$

avec $\bar{\bar{D}}_f = \frac{1}{2}(\overline{\nabla \mathbf{v}_f} + {}^t \overline{\nabla \mathbf{v}_f})$ le tenseur des vitesses de déformation.

C'est la formulation classique pour résoudre les équations de Navier-Stokes. L'inconvénient de cette formulation, comme vu précédemment, est qu'elle n'est valable que sur un domaine fixe. Il est donc nécessaire de la modifier pour pouvoir l'utiliser sur un domaine mobile et ainsi pouvoir suivre l'interface fluide-structure au cours du temps.

Conditions à l'interface fluide-structure

$$\begin{cases} \mathbf{v}_f = \dot{\mathbf{u}}_s & \text{sur } \Gamma_{f/s} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \cdot \mathbf{n}_f = \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s \cdot \mathbf{n}_s & \text{sur } \Gamma_{f/s} \end{cases} \quad (2.36)$$

2.4 Formulation ALE des équations de Navier-Stokes

2.4.1 Introduction

Afin de pouvoir mettre en place le couplage, il est nécessaire de connaître la position de l'interface au cours du temps. Lorsque le solveur fluide est résolu sur un domaine fixe et le domaine structure sur un domaine mobile, il est nécessaire de modifier les équations de l'un des deux milieux afin de pouvoir suivre l'interface au cours du temps. Dans le cas de petits déplacements, les méthodes de transpirations ont l'avantage de ne pas impacter fortement le code [FV01, Ren98]. Le principe est de conserver le maillage fluide fixe. Le déplacement de la structure est considéré, du point de vue du fluide, comme un développement limité des conditions aux limites à l'interface autour de la position initiale de la structure. Les conditions aux limites sont donc modifiées au cours du temps afin de prendre en considération le mouvement de la structure. L'inconvénient de cette méthode est sa restriction à de très petits déplacements afin de conserver les hypothèses sur les conditions limites à l'interface fluide-structure.

Une approche alternative consiste à déformer le domaine fluide afin de pouvoir suivre l'interface entre les deux milieux et permettre de plus grands déplacements qu'avec la méthode vue précédemment. La formulation Arbitraire Lagrange Euler (ALE) [DHPRF04] est une approche pour déformer le maillage. Le principe est de décrire les équations fluides dans un référentiel arbitraire. Cela est réalisé par l'ajout d'une vitesse de maillage dans les équations. La valeur de cette vitesse permet de déformer plus ou moins le domaine en fonction de la position des mailles. Lorsque ces dernières sont loin de l'interface mobile, la vitesse est nulle, les mailles ne sont alors pas déformées (approche eulérienne). Lorsque les mailles sont proches de l'interface, la vitesse arbitraire est proche de la vitesse de déplacement de l'interface afin d'assurer le recollement des domaines fluide et structure (approche lagrangienne). Pour le reste du domaine, des vitesses intermédiaires sont utilisées afin de permettre une déformation lisse du domaine. Pour cela, la grille de calcul peut être mise à jour en résolvant une équations de diffusion [SOL00] ou en faisant l'analogie entre le maillage et un système de ressorts permettant ainsi de résoudre une équation d'un oscillateur mécanique [FDKL98, DF02]. Un des inconvénients de ces méthodes est la nécessité d'un remaillage fréquent du domaine pouvant entraîner des non-conformités du domaine. Les méthodes Chimère [CW98] ont la particularité de superposer plusieurs maillages et de les faire glisser les uns sur les autres. Elles sont toutefois limitées à des mouvements de corps rigides mais leurs utilisations est très intéressante puisqu'aucun remaillage n'est nécessaire.

2.4.2 Description ALE des équations de Navier-Stokes

Principe de la formulation ALE

La description physique d'un milieu fluide ou structure peut être réalisée de deux manières. La première consiste à suivre l'évolution d'une particule du milieu au cours du temps, il s'agit d'une description lagrangienne. La seconde consiste à se placer en une position fixe au cours du temps et regarder les particules qui passent par cette position, il s'agit d'une description

eulérienne. La résolution d'un problème fluide est généralement effectuée grâce à une formulation eulérienne, le domaine de calcul restant fixe au cours du temps, tandis que le problème structure est généralement décrit par une formulation lagrangienne, le domaine se déformant au cours du temps. Physiquement, lors d'une interaction, les deux milieux doivent rester en contact au cours du temps. Dans le cadre d'une simulation par couplage de codes, des modifications doivent donc être apportées à l'une ou l'autre des formulations pour pouvoir réaliser une simulation numérique avec de tels outils. La méthode Arbitraire Lagrange-Euler consiste à définir un référentiel arbitraire dans lequel vont être calculées les variables physiques fluide. Ce référentiel est une généralisation des référentiels lagrangien et eulérien. Dans ce référentiel, les nœuds du maillage se déplacent d'une valeur arbitraire généralement comprise entre celles des descriptions lagrangienne et eulérienne (fig. 2.4). Pour les nœuds près de l'interface fluide-structure, la vitesse de la structure est utilisée (description lagrangienne) ce qui permet de suivre l'interface, tandis que loin de cette interface les nœuds peuvent rester fixes, une vitesse nulle peut donc être utilisée (description eulérienne). Une vitesse intermédiaire est utilisée pour les nœuds compris entre ces deux descriptions afin de permettre une déformation lisse du maillage. Le calcul dans un tel domaine implique une reformulation des équations du fluide dans ce repère.

Relation fondamentale en ALE

La dérivation du passage des coordonnées lagrangiennes aux coordonnées eulériennes peut être réalisée soit directement, soit en passant par les coordonnées ALE (fig. 2.3) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \Phi \circ \Psi^{-1}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t)}(\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t), t) + \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi^{-1}} \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (2.38)$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\boldsymbol{\zeta}}(\boldsymbol{\zeta}, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (2.39)$$

Cela permet d'en déduire une relation fondamentale entre les trois repères :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{ale} + \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (2.40)$$

Il pourra être noté l'apparition de la vitesse de maillage \mathbf{v}_{ale} . C'est une valeur arbitraire, qui permet de définir localement le problème comme lagrangien ($\mathbf{v}_{ale} = \mathbf{v}$, identification de $\boldsymbol{\zeta}$ à \mathbf{X} , d'où $\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = 0$) ou eulérien ($\mathbf{v}_{ale} = 0$, identification de $\boldsymbol{\zeta}$ à \mathbf{x} , d'où $\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = 1$).

Conservation de la masse

Pour obtenir une formulation ALE de l'équation de la masse, le principe consiste à définir l'équation de conservation de la masse dans le repère eulérien en transitant par les coordonnées ALE. Le fait d'être dans le repère eulérien permet l'inversion entre l'intégrale et la dérivée, il reste alors à exprimer la dérivée particulière. Celle-ci fait apparaître une dérivation par rapport à une fonction composée : la masse volumique est dépendante des coordonnées ALE elles-mêmes

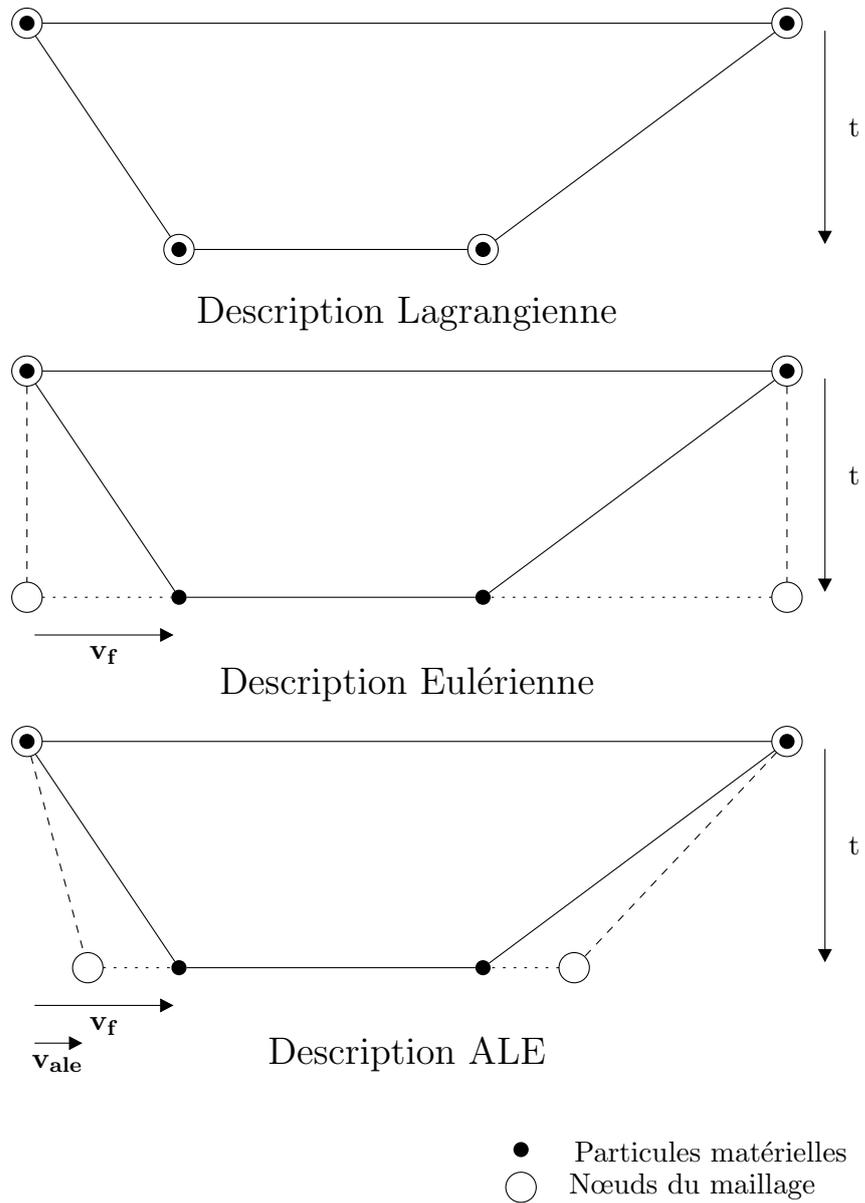


FIG. 2.4 – Référentiels Lagrangien, Eulérien et ALE [DHPRF04]

dépendantes des coordonnées eulériennes, d'où :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \rho_f(\mathbf{X}, t) d\Omega_f(t) = 0 \quad (\text{repère lagrangien}) \quad (2.41)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f^{ALE}(t)} \rho_f(\Psi^{-1}(\mathbf{X}, t), t) J_{\Psi^{-1}}(\mathbf{X}, t) d\Omega_f^{ALE}(t) = 0 \quad (\text{repère ALE}) \quad (2.42)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(0)} \rho_f(\Phi \circ \Psi^{-1}(\mathbf{X}, t), t) J_{\Phi \circ \Psi^{-1}}(\mathbf{X}, t) d\Omega_f(0) = 0 \quad (\text{repère eulérien}) \quad (2.43)$$

Grâce à (ann. A) et la relation fondamentale (eqn. 2.40), l'équation précédente (eqn. 2.41) se réécrit :

$$\int_{\Omega_f(0)} \left(\left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right)_{|\mathbf{x}} + \frac{\partial \rho_f}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \Psi^{-1}} \frac{\partial \Psi^{-1}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right) J_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) + \rho_f(\mathbf{x}, t) \frac{dJ_{\mathbf{x}}}{dt}(\mathbf{X}, t) d\Omega_f(0) = 0 \quad (2.44)$$

$$\int_{\Omega_f(0)} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t}(\mathbf{x}, t)_{|\mathbf{x}} + \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}(\rho_f) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ale}) + \rho_f \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\mathbf{v}) \right) J_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) d\Omega_f(0) = 0 \quad (2.45)$$

Le fluide étant considéré incompressible, la masse volumique ρ est indépendante de l'espace et du temps, d'où :

$$\int_{\Omega_f(0)} \rho_f \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\mathbf{v}) d\Omega_f(0) = 0 \quad (2.46)$$

Ceci permet d'obtenir la formulation locale de l'équation de conservation de la masse en ALE pour un fluide incompressible :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\mathbf{v}) = 0 \quad (2.47)$$

Quantité de mouvement

Une démarche analogue est utilisée pour exprimer l'équation de quantité de mouvement. La masse volumique et la vitesse sont exprimées en coordonnées eulériennes en transitant par les coordonnées ALE. Seule la dérivée particulaire a besoin de ce traitement, puisqu'il est nécessaire d'intervertir la dérivée particulaire avec l'intégrale de volume. Les termes associés au tenseur des contraintes et aux efforts extérieurs peuvent directement être décrits dans le repère eulérien :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \rho_f(\mathbf{X}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) d\Omega(t) = \int_{\Sigma_f(t)} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{X}, t) d\Sigma(t) + \int_{\Omega_f(t)} \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) d\Omega(t) \quad (2.48)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \rho_f(\mathbf{X}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(0)} \rho_f(\Phi \circ \Psi^{-1}(\mathbf{X}, t), t) \mathbf{v}(\Phi \circ \Psi^{-1}(\mathbf{X}, t), t) J_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) d\Omega_f(0) \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega_f(0)} \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{|\mathbf{x}} + \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ale}) \Big) J_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) d\Omega_f(0) \\ &+ \int_{\Omega_f(0)} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \right) J_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) d\Omega_f(0) \quad (2.50) \end{aligned}$$

La dépendance des fonctions ρ et \mathbf{v} aux variables (\mathbf{x}, t) et de la fonction $J_{\mathbf{x}}$ aux variables (\mathbf{X}, t) est implicite dans les équations suivantes.

L'équation de conservation de la masse (eqn. 2.45) permet de réexprimer la dérivée partielle en temps sous la forme :

$$\int_{\Omega_f(0)} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \right) J_{\mathbf{x}} d\Omega_f(0) = \int_{\Omega_f(0)} \left(\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \right) J_{\mathbf{x}} d\Omega_f(0) + \int_{\Omega_f(0)} \left(\mathbf{v} \frac{\partial \rho_f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \right) J_{\mathbf{x}} d\Omega_f(0) \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega_f(0)} \left(\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \right) J_{\mathbf{x}} d\Omega_f(0) \\ &\quad - \int_{\Omega_f(0)} \left(\nabla_{\boldsymbol{\zeta}}(\rho_f) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ale}) + \rho_f \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\mathbf{v}) \right) \mathbf{v} J_{\mathbf{x}} d\Omega_f(0) \end{aligned} \quad (2.52)$$

L'équation (2.52) permet de simplifier la partie convective de l'équation de quantité de mouvement (eqn. 2.50) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \rho_f(\mathbf{X}, t) \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) dV = \int_{\Omega_f(0)} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ale}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{v} \right) J_{\mathbf{x}} d\Omega_f(0) \quad (2.53)$$

Les équations (2.48) et (2.53) permettent d'obtenir une formulation intégrale de l'équation de quantité de mouvement :

$$\int_{\Omega_f(0)} \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ale}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{v} \right) J_{\mathbf{x}} d\Omega_f(0) = \int_{\Omega_f(0)} \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\bar{\boldsymbol{\sigma}}) J_{\mathbf{x}} d\Omega(0) + \int_{\Omega_f(O)} \mathbf{f} J_{\mathbf{x}} d\Omega(0) \quad (2.54)$$

D'où la formulation locale ALE de l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ale}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}) \mathbf{v} \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{f} \quad (2.55)$$

Il pourra être noté que la formulation ALE de la quantité de mouvement diffère de la formulation eulérienne uniquement par l'apparition d'un terme de flux dans la partie convective de l'équation dépendant de la vitesse arbitraire de maillage \mathbf{v}_{ale} et fonction de la variable ($\boldsymbol{\zeta}$). L'hypothèse est faite que les divergences selon \mathbf{x} et $\boldsymbol{\zeta}$ sont identiques. De plus, le choix de la vitesse de maillage \mathbf{v}_{ale} est arbitraire. Cette dernière permet de décrire la partie convective de l'équation dans les repères lagrangien, eulérien ou intermédiaire en fonction de la proximité du point considéré de l'interface mobile et des bords fixes du domaine.

Déformation de maillage

Afin de résoudre l'équation de quantité de mouvement (eqn. 2.55), il est nécessaire de calculer dans un premier temps la vitesse de déformation du maillage. Le choix de l'algorithme de déformation de maillage est un aspect important de la formulation ALE puisqu'il est utilisé à chaque pas de temps de calcul. Il est donc nécessaire qu'il soit assez robuste pour éviter des déformations trop importantes des mailles pouvant entraîner une dégénérescence de ces dernières. Un autre point important est l'utilisation de cet algorithme pour des maillages de formes très diverses. Et le dernier point est d'avoir un algorithme suffisamment rapide pour ne pas trop pénaliser le calcul d'ensemble. Malheureusement, il n'existe pas de méthode de déformation de maillage assurant ces trois critères. Le premier est en particulier mis en défaut par l'ensemble des méthodes. Parmi les méthodes performantes, on peut citer les algorithmes considérant le maillage comme constitué d'éléments de raideur (les arêtes des maillages) et d'éléments de torsion (spécifiés aux noeuds et décrits en fonction des angles des éléments) [FDKL98]. Dans ce cas,

une équation structure statique est résolue afin de déformer le maillage. D'autres méthodes se basent sur des considérations algébriques, le déplacement de chaque nœud est alors calculé très rapidement puisqu'aucun système n'est à résoudre [DGH82]. Il a été choisi d'utiliser un autre algorithme basé sur une équation de diffusion. Une description de la méthode avec l'utilisation d'un tenseur de Cauchy pourra être trouvée dans [SZ01]. Ci-après, une formulation plus simple est décrite :

$$\begin{cases} \nabla \bullet (\bar{\lambda} \nabla(\mathbf{v}_{ale})) = 0 \\ \mathbf{v}_{ale} = \mathbf{v}_{impose} & \text{sur } \Gamma_{f/s} \\ \mathbf{v}_{ale} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_f \setminus \Gamma_{f/s} \end{cases}$$

La variable $\bar{\lambda}$ permet de contrôler la déformation de maillage. Elle permet de définir en chaque entité du maillage à résoudre et selon chaque direction une constante. En fonction de la valeur de la constante, la maille se déforme plus ou moins. En particulier, à proximité de l'interface mobile, il est intéressant de conserver un bon raffinement du maillage afin de conserver la qualité du calcul des efforts, une valeur élevée de cette constante est utilisée. La conséquence est que toutes les mailles à proximité se déplacent en bloc avec l'interface fluide-structure. Un exemple de mise en pratique de cette constante peut être trouvée dans [Ben05].

Loi de conservation géométrique

La loi de conservation géométrique (eqn. A.15) traduit le fait que la variation de volume (ou de surface pour un modèle 2D) de chaque élément entre les instants t^n et t^{n+1} doit être égale au volume (ou la surface) balayée par les éléments de bord pendant l'intervalle de temps (eqn. 2.56).

$$\Omega^{n+1} - \Omega^n = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\Gamma_{ALE}} \mathbf{v}_{ale} \cdot \mathbf{n} dS \right) dt \quad (2.56)$$

Soit un calcul exact des volumes des termes de gauche de l'équation (2.56), il reste la question sur la manière de calculer exactement les termes de flux décrits dans le terme de droite. Le calcul de ce flux a une conséquence sur le calcul de la vitesse de déformation de maillage. Pour des schémas d'intégration temporelle du premier ordre, la vitesse de maillage doit être choisie comme suit [LF96, FGG01] :

$$\mathbf{v}_{ale}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\Delta t} \quad (2.57)$$

Il a été choisi lors du développement du coupleur de calculer la vitesse de déformation de maillage comme préconisé (eqn. 2.57) puisque cette vitesse est par définition arbitraire.

Algorithme de résolution avec la méthode ALE

Le code de calcul fluide utilisé étant résolu en volumes finis, le solveur a été développé pour calculer les valeurs des variables au centre des éléments. Il a été vu précédemment que la déformation de maillage doit nécessairement se faire aux nœuds. La méthode utilisée est donc la suivante :

- définition des conditions aux limites en déplacements aux nœuds de bords ou conditions aux limites en vitesse de déformation sur les centres des faces,

- déduction des vitesses de déformations sur les centres des faces de bords à partir des déplacements aux noeuds de bords,
- résolution de l'équation de diffusion aux centres des éléments afin d'obtenir une vitesse de maillage,
- déduction des déplacements aux noeuds à partir de la vitesse de déformation de maillage par interpolation linéaire et en respectant la loi de conservation géométrique (eqn. 2.57)

L'algorithme complet de la résolution des équations de Navier-Stokes en formulation ALE peut être résumé ainsi :

Boucle en temps

1. Conditions aux limites ALE en déplacement à l'interface fluide-structure,
2. Transformation des conditions aux limites ALE en déplacement en conditions aux limites en vitesse en respectant la loi de conservation géométrique,
3. Calcul des vitesses de déformations de maillages,

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\bar{\lambda} \nabla(\mathbf{v}_{ale})) = 0 \\ \mathbf{v}_{ale} = \mathbf{v}_{impose} \end{cases} \text{ sur } \Gamma_f$$

4. Déformation des noeuds du maillage à partir de la vitesse de déformation en respectant la loi de conservation géométrique,
5. Résolution des équations de Navier-Stokes avec une méthode de pas fractionnaire

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{v}) = 0 \\ \rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_{ale}) \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot (\bar{\sigma}) + \mathbf{f} \end{cases}$$

2.5 Discrétisations temporelle et spatiale

2.5.1 Code de mécanique des fluides

On se contente, ci-après, de donner un rapide aperçu des discrétisations utilisées dans le code de mécanique des fluides d'EDF R&D *Code_Saturne*. Le lecteur intéressé par davantage de détails, et en particulier le traitement de la turbulence ou des équations des scalaires, pourra se référer à [R&07].

La résolution temporelle des équations de Navier-Stokes (conservation de la masse et de la quantité de mouvement) est réalisée par une méthode de pas fractionnaire (algorithme de Chorin). Le premier pas, ou prédiction, consiste à réaliser une prédiction des termes de vitesses avec les termes convectifs, diffusifs et sources de l'équation de quantité de mouvement. Le second pas, ou correction, consiste à résoudre une équation de poisson sur la pression et à corriger la vitesse avec l'équation de masse. Un θ -schéma est utilisé pour la discrétisation temporelle des variables physiques :

$$\Phi^{n+\theta} = \theta \Phi^{n=1} + (1 - \theta) \Phi^n \quad (2.58)$$

Le choix de la variable θ permet de choisir l'ordre du schéma :

- lorsque $\theta = 1$, il s'agit d'un schéma d'Euler implicite d'ordre 1,
- lorsque $\theta = \frac{1}{2}$, il s'agit d'un schéma de Crank-Nicholson d'ordre 2.

L'étape de prédiction consiste à résoudre

$$\rho \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right) + \nabla \bullet (\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta} \otimes (\rho \mathbf{u})^{n+\theta_F}) = \nabla \bullet (\bar{\sigma}^{n+\theta}) \quad (2.59)$$

avec $\tilde{\mathbf{u}}$, la vitesse prédite, et :

$$\bar{\sigma}^{n+\theta} = \mu \nabla (\tilde{\mathbf{u}}^{n+\theta}) - p^{n-1+\theta} \bar{\mathbf{I}} + (\mu^t \nabla (\mathbf{u}))^{n+\theta_s} - \frac{2}{3} (\mu \nabla \bullet (\mathbf{u}))^{n+\theta_s} \bar{\mathbf{I}} \quad (2.60)$$

L'étape de correction consiste à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{(\rho \mathbf{u})^{n+1} - (\rho \tilde{\mathbf{u}})^{n+1}}{\Delta t} = -\nabla (\delta p^{n+\theta}) \\ \nabla \bullet (\rho \mathbf{u}^{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (2.61)$$

avec $\delta p^{n+\theta} = p^{n+\theta} - p^{n-1+\theta}$

La discrétisation spatiale est réalisée par une technique de volumes finis. Les variables physiques sont calculées aux centres des éléments du maillage, leur valeur étant alors constantes par élément. La méthode des volumes finis utilise la relation de Green-Ostrkogradksy afin de transformer les équations de volumes en équations surfaciques. La méthode revient à calculer des flux à travers chaque bord des cellules du maillage. Il est donc nécessaire d'avoir les valeurs des variables sur les bords du domaine. Puisque la discrétisation est d'ordre 0, une technique de reconstruction (de type développement de Taylor) est mise en place afin d'obtenir une valeur plus précise de la variable sur le bord du domaine à partir de sa valeur au centre de l'élément. Cela est nécessaire pour un maillage déformable et non-orthogonal où une interpolation linéaire n'est pas correcte (à l'inverse d'un maillage structuré).

2.5.2 Code de mécanique des structures

On se contente ci-après de donner un bref aperçu des algorithmes utilisés dans le code de mécanique des structure d'EDF R&D *Code_Aster*. Le lecteur intéressé par davantage de détails pourra se référer à [AW05].

La discrétisation spatiale est réalisée par une formulation classique en éléments finis. En quelques mots, le principe de la méthode consiste à décomposer chaque variable sur une base de fonctions. Les équations sont ainsi décomposées dans cette base et la décomposition selon chaque fonction est testée avec chacune des autres fonctions (principe variationnel). Cela permet de définir un système matriciel dont la taille est le nombre de points de calcul définis. Les points de calculs peuvent être les noeuds du maillage mais également des points situés à l'intérieur du maillage lorsque les fonctions choisies sont d'ordre supérieur à 1 (*i.e.* non-linéaires).

La résolution temporelle choisie pour le couplage fluide-structure utilise une résolution dans le domaine physique (*i.e.* déplacement, vitesse et accélération). Parmi les algorithmes disponibles pour résoudre ces systèmes d'équations linéaires ou non linéaires, on peut citer les schémas implicites de Wilson et de Newmark ou le schéma explicite de différences centrées. L'intérêt d'avoir à disposition un schéma explicite est sa rapidité de résolution due à l'absence d'inversion de matrice. La nécessité d'avoir un faible pas de temps n'est pas bloquant, puisque les cas de couplage fluide-structure étudiés par la suite montrent que dans certains cas, il est nécessaire d'utiliser de faibles pas de temps afin d'assurer un bon couplage entre les codes. Dans ce cas, lorsque le système structure est assez imposant un schéma explicite devient intéressant. Les schémas de Newmark et de Wilson sont inconditionnellement stables sous certaines conditions.

La résolution du problème par un schéma de Newmark consiste à résoudre le problème suivant (eqn. 2.62) :

$$\begin{aligned} M_s \ddot{u}_s^{n+1} + C_s \dot{u}_s^{n+1} + K u_s^{n+1} &= F_s^{n+1} \\ \dot{u}_s^{n+1} &= \dot{u}_s^n + \Delta t ((1 - c_1^{new}) \ddot{u}_s^n + c_1^{new} \dot{u}_s^n) \\ u_s^{n+1} &= u_s^n + \Delta t \dot{u}_s^n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - c_2^{new} \right) \ddot{u}_s^n + c_2^{new} \dot{u}_s^n \right) \end{aligned} \quad (2.62)$$

où c_1^{new} et c_2^{new} sont des constantes à définir. Il est généralement d'usage d'utiliser $c_1^{new} = \frac{1}{2}$ et $c_2^{new} = \frac{1}{4}$ puisque ces valeurs conduisent à un schéma d'ordre 2, inconditionnellement stable et sans amortissement numérique.

2.6 Projection de maillage

2.6.1 Introduction

Lors de la simulation d'un phénomène en interaction fluide structure par un couplage externe entre un code de mécanique des fluides et un code de mécanique des structures, un transfert de données doit être effectué à l'interface commune aux deux milieux (fig. 2.5) :

- les efforts exercés par le fluide sur la structure, calculés aux points de discrétisation de l'interface du milieu fluide, doivent être transmis aux points de discrétisation de l'interface structure,
- les déplacements de la structure, calculés aux points de discrétisation de son interface, doivent être transmis aux points de discrétisation de l'interface fluide.

Les points de discrétisation sont les entités géométriques où est résolu chaque solveur. Typiquement, le modèle structure est formulé en éléments finis et est résolu aux noeuds du maillage, tandis que le modèle fluide est formulé en volumes finis et est résolu aux centres des mailles.



FIG. 2.5 – Exemple de maillages des interfaces fluide (à gauche) et structure (à droite)

Toutes les méthodes de projection ne peuvent pas être utilisées. Afin d'assurer un transfert correct des efforts d'un domaine à l'autre, il est nécessaire de conserver le bilan des efforts s'appliquant sur l'interface fluide-structure lors de la projection.

[dBvZB07] a fait un état de l'art de différentes techniques utilisées pour transférer des données entre maillages non-conformes qu'il a catalogué en deux familles de méthodes : l'interpolation du voisin le plus proche et les méthodes de poids résiduels.

La première famille de méthodes est très simple puisqu'il suffit de trouver le point le plus proche de l'autre domaine du point à projeter. Un développement limité de la variable, quand cela est possible, peut-être utilisé afin d'affiner la projection.

La seconde famille de méthodes consiste à projeter sur une base la valeur à projeter. Une base naturelle est constituée par les points de discrétisation de l'un des deux maillages.

- Les poids d’intégration attachés à chaque fonction de base peuvent être définis par les fonctions de formes issues de la formulation des éléments finis ([MF95]).
- Une autre méthode consiste à calculer les poids en projetant les éléments d’un maillage sur l’autre. Les variables sont transférées des éléments d’un maillage aux éléments de l’autre maillage en pondérant les valeurs par la proportion de recouvrement des éléments de base par les éléments de l’autre maillage ([fAS03]).
- Des fonctions splines peuvent également être utilisées pour calculer les poids d’intégrations ([BW01]).
- Et enfin, les méthodes statistiques, tel que le krigeage, qui sont les méthodes d’estimation optimal au sens statistique du terme. Par contre elles ne conservent pas le bilan des efforts à l’interface fluide-structure. Elles sont donc utilisables uniquement pour la projection du champ de déplacement.

Il a été choisi d’utiliser la première méthode citée dans la famille des poids résiduels. La motivation vient du fait que pour les applications envisagées, le maillage fluide est plus raffiné que le maillage structure. Ce dernier sert donc de maillage de référence. Le solveur structure étant de plus formulé en éléments finis, les fonctions de formes y sont déjà présentes. L’implémentation de la méthode en est donc facilitée. Ces motivations liées aux résultats de [dBvZB07] ont également incité à utiliser cette méthode. Il serait tout de même intéressant d’évaluer la méthode basée sur les fonctions splines qui semble très prometteuse.

2.6.2 Méthodes d’interpolation par les points de Gauss

[FDKL98] et [MF95] proposent une méthode de projection basée sur les méthodes d’interpolation assurant l’équilibre entre les efforts calculés sur l’interface du milieu fluide et ceux calculés sur l’interface du milieu structure. La précision obtenue par cette méthode est équivalente à celle des méthodes des multiplicateurs de Lagrange, si le maillage du milieu fluide est suffisamment raffiné.

Principe de résolution

Il est supposé que les maillages se déplacent simultanément (i.e. il n’y a pas de condition de glissement entre les deux maillages). Chacun des points de discrétisation d’un milieu peut donc être lié à un élément du maillage de l’autre milieu et ainsi être repéré durant l’ensemble de la simulation. L’interface du premier maillage est dite interface esclave, tandis que l’interface du second maillage est dite interface maître. Grâce à cette table de connectivité entre les points de discrétisation de l’interface esclave et les éléments de l’interface maître et grâce à des fonctions d’interpolation, les données peuvent être transmises entre les deux maillages. Soit l’interface fluide correspondant à l’interface esclave et l’interface structure correspondant à l’interface maître (fig. 2.6) :

- grâce à une fonction d’interpolation, la force définie en un point de discrétisation fluide est répartie sur les points de discrétisation de l’élément structure qui lui est associé,
- grâce à une fonction d’interpolation, le déplacement au point de discrétisation fluide est calculé en fonction des points de discrétisation de l’élément structure qui lui est associé.

Le choix des fonctions d’interpolation est libre.

Principe des travaux virtuels

Soient $\hat{\mathbf{u}}_f$ et $\hat{\mathbf{u}}_s$ deux champs de déplacements virtuels admissibles pour, respectivement, le milieu fluide et le milieu structure. Quelque soient la méthode et les polynômes de discrétisation

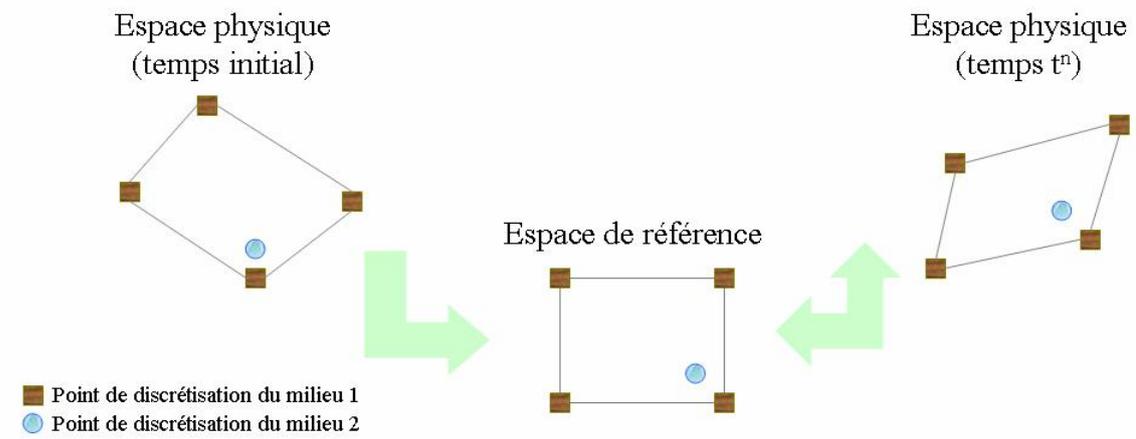


FIG. 2.6 – Principe de projection des conditions aux limites

Υ choisis, les champs à l'interface fluide structure peuvent être décomposés en une somme de n_* champs :

$$\hat{\mathbf{u}}_* = \sum_{j=1}^{n_*} \Upsilon_j \hat{\mathbf{u}}_{[*],j} \quad (2.63)$$

Grâce aux fonctions d'interpolations Π_{ij} choisies, chaque champ au point de discrétisation j du milieu fluide peut être défini, à l'interface, en fonction du champ du milieu structure :

$$\hat{\mathbf{u}}_{[f],j} = \sum_{i=1}^{n_s} \Pi_{ij} \hat{\mathbf{u}}_{[s],i} \quad (2.64)$$

Le travail virtuel des efforts agissant sur l'interface du milieu fluide est défini, en lui substituant les équations (2.63) et (2.64), par :

$$\begin{aligned} \delta W_f &= \int_{\Gamma_{f/s}} {}^t(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{u}}_f dS \\ &= \sum_{i=1}^{n_s} \left(\sum_{j=1}^{n_f} \Xi_{f,j} \Pi_{ij} \right) \hat{\mathbf{u}}_{s,i} \end{aligned} \quad (2.65)$$

où $\Xi_{f,j} = \int_{\Gamma_{f/s}} {}^t(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f \cdot \mathbf{n}) \Upsilon_j dS$ est l'effort calculé en chaque point de discrétisation fluide j .

De même, le travail virtuel appliqué sur l'interface du milieu structure peut être calculé par :

$$\delta W_s = \sum_{i=1}^{n_s} \Xi_{s,i} \hat{\mathbf{u}}_{s,i} \quad (2.66)$$

L'énergie est conservée à l'interface fluide structure, s'il y a égalité des travaux virtuels des milieux fluide et structure, soit à partir de (2.65) et (2.66) :

$$\Xi_{s,i} = \sum_{j=1}^{n_f} \Xi_{f,j} \Pi_{ij} \quad (2.67)$$

Une expression des efforts structure en chaque point de discrétisation du milieu structure i est obtenue en fonction du type de discrétisation du milieu fluide et du type d'approximation choisie.

Le transfert d'informations entre les interfaces des milieux fluide et structure est réalisé par les équations (2.64) et (2.67).

Forme des interfaces

Cette technique fonctionne parfaitement dans le cas d'interfaces jointes, c'est-à-dire si les interfaces fluide et structure coïncident avec l'interface physique (fig. 2.7).

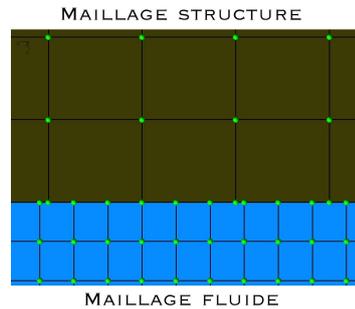


FIG. 2.7 – Interfaces des maillages fluide et structure jointes

Dans le cas d'une interface physique en arc de cercle, par exemple, les interfaces fluide et solide peuvent ne pas se recouvrir parfaitement en cas de pas de discrétisation différents pour chaque maillage (fig. 2.8). Il est alors impossible d'associer à chaque point de discrétisation d'un milieu un élément de l'autre milieu.

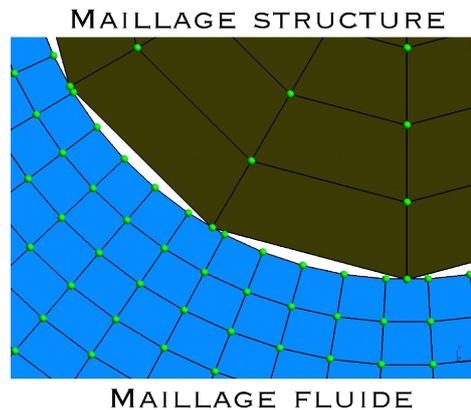


FIG. 2.8 – Interfaces des maillages fluide et structure disjointes

Pour résoudre ce problème, [MF95] propose de privilégier l'une des deux interfaces qui sert de cadre de travail, i.e. dans laquelle sont effectués les transferts de données. Pour cela les points de discrétisation de l'interface non utilisés doivent être projetés sur l'interface de référence (fig. 2.9). Les valeurs des efforts et des déplacements des points de discrétisation sont affectées à leurs projetés.

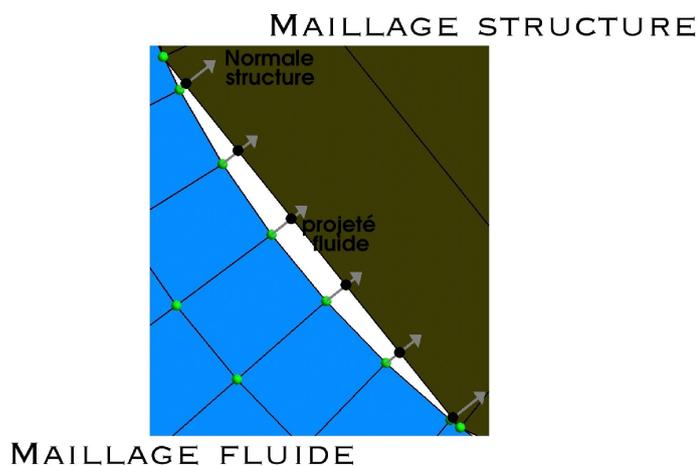


FIG. 2.9 – Projection des points de discrétisation du milieu fluide à l'interface

La projection s'effectue grâce à la normale des éléments de l'interface de référence. L'interface structure étant généralement maillée moins finement que l'interface fluide dans les configurations envisagées ici, cette première sera considérée comme l'interface maître. La normale utilisée pour la projection variant moins souvent, il y a moins d'ambiguïtés sur la projection des données. Sur la figure 2.10, l'ordre des projetés de la structure n'est pas conservé avec l'utilisation des normales fluide.

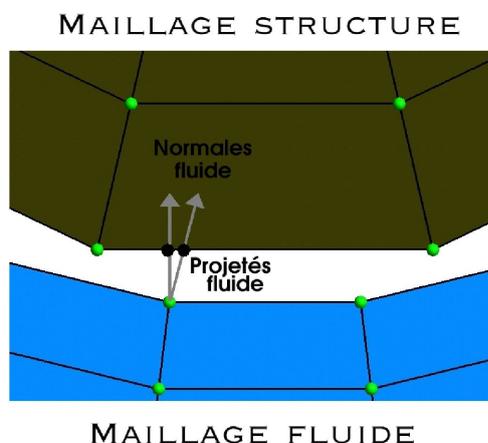


FIG. 2.10 – Normales des éléments du milieu fluide à l'interface

Cette projection par le biais des normales structure peut tout de même être mise en défaut dans certains cas. Sur la figure 2.11, aucun projeté sur un élément structure n'existe pour le point de discrétisation du milieu fluide. Dans ce cas, l'hypothèse est faite que le point de discrétisation structure le plus proche correspond au projeté du point de discrétisation fluide.

