

Numéro d'ordre : 4310

THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE,
UFR de MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES,
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE FONDAMENTALE,**

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MÉCANIQUE

par

Fatah MEJNI

**Structures synchronisées dans les écoulements
inhomogènes de convection mixte en milieu poreux**

soutenue le 1 décembre 2008, devant le Jury

<i>Président</i>	:	J.M. CHOMAZ	Directeur de recherche CNRS, LadHyX.
<i>Rapporteurs</i>	:	M.C. NÉEL U. EHRENSTEIN	Professeur à l'Université d'AVIGNON. Professeur à l'Université d'Aix-MARSEILLE.
<i>Examineurs</i>	:	A. COUAIRON P.A. BOIS	Chargé de recherche CNRS, CPHT polytechnique. Professeur à l'USTL.
<i>Directeur de Thèse</i>	:	M.N. OUARZAZI	Professeur à l'USTL.

Laboratoire de Mécanique de Lille (LML), UMR CNRS 8107, Cité Scientifique, Bâtiment M3,
59655 Villeneuve D'Ascq Cédex, France.

Remerciements :

Dans un premier temps, je tiens à exprimer ma sincère gratitude à Mr Mohamed Najib OUARZAZI pour sa grande disponibilité, son solide appui, ses conseils éclairés et ses encouragements sans cesse réitérés lors de ces quatre années de thèse effectuées au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille.

Je souhaiterai également témoigner de ma cordiale reconnaissance à Mme Marie-Christine NÉEL et à Mr Uwe EHRENSTEIN pour avoir accepté le rôle de rapporteur. De la même manière je remercie Mr Arnaud COUAIRON et Mr Pierre-Antoine BOIS qui m'ont fait le plaisir de poser un regard critique sur ces travaux en assurant la charge d'examineur, ainsi que Mr Jean-Marc CHOMAZ qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Mes remerciements s'adressent également aux amis, thésards ou non qui m'ont accompagné et soutenu chacun à sa manière au cours de la réalisation de cette thèse : Alexandre DELACHE, Qi ZHANG, Mahamadou ADAMA MAIGA, Geremino ELLA ENY, Qifeng JIANG, Shuyan LIU...

Cela va de soi mes remerciements s'adressent également à tous mes proches, plus particulièrement ma famille et de manière nominative mes parents, mon épouse Leïla et notre fille Bessmallae pour leur irremplaçable et inconditionnel soutien, remède implacable pour écarter le moindre doute. J'espère maintenant être plus disponible et leur rendre ce que je leur dois.

Table des matières

Introduction	1
1 Présentation de la convection mixte inhomogène en milieu poreux	9
1.1 Caractérisation des milieux poreux	9
1.1.1 Définition des milieux poreux	9
1.1.2 Paramètres des milieux poreux	10
1.2 Équations du mouvement pour les milieux poreux	16
1.2.1 Hypothèses adoptées	16
1.2.2 Équation de conservation de la masse	17
1.2.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement	17
1.2.4 Équation de conservation de l'énergie	21
1.3 Formulation mathématique	22
1.3.1 Problème physique et modèle mathématique	22
1.3.2 Équations adimensionnées	23
1.4 Solution de base	25
1.5 Conclusion	29
2 Modes globaux linéaires de convection mixte faiblement inhomogène en milieu poreux	31
2.1 L'approximation WKBJ pour la perturbation	31
2.1.1 Problème à l'ordre principal et relation de dispersion locale	32
2.1.2 Critère de sélection de la fréquence du mode global linéaire	33
2.1.3 La solution de l'approximation WKBJ à l'ordre ε	35
2.2 L'approximation WKBJ dans la région du point tournant double pour le domaine infini	38
2.2.1 La solution extérieure au voisinage du point tournant double	39
2.2.2 Écoulement de base au voisinage du point tournant double	41
2.2.3 Construction de la solution intérieure des équations de perturbation	41
2.3 Résultats et discussion	45
2.3.1 Dépendance du seuil et de la fréquence de l'instabilité globale vis-à-vis du nombre de Péclet	45
2.3.2 Caractéristiques de la structure spatiale du mode global linéaire	46
2.4 L'approximation WKBJ dans la région du point tournant pour le domaine semi-infini	50
2.4.1 Écoulement de base dans la région du point tournant	50

2.4.2	Solution intérieure des équations de perturbation	50
2.5	Résultats et discussion	55
2.5.1	Seuil et fréquence de l'instabilité globale	55
2.5.2	Structure spatiale du mode global linéaire	56
2.6	Conclusion	61
3	Modèle de Ginzburg-Landau et modes globaux	63
3.1	Introduction	63
3.2	Détermination analytique des modes globaux linéaires	65
3.2.1	Approximation WKBJ appliquée à l'équation de Ginzburg-Landau	65
3.2.2	Solution intérieure dans le cas d'un point tournant double	66
3.2.3	Solution intérieure dans le cas d'un point tournant simple	68
3.2.4	Validité du modèle Ginzburg-Landau	70
3.2.5	Commentaires	72
3.3	Simulations numériques	73
3.3.1	Détermination numérique du seuil de l'instabilité globale	74
3.3.2	Apport du non linéaire au delà de son rôle de saturation	75
3.4	Conclusion	82
4	Résultats de Simulations numériques directes des écoulements inhomogènes de convection mixte	85
4.1	Mise en évidence de l'écoulement de base inhomogène	86
4.2	Structures synchronisées dans le régime fortement non linéaire	88
4.2.1	Configuration infinie	88
4.2.2	Configuration semi-infinie	92
4.2.3	Comparaison avec la structure spatiale du mode global linéaire	92
4.2.4	Comparaison avec les prédictions de l'équation de Ginzburg-Landau	95
4.3	Fréquence d'oscillations des structures synchronisées pleinement développées	99
4.3.1	Mise en évidence des oscillations globales	99
4.3.2	Critère de sélection de la fréquence globale des oscillations	102
4.4	Analyse de la distribution spatiale des modes globaux non linéaires	107
4.4.1	Analyse de la distribution spatiale du mode global raide	107
4.4.2	Lois d'échelle pour une configuration semi-infinie	111
4.5	Comparaison des fréquences globales des structures synchronisées avec l'expérience	112
4.5.1	Evaluation expérimentale des nombres sans dimension et discussion	113
4.5.2	fréquences d'oscillations auto-entretenuës : théorie/expérience	116
4.6	Conclusion	117
	Conclusion générale et perspectives	121
A	Équation de Ginzburg-Landau	125
A.1	Partie linéaire de l'équation d'amplitude	125
A.2	Équation d'amplitude non linéaire	125
A.2.1	Développement multi-échelle	125
A.2.2	Ordre δ	127
A.2.3	Problème adjoint	127

A.2.4	Ordre δ^2	128
A.2.5	Ordre δ^3	129
B	Méthodes Numériques	131
B.1	Intégration temporelle	132
B.1.1	Problème de Helmholtz	132
B.1.2	Problème de Darcy	133
B.2	Discrétisation spatiale, méthode spectrale	133
B.2.1	Méthode spectrale de Galerkin	134
B.2.2	Méthode pseudo-spectrale	136
B.2.3	Conditions aux limites	138
B.3	Applications aux équations	140
B.3.1	Résolution de la température	140
B.3.2	Résolution de la pression et de la vitesse	140

Introduction

Le problème de Rayleigh-Bénard (R-B) est indiscutablement le modèle type parmi les systèmes hors d'équilibre qui a été le plus étudié dans divers laboratoires du monde entier. Cela consiste à maintenir une couche mince de fluide entre deux plaques horizontales portées à des températures différentes, la température de la plaque inférieure étant plus élevée que celle de la plaque supérieure. Lorsque la différence de température entre les deux plaques dépasse une valeur critique, une structure spatiale périodique apparaît (figure 1). De tels phénomènes peuvent se manifester à différentes échelles, allant de celle

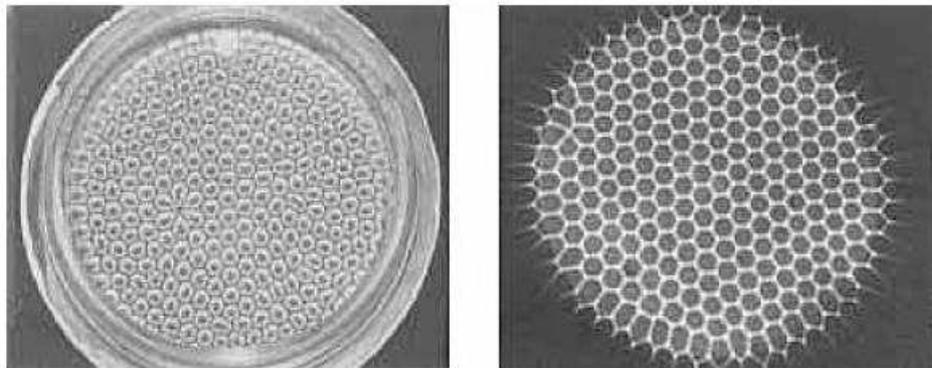


FIG. 1: Cellules hexagonales obtenues dans des conditions similaires à celles de Bénard observées par Koschmieder et Pallas [1].

du microscopique (évaporation d'une couche fluide) à celle de la planète (convection atmosphérique). Un système en convection est le siège de phénomènes de transport de la masse, de la quantité de mouvement ou de la chaleur. Les avancées récentes [2, 3] dans la compréhension de la convection de R-B sont dues en grande partie à sa relative facilité dans l'analyse théorique [4] et au développement des techniques de visualisation [5, 6].

L'équivalent du problème de R-B en milieu poreux est le très célèbre problème de *Horton-Rogers-Lapwood*, étudié en premier par Horton et Rodgers [7] et par la suite par Lapwood [8] (pour une revue, voir le livre de Nield et Bejan [9]). Contrairement à une expérience de R-B, la visualisation en milieu poreux des mouvements convectifs est confronté au moins à deux problèmes : l'opacité du milieu et la diffusion de la lumière par la matrice

solide même transparente. L'adaptation d'indice de réfraction conduit à de nombreuses difficultés techniques et demeure très approximative (Saleh et al. [10]). Par conséquent, la grande partie des données expérimentales existantes sont limitées aux mesures de transfert thermique [11, 16, 13, 14, 15, 12, 17], avec des résultats qui sont souvent contradictoires.

Ce n'est qu'en 1997 que Shattuck et al. [18] ont utilisé des moyens de mesure non intrusifs, à savoir l'imagerie par résonance magnétique comme procédé de visualisation du champ de vitesse de convection naturelle en milieu poreux. Le résultat majeure qui découle de leurs investigations expérimentales est que la structure du milieu poreux joue un rôle très important qui n'est pas prédit par la théorie qui repose sur l'hypothèse de l'homogénéité du système. En effet, dans des milieux poreux conçus de façon bien ordonnée, leurs expériences ont mis en évidence deux phénomènes qui ne sont pas prédits par la théorie :

- la présence d'un faible gradient de température qui induit un écoulement inhomogène, là où la théorie prévoit un état de conduction pure,
- des rouleaux localisés dans des régions plus perméables au fluide, en absence de toute forme de convection dans d'autres régions moins perméables.

La théorie est alors appelée à prendre en compte les inhomogénéités d'origine intrinsèque au milieu poreux, comme la variation spatiale de sa perméabilité ou extrinsèque au milieu lorsque par exemple la température appliquée sur les bords horizontaux varie spatialement. Le travail que constitue cette thèse est par conséquent une tentative qui vise à comprendre les effets de telles inhomogénéités sur la naissance et le développement des instabilités dans un milieu poreux ouvert chauffé par le bas et qui, en plus, est soumis à un écoulement forcé de débit non nul.

Du point de vue fondamental, ce problème rentre dans le cadre général de l'étude des instabilités hydrodynamiques d'écoulements dans des milieux ouverts. Ce genre de système a bénéficié d'un intérêt considérable depuis les vingt dernières années. On peut citer quelques exemples tels que les couches de mélange, les jets, les sillages, les couches limites et les problèmes de R-B et de Taylor-Couette couplés avec un écoulement imposé. Dans ce genre de système où se produit un transport global de matière vers l'aval, il est hors de question de considérer tous les points du système équivalents au regard des instabilités. La dimension spatiale des instabilités ne peut plus être dissociée de sa dimension temporelle. Il est donc naturel d'identifier les mécanismes physiques qui sont derrière l'apparition de structures macroscopiques et de leur propagation le long du système tout entier. En effet, il est maintenant clairement établi que les écoulements ouverts se regroupent en deux classes : les écoulements **instables convectifs** où les structures macroscopiques peuvent être simplement le résultat de l'amplification des perturbations présentes dans tout système expérimental, et les écoulements **instables absolus** dont le comportement est intrinsèque et peu sensible à la présence du bruit.

Du point de vue expérimental, la nature convective ou absolue d'une instabilité peut être mise en évidence par des mesures spectrales d'une quantité fluctuante par rapport à l'écoulement de base. Ces mesures montrent un spectre de fréquence large si l'instabilité est

convective ou au contraire un pic de fréquence plus énergétique si l'instabilité est absolue. Dans ce dernier cas, on observe l'apparition d'un mode global, c'est à dire d'une résonance du milieu avec une structure spatiale et une fréquence temporelle bien définies. La figure 2, illustre ce comportement dans une expérience menée par K.L. Babcock et al [19] concernant le système de Taylor-Couette ouvert forcé par un écoulement axial. Ces auteurs montrent également que les paramètres pour lesquels on observe une transition d'un spectre large de fréquence à un spectre étroit coïncident avec ceux pour lesquels l'analyse d'instabilité spatio-temporelle prédit le passage d'une instabilité convective à une instabilité absolue de l'écoulement de base.

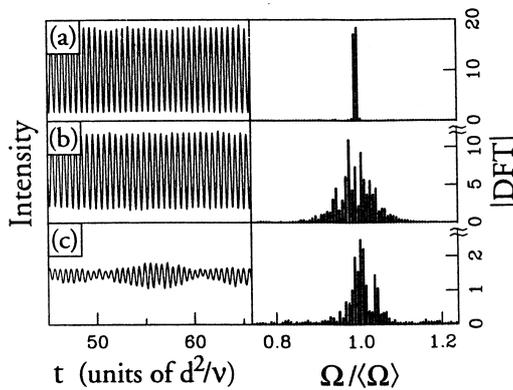


FIG. 2: Exemple de séries temporelles et de module de la transformée de Fourier rapide (DFT) associé, dans le problème de Couette-Taylor où Ω représente la vitesse angulaire du cylindre intérieur. La figure a) illustre le spectre en régime absolu et les figures b)-c) illustrent le spectre en régime convectif (figure tirée de [19])

Du point de vue mathématique, la nature convective ou absolue est déterminée en étudiant l'évolution d'une impulsion localisée dans un milieu où se produit une compétition entre les mécanismes d'advection par l'écoulement principal et d'amplification spatio-temporelle de l'instabilité. De cette compétition, trois types de comportement peuvent se produire (figure 3) :

- la perturbation décroît dans le temps et dans l'espace : le système est dit *stable*,
- la perturbation croît dans le temps et dans l'espace mais cela n'est pas suffisant pour contrer l'advection, la perturbation finit par sortir du domaine et le système est dit *convectivement instable*,
- la perturbation croît dans le temps et l'espace suffisamment pour contrer l'advection, la perturbation finit par envahir le domaine, et le système est dit *absolument instable*.

Dans sa thèse consacrée à l'étude de la convection mixte d'un fluide soumis à un écoulement horizontal homogène dans un milieu poreux chauffé par le bas, A. Delache a utilisé le concept d'instabilité absolue pour expliquer des résultats expérimentaux jusqu'alors restés mal compris. Ces résultats émanent d'investigations expérimentales conduites par M. Combarous [13, 14] et qui constituent une documentation des plus complètes sur ce sujet. Les matrices solides utilisées dans ses expériences sont non consolidées, composées de différents milieux : billes de verre, de quartz, de propylène, Différents fluides sont utilisés : de l'eau désaérée et de l'huile aux silicones. Des différents essais entrepris, il en résulte que la forme des cellules convectives dépend à la fois du gradient de température imposé entre les

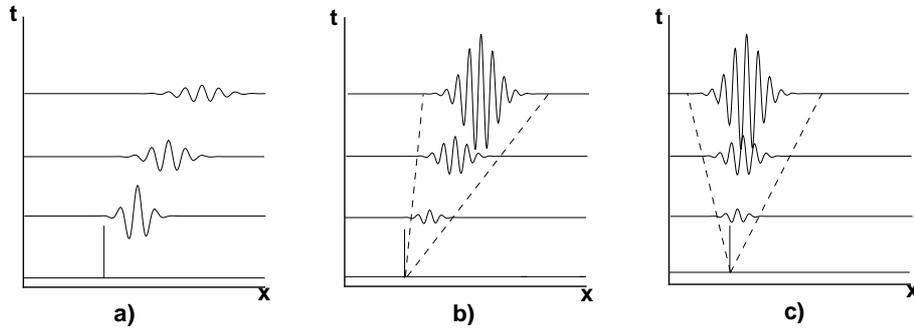


FIG. 3: Evolution d'une perturbation localisée en $x = 0, t = 0$ dans le plan (x, t) , stable en a), convectivement instable en b) et absolument instable en c)

deux parois horizontales et de la valeur de la vitesse de l'écoulement moyen du fluide saturant le milieu poreux. Lorsque le gradient vertical de température est suffisamment élevé et est maintenu fixe, l'enregistrement de l'évolution des températures au sein du milieu a permis de mettre en évidence deux types de structures :

- des rouleaux mobiles oscillatoires pour des faibles débits (un exemple d'oscillations régulières des RT est illustré sur la figure 4(a). Leur structure spatiale est parfois bidimensionnelle sous la forme de rouleaux transversaux (figure 5(a)) ou complètement tridimensionnelle.
- des rouleaux fixes parallèles à l'écoulement moyen appelés **rouleaux longitudinaux fixes** (figure 5(b)) pour des débits élevés.

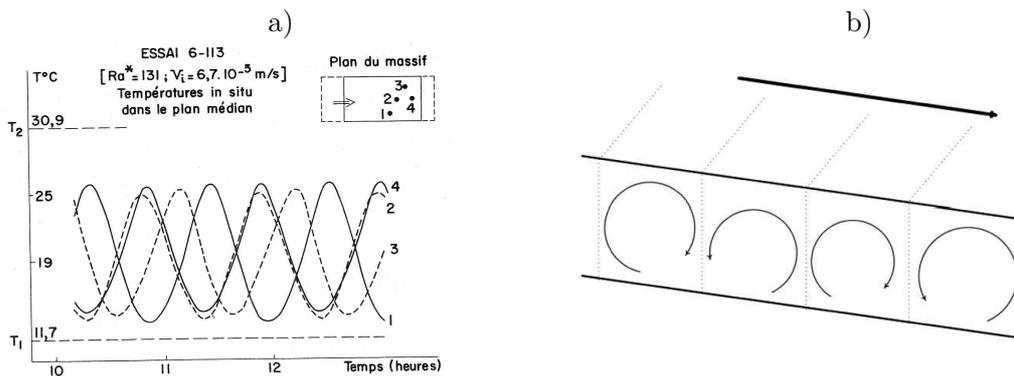


FIG. 4: a) représente l'évolution lors d'un essai, de la température en différents points du plan de symétrie horizontale du milieu poreux et met en évidence le caractère oscillatoire régulier de la température associé aux R.T représenté schématiquement en b)

Prats [20] a été le premier à analyser la stabilité linéaire de la convection mixte bidimensionnelle dans un milieu poreux d'extension latérale infinie. En utilisant le modèle de Darcy, il montre que le seul effet de l'écoulement principal est d'introduire des oscillations

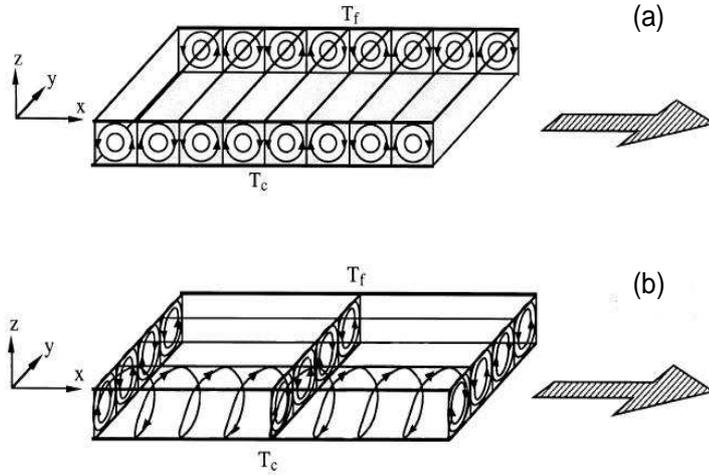


FIG. 5: (a) Représentation schématique de Rouleaux transversaux (RT). (b) Représentation schématique de Rouleaux longitudinaux (RL).

des structures convectives, alors que le seuil d'apparition de ces structures reste identique à celui du problème classique de Horton-Rogers-Lapwood. Rees [21] a étendu cette analyse en prenant en compte les effets d'inertie modélisés par le terme de Forchheimer en tant que correction du modèle de Darcy. Il montre que le couplage entre l'écoulement principal et les termes non linéaires d'inertie favorise l'émergence de structures organisées sous la forme de RL fixes, et ce quel que soit la valeur de la vitesse débitante de l'écoulement principal. D'un autre côté, en utilisant récemment la théorie de la propagation des ondes, Chung et al. [22] ont proposé une loi d'établissement spatial de ces mêmes RL. Bien que les résultats établis dans [21] et [22] soient intéressants, ces prédictions théoriques ne renseignent pas et n'aident pas à comprendre l'observation expérimentale de la transition entre les RT propagatifs et les RL fixes. Le travail de thèse de F. Dufour [23] apporte un nouvel éclairage sur les circonstances dans lesquelles la déstabilisation dans ce problème de convection mixte, conduit à un mouvement convectif dépendant du temps. L'originalité de son travail réside notamment dans l'utilisation rigoureuse du concept d'instabilité absolue, grâce auquel, on comprend mieux les conditions nécessaires qui pilotent l'émergence des RT propagatifs. Elle a par ailleurs mené une étude numérique [24] dans le but de décrire les écoulements bidimensionnels et périodiques en temps. Cette étude numérique lui a permis de calculer la fréquence globale des oscillations, les longueurs d'onde et la vitesse de phase des rouleaux transversaux. L'extension du travail de Dufour est le travail de thèse de A. Delache [27], dans le but principal était de mener une étude comparative entre les prévisions théoriques et les résultats expérimentaux obtenus par M. Combarous. Delache et al. [25] ont montré que les courbes de transition instable convectif/absolue de l'écoulement de base correspondent parfaitement aux seuils d'émergence des RT propagatifs observés expérimentalement. La figure 6 illustre ce résultat. Par contre, un grand écart a été observé entre les fréquences d'oscillations des structures propagatives bi-dimensionnelles ou tridimensionnelles prédites et les périodes mesurées [13]. Le tableau illustre bien ce désaccord

entre théorie et expérience. Quant à l'observation expérimentale des RL dans la région

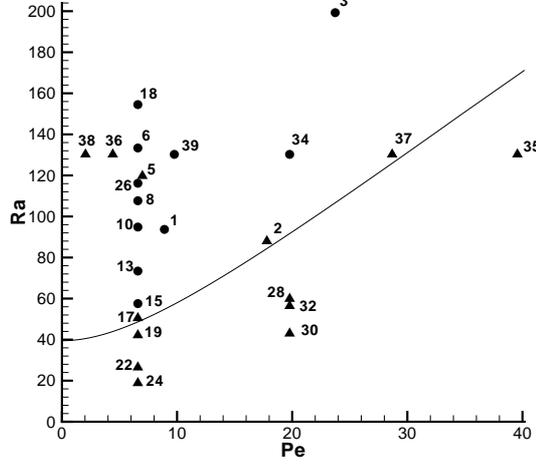


FIG. 6: Carte représentant les différents régimes d'écoulement dans le plan (Péclet Pe , Rayleigh Ra) pour les structures observées pour la série 6 [13, 14] (milieu poreux constitué de billes de verre d'un diamètre de 4mm et d'eau) dans la région laminaire : les structures oscillatoires (●) et les RL (▲). Les essais sont indiqués par leurs numéros. La courbe représente la frontière entre régime convectif et absolu prédite par la théorie.

TAB. 1: Cas homogène : comparaison entre les fréquences d'oscillations mesurées ω_{exp} et prédites $\Re(\omega^0)$ respectivement dans le cas 2D et dans le cas 3D pour différentes combinaisons de Pe et Ra .

Pe	Ra	T_{exp}^*	ω_{exp}	$\Re(\omega_0)(2D)$	écart %	$\Re(\omega_0)(3D)$	écart %
2.561	63.960	9736.842	5.696	9.978	75.184	7.292	28.026
4.519	99.899	5000.000	11.091	20.845	87.939	17.026	53.511
6.176	89.480	3289.474	16.861	27.179	61.191	21.989	30.409
7.230	71.771	2500.000	22.183	29.148	31.398	23.001	3.688
7.833	132.187	2565.789	21.612	39.495	82.744	33.739	56.113
8.285	74.896	2236.842	24.791	33.734	36.074	26.989	8.869
11.749	128.542	1578.947	35.122	57.555	63.875	49.408	40.677
13.858	76.458	1184.210	46.838	54.793	16.984	45.407	-3.057

convectivement instable (au dessous de la courbe de la figure 6), Delache et Ouarzazi [26] ont établi un critère théorique qui prédit l'observabilité de l'une ou l'autre des deux structures (i.e. RL fixes ou RT propagatifs) en fonction de l'intensité du bruit expérimental, inhérent à toute expérience.

Le problème de la convection mixte avec écoulement homogène étant assez bien compris, son extension naturelle aux écoulements inhomogènes peut apporter un éclairage nouveau sur la complexité des écoulements de convection mixte en milieu poreux en général ainsi que sur le phénomène de localisation des rouleaux observés par Shattuck et al [18] en par-

ticulier. C'est la première motivation de notre travail.

En hydrodynamique, les premières études concernant les critères de stabilité des écoulements inhomogènes ont été présentées par Soward et Jones [28] pour un écoulement entre deux sphères concentriques, par Pierrehumbert [29] et Bar-Sever et Merkine [31] pour les écoulements géophysiques et par Koch [30] pour les écoulements dans les sillages. De ces premiers travaux, il ressort que lorsque l'écoulement de base est fortement inhomogène, l'étude de sa stabilité ne peut être accomplie qu'expérimentalement ou numériquement. En revanche, pour les écoulements faiblement inhomogènes, il est généralement possible de construire des modes spatio-temporels les plus déstabilisants, appelés modes globaux instables, dans le cadre de l'approximation de WKBJ (Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys) [32, 33, 34, 35, 36], en reliant le comportement global aux propriétés locales d'instabilité [37]. De telles approches ont été développées et appliquées avec succès sur des équations modèles entre autres par Chomaz et al. [38, 39], Le Dizès et al. [40], Couairon et Chomaz [41] et Pier et al. [42].

Couairon et Chomaz [41] ont étudié les solutions non linéaires de l'équation de Ginzburg-Landau supercritique, avec des coefficients lentement variables dans l'espace. Ils ont montré que les solutions appelées modes globaux non-linéaires sont associées à un front tiré sélectionné par un critère linéaire. La fréquence sélectionnée au voisinage du seuil de l'instabilité globale s'avère correspondre à la fréquence absolue locale à l'entrée du milieu. Ils ont également obtenu des lois d'échelles relatives à la structure spatiale des modes globaux non-linéaires. Les observations expérimentales de Goujon et al. [48] et les simulations numériques de Zielinska et Wesfreid [49] concernant les écoulements dans les sillages d'obstacle ont confirmé ces lois d'échelle. Dans le cas d'une bifurcation sous-critique, Couairon et Chomaz [46, 50] ont démontré que le front reliant l'état de base stable à la solution non-linéaire saturée peut être un front poussé, gouverné par des propriétés non linéaires. Cela a été confirmé par l'investigation numérique et théorique des instabilités en optique non linéaire et spécifiquement celles observées dans les oscillateurs paramétriques dégénérées [51].

Dans le domaine infini où l'écoulement de base montre une poche d'instabilité absolue dans le milieu, Pier et al. [42] ont analysé les propriétés des modes globaux non-linéaires dans le cadre des équations de type Ginzburg-Landau à coefficients complexes et lentement variables dans l'espace. Deux types des modes globaux non-linéaires ont été identifiés : des modes globaux raides, baptisés "modes éléphants" et des modes globaux doux, appelés modes "chapeaux". Les premiers sont caractérisés par un front stationnaire localisé à la frontière amont de la zone d'instabilité absolue qui impose sa fréquence au milieu tout entiers (Pier et al. [42]). Alors que les seconds sont caractérisés par une amplitude et un nombre d'onde local lentement variables et ne peuvent se développer que pour une faible vitesse d'advection. Le principe de sélection des oscillations synchronisées auto-entretenues des modes globaux raides a été confirmé par des simulations numériques directes des systèmes physiques réels, tels que les sillages bidimensionnels [52], l'écoulement de la couche limite séparée au dessus d'une géométrie à double bosses [53] et les jets chauds [54].

La deuxième motivation qui anime ce travail est de tester, pour un écoulement réel, les mécanismes et les principes de déstabilisation d'écoulements inhomogènes proposés par la

théorie des modes globaux, élaborée à partir de modèles réduits de type Ginzburg -Landau (pour une revue récente sur cette théorie, voir Chomaz [43]).

Le premier chapitre est composé de deux parties. Après une partie qui expose les caractéristiques rhéologiques des milieux poreux, la deuxième partie propose une modélisation mathématique, identifie une solution approximative de l'écoulement inhomogène de l'état de base et met en évidence les paramètres sans dimension qui caractérisent le problème de la convection mixte en milieu poreux chauffée par le bas.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité de l'état de base supposée faiblement inhomogène suivant la direction de l'écoulement principal. La distribution spatiale et les fréquences d'oscillations du mode global linéaire sont déterminées et leur dépendance vis-à-vis des paramètres sans dimension du problème est discutée pour deux configurations génériques distinctes. La première configuration considère que le profil de température appliquée sur le bord inférieur se présente comme une tache thermique, ressemblant à une bosse dont les bords s'amortissent de part et d'autre d'une localité soumise à un échauffement maximum (configuration dite infinie). Alors que pour la deuxième configuration, la distribution spatiale de la température est supposée admettre un maximum local à l'entrée du massif poreux et s'atténue par ailleurs (configuration appelée semi-infinie).

Le chapitre trois traite de la dynamique linéaire et faiblement non linéaire du problème en utilisant le formalisme réduit de l'équation de Ginzburg-Landau. Les résultats analytiques sont comparés à ceux obtenus à la fois par les équations originelles du problème et par des simulations numériques de cette équation.

Le chapitre quatre est consacré à l'analyse des résultats des simulations numériques directes bidimensionnelles, obtenus aussi bien pour une configuration d'un domaine infini que pour celle d'un domaine semi-infini. Les fréquences globales d'oscillations des structures synchronisées ainsi que leur distribution spatiale déterminées dans le régime pleinement non linéaire sont discutées et comparées aux prédictions de la théorie des modes globaux. Ce chapitre se termine par confronter des résultats de la simulation numérique directe à des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

A la fin de ce mémoire, les résultats obtenus le long de ce travail sont synthétisés sous forme d'une conclusion générale avec l'énoncé de certaines perspectives. L'annexe A est consacrée à l'obtention de l'équation de Ginzburg-Landau. Les outils mathématiques et les méthodes spectrales utilisées dans un code développé au L.I.M.S.I ¹ par l'équipe du professeur G. Labrosse sont détaillés dans l'annexe B. Ce code validé sur une configuration de convection naturelle dans une boîte fermée a été étendu à une configuration adaptée au problème de la convection mixte.

Une partie des résultats du chapitre 4 est publiée [55], [56]. Les résultats des chapitres 2 et 3 sont en cours de rédaction en vue d'une publication.

¹Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur

Chapitre 1

Présentation de la convection mixte inhomogène en milieu poreux

1.1 Caractérisation des milieux poreux

Les milieux poreux sont largement répandus dans différents secteurs d'activité : mécanique et biomécanique (structures alvéolaires), chimie (catalyse, séparation, milieux désordonnés), anatomie (structure osseuse), agro-alimentaire (pâtes, pain), géologie (structure des sols, forages pétroliers), . . . En réalité, leur utilisation est très étendue [57]. La filtration (normale ou tangentielle) et la géologie (exploitation pétrolière) sont les domaines ayant conduit le plus d'études sur les milieux poreux.

1.1.1 Définition des milieux poreux

Dans le catalogue des milieux divisés, les milieux poreux désignent des matériaux pour lesquels la phase solide, fortement imbriquée avec la phase fluide, est fixe. On trouve de nombreux matériaux naturels dans cette catégorie : les sols, les couches sédimentaires, la plupart des roches, ainsi que certains matériaux vivants. Certains matériaux artificiels requièrent d'être poreux soit dans le processus de fabrication soit dans leur finalité pour jouer un rôle de filtre ou apporter des propriétés macroscopiques particulières (conductivité thermique par exemple).

D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- (1) le matériau doit contenir de petits espaces vides, appelés pores, délimités par une matrice solide ;
- (2) le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

Ces deux critères renvoient à deux caractéristiques essentielles d'un milieu poreux : la *porosité* -la fraction de vide- et la *perméabilité* qui indique l'aptitude d'un milieu poreux à être traversé par un écoulement. Ces deux quantités sont des variables macroscopiques, c'est-à-dire estimées sur un volume contenant de nombreuses entités microscopiques composant le matériau : les pores.

1.1.2 Paramètres des milieux poreux

Volume Élémentaire Représentatif (VER)

Pour quantifier un problème de la physique en utilisant les outils mathématiques de solution qu'offrent les équations différentielles, il est nécessaire d'avoir un milieu contenu pour établir des relations aux dérivées partielles. Dans les milieux poreux, les propriétés physiques (porosité, perméabilité, ...) sont discontinues au niveau microscopique. La dérivation de solutions de problèmes d'écoulement doit donc toujours faire appel, implicitement ou explicitement, à la définition d'un *volume élémentaire représentatif* VER (figure 1.1) à l'intérieur duquel les propriétés moyennes des fluides et des matériaux sont supposées uniformes et continues.

Le VER doit être suffisamment grand pour que des propriétés globales moyennes puissent être définies sans que les fluctuations d'un pore à l'autre ne soient significatives (la taille l du VER doit être suffisamment grande à la taille du pore d). Le VER doit cependant être suffisamment petit pour que les variations d'un paramètre dans le domaine d'étude puissent être représentées par des fonctions continues (la taille l du VER doit être suffisamment petite à la taille caractéristique du milieu L). Marsily [58] et surtout Bear [59] fournissent une discussion détaillée de ce concept ainsi que des méthodes utilisées pour dériver les propriétés moyennes des milieux poreux.

Il existe cependant d'autres procédures de changement d'échelle, comme la méthode plus récente d'homogénéisation (Sanchez-Palencia [93]). Cette méthode qui repose essentiellement sur des développements asymptotiques de la vitesse et de la pression à l'échelle du pore, puis à une application d'un opérateur moyen d'intégration pour passer à l'échelle macroscopique, a permis de justifier les termes supplémentaires des lois de quantité de mouvement.

Dans la suite, nous adoptons l'approche d'un seul domaine et nous considérons la méthode d'homogénéisation (méthodes des prises de moyennes), qui consiste à moyenner les équations de conservations locales sur un ensemble de pores (VER).

La porosité

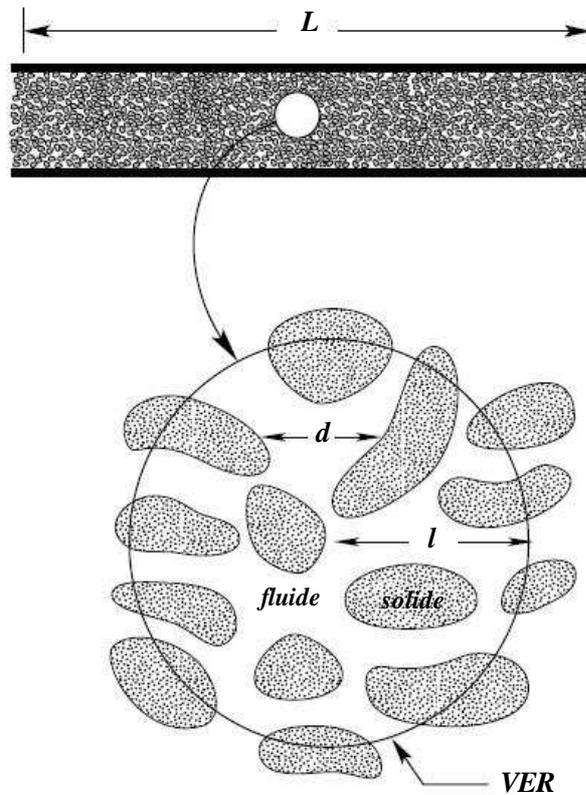


FIG. 1.1: La figure illustre la taille intermédiaire l du volume élémentaire représentatif VER entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique L et la taille du pore à l'échelle microscopique d .

Le volume total V_T d'un matériel poreux est constitué de la somme du volume des solides V_s et du volume des pores (ou vides) V_v présents dans le volume total de matériel :

$$V_T = V_v + V_s.$$

Lorsque le volume total considéré est unitaire, la somme ci-dessus est égale un. La Porosité ϕ est définie comme étant le rapport du volume des pores V_v d'un matériel sur son volume total V_T :

$$\phi = \frac{V_v}{V_T},$$

qui varie donc entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Puisqu'il s'agit d'un rapport de mêmes propriétés, la porosité n'a pas d'unités et elle est souvent exprimée en

pourcentage. Un autre paramètre caractérisant la proportion de pores dans un matériel est l'*indice de vides* e qui est défini par le rapport du volume des vides V_v sur celui des solides V_s :

$$e = \frac{V_v}{V_s}.$$

Ce paramètre est d'usage courant en géotechnique car il a l'avantage d'utiliser un volume de référence (celui des solides) qui demeure constant contrairement au volume total qui peut varier considérablement dans des matériaux fortement compressibles tels que les silts et argiles. Le lien entre la porosité et l'indice des vides est exprimé par :

$$\phi = \frac{e}{e + 1}.$$

Les résultats des calculs effectués à partir de tels modèles géométriques, comme par exemple les empilements réguliers de sphères de même diamètre (figure 1.2) montrent que la porosité, dépend fortement de l'arrangement et de la taille des grains. On trouve ainsi, pour la porosité : $\phi = 0,476$ dans le cas de l'arrangement cubique, $\phi = 0,32$ dans le cas cubique centré et $\phi = 0,255$ dans le cas cubique à face centrée.

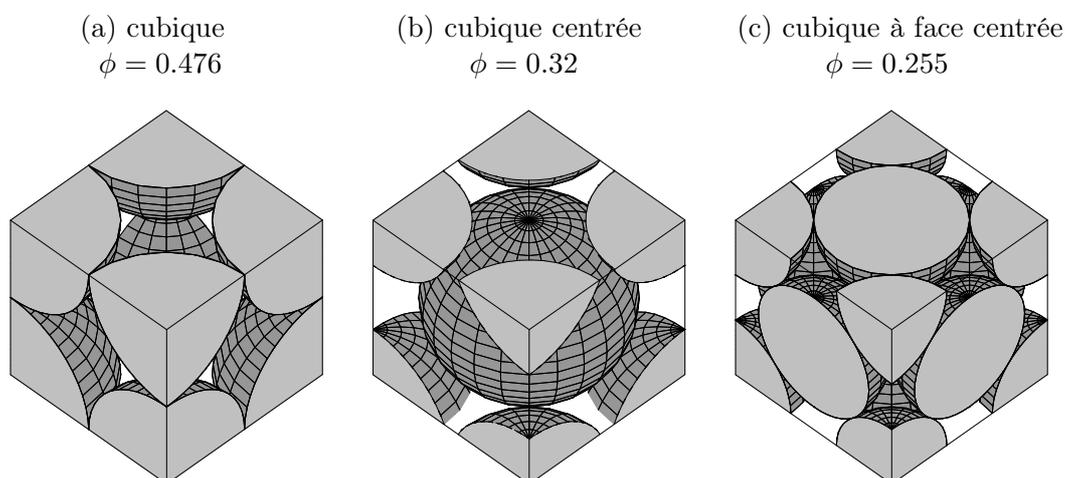


FIG. 1.2: Arrangements réguliers de sphères de même diamètre avec la porosité ϕ associée.

La tortuosité

La description de la géométrie des pores fait intervenir la notion de connectivité, correspondant à la complexité du chemin continu à travers l'espace des pores. Il faut aussi tenir

compte des "bras morts", qui sont nombreux dans les milieux peu poreux et très hétérogènes. Pour décrire ces différents aspects, on introduit un paramètre \mathcal{T} appelé tortuosité, que l'on définit de la manière suivante :

$$\mathcal{T} = \left(\frac{L_e}{L} \right)^2,$$

où L_e est la longueur réelle des lignes de courant du fluide traversant un échantillon de longueur L d'un milieu poreux modélisé sous la forme d'un réseau de capillaires ou ondulés. Ce rapport joue un rôle important dans les problèmes de diffusion.

La loi de Darcy et la conductivité hydraulique

On considère dans cette section que le milieu poreux est totalement imbibé, c'est-à-dire que le volume des pores est entièrement rempli de fluide.

L'étude fondatrice des écoulements dans les milieux poreux a été réalisée par l'ingénieur Darcy en 1856 avec un «*Mémoire sur les fontaines publiques de la ville de Dijon*» [60]. Il a réalisé des expériences pour évaluer la capacité d'écoulement à travers des filtres de sable. La figure 1.3 montre les relations observées pour des essais à des conditions différentes :

- (1) le débit Q est proportionnel à la section d'écoulement S ;
- (2) le débit Q est proportionnel à la différence de charge hydraulique Δh ;
- (3) le débit Q est inversement proportionnel à la longueur de la colonne L .

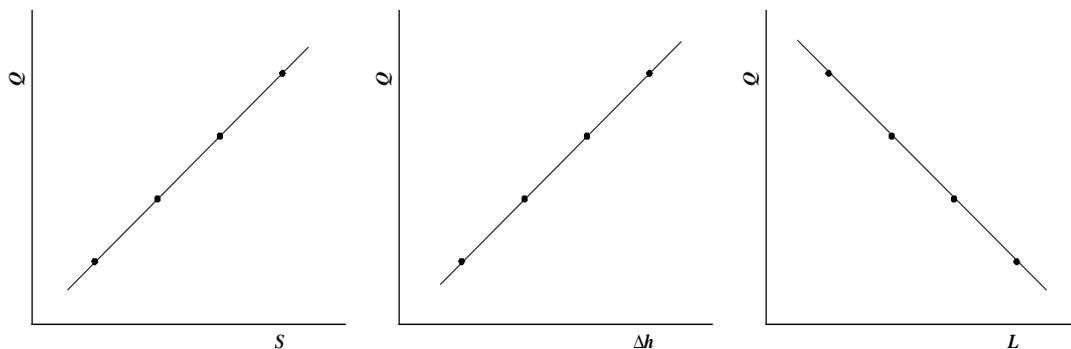


FIG. 1.3: Relations entre le débit Q et les paramètres du montage [59] utilisé par Henri Darcy en 1856 pour évaluer la capacité d'écoulement à travers des filtres de sable.

Des ces relations, on obtient l'équation suivante avec un coefficient de proportionnalité \mathcal{K} :

$$Q = \mathcal{K} \frac{S \Delta h}{L}.$$

Cette relation est appelée *formule de Darcy* ou *loi de Darcy*. Le coefficient de proportionnalité \mathcal{K} est appelé *conductivité hydraulique*. \mathcal{K} n'est à l'origine qu'un coefficient arbitraire représentant la pente de la relation linéaire entre le flux et le gradient hydraulique, il dépend :

- (1) des propriétés du milieu poreux, soient de la porosité ϕ , de la "taille des pores" d et de la tortuosité \mathcal{T} ;
- (2) des propriétés du fluide, soient de sa densité ρ_f et de sa viscosité μ_f .

La conductivité hydraulique et la perméabilité des milieux poreux

Cependant, les expériences de Darcy avec des matériaux granulaires de granulométrie différente, confirme qu'effectivement les matériaux de granulométrie grossière ont une conductivité hydraulique élevée, eux dont les pores doivent avoir des dimensions supérieures à celles des matériaux fins, dont la conductivité hydraulique est plus faible. Il y'a donc un lien entre "dimension des pores" et le *diamètre moyen des grains* D . On peut donc regrouper les paramètres affectant la conductivité hydraulique relié aux propriétés du matériel poreux en deux termes, un *facteur de forme* \mathcal{N} regroupant porosité et tortuosité ($\mathcal{N} \propto \phi/\mathcal{T}$) et la *dimension moyenne des grains* D . Ainsi, on obtient une expression définissant la conductivité hydraulique à partir des propriétés du milieu poreux et du fluide qui s'y écoule :

$$\mathcal{K} = (\mathcal{N} D^2) \frac{\rho_f \mathbf{g}}{\mu_f},$$

où \mathbf{g} est le champ de gravité. Cette dernière relation permet de tenir compte de la variation de la viscosité ou de la densité, par exemple sous l'effet de la température ou de la salinité pour l'eau. Cependant, il est plus pratique de définir une autre propriété indépendante de la nature de fluide. Il dépend des propriétés du milieu poreux pour caractériser sa capacité à permettre l'écoulement des fluides. Cette propriété est la *perméabilité* K , aussi appelée *perméabilité intrinsèque* ou *coefficient de perméabilité intrinsèque* définie théoriquement par :

$$K = \mathcal{N} D^2,$$

et dans la relation avec la conductivité hydraulique [61] est :

$$\mathcal{K} = K \frac{\rho_f \mathbf{g}}{\mu_f}.$$

Il est possible d'évaluer la perméabilité K grâce à des géométries particulières du milieu poreux. Ergun [62] a déterminé une relation empirique entre la perméabilité K , le diamètre moyen des particules sphériques D et la porosité ϕ . La relation d'Ergun est :

$$K = \frac{D^2 \phi^3}{150(1 - \phi)^2},$$

cette relation, peut également être dérivée de la théorie Hydraulique du rayon de Kozeny-Carman [59]. Dans ce cas, la constante est 180 au lieu de 150. L'une ou l'autre donne une estimation raisonnable de K . La même relation est trouvée par Rahimian et Pourshaghagh [63].

Dans le cas où le milieu poreux est constitué d'un assemblage de canaux cylindriques parallèles entre eux. Si \mathbf{n} est la densité de canaux par unité de surface et r_0 le rayon de canaux, on peut écrire K sous la forme [67] :

$$K = \frac{\mathbf{n} \pi r_0^4}{8}.$$

Si on modélise le milieu poreux comme un assemblage de canaux tortueux, parallèles en moyenne à une direction donnée est donc fortement anisotrope, K est donnée par [64] :

$$K = \frac{r_0^2 \phi}{8\mathcal{T}},$$

avec \mathcal{T} la tortuosité des canaux tortueux. Si le milieu est formé de 3 ensembles de canaux perpendiculaires deux à deux (et donc relativement isotrope), la perméabilité serait réduite d'un facteur 3, on peut faire l'estimation suivante :

$$K = \frac{r_0^2 \phi}{24\mathcal{T}}.$$

Pour des géométries quelconques du milieu. K est généralement déterminé par des mesures expérimentales, par le biais de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux. Il existe de nombreux travaux répertoriant la perméabilité pour différents milieux. On pourra consulter par exemple les ouvrages [9, 65, 66], pour trouver quelques

valeurs de K , elles se situent entre $10^{-3} - 10^{-6} \text{cm}^2$ pour le gravier et $10^{-12} - 10^{-16} \text{cm}^2$ pour l'argile stratifié.

Il existe également des modèles statistiques permettant le calcul de la perméabilité. Cela se révèle utile lorsque le milieu poreux présente des inhomogénéités dans une large gamme d'échelle (il n'y a plus de description continue fictive équivalente). Pour une présentation plus détaillée des différentes grandeurs caractéristiques des milieux poreux nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage de Nield et Bejan [9].

1.2 Équations du mouvement pour les milieux poreux

On considère une couche poreuse horizontale infinie, isotrope et homogène d'épaisseur H , de largeur aH . Cette couche est saturée par un fluide pur pesant, soumis à un écoulement forcé, dont le débit filtrant Q est non nul. La paroi inférieure est chauffée à la température $T^*(x^*, y^*, z^* = 0) = T_0^*$ alors que la paroi supérieure est maintenue à une température $T^*(x^*, y^*, z^* = H) = T_1^* < T_0^*$. La couche est placée dans le champ gravitationnel \mathbf{g} .

1.2.1 Hypothèses adoptées

Pour spécifier la modélisation du fluide au sein de la couche poreuse et les équations vérifiées par les champs de grandeurs physiques le décrivant, il est nécessaire d'adopter les hypothèses suivantes :

- (1) nous considérons que le milieu poreux est complètement saturé par un fluide pur d'une capacité thermique $(\rho c)_f$, d'une viscosité dynamique μ_f , d'une masse volumique ρ_f et d'une conductivité thermique λ_f . La matrice poreuse a une capacité thermique $(\rho c)_s$ et une conductivité thermique λ_s . L'ensemble fluide et matrice poreuse est assimilé à un milieu continu fictif, homogène et isotrope, de capacité thermique $(\rho c)_{sf}$ et de conductivité thermique λ_{sf} ;
- (2) nous nous plaçons dans l'hypothèse formulée par Boussinesq [68] et Oberbeck [69], à savoir que les propriétés physiques ne varient pas avec la température à l'exception de la densité lorsque les variations de celle-ci créent des forces de gravitation. Lorsque ceci est le cas, l'équation d'état est linéarisée autour d'un état $(T_{ref}; \rho_{ref})$ de référence :

$$\rho_f = \rho_{ref}(1 - \alpha_f(T^* - T_{ref})),$$

où α_f est le coefficient de dilatation thermique à pression constante et T^* la température en un point donné. C'est la faiblesse de α_f qui justifie dans le cas de variations de température limitées l'hypothèse de Boussinesq-Oberbeck, dont on trouvera un

exposé plus détaillé dans le livre de Chandrasekhar [70]. Négliger les variations de ρ_f dans les termes autres que $\rho_f \mathbf{g}$ conduit à considérer le fluide comme incompressible ;

- (3) nous supposons que l'écoulement au sein de la couche poreuse se fait à faible vitesse, les termes d'inertie et les termes de viscosité sont négligés. De plus nous supposons que le terme de dissipation visqueuse est lui aussi négligé dans l'équation de conservation de l'énergie.

1.2.2 Équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de masse la plus générale s'écrit sous la forme suivante :

$$\phi \partial_t \rho_f + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{V}^*) = 0. \quad (1.1)$$

Puisque le fluide est considéré incompressible, l'équation de la conservation de la masse est exprimée par l'équation de l'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0. \quad (1.2)$$

On note que \mathbf{V}^* représente la vitesse de filtration du fluide, qui correspond à une vitesse moyenne de l'écoulement, moyenne effectuée sur un VER comprenant une partie de solide immobile. Par conséquent, la vitesse du fluide dans les pores \mathbf{V}_i est appelée vitesse interstitielle. Ces deux vitesses sont reliées elles-mêmes par la relation de Dupuit-Forchheimer [72, 71] :

$$\mathbf{V}_i = \frac{\mathbf{V}^*}{\phi}.$$

Cette vitesse \mathbf{V}_i à l'intérieur des pores est supérieure à la vitesse de filtration \mathbf{V}^* (car $\phi < 1$).

1.2.3 Équation de conservation de la quantité de mouvement

Traditionnellement, la loi empirique de Darcy [60] est définie pour les écoulements en milieu poreux quand le nombre de Reynolds Re_p basé sur la dimension du pore d et la vitesse interstitielle \mathbf{V}_i

$$Re_p = \frac{dV_i}{\rho_f},$$

est petit. Sous cette circonstance, la vitesse dans certaines directions est directement proportionnelle au gradient de pression dans cette direction

$$u = -\frac{K}{\mu_f} \partial_{x^*} P^*. \quad (1.3)$$

Dans trois dimensions et en présence d'un champ gravitationnel $\mathbf{g} = (g_x, g_y, g_z)$, l'équation de la vitesse pour les écoulements des fluides qui traversent un milieu poreux isotrope est décrite d'une façon générale par le modèle de Darcy :

$$\mathbf{V}^* = -\frac{K}{\mu_f} (\nabla P^* - \rho_f \mathbf{g}). \quad (1.4)$$

Cette Loi a été vérifiée par de nombreux résultats expérimentaux pour des $Re_p < 1$. Elle a également été vérifiée par des simulations directes des équations de Navier-Stokes [63] où on vérifie bien cette chute de pression.

Les résultats expérimentaux ont montré que l'équation (1.4) était incapable de décrire les écoulements quand le nombre de Reynolds est grand $Re_p > 1$ [9]. Lorsque la vitesse débitante augmente, l'effet d'inertie de l'advection n'est plus négligeable. Pour prendre en compte cet effet, Forchheimer [71] a proposé une modification empirique de la loi de Darcy en reliant non linéairement (par un polynôme du second ordre), la vitesse de filtration et le gradient de pression. Donc, l'équation (1.4) modifiée empiriquement est baptisée équation de *Darcy-Forchheimer* [74] :

$$\mathbf{V}^* + C_F \frac{K^{\frac{1}{2}} \rho_f}{\mu_f} |\mathbf{V}^*| \mathbf{V}^* = -\frac{K}{\mu_f} (\nabla P^* - \rho_f \mathbf{g}). \quad (1.5)$$

D'après Ergun [62], le coefficient de Forchheimer C_F est donné par

$$C_F = \frac{1.75(1 - \phi)}{\phi^3 D},$$

avec D le diamètre moyen des particules sphériques. Les mesures expérimentales de Ward [82] suggèrent que quand le nombre de Reynolds est grand ($Re_p > 10$), le coefficient C_f vaut approximativement :

$$C_F = \frac{0.55}{\sqrt{K}}.$$

Muskat [76] propose en 1946 une classification (introduite initialement par Linquist [77]) du domaine de validité des équations de Darcy (1.4) et Darcy-Forchheimer (1.5). Il distingue 3 zones en fonction du nombre de Reynolds Re_p :

zone I : correspondant à de très faibles Re_p ($Re_p < 1$), où le modèle de Darcy est valable (1.4) ;

zone II : correspondant à de forts Re_p ($1 < Re_p < 10$), où le modèle de Darcy-Forchheimer est valable (1.5) ;

zone III : correspondant à une zone de transition entre les faibles et les grands nombres de Reynolds.

