

No. d'ordre : 4278

**Université des Sciences et Technologies de Lille**  
**École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur**  
**Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)**

## **THÈSE de DOCTORAT**

*pour l'obtention du grade de*

**DOCTEUR**

*de*

**L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE**

**Discipline : Mécanique**

*Présentée par*

Vincent MAGNIER

**Modélisation tridimensionnelle par éléments finis enrichis pour le calcul de singularités de délaminage et à la jonction de matériaux anisotropes**

*Soutenue le 21 novembre 2008*

*devant le jury composé de*

POTIER-FERRY M.	Professeur à L'Université de Metz, <i>Président</i>
GRAVOUIL A.	H.D.R., Maître de Conférences, INSA, Lyon, <i>Rapporteur</i>
MARIGO J.-J.	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris, <i>Rapporteur</i>
BRIEU M.	Professeur à l'École Centrale de Lille, <i>Examineur</i>
COOREVITS P.	Professeur à l'Université de Picardie Jules Verne, <i>Examineur</i>
PALUCH B.	Ingénieur à l'ONERA de Lille, <i>Examineur</i>
DEGALLAIX-MOREUIL S.	Professeur, École Centrale, Lille, <i>Co-Directeur de thèse</i>
DE SAXCÉ G.	Professeur, Université de Lille I, Lille, <i>Directeur de thèse</i>

## Remerciements

*Ce travail a été effectuée au Laboratoire de Mécanique de Lille.*

*En premier lieu, je souhaite remercier Géry de Saxcé et Suzanne Degallaix pour m'avoir dirigé et pour leurs conseils, nos discussions et la confiance qu'il m'ont témoignée tout au long de cette étude.*

*Je remercie chaleureusement les directeurs successifs du LML, à savoir Messieurs Michel Stanislas, Isam Shahrour et Guy Caignaert, de m'avoir accueilli et offert des conditions de travail appréciables. J'exprime également ma reconnaissance à l'égard du ministère de la Recherche pour avoir financé ce travail via une bourse MENRT.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Messieurs Jean-Jacques Marigo et Anthony Gravouil qui m'ont fait l'honneur d'accepter la lourde tâche d'être rapporteurs de ce mémoire. Je souhaite également manifester ma reconnaissance à Monsieur Michel Potier-Ferry qui a accepté de présider ce jury ainsi qu'à Monsieur Patrice Coorevits qui a participé à l'évaluation de ce travail. J'exprime également toute ma gratitude à Messieurs Bernard Paluch et Mathias Brieu pour avoir accepté d'être examinateurs et pour les heures précieuses de discussion qu'ils m'ont accordées.*

*Merci également à tous les collègues du laboratoire, et notamment ceux que j'ai côtoyés au quotidien : Ludo, Fabien, Vanessa, Sophie, Jean-marc, Callum, Julianna, Simon, Pauline, Sarah, Thomas, Laurence, Paul, Pierre, Ahmed, Anne-lise, Slava, Bacet, Toufik, Djimédo, Éric, Malek, Laurent, Marie-Christine, Nathalie, Anne-Marie...*

*Enfin, ces dernières lignes sont destinées à ma famille, tout d'abord je voudrais remercier Pierre qui a pris de son temps pour avoir relu mes "fotes" d'orthographe. Ensuite, je remercie mes parents et mon frère de m'avoir épaulé tout au long de ma scolarité. Enfin je pense plus spécialement à Claude qui m'a encouragé pendant ces dernières années.*



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	vii
<hr/>	
<b>Nomenclature</b>	xi
<hr/>	
<b>1 . Les "surcontraintes"</b>	1
<hr/>	
1.1 <i>Position du problème . . . . .</i>	2
1.2 <i>Le principe mixte d'Hellinger-Reissner . . . . .</i>	4
1.3 <i>Décomposition du problème en parties plane, transverse et normale. . . . .</i>	8
1.4 <i>Équations d'équilibre . . . . .</i>	10
1.5 <i>Loi de comportement . . . . .</i>	13
1.6 <i>Équations de compatibilité . . . . .</i>	14
1.7 <i>Solutions Singulières de S.S. Wang. . . . .</i>	17
1.8 <i>Les conditions aux limites . . . . .</i>	20

1.9	<i>Méthode de résolution du problème aux valeurs propres.</i>	23
1.10	<i>Conclusion</i>	24

---

<b>2 . Validation du code de surcontraintes</b>	<b>25</b>
---	-----------

---

2.1	<i>Bi-matériaux isotropes.</i>	26
2.2	<i>Tri-matériaux isotropes</i>	32
2.3	<i>Bi-matériaux isotrope/orthotrope</i>	34
2.4	<i>Bi-matériaux anisotropes.</i>	38
2.5	<i>Tri-matériaux anisotropes</i>	40
2.6	<i>Bi-matériaux isotropes avec condition de frottement</i>	42
2.7	<i>Bi-matériaux anisotropes avec conditions de continuité ou de frottement</i>	44
2.8	<i>Entaille dans un matériau avec différentes conditions imposées sur les lèvres</i>	49
2.9	<i>Bord droit d'un bi-matériaux orthotropes</i>	51
2.10	<i>Problème d'un rivet dans un bi-couches</i>	53
2.11	<i>Conclusion</i>	56

---

<b>3 . Les éléments finis enrichis</b>	<b>57</b>
--	-----------

---

3.1	<i>Position du problème</i>	58
3.2	<i>Différents modèles d'éléments finis.</i>	60
3.3	<i>Éléments Métris de déplacement régulier et singulier</i>	67
3.4	<i>Éléments de déplacement pur régulier et singulier</i>	76

3.5	<i>Quelques mots sur le schéma d'intégration</i> . . . . .	79
3.6	<i>Conclusion</i> . . . . .	88
<hr/>		
<b>4</b>	<b>Validation des approches par éléments finis enrichis</b>	<b>89</b>
<hr/>		
4.1	<i>Matériau homogène orthotrope fissuré soumis à traction</i> . . . . .	90
4.2	<i>Délaminage d'un bi-matériaux homogènes isotropes soumis à traction.</i> . . . .	97
4.3	<i>Bord libre d'un bi-matériaux homogènes isotropes soumis à traction</i> . . . . .	101
4.4	<i>Délaminage d'un bi-matériaux orthotropes soumis à traction</i> . . . . .	104
4.5	<i>Délaminage d'un bi-couches anisotropes fissuré soumis à traction</i> . . . . .	109
4.6	<i>Conclusion</i> . . . . .	113
<b>Conclusion générale &amp; Perspectives</b>		<b>115</b>
<hr/>		
<b>Annexe A</b>		<b>119</b>
<hr/>		
<b>Annexe B</b>		<b>125</b>
<hr/>		
4.7	<i>Extrapolation des déplacements</i> . . . . .	125
4.8	<i>M-Intégrale</i> . . . . .	126
<b>Bibliographie</b>		<b>129</b>
<hr/>		





# Introduction générale

Un composite est un assemblage d'au moins deux matériaux non miscibles mais ayant une forte capacité d'adhésion. Cette association lui permet de posséder des propriétés que les éléments seuls ne possèdent pas et d'améliorer ainsi la qualité du composant face à une certaine utilisation où sont requises, par exemple, la légèreté, la rigidité à l'effort ou une bonne tenue à la corrosion.

Les composites sont largement présents dans la nature, par exemple les végétaux. Parmi ceux élaborés par l'homme, on peut citer :

- *le torchis*, composé d'une matrice plastique (terre) et de renforts (fibres végétales) ; il était le matériau de construction des habitations dès le néolithique, utilisé notamment pour ses propriétés d'isolation thermique et de coût ;
- *les arcs mongols* (2000 ans av. J.-C.) sont formés de plusieurs éléments étroitement associés avec une âme en bois contrecollée de tendons au dos et de cornes sur leur face interne. En raison de la souplesse de ces matériaux, les branches recourbées, légères et courtes, emmagasinent beaucoup d'énergie lorsque l'arc est bandé ;
- *les sabres japonais traditionnels* sont-eux aussi des exemples de matériaux composites très anciens. Les forgerons nippons procédaient au pliage et au martèlement du métal jusqu'à obtenir une sorte de pâte feuilletée pouvant être composée de plus de 4000 couches. Le procédé de fabrication était utilisé pour maîtriser la teneur en carbone et pour donner à l'acier une parfaite homogénéité tout en conférant à la lame ses propriétés de résistance et de souplesse.

De nos jours, les composites trouvent leurs principales applications dans les matériels de transport aérien (civil et militaire), maritime et ferroviaire, le bâtiment, l'aérospatial ainsi que les sports et loisirs, notamment grâce à leur bonne tenue mécanique, comparable aux matériaux homogènes comme l'acier, et leur faible masse volumique. Dans ces domaines, les composites stratifiés (ou multicouches), composés d'empilement de composites unidirectionnels, occupent une place importante en raison de leur bonne tenue mécanique et de leur facilité de conception. Néanmoins, cet empilement de couches présente des discontinuités mécaniques entre deux couches successives, dû à la transition des propriétés mécaniques. Ces discontinuités engendrent un état tridimensionnel local de contrainte pouvant être singulier dans le sens où ces contraintes tendent localement vers l'infini comme le prévoit la mécanique élastique linéaire de la rupture. Un des problèmes majeurs aujourd'hui est celui du bord libre, où les contraintes sont très localisées. Une autre classe de discontinuités, appelées discontinuités géométriques (comme les trous, les coins, les fissures, etc.), peuvent elles-aussi conduire à des concentrations de contraintes tridimensionnelles pouvant être singulières. Ces discontinuités sont souvent sources d'amorçage de fissures dans les structures. La figure (1) présente quelques exemples de structures pouvant présenter ces deux types de discontinuités. Les contraintes localisées seront appelées "surcontraintes" dans la suite du document.

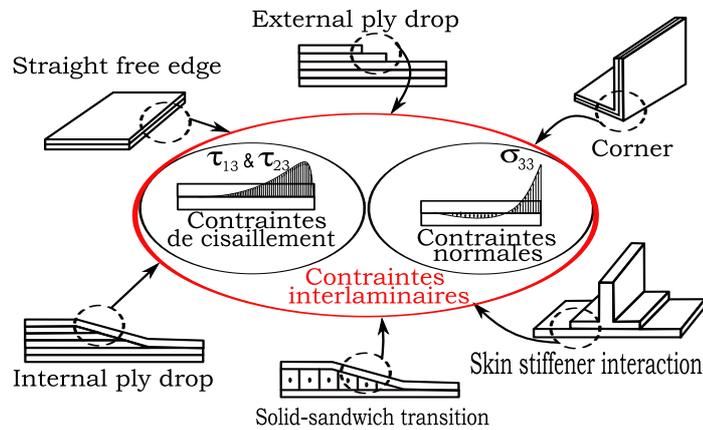


FIG. 1 – Quelques exemples propices aux contraintes interlaminaires

Ces surcontraintes ne peuvent être prédites par la théorie classique des stratifiés [Don62], basée sur l'hypothèse d'un état plan de contrainte, car elles apparaissent également dans la direction nor-

male au plan de l'interface. Ces dernières sont dites "interlaminaires" et peuvent être à l'origine du délaminage (décollement de deux couches successives). Leur première analyse a été faite par Pipes et Pagano [Pip70] au moyen d'un modèle de couche limite. De par sa complexité, ce type de problème reste aujourd'hui l'un des défis à la conception des structures composites stratifiées. Sa compréhension et sa maîtrise suscitent toujours un vif intérêt chez les industriels et les universitaires.

Le problème de surcontraintes ne peut être traité en pratique par des méthodes numériques telles que celles des éléments finis car il échappe largement au traitement numérique par éléments finis réguliers tridimensionnels.

La présente étude, fruit d'une collaboration entre le Laboratoire de Mécanique de Lille et l'ONERA, a pour objet le développement d'une méthode numérique susceptible de mieux appréhender les problèmes de structure contenant des discontinuités matérielles et/ou géométriques, et donc les surcontraintes.

Pour ce faire, nous proposons de déterminer précisément les champs mécaniques en nous basant sur une extension de la mécanique élastique linéaire de la rupture (ou mécanique de la rupture fragile) aux cas des multi-matériaux anisotropes. Cette théorie prévoit que quels que soient le corps  $\Omega$  considéré contenant une ligne singulière alors le champ des contraintes solution du problème d'élasticité linéaire posé sur ce corps s'écrit en fond d'entaille (voir (4.6)) :

$$\sigma_{ij} \sim r^\alpha \mathbf{K}_\alpha \text{ lorsque } r \text{ est voisin de } 0$$

||  $r$  étant la distance d'un point appartenant au matériau au front de fissure.  
 ||  $\mathbf{K}_\alpha$  sont les facteurs d'intensité des contraintes.  
 ||  $\alpha$ , appelé "exposant de singularité", est de partie réelle négative.

Il est à noter que l'exposant de singularité  $\alpha$  ne dépend que de la géométrie de l'entaille et des propriétés des matériaux avoisinants ; il est en particulier indépendant de la géométrie du corps et du chargement. En revanche les fonctions  $\mathbf{K}_\alpha$  dépendent de la géométrie du corps et du chargement appliqué.

Le premier chapitre de ce travail aura pour objectif de présenter une méthode permettant d'extraire l'exposant de singularité  $\alpha$ . Nous développerons une méthode semi-analytique qui s'appuie sur

une étude asymptotique d'un voisinage de ligne singulière couvrant une large gamme de situations rencontrées en pratique. La valeur de  $\alpha$  sera obtenue par la résolution d'un problème aux valeurs propres dont le système traduit l'expression des conditions aux limites.

Le deuxième chapitre validera l'approche du premier chapitre sur divers exemples trouvés dans la littérature.

Les facteurs d'intensité des contraintes  $K_\alpha$  résulteront d'un problème par éléments finis enrichis. La méthode sera détaillée dans le troisième chapitre de cette thèse. Deux formulations d'éléments finis seront développées : la première est celle en déplacement pur et la seconde est une formulation hybride, nommée "Métis", proposée par Nguyen [Ngu78]. Toujours dans cette partie, une attention particulière sera portée à quelques schémas numériques pour des intégrations singulières. Enfin, le quatrième chapitre validera les approches décrites dans le troisième chapitre en s'appuyant sur divers exemples numériques issus de la littérature.

# Nomenclature

## Principales notations

Notations	Signification
$a, \mathbf{a}, \underline{\mathbf{a}}, \underline{\underline{\mathbf{a}}}$	Scalaire, vecteur, matrice, tenseur du quatrième ordre
$V$	Espace des déplacements Cinématiquement Admissibles (C.A)
$\Sigma$	Espace des champs des contraintes Statiquement Admissibles (S.A)
$\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}}$	Champs des déplacements
$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}}$	Champs des contraintes
$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$	Champs des déformations
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	Espace des matrices carrées à valeurs réelles de dimension n
$\Omega$	Domaine de la structure
$\partial\Omega$	Contour du domaine $\Omega$
$\partial_{\mathbf{M}^*}, \frac{\partial *}{\partial \mathbf{M}}$	Gradient de la fonction *
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$	Tenseur de souplesse
$\underline{\underline{\mathbf{C}}}$	Tenseur de rigidité
$\mathbf{f}$	Forces volumiques
$\Gamma_f$	Ligne singulière

## Principales notations

$div, div_m$	Divergence volumique, surfacique
$rot$	Rotationnel
$\Delta$	Laplacien
$\phi, \psi$	Fonctions complexes d'Airy et de Prandtl
$\alpha$	Exposant de singularité des surcontraintes
$K_\alpha$	Facteur d'intensité des contraintes
$_{-}^{\top}$	Opérateur de transposition
$N(x)$	Fonction de forme
$\mathbf{h}_R, \mathbf{h}_S$	Vecteurs des paramètres de contraintes régulières et singulières
$\mathbf{q}$	Vecteur des déplacements nodaux
$\  * \ $	Norme euclidienne du second ordre d'un tenseur *
$Sym$	Opérateur de symétrisation pour les tenseurs
$Tr$	Opérateur de trace d'un tenseur
$Diag(a_1, a_2, a_3)$	Matrice ayant sur la diagonale les valeurs $a_1$ puis $a_2$ puis $a_3$
$[[a]]$	Valeur du saut de la fonction $a$ au point de discontinuité
$det(\mathbf{a})$	Déterminant de $\mathbf{a}$

# Chapitre 1

## Les "surcontraintes"

### Sommaire

---

1.1	Position du problème . . . . .	2
1.2	Le principe mixte d'Hellinger-Reissner . . . . .	4
1.3	Décomposition du problème en parties plane, transverse et normale . . . . .	8
1.4	Équations d'équilibre . . . . .	10
1.5	Loi de comportement . . . . .	13
1.6	Équations de compatibilité . . . . .	14
1.7	Solutions Singulières de S.S. Wang . . . . .	17
1.8	Les conditions aux limites . . . . .	20
1.9	Méthode de résolution du problème aux valeurs propres . . . . .	23
1.10	Conclusion . . . . .	24

---

## 1.1 Position du problème

Au voisinage de discontinuités mécaniques et/ou géométriques, l'état de contrainte est tridimensionnel et ne peut être prédit par la théorie classique des stratifiés [Don62]. L'objet de ce chapitre est donc d'élaborer une approche destinée à évaluer l'état de contrainte et de déplacement singuliers à la jonction d'un multi-matériaux.

L'une des premières tentatives pour résoudre le problème de bord libre en élasticité anisotrope fut proposée par Pipes et Pagano [Pip70]. Ainsi, par une méthode de différences finies, ces auteurs ont pu mettre en évidence l'éventualité d'une singularité de contrainte en résolvant un problème elliptique aux dérivées partielles. Dans la continuité des méthodes purement numériques, Isakson [Isa71], Rybicki [Ryb71] et d'autres se sont intéressés à la même problématique par le biais de la méthode des éléments finis (FEM).

Cependant, toutes les méthodes précédemment citées nécessitent un maillage local fin, ce qui engendre un coût numérique important.

Pour sa part, Pageau [Pag94] propose de modifier la formulation de la méthode des éléments finis en y incorporant de nouvelles fonctions de forme de sorte que, avec un maillage plus lâche, cette méthode permette de caractériser le comportement singulier à la jonction des multi-matériaux. Plus récemment, grâce à la méthode des éléments de frontière (BEM), Davi [Dav96], Prukvilailert [Pru05] et d'autres ont obtenu la valeur de l'exposant de singularité  $\alpha$ . Quant à Lindemann [Lin00] et Mittelstedt [Mit06], en utilisant une méthode hybride entre la méthode des éléments de frontière et la méthode des éléments finis, appelée "méthode des éléments finis de frontière" (BFEM), ils résolvent des problèmes complètement tridimensionnels.

Parallèlement aux méthodes purement numériques, des méthodes analytiques ont été développées. Dans ce domaine, le cas des bi-matériaux isotropes a été traité entre autres par Dempsey [Dem79], Bogy [Bog70] et Hein [Hei71], et celui des multi-matériaux isotropes par Teocaris [Teo74] et Inoue [Ino96] entre autres.

Cependant, l'extension du cas des matériaux isotropes à celui des matériaux anisotropes reste plus difficile à résoudre en raison du couplage des modes d'ouverture (Mode I), de glissement (Mode

II) et anti-plan (Mode III) (ces modes de rupture élémentaires sont illustrés sur la figure (1.1)), ce qui est dû à l'anisotropie de la structure.

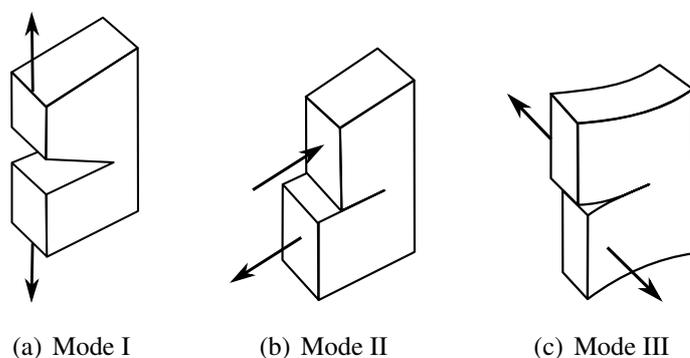


FIG. 1.1 – Les trois modes élémentaires de rupture

Ainsi pour les matériaux anisotropes, Ting [Tin81], Wang [Wan83], Delale [Del79], Chen [Che97a], Leguillon [Leg87] et d'autres ont proposé des méthodes semi-analytiques.

La méthode présentée dans ce document, initialement développée dans [Sch93], [Cre01a], [Cre01b] et [Cre02], propose un modèle tridimensionnel à partir duquel peuvent être extraits les exposants de singularité aux jonctions de différents matériaux anisotropes ainsi que les contraintes et déplacements singuliers.

Notre point de départ est le principe variationnel d'Hellinger-Reissner.

En premier lieu, nous décomposerons le problème en trois parties, respectivement plane, transverse et normale dans le repère local associé au front de fissure. Par cette décomposition, le tenseur des contraintes pour le problème plan et le problème transverse sera exprimé à partir des potentiels complexes d'Airy et de Prandtl. Grâce à la loi de comportement, que nous obtenons par le premier théorème d'Hellinger-Reissner, le problème normal sera exprimé en fonction de ces deux potentiels.

Le deuxième théorème d'Hellinger-Reissner nous conduira aux équations de l'équilibre local. Sur ces dernières, une approche asymptotique de type "couche limite", sera appliquée.

Enfin, en incluant ces deux équations dans les équations de compatibilité, nous arriverons à un problème où les seules inconnues sont les deux potentiels. Nous résoudrons alors ce problème en suivant la démarche proposée par Wang [Wan82].

Les hypothèses adoptées sont les suivantes :

- les déformations sont suffisamment petites pour que l'hypothèse des petites perturbations soit légitime (HPP) ;
- les matériaux étudiés ont un comportement élastique linéaire ;
- les propriétés mécaniques du matériau homogène équivalent à la structure fibre-matrice sont obtenues par la loi des mélanges.

Nous étudierons les états de contrainte et de déformation le long de lignes singulières, mais pas au voisinage des extrémités de celles-ci. En effet, ces points près des bords sont le siège de phénomènes complètement tridimensionnels où interviennent des phénomènes de couche limite.

## 1.2 Le principe mixte d'Hellinger-Reissner

L'objectif de cette section est de présenter un modèle permettant d'extraire les "surcontraintes" ou contraintes singulières. Ces dernières seront nécessairement localisées dans un voisinage immédiat de la ligne singulière.

Une idée est de caractériser ces contraintes singulières comme étant les solutions du modèle mixte d'Hellinger-Reissner. Cette approche apparaît initialement dans les travaux d'Hellinger [Hel14] puis est reprise plus tard par Prange [Pra16], puis par Reissner, qui lui donne sa forme définitive dans l'article [Rei50]. Nous présentons ci-dessous la méthode proposée par Reissner.

Soit  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  une base orthonormée et  $M$  un point appartenant à la structure  $\Omega$  tel que le vecteur  $\mathbf{OM}$  ait pour coordonnées vectorielles  $(x_1, x_2, x_3)^\top$ . Par la suite, les notations  $a$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\underline{\mathbf{a}}$  désigneront respectivement un scalaire, un vecteur et un tenseur d'ordre deux.

Le problème d'Hellinger-Reissner s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \text{ tel que :} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\mathbf{u}} \in V : \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \partial_M \hat{\mathbf{u}} \rangle = \{ \mathbf{f}, \hat{\mathbf{u}} \} \\ \forall \hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \in \Sigma : \langle \hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \partial_M \mathbf{u} \rangle = \langle \hat{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \end{array} \right. \quad (1.1) \\ & \left\| \begin{array}{l} \langle \underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}} \rangle = \int_{\Omega} A_{ij} B_{ji} d\Omega \text{ tel que } (\underline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}}) \in [\mathcal{M}_3(\mathbb{R})]^2, \\ \{ \underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{D}} \} = \int_{\Omega} C_i D_i d\Omega \text{ tel que } (\underline{\mathbf{C}}, \underline{\mathbf{D}}) \in (\mathbb{R}^3)^2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Il est à noter que ce principe est un problème mixte dans la mesure où  $\mathbf{u}$  et  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  sont les variables à déterminer. Nous pouvons aussi remarquer que la première équation exprime le principe des travaux virtuels et la seconde la loi de comportement pour l'ensemble de la structure. Ce modèle est exprimé dans le repère global.

Notre but, dans un premier temps, est de formuler ce problème dans le repère local lié à la ligne singulière.

Pour cela, désignons par  $\Gamma_f$ , une arête curviligne, représentant la ligne "supposée" singulière. En effet, l'existence de singularité sera prouvée *a posteriori* avec notre module de calcul car actuellement, il est impossible de prédire dans le cas tridimensionnel la localisation des singularités. Cependant, pour fixer les idées, nous privilégions les lignes situées aux discontinuités géométriques et/ou mécaniques. Nous supposons aussi, par la suite, que cette courbe est régulière, dans le sens où les points anguleux et les fortes variations de courbure seront exclus. Cette courbe  $\Gamma_f$  est décrite par une fonction  $\boldsymbol{\varphi}$  dans le repère global ( $O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ) :

$$\left\| \begin{array}{l} \boldsymbol{\varphi} : \xi^3 \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{OP} = \boldsymbol{\varphi}(\xi^3) \in \Gamma_f \subset \mathbb{R}^3 \\ \xi^3 \text{ représente l'abscisse curviligne de } \Gamma_f \\ \text{P est un point appartenant à } \Gamma_f \end{array} \right. \quad (1.2)$$

L'hypothèse de continuité et de régularité physique de la courbe  $\Gamma_f$  permet de considérer la fonction  $\boldsymbol{\varphi}$  comme étant de classe  $C^1$  au sens mathématique.

Afin d'écrire nos équations près de  $\Gamma_f$ , la construction d'un repère local (dit de Frenet) est indispensable.

Soit le repère local ( $P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) défini comme suit :

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} \quad \mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \xi^3} \left\| \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \quad (1.3)$$

La figure (1.2) illustre les deux repères (local et global) dans un bi-matériaux fissuré.

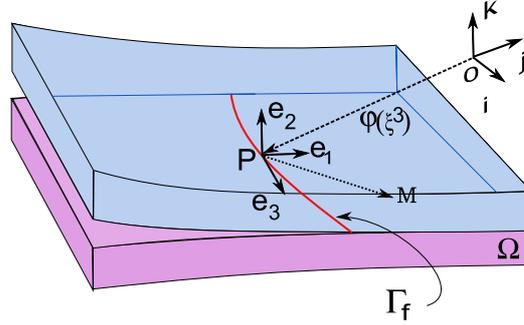


FIG. 1.2 – Repère global  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  et repère local  $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  pour une structure bi-matériaux fissurée

Nous pouvons donc décomposer tout vecteur  $\mathbf{OM}$  de la façon suivante (voir fig. (1.2)) :

$$\begin{aligned} \mathbf{OM} &= \mathbf{OP} + \mathbf{PM} = \boldsymbol{\varphi}(\xi^3) + \mathbf{m}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \\ \left\| \begin{aligned} \mathbf{m}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \xi^1 \mathbf{e}_1(\xi^3) + \xi^2 \mathbf{e}_2(\xi^3) \\ (\xi^1, \xi^2) &\text{ sont les coordonnées vectorielles dans le plan } (P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Par conséquent, l'élément d'arc  $d\mathbf{M}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= d(\mathbf{m} + \boldsymbol{\varphi}) = d\mathbf{m}' + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3} \right) d\xi^3 \\ \left\| \begin{aligned} d\mathbf{m}' &= \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^2} d\xi^2 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ceci nous permet d'adapter au repère local le gradient du principe d'Hellinger-Reissner défini dans le repère global.

Grâce à la première égalité de l'équation (1.3), l'équation (1.5) peut se mettre sous la forme :

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{m}' + (\mathbf{e}_3 \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\| + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3}) d\xi^3 \quad (1.6)$$

Par ailleurs, en réécrivant  $\mathbf{m}$  en coordonnées polaires dans le plan  $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , avec  $\mathbf{m} = \|\mathbf{m}\| \mathbf{n}(\theta, \xi^3)$  où  $\theta$  désigne l'angle polaire ( $\theta = \text{Arctan} \left( \frac{\mathbf{m}^\top \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{m}^\top \cdot \mathbf{e}_1} \right)$ ) et  $\mathbf{n}(\theta, \xi^3)$  un vecteur unitaire engendré dans  $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , il s'ensuit que la dérivée de  $\mathbf{m}(\theta, \xi^3)$  par rapport à  $\xi^3$  est forcément portée par  $\mathbf{e}_3$  :

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3} = \|\mathbf{m}\| \mu(\theta, \xi^3) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\| \mathbf{e}_3 \quad (1.7)$$

Ceci fait apparaître  $\mu(\theta, \xi^3)$  que nous pouvons interpréter comme étant géométriquement la courbure de  $\Gamma_f$ .

Si bien que l'élément d'arc  $d\mathbf{M}$  s'écrit finalement :

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{m}' + [1 + \|\mathbf{m}\| \mu(\theta, \xi^3)] \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\| \mathbf{e}_3 d\xi^3 \quad (1.8)$$

Le produit scalaire du gradient du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  avec l'élément d'arc (il en sera de même pour  $\widehat{\mathbf{u}}$ ) étant initialement équivalent à :

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{M}} \right)^\top \cdot d\mathbf{M} = \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{m}} \right)^\top \cdot d\mathbf{m}' + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^3} \cdot d\xi^3 \quad (1.9)$$

En combinant (1.8) et (1.9) :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{M}} \right)^\top \cdot d\mathbf{M} &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{m}} \right)^\top \cdot d\mathbf{m}' + \beta \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^3} \cdot d\xi^3 \\ \left\| \beta &= (1 + \|\mathbf{m}\| \mu(\theta, \xi^3)) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\| \right. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Désignons par  $\underline{\mathbf{G}}$ , l'opérateur qui projette les coordonnées d'un point dans le plan ( $P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ) :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{G}} &= \underline{\mathbf{I}}_3 - \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top \\ \left\| \underline{\mathbf{I}}_3 \right. &\text{ symbolise la matrice identité d'ordre 3} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Il est à noter que le supplémentaire de  $\underline{\mathbf{G}}$  est  $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top$ .

Il est aisé de voir que :

$$\underline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{OM} = \mathbf{m}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \quad (1.12)$$

En introduisant la décomposition de  $d\mathbf{M}$  en les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{G}} \cdot d\mathbf{M} &= d\mathbf{m}' \\ \mathbf{e}_3^\top \cdot d\mathbf{M} &= \beta d\xi^3 \end{aligned} \quad (1.13)$$

et en remplaçant  $d\mathbf{m}'$  et  $d\xi^3$  dans (1.10), il s'ensuit que le gradient du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{m}} \cdot \underline{\mathbf{G}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^3} \cdot \mathbf{e}_3^\top \beta^{-1}} \quad (1.14)$$

Finalement, le principe d'Hellinger-Reissner exprimé dans le repère de Frenet ( $P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \text{ tel que :} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{\mathbf{u}} \in V : \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}, (\partial_m \hat{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{G}} \rangle + \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \beta^{-1}(\partial_{\xi_3} \hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_3^\top \rangle = \{\mathbf{f}, \hat{\mathbf{u}}\} \\ \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \Sigma : \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}, (\partial_m \mathbf{u}) \cdot \underline{\mathbf{G}} \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \beta^{-1}(\partial_{\xi_3} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_3^\top \rangle = \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \end{array} \right. \quad (1.15) \\ & \left\| \begin{array}{l} \partial_m \mathbf{u} \text{ désigne } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Afin d'extraire les contraintes singulières, l'idée est de réécrire le problème mixte (1.15) en faisant tendre  $\|\mathbf{m}\|$  vers zéro. Cette approche est comparable à celle de couche limite que l'on trouve par exemple en théorie des coques.

### 1.3 Décomposition du problème en parties plane, transverse et normale

Afin de simplifier l'expression du problème (1.15), on cherche à décomposer le gradient du déplacement  $\partial_m \mathbf{u}$  (1.14) dans les espaces plan, transverse et normal :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} &= \mathbf{I}_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \cdot \mathbf{I}_3 = (\underline{\mathbf{G}} + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \cdot \underline{\mathbf{G}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_3} \cdot \mathbf{e}_3^\top \beta^{-1} \right) \cdot (\underline{\mathbf{G}} + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top) \\ &= \left[ \underline{\mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \cdot \underline{\mathbf{G}} \right] \\ &+ \left[ \underline{\mathbf{G}} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_3} \cdot \mathbf{e}_3^\top \beta^{-1} \right) \cdot (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top) + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} \cdot \underline{\mathbf{G}} \right) \cdot \underline{\mathbf{G}} \right] \\ &+ \left[ (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_3} \cdot \mathbf{e}_3^\top \beta^{-1} \right) \cdot (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top) \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

- La partie plane correspond à  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^\top + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^\top + 2\text{Sym}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^\top)$
- La partie de cisaillement transverse correspond à  $2\text{Sym}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3^\top) + 2\text{Sym}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3^\top)$
- La partie normale correspond à  $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top$

Si de plus, le champ des déplacements est découplé en une partie tangente et une partie normale :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_t + u_3 \mathbf{e}_3 \\ \left\| \begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \underline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{u} \\ u_3 &= \mathbf{e}_3^\top \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.17)$$

nous arrivons finalement à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{M}} &= \left[ \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{m}} \right] \\ &+ \left[ \underline{\mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^3} \cdot \mathbf{e}_3^\top (1 + \|\mathbf{m}\| \mu)^{-1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} + \mathbf{e}_3 \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{m}} \cdot \underline{\mathbf{G}} \right] \\ &+ \left[ (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^3} \cdot \mathbf{e}_3^\top (1 + \|\mathbf{m}\| \mu)^{-1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} \right] \end{aligned} \quad (1.18)$$

Les parties symétriques des premier, deuxième et troisième crochets de l'équation (1.18) représentent respectivement les déformations plane  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$ , transverse  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  et normale  $\varepsilon_N$ .

On pose alors :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T & \boldsymbol{\varepsilon}_S \\ \boldsymbol{\varepsilon}_S^\top & \varepsilon_N \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

En se rapprochant de l'écriture indicielle contractée (introduite par Voight), les composantes de  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  et  $\varepsilon_N$  prennent leurs valeurs respectivement dans l'ensemble  $\{1;2;6\}$ , dans l'ensemble  $\{4;5\}$  et dans le singleton  $\{3\}$ .

Effectuons la même décomposition du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\sigma}} &= \begin{pmatrix} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_T & \boldsymbol{\sigma}_S \\ \boldsymbol{\sigma}_S^\top & \sigma_N \end{pmatrix} \\ \left\| \begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\sigma}}_T &= \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{G}} \\ \boldsymbol{\sigma}_S &= \underline{\mathbf{G}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_3 \\ \sigma_N &= \mathbf{e}_3^\top \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Finalement, en reprenant la décomposition des contraintes définie dans (1.20) et la forme finale de  $\partial_{\mathbf{m}}\mathbf{u}$  définie en (1.18), le problème d'Hellinger-Reissner (1.1) se réécrit :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \text{ tel que :} \\ \left\{ \begin{array}{l} \forall \widehat{\mathbf{u}} \in V \quad \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}_T, \partial_{\mathbf{m}}\widehat{\mathbf{u}}_t \rangle + \{ \boldsymbol{\sigma}_S, \partial_{\mathbf{m}}^\top \widehat{\mathbf{u}}_3 + \underline{\mathbf{G}} \cdot \partial_{\xi^3} \widehat{\mathbf{u}} (1 + \|\mathbf{m}\|\mu)^{-1} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} \} \\ \quad + \sigma_N \cdot (1 + \|\mathbf{m}\|\mu)^{-1} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} \mathbf{e}_3^\top \cdot \partial_{\xi^3} \widehat{\mathbf{u}} = \{ \mathbf{f}, \widehat{\mathbf{u}} \} \\ \forall \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \in \Sigma \quad \langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_T, \partial_{\mathbf{m}}\mathbf{u}_t \rangle + \{ \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_S, \partial_{\mathbf{m}}^\top \mathbf{u}_3 + \underline{\mathbf{G}} \cdot \partial_{\xi^3} \mathbf{u} (1 + \|\mathbf{m}\|\mu)^{-1} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} \} \\ \quad + \widehat{\sigma}_N \cdot (1 + \|\mathbf{m}\|\mu)^{-1} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\|^{-1} \mathbf{e}_3^\top \cdot \partial_{\xi^3} \mathbf{u} = \langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (1.21)$$

## 1.4 Équations d'équilibre

En se fixant  $\widehat{\mathbf{u}}$  dans le problème mixte (1.21), et par un calcul utilisant le théorème de la divergence, nous parvenons au premier théorème d'Hellinger-Reissner où les égalités suivantes sont obtenues :

### Équations d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\mathbf{m}} [(1 + \|\mathbf{m}\|\mu) \underline{\boldsymbol{\sigma}}_T] + \frac{\partial}{\partial s} [(\boldsymbol{\sigma}_S + \sigma_N \mathbf{e}_3) \cdot \underline{\mathbf{G}}] = -(1 + \|\mathbf{m}\|\mu) \mathbf{f}_t \\ \operatorname{div}_{\mathbf{m}} [(1 + \|\mathbf{m}\|\mu) \boldsymbol{\sigma}_S] + \frac{\partial}{\partial s} [(\boldsymbol{\sigma}_S + \sigma_N \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3] = -(1 + \|\mathbf{m}\|\mu) f_3 \end{array} \right. \quad (1.22)$$

$$\left\| \begin{array}{l} ds = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3} \right\| d\xi^3 \\ \operatorname{div}_{\mathbf{m}} \text{ représente la divergence surfacique dans le plan } (P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{f} = \mathbf{f}_t + f_3 \mathbf{e}_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}_t = \underline{\mathbf{G}} \cdot \mathbf{f} \\ f_3 = \mathbf{e}_3^\top \cdot \mathbf{f} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Comme les équations ne dépendent pas explicitement de  $\mathbf{m}$ , il est difficile d'effectuer un passage à la limite quand  $\|\mathbf{m}\|$  tend vers 0.

Pour palier cette difficulté, et en s'inspirant des méthodes classiques de développement asymptotique, nous faisons apparaître l'homothétie de rapport  $\zeta$  d'un disque de diamètre  $\mathbf{m}$  et de centre P. Ce changement de variable dans le plan  $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  peut s'interpréter comme un zoom d'une poutre

curviligne au voisinage de la ligne singulière.

