

Numéro d'ordre : 4308

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ LILLE I
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR LILLE

Présentée pour obtenir
le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

Discipline : Mathématiques

Par

Hichem MOKNI

sous la direction de Florian Horia VASILESCU

Prolongement d'applications linéaires, espaces des fractions
et
Problème des moments

soutenue le 19 Décembre 2008 devant le jury composé de :

M. Florian Horia VASILESCU	(Univ. Lille I)	Directeur
M. Ernst ALBRECHT	(Univ. Saarlandes)	Rapporteur
M. Gilles CASSIER	(Univ. Lyon I)	Rapporteur
M. EL HASSAN Youssfi	(Univ. de Provence)	Rapporteur
M. Catalin BADEA	(Univ. Lille I)	Examineur
M. Mostafa MBEKHTA	(Univ. Lille I)	Examineur

Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à remercier mon directeur de thèse monsieur Florian-Horia Vasilescu, qui a su avec beaucoup de compétence m'initier au domaine de l'enseignement et de la recherche. Je le remercie également pour son soutien moral et l'attention qu'il a consacré à la préparation de cette thèse, sans lesquels ce travail n'aurait pas pu voir le jour. Enfin je tiens à exprimer mon plus profond respect pour sa grande disponibilité, son humanisme et sa discipline.

Ensuite je souhaite aussi exprimer ma gratitude envers M. Ernst Albrecht, M. Gilles Cassier et M. El Hassan Youssfi qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire malgré les contraintes de temps.

Je tiens à remercier M. Mostafa Mbekhta qui m'a fait l'honneur de présider le jury et M. Catalin Badea qui m'a fait l'honneur d'en être membre.

Je remercie tous les membres du laboratoire de mathématiques de Lille 1 et particulièrement ceux de l'analyse fonctionnelle. Je remercie tous mes amis et tous ceux qui ont assisté à la soutenance.

En fin, Je remercie particulièrement mon grand père, mon père et toute ma famille au sens large du terme qui m'ont soutenu depuis mon enfance afin d'effectuer ce parcours d'étude.

Introduction

Soit $(A, <)$ un ensemble dirigé et une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'espaces localement convexes tous sous-espaces d'un espace vectoriel E engendré par leur réunion. Soit, pour tout $\alpha \in A$, l'inclusion $J_\alpha : E_\alpha \rightarrow E$. Pour tout $\alpha < \beta \in A$ on a aussi des inclusions $J_{\alpha\beta} : E_\alpha \rightarrow E_\beta$ continues. L'espace E est muni de la topologie limite inductive des E_α par les J_α . Plus de détails sur les limites inductives se trouvent au premier chapitre. Soit F un sous espace vectoriel de E tel que, pour tout $\alpha \in A$, $F_\alpha = F \cap E_\alpha$ est un sous espace vectoriel topologique de E_α . Alors, comme on peut le lire dans Bourbaki [7], même si la limite inductive est stricte, il peut se faire que la topologie limite inductive sur F par les F_α soit strictement plus fine que celle induite par la topologie limite inductive sur E par les E_α . Dans ce cas le théorème de Hahn-Banach ne peut être appliqué directement pour prolonger une forme linéaire continue sur F .

Comme l'ont souligné, S. K. Kranzler et T. S. McDermott, dans leur article "*Extending continuous linear Functionals in convergence limit spaces*" (voir [22]), on connaît très peu de cas où un tel prolongement peut avoir lieu.

Il y a trois questions naturelles qui se posent :

- 1) Quelles sont les conditions qui permettent un tel prolongement ?
- 2) Si les espaces E_α sont normés, peut-on avoir en plus, une préservation de la norme sur chaque E_α ?
- 3) Qu'en est-il du cas opératoire ?

Dans une note publiée au C.R.A.S en 1965 (voir [13]), C. Foiaş et G. Marinescu ont donné une réponse positive à la première question. Leurs conditions étaient que l'ensemble $A = \mathbb{N}$, les ensembles E_n sont des espaces de Banach réflexifs tel qu'on ait des inclusions naturelles $i_n : E_n \rightarrow E_{n+1}$ vérifiant, pour tout n , $\|i_n\| \leq 1$ et les sous-espaces F_n sont fermés dans les E_n . Aucune condition n'est imposée sur la

forme linéaire continue à prolonger. Une année plus tard, M. De Wilde publie un article intitulé "*Quelques théorèmes d'extension de fonctionnelles linéaires*" qui traite du sujet. Le cadre est plus général : les espaces E_n sont simplement semi-normés, mais l'ensemble A est toujours dénombrable, les inclusions i_n sont faiblement compacts. Dire qu'une forme linéaire continue sur F (par la topologie limite inductive des F_n) se prolonge sur E , c'est dire que la forme linéaire en question est continue sur F dans la topologie induite par celle de E . Cette remarque est vérifiée si l'une de ces conditions est satisfaite, n'oublions pas que F est toujours supposé être fermé dans E : (1) Le dual faible de F est complet ; (2) Le dual de E est complet dans la topologie de la convergence uniforme sur une famille de bornés (B) qui couvre E , qui est stable par réunion finie et telle que chaque B soit contenu dans un F_n ; (3) Le dual de F est complet dans la topologie de la convergence uniforme sur les compacts absolument convexes et les F_n sont fermés dans les E_n , voir [11]. Cet angle de vision va être élaboré plus tard dans le cadre des espaces bornologiques par H. Hogbe-Nlend voir [19].

Si les duals des F_n sont complets pour les topologies respectives, ces conditions sont aussi nécessaires. Dans le cas d'un espace E de Fréchet, la condition nécessaire et suffisante est que les F_n soient denses dans F à partir d'un certain rang.

En 1975, S. K. Kranzler et T. S. McDermott ont généralisé le résultat de C. Foias et G. Marinescu en suivant la même méthode de démonstration. Toujours $A = \mathbb{N}$, leurs conditions étaient que les espaces E_n sont des espaces localement convexes tel qu'il existe une topologie de Fréchet sur chaque E'_n , le dual de E_n , plus faible que la topologie de Mackey et que les applications duales $i_n^* : E'_{n+1} \rightarrow E'_n$ sont continues pour ces topologies. Les sous-espaces F_n sont encore supposés être fermés dans les E_n .

Dans le premier chapitre nous donnons quelques préliminaires et nous exposons les espaces qui entrent dans notre cadre. Le deuxième chapitre est consacré aux applications positives et leurs liens avec la continuité. Nous introduisons aussi la propriété (P) et nous donnons quelques exemples. Ensuite, la deuxième moitié du chapitre est consacrée aux applications complètement positives et complètement bornées. Nous donnons les définitions et les principaux résultats qui nous seront utiles pour la suite.

Dans le chapitre 3 de cette thèse nous donnons une réponse positive à cette question, sous un autre angle de vue. Nous n'imposons aucune condition sur les espaces E_α ni sur l'ensemble d'indices A . Les espaces E_α sont des espaces vectoriels topologiques localement convexes avec des applications $J_{\alpha\beta} : E_\alpha \rightarrow E_\beta$ continues. Une semi-norme est choisie sur chaque E_α qui sera noté par $|\cdot|_\alpha$. Les F_α sont des sous-espaces vectoriels quelconques des E_α . Par contre, nous imposons une condition sur les applications $J_{\alpha\beta}$:

$$\sup_{\alpha < \beta} \|J_{\alpha\beta}\| = \sup\{|J_{\alpha\beta}x|_\beta; |x|_\alpha \leq 1, x \in E_\alpha\} < +\infty.$$

Évidemment, si les espaces E_α sont normés et si, pour tout $\alpha < \beta$, on a : $\|J_{\alpha\beta}\| \leq 1$ alors automatiquement $\sup_{\alpha < \beta} \|J_{\alpha\beta}\| < \infty$. Les restrictions φ_α de φ (la forme à prolonger) sur les E_α sont supposées vérifier les conditions suivantes : Pour tout $\alpha < \beta \in A$ on a $\varphi_\beta \equiv \varphi_\alpha \circ J_{\alpha\beta}$ (qui est une condition naturelle) et

$$\sup_{\alpha < \beta} \|\varphi_\beta\| = \sup\{|\varphi_\beta x|; |x|_\beta \leq 1, x \in E_\beta\} < +\infty.$$

Ce résultat est appliqué dans le cadre des espaces de fonctions holomorphes sur des ouverts de $\mathbb{C}^n$ pour obtenir une condition nécessaire et suffisante qui permet de représenter des formes linéaires et continues sur l'algèbre de germes des fonctions analytiques sur un compact K de $\mathbb{C}^n$. Dans le théorème qui suit $\hat{\mathcal{O}}_K$ représente l'algèbre des germes, tandis que $\bar{\mathcal{O}}_U$ représente l'algèbre des fonctions holomorphes sur un ouvert U , parcourant l'ensemble des voisinages ouverts de K , et continues sur le bord.

Corollaire 3.2.2 : *Une forme linéaire φ sur $\hat{\mathcal{O}}_K$ telle que ses restrictions aux algèbres $\bar{\mathcal{O}}_U$ soient continues est donnée par une mesure μ sur K , i.e. pour tout $\hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}_K$*

$$\varphi(\hat{f}) = \int_K \hat{f} d\mu,$$

si et seulement si elle vérifie, pour tout $U \subset V \in A$, $\sup_{U \subset V} \|\varphi_V\|$ est fini.

Les résultats de ce paragraphe se trouvent dans le papier [24]. Dans un autre paragraphe nous donnons un résultat dans un cadre général qui répond à la deuxième question. Pour simplifier les choses, supposons par exemple que les E_α sont des systèmes d'opérateurs (voir [27]) alors si les $J_{\alpha\beta}$ sont des opérateurs

unitaires et positifs, les F_α sont des sous-espaces contenant l'unité et les φ_α sont des formes linéaires tels que $\sup_{\alpha < \beta} \|\varphi_\beta\| < +\infty$, alors le prolongement préserve la norme si et seulement si pour tout $\alpha \in A$, φ_α est positive ou bien $\|\varphi_\alpha\| = \varphi_\alpha(1)$. Si, par exemple, les formes φ_α sont des états alors automatiquement $\sup_{\alpha < \beta} \|\varphi_\beta\| = 1 < +\infty$. Nous donnons aussi un exemple qui montre qu'un prolongement qui préserve la norme n'existe pas toujours même dans le cas où l'ensemble A contient deux éléments et les espaces sont de dimension finie.

Après ceci on généralise ces résultats dans le cas opératoriel ; c'est à dire le cas où les E_α sont des C^* -algèbres et les φ_α sont des applications à valeurs dans une algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert. Cela nous permet également de généraliser l'application donnée pour représenter certaines applications linéaires sur l'algèbre des germes, à valeurs opérateurs par des mesures opératoriennes.

Dans le chapitre 4 nous répondons à la deuxième question dans un cas particulier de limite inductive : les espaces de fractions. Les détails de la construction se trouvent au premier paragraphe du même chapitre. Ces derniers ont été utilisés par F-H. Vasilescu, seul ou avec E. Albrecht, dans plusieurs articles pour répondre à divers problèmes. Nous citons par exemple le problème des moments multi-dimensionnels sur un fermé (non borné) de $\mathbb{R}^n$ et le problème de prolongement de familles sous-normales d'opérateurs non bornés en des familles normales.

Cette approche est différente de celle du chapitre 3 au niveau des hypothèses. En effet, les applications linéaires $J_{\alpha\beta}$ ne sont plus unitaires.

F-H. Vasilescu dans [41] répond à la deuxième question dans le cas où l'espace des fractions est construit à partir d'une algèbre de fonctions continues sur un compact et l'ensemble de dénominateurs est inclus dans celle-ci. Ce qui a permis de donner une solution au problème des moments multi-dimensionnels sur un fermé de $\mathbb{R}^n$. Nous élargissons ce résultat dans deux directions : dans la première nous donnons un cadre plus général, entre autre celui des C^* -algèbres non commutatives. La deuxième est le fait que l'ensemble des dénominateurs n'est plus dans l'espace mais dans l'algèbre des opérateurs bornés sur celui-ci. Le théorème 4.2.3 présente le cas le plus général de notre étude. On dit qu'un espace vectoriel normé admet la propriété (P) pour un élément a si la norme de toute forme linéaire positive sur celui-ci vaut sa valeur en a . La notation $\mathcal{L}(E)$

représente l'algèbre des opérateurs bornés sur E .

Théorème 4.2.3 : *Soit E un espace vectoriel complexe normé et ordonné vérifiant la propriété (P) pour un certain a dans E et $G \subset \mathcal{L}(E)$ un ensemble de dénominateurs. On suppose que l'espace réel H de E est stable par G (i.e. $\forall g \in G; g(H) = H$).*

Soit F un sous-espace de l'espace des fractions E/G , on suppose que $a/g' \in F_g$, pour tout $g' < g \in G$, et F_g est cofinal dans E_g .

Si φ est une forme linéaire sur F , alors φ se prolonge en une forme linéaire positive ψ sur E/G telle que, pour tout $g \in G$, $\|\psi_g\| = \|\varphi_g\|$, si et seulement si, pour tout $g \in G$, φ_g est positive et $\|\varphi_g\| = \varphi(a/g) > 0$ (où $\varphi_g = \varphi|_{F_g}$ et $\psi_g = \psi|_{E_g}$).

Ensuite, nous traitons le cas des $*$ -algèbres de Banach hermitiennes (non commutatives) ce qui nous permet de généraliser directement le théorème de F-H. Vasilescu dans [41] et restreindre les hypothèses du cas général. Dans le contexte commutatif nous examinons le cas des algèbres de Banach puis le cas des algèbres involutives hermitiennes sur lesquelles on peut représenter les formes linéaires positives par une mesure. Les principaux résultats de ce chapitre se trouvent dans l'article [23].

Enfin, la dernière section est consacrée au problème des moments. Nous introduisons une nouvelle version du problème, non commutative, qui nous permet de généraliser le problème des moments multi-dimensionnels classique. La variable n'est plus un n -uplet dans $\mathbb{R}^n$ mais un n -uplet de quaternions vus comme des applications de $\mathbb{C}^2$ dans $M_2(\mathbb{C})$. On obtient la même caractérisation des K -applications moment donnée dans [41].

D'autres versions non commutatives du problème des moments ont été introduites par K. Schmüdgen dans [36]. Elles sont en rapport direct avec la théorie de représentations des groupes de Lie.

Dans le dernier chapitre, nous donnons une version opératorielle du précédent chapitre. Ce travail est motivé par le papier de E. Albrecht et F-H. Vasilescu "Unbounded extensions and operator moment problems", voir [2], dans lequel les auteurs donnent une version opératorielle du résultat de F-H. Vasilescu dans [41] ainsi que du problème des moments multi-dimensionnels. Nous suivons les mêmes étapes des démonstrations et nous donnons un résultat analogue dans le cas des C^* -algèbres non commutatives. Soit $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre d'unité e et $G \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ un ensemble de dénominateurs. Soit $\mathcal{D}$ un espace vectoriel complexe,

la notation $SF(\mathcal{D})$ représente l'espace des formes sesquilinéaires sur $\mathcal{D}$.

Théorème 5.2.3 : Soit $F = \sum_{g \in G} F_g \subset \mathcal{B}/G$, où pour tout $g \in G$, F_g est un sous espace vectoriel de $\mathcal{B}_g$. On suppose que $e/g' \in F_g$ pour tout $g' < g \in G$.

Soit $\mathcal{D}$ un espace préhilbertien et soit $\varphi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire. Alors φ se prolonge en une application linéaire complètement positive $\psi : \mathcal{B}/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ telle que $\|\psi_{g,x}\|_{cb} = \|\varphi_{g,x}\|_{cb}$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ et $g \in G$ si et seulement si φ est complètement contractive, et pour tout $g \in G$, et $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, $\varphi(a/g)(x, x) > 0$, avec $\varphi_{g,x} = \varphi(*) (x, x)|_{F_g}$ et $\psi_{g,x} = \psi(*) (x, x)|_{\mathcal{B}_g}$.

Plus tard, nous définissons une nouvelle mesure à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ où $\mathcal{A}$ est une C^* -algèbre et H un espace de Hilbert. Cela nous permet de donner une version opératorielle du problème des moments non commutatif, dans le deuxième chapitre. Comme application du résultat au dessus, nous donnons une caractérisation des K -applications moment à valeurs opérateurs (voir le théorème 5.3.7). Le contenu de ce chapitre se trouve dans le preprint [25].

Table des matières

Remerciements	i
1 Notions générales	9
1.1 Limites inductives	9
1.2 Espaces vectoriels ordonnés	11
1.3 *-algèbres de Banach	14
1.3.1 Les *-algèbres hermitiennes	15
1.3.2 Les C*-algèbres	16
1.3.3 Les fonctionnelles positives	17
2 Applications positives et complètement positives	19
2.1 Applications positives	19
2.2 La Propriété (P)	22
2.3 Applications complètement positives	23
2.3.1 Le cas des C*-algèbres	23
2.3.2 Le cas général (au sens de Powers)	26
3 Prolongement d'opérateurs sur des limites inductives	29
3.1 Cas scalaire (résultat principal)	29
3.2 Application	33
3.3 Sur les prolongements préservant les normes	36
3.4 Cas des opérateurs	39
3.5 Généralisation de l'application au cas opératoireiel	42
4 Prolongement des formes positives et problème des moments quaternionique	45
4.1 Les espaces de fractions	46

4.2	Cas général	50
4.3	Cas des $*$ -algèbres de Banach hermitiennes	52
4.4	Le cas commutatif	55
4.5	Le problème des moments : une version non commutative	58
4.5.1	Mesures à valeurs dans $\mathcal{A}^*$	59
4.5.2	Le problème des moments	65
5	Le problème des moments opératoriels	73
5.1	Introduction	73
5.2	Prolongement complètement positif	76
5.3	Version opératorielle non commutative du problème des moments	81
5.3.1	Une mesure spéciale	81
5.3.2	Le problème des moments opératoirel	89
	Bibliographie	93

Chapitre 1

Notions générales

Dans ce chapitre nous n'énonçons pas de nouveaux résultats. Il s'agit d'exposer les espaces qui entrent dans le cadre de notre étude et de rappeler certains résultats et certaines définitions qui seront utiles pour la suite.

Les espaces vectoriels que nous considérons sont complexes en général, nous précisons les cas où les espaces sont réels.

1.1 Limites inductives

Les espaces limites inductives ont été un sujet d'étude pour beaucoup de mathématiciens du siècle dernier, pour plus de détails sur la théorie voir par exemple dans [7], [15], [21], [34], [20],

Un ensemble A d'indices, muni d'une relation d'ordre " $<$ " est dit dirigé pour cette relation, si pour tous α et β dans A il existe un élément γ dans A tels que $\alpha, \beta < \gamma$. Cet ensemble est parfois noté $(A, <)$. Un sous ensemble A_0 est dit cofinal dans A si pour tout $\alpha \in A$ on peut trouver $\alpha_0 \in A_0$ tel que $\alpha < \alpha_0$.

Soit, pour chaque $\alpha \in A$, un espace localement convexe E_α . On suppose que, pour tous $\alpha < \beta \in A$, on a des applications linéaires continues $J_{\alpha\beta} : E_\alpha \rightarrow E_\beta$ avec la propriété $J_{\alpha\gamma} = J_{\beta\gamma}J_{\alpha\beta}$ si $\alpha < \beta < \gamma \in A$. Soit un espace vectoriel E (sans topologie à priori) et des applications linéaires $J_\alpha : E_\alpha \rightarrow E$ tel que si $\alpha < \beta \in A$ alors $J_\alpha = J_\beta J_{\alpha\beta}$ (sans perte de généralités on peut supposer que les applications J_α sont injectives, voir [20]). Supposons que l'espace E est engendré par la réunion des $J_\alpha(E_\alpha)$, on peut maintenant définir une topologie sur E .

Définition 1.1.1. On appelle topologie limite inductive des E_α par les applications J_α la topologie localement convexe sur E la plus fine rendant toutes les applications J_α continues.

L'espace E muni de cette topologie est appelé limite inductive des E_α par les applications J_α .

La proposition suivante caractérise la topologie limite inductive.

Proposition 1.1.2. Soit E la limite inductive des E_α par les applications J_α .

1. Une boule équilibrée U est un voisinage de 0 dans E si et seulement si $J_\alpha^{-1}(U)$ est un voisinage de 0 dans E_α pour tout $\alpha \in A$.
2. Si les espaces $J_\alpha(E_\alpha)$ engendrent E , on obtient un système fondamental de voisinages de 0 dans E en prenant les enveloppes convexes :

$$\Gamma\left(\bigcup J_\alpha(U_\alpha)\right),$$

où pour tout α , U_α parcourt un système fondamental donné de voisinage de 0 dans E_α .

Soit $A_0 \subset A$ un sous ensemble cofinal. Alors la topologie limite inductive sur E ne change pas si on remplace A par A_0 .

Proposition 1.1.3. Soit E un espace limite inductive d'une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'espaces localement convexes par des applications linéaires J_α et F un espace localement convexe. On suppose que E est engendré par les $J_\alpha(E_\alpha)$.

Alors pour qu'une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ soit continue il faut et il suffit que pour tout $\alpha \in A$, $\varphi \circ J_\alpha$ soit continue.

Dans notre travail nous rencontrons deux exemples de limites inductives. Les deuxième et troisième exemples sont très connus dans la littérature.

Exemple 1.1.4. 1. Dans le chapitre 4, l'espace des fractions E/G ; si E est espace normé et G est un ensemble de dénominateurs sur E , est vu comme limite inductive des espaces E/g où $g \in G$ par les inclusions naturelles. L'ensemble d'indices, dans ce cas, est G . On dit que $g < g' \in G$ s'il existe $g'' \in G$ tel que $g' = gg''$ et dans ce cas, l'application $J_{gg'} : E/g \rightarrow E/g'$ est donnée par l'expression :

$$J_{gg'}(x/g) = (g''x/g'), \quad \forall x \in E.$$

2. Dans le chapitre 3, nous pouvons voir dans l'application l'exemple suivant :

Soit $K \subset \mathbb{C}^n$ un sous ensemble compact connexe d'intérieur non vide. L'ensemble A représente tous les voisinages ouverts de K , avec la relation d'ordre $U < V$ si $V \subset U$ où $U, V \in A$. Pour tout $U \in A$ on considère les ensembles $\bar{O}_U$ des fonctions holomorphes sur U et continues sur le bord. On définit la relation d'équivalence suivante : si $f \in \bar{O}_U$ et $g \in \bar{O}_V$ on dit qu'elles sont équivalentes s'il existe $W \subset U \cap V$ et contenant K tel que $f|_W \equiv g|_W$. On définit $\hat{O}_K$ l'ensemble des classes d'équivalence, on observe que chaque élément $\hat{f}$ de $\hat{O}_K$ peut être considéré comme une fonction continue à valeurs complexes sur l'ensemble K .

Maintenant on définit les applications $I_U : \bar{O}_U \longrightarrow \hat{O}_K$ qui associent à chaque fonction sa classe d'équivalence. Ce sont des applications injectives. On pose pour $U < V$, S_{UV} l'application donnée par la restriction de $\hat{O}_U$ vers $\hat{O}_V$, ces derniers vérifient

- (i) $S_{UU} = I_{\bar{O}_U} \quad \forall U \in A;$
- (ii) $S_{UW} = S_{VW} \circ S_{UV} \quad \text{si } U, V \text{ et } W \in A \text{ sont tels que } U < V < W.$

Alors on peut voir $\hat{O}_K$ comme limite inductive des ensembles $\hat{O}_U$ par les applications I_U .

3. Soit $U \in \mathbb{R}^n$ un ouvert. On peut écrire U comme une réunion dénombrable croissante de compacts K_n , $n \in \mathbb{N}$. Soit pour tout n , $\mathcal{D}(K_n)$ l'espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables à supports inclus dans K_n . La réunion de tous les espaces $\mathcal{D}(K_n)$ est égale à $\mathcal{D}(U)$ l'espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables à support compact dans U . On munit $\mathcal{D}(U)$ de la topologie limite inductive des espaces $\mathcal{D}(K_n)$ par les inclusions naturelles. L'espace des distributions $\mathcal{D}'(U)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(U)$.

1.2 Espaces vectoriels ordonnés

Pour plus de détails sur les espaces ordonnés on peut consulter les livres de Bourbaki [7] ou de Schaefer [34].

Définition 1.2.1. On appelle espace vectoriel ordonné tout espace vectoriel E muni d'une relation réflexive et transitive " $\leq$ ", vérifiant ces deux conditions pour tout x, y dans E :

- i) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \quad \forall z \in E,$

ii) $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y, \forall \lambda > 0$.

L'espace ordonné sera noté $(E, \leq)$.

Dans la définition nous ne demandons pas que la relation d'ordre soit antisymétrique, ce qui est parfois défini par le mot "préordre". La notion d'ordre dans un espace vectoriel a un lien étroit avec la notion de cône et la notion de positivité, on va donc introduire ces deux notions.

Dans un espace vectoriel ordonné $(E, \leq)$, les éléments x dans E , vérifiant $0 \leq x$, sont dits positifs. L'ensemble des éléments positifs, dans $(E, \leq)$, forment un cône, qui est généralement appelé le cône positif de E .

De même si, dans un espace vectoriel E on a un cône C , alors on peut définir une relation d'ordre $\leq$ dans E d'une façon naturelle ; on dit que $x \leq y$ si $y - x \in C$. Les éléments positifs de E relativement à cette relation sont exactement les éléments de C .

La relation d'ordre est antisymétrique si et seulement si le cône correspondant est saillant (un cône C est dit saillant si $C \cap (-C) = \{0\}$).

Lorsqu'il est question de plus d'un cône dans E , il est nécessaire de spécifier, pour la notion de positivité, de quel cône il s'agit. Pour cela nous allons adopter la notation C -positif pour lier la positivité à un cône C donné.

Soit une fonction φ définie sur un espace ordonné E à valeur réelles ou complexes. La fonction φ est dite positive si pour tout élément positif x dans E , $\varphi(x)$ est positif. Et généralement : si E et F sont deux espaces ordonnés alors une application linéaire φ de E vers F est dite positive si pour tout élément positif $x \in E$, $\varphi(x)$ est positif dans F .

Le théorème suivant, qui est essentiel pour la suite, peut servir à prouver le théorème de Hahn-Banach. Pour plus de détails nous référons à Bourbaki [7].

Théorème 1.2.2. (Prolongement de formes linéaires positives (voir [7])). Soit E un espace vectoriel ordonné, et F un sous espace vectoriel de E tel que tout élément de E soit majoré par un élément de F .

Alors, toute forme linéaire φ sur F positive pour la structure d'ordre sur F (induite par celle de E), se prolonge en une forme linéaire positive sur E .

Voici maintenant quelques définitions qui seront utiles plus tard.

Définition 1.2.3. Soit E un espace vectoriel ordonné de cône C et H un espace réel contenant C tel que $E = H \oplus iH$; alors H est dit espace réel de E .

Soit E un espace vectoriel ordonné d'espace réel H , et soit F un sous espace vectoriel de E , alors F est dit symétrique si $F = F \cap H \oplus iF \cap H$.

Le sous-espace F est dit cofinal dans E si, pour tout x dans H , il existe y dans $C \cap F$ tel que $y - x$ soit dans C .

Soit E un espace vectoriel ordonné d'espace réel H alors on peut définir une involution "*" sur E . Comme tout élément $x \in E$, peut s'écrire, d'une façon unique, sous la forme $x_1 + ix_2$, avec x_1 et x_2 dans l'espace réel H , on peut poser $x^* = x_1 - ix_2$. Cette opération est bien définie, grâce à l'unicité de la décomposition, et on peut facilement voir qu'elle vérifie ces deux propriétés :

- $x^{**} = x$,
- $(x + \lambda y)^* = x^* + \bar{\lambda}y^*$ pour tout $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Un espace vectoriel muni d'une involution est appelé *-espace vectoriel (voir [35]). On peut donc voir E comme un *-espace vectoriel ordonné de cône positif C , et H son espace réel.

Le prochain résultat est un corollaire du théorème 1.2.2.

Corollaire 1.2.4. Soit E un espace vectoriel ordonné et soit C son cône positif. Soit F un sous-espace cofinal de E . On pose $C_F = C \cap F$, si ϕ est une forme C_F -positive sur F alors ϕ se prolonge en une forme C -positive sur E .

Les *-algèbres

Les *-algèbres sont, en même temps, des algèbres et des *-espaces vectoriels avec la propriété $(ab)^* = b^*a^*$. Pour plus de détails sur les *-algèbres voir [14] ou bien [35]. Soit A une *-algèbre d'unité e , l'ensemble des éléments auto-adjoints est appelé l'espace réel et noté A_h . Un élément b dans A est dit positif s'il existe un élément a dans A tel que $b = a^*a$.

Dans une *-algèbre A il y a un cône naturel, c'est l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des sommes finies de la forme $\sum_k a_k^*a_k$, où les a_k sont des éléments de A . Un cône C dans A est dit m -admissible s'il est inclus dans A_h et contient $\mathcal{P}(A)$ avec la propriété que pour tout $a \in A$ et $x \in C$ l'élément $a^*xa \in C$. Puisqu'on traite avec des algèbres unitaires, alors C est un cône m -admissible si et seulement si $e \in C$ et $a^*xa \in C$ pour tout $a \in A$ et $x \in C$. Le cône $\mathcal{P}(A)$ est appelé le cône positif de A , il est le plus petit cône m -admissible de A . La notion de m -admissibilité est due à R. T. Powers.