De nombreuses autres relations non linéaires analytiques ont été suggérées pour la description de l'écoulement dans la couche poreuse. Ainsi dans la représentation de Muskat décrite ci-dessus, la difficulté était de décrire correctement la zone 2, c'est à dire la zone de transition. C'est dans ce contexte que Firdaouss et al. [78] ont montré que la première et la seconde zone peuvent être unifiées en une même zone obtenue asymptotiquement en faisant tendre $Re_p \rightarrow 0$. Dans cette nouvelle zone, la loi de Darcy est modifiée par une correction cubique pour la vitesse de filtration. Leur modèle est en accord avec les expériences de Chauvetau [79]. Cette correction cubique apparaît également sous certaines hypothèses (Skjetne et Auriault [80], et Mei et Auriault [81]).

Bien que l'équation (1.5) a été utilisée avec succès par les chercheurs pour prévoir les écoulements en milieu poreux, Hsu et Cheng [73] ont montré théoriquement, qu'il y a un besoin d'inclure un deuxième terme proportionnel à $\sqrt{|\mathbf{V}^*| \mathbf{V}^*}$, qui explique l'effet de la couche limite pour des nombres de Reynolds intermédiaires. En conséquence, l'équation (1.5) a été modifiée [74] :

$$\mathbf{V}^* + C_F \frac{K^{\frac{1}{2}} \rho_f}{\mu_f} |\mathbf{V}^*| \mathbf{V}^* + C_H K^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{\rho_f |\mathbf{V}^*|}{\mu_f}} \mathbf{V}^* = -\frac{K}{\mu_f} (\nabla P^* - \rho_f \mathbf{g}). \quad (1.6)$$

où le coefficient C_H , comme C_F , est une fonction de la porosité et de la la géométrie microscopique du solide. L'équation (1.6) a été confirmée par Hsu et al. [75], qui ont mené des expériences des écoulements stables en milieu poreux sur une grande gamme des faibles et des grands nombres de Reynolds.

La modification de Brinkman [83] pour le modèle d'écoulement de Darcy (1.4), explique la transition de l'écoulement de Darcy à l'écoulement fortement visqueux (sans matrice poreuse), dans la limite d'une perméabilité extrêmement élevée :

$$\mathbf{V}^* = -\frac{K}{\mu_f}(\nabla P^* - \rho_f \mathbf{g}) + K\Delta \mathbf{V}^*. \quad (1.7)$$

La façon la plus appropriée d'écrire l'équation de Brinkman est [9],

$$\nabla P^* = \rho_f \mathbf{g} - \frac{\mu_f}{K} \mathbf{V}^* + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{V}^*. \quad (1.8)$$

Dans l'équation (1.8) il apparaît deux termes visqueux. Le premier μ_f est le terme habituel de l'équation de Darcy (1.4). Le second $\tilde{\mu}$ est analogue au terme laplacien apparaissant dans l'équation de Navier-Stokes. Le coefficient $\tilde{\mu}$ désigne la viscosité effective du milieu poreux, qui représente l'extension de Brinkman. Dans l'équation (1.7) Brinkman a proposé que μ_f et $\tilde{\mu}$ sont égaux entre eux, mais en général cela n'est pas toujours le cas. Dépendant du type du milieu poreux, les simulations numériques ont prouvé que la viscosité efficace $\tilde{\mu}$ peut être plus petite ou plus grande que la viscosité du fluide μ_f [86, 87, 88, 89]. Ochoa-Tapia et Whitaker [90] ont montré que $\tilde{\mu}$ est identique à μ_f/ϕ . Givler et Altobelli [84] ont déterminé expérimentalement $\tilde{\mu}$, à partir de valeurs mesurées de perméabilité et du profil de vitesse de filtration pour un écoulement stationnaire en milieu poreux borné par deux plaques rigides. Ils ont trouvé que $\tilde{\mu}$ est environ dix fois supérieure à μ_f . Dans le cas où la perméabilité est extrêmement élevée, l'équation (1.8) se réduit à l'équation (1.7) où μ_f et $\tilde{\mu}$ sont égaux. Pour une discussion critique de l'application de l'équation (1.8), le lecteur est renvoyé à l'ouvrage de Nield et Bejan [9].

Les deux modifications du modèle d'écoulement de Darcy (1.4) : le modèle de Forchheimer (1.5) et le modèle de Brinkman (1.8), ont été employés simultanément par Vafai et Tien [85] dans une étude du transfert thermique de la chaleur de la couche limite de convection forcée, l'équation de la vitesse de Vafai et Tien est :

$$\nabla P^* = \rho_f \mathbf{g} - \frac{\mu_f}{K} \mathbf{V}^* - C_F \frac{K^{\frac{1}{2}} \rho_f}{\mu_f} |\mathbf{V}^*| \mathbf{V}^* - \rho_f \partial_{t^*} \mathbf{V}^* + \tilde{\mu} \Delta \mathbf{V}^*. \quad (1.9)$$

Il faut aussi noter que la complexité d'un écoulement dans un milieu poreux peut être le résultat non seulement des effets d'inertie et de viscosité, mais aussi d'une variation importante de porosité au niveau des parois. Cette variation de ϕ induit de fortes perturbations du champ de vitesses dans les couches limites créant ainsi un effet qui porte le nom de "channelling effect", correspondant à l'existence d'un chemin particulier près des parois où la vitesse devient très importante.

Pour des discussions bien détaillées sur les progrès dans le développement des modèles d'écoulement en milieu poreux et de nouvelles questions au sujet des modèles les plus anciens nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Nield et Bejan [9].

1.2.4 Équation de conservation de l'énergie

La convection en milieu poreux favorise le transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide. Ce transfert de chaleur est assuré à la fois par la phase fluide et la phase solide. Or ces deux phases ne possèdent ni la même capacité thermique (respectivement $(\rho c)_f$ et $(\rho c)_s$), ni la même conductivité thermique (respectivement λ_f et λ_s). Pour cette raison et dans le but de tenir compte du transfert de chaleur lié à la présence des 2 phases, Combarrous et Bories [91] avaient proposé un modèle de deux équations d'énergie décrivant l'évolution de la température des deux phases :

$$\phi(\rho c)_f \partial_{t^*} T_f^* + (\rho c)_f \phi \mathbf{V}^* \cdot \nabla T_f^* = \nabla \cdot (\lambda_f^* \nabla T_f^*) - h(T_f^* - T_s^*), \quad (1.10)$$

$$(1 - \phi)(\rho c)_s \partial_{t^*} T_s^* = \nabla \cdot (\lambda_s^* \nabla T_s^*) - h(T_s^* - T_f^*), \quad (1.11)$$

avec T^* désignant la température, moyennée sur un VER. Les termes λ_s^* et λ_f^* sont des coefficients de conductivité thermique équivalente ils dépendent des coefficients de conductivité thermique propre λ_f et λ_s , de la porosité ϕ et d'autres paramètres. Par analyse dimensionnelle, le coefficient de transfert entre les deux phases h dépend de λ_f , de λ_s , de $(\rho c)_f$, de $(\rho c)_s$ et d'autres caractéristiques du milieu poreux par exemple la perméabilité K ou la taille d'un pore, d'un grain, d'une fibre. h peut-être déterminé expérimentalement de manière indirecte [9].

Lorsque l'on suppose l'équilibre thermique entre les deux phases fluide et solide on a alors $T_f^* = T_s^* = T^*$ (le coefficient de transfert $h \rightarrow \infty$). Sa justification repose sur la comparaison des temps caractéristiques de mise à l'équilibre thermique du milieu poreux. Sa validité a été systématiquement étudiée dans [92].

On en déduit par sommation termes à termes des équations (1.10) et (1.11), le modèle de transfert de chaleur le plus couramment utilisé pour les milieux poreux :

$$(\rho c)_{sf} \partial_{t^*} T^* + (\rho c)_f \mathbf{V}^* \cdot \nabla T_f^* = \nabla \cdot (\lambda_{sf}^* \nabla T^*), \quad (1.12)$$

avec $(\rho c)_{sf}^* = \phi(\rho c)_f + (1 - \phi)(\rho c)_s$ et $\lambda_{sf}^* = \lambda_f^* + \lambda_s^*$ étant respectivement la chaleur spécifique volumique équivalente et la conductivité thermique équivalente du milieu.

Il existe de nombreuses formulations plus ou moins explicites pour évaluer λ_{sf}^* en fonction de λ_f , de λ_s et de la porosité ϕ [9]. Parmi les modèles les plus usuels, les modèles séries λ_{sf}^\perp et parallèle λ_{sf}^\parallel , supposant les milieux constitués de strates de solide et de fluide respectivement perpendiculaires ou parallèles au transfert de chaleur, conduisent respectivement aux valeurs limites inférieure et supérieure de λ_{sf}^* lorsque λ_f et λ_s sont fixés :

$$\begin{aligned} \lambda_{sf}^\perp &= \phi \lambda_f + (1 - \phi) \lambda_s, \\ 1/\lambda_{sf}^\parallel &= \phi/\lambda_f + (1 - \phi)/\lambda_s. \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^* = 0, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{V}^* + \frac{K}{\mu_f} (\nabla P^* - \rho_f \mathbf{g}) = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{(\rho c)_{sf}^*}{(\rho c)_f} \partial_{t^*} T^* + \mathbf{V}^* \cdot \nabla T_f^* - \kappa^* \Delta T^* = 0, \quad (1.16)$$

les conditions aux limites pour des parois horizontales imperméables et isothermes sont :

$$T^*(x^*, y^*, z^* = 0) = T_0^*(1 - F(\varepsilon x^*)), \quad T^*(x^*, y^*, z^* = H) = T_1^* \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en} \quad z^* = 0; H, \quad (1.17)$$

et pour des parois latérales imperméables et adiabatiques sont :

$$\partial_y T^*(x^*, y^* = 0; aH, z^*) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{en} \quad y^* = 0; aH \quad (1.18)$$

le débit imposé à l'entrée du milieu est

$$\int_0^{aH} \int_0^H \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{n} \, dy^* dz^* = Q, \quad (1.19)$$

1.3.2 Équations adimensionnées

Nous choisissons les échelles suivantes H , $H^2(\rho c)/\lambda$, $\lambda/H(\rho c)_f$ et $\lambda\mu/(K(\rho c)_f)$ comme des échelles de référence respectivement pour la longueur, le temps, la vitesse de filtration et la pression. Avec λ , (ρc) , $(\rho c)_f$, K et μ représentent respectivement la conductivité thermique, la capacité thermique totale du milieu poreux par unité de volume, la capacité thermique du fluide par unité de volume, la perméabilité du milieu et la viscosité du fluide. La température T^* est été mise sous la forme adimensionnelle en écrivant $T^* = T_1^* + (\Delta T)T$, où T_1^* est la température supérieure et ΔT est la différence de la température maximale entre les deux plaques. En supposant que la loi de Darcy et l'hypothèse de Boussinesq s'appliquent, les équations adimensionnées du système physique, basées sur la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie deviennent :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{V} + \nabla P - RaT \mathbf{e}_z = 0, \quad (1.21)$$

$$\partial_t T + \mathbf{V} \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0. \quad (1.22)$$

On fait disparaître le terme en pression en prenant le rotationnel de (1.21). Pour ne garder que la composante verticale de la vitesse, on prend encore une fois le rotationnel de (1.21) et on projette sur \mathbf{e}_z . Finalement on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \\ \Delta W - Ra (\partial_x^2 + \partial_y^2) T = 0, \\ \partial_t T + \mathbf{V} \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

les conditions aux limites pour des parois horizontales imperméables et isothermes sont :

$$T(X, y, z = 0) = 1 - F(X) \leq 1, \quad T(X, y, z = 1) = 0 \quad \text{et} \quad W(X, y, z = 0; 1) = 0, \quad (1.24)$$

et pour des parois latérales imperméables et adiabatiques sont :

$$\partial_y T(X, y = 0; a, z) = 0 \quad \text{et} \quad V(X, y = 0; a, z) = 0; \quad (1.25)$$

le débit imposé à l'entrée du milieu est

$$\int_0^a \int_0^1 \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_x dy dz = a Pe, \quad (1.26)$$

Nombres sans dimension

Dans les équations précédentes, quatre nombres sans dimension apparaissent :

– le nombre de Rayleigh de filtration

$$Ra = \frac{K \alpha_f g H (\rho c)_f \delta T_{ref}}{\lambda_{sf}^* \mu_f}$$

qui mesure l'importance des effets thermoconvectifs,

– le nombre de Péclet

$$Pe = \frac{Q (\rho c)_f}{\lambda_{sf}^*}$$

qui représente le rapport de transfert de chaleur convectif au transfert de chaleur conductif au sein de l'écoulement.

–

$$\varepsilon \ll 1$$

qui représente le rapport de l'épaisseur H à l'échelle spatiale de variation de la température appliquée sur la plaque inférieure.

– le rapport de forme latéral a du milieu poreux.

1.4 Solution de base

Le gradient de température imposé en $z = 0$ va engendrer un écoulement de base bidimensionnel dont les grandeurs physiques dépendent de z et de la variable lente X , contrairement à l'état de base du problème classique homogène où la chaleur est transmise uniquement par conduction et où les composantes de la vitesse sont nulles. Pour calculer les composantes des champs de vitesse et de température de l'écoulement de base, on pose :

$$\partial_t = 0, \quad \partial_y = 0, \quad \partial_x = \varepsilon \partial_X, \quad \text{avec } \mathbf{v}_b = Pe \mathbf{e}_x + \mathbf{v}_b^i \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_b^i = [u_b^i, v_b^i = 0, w_b^i]^T.$$

La partie stationnaire des équations (1.23) et les expressions des conditions aux limites (1.24) deviennent

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_X u_b^i + \partial_z w_b^i = 0, \\ (\partial_z^2 + \varepsilon^2 \partial_X^2) w_b^i - \varepsilon^2 Ra \partial_X^2 T_b = 0, \\ (\partial_z^2 + \varepsilon^2 \partial_X^2 - \varepsilon u_b \partial_X - w_b^i \partial_z) T_b = 0, \end{cases} \quad (1.27)$$

et

$$T_b(X, y, z = 0) = 1 - F(X), \quad T_b(X, y, z = 1) = 0 \quad \text{et} \quad w_b(X, y, z = 0; 1) = 0, \quad (1.28)$$

Une approximation de l'état de base est ensuite recherchée sous la forme d'un développement en puissances croissantes de ε :

$$\begin{cases} T_b = T_0(X, z) + \varepsilon T_1(X, z) + \varepsilon^2 T_2(X, z) + O(\varepsilon^3), \\ u_b^i = \varepsilon u_1^i(X, z) + \varepsilon^2 u_2^i(X, z) + O(\varepsilon^3), \\ w_b^i = w_0^i(X, z) + \varepsilon w_1^i(X, z) + \varepsilon^2 w_2^i(X, z) + O(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (1.29)$$

En substituant T_B , u_B^i et w_B^i par leur développement dans (1.27) et en considérant les conditions aux limites (1.28), on obtient les solutions suivantes :

À l'ordre ε^0

$$\begin{cases} w_0^i = 0, \\ T_0 = \tilde{T}_0(z)(1 - F); \\ \tilde{T}_0(z) = 1 - z. \end{cases} \quad (1.30)$$

À l'ordre ε

$$\begin{cases} w_1' = 0, \\ T_1 = Pe\tilde{T}_1(z)\partial_X F; \\ \tilde{T}_1(z) = \frac{z}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}, \end{cases} \quad (1.31)$$

À l'ordre ε^2

$$\begin{cases} w_1 = Ra\tilde{u}_1(z)\partial_X F; \\ \tilde{u}_1(z) = -\frac{1}{3} + z - \frac{z^2}{2}, \\ w_2' = Ra\tilde{w}_1(z)\partial_X^2 F; \\ \tilde{w}_1(z) = \frac{z}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}, \\ T_2 = \left\{ \tilde{T}_2(z) + [Pe^2 - Ra(1-F)]\tilde{T}_3(z) \right\} \partial_X^2 F + Ra\tilde{T}_4(z)(\partial_X F)^2; \\ \tilde{T}_2(z) = -\frac{z}{3} + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}, \quad \tilde{T}_3(z) = -\frac{z}{45} + \frac{z^3}{18} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120}, \\ \tilde{T}_4(z) = -\frac{2z}{45} + \frac{z^2}{6} - \frac{2z^3}{9} + \frac{z^4}{8} - \frac{z^5}{40}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Et à l'ordre ε^3

$$\begin{cases} w_3' = RaPe\tilde{w}_2(z)\partial_X^3 F, \\ \tilde{w}_2(z) = -\frac{z}{45} + \frac{z^3}{18} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120}, \\ u_2 = RaPe\tilde{u}_2(z)\partial_X^2 F; \\ \tilde{u}_2(z) = \frac{1}{45} - \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{6} - \frac{z^4}{24}, \\ \dots \end{cases} \quad (1.33)$$

Il sera possible de calculer autant de composantes du développement (1.29) que l'on souhaite; cependant, nous nous arrêterons aux trois premiers termes qui seront utiles dans l'étude de stabilité entreprise au prochain chapitre. Les expressions (1.30)-(1.33) restent valables quelle que soit la fonction lente $F(X)$. Pour illustrer l'approximation de l'état de base, nous considérons deux profils de la distribution de la température appliquée sur la plaque inférieure.

Dans le cas dit infini :

$$T(X, y, z = 0) = 1 - F(X) = 1 - \tanh^2(X) \quad \text{telle que} \quad F'(X = 0) = 0, \quad (1.34)$$

et dans le cas dit semi-infini :

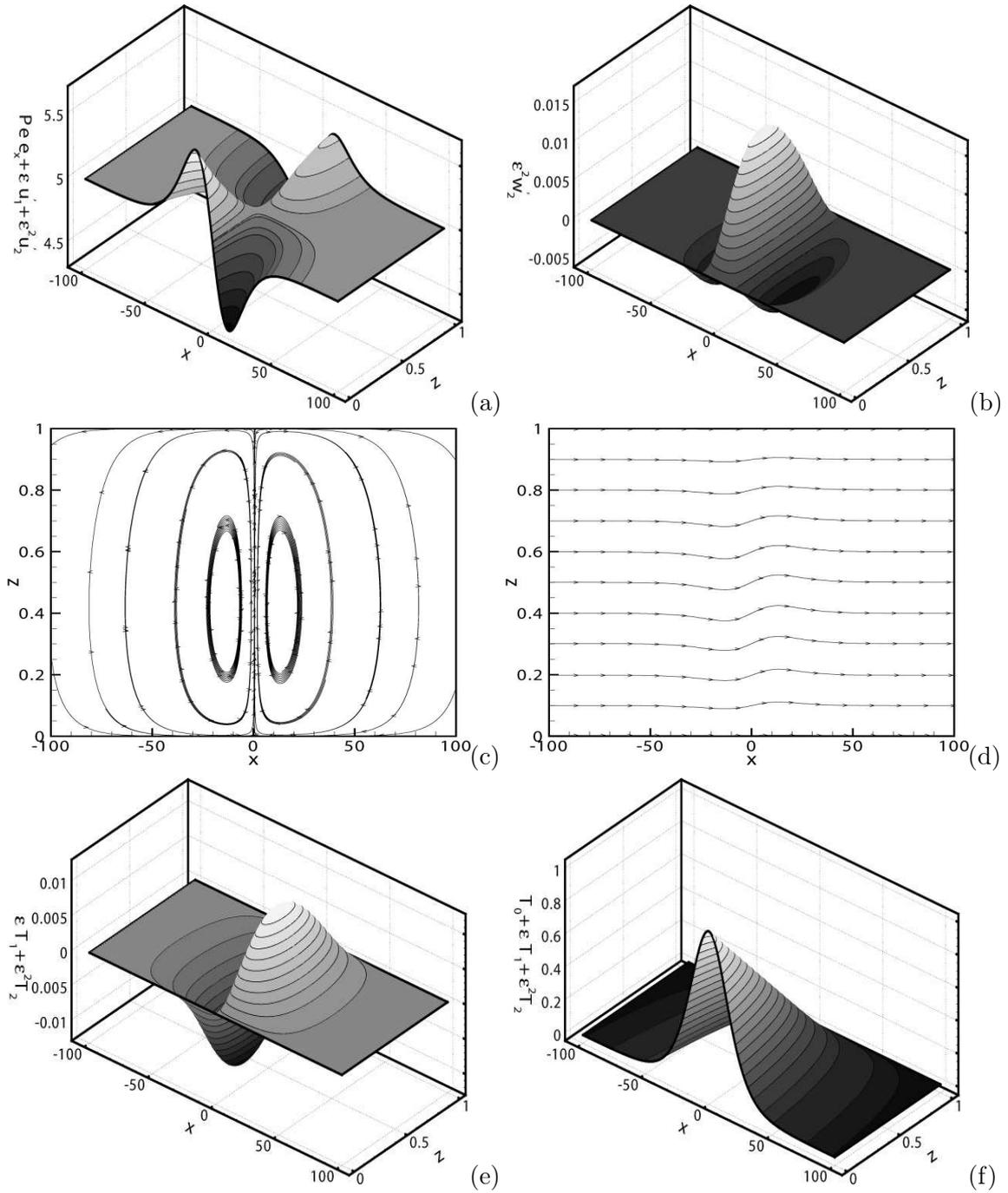


FIG. 1.5: Les composantes des champs de vitesse et de température de l'écoulement de base dans le cas infini, avec $Pe = 5$, $Ra = 50$, $\epsilon = 0.05$ et $F(X) = \tanh^2(\epsilon x)$. (a), (b) et (f) respectivement les trois premiers ordres de u_b , w_b et θ_b . (c) et (d) les lignes de courant respectivement en absence et en présence du premier ordre Pe . (e) le champ de température en absence du premier ordre T_0 .

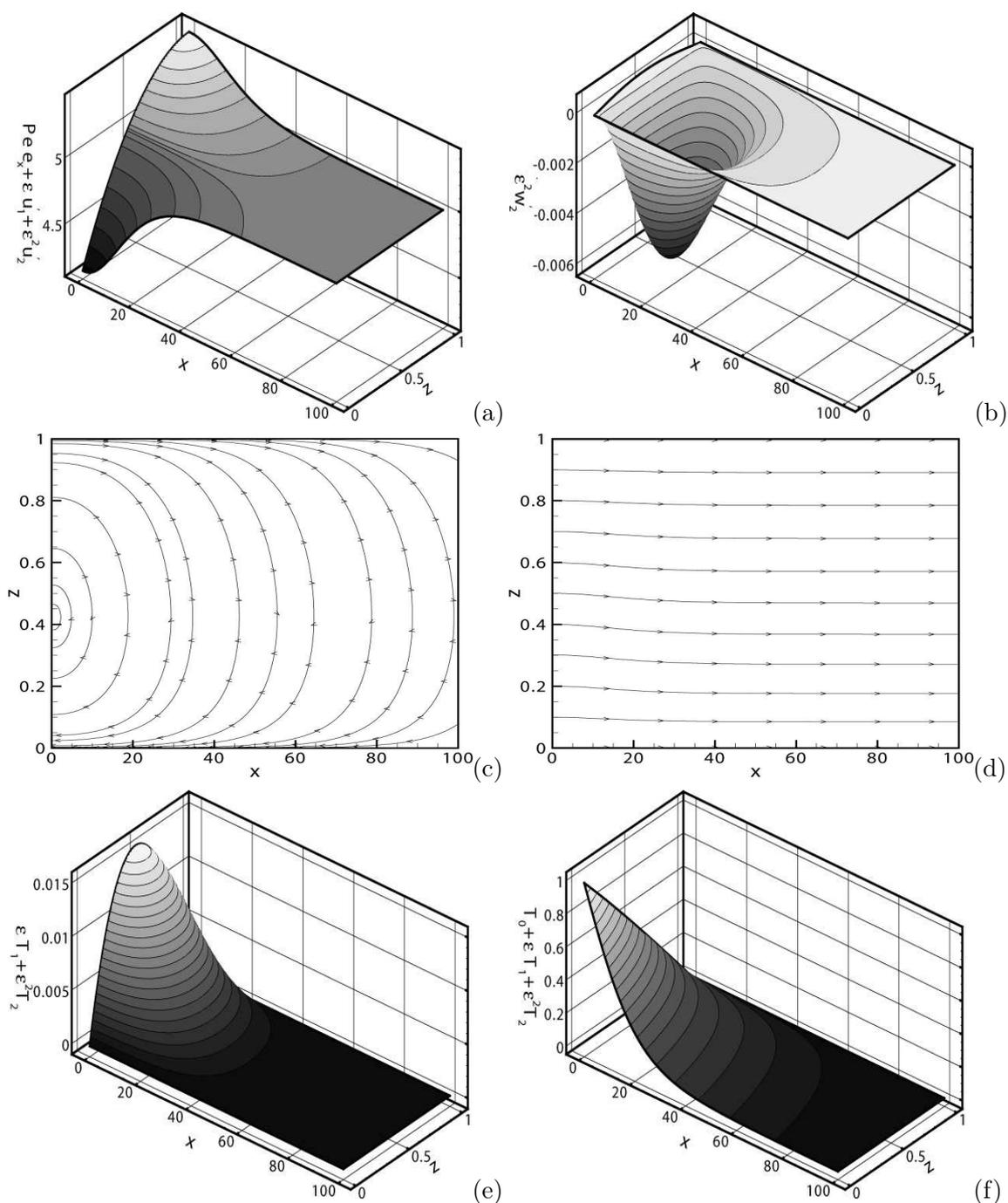


FIG. 1.6: Les composantes des champs de vitesse et de température de l'écoulement de base dans le cas semi-infini, avec $Pe = 5$, $Ra = 50$, $\epsilon = 0.05$ et $F(X) = \tanh(\epsilon x)$. (a), (b) et (f) respectivement les trois premiers ordres de u_b , w_b et θ_b . (c) et (d) les lignes de courant respectivement en absence et en présence du premier ordre Pe . (e) le champ de température en absence du premier ordre T_0 .

$$T(X, y, z = 0) = 1 - F(X) = 1 - \tanh(X) \quad \text{telle que} \quad F'(X = 0) \neq 0. \quad (1.35)$$

En utilisant les équations (1.34) et (1.35), les trois premiers ordre de l'état de base (1.29) sont évalués et présentés sur la figure 1.5 (cas infini) et sur la figure 1.6 (cas semi-infini). On remarque en particulier qu'au voisinage de la tache thermique $X = 0$ et en absence de l'écoulement principal (figures 1.5(c) et 1.6(c)), les particules fluides ont tendance à se déplacer verticalement, et au fur et à mesure qu'elles s'éloignent de la tache thermique, elles ont tendance à se déplacer horizontalement.

1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de définir certaines caractéristiques rhéologiques des milieux poreux, de présenter une modélisation mathématique de la convection mixte en milieu poreux, basée sur l'équation de Darcy et de l'approximation de Boussinesq. Par ailleurs, les paramètres adimensionnés du problème ont été mis en évidence et une solution de base approximative a été déterminée.

A partir des équations développées dans ce chapitre, il est possible d'étudier la stabilité de l'écoulement de base en fonction des paramètres du problème.

Chapitre 2

Modes globaux linéaires de convection mixte faiblement inhomogène en milieu poreux

L'analyse de stabilité linéaire permet d'étudier l'évolution d'une perturbation infinitésimale dépendante du temps $\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \theta)^\top$, superposée à l'état de base $(\mathbf{v}_b, T_b)^\top$. En raison de la variation spatiale lente de l'écoulement de base $\varepsilon \ll 1$, l'analyse de stabilité linéaire peut être effectuée dans le cadre de l'approximation WKBJ, qui est un développement asymptotique reposant sur l'existence d'une séparation entre l'échelle rapide x liée à la perturbation, et l'échelle lente X qui traduit une modulation de l'écoulement de base. Cette approximation permet par ailleurs de relier le comportement global de l'instabilité dans l'écoulement à ses caractéristiques locales.

2.1 L'approximation WKBJ pour la perturbation

La perturbation est ici recherchée sous la forme d'un développement WKBJ :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_0(X, y, z) + \varepsilon \mathbf{v}_1(X, y, z) + O(\varepsilon^2)) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int k(X) dX - i\omega t\right) + c.c., \quad (2.1)$$

où la fréquence complexe est décomposée en $\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^2)$.

En introduisant l'approximation WKBJ (2.1) dans le système d'équations (1.23), on obtient, après linéarisation, le système suivant vérifié par les champs de vitesse et de température perturbées

$$\varepsilon \partial_X u + \partial_y v + \partial_z w = 0, \quad (2.2)$$

$$(\varepsilon^2 \partial_X^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) w - \varepsilon^2 Ra \partial_X^2 \theta = 0, \quad (2.3)$$

$$(\partial_t + \varepsilon u_B \partial_X + w_B \partial_z - \varepsilon^2 \partial_X^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2) \theta + \varepsilon u \partial_X T_B + w \partial_z T_B = 0. \quad (2.4)$$

Le premier ordre de l'approximation WKBJ, conduit à une équation de dispersion inhomogène, qui relie le nombre d'onde local $k(X)$ à la fréquence ω . Le second ordre permet de construire une équation différentielle vérifiée par l'amplitude de l'ordre principal de l'approximation WKBJ.

2.1.1 Problème à l'ordre principal et relation de dispersion locale

Les équations (2.2)-(2.4) impliquent que le premier ordre \mathbf{v}_0 du développement (2.1) est une solution du problème local :

$$L_0 \mathbf{v}_0 = 0, \quad (2.5)$$

où l'opérateur L_0 est défini par :

$$L_0 = \begin{pmatrix} ik & \partial_y & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 & -Ra(k^2 - \partial_y^2) \\ 0 & 0 & \partial_z \tilde{T}_0(1-F) & -i\omega_0 + ikPe + k^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

La solution \mathbf{v}_0 est recherchée sous la forme :

$$\mathbf{v}_0 = A_0(X) \hat{\mathbf{v}}_0(k(X), Ra, Pe, \omega_0, y, z), \quad (2.7)$$

où $A_0(X)$ est une amplitude inconnue à ce stade.

Les conditions aux limites associées au système (2.5) sont :

$$v_0(X, y = 0; a, z) = w_0(X, y, z = 0; 1) = 0. \quad (2.8)$$

$$\partial_y \theta_0(X, y = 0; a, z) = \theta_0(X, y, z = 0; 1) = 0. \quad (2.9)$$

Les fonctions propres vérifiant ces conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} \hat{v}_0 = \cos(\pi z) \sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right), \\ \hat{w}_0 = \sin(\pi z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right), \\ \hat{u}_0 = \frac{i\left(\frac{m\pi}{a} + \pi\right)}{k} \cos(\pi z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right), \\ \hat{\theta}_0 = \frac{k^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \pi^2}{Ra(k^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2)} \sin(\pi z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}y\right), \end{cases} \quad (2.10)$$

à condition qu'une relation de dispersion, reliant le nombre d'onde local $k(X)$ et la fréquence à l'ordre principal ω_0 soit vérifiée :

$$D\left(k, \omega_0, Pe, Ra, X, \frac{m}{a}\right) = \left(k^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \pi^2\right) \times \\ \left(-i\omega_0 + ikPe + k^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \pi^2\right) - Ra(X) \left(k^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) = 0. \quad (2.11)$$

Cette relation de dispersion fait intervenir, en plus des paramètres adimensionnés Pe et $\frac{m}{a}$, le nombre de Rayleigh local $Ra(X) = Ra[1 - F(X)]$ qui rend compte de la présence de l'inhomogénéité.

2.1.2 Critère de sélection de la fréquence du mode global linéaire

A ce stade de l'analyse, la fréquence ω_0 est considérée comme un paramètre libre. Le critère de sélection d'une fréquence particulière associée à l'émergence d'un mode global doit respecter la condition physique selon laquelle les solutions doivent s'amortir dans les limites $X \rightarrow \pm\infty$ pour le cas d'une configuration infinie. Pour le cas semi-infini, le mode global recherché doit être nul à l'entrée du canal, s'amplifie en aval de l'entrée, et finit par amorcer une décroissance spatiale lorsque $X \rightarrow +\infty$. Dans le contexte actuel, cela suppose que les conditions suivantes doivent être vérifiées :

– sur le nombre de Rayleigh local $Ra(X)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{X \rightarrow \pm\infty} Ra(X) < Ra^c \quad (\text{cas infini}) \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} Ra(X) < Ra^c \quad (\text{cas semi-infini}) \end{array} \right. \quad (2.12)$$

– sur le taux d'amplification spatial

$$\left\{ \begin{array}{l} \Im(k) < 0 \text{ quand } X \rightarrow -\infty \text{ et } \Im(k) > 0 \text{ quand } X \rightarrow +\infty \quad (\text{cas infini}) \\ \Im(k) < 0 \text{ quand } X \rightarrow 0 \text{ et } \Im(k) > 0 \text{ quand } X \rightarrow +\infty \quad (\text{cas semi-infini}) \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Un exemple illustrant le processus de sélection de la fréquence $\Re(\omega_0)$ dans le cas d'un milieu infini est montré sur la figure 2.1. Cette figure démontre bien que la première condition de (2.13) n'est pas satisfaite en général. En effet, pour $\Re(\omega_0)$ fixée, les deux branches spatiales solutions du problème, représentées sur la figure 2.1(a) ont des signes opposés de $\Im(k)$. Cette figure montre que si on est sur la branche spatiale où $\Im(k) < 0$ lorsque

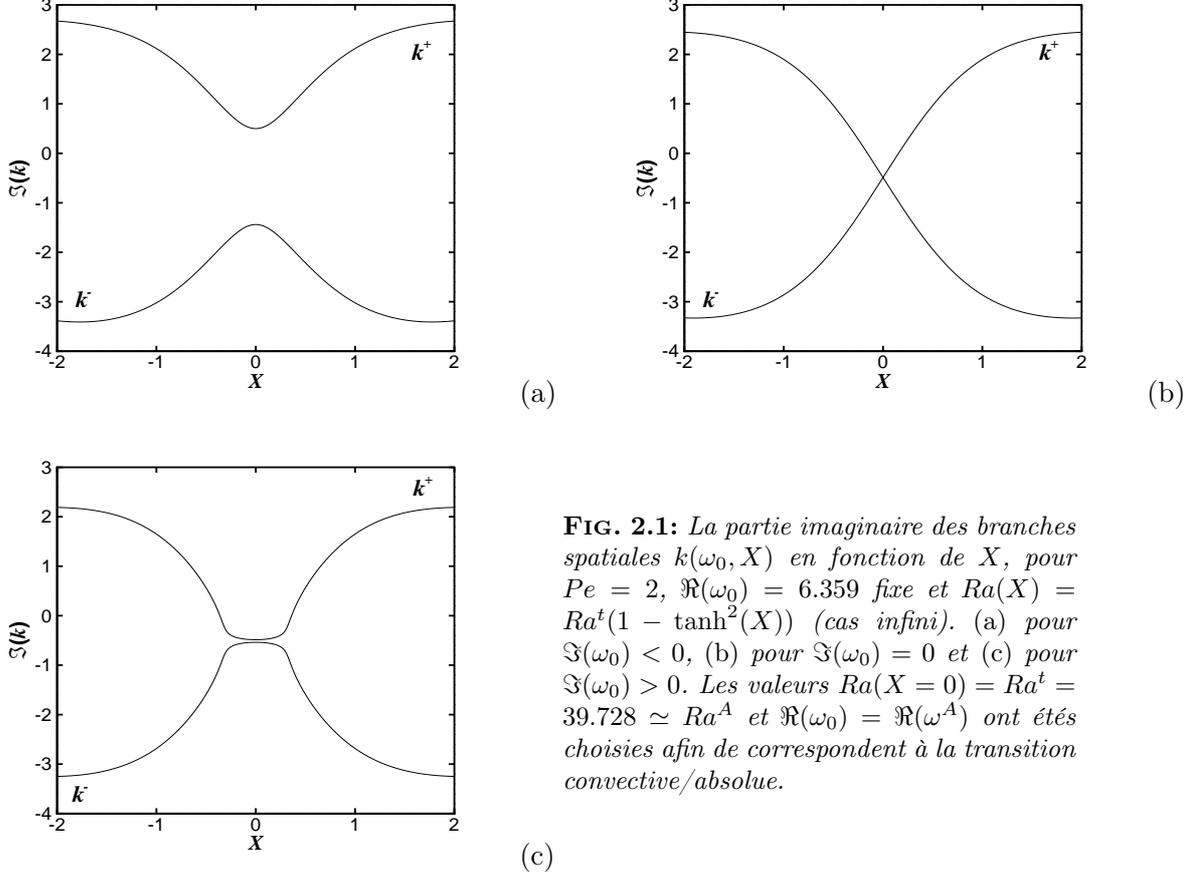


FIG. 2.1: La partie imaginaire des branches spatiales $k(\omega_0, X)$ en fonction de X , pour $Pe = 2$, $\Re(\omega_0) = 6.359$ fixe et $Ra(X) = Ra^t(1 - \tanh^2(X))$ (cas infini). (a) pour $\Im(\omega_0) < 0$, (b) pour $\Im(\omega_0) = 0$ et (c) pour $\Im(\omega_0) > 0$. Les valeurs $Ra(X=0) = Ra^t = 39.728 \simeq Ra^A$ et $\Re(\omega_0) = \Re(\omega^A)$ ont été choisies afin de correspondre à la transition convective/absolue.

$X \rightarrow -\infty$, alors $\Im(k)$ demeure négative si $X \rightarrow +\infty$.

Par conséquent, respecter la première condition (2.12) revient à faire un saut d'une branche spatiale à l'autre, de part et d'autre de la région centrale $X = 0$. La seule possibilité qui reste pour avoir une solution valable $\forall X$, est que l'on puisse passer d'une branche spatiale à l'autre sans discontinuité. Cela se produit quand les deux branches spatiales fusionnent en $X = 0$ (figure 2.1(b)) pour une valeur bien déterminée de la fréquence $\Re(\omega_0)$ et dans des conditions où l'instabilité devient marginalement absolue en $X = 0$. Rappelons que la condition mathématique pour que l'instabilité soit localement de nature absolue s'exprime par la nullité de la vitesse de groupe :

$$\begin{cases} \partial_k \omega_0 = 0, \\ \Im(\omega_0) > 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

avec ω_0 vérifiant l'équation de dispersion (2.11).

Dans le but de déterminer le mode le plus absolument instable, nous avons résolu numériquement la relation (2.14) et avons évalué le taux local de croissance temporelle

$\Im(\omega_0(X))$ pour différents modes. Le résultat est illustré sur la figure 2.2 pour $Ra = 50$, $Pe = 5$ et un rapport de forme $a = 5.5$. Le résultat le plus marquant qui découle de cette

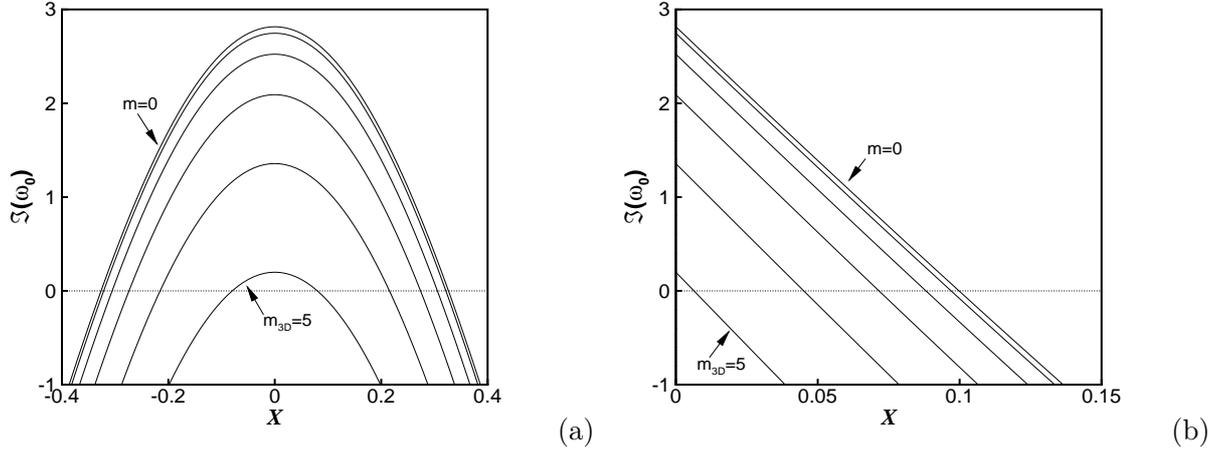


FIG. 2.2: Le taux de croissance local absolue des structures tridimensionnelles en fonction de la position X pour $m = 0, \dots, 5$, avec $a = 5.5$, $Pe = 5$, $Ra = 50$. (a) cas infini avec $F(X) = \tanh^2(X)$. (b) cas semi-infini avec $F(X) = \tanh(X)$. Le cas $m = 0$ est le taux de croissance local absolue des rouleaux propagatifs purement transversaux.

figure est le fait que pour toute position spatiale X , le taux de croissance temporelle des rouleaux propagatifs purement transversaux ($m = 0$) est plus élevé que celui des structures tridimensionnelles ($m \neq 0$), aussi bien pour une configuration de milieu infini que pour celle d'un milieu semi infini. Par conséquent, le seuil d'instabilité absolue pour les rouleaux propagatifs purement transversaux sont inférieurs aux seuils associés à des structures tridimensionnelles, comme le montre la figure 2.3. Ce résultat reste pertinent pour l'ensemble des gammes de paramètres testés numériquement est en parfait accord avec celui de Carrière et Monkewitz [117] dans leur étude du problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille dans un canal d'extension illimitée dans les deux directions horizontales.

On peut donc conclure que, le seuil d'apparition du mode global linéaire et sa fréquence d'oscillations sont obtenus au premier ordre, dans des conditions où le mode $m = 0$ devient marginalement absolument instable en $X = 0$ (i.e. $\Im(\omega_0(X = 0)) = 0$).

Ceci étant, l'amplitude $A_0(X)$ du mode global linéaire reste à déterminer. C'est l'objet du paragraphe suivant qui considère le problème de stabilité à l'ordre ε .

2.1.3 La solution de l'approximation WKBJ à l'ordre ε

Dans toute la suite de ce travail, on ne s'intéressera qu'au mode bidimensionnel ($m = 0$) le plus absolument instable.

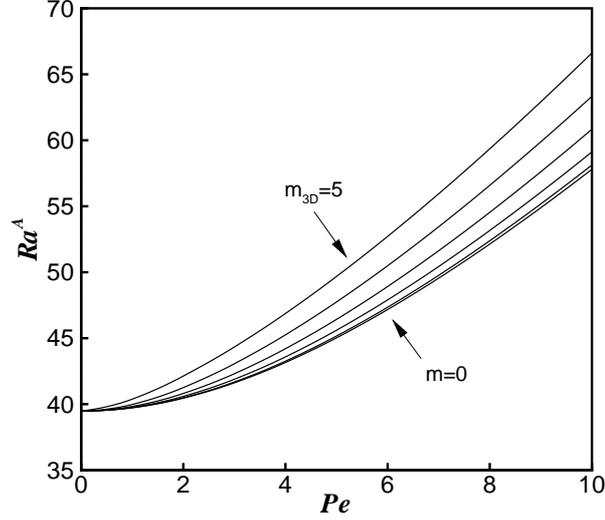


FIG. 2.3: Le seuil absolu en $X = 0$ des structures tridimensionnelles en fonction de Pe pour $m = 0, \dots, 5$, avec $a = 5.5$. Le cas $m = 0$ est le seuil de transition à une instabilité absolue des rouleaux propagatifs purement transversaux.

À l'ordre ε , on obtient le problème de stabilité suivant :

$$L_0 \mathbf{v}_1 = L_1 \mathbf{v}_0, \quad (2.15)$$

où les composantes de $L_1 \mathbf{v}_0$ sont :

$$\begin{aligned} L_1 \mathbf{v}_0 = & \left[-\partial_X A_0 \hat{u}_0, 2ik \partial_X A_0 (\hat{w}_0 - Ra \hat{\theta}_0) + A_0 \left\{ i \partial_X k (\hat{w}_0 - Ra \hat{\theta}_0) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2ik Ra \partial_X \hat{\theta}_0 \right\}, (2ik - Pe) \partial_X A_0 \hat{\theta}_0 + A_0 \left\{ (2ik - Pe) \partial_X \hat{\theta}_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + i(\omega_1 - k Ra \tilde{u}_1 \partial_X F + \partial_X k) \hat{\theta}_0 - Pe \partial_z \tilde{T}_1 \partial_X F \hat{w}_0 + \tilde{T}_0 \partial_X F \hat{u}_0 \right\} \right]^T. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La résolution du problème avec second membre (2.15) nécessite l'application de l'alternative de Fredholm qui stipule que le second membre de ce système doit être orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint L_0^* de L_0 . Pour déterminer L_0^* et ses vecteurs propres $\hat{\mathbf{v}}_0^*$, introduisons le produit scalaire entre $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{u}, \hat{w}, \hat{\theta})^T$ et $\hat{\mathbf{v}}' = (\hat{u}', \hat{w}', \hat{\theta}')^T$ défini par :

$$\langle \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}' \rangle = \int_0^1 (\hat{u} \overline{\hat{u}'} + \hat{w} \overline{\hat{w}'} + \hat{\theta} \overline{\hat{\theta}'}) dz. \quad (2.17)$$

Dans ce cas, $\widehat{\mathbf{v}}_0^*$ est solution du problème :

$$L_0^* \widehat{\mathbf{v}}_0^* = 0, \quad (2.18)$$

où l'opérateur adjoint L_0^* a pour expression :

$$L_0^* = \begin{pmatrix} -i\bar{k} & 0 & 0 \\ -\partial_z & \bar{k}^2 - \partial_z^2 & \partial_z \widetilde{T}_0(1-F) \\ 0 & -Ra\bar{k}^2 & i\bar{\omega}_0 - i\bar{k}Pe + \bar{k}^2 - \partial_z^2 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

et le mode adjoint solution de (2.18) est

$$\widehat{\mathbf{v}}_0^* = \begin{cases} \widehat{u}_0^* = 0, \\ \widehat{w}_0^* = \sin(\pi z), \\ \widehat{\theta}_0^* = -\frac{\bar{k}^2 + \pi^2}{\partial_z \widetilde{T}_0(1-F)} \sin(\pi z). \end{cases} \quad (2.20)$$

Une fois déterminée le noyau de l'opérateur adjoint, l'application de l'alternative de Fredholm conduit à une condition de solvabilité du problème (2.15) sous la forme d'une équation différentielle vérifiée par l'amplitude $A_0(X)$

$$\eta_1(X; \omega_0) \partial_X A_0 + [i\omega_1 + \eta_2(X; \omega_0) \partial_X k + \eta_3(X; \omega_0)] A_0 = 0, \quad (2.21)$$

où les expressions développées de $\eta_1(X; \omega_0)$, $\eta_2(X; \omega_0)$ et $\eta_3(X; \omega_0)$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1(X; \omega_0) = -\frac{2ik\pi^2 Ra(X)}{(k^2 + \pi^2)^2} + 2ik - Pe \\ \quad = -\partial_k \omega_0, \\ \eta_2(X; \omega_0) = \frac{i3\pi^2 Ra(X)}{(k^2 + \pi^2)^2} + \frac{i(k^2 - 3\pi^2)}{k^2 + \pi^2} + \frac{2\pi^2 Pe}{k(k^2 + \pi^2)}, \\ \eta_3(X; \omega_0) = \frac{(ik^3 - Pe k^2 - ik\pi^2) \partial_X Ra}{4\pi^2(k^2 + \pi^2)} = \bar{\eta}_3 \partial_X Ra(X); \\ \quad \partial_X Ra = -Ra \partial_X F. \end{array} \right.$$

Les dérivations de (2.5) par rapport à k pour X fixée donnent les relations suivantes

$$\partial_k L_0|_X \widehat{\mathbf{v}}_0 = -L_0 \partial_k \widehat{\mathbf{v}}_0|_X, \quad (2.22)$$

$$\partial_k^2 L_0|_X \widehat{\mathbf{v}}_0 + 2\partial_k L_0|_X \partial_k \widehat{\mathbf{v}}_0|_X = -L_0 \partial_k^2 \widehat{\mathbf{v}}_0|_X. \quad (2.23)$$

En utilisant le produit scalaire avec le mode adjoint $\widehat{\mathbf{v}}_0^*$, ceci mène aux propriétés suivantes pour $\partial_k L_0$ et $\partial_k^2 L_0$:

$$\langle \partial_k L_0 |_X \widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_0^* \rangle = - \langle L_0 \partial_k \widehat{\mathbf{v}}_0 |_X, \widehat{\mathbf{v}}_0^* \rangle = - \langle \partial_k \widehat{\mathbf{v}}_0 |_X, L_0^* \widehat{\mathbf{v}}_0^* \rangle = 0, \quad (2.24)$$

$$\langle \partial_k^2 L_0 |_X \widehat{\mathbf{v}}_0, \widehat{\mathbf{v}}_0^* \rangle + 2 \langle \partial_k L_0 |_X \partial_k \widehat{\mathbf{v}}_0 |_X, \widehat{\mathbf{v}}_0^* \rangle = 0. \quad (2.25)$$

Le développement de (2.25) conduit à l'égalité suivante :

$$\eta_2(X; \omega_0) = -\frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_0 + \bar{\eta}_2 \partial_k \omega_0, \quad \text{avec} \quad \bar{\eta}_2 = \frac{2\pi^2}{k(k^2 + \pi^2)}.$$

L'équation différentielle vérifiée par l'amplitude $A_0(X)$ devient :

$$\partial_k \omega_0 \partial_X A_0 + \left(-i\omega_1 + \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_0 \partial_X k - \bar{\eta}_2 \partial_k \omega_0 \partial_X k - \bar{\eta}_3 \partial_X Ra(X) \right) A_0 = 0. \quad (2.26)$$

dont la solution est

$$A_0(X) \sim \exp \left(\int_0^X \frac{i\omega_1 - \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_0 \partial_X k + \bar{\eta}_2 \partial_k \omega_0 \partial_X k + \bar{\eta}_3 \partial_X Ra}{\partial_k \omega_0} dX \right). \quad (2.27)$$

Cette solution est partout valable, sauf au voisinage des points où la vitesse de groupe $\partial_k \omega_0$ s'annule. Ceci se produit exactement dans les conditions où l'instabilité devient absolue en $X = 0$, position spatiale où la température présente un maximum. On parle dans ce cas d'un point tournant double (i.e. $\partial_X \omega_0 = 0$) pour la configuration infinie et d'un point tournant simple (i.e. $\partial_X \omega_0 \neq 0$) pour la configuration semi-infinie.

2.2 L'approximation WKBJ dans la région du point tournant double pour le domaine infini

La solution (2.27) est valable partout sauf au point tournant $X^t = 0$ où $A_0(X^t)$ devient singulier. Dans la perspective d'éviter cette singularité, une analyse spécifique au voisinage du point tournant $X^t = 0$ est alors nécessaire. La taille de l'intervalle centré sur le point tournant $X^t = 0$, appelée région intérieure, où doit s'opérer cette analyse est obtenue en appliquant le principe de moindre dégénérescence [98]. Dans notre problème, ce principe

fait introduire le terme diffusif $\varepsilon^2 \partial_X^2 A_0$ et stipule que ce terme doit être du même ordre de grandeur que l'inhomogénéité de la température, qui elle-même se comporte en X^2 au voisinage du point tournant $X^t = 0$. En vertu de ce principe, on doit alors introduire une nouvelle variable dite variable intérieure

$$\chi = \varepsilon^{1/2} x = \varepsilon^{-1/2} X. \quad (2.28)$$

Dès lors que la variable intérieure est définie, l'analyse qui suit repose sur la stratégie suivante :

- on évalue le comportement de la partie principale de la solution extérieure (2.27) lorsque $X \rightarrow 0$. Ensuite, on introduit la variable intérieure χ dans l'expression ainsi trouvée,
- ensuite on exprime la solution de l'écoulement de base en fonction de la variable intérieure χ ,
- et enfin, on cherche à identifier les champs de perturbation de cet écoulement en mettant en oeuvre un développement WKBJ valable dans la région intérieure d'épaisseur $\varepsilon^{1/2}$. Le raccord entre les solutions extérieure et intérieure permet de trouver une solution valable dans tout le domaine physique considéré.

