

N° d'ordre : 4233

Université des Sciences et Technologies de Lille

Université de Liège

THESE

Spécialité

Génie Electrique

Présentée par :

Guillaume PARENT

En vue de l'obtention des grades de

Docteur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille

et Docteur en Sciences de l'ingénieur de l'Université de Liège

Mise en œuvre d'une technique de projection de grandeurs discrètes : application aux couplages magnétothermique et magnéto-mécanique

Soutenue le 23 octobre 2008

Devant le jury composé de :

M. Pierre DUYSINX	Président
Jean-Louis COULOMB	Rapporteur
Johan GYSELINCK	Rapporteur
Jean-Pierre DUCREUX	Examineur
Patrick DULAR	Examineur
Francis PIRIOU	Examineur

Directeurs de thèse : P. DULAR et F. PIRIOU

Remerciements

Les remerciements... La partie la moins scientifique du mémoire mais probablement l'une des plus difficiles à rédiger. En effet, comment, sans oublier qui que ce soit, exprimer ma gratitude à tous ceux qui, de près ou de loin, d'un point de vue professionnel ou personnel, m'ont accompagné durant ces trois ans et quelques (grosses) poussières. La tâche s'avère d'autant plus ardue que ces travaux ont été réalisés en cotutelle entre les universités de Lille et de Liège, ainsi qu'en partenariat avec la société EDF. Ce n'est donc pas une, ni même deux équipes qui m'ont accueilli, mais bien trois!

Alors procédons par ordre et, comme il est de coutume, commençons par les membres du jury.

M. Pierre Duysinx, qui, bien qu'un peu extérieur au domaine du génie électrique, a accepté la lourde tâche de présider ce jury. Je tiens particulièrement à mettre ce point en relief puisque, compte tenu de la procédure de dépôt de thèse à l'université de Liège, il lui a été demandé de rapporter sur le manuscrit ainsi que de présenter les travaux devant le conseil de faculté.

Messieurs Jean-Louis Coulomb et Johan Gyselinck, qui ont accepté de rapporter sur ma thèse, d'autant que pour ce dernier l'exercice ne se déroulait pas dans sa langue maternelle. Merci à eux pour leurs remarques et pour l'attention qu'ils ont apporté à ces travaux.

M. Jean-Pierre Ducreux, qui malgré tous les événements qui se sont déroulés durant la thèse a toujours suivi l'avancement des travaux afin d'être présent le jour J.

Pour compléter ce jury, il y a mes chefs! Patrick Dular et Francis Piriou. Un grand merci pour leur disponibilité. Bien qu'étant régulièrement aux quatre coins du monde, ils ont toujours su se rendre joignables et disponibles. Merci également pour leur soutien, leur patience, leur bonne humeur et leur sens de l'humour, bref... tout ce qui fait que travailler avec eux a été un plaisir.

Pour des remerciements un peu plus personnalisés, je commencerais par Patrick. Merci à lui pour l'extrême patience qu'il a su mettre en œuvre à plusieurs reprises pour m'expliquer à la fois certaines formulations ou le fonctionnement de GETDP...

En ce qui concerne Francis, l'histoire est un peu plus ancienne puisque c'est avec lui (et Yvonnick, mais j'y reviendrai) que l'aventure "recherche" a démarré. Je le remercie tout d'abord pour la confiance qu'il a su placer en moi lors mon année de DEA, au moment où peut-être j'en manquais le plus. Néanmoins, outre ses qualités scientifiques et d'encadrement, je retiendrai plus particulièrement de notre collaboration sa passion pour la recherche du mot juste lors de la phase de rédaction et notre (sa?) revue de presse quotidienne...

J'en parlais à l'instant, si l'aventure "recherche" a commencé sous la direction de Francis à l'occasion de mon stage de DEA, je ne saurais bien entendu oublier que les travaux réalisés au cours de celui-ci étaient co-encadrés par Yvonnick Le Menach. Je garde à l'esprit que si j'ai pu démarrer une thèse, c'est également grâce à lui.

Par ailleurs, il va sans dire que je remercie également l'ensemble des membres des deux laboratoires, à Lille et à Liège. Plus particulièrement,

Marie-Christine Blonde, pour son aide précieuse concernant les différentes procédures administratives à l'USTL.

Thomas, Kader, Xiaodong, Francisc pour leurs contributions – petite ou grande – à ses travaux.

Danielle Lange, Véronique Beauvois et Ruth V. Sabariego, pour leur soutien et leur bonne humeur quotidienne.

Julie, Raoul, Vincent et Pierre grâce auxquelles je ne suis pas resté enfermé au "home" tous les soirs de mes différents séjours à Liège. A ce propos, je tiens à décerner une mention spéciale à Pierre Beerten qui m'a permis de découvrir Liège et ses nombreux aspects "culturels", parmi lesquels les gauff' (aussi bien celles qui se mangent que celles qui chantent...), le péquet, les boulets "sauce lapin", ainsi que ~~le paradis~~ le Vaudrée II.

Bien entendu ces remerciements seraient incomplets si je me limitais à la sphère professionnelle et que j'oubliais mon entourage. A la frontière de ces deux univers il y a Xavier Margueron... Pour tout ce qu'il a pu faire durant la période de rédaction : merci!

En ce qui concerne mes proches, la liste est trop longue pour rentrer ici. Alors, merci à tous ceux qui m'on côtoyé/aidé/soutenu durant toute cette période ou même avant. Et plus particulièrement, M. et Mme Doucement, Sylvain, JB, la bande de la musique...

Mon avant dernière pensée va à mes parents, qui m'ont toujours appris à aller au bout des choses. Je pense que ce manuscrit est aussi le fruit de cet état d'esprit.

Enfin, je tiens à conclure cette partie par Emilie, mon épouse, qui m'a poussé à démarrer cette thèse, qui l'a certainement regretté par moments, mais qui a toujours été présente et encourageante pendant ces années, et ce en toutes circonstances. Merci d'être comme tu es, sans toi rien n'était – ni n'est – possible.

SOMMAIRE

SOMMAIRE	1
INTRODUCTION GENERALE	5
CHAPITRE I MODELES MATHEMATQUES	7
I.1 INTRODUCTION	7
I.2 PROBLEME MAGNETIQUE	7
I.2.1 Equations à résoudre	7
I.2.1.1 Equations de Maxwell	7
I.2.1.2 Lois de comportement	8
I.2.1.3 Conditions aux limites	8
I.2.1.4 Espaces fonctionnels.....	9
I.2.1.5 Diagramme de Tonti.....	11
I.2.2 Les formulations de l'électromagnétisme (domaine continu)	12
I.2.2.1 Cas de la magnéto-statique	12
I.2.2.2 Cas de la magnéto-dynamique	14
I.2.3 Domaine discret	16
I.2.3.1 Cas de la magnéto-statique	17
I.2.3.2 Cas de la magnéto-dynamique	19
I.2.4 Calcul des forces électromagnétiques	20
I.3 PROBLEME THERMIQUE	21
I.3.1 Equation de diffusion de la chaleur	22
I.3.2 Comportement des matériaux	22
I.3.3 Conditions aux limites	22
I.3.3.1 Transfert de chaleur par convection	23
I.3.3.2 Transfert de chaleur par rayonnement	23
I.3.3.3 Condition de Dirichlet	23
I.3.3.4 Condition de Neumann	24
I.3.4 Diagramme de Tonti	24
I.3.5 Couplage avec le problème magnétique	24
I.3.5.1 Interaction thermique/électromagnétisme.....	24
I.3.5.2 Grandeurs de couplage	26
I.3.5.3 Stratégies de couplage	26
I.4 PROBLEME MECANIQUE	27
I.4.1 Equation de l'élasticité.....	27
I.4.2 Comportement des matériaux	28
I.4.3 Conditions aux limites	28

I.4.4 Couplage avec le problème magnétique et stratégie de couplage.....	28
CHAPITRE II PROJECTION DE GRANDEURS DISCRETES	31
II.1 INTRODUCTION	31
II.2 METHODE DE PROJECTION DE GALERKIN	32
II.2.1 Une interprétation géométrique de la Méthode des Eléments Finis : projection orthogonale.....	32
II.2.2 Projection orthogonale : méthode de Galerkin.....	34
II.3 PROJECTION DE GRANDEURS MAGNETIQUES	36
II.3.1 Cas de la magnétostatique	37
II.3.1.1 Préliminaire.....	37
II.3.1.2 Projection du potentiel vecteur magnétique	37
II.3.2 Cas de la magnétodynamique	39
II.3.2.1 Formulation magnétique	39
II.3.2.2 Formulation électrique	41
II.4 PROJECTION DES TERMES DE COUPLAGE.....	42
II.4.1 Problème magnétothermique	42
II.4.1.1 Cas de la densité de pertes.....	43
II.4.1.2 Cas de la température	45
II.4.2 Problème magnétomécanique	45
II.4.2.1 Le problème de la force locale	46
II.4.2.2 Détermination de la densité de force	48
II.4.2.3 Projection des densités de force	49
II.5 VALIDATION DE LA METHODE DE PROJECTION	50
II.5.1 Cube conducteur traversé par une densité de courant uniforme.....	51
II.5.1.1 Présentation du système étudié.....	51
II.5.1.2 Etude du potentiel vecteur magnétique	52
II.5.1.3 Etude de l'induction magnétique	54
II.5.1.4 Etude de l'énergie	58
II.5.2 Sphère conductrice plongée dans un champ magnétique sinusoïdal.....	59
II.5.2.1 Présentation du système étudié.....	59
II.5.2.2 Définition du problème	60
II.5.2.3 Formulation magnétique	62
II.5.2.4 Formulation électrique	65
II.6 CONCLUSION	68
CHAPITRE III MODELISATION DE SYSTEMES ELECTROTECHNIQUES.....	69
III.1 INTRODUCTION	69
III.2 COUPLAGE MAGNETOTHERMIQUE	69
III.2.1 Présentation du système étudié	69
III.2.2 Définition du problème	70
III.2.2.1 Stratégie de couplage	70
III.2.2.2 Caractéristiques des matériaux.....	70

III.2.2.3 Conditions aux limites	71
III.2.2.4 Définition des maillages utilisés	71
III.2.3 Présentation des résultats	73
III.2.3.1 Solution de référence	74
III.2.3.2 Résolution du problème avec utilisation de maillages dédiés	76
III.2.4 Conclusion.....	85
III.3 COUPLAGE MAGNETOMECHANIQUE	85
III.3.1 Présentation du système étudié	85
III.3.2 Définition du problème	86
III.3.2.1 Stratégie de couplage	86
III.3.2.2 Caractéristiques des matériaux et conditions aux limites.....	87
III.3.2.3 Définition des maillages utilisés	87
III.3.2.4 Validation de la méthode de détermination de la densité de force	88
III.3.2.5 Présentation des résultats des calculs magnéto-mécaniques	91
III.3.2.6 Conclusion	97
CONCLUSION GENERALE	99
ANNEXES.....	101
ANNEXE I EVOLUTION DE LA CONDUCTIVITE ELECTRIQUE EN FONCTION DE LA TEMPERATURE POUR CERTAINS MATERIAUX UTILISES EN ELECTROTECHNIQUE	101
ANNEXE II METHODE DE PROJECTION – CALCUL DES MATRICES	102
ANNEXE III CALCUL DES FORCES DANS L'ENTREFER DE L'ELECTRO-AIMANT PAR LA METHODE DES TRAVAUX VIRTUELS.....	104
ANNEXE IV COUPE TRANSVERSALE DU BETOBAR	109
REFERENCES	111

INTRODUCTION GENERALE

La modélisation consiste à établir une structure mathématique permettant la description des phénomènes physiques. En électromagnétisme, l'association des équations de Maxwell, qui regroupent le théorème d'Ampère et la loi de Faraday, aux lois de comportement électrique et magnétique des matériaux constitue le modèle mathématique. En thermique, celui-ci est obtenu à l'aide de la loi de Fourier et d'un bilan énergétique, auxquels on associe les lois de comportement thermique des matériaux. Le modèle mécanique, quant à lui, est obtenu à l'aide de la loi exprimant l'état d'équilibre d'un matériau et de la loi de Hooke.

Dans le cas de géométries simples, une solution analytique à chacun de ces problèmes mathématiques peut être obtenue. Cependant, pour la modélisation de systèmes réels, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes numériques. La méthode des éléments finis, tout d'abord utilisée en modélisation dans le cas de problèmes de mécanique, a par la suite été employée pour l'étude des phénomènes thermiques [4][5]. En outre, depuis une trentaine d'années, des travaux ont été développés dans le cas de la modélisation des systèmes électromagnétiques [17] pour laquelle elle constitue une des méthodes les plus utilisées.

Cependant, le plus souvent la modélisation par la méthode des éléments finis nécessite des hypothèses simplificatrices afin de trouver un compromis entre temps de calcul et qualité de la solution obtenue. En effet, dans le cas de la modélisation d'un système électrotechnique, outre les simplifications géométriques du système, il est courant de supposer que les lois de comportement reliant les phénomènes électriques et magnétiques sont indépendantes de la température ou des contraintes mécaniques. En outre, dans le cas d'une étude thermique ou mécanique de ce même système électrotechnique, il est nécessaire d'évaluer correctement les termes sources des problèmes. Or, ceux-ci sont le plus souvent d'origine électromagnétique (pertes par effet Joule ou pertes fer pour le problème thermique [4][5][21][32], efforts électromagnétiques pour le problème mécanique [7][16][19]).

Ainsi, dans le cas de systèmes réels soumis à des variations de températures importantes ou à des déformations ayant une influence non négligeable sur le comportement des matériaux, il est nécessaire de réaliser une modélisation multiphysique. Ces dernières années, de nombreux travaux ont été réalisés en ce sens, qu'il s'agisse de couplages magnétothermique [14][18][21][32] ou magnéto-mécanique [8][15][22][27][40][41].

Cependant, chaque domaine de la physique ayant ses propres particularités, les maillages utilisés lors des modélisations électromagnétique, thermique ou mécanique d'un système sont le plus souvent différents [32][41]. Aussi, dans le cas d'une modélisation multiphysique d'un système, il peut s'avérer nécessaire de transférer les informations obtenues d'un maillage vers un autre.

Ainsi, les travaux présentés dans ce mémoire concernent la mise en œuvre d'une méthode permettant la réalisation de cette opération. Ces travaux ont été effectués dans le cadre du Centre National de Recherche Technologique (CNRT) et en cotutelle entre les universités de Lille 1 et de Liège.

Le premier chapitre de ce mémoire a pour objet la présentation des structures mathématiques régissant les phénomènes de l'électromagnétisme, de la thermique et de l'élasticité. Pour chaque cas, les systèmes d'équations sont tout d'abord présentés dans le domaine continu, puis les différentes formulations qui en découlent – en champ ou en potentiel pour l'électromagnétisme, en température pour la thermique et en déplacement pour l'élasticité – sont développées. En outre, une analyse des espaces de discrétisation des inconnues employées dans ces formulations ainsi que des grandeurs de couplage est réalisée. Enfin, nous présentons les différentes stratégies de couplage possibles lors d'une modélisation multiphysique, et en particulier celle qui consiste en un couplage "faible". C'est notamment cette dernière qui est utilisée dans la suite de ce mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré à la méthode de projection de grandeurs discrètes proprement dite [28][52]. Après une introduction basée sur une interprétation géométrique de la méthode des éléments finis, la méthode de projection est développée dans le cas général, c'est-à-dire pour des champs discrets indépendamment de toute considération physique particulière. Puis, pour chaque domaine de la physique considéré dans ce document, les contraintes à ajouter à la méthode générale pour la bonne prise en compte des propriétés inhérentes à chaque grandeur – champ magnétique, densité de courant, quantité de chaleur, densité de force – sont analysées et développées. Enfin, la méthode est validée dans le cas de l'électromagnétisme sur deux exemples académiques, l'un traitant de la magnéto-statique, l'autre de la magnéto-dynamique.

Dans le troisième chapitre, la méthode de projection est mise en œuvre dans le cas de la modélisation multiphysique de systèmes électrotechniques. Une première étude consiste en la modélisation magnétothermique d'un système industriel de transport de l'énergie électrique [46]. Dans ce cas, les maillages employés pour les modélisations électromagnétique et thermique sont différents. Les formulations exposées dans le deuxième chapitre concernant la projection de la quantité de chaleur, d'une part, et de la température, d'autre part, sont alors employées. Une seconde étude, magnéto-mécanique, est réalisée, utilisant également des maillages différents. Dans ce cas, la méthode de projection est employée pour le transfert de la densité de force depuis le maillage électromagnétique vers le maillage mécanique.

CHAPITRE I MODELES MATHÉMATIQUES

I.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons introduire les modèles mathématiques régissant les phénomènes d'électromagnétisme, de thermique et de mécanique. Pour chacun de ces phénomènes, les équations constituant le problème à résoudre – respectivement les équations de Maxwell, de diffusion de la chaleur et d'état d'équilibre – seront présentées. Puis, sur la base de ces équations, les différentes formulations permettant la résolution des problèmes seront déduites. Pour chacune de ces formulations, les espaces fonctionnels permettant d'accueillir les inconnues discrètes seront présentés. Enfin, nous verrons comment coupler les différents problèmes entre eux, en particulier dans le cas de couplages magnétothermique et magnéto-mécanique.

I.2 Problème Magnétique

I.2.1 Equations à résoudre

I.2.1.1 Equations de Maxwell

On considère un domaine D constitué d'air, de matériaux magnétiques et/ou conducteurs et de sources de champs magnétiques. La frontière de D est notée Γ . A l'intérieur de D l'ensemble des phénomènes électromagnétiques est régi par les équations de Maxwell [9]:

$$\mathit{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad (\text{I.1})$$

$$\mathit{rot} \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (\text{I.2})$$

$$\mathit{div} \mathbf{b} = 0 \quad (\text{I.3})$$

$$\mathit{div} \mathbf{d} = \rho \quad (\text{I.4})$$

avec \mathbf{h} le champ magnétique (A.m^{-1}), \mathbf{b} l'induction magnétique (T), \mathbf{e} le champ électrique (V.m^{-1}), \mathbf{j} la densité de courant (A.m^{-2}), ρ la densité volumique de charge (C.m^{-3}), \mathbf{d} l'induction électrique (C.m^{-2}) et t le temps (s).

Dans la plupart des problèmes d'électrotechnique classique la fréquence des signaux est relativement basse. Aussi, il est possible de négliger les courants de déplacement introduits par le terme $\partial_t \mathbf{d}$. Dans ces conditions, à partir de l'équation (I.1), on obtient la forme locale du théorème d'Ampère :

$$\mathbf{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad (\text{I.5})$$

On peut alors en déduire la conservation de la densité de courant :

$$\text{div} \mathbf{j} = 0 \quad (\text{I.6})$$

I.2.1.2 Lois de comportement

Les équations de Maxwell sont générales et sont indépendantes des caractéristiques des milieux. Il convient donc d'ajouter à ces équations les lois de comportement, celles-ci permettant de relier les différents champs, électrique et magnétique, entre eux.

Le champ électrique \mathbf{e} est relié à la densité de courant \mathbf{j} par la forme locale de la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (\text{I.7})$$

avec σ la conductivité électrique ($\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ou $\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$).

Dans la plupart des problèmes d'électrotechnique classique, la température est considérée constante dans tout le domaine d'étude. Dans ces conditions, la conductivité électrique est également considérée constante dans chaque milieu. Cependant, dès lors que des variations de température significatives apparaissent dans le système étudié, il convient de prendre en compte les effets de la température sur la conductivité électrique, au travers d'une étude magnétothermique, comme nous le verrons par la suite.

En ce qui concerne le comportement magnétique, pour les matériaux diamagnétiques, la relation entre \mathbf{b} et \mathbf{h} est linéaire et de la forme :

$$\mathbf{b} = \mu_0 \mu_r \mathbf{h} \quad (\text{I.8})$$

avec μ_0 la perméabilité magnétique du vide ($\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$) et μ_r la perméabilité relative du matériau considéré. Pour des matériaux ferromagnétiques, si l'on néglige le phénomène d'hystérésis, il est possible d'exprimer \mathbf{b} par une fonction univoque de la forme :

$$\mathbf{b} = \mu(|\mathbf{h}|) \mathbf{h} \quad (\text{I.9})$$

avec μ une fonction du module de \mathbf{h} .

Dans le cas de matériaux durs (aimants permanents) seule la partie utile du cycle d'hystérésis est considérée. Celle-ci peut être modélisée par la relation :

$$\mathbf{b} = \mu_a \mathbf{h} + \mathbf{b}_r \quad (\text{I.10})$$

où μ_a est la perméabilité magnétique de l'aimant (souvent considérée comme constante et proche de μ_0) et où \mathbf{b}_r représente l'induction rémanente de l'aimant permanent.

I.2.1.3 Conditions aux limites

Le système composé des équations de Maxwell et des lois de comportement admet une infinité de solutions. Pour que le problème soit complet, il convient d'imposer des conditions aux limites à la frontière Γ du domaine D . Pour ce faire, celle-ci est décomposée en

deux parties Γ_e et Γ_h telles que $\Gamma_e \cup \Gamma_h = \Gamma$ et $\Gamma_e \cap \Gamma_h = \emptyset$. Les conditions aux limites sur \mathbf{b} et \mathbf{h} s'écrivent alors :

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_e} = 0 \quad (\text{I.11})$$

$$\mathbf{h} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (\text{I.12})$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire correspondant à la normale sortante à la frontière Γ .

Dans le cas où la surface Γ_e est simplement connexe, on peut alors déduire des relations (I.2) et (I.11) la condition aux limites sur le champ électrique \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_e} = 0 \quad (\text{I.13})$$

De la même façon, on déduit la condition aux limites sur la densité de courant \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0 \quad (\text{I.14})$$

1.2.1.4 Espaces fonctionnels

Afin de résoudre les équations de Maxwell dans le domaine D , il est nécessaire d'introduire les domaines de définition des différents opérateurs différentiels utilisés en électromagnétisme que sont le gradient, le rotationnel et la divergence d'un vecteur (respectivement notés **grad**, **rot** et **div**). Pour ce faire, nous considérons dans la suite le domaine D simplement connexe ainsi que sa frontière Γ .

On note $L^2(D)$ l'espace des fonctions scalaires de carré intégrable sur le domaine D . De plus, on introduit le produit scalaire, associé à cet espace fonctionnel, noté (u, v) et défini comme suit :

$$(u, v)_D = \int_D u(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in L^2(D) \quad (\text{I.15})$$

En outre, la norme d'un élément u de $L^2(D)$ est définie par :

$$\|u\|_{L^2(D)} = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\int_D u^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}} \quad (\text{I.16})$$

De la même façon, on note $\mathbf{L}^2(D)$ l'espace des champs de vecteurs dont le carré de la norme est intégrable sur le domaine D . Nous lui associons le produit scalaire noté (\mathbf{u}, \mathbf{v}) et défini comme suit :

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_D = \int_D \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D) \quad (\text{I.17})$$

La norme d'un élément \mathbf{u} de $\mathbf{L}^2(D)$ est alors définie par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(D)} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{\int_D u^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \quad (\text{I.18})$$

Les domaines de définition des opérateurs différentiels sont alors des sous-espaces de $\mathbf{L}^2(D)$ et $\mathbf{L}^2(D)$. Ils sont définis par :

$$\mathbf{E}^0 = \left\{ f \in \mathbf{L}^2(D); \mathbf{grad} f \in \mathbf{L}^2(D) \right\} \quad (\text{I.19})$$

$$\mathbf{E}^1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D); \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(D) \right\} \quad (\text{I.20})$$

$$\mathbf{E}^2 = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D); \mathbf{div} \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(D) \right\} \quad (\text{I.21})$$

Le domaine D ainsi que sa frontière Γ étant supposés contractiles l'image de l'espace \mathbf{E}^0 par le gradient est égale au noyau du rotationnel dans l'espace \mathbf{E}^1 . De la même façon, l'image de l'espace fonctionnel \mathbf{E}^1 par le rotationnel est égale au noyau de la divergence dans l'espace \mathbf{E}^2 . Ces propriétés peuvent s'écrire :

$$\text{Im} \left[\mathbf{grad} \left(\mathbf{E}^0 \right) \right] = \text{Ker} \left[\mathbf{rot} \left(\mathbf{E}^1 \right) \right] \quad (\text{I.22})$$

$$\text{Im} \left[\mathbf{rot} \left(\mathbf{E}^1 \right) \right] = \text{Ker} \left[\mathbf{div} \left(\mathbf{E}^2 \right) \right] \quad (\text{I.23})$$

où $\text{Im} \left[\lambda(X) \right]$ est l'image par l'opérateur λ de l'espace X et $\text{Ker} \left[\lambda(X) \right]$ est le noyau de l'opérateur λ défini dans l'espace X . Les relations (I.22) et (I.23) permettent ainsi de vérifier respectivement les relations classiques $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}) = 0$ et $\mathbf{div}(\mathbf{rot}) = 0$.

Pour prendre en compte les conditions aux limites sur Γ_e et Γ_h , il est nécessaire de définir deux ensembles de sous-espaces \mathbf{E}_b et \mathbf{E}_h . Ces derniers sont des restrictions des espaces $\mathbf{E}^0, \mathbf{E}^1$ et \mathbf{E}^2 . On peut alors écrire pour la frontière Γ_e :

$$\mathbf{E}_b^0 = \left\{ f \in \mathbf{E}^0; f = 0|_{\Gamma_e} \right\} \quad (\text{I.24})$$

$$\mathbf{E}_b^1 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{E}^1; \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0|_{\Gamma_e} \right\} \quad (\text{I.25})$$

$$\mathbf{E}_b^2 = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{E}^2; \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0|_{\Gamma_e} \right\} \quad (\text{I.26})$$

Et pour la frontière Γ_h :

$$E_h^0 = \left\{ f \in E^0; f = 0|_{\Gamma_h} \right\} \quad (I.27)$$

$$E_h^1 = \left\{ \mathbf{u} \in E^1; \mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0|_{\Gamma_h} \right\} \quad (I.28)$$

$$E_h^2 = \left\{ \mathbf{u} \in E^2; \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0|_{\Gamma_h} \right\} \quad (I.29)$$

Enfin, pour compléter l'ensemble des espaces, on introduit deux sous-espaces, notés E_b^3 et E_h^3 , qui sont respectivement les images des espaces E_b^2 et E_h^2 par l'opérateur divergence.

I.2.1.5 Diagramme de Tonti

La notion d'opérateur adjoint, que nous allons développer maintenant, permet d'établir un lien entre les espaces E_b^i et E_h^i ($i \in \{1, 2, 3\}$) précédemment définis.

Soit λ un opérateur défini sur l'espace E^i . Son opérateur adjoint $\tilde{\lambda}$ sur l'espace dual de E^i , noté \tilde{E}^i , est défini par la relation :

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \lambda(\mathbf{v}) d\tau = \int_D \mathbf{v} \cdot \tilde{\lambda}(\mathbf{u}) d\tau + \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\gamma \quad \text{avec } \mathbf{u} \in E^i \text{ et } \mathbf{v} \in \tilde{E}^i \quad (I.30)$$

A partir des propriétés des opérateurs vectoriels gradient, rotationnel et divergence, et en leur appliquant le théorème de Green, on peut écrire :

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} f d\tau = - \int_D f \mathbf{div} \mathbf{u} d\tau + \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) f d\gamma \quad (I.31)$$

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} d\tau = \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} d\tau + \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\gamma \quad (I.32)$$

Compte tenu des conditions aux limites associées aux espaces E_b^i et E_h^i précédemment définis, les termes d'intégrales de surface $\int_{\Gamma} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) f d\gamma$ et $\int_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\gamma$ s'annulent. Les relations (I.31) et (I.32) deviennent alors :

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} f d\tau = - \int_D f \mathbf{div} \mathbf{u} d\tau \quad \text{avec } f \in E_h^0 \text{ et } \mathbf{u} \in E_b^2 \quad (I.33)$$

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} d\tau = - \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u} d\tau \quad \text{avec } \mathbf{u} \in E_h^1 \text{ et } \mathbf{v} \in E_b^1 \quad (I.34)$$

On déduit alors des relations (I.33) et (I.34) que l'opérateur adjoint du gradient est l'opposé de la divergence et celui du rotationnel est lui-même.

Il est possible de représenter géométriquement l'ensemble de ces résultats à l'aide du diagramme de Tonti [23][36] présenté sur la Figure I-1 :

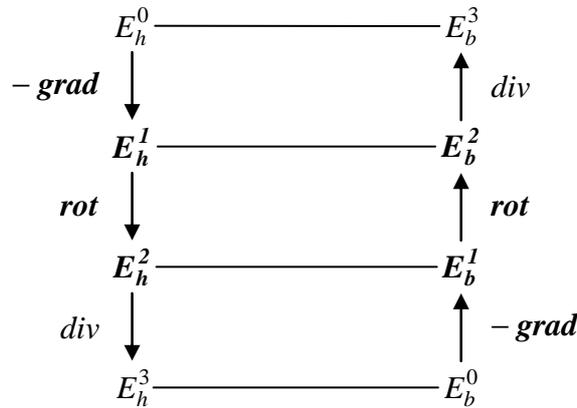


Figure I-1 Diagramme de Tonti

Pour prendre en compte la dérivée par rapport au temps, on introduit une troisième dimension au diagramme précédent. Il est alors possible de représenter le problème défini par les équations de Maxwell, les lois de comportement et les conditions aux limites précédemment définies. En effet, à partir des relations (I.19), (I.20) et (I.21), on déduit que les grandeurs \mathbf{h} , \mathbf{b} , \mathbf{j} et \mathbf{e} appartiennent respectivement aux espaces fonctionnels E_h^1 , E_b^2 , E_h^2 et E_b^1 . De plus, les lois de comportement, notées " μ " et " σ ", permettent de relier les suites d'espaces E_h^i et E_b^i . On obtient alors le diagramme de Tonti appliqué à l'électromagnétisme représenté sur la Figure I-2 :

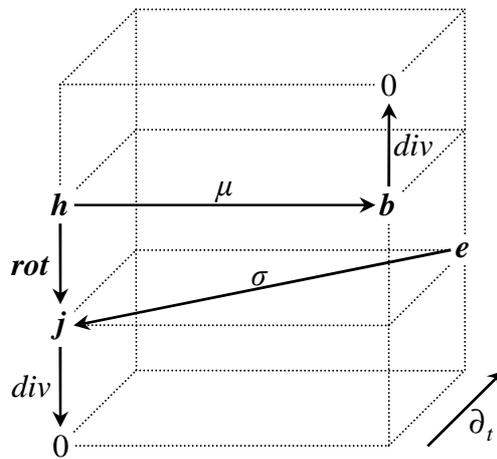


Figure I-2 Diagramme de Tonti appliqué à l'électromagnétisme

I.2.2 Les formulations de l'électromagnétisme (domaine continu)

I.2.2.1 Cas de la magnétostatique

Dans le cas de la magnétostatique, toutes les grandeurs sont considérées invariantes dans le temps. De plus, la répartition spatiale de la densité de courant \mathbf{j} est supposée connue. Nous la noterons \mathbf{j}_0 . Le système d'équations a alors pour expression :

$$\mathbf{roth} = \mathbf{j}_0 \quad (\text{I.35})$$

$$\mathbf{divb} = 0 \quad (\text{I.36})$$

avec la loi de comportement reliant le champ et l'induction magnétique et les conditions aux limites (I.11) et (I.12).

Pour résoudre ce système, on a recours soit au potentiel scalaire magnétique Ω , soit au potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} . Le premier, associé à un terme source, permet de vérifier l'équation (I.35), alors que le second permet de vérifier implicitement l'équation (I.36).

Formulation en potentiel scalaire magnétique Ω

Pour prendre en compte les inducteurs, on introduit un champ magnétique source \mathbf{h}_s tel que son rotationnel soit égal à la densité de courant \mathbf{j}_0 . Ce champ source appartient à l'espace fonctionnel E_h^1 . De plus, grâce à la relation (I.22), il est possible d'introduire un potentiel scalaire magnétique Ω , appartenant à l'espace fonctionnel E_h^0 , tel que :

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_s - \mathbf{grad}\Omega \quad (\text{I.37})$$

avec les conditions aux limites $\mathbf{h}_s \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0$ et $\Omega|_{\Gamma_h} = \text{cte}$ par morceau non connexe de Γ_h .

La formulation magnétostatique en potentiel scalaire magnétique s'obtient alors en regroupant les équations (I.36) et (I.37) avec la loi de comportement reliant le champ et l'induction magnétique et s'écrit :

$$\mathbf{div}(\mu(\mathbf{h}_s - \mathbf{grad}\Omega)) = 0 \quad (\text{I.38})$$

Formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{a}

Grâce à la propriété énoncée par la relation (I.23), l'équation (I.36) permet d'introduire le potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} . Celui-ci appartient à l'espace fonctionnel E_b^1 et est tel que son rotationnel est égal à l'induction magnétique \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \mathbf{rota} \quad (\text{I.39})$$

La composante normale de l'induction magnétique \mathbf{b} étant nulle sur la frontière Γ_b , on obtient la condition aux limites sur \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_e} = \mathbf{grad}u \times \mathbf{n}|_{\Gamma_e} \quad (\text{I.40})$$

où u est un potentiel scalaire défini sur la surface Γ_e . En outre, la relation (I.40) s'annule dans le cas où Γ_e est simplement connexe [45].

En portant la loi de comportement reliant le champ et l'induction magnétique et la relation (I.39) dans (I.35) on obtient la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rota} \right) = \mathbf{j}_0 \quad (\text{I.41})$$

Enfin, afin d'assurer l'unicité de la solution, il convient d'ajouter une condition supplémentaire sur le potentiel vecteur \mathbf{a} , appelée condition de jauge. Il en existe principalement deux. La première, appelée jauge de Coulomb, s'écrit $\text{div} \mathbf{a} = 0$. La seconde quant à elle consiste à imposer le produit scalaire $\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$ où \mathbf{w} représente un champ de vecteurs dont les lignes ne se referment pas et sont telles qu'elles relient tous les points du domaine.

1.2.2.2 Cas de la magnétodynamique

Dans le cas de la magnétodynamique, les différents champs (électrique et magnétique) sont dépendants du temps. De ce fait, dans le cas de l'approximation de l'électrotechnique (courants de déplacement négligés), le système d'équations à résoudre s'écrit :

$$\text{rote} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (\text{I.42})$$

$$\text{roth} = \mathbf{j} \quad (\text{I.43})$$

auquel il convient d'ajouter les lois de comportement (I.7) et (I.9) ainsi que les conditions aux limites (I.11) à (I.14). Pour résoudre ce système d'équations, il est possible d'utiliser, tout comme en magnétostatique, différentes formulations dont les variables peuvent être le champ magnétique \mathbf{h} , le champ électrique \mathbf{e} ou les potentiels. On obtient alors deux familles de formulations : les formulations magnétique et électrique.

Formulation magnétique en champ magnétique \mathbf{h}

Pour les régions conductrices du domaine d'étude, c'est-à-dire celles pour lesquelles la conductivité électrique σ est non nulle, l'équation à résoudre est obtenue en introduisant les lois de comportement (I.7) et (I.9) dans la relation (I.42) :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \right) + \frac{\partial \mu \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.44})$$

En remplaçant la densité de courant \mathbf{j} par son expression en fonction du champ magnétique \mathbf{h} , on obtient la formulation magnétodynamique en champ magnétique :

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \text{roth} \right) + \frac{\partial \mu \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.45})$$

avec pour condition aux limites $\mathbf{h} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0$.

Pour les régions non conductrices le problème revient à résoudre l'équation (I.3), ce qui peut être réalisé en utilisant une formulation magnétostatique en potentiel scalaire telle que (I.38).

Formulation magnétique en potentiels t - Ω

On peut déduire facilement de (I.43) que la densité de courant est à divergence nulle. Aussi, il est possible de définir un potentiel vecteur électrique t appartenant à l'espace E_h^1 tel que :

$$j = \text{rot}(t) \tag{I.46}$$

De plus, en reportant (I.46) dans (I.43), on déduit :

$$h = t - \text{grad}\Omega \tag{I.47}$$

avec Ω le potentiel scalaire magnétique défini précédemment. Par conséquent, pour les régions conductrices, la formulation magnétodynamique en potentiels t - Ω s'obtient en remplaçant h par son expression (I.47) dans la formulation en champ magnétique (I.45) :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\text{rot}(t)\right) + \frac{\partial}{\partial t}[\mu(t - \text{grad}\Omega)] = 0 \tag{I.48}$$

De la même façon, pour traiter les régions non conductrices, cette formulation doit être couplée à une formulation magnétostatique en potentiel scalaire. De plus, le potentiel vecteur électrique t n'étant pas unique, il est nécessaire d'imposer une condition de jauge afin d'assurer l'unicité de la solution.

Formulation électrique en potentiels a - v

Comme nous l'avons vu précédemment, il est possible d'exprimer l'induction magnétique b en fonction d'un potentiel vecteur électrique a . Aussi, en reportant (I.39) dans (I.42), on obtient :

$$\text{rot}\left(e + \frac{\partial a}{\partial t}\right) = 0 \tag{I.49}$$

Grâce à la propriété énoncée par la relation (I.22), il est possible, à partir de (I.49), d'introduire un potentiel scalaire électrique v appartenant à l'espace fonctionnel E_b^0 et qui vérifie :

$$e = -\frac{\partial a}{\partial t} - \text{grad}v \tag{I.50}$$

Aussi, en reportant (I.39) et (I.50) dans (I.1), et en remplaçant le champ magnétique h , l'induction magnétique b et le champ électrique e par leurs expressions respectives données par les lois de comportement, on en déduit la formulation magnétodynamique en potentiels $a-v$:

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rota}\right) + \sigma\left(\frac{\partial a}{\partial t} + \text{grad}v\right) = 0 \tag{I.51}$$

Il est par ailleurs à noter que le potentiel scalaire électrique v n'est à définir qu'à l'intérieur des parties conductrices du domaine d'étude. De plus, comme pour la formulation magnétostatique en potentiel vecteur, il est nécessaire d'appliquer une condition de jauge afin d'assurer l'unicité de la solution.

I.2.3 Domaine discret

La résolution des équations (I.38), (I.41), (I.45), (I.48) et (I.51) ne peut pas, en général, être effectuée analytiquement. On a alors recours aux méthodes numériques. Dans notre cas, on utilisera la méthode des éléments finis.

La discrétisation du problème consiste à remplacer les espaces fonctionnels continus E^0 , E^1 , E^2 et E^3 par des espaces discrets. Pour cela, le domaine d'étude D est découpé en un nombre fini d'éléments (prismes, hexaèdres ou tétraèdres en 3D) composés de nœuds, d'arêtes, de facettes et de volumes. Les inconnues du problème sont alors discrétisées sur chaque élément à l'aide de fonctions de forme (ou fonctions d'interpolation). Il en est ainsi des fonctions nodales, d'arêtes, de facettes et de volumes, respectivement notées w_n , w_a , w_f et w_v . Ces fonctions de forme permettent d'interpoler la valeur des inconnues en tout point du domaine d'étude D et engendrent des espaces fonctionnels discrets notés W^0 , W^1 , W^2 et W^3 . La littérature étant très vaste sur ce sujet, nous rappelons simplement les principales propriétés des fonctions de forme dans le Tableau I-1 :

Fonctions	Propriétés	Continuité	Espace engendré
w_n	$w_{n_i}(x_j) = \delta_{ij}$	Continue	W^0
w_a	$\int_{a_i} w_{a_j} \cdot dl = \delta_{ij}$	$w_a \times n$	W^1
w_f	$\int_{f_i} w_{f_j} \cdot ds = \delta_{ij}$	$w_f \cdot n$	W^2
w_v	$\int_{v_i} w_{v_j} d\tau = \delta_{ij}$	Discontinue	W^3

Tableau I-1 Principales propriétés des fonctions de forme

Il est alors possible de montrer que les différentes grandeurs physiques définies précédemment peuvent également être discrétisées et qu'elles trouvent place naturellement dans les espaces fonctionnels discrets. Pour cela, on définit, comme dans le domaine continu, les sous-espaces W_b^i et W_h^i avec $i \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi, les potentiels scalaires magnétique Ω et électrique v se décomposent dans l'espace des éléments nodaux W^0 . Les champs magnétique h et électrique e ainsi que les potentiels vecteurs magnétique a et électrique t se décomposent quant à eux dans l'espace des éléments d'arêtes W^1 . Enfin l'espace des éléments de facettes W^2 accueille la décomposition de la densité de courant j et de l'induction magnétique b .