Exemple 1.2.5. 1. Soit D un sous espace vectoriel dense dans un espace de Hilbert H . Soit $\mathcal{L}^+(D)$ l'ensemble de tous les opérateurs T sur H de domaine D tels que $T(D) \subseteq D, D \subseteq D(T^*)$ et $T^*(D) \subseteq D$. Alors $\mathcal{L}^+(D)$ est une $*$ -algèbre. Les $*$ -sous-algèbres de $\mathcal{L}^+(D)$ sont appelées les O^* -algèbres.

1.3 $*$ -algèbres de Banach

Une $*$ -algèbre de Banach est une algèbre de Banach muni d'une involution. Une étude détaillée des algèbres de Banach involutives peut être trouvée dans Pták [29].

Exemple 1.3.1. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité dans $\mathbb{C}$. L'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ est l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et analytiques sur $\mathbb{D}$. Munie de la norme du supremum $A(\mathbb{D})$ est une algèbre de Banach. On définit une involution sur $A(\mathbb{D})$ par la relation suivante :

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}, \quad f \in A(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Munie de cette involution $A(\mathbb{D})$ est une $*$ -algèbre de Banach.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach involutive et unitaire. En tant que $*$ -algèbre, la $*$ -algèbre de Banach $\mathcal{A}$ admet un cône naturel : $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ (voir 1.2). Cependant, il existe une autre notion de positivité.

Définition 1.3.2. Un élément $x \in \mathcal{A}$ est dit positif ($x \geq 0$) s'il est auto-adjoint ($x^* = x$) et son spectre est contenu dans les réels positifs.

Parmi les principaux résultats concernant les $*$ -algèbres de Banach on a le théorème suivant :

Théorème 1.3.3. Soit A une algèbre de Banach involutive et $h \in A$ un élément auto-adjoint. On suppose que pour tout $\lambda \in \sigma(h)$ (le spectre de h) $\operatorname{Re}(\lambda)$ (la partie réelle de λ) est positif. Alors il existe $u \in A$ auto-adjoint qui commute avec h et $u^2 = h$.

De plus si $\sigma(h)$ est positif alors $\sigma(u)$ est positif.

Dans la $*$ -algèbre de Banach $\mathcal{A}$, l'ensemble des éléments positifs sera noté $\mathcal{A}_+$. Le dernier théorème nous permet de conclure qu'un élément positif s'écrit sous la forme u^*u pour un certain $u \in \mathcal{A}$. En d'autres termes on a : $\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$.

- Remarque 1.3.4.** 1. L'inclusion $\mathcal{A}_+ \subset \mathcal{P}(\mathcal{A})$ est stricte en général. En effet, dans l'exemple 1.3.1, considérons l'application identique I . Il est clair que I est un élément auto-adjoint dans $A(\mathbb{D})$ et que $I^*I(z) = z^2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Le spectre de I^*I est tout le disque unité donc I^*I n'est pas dans $A(\mathbb{D})_+$.
2. Si la *-algèbre n'est pas complète on peut avoir une situation inversée. Par exemple si $\mathcal{A}$ est une O^* -algèbre, voir l'exemple 1.2.5, on a $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_+$. On peut trouver un exemple dans [35] page 59 où l'inclusion est stricte.

1.3.1 Les *-algèbres hermitiennes

Les *-algèbres hermitiennes sont par définition des algèbres de Banach involutives dont l'involution vérifie une certaine propriété. Tout le long de cette thèse nous supposons que l'involution est une isométrie.

Définition 1.3.5. On dit qu'une involution sur une algèbre de Banach est hermitienne, ou de même que l'algèbre de Banach est hermitienne si le spectre de tout élément auto-adjoint est inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit A une *-algèbre de Banach commutative et Δ son espace des idéaux maximaux. Si l'involution est hermitienne alors elle vérifie :

$$h(x^*) = \overline{h(x)}, \quad h \in \Delta, \quad x \in A.$$

Exemple 1.3.6. Soit $C^1([0, 1])$ l'algèbre des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle $[0, 1]$, muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad f \in C^1([0, 1]),$$

cette algèbre est une algèbre de Banach.

La conjugaison des complexes nous définit une involution naturelle sur $C^1([0, 1])$

$$f^*(x) = \overline{f(x)}, \quad x \in [0, 1].$$

Muni de cette involution $C^1([0, 1])$ est une *-algèbre de Banach hermitienne. Remarquons aussi que cette involution est une isométrie, i.e. $\|f^*\| = \|f\|$.

Soit $\mathcal{A}$ une *-algèbre de Banach hermitienne unitaire d'unité e .

Lemme 1.3.7. Pour tout élément $x \in \mathcal{A}$ auto-adjoint on a : $\|x\|e - x$ positif dans $\mathcal{A}$.

Démonstration. Il est clair que $\|x\|e - x$ est auto-adjoint. Il reste à prouver que $\sigma(\|x\|e - x) \subset \mathbb{R}_+$. Soit $\lambda \in \sigma(\|x\|e - x)$, donc $\|x\| - \lambda \in \sigma(x)$. Comme $\sigma(x) \subset [-\|x\|, \|x\|]$ cela implique que λ est forcément positif. $\square$

Le prochain lemme se trouve dans [29].

Lemme 1.3.8. *L'ensemble $\mathcal{A}_+$ de tous les éléments positifs dans une $*$ -algèbre hermitienne $\mathcal{A}$ est un cône.*

Le prochain résultat, affirme que pour une $*$ -algèbre hermitienne $\mathcal{A}$ les deux cônes $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A}_+$ coïncident.

Théorème 1.3.9. [29] *Soit $\mathcal{A}$ une $*$ -algèbre hermitienne, alors pour tout $x \in \mathcal{A}$, l'élément x^*x est positif dans $\mathcal{A}$.*

1.3.2 Les C^* -algèbres

Une C^* -algèbre est une $*$ -algèbre de Banach $\mathcal{A}$ telle que, pour tout x dans $\mathcal{A}$:

$$\|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Les C^* -algèbres sont des $*$ -algèbres de Banach hermitiennes. La théorie de Gelfand identifie les C^* -algèbres commutatives à des espaces de fonctions continues sur un compact.

Dans toute cette section soit $\mathcal{A}$ une C^* -algèbre et 1 son unité.

Lemme 1.3.10. Décomposition en éléments positifs. *Tout élément auto-adjoint x dans une C^* -algèbre $\mathcal{A}$ peut être décomposé d'une manière unique $x = x_+ - x_-$, où x_+ et x_- sont deux éléments positifs dans $\mathcal{A}$ satisfaisant $x_+x_- = x_-x_+ = 0$ et $\|x\| = \max\{\|x_+\|, \|x_-\|\}$.*

Cette décomposition n'est pas valable dans le cas général même pour les $*$ -algèbres de Banach hermitienne dont l'involution est une isométrie. Un contre-exemple simple est celui de l'exemple 1.3.6. Le module d'une fonction réelle n'est pas dérivable en général. Dans ce cas la décomposition donnée plus haut ne peut pas avoir lieu dans $C^1([0, 1])$. Néanmoins on peut toujours décomposer un élément auto-adjoint en la différence de deux éléments positifs grâce, par exemple, à l'écriture suivante d'un élément auto-adjoint a :

$$4a = (a + e)^2 - (a - e)^2.$$

Ceci est valable pour toute *-algèbre hermitienne unitaire et découle du lemme 1.3.7.

Grâce au lemme précédent, tout élément x d'une C*-algèbre $\mathcal{A}$ peut être écrit comme la combinaison linéaire de quatre éléments positifs :

$$x = a_+ - a_- + i(b_+ - b_-)$$

Ceci est possible puisque x s'écrit $x = a + ib$, où a et b sont auto-adjoints.

1.3.3 Les fonctionnelles positives

Les fonctionnelles positives jouent un rôle important dans notre travail. Pour des notions plus approfondies voir [32]. Soit $\mathcal{A}$ une *-algèbre de Banach non nécessairement commutative d'unité e .

Définition 1.3.11. Une fonction linéaire φ sur $\mathcal{A}$ est appelée fonctionnelle positive ou forme positive sur $\mathcal{A}$ si elle vérifie pour tout $x \in A$:

$$\varphi(x^*x) \geq 0.$$

Si en plus $\varphi(e) = 1$ alors φ est appelée état.

Si on regarde l'*-algèbre A comme un espace ordonné, la définition signifie que φ est $\mathcal{P}(A)$ -positive. Si A est une *-algèbre hermitienne alors φ est A_+ -positive si et seulement si φ est $\mathcal{P}(A)$ -positive.

Théorème 1.3.12. [32] Soit $\mathcal{A}$ une *-algèbre de Banach. Toute forme positive φ sur $\mathcal{A}$ est bornée. Si $\mathcal{A}$ est commutative alors $\|\varphi\| = \varphi(e)$, et si l'involution vérifie $\|x^*\| \leq \beta\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ alors $\|\varphi\| \leq \beta^{1/2}\varphi(e)$.

Dans le cas où $\beta = 1$, comme les C*-algèbres, on obtient toujours $\|\varphi\| = \varphi(e)$ si φ est positive.

Un théorème de représentation

Voici maintenant un théorème de représentation dont la démonstration se base sur la transformée de Gelfand et le théorème de représentation de Riesz. Il constitue aussi un cas particulier du théorème de Bochner.

Théorème 1.3.13. ([32]) Soit A une algèbre de Banach commutative hermitienne et soit Δ son espace des idéaux maximaux. Soit K l'ensemble de toutes les formes linéaires φ sur A vérifiant $\varphi(e) \leq 1$. Soit M l'ensemble de toutes les mesures régulières Boréliennes μ sur Δ tels que $\mu(\Delta) \leq 1$. Alors l'égalité :

$$\varphi(x) = \int_{\Delta} \hat{x} d\mu, \quad x \in A$$

établit une bijection entre K et M .

En réalité, c'est une bijection entre ensembles convexes K et M qui envoie les points extrêmes de K vers les points extrêmes de M . Par suite les formes positives multiplicatives sont exactement les points extrêmes de K . Pour plus de détails voir [32].

Chapitre 2

Applications positives et complètement positives

Le contenu de ce chapitre se base essentiellement sur l'ouvrage de Paulsen [27] et l'article de Powers [28]. Les applications complètement positives jouent un rôle important dans la théorie de dilatation. Les résultats les plus connus sont celui dû à Arveson et celui dû à Stinespring précisément dans ce domaine. L'article de Powers nous donne des versions de ces résultats dans le cas des $*$ -algèbres et la théorie de représentations. La notion de "propriété (P)" est nouvelle (voir [23]).

2.1 Applications positives

Soit $\mathcal{A}$ une $*$ -algèbre de Banach hermitienne unitaire dont l'unité sera notée $\mathbf{1}$. Soit S un sous ensemble de $\mathcal{A}$, l'ensemble S^* est défini comme suit :

$$S^* = \{a \in \mathcal{A} : a^* \in S\}.$$

L'ensemble S est dit auto-adjoint si $S^* = S$. Un sous-espace vectoriel S de $\mathcal{A}$ est appelé *système d'opérateurs* (dans ce texte) s'il est auto-adjoint et contient $\mathbf{1}$.

Soit S un système d'opérateurs et $x \in S$ un élément auto-adjoint. La décomposition de x en éléments positifs peut ne pas appartenir à S . Mais on peut quand même écrire x comme la différence de deux éléments positifs dans S :

$$x = \frac{1}{2}(\|x\|\mathbf{1} + x) - \frac{1}{2}(\|x\|\mathbf{1} - x).$$

Définition 2.1.1. Soit S un système d'opérateurs et $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre unitaire d'unité $\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$. Soit $\phi : S \rightarrow \mathcal{B}$ une application linéaire alors

1. ϕ est dite unitaire si $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$.
2. ϕ est dite contractive si $\|\phi\| \leq 1$.

Le prochain résultat est peut être connu. Comme nous ne trouvons pas de référence, nous allons lui ajouter une démonstration.

Proposition 2.1.2. Soit $\mathcal{A}$ une $*$ -algèbre de Banach hermitienne (pas nécessairement commutative) unitaire d'unité $\mathbf{1}$. Soit $S \subset \mathcal{A}$ un système d'opérateurs et $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire. Alors ϕ est positive si et seulement si $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$.

Démonstration. Supposons en premier lieu que ϕ est positive, alors soit $a \in S$ tel que $\|a\| \leq 1$. Rappelons que $\phi(a) = r \exp(i\theta)$ avec r et θ deux réels. Il suffit alors de prendre $\lambda = \exp(-i\theta)$ pour avoir $\phi(\lambda a) = |\phi(a)| \geq 0$. Sans perte de généralité supposons que $\phi(a) \geq 0$. Sachant que $a = a_1 + ia_2$ et $\|a_1\| \leq \|a\|$ avec $a_1 = (a + a^*)/2$ et $a_2 = (a - a^*)/2i$ deux éléments auto-adjoints dans S alors forcément $\phi(a) = \phi(a_1)$. Ceci se base sur le fait qu'un élément dans S se décompose comme différence de deux éléments positifs dans S . On a

$$\mathbf{1} \geq \|a\|\mathbf{1} \geq \|a_1\|\mathbf{1} \geq a_1$$

ce qui implique $\mathbf{1} - a_1 \geq 0$ dans S . Puisque ϕ est positive alors

$$\phi(\mathbf{1}) \geq \phi(a_1) = \phi(a) \geq 0.$$

D'où $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$.

Réciproquement, supposons que $\phi : S \rightarrow \mathbb{C}$ est une application linéaire telle que $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1})$ i.e. pour tout $\|a\| \leq 1$ on a : $|\phi(a)| \leq \phi(\mathbf{1})$. Soit $a \in S$ positif, sans perte de généralité, supposons que $\|a\| \leq 1$. On sait que $a \leq \|a\|\mathbf{1}$ (voir 1.3.7) et puisque $\|a\| \leq 1$, alors on a :

$$0 \leq a \leq \mathbf{1}$$

et

$$0 \leq \mathbf{1} - a \leq \mathbf{1}$$

il s'en suit que $\|\mathbf{1} - a\| \leq 1$. En écrivant $a = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - a)$ on obtient :

$$\phi(a) = \phi(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - a)) = \phi(\mathbf{1}) - \phi(\mathbf{1} - a) \geq 0.$$

□

Un théorème de représentation

Soit Ω un espace topologique compact et $Bor(\Omega)$ la σ -algèbre des ensembles boréliens de Ω . Soit H un espace de Hilbert.

Définition 2.1.3. Une application $E : Bor(\Omega) \rightarrow B(H)$ est une mesure sur Ω à valeurs dans $B(H)$ si :

L'application $B \mapsto \langle E(B)x, y \rangle$ est une mesure complexe pour tous $x, y \in H$. Autrement dit, l'application E est faiblement, dénombrablement additive.

- La mesure E est bornée si :

$$\|E\| = \sup\{\|E(B)\| : B \in Bor(\Omega)\} \leq \infty,$$

- la mesure est dite régulière si pour tout $x, y \in H$ les mesures complexes données par :

$$E_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y \rangle$$

sont régulières,

- la mesure E est dite positive si pour tout $B \in Bor(\Omega)$ on a :

$$E(B) \geq 0.$$

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Riesz pour les applications à valeurs dans $B(H)$.

Théorème 2.1.4. [27] Soit $\phi : C(\Omega) \rightarrow B(H)$ une application linéaire. L'application est bornée si et seulement si elle est donnée par une mesure régulière bornée E sur Ω à valeurs dans $B(H)$, i.e.

$$\langle \phi(f)x, y \rangle = \int_{\Omega} f dE_{x,y},$$

pour tous $x, y \in H$.

Rappelons aussi le résultat suivant :

Théorème 2.1.5. [27] Soit Ω un espace topologique compact. Soit $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre. Si $\phi : C(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}$ est une application linéaire positive alors $\|\phi\| = \|\phi(1)\|$.

Remarque 2.1.6. En tenant compte du théorème 2.1.5, il est facile de voir que si la mesure est positive alors elle est bornée. En effet, la mesure positive correspond à une application linéaire positive, laquelle est forcément bornée d'après le théorème.

2.2 La Propriété (P)

Nous nous sommes intéressés à des espaces ayant une propriétés particulière que nous appelons propriété (P).

Définition 2.2.1. Soit E un espace normé ordonné et a un élément positif de E tel que $\|a\| \leq 1$. On dit que E admet la propriété (P) pour l'élément a si quelque soit la forme linéaire positive φ sur E on a :

$$\|\varphi\| = \varphi(a).$$

Exemple 2.2.2. Les affirmations suivantes découlent du théorème 1.3.12.

1. Soit A une $*$ -algèbre de Banach unitaire commutative d'unité e , alors A admet la propriété (P) pour e .
2. Si A est une $*$ -algèbre de Banach unitaire non commutative, d'unité e qui vérifie : pour tout $x \in A$, $\|x^*\| \leq \|x\|$. Alors A admet la propriété (P) pour e .

En particulier si A est une C^* -algèbre unitaire alors A admet la propriété (P).

Certains sous espaces des exemples 1) et 2) ci-dessus admettent aussi la propriété (P) pour l'élément unité.

Lemme 2.2.3. Soit E un espace ordonné d'espace réel H ayant la propriété (P) pour un certain $a \in E$ positif tel que $\|a\| \leq 1$. Alors l'espace H a aussi la propriété (P) pour le même élément a .

Démonstration. Soit φ une forme linéaire positive sur H . On définit ψ sur E tel que pour tout $x = x_1 + ix_2 \in E$, avec x_1, x_2 dans H , $\psi(x) = \varphi(x_1) + i\varphi(x_2)$. Comme l'espace H contient le cône entier, alors ψ doit être aussi positive. Sachant que E admet la propriété (P) pour l'élément a , $\|\psi\| = \psi(a)$. De plus, $\|\varphi\| \leq \|\psi\| = \psi(a) = \varphi(a) \leq \|\varphi\|$.

□

Le lemme précédent permet d'affirmer que l'espace réel des éléments auto-adjoints d'une $*$ -algèbre de Banach unitaire admet la propriété (P) pour l'identité.

Lemme 2.2.4. Soit E un espace ordonné et $a \geq 0 \in E$ tel que $\|a\| \leq 1$. Supposons que E admet la propriété (P) pour a , et soit F un sous espace symétrique cofinal de E contenant a . Alors F admet la propriété (P) pour a .

Démonstration. Soit φ une forme positive sur F , alors puisque F est symétrique et cofinal dans A , d'après le lemme 1.2.4, φ se prolonge en une forme positive ψ sur tout E . Comme ψ est positive et E admet la propriété (P) pour a alors $\|\psi\| = \psi(a)$. Finalement on a

$$\|\varphi\| \leq \|\psi\| = \psi(a) = \varphi(a) \leq \|\varphi\|$$

d'où la conclusion. $\square$

En combinant les deux lemmes on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.2.5. *Soit E un espace ordonné d'espace réel H et $a \in E$ un élément positif tel que $\|a\| \leq 1$. Supposons que E admet la propriété (P) pour a , et soit F un sous-espace cofinal de E contenant a . Alors F admet la propriété (P) pour a .*

Démonstration. Soit φ une forme positive sur F , alors tout d'abord prolongeons φ sur $(F \cap H) \oplus i(F \cap H)$ par le lemme 2.2.3. Maintenant l'espace $(F \cap H) \oplus i(F \cap H)$ est symétrique et cofinal donc par le lemme 2.2.4, φ se prolonge sur tout E . $\square$

Remarque 2.2.6.

1. Si $\mathcal{A}$ est une $*$ -algèbre normée, unitaire d'unité e dont l'involution est isométrique, alors $\mathcal{A}$ admet la propriété (P) pour e .
2. Soit $\mathcal{A}$ une $*$ -algèbre de Banach hermitienne unitaire et $S \subset \mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel contenant $\mathbf{1}$. Alors S est cofinal. En effet, cela revient à démontrer que pour tout élément hermitien $h \in \mathcal{A}$ il existe un élément $x \in S \cap H$ tel que $x - h$ soit positif dans $\mathcal{A}$. Alors il suffit de prendre $x = \|h\| \cdot \mathbf{1}$ d'après le lemme 1.3.7.
3. En tenant compte de la première remarque et de la proposition 2.2.5, il est facile de prouver que si S est un sous-espace d'une $*$ -algèbre de Banach hermitienne unitaire, contenant $\mathbf{1}$, alors S admet la propriété (P) pour $\mathbf{1}$.

2.3 Applications complètement positives

2.3.1 Le cas des C^* -algèbres

Tout le long de cette section, $\mathcal{B}$ désigne une C^* -algèbre unitaire, d'unité $\mathbf{1}$. Son espace réel des éléments auto-adjoints est noté par $\mathcal{B}_h$ et son cône positif par $\mathcal{B}_+$. La norme sur $\mathcal{B}$ sera notée simplement par $\|\cdot\|$.

Soit $M_n(\mathcal{B})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{B}$. Un élément type de $M_n(\mathcal{B})$ sera noté $(a_{i,j})$. L'espace vectoriel $M_n(\mathcal{B})$ muni de la multiplication des matrices :

$$(a_{i,j}).(b_{i,j}) = \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right)$$

et de l'involution

$$(a_{i,j})^* = {}^t(a_{i,j}^*).$$

est une C^* -algèbre.

Étant donné une C^* -algèbre $\mathcal{B}$, il y a une suite de C^* -algèbres qui lui sont naturellement associées : $M_n(\mathcal{B})$ pour tout entier n . Par la même occasion une suite de normes et de cônes positifs lui sont aussi associés.

Soit $F \subset \mathcal{B}$ un sous espace vectoriel contenant **1**. Soit C une C^* -algèbre unitaire (On garde les mêmes notations pour les normes). Une application linéaire ϕ sur F à valeurs dans C est appelée n -positive si l'application $\phi_n : M_n(F) \rightarrow M_n(C)$ donnée par $\phi_n((a_{ij})) = (\phi(a_{ij}))$ est positive. L'application ϕ est dite *complètement positive* si elle est n -positive pour tout entier n . Elle est dite *complètement bornée* si $\sup_n \|\phi_n\|$ est fini. On pose

$$\|\phi\|_{cb} = \sup_n \|\phi_n\|.$$

Le terme *complètement contractive* veut dire que $\|\phi\|_{cb} \leq 1$.

Remarque 2.3.1. Si l'ensemble d'arrivée est $B(H)$ alors un calcul élémentaire nous fournit une définition équivalente : On dit que $\phi : F \rightarrow B(H)$ est complètement positive

si pour tout entier n , et pour tout vecteur $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in H^{(n)}$ (la somme directe de n copies de H) de norme inférieure à 1, on a :

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \phi(a_{ij}) h_j, h_i \rangle \geq 0,$$

quelque soit $(a_{ij}) \in M_n(F)_+$ (l'ensemble des éléments positifs dans $M_n(F)$).

De la même manière, on dit que ϕ est complètement contractive si pour tout entier n

et pour tous $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ dans $H^{(n)}$ de normes inférieures à 1, on a :

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \langle \phi(a_{ij})h_j, k_i \rangle \right| \leq 1,$$

quelque soit $(a_{ij}) \in M_n(F)$ avec $\|(a_{i,j})\| \leq 1$.

Comme dans le cas positif, une application complètement positive est aussi complètement bornée.

Proposition 2.3.2. [27] Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux C^* -algèbres. Soit $S \subset \mathcal{B}$ un système d'opérateurs. Soit $\phi : S \mapsto \mathcal{C}$ une application complètement positive. Alors ϕ est complètement bornée et on a :

$$\|\phi(\mathbf{1})\| = \|\phi\| = \|\phi\|_{cb}.$$

Si l'espace d'arrivée est une C^* -algèbre commutative, alors la positivité et la complète positivité sont équivalentes.

Proposition 2.3.3. [27] Soit $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre et soit $S \subset \mathcal{B}$ un sous espace vectoriel et Ω un espace topologique compact. Soit $\phi : S \mapsto C(\Omega)$ une application linéaire bornée. Alors $\|\phi\|_{cb} = \|\phi\|$. De plus, si S est un système d'opérateurs et ϕ est positive alors elle est complètement positive.

Le prochain résultat dû à Stinespring, est vrai pour les applications positives mais faux pour les applications bornées. La démonstration originale utilise des techniques de la théorie de mesure (voir [38]).

Théorème 2.3.4. (Stinespring) Soit Ω un espace topologique compact et $\mathcal{C}$ une C^* -algèbre. Soit $\phi : C(\Omega) \mapsto \mathcal{C}$ une application linéaire positive. Alors ϕ est complètement positive.

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et soit $B(H)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur H . On passe maintenant au théorème d'extension dû à Arveson (voir [4]). Lequel n'est pas vrai pour toutes les C^* -algèbres. Les C^* -algèbres qui vérifient ce résultat sont dites injectives. Ce théorème assure donc que $B(H)$ est injective.

Théorème 2.3.5. (Arveson) Soit $S \subset \mathcal{B}$ un système d'opérateurs. Soit $\phi : S \rightarrow B(H)$ une application linéaire complètement positive. Alors il existe une application linéaire complètement positive $\psi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ qui prolonge ϕ .

Le résultat suivant est un corollaire du théorème précédent très utile en pratique.

Corollaire 2.3.6. [27] Soit $F \subset \mathcal{B}$ un sous espace vectoriel contenant $\mathbf{1}$. Soit $\phi : F \rightarrow B(H)$ une application linéaire unitaire et complètement contractive. Alors il existe une application linéaire complètement positive $\psi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ qui prolonge ϕ .

On termine cette sous-section par un résultat de type Hahn-Banach dû à Wittstock voir [44].

Théorème 2.3.7. (Wittstock) Soit $F \subset \mathcal{B}$ un sous espace vectoriel. Soit $\phi : F \rightarrow B(H)$ une application linéaire complètement bornée. Alors il existe une application linéaire complètement bornée $\psi : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$ qui prolonge ϕ , avec $\|\psi\|_{cb} = \|\phi\|_{cb}$.

2.3.2 Le cas général (au sens de Powers)

Pour toute la sous section, soit A une $*$ -algèbre unitaire d'unité e et d'espace réel A_h . Rappelons que le cône positif $\mathcal{P}(A)$ est formé par les sommes finies a^*a où $a \in A$.

Définition 2.3.8. [28] Un cône Q dans l'espace réel A_h est dit m -admissible si

1. $\mu a + \lambda b \in Q$ si $a, b \in Q$ et $\mu, \lambda \geq 0$.
2. $e \in Q$.
3. $b^*ab \in Q$ si $a \in Q$ et $b \in A$.

Cela veut dire aussi que $Q \subset A_h$ et contient $\mathcal{P}(A)$.

On considère $M(A)$, l'ensemble des matrices à coefficients dans A . Un élément $(a_{i,j}) \in M(A)$ est une matrice dont les coefficients $a_{ij} \in A$ sont tous nuls sauf un nombre fini de couple d'indices i, j . Les ensembles $M_n(A)$ sont vus comme des sous-espaces vectoriels de $M(A)$. L'algèbre A est vu aussi comme un sous-espace de $M(A)$ en prenant les matrices dont la composante $1 - 1$ est un élément de A et tout le reste est nul.

L'ensemble $M(A)$ est une $*$ -algèbre dont l'addition, la multiplication et l'involution sont définies de la manière la plus naturelle :

1. $(a_{i,j}) + \lambda(b_{i,j}) = (c_{i,j})$ où $c_{ij} = a_{ij} + \lambda b_{ij}$.
2. $(a_{i,j}).(b_{i,j}) = (c_{i,j})$ où $c_{ij} = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}b_{kj})$.
3. $(a_{i,j})^* = (a_{j,i}^*)$.

où $(a_{i,j})$ et $(b_{i,j})$ sont des éléments de $M(A)$.

De la même façon on définit un cône algébriquement admissible pour $M(A)$.

Définition 2.3.9. [28] On dit que $Q_m \in M(A)$ est un cône m -admissible si :

1. $\mu(a_{i,j}) + \lambda(b_{i,j}) \in Q_m$ si $(a_{i,j}), (b_{i,j}) \in Q_m$ et $\mu, \lambda \geq 0$.
2. $(b_{i,j})^*(a_{i,j}).(b_{i,j}) + \lambda(b_{i,j})^*(b_{i,j}) \in Q_m$ où $(a_{i,j}) \in Q$ et $(b_{i,j}) \in M(A)$ et $\lambda \geq 0$.

Il est clair que $Q_m \subset M(A)_h$ et contient $\mathcal{P}(M(A))$.

Si Q est un cône m -admissible pour A et Q_m est un cône m -admissible pour $M(A)$, alors Q_m et Q sont dits compatibles si $(a\delta_{1i}\delta_{1j}) \in Q_m$ si et seulement si $a \in Q$.

Soit $Q \subset A$ un cône algébriquement admissible. Le cône maximal admissible pour $M(A)$ et compatible avec Q est donné par (voir [28]) :

$$\mathcal{K} = \left\{ (a_{i,j}) = (a_{i,j})^* \in M(A); \sum_{i,j=1}^n a_i^* a_{ij} a_j \in Q, \forall a_i \in A, i = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Soit E un $*$ -espace vectoriel (voir chapitre 1). On définit $M(E)$ l'ensemble de toutes les matrices finies à valeurs dans E . Alors $M(E)$ est un $*$ -espace vectoriel, l'addition et l'involution sont définies comme précédemment. L'ensemble des matrices auto-adjointes est noté par $M(E)_h$.