2.2.1 La solution extérieure au voisinage du point tournant double

L'évaluation du comportement quand $X \rightarrow X^t = 0$ de la partie principale de la solution extérieure WKBJ

$$\mathbf{v} \approx A_0(X) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int k(X) dX - i\omega_g t\right) \hat{\mathbf{v}}_0, \quad (2.29)$$

nécessite de déterminer préalablement le comportement des branches spatiales k^- et k^+ au voisinage du point tournant. Rappelons que la fréquence ω_0 vérifie au point tournant $X^t = 0$ les deux relations : $\partial_k \omega_0^t = 0$ et $\partial_X \omega_0^t = 0$. Le développement de Taylor de ω_0 au voisinage de $X = X^t = 0$ se réduit alors à

$$\omega_0 = \omega_0^t + \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_0^t (k - k^t)^2 + \frac{1}{2} \partial_X^2 \omega_0^t X^2 + O(\varepsilon). \quad (2.30)$$

En injectant l'expression (2.30) dans l'équation de dispersion (2.11) où on pose $m = 0$ et $Ra(X) = Ra(1 - X^2)$, on obtient après l'expression de k en fonction de la variable intérieure χ :

$$k = k^t \pm \varepsilon^{1/2} i \alpha^{1/2} |\chi| + O(\varepsilon), \quad (2.31)$$

avec :

$$\alpha^{1/2} = \left(\partial_X^2 \omega_0^t (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-1} \right)^{1/2}, \quad (2.32)$$

où $\alpha^{1/2}$ a été choisi afin d'avoir une partie réelle positive. La conversion de k^- pour $\chi < 0$ à k^+ pour $\chi > 0$ est ainsi donnée par

$$k = k^t + \varepsilon^{1/2} i \alpha^{1/2} \chi + O(\varepsilon), \quad (2.33)$$

à partir de (2.33) le terme exponentiel de (2.29) mène à :

$$\exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int k(X) dX\right) = \exp\left(\frac{i k^t}{\varepsilon^{1/2}} \chi - \frac{\alpha^{1/2}}{2} \chi^2\right) + O(\varepsilon^{1/2}). \quad (2.34)$$

Par ailleurs, après calcul, on trouve que :

$$\partial_X k = i \alpha^{1/2} + O(\varepsilon^{1/2}), \quad (2.35)$$

$$\partial_X Ra(\chi) = O(\varepsilon^{1/2}). \quad (2.36)$$

$$\partial_k \omega_0 = \varepsilon^{1/2} i \alpha^{1/2} \partial_k^2 \omega_0^t \chi + O(\varepsilon). \quad (2.37)$$

Ainsi, lorsque $X \rightarrow X^t = 0$, l'amplitude $A_0(\chi)$ s'écrit

$$A_0(\chi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\omega_1}{\alpha^{1/2} \partial_k^2 \omega_0^t}\right) \int \chi^{-1} d\chi + O(\varepsilon^{1/2})\right), \quad (2.38)$$

Finalement, la solution externe de WKBJ quand $X \rightarrow X^t = 0$, en fonction de la variable intérieure χ est :

$$\mathbf{v} \approx \chi^{-2\sigma} \exp\left(-\frac{\alpha^{1/2}}{2} \chi^2\right) \exp\left(\frac{i k^t}{\varepsilon^{1/2}} \chi - i \omega_g t\right) \widehat{\mathbf{v}}_0^t + O(\varepsilon^{1/2}) + c.c.. \quad (2.39)$$

avec :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\beta}{\alpha^{1/2}} \right), \\ \beta = -2\omega_1 (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-1}. \end{cases} \quad (2.40)$$

L'indice supérieur t indique que les différentes fonctions doivent être évaluées pour $\omega_0 = \omega_0^t$ et $X = X^t = 0$.

2.2.2 Écoulement de base au voisinage du point tournant double

L'écoulement de base dans la région centrée autour du point tournant double $X^t = 0$ est obtenu en introduisant la variable intérieure χ dans l'expression (1.23). Le champ de température et les composantes de la vitesse de l'écoulement de base sont données par l'approximation :

$$T_b(\chi, z) = \tilde{T}_0(z) \left(1 - \varepsilon \partial_X^2 F^t \frac{\chi^2}{2} \right) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad (2.41)$$

$$u_b(\chi, z) = Pe + \varepsilon^{3/2} Ra \tilde{u}_1(z) \partial_X^2 F^t \chi + O(\varepsilon^2), \quad (2.42)$$

$$w_b(\chi, z) = \varepsilon^2 Ra \tilde{w}_1(z) \partial_X^2 F^t + O(\varepsilon^{5/2}). \quad (2.43)$$

2.2.3 Construction de la solution intérieure des équations de perturbation

Dans la région intérieure, la perturbation $\mathbf{v}^t(\chi, z, t) = (u^t, w^t, \theta^t)^T$ est recherchée sous la forme d'un développement asymptotique en puissance de $\varepsilon^{1/2}$

$$\mathbf{v}^t = \left(\mathbf{v}_0^t(\chi, z) + \varepsilon^{1/2} \mathbf{v}_{1/2}^t(\chi, z) + \varepsilon \mathbf{v}_1^t(\chi, z) + O(\varepsilon^{3/2}) \right) \left(\frac{i}{\varepsilon^{1/2}} k^t \chi - i\omega t \right) + c.c., \quad (2.44)$$

où la fréquence complexe est décomposée en $\omega = \omega_0 + \varepsilon^{1/2} \omega_{1/2} + \varepsilon \omega_1 + O(\varepsilon^{3/2})$.

En introduisant l'approximation (2.44) dans le système d'équations (1.23) et en tenant compte de (2.41)-(2.43), on retrouve à l'ordre ε^0 le problème homogène :

$$L_0^t \mathbf{v}_0^t = 0, \quad (2.45)$$

avec $L_0^t = L_0|_{X=X^t=0}$. Ceci implique que la solution \mathbf{v}_0^t peut être écrite sous la forme :

$$\mathbf{v}_0^t = A_0^t(\chi)\widehat{\mathbf{v}}_0^t(k^t, Ra^t; \omega_0^t; z), \quad (2.46)$$

avec $\widehat{\mathbf{v}}_0^t = \widehat{\mathbf{v}}_0|_{X=X^t=0}$, la solution du problème homogène, exprimée localement au sommet de la bosse de la température imposée sur le bord inférieur. La relation de dispersion est à nouveau vérifiée, ce qui conduit à la valeur prise par ω_0 :

$$\omega_0 = \omega_0^t = \frac{ik^{t^2}Ra^t}{k^{t^2} + \pi^2} + k^t Pe - i(k^{t^2} + \pi^2), \quad (2.47)$$

La fréquence ω_0 est imposée par le problème homogène, c'est-à-dire par les mécanismes physiques de l'instabilité au point tournant double. L'influence de l'inhomogénéité du système sur les oscillations globales apparaîtra comme une correction $\varepsilon\omega_1$, jusqu'alors indéterminée.

À l'ordre $\varepsilon^{1/2}$, on obtient le système d'équations :

$$L_0^t \mathbf{v}_{1/2}^t = L_{1/2}^t \mathbf{v}_0^t, \quad (2.48)$$

où les composantes de $L_{1/2}^t \mathbf{v}_0^t$ sont :

$$L_{1/2}^t \mathbf{v}_0^t = \left[-\partial_\chi A_0^t \widehat{u}_0^t, 2ik^t \partial_\chi A_0^t (\widehat{w}_0^t - Ra\widehat{\theta}_0^t), (2ik^t - Pe) \partial_\chi A_0^t \widehat{\theta}_0^t + i\omega_{1/2} A_0^t \widehat{\theta}_0^t \right]^T. \quad (2.49)$$

La condition de solvabilité à l'ordre $\varepsilon^{1/2}$ impose

$$\omega_{1/2} = 0, \quad (2.50)$$

ce qui donne alors :

$$\mathbf{v}_{1/2}^t = -i\partial_\chi A_0^t \partial_k \widehat{v}_0^t|_X = \partial_\chi A_0^t \begin{cases} \widehat{u}_{1/2}^t = -\frac{\pi}{k^{t^2}} \cos(\pi z), \\ \widehat{w}_{1/2}^t = 0, \\ \widehat{\theta}_{1/2}^t = \frac{2i\pi^2}{k^{t^3} Ra^t} \sin(\pi z). \end{cases} \quad (2.51)$$

À l'ordre ε , on obtient le système suivant :

$$L_0^t \mathbf{v}_1^t = L_1^t \left(\mathbf{v}_0^t, \mathbf{v}_{1/2}^t \right), \quad (2.52)$$

où les composantes de $L_1^t \left(\mathbf{v}_0^t, \mathbf{v}_{1/2}^t \right)$ sont :

$$\begin{aligned} L_1^t \left(\mathbf{v}_0^t, \mathbf{v}_{1/2}^t \right) = & \left[-\partial_X^2 A_0^t \widehat{u}_{1/2}^t, \partial_X^2 A_0^t \left(\widehat{w}_0^t - Ra \left(2ik^t \widehat{\theta}_{1/2}^t + \widehat{\theta}_0^t \right) \right), \right. \\ & \left. \partial_X^2 A_0^t \left\{ (2ik^t - Pe) \widehat{\theta}_{1/2}^t + \widehat{\theta}_0^t \right\} + A_0^t \left(i\omega_1 \widehat{\theta}_0^t + \partial_z \widetilde{T}_0 \partial_X^2 F^t \frac{\chi^2}{2} \widehat{w}_0^t \right) \right]^T. \end{aligned} \quad (2.53)$$

La condition de solvabilité à l'ordre ε , conduit à l'équation satisfaite par l'amplitude $A_0^t(\chi)$ au voisinage du point tournant double,

$$\eta_1^t \partial_X^2 A_0^t + \left(i\omega_1 - \eta_2^t \frac{\chi^2}{2} \right) A_0^t = 0, \quad (2.54)$$

où les expressions développées de η_1^t et η_2^t sont :

$$\begin{cases} \eta_1^t = \frac{3\pi^2 Ra^t}{(k^{t^2} + \pi^2)^2} + \frac{k^{t^2} - 3\pi^2}{k^{t^2} + \pi^2} - \frac{2i\pi^2 Pe}{k^t(k^{t^2} + \pi^2)}, \\ \eta_2^t = -\frac{k^{t^2} \partial_X^2 Ra^t}{k^{t^2} + \pi^2} = i\partial_X^2 \omega_0^t; \\ \partial_X^2 Ra^t = -Ra \partial_X^2 F^t. \end{cases}$$

En utilisant les coefficients α et β dont les expressions sont données respectivement par (2.32) et (2.40), et en introduisant la substitution suivante $A_0^t = S(\xi) \exp(-\frac{\xi}{2})$, où $\xi = \alpha^{1/2} \chi^2$ dans (2.54), l'équation (2.54) est transformée en une équation hypergéométrique dégénérée :

$$\xi \partial_\xi^2 S + \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \partial_\xi S + \left(-\frac{\beta + \alpha^{1/2}}{4\alpha^{1/2}} \right) S = 0, \quad (2.55)$$

qui admet la solution suivante [95] :

$$S(\xi) = C_1 M \left(\frac{\beta + \alpha^{1/2}}{4\alpha^{1/2}}, \frac{1}{2}, \xi \right) + C_2 \xi^{1/2} M \left(\frac{\beta + 3\alpha^{1/2}}{4\alpha^{1/2}}, \frac{3}{2}, \xi \right), \quad (2.56)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes libres et M la fonction de Kummer [96].

Finalement, la solution intérieure WKBJ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t \approx & \left\{ C_1 M \left(\sigma, \frac{1}{2}, \alpha^{1/2} \chi^2 \right) + C_2 \left(\alpha^{1/2} \chi^2 \right)^{1/2} M \left(\sigma + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \alpha^{1/2} \chi^2 \right) \right\} \\ & \times \exp \left(-\frac{1}{2} \alpha^{1/2} \chi^2 \right) \exp \left(\frac{i}{\varepsilon^{1/2}} k^t - i\omega t \right) \hat{v}_0^t + c.c.. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Le raccord entre cette solution intérieure et la solution extérieure (2.39) impose à la fonction de Kummer M d'être amortie lorsque $\chi \rightarrow \pm\infty$. Dans ce cas, la fonction de Kummer M est réduite aux polynômes d'Hermite He [37, 97]. Cette réduction des fonctions propres aux polynômes d'Hermite n'est possible que si la valeur propre σ est telle que $\sigma = -n/2$ avec n un entier positif ou nul. En utilisant la définition de σ (2.40), la relation suivante est obtenue pour la correction de la fréquence à l'ordre ε :

$$\omega_{1,n} = \partial_k^2 \omega_0^t \alpha^{1/2} \left(\frac{1}{2} + n \right), \quad (2.58)$$

Comme la partie imaginaire de $\omega_{1,n}$ est une fonction décroissante de n , le mode global le plus instable est le mode obtenu pour $n = 0$.

La première approximation du mode global linéaire \mathbf{v} le plus instable et de son enveloppe \mathbf{v}^{env} s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \approx & 2 \exp \left(-\frac{\Re(\alpha^{1/2}) \varepsilon x^2}{2} \right) \exp(-\Im(k^t) x) \left[\Re(B_0^t) \cos \left(\frac{\Im(\alpha^{1/2}) \varepsilon x^2}{2} + \Re(k^t) x \right) \right. \\ & \left. + \Im(B_0^t) \sin \left(\frac{\Im(\alpha^{1/2}) \varepsilon x^2}{2} + \Re(k^t) x \right) \right] \hat{f}_0^t(z), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{env} \approx & 2 \exp \left(-\frac{\Re(\alpha^{1/2}) \varepsilon x^2}{2} \right) \exp(-\Im(k^t) x) \left| \Re(B_0^t) \cos \left(\arctan \left[\frac{\Im(B_0^t)}{\Re(B_0^t)} \right] \right) \right. \\ & \left. + \Im(B_0^t) \sin \left(\arctan \left[\frac{\Im(B_0^t)}{\Re(B_0^t)} \right] \right) \right| \hat{f}_0^t(z), \end{aligned} \quad (2.60)$$

L'expression de la constante complexe $B_0^t(k^t, Ra^t; \omega_0^t)$ et les fonctions trigonométriques $\widehat{f}_0^t(z)$ sont données par (2.10).

2.3 Résultats et discussion

L'objet de ce paragraphe est de présenter des résultats pratiques issus de l'analyse mathématique développée précédemment. Nous commençons par identifier la dépendance du seuil de l'instabilité globale et de sa fréquence d'oscillations vis-à-vis du nombre de Péclet. Ensuite, nous discuterons des aspects liés à la structure spatiale du mode global linéaire, dont l'approximation principale est donnée par l'expression (2.59).

2.3.1 Dépendance du seuil et de la fréquence de l'instabilité globale vis-à-vis du nombre de Péclet

L'émergence d'une instabilité globale est possible dès lors que la valeur du nombre de Rayleigh estimée au point tournant $X = 0$, dépasse une valeur critique Ra_g . Ce seuil global est obtenu en posant :

$$\Im(\omega_0^t + \varepsilon\omega_1) = 0. \quad (2.61)$$

Cette expression suggère que la valeur seuil prend la forme :

$$Ra_g = Ra^A + \varepsilon Ra^1. \quad (2.62)$$

où Ra^A est le seuil de transition instable convectif/instable absolue du problème homogène, et εRa^1 est une faible correction due à l'inhomogénéité. La dépendance successive de Ra_g (ligne continue), Ra^A (ligne discontinue) et Ra_c (points) vis-à-vis du nombre de Péclet Pe est illustrée sur la figure 2.4(a) pour $\varepsilon = 0.05$. Cette figure montre qu'en absence de l'écoulement principal (i.e. $Pe = 0$), le seuil global Ra_g est pratiquement identique à $Ra_c = 4\pi^2$, obtenu par l'approche temporelle de stabilité. En revanche Ra_g croît presque d'une manière quadratique vis-à-vis de Pe , démontrant ainsi le rôle stabilisant de l'écoulement principal.

Les fréquences d'oscillations globales ω_g sont données par la partie réelle de $\omega_0^t + \varepsilon\omega_1$. Elles sont représentées sur la figure 2.4(b) (trait continu) en fonction de Pe , et sont comparées aux fréquences $\omega_c = \pi Pe$, obtenues par l'approche temporelle de stabilité. Cette figure met en évidence le comportement de ω_g , identique à celui de $\omega_c = \pi Pe$ pour les

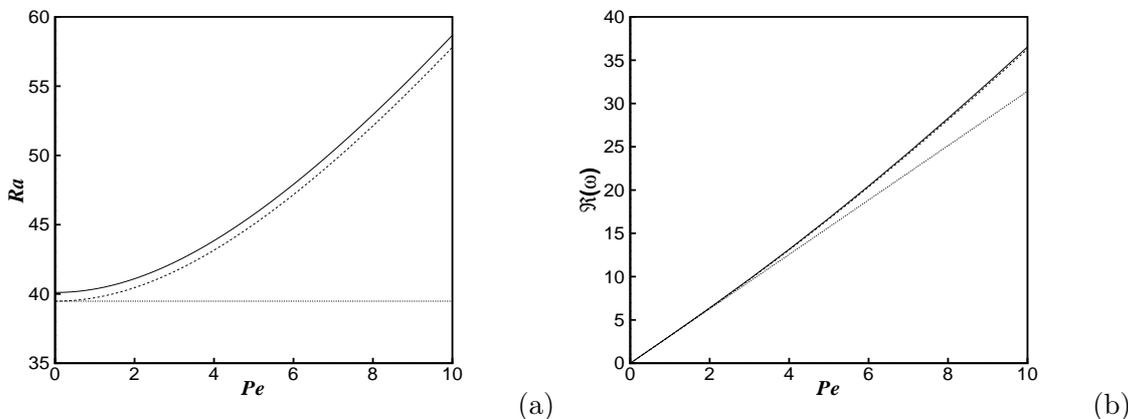


FIG. 2.4: (a) La valeur critique du nombre de Rayleigh local $Ra^t = Ra(X = 0)$ en fonction de Pe avec $\varepsilon = 0.05$: instabilité convective (points), instabilité absolue (ligne discontinue) et instabilité globale (ligne continue). (b) La partie réelle de la fréquence en fonction de Pe avec $\varepsilon = 0.05$, au seuil de l'instabilité convective (points), de l'instabilité absolue (ligne discontinue) et de l'instabilité globale (ligne continue).

faibles valeurs de Pe , et qui s'en écarte pour Pe suffisamment grand.

2.3.2 Caractéristiques de la structure spatiale du mode global linéaire

Afin d'illustrer la forme spatiale des modes globaux linéaires et de leurs enveloppes dont l'approximation à l'ordre principal est donnée respectivement par les relations (2.59) et (2.60), nous avons représenté, au seuil de l'instabilité globale, les champs perturbés de vitesse et de température sur la figure 2.5 pour $Pe = 10$ et $\varepsilon = 0.05$. Contrairement à l'intuition, la forme Gaussienne des enveloppes de ces modes globaux linéaires admet un maximum local en une position spatiale x_s , qui ne correspond pas au point d'échauffement maximum $x = 0$, mais décalée vers l'aval.

Dans la perspective de comprendre les mécanismes physiques qui pourraient expliquer ce décalage d'une part, et de dégager certaines lois mathématiques qui définissent la position spatiale x_s de ce maximum d'autre part, nous allons étudier l'influence éventuelle de l'écoulement principal en faisant varier le nombre de Péclet. La figure 2.6 représente les isocontours de la perturbation de température dans le plan (x, z) , au seuil de l'instabilité globale, pour $\varepsilon = 0.05$ et pour trois valeurs successives de Pe : $Pe = 1$ (a), $Pe = 5$ (b), et $Pe = 10$ (c). Sur ces mêmes figures, nous avons tracé aussi, d'une part le taux de croissance local maximum $\Im(\omega^{max})(x)$, calculé en supposant que le nombre d'onde k est réel, et qui renseigne sur la stabilité ou non du système, et d'autre part le taux de croissance local de l'instabilité absolue $\Im(\omega_0)(x)$. Comme le nombre de Rayleigh local $Ra(X) = Ra^t[1 - \tanh^2(X)]$ est une fonction quadratique de x , $\Im(\omega^{max})(x)$ et $\Im(\omega_0)(x)$ le sont également. Ils admettent un maximum local en $x = 0$ où $Ra^t = Ra_g$, et s'annulent respectivement en $\pm x_c$ et $\pm x_a$. Le système est alors localement instable dans la région

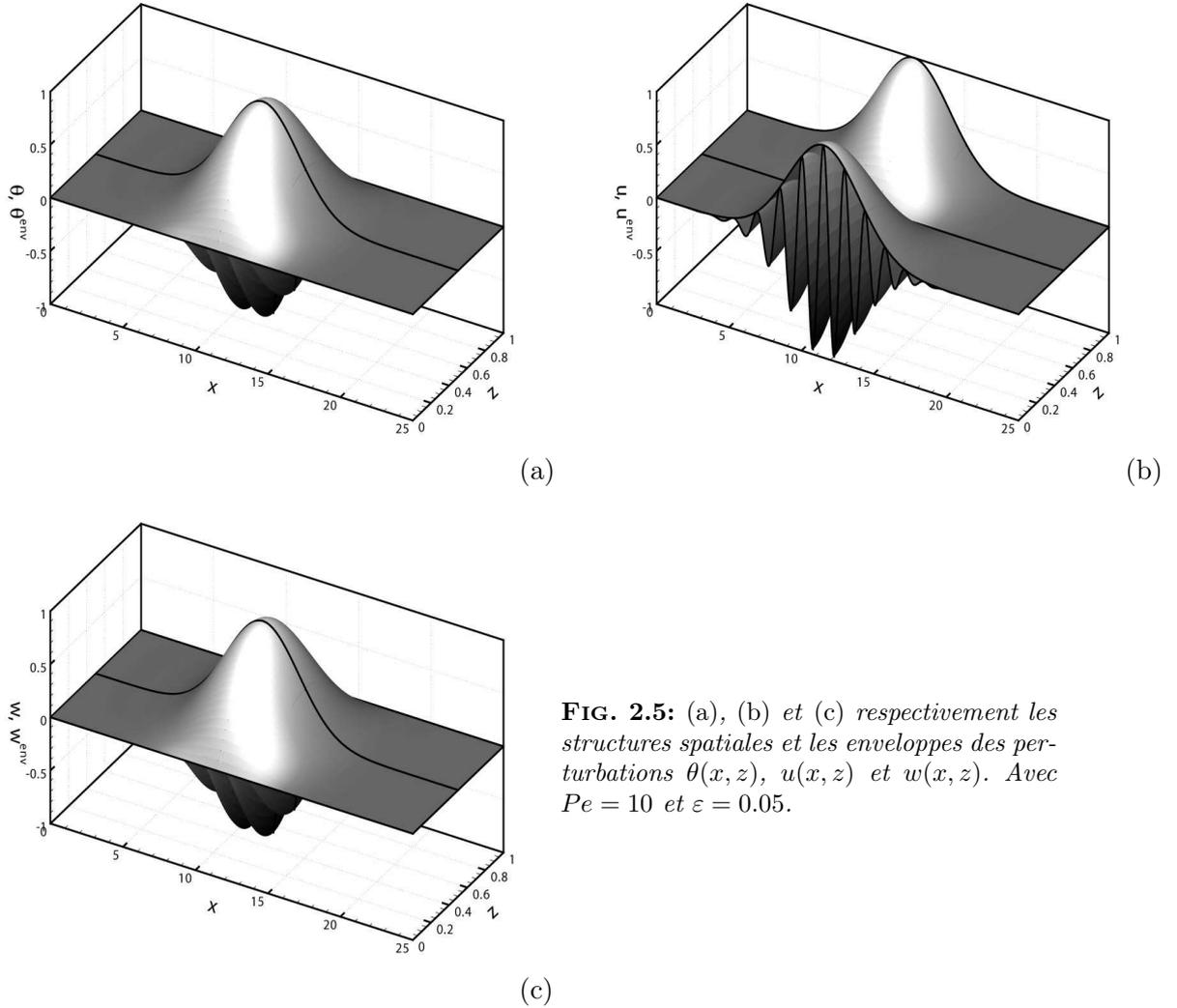


FIG. 2.5: (a), (b) et (c) respectivement les structures spatiales et les enveloppes des perturbations $\theta(x, z)$, $u(x, z)$ et $w(x, z)$. Avec $Pe = 10$ et $\varepsilon = 0.05$.

$[-x_c, x_c]$, et localement absolument instable dans la région $[-x_a, x_a]$. Nous concluons alors que **l'émergence d'un mode global linéaire est conditionnée par la présence d'une région localement absolument instable suffisamment étendue.**

L'inspection des figures 2.6(a), (b) et (c) et de la figure 2.7(a) permet de confirmer que les modes globaux se comportent comme un train de rouleaux, décalé vers l'aval au fur et à mesure que Pe augmente, et dont la position x_s du maximum de l'amplitude est voisine de la frontière aval $+x_c$ de la région instable. Ce décalage dans la position du maximum de l'amplitude x_s est dû au taux de croissance spatial $\Im(k^t)$ non nul pour des $Pe \neq 0$. La figure 2.7(b) montre le faible écart entre la position du maximum de l'amplitude obtenu à l'aide de la relation (2.63) :

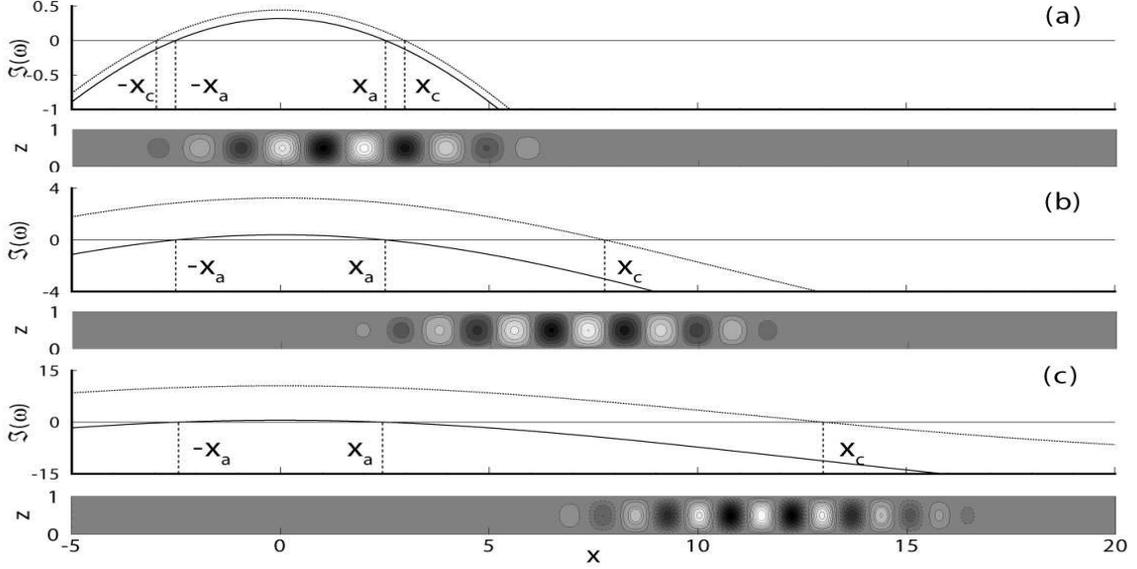


FIG. 2.6: L'évolution spatiale du taux de croissance local maximum $\Im(\omega_0^{max})(x)$ (ligne tirés), du taux de croissance local absolu (ligne continue) et les isocontours de perturbation de température $\theta(x, z)$ correspondant aux modes globaux marginalement stables pour trois valeurs de Pe : $Pe = 1$ (a), $Pe = 5$ (b) et $Pe = 10$ (c). Avec $\varepsilon = 0.05$.

$$x_s = \frac{-\Im(k^t)}{\varepsilon \Re(\alpha^{1/2})}, \quad (2.63)$$

et de l'emplacement du point de transition entre la région convective et la région stable obtenue en imposant au Rayleigh local la valeur $Ra^c = 4\pi^2$:

$$x_c = \frac{\operatorname{arctanh}\left(1 - \frac{Ra^c}{Ra_g}\right)^{1/2}}{\varepsilon}, \quad (2.64)$$

en fonction de Pe .

Grâce à l'expression analytique (2.59) de l'approximation principale du mode global linéaire, on peut extraire l'expression de la longueur d'onde λ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\Re(k^t) - \frac{\varepsilon x}{2} \Im(\alpha^{1/2})}, \quad (2.65)$$

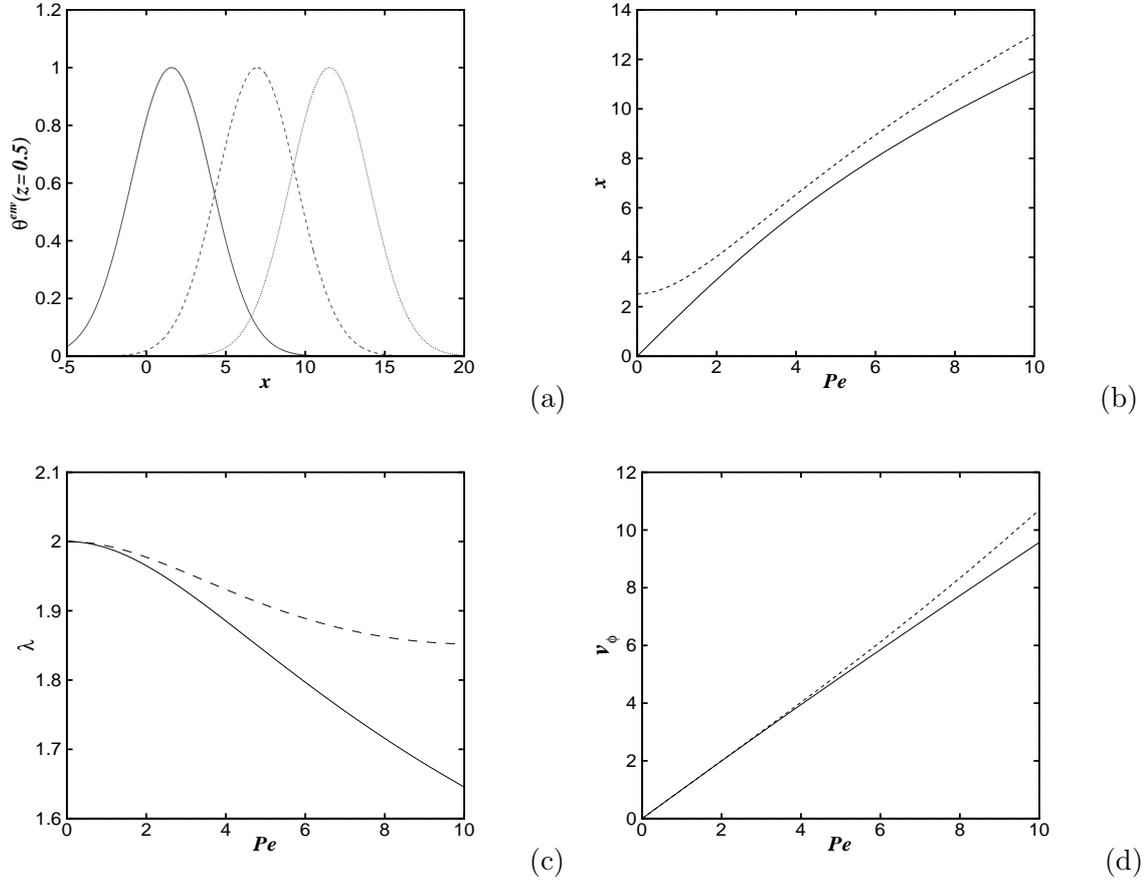


FIG. 2.7: (a) La variation spatiale de l'enveloppe de perturbation de température $\theta(x, z = 0.5)$, pour trois valeurs de Pe : $Pe = 1$ (ligne continue), $Pe = 5$ (ligne tirés) et $Pe = 10$ (ligne points). (b) la position de la valeur maximale des amplitudes x_s (ligne continue) et la position de la valeur de x_c qui délimite la région instable de la région stable (ligne tirés) en fonction de Pe . (c) Comparaison de la longueur d'onde des rouleaux inhomogènes (ligne continue) et des rouleaux homogènes (ligne tirés) en fonction de Pe . (d) Comparaison de la vitesse de phase des rouleaux inhomogènes (ligne continue) et des rouleaux homogènes (ligne tirés) en fonction de Pe . Dans toutes les figures $\varepsilon = 0.05$.

On note d'une part la dépendance de la longueur d'onde vis-à-vis de la position spatiale x , et de sa dépendance vis-à-vis de Pe (à travers la partie imaginaire de $\alpha^{1/2}$) d'autre part. Néanmoins, l'évaluation de la longueur d'onde au point x_s où l'amplitude présente un maximum peut être considérée comme une longueur d'onde de référence et permet sa comparaison avec celle du cas homogène. En x_s , l'expression de λ est :

$$\lambda_{x_s} = \frac{2\pi}{\Re(k^t) + \frac{\Im(\alpha^{1/2})\Im(k^t)}{2\Re(\alpha^{1/2})}}. \quad (2.66)$$

La figure 2.7(c) met en évidence la décroissance de $\lambda(x_s)$ lorsque Pe croit (i.e. des rouleaux dont le diamètre est de plus en plus petit). Cette décroissance s'avère plus importante relativement au cas homogène. Par ailleurs, la figure 2.7(d) illustre le comportement de la vitesse de phase v_ϕ en fonction de Pe et la compare à la vitesse de phase du cas homogène.

2.4 L'approximation WKBJ dans la région du point tournant pour le domaine semi-infini

Dans le cas semi-infini, on est en présence d'un point tournant simple où $\partial_X \omega_0 \neq 0$. Au voisinage du point tournant simple $X^t = 0$, le taux de croissance absolu $\Im \omega_0(X)$ est alors une fonction linéaire de X à l'ordre principal. Par conséquent, l'application du principe de moindre dégénérescence suggère de considérer le terme diffusif $\varepsilon^2 \partial_X^2 A_0$ du même ordre de grandeur que X , c'est à dire $X = O(\varepsilon^{2/3})$. De ce fait, on introduit une nouvelle variable intérieure

$$\xi = \varepsilon^{1/3} x = \varepsilon^{-2/3} X. \tag{2.67}$$

On exprime ensuite l'écoulement de base en fonction de ξ et on cherche la solution intérieure sous la forme d'un développement WKBJ en puissance de $\varepsilon^{1/3}$. L'analyse sera très semblable à celle de §2.2.

2.4.1 Écoulement de base dans la région du point tournant

L'écoulement de base est exprimé en fonction de ξ comme un développement de Taylor au voisinage de $\xi = 0$. Compte tenu de $F^t = 0$ ($F(X) = \tanh(X)$), l'approximation de l'écoulement de base dans la région du point tournant s'écrit :

$$\begin{cases} T_b(\xi, z) = \tilde{T}_0(z) \left(1 - \varepsilon^{2/3} \partial_X F^t \xi \right) + \varepsilon Pe \tilde{T}_1(z) \partial_X F^t + O\left(\varepsilon^{4/3}\right), \\ u_b(\xi, z) = Pe + \varepsilon Ra \tilde{u}_1(z) \partial_X F^t + O\left(\varepsilon^{4/3}\right), \\ w_b(\xi, z) = O\left(\varepsilon^{5/3}\right). \end{cases} \tag{2.68}$$

2.4.2 Solution intérieure des équations de perturbation

La perturbation $\mathbf{v}^t(\xi, z, t) = (u^t, w^t, \theta^t)^T$ dans la région voisine du point tournant, est recherchée sous la forme d'un développement WKBJ en puissance de $\varepsilon^{1/3}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t = & \left(\mathbf{v}_0^t(\xi, z) + \varepsilon^{1/3} \mathbf{v}_{1/3}^t(\xi, z) + \varepsilon^{2/3} \mathbf{v}_{2/3}^t(\xi, z) + \varepsilon \mathbf{v}_1^t(\xi, z) + O\left(\varepsilon^{4/3}\right) \right) \\ & \times \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{1/3}} k^t \xi - i\omega t\right) + c.c., \end{aligned} \quad (2.69)$$

où la fréquence complexe est décomposée en $\omega = \omega_0 + \varepsilon^{1/3} \omega_{1/3} + \varepsilon^{2/3} \omega_{2/3} + \varepsilon \omega_1 + O\left(\varepsilon^{4/3}\right)$.

En Introduisant le développement (2.69) dans le système d'équations (1.23) et en tenant compte de (2.68), on retrouve à l'ordre ε^0 , le problème homogène :

$$L_0^t \mathbf{v}_0^t = 0, \quad (2.70)$$

dont la solution :

$$\mathbf{v}_0^t = A_0^t(\xi) \widehat{\mathbf{v}}_0^t(k^t, Ra^t; \omega_0^t; z), \quad (2.71)$$

avec $\widehat{\mathbf{v}}_0^t = \widehat{\mathbf{v}}_0|_{X=X^t=0}$ a été déjà déterminée précédemment. L'amplitude $A_0^t(\xi)$ est une amplitude inconnue à ce stade. La valeur prise par ω_0 est la fréquence imposée par le problème homogène au point tournant $X^t = 0$:

$$\omega_0 = \omega_0^t. \quad (2.72)$$

À l'ordre $\varepsilon^{1/3}$, on obtient le système d'équations suivant :

$$L_0^t \mathbf{v}_{1/3}^t = \left[-\partial_\xi A_0^t \widehat{u}_0^t, 2ik^t \partial_\xi A_0^t \left(\widehat{w}_0^t - Ra \widehat{\theta}_0^t \right), (2ik^t - Pe) \partial_\xi A_0^t \widehat{\theta}_0^t + i\omega_{1/3} A_0^t \widehat{\theta}_0^t \right]^T. \quad (2.73)$$

La condition de solvabilité à l'ordre $\varepsilon^{1/3}$ conduit à l'équation suivante :

$$i\partial_k \omega_0^t \partial_\xi A_0^t + \omega_{1/3} A_0^t = 0, \quad (2.74)$$

Comme $\partial_k \omega_0^t = 0$ en $X^t = 0$, car la fréquence à l'ordre principal, égale à la fréquence absolue à $X^t = 0$, cela conduit à

$$\omega_{1/3} = 0, \quad (2.75)$$

et la solution de (2.73) est donnée sous la forme suivante :

$$\mathbf{v}_{1/3}^t(\xi, z) = A_{1/3}^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \partial_\xi A_0^t \widehat{\mathbf{v}}_{1/3}^t, \quad (2.76)$$

avec $A_{1/3}^t$ une amplitude inconnue pour l'instant, et

$$\widehat{\mathbf{v}}_{1/3}^t = \begin{cases} \widehat{u}_{1/3}^t = -\frac{\pi(k^{t^2} - \pi^2)}{k^{t^2}(k^{t^2} + \pi^2)} \cos(\pi z), \\ \widehat{w}_{1/3}^t = -\frac{2i\pi^2}{k^t(k^{t^2} + \pi^2)} \sin(\pi z), \\ \widehat{\theta}_{1/3}^t = 0. \end{cases} \quad (2.77)$$

À l'ordre $\varepsilon^{2/3}$, on obtient :

$$\begin{aligned} L_0^t \mathbf{v}_{2/3}^t &= \left[-\partial_\xi A_{1/3}^t \widehat{u}_0^t - \partial_\xi^2 A_0^t \widehat{u}_{1/3}^t, 2ik^t \partial_\xi A_{1/3}^t (\widehat{w}_0^t - Ra \widehat{\theta}_0^t) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\xi^2 A_0^t (2ik^t \widehat{w}_{1/3}^t + \widehat{w}_0^t - Ra \widehat{\theta}_0^t), (2ik^t - Pe) \partial_\xi A_{1/3}^t \widehat{\theta}_0^t \right. \\ &\quad \left. + \partial_\xi^2 A_0^t \widehat{\theta}_0^t + A_0^t (i\omega_{2/3} \widehat{\theta}_0^t + \partial_z \widetilde{T}_0 \partial_X F^t \xi \widehat{w}_0^t) \right]^T. \end{aligned} \quad (2.78)$$

La condition de solvabilité s'écrit :

$$i\partial_k \omega_0^t \partial_\xi A_{1/3}^t + \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_0^t \partial_\xi^2 A_0^t + (\omega_{2/3} - \xi \partial_X \omega_0^t) A_0^t = 0, \quad (2.79)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$A_0^t(\xi = 0) = A_0^t(\xi \rightarrow \infty) = 0. \quad (2.80)$$

La première condition à la limite suppose que l'amplitude du mode global est nulle à l'entrée de la couche poreuse, alors que la deuxième condition exige que le mode global disparaisse à l'infini. Du fait que la vitesse de groupe évaluée au point tournant est nulle (i.e. $\partial_k \omega_0^t = 0$), l'équation (2.79) se réduit à une équation d'Airy [96] dont la solution générale est :

$$A_0^t = Ai \left\{ \left[2\partial_X \omega_0^t (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-1} \right]^{1/3} \left[\xi - \omega_{2/3} (\partial_X \omega_0^t)^{-1} \right] \right\} \quad (2.81)$$

La condition à la limite annulant l'amplitude A_ξ^t en $\xi = 0$, fixe les valeurs propres prises par $\omega_{2/3}$:

$$\omega_{2/3,n} = \partial_X \omega_0^t \left[2\partial_X \omega_0^t (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-1} \right]^{-1/3} a_n, \quad (2.82)$$

avec les a_n désignent les zéros de la fonction d'Airy Ai ($a_0 = 2.33811, a_1 = 4.0879, \dots$). La solution de l'équation (2.78) est :

$$\mathbf{v}_{2/3}^t(\xi, z) = A_{2/3}^t \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \partial_\xi A_{1/3}^t \widehat{\mathbf{v}}_{1/3}^t + \partial_\xi^2 A_0^t \widehat{\mathbf{v}}_{2/3}^t, \quad (2.83)$$

avec $A_{2/3}^t$ une amplitude inconnue, et

$$\widehat{\mathbf{v}}_{2/3}^t = \begin{cases} \widehat{u}_{2/3}^t = -\frac{i\pi (k^{t^2} - 3\pi^2)}{k^t (k^{t^2} + \pi^2)^2} \cos(\pi z), \\ \widehat{w}_{2/3}^t = \frac{\pi^2 (3k^{t^2} - \pi^2)}{k^{t^2} (k^{t^2} + \pi^2)^2} \sin(\pi z), \\ \widehat{\theta}_{2/3}^t = 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

À l'ordre ε , on obtient :

$$\begin{aligned} L_0^t \mathbf{v}_1^t = & \left[-\partial_\xi A_{2/3}^t \widehat{u}_0^t - \partial_\xi^2 A_{1/3}^t \widehat{u}_{1/3}^t - \partial_\xi^3 A_0^t \widehat{u}_{2/3}^t, 2ik^t \partial_\xi A_{2/3}^t (\widehat{w}_0^t - Ra\widehat{\theta}_0^t) \right. \\ & + \partial_\xi^2 A_{1/3}^t (2ik^t \widehat{w}_{1/3}^t + \widehat{w}_0^t - Ra\widehat{\theta}_0^t) + \partial_\xi^3 A_0^t (2ik^t \widehat{w}_{2/3}^t + \widehat{w}_{1/3}^t), \\ & (2ik^t - Pe) \partial_\xi A_{2/3}^t \widehat{\theta}_0^t + \partial_\xi^2 A_{1/3}^t \widehat{\theta}_0^t + A_{1/3}^t (i\omega_{2/3} \widehat{\theta}_0^t + \partial_z \widetilde{T}_0 \partial_X F^t \xi \widehat{w}_0^t) \\ & + \partial_\xi A_0^t \partial_z \widetilde{T}_0 \partial_X F^t \xi \widehat{w}_{1/3}^t + A_0^t \left\{ (i\omega_1 - ik^t Ra \widetilde{u}_1(z) \partial_X F^t) \widehat{\theta}_0^t + \widetilde{T}_0(z) \partial_X F^t \widehat{u}_0^t \right. \\ & \left. - Pe \partial_z \widetilde{T}_1 \partial_X F^t \widehat{w}_0^t \right\}^T \Big]. \quad (2.85) \end{aligned}$$

La condition de solvabilité pour (2.85) conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} i\partial_k \omega_0^t \partial_\xi A_{2/3}^t + \frac{1}{2} \partial_k^2 \omega_0^t \partial_\xi^2 A_{1/3}^t + (\omega_{2/3} - \xi \partial_X \omega_0^t) A_{1/3}^t = & \frac{i}{6} \partial_k^3 \omega_0^t \partial_\xi^3 A_0^t - i\partial_k^2 \omega_0^t \xi \partial_\xi A_0^t \\ & - (\omega_1 - i\overline{\eta}_3^t \partial_X Ra^t) A_0^t. \quad (2.86) \end{aligned}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_k \omega_0^t = 0, \\ \partial_k^2 \omega_0^t = -2i \left(\frac{(3k^{t^2} - \pi^2)\pi^2 Ra^t}{(k^{t^2} + \pi^2)^3} + 1 \right), \\ \partial_k^3 \omega_0^t = \frac{24i(k^{t^2} - \pi^2)\pi^2 k^t Ra^t}{(k^{t^2} + \pi^2)^4}, \\ \partial_{kX}^2 \omega_0^t = -\frac{2ik^t \pi^2 \partial_X Ra^t}{(k^{t^2} + \pi^2)^2}, \\ \bar{\eta}_3^t = \frac{(ik^{t^3} - Pe k^{t^2} - ik^t \pi^2)}{4\pi^2(k^{t^2} + \pi^2)}. \end{array} \right.$$

L'équation (2.86) est une équation d'Airy avec un second membre non nul. Elle admet une solution sans des termes séculaires à condition d'imposer à la correction ω_1 des valeurs particulières :

$$\omega_1 = i\bar{\eta}_3^t \partial_X Ra^t + \frac{i}{6} (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-1} [\partial_k^3 \omega_0^t \partial_X \omega_0^t + 3\partial_k^2 \omega_0^t \partial_{kX}^2 \omega_0^t]. \quad (2.87)$$

La solution $A_{1/3}^t$ de l'équation (2.86) est obtenue comme :

$$A_{1/3}^t = \frac{i}{6} (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-2} \{ [\partial_k^3 \omega_0^t \partial_X \omega_0^t - 3\partial_k^2 \omega_0^t \partial_{kX}^2 \omega_0^t] \xi^2 - 2\partial_k^3 \omega_0^t \omega_{2/3} \xi + C \} A_0^t, \quad (2.88)$$

avec C une constante d'intégration. Les conditions aux limites sur $A_{1/3}^t$, $A_{1/3}^t(\xi \rightarrow \infty) = 0$ et $A_{1/3}^t(\xi = 0) = 0$ sont automatiquement satisfaites d'après les relations (2.80) et (2.88).

La correction $\omega_{2/3}$ de la fréquence à l'ordre $\varepsilon^{2/3}$ est gênante pour faire le raccord avec la solution WKB de §2.1.3. La procédure du raccord nécessite l'introduction d'un point tournant X complexe, ayant une partie imaginaire non nulle, au lieu de le localiser en $X = 0$, comme nous l'avons fait tout au long de cette analyse. Dans ce cas, des calculs longs et fastidieux s'imposent. Cette démarche, plus générale et plus rigoureuse est détaillée dans l'article de Monkewitz et al. [94].

Finalement, la fréquence du mode global est :

$$\begin{aligned} \omega_{g,n} \sim \omega_0^t + \varepsilon^{2/3} \left\{ \partial_X \omega_0^t \left[2\partial_X \omega_0^t (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-1} \right]^{-1/3} a_n \right\} + \varepsilon \{ i\bar{\eta}_3^t \partial_X Ra^t \\ + \frac{i}{6} (\partial_k^2 \omega_0^t)^{-1} [\partial_k^3 \omega_0^t \partial_X \omega_0^t + 3\partial_k^2 \omega_0^t \partial_{kX}^2 \omega_0^t] \} + O(\varepsilon^{4/3}). \end{aligned} \quad (2.89)$$

et l'approximation du mode global \mathbf{v} et de son enveloppe \mathbf{v}^{env} est donnée respectivement par :

$$\mathbf{v} \approx \left[\left(A_0^t + \varepsilon^{1/3} A_{1/3}^t \right) \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \partial_x A_0^t \widehat{\mathbf{v}}_{1/3}^t \right] \exp(-ikx) + c.c., \quad (2.90)$$

$$\mathbf{v}^{env} \approx 2 \left| \left(A_0^t + \varepsilon^{1/3} A_{1/3}^t \right) \widehat{\mathbf{v}}_0^t + \partial_x A_0^t \widehat{\mathbf{v}}_{1/3}^t \right| \exp(-\Im(k)x). \quad (2.91)$$

2.5 Résultats et discussion

2.5.1 Seuil et fréquence de l'instabilité globale

Pour le mode global le plus instable obtenu pour $n = 0$ et qui correspond à $a_0 = 2.33811$, le seuil Ra_g au delà duquel la théorie linéaire prévoit la naissance d'une instabilité globale est obtenue en annulant la partie imaginaire de $\omega_{g,n=0}$ donnée par l'expression (2.89). Cette valeur du seuil s'écrit :

$$Ra_g = Ra^A + \varepsilon^{2/3} Ra^{2/3} + \varepsilon Ra^1. \quad (2.92)$$

Nous présentons dans le tableau 2.1, quelques valeurs typiques de la correction impliquée pour différentes valeurs de Pe en posant $Ra(X) = Ra^t [1 - \tanh(X)]$.

Ce tableau montre que l'inhomogénéité introduit à l'ordre ε une petite correction de fréquence ω_1 , avec un taux de croissance positif. Ce qui correspond à un effet déstabilisateur sur la perturbation la plus amplifiée. L'effet déstabilisant dû à cette correction de la fréquence et du nombre de Rayleigh global à l'ordre ε est très faible et est largement compensé par l'effet stabilisant de l'inhomogénéité à l'ordre $\varepsilon^{2/3}$. En effet, à partir du tableau 2.1, il est clair que le taux de croissance de l'instabilité dû à l'inhomogénéité $\varepsilon^{2/3} \Im(\omega_{2/3}) + \varepsilon \Im(\omega_1)$ est négatif indépendamment de la valeur prise par Pe . Pour montrer l'effet très faible, et donc négligeable, de la correction obtenue à l'ordre ε , les figures 2.8(a),(b) montrent respectivement la différence relative entre $Ra_g^{(3/2)} = Ra^t + \varepsilon^{2/3} Ra^{2/3}$ et $Ra_g^{(3/2,1)} = Ra_g^{(3/2)} + \varepsilon Ra^1$ d'une part et la différence relative entre la fréquence d'oscillations $\omega_g^{(3/2)}$ et $\omega_g^{(3/2,1)}$ en fonction de Pe pour trois valeurs de ε .

TAB. 2.1: les corrections à l'ordre $\varepsilon^{2/3}$ et ε de fréquence $\omega_{2/3}$ et ω_1 , et du nombre de Rayleigh $Ra^{2/3}$ et Ra^1 pour différentes valeurs Pe , avec $Ra(X) = Ra^t(1 - \tanh(X))$, $n = 0$.

Pe	$Ra^t = Ra^A$	$\omega_{2/3}(n = 0)$	ω_1	$Ra^{2/3}(n = 0)$	Ra^1
0	39.478	$-i21.516$	3.142	43.032	0
0.1	39.481	$-.11413 - i21.519$	$3.1417 + i.07500$	43.035	$-.14199$
0.2	39.488	$-.22814 - i21.527$	$3.1420 + i.15003$	43.044	$-.29997$
0.3	39.501	$-.34194 - i21.542$	$3.1425 + i.22508$	43.059	$-.44991$
0.4	39.518	$-.45539 - i21.562$	$3.1431 + i.30020$	43.080	$-.59980$
0.5	39.541	$-.56842 - i21.587$	$3.1441 + i.37540$	43.107	$-.74961$
0.6	39.568	$-.68089 - i21.619$	$3.1452 + i.45069$	43.140	$-.89934$
0.7	39.600	$-.79272 - i21.656$	$3.1465 + i.52609$	43.179	-1.0490
0.8	39.638	$-.90379 - i21.698$	$3.1480 + i.60164$	43.224	-1.1985
0.9	39.680	$-1.0140 - i21.747$	$3.1498 + i.67734$	43.275	-1.3486
1	39.727	$-1.1233 - i21.800$	$3.1518 + i.75321$	43.331	-1.4971
2	40.455	$-2.1474 - i22.615$	$3.1843 + i1.5265$	44.188	-2.9867
3	41.618	$-3.0097 - i23.874$	$3.2427 + i2.3423$	45.508	-4.4648
4	43.160	$-3.6884 - i25.481$	$3.3282 + i3.2227$	47.193	-5.9688
5	45.028	$-4.1855 - i27.358$	$3.4406 + i4.1874$	49.164	-7.5249
6	47.172	$-4.5128 - i29.449$	$3.5797 + i5.2529$	51.363	-9.1618
7	49.552	$-4.6837 - i31.714$	$3.7459 + i6.4337$	53.754	-10.905
8	52.135	$-4.7112 - i34.126$	$3.9410 + i7.7427$	56.314	-12.777
9	54.893	$-4.6073 - i36.666$	$4.1681 + i9.1917$	59.027	-14.797
10	57.804	$-4.3831 - i39.322$	$4.4310 + i10.791$	61.885	-16.984

2.5.2 Structure spatiale du mode global linéaire

Les structures spatiales des perturbations θ , u et w ; et leurs enveloppes sont représentées pour $Pe = 10$ sur la figure 2.9.

Cette figure montre que le mode global, d'amplitude nulle à l'entrée du massif poreux, s'amplifie d'une façon douce (i.e. non raide) bien en aval de l'entrée, atteint son maximum en une localité x_s et amorce un amortissement pour finir par disparaître. Comme pour le cas infini, l'étalement de la structure spatiale du mode global linéaire dépend de la valeur prise par Pe .