Tout comme dans le domaine continu, il est possible de représenter graphiquement les deux suites de sous-espaces discrets W_b^i et W_h^i dans un diagramme de Tonti :

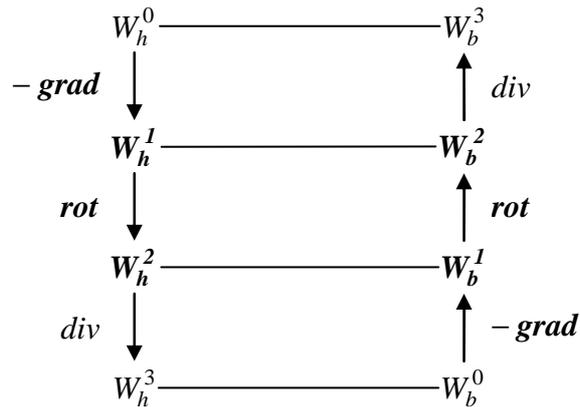


Figure I-3 Diagramme de Tonti discret

Dans la suite, on notera ε_n l'ensemble des nœuds composant le maillage, ε_a l'ensemble des arêtes, ε_f l'ensemble des facettes et ε_v l'ensemble des volumes. De la même façon, N_n, N_a, N_f et N_v feront référence, respectivement, au nombre de nœuds, d'arêtes, de facettes et de volumes du maillage.

1.2.3.1 Cas de la magnétostatique

Formulation en potentiel scalaire magnétique Ω

Nous venons de le voir, le potentiel scalaire magnétique Ω se décompose dans l'espace des éléments nodaux W^0 . Il peut donc s'écrire, sous sa forme discrète :

$$\Omega_d = \sum_{k \in \varepsilon_n} w_{n_k} \Omega_{n_k} \tag{I.52}$$

où Ω_{n_k} est la valeur du potentiel scalaire magnétique au nœud "k".

Le champ source \mathbf{h}_s se décompose dans l'espace des éléments d'arêtes W^1 . Sa forme discrète \mathbf{h}_{s_d} peut s'écrire :

$$\mathbf{h}_{s_d} = \sum_{k \in \varepsilon_a} w_{a_k} \mathbf{h}_{s_{a_k}} \tag{I.53}$$

où $\mathbf{h}_{s_{a_k}}$ représente la circulation du champ source le long de l'arête "k".

On applique alors la méthode des résidus pondérés à l'équation (I.38) pour obtenir la forme intégrale de la formulation en potentiel scalaire magnétique :

$$\int_D \psi \left[\text{div} \left(\mu \left(\mathbf{h}_{s_d} - \text{grad} \Omega_d \right) \right) \right] d\tau = 0 \tag{I.54}$$

où ψ représente une fonction test.

La méthode de Galerkin consiste alors à prendre la fonction test ψ égale aux fonctions d'interpolation nodales w_n . On obtient alors l'expression de la forme faible de la formulation magnétostatique en potentiel scalaire magnétique :

$$\begin{aligned} & \int_D \mu(\mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{grad} \Omega_d) d\tau - \int_{\Gamma} w_n \mu (\mathbf{h}_{s_d} - \mathbf{grad} \Omega_d) \cdot \mathbf{n}_s d\gamma \\ & = \int_D \mu \mathbf{grad} w_n \cdot \mathbf{h}_{s_d} d\tau \quad \forall w_n \in W_h^0 \end{aligned} \quad (\text{I.55})$$

où \mathbf{n}_s représente la normale sortante à la frontière du domaine.

Il est par ailleurs à noter que, compte tenu des conditions aux limites du problème, l'intégrale surfacique disparaît. En effet, on a $w_n = 0$ sur Γ_h , ce que permet d'imposer la condition $\mathbf{h} \times \mathbf{n} = 0$ au sens fort. De plus, en annulant l'intégrale surfacique sur Γ_e , on impose la condition $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$ au sens faible.

Formulation en potentiel vecteur magnétique a

Le potentiel vecteur se décompose dans l'espace des éléments d'arêtes \mathbf{W}^1 . Il est donc relié à la valeur de sa circulation le long d'une arête "k" par les fonctions de forme w_a selon la relation :

$$\mathbf{a}_d = \sum_{k \in \mathcal{E}_a} w_{a_k} a_{a_k} \quad (\text{I.56})$$

La densité de courant, quant à elle, se décompose dans l'espace des éléments de facettes \mathbf{W}^2 . Sa forme discrète s'écrit donc :

$$\mathbf{j}_{0_d} = \sum_{k \in \mathcal{E}_f} w_{f_k} j_{f_k} \quad (\text{I.57})$$

où j_{f_k} représente le flux de la densité de courant traversant la facette "k".

La forme intégrale de la formulation magnétostatique en potentiel vecteur s'écrit donc :

$$\int_D \psi \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{a}_d \right) - \mathbf{j}_{0_d} \right] d\tau = 0 \quad (\text{I.58})$$

où ψ est une fonction test vectorielle. On prend alors cette dernière égale aux fonctions d'interpolation d'arêtes w_a et, à l'aide d'une intégration par partie, on obtient la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique :

$$\begin{aligned}
 & \int_D \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{rota}_d \right) d\tau - \int_{\Gamma} \mathbf{w}_a \left(\mathbf{n}_s \times \frac{1}{\mu} \mathbf{rota}_d \right) d\gamma \\
 & = \int_D \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{j}_{0_d} d\tau \quad \forall \mathbf{w}_a \in \mathbf{W}_b^1
 \end{aligned} \tag{I.59}$$

Tout comme pour la formulation en potentiel scalaire magnétique, l'intégrale de surface s'annule compte tenu des conditions aux limites [13] sur Γ_e et Γ_h .

I.2.3.2 Cas de la magnétodynamique

Formulation magnétique en champ magnétique \mathbf{h}

Tout comme le champ source \mathbf{h}_s , le champ magnétique \mathbf{h} se décompose dans l'espace des éléments d'arêtes \mathbf{W}^1 et sa forme discrète s'écrit sous la forme donnée par la relation (I.53). On applique donc la méthode des résidus pondérés à l'équation (I.45) pour obtenir la forme intégrale de la formulation magnétodynamique en champ magnétique :

$$\int_D \psi \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{roth}_d \right) + \frac{\partial \mu \mathbf{h}_d}{\partial t} \right] d\tau = 0 \tag{I.60}$$

La fonction test ψ est alors prise égale aux fonction d'interpolation d'arêtes \mathbf{w}_a :

$$\int_D \mu \mathbf{w}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_d}{\partial t} d\tau - \int_{\Gamma} \mathbf{w}_a (\mathbf{n}_s \times \mathbf{h}_d) d\gamma = - \int_D \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{roth}_d \right) d\tau \quad \forall \mathbf{w}_a \in \mathbf{W}_h^1 \tag{I.61}$$

Formulation magnétique en potentiels t - Ω

Cette formulation possède deux inconnues : le potentiel scalaire magnétique Ω et le potentiel vecteur électrique \mathbf{t} . Si, comme nous l'avons vu précédemment, le premier se décompose dans l'espace des éléments nodaux, le second s'inscrit dans l'espace des éléments d'arêtes \mathbf{W}^1 :

$$\mathbf{t}_d = \sum_{k \in \mathcal{E}_a} \mathbf{w}_{a_k} t_{a_k} \tag{I.62}$$

Par conséquent, la fonction test ψ fait appel aux deux variables et est égale à $\mathbf{w}_a - \mathbf{grad} w_n$. La formulation t - Ω s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 & \int_D (\mathbf{w}_a - \mathbf{grad} w_n) \cdot \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rott}_d \right) + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{t}_d - \mathbf{grad} \Omega_d) \right] d\tau \\
 & - \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_a - \mathbf{grad} w_n) \cdot (\mathbf{n}_s \times \mathbf{e}) d\gamma = 0
 \end{aligned} \tag{I.63}$$

Cette équation peut se décomposer en deux parties distinctes. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & \int_D \left[\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{rott}_d + \mu \mathbf{w}_a \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{t}_d - \mathbf{grad} \Omega_d) \right] d\tau - \int_{\Gamma} \mathbf{w}_a \cdot (\mathbf{n}_s \times \mathbf{e}) d\gamma = 0 \\
 & - \int_D \mu \mathbf{grad} w_n \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{t}_d - \mathbf{grad} \Omega_d) d\tau - \int_{\Gamma} w_n \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_s) d\gamma = 0 \\
 & \forall w_n \in W_h^0 \text{ et } \forall \mathbf{w}_a \in \mathbf{W}_h^1
 \end{aligned} \tag{I.64}$$

On peut par ailleurs noter que la première partie de ce système correspond à la loi de Faraday, alors que la deuxième exprime la conservation de l'induction magnétique.

Formulation électrique en potentiels a-v

Comme la formulation précédente, la formulation électrique en potentiels \mathbf{a} - v possède deux inconnues, discrétisées dans l'espace des éléments d'arêtes \mathbf{W}^1 (potentiel vecteur magnétique \mathbf{a}) et dans l'espace des éléments nodaux (potentiel scalaire électrique v). D'où la forme de ce dernier :

$$v_d = \sum_{k \in \mathcal{E}_n} w_{n_k} v_{n_k} \tag{I.65}$$

La fonction test $\boldsymbol{\psi}$ est alors égale à $\mathbf{w}_a + \mathbf{grad} w_n$, ce qui conduit à l'expression :

$$\begin{aligned}
 & \int_D (\mathbf{w}_a + \mathbf{grad} w_n) \cdot \left[\mathbf{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rota}_d \right) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{a}_d}{\partial t} + \mathbf{grad} v_d \right) \right] d\tau \\
 & - \int_{\Gamma} (\mathbf{w}_a + \mathbf{grad} w_n) \cdot (\mathbf{n}_s \times \mathbf{h}) d\gamma = 0
 \end{aligned} \tag{I.66}$$

Tout comme pour la formulation magnétique en potentiels \mathbf{t} - Ω , on peut décomposer l'équation (I.66) en deux parties, la première correspondant au théorème d'Ampère et la seconde exprimant la conservation du flux de la densité de courant. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{aligned}
 & \int_D \left[\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_a \cdot \mathbf{rota}_d + \sigma \mathbf{w}_a \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{a}_d}{\partial t} + \mathbf{grad} v_d \right) \right] d\tau - \int_{\Gamma} \mathbf{w}_a \cdot (\mathbf{n}_s \times \mathbf{h}) d\gamma = 0 \\
 & - \int_D \sigma \mathbf{grad} w_n \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{a}_d}{\partial t} + \mathbf{grad} v_d \right) d\tau - \int_{\Gamma} w_n \cdot (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_s) d\gamma = 0 \\
 & \forall w_n \in W_b^0 \text{ et } \forall \mathbf{w}_a \in \mathbf{W}_b^1
 \end{aligned} \tag{I.67}$$

I.2.4 Calcul des forces électromagnétiques

Il existe plusieurs méthodes permettant le calcul des forces magnétiques s'exerçant sur un système. Le tenseur de Maxwell, par exemple, permet de calculer la force totale s'exerçant sur une région du domaine d'étude. En revanche, la méthode des travaux virtuels permet d'évaluer la distribution des forces dans tout le système. C'est cette dernière méthode que nous allons développer dans cette partie.

Les expressions respectives de l'énergie magnétique et de la co-énergie sont données par :

$$W = \int_D \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv \quad (\text{I.68})$$

$$W' = \int_D \left(\int_0^h \mathbf{b} \cdot d\mathbf{h} \right) dv \quad (\text{I.69})$$

Le principe des travaux virtuels consiste à déterminer la force exercée sur une région D d'un système en dérivant l'énergie ou la co-énergie par rapport à un déplacement \mathbf{u} respectivement à \mathbf{b} et \mathbf{h} constant :

$$\mathbf{F}_u = - \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{b}=\text{cte}} \quad (\text{I.70})$$

$$\mathbf{F}_u = \left. \frac{\partial W'}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{h}=\text{cte}} \quad (\text{I.71})$$

avec $\mathbf{u} = [x, y, z]^T$ un vecteur déplacement exprimé dans le système de coordonnées locales.

Dans le domaine discret, la dérivée de l'énergie ou de la co-énergie peut être obtenue en évaluant ces dernières pour deux positions de la région D . Cette approche nécessite alors deux solutions du problème, donc deux résolutions, et peut engendrer des erreurs numériques importantes [7]. On lui préfère donc une méthode basée sur la dérivation locale de l'énergie et de la co-énergie qui consiste à déformer les éléments d'une couche entourant la région D en déplaçant virtuellement les nœuds de ces derniers. Ainsi, si on applique les expressions précédentes à un élément e de volume v_e du maillage, on obtient sa contribution à la force nodale exercée au nœud n , appartenant à e , et qui s'écrit de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_{u,n}^e = - \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{b}=\text{cte}} = - \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{b}=\text{cte}} \left(\int_{v_e} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv \right) \quad (\text{I.72})$$

$$\mathbf{F}_{u,n}^e = \left. \frac{\partial W'}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{h}=\text{cte}} = \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{h}=\text{cte}} \left(\int_{v_e} \left(\int_0^h \mathbf{b} \cdot d\mathbf{h} \right) dv \right) \quad (\text{I.73})$$

La force nodale $\mathbf{F}_{u,n}$ est alors obtenue en sommant toutes les contributions $\mathbf{F}_{u,n}^e$.

I.3 Problème thermique

Un transfert de chaleur peut s'opérer de trois façons différentes : conduction, convection et rayonnement. Le phénomène de conduction correspond à un transfert de chaleur entre deux points à l'intérieur d'un solide ou d'un fluide soumis à un gradient de température. Le transfert de chaleur par convection, qu'elle soit naturelle ou forcée, a quant à lui pour origine le mouvement d'un fluide. C'est par ailleurs la principale méthode de refroidissement

de systèmes électriques. Enfin, le rayonnement est un transfert d'énergie sans matière, celui-ci s'effectuant par rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus caractéristique de ce type de transfert de chaleur est le rayonnement du soleil.

Si le phénomène de conduction peut être décrit par l'équation de diffusion de la chaleur dans un matériau, les transferts de chaleur par convection et par rayonnement s'apparentent à des conditions aux limites. Aussi ces derniers seront décrits dans la suite.

I.3.1 Equation de diffusion de la chaleur

La présence d'un gradient de température à l'intérieur d'un matériau engendre un flux de chaleur. Le phénomène est décrit par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\lambda \mathbf{grad}T \quad (\text{I.74})$$

où λ représente la conductivité thermique du matériau (en $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$), T la température (en $^{\circ}\text{C}$) et \mathbf{q} le flux de chaleur (en W.m^{-2}).

Un bilan énergétique nous permet d'écrire :

$$\text{div}\mathbf{q} + p = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I.75})$$

avec ρ la masse volumique du matériau (kg.m^{-3}), C_p la chaleur massique ($\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et p les sources volumiques de chaleur (W.m^{-3}).

En regroupant (I.74) et (I.75), on obtient l'équation régissant l'évolution de la température à l'intérieur d'un matériau :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}[\lambda \mathbf{grad}T] = p \quad (\text{I.76})$$

I.3.2 Comportement des matériaux

Les matériaux voient leurs propriétés thermiques telles que la conductivité λ et la chaleur massique C_p dépendre de la température. Cependant, cette variation s'avérant relativement faible compte tenu des températures mises en jeu dans les systèmes électrotechniques – systèmes de chauffage par induction mis à part – il est possible de considérer le problème thermique défini par (I.76) comme linéaire.

I.3.3 Conditions aux limites

Comme la modélisation électromagnétique, la modélisation thermique d'un système nécessite l'imposition de conditions aux limites sur la frontière du domaine d'étude. Cette dernière peut être décomposée en quatre parties. Outre les conditions classiques de type Neumann et Dirichlet, imposées sur Γ_N et Γ_D , il est possible de traiter le cas des transferts de chaleur par phénomènes de convection et de rayonnement également au travers de conditions aux limites. Celles-ci sont alors imposées respectivement sur Γ_c et Γ_r .

I.3.3.1 Transfert de chaleur par convection

Lorsqu'un solide est en contact avec un fluide en mouvement ayant une température différente, un échange de chaleur apparaît par phénomène de convection sur la surface de contact. Cet échange est défini par la relation suivante :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_c} = h_c (T - T_f) \quad (\text{I.77})$$

où T_f est la température du fluide (loin la surface de contact solide/fluide) et h_c le coefficient de convection en $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$.

I.3.3.2 Transfert de chaleur par rayonnement

Tout comme l'échange thermique par convection, le transfert de chaleur par rayonnement est traité par une condition aux limites dont l'expression générale est donnée par la relation suivante :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_r} = \varepsilon_e \sigma_{SB} (T^4 - T_f^4) \quad (\text{I.78})$$

avec ε_e l'émissivité de la surface d'échange (égale à 1 pour un corps noir, inférieure à 1 dans les autres cas) et σ_{SB} la constante de Stephan-Boltzmann ($5,67.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$).

Il est possible, d'un point de vue pratique, de réécrire la relation (I.78) afin de lui donner la même forme qu'une condition de convection. On définit un pseudo coefficient de convection h_r non linéaire et dépendant de la température tel que :

$$h_r(T) = \varepsilon_e \sigma_{SB} \frac{(T^4 - T_f^4)}{T - T_f} \quad (\text{I.79})$$

Ainsi, on peut réécrire la relation (I.78) sous la forme :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_r} = h_r(T)(T - T_f) \quad (\text{I.80})$$

D'un point de vue pratique, la relation (I.80) permet de traiter les phénomènes de convection et de rayonnement à l'aide d'une seule équation.

I.3.3.3 Condition de Dirichlet

L'analogie thermique d'une condition aux limites de type Dirichlet est un "mur isotherme". Il s'agit simplement d'imposer la température constante sur la surface d'échange :

$$T \Big|_{\Gamma_D} = T_D \quad (\text{I.81})$$

On utilise cette condition lorsqu'on considère que le matériau étudié est en contact avec un thermostat thermodynamique.

I.3.3.4 Condition de Neumann

En thermique, la condition de Neumann consiste à imposer la valeur du flux de chaleur traversant la frontière Γ_N . La condition aux limites s'écrit alors :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_r} = Q_N \quad (I.82)$$

I.3.4 Diagramme de Tonti

On peut déduire des relations (I.19) et (I.21) que la température T , le flux de chaleur \mathbf{q} et la quantité de chaleur p appartiennent respectivement aux espaces E^0 , E^2 et E^3 . Aussi, en ajoutant les lois de comportement " ρC_p " et " λ " il est possible de représenter graphiquement le problème thermique à l'aide d'un diagramme de Tonti comme le montre la Figure I-4.

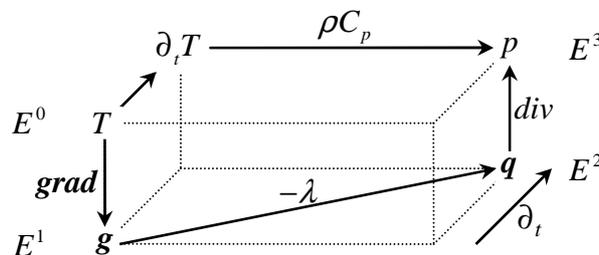


Figure I-4 Diagramme de Tonti appliqué à la thermique

où \mathbf{g} représente le gradient de la température.

I.3.5 Couplage avec le problème magnétique

I.3.5.1 Interaction thermique/électromagnétisme

La température influence grandement les caractéristiques électrique et magnétique des matériaux. Aussi, si les hypothèses sur la conductivité électrique et la perméabilité magnétique énoncées précédemment (§I.2.1.2) conviennent pour la plupart des problèmes d'électromagnétisme, leur dépendance vis-à-vis de la température doit être prise en compte dès lors que cette dernière devient importante.

La résistivité électrique ρ – inverse de la conductivité électrique – varie avec la température selon la relation suivante :

$$\rho(T) = \rho_{ref} \left[1 + \alpha_{1\rho_{ref}} (T - T_{ref}) + \alpha_{2\rho_{ref}} (T - T_{ref})^2 + \dots + \alpha_{n\rho_{ref}} (T - T_{ref})^n \right] \quad (I.83)$$

avec ρ_{ref} la résistivité électrique à $T = T_{ref}$ et $\alpha_{k\rho_{ref}}$ ($k \in [1, n]$) un paramètre dépendant de la température de référence T_{ref} . Cependant, pour la plupart des matériaux les termes $\alpha_{k\rho_{ref}}$ avec $k \geq 2$ sont négligeables devant $\alpha_{1\rho_{ref}}$. La résistivité électrique varie alors linéairement avec la température et la conductivité électrique peut être exprimée par la relation :

$$\sigma(T) = \frac{1}{\rho(T)} = \frac{\sigma_{ref}}{1 + \alpha_{\sigma_{ref}} (T - T_{ref})} \quad (I.84)$$

avec ρ_{ref} la résistivité électrique à $T = T_{ref}$ et $\alpha_{\sigma_{ref}}$ un paramètre dépendant de la température de référence T_{ref} . A titre d'illustration, on trouvera en Annexe I les valeurs de σ_{ref} et $\alpha_{\sigma_{ref}}$ ainsi que l'évolution de la conductivité électrique en fonction de la température pour différents matériaux utilisés en électrotechnique.

La perméabilité magnétique est également influencée par la température. Cependant, contrairement à la conductivité électrique, celle-ci varie peu aux températures de fonctionnement des systèmes électrotechniques classiques qui sont bien inférieures au point de Curie. En effet, pour les alliages métalliques, la relation entre la perméabilité magnétique et la température peut être décrite par l'expression (I.85) [21].

$$\mu(|h|, T) = \mu_0 \left[1 + \sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}} \frac{a}{1 + \frac{|h|}{b}} \right] \quad (I.85)$$

où a et b sont deux coefficients dépendant du matériau.

A titre d'illustration, on montre sur la Figure I-5 l'évolution de la perméabilité relative en fonction de la température pour différentes valeurs du champ magnétique h .

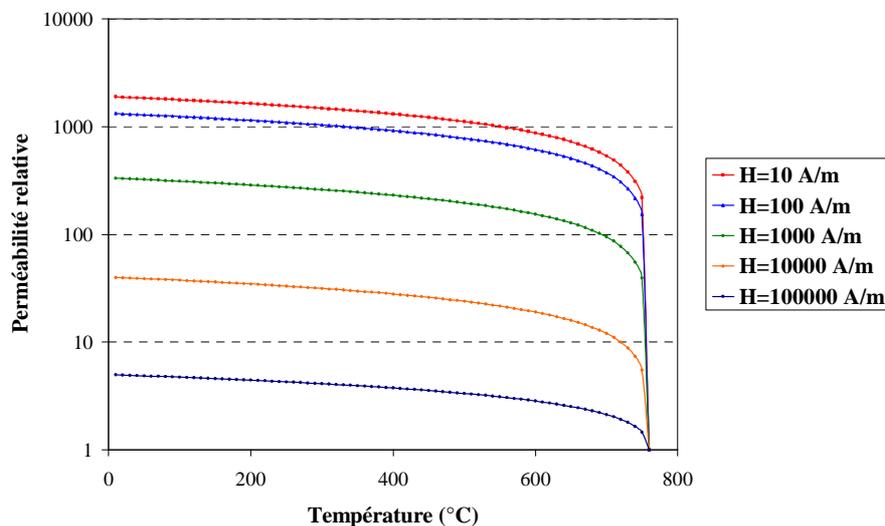


Figure I-5 Evolution de la perméabilité relative en fonction de la température

On observe sur cette figure que la perméabilité relative peut être considérée constante dans une large gamme de températures. Aussi lors d'un couplage magnétothermique - hors étude de systèmes de chauffage par induction - il est possible de considérer la perméabilité magnétique comme indépendante de la température.

I.3.5.2 Grandeurs de couplage

Le couplage entre les problèmes magnétique et thermique apparaît de deux manières différentes : influence du problème thermique sur le problème magnétique et vice versa.

Tout d'abord, comme nous venons de le voir, le problème magnétique est dépendant du problème thermique au travers de l'influence de la température sur les caractéristiques des matériaux, et en particulier sur la conductivité électrique (I.84).

Ensuite, du point de vue du problème thermique, l'interaction avec le problème magnétique apparaît via la détermination des sources de chaleur p dans l'équation (I.76). Dans notre cas, celles-ci se limiteront aux pertes Joule et seront évaluées lors de la résolution du problème magnétique par l'expression :

$$p = \mathbf{j} \cdot \mathbf{e} \quad (\text{I.86})$$

I.3.5.3 Stratégies de couplage

Il existe deux stratégies de couplage pour les problèmes multiphysiques : le couplage *fort* et le couplage *faible*.

Dans le premier cas, les équations de Maxwell et les équations de la thermique sont regroupées dans un seul et unique système non linéaire que l'on résout en un seul bloc. Il apparaît qu'avec cette stratégie le système à résoudre devient très volumineux d'une part, augmentant ainsi les ressources informatiques nécessaires à sa résolution, et bien souvent non symétrique d'autre part, impliquant l'utilisation de systèmes de résolution spécifiques. Cette stratégie s'avère donc plus coûteuse et ne se justifie donc que dans certains cas particuliers.

Dans le cas d'un couplage faible, la résolution du problème magnétique et du problème thermique se fait séparément. Le problème magnétique est tout d'abord résolu afin de déterminer les pertes servant de terme source au calcul thermique, puis le problème thermique est résolu à son tour et permet d'obtenir une première répartition de la température dans le système étudié. La conductivité électrique est alors mise à jour afin de procéder à nouveau à la résolution du problème magnétique, et ainsi de suite jusqu'à la convergence de la solution.

On montre sur la Figure I-6 la stratégie utilisée lors d'un calcul magnétothermique employant un couplage faible.

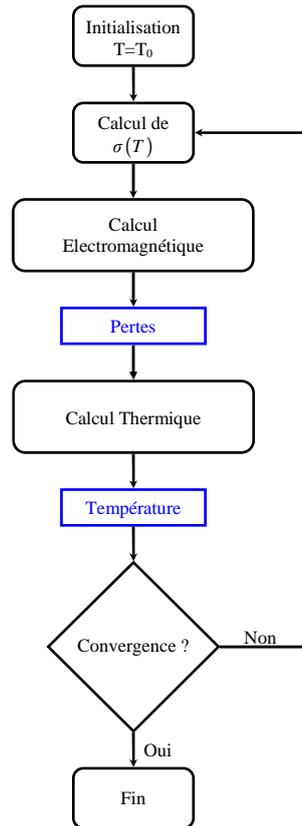


Figure I-6 Procédure utilisée lors d'un couplage magnétothermique

I.4 Problème mécanique

I.4.1 Equation de l'élasticité

Pour établir l'équation de l'élasticité, on considère le principe des déplacements virtuels [22][40][56].

On considère un domaine d'étude D soumis à des forces, volumiques ou surfaciques. De plus, on considère un déplacement virtuel de ce domaine tel que défini au paragraphe I.2.4, c'est-à-dire : $\mathbf{u} = [x, y, z]^T$. Le tenseur des déplacements correspondant à \mathbf{u} s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{I.87})$$

Dans ce tenseur, les termes diagonaux ε_{ii} représentent les allongements relatifs selon la direction i , alors que les termes non diagonaux γ_{ij} représentent les demi variations de l'angle droit. En outre, à ce tenseur des déplacements $\boldsymbol{\varepsilon}$ est associé le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$.

D'après le principe des déplacements virtuels, l'état d'équilibre du domaine d'étude implique que, pour tout déplacement virtuel \mathbf{u} , la somme des travaux virtuels internes est égale à la somme des travaux virtuels externes, ce qui s'écrit :

$$\int_D \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} d\tau = \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_v d\tau + \int_S \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_s d\tau \quad (\text{I.88})$$

où les termes \mathbf{f}_v et \mathbf{f}_s représentent respectivement les densités de force volumique et surfacique s'appliquant au domaine d'étude.

I.4.2 Comportement des matériaux

Tout comme pour les phénomènes électromagnétiques et thermiques précédemment présentés, les matériaux peuvent voir leurs caractéristiques mécaniques dépendre du déplacement. Dans ce cas, l'étude mécanique est non linéaire. Cependant, dans notre étude, compte tenu des matériaux utilisés ainsi que des contraintes et des déplacements mis en œuvre, nous nous limiterons à un comportement mécanique linéaire.

La loi de Hooke [1][3] relie le tenseur des déplacements au tenseur des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{I.89})$$

où \mathbf{L} est un vecteur dont les termes dépendent du module d'Young E , d'une part, et du coefficient de Poisson ν , d'autre part. Le module d'Young, ou constante d'élasticité longitudinale, correspond au rapport entre la contrainte de traction appliquée à un matériau et la déformation qui en résulte. En outre, il a la dimension d'une pression. Le coefficient de Poisson, quant à lui, correspond au rapport entre la contraction transversale unitaire et l'allongement axial unitaire du matériau. Il est sans dimension.

I.4.3 Conditions aux limites

Comme pour les problèmes d'électromagnétisme et de thermique, les problèmes de mécanique nécessitent l'imposition de conditions aux limites. Celles-ci peuvent être de deux types : les conditions aux limites naturelles et essentielles. Les conditions dites naturelles concernent l'application des forces externes, alors que les conditions dites essentielles consistent, pour les formulations en déplacement, à fixer certains degrés de liberté. Ce sont ces dernières qui permettent notamment de prendre en compte les différentes symétries dans le système étudié.

I.4.4 Couplage avec le problème magnétique et stratégie de couplage

Comme nous l'avons dit précédemment, il existe, en terme de couplage multiphysique, plusieurs stratégies. Dans le cas d'un couplage magnéto-mécanique, le choix de la stratégie dépend essentiellement du degré d'influence qu'auront les déformations sur le système étudié. En effet, dans certaines applications, comme celles relevant du magnétoformage ou du thixoformage par exemple, les déformations du système sont importantes et influent grandement sur les champs électromagnétiques, et donc sur les forces. En revanche, pour des applications mettant en jeu de faibles déformations – machines électriques par exemple – il est possible de négliger l'influence des grandeurs mécaniques sur les champs électromagnétiques. Dans notre cas, nous nous limiterons à cette configuration. De ce fait, les problèmes électromagnétique et mécanique peuvent être résolus séparément à l'aide d'un couplage faible selon le déroulement suivant : le problème électromagnétique est tout d'abord résolu afin d'évaluer la force. Puis, cette force est utilisée comme terme source afin de réaliser une résolution mécanique du problème.

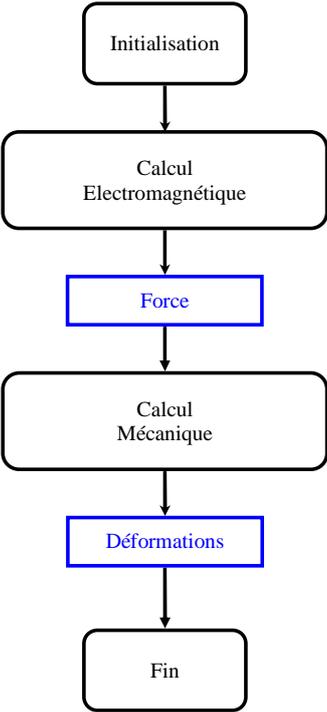


Figure I-7 Procédure utilisée lors d'un couplage magnéto-mécanique

CHAPITRE II Projection de grandeurs discrètes

II.1 Introduction

Un des problèmes inhérents au couplage multiphysique concerne la question des maillages sur lesquels s'appuient les calculs. En effet, en fonction du type de problème à résoudre – électromagnétique, thermique ou mécanique – ceux-ci sont le plus souvent particulièrement différents. A titre d'illustration, on montre sur la Figure II-1 les maillages utilisés pour des études mécanique et électromagnétique d'un même turbo-alternateur.

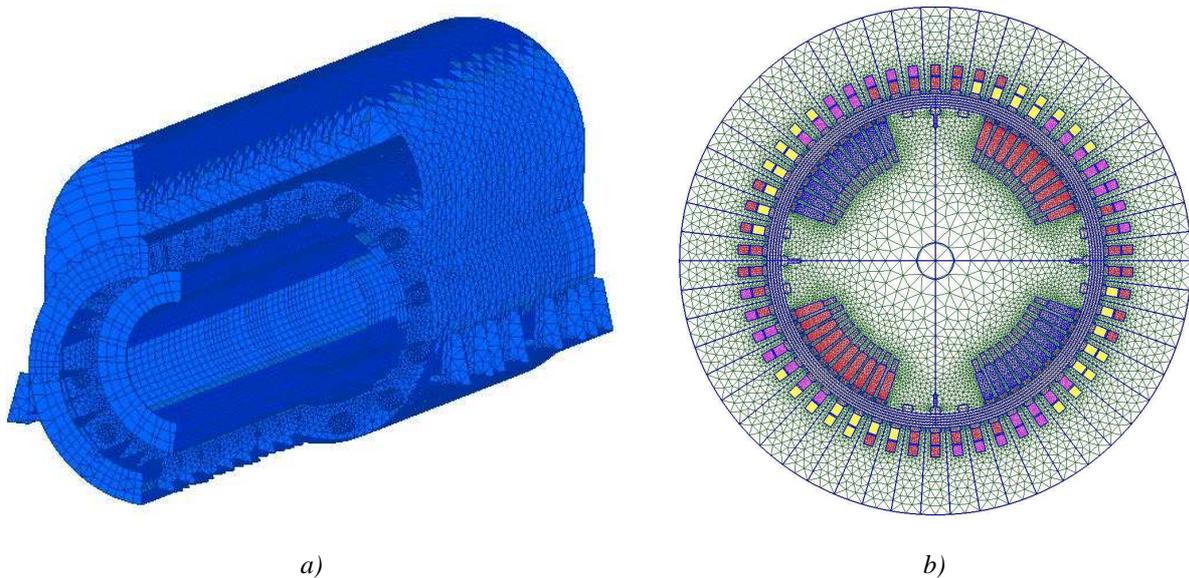


Figure II-1 Maillages utilisés pour l'étude mécanique [43] (a)
et l'étude électromagnétique (b) d'un turbo-alternateur

On peut en particulier noter sur ces figures les différences concernant les parties du turbo-alternateur qui ont été modélisées. En effet, l'étude mécanique nécessite une modélisation en 3D, notamment pour la prise en compte des clavettes et de fixations au sol. En revanche, pour la modélisation électromagnétique, si on néglige l'influence des développantes, une modélisation en 2D ou 2D "extrudée" – vue de face sur la Figure II-1 – est suffisante.

Dans ces conditions, lors d'une étude multiphysique, une solution simple consiste à utiliser un maillage prenant en compte toutes les particularités des différents domaines de la physique étudiés. Le maillage ainsi obtenu consiste alors en une sorte de "plus petit commun multiple" des maillages qu'on aurait utilisés dans le cas de calculs séparés.

Si cette méthode peut parfaitement convenir pour de "petits" systèmes, elle devient en revanche particulièrement contraignante et coûteuse en espace mémoire et en temps de calcul dès lors que le nombre de degrés de liberté nécessaires au bon déroulement du calcul, et donc la taille du maillage, devient important.

Aussi, lors de calculs couplés, il peut s'avérer nécessaire de projeter une grandeur locale obtenue lors d'un premier calcul sur un maillage différent de celui sur lequel elle a été déterminée. Une fois projetée, cette grandeur peut alors être réutilisée, le plus souvent comme terme source, lors d'un second calcul.

Ce chapitre sera consacré à la présentation et au développement d'une méthode, appelée méthode de projection de Galerkin, permettant la projection de grandeurs discrètes appartenant à un espace fonctionnel donné sur un autre. Dans un premier temps, la théorie sera développée dans le cas le plus général. Puis, dans un second temps, les particularités inhérentes aux grandeurs intervenant dans les couplages magnétothermique et magnéto-mécanique seront prises en compte. Enfin, deux exemples académiques seront traités afin de valider la qualité des solutions projetées.

II.2 Méthode de projection de Galerkin

II.2.1 Une interprétation géométrique de la Méthode des Éléments Finis : projection orthogonale

Pour comprendre l'origine de la méthode de projection de Galerkin, qui peut aussi être appelée projection orthogonale, nous allons tout d'abord donner une interprétation géométrique de la méthode des éléments finis au travers d'un exemple.

Soit D un domaine de l'espace comme défini précédemment, et sa frontière Γ . On considère alors le système suivant à résoudre dans D :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } D \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

La forme intégrale du problème (II.1) s'écrit :

$$\int_D -\text{div}[\mathbf{grad} u] v d\tau + \int_D u v d\tau = \int_D f v d\tau \quad \forall v \in L^2(D) \quad (\text{II.2})$$

On utilise alors la relation de Green-Ostrogradsky et, compte-tenu des conditions aux limites, on obtient :

$$\int_D \mathbf{grad} u \mathbf{grad} v d\tau + \int_D u v d\tau = \int_D f v d\tau \quad \forall \mathbf{grad} v \in L^2(D) \quad (\text{II.3})$$

En utilisant les produits scalaires $\langle u, v \rangle_D = \int_D [\mathbf{grad} u \mathbf{grad} v + uv] d\tau$ et (I.15) on peut écrire la relation (II.3) de façon plus compacte :

$$\langle u, v \rangle_D = (f, v)_D \quad \forall v \in L^2(D) \quad (\text{II.4})$$

Soit V_d un sous-espace discret de $L^2(D)$. La résolution de l'équation (II.4) à l'aide de la méthode des éléments finis consiste à trouver $u_d \in V_d$ tel que :

$$\langle u_d, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in V_d \quad (\text{II.5})$$

Or, V_d étant un sous-espace de $L^2(D)$, on peut choisir la fonction test v dans l'expression (II.4) telle que $v \in V_d$. De ce fait, par identification des relations (II.4) et (II.5) on peut déduire :

$$\langle u - u_d, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_d \quad (\text{II.6})$$

En considérant les propriétés du produit scalaire, l'expression (II.6) permet de déduire que l'écart entre u et u_d est orthogonal à V_d [11], ce qui revient à dire que la solution u_d obtenue par la méthode des éléments finis est la projection orthogonale de la solution exacte u sur V_d , comme illustré sur la Figure II-2 :

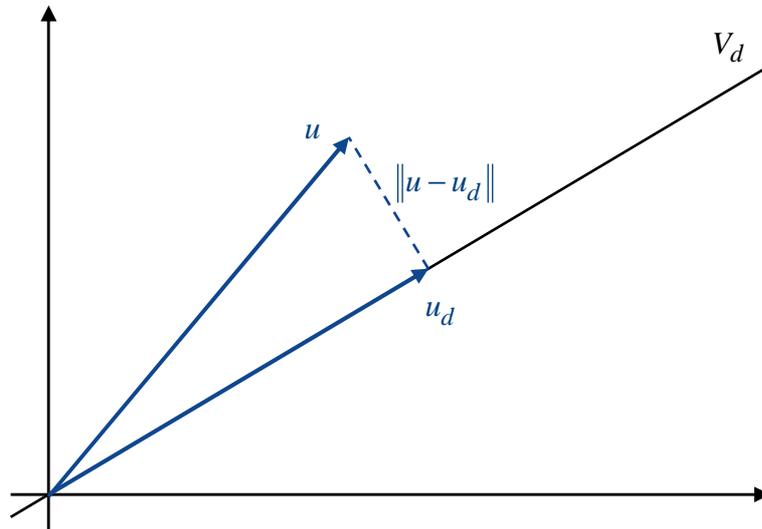


Figure II-2 Illustration de la projection orthogonale

En d'autres termes, la solution u_d est l'élément de V_d le plus proche de u , ce qui peut s'écrire :

$$\|u - u_d\|_{L^2(D)} \leq \|u - v\|_{L^2(D)} \quad \forall v \in V_d \quad (\text{II.7})$$

Ainsi, d'après (II.7), u_d est la meilleure approximation possible de la solution exacte u dans V_d puisqu'aucune autre fonction de V_d ne permet d'avoir un écart $\|u - v\|_{L^2(D)}$ plus petit que $\|u - u_d\|_{L^2(D)}$.

Il est donc possible d'utiliser le principe de la méthode des éléments finis, et en particulier la démarche qui consiste à minimiser l'écart entre deux quantités puis à utiliser la méthode de Galerkin, pour développer une méthode de projection de grandeurs discrètes d'un espace vectoriel vers un autre [28].

II.2.2 Projection orthogonale : méthode de Galerkin

Soit D un domaine de l'espace tel que défini précédemment. Comme nous l'avons vu, ce domaine est discrétisable à l'aide de maillages. On considère alors deux maillages différents de D appelés respectivement *source* et *cible*. Notre but est donc de projeter sur le maillage cible une grandeur discrète définie sur le maillage source.

On considère pour cela deux espaces fonctionnels $U \in L^2(D)$ et $V \in L^2(D)$ ainsi que deux champs $u \in U$ et $v \in V$. Le champ u est connu et discrétisé sur le maillage source. Le champ v , quant à lui, est inconnu et discrétisé sur le maillage cible. On peut alors écrire ces deux champs sous leurs formes discrètes respectives :

$$u = \sum_{i=1}^{N_{u_s}} w_{s_i} u_{s_i} \quad (\text{II.8})$$

$$v = \sum_{j=1}^{N_{v_c}} w_{c_j} v_{c_j} \quad (\text{II.9})$$

où N_{u_s} et N_{v_c} représentent le nombre d'entités géométriques (nœuds, arêtes, facettes et volumes) sur lesquelles se décomposent respectivement le champ u (sur le maillage source) et le champ v (sur le maillage cible). De la même façon w_{s_i} et w_{c_j} représentent les fonctions d'interpolation associées définies respectivement sur les maillages source et cible.