Définissons l'application  $\mathbf{C}^\zeta$  de cette homothétie :

$$\mathbf{C}^\zeta = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top + \zeta (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^\top + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^\top) \quad (1.23)$$

Donc l'homothétie de  $\mathbf{M}$ , désigné par  $\mathbf{M}^\zeta$ , est donné par :

$$\forall \mathbf{M} = (\mathbf{m}, \xi^3) \mapsto \mathbf{M}^\zeta = \mathbf{M} \circ \mathbf{C}^\zeta = (\zeta \mathbf{m}, \xi^3) \quad (1.24)$$

Il en est de même pour toute fonction  $f(\mathbf{M})$  à laquelle on associe la fonction  $f^\zeta(\mathbf{M}^\zeta)$  :

$$\forall f(\mathbf{M}) = f(\mathbf{m}, \xi^3) \mapsto f^\zeta = f \circ \mathbf{C}^\zeta = f^\zeta(\zeta \mathbf{m}, \xi^3) \quad (1.25)$$

Les contraintes s'écrivent alors :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} \circ \mathbf{C}^\zeta(\mathbf{M}) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^\zeta(\zeta \mathbf{m}, \xi^3) \quad (1.26)$$

On supposera que ces contraintes, notées  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^0$ , ont un comportement asymptotique dominant quand  $\zeta$  tend vers 0 et que nous pouvons les décomposer comme suit :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^\zeta(\zeta \mathbf{m}, \xi^3) = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^0(\zeta \mathbf{m}, \xi^3) + \underline{\boldsymbol{\sigma}}^1(\zeta \mathbf{m}, \xi^3) \quad (1.27)$$

$$\left\| \text{tel que } \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^1(\zeta \mathbf{m}, \xi^3)}{\underline{\boldsymbol{\sigma}}^0(\zeta \mathbf{m}, \xi^3)} = \mathbf{0} \right.$$

Il est à noter que cette homothétie implique un changement du gradient et de la divergence pour tout type de tenseur noté "\*" :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^*}{\partial \mathbf{M}^\zeta} = \frac{\partial^*}{\partial \mathbf{M}} \cdot [\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^\top + \zeta^{-1} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^\top + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^\top)] \\ \text{div}_{\mathbf{M}^\zeta}^* = \text{Tr} \left( \frac{\partial^*}{\partial \mathbf{M}^\zeta} \right) \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Les équations (1.22) deviennent :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{m}} [(1 + \zeta \|\mathbf{m}\| \mu) \underline{\boldsymbol{\sigma}}_T^0] \zeta^{-1} + \frac{\partial}{\partial s} [(\boldsymbol{\sigma}_S^0 + \boldsymbol{\sigma}_N^0 \mathbf{e}_3) \cdot \underline{\mathbf{G}}] = -(1 + \zeta \|\mathbf{m}\| \mu) \mathbf{f}_t \\ \operatorname{div}_{\mathbf{m}} [(1 + \zeta \|\mathbf{m}\| \mu) \boldsymbol{\sigma}_S^0] \zeta^{-1} + \frac{\partial}{\partial s} [(\boldsymbol{\sigma}_S^0 + \boldsymbol{\sigma}_N^0 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3] = -(1 + \zeta \|\mathbf{m}\| \mu) f_3 \end{cases} \quad (1.29)$$

Dans les problèmes que nous traitons, les courbures sont régulières et ne présentent pas de fortes variations et, par conséquent,  $\mu$  et  $\|\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \xi^3}\|$  ont des valeurs finies.

Donc en multipliant les équations (1.29) par  $\zeta$  et en faisant tendre ce paramètre vers zéro, les équations d'équilibre prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{m}} \boldsymbol{\sigma}_T^0 = -\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \mathbf{f}_t(\zeta \mathbf{m}, \xi^3) \\ \operatorname{div}_{\mathbf{m}} \boldsymbol{\sigma}_S^0 = -\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta f_3(\zeta \mathbf{m}, \xi^3) \end{cases} \quad (1.30)$$

Vu le caractère singulier du problème, les forces extérieures  $\mathbf{f}$  peuvent être considérées comme négligeables lorsque  $\zeta$  tend vers zéro, donnant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{m}} \boldsymbol{\sigma}_T^0 = 0 \\ \operatorname{div}_{\mathbf{m}} \boldsymbol{\sigma}_S^0 = 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

En remarquant que la structure du problème est désormais analogue à celle du problème des poutres anisotropes de Lekhnitskii [Lek63], nous allons nous inspirer de la démarche proposée par celui-ci. Afin de satisfaire les conditions d'équilibre interne (1.31), introduisons les potentiels complexes d'Airy  $\phi(\zeta \mathbf{m}, \xi^3)$  et de Prandtl  $\psi(\zeta \mathbf{m}, \xi^3)$  tels que :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{(\partial \xi^2)^2} & -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi^2} \\ -\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} & \frac{\partial^2 \phi}{(\partial \xi^1)^2} & -\frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi^2} & -\frac{\partial \psi}{\partial \xi^1} & \sigma_N \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

L'introduction des potentiels de contrainte permet de diminuer le nombre des fonctions inconnues. En effet, on ne recherchera plus que les deux potentiels  $\phi(\zeta \mathbf{m}, \xi^3)$  et  $\psi(\zeta \mathbf{m}, \xi^3)$  au lieu des contraintes  $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0, \sigma_4^0, \sigma_5^0$  et  $\sigma_6^0$ .

## 1.5 Loi de comportement

Les contraintes sont liées aux déformations par la loi de Hooke :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \quad (1.33)$$

Ou encore compte tenu de la décomposition en parties plane, transverse et normale (1.16) (en sommant sur les indices muets  $t'$  et  $s'$ ) :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = S_{tt'} \sigma_{t'} + S_{ts'} \sigma_{s'} + S_{tn} \sigma_n \\ \varepsilon_s = S_{st'} \sigma_{t'} + S_{ss'} \sigma_{s'} + S_{sn} \sigma_n \\ \varepsilon_n = S_{nt'} \sigma_{t'} + S_{ns'} \sigma_{s'} + S_{nn} \sigma_n \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\left\| \begin{array}{l} t, t' \in \{1; 2; 6\} \\ s, s' \in \{4; 5\} \\ n \in \{3\} \end{array} \right.$$

En reprenant l'idée de Lekhnitskii [Lek63],  $\sigma_n$  peut être éliminée. Pour cela, nous allons l'exprimer en fonction des autres composantes en utilisant la troisième équation de (1.34) :

$$\sigma_n = \frac{\varepsilon_n - (S_{nt'} \sigma_{t'} + S_{ns'} \sigma_{s'})}{S_{nn}} \quad (1.35)$$

Les autres équations deviennent :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \widetilde{S}_{tt'} \sigma_{t'} + \widetilde{S}_{ts'} \sigma_{s'} + \frac{S_{tn}}{S_{nn}} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s = \widetilde{S}_{st'} \sigma_{t'} + \widetilde{S}_{ss'} \sigma_{s'} + \frac{S_{sn}}{S_{nn}} \varepsilon_n \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\text{avec } \left\| \begin{array}{l} \widetilde{S}_{tt'} = S_{tt'} - \frac{S_{tn} S_{nt'}}{S_{nn}} \quad , \quad \widetilde{S}_{st'} = S_{st'} - \frac{S_{sn} S_{nt'}}{S_{nn}} \\ \widetilde{S}_{ts'} = S_{ts'} - \frac{S_{tn} S_{ns'}}{S_{nn}} \quad , \quad \widetilde{S}_{ss'} = S_{ss'} - \frac{S_{sn} S_{ns'}}{S_{nn}} \end{array} \right.$$

Pour de nombreux auteurs, il est d'usage de qualifier ces relations comme étant *la loi de comportement réduite*. Les coefficients  $\widetilde{S}_{tt'}$ ,  $\widetilde{S}_{st'}$ ,  $\widetilde{S}_{ts'}$ ,  $\widetilde{S}_{ss'}$  sont appelés coefficients de souplesse réduits.

## 1.6 Équations de compatibilité

Le tenseur des déformations dérive du champ des déplacements :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\partial_{\mathbf{M}}\mathbf{u} + \partial_{\mathbf{M}}^{\top}\mathbf{u}) = \text{Sym}(\partial_{\mathbf{M}}\mathbf{u}) \quad (1.37)$$

Dans le cas d'un domaine simplement connexe, les équations de compatibilité de Saint-Venant (1864),  $\text{rot}_{\mathbf{M}}(\text{rot}_{\mathbf{M}}^{\top}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \mathbf{0}$ , sont nécessaires et suffisantes pour prouver l'existence d'un champ de vecteurs  $\mathbf{u}$  vérifiant la relation (1.37) ( $\text{rot}_{\mathbf{M}}$  désigne le rotationnel tridimensionnel).

À partir de celles-ci, déterminons les formes que doit vérifier le champ des déformations.

En réécrivant les équations de compatibilité avec les notations tensorielles, nous obtenons :

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} - \varepsilon_{im,kj} - \varepsilon_{jk,im} = 0 \quad i, j, k, m \in \{1; 2; 3\} \quad (1.38)$$

De ces 81 équations, seules 6 sont indépendantes. Elles peuvent être obtenues en supposant par exemple que  $k$  et  $m$  sont égaux :

$$\begin{aligned} 2\text{Sym}(\partial_{\mathbf{M}}[\text{div}_{\mathbf{M}}^{\top}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}]) - \Delta_{\mathbf{M}}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \partial_{\mathbf{M}}[\partial_{\mathbf{M}}^{\top}\text{Tr}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}})] &= \mathbf{0} \\ \parallel \Delta_{\mathbf{M}} \text{ désigne le Laplacien tridimensionnel} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Par ailleurs, en réécrivant cette condition d'intégrabilité avec les changements de gradient et de la divergence décrits en (1.28), et en supposant que les déformations, notées  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ , possèdent elles-aussi un équivalent asymptotique lorsque le paramètre d'homothétie  $\zeta$  tend vers 0, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2\text{Sym}[\partial_{\mathbf{m}}\text{div}_{\mathbf{m}}^{\top}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \cdot \underline{\mathbf{G}}) \cdot \underline{\mathbf{G}}] - \text{Tr}[\partial_{\mathbf{m}}\partial_{\mathbf{m}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \cdot \underline{\mathbf{G}}) \cdot \underline{\mathbf{G}}] - \partial_{\mathbf{m}}\partial_{\mathbf{m}}^{\top}[\text{Tr}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^0) \cdot \underline{\mathbf{G}}] \cdot \underline{\mathbf{G}} &= \mathbf{0} \\ \parallel \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\zeta\mathbf{m}, \xi^3) \end{aligned} \quad (1.40)$$

Puis, compte tenu que :

$$\text{Tr}(\mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_S^0 + \boldsymbol{\varepsilon}_S^0 \cdot \mathbf{e}_3^{\top}) = 0 \quad , \quad \text{Tr}[\partial_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\varepsilon}_N^0 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^{\top})] = 0 \quad , \quad \text{Tr}\{\partial_{\mathbf{m}}[\partial_{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\varepsilon}_N^0 \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3^{\top})]\} = 0 \quad (1.41)$$

nous obtenons, à l'ordre dominant, le système découplé :

$$\begin{cases} 2\text{Sym}[\partial_{\mathbf{m}}(\text{div}_{\mathbf{m}}^{\top}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^0)] - \Delta_{\mathbf{m}}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^0 - \partial_{\mathbf{m}}[\partial_{\mathbf{m}}(\text{Tr}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^0)] = \underline{\mathbf{0}} \\ \partial_{\mathbf{m}}^{\top}(\text{div}_{\mathbf{m}}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^0) - \Delta_{\mathbf{m}}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^0 = \mathbf{0} \\ \partial_{\mathbf{m}}(\partial_{\mathbf{m}}^{\top}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N^0) = 0 \end{cases} \quad (1.42)$$

La dernière équation de (1.42) a pour solution :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N^0 = \mathbf{m}^{\top} \cdot \mathbf{A}(\zeta, \xi^3) + B(\zeta, \xi^3) \quad (1.43)$$

$\mathbf{A}(\zeta, \xi^3)$  et  $B(\zeta, \xi^3)$  étant respectivement une fonction vectorielle et une fonction scalaire arbitraires.

Étant donné que  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_N^0$  est affine dans le plan  $(P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ , nous pouvons négliger cette composante par rapport aux autres qui sont de nature singulière. Par conséquent, nous supposons que les termes  $\mathbf{A}(\zeta, \xi^3)$  et  $B(\zeta, \xi^3)$  se réduisent à zéro.

En reformulant les deux premières lignes de (1.42) avec les potentiels complexes introduits dans (1.30) et en passant par la loi de comportement réduite (1.36), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{D}_4 & \mathcal{D}_3 \\ \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi(\zeta\mathbf{m}, \xi^3) \\ \psi(\zeta\mathbf{m}, \xi^3) \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_4 = \widetilde{S}_{11}\partial_2^4 + \widetilde{S}_{22}\partial_1^4 - 2\widetilde{S}_{26}\partial_1^3\partial_2^1 - 2\widetilde{S}_{16}\partial_2^3\partial_1^1 + (2\widetilde{S}_{12} + \widetilde{S}_{66})\partial_1^2\partial_2^2 \\ \mathcal{D}_3 = -\widetilde{S}_{24}\partial_1^3 + \widetilde{S}_{15}\partial_2^3 + (\widetilde{S}_{46} + \widetilde{S}_{25})\partial_1^2\partial_2^1 - (\widetilde{S}_{56} + \widetilde{S}_{14})\partial_2^2\partial_1^1 \\ \mathcal{D}_2 = \widetilde{S}_{44}\partial_1^2 + \widetilde{S}_{55}\partial_2^2 - 2\widetilde{S}_{45}\partial_1^1\partial_2^1 \\ \text{avec } \partial_j^{i*} = \frac{\partial^{i*}}{(\partial\xi^j)^i} \end{array} \right.$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues. En éliminant  $\psi$ , le problème se réduit à :

$$(\mathcal{D}_4\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_3^2)\phi = 0 \quad (1.45)$$

L'opérateur d'ordre 6 se trouvant devant  $\phi$  peut être décomposé en un produit de six opérateurs  $D_k$  du premier ordre :

$$D_6 D_5 D_4 D_3 D_2 D_1 \phi = 0 \quad (1.46)$$

$$\left\| D_k = \frac{\partial}{\partial \xi^2} - \omega_k(\xi^3) \frac{\partial}{\partial \xi^1} \right.$$

Où  $\omega_k(\xi^3)$  sont les racines de l'équation caractéristique d'ordre 6 associée à l'équation suivante :

$$\mathcal{I}_4(\omega) \mathcal{I}_2(\omega) - \mathcal{I}_3^2(\omega) = 0$$

$$\left\| \begin{aligned} \mathcal{I}_4 &= \widetilde{S}_{11} \omega^4 - 2\widetilde{S}_{16} \omega^3 + (2\widetilde{S}_{12} + \widetilde{S}_{66}) \omega^2 - 2\widetilde{S}_{26} \omega + \widetilde{S}_{22} \\ \mathcal{I}_3 &= \widetilde{S}_{15} \omega^3 - (\widetilde{S}_{56} + \widetilde{S}_{14}) \omega^2 + (\widetilde{S}_{46} + \widetilde{S}_{25}) \omega - \widetilde{S}_{24} \\ \mathcal{I}_2 &= \widetilde{S}_{55} \omega^2 - 2\widetilde{S}_{45} \omega + \widetilde{S}_{44} \end{aligned} \right. \quad (1.47)$$

Introduisons la notation suivante :

$$\Upsilon_i := D_i D_{i-1} \dots D_1$$

$$\left\| \forall i \in \{1; 2; \dots; 6\} \right. \quad (1.48)$$

De sorte que le problème (1.46) se résume à :

$$D_6 \Upsilon_6 = 0 \quad (1.49)$$

La solution de (1.49) est la dérivée d'ordre 5 d'une fonction arbitraire  $\rho_6^{(V)}$  de la variable  $Z_6 = \xi^1 + \omega_6 \xi^2$ .

$$\Upsilon_6 = \rho_6^{(V)}(\xi^1 + \omega_6 \xi^2) \quad (1.50)$$

Il en découle que  $\Upsilon_i$  prendra la forme :

$$\Upsilon_i = \rho_i^{(i-1)}(Z_i) + \frac{\rho_{i+1}(Z_{i+1})}{\omega_{i+1} - \omega_i} \quad \forall i \in \{1; \dots; 5\} \quad (1.51)$$

$$\left\| \begin{aligned} \rho_i &: \text{fonction quelconque de } Z_i \\ Z_i &= \xi^1 + \omega_i(\xi^3) \xi^2 \end{aligned} \right.$$

Finalement, l'expression générale de  $\phi$  et par conséquent celle de  $\psi$  prendront les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{i=1}^6 \phi_i(Z_i) \\ \psi &= \sum_{i=1}^6 \psi_i(Z_i)\end{aligned}\tag{1.52}$$

$$\left\| \begin{aligned} \psi_i(Z_i) &= -\frac{\mathcal{I}_3(\varpi_i)}{\mathcal{I}_2(\varpi_i)} \phi_i'(Z_i) = \eta(\varpi_i) \phi_i'(Z_i) \end{aligned} \right.$$

Rappelons en outre que Lekhnitskii a montré que les six racines de l'équation (1.47) étaient deux à deux complexes conjuguées.

En conclusion, les expressions des fonctions d'Airy et de Prandtl s'écrivent :

$$\left\| \begin{aligned} \phi &= \sum_{i=1}^3 (\phi_i(Z_i) + \phi_{i+3}(\bar{Z}_i)) \\ \psi &= \sum_{i=1}^3 (\psi_i(Z_i) + \psi_{i+3}(\bar{Z}_i)) \end{aligned} \right.\tag{1.53}$$

Où " $\bar{Z}_i$ " est le conjugué du nombre complexe  $Z_i$ .

## 1.7 Solutions Singulières de S.S. Wang

Wang [Wan82] propose la solution de l'équation (1.53) avec la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \phi_i(Z_i) &= \frac{C_i Z_i^{\alpha+2}}{(\alpha+2)(\alpha+1)} \\ \left\| \begin{aligned} \alpha &\text{ est l'exposant de singularité à déterminer} \\ C_i &\text{ sont des constantes à déterminer} \end{aligned} \right.\end{aligned}\tag{1.54}$$

Pour des raisons d'énergie élastique finie et de déplacement fini, la partie réelle de  $\alpha$  doit être comprise dans l'intervalle ouvert  $] -1; 0[$ . La détermination de cette valeur de  $\alpha$  est la première difficulté numérique à surmonter. La valeur de  $\alpha$  et celle de  $C_i$  lié au problème nous donnera des informations sur le comportement près de la ligne singulière en termes des déplacements et des

contraintes. Finalement, la forme explicite du couple  $(\underline{\sigma}^0, \underline{u}^0)$  à l'ordre dominant est :

$$\underline{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_T^0 & \underline{\sigma}_S^0 \\ \underline{\sigma}_S^{0\top} & \underline{\sigma}_N^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\sigma}_T^0 = \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}e(C_k \underline{\tau}_T^k Z_k^\alpha + C_{k+3} \overline{\tau}_T^k \overline{Z}_k^\alpha) \\ \underline{\sigma}_S^0 = \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}e(C_k \underline{\tau}_S^k Z_k^\alpha + C_{k+3} \overline{\tau}_S^k \overline{Z}_k^\alpha) \\ \underline{\sigma}_N^0 = \frac{-S_{nt'} \sigma_{t'} - S_{ns'} \sigma_{s'}}{S_{nn}} \end{cases} \quad (1.55)$$

$$\left\| \begin{aligned} \underline{\tau}_T^k &= \overline{\omega}_k^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^\top + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^\top - \overline{\omega}_k (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^\top + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1^\top) \\ \underline{\tau}_S^k &= \eta_k \overline{\omega}_k \mathbf{e}_1 - \eta_k \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right.$$

$$\underline{u}^0 = \begin{pmatrix} \underline{u}_t^0 \\ \underline{u}_3^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{u}_t^0 = \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}e[C_k \mathbf{V}_t^k \frac{Z_k^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_{k+3} \overline{\mathbf{V}}_t^k (\frac{\overline{Z}_k^{\alpha+1}}{\alpha+1})] \\ \underline{u}_3^0 = \sum_{k=1}^3 \mathcal{R}e[C_k \mathbf{V}_3^k \frac{Z_k^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_{k+3} \overline{\mathbf{V}}_3^k (\frac{\overline{Z}_k^{\alpha+1}}{\alpha+1})] \end{cases}$$

$$\left\| \begin{aligned} \mathbf{V}_t^k &= (\widetilde{S}_{11} \overline{\omega}_k^2 + \widetilde{S}_{12} - \widetilde{S}_{16} \overline{\omega}_k + \widetilde{S}_{15} \overline{\omega}_k \eta_k - \widetilde{S}_{14} \eta_k) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\widetilde{S}_{21} \overline{\omega}_k + \widetilde{S}_{22} / \overline{\omega}_k - \widetilde{S}_{26} - \widetilde{S}_{24} \eta_k / \overline{\omega}_k + \widetilde{S}_{25} \eta_k) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{V}_3^k &= \widetilde{S}_{14} \overline{\omega}_k + \widetilde{S}_{42} / \overline{\omega}_k - \widetilde{S}_{44} \eta_k / \overline{\omega}_k + \widetilde{S}_{45} \eta_k - \widetilde{S}_{46} \end{aligned} \right.$$

Cependant, quelques cas particuliers sont à envisager ; ceux-ci font l'objet des sections suivantes.

### 1.7.1 Cas d'un découplage des problèmes transversal et plan

Cette situation correspond au cas où l'opérateur  $\mathcal{D}_3$  est nul, le système (1.44) se découple alors comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_4 \phi = 0 \\ \mathcal{D}_2 \psi = 0 \end{cases} \quad (1.56)$$

Cela est le cas essentiellement quand  $\mathbf{e}_3$  définit une symétrie matérielle. La méthode précédente est alors mise en défaut car nous ne pouvons pas, dans ces circonstances, éliminer la fonction  $\psi$  de Prandtl au profit de la fonction  $\phi$  d'Airy. Toutefois, en reprenant la démarche précédente, mais

cette fois appliquée à chaque fonction  $\psi$  et  $\phi$ , le couple  $(\underline{\sigma}^0, \mathbf{u}^0)$  prend la forme suivante :

$$\underline{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_T^0 & \underline{\sigma}_S^0 \\ \underline{\sigma}_S^{0\top} & \underline{\sigma}_N^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\sigma}_T^0 = \sum_{k=1}^2 \Re e(C_k \underline{\tau}_T^k Z_k^\alpha + C_{k+3} \overline{\underline{\tau}_T^k} \overline{Z_k}^\alpha) \\ \underline{\sigma}_S^0 = \Re e(C_3 \underline{\tau}_S^3 Z_3^\alpha + C_6 \overline{\underline{\tau}_S^3} \overline{Z_3}^\alpha) \\ \underline{\sigma}_N^0 = \frac{-S_{nt'} \underline{\sigma}_{t'} - S_{ns'} \underline{\sigma}_{s'}}{S_{nn}} \end{cases} \quad (1.57)$$

$$\left\| \begin{aligned} \underline{\tau}_T^k &= \overline{\omega}_k^2 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1^\top + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2^\top \\ &\quad - \overline{\omega}_k (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2^\top + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1^\top) \\ \underline{\tau}_S^3 &= \overline{\omega}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \end{aligned} \right.$$

$$\mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_t^0 \\ \mathbf{u}_3^0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_t^0 = \sum_{k=1}^2 \Re e[C_k \mathbf{V}_t^k \frac{Z_k^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_{k+3} \overline{\mathbf{V}_t^k} (\frac{\overline{Z_k}^{\alpha+1}}{\alpha+1})] \\ \mathbf{u}_3^0 = \Re e[C_3 \mathbf{V}_3^3 \frac{Z_3^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C_6 \overline{\mathbf{V}_3^3} (\frac{\overline{Z_3}^{\alpha+1}}{\alpha+1})] \end{cases}$$

$$\left\| \begin{aligned} \mathbf{V}_t^k &= (\widetilde{S}_{11} \overline{\omega}_k^2 + \widetilde{S}_{12} - \widetilde{S}_{16} \overline{\omega}_k) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\widetilde{S}_{21} \overline{\omega}_k + \widetilde{S}_{22} / \overline{\omega}_k - \widetilde{S}_{26}) \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{V}_3^3 &= -\widetilde{S}_{44} / \overline{\omega}_3 + \widetilde{S}_{45} \end{aligned} \right.$$

### 1.7.2 Cas où les $\overline{\omega}_k$ sont multiples

Il est important d'expliciter cette situation, parfois mal cernée.

Pour la classe des matériaux monocliniques où les symétries mécaniques ne se font que dans un plan, l'équation (1.47) se réduit à :

$$\sum_{i=0}^6 a_i \overline{\omega}^i = 0 \quad (1.58)$$

$$\left\| \text{avec } a_{2p+1} = 0 \text{ quand } p \in \{0; 1; 2\} \right.$$

Avec un changement de variable  $X^2 = \overline{\omega}$ , le cas des racines multiples peut être envisagé si les racines  $X_i$  sont réelles et si  $X_1 = X_2 = -X_3/2$  (Formule de Cardan).

Cependant, cette situation est possible aussi dans le cas où les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont découplées.

Par conséquent, les racines multiples sont nécessairement tirées de l'équation  $\mathcal{D}_4 = 0$ .

### 1.7.3 Cas d'un matériau isotrope ou isotrope transverse

Dans ces circonstances, l'équation  $\mathcal{D}_2 = 0$  admet une racine simple :  $\bar{\omega}_3 = \bar{\omega}_6 = i$ , et l'équation  $\mathcal{D}_4 = 0$  admet une racine double  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_4 = \bar{\omega}_5 = i$ .

## 1.8 Les conditions aux limites

Afin de déterminer les inconnues  $C_i$  et l'exposant de singularité  $\alpha$  introduits dans la fonction (1.54), il faut préciser les conditions aux limites.

Considérons le cas général où la ligne singulière se situe à la jonction de  $n$  secteurs angulaires  $\omega_k$ . Chaque secteur est constitué d'un matériau comme sur la figure (1.3).

Il est plus commode alors d'introduire un repère pseudo-cylindrique  $(r, \rho_k, \theta)$  caractérisé par :

$$Z_k = \xi^1 + \bar{\omega}_k(\xi^3)\xi^2 = r\rho_k \quad ; \quad \rho_k = \cos\theta + \bar{\omega}_k(\xi^3)\sin\theta \quad (1.59)$$

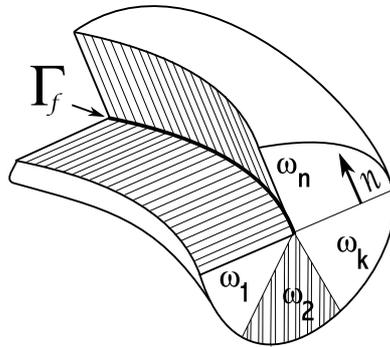


FIG. 1.3 — Voisinage de la ligne singulière à la jonction de  $n$  secteurs angulaires  $\omega_k$

Dans chaque secteur  $\omega_k$ , la solution dominante  $(\underline{\sigma}^0, \underline{u}^0)$  peut être mise sous une forme plus concise que dans les équations (1.55) et (1.57). Dorénavant, la notation contractée sera utilisée et les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}^0$  seront stockées dans un vecteur  $\sigma^0$  :

$$\begin{cases} \sigma^0 = \Re \sum_{\alpha} r^{\alpha} (\underline{\tau} \cdot \underline{\rho}^{\alpha} \cdot \underline{A} + \overline{\underline{\tau}} \cdot \overline{\underline{\rho}}^{\alpha} \cdot \underline{B}) \\ u^0 = \Re \sum_{\alpha} \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\underline{V} \cdot \underline{\rho}^{\alpha+1} \cdot \underline{A} + \overline{\underline{V}} \cdot \overline{\underline{\rho}}^{\alpha+1} \cdot \underline{B}) \end{cases} \quad (1.60)$$

avec les matrices suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{\tau}} = [\boldsymbol{\tau}^1, \boldsymbol{\tau}^2, \boldsymbol{\tau}^3] \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\tau}^k = [\boldsymbol{\tau}_1^k, \boldsymbol{\tau}_2^k, \mathbf{0}, \boldsymbol{\tau}_4^k, \boldsymbol{\tau}_5^k, \boldsymbol{\tau}_6^k]^\top \\ \underline{\mathbf{V}} = [\mathbf{V}^1, \mathbf{V}^2, \mathbf{V}^3] \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}^k = \mathbf{V}_t^k + V_3^k \cdot \mathbf{e}_3 \\ \underline{\boldsymbol{\rho}} = \text{Diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \\ \mathbf{A}^\top = (C_1, C_2, C_3) \quad ; \quad \mathbf{B}^\top = (C_4, C_5, C_6) \end{array} \right.$$

Dans les sections qui suivent, nous allons présenter différentes conditions aux limites (bord libre, déplacements imposés, continuité en contraintes et déplacements et celle en frottement) que nous pouvons rencontrer sur une interface donnée. Chacune d'entre elles impose aux champs des déplacements et/ou des contraintes de respecter certaines conditions.

### 1.8.1 Condition de bord libre

Ce cas signifie que la surface est libre de contrainte. Ceci se traduit par  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface. Étant donnée que cette condition est valable quel que soit  $r$ , pour une surface donnée, nous imposons aux équations (1.60) qu'elles respectent :

$$\left[ \begin{array}{cc} \underline{\mathbf{t}} \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}^\alpha & \underline{\bar{\mathbf{t}}} \cdot \underline{\bar{\boldsymbol{\rho}}}^\alpha \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (1.61)$$

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\mathbf{t}} = [\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3] \text{ tel que } \mathbf{t}^k = \underline{\boldsymbol{\tau}}^k \cdot \mathbf{n} \end{array} \right.$$

### 1.8.2 Condition de déplacement nul

Cette situation impose un déplacement nul en tout point de la surface considérée,  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ , et les équations (1.60) deviennent :

$$\left[ \begin{array}{cc} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}^{\alpha+1} & \underline{\bar{\mathbf{V}}} \cdot \underline{\bar{\boldsymbol{\rho}}}^{\alpha+1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \right\} = \mathbf{0} \quad (1.62)$$

### 1.8.3 Condition de continuité

Cette condition, établie sur une interface entre deux secteurs adjacents  $\omega_k$  et  $\omega_{k+1}$ , conduit à la continuité des champs des déplacements  $[[\mathbf{u}^0]] = \mathbf{u}_{k+1}^0 - \mathbf{u}_k^0 = \mathbf{0}$  et à celle des champs des contraintes

$[[\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n}]] = \underline{\sigma}_{k+1}^0 - \underline{\sigma}_k^0 = \underline{0}$ ,  $\underline{n}$  étant le vecteur unitaire normal à l'interface comme il est illustré sur la figure (1.3). Cette condition s'écrit :

$$\left[ \begin{array}{cc} \underline{t} \cdot \underline{\rho}^\alpha & \bar{\underline{t}} \cdot \bar{\underline{\rho}}^\alpha \\ \underline{V} \cdot \underline{\rho}^{\alpha+1} & \bar{\underline{V}} \cdot \bar{\underline{\rho}}^{\alpha+1} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{A} \\ \underline{B} \end{array} \right\} = \underline{0} \quad (1.63)$$

où  $\underline{t} = [t^1, t^2, t^3]$  tel que  $t^k = \underline{\tau}^k \cdot \underline{n}$

### 1.8.4 Condition de contact frottant

En présence de rugosité à l'interface de deux secteurs adjacents  $\omega_k$  et  $\omega_{k+1}$ , nous sommes amenés à modéliser les forces de frottement au contact entre les deux matériaux. Cette situation est fréquente en pratique, dans les engrenages, au contact de deux lèvres de fissure, etc.

Par la suite, nous envisagerons deux cas (fig. 1.4) : le cas où le matériau supérieur glisse vers la droite et celui où il glisse vers la gauche relativement au matériau inférieur.

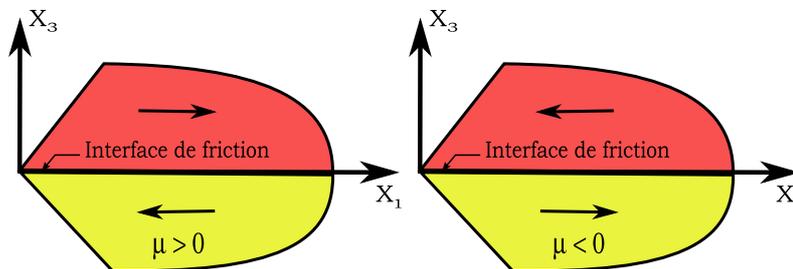


FIG. 1.4 — Configurations de deux types de glissement : (a) La partie supérieure glisse vers la droite par rapport à la partie inférieure ; (b) La partie supérieure glisse vers la gauche par rapport à la partie inférieure

Ces deux modes sont traités simultanément en allouant au coefficient de frottement  $\mu$  une valeur positive ou négative. Pour fixer les idées,  $\mu$  sera pris positivement dans le cas où la partie supérieure glisse vers la droite relativement à la partie inférieure tandis que  $\mu$  sera pris négativement dans le cas contraire.

Le long de l'interface, la condition de frottement se traduit par la continuité des contraintes ( $[[\underline{\sigma}^0 \cdot \underline{n}]] = \underline{0}$ ) et par la continuité des déplacements dans les directions  $\underline{X}_2$  et  $\underline{X}_3$  (dans le cas où le frottement se fait uniquement dans la direction  $\underline{X}_1$ , nous pouvons néanmoins adapter cette situation à d'autres directions). À cela, nous ajoutons la loi définissant la condition de frottement par adhésion. Notre

modèle est celui de Coulomb qui permet de relier l'effort tangentiel à l'effort normal par le coefficient de frottement  $\mu$  :

$$\sigma_6^0 = -\mu\sigma_2^0, \text{ où } \sigma_2^0 < 0 \quad (1.64)$$

Ainsi, sur l'interface considérée, le problème de contact frottant relatif aux champs des déplacements et des contraintes se résume à :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} \underline{t} \cdot \underline{\rho}^\alpha & \bar{t} \cdot \bar{\rho}^\alpha \\ \underline{F} \cdot \underline{\rho}^{\alpha+1} & \bar{F} \cdot \bar{\rho}^{\alpha+1} \end{array} \right]_{k+1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \right\}_{k+1} &= \left[ \begin{array}{cc} \underline{t} \cdot \underline{\rho}^\alpha & \bar{t} \cdot \bar{\rho}^\alpha \\ \underline{D} \cdot \underline{V} \cdot \underline{\rho}^{\alpha+1} & \underline{D} \cdot \bar{V} \cdot \bar{\rho}^{\alpha+1} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{array} \right\}_k \\ \left\| \begin{array}{l} \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \underline{F} = \underline{C} \cdot \underline{t} + \underline{D} \cdot \underline{V} \\ \underline{t} = [t^1, t^2, t^3] \text{ tel que } t^k = \underline{\tau}^k \cdot \underline{n} \end{array} \right. \quad (1.65) \end{aligned}$$

Ici, seul le cas d'un contact frottant unidirectionnel est considéré ; bien évidemment ce cas peut être généralisé dans le cas d'un frottement multi-directionnel en changeant certaines composantes des matrices  $\underline{C}$  et  $\underline{D}$ .

## 1.9 Méthode de résolution du problème aux valeurs propres

Il s'ensuit que le problème se résume à un problème aux valeurs propres  $\underline{\Lambda}(\alpha)\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , similaire à [Leg87]. La construction de  $\underline{\Lambda}(\alpha)$  et de  $\mathbf{X}$  se fait par un assemblage de toutes les conditions entre les différents matériaux autour d'une ligne singulière. La méthode d'assemblage est identique à celle utilisée dans la méthode par éléments finis. L'objet de cette section est de déterminer les valeurs de  $\alpha$  et de  $\mathbf{X}$ .

De manière générale, le problème aux valeurs propres précédant ne possède pas de solution analytique et nous sommes obligés de le résoudre par voie numérique. Tout d'abord, les solutions sont localisées par la méthode de la fausse position (*Regula-Falsi*), laquelle s'apparente à la méthode de *dichotomie*. En effet, elle ne coupe pas l'intervalle en deux parts égales à chaque itération mais en un point dont la position est définie par la formule de *la méthode de la sécante*.

En raison de la dépendance fortement non linéaire en  $\alpha$ , la méthode de la fausse position a été choisie puisqu'elle hérite de la robustesse de la méthode de dichotomie et de la complexité "super-

linéaire" de la méthode de la sécante.

Une des difficultés de la compilation est la présence de valeurs propres multiples. Pour les détecter, le critère de Rouché est utilisé :

$$\text{Multiplicité de } \alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial_{\alpha}[\det(\underline{\Lambda})]}{\det(\underline{\Lambda})} d\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathcal{C}} \text{Argument}[\det(\underline{\Lambda})] d\mathcal{C} \quad (1.66)$$

||  $\mathcal{C}$  est un lacet entourant la solution  $\alpha$

Par la suite, les vecteurs propres correspondants sont évalués à partir d'une factorisation LU incomplète [Wil65] permettant de construire automatiquement le vecteur  $\mathbf{X}$  de sorte que l'on puisse déterminer les champs propres des contraintes et des déplacements. Ainsi, par combinaison linéaire, le noyau de  $\Lambda(\alpha)$  est généré et prend la forme [Sch93] :

$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^0 &= \sum_{\alpha} \mathcal{R}e[K_{\alpha}(\xi^3) r^{\alpha} (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}^{\alpha} \cdot \mathbf{A} + \overline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \overline{\underline{\boldsymbol{\rho}}}^{\alpha} \cdot \mathbf{B})] \\ \mathbf{u}^0 &= \sum_{\alpha} \mathcal{R}e[K_{\alpha}(\xi^3) \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+1} (\underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\boldsymbol{\rho}}^{\alpha+1} \cdot \mathbf{A} + \overline{\underline{\mathbf{V}}} \cdot \overline{\underline{\boldsymbol{\rho}}}^{\alpha+1} \cdot \mathbf{B})] \end{aligned}$	(1.67)
--	--------

Les  $K_{\alpha}$  sont les facteurs d'intensité des contraintes associés et, pour le moment, leurs valeurs sont encore indéterminées.

## 1.10 Conclusion

Dans ce premier chapitre, une méthode asymptotique a été élaborée, permettant l'extraction des surcontraintes autour de lignes singulières à la jonction de différents matériaux anisotropes. La connaissance quasi-analytique des contraintes et des déplacements fait que la méthode est précise et ne nécessite pas un temps de calcul important. Différentes conditions aux interfaces ont été explicitées, notamment la condition de frottement entre deux matériaux en contact. Pour illustrer la présente méthode, un certain nombre d'applications numériques font l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre 2

## Validation du code de surcontraintes

### Sommaire

---

2.1	Bi-matériaux isotropes . . . . .	26
2.2	Tri-matériaux isotropes . . . . .	32
2.3	Bi-matériaux isotrope/orthotrope . . . . .	34
2.4	Bi-matériaux anisotropes . . . . .	38
2.5	Tri-matériaux anisotropes . . . . .	40
2.6	Bi-matériaux isotropes avec condition de frottement . . . . .	42
2.7	Bi-matériaux anisotropes avec conditions de continuité ou de frottement . . . . .	44
2.8	Entaille dans un matériau avec différentes conditions imposées sur les lèvres . . . . .	49
2.9	Bord droit d'un bi-matériaux orthotropes . . . . .	51
2.10	Problème d'un rivet dans un bi-couches . . . . .	53
2.11	Conclusion . . . . .	56

---

Dans le premier chapitre, nous avons décrit une théorie permettant d'extraire les exposants de singularité des contraintes  $\alpha$  ainsi que leurs vecteurs propres associés. Cette méthode a été implémentée avec le langage de programmation FORTRAN 77.

