N°ORDRE : 4380

Université Lille 1 Sciences et Technologies
École Doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France

Thèse pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Université Lille 1

présentée par **Fabien Cléry**
le 26 juin 2009

Discipline : **Mathématiques Pures**

Relèvement arithmétique et multiplicatif de formes de Jacobi

Directeur de Thèse : Valéry Gritsenko

Jury :

Examinateur	Valéry Gritsenko	Professeur	Université de Lille 1
Examinateur	Michael Harris	Professeur	Université de Paris 7
Examinateur	Dimitri Markouchevitch	Professeur	Université de Lille 1
Examinateur	Viacheslav Nikulin	Professeur	Université de Liverpool
Rapporteur	Alexei Panchichkine	Professeur	Université de Grenoble 1
Examinateur	Boris Pioline	Ch. Recherche	Université de Paris 6
Président/Rapporteur	Nils-Peter Skoruppa	Professeur	Université de Siegen

Résumé

La théorie des formes modulaires de Siegel fournit de nombreuses applications en arithmétique, en géométrie algébrique et plus récemment en physique théorique. Le sujet de cette thèse est motivé par la construction d'analogues tridimensionnels de la fonction êta de Dedekind, question apparue dans la théorie des algèbres de Kac-Moody et celle des cordes ainsi qu'en géométrie algébrique. De telles formes modulaires ont été construites par V. Gritsenko et V. Nikulin entre 1995 et 1998 pour les groupes paramodulaires complets.

Dans cette thèse, nous répondons à cette question pour les sous-groupes de congruence des groupes paramodulaires : nous obtenons une classification complète de formes de Siegel de diviseur le plus simple et les exhibons. Nous les avons nommées **dd-formes** (diviseur diagonal). Notre solution repose sur l'utilisation de formes de Jacobi et deux types de relèvements.

En 1979, H. Maass proposa une construction de formes modulaires de Siegel à partir de formes de Jacobi d'indice 1. En 1993, V. Gritsenko généralisa cette construction aux formes de Jacobi d'indice t. Nous les généralisons aux sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. On obtient ainsi des formes modulaires de Siegel pour des sous-groupes des groupes paramodulaires. Il s'agit de *relèvements arithmétiques*.

Ensuite, nous construisons *un relèvement multiplicatif* ou produit automorphe de Borcherds à partir de formes de Jacobi presque holomorphes de poids 0 et d'indice t pour le sous-groupe de congruence de type de Hecke $\Gamma_0(N)$. Cette construction généralise celle proposée par V. Gritsenko et V. Nikulin en 1998.

Les dd-formes sont des formes réflexives. Elles nous ont permis de retrouver la structure de certains anneaux gradués de formes modulaires.

Mots clés : formes de Jacobi, formes modulaires de Siegel, formes réflexives, groupes paramodulaires, opérateurs de Hecke, relèvement arithmétique, produit de Borcherds.

Abstract

Arithmetic and multiplicative lifting of Jacobi forms

The theory of Siegel modular forms gives us a lot of applications in arithmetic, algebraic geometry and more recently in physics. The subject of this dissertation is motivated by the construction of a three-dimensional analogue of the eta function of Dedekind, problem arisen in the theory of Lorentzian Kac–Moody Lie algebras, algebraic geometry and also in string theory. Such modular forms have been built by V. Gritsenko and V. Nikulin between 1995-1998 for the full paramodular groups.

In this dissertation, we answer to this problem for congruence subgroups of paramodular groups : we obtain a complete classification of the Siegel modular forms with the simplest divisor and we produce all of them. We called them **dd-forms** (modular forms with diagonal divisor). Our solution is based on the use of Jacobi forms and two types of liftings.

In 1979, H. Maass proposed a construction of Siegel modular forms by using Jacobi forms of index one. In 1993, V. Gritsenko generalized this construction to Jacobi forms of index t. We generalize these ones to congruence subgroups of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. In this way, we obtain Siegel modular forms for subgroups of the full paramodular groups. We call such a construction *arithmetic lifting*.

Then we construct a *multiplicative lifting* or Borcherds' automorphic product by using nearly holomorphic Jacobi forms of weight 0 and index t for congruence subgroups of Hecke type : $\Gamma_0(N)$. This construction generalizes the one proposed by V. Gritsenko and V. Nikulin in 1998.

The dd-forms are reflective modular forms. They have allowed us new proofs of the structure of some graded rings of modular forms.

Keywords : Arithmetic lifting, Borcherds' products, Hecke operators, Jacobi forms, paramodular groups, reflective forms, Siegel modular forms.

Remerciements

Je remercie Valéry Gritsenko qui a dirigé ce travail et m'a initié à la recherche.

Je remercie également Nils-Peter Skoruppa et Alexei Panchichkine d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse.

Je remercie tous les membres du jury et plus particulièrement M.Skoruppa qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

J'aimerais exprimer mon amitié à Alexis, Benoît, Amandine, Éric, Patrick pour leur aide et les discussions que nous avons pu avoir. Je remercie Stéphane de bien avoir voulu corriger les typos de la première version de ce texte.

Je rends hommage à ma mère, mon frère, son épouse et mes deux nièces.

Un grand merci à Isabelle pour son soutien permanent.

Table des matières

Introduction

Entre 1935 et 1937, C.L. Siegel, étudiant la théorie des formes quadratiques (notamment le nombre de représentations d'une forme quadratique par d'autres formes quadratiques), commença à contruire une théorie des formes modulaires à plusieurs variables. Ces formes modulaires, désormais appelées *formes modulaires de Siegel*, généralisent les formes modulaires classiques : le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{Sp}(1,\mathbb{Z})$ est remplacé par le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(g,\mathbb{Z})$ et le demi-plan supérieur ($\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}$) est remplacé par le demi-espace supérieur de Siegel $\mathbb{H}_g$, de dimension complexe $\frac{g(g+1)}{2}$. L'entier g est dit genre ou degré. Les séries thêta ainsi que les séries d'Eisenstein fournirent alors les premiers exemples de formes modulaires de Siegel. On trouvera une bonne introduction aux formes modulaires de Siegel dans le livre de E. Freitag (voir [F]) ainsi que dans celui de H. Klingen (voir [Kli]). Cette théorie a permis de nombreux progrès en arithmétique (classification des formes quadratiques, objectif de Siegel), en géométrie algébrique (espaces des modules de variétés abéliennes principalement polarisées) et plus récemment en physique (théorie des cordes, des trous noirs et gravité quantique). Dans cette thèse, nous nous concentrons sur les formes modulaires de Siegel de genre deux.

En 1969, I.I. Pyatetskii-Shapiro (voir [PS]) remarqua, en décomposant de manière adéquate l'espace sur lequel vivent les formes modulaires de Siegel, qu'elles possédaient un développement de Fourier particulier, il le qualifia de *développement de Fourier-Jacobi* : les coefficients d'un tel développement étant ce qu'on appelle dorénavant des *formes de Jacobi*. Il s'agit de fonctions à la fois elliptiques (ou abéliennes) et modulaires. Cela semble être le point départ de l'étude des formes de Jacobi. Les séries thêta fournirent alors bon nombre d'exemples de formes de Jacobi. Ces formes de Jacobi sont donc caractérisées par deux types de transformations : l'une abélienne (invariance pour un sous-groupe du groupe $\mathbb{Z}^2$) donnant une caractéristique numérique appelée *indice* (notée t dans la suite), l'autre modulaire (invariance pour un sous-groupe du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$) donnant une autre caractéristique numérique dite *poids* (notée k). Une étude systématique des formes de Jacobi a été menée par M. Eichler et D. Zagier, en 1985, dans l'ouvrage de référence « The Theory of Jacobi Forms »(voir [EZ]).

En 1979, H. Maass proposa de construire des formes modulaires de Siegel à partir de formes de Jacobi (voir [Ma]). Cette construction, dite relèvement de Maass, permit une avancée décisive dans la preuve de la conjecture de Saito-Kurokawa.
Il procéda de la manière suivante :

(i) la donnée de départ est une forme de Jacobi de poids k (entier) et d'indice 1 pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, disons φ,

(ii) on définit ensuite une famille d'opérateurs de Hecke, disons $T(m)$ pour $m \in \mathbb{N}$, qu'on applique à la forme φ. On obtient ainsi une famille de formes de Jacobi, $\varphi\big|_{k,1}T(m) = \varphi_m$, chacune de poids k et d'indice m,

(iii) on définit, alors, la fonction suivante : $\phi(\tau,z,\omega) = \sum\limits_{m\in\mathbb{N}} \varphi_m(\tau,z)e^{2i\pi m\omega}$,

(iv) cette série est invariante pour deux sous-groupes de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$, de plus en calculant le développement de Fourier de ϕ, on remarque qu'elle est invariante par une involution de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$,

(v) ces deux sous-groupes et cette involution engendrent le groupe $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$.

Cette construction a été généralisée en 1993 par V. Gritsenko à des formes de Jacobi pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, d'indice quelconque (y compris demi-entier) et possédant un caractère (voir [G2] et [GN2]). Le résultat est alors une forme modulaire de Siegel pour un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q})$ dit *groupe paramodulaire*. Parmi les formes obtenues de cette manière, il y en a trois qui sont remarquables : Δ_5, Δ_2, Δ_1. Une dernière forme, $\Delta_{1/2}$, obtenue par un relèvement qualifié de *trivial* par les auteurs de [GN2], est également remarquable. Elles sont remarquables car elles fournissent des analogues de la forme modulaire êta de Dedekind : leur diviseur est le plus simple possible, c'est la diagonale du demi-espace de Siegel de genre deux. Ces fonctions possédent un grand nombre d'applications en physique théorique (voir [C], [CCL], [DVV], [K1], [K2] et [K3]). La généralisation de ces formes de Siegel (diviseur le plus simple) pour les sous-groupes de congruence du groupe $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ est également importante pour la théorie de la gravité quantique (voir [DJS], [DS], [DG] et [DN]). En particulier, une question portant sur la classification des formes de Siegel de diviseur le plus simple pour les sous-groupes de congruence de type de Hecke, $\Gamma_0^{(2)}(N)$, a été formulée lors de la conférence « Black holes, Black Rings and Modular Forms »(E.N.S. Paris, Août 2007). En proposant deux types de relèvements (l'un arithmétique, l'autre multiplicatif), nous répondons complétement à cette question : nous obtenons une classification complète des formes modulaires de Siegel ayant le diviseur le plus simple (la diagonale du demi-espace de Siegel) et les exhibons toutes. Le théorème de classification, obtenu au chapitre 5 (voir 5.4), assure l'existence de huit telles formes. Les quatre premières sont celles introduites précedemment (voir [G2] et [GN2]), elles correspondent au niveau $N = 1$ (i.e. à des groupes paramodulaires complets). Dans ce travail, nous exhibons les quatre suivantes : ∇_3 ($N = 2$, $t = 1$), ∇_2 ($N = 3$, $t = 1$), $\nabla_{3/2}$ ($N = 4$, $t = 1$)et Q_1 ($N = 2$, $t = 2$). Les formes ∇_3, ∇_2 et $\nabla_{3/2}$ sont des formes paraboliques de poids respectifs 3, 2 et $\frac{3}{2}$ pour les sous-groupes de type de Hecke $\Gamma_0^{(2)}(N)$ (le niveau N étant celui indiqué après chacune de ces formes). Notons que les auteurs des articles [DS], [DJS] et [DN] ont construit les carrés des formes ∇_3 et ∇_2 (ils les ont notés Φ_6 et Φ_4). Nous avons nommé **dd-formes** ces formes modulaires exceptionnelles (dd : diviseur diagonal). Ces formes ont également la propriété remarquable d'être des formes dites *réflexives* i.e. elles s'annulent exactement (à l'ordre un) le long d'un diviseur quadratique (la diagonale du demi-espace de Siegel) déterminé par une réflexion dans le groupe correspondant (voir [GN2] et[GN3]). De telles formes sont rares et déterminent de nouvelles algèbres de Kac-Moody de type de Borcherds. De plus, dans certains cas, nous obtenons des identités de dénominateur de super-algèbres de Kac-Moody généralisées : égalité d'une série et d'un produit infini. Cette thèse est donc essentiellement consacrée à la construction des deux types de relèvements annoncés précedemment.

Relèvement arithmétique

Cette construction est une généralisation des constructions proposées par H. Maass et V. Gritsenko : la donnée est une forme de Jacobi, d'indice quelconque, pour un sous-groupe de congruence du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Le résultat de notre construction est alors une forme modulaire pour un sous-groupe, dit *groupe paramodulaire avec niveaux*, du groupe paramodulaire. Cette généralisation est obtenue au chapitre 3 (voir théorème 3.5). Pour obtenir ce relèvement, nous devons donc obtenir un système de générateurs du groupe paramodulaire avec niveaux (pour réaliser l'étape (v) dans la construction de Maass, il s'agit d'une généralisation du lemme 2.2 de [G2]). C'est l'objet du premier chapitre où nous rappelons également quelques propriétés de certains sous-groupes classiques du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Dans ce premier chapitre, nous donnons notamment une décomposition du groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ modulo le sous-groupe $\Gamma_0(N)$ qui nous sera utile au chapitre 4 pour mener à bien certains calculs délicats. Il nous faut également des formes de Jacobi pour certains sous-groupes de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et certains opérateurs de Hecke. De telles formes et tels opérateurs sont construits dans le deuxième chapitre où nous rappelons les principales définitions et propriétés des formes de Jacobi et de Siegel. Ces formes de Jacobi sont construites en utilisant les séries thêta avec caractéristiques (formes holomorphes) ainsi que leurs quotients (formes faibles, utiles pour le relèvement multiplicatif). En utilisant quelques formules de dimension d'espaces de formes de Jacobi paraboliques pour les sous-groupes de types de Hecke ($\Gamma_0(N)$) que nous calculons à l'aide d'un théorème de N.-P. Skoruppa (voir [Sko]), nous avons pu déterminer certains de ces espaces i.e. dans le cas de dimension un, donner l'unique générateur.

Relèvement multiplicatif

Nous construisons ce type relèvement (également appelé produit automorphe de Borcherds) au quatrième chapitre (voir théorème 4.3). La donnée est, cette fois, une forme de Jacobi presque holomorphe de poids 0 et d'indice t pour le sous-groupe de congruence de type de Hecke $\Gamma_0(N)$. Cette construction généralise celle proposée par V. Gritsenko et V. Nikulin en 1998 (voir [GN1]). Le résultat de cette construction est un produit infini qui est une forme modulaire de Siegel pour un sous-groupe, noté $\Gamma_t^+(N)$, du groupe paramodulaire. Une telle construction est prédite par R. Borcherds (voir [B1] et [B2]) puisque le groupe $\Gamma_t^+(N)$ peut être réalisé comme sous-groupe du groupe orthogonal d'un réseau entier pair de signature $(2,3)$. Les formes que nous obtenons sont écrites comme un produit infini où apparaissent, comme exposants, les coefficients de Fourier en tous les points paraboliques du groupe $\Gamma_0(N)$ des formes de Jacobi utilisées. L'utilisation d'un opérateur, dit de *trace*, nous a permis de diminuer le nombre de développements de Fourier à calculer pour obtenir de tels produits infinis (voir paragraphe 4.4). Cet opérateur nous a également permis de considérer certains quotients de dd-formes et d'obtenir ainsi une nouvelle série de formes réflexives (voir paragraphe 2 du dernier chapitre).

Enfin, les dd-formes ∇_3 et ∇_2 nous ont permis de retrouver de manière élémentaire les structures des anneaux gradués $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2))$ et $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(3))$. Ces structures ayant été déterminées par T. Ibukiyama (voir [I] et [Ib]). Pour l'anneau gradué $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2))$, on démontre que tous ses générateurs sont des relèvements arithmétiques de certaines formes de Jacobi. Ces deux dd-formes sont plus universelles que celles proposées par T. Ibukiyama puisqu'elles en sont les racines carrées. Ces résultats sont obtenus dans le dernier chapitre.

Leitfaden

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
3 \arrow[dr] & 2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & 4 \arrow[dl] \\
 & 5 &
\end{tikzcd}$$

Chapitre 1

Groupe paramodulaire

1.1 Quelques sous-groupes classiques de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

1.1.1 Rappels

Rappelons tout d'abord la définition du groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$:

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2,\mathbb{Z}) \text{ telle que } \det(M) = 1 \right\}$$

où $\mathcal{M}(n,\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices de taille n à coefficients entiers. Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices S et T où

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons également les définitions de certains sous-groupes de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, les plus utiles pour notre travail. On note

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod N \right\}.$$

Le groupe $\Gamma(N)$ est dit sous-groupe principal de congruence de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, c'est le noyau du morphisme de groupes (il est donc distingué) :

$$\Pi_N : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{SL}(2,(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})) \\ \sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \bar{\sigma} = \left(\begin{smallmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{smallmatrix}\right) \end{array} \right) \tag{1.1}$$

où $\bar{m}$ désigne la classe de l'entier m modulo N.

Proposition 1.1 *L'indice de $\Gamma(N)$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, noté $[\Gamma(N):\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})]$, est*

$$[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma(N)] = N^3 \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ premier}}} (1-p^{-2}).$$

Définition 1.2 *On dit qu'un sous-groupe de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de congruence s'il contient un sous-groupe du type $\Gamma(N)$ pour un certain N.*

On note

$$\Gamma_1(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ c \equiv 0 \mod N,\ a \equiv d \equiv 1 \mod N \right\}$$

et

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),\ c \equiv 0 \mod N \right\}.$$

Les sous-groupes $\Gamma_1(N)$ et $\Gamma_0(N)$ sont des sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: ils contiennent $\Gamma(N)$. Le sous-groupe $\Gamma_0(N)$ est dit sous-groupe de type de Hecke de niveau N.

Proposition 1.3 *On a*

$$[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma_1(N)] = N^2 \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ premier}}} (1-p^{-2})$$

et

$$[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma_0(N)] = N \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ premier}}} (1+p^{-1}).$$

Pour le calcul de tous ces indices, on renvoie à [Ko] Chapitre III, §1, exercices 2 à 7. Un calcul rapide donne également

Proposition 1.4 *Le groupe $\Gamma_1(N)$ est un sous–groupe distingué de $\Gamma_0(N)$ et*

$$\Gamma_1(N)/\Gamma_0(N) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$$

où $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ désigne le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

1.1.2 Le groupe $\Gamma_0(N)$

Dans ce paragraphe nous rappelons quelques faits bien connus sur le groupe $\Gamma_0(N)$. Ces résultats nous seront utiles au chapitre 4 pour la construction de produits automorphes de Borcherds. Pour les démonstrations de ces faits, on renvoie à [Sh] ou à [Ko].
Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points paraboliques de $\Gamma_0(N)$, i.e. l'espace quotient de $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ par l'action de $\Gamma_0(N)$, on a

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{f}{e}, e|N, e \geqslant 1, f \bmod (e, \frac{N}{e}) \ \text{ et } \ (e,f)=1 \right\}$$

où (a,b) désigne le plus grand diviseur commun des entiers a et b. La notation $f \bmod (e, \frac{N}{e})$ signifie que l'entier f est pris modulo $(e, \frac{N}{e})$. Le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}$ est $\displaystyle\sum_{e|N,\ e>0} \varphi((e, \frac{N}{e}))$ où φ est la fonction d'Euler.
À chaque point parabolique $f/e \in \mathcal{P}$ de $\Gamma_0(N)$, on associe une matrice de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ de la manière suivante :

$$\frac{f}{e} \mapsto M_{f/e} = \begin{pmatrix} f & * \\ e & * \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \quad M_{f/e}\langle \infty \rangle = f/e$$

où $M_{f/e}\langle . \rangle$ désigne l'action usuelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ (voir 2.1). La largeur du point parabolique de $\frac{f}{e} \in \mathcal{P}$, i.e. l'unique entier naturel non nul h_e tel que $\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N)}(\frac{f}{e}) = \pm M_{f/e} \left\{ T^{h_e n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} M_{f/e}^{-1} \cap \Gamma_0(N)$, est

$$h_e = \frac{N}{(e^2, N)};$$

et la somme des largeurs est égale à l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (voir proposition 1.3).
Exemples
i) Si $N = p$, p premier, on a alors deux points paraboliques : $\frac{1}{p}$ qui est $\Gamma_0(p)$-équivalent à ∞ et 0 de largeur 1 et p respectivement.
ii) Si $N = p^2$, p premier , on a alors $(p+1)$ points paraboliques : $\frac{1}{p^2}$ qui est $\Gamma_0(p^2)$-équivalent à ∞, 0 et $\left\{ \frac{f}{p},\ 1 \leqslant f \leqslant p-1 \right\}$ de largeur 1, p^2 et 1 respectivement.

Proposition 1.5

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \bigsqcup_{\substack{f/e \in \mathcal{P} \\ 0 \leqslant a \leqslant h_e - 1}} \Gamma_0(N) M_{f/e} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Il est clair que le membre de droite de cette décomposition est inclus dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Pour montrer cette proposition, il suffit donc de montrer que l'union est disjointe puisque le nombre de classes de cette union est l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
Supposons qu'il existe $f/e \in \mathcal{P}$, $f'/e' \in \mathcal{P}$, $0 \leqslant a \leqslant h_e - 1$ et $0 \leqslant a' \leqslant h_{e'} - 1$ tels que $\Gamma_0(N) M_{f/e} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma_0(N) M_{f'/e'} \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cela implique que $M_{f'/e'} \begin{pmatrix} 1 & a'-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{f/e}^{-1} = G \in \Gamma_0(N)$. Cependant $M_{f/e}^{-1}\langle f/e \rangle = \infty$ donc $G\langle f/e \rangle = M_{f'/e'} \begin{pmatrix} 1 & a'-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \langle \infty \rangle = M_{f'/e'}\langle \infty \rangle = f'/e'$ i.e. les points paraboliques f/e et f'/e' sont $\Gamma_0(N)$-équivalents et donc égaux. Or, si $\Gamma_0(N) M_{f/e} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma_0(N) M_{f/e} \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $h_e > 1$ (puisque si $h_e = 1$ le calcul précédent permet de conclure), $0 \leqslant a \leqslant h_e - 1$ et $0 \leqslant a' \leqslant h_e - 1$ alors $a = a'$. En effet, on a $M_{f/e} \begin{pmatrix} 1 & a'-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{f/e}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ e^2(a'-a) & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ donc N divise $e^2(a'-a)$. Or $|a'-a| < N$. Donc si $a \neq a'$, N divise e^2 donc $h_e = 1$ (absurde). □

1.1.3 Généralisation de ces sous-groupes classiques

Soit N, N_1 deux entiers naturels non nuls et S un sous-groupe du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On introduit alors l'ensemble suivant :

$$\Gamma_0(N, N_1; S) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \ \text{ tel que } \right.$$

$$\left. b \equiv 0 \bmod N_1 \ , c \equiv 0 \bmod N \ \text{ et } \ \bar{a} \in S \right\}$$

où $\bar{a}$ désigne la classe de l'entier a modulo N.

Proposition 1.6 *L'ensemble* $\Gamma_0(N, N_1; S)$ *est un sous-groupe de congruence de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Le fait que cet ensemble soit un groupe est évident. Qu'il soit un sous-groupe de congruence également : il contient le sous-groupe principal de niveau le plus petit commun multiple des entiers N et N_1.

Remarques

(i) Les groupes $\Gamma_0(N)$ ($N_1 = 1$ et $S = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$), $\Gamma_1(N)$ ($N_1 = 1$ et $S = \{\bar{1}\}$) ainsi que $\Gamma(N)$ ($N_1 = N$ et $S = \{\bar{1}\}$) sont de ce type ($\bar{1}$ désignant la classe de 1 modulo N).

(ii) Si $S_1 < S_2$ alors $\Gamma_0(N, N_1; S_1) < \Gamma_0(N, N_1; S_2)$.

(iii) Si $S = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, on note

$$\Gamma_0(N, N_1; S) = \Gamma_0(N, N_1) \tag{1.2}$$

et lorsque $S = \{\bar{1}\}$ on note

$$\Gamma_0(N, N_1; S) = \Gamma_1(N, N_1). \tag{1.3}$$

La proposition suivante généralise les résultats classiques de calculs d'indice pour les sous-groupes de congruence $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$ et $\Gamma(N)$.

Proposition 1.7 *Si* $N_1|N$ *alors*

$$[\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N, N_1; S)] = [(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* : S].N_1.N \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ premier}}} (1 + p^{-1}).$$

Démonstration.
Soit h l'indice de S dans $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ et $\{\bar{\alpha_j}\}_{1\leqslant j\leqslant h}$ une famille de représentants des classes à droite distinctes de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ modulo S.
En utilisant la surjectivité du morphisme (1.1) (voir [Sh], lemme 1.38), on déduit l'existence de matrices $\sigma_{\alpha_j} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ telles que $\Pi_N(\sigma_{\alpha_j}) = \begin{pmatrix} \bar{\alpha_j} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\alpha_j}^{-1} \end{pmatrix}$ on a alors

$$\Gamma_0(N, N_1; (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*) = \bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant h} \Gamma_0(N, N_1; S)\sigma_{\alpha_j}.$$

En effet, si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N, N_1; S)$ alors $\gamma\sigma_{\alpha_j} \in \Gamma_0(N, N_1; (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$ donc $\det\gamma\sigma_{\alpha_j} = \det\gamma \det\sigma_{\alpha_j} = 1$ et $\Pi_N(\gamma\sigma_{\alpha_j}) \in \Gamma_0(N, N_1; (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$.
Donc $\Gamma_0(N, N_1; (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*) \supseteq \bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant h} \Gamma_0(N, N_1; S)\sigma_{\alpha_j}$.
Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N, N_1; (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$, on a alors $\Pi_N(\gamma) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{0} & \bar{d} \end{smallmatrix}\right)$ où $\bar{a} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ il existe donc un entier j compris entre 1 et h et $\bar{a_1} \in S$ tels que $\bar{a} = \bar{a_1}\bar{\alpha_j}$ et $\delta = \gamma\sigma_{\alpha_j}^{-1} \in \Gamma_0(N, N_1; S)$.
D'où $\Gamma_0(N, N_1; (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*) \subseteq \bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant h} \Gamma_0(N, N_1; S)\sigma_{\alpha_j}$.

Il reste à vérifier que cette union est disjointe : supposons qu'il existe j et k tels que $\Gamma_0(N,N_1;S)\sigma_{\alpha_j} = \Gamma_0(N,N_1;S)\sigma_{\alpha_k}$, il existe alors γ et δ dans $\Gamma_0(N,N_1;S)$ tels que $\delta\gamma\sigma_{\alpha_j} = \sigma_{\alpha_k}$.
Cette dernière égalité entraîne l'existence de $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\bar{\alpha} \in S$ et $\bar{\alpha}\bar{\alpha}_j = \bar{\alpha}_k$, ce qui est absurde.

Lemme 1.8 *Si $N_1|N$ alors*

$$\Gamma_0(N) = \bigsqcup_{0\leqslant j\leqslant N_1-1} T^j\Gamma_0(N,N_1;(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*).$$

Démonstration. Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & bN_1 \\ cN & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N,N_1;(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$ et j un entier compris entre 0 et N_1-1. On a $T^j\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a+jcN & jd+bN_1 \\ cN & d\end{smallmatrix}\right)$ donc $T^j\gamma \in \Gamma_0(N)$.
Donc $\Gamma_0(N) \supseteq \bigsqcup\limits_{0\leqslant j\leqslant N_1-1} T^j\Gamma_0(N,N_1;(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$.
Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ cN & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, on a $ad \equiv 1 \bmod N$ donc $(d,N)=1$ or $N_1|N$ donc $(d,N_1)=1$ i.e. $\bar{\bar{d}} \in (\mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z})^*$ où $\bar{\bar{d}}$ désigne la classe de l'entier d modulo N_1. Ainsi l'équation $\bar{\bar{j}}\bar{\bar{d}} = \bar{\bar{b}}$ a une solution i.e. il existe un entier j compris entre 0 et N_1-1 tel que $b - jd \equiv 0 \bmod N_1$. On a donc $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ cN & d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & j \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a-jcN & b-jd \\ cN & d\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a-jcN & b-jd \\ cN & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N,N_1;(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$.
Donc $\Gamma_0(N) \subseteq \bigsqcup\limits_{0\leqslant j\leqslant N_1-1} T^j\Gamma_0(N,N_1;(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$. Le fait que cette union soit disjointe est évident.

□

On déduit de ces formules que

$$[\Gamma_0(N) : \Gamma_0(N,N_1;S)] = [(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* : S].N_1.$$

Ce qui démontre la proposition puisque

$$\Gamma_0(N,N_1;S) < \Gamma_0(N,N_1;(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*) < \Gamma_0(N) < \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}).$$

□

1.2 Groupe paramodulaire entier

1.2.1 Définitions

Définition 1.9 *Soit $t \in \mathbb{N}^*$. Le groupe paramodulaire entier est*

$$\widetilde{\Gamma_t} = \left\{ M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Z}) \quad \textit{telle que} \quad {}^tMJ_tM = J_t \right\} \tag{1.4}$$

où

$$J_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

${}^tM$ désignant la transposée de la matrice M.

On vérifie sans difficulté que $\widetilde{\Gamma}_t$ est un groupe pour le produit matriciel : cet ensemble contient l'identité et est évidemment stable pour le produit. Il est également stable pour le passage à l'inverse, puisque la relation ${}^tMJ_tM = J_t$ implique d'une part $\det(M)\mathrm{Pf}(J_t) = \mathrm{Pf}(J_t)$ où Pf désigne le pfaffien donc $\det(M) = 1$ ($\widetilde{\Gamma}_t$ est donc un sous-groupe de $\mathrm{SL}(4,\mathbb{Z})$) et d'autre part
${}^t(M^{-1})J_tM^{-1} = J_t$ car $({}^tM)^{-1} ={}^t(M^{-1})$.
En notant

$$I_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

et en utilisant une écriture matricielle par blocs pour $M \in \widetilde{\Gamma}_t$, un calcul routinier donne

Proposition 1.10 *Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_t$ alors*

$${}^tCI_tA ={}^t AI_tC, \quad {}^tAI_tD -{}^t CI_tB = I_t \quad \text{et} \quad {}^tBI_tD ={}^t DI_tB.$$

Une conséquence de cette proposition est la formule pour l'inverse d'une matrice du groupe paramodulaire entier :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_t^{-1}\,{}^tDI_t & -I_t^{-1}\,{}^tBI_t \\ -I_t^{-1}\,{}^tCI_t & I_t^{-1}\,{}^tAI_t \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Remarque Lorsque $t = 1$, le groupe paramodulaire entier n'est autre que le groupe symplectique sur $\mathbb{Z}$, noté $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$. Si $t > 1$, il y a alors une différence notable entre ces deux groupes : la stabilité pour la transposition ($\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ l'est mais pas $\widetilde{\Gamma}_t$).
La proposition suivante donne la forme générale d'un élément du groupe paramodulaire entier.

Proposition 1.11 *Si $M \in \widetilde{\Gamma}_t$ alors*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2t & b_1 & b_2t \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2t & d_1 & d_2t \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

où $a_1, \ldots, d_4$ appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour démontrer cette proposition, on peut utiliser les équations de la proposition (1.10) mais les calculs sont pénibles. Une manière simple de l'obtenir est de faire un peu de géométrie. En effet, on peut considérer $\widetilde{\Gamma}_t$ comme le groupe orthogonal entier (i.e. sur $\mathbb{Z}$) pour la forme bilinéaire alternée ϕ_t dont la matrice de Gram dans une base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{Z}^4$ est donnée par la matrice J_t (qui est antisymétrique) : le coefficient d'indice (i, j) de J_t est $\phi_t(e_i, e_j)$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant 4$. Donc pour $M \in \widetilde{\Gamma}_t$, on a

$$\phi_t(M(e_i), M(e_j)) = \phi_t(e_i, e_j). \tag{1.7}$$

Supposons que la matrice de $M \in \widetilde{\Gamma}_t$ soit donnée par $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$ (les coefficients de M sont entiers). En utilisant les relations données par (1.7), on obtient alors le système de congruences suivant :

$$\left\{ \begin{array}{cl} a_1c_2 \equiv c_1a_2 \bmod t & (1) \\ a_1d_1 - b_1c_1 \equiv 1 \bmod t & (2) \\ a_1d_2 \equiv c_1b_2 \bmod t & (3) \\ b_1c_2 \equiv d_1a_2 \bmod t & (4) \\ a_2d_2 \equiv c_2b_2 \bmod t & (5) \\ b_1d_2 \equiv d_1b_2 \bmod t & (6) \end{array} \right.$$

En multipliant alors l'équation (6) par c_1 puis en utilisant (2), on obtient la congruence $a_1d_1d_2 - d_2 \equiv d_1c_1b_2 \bmod t$ dans laquelle on injecte (3) pour obtenir que t divise d_2. On procède alors de la même manière pour obtenir que t divise a_2, b_2 et c_2. $\square$

1.2.2 Sous-groupes de $\widetilde{\Gamma}_t$

Groupe de Heisenberg

Considérons l'ensemble suivant :

$$H_t(\mathbb{Z}) = \left\{((\lambda\ \mu); \kappa) \quad \text{tel que} \quad (\lambda, \mu, \kappa) \in \mathbb{Z}^3\right\}$$

muni de la loi de composition interne donnée par

$$((\lambda\ \mu); \kappa).((\lambda'\ \mu'); \kappa') = ((\lambda + \lambda'\ \mu + \mu'); \kappa + \kappa' + t\left|\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{smallmatrix}\right|)$$

où $\left|\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{smallmatrix}\right|$ est le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda' & \mu' \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $H_t(\mathbb{Z})$ muni de cette loi est un groupe (l'élément neutre est $((0\ 0); 0)$ et l'inverse de $((\lambda\ \mu); \kappa)$ est $((-\lambda\ -\mu); -\kappa)$).

Remarque Si $t = 1$ on retrouve le groupe d'Heisenberg *entier* i.e. l'extension centrale de $\mathbb{Z}^2$ par $\mathbb{Z}$:

$$0 \to \mathbb{Z} \to H(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to 0.$$

Définition 1.12 *Le groupe $H_t(\mathbb{Z})$ est dit groupe de Heisenberg.*

On considère alors le morphisme de groupes injectif suivant :

$$h_t : \left(\begin{array}{ccc} H_t(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma}_t \\ & & \\ ((\lambda\ \mu);\kappa) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu t \\ \lambda & 1 & \mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = [(\lambda\ \mu);\kappa]_t \end{array} \right) \tag{1.8}$$

On note alors $\widetilde{H_t}(\mathbb{Z})$ l'image de $H_t(\mathbb{Z})$ par h_t (on a évidemment $\widetilde{H_t}(\mathbb{Z}) \simeq H_t(\mathbb{Z})$). Il est également clair que $\widetilde{H_t}(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}_t$. Lorsque $t = 1$, on omet l'indice t dans la notation ci-dessus i.e.

$$[(\lambda\ \mu);\kappa]_1 = [(\lambda\ \mu);\kappa]$$

Soit L et K deux entiers naturels, on considère alors le sous-ensemble suivant de $\widetilde{H_t}(\mathbb{Z})$:

$$\widetilde{H_t}(L,K,N_1) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu K t \\ \lambda L & 1 & \mu K & \kappa N_1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda L t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = [(\lambda L\ \mu K);\kappa N_1]_t \in H_t(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Proposition 1.13 *Si $N_1 | LKt$ alors $\widetilde{H_t}(L,K,N_1)$ est un sous-groupe de $\widetilde{H_t}(\mathbb{Z})$.*

Démonstration. Il est clair que $\widetilde{H_t}(L,K,N_1) \subseteq \widetilde{H_t}(\mathbb{Z})$ et $I_4 \in \widetilde{H_t}(L,K,N_1)$. La stabilité par passage à l'inverse est due à la formule suivante si $M = [(\lambda L\ \mu K);\kappa N_1]_t \in \widetilde{H_t}(L,K,N_1)$ alors

$$M^{-1} = [(-\lambda L\ \ -\mu K);-\kappa N_1]_t \in \widetilde{H_t}(L,K,N_1).$$

Pour la stabilité du produit , soit $M_i = [(\lambda_i L\ \mu_i K);\kappa_i N_1]_t$ $(i = 1,2)$ deux éléments de $\widetilde{H_t}(L,K,N_1)$, on a alors

$$[(\lambda_1 L\ \mu_1 K);\kappa_1 N_1]_t.[(\lambda_2 L\ \mu_2 K);\kappa_2 N_1]_t =$$

$$[((\lambda_1+\lambda_2)L\ (\mu_1+\mu_2)K);(\kappa_1+\kappa_2)N_1 + LKt \left| \begin{smallmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{smallmatrix} \right|]_t.$$

Donc $M_1.M_2 \in \widetilde{H_t}(L,K,N_1)$ si $N_1 | LKt$ et $\widetilde{H_t}(L,K,N_1)$ est un sous-groupe de $H_t(\mathbb{Z})$. □

Remarque En notant

$$\mathcal{H}_t(L,K,N_1)=\left\{((\lambda L\ \mu K);\kappa N_1)\quad \text{tel que}\quad (\lambda,\mu,\kappa)\in\mathbb{Z}^3\right\}$$

la condition $N_1|LKt$ implique que $\mathcal{H}_t(L,K,N_1)$ est un sous-groupe de $H_t(\mathbb{Z})$ et dans le cas $t=1$ on peut voir $\mathcal{H}_t(L,K,N_1)=\mathcal{H}_1(L,K,N_1)$ comme l'extension centrale de $L\mathbb{Z}\times K\mathbb{Z}$ par $N_1\mathbb{Z}$:

$$0\to N_1\mathbb{Z}\to\mathcal{H}_1(L,K,N_1)\to L\mathbb{Z}\times K\mathbb{Z}\to 0.$$

On a évidemment $h_t(\mathcal{H}_t(L,K,N_1))=\widetilde{H_t}(L,K,N_1)$.

Convention
Dans toute la suite, lorsqu'on écrira $\widetilde{H_t}(L,K,N_1)$ ou $\mathcal{H}_t(L,K,N_1)$, forcément $N_1|LKt$.

Sous-groupes avec niveaux de $\widetilde{\Gamma}_t$

On introduit deux sous-ensembles de $\widetilde{\Gamma}_t$

$$\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)=$$

$$\left\{M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2Lt & b_1N_1 & b_2Kt\\ a_3L & a_4 & b_3K & b_4N_1\\ c_1N & c_2NLt & d_1 & d_2Lt\\ c_3NL & c_4N & d_3L & d_4\end{pmatrix}\text{ où } a_1,\ldots,d_4\in\mathbb{Z}\text{ et } {}^tMJ_tM=J_t\right\}$$

et

$$\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S)=$$

$$\left\{M=\begin{pmatrix} a_1 & a_2Lt & b_1N_1 & b_2Kt\\ a_3L & a_4 & b_3K & b_4N_1\\ c_1N & c_2NLt & d_1 & d_2Lt\\ c_3NL & c_4N & d_3L & d_4\end{pmatrix}\in\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)\text{ et } \bar{a_1},\bar{a_4},\bar{d_1},\bar{d_4}\in S\right\}$$

où S est un sous-groupe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ et $\bar{m}$ désigne la classe de l'entier m modulo N.

Lemme 1.14 *(i) Si $N_1|LKt$, $L|KN$ et $K|LN_1$ alors $\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)$ est un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}_t$.*
(ii) Si $N_1|LKt$, $L|KN$, $K|LN_1$ et $N|Lt$ alors $\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S)$ est un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}_t$.

Démonstration. Les deux ensembles $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$ et $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$ sont inclus dans $\widetilde{\Gamma}_t$ et contiennent l'identité.
Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$, on peut alors utiliser la formule (1.6) et

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & d_3Lt & -b_1N_1 & -b_3Kt \\ d_2L & d_4 & -b_2K & -b_4N_1 \\ -c_1N & -c_3NLt & a_1 & a_3Lt \\ -c_2NL & -c_4N & a_2L & a_4 \end{pmatrix}.$$

Donc $M^{-1} \in \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$.
De même si $M \in \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, M, K; S)$ alors M^{-1} est donné par la formule précédente donc appartient à $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$.
Soit $M_i = \left(\begin{smallmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$ $(i = 1, 2)$ alors

$$M_1M_2 = \left(\begin{smallmatrix} A_1A_2+B_1C_2 & A_1B_2+B_1D_2 \\ C_1A_2+D_1C_2 & C_1B_2+D_1D_2 \end{smallmatrix}\right).$$

On note les différents blocs apparaissant dans les matrices M_1 et M_2 par $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2Lt \\ a_3L & a_4 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 & \alpha_2Lt \\ \alpha_3L & \alpha_4 \end{smallmatrix}\right)$, $\ldots$, $D_1 = \left(\begin{smallmatrix} d_1 & d_2Lt \\ d_3L & d_4 \end{smallmatrix}\right)$, $D_2 = \left(\begin{smallmatrix} \delta_1 & \delta_2Lt \\ \delta_3L & \delta_4 \end{smallmatrix}\right)$.

Un calcul direct donne

$$A_1A_2 + B_1C_2 =$$

$$\left(\begin{smallmatrix} a_1\alpha_1+b_1\gamma_1N_1N+b_2\gamma_3NKLt+a_2\alpha_3L^2t & (a_1\alpha_2+a_2\alpha_4+b_1\gamma_2N_1N)Lt+b_2\gamma_4NKt \\ (a_3\alpha_1+a_4\alpha_3+b_4\gamma_3N_1N)L+b_3\gamma_1NK & a_4\alpha_4+b_4\gamma_4N_1N+b_3\gamma_2NKLt+a_3\alpha_2L^2t \end{smallmatrix}\right)$$

comme $L|KN$, ce bloc a la forme voulue, de plus si $N|Lt$, les classes modulo N des termes diagonaux de ce bloc sont $\overline{a_1\alpha_1}$ et $\overline{a_4\alpha_4}$ donc appartiennent à S dès que $\bar{a}_1$, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{a}_4$ et $\bar{\alpha}_4$ appartiennent à S .
On mène le même type de calculs pour les trois autres blocs. On obtient

$$A_1B_2 + B_1D_2 =$$

$$\left(\begin{smallmatrix} (a_1\beta_1+b_1\delta_1)N_1+(a_2\beta_3+b_2\delta_3)LKt & (a_1\beta_2+b_2\delta_4)Kt+(a_2\beta_4+b_1\delta_2)N_1Lt \\ (a_3\beta_1+b_4\delta_3)LN_1+(a_4\beta_3+b_3\delta_1)K & (a_4\beta_4+b_4\delta_4)N_1+(a_3\beta_2+b_3\delta_2)LKt \end{smallmatrix}\right)$$

qui a la forme voulue puisque $K|LN_1$ et $N_1|LKt$.
Pour le bloc $C_1A_2 + D_1C_2$, c'est immédiat puisque

$$C_1A_2 + D_1C_2 =$$

$$\left(\begin{smallmatrix} ((c_1\alpha_1+d_1\gamma_1)+(c_2\alpha_3+d_2\gamma_3)L^2t)N & (c_1\alpha_2+c_2\alpha_4+d_1\gamma_2+d_2\gamma_4)NLt \\ (c_3\alpha_1+c_4\alpha_3+d_3\gamma_1+d_4\gamma_3)NL & ((c_4\alpha_4+d_4\gamma_4)+(c_3\alpha_2+d_3\gamma_2)L^2t)N \end{smallmatrix}\right)$$

Enfin pour le bloc $C_1B_2 + D_1D_2$, c'est comme pour le premier bloc avec la même conclusion si $N|Lt$ puisque

$$C_1B_2 + D_1D_2 =$$

$$\left(\begin{smallmatrix} d_1\delta_1+c_1\beta_1N_1N+c_2\beta_3NKLt+d_2\delta_3L^2t & (d_1\delta_2+d_2\delta_4+c_2\beta_4N_1N)Lt+c_1\beta_2NKt \\ (d_3\delta_1+d_4\delta_3+c_3\beta_1N_1N)L+c_4\beta_4NK & d_4\delta_4+c_4\beta_4N_1N+c_3\beta_2NKLt+d_3\delta_2L^2t \end{smallmatrix}\right)$$

$\square$

Définition 1.15 *Le groupe $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$ est dit groupe paramodulaire entier avec niveaux.*

Conventions

(i) Dans toute la suite lorsqu'on écrira $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$ alors $N_1|LKt$, $L|KN$ et $K|LN_1$.

(ii) Dans toute la suite lorsqu'on écrira $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$ alors $N_1|LKt$, $L|KN$, $K|LN_1$ et $N|Lt$

Remarques

(i) Si $t = N_1 = L = K = 1$ alors $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K) = \widetilde{\Gamma_1}(N, 1, 1, 1)$ est le sous-groupe de type de Hecke de niveau N de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$, noté $\Gamma_0^{(2)}(N)$ dans la suite, i.e.

$$\Gamma_0^{(2)}(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})\ C \equiv 0 \bmod N\}\,.$$

(ii) Si S_1 est un sous-groupe de S_2 alors $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S_1)$ est un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S_2)$.

(iii) Lorsque $N|Lt$ alors $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K) = \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*)$.

Sous-groupe parabolique de $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$

On introduit le sous-groupe parabolique suivant de $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$

$$\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S) =$$

$$\left\{ M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 & b_1N_1 & b_2Kt \\ a_3L & a_4 & b_3K & b_4N_1 \\ c_1N & 0 & d_1 & d_2Lt \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S) \text{ et } \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1N_1 \\ c_1N & d_1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N, N_1; S) \right\} \tag{1.9}$$

Remarques

(i) Pour que $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$ soit un sous-groupe de $\widetilde{\Gamma}_t$ la condition $N|Lt$ est nécessaire. Dans le cas de ce sous-groupe parabolique, elle ne l'est plus : $\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)$ est un groupe dès que les conditions faisant de $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$ un groupe sont réunies. Lorsque $S = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, on note

$$\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S) = \widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K).$$

(ii) Si $M \in \widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)$ alors $\det(M) = \det \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1N_1 \\ c_1N & d_1 \end{smallmatrix}\right) a_4d_4 = 1$ donc $a_4d_4 = 1$ et M est de la forme

$$M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 & b_1N_1 & b_2Kt \\ a_3L & \pm 1 & b_3K & b_4N_1 \\ c_1N & 0 & d_1 & d_2Lt \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right).$$

1.2.3 Isomorphisme entre $\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)$ et un produit semi-direct

Construction d'un produit semi-direct

Soit

$$F : \begin{pmatrix} \Gamma_0(N,N_1;S) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_t(L,K,N_1)) \\ \gamma & \longmapsto & F_\gamma : \begin{pmatrix} \mathcal{H}_t(L,K,N_1) & \to & \mathcal{H}_t(L,K,N_1) \\ ((\lambda L\ \ \mu K);\kappa N_1) & \mapsto & ((\lambda L\ \ \mu K).\gamma);\kappa N_1) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_t(L, K, N_1))$ étant le groupe des automorphismes de $\mathcal{H}_t(L, K, N_1)$ et $(\lambda\ \mu).\gamma$ désigne la multiplication à gauche du vecteur ligne $(\lambda\ \mu)$ par $\gamma \in \Gamma_0(N, N_1; S)$.

Lemme 1.16 *Si $L|KN$ et $K|LN_1$ alors F est un antimorphisme de groupes.*

Démonstration. Antimorphisme de groupes signifie que $F_{\gamma_1\gamma_2} = F_{\gamma_2} \circ F_{\gamma_1}$. Le reste de la preuve repose sur le même genre de calculs que ceux de la preuve du lemme précédent (1.14). □

Cela nous permet de construire le produit semi-direct des groupes $\Gamma_0(N, N_1; S)$ et $\mathcal{H}_t(L, K, N_1)$, on le note $\Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes \mathcal{H}_t(L, K, N_1)$, le produit étant défini par

$$(\gamma_1, ((\lambda_1 L\ \ \mu_1 K); \kappa_1 N_1)).(\gamma_2, ((\lambda_2 L\ \ \mu_2 K); \kappa_2 N_1)) =$$

$$(\gamma_1\gamma_2, ((\lambda_1 L\ \ \mu_1 K).\gamma_2 + (\lambda_2 L\ \ \ \mu_2 K)); (\kappa_1 + \kappa_2)N_1 + t \begin{vmatrix} (\lambda_1 L\ \ \mu_1 K).\gamma_2 \\ \lambda_2 L\ \ \mu_2 K \end{vmatrix})).$$

Convention

Dans toute la suite lorsqu'on écrira $\Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes \mathcal{H}_t(L, K, N_1)$ forcément $L|KN$ et $K|LN_1$.

Isomorphisme

Proposition 1.17 *Si $-I_2 \in \Gamma_0(N, N_1; S)$ alors*

$$\Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes \mathcal{H}_t(L, K, N_1) \simeq \widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)/ \{\pm I_4\}.$$

Si $-I_2 \notin \Gamma_0(N, N_1; S)$ alors

$$\Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes \mathcal{H}_t(L, K, N_1) \simeq \widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S).$$

Démonstration. Dans le cas où $-I_2 \in \Gamma_0(N, N_1; S)$, cet isomorphisme est donné par l'application suivante :

$$G : \left(\begin{array}{ccc} \Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes \mathcal{H}_t(L, K, N_1) & \to & \widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)/\{\pm I_4\} \\ (\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & bN_1 \\ cN & d \end{smallmatrix}\right), ((\lambda L\ \mu K); \kappa N_1)) & \mapsto & i_1(\gamma)[(\lambda L\ \mu K); \kappa N_1]_t \end{array} \right)$$

où i_1 est défini ci-dessous (voir (1.10)).
Pour tout $\gamma = (\left(\begin{smallmatrix} a & bN_1 \\ cN & d \end{smallmatrix}\right), ((\lambda L\ \mu K); \kappa N_1)) \in \Gamma_0(N, N_1; S) \times \mathcal{H}_t(L, K, N_1)$, on a

$$G((\gamma, ((\lambda L\ \mu K); \kappa N_1))) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & bN_1 & a\mu Kt - b\lambda LN_1 t \\ \lambda L & 1 & \mu K & \kappa N_1 \\ cN & 0 & d + cN & c\mu NKt - d\lambda Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

donc c'est un élément de $\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)/\{\pm I_4\}$.
Cela nous donne $G(I_2, ((0\ 0); 0))) = I_4$ et on vérifie que (calculs)

$$G((\gamma_1, ((\lambda_1 L\ \mu_1 K); \kappa_1 N_1))).G((\gamma_2, ((\lambda_2 L\ \mu_2 K); \kappa_2 N_1))) =$$

$$G((\gamma_1, ((\lambda_1 L\ \mu_1 K); \kappa_1 N_1)))(\gamma_2, ((\lambda_2 L\ \mu_2 K); \kappa_2 N_1))) =$$

$$G((\gamma_1\gamma_2, ((\lambda_1 L\ \mu_1 K).\gamma_2 + (\lambda_2 L\ \mu_2 K)); (\kappa_1 + \kappa_2)N_1 + t \begin{vmatrix} (\lambda_1 L\ \mu_1 K).\gamma_2 \\ \lambda_2 L\ \mu_2 K \end{vmatrix})).$$

Donc G est un morphisme de groupes. Il est clair qu'il est injectif.
Soit $M \in \widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)/\{\pm I_4\}$, on peut supposer, quitte à multiplier par $-I_4$ qui appartient à $\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)$ puisque $-I_2 \in \Gamma_0(N, N_1; S)$, que

$$M = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 & b_1 N_1 & b_2 Kt \\ a_3 L & 1 & b_3 K & b_4 N_1 \\ c_1 N & 0 & d_1 & d_2 Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

en multipliant M à droite par $i_1(\left(\begin{smallmatrix} d_1 & -b_1 N_1 \\ -c_1 N & a_1 \end{smallmatrix}\right))$ on obtient

$$i_1(\left(\begin{smallmatrix} d_1 & -b_1 N_1 \\ -c_1 N & a_1 \end{smallmatrix}\right))M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 b_2 Kt - b_1 d_2 N_1 Lt \\ a_3 L & 1 & b_3 K & b_4 N_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 d_2 Lt - c_1 b_2 KNt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

qui est un élément de $\widetilde{\Gamma}_t$. Les relations de la proposition (1.10) impliquent alors que $b_3 K = d_1 b_2 Kt - b_1 d_2 N_1 Lt$ et $a_3 L = -(a_1 d_2 Lt - c_1 b_2 KNt)$. Finalement, on voit que $M = G((\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 N_1 \\ c_1 N & d_1 \end{smallmatrix}\right), ((a_3 L\ b_3 K); b_4 N_1)))$.