Définition 2.3.10. [28] On dit que $Q_m \in M(A)_h$ est un cône admissible si :

1. $\mu(x_{i,j}) + \lambda(y_{i,j}) \in Q_m$ si $(x_{i,j}), (y_{i,j}) \in Q_m$ et $\mu, \lambda \geq 0$.
2. $\sum_{k,l=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{ki} \alpha_{lj} x_{kl} \in Q_m$ où $(x_{i,j}) \in Q_m$ et $(\alpha_{i,j})$ est une matrice à valeurs complexes dont les coefficients sont nuls sauf un nombre fini.

En particulier, si A est une $*$ -algèbre unitaire alors si un cône $Q_m \in M(A)_h$ est m -admissible il est en particulier admissible.

Soit $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace pré-hilbertien complexe. L'espace des formes sesquilineaires sur $\mathcal{D}$ est noté par $SF(\mathcal{D})$ comme dans [2].

Définition 2.3.11. Une application linéaire $\psi : A \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est dite unitaire si

$$\psi(e)(.,.) = \langle ., . \rangle .$$

Elle est dite positive si $\psi(a)$ est une forme sesquilinéaire positive non dégénérée pour tout élément $a \in Q$.

Soit E un $*$ -espace vectoriel. On suppose que $M(E)$ est muni d'un cône Q_m admissible.

Définition 2.3.12. [28] Une application linéaire $\psi : E \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est dite complètement positive si

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi(a_{ij})(x_i, x_j) \geq 0$$

pour tous $x_k \in H$, $(a_{ij})_{ij} \in Q_m$, $k = 1, \dots, n$, and $n = 1, 2, \dots$.

Voici la version généralisée du théorème d'extension d'Arveson 2.3.5 du à Powers (voir [28]). Mais avant, il est nécessaire de donner une définition de cofinalité au sens de Powers.

Définition 2.3.13. [28] Un sous-espace vectoriel F de E est dit cofinal par rapport à un cône admissible $Q_m \in M(E)_h$ si pour tout $x \in E_h$ il existe $y \in F \cap E_h$ avec $y \in Q_m$ et $y - x \in Q_m$.

Notons que si $E = A$ une $*$ -algèbre ayant un cône m -admissible Q et $Q_m \in M(A)_h$ un cône m -admissible compatible avec Q , alors cette définition de cofinalité coïncide avec la définition standard (voir 1.2.3). C'est à dire, il suffit que les quantités y et $y - x$ soient dans Q .

Théorème 2.3.14. Arveson généralisé[28] Soient $F \subset E$ un sous espace vectoriel symétrique cofinal par rapport à un cône admissible $Q_m \in M(E)_h$ et $\phi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire complètement positive. Alors ϕ se prolonge en une application linéaire complètement positive $\psi : E \rightarrow SF(\mathcal{D})$.

Chapitre 3

Prolongement d'opérateurs sur des limites inductives

Dans la première section de ce chapitre, on donne une réponse positive à la première question posée dans l'introduction. Ensuite, on donne une application dans le cadre des espaces de fonctions holomorphes. Puis dans une autre section on donne une réponse positive à la deuxième question et aussi un exemple où la réponse est négative. Enfin, on généralise le résultat de la première section pour les opérateurs complètement bornés sur des C^* -algèbres, ce qui nous permet de généraliser l'application.

3.1 Cas scalaire (résultat principal)

Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné et dirigé (i.e pour tous $\alpha, \beta \in A$ il existe $\gamma \in A$ tel que $\alpha, \beta \leq \gamma$). Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces vectoriels (réels ou complexes) topologiques tels que chaque X_α possède une semi-norme $|\cdot|_\alpha$.

Supposons que pour toute paire $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$ il existe une application linéaire $J_{\alpha\beta} : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$, qui est aussi continue dans le sens que

$$|J_{\alpha\beta}| = \sup\{|J_{\alpha\beta}x|_\beta; |x|_\alpha \leq 1, x \in X_\alpha\} < +\infty$$

On suppose aussi que $J_{\alpha\gamma} = J_{\beta\gamma} \circ J_{\alpha\beta}$ si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Soit $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces vectoriels (réels ou complexes) topologiques tels que $Y_\alpha \subseteq X_\alpha$ et $J_{\alpha\beta}(Y_\alpha) \subseteq Y_\beta$ pour tous α, β avec $\alpha \leq \beta$.

Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de formes linéaires telles que φ_α soit linéaire sur Y_α , $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ si $\alpha \leq \beta$ et

$$|\varphi_\alpha| = \sup\{|\varphi_\alpha x|; |x|_\alpha \leq 1, x \in X_\alpha\} < +\infty.$$

Problème : trouver une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que ψ_α soit linéaire et continue sur X_α , $\psi_\alpha = \psi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$, $|\psi_\alpha| < +\infty$ et $\psi_\alpha|_{Y_\alpha} = \varphi_\alpha$ pour tout α, β avec $\alpha \leq \beta$.

Remarquons au début que dans certains cas le prolongement est automatique. Par exemple le cas où les F_α sont denses dans les E_α . Un autre cas moins trivial est celui où les F_α admettent un complément topologique dans les E_α . Ou, en d'autres termes il existe une projection continue de E_α dans F_α comme, par exemple, lorsque les E_α sont des espaces de Hilbert. Dans ce cas on obtient une application continue de E - l'espace limite inductive des E_α - dans F - l'espace limite inductive des F_α - qui est égale à l'identité sur F . Sous ces conditions, il est clair que la topologie limite inductive sur F est identique à celle induite par E . Donc le théorème de Hahn-Banach fonctionne normalement.

Ensuite, nous montrons que le théorème donné par C. Foiaş et G. Marinescu dans [13] reste valable avec un petit élargissement des hypothèses sur les norme des $I_{n,n+p}$. En effet, il suffit de les considérer majorées seulement par des constantes qui ne dépendent que de n , au lieu de les majorer par 1, et que le supremum de ces constantes soit fini.

Théorème 3.1.1. Soient $E_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ des espaces de Banach réflexifs, tels que $E_n \subset E_{n+1}$ pour tout n . Supposons que

$$\sup_{p \geq 0} \|I_{n,n+p}\| = C_n < \infty$$

ou $I_{n,n+p} : E_n \longrightarrow E_{n+p}$ est l'inclusion pour tout entier positif p . Soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ et soit $F \subset E$ un sous espace linéaire de E tel que $F_n = E_n \cap F$ soit fermé dans E_n . Alors toute fonctionnelle linéaire définie sur F , dont les restrictions aux espaces F_n sont continues peut être prolongée en une fonction linéaire définie sur E et telle que ses restrictions aux espaces E_n soient continues.

Démonstration. On suit la même démonstration de C. Foiaş et G. Marinescu.

La proposition suivante est extraite de l'article [13].

Proposition 3.1.2. $I_{n,n+1}^* F_{n+1}^\perp$ est dense dans $F_n^\perp$

Par le théorème de Hahn-Banach on peut prolonger les f_n sur les espaces E_n , en conservant la continuité. Nous supposons avoir choisi les prolongements. Si nous pouvons ajouter à chaque f_n un élément $k_n \in F_n^\perp$, tel que

$$I_{n,n+1}^*(f_{n+1} + k_{n+1}) = f_n + k_n, \quad (*)$$

alors la fonctionnelle cherchée g sera donnée par ses restrictions $g_n = f_n + k_n$ à E_n .

Soit $h_n = f_n - I_{n,n+1}^* f_{n+1}$. Pour chaque n , $h_n \in F_n^\perp$. Alors, en vertu de la proposition 3.1.2, on peut construire par récurrence un élément $z_{n+1} \in F_{n+1}^\perp$ tel que $\delta_n = h_n + z_n - I_{n,n+1}^* z_{n+1}$ (où l'on prend $z_1 = 0$) satisfasse à l'inégalité $\|\delta_n\| < 1/2^n$ (il s'agit de la norme de l'espace E_n^*).

En posant

$$k_n = z_n - I_{n,n+1}^* \delta_{n+1} - I_{n,n+2}^* \delta_{n+2} - \dots,$$

où les séries sont évidemment convergentes, on vérifie aussitôt les relations (*). En effet

$$\|\sum_{p=0}^{\infty} I_{n,n+p}^* \delta_{n+p}\| < \sum_{p=0}^{\infty} C_n 1/2^{n+p} < C_n (1/2^n) \sum_{p=0}^{\infty} 1/2^p.$$

□

Revenons maintenant à notre étude. Le prochain théorème est le théorème principal de ce chapitre. Nous gardons la notation du début de cette section.

Théorème 3.1.3. : Supposons que

$$\sup_{\beta \geq \alpha} |J_{\alpha\beta}| = C_\alpha < +\infty$$

et

$$\sup_{\beta \geq \alpha} |\varphi_\beta| = D_\alpha < +\infty$$

Alors il existe une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que ψ_α soit une forme linéaire et continue sur X_α , $\psi_\alpha = \psi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ et $\psi_\alpha|_{Y_\alpha} = \varphi_\alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in A$ avec $\alpha \leq \beta$. De plus $|\psi_\alpha| \leq C_\alpha D_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.

Démonstration. Pour tout $\alpha \in A$ notons par ξ_α un prolongement de φ_α à X_α avec la propriété $|\xi_\alpha| = |\varphi_\alpha|$ (donné par le théorème de Hahn-Banach). Pour tous $\alpha, \beta \in A$ avec $\alpha \leq \beta$, définissons

$$\xi_{\alpha,\beta}(x) = \xi_\beta(J_{\alpha\beta}x), \quad x \in X_\alpha.$$

Notons que pour tous $x \in X_\alpha$,

$$|\xi_{\alpha\beta}(x)| \leq |\xi_\beta| |J_{\alpha\beta}(x)| \leq |\varphi_\beta| |J_{\alpha\beta}| |x|_\alpha \leq C_\alpha D_\alpha |x|_\alpha.$$

Pour chaque α fixé, considérons l'ensemble

$$K_\alpha = \{a = (a(x))_{x \in X_\alpha} \in \mathbb{C}^{X_\alpha}; |a(x)| \leq C_\alpha D_\alpha |x|_\alpha; x \in X_\alpha\},$$

c'est un sous-espace topologique compact de $\mathbb{C}^{X_\alpha}$ lorsque celui-ci est muni de la topologie produit, en effet K_α est un produit de disques compacts de $\mathbb{C}$.

De même $K = \prod_{\alpha \in A} K_\alpha$ est aussi un compact pour la topologie produit.

Pour chaque $\beta \in A$ fixé, notons par H_β l'ensemble des éléments $b = (b_\alpha)_{\alpha \in A} \in K$ tels que :

Pour tous $\alpha \leq \beta$, l'application $x \mapsto b_\alpha(x)$ de X_α dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire qui prolonge φ_α , et vérifie

$$b_\alpha(x) = b_\beta(J_{\alpha\beta}x), \quad x \in X_\alpha.$$

L'ensemble H_β est fermé dans K . En effet, si $(b^\theta)_{\theta \in \Theta}$ est une suite généralisée de H_β convergente vers $b \in K$, alors $\lim_\theta b^\theta_\alpha(x) = b_\alpha(x)$ pour tous $x \in X_\alpha$ et $\alpha \in A$, lorsque $b^\theta = (b^\theta_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $b = (b_\alpha)_{\alpha \in A}$. Cela implique l'affirmation car les propriétés définissant H_β passent à la limite.

Nous voulons montrer que $\bigcap_{\beta \in A} H_\beta \neq \emptyset$, tenant compte de la compacité, il suffit de prouver que pour toute famille finie $\beta_1, \dots, \beta_m$ de A on a $H_{\beta_1} \cap \dots \cap H_{\beta_m} \neq \emptyset$. Fixons $\beta_1, \dots, \beta_m \in A$. A étant dirigé, il existe $\beta \in A$ tel que $\beta_j \leq \beta$ pour tout $j = 1, \dots, m$. Pour tous $\alpha \in A$ et $x \in X_\alpha$, définissons

$$b_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \not\leq \beta \\ \xi_{\alpha\beta}(x) & \text{si } \alpha \leq \beta \end{cases}$$

Il est clair que $b_\alpha = (b_\alpha(x))_{x \in X_\alpha} \in K_\alpha$ puisque $|\xi_{\alpha\beta}(x)| \leq C_\alpha D_\alpha |x|_\alpha$, et donc $b = (b_\alpha)_{\alpha \in A} \in K$.

Reste à montrer que b appartient à $\bigcap_{\beta \in A} H_\beta$, pour cela fixons un indice $j \in \{1, \dots, m\}$ et considérons $\alpha \leq \beta_j$. Alors pour tout $x \in X_\alpha$ on a

$$b_\alpha(x) = \xi_{\alpha\beta}(x) = \xi_\beta(J_{\alpha\beta}x) = \xi_\beta(J_{\beta_j\beta}J_{\alpha\beta_j}x) = \xi_{\beta\beta_j}(J_{\alpha\beta_j}x) = b_{\beta_j}(J_{\alpha\beta_j}x),$$

d'autre part b_α est une forme linéaire sur X_α qui prolonge φ_α puisque pour tout $y \in Y_\alpha$, on a

$$b_\alpha(y) = \xi_{\alpha\beta}(y) = \xi_\beta(J_{\alpha\beta}y) = \varphi_\beta(J_{\alpha\beta}y) = \varphi_\alpha(y).$$

Cela montre que $b \in H_{\beta_j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et que $\bigcap_{\beta \in A} H_\beta \neq \emptyset$. On peut donc choisir $\psi = (\psi_\alpha)_{\alpha \in A} \in \bigcap_{\beta \in A} H_\beta$. Un tel ψ satisfait trivialement les conditions cherchées du théorème, en effet ;

Pour $\alpha \in A$ fixé, $\psi \in H_\alpha$ et donc l'application $x \mapsto \psi_\alpha(x)$ de X_α dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire qui prolonge φ_α et vérifie

$$|b_\alpha(x)| \leq C_\alpha D_\alpha |x|_\alpha,$$

de plus, si $\alpha \leq \beta$ alors $\psi \in H_\beta$ et on a

$$\psi_\alpha(x) = \psi_\beta(J_{\alpha\beta}x),$$

pour tout $x \in X_\alpha$. □

3.2 Application

Soit K une partie compacte connexe de $\mathbb{C}^n$ et A l'ensemble de tous les ouverts relativement compacts contenant K . On définit sur A la relation d'ordre $U \leq V$ si $V \subset U$, qui en fait un ensemble dirigé. Pour chaque $U \in A$, on considère $\bar{O}_U$ l'algèbre de Banach des fonctions holomorphes sur U et continues sur l'adhérence $\bar{U}$, la norme étant $\|f\|_U = \sup_{z \in \bar{U}} |f(z)|$ pour tout $f \in \bar{O}_U$. C'est une sous-algèbre de l'algèbre de Banach des fonctions continues sur $\bar{U}$, notée $C(\bar{U})$.

Pour tous $U \leq V$ dans A , on définit l'application R_{UV} de $C(\bar{U})$ dans $C(\bar{V})$ qui à chaque f fait correspondre sa restriction à $\bar{V}$. On peut facilement voir que

- (i) $R_{UU} = I_{C(\bar{U})} \quad \forall U \in A;$
- (ii) $R_{UW} = R_{VW} \circ R_{UV}, \quad \text{si } U \leq V \leq W \text{ dans } A.$

Théorème 3.2.1. : Soit $(\varphi_U)_{U \in A}$ une famille telle que pour chaque $U \in A$, φ_U est une forme linéaire continue sur $\bar{O}_U$. On suppose que $\varphi_V \circ R_{UV} = \varphi_U$ pour tous $U, V \in A$ tels que $U \leq V$.

Alors, il existe une mesure μ sur K telle que, pour tous $U \in A$ et $f \in \bar{O}_U$,

$$\varphi_U(f) = \int_K f d\mu,$$

si et seulement si $\sup_{V \geq U} \|\varphi_V\| < \infty$ pour chaque $U \in A$.

Démonstration. Soit μ une mesure sur K telle que, pour tout $U \in A$ et tous $f \in \bar{O}_U$,

$$\varphi_U(f) = \int_K f d\mu.$$

Alors nous avons $|\varphi_U(f)| \leq \|\mu\| \|f\|_U$, ce qui implique que $\sup_U \|\varphi_U\| \leq \|\mu\|$. En particulier, $\sup_{V \geq U} \|\varphi_V\| < \infty$ pour tout $U \in A$.

Inversement, supposons que $(\varphi_U)_{U \in A}$ vérifie

$$\sup_{V \geq U} \|\varphi_V\| < \infty, \quad \forall U \in A.$$

Puisque les applications restrictions R_{UV} sont de normes 1, alors on peut appliquer le Théorème 3.1.3 pour prolonger la famille $(\varphi_U)_{U \in A}$ en une famille $(\psi_U)_{U \in A}$ telle que pour chaque $U \in A$, ψ_U soit une forme linéaire continue sur $C(\bar{U})$ et telle que, pour tous $U, V \in A$ tels que $U \leq V$, $\psi_V \circ R_{UV} = \psi_U$.

D'un autre coté, le théorème de Riesz nous donne, pour chaque U , une mesure de Radon μ_U sur $\bar{U}$ telle que

$$\psi_U(f) = \int_{\bar{U}} f d\mu_U, \quad \forall f \in C(\bar{U}).$$

La famille de mesures ainsi construite doit vérifier $\mu_V = \mu_U|_{\bar{V}}$ à chaque fois que $U \leq V$, puisque dans ce cas $\psi_V \circ R_{UV} = \psi_U$. Tenant compte de cette propriété, il suffit de prouver que chaque mesure μ_U est à support dans K pour avoir la mesure μ cherchée qui va être égale à toutes les mesures μ_U .

Fixons alors $U \in A$, prenons un ouvert quelconque W tel que $\bar{W} \subset U \setminus K$ et montrons que $\mu_U(W) = 0$. Soit $V \in A$ vérifiant $\bar{V} \subset U$ et $\bar{W} \cap \bar{V} = \emptyset$. En utilisant le lemme d'Urysohn, on peut construire une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions positives dans $C(\bar{U})$, qui converge simplement vers χ_W , la fonction caractéristique de W . On note que chaque f_n est majorée par χ_W , et que χ_W est $|\mu_U|$ -intégrable, donc le théorème de convergence dominée implique que

$$\mu_U(W) = \int_{\bar{U}} \chi_W d\mu_U = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\bar{U}} f_n d\mu_U = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\bar{V}} f_n|_{\bar{V}} d\mu_V = 0.$$

Cela prouve que $\text{supp}(\mu_U) \subset K$, et que

$$\varphi_U(f) = \int_K f d\mu,$$

pour tout $f \in \bar{O}_U$. □

Maintenant sur le compact K on définit l'espace des germes des fonctions holomorphes de la manière suivante : On dit que $f \in \bar{\mathcal{O}}_U$ et $g \in \bar{\mathcal{O}}_V$ sont équivalentes s'il existe $W \in A$, $W \subset U \cap V$, tel que $f|W = g|W$; cela définit une relation d'équivalence sur $\bigcup_{U \in A} \bar{\mathcal{O}}_U$ et l'ensemble quotient, noté $\hat{\mathcal{O}}_K$ est l'ensemble des germes voulu. On munit $\hat{\mathcal{O}}_K$ de la structure d'algèbre naturellement donnée par la relation d'équivalence. On remarque que, pour tout $U \in A$, l'application $I_U : \bar{\mathcal{O}}_U \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_K$, qui à chaque fonction associe sa classe d'équivalence est linéaire injective, vu la connexité de U et l'holomorphie des fonctions de $\bar{\mathcal{O}}_U$. Dans ces conditions on munit l'espace des germes de la topologie limite inductive de la famille $(\bar{\mathcal{O}}_U)_{U \in A}$ par les application I_U .

D'un autre côté, on peut considérer l'espace $\mathcal{O}_K$ des fonctions continues sur K qui sont des restrictions de fonctions holomorphes définies sur des voisinages ouverts de K dans $\mathbb{C}^n$. Cet espace est muni de la norme de la convergence uniforme sur K , comme sous-espace de $C(K)$. On note que l'application de $\hat{\mathcal{O}}_K$ dans $\mathcal{O}_K$, qui à chaque $\hat{f}$ associe la restriction de f à K est bien définie, puisque l'image de $\hat{f}$ ne dépend pas du représentant f . Cela permet de considérer la semi-norme suivante sur $\hat{\mathcal{O}}_K$:

$$\|\hat{f}\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|; \quad \forall \hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}_K.$$

Dans le cas particulier où l'ensemble K admet un point intérieur, l'application de la restriction de $\hat{\mathcal{O}}_K$ dans $\mathcal{O}_K$ est injective et alors $\|\cdot\|_K$ est une norme sur $\hat{\mathcal{O}}_K$, la topologie qui en découle est moins fine que la topologie limite inductive donnée ci-haut. En effet, considérons le compact

$$K = L \times \bar{D}_{n-1}(0, 1) \quad \text{où } \bar{D}(0, 1)_{n-1} \text{ est le disque unité fermé de } \mathbb{C}^{n-1},$$

où $L = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$, et prenons la suite $(\hat{f}_k)_{k \geq 1}$ définie par les germes des fonctions

$$f_k(z) = \frac{z_1}{kz_1 - 1}; \quad \text{pour } z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \text{ tel que } \operatorname{Re}(z_1) < 1/k.$$

Cette suite n'est pas convergente pour la limite inductive car il n'y a pas d'ouvert $U \in A$ pour lequel, tous les éléments de la suite, à partir d'un certain rang, sont dans $\bar{\mathcal{O}}_U$. D'un autre côté, elle converge pour la norme uniforme sur K vers la fonction nulle, puisque pour tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in K$ on a

$$|f_k(z_1, z_2, \dots, z_n)|^2 = \frac{|z_1|^2}{|kz_1 - 1|^2} \leq \frac{1}{k^2 + 1}.$$

car $\operatorname{Re}(z_1) \leq 0$. Cette remarque justifie en quelque sorte le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2. : Soit φ une forme linéaire sur $\hat{\mathcal{O}}_K$ telle que ses restrictions sur les espaces $\tilde{\mathcal{O}}_U$ soient continues. Alors il existe une mesure de Radon μ sur K telle que

$$\varphi(\hat{f}) = \int_K \hat{f} d\mu, \quad \forall \hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}_K,$$

si et seulement si

$$\sup_{V \geq U} \|\varphi_V\| < \infty, \quad \forall U \in A.$$

3.3 Sur les prolongements préservant les normes

Dans le contexte précédent des limites inductives, une question naturelle se pose, peut-on trouver des prolongements $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ des $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ qui préservent les normes ; i.e. $\|\psi_\alpha\| = \|\varphi_\alpha\|$ pour tout $\alpha \in A$. Pour commencer, nous prouvons par un exemple que de tels prolongements n'existent pas en général, nous donnons ensuite des situations particulières où on peut satisfaire cette contrainte.

Avant de donner le contre-exemple, nous donnons un cas où le prolongement de Hahn-Banach qui préserve la norme est unique.

Remarque 3.3.1. En général le théorème de Hahn-Banach ne donne pas un prolongement unique d'une forme linéaire donnée. Mais dans certains cas, il ne peut exister qu'un seul prolongement qui garde la même norme. C'est le cas, par exemple, lorsque E est un espace de Hilbert et F un sous espace fermé de E . En effet si φ une forme linéaire sur F , alors le théorème de Riesz nous dit qu'il existe $a \in F$ unique tel que $\varphi(x) = \langle x, a \rangle$, pour tout $x \in F$ et que $\|\varphi\| = \|a\|$. D'autre part si ψ est un prolongement de φ sur E donné par le théorème de Hahn-Banach, il va exister $b \in E$ tel que $\psi(x) = \langle x, b \rangle$, pour tout $x \in E$ et que $\|\psi\| = \|b\|$, de plus $\|b\|$ doit être égale à $\|a\|$. Or

$$\langle a, b \rangle = \psi(a) = \varphi(a) = \langle a, a \rangle,$$

cela prouve que $(b - a)$ est orthogonal à a , et le théorème de Pythagore nous dit que

$$\|b\|^2 = \|(b - a) + a\|^2 = \|a\|^2 + \|b - a\|^2.$$

On voit que l'inégalité $\|b\| = \|a\|$, implique forcément que $b - a = 0$ et que $b = a$.

Voici maintenant un contre-exemple qui montre que sur les limites inductives un prolongement qui préserve la norme n'est pas possible en général et même en dimension fini.

Exemple 3.3.2. Sous les notations du théorème 3.1.3, on prend $A = \{1, 2\}$ muni de l'ordre usuel, $X_1 = X_2 = \mathbb{R}^2$ et J_{12} l'application identité de $\mathbb{R}^2$. On munit X_1 de la norme euclidienne notée $\|\cdot\|_1$, et X_2 de la norme $\|\cdot\|_2$ définie par $\|(x, y)\|_2 = \sup\{|y - x|, |y|\}$. Pour $i = 1, 2$ on prend $Y_i = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $\varphi_i : Y_i \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_i(x, 0) = x$.

Notons que $\|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1$. Sous les notations de l'exemple précédent l'élément "a" associé à la forme φ_1 ne peut être que l'élément $(1, 0)$ par suite le seul prolongement de φ_1 à X_1 préservant la norme est la première projection notée et définie par $\psi_1(x, y) = x$. Il s'ensuit que le prolongement (ψ_1, ψ_2) donné par le théorème 3.1.3 est unique si on exige que $\|\psi\|_1 = \|\varphi\|_1$, puisque $\psi_1 = \psi_2 \circ J_{12}$. Mais dans ce cas ψ_2 n'a pas la même norme 1 que φ_2 , en effet l'élément $(2, 1)$ est de norme 1 dans $(X_2, \|\cdot\|_2)$ par contre $|\psi_2(2, 1)| = 2$, d'où l'impossibilité du prolongement voulu.

Maintenant nous allons présenter des conditions supplémentaires sous lesquelles, le prolongement préservant les normes est possible. Notons aussi que cela est possible dans d'autres situations, notamment celle des espaces des fractions.

Soit $(E_\alpha, J_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \in A}$ une famille inductive telle chaque E_α est un espace vectoriel ordonné qui admet la propriété (P) pour un élément a_α . On note par C_α le cône des éléments positifs, par E_α^h un sous espace réel de E_α et par $\|\cdot\|_\alpha$ la norme dans E_α .

De plus, on suppose que pour tous $\alpha \leq \beta$ dans A , $J_{\alpha\beta}$ est positif (i.e $J_{\alpha\beta}(C_\alpha) \subset C_\beta$), et que $J_{\alpha\beta}(a_\alpha) = a_\beta$.

Pour chaque $\alpha \in A$, on se donne F_α un sous-espace vectoriel de E_α contenant a_α et on suppose que F_α est cofinal dans E_α , dans le sens que, pour tout $x \in E_\alpha$ il existe $y \in F_\alpha \cap E_\alpha^h$ tel que $y - x \in C_\alpha$. Dans ces conditions nous avons :

Théorème 3.3.3. : On considère une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifiant pour tout $\alpha \in A$:

φ_α est une forme linéaire positive définie sur F_α ,

$\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ pour tout $\beta \in A$ tel que $\alpha \leq \beta$, et

$\sup_{\beta \geq \alpha \in A} \|\varphi_\beta\| = D_\alpha < +\infty$.

Alors il existe une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que, pour tout $\alpha \in A$,

ψ_α est une forme linéaire positive prolongeant φ_α sur E_α et $\|\psi_\alpha\| = \|\varphi_\alpha\|$,

$\psi_\alpha = \psi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ pour tout $\beta \in A$ tel que $\alpha \leq \beta$,
si et seulement si $\|\varphi_\alpha\|_\alpha = \varphi_\alpha(a_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$.

Démonstration. La démonstration est basée sur les mêmes idées du théorème 3.1.3. Supposons que $\|\varphi_\alpha\|_\alpha = \varphi_\alpha(a_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$. Comme F_α est cofinal dans E_α , alors il existe une forme linéaire positive ξ_α prolongeant φ_α sur E_α (voir lemme 1.2.4). La propriété (P) satisfaite par les E_α implique que $\|\xi_\alpha\| = \xi_\alpha(a_\alpha) = \varphi_\alpha(a_\alpha) = \|\varphi_\alpha\|$. On définit, pour tous $\alpha \leq \beta \in A$, les applications

$$\xi_{\alpha\beta}(x) = \xi_\beta(J_{\alpha\beta}x), \quad x \in E_\alpha.$$

Puisque $J_{\alpha\beta}$ est positive et envoie F_α sur F_β , donc $\xi_{\alpha\beta}$ prolonge aussi φ_α et on a $\|\xi_{\alpha\beta}\| = \xi_{\alpha\beta}(a_\alpha) = \varphi_\alpha(a_\alpha) = \|\varphi_\alpha\|$. On note aussi que

$$|\xi_{\alpha\beta}(x)| \leq \|\varphi_\alpha\| \|x\|_\alpha; \quad \forall x \in E_\alpha.$$

Comme dans la preuve précédente on considère les compacts

$$K_\alpha = \{a = (a(x))_{x \in E_\alpha}; |a(x)| \leq D_\alpha \|x\|_\alpha, x \in E_\alpha\},$$

et $K = \Pi_{\alpha \in A} K_\alpha$.