Des exemples de structures spatiales sont montrés sur la figure 2.10 pour trois valeurs différentes de Pe . Sur cette même figure, sont représentés également à la fois le taux de croissance local maximum $\Im(\omega^{max}(x))$, et le taux de croissance local absolu $\Im(\omega_0(x))$. Comme $Ra(x)$ est une fonction décroissante de x , le taux de croissance local maximum $\Im(\omega^{max}(x))$, ainsi que le taux de croissance local absolu $\Im(\omega_0(x))$ le sont aussi. Ils admettent un maximum unique, en $x = 0$ où $Ra^t = Ra_g$, s'annule respectivement à la frontière de la région instable $[0, x_c]$, et de la région instable absolue $[0, x_a]$. Encore une

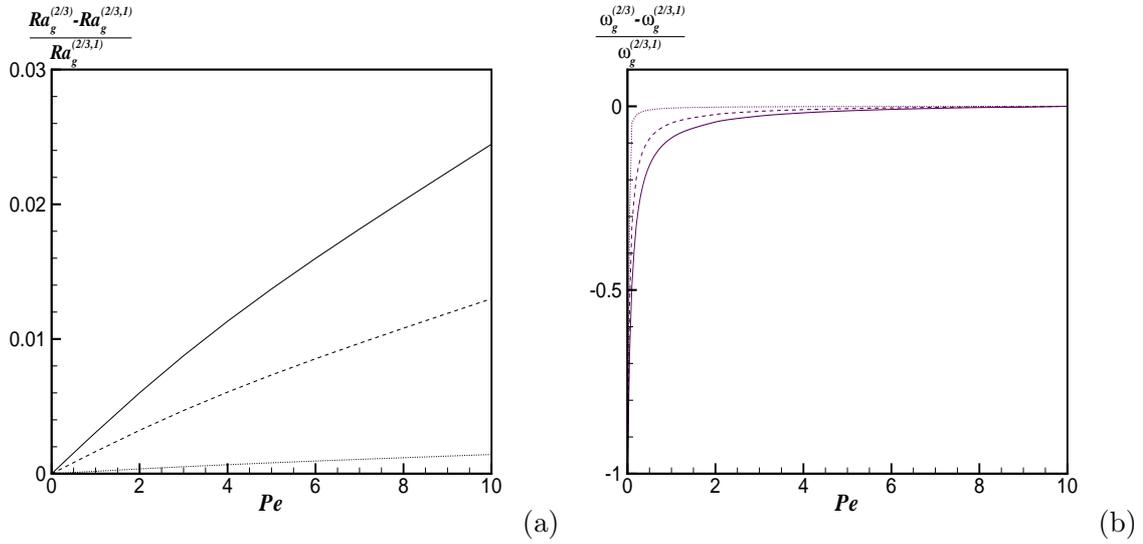
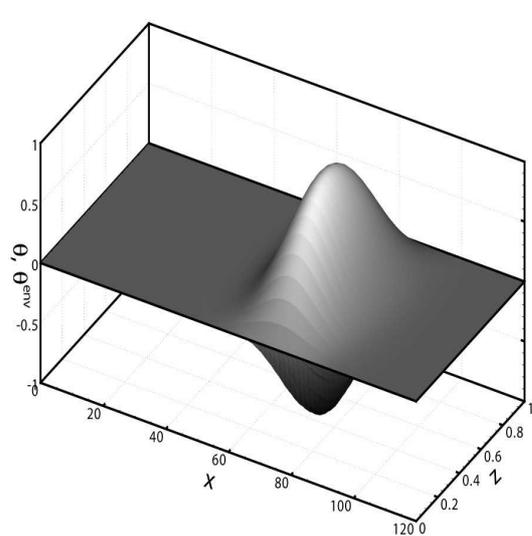


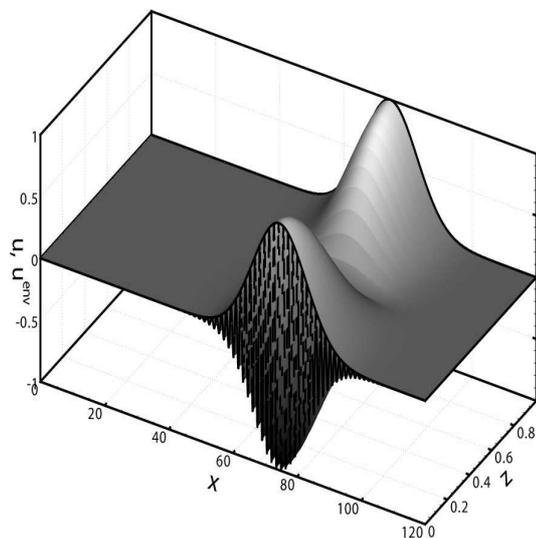
FIG. 2.8: (a) la différence relative entre les valeurs globales du nombre de Rayleigh $Ra_g^{(3/2)}$ et $Ra_g^{(3/2,1)}$. (b) la différence relative entre les fréquences globales $\omega_g^{(3/2)}$ et $\omega_g^{(3/2,1)}$. $\varepsilon = 0.005$ (ligne points), $\varepsilon = 0.05$ (ligne points-tirés) et $\varepsilon = 0.1$ (ligne continue).

fois, comme dans le cas du milieu infini, **une région d'instabilité absolue suffisamment étendue attachée à l'entrée du milieu s'avère nécessaire à la naissance d'un mode global linéaire**. On remarque aussi que les modes globaux analysés dans le cas semi-infini se comportent comme un train de rouleaux de même longueur d'onde et de même fréquence, et leur amplitude prend la forme d'une gaussienne.

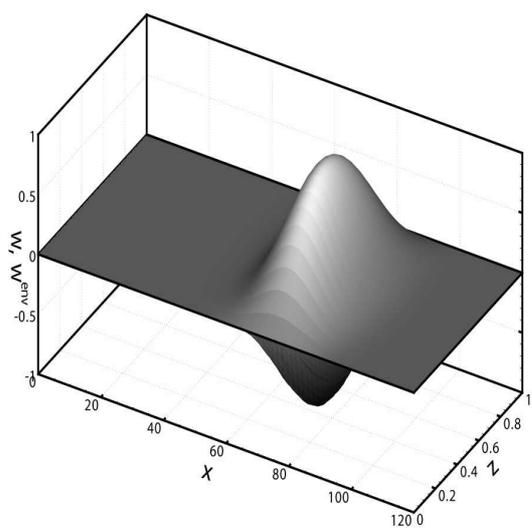
La position x_s du maximum de l'amplitude est décalée vers l'aval près de x_c , qui délimite la région d'instabilité convective de la région stable. La figure 2.11(a) montre la position du maximum de l'amplitude x_s par rapport à l'emplacement du point de transition entre la région convective et la région stable x_c en fonction de Pe . La figure 2.11(b) représente une comparaison entre la longueur d'onde avec celle des rouleaux dans le cas homogène. Par ailleurs, la figure 2.11(c) illustre le comportement de la vitesse de phase v_ϕ en fonction de Pe et la compare à la vitesse de phase du cas homogène.



(a)



(b)



(c)

FIG. 2.9: (a), (b) et (c) respectivement les structures spatiales et les enveloppes des perturbations $\theta(x, z)$, $u(x, z)$ et $w(x, z)$. Avec $Pe = 10$ et $\varepsilon = 0.005$.

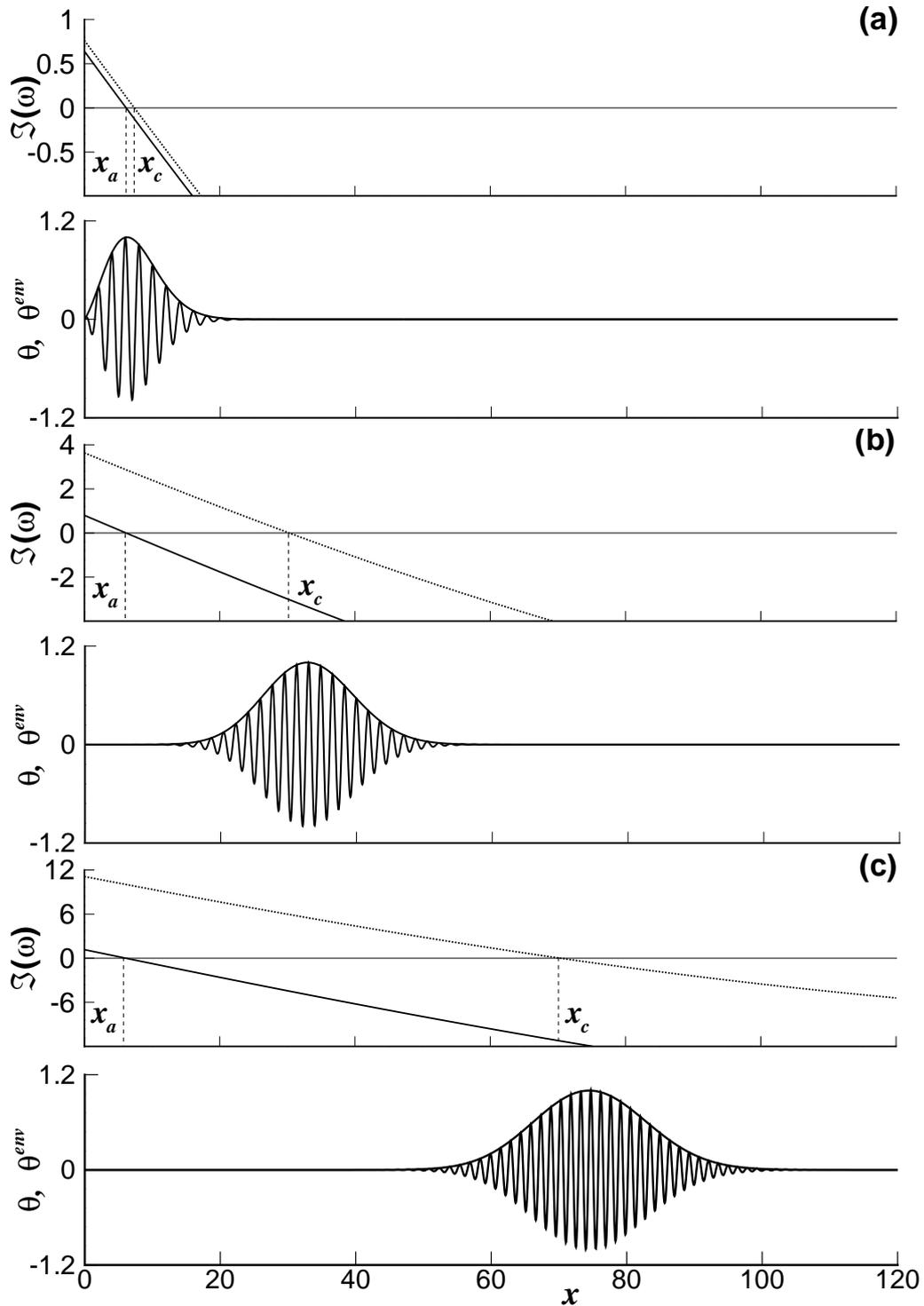
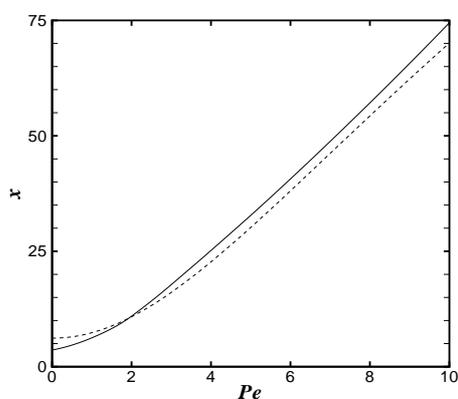
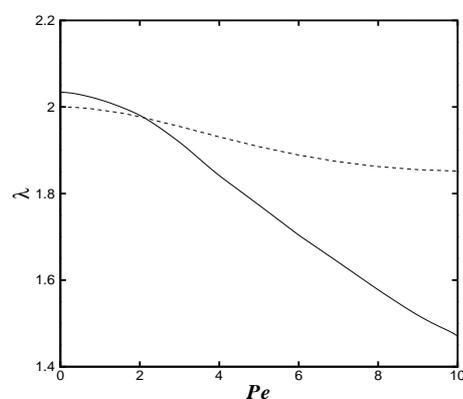


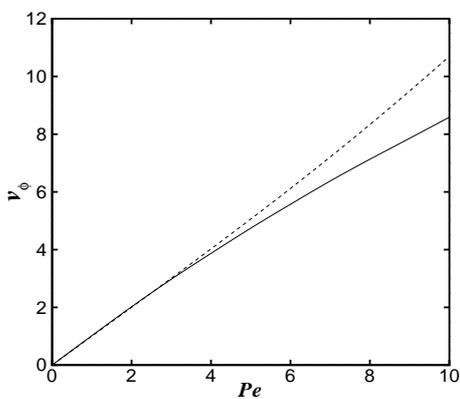
FIG. 2.10: L'évolution spatiale du taux de croissance local maximum $\mathfrak{S}(\omega_0^{max})(x)$ (ligne tirés), du taux de croissance local absolu (ligne continue) et la structure spatiale de perturbation de température $\theta(x, z = 0.5)$ correspondant aux modes globaux marginalement stables pour trois valeurs de Pe : $Pe = 1$ (a), $Pe = 5$ (b) et $Pe = 10$ (c). Avec $\varepsilon = 0.005$.



(a)



(b)



(c)

FIG. 2.11: (a) La position de la valeur maximale des amplitudes x_s (ligne continue) et la position de la valeur de x_c qui délimite la région instable de la région stable (ligne tirés) en fonction de Pe . (b) Comparaison de la longueur d'onde des rouleaux inhomogènes (ligne continue) et des rouleaux homogènes (ligne tirés) en fonction de Pe . (c) Comparaison de la vitesse de phase des rouleaux inhomogènes (ligne continue) et des rouleaux homogènes (ligne tirés) en fonction de Pe . Dans toutes les figures $\varepsilon = 0.005$.

2.6 Conclusion

L'étude réalisée dans ce chapitre concerne la détermination analytique des modes globaux linéaires en milieu poreux saturé d'un fluide, chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal. L'originalité réside dans l'inhomogénéité de la température appliquée sur la plaque inférieure. Deux profils de température sont successivement considérés. Dans le cas dit milieu infini ($+\infty < x < -\infty$), l'inhomogénéité a un profil sous la forme d'une bosse, centrée en $x = 0$. Alors que dans le cas de milieu dit semi-infini ($0 < x < -\infty$), la température admet un maximum local à l'entrée du massif poreux $x = 0$, et décroît vers l'aval. L'étude spatio-temporelle de stabilité linéaire de l'écoulement stationnaire de base est conduite en utilisant deux méthodes de perturbations singulières, à savoir la méthode des échelles multiples et celle des développements asymptotiques raccordés. Les modes globaux sont recherchés sous la forme de modes propres, modulés par un développement WKBJ dans la direction horizontale, où l'amplitude est développée en puissances de ε . Un tel développement ne peut être valable au point où la vitesse de groupe du mode le plus instable s'annule.

Dans le cas infini, cette singularité se produit au point tournant double vérifiant les conditions mathématiques suivantes $\partial_k \omega_0 = 0$ et $\partial_x \omega_0 = 0$. La présence de ce point tournant au sommet de $Ra(x)$ a conduit à chercher la solution au voisinage de ce point sous la forme d'un développement WKBJ en puissance de $\varepsilon^{1/2}$ (dite solution intérieure). Le caractère borné de cette solution a imposé une quantification de la fréquence du mode global, tenant compte du problème homogène de stabilité au point tournant et de l'inhomogénéité spatiale. Cette quantification a donné un critère de sélection du mode présentant le taux de croissance le plus élevé.

En revanche, dans le cas semi-infini, on est en présence d'un point tournant simple vérifiant les conditions mathématiques suivantes $\partial_k \omega_0 = 0$ et $\partial_x \omega_0 \neq 0$. Cette dernière relation suggère que la prise en compte des effets diffusifs nécessite que la solution au voisinage du point tournant simple soit recherchée sous la forme d'un développement WKBJ en puissance de $\varepsilon^{1/3}$. Comme l'amplitude du mode global doit être nulle à l'entrée du canal, cela impose un critère de sélection de ces instabilités et leurs fréquences.

Pour les deux configurations, Il a été démontré que l'existence d'une région d'instabilité locale absolue était nécessaire à l'émergence d'un mode global linéaire. La structure spatiale de ce mode global se présente sous la forme d'un train de rouleaux avec modulation de l'amplitude, et dont l'étendue dépend de l'écoulement principal dont l'intensité est mesurée par le nombre de Péclet. En particulier, contrairement à l'intuition, la position du maximum de l'amplitude est décalée vers l'aval de la localité qui correspond à un échauffement maximum. Toutes les caractéristiques linéaires du mode global prédites dans ce chapitre sont évidemment valables à la naissance de la convection. Qu'en est-il lorsque les non linéarités sont prises en compte pour un jeu de paramètres pris loin du seuil global déterminé linéairement. La réponse à cette question fait l'objet du travail présenté dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Modèle de Ginzburg-Landau et modes globaux

3.1 Introduction

L'analyse de stabilité linéaire menée au chapitre précédent a permis de déterminer le seuil d'apparition du mode global ainsi que le nombre d'onde et la fréquence globale associée. Dans une situation instable, au moins un mode de perturbation manifeste une croissance exponentielle et l'hypothèse de fluctuation faible n'est plus vérifiée. Au delà du seuil global, il devient nécessaire de décrire la dynamique nonlinéaire des perturbations au sein de l'écoulement, afin de trouver un mécanisme qui endigue la croissance linéaire des instabilités.

Pour rendre compte des effets non-linéaires, nous nous restreignons dans ce chapitre à décrire l'évolution spatio-temporelle des perturbations au voisinage du seuil. Dans ce cas, les modes instables sont lentement modulés à la fois en espace et en temps. Il est bien connu que l'évolution de ces modulations lentes des perturbations peut être décrite par une équation de type Ginzburg-Landau, un formalisme mathématique beaucoup plus simple que celui des équations fondamentales de base, et qui conserve la description d'une bonne partie de la physique de la convection mixte.

Historiquement, l'équation de Ginzburg-Landau a été obtenue, d'une façon plus ou moins indépendante, par plusieurs auteurs. Les articles les plus pertinents sont ceux de Newell et Whitehead en 1969 [99, 100], Segel la même année [100] (qui ont obtenu une équation de Ginzburg-Landau avec des coefficients réels dans le cas du problème de Rayleigh-Bénard), Stewartson et Stuart en 1971 [105] (ils ont étudié le problème de l'écoulement de Poiseuille et ont obtenu une équation de Ginzburg-Landau avec des coefficients complexes) et enfin Diprima et al. en 1974 [106] (ils ont étudié des problèmes d'instabilités hydrodynamiques dans un contexte plus général). En 1965, la version stationnaire de cette équation a été obtenue par Landau et Ginzburg [107] dans un article sur la superconductivité. Jusqu'aux années 1980, il semble qu'aucun nom n'a été associé à cette équation, et on parlait d'équation d'amplitude ou de formalisme d'enveloppe. Par commodité, à partir du début

des années quatre vingt, cette équation porte le nom de Ginzburg-Landau et non celui plus "précis", mais non pratique de l'équation de Segel-Newell-Whitehead-Stewartson-stuart-Diprima-Eckhauss.

Depuis le début des années quatre vingt dix, le modèle de Ginzburg-Landau a été étendu pour analyser la dynamique des écoulements ouverts faiblement inhomogènes. Parmi les travaux qui décrivent la structure synchronisée des solutions non linéaires des équations de Ginzburg-Landau avec des coefficients variables, on peut citer quelques articles de référence, notamment celui de Chomaz [44], Couairon et Chomaz [41, 45, 46, 47], Pier et Huerre [102, 52], Pier et al. [103, 42], Ouarzazi et al. [118] et Carrière et al. [101].

Dans notre problème, au voisinage des conditions critiques (i.e. $Ra = Ra^c = 4\pi^2$, $k = k_c = \pi$ et $\omega = \omega_c = k_c Pe$), la vitesse verticale par exemple, peut s'écrire :

$$W = A(x, t) \exp(ik_c x - i\omega_c t) \sin(\pi z) + c.c.,$$

où l'amplitude $A(x, t)$ vérifié l'équation de Ginzburg-Landau suivante (voir les détails de calcul dans l'Annexe A) :

$$\partial_t A = \frac{1}{2} (Ra(X) - Ra^c) A - Pe \partial_x A + 2\partial_x^2 A - \frac{1}{2} A|A|^2. \quad (3.1)$$

où $Ra(X) = Ra [1 - \tanh^2(X)]$ dans le cas du milieu infini et $Ra(X) = Ra [1 - \tanh(X)]$ pour un milieu semi-infini.

L'équation d'enveloppe (3.1) adopte la forme d'une équation générale d'advection-réaction-diffusion, et fait intervenir quatre effets physiques :

- L'instabilité de l'écoulement due à l'écart au seuil linéaire $Ra - Ra^c$.
- L'advection moyenne représentée par le nombre de Pe et qui fait intervenir les notions d'instabilités convectives et absolues.
- Le non-parallélisme de l'écoulement principal (conséquence de l'inhomogénéité) représenté par la dépendance spatiale du paramètre de contrôle $Ra(X = \varepsilon x)$. Son association avec les deux premiers effets ne permet de définir les notions d'instabilités convectives et absolues que localement.
- Le quatrième effet réside dans les non-linéarités qui assurent la saturation de l'amplitude des paquets d'ondes d'instabilité.

L'objet du travail qui suit est, dans un premier temps, d'identifier les caractéristiques linéaires du mode global construit à partir du modèle de l'équation de Ginzburg-Landau (3.1). Ces caractéristiques sont comparées à celles obtenues au chapitre précédent sur la

base du modèle mathématique originel du problème. On terminera ce chapitre par explorer, sur la base d'équation (3.1) les effets non linéaires sur la structure du mode global.

3.2 Détermination analytique des modes globaux linéaires

3.2.1 Approximation WKBJ appliquée à l'équation de Ginzburg-Landau

La construction du mode global linéaire est accomplie ici grâce à la version linéaire de (3.1)

$$\partial_t A = \frac{1}{2} (Ra(X) - Ra^c) A - Pe \partial_x A + 2\partial_x^2 A, \quad (3.2)$$

La solution de l'équation (3.2) est recherchée sous la forme d'un développement WKBJ de l'amplitude $A(X, t)$, avec la variable lente X reliée à la variable physique x par le petit paramètre ε , $X = \varepsilon x$

$$A(X, t) = (A_0(X) + \varepsilon A_1(X) + O(\varepsilon^2)) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int a(X) dX - i\omega_g t\right), \quad (3.3)$$

où la fréquence complexe est développée sous la forme $\omega_g = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + O(\varepsilon^2)$ et représente l'écart de la fréquence totale à sa valeur au seuil $\omega_c = k_c Pe$. Le nombre d'onde complexe $a(X)$ désigne l'écart du nombre d'onde total de sa valeur au seuil k_c .

L'introduction du développement asymptotique (3.3) dans l'équation (3.2) permet de retrouver à l'ordre ε^0 la relation de dispersion :

$$\omega_0 = \frac{i}{2} (Ra(X) - Ra^c) + Pea - i2a^2. \quad (3.4)$$

À l'ordre ε , la condition de solvabilité conduit à l'équation vérifiée par L'amplitude $A_0(X)$:

$$\partial_a \omega_0 \partial_X A_0 + (-i\omega_1 + 1/2 \partial_a^2 \omega_0 \partial_X a) A_0 = 0. \quad (3.5)$$

La solution de (3.5) s'écrit :

$$A_0(X) = C \exp\left(\int_0^X \frac{i\omega_1 - 1/2 \partial_a^2 \omega_0 \partial_X a}{\partial_a \omega_0} dX'\right), \quad (3.6)$$

avec C une constante.

La solution (3.6) est singulière lorsque $\partial_a \omega_0 = 0$, c'est-à-dire au point tournant de la relation de dispersion (3.4), où la vitesse de groupe s'annule. Deux cas génériques sont à considérer dans ce qui suit. Le cas où la vitesse de groupe s'annule en un point tournant double (i.e. $\partial_x \omega_0^t = 0$ en $x = 0$) pour la configuration infinie et celui de la configuration dite semi-infinie où la vitesse de groupe s'annule en un point tournant simple (i.e. $\partial_x \omega_0^t \neq 0$ en $x = 0$).

3.2.2 Solution intérieure dans le cas d'un point tournant double

Pour les mêmes raisons que dans le chapitre précédent, la description de l'instabilité au voisinage du point tournant double $X = 0$ nécessite l'introduction de la variable intérieure $\chi = \varepsilon^{1/2}x$.

Pour déterminer la solution au voisinage du point tournant $X = X^t = 0$, l'enveloppe $A^t(\chi, t)$ est recherchée sous la forme d'un développement en puissance $\varepsilon^{1/2}$:

$$A^t(\chi, t) = \left(A_0^t(\chi) + \varepsilon^{1/2} A_{1/2}^t(\chi) + \varepsilon A_1^t(\chi) + O\left(\varepsilon^{3/2}\right) \right) \times \exp\left(\frac{ia^t}{\varepsilon^{1/2}} \chi - i \left(\omega_0 + \varepsilon^{1/2} \omega_{1/2} + \varepsilon \omega_1 + O\left(\varepsilon^{3/2}\right) \right) t \right), \quad (3.7)$$

À l'ordre ε^0 , la relation de dispersion est à nouveau vérifiée, ce qui conduit à la valeur prise par ω_0 :

$$\omega_0 = \omega_0^t = \frac{i}{2} (Ra^t - Ra^c) + Pea^t - i2a^{t2} = \frac{i}{2} (Ra^t - Ra^A), \quad (3.8)$$

L'état de base est localement instable convectif lorsque $Ra^c < Ra^t < Ra^A$ et localement instable absolu lorsque $Ra^t > Ra^A$.

À l'ordre $\varepsilon^{1/2}$, on trouve :

$$\omega_{1/2} = 0. \quad (3.9)$$

À l'ordre ε^1 , la condition de solvabilité conduit à l'équation d'amplitude vérifiée par A_0^t :

$$1/2\partial_a^2\omega_0^t\partial_\chi^2A_0^t + (\omega_1 - 1/2\partial_\chi^2\omega_0^t\chi^2)A_0^t = 0. \quad (3.10)$$

On introduit les coefficients α et β définis par $\alpha^{1/2} = (\partial_\chi^2\omega_0^t/\partial_a^2\omega_0^t)^{1/2}$ et $\beta = -2\omega_1/\partial_a^2\omega_0^t$. Dans ce cas l'équation (3.10) s'écrit :

$$\partial_\chi^2A_0^t - (\beta + \alpha\chi^2)A_0^t = 0, \quad (3.11)$$

la solution générale de cette équation est :

$$A^t(\chi, t) \sim \left(C_1 M\left(\frac{\beta + \alpha^{1/2}}{4\alpha^{1/2}}, \frac{1}{2}, \alpha^{1/2}\chi^2\right) + C_2 \left(\alpha^{1/2}\chi^2\right)^{1/2} M\left(\frac{\beta + 3\alpha^{1/2}}{4\alpha^{1/2}}, \frac{3}{2}, \alpha^{1/2}\chi^2\right) \right) \\ \times \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^{1/2}\chi^2\right) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^{1/2}}a^t - i\omega_g t\right), \quad (3.12)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes et M la fonction de Kummer [96].

La condition de raccord entre la solution extérieure (3.3) et la solution intérieure (3.12) s'écrit :

$$\lim_{|\chi| \rightarrow 0} A(\chi, t) = \lim_{|\chi| \rightarrow \infty} A^t(\chi, t) \sim \chi^{-2\sigma} \exp\left(-\frac{\alpha^{1/2}}{2}\chi^2\right) \exp\left(\frac{ia^t}{\varepsilon^{1/2}}\chi - i\omega_g t\right), \quad (3.13)$$

avec $\sigma = 1/4(1 + \beta/\alpha^{1/2})$.

Dans ce cas la fonction de Kummer M est réduite aux polynômes d'Hermite He [96] et $\sigma = 1/4(1 + \beta/\alpha^{1/2})$ vérifie la condition : $2\sigma = -n$, avec n un nombre entier. La correction de la fréquence du mode global le plus instable à l'ordre ε est alors :

$$\omega_{1,0} = \partial_a^2\omega_0^t\alpha^{1/2}/2 = -i(Ra^A)^{1/2}, \quad (3.14)$$

La relation (3.14) montre que la correction de la fréquence réelle est nulle. Le taux de croissance temporelle s'écrit :

$$\Im(\omega_g) = \Im(\omega_0) + \varepsilon\Im(\omega_{1,0}) = \frac{Ra^t - Ra^A}{2} - \varepsilon(Ra^A)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Le seuil de l'instabilité globale est obtenue en imposant $\Im(\omega_g) = 0$, soit

$$Ra_g^l = Ra^A + 2(Ra^A)^{1/2}\varepsilon, \quad (3.16)$$

Le seuil de l'instabilité globale linéaire Ra_g^l est donc décalé par rapport au seuil d'instabilité absolue $Ra^A = Ra^c + Pe^2/4$ d'une quantité qui varie comme puissance 1 du paramètre de l'inhomogénéité ε . Ce qui traduit la présence d'une région d'instabilité absolue locale finie au centre du domaine.

La distribution spatiale du mode global le plus instable obtenu par l'approximation analytique linéaire dans la zone proche du point tournant double s'écrit :

$$A(x) \sim \exp\left[\left(-(Ra^A)^{1/2}\varepsilon x^2 + Pe x\right)/4\right]. \quad (3.17)$$

3.2.3 Solution intérieure dans le cas d'un point tournant simple

Dans le cas semi-infini où $Ra(X) = Ra[1 - \tanh(X)]$, et pour les mêmes raisons que dans le chapitre précédent, on doit alors introduire la variable intérieure $\xi = \varepsilon^{1/3}x$, pour décrire l'instabilité autour du point tournant simple $X = 0$. L'enveloppe est recherchée dans ce cas sous la forme d'un développement en puissance de $\varepsilon^{1/3}$:

$$A^t(\xi, t) = \left(A_0^t(\xi) + \varepsilon^{1/3}A_{1/3}^t(\xi) + \varepsilon^{2/3}A_{2/3}^t(\xi) + O(\varepsilon)\right) \times \exp\left(\frac{ia^t}{\varepsilon^{1/3}}\xi - i\left(\omega_0 + \varepsilon^{1/3}\omega_{1/3} + \varepsilon^{2/3}\omega_{2/3} + O(\varepsilon)\right)t\right). \quad (3.18)$$

À l'ordre ε^0 , on retrouve la valeur prise par ω_0^t au point tournant :

$$\omega_0 = \omega_0^t = i\left(\frac{Ra^t - Ra^c}{2}\right) + Pea^t - i2a^t = i\left(\frac{Ra^t - Ra^A}{2}\right), \quad (3.19)$$

À l'ordre $\varepsilon^{1/3}$, on trouve :

$$\omega_{1/3} = 0. \quad (3.20)$$

À l'ordre $\varepsilon^{2/3}$, la condition de solvabilité conduit à l'équation d'amplitude vérifiée par A_0^t :

$$1/2\partial_a^2\omega_0^t\partial_\xi^2 A_0^t + (\omega_{2/3} - \partial_X\omega_0^t\xi) A_0^t = 0. \quad (3.21)$$

L'équation (3.21), admet la solution suivante :

$$A_0^t(\xi) = DAi \left\{ (2\partial_X \omega_0^t / \partial_a^2 \omega_0^t)^{1/3} [\xi - (\omega_{2/3} / \partial_X \omega_0^t)] \right\}, \quad (3.22)$$

où D est une constante et Ai désigne la fonction d'Airy [96].

Les conditions aux limites associées à (3.22) sont :

$$A_0^t(0) = 0 \quad (3.23)$$

qui impose un état de ondulation à l'entrée du domaine, et

$$A_0^t(+\infty) = 0 \quad (3.24)$$

qui traduit la stabilité de l'écoulement de base à l'infini aval.

La solution (3.22), vérifie automatiquement la condition (3.24) quand $\xi \rightarrow +\infty$, et vérifie la condition (3.23) quand $\xi \rightarrow 0$ seulement si :

$$- (2\partial_X \omega_0^t / \partial_a^2 \omega_0^t)^{1/3} (\omega_{2/3,n} / \partial_X \omega_0^t) = -a_n, \quad (3.25)$$

où les $-a_n$ désignent les zéros de la fonction d'Airy Ai ($a_0 = 2.33811, a_1 = 4.0879, \dots$). La correction de la fréquence du mode global le plus instable à l'ordre $\varepsilon^{2/3}$ est dans ce cas :

$$\omega_{2/3,0} = -i2^{-1/3} (Ra^A)^{2/3} a_0. \quad (3.26)$$

Un mode global est donc obtenu lorsque la valeur de Ra est supérieure au seuil de l'instabilité globale linéaire Ra_g^l défini par :

$$Ra_g^l = Ra^A + \varepsilon^{2/3} (2Ra^A)^{2/3} a_0. \quad (3.27)$$

Le seuil d'instabilité globale linéaire Ra_g^l est donc décalé par rapport au seuil d'instabilité absolue $Ra^A = Ra^c + Pe^2/4$ d'une quantité qui varie comme puissance 2/3 du paramètre ε lié à l'inhomogénéité. Ce qui traduit la présence d'une région d'instabilité

absolue locale finie à l'entrée du domaine.

La distribution spatiale du mode global le plus instable obtenu par l'approximation analytique linéaire s'écrit :

$$A(x) \sim Ai \left[\left(\varepsilon 2 \partial_x \omega_0^t / \partial_a^2 \omega_0^t \right)^{1/3} x - a_0 \right] \exp(Pe/4x), \quad (3.28)$$

3.2.4 Validité du modèle Ginzburg-Landau

Une comparaison des résultats théoriques obtenus dans le chapitre précédent à partir des équations linéaires du problème dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy avec ceux émanant du modèle Ginzburg-Landau est nécessaire afin d'évaluer la pertinence et le champ d'application de ce dernier.

Les tests de validité du modèle G-L vont porter successivement sur le seuil de l'émergence du mode global linéaire, de sa fréquence, de sa structure spatiale et sur la position x_s du maximum de son amplitude.

Les valeurs critiques du nombre de Rayleigh au seuil de l'instabilité globale Ra_g^l peuvent être approchées par leur valeur prépondérante Ra^A , au seuil de l'instabilité absolue comme le montrent les relations (2.62) et (3.16) pour une configuration infinie d'une part, et les relations (2.92) et (3.27) pour une configuration semi-infinie d'autre part. La dépendance de Ra^A vis-à-vis de Pe , représentée sur la figure 3.1 montre que l'accord est excellent pour de faibles valeurs du nombre de Péclet, alors que cet accord se dégrade lorsque Pe augmente.

Les fréquences d'oscillations globales ω_g , obtenues à partir du modèle originel, sont représentées sur la figure 3.2 (trait continu) en fonction de Pe , et sont comparées aux fréquences $\omega = \pi Pe$ (trait points), obtenues grâce au modèle G-L. Cette figure met en évidence le comportement de ω_g , identique à celui de $\omega = \pi Pe$ pour les faibles valeurs de Pe , et qui s'en écarte pour Pe suffisamment grand.

Concernant la structure spatiale du mode global linéaire propre à la configuration infinie, les figures 3.3(a) et 3.3(b), obtenues respectivement pour $Pe = 1$ et $Pe = 5$, illustrent bien une comparaison de la forme spatiale du mode global linéaire obtenu à partir du problème originel (ligne discontinue) avec celle issue du modèle G-L (ligne continue). On constate que les deux modes globaux sont identiques pour $Pe = 1$ (le maximum de la différence relative n'excède pas 1%, comme le montre la figure 3.3(c)) alors que l'écart de l'étalement spatial des deux modes globaux devient important lorsque Pe croît (le maximum de la différence relative des amplitudes peut atteindre 60% pour $Pe = 5$ comme cela est montré sur la figure 3.3(d)). Afin d'apprécier l'influence de l'advection moyenne, mesurée par Pe , sur le degré de l'étalement spatial des modes globaux linéaires issus du

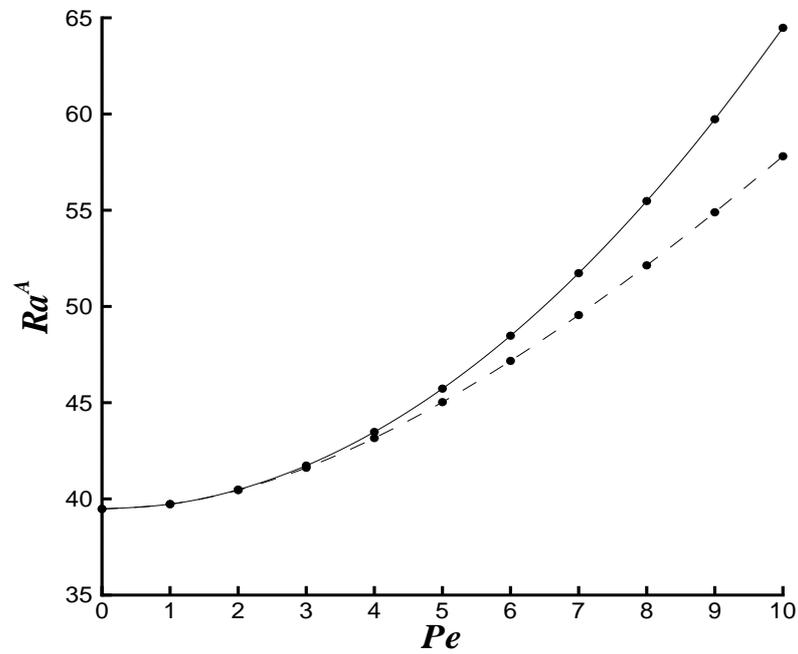


FIG. 3.1: Comparaison entre le nombre de Rayleigh absolu Ra^A obtenu par le modèle originel (ligne discontinue) et celui obtenu par le modèle de Ginzburg-Landau (ligne continue).

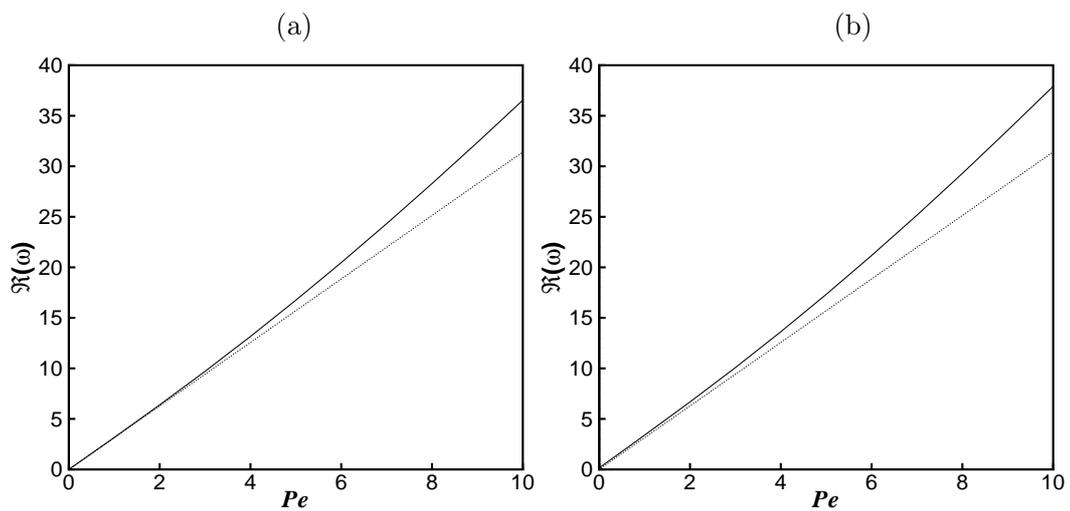


FIG. 3.2: Comparaison entre les fréquences d'oscillations globales ω_g (trait continu), obtenues à partir du modèle originel et les fréquences $\omega = \pi Pe$ (trait points), obtenues grâce au modèle G-L. (a) cas d'une configuration infinie et (b) cas d'une configuration semi-infinie. Avec $\varepsilon = 0.05$.

problème originel et du modèle de G-L, nous comparons la position spatiale x_s du maximum de l'amplitude A_s du mode global linéaire. Cette comparaison est illustrée sur la figure 3.4(a) pour la configuration infinie et la figure 3.4(b) pour le cas semi-infini. Dans les deux cas de figure, on constate que les deux courbes sont confondues pour des faibles valeurs de Pe et commencent à s'écarter pour des valeurs modérées de Pe .

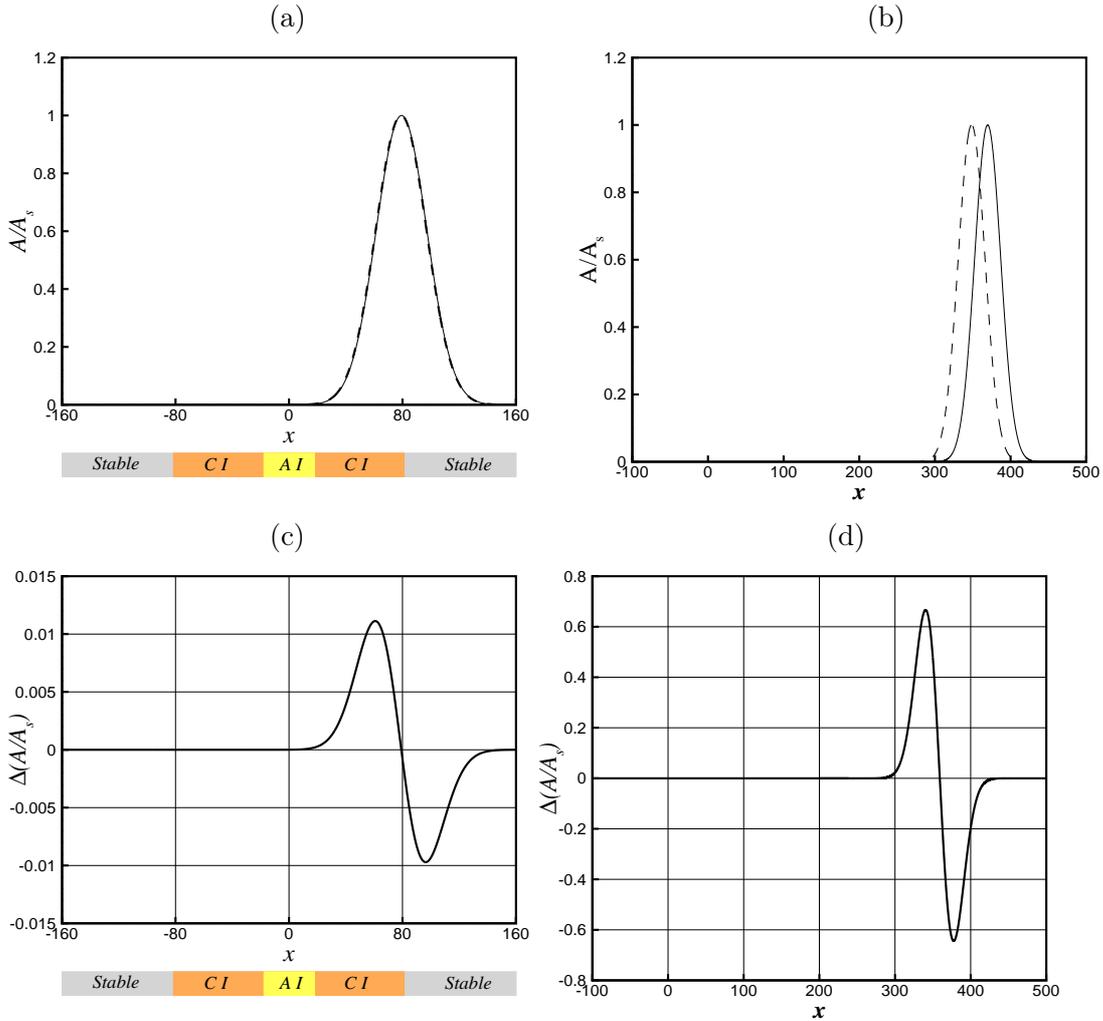


FIG. 3.3: Comparaison de la distribution spatiale normalisée du mode global linéaire le plus instable obtenue pour $Pe = 1$ (a) et $Pe = 5$ (b) avec $\varepsilon = 10^{-3}$: le problème originel (ligne discontinue) et l'équation de l'amplitude (ligne continue). (a) le problème originel pour $Ra = Ra_g^l = 39.739$ et l'équation de l'amplitude pour $Ra = Ra_g^l = 39.741$. (b) problème originel pour $Ra = Ra_g^l = 45.042$ et l'équation de l'amplitude pour $Ra = Ra_g^l = 45.742$. (c) et (d) la différence relative de la distribution spatiale respectivement pour $Pe = 1$ et $Pe = 5$.

3.2.5 Commentaires

Les caractéristiques linéaires du mode global construit à partir des équations originelles d'une part et du modèle de Ginzburg-Landau d'autre part sont pratiquement identiques pour des faibles vitesses d'advection (i.e. $Pe < 4$). Lorsque cette vitesse est modérée, voire importante, les prédictions issues du modèle de G-L tombent en défaut au regard des résultats issus des équations du problème dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy. Ce constat corrobore l'hypothèse adoptée pour la construction de l'équation de G-L (voir Annexe A), à savoir que Pe doit être petit et du même ordre de grandeur que la racine carrée de la distance au seuil ($Pe = O(\sqrt{Ra - Ra^c})$). Dans la suite, et pour la plupart des simulations numériques de l'équation de G-L, la valeur de Pe est fixée respectivement à 1 dans le cas d'une configuration infinie et à 1.5 dans le cas d'une configuration semi-infinie, en vue de respecter le domaine de validité du modèle G-L.

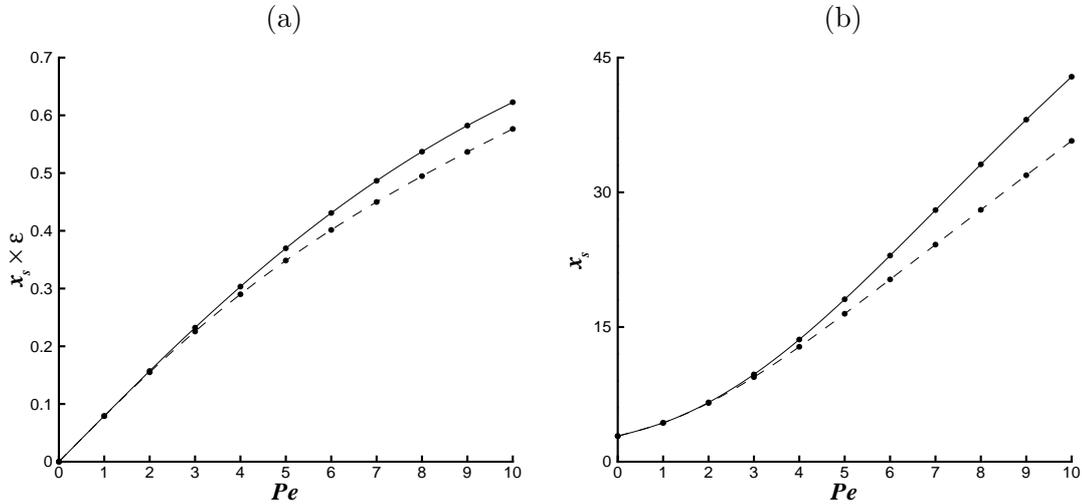


FIG. 3.4: Comparaison entre la position du maximum de l'amplitude x_s en fonction de Pe , obtenue par le modèle originel (ligne discontinue) et celui obtenue par le modèle de Ginzburg-Landau (ligne continue). (a) cas d'une configuration infinie et (b) cas d'une configuration semi-infinie (avec $\varepsilon = 10^{-2}$).

3.3 Simulations numériques

Le but recherché des simulations numériques de l'équation de G-L est dans un premier temps la détermination du taux de croissance temporelle de l'instabilité et d'en extraire le seuil global numérique. Ce seuil est ensuite comparé à celui obtenu par le biais de l'approximation WKBJ de l'équation de G-L.

Dans un second temps, la dynamique non linéaire est explorée, aussi bien au voisinage du seuil global (i.e. instabilité faiblement non linéaire) que dans la zone des paramètres assurant un écart important du seuil global (i.e. instabilité fortement non linéaire). Ces simulations numériques concernent les deux configurations associées respectivement à un

milieu infini et à un milieu semi-infini.

3.3.1 Détermination numérique du seuil de l'instabilité globale

La construction du mode global linéaire à partir de l'équation de G-L a permis de déterminer, en s'appuyant sur l'approximation WKBJ, le seuil $Ra_g^{l,th}$ de l'émergence d'une instabilité globale. Le but ici est de s'affranchir de l'approximation WKBJ en simulant directement la version linéaire (3.2) de l'équation de G-L. La valeur numérique $Ra_g^{l,nu}$ est celle du nombre de Rayleigh assurant un taux de croissance temporelle nul de la perturbation, obtenu par extrapolation d'un ensemble de résultats issus de simulations numériques.

Pour $Pe = 1$ et $\varepsilon = 10^{-3}$, le seuil $Ra_g^{l,th}$ pour un milieu infini est donné par la relation (3.16) et vaut 39.7410. Pour cet exemple, cinq simulations ont été conduites pour quatre valeurs de Ra supérieures à 39.7410 et une valeur inférieure à ce seuil. L'évolution de l'amplitude de la perturbation pour ces différentes valeurs de Rayleigh est représentée sur la figure 3.5(a), et permet de déterminer le taux de croissance temporelle $\Im(\omega)$ de la perturbation (figure 3.5(b)). Une extrapolation linéaire des cinq taux de croissance permet l'évaluation de $Ra_g^{l,nu}$, valeur pour laquelle $\Im(\omega) = 0$. La valeur estimée $Ra_g^{l,nu} = 39.7397$ s'avère en excellent accord avec la valeur analytique.

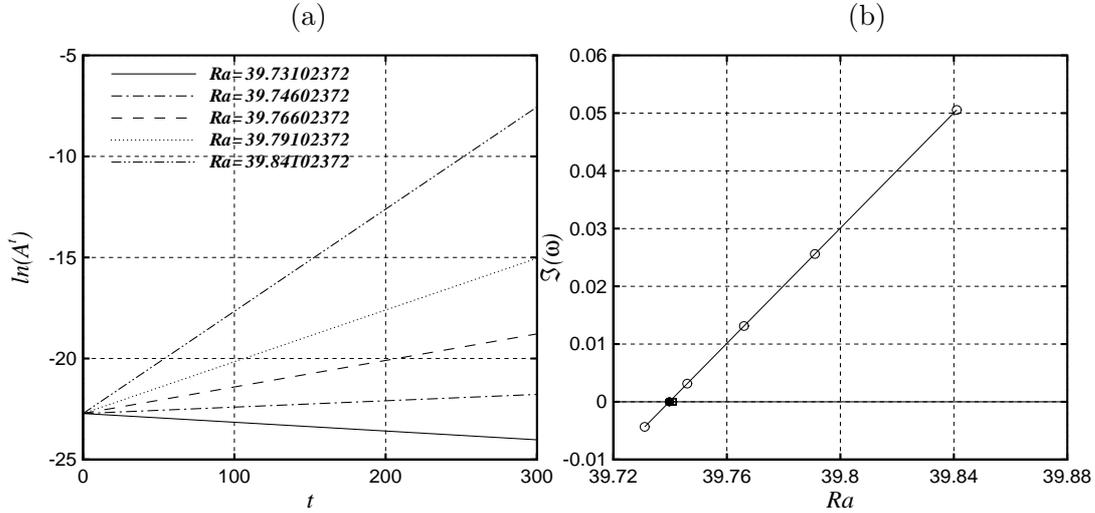


FIG. 3.5: Évaluation du nombre de Rayleigh global numérique pour $Pe = 1$ et $\varepsilon = 10^{-3}$. (a) L'évolution de l'amplitude au centre du mode global pour différentes valeurs de Ra . (b) : les taux de croissance (\circ) extraits à partir de (a) avec l'extrapolation linéaire à $Ra_g^{l,nu} = 39.7397$ (\bullet), (\square) le nombre de Rayleigh global théorique $Ra_g^{l,th} = 39.7410$.

Une démarche similaire permet de déterminer la valeur numérique du seuil $Ra_g^{l,nu}$ pour une configuration semi-infinie. Les résultats sont illustrés sur la figure 3.6 pour $Pe = 1.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$. L'extrapolation linéaire des résultats fournit la valeur $Ra_g^{l,nu} = 40.1362$, à comparer à $Ra_g^{l,th} = 40.1345$ extraite de la relation (3.27). Ce très bon accord persiste pour

tous les tests numériques que nous avons réalisés pour différentes valeurs de Pe et de ε , et ce pour les deux configurations.

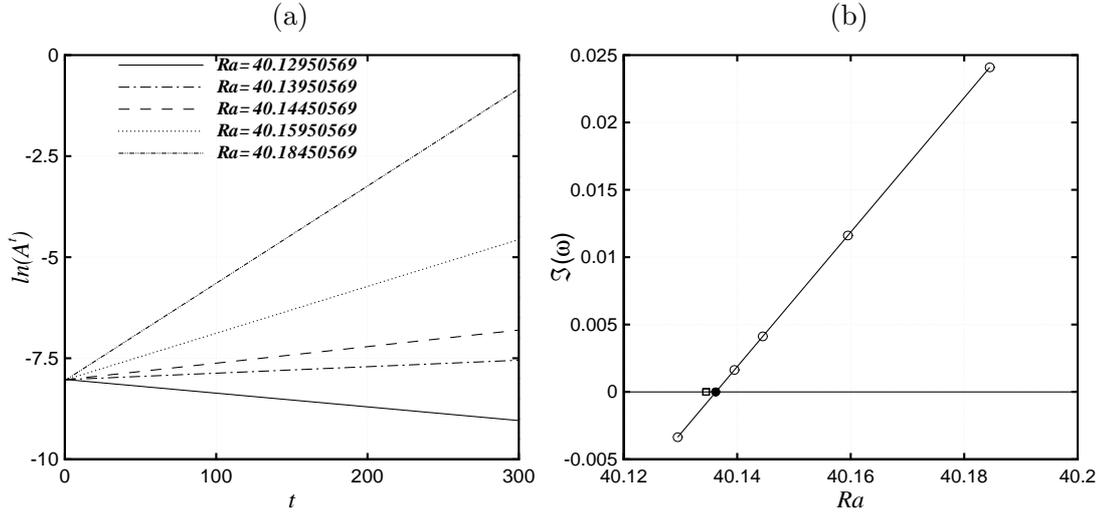


FIG. 3.6: Évaluation du nombre de Rayleigh global numérique pour $Pe = 1.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$. (a) L'évolution de l'amplitude au centre du mode global pour différentes valeurs de Ra . (b) : les taux de croissance (\circ) extraits à partir de (a) avec l'extrapolation linéaire à $Ra_g^{l,nu} = 40.1362$ (●), (□) le nombre de Rayleigh global théorique $Ra_g^{l,th} = 40.1345$.

La distribution spatiale du mode global le plus instable obtenu par une construction analytique dans la zone proche du point tournant double (3.17) et du point tournant simple (3.28) est comparée avec celle issue de la simulation numérique directe de l'équation de G-L (3.2). Un exemple de cette comparaison est illustré par la figure 3.7 (pour la configuration infinie) et la figure 3.8 (pour la configuration semi-infinie) en prenant comme condition initiale une impulsion infinitésimale d'amplitude 10^{-10} , et où l'amplitude du mode global analytique est réduite à celle de la solution numérique. Comme le montrent ces deux figures l'accord entre la simulation numérique et le critère de sélection analytique est excellent.