Si $-I_2 \notin \Gamma_0(N, N_1; S)$ alors un élément quelconque de $\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)$ est nécessairement de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 & b_1 N_1 & b_2 Kt \\ a_3 L & 1 & b_3 K & b_4 N_1 \\ c_1 N & 0 & d_1 & d_2 Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En reprenant ce qui précède, on obtient la conclusion désirée. $\square$

1.2.4 Générateurs

On considère i_1 et i_2 les deux morphismes de groupes injectifs suivants

$$i_1 : \left(\begin{array}{ccc} \Gamma_0(N,N_1;S) & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S) \\ M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \widetilde{M} = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{array} \right) \tag{1.10}$$

et

$$i_2 : \left(\begin{array}{ccc} \Gamma_0(N,N_1;S) & \longrightarrow & \widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S) \\ M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & V_t\widetilde{M}V_t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{smallmatrix}\right) \end{array} \right) \tag{1.11}$$

où

$$\widetilde{V}_t = \begin{pmatrix} 0 & t^{1/2} & 0 & 0 \\ t^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{1/2} \\ 0 & 0 & t^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $i_1(\Gamma_0(N,N_1;S)) = G_1(S)$: c'est la première copie de $\Gamma_0(N,N_1;S)$ dans $\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S)$ et $i_2(\Gamma_0(N,N_1;S)) = G_2(S)$: c'est la deuxième copie de $\Gamma_0(N,N_1;S)$ dans $\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S)$.
Lorsque $S = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, on note $G_1(S) = G_1$ et $G_2(S) = G_2$. Le théorème suivant est une généralisation du lemme 2.2 de [G2].

Théorème 1.18 *Soit*

$$\widetilde{\Gamma_t^+}(N,N_1,L,K) = \widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K) \cup \widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)\widetilde{V}_t.$$

Si $N_1|N$ *alors* $\widetilde{\Gamma_t^+}(N,N_1,L,K) = \left\langle \; G_1, \widetilde{H}_t(L,K,N_1), \widetilde{V}_t \; \right\rangle.$

Démonstration. Il suffit de démontrer le théorème pour $M \in \widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)$ puisque $\widetilde{V}_t\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)\widetilde{V}_t = \widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)$.
Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x_1Lt \\ x_2 \\ x_3NLt \\ x_4N \end{smallmatrix}\right)$ la deuxième colonne d'une matrice M appartenant à $\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)$. Le vecteur X est primitif (i.e. ses composantes sont premières entre elles) car $\det M = 1$. On notera $\mathrm{pgcd}(X)$ le plus grand diviseur commun des coordonnées d'un vecteur entier. Tout d'abord, appliquons l'élément $[(\lambda L \ \mu K); \kappa N_1]_t \in \widetilde{H}_t(L,K,N_1)$ à X , on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu Kt \\ \lambda L & 1 & \mu K & \kappa N_1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} x_1Lt + x_4\mu KNt \\ x_2 + \lambda x_1 L^2 t + \mu K x_3 NLt + \kappa x_4 NN_1 \\ x_3NLt - \lambda x_4 NLt \\ x_4N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

La démonstration se fait, alors, en deux étapes.

Première étape : on cherche $(\lambda, \mu, \kappa) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $(y_2, y_4) = 1$. Il suffit de trouver $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(\lambda x_1 L^2 t + \mu x_3 KNLt + x_2, x_4 N) = 1$ puisque $a = bq + r$ implique $(a, b) = (b, r)$. On sait que $L|KN$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $KN = kL$ donc

$$\lambda x_1 L^2 t + \mu x_3 KNLt + x_2 = L^2 t(\lambda x_1 + \mu x_3 k) + x_2.$$

Soit $d_{13} = (x_1, x_3 k)$, l'application

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & L^2 t d_{13} \mathbb{Z} \\ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} & \longmapsto & L^2 t(\lambda x_1 + \mu x_3 k) + x_2 \end{array} \right)$$

étant surjective (théorème de Bézout), il suffit donc de trouver $y \in \mathbb{Z}$ tel que $(L^2 t d_{13} y + x_2, N x_4) = 1$.

Lemme 1.19 *Soit $d = (L^2 t d_{13}, x_2)$ alors $(d, N x_4) = 1$.*

Démonstration. En effet, supposons que $(d, N x_4) = \delta > 1$. Soit p premier tel que $p|\delta$ alors $p|N x_4$ et $p|d$. Comme $p|d$, on a $p|x_2$ et $p|L^2 t d_{13}$. Puisque $p|L^2 t d_{13}$ et p premier, on a $p|L$ ou $p|t$ ou $p|d_{13}$.

Si $p|L$ alors $p|x_1 Lt$ et $p|x_3 NLt$, donc $p|$pgcd(X)$=1$–absurde.

Si $p|t$ on a de même $p|\text{pgcd}(X)$ or $\text{pgcd}(X) = 1$–absurde.

Si $p|d_{13}$ alors $p|x_1$ et $p|k x_3$, donc $p|x_3$ ou $p|k$.

Si $p|x_3$ alors $p|$pgcd(X)$=1$–absurde.

Si $p|k$ alors $p|kL$ or $kL = KN$, donc $p|K$ ou $p|N$.

Si $p|N$ alors $p|x_3 NLt$ et $p|x_1$, donc $p|1$ puisque $p|N x_4$ et $p|x_2$–absurde.

Si $p|K$, puisque $K|LN_1$, alors :

$p|L$ donc $p|x_3 NLt$ donc $p|1$ –absurde

ou

$p|N_1$ donc $p|N$ (car $N_1|N$) donc, $p|1$–absurde.

Donc $\delta = 1$ i.e. $(d, N x_4) = 1$. □

Posons $d x_2' = x_2$ et $d x_1' = L^2 t d_{13}$, on a $(x_1', x_2') = 1$ et $L^2 t d_{13} + x_2 = d(y x_1' + x_2')$. Comme $(d, N x_4) = 1$, il suffit de trouver $y \in \mathbb{Z}$ tel que $(y x_1' + x_2', N x_4) = 1$.

L'entier $x_1' \geqslant 0$ car $d_{13} \geqslant 1$, $d \geqslant 1$ (ce sont des pgcd), $t \geqslant 1$ et $L^2 \geqslant 0$, le théorème de Dirichlet assure alors qu'il existe une infinité d'entiers y tels que $y x_1' + x_2'$ soit premier. On peut donc choisir $y_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|y_0 x_1' + x_2'| > N x_4$ et $y_0 x_1' + x_2'$ premier. On a donc obtenu un entier y_0 tel que $(d(y_0 x_1' + x_2'), N x_4) = 1$, donc tel que $(y_0 L^2 t d_{13} + x_2), N x_4) = 1$. La surjectivité de l'application ci-dessus assure qu'il existe $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\lambda_0 x_1 + \mu_0 \kappa x_3 = y_0 d_{13}$.

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu_0 Kt \\ \lambda_0 L & 1 & \mu_0 K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_0 Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ Nx_4 \end{pmatrix}$ avec $(y_2, Nx_4) = 1$.

Deuxième étape : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 Lt \\ x_2 \\ x_3 NLt \\ x_4 N \end{pmatrix}$ la deuxième colonne d'une matrice M appartenant à $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$ où $(x_2, Nx_4) = 1$. Comme $N_1 | N$, on a $(x_2, x_4 N N_1) = 1$ et le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple d'entiers (a, b) tel que $ax_2 + bN_1 x_4 N = 1$. On a alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & bN_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Nx_4 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \in G_2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & bN_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -Nx_4 & 0 & x_2 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} x_1 Lt \\ 1 \\ x_3 NLt \\ 0 \end{pmatrix} = X_2.$$

Soit $Y(y) = \begin{pmatrix} 1 & Lyt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -Ly & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{V}_t.\widetilde{H}_t(L, K, N_1).\widetilde{V}_t$ où $y \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & Lyt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -Ly & 1 \end{pmatrix} .X_2 = \begin{pmatrix} (x_1+y)Lt \\ 1 \\ x_3 NLt \\ -x_3 yNL^2 t \end{pmatrix} = X_2'.$$

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a - bN_1 x_3 yNL^2 t = 1$ et on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & bN_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_3 yNL^2 t & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_2 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & bN_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_3 yNL^2 t & 0 & 1 \end{pmatrix} .X_2' = \begin{pmatrix} (x_1+y)Lt \\ 1 \\ x_3 NLt \\ 0 \end{pmatrix} = X_3.$$

On choisit ensuite $y \in \mathbb{Z}$ tel que $(x_1 + y, x_3 N_1 N) = 1$, il existe donc $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a(x_1 + y) + bN_1 x_3 N = 1$ et

$$\begin{pmatrix} a & 0 & bN_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 N & 0 & (x_1+y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & bN_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 N & 0 & (x_1+y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .X_3 = \begin{pmatrix} Lt \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X_4.$$

On a finalement

$$Y(-1).X_4 = \begin{pmatrix} 1 & -Lt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L & 1 \end{pmatrix} .X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion

Pour toute matrice $M = (X_1 X_2 X_3 X_4)$ du groupe $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K)$ (X_i désignant les colonnes de cette matrice), on a trouvé un élément M_1 appartenant au groupe $G = \left\langle\ G_1, \widetilde{H}_t(L, K, N_1), \widetilde{V}_t\ \right\rangle$ tel que $M_1 M = \left(Y_1 \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ Y_3 \ \ Y_4 \right)$.

Comme ${}^t(M_1M)J_t(M_1M) = J_t$, la dernière ligne de $M_1M = M_2$ est $\left(\begin{smallmatrix} 0&0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$ (on utilise les relations données par (1.7)). Donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1N_1 & b_2Kt \\ a_3L & 1 & b_3K & b_4N_1 \\ c_1N & 0 & d_1 & d_2Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [(0\ 0); -b_4N_1]_t.M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1N_1 & b_2Kt \\ a_3L & 1 & b_3K & 0 \\ c_1N & 0 & d_1 & d_2Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_3.$$

Comme ${}^t(M_3M)J_t(M_3M) = J_t$, on a

$$\begin{cases} a_1d_1 - b_1N_1c_1N = 1 & (1) \\ a_3L = c_1Nb_2K - a_1d_2L & (2) \\ b_3K = b_2d_1K - b_1N_1d_2L & (3) \end{cases}$$

La relation (1) implique que $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1N_1 \\ c_1N & d_1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N, N_1)$ et

$$i_1(\gamma^{-1}).M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_2'Kt \\ a_3L & 1 & b_3K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2'Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $b_2' = b_2d_1K - b_1N_1d_2L$ et $d_2' = a_1d_2L - c_1Nb_2K$. Les relations (2) et (3) impliquent, donc, que $b_2' = b_3K$ et $d_2' = -a_3L$. Ainsi

$$i_1(\gamma^{-1}).M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & b_3Kt \\ a_3L & 1 & b_3K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3Lt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [(a_3L\ b_3K); 0]_t \in \widetilde{H_t}(L, K, N_1).$$

Finalement

$$M = M_1^{-1}.[(0\ 0); b_4N_1]_t.i_1(\gamma).[(a_3L\ b_3K); 0]_t \in G = \left\langle\ G_1, \widetilde{H_t}(L, K, N_1), \widetilde{V_t}\ \right\rangle.$$

□

En utilisant la proposition (1.17), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.20 *Si $N_1|N$ alors le groupe $\widetilde{\Gamma_t^+}(N, N_1, L, K)$ est engendré par $\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K)$ et V_t.*

Le théorème précédent se généralise à tout sous-groupe S de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ de la manière suivante :

Théorème 1.21 *Soit*

$$\widetilde{\Gamma_t^+}(N, N_1, L, K; S) = \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S) \cup \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)\widetilde{V}_t.$$

Si $N_1|N$ alors $\widetilde{\Gamma_t^+}(N, N_1, L, K; S) = \left\langle\ G_1(S)\ , \widetilde{H_t}(L, K, N_1), \widetilde{V_t}\ \right\rangle$.

Démonstration. Comme pour le théorème 1.18, il suffit de le faire pour $M \in \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$ puisqu'on a encore

$$\widetilde{V_t}\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)\widetilde{V_t} = \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S).$$

On reprend la démonstration du théorème 1.18 avec cette fois $X = \begin{pmatrix} x_1 Lt \\ x_2 \\ x_3 NLt \\ x_4 N \end{pmatrix}$ la deuxième colonne d'une matrice M appartenant à $\widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$. On a donc la condition supplémentaire : $\bar{x_2} \in S$. Via un élément de $\widetilde{H_t}(L, K, N_1)$, on amène cette colonne sur $X_2 = \begin{pmatrix} y_1 Lt \\ y_2 \\ y_3 NLt \\ x_4 N \end{pmatrix}$ avec $(y_2, Nx_4) = 1$.

Comme $\widetilde{H_t}(L, K, N_1) < \widetilde{\Gamma}_t(N, N_1, L, K; S)$, $\bar{y_2} \in S$, on peut donc choisir la matrice permettant d'amener X_2 sur $\begin{pmatrix} y_1 Lt \\ 1 \\ y_3 NLt \\ 0 \end{pmatrix} = X_3$ dans $G_2(S)$.

Soit $X_3' = Y(y).X_3$, on a vu que la matrice permettant d'amener X_3' sur $\begin{pmatrix} (x_1+y)Lt \\ 1 \\ x_3 NLt \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & bN_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_3 yNL^2 t & 0 & 1 \end{pmatrix}$, elle appartient donc à $G_2(S)$.

On choisit ensuite $y \in \mathbb{Z}$ tel que $(x_1 + y, x_3 N_1 N) = 1$ et $\overline{(x_1 + y)} \in S$, c'est possible : on peut même trouver $y \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{(x_1 + y)} = \bar{1}$ puisque cela revient à trouver un entier k tel que $kNN_1 + 1$ soit premier avec $x_3 NN_1$. Le théorème de Dirichlet assure alors qu'il existe une infinité d'entiers k tel que l'entier $kNN_1 + 1$ soit premier. On choisit alors k_0 tel que $|k_0 NN_1 + 1| > x_3 NN_1$ et $k_0 NN_1 + 1$ soit premier . Ainsi $y = -x_1 + k_0 NN_1 + 1$ vérifie les deux conditions demandées. Donc

$$\begin{pmatrix} a & 0 & bN_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 N & 0 & (x_1+y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_1(S) \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & bN_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_3 N & 0 & (x_1+y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 Lt \\ 1 \\ y_3 NLt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Lt \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Puis $Y(-1). \begin{pmatrix} Lt \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On conclut alors comme pour le théorème 1.18 avec cette fois $\gamma \in \Gamma_0(N, N_1; S)$. □

En utilisant à nouveau la proposition (1.17), on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.22 *Si $N_1|N$ alors le groupe $\widetilde{\Gamma_t^+}(N, N_1, L, K; S)$ est engendré par*
$\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N, N_1, L, K; S)$ et V_t.

1.3 Groupe paramodulaire

Dans ce paragraphe, on reprend les résultats du précédent en remarquant que le groupe $\widetilde{\Gamma}_t$ est conjugué à un sous-groupe du groupe symplectique rationnel $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q})$:

$$\Gamma_t = D_t\widetilde{\Gamma}_t D_t^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} * & *t & * & * \\ * & * & * & *t^{-1} \\ * & *t & * & * \\ *t & *t & *t & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q}) \text{ où } * \in \mathbb{Z} \right\},$$

et

$$D_t = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&t \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Définition 1.23 *Le groupe Γ_t est dit groupe paramodulaire.*

On conjugue alors par D_t tous les sous-groupes de $\widetilde{\Gamma}_t$ apparus dans le paragraphe précédent, les conditions sur les entiers t, N, N_1, L et K restant identiques. On obtient alors

$$H_t(L,K,N_1) = D_t\widetilde{H}_t(L,K,N_1)D_t^{-1} = \tag{1.13}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu K \\ \lambda L & 1 & \mu K & \kappa N_1 t^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_t \right\},$$

$$\Gamma_t(N,N_1,L,K) = D_t\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K)D_t^{-1}$$
$$\left\{ M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2Lt & b_1N_1 & b_2K \\ a_3L & a_4 & b_3K & b_4N_1t^{-1} \\ c_1N & c_2NLt & d_1 & d_2L \\ c_3NLt & c_4Nt & d_3Lt & d_4 \end{pmatrix} \in \Gamma_t \right\},$$

$$\Gamma_t(N,N_1,L,K;S) = D_t\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S)D_t^{-1}$$
$$\left\{ M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2Lt & b_1N_1 & b_2K \\ a_3L & a_4 & b_3K & b_4N_1t^{-1} \\ c_1N & c_2NLt & d_1 & d_2L \\ c_3NLt & c_4Nt & d_3Lt & d_4 \end{pmatrix} \in \Gamma_t \text{ et } \bar{a_1},\bar{a_4},\bar{d_1},\bar{d_4} \in S \right\}$$

et

$$\Gamma_{t,\infty}(N,N_1,L,K;S) = D_t\widetilde{\Gamma_{t,\infty}}(N,N_1,L,K;S)D_t^{-1} = \tag{1.14}$$
$$\left\{ M = \pm\begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1N_1 & b_2K \\ a_3L & 1 & b_3K & b_4N_1t^{-1} \\ c_1N & 0 & d_1 & d_2L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma_t \text{ et } \begin{pmatrix} a_1 & b_1N_1 \\ c_1N & d_1 \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N,N_1;S) \right\}$$

Définition 1.24 *On appelle groupe paramodulaire avec niveaux le groupe*

$$\Gamma_t(N,N_1,L,K;S) = D_t\widetilde{\Gamma}_t(N,N_1,L,K;S)D_t^{-1}$$

Des calculs évidents montrent que

$$G_1(S) = D_t G_1(S) D_t^{-1}, \quad G_2(S) = D_t G_2(S) D_t^{-1}$$

et

$$V_t = D_t \widetilde{V}_t D_t^{-1} = \frac{1}{\sqrt{t}} \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{R}). \tag{1.15}$$

On a alors les deux corollaires des théorèmes (1.18) et (1.21) pour les groupes conjugués par D_t (1.12).

Corollaire 1.25 *Si $N_1|N$ alors le groupe*

$$\Gamma_t^+(N, N_1, L, K) = \Gamma_t(N, N_1, L, K) \cup \Gamma_t(N, N_1, L, K) V_t$$

est engendré par G_1, $H_t(L, K, N_1)$ et V_t.

Corollaire 1.26 *Si $N_1|N$ alors le groupe*

$$\Gamma_t^+(N, N_1, L, K; S) = \Gamma_t(N, N_1, L, K; S) \cup \Gamma_t(N, N_1, L, K; S) V_t$$

est engendré par $G_1(S)$, $H_t(L, K, N_1)$ et V_t.

On peut reformuler ces deux corollaires grâce à l'isomorphisme (1.17) :

Corollaire 1.27 *Si $N_1|N$ alors le groupe $\Gamma_t^+(N, N_1, L, K)$ est engendré par $\Gamma_{t,\infty}(N, N_1, L, K)$ et V_t.*

et

Corollaire 1.28 *Si $N_1|N$ alors le groupe $\Gamma_t^+(N, N_1, L, K; S)$ est engendré par $\Gamma_{t,\infty}(N, N_1, L, K; S)$ et V_t.*

Remarque : Lorsque $t = N_1 = L = K = 1$, on retrouve le fait que le groupe de Hecke de niveau N, $\Gamma_0^{(2)}(N)$, est engendré par l'involution V_1, la première copie de $\Gamma_0(N)$ dans $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$ et l'image du groupe $H(\mathbb{Z})$ par le morphisme (1.8).

Chapitre 2

Formes de Siegel et formes de Jacobi

2.1 Définitions et premières propriétés

Dans ce paragraphe, nous fixons les notations pour la suite et donnons les principales définitions et propriétés concernant les formes de Jacobi et les formes de Siegel.

Dans toute la suite, $\mathbb{H}$ désignera le demi-plan supérieur complexe, i.e.

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$$

où $\mathrm{Im}(\tau)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe τ. On sait (voir chapitre I de [Sh]) que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{H}$ par homographie :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ (M=\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right),\tau) & \longmapsto & M\langle\tau\rangle=\frac{a\tau+b}{c\tau+d} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$ se généralise, en dimension plus grande, en *le demi-espace supérieur de Siegel de genre* g, noté $\mathbb{H}_g$. Pour la suite de notre travail, nous n'avons besoin que du cas $g = 2$:

$$\mathbb{H}_2 = \left\{Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ tel que } {}^tZ = Z \text{ et } \mathrm{Im}(Z) > 0\right\}$$

où $\mathrm{Im}(Z) > 0$ signifie que la forme quadratique réelle $\mathrm{Im}(Z)$ est définie positive. Un calcul rapide montre que

$$\mathbb{H}_2 = \left\{Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) \text{ tel que } (\tau,\omega) \in \mathbb{H}^2, z \in \mathbb{C} \text{ et } \mathrm{Im}(z)^2 < \mathrm{Im}(\tau)\mathrm{Im}(\omega)\right\}.$$

Le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ agit également transitivement sur $\mathbb{H}_2$ par

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})\times\mathbb{H}_2 & \longrightarrow & \mathbb{H}_2 \\ (M=\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right),\ Z) & \longmapsto & M\langle Z\rangle=(AZ+B)(CZ+D)^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

en utilisant une écriture matricielle par blocs pour un élément de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$. Pour plus de détails concernant cette action, on renvoie à l'ouvrage de H. Klingen ([Kli]).

Notations

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons les notations suivantes :

$$Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}_2, \quad q = e^{2i\pi\tau}, \quad r = e^{2i\pi z} \quad \text{et} \quad s = e^{2i\pi\omega}.$$

Opérateurs standard

Soit k un entier ou un demi-entier. Pour toute fonction F définie sur $\mathbb{H}_2$ à valeurs complexes, on pose, pour $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$,

$$(F\big|_k M)(Z) = \det(CZ+D)^{-k} F(M\langle Z\rangle). \tag{2.3}$$

En notant $j(M,Z) = \det(CZ+D)$, on vérifie alors que j satisfait la relation de cocycle suivante :

$$j(M_1M_2, Z) = j(M_1, M_2\langle Z\rangle) j(M_2, Z) \quad \text{pour tout} \quad (M_1, M_2) \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})^2,$$

c'est le facteur d'automorphie. Ainsi l'opérateur $\big|_k$ définit une action du groupe $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ sur l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{H}_2$.

Remarque : Lorsque k est demi-entier, on choisit la branche de la racine carrée ayant un argument appartenant à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et $z \mapsto \sqrt{z}$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé de l'axe réel négatif $]-\infty;0]$. On a donc $\sqrt{\det(\frac{Z}{i})} > 0$ pour $Z = iY \in \mathbb{H}_2$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose alors $z^{\frac{k}{2}} = (\sqrt{z})^k$.

Soit k comme précédemment et t un entier naturel ou un demi-entier naturel ($t \in \mathbb{N}/2$). Pour toute fonction φ définie sur $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ à valeurs complexes, on pose, pour $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$,

$$(\phi\big|_{k,t} M)(\tau,z) = (c\tau+d)^{-k} e^{2i\pi t(\frac{-cz^2}{c\tau+d})} \phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}) \tag{2.4}$$

et pour tout $((\lambda\ \mu);\kappa) \in H(\mathbb{R})$ où $H(\mathbb{R})$ désigne le groupe de Heisenberg réel, i.e. l'extension centrale de $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}$,

$$(\phi\big|_t((\lambda\ \mu);\kappa))(\tau,z) = e^{2i\pi t(\lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu+\kappa)} \phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu). \tag{2.5}$$

Si k est demi-entier, on fait le même choix de la branche de la racine carrée que précédemment.

On vérifie alors que les équations (2.4) et (2.5) définissent une action du produit semi-direct $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \ltimes H(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$. On a

Proposition 2.1 *Pour* $(M, M') \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})^2$ *et* $(((\lambda\ \mu);\kappa),((\lambda'\ \mu');\kappa')) \in H(\mathbb{R})^2$, *on a*

$$(\phi\big|_{k,t}M)\big|_{k,t}M' = \phi\big|_{k,t}MM',$$

$$(\phi\big|_t((\lambda\ \mu);\kappa))\big|_t((\lambda'\ \mu');\kappa') = \phi\big|_t((\lambda+\lambda'\ \mu+\mu');\kappa+\kappa'+\lambda\mu'-\lambda'\mu)$$

et

$$(\phi\big|_{k,t}M)\big|_t((\lambda\ \mu)M;\kappa) = (\phi\big|_t((\lambda\ \mu);\kappa))\big|_{k,t}M.$$

Pour plus de détails concernant ces transformations, on renvoie au premier chapitre du livre de M. Eichler et D. Zagier ([EZ]).

2.1.1 Formes modulaires de Siegel

Soit Γ un sous-groupe de congruence de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$, i.e. Γ contient un sous-groupe principal de congruence $\Gamma[l] = \{M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}), M \equiv I_4 \bmod l\}$; dans la suite de notre travail, Γ sera un sous-groupe de Γ_t ou de $\Gamma_t^+ = \Gamma_t \cup \Gamma_t V_t$. Soit k un entier ou un demi-entier et $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ un caractère (ou un système de multiplicateur si k est demi-entier, pour plus de détails sur les systèmes de multiplicateur, on renvoie au chapitre I, §3 du livre de E. Freitag [Fre]) de Γ.

Définition 2.2 *Une forme modulaire de Siegel de poids k avec le caractère (ou le système de multiplicateur) χ pour le groupe Γ est une fonction, F, holomorphe dans $\mathbb{H}_2$ satifaisant l'équation fonctionnelle*

$$(F\big|_k M)(Z) = \chi(M)F(Z) \tag{2.6}$$

pour tout $M \in \Gamma$ et tout $Z \in \mathbb{H}_2$.
On note $M_k(\Gamma,\chi)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de Siegel de ce type.

Remarque
Pour les formes modulaires classiques, on ajoute des conditions d'holomorphie aux différents points paraboliques d'un sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Dans le cas de formes modulaires de Siegel, ces conditions sont automatiques : c'est le principe de Koecher. Le fait qu'une forme modulaire de Siegel satisfasse l'équation fonctionnelle (2.6) a la conséquence notable suivante : pour toute matrice réelle M projectivement rationnelle (i.e. il existe un réel x tel que $xM \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q})$), la fonction F possède un développement de Fourier de la forme

$$(F\big|_k M)(Z) = \sum_{T\in\check{L}, T\geqslant 0} a_M(T)e^{2i\pi \mathrm{Tr}(TZ)}, \tag{2.7}$$

où $\check{L}$ désigne le réseau dual d'un réseau rationnel L et $\mathrm{Tr}(M)$ la trace de la matrice M.

Définition 2.3 *Une forme modulaire de Siegel pour le groupe Γ avec le caractère (ou le système de multiplicateur) χ est dite parabolique si elle appartient à $M_k(\Gamma, \chi)$ et satisfait, pour toute matrice réelle projectivement rationnelle M, la condition suivante :*

$$a_M(T) \neq 0 \Rightarrow T > 0 \tag{2.8}$$

dans le développement (2.7). On note $S_k(\Gamma, \chi)$ le sous-espace de $M_k(\Gamma, \chi)$ constitué des formes paraboliques.

Remarques

(i) Les conditions (2.8) ne sont à vérifier que pour un système de représentants des doubles classes du groupe P des matrices réelles projectivement rationnelles modulo Γ et le sous-groupe parabolique P_∞ de P constitué des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$: $\Gamma\backslash P/P_\infty$. Un tel système de représentants est fini (voir [Fre] lemme 4.5).

(ii) Les formes de Siegel que nous considérerons au chapitre suivant seront modulaires pour le groupe $\Gamma_t^+(N, N_1, L, K; S)$ qui est un sous-groupe de congruence de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$: il contient $\Gamma[NN_1LKt]$.

(iii) On peut réorganiser le développement 2.7 de la manière suivante :

$$(F\big|_k M)(Z) = \sum_{m \in \mathbb{Q}, m \geqslant 0} \varphi_{M,m}(\tau, z) e^{2i\pi m \omega}.$$

Les fonctions apparaissant dans ce développement sont dites *coefficients de Fourier-Jacobi* et un tel développement est dit *développement de Fourier-Jacobi*. On pourra vérifier que les coefficients de Fourier-Jacobi sont, en fait, des formes de Jacobi.

2.1.2 Formes de Jacobi

Pour un sous-groupe Γ d'indice fini de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, on introduit le sous-groupe parabolique maximal de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$ suivant :

$$\Gamma_\infty = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b & * \\ * & * & * & * \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}) \text{ et } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \right\}, \tag{2.9}$$

on considère alors le groupe suivant

$$\Gamma^J = \begin{cases} \Gamma_\infty / \{\pm I_4\} & \text{si} \quad -I_2 \in \Gamma \\ \Gamma_\infty & \text{si} \quad -I_2 \notin \Gamma \end{cases}$$

Définition 2.4 *Le groupe Γ^J est dit groupe de Jacobi.*

Remarque

Le groupe de Jacobi est donc le groupe projectif ($P\Gamma_\infty$) de Γ_∞ i.e. le quotient de Γ_∞ par son centre. L'action standard de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ sur les fonctions définies sur $\mathbb{H}_2$ est définie modulo le centre de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ qui est $\{\pm I_2\}$ ($F\big|_k - M = F\big|_k M$). Cela nous permettra de considérer des anneaux de Hecke pour un sous-groupe de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ plutôt que pour son projectivisé (voir chapitres 3 et 4).

En utilisant l'isomorphisme (1.17), on remarque que $\Gamma^J \simeq \Gamma \ltimes H(\mathbb{Z})$. Soit k un entier ou un demi-entier ($k \in \mathbb{Z}/2$), t un entier naturel ou un demi-entier naturel ($t \in \mathbb{N}/2$) et $v : \Gamma^J \to \mathbb{C}^*$ un caractère (ou un système de multiplicateur) d'ordre fini de Γ^J.

Définition 2.5 *Une fonction ϕ holomorphe dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ à valeurs complexes est dite forme de Jacobi holomorphe pour Γ de poids k et d'indice t avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v si la fonction $\tilde{\phi}(Z) = \phi(\tau, z)e^{2i\pi t\omega}$ de $Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}_2$ est une forme modulaire pour Γ^J de poids k avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v, i.e. $\tilde{\phi}$ satisfait l'équation fonctionnelle*

$$(\tilde{\phi}\big|_k M)(Z) = v(M)\tilde{\phi}(Z) \quad \textit{pour tout} \quad M \in \Gamma^J \quad \textit{et} \quad Z \in \mathbb{H}_2 \tag{2.10}$$

et pour tout $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $\tilde{\phi}\big|_k i_1(M)$ possède un développement de Fourier de la forme suivante

$$\left(\tilde{\phi}\big|_k i_1(M)\right)(Z) = \sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0 \\ 4nt-l^2\geqslant 0}} c_M(n,l)\, q^n r^l s^t. \tag{2.11}$$

On note $J_{k,t}(\Gamma, v)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes de Jacobi de poids k et d'indice t pour le groupe Γ avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v.

Remarques :

(i) La condition (2.11) de cette définition n'est à vérifier que pour un système de représentants de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ modulo Γ donc pour un nombre fini d'éléments puisque Γ est d'indice fini dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Cette conditon signifie que la fonction ϕ est holomorphe au point parabolique déterminé par M. En fait, cette condition n'est à vérifier que pour un système de représentants des points paraboliques de Γ.

(ii) Cette définition est équivalente à celle donnée dans [EZ] (p.9) pour les raisons suivantes :

- soit $M \in \Gamma$ alors $i_1(M) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et pour $Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}_2$, on a

$$i_1(M)\langle\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right)\rangle = \begin{pmatrix} \frac{a\tau+b}{c\tau+d} & \frac{z}{c\tau+d} \\ \frac{z}{c\tau+d} & \omega - \frac{cz^2}{c\tau+d} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

- soit $((\lambda\ \mu);\kappa) \in H(\mathbb{Z})$ alors $h_1(((\lambda\ \mu);\kappa)) = [(\lambda\ \mu);\kappa]$ et

$$[(\lambda\ \mu);\kappa]\langle\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right)\rangle = \begin{pmatrix} \tau & z+\lambda\tau+\mu \\ z+\lambda\tau+\mu & \omega+\lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu+\kappa \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

L'équation (2.10) donne alors, en supprimant le facteur $e^{2i\pi t\omega}$,

$$\phi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d})e^{2i\pi t\frac{-cz^2}{c\tau+d}}(c\tau+d)^{-k} = \\ (\phi\big|_{k,t}M)(\tau,z) = v(i_1(M))\phi(\tau,z) \tag{2.14}$$

et

$$\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu)e^{2i\pi t(\lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu+\kappa)} = \\ (\phi\big|_t((\lambda\ \mu);\kappa))(\tau,z) = v(h_1(((\lambda\ \mu);\kappa)))\phi(\tau,z). \tag{2.15}$$

Le groupe Γ^J est engendré par $i_1(M)$ pour M parcourant Γ et $h_1(((\lambda\ \mu);\kappa))$ pour $((\lambda\ \mu);\kappa)$ parcourant $H(\mathbb{Z})$, on retrouve la définition classique de forme de Jacobi pour un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. En utilisant le plongement i_1 pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, l'équation (2.11) donne la forme des développements de Fourier aux différents points paraboliques de Γ.

(iii) Le caractère (ou le système de multiplicateur) v apparaissant dans la définition (2.5) sera souvent induit par un caractère (ou un système de multiplicateur) χ d'ordre fini de Γ et v_H^ϵ, où $\epsilon \in \{0,1\}$ et

$$v_H(((\lambda\ \mu);\kappa)) = (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu+\kappa} \tag{2.16}$$

est l'unique caractère binaire du groupe de Heisenberg entier $H(\mathbb{Z})$. Nous noterons dans ce cas $v = \chi \times v_H^\epsilon$, ce qui signifie que

$$v|_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} = \chi \quad et \quad v|_{H(\mathbb{Z})} = v_H^\epsilon.$$

On note dans ce cas $J_{k,t}(\Gamma, \chi \times v_H^\epsilon)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes de Jacobi de poids k et d'indice t pour le groupe Γ avec le caractère (ou le système de multiplicateur) $\chi \times v_H^\epsilon$.

Lemme 2.6 *Soit χ un caractère (ou un système de multiplicateur) d'ordre fini de Γ. Alors, pour $M \in \Gamma$ et $h \in H(\mathbb{Z})$,*

$$(\chi \times v_H)((M,h)) = \chi(M).v_H(h) \quad et \quad (\chi \times Id_H)((M,h)) = \chi(M),$$

où Id_H désigne le caractère trivial du groupe de Heisenberg entier $H(\mathbb{Z})$, définissent des caractères (ou des systèmes de multiplicateur) de $\Gamma \ltimes H(\mathbb{Z})$.

Démonstration. On a évidemment $(\chi \times v_H)((I_2,((0\ 0);0))) = 1$. Il suffit donc de vérifier que

$$w(M_1,M_2)(\chi\times v_H)((M_1,h_1))(\chi\times v_H)((M_2,h_2)) = (\chi\times v_H)((M_1,h_1).(M_2,h_2))$$

où $w(M_1,M_2) \in \{\pm 1\}$ est défini par $\chi(M_1M_2) = w(M_1,M_2)\chi(M_1)\chi(M_2)$. Par définition du produit dans $\Gamma \ltimes H(\mathbb{Z})$,

$$(M_1,h_1).(M_2,h_2) =$$

$$(M_1M_2,((\lambda\ \mu);\kappa))$$

où $\lambda = a_2\lambda_1 + c_2\mu_1 + \lambda_2$, $\mu = b_2\lambda_1 + d_2\mu_1 + \mu_2$, $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + (a_2\lambda_1 + c_2\mu_1)\mu_2 - (b_2\lambda_1 + d_2\mu_1)\lambda_2)$, $h_i = ((\lambda_i\ \mu_i);\kappa_i)$ pour $i = 1,2$ et $M_2 = \left(\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Un calcul direct donne :

$$(\chi \times v_H)((M_1,h_1).(M_2,h_2)) =$$

$$\chi(M_1M_2)(-1)^{\lambda_1(a_2+b_2+a_2b_2)+\mu_1(c_2+d_2+c_2d_2)+\lambda_1\mu_1(a_2d_2+b_2c_2)+\kappa_1}.v_H(h_2).$$

Or $M_2 \in \Gamma < \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ donc

$$a_2+b_2+a_2b_2 \equiv 1 \bmod 2, \quad c_2+d_2+c_2d_2 \equiv 1 \bmod 2 \quad \text{et} \quad a_2d_2+b_2c_2 \equiv 1 \bmod 2.$$

Ce qui démontre la première partie du lemme. La deuxième partie est évidente. □

Lemme 2.7 *Si l'espace $J_{k,t}(\Gamma,\chi \times v_H^\epsilon)$ n'est pas réduit à la fonction identiquement nulle alors $2t \equiv \epsilon \bmod 2$.*

Démonstration.
Soit $\phi \in J_{k,t}(\Gamma,\chi\times v_H^\epsilon)$ et $\widetilde{\phi}(Z) = \phi(\tau,z)e^{2i\pi t\omega}$. Pour tout $((\lambda\ \mu);\kappa) \in H(\mathbb{Z})$, on a

$$(\widetilde{\phi}\big|_t[(\lambda\ \mu);\kappa](Z) = (-1)^{\epsilon(\lambda+\mu+\lambda\mu+\kappa)}\widetilde{\phi}(Z)$$

soit

$$(-1)^{2t\epsilon(\lambda+\mu)}e^{2i\pi t(\lambda\mu+\kappa)}\widetilde{\phi}(Z) = (-1)^{\epsilon(\lambda+\mu+\lambda\mu+\kappa)}\widetilde{\phi}(Z) \quad (1)$$

puisque

$$\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{2t(\lambda+\mu)\epsilon} e^{-2i\pi t(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\phi(\tau, z).$$

Supposons que ϕ ne soit pas identiquement nulle, il existe alors $Z_0 \in \mathbb{H}_2$ tel que $\widetilde{\phi}(Z_0) \neq 0$. L'équation (1) implique que

$$(-1)^{2t\epsilon(\lambda+\mu)} e^{2i\pi t(\lambda\mu+\kappa)} = (-1)^{\epsilon(\lambda+\mu+\lambda\mu+\kappa)} \quad (2).$$

Si $\epsilon = 0$ alors l'équation (2) équivaut à $t \in \mathbb{Z}$.
Si $\epsilon = 1$ alors l'équation (2) équivaut

$$(-1)^{2t(\lambda+\mu)} e^{2i\pi t(\lambda\mu+\kappa)} = (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu+\kappa} \quad (2).$$

pour tout $(\lambda, \mu, \kappa) \in \mathbb{Z}^3$ donc, pour $\mu = \kappa = 0$, on a $(-1)^{2t\lambda} = (-1)^{\lambda}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ donc $2t \equiv 1 \bmod 2$. □

Exemples :
L'exemple le plus célèbre de forme de Jacobi de poids et d'indice demi-entiers est la fonction thêta de Jacobi de niveau 2 :

$$\begin{aligned}\vartheta(\tau, z) = -i\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}(\tau, z) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{m}\right) q^{m^2/8}\, r^{m/2} \qquad (2.17)\\ &= -q^{1/8}r^{-1/2}\prod_{n\geqslant 1}(1-q^{n-1}r)(1-q^nr^{-1})(1-q^n)\\ &= q^{1/8}(r^{1/2}-r^{-1/2})\prod_{n\geqslant 1}(1-q^nr)(1-q^nr^{-1})(1-q^n)\end{aligned}$$

où

$$\left(\frac{-4}{m}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \equiv 1 \bmod 4\\ -1 & \text{si } m \equiv -1 \bmod 4\\ 0 & \text{si } m \equiv 0 \bmod 2\end{cases}$$

qui appartient à $J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(SL(2,\mathbb{Z}), v_\eta^3 \times v_H)$, où v_η^3 est le système de multiplicateur du cube de la fonction êta de Dedekind (voir paragraphe 2.2 pour plus de détails sur les séries thêta avec caractéristiques)

Proposition 2.8 *Soit $\phi \in J_{k,t}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \chi \times v_H^\epsilon)$. Pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi(\tau, z) = \phi(N\tau, Naz)$.*
Alors $\varphi \in J_{k,Na^2t}(\Gamma_0(N), \chi^{(N)} \times v^\epsilon_{H,a,N})$ où $\chi^{(N)}(M) = \chi(\alpha_N M \alpha_N^{-1})$ pour tout $M \in \Gamma_0(N)$ et $\alpha_N = \left(\begin{smallmatrix} N & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Le caractère $v^\epsilon_{H,a,N}$ est donné par la formule

$$v^\epsilon_{H,a,N}(((\lambda\ \mu);\kappa)) = v_H^{a\epsilon}(((\lambda\ N\mu); N\kappa))$$

pour tout $((\lambda\ \mu);\kappa) \in H(\mathbb{Z})$.

Démonstration. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ alors

$$(\varphi|_{k,Na^2t}M)(\tau,z) = (c\tau+d)^{-k} e^{2i\pi Na^2t(\frac{-cz^2}{c\tau+d})}\varphi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}).$$

Or

$$\varphi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}) = \phi(\frac{a(N\tau)+bN}{c\tau+d},\frac{Naz}{c\tau+d}) =$$

$$\phi(\frac{a(N\tau)+bN}{\frac{c}{N}(N\tau)+d},\frac{Naz}{\frac{c}{N}(N\tau)+d}) = \phi(M_N\langle N\tau\rangle,\frac{Naz}{\frac{c}{N}(N\tau)+d}) =$$

$$\chi(M_N)(c\tau+d)^k e^{2i\pi Na^2t(\frac{cz^2}{c\tau+d})}\phi(N\tau,Naz)$$

car $M_N = \left(\begin{smallmatrix} a & bN \\ \frac{c}{N} & d \end{smallmatrix}\right) = \alpha_N M \alpha_N^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Donc

$$(\varphi|_{k,Na^2t}M)(\tau,z) = \chi(M_N)\varphi(\tau,z).$$

Soit $((\lambda\ \mu);\kappa) \in H(\mathbb{Z})$ alors

$$(\varphi|_{Na^2t}((\lambda\ \mu);\kappa))(\tau,z) = e^{2i\pi Na^2t(\lambda^2\tau+2\lambda z+\lambda\mu+\kappa)}\varphi(\tau,z+\lambda\tau+\mu).$$

Or

$$\varphi(\tau,z+\lambda\tau+\mu) = \phi(N\tau,Naz+\lambda a(N\tau)+\mu Na) =$$

$$(-1)^{\epsilon(a\lambda+a\mu N+\mu\lambda a^2N+\kappa)}e^{-2i\pi Na^2t(\lambda^2\tau+2\lambda z+a^2N\lambda\mu+\kappa)}\phi(N\tau,Naz).$$

Donc

$$(\varphi|_{Na^2t}((\lambda\ \mu);\kappa))(\tau,z) = (-1)^{\epsilon(a\lambda+aN\mu+a^2N\lambda\mu+a^2N\kappa)}\varphi(\tau,z)$$

car $(-1)^{\epsilon\kappa}e^{2i\pi t\kappa} = (-1)^{\kappa(\epsilon-2t)} = 1$ puisque $2t \equiv \epsilon \bmod 2$ (on suppose implicitement que $\phi \not\equiv 0$, la dernière congruence est due au lemme 2.7). Ainsi la fonction φ holomorphe dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ se transforme comme une forme de Jacobi de poids k et d'indice Na^2t pour $\Gamma_0(N)$ avec le caractère (ou le système de multiplicateur) annoncé dans la proposition. Pour conclure, il reste à vérifier la forme des développements de Fourier de φ aux différents points paraboliques de $\Gamma_0(N)$. Par hypothèse, on a (développement de Fourier de ϕ en l'unique point parabolique de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$)

$$\phi(\tau,z) = \sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0\\ 4nt-l^2\geqslant 0}} c(n,l)\,q^n r^l.$$

Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Si $\gamma = 0$ alors

$$(\varphi|_{k,Na^2t}M)(\tau,z) = \delta^{-k}\varphi(\frac{\alpha\tau+\beta}{\delta},\frac{z}{\delta}) = \delta^{-k}\phi(N(\frac{\alpha\tau+\beta}{\delta}),\frac{Naz}{\delta}) =$$

$$\sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0\\ 4nt-l^2\geqslant 0}} \delta^{-k}c(n,l)e^{2i\pi nN(\frac{\alpha\tau+\beta}{\delta})}e^{2i\pi l\frac{Naz}{\delta}} =$$

$$\sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0\\ 4nt-l^2\geqslant 0}} \delta^{-k}c(n,l)e^{2i\pi nN\frac{\beta}{\delta}}q^{nN\frac{\alpha}{\delta}}r^{lN\frac{a}{\delta}}.$$

On pose alors $n' = nN\frac{\alpha}{\delta}$ et $l' = lN\frac{a}{\delta}$. Les nombres n' et l' sont rationnels, $n' \geqslant 0$ car $\frac{\alpha}{\delta} = \delta^{-2}$ et $4\frac{\delta n'}{N\alpha}t - \frac{\delta^2 l'^2}{N^2a^2} = \frac{\delta^2}{N^2a^2}(4n'Na^2t - l'^2)$ donc

$$(\varphi|_{k,Na^2t}M)(\tau,z) = \sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0\\ 4nNa^2t-l^2\geqslant 0}} \delta^{-k}c(\frac{\delta n}{N\alpha},\frac{\delta l'}{Na})e^{2i\pi nN\frac{\beta}{\delta}}q^n r^l.$$

Si $\gamma \neq 0$ alors $\alpha_N M \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\delta}{\gamma N} \\ 0 & \frac{1}{N}\end{pmatrix} = M_0 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. On en déduit que

$$(\varphi|_{k,Na^2t}M)(\tau,z) = N^{-k}\chi(M_0)\phi(\frac{\tau}{N}+\frac{\delta}{\gamma N},az) =$$

$$\sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0\\ 4nt-l^2\geqslant 0}} N^{-k}\chi(M_0)c(n,l)e^{2i\pi n\frac{\delta}{N\gamma}}q^{\frac{n}{N}}r^{la} =$$

$$\sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0\\ 4nNa^2t-l^2\geqslant 0}} N^{-k}\chi(M_0)c(\frac{n}{N},\frac{l}{a})e^{2i\pi n\frac{\delta}{N\gamma}}q^n r^l.$$

Donc $\varphi \in J_{k,Na^2t}(\Gamma_0(N),\chi^{(N)}\times v_{H,a,N}^{\epsilon})$. □

On peut alors appliquer cette proposition à la forme ϑ (voir 2.17). Définissons la forme φ par $\varphi(\tau,z) = \vartheta(N\tau,Nz)$ pour tout $(\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ alors φ est une forme de Jacobi pour $\Gamma_0(N)$ de poids $\frac{1}{2}$ et d'indice $\frac{N}{2}$ avec le système de multiplicateur χ donné par :

$$\chi(M) = v_\eta^3(\alpha_N M\alpha_N^{-1}) \quad \text{pour tout } M\in\Gamma_0(N)$$

et

$$\chi(((\lambda\ \mu);\kappa)) = (-1)^{\lambda+N\mu+N\lambda\mu+N\kappa} \quad \text{pour tout } ((\lambda\ \mu);\kappa)\in H(\mathbb{Z}).$$

Définition 2.9 *Une forme de Jacobi holomorphe ϕ est dite forme de Jacobi parabolique pour Γ de poids k et d'indice t avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v si $\phi \in J_{k,t}(\Gamma, v)$ et pour tout $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, la sommation dans (2.11) ne porte que sur $n > 0$ et $4nt - l^2 > 0$ i.e. $c_M(n,l) = 0$ si $4nt - l^2 \leqslant 0$ ou $n = 0$.*
On note $J_{k,t}^{par}(\Gamma, v)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes de Jacobi paraboliques pour Γ de poids k et d'indice t avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v.

Exemple :

Soit η la fonction de Dedekind (voir paragraphe 2.2 pour plus de détails sur cette fonction) et

$$\phi(\tau, z) = \eta(\tau)\eta(2\tau)^4\vartheta(\tau, z),$$

on a $\phi \in J^{par}_{3,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2), \chi_2^{(2)} \times v_H)$ où $\chi_2^{(2)}$ est un caractère d'ordre 2 de $\Gamma_0(2)$ qui sera explicité dans le prochain chapitre (voir 3.20).

Définition 2.10 *Une fonction ϕ holomorphe dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ est dite forme de Jacobi faible pour Γ de poids k et d'indice t avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v si $\tilde{\phi}$ satisfait l'équation (2.10) pour tout $M \in \Gamma^J$ et possède des développements de Fourier, pour tout $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, de la forme*

$$\left(\tilde{\phi}\big|_k i_1(M)\right)(Z) = \sum_{n \geqslant 0, (n,l) \in \mathbb{Q}^2} c_M(n,l)\, q^n r^l s^t.$$

On note $J_{k,t}^{f}(\Gamma, v)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes de Jacobi faibles pour Γ de poids k et d'indice t avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v.

On peut facilement généraliser le théorème 2.2 du livre de M. Eichler et D. Zagier (voir [EZ]) à une forme de Jacobi faible pour un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Proposition 2.11 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, χ un caractère (ou un système de multiplicateur) d'ordre fini de Γ et $\phi \in J_{k,t}^{f}(\Gamma, \chi \times Id_H)$. Pour tout $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, on note*

$$(\phi\big|_{k,t} M)(\tau, z) = \sum_{n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}} c_M(\frac{n}{L}, l)\, q^{\frac{n}{L}} r^l = \phi_M(\tau, z)$$

le développement de Fourier de ϕ au point parabolique de Γ déterminé par M.
Alors $c_M(\frac{n}{L}, l)$ ne dépend que de $4\frac{n}{L}t - l^2$ et de l modulo $2t$.
De plus si $4\frac{n}{L}t - l^2 < -t^2$ alors $c_M(\frac{n}{L}, l) = 0$

Démonstration. L'entier L apparaissant dans le développement de Fourier de ϕ peut être précisé. Il s'agit de la largeur du point parabolique de Γ déterminé par M si ce point parabolique est régulier et de deux fois cette quantité si ce point parabolique est irrégulier.
On reprend alors la preuve du théorème 2.2 *ibidem*, soit $X = (\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$. De la proposition 2.1, on déduit :

$$(\phi\big|_{k,t}M)\big|_t X = (\phi\big|_{k,t}M)\big|_t XM^{-1}M = (\phi\big|_t XM^{-1})\big|_{k,t}M = \phi\big|_{k,t}M.$$

Donc

$$\phi_M(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{N},l\in\mathbb{Z}} c_M(\frac{n}{L},l)\, q^{\frac{n}{L}} r^l = e^{2i\pi t(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\phi_M(\tau,z) =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N},l\in\mathbb{Z}} c_M(\frac{n}{L},l)\, q^{\frac{n}{L}+\lambda l+\lambda^2 t} r^{l+2t\lambda} =$$

$$\sum_{n'\in\mathbb{N},l'\in\mathbb{Z}} c_M(\frac{n'}{L} - \lambda^2 t - \lambda(l'-2\lambda t), l'-2\lambda t) q^{\frac{n'}{L}} r^{l'} =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N},l\in\mathbb{Z}} c_M(\frac{n}{L} + \lambda^2 t + \lambda l, l+2\lambda t) q^{\frac{n}{L}} r^l.$$

La dernière égalité est obtenue en changeant λ en $-\lambda$.
L'unicité du développement de Fourier implique

$$c_M(\frac{n}{L},l) = c_M(\frac{n}{L} + \lambda^2 t + \lambda l, l+2\lambda t)$$

or $4(\frac{n}{L} + \lambda^2 t + \lambda l)t - (l+2\lambda t)^2 = 4\frac{n}{L}t - l^2$. Le premier point de la proposition est donc démontré.
Pour le second point, on reprend l'argument de M. Eichler et D. Zagier *ibid.* p.105. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{Z}$ fixés, et $l' \in \mathbb{Z}$ tel que $|l'| \leqslant t$ et $l \equiv \pm l' \bmod 2t$.
Si $-I_2 \in \Gamma$ alors

$$(\phi_M\big|_{k,t} - I_2) = ((\phi\big|_{k,t}M)\big|_{k,t} - I_2) = ((\phi\big|_{k,t} - I_2)\big|_{k,t}M) = \chi(-I_2)\phi_M.$$

Donc $c_M(\frac{n}{L}, -l) = \chi(-I_2)(-1)^k c_M(\frac{n}{L}, l)$ et de ce qui précède, on a

$$|c_M(\frac{n}{L},l)| = |c_M(\frac{n}{L} + \frac{l'^2 - l^2}{4t}, l')|,$$

puisque $4t(\frac{n}{L} + \frac{l'^2-l^2}{4t}) - l'^2 = 4\frac{n}{L}t - l^2$. Par définition d'une forme faible, on a $c_M(\frac{n}{L}, l) = 0$ dès que $n < 0$, donc $c_M(\frac{n}{L}, l) = 0$ dès que $\frac{n}{L} - \frac{l^2}{4t} < -\frac{l'^2}{4t}$, soit dès que $-4\frac{n}{L}t + l^2 > l'^2$. Ce qui démontre le deuxième point dans ce cas, puisque $|l'| \leqslant t$.