Afin de valider notre code de calcul, nous allons confronter nos résultats avec ceux trouvés dans la littérature. Il est à noter que les exemples décrits par la suite ne constituent en aucun cas une liste exhaustive mais ne font que reprendre des configurations que l'on rencontre en pratique avec des éléments de structure composés d'un ou de plusieurs matériaux isotropes et/ou anisotropes. Différentes conditions d'interface, notamment celle du contact frottant, seront illustrées.

Pour plus de clarté, l'appellation "bi-matériaux isotropes", signifiera que chaque matériau est isotrope et non l'ensemble. Toute autre appellation respectera ce principe.

## 2.1 Bi-matériaux isotropes

La première configuration est traitée par Huang dans [Hua07].

Il s'agit de la jonction entre deux matériaux isotropes (voir fig. (2.1)) de caractéristiques mécaniques différentes.

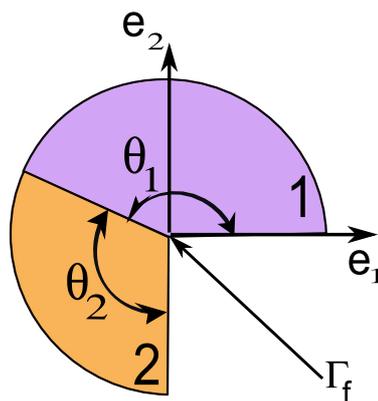


FIG. 2.1 – Deux matériaux isotropes de révolution avec une surface de jonction discontinue

Cette situation est courante dans la vie quotidienne comme un rivet plongé dans une structure métallique, un clou planté dans un matériau isotrope, etc.

Nous allons nous intéresser à la valeur que prend l'exposant de singularité  $\alpha$  en fonction des

angles d'ouverture ( $\theta_1$  et  $\theta_2$ ) des deux matériaux ainsi que du rapport  $E_r = \frac{E_2}{E_1}$ ;  $E_1$  et  $E_2$  désignent respectivement les modules de Young du matériau 1 et du matériau 2. Les angles d'ouverture des matériaux 1 et 2, notés  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , sont représentés sur la figure (2.1) dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  lié au repère de Frenet rattaché à la ligne singulière  $\Gamma_f$ . On note  $\theta$  la somme des deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Le coefficient de Poisson est fixé à 0.3 pour les deux matériaux.

Deux configurations sont traitées ; la première est tel que l'angle  $\theta$  est fixé à  $360^\circ$  et la seconde est tel que l'angle  $\theta_1$  est fixé à  $180^\circ$ .

### 2.1.1 1<sup>ère</sup> configuration : $\theta = 360^\circ$

Dans cette configuration, nous allons traiter le cas où  $\theta$  vaut  $360^\circ$ , nous parlons alors de fissure plane fermée entre les deux matériaux dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  (fig. (2.2)).

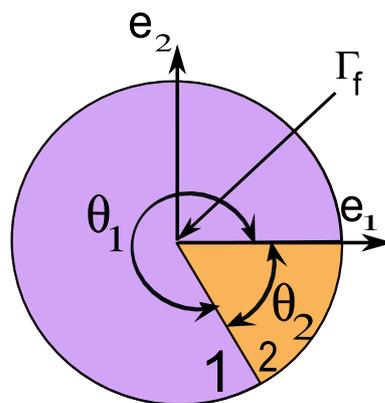


FIG. 2.2 – Vue du bi-matériaux de révolution dans le plan  $(0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

La figure (2.3) montre l'évolution de l'exposant de singularité en fonction de  $\theta_1$  pour différentes valeurs de  $E_r$ . Ce rapport des modules de Young, prendra quatre valeurs, à savoir 1.0, 0.5, 0.1 et 0.01, correspondant respectivement aux cas 1, 2, 3 et 4.

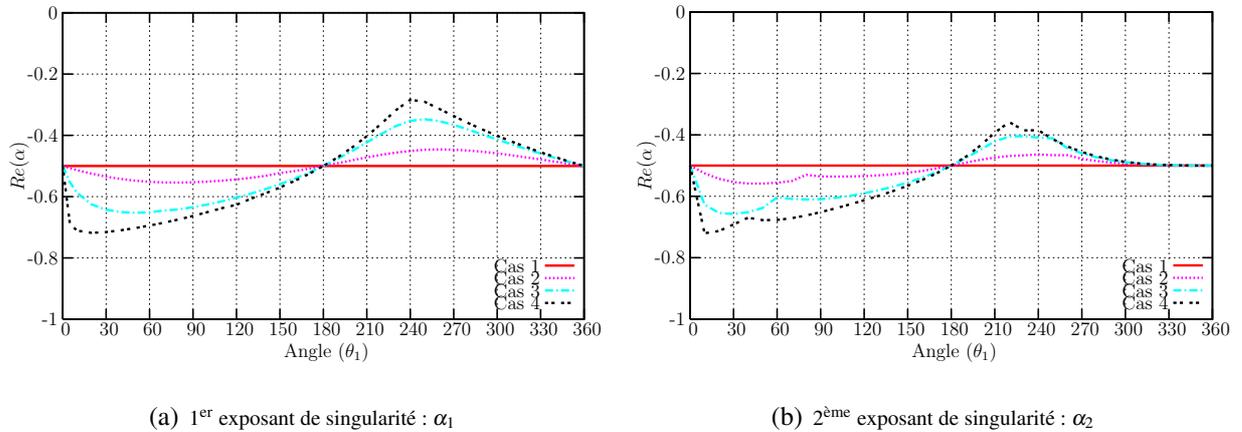


FIG. 2.3 — Variation des exposants de singularité  $\alpha$  en fonction de  $\theta_1$ , tel que  $\theta = \theta_1 + \theta_2 = 360^\circ$  (voir fig. (2.2) pour  $E_r = 1, 0.5, 0.1$  et  $0.01$ )

Interprétons les courbes de la figure (2.3). Traitons de suite le cas particulier où  $E_r$  vaut 1, signifiant que les matériaux sont les mêmes ; la partie réelle de l'exposant de singularité vaut  $-0.5$  quelle que soit la valeur de  $\theta_1$  ; ce qui est spécifique à un problème de fissure plane dans un matériau homogène.

Pour  $E_r$  différent de 1, la partie réelle de l'exposant de singularité est inférieure à  $-0.5$  lorsque  $\theta_1$  est plus petit que  $180^\circ$ , dans ce cas, les contraintes sont plus sévères.

Physiquement, nous pouvons dire que, dans le cas d'une fissure fermée entre deux matériaux isotropes possédant le même coefficient de Poisson, la contribution des proportions géométriques de chaque matériau joue un rôle déterminant dans la sévérité des contraintes près des lignes singulières. En d'autres termes, plus le matériau possédant le plus grand module de Young est étendu et plus l'exposant de singularité  $\alpha$  est petit.

De plus, l'exposant varie avec la valeur de  $E_r$  ; plus  $E_r$  est petit, et plus, pour  $\theta_1$  fixé,  $\alpha$  s'éloigne de la valeur  $-0.5$ . Ceci est dû à une plus grande différence des propriétés mécaniques entre les deux matériaux.

La figure (2.4) représente les déplacements singuliers d'un disque de diamètre l'unité centré sur le front de fissure pour chaque exposant de singularité  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Cependant, à cet instant, il ne faut considérer que les formes de ces déplacements et n'ont pas leur intensité, car les déplacements sont dépendants des facteurs d'intensité des contraintes qui ne sont pas calculés à cette étape. Les déplacements singuliers finaux, liés au problème de la structure, seront une combinaison de ces deux déplacements singuliers associés à leurs facteurs d'intensité des contraintes généralisés (voir

(1.67)).

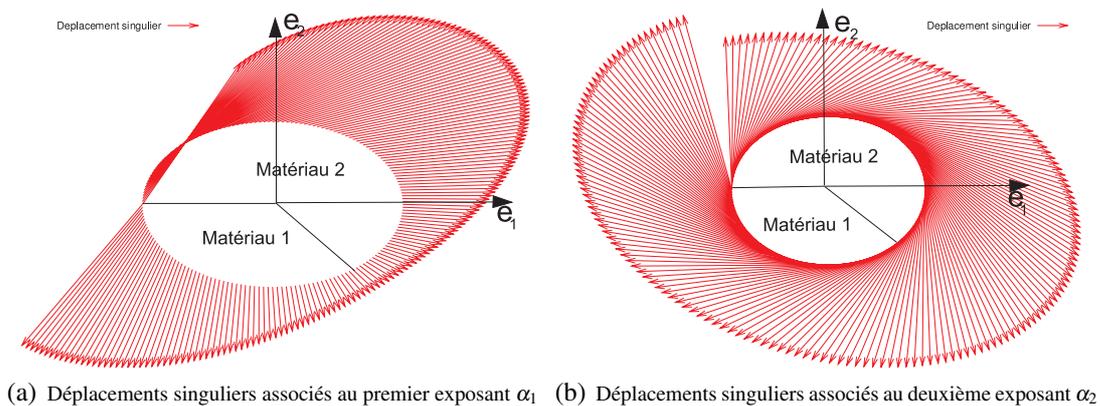


FIG. 2.4 – Déplacements singuliers associés aux exposants de singularité pour  $\theta_2 = 220^\circ$

Il est clair que chacun des deux exposants de singularité  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  est associé à un mode mixte combinant les modes élémentaires I et II. Le mode III est inexistant, donc l'exposant correspondant est nul.

### 2.1.2 2<sup>eme</sup> configuration : $\theta_1 = 180^\circ$

Dans cette configuration, l'angle  $\theta_1$  est fixé à  $180^\circ$ . Nous nous intéressons alors à l'évolution des parties réelles des exposants de singularité en fonction, cette fois-ci, de la valeur de  $\theta_2$  qui varie de  $0^\circ$  à  $180^\circ$ . Les cas 1, 2, 3, 4 et 5 correspondent respectivement aux valeurs de  $E_r$ , à savoir 10, 2, 1, 0.5 et 0.1. La figure (2.6) donne l'évolution des exposants de singularité en fonction de  $\theta_2$  pour différents  $E_r$ .

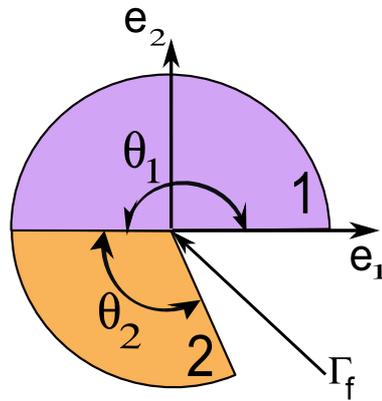


FIG. 2.5 – Vue du bi-matériaux de révolution dans le plan  $(0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$

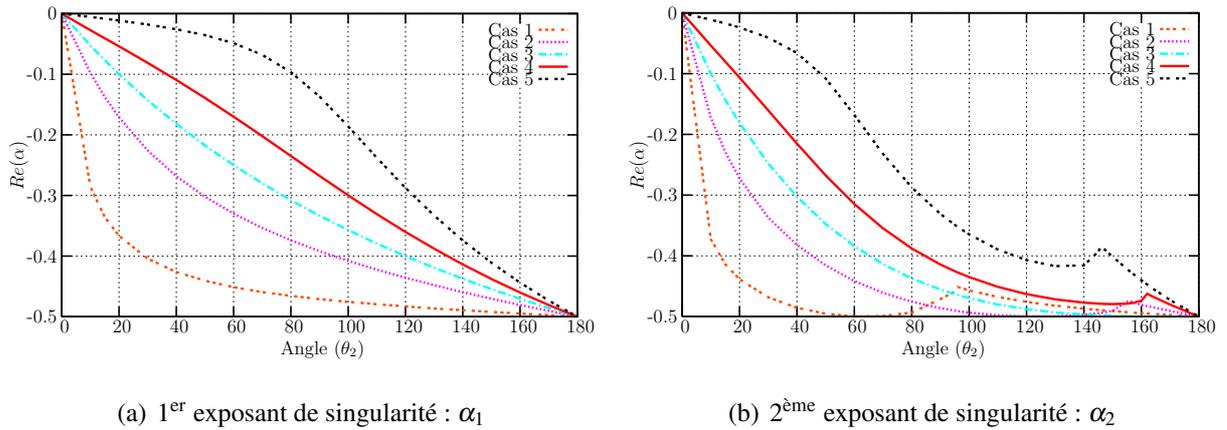


FIG. 2.6 – Variation de l'exposant de singularité  $\alpha$  en fonction de  $\theta_2$  tel que  $\theta_1$  soit fixé à  $180^\circ$  (voir fig. (2.5) pour  $E_R = 10, 2, 1, 0.5$  et  $0.1$ )

Ici, les valeurs des exposants de singularité  $\alpha_i$  se situent dans l'intervalle  $[-0.5; 0]$ . Toutes les courbes associées aux différentes valeurs de  $E_r$  démarrent du point de coordonnées  $(0^\circ; 0)$  pour terminer au point de coordonnées  $(180^\circ; -0.5)$ . Les courbes relatives à  $\alpha_1$  décroissent toutes de manière monotone tandis que celles relatives à  $\alpha_2$  décroissent toutes globalement avec la présence d'un petit pic. Précisons également que les exposants de singularité  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont associés à un mode mixte couplant les modes I et II (voir fig. (2.7)). Tout comme le précédent cas, le mode III n'existe pas donc l'exposant correspondant est nul.

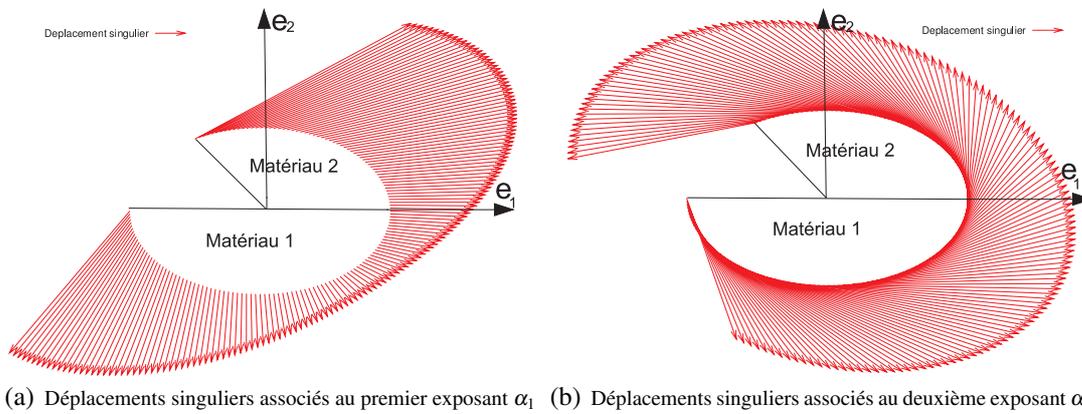


FIG. 2.7 – Déplacements singuliers associés aux exposants de singularité pour  $\theta_2 = 120^\circ$  avec  $\theta_1$  fixé à  $180^\circ$

Les résultats concernant les exposants de singularité sont en accord avec ceux de Huang [Hua07] pour les deux configurations.

## 2.2 Tri-matériaux isotropes

La deuxième configuration est reprise d'un travail de Vu-Quoc [Vu-06]. Dans cet exemple, nous nous intéressons à la singularité d'un assemblage de trois matériaux isotropes que sont l'Aluminium (Al), le Nickel (Ni) et des nanotubes de Carbone (CNT) considérés, pour cet exemple, comme un seul matériau isotrope (fig. (2.8)). Ici, les trois secteurs angulaires, chacun représentant un matériau, constituent un disque complet. Néanmoins le secteur associé au CNT forme un demi-disque alors que les deux autres sont dépendants d'un paramètre  $\theta$ , défini comme l'angle entre l'interface fixe CNT-Nickel et l'interface Aluminium-Nickel variable. Sur cette dernière, nous introduisons une fissure séparant physiquement les deux matériaux Nickel et Aluminium. Il est à noter que l'interface CNT-Aluminium est également fixe.

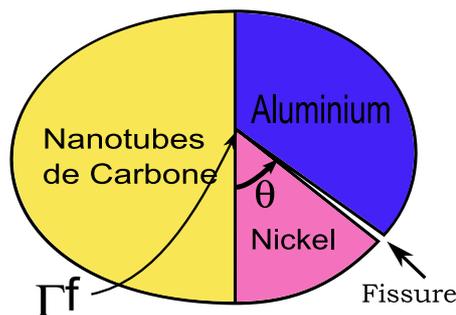


FIG. 2.8 – Fissure d'interface dans un tri-matériaux constitué d'Aluminium, de Nickel et de nanotubes de Carbone

Les conditions sur les interfaces CNT-Nickel et CNT-Aluminium sont considérées continues en contraintes et en déplacements alors que pour l'interface Aluminium-Nickel, les deux lèvres de la fissure sont supposées libres de contraintes.

Les propriétés élastiques des différents matériaux sont définies dans le tableau (2.1).

TAB. 2.1 – Propriétés élastiques du Nickel (Ni), de l'Aluminium (Al) et des nanotubes de carbone (CNT).

	Nickel	Aluminium	CNT
Module de Young ( <i>GPa</i> )	197	72	2320
Coefficient de Poisson	0.31	0.33	0.21

La figure (2.9) représente l'exposant de singularité  $\alpha$  en fonction de l'angle  $\theta$  défini dans l'intervalle  $[0^\circ, 180^\circ]$ .

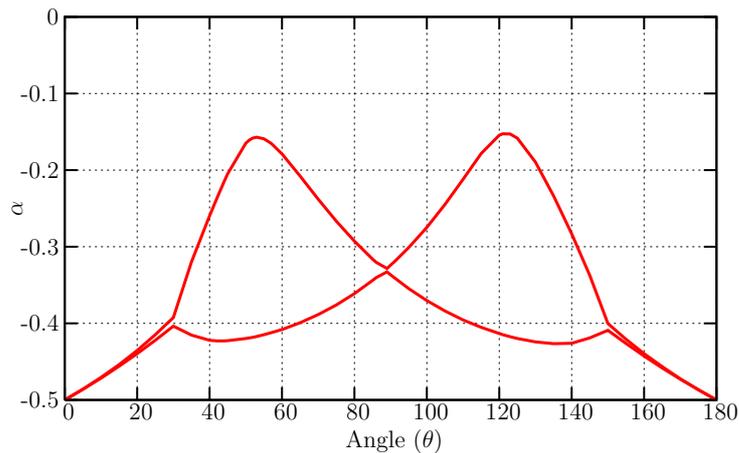


FIG. 2.9 — Exposants de singularité  $\alpha$  associé à un tri-matériau fissuré en fonction de l'angle  $\theta$  définissant la proportion géométrique du Nickel

Dans le cas où l'angle du secteur en Nickel  $\theta$  est compris dans l'intervalle  $[15^\circ; 165^\circ]$ , nous sommes en présence de deux exposants de singularité. Hors de cette intervalle, il n'y a qu'un seul exposant de singularité avec une multiplicité d'ordre 2 détectée par le critère de Rouché (1.66).

La figure (2.9) montre que les exposants de singularité  $\alpha$  sont toujours au-dessus de la valeur  $-0.5$ .

La courbe, associée à  $\alpha_1$ , est toujours au-dessus à celle, associée à  $\alpha_2$ .

De plus, quand  $\theta$  est égal à  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , l'exposant de singularité vaut  $-0.5$ , valeur caractéristique d'une fissure plane entre deux matériaux. Le maximum local de la courbe inférieure de la figure (2.9) apparaît lorsque  $\theta$  vaut  $90^\circ$ ,  $\alpha$  vaut alors  $-0.3366$ . Ce résultat est en concordance avec celui obtenu par Vu-Quoc, ( $\alpha = -0.336$ ).

Il est à noter qu'aucune symétrie n'est présente sur les courbes malgré les apparences, ce qui est logique en raison de l'absence de symétries géométrique et mécanique du problème.

La figure (2.10) donne les déplacements singuliers pour  $\theta$  égal à  $90^\circ$  d'un cercle de diamètre l'unité dans le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  centré sur le front de fissure, pour chaque exposant de singularité.

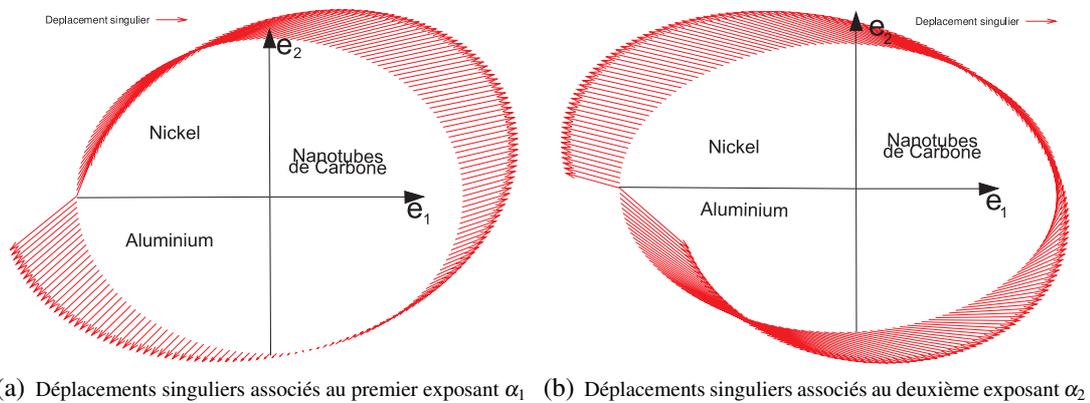


FIG. 2.10 – Déplacements singuliers associés aux exposants de singularité pour  $\theta_1 = 90^\circ$

Chacun des deux exposant est associé à un mode mixte combinant les modes I et II. Les formes des courbes (2.9) sont en accord avec celles obtenues par Vu-Quoc [Vu-06].

### 2.3 Bi-matériaux isotrope/orthotrope

La troisième configuration a été traitée par Barroso dans [Bar03].

Cet exemple traite de la jonction plane d'un matériau orthotrope avec un matériau isotrope (voir fig. (2.11)).

Cette situation est courante en pratique surtout dans des matériaux composites qui font l'objet d'un saut de plis avec la matrice ou qui admettent un insert.

Le matériau orthotrope, identifié à une couche de graphite/Epoxyde homogénéisé, couvre un demi-plan. Sur celui-ci est fixé un matériau isotrope, assimilé à de l'Epoxyde, et  $\theta$  définit l'angle d'ouverture de ce matériau (fig. (2.11)).

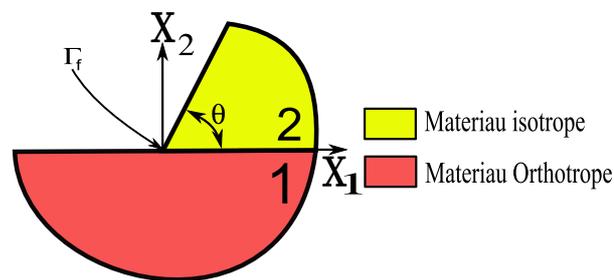


FIG. 2.11 – Jonction d'un matériau isotrope avec un matériau orthotrope

Les propriétés élastiques liées au repère local de chaque matériau, utilisées par Barroso [Bar03], sont données dans le tableau (2.2). Celles-ci sont obtenues par la "loi des mélanges" basée sur le pourcentage volumique de chaque matériau et sur leurs propriétés respectives. La définition des repères structure (global) et matériau (local) est donnée dans la note (2.3) de la page 37.

TAB. 2.2 – Propriétés élastiques d'une couche de Graphite/Epoxyde dans le repère local et de l'Epoxyde.

	$E_{11}$ (MPa)	$E_{22}$ (MPa)	$E_{33}$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$G_{13}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
Graphite/Epoxyde	141.3	9.58	9.58	5.0	5.0	3.5	0.3	0.3	0.32
Epoxyde	3			1.11			0.35		

Ici,  $E_{ii}$ ,  $G_{ij}$  et  $\nu_{ij}$  représentent respectivement les modules de Young, les modules de cisaillement et les coefficients de Poisson dans le repère matériau. Les indices 1, 2 et 3 se réfèrent respectivement à la direction longitudinale des fibres, à la direction transverse et à l'épaisseur d'une couche. Lorsque ces propriétés sont données hors des axes locaux, nous parlons plutôt des coefficients de Lekhnitskii [Lek63].

Dans la figure (2.12), nous nous intéressons à l'évolution de l'exposant de singularité en fonction de l'angle  $\theta$  variant de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  avec un angle d'orientation de fibres  $\phi^1$  du matériau 1 fixé à  $0^\circ$ . La partie réelle de  $\alpha$  est représentée par une ligne rouge continue tandis que la partie imaginaire est donnée en ligne pointillée noire. L'axe des ordonnées de gauche concerne la partie réelle de  $\alpha$

tandis que l'axe des ordonnées de droite est relatif à la partie imaginaire de  $\alpha$ .

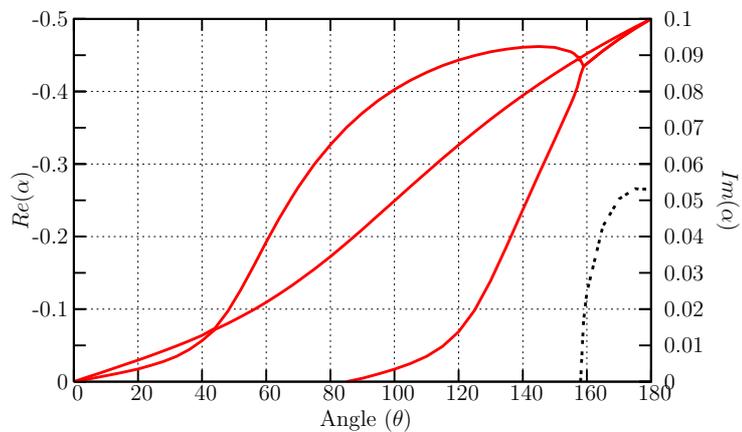


FIG. 2.12 — Exposant de singularité  $\alpha$  d'un bi-matériaux isotrope/orthotrope en fonction de l'angle  $\theta$  défini sur la fig. (2.11)

Pour  $\theta$  compris entre  $0^\circ$  et  $85^\circ$ , nous obtenons deux exposants de singularité dont chacun est une combinaison des modes I et II.

Pour  $\theta$  compris entre  $85^\circ$  et  $160^\circ$ , trois exposants réels distincts apparaissent, le troisième étant associé au mode III de rupture.

Finalement, pour  $\theta$  supérieur à  $160^\circ$ , deux exposants de singularité complexes conjugués subsistent (seule la partie imaginaire positive apparaît sur la figure (2.12)).

Sur ces courbes, trois points sont de multiplicité d'ordre 2 ( $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 155^\circ$ ).

Ces résultats sont en accord avec ceux de Barroso [Bar03].

## Note (2.3)

Nous introduisons le repère matériau ou local qui est lié à l'orientation des fibres d'un matériau stratifié ( $\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \mathbf{X}_3^*$ ) et le repère structure ou global ( $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ ) qui est lié à la structure. Nous considérons un stratifié dans lequel chaque pli  $N$  est caractérisé par un angle d'orientation de fibre  $\phi^N$  défini, dans le sens des aiguilles d'une montre, comme étant l'angle entre les axes  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_1^*$  (fig. (2.13)).

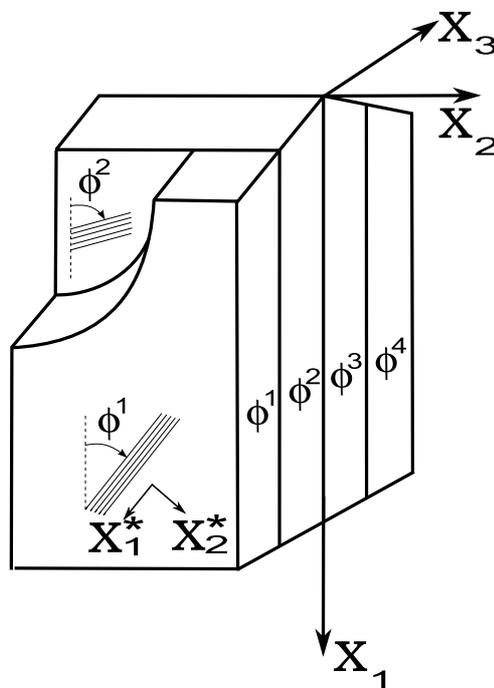


FIG. 2.13 — Repère matériau ou local lié à l'orientation des fibres ( $\mathbf{X}_1^*, \mathbf{X}_2^*, \mathbf{X}_3^*$ ) et repère structure ou global ( $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ )

Cette définition du repère local sera reprise tout au long de ce document.

## 2.4 Bi-matériaux anisotropes

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un problème de stratifié composite à fibres longues initialement traité par Wang [Wan84].

À l'interface du bi-couches de Carbone/Epoxyde, se trouve une décohésion partielle laissant place à une fissure (fig. (2.14)).

Ce type de fissure, appelé délaminage, peut résulter de nombreuses causes, les plus fréquentes viennent de l'oubli d'un morceau de film protecteur ou la présence d'un produit polluant altérant les pouvoirs adhésifs de la résine. Des études concernant les mécanismes de rupture des composites stratifiés ont indiqué que la propagation des défauts de délaminage se trouve être la cause principale de rupture conduisant à la ruine de la structure stratifiée.

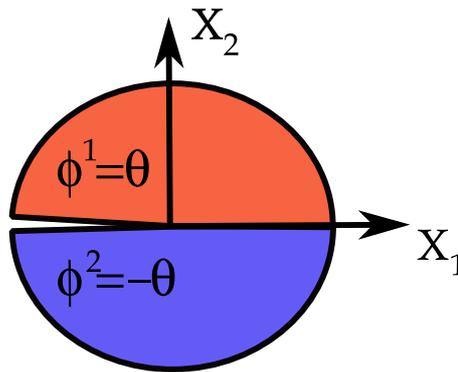


FIG. 2.14 – Fissure partielle de délaminage dans un bi-couches  $[\phi^1/\phi^2]$

Les propriétés mécaniques homogénéisées d'une couche de Carbone/Epoxyde sont récapitulées dans le tableau (2.3).

TAB. 2.3 – Propriétés élastiques d'une couche de Carbone/Epoxyde dans le repère matériau.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
137.9	14.48	14.48	5.86	5.86	5.86	0.21	0.21	0.21

La stratification du bi-couches  $[\phi^1/\phi^2]$  est telle que  $\phi^1 = -\phi^2 = \theta$ .

Le tableau (2.4) récapitule les différents exposants de singularité  $\alpha$  calculés pour quelques orientations  $\theta$ . Ces résultats sont comparés avec ceux de Chen [Che97b], Wang [Wan84] et Nguyen Tien

[Ngu06a].

TAB. 2.4 – Comparaison des exposants de singularité calculés pour un problème de délaminage dans un bi-couche Carbone/Epoxyde en fonction de l'orientation des fibres  $[\theta / -\theta]$ .

$\theta$	Présent	Wang	Chen	Nguyen
$0^0$	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5
$15^0$	-0.5 $-0.5 \pm 0.00642i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.00642i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.00644i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.00642i$
$30^0$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02400i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02399i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02400i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02400i$
$45^0$	-0.5 $-0.5 \pm 0.03434i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.03434i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.03434i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.03434i$
$60^0$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02942i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02942i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02941i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.02942i$
$75^0$	-0.5 $-0.5 \pm 0.01580i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.01579i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.01580i$	-0.5 $-0.5 \pm 0.01580i$
$90^0$	-0.5	-0.5	-0.5	-0.5

Dans ces papiers, trois exposants de singularité sont obtenus, excepté pour  $\theta$  égal à  $0^0$  et  $90^0$ , dans ces configurations, les valeurs propres sont des valeurs triples. Cependant pour les autres cas, nous retrouvons systématiquement un exposant de singularité réel égal à  $-0.5$ , et deux autres complexes conjugués, la partie imaginaire étant maximale lorsque  $\theta$  vaut  $45^0$ . En fait, dans cette séquence, les fibres d'une couche sont perpendiculaires à celles de la couche adjacente, et l'écart angulaire entre les directions des fibres est maximum.

Ici, nous nous intéressons à la valeur maximale que prend la partie imaginaire pour une orientation  $[\phi^1 / \phi^2]$  quelconque. Ceci correspond à la configuration  $[0^0 / 90^0]$  où la partie imaginaire est égale à 0.0511.

Tous ces résultats sont en accord avec ceux de Chen [Che97b], Wang [Wan84] et Nguyen Tien [Ngu06a] qui traitent également ce problème avec les potentiels complexes d'Airy et de Prandtl mais en utilisant d'autres hypothèses de départ. Par exemple, Nguyen Tien et Wang supposent un

état plan de déformation, alors que nous utilisons un modèle tridimensionnel.

## 2.5 Tri-matériaux anisotropes

Cet exemple est traité par Chen dans [Che97a].

On s'intéresse ici à la jonction entre trois matériaux orthotropes comme illustré sur la figure (2.15). Chaque matériau, composé de Carbone/Epoxyde, représente un quart de cercle et possède sa propre orientation de fibres. L'orientation des fibres du matériau 3 ( $\phi^3$ ) est fixée à  $90^\circ$  tandis que celles des matériaux 1 et 2 sont opposées :  $\phi^1 = -\phi^2 = \theta$ , où  $\theta$  est un paramètre.

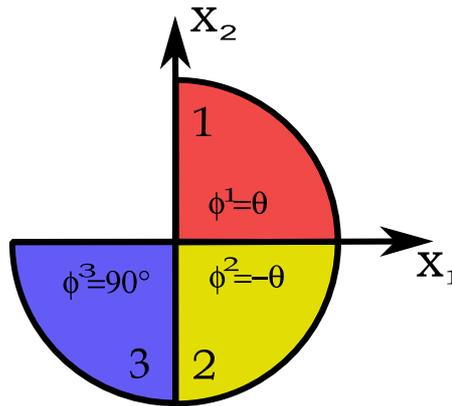


FIG. 2.15 – Tri-matériaux anisotropes constitué de trois couches unidirectionnelles de Carbone/Epoxyde

Les propriétés élastiques du Carbone/Epoxyde sont données dans le tableau (2.5).

TAB. 2.5 – Propriétés élastiques d'une couche de Carbone/Epoxyde dans le repère matériau.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
137.9	14.48	14.48	5.86	5.86	5.86	0.21	0.21	0.21

Notre intention, dans cet exemple, est de montrer l'influence des orientations des fibres sur les exposants de singularité dans le tri-matériaux, en faisant varier le paramètre  $\theta$ .

La figure (2.16) illustre ainsi les exposants de singularité  $\alpha$  en fonction du paramètre  $\theta$  qui prend

ses valeurs dans l'intervalle  $[-90^\circ, 90^\circ]$ .

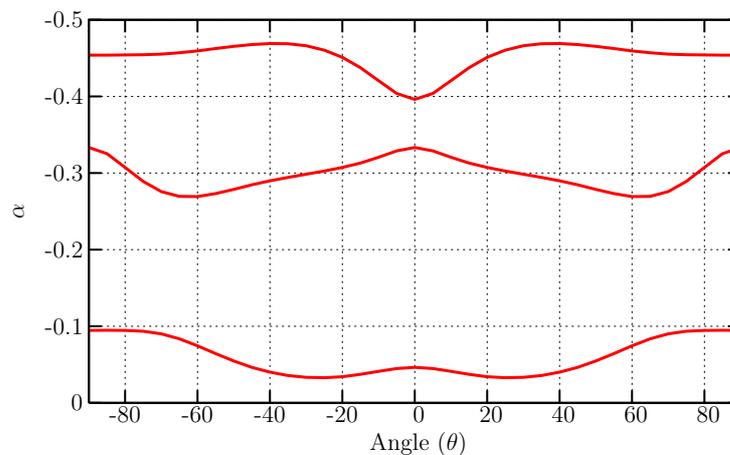


FIG. 2.16 — Exposants de singularité de contrainte  $\alpha$  d'un tri-matériaux anisotropes comme défini sur la figure (2.15)

Nous sommes en présence de trois exposants réels distincts. L'exposant le plus petit est relatif au mode III alors que les autres sont associés à un mode mixte combinant les modes I et II.

Notons qu'il existe une symétrie par rapport à l'axe  $\theta = 0^\circ$  ; autrement dit, les trois exposants de singularité pour la configuration  $(90^\circ / -\theta / \theta)$  sont les mêmes que pour la configuration  $(90^\circ / \theta / -\theta)$ . De plus, il a été constaté que les déplacements singuliers associés aux modes I et II sont les mêmes pour les configurations  $(90^\circ / -\theta / \theta)$  et  $(90^\circ / \theta / -\theta)$ . Néanmoins, les déplacements singuliers associés au mode III sont anti-symétriques comme l'illustre la figure (2.17) pour  $\theta = 45^\circ$  et  $\theta = -45^\circ$ .

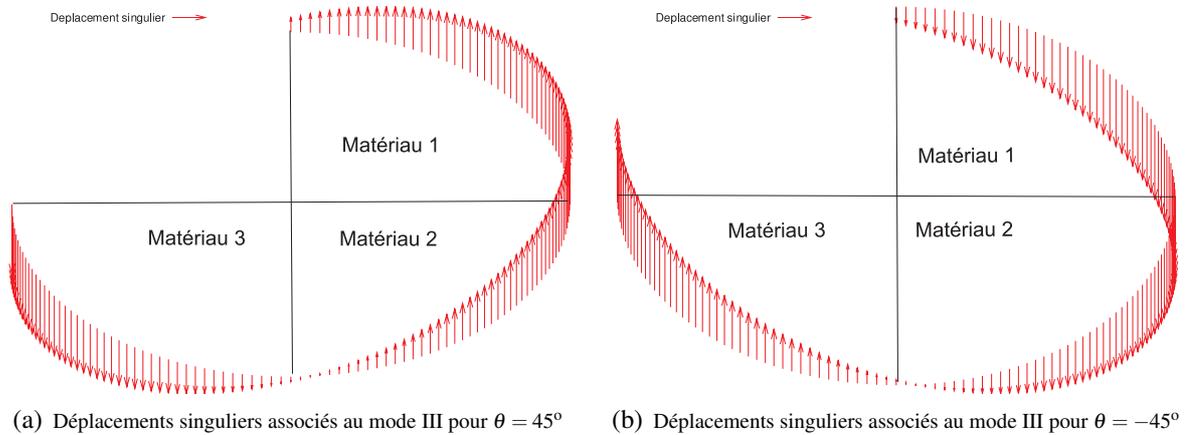


FIG. 2.17 – Déplacements singuliers associés au mode III

Ces résultats sont en accord avec ceux de Chen [Che01].