3.3.2 Apport du non linéaire au delà de son rôle de saturation

Nous avons vu précédemment que les modes globaux linéaires peuvent se développer quand le nombre de Rayleigh excède le seuil de l'instabilité absolue par une quantité de l'ordre de ε pour une configuration présentant un point tournant double et par une quantité de l'ordre de $\varepsilon^{2/3}$ dans le cas d'un point tournant simple. Le dizès et al. [104], ont étendu l'analyse de la théorie des modes globaux linéaires au régime faiblement non linéaire. Ils ont montré que le résultat classique de l'analyse faiblement non linéaire ne s'applique pas de manière triviale et qu'il possède des limites de validité. Leur analyse montre que les modes globaux linéaires peuvent être reproduits comme solutions dans le régime faiblement non linéaire à condition que les écarts au seuil $Ra - Ra_g^l$ ne dépassent pas une quantité exponentiellement petite par rapport au paramètre d'inhomogénéité ε (i.e.

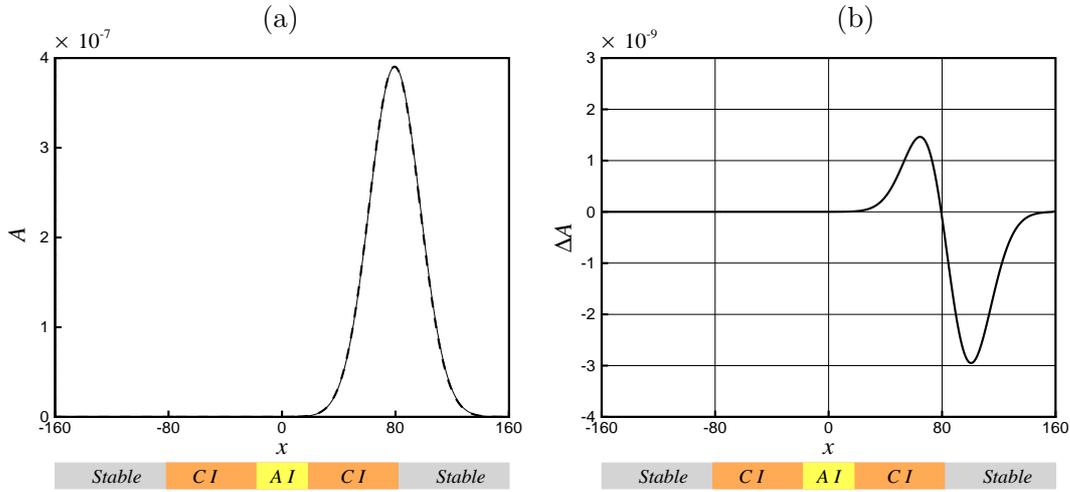


FIG. 3.7: (a) Comparaison entre le mode global obtenu par la simulation numérique (ligne continue) avec $x_s^{nu} = 79.449$ et celui obtenu par l'approximation analytique (3.17) (ligne discontinue) avec $x_s^{th} = 79.327$. (b) la différence relative entre les deux modes. Avec $Pe = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $Ra = Ra_g^{l,nu} = 39.7397$ et $Ra = Ra_g^{l,th} = 39.7410$.

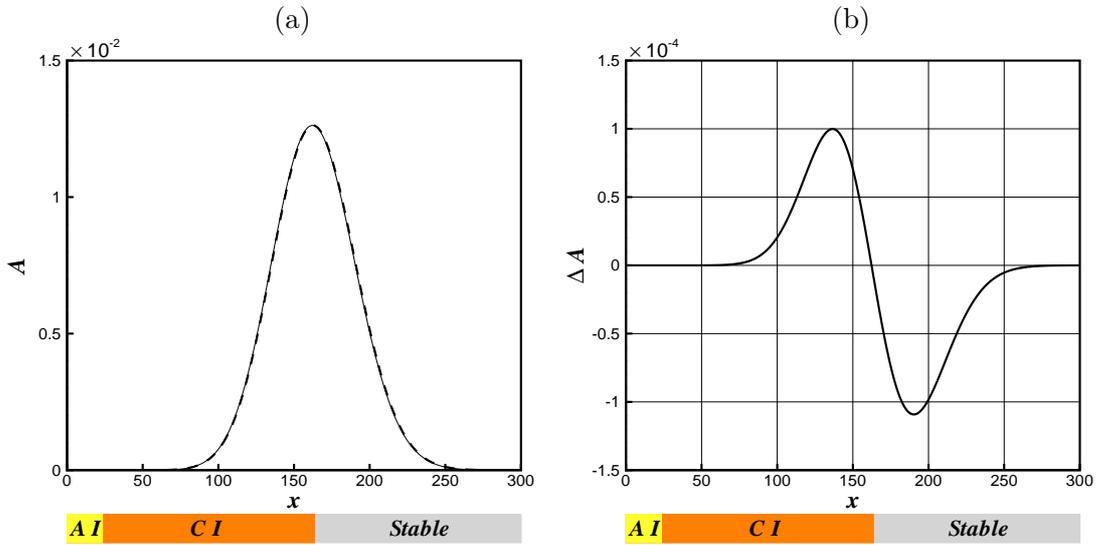


FIG. 3.8: (a) Comparaison entre le mode global obtenu par la simulation numérique (ligne continue) avec $x_s^{nu} = 162.1483$ et celui obtenu par l'approximation analytique (3.28) (ligne discontinue) avec $x_s^{th} = 162.5272$. (b) la différence relative entre les deux modes. Avec $Pe = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Ra = Ra_g^{l,nu} = 40.1362$ et $Ra = Ra_g^{l,th} = 40.1345$.

$Ra - Ra_g^l < \exp(-1/\varepsilon)$). Le but ici, est de s'affranchir des limites de la théorie faiblement non linéaire. La prise en compte des fortes non-linéarités peut apporter des informations supplémentaires sur la structure spatiale des solutions bifurquées au-dessus du seuil global.

Résultats pour une configuration infinie

La simulation numérique de l'équation (3.1) dans le régime fortement non linéaire permet d'étudier le comportement de l'instabilité lorsque le système se trouve dans des conditions relativement loin du seuil. Nous avons fixé le jeu des paramètres à $Pe = 4$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et à $Ra = 45$, au delà du seuil global qui se trouve à $Ra_g \simeq 43.61$. L'évolution temporelle de l'énergie de perturbation, initialisée par une impulsion infinitésimale d'amplitude 10^{-10} , est illustrée sur la figure 3.9(a). La forme spatiale de l'amplitude de la perturbation est représentée pour trois temps (les cercles de la figure 3.9(a)) successivement sur les figures 3.9(b), 3.9(c) et 3.9(d). Ces trois derniers graphiques montrent que la solution non linéaire est composée d'un front qui tend à remonter en amont au cours du temps, à contre sens de l'écoulement principal. À des temps asymptotiquement grands (figure 3.9(d)) ce front est stoppé au cours de sa propagation vers l'amont par l'écoulement principal, pour s'accrocher à la frontière amont x_{ca} entre la région localement instable convective et la région localement instable absolue. De tels solutions non linéaires imposées par l'existence d'un point tournant double sont baptisées, modes globaux raides ou "éléphants". Tant que les valeurs de Pe restent modérées voire élevées, les simulations numériques mettent en évidence des solutions dont la distribution spatiale comporte un front raide.

D'après Pier et al. [103, 52], ce front stationnaire situé à la position spatiale x_{ca} impose la fréquence d'oscillation $\omega_A(x_{ca})$ au milieu tout entier. Les simulations numériques de l'équation de G-L à coefficients réels (3.1) montrent que les solutions ne présentent aucune oscillation, indiquant ainsi que l'écart à la fréquence critique $\omega_c = \pi Pe$ est nul. Cela signifie que le modèle de G-L (3.1) prévoit des structures synchronisées battant à une fréquence $\omega_c = \pi Pe$, qui est à comparer à la fréquence imposée par le front $\omega_A(x_{ca})$. Cette comparaison a été déjà menée au paragraphe 3.2.4, et a été illustrée sur la figure 1.2(a), qui montre que le critère de sélection de la fréquence proposé par Pier et al. [103, 52] est très satisfaisant pour des valeurs petites de Pe .

En revanche, pour des faibles valeurs de Pe , les résultats numériques montrent que les modes globaux raides sont remplacés par des solutions ne comportant pas de front, et dont la structure spatiale est lentement variable. Ces solutions observées pour des faibles valeurs d'advection sont baptisées modes globaux doux ou "chapeaux". Un exemple de mode global doux est illustré sur la figure 3.10 pour $Pe = 1$, $Ra = 45$ et $\varepsilon = 10^{-2}$.

Résultats pour une configuration semi-infinie

La figure 3.11(a) représente l'évolution de l'énergie de la perturbation, initialisée par une impulsion infinitésimale localisée à $x = 10$ pour un jeu de paramètres assurant une région d'instabilité absolue locale au voisinage de l'entrée du massif poreux. La structure spatiale saturée de ce mode global non linéaire est représentée sur la figure 3.11(d) et correspond à un front raide bloqué au voisinage de l'entrée du milieu.

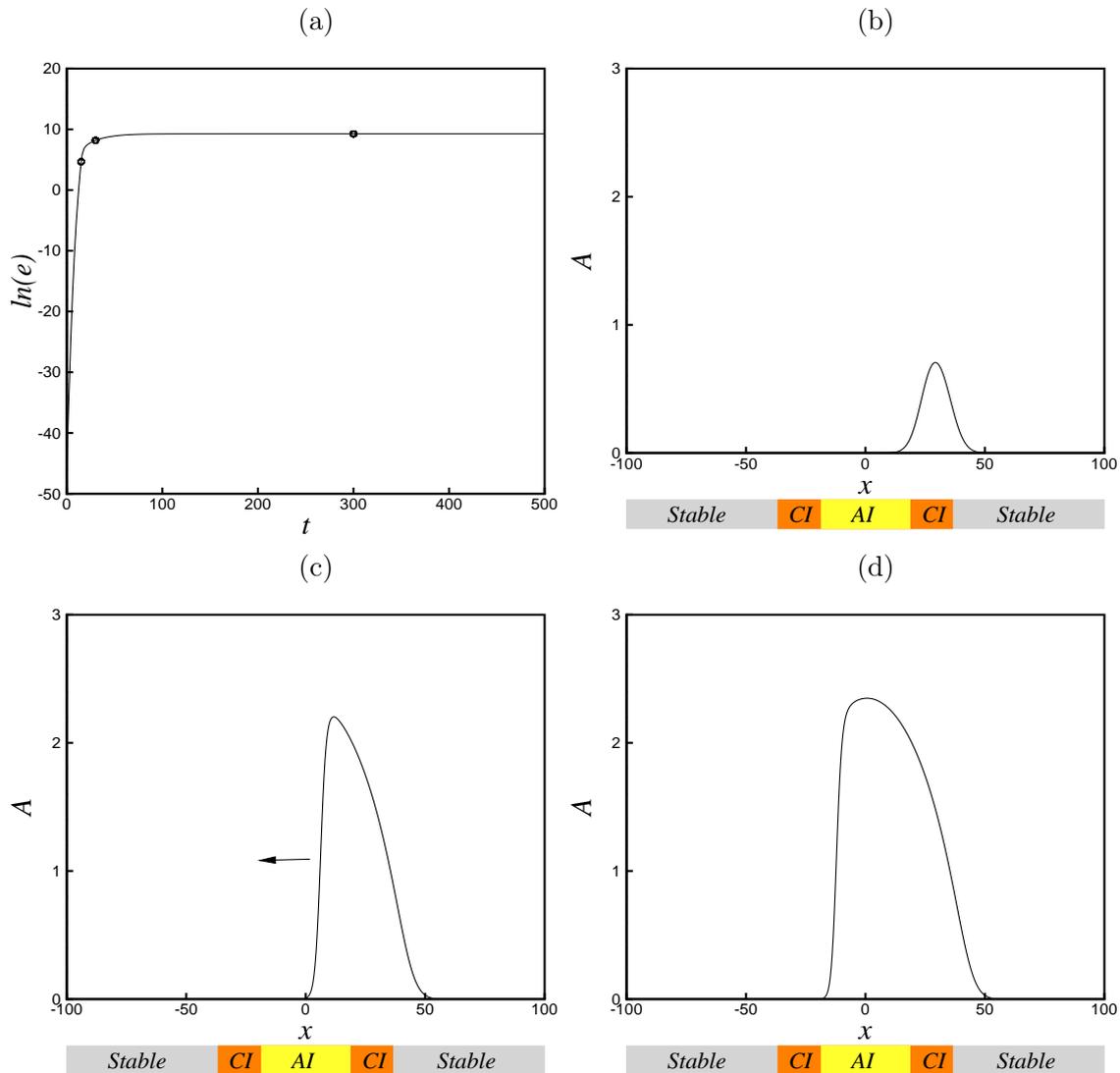


FIG. 3.9: Simulation numérique de l'évolution temporelle de l'instabilité obtenue avec $Pe = 4$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $Ra = 45$, initialisée par une impulsion infinitésimale d'amplitude 10^{-10} localisée à $x = 0$. Les cercles de la figure (a) correspondent aux temps des figures (b) $t = 15$, (c) $t = 30$ et (d) $t = 300$.

Sur la base de l'équation de G-L. Couairon et Chomaz, ont analysé théoriquement la structure spatiale de ce gène de mode global. Partant du fait que la solution saturée est le produit d'une interaction entre l'inhomogénéité de l'écoulement de base (i.e. faible non parallélisme) et les non linéarités du problème, ils avaient défini une stratégie, qui s'est avérée productive, en vue de dégager un critère selon lequel les effets non linéaires vont dominer les effets de l'inhomogénéité ou inversement. Ils ont été amenés à définir trois échelles de longueur, à savoir :

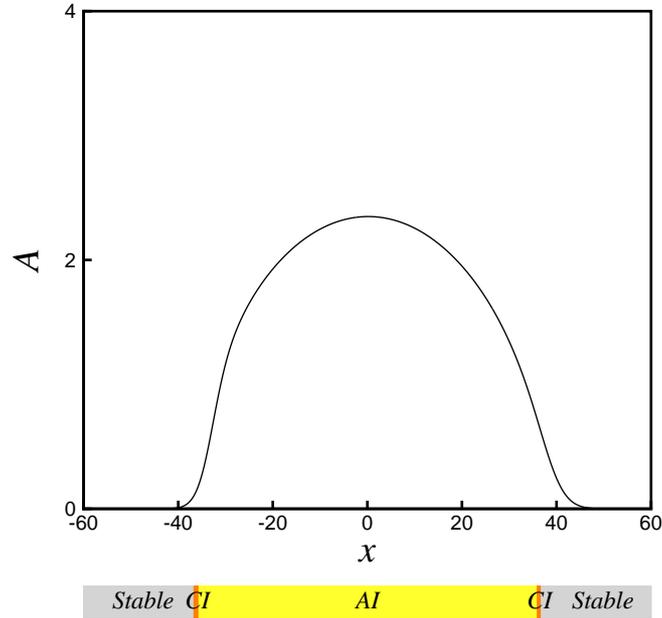


FIG. 3.10: Mode global non linéaire obtenu par la simulation numérique pour $Pe = 1$, $\varepsilon = 10^{-2}$ et $Ra = 45$.

- Δx , la longueur d'établissement des structures saturées, lorsque l'écoulement principal est supposé homogène (i.e. $\varepsilon = 0$).
- x_s , la position de l'amplitude maximum des solutions saturées en présence d'inhomogénéité.
- x_a , qui caractérise l'étendue de la région instable absolue de l'écoulement inhomogène de base.

Par application de méthodes de développements asymptotiques raccordés, Couairon et Chomaz [41] ont établi une loi d'échelle reliant la longueur d'établissement Δx à l'écart du seuil d'instabilité absolue Ra^A . Cette loi d'échelle s'écrit :

$$\Delta x \simeq \frac{1}{\sqrt{Ra - Ra^A}}.$$

Deux cas de figure limites peuvent se produire. Lorsque $x_a \gg \Delta x$, les effets non linéaires dominent l'inhomogénéité et x_s est voisin de Δx . Par contre, si $x_a \ll \Delta x$, les effets d'inhomogénéité dominent les effets non linéaires. Dans ce cas, le mode global non linéaire peut être décrit par la solution linéaire (3.28).

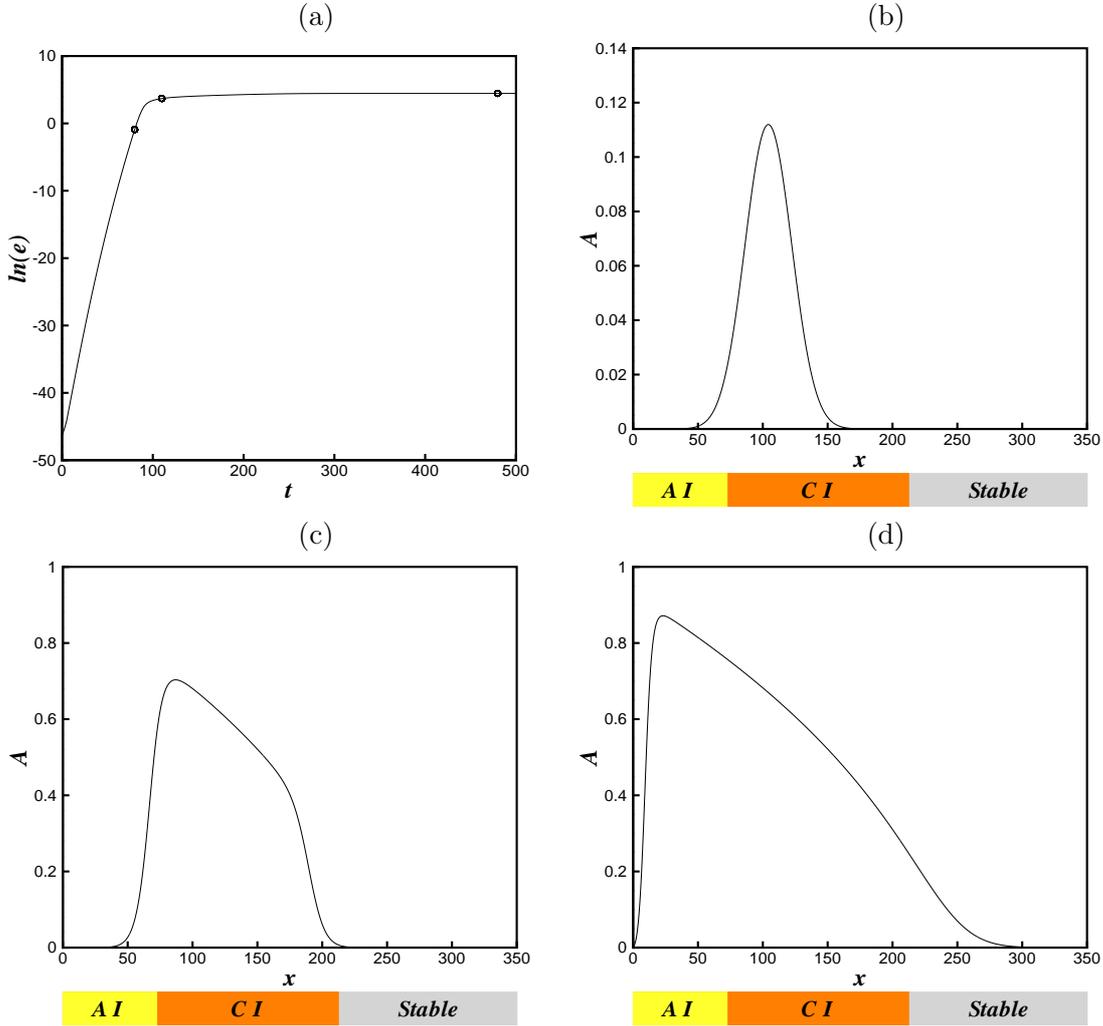


FIG. 3.11: Simulation numérique de l'évolution temporelle de l'instabilité obtenue avec $Pe = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$ et $Ra = 40.3345 > Ra_g^l$, initialisée par une impulsion infinitésimale d'amplitude 10^{-10} localisée à $x = 10$. Les cercles de la figure (a) correspondent aux temps des figures (b) $t = 80$, (c) $t = 110$ et (d) $t = 480$.

Les simulation numériques de l'équation de G-L (3.1) sont un bon test des prédictions théoriques citées à dessus. Pour $Pe = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-4}$ et Ra variable, la position du maximum de l'amplitude s'avère suivre la loi d'échelle $x_s \simeq \Delta x \simeq 5.083\pi/\sqrt{Ra - Ra^A}$ (ligne continue sur la figure 3.12), confirmant ainsi la loi d'échelle proposée, à condition que Ra ne soit pas trop proche du seuil global linéaire Ra_g^l . En effet, d'après la figure 3.13 qui montre l'emplacement de la position x_s (ligne discontinue) et la position x_a (ligne continue), on constate que la condition $x_a \gg x_s$ est satisfaite pour des valeurs de Ra suffisamment loin du seuil Ra_g^l .

Quant à l'amplitude maximale, elle est légèrement modifiée par rapport à celle observée

dans le cas homogène $A_s^h = \sqrt{Ra - Ra^c}$. La figure 3.14 représente une comparaison de l'amplitude maximale obtenue par les simulations numériques (points) avec celles qui sont obtenues théoriquement : cas homogène A_s^h (ligne discontinue) et cas inhomogène (ligne continue) obtenue par une extrapolation de l'amplitude $A(x_s) \simeq \sqrt{Ra(\varepsilon x_s) - Ra^c}$:

$$\begin{aligned}
 A_s^{inh} \sim A(x_s) &\simeq \sqrt{\bar{\varepsilon} + \frac{Pe^2}{4}} - \frac{\varepsilon (Ra^A + \bar{\varepsilon}) x_s}{2\sqrt{\bar{\varepsilon} + \frac{Pe^2}{4}}} \\
 &\simeq \sqrt{\bar{\varepsilon} + \frac{Pe^2}{4}} - \frac{5.083\pi\varepsilon}{2\sqrt{\bar{\varepsilon} + \frac{Pe^2}{4}}} \left(\frac{Ra^A}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \right), \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

avec : $\bar{\varepsilon} = Ra - Ra^A$, l'écart au seuil absolu.

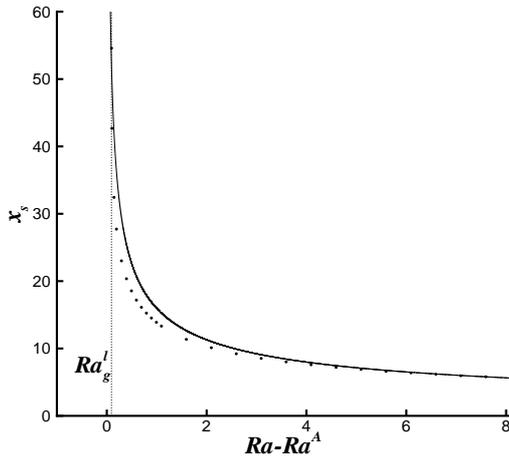


FIG. 3.12: Comparaison de la position du maximum de l'amplitude x_s obtenue par la simulation numérique (points) avec la loi d'échelle $x_s \simeq 5.083\pi/\sqrt{Ra - Ra^A}$, pour $Pe = 1.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$.

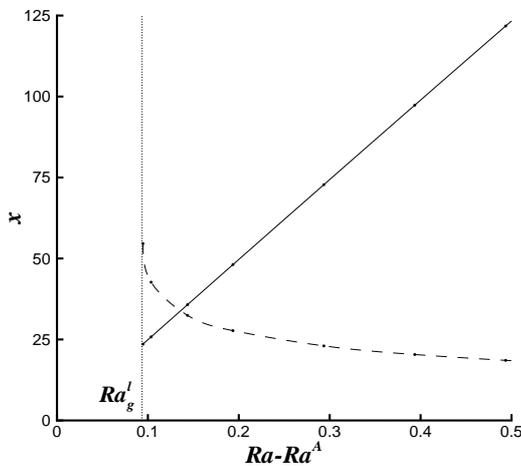


FIG. 3.13: L'emplacement de la position du maximum de l'amplitude x_s (ligne discontinue) et la position x_a qui définit la largeur de la zone absolument instable (ligne continue) en fonction de Ra , pour $Pe = 1.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$.

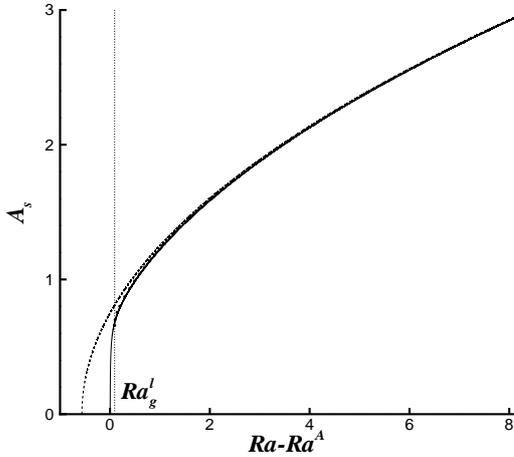


FIG. 3.14: Comparaison de l'amplitude maximum A_s obtenue par les simulations numériques (points) avec celles obtenues théoriquement : cas homogène $A_s^h = \sqrt{Ra - Ra^c}$ (ligne discontinue) et cas inhomogène $A_s^{inh} \simeq \sqrt{Ra(\varepsilon x_s) - Ra^c}$ (ligne continue), pour $Pe = 1.5$ et $\varepsilon = 10^{-4}$.

3.4 Conclusion

L'équation de Ginzburg-Landau avec coefficient spatialement variable a permis d'obtenir une solution analytique au problème de stabilité locale. Les résultats linéaires issus de ce formalisme ont été validés grâce au critère de sélection appliqué aux équations du problème dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy. L'accord entre les deux approches s'est avéré excellent pour de faibles valeurs de Pe . D'autre part, ce formalisme réduit a rendu accessible une simulation numérique de l'enveloppe et une validation du critère de sélection, par comparaison entre le nombre de Rayleigh global et la structure spatiale linéaire obtenus analytiquement et numériquement.

Dans le cas d'une configuration infinie, les simulations numériques de l'équation d'amplitude dans le régime fortement non linéaire donnent naissance à deux types de modes globaux suivant la valeur prise par Pe :

- des modes globaux doux "chapeaux" dont la structure spatiale ne comporte pas de front, semblable à celle des modes globaux linéaires pour des débits faibles ;
- des modes globaux raides "éléphants" pour des débits élevés et dont la structure spatiale développe un front raide au point amont de la transition convective/absolue.

Dans le cas semi-infini, les simulations numériques de l'équation de G-L dans le régime fortement non linéaire mettent en évidence des modes globaux non-linéaires délimités par un front amont arrêté au cours de sa propagation par la condition au bord à l'entrée. Ces modes globaux ont un maximum A_s se situant dans la région absolument instable, à une distance x_s de l'entrée. Ce maximum d'amplitude A_s et sa position spatiale x_s obéissent à des lois d'échelles proposées par Couairon et Chomaz [41].

Cependant, ce formalisme à coefficients réels n'a pas permis de prévoir la fréquence globale. D'autre part, il ne s'applique en toute rigueur qu'à des situations présentant de faibles valeurs de Pe et un faible écart du seuil global linéaire. Dans la perspective de s'affranchir de ces limites, une simulation numérique directe des équations originelles du problème dans le cadre de l'approximation de Boussinesq est nécessaire dans le cas fortement non linéaire.

Chapitre 4

Résultats de Simulations numériques directes des écoulements inhomogènes de convection mixte

Les observations expérimentales de convection mixte en milieu poreux disponibles dans la littérature ont mis en évidence l'émergence de structures synchronisées et auto-entretenues que l'on désigne par modes globaux. L'analyse de stabilité linéaire menée au chapitre 2 a permis de montrer que l'émergence d'un mode global est possible dès lors que l'écoulement inhomogène de base devient absolument instable dans une région spatiale suffisamment étendue. Lorsque cela se produit, nous avons montré que le mode propagatif structuré en rouleaux transversaux (i.e. mode 2D) est le mode dont le taux de croissance local absolu est le plus élevé. Dans ce contexte, la simulation numérique directe bidimensionnelle nous paraît justifiée.

Les objectifs recherchés des essais numériques sont :

- identifier les structures synchronisées dans le régime fortement non linéaire en fonction des paramètres Ra , Pe et le paramètre lié à l'inhomogénéité ε .
- déterminer les fréquences globales des oscillations de ces structures et vérifier la pertinence de critères de sélection proposés par la théorie des modes globaux non linéaires.
- discuter la loi d'échelle d'établissement de ces structures saturées.
- comparer les résultats des simulations numériques directes aux prédictions obtenues par l'équation de Ginzburg-Landau.
- comparer les fréquences globales des structures synchronisées avec l'expérience.

4.1 Mise en évidence de l'écoulement de base inhomogène

Il s'agit de résoudre le système complet des équations régissant le phénomène de convection mixte dans un milieu poreux bidimensionnel $\Omega = [-L_x, L_x] \cdot [-L_z, L_z]$, chauffé par le bas d'une façon inhomogène. Les équations modélisant le problème ont été présentées au chapitre 1 et s'écrivent sous forme adimensionnelle :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{V} + \nabla P = RaT\mathbf{e}_z, \quad (4.2)$$

$$\partial_t T + \mathbf{V} \cdot \nabla T - \Delta T = 0, \quad (4.3)$$

auquel on associe des conditions aux limites inhomogènes du type Dirichlit sur la température T :

$$\begin{cases} T(x, z = -L_z) = 1 - F(\varepsilon x), \\ T(x, z = +L_z) = 0, \\ T(x = \pm L_x, z) = \frac{(L_z - z)}{2L_z}(1 - F(\pm \varepsilon L_x)), \end{cases} \quad (4.4)$$

et des conditions aux limites homogènes du type Dirichlit sur les composantes de la vitesse u et w :

$$\begin{cases} u(x = \pm L_x, z) = Pe, \\ w(x, z = \pm L_z) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous avons exposé dans l'annexe B la méthode spectrale utilisée afin de résoudre numériquement le système non linéaire (4.1)-(4.3) avec les conditions aux limites (4.4)-(4.5).

Le code numérique utilisé est une extension d'un code développé par Batoul et al. [116], conçu pour résoudre directement le problème de Stokes (2D/3D) appliqué à la cavité entraînée. La première étape de ce solveur de Stokes est un solveur de Darcy où la décroissance exponentielle de la vitesse en fonction de la fréquence de coupure est observée. L'ordre temporel du schéma a été confirmé. De plus on montre que le schéma est stable et consistant en temps et en espace. A titre d'exemple, nous trouvons une divergence de l'ordre de 10^{-9} pour les simulations couramment utilisées. Les domaines numériques sont $(x, z) \in [-L_x, L_x; 0, 1]$ pour le cas d'une poche d'instabilité absolue dans le milieu et $(x, z) \in [x = 0, L_x; 0, 1]$ dans le cas d'une entrée absolument instable. Ils sont choisis de telle sorte que l'écoulement de base soit toujours stable dans une région finie près de la sortie. La résolution numérique permet d'obtenir le champ total de l'écoulement. La perturbation est déterminée à posteriori, en soustrayant du champ total, l'approximation analytique de l'état de base approchée par (1.29).

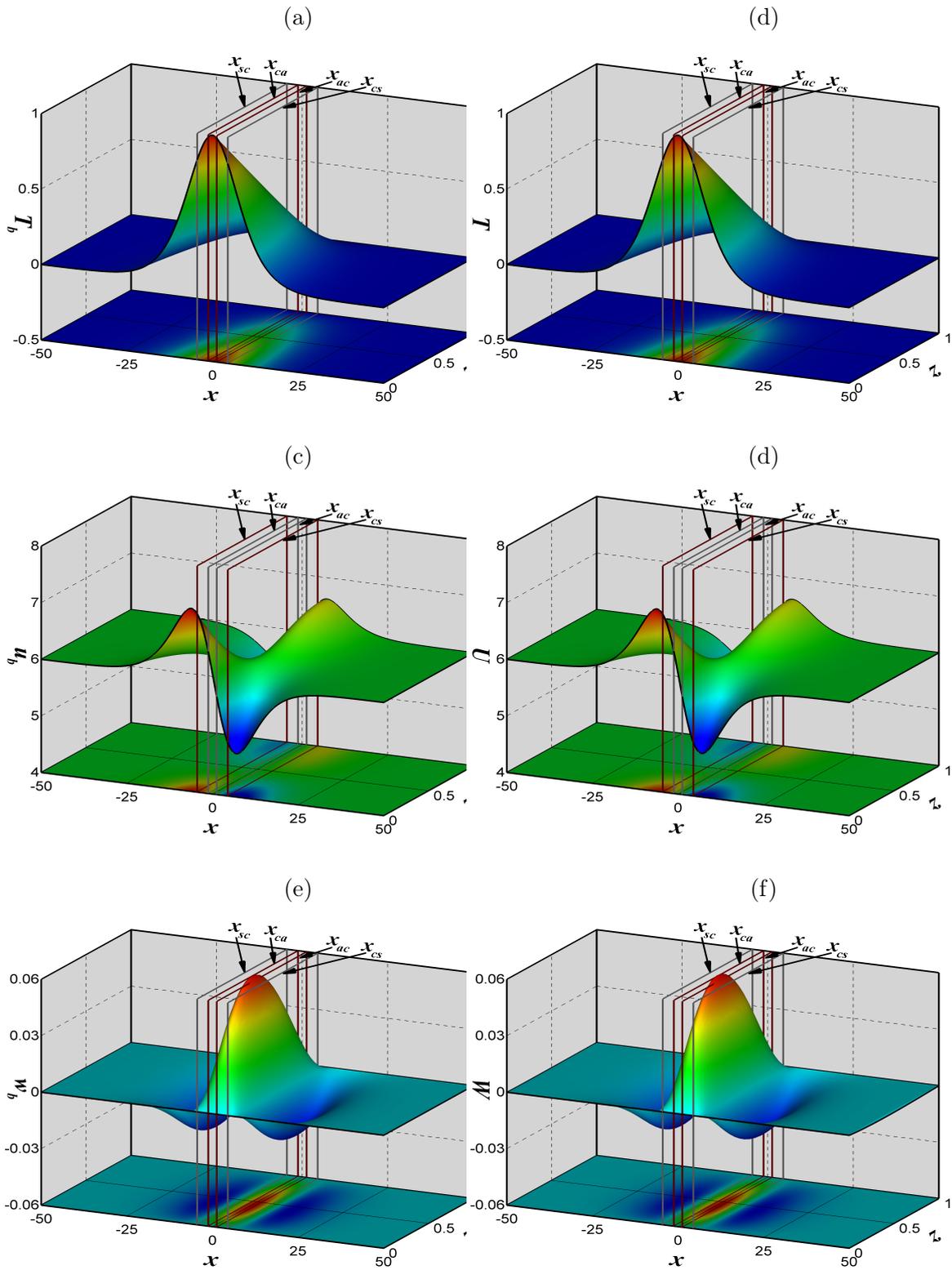


FIG. 4.1: (a), (c) et (e) respectivement la température T_b et les deux composantes u_b et w_b du champ de vitesse de l'écoulement de base analytique. (b), (d) et (f) respectivement la température T et les deux composantes U et W du champ de vitesse de l'écoulement obtenues numériquement. Avec $\varepsilon = 0.1$, $Pe = 6$, et $Ra^A \approx 47.172 < Ra = 47.913 < Ra_g^l \approx 48.654$.

Comme tests de validation, les résultats de Dufour et Néel [24] et de Delache [27] dans le cas d'un chauffage homogène ($\varepsilon = 0$) ont été reproduits avec succès.

Dans le cas d'un chauffage inhomogène ($\varepsilon \neq 0$), les simulations numériques indiquent qu'en l'absence d'une région absolument instable suffisamment large, (i.e. $Ra < Ra_g^l$, toute perturbation initiale est amortie et le système, bien qu'instable, voire absolument instable localement, retrouve asymptotiquement l'état de conduction. Ce résultat est en conformité avec les conditions nécessaires à l'émergence d'un mode global dégagées au chapitre 2. Ainsi, ce scénario est bien respecté à travers l'exemple d'illustration suivant, pour lequel nous avons fixé les paramètres à $\varepsilon = 0.1$, $Pe = 6$, et $Ra^A \approx 47.172 < Ra = 47.913 < Ra_g^l \approx 48.654$. La solution stationnaire obtenue numériquement, après un temps transitoire, relaxe vers la solution de base en absence de toute forme de structures thermo-convectives. Nous avons estimé utile de la comparer à la solution de base obtenue par l'approximation analytique (1.29) dans le cas du milieu infini. Les composantes de la vitesse (U et W) et la température T obtenues numériquement (trait discontinu) et celles de la solution analytique de base (u_b , w_b et T_b) (trait continu) sont représentées sur la figure 4.1. Une comparaison entre les isocontours de la solution numérique (U , W et T) et ceux de la solution analytique de base (u_b , w_b et T_b) est également illustrée sur la figure 4.2. Cette comparaison, très favorable, nous rassure de la validité de la solution approximative 1.29, obtenue analytiquement au chapitre 1.

4.2 Structures synchronisées dans le régime fortement non linéaire

4.2.1 Configuration infinie

Pour bien illustrer la forme spatiale des oscillations synchronisées dans le domaine fortement non linéaire, des simulations numériques sont menées pour des valeurs de Ra éloignées de la valeur seuil Ra_g^l obtenue par l'analyse linéaire de stabilité exposée au chapitre 2. Le domaine numérique $(x, z) \in [-20, 20; 0, 1]$ est suffisamment étendu pour modéliser le domaine ouvert infini pour les simulations numériques exposées dans ce paragraphe. Nous avons fixé la valeur du nombre de Rayleigh à $Ra = 75$, assurant ainsi une zone instable dans l'intervalle $x \in [-8.2, 8.2]$, le système étant linéairement stable ailleurs. Dans la perspective d'apprécier l'influence du flux moyen de l'écoulement principal sur les caractéristiques des structures thermo-convectives pleinement développées, nous avons conduit des essais numériques avec $\varepsilon = 0.1$ pour différents nombres de Pe .

La figure 4.3 met en évidence la forme spatiale de la solution saturée de certaines grandeurs physiques, obtenues pour $Pe = 1$. Dans ce cas de figure où nous pouvons constater que l'étendue spatiale de la zone d'instabilité absolue locale est pratiquement identique à la zone d'instabilité locale, les structures thermo-convectives saturées adoptent la forme d'un mode global chapeau avec une amplitude qui varie lentement dans l'espace (figure

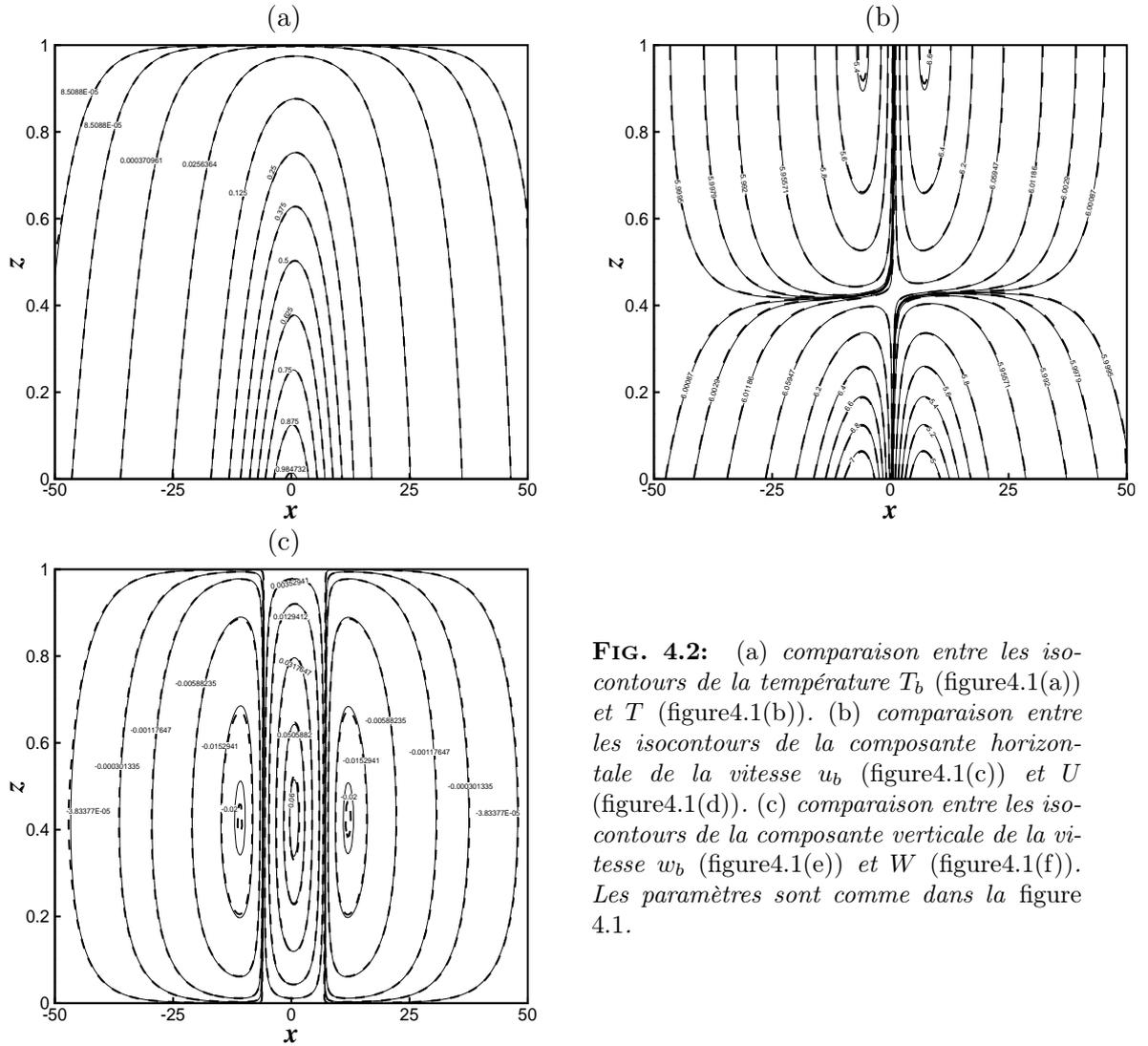
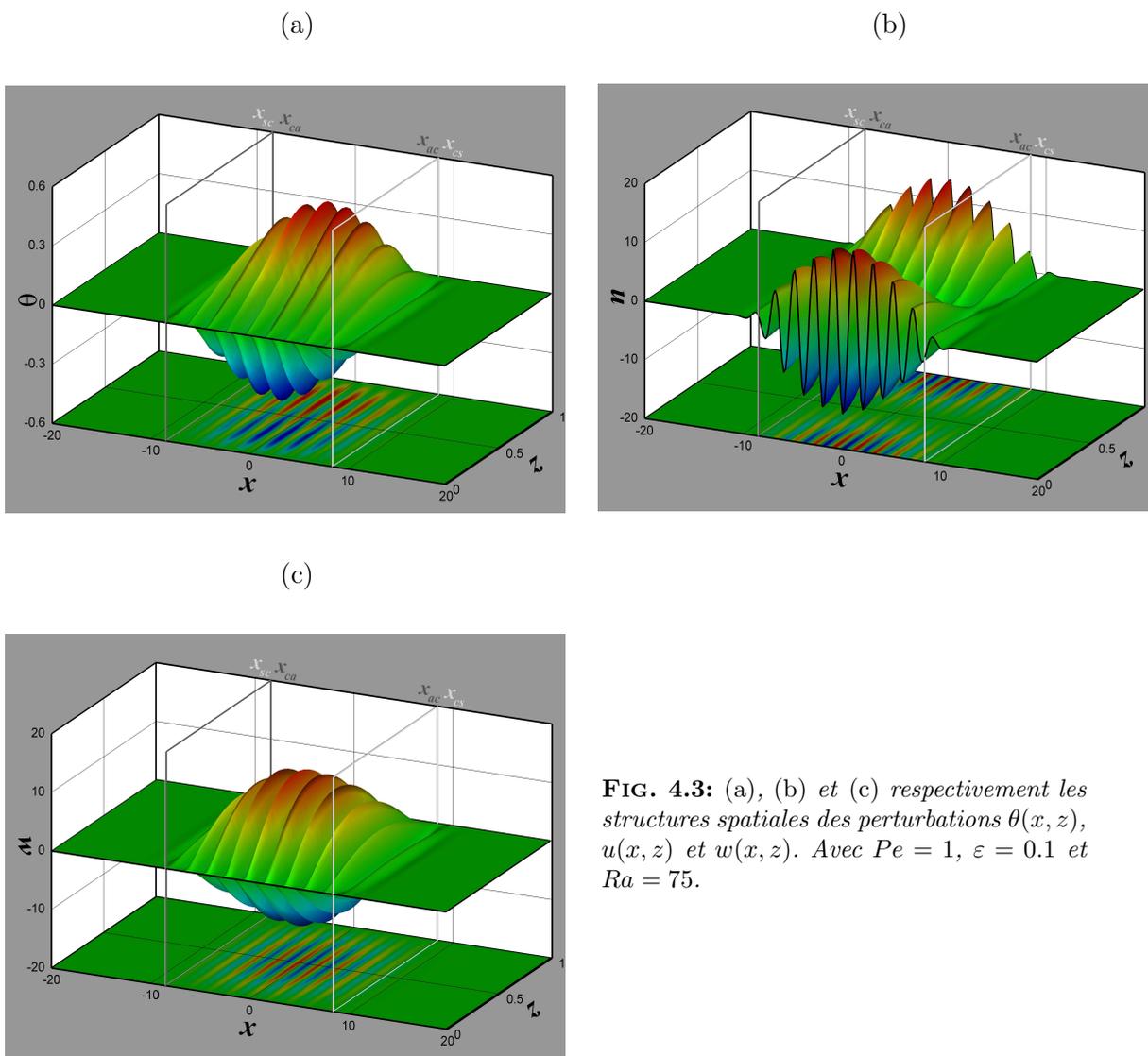


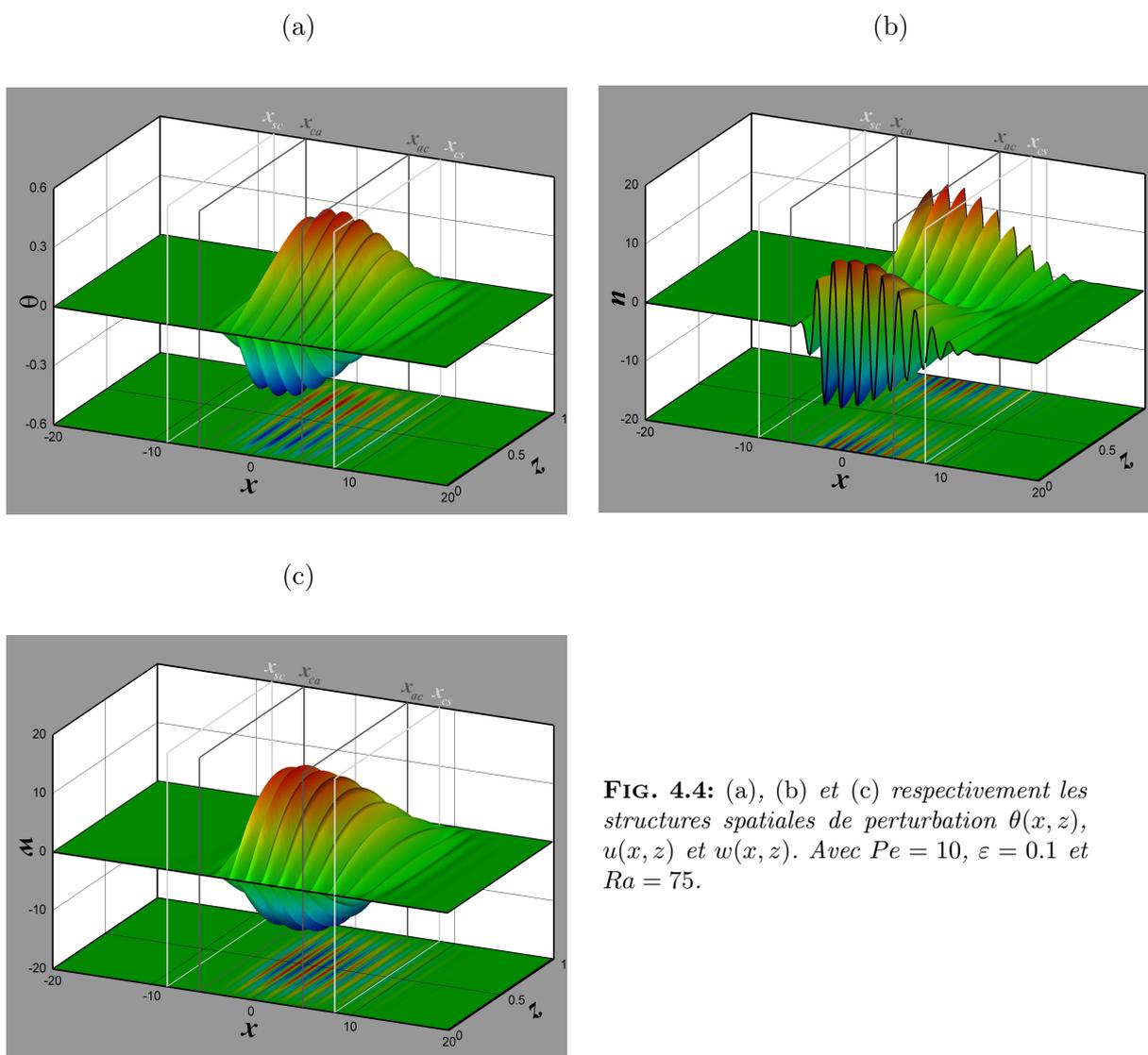
FIG. 4.2: (a) comparaison entre les isocontours de la température T_b (figure4.1(a)) et T (figure4.1(b)). (b) comparaison entre les isocontours de la composante horizontale de la vitesse u_b (figure4.1(c)) et U (figure4.1(d)). (c) comparaison entre les isocontours de la composante verticale de la vitesse w_b (figure4.1(e)) et W (figure4.1(f)). Les paramètres sont comme dans la figure 4.1.

4.3(d)). Notons que pour cette valeur petite de Pe , la symétrie de réflexion $x \rightarrow -x$ est presque respectée au regard de la forme spatiale de ce mode global chapeau.

Lorsque le flux moyen de l'écoulement principal est augmenté, les simulations numériques confirment que les structures spatiales thermo-convectives sont le siège d'une brisure de symétrie $x \rightarrow -x$, dont l'une des conséquences est la formation d'un front raide au point de transition amont instable convectif/absolu. La structure spatiale du mode global non-linéaire est celle d'un mode éléphant comme le montre la figure 4.4, obtenue pour $Pe = 10$, et où nous avons représenté la solution saturée de certaines grandeurs physiques.

Pour illustrer la transition observée dans la nature du mode global non-linéaire, une série de simulations numériques a été effectuée pour différents nombres de Pe (de $Pe = 1$ à $Pe = 10$). La figure 4.5 présente la structure spatiale de la composante verticale w de la vitesse du mode global non-linéaire dans le plan médian $z = 0.5$. Comme le montre cette figure, dès que le nombre de Pe augmente, le front qui se forme au voisinage du





point de transition amont instable convectif/instable absolu x_{ca} est de plus en plus raide. Cette structure spatiale fait l'objet d'une étude plus détaillée dans le paragraphe 4.5. Elle n'est pas seulement motivée pour des raisons académiques aussi nobles qu'elles soient, mais également pour mieux appréhender les transferts de chaleur et d'énergie qui dépendent de la sélection du système d'une structure spatiale particulière plutôt qu'une autre.

4.2.2 Configuration semi-infinie

Cette section vise à mettre en évidence les modes globaux non-linéaires des écoulements de convection mixte en présence d'une région d'instabilité absolue suffisamment étendue à l'entrée de la couche poreuse. Pour un ensemble de paramètres fixés dans le régime fortement non-linéaire, les simulations numériques directes montrent que la solution est composée d'un front reliant l'état conductif de base à l'entrée aux structures thermo-convectives saturées en aval. Un exemple est reproduit sur la figure 4.6 pour $Ra = 52$, $Pe = 5$ et $\varepsilon = 0.01$. La région absolument instable s'étend de l'entrée du massif poreux à la position $x_{ac} \approx 13.4895$. Cette figure montre que la structure spatiale du mode global non-linéaire s'étend en aval au-delà de la position stable neutre $x_{cs} \approx 24.5522$ et la position de la valeur maximale de l'amplitude est localisée dans la région absolument instable. La longueur d'établissement de ses structures thermo-convectives est discutée en détail au paragraphe 4.5 et où une loi d'échelle appropriée est proposée.

4.2.3 Comparaison avec la structure spatiale du mode global linéaire

Il est intéressant d'apprécier le rôle des non linéarités dans la formation des structures synchronisées, au delà de leur rôle attendue de saturation. Cette tâche est accomplie à travers une comparaison de la structure spatiale du mode global linéaire obtenu au chapitre 2 avec celle issue de la simulation numérique directe du problème non linéaire.