Si $-I_2 \notin \Gamma$, on reprend un argument de [AI] p.264, en considérant le groupe $\widetilde{\Gamma}$ engendré par Γ et $-I_2$.
On introduit alors les deux formes suivantes :

$$\varphi = \phi + (\phi\big|_{k,t} - I_2) \quad \text{et} \quad \psi = \phi - (\phi\big|_{k,t} - I_2).$$

Il est alors clair que $\varphi \in J^f_{k,t}(\widetilde{\Gamma}, \chi \times Id_H)$. Comme φ possède le développement de Fourier suivant au point parabolique de $\widetilde{\Gamma}$ déterminé par $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$:

$$\varphi\big|_{k,t}M(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}, l\in\mathbb{Z}} (c_M(\frac{n}{L}, l) + (-1)^k c_M(\frac{n}{L}, -l))\, q^{\frac{n}{L}} r^l,$$

on déduit de ce qui précède que

$$\text{si } 4\frac{n}{L}t - l^2 < -t^2, \text{ alors } c_M(\frac{n}{L}, l) + (-1)^k c_M(\frac{n}{L}, -l) = 0.$$

Notons par ϵ le caractère défini par la projection naturelle de $\widetilde{\Gamma}$ sur $\widetilde{\Gamma}/\Gamma \simeq \{\pm 1\}$, alors $\psi \in J^f_{k,t}(\widetilde{\Gamma}, \chi.\epsilon \times Id_H)$. Le développement de Fourier de ψ au point parabolique de $\widetilde{\Gamma}$ déterminé par $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est donné par :

$$\psi\big|_{k,t}M(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{N}, l\in\mathbb{Z}} (c_M(\frac{n}{L}, l) - (-1)^k c_M(\frac{n}{L}, -l))\, q^{\frac{n}{L}} r^l$$

on déduit de ce qui précède que

$$\text{si } 4\frac{n}{L}t - l^2 < -t^2 \text{ alors } c_M(\frac{n}{L}, l) - (-1)^k c_M(\frac{n}{L}, -l) = 0.$$

La proposition est donc démontrée. □

Nous donnons ci-dessous quelques formes de Jacobi faibles pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Ces formes nous seront utiles pour donner la structure de l'anneau bigradué $J_{*,*}(\Gamma)$.

Exemples

(i) La fonction η de Dedekind ne s'annulant pas dans $\mathbb{H}$, on peut former le quotient suivant

$$\varphi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau,z) = \frac{\vartheta(\tau,z)}{\eta(\tau)^3},$$

qui est holomorphe dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$, et on vérifie que $\varphi_{-1,\frac{1}{2}} \in J^f_{-1,\frac{1}{2}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), v_H)$.
On pose alors pour $(\tau,z) \in \mathbb{H}\times\mathbb{C}$,

$$\varphi_{-1,2}(\tau, z) = \varphi_{-1,\frac{1}{2}}(\tau, 2z). \tag{2.18}$$

On a $\varphi_{-1,2} \in J^f_{-1,2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$. On trouve dans [EZ] une autre expression de cette forme : soit Δ la fonction de Ramanujan i.e.

$$\Delta(\tau) = q\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)^{24} = \sum_{n\geqslant 1}\tau(n)q^n \tag{2.19}$$

et $\varphi_{-1,2} = \frac{\varphi_{11,2}}{\Delta}$ où $\varphi_{11,2}$ est l'unique forme de Jacobi parabolique de poids 11 et d'indice 2 pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$:

$$\varphi_{11,2}(\tau, z) = \frac{1}{288i\pi}\left(\frac{\partial E_{4,1}}{\partial z}(\tau,z)E_{6,1}(\tau,z) - \frac{\partial E_{6,1}}{\partial z}(\tau,z)E_{4,1}(\tau,z)\right) \tag{2.20}$$

et $E_{2k,1}$ désigne la série d'Eisenstein de poids $2k$ et d'indice 1 pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (voir [EZ] chapitre I, §2). On introduit également deux autres formes :

$$\varphi_{-2,1}(\tau, z) = \left(\frac{\vartheta(\tau,z)}{\eta(\tau)^3}\right)^2 = \varphi^2_{-1,\frac{1}{2}}(\tau,z) \tag{2.21}$$

pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H}\times\mathbb{C}$. On a $\varphi_{-2,1} \in J^f_{-2,1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$. Dans [EZ], on trouve une autre construction de $\varphi_{-2,1}$: $\varphi_{-2,1}(\tau,z) = \frac{\varphi_{10,1}(\tau,z)}{\Delta(\tau)}$ où $\varphi_{10,1}$ est l'unique forme de Jacobi parabolique de poids 10 et d'indice 1 pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.
Soit $\wp$ la fonction de Weierstraß i.e. pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H}\times\mathbb{C}$

$$\wp(\tau, z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda'}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \tag{2.22}$$

où $\Lambda = \{n\tau + m; (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\Lambda' = \Lambda\setminus\{0\}$. La fonction $\wp$ se transforme comme une forme de Jacobi de poids 2 et d'indice 0 et possède un pôle d'ordre 2 en tout point de Λ. On forme le produit $\wp\varphi_{-2,1}$ qui apparaît alors comme un élément de $J^f_{0,1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$. On pose alors

$$\varphi_{0,1} = -\frac{3}{\pi^2}\wp\varphi_{-2,1}. \tag{2.23}$$

On trouve une autre construction de cette forme dans [EZ] : $\varphi_{0,1}(\tau,z) = \frac{\varphi_{12,1}(\tau,z)}{\Delta(\tau)}$ où $\varphi_{12,1}$ est l'unique forme de Jacobi parabolique de poids 12 et d'indice 1 pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.
Nous verrons également (voir paragraphe 2.2) qu'il est possible de construire des formes de Jacobi faibles pour des sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ en utilisant des quotients de séries thêta avec caractéristiques.

Définition 2.12 *Une fonction ϕ holomorphe dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ est dite forme de Jacobi presque holomorphe pour Γ de poids k et d'indice t avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v si $\tilde{\phi}$ satisfait l'équation (2.10) pour tout $M \in \Gamma^J$ et qu'il existe un entier naturel n tel que $\Delta^n \phi$ soit une forme de Jacobi faible.*
On note $J^{ph}_{k,t}(\Gamma, v)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes de Jacobi presque holomorphes pour Γ de poids k et d'indice t avec le caractère (ou le système de multiplicateur) v.

Une forme de Jacobi presque holomorphe est donc autorisée à avoir des pôles aux différents points paraboliques de Γ. Une telle forme possède donc des développements de Fourier aux différents points paraboliques de Γ de la forme suivante, pour tout $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$,

$$(\phi\big|_{k,t} M)(\tau, z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}, n \geqslant -n_0 \\ l \in \mathbb{Q}}} c_M(\frac{n}{L}, l)\, q^{\frac{n}{L}} r^l$$

où $n_0 \in \mathbb{N}$.
Pour obtenir des formes de Jacobi presque holomorphes, on peut considérer des quotients de ϑ (voir 2.17) par des puissances suffisamment grandes de η. Par exemple, $\frac{\vartheta}{\eta^{15}} \in J^{ph}_{-7,\frac{1}{2}}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), v_\eta^{12} \times v_H)$.

Remarque :
Dans toutes les notations introduites ci-dessus, lorsque le caractère (ou le système de multiplicateur) v est trivial, on omet de l'écrire.

Dans le paragraphe suivant, nous introduisons la notion de correction automorphe due à V. Gritsenko (voir [G4]).

2.1.3 Correction automorphe

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, k et t deux entiers. On note

$$JT_{k,t}(\Gamma) = \{\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ \text{ holomorphe telle que}$$
$$\varphi|_{k,t} M = \varphi \text{ pour tout } \ M \in \Gamma\}\,.$$

Un élément de $JT_{k,t}(\Gamma)$ est dit *forme de type de Jacobi*. À tout élément $\varphi \in JT_{k,t}(\Gamma)$, on associe la fonction $\hat{\varphi}$ définie pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ par

$$\hat{\varphi}(\tau, z) = e^{-8\pi^2 t G_2(\tau) z^2} \varphi(\tau, z), \tag{2.24}$$

où $G_2(\tau) = -\dfrac{1}{24} + \sum_{n\geqslant 1} \sigma_1(n)q^n = -24E_2(\tau)$ (la fonction E_2 est une forme quasi-modulaire).

Proposition 2.13 *Soit $\varphi \in JT_{k,t}(\Gamma)$ (respectivement $J^{ph}_{k,t}(\Gamma)$) .*
Notons $\hat{\varphi}(\tau, z) = \sum_{\nu\geqslant 0} f_\nu(\tau)z^\nu$ le développement de Taylor de $\hat{\varphi}$ en 0.
Alors pour tout $\nu \geqslant 0$, la fonction f_ν se transforme comme une forme modulaire de poids $k+\nu$ pour Γ (respectivement appartient à $M^{ph}_{k+\nu}(\Gamma)$, l'espace des formes modulaires de poids $k+\nu$ presque holomorphes pour le groupe Γ).

Démonstration.
Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ alors

$$\hat{\varphi}(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}) = e^{-8\pi^2 t G_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d})(\frac{z}{c\tau+d})^2}\varphi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d})$$

or

$$G_2(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = G_2(\tau)(c\tau+d)^2 - \frac{c(c\tau+d)}{4i\pi}$$

et

$$\varphi(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k e^{2i\pi tc\frac{z^2}{c\tau+d}}\varphi(\tau, z).$$

On en déduit que

$$\hat{\varphi}(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^k\hat{\varphi}(\tau, z). \tag{2.25}$$

La dérivée ν-ième de chaque membre de l'équation (2.25) et l'unicité du développement de Taylor assurent alors que pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, on a

$$f_\nu(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau+d)^{k+\nu}f_\nu(\tau).$$

Donc f_ν se tranforme comme une forme modulaire de poids $k+\nu$ pour Γ. Le premier cas est démontré. Remarquons que l'équation (2.25) implique que $\hat{\varphi} \in JT_{k,0}(\Gamma)$ puisque $\hat{\varphi}$ est évidemment holomorphe.
Chaque fonction f_ν est holomorphe dans $\mathbb{H}$ puisque égale à

$$\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu\hat{\varphi}(\tau, z)}{\partial z^\nu}\right)_{|z=0}.$$

Il reste alors à vérifier la forme des développements de Fourier de f_ν aux différents points paraboliques de Γ. Notons $g(\tau, z) = f_\nu(\tau)z^\nu$ pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H}\times\mathbb{C}$. Pour $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, on a

$$(\hat{\varphi}\big|_{k,0}M)(\tau, z) = \sum_{\nu\geqslant 0}(g\big|_{k,0}M)(\tau, z) = \sum_{\nu\geqslant 0}(f_\nu\big|_{k+\nu}M)(\tau)z^\nu$$

car

$$(g\big|_{k,0}M)(\tau,z) = (c\tau+d)^{-k} g\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{-k} f_\nu\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\frac{z^\nu}{(c\tau+d)^\nu}.$$

Donc, par définition du développement de Taylor,

$$(f_\nu\big|_{k+\nu}M)(\tau) = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu(\hat{\varphi}\big|_{k,0}M)(\tau,z)}{\partial z^\nu}\right)_{|z=0},$$

or

$$(\hat{\varphi}\big|_{k,0}M)(\tau,z) = e^{-8\pi^2 t G_2(\tau) z^2}(\varphi\big|_{k,t}M)(\tau,z).$$

Ces formules nous permettent de vérifier la forme des développements de Fourier des fonctions f_ν aux différents points paraboliques de Γ. □

Remarque : Si on suppose dans la proposition 2.13 que $\varphi \in J^f_{k,t}(\Gamma)$ alors les fonctions f_ν sont des formes modulaires de poids $k+\nu$ pour Γ.

2.1.4 Structure de $J^f_{*,*}(\Gamma)$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.14 *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, *alors*

$$J^f_{*,*}(\Gamma) = M(\Gamma)[\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}] \oplus \varphi_{-1,2}M(\Gamma)[\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}].$$

De plus, si $-I_2 \in \Gamma$, alors

$$J^f_{pair,*}(\Gamma) = M(\Gamma)[\varphi_{-2,1},\varphi_{0,1}] \quad et \quad J^f_{impair,*}(\Gamma) = \varphi_{-1,2}J^f_{pair,*}(\Gamma).$$

Les notations utilisées dans ce théorème sont les suivantes :

$$J^f_{*,*}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{N}} J^f_{k,t}(\Gamma), \quad J^f_{pair,*}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{N}} J^f_{2k,t}(\Gamma)$$

$$J^f_{impair,*}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z},t\in\mathbb{N}} J^f_{2k+1,t}(\Gamma) \quad \text{et} \quad M(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_k(\Gamma);$$

où $M_k(\Gamma)$ désigne le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des formes modulaires de poids k pour Γ, c'est pourquoi la somme porte uniquement sur $k \in \mathbb{N}$ puisque si $k < 0$ alors $M_k(\Gamma)$ est vide. Une démonstration de ce théorème est faite dans l'article de H. Aoki et T. Ibukiyama (voir [AI] p.264). Nous préférons donner une autre démonstration de ce théorème en utilisant la correction automorphe introduite ci-dessus. La proposition suivante va justifier qu'il n'y a que des indices positifs dans les décompositions du théorème (2.14).

Soit t un entier ou un demi-entier. On note

$$\widetilde{J}_{k,t} = \{\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ méromorphe telle que}$$

$$\varphi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e^{-2i\pi t(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\varphi(\tau,z) \text{ pour tout } (\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2\Big\}$$

Proposition 2.15 *Soit $\varphi \in \widetilde{J}_{k,t}$ alors à $\tau \in \mathbb{H}$ fixé, le nombre de zéros comptés avec multiplicité (N_z) moins le nombre de pôles comptés avec multiplicité (N_p) de φ dans un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est $2t$.*

Démonstration. Soit F un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ et ∂F son bord, on sait que $N_z - N_p = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial F} \frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz$ où $\varphi_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. On décompose alors le bord de F en quatre segments (voir figure 1), on a donc $N_z - N_p = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\int_{\mathcal{C}_i}\frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz$. L'équation fonctionnelle vérifiée par φ implique que

$$\int_{\mathcal{C}_2}\frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz + \int_{\mathcal{C}_4}\frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz = 0$$

et

$$\int_{\mathcal{C}_1}\frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz + \int_{\mathcal{C}_3}\frac{\varphi_z(\tau,z)}{\varphi(\tau,z)}dz = 4i\pi t.$$

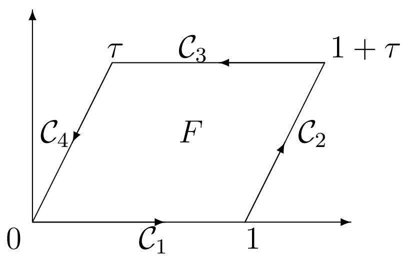


Figure 1.

□

Cette proposition nous permet d'énoncer les corollaires suivants :

Corollaire 2.16 $J^{f}_{k,0}(\Gamma) = M_k(\Gamma)$ *pour tout sous-groupe* Γ *d'indice fini de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Démonstration. La proposition 2.15 permet d'affirmer qu'une fonction holomorphe φ dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ vérifiant l'équation fonctionnelle caractérisant un élément de $\widetilde{J}_{k,t}$ pour $t = 0$ est indépendante de z (c'est un des théorèmes de Liouville : une fonction holomorphe doublement périodique est constante) donc $\varphi(\tau, z) = \varphi(\tau, z_0)$ où $z_0 \in \mathbb{C}$ est fixé. Comme $\varphi \in J^f_{k,0}(\Gamma)$, cette fonction se transforme comme une forme modulaire de poids k pour Γ et possède des développements de Fourier du type requis aux différents points paraboliques de Γ. $\square$

Corollaire 2.17 *La dimension de* $\widetilde{J}_{k,t} \cap \{\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *holomorphe*$\}$ *est nulle pour tout* $t < 0$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \widetilde{J}_{k,t} \cap \{\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe$\}$ la fonction φ est holomorphe et son nombre de zéros comptés avec multiplicité dans un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est $2t$, donc strictement négatif si t est strictement négatif, ce qui est impossible. $\square$

Corollaire 2.18 *La dimension de* $J^f_{k,t}(\Gamma)$ *est nulle pour tout* $t < 0$ *et tout sous-groupe* Γ *d'indice fini de* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

La preuve de ce corollaire est immédiate puisque

$$J^f_{k,t}(\Gamma) \subset \widetilde{J}_{k,t} \cap \{\varphi : \mathbb{H} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ holomorphe}\}.$$

Pour démontrer le théorème (2.14), nous avons besoin de connaître l'ensemble des zéros des formes de Jacobi faibles $\varphi_{-1,2}$ et $\varphi_{-2,1}$. Rappelons que ϑ possède un unique zéro d'ordre 1 dans un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}\tau \oplus \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{Z}(\vartheta) = \left\{(\tau, a\tau + b) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\} \tag{2.26}$$

où $\mathcal{Z}(\varphi) = \{(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C} \text{ tel que } \varphi(\tau, z) = 0\}$.
L'expression de $\varphi_{-1,2}$ (voir 2.18) donne alors :

$$\mathcal{Z}(\varphi_{-1,2}) = \left\{(\tau, \frac{1}{2}(a\tau + b)) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\} \tag{2.27}$$

chaque zéro étant d'ordre 1.
L'expression de $\varphi_{-2,1}$ (voir 2.21), nous donne :

$$\mathcal{Z}(\varphi_{-2,1}) = 2.\left\{(\tau, a\tau + b) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\} = 2.\mathcal{Z}(\vartheta), \tag{2.28}$$

chaque zéro étant d'ordre 2.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème (2.14).

Démonstration.

(i) Nous allons démontrer dans un premier temps le fait suivant : si $-I_2 \in \Gamma$, alors $J^f_{pair,*}(\Gamma) = M(\Gamma)[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}]$.
Soit $\varphi \in J^f_{2k,t}(\Gamma)$, on lui associe $\hat{\varphi}$ (voir 2.24). Comme $-I_2 \in \Gamma$, le développement de Taylor de $\hat{\varphi}$ en $z = 0$ est de la forme :

$$\hat{\varphi}(\tau, z) = \sum_{\nu \geqslant 0} f_{2k+2\nu} z^{2\nu} = f_{2k}(\tau) + f_{2k+2}(\tau) z^2 + \cdots ,$$

où les fonctions $f_{2k+2\nu} \in M_{2k+2\nu}(\Gamma)$. On considère alors la forme suivante :

$$\psi(\tau, z) = \varphi(\tau, z) - f_{2k}(\tau)(\frac{\varphi_{0,1}(\tau, z)}{12})^t.$$

Il est clair que $\psi \in J^f_{2k,t}(\Gamma)$. De plus $\psi(\tau, 0) = 0$ ($\varphi_{0,1}(\tau, 0) = 12$) et ce zéro est d'ordre 2 : $\mathcal{Z}(\psi) \supseteq \mathcal{Z}(\varphi_{-2,1})$. On peut donc diviser ψ par $\varphi_{-2,1}$ dans l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ et $\frac{\psi}{\varphi_{-2,1}} \in J^f_{2k+2,t-1}(\Gamma)$. On mène alors une récurrence sur l'indice t pour finalement obtenir un élément de $J^f_{2k+2t-2,1}(\Gamma)$. Il ne reste plus qu'à donner la structure de $J^f_{0,1}(\Gamma)$.
Soit $\varphi \in J^f_{0,1}(\Gamma)$ alors

$$\hat{\varphi}(\tau, z) = \sum_{\nu \geqslant 0} f_{2\nu}(\tau) z^{2\nu} = \varphi(\tau, 0) + f_2(\tau) z^2 + f_4(\tau) z^4 + \cdots ,$$

où $\varphi(\tau, 0) \in M_0(\Gamma) = \mathbb{C}$ (voir [Ko] proposition 18, chapitre III). La proposition 2.15 implique alors que $\varphi(\tau, 0) = c_0 \in \mathbb{C}$ et $f_2 \in M_2(\Gamma)$ déterminent uniquement la forme φ. En effet, soit φ_1 et φ_2 deux éléments de $J^f_{0,1}(\Gamma)$ tels que

$$\varphi_1(\tau, z) = e^{8\pi^2 G_2(\tau) z^2}(c_0 + f_2(\tau) z^2 + f_4^{(1)}(\tau) z^4 + \cdots)$$

et

$$\varphi_2(\tau, z) = e^{8\pi^2 G_2(\tau) z^2}(c_0 + f_2(\tau) z^2 + f_4^{(2)}(\tau) z^4 + \cdots) ,$$

alors

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(\tau, z) = e^{8\pi^2 G_2(\tau) z^2} z^4((f_4^{(1)} - f_4^{(2)})(\tau) + \cdots).$$

Donc $\varphi_1 - \varphi_2$ possède un zéro d'ordre au moins 4, ce qui implique que cette fonction est identiquement nulle, puisque $(\varphi_1 - \varphi_2) \in J^f_{0,1}(\Gamma)$ et vérifie donc les hypothèses de la proposition 2.15. On en déduit que $J^f_{0,1}(\Gamma)$ est engendré par $\varphi_{0,1}$ et $\varphi_{-2,1} M_2(\Gamma)$: soit $\psi(\tau, z) = \varphi(\tau, z) - \frac{\varphi(\tau,0)}{12} \varphi_{0,1}(\tau, z)$ alors $\psi \in J^f_{0,1}(\Gamma)$ et $\mathcal{Z}(\psi) \supseteq \mathcal{Z}(\varphi_{-2,1})$. On peut donc diviser ψ par $\varphi_{-2,1}$ et $\frac{\psi}{\varphi_{-2,1}}(\tau, 0) = f_2(\tau) \in M_2(\Gamma)$. Donc

$$\varphi(\tau, z) = \frac{\varphi(\tau, 0)}{12} \varphi_{0,1}(\tau, z) + f_2(\tau) \varphi_{-2,1}(\tau, z).$$

On a ainsi donné la structure de $J^f_{0,1}(\Gamma)$ et trouvé sa dimension

$$\dim J^f_{0,1}(\Gamma) = 1 + \dim M_2(\Gamma). \tag{2.29}$$

Le premier point est donc démontré.

(ii) Si $-I_2 \in \Gamma$, alors $J^f_{impair,*}(\Gamma) = \varphi_{-1,2} J^f_{pair,*}(\Gamma)$.
Soit $\varphi \in J^f_{2k+1,t}(\Gamma)$, $t \geqslant 1$ (si $t = 0$ alors $\varphi \in M_{2k+1}(\Gamma)$ et il n'y a rien à prouver). Alors φ est divisible par $\varphi_{-1,2}$ dans l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$. En effet, on a $\varphi(\tau, z) = -\varphi(\tau, -z)$ car $(\varphi|_{2k+1,t} - I_2) = \varphi$ donc $\varphi(\tau, 0) = 0$. Puis en utilisant $\varphi(\tau, z + \lambda\tau + \mu) = e^{-2i\pi t(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\varphi(\tau, z)$ pour $z = -\frac{1}{2}$, $\mu = 1$, $\lambda = 0$, puis $z = -\frac{\tau}{2}$, $\lambda = 1$, $\mu = 0$ et $z = -\frac{\tau+1}{2}$, $\lambda = \mu = 1$, on obtient $\varphi(\tau, \frac{1}{2}) = 0$, $\varphi(\tau, \frac{\tau}{2}) = 0$ et $\varphi(\tau, \frac{\tau+1}{2}) = 0$. Donc $\mathcal{Z}(\varphi) \supseteq \mathcal{Z}(\varphi_{-1,2})$ et $\frac{\varphi}{\varphi_{-1,2}} \in J^f_{2k,t-2}(\Gamma)$, si $t = 1$ alors φ est identiquement nulle (voir le corollaire 2.18) et si $t \geqslant 2$ le deuxième point est démontré.
Le théorème est donc prouvé dans le cas où $-I_2 \in \Gamma$.

(iii) Si $-I_2 \notin \Gamma$, comme dans la démonstration de la proposition 2.11 dont reprend les notations, on introduit le groupe $\widetilde{\Gamma}$ engendré par Γ et $-I_2$. Soit $\varphi \in J^f_{k,t}(\Gamma)$, posons

$$\phi = \varphi + (\varphi|_{k,t} - I_2) \quad \text{et} \quad \psi = \varphi - (\varphi|_{k,t} - I_2).$$

Alors $\phi \in J^f_{k,t}(\widetilde{\Gamma})$ et, en reprenant les points (i) et (ii), on obtient que

$$\phi \in M(\widetilde{\Gamma})[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}] \oplus \varphi_{-1,2} M(\widetilde{\Gamma})[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}].$$

On remarque alors que $M(\widetilde{\Gamma}) = M_{pair}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_{2k}(\Gamma)$ puisque si $f \in M(\widetilde{\Gamma})$ est de poids impair, alors f est identiquement nulle et, si f est de poids pair, comme $(f|_{2k} \pm M) = (f|_{2k} M)$ pour tout $M \in \Gamma$, alors $f \in M_{2k}(\Gamma)$.
La fonction ψ appartient à $J^f_{k,t}(\widetilde{\Gamma}, \epsilon)$. La présence du caractère ϵ ne modifie que légèrement les démonstrations des points (i) et (ii).
Si k est impair alors $\psi(\tau, z) = \psi(\tau, -z)$ et, en reprenant le point (i) (les fonctions $f_{k+\nu}$ étant cette fois des éléments de $M_{k+\nu}(\widetilde{\Gamma}, \epsilon)$), on obtient que $\psi \in M(\widetilde{\Gamma}, \epsilon)[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}]$.
Si k est pair alors $\psi(\tau, z) = -\psi(\tau, -z)$ et, en reprenant le point (ii), on obtient que $\psi \in \varphi_{-1,2} M(\widetilde{\Gamma}, \epsilon)[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}]$ donc

$$\psi \in M(\widetilde{\Gamma}, \epsilon)[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}] \oplus \varphi_{-1,2} M(\widetilde{\Gamma}, \epsilon)[\varphi_{-2,1}, \varphi_{0,1}].$$

Il reste à remarquer que $M(\widetilde{\Gamma}, \epsilon) = M_{impair}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} M_{2k+1}(\Gamma)$ puisque si $f \in M(\widetilde{\Gamma}, \epsilon)$ est de poids pair, alors f est identiquement nulle ($f = (f|_{2k} -$

$I_2) = \epsilon(-I_2)f = -f)$ et si f est de poids impair alors $f \in M_{impair}(\Gamma)$ $(-f = (f\big|_{2k+1} - I_2) = \epsilon(-I_2)f = -f$ et pour tout $M \in \Gamma$, on a $f\big|_{2k+1}M = f)$.
On conclut en remarquant que $\varphi = \frac{\phi+\psi}{2}$. $\square$

2.2 Séries thêta avec caractéristiques

Le but de cette section est la construction de formes de Jacobi à l'aide de séries thêta avec caractéristiques.

2.2.1 Rappels

Dans ce paragraphe, nous définissons les séries thêta avec caractéristiques et rappelons quelques-unes de leurs propriétés bien connues.

Pour $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ et $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$, on définit la série suivante

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi(n+\frac{a}{N})^2\tau+2i\pi(n+\frac{a}{N})(z+\frac{b}{N})}. \tag{2.30}$$

Proposition 2.19 *La série ci-dessus converge uniformément et absolument sur tout compact de $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$.*

On note alors $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$ la somme de cette série qui est dite *série thêta de Jacobi avec caractéristiques* (voir [FK] et [Mu]). La présence de N au dénominateur sera justifiée dans la suite où nous spécialiserons $\binom{a}{b} \in \mathbb{Z}^2$.
La preuve de cette proposition est un fait classique. H.M. Farkas et I. Kra, (voir [FK] p.73) en donnent une preuve en exprimant $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$ en fonction de $\vartheta^{(N)}_{\binom{0}{0}} = \vartheta_{\binom{0}{0}}$.

Pour la suite de notre travail, nous préférons exprimer $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$ en fonction de $\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{1}}$ puisque nous connaissons les formules de transformations abélienne et modulaire de $\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{1}}$ précisément. Pour simplifier les notations, nous notons

$$\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{1}} = \theta. \tag{2.31}$$

Le lemme suivant rappelle ces formules.

Lemme 2.20 *Pour tout* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$*, on a*

$$(\theta|_{\frac{1}{2}}(\lambda \quad \mu)) = (-1)^{\lambda+\mu}\theta(\tau, z)$$

et pour tout $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$*, on a*

$$(\theta|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}M) = v_\eta(M)^3\theta$$

où v_η *désigne le système de multiplicateur de la fonction êta de Dedekind.*

La fonction η de Dedekind

La fonction êta de Dedekind est définie pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ par

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\geqslant 1}(1 - q^n). \tag{2.32}$$

Rappelons quelques formules pour cette fonction :

$$\eta(\tau) = \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{12}{n}\right) q^{\frac{n^2}{24}} = q^{\frac{1}{24}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} \tag{2.33}$$

où

$$\left(\frac{12}{n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv \pm 1 \bmod 12 \\ -1 & \text{si } n \equiv \pm 5 \bmod 12 \\ 0 & \text{si } (n, 12) \neq 1 \end{cases}.$$

La fonction êta de Dedekind est une forme modulaire pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de poids $\frac{1}{2}$ avec un système de multiplicateur, noté v_η, d'ordre 24. On trouve dans l'ouvrage de M. Knopp (voir [K], chapitre 4) les formules explicites pour ce système de multiplicateur que nous rappelons brièvement :
Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ alors

$$v_\eta(M) = \begin{cases} \left(\frac{d}{c}\right)^* e^{\frac{i\pi}{12}((a+d)c - bd(c^2-1) - 3c)} & \text{si c est impair} \\ \left(\frac{c}{d}\right)_* e^{\frac{i\pi}{12}((a+d)c - bd(c^2-1) + 3(d-1-cd))} & \text{si c est pair} \end{cases} \tag{2.34}$$

où les symboles $\left(\frac{c}{d}\right)^*$ et $\left(\frac{c}{d}\right)_*$ sont définis de la manière suivante :
pour $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $c \neq 0$, $(c, d) = 1$ et d est impair, alors

$$\left(\frac{c}{d}\right)^* = \left(\frac{c}{|d|}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{c}{d}\right)_* = \left(\frac{c}{|d|}\right)(-1)^{\frac{\mathrm{sign}(c)-1}{2}\frac{\mathrm{sign}(d)-1}{2}}$$

($\left(\frac{c}{d}\right)$ désigant le symbole de Jacobi et $\mathrm{sign}(c) = \frac{c}{|c|}$ pour $c \neq 0$). On complète ces définitions en posant :

$$\left(\frac{0}{\pm 1}\right)^* = 1 \quad \left(\frac{0}{1}\right)_* = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{0}{-1}\right)_* = -1.$$

Expression de $\vartheta^{(N)}_{(a,b)}$ en fonction de ϑ

Pour déterminer les transformations abélienne et modulaire de $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$, nous allons utiliser les formules connues de ces transformations pour θ. Le lemme suivant exprime le lien entre $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$ et θ.

Lemme 2.21 *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors*

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}(\tau,z) = e^{i\pi}e^{2i\pi(\frac{1}{2}(a')^2\tau+a'z+(b'-\frac{1}{2})a')}\theta(\tau,z+a'\tau+b')$$

où

$$a' = \frac{a}{N}+\frac{1}{2} \quad et \quad b' = \frac{b}{N}+\frac{1}{2}.$$

Démonstration. En manipulant l'expression de $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$ sous forme de série, on a

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}(\tau,z) = e^{2i\pi(\frac{a^2}{2N^2}\tau+\frac{a}{N}z+\frac{ab}{N^2})}\vartheta^{(N)}_{\binom{0}{0}}(\tau,z+\frac{a}{N}\tau+\frac{b}{N})$$

et

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{0}{0}}(\tau,z) = e^{i\pi}e^{i\pi\frac{\tau}{4}}e^{i\pi z}\theta(\tau,z+\frac{\tau}{2}+\frac{1}{2}).$$

La proposition est alors immédiate. □

Ce lemme nous permet de donner l'ensemble des zéros de $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$ puisque

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}(\tau,z) = 0 \Leftrightarrow \theta(\tau,z+a'\tau+b') = 0$$

et comme $\mathcal{Z}(\theta) = \mathcal{Z}(\vartheta)$, la formule (2.26) nous permet d'affirmer :

Proposition 2.22

$$\mathcal{Z}(\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}) = \left\{(\tau,(p-(\frac{a}{N}+\frac{1}{2}))\tau+q-(\frac{b}{N}+\frac{1}{2})),\tau\in\mathbb{H},(p,q)\in\mathbb{Z}^2\right\}.$$

On déduit alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.23 *Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ et tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b) \neq (\frac{N}{2},\frac{N}{2})$*

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}(\tau,0) \neq 0.$$

Rappelons également le fait suivant :

Proposition 2.24 *Supposons que $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 \leqslant a, b \leqslant N-1$. Alors les N^2 séries thêta avec caractéristiques $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$ sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes.*

La preuve de cette proposition se trouve dans l'ouvrage de D. Mumford (voir [Mu] pages 8 à 11).

2.2.2 Formules de transformations

Nous sommes maintenant en mesure de donner les formules générales de transformations de $\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}$.

Proposition 2.25 *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',b') \in \mathbb{Z}^2$ alors*

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a+a'N}{b+b'N}} = e^{2i\pi \frac{ab'}{N}} \vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}} \tag{2.35}$$

La preuve de cette proposition repose sur une simple manipulation de la formule (2.30).

Transformation abélienne

Théorème 2.26 *Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors*

$$(\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2}}(\lambda \quad \mu)) = e^{2i\pi(\frac{a\mu - b\lambda}{N})} \vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}} = v_{(H,\binom{a}{b},N)}((\lambda \quad \mu)) \vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}. \tag{2.36}$$

Démonstration. Pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$, on a

$$(\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2}}(\lambda \quad \mu))(\tau, z) = e^{i\pi(\lambda^2\tau + 2\lambda z)} \vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}(\tau, z + \lambda\tau + \mu).$$

Le lemme 2.21 permet d'écrire

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e^{i\pi} e^{2i\pi(\frac{1}{2}(a')^2\tau + a'(z+\lambda\tau+\mu) + (b'-\frac{1}{2})a')} \theta(\tau, z+a'\tau+b'+\lambda\tau+\mu),$$

on applique alors le lemme 2.20 pour obtenir

$$\theta(\tau, Z+\lambda\tau+\mu) = (-1)^{(\lambda+\mu)} e^{-i\pi(\lambda^2\tau + 2\lambda Z)} \theta(\tau, Z)$$

où $Z = z + a'\tau + b'$. Donc

$$(\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2}}(\lambda \quad \mu))(\tau, z) = e^{2i\pi(a'\mu - b'\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2})} \vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}(\tau, z)$$

et comme $a'\mu - b'\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = (\frac{a}{N} + \frac{1}{2})\mu - (\frac{b}{N} + \frac{1}{2})\lambda + \frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = \frac{a\mu - b\lambda}{N} + \mu$, on en déduit la proposition. □

Remarque
Pour $a = b = 1$ et $N = 2$, on retrouve la première formule du lemme 2.20.

Transformation modulaire

Théorème 2.27 *Soit $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ alors*

$$(\vartheta^{(N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}\big|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} M) = v_\eta(M)^3 e^{i\pi(a'b'-a'+\mu'+\lambda-\lambda\mu-2\lambda\mu')}\vartheta^{(N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\alpha+b\gamma-\alpha\gamma\frac{N}{2}\\ a\beta+b\delta+\beta\delta\frac{N}{2}\end{smallmatrix}\right)} \tag{2.37}$$

où

$$a' = \frac{a}{N} + \frac{1}{2}, \quad b' = \frac{b}{N} + \frac{1}{2}, \quad \lambda = a'\alpha + b'\gamma, \quad \mu = a'\beta + b'\delta$$

et

$$\mu' = -\frac{1}{2}(\beta + \delta - \beta\delta - 1).$$

Démonstration. Pour $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, on a

$$(\vartheta^{(N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}\big|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} M)(\tau,z) = (\gamma\tau+\delta)^{-\frac{1}{2}} e^{i\pi(\frac{-\gamma z^2}{\gamma\tau+\delta})}\vartheta^{(N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \frac{z}{\gamma\tau+\delta}).$$

Le lemme 2.21 permet d'écrire

$$\vartheta^{(N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \frac{z}{\gamma\tau+\delta}) =$$

$$e^{i\pi} e^{2i\pi(\frac{1}{2}(a')^2(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta})+a'(\frac{z}{\gamma\tau+\delta})+(b'-\frac{1}{2})a')}\theta(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \frac{z}{\gamma\tau+\delta} + a'\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} + b').$$

En posant $Z = z + \lambda\tau + \mu$ où $\lambda = a'\alpha + b'\gamma$ et $\mu = a'\beta + b'\delta$; le lemme 2.20 donne

$$\theta(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \frac{Z}{\gamma\tau+\delta}) = v_\eta(M)^3(\gamma\tau+\delta)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi(\frac{\gamma Z^2}{\gamma\tau+\delta})}\theta(\tau, Z) =$$

$$v_\eta(M)^3(\gamma\tau+\delta)^{\frac{1}{2}} e^{i\pi(\frac{\gamma z^2}{\gamma\tau+\delta})} e^{2i\pi(\gamma\frac{z}{\gamma\tau+\delta}(\lambda\tau+\mu))} e^{i\pi(\frac{\gamma}{\gamma\tau+\delta}(\lambda\tau+\mu)^2)}\theta(\tau, z+\lambda\tau+\mu).$$

Donc

$$(\vartheta^{(N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}\big|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} M)(\tau,z) =$$

$$v_\eta(M)^3 e^{i\pi} e^{2i\pi(\frac{1}{2}(a')^2(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta})+a'(\frac{z}{\gamma\tau+\delta})+(b'-\frac{1}{2})a')}$$

$$e^{2i\pi(\gamma\frac{z}{\gamma\tau+\delta}(\lambda\tau+\mu))} e^{i\pi(\frac{\gamma}{\gamma\tau+\delta}(\lambda\tau+\mu)^2)}\theta(\tau, z+\lambda\tau+\mu) \quad (1).$$

D'autre part, en posant $a_1 = a\alpha + b\gamma - \alpha\gamma\frac{N}{2}$ et $b_1 = a\beta + b\delta + \beta\delta\frac{N}{2}$, on a

$$a_1' = \frac{a_1}{N} + \frac{1}{2} = \lambda + \lambda' \quad \text{et} \quad b_1' = \frac{b_1}{N} + \frac{1}{2} = \mu + \mu',$$

où $\lambda' = -\frac{1}{2}(\alpha+\gamma+\alpha\gamma-1) \in \mathbb{Z}$ et $\mu' = -\frac{1}{2}(\beta+\delta-\beta\delta-1) \in \mathbb{Z}$. Le fait que λ' et μ' sont entiers est dû à l'appartenance de M à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ (voir la démonstration du lemme 2.6).
En utilisant le lemme 2.21, on a

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a_1}{b_1}}(\tau,z) =$$

$$e^{i\pi}e^{2i\pi(\frac{1}{2}(a_1')^2\tau+a_1'z+(b_1'-\frac{1}{2})a_1')}\theta(\tau,z+a_1'\tau+b_1') =$$

$$e^{i\pi}e^{2i\pi(\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')^2\tau+(\lambda+\lambda')z+(\mu+\mu'-\frac{1}{2})(\lambda+\lambda'))}\theta(\tau,(z+\lambda\tau+\mu)+\lambda'\tau+\mu').$$

Comme λ' et μ' sont entiers, on peut appliquer le lemme 2.20 i.e.

$$\theta(\tau,(z+\lambda\tau+\mu)+\lambda'\tau+\mu') = (-1)^{(\lambda'+\mu')}e^{-i\pi(\lambda'^2\tau+2\lambda'(z+\lambda\tau+\mu))}\theta(\tau,z+\lambda\tau+\mu),$$

d'où

$$\vartheta^{(N)}_{\begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma-\alpha\gamma\frac{N}{2} \\ a\beta+b\delta+\beta\delta\frac{N}{2}\end{pmatrix}}(\tau,z) =$$

$$e^{i\pi}(-1)^{(\lambda'+\mu')}e^{2i\pi((\mu+\mu'-\frac{1}{2})(\lambda+\lambda')-\lambda'\mu)}e^{i\pi(\lambda^2\tau+2\lambda z)}\theta(\tau,z+\lambda\tau+\mu) \quad (2).$$

En comparant les équations (1) et (2), on obtient

$$(\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}\big|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}M)(\tau,z) =$$

$$v_\eta(M)^3e^{2i\pi((b'-\frac{1}{2})a')}e^{-2i\pi((\mu+\mu'-\frac{1}{2})(\lambda+\lambda')-\lambda'\mu)}e^{i\pi C}\vartheta^{(N)}_{\begin{pmatrix} a\alpha+b\gamma-\alpha\gamma\frac{N}{2} \\ a\beta+b\delta+\beta\delta\frac{N}{2}\end{pmatrix}}(\tau,z),$$

où

$$C = (a')^2\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta} + \frac{2a'z}{\gamma\tau+\delta} + \frac{2\gamma z}{\gamma\tau+\delta}(\lambda\tau+\mu) + \frac{\gamma}{\gamma\tau+\delta}(\lambda\tau+\mu)^2 - \lambda^2\tau - 2\lambda z.$$

On calcule alors C et on obtient

$$C = \frac{1}{\gamma\tau+\delta}((a'^2\alpha+2\lambda\mu\gamma-\lambda^2\delta)\tau+a'^2\beta+\gamma\mu^2),$$

on remarque alors que

$$a'^2\alpha+2\lambda\mu\gamma-\lambda^2\delta = \gamma(\lambda\mu-a'b') \quad \text{et} \quad a'^2\beta+\gamma\mu^2 = \delta(\lambda\mu-a'b'),$$

donc

$$C = \lambda\mu - a'b'.$$

Soit finalement

$$(\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}M)(\tau,z)=\chi_{(\binom{a}{b},N)}(M)\vartheta^{(N)}_{\binom{a\alpha+b\gamma-\alpha\gamma\frac{N}{2}}{a\beta+b\delta+\beta\delta\frac{N}{2}}}(\tau,z),$$

où

$$\chi_{(\binom{a}{b},N)}(M)=v_\eta(M)^3e^{i\pi(a'b'-a'+\mu'+\lambda-\lambda\mu-2\lambda\mu')} \tag{2.38}$$

comme annoncé dans le théorème. □

Remarque

Pour $a=b=1$ et $N=2$, on retrouve la deuxième formule du lemme 2.20. En effet, $\vartheta^{(2)}_{\binom{\alpha+\gamma-\alpha\gamma}{\beta+\delta+\beta\delta}}=\vartheta^{(2)}_{\binom{1+2a_1}{1+2b_1}}$, où $a_1=\frac{\alpha+\gamma-\alpha\gamma-1}{2}\in\mathbb{Z}$ et $b_1=\frac{\beta+\delta+\beta\delta-1}{2}\in\mathbb{Z}$ donc $\vartheta^{(2)}_{\binom{1+2a_1}{1+2b_1}}=e^{i\pi b_1}\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{1}}$. On vérifie alors que

$$\chi_{(\binom{1}{1},2)}(M)e^{i\pi b_1}=v_\eta(M)^3.$$

Le théorème (2.27) permet d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 2.28 *Pour tout $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, la série thêta de caractéristiques (a,b) et de niveau $2N$ est une forme de Jacobi holomorphe pour le sous-groupe principal de congruence de niveau $2N$, $\Gamma(2N)$, de poids et d'indice $\frac{1}{2}$ avec un système de multiplicateur.*

Démonstration. Les formules (2.36) et (2.37) donnent pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ et $M=\begin{pmatrix}1+2N\alpha & 2N\beta\\ 2N\gamma & 1+2N\delta\end{pmatrix}\in\Gamma(2N)$:

$$\vartheta^{(N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2}}(\lambda\ \ \mu)=e^{2i\pi(\frac{a\mu-b\lambda}{2N})}\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}=v_{(H,\binom{a}{b},2N)}((\lambda\ \ \mu))\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$$

et

$$\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}M=\chi_{(\binom{a}{b},2N))}(M)\vartheta^{(2N)}_{\binom{a+2N(a\alpha+b\gamma-(1+2N\alpha))\gamma N)}{b+2N(a\beta+b\delta+\beta(1+2N)\delta N)}}.$$

Or la formule(2.25) implique

$$\vartheta^{(2N)}_{\binom{a+2N(a\alpha+b\gamma-(1+2N\alpha)\gamma N)}{b+2N(a\beta+b\delta+\beta(1+2N)\delta N}}=e^{i\pi\frac{a(a\beta+b\delta+\beta(1+2N)\delta N)}{N}}\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}},$$

donc

$$\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}M=\chi_{(\binom{a}{b},2N)}(M)e^{i\pi\frac{a(a\beta+b\delta+\beta(1+2N)\delta N)}{N}}\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}=\widetilde{\chi}_{(\binom{a}{b},2N)}(M)\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}.$$

Pour achever la preuve, il reste à vérifier la forme des développements de Fourier de $\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$ aux différents points paraboliques de $\Gamma(2N)$. En utilisant la formule (2.17), on obtient le développement de Fourier de $\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$ en ∞ :

$$\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}(\tau,z) = e^{\frac{3i\pi}{2}} e^{2i\pi(b'-\frac{1}{2})a'} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{m}\right) e^{2i\pi b'\frac{m}{2}}\, q^{\frac{1}{2}(\frac{m}{2}+a')^2}\, r^{(\frac{m}{2}+a')} \tag{2.39}$$

où $a' = \frac{a}{2N} + \frac{1}{2}$ et $b' = \frac{b}{2N} + \frac{1}{2}$. Ce développement a donc la forme requise : l'exposant de q est un nombre rationnel positif et la condition $4nt - l^2 \geqslant 0$ est vérifiée, puisque $4\frac{1}{2}(\frac{m}{2}+a')^2 - (\frac{m}{2}+a')^2 = 0$. Pour les autres points paraboliques c'est alors immédiat puisque si un tel point est représenté par une matrice $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, la formule (2.37) donne :

$$(\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}|_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}M)(\tau,z) = \lambda\vartheta^{(2N)}_{\binom{a\alpha+b\gamma-\alpha\gamma N}{a\beta+b\delta+\beta\delta N}}(\tau,z) = \lambda\vartheta^{(2N)}_{\binom{a_1}{b_1}}(\tau,z) =$$

$$\lambda e^{\frac{3i\pi}{2}} e^{2i\pi(b_1'-\frac{1}{2})a_1'} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(\frac{-4}{m}\right) e^{2i\pi b_1'\frac{m}{2}}\, q^{\frac{1}{2}(\frac{m}{2}+a_1')^2}\, r^{(\frac{m}{2}+a_1')}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. □

On obtient également, comme corollaire évident du théorème (2.27), les valeurs de $\chi_{(\binom{a}{b},N)}(M)$ pour quelques éléments particuliers de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.

Corollaire 2.29

$$\chi_{(\binom{a}{b},N)}(-I_2) = -i, \quad \chi_{(\binom{a}{b},N)}(T) = e^{\frac{i\pi}{4}} e^{-i\pi a'^2}$$

et

$$\chi_{(\binom{a}{b},N)}(S) = e^{\frac{i\pi}{4}} e^{i\pi(2a'b'-a'-b')},$$

où

$$a' = \frac{a}{N} + \frac{1}{2} \quad et \quad b' = \frac{b}{N} + \frac{1}{2}.$$

On retrouve ainsi les valeurs données dans [FK] p.84 i.e. $\chi_{(\binom{0}{0},N)}(T) = 1$ et $\chi_{(\binom{0}{0},N)}(S) = e^{-\frac{i\pi}{4}}$. La proposition suivante résume les propriétés de $\chi_{(\binom{a}{b},N)}$ dont nous aurons besoin par la suite. Il s'agit d'un analogue de la proposition 1.12 du chapitre 2 de l'ouvrage de M. Farkas et I. Kra (voir [FK]).

Proposition 2.30 *Pour tout $M \in \Gamma(N)$ et tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on a*

$$\chi_{(\binom{a}{b},N)}(M)^{8N} = 1.$$

Si N est pair ainsi que a et b alors pour tout $M \in \Gamma(N)$, on a

$$\chi_{(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right),N)}(M)^{4N} = 1.$$

Si $N = 2$ alors, pour $0 \leqslant a, b \leqslant 1$ et tout $M \in \Gamma(2)$, on a

$$\chi_{(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right),2)}(M)^{4} = 1.$$

Si $4|N$, a et b sont pairs alors, pour tout $M \in \Gamma(N)$, on a

$$\chi_{(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right),2)}(M)^{2N} = 1.$$

Si $N = 2$ alors, pour $0 \leqslant a, b \leqslant 1$ et tout $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, on a

$$\chi_{(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right),2)}(M)^{8} = 1.$$

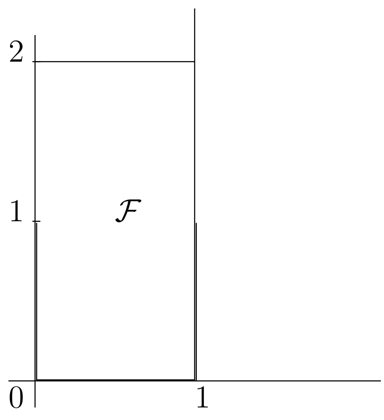
2.2.3 Caractéristiques

Classes d'équivalence de caractéristiques

Définition 2.31 *Deux caractéristiques $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ et $w = \left(\begin{smallmatrix} t \\ u \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ sont dites équivalentes, on note $v \sim w$, si $v+w$ ou $v-w$ est à coordonnées entières paires. On note $[v] = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ la classe de v.*

Il est alors clair que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$, on note $\mathbb{R}^2/\sim$ l'espace quotient. Cet espace quotient s'identifie à $\mathbb{R}^2/G$ où G est le groupe de transformations de $\mathbb{R}^2$ engendré par $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} -x \\ -y \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x+2 \\ y \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x \\ y+2 \end{smallmatrix}\right)$. Un domaine fondamental pour l'action de G sur $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{F} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, 0 < y < 2\right\} \cup \left\{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2, 0 \leqslant y \leqslant 1\right\} \cup$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2, 0 < x \leqslant 1\right\} \cup \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2, 0 < y \leqslant 1\right\}$$



Théorème 2.32 *L'application*

$$\left(\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2/\sim) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{R}^2/\sim \\ ([\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}], M) & \mapsto & [(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) * M = {}^tM (\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}) + t(M)] \end{array} \right),$$

où $t(M) = \left(\begin{smallmatrix} -\alpha\gamma \\ \beta\delta \end{smallmatrix}\right)$ *pour* $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$, *définit une action du groupe* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *sur l'espace quotient* $\mathbb{R}^2/\sim$.

La preuve de ce théorème se trouve dans [FK] pp. 91-93.

Classes de caractéristiques entières

Proposition 2.33 *On a*

$$\mathbb{Z}^2/\sim = \left\{ [\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}] \right\}.$$

La preuve de cette proposition est élémentaire.
On remarque que $[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}]$ est fixée par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ puisque

$$\left[(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}) * (\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}) = (\begin{smallmatrix} \alpha+\gamma-\alpha\gamma \\ \beta+\delta+\beta\delta \end{smallmatrix}) \right] = [(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix})]$$

car pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $\alpha + \gamma - \alpha\gamma$ et $\beta + \delta + \beta\delta$ sont impairs. Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ fixe donc la classe $[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}]$ et permute les trois autres classes entières entre elles.

Classes de caractéristiques rationnelles

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $Z(N)$ l'ensemble des classes de caractéristiques dont les représentants sont de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{smallmatrix}\right)$ où a et b sont des entiers relatifs. En se plaçant sur $\mathcal{F}$, on a

$$Z(1) = \mathbb{Z}^2/\sim = \left\{ [\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}] \right\}.$$

et pour $N > 1$,

$$Z(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{b}{N} \end{smallmatrix} \right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ \frac{b}{N} \end{smallmatrix} \right], 0 \leqslant b \leqslant N ; \left[\begin{smallmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{smallmatrix} \right], 1 \leqslant a \leqslant N-1, 0 \leqslant b \leqslant 2N-1 \right\}.$$

On en déduit aisément que

$$|Z(N)| = 2(N^2+1).$$

Par exemple pour $N = 6$, les éléments de $Z(6)$ sont représentés par des croix ($\times$) sur la figure 2.2.3.