Comme nous l'avons dit dans l'illustration précédente, le principe de la méthode repose sur la minimisation de l'écart entre les champs u et v , celle-ci étant réalisée à l'aide de la méthode des résidus pondérés.

$$\int_D \psi (u - v) d\tau = 0 \quad \forall \psi \in V \quad (\text{II.10})$$

où ψ représente une fonction test que l'on définira ultérieurement.

D'où, en remplaçant u et v par leurs expressions respectives (II.8) et (II.9) on obtient :

$$\int_D \psi \sum_{j=1}^{N_{v_c}} w_{c_j} v_{c_j} d\tau = \int_D \psi \sum_{i=1}^{N_{u_s}} w_{s_i} u_{s_i} d\tau \quad \forall \psi \in V \quad (\text{II.11})$$

On applique alors la méthode de Galerkin. Comme vu précédemment, elle consiste à remplacer la fonction test ψ par la fonction d'interpolation adéquate. Dans notre cas, l'inconnue du problème est le vecteur $[v_c]$. Aussi la fonction test est remplacée par les fonctions d'interpolation w_{c_j} définies sur le maillage cible. On obtient alors le système matriciel linéaire suivant :

$$[A][v_c] = [B][u_s] \quad (\text{II.12})$$

Dans ce système, tous les termes sont connus, à l'exception du vecteur $[v_c]$. En effet, à l'aide de l'équation (II.11) on peut facilement déduire l'expression des termes composant les matrices $[A]$ et $[B]$ soit :

$$A_{m,n} = \int_D w_{c_m} w_{c_n} d\tau \quad (\text{II.13})$$

$$B_{o,p} = \int_D w_{c_o} w_{s_p} d\tau \quad (\text{II.14})$$

La matrice $[A]$ est donc une matrice carrée de dimension $N_{v_c} \times N_{v_c}$. Celle-ci est par ailleurs facile à déterminer puisqu'elle est très semblable à une matrice de masse classique – caractéristiques des matériaux mises à part – calculée sur le maillage cible. La matrice $[B]$ quant à elle est de dimension $N_{v_c} \times N_{u_s}$ et fait intervenir des produits de fonctions d'interpolation définies sur les deux maillages.

On trouvera, en Annexe II, le calcul détaillé de la matrice $[B]$ sur un exemple en une dimension.

On peut par ailleurs noter que le système matriciel (II.11) a été obtenu sans émettre d'hypothèse concernant les propriétés du champ u à projeter. En effet, il peut s'agir de n'importe quel champ de vecteur discret se décomposant sous la forme classique (II.8). Cependant nous allons voir, dans la suite de ce chapitre, qu'en fonction de la grandeur à projeter – magnétique, thermique ou mécanique – il peut s'avérer judicieux d'ajouter des contraintes supplémentaires au système (II.12).

Remarques

Il est possible, à l'aide de cette méthode, de projeter des grandeurs continues [28] au lieu de grandeurs discrètes. C'est notamment le cas pour l'imposition de conditions aux limites non homogènes. Dans ce cas, le champ u est défini par une fonction analytique.

Une approche similaire à la méthode de projection présentée dans ce paragraphe est employée pour effectuer des recollements de maillages. Cette méthode, appelée Mortar [31], a été utilisée pour la prise en compte du mouvement [26][34][35][44][49]. Il s'agit de définir une surface de glissement sur laquelle on réalise un recollement entre deux maillages, l'un étant fixe et l'autre mobile. On construit alors un système matriciel similaire à (II.12) dans lequel les vecteurs $[v_c]$ et $[u_s]$ représentent les valeurs des inconnues du problème (potentiels scalaire ou vecteur magnétique) respectivement sur le maillage mobile et le maillage fixe. La matrice $[A]$ est alors inversée afin d'exprimer les inconnues mobiles en fonction des inconnues fixes, et le produit $[A]^{-1}[B]$ est réintroduit dans le système éléments finis classique.

Enfin, dans la suite de ce chapitre, nous allons à plusieurs reprises projeter des grandeurs depuis un maillage source vers un maillage cible. Les caractéristiques de ces maillages sont bien entendu différentes et sont définies dans le Tableau II-1 :

	Maillage source	Maillage cible
Nombre de nœuds / fonction d'interpolation associée	N_{n_s} / w_{n_s}	N_{n_c} / w_{n_c}
Nombre d'arêtes / fonction d'interpolation associée	N_{a_s} / w_{a_s}	N_{a_c} / w_{a_c}
Nombre de facettes / fonction d'interpolation associée	N_{f_s} / w_{f_s}	N_{f_c} / w_{f_c}
Nombre de volumes / fonction d'interpolation associée	N_{v_s} / w_{v_s}	N_{v_c} / w_{v_c}

Tableau II-1 Caractéristiques des maillages source et cible

II.3 Projection de grandeurs magnétiques

Qu'il s'agisse de couplage magnétothermique ou magnétomécanique, l'approche la plus évidente, concernant les grandeurs à projeter, est probablement de considérer les grandeurs de couplage. Dans le cas de la température, par exemple, cette approche est naturelle puisqu'elle constitue la "grandeur d'état" solution du calcul thermique. En revanche, qu'il s'agisse de la densité de pertes ou des forces électromagnétiques, celles-ci sont obtenues à l'aide d'une opération de post-traitement mettant en jeu la grandeur d'état solution de la résolution électromagnétique. En effet, comme nous l'avons vu précédemment, la densité de pertes, par exemple, est calculée à partir de la densité de courant et du champ électrique (I.86). Or, ces derniers sont eux-mêmes obtenus à partir des grandeurs d'état que sont le champ magnétique, les potentiels scalaires – magnétique ou électrique – ou le potentiel vecteur magnétique, selon la formulation employée. De même, dans le cas du couplage magnétomécanique, les forces sont évaluées, dans notre cas, par dérivation de l'énergie, elle-même évaluée par une intégrale impliquant le champ et l'induction magnétique ((I.72) et (I.73)).

Aussi, une autre approche consiste à projeter la grandeur d'état solution de la résolution électromagnétique sur le maillage cible supportant la résolution thermique ou mécanique. On y réalise alors l'opération de post-traitement permettant d'évaluer la grandeur de couplage souhaitée, comme par exemple le calcul des densités de pertes dans le cas d'un couplage magnétothermique.

Par ailleurs, certaines études purement électromagnétiques nécessitent également l'utilisation de maillages différents et donc la projection des grandeurs magnétiques d'une grille vers l'autre. En effet, lors d'une résolution magnétodynamique à l'aide de la méthode des perturbations, l'étude est réalisée en deux étapes. Tout d'abord, un problème magnétodynamique non perturbé est résolu sur un premier maillage. Dans cette première étape les régions conductrices dont on souhaite étudier l'influence sur le système à l'aide de la méthode des perturbations ne sont pas prises en compte dans l'étude. La solution de ce premier problème sert alors de source au second problème pour lequel l'étude se limite aux régions précédemment citées et qui a donc pour support un maillage différent. Dans ces conditions il est nécessaire de projeter la solution obtenue à la suite de la première étape d'un maillage vers l'autre.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la projection des grandeurs magnétiques à l'aide de la méthode précédemment décrite, et plus particulièrement aux contraintes supplémentaires à apporter à la formulation (II.11) afin de tenir compte des spécificités et des propriétés de chacune de ces grandeurs.

II.3.1 Cas de la magnétostatique

II.3.1.1 Préliminaire

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, il existe en magnétostatique deux formulations, l'une en potentiel scalaire magnétique, l'autre en potentiel vecteur magnétique. Si la projection de ce dernier, comme nous allons le voir, ne pose pas de problème particulier, celle des grandeurs issues de la formulation en potentiel scalaire magnétique – à savoir le potentiel Ω et le champ source \mathbf{h}_s – s'avère plus délicate. En effet, la projection du potentiel Ω ne permet d'obtenir une solution que dans les régions de l'espace où il n'existe pas de champ source \mathbf{h}_s . Pour inclure les sources de courant, il est nécessaire de projeter également ce champ source. Cependant, ce dernier n'est pas physique, mais s'apparente à un potentiel. Aussi, dans le cas de la formulation magnétostatique en potentiel scalaire, il nous paraît judicieux de projeter le champ magnétique physique, qui est défini par la relation $\mathbf{h} = \mathbf{h}_s - \text{grad}\Omega$, et qui permet de prendre en compte les deux grandeurs à la fois. De plus, une telle projection permet d'englober tous les cas, à savoir avec ou sans courant imposé. Dans la mesure où cette méthode est également utilisée lors d'un calcul en magnétodynamique, elle sera développée par la suite dans le paragraphe du même nom.

II.3.1.2 Projection du potentiel vecteur magnétique

Comme on peut l'observer sur le diagramme de Tonti appliqué à l'électromagnétisme (Figure I-2), le potentiel vecteur magnétique se décompose dans l'espace des éléments d'arêtes. La décomposition de \mathbf{a} sur les maillages source et cible est alors donnée respectivement par les expressions (II.15) et (II.16) :

$$\mathbf{a}_s = \sum_{i=1}^{N_{a_s}} \mathbf{w}_{a_{s_i}} a_{a_{s_i}} \quad (\text{II.15})$$

$$\mathbf{a}_c = \sum_{j=1}^{N_{a_c}} \mathbf{w}_{a_{c_j}} a_{a_{c_j}} \quad (\text{II.16})$$

où $a_{a_{s_i}}$ et $a_{a_{c_j}}$ sont les circulations de \mathbf{a} respectivement le long de la $i^{\text{ème}}$ arête du maillage source et de la $j^{\text{ème}}$ arête du maillage cible.

Aussi, conformément à la démarche présentée au paragraphe II.2.2, la projection du potentiel vecteur \mathbf{a} depuis un maillage source vers un maillage cible s'écrit :

$$\int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{j=1}^{N_{a_c}} \mathbf{w}_{a_{c_j}} a_{a_{c_j}} d\tau = \int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{i=1}^{N_{a_s}} \mathbf{w}_{a_{s_i}} a_{a_{s_i}} d\tau \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in L^2(D) \quad (\text{II.17})$$

Il convient alors de remplacer la fonction test vectorielle $\boldsymbol{\psi}$ par les fonctions d'interpolation d'arête. On obtient le système matriciel linéaire introduit par l'expression (II.12) et dans lequel les vecteurs $[u_s]$ et $[v_c]$ sont respectivement les vecteurs des circulations du potentiel vecteur magnétique $[a_{a_s}]$ et $[a_{a_c}]$ le long des arêtes des maillages

source et cible. De plus, les termes élémentaires des matrices $[A]$ et $[B]$ ont dans ce cas pour expressions :

$$A_{m,n} = \int_D \mathbf{w}_{a_{c_m}} \cdot \mathbf{w}_{a_{c_n}} d\tau \quad m \in \{1, N_{a_c}\} \text{ et } n \in \{1, N_{a_c}\} \quad (\text{II.18})$$

$$B_{o,p} = \int_D \mathbf{w}_{a_{c_o}} \cdot \mathbf{w}_{a_{s_p}} d\tau \quad o \in \{1, N_{a_c}\} \text{ et } p \in \{1, N_{a_s}\} \quad (\text{II.19})$$

Ainsi, de même que le potentiel vecteur magnétique discret \mathbf{a}_s , obtenu suite à une résolution par la méthode des éléments finis, représente une approximation du potentiel réel, le potentiel \mathbf{a}_c obtenu par projection de \mathbf{a}_s en représente une autre. Cependant, si \mathbf{a}_s a été obtenu en résolvant les équations de Maxwell, \mathbf{a}_c a lui été obtenu mathématiquement, sans tenir compte de toutes ses propriétés physiques, et en particulier celle qui le lie à l'induction magnétique \mathbf{b} (I.39).

Par conséquent, certaines contraintes [58] doivent être ajoutées à la formulation (II.17) afin, notamment, que le potentiel vecteur magnétique obtenu sur le maillage cible vérifie l'équation (I.39).

Pour cela, on écrit la décomposition de l'induction magnétique \mathbf{b} respectivement sur les maillages source et cible. Puis, à l'aide de la relation (I.39), on exprime cette dernière en fonction des circulations du potentiel vecteur magnétique.

$$\mathbf{b}_s = \sum_{i=1}^{N_{f_s}} \mathbf{w}_{f_{s_i}} b_{f_{s_i}} = \mathbf{rot} \mathbf{a}_s = \sum_{j=1}^{N_{a_s}} a_{a_{s_j}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{s_j}} \quad (\text{II.20})$$

$$\mathbf{b}_c = \sum_{i=1}^{N_{f_c}} \mathbf{w}_{f_{c_i}} b_{f_{c_i}} = \mathbf{rot} \mathbf{a}_c = \sum_{j=1}^{N_{a_c}} a_{a_{c_j}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{c_j}} \quad (\text{II.21})$$

Dans cette approche on choisit donc, conformément à la démarche présentée précédemment, de minimiser l'écart entre \mathbf{b}_s et \mathbf{b}_c . Puis, en les remplaçant par leurs expressions respectives (I.20) et (I.21), on obtient la formulation suivante :

$$\int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{j=1}^{N_{a_c}} a_{a_{c_j}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{c_j}} d\tau = \int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{i=1}^{N_{a_s}} a_{a_{s_i}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{s_i}} d\tau \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{L}^2(D) \quad (\text{II.22})$$

Pour cette formulation on prend la fonction test $\boldsymbol{\psi}$ égale au rotationnel des fonctions d'interpolation définies sur le maillage cible : $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_c}$. Néanmoins, le système ainsi obtenu admet une infinité de solutions. Aussi, comme pour la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique ou la formulation électrique, il est nécessaire d'ajouter une condition de jauge. De plus, pour cette formulation, les termes élémentaires des matrices $[A]$ et $[B]$ du système (II.12) ont pour expressions :

$$A_{m,n} = \int_D \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{c_m}} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{c_n}} d\tau \quad m \in \{1, N_{a_c}\} \text{ et } n \in \{1, N_{a_c}\} \quad (\text{II.23})$$

$$B_{o,p} = \int_D \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{c_o}} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{s_p}} d\tau \quad o \in \{1, N_{a_c}\} \text{ et } p \in \{1, N_{a_s}\} \quad (\text{II.24})$$

II.3.2 Cas de la magnétodynamique

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, il existe en magnétodynamique deux familles de formulations : magnétique et électrique. De plus, la première de ces deux familles est elle-même décomposée en deux formulations.

Dans tous les cas, plusieurs grandeurs interviennent dans chaque formulation. En effet, la formulation magnétique en potentiels $\mathbf{t} - \Omega$ fait intervenir à la fois une grandeur vectorielle, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{t} , et une grandeur scalaire, le potentiel scalaire magnétique Ω , toutes deux se décomposant bien entendu dans des espaces discrets différents. De la même façon, la formulation électrique $\mathbf{a} - v$ met en jeu à la fois deux grandeurs, l'une vectorielle et l'autre scalaire, à savoir le potentiel vecteur électrique \mathbf{a} et le potentiel scalaire électrique v . Enfin, même si dans la formulation magnétique en champ (I.45) [33] seul le champ magnétique \mathbf{h} apparaît clairement, le potentiel scalaire magnétique Ω intervient lors de la prise en compte des régions non conductrices du système.

Aussi, lors d'un couplage dans lequel il est nécessaire de projeter les grandeurs magnétiques issues d'une résolution en magnétodynamique, plusieurs approches sont possibles.

II.3.2.1 Formulation magnétique

Lors de la résolution d'un problème magnétodynamique à l'aide de la méthode des perturbations, la grandeur à projeter est le plus souvent le champ magnétique \mathbf{h} [50], que le calcul ait été réalisé à l'aide d'une formulation en champ ou en potentiels. Dans le premier cas, le champ magnétique est directement connu en tant que grandeur d'état solution du problème, alors que dans le second il est évalué à l'aide des potentiels vecteur et scalaire magnétiques selon la relation (I.47). Aussi, pour ce type d'étude, il est nécessaire de projeter \mathbf{h} .

Comme indiqué sur le diagramme de Tonti appliqué à l'électromagnétisme (Figure I-2), le champ magnétique se décompose dans l'espace des éléments d'arêtes. Par conséquent, le projeter depuis un maillage source vers un maillage cible revient à utiliser la formulation (II.17) en y substituant ses circulations h_{a_s} et h_{a_c} à celles du potentiel vecteur magnétique a_{a_s} et a_{a_c} :

$$\int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{j=1}^{N_{a_c}} \mathbf{w}_{a_{c_j}} h_{a_{c_j}} d\tau = \int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{i=1}^{N_{a_s}} \mathbf{w}_{a_{s_i}} h_{a_{s_i}} d\tau \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in L^2(D) \quad (\text{II.25})$$

De la même façon, on remplace la fonction test $\boldsymbol{\psi}$ par les fonctions d'interpolation d'arête, et les termes élémentaires des matrices $[A]$ et $[B]$ du système linéaire (II.12) sont identiques à ceux définis par les expressions (II.18) et (II.19).

L'utilisation de cette formulation permet donc d'obtenir une nouvelle approximation \mathbf{h}_c du champ magnétique réel \mathbf{h} . Si cette décomposition de \mathbf{h} est correcte pour les parties non conductrices du domaine d'étude, elle s'avère insuffisante [53][58] pour les parties conductrices puisqu'elle n'y vérifie pas le théorème d'Ampère ($\mathbf{rot}\mathbf{h}_c \neq \mathbf{j}$).

Pour prendre correctement en compte ces parties du domaine d'étude, on choisit de projeter la densité de courant \mathbf{j}_s , c'est-à-dire $\mathbf{rot}\mathbf{h}_s$. Cette dernière se décompose, conformément au diagramme de Tonti (Figure I-2), dans l'espace des éléments de facettes. De plus, à l'aide de la relation (I.5), on peut relier le flux de la densité de courant au travers des facettes du maillage à la circulation du champ magnétique le long des arêtes :

$$\mathbf{j}_s = \sum_{i=1}^{N_{f_s}} \mathbf{w}_{f_{s_i}} j_{f_{s_i}} = \mathbf{rot}\mathbf{h}_s = \sum_{j=1}^{N_{a_s}} h_{a_{s_j}} \mathbf{rot}\mathbf{w}_{a_{s_j}} \quad (\text{II.26})$$

De même, on peut écrire sur le maillage cible :

$$\mathbf{j}_c = \sum_{i=1}^{N_{f_c}} \mathbf{w}_{f_{c_i}} j_{f_{c_i}} = \mathbf{rot}\mathbf{h}_{c_p} = \sum_{j=1}^{N_{a_c}} h_{a_{c_pj}} \mathbf{rot}\mathbf{w}_{a_{c_j}} \quad (\text{II.27})$$

Dans cette formulation il s'agit de minimiser l'écart entre les densités de courant exprimées sur les maillages source et cible. Ainsi, en remplaçant \mathbf{j}_s et \mathbf{j}_c par leurs expressions respectives (II.26) et (II.27) on obtient la formulation suivante :

$$\int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{j=1}^{N_{a_c}} h_{a_{c_pj}} \mathbf{rot}\mathbf{w}_{a_{c_j}} d\boldsymbol{\tau} = \int_D \boldsymbol{\psi} \sum_{i=1}^{N_{a_s}} h_{a_{s_i}} \mathbf{rot}\mathbf{w}_{a_{s_i}} d\boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{L}^2(D) \quad (\text{II.28})$$

On peut noter que cette formulation est extrêmement proche de celle développée pour la projection du potentiel vecteur magnétique (II.22). On prend donc la fonction test égale au rotationnel des fonctions d'arêtes définies sur le maillage cible ($\boldsymbol{\psi} = \mathbf{rot}\mathbf{w}_{a_c}$). De même, le système ainsi obtenu admet une infinité de solutions. Il est donc nécessaire d'y ajouter une condition de jauge. Par conséquent, la grandeur \mathbf{h}_{c_p} obtenue sur le maillage cible n'est pas un champ physique. Elle a valeur de potentiel. Par ailleurs, on retrouve les mêmes matrices $[A]$ et $[B]$ du système linéaire (II.12) que celles définies par les termes élémentaires (II.23) et (II.24).

La densité de courant $\mathbf{j}_c = \mathbf{rot}\mathbf{h}_{c_p}$ ainsi calculée est correcte dans la mesure où il s'agit d'une autre approximation de \mathbf{j}_s . Il est donc possible d'utiliser cette formulation afin d'estimer, par exemple, les pertes par effet Joule sur le maillage cible.

Néanmoins, comme nous l'avons mentionné précédemment, la grandeur \mathbf{h}_c ainsi obtenue n'est pas un champ physique. La formulation (II.28) s'avère donc insuffisante si l'on désire avoir accès à la fois au champ magnétique et à la densité de courant sur le maillage cible.

Une première approche permettant cette opération consisterait à réaliser deux calculs successifs utilisant respectivement les formulations (II.25) et (II.28). La première résolution permettrait d'obtenir la projection du champ magnétique et la seconde celle de la densité de courant. Cependant, il est possible d'utiliser une autre approche n'employant qu'une seule résolution afin de recalculer le bon champ magnétique physique à partir de la grandeur \mathbf{h}_c obtenue par la résolution de (II.28).

En effet, dans cette formulation, la grandeur \mathbf{h}_{c_p} est définie, à la manière d'un potentiel, telle que son rotationnel est égal à la projection de la densité de courant \mathbf{j}_c sur le maillage cible. On peut donc introduire, à l'aide de la relation (I.22), le potentiel scalaire magnétique Ω_c défini sur le maillage cible tel que :

$$\mathbf{h}_c = \mathbf{h}_{c_p} - \mathbf{grad}\Omega_c \quad (\text{II.29})$$

On peut alors, suite à la résolution du problème (II.28), calculer le potentiel scalaire magnétique Ω_c permettant d'obtenir le bon champ magnétique \mathbf{h}_c sur le maillage cible en résolvant le problème suivant :

$$\int_D \psi \left[\text{div} \left(\mu \left(\mathbf{h}_{c_p} - \mathbf{grad}\Omega_c \right) \right) \right] d\tau = 0 \quad \forall \psi \in L^2(\Omega) \quad (\text{II.30})$$

On peut remarquer que ce problème s'apparente à une résolution magnétostatique en potentiel scalaire magnétique (§I.2.3.1) dont \mathbf{h}_{c_p} serait le terme source. Ainsi, dans (II.30), on remplace la fonction test par les fonctions d'interpolation nodales. De plus, il est possible de regrouper les deux problèmes (II.28) et (II.30) dans un seul système d'équations :

$$\begin{cases} \int_D \psi_1 \sum_{j=1}^{N_{ac}} h_{a_{c_pj}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{c_j}} d\tau = \int_D \psi_1 \sum_{i=1}^{N_{as}} h_{a_{s_i}} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{a_{s_i}} d\tau \quad \forall \psi_1 \in L^2(D) \\ \int_D \psi_2 \left[\text{div} \left(\sum_{j=1}^{N_{ac}} \mathbf{w}_{a_{c_j}} h_{a_{c_pj}} - \sum_{k=1}^{N_{nc}} \mathbf{grad} \left(w_{n_{c_k}} \Omega_{n_{c_k}} \right) \right) \right] d\tau = 0 \quad \forall \psi_2 \in L^2(D) \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Avec la formulation (II.31) on obtient sur le maillage cible un champ magnétique \mathbf{h}_c défini par (II.29) correct dans le sens où il constitue une bonne approximation de \mathbf{h}_s et qui, de plus, vérifie le théorème d'Ampère.

II.3.2.2 Formulation électrique

La formulation électrique (I.51) fait intervenir deux grandeurs : les potentiels vecteur magnétique \mathbf{a} et scalaire électrique v . Aussi, comme pour la formulation magnétique, différentes approches peuvent être considérées concernant la projection.

Bien entendu, il est possible, pour les parties non conductrices, de réutiliser les deux formulations présentées dans le paragraphe consacré à la projection du potentiel vecteur en magnétostatique. Cependant, pour prendre en compte les parties conductrices du domaine d'étude, il est nécessaire d'introduire le potentiel scalaire électrique v_c sur le maillage cible. Comme pour la formulation magnétique, nous allons adopter une approche dans laquelle nous

projetons le potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} auquel on impose certaines contraintes permettant de retrouver le bon potentiel scalaire électrique v sur le maillage cible.

Pour cela, on reprend la formulation (II.22) qui nous permet d'obtenir le potentiel vecteur magnétique \mathbf{a}_c sur le maillage cible. Comme nous l'avons vu précédemment, le potentiel vecteur obtenu sur le maillage cible à l'aide de cette formulation vérifie $\text{div}\mathbf{b} = 0$. Cependant, dans le cas de la magnétodynamique, il est nécessaire pour les grandeurs projetées de vérifier les équations de Maxwell-Faraday (I.2) et de Maxwell-Ampère (I.3).

Dans notre approche, nous proposons de vérifier, sur le maillage cible, l'équation de Maxwell-Faraday au sens fort. Pour cela, comme nous l'avons vu précédemment (I.50), nous exprimons le champ électrique en fonction du potentiel vecteur magnétique \mathbf{a}_c et du potentiel scalaire électrique v_c , tous deux définis sur le maillage cible.

$$\mathbf{e}_c = -\frac{\partial \mathbf{a}_c}{\partial t} - \text{grad} v_c \quad (\text{II.32})$$

De ce fait, nous allons vérifier l'équation de Maxwell-Ampère au sens faible, ce qui peut être réalisé en résolvant l'équation $\text{div}\mathbf{j} = 0$ sur le maillage cible. En utilisant l'expression du champ électrique défini par (I.32), ainsi que la loi d'Ohm (I.7), on peut écrire [33] :

$$\int_D \sigma \text{grad} w_{n_c} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_c}{\partial t} d\tau + \int_D \sigma \text{grad} w_{n_c} \cdot \text{grad} v_c d\tau = \int_\Gamma w_{n_c} \cdot (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_s) d\gamma \quad \forall w_{n_c} \in W_b^0 \quad (\text{II.33})$$

La relation (II.33) n'est bien entendu définie que dans les parties conductrices du domaine d'étude. Il est possible, comme pour la formulation magnétique précédemment développée, de regrouper les deux formulations (II.22) et (II.33) en un seul problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_D \psi \sum_{j=1}^{N_{a_c}} a_{a_{c_j}} \text{rot} w_{a_{c_j}} d\tau = \int_D \psi \sum_{i=1}^{N_{a_s}} a_{a_{s_i}} \text{rot} w_{a_{s_i}} d\tau \\ \int_D \sigma \text{grad} w_{n_c} \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_c}{\partial t} d\tau + \int_D \sigma \text{grad} w_{n_c} \cdot \text{grad} v_c d\tau = \int_\Gamma w_{n_c} \cdot (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_s) d\gamma \\ \forall \psi \in L^2(D) \quad \forall w_{n_c} \in W_b^0 \end{array} \right. \quad (\text{II.34})$$

II.4 Projection des termes de couplage

II.4.1 Problème magnétothermique

Dans le cas d'un couplage magnétothermique faible, comme défini au premier chapitre, il est judicieux d'utiliser des maillages différents selon qu'on résout le problème électromagnétique ou le problème thermique.

La quantité de chaleur, grandeur source du problème thermique, est calculée – et donc connue – sur le maillage supportant la résolution électromagnétique du système. Aussi, il est nécessaire de projeter cette grandeur sur le maillage utilisé pour la résolution du problème thermique. De la même façon, afin de prendre en compte la dépendance de la conductivité

électrique vis-à-vis de la température, il est nécessaire de projeter les valeurs de cette dernière sur le maillage supportant le calcul électromagnétique.

De ce fait, le déroulement du calcul magnétothermique, illustré par la Figure I-6, est modifié (Figure II-3).

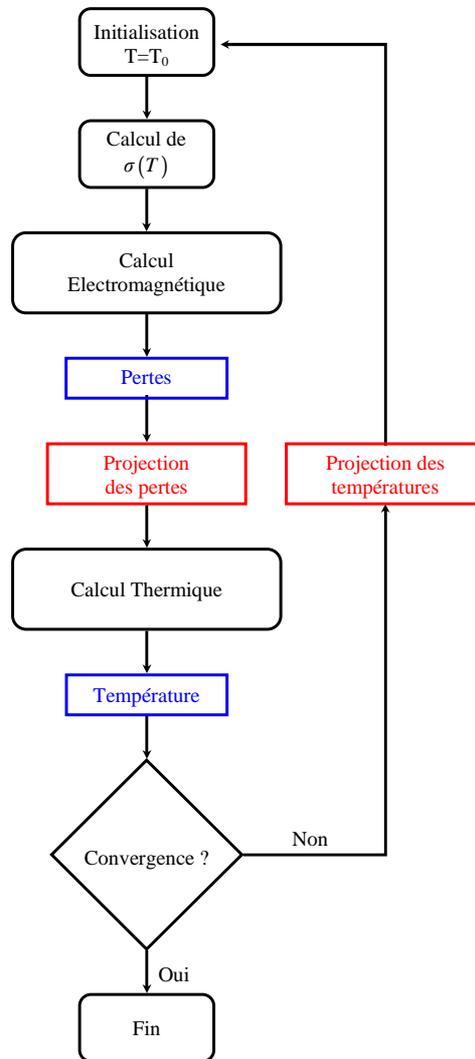


Figure II-3 Déroulement d'un calcul magnétothermique avec projection des pertes et des températures sur des maillages différents.

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la projection des termes de couplage intervenant dans un calcul magnétothermique, à savoir : la densité de pertes et la température.

II.4.1.1 Cas de la densité de pertes

D'après le diagramme de Tonti appliqué à la thermique (Figure I-4), la quantité de chaleur q se décompose dans l'espace des éléments de volume. Comme nous l'avons dit au préalable, celle-ci se limitera, dans notre cas, aux pertes par effet Joule, que nous noterons p . Ainsi la projection de la densité de pertes p à l'aide de la formulation (II.11) s'écrit :

$$\int_D \psi \sum_{j=1}^{N_{v_c}} w_{v_{c_j}} p_{v_{c_j}} d\tau = \int_D \psi \sum_{i=1}^{N_{v_s}} w_{v_{s_i}} p_{v_{s_i}} d\tau \quad \forall \psi \in L^2(D) \quad (\text{II.35})$$

où les termes $p_{v_{s_i}}$ et $p_{v_{c_j}}$ représentent la valeur discrète de la densité de puissance p exprimée respectivement dans l'élément "i" du maillage source et dans l'élément "j" du maillage cible.

Aussi, lorsqu'on applique la méthode de Galerkin, conformément à la démarche présentée au paragraphe II.2.2, la fonction test ψ est remplacée par les fonctions d'interpolation de volume. On obtient alors le système matriciel linéaire introduit par l'expression (II.12) dans lequel on substitue les vecteurs $[p_{v_s}]$ et $[p_{v_c}]$ respectivement à $[u_s]$ et $[v_c]$. De plus, les termes élémentaires des matrices $[A]$ et $[B]$ ont dans ce cas pour expressions :

$$A_{m,n} = \int_D w_{v_{c_m}} w_{v_{c_n}} d\tau \quad m \in \{1, N_{v_c}\} \text{ et } n \in \{1, N_{v_c}\} \quad (\text{II.36})$$

$$B_{o,p} = \int_D w_{v_{c_o}} w_{v_{s_p}} d\tau \quad o \in \{1, N_{v_c}\} \text{ et } p \in \{1, N_{v_s}\} \quad (\text{II.37})$$

On remarque par ailleurs à l'aide de l'expression (II.36) que, de par les propriétés des fonctions d'interpolation de volumes résumées dans le Tableau I-1, la matrice $[A]$ est diagonale.

Cependant, il est également à noter que, du fait de l'espace dans lequel la densité de pertes est discrétisée, cette dernière est constante par élément fini. En outre, lorsque le calcul thermique est supporté par un maillage beaucoup plus grossier que celui utilisé pour le calcul électromagnétique un "effet d'escalier" peut apparaître sur la densité de pertes projetée. Si cet "effet d'escalier" n'a pas de conséquence du point de vue global, il peut en revanche engendrer localement de forts écarts entre la densité de pertes calculée sur le maillage source et son homologue projetée.

De plus, historiquement, beaucoup de codes de résolution de problèmes de thermique par la méthode des éléments finis discrétisent toutes les grandeurs dans l'espace des éléments nodaux. Aussi, lors d'un couplage de codes, il peut s'avérer nécessaire d'exprimer la densité de pertes projetée aux nœuds du maillage cible.

Il est possible, dans la formulation (II.11), d'effectuer cette dernière opération. En effet, on peut donner à la densité de pertes projetée une évolution linéaire à l'intérieur de chaque élément du maillage cible en choisissant pour cela de la discrétiser dans l'espace des éléments nodaux. Sur le maillage source, en revanche, on conserve la discrétisation vue précédemment. On a alors les deux expressions suivantes :

$$P_s = \sum_{i=1}^{N_{v_s}} w_{v_{s_i}} P_{v_{s_i}} \quad (\text{II.38})$$

$$P_c = \sum_{j=1}^{N_{n_c}} w_{n_{c_j}} P_{n_{c_j}} \quad (\text{II.39})$$

La relation (II.35) devient alors :

$$\int_D \psi \sum_{j=1}^{N_{n_c}} w_{n_{c_j}} p_{n_{c_j}} d\tau = \int_D \psi \sum_{i=1}^{N_{v_s}} w_{v_{s_i}} p_{v_{s_i}} d\tau \quad \forall \psi \in L^2(D) \quad (\text{II.40})$$

Dans ce cas, on applique la méthode de Galerkin en remplaçant la fonction test ψ par les fonctions d'interpolation nodales. Les termes élémentaires des matrices $[A]$ et $[B]$ du système (II.12) s'écrivent alors :

$$A_{m,n} = \int_D w_{n_{c_m}} w_{n_{c_n}} d\tau \quad m \in \{1, N_{n_c}\} \text{ et } n \in \{1, N_{n_c}\} \quad (\text{II.41})$$

$$B_{o,p} = \int_D w_{n_{c_o}} w_{v_{s_p}} d\tau \quad o \in \{1, N_{n_c}\} \text{ et } p \in \{1, N_{v_s}\} \quad (\text{II.42})$$

II.4.1.2 Cas de la température

La température se discrétise, toujours d'après le diagramme de Tonti de la Figure I-4, dans l'espace des éléments nodaux. La formulation permettant sa projection est donc similaire à celle utilisée pour la densité de pertes. Dans la relation (II.35) on substitue les valeurs des températures sur les maillages source et cible T_{n_s} et T_{n_c} aux densités de pertes p_{v_s} et p_{v_c} d'une part, et les fonctions d'interpolation nodales w_{n_s} et w_{n_c} aux fonctions d'interpolation de volume w_{v_s} et w_{v_c} . On obtient alors la formulation suivante :

$$\int_D \psi \sum_{j=1}^{N_{n_c}} w_{n_{c_j}} T_{n_{c_j}} d\tau = \int_D \psi \sum_{i=1}^{N_{n_s}} w_{n_{s_i}} T_{n_{s_i}} d\tau \quad \forall \psi \in L^2(D) \quad (\text{II.43})$$

La fonction test est donc remplacée par les fonctions d'interpolation nodales. Les termes élémentaires du système matriciel (II.12) auront pour expression :

$$A_{m,n} = \int_D w_{n_{c_m}} w_{n_{c_n}} d\tau \quad m \in \{1, N_{n_c}\} \text{ et } n \in \{1, N_{n_c}\} \quad (\text{II.44})$$

$$B_{o,p} = \int_D w_{n_{c_o}} w_{n_{s_p}} d\tau \quad o \in \{1, N_{n_c}\} \text{ et } p \in \{1, N_{n_s}\} \quad (\text{II.45})$$

II.4.2 Problème magnétomécanique

Tout comme le couplage magnétothermique, le couplage magnétomécanique implique le plus souvent l'utilisation de maillages différents lors du calcul électromagnétique et du calcul mécanique. Par ailleurs, dans ce type d'étude, la grandeur source du problème mécanique est la répartition des forces électromagnétiques dans le système. Comme nous l'avons dit précédemment, les forces électromagnétiques locales sont obtenues, dans notre cas, à l'aide de la méthode des travaux virtuels.

Cependant, contrairement aux grandeurs précédemment traitées dans cette partie, les forces d'origine électromagnétique ne trouvent pas leur place naturellement dans le diagramme de Tonti et leurs espaces de discrétisation dépendent même de leur nature (force

de Lorentz, force de Laplace, etc.) [55]. De plus, dans le cas de la méthode des travaux virtuels, une attention particulière est à observer quant à la nature (champ ou non) [19][54][55][57][58] des forces obtenues.

II.4.2.1 Le problème de la force locale

Bien entendu, le terme *force totale*, et par extension *force*, désigne la force totale exercée sur une région du domaine d'étude. Le terme *force locale* [19][20] quant à lui désigne la grandeur obtenue aux nœuds du maillage à l'aide de la méthode des travaux virtuels. C'est cette grandeur qui est obtenue à l'aide des relations (I.72) et (I.73). Enfin les termes *force distribuée*, *distribution de force* et *densité de force* désignent une autre grandeur. Celle-ci peut être surfacique ou volumique, et est reliée à la force totale par son intégrale sur le domaine d'étude.

Qu'il s'agisse d'électromagnétisme (champ magnétique, potentiels scalaire ou vecteur) ou de thermique (température ou densité de pertes), les grandeurs que nous nous sommes proposé de projeter jusqu'ici définissent toutes des champs. De plus, elles sont toutes reliées entre elles, soit au travers des lois de comportement, soit au travers des opérateurs différentiels définis au premier chapitre et s'intègrent donc toutes dans un diagramme de Tonti. En outre, elles sont parfaitement définies en tout point de l'espace, notamment au travers des fonctions d'interpolation, comme défini par l'expression (II.8).

Contrairement à ces précédentes grandeurs, les forces nodales obtenues par la méthode des travaux virtuels ne sont pas calculées en appliquant un opérateur différentiel à la grandeur d'état solution de la résolution électromagnétique, comme on le fait par exemple à partir du champ magnétique pour déduire la densité de courant. De plus, ces forces, quoique locales puisque définies aux nœuds du maillage, s'approchent davantage de grandeurs globales. En effet, celles-ci sont obtenues par intégration sur les volumes des éléments du maillage. Par conséquent, il apparaît clairement que le terme $F_{u,n}^e$ défini dans les expressions (I.72) et (I.73) et qui représente la contribution de l'élément e du maillage à la force nodale exercée au nœud n , dépend des caractéristiques du maillage, et en particulier de la taille de ce dernier. Ainsi la force nodale $F_{u,n}$, obtenue en sommant toutes les contributions $F_{u,n}^e$ des éléments constitués du nœud n , est liée au maillage.

Pour mettre en évidence ce phénomène, on se propose d'étudier l'exemple académique de la Figure II-4. Il s'agit d'un électro-aimant composé d'un inducteur et d'une culasse en fer, le tout au-dessus d'une plaque, également constituée de fer. Par ailleurs, la perméabilité magnétique du fer est ici considérée comme constante.

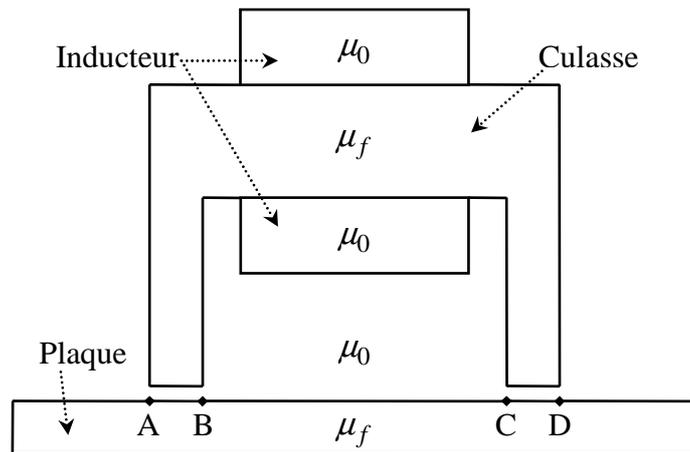


Figure II-4 Structure étudiée

On se propose ici de calculer, pour deux maillages différents, les forces locales s'exerçant sur la plaque au niveau des dents de l'électro-aimant, c'est-à-dire entre les points A et B ou C et D. Pour simplifier les calculs, on suppose d'une part que l'entrefer, de surface S sous chaque dent, est suffisamment petit pour négliger les fuites et d'autre part que la culasse et la plaque ont une perméabilité μ_f infinie. On représente sur la Figure II-5 les deux maillages utilisés au niveau de l'interface Air/Plaque entre les points A et B.