Exemple

Sur la figure 2.12, un élément de la structure à 2 points d'intégration et 3 éléments du milieu fluide sont représentés. Dans un premier temps, les 4 points de discrétisation du milieu fluide

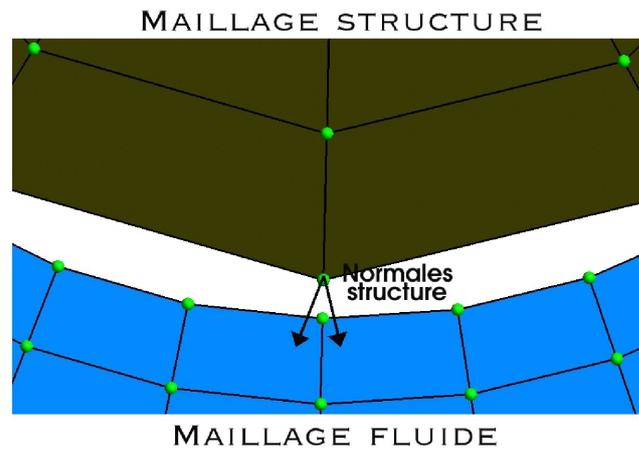


FIG. 2.11 – Problème de la projection par normale

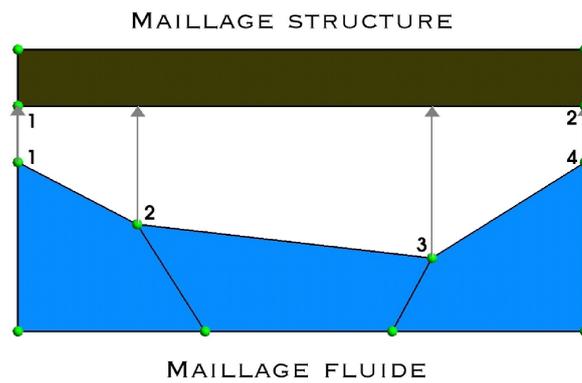


FIG. 2.12 – Exemple de projection de données

sont projetés sur l'élément de la structure. Dans un second temps, la coordonnée paramétrique χ de chaque projeté fluide sur l'élément structure est calculée grâce à la fonction d'interpolation des éléments à deux noeuds : $\mathbf{x}_f = \Pi_1(\chi_f)\mathbf{x}_{[s,1]} + \Pi_2(\chi_f)\mathbf{x}_{[s,2]}$ avec $\Pi_1(\chi) = (1 - \chi)$ et $\Pi_2(\chi) = \chi$.

Les chargements structure sont calculés de la façon suivante :

$$\begin{cases} \Xi_{s,1} = \Xi_{f,1} + \Pi_1(\chi_2)\Xi_{f,2} + \Pi_1(\chi_3)\Xi_{f,3} \\ \Xi_{s,2} = \Pi_2(\chi_2)\Xi_{f,2} + \Pi_2(\chi_3)\Xi_{f,3} + \Xi_{f,4} \end{cases} \quad (2.68)$$

De même, les déplacements aux noeuds des mailles du milieu fluide peuvent être calculés à partir de la valeur aux deux noeuds de la structure :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_1^F = \Pi_1(\chi_1)\hat{\mathbf{u}}_1^S + \Pi_2(\chi_1)\hat{\mathbf{u}}_2^S \\ \hat{\mathbf{u}}_2^F = \Pi_1(\chi_2)\hat{\mathbf{u}}_1^S + \Pi_2(\chi_2)\hat{\mathbf{u}}_2^S \\ \hat{\mathbf{u}}_3^F = \Pi_1(\chi_3)\hat{\mathbf{u}}_1^S + \Pi_2(\chi_3)\hat{\mathbf{u}}_2^S \\ \hat{\mathbf{u}}_4^F = \Pi_1(\chi_4)\hat{\mathbf{u}}_1^S + \Pi_2(\chi_4)\hat{\mathbf{u}}_2^S \end{cases} \quad (2.69)$$

Algorithme de Projection

Avec cette méthode de projection, l'algorithme de couplage entre les codes fluide et structure s'écrit (avec en gras les étapes liées à l'interpolation des données) :

Initialisation

1. **Pour chaque centre de maille fluide : Localisation de l'élément structure qui le contient et calcul des coordonnées paramétriques (χ_j) du centre de maille fluide dans l'élément structure associé,**

Boucle en temps

2. Prédiction de l'interface fluide-structure en fonction du schéma de couplage choisi,
3. Résolution du modèle fluide,
4. Calcul des efforts fluides à appliquer à la structure,
5. **Calcul des efforts en chaque point d'intégration de l'interface structure (eqn. 2.67),**
6. Résolution du modèle structure,
7. **Calcul des déplacements en chaque point d'intégration de l'interface fluide (eqn. 2.64).**

2.7 Algorithme du couplage des codes fluide et structure

La méthodologie de couplage présentée ci-avant peut se résumer comme suit (fig. 2.13) :

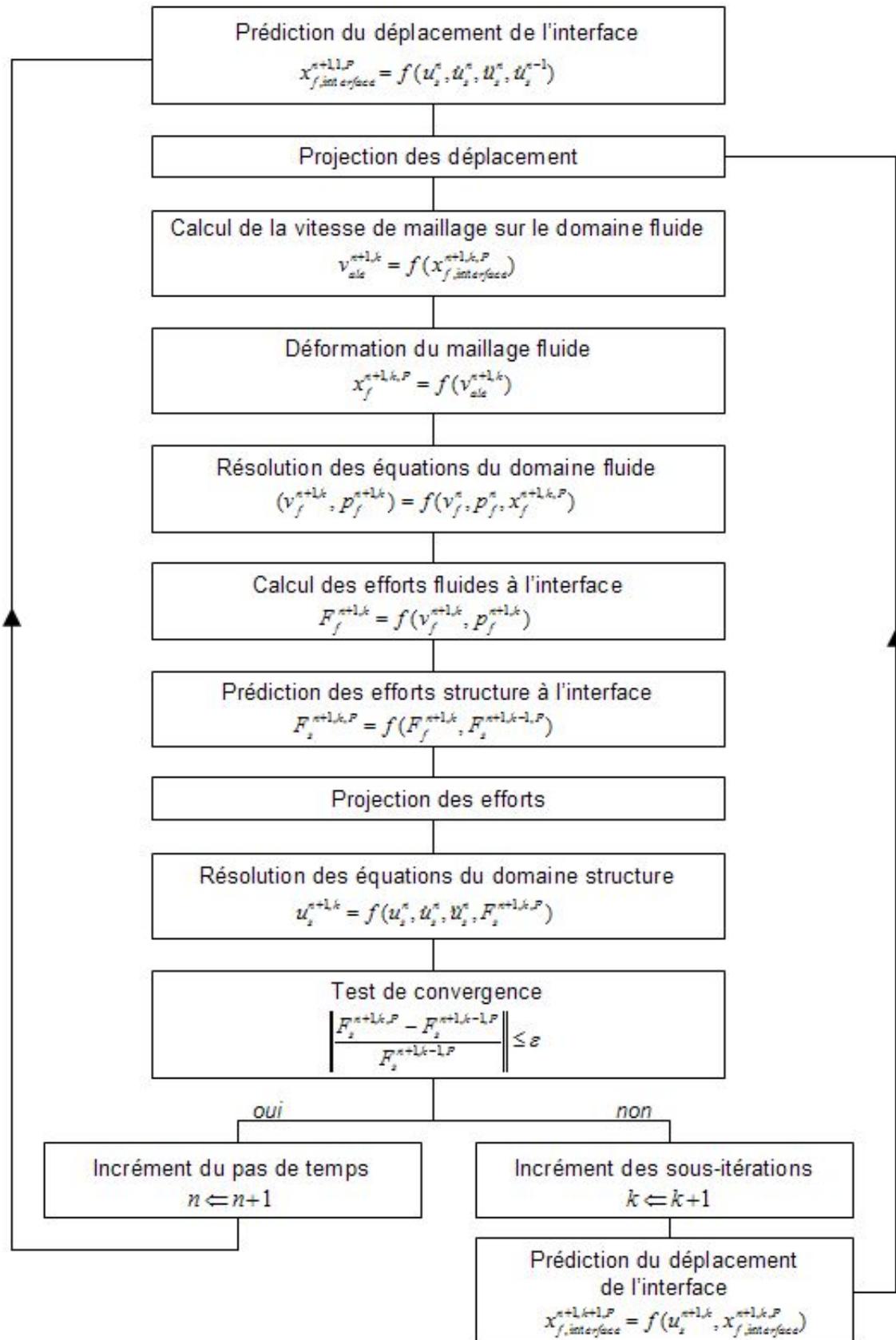


FIG. 2.13 – Vue globale de l'algorithme de couplage

3

Deux cylindres dans un fluide parfait au repos

La modélisation de l'interaction fluide-structure par couplage de codes externes implique une résolution non simultanée des équations fluides et structures. Afin de pouvoir résoudre les équations fluides à un instant donné, il est nécessaire de savoir comment va se comporter la structure au même moment. Et inversement, il est nécessaire de savoir comment va se comporter le fluide à l'instant où les équations structures sont résolues. Pour cela des schémas de prédiction du déplacement de la structure et de l'effort fluide qui s'applique sur la structure ont été développés [FLM95, PFL95, Pip97]. Différents paramètres permettent de les régler au mieux. Le but du présent travail est de faire une étude de sensibilité sur ces différents paramètres afin de pouvoir répondre aux questions suivantes :

- Quels sont les schémas de couplage sur les déplacements et les forces les mieux adaptées au cas à traiter ?,
- A quel instant les variables fluides doivent-elles être utilisées pour calculer les efforts exercés par le fluide sur la structure ?,
- Quel est l'impact, en terme de conservation d'énergie du système, sur la résolution des équations de Navier-Stokes ?

[PF01] a étudié ces questions, d'une façon analytique, sur un cas masse-ressort. Dans l'étude suivante, l'étude porte sur le cas de deux cylindres dans un fluide parfait au repos avec une approche semi-analytique et une approche numérique.

3.1 Algorithme partitionné

Lors de la résolution d'un couplage fluide-structure par algorithme partitionné, il est nécessaire de décomposer la résolution du problème en deux étapes :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_f^{n+1} = \mathcal{F}(\mathbf{u}_s^{n+1}) & \text{Résolution du problème fluide} \\ \mathbf{u}_s^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_f^{n+1}) & \text{Résolution du problème structure} \end{cases} \quad (3.1)$$

Ce qui permet de formuler le problème sous forme non-linéaire :

$$\mathbf{u}_s^{n+1} = \mathcal{S} \circ \mathcal{F}(\mathbf{u}_s^{n+1}) \quad (3.2)$$

La résolution par une méthode explicite nécessite la prédiction du déplacement de la structure

lors de la résolution du problème fluide et des efforts lors de la résolution du problème structure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_f^{n+1} = \mathcal{F}(\mathbf{u}_s^{P,n+1}) \text{ avec } \mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + c_{s,0}^{exp} \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n + c_{s,1}^{exp} \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^{n-1} + c_{s,2}^{exp} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_s^n \\ \mathbf{u}_s^{n+1} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_f^{P,n+1}) \text{ avec } \mathbf{f}_f^{P,n+1} = \begin{cases} c_{f,0}^{exp} \mathbf{f}_f^{n+1} + (1 - c_{f,0}^{exp}) \mathbf{f}_f^{P,n} \\ \text{ou } c_{f,0}^{exp} \mathbf{f}_f^{n+1} + (1 - c_{f,0}^{exp}) \mathbf{f}_f^n \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où $c_{s,0}^{exp}$, $c_{s,1}^{exp}$, $c_{s,2}^{exp}$ et $c_{f,2}^{exp}$ sont des constantes permettant d'affiner les prédictions.

La résolution par une méthode par sous-cyclage impose la prédiction du déplacement à chaque sous-itération, les autres variables étant prises au début du pas de temps afin de formuler le problème sous forme d'algorithme de point fixe :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_f^{n+1,k} = \mathcal{F}(\mathbf{u}_s^{P,n+1,k}, \dot{\mathbf{u}}_f^n, p_f^n) \\ \text{avec } \mathbf{u}_s^{P,n+1,k} = \begin{cases} \mathbf{u}_s^n + c_{s,0}^{exp} \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n + c_{s,1}^{exp} \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^{n-1} + c_{s,2}^{exp} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_s^n \text{ pour } k = 1 \\ c_{s,0}^{imp} \mathbf{u}_s^{n+1,k-1} + (1 - c_{s,0}^{imp}) \mathbf{u}_s^{P,n+1,k-1} \text{ sinon} \end{cases} \\ \mathbf{u}_s^{n+1,k} = \mathcal{S}(\mathbf{f}_f^{P,n+1,k}, \mathbf{u}_s^n) \\ \text{avec } \mathbf{f}_f^{P,n+1,k} = \mathbf{f}_f^{n+1,k} \\ \text{convergence : } \frac{\|\mathbf{f}_f^{n+1,k} - \mathbf{f}_f^{n+1,k-1}\|}{\|\mathbf{f}_f^{n+1,k-1}\|} \leq \epsilon \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où ϵ est une constante fixée et $c_{s,0}^{imp}$ une constante permettant de relaxer la prédiction.

Différents couples de prédicteurs sont testés (tab. 3.1, 3.2) afin d'évaluer de façon semi-analytique les propriétés de conservation de l'énergie de chaque couple de prédicteur. Les prédicteurs de déplacement sont obtenus par développement limité d'un pas de temps ou d'un demi-pas de temps, sur le déplacement ou la vitesse, jusqu'à l'ordre 3. Les prédicteurs de forces dépendent soit de l'instant auquel sont prises les variables de calcul, soit du critère de conservation de l'énergie à l'interface entre les deux domaines.

Une comparaison de ces résultats par une méthode semi-analytique permet de classer les couples de prédicteurs en fonction de leur potentialité à conserver l'énergie du système. L'approche numérique permet de vérifier le classement des couples de prédicteurs. Et enfin, ces derniers résultats permettent de quantifier l'erreur numérique liée aux codes de calcul indépendamment du couplage (la solution semi-analytique étant la solution de référence). Pour cela, le problème structure est résolu par un schéma de Newmark tandis que les efforts sont calculés de façon explicite grâce aux prédictions des déplacements ou par la résolution du code de calcul fluide.

3.2 Description du cas et solution analytique

Soient deux cylindres rigides et mobiles d'une longueur infinie de rayons respectifs R_1 et R_2 , modélisés par une masse et un ressort chacun, espacés d'une longueur P , baignant dans un fluide parfait incompressible et oscillant librement et indépendamment dans le plan $x_1 O x_2$ (fig. 3.1).

TAB. 3.1 – COUPLES DE PREDICTEURS EXPLICITES TESTES

Prédicteurs du déplacement		Prédicteurs de la force	
$\mathbf{u}_s^{P,n+1}$	$= \mathbf{u}_s^n$	$\mathbf{f}_f^{P,n+1}$	$= \mathbf{f}_f^n$
$\mathbf{u}_s^{P,n+1}$	$= \mathbf{u}_s^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{f}_f^{P,n+1}$	$= \mathbf{f}_f^{n+1}$
$\mathbf{u}_s^{P,n+1}$	$= \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$	$\mathbf{f}_f^{P,n+1}$	$= \frac{1}{2} \mathbf{f}_f^n + \frac{1}{2} \mathbf{f}_f^{n+1}$
$\mathbf{u}_s^{P,n+1}$	$= \mathbf{u}_s^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{f}_f^{P,n+1}$	$= 2\mathbf{f}_f^n - \mathbf{f}_f^{P,n}$
$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}}$	$= \mathbf{u}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{f}_f^{P,n+1}$	$= 2\mathbf{f}_f^{n+1} - \mathbf{f}_f^{P,n}$
$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}}$	$= \mathbf{u}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n + \frac{\Delta t^2}{8} \ddot{\mathbf{u}}_s^n$		
$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}}$	$= \mathbf{u}_s^n + \frac{5\Delta t}{8} \dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{8} \dot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$		

TAB. 3.2 – PREDICTEURS IMPLICITES TESTES

Prédicteurs du déplacement initial	Prédicteurs des itérations suivantes
$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$	$\mathbf{u}_s^{P,n+1,k} = \mathbf{u}_s^{n+1,k-1}$

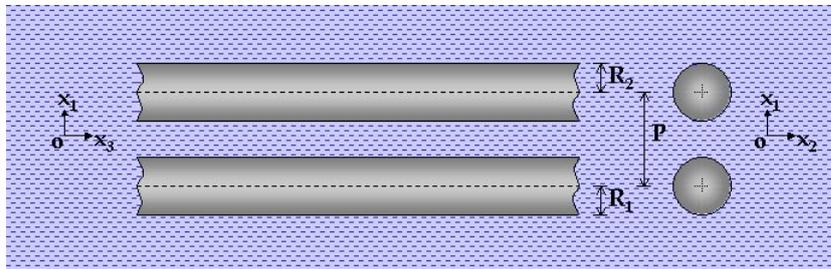


FIG. 3.1 – Géométrie des tubes parallèles

3.2.1 Equations

Les équations du mouvement des structures sont :

$$\begin{cases} \overline{\overline{M}}_{[s,1]} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t^2} + \overline{\overline{K}}_{[s,1]} \mathbf{u}_{[s,1]} = -\mathbf{F}_{[f,1]} \\ \overline{\overline{M}}_{[s,2]} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t^2} + \overline{\overline{K}}_{[s,2]} \mathbf{u}_{[s,2]} = -\mathbf{F}_{[f,2]} \end{cases} \quad (3.5)$$

où $[s, j]$ dénote la structure j et $[f, j]$ fait référence à l'effort fluide appliqué sur la structure j . Les matrices de masses ($\overline{\overline{M}}_{[s,j]}$) et de rigidités ($\overline{\overline{K}}_{[s,j]}$) sont diagonales.

Les forces fluides $\mathbf{F}_{[f,j]}$ peuvent être exprimées en fonction des dérivées des déplacements des structures [Maz70] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{[f,1]} \\ \mathbf{F}_{[f,2]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\overline{M}}_{[f,1]} \alpha_{11} & \overline{\overline{M}}_{[f,1,2]} \alpha_{12} \\ \overline{\overline{M}}_{[f,1,2]} \alpha_{12} & \overline{\overline{M}}_{[f,2]} \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t^2} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

avec $\overline{\overline{M}}_{[f,j]}$ la masse de fluide déplacée par la structure j et $\overline{\overline{M}}_{[f,1,2]} = \pi \rho_f \left(\frac{R_1 + R_2}{2} \right)^2$. Les termes de masse ajoutés sont identiques selon les deux directions d'étude x_1 et x_2 .

Les coefficients associés aux masses ajoutées sont donnés par :

$$\begin{cases} \alpha_{11} = 1 + \frac{P^4 - 2P^2(R_1^2 + R_2^2) + (R_2^2 - R_1^2)^2}{P^2 R_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-n(\alpha+\alpha_1)}}{\sinh(n\alpha)} \\ \alpha_{22} = 1 + \frac{P^4 - 2P^2(R_1^2 + R_2^2) + (R_2^2 - R_1^2)^2}{P^2 R_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-n(\alpha+\alpha_2)}}{\sinh(n\alpha)} \\ \alpha_{12} = \left(1 + \frac{P^4 - 2P^2(R_1^2 + R_2^2) + (R_2^2 - R_1^2)^2}{R_1^2 R_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \coth(n\alpha) e^{-2n\alpha} \right) \left(\frac{4R_1^2 R_2^2}{P^2 (R_1 + R_2)^2} \right) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \alpha = \ln \left(\frac{P^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} + \sqrt{\left(\frac{P^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} \right)^2 - 1} \right) \\ \alpha_1 = 2 \ln \left(\frac{P^2 + R_1^2 - R_2^2}{2PR_1} + \sqrt{\left(\frac{P^2 + R_1^2 - R_2^2}{2PR_1} \right)^2 - 1} \right) \\ \alpha_2 = 2 \ln \left(\frac{P^2 - R_1^2 + R_2^2}{2PR_2} + \sqrt{\left(\frac{P^2 - R_1^2 + R_2^2}{2PR_2} \right)^2 - 1} \right) \end{cases} \quad (3.8)$$

Le problème avec les conditions initiales se décrit donc comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\overline{\overline{M}}_{[s,1]} + \overline{\overline{M}}_{[f,1]}\alpha_{11}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t^2} + \overline{\overline{K}}_{[s,1]} \mathbf{u}_{[s,1]} + \overline{\overline{M}}_{[f,1,2]}\alpha_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t^2} = 0 \\ (\overline{\overline{M}}_{[s,2]} + \overline{\overline{M}}_{[f,2]}\alpha_{22}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t^2} + \overline{\overline{K}}_{[s,2]} \mathbf{u}_{[s,2]} + \overline{\overline{M}}_{[f,1,2]}\alpha_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t^2} = 0 \\ \mathbf{u}_{[s,1]}(t=0) = \mathbf{u}_{[s,1]}^0 \\ \mathbf{u}_{[s,2]}(t=0) = \mathbf{u}_{[s,2]}^0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_{[s,1]}^0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_{[s,2]}^0 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

3.2.2 Energie du système

Il est supposé que les deux cylindres baignent dans un fluide parfait de domaine non borné. L'énergie du système composé par les deux cylindres (masses et ressorts) et le fluide se conserve donc au cours du temps. Cette énergie est évaluée à partir du système d'équation (eqn. 3.9) :

$$\begin{aligned} & \int_t \begin{pmatrix} \overline{\overline{M}}_{[s,1]} + \overline{\overline{M}}_{[f,1]}\alpha_{11} & \overline{\overline{M}}_{[f,1,2]}\alpha_{12} \\ \overline{\overline{M}}_{[f,1,2]}\alpha_{12} & \overline{\overline{M}}_{[s,2]} + \overline{\overline{M}}_{[f,2]}\alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t} \end{pmatrix} dt \\ & + \int_t \begin{pmatrix} \overline{\overline{K}}_{[s,1]} \mathbf{u}_{[s,1]} & 0 \\ 0 & \overline{\overline{K}}_{[s,2]} \mathbf{u}_{[s,2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{[s,1]} \\ \mathbf{u}_{[s,2]} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_{[s,1]}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_{[s,2]}}{\partial t} \end{pmatrix} dt = 0 \quad (3.10) \end{aligned}$$

Les produits accélération-vitesse et déplacement-vitesse permettent de simplifier le problème comme suit

$$\begin{aligned} & \int_t \sum_{i,j=1}^2 \left(M_{[s,j],i} + M_{[f,j]}\alpha_{jj} \right) \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \dot{u}_{[s,j],i}^2 \\ & + \int_t \sum_{i,j=1}^2 K_{[s,j],i} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} u_{[s,j],i}^2 \\ & + \int_t \sum_{i=1}^2 M_{[f,1,2]}\alpha_{12} \frac{d}{dt} \dot{u}_{[s,1],i} \dot{u}_{[s,2],i} = 0 \quad (3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2} M_{[s,j],i} \dot{u}_{[s,j],i}^2}_{\text{Energie cinétique des structures}} + \underbrace{\frac{1}{2} M_{[f,j]}\alpha_{jj} \dot{u}_{[s,j],i}^2}_{\text{Energie cinétique par couplage inertiel}} \right. \\ & \left. + \underbrace{\frac{1}{2} K_{[s,j],i} u_{[s,j],i}^2}_{\text{Energie potentielle des structures}} + \underbrace{M_{[f,1,2]}\alpha_{12} \dot{u}_{[s,1],i} \dot{u}_{[s,2],i}}_{\text{Energie de couplage des deux cylindres}} \right) = \text{cste} \quad (3.12) \end{aligned}$$

3.2.3 Données numériques

Les structures sont modélisées par des éléments discrets auxquels on impose une masse et une raideur. Des caractéristiques différentes sont imposées aux deux cylindres (tab. 3.3). Le pas inter-tube est pris égal à $P = 3,0 \cdot 10^{-2}$. Une impulsion initiale est donnée à chacun des cylindres dans des directions opposées (tab. 3.4). Le fluide est considéré non visqueux (tab. 3.5). Dans l'ensemble des cas envisagés, le mouvement des structures est résolu avec un schéma de Newmark. Les constantes de résolution utilisées sont $\beta = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. Ces constantes permettent d'obtenir un schéma de résolution d'ordre 2, inconditionnellement stable (*i.e.* indépendant du choix du pas de temps) sans amortissement numérique.

TAB. 3.3 – PROPRIETES DES TUBES

		Cylindre de gauche	Cylindre de droite
Masse volumique	(kg.m ⁻³)	4,1 10 ³	4,0 10 ³
Raideur	(kg.s ⁻²)	2,0 10 ⁴	1,9 10 ⁴
Diamètre extérieur	(m)	2,0 10 ⁻²	2,0 10 ⁻²

TAB. 3.4 – CONDITIONS INITIALES DES TUBES

		Cylindre de gauche	Cylindre de droite
Déplacement initial selon x_1	(m)	-1,2 10 ⁻³	0,9 10 ⁻³
Déplacement initial selon x_2	(m)	1,1 10 ⁻³	-1,3 10 ⁻³
Vitesse initiale selon x_1	(m.s ⁻¹)	0,0	0,0
Vitesse initiale selon x_2	(m.s ⁻¹)	0,0	0,0

TAB. 3.5 – PROPRIETES DU FLUIDE

Masse volumique	1,0 10 ³	(kg.m ⁻³)
Viscosité cinématique	0,0	(kg.m ⁻³)

3.3 Résolution monolithique

Afin d'obtenir une solution exacte du problème, une résolution monolithique (*i.e.* simultanée) des deux équations est effectuée. Pour cela, le système d'équations (eqn. 3.9) est mis sous la forme :

$$\begin{pmatrix} M_{[s,1]} + M_{[f,1]}\alpha_{11} & M_{[f,1,2]}\alpha_{12} \\ M_{[f,1,2]}\alpha_{12} & M_{[s,2]} + M_{[f,2]}\alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{[s,1]}^{P,n+1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{[s,2]}^{P,n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{[s,1]} & 0 \\ 0 & K_{[s,2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{[s,1]}^{P,n+1} \\ \mathbf{u}_{[s,2]}^{P,n+1} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.13)$$

Le système d'équations (eqn. 3.13) est l'expression de l'équation d'une structure sans second membre. Un schéma de Newmark est utilisé afin de résoudre ce problème. Les équations étant

linéaires, les systèmes d'équations selon chaque direction sont résolus indépendamment l'un de l'autre. La conservation d'énergie de l'ensemble du domaine est obtenue en sommant les énergies selon chaque direction. Ce calcul démontre la conservation de l'énergie du système au cours du temps (fig. 3.2). L'énergie totale du système est la somme des énergies selon les deux degrés de liberté, soit une énergie totale de $5,025 \cdot 10^{-2}$ Joules. De plus, il est possible d'observer que

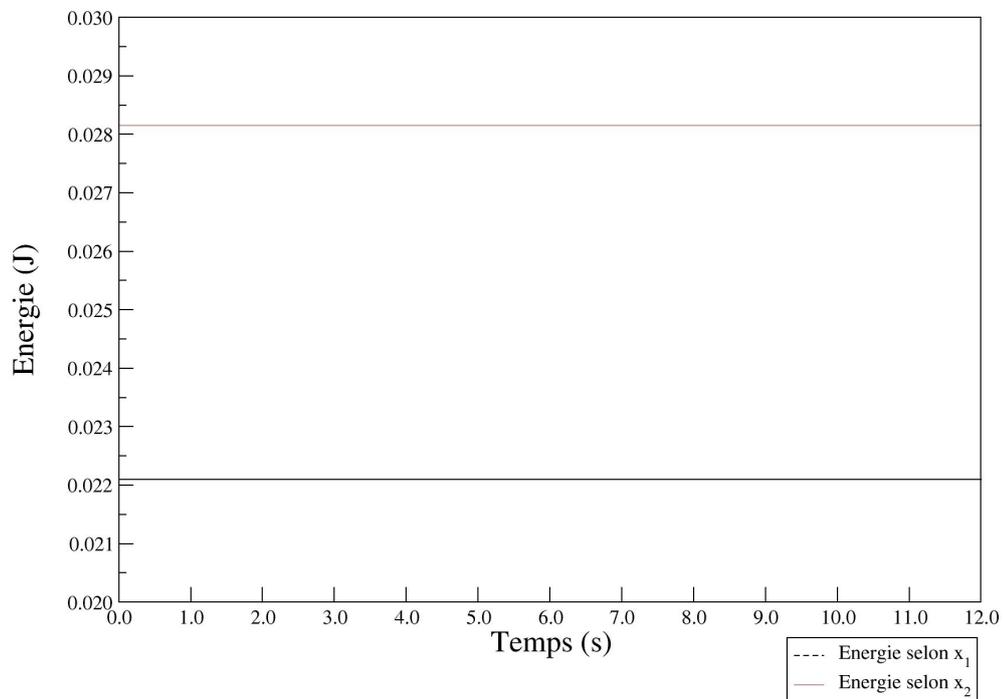
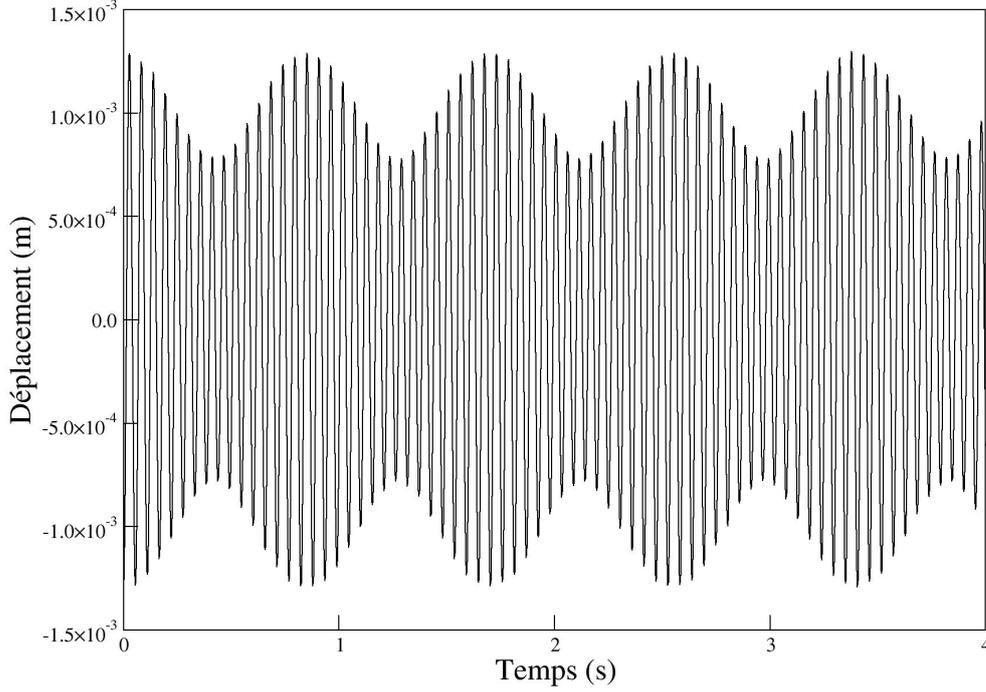


FIG. 3.2 – Energie du système selon chaque direction

les mouvements des cylindres interagissent et qu'il existe bien une fréquence de couplage se superposant à la fréquence propre de chaque cylindre (fig. 3.3).

FIG. 3.3 – Déplacement selon x_2 du cylindre de droite

3.4 Résolution partitionnée semi-analytique

3.4.1 Décomposition du problème

La résolution du système (eqn. 3.9) peut être décomposé en deux sous-systèmes, un pour la résolution du problème fluide, et un pour la résolution du problème structure :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} : \mathbf{u}_s^{P,n+1} &\longrightarrow \mathbf{f}_f^{n+1} \\
 \begin{cases} \mathbf{f}_{[f,1]}^{n+1} = -M_{[f,1]}\alpha_{11}\ddot{\mathbf{u}}_{[s,1]}^{P,n+1} - M_{[f,1,2]}\alpha_{12}\ddot{\mathbf{u}}_{[s,2]}^{P,n+1} \\ \mathbf{f}_{[f,2]}^{n+1} = -M_{[f,2]}\alpha_{22}\ddot{\mathbf{u}}_{[s,2]}^{P,n+1} - M_{[f,1,2]}\alpha_{12}\ddot{\mathbf{u}}_{[s,1]}^{P,n+1} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S} : \mathbf{f}_f^{P,n+1} &\longrightarrow \mathbf{u}_s^{n+1} \\
 \begin{cases} M_{[s,1]}\ddot{\mathbf{u}}_{[s,1]}^{n+1} + K_{[s,1]}\mathbf{u}_{[s,1]}^{n+1} = \mathbf{f}_{[f,1]}^{P,n+1} \\ M_{[s,2]}\ddot{\mathbf{u}}_{[s,2]}^{n+1} + K_{[s,2]}\mathbf{u}_{[s,2]}^{n+1} = \mathbf{f}_{[f,2]}^{P,n+1} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les efforts étant fonction de l'accélération, il est nécessaire de les réécrire en fonction du déplacement afin de pouvoir tester les prédicteurs de déplacement. Pour cela, le système d'équations de la résolution monolithique (eqn. 3.13) est utilisé. Le terme en déplacement est passé au second membre et la matrice de masse associée à l'accélération est inversée. La résolution directe de ce système (eqn. 3.15) permet d'exprimer les accélérations en fonction des déplacements prédits à chaque pas de temps. Les efforts sont alors calculés comme précisé précédemment (eqn. 3.14 :

\mathcal{F}).

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_{[s,1]}^{P,n+1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{[s,2]}^{P,n+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} M_{[s,1]} + M_{[f,1]}\alpha_{11} & M_{[f,1,2]}\alpha_{12} \\ M_{[f,1,2]}\alpha_{12} & M_{[s,2]} + M_{[f,2]}\alpha_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} K_{[s,1]} & 0 \\ 0 & K_{[s,2]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{[s,1]}^{P,n+1} \\ \mathbf{u}_{[s,2]}^{P,n+1} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

3.4.2 Quantification de l'erreur induite par les schémas de couplage explicites

Le cas est testé en résolvant le problème structure (eqn. 3.14 : \mathcal{S}) par un schéma de Newmark et en prenant la forme explicite des efforts (eqn. 3.15) imposés par une prédiction. Les résultats sur l'énergie permettent d'évaluer l'erreur numérique liée à chaque schéma. Une étude de sensibilité temporelle est tout d'abord réalisée afin d'évaluer l'impact du choix du pas de temps.

Convergence temporelle

Afin d'évaluer l'erreur liée à la discrétisation temporelle, trois pas de temps sont testés pour un schéma de couplage donné ($\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$ et $\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^{n+1}$). Les pas de temps choisis sont respectivement : 10^{-3} s, 10^{-4} s et 10^{-5} s. Les constantes du schéma d'intégration temporelle de Newmark choisies sont $\beta_{Newmark} = \frac{1}{4}$ et $\gamma_{Newmark} = \frac{1}{2}$. La comparaison est faite sur la conservation de l'énergie du système pour chacune des configurations. Les simulations sont réalisées sur une durée de 12,0 s. L'influence du pas de temps sur la conservation de l'énergie est mise en évidence (fig. 3.4, où les erreurs relatives des pas de temps 10^{-4} s et 10^{-5} s sont multipliées respectivement par des facteurs 10^3 et 10^6). Il peut être remarqué que la pente des courbes pour les cas avec des pas de temps 10^{-4} s et 10^{-5} s sont quasiment identiques à un facteur d'échelle près, tandis que pour le pas de temps 10^{-3} s la variation de la pente, et donc de l'erreur, durant la même période semble être plus rapide.

Les pas de temps 10^{-4} s et 10^{-5} ont une très bonne conservation de l'énergie à la fin de la simulation (tab. 3.6). Il est à noter que pour le pas de temps 10^{-3} s, l'énergie diminue sur les 3 premières itérations avant de remonter. C'est la raison pour laquelle l'énergie minimale n'est pas l'énergie initiale du système. Les études semi-analytiques et numériques suivantes sont réalisées avec un pas de temps de 10^{-4} s afin de permettre un temps de simulation plus représentatif pour les cas numériques.

TAB. 3.6 – INFLUENCE DU PAS DE TEMPS SUR LA CONSERVATION DE L'ENERGIE

pas de temps (s)	Energie minimale (J)	Energie maximale (J)
10^{-3}	0,5024 10^{-1}	0,6010 10^{-1}
10^{-4}	0,5025 10^{-1}	0,5025 10^{-1}
10^{-5}	0,5025 10^{-1}	0,5025 10^{-1}
Référence	0,5025 10^{-1}	0,5025 10^{-1}

Comparaison des schémas

Le cas précédent est repris avec un pas de temps de 10^{-4} s et les constantes du schéma d'intégration temporelle de Newmark $\beta_{Newmark} = \frac{1}{4}$ et $\gamma_{Newmark} = \frac{1}{2}$. Afin de comparer les

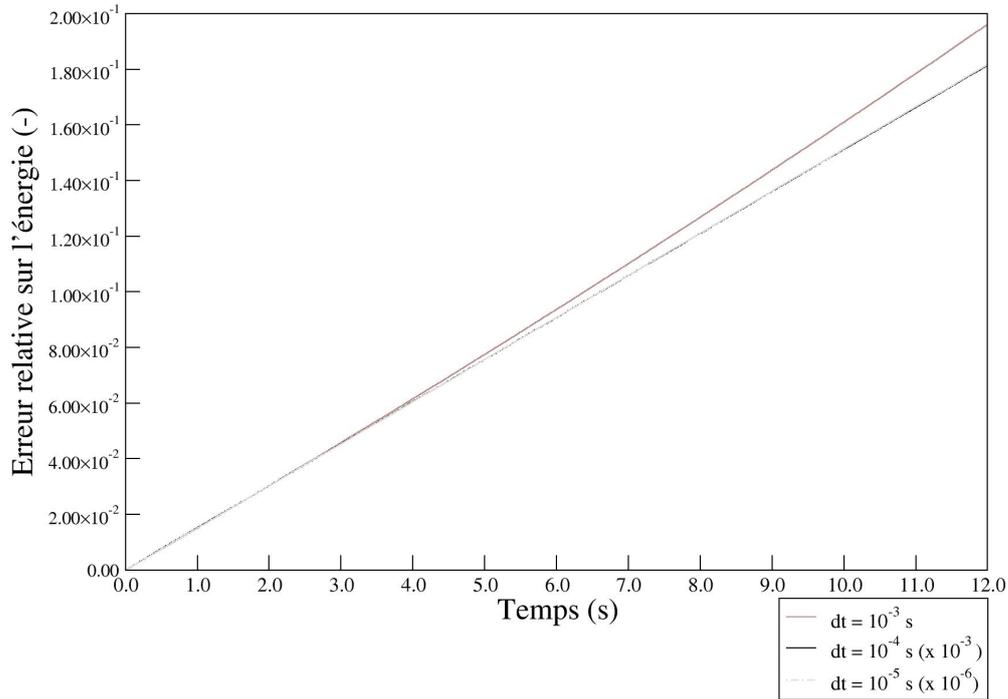


FIG. 3.4 – Différentes évolutions de l'erreur relative sur l'énergie

différents prédicteurs de déplacement et de forces, le calcul de l'énergie du domaine est réalisé sur une période suffisamment longue (i.e. 12,0 s) afin de pouvoir comparer la diffusion des schémas. L'évolution de l'énergie au cours du temps montre un amortissement des structures, et donc une diffusion numérique, pour l'ensemble des schémas de couplage explicite (fig. 3.5). Cette diffusion numérique permet de regrouper les schémas en cinq grandes classes (tab. 3.7).

Les résultats sont en cohérence avec l'étude réalisée par [PF01]. Ce sont les mêmes couples de prédicteurs qui conservent le mieux l'énergie. Un tracé plus précis des schémas les plus pertinents (fig. 3.6) permet de montrer qu'une prédiction à l'ordre deux améliore la conservation dans le cas des schémas synchrones (F2U2 et F2U3, *i.e.* ligne 2, colonnes 2 ou 3 dans tab. 3.7) ce qui n'est pas le cas pour les schémas asynchrones (F5U5 et F5U6, *i.e.* ligne 5, colonnes 5 ou 6). Cela montre que les schémas du 1er ordre conservent mieux l'énergie que les schémas du second ordre. Ce résultat sera à étudier plus précisément. D'autre part, il est à noter que pour cet exemple, certains couples de prédicteurs deviennent instables. De plus, l'erreur relative converge vers 1. Cela traduit le fait que les structures s'amortissent et reviennent vers leur position d'équilibre, d'où une énergie nulle du système en fin de simulation (fig. 3.7).