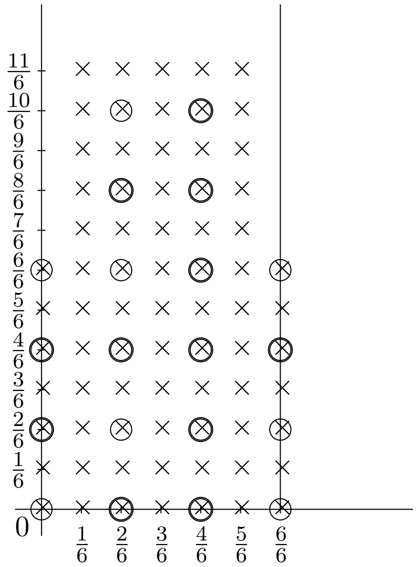


Figure 2.2.3

Définition 2.34 *La caractéristique $\left(\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right)$ est dite impaire si a et b sont impairs et elle est dite paire si a et b sont pairs.*

On vérifie alors que cette définition ne dépend que de la classe de la caractéristique, on définit alors la parité d'une classe comme étant celle de l'un de ses réprésentants. On introduit alors le sous-ensemble suivant de $Z(N)$:

$$X(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right] \in Z(N) \text{ telle que la parité de } \left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right] \text{ est la même que celle de } N \right\}.$$

En se plaçant sur $\mathcal{F}$, on voit que

$$X(1) = \{[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}]\} \quad \text{et} \quad X(2) = Z(1),$$

(de manière générale $X(2N) = Z(N)$) et

$$X(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}0\\ \frac{2b}{N}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\ \frac{2b}{N}\end{smallmatrix}\right], 0 \leqslant b \leqslant \frac{N}{2}; \left[\begin{smallmatrix}\frac{2a}{N}\\ \frac{2b}{N}\end{smallmatrix}\right], 1 \leqslant a \leqslant \frac{N}{2} - 1, 0 \leqslant b \leqslant N-1 \right\},$$

pour N pair et

$$X(N) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix}1\\ \frac{2b+1}{N}\end{smallmatrix}\right], 0 \leqslant b \leqslant \frac{N-1}{2}; \left[\begin{smallmatrix}\frac{2a+1}{N}\\ \frac{2b+1}{N}\end{smallmatrix}\right], 1 \leqslant a \leqslant \frac{N-3}{2}, 0 \leqslant b \leqslant N-1 \right\},$$

pour $N > 1$ impair. On en déduit alors que

$$|X(N)| = \begin{cases} \frac{N^2+1}{2} & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{N^2}{2} + 2 & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}.$$

Pour $N = 6$, les éléments de $X(6)$ sont représentés sur la figure 2.2.3 par des croix entourées.

Définition 2.35 *On appelle tour au dessus de $\frac{a}{N}$, notée $T_{\frac{a}{N}}$, l'ensemble des points de $Z(N)$ dont la première coordonnée est $\frac{a}{N}$.*

En se plaçant sur $\mathcal{F}$, on a

$$T_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b}{N} \end{bmatrix}, 0 \leqslant b \leqslant N \right\} \quad \text{si } a = 0,$$

$$T_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b}{N} \end{bmatrix}, 0 \leqslant b \leqslant N \right\} \quad \text{si } a = N$$

et

$$T_{\frac{a}{N}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{bmatrix}, 0 \leqslant b \leqslant 2N-1 \right\} \quad \text{si } 0 < a < N.$$

Comme $\left[\begin{pmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{pmatrix} * \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{a+b+N}{N} \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b'}{N} \end{pmatrix} \right]$, on a :

Proposition 2.36 *Chaque tour est invariante par $\Gamma_\infty = \langle T \rangle$.*

On peut alors énoncer la proposition suivante (voir [FK] p.91 proposition 2.2.)

Proposition 2.37 *(i) Le groupe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ permute les éléments de $Z(N)$ ainsi que ceux de $X(N)$.*
(ii) Le groupe $\Gamma(N)$ fixe chaque élément de $X(N)$.

Cette proposition nous permet de faire les remarques suivantes :

(i) comme $X(2N) = Z(N)$, on en déduit que le groupe $\Gamma(2N)$ fixe chaque élément de $Z(N)$,

(ii) le groupe quotient $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})/\Gamma(N)$ agissant sur $X(N)$, on a le morphisme de groupes suivant :

$$\rho : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Gamma(N) & \to & \mathrm{Bij}(X(N)) \\ M & \mapsto & \rho_M : \left(\begin{array}{ccc} X(N) & \to & X(N) \\ \begin{bmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{bmatrix} & \mapsto & \left[\begin{pmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{pmatrix} * M \right] \end{array} \right) \end{array} \right)$$

où $\mathrm{Bij}(X(N))$ désigne l'ensemble des permutations de $X(N)$. Le deuxième point de la proposition 2.1 indique que $\mathrm{Ker}\rho \subseteq \Gamma(N)$. En fait, on a $\mathrm{Ker}\rho = \overline{\Gamma(N)} = \{M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \text{ tel que } M \equiv \pm I_2 \bmod N\}$ car l'action de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ sur les classes de caractéristiques se factorise à travers le centre de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Définition 2.38 *Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$X_0(N) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{bmatrix} \in X(N) \textit{ telle que } \begin{bmatrix} \frac{a}{N} \\ \frac{b}{N} \end{bmatrix} \notin X(N') \textit{ pour tout } 0 < N' < N, N' | N \right\}.$$

Pour $N = 6$, les éléments de $X_0(6)$ sont représentés sur la figure 2.2.3 par des croix entourées gras. On a la description suivante de $X_0(N)$:

Proposition 2.39 *Soit* $\left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right] \in X(N)$ *et* $d = (a, b, N)$ *alors*

si $N \equiv 1 \bmod 2$, $\left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right] \in X_0(N)$ *si et seulement si* $d = 1$,

si $N \equiv 2 \bmod 4$, $\left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right] \in X_0(N)$ *si et seulement si* $d = 2$ *et* $\frac{a}{2}$ *ou* $\frac{b}{2}$ *est pair et*

si $N \equiv 0 \bmod 4$, $\left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right] \in X_0(N)$ *si et seulement si* $d = 2$.

La démonstration de cette proposition se trouve dans [FK] à la page 100. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2.40 *Si N est premier alors* $X_0(N) = X(N) - \{\left[\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}\right]\}$.

On a la partition suivante de $X(N)$:

$$X(N) = \bigsqcup_{\substack{N'>0\\ N'|N}} X_0(N')$$

donc $|X(N)| = \sum_{\substack{N'>0\\ N'|N}} |X_0(N')|$ et on sait que le cardinal de $X_0(N)$ est le nombre de points paraboliques de $\Gamma(N)$ i.e.

$$|X_0(N)| = \begin{cases} \frac{N^2}{2}\prod_{p|N}(1-p^{-2}) & \text{si } N > 2 \\ 3 & \text{si } N = 2 \\ 1 & \text{si } N = 1 \end{cases}.$$

Proposition 2.41 *Le groupe* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ *agit transitivement sur* $X_0(N)$.
Pour $0 \leqslant a \leqslant N$, *le groupe* $\Gamma_1(N)$ *laisse globalement stable* $T_{\frac{a}{N}} \cap X(N)$.
Le groupe $\Gamma_0(N)$ *agit transitivement sur* $T_1 \cap X_0(N)$.
Si N est pair, le groupe $\Gamma_0(N)$ *agit transitivement sur* $T_0 \cap X_0(N)$.
Soit a et a' deux entiers de même parité que N alors

si N est impair le groupe $\Gamma_0(N)$ *envoie* $T_{\frac{a}{N}} \cap X_0(N)$ *sur* $T_{\frac{a'}{N}} \cap X_0(N)$ *si et seulement si* $(a, N) = (a', N) \neq N$ *et*

si N est pair le groupe $\Gamma_0(N)$ *envoie* $T_{\frac{a}{N}} \cap X_0(N)$ *sur* $T_{\frac{a'}{N}} \cap X_0(N)$ *si et seulement si* $(a, N) = (a', N) \neq N$ *et les deux entiers* $\frac{a}{2}$ *et* $\frac{a'}{2}$ *sont de même parité.*

On note $X(\Gamma_0(N))$ l'ensemble des classes de caractéristiques fixées ponctuellement par le groupe $\Gamma_0(N)$. On a la classification suivante :

N modulo 12	$X(\Gamma_0(N))$
1,5,7,11	$\{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\}$
2,10	$\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\}=X(\Gamma_0(2))$
3,9	$\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}=X(\Gamma_0(3))$
4,8	$\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}=X(\Gamma_0(4))$
6	$\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}=X(\Gamma_0(6))$
0	$\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{1}{3}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{2}{3}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}=X(\Gamma_0(12))$

2.2.4 Construction de formes de Jacobi holomorphes

Nous allons appliquer les résultats des paragraphes précédents à la construction de formes de Jacobi holomorphes pour des sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Pour réaliser ces constructions, nous n'utilisons que des caractéristiques rationnelles. Donc désormais lorsqu'on utilisera le terme *caractéristiques*, il s'agira toujours de caractéristiques rationnelles.

Lien entre les classes de caractéristiques et les séries thêta avec caractéristiques

La formule de transformation modulaire des séries thêta avec caractéristiques (voir 2.37) et l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur les classes de caractéristiques i.e. sur $Z(N)$ (voir proposition 2.37) permettent de définir une action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par les séries thêta $\vartheta^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}$ où a et b sont des entiers naturels compris entre 0 et $2N$, on note

$$\Theta^{(2N)} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left\{\vartheta^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}, 0 \leqslant a, b \leqslant 2N\right\},$$

c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $4N^2$ (voir proposition (2.24)).
À chaque élément $\left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\\frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right]$ de $Z(N)$, nous associons le sous-espace vectoriel de $\Theta^{(2N)}$ engendré par $\vartheta^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)}$ et $\vartheta^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}2N-a\\2N-b\end{smallmatrix}\right)}$ que l'on note $\Theta^{(2N)}_{a,b}$. Compte tenu de la proposition (2.25), cette correspondance est bien définie (i.e. ne dépend pas du représentant choisi). Lorsque $(a,b)=(0,0),(N,0),(0,N)$ ou (N,N) (i.e. classe de caractéristiques entières) la dimension de $\Theta^{(2N)}_{a,b}$ est un, elle vaut deux dans les autres cas (pour montrer ce fait, on utilise les propositions (2.25) et (2.22)).

Comme fait principal du théorème (2.27) et de la proposition (2.37), nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.42 *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$.
Si Γ *laisse stable un sous-ensemble* E *de* $Z(N)$ *alors* Γ *laisse stable le sous-espace vectoriel* $Vect_{\mathbb{C}}\left\{\Theta^{(2N)}_{a,b}, \left[\begin{smallmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{smallmatrix}\right] \in E\right\}$ *de* $\Theta^{(2N)}$.

Cas des classes de caractéristiques entières

Nous avons vu que (cf (2.33))

$$\mathbb{Z}^2/\sim = \{[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}], [\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}]\}$$

et que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ fixait la caractéristique $[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}]$. Donc le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ fixe l'espace vectoriel unidimensionnel $\Theta^{(2)}_{1,1}$. On retrouve donc le fait que la série thêta $\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}$ est une forme de Jacobi de poids $\frac{1}{2}$ et d'indice $\frac{1}{2}$ pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ avec le système de multiplicateur $v_\eta^3 \times v_H$.
Nous avons également vu que le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ permutait les classes $[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}]$, $[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}]$ et $[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}]$ et que chacune de ces classes était fixée par $\Gamma(2)$. Ces faits et la proposition (2.30), nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.43 *On a*

$$\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)} \in J_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), v_\eta^3 \times v_H).$$

Les fonctions suivantes :

$$(\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)})^4, \quad (\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)})^4 \quad et \quad (\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)})^4$$

sont des éléments de $J_{2,2}(\Gamma(2))$.

$$(\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)})^8 + (\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)})^8 + (\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)})^8 \in J_{4,4}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})).$$

Remarque

Les calculs effectués dans la démonstration du corollaire (2.28), notamment la formule (2.39), nous dispensent de la vérification des développements de Fourier de ces fonctions ainsi que de celles qui vont suivre aux différents points paraboliques des sous-groupes de congruence de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ pour lesquels elles se transforment comme des formes de Jacobi.

Les deux derniers points de cette proposition sont évidents. Pour le premier point, le fait que cette fonction, notons-la φ, se transforme comme une forme de Jacobi et possède un développement de Fourier de la forme voulue est immédiat, seule la formule du système de multiplicateur nécessite une explication. Grâce au théorème (2.27), on a $\varphi\big|_{\frac{3}{2}}(\lambda\ \ \mu) = (-1)^{\lambda+\mu}$. Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, la fonction $\varphi^{24}(\tau, 0)$ est non nulle (voir proposition (2.23)), c'est donc un multiple d'une puissance de Δ (ceci est dû à la formule de valence). En regardant les poids, on obtient alors $\varphi^{24}(\tau, 0) = \lambda\Delta(\tau)^3 = \lambda\eta(\tau)^{72}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Ces fonctions étant holomorphes dans $\mathbb{H}$ (connexe), on a $\varphi(\tau, 0) = \mu\eta(\tau)^3$, (en comparant les développements de Fourier, on a $\mu = 2$) ceci nous donne donc le système de multiplicateur annoncé dans la proposition. On peut vérifier en utilisant la formule du triple produit pour la série thêta de Jacobi (voir 2.17) que

$$\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{0}}(\tau, 0) = e^{-\frac{i\pi}{12}}\frac{\eta(\frac{\tau+1}{2})^2}{\eta(\tau)}, \quad \vartheta^{(2)}_{\binom{0}{1}}(\tau, 0) = \frac{\eta(\frac{\tau}{2})^2}{\eta(\tau)}, \quad \vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}}(\tau, 0) = 2\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)}$$

et

$$\eta(\frac{\tau+1}{2})\eta(\frac{\tau}{2})\eta(2\tau) = e^{\frac{i\pi}{24}}\eta(\tau)^3$$

Cas des classes de caractéristiques rationnelles

La méthode de construction est assez simple : on utilise les propositions (2.37) et (2.41) ainsi que le tableau (2.2.3) pour repérer les sous-ensembles de $X(N)$ invariants par $\Gamma_1(N)$ ou $\Gamma_0(N)$, on leur associe alors les sous-espaces de $\Theta^{(2N)}$ qui sont également invariants. Dans ces sous-espaces, on forme alors des sommes de produits de séries thêta en agençant correctement les systèmes de multiplicateur. Une application directe de la proposition (2.37) donne :

Proposition 2.44 *Soit*

$$\varphi(\tau, z) = \prod_{\substack{0\leqslant a,b\leqslant 2N-1 \\ (a,b)\neq(N,N)}} \vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}(\tau, z)$$

pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$, *alors* $\varphi \in J_{\frac{4N^2-1}{2}, \frac{4N^2-1}{2}}(\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), v_\eta^{4N^2-1} \times v_H)$

Démonstration. Il s'agit d'une généralisation du premier point de la proposition précédente. La fonction φ étant holomorphe dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$, se transformant comme une forme de Jacobi et possédant un développement de Fourier de la forme voulue, il ne reste qu'à prouver la formule du système de multiplicateur. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Z}^2$, la proposition (2.26) implique que

$$\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\big|_{\frac{1}{2}}(\lambda\ \ \mu) = e^{i\pi(\frac{a\mu-b\lambda}{N})}\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$$

donc
$$\varphi\big|_{\frac{4N^2-1}{2}}(\lambda\quad\mu) = \exp\Big(\frac{i\pi}{N}\Big(\sum_{\substack{0\leqslant a,b\leqslant 2N-1\\(a,b)\neq(N,N)}}(a\mu-b\lambda)\Big)\Big)\varphi.$$

Or
$$\sum_{\substack{0\leqslant a,b\leqslant 2N-1\\(a,b)\neq(N,N)}}(a\mu-b\lambda) = 2N^2(2N-1)(\mu-\lambda)-N\mu+N\lambda$$

donc $\varphi\big|_{\frac{4N^2-1}{2}}(\lambda\quad\mu) = (-1)^{\lambda+\mu}\varphi$. Comme pour la proposition précédente, on a $\varphi^{24}(\tau,0) = c\eta^{24(4N^2-1)}(\tau)$. On en déduit donc la formule du système de multiplicateur pour φ. $\square$

La lecture du tableau (2.2.3) et $\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\vartheta^{(2N)}_{\binom{2N-a}{2N-b}}\big|_1(\lambda\quad\mu) = 1$ pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ donnent :

Proposition 2.45 *Si* $N\equiv 2$ *ou* $10 \bmod 12$ *alors*
$$\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}} \in J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N),\chi_1\times v_{(H,\binom{1}{0},2)}).$$

Si $N\equiv 3$ *ou* $9 \bmod 12$ *alors*
$$\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{1}}\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{5}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N),\chi_2\times Id_H).$$

Si $N\equiv 4$ *ou* $8 \bmod 12$ *alors*
$$\vartheta^{(4)}_{\binom{2}{1}}\vartheta^{(4)}_{\binom{2}{3}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N),\chi_3\times Id_H),$$
$$\vartheta^{(4)}_{\binom{0}{1}}\vartheta^{(4)}_{\binom{0}{3}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N),\chi_4\times Id_H)$$

et
$$\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}} \in J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N),\chi_1\times v_{(H,\binom{1}{0},2)}).$$

Si $N\equiv 6 \bmod 12$ *alors*
$$\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}} \in J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N),\chi_1\times v_{(H,\binom{1}{0},2)}),$$
$$\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{1}}\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{5}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N),\chi_2\times Id_H)$$

et
$$\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{2}}\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{4}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N),\chi_5\times Id_H).$$

Si $N \equiv 0 \bmod 12$ *alors*

$$\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}} \in J_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma_0(N), \chi_1 \times v_{(H,\binom{1}{0},2)}),$$

$$\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{1}}\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{5}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N), \chi_2 \times Id_H),$$

$$\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{2}}\vartheta^{(6)}_{\binom{3}{4}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N), \chi_5 \times Id_H),$$

$$\vartheta^{(4)}_{\binom{2}{1}}\vartheta^{(4)}_{\binom{2}{3}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N), \chi_3 \times Id_H),$$

et

$$\vartheta^{(4)}_{\binom{0}{1}}\vartheta^{(4)}_{\binom{0}{3}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(N), \chi_4 \times Id_H)$$

Les caractères (ou systèmes de multiplicateur) χ_i apparaissant dans cette proposition peuvent être calculés explicitement.

La proposition (2.41) permet de construire des formes de Jacobi holomorphes pour $\Gamma_1(N)$ et $\Gamma_0(N)$: on peut, par exemple, former le produit des séries thêta correspondant aux classes de caractéristiques appartenant à $T_{\frac{a}{N}} \cap X(N)$ et ainsi obtenir une forme de Jacobi holomorphe pour $\Gamma_1(N)$ ou bien utiliser le fait que $\Gamma_0(N)$ agit transitivement sur $T_0 \cap X_0(N)$, lorsque N est pair, pour construire une forme de Jacobi pour $\Gamma_0(N)$. Les possibilités de construction sont en fait très nombreuses, nous allons en expliciter un certain nombre pour les cas particuliers $N = 2, 3$ et 4.

N=2

Les différentes propositions du paragraphe (2.2) et quelques calculs élémentaires nous donnent la décomposition de $Z(2)$ en $\Gamma_0(2)$-orbites suivante :

$$Z(2) = \{\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\} \sqcup \{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\} \sqcup \{\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\} \sqcup \left\{\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right]\right\} \sqcup \left\{\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{b}{2}\end{smallmatrix}\right], 0 \leqslant b \leqslant 3\right\}.$$

Ainsi la $\Gamma_0(2)$-orbite de $\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right]$ nous permet de construire la forme de Jacobi holomorphe suivante :

$$\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{0}}\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{1}} \in J_{1,1}(\Gamma_0(2), v_\eta^3\chi_1^{-1} \times v_{(H,\binom{0}{1},2)}),$$

et celle de $\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right]$ la forme de Jacobi suivante :

$$\vartheta^{(4)}_{\binom{2}{1}}\vartheta^{(4)}_{\binom{2}{3}}\vartheta^{(4)}_{\binom{0}{1}}\vartheta^{(4)}_{\binom{0}{3}} \in J_{2,2}(\Gamma_0(2), \chi_3\chi_4 \times Id_H). \tag{2.40}$$

La présence des systèmes de multiplicateur nous empêche de construire des formes de poids plus petit que 2. Cependant, on a

$$\chi^4_{(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),4)}(M)\chi^4_{(\left(\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right),4)}(M)=\chi^4_{(\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right),4)}(M)\chi^4_{(\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right),4)}(M)=(-1)^\gamma$$

pour tout $M=\left(\begin{smallmatrix}1+2\alpha & \beta\\ 2\gamma & 1+2\delta\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(2)$ donc

$$\left(\vartheta^{(4)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(4)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(4)}_{\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(4)}_{\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)}\right)^4\in J_{8,8}(\Gamma_0(2),\chi)$$

où χ est un caractère d'ordre 2 de $\Gamma_0(2)$ donné par :

$$\chi(\left(\begin{smallmatrix}1+2\alpha & \beta\\ 2\gamma & 1+2\delta\end{smallmatrix}\right))=(-1)^\gamma$$

pour tout $M=\left(\begin{smallmatrix}1+2\alpha & \beta\\ 2\gamma & 1+2\delta\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(2)$.

N=3

On a

$$X(3)=\left\{\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac13\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac53\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac13\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}\quad\text{et}\quad X_0(3)=\left\{\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac13\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac53\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac13\end{smallmatrix}\right]\right\}.$$

On sait que $\Gamma_0(3)$ laisse stable $T_1\cap X_0(3)=\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac13\end{smallmatrix}\right]\right\}$, et $\Gamma_1(3)$ laisse stable $T_{\frac13}\cap X(3)=\left\{\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac13\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac53\end{smallmatrix}\right]\right\}$. Or $\Gamma_0(3)=\Gamma_1(3)\sqcup -I_2\Gamma_1(3)$ et $-I_2$ laisse fixe chaque élément de $Z(3)$, donc $\Gamma_0(3)$ laisse stable $T_{\frac13}\cap X(3)$. Ceci nous permet de construire la forme de Jacobi suivante :

$$\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}5\\5\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}5\\3\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\5\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}5\\1\end{smallmatrix}\right)}\in J_{3,3}(\Gamma_0(3),\chi_6\times Id_H). \tag{2.41}$$

Un calcul plus précis montre que $\Gamma_0(3)$ laisse stable $\left\{\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac13\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac23\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac23\end{smallmatrix}\right]\right\}$ et $\left\{\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac23\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac13\\\frac43\end{smallmatrix}\right]\right\}$, on en déduit deux autres formes de Jacobi holomorphes :

$$\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\5\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)}\in J_{3,3}(\Gamma_0(3),\chi_7\times Id_H)$$

et

$$\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}5\\0\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}5\\4\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right)}\vartheta^{(6)}_{\left(\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}\right)}\in J_{3,3}(\Gamma_0(3),\chi_8\times Id_H).$$

N=4

Nous avons vu que $\Gamma_0(4)$ laisse fixe chacune des classes suivantes $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac12\end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac12\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ et laisse stable $\{\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\}$ car $\Gamma_0(2)$ le fait. La proposition

(2.41) implique que $\Gamma_1(4)$ laisse stable $\left\{\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{smallmatrix}\right]\right\}$, donc $\Gamma_0(4) = \Gamma_1(4) \sqcup -I_2\Gamma_1(4)$ laisse également stable cet ensemble. Un calcul plus précis montre que $\Gamma_0(4)$ laisse également stable les ensembles suivants :

$$\left\{\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac{1}{4}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\\frac{3}{4}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{1}{4}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\\frac{3}{4}\end{smallmatrix}\right]\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{5}{4}\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{7}{4}\end{smallmatrix}\right]\right\}.$$

Un calcul rapide montre que $\Gamma_0(4)$ échange les tours $T_{\frac{1}{4}}$ et $T_{\frac{3}{4}}$. On a donc la décomposition de $Z(4)$ en $\Gamma_0(4)$-orbites. Ceci nous permet de construire les formes de Jacobi suivantes :

$$\vartheta^{(4)}_{\binom{1}{0}}\vartheta^{(4)}_{\binom{3}{0}}\vartheta^{(4)}_{\binom{1}{1}}\vartheta^{(4)}_{\binom{3}{3}}\vartheta^{(4)}_{\binom{1}{2}}\vartheta^{(4)}_{\binom{3}{2}}\vartheta^{(4)}_{\binom{1}{3}}\vartheta^{(4)}_{\binom{3}{1}} \in J_{4,4}(\Gamma_0(4), \chi_9 \times Id_H),$$

$$\vartheta^{(8)}_{\binom{0}{1}}\vartheta^{(8)}_{\binom{0}{7}}\vartheta^{(8)}_{\binom{0}{3}}\vartheta^{(8)}_{\binom{0}{5}}\vartheta^{(8)}_{\binom{4}{1}}\vartheta^{(8)}_{\binom{4}{7}}\vartheta^{(8)}_{\binom{4}{3}}\vartheta^{(8)}_{\binom{4}{5}} \in J_{4,4}(\Gamma_0(4), \chi_{10} \times Id_H),$$

et

$$\vartheta^{(8)}_{\binom{2}{1}}\vartheta^{(8)}_{\binom{6}{7}}\vartheta^{(8)}_{\binom{2}{3}}\vartheta^{(8)}_{\binom{6}{5}}\vartheta^{(8)}_{\binom{2}{5}}\vartheta^{(8)}_{\binom{6}{3}}\vartheta^{(8)}_{\binom{2}{7}}\vartheta^{(8)}_{\binom{6}{1}} \in J_{4,4}(\Gamma_0(4), \chi_{11} \times Id_H).$$

2.2.5 Construction de formes de Jacobi faibles

Pour construire des formes de Jacobi faibles pour $\Gamma_0(N)$ ou $\Gamma_1(N)$, nous allons utiliser des quotients de séries thêta avec caractéristiques.
Pour $0 \leqslant a, b \leqslant 2N$ et $(a,b) \neq (N,N)$, on pose, pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$,

$$\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}(\tau, z) = \frac{\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}(\tau, z)}{\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}}(\tau, 0)} \tag{2.42}$$

Le couple (a,b) étant différent de (N,N), la proposition (2.23) implique que ces fonctions $\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$ sont holomorphes dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, et les théorèmes (2.26) et (2.27) impliquent qu'elles vérifient les équations fonctionnelles suivantes :

$$\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\big|_{\frac{1}{2}}(\lambda \quad \mu) = e^{i\pi(\frac{a\mu-b\lambda}{N})}\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}} = v_{(H,\binom{a}{b},2N)}((\lambda \quad \mu))\vartheta^{(2N)}_{\binom{a}{b}} \tag{2.43}$$

et

$$\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\big|_{0,\frac{1}{2}}M = \xi^{(2N)}_{\binom{a\alpha+b\gamma-\alpha\gamma N}{a\beta+b\delta+\beta\delta N}} \tag{2.44}$$

pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ et tout $M=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. La formule (2.44) montre l'absence d'un système de multiplicateur dans la formule de transformation modulaire de $\xi^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)}$, ce fait va nous permettre de construire plus aisément des formes de Jacobi faibles pour les groupes $\Gamma_0(N)$ ou $\Gamma_1(N)$. On a le fait principal suivant :

Proposition 2.46 *La fonction* $\xi^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)}$ *est une forme de Jacobi faible de poids* 0 *et d'indice* $\frac{1}{2}$ *pour le sous-groupe principal de congruence* $\Gamma(2N)$ *avec le caractère* $Id\times v_{(H,\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right),2N)}$.

Démonstration. Soit $M=\left(\begin{smallmatrix}1+2N\alpha & 2N\beta\\ 2N\gamma & 1+2N\delta\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma(2N)$, la formule (2.44) donne :

$$\xi^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)}\Big|_{0,\frac{1}{2}}M=\xi^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a+2N(a\alpha+b\gamma-(1+2N\alpha))\gamma N)\\ b+2N(a\beta+b\delta+\beta(1+2N)\delta N)\end{smallmatrix}\right)},$$

or la formule(2.25) implique

$$\vartheta^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a+2N(a\alpha+b\gamma-(1+2N\alpha)\gamma N)\\ b+2N(a\beta+b\delta+\beta(1+2N)\delta N\end{smallmatrix}\right)}=e^{i\pi\frac{a(a\beta+b\delta+\beta(1+2N)\delta N)}{N}}\vartheta^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)},$$

donc $\xi^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)}\Big|_{0,\frac{1}{2}}M=\xi^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)}$. Pour achever la démonstration de cette proposition, il reste à vérifier la forme des développements de Fourier aux différents points paraboliques de $\Gamma(2N)$. En reprenant l'argument du corollaire (2.28), il suffit de le vérifier en ∞. On reprend alors la définition des séries thêta avec caractéristiques i.e. la formule (2.30) dans laquelle on met en facteur $q^{\frac{a^2}{8N^2}}$, il vient alors

$$\vartheta^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)}(\tau,z)=q^{\frac{a^2}{8N^2}}\sum_{n,l}c(n,l)q^nr^l=q^{\frac{a^2}{8N^2}}(\sum_{n\in\mathbb{N}}P_n(z)q^{\frac{n}{8N^2}}),$$

où P_n est une expression polynomiale de puissances rationnelles de $r=e^{2i\pi z}$ telle que $P_0(0)\neq 0$. Donc

$$\xi^{(2N)}_{\left(\begin{smallmatrix}a\\ b\end{smallmatrix}\right)}(\tau,z)=(\sum_{n\in\mathbb{N}}P_n(z)q^{\frac{n}{8N^2}})(\sum_{n\in\mathbb{N}}P_n(0)q^{\frac{n}{8N^2}})^{-1}.$$

On développe alors le numérateur de cette expression de la manière suivante :

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}}P_n(0)q^{\frac{n}{8N^2}})^{-1}=P_0(0)^{-1}(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{P_n(0)}{P_0(0)}q^{\frac{n}{8N^2}})^{-1}=$$

$$P_0(0)^{-1}(1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{P_n(0)}{P_0(0)}q^{\frac{n}{8N^2}})^{-1} = P_0(0)^{-1}(1+\sum_{l\geqslant 1}(-1)^l(\sum_{n\geqslant 1}\frac{P_n(0)}{P_0(0)}q^{\frac{n}{8N^2}})^l).$$

Cette dernière expression implique que seules des puissances positives de q apparaissent dans le développement de Fourier de $\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$ en ∞. $\square$

Nous allons maintenant appliquer ces résultats et ceux du pargraphe 2.2 à la construction de formes de Jacobi faibles de poids 0 et d'indices assez petits pour le groupe $\Gamma_0(N)$. Quelques-unes de ces formes nous seront utiles pour la construction des dd-formes modulaires (voir chapitre 5). Le point essentiel pour de telles constructions est la proposition suivante :

Proposition 2.47 *Soit* Γ *un sous-groupe d'indice fini de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *fixant une classe de caractéristiques* $\begin{bmatrix}\frac{a}{N}\\ \frac{b}{N}\end{bmatrix} \in Z(N)$. *Alors* $\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\xi^{(2N)}_{\binom{2N-a}{2N-b}} \in J^f_{0,1}(\Gamma)$.

Démonstration. Le groupe Γ laisse donc stable le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Theta^{(2N)}_{a,b}$ i.e. le groupe Γ permute les deux fonctions $\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$ et $\xi^{(2N)}_{\binom{2N-a}{2N-b}}$. La formule (2.43) implique

$$\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\xi^{(2N)}_{\binom{2N-a}{2N-b}}\Big|_1(\lambda\ \ \mu) = (\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\Big|_{\frac{1}{2}}(\lambda\ \ \mu))(\xi^{(2N)}_{\binom{2N-a}{2N-b}}\Big|_{\frac{1}{2}}(\lambda\ \ \mu)) =$$

$$e^{i\pi(\frac{a\mu-b\lambda}{N})}\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}e^{i\pi(\frac{(2N-a)\mu-(2N-b)\lambda}{N})}\xi^{(2N)}_{\binom{2N-a}{2N-b}} = \xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}\xi^{(2N)}_{\binom{2N-a}{2N-b}}.$$

La proposition précédente assure que les développements de Fourier de cette fonction ont la forme voulue aux différents points paraboliques de Γ. $\square$

Exemples explicites

N=1

Ce cas est particulier puisque $\dim_{\mathbb{C}}\Theta^{(2)}_{a,b} = 1$.

Proposition 2.48 *On a*

$$(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2 \in J^f_{0,1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$$

et

$$\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}}\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}}\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}} \in J^f_{0,\frac{3}{2}}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), v_H).$$

En utilisant la formule de dimension (2.29), on a $\dim_{\mathbb{C}} J^f_{0,1}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = 1$ donc les formes de Jacobi faibles $\varphi_{0,1}$ (voir (2.23)) et $(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2$ sont proportionnelles. Un rapide calcul donne

$$\varphi_{0,1} = 4((\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2).$$

En appliquant les résultats du théorème (2.14), on déduit la dimension, sur $\mathbb{C}$, de $J^f_{0,t}(\Gamma_0(N))$ pour t entier :

$$\dim_{\mathbb{C}} J^f_{0,t}(\Gamma_0(N)) = \sum_{r=0}^{t} \dim_{\mathbb{C}} M_{2r}(\Gamma_0(N)). \tag{2.45}$$

En particulier, on a $\dim_{\mathbb{C}} J^f_{0,2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = 2$ et la proposition suivante :

Proposition 2.49 *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $J^f_{0,2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ est engendré par les fonctions suivantes :*

$$(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}})^4 + (\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^4 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^4$$

et

$$(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}}\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}}\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}}\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2.$$

N=2

Proposition 2.50 *On a*

$$\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}} \in J^f_{0,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2), Id_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} \times v_{(H,\binom{1}{0},2)}),$$

$$\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}}\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}} \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(2), Id_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} \times v_{(H,\binom{0}{1},2)}),$$

$$\xi^{(4)}_{\binom{0}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{0}{3}} + \xi^{(4)}_{\binom{2}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{2}{3}} \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(2))$$

et

$$\xi^{(4)}_{\binom{1}{0}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{0}} + \xi^{(4)}_{\binom{1}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{3}} + \xi^{(4)}_{\binom{1}{2}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{2}} + \xi^{(4)}_{\binom{1}{3}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{1}} \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(2)).$$

Cette proposition implique que $(\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2 \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(2))$, donc que $(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2 \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(2))$ puisque c'est la différence de $\frac{\varphi_{0,1}}{4}$ et de $(\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2$. En utilisant à nouveau la formule de dimension (2.45), on a $\dim_{\mathbb{C}} J^f_{0,1}(\Gamma_0(2)) = 2$, $\dim_{\mathbb{C}} J^f_{0,2}(\Gamma_0(2)) = 4$, et on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.51 *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(2))$ est engendré par les fonctions*

$$\varphi_{0,1} \quad et \quad (\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2.$$

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $J_{0,2}^{f}(\Gamma_0(2))$ est engendré par les fonctions

$$(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}})^4 + (\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^4 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^4, \quad (\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}}\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2 + (\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}}\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2,$$

$$(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}}\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2 \quad et \quad (\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^4.$$

N=3

Proposition 2.52 *On a*

$$\xi^{(6)}_{\binom{3}{1}}\xi^{(6)}_{\binom{3}{5}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(3)),$$

$$\xi^{(6)}_{\binom{1}{1}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{5}} + \xi^{(6)}_{\binom{1}{3}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{3}} + \xi^{(6)}_{\binom{1}{5}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{1}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(3)),$$

$$\xi^{(6)}_{\binom{0}{1}}\xi^{(6)}_{\binom{0}{5}} + \xi^{(6)}_{\binom{0}{2}}\xi^{(6)}_{\binom{0}{4}} + \xi^{(6)}_{\binom{3}{2}}\xi^{(6)}_{\binom{3}{4}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(3)),$$

et

$$\xi^{(6)}_{\binom{1}{0}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{0}} + \xi^{(6)}_{\binom{1}{2}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{4}} + \xi^{(6)}_{\binom{1}{4}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{2}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(3)).$$

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel bidimensionnel $J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(3))$ est engendré par les fonctions $\varphi_{0,1}$ et $\xi^{(6)}_{\binom{3}{1}}\xi^{(6)}_{\binom{3}{5}}$.

N=4

Proposition 2.53 *On a*

$$\xi^{(4)}_{\binom{0}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{0}{3}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(4)),$$

$$\xi^{(4)}_{\binom{2}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{2}{3}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(4)),$$

$$\xi^{(4)}_{\binom{1}{0}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{0}} + \xi^{(4)}_{\binom{1}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{3}} + \xi^{(4)}_{\binom{1}{2}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{2}} + \xi^{(4)}_{\binom{1}{3}}\xi^{(4)}_{\binom{3}{1}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(4)),$$

$$\xi^{(8)}_{\binom{0}{1}}\xi^{(8)}_{\binom{0}{7}} + \xi^{(8)}_{\binom{0}{3}}\xi^{(8)}_{\binom{0}{5}} + \xi^{(8)}_{\binom{4}{1}}\xi^{(8)}_{\binom{4}{7}} + \xi^{(8)}_{\binom{4}{3}}\xi^{(8)}_{\binom{4}{5}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(4))$$

et

$$\xi^{(8)}_{\binom{2}{1}}\xi^{(8)}_{\binom{6}{7}} + \xi^{(8)}_{\binom{2}{3}}\xi^{(8)}_{\binom{6}{5}} + \xi^{(8)}_{\binom{2}{5}}\xi^{(8)}_{\binom{6}{3}} + \xi^{(8)}_{\binom{2}{7}}\xi^{(8)}_{\binom{6}{1}} \in J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(4)).$$

Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $J_{0,1}^{f}(\Gamma_0(4))$ est engendré par les fonctions $\xi^{(4)}_{\binom{0}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{0}{3}}$, $\xi^{(4)}_{\binom{2}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{2}{3}}$ et $\varphi_{0,1}$.

2.3 Autres méthodes de construction

Dans ce paragraphe, nous donnons deux autres méthodes de construction de formes de Jacobi : la première pour construire des formes holomorphes et la seconde pour en construire des faibles.

2.3.1 Pour des formes de Jacobi holomorphes

La proposition suivante est une généralisation du théorème 9.5 de l'ouvrage de M. Eichler et D. Zagier (voir [EZ]).

Proposition 2.54 *Soit* Γ *un sous-goupe d'indice fini de* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$*. Pour* $i=1$ *ou* 2*, soit* k_i *et* t_i *des entiers ou demi-entiers,* χ_i *un caractère (ou système de multiplicateur) de* Γ *d'ordre fini,* ρ_i *un caractère de* $H(\mathbb{Z})$ *et* $\varphi_i \in J_{k_i,t_i}(\Gamma, \chi_i \times \rho_i)$*. Alors*

$$[\varphi_1,\varphi_2] = \frac{1}{2i\pi}(t_2\varphi_1'\varphi_2 - t_1\varphi_1\varphi_2') \in J_{k_1+k_2+1,t_1+t_2}(\Gamma, \chi_1\chi_2 \times \rho_1\rho_2),$$

où

$$\varphi'(\tau,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(\tau,z).$$

Démonstration. Le fait que $[\varphi_1,\varphi_2]$ se transforme comme une forme de Jacobi de poids k_1+k_2+1 et d'indice t_1+t_2 pour Γ avec le caractère (ou le système de multiplicateur) $\chi_1\chi_2 \times \rho_1\rho_2$ se vérifie comme dans la preuve du théorème 9.5 *ibidem*. Il suffit donc de vérifier les développements de Fourier aux différents points paraboliques de Γ. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, par hypothèse, on a

$$(\varphi_j\big|_{k_j,t_j}M)(\tau,z) = \sum_{\substack{(n_j,l_j)\in\mathbb{Q}^2, n_j\geqslant 0 \\ 4n_jt_j - l_j^2 \geqslant 0}} c_M^{(j)}(n_j,l_j)q^{n_j}r^{l_j}$$

pour $j=1$ ou 2. En différentiant par rapport à z, l'expression $\varphi_j\big|_{k_j,t_j}M$ qui s'écrit

$$(\varphi_j\big|_{k_j,t_j}M)(\tau,z) = (c\tau+d)^{-k_j}\exp(2i\pi t_j\left(\frac{-cz^2}{c\tau+d}\right))\varphi_j(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{z}{c\tau+d}),$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_j\big|_{k_j,t_j}M(\tau,z)\right) = \frac{-8i\pi c t_j z}{c\tau+d}(\varphi_j\big|_{k_j,t_j}M)(\tau,z) + \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\big|_{k_j+1,t_j}M\right)(\tau,z).$$

On déduit de cette dernière formule

$$((t_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\varphi_2 - t_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\varphi_1)\big|_{k_1+k_2+1,t_1+t_2})(\tau,z) =$$

$$\left(t_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_1\big|_{k_1,t_1}M\right)\left(\varphi_2\big|_{k_2,t_2}M\right) - t_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_2\big|_{k_2,t_2}M\right)\left(\varphi_1\big|_{k_1,t_1}M\right)\right)(\tau,z).$$

Donc la fonction $[\varphi_1,\varphi_2]$ possède le dévelopement de Fourier, au point parabolique représenté par Γ, suivant :

$$[\varphi_1,\varphi_2](\tau,z) = \sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2, n\geqslant 0\\ 4n(t_1+t_2)-l^2\geqslant 0}} a_M(n,l)q^n r^l$$

où

$$a_M(n,l) = \sum_{\substack{n_1+n_2=n\\ l_1+l_2=l}} (t_2l_1 - t_1l_2)c_M^{(1)}(n_1,l_1)c_M^{(2)}(n_2,l_2).$$

Cette expression des coefficients de Fourier de $[\varphi_1,\varphi_2]$ nous permet d'affirmer que $[\varphi_1,\varphi_2]$ est une forme de Jacobi parabolique (si elle n'est pas nulle) car, si $4n(t_1+t_2)-l^2=0$ alors $a_M(n,l)=0$. En effet, comme

$$4(n_1+n_2)(t_1+t_2) - (l_1+l_2)^2 =$$

$$(4n_1t_1 - l_1^2)(t_1+t_2) + (4n_2t_2 - l_2^2)(t_1+t_2) + (t_1l_2 - t_2l_1)^2\frac{1}{t_1t_2},$$

si cette expression est nulle, on a $t_1l_2 - t_2l_1 = 0$ car $4n_it_i - l_i^2 \geqslant 0$ et $t_1+t_2 \geqslant 0$. □

Exemples

La forme $\varphi_{11,2}$ (voir 2.20) est construite de cette manière.
Posons, pour tout $(\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$,

$$\varphi(\tau,z) = \vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}}(\tau,2z),$$

alors $\varphi\in J_{\frac{1}{2},2}(\Gamma_0(2),\chi_1)$. En appliquant la proposition précédente aux formes φ et $\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}}$, on obtient

$$[\varphi,\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}}] \in J^{par}_{2,\frac{5}{2}}(\Gamma_0(2),\chi_1^2).$$

2.3.2 Pour des formes de Jacobi faibles

Nous allons indiquer brièvement une méthode de construction de formes de Jacobi faibles. Pour cela, nous introduisons l'opérateur différentiel, agissant sur les fonctions holomorphes dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$, suivant :

$$L = 8i\pi t \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

où t est un entier ou un demi-entier. Il s'agit de l'opérateur de chaleur (voir [EZ], chapitre I, §3). On vérifie alors que si φ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ se transformant comme une forme de Jacobi de poids k (entier) et d'indice t pour un sous-groupe Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, on a

$$L(\varphi)\big|_t(\lambda\ \mu) = L(\varphi)$$

et

$$(L(\varphi)\big|_{k+2,t}M)(\tau,z) = (L(\varphi))(\tau,z) + (2k-1)\frac{c}{c\tau+d}4i\pi t\varphi(\tau,z)$$

pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{Z}^2$, tout $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ et tout $(\tau,z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$.
On définit alors un nouvel opérateur de la manière suivante :

$$D(\varphi) = L(\varphi\eta^{1-2k})\eta^{2k-1},$$

où la fonction φ est holomorphe $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$. En utilisant le fait que $\frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)} = \frac{2i\pi}{24}E_2(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ ($E_2 = -24G_2$), on a :

$$(D(\varphi))(\tau,z) = (L(\varphi))(\tau,z) - \frac{2}{3}\pi^2 t(1-2k)E_2(\tau)\varphi(\tau,z).$$

Proposition 2.55 *L'application*

$$D : \left(\begin{array}{ccc} J^f_{k,t}(\Gamma) & \to & J^f_{k+2,t}(\Gamma) \\ \varphi & \mapsto & D(\varphi) \end{array}\right)$$

est un morphisme d'espaces vectoriels.

Pour démontrer cette proposition, on utilise le même genre de calculs que pour la preuve de la proposition (2.54).

Exemple
Nous nous contentons de donner un seul exemple d'application de cette proposition. Soit $f_8(\tau) = (\eta(\tau)\eta(2\tau))^8$, on sait que $f_8 \in S_8(\Gamma_0(2))$ (voir [Ko] chapitre III, §3, proposition 20). On forme alors le produit suivant $\psi = f_8\varphi_{-2,1}$

(voir (2.21) pour la définition de $\varphi_{-2,1}$) qui est, a priori, un élément de $J_{6,1}^{f}(\Gamma_0(2))$. Cependant, comme $\varphi_{-2,1}=\frac{\varphi_{10,1}}{\Delta}$, on a

$$\psi(\tau,z)=\frac{(\eta(\tau)\eta(2\tau))^8}{\Delta(\tau)}\varphi_{10,1}(\tau,z)$$

et, en utilisant les écritures de η et Δ sous forme de produits infinis, on a

$$\psi(\tau,z)=\left(\prod_{n\geqslant 1}\left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^8\right)\varphi_{10,1}(\tau,z).$$

Cela nous permet de vérifier que $\psi\in J_{6,1}^{par}(\Gamma_0(2))$. De la proposition ci-dessus, on obtient que $D(\psi)\in J_{8,1}^{f}(\Gamma_0(2))$. On peut encore vérifier qu'en fait $D(\psi)\in J_{8,1}^{par}(\Gamma_0(2))$. On divise alors $D(\psi)$ par f_8 qui ne s'annule pas dans $\mathbb{H}$ pour finalement obtenir une forme de Jacobi faible de poids 0 et d'indice 1 pour $\Gamma_0(2)$.

2.4 Quelques formules de dimension de $J_{k,m}^{par}(\Gamma_0(N))$

Énoncé d'un théorème de Skoruppa

Théorème 2.56 (Skoruppa) *Pour $k\geqslant 3$ et $m\geqslant 0$ entiers on a*

$$\begin{aligned}2.\dim_{\mathbb{C}}J_{k,m}^{par}(\Gamma_0(N)) &= \sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}(s_{k,m;h_e}^{top}(1)+(-1)^k s_{k,m;h_e}^{top}(m))\\ &+\sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}(s_{k,m;h_e}^{par}(1)+(-1)^k s_{k,m;h_e}^{par}(m))\\ &+\sum_{t=-1}^{t=1}e(t)(s_{k,m;t}^{ell}(1)+(-1)^k s_{k,m;t}^{ell}(m)),\end{aligned}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des points paraboliques de $\Gamma_0(N)$ et h_e la largeur du point parabolique $\frac{f}{e}$.

Remarques :

(i) Cette formule implique trivialement que $\dim_{\mathbb{C}}J_{k,1}^{par}(\Gamma_0(N))=0$ pour $k\geqslant 3$ impair.

(ii) Comme une forme de Jacobi parabolique d'indice 0 est une forme modulaire parabolique de même poids, on en déduit que $\dim_{\mathbb{C}}J_{k,0}^{par}(\Gamma_0(N))=0$ pour $k\geqslant 3$ impair puisque $\dim_{\mathbb{C}}M_{2k+1}(\Gamma_0(N))=0$ $(-I_2\in\Gamma_0(N))$.

Les sections suivantes ont pour but de préciser cette formule i.e. préciser les fonctions $s^{top}_{k,m;h_e}$, $s^{par}_{k,m;h_e}$, $s^{ell}_{k,m;t}$ et $e(t)$.

La fonction e

On note $\nu_2(\Gamma_0(N))$ (respectivement $\nu_3(\Gamma_0(N))$), le nombre de points elliptiques non $\Gamma_0(N)$-équivalents d'ordre 2 (respectivement d'ordre 3) de $\Gamma_0(N)$. Il est alors clair que

$$e(-1) = e(1) = \nu_3(\Gamma_0(N))$$

et

$$e(0) = \nu_2(\Gamma_0(N)).$$

Pour le groupe $\Gamma_0(N)$, on connaît explicitement ces deux fonctions :

Proposition 2.57 *On a*

$$\nu_2(\Gamma_0(N)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 4|N \\ \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ premier}}} (1 + \left(\frac{-1}{p}\right)) & \end{cases},$$

où

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ p = 2 \\ 1 & \text{si } \ p \equiv 1 \mod 4 \\ -1 & \text{si } \ p \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

et

$$\nu_3(\Gamma_0(N)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ 9|N \\ \prod_{\substack{p|N \\ p \text{ premier}}} (1 + \left(\frac{-3}{p}\right)) & \end{cases},$$

où

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ p = 3 \\ 1 & \text{si } \ p \equiv 1 \mod 3 \\ -1 & \text{si } \ p \equiv 2 \mod 4 \end{cases}.$$

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Sh] chapitre I (p.25).

La fonction $s^{top}_{k,m;h_e}$

On note $Q(n)$ le plus grand entier dont le carré divise n ($n \in \mathbb{N}$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta < 0$, on définit une fonction $H_n(\Delta)$ de la manière suivante :

si $n = 1$ alors $H_1(\Delta) = H(\Delta)$ où H est le nombre de classes de Hurwitz i.e. $H(0) = -\frac{1}{12}$ et $H(\Delta)$ est le nombre de classes d'équivalence de formes quadratiques binaires à coefficients entiers définies positives de discriminant Δ sous l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. On compte les formes équivalentes à $x^2 + y^2$

(respectivement x^2+xy+y^2) avec la multiplicité $\frac{1}{2}$ (respectivement $\frac{1}{3}$). Si Δ n'est pas congru à 0 ou 1 modulo 4 alors $H(\Delta)=0$,

si $n \geqslant 1$, on écrit $(n,\Delta)=a^2b$ où b est sans facteur carré et on pose

$$H_n(\Delta)=\begin{cases} a^2b\left(\frac{\Delta/a^2b^2}{n/a^2b}\right)H_1(\frac{\Delta}{a^2b^2}) & \text{si } \ a^2b^2|\Delta \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Dans cette formule $\left(\frac{a}{b}\right)$ désigne le symbole de Jacobi des entiers a et b. On pose $n'=\frac{m}{n}$ pour $n||m$ i.e. n et $\frac{m}{n}$ sont premiers entre eux. Pour $k\geqslant 2$, $b\geqslant 1$ entiers, on pose

$$s_{k,m;b}^{top}(n)=-(2k-3)H_{bn'}(0)-\frac{1}{2}Q(n'(4n',bn)).$$

Comme $H_{bn'}(0)=-\frac{1}{12}bn'$, on déduit les simplifications suivantes :

$$S_{k,m}^{top}=\sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}\frac{1}{2}(s_{k,m;h_e}^{top}(1)+(-1)^k s_{k,m;h_e}^{top}(m))$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}(\left(\frac{2k-3}{12}\right)h_em-\frac{1}{2}Q(m(4m,h_e))+(-1)^k\left(\frac{2k-3}{12}\right)h_e-\frac{1}{2}Q((4,h_em)))$$

$$=\left(\frac{2k-3}{24}\right)(m+(-1)^k)\sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}h_e-\frac{1}{4}\sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}Q(m(4m,h_e))+(-1)^kQ((4,h_em))$$

$$=\left(\frac{2k-3}{24}\right)(m+(-1)^k)N.\prod_{\substack{p|N\\ p \text{ premier}}}(1+p^{-1})$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}Q(m(4m,h_e))+(-1)^kQ((4,h_em)).$$

On a donc la proposition suivante :

Proposition 2.58

$$S_{k,m}^{top}=\left(\frac{2k-3}{24}\right)(m+(-1)^k)N.\prod_{\substack{p|N\\ p \text{ premier}}}(1+p^{-1})$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}}Q(m(4m,h_e))+(-1)^kQ((4,h_em)).$$

La fonction $s^{par}_{k,m;b}$

Pour k entier supérieur ou égal à 2 et b entier supérieur ou égal à 1, on pose

$$s^{par}_{k,m;b}(n) = \frac{1}{2}(-1)^{k+1}(4n, bn') \sum_{\substack{\Delta<0,\ \Delta | \frac{4n}{(4n,bn')} \\ \frac{4n}{(4n,bn')\Delta} \text{ sans facteur carré}}} H_{bn'/(4n,bn')}(\Delta),$$

n' étant défini comme dans la section précedente. On pose alors

$$S^{par}_{k,m} = \frac{1}{2} \sum_{\frac{f}{e}\in\mathcal{P}} (s^{par}_{k,m;h_e}(1) + (-1)^k s^{par}_{k,m;h_e}(m)). \tag{2.46}$$

La fonction $s^{ell}_{k,m;t}$

Pour $t \in \{-1, 0, 1\}$, $k \geqslant 2$ et $m \geqslant 0$ entiers, on pose

$$s^{ell}_{k,m;t}(n) = -\delta((t+2)|n) p_{2k-2}(\sqrt{t+2}) H_{n'}(t^2-4)$$

où $\delta(a|b) = 1$ si a divise b et 0 sinon. Les polynômes p_k sont définis de la manière suivante : $p_k(s)$ est le coefficient de x^{k-2} dans le développement en série entière de $(1 - sx + x^2)^{-1}$. Les premiers p_k sont $p_2(s) = 1$, $p_4(s) = s^2 - 1$, $p_6(s) = s^4 - 3s^2 + 1$, etc. On trouve facilement $p_k(\pm 2) = (k-1)(-1)^{k-2}$. En remarquant que $p_k(s) = \frac{\rho^{k-1} - \rho'^{k-1}}{\rho - \rho'}$ où ρ et ρ' sont les racines de $X^2 - sX + 1$ si $s^2 \neq 4$, on obtient facilement quelques valeurs particulières de p_k : $p_{2k-2}(0) = (-1)^k$, $p_{2k-2}(1) = -\frac{\sin(\frac{2k\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{3}}$, $p_{2k-2}(\sqrt{3}) = 2\sin(\frac{(2k-3)\pi}{6})$ et $p_{2k-2}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sin(\frac{(2k-3)\pi}{4})$. On applique alors cela pour les différentes valeurs de t, et on obtient

$$s^{ell}_{k,m;-1}(1) = \frac{\sin(\frac{2k\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{3}} H_m(-3), \quad s^{ell}_{k,m;-1}(m) = \frac{1}{3}\frac{\sin(\frac{2k\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{3}},$$

$$s^{ell}_{k,m;0}(1) = 0, \quad s^{ell}_{k,m;0}(m) = -\frac{1}{2}\delta(2|m) p_{2k-2}(\sqrt{2})$$

$$s^{ell}_{k,m;1}(1) = 0, \quad s^{ell}_{k,m;1}(m) = -\frac{1}{3}\delta(3|m) p_{2k-2}(\sqrt{3}).$$

En posant

$$S^{ell}_{k,m} = \frac{1}{2}\sum_{t=-1}^{t=1} e(t)(s^{ell}_{k,m;t}(1) + (-1)^k s^{ell}_{k,m;t}(m))$$

et en utilisant les résultats précedents, on a la proposition suivante :

Proposition 2.59

$$S_{k,m}^{ell} = \frac{1}{2}\nu_3(\Gamma_0(N))\left(\frac{\sin(\frac{2k\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{3}}\left(H_m(-3)+\frac{(-1)^k}{3}\right)+\frac{(-1)^{k+1}}{3}\delta(3|m)p_{2k-2}(\sqrt{3})\right)$$
$$+\frac{(-1)^{k+1}}{4}\nu_2(\Gamma_0(N))\delta(2|m)p_{2k-2}(\sqrt{2}).$$

Applications

Le cas $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ **(i.e.** $N=1$**)**

Proposition 2.60 *Pour $k \geqslant 2$ entier, on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{2k,1}^{par}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sin(\frac{4k\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{3}}+k\right)-1.$$

Démonstration. Dans ce cas, les formules se simplifient énormément puisque $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ n'a qu'un seul point parabolique de largeur 1 et que le nombre de points elliptiques d'ordre 2 ou d'ordre 3 non $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-équivalents est 1. On en déduit donc

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{2k,1}^{par}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = s_{2k,1;1}^{top}(1)+s_{2k,1;1}^{par}(1)+\sum_{t=-1}^{t=1} s_{2k,1;t}^{ell}(1)$$

or

$$s_{2k,1;1}^{top}(1) = \frac{4k-3}{12}-\frac{1}{2} = \frac{4k-9}{12},$$
$$s_{2k,1;1}^{par}(1) = -\frac{1}{2}(H(-4)+H(-2)) = -\frac{1}{4}$$

et

$$s_{2k,1;0}^{ell}(1) = s_{2k,1;1}^{ell}(1) = 0 \quad \text{et} \quad s_{2k,1;-1}^{ell}(1) = \frac{1}{3}\frac{\sin(\frac{4k\pi}{3})}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

□

On retrouve, en particulier, le fait que $J_{10,1}^{par}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ et $J_{12,1}^{par}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$ sont de dimension complexe 1 (voir [EZ] p.38).