Pour chaque $\beta \in A$ fixé, on note par H_β l'ensemble des éléments $b = (b_\alpha)_{\alpha \in A} \in K$ vérifiant :

pour tout $\alpha \leq \beta$, l'application $x \mapsto b_\alpha(x)$ de E_α dans $\mathbb{K}$ est un prolongement linéaire positif φ_α tel que

$$b_\alpha(x) = b_\beta(J_{\alpha\beta}x), \quad x \in E_\alpha.$$

Pour conclure, on prouve que H_β est fermé dans K et que $\bigcup_{\beta \in A} H_\beta$ est non vide pour obtenir la famille $(\psi_\alpha)_\alpha$ voulue. Tenant compte du fait que les ψ_α sont positives et de la propriété (P) on aura $\|\psi_\alpha\| = \|\varphi_\alpha\|$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que, pour tout $\alpha \in A$, ψ_α est une forme linéaire positive prolongeant φ_α sur E_α et $\|\psi_\alpha\| = \|\varphi_\alpha\|$. Alors comme E_α admet la propriété (P) pour a_α donc on a : $\|\psi_\alpha\| = \psi_\alpha(a_\alpha)$. Finalement, remarquons que pour tout $\alpha \in A$ on a :

$$\|\varphi_\alpha\| \leq \|\psi_\alpha\| = \psi_\alpha(a_\alpha) = \varphi_\alpha(a_\alpha) \leq \|\varphi_\alpha\|$$

□

Rappelons qu'un espace d'opérateurs est un sous espace d'une C^* -algèbre. Nous considérons toujours les C^* -algèbres unitaires. Supposons que pour tout $\alpha \in A$, $E_\alpha = S_\alpha$ un espace d'opérateurs contenant l'unité, noté par e_α , et F_α un sous espace de S_α qui contient e_α . Sous ces conditions on obtient le même théorème. Si maintenant les S_α sont des systèmes d'opérateurs alors, en vu de la proposition 2.1.2, on a :

Corollaire 3.3.4. *On considère une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifiant pour tout $\alpha \in A$,*

φ_α est une forme linéaire définie sur F_α ,

$\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ pour tout $\beta \in A$ tel que $\alpha \leq \beta$, et

$\sup_{\beta \geq \alpha \in A} \|\varphi_\beta\| = D_\alpha < +\infty$.

Alors il existe une famille $(\psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que, pour tout $\alpha \in A$,

ψ_α est une forme linéaire positive prolongeant φ_α sur S_α et $\|\psi_\alpha\| = \|\varphi_\alpha\|$,

$\psi_\alpha = \psi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ pour tout $\beta \in A$ tel que $\alpha \leq \beta$,

si et seulement si φ_α est positive pour tout $\alpha \in A$.

3.4 Cas des opérateurs

Dans ce paragraphe nous allons présenter une version du théorème 3.1.3 où nous prenons des opérateurs complètement bornés au lieu des formes linéaires bornées.

Soit $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre unitaire Soit H un espace de Hilbert, on dénote par $BSF(H)$ l'espace vectoriel des formes sesquilinéaires bornées sur H . Une application linéaire ψ de $\mathcal{B}$ à valeurs dans $BSF(H)$ est dite *unitaire* si $\psi(1)(.,.) = \langle ., . \rangle$. Elle est dite *positive* si $\psi(f)$ est positive semi-définie pour tout élément positif $f \in \mathcal{B}$. Rappelons aussi que à tout élément dans $BSF(H)$ lui correspond un élément dans $B(H)$. En vu de la remarque faite à la fin du chapitre précédent l'application ψ est complètement bornée (resp. complètement positive) lorsque l'application correspondante Ψ sur $\mathcal{B}$ à valeurs dans $B(H)$ est complètement bornée (resp. complètement positive), et $\|\psi\|_{cb} = \|\Psi\|_{cb}$.

Soit A un ensemble dirigé. On considère $(\mathcal{B}_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de C^* -algèbres (non nécessairement commutatives), et soit $\|\cdot\|_\alpha$ la norme de chaque $\mathcal{B}_\alpha$.

Supposons que pour tous $\alpha, \beta \in A$ tels que $\alpha \leq \beta$, on dispose d'un opérateur complètement bornée et unitaire $J_{\alpha\beta} : \mathcal{B}_\alpha \longrightarrow \mathcal{B}_\beta$ vérifiant $J_{\alpha\alpha}$ égale l'identité de

$\mathcal{B}_\alpha$ et $J_{\alpha\gamma} = J_{\beta\gamma} \circ J_{\alpha\beta}$ à chaque fois que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$.

Soit, pour chaque $\alpha \in A$, un sous-espace M_α de $\mathcal{B}_\alpha$ et Φ_α un opérateur complètement borné de M_α à valeurs dans $B(H)$. On suppose que $J_{\alpha\beta}(M_\alpha) \subset M_\beta$ et que $\Phi_\alpha = \Phi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$, pour tous α, β dans A tels que $\alpha \leq \beta$.

Modulo ces données, nous allons énoncer le théorème suivant qui est, dans un certain sens, une généralisation du théorème 3.1.3 au cas des C^* -algèbres. La démonstration se base sur les mêmes idées.

Théorème 3.4.1. : *On suppose que*

$$\sup_{\beta \geq \alpha} \|J_{\alpha\beta}\|_{cb} = C_\alpha < +\infty$$

et

$$\sup_{\beta \geq \alpha} \|\Phi_\beta\|_{cb} = D_\alpha < +\infty$$

Alors il existe une famille $(\Psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'opérateurs Ψ_α complètement bornés sur $\mathcal{B}_\alpha$ à valeurs dans $B(H)$, tels que $\Psi_\alpha = \Psi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ et $\Psi_\alpha|_{M_\alpha} = \Phi_\alpha$ pour tous $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leq \beta$. De plus $\|\Psi_\alpha\|_{cb} \leq C_\alpha D_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$.

Démonstration. Pour tout $\alpha \in A$, l'opérateur Φ_α étant défini sur M_α à valeurs dans $B(H)$, il se prolonge à $\mathcal{B}_\alpha$ par le théorème de Wittstock, en un opérateur Ξ_α complètement borné, tel que $\|\Xi_\alpha\|_{cb} = \|\Phi_\alpha\|_{cb}$.

On définit, pour tous $\alpha \leq \beta \in A$, les opérateurs

$$\Xi_{\alpha,\beta}(h) = \Xi_\beta(J_{\alpha\beta}h), \quad h \in \mathcal{B}_\alpha,$$

ces opérateurs induisent, pour chaque $h \in \mathcal{B}_\alpha$, des formes sesquilineaires $\xi_{\alpha,\beta}(h)$ définies sur H par

$$\xi_{\alpha,\beta}(h)(x, y) = \langle \Xi_{\alpha,\beta}(h)x, y \rangle, \quad x, y \in H.$$

On note que, pour tous $x, y \in H$ et tout $h \in \mathcal{B}_\alpha$,

$$|\xi_{\alpha,\beta}(h)(x, y)| \leq \|\Xi_{\alpha,\beta}(h)\| \|x\| \|y\|,$$

et puisque

$$\|\Xi_{\alpha,\beta}(h)\| \leq \|\Xi_\beta\|_{cb} \|J_{\alpha\beta}\|_{cb} \|h\|_\alpha \leq \|\Phi_\beta\|_{cb} \|J_{\alpha\beta}\|_{cb} \|h\|_\alpha \leq C_\alpha D_\alpha \|h\|_\alpha,$$

alors

$$|\xi_{\alpha\beta}(h)(x, y)| \leq C_\alpha D_\alpha \|h\|_\alpha \|x\| \|y\|.$$

Maintenant et comme dans la démonstration du théorème 5.1.1, on considère pour chaque α l'ensemble

$$K_\alpha = \{a = (a(h, x, y))_{h \in \mathcal{B}_\alpha, x, y \in H} \in \mathbb{C}^{\mathcal{B}_\alpha \times H \times H}; |a(h, x, y)| \leq C_\alpha D_\alpha \|h\|_\alpha \|x\| \|y\|\},$$

qui est un sous-espace topologique compact de $\mathbb{C}^{\mathcal{B}_\alpha \times H \times H}$ lorsque celui-ci est muni de la topologie produit, et on considère aussi le compact $K = \Pi_{\alpha \in A} K_\alpha$.

Lorsque $\beta \in A$, on note H_β l'ensemble des éléments $b = (b_\alpha)_{\alpha \in A} \in K$ qui vérifient, pour tout $\alpha \leq \beta$:

- i) b_α est linéaire complètement borné en h et sesquilinéaire en (x, y) .
- ii) $b_\alpha(h, x, y) = b_\beta(J_{\alpha\beta}h, x, y)$, $h \in \mathcal{B}_\alpha$ et $x, y \in H$.
- iii) $b_\alpha(h, x, y) = \langle \Phi_\alpha(h)x, y \rangle$, $h \in M_\alpha$ et $x, y \in H$.

Il est clair que les H_β sont fermés dans K . On démontre comme pour le théorème 3.1.3, et en utilisant les $\xi_{\alpha\beta}$ ci-dessus, que $\bigcap_{\beta \in A} H_\beta \neq \emptyset$.

Considérons, alors, $b = (b_\alpha)_{\alpha \in A} \in \bigcap_{\beta \in A} H_\beta$. Les propriétés i), ii) et iii) vérifiées par chaque b_α , permettent à l'aide du théorème de Riesz, de définir un unique opérateur $\Psi_\alpha(h)$ sur $\mathcal{B}_\alpha$ par

$$\langle \Psi_\alpha(h)x, y \rangle = b_\alpha(h, x, y), \quad h \in \mathcal{B}_\alpha, x, y \in H.$$

Ces opérateurs Ψ_α vérifient les conditions voulues toujours en vertu de i), ii) et iii). $\square$

On peut aussi généraliser le corollaire 3.3.4. Soit, pour tout α , S_α un système d'opérateurs et F_α un sous-espace de S_α contenant e_α . La démonstration se base sur 2.3.2 qui va jouer le rôle de la propriété (P) et le corollaire du théorème d'Arveson 2.3.6 qui nous donnera le prolongement complètement positif.

Théorème 3.4.2. : On considère une famille $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifiant pour tout $\alpha \in A$:

Φ_α est un opérateur complètement contractif défini sur F_α à valeurs dans $B(H)$,

$\Phi_\alpha = \Phi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ pour tout $\beta \in A$ tel que $\alpha \leq \beta$, et

$$\sup_{\beta \geq \alpha \in A} \|\Phi_\beta\| = D_\alpha < +\infty.$$

Alors il existe une famille $(\Psi_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que, pour tout $\alpha \in A$,

Ψ_α est un opérateur complètement positif prolongeant Φ_α sur S_α tel que $\|\Psi_\alpha\|_{cb} = \|\Phi_\alpha\|_{cb}$,

$\Psi_\alpha = \psi_\beta \circ J_{\alpha\beta}$ pour tout $\beta \in A$ tel que $\alpha \leq \beta$,
si et seulement si $\|\Phi_\alpha\|_{cb} = \Phi(e_\alpha)$ pour tout $\alpha \in A$.

3.5 Généralisation de l'application au cas opératoriel

Nous gardons les mêmes notations de l'exemple du second paragraphe. Pour chaque $U \in A$, l'espace $C(\bar{U})$ est une C^* -algèbre commutative et $\bar{\mathcal{O}}_U$ en est un sous-espace. Donc $\bar{\mathcal{O}}_U$ est vu comme un espace d'opérateurs et on peut dans ce cadre utiliser la proposition 2.3.3.

En particulier, les opérateurs R_{UV} sont bornés, donc complètement bornés et on a $\|R_{UV}\|_{cb} = \|R_{UV}\| = 1$.

Théorème 3.5.1. : Soit $(\Phi_U)_{U \in A}$ une famille telle que, pour tout $U \in A$, Φ_U est un opérateur complètement borné de $\bar{\mathcal{O}}_U$ à valeurs dans $B(H)$. On suppose que $\Phi_V \circ R_{UV} = \Phi_U$ pour tous U, V dans A avec $U \leq V$.

Alors, il existe une mesure régulière bornée $\mathfrak{F}$ sur K à valeurs dans $B(H)$ vérifiant

$$\Phi_U(f)(x, y) = \int_K f d\mathfrak{F}_{x,y},$$

pour tous $f \in \bar{\mathcal{O}}_U$ et $x, y \in H$, si et seulement si la famille $(\Phi_U)_{U \in A}$ satisfait

$$\sup_{V \geq U} \|\Phi_V\|_{cb} < \infty,$$

Pour tout $U \in A$.

Démonstration. Par le théorème 3.4.1, la famille $(\Phi_U)_{U \in A}$ se prolonge en une famille $(\Psi_U)_{U \in A}$ sur $C(\bar{U})$, telle que Ψ_U est un opérateur complètement borné, pour tout $U \in A$.

Sachant qu'il y a une correspondance bijective entre les applications linéaires bornées de $C(\bar{U})$ dans $B(H)$ et les mesures régulières bornées sur $\bar{U}$ à valeurs dans $B(H)$, alors il existe une unique telle mesure $\mathfrak{F}_U$ vérifiant :

$$\langle \Phi_U(f)x, y \rangle = \int_K f d\mathfrak{F}_{U,x,y},$$

où les mesures $\mathfrak{F}_{U,x,y}$ sont définies par

$$\mathfrak{F}_{U,x,y}(B) = \langle \mathfrak{F}(B)x, y \rangle,$$

pour tous borélien B de $\bar{U}$ et $x, y \in H$. De plus on a $\mathfrak{F}_V = \mathfrak{F}_U|_{\bar{V}}$ à chaque fois que $U \leq V$ dans A . Maintenant pour x, y fixés dans H et comme pour le théorème 3.2.1, on montre que toutes les mesures $\mathfrak{F}_{U,x,y}$, $U \in A$, sont égales à une seule mesure $\mathfrak{F}_{x,y}$ à support dans K vérifiant

$$\langle \Phi_U(f)x, y \rangle = \int_K f d\mathfrak{F}_{x,y}, \quad U \in A \quad \text{et} \quad f \in \bar{\mathcal{O}}_U.$$

Cela nous fournit une unique mesure régulière bornée $\mathfrak{F}$ sur K à valeurs dans $B(H)$ définie, pour tout borélien B de K et tous $x, y \in H$, par

$$\mathfrak{F}_{x,y}(B) = \langle \mathfrak{F}(B)x, y \rangle.$$

Automatiquement on a $\mathfrak{F}_U = \mathfrak{F}$ pour tout $U \in A$.

Réciproquement, soit $\mathfrak{F}$ une mesure régulière bornée sur K à valeur dans $B(H)$ telle que

$$\langle \Phi_U(f)x, y \rangle = \int_K f d\mathfrak{F}_{x,y},$$

pour tous $f \in \bar{\mathcal{O}}_U$ et $U \in A$. La mesure étant bornée on a :

$$\|\mathfrak{F}\| = \sup\{\|\mathfrak{F}(B)\| : B \text{ ensemble Borelien de } K\} < \infty.$$

Ce qui implique que $|\Phi_U(f)| \leq \|\mathfrak{F}\| \cdot \|f\|_U$, donc $\sup_U \|\Phi_U\| \leq \|\mathfrak{F}\|$ et en particulier, $\sup_{V \geq U} \|\Phi_V\| < \infty$, pour tout $U \in A$.

□

On obtient aussi le corollaire suivant, nous gardons les notations de la section 3.2 :

Corollaire 3.5.2. : Soit $\Phi : \hat{\mathcal{O}}_K \rightarrow B(H)$ une application linéaire telle que ses restrictions sur les espaces $\bar{\mathcal{O}}_U$ soient complètement bornées. Alors, il existe une mesure régulière bornée $\mathfrak{F}$ sur K à valeurs dans $B(H)$ vérifiant

$$\Phi(\hat{f})(x, y) = \int_K \hat{f} d\mathfrak{F}_{x,y}, \quad \forall \hat{f} \in \hat{\mathcal{O}}_K,$$

si et seulement si

$$\sup_{V \geq U} \|\Phi_V\|_{cb} < \infty, \quad \forall U \in A.$$

Chapitre 4

Prolongement des formes positives et problème des moments quaternionique

Ce chapitre étudie le problème de prolongement des formes linéaires positives, ou le prolongement positif de certaines formes linéaires sur des espaces de fractions dans plusieurs contextes. Dans la première section, on définit les espaces de fractions selon la terminologie de F.H. Vasilescu [42]. La seconde section concerne le cas le plus général de notre étude : c'est le cas des espaces vectoriels normés ordonnés. Ces espaces peuvent être des espaces d'opérateurs (bornés ou non bornés) ou des $*$ -algèbres. La troisième section se restreint au contexte des $*$ -algèbres de Banach hermitiennes qui nous permet de diminuer nos hypothèses et qui présente plus d'intérêt au niveau des applications. La quatrième section étudie le cas commutatif, lequel nous permet de représenter les formes positives par des mesures en passant par la transformée de Gelfand. Finalement, dans la dernière section nous allons donner une application du cas des C^* -algèbres dans l'étude du problème des moments. Nous introduisons un contexte généralisé dans un cadre non commutatif. Les résultats de ce chapitre sont essentiellement dans [23] et ils généralisent le travail de F-H.Vasilescu dans [41].

4.1 Les espaces de fractions

Les espaces de fractions sont des structures algébriques fondamentales qu'on peut trouver dans le traité de Bourbaki; par exemple, voir [6]. Ils ont été utilisés par F-H. Vasilescu seul ou avec E. Albrecht dans plusieurs articles, voir par exemple [2], [41], [42], pour étudier le problème des moments multi-dimensionnels et le prolongement des familles sous normales d'opérateurs non bornés. Pour une étude détaillée sur les espaces de fractions dans ce contexte nous suivons le travail [42]. Nous allons, maintenant, rappeler la construction.

Soit E un espace vectoriel (réel ou complexe) normé. On note par $B(E)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur E . Le symbole $\|\cdot\|$ représente la norme sur E .

Définition 4.1.1. Une partie G de $B(E)$ est dite ensemble de dénominateurs, si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. L'identité de E , $I_E \in B(E)$ est dans G ,
2. si g_1 et g_2 sont dans G alors $g_1 \cdot g_2$ est dans G ,
3. L'ensemble G est commutatif,
4. Tout élément g dans G est un opérateur injectif.

Une relation d'ordre " $<$ " est définie naturellement sur G . Soient g_1 et g_2 dans G , alors $g_1 < g_2$ s'il existe $g \in G$ tel que $g_2 = gg_1$. L'ensemble $(G, <)$ est un ensemble dirigé puisque $g_3 = g_1g_2$ vérifie $g_1 < g_3$ et $g_2 < g_3$ pour tout $g_1, g_2 \in G$.

On peut trouver l'exemple suivant dans [41] et dans [2]. Il a servi à caractériser les suites des moments (scalaires et opératoriels) multi-dimensionnelles dans le cas non borné.

Exemple 4.1.2. Soit A une algèbre unitaire d'unité e et Q un sous ensemble multiplicatif et commutatif de A tel que :

1. $e \in Q$,
2. si $qx = 0$ pour $q \in Q$ et $x \in A$ alors $x = 0$.

L'ensemble Q est un ensemble de dénominateurs.

Dans [2] et [42] il a servi à plonger des espaces d'opérateurs non bornés sous normaux dans des espaces de fractions afin de les prolonger en des opérateurs bornés normaux.

Soit G un ensemble de dénominateurs sur E . La relation " $\sim$ " définie sur $E \times G$ par :

$$(x_1, g_1) \sim (x_2, g_2) \Leftrightarrow g_2 x_1 = g_1 x_2$$

est une relation d'équivalence.

L'ensemble quotient $(E \times G) / \sim$ sera noté E/G , et la classe d'un élément $(x, g) \in (E \times G)$ sera noté x/g .

L'injectivité des opérateurs restreint la classe de 0 aux éléments $(0, g)$ pour tout $g \in G$.

Lemme 4.1.3. *Soit G un ensemble de dénominateurs sur E alors l'ensemble E/G est un espace vectoriel.*

Définition 4.1.4. *L'espace vectoriel E/G est appelé espace des fractions de E avec les dénominateurs dans G .*

L'espace E peut être regardé comme un sous espace de E/G si on considère l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E/G \\ x &\longmapsto x/I \end{aligned}$$

on voit bien qu'elle est injective (puisque $x/I = 0$ si et seulement si $x = 0$) et donc E s'identifie à E/I .

On va définir une topologie sur l'espace des fractions, pour cela on va le voir comme limite inductive d'espaces vectoriels normés.

Soit $g_0 \in G$, considérons la multiplication par g_0 , appelée A_{g_0} , définie comme suit :

$$\begin{aligned} A_{g_0} : E/G &\longrightarrow E/G \\ x/g &\longmapsto g_0 x/g. \end{aligned}$$

L'application A_{g_0} est clairement injective (comme g_0 est un opérateur injectif). On définit l'espace $E_g = E/g$ comme l'image réciproque de E par $A_g : A_g^{-1}(E)$ et cela pour tout $g \in G$.

Exemple 4.1.5. Soit E un espace vectoriel et $G \subset B(E)$ un ensemble de dénominateurs sur E . Soit $M(E)$ l'ensemble de toutes les matrices (a_{ij}) à coefficient dans E où les a_{ij} sont tous nuls sauf peut être pour un nombre fini d'indices i, j . L'ensemble G peut être vu comme un ensemble de dénominateurs sur $M(E)$; en effet il suffit de considérer l'opération suivante :

$$g * (a_{ij}) = (ga_{ij}), \quad g \in G, (a_{ij}) \in M(E).$$

Grâce à cette opération l'ensemble G peut être considéré comme sous-ensemble de $B(M(E))$ vérifiant bien sûr les conditions voulues.

Maintenant, l'ensemble $M(E)/G$ est aussi un espace de fractions. Il peut être identifié à l'ensemble $M(E/G)$.

Topologie sur l'espace de fraction

Quelque soit $g \in G$, chaque E/g est un espace vectoriel normé. La norme $\|\cdot\|_g$ sur E/g est définie pour tout $f \in E/g$, par $\|f\|_g = \|gf\|$.

Pour tout $g_1 < g_2 \in G$ on définit l'application $J_{g_1 g_2}$:

$$\begin{aligned} J_{g_1 g_2} : E/g_1 &\longrightarrow E/g_2 \\ x/g_1 &\longmapsto gx/g_2, \end{aligned}$$

avec g est tel que $g_2 = gg_1$.

L'application $J_{g_1 g_2}$ est une isométrie entre les espaces E/g_1 et E/g_2 , du coup tous les espaces E/g sont isométriques puisqu'ils sont tous isométriques à E .

Comme l'ensemble G est dirigé, l'espace E/G est la limite inductive des espaces E/g par les applications de type $J_{g_1 g_2}$ (définies plus haut) et les inclusions naturelles $J_g : E/g \longrightarrow E/G$. La topologie sur E/G est alors définie comme la plus fine qui assure la continuité des applications J_g pour tout $g \in G$. On a

$$E/G = \sum_{g \in G} E/g = \sum_{g \in G} E_g.$$

Soit F un espace vectoriel topologique. Une application linéaire de E/G dans F est continue si et seulement si sa composée avec J_g est continue pour tout $g \in G$.

La positivité sur l'espace des fractions

Supposons maintenant que l'espace vectoriel E est ordonné et soit C son cône positif. Pour bien définir la positivité sur l'espace de fractions E/G on doit imposer la condition que l'ensemble de dénominateurs G soit un ensemble de dénominateurs positifs, c'est à dire $g(C) \subset C$ pour tout $g \in G$.

Soit E un espace vectoriel ordonné de cône positif C , et soit G un ensemble de dénominateurs positifs par rapport à C . La positivité dans chaque E_g pour tout $g \in G$ est définie à partir de l'espace E . Un élément $x/g \in E_g$ est dit positif dans E_g si x est positif dans E . L'ensemble de tous les éléments positifs est un cône noté C_g . On a :

$$C_g = \{f \in E_g; gf \in C\}.$$

Enfin, un élément $f \in E/G$ est positif si f appartient à un certain C_g pour $g \in G$; c'est à dire si f s'écrit $f = x/g$ pour un certain $x \in C$ et $g \in G$ alors $x = gf$ est positif dans E . Le cône de l'espace E/G est la réunion de tous les cônes des espaces E_g et sera noté par C/G .

Les espaces de fractions et la propriété (P)

La propriété (P) est définie dans le chapitre 2. On suppose que l'espace E admet la propriété (P) pour un élément $a \in E$ positif. Avec la notation de la section précédente, nous avons :

Lemme 4.1.6. *Pour tout $g \in G$, l'espace E_g admet la propriété (P) pour l'élément a/g .*

Démonstration. On fixe $g \in G$, soit $\varphi : E/g \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire positive. On pose $\varphi_g : E \rightarrow \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par $\varphi_g(x) = \varphi(x/g)$. Alors φ_g est clairement positive. Puisque E admet la propriété (P) pour a alors $\|\varphi_g\| = \varphi_g(a)$. Pour tout $f \in E/g$ tel que $\|f\|_g \leq 1$ on a :

$$|\varphi(f)| = |\varphi_g(gf)| \leq \varphi_g(a) = \varphi(a/g).$$

D'où la conclusion. □

4.2 Cas général

Dans ce chapitre nous donnons une réponse positive à la deuxième question posée dans l'introduction.

Soit E un espace vectoriel complexe ordonné normé de cône positif C , tel qu'il existe un sous-espace vectoriel réel H contenant le sous-espace $C - C$, vérifiant la propriété :

$$E = H \oplus iH.$$

Exemple 4.2.1. Soit $\mathcal{B}$ une $*$ -algèbre de Banach et $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ son cône positif. L'espace H ici n'est autre que l'espace des éléments hermitiens $\mathcal{B}_h$, il contient $\mathcal{P}(\mathcal{B}) - \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Tout $x \in \mathcal{B}$ peut se décomposer de cette façon : $x = (x + x^*)/2 + i(x - x^*)/2i$, où $(x + x^*)/2$ et $(x - x^*)/2i$ sont dans $\mathcal{B}_h$. Il est clair que si x est non nul dans $\mathcal{B}_h$, alors ix ne l'est pas. On a donc : $\mathcal{B} = \mathcal{B}_h \oplus i\mathcal{B}_h$.

Si $\mathcal{B}$ est une $*$ -algèbre de Banach hermitienne ou une O^* -algèbre (voir chapitre 1), alors $\mathcal{B}_h = \mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+$. L'espace réel est obtenu à partir du cône (i.e. $H = C - C$).

Soit E un espace vectoriel complexe normé ordonné et $a \in E$ positif et $G \subset B(E)$ un ensemble de dénominateurs. Supposons que l'espace E admet la propriété (P) pour a , voir 2.2. On construit E/G comme précédemment. Supposons maintenant que $g(H) = H$ pour tout $g \in G$ (ce qui se produit automatiquement lorsque $H = C - C$, car les opérateurs g sont positifs). Par conséquent l'ensemble G est aussi un ensemble de dénominateurs sur H , on construit alors l'espace des fractions $H/G = \sum_{g \in G} H_g$, où $H_g = H/g$ pour tout $g \in G$. L'espace des fractions H/G est un sous-espace de l'espace des fractions E/G .

Lemme 4.2.2. Supposons que pour tout $g \in G$, $g(H) = H$. Alors l'espace des fractions E/G est de la forme $E/G = H/G \oplus iH/G$.

Démonstration. Il est clair que $E_g = H_g \oplus iH_g$ pour tout $g \in G$, où $H_g = H/g$. Soit $f \in E/G$ alors il existe $g \in G$ tel que $f \in E_g$ donc f s'écrit sous la forme $f = h_1 + ih_2$ avec h_1 et h_2 dans H_g . Supposons maintenant qu'en même temps on a $f \in E_{g'}$ pour un certain $g' \neq g \in G$, donc $f = h'_1 + ih'_2$ avec h'_1 et h'_2 dans H/g' . Puisque l'ensemble G est dirigé alors il existe $g'' \in G$ tel que $g, g' < g''$ ce qui nous permet de faire le calcul dans $E_{g''} = H_{g''} \oplus iH_{g''}$, on a : $h_1 + ih_2 = h'_1 + ih'_2$ donc, forcément $h_1 = h'_1$ et $h_2 = h'_2$. D'où l'unicité de la décomposition. $\square$

On peut maintenant énoncer le théorème de prolongement pour les espaces complexes, remarquons aussi que le même résultat reste vrai dans le cas réel. Le théorème suivant est du même type que le théorème de prolongement positif 1.2.2.

Théorème 4.2.3. *Soit E un espace vectoriel complexe ordonné admettant la propriété (P) pour un certain a dans E et tel que son espace réel H est stable par G (i.e. $\forall g \in G; g(H) = H$).*

Soit F un sous-espace de E/G , on suppose que $a/g' \in F_{g'}$ pour tout $g' < g \in G$, et F_g est cofinal dans E_g .

Si φ est une forme linéaire sur F , alors φ se prolonge en une forme linéaire positive ψ sur E/G telle que, pour tout $g \in G$, $\|\psi_g\| = \|\varphi_g\|$, si et seulement si, pour tout $g \in G$, φ_g est positive et $\|\varphi_g\| = \varphi(a/g) > 0$. (où $\varphi_g = \varphi|_{F_g}$ et $\psi_g = \psi|_{E_g}$).