Sur la figure 4.7, nous avons tracé le taux local maximum de croissance temporelle $\Im(\omega_0^{max})(x)$ (trait discontinu) et le taux local de croissance du mode global linéaire associé $\Im(\omega_0^0)(x)$ (trait continu). Le seuil Ra_g^l de l'émergence du mode global linéaire correspond à $\Im(\omega_0^0)(x = 0) = 0$. Au seuil, ce mode global linéaire est représenté respectivement sur la figure 4.7(c) pour une configuration semi-infinie avec $Pe = 5$ et $\varepsilon = 0.01$ et sur la figure 4.5(d) pour une configuration infinie avec $Pe = 6$ et $\varepsilon = 0.01$. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, ces modes globaux linéaires s'étalent spatialement de telle sorte que le maximum de leur amplitude est atteint au voisinage du point de transition avale entre le domaine d'instabilité convective et la zone stable. Les simulations numériques directes du problème montrent que les non linéarités transforment d'une façon drastique la distribution spatiale des solutions saturées. Pour une configuration semi-infinie et pour $Ra = 52 > Ra_g^l$, la figure 4.7(g) renseigne sur la distribution spatiale des solutions, qui sont repoussées vers l'amont pour s'amortir au voisinage de l'entrée du milieu et dont le maximum de l'amplitude se situe dans la zone absolument instable. D'une façon similaire, pour une configuration infinie et pour $Ra = 60 > Ra_g^l$, la figure 4.7(h) montre que les non linéarités favorisent

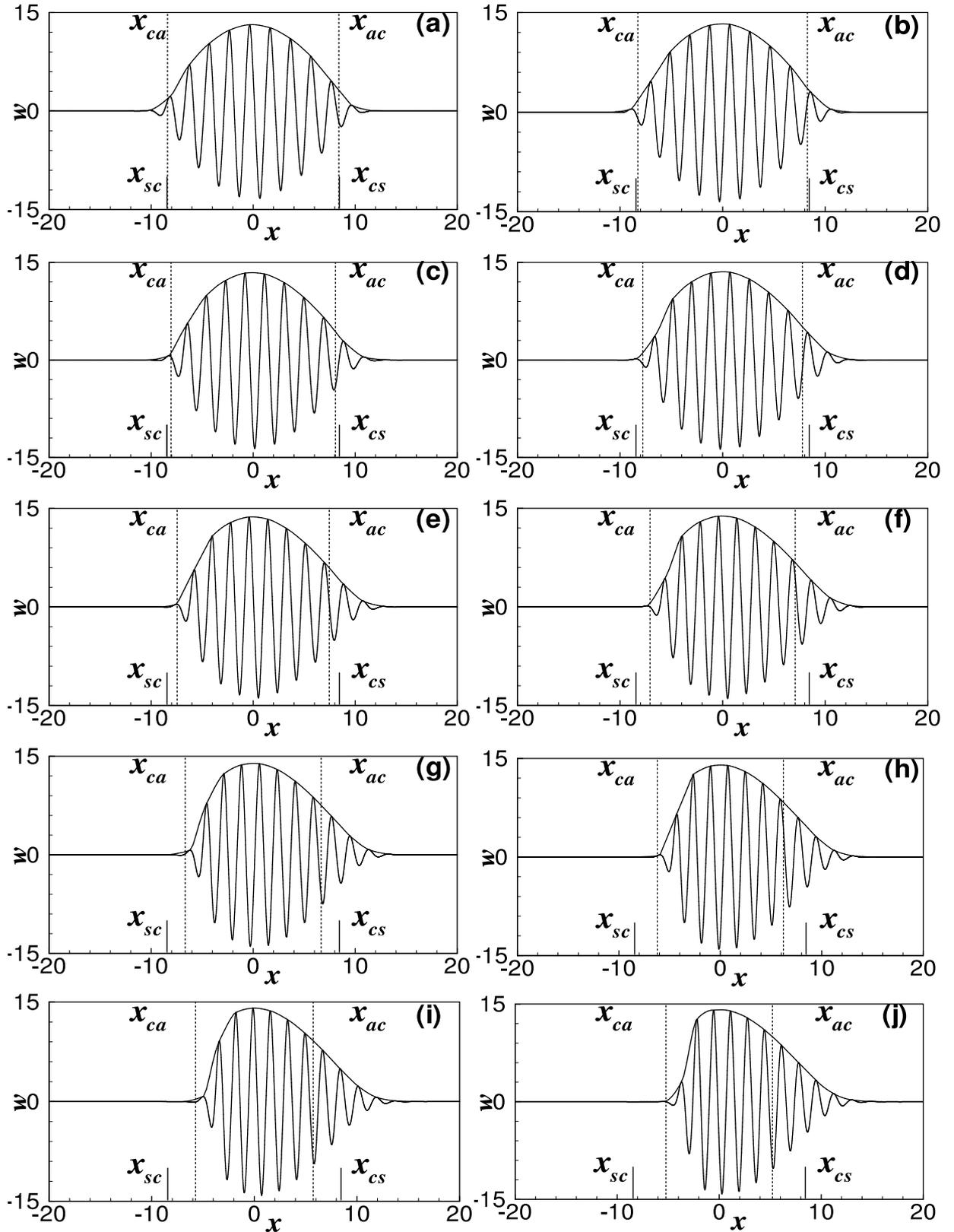
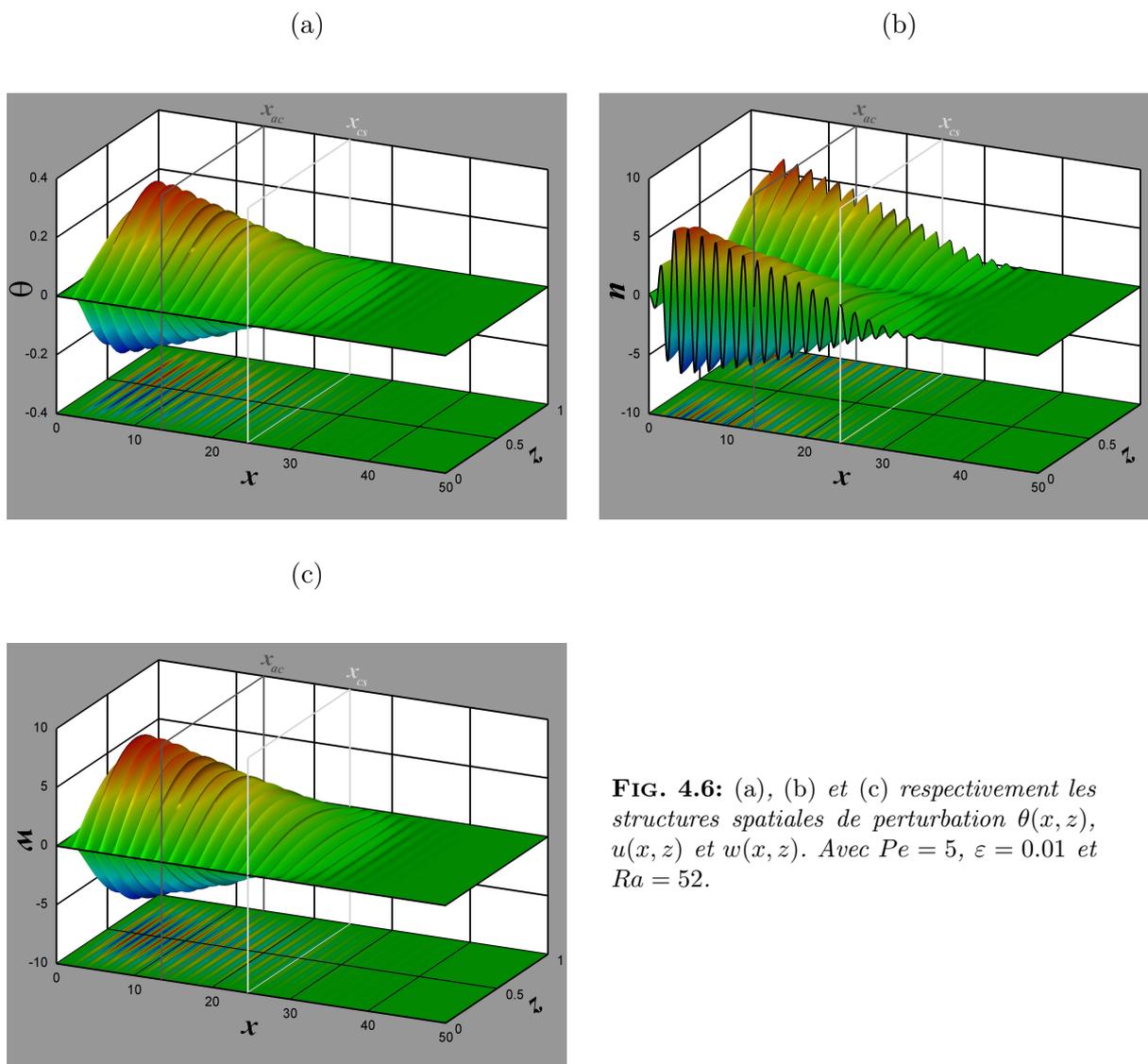


FIG. 4.5: la structure spatiale du mode global (w) dans le plan $z = 0.5$: (a) $Pe = 1$, (b) $Pe = 2$, (c) $Pe = 3$, (d) $Pe = 4$, (e) $Pe = 5$, (f) $Pe = 6$, (g) $Pe = 7$, (h) $Pe = 8$, (i) $Pe = 9$ et (j) $Pe = 10$. Avec $\varepsilon = 0.1$ et $Ra = 75$.



l'établissement d'un mode global raide qui se développe à partir de la position spatiale amont où le système observe une transition instable convective/instable absolue.

4.2.4 Comparaison avec les prédictions de l'équation de Ginzburg-Landau

Dans le chapitre précédent, on a montré que les résultats analytiques (seuil critique global, structure spatiale du mode global linéaire et sa fréquence) issus de la version linéaire de l'équation de G-L et ceux qui sont obtenus des équations complètes du problème dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et la loi de Darcy sont en excellent accord pour de faibles valeurs de Péclet. Qu'en est-il lorsque les effets non-linéaires jouent pleinement leurs rôles ? La réponse à cette question nous renseigne sur la pertinence et le champ d'application du modèle de G-L dans le régime non linéaire. Elle est apportée par comparaison des résultats des simulations numériques directes et des simulations numériques de l'équation de G-L en se limitant à des faibles valeurs du nombre de Péclet.

Cas d'une configuration infinie

Pour $Pe = 1$ et $\varepsilon = 0.05$, les simulations numériques sont conduites successivement pour une valeur de Rayleigh ($Ra = 40.5$), très proche du seuil critique global $Ra_g^l \simeq 40.36$ et pour $Ra = 45$, relativement loin du seuil.

Pour $Ra = 40.5$, les résultats des simulations numériques sont représentés successivement sur la figure 4.8(a) pour l'équation de G-L et sur la figure 4.8(b) pour les équations complètes du problème. Au regard de ces résultats, nous constatons que le modèle de G-L sous estime la valeur maximale A_s de l'amplitude ; $A_s \simeq 0.5$ pour le modèle de G-L, alors que $A_s = w_s \simeq 1$ pour le problème originel. Cette observation de désaccord étant faite, nous comparons ensuite l'étendue spatiale des deux solutions. Nous représentons sur la figure 4.8(c) les deux solutions normalisées par la valeur maximale A_s de l'amplitude trouvée par le biais du modèle G-L. Cette figure montre clairement que la distribution spatiale des deux solutions est pratiquement similaire, l'écart relatif ne dépasse pas les 2% (figure 4.8(d)).

Les simulations numériques avec des valeurs de Rayleigh suffisamment loin du seuil critique global confirment les comportements, signalés ci-dessus, observés au voisinage du seuil. L'inspection des solutions représentées sur le graphe 4.9, obtenues pour $Ra = 45$ est une illustration de ces comportements.

Cas d'une configuration semi-infinie

Les simulations numériques des équations complètes du problème et du modèle de G-L pour une configuration semi-infinie aboutissent aux mêmes constatations que dans le cas d'une configuration infinie. Le désaccord en termes de valeurs maximales des amplitudes

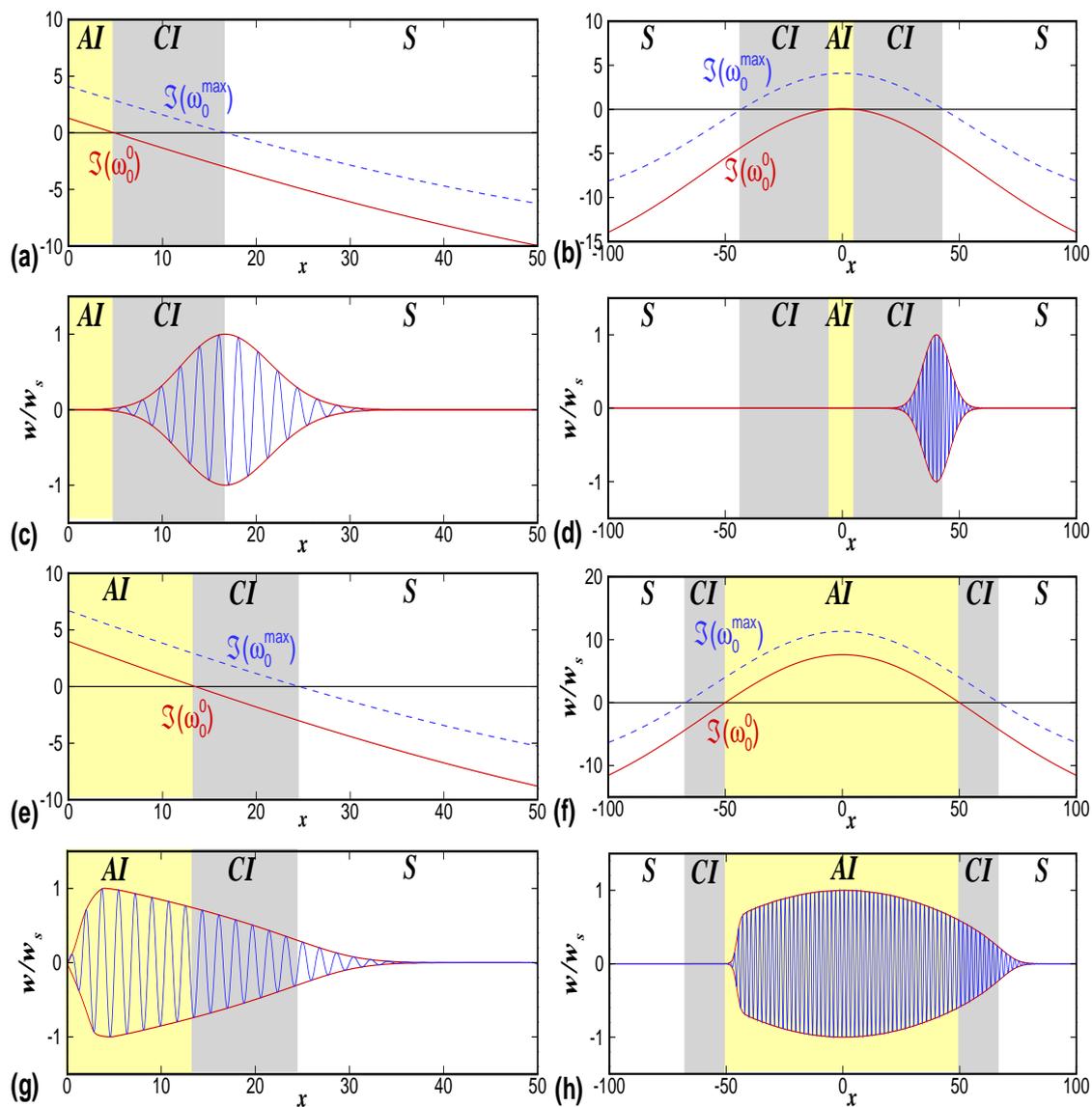


FIG. 4.7: Comparaison du mode global linéaire et non linéaire. Les figures (a), (c), (e) et (f) sont propres à une configuration semi-infinie, alors que les figures (b), (d), (f) et (h) le sont pour une configuration infinie. les figures a et b représentent le taux maximum de croissance temporelle (ligne discontinue) et le taux maximum du mode global (ligne continue). Les figures (c) et (d) illustrent le mode global linéaire pour $Ra = Ra_g^l$ alors que les figures (g) et (h) représentent les modes globaux non linéaires pour $Ra > Ra_g^l$

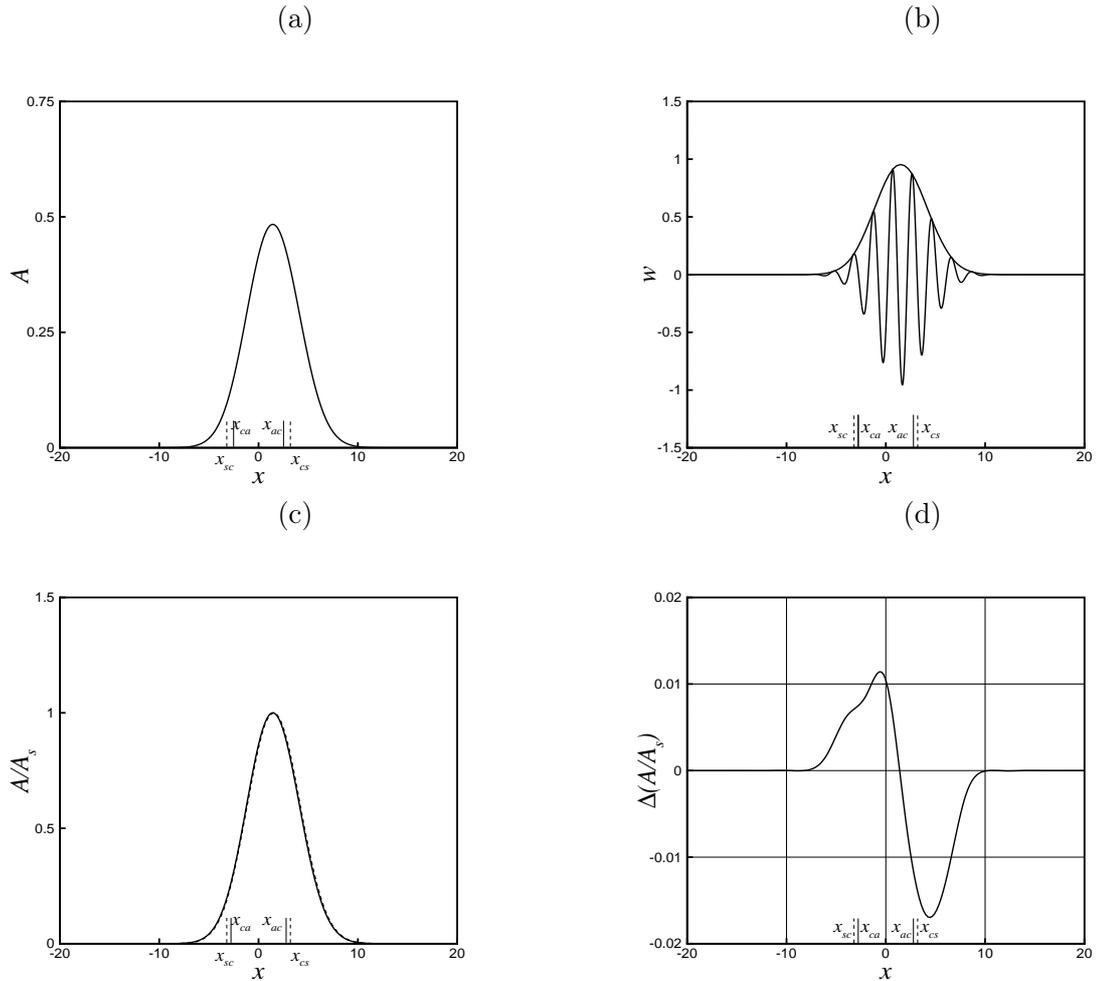


FIG. 4.8: Comparaison des solutions numériques en formalisme d'enveloppe (a) et par les équations complètes du problème (b). La situation décrite pour $Pe = 1$, $\varepsilon = 0.05$ et $Ra = 40.5$. (c) comparaison de l'enveloppe de l'amplitude normalisée du mode global non-linéaire (ligne continue (a) et ligne discontinue (b)). La différence relative est de l'ordre 0.01 (d).

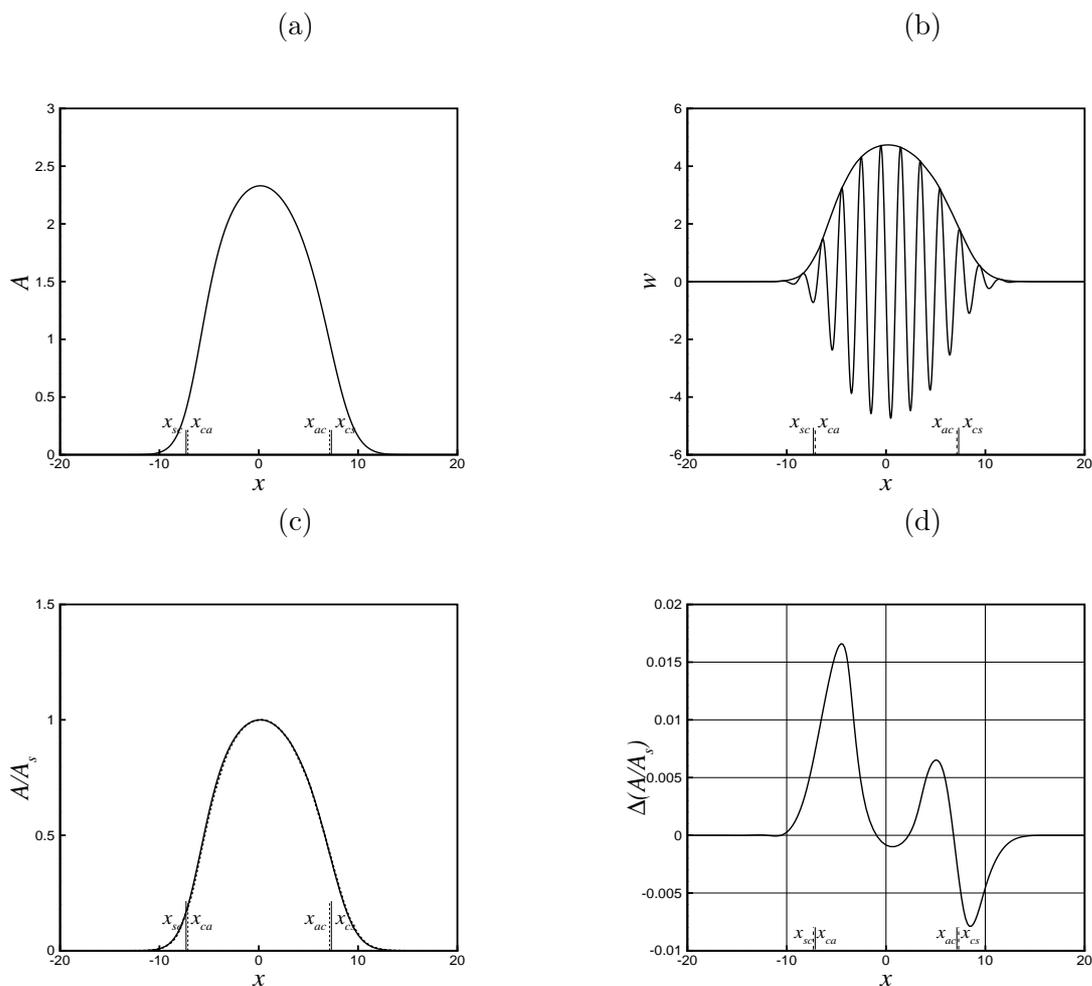


FIG. 4.9: Comparaison des solutions numériques en formalisme d'enveloppe (a) et par les équations complètes du problème (b). La situation décrite pour $Pe = 1$, $\varepsilon = 0.05$ et $Ra = 45$. (c) comparaison de l'enveloppe de l'amplitude normalisée du mode global non-linéaire (ligne continue (a) et ligne discontinue (b)). La différence relative est de l'ordre 0.01 (d).

des solutions persiste, et un accord parfait de leur distribution spatiale est confirmé.

Le premier exemple, obtenu pour une valeur de Rayleigh ($Ra = 40.3$) très proche du seuil critique global ($Ra_g^l(Pe = 1, \varepsilon = 0.001) \simeq 40.161$) montre que la position du maximum de l'amplitude est $x_s \simeq 11.987$ pour le mode global non-linéaire issu du modèle de G-L est pratiquement confondue avec $x_s \simeq 11.988$ obtenu par les équations complètes du problème (figure 4.10). Cet accord parfait persiste pour des valeurs de Rayleigh suffisamment loin du seuil critique global. Pour $Ra = 45$, la simulation numérique du modèle de G-L montre que $x_s \simeq 4.795$, à comparer à $x_s \simeq 4.834$ issue des équations complètes du problème (figure 4.24).

Commentaires des résultats

Pour les deux configurations génériques étudiées, des comparaisons des résultats de simulations numériques directes et de l'équation de G-L limitées à des faibles valeurs du nombre de Péclet, nous pouvons conclure que :

- le modèle de G-L sous estime la valeur maximale de l'amplitude des structures thermo-convectives.
- les distributions spatiales des structures thermo-convectives obtenues par le modèle mathématique originel et par le formalisme réduit à l'équation de G-L sont pratiquement similaires.

Ces résultats sont observés aussi bien au voisinage du seuil global de l'instabilité que relativement loin de celui-ci.

4.3 Fréquence d'oscillations des structures synchronisées pleinement développées

4.3.1 Mise en évidence des oscillations globales

Configuration infinie

Pour déterminer la fréquence globale des structures oscillatoires, on suit l'évolution dans le temps de la composante verticale W de la vitesse ou de la température T en plusieurs points du domaine numérique. Sur les figures 4.12((a), (c) et (e)) et 4.13((a), (c) et (e)), nous avons tracé respectivement pour $Pe = 1$ et $Pe = 10$ le suivi temporel de la composante verticale W de la vitesse en trois points différents ($x = -5.94$, $x = 0$

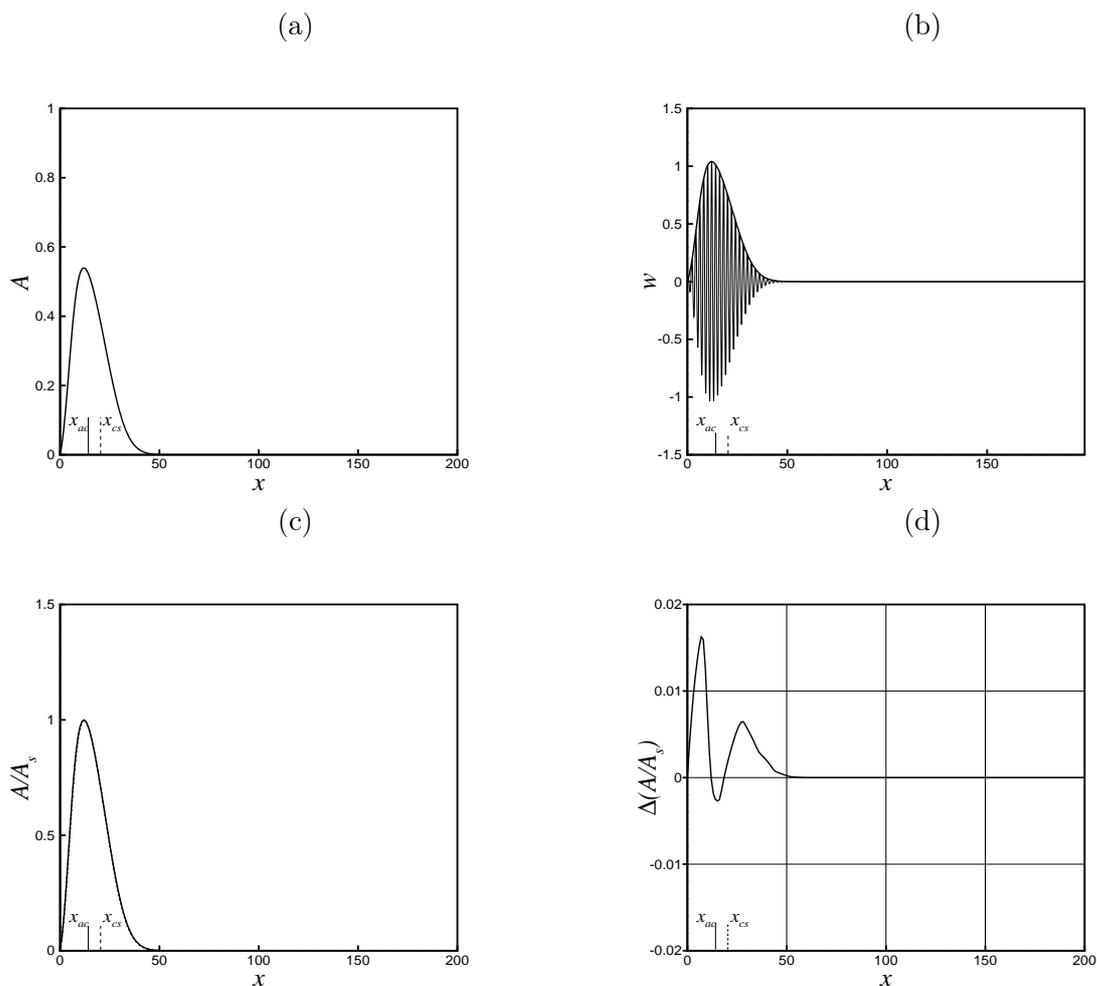


FIG. 4.10: Comparaison des solutions numériques en formalisme d'enveloppe (a) et par les équations complètes du problème (b). La situation décrite pour $Pe = 1$, $\varepsilon = 0.001$ et $Ra = 40.3$. (c) comparaison de l'enveloppe de l'amplitude normalisée du mode global non-linéaire (ligne continue (a) et ligne discontinue (b)). La différence relative est de l'ordre 0.01 (d).

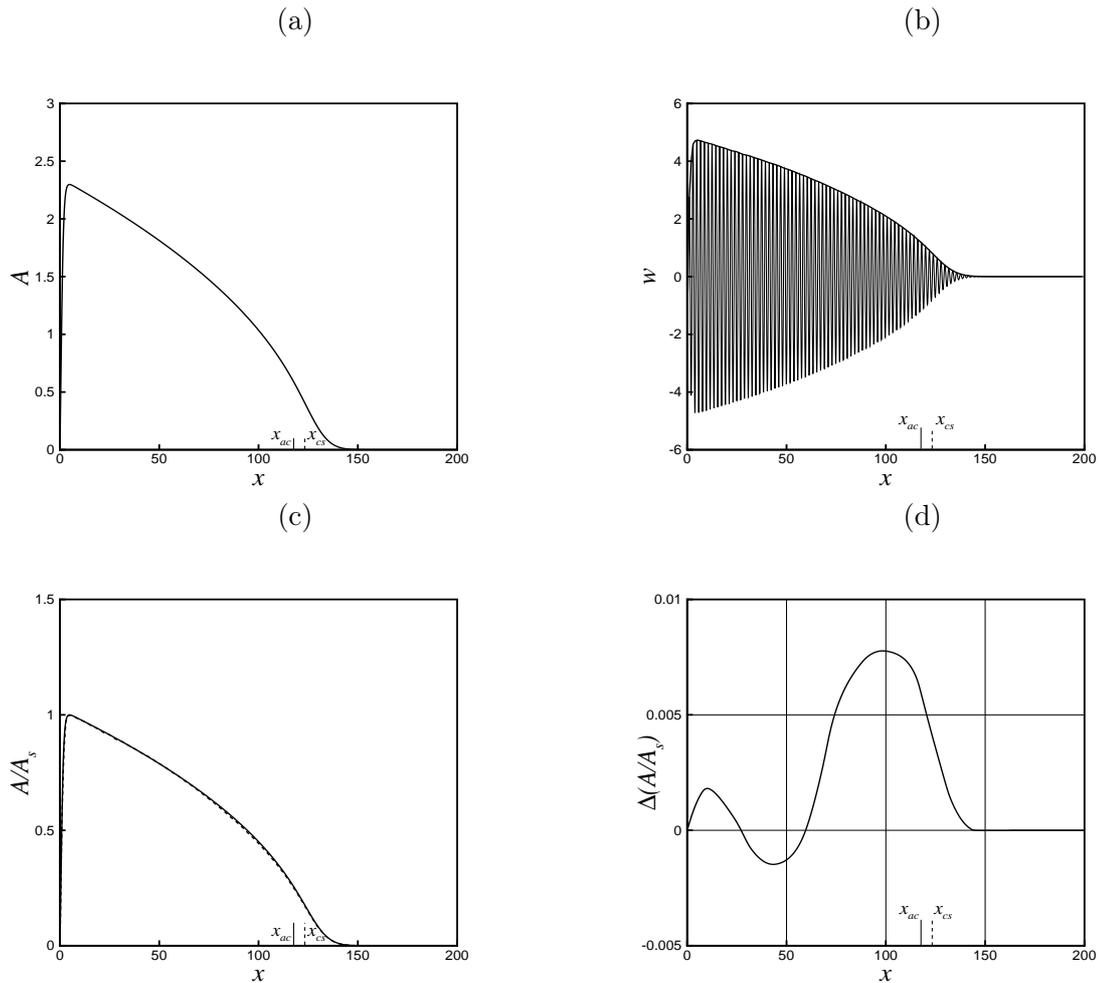


FIG. 4.11: Comparaison des solutions numériques en formalisme d'enveloppe (a) et par les équations complètes du problème (b). La situation décrite pour $Pe = 1$, $\varepsilon = 0.001$ et $Ra = 45$. (c) comparaison de l'enveloppe de l'amplitude normalisée du mode global non-linéaire (ligne continue (a) et ligne discontinue (b)). La différence relative est de l'ordre 0.01 (d).

et $x = 13.86$) situés dans le plan médian $z = 0.5$ de l'écoulement instationnaire. Les simulations numériques montrent que l'amplitude augmente jusqu'à ce que la saturation non-linéaire soit atteinte et le champ d'écoulement soit strictement périodique. Nous avons déterminé le spectre temporel associé à ces points en effectuant une transformée de Fourier rapide (FFT) sur la composante verticale W de la vitesse. Sur les figures 4.12((b), (d) et (f)) et 4.13((b), (d) et (f)), nous avons tracé le module de la transformée de Fourier en fonction des pulsations ω . Le spectre de ces derniers, se réduit à la forme particulière d'un "pic" autour d'une pulsation précise. Ces figures mettent en évidence les fréquences des oscillations des structures thermo-convectives ω_g ($\omega_g(Pe = 1) \approx 3.2106$ et $\omega_g(Pe = 10) \approx 37.8268$) et leurs harmoniques. Les trois points oscillent à la même fréquence, ce qui démontre que l'instabilité globale se manifeste par des oscillations non linéaires saturées ayant une fréquence intrinsèque bien définie.

Configuration semi-infinie

Comme pour la configuration infinie, l'évolution dans le temps de la composante verticale W de la vitesse et le spectre temporel associé en deux points $x = 14.2$ et $x = 27.4$ du plan median, sont montrés sur la figure 4.14. Les paramètres sont fixés à $Pe = 5$, $\varepsilon = 0.01$ et $Ra = 52$. Ces figures montrent qu'après une période transitoire, les structures thermo-convectives battent avec une fréquence globale $\omega_g \approx 17.7497$.

Ayant mis en évidence les oscillations auto-entretenues de convection mixte, la tâche centrale qui reste à élucider à ce stade de notre mémoire, est celle d'identifier les mécanismes qui sont derrière la sélection de la fréquence globale de ces oscillations. C'est l'objet du paragraphe suivant.

4.3.2 Critère de sélection de la fréquence globale des oscillations

Configuration infinie

Dans la perspective de vérifier si les oscillations globales observées par voie de simulation numérique directe sont connectées à des propriétés locales d'instabilité linéaire, nous avons déterminé, à partir de l'équation de dispersion linéaire obtenue au chapitre 2, la variation spatiale de la fréquence absolue locale $\Re(\omega_0)$. Pour $Ra = 75$ et $\varepsilon = 0.1$, cette variation est représentée sur les figures 4.15(a) et 4.15(b), respectivement pour $Pe = 1$ et $Pe = 10$. Sur les mêmes figures, nous avons reporté les valeurs de la fréquence globale ω_g ($\omega_g(Pe = 1) \approx 3.2106$ et $\omega_g(Pe = 10) \approx 37.8268$) déterminée par simulation numérique directe (trait discontinu horizontal). Ces figures montrent que ω_g est très proche de la fréquence absolue linéaire ω_0^{ca} ($\omega_0^{ca}(Pe = 1) \approx 3.1514$ et $\omega_0^{ca}(Pe = 10) \approx 36.2947$) au point de transition x_{ca} entre la zone amont instable convective et la zone instable absolue. Cet excellent accord suggère que le front d'onde qui s'installe à la frontière amont x_{ca} de la zone d'instabilité absolue, agit comme un oscillateur et impose sa fréquence à l'écoulement tout

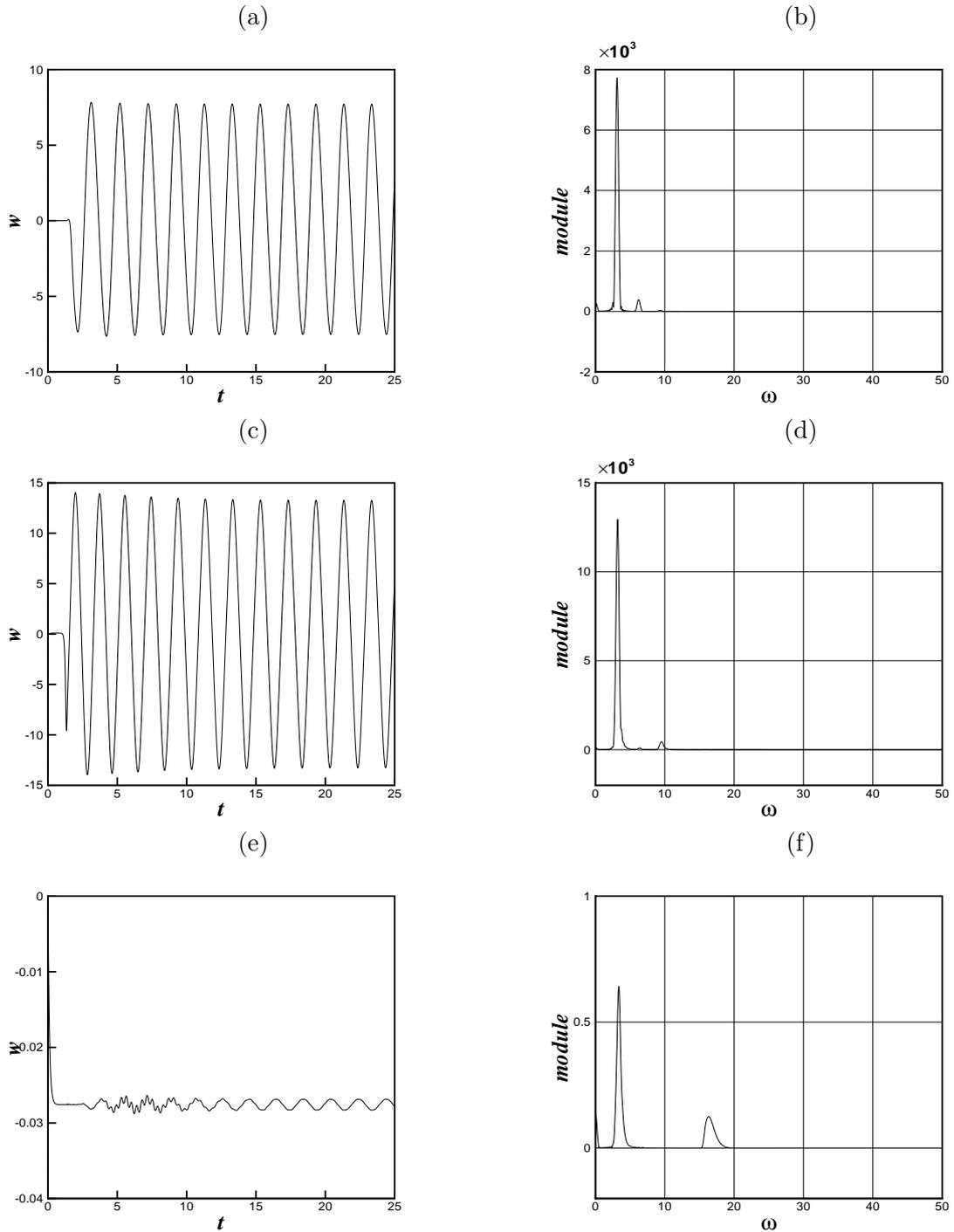


FIG. 4.12: (a), (c) et (e) Le suivi temporel et (b), (d) et (f) la transformée de Fourier temporelle (FFT) de la composante verticale W de la vitesse pour $Pe = 1$, $\varepsilon = 0.1$ et $R = 75$. (a) et (b) en $x = -5.94$ et $z = 0.5$, (c) et (d) en $x = 0$ et $z = 0.5$ et (e) et (f) en $x = 13.86$ et $z = 0.5$.

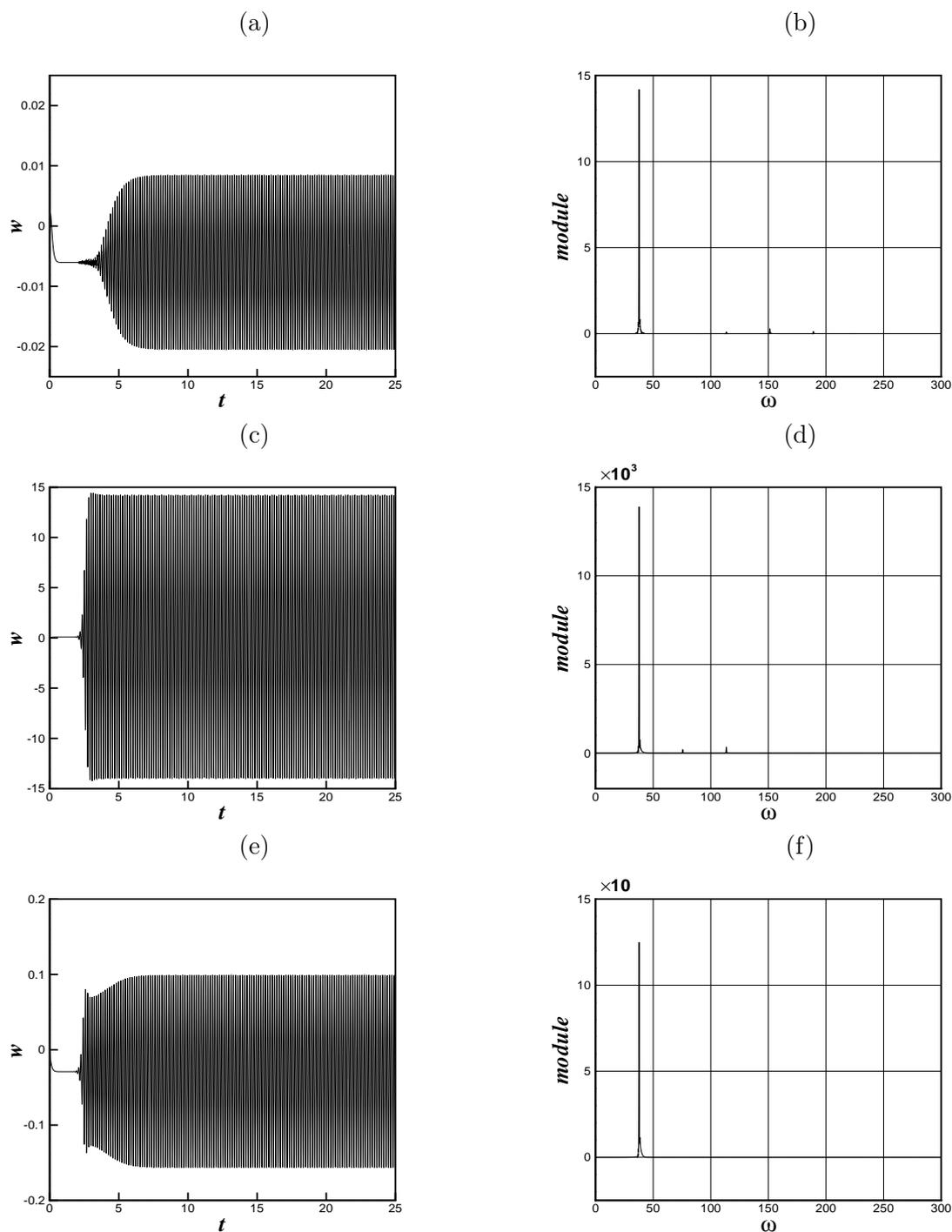


FIG. 4.13: (a), (c) et (e) Le suivi temporel et (b), (d) et (f) la transformée de Fourier temporelle (FFT) de la composante verticale W de la vitesse pour $Pe = 10$, $\varepsilon = 0.1$ et $R = 75$. (a) et (b) en $x = -5.94$ et $z = 0.5$, (c) et (d) en $x = 0$ et $z = 0.5$ et (e) et (f) en $x = 13.86$ et $z = 0.5$.

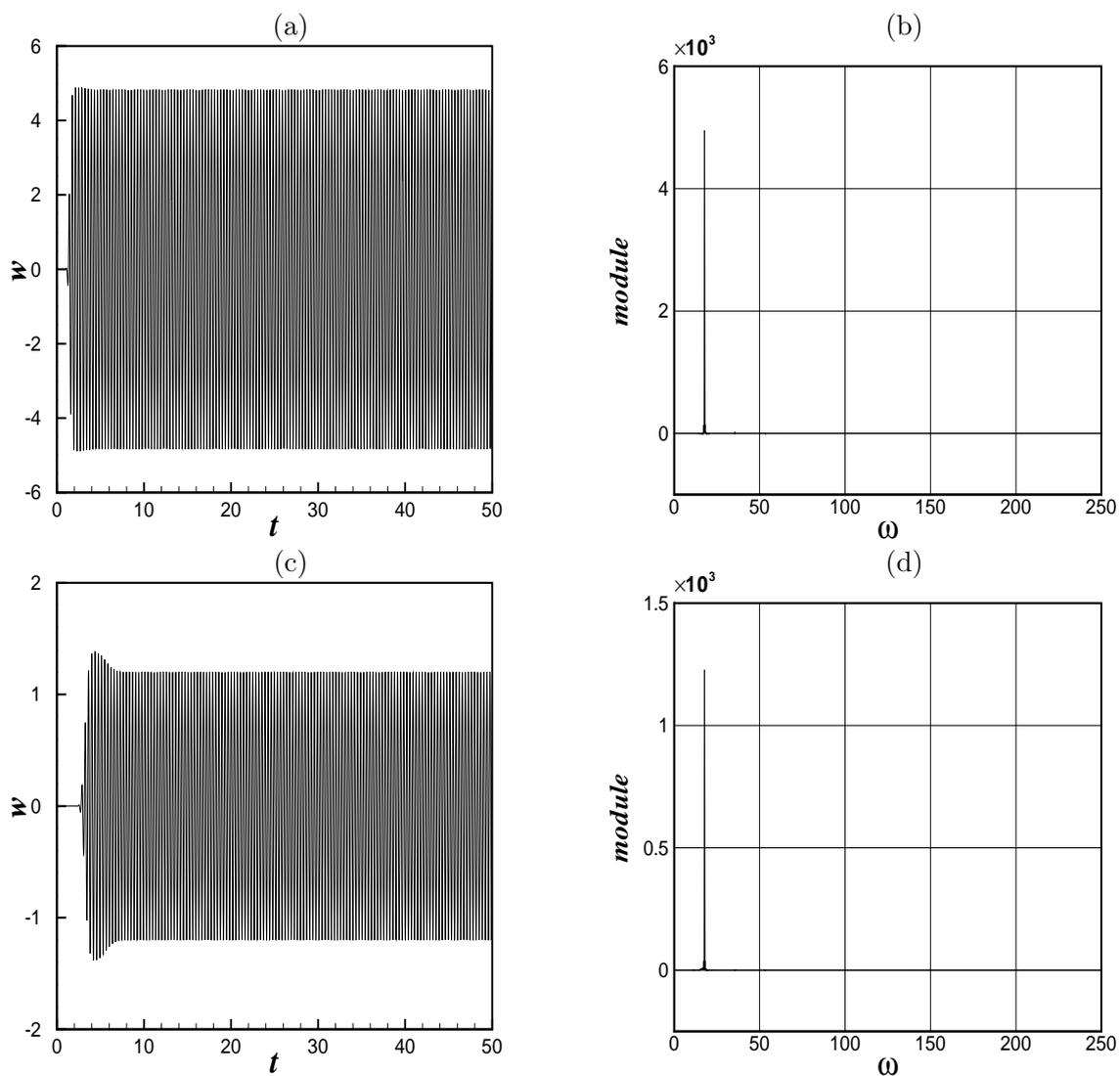


FIG. 4.14: (a) et (c) Le suivi temporel et (b) et (d) la transformée de Fourier temporelle (FFT) de la composante verticale W de la vitesse pour $Pe = 5$, $\varepsilon = 0.01$ et $Ra = 52$. (a) et (b) en $x = 14.2$ et $z = 0.5$ et (c) et (d) en $x = 27.4$ et $z = 0.5$.

entier. Ce résultat est conforme au critère de sélection de la fréquence globale, obtenu par Pier et Huerre [42] à partir du modèle de Ginzburg-Landau avec des coefficients complexes et faiblement inhomogènes. Il est à noter que ce critère semble être valable pour $Pe = 1$ où la structure du mode global est proche d'un mode global doux.

Pour avoir des données plus quantitatives, des simulations numériques ont été conduites pour différentes valeurs de Péclet en gardant $Ra = 75$ et $\varepsilon = 0.1$. Sur la figure 4.16, nous avons tracé la dépendance de ω_0^{ca} vis-à-vis de Pe et nous avons reporté pour dix valeurs de Pe , les valeurs de ω_g déterminées par des simulations numériques directes. Ce graphique met en évidence le pertinence du critère de sélection de la fréquence et plus particulièrement pour des flux de l'écoulement moyen qui ne sont pas trop élevés.

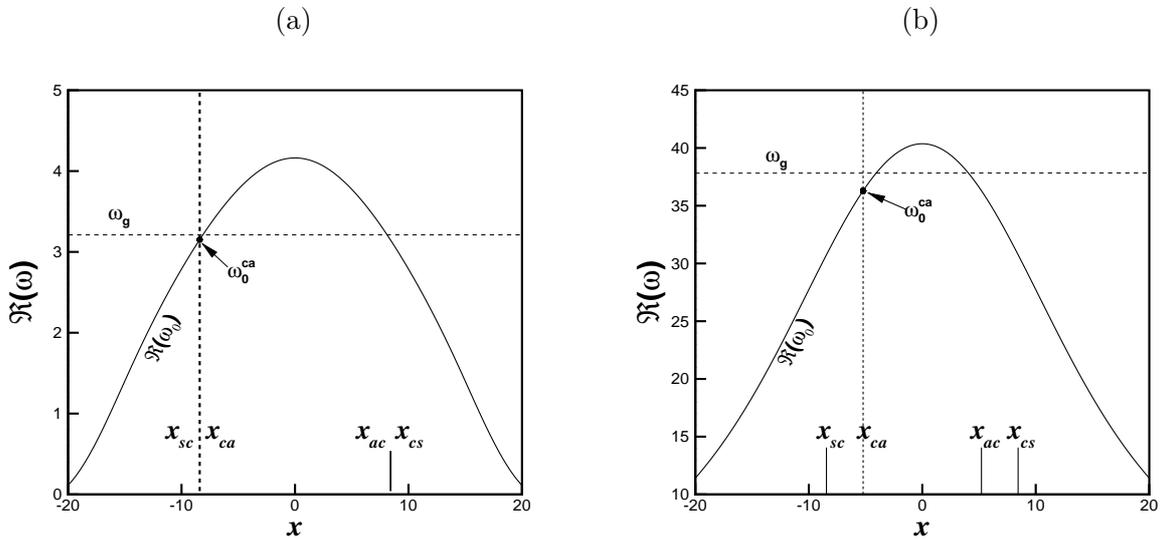


FIG. 4.15: Comparaison entre la fréquence absolue locale $\Re(\omega_0)$ et la fréquence globale numérique ω_g , pour $\varepsilon = 0.1$ et $Ra = 75$: (a) $Pe = 1$ et (b) $Pe = 10$.

Nous nous sommes laissés tentés par d'autres explorations numériques impliquant un autre jeu de paramètres que celui utilisé jusqu'alors. Des simulations numériques sont menées avec $Ra = 60$, $\varepsilon = 0.01$ et Pe variable. La structure spatiale de la solution obtenue pour $Pe = 6$ confirme qu'il s'agit d'un mode global raide comme cela est illustré sur la figure 4.17(a). La fréquence globale numérique observée $\omega_g \approx 20.5261$ est très proche de la fréquence $\omega_0^{ca} \approx 20.3550$ prévue par le critère de sélection (figure 4.17(b)). Par ailleurs, les résultats numériques montrés sur les figures 4.17(c)-(d), témoignent de la robusté du critère de sélection de la fréquence d'oscillations des modes raides pour des valeurs variables de Ra et Pe .

Configuration semi-infinie

Une première simulation numérique où nous avons fixé les trois paramètres du problème à $Ra = 52$, $Pe = 5$ et $\varepsilon = 0.01$ donne naissance à un mode global non linéaire dont la

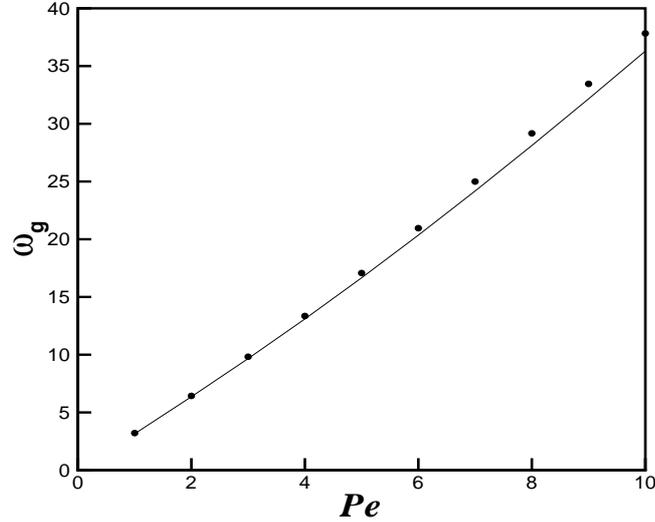


FIG. 4.16: Comparaison entre la fréquence absolue ω_0^{ca} au point de transition x_{ca} et la fréquence globale numérique ω_g , pour $\varepsilon = 0.1$, $Ra = 75$ et Pe variable.

structure spatiale est reproduite sur la figure 4.18(a). Comme pour le cas d'une configuration infinie, nous avons représenté sur la figure 4.18(b) la variation spatiale de la fréquence absolue locale $\Re(\omega_0)$, en indiquant aussi la fréquence globale $\omega_g \approx 17.7497$ déterminée par simulation numérique directe numérique (trait discontinue horizontale). Nous constatons que ω_g est presque égale à la fréquence absolue $\Re(\omega_0(x=0)) \approx 17.7594$ évaluée à l'entrée du massif poreux. Ce résultat est en parfait accord avec le critère de sélection de la fréquence globale des écoulements faiblement inhomogènes présentant une région d'instabilité absolue attachée à l'entrée du milieu et qui stipule que $\omega_g \approx \Re(\omega_0(x=0))$. Ce critère a été obtenu par A. Couairon et J.M. Chomaz [41] à partir du modèle de Ginzburg-Landau lorsque les paramètres sont fixés au voisinage de l'instabilité globale marginale. Or, les résultats numériques montrés sur la figure 4.18(c) pour Ra variable et $Pe = 5$, et dans la figure 4.18(d) pour Pe variable et $Ra = 52$ confirment que ce critère de sélection de la fréquence est robuste, y compris dans le régime fortement non-linéaire (c'est-à-dire loin du seuil de l'instabilité globale).