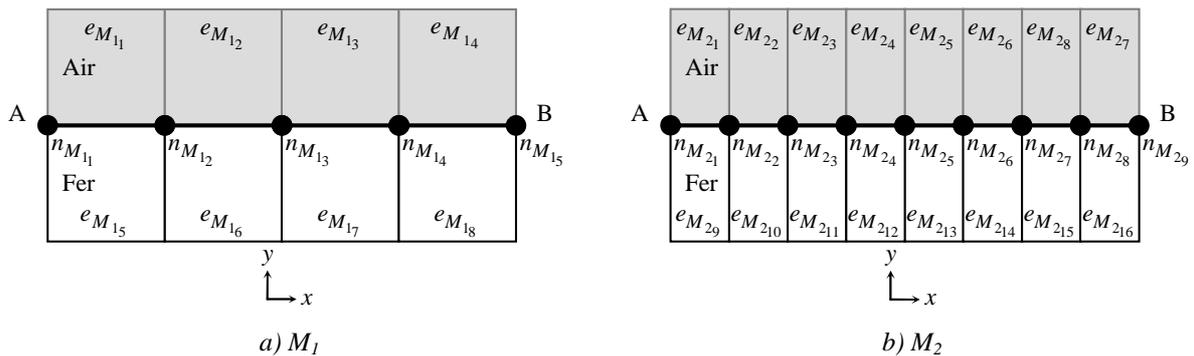


Figure II-5 Maillages utilisés à l'interface Air/Plaque

A l'aide de la méthode des travaux virtuels on obtient, sur chacun des deux maillages, les forces locales présentées dans le Tableau II-2. Le détail des calculs est reproduit en Annexe III.

Maillage	Indice du nœud	Force
M ₁	$n_{M_{11}}$ et $n_{M_{15}}$	$\frac{S}{8} \frac{b_0^2}{2\mu_0}$
	De $n_{M_{12}}$ à $n_{M_{14}}$	$\frac{S}{4} \frac{b_0^2}{2\mu_0}$
M ₂	$n_{M_{21}}$ et $n_{M_{19}}$	$\frac{S}{16} \frac{b_0^2}{2\mu_0}$
	De $n_{M_{22}}$ à $n_{M_{28}}$	$\frac{S}{8} \frac{b_0^2}{2\mu_0}$

Tableau II-2 Valeurs des forces nodales obtenues sur les deux maillages

Par conséquent, on remarque, notamment au travers des nœuds $n_{M_{11}}$ et $n_{M_{21}}$, $n_{M_{12}}$ et $n_{M_{23}}$, $n_{M_{13}}$ et $n_{M_{25}}$, $n_{M_{14}}$ et $n_{M_{27}}$ ou encore $n_{M_{15}}$ et $n_{M_{29}}$ que la valeur de la force locale calculée en un point donné dépend du maillage.

Aussi, il est nécessaire d'introduire une grandeur intermédiaire, calculée à partir des forces nodales obtenues par la méthode des travaux virtuels, et qui permet de rendre compte de la valeur de la force exercée en tout point de l'espace, notamment à l'aide des fonctions d'interpolation et de la forme (II.8). De par ces caractéristiques ainsi définies, cette grandeur est une densité de force, et s'exprime en $N.m^{-2}$ dans le cas d'une force surfacique ou en $N.m^{-3}$ dans le cas d'une force volumique.

II.4.2.2 Détermination de la densité de force

Soit N l'ensemble des nœuds inclus dans la région sur laquelle les forces nodales sont calculées. Pour chaque nœud n de N la force nodale $F_{u,n}$ représente une globalisation des effets de la densité de force [19][54][57][58], notée f , au voisinage direct de ce nœud. De plus, pour chaque composante x , y et z de f et de $F_{u,n}$, cette globalisation peut être exprimée par les formes intégrales suivantes :

$$\int_D w_n f_x d\tau = F_{u,n_x} \quad n \in N \quad (II.46)$$

$$\int_D w_n f_y d\tau = F_{u,n_y} \quad n \in N \quad (II.47)$$

$$\int_D w_n f_z d\tau = F_{u,n_z} \quad n \in N \quad (II.48)$$

Il est par ailleurs à noter que le support d'intégration D se limite aux éléments adjacents au nœud n . De plus, la densité de force f est exprimée aux nœuds.

Comme nous l'avons dit précédemment, pour pouvoir être projetée depuis un maillage vers un autre, la densité de force f doit être définie en tout point de l'espace. Cette contrainte est réalisée en discrétisant f selon la forme (II.8). L'expression (II.46) peut alors s'écrire :

$$\int_D w_n \left(\sum_{i=1}^N w_i f_{i_x} \right) d\tau = F_{u,n_x} \quad \forall n \in N \quad (II.49)$$

$$\int_D w_n \left(\sum_{i=1}^N w_i f_{i_y} \right) d\tau = F_{u,n_y} \quad \forall n \in N \quad (II.50)$$

$$\int_D w_n \left(\sum_{i=1}^N w_i f_{i_z} \right) d\tau = F_{u,n_z} \quad \forall n \in N \quad (II.51)$$

En écrivant les relations (II.49), (II.50) et (II.51) pour chaque nœud on obtient, pour chaque composante x , y et z , le système matriciel linéaire suivant :

$$[A] \begin{bmatrix} f_{i,x,y,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{u,n,x,y,z} \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

où un terme élémentaire de la matrice $[A]$ s'écrit :

$$A_{m,n} = \int_D w_n w_n d\tau \quad (\text{II.53})$$

Une fois la densité de force f ainsi obtenue, il est alors possible de la projeter sur un maillage différent.

II.4.2.3 Projection des densités de force

Comme nous l'avons dit précédemment, la densité de force f est interpolée en tout point de l'espace à l'aide des fonctions d'interpolation nodales. La formulation permettant la projection de la densité de force depuis un maillage source vers un maillage cible s'écrit donc :

$$\int_D \psi \sum_{j=1}^{N_{n_c}} w_{n_{c_j}} f_{n_{c_j}} d\tau = \int_D \psi \sum_{i=1}^{N_{n_s}} w_{n_{s_i}} f_{n_{s_i}} d\tau \quad \forall \psi \in L^2(D) \quad (\text{II.54})$$

La fonction test est donc remplacée par les fonctions d'interpolation nodales pour obtenir les mêmes matrices que pour la projection de la température :

$$A_{m,n} = \int_D w_{n_{c_m}} w_{n_{c_n}} d\tau \quad m \in \{1, N_{n_c}\} \text{ et } n \in \{1, N_{n_c}\} \quad (\text{II.55})$$

$$B_{o,p} = \int_D w_{n_{c_o}} w_{n_{s_p}} d\tau \quad o \in \{1, N_{n_c}\} \text{ et } p \in \{1, N_{n_s}\} \quad (\text{II.56})$$

Par conséquent, lors de l'utilisation de maillages dédiés, le protocole pour un calcul magnéto-mécanique présenté sur la Figure I-7 devient :

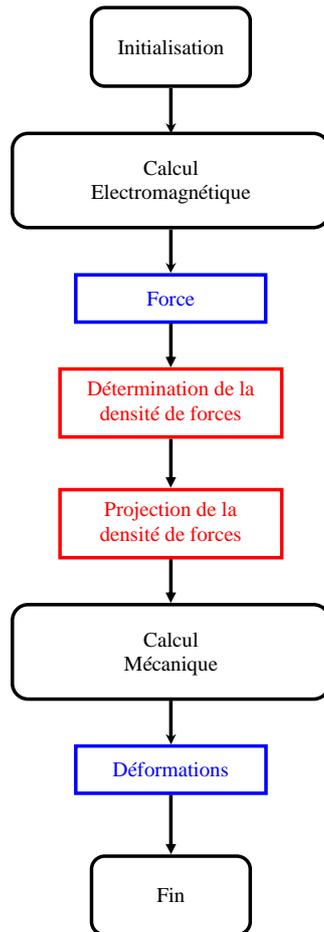


Figure II-6 Déroulement d'un calcul magnétomécanique avec détermination et projection de la densité de pertes

II.5 Validation de la méthode de projection

Nous allons maintenant valider la technique de projection développée précédemment dans le cas des grandeurs magnétiques. Pour cela, nous modélisons deux exemples académiques.

Le premier, mettant en œuvre une résolution magnétostatique, consiste en le cube traversé par une densité de courant uniforme [13][29]. Il s'agit, dans cet exemple, d'étudier la projection du potentiel vecteur magnétique telle qu'elle a été introduite par les formulations (II.17) et (II.22). Par ailleurs, il permet de mettre en évidence la différence entre ces deux formulations, et en particulier la vérification de la propriété $\text{rota}_c = \mathbf{b}$ par la formulation (II.22).

Le second exemple, quant à lui, fait appel à une formulation magnétodynamique. Il consiste en la sphère conductrice plongée dans un champ magnétique uniforme variable dans le temps [2][10].

Dans les deux cas, les résultats numériques seront, lorsque c'est possible, comparés avec la solution analytique.

II.5.1 Cube conducteur traversé par une densité de courant uniforme

II.5.1.1 Présentation du système étudié

Le système étudié dans cette partie consiste en un cube d'un mètre de côté et de perméabilité magnétique $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$. On applique à ce cube une densité de courant constante $j_0 = 10 \text{ MA.m}^{-2}$ dirigée selon l'axe (Oz). Par ailleurs, on applique des conditions aux limites de type $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_e} = 0$ de telle sorte que le flux magnétique ne sorte pas du cube.

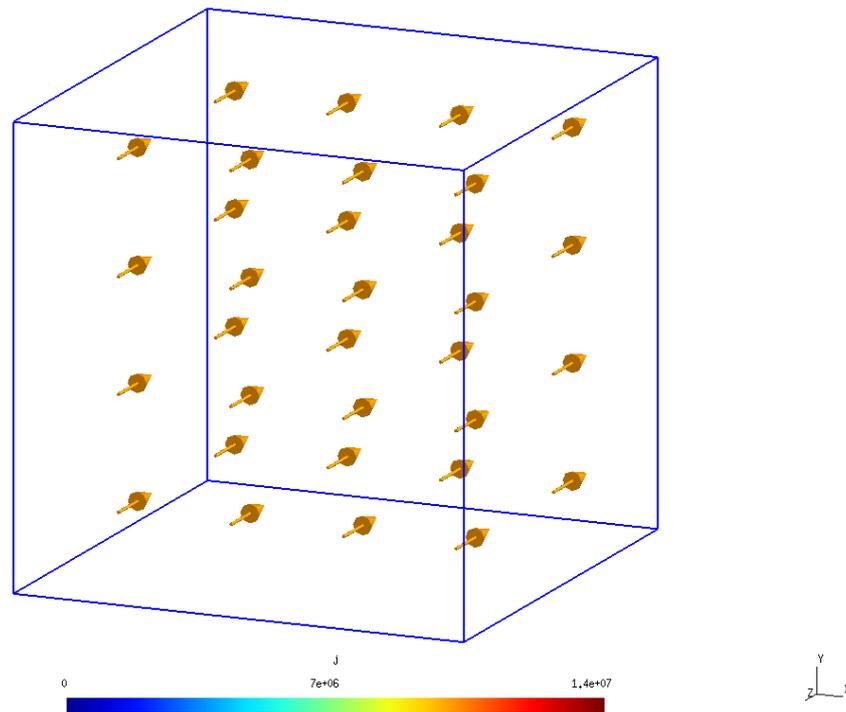


Figure II-7 Système étudié et densité de courant imposée

Pour mettre en œuvre la projection du potentiel vecteur magnétique au travers des formulations (II.17) et (II.22), nous réalisons plusieurs maillages de finesses différentes. Les caractéristiques (nombre d'éléments) de ces derniers sont résumées dans le Tableau II-3.

Maillage	Nombre d'éléments
M ₁	27
M ₂	48
M ₃	108
M ₄	243
M ₅	432
M ₆	675
M ₇	972
M ₈	1728
M ₉	2523
M ₁₀	3888
M ₁₁	5808
M ₁₂	8748

Tableau II-3 Caractéristiques de différents maillages utilisés

II.5.1.2 Etude du potentiel vecteur magnétique

Dans le cas général, lorsqu'on souhaite projeter une grandeur depuis un maillage source vers un maillage cible, deux configurations peuvent être envisagées :

1. le maillage source est plus fin que le maillage cible
2. le maillage source est plus grossier que le maillage cible

Pour prendre en considération ces deux configurations, nous utilisons trois maillages parmi ceux présentés dans le Tableau II-3, à savoir les maillages M_3 , M_7 et M_{12} . Le maillage M_7 est ici employé comme maillage source. Aussi, dans un premier temps, une résolution magnétostatique du problème y est réalisée. On montre, sur la Figure II-8, la solution obtenue suite à ce calcul.

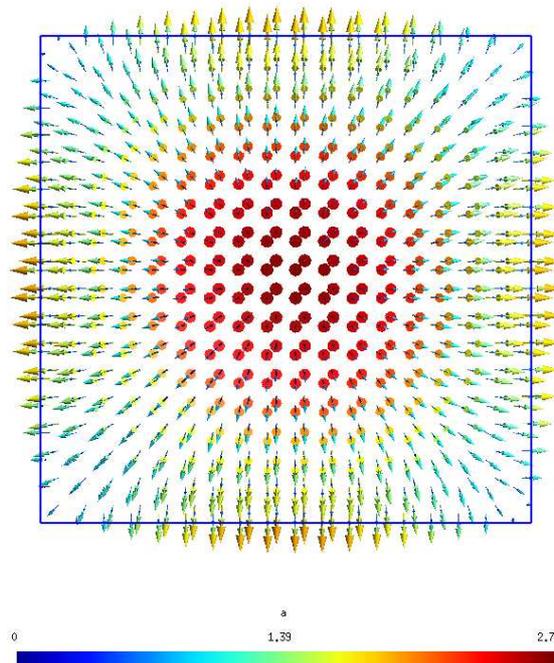


Figure II-8 Distribution du potentiel vecteur magnétique

Dans un second temps, la solution ainsi obtenue est projetée tour à tour sur les maillages M_3 (configuration n°1) et M_{12} (configuration n°2) en utilisant, à chaque fois, les deux formulations (II.17) et (II.22) développées précédemment.

Sur la Figure II-9, on présente la distribution du potentiel vecteur projeté, via les deux formulations, depuis le maillage M_7 sur le maillage M_3 .

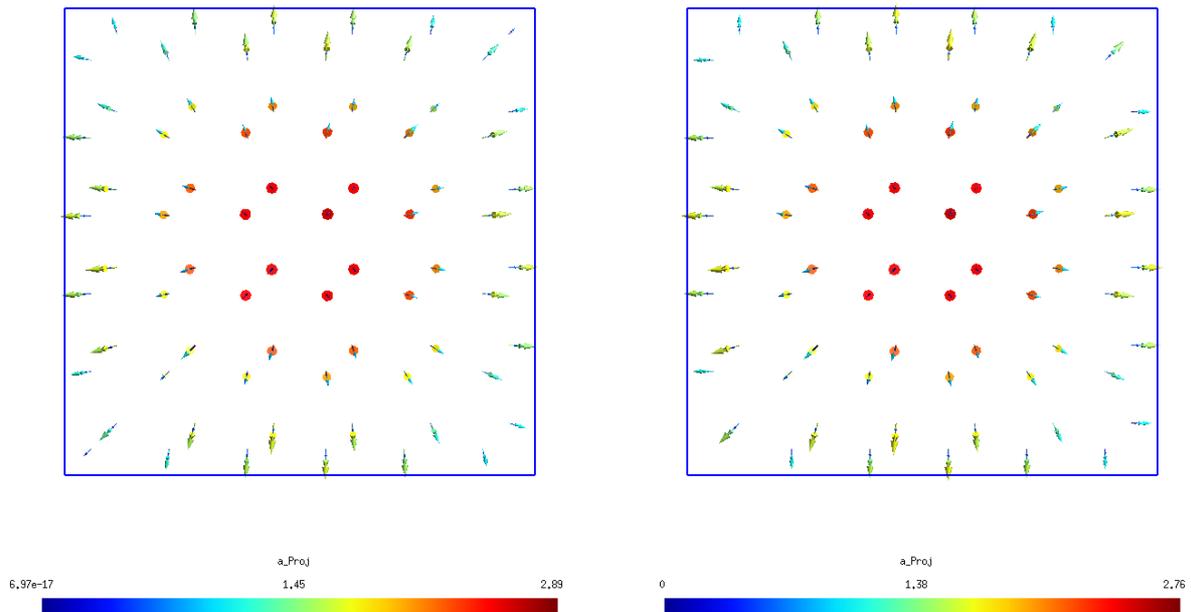


Figure II-9 Distribution du potentiel vecteur magnétique projeté sur le maillage M_3 , à partir du maillage M_7 , via la formulation (II.17) (gauche) et via la formulation (II.22) (droite)

On constate sur cette figure que la distribution du potentiel vecteur magnétique projeté est, pour les deux formulations, conforme à celui de la Figure II-8.

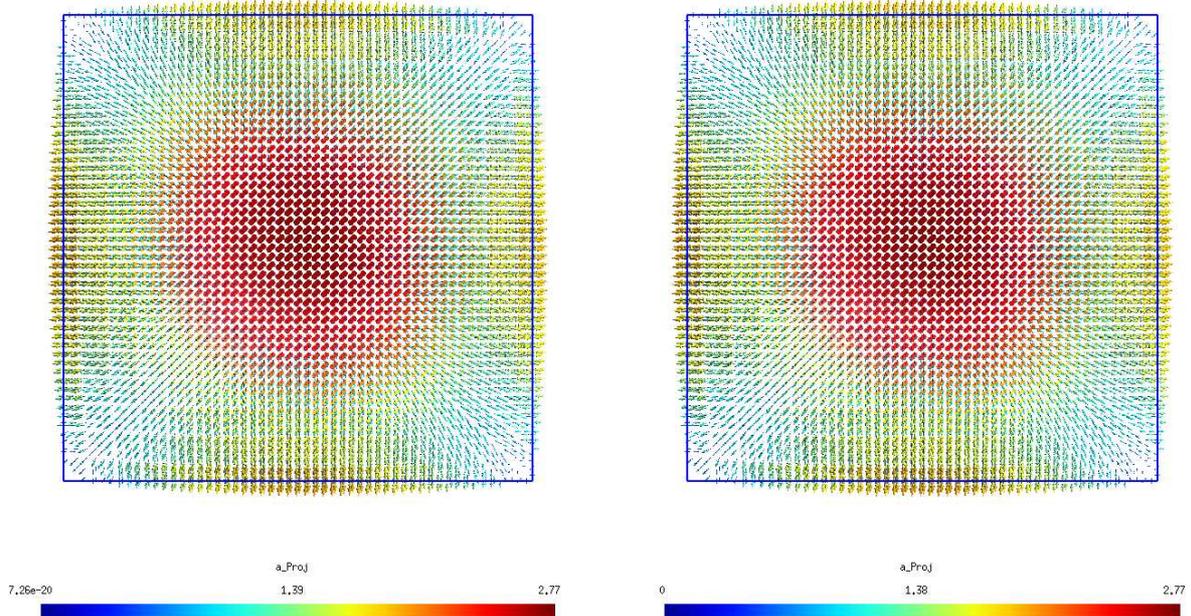


Figure II-10 Distribution du potentiel vecteur magnétique projeté sur le maillage M_{12} , à partir du maillage M_7 , via la formulation (II.17) (gauche) et via la formulation (II.22) (droite)

De même, le potentiel vecteur magnétique projeté dans le cas où le maillage cible est plus fin que le maillage source (Figure II-10), est conforme à celui de la Figure II-8.

II.5.1.3 Etude de l'induction magnétique

Dans le cas d'une formulation en potentiel vecteur magnétique, la distribution spatiale de l'induction \mathbf{b} est obtenue en calculant le rotationnel de \mathbf{a} ($\text{rota} = \mathbf{b}$). A titre d'illustration, la Figure II-11 présente la distribution de l'induction magnétique dans le cube. Il s'agit en fait du rotationnel du potentiel vecteur magnétique présenté sur la Figure II-8.

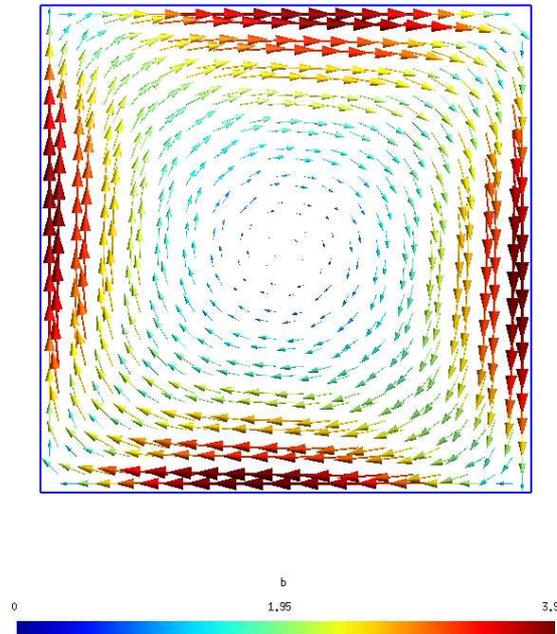


Figure II-11 Distribution de l'induction magnétique

Cependant, comme nous l'avons vu précédemment, le lien entre le potentiel vecteur magnétique et l'induction magnétique n'est pas pris en compte lors de la projection de \mathbf{a} à l'aide de la formulation (II.17). En revanche, la formulation (II.22) permet de conserver cette propriété lors de la projection de \mathbf{a} .

Afin d'illustrer cette différence entre les deux formulations nous reprenons les potentiels vecteurs présentés sur la Figure II-9 et nous calculons leurs rotationnels. Le résultat est présenté sur la Figure II-12. De même, la Figure II-13 présente la distribution du rotationnel des potentiels vecteurs présentée sur la Figure II-10.

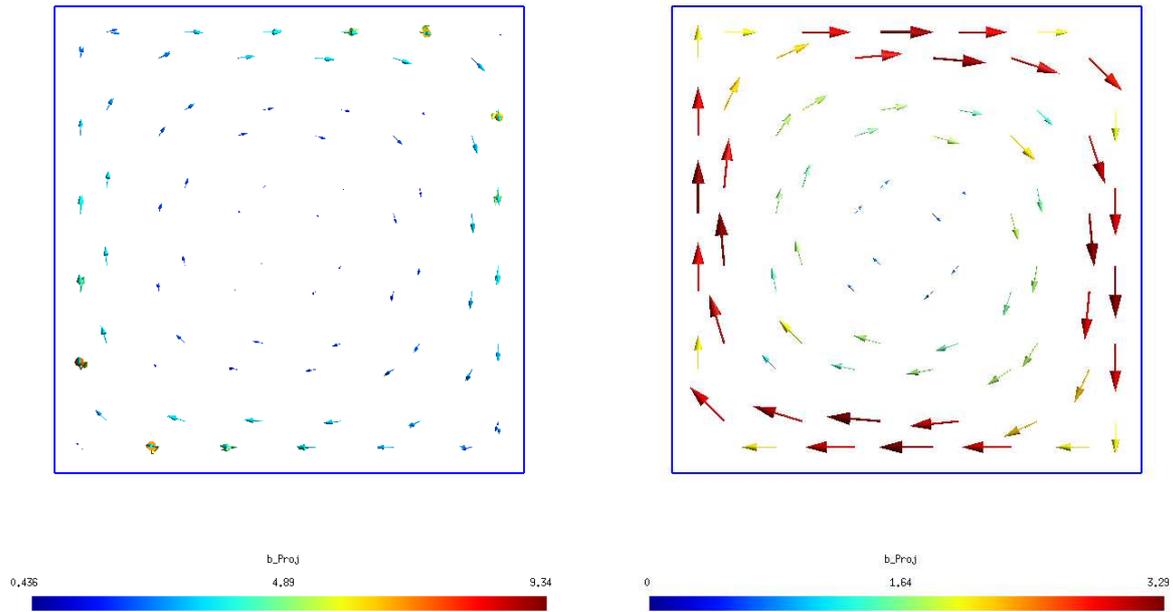


Figure II-12 Distribution du rotationnel du potentiel vecteur magnétique projeté sur le maillage M_3 , à partir du maillage M_7 , via la formulation (II.17) (gauche) et via la formulation (I.22) (droite)

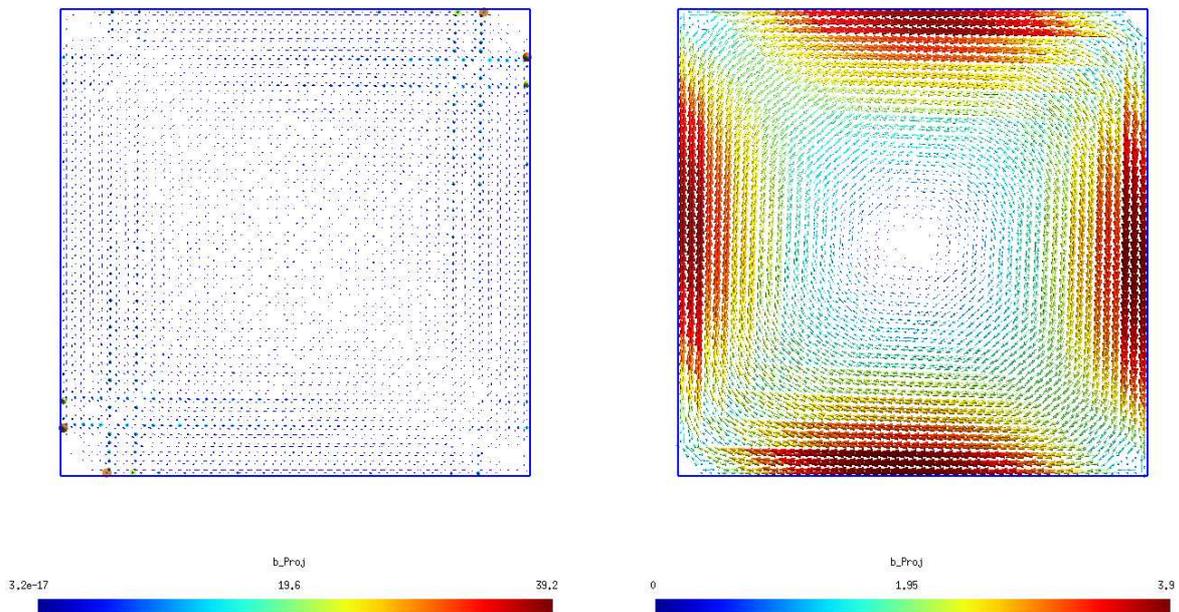


Figure II-13 Distribution du rotationnel du potentiel vecteur magnétique projeté sur le maillage M_{12} , à partir du maillage M_7 , via la formulation (II.17) (gauche) et via la formulation (II.22) (droite)

Sur ces deux figures, on constate bien que pour les deux configurations possibles – maillage cible plus grossier ou plus fin que le maillage source – l'utilisation de la formulation (II.17) ne permet pas d'évaluer l'induction magnétique à partir du potentiel vecteur magnétique.

En revanche, on peut également noter sur ces figures que le potentiel vecteur magnétique projeté sur le maillage cible via la formulation (II.22) est bien défini de telle sorte que son rotationnel est égal à l'induction magnétique. En effet, d'un point de vue qualitatif, on

retrouve bien, sur les deux figures, la forme de la distribution de l'induction magnétique de la Figure II-11.

Pour étudier quantitativement les variations spatiales de \mathbf{b} dans le système, on choisit de les représenter le long de coupes représentatives à l'intérieur du cube (Figure II-14). Ces dernières sont définies de la façon suivante :

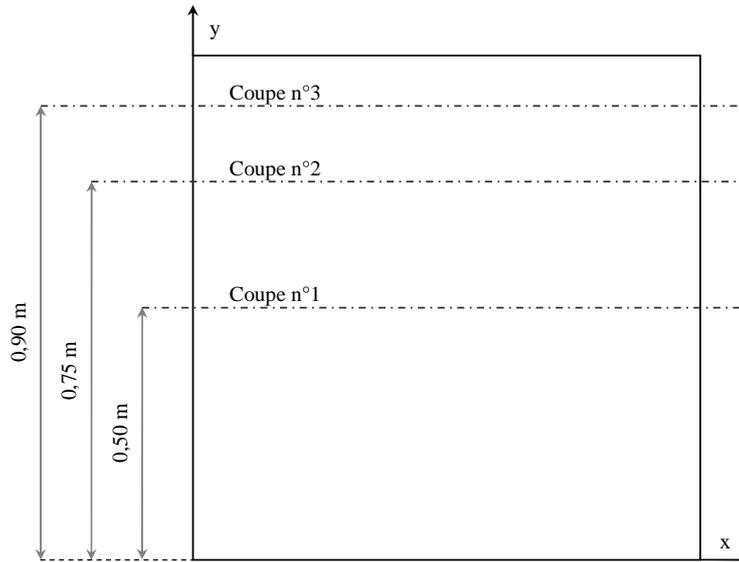


Figure II-14 Définition des coupes dans le système

$$\text{Coupe n}^\circ 1 \equiv \{0 \leq x \leq 1 \text{ m}, y = 0 \text{ m}, z = 0,5 \text{ m}\}$$

$$\text{Coupe n}^\circ 2 \equiv \{0 \leq x \leq 1 \text{ m}, y = 0,75 \text{ m}, z = 0,5 \text{ m}\}$$

$$\text{Coupe n}^\circ 3 \equiv \{0 \leq x \leq 1 \text{ m}, y = 0,9 \text{ m}, z = 0,5 \text{ m}\}$$

Le problème est invariant selon l'axe (Oz). L'induction magnétique n'a donc pas de composante selon cet axe. De plus, le problème est également symétrique. De ce fait, le long de la coupe n°1, seule la composante Y de l'induction est non nulle. Sa variation est représentée sur la Figure II-15.

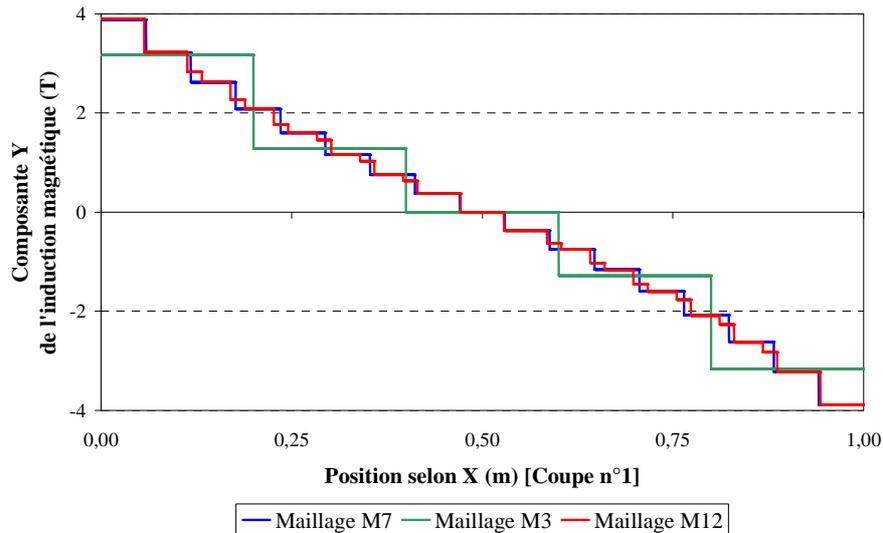


Figure II-15 Variation de la composante Y de l'induction magnétique le long de la coupe n°1

Qu'il s'agisse du maillage M_3 ou du maillage M_{12} , on constate sur la Figure II-15 que l'induction magnétique calculée à partir du potentiel vecteur magnétique projeté a la même évolution spatiale que celle calculée directement sur le maillage M_7 .

Cependant, on remarque également sur cette figure que, dans le cas de la configuration n°1 (projection depuis M_7 sur M_3), la qualité de la solution projetée est dégradée comparativement à la grandeur d'origine. En revanche, dans le cas de la configuration n°2 (depuis M_7 sur M_{12}) la solution projetée est extrêmement proche de la grandeur d'origine.

Le long des coupes n°2 et n°3, les composantes X et Y de l'induction magnétique sont toutes deux non nulles. Elles sont représentées respectivement sur la Figure II-16 et la Figure II-17.

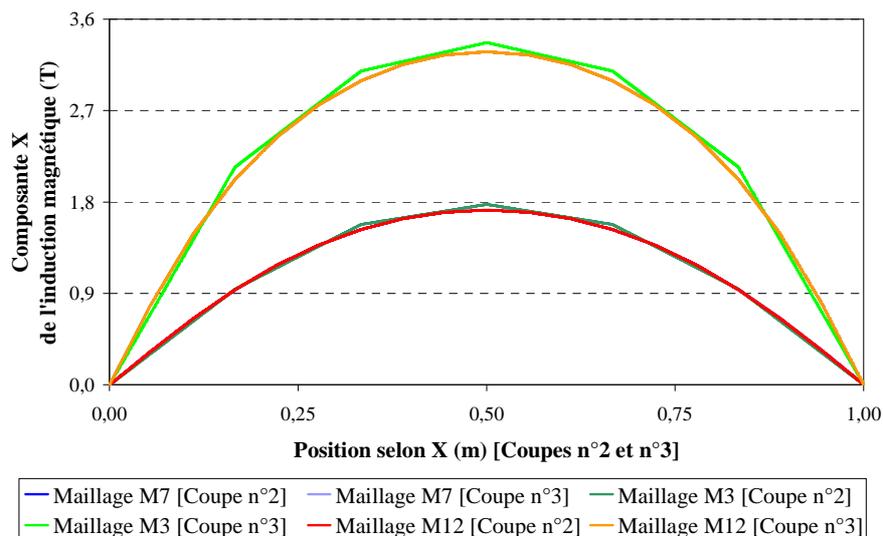


Figure II-16 Variation de la composante X de l'induction magnétique le long de coupes n°2 et n°3.

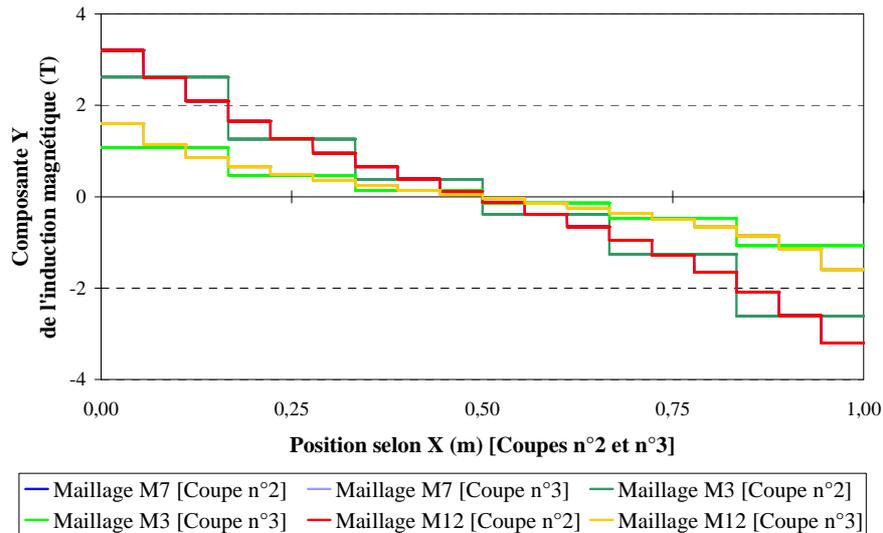


Figure II-17 Variation de la composante Y de l'induction magnétique le long des coupes n°2 et n°3.

Ces deux figures confirment la tendance observée sur la Figure II-15. En effet, lorsque la projection est réalisée dans le cas de la configuration n°1, la grandeur issue de la projection concorde en moyenne avec la grandeur d'origine, mais subit une perte d'information, comme nous allons le voir lors de l'étude de l'énergie stockée en fonction des maillages. En revanche, sur les deux figures, les courbes représentant l'évolution spatiale des inductions magnétiques source et évaluée à partir du potentiel vecteur magnétique projeté sur le maillage M_{12} sont confondues. Dans le cas de la configuration n°2, la méthode de projection permet donc une évaluation précise des grandeurs projetées sur le maillage cible.

II.5.1.4 Etude de l'énergie

Dans cette partie, nous allons étudier l'évolution de l'énergie calculée à partir du potentiel vecteur magnétique projeté sur différents maillages cibles. Pour cela, le problème est tout d'abord résolu sur le maillage M_7 (maillage source) comme précédemment. Le potentiel vecteur magnétique ainsi obtenu est alors projeté tour à tour sur chacun des maillages présentés dans le Tableau II-3. L'énergie magnétique est alors évaluée sur chacun des maillages cibles à partir du potentiel vecteur projeté.

L'énergie ainsi obtenue est ensuite comparée à des valeurs obtenues différemment. Comme indiqué précédemment, le problème étudié a une solution analytique $W = 2,208 \text{ MJ}$ [13]. Par ailleurs, lors d'une résolution de ce problème par la méthode des éléments finis, la valeur de l'énergie calculée dépend fortement de la finesse du maillage [29] (Figure II-18). De ce fait, nous effectuons une résolution magnéto-statique sur chaque maillage cible afin d'y obtenir une valeur de l'énergie magnétique.

Les résultats obtenus suite à ces différents calculs sont présentés sur la Figure II-18.

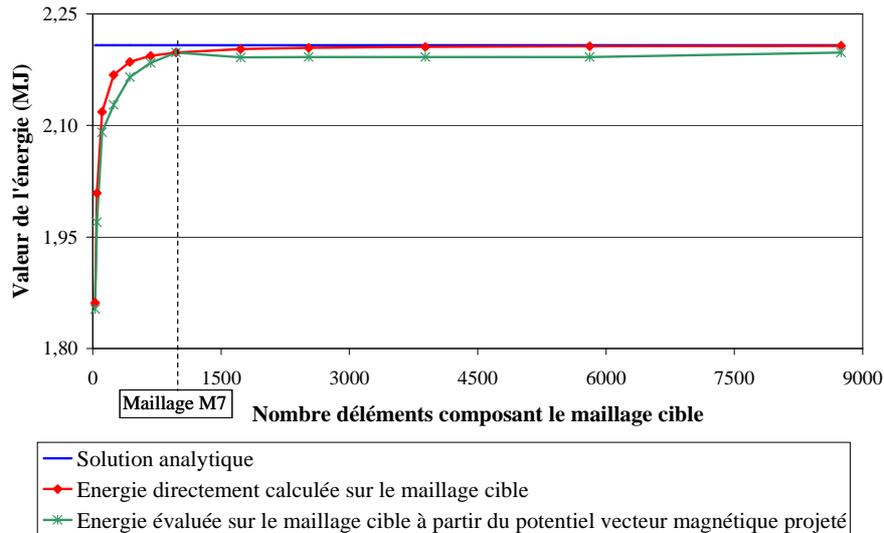


Figure II-18 Energie stockée dans le système obtenue par différentes méthodes

Sur la Figure II-18, on retrouve la forme classique de l'évolution de la valeur de l'énergie en fonction de la finesse du maillage. En effet, la courbe représentant l'énergie calculée à partir du potentiel vecteur issu de la projection observe la même allure que celle représentant la valeur de l'énergie directement calculée sur les maillages cibles. Par ailleurs, on constate également, comme pour l'induction magnétique étudiée précédemment, la perte d'information inhérente à la projection puisque les deux courbes ne sont pas confondues. Néanmoins, l'écart relatif maximum reste inférieur à 5%.

II.5.2 Sphère conductrice plongée dans un champ magnétique sinusoïdal

II.5.2.1 Présentation du système étudié

Dans cette partie, il s'agit de valider les formulations de projection présentées aux paragraphes II.3.2.1 et II.3.2.2. Pour cela, on considère le système de la Figure II-19 constitué d'une sphère conductrice plongée dans l'air et soumise à un champ magnétique sinusoïdal uniforme.

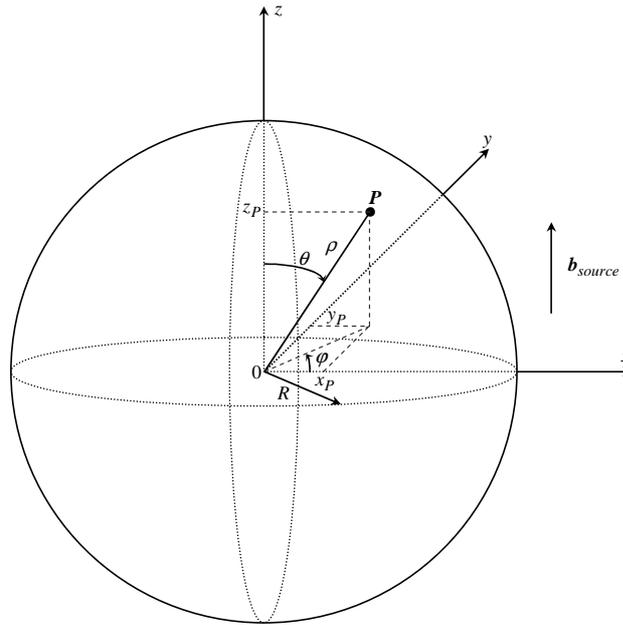


Figure II-19 Système étudié

Dans notre étude, la sphère est constituée de cuivre. Sa perméabilité magnétique μ est prise égale à μ_0 et sa conductivité électrique σ a pour valeur $5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$.

L'induction magnétique source appliquée au système est dirigée selon l'axe (Oz) (Figure II-19). Elle est par ailleurs définie comme suit :

$$\mathbf{b}_{source}(t) = b_{s_0} \cos(\omega t) \mathbf{e}_z \quad (\text{II.57})$$

où b_{s_0} est égal à 1 T. De plus, la fréquence du champ source est fixée à 50Hz.