## 2.6 Bi-matériaux isotropes avec condition de frottement

Cet exemple, étudié initialement par Mugadu [Mug02], traite le cas de deux matériaux isotropes mis en contact avec un frottement de Coulomb. Dans cet exemple, les deux matériaux sont de même nature avec des constantes élastiques identiques. Géométriquement, le premier constitue un demi-plan et le deuxième un coin d'angle  $\theta$  (fig. (2.18)).

Mugadu s'est intéressé à ce genre de problème car les applications avec ce type d'interface sont nombreuses dans la vie quotidienne. Citons, à titre d'exemple, les dents d'un engrenage ainsi que la plupart des types de connexions boulonnées.

Remarquons aussi qu'aucune propriété mécanique n'est donnée pour ce cas. En effet, les résultats suivants sont valables quelles que soient les propriétés élastiques, s'il s'agit d'un matériau isotrope. En conséquence, l'exposant de singularité  $\alpha$  ne dépend que de l'angle  $\theta$  et du coefficient de frottement  $\mu$ .

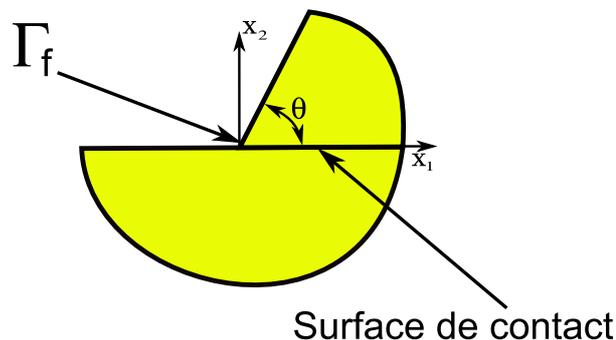


FIG. 2.18 — Contact avec frottement située entre deux mêmes matériaux isotropes

Nous nous intéressons à la variation de l'exposant de singularité avec l'angle d'ouverture  $\theta$  du matériau supérieur, pour un certain nombre de valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ . Ces derniers prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{-0.7; -0.5; -0.3; 0; 0.3; 0.5; 0.7\}$ . Comme dans le premier chapitre,  $\mu$  positif signifie que la partie supérieure glisse vers la droite relativement à la partie inférieure. Dans le cas contraire,  $\mu$  est négatif. Les exposants de singularité sont donnés en figure (2.19).

Le calcul des déplacements montre que chaque mode de rupture élémentaire est associé exclusivement à un exposant de singularité. Le graphique (2.19(a)) montre l'exposant de singularité  $\alpha_1$  associé au mode II tandis que l'autre graphe (2.19(b)) nous donne les autres exposants  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ .  $\alpha_2$  est associé au mode III, il est le même quel que soit  $\mu$ . Quant à  $\alpha_3$ , il est associé au mode I de rupture. Pour ce dernier, deux courbes le représentent correspondant à deux situations distinctes, l'une est associée au cas de l'interface avec frottement, et est indépendante de  $\mu$ , alors que l'autre se rapporte au problème d'un matériau entaillé, en l'absence d'interface (V-notch).

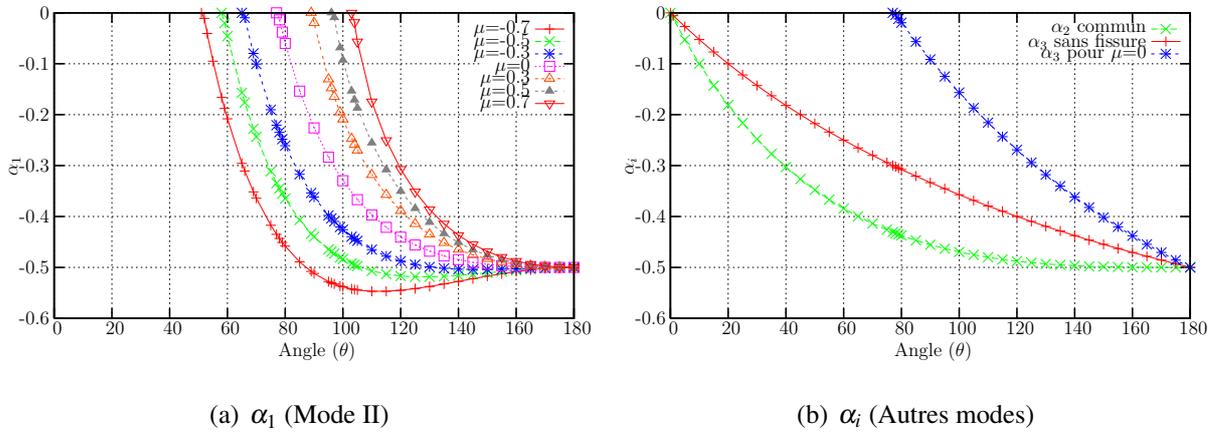


FIG. 2.19 – Exposants de singularité  $\alpha$  en fonction de l'angle  $\theta$

En ce qui concerne le mode II, pour un angle  $\theta$  donné, le comportement singulier en contrainte est d'autant plus sévère que le coefficient de frottement est petit, tandis que les coefficients associés aux autres modes sont inchangés ; ceci s'explique par nos hypothèses de départ, stipulant une interface de frottement unidirectionnel.

De plus, toutes les courbes convergent vers le même exposant de singularité  $\alpha = -0.5$  lorsque  $\theta$  tend vers  $180^\circ$ .

Sur la figure (2.19(b)), une différence est visible entre les deux exposants  $\alpha_3$  (l'un lié à l'interface de frottement et l'autre au problème d'entaille sans interface) notamment sur l'amorçage du comportement singulier qui se fait dès que  $\theta$  vaut  $0^\circ$  pour la condition de continuité parfaite, alors qu'elle s'effectue pour  $\theta$  égal à  $77^\circ$  dans l'autre cas.

Ces résultats sont cohérents avec ceux de Mugadu [Mug02].

## 2.7 Bi-matériaux anisotropes avec conditions de continuité ou de frottement

Dans cet exemple traité par Poonsawat [Poo01], deux couches de Carbone/Epoxyde sont en contact avec une interface de frottement unidirectionnel comme définie dans l'équation (1.65).

La couche supérieure, avec un bord incliné d'angle  $\theta$ , s'appuie sur la couche inférieure comme montré sur la figure (2.20).

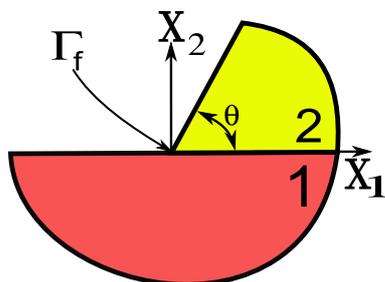


FIG. 2.20 – Fissure de délaminage d'un bi-matériaux anisotropes avec contact frottant

Les propriétés élastiques d'une couche dans le repère matériau sont données dans le tableau (2.6).

TAB. 2.6 – Propriétés élastiques d'une couche de Carbone/Epoxyde dans le repère matériau.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
137.9	14.48	14.48	5.86	5.86	5.86	0.21	0.21	0.21

La variation de l'exposant de singularité  $\alpha$  en fonction de l'angle  $\theta$  est étudiée tout d'abord dans le cas d'une interface avec une condition de continuité en déplacements et contraintes puis dans le cas d'un coefficient de frottement positif  $\mu = +0.5$  (fig. (2.22)) et finalement dans le cas d'un coefficient de frottement négatif  $\mu = -0.5$  (fig. (2.23)). Rappelons que  $\mu$  positif signifie que la partie supérieure glisse vers la droite relativement à la partie inférieure. Dans le cas contraire  $\mu$  est négatif.

Dans les figures (2.21)-(2.22)-(2.23), la partie réelle de  $\alpha$  est donnée en ligne continue tandis que sa partie imaginaire est donnée en pointillés. Sur chacune de ces figures, différentes configurations  $[\phi^1/\phi^2]$  sont traitées.

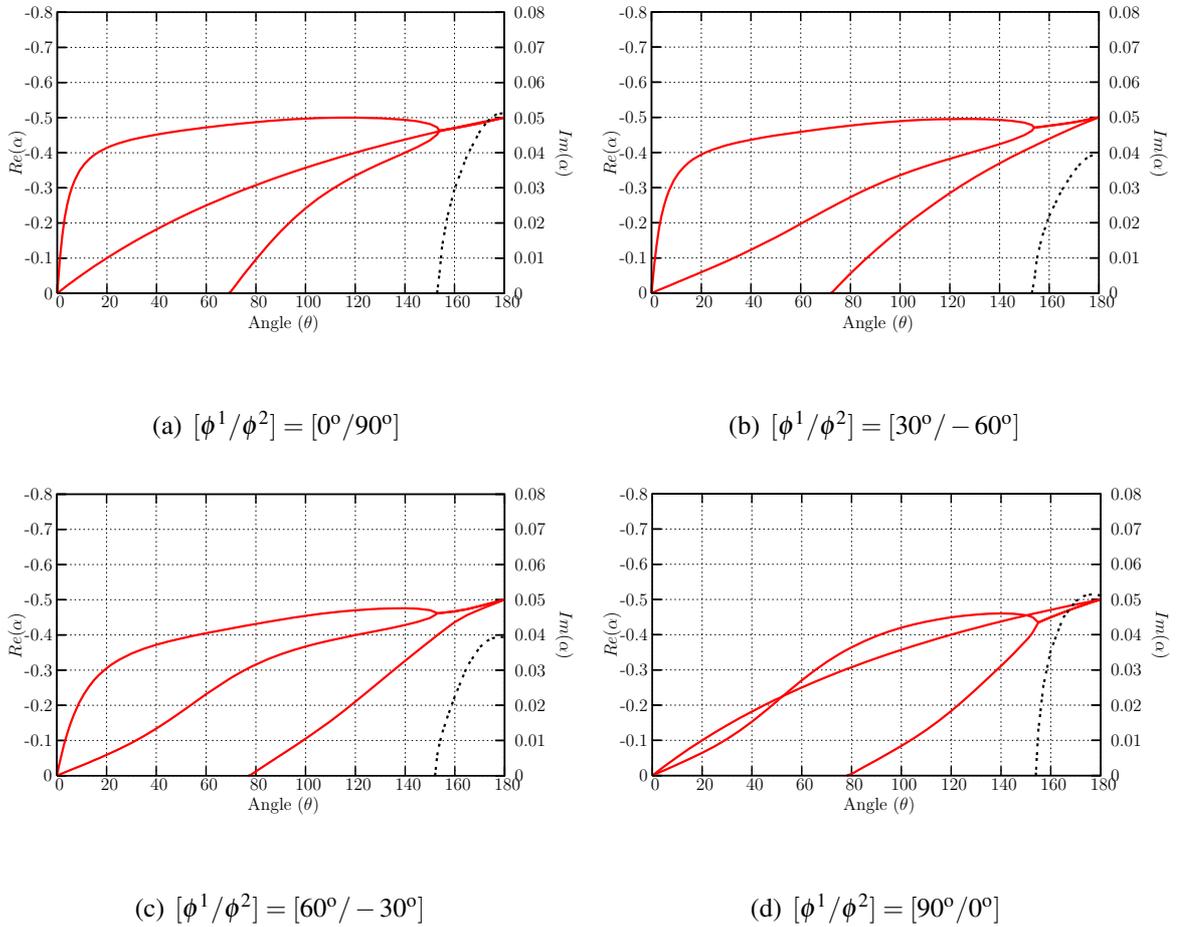


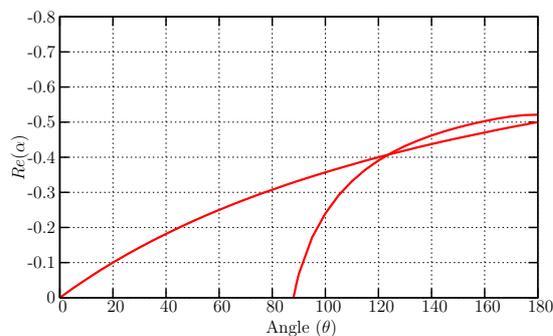
FIG. 2.21 – Exposants de singularité de contrainte  $\alpha$  pour un bi-matériaux de Carbone/Epoxyde avec condition de continuité en déplacements et contraintes

Dans le cas d'une condition de continuité en déplacements et en contraintes entre les deux matériaux, la figure (2.21) montre qu'il faut distinguer deux cas,  $\theta$  inférieur ou non à  $150^\circ$ . En effet, pour toute valeur de  $\theta$  inférieure à  $150^\circ$ , l'exposant de singularité  $\alpha$  est un réel. De plus, il n'y a que deux exposants de singularité associés aux modes I et II tant que  $\theta$  reste inférieur à  $70^\circ$ . Au-delà de cette limite, le mode III intervient avec l'apparition d'un 3<sup>ème</sup> exposant de singularité. Pour toute valeur de  $\theta$  supérieure à  $150^\circ$ , nous obtenons une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

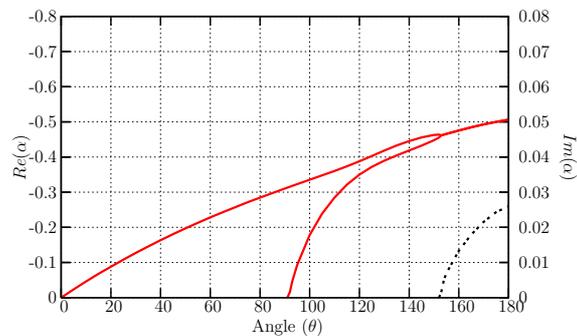
Dans le cas d'une fissure plane ( $\theta=180^\circ$ ), nous retrouvons les exposants de singularité typiques du délaminage, à savoir  $-0.5$  et  $-0.5 \pm \zeta i$ , où  $\zeta$  est un nombre réel.

La figure (2.22) donne la variation des exposants de singularité en fonction de l'angle d'ouverture

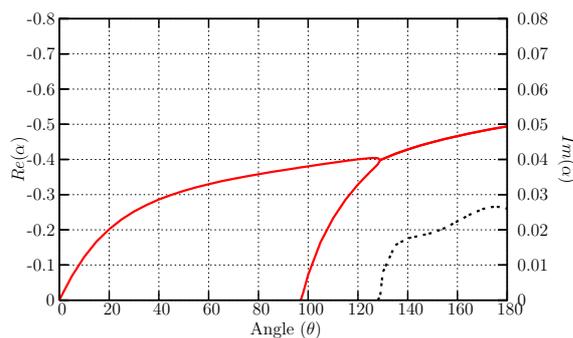
$\theta$  pour un coefficient de Coulomb  $\mu$  égal à 0.5.



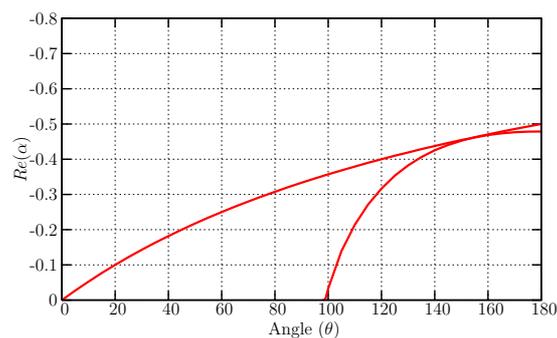
(a)  $[\phi^1/\phi^2] = [0^\circ/90^\circ]$



(b)  $[\phi^1/\phi^2] = [30^\circ/-60^\circ]$



(c)  $[\phi^1/\phi^2] = [60^\circ/-30^\circ]$



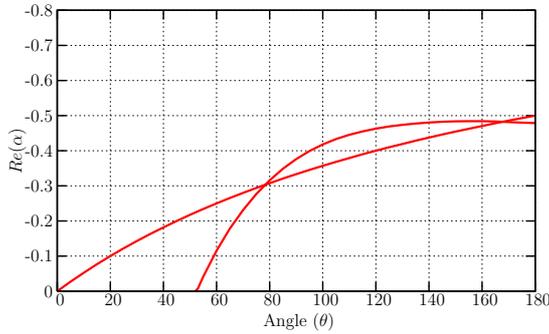
(d)  $[\phi^1/\phi^2] = [90^\circ/0^\circ]$

FIG. 2.22 — Exposants de singularité de contrainte  $\alpha$  pour un bi-couches de Carbone/Epoxyde avec la condition de frottement positif  $\mu = +0.5$

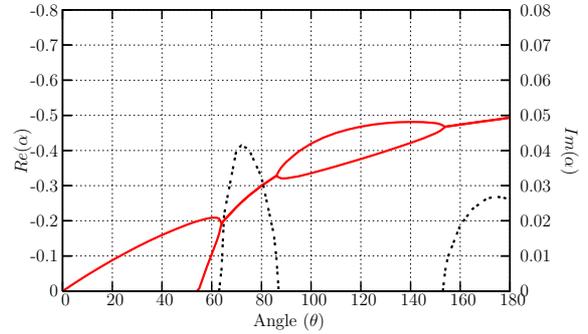
Sur les figures (2.22(a)-(b)-(c)-(d)), deux exposants de singularité sont obtenus, quel que soit l'angle  $\theta$ , l'un (associé au mode I) se déclenche dès les premières variations de  $\theta$ , tandis que l'autre (associé au mode III) s'amorce pour  $\theta$  proche de  $90^\circ$ .

Remarquons aussi que dans les stratifications  $[0^\circ/90^\circ]$  et  $[90^\circ/0^\circ]$ , pour  $\theta$  égal à  $180^\circ$ , la partie réelle d'une des racines est différente de  $-0.5$ .

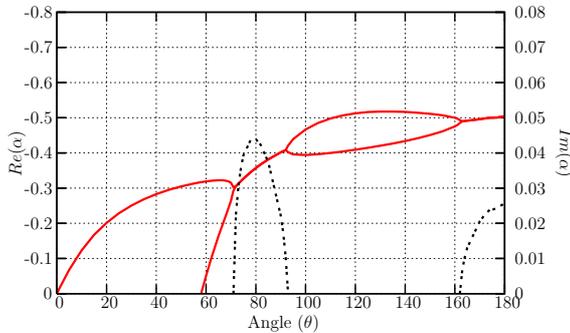
Passons au cas d'un frottement négatif. Les figures (2.23(a)-(b)-(c)-(d)) reprennent les mêmes séquences d'empilement qu'auparavant, pour  $\mu$  égal à  $-0.5$ .



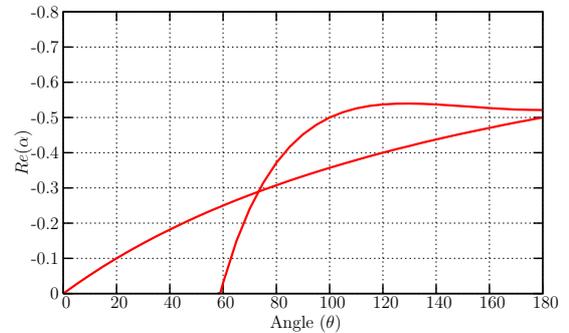
(a)  $[\phi^1/\phi^2] = [0^\circ/90^\circ]$



(b)  $[\phi^1/\phi^2] = [30^\circ/-60^\circ]$



(c)  $[\phi^1/\phi^2] = [60^\circ/-30^\circ]$



(d)  $[\phi^1/\phi^2] = [90^\circ/0^\circ]$

FIG. 2.23 — Exposants de singularité de contrainte  $\alpha$  pour un bi-couches de Carbone/Epoxyde avec la condition de frottement négatif  $\mu = -0.5$

Comme pour le cas du frottement positif, nous sommes en présence d'uniquement deux exposants de singularité comme le montrent les figures (2.23(a)-(b)-(c)-(d)). Chacun de ces exposants est associé à un mode de rupture ; le premier, apparaissant dès  $\theta = 0^\circ$ , est associé au mode I et le second est associé au mode III. Cependant, le mode III s'initie pour un angle d'ouverture  $\theta$  plus petit que pour un coefficient de frottement positif. Les deux séquences  $[0^\circ/90^\circ]$  et  $[90^\circ/0^\circ]$  engendrent chacune deux racines réelles tandis que les autres séquences font apparaître une alternance de racines réelles et complexes.

Ces résultats sont conformes à ceux trouvés par Poonsawat [Poo01].

Remarquons aussi que pour les stratifications  $[0^\circ/90^\circ]$  et  $[90^\circ/0^\circ]$ , une courbe est commune quelle que soit la condition d'interface. Ce résultat était prévisible puisque cette courbe représente l'exposant de singularité associé au mode I, celui-ci ne dépendant pas des conditions de frottement

relatif à la seule direction  $\mathbf{X}_1$ .

Ces résultats sont aussi en accord avec ceux de Poonsawat [Poo01].

## 2.8 Entaille dans un matériau avec différentes conditions imposées sur les lèvres

Après avoir testé certaines configurations soumises aux conditions de continuité, libres de contrainte et de frottement, attardons-nous sur la condition de déplacements imposés.

Cet exemple, traité par Chue [Chu01] et Williams [Wil52], illustre une couche de Graphite/Epoxyde entaillée. L'angle d'ouverture de l'entaille dépend d'un paramètre  $\theta$ , tel que l'entaille vaut  $2\pi - 2\theta$  (voir fig. (2.24)).

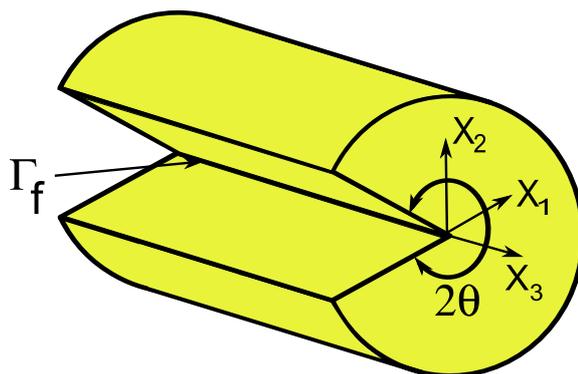


FIG. 2.24 — Entaille d'ouverture  $360^\circ - 2\theta$  dans un Graphite/Epoxyde unidirectionnel dont le front de fissure est parallèle à  $\mathbf{X}_3$

Ici, les repères structure et matériau sont confondus ( $\phi^1 = 0^\circ$ ), et les caractéristiques élastiques sont définies dans le tableau (2.7).

TAB. 2.7 — Propriétés élastiques d'une couche de Carbone/Epoxyde dans le repère matériau.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
137.9	14.48	14.48	5.86	5.86	5.86	0.21	0.21	0.21

L'étude est réalisée pour deux valeurs de  $\theta$ , égales à  $100^\circ$  et  $135^\circ$ .

En ce qui concerne les conditions aux limites, nous supposons, dans un premier temps, des dé-

placements imposés nuls sur les deux lèvres de la fissure ( $u_1(\pm\theta) = u_2(\pm\theta) = u_3(\pm\theta) = 0$ ) puis, dans un second temps, nous fixons des déplacements nuls sur la lèvre supérieure ( $u_1(+\theta) = u_2(+\theta) = u_3(+\theta) = 0$ ) tandis que la lèvre inférieure est libre de contrainte ( $\sigma_\theta(-\theta) = \sigma_{\theta r}(-\theta) = \sigma_{\theta z}(-\theta) = 0$ ).

L'ensemble des résultats est donné dans le tableau (2.25).

Il est à noter que le problème plan et le problème transversal sont découplés (voir définition en section (1.7.1)), ce qui engendre un exposant de singularité propre au mode III. Étant donné que Kuo [Kuo74] ne résout que le problème plan, nous complétons ses résultats avec ceux de Ma [Ma89] lequel traite uniquement le problème transversal.

FIG. 2.25 – Comparaison des exposants de singularité d'un matériau entaillé avec différentes conditions sur les interfaces.

	Présent	Chue [Chu01]	Williams [Wil52]	Ma [Ma89]
$2\theta$	Les deux lèvres sont fixes			
200°	-0.146 -0.0481 -0.1	-0.146 -0.0478 -0.1	-0.146 -0.0478	-0.1
270°	-0.404 -0.241 -0.333	-0.404 -0.241 -0.333	-0.404 -0.241	-0.333
$2\theta$	Une lèvre est fixe et l'autre est libre de contrainte			
200°	-0.547 $\pm 0.079i$ -0.55	-0.547 $\pm 0.078i$ -0.55	-0.547 $\pm 0.078i$	-0.55
270°	-0.658 $\pm 0.035i$ -0.667	-0.658 $\pm 0.034i$ -0.667	-0.658 $\pm 0.0342724i$	-0.667

Nous pouvons tout de suite remarquer que les contraintes sont plus sévères lorsqu'une seule lèvre est fixe que dans le cas où les deux lèvres sont fixes.

Sans surprise, nous constatons aussi que plus l'angle d'ouverture  $\theta$  est obtu et plus les exposants

de singularité sont élevés, quelles que soient les conditions aux limites.

Nos résultats sont en accord avec ceux des différents auteurs pré-cités.

## 2.9 Bord droit d'un bi-matériaux orthotropes

Dans les exemples précédents, les lignes singulières résultaient toujours d'une entaille présente entre deux ou plusieurs matériaux ou de la présence d'une fissure. Cependant, près des bords libres et autour des changements de séquence d'empilement, apparaissent aussi des contraintes dans la direction normale au plan de la plaque. Ces contraintes ont été mises en évidence par Pipes et Pagano [Pip70] au moyen d'un modèle de couche limite.

Considérons le bord droit d'une plaque bi-couches [ $\phi^1/\phi^2$ ] (voir fig. (2.26)). Nous allons traiter ce problème, dans un premier temps, avec la condition de continuité en déplacements et contraintes entre le deux couches, puis dans un second temps, avec une condition de frottement.

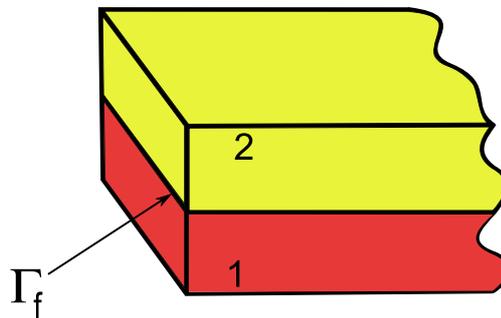


FIG. 2.26 – Bord droit d'un bi-couches

Les propriétés élastiques d'une couche homogénéisée sont celles d'un Carbone/Epoxyde et sont récapitulées dans le tableau (2.8).

TAB. 2.8 – Propriétés élastiques d'un pli de Carbone/Epoxyde dans le repère local.

$E_1$ (psi)	$E_2$ (psi)	$E_3$ (psi)	$G_{12}$ (psi)	$G_{23}$ (psi)	$G_{13}$ (psi)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
20	2.1	2.1	0.85	0.85	0.85	0.21	0.21	0.21
$1 \text{ psi} = 0.006895 \text{ MPa}$								

## Chapitre 2 : VALIDATION DU CODE DE SURCONTRAINTES

L'exemple consiste à faire varier les deux angles  $\phi^1$  et  $\phi^2$  par pas de  $15^\circ$ . Le tableau (2.9) donne l'évolution de la valeur du seul exposant de singularité, associé au mode I, en fonction des différentes orientations.

TAB. 2.9 — Exposants de singularité  $\alpha$  dans le cas d'un bord libre avec une condition de continuité en contraintes et déplacements entre deux matériaux anisotropes .

$\phi^2 \backslash \phi^1$	$-90^\circ$	$-75^\circ$	$-60^\circ$	$-45^\circ$	$-30^\circ$	$-15^\circ$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
$0^\circ$	-0.0334	-0.0328	-0.0287	-0.0206	-0.0105	-0.0027	-	-0.0027	-0.0105	-0.0206	-0.0287	-0.0328
$15^\circ$	-0.0294	-0.0303	-0.0296	-0.0250	-0.0173	-0.0089	-0.0027	-	-0.0037	-0.0134	-0.0234	-0.0292
$30^\circ$	-0.0199	-0.0229	-0.0268	-0.0270	-0.0234	-0.0173	-0.0105	-0.0037	-	-0.0044	-0.0137	-0.0202
$45^\circ$	-0.0097	-0.0131	-0.0203	-0.0256	-0.0270	-0.0250	-0.0206	-0.0134	-0.0044	-	-0.0038	-0.0095
$60^\circ$	-0.0026	-0.0047	-0.0117	-0.0203	-0.0268	-0.0296	-0.0287	-0.0234	-0.0137	-0.0038	-	-0.0020
$75^\circ$	-0.0001	-0.0006	-0.0047	-0.0131	-0.0229	-0.0303	-0.0328	-0.0292	-0.0202	-0.0095	-0.0020	-
$90^\circ$ -	-	-0.0026	-0.0097	-0.0199	-0.0294	-0.0334	-0.0294	-0.0199	-0.0097	-0.0097	-0.0026	-0.0001

Quelques séquences d'empilement, avec le même matériau, ont aussi été traitées par Destyunder [Des81] et Yeh [Yeh86] notamment pour un bi-couches symétrique ayant des orientations de fibres égales à  $\pm 45^\circ$  et  $\pm 60^\circ$  (2.10). Le premier traite ce problème en passant par les potentiels complexes dans un contexte bidimensionnel alors que le second le résout par la méthode des éléments finis.

TAB. 2.10 — Exposants de singularité  $\alpha$  dans le cas d'un bord libre avec une condition de continuité en contraintes et déplacements entre deux matériaux anisotropes.

	Destyunder	Yeh	Présent
$\phi^1 = 45^\circ / \phi^2 = -45^\circ$	-0.0258	-0.0255	-0.0256
$\phi^1 = 60^\circ / \phi^2 = -60^\circ$	-0.0115	-0.0116	-0.0117

Notons tout d'abord que les configurations  $[\theta/\theta]$  ne sont pas sujettes à un état singulier. Les contraintes interlaminaires sont alors inexistantes et, par conséquent, la théorie classique des laminés peut être appliquée.

Les états singuliers les plus sévères apparaissent pour un écart d'angles  $(|\theta_1 - \theta_2|)$  supérieur à  $75^\circ$ . En effet, dans ces configurations, l'effort des fibres de la couche supérieure est transmis à la matrice de la couche inférieure ; les configurations les plus critiques sont  $[-90^\circ/0^\circ]$  et  $[-15^\circ/90^\circ]$ .

Les résultats obtenus sont très voisins de ceux obtenus par Destynder [Des81] et Yeh [Yeh86].

Modifions maintenant les conditions d'interface ; nous supposons ici un contact frottant entre les deux matériaux.

Suite à des considérations géométriques et mécaniques, la singularité obtenue pour une séquence  $[\phi^1/\phi^2]$  avec un coefficient de Coulomb positif est égale à celle obtenue par la séquence  $[-\phi^2/-\phi^1]$  avec le même coefficient de Coulomb mais pris négativement. Pour cette raison, un seul cas sera traité par la suite. Rappelons que  $\mu$  positif signifie que la partie supérieure glisse vers la droite relativement à la partie inférieure. Dans le cas contraire  $\mu$  est négatif.

Le tableau (2.11) donne les exposants de singularité pour  $\mu = +0.5$ .

TAB. 2.11 — Exposants de singularité  $\alpha$  dans le cas d'un bord libre entre deux matériaux en frottement anisotropes avec  $\mu = +0.5$ .

$\phi^2 \backslash \phi^1$	$-90^\circ$	$-75^\circ$	$-60^\circ$	$-45^\circ$	$-30^\circ$	$-15^\circ$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$
$0^\circ$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
$15^\circ$	-	-	-	-	-	-0.0089	-0.0122	-	-	-	-	-
$30^\circ$	-	-	-	-	-0.0234	-0.0443	-0.0448	-0.0302	-	-	-	-
$45^\circ$	-	-	-	-0.0256	-0.0693	-0.0895	-0.0897	-0.0754	-0.0461	-	-	-
$60^\circ$	-	-	-0.0117	-0.0663	-0.1092	-0.1303	-0.1330	-0.1217	-0.0951	-0.0508	-	-
$75^\circ$	-	-0.0006	-0.0306	-0.0820	-0.1253	-0.1491	-0.1556	-0.1473	-0.1224	-0.0790	-0.0283	-
$90^\circ$	-	-0.0033	-0.0310	-0.0805	-0.1246	-0.1504	-0.1585	-0.1504	-0.1246	-0.0805	-0.0310	-0.0033

Les singularités les plus sévères apparaissent pour  $\phi_1$  est égal à  $0^\circ$ .

En comparant les tableaux (2.9) et (2.11), nous pouvons observer que quel que soit  $[\phi_1/\phi_2]$ , la singularité est plus sévère dans le cas d'un bord libre avec frottement que dans celui d'un bord libre avec condition de continuité en contraintes et déplacements.

Ces résultats sont en accord avec ceux de Poonsawat [Poo01].

## 2.10 Problème d'un rivet dans un bi-couches

Finalement, un exemple original est proposé, celui d'un insert plongé dans un bi-couches. En effet, les inserts dans les structures stratifiées sont souvent sources d'amorçage de fissure. Cepen-

dant, le problème des singularités introduites est difficile à résoudre en raison de son caractère tridimensionnel. Sa résolution par la méthode des éléments finis, comme le fait Noirot [Noi00], nécessite un maillage local fin, augmentant fortement la taille du problème.

**Néanmoins, grâce à la formulation présentée au chapitre 1, la résolution de ce type de problème, présentant une courbure, est facilement accessible.**

Ici, chaque couche est constituée de Carbone/Epoxyde tandis que le rivet est en aluminium. Les propriétés élastiques de chaque matériau sont données dans le tableau (2.12) . Concernant le bi-couches, l'orientation des fibres est fixée à  $[45^\circ / -45^\circ]$ . La figure (2.27) montre la moitié du problème.

TAB. 2.12 – Propriétés élastiques de l'Aluminium et d'une couche de Graphite/Epoxyde.

	$E_{11}$ (MPa)	$E_{22}$ (MPa)	$E_{33}$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$G_{13}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$
Graphite/Epoxyde	137.9	14.48	14.48	5.86	5.86	5.86	0.21	0.21	0.21
Aluminium	72.			27.07			0.33		

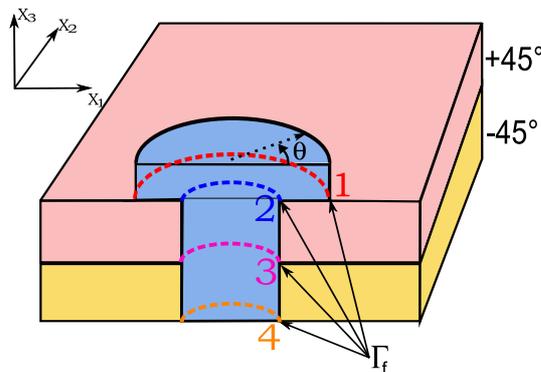


FIG. 2.27 – Demi-problème d'un rivet plongé dans un bi-couches de Carbone/Epoxyde

Quatre lignes devraient être, *a priori*, sujettes à un comportement singulier, ce qui sera confirmé ou non par notre code de calcul. La première ligne se situe au bord de la tête du rivet reposant sur la surface extérieure du composite. La seconde ligne se trouve à l'intersection du pli supérieur avec le rivet au niveau du trou. La troisième ligne concerne une discontinuité de propriétés mécaniques. Et finalement, la dernière ligne est un bord libre entre deux matériaux différents.

Étant donné que le rivet au niveau des lignes singulières a une forme cylindrique de révolution, ces 4 lignes singulières sont des cercles. La position d'un point sur chacun de ces cercles est donnée par le rayon du cylindre et par l'angle  $\theta$  défini sur la figure (2.27).

Les figures (2.28) illustrent l'évolution de l'exposant de singularité  $\alpha$  en fonction de l'angle  $\theta$  défini sur la figure (2.27). Il est à noter que la résolution des problèmes des quatre lignes singulières se fait simultanément dans notre code de calcul.

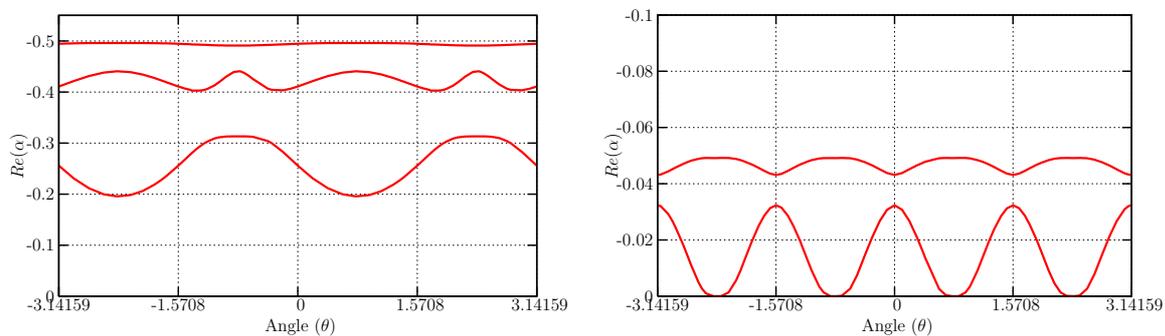
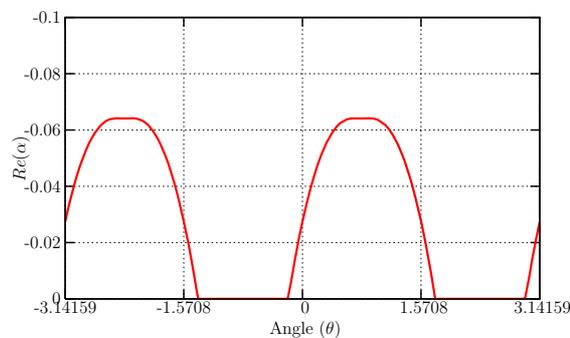
(a) 1<sup>ère</sup> ligne singulière(b) 3<sup>ème</sup> ligne singulière(c) 4<sup>ème</sup> ligne singulière

FIG. 2.28 — Exposants de singularité relatifs au problème d'un rivet plongé dans un bi-couches de séquence  $[45^\circ / -45^\circ]$ , pour les diverses lignes singulières

Avant tout, remarquons qu'aucune solution relative à la ligne n°2 n'est graphiquement représentée, car celle-ci n'est pas sujette à un comportement singulier.