3.4.3 Quantification de l'erreur induite par les schémas de couplage implicites

Le principe du schéma de couplage implicite est de faire des sous-itérations au sein d'un pas de temps afin de renforcer les conditions aux limites à l'interface à chaque itération. L'erreur liée à la prédiction sur les conditions aux limites et à la résolution non simultanée des codes est ainsi réduite. Le grand intérêt de ce type de schéma est donc la possibilité de pouvoir utiliser de plus grands pas de temps qu'avec les schémas explicites. Ce type de couplage atteint ses limites lorsque le produit des itérations par le nombre de sous-itérations devient égal ou supérieur au

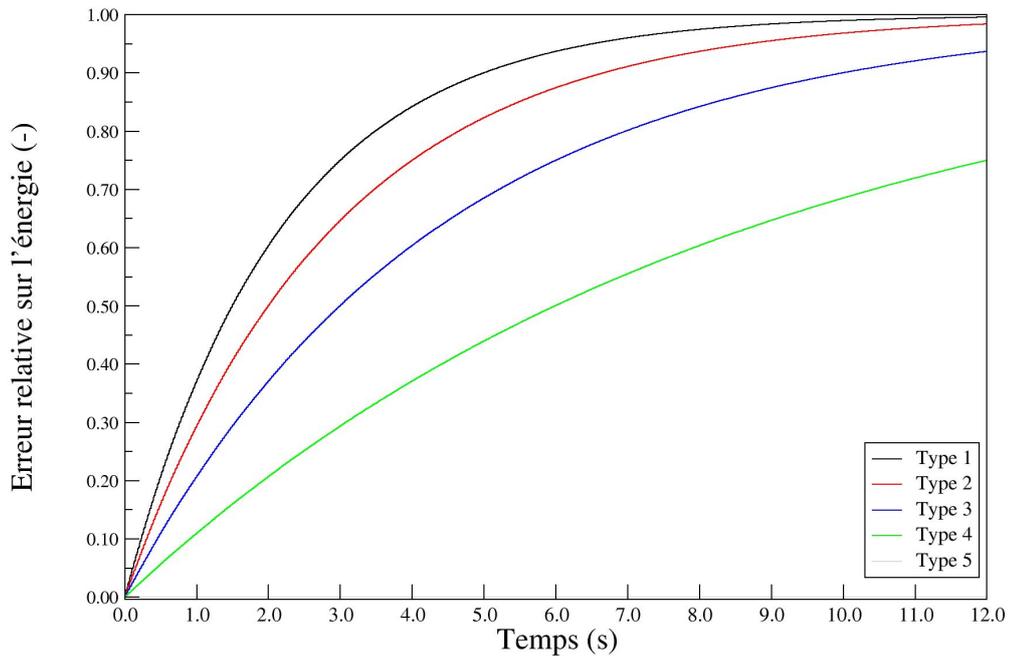


FIG. 3.5 – Evolutions de l’erreur relative sur l’énergie pour les prédicteurs explicites pour le cas semi-analytique

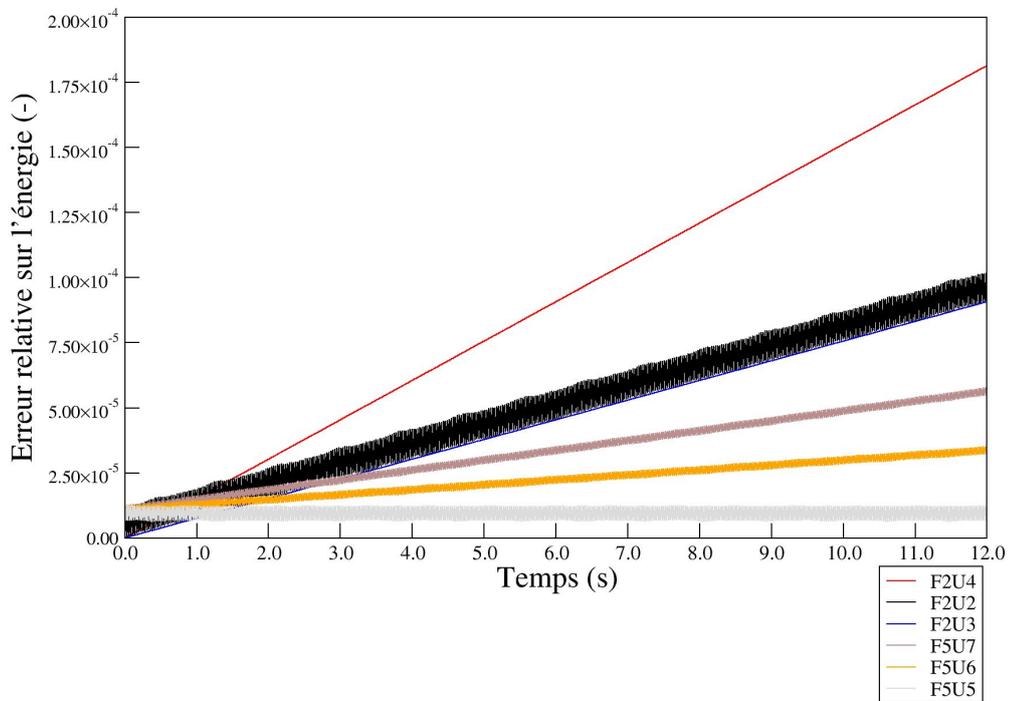


FIG. 3.6 – Zoom sur les différentes évolutions de l’erreur relative sur l’énergie pour prédicteurs explicites les plus pertinents (type 5)

TAB. 3.7 – CONSERVATION DE L'ENERGIE DES COUPLES DE PREDICTEURS EXPLICITES POUR LE CAS SEMI-ANALYTIQUE

	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$	$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n + \frac{\Delta t^2}{8} \ddot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{5\Delta t}{8} \dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{8} \ddot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^n$	1	3	3	3	2	2	2
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^{n+1}$	3	5	5	5	4	4	4
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \frac{1}{2}\mathbf{f}_f^n + \frac{1}{2}\mathbf{f}_f^{n+1}$	2	4	4	4	3	3	3
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = 2\mathbf{f}_f^n - \mathbf{f}_f^{P,n}$	2	4	4	4	3	3	3
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = 2\mathbf{f}_f^{n+1} - \mathbf{f}_f^{P,n}$	4	Instable	Instable	Instable	5	5	5

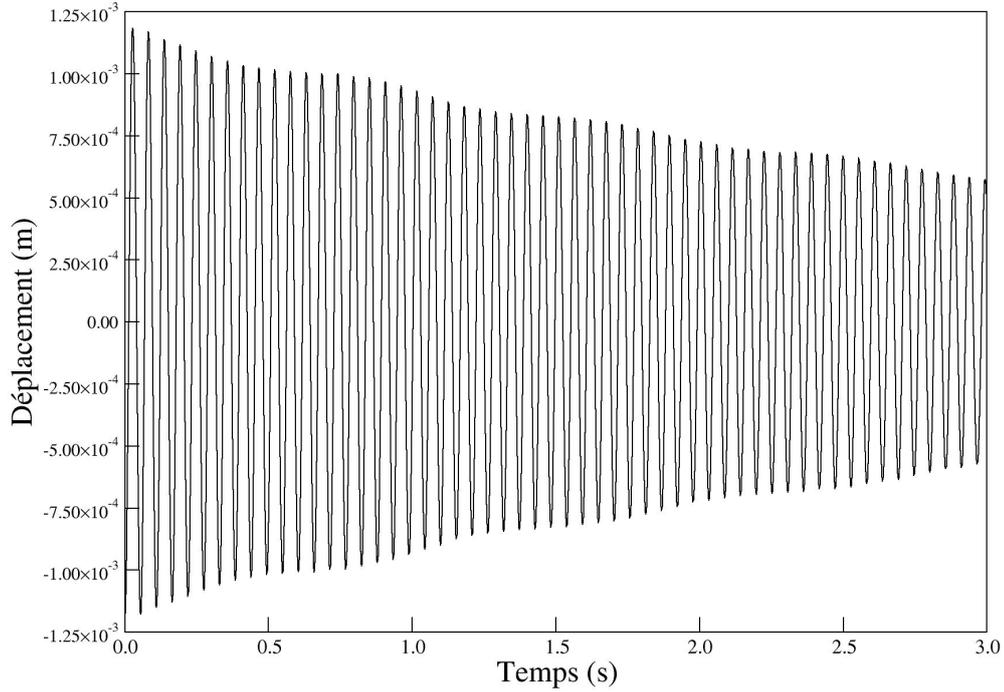


FIG. 3.7 – Déplacement selon x_1 d'un cylindre pour le couple de prédicteur (type 1 : $\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^n$ et $\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n$)

nombre d'itérations effectuées avec un couplage explicite. Par exemple, pour un pas de temps $\Delta t = 10^{-4}$ s en explicite, le nombre maximal de sous-itérations pour que le schéma implicite avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$ s soit intéressant d'un point de vue temps de calcul est 10.

Cette philosophie est conservée pour tester les schémas de couplage implicite. Deux prédictions sur le déplacement sont testées avec trois pas de temps : $1,0 \cdot 10^{-3}$ s, $5,0 \cdot 10^{-4}$ s et $2,0 \cdot 10^{-4}$ s. En fonction de ce qui a été expliqué précédemment, le nombre maximal de sous-itérations autorisées sera respectivement 10, 5 et 2. De plus le critère d'arrêt, basé sur une erreur relative, est choisi égal à 10^{-14} , soit l'erreur machine.

Il est intéressant de noter que les tests avec 5 et 10 sous-itérations assurent la conservation de l'énergie à l'inverse du cas avec deux sous-itérations et du cas explicite (cf. énergie maximale de tab. 3.8). La conservation de l'énergie est obtenue avec le pas de temps $2,0 \cdot 10^{-4}$ s en augmentant à 3 le nombre de sous-itérations. L'ensemble des sous-itérations est nécessaire afin de converger. Les résultats avec les pas de temps $5,0 \cdot 10^{-4}$ s et $1,0 \cdot 10^{-3}$ s démontrent l'intérêt du schéma implicite, puisque pour un nombre de résolution du système fluide inférieur ou égal au cas explicite, la conservation de l'énergie est assurée au bout de 12 s de temps physique dans le premier cas et pas dans le second (tab. 3.8).

TAB. 3.8 – CONSERVATION DE L'ENERGIE POUR LES SCHEMAS IMPLICITES

Pas de temps (s)	Energie maximale (J)	Nombre de sous-itérations maximales (-)	Nombre de résolutions du système linéaire (-)
$1,0 \cdot 10^{-3}$	$5,0250 \cdot 10^{-2}$	7	60320
$5,0 \cdot 10^{-4}$	$5,0250 \cdot 10^{-2}$	5	120000
$2,0 \cdot 10^{-4}$	$5,0323 \cdot 10^{-2}$	2	120000
$1,0 \cdot 10^{-4}$	$5,0259 \cdot 10^{-2}$	1	120000

3.5 Résolution partitionnée numérique

3.5.1 Décomposition du problème

Comme pour la résolution semi-analytique, la résolution du système (eqn. 3.9) peut être décomposée en deux sous-systèmes, un pour la résolution du problème fluide, et un pour la résolution du problème structure :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} : \mathbf{u}_s^{P,n+1} &\longrightarrow \mathbf{f}_f^{n+1} \\
&\left\{ \begin{array}{l} \text{Résolution par} \\ \text{le code de calcul fluide} \end{array} \right. \\
\mathcal{S} : \mathbf{f}_f^{P,n+1} &\longrightarrow \mathbf{u}_s^{n+1} \\
&\left\{ \begin{array}{l} M_{[s,1]} \ddot{\mathbf{u}}_{[s,1]}^{n+1} + K_{[s,1]} \mathbf{u}_{[s,1]}^{n+1} = \mathbf{f}_{[f,1]}^{P,n+1} \\ M_{[s,2]} \ddot{\mathbf{u}}_{[s,2]}^{n+1} + K_{[s,2]} \mathbf{u}_{[s,2]}^{n+1} = \mathbf{f}_{[f,2]}^{P,n+1} \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Les efforts sont obtenus à partir du code de calcul fluide (eqn. 3.16 : \mathcal{F}), tandis que les déplacements sont obtenus, comme précédemment, en résolvant un Newmark (eqn. 3.16 : \mathcal{S}).

3.5.2 Modélisation

Les caractéristiques des structures, du fluide et les conditions initiales sont celles utilisées pour le cas semi-analytique.

Une condition de glissement est imposée sur les bords des cylindres afin de prendre en compte l'hypothèse de fluide parfait. De plus, une condition de symétrie est imposée aux bords du domaine afin de simuler un domaine de taille infini. Les bords du domaine sont pris assez éloignés des deux cylindres afin de réduire au maximum les effets de bords (fig. 3.8). Afin de pouvoir conserver la qualité du maillage sur le bord du cylindre, une viscosité de maillage importante est imposée sur les premières épaisseurs de mailles à partir de l'interface (fig. 3.9).

3.5.3 Quantification de l'erreur du solveur fluide en prédiction imposée

Un premier calcul est réalisé afin d'évaluer le solveur fluide et la déformation de maillage. Pour cela, le déplacement de la structure, obtenu par calcul monolithique, est imposé comme prédiction du calcul numérique. Ainsi, la prédiction de l'interface est toujours la position exacte du domaine à la fin de l'itération. Cela permet d'en déduire les efforts que le fluide applique sur la structure lors du calcul numérique. La différence entre ces efforts et ceux obtenus par

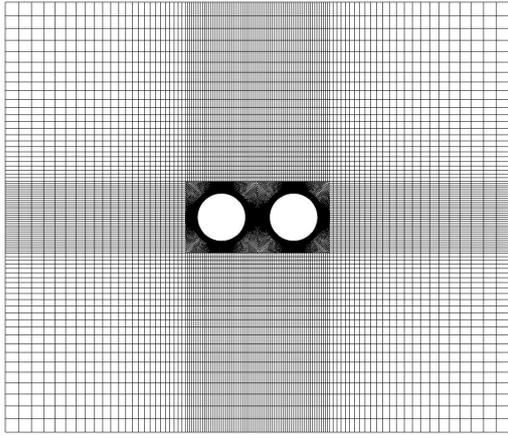


FIG. 3.8 – Maillage complet du domaine fluide et du contour des tubes

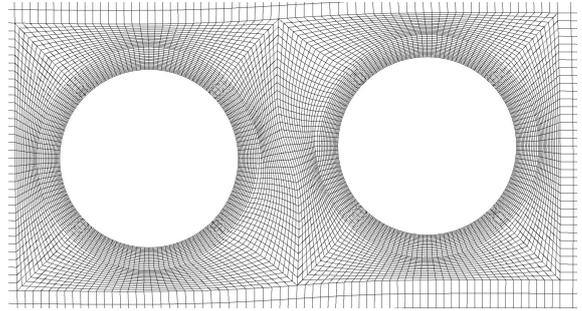


FIG. 3.9 – Déformation des mailles à proximité de l'interface

calcul monolithique permettent d'évaluer l'erreur liée au solveur fluide et à la déformation de maillage. Le tracé des efforts fluides (fig. 3.10) mettent en évidence une surévaluation du calcul numérique en comparaison du calcul analytique. Il est à noter que la valeur moyenne des efforts est bien nulle dans les deux cas et la fréquence est identique pour les deux calculs. La variation d'amplitude peut s'expliquer par la diffusion numérique liée au code (choix du pas de temps trop grand) ou par l'erreur liée à la déformation de maillage.

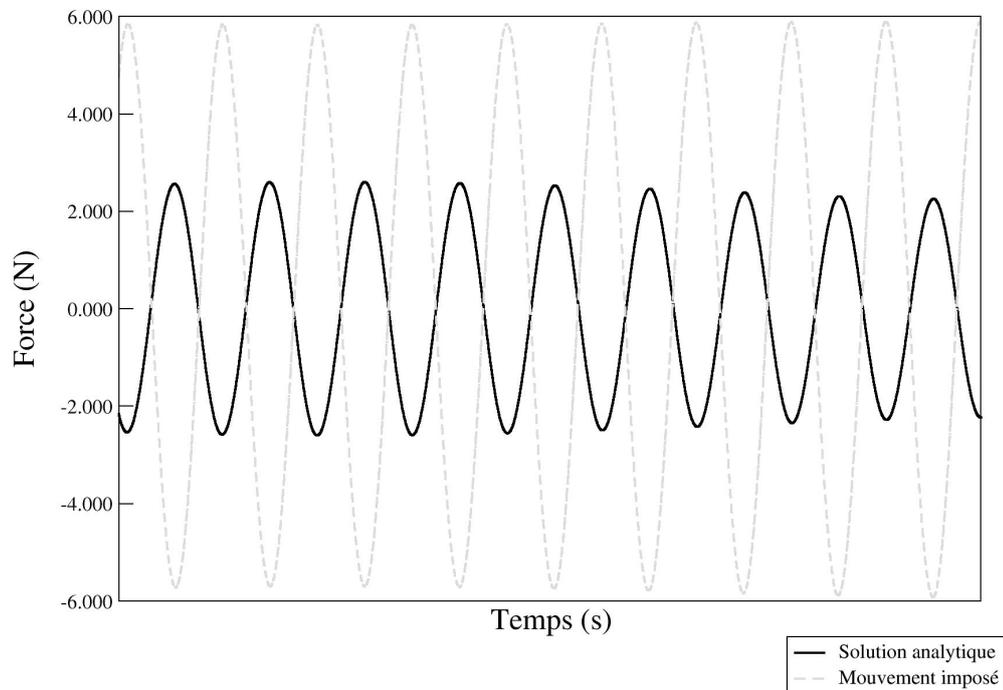


FIG. 3.10 – Energie du système pour deux raffinement de maillage

3.5.4 Quantification de l'erreur du solveur fluide pour les schémas explicites

Convergence spatiale

Un calcul de référence est réalisé avec un maillage de 260000 éléments pour un schéma de couplage donné ($\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$ et $\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^{n+1}$). L'énergie du système de cette solution est comparée à un maillage moins raffiné de 15000 éléments, les autres paramètres étant identiques pour les deux simulations.

L'énergie obtenue avec les deux maillages est quasiment identique (fig. 3.11). Le maillage le moins raffiné peut donc être conservé pour les calculs suivants, la perte d'énergie liée au raffinement spatial étant négligeable.

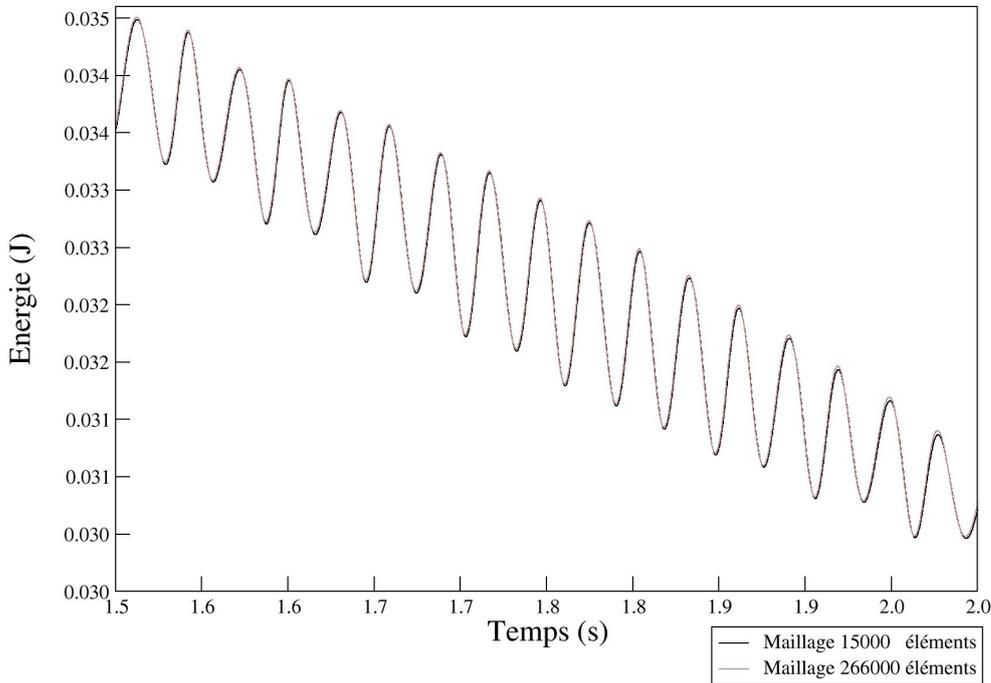


FIG. 3.11 – Energie du système pour deux raffinements de maillage

Résultats qualitatifs

Suite aux des études de convergences spatiales et temporelles, un premier calcul est réalisé avec un schéma de couplage ($\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$ et $\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^{n+1}$) afin d'évaluer qualitativement les résultats. L'étude de deux cylindres mobiles dans un fluide au repos se traduit par la superposition de fréquences dans les signaux des structures. Ce phénomène est observable à travers l'ondulation des amplitudes maximales sur les courbes de déplacement (fig. 3.12). L'atténuation des signaux au cours du temps s'explique par la dissipation numérique d'énergie à l'interface fluide-structure.

La figure 3.13 montre une variation de la pression pendant plus d'une période. On peut voir qu'une dépression se crée et attire les cylindres l'un vers l'autre jusqu'à ce que le confinement soit trop important et repousse les cylindres en créant une surpression.

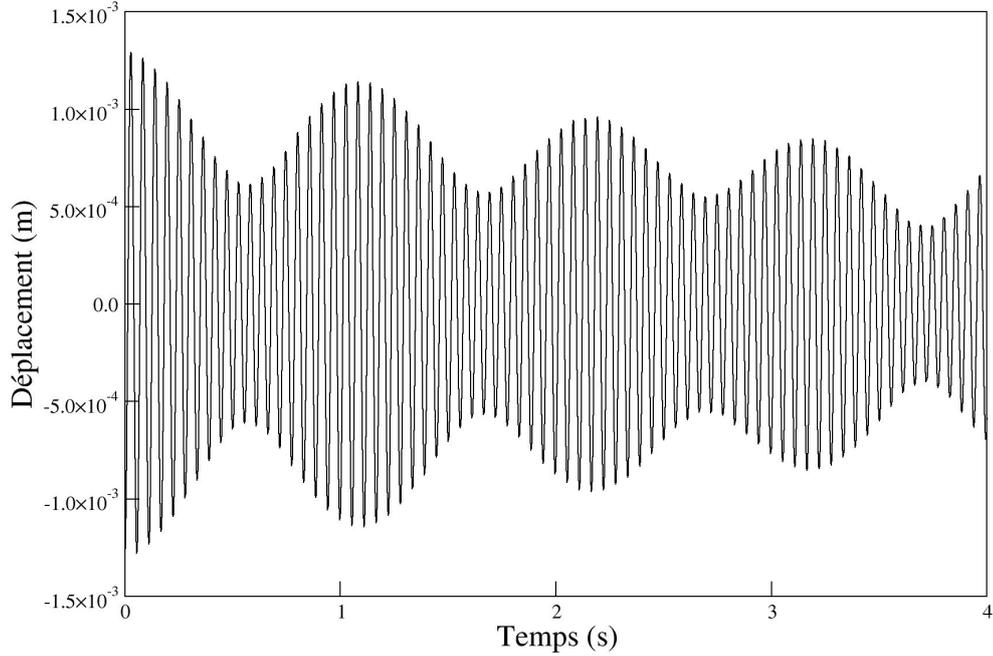


FIG. 3.12 – Déplacement du cylindre de droite selon la direction x_2 par calcul numérique

Le champ de vitesse (fig. 3.14) permet de vérifier que les conditions aux limites cinématiques sont vérifiées au cours du temps. Les vecteurs vitesses donnent l'impression de pénétrer dans le cylindre à certains endroits. Cela est dû au fait que le cylindre est mobile et donc que la vitesse du fluide doit être égale à la vitesse du cylindre à l'interface pour permettre l'adhérence entre les deux milieux.

Comparaison des schémas

La hiérarchisation des schémas obtenus par calcul numérique (tab. 3.9) est globalement comparable à la hiérarchisation obtenue pour les calculs semi-analytiques (tab. 3.7). Il est toutefois à noter que la diffusion numérique liée à la résolution des équations de Navier-Stokes modifie le comportement de trois schémas. Pour deux d'entre eux (F4U3 et F5U6 soient, respectivement, ligne 5 et colonne 3 et ligne 5 et colonne 6 de tab. 3.9), l'ajout des termes en accélération sur la prédiction du déplacement a pour conséquence de rendre le problème instable. Pour le troisième schéma (F5U2 soit ligne 5 et colonne 2 de tab. 3.9), la diffusion numérique a tendance à améliorer le calcul puisque ce schéma est celui conservant le mieux l'énergie alors qu'analytiquement le schéma est instable.

Convergence temporelle

Comme pour l'étude semi-analytique, trois pas de temps, $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-3}$ s, $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4}$ s et $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-5}$ s sont testés pour un schéma de couplage donné ($\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2}\ddot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$ et $\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^{n+1}$) afin d'évaluer la perte d'énergie liée au choix du pas de temps.

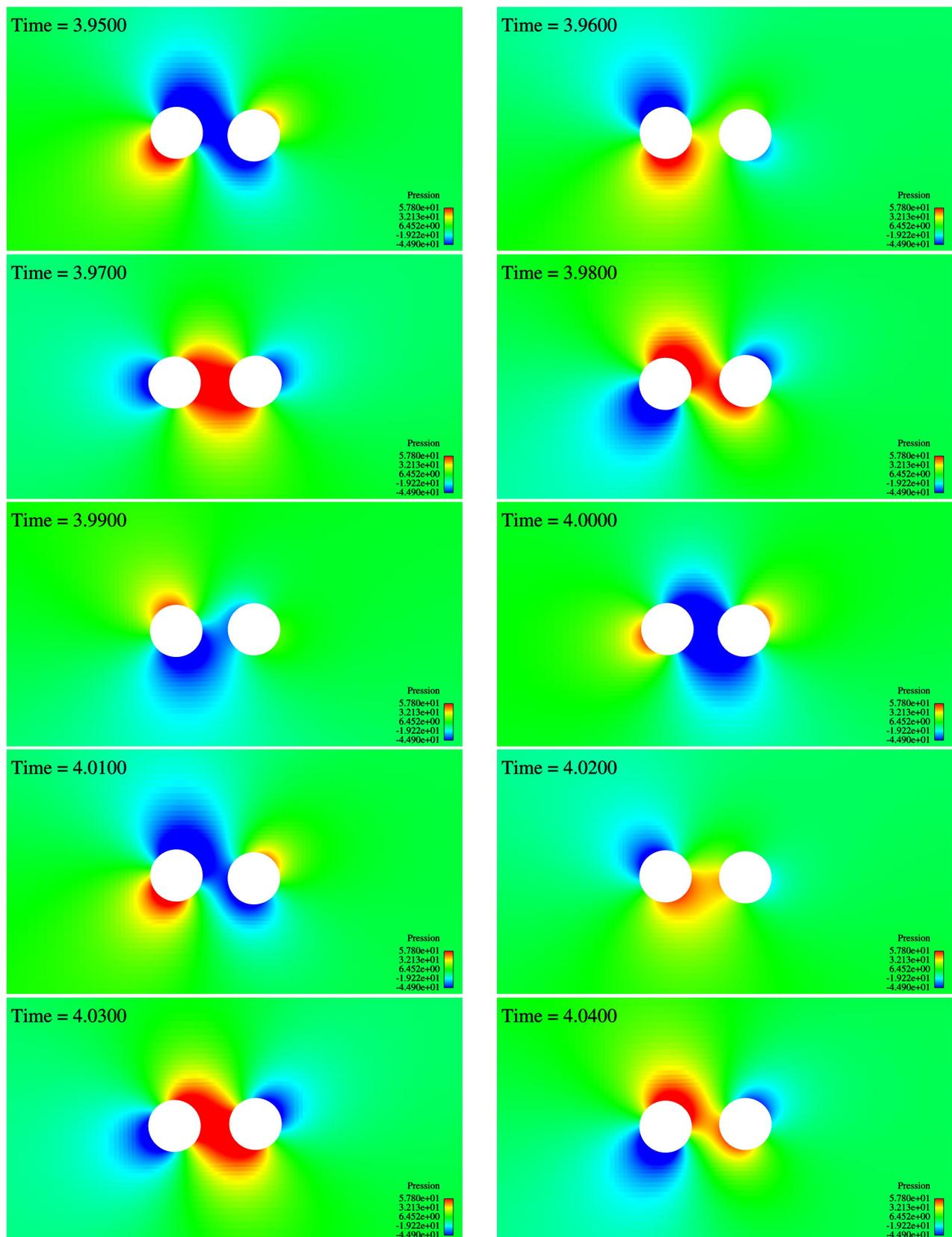


FIG. 3.13 – Champ de pression entre les instants 3,95s et 4,04s

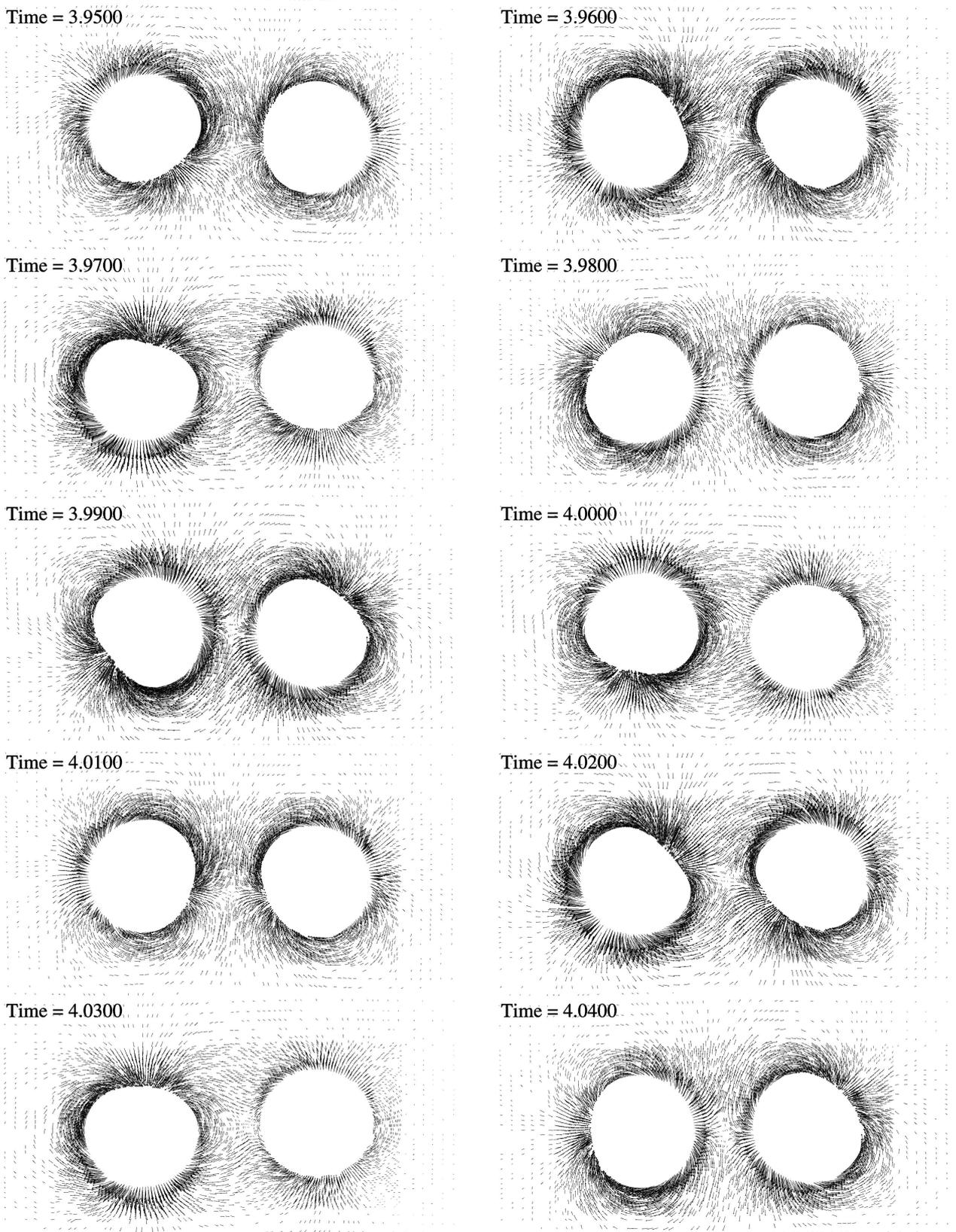


FIG. 3.14 – Champ de vitesse entre les instants 3,95s et 4,04s

TAB. 3.9 – CONSERVATION DE L'ENERGIE DES COUPLES DE PREDICTEURS EXPLICITES POUR LE CAS NUMERIQUE

	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$	$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{u}}_s^n + \frac{\Delta t^2}{8} \ddot{\mathbf{u}}_s^n$	$\mathbf{u}_s^{P,n+\frac{1}{2}} = \mathbf{u}_s^n + \frac{5\Delta t}{8} \dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{8} \ddot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^n$	1	3	3	3	2	2	2
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^{n+1}$	3	5	5	5	4	4	4
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \frac{1}{2}\mathbf{f}_f^n + \frac{1}{2}\mathbf{f}_f^{n+1}$	2	4	4	4	3	3	3
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = 2\mathbf{f}_f^n - \mathbf{f}_f^{P,n}$	2	4	Instable	4	3	3	3
$\mathbf{f}_f^{P,n+1} = 2\mathbf{f}_f^{n+1} - \mathbf{f}_f^{P,n}$	4	6	Instable	Instable	5	Instable	5

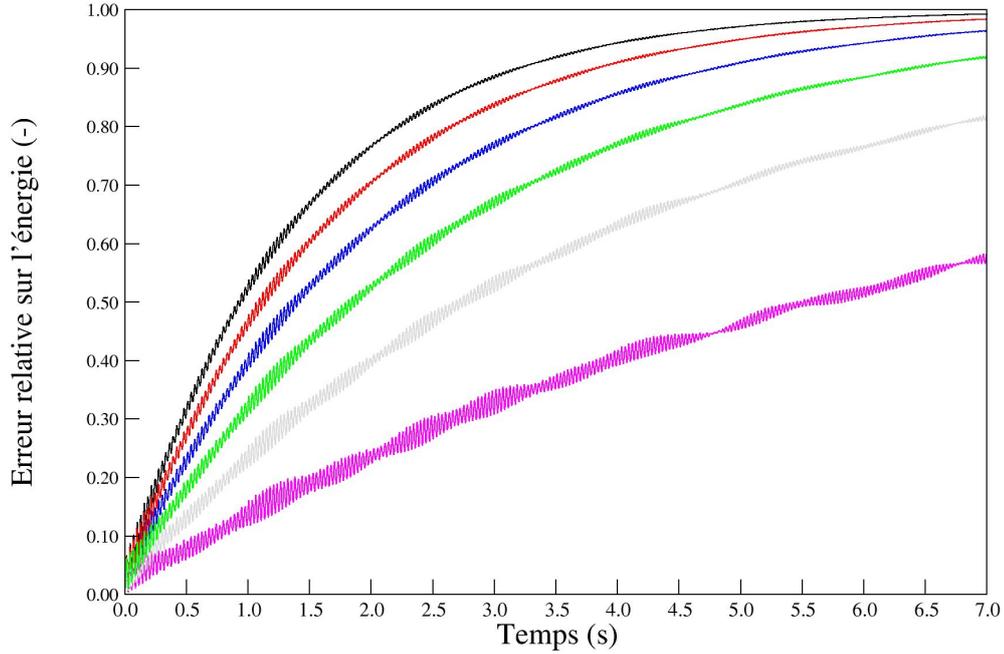


FIG. 3.15 – Evolutions de l’erreur relative sur l’énergie pour les prédicteurs explicites pour le cas numérique

La réduction du pas de temps a un impact beaucoup plus important que pour le cas semi-analytique. La décroissance de l’énergie n’est pas linéaire en temps. Le fait de réduire d’un facteur 10 le pas de temps ne réduit pas du même facteur l’erreur sur l’énergie (fig. 3.16). Pour le pas de temps $1,0 \cdot 10^{-3}$ s, l’erreur relative semble avoir une croissance logarithmique, pour le pas de temps $1,0 \cdot 10^{-4}$ s, la croissance semble être linéaire. Le pas de temps $1,0 \cdot 10^{-5}$ s semble contraindre l’erreur à osciller dans un domaine borné.

Quantification de l’erreur numérique

Les études de conservation de l’énergie ayant été faites pour le cas semi-analytique et pour le cas numérique, il est intéressant de les comparer afin de pouvoir quantifier l’erreur liée au code de calcul fluide. Pour un schéma de couplage explicite donné ($\mathbf{f}_f^{P,n+1} = \mathbf{f}_f^{n+1}$ et $\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \frac{3\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^n - \frac{\Delta t}{2}\dot{\mathbf{u}}_s^{n-1}$), l’erreur relative obtenue lors de l’étude semi-analytique est la solution de référence à obtenir avec le couplage numérique. L’étude de l’erreur relative entre l’énergie obtenue des deux manières permet de quantifier la diffusion numérique liée au code de calcul fluide (schéma de résolution temporel et spatial, déformation du maillage, ...) puisque les schémas de couplages sont identiques. Le tracé de l’erreur relative pour le pas de temps $1,0 \cdot 10^{-4}$ s (fig. 3.17) montre que la solution numérique obtenue est loin de la solution optimale qui pourrait être obtenue. Le tracé pour le pas de temps $1,0 \cdot 10^{-5}$ s (fig. 3.17) met en évidence une réduction significative de la diffusion numérique. Celle-ci a tout de même un impact de l’ordre de 10 % sur la conservation de l’énergie au bout de 4,5 s de simulation physique.

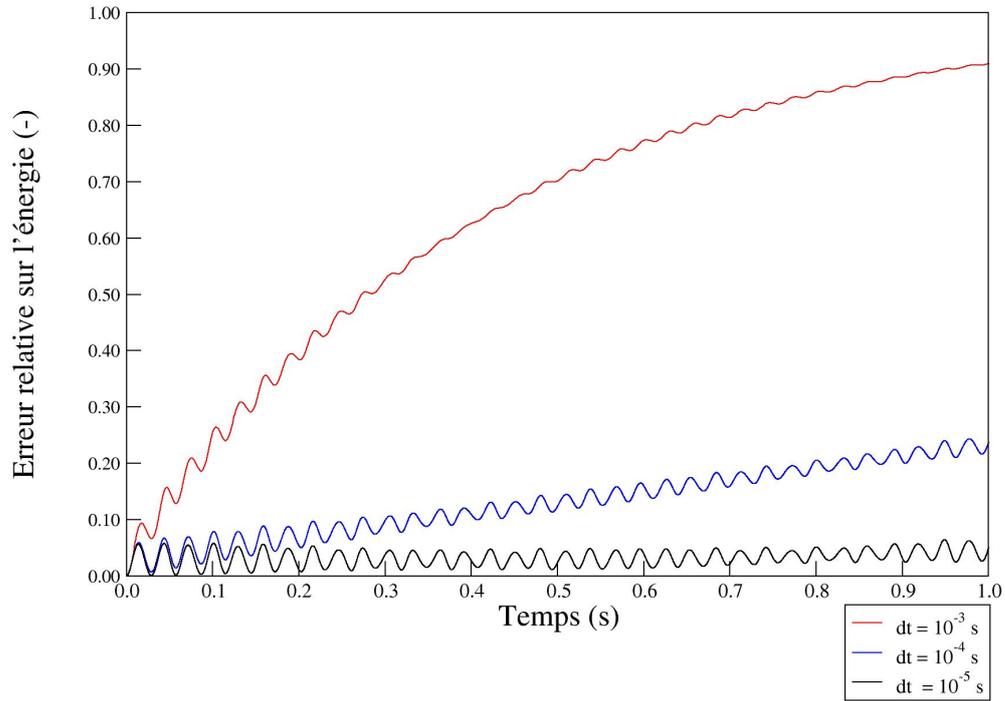


FIG. 3.16 – Influence du pas de temps sur la conservation de l'énergie

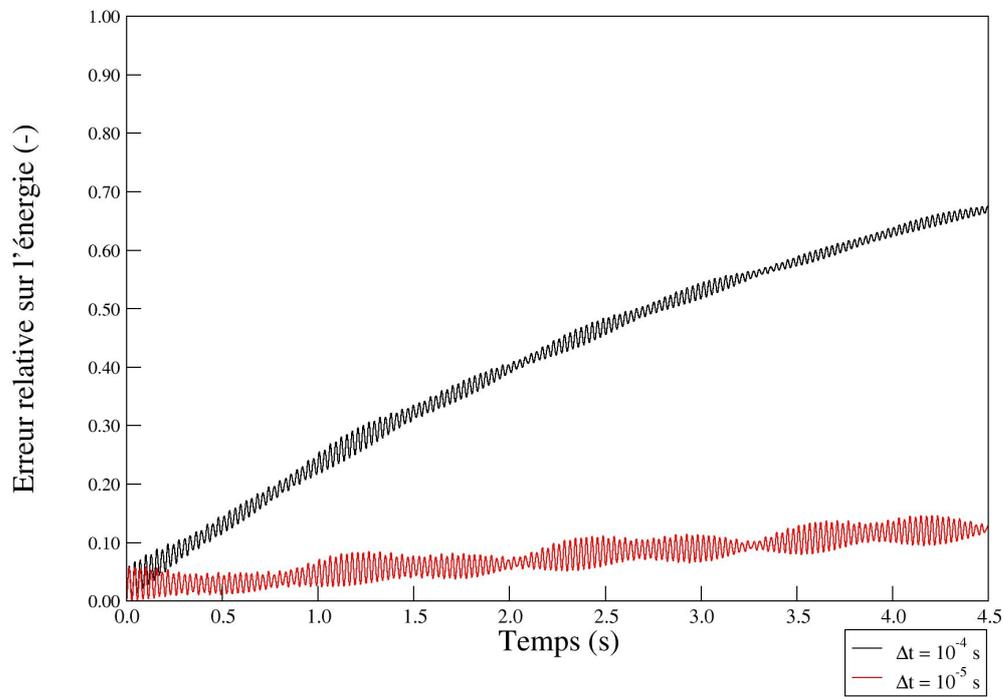


FIG. 3.17 – Erreur relative cas semi-analytique versus cas numérique

3.5.5 Quantification de l'erreur du solveur fluide pour les schémas implicites

Une démarche analogue à l'étude semi-analytique est menée pour les schémas implicites (*i.e.* n sous-itérations maximales pour un pas de temps n fois plus grand que la solution avec un schéma explicite). Il s'avère que les résultats sont identiques au cas explicite. Un calcul avec un pas de temps similaire au cas explicite, $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4}$ s, et un nombre de sous-itérations imposé à 40 est réalisé. Là encore, les sous-itérations n'ont aucun effet sur l'amélioration de la convergence (fig. 3.18). Ce résultat est assez suprenant puisque le schéma implicite a tendance à améliorer la convergence du schéma de couplage. Ce résultat s'explique par une modification trop minimale des efforts entre les sous-itérations pour avoir un impact suffisant sur le mouvement de la structure (fig. 3.19).