Proposition 2.61 *Pour $k \geqslant 3$ entier, on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{k,2}^{par}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{3}-1+(-1)^k\left(\frac{2k-9}{12}\right)-\frac{3}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left((-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{2k-3}{4}\pi\right)-\frac{1}{3}\frac{\sin(\frac{2k\pi}{3})}{\sin(\frac{\pi}{3})}\left(1+(-1)^{k+1}\right)\right).$$

Cette formule montre que la première forme de Jacobi parabolique de poids impair et d'indice 2 est de poids 11, il s'agit de $\varphi_{11,2}$ (voir 2.20). Dans le cas où k est pair, cette formule se simplifie énormément :

Corollaire 2.62 *Pour $k \geqslant 2$ entier, on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{2k,2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \frac{1}{4}\left(2k + (-1)^k - 5\right),$$

et donc, pour $k \geqslant 1$ entier, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{4k,2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{4k+2,2}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = k-1.$$

Quelques cas particuliers

Dans ce paragraphe, nous donnons une suite de résultats sur les dimensions de certains espaces. Les démonstrations de ces faits consistant à appliquer les résultats des sections précédentes, nous les omettons.

Proposition 2.63 *Soit p premier impair alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{3,2}(\Gamma_0(p)) = \frac{1}{8}(p + (-1)^{\frac{p-1}{2}} - 2(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}})$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{3,3}(\Gamma_0(p)) = \frac{1}{4}(p + (-1)^{\frac{p-1}{2}}).$$

Proposition 2.64 *Soit $k \geqslant 2$ alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{2k,1}(\Gamma_0(2)) = k-2.$$

Proposition 2.65 *Soit $k \geqslant 1$ alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{6k-2,1}(\Gamma_0(3)) = 4k-3,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{6k,1}(\Gamma_0(3)) = 4k-2$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{6k+2,1}(\Gamma_0(3)) = 4k-1.$$

Proposition 2.66 *On a*

$$\dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{3,m}(\Gamma_0(2)) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } 0 \leqslant m \leqslant 4 \\ 1 & \text{si } m = 5 \end{array}\right. , \quad \dim_{\mathbb{C}} J^{par}_{4,m}(\Gamma_0(2)) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } m = 0,1,2,4 \\ 1 & \text{si } m = 3 \\ 2 & \text{si } m = 5 \end{array}\right. .$$

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(3)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant m \leqslant 3 \\ 1 & \text{si } m = 4 \end{cases}, \quad \dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(4)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant m \leqslant 4 \\ 2 & \text{si } m = 5 \\ 1 & \text{si } m = 6 \end{cases}.$$

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(5)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0,1 \\ 1 & \text{si } m = 2,3 \\ 2 & \text{si } m = 4 \end{cases}, \quad \dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(6)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0,1 \\ 1 & \text{si } m = 2,3 \\ 3 & \text{si } m = 4 \end{cases},$$

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(7)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0,1 \\ 1 & \text{si } m = 2 \\ 2 & \text{si } m = 3 \end{cases}, \quad \dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(8)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant m \leqslant 2 \\ 2 & \text{si } m = 3,4 \\ 5 & \text{si } m = 5 \end{cases}.$$

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(9)) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant m \leqslant 2 \\ 1 & \text{si } m = 3 \\ 2 & \text{si } m = 4 \end{cases}, \quad \dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(10)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0,1 \\ 2 & \text{si } m = 2 \\ 4 & \text{si } m = 3 \\ 6 & \text{si } m = 4 \end{cases}$$

et

$$\dim_{\mathbb{C}} J_{3,m}^{par}(\Gamma_0(11)) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0,1 \\ 1 & \text{si } m = 2 \\ 3 & \text{si } m = 3 \\ 4 & \text{si } m = 4 \end{cases}.$$

Chapitre 3

Relèvement arithmétique

Dans ce chapitre, nous allons construire un relèvement, dit arithmétique, de formes de Jacobi pour un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ afin d'obtenir des formes modulaires pour certains sous-groupes du groupe paramodulaire. Il s'agit d'une généralisation à des sous-groupes de congruence du relèvement proposé par V. Gritsenko (voir [G2] et [G3]). Pour obtenir un tel relèvement, nous devrons utiliser certains opérateurs de Hecke sur l'espace des formes de Jacobi. Cela nous amène donc à considérer des opérateurs de Hecke pour le groupe Γ^J (voir 2.4) ou ce qui est équivalent pour le sous-groupe parabolique de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ correspondant (voir la remarque précédant la définition 2.5).

3.1 Opérateurs de Hecke

3.1.1 Rappels

Rappelons succintement la notion d'anneau de Hecke afin de fixer certaines notations utiles pour la suite.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $q_1 \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\Gamma_\infty(Nq_1, q_1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & * \\ * & * & * & * \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) \text{ tel que } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_1(Nq_1, q_1) \right\} \quad (3.1)$$

où $* \in \mathbb{Z}$ et $\Gamma_1(Nq_1, q_1)$ est défini comme dans le chapitre 1 (voir 1.3). On sait (voir proposition 1.17) que $P\Gamma_\infty(Nq_1, q_1) \simeq \Gamma_1(Nq_1, q_1) \ltimes H(\mathbb{Z})$. On considère alors le sous-groupe d'indice 2 de $\Gamma_1(Nq_1, q_1) \ltimes H(\mathbb{Z})$ suivant :

$$\Gamma_1(Nq_1, q_1) \ltimes \mathrm{Ker}(v_H),$$

où $\mathrm{Ker}(v_H)$ désigne le noyau du caractère v_H :

$$\mathrm{Ker}(v_H) = \{((\lambda\ \mu); \kappa) \in H(\mathbb{Z}) \text{ tel que } \lambda + \mu + \lambda\mu + \kappa \equiv 0 \bmod 2\}.$$

On définit alors le sous-groupe correspondant de $\Gamma_\infty(Nq_1, q_1)$ par

$$\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b & a\mu-b\lambda \\ \lambda & * & \mu & \kappa \\ c & 0 & d & c\mu-d\lambda \\ 0 & 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty(Nq_1, q_1), ((\lambda\ \mu); \kappa) \in \operatorname{Ker}(\upsilon_H) \right\}.$$

On note $\mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty$ le sous-groupe parabolique du groupe des similitudes symplectiques rationnelles $\mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})$:

$$\mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q}), * \in \mathbb{Q} \right\}$$

et

$$\mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{Q}) \text{ tel que } {}^tMJM = r(M)J \text{ où } r(M) \in \mathbb{Q}^{+\,*} \right\}.$$

Le couple $(\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1), \mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty)$ est un couple de Hecke i.e.

$$\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) \subset \mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty \subset \widetilde{\Gamma_\infty^{(K)}}(Nq_1, q_1)$$

($\widetilde{\Gamma_\infty^{(K)}}(Nq_1, q_1)$ est le commensurateur de $\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)$ dans $\mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty$) car le couple $(\Gamma_\infty(1, 1), \mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty)$ en est un (voir [G5] et [G6]) : le groupe $\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)$ étant d'indice fini dans $\Gamma_\infty(1, 1)$, ces deux groupes ont le même commensurateur dans $\mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty$. On peut donc définir l'anneau de Hecke du couple $(\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1), \mathrm{GSp}^+(2, \mathbb{Q})_\infty)$, on le note $H(\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1))$, c'est l'ensemble des sommes formelles finies de doubles classes modulo $\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)$. Un élément, X, de cet anneau s'écrit donc

$$X = \sum_i a_i \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) M_i \Gamma_\infty(Nq_1, q_1) = \sum_j b_j \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) M_j.$$

Un tel élément, X, agit sur l'espace des formes modulaires pour $\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)$ de la manière standard, à savoir

$$(F\big|_k X)(Z) = \begin{cases} \sum_j r(M_j)^{k-1} b_j (F\big|_k M_j)(Z) & \text{si} \quad k \neq 0 \\ \sum_j b_j (F\big|_0 M_j)(Z) & \text{si} \quad k = 0 \end{cases},$$

où $r(M_j)$ est le rapport de la similitude symplectique M_j.
Rappelons également la définition de l'élément $T^{(N)}(m)$, où $m \in \mathbb{N}^*$, de l'anneau de Hecke $H(\Gamma_1(Nq_1, q_1), \mathcal{M}_2^+(Nq_1, q_1))$ où

$$\mathcal{M}_2^+(Nq_1, q_1) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2^+(\mathbb{Z}) \right.$$

$$\left. \text{tel que } a \equiv 1 \bmod Nq_1,\ b \equiv 0 \bmod q_1,\ c \equiv 0 \bmod Nq_1 \right\}$$

et $\mathcal{M}_2^+(\mathbb{Z})$ désigne l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant positif. L'élément $T^{(N)}(m)$ est alors défini par (voir proposition 3.36 de [Sh])

$$T^{(N)}(m) = \sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} \Gamma_1(Nq_1, q_1)\, \sigma_a \cdot \begin{pmatrix} a & q_1 b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

où $a > 0$ et $\sigma_a \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ tel que $\sigma_a \equiv \left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \bmod Nq_1$.
Nous aurons besoin de deux types d'opérateur de Hecke :

$$\Lambda_n = \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n^{-1} \end{smallmatrix}\right) \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) \in H(\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)) \tag{3.3}$$

(on notera par la suite

$$\delta_n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n^{-1} \end{smallmatrix}\right)) \tag{3.4}$$

et

$$T_-^{(N)}(m) = \sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)\, i_1(\sigma_a) \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & bq_1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in H(\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)), \tag{3.5}$$

où n et m sont des entiers naturels non nuls.

L'élément Λ_n réalise un plongement du monoïde $\mathbb{N}^*$ (que l'on peut voir comme étant l'anneau de Hecke , $H(\{1\}, \mathbb{N}^*)$, du groupe trivial) dans l'anneau de Hecke $H(\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1))$, de même l'élément $T_-^{(N)}(m)$ réalise un plongement de l'anneau de Hecke $H(\Gamma_1(Nq_1, q_1), \mathcal{M}_2^+(Nq_1, q_1))$ dans $H(\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1))$. Un calcul rapide montre que

Lemme 3.1

$$\Lambda_n = \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n^{-1} \end{smallmatrix}\right).$$

En effet, pour tout $M \in \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)$, on a

$$\delta_n M \delta_n^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & b & an\mu - bn\lambda \\ n\lambda & * & n\mu & n^2\kappa \\ c & 0 & d & cn\mu - dn\lambda \\ 0 & 0 & 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)$$

car $((n\lambda\ n\mu); n^2\kappa) \in \mathrm{Ker}(v_H)$ si $((\lambda\ \mu); \kappa) \in \mathrm{Ker}(v_H)$.

3.1.2 Les opérateurs Λ_n et $T_-^{(N)}(m)$

Nous allons faire agir les deux opérateurs de Hecke introduits ci-dessus sur l'espace des formes de Jacobi $J_{k,t}(\Gamma_0(N, N_1; S), \chi \times v_H^{2t})$, où $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}/2$ et $\chi : \Gamma_0(N) \to \mathbb{C}^*$ est un caractère d'ordre fini. Nous avons besoin d'un caractère de $\Gamma_0(N)$ car dans la formule de $T_-^{(N)}(m)$ apparaît la matrice σ_a qui est un élément de ce groupe. La forme du caractère n'est pas fortuite puisque le caractère binaire non trivial v_H ne peut apparaître que si l'indice de la forme de Jacobi est demi-entier (voir la proposition (2.7)). Une condition nécessaire pour pouvoir appliquer ces deux opérateurs à une telle forme de Jacobi est :

$$\Gamma_1(Nq_1, q_1) \subseteq \mathrm{Ker}(\chi) \tag{3.6}$$

pour un certain entier naturel non nul q_1. Un rapide calcul nous indique

Lemme 3.2 *Si $N_1|q_1$ alors $\Gamma_1(Nq_1, q_1)$ est un sous-groupe distingué de $\Gamma_0(N, N_1; S)$.*

Action de Λ_n

Lemme 3.3 *Soit $\phi \in J_{k,t}(\Gamma_0(N, N_1; S), \chi\times v_H^{2t})$ et supposons que la condition (3.6) soit réalisée.*
Alors $\phi\big|_k\Lambda_n \in J_{k,n^2t}(\Gamma_0(N, N_1; S), \chi \times v_H^{2nt})$.

Démonstration. Soit $\widetilde{\phi}(Z) = \phi(\tau, z)e^{2i\pi t\omega}$, on a

$$\widetilde{\phi}\big|_k\Lambda_n = \widetilde{\phi}\big|_k\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&n&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&n^{-1}\end{pmatrix} = \widetilde{\phi}\big|_k\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&n&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&n^{-1}\end{pmatrix}$$

car la condition (3.6) est réalisée et $\widetilde{\phi}$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_0(N, N_1; S)^J$. On a donc

$$(\widetilde{\phi}\big|_k\Lambda_n)(Z) = n^k\phi(\tau, nz)e^{2i\pi n^2t\omega}$$

et on pose

$$(\phi\big|_k\Lambda_n)(\tau, z) = n^k\phi(\tau, nz). \tag{3.7}$$

Cette dernière équation assure l'holomorphie de $\phi\big|_k\Lambda_n$ dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$. Comme $\delta_n i_1(M) = \delta_n i_1(M)$ pour tout $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et

$$\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1)i_1(M) = i_1(M)\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) \tag{3.8}$$

pour tout $M \in \Gamma_0(N, N_1; S)$, on a

$$(\widetilde{\phi}\big|_k\Lambda_n)\big|_k i_1(M) = \chi(M)\widetilde{\phi}\big|_k\Lambda_n.$$

Soit $(\lambda, \mu, \kappa) \in \mathbb{Z}^3$, on a

$$(\widetilde{\phi}\big|_k \Lambda_n)\big|_k [(\lambda\ \mu); \kappa] = (\widetilde{\phi}\big|_k [(n\lambda\ n\mu); n^2\kappa])\big|_k \Lambda_n$$

$$\widetilde{\phi}\big|_k \Lambda_n = (-1)^{2t((n\lambda+n\mu)+n^2(\lambda\mu+\kappa))} \widetilde{\phi}\big|_k \Lambda_n =$$

$$v_H^{2nt}(((\lambda\ \mu); \kappa)) \widetilde{\phi}\big|_k \Lambda_n$$

car $n^2 \equiv n \bmod 2$. Il ne reste plus qu'à vérifier la forme des développements de Fourier de $\phi\big|_k \Lambda_n$ aux différents points paraboliques de $\Gamma_0(N, N_1; S)$. Soit $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, on sait que

$$(\phi\big|_{k,t} M)(\tau, z) = \sum_{\substack{(m,l)\in\mathbb{Q}^2,\ m\geqslant 0 \\ 4mt-l^2\geqslant 0}} c_M(m, l) q^m r^l$$

donc le développement de Fourier de $\phi\big|_k \Lambda_n$ au point parabolique de $\Gamma_0(N, N_1; S)$ représenté par la matrice M est de la forme, voir formule (3.7),

$$(\phi\big|_k \Lambda_n)\big|_k M)(\tau, z) = \sum_{\substack{(m,l)\in\mathbb{Q}^2,\ m\geqslant 0 \\ 4mt-l^2\geqslant 0}} n^k c_M(m, l) q^m r^{nl} =$$

$$\sum_{\substack{(m,l)\in\mathbb{Q}^2,\ m\geqslant 0 \\ 4mn^2t-l^2\geqslant 0}} n^k c_M(m, \frac{l}{n}) q^m r^l.$$

$\square$

Remarque

L'égalité (3.8) est due en partie à la propriété suivante : la conjugaison par $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ ne modifie pas le caractère v_H. En effet, on a

$$i_1(M)[(\lambda\ \mu); \kappa] i_1(M)^{-1} = [(\lambda d - \mu c\ a\mu - b\lambda); \kappa]$$

et

$$v_H(((\lambda d - \mu c\ a\mu - b\lambda); \kappa)) = (-1)^{\lambda(d+b+bd)+\mu(a+c+ac)+\lambda\mu(ad-bc)+\kappa} = (-1)^{\lambda+\mu+\lambda\mu+\kappa},$$

car $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

Action de $T_-^{(N)}(m)$

Lemme 3.4 *Soit $\phi \in J_{k,t}(\Gamma_0(N,N_1;S), \chi \times v_H^\epsilon)$, où $\epsilon = 0$ ou 1. Supposons que la condition (3.6) soit réalisée, $(m, 2^\epsilon q_1)=1$ et $N_1|q_1$.*
Alors $\phi\big|_k T_-^{(N)}(m) \in J_{k,mt}(\Gamma_0(N,N_1;S), \chi_m \times v_H^\epsilon)$, où χ_m est un caractère de $\Gamma_0(N,N_1;S)$ défini par

$$\chi_m(M) := \chi(M_m),$$

où pour toute matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N,N_1;S)$, la matrice M_m est donnée par

$$M_m = \left(\begin{smallmatrix} \alpha+\alpha_1 N q_1 & \beta_m \\ m\gamma+\gamma_1 N q_1 & \delta+\delta_1 N q_1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N,N_1;S)$$

et $m\beta_m \equiv \beta \bmod q_1$.

Démonstration. Précisons tout d'abord l'opérateur défini sur l'espace des formes de Jacobi vérifiant la condition (3.6) par $T_-^{(N)}(m)$:

$$(\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m))(Z) = m^{k-1} \sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} d^{-k}\chi(\sigma_a)\phi(\frac{a\tau+bq_1}{d}, az)\, e^{2\pi i m t\omega}. \qquad (3.9)$$

On pose alors

$$(\phi\big|_k T_-^{(N)}(m))(\tau,z) = m^{k-1} \sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} d^{-k}\chi(\sigma_a)\phi(\frac{a\tau+bq_1}{d}, az).$$

Cette expression montre que $\phi\big|_k T_-^{(N)}(m)$ est holomorphe dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$. Pour simplifier les notations, on pose

$$\widetilde{\psi}(Z) = (\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m))(Z) = (\phi\big|_k T_-^{(N)}(m))(\tau,z)e^{2\pi i m t\omega}.$$

Transformation abélienne

Soit $(\lambda,\mu,\kappa) \in \mathbb{Z}^3$, on doit montrer que $\widetilde{\psi}\big|_k[((\lambda\ \mu);\kappa)] = v_H(((\lambda\ \mu);\kappa))^\epsilon\widetilde{\psi}$. Un calcul direct donne :

$$\widetilde{\psi}\big|_k[((\lambda\ \mu);\kappa)] = \sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq)=1 \\ b \bmod d}} v_H(((\lambda'\ \mu');\kappa'))^\epsilon(\widetilde{\phi}\big|_k i_1(\sigma_a)M(a,b,d)),$$

où $M(a,b,d) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 & bq_1 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et

$\lambda' = \lambda d\delta - a\gamma\mu + \lambda b\gamma q_1, \quad \mu' = a\alpha\mu - \lambda b\alpha q_1 - \lambda d\beta, \quad \kappa' = \kappa m \quad$ et $\sigma_a = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$.

Si $\epsilon = 0$ i.e. $2t \equiv 0 \bmod 2$, il n'y a rien à prouver.
Si $\epsilon = 1$ i.e. $2t \equiv 1 \bmod 2$, on doit prouver que $\lambda' + \mu' + \lambda'\mu' + \kappa' \equiv \lambda + \mu + \lambda\mu + \kappa \bmod 2$. De $(m, 2q_1) = 1$, on déduit que m est impair, donc a et d sont impairs $(ad = m)$ et

$$\lambda' \equiv \lambda\delta+\gamma\mu+\lambda b\gamma q_1 \bmod 2, \quad \mu' \equiv \alpha\mu+\lambda b\alpha q_1-\lambda\beta \bmod 2 \quad \text{et} \quad \kappa' \equiv \kappa \bmod 2.$$

Ce qui nous amène à :

$$\lambda' + \mu' + \lambda'\mu' \equiv \lambda(\delta + \beta + \beta\delta + bq_1(\alpha + \gamma + \alpha\gamma + \alpha\delta - \beta\gamma))+$$
$$\mu(\alpha + \gamma + \alpha\gamma) + \lambda\mu(\alpha\delta - \beta\gamma) \bmod 2.$$

En utilisant le fait que $\alpha+\gamma+\alpha\gamma \equiv 1 \bmod 2$ et $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$ car $\sigma_a \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, on en déduit

$$\lambda' + \mu' + \lambda'\mu' + \kappa' \equiv \lambda + \mu + \lambda\mu + \kappa \bmod 2.$$

Ceci démontre donc que $\phi\big|_k T_-^{(N)}(m)$ vérifie l'équation fonctionnelle (2.15).

Transformation modulaire

Montrons, dans un premier temps, que χ_m est un caractère de $\Gamma_0(N, N_1; S)$. L'application χ_m est définie : si $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a & bN_1 \\ cNq_1 & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N, N_1; S)$ alors $\alpha_m \in \Gamma_0(N, N_1; S)$ car $N_1 | q_1$ et m est inversible modulo q_1. Cette application ne dépend pas du choix de α_m modulo les conditions du lemme : si α_m et α'_m sont deux matrices vérifiant ces conditions alors $\alpha_m^{-1}\alpha'_m \in \Gamma(q_1) \subset \mathrm{Ker}(\chi)$. Pour conclure, on remarque que si α et β sont deux éléments de $\Gamma_0(N, N_1; S)$ alors $(\alpha\beta)_m = \alpha_m\beta_m$ modulo $\Gamma(q_1)$ donc

$$\chi_m(\alpha\beta) = \chi((\alpha\beta)_m) = \chi(\alpha_m)\chi(\beta_m) = \chi_m(\alpha)\chi_m(\beta)$$

et

$$\chi_m(I_2) = \chi((I_2)_m) = \chi(I_2) = 1.$$

Vérifions maintenant la modularité de $\phi\big|_k T_-^{(N)}(m)$. Soit $M \in \Gamma_0(N, N_1; S)$ alors

$$(\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m))\big|_k i_1(M) = \widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m) i_1(M).$$

On réécrit l'opérateur $T_-^{(N)}(m)$ de la manière suivante :

$$T_-^{(N)}(m) = \sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1, q_1) M_a,$$

où
$$M_a = i_1(\sigma_a)\cdot\begin{pmatrix} a & 0 & bq_1 & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha' Nq_1 & 0 & \beta' q_1 & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ \gamma' Nq_1 & 0 & m+\delta' Nq_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$
Un calcul direct donne, la matrice M_m est donnée dans le lemme,
$$i_1(M_m^{-1})M_a i_1(M) = \begin{pmatrix} 1+\tilde\alpha Nq_1 & 0 & \tilde\beta q_1 & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ \tilde\gamma Nq_1 & 0 & m+\tilde\delta Nq_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$
c'est donc un élément de $T_-^{(N)}(m)$. Le groupe $\Gamma_1(Nq_1,q_1)$ étant distingué dans $\Gamma_0(N,N_1;S)$ (voir le lemme 3.2), on vérifie alors que
$$\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)i_1(M_m^{-1})M_a i_1(M) \neq \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)i_1(M_m^{-1})M_{a'} i_1(M)$$
pour a et a' distincts premiers avec Nq_1. On en déduit que
$$\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m)i_1(M) = (\widetilde{\phi}\big|_k i_1(M_m))\big|_k T_-^{(N)}(m) = \chi(M_m)\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m).$$
Il ne reste donc plus qu'à vérifier la forme des développements de Fourier de $\phi\big|_k T_-^{(N)}(m)$ aux différents points paraboliques de $\Gamma_0(N,N_1;S)$.
Soit $M'\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, on a
$$(\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m))\big|_k i_1(M') = \widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m)i_1(M') = \sum_{\substack{ad=m\\(a,Nq_1)=1\\ b \bmod d}} \widetilde{\phi}\big|_k M_a i_1(M').$$
Posons $N_a = M_a i_1(M')$, la matrice N_a est alors de la forme
$$N_a = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & \beta' & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ \gamma' & 0 & \delta' & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
avec $\alpha'\delta'-\beta'\gamma' = m$. Il existe alors une matrice $M\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ telle que
$$N_a = i_1(M)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
où $\alpha\delta = m$ et $\alpha>0$. On en déduit alors que les développements de Fourier de $\phi\big|_k T_-^{(N)}(m)$ ont la forme requise. En effet,
$$((\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m))\big|_k i_1(M'))(Z) = \sum_{\substack{ad=m\\(a,Nq_1)=1\\ b \bmod d}} ((\widetilde{\phi}\big|_k i_1(M))\big|_k \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix})(Z).$$

Posons $\widetilde{\phi}\big|_k i_1(M) = \widetilde{\phi_M}$, on a alors

$$((\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m))\big|_k i_1(M'))(Z) = \sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} (\delta)^{-k} \widetilde{\phi_M}\left(\begin{pmatrix} \frac{\alpha\tau+\beta}{\delta} & \alpha z \\ \alpha z & m\omega \end{pmatrix}\right).$$

Par hypothèses, on sait que

$$\widetilde{\phi_M}(Z) = \sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0 \\ 4nt-l^2\geqslant 0}} c_M(n,l) q^n r^l s^t$$

donc

$$((\widetilde{\phi}\big|_k T_-^{(N)}(m))\big|_k i_1(M'))(Z) = \sum_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Q}^2,\ n\geqslant 0 \\ 4nmt-l^2\geqslant 0}} d_M(n,l) q^n r^l s^{mt}$$

où les coefficients $d_M(n,l)$ sont des combinaisons linéaires des coefficients $c_M(n,l)$. Cette dernière formule achève la preuve du lemme. $\square$

Remarque
Si, dans le lemme précédent, on suppose que la forme ϕ est parabolique alors $\phi\big|_k T_-^{(N)}(m)$ est également parabolique : cela est dû à la formule précédente.

3.2 Théorème principal

Le théorème que nous allons énoncer est une généralisation à un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ du théorème 1.12 de V. Gritsenko (voir [GN2]).

Théorème 3.5 *Soit $\phi \in J_{k,t}(\Gamma_0(N,N_1;S), \chi\times v_H^{2t})$, où $k\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{N}/2$, $N_1|N$ et $\chi:\Gamma_0(N)\to\mathbb{C}^*$ est un caractère d'ordre fini tel que $\mathrm{Ker}(\chi)\supset\Gamma_1(Nq_1,q_1)$ et $N_1|q_1$. On suppose que q_1 est un diviseur de 24 et $\chi\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)= e^{\frac{2i\pi}{q_1}}$.*

1. *Si $q_1t\in\mathbb{N}$, $q_1>1$ ou $q_1=1$ et $c(0,0)=0$ où $c(0,0)$ est le coefficient constant du développement de Fourier de ϕ à l'infini. On fixe $\mu\in(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z})^*$. Alors la fonction*

$$F_\phi(Z) = \mathrm{R}_\mu(\phi)(Z) = \sum_{\substack{m\equiv\mu \bmod q_1 \\ m>0}} \widetilde{\phi}\,|_k\, T_-^{(N)}(m)(Z)$$

est une forme modulaire de poids k pour le groupe $\Gamma_{q_1t}^+(N,N_1,L,1;S)$ avec un caractère $\chi_{t,\mu}$ où L est un entier tel que $N|Lq_1t$ et $L|N$. Si $\mu=1$ alors

$\mathrm{R}(\phi) = \mathrm{R}_1(\phi) \not\equiv 0$ pour $\phi \not\equiv 0$. Si $\mathrm{R}_\mu(\phi) \not\equiv 0$, alors le caractère $\chi_{t,\mu}$ est induit par le caractère $\chi_\mu \times v_H^{2t}$ du groupe de Jacobi, où χ_μ est un caractère de $\Gamma_0(N, N_1; S)$ μ-conjugué à χ (voir lemme 3.4), et par les relations

$$\chi_{t,\mu}(V_{q_1 t}) = (-1)^k, \quad \chi_{t,\mu}([(0\ 0); \frac{\kappa N_1}{q_1 t}]) = e^{(2i\pi \frac{\mu\kappa N_1}{q_1})} \quad (\kappa \in \mathbb{Z}).$$

2. *Si $q_1 t \in \mathbb{N}$, $q_1 = 1$ (donc $N_1 = 1$) et $c(0,0) \neq 0$. On suppose alors que le caractère χ de $\Gamma_0(N, 1; S)$ est induit par un caractère de Dirichlet primitif modulo N, noté χ_N : $\chi((\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix})) = \chi_N(d)$ pour tout $(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}) \in \Gamma_0(N, 1; S)$ et $\chi_N(-1) = (-1)^k$ (sauf si $k = 2$ et χ est le caractère trivial modulo N). Alors*

$$F_\phi(Z) = \mathrm{R}(\phi)(Z) = c(0,0)E_k(\tau, \chi_N) + \sum_{m \geqslant 1} \widetilde{\phi}\,|_k\, T_-^{(N)}(m)(Z),$$

où

$$E_k(\tau, \chi_N) = 2^{-1}L(1-k, \chi_N) + \sum_{n \geqslant 1} \sum_{a|n} \chi_N(a)\, a^{k-1} q^n$$

est la série d'Eisenstein de poids k pour $\Gamma_0(N)$ avec le caractère χ_N, est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_t^+(N, 1, L, 1; S)$ avec le caractère χ_N.

3. *Si $q_1 t$ est demi-entier alors $\mathrm{R}_\mu(\phi)$ est une forme modulaire de poids k pour le groupe $\delta_2^{-1}\Gamma_{4q_1 t}^+(N, N_1, L, 1; S)\delta_2$ avec le caractère $\chi_\mu \times v_H$.*

Remarques

(i) Les conditions $q_1 > 1$ et $\chi\big((\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})\big) = e^{\frac{2i\pi}{q_1}}$ impliquent que $c(0,0) = 0$. C'est pour cela que dans le cas **1** , si $q_1 = 1$, on impose cette condition.

(ii) Le groupe paramodulaire pour lequel ce relèvement est modulaire a plusieurs niveaux. Cela est dû aux conditions qui sont apparues dans le chapitre 1 pour obtenir des sous-groupes de Γ_t. Par exemple, lorsque $S = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ et t est entier, la condition $N | Lq_1 t$ n'est plus nécessaire, on peut donc la supprimer et prendre $L = 1$ car $N_1 | q_1 t$.

(iii) Dans le cas **2**, on a exclu le cas $k = 2$ et χ est le caractère trivial modulo N. Cela est dû à la définition de la série d'Eisenstein qui n'est pas la même dans ce cas. On peut quand même obtenir un relèvement arithmétique dans ce cas. Pour cela, on pose

$$\mathrm{R}(\phi) = c(0,0) f_2(\ .\ ; \chi_0, \chi) + \sum_{m \geqslant 1} \widetilde{\phi}\,|_2\, T_-^{(N)}(m),$$

où χ_0 est le caractère principal, χ est le caractère trivial modulo N et

$$f_2(\tau; \chi_0, \chi) = -\frac{1}{24}(1 - N) + \sum_{n \geqslant 1} \Big(\sum_{\substack{d|n \\ (d,N)=1}} d \Big) q^n$$

pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. On sait que $f_2 \in M_2(\Gamma_0(N))$ (voir [Mi] preuve du théorème 4.7.1).

Démonstration. Nous allons montrer, dans un premier temps, que ce relèvement est modulaire. Tous les résultats apparaissant dans cette partie de la preuve sont donc vrais sous réserve de convergence. Cette convergence sera prouvée dans la deuxième partie de la démonstration où nous verrons qu'elle est uniforme et absolue, ce qui permet toutes les interversions dans les sommations suivantes.
Supposons que $q_1 t$ soit entier.

Compte tenu des hypothèses de notre théorème, la fonction ϕ possède un développement de Fourier de la forme suivante :

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{l \equiv 2t \bmod 2 \\ n \geqslant 0,\ n \equiv 1 \bmod q_1 \\ \frac{4nt}{q_1} \geqslant \frac{l^2}{4}}} c(n,l) e^{2i\pi(\frac{n}{q_1}\tau + \frac{l}{2}z)}.$$

Donc

$$\phi(\frac{a\tau + bq_1}{d}, az) = \sum_{\substack{l \equiv 2t \bmod 2 \\ n \geqslant 0,\ n \equiv 1 \bmod q_1 \\ \frac{4nt}{q_1} \geqslant \frac{l^2}{4}}} c(n,l) e^{2i\pi\left((\frac{an}{dq_1})\tau + \frac{l}{2}az + \frac{nb}{d}\right)}$$

et, comme

$$\sum_{b \bmod d} e^{2i\pi \frac{nb}{d}} = \begin{cases} d & \text{si } d|n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

la définition de l'opérateur de Hecke (3.9) nous donne

$$(\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m))(Z) = \tag{3.11}$$

$$m^{k-1} \sum_{\substack{ad=m, a>0 \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} d^{-k} \chi(\sigma_a) \sum_{\substack{l \equiv 2t \bmod 2 \\ n \geqslant 0,\ n \equiv 1 \bmod q_1 \\ \frac{4nt}{q_1} \geqslant \frac{l^2}{4}}} c(n,l) e^{2i\pi\left(\frac{n(a\tau + bq_1)}{dq_1} + \frac{al}{2}z + mt\omega\right)}$$

$$= \sum_{\substack{ad=m, a>0 \\ (a,Nq_1)=1}} a^{k-1} \chi(\sigma_a) \sum_{\substack{l \equiv 2t \bmod 2 \\ n_1 \geqslant 0,\ dn_1 \equiv 1 \bmod q_1 \\ \frac{4n_1 dt}{q_1} \geqslant \frac{l^2}{4}}} c(dn_1, l) e^{2i\pi(\frac{an_1}{q_1}\tau + \frac{al}{2}z + adt\omega)}.$$

La forme de Jacobi ϕ possède le caractère v_H du groupe de Heisenberg (vu comme sous-groupe du groupe de Jacobi) si et seulement si $2t \equiv 1 \mod 2$.

Si t est demi-entier alors q_1 est pair car $tq_1 \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout entier m premier avec q_1 le caractère de la forme de Jacobi $\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m)$ provenant du groupe de Heisenberg est v_H. La partie du caractère de $\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m)$ provenant de $\Gamma_0(N, N_1; S)$ ne dépend que de m modulo q_1 (voir lemme 3.4), puisque ϕ satisfait l' hypothèse (3.6) i.e. pour tout $m \equiv \mu \bmod q_1$, on a $\chi_m \equiv \chi_\mu$. Donc le caractère de la forme de Jacobi $\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m)$ est $\chi_\mu \times v_H^{2t}$ dès que $m \equiv \mu \bmod q_1$. Cette congruence est imposée dans la définition de la fonction F_ϕ.

Lemme 3.6 *Soit q_1 un diviseur (positif) de 24, $\mu \in (\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z})^*$, a et d deux entiers naturels tels que $ad = m$, où $m \equiv \mu \bmod q_1$.*
Alors, pour tout entier naturel n, la condition $dn \equiv 1 \bmod q_1$ équivaut à $an \equiv \mu \bmod q_1$.

La preuve de ce lemme est évidente une fois remarqué que pour tout $x \in (\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^*$, on a $x^2 \equiv 1 \mod 24$. Le nombre 24 est le plus grand entier possédant cette propriété. Cette propriété est également vraie pour tout diviseur de 24.

Supposons que $c(0,0) = 0$.
La définition de F_ϕ donne

$$F_\phi(Z) =$$

$$\sum_{\substack{m\equiv\mu \bmod q_1\\ m>0}} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\ (a,Nq_1)=1}} a^{k-1}\chi(\sigma_a) \sum_{\substack{l\equiv 2t \bmod 2\\ n_1\geqslant 0,\ dn_1\equiv 1 \bmod q_1\\ \frac{4n_1dt}{q_1}\geqslant\frac{l^2}{4}}} c(dn_1,l)e^{2i\pi(\frac{an_1}{q_1}\tau+\frac{al}{2}z+adt\omega)}$$

$$= \sum_{\substack{a>0,\,d>0\\ ad\equiv\mu \bmod q_1\\ (a,N)=1}} a^{k-1}\chi(\sigma_a) \sum_{\substack{l\equiv 2t \bmod 2\\ n_1\geqslant 0,\ an_1\equiv\mu \bmod q_1\\ \frac{4n_1dt}{q_1}\geqslant\frac{l^2}{4}}} c(dn_1,l)e^{2i\pi(\frac{an_1}{q_1}\tau+\frac{al}{2}z+adt\omega)}$$

$$= \sum_{\substack{n,\,m>0\\ n,m\equiv\mu \bmod q_1\\ l\equiv 2t \bmod 2\\ \frac{4nmt}{q_1}\geqslant\frac{l^2}{4}}} \sum_{\substack{a|(n,l,m)\\ (a,N)=1\\ a>0}} a^{k-1}\,\chi(\sigma_a)\,c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})e^{2i\pi(\frac{n}{q_1}\tau+\frac{l}{2}z+mt\omega)}.$$

Les fonctions $\phi|_k T_-^{(N)}(m)$ sont des formes modulaires pour le groupe de Jacobi $\Gamma^J(N, N_1; S) \simeq \Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes H(\mathbb{Z})$, elles sont donc modulaires pour $\Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes \mathcal{H}(L, 1, N_1)$. Le sous-groupe parabolique $\Gamma_{q_1t,\infty}(N, N_1, L, 1; S)$ (voir (1.14)) diffère du groupe $\Gamma_0(N, N_1; S) \ltimes \mathcal{H}(L, 1, N_1)$ par son centre. Pour tout $m \equiv \mu \bmod q_1$, l'action du centre est donnée par

$$\left(\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m)\right)\big|_k [(0\ 0); \frac{\kappa N_1}{q_1 t}] = e^{2i\pi \frac{\kappa N_1 \mu}{q_1}} \left(\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m)\right).$$

Cela provient du calcul suivant :

$$\left(\left(\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m)\right) \big|_k [(0\ 0); \frac{\kappa N_1}{q_1 t}]\right)(Z) = \phi_m(\tau, z) e^{2i\pi m t \omega} e^{2i\pi m t \frac{\kappa N_1}{q_1 t}}$$

car

$$[(0\ 0); \frac{\kappa N_1}{q_1 t}]\langle\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\kappa N_1}{q_1 t} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \langle\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right)\rangle = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega + \frac{\kappa N_1}{q_1 t} \end{smallmatrix}\right)$$

donc

$$(F_\phi\big|_k [(0\ 0); \frac{\kappa N_1}{q_1 t}])(Z) = \sum_{\substack{m \equiv \mu \bmod q_1 \\ m > 0}} \phi_m(\tau, z) e^{2i\pi m t \omega} e^{2i\pi m t \frac{\kappa N_1}{q_1 t}} = e^{2\pi i \frac{\kappa N_1 \mu}{q_1}} F_\phi(Z),$$

où $\phi_m = (\phi\big|_k T_-^{(N)}(m))$. Ainsi la fonction F_ϕ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_{q_1 t, \infty}(N, N_1, L, 1; S)$ avec le caractère $\chi_\mu \times v_H^{2t} \times \exp\left(2i\pi(\frac{{}^*\mu N_1}{q_1})\right)$. Le développement de Fourier de F_ϕ est également invariant par la transformation $\{\tau \mapsto q_1 t \omega,\ \omega \mapsto (q_1 t)^{-1} \tau\}$. Cette transformation est induite par $V_{q_1 t}$ (voir (1.15)). Donc

$$F_\phi|_k V_{q_1 t} = (-1)^k F_\phi.$$

Le groupe $\Gamma_{q_1 t, \infty}(N, N_1, L, 1; S)$ et l'involution $V_{q_1 t}$ engendrent le groupe $\Gamma_{q_1 t}^+(N, N_1, L, 1; S)$ car $N_1 | N$ (voir corollaire 1.28), ainsi ce relèvement est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_{q_1 t}^+(N, N_1, L, 1; S)$ avec le caractère annoncé dans le théorème si $c(0,0) = 0$. De plus si $\mu = 1$ alors $F_\phi \not\equiv 0$ dès que la forme ϕ n'est pas identiquement nulle : le premier coefficient de Fourier-Jacobi de F_ϕ étant ϕ.

Supposons maintenant que $q_1 = 1$ donc $t \in \mathbb{N}$, $N_1 = 1$ et $c(0,0) \neq 0$.
Traitons dans un premier temps le cas $k \neq 2$ ou χ n'est pas le caractère trivial modulo N.
L'équation (3.11) s'écrit alors

$$\left(\widetilde{\phi}|_k T_-^{(N)}(m)\right)(Z) = \tag{3.12}$$

$$\sum_{\substack{ad = m, a > 0 \\ (a, N) = 1}} a^{k-1} \chi_N(a) \sum_{\substack{l \in \mathbb{Z},\ n_1 \in \mathbb{N} \\ 4 n_1 d t \geqslant l^2}} c(d n_1, l) q^{a n_1} r^{a l} s^{m t}.$$

On a alors

$$F_\phi(Z) = c(0,0)E_k(\tau,\chi_N)+\sum_{m\geqslant 1}\sum_{\substack{ad=m,a>0\\(a,N)=1}} a^{k-1}\chi_N(a)\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z},\ n_1\in\mathbb{N}\\ 4n_1dt\geqslant l^2}} c(dn_1,l)q^{an_1}r^{al}s^{mt}$$

$$= c(0,0)\left(E_k(\tau,\chi_N)+\sum_{m\geqslant 1}\sum_{\substack{ad=m,a>0\\(a,N)=1}} a^{k-1}\chi_N(a)s^{mt}\right)+$$

$$\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 4mnt-l^2\geqslant 0}}\sum_{\substack{a|(n,l,m)\\(a,N)=1\\a>0}} a^{k-1}\,\chi_N(a)\,c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})q^n r^l s^{tm}.$$

Par définition, $\chi_N(a)=0$ si $(a,N)\neq 1$, on a donc (voir [Hi])

$$\sum_{m\geqslant 1}\sum_{\substack{ad=m,a>0\\(a,N)=1}} a^{k-1}\chi_N(a)s^{mt} = \sum_{m\geqslant 1}\sum_{a|m,a>0} a^{k-1}\chi_N(a)s^{mt} =$$

$$E_k(t\omega,\chi_N)-2^{-1}L(1-k,\chi_N),$$

où $L(.,\chi_N)$ est la L-fonction de Dirichlet du caractère χ_N i.e.

$$L(s,\chi_N)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\chi_N(n)}{n^s}.$$

Cela donne donc

$$F_\phi(Z) = c(0,0)(E_k(\tau,\chi_N)+E_k(t\omega,\chi_N)-2^{-1}L(1-k,\chi_N))+ \tag{3.13}$$

$$\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 4mnt-l^2\geqslant 0}}\sum_{\substack{a|(n,l,m)\\(a,N)=1\\a>0}} a^{k-1}\,\chi_N(a)\,c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})q^n r^l s^{tm}.$$

La série d'Eisenstein $E_k(.,\chi_N)$ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_0(N)$ avec le caractère χ_N (voir [Hi, Proposition 5.1.2]), on peut donc la voir comme une forme de Jacobi de poids k et d'indice 0 avec le caractère χ_N pour le sous-groupe $\Gamma_0(N,1;S)$. La fonction F_ϕ est donc modulaire pour le groupe $\Gamma_{t,\infty}(N,1,L,1;S)$. La formule (3.13) prouve l'invariance de la fonction F_ϕ par la transformation $(\omega\mapsto\tau/t,\ \tau\mapsto t\omega)$ qui est induite par V_t. En utilisant comme précedemment le corollaire 1.28 on obtient que la fonction F_ϕ est une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_t^+(N,1,L,1;S)$ avec le caractère χ_N.

Si $k = 2$ et χ est le caractère trivial modulo N, on obtient alors de la même manière

$$F_\phi(Z) = c(0,0)(f_2(\tau;\chi_0,\chi) + f_2(t\omega;\chi_0,\chi) + \frac{1}{24}(1-N))+ \tag{3.14}$$

$$\sum_{\substack{m,n\geqslant 1\\ l\in\mathbb{Z}\\ 4mnt-l^2\geqslant 0}} \sum_{\substack{a|(n,l,m)\\ (a,N)=1\\ a>0}} a^{k-1}\, c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})q^n r^l s^{tm}.$$

On peut alors conclure comme précédemment : la fonction F_ϕ est une forme modulaire de poids 2 pour le groupe $\Gamma_t^+(N,1,L,1;S)$.

Si $q_1 t$ est demi-entier ($q_1|24$ donc t est demi-entier et $q_1 = 1$ ou 3), on introduit la forme suivante :

$$\widetilde{\psi} = 2^{-k}(\widetilde{\phi}\big|_k \Lambda_2).$$

On sait que $\psi \in J_{k,4t}(\Gamma_0(N,N_1;S),\chi\times v_H)$ (voir lemme 3.3). On peut appliquer les cas **1** ou **2** si $q_1 = 1$ (donc $N_1 = 1$) et $c(0,0)\neq 0$ (l'action de Λ_2 n'affectant pas la variable τ d'un élément Z de $\mathbb{H}_2$) de notre théorème à ψ. On en déduit que F_ψ se transforme comme une forme modulaire de poids k pour $\Gamma_{4t}^+(N,N_1,L,1;S)$ avec le caractère $\chi_{4t,\mu}$. Le lemme suivant va nous permettre de conclure :

Lemme 3.7 *Les opérateurs Λ_n et $T_-^{(N)}(m)$ commutent.*

Démonstration. On a

$$T_-^{(N)}(m)\Lambda_n = \left(\sum_{\substack{ad=m\\ (a,Nq_1)=1\\ b \bmod d}} \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)M_a\right)\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)\delta_n =$$

$$\sum_{\substack{ad=m\\ (a,Nq_1)=1\\ b \bmod d}} \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)M_a\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)\delta_n = \sum_{\substack{ad=m\\ (a,Nq_1)=1\\ b \bmod d}} \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)M_a\delta_n,$$

où les matrices M_a et δ_n ont été définies précédemment (voir 3.10 et 3.4). Un calcul rapide montre que $M_a\delta_n = \delta_n M_a$ donc

$$T_-^{(N)}(m)\Lambda_n = \sum_{\substack{ad=m\\ (a,Nq_1)=1\\ b \bmod d}} \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)\delta_n M_a =$$

$$\sum_{\substack{ad=m \\ (a,Nq_1)=1 \\ b \bmod d}} \Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)\delta_n\Gamma_\infty^{(K)}(Nq_1,q_1)M_a = \Lambda_n T_-^{(N)}(m).$$

$\square$

On en déduit que

$$F_\psi = 2^{-k}F_\phi\big|_k\delta_2,$$

donc F_ϕ se transforme comme une forme modulaire de poids k pour le groupe $\delta_2^{-1}\Gamma_{4q_1t}^+(N,N_1,L,1;S)\delta_2$ avec le caractère $\chi_\mu \times v_H$.

Il reste donc à prouver la convergence de la série définissant $\mathrm{R}_\mu(\phi)$. Nous allons prouver la convergence de cette série dans le cas où $c(0,0)=0$. Nous verrons à la suite de cette preuve pourquoi les autres cas en découlent.
Notons

$$Z = X+iY = \begin{pmatrix}\tau & z\\ z & \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u & x\\ x & u_1\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}v & y\\ y & v_1\end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2,$$

l'appartenance de Z à $\mathbb{H}_2$ implique alors que $v>0$, $v_1>0$ et $y^2<vv_1$. Reprenons la formule établie précédemment pour F_ϕ :

$$F_\phi(Z) = \sum_{\substack{n,\,m>0 \\ n,m\equiv\mu \bmod q_1 \\ l\equiv 2t \bmod 2 \\ \frac{4nmt}{q_1}\geqslant\frac{l^2}{4}}} \sum_{\substack{a|(n,l,m) \\ (a,N)=1 \\ a>0}} a^{k-1}\,\chi(\sigma_a)\,c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})e^{2i\pi(\frac{n}{q_1}\tau+\frac{l}{2}z+mt\omega)}. \qquad (3.15)$$

On a donc

$$|F_\phi(Z)| \leqslant \sum_{\substack{n,m\in\mathbb{N}^*,l\in\mathbb{Z} \\ \frac{4nmt}{q_1}\geqslant\frac{l^2}{4}}} \Big|\sum_{\substack{a|(n,l,m) \\ (a,N)=1 \\ a>0}} a^{k-1}\,\chi(\sigma_a)\,c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})\Big| e^{-2\pi(\frac{n}{q_1}v+\frac{l}{2}y+mtv_1)}$$

$$\leqslant \sum_{T=\begin{pmatrix}\frac{n}{q_1} & \frac{l}{4}\\ \frac{l}{4} & mt\end{pmatrix}\geqslant 0} |\alpha(T)|e^{-2\pi\mathrm{Tr}(TY)},$$

où

$$|\alpha(T)| = \Big|\sum_{\substack{a|(n,l,m) \\ (a,N)=1 \\ a>0}} a^{k-1}\,\chi(\sigma_a)\,c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})\Big| \leqslant \sum_{\substack{a|(n,l,m) \\ a>0}} a^{k-1}\big|c(\frac{nm}{a^2},\frac{l}{a})\big|,$$

$T \geqslant 0$ signifie que la forme quadratique définie par la matrice T est semi-définie positive et $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M. Nous allons montrer qu'une forme de Jacobi de poids k et d'indice t, que nous supposons dans un premier temps entier, s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients dans l'anneau des formes modulaires de poids $k - \frac{1}{2}$ de séries thêta. Il s'agit d'une généralisation des résultats du paragraphe 5 de l'ouvrage M. Eichler et D. Zagier (voir [EZ]) à un sous-groupe de congruence.