4.4 Analyse de la distribution spatiale des modes globaux non linéaires

4.4.1 Analyse de la distribution spatiale du mode global raide

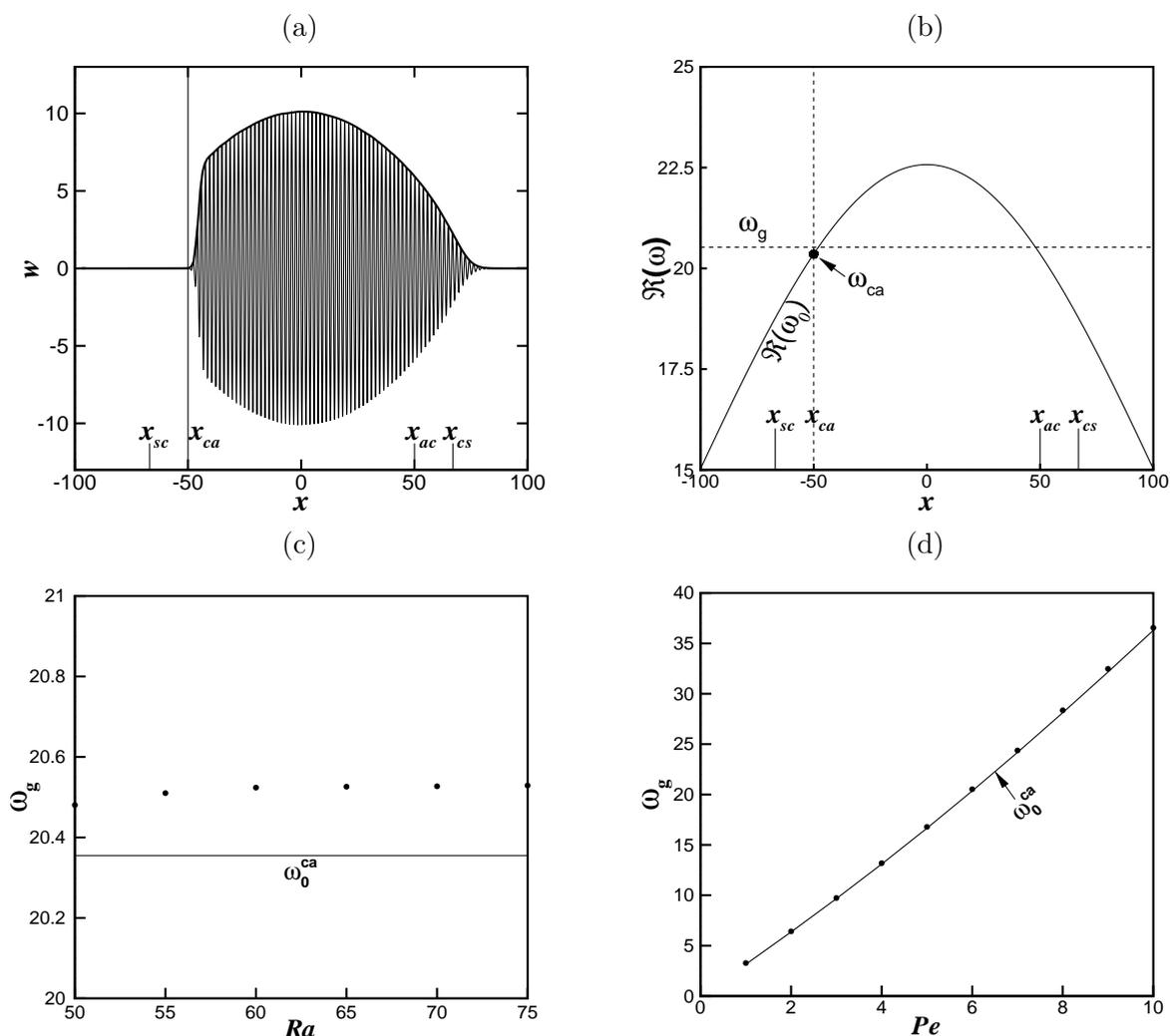


FIG. 4.17: (a) la distribution spatiale de la vitesse verticale de perturbation w suivant x pour $z = 0.5$, avec $Pe = 6$ et $Ra = 60$. (b) comparaison de la fréquence absolue locale $\Re(\omega_0)$ et la fréquence globale numérique ω_g observée, pour $Pe = 6$ et $Ra = 60$. (c) et (d) comparaison de la fréquence absolue théorique ω_0^{ca} et la fréquence globale ω_g , respectivement pour ($Pe = 6$, Ra variable) et (Pe variable, $Ra = 65$). Avec $\varepsilon = 0.01$.

Dans le paragraphe précédent, les simulations numériques directes du problème non-linéaire montrent que l'apparition des oscillations auto-entretenues des structures thermoconvectives, ainsi que leur fréquence globale ω_g , suivent précisément les prédictions de critères théoriques. La fréquence globale ω_g de ces structures oscillatoires non linéaires est proche de la fréquence absolue linéaire ω_0^{ca} au point amont de la frontière de la zone absolue x_{ca} . L'objectif de ce paragraphe est d'examiner d'une façon fine la distribution spatiale du mode global raide à la lumière de quelques principes proposés par Pier et al. [42]. Cette tâche sera accomplie en prenant comme exemple test le mode global obtenu pour $Pe = 6$, $Ra = 60$ et $\varepsilon = 0.01$ et représenté sur la figure 4.17(a). Cette figure montre clairement que la solution est un train d'ondes délimité en amont par un front pointu

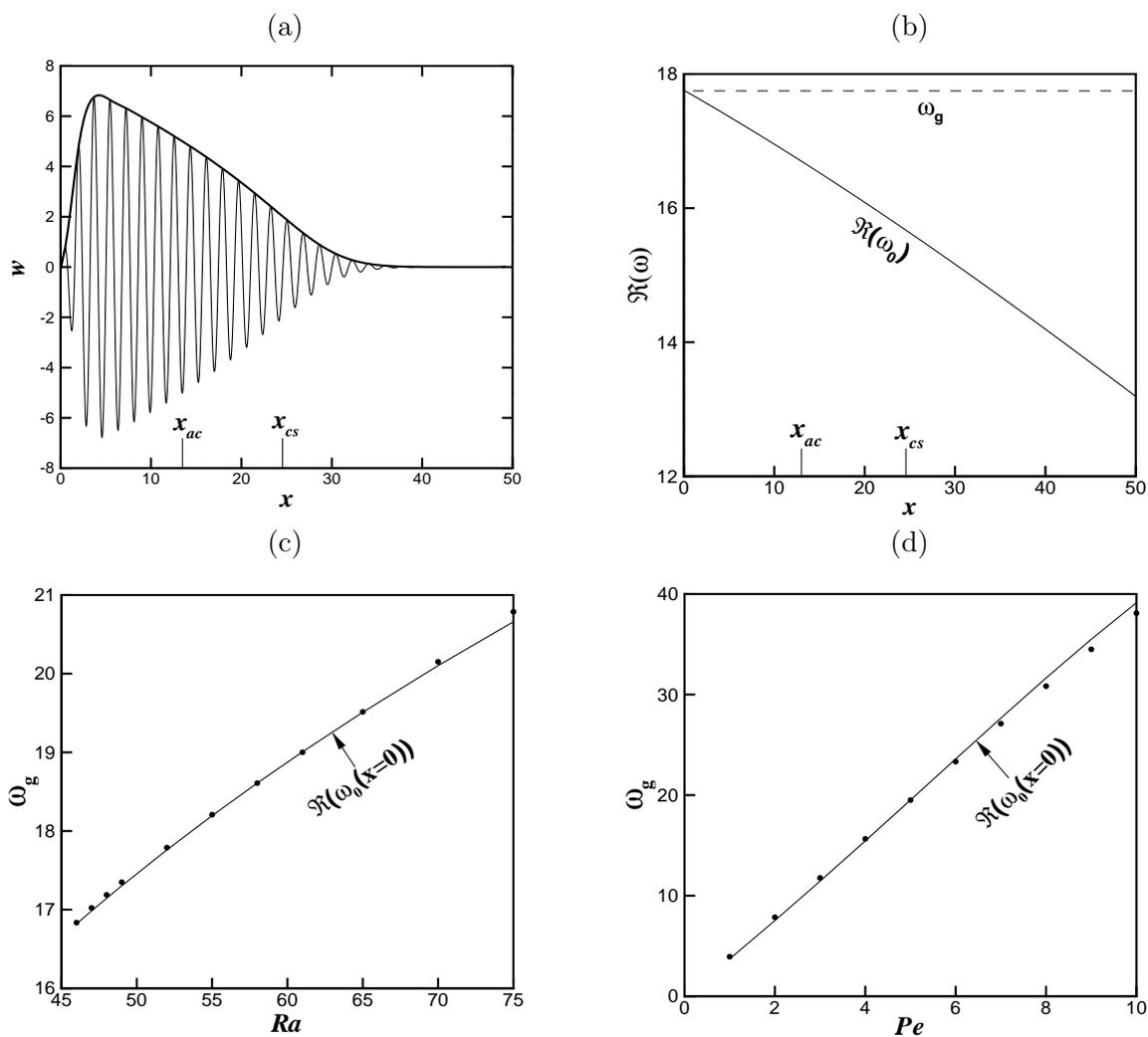


FIG. 4.18: (a) la distribution spatiale de la vitesse verticale de la perturbation w suivant x pour $z = 0.5$, avec $Pe = 5$ et $Ra = 52$. (b) comparaison de la fréquence absolue locale $\Re(\omega_0)$ et la fréquence globale numérique ω_g observée, pour $Pe = 5$ et $Ra = 52$. (c) et (d) comparaison de la fréquence absolue théorique $\Re(\omega_0)$ en $x = 0$ et la fréquence globale ω_g , respectivement pour ($Pe = 5$, Ra variable) et (Pe variable, $Ra = 65$).

situé dans la proximité de $x_{ca} \approx -50.0350$, et dont l'enveloppe entame une décroissance spatiale à partir de $x = 0$ qui se poursuit au-delà de la position spatiale $x_{cs} \approx 66.9772$, où l'écoulement de base est linéairement stable. A travers cet exemple, nous nous intéressons à la corrélation entre les branches spatiales déterminées par l'analyse linéaire d'instabilité locale et la distribution spatiale des solutions non linéaires. Particulièrement, nous allons vérifier les propriétés suivantes, énoncées et démontrées dans [42] :

- i) en amont de x_{ca} , la pente du front est identique au taux d'amplification spatiale de l'onde montante notée k^- . Ce taux d'amplification spatiale est déterminé par l'analyse linéaire d'instabilité locale ;
- ii) en aval de x_{cs} , l'enveloppe du mode global non-linéaire est amortie avec un taux spatial identique à celui d'une onde descendante notée k^+ ;
- iii) le nombre d'onde réel dans la région centrale du mode global non-linéaire est connecté en aval de x_{cs} au nombre d'onde réel de l'onde k^+ déterminé linéairement.

Précisons que dans la région des paramètres où l'instabilité est convective, les branches spatiales complexes k^+ et k^- sont associées respectivement aux ondes d'instabilité qui se propagent respectivement dans la direction aval et amont. Nous avons déterminé les taux de croissance spatiaux ($-k_i^-$) et ($-k_i^+$) évalués en $x = -55$, une position spatiale correspondant à une instabilité convective juste en amont du front. La pente du front est évaluée par $\ln(w)$, le logarithme de l'enveloppe de la composante verticale de la vitesse. On peut observer en détail la structure spatiale du front amont dans le diagramme semi-algorithmique de la figure 4.19(a) où nous avons reporté aussi les taux de croissance spatiaux ($-k_i^-$) et ($-k_i^+$). Cette figure montre clairement que la pente de l'enveloppe du mode global est gouvernée, dans la région convectivement instable amont ($x_{sc} < x < x_{ca}$), par le taux d'amplification spatiale de l'onde montante k^- .

D'une façon similaire, nous avons déterminé les taux de croissance spatiaux ($-k_i^-$) et ($-k_i^+$) évalués en $x = 82$ dans la région stable aval ($x > x_{cs}$) et nous l'avons comparé au taux d'amortissement spatial du train d'onde, observé à la limite avale. Le diagramme semi-algorithmique de la figure 4.19(b) illustre cette comparaison qui montre que l'amortissement de l'enveloppe du train d'ondes non-linéaire est gouverné par l'onde descendante ($-k^+$).

Commentaires des résultats

De l'inspection de la distribution spatiale des solutions non linéaires qui confirme les prédictions théoriques, nous concluons que la position x_{ca} joue le rôle d'un oscillateur qui produit des oscillations globales auto-entretenuées des structures thermo-convectives, indépendamment de la présence de n'importe quelle contrainte persistante d'une perturbation initiale. Ces oscillations globales auto-entretenuées qui prennent naissance à la frontière amont de l'instabilité locale absolue, sont ensuite amplifiées spatialement en aval par une

onde montante, et amortie dans la zone stable aval par une onde descendante.

Qu'en est-il du rapport entre le nombre d'ondes dans la région centrale du mode global non linéaire et la théorie linéaire ?

Rappelons d'abord qu'une région d'instabilité est caractérisée par des perturbations qui s'amplifient dans le temps, à partir d'une perturbation initiale périodique dans l'espace. Autrement dit, nous devons supposer que le nombre d'ondes k de la perturbation est réel, tandis que sa fréquence ω est complexe. Un taux de croissance temporel positif permet de définir un ballon d'instabilité dans le plan (x, k) (domaine gris de la figure 4.20) limité par un contour où $\Im(\omega) = 0$. Dans la région centrale du ballon d'instabilités, les simulations numériques directes mettent en évidence une sélection unique de la longueur d'onde qui ne dépend que de la combinaison finale $Pe - Ra$. Pour $Ra = 60$ et $Pe = 6$, les points dans la figure 4.20 indiquent des nombres d'ondes locaux obtenus numériquement en considérant une moyenne de distances locales entre huit rouleaux thermo-convectifs adjacents. Nous montrons aussi dans cette figure les branches spatiales linéaires k_r^{l+} (ligne continue) et k_r^{l-} (ligne discontinue) qui, pour $Ra = Ra^A \approx 47.1716$, se rencontrent au point de pincement, à la position spatiale x_{ca} (rep. x_{ac}). Dans le plan (x, k) de cette figure, nous remarquons que les ondes non-linéaires admettent une longueur d'onde constante spatialement jusqu'à la frontière x_{cs} du ballon d'instabilités. À la position neutre d'instabilité x_{cs} , la branche spatiale linéaire k_r^{l+} succède dans la région linéaire aval $x > x_{cs}$. Ce comportement est en conformité avec les prédictions théoriques.

Nous concluons que le mode global analysé possède toutes les caractéristiques d'un mode global non-linéaire raide, régi par un front stationnaire situé au bord amont d'un milieu absolument instable.

4.4.2 Lois d'échelle pour une configuration semi-infinie

Les simulations numériques directes mettent en évidence des structures thermo-convectives pleinement développées qui sont reliées à l'état de conduction à l'entrée du canal par l'intermédiaire d'un front. Ce front se forme à une certaine distance qui peut être plus ou moins grande selon le jeu de paramètres. Lorsque l'on augmente Ra à Pe fixé, on constate que le front avance vers l'entrée, alors que si l'on augmente Pe à Ra fixé, le front est poussé de plus en plus vers l'aval. Dans ce dernier cas, les simulations numériques montrent que le maximum de l'amplitude des structures thermo-convectives reste à peu près constant.

À cet égard il est très utile de rappeler les résultats théoriques récents obtenus par Couairon et Chomaz [41]. En particulier, leur modèle prévoit les propriétés suivantes :

- i) la loi d'échelle qui relie la longueur caractéristique x_s au seuil de l'instabilité absolue Ra^A est $x_s \approx 1/\sqrt{Ra - Ra^A}$;
- ii) le maximum A_s de l'amplitude du mode global suit la loi $A_s \approx \sqrt{Ra(x_s) - Ra^c}$, où $Ra(x_s)$ et Ra^c sont respectivement le nombre de Rayleigh local évalué à $x = x_s$ et

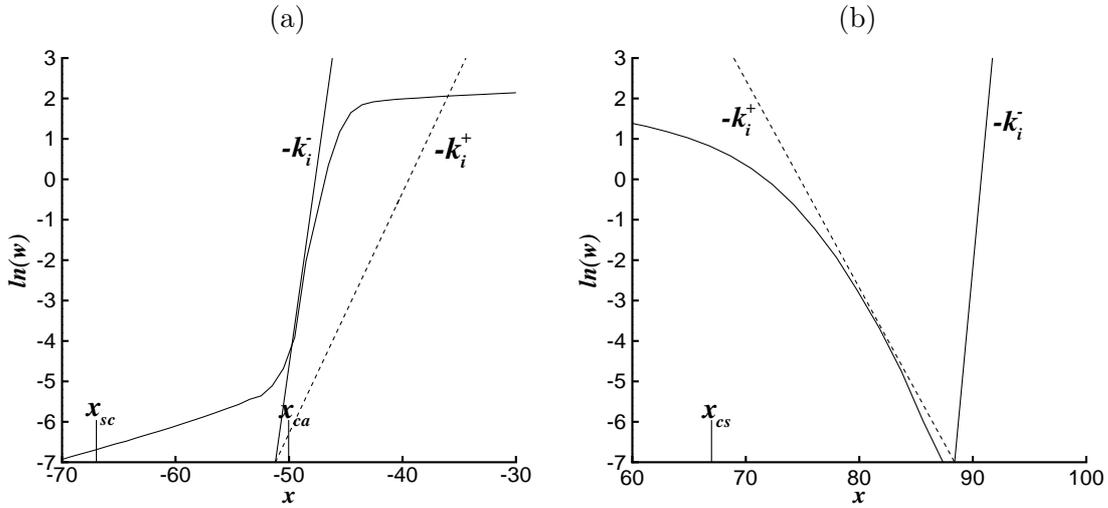


FIG. 4.19: (a) la représentation dans le diagramme semi-algorithmique du front amont du mode global non-linéaire (figure 4.17(a)) ; comparaison de la pente du front avec les taux de croissance spatiale $-k_i^-(\omega_0^{ca}, x = -55) = 1.99$, $-k_{0,i}^{ca} = 1.3$ et $-k_i^+(\omega_0^{ca}, x = -55) = 0.6$. (b) la représentation dans le diagramme semi-algorithmique du train d'ondes non-linéaire en décadence au-delà de la position spatiale x_{cs} ; comparaison de sa pente avec $-k_i^+(\omega_0^{ca}, x = 82) = -0.51$ et $-k_i^-(\omega_0^{ca}, x = 82) = 3$

sa valeur au seuil de l'instabilité convective.

Nous avons examiné la capacité de ces lois d'échelles pour prévoir le maximum de l'amplitude du mode global non-linéaire et de son emplacement spatial. Pour $Pe = 5$, nous constatons que la position x_s et le maximum A_s d'amplitude du mode global sont parfaitement bien adaptés aux expressions suivantes : $x_s = 3.9\pi/\sqrt{Ra} - Ra^A$ (figure 4.21(e)) et $A_s = 2.3\sqrt{Ra(x_s) - Ra^c}$ (figure 4.21(f)), confirmant ainsi les prédictions théoriques.

4.5 Comparaison des fréquences globales des structures synchronisées avec l'expérience

Cette partie aborde la question de la comparaison des fréquences globales des structures thermo-convectives mesurées expérimentalement par M. Combarous [120] avec les résultats issus de notre travail. Cette entreprise est exigeante du fait qu'elle n'autorise aucun ajustement des paramètres du problème d'une part et qu'elle suppose d'autre part, que l'on soit bien informé des méthodes d'évaluation des paramètres et des nombres sans dimension, caractéristiques des conditions d'un essai expérimental. Cette entreprise est aussi intéressante car elle permet de vérifier si le modèle théorique, représenté par le système d'équations utilisé, est bien adapté à la description des phénomènes observés. Ainsi nous avons jugé utile de rappeler les grandes lignes des méthodes utilisées par M. Combarous pour évaluer les paramètres du problème.

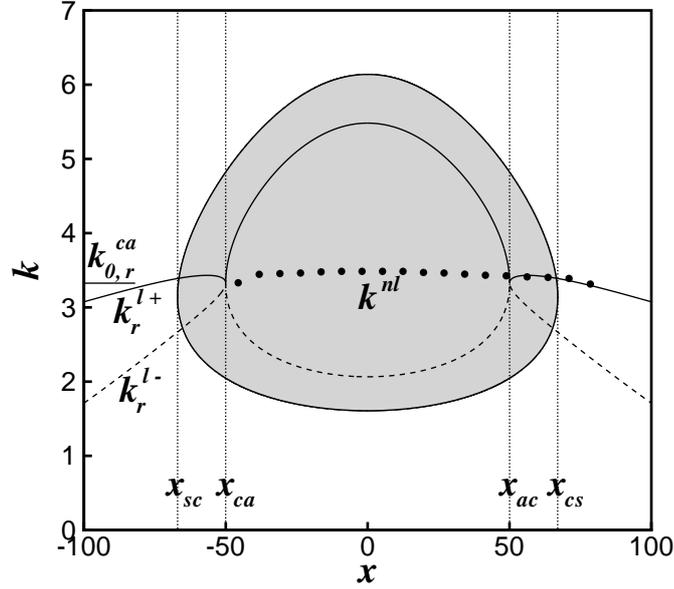


FIG. 4.20: Le ballon non-linéaire (domaine gris) limité par un contour où $\Im(\omega_0) = 0$, avec les branches spatiales linéaires k_r^{l+} (ligne continue) et k_r^{l-} (ligne discontinue) qui pincent à la position spatiale x_{ca} (rep. x_{ac}) pour $Ra = Ra^A \approx 47.1716$. Les points dans la figure représentent les nombres d'ondes locaux obtenus numériquement.

4.5.1 Evaluation expérimentale des nombres sans dimension et discussion

Les nombres sans dimension qui interviennent dans le problème sont :

$$Ra = \frac{\overbrace{\alpha_f(\rho c)_f}^{=A}}{\nu_f} \frac{K}{\lambda} g(T_1 - T_0) H, \quad (4.6)$$

$$Pe = \frac{V_e H(\rho c)_f}{\lambda}. \quad (4.7)$$

L'évaluation des différents paramètres a été réalisée dans [120].

Conductivité thermique équivalente λ^* :

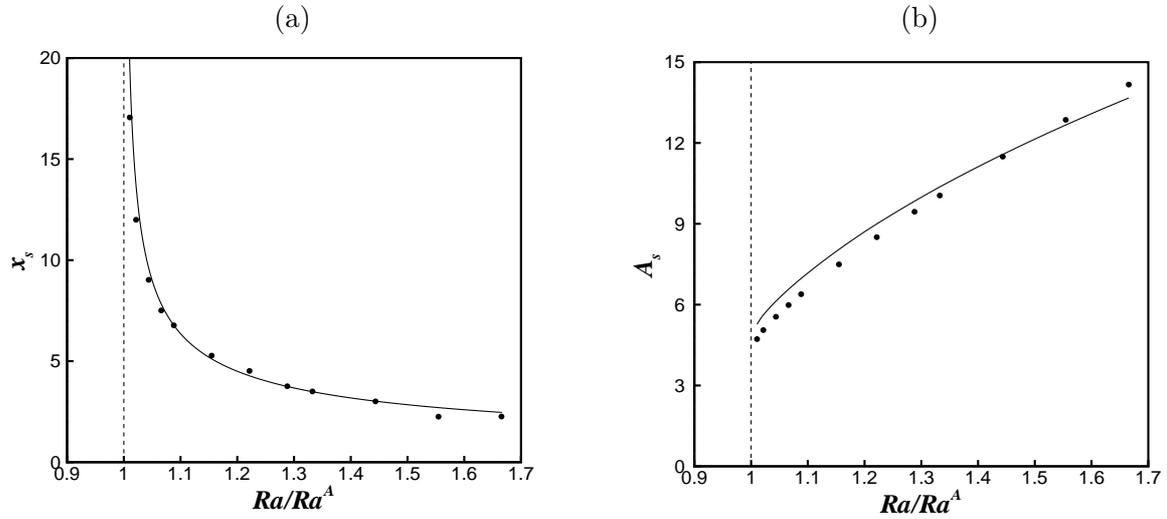


FIG. 4.21: (a) comparaison de la position spatiale x_s du maximum de l'amplitude du mode global non-linéaire obtenue par la simulation numérique directe (points) avec la loi d'échelle $x_s = 3.9\pi/\sqrt{Ra - Ra^A}$. (b) comparaison du maximum de l'amplitude du mode global non-linéaire A_s obtenue par la simulation numérique directe (points) avec la loi d'échelle $A_s = 2.3\sqrt{Ra(x_s) - Ra^c}$.

L'interprétation des essais menés en régime de conduction pure, lorsque $(T_0^* - T_1^*)$ est faible permet, de déterminer λ^* lorsque l'on tient compte des fuites thermiques. Lorsque l'on utilise cette méthode d'évaluation directe λ^* est notée λ_2^* . Les variations de λ^* en fonction de la température moyenne de l'essai sont négligées.

Perméabilité :

La dimension relativement faible du massif poreux ne permet pas une détermination directe de la perméabilité, ni le long de l'axe du milieu, ni dans la direction verticale. K est donc estimé à l'aide de la loi de Kozeny-Carman en fonction de la porosité ϕ :

$$K = K_2 = \frac{d^2}{36C_0} \frac{\phi^3}{(1 - \phi)^2}$$

la constante C_0 est choisie égale à 4.8 pour des grains sphériques de diamètre d .

Caractéristiques du fluide :

Les caractéristiques physiques des fluides, varient avec la température, la viscosité notamment. Nous présentons sur la figure (4.22) l'évolution, en fonction de la température, du paramètre $A = \frac{\alpha_f(\rho c)_f}{\nu_f}$ intervenant dans l'expression de Ra pour l'eau et l'huile aux silicones utilisées [120].

Méthode d'évaluation de Ra :

De nombreux paramètres interviennent dans le nombre de Rayleigh dont certains ne

sont pas accessibles, par une mesure directe (la perméabilité par exemple). M. Combarrous a donc procédé en deux étapes dans l'évaluation de Ra :

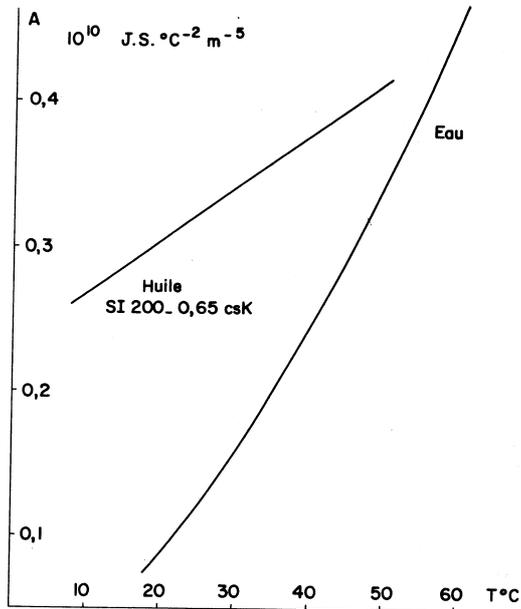


FIG. 4.22: Coefficient A en fonction de la température T

- i) la première étape consiste à vérifier le critère d'apparition de la convection naturelle ($Ra_c = 4\pi^2$) et ce en utilisant la valeur de λ_2^* de la conductivité thermique et la valeur de K_2 de la perméabilité.
- ii) les résultats de cette vérification étant satisfaisants pour l'ensemble des séries d'essais, connaissant alors la différence de température critique $(T_0^* - T_1^*)_c$ au delà de laquelle apparaît la convection naturelle, on définit un rapport $(\frac{K}{\lambda^*}) = (\frac{K}{\lambda^*})_1$ tel que :

$$Ra_c \left[\left(\frac{K}{\lambda^*} \right)_1 \right] = 4\pi^2, \text{ i.e. } 4\pi^2 = gA(T_0^* - T_1^*)_c H \left(\frac{K}{\lambda^*} \right)_1.$$

L'écart moyen, pour l'ensemble des séries (6, 7, 11 et 14 entre autres) est égal à 5%. Les valeurs numériques de Ra ont été alors estimées en utilisant $(\frac{K}{\lambda^*})_1$ et en prenant une température moyenne $\bar{T} = \frac{T_1^* + T_0^*}{2}$ pour l'évaluation du coefficient A .

Ce rappel de l'estimation expérimentale de Ra a montré que celle-ci tient compte des variations des caractéristiques du fluide utilisé en fonction de la température moyenne. Or le modèle théorique est basé sur l'approximation de Boussinesq qui stipule que toutes les caractéristiques du fluide restent constantes sauf la masse volumique dans le terme lié à la poussée d'Archimède où elle dépend linéairement de la température. Ce constat étant fait, dans toute la suite de ce chapitre, nous utilisons les valeurs de Ra , ainsi que les valeurs des autres paramètres tels qu'ils ont été évalués dans [120].

Puisque différents milieux poreux ont été utilisés dans les expériences avec de l'eau ou de l'huile comme fluide, nous avons rassemblé, dans le tableau 4.1, certaines propriétés

thermo-physiques pour différentes séries d'expériences.

TAB. 4.1: Propriétés thermo-physiques pour les différentes séries d'expériences.

séries	solide/fluide	ϕ	$K.10^{-8}$ m^2	λ_s W/mC	λ_f W/mC	λ^* W/mC
6	verre/eau	0.371	1.147	1.5	0.6	0.85
7	verre/huile	0.351	0.228	1.5	0.15	1.03
11	verre/eau	0.381	0.721	1.5	0.6	0.9
14	quartz/eau	0.324	0.209	6	0.6	4.25

4.5.2 fréquences d'oscillations auto-entretenues : théorie/expérience

Les essais réalisés montrent que les structures propagatives adoptent parfois une organisation en **rouleaux purement transversaux**, et d'autres fois **une organisation complètement tridimensionnelle**. Le rapport de forme latéral a du canal utilisé dans les expériences est $a = 6.91$. Dans ce cas, les modes instables étudiés au chapitre 2 correspondent à des modes dont le nombre d'onde transversal est $m\pi/a$ où m peut prendre des valeurs allant de $m = 0$ à $m = 6$. Le mode $m = 0$ correspond à des rouleaux transversaux (i.e. 2D), alors que les autres modes sont associés à des structures tridimensionnelles. Ce constat nous amène à comparer les prédictions issues de ce travail en considérant aussi bien les fréquences obtenues pour le cas bidimensionnel (i.e. $m = 0$) que le cas tridimensionnel ($m = 1, 2, \dots, 6$).

La figure 4.23 est un exemple d'oscillations régulières de structures thermo-convectives enregistrées avec la série 6 pour $Ra = 131$ et une vitesse intersticielle de $V_i = 6.710^{-5} m/s$ soit un nombre de Péclet $Pe = 6.5$. La période d'oscillations mesurée est de $3766s$, soit une fréquence adimensionnée $\omega_{exp} = 15.46$. Nous comparons cette fréquence à celle prédite dans ce travail dans le cas d'une configuration infinie et obtenons $\omega_A(m = 0) = 22.5$ et $\omega_A(m = 6) = 17.38$. Si l'écart relatif entre la fréquence prédite et la fréquence mesurée est important pour une structure bidimensionnelle, il l'est beaucoup moins si l'on considère une structure tridimensionnelle (écart de 12.39%).

Pour la série 11, nous disposons de huit valeurs de périodes enregistrées pour différentes combinaisons de Ra et Pe . Le tableau 4.2 récapitule l'ensemble des résultats. De ce tableau, nous pouvons retenir que les fréquences des structures tridimensionnelles prédites par la théorie sont en très bon accord avec les fréquences mesurées (l'écart relatif ne dépasse pas les 10%), alors que le contraire est observé si nous admettons le caractère bidimensionnel des structures thermo-convectives. La figure 4.24 illustre graphiquement cette comparaison. Les autres courbes qui représentent les fréquences des structures tridimensionnelles avec m allant de 1 à 5 se trouvent entre les courbes $m = 0$ et $m = 6$ de cette figure.

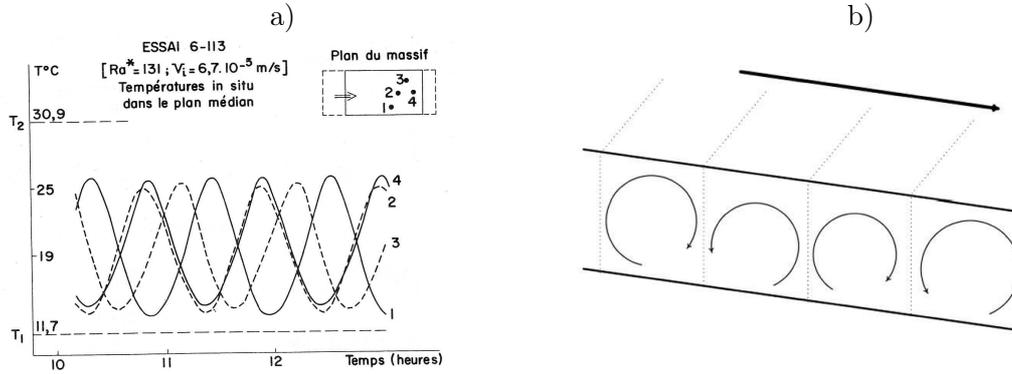


FIG. 4.23: a) représente l'évolution lors d'un essai, de la température en différents points du plan de symétrie horizontale du milieu poreux et met en évidence le caractère oscillatoire régulier de la température associé aux R.T représenté schématiquement en b)

TAB. 4.2: Comparaison des fréquences globales des structures thermo-convectives avec l'expérience [120].

Pe	Ra	T_{exp}^*	ω_{exp}	$\omega^A(m=0)$	écart %	$\omega^A(m=6)$	écart %
2.561	63.960	9736.842	5.696	8.196	43.884	5.269	-7.505
4.519	99.899	5000.000	11.091	14.926	34.577	10.828	-2.378
6.176	89.480	3289.474	16.861	20.996	24.523	16.242	-3.672
7.230	71.771	2500.000	22.183	25.074	13.034	19.996	-9.857
7.833	132.187	2565.789	21.612	27.439	26.963	22.203	2.733
8.285	74.896	2236.842	24.791	29.239	17.943	23.893	-3.621
11.749	128.542	1578.947	35.122	43.717	24.474	37.736	7.445
13.858	76.458	1184.210	46.838	52.914	12.971	46.6676	-3.649

4.6 Conclusion

Des simulations numériques directes ont été conduites pour la mise en évidence des solutions fortement non-linéaires des écoulements de convection mixte dans des milieux poreux chauffés par le bas d'une façon inhomogène et soumis à un gradient de pression horizontal. Pour les deux configurations génériques considérées, ces simulations numériques du problème bidimensionnel indiquent que la présence d'une région d'instabilité absolue suffisamment étendue est nécessaire à l'émergence de structures thermo-convectives auto-entretenues et oscillant avec une fréquence bien définie. Il a été trouvé que cette fréquence obtenue par simulation numérique du problème non linéaire correspond à la fréquence absolue marginale dans le cas où le système présente une poche d'instabilité absolue détachée de l'entrée (configuration infinie), et à la fréquence absolue imposée à l'entrée du milieu lorsque la poche d'instabilité absolue est attachée à l'entrée (configuration semi-infinie). Ce mécanisme de sélection de la fréquence s'avère pertinent, y compris loin du seuil d'instabilité globale marginale.

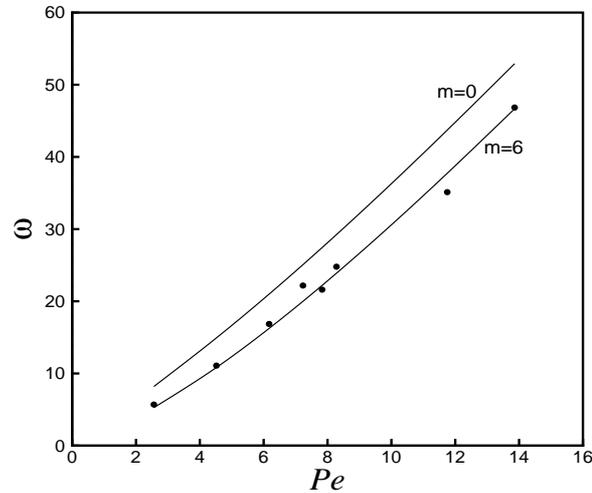


FIG. 4.24: Comparaison des fréquences globales des structures thermo-convectives avec l'expérience ; les courbes $m = 0$ et $m = 6$ représentent respectivement le cas 2D et le cas 3D. Les points sont les fréquences mesurées [120].

L'analyse détaillée de la distribution spatiale des structures synchronisées montre que :

- i) Pour une configuration infinie, la solution non-linéaire est composée d'un train de rouleaux transversaux délimité à la frontière amont d'instabilité absolue locale par un front raide et dont l'enveloppe est amortie au fur et à mesure que l'on s'approche de la région stable localement. L'analyse fine de la distribution spatiale des solutions révèle que la frontière amont d'instabilité absolue agit comme un générateur des oscillations auto-entretenues.
- ii) Pour une configuration semi-infinie, les simulations numériques mettent en évidence l'émergence d'un mode global non linéaire, composé d'un front reliant l'état de conduction à l'entrée aux rouleaux transversaux propagatifs. Ce front s'avère capable de remonter l'écoulement principal et finit par s'arrêter à une certaine distance du bord de l'entrée. Des lois d'échelles pour le maximum de l'amplitude des structures thermo-convectives et de son emplacement spatial ont été déterminées.

Ces résultats liés au critère de sélection de la fréquence et de la distribution spatiale des structures synchronisées sont en excellent accord avec la théorie des modes globaux non linéaires (Pier et al. [42], Couairon et Chomaz [41]).

Pour les deux configurations génériques étudiées, des comparaisons des résultats de simulations numériques directes et de l'équation de ginzburg-Landau, limitées à des faibles valeurs du nombre de Péclet ont été menées. Ces comparaisons montrent que si le mo-

dèle de G-L présente l'inconvénient de sous estimer la valeur maximale de l'amplitude des structures thermo-convectives, il présente l'avantage de prédire une distribution spatiale des structures thermo-convectives similaire à celle obtenue à partir du modèle mathématique originel.

Ce chapitre s'achève par une comparaison entre la théorie et l'expérience, des fréquences adimensionnelles d'oscillations des ondes transverses bidimensionnelles et des ondes tridimensionnelles. Bien que des précautions nécessaires ont été prises pour mener à bien cette tâche, une comparaison quantitative nécessite d'avoir connaissance de l'incertitude sur la mesure expérimentale des fréquences, un précieux renseignement dont nous ne disposons pas. Ces réserves étant soulignées, cette comparaison met en évidence un très bon accord entre les fréquences des structures tridimensionnelles prédites par la théorie et les fréquences mesurées (l'écart relatif ne dépasse pas les 10%), alors que le contraire est observé si nous admettons le caractère bidimensionnel des structures thermo-convectives.

Conclusion générale et perspectives

Ce travail porte sur une étude théorique et numérique des structures synchronisées pouvant naître et se développer dans un fluide confiné en milieu poreux chauffé par le bas d'une façon faiblement inhomogène et soumis à un écoulement horizontal. La formulation mathématique des équations de ce problème repose sur la loi phénoménologique de Darcy pour décrire la filtration du fluide dans le milieu poreux. Ce problème de convection mixte admet une solution de base avec un écoulement stationnaire faiblement non parallèle. Cette solution de base est déterminée par le biais d'un développement en puissances de ε , paramètre qui caractérise le faible non parallélisme. La stabilité de cet écoulement de base est ensuite étudiée en fonction des nombres sans dimension du problème, à savoir le nombre de Rayleigh de filtration Ra , le nombre de Péclet Pe , le rapport de forme latéral du milieu poreux a et ε . Deux profils de température sont successivement considérés. Dans le cas dit milieu infini ($+\infty < x < -\infty$), l'inhomogénéité a un profil sous la forme d'une bosse, centrée en $x = 0$. Alors que dans le cas de milieu dit semi-infini ($0 < x < -\infty$), la température admet un maximum local à l'entrée du massif poreux $x = 0$, et décroît vers l'aval. L'étude spatio-temporelle de stabilité linéaire de l'écoulement stationnaire de base est conduite en utilisant la méthode des échelles multiples et la méthode des développements asymptotiques raccordés. Les solutions thermo-convectives sont recherchées sous la forme de modes propres, modulés par un développement WKBJ dans la direction horizontale, où l'amplitude est développée en puissances de ε . Un tel développement ne peut être valable au point où la vitesse de groupe du mode le plus instable s'annule.

Dans le cas infini, la solution au voisinage du point tournant double est recherchée sous la forme d'un développement WKBJ en puissance de $\varepsilon^{1/2}$ (dite solution intérieure). Le caractère borné de cette solution a imposé une quantification de la fréquence du mode global, tenant compte du problème homogène de stabilité au point tournant et de l'inhomogénéité spatiale. Cette quantification a donné un critère de sélection du mode présentant le taux de croissance le plus élevé.

En revanche, dans le cas semi-infini, on est en présence d'un point tournant simple au voisinage duquel la solution est recherchée sous la forme d'un développement WKBJ en puissance de $\varepsilon^{1/3}$. Comme l'amplitude du mode global doit être nulle à l'entrée du canal, cela impose un critère de sélection de ces instabilités et de leurs fréquences.

Pour les deux configurations, Il a été démontré que l'existence d'une région d'instabilité locale absolue était nécessaire à l'émergence d'un mode global linéaire. La structure spatiale de ce mode global se présente sous la forme d'un train de rouleaux avec modulation

de l'amplitude, et dont l'étendue dépend de l'intensité de l'écoulement principal.

Dans la perspective d'étudier la dynamique faiblement non linéaire, un modèle réduit, composé d'une équation de Ginzburg-Landau avec un coefficient spatialement variable, a été obtenu. Les résultats linéaires issus de ce formalisme ont été validés grâce au critère de sélection appliqué aux équations du problème dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy. L'accord entre les deux approches est excellent pour de faibles valeurs de Pe . D'autre part, ce formalisme réduit a rendu accessible une simulation numérique de l'enveloppe et une validation du critère de sélection, par la comparaison entre le nombre de Rayleigh global et la structure spatiale du mode global linéaire obtenus analytiquement et numériquement. Dans le régime fortement non linéaire, les structures spatiales ont été mises en évidence et analysées pour les deux configurations génériques considérées.

Cependant, ce formalisme d'enveloppe présente des limites dans le sens il ne permet pas de prévoir la fréquence globale des structures thermo-convectives d'une part, et ne s'applique qu'à des situations présentant de faibles valeurs de Ra et de Pe . Pour s'affranchir de ces limites, une simulation numérique directe du problème dans le cadre de l'approximation de Boussinesq est nécessaire dans la région des paramètres où le système est le siège d'effets fortement non linéaires.

Pour les deux configurations génériques considérées, ces simulations numériques du problème bidimensionnel indiquent que la présence d'une région d'instabilité absolue suffisamment étendue est nécessaire à l'émergence de structures thermo-convectives auto-entretenues et oscillant avec une fréquence bien définie. Il a été trouvé que cette fréquence obtenue par simulation numérique du problème non linéaire correspond à la fréquence absolue marginale dans le cas d'une configuration infinie, et à la fréquence absolue imposée à l'entrée du milieu pour une configuration semi-infinie. Ce mécanisme de sélection de la fréquence s'avère pertinent, y compris loin du seuil d'instabilité globale marginale. Ensuite, nous avons analysé en détail la distribution spatiale des structures synchronisées obtenues par des simulations numériques pour différentes combinaisons des paramètres du problème. Il en ressort que, comme le critère de sélection de la fréquence, la distribution spatiale des structures synchronisées est en excellent accord avec la théorie des modes globaux non linéaires (Pier et al. [42], Couairon et Chomaz [41]).

Nous avons, pour finir, mené une comparaison quantitative des prédictions théoriques émanant à la fois de l'analyse spatio-temporelle de stabilité linéaire et des résultats des simulations numériques avec des données expérimentales. Cette comparaison porte sur les fréquences d'oscillations des structures thermo-convectives. Elle met en évidence un très bon accord entre les fréquences des structures tridimensionnelles prédites par la théorie et les fréquences mesurées, alors que le contraire est observé si nous admettons le caractère bidimensionnel des structures thermo-convectives.

Le très bon accord constaté entre les résultats des essais expérimentaux et les prédictions théoriques et numériques concernant les fréquences d'oscillations des structures tridimensionnelles nous encourage à envisager des simulations numériques tridimensionnelles du problème. C'est l'une des perspectives du présent travail. L'autre perspective

consiste dans l'utilisation des concepts utilisés le long de ce travail, et qui reposent sur la théorie des modes globaux non linéaires, à comprendre la dynamique non linéaire des instabilités thermiques dans des systèmes en rotation. Toutes les investigations théoriques et numériques sur ce sujet, négligent, à notre connaissance, les effets de la force centrifuge qui induit une circulation à grande échelle (i.e. écoulement presque parallèle) dont il convient de mesurer les effets.

Annexe A

Équation de Ginzburg-Landau

A.1 Partie linéaire de l'équation d'amplitude

Pour décrire la partie linéaire de l'équation d'amplitude, on peut effectuer un développement de Taylor de ω_0 au voisinage du seuil critique (k_c, Ra^c) . À partir de l'équation de dispersion (2.11) (avec $m = 0$ et $F(X) = 0$), on déduit alors :

$$\omega_0 - \omega_c = \underbrace{\frac{\partial \omega_0}{\partial Ra}}_c \Big|_c (Ra - Ra^c) + \underbrace{\frac{\partial \omega_0}{\partial k}}_c \Big|_c (k - k_c) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k^2}}_c \Big|_c (k - k_c)^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

Pour que les termes $Pe(k - k_c)$, $(\omega_0 - \omega_c)$ et $(k - k_c)^2$ soient du même ordre de grandeur que $(Ra - Ra^c)$, il faut que Pe et $(k - k_c)$ soient du même ordre de grandeur que $(Ra - Ra^c)^{1/2}$ et que $(\omega_0 - \omega_c)$ soit du même ordre de grandeur que $(Ra - Ra^c)$.

En multipliant (A.1) par $i\tilde{A}(k, \omega_0)$ ¹ et en prenant la transformée de Fourier inverse on obtient la partie linéaire de l'équation de Ginzburg-Landau :

$$\partial_t A = \frac{1}{2} (Ra - Ra^c) A - Pe \partial_x A + 2\partial_x^2 A. \quad (\text{A.2})$$

A.2 Équation d'amplitude non linéaire

A.2.1 Développement multi-échelle

On cherche à déterminer le comportement asymptotique de la solution dès que le nombre de Rayleigh dépasse sa valeur critique Ra^c d'une quantité qui varie en puissance de δ^2

¹ $\tilde{A}(k, \omega_0)$ étant la transformé de Fourier de $A(x, t) = A_0 e^{i((k-k_c)x - (\omega_0 - \omega_c)t)}$

$$Ra = Ra^c + \delta^2 R_2 + \dots \quad (\text{A.3})$$

Pour que l'équation d'enveloppe inclut un terme d'advection des rouleaux par l'écoulement moyen, Pe doit être choisi comme

$$Pe = \delta Pe_1. \quad (\text{A.4})$$

Les échelles de temps t_1 et t_2 , et l'échelle de l'espace X appropriées sont

$$t_1 = \delta t, \quad t_2 = \delta^2 t \quad \text{et} \quad X = \delta x. \quad (\text{A.5})$$

On peut exprimer la solution globale $\mathbf{V}(X, x, t, t_1, t_2, z)$ sous la forme suivante

$$\mathbf{V}(X, x, t, t_1, t_2, z) = \mathbf{V}_B + \mathbf{V}_c(X, x, t, t_1, t_2, z), \quad (\text{A.6})$$

et on fait un développement asymptotique de la solution convective $\mathbf{V}_c(X, x, t, t_1, t_2, z)$ en puissance du paramètre δ

$$\mathbf{V}_c(X, x, t, t_1, t_2, z) = (\delta \mathbf{V}_1 + \delta^2 \mathbf{V}_2 + \delta^3 \mathbf{V}_3 + O(\delta^4))(X, x, t, t_1, t_2, z). \quad (\text{A.7})$$

Les équations, ainsi que les conditions aux limites vérifiées par $\mathbf{V} = [u, w, \theta]^T$ sont respectivement

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_x + \delta \partial_X) u + \partial_z w = 0, \\ (\delta^2 \partial_X^2 + 2\delta \partial_{X,x}^2 + \partial_x^2 + \partial_z^2) w - (Ra^c + \delta^2 R_2 + \dots) \times \\ \quad (\delta^2 \partial_X^2 + 2\delta \partial_{X,x}^2 + \partial_x^2) \theta = 0, \\ (\partial_t + \delta \partial_{t_1} + \delta^2 \partial_{t_2} - \delta^2 \partial_X^2 - 2\delta \partial_{X,x}^2 - \partial_x^2 - \partial_z^2) \theta + u (\partial_x + \delta \partial_X) \theta + w \partial_z \theta = 0, \end{array} \right. \quad (\text{A.8})$$

et

$$\left\{ \begin{array}{llll} w = 0 & \text{et} & \theta = 1 & \text{en} & z = 0, \\ w = 0 & \text{et} & \theta = 0 & \text{en} & z = 1. \end{array} \right. \quad (\text{A.9})$$

L'écoulement de base étant

$$\begin{cases} \theta_B = 1 - z, \\ u_B = \delta P e_1, \\ w_B = 0. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

A.2.2 Ordre δ

Équations

Si les expressions (A.6) et (A.7) sont introduites dans le système (A.8) et en tenant compte de (A.10). À l'ordre δ , le système (A.8) se réduit à

$$\begin{cases} \partial_x u_1 + \partial_z w_1 = 0, \\ (\partial_x^2 + \partial_z^2) w_1 - Ra^c \partial_x^2 \theta_1 = 0, \\ (-\partial_t + \partial_x^2 + \partial_z^2) \theta_1 + w_1 = 0. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Solutions

Le système (A.11) admet les solutions qui satisfont aux conditions limites (A.9) suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{i\pi}{k_c} A(X, t_2) \exp(ik_c(x - Pe_1 t_1)) \cos(\pi z) + c.c., \\ w_1 = A(X, t_2) \exp(ik_c(x - Pe_1 t_1)) \sin(\pi z) + c.c., \\ \theta_1 = \frac{k_c^2 + \pi^2}{Ra^c k_c^2} A(X, t_2) \exp(ik_c(x - Pe_1 t_1)) \sin(\pi z) + c.c.. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

A.2.3 Problème adjoint

Introduisant le produit intérieur entre $\mathbf{V} = [u, w, \theta]^T$ et $\mathbf{V}^* = [u^*, w^*, \theta^*]^T$ comme

$$\langle \mathbf{V}, \mathbf{V}^* \rangle = \int_0^{2\pi/k_c} \int_0^1 (u\bar{u}^* + w\bar{w}^* + \theta\bar{\theta}^*) dz dx, \quad (\text{A.13})$$

où $\bar{}$ désigne le complexe conjugué.

Le mode adjoint $\mathbf{v}_1^* = [u_1^*, w_1^*, \theta_1^*]^T$ est la solution du problème adjoint défini par :

$$\begin{cases} -\partial_x u_1^* = 0, \\ -\partial_z u_1^* + (\partial_x^2 + \partial_z^2) w_1^* + \theta_1^* = 0, \\ -Ra^c \partial_x^2 w_1^* + (-\partial_t + \partial_x^2 + \partial_z^2) \theta_1^* = 0, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Solutions

Le système (A.14) admet les solutions suivantes :

$$\begin{cases} u_1^* = 0, \\ w_1^* = \exp(ik_c x) \sin(\pi z) + c.c., \\ \theta_1^* = (k_c^2 + \pi^2) \exp(ik_c x) \sin(\pi z) + c.c. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

A.2.4 Ordre δ^2

Équations

À l'ordre δ^2 on a :

$$\begin{cases} \partial_x u_2 + \partial_z w_2 = -\partial_X u_1, \\ (\partial_x^2 + \partial_z^2) w_2 - Ra^c \partial_x^2 \theta_2 = 2\partial_{X,x}^2 (Ra^c \theta_1 - w_1), \\ (-\partial_t + \partial_x^2 + \partial_z^2) \theta_2 + w_2 = (\partial_{t_1} + Pe_1 \partial_x - 2\partial_{X,x}^2 + w_1 \partial_z + u_1 \partial_x) \theta_1, \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

Solutions

Afin d'éviter d'introduire une nouvelle amplitude, on suppose que θ_2 est orthogonale à θ_1 , dans ce cas on pose :

$$\theta_2 = -\frac{1}{4\pi^3} A(X, t_2) \bar{A}(X, t_2) \sin(2\pi z), \quad (\text{A.17})$$

$$w_2 = -\frac{i}{\pi} \partial_X A(X, t_2) \sin(\pi z) \exp(ik_c(x - Pe_1 t_1)) + c.c., \quad (\text{A.18})$$

et cela donne :

$$u_2 = 0. \quad (\text{A.19})$$

A.2.5 Ordre δ^3

Équations

À l'ordre δ^3 on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x u_3 + \partial_z w_3 = -\partial_X u_2, \\ (\partial_x^2 + \partial_z^2) w_3 - Ra^c \partial_x^2 \theta_3 = 2\partial_{X,x}^2 (Ra^c \theta_2 - w_2) + (Ra^c \partial_X^2 + R_2) \theta_1 - \partial_X^2 w_1 \\ (-\partial_t + \partial_x^2 + \partial_z^2) \theta_3 + w_3 = (\partial_{t_1} + Pe_1 \partial_x - 2\partial_{X,x}^2 + w_1 \partial_z + u_1 \partial_x) \theta_2 + \\ (\partial_{t_2} + (Pe_1 + u_1) \partial_X - \partial_X^2 + u_2 \partial_x + w_2 \partial_z) \theta_1. \end{array} \right. \quad (\text{A.20})$$

Alternative de Fredholm

Ce système inhomogène ne peut avoir de solution que si les hypothèses du théorème de Fredholm [121] sont vérifiées, à savoir que le membre de droite de (A.20) doit être orthogonal aux solutions du système adjoint à (A.11) homogène. Après avoir introduit le produit intérieur, la condition d'orthogonalité fournit une condition de solvabilité. Ceci se traduit par une condition sur l'amplitude $A(X, t_2)$ qui selon la familière équation de Ginzburg-Landau s'écrit :

$$2\partial_{t_2} A = R_2 A - 2Pe_1 \partial_X A + 4\partial_X^2 A - A^2 \bar{A}. \quad (\text{A.21})$$

Équation d'amplitude de Ginzburg-Landau

L'amplitude A de l'équation (A.21) est d'ordre unité, or l'amplitude physique est d'ordre δ . Ceci suggère le changement des variables : $R_2 = \delta^{-2}(Ra - Ra^c)$, $X = \delta x$, $t_2 = \delta^2 t$ et $Pe_1 = \delta^{-1} Pe$. Ce qui permet de revenir à l'équation d'amplitude écrite dans les variables physiques d'origine

$$\partial_t A = \frac{1}{2} (Ra - Ra^c) A - Pe \partial_x A + 2\partial_x^2 A - \frac{1}{2} A^2 \bar{A}. \quad (\text{A.22})$$

Pour le cas inhomogène (i.e. $F(X) \neq 0$), si on suppose $\varepsilon \ll \delta \ll 1$ l'inhomogénéité intervient dans l'équation (A.22) uniquement dans l'expression du nombre de Rayleigh local $R(X) = Ra[1 - F(X)]$.