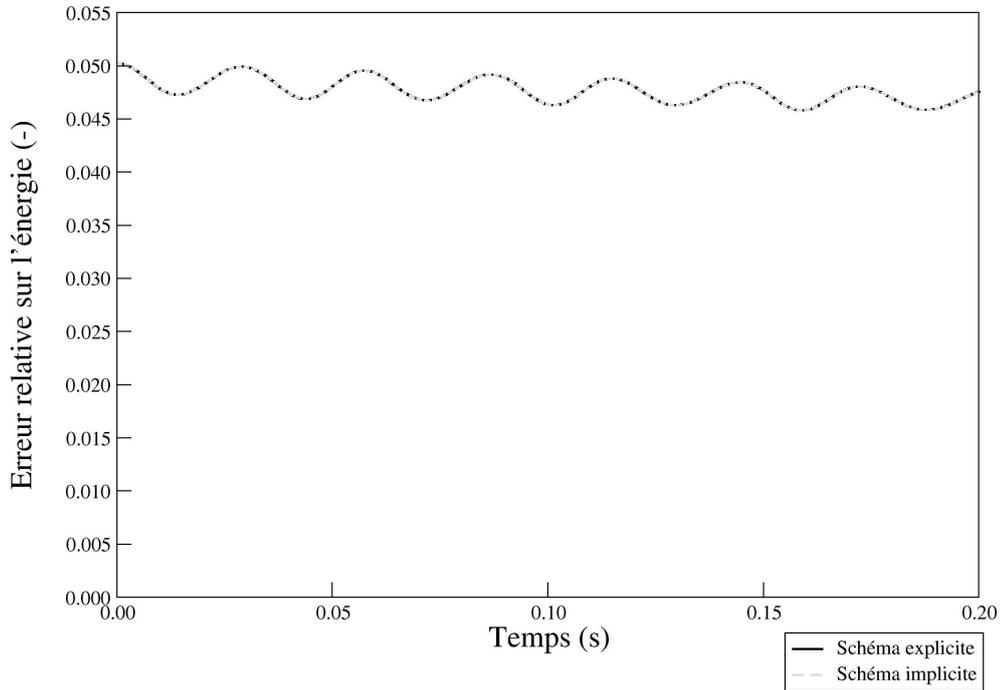


FIG. 3.18 – Comparaison des erreurs relatives entre les schémas explicites et implicites

3.6 Conclusion

Cette étude a permis de hiérarchiser différents couples de prédicteurs de déplacement et de force. Une étude semi-analytique a permis de quantifier l'erreur liée aux schémas de couplage. L'intérêt de schémas de couplages implicites a été mis en évidence sur le cas semi-analytique. L'étude numérique a permis de valider l'implémentation des schémas de couplages en corroborant les résultats de l'étude semi-analytique. Malgré tout, le comportement de trois schémas différents et il serait intéressant de les tester sur des configurations différentes (avec par exemple un fluide visqueux) afin de comprendre, d'une part, pourquoi l'ajout des termes en accélération tend à faire diverger les schémas et d'autre part, de vérifier si le bon comportement du schéma ($\mathbf{u}_s^{P,n+1} = \mathbf{u}_s^n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_s^n$ et $\mathbf{f}_f^{P,n+1} = 2\mathbf{f}_f^{n+1} - \mathbf{f}_f^{P,n}$) est uniquement dû à ce cas d'étude ou est généralisable en dépit des résultats semi-analytiques. D'autre part cette étude a permis de quantifier sur le

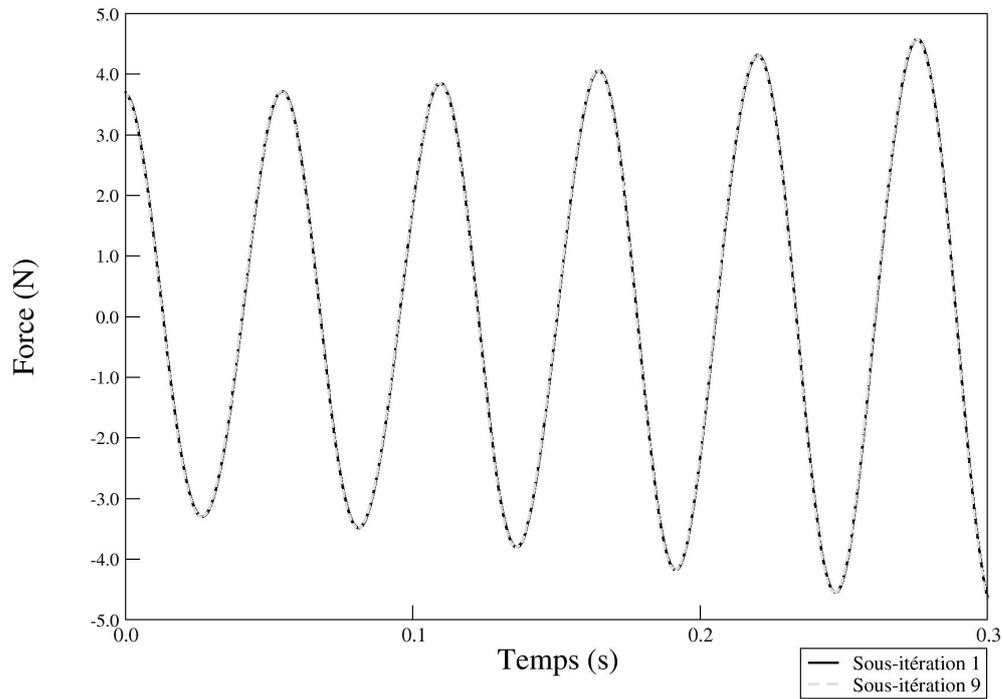


FIG. 3.19 – Comparaison de la composante x_1 de l'effort appliqué sur le cylindre de droite pour deux sous-itérations

coupleur les erreurs liées, d'une part, aux schémas de couplages et d'autre part, à la diffusion numérique du code de calcul fluide. Dans tous les cas, il en ressort qu'il est nécessaire d'utiliser un très faible pas de temps, beaucoup plus restrictif que les critères du nombre de courant, pour un calcul fluide seul, ou d'un dixième de la fréquence en air de la structure, pour un calcul structure seul.

Vibration de structure soumise à un écoulement axial interne

4.1 Introduction

La compréhension et la prédiction de la dynamique des tubes en écoulements axiaux a un intérêt important dans les applications d'ingénierie puisque c'est une configuration présente dans un grand nombre de secteurs de l'industrie. Dans le domaine nucléaire, cette problématique apparaît, par exemple, sur les assemblages combustibles. Généralement ces tubes sont faits aussi fins que possible pour des raisons de poids et de coûts économiques. C'est pourquoi la réponse à de telles excitations est d'un grand intérêt. Ces quelques exemples sont la preuve de l'intérêt industriel de la problématique et la raison de la littérature très fournie à ce sujet [PL93, Pai98].

L'ensemble des études théoriques et expérimentales ont montré qu'un tube soumis à un écoulement interne perd sa stabilité par flottement (*i.e.* l'amortissement apparent devient négatif). Les modèles ont d'abord été développés à partir de considérations 2D et linéaires [GP66b, GP66a, Pai70] avant d'être étendus à des approches non linéaires [SLP94, LPH95, MSPS08]. Des modèles dérivés avec des modifications de conditions aux limites, tels que le tube posé en appui à chaque extrémité, la présence d'un ressort ou de masse en bout de tube [NR06, YS07, MSSWGP07, PSWGS07] ont également été développés afin d'élargir la gamme d'études des problèmes industriels.

Dans le cadre de l'étude menée par la suite, la méthodologie employée sera limitée au cadre de petits déplacements (*i.e.* approche linéaire) avec une approche 2D afin de pouvoir comparer les résultats à une approche numérique par transpiration [Ren98, FV01, FLT03]. Cette approche numérique consiste à conserver le domaine fluide fixe et à prendre en considération le mouvement de la structure en modifiant les conditions aux limites. Dans [FLT03], le problème est réécrit sous forme spectrale. L'obtention des valeurs propres ainsi obtenues permettent de mener à bien une étude de stabilité.

4.2 Description du modèle

La description reprend celle réalisée par [Pai98].

Soit un cylindre flexible de section transversale circulaire, de rayon intérieur Ri , de rayon extérieur Re et de longueur L , dans lequel s'écoule un fluide incompressible avec une vitesse uniforme v_f^0 selon l'axe x_1 correspondant à la position de la structure au repos (fig. 4.1). Le cylindre est supposé encastré en amont et libre en aval de l'écoulement. La section transverse

est supposée uniforme, la modélisation est donc effectuée sur la ligne moyenne du tube. Seuls des petits déplacements en flexion (i.e selon l'axe x_2) sont permis.

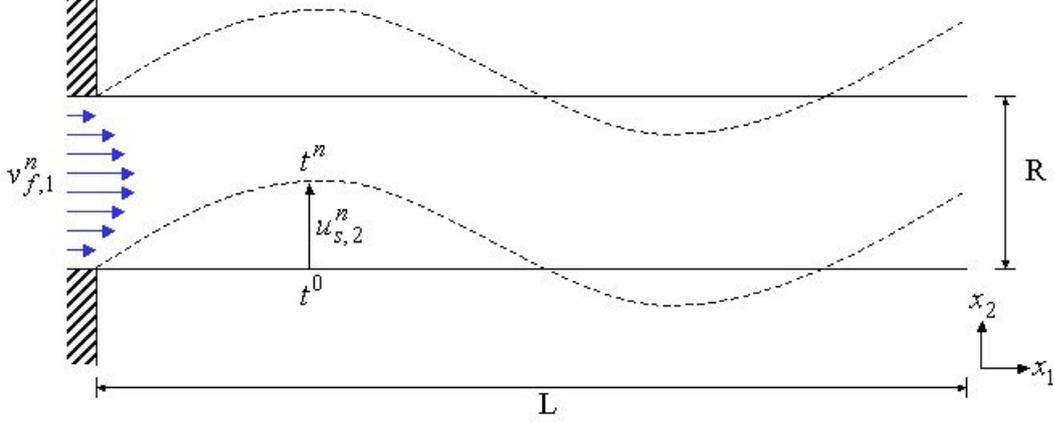


FIG. 4.1 – Géométrie du tube soumis à un écoulement interne

Les efforts liés à la gravité et les perturbations extérieures sont négligés. Seuls les efforts appliqués par le fluide sur la paroi de la structure sont donc pris en compte dans les efforts extérieurs.

Soit un élément infinitésimal du domaine fluide δ_f . Celui-ci est soumis d'une part aux efforts de pression et, d'autre part, aux réactions normale et tangentielle du tube sur le fluide. La seconde loi de Newton pour le fluide s'écrit donc :

$$M_f \delta_f \frac{d\mathbf{v}_f}{dt} = pA\mathbf{e}_n - A\left(p + \frac{\partial p}{\partial n}\delta_f\right)\mathbf{e}_n - qS\delta_f\mathbf{e}_n - F\delta_f\mathbf{e}_t \quad (4.1)$$

De même, un élément infinitésimal de la structure δ_s est soumis aux efforts de tension, de cisaillement et aux réactions normale et tangentielle du fluide sur la structure. La seconde loi de Newton pour la structure s'écrit donc :

$$M_s \delta_s \frac{d^2\mathbf{u}_s}{dt^2} = -T\mathbf{e}_n + \left(T + \frac{\partial T}{\partial n}\delta_s\right)\mathbf{e}_n - Q\mathbf{e}_t + \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial n}\delta_s\right)\mathbf{e}_t + qS\delta_s\mathbf{e}_n + F\delta_s\mathbf{e}_t \quad (4.2)$$

Seules des petites perturbations sont permises, d'où :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_n = \cos(\theta)\mathbf{x}_1 + \sin(\theta)\mathbf{x}_2 \simeq \mathbf{x}_1 + \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1}\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{e}_t = \cos(\theta)\mathbf{x}_2 - \sin(\theta)\mathbf{x}_1 \simeq \mathbf{x}_2 - \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1}\mathbf{x}_1 \end{cases} \quad (4.3)$$

avec θ l'angle entre les repères $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ et $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)$ et $\frac{\partial}{\partial n} \simeq \frac{\partial}{\partial x_1}$.

De plus, selon la théorie des poutres de Euler-Bernoulli [BBQB⁺02], le cisaillement de la poutre peut s'exprimer de la manière suivante :

$$Q = -EI \frac{\partial^3 u_{s,2}}{\partial^3 x_1} \quad (4.4)$$

avec E , le module d'Young et I , le moment d'inertie.

La vitesse de l'écoulement au centre du tube est la superposition de la vitesse du tube et de la vitesse en entrée selon la direction normale du tube :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_f &= \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + v_f^0 \mathbf{e}_n \\ &\simeq \frac{\partial u_{s,2}}{\partial t} \mathbf{x}_2 + v_f^0 \mathbf{x}_1 + v_f^0 \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1} \mathbf{x}_2\end{aligned}\quad (4.5)$$

Puisque, pour de petites perturbations, $\frac{\partial u_{s,1}}{\partial t} \simeq 0$.

La vitesse du fluide en entrée du domaine v_f^0 est supposée constante. L'accélération du fluide s'en déduit par dérivation par rapport au temps de (eqn. 4.5) :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_f &= \frac{d\mathbf{v}_f}{dt} \\ &\simeq \frac{\partial}{\partial t} \left(v_f^0 \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial u_{s,2}}{\partial t} + v_f^0 \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1} \right) \mathbf{x}_2 \right) + v_f^0 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(v_f^0 \mathbf{x}_1 + \left(\frac{\partial u_{s,2}}{\partial t} + v_f^0 \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1} \right) \mathbf{x}_2 \right) \\ &\simeq \frac{\partial^2 u_{s,1}}{\partial t^2} \mathbf{x}_1 + \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial t^2} \mathbf{x}_2 + 2v_f^0 \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial x_1 \partial t} \mathbf{x}_2 + (v_f^0)^2 \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial x_1^2} \mathbf{x}_2 + \frac{\partial v_f^0}{\partial t} \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1} \mathbf{x}_2\end{aligned}\quad (4.6)$$

La projection et la somme des équations (eqn. 4.1), (eqn. 4.2), (eqn. 4.4), (eqn. 4.5) et (eqn. 4.6) selon les directions x_1 et x_2 permet alors d'obtenir la formulation suivante :

$$\begin{cases} A \frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} \simeq 0 \\ -EI \frac{\partial^4 u_{s,2}}{\partial x_1^4} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(T - Ap \right) \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1} \simeq M_f \frac{\partial v_{f,2}}{\partial t} + M_s \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial t^2} \end{cases}\quad (4.7)$$

L'équation de la dynamique de la structure se formule alors à partir de la combinaison de (eqn. 4.7) et (eqn. 4.5) :

$$(M_s + M_f) \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial t^2} + 2M_f v_{f,1}^0 \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial x_1 \partial t} + M_f (v_{f,1}^0)^2 \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial x_1^2} + EI \frac{\partial^4 u_{s,2}}{\partial x_1^4} \simeq 0\quad (4.8)$$

Le problème se résout grâce aux conditions limites :

$$\begin{cases} u_{s,2}(x_1 = 0) = 0 & \text{et} & \frac{\partial u_{s,2}}{\partial x_1}(x_1 = 0) = 0 \\ \frac{\partial^2 u_{s,2}}{\partial x_1^2}(x_1 = L) = 0 & \text{et} & \frac{\partial^3 u_{s,2}}{\partial x_1^3}(x_1 = L) = 0 \end{cases}\quad (4.9)$$

Il est à noter que la viscosité du fluide n'intervient pas dans l'équation et cela indépendamment des hypothèses de linéarité choisies [Pai98].

Différentes méthodes existent pour résoudre cette équation et trouver les fréquences et amortissements du système. L'une d'elle consiste à décomposer la solution sous la forme de deux variables indépendantes : $u_{s,2}(t, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(x_2) q_k(t)$ où $\phi_k(x_2)$ sont les fonctions propres d'une poutre telles que $\phi_k^{(4)}(x_2) = \lambda_k^4 \phi_k(x_2)$, avec λ_k les valeurs propres du système, et $q_k(t)$ les coordonnées généralisées. A partir de cette décomposition, il est possible d'obtenir un système d'équations fonction de $q_k(t)$ représentant un oscillateur mécanique. En supposant que les coordonnées généralisées soient de la forme $q_k(t) = A_k e^{j\Omega t}$, il existe une solution au problème en annulant le déterminant du système ainsi créé. Les solutions obtenues $\Omega = \omega \sqrt{1 - \chi^2} + j\chi\omega$ sont les fréquences et amortissements des différents modes propres de la structure. Il est ainsi possible de savoir pour quel mode de la structure, cette dernière part en instabilité de flottement ($\Im(\Omega) < 0$) ou statique de flambage ($\Re(\Omega) = 0$).

4.3 Modélisation

La modélisation effectuée est 2D, puisque le modèle analytique ne présuppose pas une géométrie axisymétrique de la structure. L'écoulement correspond donc à un écoulement dans un canal. Un profil parabolique est imposé en entrée (fig. 4.2).

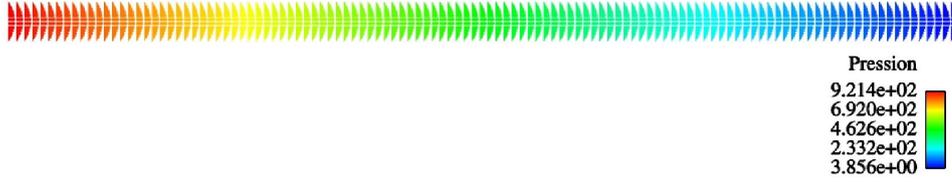


FIG. 4.2 – Écoulement initial dans le tube

Les parois supérieures et inférieures sont considérées mobiles. Les efforts fluide sont calculés sur les parois supérieures et inférieures du domaine fluide et sont envoyés à la structure. La structure est modélisée par sa fibre moyenne via des éléments poutres à section circulaire et est encastree à une extrémité. Les forces des parois fluides sont donc confondues sur le maillage structure (fig. 4.3).

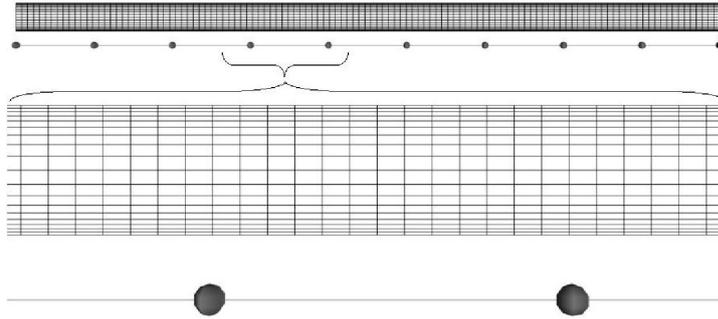


FIG. 4.3 – Maillages fluide et structure et zoom sur un élément structure

Après la mise en régime de l'écoulement sur la structure au repos, alignée sur l'axe x_1 , une vitesse initiale est donnée à la structure afin de dissymétriser l'écoulement. La fonction utilisée a la forme de la déformée modale du 2^e mode propre de la structure en air :

$$v_{s,1} = \text{Ampl} \left(\cos\left(\frac{k_2 x_1}{L}\right) - \cosh\left(\frac{k_2 x_1}{L}\right) + R_2 \left(\sin\left(\frac{k_2 x_1}{L}\right) - \sinh\left(\frac{k_2 x_1}{L}\right) \right) \right) \quad (4.10)$$

$$\text{avec} \begin{cases} k_2 \text{ la 2ème solution positive de } \cos(k) \cosh(k) = -1 \\ R_2 = \frac{\sin(k_2) - \sinh(k_2)}{\cos(k_2) - \cosh(k_2)} \\ \text{Ampl une vitesse arbitraire} \end{cases}$$

La simulation est réalisée afin d'obtenir plusieurs périodes d'oscillations pour permettre le post-traitement et l'obtention des fréquences et amortissements. Le post-traitement réalisé est l'ajustement d'une courbe en sinus et cosinus (eqn. 1.2) appliquée au déplacement de l'extrémité libre du tuyau.

La configuration choisie est celle traitée dans [Ren98] :

– Longueur du tube	L	=	1,0	m,
– Rayon interne du tube	R_i	=	$2,0 \cdot 10^{-2}$	m,
– Epaisseur du tube	e	=	$4,0 \cdot 10^{-4}$	m,
– Module d’Young	E_s	=	$1,5 \cdot 10^9$	Pa,
– Coefficient de Poisson	ν_s	=	0,3,	
– Masse linéique de la structure	M_s	=	160	kg.m ⁻² ,
– Masse volumique du fluide	ρ_f	=	$1,0 \cdot 10^3$	kg.m ⁻³ ,
– Rapport entre les masses fluide et structure	β	=	0,2,	
– Viscosité dynamique	η	=	$5,0 \cdot 10^{-2}$	kg.m ⁻¹ .s ⁻¹ ,
– Vitesse de fluide en entrée	\mathbf{v}_f	=	$(0,614\bar{v}_{red}; 0; 0)$	m.s ⁻¹ ,
– Vitesse réduite adimensionnée	\bar{v}_{red}	∈	[0, 7],	
– Amplitude initiale de la structure	$Ampl$	=	$1,84 \cdot 10^{-6}$	m.s ⁻¹ .

4.4 Résultats

Des simulations ont été réalisées pour des vitesses réduites allant de 1 à 7. Les résultats sont comparés à des méthodes de transpiration dont le principe consiste à travailler sur un domaine fluide fixe et à prendre en considération le mouvement de l’interface en modifiant les conditions limites. Cette méthode est restreinte à de très petits déplacements. Les tests avec des schémas explicites ont tous échoué, le domaine faisant apparaître un retournement de maille au bout de quelques itérations. Les simulations ont donc été réalisées avec des schémas de couplages implicites et des pas de temps dix fois plus grands que pour les tests explicites puisqu’un nombre maximal de dix sous-itérations a été imposé. Le critère de convergence a été volontairement supprimé afin d’évaluer la convergence. Excepté pour les premières itérations, la convergence reste bornée sous $3,5 \cdot 10^{-3}$ (fig. 4.4). Les premières itérations peuvent s’expliquer par une modification assez rapide de l’écoulement dû à l’impulsion initiale donnée à la structure. Les pics locaux sur l’erreur traduisent les amplitudes maximales du déplacement du tube. Une étude plus précise sur les sous-itérations (fig. 4.5) montre une décroissance rapide de l’erreur sur les cinq premières sous-itérations, puis une décroissance beaucoup plus lente sur les cinq dernières sous-itérations.

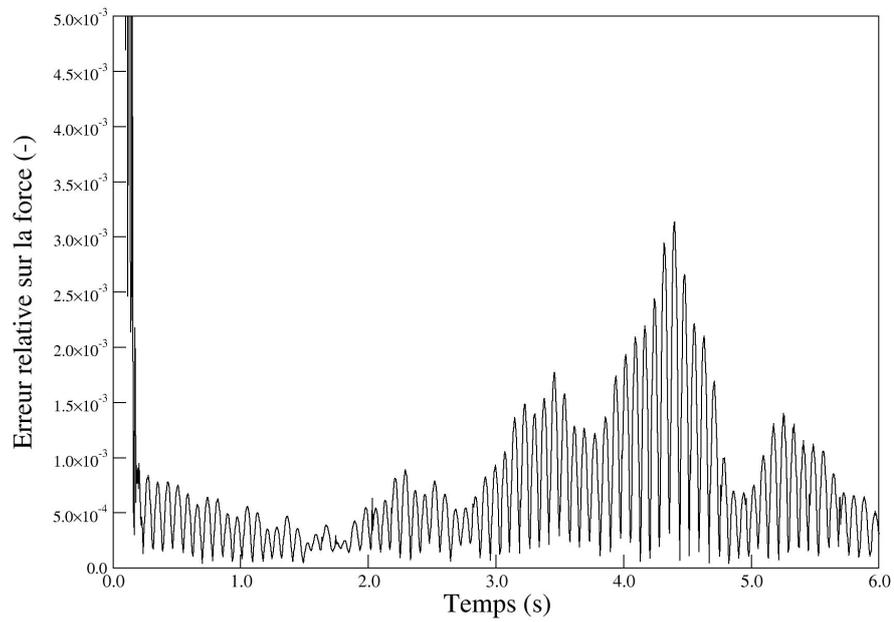
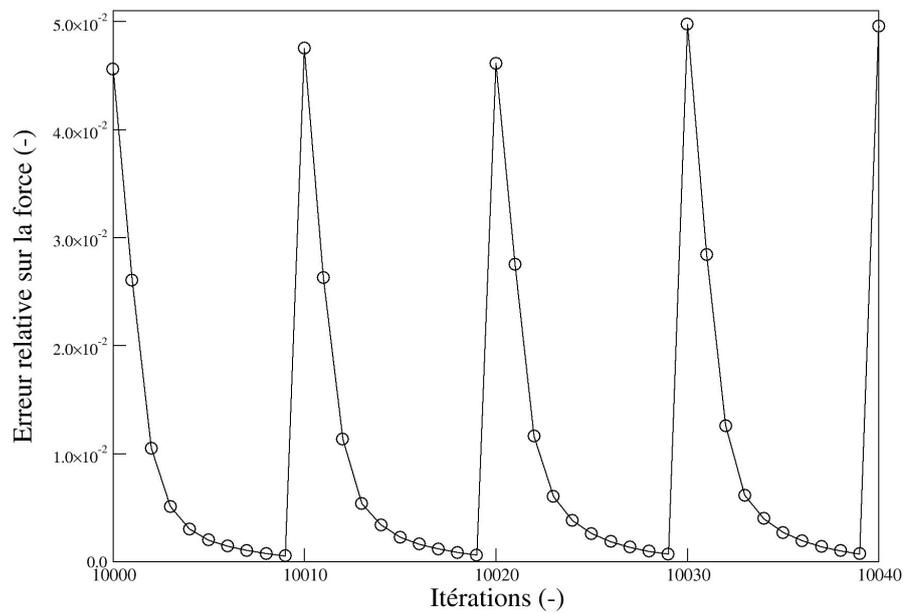
Le tracé des déformées des tubes pour les vitesses réduites 4,0 et 4,5 aux instants 1,99 s et 5,00 s (fig. 4.6) montre une amplitude tendant à s’atténuer dans le premier cas et à croître dans le second.

Le déplacement de l’extrémité libre de la structure pour des vitesses réduites de 4 et 4,5 (fig. 4.7) met clairement en évidence le départ en instabilité (annulation de l’amortissement). La vitesse critique est donc comprise entre ces deux valeurs.

Le tracé dans le plan fréquence-amortissement (fig. 4.8), permet de montrer que la méthode ALE et la méthode de transpiration de [FV01] captent le départ en instabilité pour une vitesse réduite comprise entre 4 et 4,5.

Une comparaison plus précise des fréquences et des amortissements (fig. 4.9, 4.10) fait apparaître une différence entre les modèles. Tant que la structure reste stable, les amortissements calculés sont du même ordre. Pour des vitesses supérieures à la vitesse critique les différences s’accroissent entre les deux méthodes. A l’inverse, le calcul de la masse pour la méthode ALE et la méthode par transpiration de [Ren98] est semblable pour des valeurs éloignées de la vitesse réduite de départ en instabilité.

D’autre part, cette étude permet de valider la méthode de projection employée pour les struc-

FIG. 4.4 – Convergence du schéma implicite pour $v_{red} = 4, 5$ FIG. 4.5 – Evolution de la convergence des sous-itérations pour $v_{red} = 4, 5$

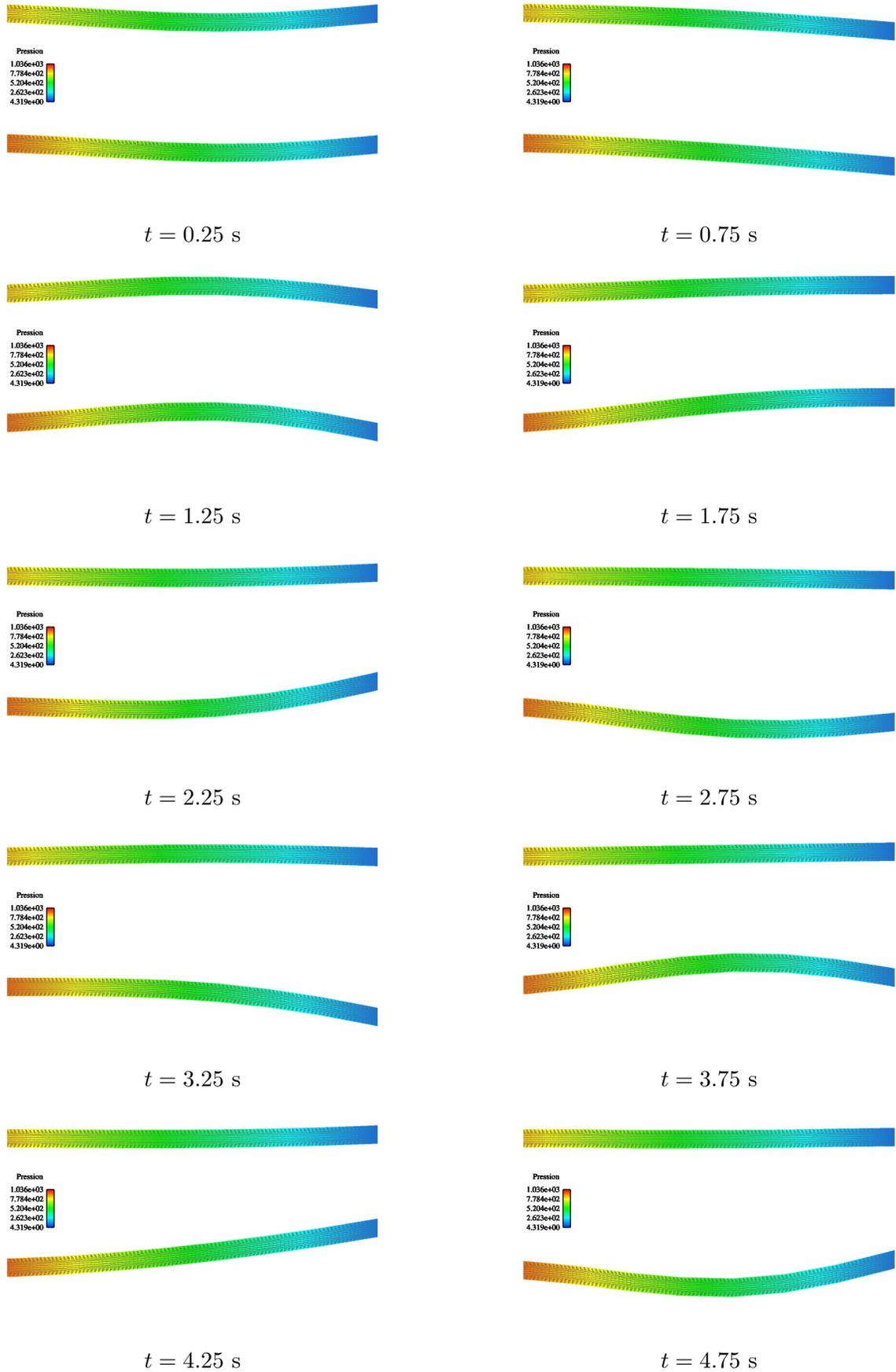


FIG. 4.6 – Déformée du tube à différents instants pour les vitesses réduites 4 (haut) et 4,5 (bas)

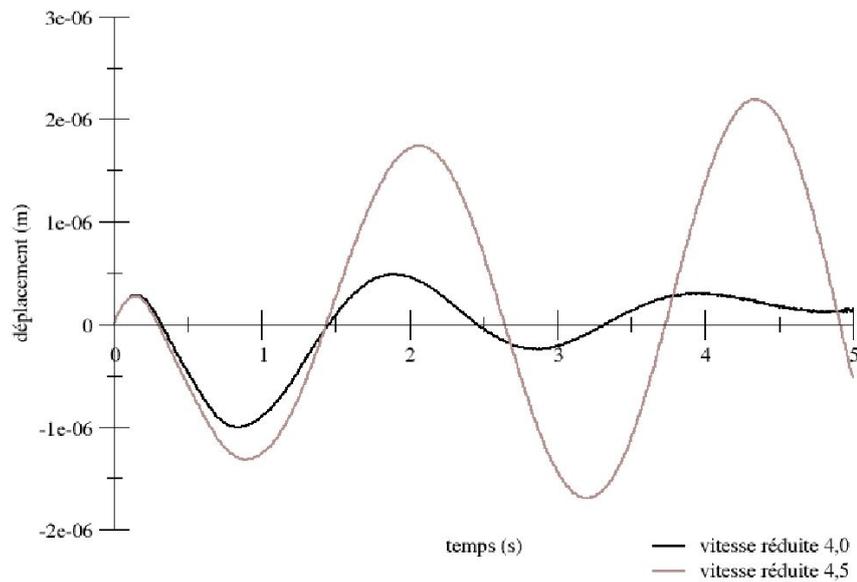


FIG. 4.7 – Tracé du déplacement de la structure pour les vitesses réduites 4,0 et 4,5

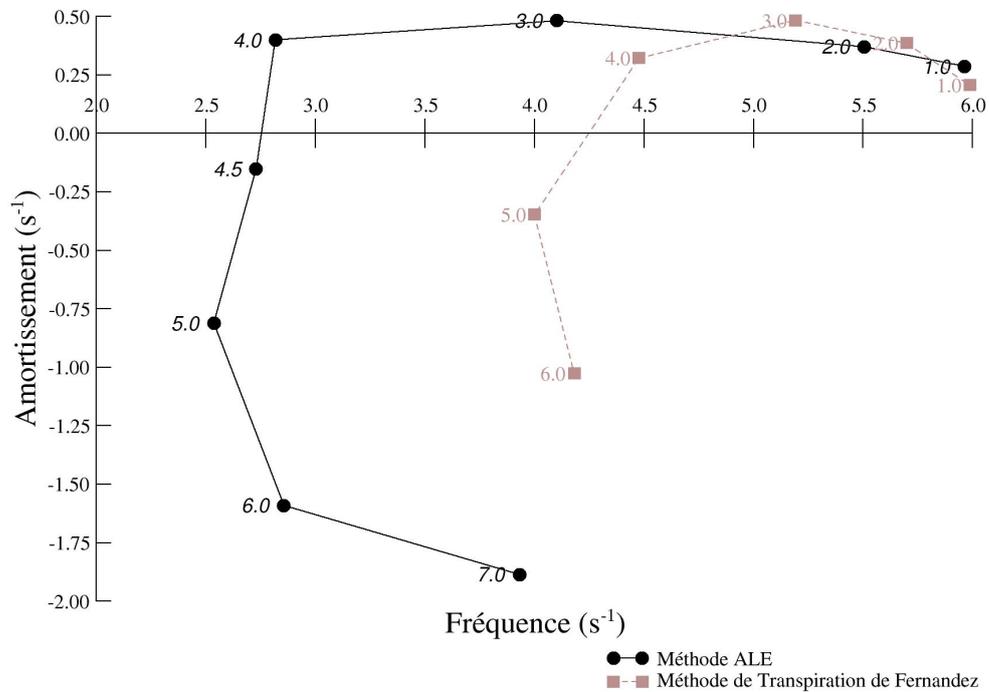


FIG. 4.8 – Tracé du plan fréquence-amortissement pour différentes vitesses d'entrée du fluide

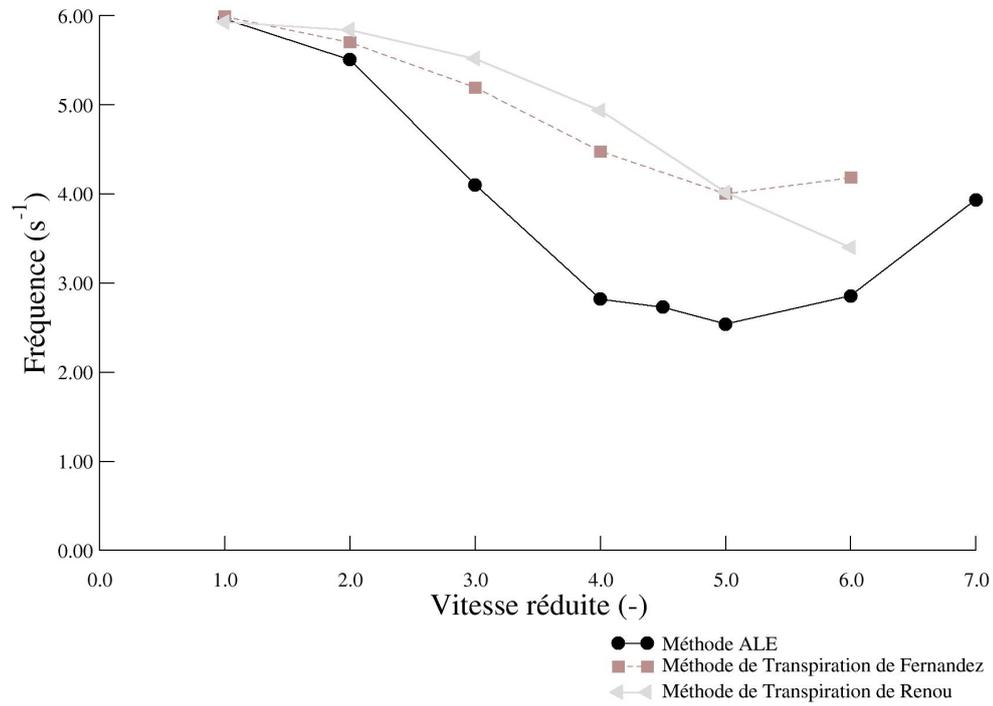


FIG. 4.9 – Tracé de la fréquence pour différentes vitesses d'entrée du fluide

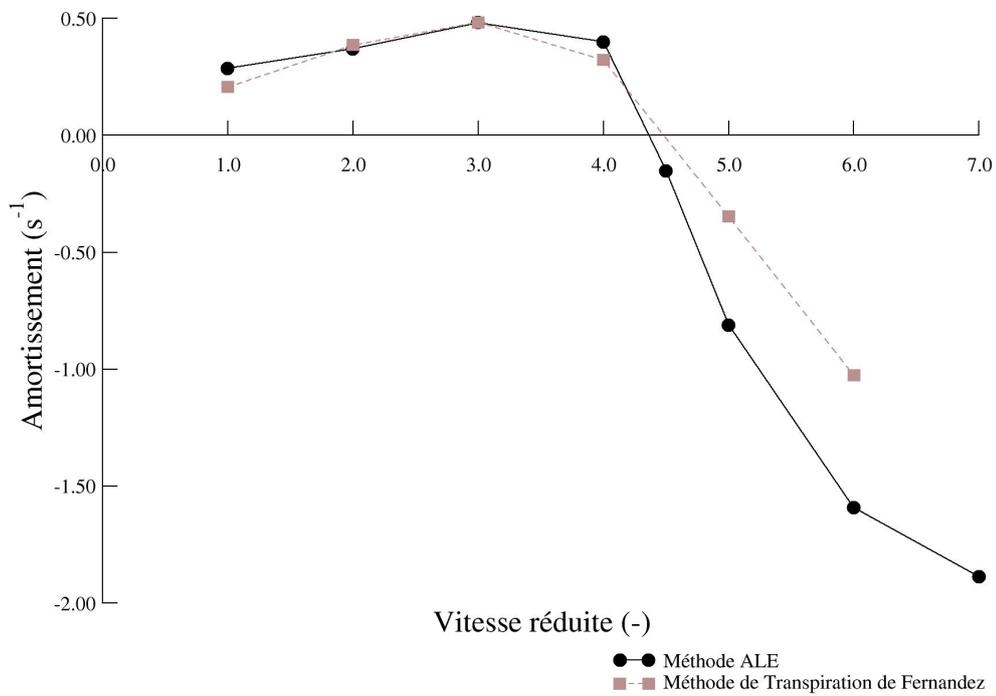


FIG. 4.10 – Tracé de l'amortissement pour différentes vitesses d'entrée du fluide

tures flexibles. Elle démontre la capacité de la méthode à reproduire fidèlement les déplacements des interfaces fluide et structure (fig. 4.11) et la bonne répartition des efforts fluides sur la structure (fig. 4.12).