II.5.2.2 Définition du problème

Considérations géométriques

Sur la Figure II-19 on constate que le système étudié présente deux types de symétries permettant de réduire le domaine d'étude.

En effet, pour $z = 0$ l'induction magnétique est perpendiculaire au plan (Oxy). En appliquant sur ce plan une condition aux limites de type $\mathbf{h} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0$ on peut limiter le domaine d'étude à l'ensemble de l'espace tel que $z \geq 0$.

De plus, la symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) permettrait de réaliser une étude axisymétrique. Cependant, afin de valider les formulations de projection présentées précédemment dans le cas de résolution en 3D, nous prenons ici en considération une portion de l'espace comprise entre deux angles φ_1 et φ_2 inférieurs à 2π . Pour cela on applique une condition aux limites de type $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_e} = 0$ sur les plans tels que $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = \varphi_2$. Dans notre étude, nous prenons $\varphi_1 = 0$ et $\varphi_2 = \frac{\pi}{64}$.

Définition des maillages utilisés

Pour prendre en compte les deux configurations possibles énoncées au paragraphe précédent, nous réalisons trois maillages de finesses différentes. En effet, le système étudié est sujet au phénomène de pénétration de courant dans la sphère conductrice. Par conséquent, la finesse des maillages à proximité de l'interface sphère/air a son importance. Dans notre cas, les trois maillages employés sont composés de tétraèdres. Leurs caractéristiques sont résumées dans le Tableau II-4.

Maillage	Nombre d'éléments dans la sphère	Nombre d'éléments dans l'air	Nombre total d'éléments
M ₁	2073	1456	3429
M ₂	954	896	1850
M ₃	5434	2575	8009

Tableau II-4 Caractéristiques des maillages utilisés

Par ailleurs, pour cette étude, le maillage M₂ sera utilisé comme maillage source alors que les maillages M₁ et M₃ constitueront les maillages cibles.

Plans de coupes

Comme dans le paragraphe précédent, nous définissons ici différentes coupes dans le système afin d'étudier les variations spatiales des différentes grandeurs électromagnétiques, et en particulier l'induction magnétique et la densité de courant.

Les plans de coupes sont représentés sur la Figure II-20.

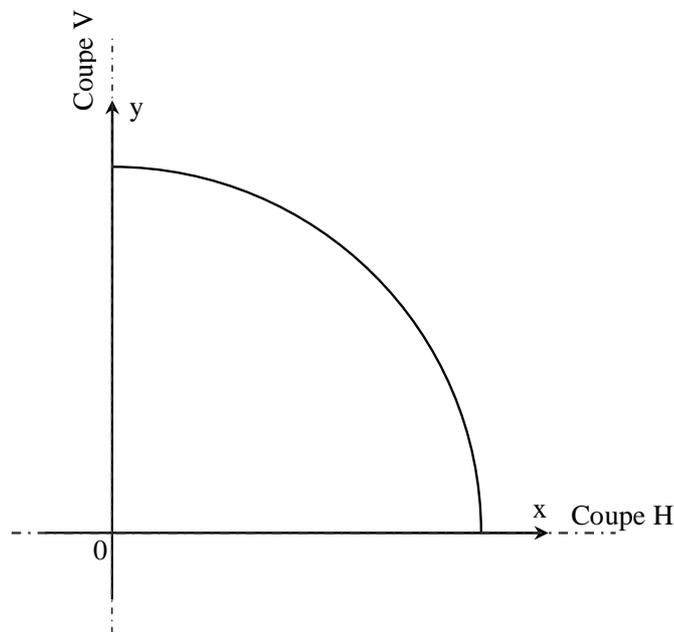


Figure II-20 Définition des coupes dans le système

$$\text{Coupe H} \equiv \left\{ 0 \leq \rho \leq 0,1 \text{ m}, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0 \text{ m} \right\} \equiv \{0 \leq x \leq 0,1 \text{ m}, y = 0 \text{ m}, z = 0 \text{ m}\}$$

$$\text{Coupe V} \equiv \{0 \leq \rho \leq 0,1 \text{ m}, \theta = 0, \varphi = 0 \text{ m}\} \equiv \{x = 0 \text{ m}, y = 0 \text{ m}, 0 \leq z \leq 0,1 \text{ m}\}$$

Comme on peut le remarquer sur cette figure, ces deux coupes sont significatives compte tenu des grandeurs que nous allons observer. En effet, la coupe H se situe dans le plan de symétrie (Oxy) alors que la coupe V représente l'axe de la symétrie de révolution. Dans ces conditions, le long de ces coupes, seule la composante de l'induction magnétique selon z est non nulle. De plus, comme nous l'avons dit précédemment, seule la composante de la densité de courant selon la direction φ est non nulle.

II.5.2.3 Formulation magnétique

On se propose d'étudier la projection du champ magnétique \mathbf{h} à l'aide de la formulation (II.31). Pour cela, nous procédons de la même façon que pour l'exemple magnétostatique. Dans un premier temps, une résolution magnétodynamique en champ magnétique en formalisme complexe est réalisée sur le maillage M_2 . Dans un second temps, la solution obtenue est projetée tour à tour sur les maillages M_1 (configuration n°1) et M_3 (configuration n°2) à l'aide de la formulation (II.31).

Comme nous l'avons dit précédemment, seule la composante selon z de l'induction magnétique est non nulle le long de la coupe V. L'évolution des parties réelle et imaginaire de \mathbf{b} le long de la coupe V est représentée respectivement sur la Figure II-21 et sur la Figure II-22. Sur chacune de ces figures, on trouvera l'évolution de l'induction magnétique avant et après projection pour les deux configurations, ainsi que la solution analytique du problème.

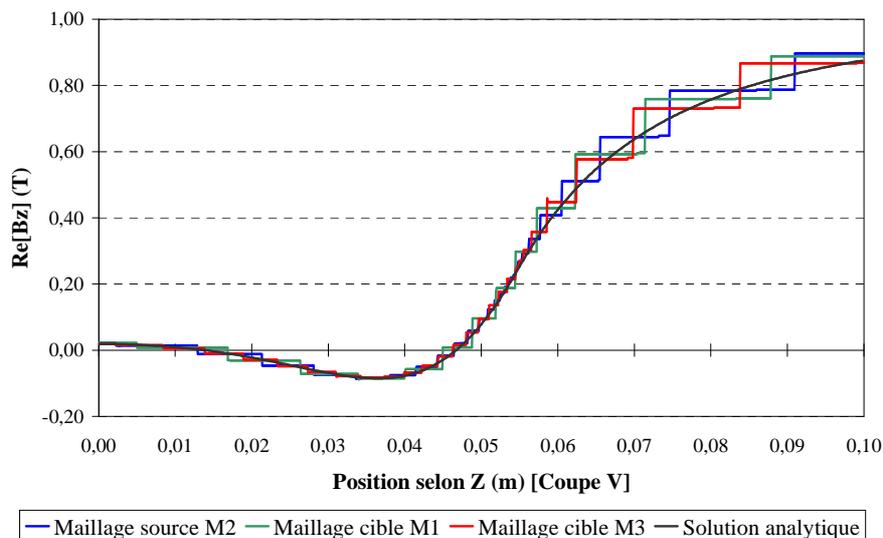


Figure II-21 Evolution de la composante selon z de la partie réelle de l'induction magnétique le long de la coupe V

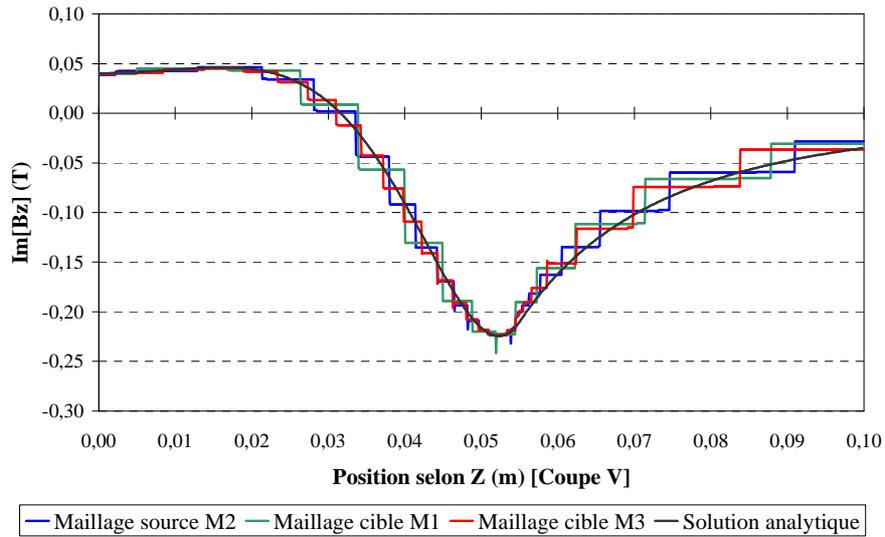


Figure II-22 Evolution de la composante selon z de la partie imaginaire de l'induction magnétique le long de la coupe V

L'évolution des parties réelle et imaginaire de \mathbf{b} le long de la coupe H est représentée respectivement sur la Figure II-23 et sur la Figure II-24.

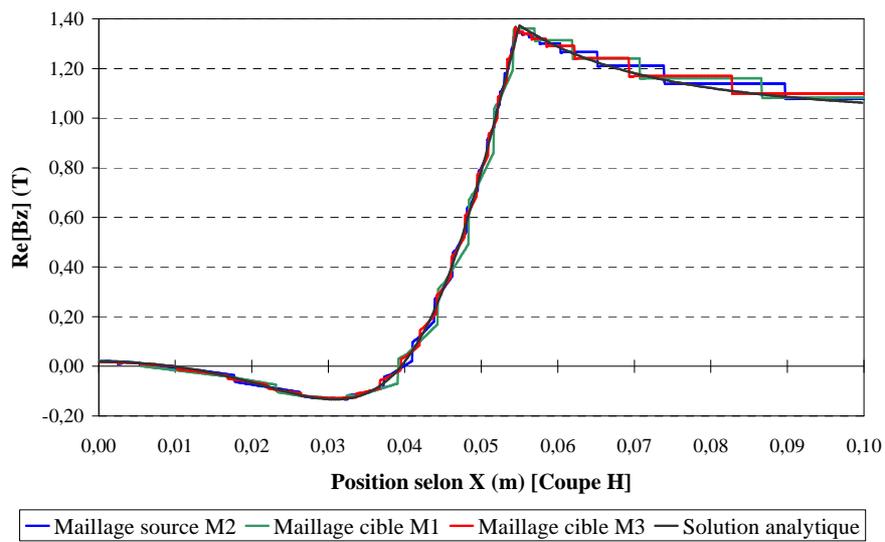


Figure II-23 Evolution de la composante selon z de la partie réelle de l'induction magnétique le long de la coupe H

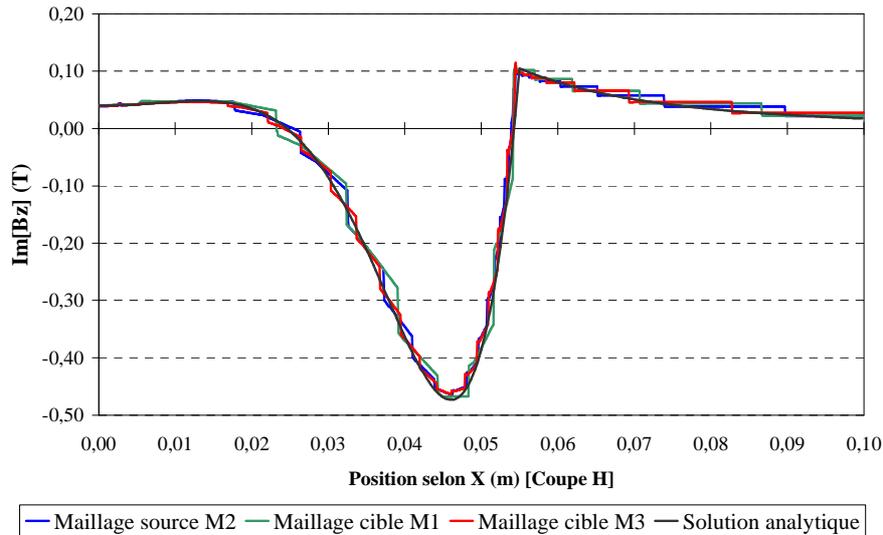


Figure II-24 Evolution de la composante selon z de la partie imaginaire de l'induction magnétique le long de la coupe H

Sur les quatre figures précédentes, on peut constater que la méthode de projection a tout d'abord permis la conservation des conditions de transmission de l'induction magnétique à l'interface sphère/air. Par ailleurs, on peut également noter une légère perte d'information dans le cas de la configuration n°1 (maillage cible plus grossier que le maillage source). En effet, dans cette configuration, le maillage cible utilisé est moins à même de prendre en compte le phénomène de profondeur de pénétration du courant dans la sphère. Néanmoins, la méthode de projection permet une bonne évaluation des grandeurs en moyenne sur le maillage cible. En revanche, on peut noter la très bonne concordance des différentes courbes dans le cas de la configuration n°2.

Comme nous l'avons dit précédemment, le long de la coupe H , seule la composante selon la direction φ de la densité de courant est non nulle. Comme pour l'induction magnétique, on propose d'observer la variation spatiale de ses parties réelle et imaginaire.

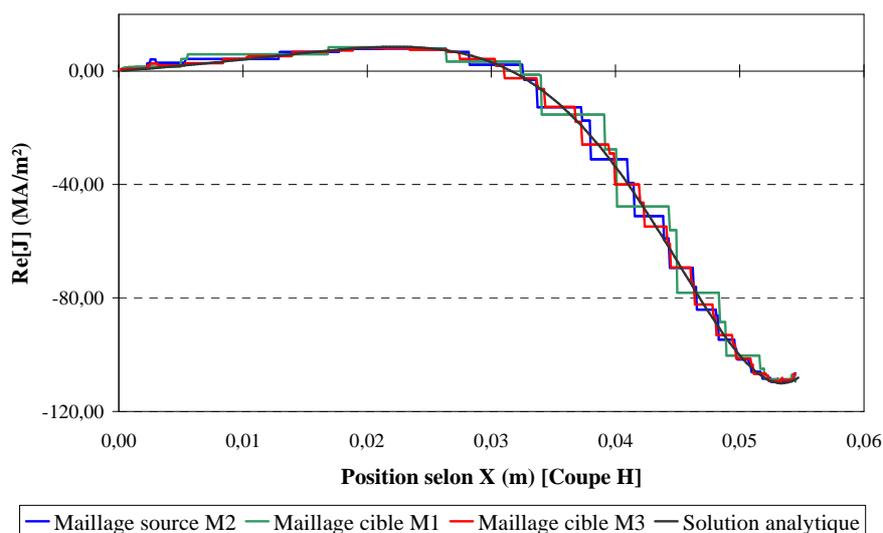


Figure II-25 Evolution de la partie réelle de la densité de courant le long de la coupe H

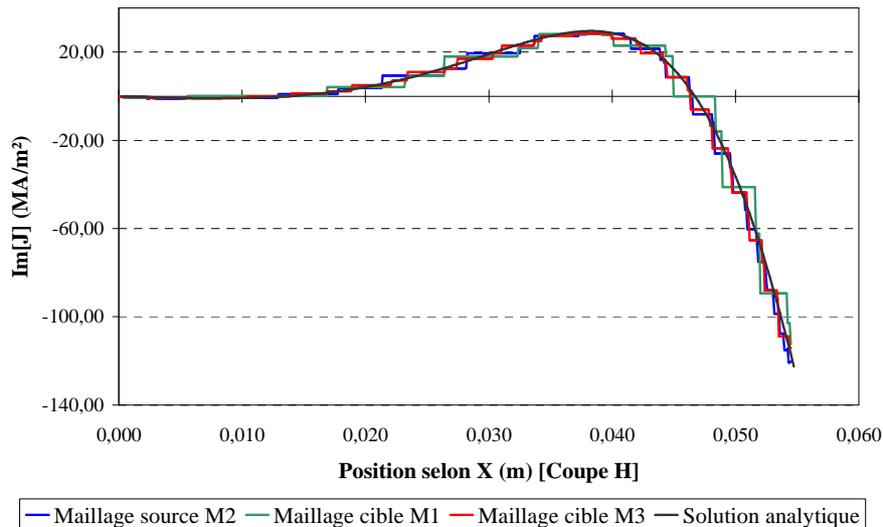


Figure II-26 Evolution de la partie imaginaire de la densité de courant le long de la coupe H

Comme pour l'induction magnétique, la méthode de projection permet une bonne évaluation de la densité de courant sur le maillage cible. De même, la qualité de la solution projetée dépend de la finesse de ce dernier, en particulier dans l'épaisseur de peau. Cependant, les grandeurs projetées restent correctes en moyenne.

II.5.2.4 Formulation électrique

On se propose maintenant d'étudier la projection du potentiel vecteur magnétique \mathbf{a} à l'aide de la formulation (II.54). Pour cela, on procède de la même façon que précédemment.

On montre, sur la Figure II-27 et la Figure II-28, l'évolution respectivement des parties réelle et imaginaire de l'induction magnétique le long de la coupe V.

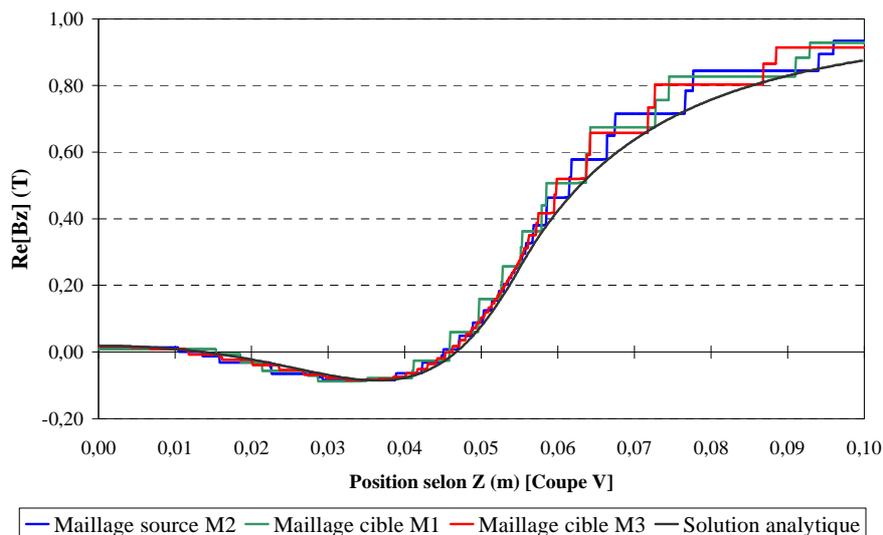


Figure II-27 Evolution de la composante selon z de la partie réelle de l'induction magnétique le long de la coupe V

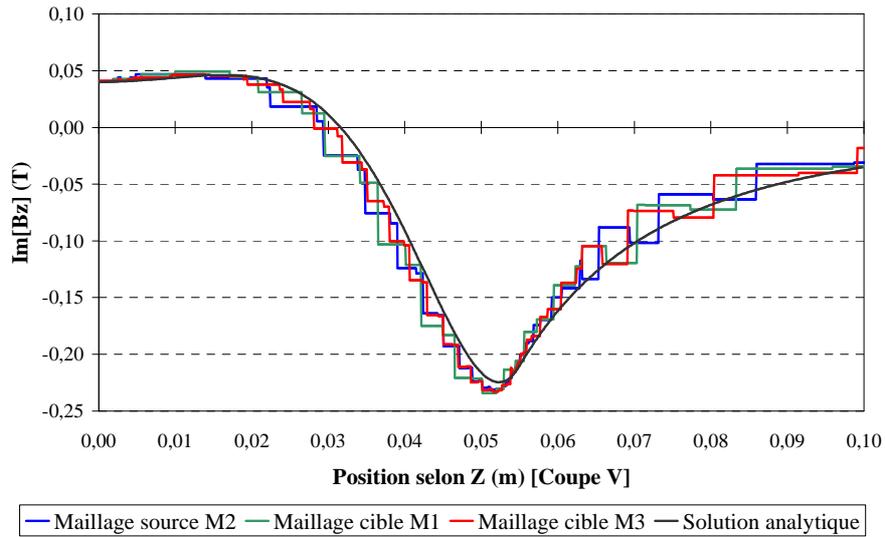


Figure II-28 Evolution de la composante selon z de la partie imaginaire de l'induction magnétique le long de la coupe V

De même le long de la coupe H :

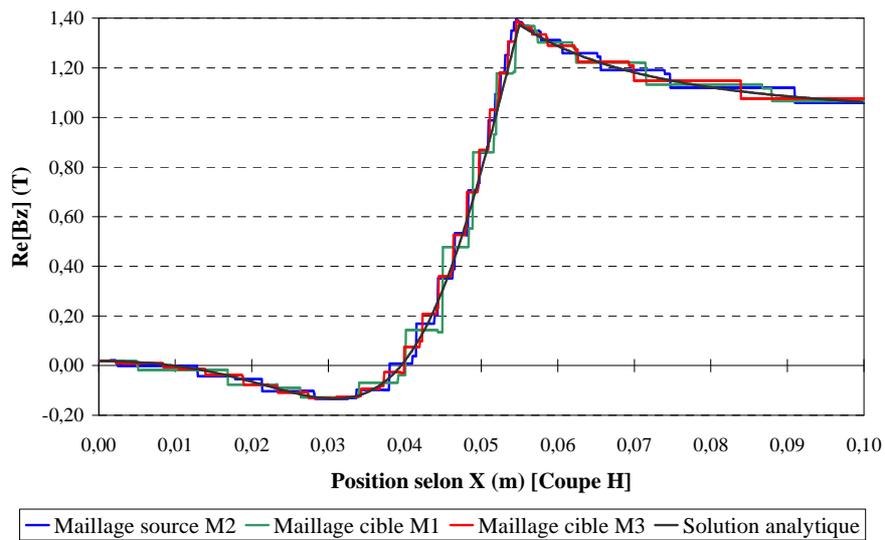


Figure II-29 Evolution de la composante selon z de la partie réelle de l'induction magnétique le long de la coupe H

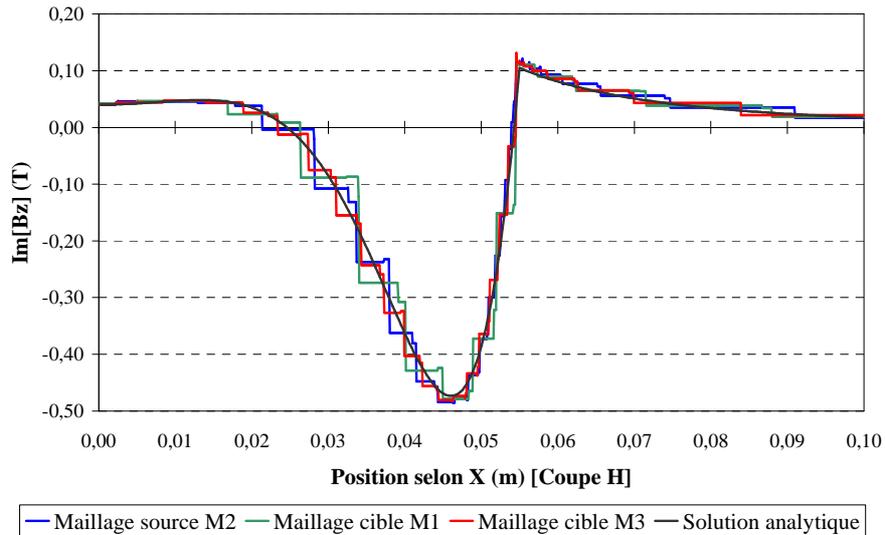


Figure II-30 Evolution de la composante selon z de la partie imaginaire de l'induction magnétique le long de la coupe H

Comme pour la projection du champ magnétique \mathbf{h} , ces quatre figures mettent en évidence la bonne concordance entre les grandeurs projetées et originales.

On montre également, sur la Figure II-31 et la Figure II-32 l'évolution de la densité de courant le long de la coupe H .

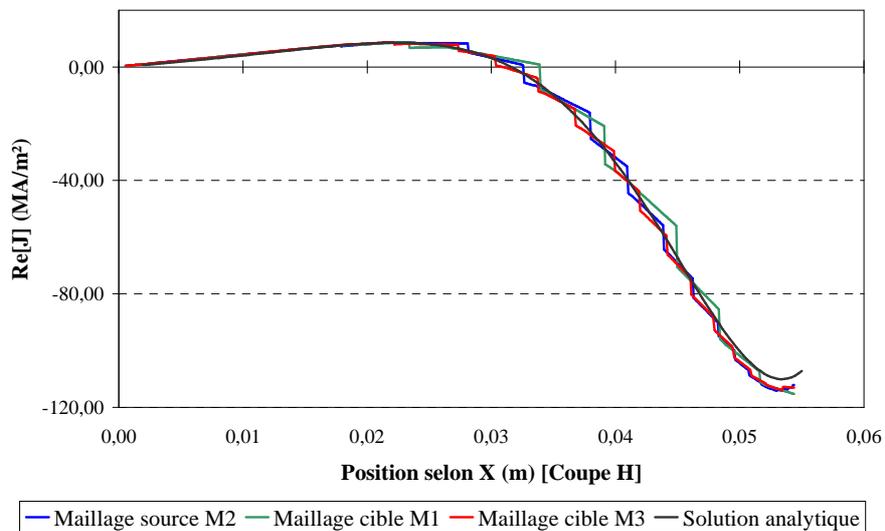


Figure II-31 Evolution de la partie réelle de la densité de courant le long de la coupe H

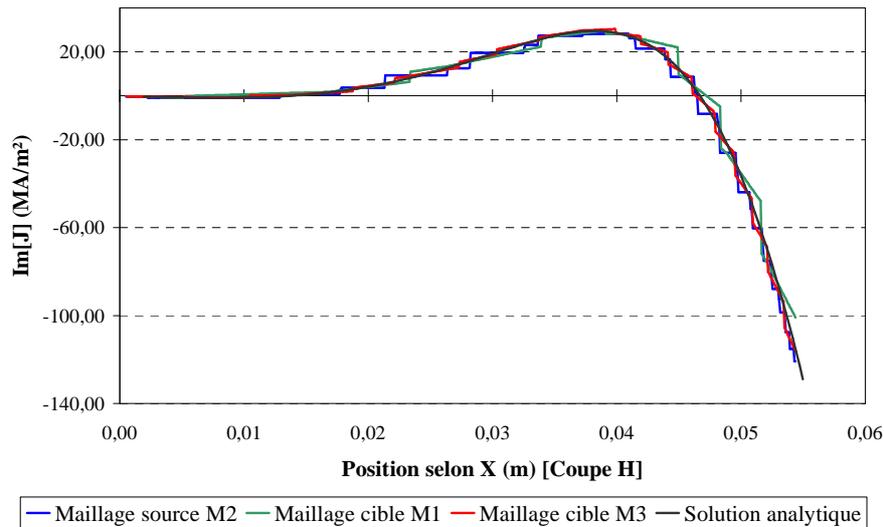


Figure II-32 Evolution de la partie imaginaire de la densité de courant le long de la coupe H

Par ailleurs, il est à noter que la qualité de la solution projetée dépend, entre autre, de la qualité du calcul des intégrales constituant les termes élémentaires des matrices du système (II.12). Or, cette opération est réalisée numériquement aux points de Gauss. Par conséquent, une augmentation du nombre de points de Gauss employés lors de l'intégration numérique pourra améliorer la qualité de la solution projetée, notamment dans le cas de fortes disparités entre les maillages source et cible [57].

II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de projection de grandeurs discrètes. A partir de cette méthode, différentes formulations de projection ont été développées afin de prendre en compte les propriétés physiques des grandeurs considérées, comme le champ magnétique, les potentiels – scalaire et vecteur – magnétiques, la quantité de chaleur, la température et la densité de force. Par ailleurs, les formulations concernant la projection de différentes grandeurs magnétiques ont été validées sur deux cas tests académiques.

Dans le chapitre suivant, les formulations permettant la projection des grandeurs de couplage dans le cas de modélisations magnétothermique et magnétomécanique seront mises en œuvre.

CHAPITRE III Modélisation de systèmes électrotechniques

III.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode de projection développée précédemment dans le cas de calculs multiphysiques couplés.

Dans un premier temps, un calcul magnétothermique est réalisé au travers de la modélisation d'un système industriel de transport de l'énergie électrique de type "jeu de barres". Puis, dans un second temps, un système composé d'un électro-aimant au-dessus d'une plaque de métal est modélisé afin d'en réaliser l'étude magnétomécanique.

III.2 Couplage magnétothermique

Dans cette partie, nous allons réaliser un calcul magnétothermique sur un système industriel de transport de l'énergie électrique. Notre but est de déterminer l'évolution de la température dans le système au point de fonctionnement nominal. En outre, nous utiliserons deux maillages différents pour les calculs électromagnétique et thermique. Pour cela, nous utiliserons la méthode de projection développée au chapitre précédent et en particulier les formulations (II.35) et (II.40), pour la projection de la densité de pertes Joule, et (II.43) pour celle de la température.

III.2.1 Présentation du système étudié

Pour cette étude nous avons modélisé un système de transport d'énergie électrique sous basses et moyennes tensions appelé *betobar*. Ce système se compose d'un ensemble de conducteurs de cuivre ou d'aluminium sertis dans un bloc constitué d'un alliage de béton et de résine.

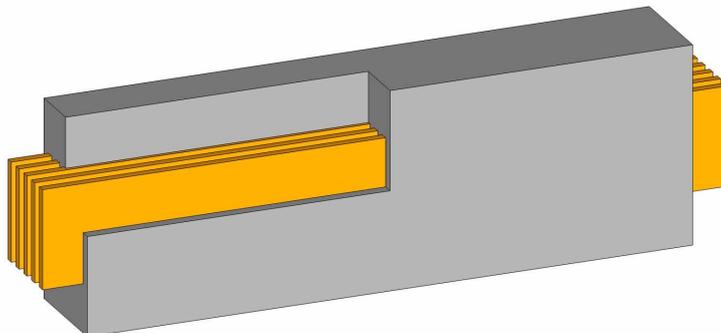


Figure III-1 Un exemple de betobar

Différentes configurations sont possibles en termes de géométrie (droite, coudée, "en T"), de nombre de conducteurs (un seul système de courants triphasés ou deux en parallèle) ou encore de puissance transportable [46].

Le modèle étudié dans notre cas correspond à celui représenté sur la Figure III-1. Il présente donc une invariance selon une des trois directions de l'espace et se compose de cinq conducteurs de cuivre (trois phases, le neutre et la terre). Les caractéristiques du dispositif étudié (dimensions et valeur du courant nominal) sont résumées dans le Tableau III-1.

Dimensions du bloc de béton (mm) (Largeur × Hauteur)	Dimensions d'un conducteur (mm) (Largeur × Hauteur)	Section d'un conducteur (mm ²)	Courant nominal (A)
104×200	100×8	800	1955

Tableau III-1 Caractéristiques du système

Par ailleurs, une coupe transversale de la structure peut être trouvée dans l'Annexe IV.

III.2.2 Définition du problème

III.2.2.1 Stratégie de couplage

Dans cette partie il s'agit de mettre en œuvre la méthode de projection présentée précédemment dans le cas d'un couplage magnétothermique. Pour cela, l'étude se déroule en deux parties.

Dans un premier temps, une solution de référence est obtenue en réalisant un calcul magnétothermique à l'aide d'un couplage faible selon la stratégie de la Figure I-6. Pour ce calcul, les deux résolutions – électromagnétique et thermique – sont supportées par un seul et même maillage fin.

Dans un second temps, un autre calcul magnétothermique est réalisé, toujours à l'aide d'un couplage faible, selon la stratégie de la Figure II-3. Cette fois, les résolutions électromagnétique et thermique sont supportées par des maillages différents. Les termes de couplage – densité de pertes par effet Joule et température – sont donc successivement projetés d'un maillage à l'autre.

Au cours de ces deux calculs, la résolution du problème électromagnétique est réalisée à l'aide d'une formulation magnétodynamique en champ magnétique (I.45). Le problème thermique, quant à lui, est résolu à l'aide de la formulation (I.76).

En outre, les constantes de temps des phénomènes thermiques étant beaucoup plus élevées que celles des phénomènes électromagnétiques, nous considérerons que, du point de vue des ces derniers, le système est quasi statique. De ce fait, la résolution du problème électromagnétique est réalisée en formalisme complexe.

III.2.2.2 Caractéristiques des matériaux

Caractéristiques magnétiques

Les deux matériaux – béton et cuivre – constituant le système sont amagnétiques. Leur perméabilité magnétique est donc prise égale à μ_0 .

Par ailleurs, on considère pour cette étude que la conductivité électrique du cuivre dépend de la température. Son expression est donnée par la relation (I.84). L'étude se déroulant à température ambiante de 20 °C, les paramètres σ_{ref} et $\alpha_{\sigma_{ref}}$ intervenant dans

cette relation ont pour valeurs respectives $5,9 \cdot 10^{-7} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ et $3,9 \cdot 10^{-3} \text{K}^{-1}$ (Tableau A - 1 électrique σ_{ref} et constante $\alpha_{\sigma_{ref}}$ pour différents matériaux et pour $T_{ref}=20^\circ\text{C}$).

Caractéristiques thermiques

Pour cette étude, nous prenons des caractéristiques thermiques linéaires. Celles-ci sont résumées dans le Tableau III-2.

	Béton	Cuivre
Conductivité thermique ($\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$)	0,94203	348
Masse volumique ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	1800	8920
Capacité calorifique ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	820	385

Tableau III-2 Caractéristiques thermiques du système

III.2.2.3 Conditions aux limites

Résolution électromagnétique

Le système étudié est invariant selon la direction (Oz) (Figure III-1). Aussi, nous ne modélisons qu'une tranche de 1 cm selon cette direction. En outre, sur les deux plans tels que $z = 0$ et $z = 1$ cm une condition aux limites de type $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_e} = 0$ est appliquée. Par ailleurs, le système est inclus dans une boîte d'air en surface de laquelle on applique une condition aux limites de type $\mathbf{h} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0$.

Résolution thermique

Pour la résolution thermique le domaine d'étude est réduit au betobar lui-même. En effet, l'échange par convection entre la surface du béton et l'air est modélisé à l'aide de la condition aux limites donnée par la relation (I.77).

III.2.2.4 Définition des maillages utilisés

On considère plusieurs maillages. Ces derniers diffèrent les uns des autres en particulier selon deux critères : le type d'éléments utilisés (hexaèdres, prismes ou tétraèdres) et leur finesse.

Comme nous l'avons dit précédemment, une tranche de 1 cm selon la direction (Oz) a été modélisée. En outre, pour tous les maillages que nous allons considérer, une seule couche d'éléments sera réalisée selon cette direction.

Maillage supportant la résolution électromagnétique

L'étude s'effectue au point de fonctionnement nominal, c'est-à-dire à une fréquence de 50 Hz. A cette fréquence, un phénomène d'effet de peau va apparaître à l'intérieur des conducteurs compte tenu de leurs dimensions (Tableau III-1). Le maillage supportant la résolution électromagnétique doit donc être suffisamment fin pour prendre en compte correctement ce phénomène.

En fonctionnement nominal, sous une température ambiante de 20 °C, la température maximale à l'intérieur des conducteurs n'excède pas 120 °C [46]. En première approximation, l'expression de l'épaisseur de peau donnée par la relation $\sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ donne une valeur comprise entre 9 mm et 11 mm. Il est donc nécessaire, pour la résolution électromagnétique, d'avoir plusieurs couches d'éléments dans cette zone.

Pour ce maillage, nous utilisons deux types d'éléments : des hexaèdres pour les conducteurs et des prismes pour le bloc de béton. Les caractéristiques de ce maillage sont résumées dans le Tableau III-3 :

Nom du maillage	Nombre total d'éléments	Nombre d'éléments dans le béton	Nombre d'éléments dans chacun des conducteurs	Longueur caractéristique
M_1	28791	17128	1800	0,66 mm

Tableau III-3 Caractéristiques du maillage M_1

Remarque : Dans ce tableau, la longueur caractéristique désigne, pour les éléments contenus dans les conducteurs, la taille d'une des arêtes d'une facette contenue dans le plan (Oxy).

A titre d'illustration, le maillage M_1 est représenté sur la Figure III-2.

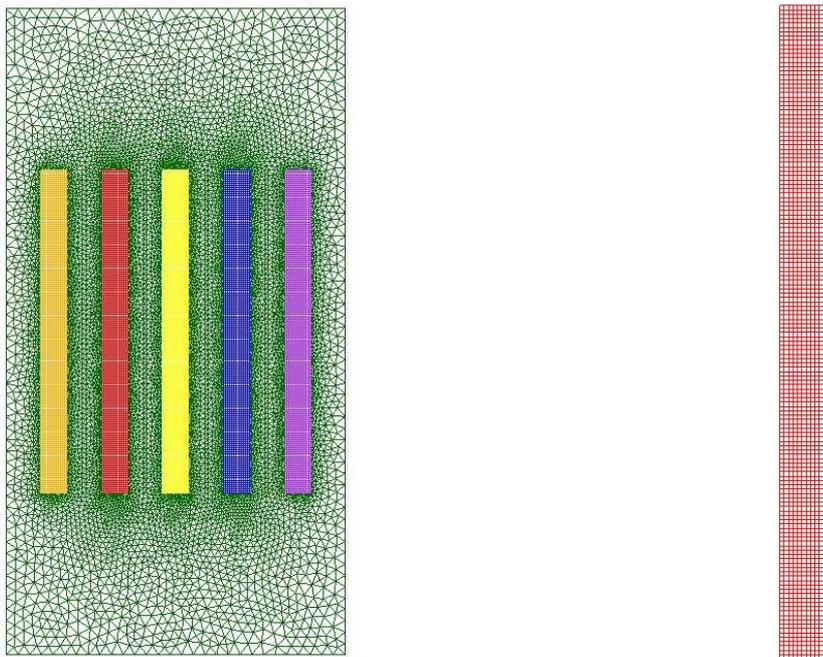


Figure III-2 Maillage supportant la résolution du problème électromagnétique (gauche)
Agrandissement sur un des conducteurs (droite)

Maillages supportant la résolution thermique

En ce qui concerne la résolution thermique du problème, deux types de maillages sont réalisés, différenciés par le type d'éléments qui les constituent. Dans le premier cas, les maillages sont basés sur le maillage M_1 , et ne diffèrent de ce dernier que par leur finesse. Ils sont donc composés d'hexaèdres et de prismes et seront notés M_{hp} dans la suite de ce document. Dans le deuxième cas, nous utilisons des tétraèdres pour mailler l'ensemble du système. Les maillages de ce type sont notés M_t .

Les caractéristiques des ces maillages sont résumées dans le Tableau III-4.

Nom du maillage	Nombre total d'éléments	Nombre d'éléments dans le béton	Nombre d'éléments dans chacun des conducteurs	Longueur caractéristique
M _{hp1}	20752	11490	1250	0,8 mm
M _{hp2}	13856	7308	800	1 mm
M _{hp3}	8266	4065	450	1,33 mm
M _{hp4}	4010	1554	200	2 mm
M _{hp5}	2808	1102	50	4 mm
M _{hp6}	2310	794	12	8 mm
M _{t1}	15261	8121	675	4 mm
M _{t2}	10075	5741	144	8 mm

Tableau III-4 Caractéristiques des maillages supportant la résolution du problème thermique

III.2.3 Présentation des résultats

La présentation des résultats de cette étude s'effectuera en deux parties. Dans un premier temps, nous étudierons la qualité des grandeurs projetées, densité de pertes Joule et température, au niveau local. Cette étude s'effectuera sur la solution du problème en régime permanent. Puis, dans un second temps, nous étudierons l'influence de la méthode de projection sur la solution temporelle du problème, et en particulier l'évolution de la température dans le système.

En outre, dans les deux cas, les grandeurs obtenues suite à une projection seront comparées à la solution de référence.