Démonstration. D'après le lemme précédent E/G s'écrit $E/G = H/G \oplus iH/G$, donc en vue des hypothèses il est élémentaire de voir que l'espace F est cofinal dans E/G . Ainsi puisque φ est positive sur F il suffit d'appliquer le corollaire 1.2.4 dans le premier chapitre pour conclure que φ se prolonge en une application ψ positive sur tout E/G . Maintenant, puisque l'espace E_g admet la propriété (P) pour a/g , alors

$$\|\varphi_g\| \leq \|\psi_g\| = \psi_g(a/g) = \varphi_g(a/g) \leq \|\varphi_g\|.$$

Inversement, si φ se prolonge en une forme linéaire ψ positive sur E/G tel que pour tout $g \in G$, $\|\psi_g\| = \|\varphi_g\|$, alors φ est positive. Comme pour tout $g \in G$, E_g admet la propriété (P) pour a/g , alors $\|\varphi_g\| = \|\psi_g\| = \psi(a/g) = \varphi(a/g)$, pour tout $g \in G$. $\square$

Remarque 4.2.4. *Soit $\mathcal{A}$ une $*$ -algèbre de Banach hermitienne d'unité e et $S \subset \mathcal{A}$ un système d'opérateurs. Soit $G \subset B(S)$ une famille commutative et multiplicative contenant l'identité I et formée par des opérateurs positifs et injectifs. Soit F un sous-espace de S/G contenant e/G . Alors, pour tout $g \in G$, F_g est cofinal dans $\mathcal{A}_g$. En effet, il suffit d'utiliser la remarque 2.2.6 en notant que d'une part, $e/g \in F_g$ pour tout $g \in G$, et que d'autre part, pour tout élément x auto-adjoint on a : $x \leq \|x\|e$. Ainsi, dans ce cas la "cofinalité" et la propriété (P) sont automatiques. Dans le cas où E serait un système d'opérateurs dans une $*$ -algèbre de Banach hermitienne alors dans les hypothèses du précédent théorème la cofinalité et la propriété seront automatiques.*

Maintenant, prenons $E = \mathcal{A}$ une $*$ -algèbre de Banach unitaire dont l'involution est isométrique et $G \subset B(\mathcal{A})$ un ensemble de dénominateurs sur $\mathcal{A}$.

Corollaire 4.2.5. *Soit F un sous-espace cofinal de $\mathcal{A}/G$, on suppose que $e/g' \in F_g$, pour tout $g' < g \in G$.*

Si φ est une forme linéaire sur F , alors φ se prolonge en une forme linéaire positive ψ sur $\mathcal{A}/G$ telle que pour tout $g \in G$ $\|\psi_g\| = \|\varphi_g\|$, si et seulement si pour tout $g \in G$, φ_g est positive et $\|\varphi_g\| = \varphi(a/g) > 0$. (Ici $\varphi_g = \varphi|_{F_g}$ et $\psi_g = \psi|_{\mathcal{A}_g}$).

4.3 Cas des $*$ -algèbres de Banach hermitiennes

Dans cette section on discute le même problème lorsque $E = S$ est un système d'opérateurs d'une $*$ -algèbre de Banach hermitienne $\mathcal{B}$, et $G \subset \mathcal{L}(S)$ est un ensemble de dénominateurs sur S .

Avec les mêmes notations, nous énonçons maintenant le théorème dans ce cas particulier. L'idée de la prochaine preuve est inspirée du travail de E. Albrecht et F-H. Vasilescu, [2].

Théorème 4.3.1. *Soit S un système d'opérateurs et F un sous-espace linéaire de S/G . On suppose que $e/g' \in F_g$ pour tout $g' < g \in G$.*

Soit φ une forme linéaire sur F , alors φ se prolonge en une forme linéaire ψ positive sur S/G telle que $\|\psi_g\| = \|\varphi_g\|$ pour tout $g \in G$, si et seulement si pour tout $g \in G$, $\|\varphi_g\| = \varphi(e/g) > 0$, (où $\varphi_g = \varphi|_{F_g}$ et $\psi_g = \psi|_{S_g}$).

Démonstration. D'abord, on définit Φ_g sur gF_g , pour tout $g \in G$ vérifiant l'équation :

$$\Phi_g(x) = \varphi(e/g)^{-1} \varphi(x/g).$$

Alors Φ_g est une forme linéaire sur gF_g de norme 1. On applique maintenant le théorème de Hahn-Banach pour prolonger Φ_g en une forme linéaire Ψ_g sur S tel que $\|\Psi_g\| = \|\Phi_g\| = 1 = \Psi_g(e) (= \Phi_g(e))$. La forme Ψ_g doit être positive en vertu de la proposition 2.1.2.

Ensuite, on définit, pour tous $g, g_1, g_2 \in G$ tel que $g = g_1 g_2$, une autre fonctionnelle linéaire Ψ_{g, g_1} sur S par la relation :

$$\Psi_{g, g_1}(x) = \varphi(e/g_1)^{-1} \varphi(e/g) \Psi_g(g_2 x).$$

Il est clair que Ψ_{g,g_1} est une fonctionnelle positive. Par conséquent, d'après l'hypothèse, $\|\Psi_{g,g_1}\| = \Psi_{g,g_1}(e)$ ce qui est égal à 1. En effet,

$$\Psi_{g,g_1}(e) = \varphi(e/g_1)^{-1} \varphi(e/g) \psi_g(g_1 e) = \varphi(e/g_1)^{-1} \varphi(e/g) \psi_g(g e/g_1).$$

L'élément e/g_1 appartient à F_g , car $g_1 < g$, on peut alors écrire

$$\varphi(e/g_1)^{-1} \varphi(e/g) \Phi_g(g e/g_1) = \varphi(e/g_1)^{-1} \varphi(e/g_1) = 1.$$

On note que

$$|\varphi(e/g_1) \psi_{g,g_1}(x)| \leq \varphi(e/g_1) \|x\|. \quad (4.1)$$

Soit maintenant, pour tout $g \in G$,

$$K_g = \{b = b(f) \in \mathbb{C}^{S_g} : |b(f)| \leq \varphi(e/g) \|g f\|\}.$$

Munis de la topologie produit, les espaces topologiques K_g , $g \in G$ et, par conséquent, $K = \prod_{g \in G} K_g$ sont compacts.

Pour tout $g \in G$, on considère H_g l'ensemble de tous les $b = (b_{g'})_{g' \in g} \in K$ tels que pour tout $g' \in g$ avec $g' < g$, l'application $f \mapsto b_{g'}(f)$ est une forme linéaire positive sur $S_{g'}$ qui prolonge $\varphi_{g'}$ et vérifie :

$$b_{g'}(f) = b_g(f), \quad f \in S_{g'}.$$

Il est clair que les ensembles H_g sont fermés dans K et par conséquent compacts. Pour démontrer $\bigcap_{g \in G} H_g \neq \emptyset$, il suffit de démontrer que toutes les intersections finies sont non vides. Soient $g_1, \dots, g_n \in G$, comme G est dirigé, il existe $g \in G$ tel que $g_i < g$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Soit la forme Ψ_g et, pour tous les diviseurs $g' < g \in G$, les formes $\Psi_{g,g'}$ construites ci-dessus. On définit pour tout $g' \in G$ et tout $f \in S_{g'}$:

$$b_{g'}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } g' \not< g \\ \varphi(e/g') \Psi_{g,g'}(f) & \text{if } g' < g. \end{cases}$$

Notons que $b := (b_{g'})_{g' \in g} \in K$ parce que

$$|b_{g'}(f)| \leq |\varphi(e/g') \Psi_{g,g'}(f)| \leq \varphi(e/g') \|g' f\|.$$

Fixons un indice $i \in 1, \dots, n$ et soit $g' < g_i \in G$. Alors il existe $g'_i, \tilde{g}_i \in G$ tels que $g_i = g'g'_i$ et $g = g_i\tilde{g}_i$. On remarque que pour tout $f \in S_{g'}$

$$\begin{aligned} b_{g'}(f) &= \varphi(e/g')\Psi_{g,g'}(g'f) = \varphi(e/g)\Psi_g(\tilde{g}_i g'_i g'f) \\ &= \varphi(e/g)\Psi_g(gf) \\ &= \varphi(e/g_i)\Psi_{g,g_i}(g_i) \\ &= b_{g_i}(f) \end{aligned}$$

de sorte que $f \mapsto b_{g'}(f)$ soit une forme linéaire positive sur $S_{g'}$ puisque $\Psi_{g,g'}$ est positive et prolonge $\varphi_{g'}$ car $F_{g'} \subset F_g$ (d'après l'hypothèse). Par conséquent, $b := (b_{g'})_{g' \in G}$ est dans $H_{g_1} \cap \dots \cap H_{g_n}$.

Il vient que l'intersection $\bigcap_{g \in G} H_g$ est non vide, donc on peut prendre un élément $c = (c_g)_{g \in G} \in \bigcap_{g \in G} H_g$ pour définir pour tout $f \in S/G$

$$\psi(f) := c_g(f) \text{ si } f \in E_g.$$

Pour que ψ soit bien définie, supposons qu'il existent $g_1, g_2 \in G$ et f appartenant à S_{g_1} et S_{g_2} . Comme G est dirigé, il existe $g \in G$ plus grand que g_1 et g_2 . De plus, comme $c \in H_g$, il vient que

$$c_{g_1}(f) = c_g(f) = c_{g_2}(f)$$

alors ψ définit une forme linéaire sur S/G . Il est clair que ψ est positive et prolonge φ . Soit $g \in G$, d'après (4.1) on obtient que

$$\|\varphi_g\| \leq \|\psi_g\| \leq \varphi(e/g) \leq \|\varphi_g\|$$

ce qui termine la première implication.

Inversement, si φ se prolonge en une forme linéaire positive sur S/G alors, pour tout $g \in G$, on définit $\tilde{\psi}_g(x) = \psi_g(x/g)$. Donc $\tilde{\psi}_g$ est une forme linéaire positive sur S . Par conséquent d'après la propriété (P), $\|\tilde{\psi}_g\| = \tilde{\psi}_g(e)$.

En effet $\|\psi_g\| = \|\tilde{\psi}\| = \tilde{\psi}(e) = \psi_g(e/g) = \varphi(e/g)$, cela signifie que φ est positive et pour tout $g \in G$, $\|\varphi_g\| = \varphi(e/g) > 0$. Ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Remarque 4.3.2. On observe d'après les hypothèses qu'aucune condition de positivité n'est imposée à la forme φ , mais le prolongement est toujours positif. Cela est obtenu grâce au théorème 2.1.2, qui en même temps nous permet d'utiliser le théorème de Hahn-Banach. Ce qui explique pourquoi on peut se passer des hypothèses de cofinalité et de symétrie. Cela reste vrai dans le cas commutatif comme on peut le voir dans la section suivante.

4.4 Le cas commutatif

Dans cette section, on se restreint au cas commutatif. Ainsi, soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative et 1 son unité.

Soit Ω l'espace compact de tous les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$. Pour tout $x \in \mathcal{A}$, on note par $\hat{x}$ la fonction dans $C(\Omega)$ donnée par la transformée de Gelfand. L'ensemble de toutes ces fonctions est noté par $\hat{\mathcal{A}}$. Il est bien connu que c'est une sous-algèbre de $C(\Omega)$. La transformée de Gelfand est un homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\hat{\mathcal{A}}$ de noyau le radical de $\mathcal{A}$ noté $\text{rad}\mathcal{A}$. On rappelle aussi que $\|\hat{x}\| = \rho(x) \leq \|x\|$, $\rho(x)$ étant le rayon spectral de x . Rappelons la proposition suivante :

Proposition 4.4.1. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative. Pour tous x et y dans $\mathcal{A}$ on a : $\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$.*

A partir de cette proposition on voit facilement que l'ensemble des éléments dont le spectre est positif, dans une algèbre de Banach commutative, est un cône.

Supposons que $\mathcal{A}$ est semi-simple, c'est à dire $\text{rad}\mathcal{A} = \{0\}$. Soit $\mathcal{M} \subset B(\mathcal{A})$ un ensemble de dénominateurs sur $\mathcal{A}$. On suppose que tout $M \in \mathcal{M}$ envoie tout élément de spectre positif vers un élément de spectre positif. Tout opérateur $M \in \mathcal{M}$ nous donne un opérateur dans $\hat{\mathcal{A}}$, et nous supposons que chacun de ces opérateurs se prolonge en un opérateur positif et injectif sur $C(\Omega)$. Nous allons noter par $\hat{\mathcal{M}}$ le sous-ensemble correspondant de $\mathcal{L}(C(\Omega))$, nous supposons également qu'il est encore commutatif et multiplicatif. Finalement, pour tout $f = x/M \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$ on pose $\hat{f} = \hat{x}/\hat{M}$.

Soit ω une forme linéaire sur $\mathcal{A}$. On dit que ω est positive si elle envoie chaque élément de spectre positif vers un réel positif.

Proposition 4.4.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ et supposons que $1/M' \in F_M$, pour tout $M' \leq M$ dans $\mathcal{M}$. Soit φ une forme linéaire sur F .*

La forme φ se prolonge en une forme linéaire positive ψ sur $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ telle que $\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|$ si et seulement si pour tout $M \in \mathcal{M}$, $\sup_{\rho(x) \leq 1} |\varphi_M(x)| = \varphi(1/M) > 0$, avec $\varphi_M = \varphi|_{F_M}$ et $\psi_M = \psi|_{\mathcal{A}/M}$.

Démonstration. Soit φ une forme linéaire sur F telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}, \sup_{\rho(x) \leq 1} |\varphi_M(x)| = \varphi(1/M) > 0.$$

Définissons $\hat{\varphi}$ sur $\hat{F}$ comme suit : $\hat{\varphi}(\hat{f}) = \varphi(f)$ pour tout $f \in F$. Pour tout $M \in \mathcal{M}$, on peut remarquer que

$$\|\hat{\varphi}_M\| = \sup_{\|\hat{x}\|_\infty \leq 1} |\hat{\varphi}_M(\hat{x})| = \sup_{\rho(x) \leq 1} |\varphi_M(x)| = \varphi(1/M) = \hat{\varphi}(\hat{1}/\hat{M}) > 0$$

Alors, si on considère $\hat{F}$ comme un sous-espace de la C^* -algèbre $C(\Omega)$ et si on applique le théorème 4.3.1 à $\hat{\varphi}$, alors elle se prolonge en une forme positive linéaire $\hat{\psi}$ sur $C(\Omega)/\hat{M}$ telle que $\|\hat{\psi}_M\| = \|\hat{\varphi}_M\|$, pour tout $M \in \mathcal{M}$. Maintenant, on définit ψ sur $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ comme suit : $\psi(f) = \hat{\psi}(\hat{f})$, alors ψ est le prolongement désiré de φ . En effet, pour tous $M \in \mathcal{M}$ et $x \in \mathcal{A}_M$ on observe que :

$$(*) \quad \|\psi_M\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\psi_M(x)| \leq \sup_{\rho(x) \leq 1} |\psi_M(x)| = \sup_{\|\hat{x}\|_\infty \leq 1} |\hat{\psi}_M(\hat{x})| = \hat{\psi}_M(\hat{1}/\hat{M})$$

Si on remplace ψ par φ nous remarquons que, pour tout $M \in \mathcal{M}$, $\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|$.

Inversement, supposons que φ se prolonge en une forme linéaire positive ψ sur $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}$, $\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|$. Alors, comme $\hat{\mathcal{A}}_M$ vérifie la propriété (P) pour $\hat{1}/M$, on conclut, d'après (*), que

$$\|\varphi_M\| \leq \|\psi_M\| \leq \|\hat{\psi}_M\| = \hat{\psi}(\hat{1}/\hat{M}) = \psi(1/M) = \varphi(1/M).$$

□

Maintenant, soit $\mathcal{A}$ une $*$ -algèbre de Banach hermitienne commutative dont l'involution n'est pas nécessairement continue. Nous considérons l'espace de fraction $\mathcal{A}/\mathcal{M}$. On veut intégrer les éléments de cet espace, ainsi on a besoin de quelques définitions. La définition suivante est prise de [42].

Définition 4.4.3. Une mesure μ est dite $\mathcal{M}$ -divisible sur Ω si, pour tout $M \in \mathcal{M}$, il existe une mesure ν_M sur Ω telle que pour tout $f \in C(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} Mf d\nu_M.$$

Théorème 4.4.4. Soit F un sous-espace vectoriel symétrique de $\mathcal{A}/\mathcal{M}$, on suppose que $1/M' \in F_M$ pour tout $M' \leq M$ dans $\mathcal{M}$.

Une forme linéaire positive φ sur F se prolonge en une forme linéaire positive ψ sur $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ telle que $\|\psi_M\| = \|\varphi_M\|$ si et seulement si pour tout $M \in \mathcal{M}$, $\|\varphi_M\| = \varphi(1/M) > 0$, avec $\varphi_M = \varphi|_{F_M}$ et $\psi_M = \psi|_{\mathcal{A}/M}$.

De plus, si $\|\psi_M\| \leq 1$ pour tout $M \in \mathcal{M}$, alors il existe une unique mesure μ sur Ω $\mathcal{M}$ -divisible, telle que pour tout $f \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$,

$$\psi(f) = \int_{\Omega} \hat{f} d\mu.$$

Démonstration. Soit φ une forme linéaire sur F telle que pour tout $M \in \mathcal{M}$, $\|\varphi_M\| = \varphi(1/M) > 0$. Ici, on utilise le corollaire 4.2.5. Sachant que les $*$ -algèbres commutatives admettent la propriété (P), voir 2.2.2, toutes les hypothèses du corollaire sont vérifiées, alors il existe une forme linéaire positive ψ qui prolonge φ si et seulement si pour tout $M \in \mathcal{M}$, $\|\varphi_M\| = \varphi(1/M) > 0$, avec $\varphi_M = \varphi|_{F_M}$ et $\psi_M = \psi|_{\mathcal{A}/M}$.

Soit ψ une forme linéaire donnée par le prolongement, et supposons que $\|\psi_M\| \leq 1$, pour tout $M \in \mathcal{M}$. On définit des fonctions $\tilde{\psi}_M$ par $\tilde{\psi}_M(h) = \psi(h/M)$, ce sont des formes linéaires sur $\mathcal{A}$ laquelle est une $*$ -algèbre commutative hermitienne, alors il existe une unique mesure de Radon ν_M sur Ω (voir le théorème 1.3.13) telle que, pour tout $h \in \mathcal{A}$,

$$\tilde{\psi}_M(h) = \int_{\Omega} \hat{h} d\nu_M, \quad M \in \mathcal{M}.$$

Soit $f \in \mathcal{A}/M$ donc $Mf \in \mathcal{A}$ alors

$$\int_{\Omega} (Mf)^{\wedge} d\nu_M = \tilde{\psi}_M(Mf) = \psi(f),$$

ce qui permet de bien définir une mesure μ sur Ω par

$$\int_{\Omega} \hat{f} d\mu = \int_{\Omega} (Mf)^{\wedge} d\nu_M, \quad f \in \mathcal{A}.$$

μ est alors $\mathcal{M}$ -divisible d'après l'égalité : $\tilde{\psi}_{M_1}(M_1h) = \psi(h) = \tilde{\psi}_{M_2}(M_2h)$ ce qui implique que

$$\int_{\Omega} (M_1h)^{\wedge} d\nu_{M_1} = \int_{\Omega} (M_2h)^{\wedge} d\nu_{M_2},$$

alors on peut écrire pour tout $f \in \mathcal{A}/M$

$$\int_{\Omega} \hat{f} d\mu = \int_{\Omega} (Mf)^{\wedge} d\nu_M, \quad M \in \mathcal{M},$$

ce qui est bien défini.

Si f est arbitraire, alors $f = \sum_{j \in J} h_j / M_j$, avec $h_j \in \mathcal{A}$, $M_j \in \mathcal{M}$ pour tout $j \in J$, J un ensemble fini. Ainsi, on obtient

$$\psi(f) = \sum_{j \in J} \tilde{\psi}_{M_j}(h_j) = \sum_{j \in J} \int_{\Omega} \hat{h}_j d\nu_{M_j} = \int_{\Omega} \hat{f} d\mu$$

ce qui termine la preuve. □

On peut obtenir le théorème 3.7 de F-H. Vasilescu dans [41] comme corollaire du théorème 4.3.1 précédent. Plus précisément, soit Ω un espace topologique compact et $C(\Omega)$ l'algèbre de toutes les fonctions continues sur Ω . On se donne Q une famille d'éléments positifs non nuls de $C(\Omega)$. On dit que Q est une famille multiplicative si :

- (i) $1 \in Q$,
- (ii) $q', q'' \in Q$ implique $q'q'' \in Q$,
- (iii) Si $qh = 0$ pour un élément $q \in Q$ et un élément $h \in C(\Omega)$, alors $h = 0$.

Alors Q est un ensemble de dénominateurs sur $C(\Omega)$. On considère l'espace de fraction $C(\Omega)/Q$.

Corollaire 4.4.5. *On se donne, pour chaque $q \in Q$, un sous-espace vectoriel F_q de $C(\Omega)/q$, et on suppose que $1/q' \in F_q$ pour tout $q' \leq q$ dans Q . Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{F} = \sum_{q \in Q} F_q$, alors φ se prolonge en une forme linéaire positive ψ sur $C(\Omega)/Q$ telle que $\|\psi_q\| = \|\varphi_q\|$ si et seulement si, pour tout $q \in Q$, $\|\varphi_q\| = \varphi(1/q) > 0$, avec $\varphi_q = \varphi|_{F_q}$ et $\psi_q = \psi|_{C(\Omega)/q}$.*

De plus, il existe une unique mesure de Borel sur Ω telle que pour tout $f \in C(\Omega)/Q$,

$$\psi(f) = \int_{\Omega} f d\mu.$$

4.5 Le problème des moments : une version non commutative

Le problème des moments, introduit par Stieltjes il y a plus d'un siècle, a été d'une grande inspiration surtout pour l'analyse et pour les mathématiques en général. En effet, plusieurs grands théorèmes lui doivent l'existence. Ce sujet est toujours d'actualité et on le trouve sous plusieurs versions dans la littérature.

Dans ce chapitre, nous allons introduire une version non commutative du problème des moments.

Soit Ω un espace topologique compact. On note par $Bor(\Omega)$ la σ -algèbre des ensembles boréliens de Ω .

Soit $\mathcal{A}$ une C^* -algèbre non nécessairement commutative, unitaire d'unité 1 et d'espace réel $\mathcal{A}_h$. On note par $\mathcal{A}^*$ l'espace de Banach dual de $\mathcal{A}$. La C^* -algèbre des fonctions continues sur Ω à valeurs dans $\mathcal{A}$ est notée par $C(\Omega, \mathcal{A})$. Toutes les normes seront notées par $\| \cdot \|$. On mentionnera s'il y a un risque de confusion.

4.5.1 Mesures à valeurs dans $\mathcal{A}^*$

Une mesure positive sur $Bor(\Omega)$ à valeur dans $\mathcal{A}^*$ a été introduite par C.-G. Ambrozie et F.-H. Vasilescu dans [3], afin d'intégrer des fonctions boréliennes et bornées sur Ω à valeurs dans $\mathcal{A}$. Nous allons compléter les détails de cette construction :

Soit m une application définie sur $Bor(\Omega)$, à valeur dans $\mathcal{A}^*$ vérifiant les trois conditions suivantes :

1. L'application $m(\cdot)a : Bor(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est une mesure scalaire pour tout $a \in \mathcal{A}$. Cela implique qu'elle est fortement additive i.e. pour tout borélien B qui s'écrit comme réunion disjointe au plus dénombrable de boréliens $(B_j)_j$, et pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a :

$$m(B)a = \sum_j m(B_j)a.$$

2. L'application m est positive, i.e. pour tout $B \in Bor(\Omega)$, l'application $m(B)$ est positive dans le sens suivant :

$$\forall a \in \mathcal{A}, a \geq 0, \quad m(B)a \geq 0.$$

3. L'application $m(\cdot)1 : Bor(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ est bornée c'est à dire :

$$\sup\{|m(B)1| : B \in Bor(\Omega)\} < \infty.$$

Remarque 4.5.1. La deuxième condition implique la troisième ; en effet, puisque 1 est un élément positif dans $\mathcal{A}$, alors la mesure scalaire $m(\cdot)1$ est positive. Cette mesure nous définit une forme linéaire sur $C(\Omega)$ -l'algèbre des fonctions continues sur Ω . Pour tout $f \in C(\Omega)$, l'application φ définie par :

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} f dm1,$$

est une forme linéaire positive sur $C(\Omega)$ donc bornée. Ce qui implique que la mesure est bornée.

Commençons par définir l'intégrale des "fonctions en escalier" ou fonctions simples. Soit $f = \sum_j \chi_{B_j} a_j$ où $(B_j)_j$ est une partition finie de Ω et χ_{B_j} la fonction caractéristique de B_j . Les a_j sont des éléments de $\mathcal{A}$. On définit l'intégrale par l'expression suivante :

$$\int_{\Omega} (dm, f) = \sum_j m(B_j) a_j.$$

Pour pouvoir élargir la définition à toutes les fonctions de $C(\Omega, \mathcal{A})$, montrons que cette intégrale est bornée. Pour cela supposons, au premier lieu, que les a_j sont des éléments auto-adjoints. Alors puisque $\mathcal{A}$ est une C^* -algèbre on a :

$$-||a_j||\mathbf{1} \leq a_j \leq ||a_j||\mathbf{1} \quad \text{dans } \mathcal{A}.$$

Sachant que les formes linéaires $m(B_j)$ sont positives alors

$$-||a_j||m(B_j)\mathbf{1} \leq m(B_j)a_j \leq ||a_j||m(B_j)\mathbf{1}.$$

En additionnant par rapport à j on obtient

$$-\sum_j ||a_j||m(B_j)\mathbf{1} \leq \sum_j m(B_j)a_j \leq \sum_j ||a_j||m(B_j)\mathbf{1},$$

ou encore

$$-\sum_j ||a_j||m(B_j)\mathbf{1} \leq \int_{\Omega} (dm, f) \leq \sum_j ||a_j||m(B_j)\mathbf{1},$$

Par la suite, on a

$$|\int_{\Omega} (dm, f)| \leq \sum_j ||a_j||m(B_j)\mathbf{1} \leq \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| \sum_j m(B_j)\mathbf{1} \leq \|f\|_{\infty} m(\Omega)\mathbf{1}.$$

Passons maintenant au cas où les a_j sont des éléments quelconques de $\mathcal{A}$.

Remarque 4.5.2. Tout élément $a_j \in \mathcal{A}$ se décompose de façon unique sous la forme $a_j = a'_j + ia''_j$, avec $a'_j = (a_j + a_j^*)/2$ et $a''_j = (a_j - a_j^*)/2i$ sont des éléments dans $\mathcal{A}_h$. De plus on a : $\|a'_j\| \leq \|a_j\|$ et $\|a''_j\| \leq \|a_j\|$.

Ceci nous permet d'obtenir un encadrement pour tous les éléments de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f) \right| &= \left| \sum_j \mathfrak{m}(B_j) a_j \right| = \left| \sum_j \mathfrak{m}(B_j) a'_j + i \sum_j \mathfrak{m}(B_j) a''_j \right| \\ &\leq \left| \sum_j \mathfrak{m}(B_j) a'_j \right| + \left| \sum_j \mathfrak{m}(B_j) a''_j \right| \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité obtenue pour les éléments auto-adjoints on obtient :

$$\left| \int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f) \right| \leq 2 \|f\|_{\infty} \mathfrak{m}(\Omega) \mathbf{1}.$$

Maintenant un dernier lemme pour conclure :

Lemme 4.5.3. *Toute fonction dans $C(\Omega, \mathcal{A})$ s'écrit comme limite uniforme de fonctions en escalier à valeurs dans $\mathcal{A}$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon \geq 0$ et soit $f \in C(\Omega, \mathcal{A})$, puisque f est continue alors pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage de x , $V_{\varepsilon}(x)$ dans Ω tels que pour tout $y \in V_{\varepsilon}(x)$ on a : $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$.

Il est clair que les voisinages $V_{\varepsilon}(x)$ forment un recouvrement de Ω . L'espace Ω étant compact on peut alors en extraire un recouvrement fini. Soit $(V_{\varepsilon}(x_j))_{1 \leq j \leq n}$ un tel recouvrement de Ω et soit $(B_j)_{1 \leq j \leq n}$ la famille de boréliens définis par $B_1 = V_{\varepsilon}(x_1)$ et $B_j = V_{\varepsilon}(x_j) \setminus (V_{\varepsilon}(x_1) \cup \dots \cup V_{\varepsilon}(x_{j-1}))$ pour tout $2 \leq j \leq n$. Il est clair que $(B_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une partition de Ω et que $B_j \subset V_{\varepsilon}(x_j)$ pour $1 \leq j \leq n$.

Soit $g : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ la fonction en escalier, définie par : $g = \sum_{j=1}^n \chi_{B_j} f(x_j)$. Si on prend $x \in \Omega$ quelconque, alors il existe $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x \in B_{j_0} \subset V_{\varepsilon}(x_{j_0})$, de sorte que

$$\|f(x) - g(x)\| = \|f(x) - f(x_{j_0})\| \leq \varepsilon.$$

Cela est vrai pour tout $x \in \Omega$ donc $\|f - g\| \leq \varepsilon$, d'où la conclusion. $\square$

Ce dernier lemme nous permet de définir l'intégrale $\int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f)$ pour toute fonction continue f de Ω à valeurs dans $\mathcal{A}$, puisque l'intégrale la haut est bornée.

Remarque 4.5.4. (a) Si $h = \sum_j \lambda_j \chi_{B_j}$ est une fonction en escalier à valeurs complexes, et si a appartient à $\mathcal{A}$, alors

$$\int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, h \otimes a) = \sum_j \lambda_j \mathfrak{m}(a, B_j) = \int_{\Omega} h d\mathfrak{m}(a).$$

Si h est une fonction continue sur Ω , alors d'après le lemme 4.5.3 elle peut être approchée par des fonction en escalier, alors pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a :

$$\int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, h \otimes a) = \int_{\Omega} h d\mathfrak{m}(a).$$

(b) Si la fonction $f \in C(\Omega, \mathcal{A})$ est positive, i.e. pour tout $t \in \Omega$, $f(t) \geq 0$, alors $\int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f) \geq 0$.