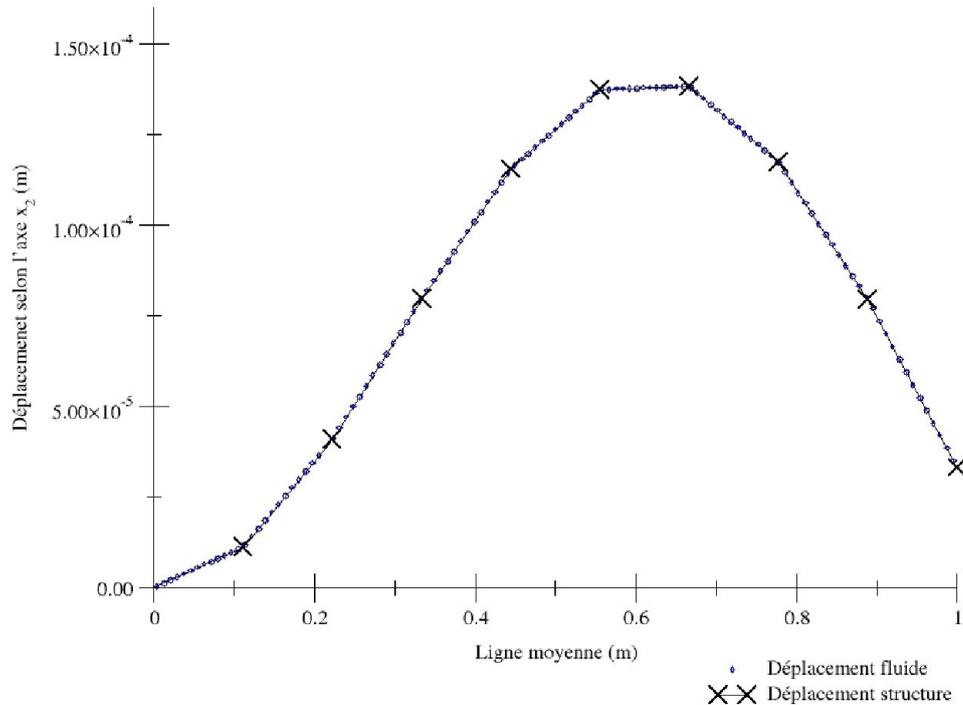


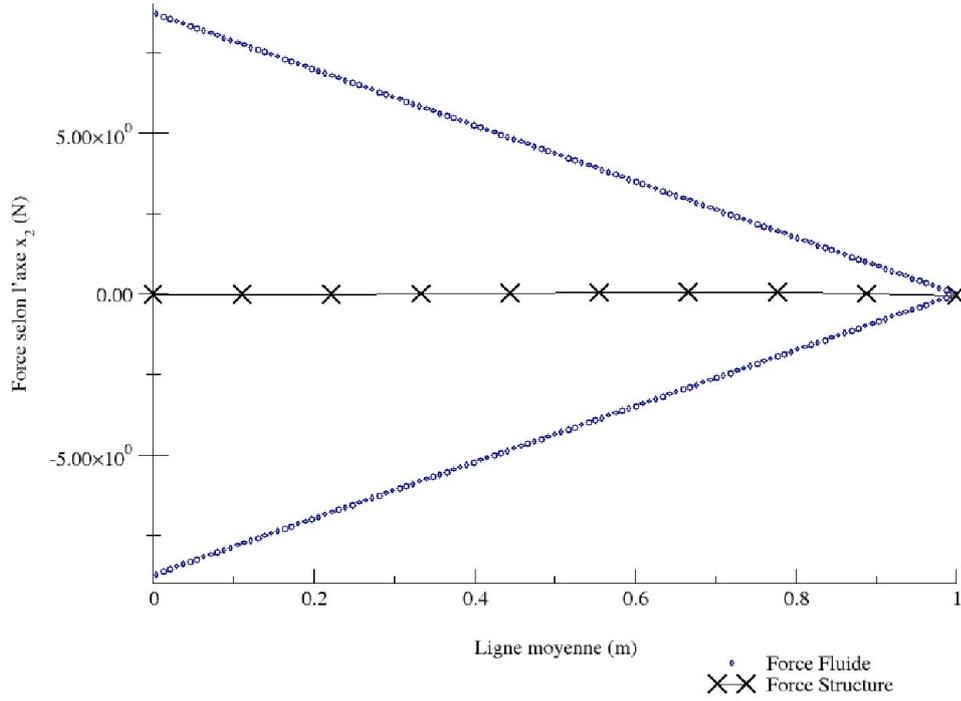
FIG. 4.11 – Déplacement des interfaces à $t = 5,00$ s pour $v_r = 4,5$

4.5 Modélisation de l'aléatoire et propagation de l'incertitude par la méthode des polynômes du chaos ¹

4.5.1 Introduction

La croissance de la puissance des moyens de calcul permet de mettre en œuvre des codes de simulation de plus en plus complexes. Pour approcher la réalité des phénomènes physiques, ces codes nécessitent un grand nombre de variables d'entrée et délivrent de nombreuses variables en sortie. Pour mesurer la variabilité des sorties et connaître l'influence des diverses variables d'entrée il est nécessaire d'explorer l'espace des variables d'entrée. La dimension de cet espace rend une exploration exhaustive impossible. Pour passer outre cette impossibilité, il faut définir des stratégies fondées sur une connaissance partielle des variables. L'utilisation de modèles stochastiques permet de rendre compte des dépendances à divers niveaux de complexité et autorise la mise en œuvre de plans d'expériences. Ces modèles sont aussi bien adaptés à des études plus locales comme l'analyse de sensibilité. L'un de ces modèles est la méthode des Polynômes de Chaos (PC) pour la résolution numérique d'équations différentielles partielles stochastiques (EDPS). La méthode des PC est basée sur l'introduction de la géométrie et des coordonnées dans

¹Ce chapitre reprend en partie le rapport rédigé par N. POUSSINEAU, D. LUCOR, J. KO et F. HUVELIN lors du CEMRACS 2006 [MCM⁺06]


 FIG. 4.12 – Répartitions des forces sur les interfaces à $t = 5,00$ s pour $v_r = 4, 5$

un espace probabilisé dans lequel l'incertitude des paramètres d'entrée et de la solution peut être modélisée. Elle est similaire aux méthodes de Monte-Carlo, dans le sens où elle nécessite seulement de calculer la solution déterministe en certains points choisis du domaine, la différence étant que la position de ces points est déterministe et non pas aléatoire.

4.5.2 Formulation *non intrusive* des méthodes du Chaos Polynomial

On appelle espace *probabilisable* lié à l'expérience aléatoire \mathcal{E} le couple (Ω, \mathcal{B}) , où Ω est l'univers des résultats de \mathcal{E} et \mathcal{B} la σ -algèbre (ou *tribu*) liée aux événements de \mathcal{E} . Si l'on considère un espace probabilisable, on appelle probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) , toute application $P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

1. $P(\Omega) = 1$
2. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{B} , $\cup_{n=0}^{\infty} A_n$ est encore un élément de \mathcal{B} (stabilité par union dénombrable) ;

Le triplet (Ω, \mathcal{B}, P) porte le nom d'espace *probabilisé* (associé à l'expérience aléatoire donnée). Soit Θ un espace de fonctions mesurables de Ω à valeurs réelles :

$$\Theta = \{\xi/\xi : \omega \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (4.11)$$

Chaque fonction ξ de Θ définit une variable aléatoire. Soit $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$, un ensemble infini mais dénombrable de variables aléatoires indépendantes. L'approche des méthodes spectrales stochastiques est rendue possible par l'espace des variables aléatoires qui est construit de telle manière qu'il autorise une projection (de type Galerkin) d'un champ aléatoire $y(X, t, \omega)$ sur la famille des approximations paramétriques $\{\Phi_k(\boldsymbol{\xi}(\omega))\}$ (4.12). Cette procédure est très similaire

à ce qui se fait dans le cadre de la formulation variationnelle de la méthode des éléments finis pour les problèmes déterministes classiques.

$$y(X, t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(X, t) \Phi_k(\boldsymbol{\xi}(\omega)) \quad (4.12)$$

Cette représentation permet une séparation des variables où les variables stochastiques, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{d=N}$, $N \in \mathbb{N}$, sont seulement présentes au niveau de la base polynomiale $\{\Phi_k(\boldsymbol{\xi})\}$ et où les coefficients modaux $y_k(X, t)$ à déterminer sont déterministes. Les vecteurs $\{\Phi_j(\boldsymbol{\xi})\}$ de la base sont des polynômes orthogonaux du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$, et ils satisfont la relation d'orthogonalité :

$$\langle \Phi_i \Phi_j \rangle = \langle \Phi_i^2 \rangle \delta_{ij}, \quad (4.13)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit interne. Le nombre de termes dans la sommation (4.12) est infini. En pratique, un nombre fini de termes M est conservé. La construction tensorielle d'une base complète comporte $M = (N + P)!/N!P!$ termes où P est l'ordre le plus élevé des polynômes utilisés :

$$y(X, t, \omega) \approx \sum_{k=0}^{M-1} y_k(X, t) \Phi_k(\boldsymbol{\xi}(\omega)). \quad (4.14)$$

Ce développement tronqué est par nature approché mais une égalité sera néanmoins utilisée par la suite pour faciliter les notations. Le nombre N est dans la pratique fixé par le nombre et la nature des sources d'incertitudes propagées dans le modèle numérique. Le produit interne (4.13) est dans l'espace d'Hilbert déterminé par la mesure des variables aléatoires :

$$\langle f(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi}) \rangle = \int_{\omega \in \Omega} f(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi})dP(\omega) = \int f(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi})w(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi} \quad (4.15)$$

où $w(\boldsymbol{\xi})$ représente la densité de la loi de probabilité $dP(\omega)$ par rapport à la mesure $d\boldsymbol{\xi}$ et où l'intégration est menée sur un domaine Ω déterminé par l'étendue du vecteur aléatoire $\boldsymbol{\xi}$. Puisque les variables aléatoires $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{d=N}$ sont indépendantes, la densité de probabilité de $\boldsymbol{\xi}$ peut être décomposée en un produit :

$$w(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{n=1}^N w(\xi_n) \quad (4.16)$$

L'efficacité de cette approche dépend du choix judicieux d'un système de 'coordonnées' dans l'espace probabiliste. La représentation de fonctions aléatoires par les PC est basée sur la théorie du chaos homogène et est essentiellement une représentation spectrale des champs de variables *gaussiennes* grâce à l'utilisation de polynômes spécialisés, appelés polynômes d'Hermite [Wie38, GS91].

Les PC permettent une représentation très précise d'ordre élevé des fonctions aléatoires ainsi qu'une convergence spectrale dans de nombreux cas. Cependant, il s'avère que cette convergence est lente pour des champs aléatoires de variables non-gaussiennes. Ainsi la convergence rapide de la représentation PC, et par là même l'efficacité des méthodes de calcul qui en découlent, dépend du choix des 'coordonnées' de l'espace des probabilités. Ce choix doit être adapté aux statistiques des paramètres incertains d'entrée et à la solution stochastique. Ceci est obtenu en employant les Polynômes de Chaos généralisés (PCg) qui sont une généralisation des PC et sont orthogonaux par rapport aux mesures de probabilités non-gaussiennes. De tels polynômes sont aussi appelés polynômes *Wiener-Askey* [AW85, KS98, Sch99].

La représentation PCg de champs incertains correspond à une représentation par éléments spectraux de la fonction aléatoire dans l'espace probabiliste. Dans l'approche PCg, les polynômes sont choisis de telle manière qu'il existe une étroite correspondance entre la fonction de poids du polynôme orthogonal et la fonction densité de probabilité (PDF) de la variable aléatoire considérée. C'est pourquoi il existe un polynôme optimal pour chaque type de distribution. Le Tableau (4.1) présente la correspondance qui existe entre le type de distribution considéré et le polynôme de chaos optimal correspondant. Chaque famille de polynômes permettra la représentation la plus compacte et la plus précise possible de la fonction aléatoire pourvue du type de distribution appropriée.

TAB. 4.1 – Correspondance entre le type de polynôme Wiener-Askey et la densité de probabilité associée ($N \geq 0$ est un entier fini).

	Variables aléatoires ξ	Wiener-Askey PC $\{\Phi(\xi)\}$	Support
Distribution continue	Gaussienne	Hermite-chaos	$(-\infty, \infty)$
	gamma	Laguerre-chaos	$[0, \infty)$
	beta	Jacobi-chaos	$[a, b]$
	uniforme	Legendre-chaos	$[a, b]$
Distribution discrète	Poisson	Charlier-chaos	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	binomiale	Krawtchouk-chaos	$\{0, 1, \dots, N\}$
	binomiale négative	Meixner-chaos	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	hypergéométrique	Hahn-chaos	$\{0, 1, \dots, N\}$

Dans la suite l'appellation PC ou Chaos Polynomial désignera indifféremment les représentations PC et PCg.

Il existe une approche, dite *intrusive* de l'application des PC. Elle consiste à substituer la représentation PC dans l'EDPS, à projeter (projection de type Galerkin) ce nouveau système sur la base des PC puis à résoudre le système couplé déterministe qui résulte de cette projection. Cette approche est coûteuse en termes de développement du code de calcul déterministe qui doit subir de lourdes modifications.

Une autre approche, dite *non-intrusive* consiste à projeter directement la solution stochastique sur l'ensemble des polynômes de la base PC. De cette manière, les coefficients y_k peuvent être calculés directement grâce à une projection de type Galerkin de la solution sur la base PC. C'est la méthode utilisée dans cette étude. L'orthogonalité de la base rend cette projection aisée :

$$(\forall k \in \{0, \dots, M-1\}) \quad y_k(X, t) = \frac{\langle y(X, t, \omega), \Phi_k(\xi(\omega)) \rangle}{\langle \Phi_k^2(\xi(\omega)) \rangle}. \quad (4.17)$$

Cette expression illustre le fait que le coefficient y_k est une mesure, à un facteur de normalisation près, de la corrélation entre la fonction y et la fonctionnelle $\Phi_k(\xi)$. On rappelle que $\langle \Phi_k(\xi(\omega)) \rangle = 0$ pour $k > 0$. Le mode-zéro du PC, y_0 , représente la solution moyenne \bar{y} et les autres modes d'ordres plus élevés sont une mesure de la variabilité stochastique de la solution autour de sa valeur moyenne. La fonction d'auto-corrélation R_y de la fonction y s'exprime

directement en fonction des coefficients du développement :

$$\begin{aligned}
 R_y(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) &= \langle y(\mathbf{X}_1, t), y(\mathbf{X}_2, t) \rangle \\
 &= \left\langle \left(\sum_{i=0}^{M-1} y_i(\mathbf{X}_1, t) \Phi_i(\boldsymbol{\xi}) \right), \left(\sum_{j=0}^{M-1} y_j(\mathbf{X}_2, t) \Phi_j(\boldsymbol{\xi}) \right) \right\rangle \\
 &= \sum_{i=0}^{M-1} y_i(\mathbf{X}_1, t) y_i(\mathbf{X}_2, t) \langle \Phi_i^2(\boldsymbol{\xi}) \rangle
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

En particulier la variance de la solution s'écrit :

$$\text{var}(y(\mathbf{X}, t, \omega)) = \langle (y(\mathbf{X}, t, \omega) - \overline{y(\mathbf{X}, t, \omega)})^2 \rangle = \sum_{k=1}^{M-1} [y_k^2(\mathbf{X}, t) \langle \Phi_k^2 \rangle]. \tag{4.19}$$

Cependant, la connaissance de l'auto-corrélation n'est pas suffisante pour déterminer de manière unique la fonction elle-même ou ses coefficients. Il existe en effet dans ce cas là, une infinité de processus stochastiques avec la même fonction d'auto-corrélation.

La méthodologie à employer pour les PC peut être résumée par (fig. 4.13).

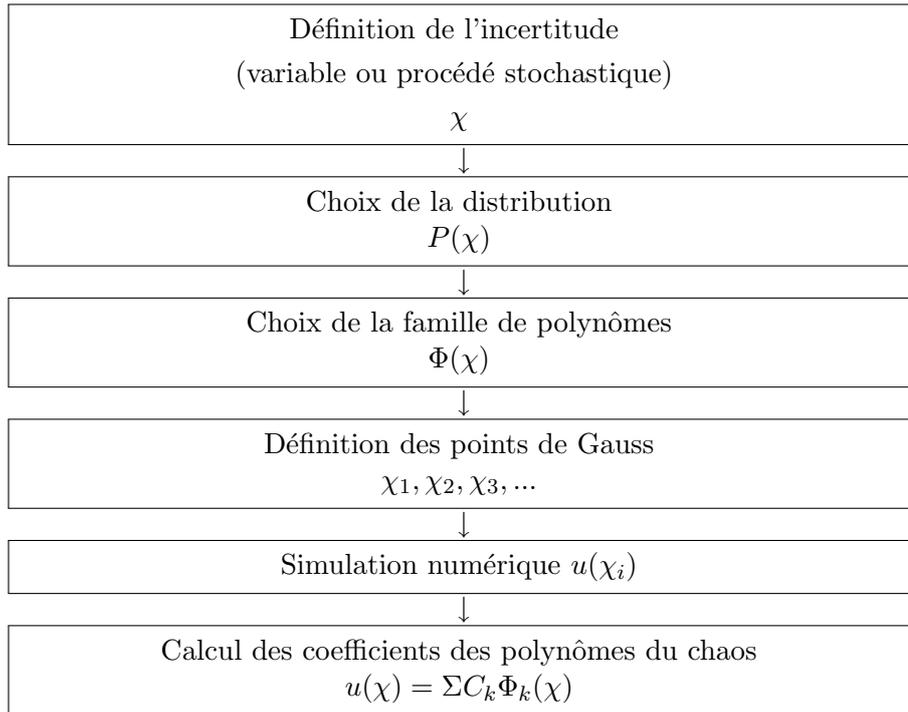


FIG. 4.13 – Utilisation de la formulation *non intrusive* des Polynômes du Chaos

4.5.3 Application

Le cas d'un écoulement à l'intérieur d'un tuyau flexible encastré en amont et libre en aval (fig. 4.1) est repris. L'influence du module d'Young sur l'amortissement de la structure est testée afin d'étudier, via un critère de dépassement de seuil, la probabilité de départ en instabilité de

la structure. Il est supposé que la valeur du module d'Young peut varier uniformément entre $1,0 \cdot 10^9$ et $2,0 \cdot 10^9$ Pa. Les polynômes de Legendre sont donc utilisés (tab. 4.1). Afin d'évaluer au mieux les coefficients modaux, le calcul est réalisé avec 15 points de quadratures. 15 simulations numériques sont réalisées pour des valeurs du module d'Young prédéterminées comprises entre $1,0 \cdot 10^9$ et $2,0 \cdot 10^9$. Ces valeurs sont les racines du polynôme de Legendre de degré 15 (par transformation affine, il est possible de passer du domaine de référence du polynôme de Legendre $[-1,1]$ au cas d'étude $[1,0 \cdot 10^9, 2,0 \cdot 10^9]$). Le nombre maximum de termes pouvant être utilisé pour reconstruire la solution est alors 14 (2 points de Gauss sont nécessaires pour évaluer l'intégrale d'un polynôme linéaire, donc 15 points sont nécessaires, à minima, pour résoudre l'intégrale d'un polynôme de degré 14). Afin de réduire les erreurs de troncatures, les reconstructions sont réalisées avec au maximum 11 coefficients (soit un degré 10 pour le polynôme le plus élevé). 80000 valeurs comprises entre $1,0 \cdot 10^9$ et $2,0 \cdot 10^9$ sont tirées aléatoirement. Grâce à la décomposition polynomiale, pour chacune de ces valeurs du module d'Young, il est possible d'en déduire la valeur associée de l'amortissement de la structure et ainsi d'étudier la probabilité de départ en instabilité de la structure par un critère de dépassement de seuil (amortissement négatif). Cette reconstruction par le chaos polynomial permet un gain de temps important au regard des 80000 simulations numériques qu'il aurait fallu faire autrement.

Deux vitesses de fluide en entrée du domaine sont simulées afin d'évaluer l'impact du module d'Young sur le départ en instabilité. Les vitesses réduites² sont choisies de telle manière à simuler un cas stable ($v_r = 4,0$) et un cas instable ($v_r = 4,5$) pour un module d'Young fixé à $1,5 \cdot 10^9$ Pa.

Avant d'interpréter les résultats, il est important d'avoir une idée de la qualité de la reconstruction de la solution. Afin de connaître le nombre de termes nécessaires à la reconstruction, il est possible d'étudier l'évolution de la variance en fonction du nombre de coefficients utilisés (fig. 4.14). Pour la vitesse $v_r = 4,5$, la convergence est très rapide, car 4 termes sont suffisants. Pour la vitesse $v_r = 4,0$, la convergence est beaucoup plus lente. 6 termes sont le minimum requis. L'utilisation de polynômes plus élevés est possible, avec le risque lié à l'approximation de la quadrature sur ces termes.

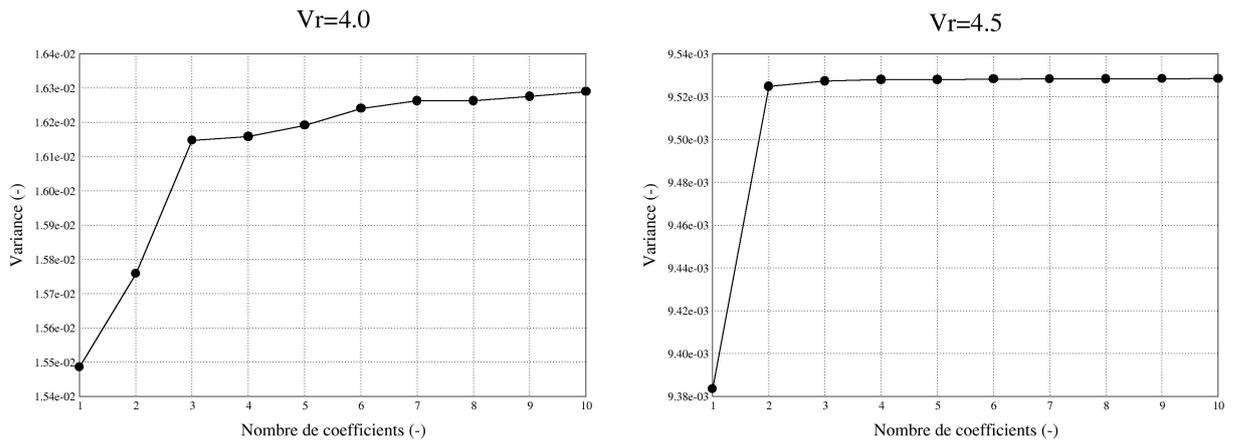


FIG. 4.14 – Nombre de coefficients nécessaires pour la reconstruction

Le tracé de l'amortissement réduit en fonction du module d'Young (fig. 4.15) montre un comportement en grande partie linéaire entre la variable d'entrée, le module d'Young, et la

²La vitesse réduite, variable adimensionnelle, est le rapport entre la vitesse du fluide et la longueur caractéristique et la fréquence en air de la structure.

variable de sortie, l'amortissement réduit, pour la vitesse réduite 4,5. Il apparaît tout de même un aplatissement de la courbe linéaire pour des modules de Young grand. Pour la vitesse réduite 4,0, le comportement est linéaire jusqu'à atteindre de grands modules d'Young. La variation de la pente pour des modules d'Young de l'ordre de $1,7 \cdot 10^9$ Pa traduit une modification de la relation entre le module d'Young et l'amortissement réduit. Aux niveaux des bornes inférieures et supérieures du domaine, la non-linéarité est probablement la conséquence des effets de bords liés au calcul. Le système est donc plus sensible à la vitesse réduite 4,0 qu'à la vitesse réduite 4,5.

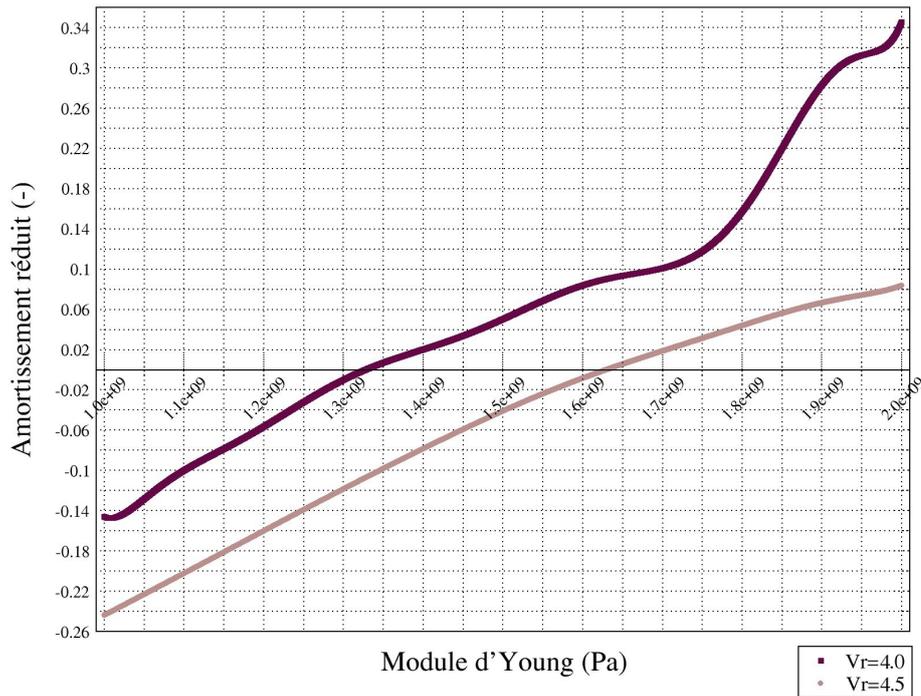


FIG. 4.15 – Probabilité de départ en instabilité

L'histogramme des amortissements réduits pour $V_r = 4,0$ (fig. 4.16) permet d'en déduire qu'il existe une probabilité plus élevée d'obtenir 0,10 comme valeur de l'amortissement pour une distribution uniforme du module d'Young dans le domaine étudié. De plus, il est plus probable d'avoir un amortissement dans la plage $[-0,15;0,13]$ que dans la plage $[0,13;0,35]$. Comme précédemment, les variations de valeurs pour l'amortissement le plus faible et le plus élevé sont dues aux effets de bords de la méthode. L'histogramme pour $v_r = 4,5$ (fig. 4.17) permet d'en déduire que tous les amortissements ont quasiment une probabilité uniforme d'être trouvés. Cela conforte l'idée que pour cette vitesse, la relation entre le module d'Young et l'amortissement est linéaire.

Pour les deux vitesses, les reconstructions de la solution avec 6 ou 11 coefficients sont très proches (tab. 4.2). 6 coefficients semblent donc suffisants pour avoir une bonne approximation de la solution.

Cette étude sur la propagation d'incertitudes a permis de mettre en évidence l'intérêt des polynômes du chaos pour l'interaction fluide-structure et l'identification des seuils critiques de départ en instabilité. Il serait intéressant de tester d'autres méthodes de propagation afin de

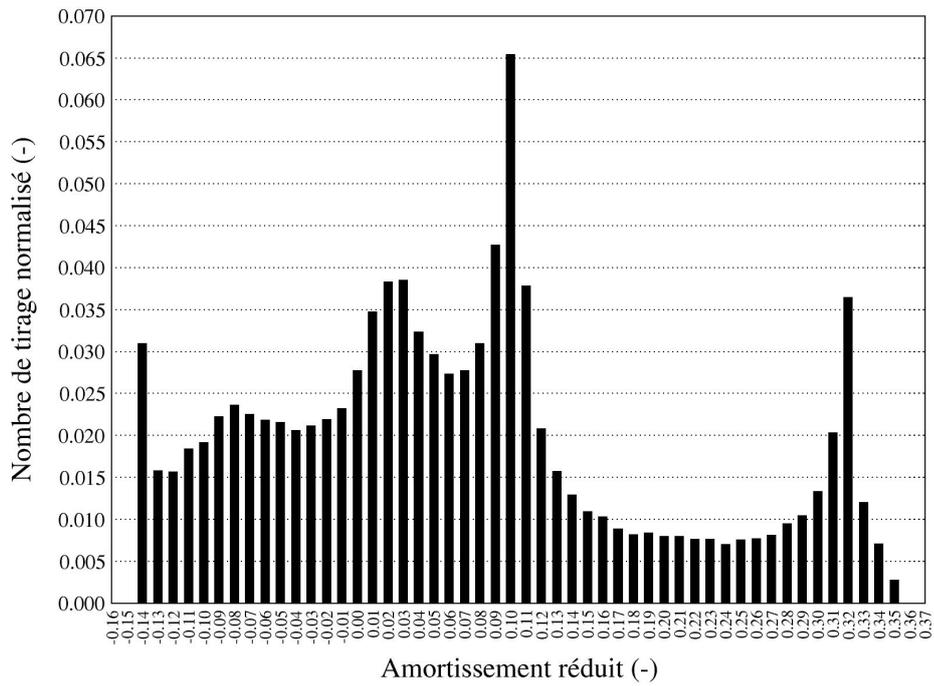


FIG. 4.16 – Reconstruction de la solution pour $V_r = 4, 0$

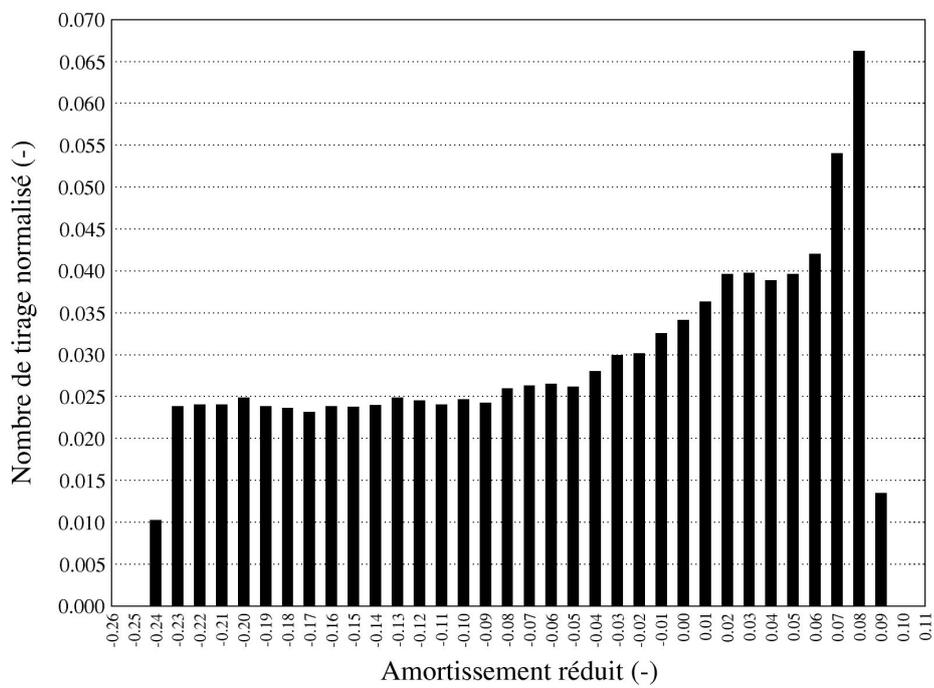


FIG. 4.17 – Reconstruction de la solution pour $V_r = 4, 5$

TAB. 4.2 – PROBABILITE DE DEPART EN INSTABILITE

	6 coefficients	11 coefficients
$v_r = 4,0$	31,79%	32,60%
$v_r = 4,5$	63,12%	63,06%

compléter cette étude.

4.6 Conclusion

Cette étude sur les structures soumises à des écoulements axiaux a permis de démontrer la capacité du couplage entre un code CFD et un code CSD à reproduire le départ en instabilité d'une structure soumise à des efforts fluidelastiques. Elle a également permis de valider la méthode de projection de données entre les interfaces flexibles fluide et structure. De plus, ce cas d'étude a permis une première approche de la propagation des incertitudes et a montré la validité de la méthode du chaos polynomial pour évaluer les incertitudes liées au seuil de départ en instabilité lorsque des paramètres en entrée du domaine sont incertains. Il serait toutefois intéressant de tester cette méthode dans un cadre plus large, avec par exemple le traitement d'incertitudes sur plusieurs paramètres d'entrée ou sur la variabilité spatiale ou temporelle d'une donnée d'entrée afin de conforter la méthodologie dans la probabilité de dépassement de seuil.

5

Vibrations de structures soumises à un écoulement transverse

5.1 Critère d'ingénierie pour le départ en instabilité

Des configurations de type faisceaux de tubes soumis à des écoulements transverses sont présentes dans de nombreuses applications industrielles telles que les risers dans le domaine pétrolier ou les générateur de vapeur dans le domaine nucléaire. Dans tous les cas, les vibrations des structures sont soumises au moins à l'un des phénomènes suivants (fig. 5.1) :

- les excitations aléatoires turbulentes du fluide,
- les phénomènes d'accrochage ou "vortex shedding" (*i.e.* lorsque la fréquence de la structure entre en résonance avec la fréquence de détachement tourbillonnaire du fluide),
- les instabilités fluide-élastiques.

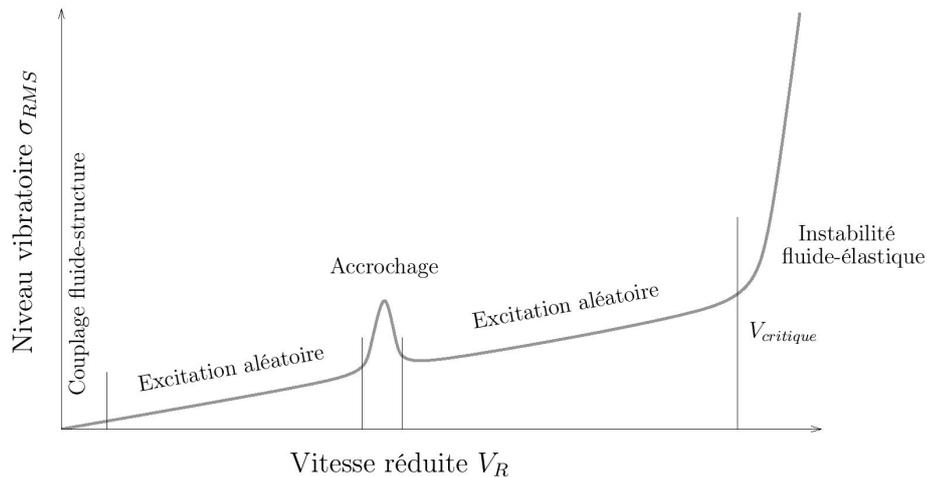


FIG. 5.1 – Evolution du niveau vibratoire en fonction de la vitesse réduite

Ce dernier phénomène est le plus dangereux car il peut entraîner par fatigue vibratoire ou choc la rupture de la structure. Selon [Pri95], le paramètre prépondérant pour la prédiction des instabilités fluide-élastiques est la nature de l'écoulement interstitiel dans le faisceau et plus particulièrement le retard de phase entre le mouvement du cylindre et les forces s'appliquant sur ce dernier. La nature des instabilités fluide-élastiques peut être illustrée comme un phénomène

rétroactif entre le mouvement de la structure et les forces fluides s'exerçant sur celle-ci. Un petit déplacement de la structure modifie l'écoulement, et donc les efforts s'appliquant sur les tubes, ceux-ci modifiant en retour le chargement sur la structure et donc le déplacement de cette dernière.

[Pri95], [Ray07] font des synthèses assez complètes des différents modèles théoriques employés afin de prédire le départ en instabilité d'une structure soumise à un écoulement transverse dans une configuration faisceau sous écoulement transverse.

L'analyse de la stabilité fluide-élastique des faisceaux de tubes sous écoulement transverse utilise souvent l'approche quasi-statique basée sur les travaux de [Con70] et [Ble74]. Connors observe expérimentalement, à partir de différentes configurations menant à l'instabilité, que le mouvement prépondérant des tubes était un déplacement elliptique avec un mouvement alterné des tubes dans les directions axiales et transverses de l'écoulement. A partir de ces observations, Connors mesure les forces s'appliquant sur un tube central d'un faisceau, ayant une unique rangée, en déplaçant statiquement les deux tubes voisins de façon symétrique ou antisymétrique. Cette étude lui permet de définir un modèle de prédiction de la vitesse critique de départ en instabilité. Blevins reformule ce modèle en exprimant la vitesse réduite critique v_{Rc} en fonction du nombre de Scruton A_R (eqn. 5.1) :

$$v_{Rc} = K\sqrt{A_R} \quad (5.1)$$

$$A_R = \frac{\bar{m}_s}{\rho_f D_s^2} \chi_s \quad (5.2)$$

$$v_R = \frac{v_{gap}}{f_s D_s} \quad (5.3)$$

avec K la constante de Connors, $\bar{m}_s = M_s + M_{s,a}$, M_s la masse de la structure, $M_{s,a}$ la masse ajoutée de la structure, ρ_f la masse volumique du fluide, D_s le diamètre du tube, χ_s l'amortissement de la structure, v_R la vitesse réduite, v_{gap} la vitesse de l'écoulement entre les tubes et f_s la fréquence de la structure. Ce critère est intéressant par le fait que connaissant les propriétés de la structure et du fluide, il est possible de connaître la vitesse critique. De nombreuses expériences ont été réalisées afin de définir la constante de Connors. Celles-ci ont donné lieu à la définition de cartes de d'instabilités. Sur (fig. 5.2) est tracée la carte d'instabilité suite aux études de [Ble90] et [PT91] où la constante de Connors est prise égale, respectivement, à 3, 0 et 2, 4.

Une analyse de [Pri01] sur l'utilisation de l'équation de Connors met en défaut la dépendance en racine carrée entre l'amortissement χ_s et la masse adimensionnée $\frac{\bar{m}_s}{\rho_f D_s^2}$. Cette indépendance est également observée expérimentalement [WK82, PK91]. Des travaux [Paï83, PT91] vont plus loin en suggérant que l'amortissement est dépendant d'un autre exposant inférieur à 0,5 (eqn. 5.4) :

$$v_{Rc} = K\chi_s^a \left(\frac{\bar{m}_s}{\rho_f D_s^2} \right)^b \quad (5.4)$$

Le critère de Connors semble donc permettre d'obtenir une valeur conservative de la vitesse critique.

Afin d'affiner la recherche de la vitesse critique, d'autres modèles ont été développés.

Les modèles semi-analytiques de [LW82, YW93] se basent sur une description analytique de la pression en tout point de la circonférence du tube mobile en prenant en considération, d'une manière empirique, le retard de phase entre le déplacement et les efforts fluides. Le champ de pression intégré sur la partie immergée du tube est alors introduit dans l'équation du mouvement de la structure qui est résolue par analyse modale. Dans la continuité des travaux sur les

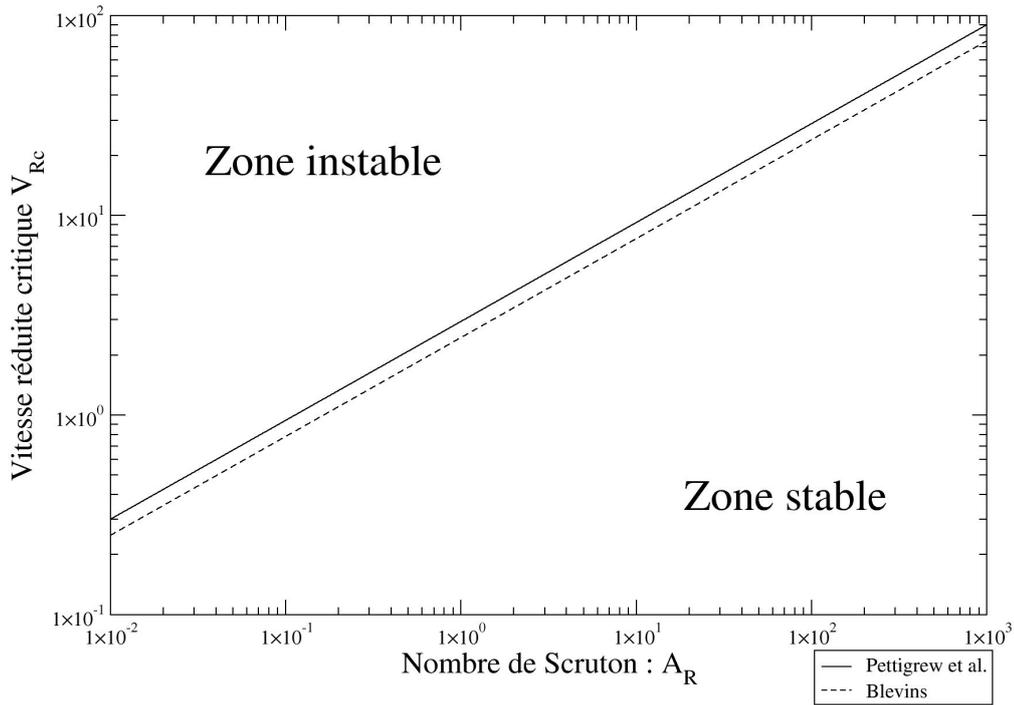


FIG. 5.2 – Représentation d’une carte d’instabilité pour différentes constantes de Connors

modèles semi-analytiques, [HM07] proposent un calcul, par une approche numérique, du champ de pression en décomposant le faisceau de tubes en plusieurs sous-domaines et en conservant la notion de retard de phase. La pression est ainsi plus précise dans chaque sous-domaine et est intégrée le long des tubes flexibles afin d’être ajoutée au système d’équations de la structure, résolu dans le domaine temporel.