Annexe B

Méthodes Numériques

Il s'agit de résoudre le système complet d'équations régissant le phénomène de convection mixte dans un milieu poreux bi-dimensionnel $\Omega = [-L_x, L_x] \cdot [-L_z, L_z]$, chauffé par le bas d'une façon inhomogène. Les équations modélisant le problème ont été présentées au chapitre II, il s'agit des équations de continuité, de Darcy et de chaleur (conservation de l'énergie). Nous restons aussi dans le cadre de l'hypothèse de Boussinesq.

Sous forme adimensionnelle, le système d'équations s'écrit ;

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{V} + \nabla P = RaT\mathbf{e}_z, \quad (\text{B.2})$$

$$\partial_t T + \mathbf{V} \cdot \nabla T - \Delta T = 0, \quad (\text{B.3})$$

auquel on associe des conditions aux limites inhomogènes du type Dirichlit sur la température T :

$$\begin{cases} T(x, z = -L_z) = 1 - F(\varepsilon x), \\ T(x, z = +L_z) = 0, \\ T(x = \pm L_x, z) = \frac{(L_z - z)}{2L_z}(1 - F(\pm \varepsilon L_x)), \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

et des conditions aux limites homogènes du type Dirichlit sur les composantes de la vitesse u et w :

$$\begin{cases} u(x = \pm L_x, z) = Pe, \\ w(x, z = \pm L_z) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

La résolution numérique des équations (B.1)-(B.3) avec les conditions aux limites (B.4) et (B.5) repose sur la résolution de deux problèmes successifs : la première étape, revient à résoudre un problème de type Helmholtz [110] pour la température, tandis que la seconde,

revient à résoudre un problème de Darcy (un problème div-grad [109]) pour la pression et la vitesse. La discrétisation spatiale de ces deux problèmes est réalisée par méthode spectrale, celle-ci sera décrite dans le paragraphe §B.2. Nous allons auparavant présenter la discrétisation temporelle des deux problèmes.

B.1 Intégration temporelle

B.1.1 Problème de Helmholtz

L'équation de la chaleur (B.3) est intégrée temporellement à l'aide d'un schéma d'Euler retardé d'ordre 2 pour la dérivée en temps et un schéma de Adams-Bushforth, dans lequel est effectuée une extrapolation d'ordre 2 en temps du terme non-linéaire (terme de convection). Le terme de diffusion est pris de façon implicite. Ce schéma est construit de la façon suivante

$$\frac{\frac{3}{2}T^{n+1} - 2T^n + \frac{1}{2}T^{n-1}}{\Delta t} + 2(\mathbf{V}^n \cdot \nabla)T^n - (\mathbf{V}^{n-1} \cdot \nabla)T^{n-1} = \Delta T^{n+1}, \quad (\text{B.6})$$

où Δt représente le pas de temps, et l'indice n indique que les fonctions sont évaluées à l'instant $t^n = n\Delta t$ pour $n = 0, 1, \dots$

Le problème (B.6) se réduit à un problème de Helmholtz :

$$(\Delta - \sigma)T^{n+1} = f^{n-1,n}, \quad (\text{B.7})$$

$$T^{n+1}(x, z = -L_z) = 1 - F(\varepsilon x), \quad (\text{B.8})$$

$$T^{n+1}(x, z = +L_z) = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$T^{n+1}(x = \pm L_x, z) = \frac{(L_z - z)}{2L_z}(1 - F(\pm \varepsilon L_x)), \quad (\text{B.10})$$

où :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{3}{2\Delta t}, \\ f^{n,n-1} = \frac{\sigma}{3}(-4T^n + T^{n-1}) + 2\mathbf{V}^n \cdot \nabla T^n - \mathbf{V}^{n-1} \cdot \nabla T^{n-1}. \end{cases}$$

Il s'agit d'un problème de Helmholtz dont la résolution est effectuée par une méthode spectrale de collocation présentée dans le paragraphe §B.2.

B.1.2 Problème de Darcy

Pour déterminer la pression et la vitesse. On va résoudre le problème de Darcy :

$$\mathbf{V}^{n+1} + \nabla P^{n+1} = \mathbf{g}^{n+1}, \quad (\text{B.11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0, \quad (\text{B.12})$$

$$u^{n+1}(x = \pm L_x, z) = Pe, \quad (\text{B.13})$$

$$w^{n+1}(x, z = \pm L_z) = 0, \quad (\text{B.14})$$

où $\mathbf{g}^{n+1} = RaT^{n+1}\mathbf{e}_z$.

Une manière de résoudre (B.11)-(B.14) est de former un problème de Poisson (continu) pour la pression : en prenant la divergence de (B.11) et en la combinant avec (B.12) on obtient l'équation :

$$\Delta P^{n+1} = \nabla \cdot \mathbf{g}^{n+1} = h^{n+1}, \quad (\text{B.15})$$

où il n'y a aucune condition explicite aux limites sur la pression. Comme les conditions aux limites ne portent que sur u et w . La condition d'incompressibilité (B.12), va permettre de construire des conditions aux limites pour la pression. La pression n'est ici qu'une fonction asservie à la vitesse, qui s'ajuste de telle sorte que cette dernière reste à divergence nulle. Le champ de vitesse est déterminé directement par la résolution de l'équation (B.11) avec comme conditions aux limites (B.13) et (B.14).

Le système d'équations (B.1)-(B.3) modélisant le phénomène de la convection mixte en milieu poreux fait donc apparaître deux types de systèmes différentiels classiques : l'équation de type Helmholtz issue de la discrétisation temporelle (B.7) de l'équation de la chaleur (B.3) et le système de Darcy correspondant aux équations (B.11) et (B.12). Ces deux systèmes peuvent être résolus numériquement par méthodes spectrales.

B.2 Discrétisation spatiale, méthode spectrale

Les méthodes spectrales sont des techniques d'approximation des solutions d'équations aux dérivées partielles. Leur principale caractéristique est que les solutions discrètes sont cherchées dans l'espace de polynômes de haut degré. En ce sens, la précision de ces méthodes n'est limitée que par la régularité de la fonction à approcher, au contraire des autres types d'approximations comme les différences finies ou éléments finis [108]. Elles se distinguent ainsi des méthodes à précision finie par la qualité de leurs approximations, dont l'erreur tend exponentiellement vers zéro quand le degré polynomial augmente lorsque la solution est régulière. La plupart du temps elles sont écrites pour des domaines rectangulaires, cylindriques ou sphériques, elles restent plus difficilement adaptables à des domaines

de calcul quelconques. Pour plus de détails, on pourra consulter [113, 108, 114, 110, 115] sur les méthodes spectrales, [109] pour leurs applications en milieu poreux. Par la suite, nous avons opté pour une formulation forte des équations à résoudre.

Pour illustrer la méthode spectrale utilisée dans la résolution numérique du problème spatial (B.1)-(B.3), et pour des raisons de simplicité, nous considérons le problème multidimensionnel suivant :

$$(\Delta - \sigma)a(x, z) = f(x, z), \quad x, z \in [-1; 1]. \quad (\text{B.16})$$

L'équation type (B.16) qui décrit le problème est l'équation de Helmholtz. Ce problème est un problème de base courant en analyse numérique. On rajoute à ce problème les conditions de frontière inhomogènes de type Dirichlet ; c'est-à-dire, à coefficients dépendant la direction parallèle au bord sur lequel ces conditions s'appliquent. Ces conditions s'écrivent de manière suivante :

$$\alpha_x^\pm(z)a(x = \pm 1, z) = \gamma_x^\pm(z) \quad \text{suivant } x \quad (\text{B.17})$$

$$\alpha_z^\pm(x)a(x, z = \pm 1) = \gamma_z^\pm(x) \quad \text{suivant } z \quad (\text{B.18})$$

avec \pm indique la valeur par x (resp. z) en ± 1 .

B.2.1 Méthode spectrale de Galerkin

Pour résoudre l'équation (B.16), on utilise dans cette étude une méthode pseudo-spectrale ou spectrale de collocation [108], une méthode spectrale consiste à décomposer a sur une base de fonctions orthogonales par rapport à un produit scalaire. Ici, a sera approché, dans les deux directions de l'espace x et z , par sa projection sur la base des polynômes de Chebyshev tronquée à l'ordre N_x en x et N_z en z , soit :

$$a(x, z) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{a}_{mn} T_m(x) T_n(z), \quad x, z \in [-1; 1], \quad (\text{B.19})$$

où :

$$T_c(x) = \cos(c \cdot \arccos(x)).$$

Ces polynômes de Chebyshev peuvent aussi se définir par la relation de récurrence :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \quad \text{et} \quad T_c(x) = 2xT_{c-1}(x) - T_{c-2}(x).$$

De plus si le produit scalaire est défini comme qui suit :

$$\langle \dots \rangle = \int_{-1}^{+1} (\cdot)(\cdot) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

on a, pour les polynômes de Chebyshev, les relations d'orthogonalité :

$$\langle T_i, T_j \rangle = c_i \frac{\pi}{2} \delta_{ij} \quad \text{avec } c_0 = 2 \text{ et } c_i = 1 \text{ pour } i \geq 1,$$

on peut alors écrire les composantes spectrales :

$$\tilde{a}_{mn} = C_{ste} \cdot \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} a(x, z) T_m(x) T_n(z) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

et on a la relation :

$$m^P n^q \tilde{a}_{mn} \rightarrow 0, \quad \text{quand } m, n \rightarrow \infty, \quad \forall p, q > 0,$$

ceci montre que l'erreur d'approximation décroît plus rapidement qu'une décroissance algébrique quand le degré du polynôme augmente, pour une fonction régulière (ou analytique) : c'est ce que l'on appelle une décroissance exponentielle ou précision spectrale.

Les dérivées à l'ordre p et q , de toute fonction a développée dans cette base, s'écrivent :

$$\partial_x^p a(x, z) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{a}_{mn} \partial_x^p T_m(x) T_n(z), \quad \forall 0 \leq p \leq N_x, \quad (\text{B.20})$$

$$\partial_z^q a(x, z) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{a}_{mn} T_m(x) \partial_z^q T_n(z), \quad \forall 0 \leq q \leq N_z, \quad (\text{B.21})$$

ce qui permet d'en déduire la décomposition en série tronquée pour les dérivées :

$$\partial_x^p a(x, z) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{a}_{mn}^p T_m(x) T_n(z), \quad \forall 0 \leq p \leq N_x, \quad (\text{B.22})$$

$$\partial_z^q a(x, z) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{a}_{mn}^q T_m(x) T_n(z), \quad \forall 0 \leq q \leq N_z, \quad (\text{B.23})$$

avec :

$$\tilde{a}_{mn}^p = \sum_{k=0}^{N_x} \tilde{a}_{kn} \langle \partial_x^p T_k, T_m \rangle \quad \text{et} \quad \tilde{a}_{mn}^q = \sum_{l=0}^{N_z} \tilde{a}_{ml} \langle \partial_z^q T_l, T_n \rangle.$$

Ces relations font apparaître les opérateurs spectraux de dérivation associés aux différentes directions. L'application de ces opérateurs sur un élément de l'espace spectral tronqué peut être explicitée à l'aide d'une matrice carrée d'ordre N_x en x , et d'ordre N_z en z . L'opérateur de dérivation à l'ordre p (resp. q), associé à une direction :

$$\tilde{a}_{mn}^p = \sum_{k=0}^{N_x} (\mathbf{D}_{mk}^x)^p \tilde{a}_{kn} \quad \text{et} \quad \tilde{a}_{mn}^q = \sum_{l=0}^{N_z} (\mathbf{D}_{nl}^z)^q \tilde{a}_{ml},$$

où $(\mathbf{D}_{ij}^k)^l$ désigne l fois le produit matriciel de $\mathbf{D}_{ij}^k = \langle \partial_k T_j, T_i \rangle$.

B.2.2 Méthode pseudo-spectrale

Enfin ces relations sont exprimées de manière discrète. Ce qui permet d'en déduire les opérateurs différentiels pour l'espace physique. Une telle formulation du problème est appelée pseudo-spectrale (méthode mixte espace physique/espace spectral). Dans ce cas les points de collocations, appelés aussi quadratures sont choisis comme suit :

$$\begin{aligned} x_i &= \cos \frac{\pi i}{N_x} \quad \text{pour } i = 0, \dots, N_x, \\ z_j &= \cos \frac{\pi j}{N_z} \quad \text{pour } j = 0, \dots, N_z, \end{aligned}$$

les points de collocation retenus ici sont les points provenant de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto.

En utilisant une base d'interpolant de Lagrange, nous allons interpoler a à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$a(x_i, z_j) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} a_{mn} h_m(x_i) h_n(z_j), \quad \forall i \in [0, N_x], \quad \forall j \in [0, N_z], \quad (\text{B.24})$$

où h_m est le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré N_x en x , caractéristique du point de collocation x_i :

$$\forall i \in [0, N_x] \quad h_m(x_i) = \delta_{mi}.$$

Ce polynôme s'écrit

$$\forall m \in [0, N_x] \quad h_m(x) = \prod_{i=0, i \neq m}^{N_x} \frac{x - x_i}{x_i - x_m} = \frac{(-1)^{m+1} (1 - x^2) T'_{N_x}(x)}{\bar{c}_m N_x^2 (x - x_m)},$$

avec :

$$\bar{c}_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = 0, N_x \\ 1 & i = 1, \dots, N_x - 1, \end{cases}$$

et T'_{N_x} désigne la dérivée du polynôme de Chebyshev de degré N_x . On a alors pour les dérivées à l'ordre p et q les relations :

$$\partial_x^p a(x_i, z_j) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{a}_{mn} \partial_x^p h_m(x_i) h_n(z_j), \quad \forall 0 \leq p \leq N_x, \quad (\text{B.25})$$

$$\partial_z^q a(x_i, z_j) \approx \sum_{m=0}^{N_x} \sum_{n=0}^{N_z} \tilde{a}_{mn} h_m(x) \partial_z^q h_n(z_j), \quad \forall 0 \leq q \leq N_z, \quad (\text{B.26})$$

d'où l'on peut tirer les opérateurs de dérivation en espace, dans l'espace physique discrétisé :

$$\partial_x^p a(x_i, z_j) = \sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_{ik}^x)^p a(x_k, z_j), \quad (\text{B.27})$$

$$\partial_z^q a(x_i, z_j) = \sum_{l=0}^{N_z} (\mathcal{D}_{jl}^z)^q a(x_i, z_l). \quad (\text{B.28})$$

où \mathcal{D}_{ij}^x sont des matrices pleines : le calcul de la dérivée en un point fait intervenir tous les points du domaine physique. L'expression des coefficients $\mathcal{D}_{ij}^x = h'_j(x_i)$ (*cf.* par exemple [111]) est donnée par :

$$\mathcal{D}_{ij}^x = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\bar{c}_i}{\bar{c}_j} \frac{(-1)^{i+j}}{\sin \frac{\pi(i+j)}{2N_x} \sin \frac{\pi(i-j)}{2N_x}} & i \neq j \\ -\frac{\cos \frac{\pi j}{N_x}}{2 \sin^2 \frac{\pi i}{N_x}} & 1 \leq i = j \leq N_x - 1 \\ \frac{2N_x^2 + 1}{6} & i = j = 0 \\ -\frac{2N_x^2 + 1}{6} & i = j = N_x, \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

où l'on a utilisé les formules trigonométriques :

$$\begin{aligned} x_i - x_j &= -2 \sin \frac{\pi(i+j)}{2N_x} \sin \frac{\pi(i-j)}{2N_x}, \\ 1 - x_i^2 &= \sin^2 \frac{\pi i}{N_x}. \end{aligned}$$

Après discrétisation spectrale des opérateurs de dérivations. L'approximation de collocation Chebyshev est équivalente au système linéaire :

$$\sum_{k=0}^{N_x} (\mathcal{D}_{ik}^x)^2 a(x_k, z_j) + \sum_{l=0}^{N_z} (\mathcal{D}_{jl}^z)^2 a(x_i, z_l) - \sigma a(x_i, z_j) = f(x_i, z_j), \quad (\text{B.30})$$

$$\forall x_i, z_j \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

La notation indicielle (B.30) induit une formulation tensorisée des équations, qui deviennent :

$$(\mathcal{I}_z \otimes (\mathcal{D}^x)^2 + (\mathcal{D}^z)^2 \otimes \mathcal{I}_x - \sigma \mathcal{I}_z \otimes \mathcal{I}_x) a = f. \quad (\text{B.31})$$

B.2.3 Conditions aux limites

Pour l'instant nous n'avons pas rajouté les conditions aux limites (B.17)-(B.18). Elles s'écrivent sous la forme discrétisée suivante :

$$a(x_{i=0}, z_j) = a_{0j} = \frac{(\gamma_x^-)_j}{(\alpha_x^-)_j} = (\mu_x^-)_j, \quad (\text{B.32})$$

$$a(x_{i=N_x}, z_j) = a_{N_x j} = \frac{(\gamma_x^+)_j}{(\alpha_x^+)_j} = (\mu_x^+)_j, \quad (\text{B.33})$$

$$a(x_i, z_{j=0}) = a_{i0} = \frac{(\gamma_z^-)_i}{(\alpha_z^-)_i} = (\mu_z^-)_i, \quad (\text{B.34})$$

$$a(x_i, z_{j=N_z}) = a_{i N_z} = \frac{(\gamma_z^+)_i}{(\alpha_z^+)_i} = (\mu_z^+)_i, \quad (\text{B.35})$$

$$\forall i, j \in [1, N_x] \times [1, N_z].$$

Il faut en plus tenir compte de conditions de compatibilité : les conditions sur a dans les deux directions doivent être vérifiées simultanément dans les coins, c'est-à-dire il faut que $(\mu_x^-)_0 = (\mu_z^-)_0$, $(\mu_x^-)_{N_z} = (\mu_z^-)_{N_z}$, $(\mu_x^+)_0 = (\mu_z^+)_{N_x}$ et $(\mu_x^+)_{N_x} = (\mu_z^+)_{N_x}$. On remplace les valeurs aux points de frontière a_{0j} , $a_{N_x j}$, a_{i0} et $a_{i N_z}$ dans (B.30). Dans ce cas le problème (B.30) devient pour les points de collocation intérieurs :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{N_x-1} (\mathcal{D}_{ik}^x)^2 a_{kj} + \sum_{l=1}^{N_z-1} (\mathcal{D}_{jl}^z)^2 a_{il} - \sigma a_{ij} &= f_{ij} \tag{B.36} \\
 &- \underbrace{\left\{ (\mathcal{D}_{i0}^x)^2 (\mu_x^-)_j + (\mathcal{D}_{iN_x}^x)^2 (\mu_x^+)_j \right\}}_{f_{\mu_x}} \\
 &- \underbrace{\left\{ (\mathcal{D}_{j0}^z)^2 (\mu_z^-)_i + (\mathcal{D}_{jN_z}^z)^2 (\mu_z^+)_i \right\}}_{f_{\mu_z}} \\
 \forall i \in [1, N_x - 1], \quad \forall j \in [1, N_z - 1],
 \end{aligned}$$

l'équation (B.36) s'écrit sous la forme tensorielle :

$$(\mathcal{I}_z \otimes [(\mathcal{D}^x)^2]_{int.} + [(\mathcal{D}^z)^2]_{int.} \otimes \mathcal{I}_x - \sigma \mathcal{I}_z \otimes \mathcal{I}_x) a = f - f_{\mu_x} - f_{\mu_z}. \tag{B.37}$$

Il est à noter que ce système de collocation peut s'obtenir d'une formulation variationnelle du problème de Helmholtz (B.16)-(B.18), utilisant le produit scalaire de Chebyshev-Gauss-Lobatto [112]. Le système linéaire (B.37) étant inversible, on le résout par une méthode de diagonalisation [111]. Il suffit pour cela de connaître les matrices diagonales formées par les valeurs propres de $[(\mathcal{D}^x)^2]_{int.}$ et $[(\mathcal{D}^z)^2]_{int.}$ que l'on note respectivement Λ_x et Λ_z , ainsi que les matrices de passage des bases physiques (interpolants de Lagrange) aux bases des modes propres que l'on note respectivement \mathcal{P}_x et \mathcal{P}_z , les opérateurs s'écrivent donc sous la forme :

$$[(\mathcal{D}^x)^2]_{int.} = \mathcal{P}_x \Lambda_x \mathcal{P}_x^{-1}, \quad \text{et} \quad [(\mathcal{D}^z)^2]_{int.} = \mathcal{P}_z \Lambda_z \mathcal{P}_z^{-1}.$$

En réintroduisant dans (B.37). L'opérateur de Helmholtz est diagonalisé avec la notation tensorielle :

$$(\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{P}_x) \underbrace{(\mathcal{I}_z \otimes \Lambda_x + \Lambda_z \otimes \mathcal{I}_x - \sigma \mathcal{I}_z \otimes \mathcal{I}_x)}_{\mathbb{H}} (\mathcal{P}_z^{-1} \otimes \mathcal{P}_x^{-1}) a = f - f_{\mu_x} - f_{\mu_z}, \tag{B.38}$$

puis inversé ce qui permet d'en déduire a :

$$a = (\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{P}_x) \mathbb{H}^{-1} (\mathcal{P}_z^{-1} \otimes \mathcal{P}_x^{-1}) (f - f_{\mu_x} - f_{\mu_z}). \tag{B.39}$$

La matrice \mathbb{H} est diagonale, son inversion s'obtient simplement par inversion des termes diagonaux ceux qui est relativement peu coûteux. La résolution de a s'effectue sur les points de collocation intérieurs par (B.40). Les points de collocation extérieurs s'obtiennent en utilisant les relations (B.32)-(B.35).

B.3 Applications aux équations

B.3.1 Résolution de la température

Pour la résolution de l'équation (B.7) avec les conditions aux limites (B.8)-(B.10), on reconnaît une équation de Helmholtz du type (B.16) avec les conditions aux limites du type (B.17) et (B.18). On peut donc directement appliquer la méthode développée dans le paragraphe §B.2 au cas de l'équation de la température (B.7).

$$T^{n+1} = (\mathcal{P}_z \otimes \mathcal{P}_x) \mathbb{H}^{-1} (\mathcal{P}_z^{-1} \otimes \mathcal{P}_x^{-1}) (f - f_{\mu_x} - f_{\mu_z})^{n-1, n}. \quad (\text{B.40})$$

B.3.2 Résolution de la pression et de la vitesse

La méthode spectrale développée jusqu'à ici permet de résoudre complètement les problèmes de type Helmholtz, c'est-à-dire l'équation de la chaleur (B.7). Il reste donc à traiter les équations (B.11) et (B.12) constituant le problème de Darcy. L'objectif de cette partie est de décrire la résolution des équations de Darcy, par la technique spectrale de collocation développée au paragraphe §B.2. L'avantage principal de l'utilisation de cette méthode dans ce problème concerne la possibilité d'approximer, avec une grande précision, la vitesse à l'aide d'une vitesse discrète à divergence nulle. Nous utilisons ici un découplage vitesse-pression qui consiste à construire un opérateur sur la pression, ne nécessitant aucune condition aux limites sur la pression pour son inversion.

Connaissant T au temps t^{n+1} il s'agit de résoudre numériquement le problème de Darcy (B.11)-(B.14). Après avoir enlevé les indices temporels $n + 1$ et posé :

$$\mathbf{g}(x, z) = (g_x(x, z), g_z(x, z)),$$

le problème de Darcy (B.11)-(B.14) s'écrit sous la forme scalaire :

$$u + \partial_x P = g_x, \quad (\text{B.41})$$

$$w + \partial_z P = g_z, \quad (\text{B.42})$$

$$\partial_x u + \partial_z w = 0, \quad (\text{B.43})$$

$$u(x = \pm L_x, z) = Pe, \quad (\text{B.44})$$

$$w(x, z = \pm L_z) = 0. \quad (\text{B.45})$$

L'approximation de collocation du problème de Darcy revient à écrire le système (B.41)-(B.45) aux points de collocation :

Pour $i \in [1, N_x]$ et $j \in [1, N_z]$,

$$u(x_i, z_j) + \partial_x P(x_i, z_j) = g_x(x_i, z_j), \quad (\text{B.46})$$

$$w(x_i, z_j) + \partial_z P(x_i, z_j) = g_z(x_i, z_j), \quad (\text{B.47})$$

$$\partial_x u(x_i, z_j) + \partial_z w(x_i, z_j) = 0, \quad (\text{B.48})$$

$$u(x_{i=0, N_x}, z_j) = Pe, \quad (\text{B.49})$$

$$w(x_i, z_{j=0, N_z}) = 0, \quad (\text{B.50})$$

Comme la vitesse et la pression sont reliées par :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \Leftrightarrow \Delta P = h$$

alors, pour connaître la valeur du champ de pression, il faut donc réinjecter la condition sur la vitesse, cela découle directement des équations discrétisées :

- On impose $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ sur tous les noeuds du domaine même à la frontière (la divergence est nulle partout) :

$$\partial_x u(x_i, z_j) + \partial_z w(x_i, z_j) = 0, \quad (\text{B.51})$$

en utilisant la discrétisation de type spectrale des opérateurs de dérivation exprimée dans le paragraphe §B.2, nous pouvons définir les opérateurs de divergence :

$$\sum_{k=1}^{N_x-1} \mathcal{D}_{ik}^x u_{kj} + \sum_{l=1}^{N_z-1} \mathcal{D}_{jl}^z w_{il} = -\mathcal{D}_{iN_x}^x u_{N_x j} - \mathcal{D}_{i0}^x u_{0j} - \mathcal{D}_{jN_z}^z w_{iN_z} - \mathcal{D}_{j0}^z w_{i0}. \quad (\text{B.52})$$

- On applique la loi de Darcy pour les points de collocation intérieurs :

$$u_{kj} + \sum_{m=0}^{Nx} \mathcal{D}_{km}^x P_{mj} = g_{kj}^x, \quad (\text{B.53})$$

$$w_{il} + \sum_{h=0}^{Nz} \mathcal{D}_{lh}^z P_{ih} = g_{il}^z. \quad (\text{B.54})$$

- On résout le système (B.52)-(B.54) par un découplage de la vitesse et la pression : de (B.53) on tire :

$$u_{kj} = - \sum_{m=0}^{Nx} \mathcal{D}_{km}^x P_{mj} + g_{kj}^x, \quad (\text{B.55})$$

et de (B.54) on tire :

$$w_{il} = - \sum_{h=0}^{Nz} \mathcal{D}_{lh}^z P_{ih} + g_{il}^z, \quad (\text{B.56})$$

et en portant les équations (B.55) et (B.56) dans (B.52) on obtient une équation de type Poisson pour la pression , définie sur tout le domaine Ω soit :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{Nx-1} \mathcal{D}_{ik}^x \left(\underbrace{\sum_{m=0}^{Nx} \mathcal{D}_{km}^x P_{mj}}_{\widehat{\mathcal{D}}^x P} \right)}_{\widehat{\mathcal{D}}^x \cdot \widehat{\mathcal{D}}^x P} + \sum_{l=1}^{Nz-1} \mathcal{D}_{jl}^z \left(\sum_{h=0}^{Nz} \mathcal{D}_{lh}^z P_{ih} \right) =$$

$$\sum_{k=1}^{Nx-1} \mathcal{D}_{ik}^x g_{kj}^x + \mathcal{D}_{iNx}^x u_{Nxj} + \mathcal{D}_{i0}^x u_{0j} + \sum_{l=1}^{Nz-1} \mathcal{D}_{jl}^z g_{il}^z + \mathcal{D}_{jNz}^z w_{iNz} + \mathcal{D}_{j0}^z w_{i0}$$

soit sous forme tensorielle :

$$\left(\underbrace{\mathcal{I}_z \otimes (\widehat{\mathcal{D}}^x \cdot \widehat{\mathcal{D}}^x) + (\widehat{\mathcal{D}}^z \cdot \widehat{\mathcal{D}}^z) \otimes \mathcal{I}_x}_{\mathbb{U}} \right) P = h,$$

avec la matrice $\widehat{\mathcal{D}}^x$ est la matrice de divergence de dimension $N_x \times N_x - 1$, et $\widehat{\mathcal{D}}^x$ la matrice de dérivation pour la pression de dimension $N_x - 1 \times N_x$, h construite sur les \mathcal{D} mais où on remplace les valeurs des h à la frontière par les conditions aux limites sur la vitesse (B.49)-(B.50).

Finalement on obtient la pression et la vitesse au temps t^{n+1} :

$$P^{n+1} = \mathbb{U}^{-1}h^{n+1}, \quad (\text{B.57})$$

$$u^{n+1} = -\widehat{\mathcal{D}}^x P^{n+1}, \quad (\text{B.58})$$

$$w^{n+1} = -\widehat{\mathcal{D}}^z P^{n+1} + RaT^{n+1}. \quad (\text{B.59})$$

La matrice \mathbb{U}^{-1} , se calcule par la méthode de diagonalisation. Une fois que la pression est calculée, les équations (B.58) et (B.59) donnent la valeur de la vitesse aux points de collocation intérieurs. Les vitesses aux bords sont données par les véritables conditions aux limites (B.49) et (B.50).

Bibliographie

- [1] **KOSCHMIEDER E.L. & PALLAS S.G.**, *Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer*, Int. J. heat Mass Transfer, **17**, 991-1002, (1974).
- [2] **BEHRINGER R.P.**, *Rayleigh-Bénard convection and turbulence in liquid helium*, Rev. Mod. Phys, **57**, 657-687, (1985).
- [3] **CROSS M.C. & HOHENBERG P.C.**, *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys, **65**, 851-1112, (1993).
- [4] **BUSSE F.H. & WHITEHEAD J.A.**, *Instabilities of convection rolls in a high Prandtl number fluid*, J. Fluid Mech., **47**, 305-320, (1971).
- [5] **RASENAT S., HARTUNG G., WINKLER B.L. & REHBERG I.**, *The shadowgraph method in convection experiments*, Exps. Fluids, **7**, 412-420, (1989).
- [6] **BRUYN J.DE, BODENSCHATZ E., MORRIS S.W., TRAINOFF S.P., HU Y., CANNELL D.S. & AHLERS G.**, *Apparatus for the study of Rayleigh-Bénard convection in gas under pressure*, Rev. Sci. Instrum, **67**, 2043-2067, (1996).
- [7] **HORTON C.W. & RODGERS F.T.**, *Convection currents in a porous media*, J. Appl. Phys., **16**, 367-370, (1945).
- [8] **LAPWOOD E.R.**, *Convection of a fluid in a porous medium*, Proc. Camb. Phil. Soc., **44**, 508-521, (1948).
- [9] **NIELD D.A. & BEJAN A.**, *Convection in Porous Media*, New York, Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1992 (2nd edn., 1999).
- [10] **SALEH S., LARREA J.C., THOVERT J.F., PLATTEN J.K. & ADLER P.M.**, *Thermal Convection in a Model Porous Medium*, Sixth international Symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics, Lisbon, (1992).
- [11] **SCHNEIDER K.J.**, *Investigation on the influence of free thermal convection on the heat transfer through granular material*, Proc. 11th Intl Congr. of Refrigeration 247-253, (1963).
- [12] **KANEKO T., MOHTADI M.F. & AZIZ K.**, *An experimental study of natural convection in inclined porous media*, Intl J. Heat Mass Transfer, **17**, 485-496, (1974).
- [13] **COMBARNOUS M.**, *Convection naturelle et convection mixte dans une couche poreuse horizontale*, Rev. Gén. Therm, **9**, 1355-1375, (1970).
- [14] **COMBARNOUS M. & BORIES S.A.**, *Hydrothermal convection in saturated porous media*, Advances in Hydrosience, **10**, 231-307, (1975).
- [15] **BURETTA R.J. & BERMAN A.S.**, *Convective heat transfer in a liquid saturated porous layer*, Trans. ASME J. Appl. Mech, **43**, 249-253, (1976).
- [16] **KATTO Y. & MASUOKA T.**, *Criterion for the onset of convective flow in a fluid in a porous medium*, Intl J. Heat Mass Transfer, **10**, 297-309, (1967).
- [17] **YEN Y.C.**, *Effects of density inversion on free convective heat transfer in porous layer heated from below*, Intl J. Heat. Mass Transfer, **17**, 1349-1356, (1974).

- [18] SKATTUCK M.D., BEHRINGER R.P., JOHNSON G.A. & GEORGIADIS J.G., *Convection and flow in porous media. Part 1. Visualization by magnetic resonance imaging*, J. Fluid Mech., **332**, 215-245, (1997).
- [19] K.L. BABCOCK, G. AHLERS, D.S. CANNELL, *Noise amplification in open Taylor-Couette flow*, Phys. Rev. E, vol 50, number 5, 3670-3691, (1994).
- [20] PRATS M., *The effect of horizontal fluid motion on thermally induced convection currents in porous media*, J. Geophys. Res., **71**, 4835-4838, (1967).
- [21] REES D.A.S., *The effect of inertia on the onset of mixed convection in a porous layer heated from below*, Int. Comm. Heat Mass Transfert, **24**, (2), 277-283, (1997).
- [22] CHUNG T.J., PARK J.H., CHOI C.K. & YOON D.Y., *The onset of vortex in laminar forced convection flow through a horizontal porous channel*, Int. J. Heat Mass Transfert, **45**, 3061-3064, (2002).
- [23] DUFOUR F., *Etude analytique et numérique de la convection entraînée en milieux poreux*, Thèse, Université Paul Sabatier Toulouse III, (1998).
- [24] DUFOUR F. & NÉEL M.C., *Numerical study of instability in a horizontal porous channel with bottom heating and forced horizontal flow*, Phys. Fluids, **10**, (9), 2198-2207, (1998).
- [25] DELACHE A., OUARZAZI M.N., & COMBARNOUS M., *Spatio-temporal stability analysis of mixed convection flows in porous media heated from below : Comparison with experiments*, Int. J. Heat Mass Transfer, **50**, Issues 7-8, 1485-1499, (2007).
- [26] DELACHE A. & OUARZAZI M.N. , *Weakly nonlinear interaction of mixed convection patterns in porous media heated from below*, Int. J. Thermal Sciences, (2008).
- [27] DELACHE A. , *Étude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux : comparaison avec l'expérience*, Thèse, Lille 1, (2005).
- [28] SOWARD A.M. & JONES C.A., *The linear stability of the flow in the narrow gap between two concentric rotating spheres*, Q. J. Mech. appl. Math., **36**(1), 19-42 (1983).
- [29] PIERREHUMBERT R.T., *Local and global baroclinic instability of zonally varying flows*, J. Atmos. Sci., **41**, 2141-2162 (1984).
- [30] KOCH W., *Local instability characteristics and frequency determination of selfexcited wake flows*, J. Sound Vibration, **99**, 53-58 (1985).
- [31] BAR-SEVER Y. & MERKINE L.O., *Local instabilities of weakly nonparallel large scale flows : WKB analysis*, Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics, **41**, 233-286 (1988).
- [32] WENTZEL G., *Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik*, Z. Phys., **38**, 518-529 (1926).
- [33] KRAMERS H.A., *Wellenmechanik und halbzahlige Quantizierung*, Z. Phys., **39**, 828-840 (1926).
- [34] BRILLOUIN L., *La mécanique ondulatoire de Schrödinger; une méthode générale de résolution par approximations successives*, C. R. Acad. Sci. Paris, **183**, 24-26 (1926).
- [35] BRILLOUIN L., *Remarques sur la mécanique ondulatoire*, J. Phys. Radium, **VII** (12), 353-368 (1926).
- [36] JEFFREYS H., *On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order*, Proc. London Math. Soc. (2nd ser.), **23**, 428-436 (1925).
- [37] HUERRE P. & MONKEWITZ P.A., *Local and global instabilities in spatially developing flows*, Annu. Rev. Fluid Mech., **22**, 473-537 (1990).
- [38] CHOMAZ J.M., HUERRE P., & REDEKOPP L.G., *Bifurcation to local and global modes in spatially developing flows*, Phys. Rev. Lett., **60**, 25-28 (1988).

- [39] CHOMAZ J.M., HUERRE P., & REDEKOPP L.G., *A Frequency selection criterion in spatially developing flows*, Stud. App. Math., **84**, 119-144 (1991).
- [40] LE DIZÈS S., HUERRE P., CHOMAZ J.M. & MONKEWITZ P.A., *Linear global modes in spatially developing media*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, **354**, 169-212 (1996).
- [41] COUAIRON A. & CHOMAZ J.M., *Fully nonlinear global modes in slowly varying flows*, Phys. Fluids, **11**, 3688-3703, (1999).
- [42] PIER B., HUERRE P. & CHOMAZ J.M., *Bifurcation to fully nonlinear synchronized structures in slowly varying media*, Physica D, **148**, 49-96, (2001).
- [43] CHOMAZ J.M., *Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity*, Ann. Rev. Fluid Mech., **37**, 357-392, (2005).
- [44] CHOMAZ J.M., *Absolute and convective instabilities in nonlinear systems*, Phys. Rev. Lett., **69**, 1931-1934, (1992).
- [45] COUAIRON A. & CHOMAZ J.M., *Global instability in fully nonlinear systems*, Phys. Rev. Lett., **77**, 4015-4018, (1996).
- [46] COUAIRON A. & CHOMAZ J.M., *Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems*, Physica D, **08**, 236-276, (1997).
- [47] COUAIRON A. & CHOMAZ J.M., *Pattern selection in the presence of a cross flow*, Phys. Rev. Lett., **79**, 2666-2669, (1997).
- [48] GOUJON-DURAND S., JENFFER P. & WESFREID J.E., *Downstream evolution of the Bénard-von Kármán instability*, Phys. Rev. E, **50**, 308-313, (1994).
- [49] ZIELINSKA B.J.A. & WESFREID J.E., *On the spatial structure of global modes in wake flow*, Phys. Fluids, **7**, 1418-1424, (1995).
- [50] COUAIRON A. & CHOMAZ J.M., *Pushed Global modes in weakly inhomogeneous subcritical flows*, Physica. D, **158**, 129-150, (2001).
- [51] TAKI M., OUARZAZI M.N., WARD H. & GLORIEUX P., *Nonlinear front propagation in optical parametric oscillators*, J. Opt. Soc. Am. B., **17**(6), 997-1003, (2000).
- [52] PIER B. & HUERRE P., *Nonlinear self-sustained structures and fronts in spatially developing wake flows*, J. Fluid Mech., **435**, 145-174, (2001).
- [53] MARQUILLIE M. & EHRENSTEIN U., *On the onset of nonlinear oscillations in a separating boundary-layer flow*, J. Fluid Mech., **490**, 169-188, (2003).
- [54] LESSHAFFT L., HERRE P., SAGAUT P. & TERRACOL M., *Nonlinear global modes in hot jets*, J. Fluid Mech., **554**, 393-409, (2006).
- [55] OUARZAZI M.N., MEJNI F., DELACHE A., & LABROSSE G., *Nonlinear global modes in inhomogeneous mixed convection flows in porous media*, J. Fluid Mech., **595**, 367-377, (2008).
- [56] MEJNI F., & OUARZAZI M.N., *Global instabilities in inhomogeneous mixed convection flows in semi-infinite porous media*, accepté et visible sur le site de Mechanics Research Communications, (2008).
- [57] GIBSON L.J. & ASHBY M.F., *Cellular Solids, Structure and Properties*, Oxford, New York : Pergamon Press, (1988).
- [58] MARSILY G., *Quantitative hydrogeology - Groundwater hydrology for engineers*, Academic Press, San Diego, (1986).
- [59] BEAR J., *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications, Inc., New York, (1972).

- [60] **DARCY H.**, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*, Librairie des Corps Impériaux des Ponts et Chaussées et des Mines, Paris, (1856).
- [61] **SHEIDEGGER A.E.**, *The physics of flow through porous media*, University of Toronto press, (1960).
- [62] **ERGUN S.**, *Fluid flow through packed columns*, Chem. Engng Prog., **48**, 89-94, (1952).
- [63] **RAHIMIAN M.H. & POURSHAGHAGHY A.**, *Direct simulation of forced convection flow in a parallel plate channel filled with porous media*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, **29**, (6), 867-878, (2002).
- [64] **GUYON E., HULIN J.P & PETIT L.**, *Hydrodynamique physique*, EDP sciences/CNRS Edition, (2001).
- [65] **FREEZE R.A. & CHERRY J.A.**, *Groundwater*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J, (1979).
- [66] **BEJAN A. & KRAUS A.D.**, *Heat Transfer Handbook*, Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, (2003).
- [67] **BEJAN A.**, *Convection Heat Transfer*, 2nd ed., Wiley, New York, (1995).
- [68] **BOUSSINESQ J.**, *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et la théorie mécanique de la lumière, Tome II : Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité. Courants de convection*, Gauthier-Villars, (1903).
- [69] **OBERBECK A.**, *Ueber die Wärmeleitung des Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen*, Ann. Phys. Chem., **7**, 271-292, (1879).
- [70] **CHANDRASEKHAR S.**, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press, Oxford, (1961).
- [71] **FORCHHEIMER P.**, *Wasserbewegung durch Boden*, Z. Ver. Deutsch. Ing., **45**, 1782-1788 (1901).
- [72] **DUPUIT J.**, *Etudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement des Eaux dans les Canaux Decouverts et a Travers les Terrains Permeables*, 2nd edn., Dunod, Paris, (1863).
- [73] **HSU C.T. & CHENG P.**, *Thermal dispersion in a porous medium*, Int. J. Heat Mass Transfer, **33**, 1587-1597, (1990).
- [74] **VAFAI K.**, *Handbook of POROUS MEDIA*, Second Edition, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, (2005).
- [75] **HSU C.T., FU H.L. & CHENG P.**, *On pressure-velocity correlation of steady and oscillating flows in regenerators made of wire-screens*, ASMEJ. Fluids Eng., **21**, 52-56, (1999).
- [76] **MUSKAT M.**, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, The Maple Press Company, York, PA, (1946).
- [77] **LINQUIST E.**, *Proceeding of Premier Congrès des Grands Barrages*, Stockholm, (1930).
- [78] **FIRDAOUSS M., GUERMOND J.L. & LE QUÉRÉ P.**, *Non linear coorection to Darcy's law at low Raynols numbers*, J. Fluid Mech, **343**, 331-350, (1997).
- [79] **CHAUVETAU G.**, *Essai sur la loi de Darcy*, thèse, université de Toulouse, (1965).
- [80] **SKJETNE E. & AURIAULT J.L.**, *New insights on steady non-linear flow in porous media*, European J. Mech. B Fluids, **18**, (1), 131-145, (1999).
- [81] **MEI C. & AURIAULT J.L.**, *The effect of weak inertia on flow through a porous medium*, J. Fluid Mech., **222**, 647-663, (1991).

- [82] **WARD J.C.**, *Turbulent Flow in Porous Media*, J. Hydraul. Div. ASCE, **90**, (5), 1-12, (1964).
- [83] **BRINKMAN H.C.**, *A Calculation of the Viscous Force Extended by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles*, *Appl. Sci. Res.*, **A1**, 26-34, (1947).
- [84] **GIVLER R.C. & ALTOBELLI S.A.**, *A determination of effective viscosity for the Brinkman-Forchheimer flow model*, J. Fluid. Mech., **258**, 355-370, (1994).
- [85] **VAFAI K. & TIEN C.-L.**, *Boundary and Inertia Effects on Flow and Heat Transfer in Porous Media*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **24**, 195-203 (1981).
- [86] **LUNDGREN T.S.**, *Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres*, J. Fluid Mech., **51**, 273-299, (1972).
- [87] **MARTYS N., BENTZ D.P. & GARBOCZI E.J.**, *Computer simulation study of the effective viscosity in Brinkman's equation*, *Phys. Fluids*, **6**, 1434-1439, (1994).
- [88] **QUINTARD M.**, *Diffusion in isotropic and anisotropic porous systems : three dimensional calculations*, *Transp. Porous Media*, **11**, 187-199, (1993).
- [89] **KOPLIK J., LEVINE H. & ZEE A.**, *Viscosity renormalizations in the Brinkman equation*, *Phys. Fluids*, **26**, 2864-2870, (1983).
- [90] **OCHOA-TAPIA J.A. & WHITAKER S.**, *Momentum transfer at the boundary between a porous medium and a homogeneous fluid -I*, Theoretical development, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **38**, 2647-2655, (1995).
- [91] **COMBARNOUS M. & BORIES S.A.**, *Modélisation de la convection d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **17**, 505-514, (1974).
- [92] **QUINTARD M. & WHITAKER S.**, *One and two-equation models for transient diffusion process in two-phase systems*, *Advances in Heat Transfer*, **23**, 369-464, (1993).
- [93] **SANCHEZ-PALENCIA E.**, *Non homogeneous media and vibration theory*, *Lecture Notes in Physics*, **127**, (1980).
- [94] **MONKEWITZ P.A., HUERRE P. & CHOMAZ J.M.**, *Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows*, J. Fluid Mech., **288**, 1-20 (1993).
- [95] **NIKIFONOV A. & OUVAROV V.**, *Fonctions spéciales de la physique mathématique*, (1973).
- [96] **ABRAMOVITZ M. & STEGUN I.A.**, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, (1964).
- [97] **APPELL P. & KAMPÉ DE FÉRIET J.**, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques polynômes d'Hermite*, (1926).
- [98] **BENDER C.M. & ORSZAG S.A.**, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers* McGraw-Hill, New-York (1978).
- [99] **NEWELL A.C. & WHITEHEAD J.A.**, *Finite bandwidth, finite amplitude convection*, J. Fluid Mech., **38**, 279-303 (1969).
- [100] **SEGEL L.A.**, *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection*, J. Fluid Mech., **38**, 203-235 (1969).
- [101] **CARRIÈRE P., MONKEWITZ P.A. & DENIS M.**, *Envelope equations for the Rayleigh-Bénard-Poiseuille system. Part 1. Spatially homogeneous case*, J. Fluid Mech., **502**, 153-174 (2004).
- [102] **PIER B. & HUERRE P.**, *Fully nonlinear global modes in spatially developing media*, *Physica D*, **97**, 206-222 (1996).
- [103] **PIER B., HUERRE P., CHOMAZ J.M. & COUAIRON A.**, *Steep nonlinear global modes in spatially developing media*, *Phys. Fluids*, **10**, 2433-2435 (1998).

- [104] **LE DIZÈS S., HUERRE P., CHOMAZ J.M. & MONKEWITZ P.A.**, *Nonlinear stability analysis of slowly diverging flows : Limitations of the weakly nonlinear approach*, in *proceedings of the IUTAM symposium on bluff-body wakes, dynamics and instabilities* (ed. Eckelmann H., Graham J.M.R, Huerre P., & Monkewitz P.A.), Berlin : Springer-Verlag, 147-152 (1993).
- [105] **STEWARTSON K. & STUART J.T.**, *A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow*, *J. Fluid Mech.*, **48**, 529-545 (1971).
- [106] **DIPRIMA R.C., ECKHAUSS W. & SEGEL L.A.**, *A Nonlinear wave-number interaction in near-vertical two-dimensional flows*, *J. Fluid Mech.*, **49**(4), 705-744 (1971).
- [107] **GINZBURG V.L. & LANDAU L.D.**, *On the theory of superconductivity*, Collection d'articles de Landau (article N° 73), Edition Pergamon.
- [108] **CANUTO C., HUSSAINI M.Y., QUARTERONI A. & ZANG T.A.**, *Spectral methods in fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1988).
- [109] **AZAÏEZ M., BERNARDI C. & GUNDMANN M.**, *Spectral methods applied to porous media equations*, *East-West J. Numer. Math.*, **2**, 91-105, (1994).
- [110] **HALDEWYNAG P., LABROSSE G. & ABOUDI S.**, *Chebyshev 3-D spectral and 2-D pseudospectral solvers for the Helmholtz equation*, *J. Comput. Phys.*, **55**, 115-128, (1984).
- [111] **EHRENSTEIN U. & PEYRET R.**, *A Chebyshev-collocation methode for the Navier-Stokes equations with application to double-diffusive convection*, *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **9**, 427-452, (1989).
- [112] **BERNARDI C. & MADAY Y.**, *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Springer-Verlag, Paris, (1992).
- [113] **BOYD J.P.**, *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Publication (2000).
- [114] **PEYRET R.**, *Spectral method for incompressible viscous flow*, Springer, (2002).
- [115] **QUARTERONI A. & VALLI A.**, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [116] **BATOUL A., KHALLOUF H. & LABROSSE G.**, *Une méthode de résolution directe (pseudo-spectrale) du problème de Stokes 2D/3D instationnaire. Application à la cavité entraînée carrée*, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **319**, Série II, 1455-1461, (1994).
- [117] **CARRIÈRE PH. & MONKEWITZ P.A.**, *Convective versus absolute instability in mixed Rayleigh-Bénard-Poiseuille convection*, *J. Fluid Mech.*, **384**, 243-262, (1999).
- [118] **OUARZAZI M.N., JOULIN A., BOIS P.A. & PLATTEN J.K.**, *Soret effect and mixed convection in porous media. In Thermal Non Equilibrium Phenomena in Fluid Mixtures*, (ed. Köhler W. & Wiegand S.). Lecture Notes in Physics, Springer, **584**, 428-447, (2002).
- [119] **BERS A.**, *Linear waves and instabilities*, Dans C. DEWITT & J. PEYRAUD, éditeurs, *Physique des Plasmas*, pages 117-215, GORDON & BREACH, New York, (1975).
- [120] **COMBARNOUS M.**, *Convection naturelle et convection mixte en milieu poreux*, PhD thesis Faculté des sciences de l'univ. de Paris, (1970).
- [121] **REINHARDT F. & SOEDER H.**, *Atlas des mathématiques*, Librairie Générale Française, (1997).

Résumé :

Ce travail porte sur une étude théorique et numérique des structures synchronisées d'un fluide confiné en milieu poreux chauffé par le bas d'une façon inhomogène et soumis à un écoulement horizontal. L'inhomogénéité de la température induit un écoulement stationnaire et faiblement non parallèle dont la stabilité linéaire est étudiée. Les instabilités thermo-convectives sont recherchées sous la forme de modes propres, modulés par un développement WKBJ dans la direction horizontale. Pour les deux configurations génériques présentant un point tournant simple ou double, Il a été démontré que l'existence d'une région d'instabilité locale absolue était nécessaire à l'émergence d'un mode global. Le seuil et la fréquence des oscillations de ce mode global sont déterminés en fonction des nombres sans dimension du problème.

La dynamique non linéaire est explorée grâce à une équation de Ginzburg-Landau d'une part, et à la résolution numérique directe bidimensionnelle en méthode spectrale d'autre part. Il a été trouvé que la fréquence obtenue par simulation numérique directe correspond à la fréquence absolue marginale dans le cas d'une configuration avec point tournant double, et à la fréquence absolue imposée par un point tournant simple attaché à l'entrée du milieu. Ce mécanisme de sélection de la fréquence s'avère pertinent, y compris loin du seuil d'instabilité globale marginale. Comme le critère de sélection de la fréquence, l'analyse fine de la distribution spatiale des structures synchronisées montre que les résultats sont en excellent accord avec la théorie des modes globaux non linéaires.

Enfin, une comparaison quantitative entre théorie et expérience met en évidence un très bon accord entre les fréquences des structures synchronisées tridimensionnelles prédites et les fréquences mesurées.

Abstract :

Mixed convection flow in porous media heated from below non uniformly and subjected to an horizontal pressure gradient is studied theoretically and numerically. The prescribed temperature at the bottom boundary is assumed to vary slowly in space. The result is the establishment of a weak inhomogeneous basic state, the stability of which is carried out using the WKBJ approximation. Depending on the choice of the imposed inhomogeneous temperature profile, two cases prove to be of interest : the base flow displays an absolute instability region either detached from the inlet or attached to it. Results from combined direct numerical simulations and linear stability approach have revealed that in the first case, the nonlinear solution is a steep nonlinear global mode, with a sharp stationary front located at a marginally absolutely unstable station. In the second configuration, the scaling laws for the establishment of a nonlinear global mode quenched by the inlet are found to perfectly agree with the theory. It is also found that in both configurations, the global frequency of synchronized oscillations corresponds to the local absolute frequency determined by linear criterion, even far from the threshold of global instability. All these results agree remarkably with recent advances of nonlinear global modes theory. A good agreement is also found between the predictions of the theory and the measured global frequencies.