Un théorème de représentation

Proposition 4.5.5. Soit Ω un espace topologique compact. Soit ϕ une application linéaire sur $C(\Omega, \mathcal{A})$. Alors ϕ est positive si et seulement s'il existe une unique mesure positive $\mathfrak{m}$ à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ sur Ω telle que, pour tout $f \in C(\Omega, \mathcal{A})$,

$$\phi(f) = \int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f).$$

Démonstration. Soit ϕ une forme positive sur $C(\Omega, \mathcal{A})$. On rappelle que la famille formée par les sommes finies $(\sum (h \otimes a); h \in \Omega, a \in \mathcal{A})$ est dense dans $C(\Omega, \mathcal{A})$ qui peut être vu comme égale au produit tensoriel algébrique $C(\Omega) \otimes \mathcal{A}$.

On fixe $a \geq 0 \in \mathcal{A}$, on définit la forme ϕ_a sur $C(\Omega)$ telle que, pour tout h , $\phi_a(h) = \phi(h \otimes a)$. Clairement, ϕ_a est positive puisque ϕ est positive, alors, en vertu du théorème de Riesz, il existe une unique mesure borélienne positive $\mathfrak{m}_a$ sur Ω telle que

$$\phi(h \otimes a) = \phi_a(h) = \int_{\Omega} h d\mathfrak{m}_a ; h \in C(\Omega).$$

Ce qui nous donne une application d'ensembles $B \rightarrow \mathfrak{m}_a(B)$ sur les ensembles mesurables de Ω . Si $a = 0$ alors la mesure est nulle et si a est auto-adjoint alors il s'écrit d'une manière unique comme la différence de deux éléments positifs $a = a^+ - a^-$. On définit alors l'application d'ensembles $B \rightarrow \mathfrak{m}_a(B) = \mathfrak{m}_{a^+}(B) - \mathfrak{m}_{a^-}(B)$. Puisque, $\phi(h \otimes a) = \phi(h \otimes a^+) - \phi(h \otimes a^-)$, on pose

$$\int_{\Omega} h d\mathfrak{m}_a = \int_{\Omega} h d\mathfrak{m}_{a^+} - \int_{\Omega} h d\mathfrak{m}_{a^-} = \phi(h \otimes a).$$

Si a est un élément dans $\mathcal{A}$ alors il est décomposé d'une manière unique : $a = a' + ia''$, où a' et a'' sont des éléments hermitiens. Donc, on définit l'application

d'ensembles $B \rightarrow m_a(B) = m_{a'}(B) + i m_{a''}(B)$, et comme $\phi(h \otimes a) = \phi(h \otimes a') + i \phi(h \otimes a'')$, on pose alors

$$\int_{\Omega} h dm_a = \int_{\Omega} h dm_{a'} + i \int_{\Omega} h dm_{a''} = \phi(h \otimes a).$$

Maintenant, puisque pour tout $a \in \mathcal{A}$, on obtient une famille de mesures scalaires définies par les applications d'ensembles $B \rightarrow m(B)a$, on peut alors définir une mesure m à valeurs dans $\mathcal{A}^*$, par l'application d'ensemble $B \rightarrow m(B)$ définie sur les ensembles mesurables de Ω à valeurs dans $\mathcal{A}^*$. Sachant que la mesure m est dite positive si $m(B)a \geq 0$ pour tout ensemble $B \subset \Omega$ mesurable et tout élément positif $a \in \mathcal{A}$, donc, trivialement, si ϕ est positive alors m est positive. On peut écrire maintenant, pour toute somme finie sous la forme $f = \Sigma(h \otimes a)$,

$$\phi(f) = \int_{\Omega} (dm, f).$$

Pour prolonger la proposition à tous les éléments de $C(\Omega, \mathcal{A})$ considérons une fonction en escalier à valeurs dans $\mathcal{A}$. Soit $(B_j)_j$ une partition finie de Ω , et soit $f = \sum_j \chi_{B_j} \otimes a_j$ une fonction en escalier à valeurs dans $\mathcal{A}$, alors

$$\int_{\Omega} (dm, f) = \sum_j m(B_j) a_j.$$

Pour tout j , il existe deux éléments auto-adjoint a'_j et a''_j tel que $a_j = a'_j + i a''_j$. Tout élément auto-adjoint a dans $\mathcal{A}$ vérifie l'estimation

$$-\|a\|\mathbf{1} \leq a \leq \|a\|\mathbf{1}.$$

En utilisant la positivité de m , on obtient pour tout $B \subset \Omega$ et pour un élément $a \in \mathcal{A}$ auto-adjoint

$$-\|a\|m(B)\mathbf{1} \leq m(B)a \leq \|a\|m(B)\mathbf{1}.$$

en sommant les inégalités, on obtient

$$|\int_{\Omega} (dm, f)| \leq 2 \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| m(\Omega)\mathbf{1}.$$

Les éléments dans $C(\Omega, \mathcal{A})$ sont des limites uniformes de fonctions en escalier (voir la haut), alors on peut prolonger les inégalités précédentes aux fonctions continues. Maintenant par densité on prolonge la dernière inégalité à tous les

éléments f dans $C(\Omega, \mathcal{A})$ et cela parce que la limite des intégrales existe, et la forme ϕ est continue (puisque'elle est positive sur une C^* -algèbre (voir le chapitre 2)). Alors on obtient :

$$\phi(f) = \int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f) ; f \in C(\Omega, \mathcal{A}).$$

Supposons qu'il existe une autre mesure positive à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ sur Ω vérifiant l'inégalité ci-dessus alors elle doit coïncider avec $\mathfrak{m}$ sur les mesures scalaires lesquels sont uniques, donc $\mathfrak{m}$ est unique.

Réciproquement, si $\mathfrak{m}$ est une mesure positive à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ sur Ω , et si $f : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ est une fonction continue positive, d'après la remarque ci dessus, l'entité $\int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f)$ est positive. La linéarité de l'intégrale est triviale. $\square$

Soit G un ensemble de dénominateurs sur $C(\Omega, \mathcal{A})$. Rappelons maintenant la définition suivante :

Définition 4.5.6. Une mesure μ est dite $\mathcal{M}$ -divisible sur Ω si, pour tout $M \in \mathcal{M}$, il existe une mesure ν_M sur Ω telle que pour tout $f \in C(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} Mf d\nu_M.$$

Le prochain théorème est une sorte de théorème de représentation pour les espaces de fractions.

Théorème 4.5.7. Soit $\psi : C(\Omega, \mathcal{A})/G \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire. Alors ψ est positive, si et seulement si, il existe une unique mesure positive $\mathfrak{m}$ à valeurs dans $\mathcal{A}^*$, G -divisible, définie sur les boréliens de Ω tel que

$$\psi(f) = \int_{\Omega} (d\mathfrak{m}, f), f \in C(\Omega, \mathcal{A})/G.$$

Démonstration. Soit, pour tout $g \in G$, la forme linéaire $\phi_g : C(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi_g(h) = \psi(h/g)$, pour tout $h \in C(\Omega, \mathcal{A})$.

Supposons, en premier lieu, que $\psi : C(\Omega, \mathcal{A})/G \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme linéaire positive. Pour tout $h \in C(\Omega, \mathcal{A})$ la forme linéaire $\phi_g(h)$ est positive donc la proposition 4.5.5 au dessus, nous donne une unique mesure $\mathfrak{m}_g$ positive à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ définie sur les boréliens de Ω , tel que, pour tout $h \in C(\Omega, \mathcal{A})$ on a :

$$\phi_g(h) = \int_{\Omega} (d\mathfrak{m}_g, h).$$

Soit $f \in C(\Omega, \mathcal{A})/g$ alors

$$\int_{\Omega} (dm_g, gf) = \phi_g(gf) = \psi(f).$$

Soit m une mesure à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ définie sur les boréliens de Ω , pour tout $g \in G$, et $f \in C(\Omega, \mathcal{A})/g$ par

$$\int_{\Omega} (dm, f) = \int_{\Omega} (dm_g, gf).$$

La mesure m à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ est G -divisible, en effet, si g_1, g_2 sont dans G , alors $\phi_{g_1}(g_1 h) = \psi(h) = \phi_{g_2}(g_2 h)$, ce qui implique

$$\int_{\Omega} (dm_{g_1}, g_1 h) = \int_{\Omega} (dm_{g_2}, g_2 h)$$

alors on peut écrire, si f est dans $C(\Omega, \mathcal{A})/g$

$$\int_{\Omega} (dm, f) = \int_{\Omega} (dm_g, gf) \quad g \in G,$$

qui est bien définie, ce qui nous donne une représentation intégrale de ψ . L'unicité de la mesure m est due à l'unicité des mesures m_g .

Réciproquement, supposons qu'il existe une mesure positive m à valeurs dans $\mathcal{A}^*$ définie sur les boréliens de Ω , G -divisible, tel que l'égalité soit établie. Puisque toutes les mesures m_g obtenues doivent être positives, les formes ϕ_g sont positives à leur tour. Donc la forme linéaire ψ est positive. Ce qui achève la preuve. $\square$

4.5.2 Le problème des moments

Soit $M_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées 2×2 complexes. La matrice unité est notée par $\mathbf{1}$. Soit $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ le produit cartésien du corps des complexes avec lui même, et $K \subset \mathbb{C}^2$ un sous ensemble fermé. On considère l'espace des fonctions continues sur K à valeurs dans $M_2(\mathbb{C})$, généralement noté par $C(K, M_2(\mathbb{C}))$.

On s'intéresse à la sous-algèbre des quaternions dans $M_2(\mathbb{C})$. Soit les fonctions $\xi, \xi^* : \mathbb{C}^2 \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ définies, pour $\zeta = (x, y) \in \mathbb{C}^2$, par :

$$\xi(\zeta) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}; \quad \xi^*(\zeta) = \begin{pmatrix} \bar{x} & -y \\ \bar{y} & x \end{pmatrix}.$$

On va utiliser les symboles ξ et ξ^* à la place de $\xi(\zeta)$ et $\xi^*(\zeta)$ pour simplifier les formules. Rappelons aussi que $\xi^*\xi$ est égale à $\|\xi\|^2\mathbf{1} = (|x|^2 + |y|^2)\mathbf{1} = \|\zeta\|^2\mathbf{1}$.

On dénote par θ la fonction qui peut être soit ξ soit ξ^* . On appelle générateur de degré n la fonction $g^{(n)}$ sur K à valeurs dans $M_2(\mathbb{C})$ suivante :

$$\zeta = (x, y) \mapsto \theta^{\alpha_0} a_0 \theta^{\alpha_1} a_1 \theta^{\alpha_2} a_2 \dots \theta^{\alpha_l} a_l$$

où les a_j sont dans $M_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ sont des entiers positifs et $l \leq n$ avec $\sum_{j=0}^l \alpha_j = n$. Compte tenu du fait que $\theta^0 \mathbf{1} = \mathbf{1}$, sans perte de généralité, on peut définir un générateur de degré n , $g^{(n)}$ de la sorte :

$$\zeta = (x, y) \mapsto \theta^{\alpha_0} a_0 \theta^{\alpha_1} a_1 \theta^{\alpha_2} a_2 \dots \theta^{\alpha_n} a_n$$

où $a_j \in M_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, pour tout $j = 0, 1, 2, \dots, n$, et $\sum_{j=0}^n \alpha_j = n$.

On considère une suite $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$ de fonctions multi-linéaires réelles définies comme suit :

$$\begin{aligned} \Gamma_n : M_2(\mathbb{C})^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &\longmapsto \Gamma_n(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

La version du problème des moments généralisé peut maintenant être formulée par ces mots :

Étant donné une suite de fonctions multi-linéaires réelles $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$ existe-il une unique mesure m positive à valeurs dans $M_2(\mathbb{C})^$ définie sur les boréliens de K , tel que, pour tous $a_0, a_1, \dots, a_n \in M_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$(*) \quad \int_K (dm, \theta^{\alpha_0} a_0 \theta^{\alpha_1} a_1 \theta^{\alpha_2} a_2 \dots \theta^{\alpha_n} a_n) = \Gamma_n(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Si une telle mesure existe alors elle est appelée *mesure de représentation* de la suite $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$.

On note par $\mathcal{P}_n(K, M_2(\mathbb{C}))$ l'espace engendré par tous les générateurs de degrés plus petits ou égales à $2n - 1$ et la fonction $(\mathbf{1} + \xi \xi^*)^n$. C'est un sous espace de $C(K, M_2(\mathbb{C}))$. L'espace $\mathcal{P}(K, M_2(\mathbb{C}))$ désigne la réunion de tous les $\mathcal{P}_n(K, M_2(\mathbb{C}))$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}$. Il est clair que $\mathcal{P}(K, M_2(\mathbb{C}))$ est un sous espace vectoriel de $C(K, M_2(\mathbb{C}))$. Cet espace est vu comme la limite inductive des espaces $\mathcal{P}_n(K, M_2(\mathbb{C}))$;

$$\mathcal{P}(K, M_2(\mathbb{C})) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{P}_n(K, M_2(\mathbb{C})).$$

Soit ϕ_Γ une forme linéaire définie sur $\mathcal{P}(K, M_2(\mathbb{C}))$ de la manière suivante : Pour tout n , si $\theta^{\alpha_0}a_0\theta^{\alpha_1}a_1\theta^{\alpha_2}a_2\dots\theta^{\alpha_n}a_n$ est un générateur de degré n alors

$$\phi_\Gamma(\theta^{\alpha_0}a_0\theta^{\alpha_1}a_1\theta^{\alpha_2}a_2\dots\theta^{\alpha_n}a_n) = \Gamma_n(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Ensuite on prolonge ϕ_Γ par linéarité sur tout l'espace $\mathcal{P}(K, M_2(\mathbb{C}))$. La fonction ϕ_Γ est appelée *forme linéaire associée* à la suite $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$.

S'il existe une mesure qui répond au "problème des moments généralisé" concernant la suite $(\Gamma_n)_{n \geq 0}$, alors la mesure est aussi dite mesure de représentation de la forme ϕ_Γ et l'application linéaire ϕ_Γ est appelée *application moment*.

Le problème des moments peut être aussi formulé en ces termes :

Soit $K \subset \mathbb{C}^2$ un sous ensemble fermé. Une application linéaire $\phi : \mathcal{P}(K, M_2(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}$ est une *K-application moment* s'il existe une unique mesure m positive à valeurs dans $M_2(\mathbb{C})^*$ définie sur les boréliens de K , telle que

$$\phi(p) = \int_K (dm, p)$$

pour tout $p \in \mathcal{P}(K, M_2(\mathbb{C}))$.

Pour se ramener au cas classique, il suffit de supposer que l'ensemble fermé $K \subset \mathbb{C}^2$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et de se restreindre aux générateurs de la forme $g^{(n)} = t^n \mathbf{1}$ pour $t \in K$. La relation (*) nous donne :

$$\int_K (dm, t^n \cdot \mathbf{1}) = \Gamma_n(\mathbf{1})$$

D'après la remarque 4.5.4, si on note par p_n la fonction définie, pour tout $t \in K$, par $p_n(t) = t^n$, on obtient :

$$\int_K (dm, t^n \cdot \mathbf{1}) = \int_K (dm, p_n \otimes \mathbf{1}) = \int_K t^n dm(\mathbf{1}) = \Gamma_n(\mathbf{1})$$

Notre problème se résume à trouver une mesure scalaire positive unique $m(\mathbf{1})$ sur les boréliens de K tel que pour tout entier n :

$$\int_K t^n dm(\mathbf{1}) = \Gamma_n(\mathbf{1})$$

Ce qui nous ramène au cas classique.

Puisqu'on s'intéresse au problème des moments multi-dimensionnel, on va introduire un générateur multi-dimensionnel. Alors pour simplifier les écritures soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}^2$ et $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{C})$. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ désigne le produit cartésien de n copies de $\mathbb{K}$. Soit $K \subset \mathbb{K}^n$ un sous-ensemble fermé.

Soit $\mathbb{Z}_+^n$ l'ensemble de tous les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, où $\alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Ici $\mathbb{Z}_+$ désigne l'ensemble des entiers positifs.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ un multi-indice. Un générateur multi-dimensionnel $G_n^{(\alpha)}$ est une fonction sur $\mathbb{K}^n$ à valeurs dans $\mathcal{A}$ définie pour tout élément $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{K}^n$ comme le produit de n générateurs $g_1^{(\alpha_1)}, g_2^{(\alpha_2)}, \dots, g_n^{(\alpha_n)}$:

$$G_n^{(\alpha)}(\zeta) = g_1^{(\alpha_1)}(\zeta_1)g_2^{(\alpha_2)}(\zeta_2)\dots g_n^{(\alpha_n)}(\zeta_n).$$

On considère la sous-algèbre $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ de $C(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ engendré par tous les générateurs multidimensionnels. Soit $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ une application linéaire. Le *problème des moments multi-dimensionnel* consiste à trouver une mesure sur les boréliens de $\mathbb{K}^n$ à valeur dans $\mathcal{A}^*$ tel que :

$$\phi(p) = \int_{\mathbb{K}^n} (d\mathfrak{m}, p)$$

pour tout $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$. Si une telle mesure existe alors l'application ϕ est dite une *application moment* et la mesure $\mathfrak{m}$ est dite *mesure de représentation* pour ϕ .

Si la mesure $\mathfrak{m}$ est nulle en dehors de l'ensemble fermé $K \subset \mathbb{K}^n$ alors on dit que ϕ est une *K-application moment*. Dans ce cas on a évidemment $\phi(p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ vérifiant $p|_K = 0$. Réciproquement, une application $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *K-compatible* si pour tout $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ vérifiant $p|_K = 0$ on a $\phi(p) = 0$. Une K-application moment est K-compatible.

On va adapter la méthode de Riesz pour répondre à ce problème et suivre les pas de F.H. Vasilescu et E. Albrecht qui ont donné une réponse au problème des moments classique multi-dimensionnels scalaire et opératoriel sur des ensembles non bornés. Voir [2] et [41] pour les détails.

Remarque 4.5.8. Si l'ensemble fermé $K \subset \mathbb{R}^n$ et si $t = (t_1, \dots, t_n) \in K$, un générateur multi-dimensionnel $G_n^{(\alpha)}(t)$ s'écrit sous la forme suivante : $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n} a$, pour un certain $a \in \mathcal{A}$.

Pour se ramener au cas classique, il suffit de considérer les espaces $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\mathbf{1}$: l'algèbre des polynômes multi-dimensionnels sur $\mathbb{R}^n$ multipliés par $\mathbf{1}$ et l'espace $C(\mathbb{R}^n)\mathbf{1}$: l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ multipliées par $\mathbf{1}$, qui est une C^* -algèbre commutative, sachant que la mesure $m(\mathbf{1}, \cdot)$ est une mesure scalaire positive. On obtient alors la version, bien connu, du problème des moments multi-dimensionnel sur $\mathbb{R}^n$. Notre version est donc une généralisation de ce problème.

Soit, maintenant, $\hat{\mathbb{K}}_n = (\mathbb{K} \cup \{\infty\})^n$ le produit cartésien de n copies du compactifié $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{K}$ (en ajoutant un point), et soit Ω l'adhérence de K dans $\hat{\mathbb{K}}_n$.

Soit $C(\hat{\mathbb{K}}_n, \mathcal{A})$ la C^* -algèbre de toutes les fonctions sur $\hat{\mathbb{K}}_n$ à valeurs dans $\mathcal{A}$. On pose $\mathcal{Q}_n$ l'ensemble des fonctions rationnelles multi-dimensionnelles à valeurs dans $\mathcal{A}$ de la forme,

$$q_\alpha(\zeta) = (\mathbf{1} + \xi_1^* \xi_1)^{-\alpha_1} \dots (\mathbf{1} + \xi_n^* \xi_n)^{-\alpha_n},$$

pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ où $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \hat{\mathbb{K}}_n$, et la fonction qui vaut $\mathbf{1}$.

Lemme 4.5.9. *L'ensemble $\mathcal{Q}_n$ est un ensemble de dénominateurs sur $C(\hat{\mathbb{K}}_n, \mathcal{A})$.*

Démonstration. La quantité $q_\alpha(\zeta)$ s'écrit aussi comme suit :

$$\frac{1}{(1 + \|\xi_1\|^2)^{\alpha_1} \dots (1 + \|\xi_n\|^2)^{\alpha_n}} \mathbf{1}$$

Si les α_j sont tous nuls alors il est évident que la quantité la-haut vaut $\mathbf{1}$, sinon pour les indices j tel que $\alpha_j > 0$ chaque quantité :

$$\frac{1}{(1 + \|\xi_j\|^2)^{\alpha_j}} \leq \frac{1}{(1 + \|\xi_j\|^2)'}.$$

et donc elle tend vers 0 lorsque $\|\xi_j\|$ tend vers l'infini. Sachant que la norme de ζ est égale à la norme de ξ alors il est facile de voir que $\|q_\alpha(\zeta)\|$ tend vers 0 lorsque $\|\zeta\|$ tend vers l'infini. La fonction q_α à valeurs dans $\mathcal{A}$ se prolonge, alors, par continuité sur $\hat{\mathbb{K}}_n \setminus \mathbb{K}_n$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Il n'est pas difficile de voir que la famille $\mathcal{Q}_n$ est multiplicative et commutative. Chaque élément dans $\mathcal{Q}_n$ peut être vu comme un opérateur positif sur $C(\hat{\mathbb{K}}_n, \mathcal{A})$; il est, aussi, clair qu'il s'agit d'un opérateur injectif. Donc $\mathcal{Q}_n$ est bien un ensemble de dénominateurs sur $C(\hat{\mathbb{K}}_n, \mathcal{A})$. $\square$

Posons aussi $p_\alpha(\zeta) = q_\alpha(\zeta)^{-1}$, $\zeta \in \hat{\mathbb{K}}_n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{P}_\alpha(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ engendré par toutes les fonctions de la forme $G_n^{(\beta)} = g_1^{(\beta_1)} \dots g_n^{(\beta_n)}$ avec $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ tel que $\beta_j < 2\alpha_j$ pour tout $j = 1, \dots, n$, ainsi que la fonction $(1 + \xi_1^* \xi_1)^{\alpha_1} \dots (1 + \xi_n^* \xi_n)^{\alpha_n}$.

La fonction p/p_α , pour tout $p \in \mathcal{P}_\alpha(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$, se prolonge sur $\hat{\mathbb{K}}_n \setminus \mathbb{K}^n$; en effet, soit $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{K}^n$ avec $\zeta_j = (x_j, y_j)$ et $G_n^{(\beta)}(\zeta) = g_1^{(\beta_1)}(\zeta_1) g_2^{(\beta_2)}(\zeta_2) \dots g_n^{(\beta_n)}(\zeta_n)$ un générateur multi-dimensionnel.

$$\|G_n^{(\beta)}(\zeta) q_\alpha(\zeta)^{-1}\| \leq \frac{\|g_1^{(\beta_1)}(\zeta_1) g_2^{(\beta_2)}(\zeta_2) \dots g_n^{(\beta_n)}(\zeta_n)\|}{\prod_{j=1}^n (1 + \|\xi_j\|^2)^{\alpha_j}} \leq \frac{\|g_1^{(\beta_1)}(\zeta_1)\| \cdot \|g_2^{(\beta_2)}(\zeta_2)\| \dots \|g_n^{(\beta_n)}(\zeta_n)\|}{\prod_{j=1}^n (1 + \|\xi_j\|^2)^{\alpha_j}}.$$

Dans notre cas chaque variable est considérée séparément, nous avons pour chaque indice j :

$$\frac{\|g_j^{(\beta_j)}(\zeta_j)\|}{(1 + \|\xi_j\|^2)^{\alpha_j}} = \frac{\|\theta^{l_0} a_0 \theta^{l_1} a_1 \theta^{l_2} a_2 \dots \theta^{l_{\beta_j}} a_{\beta_j}\|}{(1 + \|\xi_j\|^2)^{\alpha_j}} \leq \frac{A \|\theta\|^{\beta_j}}{(1 + \|\xi_j\|^2)^{\alpha_j}} \leq \frac{A \|\xi\|^{\beta_j}}{(1 + \|\xi_j\|^2)^{\alpha_j}},$$

où A désigne le produit des normes des a_i .

Il est clair que la dernière quantité tend vers 0 lorsque $\|\xi_j\|$ tend vers l'infini puisque $\beta_j < 2\alpha_j$.

La fonction p/p_α , pour tout $p \in \mathcal{P}_\alpha(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ devient donc un élément de $C(\hat{\mathbb{K}}_n, \mathcal{A})$, et alors l'espace vectoriel $\mathcal{P}_\alpha(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ est vu comme un sous-espace vectoriel de $C(\hat{\mathbb{K}}_n, \mathcal{A})/q_\alpha = p_\alpha C(\hat{\mathbb{K}}_n, \mathcal{A})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Soit $\mathcal{Q}_n(\Omega)$ l'ensemble des fonctions dans $\mathcal{Q}_n$, (prolongées sur $\hat{\mathbb{K}}_n$ et) restreintes à Ω . Si $q', q'' \in \mathcal{Q}_n(\Omega)$, on dit que $q' < q''$ si pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ avec la propriété $q' = q_\alpha|_\Omega$, on peut trouver un $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ tel que $q'' = q_\beta|_\Omega$ et $\beta - \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. La relation " $<$ " est une relation d'ordre partiel sur $\mathcal{Q}_n(\Omega)$. Cette relation d'ordre est plus forte que la division.

Pour chaque $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, soit $\mathcal{P}_\alpha(K, \mathcal{A})$ l'espace des fonctions p dans $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ restreintes à K , telles que la fonction $(p q_\alpha)|_K$ se prolonge continuellement sur Ω .

Soit $\mathcal{P}(K, \mathcal{A})$ l'espace $\{p|_K; p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})\}$. On peut voir $\mathcal{P}(K, \mathcal{A})$ comme la $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \mathcal{P}_\alpha(K, \mathcal{A})$ qui est un sous-espace de l'espace des fractions $C(\Omega, \mathcal{A})/\mathcal{Q}_n(\Omega)$, où chaque espace $\mathcal{P}_\alpha(K, \mathcal{A})$ est un sous-espace de $C(\Omega, \mathcal{A})/q_\alpha$, $q_\alpha \in \mathcal{Q}_n(\Omega)$.

Il est clair que $q_\beta^{-1} q_\alpha|_K$ admet un prolongement continue sur Ω si $q_\alpha < q_\beta$ et alors $1/q_\beta \in \mathcal{P}_\alpha(K, \mathcal{A})$ pour tout $q_\beta < q_\alpha$, $q_\alpha, q_\beta \in \mathcal{Q}_n(\Omega)$.

Théorème 4.5.10. Soit $\phi : \mathcal{P}(K, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire. Alors l'application ϕ est une K -application moment si et seulement si elle est K -compatible et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, on a : $\phi(p_\alpha) > 0$ et

$$|\phi_\alpha(p)| \leq \phi(p_\alpha) \sup_{\zeta \in K} \|q_\alpha(\zeta)p(\zeta)\|, \quad p \in \mathcal{P}_\alpha(K, \mathcal{A}).$$

où $\phi_\alpha = \phi|_{\mathcal{P}(K, \mathcal{A})/q_\alpha}$.

Démonstration. Supposons, d'abord, que l'application $\phi : \mathcal{P}(K, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ est linéaire, K -compatible et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|\phi_\alpha\| = \phi(p_\alpha) > 0$. Cette application, d'après le théorème 4.3.1 se prolonge en une application $\psi : C(\Omega, \mathcal{A})/Q_n(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ linéaire et positive. L'application ψ est positive alors le théorème 4.5.7 nous donne une unique mesure positive m à valeurs dans $\mathcal{A}^*$, $Q_n(\Omega)$ -divisible, définie sur les boréliens de Ω telle que

$$\psi(f) = \int_{\Omega} (dm, f), \quad f \in C(K, \mathcal{A})/Q_n(\Omega).$$

Comme les fonctions $q \in Q_n(\Omega)$ sont identiquement nulles sur $\Omega \setminus K$, alors le support de m est inclus dans K .

Donc, pour tout $p \in \mathcal{P}_n(\Omega, \mathcal{A})$, on obtient ;

$$\phi(p) = \int_K (dm, p).$$

Ce qui prouve que ϕ est une K -application moment.