Les modèles instationnaires ont la particularité d’être précis mais se basent sur des données expérimentales [TT81, TTST02, AG04]. Le principe consiste à effectuer un ensemble d’expériences sur une configuration donnée afin d’en déduire une corrélation entre les termes d’amortissement ajouté et de raideur ajoutée et les paramètres d’entrée du système tels que les données géométriques, les propriétés physiques de la structure et du fluide, la vitesse d’écoulement. Il est ainsi possible d’en déduire une loi de comportement plus ou moins précise en fonction du nombre d’expériences réalisées. Cette loi est alors utilisée dans la résolution d’un système mécanique afin d’étudier le comportement vibratoire des tubes. Cette méthode est très précise mais fait appel à de nombreuses données expérimentales.

Plus récemment, des modélisations avec un détail de l’écoulement plus complet ont été développées. [RBCC07] modélise l’ensemble d’un générateur de vapeur par une approche de milieu poreux pour le fluide et la structure. L’avantage est l’obtention d’un couplage monolithique puisque les équations des deux milieux sont résolues dans un unique système. Les équations fluides sont réécrites avec une méthode ALE afin de permettre une déformation du domaine fluide.

[WMP07] propose d’utiliser une méthode SEM (Sensitivity Equation Method) afin de pouvoir calculer les coefficients et leurs dérivées des efforts présents dans les modèles quasi-statiques. La méthode consiste à dériver les équations par rapport à un paramètre arbitraire. L’intégration de la dérivée des efforts sur le cylindre est alors exprimée en fonction de ce paramètre suivant la di-

rection de l'espace souhaitée en fonction des dérivées recherchées. Une méthode de transpiration est utilisée afin de déformer l'interface du domaine fluide en contact avec les structures.

Les résultats présentés ci-après, se proposent de modéliser l'écoulement dans un faisceau mobile par une approche entièrement CFD [LBS03, HGdMB⁺07]. Cette approche permet de réaliser une étude de stabilité uniquement avec cet outil numérique. Le cout en termes de temps de calcul est important puisque la recherche de la vitesse critique est réalisée par dichotomie. L'approche par corrélation étant beaucoup moins couteuse en temps, les résultats de ces simulations numériques peuvent servir à alimenter la base de données des corrélations fluides-élastiques afin d'affiner ces dernières, puisqu'il est plus facile, en terme de moyen d'essai, d'obtenir des points de corrélation numériquement qu'expérimentalement sur des configurations très diverses. D'autre part cette méthodologie permet d'accéder à des données beaucoup plus locales que les expériences et peut donc être un bon complément pour la compréhension des instabilités fluide-élastiques. Et enfin cette méthode permet de simuler des comportements post-instabilités, phénomènes difficilement observables expérimentalement sous peine de détérioration du matériel. Ci-après est proposé un début de qualification de la méthode en vue d'une utilisation, à plus long termes, pour les points cités ci-dessus.

5.2 Modélisation des faisceaux de tubes

5.2.1 Description de la maquette AMOVI

L'expérience AMOVI, réalisée par le CEA [dM06, HGdMB⁺07], est constituée de 15 tubes pleins et de 10 demi-tubes (fig. 5.3) dont un seul est mobile. Une description plus détaillée de la maquette pourra être trouvée dans [Baj06].

La section d'essai mesure 70 mm de large et 100 mm de profondeur. L'écoulement monophasique arrive en partie basse du banc d'essai et une grille en amont du faisceau permet d'avoir un écoulement homogène à l'arrivée sur les tubes. Tous les tubes ont le même diamètre, 12, 15 mm, et le pas inter tube est de 17, 5 mm, soit un ratio pas sur diamètre égal à 1, 44. Le tube mobile est en acier inoxydable et peut se déplacer uniquement dans la direction transverse à l'écoulement. Celui-ci est monté sur une lame flexible encastrée sur le bâti laquelle est instrumentée par une jauge de déformation collée au voisinage de l'encastrement (fig. 5.4). La fréquence en air du tube mobile est de 14,3 Hz et l'amortissement réduit en air est de 0,25 %. Les tubes fixes sont en plexiglas avec une fréquence en air de résonance en flexion supérieure à 300 Hz (très éloignée de celle du tube mobile). Le débit en entrée peut varier entre 0 et 5 m³.h⁻¹.

5.2.2 Modélisation numérique de la maquette

D'un point de vue numérique (fig. 5.5), une vitesse est imposée en entrée du domaine et une sortie libre (annulation de la dérivée normale de la pression) est imposée en aval du domaine. Sur les bords, une paroi fixe est imposée (vitesse nulle). En fonction du type de simulation effectuée le domaine peut être extrudé selon la troisième dimension. Dans ce cas des conditions de symétries sont imposées sur les bords supérieurs et inférieurs.

La dernière rangée en aval du tube mobile est modélisé par des demi-tubes puisqu'elle n'influence pas la vibration du tube mobile (fig. 5.6).

Dans le cadre du benchmark présenté ci-après, les résultats sont comparés entre deux codes (*Code_Saturne* à EDF et code CASTEM Fluide au CEA). La principale différence entre les deux codes est la résolution en volume finis du domaine fluide dans un cas et en éléments finis dans l'autre. Sinon, l'ensemble de la méthodologie présentée précédemment est conservée :

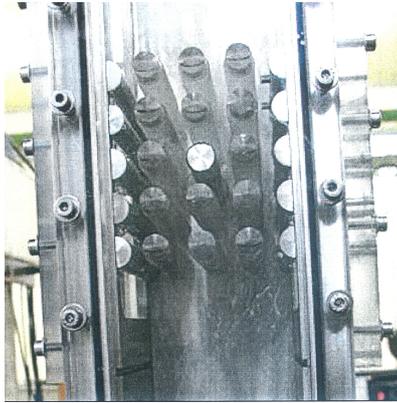


FIG. 5.3 – Représentation de la maquette Amovi (Image CEA, [Baj06])

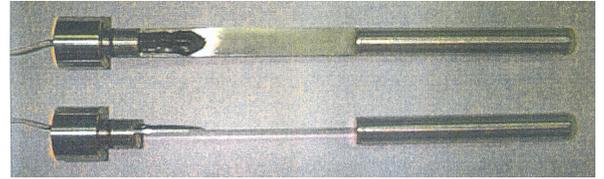


FIG. 5.4 – Représentation du tube mobile encastré sur une lame flexible (Image CEA, [Baj06])

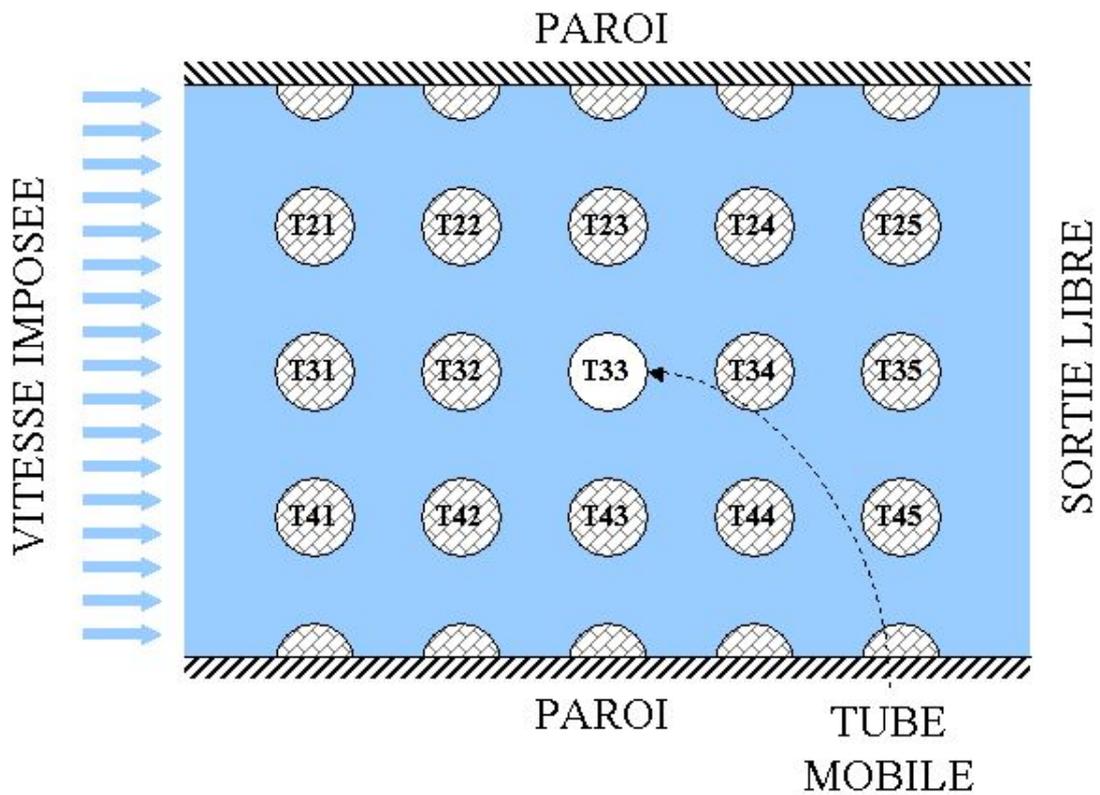


FIG. 5.5 – Modélisation de la maquette AMOVI

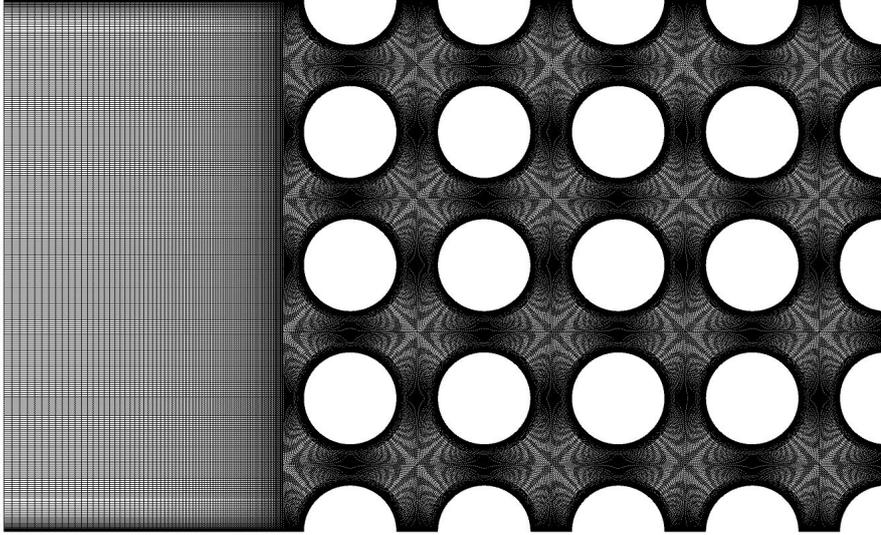


FIG. 5.6 – Maillage de la maquette AMOVI

déformation de maillage par une méthode ALE, procédure de couplage par algorithme partitionnée.

Afin de réduire les différences entre les méthodologies de calcul EDF et CEA, un schéma de couplage explicite asynchrone a été utilisé pour l'ensemble des simulations. De plus, pour réduire l'erreur liée au schéma de couplage et limiter les temps de calcul, une extrapolation de Richardson est utilisée (ann. B). Le principe consiste à calculer, par simulation numérique, la variable de sortie à identifier (masse ajoutée, amortissement réduit en eau) en différents points d'une variable d'entrée (telle que le pas de temps ou le nombre de mailles du maillage). Ces valeurs permettent d'identifier les termes de l'équation de Richardson permettant d'obtenir une valeur "convergée" de la variable de sortie en fonction de la variable d'entrée (une valeur de l'amortissement réduit indépendante du choix du pas de temps, par exemple).

Les simulations sont effectuées sur suffisamment de périodes afin de pouvoir appliquer des méthodes du traitement du signal sur le déplacement de la structure. Celle-ci étant supposée rigide et se déplaçant uniquement selon un degré de liberté, un seul mode est nécessaire pour décrire son mouvement. Les données initiales en déplacement et vitesse étant connues, la fréquence en eau ($f_{s,e}$) et l'amortissement en eau ($\chi_{s,e}$), et donc les termes de masse ajoutée ($M_{s,a}$) et d'amortissement ajouté ($C_{s,a}$), peuvent être obtenus par une méthode d'ajustement de paramètres. Le post-traitement des données est donc effectué en supposant que les efforts fluides peuvent se modéliser par un terme constant de masse ajoutée lié à l'accélération de la structure, un terme constant d'amortissement ajouté lié à la vitesse et un terme constant de raideur ajoutée lié au déplacement [Gra91] (eqn. 5.5) :

$$M_s \frac{d^2 u_s}{dt^2} + C_s \frac{du_s}{dt} + K_s u_s = -M_{s,a} \frac{d^2 u_s}{dt^2} - C_{s,a} \frac{du_s}{dt} - K_{s,a} u_s \quad (5.5)$$

Cette équation peut être réécrite sous forme adimensionnée afin de faire apparaître la fréquence ($f_{s,e}$) et l'amortissement réduit ($\chi_{s,e}$) (eqn. 5.6) :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + 2\chi_{s,e}\omega_{s,e} \frac{du_s}{dt} + \omega_s^2 u_s = 0 \quad (5.6)$$

Les conditions initiales étant connues, la solution de l'équation 5.6 peut être exprimée en fonction des deux inconnues que sont l'amortissement en eau ($\chi_{s,e}$) et la fréquence en eau ($f_{s,e}$) de la structure (eqn. 5.7). Une méthode d'ajustement de paramètre à partir des courbes de déplacements obtenues numériquement sur la solution de l'équation permet d'obtenir la valeur des deux inconnues.

$$\begin{cases} u_s(t) = e^{-\chi_{s,e} 2\pi f_{s,e} t} (u_0 \cos(2\pi f_{s,e} \sqrt{1 - \chi_{s,e}^2} t) + u_0 \frac{\chi_{s,e}}{\sqrt{1 - \chi_{s,e}^2}} \sin(2\pi f_{s,e} \sqrt{1 - \chi_{s,e}^2} t)) \\ u_0 = u_s(t=0) = 5,0 \cdot 10^{-4} D_s \text{ m} \\ v_0 = \frac{du_s}{dt}(t=0) = 0,0 \text{ m.s}^{-1} \end{cases} \quad (5.7)$$

5.3 Tube mobile dans un fluide au repos

5.3.1 Loi de Rogers

L'étude des vibrations d'une structure induite par des efforts fluide-structure est d'un grand intérêt puisque, dans de nombreux cas, une solution analytique existe. Pour le cas d'un tube mobile dans un faisceau fixe et baignant dans un fluide au repos, il est possible d'obtenir analytiquement la masse et l'amortissement ajoutés de la structure. La solution est obtenue en deux étapes :

- dans un premier temps, la solution analytique d'un cylindre vibrant dans un fluide visqueux au repos entouré par un tube fixe est exprimée,
- dans un second temps, une loi permet de corriger les termes de la solution analytique afin de prendre en considération le confinement lié au faisceau.

La première étape permet d'obtenir le coefficient de masse ajoutée ($M_{s,a}$), la fréquence en eau ($f_{s,a}$) et l'amortissement réduit en eau ($\chi_{s,a}$), valables pour des nombres de Stokes ($St = \frac{f_s D_s^2}{\nu_f}$) supérieurs à 2100 [PT03] :

$$M_{s,a} = \frac{\rho_f \pi D_s^2}{4} \frac{1 + (\frac{D_s}{D_c})^2}{1 - (\frac{D_s}{D_c})^2} \quad (5.8)$$

$$f_{s,a} = f_s \sqrt{\frac{M_s}{M_s + M_{s,a}}} \quad (5.9)$$

$$\xi_{s,a} = \xi_s + \frac{\pi}{\sqrt{8}} \frac{\rho_f D_s^2}{M_s + M_{s,a}} \sqrt{\frac{2}{\pi St}} \frac{1 + (\frac{D_s}{D_c})^3}{(1 - (\frac{D_s}{D_c})^2)^2} \quad (5.10)$$

où D_c est le diamètre de confinement et ν_f la viscosité cinématique du fluide. Le fluide n'ayant pas d'écoulement, la raideur ajoutée $K_{s,a}$ est nulle.

La seconde étape consiste à prendre en considération le confinement du faisceau en modifiant le diamètre de confinement D_c [RTP84] :

$$\frac{D_c}{D_s} = (1,07 + 0,56 \frac{P}{D_s}) \frac{P}{D_s}, \text{ pour un faisceau de tubes à pas carré} \quad (5.11)$$

Cette première étude a un intérêt triple :

- elle permet de connaître la précision du calcul de la masse ajoutée et de l'amortissement ajouté,
- elle permet de valider la méthode d'extrapolation de Richardson au cas présent,
- elle permet une étude de convergence en espace et en temps.

5.3.2 Résultats numériques

Données numériques

Pour l'ensemble des simulations, le fluide considéré est de l'eau (tab. 5.1).

TAB. 5.1 – PROPRIETES DU FLUIDE POUR LES SIMULATIONS AU REPOS

Masse volumique	Viscosité cinématique
$1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$	$1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$

Les propriétés du tube mobile sont celles de la maquette Amovi (tab. 5.2). D'un point de vue numérique, la structure est supposée rigide et est décrite par son centre de gravité où sont imposées une masse, un amortissement et un ressort. Le déplacement de la structure est restreint à un degré de liberté.

TAB. 5.2 – PROPRIETES DE LA STRUCTURE POUR LES SIMULATIONS AU REPOS

Fréquence en air	Amortissement réduit en air	Masse	Diamètre
14,30 Hz	0,250 %	0,298 kg	12,15 mm

Afin de mettre le fluide en mouvement, un déplacement initial est imposé à la structure : $u_s(t = 0) = 5,010^{-4} D_s = 60,8710^{-7} \text{ m}$. Cette impulsion permet de créer un champ de pression et de vitesse dans le fluide (fig. 5.7, fig. 5.8).

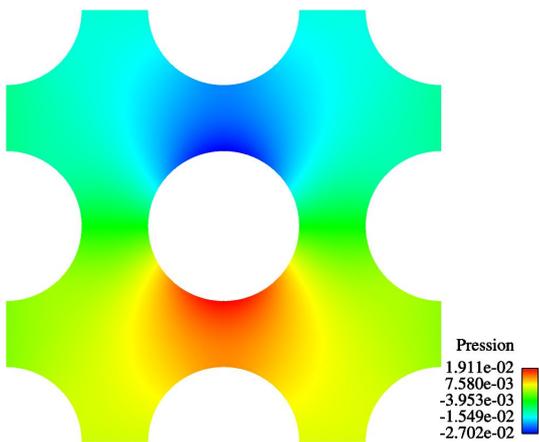


FIG. 5.7 – Champ de pression autour du tube mobile

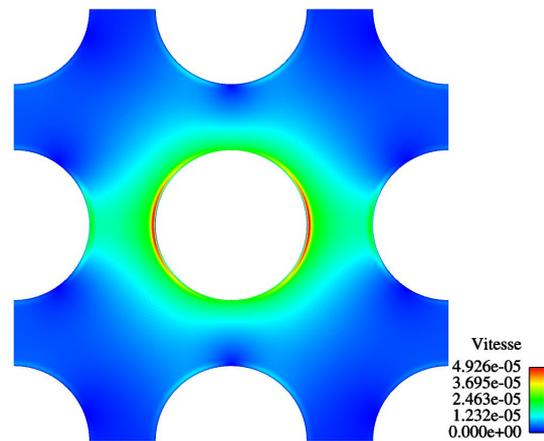


FIG. 5.8 – Champ de vitesse autour du tube mobile

Convergence en espace

Afin d'obtenir un maillage optimal d'un point de vue numérique (*i.e.*, suffisamment raffiné pour obtenir une valeur précise de la valeur recherchée en un temps de calcul raisonnable), cinq maillages sont testés. Une attention particulière est portée au raffinement des bords des tubes

où il est nécessaire d'avoir une bonne qualité de maillage pour en déduire une valeur précise des efforts s'appliquant sur la structure. Les simulations sont réalisées pour un pas de temps fixe $\Delta t = 10^{-4}$ s.

Pour l'ensemble des simulations, la structure s'amortit et revient vers sa position d'équilibre (fig. 5.9).

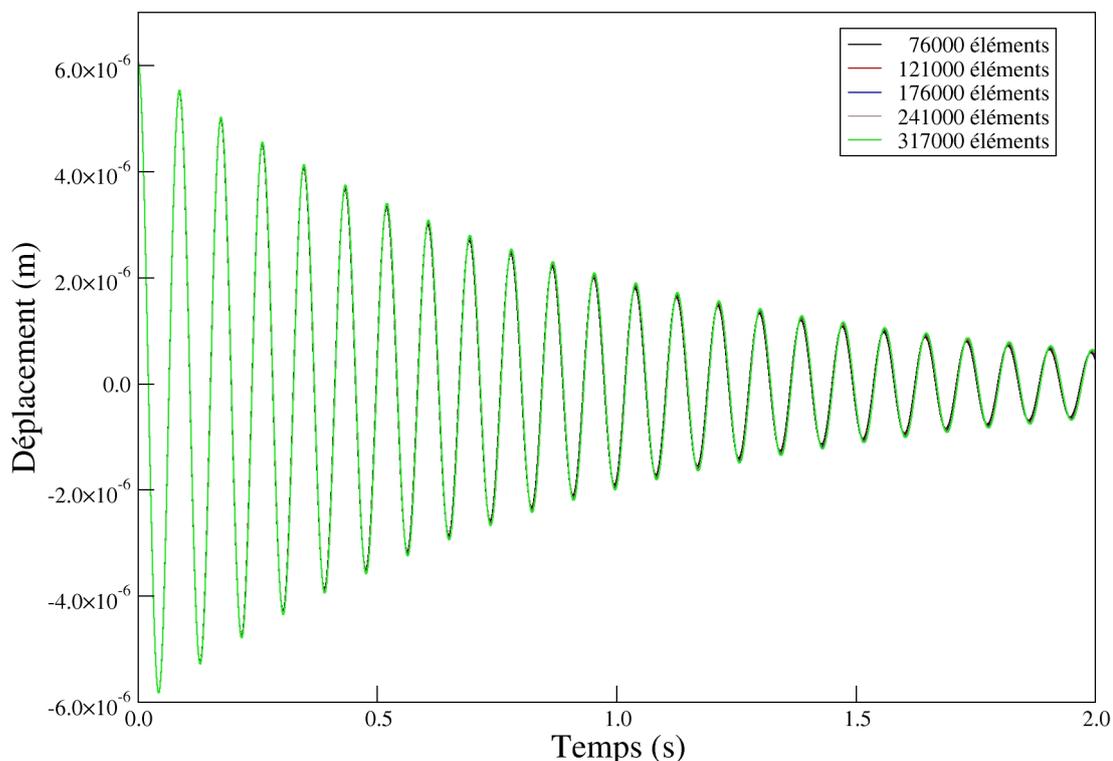


FIG. 5.9 – Déplacement du tube mobile pour différents maillages

Un post-traitement de ces signaux permet de mettre en évidence la convergence de la fréquence et de l'amortissement (fig. 5.10, fig. 5.11). Il est intéressant de noter que la valeur de la fréquence est captée rapidement, tandis que la convergence de l'amortissement est plus lente.

Les valeurs convergées de la fréquence et de l'amortissement sont calculées par la méthode d'extrapolation de Richardson. L'erreur relative entre les valeurs du maillage à 176000 éléments et les valeurs convergées étant inférieure à 0,12% pour la fréquence et 2,1% pour l'amortissement réduit, ce maillage est conservé puisqu'il donne des résultats satisfaisants en un temps de calcul raisonnable.

Convergence en temps

Une démarche similaire à la convergence en espace est réalisée sur le pas de temps. Cinq pas de temps différents sont utilisés pour étudier la convergence : $5,0 \cdot 10^{-4}$ s, $2,0 \cdot 10^{-4}$ s, $1,0 \cdot 10^{-4}$ s, $5,0 \cdot 10^{-5}$ s et $1,0 \cdot 10^{-5}$ s.

Des conclusions identiques à l'étude de convergence spatiale peuvent être obtenues. La fréquence de la structure est obtenue très rapidement (fig. 5.12). Le calcul de l'amortissement

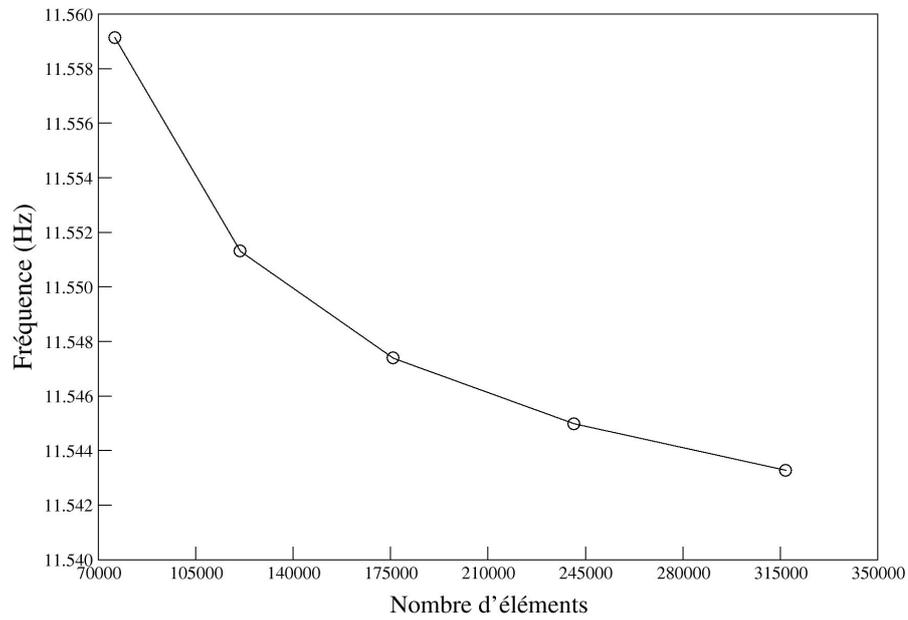


FIG. 5.10 – Convergence de la fréquence pour différents maillages

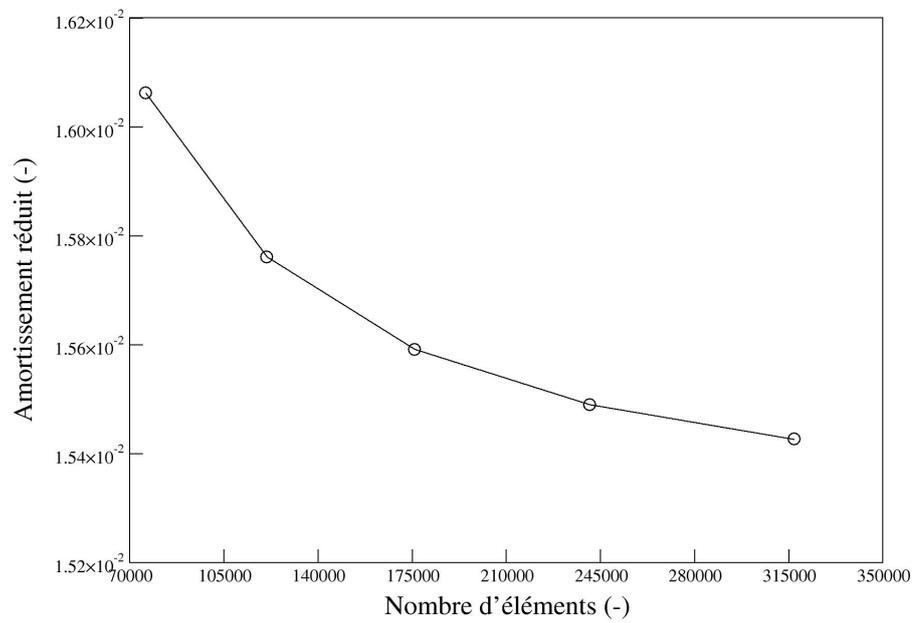


FIG. 5.11 – Convergence de l'amortissement pour différents maillages

réduit est plus difficile car dépendant du choix du pas de temps (fig. 5.13). Malgré tout, l'amortissement converge vers une valeur asymptotique à mesure que le pas de temps réduit.

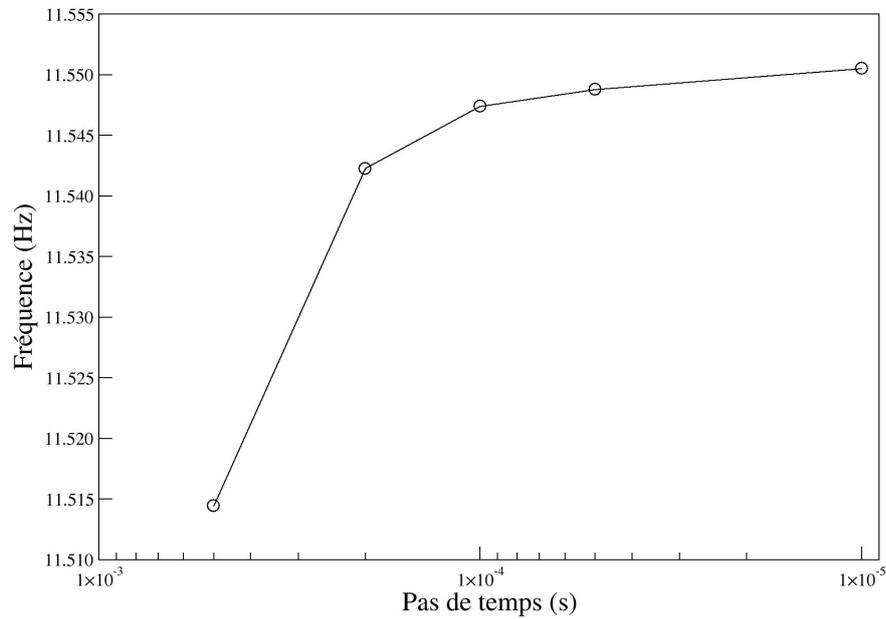


FIG. 5.12 – Convergence de la fréquence pour différents pas de temps

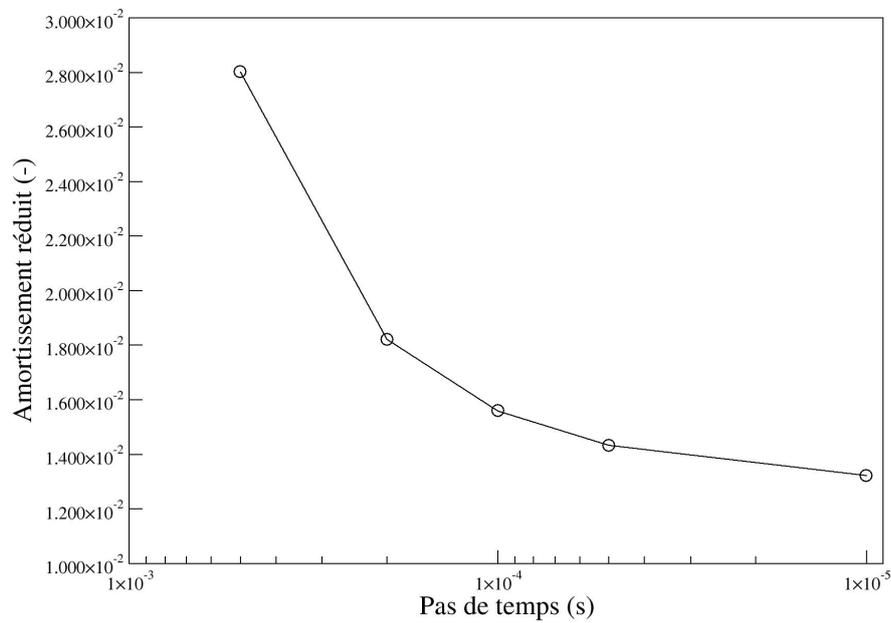


FIG. 5.13 – Convergence de l'amortissement pour différents pas de temps

Une extrapolation de Richardson sur ces valeurs est réalisée afin de comparer les résultats aux valeurs analytiques obtenues avec la loi de Rogers et aux résultats des simulations numériques

du CEA.

La fréquence obtenue est proche de celles obtenues expérimentalement et numériquement par le CEA (tab. 5.3).

TAB. 5.3 – FREQUENCE EN EAU DANS UN FLUIDE AU REPOS

	CEA	EDF	analytique
f_{eau}	11,63 Hz	11,56 Hz	11,55 Hz

Les résultats sur l'amortissement réduit en eau obtenus avec une extrapolation d'ordre deux (tab. 5.4) sont similaires au résultat analytique pour les codes EDF et CEA.

TAB. 5.4 – AMORTISSEMENT REDUIT EN EAU DANS UN FLUIDE AU REPOS

	CEA	EDF	analytique
χ_{eau}	1,22 %	1,13 %	1,14 %

Conclusion

Cette simulation a permis de mettre en évidence la capacité des codes à retrouver la masse ajoutée et l'amortissement ajouté de la structure en eau au repos. Pour la fréquence, le calcul est relativement aisé dû au fait qu'il dépend peu du pas de temps. Pour l'amortissement il est nécessaire de faire une convergence en temps et il est pratique d'utiliser une extrapolation afin de retrouver l'amortissement ajouté de la structure. Cette méthodologie ayant donné de bons résultats, elle est mise en œuvre pour le benchmark présenté ci-dessous.

5.4 Benchmark 2D

Le but de ce benchmark est de s'assurer que les codes sont capables de capter le seuil de départ en instabilité d'une ou plusieurs structures soumises à un écoulement transverse. Les simulations pour un fluide au repos ont montré qu'il est nécessaire d'utiliser un faible pas de temps pour bien représenter l'amortissement et qu'il est nécessaire d'appliquer une extrapolation de Richardson. C'est la raison pour laquelle pour chaque vitesse, trois simulations sont calculées afin d'appliquer une extrapolation de Richardson. Les pas de temps utilisés sont $2,0 \cdot 10^{-4}$ s, $1,0 \cdot 10^{-4}$ s et $5,0 \cdot 10^{-5}$ s.

5.4.1 Données numériques

Pour cette simulation, les caractéristiques de l'eau sont conservées pour le fluide (tab. 5.1). Par contre, les propriétés structure sont modifiées (tab. 5.5).

A partir de ces données, il est possible de définir une plage de vitesses fluide en entrée du domaine permettant de conserver un écoulement laminaire et pour lequel le tube part en instabilité.

TAB. 5.5 – PROPRIETES DE LA STRUCTURE POUR LES SIMULATIONS AU REPOS

Fréquence en air	Amortissement réduit en air	Masse	Diamètre
2,50 Hz	0,0437 %	0,298 kg	10,00 mm

Il est donc nécessaire, d'une part, de conserver un faible nombre de Reynolds dans le faisceau. Afin de calculer ce nombre la vitesse caractéristique la plus représentative est la vitesse inter-tube (eqn. 5.12).

$$\mathbf{v}_{gap} = \mathbf{v}_{entree} \frac{P/D_s}{1 - P/D_s} \quad (5.12)$$

$$Re = \frac{\rho_f \|\mathbf{v}_{gap}\| D_s}{\mu_f} \quad (5.13)$$

D'autre part, pour un tube mobile dans un faisceau fixe, le départ en instabilité apparaît, en général, pour une vitesse réduite (eqn. 5.14) de l'ordre de 2 à 3. Cette valeur contraint le choix de la vitesse inter-tube, et donc de la vitesse en entrée du domaine, du diamètre et de la fréquence de la structure.

$$\mathbf{v}_{red} = \frac{\mathbf{v}_{gap}}{f_s D_s} \quad (5.14)$$

$$(5.15)$$

La combinaison de ces contraintes permet de définir la gamme de vitesses réduites à tester (tab. 5.6) et explique la raison pour laquelle les propriétés de la structures sont modifiées par rapport au cas en eau au repos.

TAB. 5.6 – VITESSES IMPOSEES POUR LES SIMULATIONS

$v_{entree}(\text{m.s}^{-1})$	v_{gap}	v_{red}	Re
0,00100	0,00327	0,131	33
0,00250	0,00818	0,327	82
0,00500	0,01636	0,655	164
0,00750	0,02455	0,982	245
0,01125	0,03682	1,473	368
0,01500	0,04909	1,964	491
0,01870	0,06120	2,448	612
0,02000	0,06545	2,618	655
0,02250	0,07364	2,945	736
0,02500	0,08182	3,273	818
0,03000	0,09818	3,927	982
0,03500	0,11455	4,582	1145

5.4.2 Un tube mobile

Lors de cette simulation, seul un tube est mobile (configuration identique au cas du fluide au repos). Afin de reproduire au mieux l'interaction entre le tube mobile et le fluide, une initialisation de l'écoulement est réalisée sur faisceau fixe afin de s'assurer lors du lâcher de la structure de valeurs correctes de pressions et de vitesses du fluide.

Le tracé des déplacements du tube mobile au cours du temps (fig. 5.14) démontre que les trois comportements de la structure sont reproduits : stable, critique et instable.

D'un point de vue global, les valeurs moyennes de la vitesse et de la pression semblent être fixes au cours du temps (fig. 5.15, fig. 5.16).

Plus localement, il peut être mis en évidence les fluctuations de pressions et de vitesses permettant de traduire le comportement de la structure (fig. 5.17).

L'étude de l'amortissement en eau montre que pour les deux codes le départ en instabilité de la structure (lorsque l'amortissement devient négatif) est capté pour des vitesses réduites proches (fig. 5.18). La vitesse critique de départ en instabilité est de l'ordre de $0,018 \text{ m.s}^{-1}$ dans un cas et $0,021 \text{ m.s}^{-1}$ dans l'autre cas, ce qui correspond à des vitesses réduites de l'ordre de, respectivement, 2, 4 et 2, 7.

La comparaison des fréquences (fig. 5.19) montre que les deux codes obtiennent des résultats similaires. En particulier, il peut être noté sur la courbe EDF, que la fréquence a tendance à diminuer en s'approchant de la vitesse critique, puis à augmenter rapidement.

Toutefois, le modèle utilisé pour post-traiter les résultats semble atteindre ses limites pour des vitesses supérieures à la vitesse critique de départ en instabilité, le coefficient de corrélation se détériorant rapidement. Un ajustement de paramètres sans contraindre les amplitudes sur les termes en cosinus et sinus améliore grandement le coefficient de corrélation au détriment du respect des conditions initiales. Cela traduit le fait que le modèle employé (eqn. 5.7) n'est pas suffisant pour reproduire correctement le comportement du tube pour les vitesses post-instabilité.

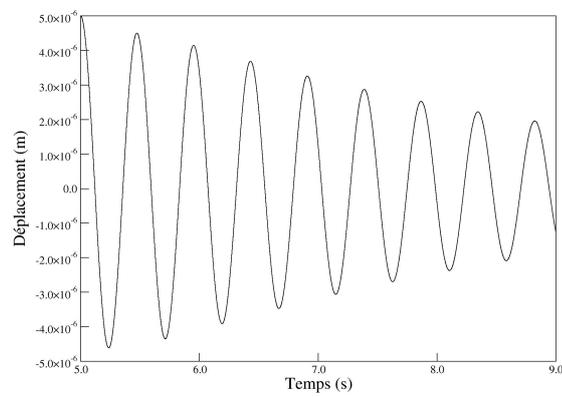
D'autre part, pour l'ensemble des cas stables et instables, le déplacement et l'effort appliqué sur le tube mobile sont toujours en phase (fig. 5.20). Afin de capter le déphasage entre le déplacement du tube et la force s'exerçant sur celui-ci, il faudrait réduire le pas de temps des simulations.

Ce benchmark a permis de démontrer que des outils de CFD peuvent être utilisés pour capter le départ en instabilité d'une structure mobile en petits déplacements dans un faisceau sous écoulement transverse laminaire. Les résultats obtenus avec les outils de couplages EDF et CEA donnent des résultats comparables. Par la suite, il serait intéressant d'une part d'explorer la zone de post-instabilité où le comportement du signal de déplacement semble différent, d'autre part de poursuivre l'analyse des résultats, notamment l'identification de la phase entre force et déplacement corrélée avec le départ en instabilité.