Concernant les autres singularités illustrées dans les figures (2.28), nous observons une périodicité de phase  $\pi$ . Ceci est la conséquence d'une symétrie "miroir" du problème physique et des pro-

priétés mécaniques. Cependant, la ligne singulière n° 3 présente une périodicité de phase  $\frac{\pi}{2}$ . En effet, si nous nous plaçons sur un point du cercle n° 2, un angle  $\theta$  correspond à une stratification  $[\phi^1/\phi^2]$ , donc à un angle  $\theta + \pi/2$  correspond la stratification  $[\phi^2/\phi^1]$ , impliquant ainsi une périodicité d'angle  $\pi/2$ .

Remarquons aussi que l'exposant de singularité le plus élevé est obtenu pour la ligne n° 1.

## 2.11 Conclusion

Dans cette partie, un recalage du code qui calcule les exposants de singularité ainsi que les contraintes et déplacements singuliers a été effectué sur divers exemples issus de la littérature. Ces exemples traitent des cas de mono ou multi-matériaux isotropes et/ou anisotropes avec des conditions d'interface variées comme les conditions de continuité, de surface libre, de déplacement imposé ou de frottement de Coulomb.

Nous avons montré que la méthode proposée donne des résultats en parfait accord avec ceux de plusieurs auteurs utilisant des méthodes différentes. De plus, les temps de calcul sont très faibles puisque, prenons le cas de l'insert, par exemple, avec ses 4 lignes singulières, les temps de calcul n'excèdent pas la seconde, sur un ordinateur cadencé à 2GHz.

Néanmoins, il serait sans doute hasardeux de tirer des conclusions trop hâtives sur l'état des champs mécaniques. En effet, indépendamment de la validité très discutable du modèle linéaire, l'importance d'une singularité est liée non seulement à son exposant mais aussi aux facteurs d'intensité des contraintes. Des méthodes d'évaluation de ces paramètres font l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre 3

## Les éléments finis enrichis

### Sommaire

---

3.1	Position du problème . . . . .	58
3.2	Différents modèles d'éléments finis . . . . .	60
3.3	Éléments Métis de déplacement régulier et singulier . . . . .	67
3.4	Éléments de déplacement pur régulier et singulier . . . . .	76
3.5	Quelques mots sur le schéma d'intégration . . . . .	79
3.6	Conclusion . . . . .	88

---

### 3.1 Position du problème

L'objet de ce chapitre est de déterminer un paramètre aidant à caractériser la rupture sur les lignes singulières. Dans notre cas, nous travaillerons sur les facteurs d'intensité des contraintes  $K_i$  (équation (1.67)). Pour déterminer ces grandeurs, il est nécessaire de connaître la géométrie de la structure ainsi que les chargements appliqués à celle-ci. Nous utiliserons la méthode des éléments finis pour résoudre le problème.

Lorsqu'un problème de fissures est simulé numériquement, la difficulté réside dans l'estimation précise des champs des contraintes et des déformations qui doivent être singuliers comme le prédit la théorie de la mécanique linéaire de la rupture.

Cette difficulté a été identifiée et démontrée relativement tôt dans le développement des éléments finis, notamment par Chan [Cha70]. Elle s'explique par l'utilisation de fonctions de type polynomial peu propices à représenter des singularités dans la formulation des éléments finis classiques. Pour palier ces difficultés, une des méthodes proposées est d'utiliser un maillage fin local près des lignes singulières, ce qui est quasi-indispensable pour obtenir une bonne estimation de ces champs mécaniques.

Cependant, on comprend aisément que dans le but d'obtenir une économie de coût numérique, une limitation du nombre d'éléments finis est souhaitable tout en préservant une précision satisfaisante des résultats. Ceci a conduit à l'élaboration de nouvelles méthodes d'éléments finis traitant de problèmes fissurés.

Une avancée significative (et l'une des plus connues) dans l'utilisation des éléments finis pour la mécanique élastique linéaire de la rupture fut l'apparition de la technique du "nœud de quart" introduite par Henshell [Hen75] et Barsoum [Bar76]. Ces chercheurs ont montré que les déplacements en fond de fissure, ainsi que les champs des contraintes et des déformations, peuvent être modélisés en manipulant certains nœuds dans un élément quadratique. La technique consiste à déplacer les nœuds du milieu, B et C, au quart du côté de l'élément, B' et C', en se rapprochant du nœud singulier A. Ce processus engendre alors une singularité dans la transformation entre les

coordonnées d'espace paramétrique de l'élément et d'espace cartésien (fig. (3.1)) permettant aux champs des contraintes et des déformations d'être inversement proportionnels à la racine carrée de la distance d'un point au front de fissure.

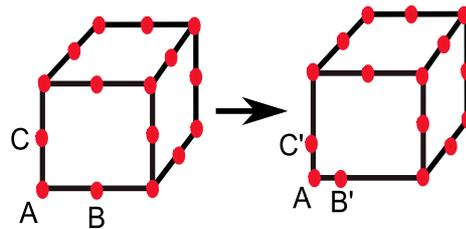


FIG. 3.1 — Élément quadratique - Élément quadratique de Barsoum centré sur le point A

Ce procédé permet d'obtenir une bonne estimation des déformations et des contraintes en fond de fissure avec un maillage légèrement plus lâche.

Ces méthodes associées à des techniques comme l'intégrale-J (Rice [Ric68]), la  $\theta$ -méthode (Destuynder [Des81]), l'intégrale-M (Yau [Yau84]) et bien d'autres, permettent d'obtenir par post-traitement des paramètres pertinents vis-à-vis de la mécanique de la rupture (Facteurs d'Intensité des Contraintes (FIC), Taux de restitution d'énergie, etc. ).

Dans un registre différent, un certain nombre de chercheurs (Byskov [Bys70], Tracey [Tra71], Tong [Ton73], Papaioannou [Pap74], Alturi [Atl75] & Benzley [Ben74], etc.) ont proposé des formulations spéciales d'éléments finis qui consistent à enrichir l'approximation par éléments finis par des fonctions additionnelles singulières pour différents types d'éléments finis. Melenk [Mel96], avec la méthode dite "de la partition de l'unité", propose un cadre mathématique général pour l'enrichissement de ces éléments en y ajoutant des degrés de liberté. Concrètement, cela veut dire que la structure sera discrétisée en deux types d'éléments, "réguliers" et "singuliers" [Ngu06b]. Dans les éléments singuliers, un terme enrichissant permettra de libérer le maillage. Avec un bon choix de fonctions additionnelles, le cas des multi-matériaux peut être traité sans aucune difficulté.

Dans cette thèse, nous proposons de travailler sur deux types de formulations par éléments finis. La première, proposée par Nguyen Dang [Ngu78], est un élément fini hybride original, dit "Métis", et la deuxième est le modèle en déplacement pur. La différence entre ces deux méthodes, outre leur formulation, réside dans l'enrichissement simple ou double. L'élément Métis, basé sur une approche hybride, permet d'enrichir les champs des contraintes et des déplacements, tandis que pour l'autre formulation, seul le champ des déplacements sera enrichi.

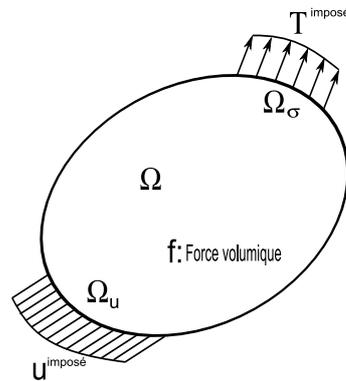
Pour ce faire, nous nous baserons sur les fonctions additionnelles décrites dans le chapitre 1. L'introduction de ces fonctions dans les deux types de modélisation donne une indication sur les facteurs d'intensité des contraintes dans un contexte général. En effet, notre approche permet de résoudre des cas où l'exposant de singularité  $\alpha$  n'est pas nécessairement égal à  $-\frac{1}{2}$  comme dans le cas des fissures ouvertes (V-notch), ou des cas de lignes singulières se situant sur un bord libre à la jonction d'un multi-matériaux, ce qui est imprécis avec la méthode de Barsoum par exemple.

## 3.2 Différents modèles d'éléments finis

### 3.2.1 Principe général

La méthode des éléments finis permet de trouver une solution approchée à un problème aux limites (Sollicitation, condition de type Dirichlet, Neumann ou Robin) dans un domaine  $\Omega$ , en discrétisant ce dernier en sous-domaines  $\Omega_e$  de formes simples appelés mailles ou éléments finis ( $\Omega = \bigcup \Omega_e$ ). Il s'agit aussi de mettre en place, à l'aide des principes hérités de la formulation variationnelle ou formulation faible (basée sur une fonctionnelle  $\Pi$ ), un algorithme de discrétisation permettant de rechercher une solution approchée. Ainsi, le choix de la fonctionnelle  $\Pi$  avec les conditions que doivent respecter ses variables (contraintes et déplacements) est une étape primordiale pour la précision des champs mécaniques.

La figure (3.2) montre une structure quelconque  $\Omega$  dans laquelle une partie  $\Omega_u$  subit un déplacement imposé  $\mathbf{u}^{\text{imposé}}$  et sur laquelle une partie  $\Omega_\sigma$  est soumise à une tension imposée  $\mathbf{T}^{\text{imposé}}$ . L'ensemble de la structure est assujéti à une force volumique  $\mathbf{f}$ .

FIG. 3.2 — Structure  $\Omega$  avec conditions limites

Les sections suivantes rappellent quelques modèles d'éléments finis associés à leur fonctionnelle  $\Pi$  et les conditions que doivent respecter ses variables.

### 3.2.2 Modèle de déplacement pur

Ce premier modèle est la méthode la plus utilisée dans les codes industriels. Ici, le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  est cinématiquement admissible ; cela signifie que  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  est compatible dans le domaine  $\Omega$  :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

et que le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  vérifie les conditions aux limites imposées sur  $\Omega_{\mathbf{u}}$  :

$$u_i = u_i^{\text{imposé}} \quad (3.2)$$

Grâce à ces hypothèses, la continuité des déplacements est assurée à l'intérieur de l'élément et d'un élément à l'autre (voir fig. (3.3)).

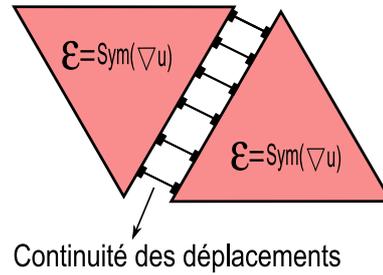


FIG. 3.3 – Conditions intra et inter-éléments pour le modèle en déplacement pur

La fonctionnelle, appelée énergie totale, de ce modèle s'écrit alors :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\top} \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\top} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \mathbf{T}^{\text{imposé}} dS \quad (3.3)$$

Celle-ci prend une valeur minimale lorsque, parmi tous les champs cinématiquement admissibles, nous choisissons celui qui correspond à la solution exacte du problème.

L'annulation de la variation de cette fonctionnelle conduit aux conditions de stationnarité (ou conditions naturelles) qui, dans ce cas, sont une forme faible des équations d'équilibre.

Dans cette situation, le champ des contraintes, déduit du champ des déplacements, vérifie les équations d'équilibre en moyenne, mais pas localement.

### 3.2.3 Modèle d'équilibre pur

Ce deuxième modèle a été initialement introduit par Fraeijns de Veubeke [Fra65]. Il impose aux champs des contraintes d'être statiquement admissibles, ce qui se traduit par la satisfaction dans un premier temps de l'équation d'équilibre à l'intérieur du domaine  $\Omega$  :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (3.4)$$

et par, dans un second temps, la continuité des contraintes sur une partie de surface  $\Omega_{\sigma}$  :

$$\sigma_{ij} \cdot n_j = T_i^{\text{imposé}} \quad (3.5)$$

Par conséquent, les éléments du modèle d'équilibre pur assurent la continuité des contraintes à l'intérieur de l'élément et d'un élément à l'autre (voir fig. (3.4)).

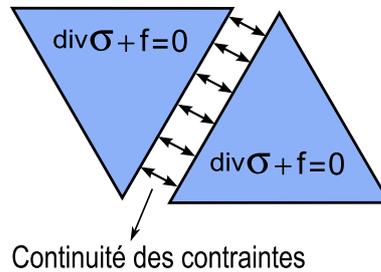


FIG. 3.4 – Conditions intra et inter-éléments pour le modèle en équilibre pur

La fonctionnelle de ce modèle s'écrit :

$$\Pi(\underline{\sigma}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\sigma}^{\top} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega_u} \mathbf{n}^{\top} \cdot \underline{\sigma} \cdot \mathbf{u}^{\text{imposé}} dS \quad (3.6)$$

Remarquons que cette fonctionnelle est l'énergie complémentaire totale du système, de plus elle est duale à celle du modèle en déplacement pur (3.3). Ainsi, le champ des déplacements déduit du champ des contraintes ne vérifie les conditions de compatibilité qu'en moyenne et non localement. Ce type de modèle est plus délicat à mettre en œuvre en raison de la difficulté à générer en pratique des champs des contraintes exactement en équilibre.

Les méthodes pures imposent aux champs approchés de vérifier *a priori* les conditions de continuité au travers des frontières des éléments. Cela peut conduire à un manque de flexibilité de l'approche par éléments finis pour un certain nombre de problèmes tels que la flexion des plaques, les composites multi-couches, la mécanique de la rupture, etc.

Afin d'améliorer cette flexibilité, on peut relaxer les conditions de continuité des champs des déplacements ou des contraintes de surface et introduire des conditions *a posteriori* dans les principes variationnels à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Cette idée est le concept de base des éléments finis hybrides.

### 3.2.4 Modèle hybride de déplacement

Le modèle hybride de déplacement, introduit initialement par Jones [Jon64], se définit par la compatibilité interne du champ des déplacements  $\mathbf{u}$  à l'intérieur de l'élément, tandis que sur les bords, les champs des contraintes  $\underline{\sigma}$  sont tels que la transmission des contraintes de surfaces

s'effectue de manière continue (voir fig. (3.5)).

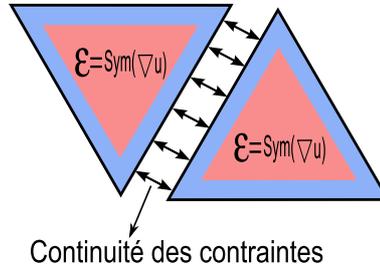


FIG. 3.5 — Conditions intra et inter-éléments pour le modèle hybride de déplacement

Généralement, cette approche ne conduit qu'à une continuité faible du champ des déplacements au travers des frontières des éléments.

Cette méthode est basée sur les principes de minimum de l'énergie potentielle totale :

$$\Pi(\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\top} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\top} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega_u} \mathbf{n}^{\top} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{u}^{\text{imposé}} dS - \int_{\Omega_u \cup \Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.7)$$

Remarquons que si nous imposons la continuité des champs des déplacements  $\mathbf{u}$  entre éléments, nous retrouvons la fonctionnelle caractéristique de la formulation en déplacement pur (3.3).

### 3.2.5 Modèle hybride de contrainte

Le modèle hybride de contrainte, présenté initialement par Pian [Pia64], nécessite une discrétisation du champ des contraintes vérifiant *a priori* les équations d'équilibre en volume à l'intérieur des éléments. Les conditions de continuité des contraintes de surface sont introduites *a posteriori* dans l'énergie complémentaire totale à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Ces derniers représentent physiquement la continuité des champs des déplacements aux frontières des éléments (voir fig. (3.6)).

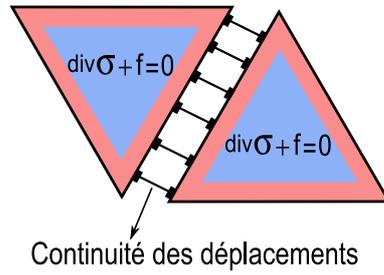


FIG. 3.6 – Conditions intra et inter-élément pour le modèle hybride de contrainte

Cette approche est basée sur la minimisation de l'énergie potentielle complémentaire :

$$\Pi(\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\top} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega_u \cup \Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \mathbf{T}^{\text{imposé}} dS \quad (3.8)$$

En imposant aux champs des contraintes d'être statiquement admissibles, nous retrouvons la fonctionnelle (3.6) caractéristique du modèle d'équilibre pur.

### 3.2.6 Modèle Métis de déplacement

Le modèle Métis de déplacement est une classe particulière de modèle hybride qui constitue un pont entre les modèles classiques à un champ d'inconnues et les modèles à deux champs d'inconnues. En effet, il possède les propriétés de dualité et de monotonie des modèles purs correspondants tout en ayant un comportement de convergence plus rapide, grâce à la souplesse bien connue des modèles hybrides.

Pour ce modèle Métis de déplacement, nous supposons que le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  est cinématiquement admissible sur le bord de l'élément, tandis que le champ des contraintes  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  est un champ arbitraire en équilibre dans  $\Omega$ . En outre, nous imposons la condition d'unisolvance sur le champ des déplacements  $\mathbf{u}$ . Dans ce cas,  $\mathbf{u}$  est défini et continu à l'intérieur de chaque élément et doit être conforme entre éléments (voir fig. (3.7)).

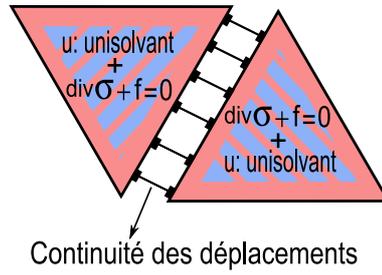


FIG. 3.7 — Conditions intra et inter-éléments pour le modèle Métais de déplacement

La fonctionnelle de ce modèle s'écrit alors :

$$\Pi(\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{\top} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \int_{\Omega_u \cup \Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \mathbf{T}^{\text{imposé}} d\Omega_{\sigma} \quad (3.9)$$

### 3.2.7 Modèle Métais de contrainte

Le modèle Métais de contrainte, dual au modèle Métais de déplacement, impose la continuité des champs des contraintes  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  sur le bord des éléments, tandis que  $\mathbf{u}$  doit être compatible dans l'élément. De plus, la condition d'unisolvance sur  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  (voir fig. (3.8)) est imposée. Cette condition signifie que le champ des contraintes est prolongé à l'intérieur de l'élément par un polynôme complet.

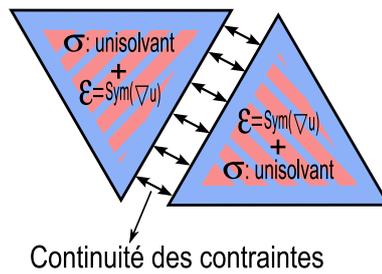


FIG. 3.8 — Conditions intra et inter-éléments pour le modèle Métais de contrainte

Cette approche est basée sur la minimisation de la fonctionnelle suivante :

$$\Pi(\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\top} \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\top} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega_u} \mathbf{n}^{\top} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{u}^{\text{imposé}} dS - \int_{\Omega_u \cup \Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.10)$$

### 3.3 Éléments Métis de déplacement régulier et singulier

#### 3.3.1 Généralités

Ce modèle, initialement proposé par Nguyen Dang [Ngu78], possède plusieurs avantages. Son premier intérêt, est que cet élément possède une convergence monotone décroissante alors qu'elle est oscillante pour un élément hybride quelconque. En outre, pour un maillage fixé, la convergence est plus rapide que celle de l'élément déplacement pur (voir Nguyen Dang [Ngu78] qui le montre grâce à l'analyse convexe) comme illustré sur la figure (3.9).

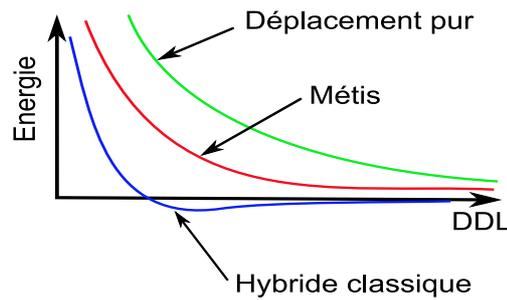


FIG. 3.9 – Convergence vers la solution des différentes formulations d'éléments finis en fonction des degrés de liberté

Le deuxième point d'intérêt est que le Lagrangien peut s'écrire en fonction d'intégrales de volume. En effet, la fonctionnelle d'énergie gouvernant l'élément fini Métis de déplacement pour les matériaux anisotropes, s'écrit avec les notations indicielles :

$$\Pi(\underline{\sigma}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\sigma}^{\top} \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega_{\mathbf{u}} \cup \Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \mathbf{T}^{\text{imposé}} dS \quad (3.11)$$

$\mathbf{T}^{\text{imposé}}$  sont les tractions imposées sur  $\Omega_{\sigma} \partial \Omega_e$   
 $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire tangent à la surface  $\Omega_{\mathbf{u}} \cup \Omega_{\sigma}$

Cette fonctionnelle (3.11) peut être décomposée en une somme de fonctionnelles sur les éléments (ou fonctionnelles élémentaires) :

$$\begin{aligned} \Pi(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}) &= \sum_e \Pi_e(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}) \\ \left\| \begin{aligned} \Pi_e(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^\top \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega_e - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{u}^\top \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{T} dS \\ \Omega_e &\text{ représente le domaine d'un élément fini} \\ \partial\Omega_e &\text{ est la frontière du domaine de l'élément fini } \Omega_e \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Comme nous l'avons écrit précédemment, le champ des contraintes  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  doit être statiquement admissible à l'intérieur de l'élément  $\Omega_e$  et le champ des déplacements  $\mathbf{u}$  doit l'être cinématiquement sur les frontières de celui-ci. Cependant, en plus de ces conditions, nous imposons au champ des déplacements la condition d'unisolvance, ce qui signifie que le champ des déplacements est prolongé à l'intérieur de chaque élément par un polynôme complet.

Ce principe permet de transformer de manière élégante la fonctionnelle (3.12) en une intégrale de volume sans termes de bord :

$$\int_{\partial\Omega_e} \mathbf{u}^\top \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_e} \left[ \text{Tr}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^\top \cdot \text{Sym}(\partial_{\mathbf{M}}\mathbf{u})) + \mathbf{u}^\top \cdot \text{div}_{\mathbf{M}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \right] d\Omega_e \quad (3.13)$$

Étant donné que le champ des contraintes est statiquement admissible à l'intérieur de chaque élément fini, le Lagrangien élémentaire  $\Pi_e(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u})$  prend alors la forme :

$$\Pi_e(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega_e} \left[ \frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\sigma}}^\top \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} - \text{Tr}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^\top \cdot \text{Sym}(\partial_{\mathbf{M}}\mathbf{u})) \right] d\Omega_e + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{u}^\top \cdot \mathbf{T}^{\text{imposé}} dS \quad (3.14)$$

Comme nous le voyons, la fonctionnelle ne comporte que des intégrales de volume ; cela a pour conséquence d'obtenir une évaluation numérique plus précise, surtout quand on traite de matériaux anisotropes. En effet, il est bien connu que les calculs d'intégrales de volume sont plus robustes, plus stables et plus faciles à appliquer dans un code que les calculs d'intégrales sur un contour, qui sont fortement "numerically path-dependent" (le lecteur intéressé pourra aller voir page 300 de Nguyen QS [Ngu00] et le papier de Banks-Sills [Ban97]).

Le troisième point d'intérêt concerne la bonne tenue des éléments Métis vis-à-vis des distorsions géométriques. En traitant une poutre de Saint-Venant soumise à la traction, Crépin [Cre01a] montre

que ces éléments se comportent très bien quel que soit l'angle de distorsion des éléments. Ceci est directement lié au fait que le théorème de Brezzi [Bre91] a servi à la construction de la formulation discrète, de sorte que cette dernière possède les bonnes propriétés de la formulation continue ; celles-ci sont trop souvent absentes dans les formulations mixtes d'éléments tridimensionnels comme dans l'élément hybride de contraintes de [Pia64].

Rappelons que notre objectif est de quantifier précisément les singularités de contrainte et de déplacement près d'une ligne singulière. Pour cela, nous allons enrichir les éléments finis près de la ligne singulière en incorporant la solution asymptotique (1.67) trouvée dans le premier chapitre.

En supposant que ces surcontraintes sont confinées au voisinage immédiat de la ligne singulière, il est raisonnable de les tronquer en les incorporant uniquement au maillage voisin des bords de la ligne singulière  $\Gamma_f$  (voir figure (3.10)). La structure est donc discrétisée en éléments réguliers et singuliers ; les éléments singuliers sont localisés près des bords de la ligne singulière tandis que les autres éléments de la structure sont considérés comme réguliers.

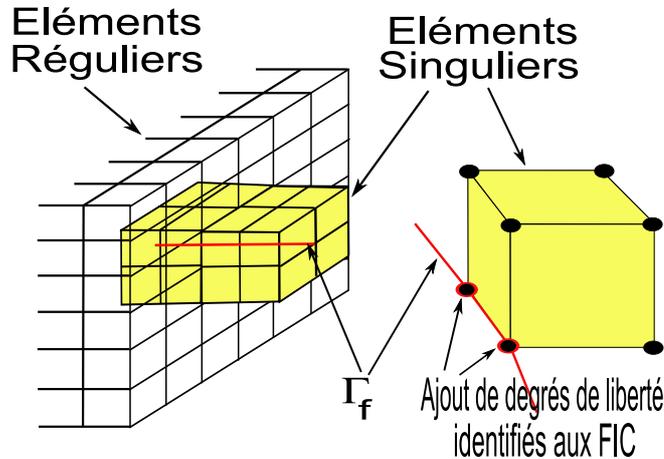


FIG. 3.10 – Maillage d'une structure  $\Omega$  contenant une ligne singulière  $\Gamma_f$  par éléments finis singuliers et réguliers

Dans notre étude, nous supposerons que la fissure ne traverse aucun élément.

Ce type de méthode simple et générale autorise ainsi des maillages relativement lâches sans perte de précision significative sur les singularités de contrainte.

### 3.3.2 Élément régulier

Le champ des déplacements est discrétisé par une approximation nodale  $\mathbf{u} = \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x})\mathbf{q}$  telle que  $\underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x})$  représente la matrice contenant les fonctions d'interpolation  $N_i(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{q}$  est le vecteur des déplacements nodaux.

Les nœuds géométriques (correspondant aux coins de l'élément) sont confondus avec les nœuds d'interpolation. Cet élément comporte donc 24 variables.

Les fonctions de forme  $N_i(\mathbf{x})$  sont celles de Lagrange :

$$N_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{8}(1 + x_i x)(1 + y_i y)(1 + z_i z) \quad \text{avec } i \in \{1; \dots; 8\}$$

||  $x_i, y_i$  et  $z_i$  représentent les coordonnées des nœuds d'interpolation (voir fig. 3.11)

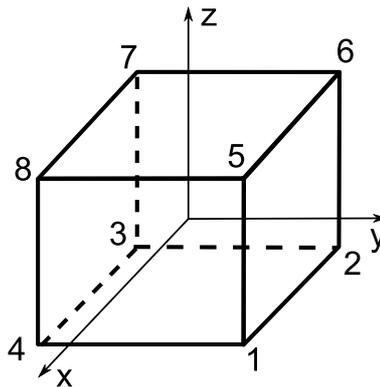


FIG. 3.11 – Hexaèdre de référence (Cube)

Dans la suite, la notation contractée sera utilisée. Donc, le champ des déformations est interpolé comme suit :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{q}$$

$$\underline{\mathbf{B}} = \partial_{Df} \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \quad \text{tel que} \quad \partial_{Df} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{2\partial z} & \frac{\partial}{2\partial x} \\ \frac{\partial}{2\partial z} & 0 & \frac{\partial}{2\partial x} \\ \frac{\partial}{2\partial y} & \frac{\partial}{2\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

En ce qui concerne les contraintes régulières, elles sont exprimées de la façon suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^R = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} = \underline{\mathbf{R}}_R \cdot \mathbf{h}_R \quad (3.17)$$

Le vecteur  $\mathbf{h}_R$  contient les paramètres des contraintes régulières. La matrice d'interpolation  $\underline{\mathbf{R}}_R$  est construite de sorte que les deux conditions du théorème de Brezzi [Bre91] soient satisfaites. De façon plus précise, la matrice  $\underline{\mathbf{R}}_R$  est construite comme ceci :

$$\underline{\mathbf{R}}_R = \begin{bmatrix} y & z & xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & z & xz & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & x & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Discretisons le Lagrangien élémentaire (3.14) dans le cas des éléments réguliers :

$$\begin{aligned} \Pi_e(\mathbf{h}_R, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \mathbf{h}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{F}}_R \cdot \mathbf{h}_R - \mathbf{h}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{G}}_R^\top \cdot \mathbf{q} + \mathbf{L}_e^\top \cdot \mathbf{q} \\ &\left\| \begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_R &= \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{R}}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{R}}_R d\Omega_e \\ \underline{\mathbf{G}}_R &= \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{B}}^\top \cdot \underline{\mathbf{R}}_R d\Omega_e \\ \mathbf{L}_e &= \int_{\partial\Omega_e} \underline{\mathbf{N}}^\top \cdot \mathbf{T} dS \end{aligned} \right. \quad (3.19) \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien élémentaire (3.19) par rapport aux paramètres des contraintes  $\mathbf{h}_R$  donne :

$$\underline{\mathbf{F}}_R \cdot \mathbf{h}_R - \underline{\mathbf{G}}_R^\top \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

ce qui est une forme discrétisée des équations de compatibilité pour un élément.

D'autre part, en considérant la variation du Lagrangien élémentaire  $\Pi_e(\mathbf{q}, \mathbf{h}_R)$  par rapport à  $\mathbf{q}$ , nous obtenons :

$$\underline{\mathbf{G}}_R \cdot \mathbf{h}_R - \mathbf{L}_e = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

ce qui est une forme discrétisée des équations d'équilibre.

Au vu des équations (3.21) et (3.20), nous proposons d'utiliser la méthode de condensation statique ou de sous-structuration statique introduite par Imbert [Imb91]. Cette méthode est une technique numérique qui permet de diminuer le nombre d'inconnues des modèles éléments finis ; les degrés de liberté du modèle initial sont séparés en degrés de liberté de jonction (ou maîtres) et degrés de libertés internes (ou esclaves) qui vont être éliminés. Donc, en proposant de considérer  $\mathbf{h}_R$  comme degrés de libertés internes,  $\mathbf{q}$  devient par conséquent les degrés de liberté de jonction et le problème à résoudre pour les éléments réguliers se résume à :

$$\mathbf{G}_R \cdot \mathbf{F}_R^{-1} \cdot \mathbf{G}_R^T \cdot \mathbf{q} = \mathbf{L}_e \quad (3.22)$$

### 3.3.3 Élément singulier

Dans cette approche, on s'intéresse aux éléments touchant le front de fissure. Étant donné que l'élément Métis est un élément hybride, donc à deux champs de variables ( $\mathbf{u}, \underline{\boldsymbol{\sigma}}$ ), l'enrichissement est double, dans le sens où chaque variable sera enrichie. Nguyen Dang [Ngu91] appelle ceci la "double singularité" ; une singularité de contrainte et une singularité de déplacement.

Concernant la singularité de déplacement, elle est souvent obtenue en appliquant la technique du nœud de quart (voir fig. (3.1)). Cette technique a par la suite été modifiée par Ingraffea [Ing80] qui propose une formule de calcul des facteurs d'intensité des contraintes à partir des déplacements nodaux sur les lèvres de la fissure dans le cas des matériaux isotropes. De Saxcé [de 89] a proposé une correction de cette formule qui respecte les modes rigides.

Cependant cette technique, simple de programmation, nécessite souvent des raffinements importants du maillage pour obtenir une précision suffisante. En fait, si la distribution radiale des contraintes ( $\sigma_{rr}$ ) est exacte, la distribution circonférentielle ( $\sigma_{\theta\theta}$ ) est imprécise. Cependant ce type d'approche implique l'utilisation d'éléments à interpolation quadratique.

De plus, cette technique de Barsoum génère une singularité de contrainte dont l'exposant de singularité est égal à  $-0.5$ , la rendant moins précise sur les problèmes présentant des lignes singulières dont l'exposant de singularité est différent de  $-0.5$ . Pour résoudre ce genre de problème, comme le bord droit ou les problèmes d'entaille à la jonction de plusieurs matériaux, la singularité de dé-

formation est parfois introduite en modifiant les fonctions de forme  $N_i(\mathbf{x})$  comme le propose Akin [Aki76] :

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= 1 - (x+y-xy)/R & ; & \quad N_2(x,y) = (x-xy)/R \\ N_3(x,y) &= (xy)/R & ; & \quad N_4(x,y) = (y-xy)/R \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\parallel R = (x+y-xy)^p$$

La figure (3.12) illustre la position des nœuds pour la méthode d'Akin de façon à ce que le nœud 1 soit le nœud singulier.

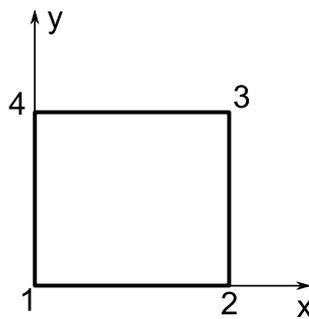


FIG. 3.12 – Élément de référence pour la méthode d'Akin

La valeur de  $p$  est choisie comme étant l'exposant de singularité  $\alpha$  déterminé dans le premier chapitre. Ce type de formulation peut être utilisé dans des éléments linéaires.

Cette méthode fut implémentée dans la thèse de Crépin [Cré01]. Cependant, nous nous sommes aperçus que celle-ci n'était pas capable de résoudre tout type de problèmes. Pour cette raison, une autre idée, développée dans ce travail de thèse pour mieux caractériser les champs mécaniques près des lignes singulières est d'enrichir les champs de variables de ces éléments. Pour être plus précis, l'approximation du champ des déplacements classique  $\mathbf{u}^R$ , issue du calcul par éléments finis, est enrichie par une correction  $\mathbf{u}^S$  sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^R + \mathbf{u}^S \quad (3.24)$$

Cette approximation, inspirée des travaux de Belytschko [Bel99] et de Moës [Moe99], ajoute des degrés de liberté dans l'élément, dans le but de mieux représenter le phénomène physique à évaluer pour tout type de problème.

Les fonctions additionnelles pour les déplacements sont celles décrites dans le premier chapitre

(1.67).

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{q} + \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\xi^i, \mu_k, \alpha + 1) \cdot \mathbf{h}_S]$$

où  $\left\| \begin{array}{l} \underline{\boldsymbol{\gamma}} = [\mathbf{u}_1^0, \dots, \mathbf{u}_k^0, \dots, \mathbf{u}_m^0], k \text{ est le numéro du nœud.} \\ \mathbf{u}_k^0 \text{ est le déplacement singulier au nœud } k \text{ décrit dans l'équation (1.67).} \end{array} \right.$  (3.25)

Comme nous pouvons le voir, la partie singulière est linéairement dépendante des facteurs d'intensité des contraintes  $K_\alpha$  qui sont rangés dans un vecteur colonne  $\mathbf{h}_S$ . Par conséquent, le champ des déformations s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}_R + \boldsymbol{\varepsilon}_S = \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{q} + \underline{\mathbf{A}}_S \cdot \mathbf{h}_S \\ \left\| \begin{array}{l} \underline{\mathbf{B}} = \partial_{Df} \cdot (\underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x})) \\ \underline{\mathbf{A}}_S = \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cdot \partial_{Df} (\underline{\boldsymbol{\gamma}}(\xi^i, \mu_k, \alpha + 1)) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La construction du champs des contraintes se fait sur le même principe que pour les déplacements ; ces champs sont décomposés en une partie régulière  $\boldsymbol{\sigma}^R$  et une partie singulière  $\boldsymbol{\sigma}^S$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^R + \boldsymbol{\sigma}^S \quad (3.27)$$

La partie régulière est évaluée exactement de la même manière que pour les éléments réguliers :

$$\boldsymbol{\sigma}^R = \underline{\mathbf{R}}_R \cdot \mathbf{h}_R$$

$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{h}_R \text{ est le vecteur contenant les paramètres des contraintes régulières} \\ \underline{\mathbf{R}}_R \text{ est construit comme dans l'équation (3.18)} \end{array} \right.$  (3.28)

Les fonctions additionnelles pour les contraintes seront celles décrites dans le premier chapitre (1.67).

$$\boldsymbol{\sigma}^S = \underline{\mathbf{R}}_S \cdot \mathbf{h}_S$$

$\left\| \begin{array}{l} \underline{\mathbf{R}}_S = [\boldsymbol{\sigma}_1^0, \dots, \boldsymbol{\sigma}_m^0], m \text{ étant le numéro du nœud} \\ \boldsymbol{\sigma}_k^0 \text{ est le vecteur des contraintes singulières au nœud } k \text{ décrit dans (1.67)} \end{array} \right.$  (3.29)

La méthode est assez proche de celle utilisée par Chen & Sze [Che01], qui l'applique à un modèle

hybride de contrainte.