Réciproquement, si ϕ est une K -application moment alors elle est K -compatible et on a :

$$\begin{aligned} \phi(p_\alpha) &= \phi(q_\alpha) = \int_K (dm, q_\alpha) \\ &= \int_K (1 + \|\xi_1\|^2)^{-\alpha_1} \dots (1 + \|\xi_n\|^2)^{-\alpha_n} dm(\mathbf{1}) \\ &\geq \int_K dm(\mathbf{1}) > 0. \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $\phi(p_\alpha) > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Ensuite, on a :

$$|\phi(p)| \leq \int_K (dm, |p|) \leq \phi(p_\alpha) \sup_{\zeta \in K} \|q_\alpha(\zeta)p(\zeta)\|, \quad p \in \mathcal{P}_\alpha(K, \mathcal{A}),$$

□

Revenons au cas d'une variable. Soit K un ensemble fermé non borné de $\mathbb{C}^2$. Soit $(\Gamma_n)_n$ une suite de fonctions multi-linéaires (voir en page 66) et ϕ_Γ la forme linéaire qui lui est associée. En appliquant le dernier théorème à l'application ϕ_Γ nous concluons que, sous les notations de la page 66, la suite $(\Gamma_n)_n$ est une suite de moments si et seulement si l'application ϕ_Γ est K -compatible et pour tout entier positif n , on a : $\phi_\Gamma((\mathbf{1} + \xi^* \xi)^n) > 0$ et

$$|\phi_\Gamma(p)| \leq \phi_\Gamma((\mathbf{1} + \xi^* \xi)^n) \sup_{\zeta \in K} \|q_n(\zeta)p(\zeta)\|, \quad p \in \mathcal{P}_n(K, \mathcal{A}),$$

avec $q_n = (\mathbf{1} + \xi^* \xi)^{-n}$. Or nous avons :

$$\begin{aligned} |\phi_\Gamma(p)| &\leq \phi_\Gamma((\mathbf{1} + \xi^* \xi)^n) \sup_{\zeta \in K} \frac{\|p(\zeta)\|}{(1 + \|\zeta\|^2)^n} \\ &\leq \phi_\Gamma\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\xi^* \xi)^k \mathbf{1}\right) \sup_{\zeta \in K} \frac{\|p(\zeta)\|}{(1 + \|\zeta\|^2)^n} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \phi_\Gamma((\theta)^{2k} \mathbf{1}) \sup_{\zeta \in K} \frac{\|p(\zeta)\|}{(1 + \|\zeta\|^2)^n} \\ &\leq \sup_{\zeta \in K} \frac{\|p(\zeta)\|}{(1 + \|\zeta\|^2)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \Gamma_{2k}(\mathbf{1}) \end{aligned}$$

Finalement on conclut que la suite $(\Gamma_n)_n$ est une suite de moments si et seulement si l'application ϕ_Γ est K -compatible et pour tout entier positif n , on a : $\Gamma_{2n}(\mathbf{1}) > 0$ et

$$|\phi_\Gamma(p)| \leq \sup_{\zeta \in K} \frac{\|p(\zeta)\|}{(1 + \|\zeta\|^2)^n} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \Gamma_{2k}(\mathbf{1}).$$

Chapitre 5

Le problème des moments opératoriels

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on donne une version opératorielle du théorème 4.3.1 dans le cas des C^* -algèbres et en même temps dans un contexte non commutatif. Nous introduisons une nouvelle mesure qui nous permet de donner une version opératorielle du problème des moments donné dans le chapitre précédent. Comme application, nous donnons une caractérisation des applications moments opératoriels.

Considérons maintenant une C^* -algèbre $\mathcal{B}$ unitaire et $F \subset \mathcal{B}$ un sous-espace vectoriel. Alors l'ensemble $M(\mathcal{B})$ de toutes les matrices à coefficient dans $\mathcal{B}$ (voir chapitre 2) peut être identifié avec l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathcal{B})$.

Remarque 5.1.1. *Le cône maximal $\mathcal{K}$ dans $M(\mathcal{B})$ m -admissible compatible avec $\mathcal{B}_+$ donné par (voir [28]) :*

$$\mathcal{K} = \left\{ (a_{i,j}) = (a_{i,j})^* \in M(\mathcal{B}); \sum_{i,j=1}^n a_i^* a_{ij} a_j \in \mathcal{B}_+, \forall a_i \in A, i = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots \right\},$$

s'identifie avec $M(\mathcal{B})_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n(\mathcal{B})_+$. En effet, il suffit de démontrer l'inclusion $\mathcal{K} \subset M(\mathcal{B})_+$. Soit $(a_{i,j}) \in \mathcal{K}$; montrons que $(a_{i,j}) \in M(\mathcal{B})_+$. On a $(a_{i,j}) = (a_{i,j})^$ et*

$$\sum_{i,j=1}^n a_i^* a_{ij} a_j \in \mathcal{B}_+, \forall a_i \in \mathcal{B}, i = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots$$

On se restreint au cas où $\mathcal{B} \subset B(H)$ pour un certain Hilbert H . Supposons que $(a_{i,j}) \in M_n(\mathcal{B})$ pour un certain entier n et appliquons la matrice à un vecteur $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in H^{(n)}$ (qui est la somme directe de n copies de H),

$$\langle (a_{i,j})h, h \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}h_j, h_i \rangle.$$

Pour un choix convenable de n opérateurs $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{B}$ et d'un élément $k \in H$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$ on a $a_i(k) = h_i$ on obtient :

$$\langle (a_{i,j})h, h \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle a_{ij}a_jk, a_ik \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle a_i^*a_{ij}a_jk, k \rangle = \langle \left(\sum_{i,j=1}^n a_i^*a_{ij}a_j \right) k, k \rangle,$$

comme $\sum_{i,j=1}^n a_i^*a_{ij}a_j$ est un élément positif, nous concluons que :

$$\langle (a_{i,j})h, h \rangle \geq 0$$

Puisque, dans ce chapitre, nos objets sont des C^* -algèbres alors on peut donner un sens au mot "complètement contractive" dans ce contexte. Soit $\mathcal{D}$ un sous-espace vectoriel dense dans un certain espace de Hilbert.

Définition 5.1.2. Soit $F \subset \mathcal{B}$ un sous espace vectoriel. Une application linéaire $\varphi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est dite complètement contractive si pour tout entier n et pour tous $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ et

$k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{D}^{(n)}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n \langle h_i, h_i \rangle \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \langle k_i, k_i \rangle \leq 1,$$

on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(a_{ij})(h_j, k_i) \right| \leq 1,$$

quelque soit $(a_{ij}) \in M_n(F)$ avec $\|(a_{i,j})\| \leq 1$.

En tenant compte du théorème de Riez pour les formes sesquilineaires, l'espace $B(H)$ peut être identifié à l'espace des formes sesquilineaire bornées sur H . Cela nous permet d'affirmer que sur une C^* -algèbre $\mathcal{B}$ la définition de complète contractivité donnée dans la section 2.3.1 est équivalente à la définition donnée la-haut. En effet, soit H est un espace de Hilbert et soit F un espace d'opérateurs et $\phi : F \rightarrow SF(H)$ une application complètement contractive. Alors, pour tout

entier n et pour tous $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ dans $H^{(n)}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n \langle h_i, h_i \rangle \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \langle k_i, k_i \rangle \leq 1,$$

on a :

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi(a_{ij})(h_j, k_i) \right| \leq 1,$$

quelque soit $(a_{ij}) \in M_n(F)$ avec $\|(a_{ij})\| \leq 1$. Comme, pour tous i et j , la forme $\phi(a_{ij})$ est sesquilineaire bornée, alors il existe un opérateur unique $\Phi(a_{ij})$ dans $B(H)$ tel que :

$$\phi(a_{ij})(h_j, k_i) = \langle \Phi(a_{ij})h_j, k_i \rangle.$$

Il est clair que cela nous définit une application linéaire $\Phi : F \rightarrow B(H)$. Cette application est complètement contractive. En effet, pour tout entier n , et pour

tous vecteurs $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ et $k = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \in H^{(n)}$ de normes inférieures à 1, on a :

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi(a_{ij})h_j, k_i \rangle \right| = \left| \sum_{i,j=1}^n \phi(a_{ij})(h_j, k_i) \right| \leq 1,$$

quelque soit $(a_{ij}) \in M_n(F)$ avec $\|(a_{ij})\| \leq 1$ (voir la remarque 2.3.1).

De la même manière, si l'application $\phi : F \rightarrow SF(H)$ est complètement positive et bornée alors les deux définitions de complète positivité sont équivalentes.

5.2 Prolongement complètement positif

Dans cette section on suit les pas de E. Albrecht et F-H. Vasilescu dans le papier [2], en effectuant, à chaque fois, les changements nécessaires pour le contexte non commutatif. Soit $\mathcal{B}$ une $*$ -algèbre de Banach hermitienne unitaire d'unité e et soit $S \subset \mathcal{B}$ un système d'opérateurs. Soit $G \subset B(S)$ un ensemble de dénominateurs. On considère l'espace des fractions S/G . Soit $\mathcal{D}$ un espace vectoriel complexe.

Proposition 5.2.1. *Soit $\psi : S/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire. Alors ψ est positive si et seulement si $\|\psi_{g,x}\| = \psi(e/g)(x, x)$, pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D}$, où $\psi_{g,x} = \psi(*) (x, x)|_{S_g}$.*

Démonstration. Supposons que ψ est positive. On fixe $x \in \mathcal{D}$, et on considère $\tilde{\psi}_{g,x}$ l'application linéaire définie sur S par $\tilde{\psi}_{g,x}(a) = \psi(a/g)(x, x)$. Il est clair que $\tilde{\psi}_{g,x}$ est positive, donc par la proposition 2.1.2 on a :

$$\|\psi_{g,x}\| = \|\tilde{\psi}_{g,x}\| = \tilde{\psi}_{g,x}(e) = \psi(e/g)(x, x).$$

Réciproquement, supposons que ψ est telle que $\|\psi_{g,x}\| = \psi(e/g)(x, x)$, pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D}$. Par la proposition 2.1.2, l'application $\tilde{\psi}_{g,x}$ est positive, de sorte que si $f = a/g \in S/G$ est positif alors $\psi(f)(x, x) = \psi_g(a/g)(x, x) = \tilde{\psi}_{g,x}(a) \geq 0$. $\square$

Le lemme suivant est nécessaire pour le résultat principal. Un résultat similaire peut être trouvé dans [2], dans le cas où ψ est positive au lieu d'être complètement positive. Notons que le cas commutatif nécessite moins d'hypothèses. Soit $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre unitaire et $G \subset B(\mathcal{B})$ un ensemble de dénominateurs. On considère l'espace des fractions $\mathcal{B}/G$. Maintenant $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel dense dans un espace de Hilbert H dont le produit scalaire est noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lemme 5.2.2. *Soit g, g_1 et g_2 dans G tels que $g = g_1 g_2$, et soit $\Xi : \mathcal{B}/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire complètement positive vérifiant :*

$$\Xi(e/g)(x, x) > 0 \text{ et } \Xi(e/g_1)(x, x) > 0, \text{ pour tous } x \in \mathcal{D} \setminus \{0\},$$

*de sorte que $\langle *, * \rangle_g := \Xi(e/g)(*, *)$ et $\langle *, * \rangle_{g_1} := \Xi(e/g_1)(*, *)$ soient des produits scalaires sur $\mathcal{D}$. On considère $\mathcal{D}_g$ et $\mathcal{D}_{g_1}$ les complétés respectifs de $\mathcal{D}$ par rapport à $\langle *, * \rangle_g$ et $\langle *, * \rangle_{g_1}$. Alors il existe des applications linéaires uniques $\Psi_g : \mathcal{B} \rightarrow B(\mathcal{D}_g)$ et $\Psi_{g,g_1} : \mathcal{B} \rightarrow B(\mathcal{D}_{g_1})$ telles que, pour tout $a \in \mathcal{B}$,*

$$\langle \Psi_g(a)x, y \rangle_g = \Xi(a/g)(x, y), \quad x, y \in \mathcal{D},$$

$$\langle \Psi_{g,g_1}(a)x, y \rangle_{g_1} = \Xi(a/g_1)(x, y) = \langle \Psi_g(g_2a)x, y \rangle_g, \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

De plus les applications Ψ_g et Ψ_{g,g_1} sont unitaires et complètement positives.

Démonstration. Puisque Ξ est complètement positive, en particulier elle est positive, et donc pour tout $x \in \mathcal{D}$, l'inégalité suivante est vraie pour tout $a \in \mathcal{B}$ positif

$$\Xi(a/g)(x, x) \leq \|a\|_\infty \Xi(e/g)(x, x) = \|a\|_\infty \langle x, x \rangle_g.$$

Lorsque $a \in \mathcal{B}$ est un élément arbitraire, il se décompose sous la forme $a = (a_1 - a_2) + i(a_3 - a_4)$, avec a_1, a_2, a_3 et a_4 dans $\mathcal{B}_h^+$, car $\mathcal{B}$ est une C^* -algèbre. Maintenant en écrivant chaque forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \Xi(a_i/g)(x, y)$ sous forme polaire et en utilisant l'inégalité précédente, on obtient

$$|\Xi(a/g)(x, y)| \leq 16\|a\|_\infty;$$

pour tous x, y dans la boule unité de $\mathcal{D}$.

Le fait que la forme sesquilinéaire $(x, y) \mapsto \Xi(a/g)(x, y)$ soit bornée implique qu'il existe un unique opérateur $\Psi_g(a)$ dans $B(\mathcal{D}_g)$, tel que

$$\langle \Psi_g(a)x, y \rangle_g = \Xi(a/g)(x, y), \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

L'application linéaire $\Psi_g : \mathcal{B} \mapsto B(\mathcal{D}_g)$ est nécessairement, complètement positive, puisque l'application Ξ l'est, et $\Psi(e)$ est clairement égal à l'identité dans $B(\mathcal{D}_g)$. Il s'en suit par la proposition ci-dessus que $\|\Psi_g(e)\| = \|\Psi_g\| = \|\Psi_g\|_{cb} \leq 1$. Cela veut dire que Ψ_g est une application linéaire unitaire, complètement contractive et complètement positive.

Puisque $g_1 < g$ alors $\mathcal{B}_{g_1} \subset \mathcal{B}_g$ et la restriction de Ξ à $\mathcal{B}_{g_1}$ est complètement positive et bornée. Donc, par les mêmes arguments on aura un unique opérateur $\Psi_{g,g_1}(a)$ sur $\mathcal{D}_{g_1}$, et une unique application linéaire $\Psi_{g,g_1} : \mathcal{B} \mapsto B(\mathcal{D}_{g_1})$, tels que

$$\langle \Psi_{g,g_1}(a)x, y \rangle_{g_1} = \Xi(a/g_1)(x, y) = \langle \Psi_g(g_2a)x, y \rangle_g;$$

pour tous $x, y \in \mathcal{D}$ et $a \in \mathcal{B}$. L'application Ψ_{g,g_1} est aussi complètement positive, et $\Psi_{g,g_1}(e)$ est l'opérateur identité, d'où $\|\Psi_{g,g_1}(e)\| = \|\Psi_{g,g_1}\| = \|\Psi_{g,g_1}\|_{cb}$. $\square$

En gardant les mêmes notations, nous énonçons le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 5.2.3. Soit $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre d'unité e , et $F = \sum_{g \in G} F_g \subset \mathcal{B}/G$, où F_g est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_g$. On suppose que $e/g' \in F_g$ pour tout $g' < g \in G$.

Soit $\varphi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire. Alors φ se prolonge en une application linéaire complètement positive $\psi : \mathcal{B}/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ telle que $\|\psi_{g,x}\|_{cb} = \|\varphi_{g,x}\|_{cb}$ pour tous $x \in \mathcal{D}$ et $g \in G$, si et seulement si, φ est complètement contractive et vérifie $\varphi(e/g)(x, x) > 0$, pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, avec $\varphi_{g,x} = \varphi(*) (x, x)|_{F_g}$ et $\psi_{g,x} = \psi(*) (x, x)|_{\mathcal{B}_g}$.

Démonstration. Soit $\varphi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire unitaire et complètement contractive. Supposons que $\varphi(e/g)(x, x) > 0$ pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Notons que, pour tout $g \in G$, la forme sesquilinéaire $\varphi(e/g)(*, *)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{D}$. On le notera par $\langle *, * \rangle_g$. Soit $\mathcal{D}_g$ le complété de $\mathcal{D}$ pour ce produit scalaire pour lequel on garde la même notation sur $\mathcal{D}_g$. L'application φ est bornée, donc pour tout $h \in gF_g$, la forme sesquilinéaire $\varphi(h/g)(*, *)$ est aussi bornée et donc se prolonge en une unique forme sesquilinéaire bornée sur $\mathcal{D}_g$, notée avec le même symbole. On remarque que φ définie sur $\mathcal{D}_g$ est unitaire complètement contractive. Puisque les formes sesquilinéaires $\varphi(h/g)(*, *)$ sont bornées, il existe pour chacune un unique opérateur $\Phi_g(h)$ sur $\mathcal{D}_g$ vérifiant :

$$\varphi(h/g)(x, y) = \langle \Phi(h)x, y \rangle_g = \varphi(e/g)(\Phi(h)x, y),$$

pour tout $h \in gF_g$. On voit simplement que $\Phi_g : gF_g \mapsto B(H)$ est une application unitaire complètement contractive. Donc on peut appliquer le corolaire 2.3.6 pour prolonger Φ_g en une application linéaire complètement positive $\Psi_g : \mathcal{B} \rightarrow B(H)$. D'autre part, en utilisant la proposition 2.3.2, on conclut que $\|\Psi_g(e)\| = \|\Psi_g\| = \|\Psi_g\|_{cb}$ ce qui implique que Ψ_g est complètement contractive car $\|\Psi_g(e)\| = 1$.

Maintenant, nous appliquons le lemme 5.2.2 la haut pour obtenir une application linéaire complètement positive et complètement contractive Ψ_{g,g_1} , définie par $\Xi(a/g)(x, y) = \langle \Psi_g(a)x, y \rangle_g$, pour tout $a \in \mathcal{B}$, et $x, y \in \mathcal{D}$, vérifiant l'équation :

$$\langle \Psi_{g,g_1}(a)x, y \rangle_{g_1} = \Xi(a/g_1)(x, y) = \langle \Psi_g(g_2a)x, y \rangle_g.$$

On note que :

$$|\langle \Psi_{g,g_1}(a)x, y \rangle_{g_1}| = |\langle \Psi_g(g_2a)x, y \rangle_g| \leq \|a\|_\infty \|x\|_{g_1} \|y\|_{g_1}. \quad (5.1)$$

Maintenant, pour tout $g \in G$, on note par K_g l'ensemble des éléments $b = b(f, x, y) \in \mathbb{C}^{\mathcal{B}_g \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}}$ tels que $|b(f, x, y)| \leq \|gf\|_\infty \|x\|_{g_1} \|y\|_{g_1}$. Munis de la topologie produit, les espaces topologiques K_g , $g \in G$ et donc $K = \prod_{g \in G} K_g$ sont compacts.

Pour chaque $g \in G$, on considère H_g l'ensemble de tous les $b = (b_{g'})_{g' \in G} \in K$ tels que pour tout $g' \in G$ avec $g' < g$, l'application $f \mapsto b_{g'}(f, x, y)$ est linéaire complètement positive sur $\mathcal{B}_{g'}$, prolongeant $\varphi_{g'}$ et vérifiant

$$b_{g'}(f, x, y) = b_g(a, x, y), \quad f \in \mathcal{B}_{g'}.$$

Il est clair que les H_g sont fermés dans K et par suite compacts, donc pour prouver que $\bigcap_{g \in G} H_g \neq \emptyset$ il suffit de montrer que toutes les intersections finies $H_{g_1} \cap \dots \cap H_{g_n}$ où $g_1, \dots, g_n \in G$ sont non vides. Comme G est dirigé, il existe $g \in G$ tel que $g_i < g$ pour $i = 1, \dots, n$. Considérons l'opérateur Ψ_g et, pour tous les diviseurs $g' < g \in G$, les opérateurs $\Psi_{g, g'}$ définis ci-haut. Soit, pour tous $g' \in G$, $f \in \mathcal{B}_{g'}$ et $x, y \in \mathcal{D}$:

$$b_{g'}(a, x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } g' \nless g \\ \langle \Psi_{g, g'}(g'f)x, y \rangle_{g'} & \text{si } g' < g. \end{cases}$$

Notons que $b := (b_{g'})_{g' \in G} \in K$ car

$$|b_{g'}(f, x, y)| \leq |\langle \Psi_{g, g'}(g'f)x, y \rangle_{g'}| \leq \|g'f\|_\infty \|x\|_{g'} \|y\|_{g'}.$$

Fixons un indice $i \in 1, \dots, n$ et considérons $g' < g_i \in G$, alors il existe $g'_i, \tilde{g}_i \in G$ tels que $g_i = g'g'_i$ et $g = g_i\tilde{g}_i$. On peut voir que, pour tous $f \in \mathcal{B}_{g'}$ et $x, y \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} b_{g'}(f, x, y) &= \langle \Psi_{g, g'}(g'f)x, y \rangle_{g'} = \langle \Psi_g(\tilde{g}_i g'_i g'f)x, y \rangle_g \\ &= \langle \Psi_g(gf)x, y \rangle_g \\ &= \langle \Psi_{g, g_i}(g_i f)x, y \rangle_{g_i} \\ &= b_{g_i}(f, x, y), \end{aligned}$$

il s'en suit que $f \mapsto b_{g'}(f, x, y)$ est une application linéaire de $\mathcal{B}_{g'}$ dans $SF(\mathcal{D})$ complètement positive, puisque $\Psi_{g, g'}$ est complètement positive. De plus elle prolonge $\varphi_{g'}$ car $F_{g'} \subset F_g$ par hypothèses. Donc, $b := (b_{g'})_{g' \in G}$ appartient à $H_{g_1} \cap \dots \cap H_{g_n}$.

En résumé l'intersection $\bigcap_{g \in G} H_g$ est non vide, et on peut prendre $c = (c_g)_{g \in G} \in \bigcap_{g \in G} H_g$ pour définir, pour tout $f \in \mathcal{B}/G$

$$\psi(f) := c_g(f) \quad \text{si } f \in \mathcal{B}_g.$$

ψ est bien définie en effet, soit $g_1, g_2 \in G$ et f dans $\mathcal{B}_{g_1} \cup \mathcal{B}_{g_2}$, puisque G est dirigé il existe $g \in G$ qui majore à la fois g_1 et g_2 , mais $c \in H_g$ donc

$$c_{g_1}(f) = c_g(f) = c_{g_2}(f).$$

ψ est par définition linéaire, prolonge φ et est complètement positive. On conclut l'implication avec la formule (3.1) qui implique pour $g \in G$, que

$$\|\varphi_{g,x}\| \leq \|\psi_{g,x}\| \leq \|x\|^2 = \varphi(e/g)(x, x) \leq \|\varphi_{g,x}\|.$$

Inversement, supposons que φ se prolonge en une application linéaire $\psi : \mathcal{B}/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ complètement positive. On définit $\tilde{\psi}_{g,x}$, pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D}$, par

$$\tilde{\psi}_{g,x}(a) = \psi_g(a/g)(x, x).$$

Dans ces conditions $\tilde{\psi}_{g,x}$ est une application linéaire positive sur $\mathcal{B}$, et en vertu de la proposition 2.3, on a $\|\tilde{\psi}_{g,x}\| = \tilde{\psi}_{g,x}(e)$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique que

$$|\psi_g(a/g)(x, y)| \leq \|\tilde{\psi}_{g,x}\| \|\tilde{\psi}_{g,y}\| \leq \tilde{\psi}_{g,x}(e) \tilde{\psi}_{g,y}(e).$$

Par conséquent, il existe un unique opérateur Ψ , tel que pour tous $g \in G$ et $x, y \in \mathcal{D}$,

$$\psi(a/g)(x, y) = \langle \Psi_g(a)x, y \rangle_g, \quad a \in \mathcal{B}.$$

Ψ étant complètement positif, et encore par la proposition 2.2, on conclut que Ψ est complètement contractif et qu'il en est de même pour ψ et φ . Cela termine la démonstration du théorème. $\square$

Dans le cas commutatif, on peut raffiner les hypothèses grâce au théorème de Stinespring 2.3.4 qui nous dit que si une application linéaire d'une C^* -algèbre commutative à valeurs dans une C^* -algèbre alors le terme "complètement positive" est équivalent au terme "positive". On peut alors obtenir le théorème (voir le théorème 2.5 dans [2]) suivant :

Théorème 5.2.4. *Soit $\mathcal{B}$ une C^* -algèbre commutative d'unité e , et $F = \sum_{g \in G} F_g \subset \mathcal{B}/G$, où F_g est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}_g$. On suppose que $e/g' \in F_g$ pour tout $g' < g \in G$.*

Soit $\varphi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire. Alors φ se prolonge en une application linéaire positive $\psi : \mathcal{B}/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ telle que $\|\psi_{g,x}\| = \|\varphi_{g,x}\|$ pour tous $x \in \mathcal{D}$ et $g \in G$, si et seulement si, φ est complètement contractive et vérifie $\varphi(e/g)(x, x) > 0$, pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, avec $\varphi_{g,x} = \varphi() (x, x)|_{F_g}$ et $\psi_{g,x} = \psi(*) (x, x)|_{\mathcal{B}_g}$.*

R.T. Powers dans [28] a généralisé le théorème d'Arveson 2.3.5 qui prolonge les applications complètement positives sur des C^* -algèbres à valeurs opérateurs dans le cas des applications complètement positives sur des $*$ -espaces vectoriels à

valeurs dans un espace de formes sesquilinéaires sur un certain espace vectoriel. Cela nous permet d'établir le résultat suivant. Soit $\mathcal{B}$ une $*$ -algèbre de Banach hermitienne unitaire d'unité e et soit $S \subset \mathcal{B}$ un système d'opérateurs. Soit $G \subset B(S)$ un ensemble de dénominateurs. On considère l'espace des fractions S/G .

Théorème 5.2.5. *Soit F un sous-espace vectoriel symétrique de S/G . On suppose que $e/g \in F_g = F \cap S_g$ pour tout $g \in G$.*

Soit $\varphi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire, alors φ se prolonge en une application linéaire complètement positive $\psi : S/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ telle que $\|\psi_{g,x}\|_{cb} = \|\varphi_{g,x}\|$, pour tous $x \in \mathcal{D}$ et $g \in G$, si et seulement si φ est complètement positive et $\varphi(e/g)(x, x) > 0$ pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, avec $\varphi_{g,x} = \varphi|_{F_g}$ et $\psi_{g,x} = \psi|_{S_g}$.

Démonstration. Supposons que $\varphi : F \rightarrow SF(\mathcal{D})$ se prolonge en une application linéaire complètement positive $\psi : S/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ telle que $\|\psi_{g,x}\|_{cb} = \|\varphi_{g,x}\|$, pour tous $x \in \mathcal{D}$ et $g \in G$. Alors il est facile de conclure que φ est complètement positive, et que $\varphi(a/g)(x, x) > 0$ pour tous $g \in G$ et $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Pour la réciproque nous allons utiliser le théorème de Powers dans [28] (voir 2.3.14); pour se faire, on doit prouver d'abord que F est cofinal dans S/G par rapport à $\mathfrak{M}(S/G)^+$.

Prenons $f = f^* \in S/G$, il existe alors $g \in G$ et $a = a^* \in \mathcal{B}$ tels que $f = a/g$. Sachant que $a \leq \|a\|e \in S$ et que $\|a\|e$ appartient à $\mathfrak{M}(S/G)^+ \cap F$, on conclut que F est cofinal puisque $(\|a\|e - a)/g$ est positif et appartient à $\mathfrak{M}(S/G)^+$. Maintenant, en utilisant le théorème de Powers on aura un prolongement ψ de φ , $\psi : S/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ complètement positif. Par la proposition 5.2.1 on obtient facilement que, pour tous $x \in \mathcal{D}$ et $g \in G$,

$$\|\varphi_{g,x}\| \leq \|\psi_{g,x}\|_{cb} = \psi(e/g)(x, x) = \varphi(e/g)(x, x) \leq \|\varphi_{g,x}\|,$$

et donc $\|\psi_{g,x}\|_{cb} = \|\varphi_{g,x}\|$. □

5.3 Version opératorielle non commutative du problème des moments

5.3.1 Une mesure spéciale

Cette section est analogue à la section 4.5.1 du chapitre précédent dans le cas opératorielle. Les mêmes techniques de démonstrations sont adoptées. Soit Ω

un espace topologique compact. On note par $Bor(\Omega)$ la σ -algèbre des ensembles boréliens de Ω .

Soit $\mathcal{A}$ une C^* -algèbre non nécessairement commutative, avec unité $\mathbf{1}$. L'espace réel des éléments auto-adjoints est noté par $\mathcal{A}_h$. Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Et soit $B(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs bornés sur H . L'ensemble $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ représente les applications linéaires sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $B(H)$. Toutes les normes seront notées par $\| \cdot \|$. On mentionnera s'il y a un risque de confusion.

Le but de cette section est de définir une mesure positive sur $Bor(\Omega)$ à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$, pour pouvoir intégrer des fonctions sur Ω à valeurs dans $\mathcal{A}$. Et pour pouvoir formuler, par la suite, le problème des moments dans un nouveau contexte.

Soit $\mathbb{E}$ une application de l'ensemble des boréliens de Ω , $Bor(\Omega)$, à valeur dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ sur laquelle on impose trois conditions :

1. L'application $\mathbb{E}$ est faiblement dénombrablement additive, i.e. pour toute suite d'ensemble boréliens $(B_j)_j$, deux à deux disjoint, dans $Bor(\Omega)$ dont l'union est notée par B , et pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a :

$$\langle \mathbb{E}(a, B)x, y \rangle = \sum_j \langle \mathbb{E}(a, B_j)x, y \rangle,$$

2. L'application $\mathbb{E}$ est positive, i.e. pour tout $B \in Bor(K)$, l'application $\mathbb{E}(B)$ est positive dans le sens suivant :

$$\forall a \geq 0 \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{E}(a, B) \geq 0 \in B(H),$$

3. L'application $\mathbb{E}(\mathbf{1}, \cdot) : Bor(\Omega) \rightarrow B(H)$ est bornée dans le sens suivant :

$$\sup\{\|\mathbb{E}(\mathbf{1}, B)\| : B \in Bor(\Omega)\} < \infty.$$

Bien sûr, pour tout $B \in Bor(\Omega)$, $\mathbb{E}(B)$ est un opérateur dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$, et pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}(a, B)$ est un opérateur dans $B(H)$.