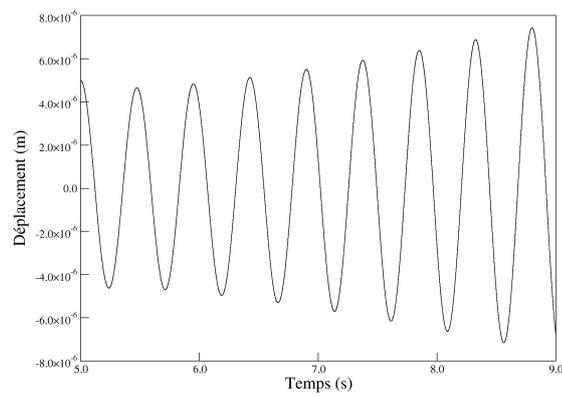
5.4.3 Faisceau de tubes mobiles

Le but de cette simulation est de démontrer la capacité du code à reproduire le départ en instabilité de plusieurs tubes mobiles dans un faisceau. L'intérêt est de reproduire le fait que pour un ensemble de tubes mobiles dans un faisceau, la vitesse critique de départ en instabilité apparaît pour une valeur plus faible que dans le cas d'un unique tube mobile dans un faisceau.

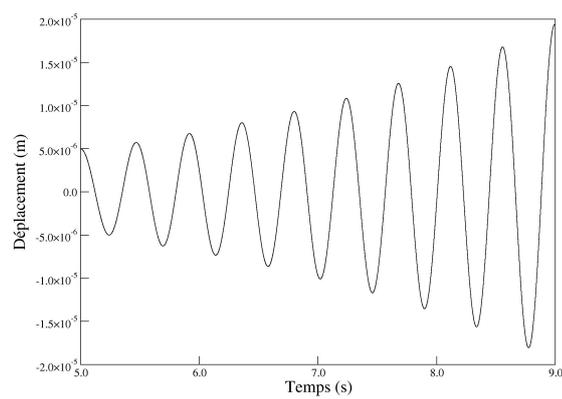
Dans cette simulation, seuls les demi-tubes en contact avec la paroi sont supposés fixes. Les autres tubes ont tous les mêmes propriétés (tab. 5.5). Les autres paramètres sont identiques aux simulations avec un unique tube mobile.



$$v_{entree} = 0,0150 \text{ m.s}^{-1}$$

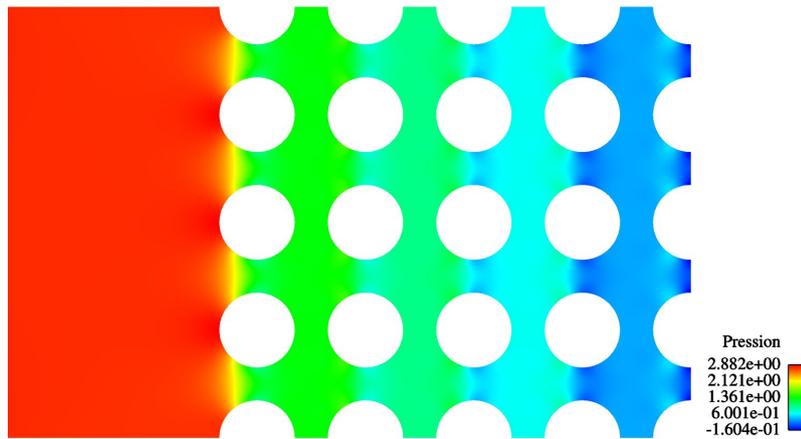
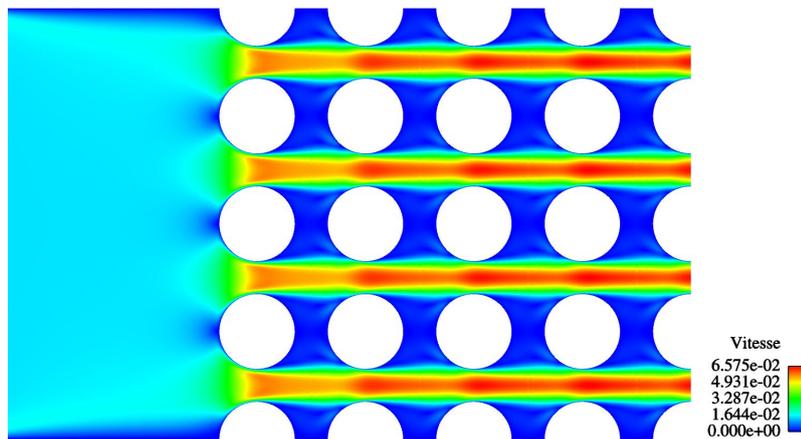
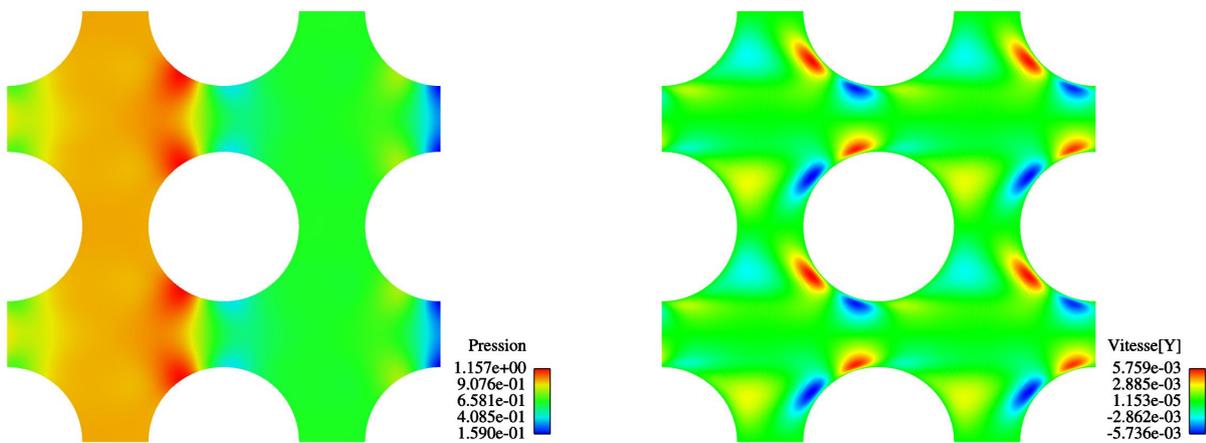


$$v_{entree} = 0,0187 \text{ m.s}^{-1}$$



$$v_{entree} = 0,0300 \text{ m.s}^{-1}$$

FIG. 5.14 – Déplacement du tube dans le cas du benchmark

FIG. 5.15 – Champs de pression pour $v_{\text{entrée}} = 0,0150 \text{ m.s}^{-1}$ FIG. 5.16 – Écoulement pour $v_{\text{entrée}} = 0,0150 \text{ m.s}^{-1}$ FIG. 5.17 – Fluctuation de la pression (g.) et du champ de vitesse (d.) selon la direction transverse autour du tube mobile pour $v_{\text{entrée}} = 0,0150 \text{ m.s}^{-1}$

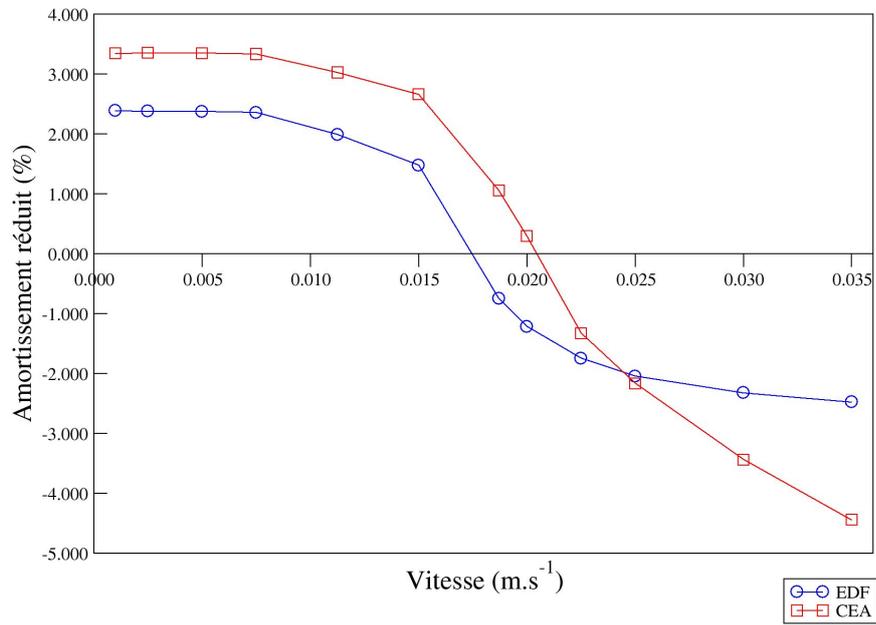


FIG. 5.18 – Amortissement réduit en eau du tube mobile pour différentes vitesses d'entrée

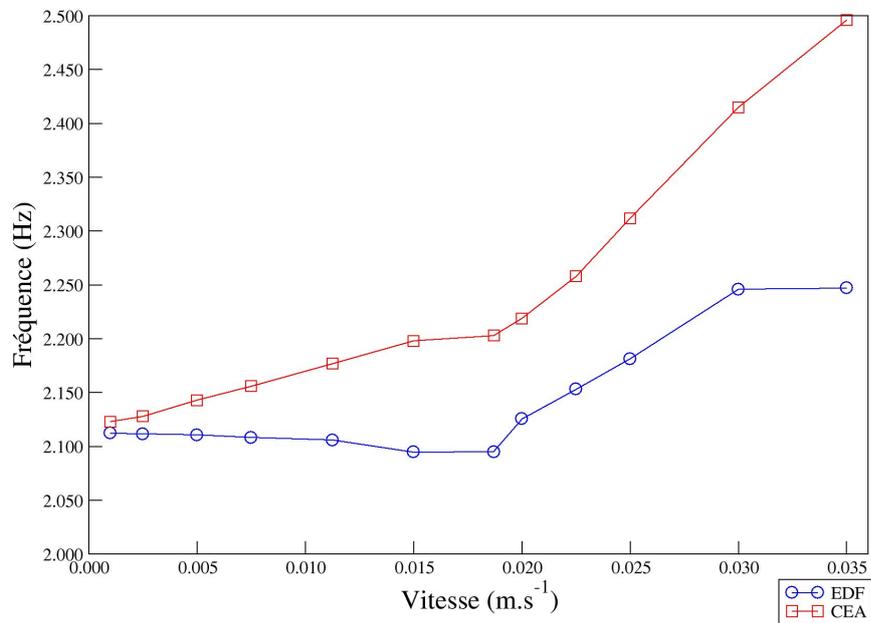


FIG. 5.19 – Fréquence en eau du tube mobile pour différentes vitesses d'entrée

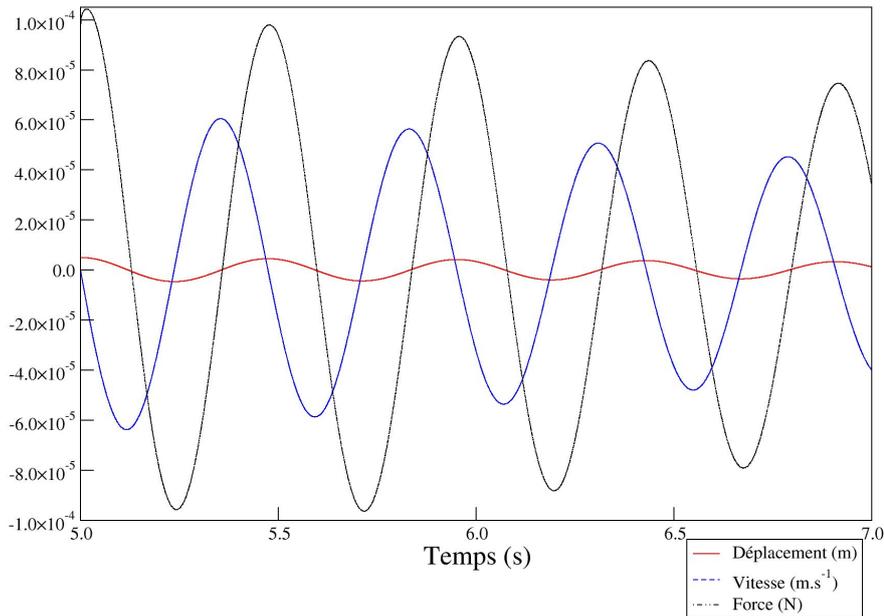


FIG. 5.20 – Comparaison du déphasage entre le déplacement, la vitesse et l'effort s'appliquant sur le tube mobile pour $v_{\text{entrée}} = 0,0150 \text{ m.s}^{-1}$

Le comportement instable de la structure est clairement identifié pour des vitesses supérieures à $0,0187 \text{ m.s}^{-1}$ (fig. 5.21) pour l'ensemble des tubes (cf. fig 5.5 pour la numérotation des tubes).

Le comportement stable de la structure est également identifié (fig. 5.22) pour des vitesses inférieures ou égales à $0,01125 \text{ m.s}^{-1}$. La décroissance du déplacement des tubes n'est pas exponentielle comme pour le cas d'un seul tube mobile. Ce type de décroissance peut s'expliquer par le phénomène de couplage de modes des tubes. Dans le chapitre sur les deux cylindres baignant dans un fluide au repos, il est vu que le déplacement théorique des deux cylindre est composé de la superposition de deux fréquences. Les signaux présentés ici sont de la même forme à la différence près que leur amplitude vibratoire s'atténue au cours du temps, ce qui traduit le comportement stable des structures.

Pour la vitesse intermédiaire, $v_{\text{entrée}} = 0,01500 \text{ m.s}^{-1}$, le comportement des structures est plus complexes (fig. 5.23). Comme pour le cas stable, le couplage de modes des tubes est mis en évidence. Par contre, la décroissance, tout comme la croissance, des amplitudes vibratoire n'est pas clairement mise en évidence. Il peut donc être supposé que cette vitesse est très proche de la vitesse critique de départ en instabilité fluide-élastique. Ce résultat est en accord avec ce qui était attendu, à savoir que la vitesse critique de départ en instabilité est plus faible pour un faisceau de tubes mobiles que pour un seul tube mobile dans un faisceau. La vitesse critique passe de l'ordre de $0,018 \text{ m.s}^{-1}$ pour un seul tube mobile à $0,015 \text{ m.s}^{-1}$ pour un faisceau mobile.

Du point de vue des champs de pressions et de vitesses (fig. 5.24), il peut être remarqué que les champs ont des formes très semblables au cas d'un seul tube mobile.

Le tracé du déplacement, de la vitesse et de la force s'appliquant sur le tube 33 (tube mobile dans le cas d'un seul tube mobile) (fig. 5.25) montre l'apparition d'un déphasage entre la force et le déplacement pour des vitesses supérieures à la vitesse critique [LW82, Che83], tandis que pour des vitesses inférieures le déphasage apparaît plus tardivement. De plus, il peut être remarqué

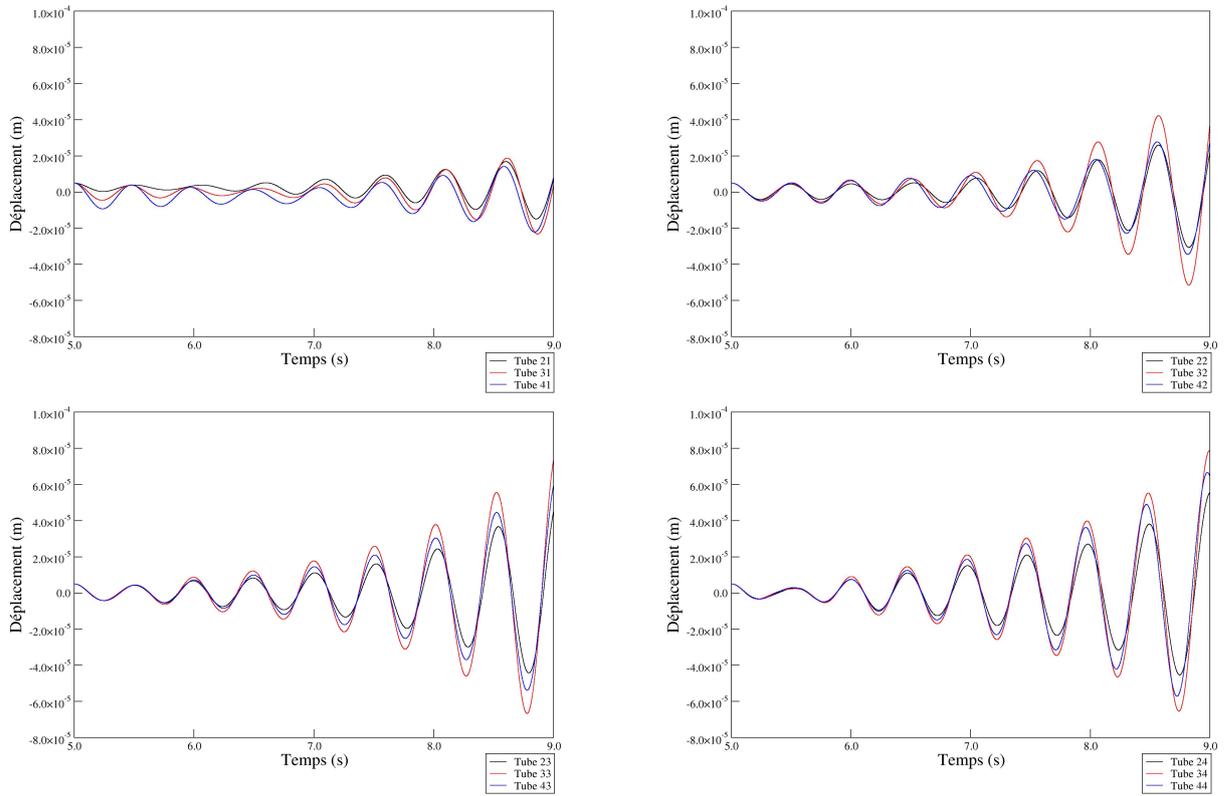


FIG. 5.21 – Déplacement des 4 premières rangées de tubes pour $v_{entree} = 0,01870 \text{ m.s}^{-1}$

que dans le cas post-instabilité l'effort est en avance sur le déplacement, tandis que sur le cas pré-instabilité l'effort est en retard sur le déplacement.

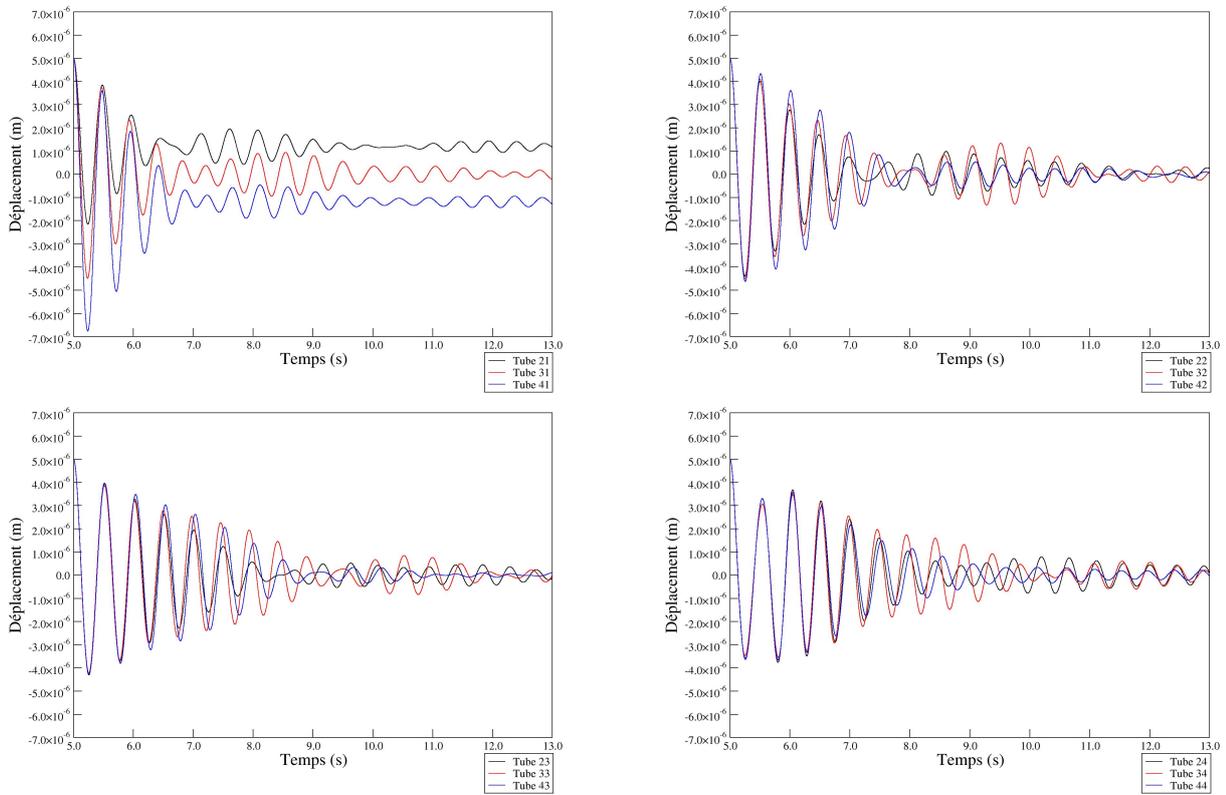
Le calcul avec un ensemble de tubes mobiles a permis de démontrer la capacité du code à trouver une vitesse critique de départ en instabilité fluide-élastique plus faible que pour le cas avec un unique tube mobile. De plus, le mécanisme de déphasage entre le déplacement et l'effort s'appliquant sur les tubes a été reproduit.

5.5 Première approche de la simulation de la maquette AMOVI

Une série d'essais expérimentaux est réalisée sur la maquette décrite précédemment. La valeur du Reynolds utilisé pour ces essais varie entre 1200 et 6000. L'hypothèse de laminarité du fluide peut donc être remise en cause. Malgré tout, le modèle numérique utilisé conserve cette hypothèse de fluide laminaire. Un unique pas de temps ($\Delta t = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$) est utilisé pour les 8 simulations (tab. 5.7).

Pour de faibles Reynolds, $Re \approx 1200$ (fig. 5.27), le comportement du tube est stable. Par traitement du signal, il est possible d'obtenir la fréquence et l'amortissement en eau de la structure. Pour des Reynolds plus élevés (fig. 5.28, fig. 5.29), le signal devient plus perturbé. Il est alors impossible de traiter le signal avec un ajustement de paramètres pour obtenir les caractéristiques en eau de la structure.

Ces Reynolds sont dans des gammes de début de turbulence. A l'inverse du benchmark 2D, des tourbillons apparaissent en amont des tubes (fig 5.30) et le champ de pression est plus disparate (fig. 5.31) que dans l'étude précédente.

FIG. 5.22 – Déplacement des 4 premières rangées de tubes pour $v_{entree} = 0,01125 \text{ m.s}^{-1}$

TAB. 5.7 – VITESSES IMPOSEES POUR LES SIMULATIONS

$v_{entree}(\text{m.s}^{-1})$	v_{gap}	v_{red}	Re
0,030	0,098	0,565	1193
0,045	0,147	0,848	1789
0,060	0,196	1,130	2386
0,075	0,245	1,413	2982
0,090	0,295	1,695	3579
0,105	0,344	1,978	4175
0,120	0,393	2,260	4772
0,150	0,491	2,825	5965

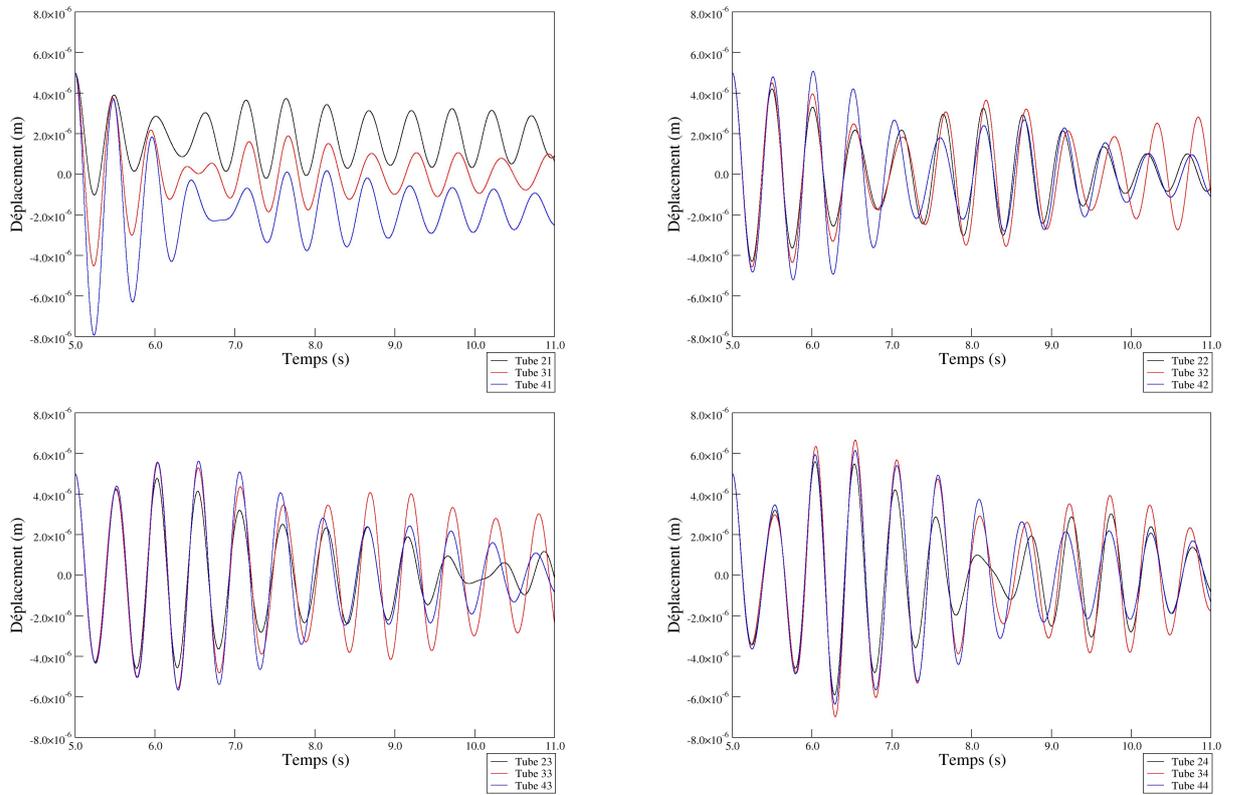


FIG. 5.23 – Déplacement des 4 premières rangées de tubes pour $v_{entree} = 0,01500 \text{ m.s}^{-1}$

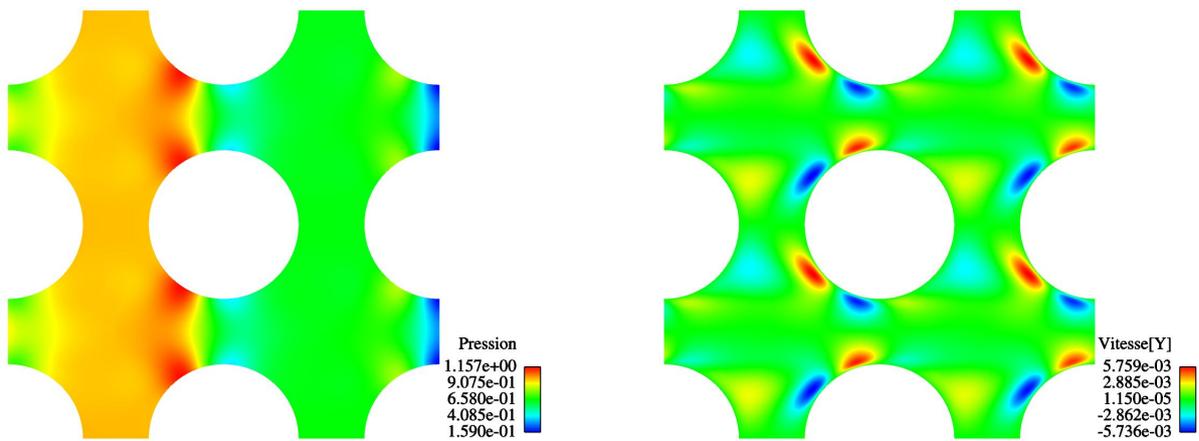


FIG. 5.24 – Fluctuation de la pression (g.) et du champ de vitesse (d.) selon la direction transverse autour du tube mobile pour $v_{entree} = 0,0150 \text{ m.s}^{-1}$

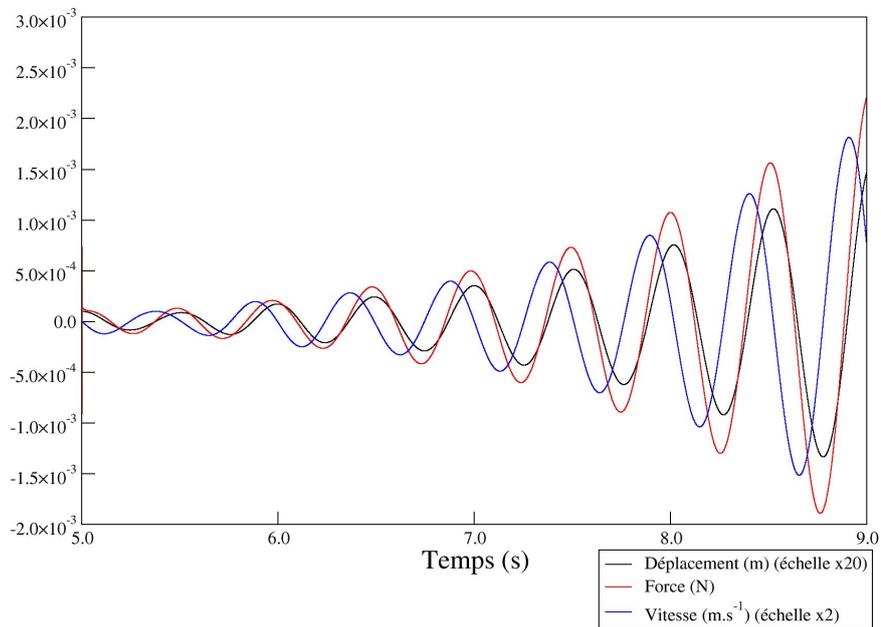


FIG. 5.25 – Comparaison du déphasage entre le déplacement, la vitesse et l'effort s'appliquant sur le tube mobile pour $v_{entree} = 0,01870 \text{ m.s}^{-1}$

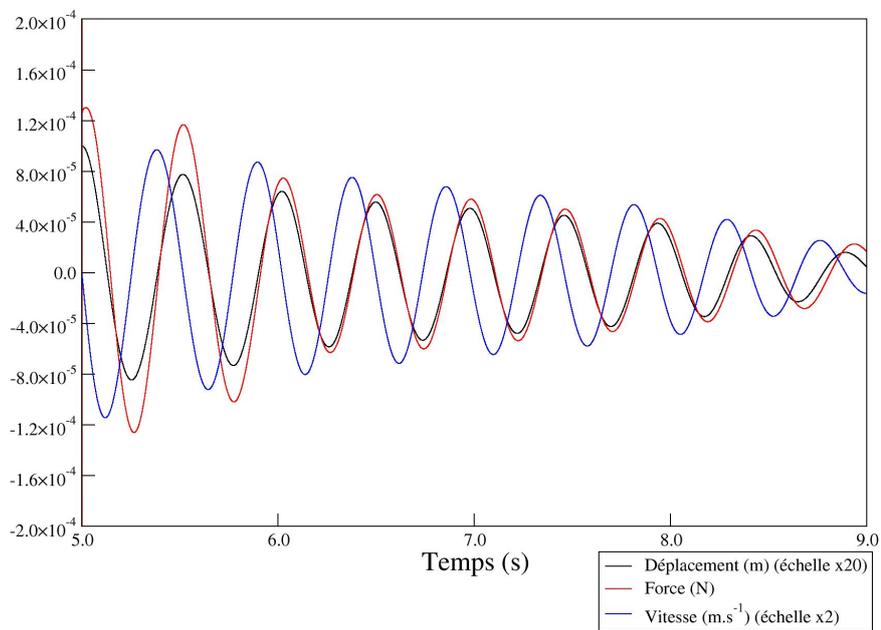
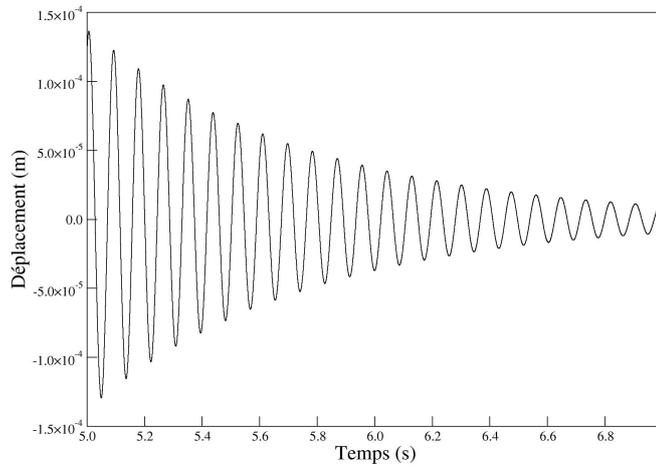
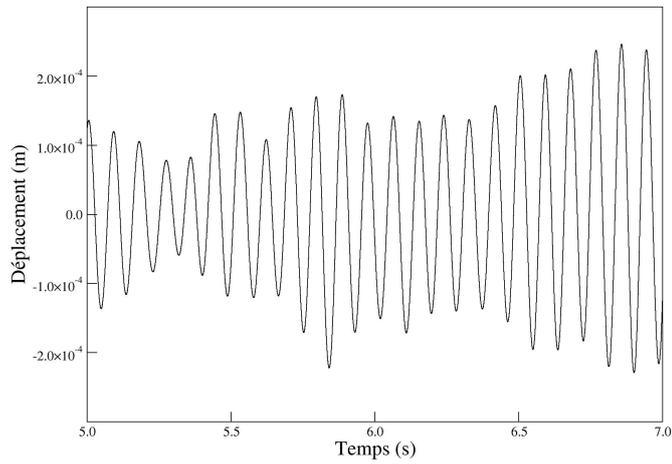
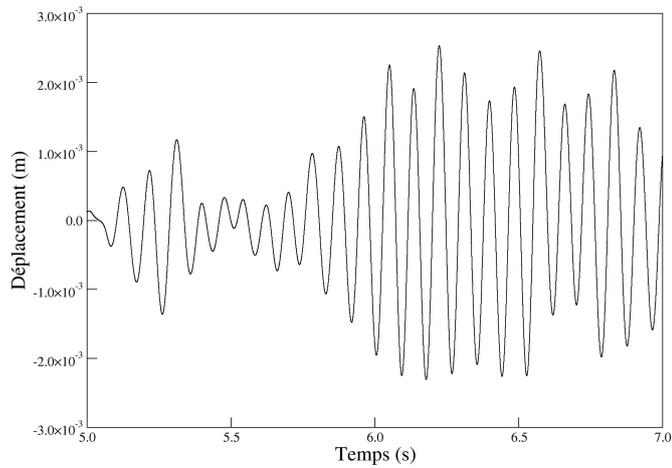
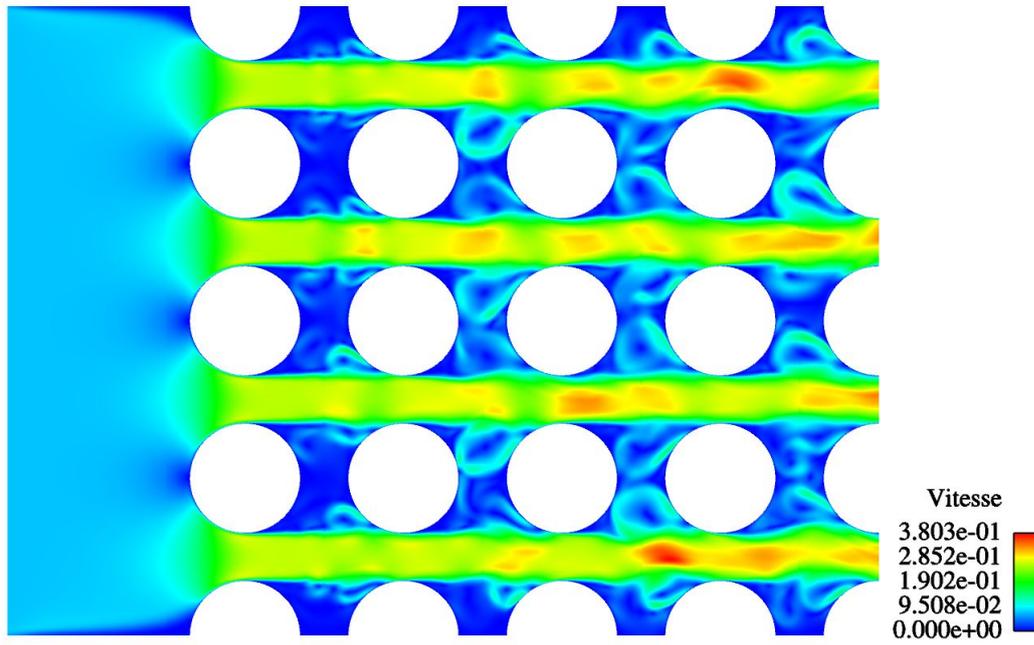
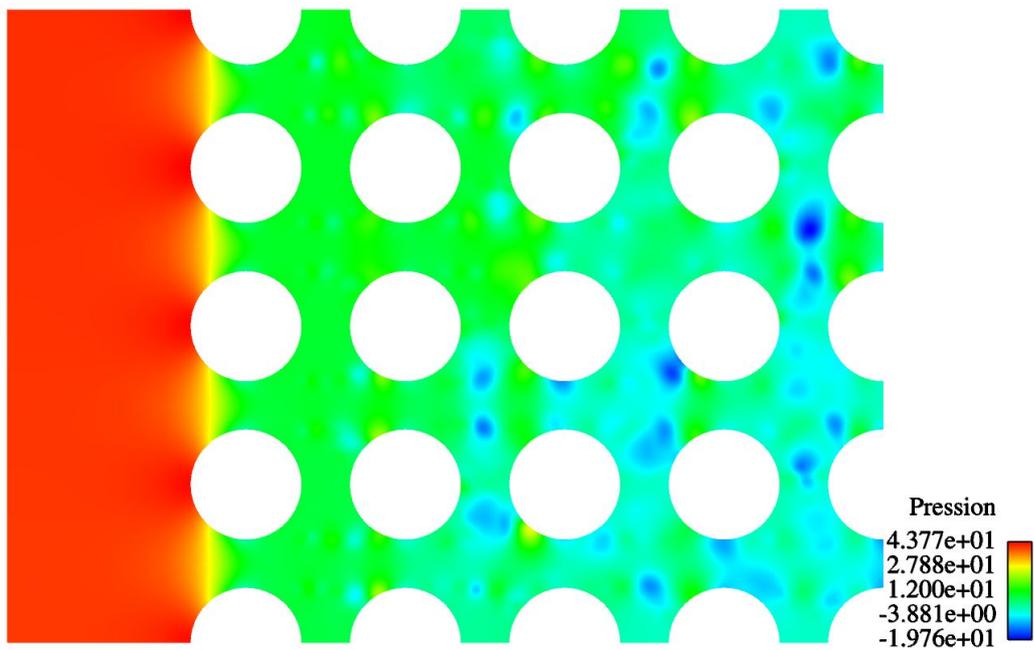


FIG. 5.26 – Comparaison du déphasage entre le déplacement, la vitesse et l'effort s'appliquant sur le tube mobile pour $v_{entree} = 0,01125 \text{ m.s}^{-1}$

FIG. 5.27 – Déplacement du tube pour $Re = 1190$ dans le cas de la simulation $2D$ FIG. 5.28 – Déplacement du tube pour $Re = 2980$ dans le cas de la simulation $2D$ FIG. 5.29 – Déplacement du tube pour $Re = 4770$ dans le cas de la simulation $2D$

FIG. 5.30 – Cartographie du champ de vitesse pour $v_{\text{entrée}} = 0,075 \text{ m.s}^{-1}$ FIG. 5.31 – Cartographie du champ de pression pour $v_{\text{entrée}} = 0,075 \text{ m.s}^{-1}$

Comme l'a montré [Ben05], une modélisation 2D a, alors, tendance à surévaluer les efforts. L'énergie emmagasinée dans les tourbillons ne peut être dissipée selon la troisième direction et est transférée à la structure. Une modélisation 3D permet de prendre en compte cet effet de l'écoulement. Un test en 3D est réalisé sur la vitesse $v_{entree} = 0.075 \text{ m.s}^{-1}$ (fig. 5.32).