Pour cela, on définit des coupes dans le système. Ces dernières sont définies comme suit :

$$\text{Coupe } V_1 \equiv \{x = 0 \text{ mm}, -100 \leq y \leq 100 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Coupe } V_2 \equiv \{x = -18,7 \text{ mm}, -100 \leq y \leq 100 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Coupe } V_3 \equiv \{x = -52 \text{ mm}, -100 \leq y \leq 100 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Coupe } H_1 \equiv \{-52 \leq x \leq 52 \text{ mm}, y = 0 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Coupe } H_2 \equiv \{-52 \leq x \leq 52 \text{ mm}, y = 50 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Coupe } H_3 \equiv \{-52 \leq x \leq 52 \text{ mm}, y = 100 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

De plus, afin d'étudier l'évolution temporelle de la température dans le système, on définit différents points caractéristiques :

$$\text{Point n}^\circ 1 \equiv \{x = 0 \text{ mm}, y = 0 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Point n}^\circ 2 \equiv \{x = -52 \text{ mm}, y = 0 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Point n}^\circ 3 \equiv \{x = 0 \text{ mm}, -y = 100 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

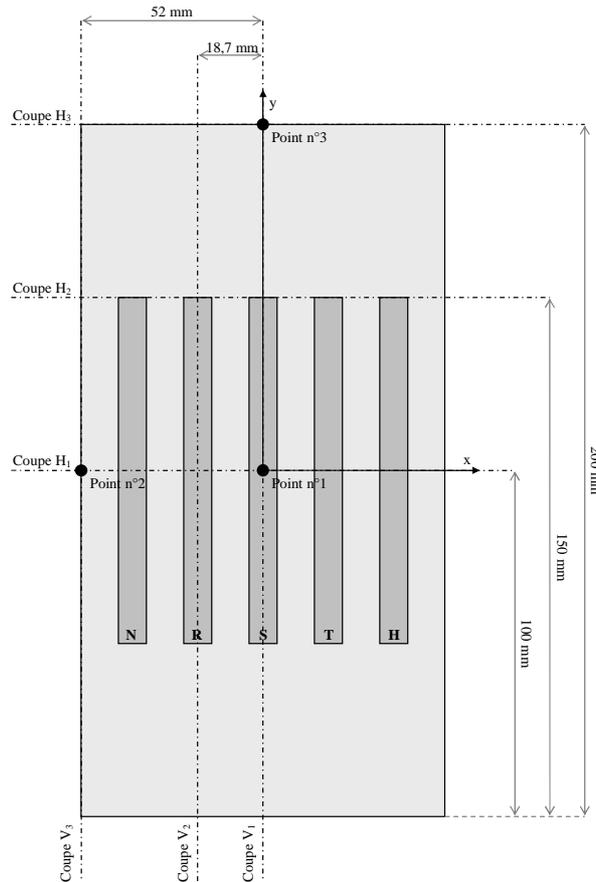


Figure III-3 Définition des coupes dans le système

III.2.3.1 Solution de référence

Comme nous l'avons dit précédemment, un premier calcul est réalisé avec le maillage M_1 , et selon la stratégie de la Figure I-6. Dans cette partie, nous présentons les résultats de ce calcul qui seront pris comme référence dans la suite.

En outre, pour la solution du problème en régime permanent, nous présentons ici les résultats qualitativement sous forme de cartes de champ, les résultats quantitatifs le long des coupes définies précédemment étant repris par la suite lors de l'étude des grandeurs projetées.

Solution du problème en régime permanent

Sur la Figure III-4 on montre la distribution de la densité de pertes par effet Joule dans un des conducteurs. Comme nous l'avons dit précédemment, on observe la présence d'un effet de peau aux extrémités du conducteur.

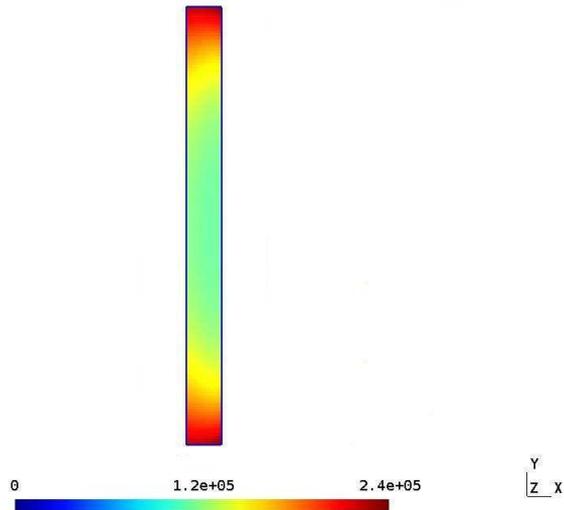


Figure III-4 Distribution de la densité de pertes Joule ($W.m^{-3}$) dans un conducteur

Par ailleurs, la valeur totale des pertes par effet Joule dans 1 m de *betobar* est de 347,86 W.

La distribution de la température dans le système en régime permanent est représentée sur la Figure III-5.

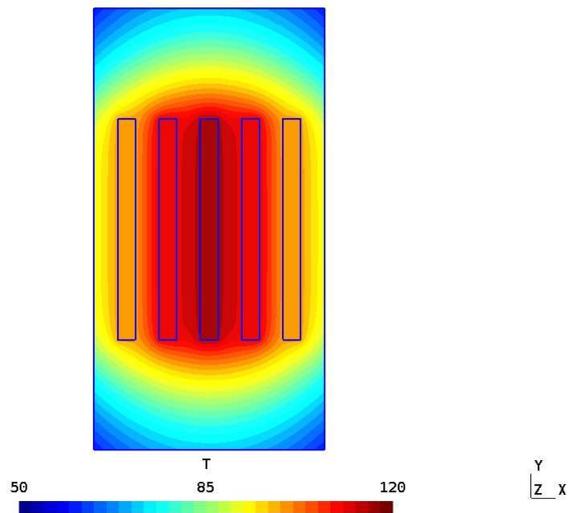


Figure III-5 Distribution de la température ($^{\circ}C$) dans le système

Sur cette figure, on peut remarquer que, conformément aux caractéristiques fournies par le constructeur, la température à l'intérieur des conducteurs n'excède pas $120^{\circ}C$ d'une part, et que la température en surface du béton est inférieure à $95^{\circ}C$ d'autre part.

Solution temporelle du problème

Pour les différents points définis précédemment, l'évolution de la température en fonction du temps est représentée sur la Figure III-6.

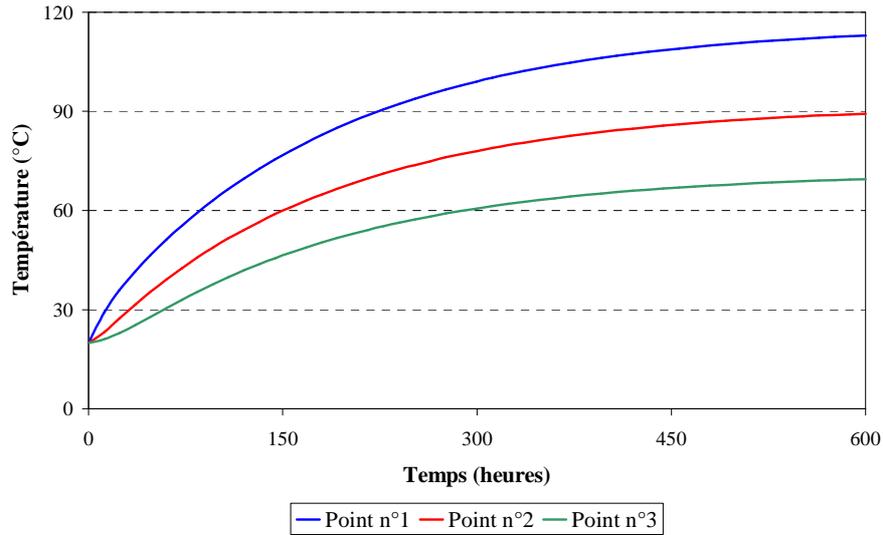


Figure III-6 Evolution de la température en différents points du système en fonction du temps

III.2.3.2 Résolution du problème avec utilisation de maillages dédiés

Solution du problème en régime permanent

Pour chaque maillage du Tableau III-4, le problème est résolu selon la stratégie présentée sur la Figure II-3. A titre d'exemple, la distribution de la densité de pertes Joule projetée sur le maillage supportant la résolution thermique du problème ainsi que celle de la température dans le système, dans le cas de l'utilisation du maillage M_{12} , sont représentées respectivement sur la Figure III-7 et la Figure III-8.

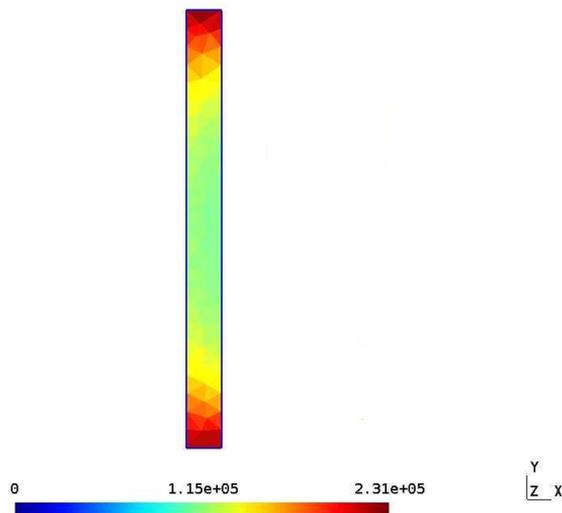


Figure III-7 Distribution de la densité de pertes Joule ($W.m^{-3}$) dans un conducteur (Maillage M_{12})

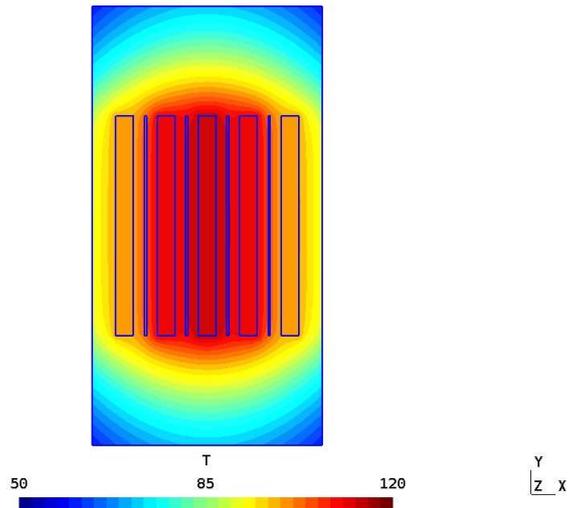


Figure III-8 Distribution de la température ($^{\circ}\text{C}$) dans le système (Maillage M_{12})

Sur ces deux figures, on remarque bien que la discrétisation de l'espace est plus grossière qu'avec le maillage M_1 . Les effets de cette discrétisation se font ressentir en particulier sur l'évaluation de la densité de pertes Joule projetée. Nous allons maintenant étudier l'influence de la finesse du maillage sur les grandeurs projetées.

Projection de la densité de pertes Joule

Comme nous l'avons dit précédemment, il est possible, pour la projection de la densité de pertes Joule, d'utiliser soit des fonctions d'interpolation d'éléments de volume (II.35) soit des fonctions d'interpolation d'éléments nodaux (II.40).

Maillage	Pertes totales dans le système (W)		Ecart relatif par rapport à la solution de référence (%)	
	Type de fonction d'interpolation employée		Type de fonction d'interpolation employée	
	w_v	w_n	w_v	w_n
M_{hp1}	347,67	347,67	0,054	0,054
M_{hp2}	347,37	347,36	0,142	0,142
M_{hp3}	347,50	347,50	0,102	0,102
M_{hp4}	347,76	347,76	0,028	0,028
M_{hp5}	346,61	346,61	0,357	0,357
M_{hp6}	346,98	346,98	0,252	0,252
M_{t1}	345,39	346,98	0,710	0,253
M_{t1}	345,35	346,62	0,722	0,356

Tableau III-5 Valeurs des pertes totales par effet Joule en fonction des maillages et des fonctions d'interpolation utilisées

Au travers de ce tableau, il est possible de faire ressortir deux points importants. Tout d'abord, la méthode de projection définie par les relations (II.35) et (II.40) consiste en une minimisation de l'écart entre les densités de pertes exprimées respectivement sur les maillages source et cible. Cette opération est correctement réalisée puisque quel que soit le maillage cible employé, l'écart par rapport à la solution de référence est inférieur à 1%. Ensuite, on remarque également que, pour la grandeur globale que constitue la valeur totale des pertes par effet Joule dans le système, l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volume et d'élément nodaux n'a pas d'influence sur les grandeurs globales dans l'exemple traité.

Afin de mettre en évidence l'influence de la nature des fonctions d'interpolation employées pour la projection, on montre la variation spatiale de la densité de pertes le long de la coupe V_2 dans le cas de l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volume (Figure III-9) et d'éléments nodaux (Figure III-10), pour les maillages M_{hp} .

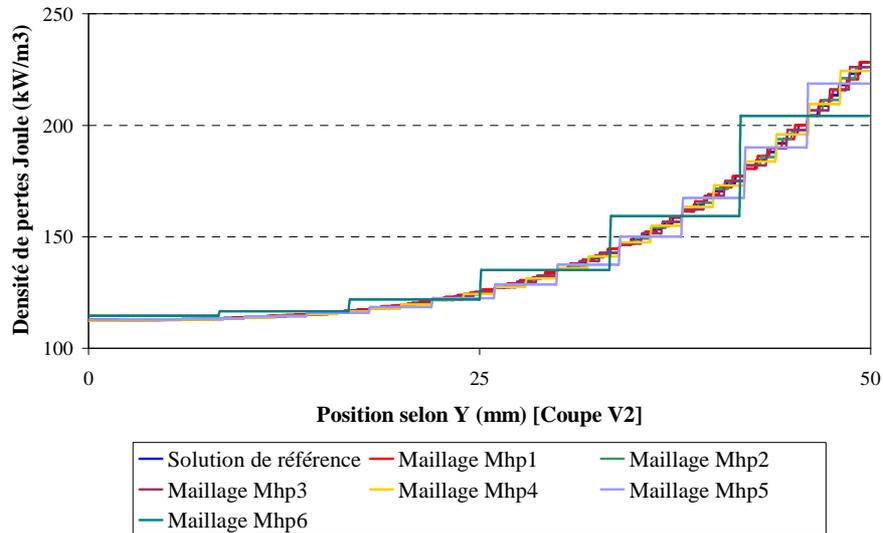


Figure III-9 Evolution de la densité de pertes Joule le long de la coupe V_2 (utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volume)

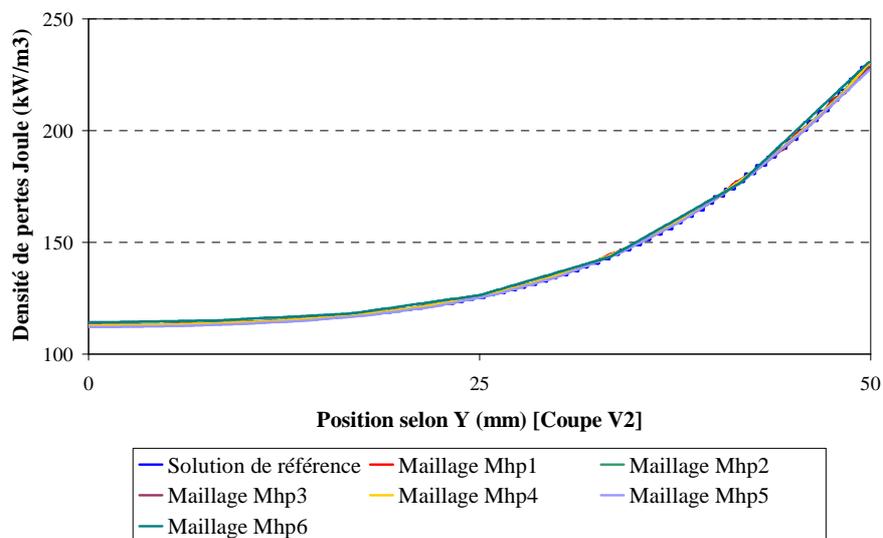


Figure III-10 Evolution de la densité de pertes Joule le long de la coupe V_2 (utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments nodaux)

Sur la Figure III-9 on remarque l'allure "en escalier" des différentes courbes. En effet, l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volume implique que la densité de pertes Joule est constante par élément fini du maillage cible. Dans ce type de configuration, l'écart relatif local entre la grandeur projetée et la grandeur source augmentera avec la taille des éléments constituant le maillage cible.

En revanche, l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments nodaux implique une variation linéaire de cette même densité de pertes Joule à l'intérieur des éléments du maillage

cible. Dans cette configuration la grandeur projetée reste très proche de la grandeur source pour chacun des maillages étudiés.

Cependant, comme nous l'avons mis en évidence (Tableau III-5), l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volumes ou d'éléments nodaux a peu d'influence sur la valeur totale des pertes Joule dans le système. Du point de vue global, l'approximation est correcte dans les deux cas.

Projection de la température

Nous allons ici étudier l'influence de la finesse des maillages sur la qualité de la valeur de la température issue de la projection. Pour cela on montre sur les figures suivantes l'évolution de la température le long des différentes coupes définies sur la Figure III-3. Sur ces figures, les courbes de gauche correspondent à l'évolution spatiale de la température obtenue dans le cas où la densité de pertes a été projetée à l'aide de fonctions d'interpolation d'éléments de volumes. Celles obtenues dans le cas où la densité de pertes a été projetée à l'aide de fonctions d'interpolation d'éléments nodaux se situent à droite.

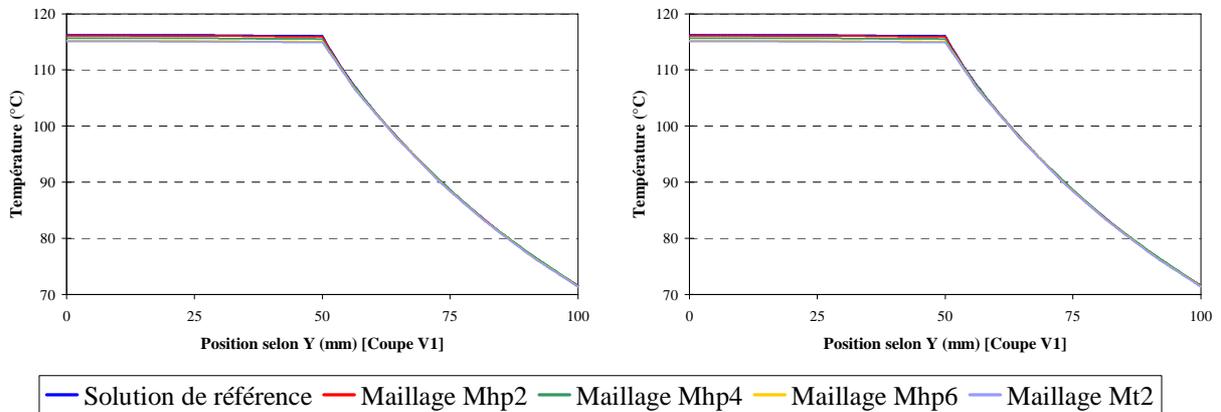


Figure III-11 Evolution de la température le long de la coupe V_1

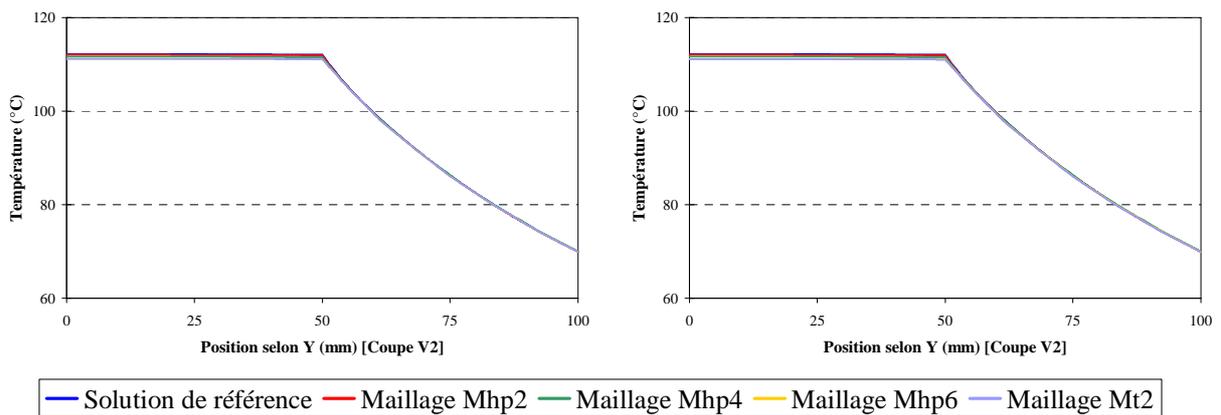


Figure III-12 Evolution de la température le long de la coupe V_2

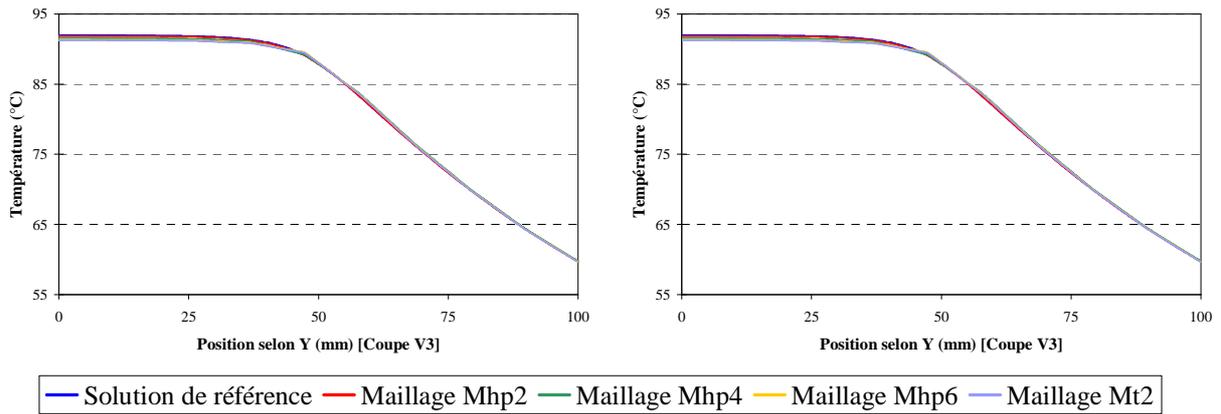


Figure III-13 Evolution de la température le long de la coupe V_3

Sur ces figures, on peut constater que l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volumes ou d'éléments nodaux a une influence négligeable sur le calcul de la température dans le système. Par ailleurs, les résultats font apparaître une très bonne concordance entre les grandeurs projetées et la référence.

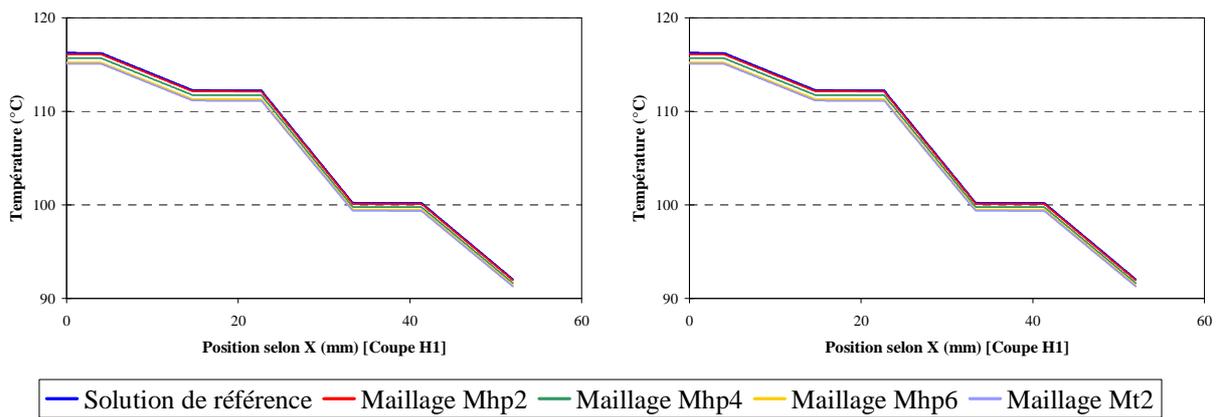


Figure III-14 Evolution de la température le long de la coupe H_1

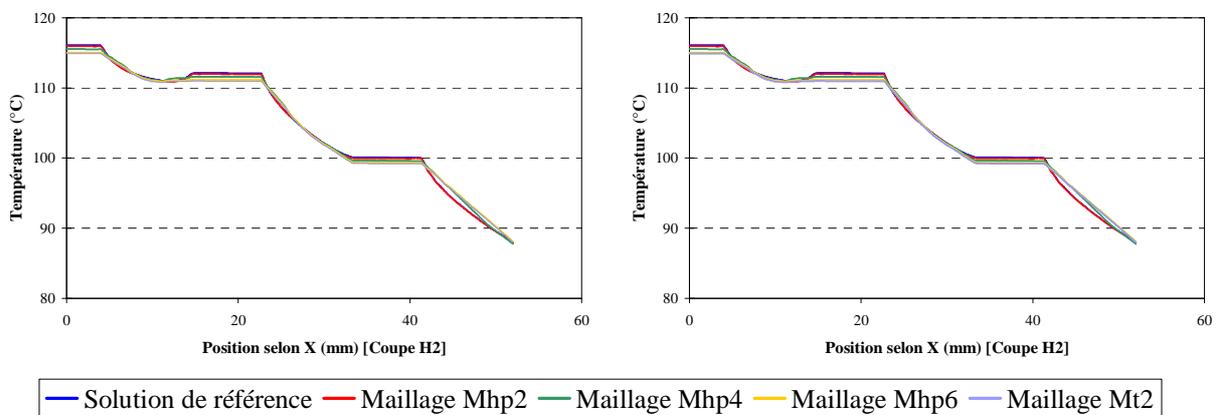


Figure III-15 Evolution de la température le long de la coupe H_2

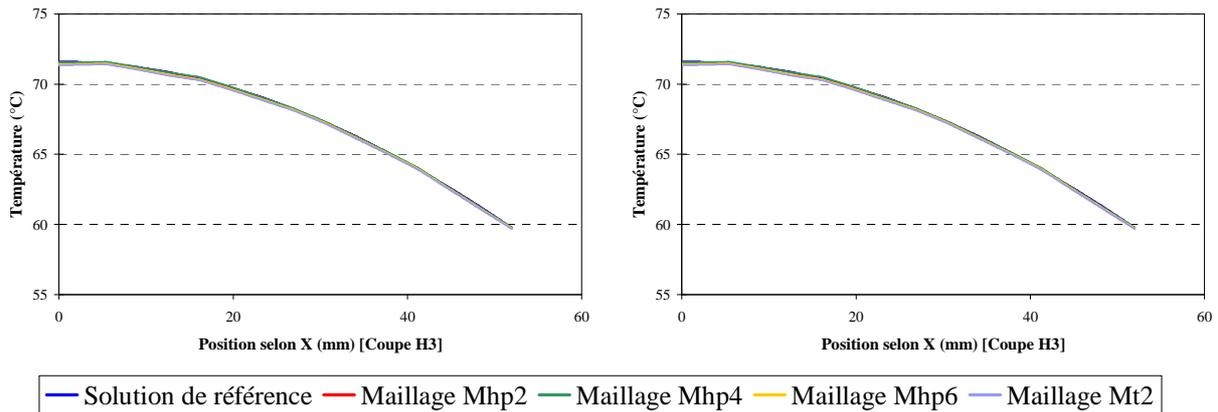


Figure III-16 Evolution de la température le long de la coupe H_3

Comme pour les coupes V_1 , V_2 et V_3 , les figures précédentes mettent en évidence la bonne concordance entre les courbes représentant la température issue de la projection et la référence.

Solution temporelle du problème

Le problème thermique est maintenant résolu en pas à pas dans le temps afin d'étudier l'évolution temporelle de la température dans le système lors de l'utilisation de maillages dédiés. Tout comme pour l'étude en régime permanent, l'étude a été réalisée en projetant la densité de pertes Joule à l'aide de fonctions d'interpolation d'éléments de volumes dans un premier temps et d'éléments nodaux dans un second temps. L'évolution de la température aux points n°1, 2 et 3 (Figure III-3) dans ces deux configurations est représentée respectivement sur la Figure III-17 et la Figure III-18. Par ailleurs, elle est comparée à la solution de référence, obtenue, comme dans le cas de l'étude du régime permanent, en utilisant le maillage M_1 lors des deux résolutions, électromagnétique et thermique.

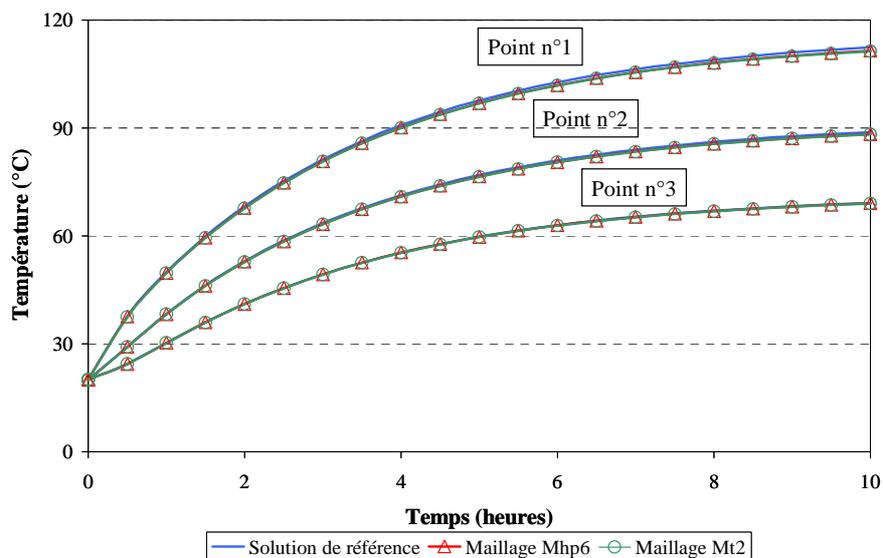


Figure III-17 Evolution de la température en fonction du temps

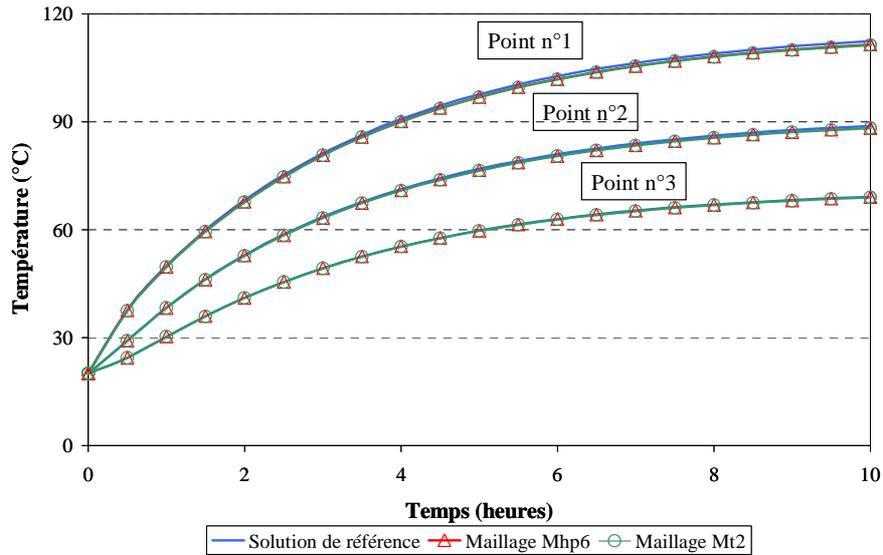


Figure III-18 Evolution de la température en fonction du temps

Comme lors de l'étude en régime permanent, les résultats présentés mettent en évidence la bonne concordance des courbes.

Temps de calcul

Dans la stratégie de couplage classique de la Figure I-6, deux résolutions par éléments finis sont réalisées : une première pour la résolution électromagnétique du système et une seconde pour la résolution thermique. En revanche, lors de l'utilisation de maillages dédiés, on rajoute dans ce calcul deux autres résolutions : une première pour la projection de la densité de pertes Joule et une seconde pour la projection de la température. La réalisation de ces deux opérations implique elle-même un coût en terme de temps de calcul. Il apparaît donc nécessaire d'évaluer ce coût.

La Figure III-19 montre le temps total de résolution du problème en fonction du maillage utilisé pour la résolution thermique. Sur cette figure, les temps de calculs sont en pourcentage du temps de référence, celui-ci correspondant au temps de calcul lors de la résolution des deux problèmes – électromagnétique et thermique – à l'aide du maillage M_1 .

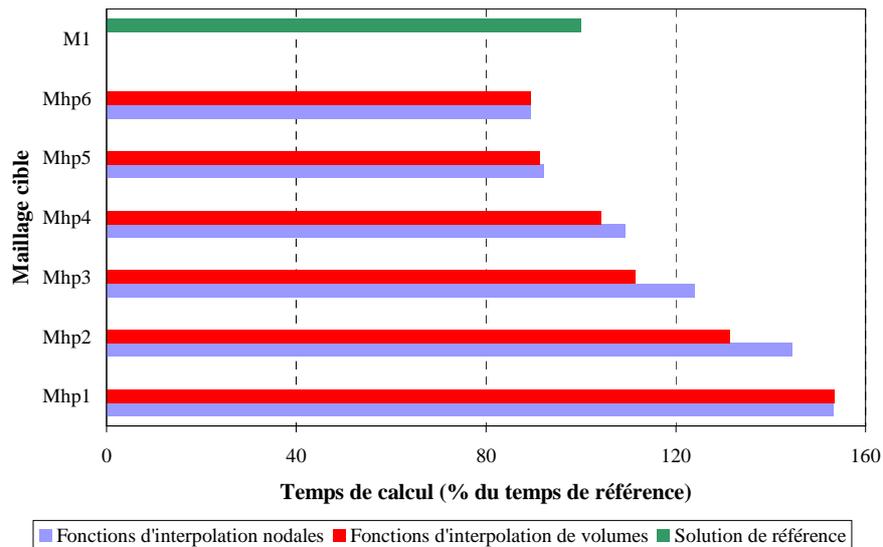


Figure III-19 Comparaison des temps de calcul en fonction du maillage utilisé pour la résolution thermique

On constate sur cette figure que, pour les maillages les plus fins (de M_{hp1} à M_{hp4}), la projection de la densité de pertes Joule et de la température augmente le temps de calcul. Dans ces configurations, le temps gagné grâce à l'utilisation d'un maillage plus fin lors de la résolution thermique n'a pas permis de compenser le coût des deux opérations de projection. En revanche, pour les maillages les plus grossiers (M_{hp5} et M_{hp6}), on constate un gain de l'ordre de 10% comparativement à la solution de référence.

Par ailleurs, l'utilisation, lors de la projection de la densité de pertes Joule, de fonctions d'interpolation d'éléments nodaux apparaît légèrement plus coûteuse par rapport aux fonctions d'interpolation d'éléments de volume.

On souhaite maintenant étudier, pour chaque maillage cible, le temps pris par chacune des quatre opérations réalisées au cours du calcul – résolution électromagnétique, projection de la densité de pertes Joule, résolution thermique et projection de la température – en proportion du temps de calcul total. La part prise par chacune de ces opérations sur le temps total est représentée sur la Figure III-20 dans le cas de l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volume. La Figure III-21, quant à elle, montre ces mêmes temps de calcul dans le cas de l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments nodaux.

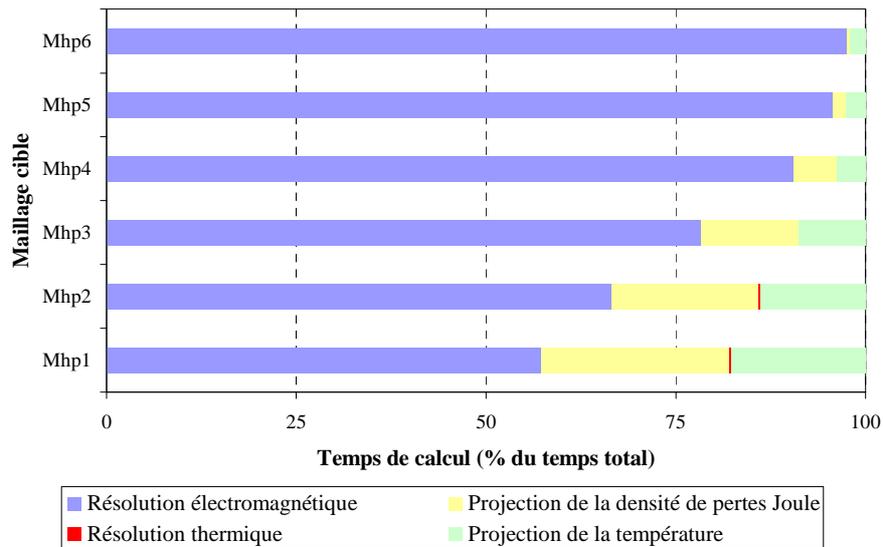


Figure III-20 Répartition des différentes opérations dans le temps de calcul total (utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volumes)

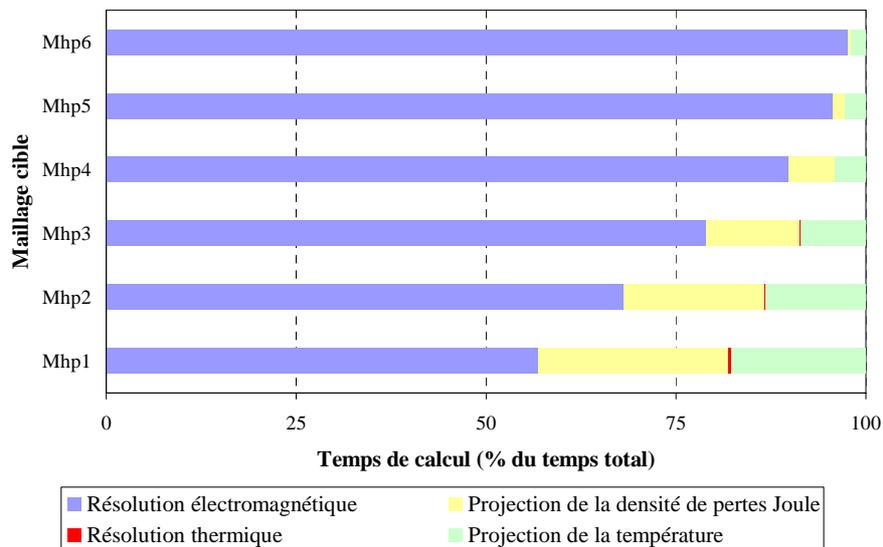


Figure III-21 Répartition des différentes opérations dans le temps de calcul total (utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments nodaux)

Sur ces figures, il est possible de mettre plusieurs caractéristiques du calcul en évidence.

Tout d'abord, dans notre étude, le maillage supportant la résolution électromagnétique du problème est toujours le même (M_1) et cela quel que soit le maillage utilisé pour la résolution thermique. De plus, la résolution électromagnétique est celle qui est réalisée sur le plus grand domaine d'étude puisqu'il inclut le système complet (betobar + air). Les autres résolutions (thermique et projections) sont en revanche réalisées sur des domaines d'étude réduits : conducteurs + béton pour la résolution thermique et la projection de la température, et conducteurs uniquement pour la projection de la densité de pertes Joule. Pour ces raisons le système matriciel à résoudre est à la fois plus long à générer et à inverser. Il est donc logique de constater que le temps pris par la résolution électromagnétique dépasse la moitié du temps total du calcul.

Concernant la part prise par la résolution thermique, on constate bien qu'elle diminue logiquement en fonction du maillage utilisé. Par ailleurs elle reste, dans tous les cas, bien inférieure aux autres contributions.

Pour ce qui est des deux projections, on peut constater que l'utilisation de fonctions d'interpolation d'éléments de volume ou d'éléments nodaux lors de la projection de la densité de pertes Joule a peu d'influence sur le temps de calcul. Par ailleurs, le temps consacré à ces deux opérations est inversement proportionnel au nombre d'éléments constituant le maillage supportant la résolution thermique. En effet, la taille des matrices $[A]$ et $[B]$ de l'expression (II.12) dépend directement du nombre d'éléments constituant les maillages source et cible. A titre d'illustration, dans le cas de l'utilisation du maillage M_{hp_6} , l'ensemble projection de la densité de pertes Joule - résolution thermique - projection de la température ne représente que moins de 3% du temps de calcul total.

III.2.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons modélisé un système de transport de l'énergie électrique pour lequel différents maillages ont été employés afin d'utiliser la méthode de projection dans le cas d'un couplage magnétothermique.

Les résultats ont pu mettre en évidence la bonne concordance entre les grandeurs "originales" et les grandeurs projetées, aussi bien pour la projection de la densité de courant que pour celle de la température. Par ailleurs, les résultats du calcul magnétothermique dans le cas de l'utilisation de maillages dédiés ont pu être comparés à une solution de référence et sont tout à fait satisfaisants.

Enfin, une analyse des temps de calcul montre que le coût des projections peut être négligeable dans le cas de l'utilisation de maillages très différents en terme de nombre d'éléments.

III.3 Couplage magnétomécanique

Dans cette partie nous allons mettre en œuvre la méthode de projection dans le cas d'un couplage magnétomécanique. Pour cela nous modélisons le dispositif de la Figure II-4. Il se compose donc d'un électro-aimant situé au dessus d'une plaque qui peut être constituée de fer ou de cuivre, comme nous allons le voir par la suite.