La forme discrétisée du Lagrangien est :

$$\begin{aligned} \Pi_e(\mathbf{h}_R, \mathbf{h}_S, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \mathbf{h}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{F}}_R \cdot \mathbf{h}_R + \mathbf{h}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{F}}_{SR} \cdot \mathbf{h}_R + \frac{1}{2} \mathbf{h}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{F}}_S \cdot \mathbf{h}_S + \underline{\mathbf{L}}_e^\top \cdot \mathbf{q} \\ &\quad - \mathbf{h}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{G}}_R^\top \cdot \mathbf{q} - \mathbf{h}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{G}}_S^\top \cdot \mathbf{q} - \mathbf{h}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{H}}_{RS} \cdot \mathbf{h}_S - \mathbf{h}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{H}}_S \cdot \mathbf{h}_R \\ \left\| \begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}_{SR} &= \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{R}}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{R}}_R d\Omega_e & \underline{\mathbf{G}}_S &= \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{B}}^\top \cdot \underline{\mathbf{R}}_S d\Omega_e \\ \underline{\mathbf{F}}_S &= \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{R}}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{R}}_S d\Omega_e & \underline{\mathbf{H}}_S &= \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{R}}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{A}}_S d\Omega_e \\ \underline{\mathbf{H}}_{RS} &= \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{R}}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{A}}_S d\Omega_e \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (3.30)$$

L'annulation de la variation première de la fonctionnelle (3.30) par rapport aux paramètres du champ des déplacements  $\mathbf{q}$  conduit aux équations d'équilibre :

$$\frac{\partial \Pi_e(\mathbf{h}_R, \mathbf{h}_S, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \underline{\mathbf{L}}_e - \underline{\mathbf{G}}_R \cdot \mathbf{h}_R - \underline{\mathbf{G}}_S \cdot \mathbf{h}_S = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

L'annulation de la dérivée première de l'équation (3.30) par rapport aux paramètres de contrainte  $\mathbf{h}_R$  et  $\mathbf{h}_S$ ) conduit aux conditions de stationnarité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_e(\mathbf{h}_R, \mathbf{h}_S, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{h}_R} &= \underline{\mathbf{F}}_R \cdot \mathbf{h}_R + \underline{\mathbf{F}}_{SR}^\top \cdot \mathbf{h}_S - \underline{\mathbf{G}}_R^\top \cdot \mathbf{q} - \underline{\mathbf{H}}_{RS} \cdot \mathbf{h}_S = \mathbf{0} \\ \frac{\partial \Pi_e(\mathbf{h}_R, \mathbf{h}_S, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{h}_S} &= \underline{\mathbf{F}}_{SR} \cdot \mathbf{h}_R + \underline{\mathbf{F}}_S \cdot \mathbf{h}_S - \underline{\mathbf{H}}_{RS}^\top \cdot \mathbf{h}_R - \underline{\mathbf{G}}_S^\top \cdot \mathbf{q} - \underline{\mathbf{H}}_S \cdot \mathbf{h}_S - \underline{\mathbf{H}}_S^\top \cdot \mathbf{h}_S = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ici, le vecteur  $\mathbf{h}_R$  des paramètres réguliers des contraintes est éliminé par une condensation statique dans chaque élément. En faisant apparaître les matrices de rigidité, de connexion et de flexibilité :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{K}}_R &= \underline{\mathbf{G}}_R \cdot \underline{\mathbf{F}}_R^{-1} \cdot \underline{\mathbf{G}}_R^\top \\ \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_S &= \underline{\mathbf{G}}_S - \underline{\mathbf{G}}_R^\top \cdot \underline{\mathbf{F}}_R^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{F}}_{SR}^\top - \underline{\mathbf{H}}_{RS}) \\ \underline{\tilde{\mathbf{F}}}_S &= (\underline{\mathbf{H}}_{RS}^\top - \underline{\mathbf{F}}_{SR}) \cdot \underline{\mathbf{F}}_R^{-1} \cdot (\underline{\mathbf{H}}_{RS} - \underline{\mathbf{F}}_{SR}^\top) + (\underline{\mathbf{H}}_S + \underline{\mathbf{H}}_S^\top) \end{aligned} \quad (3.33)$$

nous devons résoudre ce système :

$$\left[ \begin{array}{cc} \underline{\mathbf{K}}_R & \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_S \\ \underline{\tilde{\mathbf{G}}}_S^\top & \underline{\tilde{\mathbf{F}}}_S \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \mathbf{h}_S \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\mathbf{L}}_e \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (3.34)$$

Les facteurs d'intensité des contraintes le long du front de fissure ainsi que l'ensemble des déplacements nodaux de la structure sont obtenus sans aucune difficulté directement après assemblage et résolution du système.

### 3.4 Éléments de déplacement pur régulier et singulier

Dans cette partie, nous allons reprendre la démarche illustrée précédemment en changeant la formulation de l'élément Métis. Ici, la formulation en déplacement pur enrichi est développée. Celle-ci n'a qu'un champ de variables  $\mathbf{u}$ , contrairement à la méthode Métis, ce qui engendre une singularité simple en fond de fissure.

Cette méthode est proche de la méthode X-FEM (sans propagation). Cependant, la différence essentielle réside dans le choix des fonctions additionnelles au sein des éléments singuliers, permettant de traiter des problèmes dont l'exposant de singularité n'est pas forcément égal à  $-0.5$ . En effet, la méthode X-FEM, proposée par Moës [Moe99], traite uniquement de matériaux homogènes élastiques fissurés avec quatre fonctions d'enrichissement de base pour représenter totalement le champ de Westergaard en pointe de fissure.

#### 3.4.1 Élément régulier

Avant tout, rappelons la forme de la fonctionnelle relative à la formulation en déplacement pur (3.3) :

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\top} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}^{\top} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega_{\sigma}} \mathbf{u}^{\top} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} d\Omega_{\sigma} \quad (3.35)$$

Elle peut être décomposée en une somme de fonctionnelles élémentaires :

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) &= \sum_e \Pi_e(\mathbf{u}) \\ \left\| \Pi_e(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{2} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{\top} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{f}^{\top} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega_{\sigma} \cap \Omega_e} \mathbf{u}^{\top} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} d\Omega_{\sigma} \right. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Tout comme dans la méthode Métis, le champ des déplacements est discrétisé avec une approximation nodale  $\mathbf{u} = \underline{\underline{\mathbf{N}}}(\mathbf{x})\mathbf{q}$  telle que  $\underline{\underline{\mathbf{N}}}(\mathbf{x})$  représente la matrice contenant les fonctions de forme et  $\mathbf{q}$  est le vecteur des déplacements nodaux. Donc, le champ des déformations est interpolé par  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}\cdot\mathbf{q}$  où  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  est la matrice contenant les dérivées des fonctions de forme.

En discrétisant la fonctionnelle élémentaire introduite dans (3.36), nous obtenons :

$$\begin{cases} \Pi_e(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \underline{\mathbf{K}}_R \mathbf{q} - \mathbf{q}^\top \underline{\mathbf{L}}_e \\ \underline{\mathbf{K}}_R = \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{B}}^\top \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{B}} d\Omega_e \\ \underline{\mathbf{L}}_e = \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{f}}^\top \cdot \underline{\mathbf{u}} d\Omega_e + \int_{\Omega_\sigma \cap \Omega_e} \underline{\mathbf{u}}^\top \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS \end{cases} \quad (3.37)$$

La variation première de la fonctionnelle (3.37) par rapport aux paramètres de champs des déplacements  $\mathbf{q}$  conduit aux équations d'équilibre :

$$\underline{\mathbf{K}}_R \cdot \mathbf{q} = \underline{\mathbf{L}}_e \quad (3.38)$$

Nous obtenons les matrices élémentaires qui sont ensuite assemblées de façon à obtenir la matrice de raideur globale.

### 3.4.2 Élément singulier

Cette section porte sur les éléments près de la fissure ; tout comme dans la méthode X-FEM, les champs des déplacements sont décomposés en une somme de contributions :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^R + \mathbf{u}^S \quad (3.39)$$

En reprenant les fonctions d'enrichissement du premier chapitre, la forme finale de  $\mathbf{u}$  devient :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{q} + \underline{\boldsymbol{\gamma}}(\xi^i, \mu_k, \alpha + 1) \cdot \underline{\mathbf{h}}_S] \\ \text{où } \underline{\boldsymbol{\gamma}} = [\underline{\mathbf{u}}_1^0, \dots, \underline{\mathbf{u}}_k^0, \dots, \underline{\mathbf{u}}_m^0], k \text{ est le numéro du nœud.} \\ \underline{\mathbf{u}}_k^0 \text{ est le déplacement singulier au nœud } k \text{ décrit dans l'équation (1.67).} \end{cases} \quad (3.40)$$

Le champ des déformations s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_R + \boldsymbol{\varepsilon}_S = \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{q} + \underline{\mathbf{A}}_S \cdot \underline{\mathbf{h}}_S \\ \underline{\mathbf{B}} = \partial_{Df} \cdot (\underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x})) \\ \underline{\mathbf{A}}_S = \underline{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \cdot \partial_{Df} (\underline{\boldsymbol{\gamma}}(\xi^i, \mu_k, \alpha + 1)) \end{cases} \quad (3.41)$$

Finalement, le Lagrangien (3.3) s'écrit avec les paramètres des contraintes singulières  $\mathbf{h}_S$  et des déplacements  $\mathbf{q}$  :

$$\Pi_e(\mathbf{q}, \mathbf{h}_S) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^\top \cdot \underline{\mathbf{H}}_R \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q}^\top \cdot \underline{\mathbf{H}}_{RS}^\top \cdot \mathbf{h}_S + \frac{1}{2} \mathbf{h}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{H}}_{SS} \cdot \mathbf{h}_S - \mathbf{q}^\top \cdot \underline{\mathbf{L}}_e$$

$$\left\| \begin{array}{l} \underline{\mathbf{H}}_R = \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{B}}^\top \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{B}} d\Omega_e \\ \underline{\mathbf{H}}_{RS} = \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{A}}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{B}} d\Omega_e \\ \underline{\mathbf{H}}_{SS} = \int_{\Omega_e} \underline{\mathbf{A}}_S^\top \cdot \underline{\mathbf{C}} \cdot \underline{\mathbf{A}}_S d\Omega_e \end{array} \right. \quad (3.42)$$

L'annulation de la variation première de cette fonctionnelle (3.42) par rapport aux paramètres du champ des déplacements  $\mathbf{q}$  nous conduit à l'équation d'équilibre :

$$\frac{\partial \Pi_e(\mathbf{q}, \mathbf{h}_S)}{\partial \mathbf{q}} = \underline{\mathbf{H}}_R \cdot \mathbf{q} + \underline{\mathbf{H}}_{RS} \cdot \mathbf{h}_S - \underline{\mathbf{L}}_e = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

L'annulation de la dérivée première de la fonctionnelle (3.42) par rapport aux paramètres de singularité  $\mathbf{h}_S$  nous conduit aux conditions de stationnarité :

$$\frac{\partial \Pi_e(\mathbf{q}, \mathbf{h}_S)}{\partial \mathbf{h}_S} = \underline{\mathbf{H}}_{SS} \cdot \mathbf{h}_S + \underline{\mathbf{H}}_{RS}^\top \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

Finalement, le système à résoudre concernant la formulation en déplacement pur dans un élément singulier se résume à :

$$\left[ \begin{array}{cc} \underline{\mathbf{H}}_R & \underline{\mathbf{H}}_{RS} \\ \underline{\mathbf{H}}_{RS}^\top & \underline{\mathbf{H}}_{SS} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \mathbf{h}_S \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\mathbf{L}}_e \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

Les facteurs d'intensité des contraintes généralisés le long du front de fissure ainsi que l'ensemble des déplacements nodaux de la structure sont obtenus directement après assemblage et résolution sans aucune difficulté.

### 3.5 Quelques mots sur le schéma d'intégration

Dans le domaine de l'analyse numérique, il faut souvent déterminer des intégrales et essayer d'obtenir une bonne approximation de celles-ci. En général, on remplace le calcul d'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration :

$$F = \int_c^d f(x)\varpi(x)dx \approx \sum_{i=1}^N w_i f(x_i)$$

$c, d$  sont des grandeurs réelles

$f$  est une fonction intégrable sur l'intervalle  $[c; d]$

$\varpi$  est une fonction de pondération

$x_i$  est l'abscisse du  $i^{\text{ème}}$  point de quadrature

$w_i$  est le coefficient (ou poids) de quadrature associé au point  $x_i$

$N$  est le nombre de points d'interpolation

(3.46)

La fonction de pondération détermine le type de la quadrature de Gauss.

Dans notre étude, il faudra distinguer deux cas relatifs aux deux types d'intégrandes. Plus précisément, dans les éléments réguliers, l'intégrande est de type polynômial tandis que dans les éléments singuliers, l'intégrande est de type hyperbolique dû au comportement des champs des contraintes et des déformations qui tendent vers l'infini lorsque l'on se rapproche du front de fissure.

Pour les éléments réguliers, la quadrature de Gauss-Legendre sera appliquée car, par définition, ce type de schéma est bien adapté à l'intégration de polynômes.

Cependant, pour les éléments singuliers, ce type de schéma d'intégration ne converge que très lentement en fonction du degré d'interpolation.

Le but de cette section est de tester différents schémas trouvés dans la littérature pour connaître *a priori* la précision de chacun d'entre eux. Ensuite, nous proposons de confronter les résultats de ces différents schémas et de les comparer à des solutions analytiques par l'intermédiaire d'intégrales tests  $(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6)$  définies dans le tableau (3.1). Nous testerons les schémas de Gauss-Legendre, de Chebyshev-Radau, de Gauss-Radau et enfin de Gauss-Jacobi.

TAB. 3.1 – Fonctions à intégrer associées à leur valeur numérique.

Fonction	Intégrale	Valeur de l'intégrale
$F_1$	$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} dx dy$	$4\sqrt{2} \simeq 5.6568$
$F_2$	$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{4}}} dx dy$	$8\sqrt[4]{2} \simeq 9.5137$
$F_3$	$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}} dx dy$	$\frac{8}{3} \sqrt[3]{2} \simeq 4.4848$
$F_4$	$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} dx dy$	$4\sqrt{2} - \frac{4}{3} \sqrt[3]{2} \simeq 1.8846$
$F_5$	$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x}{(x+1)^{\frac{3}{4}}} dx dy$	$8 \sqrt[4]{2} - \frac{8}{10} \sqrt[5]{2} \simeq 5.7082$
$F_6$	$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x}{(x+1)^{\frac{1}{4}}} dx dy$	$\frac{8}{3} \sqrt[3]{2} - \frac{8}{7} \sqrt[7]{2} \simeq 0.6407$

Comme il est présenté dans le tableau (3.1), nous nous intéressons à un problème bidimensionnel, dans le sens où nous intégrons suivant  $x$  et  $y$ . Cependant, pour les méthodes de Gauss-Legendre, de Gauss-Chebyshev et de Gauss-Jacobi, nous traiterons le problème pour un schéma dans la direction  $x$  couplé avec un schéma dans la direction  $y$ , alors que le schéma de Gauss-Radau se fera en découpant le carré en deux triangles. Les sections suivantes présentent ces différents schémas en déterminant les  $x_i$  et  $w_i$  relatifs à chacun d'entre eux.

### 3.5.1 Schéma de Gauss-Legendre

Les  $N$  points  $x_i$  de cette quadrature sont les racines du polynôme de Legendre d'ordre  $N$  donné par :

$$P_N(x) = \frac{1}{2^N N!} \frac{\partial^N}{\partial x^N} (x^2 - 1)^N \quad (3.47)$$

Les coefficients  $w_i$ , dépendant eux-aussi des polynômes de Legendre et de leurs racines, se calculent comme suit :

$$w_i = \frac{2}{P'_{N+1}(x_i) P_N(x_i) (N+1)} \quad (3.48)$$

Dans le tableau (3.2) sont répertoriées l'abscisse des points  $x_i$  ainsi que la valeur des poids  $w_i$  jusqu'à l'ordre 5. Il est à noter que dans le cas où  $f(x)$  est un polynôme d'ordre  $2N - 1$ , le schéma d'ordre  $N$  donne la valeur exacte de l'intégration.

TAB. 3.2 – Positions des points de Gauss et poids associés pour le schéma de Gauss-Legendre.

$N$	$x_i, y_i$	$w_i$
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \frac{1}{5} \sqrt{15}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \frac{1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$	$\pm \frac{1}{36} (18 + \sqrt{30})$
	$\pm \frac{1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$\pm \frac{1}{36} (18 - \sqrt{30})$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}$	$\pm \frac{1}{900} (322 + 13\sqrt{70})$
	$\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}$	$\pm \frac{1}{900} (322 - 13\sqrt{70})$

Le tableau (3.3) donne les résultats des intégrales en fonction du nombre de points de Gauss.

TAB. 3.3 – Valeurs des intégrales en fonction du nombre de points de Gauss et erreurs relatives avec le schéma de Gauss-Legendre.

Fonctionnelle	9 Points de Gauss	16 Points de Gauss	25 Points de Gauss
$F_1$	4.95219	5.10911	5.20883
<i>erreur relative</i>	12%	9%	7%
$F_2$	5.89698	6.32338	6.62764
<i>erreur relative</i>	38%	33%	30%
$F_3$	4.35302	4.39464	4.41816
<i>erreur relative</i>	3%	2%	1%
$F_4$	1.16674	1.3313	1.43403
<i>erreur relative</i>	38%	29%	23%
$F_5$	2.07118	2.5072	2.8157
<i>erreur relative</i>	63%	56%	50%
$F_6$	0.5034	0.5483	0.5730
<i>erreur relative</i>	21%	14%	10%

### 3.5.2 Schéma de Gauss-Chebyshev

Ce schéma, quant à lui, est associé à la fonction de poids  $\varpi(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Ici, les points  $x_i$  et les poids  $w_i$  sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 x_i &= \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{2N}\right) \\
 w_i &= \frac{\pi}{N}
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

Le tableau (3.4) compare les résultats des intégrales en fonction du nombre de points de Gauss.

TAB. 3.4 – Valeurs des intégrales en fonction du nombre de points de Gauss et erreurs relatives avec le schéma de Gauss-Chebyshev.

Fonctionnelle	9 Points de Gauss	16 Points de Gauss	25 Points de Gauss
$F_1$	5.7220	5.6934	5.6802
<i>erreur relative</i>	1%	0.6%	0.4%
$F_2$	7.4792	7.7379	7.9186
<i>erreur relative</i>	21%	18%	16%
$F_3$	4.7213	4.6303	4.5852
<i>erreur relative</i>	5%	3%	2%
$F_4$	1.8138	1.8471	1.8615
<i>erreur relative</i>	3%	2%	1%
$F_5$	3.5273	3.8541	4.0646
<i>erreur relative</i>	38%	32%	28%
$F_6$	0.7231	0.7001	0.6861
<i>erreur relative</i>	12%	9%	7%

### 3.5.3 Schéma de Gauss-Radau

Cette méthode, appelée aussi méthode "produit", consiste à transformer une intégrale sur un triangle en une intégrale sur un carré par un changement de variables.

Dans notre étude, nous n'allons pas utiliser cette démarche mais nous allons reprendre le schéma d'intégration élaboré sur le triangle. Cela nous oblige à découper le carré en deux triangles (voir figure (3.13)).

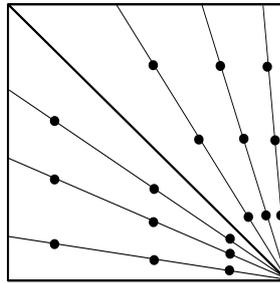


FIG. 3.13 — Positions des points de Gauss dans le cas bidimensionnel pour le schéma de Gauss-Radau à 9 points

Nous séparons l'intégrale en deux parties :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y) dy dx = \int_{-1}^1 \left[ \int_{-1}^{-x} f(x,y) dy + \int_{-x}^1 f(x,y) dy \right] dx \quad (3.50)$$

Cette méthode est peu utilisée car la localisation des points d'intégration ne respecte pas les symétries dans le triangle de référence (voir fig. (3.13)). Cependant, ce type de schéma peut être efficace lorsque les variations de l'intégrande sont fortes au voisinage du nœud singulier du triangle.

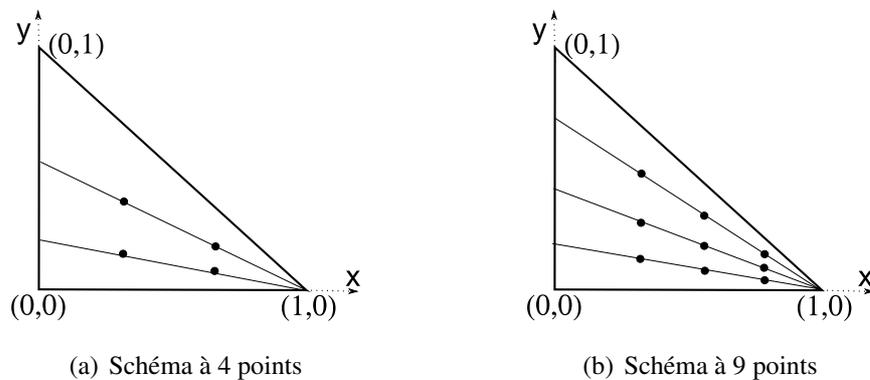


FIG. 3.14 — Positions des points de Gauss pour le schéma de Gauss-Radau

TAB. 3.5 – Positions des points de Gauss et poids associés pour le schéma de Gauss-Radau.

$N$	$R_i$	$S_i$	$a_i$	$w_i$
$2 \times 2$	0.2113	0.1550	0.3764	0.5
	0.7887	0.6449	0.5125	0.5
$3 \times 3$	0.1127	0.0886	0.2205	0.2778
	0.5	0.4095	0.3882	0.4444
	0.8873	0.7877	0.3288	0.2778
Formule pour l'intégrale :				
$\int_0^{1-x} \int_0^1 f(x,y) dy dx = \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} w_j \cdot w_i \cdot f(x_i, y_i)$				
$w_j = a_i(1 - x_i)$				
$x_i = S_i$				
$y_i = R_i(1 - S_i)$				

Remarquons que  $R_i$  et  $w_i$  sont les coefficients de l'intégration numérique de Gauss sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

TAB. 3.6 – Valeurs des intégrales en fonction du nombre de points de Gauss et erreurs relatives avec le schéma de Gauss-Radau.

Fonctionnelle	8 Points de Gauss	18 Points de Gauss
$F_1$	4.9215	5.60029
<i>erreur relative</i>	13%	1%
$F_2$	8.18174	8.7525
<i>erreur relative</i>	14%	8%
$F_3$	3.8152	2.19754
<i>erreur relative</i>	15%	2%
$F_4$	2.0365	1.8667
<i>erreur relative</i>	8%	0.5%
$F_5$	4.1669	5.1668
<i>erreur relative</i>	27%	8%
$F_6$	0.6855	0.6343
<i>erreur relative</i>	7%	1%

### 3.5.4 Schéma de Gauss-Jacobi

La quadrature de Gauss-Jacobi est utilisée pour calculer numériquement l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 (1-x)^a (1+x)^b f(x) dx \quad (3.51)$$

Ce schéma nécessite, dans un premier temps, de déterminer la position des points de Gauss  $x_i$  ainsi que la valeur des fonctions de poids  $w_i$ . Néanmoins, quelques conditions doivent être respectées, notamment sur les exposants  $a$  et  $b$  qui doivent être strictement supérieurs à  $-1$ .

Commençons par déterminer les valeurs  $x_i$ . Ces valeurs sont les racines du polynôme de Jacobi  $P_N^{(a,b)}(x)$  ( $N$  étant le degré de l'interpolation ou, dit autrement, le nombre de points de Gauss). Les polynômes de Jacobi ( $P_i^{(a,b)}(x)$ ) sont donnés par la formule suivante :

$$(1-x)^a (1+x)^b P_i^{(a,b)}(x) = \frac{(-1)^i}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} [(1-x)^{i+a} (1+x)^{i+b}] \quad (3.52)$$

La seconde étape consiste à calculer les poids  $w_k$  qui sont donnés par la formule suivante :

$$w_i = \frac{2^{a+b+1}\Gamma(N+a+1)\Gamma(N+b+1)}{\Gamma(N+a+b+1)\Gamma(N+1)(1-x_i^2)[P_N^{(a,b)}(x_i)]^2} \quad (3.53)$$

||  $\Gamma$  est la fonction Gamma définie comme étant  $\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$

En choisissant judicieusement  $a$  et  $b$ , nous retrouvons les schémas de Gauss-Legendre et de Gauss-Chebyshev.

TAB. 3.7 – Valeurs des intégrales en fonction du nombre de points de Gauss et erreurs relatives avec le schéma de Gauss-Jacobi.

Fonctionnelle	4 Points de Gauss	9 Points de Gauss
$F_1$	5.6568	5.6568
<i>erreur relative</i>	0%	0%
$F_2$	9.51366	9.51366
<i>erreur relative</i>	0%	0%
$F_3$	4.4848	4.4848
<i>erreur relative</i>	0%	0%
$F_4$	1.8856	1.8856
<i>erreur relative</i>	0%	0%
$F_5$	5.7082	5.7082
<i>erreur relative</i>	0%	0%
$F_6$	0.6407	0.6407
<i>erreur relative</i>	0%	0%

### 3.5.5 Conclusion sur les schémas d'intégration

Au vu des précisions sur les résultats, le double schéma de Gauss-Radau et celui de Gauss-Jacobi se distinguent des autres. En effet, l'erreur maximale pour ce type de fonctions singulières tests est de 8%. Ces deux schémas ont été privilégiés pour le calcul d'intégrales dans les éléments singuliers. Il est à noter que pour le schéma de Gauss-Jacobi, un choix judicieux des exposants  $a$  et  $b$  permet d'incorporer facilement l'exposant de singularité  $\alpha$  calculé en pré-processeur.

Après avoir testé ces schémas dans le calcul par éléments finis, nous remarquons qu'il y a très peu de différences sur les valeurs nodales entre les schémas Gauss-Radau et Gauss-Jacobi.

### 3.6 Conclusion

Dans cette troisième partie, nous avons décrit deux méthodes d'éléments finis permettant d'extraire les facteurs d'intensité des contraintes près des lignes singulières. La première formulation est celle de l'élément Métis enrichi et la seconde est celle en déplacement pur enrichi.

Ces deux formulations ont fait l'objet d'une scission en éléments régulier et singulier. Les éléments singuliers sont des éléments réguliers sur lesquels nous ajoutons des fonctions d'enrichissement afin de mieux appréhender le comportement de la structure au niveau de la ligne singulière. Ces fonctions d'enrichissement, issues du chapitre 1, font apparaître des degrés de liberté supplémentaires identifiés comme les facteurs d'intensité des contraintes.

Concernant ces deux types d'éléments (réguliers et singuliers), des schémas numériques d'intégration ont été testés. Le schéma de Gauss-Legendre s'est révélé adéquat pour les éléments réguliers, tandis que les schémas de Gauss-Radau et Gauss-Jacobi se sont montrés plus pertinents pour les éléments singuliers.

Ces deux méthodes ont été implémentées dans un programme d'éléments finis appelé "SIC" [Sic]. De celui-ci sont obtenus le calcul des champs des déplacements et des facteurs d'intensité des contraintes pour l'élément Métis et pour l'élément en déplacement pur sans aucune difficulté directement après assemblage et résolution du système.

Pour illustrer les deux méthodes, quelques applications numériques feront l'objet du prochain chapitre.

# Chapitre 4

## Validation des approches par éléments finis enrichis

### Sommaire

---

4.1	Matériau homogène orthotrope fissuré soumis à traction . . . . .	90
4.2	Délaminage d'un bi-matériaux homogènes isotropes soumis à traction . . . . .	97
4.3	Bord libre d'un bi-matériaux homogènes isotropes soumis à traction . . . . .	101
4.4	Délaminage d'un bi-matériaux orthotropes soumis à traction . . . . .	104
4.5	Délaminage d'un bi-couches anisotropes fissuré soumis à traction . . . . .	109
4.6	Conclusion . . . . .	113

---

Au cours du chapitre 3, des méthodes par éléments finis enrichis pour l'extraction de facteurs d'intensité des contraintes ont été présentées.

Ces méthodes ont été implémentées dans un code de recherche par éléments finis appelé SIC [Sic] (Système Interactif de Conception). Celui-ci constituait à l'origine une plate-forme de codéveloppement et d'échanges pour un réseau de laboratoires et d'industriels. SIC est un code ancien (1985) écrit en C et Fortran 77 avec une approche orientée objet et un langage de programmation. Ses principaux champs d'application étaient la mécanique des solides et des structures, la thermique, et leurs disciplines associées.

Les exemples qui suivent sont issus de la littérature et présentent des cas de mono ou multi-matériaux avec singularité ayant pour la plupart une solution analytique. Ces exemples serviront à valider la méthode par éléments finis Métis enrichis et celle par éléments finis en déplacement pur enrichis.

Les résultats des facteurs d'intensité des contraintes obtenus par les méthodes d'éléments finis enrichis pourront ultérieurement être complétés par ceux obtenus via le progiciel Abaqus. En effet, dans sa version 6.6, celui-ci permet d'obtenir les facteurs d'intensité des contraintes dans des cas particuliers (cas de mono-matériau) en passant par le calcul de l'intégrale J. La déduction des facteurs d'intensité des contraintes se fait à la manière de Shih [Shi88]. La résolution de problème par cette approche typique des codes industrielles permet d'avoir une indication sur l'exactitude des résultats et sur le temps CPU utilisé.

## 4.1 Matériau homogène orthotrope fissuré soumis à traction

Le premier problème considéré est celui d'un corps orthotrope soumis à un essai de traction uniaxiale. Une fissure traversante est présente au centre du corps tel que les fronts de fissure sont parallèles à  $\mathbf{X}_3$  (repère structure). Cette fissure, de largeur  $2a$ , est inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à l'axe  $\mathbf{X}_1$  comme illustré sur la figure (4.1). Les dimensions de la structure sont considérées comme très grandes vis-à-vis de la largeur de fissure.

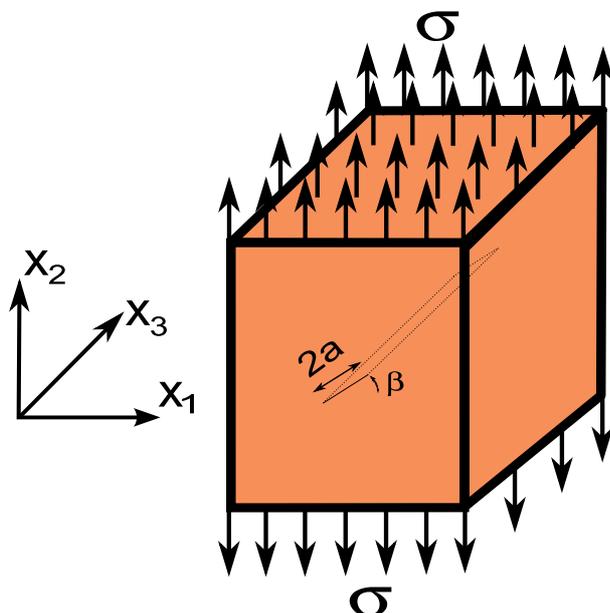


FIG. 4.1 – Matériau homogène orthotrope fissuré soumis à traction uniaxiale

La structure est soumise à une contrainte de traction  $\sigma$  uniforme suivant la direction  $\mathbf{X}_2$ . Les propriétés mécaniques utilisées pour décrire le matériau fictif orthotrope sont résumées dans le tableau (4.1). Dans cet exemple, les repères structure et matériau sont confondus.

TAB. 4.1 – Propriétés élastiques du matériau orthotrope.

$E_1$ (MPa)	$E_2$ (MPa)	$E_3$ (MPa)	$G_{12}$ (MPa)	$G_{23}$ (MPa)	$G_{13}$ (MPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
10	8	6	4	5	6	0.1	0.2	0.3

Afin de calculer les facteurs d'intensité des contraintes pour le problème de traction uniaxiale sur un matériau homogène fissuré, Sih [Sih65] propose une solution analytique ; ces facteurs d'intensité des contraintes dépendent uniquement de l'angle d'inclinaison de la fissure  $\beta$ , de la demi-longueur de fissure  $a$  et des contraintes de traction  $\sigma$  appliquées loin de la fissure :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2(\beta) \\ K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin(\beta) \cos(\beta) \\ K_{III} = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

La hauteur, la profondeur et la largeur du corps sont fixées à  $18.7\text{mm}$  et la demi-longueur de fissure est égale à  $1\text{mm}$ . Pour cet exemple, l'angle d'inclinaison de la fissure vaut  $\frac{\pi}{6}$ .

Nous avons résolu ce problème par différentes méthodes.

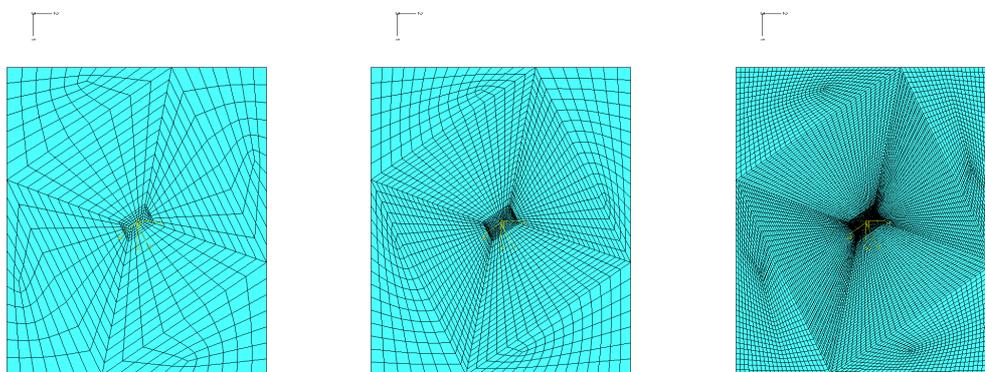
La première méthode consiste à modéliser le cube fissuré à l'aide du logiciel Abaqus avec des éléments quadratiques. En fond d'entaille, des éléments de Barsoum (option disponible sous Abaqus 6.6) sont utilisés pour modéliser au mieux la singularité de contrainte. Des éléments de formulation en déplacement pur nous ont permis de simuler ce problème. Les facteurs d'intensité des contraintes sont alors calculés comme indiqué dans la note (4.1) de la page 96.

Une seconde possibilité est d'utiliser les deux méthodes décrites dans le chapitre 3, à savoir la méthode par éléments finis Métis enrichis ainsi que celle par éléments finis en déplacement pur enrichis.

Les résultats de ces différentes formulations sont alors comparés à ceux de Banks-Sills [Ban97] qui, lui, utilise des éléments quadratiques avec une formulation en déplacement pur. Dans son papier, il compare différentes méthodes dont la M-intégrale, la J-intégrale et la méthode d'extrapolation des déplacements (notée "DE" dans les tableaux qui suivent) conduisant aux facteurs d'intensité des contraintes.

Nous allons comparer toutes ces méthodes pour différents maillages.

Banks-Sills propose trois maillages que nous reprenons afin d'effectuer une comparaison judicieuse entre les différentes méthodes. Ces maillages sont illustrés dans la figure (4.2) ; par la suite, ils seront qualifiés de grossier, médium et fin.



(a) Maillage grossier

(b) Maillage médium

(c) Maillage fin

FIG. 4.2 – Les trois maillages proposés pour résoudre le problème de la figure (4.1) dans le plan  $(X_1, X_2)$ 

Quelques caractéristiques numériques des maillages sont données dans le tableau (4.2).

TAB. 4.2 – Différentes caractéristiques de chaque maillage.

	Maillage 1	Maillage 2	Maillage 3
Nombre de mailles	552	3324	13156
Nombre de nœuds	1672	10061	39564

Cependant, le logiciel (SIC) dans lequel nous avons implémenté nos éléments enrichis nous limite quant au nombre de mailles. Par conséquent, les résultats relatifs au maillage fin ne peuvent être présentés pour les méthodes par les éléments finis enrichis.

Le tableau (4.3) fait apparaître les facteurs d'intensité des contraintes normalisés ( $\tilde{K} = K/\sigma\sqrt{\pi a}$ ) obtenus par Bank-Sills avec la M-intégrale, la J-intégrale pour différents contours d'intégration qui sont illustrés sur la figure (4.3). Le tableau présente aussi les résultats trouvés par Abaqus avec le maillage fin pour différents contours d'intégration.

La solution analytique de référence pour les facteurs d'intensité des contraintes est la suivante :

$$\left\| \begin{array}{l} \tilde{K}_I = \frac{1}{4} \\ \tilde{K}_{II} = \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0.433012 \\ \tilde{K}_{III} = 0 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

TAB. 4.3 – Facteurs d'intensité des contraintes normalisés et erreurs relatives pour un problème de fissure inclinée d'un angle de  $\frac{\pi}{6}$  dont le matériau possède les propriétés mécaniques du tableau (4.1) avec le maillage fin pour différents contours.

N° Contour	M-Intégrale		J-Intégrale		Abaqus	
	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$
1 <i>Erreur</i>	0.2516 -0.64%	0.4343 -0.30%	0.2503 -0.11%	0.4320 0.23%	0.2507 -0.28%	0.4317 0.30%
2 <i>Erreur</i>	0.2503 -0.03%	0.4334 -0.09%	0.2501 -0.01%	0.4330 0%	0.2502 -0.02%	0.4331 0.02%
3 <i>Erreur</i>	0.2503 -0.03%	0.4334 -0.09%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%
4 <i>Erreur</i>	0.2503 -0.03%	0.4334 -0.09%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%
5 <i>Erreur</i>	0.2503 -0.03%	0.4334 -0.09%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%

Les résultats obtenus montrent une stabilité des valeurs et de leur précision à partir du contour n°2, pour chaque méthode (excepté pour les facteurs d'intensité des contraintes en mode II pour la J-intégrale et pour ceux en mode I obtenu par le calcul d'Abaqus, tous deux déduits du contour n°2). Toutes les méthodes donnent des résultats avec moins de 1% d'erreur par rapport à la solution analytique dès le contour °2. Conformément aux attentes, il est à noter que  $\tilde{K}_{III}$  est nul quelle que soit la technique utilisée.

Le tableau suivant (4.4) montre les résultats importés de [Ban97] pour les trois maillages. Le tableau (4.5) passe en revue les résultats obtenus par la méthode utilisée par Abaqus ainsi que par les méthodes utilisant les éléments finis enrichis. Pour les techniques présentant des intégrations (J-intégrale, M-intégrale et Abaqus), le contour n°3 est utilisé car, comme le montre le tableau (4.3), c'est à partir du contour n°3 que nous avons une stabilité et une bonne précision des valeurs ;

de plus, ce choix permet de restreindre les temps CPU.

TAB. 4.4 – (Résultats importés de [Ban97]) Facteurs d'intensité des contraintes normalisés et erreurs relatives pour un problème de fissure inclinée d'un angle de  $\frac{\pi}{6}$  dont le matériau possède les propriétés mécaniques du tableau (4.1).

Maillage	M-Intégrale		J-Intégrale		DE	
	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$
1 <i>Erreur</i>	0.2502 -0.02%	0.4334 -0.08%	0.2497 0.12%	0.4327 0.07%	0.2510 -0.4%	0.4506 -4.06%
2 <i>Erreur</i>	0.2503 -0.03%	0.4334 -0.08%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%	0.2525 -1.1%	0.4389 -1.36%
3 <i>Erreur</i>	0.2503 -0.03%	0.4334 -0.08%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%	0.2506 -0.24%	0.4334 -0.08%

TAB. 4.5 – Facteurs d'intensité des contraintes normalisés et erreurs relatives pour un problème de fissure inclinée d'un angle de  $\frac{\pi}{6}$  dont le matériau possède les propriétés mécaniques du tableau (4.1).

Maillage	Élément Métis enrichi		Élément déplacement pur enrichi		Abaqus	
	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$
1 <i>Erreur</i>	0.2503 -0.03%	0.4334 -0.08%	0.2497 0.12%	0.4328 0.05%	0.2496 0.16%	0.4328 0.05%
2 <i>Erreur</i>	0.2502 -0.03%	0.4334 -0.08%	0.2499 0.02%	0.4331 -0.01%	0.2501 -0.01%	0.4331 -0.02%

Les résultats présentent une bonne cohérence, avec une erreur ne dépassant pas les 1.2‰ pour les approches par éléments finis enrichis. Il semblerait que la méthode d'extrapolation des déplacements (DE) soit la moins précise pour ce genre de problèmes, l'erreur pouvant aller jusqu'à 4.06%. De plus, celle-ci nécessite un maillage fin, contrairement aux autres méthodes qui s'avèrent stables quel que soit le maillage.

Les temps de calcul pour la résolution de ce problème sont relativement faibles : il faut moins de 2 minutes avec le maillage moyen sous Abaqus (avec le contour n°3) et sous SIC pour obtenir les résultats sur un PC cadencé à 2GHz.