Supposons que t soit entier. On a donc

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Q}, n \geqslant 0 \\ l \in \mathbb{Z} \\ 4nt - l^2 \geqslant 0}} c(n, l) q^n r^l = \sum_{\substack{\Delta \in \mathbb{Q}, \Delta \leqslant 0 \\ l \in \mathbb{Z}}} c(\Delta, l) q^{\frac{|\Delta|}{4}} q^{\frac{l^2}{4t}} r^l,$$

où $\Delta = \frac{l^2}{t} - 4n$. On a vu (voir 2.11) que $c(\Delta, l) = c(\Delta, l - 2t)$ i.e. $c(\Delta, l)$ ne dépend que de l modulo $2t$, on peut donc resommer l'expression précédente de la manière suivante :

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\substack{\Delta \in \mathbb{Q}, \Delta \leqslant 0 \\ \mu \in \mathbb{Z}/2t\mathbb{Z}}} c(\Delta, \mu) q^{\frac{|\Delta|}{4}} \sum_{\substack{l \equiv \mu \bmod 2t \\ l \in \mathbb{Z}}} q^{\frac{l^2}{4t}} r^l.$$

On pose alors

$$\vartheta_{t,\mu}(\tau, z) = \sum_{\substack{l \equiv \mu \bmod 2t \\ l \in \mathbb{Z}}} q^{\frac{l^2}{4t}} r^l \quad \text{et} \quad h_\mu(\tau) = \sum_{\substack{\Delta \in \mathbb{Q}, \Delta \leqslant 0 \\ \mu \in \mathbb{Z}/2t\mathbb{Z}}} c(\Delta, \mu) q^{\frac{|\Delta|}{4}}.$$

Les fonctions $\vartheta_{t,\mu}$ sont indépendantes de ϕ et les fonctions h_μ sont des formes modulaires de poids $k - \frac{1}{2}$ avec un système de multiplicateur pour un certain sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. On obtient finalement

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\mu \in (\mathbb{Z}/2t\mathbb{Z})} h_\mu(\tau) \vartheta_{t,\mu}(\tau, z).$$

On utilise alors les estimations obtenues par H. Petersson (voir [P]) pour les coefficients de Fourier d'une forme modulaire de poids quelconque avec un système de multiplicateur pour un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$:

$$|c(\Delta, \mu)| \leqslant C_\mu |\Delta|^{P_k},$$

où C_μ est une constante réelle positive et P_k est un polynôme en k. On obtient alors la majoration suivante pour $|\alpha(T)|$:

$$|\alpha(T)| \leqslant \sum_{\substack{a | (n,l,m) \\ a > 0}} a^{k-1} \left| c\left(\frac{nm}{a^2}, \frac{l}{a}\right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \mathrm{Max}\,\{C_\mu, \mu \in \mathbb{Z}/2t\mathbb{Z}\} \sum_{\substack{a|(n,l,m)\\ a>0}} a^{k-1}\left(\frac{4nmt}{a^2} - \frac{l^2}{a^2}\right)^{P_k}\\
&\leqslant C(4nmt - l^2)^{P_k} \sum_{\substack{a|(n,l,m)\\ a>0}} a^{k-1-2P_k}\\
&\leqslant C(4nmt - l^2)^{P_k} \sum_{a=1}^{n} a^{k-1-2P_k}\\
&\leqslant C(4nmt - l^2)^{P_k} n.
\end{aligned}$$

La dernière majoration est obtenue en prenant les formules exactes des polynômes P_k (voir [P]). Comme $\mathrm{Tr}(T) = \frac{n}{q_1} + mt$, il existe $\epsilon > 0$ et une constante $\tilde{C}$ tels que

$$|\alpha(T)| \leqslant \tilde{C} e^{\pi\epsilon \mathrm{Tr}(T)}$$

pour tout $T \geqslant 0$. Cette dernière majoration conduit à

$$|F_\phi| \leqslant \tilde{C} \sum_{T=\begin{pmatrix} \frac{n}{q_1} & \frac{l}{4}\\ \frac{l}{4} & mt\end{pmatrix} \geqslant 0} e^{-2\pi \mathrm{Tr}(T(Y - \frac{\epsilon}{2} I_2))}.$$

Donc, pour $Y > \epsilon I_2$, on a

$$|F_\phi| \leqslant \tilde{C} \sum_{T=\begin{pmatrix} \frac{n}{q_1} & \frac{l}{4}\\ \frac{l}{4} & mt\end{pmatrix} \geqslant 0} e^{-\pi\epsilon \mathrm{Tr}(T)} < \infty.$$

Nous avons donc démontré que la série définissant F_ϕ converge uniformément et absolument pour $Y > \epsilon I_2$ ainsi F_ϕ est holomorphe dans $\mathbb{H}_2$ comme limite uniforme de fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}_2$ dans le cas où t est entier et $c(0,0) = 0$. Si t est entier et $c(0,0) \neq 0$, on ajoute alors soit la série d'Eisenstein $E_k(.,\chi_N)$ qui est holomorphe dans $\mathbb{H}$ pour $k \geqslant 1$ (voir [Hi]), soit la forme $f_2(.\,;\chi_0,\chi)$ qui est également holomorphe dans $\mathbb{H}$.
Si t est demi-entier, on considère la fonction suivante :

$$\psi(\tau, z) = \phi(\tau, 2z) \text{ pour tout } (\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}.$$

La fonction ψ est donc un élément de $J_{k,4t}(\Gamma_0(N, N_1; S), \chi \times Id_H)$, on peut appliquer ce qui précède i.e. la série définissant F_ψ converge uniformément pour tout $Y > \epsilon I_2$. Comme $F_\psi(Z) = (F_\phi\big|_k \delta_2)(Z)$ pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$, on en déduit que la série définissant F_ϕ converge uniformément et absolument pour tout $Y > \epsilon I_2$. Donc, dans tous les cas de notre théorème, la fonction F_ϕ est bien définie et est holomorphe dans $\mathbb{H}_2$. Ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

Dans le théorème précédent, nous ne pouvons pas décider si le relèvement d'une forme de Jacobi parabolique est parabolique. Dans le cas particulier du groupe $\Gamma_0(N)$, on peut préciser cela. En effet, si $\phi \in J_{k,t}^{par}(\Gamma_0(N), \chi \times v_H^\epsilon)$ alors $\phi|_k T_-^{(N)}(m) \in J_{k,mt}^{par}(\Gamma_0(N), \chi_m \times v_H^\epsilon)$ (voir la remarque à la suite du lemme 3.4). Comme le groupe $\Gamma_t(N)$ et le groupe de Jacobi complet $SL_2(\mathbb{Z})^J$ engendrent le groupe paramodulaire Γ_t, pour obtenir toutes les composantes de bord de $\Gamma_t(N)\backslash\mathbb{H}_2$ (points ou courbes paraboliques), il suffit d'utiliser le sous-groupe parabolique $P_\infty = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} U & V \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q}),\ U \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q}) \right\}$. Le développement de Fourier de F_ϕ (voir 3.15) est de la forme

$$F_\phi(Z) = \sum_{T>0} \alpha(T) e^{2i\pi \mathrm{Tr}(TZ)}$$

dans le cas où ϕ est parabolique. Une matrice de $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q})$ de la forme $\left(\begin{smallmatrix} U & V \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ ne modifie pas la nature d'un tel développement de Fourier :

$$\begin{aligned}
(F_\phi\big|_k \left(\begin{smallmatrix} U & V \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{smallmatrix}\right))(Z) &= \sum_{T>0} (\det U)^k \alpha(T) e^{2i\pi \mathrm{Tr}(TV{}^tU)} e^{2i\pi \mathrm{Tr}(TUZ{}^tU)} \\
&= \sum_{T>0} (\det U)^k \alpha(T) e^{2i\pi \mathrm{Tr}(TV{}^tU)} e^{2i\pi \mathrm{Tr}({}^tUTUZ)} \\
&= \sum_{T>0} (\det U)^k \alpha({}^tU^{-1}TU^{-1}) e^{2i\pi \mathrm{Tr}(TVU^{-1})} e^{2i\pi \mathrm{Tr}(TZ)}
\end{aligned}$$

car $U \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Q})$ implique que ${}^tUTU > 0$ pour $T > 0$. On peut donc énoncer le corollaire suivant du théorème 3.5 :

Corollaire 3.8 *Soit $\phi \in J_{k,t}^{par}(\Gamma_0(N), \chi \times v_H^{2t})$, où $k \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}/2$ et $\chi : \Gamma_0(N) \to \mathbb{C}^*$ est un caractère d'ordre fini tel que $\mathrm{Ker}(\chi) \supset \Gamma_1(Nq_1, q_1)$. On suppose que q_1 est un diviseur de 24 et $\chi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = e^{\frac{2i\pi}{q_1}}$.*

1. *Si $q_1 t \in \mathbb{N}$, $q_1 > 1$ ou $q_1 = 1$ et $c(0,0) = 0$ où $c(0,0)$ est le coefficient constant du développement de Fourier de ϕ à l'infini. On fixe $\mu \in (\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z})^*$. Alors la fonction $\mathrm{R}_\mu(\phi)$ est une forme parabolique de poids k pour le groupe $\Gamma_{q_1 t}^+(N)$ avec le caractère $\chi_{t,\mu}$ décrit dans le théorème 3.5.*

2. *Si $q_1 t$ est demi-entier alors $\mathrm{R}_\mu(\phi)$ est une forme parabolique de poids k pour le groupe $\delta_2^{-1}\Gamma_{4q_1 t}(N)^+\delta_2$ avec le caractère $\chi_\mu \times v_H$.*

3.3 Exemples

Les exemples que nous allons donner dans cette section sont reliés aux dd-formes (voir chapitre 5). Tous les exemples que nous donnons sont des formes modulaires pour un sous-groupe Γ de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Q})$ s'annulant le long des Γ-translatées de la diagonale

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \ \tau, \omega \in \mathbb{H}_1 \right\} \subset \mathbb{H}_2. \tag{3.16}$$

Cette propriété est due à la présence du facteur ϑ ($\vartheta(\tau,0)=0$) dans les formes de Jacobi que nous relevons et au fait que les opérateurs de Hecke qui interviennent dans la construction de ces relèvements conservent ce diviseur (voir 3.9).

3.3.1 Le cas $N=1$

Dans ce cas, nous donnons trois exemples pour $t=1$, 2 et 3. Ces exemples sont traités dans [GN2] dont nous reprenons les notations.
Soit donc :

$$\Delta_5 = \mathrm{R}(\eta^9\vartheta), \tag{3.17}$$

$$\Delta_2 = \mathrm{R}(\eta^3\vartheta) \tag{3.18}$$

et

$$\Delta_1 = \mathrm{R}(\eta\vartheta). \tag{3.19}$$

Proposition 3.9 *On a*

$$\Delta_5 \in S_5(\Gamma_1,\chi_{1,1}), \quad \Delta_2 \in S_2(\Gamma_2^+,\chi_{2,1}) \quad \text{et} \quad \Delta_1 \in S_1(\Gamma_3^+,\chi_{3,1})$$

Remarques
(i) Les caractères peuvent être précisés :

$$\chi_{1,1}(i_1(M)) = v_\eta^{12}(M), \quad \chi_{2,1}(i_1(M)) = v_\eta^{6}(M), \quad \chi_{3,1}(i_1(M)) = v_\eta^{4}(M);$$

$$\chi_{1,1}([(\lambda\ \mu);0]) = \chi_{2,1}([(\lambda\ \mu);0]) = \chi_{3,1}([(\lambda\ \mu);0]) = v_H(((\lambda\ \mu);0))$$

$$\chi_{1,1}([(0\ 0);\kappa]) = 1, \quad \chi_{2,1}([(0\ 0);\kappa]) = (-1)^\kappa, \quad \chi_{3,1}([(0\ 0);\frac{\kappa}{3}]) = e^{2i\pi\frac{\kappa}{3}}$$

$$\chi_{1,1}(V_1) = -1, \quad \chi_{2,1}(V_2) = 1, \quad \chi_{3,1}(V_3) = -1,$$

où $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et $(\lambda,\mu,\kappa) \in \mathbb{Z}^3$.

(ii) Les caractères de Δ_5, Δ_2 et Δ_1 sont respectivement d'ordre 2, 4 et 6.
(iii) Le carré de la forme Δ_5 est égal (à une constante multiplicative près) à la forme ψ_{10} de Igusa, c'est la forme parabolique de plus petit poids pour $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) = \Gamma_1$. De même, à une constante près, la forme parabolique Δ_2 (resp. Δ_1) est la racine d'ordre 4 (resp. 6) de l'unique forme parabolique de poids 8 pour Γ_2 (resp. de poids 6 pour Γ_3). C'est pourquoi, dans leur article [GN2], V. Gritsenko et V. Nikulin ont qualifié ces trois formes d'*analogues tridimentionnels* de la fonction êta de Dedekind.
(iv) Les auteurs de [GN2] (voir p.219) construisent également une forme de Siegel, $\Delta_{1/2} \in M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_4^+, \chi_8)$, à partir d'un relèvement qu'ils qualifient de *trivial* de la série thêta Jacobi :

$$\Delta_{1/2}(Z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}, m\in\mathbb{N}} \left(\frac{-4}{n}\right)\left(\frac{-4}{m}\right) q^{\frac{n^2}{8}} r^{\frac{nm}{2}} s^{\frac{m^2}{2}}$$

3.3.2 Le cas $N = 2$

Dans ce cas, nous allons construire deux exemples.
Pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$, on pose

$$\varphi_{3,\frac{1}{2}} = \eta(\tau)\eta(2\tau)^4\,\vartheta(\tau, z) \tag{3.20}$$

et

$$\varphi_{1,\frac{1}{2}} = \frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)}\,\vartheta(\tau, z). \tag{3.21}$$

On vérifie alors sans difficulté que

$$\varphi_{3,\frac{1}{2}} \in J^{par}_{3,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2), \chi_2^{(2)} \times v_H) \quad \text{et} \quad \varphi_{1,\frac{1}{2}} \in J_{1,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2), \chi_4^{(2)} \times v_H),$$

où $\chi_2^{(2)}$ et $\chi_4^{(2)}$ sont des caractères d'ordre respectif 2 et 4 de $\Gamma_0(2)$ donnés par les formules suivantes :

$$\chi_2^{(2)} = v_\eta^4 (v_\eta^{(2)})^4 \quad \text{et} \quad \chi_4^{(2)} = v_\eta^2 (v_\eta^{(2)})^2$$

où v_η désigne le système de multiplicateur de la fonction êta de Dedekind et $v_\eta^{(2)}$ est le conjugué de v_η par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En utilisant la formule exacte de v_η (voir 2.34), on a

$$\chi_2^{(2)}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = (-1)^{b-c} \quad \text{et} \quad \chi_4^{(2)}\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2c & d \end{smallmatrix}\right)\right) = e^{\frac{2\pi i}{4} d(b-c)}$$

pour toute matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(2)$.

On vérifie alors que

$$\ker \chi_2^{(2)} \supset \Gamma_1(4,2) \quad \text{et} \quad \ker \chi_4^{(2)} \supset \Gamma_1(8,4)$$

et

$$\chi_2^{(2)}\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)= e^{\frac{2\pi i}{2}}, \quad \chi_4^{(2)}\big(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\big)= e^{\frac{2\pi i}{4}}.$$

On peut donc appliquer le théorème 3.5 à ces deux formes de Jacobi avec respectivement $q_1 = 2$ et $q_1 = 4$, on obtient

Proposition 3.10

$$\nabla_3 := \mathrm{R}(\varphi_{3,\frac{1}{2}}) \in S_3(\Gamma_0^{(2)}(2), \chi_2^{(2)} \times v_H) \tag{3.22}$$

et

$$Q_1 := \mathrm{R}(\varphi_{1,\frac{1}{2}}) \in M_1(\Gamma_2^+(2), \chi_4^{(2)} \times v_H). \tag{3.23}$$

Remarques :
(i) Nous ne donnons que la partie du caractère induite par le groupe de Jacobi. Pour les autres éléments des groupes pour lesquels ces formes sont modulaires, les formules sont données dans le théorème 3.5. Cette remarque tient également pour les exemples suivants.
(ii) La forme $\varphi^2_{3,\frac{1}{2}}$ est l'unique forme parabolique de poids 6 et d'indice 1 pour le groupe $\Gamma_0(2)$, cela est dû à la formule de dimension de la proposition 2.64.
(iii) Les coefficients de Fourier de la forme Q_1 possèdent une formule très simple. En effet, on a $\eta(2\tau)^2/\eta(\tau) = \frac{1}{2}\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}(\tau,0)$ et

$$\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)}(\tau,0) = q^{\frac{1}{8}} \prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)(1+q^{n-1})(1+q^n) = 2\sum_{n\in\mathbb{N}} q^{\frac{(2n+1)^2}{8}}.$$

En utilisant cette dernière formule, on obtient

$$Q_1(Z) = \sum_{N>0} \sum_{\substack{n,\, m\in 4\mathbb{N}+1 \\ l\in 2\mathbb{Z}+1 \\ (2N+1)^2=2mn-l^2}} \left(\frac{-4}{l}\right) \sigma_0((n,l,m))\, q^{\frac{n}{4}} r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{m}{2}}, \tag{3.24}$$

où $\sigma_0((n,l,m))$ est le nombre de diviseurs du plus grand diviseur commun de n, l et m. Cette formule est analogue à celles obtenues par V. Gritsenko pour Δ_2 et Δ_1 (voir [GN2] p.226).

3.3.3 Le cas $N = 3$

Pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$, on pose

$$\varphi_{2,\frac{1}{2}}(\tau, z) = \eta(3\tau)^3 \vartheta(\tau, z). \tag{3.25}$$

On vérifie alors que

$$\varphi_{2,\frac{1}{2}} \in J^{par}_{2,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(3), \chi_2^{(3)} \times v_H),$$

où $\chi_2^{(3)}$ est le caractère d'ordre 2 de $\Gamma_0(3)$ donné par la formule suivante :

$$\chi_2^{(3)} = v_\eta^3 (v_\eta^{(3)})^3$$

et $v_\eta^{(3)}$ est le conjugué de v_η par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. En utilisant la formule exacte de v_η (voir 2.34), on a

$$\chi_2^{(3)}(M) = \begin{cases} (-1)^{a+d+1} \left(\frac{d}{3}\right) & \text{si} \quad c \equiv 1 \bmod 2 \\ (-1)^b \left(\frac{d}{3}\right) & \text{si} \quad c \equiv 0 \bmod 2 \end{cases},$$

où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 3c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(3)$. On vérifie alors que

$$\ker \chi_2^{(3)} \supset \Gamma_1(6, 2), \qquad \chi_2^{(3)}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = e^{\pi i}.$$

On peut appliquer le théorème 3.5 à cette forme avec $q_1 = 2$, on obtient

Proposition 3.11

$$\nabla_2 := \mathrm{R}(\varphi_{2,\frac{1}{2}}) \in S_2(\Gamma_0^{(2)}(3), \chi_2^{(3)} \times v_H). \tag{3.26}$$

Remarques

(i) La forme $\varphi^2_{2,\frac{1}{2}}$ est l'unique forme parabolique de poids 4 et d'indice 1 pour le groupe $\Gamma_0(3)$, cela est dû à la formule de dimension de la proposition 2.65.
(ii) Comme pour la forme Q_1, les coefficients de Fourier de ∇_2 possèdent une formule très simple. Grâce à Euler et Jacobi, on a la formule suivante :

$$\eta(\tau)^3 = \sum_{n>0} \left(\frac{-4}{n}\right) n q^{n^2/8}.$$

On obtient alors

$$\nabla_2(Z) = \sum_{N>0} \sum_{\substack{m,\, n \in 2\mathbb{N}+1 \\ 3N^2 = 4mn - l^2}} N \left(\frac{-4}{Nl}\right) \sum_{\substack{a|(l,m,n) \\ a>0}} a \left(\frac{a}{3}\right) q^{\frac{n}{2}} r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{m}{2}} \tag{3.27}$$

puisque dans la formule de relèvement on a $\chi(\sigma_a) = \left(\frac{a}{3}\right)$.

3.3.4 Le cas $N = 4$

Pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$, on pose

$$h_{\frac{3}{2}}(\tau, z) = \frac{\eta(2\tau)\eta(4\tau)^2}{\eta(\tau)}\,\vartheta(\tau, z). \tag{3.28}$$

On vérifie alors que

$$h_{\frac{3}{2}} \in J_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4), \chi_4^{(4)} \times v_H),$$

où $\chi_4^{(4)}$ est un système de multiplicateur d'ordre 4 de $\Gamma_0(4)$. On considère alors le carré de cette forme :

$$h_{\frac{3}{2}}^2 \in J_{3,1}(\Gamma_0(4), \chi_2^{(4)}),$$

où $\chi_2^{(4)}$ est un caractère d'ordre 2 de $\Gamma_0(4)$ donné par la formule suivante :

$$\chi_2^{(4)} = v_\eta^4 (v_\eta^{(4)})^4 (v_\eta^{(2)})^2$$

et $v_\eta^{(4)}$ est le conjugué de v_η par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $v_\eta^{(2)}$ a été défini dans le cas $N = 2$. En utilisant la formule exacte de v_η (voir 2.34), on a

$$\chi_2^{(4)}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 4c & d \end{smallmatrix}\right)) = (-1)^{\frac{(d-1)}{2}} \quad \text{pour} \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 4c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4),$$

donc $\Gamma_1(4, 1) \subset \mathrm{Ker}\chi_2^{(4)}$. On peut appliquer le théorème 3.5 à cette forme avec $q_1 = 1$ et on obtient :

Proposition 3.12

$$F_3 := \mathrm{R}(h_{3/2}^2) \in M_3(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi_2^{(4)}). \tag{3.29}$$

La forme de Jacobi $h_{3/2}^2$ s'annule à l'ordre 2 en $z = 0$, donc la forme F_3 s'annule à l'ordre au moins 2 le long des $\Gamma_0^{(2)}(4)$-translatées de $\mathcal{H}_1$. Dans le chapitre 5, nous verrons, en utilisant la classification des dd-formes, qu'il existe une forme $\nabla_{3/2}$ telle que $F_3 = \nabla_{3/2}^2$.

Chapitre 4

Relèvement multiplicatif

Le but de ce chapitre est de construire un relèvement multiplicatif ou produit automorphe de Borcherds pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_t(N) < \Gamma_t$. Dans le cas $N = 1$ (i.e. pour le groupe paramodulaire sans niveau), de tels produits ont été obtenus par V. Gritsenko et V. Nikulin (voir [GN1] et [GN2]). La donnée pour une telle construction est une forme de Jacobi presque holomorphe de poids 0, d'indice t sans caractère pour $\Gamma_0(N)$. R. Borcherds mentionne (voir [B1, Examples 2.2 and 2.3]) que des produits automorphes peuvent être obtenus à partir de formes de Jacobi pour $\Gamma_0(N)$ en les considérant comme des formes de Jacobi vectorielles, chaque composante étant la forme évaluée en un des points paraboliques. Ceci nous amène donc à envisager les développements de Fourier en chaque point parabolique de $\Gamma_0(N)$ et donc à introduire un opérateur de Hecke *complet* $T_N(m)$ pour $\Gamma_0(N)$ qui contient plus de classes que $T_-^{(N)}(m)$ si $(m, N) \neq 1$. Cet opérateur $T_N(m)$ a été introduit par H. O. Herøy (voir [He]) et utilisé par H. Aoki et T. Ibukiyama (voir [AI]).

Rappelons brièvement les propriétés du sous-groupe de congruence de Hecke $\Gamma_0(N)$ vues au chapitre 1. Le nombre de points paraboliques non-équivalents de $\Gamma_0(N)$ est $\displaystyle\sum_{e|N,\, e>0} \varphi((e, \frac{N}{e}))$ et l'ensemble $\mathcal{P}$ des points paraboliques est donné par

$$\mathcal{P} = \left\{ \frac{f}{e},\ e|N,\ e \geqslant 1,\ f \mod (e, \frac{N}{e}),\ (e, f) = 1 \right\}.$$

À chaque point parabolique $f/e \in \mathcal{P}$ de $\Gamma_0(N)$, on associe une matrice de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de la façon suivante :

$$\frac{f}{e} \mapsto M_{f/e} = \left(\begin{smallmatrix} f & * \\ e & * \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}), \quad M_{f/e}\langle\infty\rangle = f/e.$$

On note $h_e = N/(e^2, N)$ la largeur du point parabolique $f/e \in \mathcal{P}$. On a vu que la somme des largeurs vaut $N \cdot \prod_{p|N}(1+p^{-1})$ (p premier) qui est l'indice de $\Gamma_0(N)$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. À chaque point parabolique $f/e \in \mathcal{P}$, on associe, également, l'entier $N_e = \frac{N}{e}$.

4.1 L'opérateur $T_N(m)$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$M_N(m) = \{M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ cN & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid \det(M) = m\}\,.$$

Lemme 4.1 *Soit $M \in M_N(m)$ alors*

$$\Gamma_0(N)M\Gamma_0(N) = \bigsqcup_{f/e\in\mathcal{P}} \bigsqcup_{\substack{ad=m,a>0\\ ae\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_e d}} \Gamma_0(N)M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right). \tag{4.1}$$

Démonstration.
Démontrons tout d'abord que l'union du membre de droite de (4.1) est disjointe.
Supposons que $\Gamma_0(N)M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \Gamma_0(N)M_{f'/e'}\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)$ où $M_{f/e} = \left(\begin{smallmatrix} f & g \\ e & h \end{smallmatrix}\right)$ et $M_{f'/e'} = \left(\begin{smallmatrix} f' & g' \\ e' & h' \end{smallmatrix}\right)$ alors

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d'}{d} & \frac{bd-b'd'}{dd'} \\ 0 & \frac{a'}{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

donc $d|d'$ et $a|a'$. Or $ad = a'd' = m$, $a > 0$ et $a' > 0$ donc $a = a'$ et $d = d'$. Ainsi

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b-b'}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}),$$

donc $d|(b-b')$, posons $\alpha = \frac{b-b'}{d}$.
On a alors

$$M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)M_{f'/e'}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ eh'-ee'\alpha-e'h & * \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N),$$

donc $eh' - ee'\alpha - e'h \equiv 0 \bmod N$ et, comme $e'|N$, on en déduit que $eh' - ee'\alpha - e'h \equiv 0 \bmod e'$, donc $e'|e$, puisque $f'h' \equiv 1 \bmod e'$. En considérant l'inverse de cette dernière matrice, on obtient de même $e|e'$ et, comme e et e' sont strictement positifs, on a $e = e'$.
Pour montrer que $f = f'$, on considère l'image de ∞. On a, d'une part, $M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\langle\infty\rangle = M_{f/e}\langle\infty\rangle = \frac{f}{e}$ et, d'autre part, $\Gamma_0(N)M_{f'/e}\langle\infty\rangle = \Gamma_0(N)\langle\frac{f'}{e}\rangle$ donc ces points paraboliques sont $\Gamma_0(N)$-équivalents et donc égaux. On en déduit que $M_{f/e} = M_{f'/e'}$.

On calcule alors l'image de $\frac{f}{e}$, on a $M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)M_{f/e}^{-1}\langle\frac{f}{e}\rangle=\frac{f}{e}$, donc

$$M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)M_{f/e}^{-1}\in \mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N)}(\frac{f}{e})$$

or $\mathrm{Stab}_{\Gamma_0(N)}(\frac{f}{e})=M_{f/e}\left\{\pm\left(\begin{smallmatrix}1&h_en\\0&1\end{smallmatrix}\right),n\in\mathbb{Z}\right\}M_{f/e}^{-1}\cap\Gamma_0(N)$. On en déduit que $b=b'$ car b et b' sont pris modulo h_ed. Ce qui prouve que l'union est disjointe.

Montrons maintenant que le membre de gauche est inclus dans le membre de droite (l'autre inclusion est évidente puisque $ae\equiv 0 \bmod N$). Il suffit de prouver que

$$M_N(m)\subseteq \bigsqcup_{f/e\in\mathcal{P}}\ \bigsqcup_{\substack{ad=m,a>0\\ ae\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_ed}}\Gamma_0(N)M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right).$$

Notons $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})_\infty$ le stabilisateur de ∞ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$. On sait que

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}).\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})_\infty.$$

Considérons alors l'application suivante :

$$P:\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})_\infty & \to & \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\\ M & \mapsto & M\langle\infty\rangle\end{smallmatrix}\right).$$

Une vérification rapide montre que cette application est bijective. On en déduit

$$\Gamma_0(N)\backslash\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})_\infty\simeq\Gamma_0(N)\backslash\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\simeq\mathcal{P}.$$

Soit $A\in M_N(m)$ alors $A\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&m^{-1}\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{Q})$ donc $A=A_0M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ où $A_0\in\Gamma_0(N)$, a, b et d entiers positifs. □

Introduisons alors l'opérateur de Hecke suivant :

$$\phi\big|_{k,t}T_N(m)(\tau,z)=m^{k-1}\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(N)\backslash M_N(m)}(c\tau+d)^{-k}e^{-2i\pi mt\frac{cz^2}{c\tau+d}}\,\phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{mz}{c\tau+d}\right),\tag{4.2}$$

où $\phi\in J_{k,t}^{ph}(\Gamma_0(N))$ (l'indice t est donc entier). Cet opérateur de Hecke est dit *complet* car il prend en compte tous les points paraboliques de $\Gamma_0(N)$.

Lemme 4.2 *Si $\phi\in J_{k,t}^{ph}(\Gamma_0(N))$ alors $\phi\big|_{k,t}T_N(m)\in J_{k,mt}^{ph}(\Gamma_0(N))$*

Démonstration. La fonction $\phi\big|_{k,t}T_N(m)$ est holomorphe dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$ comme somme finie de fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}\times\mathbb{C}$, la somme est finie car

$$\Gamma_0(N)\backslash M_N(m)=\bigsqcup_{f/e\in\mathcal{P}}\ \bigsqcup_{\substack{ad=m,a>0\\ ae\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_ed}}\Gamma_0(N)M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)=T_N(m)$$

en vertu du lemme précédent.
Pour prouver la modularité de $\phi\big|_{k,t}T_N(m)$, on utilise la définition de l'opérateur $T_N(m)$:

$$\phi\big|_{k,t}T_N(m) = \sum_{M\in T_N(m)} \phi\big|_{k,t}M.$$

Donc, pour tout $A \in \Gamma_0(N)$, on a

$$(\phi\big|_{k,t}T_N(m))\big|_{k,mt}A = \sum_{M\in T_N(m)} \phi\big|_{k,t}MA = \sum_{M'\in T_N(m)} \phi\big|_{k,t}A'M' = \phi\big|_{k,t}T_N(m)$$

car $MA \in T_N(m)$ donc il existe un unique couple $(M', A') \in T_N(m)\times\Gamma_0(N)$ tel que $MA = A'M'$.
Soit $(\lambda, \mu, \kappa) \in \mathbb{Z}^3$ et $\widetilde{\phi}(Z) = \phi(\tau, z)e^{2i\pi t\omega}$. On plonge alors $T_N(m)$ dans l'anneau de Hecke de $\Gamma_0(N)_\infty$ (voir 2.9), on note encore $T_N(m)$ cet opérateur, pour obtenir

$$\widetilde{\phi}\big|_k T_N(m) = \sum_{\substack{f/e\in\mathcal{P}\\ ad=m,a>0\\ ae\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_e d}} \widetilde{\phi}\big|_k i_1(M_{f/e})M_{a,b,d},$$

où

$$M_{a,b,d} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0\\ 0 & m & 0 & 0\\ 0 & 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Or, on sait que $M_{a,b,d}[(\lambda\ \mu);\kappa] = [(\lambda'\ \mu');\kappa']M_{a,b,d}$ et $i_1(M_{f/e})[(\lambda'\ \mu');\kappa'] = [(\lambda''\ \mu'');\kappa'']i_1(M_{f/e})$ donc

$$(\widetilde{\phi}\big|_k T_N(m))\big|_k[(\lambda\ \mu);\kappa] = \widetilde{\phi}\big|_k T_N(m).$$

Cela permet d'affirmer que la fonction $\phi\big|_{k,t}T_N(m)$ se transforme comme une forme de Jacobi de poids k et d'indice mt pour $\Gamma_0(N)$. Il ne reste plus qu'à vérifier les développements de Fourier aux différents points paraboliques de $\Gamma_0(N)$. Comme $\Gamma_0(N)\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\Gamma_0(N)$, on a, pour tout $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$

$$\begin{aligned}(\phi\big|_{k,t}T_N(m))\big|_{k,mt}A &= \sum_{\substack{f/e\in\mathcal{P}\\ ad=m,a>0\\ ae\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_e d}} (\phi\big|_{k,t}A')M_{f/e}\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right)\\ &= \sum_{\substack{f'/e'\in\mathcal{P}\\ ad=m,a>0\\ ae'\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_{e'} d}} (\phi\big|_{k,t}M_{f'/e'})\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ 0 & d\end{smallmatrix}\right).\end{aligned}$$

Cette dernière formule permet donc de conclure (voir preuve de la proposition 2.8). $\square$

Remarque
Si $\phi \in J_{k,mt}(\Gamma_0(N))$ (respectivement $J^{par}_{k,mt}(\Gamma_0(N))$) alors $\phi|_{k,t}T_N(m) \in J_{k,mt}(\Gamma_0(N))$ (respectivement $J^{par}_{k,mt}(\Gamma_0(N))$).

4.2 Théorème principal

Nous allons, dans ce paragraphe, construire un produit automorphe de Borcherds à partir d'une forme de Jacobi presque holomorphe de poids 0 et d'indice t entier pour le groupe $\Gamma_0(N)$. Le produit construit sera alors modulaire pour le groupe $\Gamma_t(N)^+ = \Gamma_t(N,1,1,1)^+$.

Soit $\phi \in J^{ph}_{0,t}(\Gamma_0(N))$, on note son développement de Fourier au point parabolique f/e représenté par $M_{f/e}$ de la manière suivante :

$$\left(\phi|_{0,t}M_{f/e}\right)(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}/h_e}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{f/e}(n,l)q^n r^l = \phi_{f/e}(\tau,z).$$

Remarquons que $c_{1/N}(n,l)$ est le coefficient de Fourier de ϕ à l'infini et que, pour une forme de Jacobi faible, on a $n \geqslant 0$ si $c_{f/e}(n,l) \neq 0$.

Théorème 4.3 *Soit $\phi \in J^{ph}_{0,t}(\Gamma_0(N))$. Supposons que, pour tous les points paraboliques de $\Gamma_0(N)$, on ait $\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(n,l) \in \mathbb{Z}$ si $4nmt - l^2 \leqslant 0$. Alors le produit*

$$\mathrm{B}_\phi(Z) = q^A r^B s^C \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} \left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)} \tag{4.3}$$

où $(n,l,m) > 0$ signifie : si $m > 0$ alors $n \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$, si $m = 0$ et $n > 0$ alors $l \in \mathbb{Z}$, si $m = n = 0$ alors $l < 0$ et

$$A = \frac{1}{24}\sum_{\substack{f/e\in\mathcal{P}\\ l\in\mathbb{Z}}} h_e c_{f/e}(0,l),\quad B = \frac{1}{2}\sum_{\substack{f/e\in\mathcal{P}\\ l\in\mathbb{Z},\, l>0}} l h_e c_{f/e}(0,l),\quad C = \frac{1}{4}\sum_{\substack{f/e\in\mathcal{P}\\ l\in\mathbb{Z}}} l^2 h_e c_{f/e}(0,l),$$

définit une fonction modulaire de poids

$$k = \frac{1}{2}\sum_{f/e\in\mathcal{P}} \frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(0,0)$$

pour le groupe $\Gamma_t(N)^+$ avec un caractère (ou un système de multiplicateur) χ. En particulier

$$\frac{\mathrm{B}_\phi(V_t\langle Z\rangle)}{\mathrm{B}_\phi(Z)} = (-1)^{D_0} \quad \text{où} \quad D_0 = \sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{l\in\mathbb{Z},\ n<0} \frac{h_e}{N_e}\sigma_0(-n)c_{f/e}(n,l).$$

Les pôles et les zéros de B_ϕ sont situés sur des diviseurs quadratiques rationnels définis par les coefficients de Fourier $c_{f/e}(n,l)$ tels que $4nmt - l^2 < 0$. Donc B_ϕ est holomorphe si tous les coefficients de ce type sont positifs. Le caractère (ou le système de multiplicateur) χ est induit par les relations suivantes :

$$\chi(i_1(M)) = \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \left(v_\eta^{(N_e)}(M)\right)^{\frac{h_e}{N_e}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{f/e}(0,l)},$$

pour $M \in \Gamma_0(N)$, où $v_\eta^{(N_e)}(M) = v_\eta(\alpha_e M \alpha_e^{-1})$ et $\alpha_e = \left(\begin{smallmatrix} N_e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et

$$\chi([(\lambda\ \mu);0]) = \prod_{f/e\in\mathcal{P},\ l>0} v_{H,N_e}^{\frac{h_e}{N_e} l c_{f/e}(0,l)}([(\lambda\ \mu);0]),$$

où $v_{H,N_e}([(\lambda\ \mu);0]) = (-1)^{\lambda+N_e\mu+N_e\lambda\mu}$ pour $(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^2$ et pour tout $\kappa\in\mathbb{Z}$

$$\chi([(0\ 0);\frac{\kappa}{t}]) = e^{2i\pi C\kappa/t}.$$

Démonstration.

Le groupe paramodulaire Γ_t peut être réalisé comme groupe orthogonal stable du réseau $2U \oplus \langle -2t\rangle$ de signature $(2,3)$ où $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ désigne le plan hyperbolique (voir [G1], [GH2]). En utilisant des arguments semblables, on peut réaliser le groupe $\Gamma_t(N)$ comme un sous-groupe du groupe orthogonal du réseau $U \oplus U(N) \oplus \langle -2t\rangle$ (son action sur le groupe discriminant étant diagonale) où $U(N) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & N \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Le produit apparaissant dans ce théorème est alors une spécialisation d'un produit automorphe considéré par Borcherds : voir [B1, Theorem 13.3]. Il converge donc si $Y = \mathrm{Im} Z$ appartient à une chambre de Weyl déterminée par l'action de $\Gamma_0(N)$ sur $Y > 0$ avec $\det(Y) > C$ pour C suffisamment grand. Ce produit peut alors être étendu en une fonction méromorphe dans $\mathbb{H}_2$ dont les pôles et les zéros sont situés sur des diviseurs quadratiques rationnels de $\mathbb{H}_2$.

Nous allons maintenant démontrer la modularité de ce produit. Pour $\phi \in J_{0,t}^{ph}(\Gamma_0(N))$ et $Z = \left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}_2$, on introduit l'opérateur suivant :

$$\mathrm{L}_\phi(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi\big|_{0,t} T_N(m)(\tau,z) e^{2i\pi t m\omega}. \tag{4.4}$$

Lemme 4.4 *On a*

$$\exp(-\mathrm{L}_\phi(Z)) = \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \prod_{\substack{m\geqslant 1\\(n,l)\in\mathbb{Z}^2}} \left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)}$$

(sous réserve de convergence du produit).

Démonstration. En utilisant la décomposition (4.1) de $\Gamma_0(N)\backslash M_N(m)$, on a

$$(\phi|_{k,t}T_N(m))(\tau,z) = m^{-1}\sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\ae\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_e d}} \phi_{f/e}(\frac{a\tau+b}{d},az)$$

$$= m^{-1}\sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\ae\equiv 0 \bmod N\\ b \bmod h_e d}} \sum_{n\in\mathbb{Z}/h_e,\ l\in\mathbb{Z}} c_{f/e}(n,l)e^{2i\pi n\frac{b}{d}}q^{an}r^{al}$$

$$= m^{-1}\sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\ae\equiv 0 \bmod N}} \sum_{(n,l)\in\mathbb{Z}^2} \left(\sum_{b=0}^{h_e d-1} e^{2i\pi n\frac{b}{dh_e}}\right) c_{f/e}(\frac{n}{h_e},l)q^{\frac{an}{dh_e}}r^{al}$$

$$= m^{-1}\sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\ae\equiv 0 \bmod N}} \sum_{(n,l)\in\mathbb{Z}^2} dh_e c_{f/e}(dn,l)q^{an}r^{al}$$

car

$$\sum_{b=0}^{h_e d-1} e^{2i\pi n\frac{b}{dh_e}} = \begin{cases} dh_e & \text{si} \quad dh_e|n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc

$$\mathrm{L}_\phi(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}\sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\ae\equiv 0 \bmod N}} \sum_{(n,l)\in\mathbb{Z}^2} dh_e c_{f/e}(dn,l)q^{an}r^{al}s^{tm}$$

$$= \sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\ae\equiv 0 \bmod N\\(n,l)\in\mathbb{Z}^2}} \frac{h_e}{a}c_{f/e}(dn,l)q^{an}r^{al}s^{tm}$$

$$= \sum_{f/e\in\mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{ad=m,a>0\\(n,l)\in\mathbb{Z}^2}} \frac{h_e}{N_e}\frac{1}{a}c_{f/e}(dn,l)(q^{N_e n}r^{N_e l}s^{dN_e t})^a,$$

car la condition $ae \equiv 0 \bmod N$ implique $N_e|a$. On en déduit que

$$\mathrm{L}_\phi(Z) = \sum_{\substack{m\geqslant 1\\(n,l)\in\mathbb{Z}^2}} \sum_{a\geqslant 1} \frac{1}{a} \left(\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(mn,l)(q^{N_e n} r^{N_e l} s^{dN_e t})^a \right).$$

On reconnaît alors le développement en série entière de

$$\log\left((1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e})^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(mn,l)} \right).$$

□

Séparons le produit (4.3) en deux parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_\phi(Z) &= q^A r^B s^C \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} \left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(nm,l)} \\
&= \left(q^A r^B s^C \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \prod_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Z}^2\\(n,l,0)>0}} \left(1-(q^n r^l)^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(0,l)} \right) \\
&\quad \left(\prod_{f/e\in\mathcal{P}} \prod_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Z}^2\\m\geqslant 1}} \left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(mn,l)} \right).
\end{aligned}$$

La deuxième partie n'est autre que $\exp(-\mathrm{L}_\phi(Z))$, donc

$$\mathrm{B}_\phi(Z) = q^A r^B s^C \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \prod_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Z}^2\\(n,l,0)>0}} \left(1-(q^n r^l)^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(0,l)} \exp(-L_\phi(Z)).$$

Notons

$$P_{f/e}(\tau,z) = \prod_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Z}^2\\(n,l,0)>0}} \left(1-(q^n r^l)^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(0,l)}.$$

On sépare alors ce produit en trois parties suivant la définition de $(n,l,0)>0$, pour obtenir :

$$P_{f/e}(\tau,z) = \big(\prod_{n>0} (1-q^{nN_e})^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(0,0)} \big)$$

$$\big(\prod_{l<0} (1-r^{lN_e})^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(0,l)} \big) \big(\prod_{l\neq 0, n>0} (1-(q^n r^l)^{N_e})^{\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(0,l)} \big).$$

En utilisant la formule du produit de la fonction êta de Dedekind (voir 2.32), on obtient :

$$\Big(\prod_{n>0}(1-q^{nN_e})\Big)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,0)} = q^{-\frac{1}{24}h_e c_{f/e}(0,0)}\eta(N_e\tau)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,0)}.$$

Comme $c_{f/e}(0,l) = c_{f/e}(0,-l)$ (voir 2.11), on peut alors simplifier $P_{f/e}$ de la manière suivante :

$$P_{f/e}(\tau,z) = q^{-\frac{1}{24}h_e c_{f/e}(0,0)}\eta(N_e\tau)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,0)}.$$

$$\prod_{l>0}\left((1-r^{-lN_e})\prod_{n\geqslant 1}(1-(q^n r^l)^{N_e})(1-(q^n r^{-l})^{N_e})\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)}.$$

On utilise alors la formule du triple produit de la série thêta de Jacobi (voir 2.17), pour obtenir :

$$\left((1-r^{-lN_e})\prod_{n\geqslant 1}(1-(q^n r^l)^{N_e})(1-(q^n r^{-l})^{N_e})\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)}$$

$$= q^{-\frac{1}{12}h_e c_{f/e}(0,l)} r^{-\frac{l}{2}h_e c_{f/e}(0,l)}\left(\frac{\vartheta(N_e\tau, N_e lz)}{\eta(N_e\tau)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)}.$$

On réunit alors tous ces termes et

$$P_{f/e}(\tau,z) = q^{-A_{f/e}} r^{B_{f/e}}\eta(N_e\tau)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,0)}\prod_{l>0}\left(\frac{\vartheta(N_e\tau, N_e lz)}{\eta(N_e\tau)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)},$$

où

$$A_{f/e} = \frac{1}{24}h_e\sum_{l\in\mathbb{Z}}c_{f/e}(0,l) \quad \text{et} \quad B_{f/e} = \frac{1}{2}h_e\sum_{l>0}l c_{f/e}(0,l).$$

Il est à noter que les produits ou les sommes sur l sont finis en vertu de la proposition 2.11. On a donc

$$\prod_{f/e\in\mathcal{P}}P_{f/e}(\tau,z) = q^{-A}r^{-B}\prod_{f/e\in\mathcal{P}}\left(\eta(N_e\tau)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,0)}\prod_{l>0}\left(\frac{\vartheta(N_e\tau, N_e lz)}{\eta(N_e\tau)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)}\right),$$

où A et B sont donnés dans le théorème. En utilisant la définition de C, on a :

$$s^C = \prod_{f/e\in\mathcal{P}}\prod_{l>0}(e^{i\pi l^2 N_e\omega})^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)},$$

soit, finalement,

$$\mathrm{B}_\phi(Z) = T_\phi^{(0)}(Z)\exp(-\mathrm{L}_\phi(Z))$$

où la fonction $T_\phi^{(0)}$ est donnée par

$$T_\phi^{(0)}(Z) = \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \eta(N_e\tau)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,0)} \prod_{l>0}\left(\frac{\vartheta(N_e\tau, N_e lz)}{\eta(N_e\tau)}\, e^{i\pi N_e l^2\omega}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)}. \tag{4.5}$$

Le facteur $T_\phi^{(0)}$ peut être vu comme le « zéroïème » opérateur de Hecke ou la correction de Hodge en termes géométriques (voir [G4]) : c'est une forme de Jacobi presque holomorphe pour $\Gamma_0(N)$ de poids k défini dans le théorème et d'indice C puisque chaque terme du produit est une forme de Jacobi presque holomorphe pour $\Gamma_0(N_e) \supset \Gamma_0(N)$. C'est le premier coefficient de Fourier-Jacobi de B_ϕ. Chaque terme de L_ϕ est une forme de Jacobi presque holomorphe de poids 0 et d'indice mt pour $\Gamma_0(N)$ (voir lemme 4.2), donc pour tout $M \in \Gamma_0(N)$, on a

$$\exp(-\mathrm{L}_\phi)\big|_0 i_1(M) = \exp(-\mathrm{L}_\phi).$$

Pour tout $[(\lambda\ \mu);\kappa] \in H_t = H_t(1,1,1)$ (voir 1.13), on a

$$\mathrm{B}_\phi\big|_k[(\lambda\ \mu);\kappa] = (\mathrm{B}_\phi\big|_k[(\lambda\ \mu);0])\big|_k[(0\ 0);\kappa] = \mathrm{B}_\phi\big|_k[(0\ 0);\kappa],$$

car $T_\phi^{(0)}\big|_k[(\lambda\ \mu);0] = T_\phi^{(0)}$ et $\exp(-\mathrm{L}_\phi)\big|_0[(\lambda\ \mu);0] = \exp(-\mathrm{L}_\phi)$. Comme $(\mathrm{B}_\phi\big|_k[(0\ 0);\kappa])(Z) = \mathrm{B}_\phi(\left(\begin{smallmatrix}\tau & z\\ z & \omega+\frac{\kappa}{t}\end{smallmatrix}\right))$, on a

$$\mathrm{B}_\phi\big|_k[(0\ 0);\kappa] = e^{2i\pi\frac{\kappa C}{t}}.$$

Donc la fonction B_ϕ est modulaire pour le groupe $\Gamma_{t,\infty}(N)$ avec le poids et le caractère indiqués dans le théorème. Le groupe $\Gamma_t(N)^+$ étant engendré par $\Gamma_{t,\infty}(N)$ et V_t, pour achever la preuve de notre théorème, il suffit d'étudier le comportement de B_ϕ sous l'involution V_t.

Lemme 4.5 *On a*

$$\frac{\mathrm{B}_\phi(V_t\langle Z\rangle)}{\mathrm{B}_\phi(Z)} = (-1)^{D_0}(q^{1/t}s^{-1})^{tD_1+C-tA}$$

où D_0 est donné dans le théorème et

$$D_1 = \sum_{f/e\in\mathcal{P}}\ \sum_{l\in\mathbb{Z},\ n<0} h_e\sigma_1(-n)c_{f/e}(n,l).$$

Démonstration. Par définition, $\mathrm{B}_\phi(V_t\langle Z\rangle) = \mathrm{B}_\phi(\left(\begin{smallmatrix} t\omega & \frac{z}{\tau} \\ z & \frac{\tau}{t} \end{smallmatrix}\right))$ donc

$$\frac{\mathrm{B}_\phi(V_t\langle Z\rangle)}{\mathrm{B}_\phi(Z)} = q^{\frac{C}{t}-A} s^{At-C} \prod_{f/e\in\mathcal{P}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} \frac{\left(1-(q^m r^l s^{tn})^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)}}{\left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)}}.$$

Notons alors

$$Q_{f/e}(Z) = \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} \left(\frac{\left(1-(q^m r^l s^{tn})^{N_e}\right)}{\left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)} = Q^{(1)}_{f/e}(Z) Q^{(2)}_{f/e}(Z),$$

où

$$Q^{(1)}_{f/e}(Z) = \prod_{\substack{(n,l)\in\mathbb{Z}^2\\(n,l,0)>0}} \left(\frac{\left(1-(r^l s^{tn})^{N_e}\right)}{\left(1-(q^n r^l)^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)} = \prod_{\substack{n\geqslant 1\\l\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{\left(1-(r^l s^{tn})^{N_e}\right)}{\left(1-(q^n r^l)^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)}$$

et

$$Q^{(2)}_{f/e}(Z) = \prod_{\substack{m\geqslant 1\\(n,l)\in\mathbb{Z}^2}} \left(\frac{\left(1-(q^m r^l s^{tn})^{N_e}\right)}{\left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)}.$$

Un calcul direct donne alors

$$Q^{(2)}_{f/e}(Z) = \prod_{\substack{m\geqslant 1\\l\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{\left(1-(q^m r^l)^{N_e}\right)}{\left(1-(r^l s^{tm})^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(0,l)} \prod_{\substack{m\geqslant 1, n\geqslant 1\\l\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{\left(1-(q^m r^l s^{tn})^{N_e}\right)}{\left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)} \prod_{\substack{m\geqslant 1, n<0\\l\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{\left(1-(q^m r^l s^{tn})^{N_e}\right)}{\left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)}.$$

La première partie de ce produit est $Q^{(1)}_{f/e}(Z)^{-1}$, la deuxième partie vaut 1 (c'est symétrique en m et n), donc

$$Q_{f/e}(Z) = \prod_{\substack{m\geqslant 1, n<0\\l\in\mathbb{Z}}} \left(\frac{\left(1-(q^m r^l s^{tn})^{N_e}\right)}{\left(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e}\right)}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(nm,l)}.$$

La définition d'une forme de Jacobi presque holomorphe assure l'existence d'un entier naturel n_0 tel que, si $N \leqslant -n_0-1$, alors $c_{f/e}(N,l)=0$. Cela nous permet de préciser la forme de $Q_{f/e}$:

$$Q_{f/e}(Z)=\prod_{j=1}^{n_0} Q_{f/e}^{(j)}(Z),$$

où

$$Q_{f/e}^{(j)}(Z)=\prod_{\substack{m\geqslant 1, n\leqslant -1\\ mn=-j\\ l\in\mathbb{Z}}}\left(\frac{(1-(q^m r^l s^{tn})^{N_e})}{(1-(q^n r^l s^{tm})^{N_e})}\right)^{\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(-j,l)}.$$

Décomposons j en produit de facteurs premiers : $j=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$, où $\alpha_i\in\mathbb{N}$ et notons $\alpha=\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(-j,l)$, on a alors

$$Q_{f/e}^{(j)}(Z)=\prod_{\substack{0\leqslant\beta_i,\delta_i\leqslant\alpha_i\\ \beta_i+\delta_i=\alpha_i}} Q_{f/e}^{(i,j)}(Z),$$

où

$$Q_{f/e}^{(i,j)}(Z)=\prod_{l\in\mathbb{Z}}\left(\frac{(1-(q^{p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}} r^l s^{-tp_1^{\delta_1}\cdots p_k^{\delta_k}})^{N_e})}{(1-(q^{-p_1^{\delta_1}\cdots p_k^{\delta_k}} r^l s^{tp_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}})^{N_e})}\right)^{\alpha}.$$

On utilise alors le fait que $c_{f/e}(-j,l)=c_{f/e}(-j,-l)$ pour simplifier cette expression :

$$Q_{f/e}^{(i,j)}(Z)=\prod_{l\in\mathbb{Z}}(qs^{-t})^{p_1^{\delta_1}\cdots p_k^{\delta_k}N_e\alpha}\prod_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^{\alpha}\left(\frac{s^{tp_1^{\delta_1}\cdots p_k^{\delta_k}N_e}-q^{p_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}N_e}r^{lN_e}}{s^{tp_1^{\beta_1}\cdots p_k^{\beta_k}N_e}-q^{p_1^{\delta_1}\cdots p_k^{\delta_k}N_e}r^{lN_e}}\right)^{\alpha}.$$

Cette dernière expression donne alors (les termes de la dernière partie de ce produit se simplifiant et étant au nombre de $\sigma_0(j)$) :

$$Q_{f/e}^{(j)}(Z)=(qs^{-t})^{\sum_{l\in\mathbb{Z}}h_e c_{f/e}(-j,l)\sigma_1(j)}(-1)^{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{h_e}{N_e}c_{f/e}(-j,l)\sigma_0(j)}.$$

On regroupe alors toutes ces formules pour obtenir :

$$\frac{\mathrm{B}_\phi(V_t\langle Z\rangle)}{\mathrm{B}_\phi(Z)}=\prod_{f/e\in\mathcal{P}}\prod_{j=1}^{n_0}Q_{f/e}^{(j)}(Z)=(-1)^{D_0}(q^{1/t}s^{-1})^{tD_1+C-tA}.$$

$\square$

Pour achever la preuve du théorème, il ne reste donc plus qu'à prouver

$$tD_1+C-tA=0.$$

Pour cela, nous avons besoin d'un dernier lemme.