Tout comme pour l'étude magnétothermique précédente, deux maillages différents seront utilisés ici pour les calculs électromagnétique et mécanique. Dans un premier temps, nous validerons la relation (I.52) permettant de déterminer la répartition de la densité de force dans le système à partir des forces nodales obtenues par la méthode des travaux virtuels. Puis, dans un second temps, nous utiliserons la formulation (I.54) afin de projeter cette densité de force sur le maillage supportant la résolution mécanique.

Dans cette étude, nous étudierons tout d'abord la qualité des densités de forces projetées ainsi que l'influence de la projection sur la solution de la résolution mécanique, c'est-à-dire le calcul de déplacement.

III.3.1 Présentation du système étudié

Comme nous l'avons dit, nous reprenons pour cette étude le dispositif introduit au chapitre précédent (Figure III-22).

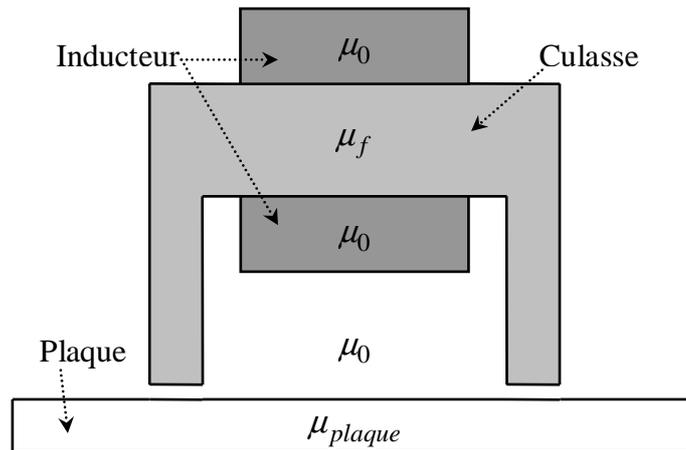


Figure III-22 Système étudié

Les dimensions du dispositif sont résumées dans le Tableau III-6

Dimensions de la culasse (mm) (Largeur × Hauteur)	Dimensions d'un inducteur (mm) (Largeur × Hauteur)	Largeur d'une dent de la culasse (mm)	Dimensions de la plaque (mm) (Largeur × Hauteur)
54×40	30×10	7	90×7

Tableau III-6 Caractéristiques du système étudié

III.3.2 Définition du problème

III.3.2.1 Stratégie de couplage

Dans cette partie il s'agit de mettre en œuvre la méthode de projection présentée précédemment dans le cas d'un couplage magnétomécanique. Pour cela nous procédons de la même façon que lors de l'étude magnétothermique précédente.

Deux calculs sont réalisés. Dans le premier, la plaque est composée de fer et le problème électromagnétique est résolu à l'aide d'une formulation en magnétostatique en potentiel vecteur (I.41). Ce calcul a pour but de traiter avec des forces surfaciques. Pour le second calcul, la plaque est composée de cuivre, et le problème est résolu en pas à pas dans le temps à l'aide d'une formulation magnétodynamique électrique (I.51). Contrairement au précédent, ce calcul met en œuvre des forces volumiques.

Dans un premier temps, pour chacun de ses deux calculs, une solution de référence est tout d'abord obtenue à l'aide d'un couplage faible selon la stratégie de la Figure I-7. Dans ces cas, les deux résolutions - électromagnétique et mécanique - sont supportées par un seul et même maillage fin.

Puis, dans un second temps, toujours pour chacun des deux calculs, une autre résolution magnétomécanique du problème est réalisée selon la stratégie de la Figure II-6. Dans ce cas, les résolutions électromagnétique et mécanique sont supportées par des maillages différents. Le terme de couplage, la densité de force, est donc projeté depuis le maillage supportant la résolution électromagnétique du problème vers celui supportant la résolution mécanique.

III.3.2.2 Caractéristiques des matériaux et conditions aux limites

Caractéristiques magnétiques

Pour cette étude, nous considérons que le fer a une caractéristique magnétique linéaire : $\mathbf{b} = \mu_0 \mu_r \mathbf{h}$, avec $\mu_r = 1000$.

Caractéristiques mécaniques

Les caractéristiques pour le calcul élastique concernent la plaque de cuivre. Il s'agit du module d'Young ainsi que du coefficient de Poisson. Nous prenons les valeurs suivantes :

- $E = 130 \text{ Gpa}$
- $\nu = 0,34$

Conditions aux limites pour la résolution électromagnétique

La résolution du problème se fait en deux dimensions. Par ailleurs, le système est inclus dans une boîte d'air en surface de laquelle on applique une condition aux limites de type $\mathbf{h} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_h} = 0$.

Conditions aux limites pour la résolution mécanique

En ce qui concerne la résolution mécanique, nous considérons que la plaque est incrustée de part et d'autre. La condition aux limites correspondante revient à imposer un déplacement nul selon toutes les directions sur les nœuds situés aux extrémités de la plaque.

III.3.2.3 Définition des maillages utilisés

On considère plusieurs maillages. Ces derniers diffèrent les uns des autres en particulier selon deux critères : le type d'éléments utilisés (triangles ou quadrangles) ainsi que leur finesse.

Maillage supportant la résolution électromagnétique

Pour ce maillage, que nous nommons M_1 , nous utilisons deux types d'éléments : des quadrangles à l'intérieur de la plaque, et des triangles dans le reste du domaine d'étude. En outre, le maillage à l'intérieur de la plaque est défini comme suit : 158 couches selon la direction (Ox) et 14 couches selon la direction (Oy).

Nom du maillage	Nombre total d'éléments	Nombre d'éléments dans la plaque	Nombre de divisions dans la plaque selon la direction (Ox)	Nombre de divisions dans la plaque selon la direction (Oy)
M_1	13872	2212	158	14

Tableau III-7 Caractéristiques du maillage M_1

A titre d'illustration le maillage M_1 est représenté sur la Figure III-23.

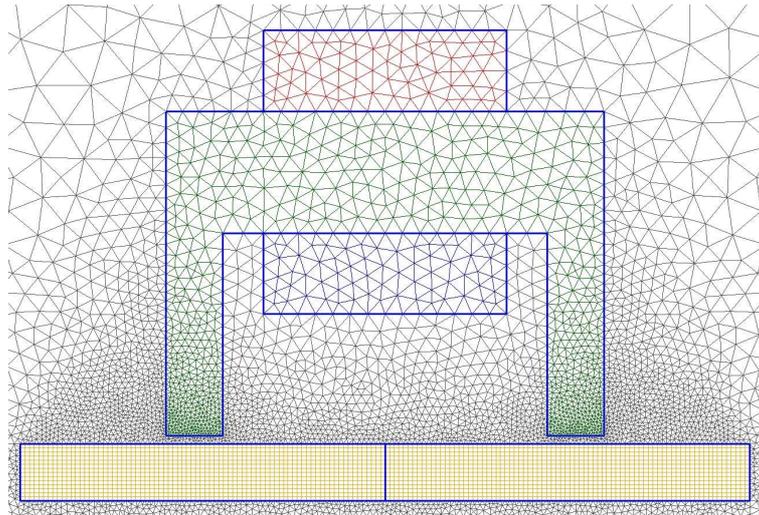


Figure III-23 Maillage supportant la résolution électromagnétique du problème

Maillages supportant la résolution mécanique

En ce qui concerne la résolution mécanique le domaine d'étude se limite à la plaque. De ce fait, les maillages présentés dans cette partie ne diffèrent de M_1 que dans cette région. Par ailleurs, nous utilisons deux types de maillages : les premiers, notés M_q , sont constitués de quadrangles alors que les seconds, notés M_t , sont composés de triangles. Les caractéristiques de ces maillages sont résumées dans le Tableau III-8.

Nom du maillage	Nombre total d'éléments	Nombre d'éléments dans la plaque	Nombre de divisions dans la plaque selon la direction (Ox)	Nombre de divisions dans la plaque selon la direction (Oy)
M_{q1}	12412	1656	138	12
M_{q2}	11138	1180	118	10
M_{q3}	9736	784	98	8
M_{q4}	8504	468	78	6
M_{q5}	7354	232	58	4
M_{t1}	8164	788		
M_{t2}	7126	394		

Tableau III-8 Caractéristiques des maillages supportant la résolution mécanique

III.3.2.4 Validation de la méthode de détermination de la densité de force

Définition de coupes caractéristiques

Afin de visualiser les évolutions spatiales et temporelles des grandeurs étudiées dans cette partie, on définit deux coupes et un point caractéristique à l'intérieur de la plaque. Ces derniers sont définis comme suit :

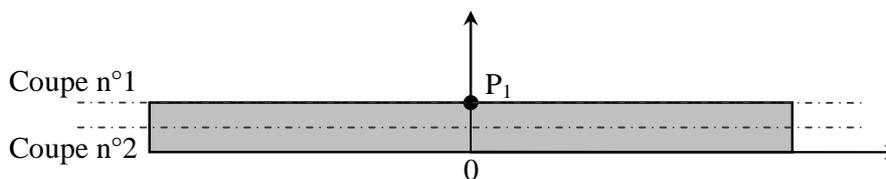


Figure III-24 Définition de coupes et d'un point caractéristiques dans le système

$$\text{Coupe n}^\circ 1 \equiv \{-45 \leq x \leq 45 \text{ mm}, y = 7 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Coupe H}_2 \equiv \{-45 \leq x \leq 45 \text{ mm}, y = 3,5 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

$$\text{Point n}^\circ 1 \equiv \{x = 0, y = 7 \text{ mm}, z = 0 \text{ mm}\}$$

Dans le chapitre précédent nous avons mis en évidence la relation dure qui existe entre la force locale obtenue à l'aide de la méthode des travaux virtuels et le maillage sur lequel elle est déterminée (§II.4.2.1). Afin d'illustrer le calcul effectué dans ce paragraphe, dont le détail peut être trouvé en Annexe III, on résout le problème à l'aide d'une formulation magnétostatique dans le cas où la plaque est composée de fer, et cela sur deux maillages différents. On montre sur la Figure III-25 le résultat de ce calcul respectivement pour les maillages M_1 et M_{12} .

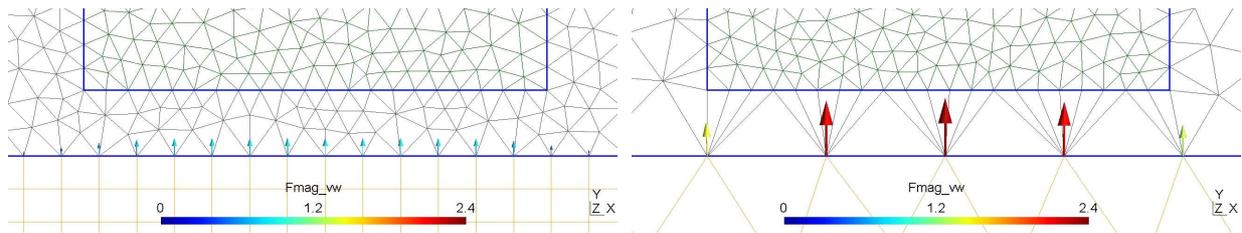


Figure III-25 Forces nodales obtenues par la méthode des travaux virtuels
Maillage M_1 (gauche) – Maillage M_{12} (droite)

On constate bien par le calcul que sur le maillage M_1 les forces nodales apparaissent inférieures à celles obtenues sur le maillage M_{12} . Il est donc nécessaire de déterminer la répartition de la densité de force dans la plaque avant l'opération de projection à l'aide de la relation (II.52).

Afin de valider cette relation, on réalise le calcul suivant : la plaque étant constituée de cuivre, on impose un courant sinusoïdal dans les inducteurs. Par conséquent, des courants induits vont apparaître à l'intérieur de la plaque, engendrant des forces de Laplace qui peuvent être déterminées à l'aide du produit vectoriel de la densité de courant par l'induction magnétique $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$. En outre, le résultat de cette opération nous donne bien une densité de force, exprimée en N.m^{-3} [55]. A la suite de cette résolution, on détermine les forces nodales à l'intérieur de la plaque à l'aide de la méthode des travaux virtuels. A partir de ces forces, on déduit, à l'aide de la relation (II.52), les densités de forces à l'intérieur de la plaque que l'on peut comparer à celles obtenues à l'aide du produit $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$. Par ailleurs, le calcul est réalisé en pas à pas dans le temps.

Pour un pas de temps correspondant à un extremum de la force à l'intérieur de la plaque, on montre sur la Figure III-26 l'évolution de la composante selon x de la densité de force de Laplace le long des coupes n°1 et n°2. L'évolution de la composante selon y est représentée quant à elle sur la Figure III-27.

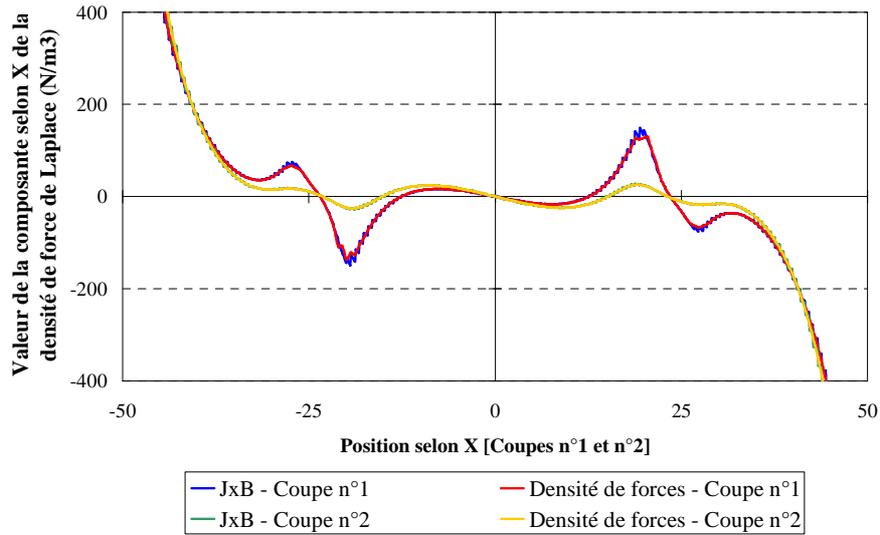


Figure III-26 Composante selon x de la densité de force de Laplace le long des coupes n°1 et n°2

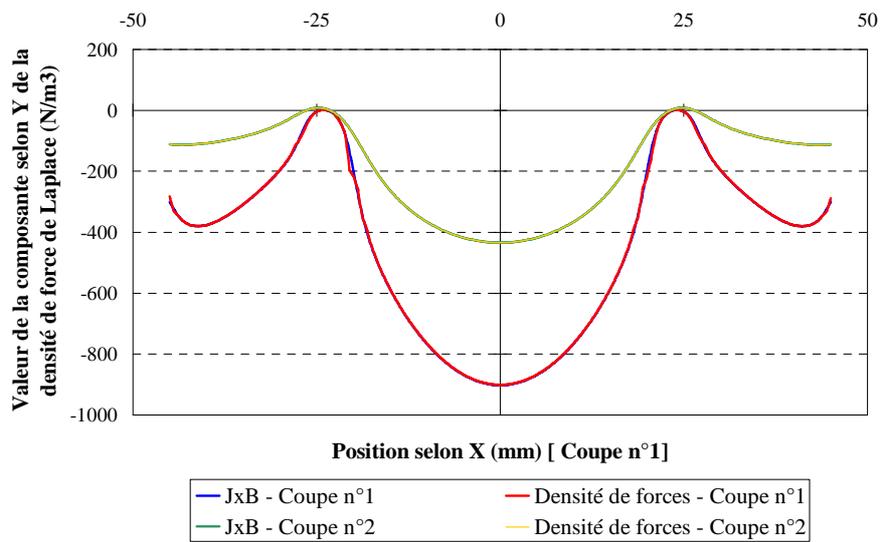


Figure III-27 Composante selon y de la densité de force de Laplace le long des coupes n°1 et n°2

Compte tenu des symétries dans le système, au point P_1 seule la composante selon Y de la densité de force est non nulle. Son évolution en fonction du temps est représentée sur la Figure III-28.

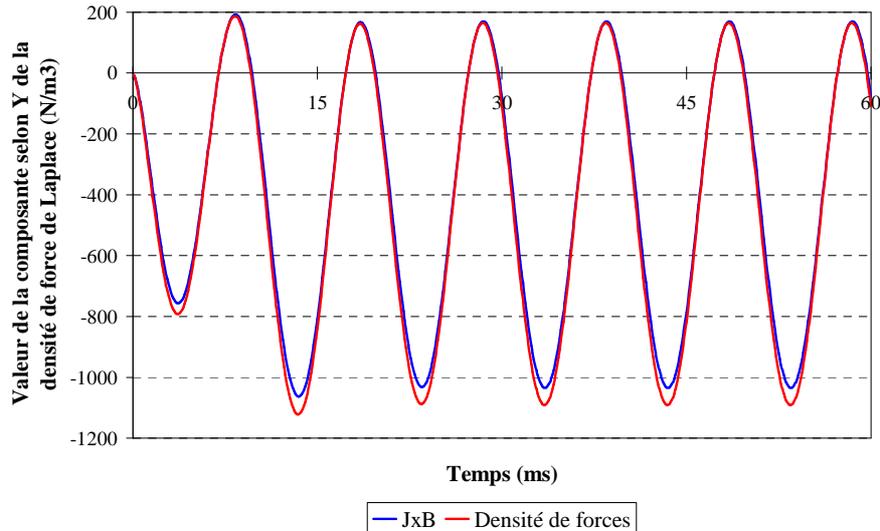


Figure III-28 Evolution de la composante selon y de la densité de force de Laplace au point P_1

Sur les courbes précédentes on peut noter la bonne concordance entre les valeurs de la densité de force obtenues par la relation "classique" $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$, et celles obtenues par la relation (II.52).

Par ailleurs, dans le cas magnétostatique, les densités de forces surfaciques correspondant aux forces nodales de la Figure III-25 et obtenues à l'aide de la relation (II.52) sont représentées sur la Figure III-29.

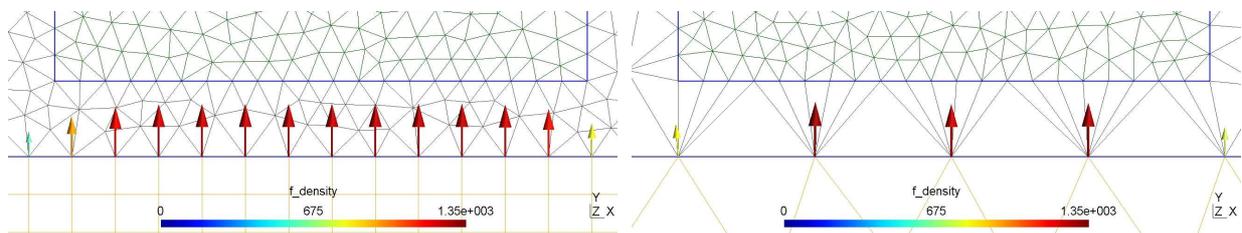


Figure III-29 Densité de force - Maillage M_1 (gauche) – Maillage M_2 (droite)

On peut constater sur cette figure que la répartition de cette densité de force est indépendante du maillage.

III.3.2.5 Présentation des résultats des calculs magnétomécaniques

On considère à nouveau le système dans la configuration où la plaque est constituée de cuivre. La résolution électromagnétique est réalisée en magnétodynamique (apparition de courants induits à l'intérieur de la plaque) en pas à pas dans le temps.

On observe tout d'abord l'évolution de la densité de force projetée sur les différents maillages cibles. Comme dans le paragraphe précédent, ces courbes sont obtenues pour un pas de temps correspondant à un extremum de la force à l'intérieur de la plaque.

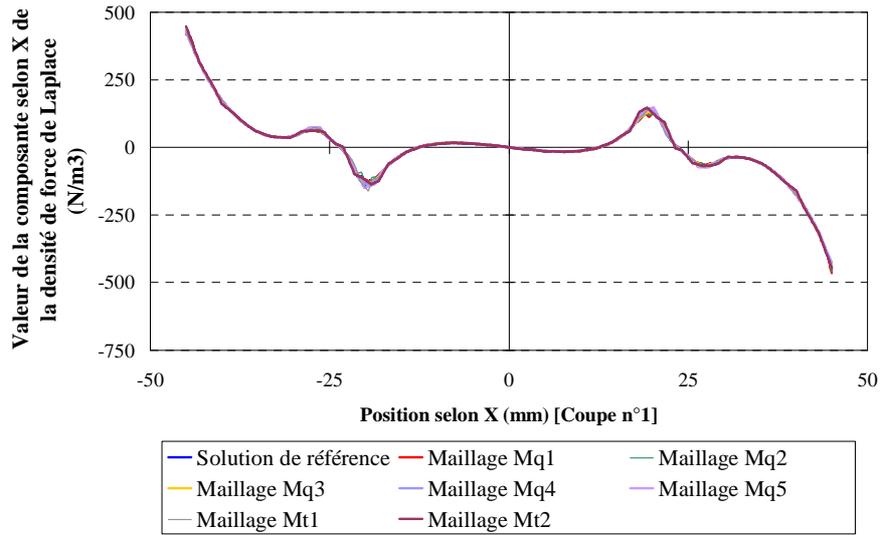


Figure III-30 Composante selon x de la densité de force de Laplace projetée sur les différents maillages cibles le long de la coupe n°1

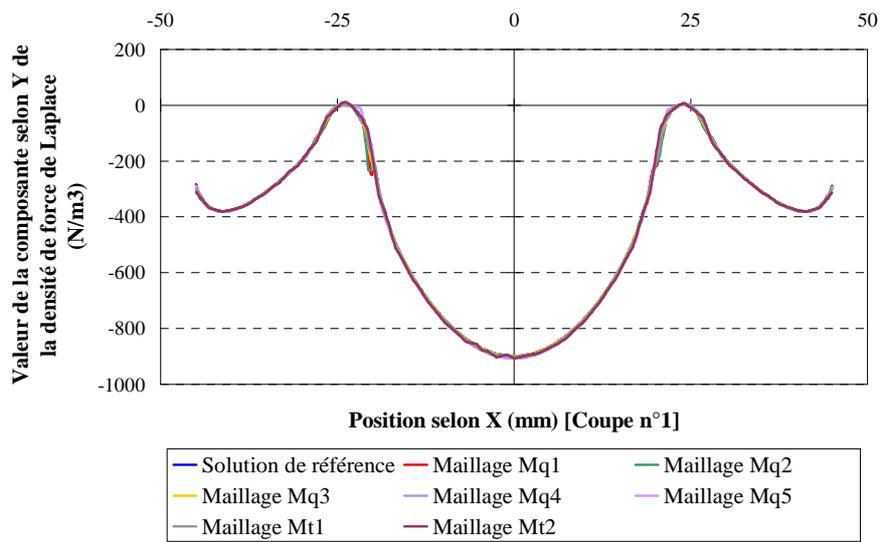


Figure III-31 Composante selon y de la densité de force de Laplace projetée sur les différents maillages cibles le long de la coupe n°1

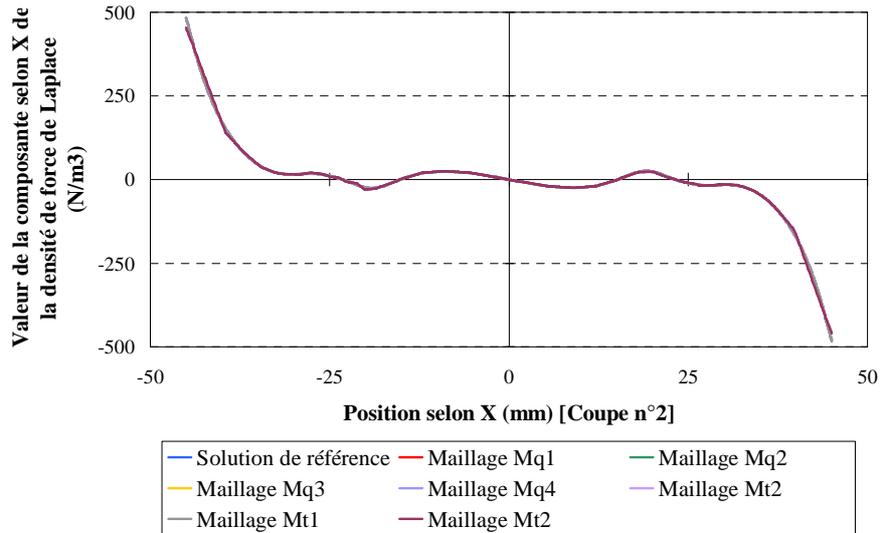


Figure III-32 Composante selon x de la densité de force de Laplace projetée sur les différents maillages cibles le long de la coupe n°2

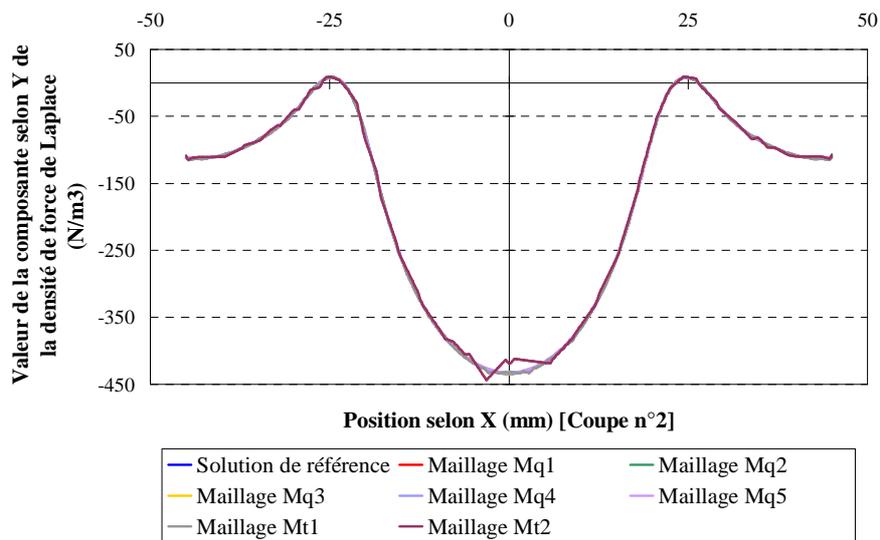


Figure III-33 Composante selon y de la densité de force de Laplace projetée sur les différents maillages cibles le long de la coupe n°2

Sur ces figures on peut constater la bonne concordance entre les grandeurs projetées et les grandeurs sources sur les deux coupes.

Sur la Figure III-34 on montre l'évolution de cette densité de force au cours du temps au niveau du point P₁.

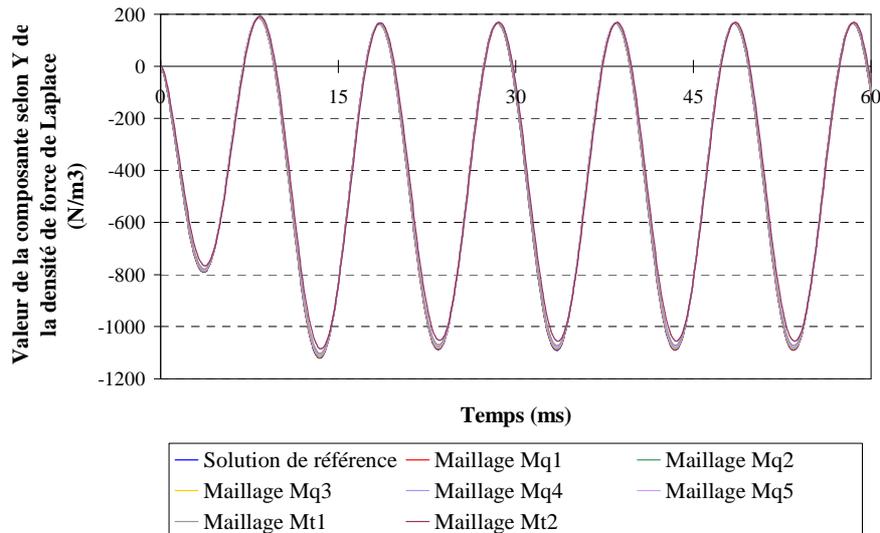


Figure III-34 Evolution temporelle de la composante selon y de la densité de force au point P_1

Comme pour l'évolution spatiale des grandeurs projetées le long des coupes n°1 et n°2, la Figure III-34 rend compte de la qualité de la projection.

Nous allons maintenant analyser l'influence de la projection sur le calcul mécanique. Pour cela on observe la déformation de la plaque.

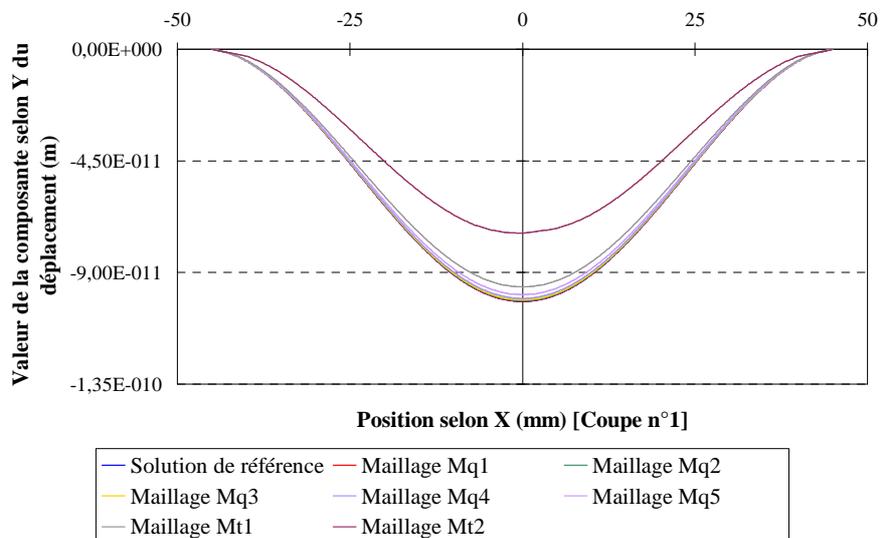


Figure III-35 Valeur de la composante selon y du déplacement le long de la coupe n°1

Sur cette figure on peut constater que les résultats de la résolution mécanique sont proches sur les différents maillages M_q ainsi que sur le maillage M_{t_1} , puisque l'écart maximum avec la solution de référence, constaté sur M_{t_1} , est inférieur à 3%. Sur le maillage M_{t_2} en revanche l'écart atteint devient important. Cependant, vu le nombre d'éléments le constituant, ce dernier semble être simplement trop lâche pour ce calcul élastique.

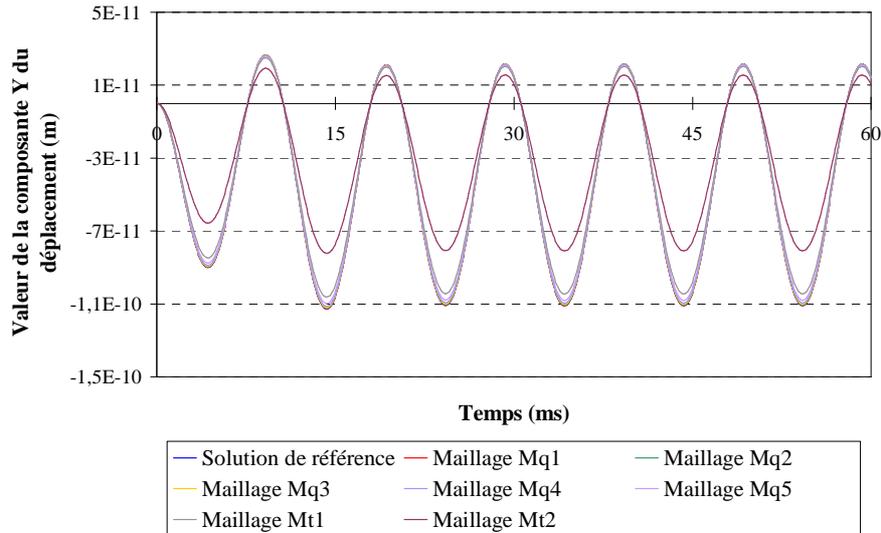


Figure III-36 Evolution temporelle de la composante selon y du déplacement au point P_1

On retrouve sur la Figure III-36 le même type de résultat que pour la coupe n°1 : l'écart relatif entre les solutions obtenues sur les maillages M_q ainsi que sur le maillage M_t est très faible.

Temps de calcul

Comme pour l'étude magnétothermique précédente il nous paraît nécessaire de réaliser une étude des temps de calculs nécessaires à chaque opération (résolution électromagnétique, détermination de la densité de force, projection et résolution mécanique).

Sur la Figure III-37 on montre le temps total de résolution du problème couplé en fonction du maillage utilisé pour la résolution thermique. Sur cette figure, les temps de calcul sont en pourcentage du temps de référence. Comme pour l'étude magnétothermique précédente, celui-ci correspond au temps de calcul nécessaire à la résolution du problème couplé dans le cas de l'utilisation d'un maillage unique – M_1 – pour les résolutions électromagnétique et mécanique.

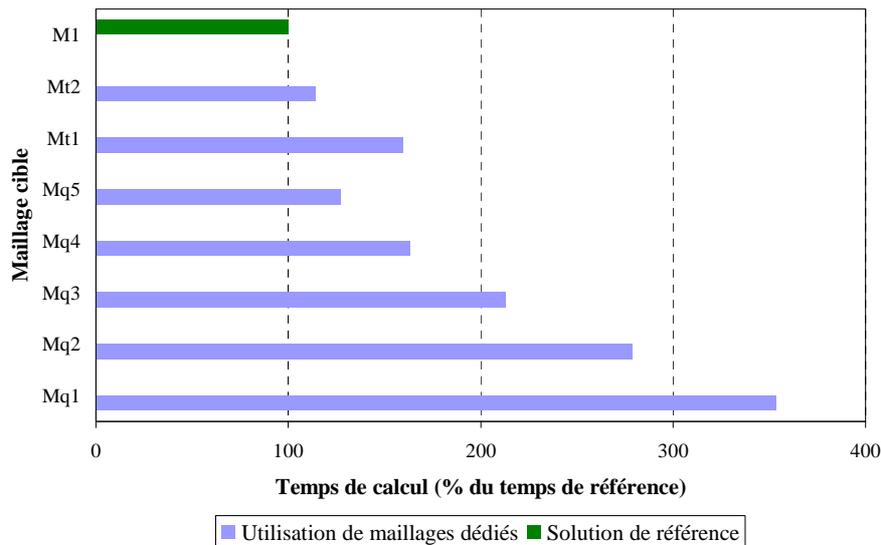


Figure III-37 Comparaison des temps de calcul en fonction du maillage utilisé pour la résolution mécanique

On peut constater que, quel que soit le maillage cible utilisé, les deux opérations que sont la détermination de la densité de force et sa projection allongent le temps de calcul total. Il semble donc que l'utilisation d'un maillage plus fin pour la résolution mécanique ne permet pas, sur ce système, de compenser les deux opérations sus citées. Nous allons donc étudier, pour chaque maillage cible, le temps pris par chacune des quatre opérations au cours du calcul en proportion du temps de calcul total.

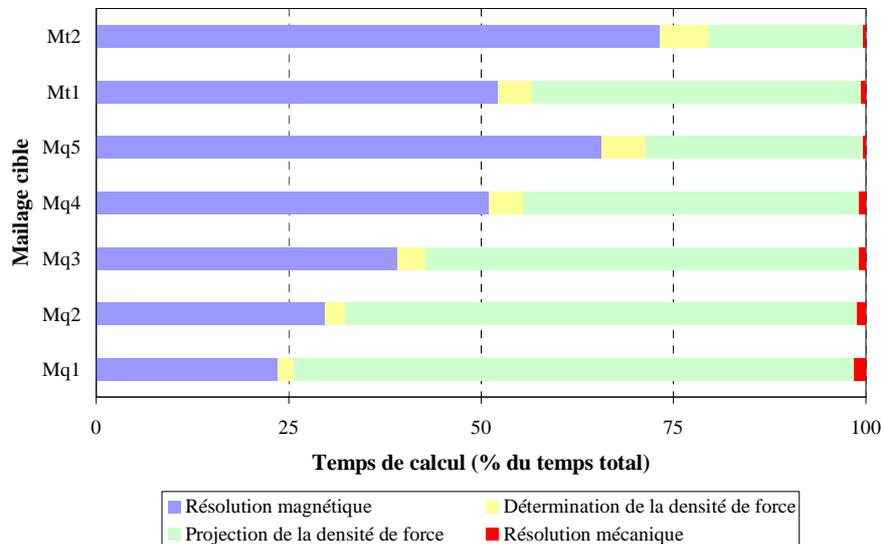


Figure III-38 Répartition des différentes opérations dans le temps de calcul total

On peut tout d'abord constater sur cette figure que, contrairement à l'étude magnétothermique précédente dans laquelle la résolution électromagnétique représentait systématiquement l'opération la plus coûteuse, ce n'est pas le cas ici. En effet, celle-ci représente 23,5 % du temps de calcul lors de l'utilisation de M_{q1} – le plus fin – comme maillage cible, contre 65 % pour M_{q5} . Cependant, en valeur absolue, ce temps de calcul est toujours le même – tout comme celui pris par l'opération de détermination de la densité de force – puisque le maillage utilisé est toujours le même. En revanche, la proportion de temps

prise par la projection et la résolution mécanique diminue en fonction du maillage cible. En effet, en ce qui concerne l'opération de projection, le temps de calcul a été divisé par quatre lors de l'utilisation de M_{q_5} par rapport à M_{q_1} . De plus, pour ces deux maillages, le temps pris par la résolution mécanique a été divisé par 26, ce qui souligne l'intérêt des maillages dédiés. Cependant, dans ce cas, ce gain de temps ne permet pas de compenser le coût de la détermination de la densité de force, d'une part, et de la projection, d'autre part.

III.3.2.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons modélisé un électro-aimant pour lequel plusieurs maillages ont été employés afin d'utiliser la méthode de projection dans le cas d'un couplage magnétomécanique.

Comme dans le cas d'un couplage magnétothermique, les résultats ont pu mettre en évidence la bonne concordance entre les grandeurs "originales" et les grandeurs projetées. De même, les résultats du calcul magnétomécanique dans le cas de l'utilisation de maillages dédiés ont pu être comparés à une solution de référence et sont tout à fait satisfaisants.

Cependant, une analyse des temps de calcul montre que la méthode de projection a, dans notre cas, un coût qui n'est pas compensé par le gain de temps obtenu sur le calcul mécanique en lui-même.

Conclusion Générale

Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la mise en œuvre d'une méthode de projection de grandeurs discrètes dans le cas de problèmes couplés.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé les structures mathématiques basées sur les équations de Maxwell pour l'électromagnétisme, la loi de Fourier pour la thermique et la loi de l'état d'équilibre pour la mécanique. Une fois ces structures définies, nous avons présenté, pour chacun de ces domaines de la physique, différentes formulations, respectivement en champs et en potentiels, en température et en déplacement, permettant la résolution de ces problèmes dans le domaine discret. En outre, les espaces vectoriels permettant d'accueillir les inconnues des problèmes ainsi que les grandeurs de couplage ont été analysés. Enfin, nous avons présenté la stratégie de couplage que nous avons employée lors de calculs magnétothermique et magnétomécanique.

Dans le deuxième chapitre nous avons présenté une méthode de projection de grandeurs discrètes. Cette dernière a été introduite à l'aide d'une interprétation géométrique de la méthode des éléments finis. Dans cette partie, nous avons mis en avant le fait que la solution discrète obtenue à la suite d'une résolution par la méthode des éléments finis constitue une projection orthogonale, sur une base (maillage) définie, de la solution exacte du problème. La méthode de projection proposée reprend ce principe : connaissant l'expression d'une grandeur discrète dans une base donnée, la méthode permet d'exprimer cette grandeur dans une autre base. Ainsi, il est possible de transférer des informations d'un maillage vers un autre. Dans notre cas, nous avons développé différentes formulations permettant la projection de grandeurs électromagnétique, thermique et mécanique. Dans le cas de l'électromagnétisme, le but était de projeter le champ magnétique ou les potentiels – scalaire ou vectoriel – magnétiques. Dans ce cas, nous avons ajouté à la formulation générale de la méthode de projection différentes contraintes permettant la conservation des propriétés desdites grandeurs, comme la vérification des lois d'Ampère et de Faraday. Dans le cas de la thermique, deux formulations de projection ont été développées et analysées. Tout d'abord celle de la quantité de chaleur – pertes par effet Joule dans notre cas – qui constitue le terme source du problème thermique. Puis, celle de la température, qui influence les caractéristiques des matériaux, et donc le problème électromagnétique. Enfin, dans le cas de la mécanique, nous avons développé une formulation permettant la projection de la répartition de la densité de force. La validation, dans ce chapitre, des formulations de projection de grandeurs magnétiques au travers de deux cas tests académiques ont permis de montrer la bonne concordance entre les grandeurs d'origine et projetées. Cependant, nous avons également pu mettre en évidence le caractère non conservatif de la méthode de projection, notamment au travers de l'étude de l'énergie stockée dans le système, comme toute méthode numérique.