Note (4.1)

Dans cette note, nous présentons brièvement la méthode de calcul qu'utilise le progiciel Abaqus permettant de déterminer les facteurs d'intensité des contraintes.

Dans un premier temps, l'intégrale  $J$  (taux de restitution de l'énergie) est calculée :

$$J = \int_{\Gamma} (W dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dS)$$

$W$  est l'énergie de déformation par unité de volume

$\Gamma$  est un contour fermé parcouru dans le sens anti-trigonométrique

$\mathbf{T}$  est le vecteur contrainte normale perpendiculaire à  $\Gamma$

$\mathbf{u}$  est le vecteur déplacement d'un point  $M$  de  $\Gamma$

(4.3)

Cependant, la précision de l'intégrale  $J$  dépend essentiellement du contour d'intégration  $\Gamma$  ; en d'autres termes, plus l'intégrale sera prise sur un large contour et plus les résultats seront précis. La figure (4.3) donne les différentes numérotations des contours autour du front de fissure.

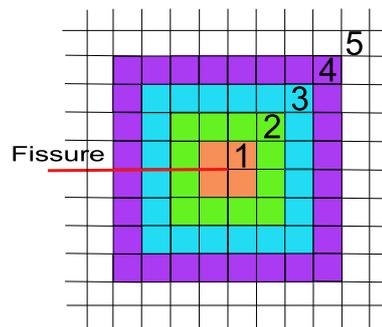


FIG. 4.3 – Numérotation des contours pour le calcul de  $J$

Pour fixer les idées, les contours n°3 et n°4 (fig. (4.3)) offrent un bon compromis entre le temps de calcul (y compris l'écriture de données sur le disque dur) et la précision des résultats.

À partir de cette intégrale, Shih [Shi88] propose de relier les facteurs d'intensité des contraintes au taux de restitution de l'énergie,  $J$ , pour un matériau élastique selon :

$$J = \frac{1}{8\pi} \mathbf{K}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}$$

$\mathbf{K} = (K_I, K_{II}, K_{III})^T$  où  $K_i$  est le facteur d'intensité des contraintes associé au mode  $i$

$\mathbf{B}$  est une matrice d'énergie (voir [Shi88] pour plus d'explication)

(4.4)

Cette méthode ne peut néanmoins traiter que des cas de matériaux homogènes fissurés ou de problèmes de délaminage entre deux matériaux isotropes, d'après la notice Abaqus.

## 4.2 Délaminage d'un bi-matériaux homogènes isotropes soumis à traction

Dans cet exemple, nous nous intéressons à la traction d'un bi-matériaux isotropes comme le montre la figure (4.4). Une fissure traversante de longueur  $2a$  est présente au centre de l'interface tel que les fronts de fissure sont parallèles à l'axe  $X_3$ . La largeur et la longueur  $2W$  et la hauteur  $2H$  du bi-matériaux sont respectivement fixées à  $100\text{mm}$  et  $200\text{mm}$ .

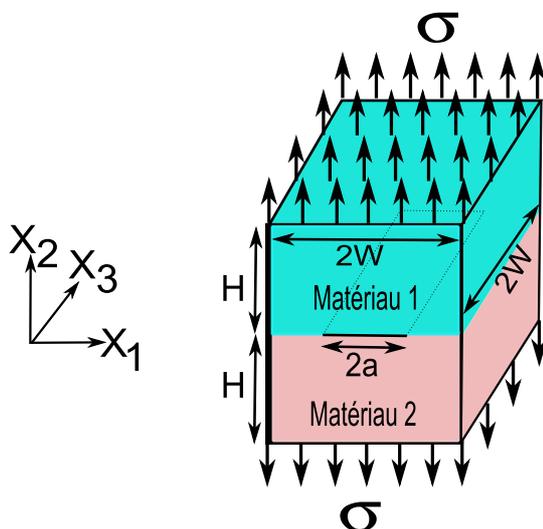


FIG. 4.4 – Traction sur un bi-matériaux isotropes présentant une fissure de délaminage centrée.

Le module de Young du matériau 1 ( $E_1$ ) vaut  $205.8\text{GPa}$ .  $\Upsilon$  définit le rapport des modules de Young entre les deux matériaux ( $\Upsilon = \frac{E_2}{E_1}$ ); celui-ci varie de 1 à 100.

En ce qui concerne le coefficient de Poisson, il est fixé à 0.3 pour les deux matériaux.

La contrainte de traction est égale à  $9.8\text{MPa}$ .

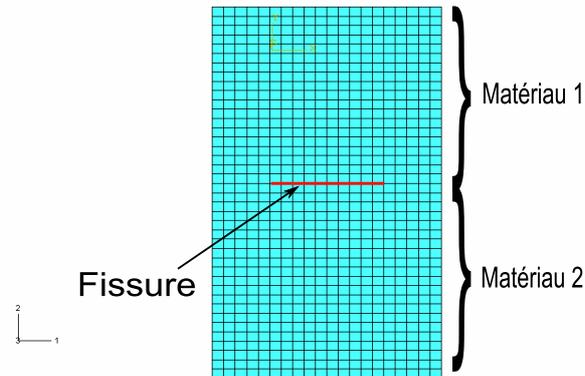
Trois cas seront examinés par la suite, correspondant à des longueurs de fissure égales à 40, 60 et  $80\text{mm}$ .

Cet exemple a été traité par Nagashima dans [Nag03]. Cet auteur compare différentes méthodes d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes pour un maillage donné, composé de 861 nœuds et de 800 éléments (fig. (4.5)).

Ici, toutes les mailles ont les mêmes dimensions et aucun raffinement n'est effectué au voisinage

de la fissure.

FIG. 4.5 – Maillage utilisé pour le bi-matériaux isotropes présentant une fissure centrée dans l'interface.



Pour obtenir les facteurs d'intensité des contraintes, Nagashima utilise la méthode d'extrapolation (DE) et la M-Intégrale. Nous proposons de reprendre le même maillage et de comparer nos méthodes à celles utilisées par Nagashima.

Les trois tableaux (4.6), (4.7) et (4.8) donnent respectivement les facteurs d'intensité des contraintes normalisés pour les trois longueurs de fissure 40mm, 60mm et 80mm. Dans ces tableaux,  $\Upsilon$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\{1; 2; 10; 100\}$ ; le premier cas correspondant à un seul matériau homogène. Ces résultats sont complétés d'une solution, considérée comme de référence par de nombreux auteurs, trouvée dans Yuuki [Yuu93] et Miyazaki [Miy93].

TAB. 4.6 – Facteurs d'intensité des contraintes normalisés pour un bi-matériaux isotropes fissuré tel que  $2a = 40mm$ .

		$2a = 40mm$									
		Métis		Déplacement pur		DE		M-Intégrale		Référence	
$\Upsilon$		$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$
1		1.112	0.000	1.107	0.000	1.084	0.000	1.109	0.000	1.111	0.000
	Erreur	0.09%	0%	0.36%	0%	2.43%	0%	0.18%	0%		
2		1.105	-0.073	1.102	-0.072	1.073	-0.074	1.102	-0.073	1.104	-0.073
	Erreur	0.09%	0%	0.18%	1.36%	2.80%	1.36%	0.18%	0%		
10		1.069	-0.174	1.060	-0.171	1.011	-0.148	1.057	-0.174	1.066	-0.173
	Erreur	0.28%	0.57%	0.56%	1.15%	5.16%	14.4%	0.84%	0.57%		
100		1.042	-0.204	1.032	-0.201	0.975	-0.149	1.025	-0.203	1.039	-0.203
	Erreur	0.29%	0.50%	0.67%	0.98%	6.16%	26.6%	1.34%	0%		

TAB. 4.7 – Facteurs d'intensité des contraintes normalisés pour un bi-matériaux isotropes fissuré tel que  $2a = 60mm$ .

		$2a = 60mm$									
		Métis		Déplacement pur		DE		M-Intégrale		Référence	
$\Upsilon$		$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$
1		1.304	0.000	1.300	0.000	1.267	0.000	1.302	0.000	1.305	0.000
	<i>Erreur</i>	0.07%	0%	0.38%	0%	2.91%	0%	0.23%	0%		
2		1.294	-0.087	1.288	-0.085	1.251	-0.086	1.291	-0.086	1.291	-0.086
	<i>Erreur</i>	0.23%	1.16%	0.23%	1.16%	3.09%	0%	0%	0%		
10		1.243	-0.200	1.237	-0.196	1.163	-0.166	1.224	-0.198	1.239	-0.198
	<i>Erreur</i>	0.32%	1.01%	0.16%	1.01%	6.13%	16.16%	1.21%	0%		
100		1.205	-0.230	1.194	-0.225	1.110	-0.162	1.178	-0.226	1.201	-0.228
	<i>Erreur</i>	0.33%	0.87%	0.58%	1.31%	7.57%	28.9%	1.91%	0.87%		

TAB. 4.8 – Facteurs d'intensité des contraintes normalisés pour un bi-matériaux isotropes fissuré tel que  $2a = 80mm$ .

		$2a = 80mm$									
		Métis		Déplacement pur		DE		M-Intégrale		Référence	
$\Upsilon$		$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$	$\tilde{K}_I$	$\tilde{K}_{II}$
1		1.820	0.000	1.817	0.000	1.760	0.000	1.807	0.000	1.818	0.000
	<i>Erreur</i>	0.11%	0%	0.05%	0%	3.19%	0%	0.60%	0%		
2		1.804	-0.132	1.791	-0.130	1.729	-0.132	1.783	-0.131	1.799	-0.131
	<i>Erreur</i>	0.27%	0.76%	0.44%	0.76%	3.89%	0.76%	0.89%	0%		
10		1.691	-0.286	1.680	-0.279	1.558	-0.247	1.643	-0.288	1.686	-0.283
	<i>Erreur</i>	0.29%	1.06%	0.35%	1.41%	7.59%	12.72%	2.55%	1.76%		
100		1.620	-0.331	1.603	-0.322	1.457	-0.236	1.552	-0.319	1.612	-0.327
	<i>Erreur</i>	0.49%	1.22%	0.55%	1.52%	9.61%	27.82%	3.72%	2.44%		

Les résultats pour les différentes longueurs de fissure et les différents  $\Upsilon$  montrent une bonne cohérence entre les méthodes comparées. Néanmoins, les résultats issus de la méthode d'extrapolation (DE) se différencient légèrement de ceux des trois autres méthodes proposées. La méthode d'extrapolation donne en effet de moins bons résultats comparativement aux autres avec une erreur pouvant aller jusqu'à 27%. De manière générale, toutes les méthodes sont d'autant plus précises que  $\Upsilon$  est petit ou que la longueur de fissure est faible.

Constatons aussi que le modèle par élément fini Métis sur-évalue systématiquement les facteurs d'intensité des contraintes tandis que les autres méthodes les sous-évaluent, à l'exception de la

méthode d'extrapolation pour  $\Upsilon = 2$ .

L'explication pourrait venir de l'enrichissement par la double singularité induite par l'élément Mé-tis en fond de fissure, qui provoquerait une surestimation des champs mécaniques.

Physiquement, le mode I est dominant quel que soit  $\Upsilon$  et la longueur de fissure.

En outre, le mode I est d'autant plus sollicité que la fissure est grande, pour  $\Upsilon$  fixé. En effet, la perte de rigidité globale de la structure due à l'augmentation de la taille de fissure entraîne logiquement une augmentation des sollicitations près des fronts de fissure.

Cependant, pour une longueur de fissure fixée, nous constatons une diminution du facteur d'intensité des contraintes associé au mode d'ouverture et une augmentation du facteur d'intensité des contraintes associé au mode de glissement lorsque  $\Upsilon$  augmente.

En effet, en ce qui concerne le mode I,  $E_1$  étant fixé une fois pour toute, le paramètre  $\Upsilon$  ne fait varier que le module de Young du second matériau ( $E_2$ ). Par conséquent, lorsque  $\Upsilon$  augmente, la rigidité globale de la structure est renforcée, ce qui engendre une diminution de  $\tilde{K}_I$ .

En ce qui concerne le mode II, l'augmentation de  $\Upsilon$  induit un cisaillement plus important à l'interface, se traduisant par une augmentation de l'intensité du  $\tilde{K}_{II}$ .

### 4.3 Bord libre d'un bi-matériaux homogènes isotropes soumis à traction

Sur cet exemple, un bi-matériaux isotropes est soumis à de la traction uniaxiale (fig. (4.6)).

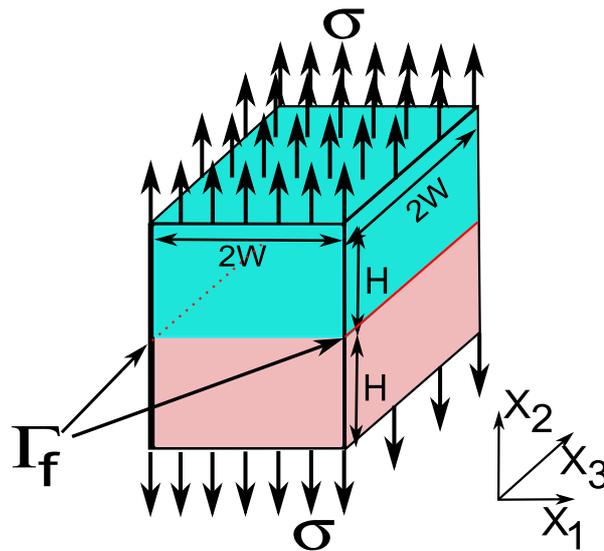


FIG. 4.6 — Essai de traction sur un bi-matériaux isotropes non fissuré

Les dimensions de l'éprouvette sont fixées à  $20\text{ mm}$  pour  $W$  et pour  $H$ .

Une contrainte uniforme  $\sigma$ , d'intensité  $10\text{ MPa}$ , est appliquée de part et d'autre de l'éprouvette suivant la direction  $\mathbf{X}_2$ .

En ce qui concerne les propriétés mécaniques, les modules de Young sont dépendants d'un rapport  $\Upsilon = \frac{E_1}{E_2}$  tandis que le coefficient de Poisson de chaque matériau est fixé à  $0.3$ .

Il est à noter qu'aucun module de Young n'est donné car le résultat final dépend uniquement de ce rapport.

Étant données les symétries géométrique, mécanique et de chargement, nous pouvons simplifier cet exemple en ne traitant que la moitié de celui-ci, tout en imposant les conditions adéquates.

Ce problème de facteurs d'intensité des contraintes possède une solution analytique détaillée par Munz dans [Mun92], et est traité numériquement par Chen [Che01].

La méthode utilisée par Chen pour obtenir les facteurs d'intensité des contraintes est assez proche de celle de l'élément Métis enrichi. En effet, cet auteur utilise également un élément fini enri-

chi, mais avec une formulation hybride de contrainte. L'autre différence réside dans l'emploi d'un "super-élément", défini par la réunification des éléments singuliers. Cet élément, de forme rectangulaire et possédant 6 nœuds, est enrichi en contraintes et en déplacements singuliers qui sont préalablement calculés par un code de surcontraintes. Selon l'auteur, cette formulation est précise et efficace, quelle que soit la nature du bi-matériaux.

Afin d'établir une comparaison entre ces différentes méthodes, nous utiliserons le maillage proposé par Chen. La demi-structure est maillée par  $4 \times 12$  éléments dans le plan  $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$  (fig. (4.7)).

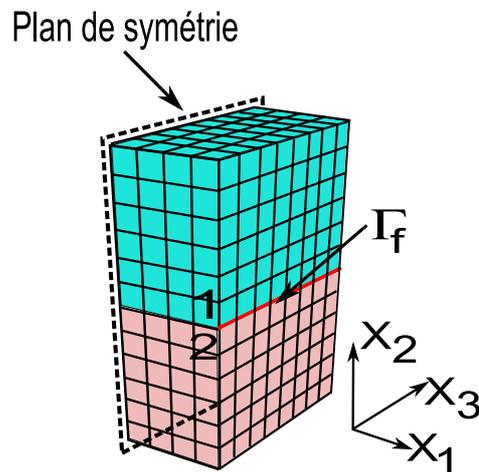


FIG. 4.7 – Maillage utilisé pour étudier le bord libre du bi-matériaux isotropes

Étant donné que les coefficients de Poisson sont les mêmes pour les deux matériaux, seul le facteur d'intensité des contraintes relatif au mode d'ouverture est sollicité. Le tableau (4.9) présente ce facteur d'intensité des contraintes normalisé ( $\tilde{K}_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi}$ ) obtenu par nos méthodes de calculs ainsi que celui évalué par Chen [Che01] pour différents rapports  $\Upsilon$ . Les solutions exactes, établies par Munz [Mun92], y sont aussi reportées, ainsi que l'exposant de singularité  $\alpha$  calculé par notre code de surcontraintes.

TAB. 4.9 – Facteurs d'intensité des contraintes normalisés  $\tilde{K}_I$  au bord libre d'un bi-matériaux isotropes et exposants de singularité  $\alpha$ .

$\Upsilon$	5	10	100	1000
Métis <i>Erreur</i>	0.879 0.9%	0.845 0.5%	0.809 0.49%	0.807 0.62%
Déplacement pur <i>Erreur</i>	0.865 -1.5%	0.832 -1.03%	0.794 -1.37%	0.785 -2.12%
Chen [Che01] <i>Erreur</i>	0.87734 0.9%	0.84552 0.58%	0.81374 1.08%	0.81025 1.02%
Exact	0.87817	0.84067	0.80502	0.80204
$\alpha$	-0.136098	-0.19859	-0.27856	-0.28832

Nos résultats sont très voisins de ceux donnés théoriquement par Munz [Mun92] et numériquement par Chen [Che01], voire meilleurs que ceux de Chen par la méthode de l'élément Métis.

Plus la singularité est sévère (dû à un exposant  $\alpha$  plus petit) et plus le facteur d'intensité des contraintes d'ouverture est faible.

Il faut souligner la sur-évaluation des valeurs obtenues par Chen au-delà de  $\Upsilon = 5$ , comme pour la méthode de l'élément Métis. Ceci conforte l'idée que le double enrichissement en fond de fissure est à l'origine de cette sur-évaluation.

De plus, physiquement,  $K_I$  diminue lorsque le paramètre  $\Upsilon$  augmente ; ceci est dû au renforcement de la rigidité de la structure, dans la direction  $\mathbf{X}_1$  en l'occurrence.

## 4.4 Délaminage d'un bi-matériaux orthotropes soumis à traction

Nous présentons dans cet exemple, un essai de traction sur un bi-matériaux orthotropes.

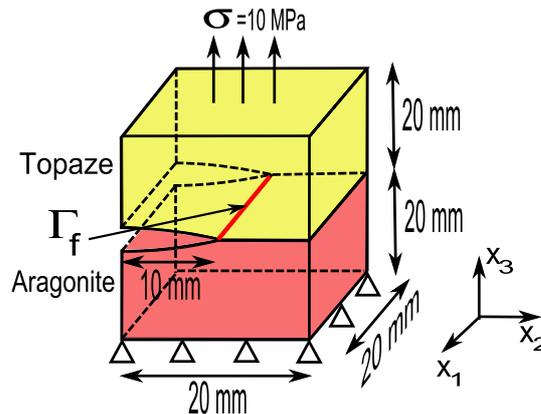


FIG. 4.8 – Délaminage entre deux matériaux anisotropes que sont la Topaze et l'Aragonite

Les deux matériaux sont des roches ; le premier est la Topaze et le second l'Aragonite. Sur une partie de l'interface entre les deux matériaux, une fissure débouchante (fig. (4.8)) est présente tandis que l'autre partie est le siège d'un collage parfait se traduisant par une continuité en déplacements et contraintes.

Leurs coefficients de rigidité sont donnés dans le tableau (4.10).

TAB. 4.10 – Composantes de la matrice de rigidité (GPa) pour l'Aragonite et la Topaze.

	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{15}$	$C_{22}$	$C_{23}$	$C_{25}$	$C_{33}$	$C_{35}$	$C_{44}$	$C_{46}$	$C_{55}$	$C_{66}$
Aragonite	160	36.6	1.97	0	87	15.9	0	85	0	41.3	0	25.6	42.7
Topaz	281	126	84.6	0	349	88.2	0	295	0	108	0	133	131

Les données numériques du problème illustré sur la figure (4.8) sont présentées dans le tableau (4.11).

TAB. 4.11 – Données numériques du problème.

a	W	h	t	$\sigma_0$
10mm	20mm	20mm	20mm	10 MPa

Examinons la distribution des facteurs d'intensité des contraintes le long du front de fissure. Les résultats obtenus par nos méthodes sont comparés à ceux obtenus par Nagai [Mas07] utilisant des éléments hexagonaux quadratiques. Nagai n'utilise aucun élément singulier près du front de fissure.

Il calcule les facteurs d'intensité des contraintes par deux méthodes : la méthode d'extrapolation (DE) des déplacements et la M-Intégrale. Pour cette dernière, il ne précise pas quel contour il utilise (voir fig. (4.3) de la page 96) .

Ce problème ne possède pas de solution analytique ; par conséquent, nous testerons plusieurs maillages, en espérant obtenir une convergence numérique de la solution.

Un maillage typique est présenté sur la figure (4.9). La discrétisation suivant la hauteur (axe  $X_3$ ) n'est pas constante quel que soit le maillage utilisé. Celui-ci est plus dense au voisinage de l'interface entre les deux matériaux. Ceci permet de caractériser au mieux le comportement dans cette zone sujette aux contraintes hors-plan.

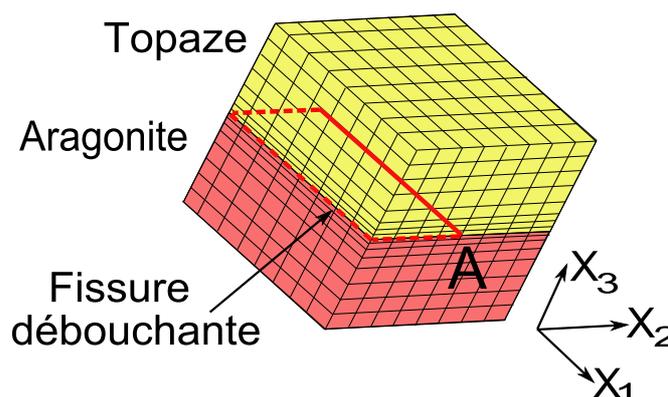


FIG. 4.9 — Exemple de maillage utilisé pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes d'un bi-matériaux orthotropes (Maillage 4, tableau (4.12))

Quatre maillages sont utilisés, leurs caractéristiques sont données dans le tableau (4.12).

TAB. 4.12 – Caractéristiques numériques des quatre maillages utilisés dans l’essai de traction du bi-matériaux.

	Nombre d’éléments
Maillage 1	480
Maillage 2	576
Maillage 3	784
Maillage 4	1024

La figure (4.10) présente les distributions des facteurs d’intensité des contraintes le long du front de fissure, obtenues par les différentes méthodes proposées par Nagai et par les nôtres. Nous avons utilisé ici le maillage 4, tandis que Nagai a utilisé un maillage très fin dont le nombre d’éléments est supérieur à 62000.

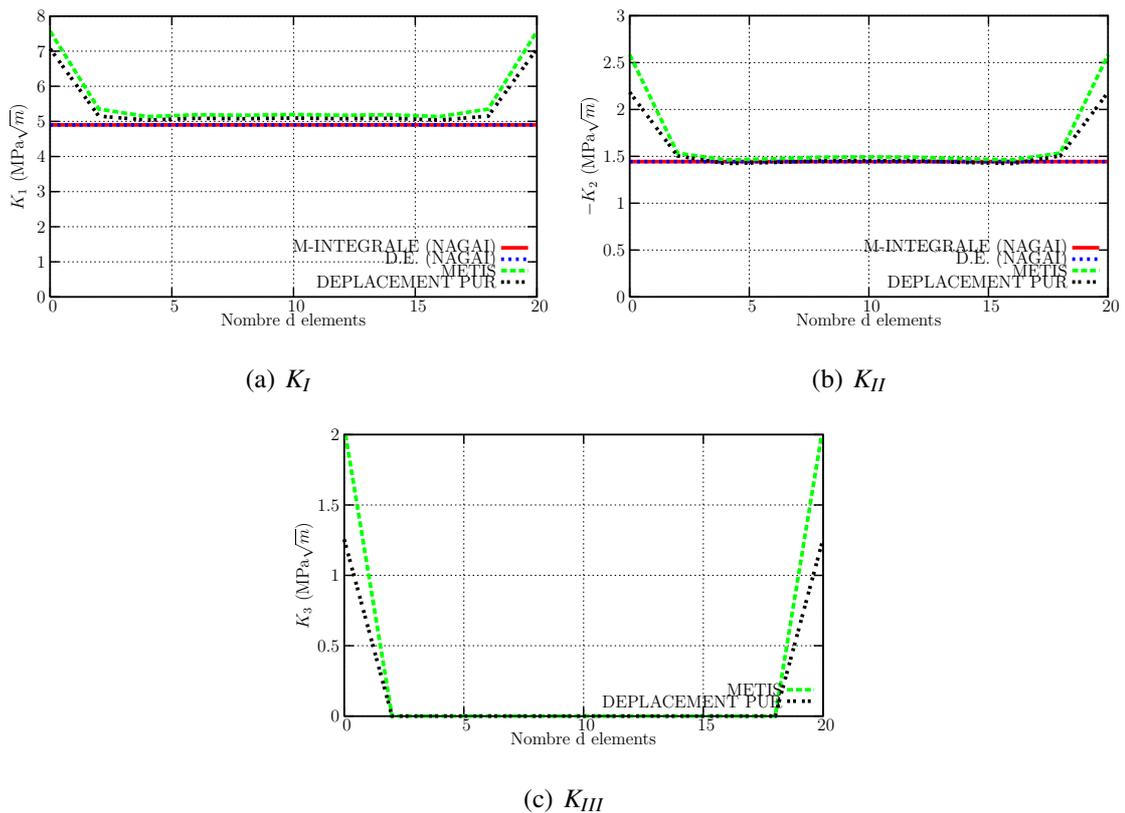


FIG. 4.10 – Comparaison des facteurs d’intensité des contraintes en fond de fissure d’un bi-matériaux orthotropes obtenus par différentes méthodes (configuration fig. (4.8))

Nos résultats au centre de l’éprouvette semblent assez proches de ceux de Nagai avec une erreur

relative par rapport à la M-intégrale de 1% pour l'élément Métis et de 4% pour l'élément en déplacement pur. Cependant, près des bords, l'erreur peut atteindre jusqu'à 50% pour l'élément Métis et 40% pour l'élément en déplacement pur. Nous avons alors procédé à un remaillage conduisant à un raffinement aux bords (voir figure (4.11) montrant le maillage 4 redéfini).

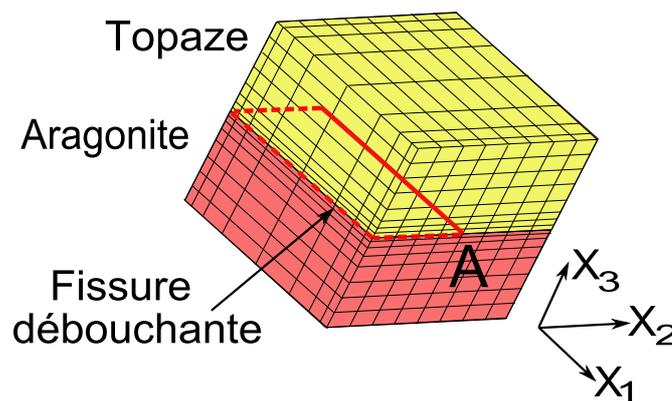


FIG. 4.11 — Maillage utilisé pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes dans un bi-matériaux orthotropes avec raffinement aux bords (Maillage 4 en l'occurrence)

La figure (4.12) donne les distributions des facteurs d'intensité des contraintes avec le maillage 4 raffiné aux bords.

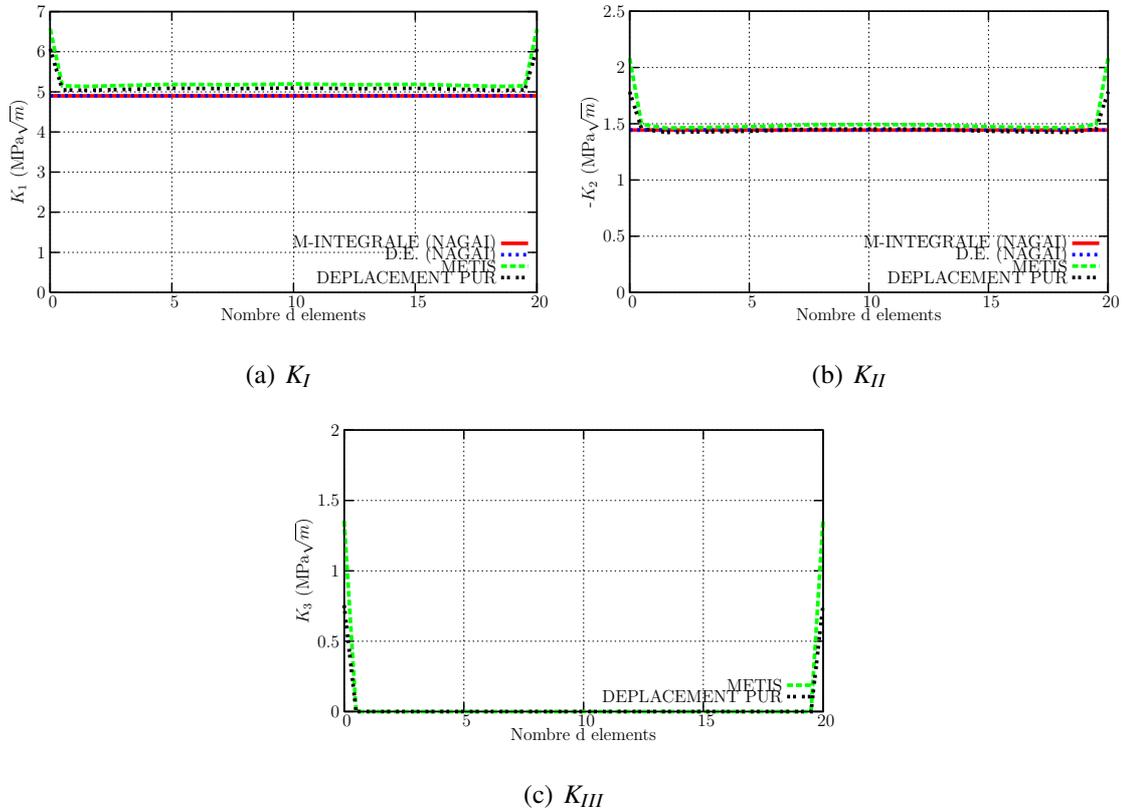


FIG. 4.12 — Comparaison des facteurs d'intensité de contraintes obtenus par différentes méthodes avec un maillage plus dense aux bords (configuration fig. (4.8))

Il est clair que le raffinement atténue les singularités près des bords libres ; cependant, un écart conséquent persiste entre les différentes méthodes proposées (31% d'erreur pour l'élément Métis et 22% pour la formulation en déplacement pur).

Remarquons aussi que ces singularités se manifestent sur la dernière maille. Nous savons que ces zones sont sièges de singularités complètement tridimensionnelles pour lesquelles notre code de calcul des surcontraintes est mal adapté. Nous en concluons que nous faisons forcément une erreur d'approximation. Néanmoins, il nous paraît logique que physiquement ces zones soient singulières. En effet, de nombreuses études ont montré que l'amorçage de fissure dans les bi-matériaux orthotropes s'initie aux bords, les paramètres de rupture doivent donc y être plus élevés qu'au centre de la fissure. Cependant, les résultats proposés par Nagai près de ces zones montrent des facteurs d'intensité des contraintes légèrement plus faibles qu'au centre du front de fissure.

Dans ce qui suit, nous proposons de comparer la convergence de chacune des méthodes en fonction du nombre de mailles. La figure (4.13) donne les facteurs d'intensité des contraintes au centre de

la ligne singulière en coordonnées semi-logarithmiques en fonction du nombre d'éléments.

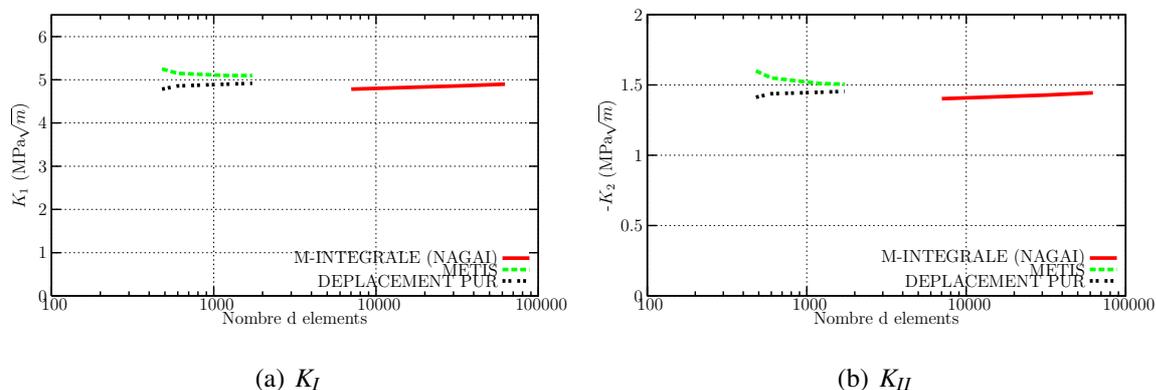


FIG. 4.13 – Facteurs d'intensité des contraintes en fond de fissure à mi-ligne singulière en fonctions du nombre de mailles

Nos résultats sont cohérents avec ceux de Nagai, ils semblent converger vers une même asymptote. Il faut cependant noter que nous travaillons avec un nombre de mailles compris entre 480 et 1024, alors que Nagai travaille dans une fourchette de 8000 à 60000 éléments.

Il aurait été intéressant de travailler avec un nombre d'éléments comparable, mais les limites de notre logiciel nous ont rendu le travail inaccessible sur cette plage de mailles.

Il faut aussi remarquer que les méthodes de Nagai et la méthode par éléments finis en déplacement pur enrichis convergent de façon croissante, contrairement à la méthode Métais.

## 4.5 Délaminage d'un bi-couches anisotropes fissuré soumis à traction

Dans cet exemple, une fissure de longueur  $2a$  est présente à l'interface dans un bi-matériaux soumis à une charge de traction uniformément répartie. Ici, le front de fissure est parallèle à l'axe  $\mathbf{X}_1$  comme l'indique la figure (4.14).

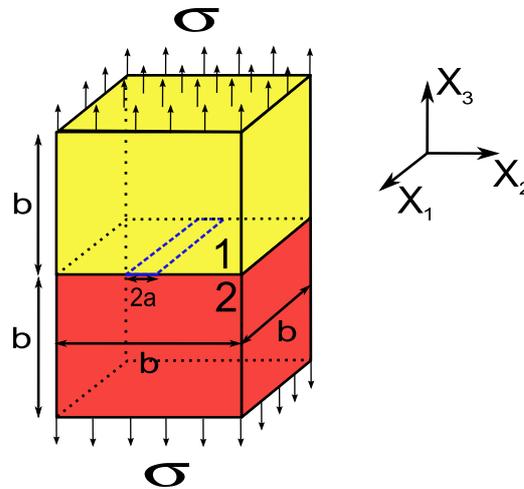


FIG. 4.14 – Essai de traction uniaxiale sur un bi-matériaux anisotropes fissuré à l’interface

Les dimensions de la structure sont fixées à  $100m$  pour  $b$  et  $1m$  pour  $a$ ,  $a$  étant la demi-longueur de fissure. Il est à noter que cette dernière traverse toute l’éprouvette.

Ce bi-matériaux est composé de deux couches de Carbone/Epoxy dont les propriétés mécaniques sont données dans le tableau (4.13). La stratification de la structure est fixée à  $[\theta_1/\theta_2]$  telle que l’orientation  $\theta_i$  se rapporte au matériau  $i$ .

TAB. 4.13 – Propriétés élastiques d’une couche homogénéisée de Carbone/Epoxy dans le repère matériau.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{23}$	$\nu_{13}$
138	9.86	9.86	5.24	5.24	5.24	0.3	0.3	0.3

Il existe donc deux fronts de fissure mais, étant donnée la symétrie du problème, nous ne nous intéresserons qu’à l’un d’entre eux.

La solution analytique des facteurs d’intensité des contraintes pour ce type de problème fut proposée par Hwu [Hwu93]. Ce cas fut aussi traité par Qian [Qia97] par la méthode des éléments finis. Qian modélise la structure par des éléments quadratiques à 20 nœuds sous le logiciel Abaqus. À partir du calcul numérique du taux de restitution d’énergie, il évalue les facteurs d’intensité des contraintes par une méthode analytique explicite adaptée à ce genre de problème (voir [Qia97]). Cependant, il ne donne aucune indication sur la discrétisation utilisée. Nous proposons alors de

travailler avec un maillage suffisamment fin près de la fissure, comme l'illustre la figure (4.15). Il s'agit d'un maillage dégressif dans le plan  $(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$  lorsque l'on se dirige vers la fissure. Cette dégression suit une loi en série géométrique. Il nous suffit alors d'introduire une raison (quotient de deux mailles successives) ainsi qu'une taille d'élément de référence que nous définissons comme la demi-longueur de la fissure  $a$ ,  $a$  étant égal à  $2\text{mm}$ . Dans la direction  $\mathbf{X}_1$ , le maillage suit le même principe avec une densité plus importante près des bords, comme montré dans la section (4.4).

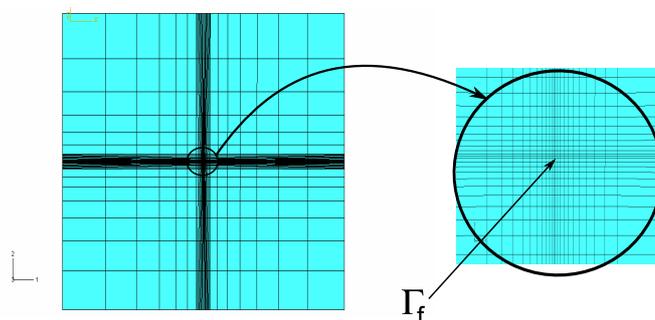


FIG. 4.15 – Maillage dans le plan  $(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$  utilisé pour le bi-matériaux orthotropes fissuré

Le maillage de la structure comporte donc 2014 éléments.

Trois configurations sont traitées :  $[0^\circ/90^\circ]$ ,  $[45^\circ/-45^\circ]$  et  $[0^\circ/45^\circ]$ .

Les tableaux (4.14), (4.15) et (4.16) donnent respectivement les facteurs d'intensité des contraintes normalisés dans les modes I, II et III ( $\tilde{K}_i = K_i/\sigma\sqrt{\pi a}$ ) aux bords de l'éprouvette. L'erreur relative par rapport à la solution exacte  $y$  est aussi reportée.