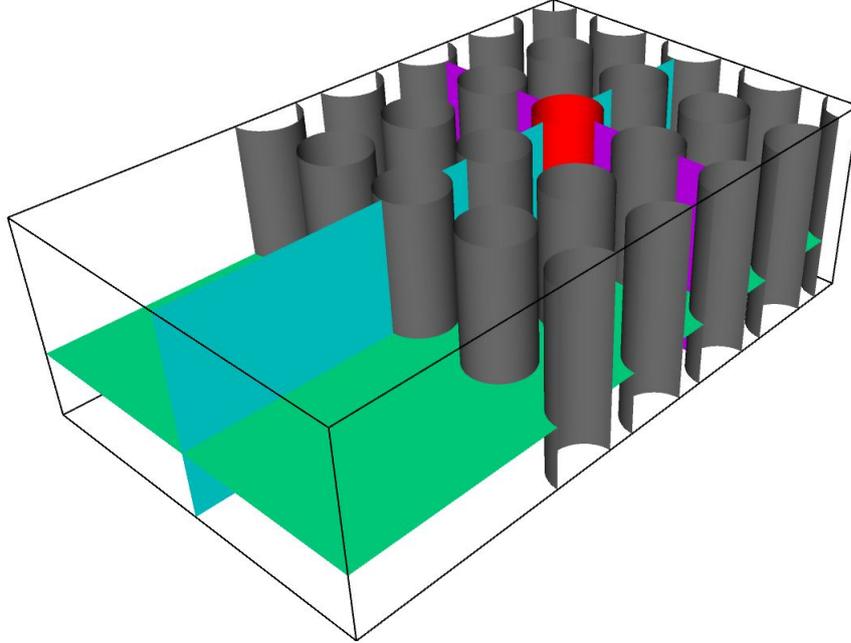


FIG. 5.32 – Vue des coupes du maillage

Le maillage est extrudé sur 3 diamètres afin de pouvoir capter les tourbillons se formant dans cette direction [BJ05]. Malgré le nombre de Reynolds, aucun modèle de turbulence n'est ajouté et le même raffinement de maillage est utilisé afin de pouvoir comparer qualitativement les effets 3D par rapport aux effets 2D.

Les simulations mettent en évidence un comportement 3D du fluide aussi bien sur la vitesse (fig. 5.33) que sur la pression (5.34)

La conséquence est une réduction importante des efforts s'appliquant sur la structure mobile (5.35). Le déplacement obtenu est alors assez différent de la modélisation 2D (fig. 5.36).

Ce signal est plus en cohérence avec celui du mouvement d'une structure selon un seul degré de liberté. Malgré tout, il montre une augmentation des vibrations, traduisant un cas post-instabilité. Or l'expérience montre que pour cette vitesse, le comportement du tube est stable. Cela est dû à l'absence de modèle de turbulence et donc une modélisation approximative des tourbillons qui ne dissipe pas suffisamment d'énergie et surévaluent les efforts.

Ces premiers résultats démontrent qu'il est nécessaire d'avoir une modélisation 3D de la maquette AMOVI. Il est, également, nécessaire d'utiliser un modèle de turbulence afin de reproduire plus précisément l'écoulement.

5.6 Conclusion

Les résultats présentés ont permis de démontrer qu'un couplage fluide-structure par des outils CFD est capable de capter la vitesse de départ en instabilité fluide-élastique dans un faisceau de

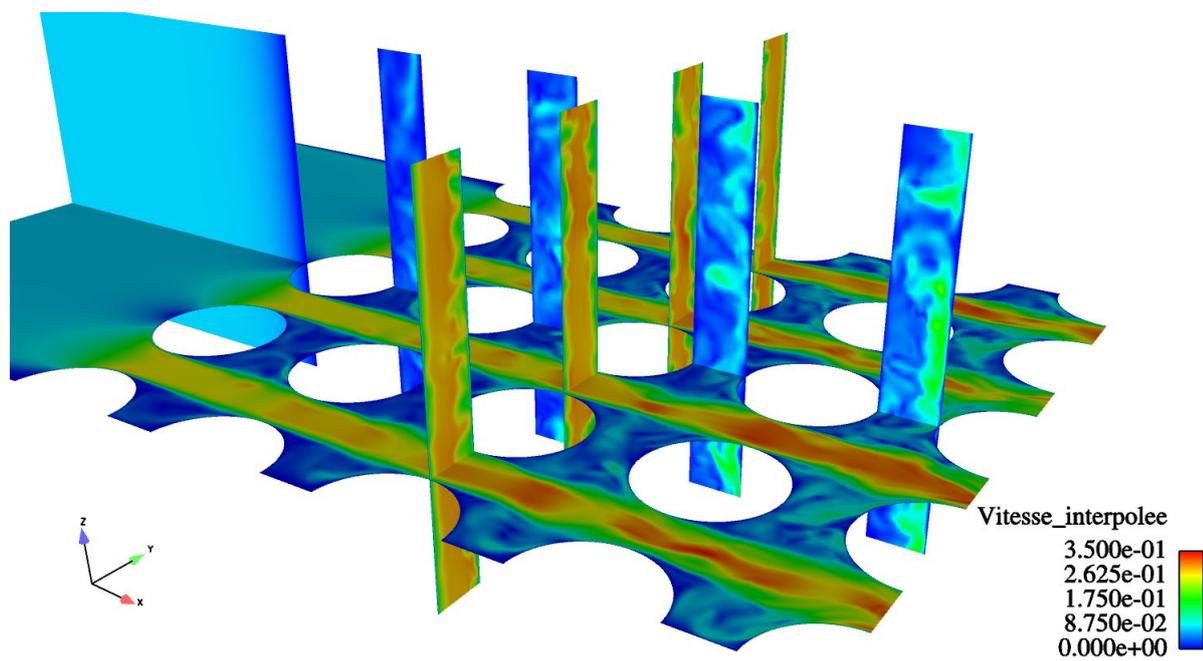


FIG. 5.33 – Influence de la modélisation 3D sur le champ de vitesse

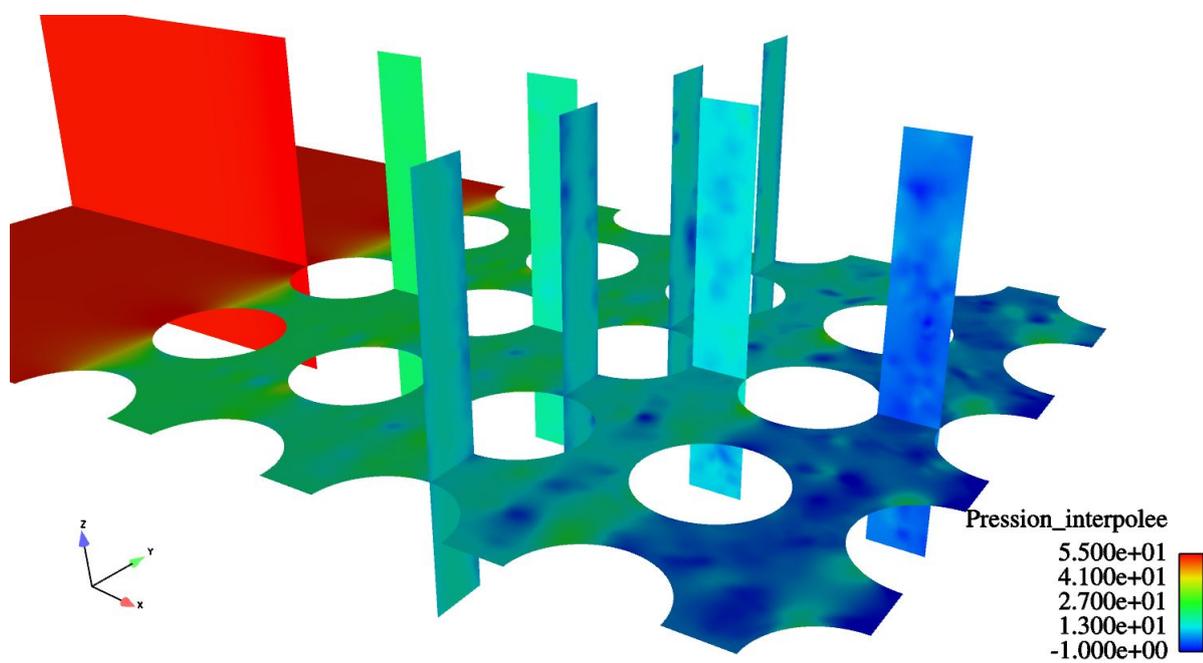


FIG. 5.34 – Influence de la modélisation 3D sur le champ de pression

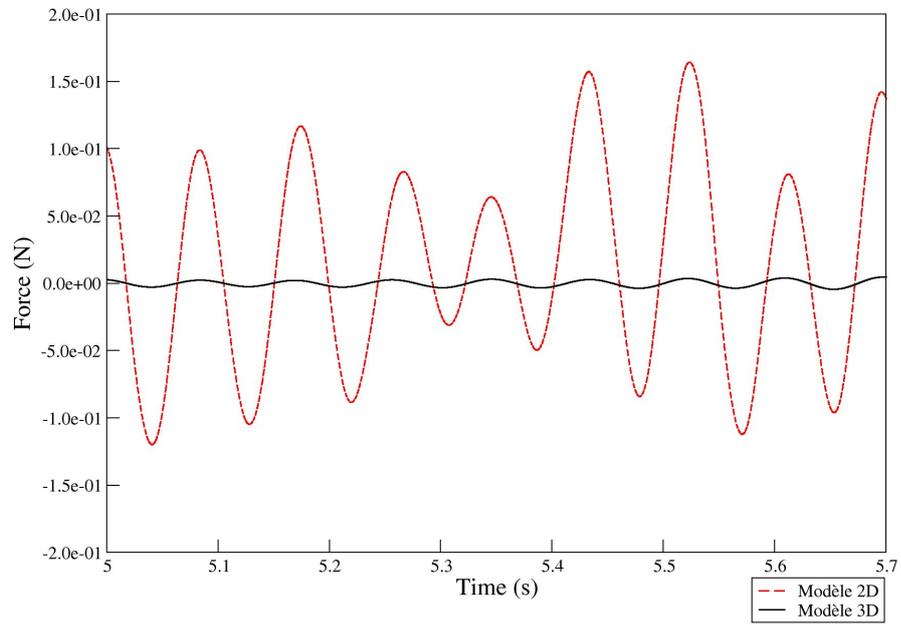


FIG. 5.35 – Comparaison des efforts de la structure entre les modélisations 2D et 3D

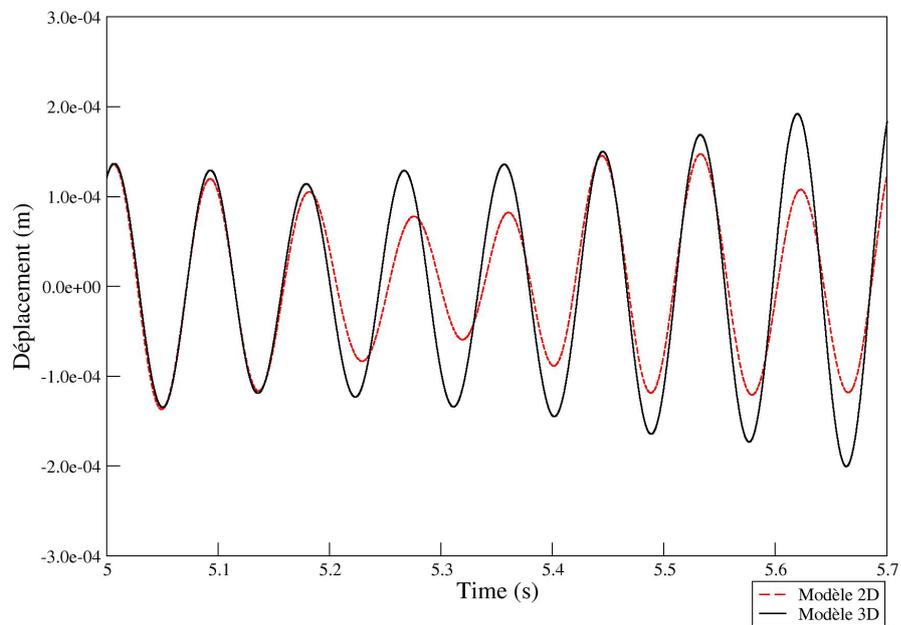


FIG. 5.36 – Comparaison du déplacement de la structure entre les modélisations 2D et 3D

tubes. Les résultats sont en cohérence avec la théorie puisque la vitesse de départ en instabilité pour un ensemble de tubes mobiles apparaît plus tôt que pour un unique tube mobile. Afin d'affiner les résultats pour un ensemble de tubes mobiles, il serait intéressant d'allonger la période de simulation afin de pouvoir utiliser des outils de traitement du signal permettant d'obtenir les fréquences et les amortissements sur un signal complexe [Per98]. De plus, la simulation avec plusieurs tubes mobiles a permis de reproduire le déphasage se créant entre le déplacement et l'effort s'appliquant sur les tubes mobiles. Par contre, ce phénomène n'a pas pu être mis en évidence sur le cas d'un seul tube mobile. Il pourrait également être intéressant de prolonger la simulation afin de savoir si le déphasage apparaît. Dans le cadre de la comparaison des résultats numériques à l'expérience, il a été démontré qu'une modélisation 3D de la maquette est requise et qu'il est nécessaire d'utiliser un modèle de turbulence.

6

Conclusions et perspectives

Ce rapport de thèse porte sur la simulation numérique du départ en instabilité d'une structure soumise à un chargement fluide ou fluide-élastique à l'aide d'un outil CFD et d'un outil CSD couplés par une procédure partitionnée.

Dans un premier temps, une étude sur deux cylindres rigides dans un fluide au repos est menée. Il a été mis en évidence, de façon semi-analytique, les propriétés, en terme de conservation de l'énergie, des schémas de couplages explicites et l'avantage de l'utilisation des schémas de couplages implicites. D'un point de vue numérique, l'erreur liée au couplage des codes et l'erreur liée à la diffusion numérique sont quantifiées. Il est mis en évidence la nécessité d'utiliser un très petit pas de temps avec des schémas couplages explicites. L'apport du schéma de couplage implicite sur les simulations avec les codes de calcul n'est pas mis en évidence sur ce cas de couplage.

Dans un second temps, une étude sur une structure flexible soumise à un écoulement interne est réalisée. L'intérêt du schéma de couplage implicite est mis en évidence lors de la réalisation de ces calculs. La capacité du code à reproduire le départ en instabilité est démontré. De plus, ce cas permet de valider la méthode de projection de données entre des interfaces fluide-structure flexibles. La méthode du chaos polynomiale est ensuite introduite. Un critère de seuil est utilisé afin de pouvoir évaluer l'incertitude liée au départ en instabilité de la structure pour une donnée d'entrée aléatoire. La littérature fournie sur ce cas test en fait un bon exemple pour étendre et valider la méthodologie de couplage au cas de structures non-linéaires.

Et enfin, dans un troisième temps, une étude sur les faisceaux de tubes soumis à des écoulements transverses est menée. Il est démontré la capacité du code à capter le départ en instabilité d'un tube mobile et d'un ensemble de tubes mobiles. Entre les deux simulations, il apparaît une réduction de la vitesse critique lorsque plusieurs tubes sont mobiles, ce qui est conforme à la théorie. De plus, dans le cadre de plusieurs tubes mobiles, le déphasage entre le déplacement et la force s'exerçant sur un tube est mis en évidence. Il est à noter que le déphasage est différent entre les cas pré et post instabilité. Enfin des calculs préliminaires 3D sont menés et démontrent l'influence de la troisième direction sur l'évaluation des efforts, à partir d'un certain Reynolds. Le but de cette étude est d'étendre, à l'avenir, le calcul à une gamme de Reynolds turbulent afin de pouvoir comparer les résultats à des résultats expérimentaux.

En conclusion, ce rapport permet de démontrer la viabilité d'un couplage CFD et CSD pour étudier le départ en instabilité de structures soumises à des chargements fluide ou fluide-élastiques. L'instabilité est modélisée pour les cas sous écoulements axiaux et sous écoulements transverses. Des structures avec plusieurs degrés de libertés sont modélisées. La validation de l'outil est effectuée pour des écoulements laminaires.

Trois grands axes de développement peuvent être envisagés dans la continuité de ce travail. Le premier consiste en une amélioration de la modélisation physique et en particulier en la validation des modèles de structures non-linéaires et des écoulements turbulents. Le second consiste en une amélioration des techniques de résolution et en particulier en un travail à fournir sur le schéma de couplage implicite afin d'accélérer la convergence des sous-itérations. Et enfin le troisième point consiste en la poursuite de la validation physique de l'outil et en particulier la comparaison à des résultats issues d'expériences.

Bibliographie

- [AG04] A. Adobes and M. Gaudin. Numerical study of tube bundle vibrations in an n4 standardized nuclear plant series steam generator. In *8th International Conference on Flow-Induced Vibration*, Paris, France, july 2004. FIV2004.
- [AGB01] A. Adobes, A. Gosse, and C. Barrate. Qualification of motion dependent fluid forces coefficients. In *Pressure Vessels and Piping Conference*, Atlanta, USA, July 22-26 2001. ASME.
- [APH03] D. Abouri, A. Parry, and A. Hamdouni. *Fluid-rigid body dynamic interaction in complex industrial flow*, chapter chapter Advances in fluid Mechanics : Fluid structure interaction II, pages 295–305. Wit Press, 2003.
- [AW85] R. Askey and J. Wilson. Some basic hypergeometric polynomials that generalize jacobi polynomials. *Memoirs Amer. Math. Soc., AMS, Providence RI*, 319, 1985.
- [AW05] M. Abbas and F. Waeckel. Introduction à *Code_Aster*, manuel d'utilisation u1.02.00. Technical report, Département AMA, EDF R&D, 2005. <http://www.code-aster.org>.
- [Baj06] F. Baj. Etude numérique d'un faisceau de tubes sous écoulement transverse. Technical report, CEA/Saclay - SEMT/DYN/RT/05-017/A, 2006.
- [BBQB⁺02] A. Bazergui, T. Bui-Quoc, A. Biron, G. McIntyre, and C. Laberge. *Résistance des matériaux*. Presse Internationales Polytechnique, troisième édition, 2002.
- [Ben91] O.O. Bendiksen. A new approach to computational aeroelasticity. In *32nd Structural Dynamics, and Materials Conference*, Washington, USA, 1991. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [Ben05] Z. Bendjeddou. *Méthodologie pour la simulation numérique des vibrations induites par écoulements dans les faisceaux de tubes*. thèse de doctorat, Université Lille 1, 2005.
- [BJ05] S. Benhamadouche and N. Jarrin. Simulation des écoulements en faisceaux de tubes en configuration in-line avec une approche l.e.s. Technical report, EDF R&D, Département Mécanique des Fluides, Energies et Environnement, 2005.
- [Ble74] R.D. Blevins. Fluid-elastic whirling of a tube row. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 96 :263–267, 1974.
- [Ble90] R.D. Blevins. *Flow-induced vibration*. Van Norstrand Reinhold, New York, USA, seconde édition, 1990.
- [Blo98] J. Blom. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 167 :369–391, 1998.

- [BW01] A. Beckert and H. Wendkand. Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions. *Aerospace Science and Technology*, 5(2) :125–134, 2001.
- [Che83] S.S. Chen. Instability mechanisms and stability criteria of a group of circular cylinders subject to cross-flow. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 96 :253–260, 1983.
- [Che87] S.S. Chen. *Flow-induced vibration of circular cylindrical structures*. Hemisphere publishing corporation, 1987.
- [Con70] H.J. Connors. Fluid-elastic vibration of tube arrays excited by cross-flow. In *Pressure Vessels and Piping Conference*, Chicago, USA, 1970. ASME.
- [CW98] J.J. Chattot and Y. Wang. Improved treatment of intersecting bodies with the chimera method and validation with a simple and fast flow solver. *Computers & Fluids*, 27(5-6) :721–740, 1998.
- [dBvZB07] A. de Boer, A.H. van Zuijlen, and H. Bijl. Review of coupling methods for non-matching meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(8) :1515–1525, 2007.
- [DF02] C. Degand and C. Farhat. A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Computers & Structures*, 80(3-4) :305–316, 2002.
- [DGH82] J. Donea, S. Giuliani, and J. P. Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33(1-3) :689–723, 1982.
- [DHPRF04] J. Donea, A. Huerta, J.-Ph. Ponthot, and A. Rodriguez-Ferran. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, volume 1 : Fundamentals, chapter Chapter 14 : Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods. John Wiley & Sons, Ltd, 2004.
- [dM06] M.V. de Morais. *Qualification numérique des méthodes de modélisation des forces fluide-élastiques s'exerçant dans un faisceau de tubes en écoulement transversal*. PhD Thesis, Université d'Evry val d'Essone, 2006.
- [EP05] S. Etienne and D. Pelletier. A general approach to sensitivity analysis of fluid-structure interactions. *Journal of fluids and structures*, 21 :169–186, 2005.
- [fAS03] Fraunhofer Institut for Algorithms and Scientific Computing SCAI. Mpcci, mesh-based parallel code coupling interface - specification of mpcci version 2.0, 2003.
- [FDKL98] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4) :231–245, 1998.
- [FGG01] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmont. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ale schemes for the solution of flow problems on moving grids. *Journal of Computational Physics*, 174(2) :669–694, 2001.
- [FGG05] M.A. Fernandez, J.-F. Gerbeau, and C. Grandmont. A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. Technical report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2005. Rapport N° 5700.
- [FLM95] C. Farhat, M. Lesoinne, and N. Maman. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems : three field formulation, geometric conservation

- and distribution solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 21 :807–835, 1995.
- [FLSL97] C. Farhat, M. Lesoinne, P. Stern, and S. Lantéri. High performance solution of three-dimensional nonlinear aeroelastic problems via parallel partitioned algorithms : methodology and preliminary results. *Advances in Engineering Software*, 28 :43–61, 1997.
- [FLT03] M.A. Fernandez and P. Le Tallec. Linear stability analysis in fluid-structure interaction with transpiration. part ii : Numerical analysis and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192 :4837–4873, 2003.
- [FPF01] C.A. Felippa, K.C. Park, and C. Farhat. Partitioned analysis fo coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25) :3247–3270, 2001.
- [FV01] M.A. Fernandez Varela. *Modèles simplifiés d'interaction fluide-structure*. thèse de doctorat, Université Paris IX Dauphine, 2001.
- [GP66a] R.W. Gregory and M.P. Païdoussis. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. i. experiment. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 293-1435 :512–527, 1966.
- [GP66b] R.W. Gregory and M.P. Païdoussis. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid. i. theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 293-1435 :512–527, 1966.
- [Gra91] S. Granger. A global model for flow-induced vibration of tube bundles in cross-flow. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 113 :48–60, 1991.
- [GS91] R.G. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic Finite Elements : a Spectral Approach*. Springer-Verlag, 1991.
- [Gui98] V. Guimet. *Analyse numérique et simulation de problèmes d'interaction fluide-structure en régime incompressible*. PhD thesis, Université Paris VI, 1998.
- [GV03] J.-F. Gerbeau and M. Vidrascu. A quasi-newton algorithm based on a reduced model for fluid-structure interaction problems in blood flows. Technical report, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2003. Rapport N°4691.
- [HB00] J.-M. Hervouet and P. Bates, editors. *The Telemac Modelling System*. Hydrological processes, John Wiley & Sons, Ltd., 2000.
- [Her03] J.-M. Hervouet. *Hydrodynamique des écoulements à surface libre. Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*. Presse de l'école nationale des Ponts et chaussées, 2003.
- [HGdMB⁺07] F. Huvelin, M.V. Giraio de Morais, F. Baj, J.-P. Magnaud, E. Longatte, and M. Souli. Numerical simulation of tube bundle vibrations under cross flow. In *Pressure Vessels and Piping Conference*, San Antonio, USA, july 2007. ASME.
- [HM07] M. Hassan and F. Mahmood. Modeling of fluidelastic instability forces in fully flexible tube arrays. In *Pressure Vessels and Piping Conference*, San Antonio, USA, july 2007. ASME.
- [HWD04] B. Hübner, E. Walhorn, and D. Dinkler. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193 :2087–2104, 2004.

- [JAPB08] F. Jusserand, A. Adobes, T. Pasutto, and L. Broutin. Computation of dimensionless spectrum of fluid forces induced by vortex shedding from a single rigid tube in a single-phase cross flow. In *Flow-Induced Vibrations*, Prague, Czech Republic, 30 June - 3 July 2008. FIV-2008.
- [KS98] R. Koekoek and R.F. Swarttouw. The askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. Technical report, Department of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, 1998. Technical Report 98-17.
- [LBS03] E. Longatte, Z. Bendjeddou, and M. Souli. Methods for numerical study of tube bundle vibrations in cross flows. *Journal of Fluids and Structures*, 18 :513–528, 2003.
- [LBVS05] L. Longatte, Z. Bendjeddou, V. Verreman, and M. Souli. Explicit and implicit code coupling schemes in fluid structure interaction. In *Proceeding of ASME : 2005 ASME Pressure Vessels & Piping, Division Conference*, Denver, Colorado, USA, July 17-21 2005.
- [LF96] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(1-2) :71–90, 1996.
- [LNW00] E. Longatte, R. Nhili, and T. Weiss. Prediction of flow induced vibrations of drive line assembly. In *Pressure Vessels and Piping Conference*, Seattle, USA, July 23-27 2000. ASME.
- [LPH95] U. Lee, C.H. Pak, and S.C. Hong. The dynamics of a piping system with internal unsteady flow. *Journal of Sound and Vibration*, 180 :297–311, 1995.
- [LW82] J.H. Lever and D.S. Weaver. A theoretical model for the fluidelastic instability in heat exchanger tube bundles. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 104 :87–108, 1982.
- [Maz70] V. Yu. Mazur. Motion of two circular cylinders in an ideal fluid. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhan. Zhidk. i Gaza*, 6 :80–84, 1970.
- [MCM⁺06] J.-M. Martinez, J. Cahen, A. Millard, D. Lucor, F. Huvelin, J. Ko, and N. Pousineau. Modélisation des incertitudes par polynômes de chaos, étude d'un écoulement en milieu poreux. Technical report, CEA, Laboratoire d'Etude Thermiques des Réacteurs, 2006. RAPPORT DMS2/DIR/RT/06-006/A.
- [MF95] N. Maman and C. Farhat. Matching fluid and structure meshes for aeroelastic computations : a parallel approach. *Computers & Structures*, 54(4) :779–785, 1995.
- [MSPS08] Y. Modarres-Sadeghi, M.P. Païdoussis, and C. Semler. Three-dimensional oscillations of a cantilever pipe conveying fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43-1 :18–25, 2008.
- [MSSWGP07] Y. Modarres-Sadeghi, C. Semler, M. Wadham-Gagnon, and M.P. Païdoussis. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. part 3 : Three-dimensional dynamics in the presence of an end-mass. *Journal of Fluids and Structures*, 23(4) :589–603, 2007.
- [NR94] E. Naudascher and D. Rockwell. *Flow-induced vibrations, An engineering guide*. A.A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1994.

- [NR06] M. Nikolic and M. Rajkovic. Bifurcations in nonlinear models of fluid-conveying pipes supported at both ends. *Journal of Fluids and Structures*, 22(2) :173–195, 2006.
- [Pai98] M.P. Paidoussis. *Fluid-structure interactions. Slender Structures and axial flow, volume 1*. Academic Press, 1998.
- [Pai70] M.P. Paidoussis. Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 12 :85–103, 1970.
- [Pai83] M.P. Paidoussis. A review of flow-induced vibrations in reactors and reactor components. *Nuclear Engineering and Design*, 74 :31–60, 1983.
- [Per98] L. Perotin. Logiciel imene version 3.1 : Note de principe. Technical report, EDF R&D, Département Transferts Thermiques et Aérodynamiques, 1998.
- [PF01] S. Piperno and C. Farhat. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part ii : energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190 :3147–3170, 2001.
- [PFD77] K.C. Park, C.A. Felippa, and J.A. DeRuntz. Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis. In *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction Problems*, New York, USA, 1977. American Society of Mechanical Engineers.
- [PFL95] S. Piperno, C. Farhat, and B. Larrouturou. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems - part i : Model problem, theory and two-dimensional application. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 124 :79–112, 1995.
- [Pip97] S. Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *International journal for numerical methods in fluids*, 25 :1207–1226, 1997.
- [PK91] S.J. Price and S. Kuran. Fluidelastic stability of a rotated square array with multiple flexible cylinders subject to cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 5 :551–572, 1991.
- [PL93] M.P. Paidoussis and G.X. Li. Pipes conveying fluid : a model dynamical problem. *Journal of Fluids and Structures*, 7 :137–204, 1993.
- [Pri95] S.J. Price. A review of theoretical models for fluidelastic instability of cylinder arrays in cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 9 :463–518, 1995.
- [Pri01] S.J. Price. An investigation on the use of connors’ equation to predict fluidelastic instability in cylinder arrays. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 420(1) :117–124, 2001.
- [PSWGS07] M.P. Paidoussis, C. Semler, M. Wadham-Gagnon, and S. Saaid. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. part 2 : Dynamics of the system with intermediate spring support. *Journal of Fluids and Structures*, 23(4) :569–587, 2007.
- [PT91] M.J. Pettigrew and C.E. Taylor. Fluidelastic instability of heat exchanger tube bundles : Review and design recommendations. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 113 :242–256, 1991.
- [PT03] M.J. Pettigrew and C.E. Taylor. Vibrations analysis of shell-and-tube heat exchangers : an overview - part 1 : flow, damping, fluidelastic instability. *Journal of Fluids and Structures*, 18 :469–483, 2003.

- [R&07] EDF R&D. *Code_Saturne* 1.3.f theory and programmer's guide. Technical report, Fluid Dynamics, Power Generation and Environment Department, EDF R&D, 2007. http://rd.edf.com/code_saturne.
- [Ray07] C. Raynaud. Etat de l'art des méthodes applicables à l'analyse des instabilités fluide-élastiques. Technical report, EDF R&D, Département Mécanique des Fluides, Energies et Environnement, 2007.
- [RBCC07] G. Ricciardi, S. Bellizzi, B. Collard, and B. Cochelin. Numerical and experimental investigation of nuclear reactor core modeled by a porous media. In *Pressure Vessels and Piping Conference*, San Antonio, USA, July 2007. ASME.
- [Ren98] J.Y. Renou. *Une méthode eulérienne pour le calcul numérique de forces fluides-élastiques*. thèse de doctorat, Université Paris VI, 1998.
- [RTP84] R.J. Rogers, C.E. Taylor, and M.J. Pettigrew. Fluid effects on multi-span heat-exchanger tube vibration. In H. Chung and M.D. Bernstein, editors, *Proceedings Pressure Vessel and Piping Conference, ASME, New York, San Antonio, TX, USA*, pages 17–26, June 1984.
- [Sch99] W. Schoutens. *Stochastic processes in the Askey scheme*. PhD thesis, K.U. Leuven, 1999.
- [SLP94] C. Semler, G.X. Li, and M.P. Paidoussis. The non-linear equations of motion of pipes conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 169 :577–599, 1994.
- [Smi74] D. Smith. A case study and analysis of the Tacoma Narrows bridge failure. Technical report, Department of Mechanical Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada, 1974. 99.497 Engineering Project.
- [SOL00] M. Souli, A. Ouahsine, and L. Lewin. Ale formulation for fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(5-7) :659–675, 2000.
- [SZ01] M. Souli and J.P. Zolesio. Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(3-5) :451–466, 2001.
- [TL79] P.D. Thomas and C.K. Lombard. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA Journal*, 17 :1030–1037, 1979.
- [TT81] H. Tanaka and S. Takahara. Fluidelastic vibration of tube array in cross-flow. *Journal of Sound and Vibrations*, 77 :19–37, 1981.
- [TTST02] H. Tanaka, K. Tanaka, F. Shimizu, and S. Takahara. Fluidelastic analysis of tube bundle vibration in cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 16(1) :93–112, 2002.
- [Wie38] N. Wiener. The homogeneous chaos. *Amer. J. Math.*, 60 :897–936–1037, 1938.
- [WK82] D.S. Weaver and D. Koroyannakis. The cross-flow response of a tube array in water - a comparison with the same array in air. *ASME Journal of Pressure Vessel Technology*, 104 :139–146, 1982.
- [WMP07] R. Watteaux, N. Mureithi, and D. Pelletier. Determination of coupling force derivatives in tube bundles using the shape sensitivity equation method. In *Pressure Vessels and Piping Conference*, San Antonio, USA, July 2007. ASME.
- [YS07] H.-I. Yoon and I.-S. Son. Dynamic response of rotating flexible cantilever pipe conveying fluid with tip mass. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(7) :878–887, 2007.

- [YW93] M. Yetisir and D.S. Weaver. An unsteady theory for fluid-elastic instability in an array of flexible tubes in cross-flow. *Journal of Fluids and Structures*, 7 :751–766, 1993.

A

Formulaire mathématique

A.1 Jacobien

A.1.1 Interprétation du jacobien

La matrice jacobienne est la matrice des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle. Soit la fonction \mathbf{f} tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{f} : \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} & \rightarrow \mathbf{f} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

On en déduit la matrice jacobienne :

$$\overline{\overline{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Le déterminant de la matrice jacobienne intervient dans le changement de variables au sein d'une intégrale. Si l'on considère l'élément d'intégration dx_1 en coordonnées eulériennes et que l'on souhaite le récrire en coordonnées lagrangiennes, on obtient :

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial x_1}{\partial X_3} dX_3 \quad (\text{A.3})$$

d'où

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Considérons maintenant la variation de volume entre un instant initial dV^0 et le temps courant dV . Les deux variations de volumes s'expriment, dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, par :

$$dV^0 = dX_1 \mathbf{e}_1 \cdot (dX_2 \mathbf{e}_2 \wedge dX_3 \mathbf{e}_3) \quad (\text{A.5})$$

$$dV = dx_1 \mathbf{e}_1 \cdot (dx_2 \mathbf{e}_2 \wedge dx_3 \mathbf{e}_3) \quad (\text{A.6})$$

On en déduit :

$$dV = \sum_{i=1}^3 \overline{M}_{i1} dX_1 \mathbf{e}_i \cdot (\sum_{j=1}^3 \overline{M}_{j2} dX_2 \mathbf{e}_j \wedge \sum_{k=1}^3 \overline{M}_{k3} dX_3 \mathbf{e}_k) \quad (\text{A.7})$$

$$= \det(\overline{M}) dV^0 \quad (\text{A.8})$$

De plus, la masse du milieu considéré restant constante au cours du temps, on en déduit :

$$J = \det(\overline{M}) = \frac{dV}{dV^0} = \frac{\rho^0}{\rho} \quad (\text{A.9})$$

On peut déduire de cette dernière expression que le jacobien traduit la variation de volume entre l'état actuel et l'état initial du domaine considéré, pour une transformation des coordonnées eulériennes aux coordonnées lagrangiennes. Il représente, de plus, le ratio entre la masse volumique à un instant donné et la masse volumique à l'instant initial. Ce dernier point est très important dans l'étude d'un milieu continu à masse volumique constante, car le jacobien entre deux systèmes de coordonnées est égal à 1.

A.1.2 Equation du jacobien

On rappelle que :

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{da}{dt} & \frac{db}{dt} \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ \frac{dc}{dt} & \frac{dd}{dt} \end{vmatrix} \quad (\text{A.10})$$

donc

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_2} & \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_2} & \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_1} & \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_2} & \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \dot{u}_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \dot{u}_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{u}_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \dot{u}_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \dot{u}_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{u}_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \dot{u}_3} \end{vmatrix} \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{\partial(\dot{u}_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} + \frac{\partial(x_1, \dot{u}_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} + \frac{\partial(x_1, x_2, \dot{u}_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \quad (\text{A.12})$$

On peut également montrer que :

$$\frac{\partial(\dot{u}_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \dot{\cdot} \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \frac{\partial(\dot{u}_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \quad (\text{A.13})$$

donc :

$$\frac{\partial(\dot{u}_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = J \frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} \quad (\text{A.14})$$

On en déduit que :

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla_{\mathbf{x}} \bullet (\dot{\mathbf{u}}) \quad (\text{A.15})$$

A.2 Dérivée particulière d'une intégrale

A.2.1 Cas général

Soient $f(\mathbf{x}, t)$ un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R} , $\Omega(t)$ le volume occupé à l'instant t par un milieu continu en mouvement et $I(t)$ l'intégrale de la fonction scalaire $f(\mathbf{x}, t)$ sur ce volume.

$$I(t) = \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) d\Omega(t) \quad (\text{A.16})$$

Le calcul de la dérivée particulière de cette intégrale est :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) d\Omega(t) \right) = \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \right) d\Omega(t) \quad (\text{A.17})$$

La première étape pour obtenir ce résultat consiste à effectuer le changement de variables en coordonnées de Lagrange de l'intégrale $I(t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \\ J(\mathbf{X}, t) = \det(\nabla_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\varphi})) \\ \Omega(t) = J(\mathbf{X}, t)\Omega(0) \\ I(t) = \int_{\Omega(0)} f(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t) d\Omega(0) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

La dérivation de l'intégrale est alors possible :

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) d\Omega(t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} f(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t) d\Omega(0) \\ &= \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} \left(f(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t) \right) d\Omega(0) \\ &= \int_{\Omega(0)} \left(J(\mathbf{X}, t) \frac{df}{dt}(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \frac{dJ}{dt}(\mathbf{X}, t) \right) d\Omega(0) \\ &= \int_{\Omega(0)} \left(J(\mathbf{X}, t) \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + J(\mathbf{X}, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right) d\Omega(0) \\ &= \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t) \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right) J(\mathbf{X}, t) d\Omega(0) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

On peut démontrer (eqn. A.15) :

$$\frac{\partial J}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.20})$$

On obtient donc :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \right) J(\mathbf{X}, t) d\Omega(0) \quad (\text{A.21})$$

Sachant que $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = f(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}, t))$, on obtient l'égalité recherchée :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{\Omega(0)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \right) J(\mathbf{X}, t) d\Omega(0) \quad (\text{A.22})$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) \right) d\Omega(t) \quad (\text{A.23})$$

A.2.2 Cas particulier avec la masse volumique

Considérons l'intégrale

$$I_{\rho}(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) d\Omega(t) \quad (\text{A.24})$$

où ρ est la masse volumique du domaine considéré et les autres variables, celles définies dans la sous-section précédente.

D'après (eqn. A.17), la dérivée particulière de l'intégrale (eqn. A.24) s'exprime sous la forme :

$$\frac{dI_{\rho}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) d\Omega(t) \right) \quad (\text{A.25})$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \right) \right) d\Omega(t) \quad (\text{A.26})$$

On en déduit :

$$\frac{dI_{\rho}(t)}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left(f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + f(\mathbf{x}, t) \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \right) + \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}, t)) \right) d\Omega(t) \quad (\text{A.27})$$

$$= \int_{\Omega(t)} f(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \right) \right) d\Omega(t) + \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}, t)) \right) d\Omega(t) \quad (\text{A.28})$$

La première intégrale du second membre est nulle, (puisque on retrouve l'équation de conservation de la masse). On en déduit alors :

$$\frac{dI_{\rho}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) d\Omega(t) \right) = \int_{\Omega(t)} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} \right) d\Omega(t) \quad (\text{A.29})$$

B

Extrapolation de Richardson

Soit A le résultat exact et h un pas numérique (tel que le pas de temps) et $A(h)$ le résultat de la simulation avec le pas h . $A(h)$ peut être défini comme une approximation de A par

$$A(h) = A + Ch^{-\alpha} + C'h^{-\alpha+1} + C''h^{-\alpha+2} + \dots \quad (\text{B.1})$$

où C, C', C'' et α sont des constantes. Si une troncature au premier ordre est réalisée, l'expression devient :

$$A(h) = A + Ch^{-\alpha} \quad (\text{B.2})$$

Dans ce cas, trois simulations avec différents pas numériques sont suffisantes pour avoir une meilleure approximation de A . Si h est divisé par deux à chaque simulation, le calcul de la constante se fait comme suit :

$$A(h) = A + Ch^{-\alpha} \quad (\text{B.3})$$

$$A\left(\frac{h}{2}\right) = A + C\left(\frac{h}{2}\right)^{-\alpha} \quad (\text{B.4})$$

$$A\left(\frac{h}{4}\right) = A + C\left(\frac{h}{4}\right)^{-\alpha} \quad (\text{B.5})$$

et

$$\alpha = \frac{\ln\left(\frac{A\left(\frac{h}{4}\right) - A\left(\frac{h}{2}\right)}{A\left(\frac{h}{2}\right) - A(h)}\right)}{\ln(2)} \quad (\text{B.6})$$

$$A = \frac{A\left(\frac{h}{2}\right) - 2^\alpha A(h)}{1 - 2^\alpha} \quad (\text{B.7})$$