Dans le troisième chapitre, la méthode de projection a été employée dans le cas de problèmes multiphysiques couplés. Qu'il s'agisse de l'étude magnétothermique ou de l'étude magnétomécanique, les résultats obtenus ont pu montrer l'efficacité de la méthode dans le cas de la projection des différentes grandeurs de couplage. En effet, dans les deux cas, l'utilisation

de maillages dédiés a donné des résultats extrêmement proches des solutions de références, obtenues en utilisant un maillage unique. Cependant, l'opération de projection a un coût en terme de temps de calcul. Si, dans le cas de l'étude magnétothermique, celui-ci a bien été compensé par le gain de temps obtenu lors de la résolution thermique du problème, cela n'a pas été le cas pour l'étude magnétomécanique pour l'exemple traité. Néanmoins, les résultats obtenus montrent les potentialités d'une telle approche dans le cas de systèmes pour lesquels l'utilisation d'un maillage unique est impossible compte tenu des ressources informatiques à mettre en œuvre.

Dans la suite de ce travail, il serait intéressant d'approfondir les possibilités de la méthode de projection dans le cas de la modélisation d'un système plus conséquent. D'autre part, la méthode de détermination de la répartition de la densité de force connaît certaines limites concernant la différenciation entre forces surfaciques et volumiques. Ce phénomène apparaît notamment lorsqu'on considère le caractère non linéaire de la loi de comportement magnétique [54]. Une approche permettant la dissociation entre les forces surfaciques et volumiques serait l'utilisation d'éléments dits "dégénérés" à l'interface entre le matériau ferromagnétique et l'air [37]. Enfin, nous avons vu dans le chapitre II qu'une approche similaire à la méthode de projection présentée dans ce mémoire peut être employée pour effectuer des recollements de maillages. Aussi il serait intéressant d'employer cette approche afin de pouvoir utiliser des maillages dédiés dans le cas d'un couplage fort, c'est-à-dire, dans le cas d'une résolution magnétothermique par exemple, lors de la résolution simultanée des problèmes électromagnétique et thermique.

ANNEXES

Annexe I Evolution de la conductivité électrique en fonction de la température pour certains matériaux utilisés en électrotechnique

Le Tableau A - 1 donne les valeurs σ_{ref} et $\alpha_{\sigma_{ref}}$ pour une température de référence T_{ref} de 20°C pour différents matériaux couramment utilisés en électrotechnique.

Matériau	σ_{ref} ($\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$)	$\alpha_{\sigma_{ref}}$ (K^{-1})
Cuivre	$5,9^e7$	$3,9^e-3$
Aluminium	$3,5^e7$	$4,03^e-3$
Fer	$1,04^e7$	$6,5^e-3$

Tableau A - 1 électrique σ_{ref} et constante $\alpha_{\sigma_{ref}}$ pour différents matériaux et pour $T_{ref}=20^{\circ}C$

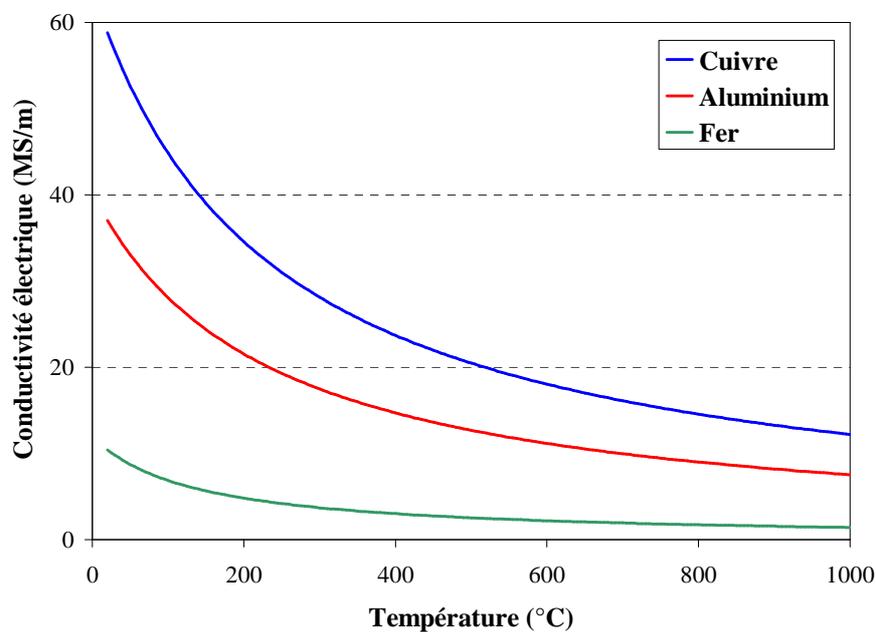


Figure A - 1 Evolution de la conductivité électrique en fonction de la température

Annexe II Méthode de projection – Calcul des matrices

Dans cette annexe, nous présentons en détail le calcul de la matrice $[B]$ intervenant dans l'expression (II.12) dont les termes élémentaires sont donnés par :

$$B_{o,p} = \int_D w_{c_o} w_{s_p} d\tau \tag{A.1}$$

Dans un souci de lisibilité, nous nous ne présentons que le calcul de la première ligne de la matrice $[B]$.

Pour simplifier les calculs, nous nous limitons dans cette annexe à l'étude d'une poutre modélisée en une dimension. Le maillage source (Figure A - 2) est composé de six nœuds, alors que le maillage cible en comprend quatre (Figure A - 3).

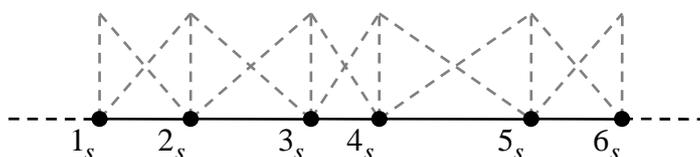


Figure A - 2 Maillage source de la poutre

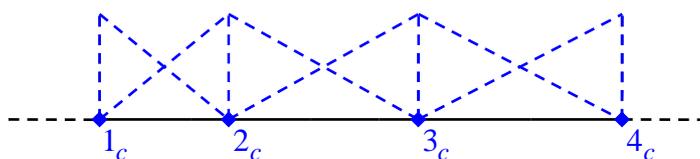


Figure A - 3 Maillage cible de la poutre

La matrice $[A]$ est donc de dimension 4×4 alors que la matrice $[B]$ est de dimension 4×6 , et le système matriciel (II.12) s'écrit :

$$[A]_{4 \times 4} [v_c]_4 = [B]_{4 \times 6} [u_s]_6 \tag{A.2}$$

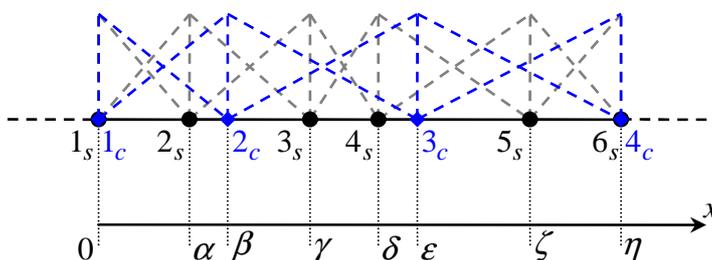


Figure A - 4 Maillages source et cible de la poutre

On observe sur la Figure A - 4 que la fonction d'interpolation w_{c_1} est non nulle sur l'intervalle $[0, \beta]$. Or, sur cet intervalle, seules les fonctions d'interpolation w_{s_1} , w_{s_2} et w_{s_3} sont non nulles, ce qui implique que seuls les trois premiers termes de la première ligne seront

non nuls. Les expressions des fonctions d'interpolation w_{c_1} , w_{s_1} , w_{s_2} et w_{s_3} sur l'intervalle $[0, \beta]$ sont données dans le Tableau A - 2.

	$0 \leq x \leq \alpha$	$\alpha \leq x \leq \beta$
w_{c_1}	$\frac{1}{\beta}(\beta - x)$	$\frac{1}{\beta}(\beta - x)$
w_{s_1}	$\frac{1}{\alpha}(\alpha - x)$	0
w_{s_2}	$\frac{1}{\alpha}x$	$\frac{1}{(\gamma - \alpha)}(\gamma - x)$
w_{s_3}	0	$\frac{1}{(\gamma - \alpha)}(x - \alpha)$

Tableau A - 2 Expression des fonctions d'interpolation w_{c_1} , w_{s_1} , w_{s_2} et w_{s_3} sur l'intervalle $[0, \beta]$

Le calcul des différentes intégrales sur l'intervalle $[0, \beta]$ donne alors la première ligne de la matrice $[B]$:

P	1	2	3	4	5	6
$B_{1,p}$	$\frac{\alpha(3\beta - \alpha)}{6\beta}$	$\frac{(\alpha^2\gamma - 3\alpha\beta\gamma - \beta^2(\beta - 3\gamma))}{6\beta(\gamma - \alpha)}$	$\frac{(\alpha - \beta)^3}{6\beta(\alpha - \gamma)}$	0	0	0

Tableau A - 3 Expression des termes élémentaires de la matrice $[B]$

Annexe III Calcul des forces dans l'entrefer de l'électro-aimant par la méthode des travaux virtuels

Dans cette annexe nous présentons le détail du calcul des forces locales dans l'entrefer de l'électro-aimant (Figure A - 5) présenté au paragraphe II.4.2.1.

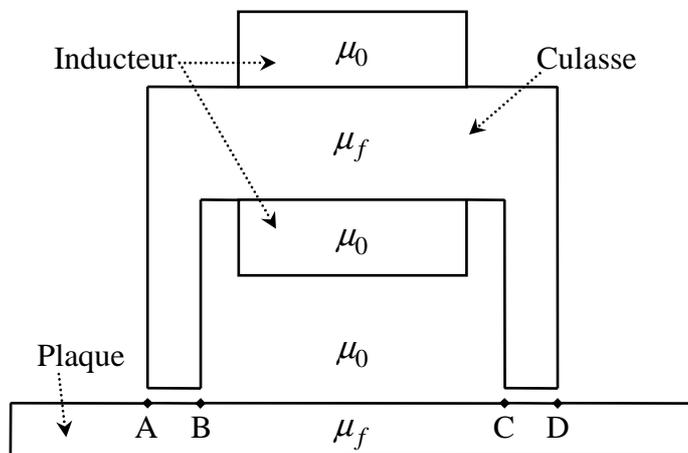


Figure A - 5 Electro-aimant au-dessus d'une plaque de perméabilité infinie

Comme nous l'avons expliqué précédemment, notre but est ici de calculer, pour deux maillages différents, les forces locales obtenues dans l'entrefer à l'aide de la méthode des travaux virtuels pour deux maillages différents. Ce calcul a pour but d'illustrer le lien entre la valeur de la force locale obtenue et la finesse du maillage ou, en d'autres termes, le fait que les forces locales obtenues par la méthode des travaux virtuels ne constituent pas un champ [19][54][58].

Pour ce calcul, nous nous appuyons sur les maillages M_1 et M_2 introduits par la Figure II-5 et que nous rappelons ci dessous.

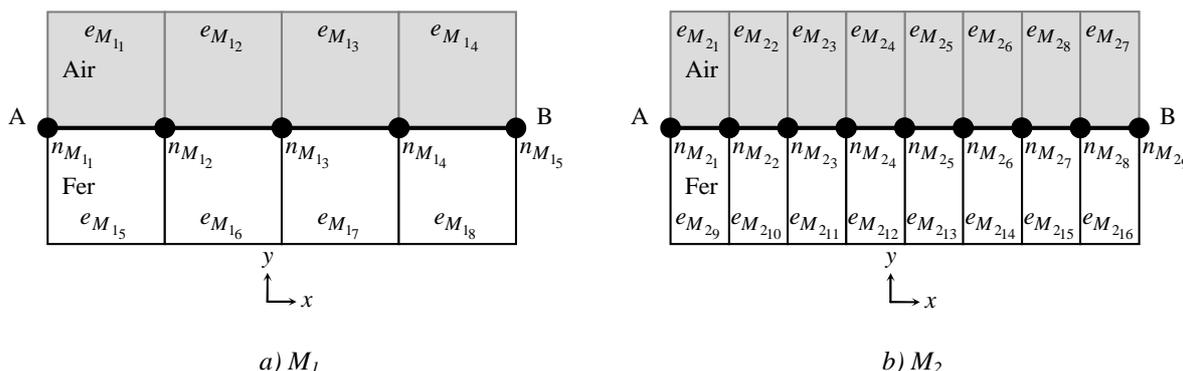


Figure A - 6 Maillages utilisés à l'interface Air/Plaque

Par ailleurs, comme nous l'avons dit précédemment, nous prendrons les hypothèses suivantes : la perméabilité de la culasse ainsi que celle de la plaque sont notées μ_f et infinie. La perméabilité de l'air quant à elle est notée μ_0 . De plus, nous considérons l'entrefer suffisamment petit pour négliger les fuites entre les dents de la culasse et la plaque. L'induction magnétique y est alors constante et notée b_0 . L'induction magnétique dans la plaque est alors notée b_f . Enfin, les caractéristiques géométriques d'une dent de la culasse

sont les suivantes : profondeur selon l'axe z notée p et largeur selon l'axe x (distance AB) notée l . La surface de la dent est alors $S=lp$.

Pour le calcul, nous distinguons deux cas. Tout d'abord celui des nœuds situés aux extrémités A et B (Figure A - 6) puis ceux situés à l'intérieur du segment AB. En effet, cette distinction est nécessaire dans la mesure où, suite aux hypothèses émises précédemment, seuls deux éléments contribuent à la force locale dans le premier cas, alors que quatre éléments interviennent dans le second.

Cas des nœuds extérieurs

Nous nous intéressons dans un premier temps aux nœuds situés aux extrémités du segment AB. Il s'agit donc des nœuds n_{M_1} et $n_{M_{15}}$ pour le maillage M_1 et des nœuds $n_{M_{21}}$ et $n_{M_{29}}$ pour le maillage M_2 . Dans la mesure où le système est parfaitement symétrique nous ne détaillons ici que le calcul de la force exercée au point A, c'est-à-dire aux nœuds n_{M_1} pour le maillage M_1 et $n_{M_{21}}$ pour le maillage M_2 .

On déplace alors ces deux nœuds selon un vecteur $\mathbf{u} = [0, u_y, 0]^T$ comme représenté sur la Figure A - 7.

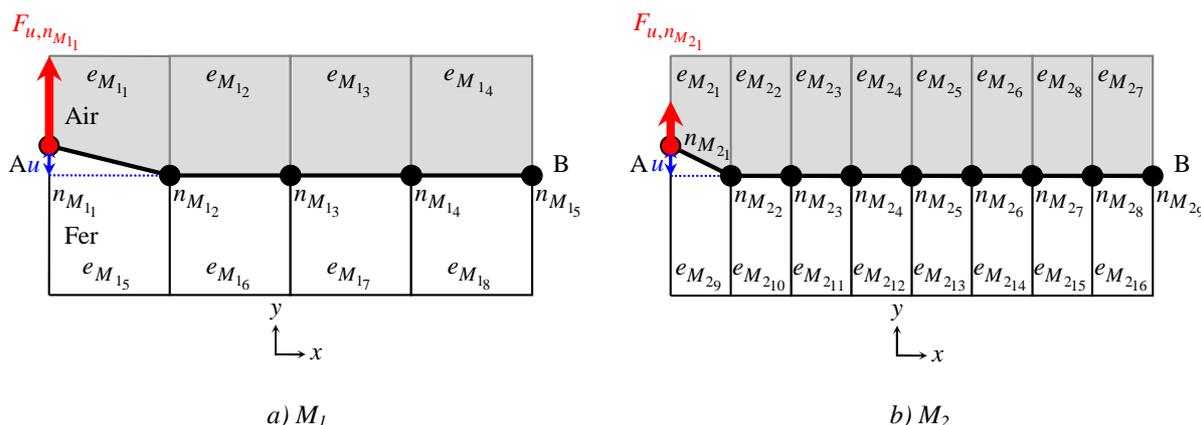


Figure A - 7 Maillages déformés suite au déplacement d'un nœud

Les valeurs des forces $F_{u,n_{M_1}}$ et $F_{u,n_{M_{21}}}$ ont alors pour expressions :

$$F_{u,n_{M_1}} = F_{u,n_{M_1}}^{e_{M_{11}}} + F_{u,n_{M_1}}^{e_{M_{15}}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(W_{e_{M_{11}}} + W_{e_{M_{15}}} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$F_{u,n_{M_{21}}} = F_{u,n_{M_{21}}}^{e_{M_{21}}} + F_{u,n_{M_{21}}}^{e_{M_{29}}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(W_{e_{M_{21}}} + W_{e_{M_{29}}} \right) \quad (\text{A.4})$$

On exprime alors les énergies $W_{e_{M_{11}}}$, $W_{e_{M_{15}}}$, $W_{e_{M_{21}}}$ et $W_{e_{M_{29}}}$ en fonction du déplacement \mathbf{u} tel que représenté sur la Figure A - 7.

$$W_{e_{M_{11}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{11}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{11}}}} \frac{b_0^2}{2\mu_0} dv = \frac{b_0^2}{2\mu_0} v_{e_{M_{11}}} - \frac{1}{2} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \frac{S}{4} u_y \quad (\text{A.5})$$

$$W_{e_{M_{15}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{15}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{15}}}} \frac{b_f^2}{2\mu_f} dv = \frac{b_f^2}{2\mu_f} v_{e_{M_{15}}} + \frac{1}{2} \frac{b_f^2}{2\mu_f} \frac{S}{4} u_y \quad (\text{A.6})$$

$$W_{e_{M_{21}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{21}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{21}}}} \frac{b_0^2}{2\mu_0} dv = \frac{b_0^2}{2\mu_0} v_{e_{M_{21}}} - \frac{1}{2} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \frac{S}{8} u_y \quad (\text{A.7})$$

$$W_{e_{M_{29}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{29}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{29}}}} \frac{b_f^2}{2\mu_f} dv = \frac{b_f^2}{2\mu_f} v_{e_{M_{29}}} + \frac{1}{2} \frac{b_f^2}{2\mu_f} \frac{S}{8} u_y \quad (\text{A.8})$$

La perméabilité μ_f de la plaque étant infinie par hypothèse, on en déduit :

$$F_{u, n_{M_{11}}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(W_{e_{M_{11}}} + \underbrace{W_{e_{M_{15}}}}_{=0} \right) = \frac{S}{8} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \quad (\text{A.9})$$

$$F_{u, n_{M_{21}}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(W_{e_{M_{21}}} + \underbrace{W_{e_{M_{29}}}}_{=0} \right) = \frac{S}{16} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \quad (\text{A.10})$$

On remarque que malgré le fait que les nœuds $n_{M_{11}}$ et $n_{M_{21}}$ ont les mêmes coordonnées, les forces $F_{u, n_{M_{11}}}$ et $F_{u, n_{M_{21}}}$ ne sont pas identiques.

Cas des nœuds intérieurs

Il s'agit des nœuds allant de $n_{M_{12}}$ à $n_{M_{14}}$ pour le maillage M_1 et de $n_{M_{22}}$ à $n_{M_{28}}$ pour le maillage M_2 . De même que précédemment, nous effectuons le calcul uniquement sur un nœud de chaque maillage, la force locale ainsi obtenue étant la même pour les autres nœuds précédemment cités. Comme représenté sur la Figure A - 8 on choisit d'effectuer le calcul sur les nœuds $n_{M_{12}}$ et $n_{M_{23}}$ en appliquant la même démarche que pour les nœuds extérieurs.

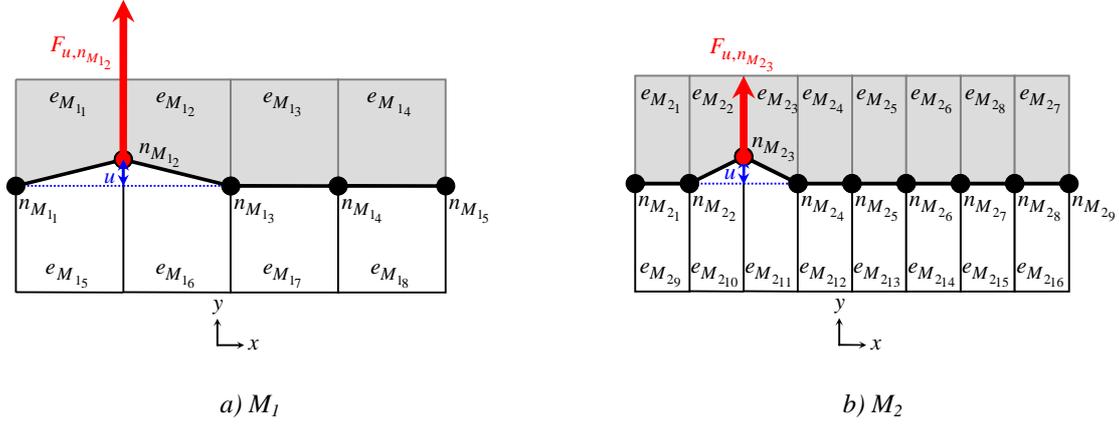


Figure A - 8 Maillages déformés suite au déplacement d'un nœud

Les valeurs des forces $F_{u,n_{M_{12}}}$ et $F_{u,n_{M_{23}}}$ ont alors pour expressions :

$$\begin{aligned} F_{u,n_{M_{12}}} &= F_{u,n_{M_{12}}}^{e_{M_{11}}} + F_{u,n_{M_{12}}}^{e_{M_{12}}} + F_{u,n_{M_{12}}}^{e_{M_{15}}} + F_{u,n_{M_{12}}}^{e_{M_{16}}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial u} \left(W_{e_{M_{11}}} + W_{e_{M_{12}}} + W_{e_{M_{15}}} + W_{e_{M_{16}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} F_{u,n_{M_{23}}} &= F_{u,n_{M_{23}}}^{e_{M_{22}}} + F_{u,n_{M_{23}}}^{e_{M_{23}}} + F_{u,n_{M_{23}}}^{e_{M_{210}}} + F_{u,n_{M_{23}}}^{e_{M_{211}}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial u} \left(W_{e_{M_{22}}} + W_{e_{M_{23}}} + W_{e_{M_{210}}} + W_{e_{M_{211}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

On exprime alors les différentes énergies intervenant dans les relations (A.11) et (A.12) en fonction du déplacement u tel que représenté sur la Figure A - 8 .

$$W_{e_{M_{11}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{11}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{11}}}} \frac{b_0^2}{2\mu_0} dv = \frac{b_0^2}{2\mu_0} v_{e_{M_{11}}} - \frac{1}{2} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \frac{S}{4} u_y \quad (\text{A.13})$$

$$W_{e_{M_{12}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{12}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{12}}}} \frac{b_0^2}{2\mu_0} dv = \frac{b_0^2}{2\mu_0} v_{e_{M_{12}}} - \frac{1}{2} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \frac{S}{4} u_y \quad (\text{A.14})$$

$$W_{e_{M_{15}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{15}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{15}}}} \frac{b_f^2}{2\mu_f} dv = \frac{b_f^2}{2\mu_f} v_{e_{M_{15}}} + \frac{1}{2} \frac{b_f^2}{2\mu_f} \frac{S}{4} u_y \quad (\text{A.15})$$

$$W_{e_{M_{16}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{16}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{16}}}} \frac{b_f^2}{2\mu_f} dv = \frac{b_f^2}{2\mu_f} v_{e_{M_{16}}} + \frac{1}{2} \frac{b_f^2}{2\mu_f} \frac{S}{4} u_y \quad (\text{A.16})$$

$$W_{e_{M_{21}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{21}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{21}}}} \frac{b_0^2}{2\mu_0} dv = \frac{b_0^2}{2\mu_0} v_{e_{M_{21}}} - \frac{1}{2} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \frac{S}{8} u_y \quad (\text{A.17})$$

$$W_{e_{M_{22}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{22}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{22}}}} \frac{b_0^2}{2\mu_0} dv = \frac{b_0^2}{2\mu_0} v_{e_{M_{22}}} - \frac{1}{2} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \frac{S}{8} u_y \quad (\text{A.18})$$

$$W_{e_{M_{210}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{210}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{210}}}} \frac{b_f^2}{2\mu_f} dv = \frac{b_f^2}{2\mu_f} v_{e_{M_{210}}} + \frac{1}{2} \frac{b_f^2}{2\mu_f} \frac{S}{8} u_y \quad (\text{A.19})$$

$$W_{e_{M_{211}}}(u_y) = \int_{v_{e_{M_{211}}}} \left(\int_0^b \mathbf{h} \cdot d\mathbf{b} \right) dv = \int_{v_{e_{M_{211}}}} \frac{b_f^2}{2\mu_f} dv = \frac{b_f^2}{2\mu_f} v_{e_{M_{211}}} + \frac{1}{2} \frac{b_f^2}{2\mu_f} \frac{S}{8} u_y \quad (\text{A.20})$$

De même que précédemment on déduit l'expression des forces $F_{u,n_{M_{12}}}$ et $F_{u,n_{M_{23}}}$ en prenant la perméabilité μ_f égale à l'infini. On obtient :

$$F_{u,n_{M_{12}}} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(W_{e_{M_{11}}} + W_{e_{M_{12}}} + \underbrace{W_{e_{M_{15}}}}_{=0} + \underbrace{W_{e_{M_{16}}}}_{=0} \right) = \frac{S}{4} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \quad (\text{A.21})$$

$$F_{u,n_{M_{23}}} = -\frac{\partial}{\partial u} \left(W_{e_{M_{22}}} + W_{e_{M_{23}}} + \underbrace{W_{e_{M_{210}}}}_{=0} + \underbrace{W_{e_{M_{211}}}}_{=0} \right) = \frac{S}{8} \frac{b_0^2}{2\mu_0} \quad (\text{A.22})$$

On remarque, comme pour les nœuds extérieurs, que les forces $F_{u,n_{M_{12}}}$ et $F_{u,n_{M_{23}}}$ sont différentes bien qu'exprimées au même point de l'espace.

Cependant, la force totale exercée sur la plaque en dessous d'une dent de la culasse est reliée aux forces locales que nous venons de calculer selon les relations suivantes :

$$F_{totale} = \sum_{i=1}^5 F_{u,n_{M_{1i}}} \quad (\text{A.23})$$

$$F_{totale} = \sum_{j=1}^9 F_{u,n_{M_{2j}}} \quad (\text{A.23})$$

Dans les deux cas, on retrouve bien la même force totale classique $F = \frac{b_0^2}{2\mu_0} S$.

Annexe IV Coupe transversale du betobar

Dans cette annexe nous présentons une coupe transversale du système betobar modélisé dans le chapitre III. Sur cette figure on trouvera également les dimensions résumées dans le Tableau III-1.

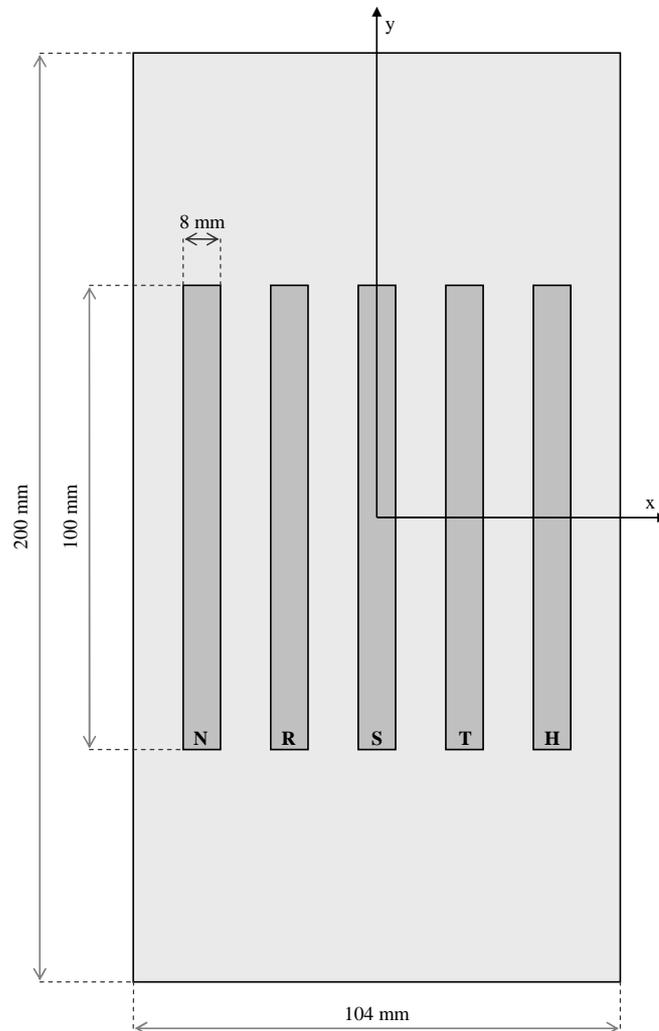


Figure A - 9 Dimensions du système betobar modélisé

Références

- [1] P. Germain, "Mécanique des milieux continus, cours à l'usage de la science", *Masson et C^{ie} Editeurs*, 1962.
- [2] W. R. Smythe, "Static and dynamic electricity", *Mc Graw-Hill*, 3rd Edition, 1968
- [3] L. Solomon, "Elasticité linéaire", *Masson et C^{ie} Editeurs*, 1968.
- [4] A. F. Armor, "Heat flow in the stator core of large turbine-generators by the method of three-dimensional finite elements (Part I : analysis by scalar potential formulation)", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-95, No. 5, September/October 1976.
- [5] A. F. Armor, "Heat flow in the stator core of large turbine-generators by the method of three-dimensional finite elements (Part II : temperature distribution in the stator iron)", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, Vol. PAS-95, No. 5, September/October 1976.
- [6] G. Dhatt, G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis", *Maloine*, 1981.
- [7] J. L. Coulomb, "A methodology for the determination of global electromechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of the magnetic forces, torques and stiffness", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. MAG-19, No.6, pp. 2514-2519, November 1983.
- [8] J. L. Coulomb and G. Meunier, "Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. MAG-20, No. 5, pp. 1894-1896, Septembre 1984.
- [9] G. Fournet, "Electromagnétisme à partir des équations locales", *Masson et C^{ie} Editeurs*, 1985.
- [10] M. H. Nayfeh & M. K. Brussel, "Electricity and Magnetism", *John Wiley and Sons, Inc.*, New-York, 1985.
- [11] C. Johnson, "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method", *Cambridge University Press*, 1987.
- [12] W. C. Young, R. G. Budynas, "Roark's formulas for stress and strain", *Mc Graw-Hill*, 7th Edition, 1989.
- [13] A. Albanese and G. Rubinacci, "Magnetostatic fields computations in terms of two components vector potential", *International journal for the numerical methods in engineering*, Vol.29, pp 515-532, 1990.

- [14] P. Molino and M. Repetto, "Comparison of different strategies for the analysis of nonlinear coupled thermo-magnetic problems under pulsed conditions", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 26, No. 2, March 1990.
- [15] Z. Ren and A. Razek, "A coupled electromagnetic-mechanical model for thin convective plate deflection analysis", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 26, No. 5, pp. 1650-1652, September 1990.
- [16] Z. Ren and A. Razek, "Force calculation by Maxwell stress tensor in 3D hybrid finite element - boundary integral formulation", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 26, No. 5, pp. 2774-2776, September 1990.
- [17] A. Bossavit, "Electromagnétisme en vue de la modélisation", Collection Mathématiques et Applications", *Springer-Verlag*, 1991.
- [18] M. Féliachi and G. Develey, "Magneto-thermal behavior finite element method analysis for ferromagnetic materials in induction heating devices", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 27, No. 6, November 1991.
- [19] A. Bossavit, "Edge-element computation of the force field in deformable bodies", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 28, No. 2, pp. 1263-1266, March 1992.
- [20] Z. Ren and A. Razek, "Local force computation in deformable bodies", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 28, No. 2, pp. 1212-1215, March 1992.
- [21] C. Chaboudez, S. Clain, R. Glardon, J. Rappaz, M Swierkosz, R. Touzani, "Numerical modelling of induction heating of long workpieces", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 30, No 6., pp. 5028-5037, 1994.
- [22] Z. Ren, B. Ionescu, M. Besbes and A. Razek, " Calculation of mechanical deformation of magnetic materials in electromagnetic devices", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 31, No. 3, pp. 1873-1876, May 1995.
- [23] E. Tonti, "On the geometrical structures of the electromagnetism", in *Gravitation, Electromagnetism and Geometrical Structures*, for the 80th birthday of A. Lichnerowicz, Edited by G. Ferrarese, 1995, Pitagora Editrice Bologna, pp. 281-308.
- [24] Z. Badics, Y. Matsumoto, K. Aoki, F. Nakayasu, M Uesaka and K. Miya, "An effective 3D finite element scheme for computing electromagnetic field distortions due to defects in eddy-current nondestructive evaluation", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 33, No. 2, pp. 1012-1020, March 1997.
- [25] B. Boualem, "Contribution à la modélisation des systèmes électrotechniques à l'aide des formulations en potentiels : application à la machine asynchrone", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Juillet 1997.
- [26] F. B. Belgacem, A. Buffa and Y. Maday, "The mortar element method for 3D Maxwell's equations : first results", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 1999.
- [27] K. Delaere, P. Sas, R. Belmans and K. Hameyer, "Weak coupling of magnetic and vibrational analysis using local forces", *Electrical Machines and Drives, 1999. International Conference IEMD '99*, pp. 514-516.
- [28] C. Geuzaine, N. Meys, F. Henrotte and P. Dular, "A Galerkin projection method for mixed elements", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 35, No. 3, May 1999.

- [29] Y. Le Menach, "Contribution à la modélisation tridimensionnelle des systèmes électrotechniques", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Février 1999.
- [30] J. E. Rougier, J. Y. Berthou, "Interpolation de champs calculés par des méthodes finies pour le couplage de codes, état des lieux", Rapport de fin d'étude, 1999.
- [31] A. Buffa, Y. Maday and F. Rapetti, "Calculation of eddy currents in moving structures by a sliding mesh-finite element method", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, No. 4, pp. 1356-1359, July 2000.
- [32] J. Driesen, "Coupled electromagnetic-thermal problems in electrical energy transducers", Doctoral thesis, Katholieke universiteit Leuven, December 2000.
- [33] P. Dular, P. Kuo-Peng, C. Geuzaine, N. Sadowski and J. P. A. Bastos, "Dual magnetodynamic formulations and their source fields associated with massive and stranded inductors", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, No. 4, July 2000.
- [34] F. Rapetti, "Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des élément avec joints", Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Mai 2000.
- [35] F. Rapetti, F. Bouillault, L. Santendra, A. Buffa, Y. Maday, A. Razek, "Calculation of eddy current with edge elements on non-matching grids in moving structures", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 36, No. 4, pp.1351-1355, July 2000.
- [36] E. Tonti, "Algebraic topology and computational electromagnetism", in *International Workshop on Electric and Magnetic Fields*, pp. 20-21, 2000.
- [37] Z. Ren and Z. Cendes, "Shell elements for the computation of magnetic forces", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 37, No. 5, Sept. 2001.
- [38] F. Henrotte and K. Hameyer, "Computation of electromagnetic force densities: Maxwell stress tensor vs. virtual work principle", *Journal of Computational and Applied Mathematics* Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2002.
- [39] F. Henrotte and K. Hameyer, "Electromagnetic force densities in a continuous medium", *Scientific Computing in Electrical Engineering (Proc. of the SCEE-2002 Conference held in Eindhoven)*, Springer, Berlin (2004), pp. 214-222.
- [40] A. Belahcen, "Magnetoelasticity, magnetic forces and magnetostriction in electrical machines", Doctoral thesis, Helsinki University of Technology Department of Electrical and Communications Engineering Laboratory of Electromechanics, 2004.
- [41] Groupe CEDRAT, "Etudes des efforts électromagnétiques dans un turbo-alternateur", Rapport pour EDF R&D, 2004.
- [42] F. Henrotte, H. V. Sande, G. Deliege and K. Hameyer, "Electromagnetic force density in a ferromagnetic material", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 40, No. 2, pp.553-556, March 2004.
- [43] P. Lebailly, L. Dutrech, J. G. Astier, O. Nicholas, L. Billet, "Analyse de la tenue vibratoire en fonctionnement du circuit magnétique de l'alternateur de Chinon B4", Rapport EDF R&D/AMA, 2004.

- [44] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadowski, A. Razek, L. Santendra, F. Bouillault, F. Rapetti, "Using hierarchic interpolation with mortar element method for electrical machines", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 41, No. 5, pp. 1472-1475, 2005.
- [45] P. Dular, J. Gyselinck, T. Henneron, and F. Piriou, "Dual finite element formulations for lumped reluctances coupling"; *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 41, No. 5, pp. 1396-1399, May 2005.
- [46] Groupe ETACOM, Betobar, http://www.etacomgroup.com/Fr/Product_1.htm.
- [47] C. Felippa, "Introduction to finite element methods", Department of Aerospace Engineering Sciences – University of Colorado, <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/>, consulté en 2005.
- [48] C. Felippa, "Advanced finite element methods", Department of Aerospace Engineering Sciences – University of Colorado, <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/home.html>, consulté en 2005.
- [49] X. Shi, "Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis appliquée à la modélisation des machines électriques", Thèse de Doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Décembre 2005.
- [50] P. Dular and R. V. Sabariego, "A perturbation method for computing field distortions due to conductive regions with h-conform magnetodynamic finite element formulations"; *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 43, No. 4, pp. 1293-1296, April 2007.
- [51] F. Henrotte and K. Hameyer, "A theory for electromagnetic force formulas in continuous media", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 43, No. 4, pp.1445-1448, April 2007.
- [52] B. Kaltenbacher, "Introduction to inverse problem and regularization", *Inverse Problems and Optimization in Low Frequency Electromagnetism*, Leuven, October 2007.
- [53] R. V. Sabariego and P. Dular, "A perturbation approach for the modeling of eddy current nondestructive testing problems with differential probes", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 43, No. 4, pp. 1289-1292, April 2007.
- [54] A. Belahcen, "Computation of generalized nodal forces and force fields in electrical machines", *13th biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, Athens, May 2008.
- [55] A. Bossavit, "Force-related nuts and bolts in the discretization toolkit for electromagnetics", *IEEE Trans. Mag.*, Vo. 44, No. 6, pp. 1289-1292 June 2008.
- [56] L. Daridon, "Cours d'éléments finis", Université Louis Pasteur de Strasbourg, <http://www-ipst.u-strasbg.fr/cours/elements-finis/>, consulté en 2008.
- [57] G. Parent, P. Dular, F. Piriou, and A. Abakar, "Accurate projection method of source quantities in coupled problems", *13th biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation*, Athens, May 2008.
- [58] G. Parent, P. Dular, J. P. Ducreux and F. Piriou, "Using a Galerkin projection method for coupled problems", *IEEE Trans. Mag.*, Vol. 44, No. 6, pp. 830-833, June 2008.

Résumé : Pour étudier les systèmes électromagnétiques, mécaniques ou thermiques, on a de plus en plus recours à la modélisation numérique. Pour la résolution des différents modèles mathématiques, la méthode des éléments finis est généralement utilisée. Dans le cas de couplages multi-physiques, les particularités de chacune des grandeurs étudiées impliquent l'utilisation d'un maillage commun le plus souvent important en termes de nombre d'éléments. L'objectif de ce travail est de proposer et de mettre en oeuvre une méthode de projection de grandeurs discrètes permettant l'utilisation de maillages dédiés pour chacun des domaines de la physique.

Dans le premier chapitre, les modèles mathématiques décrivant les phénomènes de l'électromagnétisme, de la thermique et de la mécanique, ainsi que les espaces de discrétisation des différentes inconnues sont exposés. Dans la seconde partie, la méthode de projection est introduite à l'aide d'une interprétation géométrique de la méthode des éléments finis, puis est développée, tout d'abord dans le cas général, puis pour chacun des domaines de la physique étudiés. Des exemples académiques sont également traités dans cette partie afin de valider la démarche utilisée. Enfin, dans le troisième chapitre, la méthode de projection est employée pour modéliser des dispositifs électromagnétiques dans le cas de couplages magnétothermique et magnéto-mécanique.

Mots clés : méthode des éléments finis, couplages multiphysique, projection, électromagnétisme.

Title : Implementation of a projection method for discrete quantities : study of magnetothermal and magnetomechanical coupled problems.

Abstract : To study electromagnetic, mechanical or thermal systems, numerical modelling is more and more used. Generally, to numerically solve the mathematical models, the finite element method is used. In the case of multi-physical coupling, the properties of each of the studied quantities imply the use of a common meshing which is mostly important in terms of number of elements. The aim of this work is to propound and use a projection method for discrete quantities allowing using dedicated meshes for each phenomenon.

In the first chapter, the mathematical models describing the electromagnetic, thermal and mechanical phenomena, as well as the discretization spaces of each unknown are exposed. In the second chapter, the projection method is presented through a geometrical interpretation of the finite element method, and then is developed in a general way and for every physical phenomenon. Academic examples are also modelled to validate the method. Finally, in the third chapter, the projection method is used for the modelling of electromagnetic systems in the case of magnetothermal and magnetomechanical couplings.

Key words : finite element method, multiphysical coupled problems, projection method, electromagnetism.