TAB. 4.14 – Facteurs d'intensité des contraintes en mode I normalisés ( $\tilde{K}_I$ ).

$[\theta_1/\theta_2]$	$\tilde{K}_I$			
	Exact	Qian	Métis	Déplacement pur
$[0^\circ/90^\circ]$ <i>Erreur</i>	1.	0.9986 0.14%	1.024 2.4%	0.975 2.5%
$[45^\circ/-45^\circ]$ <i>Erreur</i>	1.	0.9979 0.21%	1.020 2.0%	0.976 2.4%
$[0^\circ/45^\circ]$ <i>Erreur</i>	1.	0.9999 0.01%	1.020 2.0%	0.975 2.5%

TAB. 4.15 – Facteurs d'intensité des contraintes en mode II normalisés ( $\tilde{K}_{II}$ ).

	$\tilde{K}_{II}$			
$[\theta_1/\theta_2]$	Exact	Qian	Métis	Déplacement pur
$[0^\circ/90^\circ]$ <i>Erreur</i>	-0.1343	-0.1325 1.37%	-0.1362 1.42%	-0.130 3.5%
$[45^\circ/-45^\circ]$ <i>Erreur</i>	0.	0. 0%	0. 0%	0. 0%
$[0^\circ/45^\circ]$ <i>Erreur</i>	-0.0892	-0.0884 0.97%	-0.092 3.1%	-0.086 3.5%

TAB. 4.16 – Facteurs d'intensité des contraintes en mode III normalisés ( $\tilde{K}_{III}$ ).

	$\tilde{K}_{III}$			
$[\theta_1/\theta_2]$	Exact	Qian	Métis	Déplacement pur
$[0^\circ/90^\circ]$ <i>Erreur</i>	0.	0. 0%	0. 0%	0. 0%
$[45^\circ/-45^\circ]$ <i>Erreur</i>	0.0765	0.0748 2.1%	0.0856 11%	0.0824 7.7%
$[0^\circ/45^\circ]$ <i>Erreur</i>	0.0109	0.0106 3.6%	0.0123 12%	0.0118 8%

Les tableaux (4.14), (4.15) et (4.16) montrent globalement une bonne cohérence entre les différentes méthodes. Néanmoins, la méthode proposée par Qian [Qia97] paraît plus précise que les nôtres pour tous les modes élémentaires de rupture, avec une erreur n'excédant pas les 1% pour les modes I et II et 4% pour le mode III. Comme pour l'exemple précédent, les calculs des facteurs d'intensité des contraintes en mode III sont imprécis avec des erreurs allant jusqu'à 12% pour l'élément Métis et 8% pour l'élément en déplacement pur.

Cependant, comme mentionné précédemment, il est difficile de comparer nos méthodes avec celle de Qian, étant donné le manque d'informations dans son article.

Sur cet exemple, il s'avère que la méthode par éléments finis Métis enrichis est plus précise que celle par éléments finis en déplacement pur enrichis, et nous retrouvons, comme à l'accoutumé, l'encadrement de la solution exacte par les formulations Métis et en déplacement pur.

## 4.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons présenté cinq problèmes de référence traitant de singularités au sein de mono ou multi-matériaux. Les résultats issus de la méthode des éléments finis enrichis sont cohérents avec les solutions analytiques et avec les résultats d'autres méthodes numériques trouvés dans la littérature.

Nous avons montré qu'un maillage assez lâche est suffisant pour résoudre tout type de problème par la méthode des éléments finis enrichis. Par conséquent, ceci constitue un gain de temps dans la préparation du modèle élément fini.

Il apparaît que les résultats issus du calcul par éléments finis Métis sur-évaluent systématiquement les solutions de référence, tandis que ceux provenant de la formulation en déplacement pur les sous-évaluent. Ce phénomène est probablement dû au double enrichissement en fond de fissure pour les éléments finis Métis enrichis. Ces deux solutions peuvent faire office d'encadrement de la solution exacte.

En ce qui concerne l'effort de calcul, la méthode globale ne nécessite que quelques minutes sur un mono-processeur cadencé à 900 MHz pour résoudre complètement un exemple. La plus grande partie de ce temps est consacrée à l'inversion de la matrice globale.





## Conclusion générale & Perspectives

Dans ce travail de thèse, je me suis intéressé au développement d'éléments finis enrichis pour caractériser des paramètres de la mécanique de la rupture dans un contexte tridimensionnel au sein de multi-matériaux anisotropes.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté une méthode semi-analytique permettant de déterminer les surcontraintes au voisinage d'une discontinuité. Pour cela, je me suis appuyé sur une étude asymptotique près de la ligne singulière, à la jonction entre différents matériaux anisotropes. En s'inspirant des méthodes de type couche limite, je résous finalement un problème aux valeurs propres. La connaissance quasi-analytique des champs mécaniques assure la précision de la méthode. Il est à noter que j'ai étendu cette méthode au cas où une condition de contact frottant unidirectionnel respectant la loi de Coulomb existe à l'interface.

Dans le deuxième chapitre, divers problèmes de singularité ont été traités et ont été comparés à des résultats tirés de la littérature. Les résultats, traitant de mono ou de multi-matériaux, ont montré une bonne cohérence avec les autres méthodes. De plus, les temps de calcul sont faibles puisqu'il ne faut que quelques fractions de seconde pour extraire les exposants de singularité et les vecteurs propres conduisant aux contraintes et aux déplacements singuliers. Un exemple original a été proposé ensuite, traitant le cas d'un rivet plongé dans un bi-couche. Nous montrons que ce problème, dans lequel la ligne singulière présente une courbure, peut être facilement résolu grâce à l'outil de calcul développé.

Cependant, ces résultats sont locaux et ne dépendent que de la géométrie et des propriétés des matériaux avoisinants. Par conséquent, ils ne donnent que des informations partielles sur l'amorçage potentiel de fissure. En conséquence, cette méthode asymptotique est ensuite couplée à des calculs par éléments finis permettant d'acquérir des paramètres de mécanique de la rupture. Nous aboutissons ainsi à une double description, des champs proches et des champs lointains, et utilisons une règle de raccordement entre les deux.

Dans le troisième chapitre, nous avons détaillé la méthode de raccordement de la solution asymptotique avec celle par éléments finis. Nous obtenons alors les facteurs d'intensité des contraintes le long du front de fissure et les déplacements nodaux. Pour cela, deux formulations d'éléments finis ont été développées : la première est celle en déplacement pur et la seconde est une formulation hybride, nommée "Métis". Cette étude permet de résoudre de manière originale des problèmes dont l'exposant de singularité n'est pas nécessairement égal à  $-0.5$ . En effet, dans les problèmes de jonctions entre plusieurs matériaux anisotropes, au bord libre ou en fond d'entaille, l'exposant de singularité est souvent différent de  $-0.5$ , et les méthodes proposées dans la littérature ne sont pas adaptées, c'est le cas de l'élément Métis antérieurement développé par Nguyen Dang [Ngu91]. Nous proposons ici d'utiliser la méthode de la "partition de l'unité". En ce qui concerne le calcul des intégrales des fonctions singulières, parmi plusieurs schémas d'intégration numérique testés, les schémas de Gauss-Radau et de Gauss-Jacobi se révèlent les plus efficaces.

Dans le dernier chapitre, des calculs numériques des facteurs d'intensité des contraintes sur diverses configurations dont les résultats sont disponibles dans la littérature valident la méthode proposée. En effet, les résultats montrent une bonne cohérence, et une bonne précision, et ce pour un maillage qui peut rester relativement lâche. De plus, notre méthode ne requiert qu'un faible temps CPU. En ce qui concerne les facteurs d'intensité des contraintes, les résultats des calculs utilisant les éléments finis Métis enrichis surestiment légèrement la solution exacte du problème, tandis que les éléments finis en déplacement pur enrichis la sous-estime. Ainsi, ces deux types d'éléments fournissent un encadrement de la solution exacte.

Les résultats obtenus dans ce travail de thèse nous permettent d'envisager de nombreuses perspec-

tives. En premier lieu, dans le calcul de l'exposant de singularité, nous avons traité de problèmes avec contact frottant. Partant de cette même hypothèse, il conviendrait de poursuivre pour le calcul des facteurs d'intensité des contraintes par éléments finis.

En deuxième lieu, il serait intéressant de développer des estimateurs d'erreur qui seraient utilisés pour localiser les zones d'erreur afin de développer des procédures d'adaptation de maillage destinés à optimiser la qualité du calcul pour un temps donné.

En troisième lieu, des études expérimentales devraient permettre de valider les approches proposées. Grosbras [Gro08], par exemple, mesure des champs des déplacements au voisinage d'une singularité (bords libres et aux interfaces entre couches) par corrélation d'images numériques à l'échelle de la singularité.

A plus long terme, il serait intéressant d'établir des critères d'amorçage de fissure et de les coupler avec une modélisation de propagation au sein de multi-matériaux anisotropes en s'inspirant, par exemple, de la méthode X-FEM. En effet, cette méthode permet de simuler efficacement la propagation d'une fissure quelconque, tout en évitant les opérations de maillage et remaillage, coûteuses en temps de calcul.





## Annexe A

Le but de cette annexe est de prouver que le champs des contraintes en fond d'entaille est de la forme :

$$\sigma_{ij} \sim r^\alpha \mathbf{K}_\alpha \text{ lorsque } r \text{ est voisin de } 0$$

- ||  $r$  étant la distance d'un point appartenant au matériau jusqu'au front de fissure.
- ||  $\mathbf{K}_\alpha$  sont les facteurs d'intensité des contraintes
- ||  $\alpha$  est appelé "exposant de singularité"

Nous nous intéressons au champ des contraintes au voisinage d'une entaille dans un corps constitué d'un matériau élastique, linéaire, homogène, isotrope. La forme du domaine occupé par le corps est quelconque, mais régulière, à l'exception d'une entaille. Ce corps est soumis à des efforts imposés sur une partie de son bord et à des déplacements imposés sur la partie complémentaire. Pour simplifier, les forces de volume sont supposées nulles et le problème est posé en déformations planes. L'origine des coordonnées est choisie en fond d'entaille. L'entaille est symétrique par rapport à (Ox) et son demi-angle d'ouverture vaut  $\omega$ .

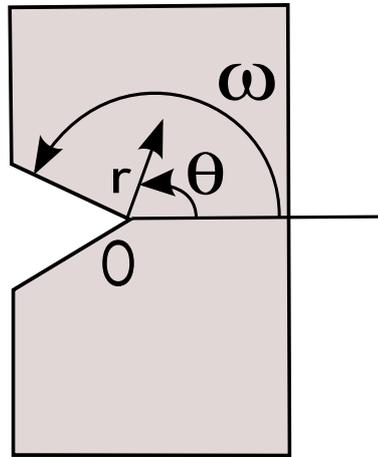


FIG. 4.16 – Éprouvette entaillée

La démonstration qui suit repose sur le calcul de la fonction d’Airy.

Afin de déterminer le comportement asymptotique des contraintes au voisinage de la pointe de l’entaille, on cherche le développement de la fonction d’Airy du problème d’élasticité sous la forme :

$$\phi(r, \theta) = r^{\alpha+2}g(\theta) \text{ au voisinage de } O \quad (4.5)$$

La fonction d’Airy est une fonction bi-harmonique et par conséquent :

$$\Delta\Delta\phi(r, \theta) = 0 \quad (4.6)$$

Le Laplacien s’exprime en coordonnées polaires par :

$$\Delta\phi(r, \theta) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \quad (4.7)$$

En cherchant le développement de  $\phi$  au voisinage de  $r = 0$  sous la forme indiquée  $r^{\alpha+2}g(\theta)$ , on obtient :

$$\Delta\phi(r, \theta) = [(\alpha + 2)^2g(\theta) + g''(\theta)] r^\alpha \quad (4.8)$$

Puis, en posant  $\beta = \alpha + 2$  :

$$\Delta\Delta\phi(r, \theta) = [\alpha^2 h(\theta) + h''(\theta)] r^{\alpha-2} = [g^{(4)}(\theta) + (\beta^2 + \alpha^2)g''(\theta) + \alpha^2\beta^2 g(\theta)] r^{\alpha-2} \quad (4.9)$$

$g$  est donc solution de l'équation différentielle à coefficients constants :

$$g^{(4)}(\theta) + (\beta^2 + \alpha^2)g''(\theta) + \alpha^2\beta^2 g(\theta) \quad (4.10)$$

Les solutions de l'équation précédente sont de la forme  $Ae^{(p\theta)}$ , où  $p$  vérifie :

$$p^4 + (\beta^2 + \alpha^2)p^2 + \alpha^2\beta^2 = 0 \quad (4.11)$$

Les racines de l'équation (4.11) sont :

$$p^2 = -\alpha^2 \quad ; \quad p^2 = -\beta^2 \quad (4.12)$$

Et les solutions de (4.10) s'écrivent donc :

$$g(\theta) = A\cos(\beta\theta) + B\sin(\beta\theta) + C\cos(\alpha\theta) + D\sin(\alpha\theta) \quad (4.13)$$

Les conditions aux limites du problème sont :

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\theta} = 0 \text{ pour } \theta = \pm\omega \quad (4.14)$$

Compte tenu des relations entre les contraintes et la fonctions d'Airy :

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (4.15)$$

Les conditions limites s'écrivent :

$$g'(\theta) = g(\theta) = 0 \text{ pour } \theta = \pm\omega$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta\omega) & \sin(\beta\omega) & c & \sin(\alpha\omega) \\ \cos(\beta\omega) & -\sin(\beta\omega) & \cos(\alpha\omega) & -\sin(\alpha\omega) \\ -\beta\sin(\beta\omega) & \beta\cos(\beta\omega) & -\alpha\sin(\alpha\omega) & \alpha\cos(\alpha\omega) \\ \beta\sin(\beta\omega) & \beta\cos(\beta\omega) & \alpha\sin(\alpha\omega) & \alpha\cos(\alpha\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

En faisant la somme et la différence des lignes 1 et 2 d'une part, 3 et 4 d'autre part, ce système  $4 \times 4$  peut être réduit à deux systèmes  $2 \times 2$  :

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta\omega) & \cos(\alpha\omega) \\ \beta\sin(\beta\omega) & \alpha\sin(\alpha\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sin(\beta\omega) & \sin(\alpha\omega) \\ \beta\cos(\beta\omega) & \alpha\cos(\alpha\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

L'existence d'une solution non nulle à l'un de ces systèmes linéaires n'est possible que si le déterminant du système considéré est nul. L'annulation du déterminant du premier système s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha\cos(\beta\omega)\sin(\alpha\omega) - \beta\sin(\beta\omega)\cos(\alpha\omega) &= 0 \\ -(\alpha + 1)\sin(2\omega) - \sin(2(\alpha + 1)\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

L'exposant de singularité  $\alpha$  est donc solution de :

$$\frac{\sin(2(\alpha + 1)\omega)}{2(\alpha + 1)\omega} = -\frac{\sin(2\omega)}{2\omega} \quad (4.19)$$

L'existence d'une solution non nulle pour le second système conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\sin(2(\alpha + 1)\omega)}{2(\alpha + 1)\omega} = \frac{\sin(2\omega)}{2\omega} \quad (4.20)$$

Compte tenu des relations entre les composantes du tenseur des contraintes et la fonction d'Airy  $\phi$ , les contraintes varient comme  $r^\alpha$  au voisinage de  $r = 0$ . Le champ des contraintes sera donc singulier en fond d'entaille si  $\alpha < 0$ . D'autre part, l'énergie élastique du système doit rester finie

$(\Pi \sim \sigma^2 \sim r^{2\alpha})$  qui n'est intégrable sur  $\mathbb{R}^2$  que lorsque  $\alpha > 1$ . En résumé, on recherche  $\alpha$  solution de (4.19) et/ou (4.20) en se limitant aux valeurs supérieures à  $-1$ . La plus petite solution donnera le terme dominant dans le développement et seules les solutions négatives donneront lieu à des contraintes singulières. La résolution des équations (4.19) (4.20) se fait graphiquement en posant  $x = 2(\alpha + 1)\omega$ . On cherche le plus petite racine positive des équations  $\sin(x)/x = \pm \sin(2\omega)/2\omega$ .

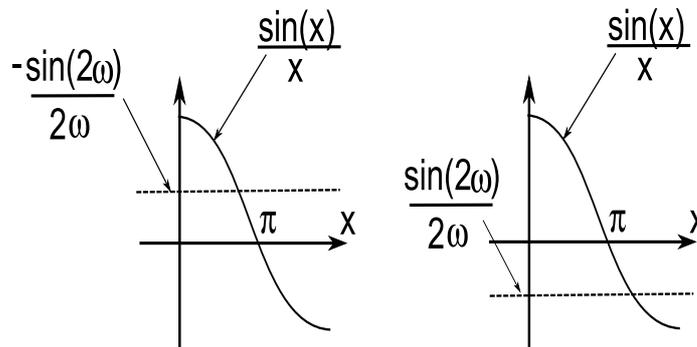


FIG. 4.17 — Résolution graphique des équations (4.19) (à gauche) et (4.20) (à droite)

Pour  $\frac{\pi}{2} \leq \omega < \pi$ ,  $\sin(2\omega)$  est négatif et la première solution positive  $x = 2(\alpha + 1)$  de l'équation (4.19) est inférieure à  $\pi$ , ce qui correspond à une valeur de  $\alpha$  dans l'intervalle  $] -1; 0[$  et donc à une singularité de contrainte. Nous pouvons déjà affirmer que *les contraintes au voisinage de la pointe de l'entaille sont singulières*.

La solution de l'équation (4.20) est supérieure à  $\pi$ , ce qui correspond à une valeur positive de  $\alpha$  qui n'entraîne pas de singularité, sauf lorsque  $\omega = \pi$ .

Les constantes  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas déterminées par cette analyse mais par le comportement de la fonction d'Airy en dehors du voisinage du fond d'entaille. Elles dépendent donc de la géométrie du corps et du chargement appliqué.





## Annexe B

Dans le chapitre 4, la méthode de la M-Intégrale ainsi que celle d'extrapolation des déplacements ont souvent été mentionnées. Ces techniques permettent notamment d'obtenir les facteurs d'intensité des contraintes en utilisant des résultats issus du calcul par éléments finis.

Cette annexe résume brièvement ces différentes techniques.

### 4.7 Extrapolation des déplacements

Les facteurs d'intensité des contraintes peuvent être déterminés par la relation les reliant aux déplacements en fond de fissure. Cette définition est celle de la méthode d'extrapolation des déplacements.

Dans le cadre général d'une fissure située à la jonction de plusieurs matériaux anisotropes, les

relations s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} K_{II} \\ K_I \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \underline{\mathbf{\Lambda}} \left\langle \frac{(1 + 2i\varepsilon_j) \cosh(\pi\varepsilon_j)}{(r/l_k)^{i\varepsilon_j}} \right\rangle \underline{\mathbf{\Lambda}}^T \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta u_3 \end{Bmatrix}$$

$\Delta u_i$  sont respectivement les déplacements en fond de fissure suivant les directions  $X_1, X_2$  et  $X_3$   
 $\varepsilon_j$  est la partie imaginaire associée à  $\alpha_j$   
 $\underline{\mathbf{\Lambda}} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  où les  $\lambda_j$  sont les vecteurs propres associés à  $\alpha_j$  dans le problème de surcontrainte  
 $l_k$  est un paramètre de précision à donner

(4.21)

Cette méthode générale, adaptable à toute situation, est très simple à mettre en œuvre. Cependant, sa précision est souvent discutable et nécessite un maillage très fin près des zones singulières.

## 4.8 M-Intégrale

Dans cette section, la M-Intégrale est traitée dans le cas général. Introduite initialement par Yau [Yau84], celle-ci permet d'identifier les facteurs d'intensité des contraintes en utilisant le principe de superposition en liaison avec la J-Intégrale.

Justement, cette dernière dans le cas tridimensionnel s'exprime de la façon suivante :

$$J = \int_{\Gamma} \left\{ W \cdot n - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right\} d\Gamma - \int \int_A \left\{ \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \sigma_{i3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3 \partial x_1} \right\} dA$$

$W$  est la densité d'énergie potentielle complémentaire

$\Gamma$  est un contour arbitraire enrobant le front de fissure

$n$  est le vecteur normal au contour  $\Gamma$

$T_i$  est le vecteur contrainte normale perpendiculaire au contour  $\Gamma$

$A$  est le volume à l'intérieur du contour  $\Gamma$

(4.22)

Avec l'hypothèse des déformations planes, le second membre de (4.22) disparaît puisque les dérivées suivant  $x_3$  sont nulles.

Cette intégrale peut aussi se mettre sous une forme concise :

$$J = \mathbf{K}^\top \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{K}$$

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{K} \text{ est le vecteur des facteurs d'intensité des contraintes} \\ \underline{\mathbf{E}} \text{ est une matrice obtenue à partir des tenseurs de Barnett-Lothe} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Considérons deux états indépendants respectant l'équilibre interne distingués, par la suite, par les indices (1) et (2). L'indice (1) fera référence au problème à résoudre tandis que l'indice (2) fera référence à un problème déjà connu. La superposition des deux problèmes aura pour indice (1+2). La distribution des déplacements et des déformations dans le problème superposé peut donc s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{(1+2)} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} \\ \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(1+2)} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(1)} + \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(2)} \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Les facteurs d'intensité des contraintes peuvent également être superposés :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_I^{(1+2)} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \\ K_{II}^{(1+2)} = K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \\ K_{III}^{(1+2)} = K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)} \end{array} \right. \quad (4.25)$$

En substituant l'équation (4.25) dans l'équation (4.23), l'intégrale J des deux états superposés (1+2) est obtenue :

$$J^{(1+2)} = \frac{1}{4} \left\{ \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} \right\}^\top \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \left\{ \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} \right\} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{1}{4} \left\{ \mathbf{K}^{(1)\top} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)\top} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{K}^{(1)} \right\} \quad (4.26)$$

Par conséquent, le M-intégrale est calculée de la manière suivante :

$$M = \frac{1}{4} \left\{ \mathbf{K}^{(1)\top} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)\top} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{K}^{(1)} \right\} = J^{(1+2)} - J^{(1)} - J^{(2)} \quad (4.27)$$

Tout problème connu peut être utilisé comme référence au problème. Dans cette étude, nous utilisons comme références les solutions asymptotiques.

Si les solutions asymptotiques suivantes sont sélectionnées ( (a)  $K_{II} = 1, K_I = 0, K_{III} = 0$ , (b)  $K_{II} = 0, K_I = 1, K_{III} = 0$ , (c)  $K_{II} = 0, K_I = 0, K_{III} = 1$ ), alors nous obtenons une équation linéaire

simultanée comme suit :

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{II}^{(1)} \\ K_I^{(1)} \\ K_{III}^{(1)} \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} M_{(a)} \\ M_{(b)} \\ M_{(c)} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

La résolution de ce système linéaire nous donne les facteurs d'intensité des contraintes du problème ciblé.



## Bibliographie

- [Aki76] J. Akin. The generation of element with singularities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10 :pp. 1249–1259, 1976.
- [Atl75] S. Atluri, A. Kobayashi, and M. Nakagaki. An assumed displacement hybrid finite element model for linear fracture mechanics. *International Journal of Fracture*, vol. 11 :pp. 257–271, 1975.
- [Ban97] L. Banks-Sills. A conservative integral for determining stress intensity factors of a bimaterial strip. *International Journal of Fracture*, vol. 86 :pp. 385–398, 1997.
- [Bar76] R. Barsoum. On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10 :pp. 25–37, 1976.
- [Bar03] A. Barroso, V. Mantič, and F. París. Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners. *International Journal of Fracture*, vol. 119 :pp. 1–23, 2003.
- [Bel99] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45 :pp. 601–620, 1999.
- [Ben74] S. Benzley. Representations of singularities with isoparametric finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8 :pp. 537–545, 1974.

- [Bog70] D. Bogy. On the problem of edge-bonded elastic quarter planes loaded at the boundary. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 6 :pp. 1287–1313, 1970.
- [Bre91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [Bys70] E. Byskov. The calculation of stress intensity factors using the finite element method with cracked elements. *Internationnal Journal of fracture*, vol. 6 :pp. 159–167, 1970.
- [Cha70] S. Chan, I. Tuba, and W. Wilson. On the finite element method in linear fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 2 :pp. 1–17, 1970.
- [Che97a] H. Chen. Stress singularities in anisotropic multi-material wedges and junctions. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37 :pp. 1057–1073, 1997.
- [Che97b] W. Chen and T. Huang. Stress singularity of edge delamination in angle-ply and cross-ply laminates. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 64 :pp. 525–531, 1997.
- [Che01] M. Chen. A novel hybrid finite element analysis of bimaterial wedge problems. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 68 :pp. 1463–1476, 2001.
- [Chu01] C. Chue, C. Tseng, and C. Liu. On stress singularities in anisotropic wedge for various boundary conditions. *Composite Structures*, vol. 54 :pp. 87–102, 2001.
- [Cré01] D. Crépin. *Éléments finis mixtes singuliers tridimensionnels pour l'étude des "surcontraintes" dans les structures en matériaux composites*. Phd thesis, spécialité : mécanique, Université de Lille1, France, 2001.
- [Cre01a] D. Crepin. *Éléments finis mixtes singuliers tridimensionnels pour l'étude des surcontraintes dans les structures en matériaux composites*. Ph.D. thesis, Université de Lille 1, 2001.
- [Cre01b] D. Crepin, M. Pyrz, and G. de Saxce. éléments finis mixtes 3d adaptés au calcul des surcontraintes dans les assemblages de composites. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences-Série Iib*, vol. 329 :pp. 633–336, 2001.

- [Cre02] D. Crepin, M. Pyrz, and G. de Saxce. éléments finis mixtes singuliers 3d pour le calcul des surcontraintes dans les assemblages de composites. *Revue Européenne des éléments finis*, vol. 11 :pp. 319–333, 2002.
- [Dav96] G. Davi. Stress fields in general composite laminates. *AIAA Journal*, vol. 34 :pp. 2604–2608, 1996.
- [de 89] G. de Saxce and H. Nguyen Dang. Modified formulae for three dimensional direct stress intensity factor computation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 6 :pp. 223–230, 1989.
- [Del79] F. Delale and F. Erdogan. Bonded orthotropic strips with cracks. *International Journal of Fracture*, vol. 15 :pp. 343–364, 1979.
- [Dem79] J. Dempsey and G. Sinclair. On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. *Journal of Elasticity*, vol. 9 :pp. 373–391, 1979.
- [Des81] P. Destuynder and M. Djaoua. Sur une interprétation mathématique de l’intégrale de rice en théorie de la rupture fragile. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 3 :pp. 70–87, 1981.
- [Don62] S. Dong, K. Pister, and R. Taylor. On the theory of laminated anisotropic shells and plates. *Journal of Aeronautical Science*, vol. 29 :pp. 969–975, 1962.
- [Fra65] B. Fraeijns de Veubeke. *Displacements and equilibrium models in the finite elements method*. John Willey & Sons, London, 1965.
- [Gro08] P. Grosbras. *Etude expérimentale et modélisation de la défaillance des matériaux composites près des bords libres et des jonctions*. Ph.D. thesis, Université de Lille 1, 2008.
- [Hei71] V. Hein and F. Erdogan. Stress singularities in a two-material wedge. *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 7 :pp. 317–330, 1971.
- [Hel14] E. Hellinger. *Die allgemeine ansätze der mechanik der continua*. Encyklopoedia der mathematische wissenschaften, Leipzig, 1914.

- [Hen75] R. Henshell and K. Shaw. Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 9 :pp. 495–507, 1975.
- [Hua07] C. Huang and A. Leissa. Stress singularities in bimaterial bodies of revolution. *Composite Structures*, vol. 82 :pp. 488–498, 2007.
- [Hwu93] C. Hwu. Explicit solutions for collinear interface crack problems. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30 :pp. 301–312, 1993.
- [Imb91] J. Imbert. *Analyse des structures par éléments finis*. Cepadues, 1991.
- [Ing80] A. Ingraffea and C. Manu. Stress intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15 :pp. 1427–1445, 1980.
- [Ino96] T. Inoue and H. Koguchi. Influence of the intermediate material on the order of stress singularity in three-phase bonded structure. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33 :pp. 399–417, 1996.
- [Isa71] G. Isakson and A. Levy. Finite-element analysis of interlaminar shear in fibrous composites. *Journal of Composite Materials*, vol. 5 :pp. 273–276, 1971.
- [Jon64] R. Jones. A generalization of the direct-stiffness method of structural analysis. *AIAA Journal*, vol. 2 :pp. 821–826, 1964.
- [Kuo74] M. Kuo and D. Bogy. Plane solutions for the displacement and traction-displacement problems for anisotropic elastic wedges. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 41 :pp. 197–202, 1974.
- [Leg87] D. Leguillon and E. Sanchez-Palencia. *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. Masson, Paris, 1987.
- [Lek63] S. Lekhnitskii. *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. Holden-day, Series of Mathematical Physics, 1963.

- [Lin00] J. Lindemann and W. Becker. Analysis of the free-edge effect in composite laminates by the boundary finite element method. *Mechanics of Composite Materials*, vol. 36 :pp. 355–366, 2000.
- [Ma89] C. Ma and B. Hour. Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 25 :pp. 1295–1309, 1989.
- [Mas07] N. Masaki, I. Toru, and M. Noriyuki. Stress intensity factor analysis of a three-dimensional interface crack between dissimilar anisotropic materials. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 74 :pp. 2481–2497, 2007.
- [Mel96] J. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139 :pp. 289–314, 1996.
- [Mit06] C. Mittelstedt and W. Becker. Efficient computation of order and mode of three-dimensional stress singularities in linear elasticity by the boundary finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43 :pp. 2868–2903, 2006.
- [Miy93] N. Miyazaki, T. Ikeda, T. Soda, and T. Munakata. Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method. *Japan Society Mechanical Engineering*, vol. 36 :pp. 36–42, 1993.
- [Moe99] N. Moes, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 139 :pp. 289–314, 1999.
- [Mug02] A. Mugadu, D. Hills, and L. Limmer. An asymptotic approach to crack initiation in fretting fatigue of complete contacts. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 50 :pp. 531–547, 2002.
- [Mun92] D. Munz and Y. Yang. Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 59 :pp. 857–861, 1992.

- [Nag03] T. Nagashima, Y. Omoto, and S. Tani. Stress intensity factor analysis of interface cracks using x-fem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56 :pp. 1151–1173, 2003.
- [Ngu78] H. Nguyen Dang. On the monotony and the convergence of a special class of hybrid finite element : the mongrel element. *Variational Methods in Mechanics of Solids*, vol. 1 :pp. 208–213, 1978.
- [Ngu91] H. Nguyen Dang, G. de Saxce, and K. Che-Hang. The computation of 2-d stress intensity factors using hybrid mongrel displacement finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 38 :pp. 197–205, 1991.
- [Ngu00] Q. Nguyen. *Stability and Non-Linear Solid Mechanics*. Wiley, New-York, 2000.
- [Ngu06a] D. Nguyen Tien. *Modélisation du délaminage des composites sous chargement complexe par éléments métis*. Ph.D. thesis, Université of Liège, 2006.
- [Ngu06b] D. Nguyen Tien and H. Nguyen Dang. Regular and singular metis finite element models for delamination in composite laminates. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42 :pp. 650–659, 2006.
- [Noi00] F. Noiroto, J. Ferrero, J. Barrau, B. Castanie, and M. Sudre. Analyse d’inserts pour les structures sandwich composites. *Mécaniques et Industries*, vol. 1 :pp. 241–249, 2000.
- [Pag94] S. Pageau, P. Joseph, and J. S. Biggers. The order of stress singularities for bonded and debonded three-material junctions. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 31 :pp. 2979–2997, 1994.
- [Pap74] S. Papaioannou, P. Hilton, and R. Lucas. A finite element method for calculating stress intensity factors and its application to composites. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 6 :pp. 807–823, 1974.
- [Pia64] T. Pian. Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions. *AIAA Journal*, vol. 2 :pp. 1333–1336, 1964.
- [Pip70] R. Pipes and N. Pagano. Interlaminar stresses in composite laminates under uniform axial extension. *Journal of Composite Materials*, vol. 39 :pp. 538–548, 1970.

- [Poo01] P. Poonsawat, A. Wijeyewickrema, and P. Karasudhi. Singular stress fields of angle-ply and monoclinic bimaterial wedges. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38 :pp. 91–113, 2001.
- [Pra16] E. Prange. *Der variations und minimal prinzipte der statik der baukonstruktionen*. Habilitationsschrift, 1916.
- [Pru05] M. Prukvilailert and H. Koguchi. Stress singularity analysis around the singular point on the stress singularity line in three-dimensional joints. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42 :pp. 3059–3074, 2005.
- [Qia97] W. Qian and C. Sun. Calculation of stress intensity factors for interlaminar cracks in composite laminates. *Composites Science and Technology*, vol. 57 :pp. 637–650, 1997.
- [Rei50] E. Reissner. On a variational theorem in elasticity. *Journal of Mathematical Physics*, vol. 29 :pp. 90–95, 1950.
- [Ric68] J. Rice. *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*. Fracture : a advanced treatise, II, Liebowitz H., Academic Press, 1968.
- [Ryb71] E. Rybicki. Approximate three-dimensional solutions for symmetric laminates under inplane loading. *Journal of Composite Materials*, vol. 5 :pp. 354–360, 1971.
- [Sch93] P. Schils, G. Laschet, G. de Saxce, E. Lambert, and N. Dang Hung. *Développement et validation de modèles pour la caractérisation des propriétés mécaniques et la description des mécanismes d'endommagement des structures en matériaux composites*. Projet région wallone, Rapport final de la convention numéro 1889, 1993.
- [Shi88] C. Shih and R. Asaro. Elastic-plastic analysis of cracks on bimaterial interfaces : Part iUsmall scale yielding. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 1 :pp. 299–316, 1988.
- [Sic] <http://sic.univ-tln.fr/>.
- [Sih65] G. Sih, P. Paris, and G. Irwin. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 1 :pp. 189–203, 1965.

- [Teo74] P. Teocaris. The order of singularity at a multi-wedge corner of a composite plate. *International Journal of Engineering Science*, vol. 12 :pp. 107–120, 1974.
- [Tin81] T. Ting and S. Chou. Edge singularities in anisotropic composites. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 17 :pp. 1057–1068, 1981.
- [Ton73] P. Tong, T. Pian, and S. Lasry. A hybrid element approach to crack problems in plane elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7 :pp. 1031–1036, 1973.
- [Tra71] D. Tracey. Finite elements for determination of crack tip elastic stress intensity factors. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 3 :pp. 255–256, 1971.
- [Vu-06] L. Vu-Quoc and V. Tran. Singularity analysis and fracture energy-release rate for composites : Piecewise homogeneous-anisotropic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195 :pp. 5162–5197, 2006.
- [Wan82] S. Wang and I. Choi. Boundary layer effect in composite laminates, part i : Free-edge stress singularities ; part ii : free-edge stress solutions and characteristics. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 49 :pp. 541–550, 1982.
- [Wan83] S. Wang and I. Choi. The interface crack between dissimilar anisotropic composite materials. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50 :pp. 169–178, 1983.
- [Wan84] S. Wang. Edge delamination in angle-ply composite laminates. *AIAA Journal*, vol. 22 :pp. 256–264, 1984.
- [Wil52] M. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 19 :pp. 526–528, 1952.
- [Wil65] J. Wilkinson. *The algebraic eigenvalue problem*. Oxford University Press, 1965.
- [Yau84] J. Yau and S. Wang. An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 20 :pp. 423–432, 1984.

- [Yeh86] J. Yeh and J. Tadibakhsh. Stress singularity in composite laminates by finite element method. *Journal of Composite Materials*, vol. 20 :pp. 347–364, 1986.
- [Yuu93] R. Yuuki. *Mechanics of interface*. Baifukan, Tokyo, 1993.

Chapitre 4 : *BIBLIOGRAPHIE*

## Résumé

### **Modélisation tridimensionnelle par éléments finis enrichis pour le calcul de singularités de délaminage et à la jonction de matériaux anisotropes**

Il est connu de longue date que les discontinuités matérielles et/ou géométriques peuvent provoquer des concentrations des contraintes, dites "surcontraintes", nocives pour la résistance du matériau qui doit les supporter. En effet, l'état de contrainte dans ces zones peut être singulier et ne peut être modélisé en pratique par éléments finis réguliers tridimensionnels, à moins de mailler très finement. Pour palier cette difficulté, nous proposons une méthode numérique en deux étapes. La première permet de déterminer l'ordre de la singularité et le mode de surcontraintes. La seconde étape consiste à inclure ces résultats dans une description des champs mécaniques régnant dans la structure pour obtenir les informations complètes sur l'amorçage de fissure via une règle de raccordement. Ce raccordement a d'abord été effectué dans une formulation d'éléments finis hybrides "Métis" à double singularité puis dans une formulation en déplacement pur. Cette technique a été étendue au cas général où l'exposant de singularité est quelconque permettant de résoudre des problèmes de bord libre ou d'entaille à la jonction de plusieurs matériaux anisotropes avec une grande précision. L'analyse duale d'un problème grâce aux deux types de formulations fournit une estimation a posteriori de l'erreur. Des applications numériques tant au niveau du calcul d'exposants de singularité que de celui des facteurs d'intensité des contraintes valident la méthode en s'appuyant sur divers exemples issus de la littérature. Les résultats montrent une bonne cohérence et une bonne précision. De plus, ces méthodes ne requièrent qu'un faible temps CPU.

#### **Mots clés**

Délaminage, composites stratifiés, éléments finis mixtes, jonctions

## Abstract

### **Three-dimensional modeling with enriched finite element for the calculation of singularities delamination and at the junction of anisotropic materials**

Material and/or geometry discontinuities can cause concentrations of stress. This stress can be harmful to the strength of the structure. Indeed, the state of stress in these areas can be singular. This kind of stress, called "overstress", can be modelled in practice by regular three-dimensional finite element, unless very finely meshed. To overcome this difficulty, we propose a numerical method in two steps. The first determines the singularity order and the mode fracture. The second step is to include these results in a description of the mechanical fields prevailing in the structure to obtain complete information on the initiation of the crack via a rule of connection. This connection was implemented in a finite element mixed formulation named "Metis" and a finite element displacement formulation. The proposed technique has been extended for all given singularity order. So, this technique can resolve any problems like free-edge or V-notch at the junction of several anisotropic materials with great precision. The dual analysis of a problem with these two types of formulations provides a posteriori error. Numerical applications for calculation of stress intensity factors and singularity order validate the proposed method on examples from literature. The results show a good consistency and good accuracy. Moreover, these methods require only low CPU time.

#### **Keywords**

Delamination, composites laminates, mixed finite elements, junctions