Lemme 4.6 *Soit $\phi \in J_{0,t}^{ph}(\Gamma_0(N))$ alors $tD_1 + C - tA = 0$.*

Démonstration. La preuve de ce lemme se fait en deux étapes.

Première étape

Soit $\varphi \in J_{0,t}^{ph}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}))$. On va utiliser la correction automorphe introduite au chapitre 2 afin d'obtenir une relation entre les coefficients de Fourier de φ. Soit $\hat{\varphi}(\tau,z) = e^{-8\pi^2 tG_2(\tau)z^2}\varphi(\tau,z)$ (voir 2.24). La proposition 2.13 nous permet d'affirmer que la fonction définie par $f_2(\tau) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(\tau,0)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$ est une forme modulaire presque holomorphe de poids 2 pour $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Or, d'après un lemme de R. Borcherds (voir [B2, Lemma 9.2]), on sait que le terme constant d'une telle forme est nul. Or

$$f_2(\tau) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(\tau,0) - 16\pi^2 tG_2(\tau)\varphi(\tau,0)$$

et, en notant $\varphi(\tau,z) = \sum_{(n,l)\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n r^l$ le développement de Fourier de φ en ∞, on obtient :

$$t\sum_{l\in\mathbb{Z}} c(0,l) - 24t\sum_{\substack{n<0\\ l\in\mathbb{Z}}} \sigma_1(-n)c(n,l) - 6\sum_{l\in\mathbb{Z}} l^2 c(0,l) = 0. \tag{4.6}$$

Deuxième étape

Pour traiter le cas d'une forme de Jacobi presque holomorphe pour $\Gamma_0(N)$, on utilise l'opérateur de trace suivant :

$$\psi = \mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\phi) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \phi\big|_{0,t}\gamma \in J_{0,t}^{nh}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})).$$

Le développement de Fourier de ψ est de la forme

$$\psi(\tau,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n r^l \quad \text{où} \quad c(n,l) = \sum_{f/e\in\mathcal{P}} h_e c_{f/e}(n,l).$$

Cela est dû à la proposition 1.5. On applique alors la formule (4.6) pour terminer la preuve du lemme. □

Le théorème est donc démontré. □

Remarques

Ce théorème généralise le théorème 2.1 de V. Gritsenko qui correspond au cas $N = 1$. Lorsque $N = 1$, toutes les orbites des diviseurs quadratiques rationnels sous Γ_t (qui sont des surfaces modulaires de Humbert, pour plus de détails concernant ces faits, on renvoie aux articles [GH2] et [GN2] ainsi qu'à l'ouvrage de G. van der Geer [vdG]) ont un représentant contenant le point ∞. Lorsque $N > 1$, la situation est plus compliquée : il y a plus d'orbites et elles n'ont pas toutes une intersection non triviale avec l'infini. C'est pourquoi, nous devons invoquer le théorème 13.3 de R. Borcherds dans la preuve notre théorème (voir [B1]).

Quelques exemples de produits automorphes de Borcherds, pour le sous-groupe de congruence de type de Hecke, $\Gamma_0^{(2)}(N)$, ont été construits par H. Aoki et T. Ibukiyama (voir [AI]). Cependant les exemples qu'ils fournissent sont particuliers puisqu'ils ne prouvent pas de manière générale un lemme du type 4.6.

Dans le théorème 4.3, on a la condition : $\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(n,l) \in \mathbb{Z}$ si $4nmt - l^2 \leqslant 0$. Cette condition a un sens i.e. on peut la vérifier car on a vu (voir 2.11) que $c_{f/e}(n,l) = 0$ si $4nt - l^2 \leqslant -t^2$ et que ces coefficients de Fourier ne dépendent que de la norme hyperbolique $(4nt - l^2)$ et de l modulo $2t$, on parlera d'orbite de coefficients de Fourier. Ainsi pour appliquer le théorème 4.3, il suffit de vérifier l'appartenance à $\mathbb{Z}$ de $\frac{h_e}{N_e} c_{f/e}(n,l)$ pour un nombre fini d'orbites.

4.3 Exemples

4.3.1 Le cas $N = 1$

Une très grande quantité d'exemples est donnée dans ce cas dans [GN2]. Nous rappelons ceux qui nous seront utiles pour la suite (voir classification des dd-formes au chapitre suivant), ces exemples sont traités dans [GN2] aux pages 237-241.

La forme $\mathrm{B}_{\varphi_{0,1}}$
Soit

$$\begin{aligned} \mathrm{B}_{\varphi_{0,1}}(Z) &= (qrs)^{1/2} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} (1 - q^n r^l s^m)^{a_1(nm,l)} \qquad (4.7)\\ &= \eta(\tau)^9 \vartheta(\tau,z) e^{i\pi\omega} \exp(-\mathrm{L}_{\varphi_{0,1}})(Z), \end{aligned}$$

où $a_1(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,1}$ (voir 2.23) et $Z \in \mathbb{H}_2$.

La forme $\mathrm{B}_{\varphi_{0,2}}$
Pour construire cette forme, on utilise la forme de Jacobi faible, $\varphi_{0,2}$, de poids 0 et d'indice 2 pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ suivante :

$$\varphi_{0,2} = \frac{\varphi_{2,2}}{\eta^4}, \qquad (4.8)$$

où $\varphi_{2,2}(\tau,z) = 2[\vartheta(\tau,z), \frac{\eta(\tau)\vartheta(\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}]$ pour tout $(\tau,z) \in \mathbb{H}\times\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{\varphi_{0,2}}(Z) &= q^{\frac{1}{4}}r^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^{2m})^{a_2(nm,l)} \\ &= \eta^3(\tau)\vartheta(\tau,z)e^{i\pi\omega}\exp(-\mathrm{L}_{\varphi_{0,2}})(Z),\end{aligned} \tag{4.9}$$

où $a_2(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,2}$ et $Z\in\mathbb{H}_2$.

La forme $\mathrm{B}_{\varphi_{0,3}}$

Pour construire cette forme, on utilise la forme de Jacobi faible, $\varphi_{0,3}$, de poids 0 et d'indice 3 pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ suivante :

$$\varphi_{0,3}(\tau,z) = \left(\frac{\vartheta(\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}\right)^2, \tag{4.10}$$

pour tout $(\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{\varphi_{0,3}}(Z) &= q^{\frac{1}{6}}r^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^{3m})^{a_3(nm,l)} \\ &= \eta(\tau)\vartheta(\tau,z)e^{i\pi\omega}\exp(-\mathrm{L}_{\varphi_{0,3}})(Z),\end{aligned} \tag{4.11}$$

où $a_3(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,3}$ et $Z\in\mathbb{H}_2$.

La forme $\Delta_{1/2}$

Pour construire cette forme, on utilise la forme de Jacobi faible, $\varphi_{0,4}$, de poids 0 et d'indice 4 pour le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ suivante :

$$\varphi_{0,4}(\tau,z) = \frac{\vartheta(\tau,3z)}{\vartheta(\tau,z)}, \tag{4.12}$$

pour tout $(\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{\varphi_{0,4}}(Z) &= q^{\frac{1}{8}}r^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^{4m})^{a_4(nm,l)} \\ &= \vartheta(\tau,z)e^{i\pi\omega}\exp(-\mathrm{L}_{\varphi_{0,4}})(Z),\end{aligned} \tag{4.13}$$

où $a_4(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,4}$ et $Z\in\mathbb{H}_2$.

Proposition 4.7 *On a*

$$\mathrm{B}_{\varphi_{0,1}} \in M_5(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}),\chi_2), \quad \mathrm{B}_{\varphi_{0,2}} \in M_2(\Gamma_2^+,\chi_4),$$

$$\mathrm{B}_{\varphi_{0,3}} \in M_1(\Gamma_3^+, \chi_6) \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_{\varphi_{0,4}} \in M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_4^+, \chi_8),$$

où χ_2, χ_4 et χ_6 sont des caractères d'ordre 2, 4 et 6 pour les groupes correspondants et χ_8 est un système de multiplicateur d'ordre 8 pour le groupe Γ_4^+.
De plus, ces quatre formes s'annulent exactement sur les translatées de $\mathcal{H}_1$ à l'ordre 1 sous l'action du groupe pour lequel elles sont modulaires.

Pour les exemples dans le cas $N > 1$, on reprend les notations du chapitre 2 paragraphe 2.

4.3.2 Le cas $N = 2$

On va donner deux exemples dans ce cas : un pour l'indice 1, l'autre pour l'indice 2.

Soit

$$\phi_2 = 4(\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2. \tag{4.14}$$

On a vu que $\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}} \in J^f_{0,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2), Id_{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} \times v_{(H,\binom{1}{0}),2)})$ (voir proposition 2.50), donc $\phi_2 \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(2))$. Le groupe $\Gamma_0(2)$ possède deux points paraboliques en lesquels la forme ϕ_2 possède les développements de Fourier suivants :

$$\phi_2(\tau, z) = (r^{-1} + 2 + r) + 2(r^{-2} - 2 + r^2)q + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n r^l,$$

$$(\phi_2|_{0,1}S)(\tau, z) = 4 - 8(r^{-1} - 2 + r)q^{\frac{1}{2}} + \cdots = \sum_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c_S(n,l)q^n r^l.$$

Les seules orbites de coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative ou nulle (on indique entre parenthèses la valeur de la norme) sont

$$c(0,1) = 1\,(-1), \quad c(0,0) = 2\,(0), \quad c_S(0,1) = 0\,(-1) \quad \text{et} \quad c_S(0,0) = 4\,(0).$$

On peut appliquer le théorème 4.3 à ϕ_2 (tous les coefficients ci-dessus sont des entiers positifs), on obtient alors :

Proposition 4.8 *La fonction B_{ϕ_2} appartient à $M_3(\Gamma_0^{(2)}(2), \chi_2)$, où χ_2 est un caractère d'ordre 2 du groupe $\Gamma_0^{(2)}(2)$ et B_{ϕ_2} possède le produit infini suivant :*

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{\phi_2}(Z) &= q^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} (1 - q^n r^l s^m)^{c(nm,l)}(1 - q^{2n} r^{2l} s^{2m})^{c_S(nm,l)} \\ &= \eta(\tau)\eta(2\tau)^4 \vartheta(\tau, z) e^{i\pi\omega} \exp(-\mathrm{L}_{\phi_2})(Z).\end{aligned}$$

Pour tout $(\tau, z) \in \mathbb{H} \times \mathbb{C}$, on pose

$$\psi_2(\tau, z) = 2\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}}(\tau, 2z). \tag{4.15}$$

La proposition 2.50 et le lemme 3.3 assurent que $\psi_2 \in J^f_{0,2}(\Gamma_0(2))$. La forme ψ_2 possède les développements de Fourier suivants :

$$\psi_2(\tau, z) = (r^{-1} + r) + (r^{-3} - r^{-1} - r + r^3)q + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n r^l,$$

$$\begin{aligned}(\psi_2|_{0,2}S)(\tau, z) &= 2 - 2(r^{-2} - 2 + r^2)q^{\frac{1}{2}} - 4(r^{-2} - 2 + r^2)q^1 - 8(r^{-2} - 2 + r^2)q^{\frac{3}{2}} + \dots \\ &= \sum_{n\in\frac{1}{2}\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c_S(n,l)q^n r^l.\end{aligned}$$

Les seules orbites de coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative ou nulle sont

$$c(0,2) = 0\ (-4), \quad c(0,1) = 1\ (-1), \quad c(1,3) = 1\ (-1), \quad c(0,0) = 0\ (0),$$

$$c_S(\frac{3}{2}, 4) = 0\,(-4), \quad c_S(0,2) = 0\,(-4), \quad c_S(0,1) = 0\,(-1), \quad c_S(1,3) = 0\,(-1),$$

$$c_S(0,0) = 2\ (0) \quad \text{et} \quad c_S(\frac{1}{2}, 2) = -2\ (0).$$

On applique alors le théorème 4.3 (les coefficients ci-dessus sont tous entiers et ceux de norme strictement négative sont positifs ou nuls), on obtient :

Proposition 4.9 *La fonction B_{ψ_2} appartient à $M_1(\Gamma_2^+(2), \chi_4)$, où χ_4 est un caractère d'ordre 4 du groupe $\Gamma_2^+(2)$ et B_{ψ_2} possède le produit infini suivant :*

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{\psi_2}(Z) &= q^{\frac{1}{4}} r^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} (1 - q^n r^l s^{2m})^{c(nm,l)} (1 - q^{2n} r^{2l} s^{4m})^{c_S(nm,l)} \\ &= \frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} \vartheta(\tau, z) e^{i\pi\omega} \exp(-\mathrm{L}_{\psi_2})(Z).\end{aligned}$$

4.3.3 Le cas $N = 3$

Soit

$$\phi_3 = 3(\xi^{(6)}_{\binom{3}{1}} \xi^{(6)}_{\binom{3}{5}}). \tag{4.16}$$

La proposition 2.52 assure que $\phi_3 \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(3))$. La forme ϕ_3 possède les développements de Fourier aux deux points paraboliques du groupe $\Gamma_0(3)$ suivants :

$$\phi_3(\tau, z) = (r^{-1} + 1 + r) + (r^{-2} - r^{-1} - r + r^2)q + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n r^l,$$

$$(\phi_3|_{0,1}S)(\tau, z) = 3 - 3(r^{-1} - 2 + r)q^{\frac{1}{3}} + \cdots = \sum_{n\in\frac{1}{3}\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c_S(n,l)q^n r^l.$$

Les seules orbites de coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative ou nulle sont

$$c(0,1) = 1\,(-1), \quad c(0,0) = 1\,(0), \quad c_S(0,1) = 0\,(-1) \quad \text{et} \quad c_S(0,0) = 0\,(0).$$

On peut appliquer le théorème 4.3 à ϕ_2 (tous les coefficients ci-dessus sont des entiers positifs), on obtient alors :

Proposition 4.10 *La fonction* B_{ϕ_3} *appartient à* $M_2(\Gamma_0^{(2)}(3), \chi_2)$*, où* χ_2 *est un caractère d'ordre 2 du groupe* $\Gamma_0^{(2)}(3)$ *et* B_{ϕ_3} *possède le produit infini suivant :*

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_{\phi_3}(Z) &= q^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\(n,l,m)>0}} (1 - q^n r^l s^m)^{c(nm,l)}(1 - q^{3n}r^{3l}s^{3m})^{c_S(nm,l)}\\ &= \eta(3\tau)^3\vartheta(\tau,z)e^{i\pi\omega}\exp(-\mathrm{L}_{\phi_3})(Z).\end{aligned}$$

4.3.4 Le cas $N = 4$

Ce cas est un peu plus compliqué puisque le groupe $\Gamma_0(4)$ possède trois points paraboliques. Soit

$$\phi_4 = 2(\xi^{(4)}_{\binom{2}{1}}\xi^{(4)}_{\binom{2}{3}}). \tag{4.17}$$

La proposition 2.53 assure que $\phi_4 \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(4))$. La forme ϕ_4 possède les développements de Fourier suivants :

$$\phi_4(\tau, z) = (r^{-1} + r) + (r^{-3} - r^{-1} - r^1 + r^3)q^2 + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c(n,l)q^n r^l,$$

$$(\phi_4|_{0,1}S)(\tau, z) = 2 - 2(r^{-1} - 2 + r)q^{\frac{1}{4}} + \cdots = \sum_{n\in\frac{1}{4}\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c_S(n,l)q^n r^l,$$

$$(\phi_4|_{0,1}M)(\tau,z) = 2 + 2(r^{-2} - 2 + r^2)q + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N},\, l\in\mathbb{Z}} c_M(n,l)q^n r^l,$$

où $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Les seules orbites de coefficients de Fourier de norme hyperbolique négative ou nulle sont

$$c(0,1) = 1\ (-1), \quad c(0,0) = 0\ (0), \quad c_M(0,1) = 0\ (-1), \quad c_M(0,0) = 2\ (0),$$

$$c_S(\frac{3}{4},2) = 0\,(-1), \quad c_S(0,1) = 0\,(-1), \quad c_S(0,0) = 2\,(0) \quad \text{et} \quad c_S(1,1) = -16\,(0).$$

On applique alors le théorème 4.3 (les coefficients ci-dessus sont tous entiers, ceux de norme strictement négative sont positifs ou nuls et les nombres $c_M(0,1)$ et $c_M(0,0)$ sont pairs), on obtient :

Proposition 4.11 *La fonction* $\mathrm{B}_{\phi_4} = \nabla_{3/2}$ *appartient à* $M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi_4)$*, où* χ_4 *est un système de multiplicateur d'ordre* 2 *du groupe* $\Gamma_0^{(2)}(4)$ *et* B_{ϕ_4} *possède le produit infini suivant :*

$$\begin{aligned}\nabla_{3/2}(Z) &= (qrs)^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3, m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^m)^{c(nm,l)}(1-q^{2n}r^{2l}s^{2m})^{\frac{1}{2}c_M(nm,l)}(1-q^{4n}r^{4l}s^{4m})^{c_S(nm,l)} \\ &= \frac{\eta(2\tau)\eta(4\tau)^2}{\eta(\tau)}\,\vartheta(\tau,z)e^{i\pi\omega}\exp(-\mathrm{L}_{\phi_4})(Z).\end{aligned}$$

4.4 Formule de trace

Le produit automorphe construit au paragraphe précédent nécessite de connaître les coefficients de Fourier de la forme de Jacobi utilisée en tous les points paraboliques du groupe $\Gamma_0(N)$. Nous allons proposer une autre méthode de construction qui limitera le nombre de développements de Fourier à calculer. À cette fin, nous réécrivons l'opérateur de Hecke complet, $T_N(m)$, en sommant par rapport aux classes à partir d'un même sous-groupe $\Gamma_0(N_a)$, où $N_a = \frac{N}{(N,a)}$:

$$T_N(m) = \sum_{a|m} \sum_{M\in\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N_a)} \sum_{b \bmod \frac{m}{a}} \Gamma_0(N)M\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{m}{a}\end{pmatrix}.$$

À partir de cette représentation, on réorganise la somme formelle d'opérateurs de Hecke, $\mathrm{L}_T = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} T_N(m)$, on obtient alors :

$$\mathrm{L}_T = \sum_{e|N} \sum_{\substack{a'\geqslant 1 \\ (a',N_e)=1 \\ (a=ea')}} \sum_{M\in\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N_e)} \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ (m=an)}} (an)^{-1} \sum_{b \bmod n} \Gamma_0(N)M \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & an & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors réécrire la dernière classe de la manière suivante :

$$\Gamma_0(N)M \begin{pmatrix} \frac{a}{e} & 0 & b & 0 \\ 0 & \frac{an}{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors une nouvelle forme pour (4.4), $\phi \in J_{0,t}^{ph}(\Gamma_0(N))$,

$$\mathrm{L}_\phi(Z) = \sum_{e|N} \sum_{m\geqslant 1} e^{-1}\big(\widetilde{\phi}_{N_e}|_0\, T_-^{(N_e)}(m)\big)(eZ) = \sum_{e|N} e^{-1}\mathrm{L}_{\phi_{N_e}}(eZ), \qquad (4.18)$$

où

$$\widetilde{\phi}_{N_e}(Z) = \phi_{N_e}(\tau,z)e^{2\pi i t\omega} = \mathrm{Tr}_{\Gamma_0(N_e)}\widetilde{\phi}(Z) = \sum_{M\in\Gamma_0(N)\backslash\Gamma_0(N_e)} \big(\widetilde{\phi}\,|_0\, i_1(M)\big)(Z)$$

est une forme de Jacobi presque holomorphe de poids 0 et d'indice t pour le groupe $\Gamma_0(N_e)$ et $T_-^{(N_e)}(m)$ est l'opérateur de Hecke utilisé dans le relèvement arithmétique du chapitre 3 :

$$T^{(N_e)}(m) = \sum_{\substack{ad=m,\ (a,N_e)=1 \\ b \bmod d}} \Gamma_0(N_e) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Considérons alors le développement de Fourier de la forme $\mathrm{Tr}_{\Gamma_0(N_e)}\widetilde{\phi}$ à l'infini :

$$\phi_{N_e}(\tau,z) = \sum_{n,l\in\mathbb{Z}} f_{N_e}(n,l)q^n r^l.$$

On remarque que pour $e = N$, on a $\phi_1 = \phi$ et $f_1(n,l)$ est le coefficient de Fourier de ϕ à l'infini noté $c_{1/N}(n,l)$ dans le théorème 4.3. On mène alors le même genre de calculs que ceux de la preuve du lemme 4.4

$$e^{-1}\mathrm{L}_{\psi_{N_e}}(eZ) = \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ n,l\in\mathbb{Z}}} \sum_{\substack{a\geqslant 1 \\ (a,N_e)=1}} \frac{1}{ae} f_{N_e}(mn,l)\left(q^n r^l s^{tm}\right)^{ea}$$

et

$$\sum_{\substack{m\geqslant 1\\(m,N)=1}} \frac{x^m}{m} = -\sum_{b|N} \frac{\mu(b)}{b}\mathrm{Log}(1-x^b),$$

où μ désigne la fonction de Möbius :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n=1 \\ 0 & \text{si n possède un facteur carré} \\ (-1)^k & \text{si} \quad n = p_1\cdots p_k, \\ & p_i \text{ premiers distincts} \end{cases}$$

Donc

$$\mathrm{L}_\phi(Z) = -\sum_{e|N}\sum_{b|N_e}\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}} \mathrm{Log}\left(1-\left(q^n r^l s^{tm}\right)^{be}\right)^{\mu(b)\frac{f_{N_e}(mn,l)}{be}}.$$

L'avantage de cette nouvelle formule pour L_ϕ est évident : on n'utilise que les développements de ϕ_{N_e} à l'infini. Pour le groupe $\Gamma_0^{(2)}(p)$, p premier, cette expression ne contient que deux fonctions dont une est classique :

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} : J^f_{0,1}(\Gamma_0(p)) \longrightarrow J^f_{0,1}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}\varphi_{0,1},$$

où la forme $\varphi_{0,1}$ a été définie au chapitre 2 (voir 2.23). On obtient alors, pour tout élément $\phi \in J^f_{0,1}(\Gamma_0(p))$,

$$\exp(-\mathrm{L}_{\phi_p}(Z)) = \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}} \left(1-q^n r^l s^{tm}\right)^{c_\phi(nm,l)}\left(1-q^{pn}r^{pl}s^{pmt}\right)^{\frac{1}{p}(f(nm,l)-c_\phi(nm,l))},$$

où $c_\phi(n,l)$ et $f(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de ϕ et de $\mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(\phi_p)$ à l'infini.

4.4.1 Exemples

Nous allons utiliser la nouvelle formule de l'opérateur $T_N(m)$ pour les formes ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 et ψ_2 (voir 4.14, 4.16, 4.17 et 4.15). On sait que l'indice de $\Gamma_0(2)$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est 3 (voir proposition 1.3). Un système de représentants est donné par $\{I_2, S, T^{-1}S\}$ (voir [Ko] exercice 14, chapitre III, §1). En utilisant la formule de transformation modulaire de $\xi^{(2N)}_{\binom{a}{b}}$ (voir 2.44), on a

$$\varphi_{0,1} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\phi_2 = 4(\xi^{(2)}_{\binom{1}{0}})^2 + 4(\xi^{(2)}_{\binom{0}{1}})^2 + 4(\xi^{(2)}_{\binom{0}{0}})^2. \qquad (4.19)$$

L'indice $\Gamma_0(3)$ dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ est 4 et un système de représentants est donné par $\{I_2, S, T^{-1}S, T^{-2}S\}$, donc

$$\varphi_{0,1} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\phi_3 = 3(\xi^{(6)}_{\binom{3}{1}}\xi^{(6)}_{\binom{3}{5}}) + 3(\xi^{(6)}_{\binom{1}{3}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{3}}) + 3(\xi^{(6)}_{\binom{1}{1}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{5}}) + 3(\xi^{(6)}_{\binom{1}{5}}\xi^{(6)}_{\binom{5}{1}}). \tag{4.20}$$

On obtient alors une nouvelle expression pour B_{ϕ_p} ($p = 2$ ou 3) :

$$\mathrm{B}_{\phi_p}(Z) = T^{(0)}_{\phi_p}(Z) \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\, l\in\mathbb{Z}}} \left(1 - q^n r^l s^{pm}\right)^{c_{\phi_p}(nm,l)} \left(1 - q^{pn} r^{pl} s^{pm}\right)^{\frac{1}{p}(a_1(nm,l) - c_{\phi_p}(nm,l))},$$

où $a_1(n,l)$ et $c_{\phi_p}(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,1}$ et de ϕ_p à l'infini. Pour la forme ψ_2, on obtient

$$\varphi_{0,2}(\tau,z) = (\mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\psi_2)(\tau,z) = \psi_2(\tau,z) + 2\xi^{(2)}_{0,1}(\tau,2z) + 2\xi^{(2)}_{0,0}(\tau,2z), \tag{4.21}$$

où la forme $\varphi_{0,2}$ a été définie précédemment (voir 4.8). On obtient alors

$$\mathrm{B}_{\psi_2}(Z) = T^{(0)}_{\psi_2}(Z) \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\, l\in\mathbb{Z}}} \left(1 - q^n r^l s^{2m}\right)^{c_{\psi_2}(nm,l))} \left(1 - q^{2n} r^{2l} s^{2m}\right)^{\frac{1}{2}(a_2(nm,l) - c_{\psi_2}(nm,l))},$$

où $a_2(n,l)$ et $c_{\psi_2}(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,2}$ et de ψ_2 à l'infini.

Traitons finalement le cas de ϕ_4. Dans la nouvelle formule de $T_N(m)$, on a un groupe intermédiaire qui est $\Gamma_0(2)$, il apparaît alors deux formes :

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\phi_4 \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}_{\Gamma_0(2)}\phi_4.$$

Un système de représentants de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ modulo $\Gamma_0(4)$ est

$$\left\{I_2, S, T^{-1}S, T^{-2}S, T^{-3}S, ST^{-2}S\right\},$$

et pour $\Gamma_0(2)$ modulo $\Gamma_0(4)$ c'est, par exemple, $\{I_2, ST^{-2}S\}$. On en déduit les expressions suivantes pour les traces de ϕ_4 :

$$\varphi_{0,1} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\phi_4 \quad \text{et} \quad \phi_2 = \mathrm{Tr}_{\Gamma_0(2)}\phi_4 = \sum_{M\in\Gamma_0(4)\backslash\Gamma_0(2)} \phi_4|_0 M. \tag{4.22}$$

Cela nous permet d'écrire

$$\mathrm{B}_{\phi_4}(Z) = T^{(0)}_{\phi_4}(Z) \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\, l\in\mathbb{Z}}} \left(1 - q^n r^l s^{m}\right)^{c_{\phi_4}(nm,l))} \left(1 - q^{2n} r^{2l} s^{2m}\right)^{\frac{1}{2}(c_{\phi_2}(nm,l) - c_{\phi_4}(nm,l))}$$

$$\left(1 - q^{4n} r^{4l} s^{4m}\right)^{\frac{1}{4}(a_1(nm,l) - c_{\phi_2}(nm,l))},$$

où $a_1(n,l)$, $c_{\phi_2}(n,l)$ et $c_{\phi_4}(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,1}$, ϕ_2 et de ϕ_4 à l'infini.

Ces nouvelles formules pour les produits automorphes nous seront utiles au prochain chapitre pour la construction de formes réflexives : on quotientera entre eux certains de ces produits pour obtenir de nouvelles formes de Siegel.

Chapitre 5

Applications et perspectives

5.1 Les dd-formes modulaires

La première (i.e. celle de plus petit poids) forme modulaire parabolique pour $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ est la forme de Igusa Ψ_{10}. En fait, la forme Ψ_{10} est égale (à une constante multiplicative près) au carré de la forme Δ_5 qui est le produit des dix séries thêta de Siegel paires (voir [F] et 3.17). La forme modulaire Δ_5 possède la propriété remarquable suivante : elle s'annule (à l'ordre un) exactement sur la diagonale

$$\mathcal{H}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix},\ \tau,\, \omega \in \mathbb{H}_1 \right\} \subset \mathbb{H}_2$$

du demi-plan supérieur de Siegel. Lors de la conférence « *Black holes, Black Rings and Modular Forms* »(ENS, Paris, Août 2007) fut formulé un problème sur l'existence de formes modulaires de Siegel « ressemblant » à Δ_5 pour des sous-groupes de congruence de type de Hecke. De telles formes modulaires de Siegel sont utilisées pour caractériser l'entropie des trous noirs et la dégénérescence de dyons pour certaines classes de compactification de cordes CHL (voir [DG], [DN]). Une reformulation de ce problème (plus mathématique) est : *déterminer toutes les formes de Siegel F pour $\Gamma_0^{(2)}(N)$ (avec un caractère ou un système de multiplicateur) qui s'annulent exactement à l'ordre* 1 *le long des $\Gamma_0^{(2)}(N)$-translatées de la diagonale $\mathcal{H}_1 \subset \mathbb{H}_2$.*

On appelle de telles formes **dd-formes modulaires** : formes modulaires de diviseur diagonal. Une dd-forme modulaire est donc, du point de vue des zéros, une généralisation naturelle de Δ_5. La résolution de ce problème a donné lieu à une publication commune avec Valéry Gritsenko (voir [GC]). Dans cette section, nous reprenons cette solution.

Théorème 5.1 *Pour les sous-groupes de congruence de Hecke $\Gamma_0^{(2)}(N)$ avec $N > 1$, il existe exactement trois dd-formes modulaires : ∇_3 de poids 3 pour $\Gamma_0^{(2)}(2)$ avec un caractère d'ordre 2, ∇_2 de poids 2 pour $\Gamma_0^{(2)}(3)$ avec un caractère d'ordre 2 et $\nabla_{3/2}$ de poids $3/2$ pour $\Gamma_0^{(2)}(4)$ avec un système de multiplicateur d'ordre 4.*

On a obtenu un résultat plus précis que ce théorème : nous avons donné la classification complète des dd-formes modulaires pour les sous-groupes de Hecke $\Gamma_t(N)$ des groupes symplectiques paramodulaires Γ_t. Le théorème 5.2 affirme qu'il existe exactement *huit* telles dd-formes modulaires. Quatre d'entre elles, Δ_5, Δ_2, Δ_1 et $\Delta_{1/2}$ de poids 5, 2, 1 et 1/2 pour les groupes paramodulaires Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4, ont été construites par V. Gritsenko et V. Nikulin dans [GN2]. Les quatre autres formes sont les trois formes du théorème 5.1 et la dd-forme modulaire Q_1 de poids 1 avec un caractère d'ordre 4 pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_2(2)$ du groupe paramodulaire Γ_2.

5.1.1 Classification des dd-formes modulaires

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante

Proposition 5.2 *Si F_k est une dd-forme modulaire de poids entier (ou demi-entier) k avec un caractère (ou un système de multiplicateur) pour $\Gamma_t(N)$ alors le triplet $(t, N; k)$ ne peut prendre que l'une des neuf valeurs suivantes*

$$(1,1;5),\ (2,1;2),\ (3,1;1),\ (4,1;\frac{1}{2}),\ (1,2;3),\ (1,3;2),\ (1,4;\frac{3}{2}),$$

$$(2,2;1),\ (2,4;\frac{1}{2}).$$

Les dd-formes modulaires correspondantes sont alors, si elles existent, uniques à un scalaire multiplicatif près.

Démonstration. L'unicité d'une dd-forme modulaire pour un sous-groupe fixé est due au principe de Koecher (voir [F]). Soit F une dd-forme modulaire non nulle de poids k pour $\Gamma_t(N)$. Introduisons l'opérateur de symétrisation multiplicative suivant :

$$[F]_1 = \prod_{\gamma \in \Gamma_t^{(int)}(N) \backslash \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})} F|_k \gamma \qquad \text{où} \quad \Gamma_t^{(int)}(N) = \Gamma_t(N) \cap \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}).$$

On vérifie alors aisément que $[F]_1$ est une forme modulaire non nulle pour $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ de poids $k \cdot [\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_t^{(int)}(N)]$, notons également $\Gamma_d^{(int)} = \Gamma_d \cap \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$. Dans ce qui suit, la lettre p désigne un nombre premier.

Lemme 5.3 *Pour $t \geqslant 1$ et $N \geqslant 1$ entiers, on a*

$$[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_t^{(int)}(N)] = \Big((Nt)^3 \prod_{p\,|(tN)} (1+p^{-1})(1+p^{-2})\Big) \cdot \prod_{p\,|(t,N)} (1+p^{-1}).$$

Démonstration. On a les inclusions suivantes de sous-groupes

$$\Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N) \subset \Gamma_{tN}^{(int)} \subset \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$$

et

$$\Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N) \subset \Gamma_t^{(int)}(N) \subset \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}).$$

Ceci nous donne (formule des indices)

$$[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N)] = [\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_{tN}^{(int)}] \cdot [\Gamma_{tN}^{(int)} : \Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N)]$$

et

$$[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N)] = [\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_t^{(int)}(N)] \cdot [\Gamma_t^{(int)}(N) : \Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N)].$$

On en déduit donc

$$[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_t^{(int)}(N)] = \frac{[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_{tN}^{(int)}] \cdot [\Gamma_{tN}^{(int)} : \Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N)]}{[\Gamma_t^{(int)}(N) : \Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N)]}.$$

On sait que (voir [GH1, §1])

$$[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_{tN}^{(int)}] = (tN)^3 \prod_{p\,|(tN)} (1+\frac{1}{p})(1+\frac{1}{p^2}).$$

On remarque que

$$[\Gamma_{tN}^{(int)} : \Gamma_{tN}^{(int)} \cap \Gamma_t(N)] = [\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = N \prod_{p\,|N} (1+\frac{1}{p}),$$

et

$$[\Gamma_t^{(int)}(N) : \Gamma_t^{(int)} \cap \Gamma_{tN}] = [\Gamma_0(t) : \Gamma_0(tN)] = \frac{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(tN)]}{[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(t)]}$$
$$= N \prod_{p\,|(tN)} (1+\frac{1}{p}) \prod_{p\,|t} (1+\frac{1}{p})^{-1}.$$

Le lemme est donc démontré. □

Soit $\pi_{t,N} : \mathbb{H}_2 \to \mathcal{A}_t(N) = \Gamma_t(N)\backslash\mathbb{H}_2$ la projection naturelle.

Supposons que F possède un diviseur diagonal de multiplicité $m \geqslant 1$, i.e. $\mathrm{div}_{\mathcal{A}_t(N)} F = m \cdot \pi_{t,N}(\mathcal{H}_1)$. Sachant que H_1 est irréductible dans $\mathcal{A}_1$ (H_1 étant la surface de Humbert de discriminant 1 dans $\mathcal{A}_1$, pour la théorie des surfaces de Humbert, on renvoie à [vdG] et [GH2]). Par conséquent, $\mathrm{div}_{\mathcal{A}_1}([F]_1)$ est la surface de Humbert H_1 avec une certaine multiplicité, disons d. Le principe de Koecher permet alors d'affirmer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}^*$ telle que

$$[F]_1(Z) = C \cdot \Delta_5(Z)^d.$$

Calcul de la multiplicité d

On sait (voir [GH1]) que le stabilisateur de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ est le groupe engendré par le produit direct de deux copies de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$ et l'involution J :

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & b_1 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{R}) \right\}, \quad J = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

L'ordre de H_1 en tant que zéro de $[F]_1$ est le nombre de classes de $\Gamma_t^{(int)}(N)M$ dans $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ contenant un élément du stabilisateur de $\mathcal{H}_1$. On doit donc déterminer le nombre de classes distinctes $\Gamma_t^{(int)}(N)M$ où $M \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})}(\mathcal{H}_1)$. L'involution J qui permute les éléments τ et ω de $Z \in \mathbb{H}_2$ appartient à $\Gamma_t^{(int)}(N)$ si et seulement si $t = 1$. Si $t > 1$ alors $\Gamma_t^{(int)}(N)M_1 \neq \Gamma_t^{(int)}(N)JM_2$ pour tout couple (M_1, M_2) de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. On a donc un facteur 2 si $t > 1$. En résumé, $[F]_1$ s'annule sur H_1 à l'ordre

$$d = 2^{\delta(t)}\, m[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] \cdot [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(tN)],$$

où $\delta(t) = 0$ si $t = 1$ et $\delta(t) = 1$ si $t > 1$.

Connaissant le poids de $[F]_1$ et utilisant la relation entre $[F]_1$ et Δ_5, on obtient la relation suivante entre les poids de ces deux formes

$$\left(kN \prod_{\substack{p\,|N \\ p \nmid t}} \frac{p^2+1}{p(p+1)} \right) \cdot t^2 \prod_{p\,|t} \frac{p^2+1}{p^2} = 2^{\delta(t)}\, 5m.$$

À m fixé, de simples arguments de divisibilité entraînent l'existence de seulement quelques possibilités pour les triplets $(t, N; k)$. Ainsi, si F est une dd-forme modulaire (i.e. $m = 1$) de poids k , on a uniquement quatre triplets $(t, N; k)$ avec $t = 1$ et cinq de plus si $t > 1$. Ce sont les triplets annoncés dans la proposition. □

5.1.2 Construction des huit dd-formes modulaires

Théorème 5.4 *Pour les sous-groupes de Hecke $\Gamma_t(N) \subseteq \Gamma_t$, il existe exactement huit dd-formes modulaires. Elles appartiennent aux espaces suivants :*

$$M_5(\Gamma_1, \chi_2); \quad M_2(\Gamma_2, \chi_4),\ M_3(\Gamma_0^{(2)}(2), \chi_2); \quad M_1(\Gamma_3, \chi_6),\ M_2(\Gamma_0^{(2)}(3), \chi_2);$$

$$M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_4, \chi_8),\ M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi_4); \qquad M_1(\Gamma_2(2), \chi_4)$$

où χ_d est un caractère (ou un système de multiplicateur) d'ordre d du groupe modulaire correspondant.

En fait, nous avons déjà rencontré ces huit dd-formes aux chapitres 3 et 4. En effet, notons F_1 la dd-forme pour $M_1(\Gamma_2(2), \chi_4)$. Au chapitre 3, nous avons construit une forme $Q_1 \in M_1(\Gamma_2^+(2), \chi_4)$ (voir 3.23) et nous avons remarqué que cette forme s'annule le long des $\Gamma_2^+(2)$-translatées de $\mathcal{H}_1$. On considère alors le quotient $\frac{Q_1}{F_1}$ qui est donc holomorphe dans $\mathbb{H}_2$. C'est donc une forme modulaire de poids 0 pour $\Gamma_2(2)$ (rappelons que $\Gamma_2^+(2) = \Gamma_2(2) \cup V_2\Gamma_2(2)$), le principe de Koecher implique que ce quotient est constant. La dd-forme pour $M_1(\Gamma_2(2), \chi_4)$ est donc Q_1. En reprenant les mêmes arguments pour la forme B_{ψ_2} construite au chapitre 4 (voir 4.9) qui s'annule également le long des $\Gamma_2^+(2)$-translatées de $\mathcal{H}_1$, on obtient que les formes Q_1 et B_{ψ_2} sont proportionnelles, puis, en comparant leur premier coefficient de Fourier-Jacobi, qu'elles sont égales. Ce raisonnement est valable pour les sept autres dd-formes. La dd-forme pour $M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0^{(2)}(4), \chi_4)$ est donc $\nabla_{3/2}$ et on obtient l'égalité annoncée au chapitre 3 : $\nabla_{3/2}^2 = F_3$.

Identités dans le cas $N > 1$

Les identités suivantes sont valables pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$:

$$\begin{aligned}\nabla_3(Z) &= \mathrm{R}(\varphi_{3,\frac{1}{2}})(Z) = \mathrm{B}_{\phi_2}(Z) \\ &= q^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3 \\ m\geqslant 0 \\ (n,l,m)>0}} (1 - q^n r^l s^m)^{c(nm,l)} (1 - q^{2n} r^{2l} s^{2m})^{c_S(nm,l)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_1(Z) &= \mathrm{R}(\varphi_{1,\frac{1}{2}})(Z)\\
&= \sum_{N>0} \sum_{\substack{n,\, m\in 4\mathbb{N}+1\\ l\in 2\mathbb{Z}+1\\ (2N+1)^2=2mn-l^2}} \left(\frac{-4}{l}\right) \sigma_0((n,l,m))\, q^{\frac{n}{4}} r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{m}{2}}\\
&= \mathrm{B}_{\psi_2}(Z)\\
&= q^{\frac{1}{4}} r^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3\\ m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^{2m})^{c(nm,l)} (1-q^{2n} r^{2l} s^{4m})^{c_S(nm,l)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_2(Z) &= \mathrm{R}(\varphi_{2,\frac{1}{2}})(Z)\\
&= \sum_{N>0} \sum_{\substack{m,\, n\in 2\mathbb{N}+1\\ 3N^2=4mn-l^2}} N \left(\frac{-4}{Nl}\right) \sum_{\substack{a|(l,m,n)\\ a>0}} a \left(\frac{a}{3}\right) q^{\frac{n}{2}} r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{m}{2}}\\
&= \mathrm{B}_{\phi_3}(Z)\\
&= q^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3\\ m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^{m})^{c(nm,l)} (1-q^{3n} r^{3l} s^{3m})^{c_S(nm,l)}
\end{aligned}$$

et

$$F_3(Z) = \mathrm{R}(h_{3/2}^2)(Z) = \nabla_{3/2}^2(Z) = \mathrm{B}_{2\phi_4}(Z) =$$

$$qrs \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3\\ m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^m)^{2c(nm,l)} (1-q^{2n} r^{2l} s^{2m})^{c_M(nm,l)} (1-q^{4n} r^{4l} s^{4m})^{2c_S(nm,l)}.$$

Dans le cas $N = 1$ de telles identités ont été obtenues par les auteurs de [GN2]. Rappelons brièvement ces formules puisqu'elles nous seront utiles au paragraphe suivant. On a les identités suivantes pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$:

$$\Delta_5(Z) = \mathrm{R}(\eta^9\vartheta)(Z) = \mathrm{B}_{\varphi_{0,1}}(Z)$$

$$= (qrs)^{1/2} \prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3\\ m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}} (1-q^n r^l s^m)^{a_1(nm,l)},$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(Z) &= \mathrm{R}(\eta^3\vartheta)(Z)\\ &= \sum_{N>0}\ \sum_{\substack{m,\,n\in 4\mathbb{N}+1\\ N^2=2mn-l^2}} N\left(\frac{-4}{Nl}\right)\sum_{\substack{a|(l,m,n)\\ a>0}}\left(\frac{-4}{a}\right) q^{\frac{n}{4}} r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{m}{2}}\\ &= \mathrm{B}_{\varphi_{0,2}}(Z)\\ &= q^{\frac14} r^{\frac12} s^{\frac12}\prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3\\ m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}}(1-q^n r^l s^{2m})^{a_2(nm,l)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(Z) &= \mathrm{R}(\eta\vartheta)(Z)\\ &= \sum_{N>0}\ \sum_{\substack{m,\,n\in 6\mathbb{N}+1\\ N^2=4mn-3l^2}} \left(\frac{-4}{l}\right)\left(\frac{12}{N}\right)\sum_{\substack{a|(l,m,n)\\ a>0}}\left(\frac{6}{a}\right) q^{\frac{n}{6}} r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{m}{2}}\\ &= \mathrm{B}_{\varphi_{0,3}}(Z)\\ &= q^{\frac16} r^{\frac12} s^{\frac12}\prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3\\ m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}}(1-q^n r^l s^{3m})^{a_3(nm,l)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta_{1/2}(Z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}}\left(\frac{-4}{n}\right)\left(\frac{-4}{m}\right) q^{\frac{n^2}{8}} r^{\frac{nm}{2}} s^{\frac{m^2}{2}}\\ &= \mathrm{B}_{\varphi_{0,4}}(Z)\\ &= q^{\frac18} r^{\frac12} s^{\frac12}\prod_{\substack{(n,l,m)\in\mathbb{Z}^3\\ m\geqslant 0\\ (n,l,m)>0}}(1-q^n r^l s^{4m})^{a_4(nm,l)}.\end{aligned}$$

Théorème 5.5 *La dd-forme modulaire de type $(2,4;\frac12)$ n'existe pas.*

Démonstration. Supposons que $D \in M_{\frac12}(\Gamma_2(4),\chi)$ soit une dd-forme modulaire. La forme D possède alors un développement de Fourier-Jacobi de la forme :

$$D(Z) = d_{\frac12,0}(\tau) + \sum_{m\in\frac12\mathbb{N}^*} d_{\frac12,m}(\tau,z)e^{2\pi i m\omega}.$$

Le premier coefficient de Fourier-Jacobi, $d_{\frac12,0}$, est identiquement nul car D est une dd-forme :

$$d_{\frac12,0}(\tau) = \lim_{v_1\to\infty} D\Big(\begin{pmatrix}\tau & z\\ z & iv_1\end{pmatrix}\Big) = \lim_{v_1\to\infty} D\Big(\begin{pmatrix}\tau & 0\\ 0 & iv_1\end{pmatrix}\Big) = 0$$

pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. Donc la forme D possède le développement de Fourier-Jacobi suivant :

$$D(Z) = d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\tau) + \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*, m \geqslant 1} d_{\frac{1}{2},m}(\tau, z) e^{2\pi i m \omega}.$$

On peut voir Q_1 comme une forme modulaire pour le groupe $\Gamma_2(4) < \Gamma_2(2)$. La forme Q_1 s'annule le long de la diagonale $\mathcal{H}_1$, mais ce diviseur possède plusieurs composantes irréductibles modulo le groupe $\Gamma_2(4)$. Donc le quotient $F = Q_1/D$ est une fonction holomorphe dans $\mathbb{H}_2$ et est une forme modulaire pour le groupe $\Gamma_2(4)$ de poids $\frac{1}{2}$ (principe de Koecher). La forme F possède donc le développement de Fourier-Jacobi suivant :

$$F(Z) = f_{\frac{1}{2}}(\tau) + \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*} f_{\frac{1}{2},m}(\tau, z) \exp(2\pi i m \omega),$$

où la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ est une fonction modulaire (i.e. se transforme comme une forme modulaire mais peut posséder des pôles aux points paraboliques) de poids $\frac{1}{2}$ pour le groupe $\Gamma_0(4)$ avec un système de multiplicateur d'ordre fini. On considère alors les développements de Fourier-Jacobi de chacun des membres de l'égalité $Q_1 = D \cdot F$, on obtient

$$\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} \vartheta(\tau, z) = f_{\frac{1}{2}}(\tau) \cdot d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\tau, z).$$

Cela conduit au fait que le premier coefficient de Fourier-Jacobi, non trivial, de D, $d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$, est égal à $g\vartheta$, où g est une fonction modulaire de poids 0 pour le groupe $\Gamma_0(4)$ avec un caractère d'ordre fini. Supposons que la fonction g soit une forme modulaire ($g \in M_0(\Gamma_0(4), \epsilon)$, où ϵ est un caractère d'ordre fini de $\Gamma_0(4)$). La forme g est donc constante (voir [Ko] chapitre III, §3, proposition 18). On en déduit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}^*$ telle que

$$F(Z) = c\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} + \sum_{m \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*} f_{\frac{1}{2},m}(\tau, z) \exp(2\pi i m \omega).$$

Cette dernière égalité est absurde car la forme F s'annule sur les $(\Gamma_2(2) - \Gamma_2(4))$-translatées de $\mathcal{H}_1$ et $\frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} \neq 0$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. Donc la fonction g possède un pôle en un point parabolique de $\Gamma_0(4)$ et la forme de Jacobi $g\vartheta$ ne peut être holomorphe en ce point puisque la série thêta de Jacobi est de poids singulier (pour tous ses coefficients de Fourier $c(n, l)$, on a $2n - l^2 = 0$). Donc la forme D n'est pas holomorphe. □

Le tableau suivant résume la liste des huit dd-formes :

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
$t=1$	Δ_5	∇_3	∇_2	$\nabla_{3/2}$
$t=2$	Δ_2	Q_1		
$t=3$	Δ_1			
$t=4$	$\Delta_{1/2}$			

On peut appliquer le théorème 3.5 à certaines puissances des dd-formes apparues précédemment.

Corollaire 5.6 *On a*

$$\nabla_3^2 = \mathrm{R}\big(\varphi^2_{3,\frac{1}{2}}\big) \in S_6(\Gamma_0(2)),$$

$$\nabla_2^2 = \mathrm{R}\big(\varphi^2_{2,\frac{1}{2}}\big) \in S_4(\Gamma_0(3)),$$

$$Q_1^2 = \mathrm{R}\big(\varphi^2_{1,\frac{1}{2}}\big) \in M_2(\Gamma_2(2), \chi_2),$$

$$Q_1^4 = \mathrm{R}\big(\varphi^4_{1,\frac{1}{2}}\big) \in M_4(\Gamma_2(2)).$$

Démonstration. Toutes ces identités sont semblables, prouvons la dernière. La forme $\varphi^4_{1,\frac{1}{2}}$ appartient à $J_{4,2}(\Gamma_0(2))$, on peut lui appliquer le théorème 3.5 pour obtenir $\mathrm{R}(\varphi^4_{1,\frac{1}{2}}) \in M_4(\Gamma_2(2))$. Cette forme de Jacobi $\varphi^4_{1,\frac{1}{2}}$ possède un zéro d'ordre 4 en $z=0$. Les opérateurs de Hecke dans la construction du relèvement arithmétique conservent ce diviseur. Ainsi, le quotient $\mathrm{R}(\varphi^4_{1,\frac{1}{2}})/Q_1^4$ est une forme modulaire de poids nul donc constant (principe de Koecher). En comparant les premiers coefficients de Fourier-Jacobi de ces deux formes, on voit que cette constante est 1. $\square$

Les formes modulaires ∇_3^2 et ∇_2^2 coïncident avec deux des générateurs des anneaux gradués de formes de Siegel pour les groupes $\Gamma_0^{(2)}(2)$ et $\Gamma_0^{(2)}(3)$ (voir [Ib]). La construction proposée dans le théorème 3.5 fournit une approche plus universelle de ces générateurs : elle nous permet d'obtenir des fonctions plus fondamentales, comme ∇_2 ou ∇_3, qui sont des racines des générateurs des anneaux gradués correspondants. Donnons les relations entre ces deux formes et les générateurs proposés par Ibukiyama. On a

$$\nabla_3^2 = \mathrm{R}\big(\varphi^2_{3,\frac{1}{2}}\big) = K \in S_6(\Gamma_0(2)), \tag{5.2}$$

où

$$K = \frac{1}{4096}\big(\theta_{0100}\theta_{0110}\theta_{1000}\theta_{1001}\theta_{1100}\theta_{1111}\big)^2$$

et

$$\nabla_2^2 = \mathrm{R}\big(\varphi^2_{2,\frac12}\big) = \frac{1}{24}\,\Theta_4(Z) \in S_4(\Gamma_0(3)).$$

θ_{abcd} est la série thêta de Siegel de caractéristiques $(abcd)$ de niveau 2 (voir 5.7) et Θ_4 est une série thêta avec une fonction sphérique (voir [AI], p.256). Nous utiliserons cette remarque pour donner une nouvelle preuve de la structure des anneaux gradués $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2))$ et $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(3))$ (voir 5.3).