Remarque 5.3.1. Supposons que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}(a, \cdot) : Bor(\Omega) \rightarrow B(H)$ est une mesure à valeurs dans $B(H)$, qui est positive si a est un élément positif dans $\mathcal{A}$. Alors la première et la deuxième condition sont remplies. Réciproquement, la première et la deuxième condition nous donnent que, pour tout $a \in \mathcal{A}$, $\mathbb{E}(a, \cdot) : Bor(\Omega) \rightarrow B(H)$ est

une mesure à valeur dans $B(H)$, qui est positive si et seulement si a est un élément positif dans $\mathcal{A}$.

La deuxième condition implique la troisième; en effet, puisque $\mathbf{1}$ est un élément positif dans $\mathcal{A}$, alors la mesure $\mathbb{E}(\mathbf{1}, \cdot)$ à valeur dans $B(H)$ est positive, donc elle est bornée d'après la remarque 2.1.6.

Commençons par définir l'intégrale pour les "fonctions en escalier" ou fonctions simples. Soit $f = \sum_j \chi_{B_j} a_j$, où $(B_j)_j$ est une partition finie de Ω et χ_{B_j} la fonction caractéristique de B_j . Les a_j sont des éléments de $\mathcal{A}$. On définit, pour tout $x, y \in H$, l'opérateur suivant :

$$\langle \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)x, y \rangle = \langle \sum_j \mathbb{E}(a_j, B_j)x, y \rangle = \sum_j \langle \mathbb{E}(a_j, B_j)x, y \rangle.$$

Pour simplifier les écritures la quantité $\langle \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)x, y \rangle$ va être notée par $\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y}$.

Cette écriture définit bien l'opérateur $\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)$. Nous allons maintenant prouver qu'il est borné. Pour cela supposons, au premier lieu, que les a_j sont des éléments auto-adjoints. Alors puisque $\mathcal{A}$ est une C^* -algèbre on a :

$$-\|a_j\|\mathbf{1} \leq a_j \leq \|a_j\|\mathbf{1} \quad \text{dans } \mathcal{A}.$$

Sachant que les opérateurs $\mathbb{E}(B_j)$ sont positifs alors

$$-\|a_j\|\mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j) \leq \mathbb{E}(a_j, B_j) \leq \|a_j\|\mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j) \quad \text{dans } B(H),$$

Donc :

$$-\|a_j\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j)x, x \rangle \leq \langle \mathbb{E}(a_j, B_j)x, x \rangle \leq \|a_j\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j)x, x \rangle \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

En additionnant par rapport à j on obtient

$$-\sum_j \|a_j\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j)x, x \rangle \leq \sum_j \langle \mathbb{E}(a_j, B_j)x, x \rangle \leq \sum_j \|a_j\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j)x, x \rangle,$$

ou encore

$$-\sum_j \|a_j\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j)x, x \rangle \leq \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,x} \leq \sum_j \|a_j\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j)x, x \rangle.$$

pour tout $x \in H$.

Par la suite, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,x} \right| &\leq \left| \sum_j \|a_j\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j)x, x \rangle \right| \\
 &\leq \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| \langle \left[\sum_j \mathbb{E}(\mathbf{1}, B_j) \right] x, x \rangle \\
 &\leq \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| \langle \mathbb{E}(\mathbf{1}, \Omega)x, x \rangle \\
 &\leq \|f\|_{\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}, \Omega)\| \|x\|^2.
 \end{aligned}$$

Passons maintenant au cas où les a_j sont des éléments quelconques de $\mathcal{A}$. Tout élément $a_j \in \mathcal{A}$ s'écrit d'une façon unique : $a_j = a'_j + ia''_j$, avec $a'_j = (a_j + a_j^*)/2$ et $a''_j = (a_j - a_j^*)/2i$ sont des éléments dans $\mathcal{A}_h$. Et bien évidemment on a : $\|a'_j\| = \|(a_j + a_j^*)/2\| \leq \|a_j\|$ et $\|a''_j\| = \|(a_j - a_j^*)/2i\| \leq \|a_j\|$.

Cela nous permet d'obtenir un encadrement pour tous les éléments de $\mathcal{A}$. Alors, pour tout $x \in H$, on a

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,x} \right| &= \left| \sum_j \langle \mathbb{E}(a_j, B_j)x, x \rangle \right| \\
 &= \left| \sum_j \langle \mathbb{E}(a'_j, B_j)x, x \rangle + i \sum_j \langle \mathbb{E}(a''_j, B_j)x, x \rangle \right| \\
 &\leq \left| \sum_j \langle \mathbb{E}(a'_j, B_j)x, x \rangle \right| + \left| \sum_j \langle \mathbb{E}(a''_j, B_j)x, x \rangle \right|
 \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité obtenue pour les éléments auto – adjoints on obtient :

$$\leq 2\|f\|_{\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}, \Omega)\| \|x\|^2.$$

Rappelons la formule de polarisation, pour tout x, y dans H on a :

$$\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y} = 1/4 \sum_{k=0}^3 i^k \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x+i^k y}.$$

En vertu de cette formule on conclut que :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y} \right| &\leq 1/2 \|f\|_{\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}, \Omega)\| \sum_{k=0}^3 \|(x + i^k y)\|^2 \\
&\leq 2 \|f\|_{\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}, \Omega)\| (\|x\|^2 + \|y\|^2)
\end{aligned}$$

En prenant x et y dans H , avec $\|x\| = \|y\| = 1$, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y} \right| \leq 4 \|f\|_{\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}, \Omega)\|,$$

et on obtient donc une majoration de la norme :

$$\left\| \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f) \right\| \leq 4 \|f\|_{\infty} \|\mathbb{E}(\mathbf{1}, \Omega)\|.$$

On cherche à intégrer les fonctions continues sur Ω à valeur dans $\mathcal{A}$. D'après le lemme 4.5.3 toute fonction continue à valeurs dans $\mathcal{A}$ est limite uniforme d'une suites de fonctions en escalier à valeurs dans $\mathcal{A}$. Puisque l'intégrale est bornée, alors la limite suivante est convergente et admet une limite finie :

$$\lim_n \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f_n) = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f).$$

Remarque 5.3.2. (a) Si $h = \sum_j \lambda_j \chi_{B_j}$ est une fonction en escalier à valeurs complexes et si a est dans $\mathcal{A}$, alors

$$\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, h \otimes a)_{x,y} = \sum_j \lambda_j \langle \mathbb{E}(a, B_j) x, y \rangle = \int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a)_{x,y}.$$

Si, maintenant, h est une fonction continue sur Ω , alors elle peut être approchée par des fonctions en escalier donc pour tout $a \in \mathcal{A}$ on a :

$$\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, h \otimes a)_{x,y} = \int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a)_{x,y}.$$

(b) Si $f \in C(\Omega, \mathcal{A})$ est positive, i.e. pour tout $t \in \Omega$, $f(t) \geq 0$, alors $\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,x} \geq 0$, pour tout $x \in H$.

Un théorème de représentation

Théorème 5.3.3. Soit Ω un espace topologique compact. Soit $\Phi : C(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow B(H)$ une application linéaire. Alors Φ est positive si et seulement s'il existe une unique mesure $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$, positive, définie sur les sous-ensembles boréliens de Ω telle que pour tout $f \in C(\Omega, \mathcal{A})$ on a :

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

Démonstration. Soit $\Phi : C(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow B(H)$ une application linéaire positive. Rappelons que la famille constituée des sommes finies de la forme $(\sum (h \otimes a); h \in \Omega, a \in \mathcal{A})$ est dense dans $C(\Omega, \mathcal{A})$, ce dernier est considéré égale à $C(\Omega) \otimes \mathcal{A}$.

Fixons un élément $a \in \mathcal{A}$ positif. On définit l'application Φ_a sur $C(\Omega)$ telle que, pour tout $h \in C(\Omega)$, $\Phi_a(h) = \Phi(h \otimes a)$. L'application Φ_a est positive, puisque Φ est positive, alors en vertu du théorème 2.1.4, il existe une unique mesure $\mathbb{E}(a)$ positive à valeurs dans $B(H)$ sur les boréliens de Ω tel qu'on ait

$$\langle \Phi(h \otimes a)x, y \rangle = \langle \Phi_a(h)x, y \rangle = \int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a)_{x,y}, \quad x, y \in H, h \in C(\Omega).$$

Cela nous fournit une collection de mesures indexées par les éléments de $\mathcal{A}_+$, $B \rightarrow \mathbb{E}(a, B)$ à valeurs dans $B(H)$ définies sur les ensembles mesurables de Ω . Maintenant supposons que a est auto-adjoint, alors il s'écrit, d'une manière unique, comme la différence de deux éléments positifs $a = a^+ - a^-$. On peut donc définir une mesure $B \rightarrow \mathbb{E}(a, B) = \mathbb{E}(a^+, B) - \mathbb{E}(a^-, B)$. Puisque, $\Phi(h \otimes a) = \Phi(h \otimes a^+) - \Phi(h \otimes a^-)$ on pose :

$$\int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a)_{x,y} = \int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a^+)_{x,y} - \int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a^-)_{x,y} = \langle \Phi(h \otimes a)x, y \rangle, \quad x, y \in H.$$

Si, maintenant, a est un élément quelconque dans $\mathcal{A}$ alors il se décompose d'une manière unique $a = a' + ia''$, où a' et a'' sont auto-adjoints. Cela définit bien une mesure $B \rightarrow \mathbb{E}(a, B) = \mathbb{E}(a', B) + i\mathbb{E}(a'', B)$, et puisque $\Phi(h \otimes a) = \Phi(h \otimes a') + i\Phi(h \otimes a'')$, alors posons

$$\int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a)_{x,y} = \int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a')_{x,y} + i \int_{\Omega} h d\mathbb{E}(a'')_{x,y} = \langle \Phi(h \otimes a)x, y \rangle, \quad x, y \in H. \quad (5.2)$$

Actuellement la collection de mesures à valeurs dans $B(H)$ s'élargit sur tout l'ensemble $\mathcal{A}$. On peut alors définir une mesure $B \rightarrow \mathbb{E}(a, B)$ sur les boréliens de Ω à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$. Par définition la mesure $\mathbb{E}$ est positive. L'écriture 5.2 est valable pour toute somme finie de la forme $f = \sum(h \otimes a)$:

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y}.$$

Par densité on prolonge cette écriture à tous les éléments f dans $C(\Omega, \mathcal{A})$, puisque la limite des intégrales existe et l'application Φ est continue (car elle est positive sur une C^* -algebra, voir 2.1.5). On obtient alors

$$\langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y}, \quad x, y \in H, \quad f \in C(\Omega, \mathcal{A}).$$

Supposons qu'il existe une deuxième mesure positive à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ sur Ω vérifiant l'égalité au dessus, alors elle doit coïncider avec $\mathbb{E}$ sur la collection de mesures à valeurs dans $B(H)$ $\mathbb{E}(a)$ lesquelles sont définies d'une manière unique. La mesure $\mathbb{E}$ est par conséquent unique.

Réciproquement, si $\mathbb{E}$ est une mesure positive à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ sur Ω , et $f : \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ est une fonction positive alors d'après la remarque 5.3.2 la quantité $\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,x}$ est positive. La linéarité de l'intégrale est triviale ce qui termine la preuve. $\square$

On va, maintenant, adopter une définition donnée par F-H. Vasilescu dans [42] à notre contexte. Soit G un ensemble de dénominateurs sur $C(\Omega, \mathcal{A})$

Définition 5.3.4. Une mesure $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ est dite G -divisible sur Ω , si pour tout $g \in G$, il existe une mesure $\mathbb{E}_g$ sur Ω tel que, pour tout $f \in C(\Omega, \mathcal{A})$ on a :

$$\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f) = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}_g, gf).$$

Le prochain théorème nous permet de représenter les applications linéaires positives sur $C(\Omega, \mathcal{A})/G$ à valeurs dans $SF(\mathcal{D})$ en intégrales.

Théorème 5.3.5. Soit $\psi : C(\Omega, \mathcal{A})/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire et unitaire. Alors ψ est positive, si et seulement si, il existe une unique mesure $\mathbb{E}$ positive, G -divisible, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ définie sur les boréliens de Ω tel que :

$$\psi(f)(x, y) = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y}, \quad f \in C(\Omega, \mathcal{A})/G, \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

Démonstration. Supposons que $\psi : C(\Omega, \mathcal{A})/G \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est une application linéaire, positive et unitaire. D'après la proposition 5.2.1, pour tout $g \in G$ l'application $\psi_{g,x} = \psi(*)|_{C(\Omega, \mathcal{A})_g}$ est bornée. Par suite la forme sesquilinéaire définie par $\phi_g(h)(x, y) = \psi(h/g)(x, y)$, pour tout $g \in G$, pour tout $h \in C(\Omega, \mathcal{A})$ et $x, y \in H$ est bornée. Par conséquent il existe un unique opérateur $\Phi_g(h)$ dans $B(H)$ (par le théorème de Riez) vérifiant :

$$\phi_g(h)(x, y) = \langle \Phi_g(h)x, y \rangle, \quad h \in C(\Omega, \mathcal{A}), \quad x, y \in H.$$

L'application linéaire $\Phi_g : C(\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow B(H)$ est trivialement positive, alors le théorème 5.3.3 nous donne une unique mesure positive $\mathbb{E}_g$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ définie sur les ensembles boréliens de Ω , tel que, pour tout $h \in C(\Omega, \mathcal{A})$ on a :

$$\langle \Phi_g(h)x, y \rangle = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}_g, h)_{x,y} \quad x, y \in D.$$

Soit $f \in C(\Omega, \mathcal{A})/g$ alors

$$\int_{\Omega} (d\mathbb{E}_g, gf)_{x,y} = \langle \Phi_g(gf)x, y \rangle = \phi_g(gf)(x, y) = \psi(f)(x, y), \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

soit $\mathbb{E}$ une mesure à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ définie sur les ensembles boréliens de Ω par, pour tout $g \in G$ et $f \in C(\Omega, \mathcal{A})/g$:

$$\int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y} = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}_g, gf)_{x,y} \quad x, y \in \mathcal{D}. \quad (5.3)$$

La mesure $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ est G -divisible. En effet, si g_1, g_2 sont dans G et x, y dans $\mathcal{D}$, alors $\phi_{g_1}(g_1h)(x, y) = \psi(h)(x, y) = \phi_{g_2}(g_2h)(x, y)$, ce qui implique que :

$$\int_{\Omega} (d\mathbb{E}_{g_1}, g_1h)_{x,y} = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}_{g_2}, g_2h)_{x,y} \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

Maintenant la formule 5.3 est bien définie pour tout f dans $C(\Omega, \mathcal{A})/g$.

Si f est arbitraire, alors $f = \sum_{j \in J} h_j/g_j$, avec $h_j \in C(\Omega, \mathcal{A})$, $g_j \in G$ pour tout $j \in J$, où J est un ensemble fini. D'où on obtient :

$$\psi(f)(x, y) = \sum_{j \in J} \phi_{g_j}(h_j)(x, y) = \sum_{j \in J} \int_{\Omega} (d\mathbb{E}_{g_j}, h_j)_{x,y} = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}, f)_{x,y}, \quad x, y \in \mathcal{D},$$

Cela nous donne une représentation intégrale de ψ .

Réciproquement, l'existence d'une mesure $\mathbb{E}$ positive, à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ sur les boréliens de Ω , tel que l'égalité est vérifiée, et puisque toutes les mesures à valeurs dans $B(H)$ induites doivent être positives, alors il est clair que l'application linéaire ψ doit être positive à son tour. Ce qui termine la preuve. $\square$

5.3.2 Le problème des moments opératoriel

Dans cette section nous adoptons les mêmes notations que la section 4.5.2. En effet nous allons donner une version opératorielle du problème des moments généralisé du chapitre précédent.

Soit $\mathcal{D}$ un espace préhilbertien et $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A}) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire unitaire. Notre *problème des moments opératoriel* consiste à trouver une mesure $\mathbb{E}$ positive à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ définie sur les sous-ensembles boréliens de $\mathbb{K}^n$, où H est l'espace de Hilbert complété de $\mathcal{D}$, tel que $\phi(p)(x, y) = \int (dE_{x,y}, p)$, pour tout $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ et $x, y \in \mathcal{D}$. Lorsqu'une telle mesure $\mathbb{E}$ positive existe on dit que $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A}) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est une *application moment*, et la mesure $\mathbb{E}$ est une *mesure de représentation* pour ϕ .

Lorsque la mesure de représentation $\mathbb{E}$ s'annule sur le complémentaire d'un ensemble fermé $K \subset \mathbb{K}^n$ on dit que ϕ est une *K-application moment*. Dans ce cas on a évidemment $\phi(p) = 0$ pour tout élément $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ vérifiant $p|_K = 0$. Réciproquement, l'application linéaire $\phi : \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A}) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est dite *K-compatible* si $\phi(p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}(\mathbb{K}^n, \mathcal{A})$ vérifiant $p|_K = 0$.

Remarque 5.3.6. Si l'ensemble fermé K est inclus dans $\subset \mathbb{R}^n$ et si $t = (t_1, \dots, t_n) \in K$ alors un générateur multidimensionnel $G_n^{(\alpha)}(t)$ s'écrit sous la forme suivante : $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n} a$, pour un certain $a \in \mathcal{A}$.

Pour se ramener au cas classique, il suffit de considérer les espaces $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\mathbf{1}$: l'algèbre des polynômes multidimensionnels sur $\mathbb{R}^n$ multipliés par $\mathbf{1}$ et l'espace $C(\mathbb{R}^n)\mathbf{1}$: l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ multipliées par $\mathbf{1}$, qui est une C^* -algèbre commutative. Sachant que la mesure $\mathbb{E}(\mathbf{1}, \cdot)$ est une mesure à valeurs dans $B(H)$ positive. On obtient alors la version, bien connue, du problème des moments multidimensionnel opératoriel sur $\mathbb{R}^n$. Notre version est donc une généralisation de ce problème.

Nous cherchons à caractériser les *K-applications moment*. Le théorème suivant qui est une application du théorème 5.2.3 nous donne une caractérisation.

Théorème 5.3.7. Soit $\phi : \mathcal{P}(K, \mathcal{A}) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire. Si l'application ϕ est complètement contractive, K -compatible et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\phi(p_\alpha)(x, x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, alors ϕ est une K -application moment.

Démonstration. Supposons que l'application $\phi : \mathcal{P}(K, \mathcal{A}) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est linéaire, complètement contractive, K -compatible et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\phi(p_\alpha)(x, x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. Cette application, par le théorème 5.2.3 se prolonge en une application linéaire $\psi : C(\Omega, \mathcal{A})/Q_n(\Omega) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ complètement positive. L'application ψ est en particulier positive, alors en appliquant le théorème 5.3.5 la haut, on obtient une unique mesure $\mathbb{E}$ positive, $Q_n(\Omega)$ -divisible à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{A}, B(H))$ définie sur les sous-ensembles boréliens de Ω tel que

$$\psi(f)(x, y) = \int_{\Omega} (d\mathbb{E}_{x,y}, f), \quad f \in C(K, \mathcal{A})/Q_n(\Omega), \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

Maintenant puisque les fonctions $q \in Q_n(\Omega)$ sont nulles sur $\Omega \setminus K$, le support de la mesure $\mathbb{E}$ est forcément inclus dans K .

Par suite, pour tout $p \in \mathcal{P}_n(\Omega, \mathcal{A})$, on obtient ;

$$\phi(p)(x, y) = \int_K (d\mathbb{E}_{x,y}, p), \quad x, y \in \mathcal{D}.$$

Ce qui veut dire que l'application ϕ est une K -application moment. $\square$

Remarque 5.3.8. Si l'application ϕ est une K -application moment alors elle est K -compatible d'une manière évidente, et on a aussi $\phi(p_\alpha)(x, x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. En effet,

$$\begin{aligned} \psi(p_\alpha)(x, x) &= \psi(q_\alpha)(x, x) = \int_K (d\mathbb{E}_{x,x}, q_\alpha) \\ &= \int_K (1 + \|\xi_1\|^2)^{-\alpha_1} \dots (1 + \|\xi_n\|^2)^{-\alpha_n} d\mathbb{E}(\mathbf{1})_{x,x} \\ &\geq \int_K d\mathbb{E}(\mathbf{1})_{x,x} \geq 0. \end{aligned}$$

Dans le cas commutatif on a une équivalence dans le théorème 5.3.7 en utilisant la remarque précédente et le théorème 5.2.4. On obtient aussi une équivalence sous les hypothèses suivantes.

Théorème 5.3.9. *Soit $\phi : \mathcal{P}_n(\mathcal{A}) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ une application linéaire. L'application ϕ est complètement contractive (resp. complètement positive), K -compatible et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\phi(p_\alpha)(x, x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$, si et seulement si ϕ est une K -application moment complètement contractive (resp. complètement positive).*

Démonstration. Supposons $\phi : \mathcal{P}_n(\mathcal{A}) \rightarrow SF(\mathcal{D})$ est une application linéaire complètement contractive (resp. complètement positive), K -compatible et pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\phi(p_\alpha)(x, x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathcal{D} \setminus \{0\}$. Alors en appliquant la même démonstration que celle du théorème 5.3.7 on conclut que ϕ est une K -application moment complètement contractive. À l'exception du cas où l'application ϕ est complètement positive on applique le théorème 5.2.5 au lieu d'appliquer le théorème 5.2.3 et cela en remarquant, bien sûr, que le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_n(\mathcal{A})$ est symétrique dans $C((\mathbb{R}_\infty)^n, \mathcal{A})/Q_n$.

Réciproquement si ϕ est une K -application moment complètement contractive (resp. complètement positive) alors il suffit d'appliquer la remarque précédente pour conclure. $\square$

Bibliographie

- [1] N.I. Akhiezer, *The classical moment problem.*, Oliver & Boyd, Edinburgh (1961) traduction anglaise, 1965.
- [2] E. Albrecht and F.-H. Vasilescu, *Unbounded extensions and operator moment problems*, Preprint, 2004.
- [3] C.-G. Ambrozie and F.-H. Vasilescu, *Operator-theoretic positivstellensätze*, J. Anal. Appl. **22**(2003), No. 2, 299-314.
- [4] W. B. Arveson, *Subalgebras of C^* -algebras*, Acta. Math. **123**(1969), 141-224.
- [5] R. S. Bucy and G. Maltese, *A representation theorem for positive functionals on involution algebras*, Math. Annalen **162** (1966), 364-367.
- [6] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Herman, Paris, 1961.
- [7] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Masson, Paris, 1981.
- [8] G. Cassier, *Le problème des moments pour un convexe compact de R^n* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), no. 4, 195–197.
- [9] G. Cassier, *Problème des moments sur un compact de R^n et décomposition de polynômes à plusieurs variables*, J. Funct. Anal. **58** (1984), no. 3, 254–266.
- [10] M. De Wilde, *Sur un type particulier de limite inductive*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **35**(1966), 545-551.
- [11] M. De Wilde, *Quelques théorèmes d'extension de fonctionnelles linéaires*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **35**(1966), 552-557.
- [12] A. Dosiev, *Quantized moment problem*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), no. 10, 627-630.
- [13] C. Foiaş and G. Marinescu, *Fonctionnelles linéaires dans les réunions dénombrables d'espaces de Banach réflexifs*, C. R. Acad. Sci. Paris **261** (1965), 4958.

- [14] I. Gelfand, D. Raikov, and G. Shilov *commutative normed rings*, Chelsea Publishing Company. 1964.
- [15] A. Grothendieck, *espaces vectoriels topologiques*, 3^e ed., São paulo (Publ. Soc. Mat. São Paulo), 1964.
- [16] R. C. Gunning and H. Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [17] P.R. Halmos, *Measure theory*, Van Nostrand, Princeton, 1950.
- [18] P.R. Halmos, *Introduction to Hilbert space*, Chelsea publishing company, New York 1, N.Y. 1951.
- [19] H. Hogbe-Nlend, *Théorie des bornologies et applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **270** 1970 A1320-A1322.
- [20] H. Jarchow, *Locally convex spaces*, B.G.Teubner, Stuttgart, 1981.
- [21] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York, 1969.
- [22] S. K. Kranzler and T. S. McDermott, *Extending continuous linear Functionals in convergence limit spaces*, Proc. of the AMS. Vol 43, No 2. (Apr 1974), p. 357-360.
- [23] H. Mokni, *Positive functionals on some spaces of fractions*, Positivity 11, No. 3 (2007), p. 417-432 Birkhäuser Verlag Basel.
- [24] H. Mokni, *Extending linear forms in inductive families*, Int. J. Pure appl. Math. (à paraître)
- [25] H. Mokni, *Completely positiveness and a generalized moment problem*, preprint 2007.
- [26] I. V. Orlov, *The Hahn-Banach theorem in inductive scales of spaces*, Dopov. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki 1997, **9**, 32-36.
- [27] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [28] R. T. Powers, *Selfadjoint algebra of unbounded operators. II*, Trans. Amer. Math. Soc., **187** (1974), 261-293.
- [29] V. Pták, *Banach algebras with involution*, Manuscripta Math. **6** (1972), 245-290.
- [30] F. RIESZ AND B. NAGY, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Paris : Gauthier-Villars, Budapest : Akadémiai Kiadó VIII, (1955).

- [31] A. P. Robertson and W. J. Robertson, *Topological Vector Spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 53, Cambridge University Press, New York 1964.
- [32] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [33] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 2^e ed. Tata-McGraw-Hill Publication co. Limited New Delhi, 1977.
- [34] H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [35] K. Schmüdgen, *Unbounded operator algebras and representation theory*, Birkhäuser Verlag, Basel. Boston. Berlin, 1990.
- [36] K. Schmüdgen, *Noncommutative moment problems*, Math. Z. 206 (1991), no. 4, 623-649.
- [37] L. Schwartz, *Analyse : topologie générale et analyse fonctionnelle*, 2^e ed., Herman, 1980.
- [38] W. F. Stinespring, *Positive functions on C^* -algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 211-216.
- [39] J. Stochel, *Solving the truncated moment problem solves the full moment problem*, Glasgow Math. J. 43(2001), 335-341.
- [40] F.-H. Vasilescu, *Operator moment problems in unbounded sets*, Recent Advances in Operator Theory and Related Topics. The Béla Székfalvi-Nagy Memorial volume. Operator Theory : Advances and Applications, Vol.127, 613-638, Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.
- [41] F.-H. Vasilescu, *Spaces of fractions and positive functionals*, Math. Scand. 96(2005), 257-279.
- [42] F.-H. Vasilescu, *Unbounded normal algebras and spaces of fractions*, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 176, 295-322, Birkhäuser Verlag Basel, 2007.
- [43] N.E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^* -algebras*, Oxford science publication, 1994.
- [44] G. Wittstock, *On matrix order and convexity*, in Functional Analysis : Surveys and Recent Results, Math. Studies, Vol. 90, North-Holland, Amsterdam, 1984, 175-188.

Résumé

Nous nous intéressons dans ce travail au prolongement d'applications linéaires, que ce soit des fonctions à valeurs scalaires ou des applications à valeurs opérateurs, sur des limites inductives d'espaces vectoriels topologiques en général et en particulier sur des algèbres d'opérateurs.

Dans un premier lieu, nous regardons le problème dans le cadre le plus général c'est à dire celui de prolonger des formes linéaires sur une limite inductive d'espaces localement convexes. Nous donnons une condition nécessaire sur ces formes pour que le prolongement soit possible. Nous nous intéressons aussi au prolongement préservant la norme et nous donnons un exemple ou un tel prolongement n'est pas possible. Ensuite nous donnons une application de notre résultat principal dans le cadre des germes des fonctions holomorphes sur un compact de $\mathbb{C}^n$. Puis nous généralisons les résultats obtenus dans le contexte des applications linéaires sur des C^* -algèbres à valeurs opérateurs ce qui nous permet de généraliser l'application.

En second lieu, nous considérons les mêmes questions dans le cas particulier de limites inductives : les espaces de fractions. Nous généralisons le résultat de F-H. Vasilescu dans le cas non commutatif ainsi que le problème des moments multidimensionnels sur un ensemble fermé non borné du corps des quaternions.

En dernier lieu, nous s'intéressons aux applications complètement positives et complètement contractives à valeurs opérateurs sur des espaces de fractions. On considère le contexte non commutatif du papier de E. Albrecht et F-H. Vasilescu. Nous donnons un résultat pour chaque type de ses application linéaires. En applications aux résultats obtenues, on généralise notre problème des moments dans le cas opératoire en introduisant une nouvelle mesure. Enfin, nous donnons une caractérisation des applications moments.

Abstract

In this work we are interested by extending linear forms and linear maps in general on inductive limit spaces of locally convex spaces or of some operator algebras.

Firstly, we consider the more general case i.e. extending linear forms on limit spaces of locally convex spaces. We give a necessary condition on the linear forms making the extension possible. We are also in interest of a norm preserving extension. We show by an example that a such extension is not always possible then we state our result in a general case. Moreover we give an application of our main result in a context of germes of holomorphic functions on a compact set of $\mathbb{C}^n$. After that, we generalize this results and the application, by the same way, when the linear application are with operator values.

Secondly, we consider the same questions in a particular case of inductive limits : The spaces of fractions. We generalize the result of F-H. Vasilescu in a non commutatif context and then we generalize the multi-dimensionnels moment problem on a closed unbounded set of quaternion set.

Finally, we focus on the completely positive or completely contractive linear maps on spaces of fractions with operator values. We consider the non commutative context of the work of E. Albrecht and F-H. Vasilescu. As an application, we generalize the given moment problem on the operator case and we give a new measure. Then we give a characterization of the moment maps.