5.2 Formes modulaires réflexives

Pour chaque dd-forme modulaire, nous avons une identité entre le développement de Fourier et le produit automorphe de Borcherds. De telles identités sont assez rares. Dans ce paragraphe, nous allons donner de nouveaux exemples de telles relations en étudiant de nouvelles formes modulaires réflexives i.e. des formes modulaires dont les diviseurs sont déterminés par des réflexions dans le groupe correspondant (voir [GN2] et [GN3]). Chaque dd-forme modulaire est réflexive puisqu'elle s'annule sur $\mathcal{H}_1$. Ces nouveaux exemples sont construits comme quotients des dd-formes modulaires. Pour cela, nous utilisons la formule de trace du chapitre précédent et obtenons de nouvelles formes modulaires réflexives de poids 2 pour $\Gamma_0^{(2)}(2)$, de poids 3 pour $\Gamma_0^{(2)}(3)$, de poids 3/2 et 7/2 pour $\Gamma_0^{(2)}(4)$ et de poids 1 pour $\Gamma_2(2)$:

$$\frac{\Delta_5(2Z)}{\nabla_3(Z)},\quad \frac{\Delta_2(2Z)}{Q_1(Z)},\quad \frac{\nabla_3(2Z)}{\nabla_{3/2}(Z)},\quad \frac{\Delta_5(2Z)}{\nabla_{3/2}(Z)}$$

et

$$\frac{\Delta_5(Z)}{\nabla_3(Z)},\quad \frac{\Delta_5(Z)}{\nabla_2(Z)},\quad \frac{\Delta_2(Z)}{Q_1(Z)},\quad \frac{\nabla_3(Z)}{\nabla_{3/2}(Z)},\quad \frac{\Delta_5(Z)}{\nabla_{3/2}(Z)}.$$

On reprend les notations du chapitre précédent. Nous savons désormais que $\Delta_5 = \mathrm{B}_{\varphi_{0,1}}$, en utilisant la formule de trace pour la forme ϕ_2 (voir 4.14 et 4.19), on obtient le produit infini suivant :

$$\frac{\Delta_5(Z)}{\nabla_3(Z)} = \frac{\eta(\tau)^8}{\eta(2\tau)^4}\prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}}\left(\frac{1-q^nr^ls^m}{1+q^nr^ls^m}\right)^{\frac12((a_1(nm,l)-c_{\phi_2}(nm,l))},$$

où les nombres $c_{\phi_2}(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de ϕ_2 en ∞.

Pour $N=3$, on utilise la forme ϕ_3 (voir 4.16) et la formule de trace (4.20) pour obtenir :

$$\frac{\Delta_5(Z)}{\nabla_2(Z)} = \frac{\eta(\tau)^9}{\eta(3\tau)^3}\prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}}(1-q^nr^ls^m)^{b(nm,l)}(1-q^{3n}r^{3l}s^{3m})^{-\frac13 b(nm,l)},$$

où $b(n,l) = a_1(n,l) - c_{\phi_3}(n,l)$ et les nombres $c_{\phi_3}(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de ϕ_3 en ∞. Ces deux fonctions sont holomorphes dans $\mathbb{H}_2$ (le diviseur de Δ_5 contient celui de ∇_3 et de ∇_2). Donc

$$\frac{\Delta_5}{\nabla_3} \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(2), \chi^{(2)} \times Id_H) \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_5}{\nabla_2} \in M_3(\Gamma_0^{(2)}(3), \chi^{(3)} \times Id_H).$$

On peut préciser les caractères de ces deux formes sachant que le caractère de Δ_5 est induit par $v_\eta^{12} \times v_H$. On a

$$\chi^{(2)}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2c & d \end{smallmatrix}\right)) = (-1)^c \text{ pour } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(2)$$

et

$$\chi^{(3)}(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 3c & d \end{smallmatrix}\right)) = \left(\frac{d}{3}\right) \text{ pour } \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 3c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(3).$$

Ces deux caractères sont d'ordre 2. Considérons la première forme modulaire réflexive de la liste ci-dessus, on a

$$\frac{\Delta_5(2Z)}{\nabla_3(Z)} = \widetilde{\phi}_{2,\frac{1}{2}}(Z) \prod_{\substack{m \geqslant 1 \\ n,l \in \mathbb{Z}}} (1-q^{2n}r^{2l}s^{2m})^{\frac{1}{2}(a_1(nm,l)+c_{\phi_2}(nm,l))}(1-q^n r^l s^m)^{-c_{\phi_2}(nm,l)},$$

où

$$\phi_{2,\frac{1}{2}}(\tau,z) = \frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)} \frac{\vartheta(2\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}$$

On vérifie alors que $\phi_{2,\frac{1}{2}} \in J_{2,\frac{1}{2}}^{par}(\Gamma_0(2), \chi_2 \times v_{(H,\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),2)})$, le caractère χ_2 est d'ordre 2 : $\chi_2(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 2c & d \end{smallmatrix}\right)) = (-1)^b$. On peut appliquer le théorème 3.5 à cette forme de Jacobi ($\Gamma_1(4,2) \subset \operatorname{Ker}(\chi_2)$) ainsi qu'à son carré (bien que le caractère $v_{(H,\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),2)}$ ne soit pas v_H, on peut appliquer ce théorème : après l'action de l'opérateur de Hecke $T_-^{(N)}(m)$, ce caractère n'est pas modifié). On obtient que cette forme modulaire ainsi que son carré sont les relèvements arithmétiques de leur premier coefficient de Fourier-Jacobi

$$\frac{\Delta_5^{(2)}}{\nabla_3} = \mathrm{R}(\phi_{2,\frac{1}{2}}) \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(2), \chi_2 \times v_{(H,\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right),2)}),$$

où $\Delta_5^{(2)}(Z) = \Delta_5(2Z)$ pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$ et

$$\left(\frac{\Delta_5^{(2)}}{\nabla_3}\right)^2 = \mathrm{R}(\phi_{2,\frac{1}{2}}^2) \in M_4(\Gamma_0^{(2)}(2)). \tag{5.3}$$

On obtient des formules semblables dans le cas $N=3$:

$$\frac{\Delta_5^{(3)}}{\nabla_2} = \mathrm{R}(\phi_{3,1}) \in M_3(\Gamma_0^{(2)}(3), \left(\frac{\det D}{3}\right)), \tag{5.4}$$

où $\Delta_5^{(3)}(Z) = \Delta_5(3Z)$ pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$ et

$$\phi_{3,1}(\tau, z) = \eta(3\tau)^6 \, \frac{\vartheta(3\tau, 3z)}{\vartheta(\tau, z)}.$$

On vérifie que $\phi_{3,1} \in J_{3,1}(\Gamma_0(3), \left(\frac{d}{3}\right))$ et $\Gamma_1(3,1) \subset \mathrm{Ker}(\left(\frac{d}{3}\right))$ (ce qui permet l'application du théorème 3.5 et donne la formule 5.4). On a également le produit infini suivant :

$$\frac{\Delta_5(3Z)}{\nabla_2(Z)} = \widetilde{\phi}_{3,1}(Z) \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}} (1-q^{3n}r^{3l}s^{3m})^{\frac{1}{3}(2a_1(nm,l)+c_{\phi_3}(nm,l))}(1-q^nr^ls^m)^{-c_{\phi_3}(nm,l)}.$$

Notons que cette dernière forme n'est pas réflexive.

Traitons le cas $N=4$. Nous avons vu qu'en utilisant l'opérateur de trace pour ϕ_4, on obtient les deux formes $\varphi_{0,1}$ et ϕ_2. Cela nous permet d'obtenir des produits infinis pour les quatre formes réflexives du type $\frac{\Delta_5}{\nabla_{3/2}}$ et $\frac{\nabla_3}{\nabla_{3/2}}$ de la liste ci-dessus en n'utilisant que les coefficients de Fourier de $\varphi_{0,1}$, ϕ_2 et ϕ_4 en ∞ :

$$\frac{\Delta_5(Z)}{\nabla_{3/2}(Z)} = \frac{\eta(\tau)^{10}}{\eta(2\tau)\eta(4\tau)^2} \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}} (1-q^nr^ls^m)^{b_1(nm,l)}(1-q^{2n}r^{2l}s^{2m})^{b_2(nm,l)}$$

$$(1-q^{4n}r^{4l}s^{4m})^{b_3(nm,l)},$$

où

$$b_1(n,l) = a_1(n,l) - c_{\phi_4}(n,l), \quad b_2(n,l) = \frac{1}{2}(c_{\phi_4}(n,l) - c_{\phi_2}(n,l))$$

et

$$b_3(n,l) = \frac{1}{4}(c_{\phi_2}(n,l) - a_1(n,l)).$$

La fonction $\frac{\Delta_5}{\nabla_{3/2}}$ est une forme modulaire de poids $\frac{7}{2}$ pour le groupe $\Gamma_0^{(2)}(4)$ avec le système de multiplicateur d'ordre 4 suivant :

$$v_\eta^{10}(v_\eta^{(2)})^{-1}(v_\eta^{(4)})^{-2} \times Id_H.$$

L'identité suivante est valable pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$:

$$\frac{\nabla_3(Z)}{\nabla_{3/2}(Z)} = \frac{\eta(\tau)^2\eta(2\tau)^3}{\eta(4\tau)^2} \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,l\in\mathbb{Z}}} (1-q^n r^l s^m)^{c_1(nm,l)}(1-q^{2n}r^{2l}s^{2m})^{c_2(nm,l)}$$

$$(1-q^{4n}r^{4l}s^{4m})^{c_3(nm,l)},$$

où

$$c_1(n,l) = c_{\phi_2}(n,l) - c_{\phi_4}(n,l), \quad c_2(n,l) = \frac{1}{2}(c_{\phi_4}(n,l) - 2c_{\phi_2}(n,l) + a_1(n,l))$$

et

$$c_3(n,l) = \frac{1}{4}(c_{\phi_2}(n,l) - a_1(n,l)).$$

La fonction $\frac{\nabla_3}{\nabla_{3/2}}$ est une forme modulaire de poids $\frac{3}{2}$ pour le groupe $\Gamma_0^{(2)}(4)$ avec le système de multiplicateur d'ordre 4 suivant :

$$v_\eta^2(v_\eta^{(2)})^3(v_\eta^{(4)})^{-2} \times Id_H.$$

De même, pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$, on a :

$$\frac{\nabla_3^{(2)}(Z)}{\nabla_{3/2}(Z)} = \eta(4\tau)^2\eta(\tau)\frac{\vartheta(2\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}e^{i\pi\omega} \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,l\in\mathbb{Z}}} (1-q^n r^l s^m)^{d_1(nm,l)}(1-q^{2n}r^{2l}s^{2m})^{d_2(nm,l)}$$

$$(1-q^{4n}r^{4l}s^{4m})^{d_3(nm,l)}$$

$(\nabla_3^{(2)}(Z) = \nabla_3(2Z))$, où

$$d_1(n,l) = -c_{\phi_4}(n,l), \quad c_2(n,l) = \frac{1}{2}(c_{\phi_4}(n,l) + c_{\phi_2}(n,l))$$

et

$$c_3(n,l) = \frac{1}{4}(a_1(n,l) - c_{\phi_2}(n,l)).$$

La fonction $\frac{\nabla_3^{(2)}}{\nabla_{3/2}}$ est une forme modulaire de poids $\frac{3}{2}$ pour le groupe $\Gamma_0^{(2)}(4)$ avec le système de multiplicateur d'ordre 4 suivant :

$$v_\eta^{-2}(v_\eta^{(2)})^3(v_\eta^{(4)})^2 \times v_H.$$

La dernière identité est :

$$\frac{\Delta_5^{(2)}(Z)}{\nabla_{3/2}(Z)} = \frac{\eta(\tau)\eta(2\tau)^8}{\eta(4\tau)^2}\frac{\vartheta(2\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}e^{i\pi\omega} \prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,l\in\mathbb{Z}}} (1-q^n r^l s^m)^{e_1(nm,l)}(1-q^{2n}r^{2l}s^{2m})^{e_2(nm,l)}$$

$$(1-q^{4n}r^{4l}s^{4m})^{e_3(nm,l)},$$

où

$$e_1(n,l)=-c_{\phi_4}(n,l),\quad e_2(n,l)=\frac{1}{2}(c_{\phi_4}(n,l)+2a_1(n,l)-c_{\phi_2}(n,l))$$

et

$$c_3(n,l)=\frac{1}{4}(c_{\phi_2}(n,l)-a_1(n,l)).$$

La fonction $\frac{\Delta_5^{(2)}}{\nabla_{3/2}}$ est une forme modulaire de poids $\frac{7}{2}$ pour le groupe $\Gamma_0^{(2)}(4)$ avec le système de multiplicateur d'ordre 4 suivant :

$$v_\eta^{-2}(v_\eta^{(2)})^{11}(v_\eta^{(4)})^{-2}\times v_H.$$

Il ne reste donc plus qu'à traiter le cas $N=t=2$. Pour construire la forme Q_1 nous avons utilisé la forme ψ_2 (voir 4.15) dont la trace est la forme $\varphi_{0,2}$ (voir 4.8 et 4.21) utilisée par V. Gritsenko pour construire Δ_2, on obtient donc une forme modulaire réflexive de poids 1 pour le sous-groupe $\Gamma_2(2)$ du groupe Γ_2 :

$$\frac{\Delta_2(Z)}{Q_1(Z)}=\frac{\eta(\tau)^4}{\eta(2\tau)^2}\prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}}\left(\frac{1-q^nr^ls^{2m}}{1+q^nr^ls^{2m}}\right)^{\frac{1}{2}(a_2(nm,l)-c_{\psi_2}(nm,l))},$$

où les nombres $a_2(n,l)$ sont les coefficients de Fourier de $\phi_{0,2}$. De la même manière, on obtient :

$$\frac{\Delta_2(2Z)}{Q_1(Z)}=\widetilde{\phi}_{1,\frac{1}{2}}(Z)\prod_{\substack{m\geqslant 1\\ n,\,l\in\mathbb{Z}}}(1-q^{2n}r^{2l}s^{4m})^{\frac{1}{2}(a_2(nm,l)+c_{\psi_2}(nm,l))}(1-q^nr^ls^{2m})^{-c_{\psi_2}(nm,l)},$$

où

$$\phi_{1,\frac{1}{2}}(\tau,z)=\eta(2\tau)\eta(\tau)\frac{\vartheta(2\tau,2z)}{\vartheta(\tau,z)}$$

On vérifie alors que $\phi_{1,\frac{1}{2}}\in J_{1,\frac{1}{2}}(\Gamma_0(2),\chi_4\times v_{(H,\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),2)})$ et

$$\chi_4(M)=e^{\frac{2i\pi}{4}(bd+d-1)}$$

pour toute matrice $M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\2c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(2)$. On a donc $\Gamma_1(8,4)\subset\mathrm{Ker}(\chi_4)$ et on peut appliquer le théorème 3.5 (comme précédemment le caractère $v_{(H,\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right),2)}$ n'est pas v_H mais il n'est pas modifié par les opérateurs de Hecke utilisés dans le relèvement arithmétique) avec $q_1=4$, pour obtenir :

$$\frac{\Delta_2^{(2)}}{Q_1}=\mathrm{R}(\phi_{1,\frac{1}{2}}).$$

Cette forme n'est pas parabolique car $\phi_{1,\frac{1}{2}}(\tau,z)=\frac{1}{2}\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}}(\tau,z)\vartheta^{(2)}_{\binom{1}{0}}(\tau,0)$ mais cette dernière expression nous permet d'obtenir une formule élémentaire pour les coefficients de Fourier de $\frac{\Delta_2^{(2)}}{Q_1}$: comme pour $(a,8)=1$, on a $\chi_4(\sigma_a)=\left(\frac{-4}{a}\right)$, on en déduit

$$\frac{\Delta_2(2Z)}{Q_1(Z)}=\mathrm{R}(\phi_{1,\frac{1}{2}})(Z)=\frac{1}{2}\sum_{N\geqslant 1}\sum_{\substack{n,m\in 4\mathbb{N}+1\\ l\in 2\mathbb{Z}+1\\ 2nm-l^2=N^2}}\sum_{\substack{a\mid(n,l,m)\\ a>0}}\left(\frac{-4}{a}\right)q^{\frac{n}{4}}r^{\frac{l}{2}}s^{\frac{m}{2}}.$$

5.3 Structure de $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(N))$ pour $N=2$ ou 3

La mise au jour des fonctions ∇_3 et ∇_2 permet de donner la structure de $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(N))=\bigoplus_{k\geqslant 0}M_{2k}(\Gamma_0^{(2)}(N))$ assez facilement pour $N=2$ et $N=3$. Pour obtenir ce résultat, on imite la preuve de Freitag (voir [Fr]), simplifiant la première démonstration de ce résultat dû à Igusa (voir [Ig]), montrant que l'anneau gradué des formes modulaires de poids pair et de genre 2, $M_{2*}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$, vu comme $\mathbb{C}$-algèbre, est engendré par les quatre séries d'Eisenstein E_4, E_6, E_{10} et E_{12}. Dans la preuve de Freitag, l'outil essentiel est l'existence d'une forme, Θ (produit des dix séries thêta avec caractéristiques paires, c'est un multiple de Δ_5), appartenant à $M_5(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}),\chi)$ (où χ est un caractère d'ordre 2 de $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$) s'annulant exactement sur $\mathcal{H}_1$ (à l'ordre un). Cette preuve de Freitag a été reprise dans [Kli].

Les formes ∇_3 et ∇_2 sont des analogues de la forme Θ pour les groupes $\Gamma_0^{(2)}(2)$ et $\Gamma_0^{(2)}(3)$: elles possèdent un caractère d'ordre 2 et s'annulent, à l'ordre un, exactement sur $\mathcal{H}_1$.

5.3.1 Rappels élémentaires

Proposition 5.7 *Soit $F\in M_k(\Gamma_0^{(2)}(N))$ de poids k strictement négatif. Alors F est identiquement nulle.*

Démonstration. Soit

$$[F]_1=\prod_{M\in\Gamma_0^{(2)}(N))\backslash\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})}F\big|_k M,$$

il est alors évident que $[F]_1\in M_{k[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(2)}(N)]}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$. Comme

$$[\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}):\Gamma_0^{(2)}(N)]=N^3\prod_{\substack{p\mid N\\ p\text{ premier}}}(1+p^{-1})(1+p^{-2})$$

$[F]_1$ est une forme modulaire pour $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ de poids strictement négatif. Elle est donc identiquement nulle en vertu du principe de Koecher (voir [Kli]). Chaque terme de ce produit étant une fonction holomorphe dans $\mathbb{H}_2$, il existe $M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ telle que $F|_k M$ soit identiquement nulle. Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 5.8 *Soit F et G deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}_2$ telles que FG soit identiquement nulle. Alors F ou G est identiquement nulle.*

Démonstration. Supposons que ni F ni G ne soit identiquement nulle. Soit

$$\mathcal{Z}(F) = \{Z \in \mathbb{H}_2 \text{ tel que } F(Z) = 0\},$$

de même pour G, comme F et G sont holomorphes $\mathcal{Z}(F)$ et $\mathcal{Z}(G)$ sont des fermés d'intérieur vide. Or $\mathcal{Z}(FG) = \mathcal{Z}(F) \cup \mathcal{Z}(G)$ donc $\mathcal{Z}(FG)$ est d'intérieur vide comme réunion dénombrable, ici finie, de fermés d'intérieur vide. Ce qui est absurde. $\square$

Comme pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})$ l'application de $\mathbb{H}_2$ dans lui-même qui à Z associe $M\langle Z\rangle$ est biholomorphe et, pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$, $\det(CZ+D)^{-k}$ est différent de zéro, on en déduit que F est identiquement nulle. $\square$

On note $M_k(\Gamma_0(N)\times\Gamma_0(N))$ l'ensemble des formes modulaires de poids k pour $\Gamma_0(N)\times\Gamma_0(N)$ i.e. l'ensemble des fonctions vérifiant :

$F : \mathbb{H}\times\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorphe,

$F\big|_k(M_1,M_2) = F$ pour tout $(M_1,M_2) \in \Gamma_0(N)\times\Gamma_0(N)$,

$$(F\big|_k(M_1,M_2))(\tau,\omega) = \sum_{\substack{(n_1,n_2)\in\mathbb{Q}^2\\ n_1,n_2\geqslant 0}} a_{(M_1,M_2)}(n_1,n_2)e^{2i\pi(n_1\tau+n_2\omega)}$$

pour tout $(M_1,M_2) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\times\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$,

où $\big|_k$ est l'opérateur standard sur les fonctions de $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$:

$$(F\big|_k(M_1,M_2))(\tau,\omega) = (c_1\tau+d_1)^k(c_2\omega+d_2)^k G(M_1\langle\tau\rangle, M_2\langle\omega\rangle),$$

où

$$M_i = \left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Lemme 5.9 *Soit $F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(N))$ alors $F|_{\mathcal{H}_1} \in M_k(\Gamma_0(N)\times\Gamma_0(N))$.*

Démonstration.

Soit $G = F|_{\mathcal{H}_1}$ i.e. $G(\tau,\omega) = F(\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right))$. La fonction G est donc holomorphe dans $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ comme restriction de F (holomorphe dans $\mathbb{H}_2$) à $\mathcal{H}_1$.

Soit $(M_1, M_2) \in \Gamma_0(N) \times \Gamma_0(N)$ ($M_i = \left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{smallmatrix}\right)$), on a alors

$$(G|_k(M_1, M_2))(\tau, \omega) = (c_1\tau + d_1)^k (c_2\omega + d_2)^k G(M_1\langle\tau\rangle, M_2\langle\omega\rangle).$$

On associe alors à (M_1, M_2) la matrice

$$M_{12} = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0^{(2)}(N).$$

Comme $(F|_k M_{12})(Z) = F(Z)$, on a $(G|_k(M_1, M_2)) = G$.
Il reste alors à vérifier les développements de Fourier aux différents points paraboliques de $\Gamma_0(N) \times \Gamma_0(N)$:
on sait

$$\left(G\big|_k M\right)(Z) = \sum_{T \geqslant 0} a_M(T) e^{2i\pi(\mathrm{Tr}(TZ))}$$

pour tout $M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$ où la somme porte sur les matrices semi-entières semi-définies positives ($T = \left(\begin{smallmatrix} n & \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} & m \end{smallmatrix}\right)$, où $(n, l, m) \in \mathbb{Q}^3$), on peut réécrire ce développement de Fourier :

$$(G|_k M)(Z) = \sum_{\substack{n,l,m \in \mathbb{Q}^3 \\ n,m \geqslant 0, 4nm - l^2 \geqslant 0}} A_M(n, l, m) e^{2i\pi((n\tau + lz + m\omega))}.$$

Cette écriture permet de conclure. $\square$

Remarque : la restriction de F à $\mathcal{H}_1$ est parfois notée $W(F)$ et W est dit opérateur de Witt.

Lemme 5.10 *Soit $F \in M_k(\Gamma_0^{(2)}(N))$ et k pair alors $F|_{\mathcal{H}_1}(\tau, \omega) = F|_{\mathcal{H}_1}(\omega, \tau)$.*

Démonstration. On sait que l'involution $V_1 \in \Gamma_0^{(2)}(N)$, donc

$$(F\big|_k V_1)(Z) = F(Z) = F(\left(\begin{smallmatrix} \tau & z \\ z & \omega \end{smallmatrix}\right)) = (-1)^k F(V\langle Z\rangle) = F(\left(\begin{smallmatrix} \omega & z \\ z & \tau \end{smallmatrix}\right)).$$

$\square$

Structure de $M_*(\Gamma_0(2))$

Soit e_k la série d'Eisenstein de poids k pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ de terme constant égal à 1 :

$$e_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n,$$

où B_k sont les nombres de Bernoulli définis par :

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

On définit également $e_2^{(2)}$ par $e_2^{(2)}(\tau) = 2E_2(2\tau) - E_2(\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, où E_2 est la série d'Eisenstein quasi-modulaire de poids 2 pour $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$:

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n \geqslant 1} \sigma_1(n) q^n$$

et $\sigma_k(N) = \sum_{d|N, d>0} d^k$.

La fonction $e_2^{(2)}$ est un élément de $M_2(\Gamma_0(2))$ car, d'une manière générale, on montre

Proposition 5.11 *Soit a_1 et a_p deux entiers relatifs et p un nombre premier. On pose, pour tout $\tau \in \mathbb{H}$,*

$$e_2^{(p)}(\tau) = a_1 E_2(\tau) + a_p E_2(p\tau).$$

Si $a_1 + \frac{a_p}{p} = 0$ alors $e_2^{(p)} \in M_2(\Gamma_0(p))$.

Démonstration. La fonction $e_2^{(p)}$ est holomorphe dans $\mathbb{H}$ comme somme de fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}$.
Soit $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(p)$ alors

$$(e_2^{(p)}\big|_2 \sigma)(\tau) = (a_1 E_2\big|_2 \sigma)(\tau) + (a_p E_2^{(p)}\big|_2 \sigma)(\tau)$$

où $E_2^{(p)} = E_2(p\tau)$ pour tout $\tau \in \mathbb{H}$. On a

$$\begin{aligned}
(E_2^{(p)}\big|_2 \sigma)(\tau) &= (\gamma\tau + \delta)^{-2} E_2^{(p)}\left(\frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}\right) \\
&= \left(\frac{\gamma}{p}(p\tau) + \delta\right)^{-2} E_2\left(\frac{\alpha(p\tau) + p\beta}{\frac{\gamma}{p}(p\tau) + \delta}\right) \\
&= (\gamma\tau + \delta)^{-2}\left(E_2(p\tau) + \frac{12\frac{\gamma}{p}}{2i\pi(\gamma\tau + \delta)}\right)
\end{aligned}$$

car $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & p\beta \\ \frac{\gamma}{p} & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ puisque $p|\gamma$.

$$(e_2^{(p)}\big|_2 \sigma)(\tau) = e_2^{(p)}(\tau) + \frac{12\gamma}{2i\pi(\gamma\tau + \delta)}\left(a_1 + \frac{a_p}{p}\right) = e_2^{(p)}(\tau).$$

Il ne reste plus qu'à donner les développements de Fourier de $e_2^{(p)}$ aux points paraboliques de $\Gamma_0(p)$.
En ∞, on a

$$e_2^{(p)}(\tau) = a_1 + a_p - 24\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{d|n,\frac{n}{d}|p} a_{\frac{n}{d}}\sigma_1(d)\right) q^n.$$

En 0, on a

$$\begin{aligned}(e_2^{(p)}|_2 S)(\tau) &= a_1 E_2(\tau) + \frac{a_p}{p^2}E_2(\frac{\tau}{p})\\ &= a_1 + \frac{a_p}{p^2} - 24\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{d|n,\frac{n}{d}|p} a_{\frac{pd}{n}}\frac{n^2}{(pd)^2}\sigma_1(d)\right) q^{\frac{n}{p}}.\end{aligned}$$

Ces deux expressions permettent donc d'affirmer que $e_2^{(p)} \in M_2(\Gamma_0(p))$. $\square$

Remarque :

On a

$$e_2^{(2)}(\tau) = \theta_{\mathbb{D}_4}(\tau) = \frac{1}{2}(\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{0}}(\tau,0)^4 + \vartheta^{(2)}_{\binom{0}{1}}(\tau,0)^4),$$

où $\theta_{\mathbb{D}_4}$ est la série thêta attachée au réseau $\mathbb{D}_4$. On a le théorème suivant :

Théorème 5.12 $M_*(\Gamma_0(2)) = \mathbb{C}[e_2^{(2)}, e_4]$.

Pour la preuve de ce théorème, on renvoie à l'appendice I de N.-P. Skoruppa dans [HBJ].

Structure de $M_*(\Gamma_0(3))$

Pour tout $\tau \in \mathbb{H}$, on définit les deux fonctions suivantes :

$$g_2(\tau) = \frac{1}{2}e_2^{(3)}(\tau) = \frac{1}{2}(3E_2(3\tau) - E_2(\tau)) \quad \text{et} \quad g_6(\tau) = \eta(3\tau)^6\eta(\tau)^6.$$

On sait que $g_2 \in M_2(\Gamma_0(3))$ (voir proposition 5.11) et $g_6 \in S_6(\Gamma_0(3))$ (voir chapitre III, § 3, exercice 13 de [Ko]).

Théorème 5.13 $M_*(\Gamma_0(3)) = \mathbb{C}[g_2, g_6] \oplus e_4\mathbb{C}[g_2, g_6]$ *où, $\oplus$ représente la somme directe de modules.*

Pour une démonstration de ce théorème, on renvoie à [Ib].
Comme $\dim_{\mathbb{C}} M_8(\Gamma_0(3)) = 3$, il existe une relation linéaire entre g_2^4, e_4^2, $g_2^2e_4$ et g_2g_6. En comparant les développements de Fourier de ces quatre formes, on a

$$e_4^2 + 9g_2^4 - 10g_2^2e_4 + 1728g_2g_6 = 0.$$

On peut donc reformuler le théorème 5.13 :

$$M_*(\Gamma_0(3)) = \mathbb{C}[g_2, e_4, g_6]/(e_4^2 + 9g_2^4 - 10g_2^2 e_4 + 1728 g_2 g_6),$$

où (P) désigne l'idéal de $\mathbb{C}[g_2, e_4, g_6]$ engendré par un polynôme $P \in \mathbb{C}[g_2, e_4, g_6]$.

Proposition 5.14 *Soit $F \in M_{2k}(\Gamma_0^{(2)}(2))$ s'annulant sur $\mathcal{H}_1$, alors F est divisible par ∇_3^2 dans l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}_2$.*

Démonstration. Compte tenu de la formule donnant le caractère de ∇_3 (voir 3.22), on a

$$\left(\nabla_3\big|_3 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right)(Z) = \nabla_3(Z).$$

Soit $G = \frac{F}{\nabla_3}$ alors $G \in M_{2k-3}(\Gamma_0^{(2)}(2), \chi_2^{(2)} \times v_H)$ et

$$(G\big|_{2k-3}U)(Z) = -G(\left(\begin{smallmatrix} \tau & -z \\ -z & \omega \end{smallmatrix}\right)) = G(Z),$$

car $U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0^{(2)}(2)$. Donc G s'annule sur $\mathcal{H}_1$ et on peut encore diviser par ∇_3, ainsi $\frac{F}{\nabla_3^2} \in M_{2k-6}(\Gamma_0^{(2)}(2))$. □

Proposition 5.15 *Soit $F \in M_{2k}(\Gamma_0^{(2)}(3))$ s'annulant sur $\mathcal{H}_1$, alors F est divisible par ∇_2^2 dans l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}_2$.*

Démonstration. Compte tenu de la formule donnant le caractère de ∇_2 (voir 3.26), on a

$$\left(\nabla_2\big|_2 i_1(-I_2)\right)(Z) = -\nabla_2(Z).$$

Soit $G = \frac{F}{\nabla_2}$ alors $G \in M_{2k-2}(\Gamma_0^{(2)}(3), \chi_2^{(3)})$ et

$$(G\big|_{2k-2}i_1(-I_2))(Z) = G(\left(\begin{smallmatrix} \tau & -z \\ -z & \omega \end{smallmatrix}\right)) = -G(Z),$$

car $i_1(-I_2) \in \Gamma_0^{(2)}(3)$. Donc G s'annule sur $\mathcal{H}_1$ et on peut encore diviser par ∇_2, ainsi $\frac{F}{\nabla_2^2} \in M_{2k-4}(\Gamma_0^{(2)}(3))$. □

5.3.2 Structure de $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2))$

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 5.16

$$M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2)) = \mathbb{C}[F_2, H, U, \nabla_3^2].$$

Les formes F_2, H et U seront précisées au cours de cette démonstration qui s'appuie sur plusieurs propositions que nous allons énoncer.

Proposition 5.17 *Soit $F \in M_{2k}(\Gamma_0^{(2)}(2))$ alors $F|_{\mathcal{H}_1}$ est un polynôme isobare en $e_2^{(2)}(\tau)e_2^{(2)}(\omega)$, $e_4(\tau)e_4(\omega)$ et $e_2^{(2)}(\tau)^2e_4(\omega)+e_2^{(2)}(\omega)^2e_4(\tau)$.*

Démonstration. Le théorème 5.12 assure qu'une base (sur $\mathbb{C}$) de $M_{2k}(\Gamma_0(2))$ est

$$\left\{h_a = e_2^{\alpha_a}e_4^{\beta_a} \text{ où } (\alpha_a,\beta_a)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } 2\alpha_a+4\beta_a=2k\right\},$$

où l'on note e_2 la forme $e_2^{(2)}$ du paragraphe précédent pour alléger les notations. Soit $G=F|_{\mathcal{H}_1}$ alors

$$G(\tau,\omega)=\sum_{1\leqslant a,b\leqslant n}\lambda_{a,b}h_a(\tau)h_b(\omega)$$

puisque $G\in M_{2k}(\Gamma_0(2)\times\Gamma_0(2))$. Comme $G(\tau,\omega)=G(\omega,\tau)$ (voir lemme 5.10), on a

$$G(\tau,\omega)=\sum_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n}\lambda_{a,b}h_a(\tau)h_b(\omega)=$$

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n}\lambda_{a,b}e_2^{\alpha_a}(\tau)e_4^{\beta_a}(\tau)e_2^{\alpha_b}(\omega)e_4^{\beta_b}(\omega)+e_2^{\alpha_a}(\omega)e_4^{\beta_a}(\omega)e_2^{\alpha_b}(\tau)e_4^{\beta_b}(\tau).$$

Soit $\alpha_0=\mathrm{Min}\,\{\alpha_c, 1\leqslant c\leqslant n\}$ et $\beta_0=\mathrm{Min}\,\{\beta_c,1\leqslant c\leqslant n\}$, on peut alors factoriser G de la manière suivante :

$$G(\tau,\omega)=e_2^{\alpha_0}(\tau)e_2^{\alpha_0}(\omega)e_4^{\beta_0}(\tau)e_4^{\beta_0}(\omega).$$

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant b\leqslant n}\lambda_{a,b}e_2^{\alpha'_a}(\tau)e_4^{\beta'_a}(\tau)e_2^{\alpha'_b}(\omega)e_4^{\beta'_b}(\omega)+e_2^{\alpha'_a}(\omega)e_4^{\beta'_a}(\omega)e_2^{\alpha'_b}(\tau)e_4^{\beta'_b}(\tau)$$

où $\alpha'_a=\alpha_a-\alpha_0$, $\alpha'_b=\alpha_b-\alpha_0$, $\beta'_a=\beta_a-\beta_0$ et $\beta'_b=\beta_b-\beta_0$. On a la relation suivante :

$$2\alpha'_a+4\beta'_a=2\alpha'_b+4\beta'_b. \tag{5.5}$$

Supposons $\alpha'_a\leqslant\alpha'_b$ alors (5.5) implique que $\beta'_a\geqslant\beta'_b$ et on a :

$$e_2^{\alpha'_a}(\tau)e_4^{\beta'_a}(\tau)e_2^{\alpha'_b}(\omega)e_4^{\beta'_b}(\omega)+e_2^{\alpha'_a}(\omega)e_4^{\beta'_a}(\omega)e_2^{\alpha'_b}(\tau)e_4^{\beta'_b}(\tau)=$$

$$e_2^{\alpha'_a}(\tau)e_2^{\alpha'_a}(\omega)e_4^{\beta'_b}(\tau)e_4^{\beta'_b}(\omega)(e_2(\omega)^{\alpha'_b-\alpha'_a}e_4(\tau)^{\beta'_a-\beta'_b}+e_2(\tau)^{\alpha'_b-\alpha'_a}e_4(\omega)^{\beta'_a-\beta'_b}).$$

Le cas $\alpha'_a\geqslant\alpha'_b$ est similaire. La fonction G apparaît donc comme un polynôme en $e_2(\tau)e_2(\omega)$, $e_4(\tau)e_4(\omega)$ et $B=e_2(\tau)^{\alpha}e_4(\omega)^{\beta}+e_2(\omega)^{\alpha}e_4(\tau)^{\beta}$ où α et

β sont des entiers naturels non nuls satisfaisant la relation : $\alpha = 2\beta$. On peut donc écrire

$$B(\tau,\omega) = (e_2(\tau)^2 e_4(\omega))^\beta + (e_2(\omega)^2 e_4(\tau))^\beta = B_\beta(\tau,\omega).$$

Il reste à montrer que $B(\tau,\omega)$ est un polynôme en $e_2(\tau)e_2(\omega)$,
$e_4(\tau)e_4(\omega)$ et $e_2(\tau)^2 e_4(\omega) + e_2(\omega)^2 e_4(\tau)$.
On mène une récurrence sur β :
si $\beta = 1$, il n'y a rien à vérifier,
on suppose vrai pour $\beta \leqslant m$,
pour $\beta = m+1$ on a

$$B(\tau,\omega) = (e_2(\tau)^2 e_4(\omega))^{m+1} + (e_2(\omega)^2 e_4(\tau))^{m+1} =$$

$$B_m(\tau,\omega)B_1(\tau,\omega) - B_{m-1}(\tau,\omega)e_2(\tau)^2 e_4(\omega)e_2(\omega)^2 e_4(\tau).$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. $\square$

Pour donner la structure de $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2))$, il suffit alors de trouver trois formes F_2, F_4 et G_4 de poids 2, 4 et 4 pour $\Gamma_0^{(2)}(2)$ telles que

$$F_2((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = e_2(\tau)e_2(\omega), \quad F_4((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = e_4(\tau)e_4(\omega) \quad \text{et}$$

$$G_4((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = e_2(\tau)^2 e_4(\omega) + e_2(\omega)^2 e_4(\tau).$$

En effet, supposons l'existence de trois telles formes, soit $F \in M_{2k}(\Gamma_0^{(2)}(2))$, la proposition (5.17) implique l'existence d'un polynôme, disons P, tel que

$$F|_{\mathcal{H}_1} = P(F_2|_{\mathcal{H}_1}, F_4|_{\mathcal{H}_1}, G_4|_{\mathcal{H}_1}).$$

Donc le polynôme $F - P(F_2, F_4, G_4)$ s'annule sur $\mathcal{H}_1$: il est donc divisible par ∇_3^2 (voir propositon (5.14)) dans l'anneau des fonctions holomorphes dans $\mathbb{H}_2$ i.e.

$$\frac{F - P(F_2, F_4, G_4)}{\nabla_3^2} \in M_{2k-6}(\Gamma_0^{(2)}(2)).$$

Le poids diminuant de 6, en répétant cette opération, on obtient une forme de poids négatif donc identiquement nulle (voir proposition (5.7)). Ceci prouve donc, sous réserve de l'existence de ces trois formes,

$$M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2)) = \mathbb{C}[F_2, F_4, G_4, \nabla_3^2].$$

Existence des formes F_2, F_4 et G_4.

L'existence de la série d'Eisenstein de poids 4 pour $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) \supset \Gamma_0^{(2)}(2)$ assure l'existence de F_4 : soit

$$\begin{aligned} E_4(Z) &= \sum_{M=\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z})} \det(CZ+D)^{-4} \\ &= \sum_{\substack{n,l,m\in\mathbb{Z} \\ n,m,4nm-l^2\geqslant 0}} A(n,l,m)e^{2i\pi(n\tau+lz+m\omega)}, \end{aligned}$$

où

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & 1 & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}) \text{ où } * \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$A(n,l,m) = \sum_{d|(n,l,m)} d^3 H(3, \frac{4nm-l^2}{d^2}),$$

H étant la fonction de Cohen (voir [EZ] p.82).
On sait que $E_4 \in M_4(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}))$ et la proposition (5.17) implique l'existence d'une constante $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que

$$E_4(\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)) = \lambda e_4(\tau)e_4(\omega), \tag{5.6}$$

et, en comparant les premiers coefficients de Fourier des deux membres, $A(0,0,0) = 1$, on a $\lambda = 1$. On choisit donc $F_4 = E_4$.
Pour trouver les deux autres formes, F_2 et G_4, on utilise les séries thêta de Siegel avec caractéristiques : θ_{abcd}.
Soit

$$\theta_{abcd}(Z) = \sum_{\left(\begin{smallmatrix} n \\ l \end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{Z}^2} e^{2i\pi(\frac{1}{2}Z[\left(\begin{smallmatrix} n+\frac{a}{2} \\ l+\frac{b}{2} \end{smallmatrix}\right)]+{}^t\left(\begin{smallmatrix} n+\frac{a}{2} \\ l+\frac{b}{2} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \frac{c}{2} \\ \frac{d}{2} \end{smallmatrix}\right))}, \tag{5.7}$$

où $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$, $Z \in \mathbb{H}_2$ et $Z[\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)] =^t \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) Z \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, où ${}^t\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ désigne la transposée de $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.
On vérifie alors sans difficulté que

$$\theta_{abcd}(\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)) = \vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)}(\tau,0)\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)}(\omega,0). \tag{5.8}$$

Pour simplifier les notations, on pose :

$$\vartheta^{(2)}_{\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)}(\tau,0) = \vartheta_{a,b}(\tau).$$

Proposition 5.18 *Soit*

$$F_2(Z) = \frac{1}{4}(\theta_{0000}(Z)^4 + \theta_{0001}(Z)^4 + \theta_{0010}(Z)^4 + \theta_{0011}(Z)^4).$$

Alors $F_2 \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(2))$ *et* $F_2((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = e_2(\tau)e_4(\omega)$.

Démonstration. Le fait que $F_2 \in M_2(\Gamma_0^{(2)}(2))$ est dû à T. Ibukiyama, où cette fonction est notée X (voir par exemple [I], p.590). La formule (5.8) donne alors

$$F_2((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = \frac{1}{4}\left(\vartheta_{0,0}(\tau)^4 + \vartheta_{0,1}(\tau)^4\right)\left(\vartheta_{0,0}(\omega)^4 + \vartheta_{0,1}(\omega)^4\right).$$

On a vu que (voir la remarque suivant la proposition 5.11) :

$$\vartheta_{0,0}(\tau)^4 + \vartheta_{0,1}(\tau)^4 = 2e_2(\tau) = 1 + 24\sum_{n\geqslant 1}\sigma_1^{(i)}(n)q^n,$$

où $\sigma_1^{(i)}(n) = \sum_{\substack{d\mid n\\ d \text{ impair}}} d.$ □

Proposition 5.19 *Soit*

$$G_4(Z) = \frac{1}{4}(5E_4(Z) + 3(\theta_{0000}(Z)\theta_{0001}(Z)\theta_{0010}(Z)\theta_{0011}(Z))^2 -$$

$$(\theta_{0100}(Z)^4 - \theta_{0110}(Z)^4)^2).$$

Alors $G_4 \in M_4(\Gamma_0^{(2)}(2))$ *et* $G_4((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = e_2(\tau)^2e_4(\omega) + e_2(\omega)^2e_4(\tau)$.

Démonstration. On sait que $H = (\theta_{0000}\theta_{0001}\theta_{0010}\theta_{0011})^2$ et $U = (\theta_{0100}^4 - \theta_{0110}^4)^2$ appartiennent à $M_4(\Gamma_0^{(2)}(2))$ par [I], où ces fonctions sont respectivement notées Y et $16384Z$.

On sait que

$$e_2(\tau) = \frac{1}{2}(\vartheta_{0,0}(\tau)^4 + \vartheta_{0,1}(\tau)^4),$$

en utilisant l'identité de Jacobi (voir [Mu] p.23) i.e.

$$\vartheta_{0,0}(\tau)^4 = \vartheta_{0,1}(\tau)^4 + \vartheta_{1,0}(\tau)^4,$$

on a

$$e_2(\tau)^2 = \vartheta_{0,1}(\tau)^8 + \vartheta_{0,1}(\tau)^4\vartheta_{1,0}(\tau)^4 + \frac{1}{4}\vartheta_{1,0}(\tau)^4.$$

On sait également que (voir [IO] p.303)

$$e_4(\tau) = \vartheta_{0,1}(\tau)^8 + \vartheta_{0,1}(\tau)^4\vartheta_{1,0}(\tau)^4 + \vartheta_{1,0}(\tau)^8$$

et, en utilisant la proposition 5.17,

$$H((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = \vartheta_{0,1}(\tau)^8\vartheta_{0,1}(\omega)^8 + \vartheta_{0,1}(\tau)^8\vartheta_{1,0}(\omega)^4\vartheta_{0,1}(\omega)^4 +$$
$$\vartheta_{1,0}(\tau)^4\vartheta_{0,1}(\tau)^4\vartheta_{0,1}(\omega)^8 + \vartheta_{1,0}(\tau)^4\vartheta_{0,1}(\tau)^4\vartheta_{1,0}(\omega)^4\vartheta_{0,1}(\omega)^4$$

et

$$U((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = \vartheta_{1,0}(\tau)^8\vartheta_{1,0}(\omega)^8.$$

On déduit alors de ces formules :

$$e_2(\tau)^2e_4(\omega) + e_2(\omega)^2e_4(\tau) = 2H((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) + \frac{1}{2}U((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}))+$$
$$\frac{5}{4}(\vartheta_{0,1}(\tau)^8\vartheta_{1,0}(\omega)^8 + \vartheta_{1,0}(\tau)^8\vartheta_{0,1}(\omega)^8 +$$
$$\vartheta_{0,1}(\tau)^4\vartheta_{1,0}(\tau)^4\vartheta_{1,0}(\omega)^8 + \vartheta_{1,0}(\tau)^8\vartheta_{0,1}(\omega)^4\vartheta_{1,0}(\omega)^4).$$

On note $R(\tau,\omega)$ le terme ayant $\frac{5}{4}$ en facteur et on vérifie que

$$e_4(\tau)e_4(\omega) = R(\tau,\omega) + H((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) + U((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})).$$

Ces formules permettent alors de conclure. □

Ces deux dernières propositions impliquent que

$$M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2)) = \mathbb{C}[F_2, F_4, G_4, \nabla_3^2] = \mathbb{C}[F_2, E_4, G_4, \nabla_3^2]$$

or

$$G_4 = \frac{1}{4}(5E_4 + 3H - U) \quad \text{ et } \quad E_4 = 4F_2^2 - 3H + 2^{26}3U.$$

On a donc prouvé le théorème 5.16.
On a ainsi donné la structure de $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2))$ et retrouvé le résultat de T. Ibukiyama puisque $\nabla_3^2 = K$ (voir 5.2). L'indépendance algébrique de ces quatre formes est connue (voir [I]).

Remarque

Tous les générateurs de $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2)) = \mathbb{C}[F_2, H, U, \nabla_3^2]$ peuvent être obtenus comme relèvement arithmétique de formes de Jacobi pour le groupe $\Gamma_0(2)$. Pour le générateur ∇_3^2, c'est évident. On a (voir 5.6)

$$\nabla_3^2 = \mathrm{R}(\varphi_{3,\frac{1}{2}}^2).$$

On a la relation suivante $\psi_{10} = H\nabla_3^2$ (voir [AI] p.255). Or $\psi_{10} = \Delta_5^2$ donc $H = \left(\frac{\Delta_5}{\nabla_3}\right)^2$ et apparaît comme le relèvement arithmétique de la forme de Jacobi $\phi(\tau) = \frac{\eta(\tau)^{16}}{\eta(2\tau)^8}$ de poids 4 et d'indice 0 pour le groupe $\Gamma_0(2)$ i.e.

$$H = \mathrm{R}(\phi).$$

Pour obtenir le générateur U comme relèvement arithmétique, nous procédons de la manière suivante. Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré le quotient $\left(\frac{\Delta_5^{(2)}}{\nabla_3}\right)^2 = \mathrm{R}(\phi^2_{2,\frac{1}{2}})$ (voir 5.3) qui est une forme modulaire pour le groupe $\Gamma_0^{(2)}(2)$ de poids 4. Nous allons montrer la proposition suivante :

Proposition 5.20 *On a*

$$U = 2^{14}\mathrm{R}(\phi^2_{2,\frac{1}{2}}).$$

Démonstration. Le théorème 5.16 implique que la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_4(\Gamma_0^{(2)}(2))$ est égale à 3 (il s'agit du nombre de solutions entières de l'équation $2n_1 + 4(n_2 + n_3) + 6n_4 = 4$) et qu'il est engendré par les trois formes E_4, H et U puisque ces trois formes sont linéairement indépendantes. On en déduit l'existence de nombres complexes λ, μ et κ tels que

$$\mathrm{R}(\phi^2_{2,\frac{1}{2}}) = \lambda E_4 + \mu U + \kappa H.$$

Une telle relation implique que $\lambda = \kappa = 0$. En effet, plaçons-nous sur la diagonale $\mathcal{H}_1$, on a alors

$$\mathrm{R}(\phi^2_{2,\frac{1}{2}})(\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)) =$$

$$\lambda e_4(\tau)e_4(\omega) + \mu\vartheta_{1,0}(\tau)^8\vartheta_{1,0}(\omega)^8 + \kappa\vartheta_{0,0}(\tau)^4\vartheta_{0,0}(\omega)^4\vartheta_{0,1}(\tau)^4\vartheta_{0,1}(\omega)^4$$

grâce aux formules 5.6 et 5.8. Le développement de Fourier de la forme $\phi^2_{2,\frac{1}{2}}$ en ∞ est :

$$\phi^2_{2,\frac{1}{2}}(\tau, z) = (r^{-1} + 2 + r)q + \cdots$$

donc $c(0,0) = 0$ et le théorème 3.5 implique que

$$\mathrm{R}(\phi^2_{2,\frac{1}{2}})(\left(\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix}\right)) = \phi^2_{2,\frac{1}{2}}(\tau, 0)s + \cdots$$

Cela implique que

$$\lambda e_4(\tau) + \kappa\vartheta_{0,0}(\tau)^4\vartheta_{0,1}(\tau)^4 = 0$$

et donc que $\lambda = \kappa = 0$ (le développement de Fourier du membre de droite de la dernière équation débutant par : $(\lambda+\kappa)+2^4\lambda q^{\frac{1}{2}}$). Les formes $\mathrm{R}(\phi^2_{2,\frac{1}{2}})$ et U sont donc proportionnelles, et on vérifie que la constante de proportionnalité est 2^{14}. □

Posons $U_1 = 2^{-14}U$, pour alléger les notations, on sait que la forme HU_1 est parabolique (voir [IO]). De ce qui précède, on déduit qu'elle est le relèvement arithmétique de la forme de Jacobi de poids 8 et d'indice 1 pour le groupe $\Gamma_0(2)$ suivante :

$$\varphi_{8,1}(\tau,z)=\phi^2_{2,\frac{1}{2}}(\tau,z)\frac{\eta(\tau)^{16}}{\eta(2\tau)^8}=\eta(\tau)^{14}\eta(2\tau)^2\frac{\vartheta(2\tau,2z)^2}{\vartheta(\tau,z)^2}.$$

Cette forme est sans caractère (car $v_\eta^8(M)(v_\eta^{(2)})^8(M)=1$ pour tout $M\in\Gamma_0(2)$) et elle est parabolique. Il s'agit d'un des deux générateurs de $J_{8,1}^{par}(\Gamma_0(2))$ puisque cet espace est de dimension 2 (voir 2.64).
Il ne reste plus qu'à obtenir la forme F_2 comme relèvement arithmétique. Pour cela, on calcule les premiers termes de son développement de Fourier-Jacobi :

$$F_2(Z)=\frac{1}{2}(\vartheta_{0,0}(\tau)^4+\vartheta_{0,1}(\tau)^4)+12(\vartheta_{0,0}(\tau)^2\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{0}}(\tau,z)^2+\vartheta_{0,1}(\tau)^2\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{1}}(\tau,z)^2)s+\cdots$$

On pose alors, pour tout $(\tau,z)\in\mathbb{H}\times\mathbb{C}$,

$$\varphi(\tau,z)=\vartheta_{0,0}(\tau)^2\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{0}}(\tau,z)^2+\vartheta_{0,1}(\tau)^2\vartheta^{(2)}_{\binom{0}{1}}(\tau,z)^2.$$

On vérifie alors que la fonction φ est une forme de Jacobi de poids 2 et d'indice 1 pour le groupe $\Gamma_0(2)$. Pour appliquer le théorème 3.5 à la forme φ, nous devons connaître son coefficient de Fourier constant à l'infini. Un rapide calcul donne

$$\varphi(\tau,z)=2+2(r^{-2}+8r^{-1}+6+8r+r^2)q+\cdots$$

donc $c(0,0)=2$. On est donc dans le cas où $k=2$ et χ est le caractère trivial, la formule du relèvement est donnée par la remarque (iii) suivant le théorème 3.5 :

$$\mathrm{R}(\varphi)(Z)=2f_2(\tau,\chi_0,\chi)+\sum_{m\geqslant1}\widetilde{\varphi}\big|_2T_-^{(2)}(m)$$

et

$$f_2(\tau,\chi_0,\chi)=\frac{1}{24}+\sum_{n\geqslant1}(\sum_{\substack{d|n\\(d,2)=1}}d)q^n=\frac{1}{48}(\vartheta_{0,0}(\tau)^4+\vartheta_{0,1}(\tau)^4).$$

On obtient donc

$$\mathrm{R}(12\varphi)=F_2\in M_2(\Gamma_0^{(2)}(2))$$

et

$$M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2))=\mathbb{C}[\mathrm{R}(\varphi),\mathrm{R}(\phi),\mathrm{R}(\phi^2_{2,\frac{1}{2}}),\mathrm{R}(\varphi^2_{3,\frac{1}{2}})].$$

La structure de l'anneau $M_*(\Gamma_0^{(2)}(2))$ est donnée par (voir [Ib] p.34)

$$M_*(\Gamma_0^{(2)}(2)) = M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2)) \oplus \chi_{19} M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(2)),$$

où χ_{19} est l'unique forme parabolique de poids 19 pour le groupe $\Gamma_0^{(2)}(2)$. Cette forme parabolique χ_{19} a été obtenue par H. Aoki et T. Ibukiyama comme produit automorphe de Borcherds à partir d'une forme de Jacobi faible de poids 0 et d'indice 1 (voir [AI] p.271).

5.3.3 Structure de $M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(3))$

Théorème 5.21 *On a*

$$M_{2*}(\Gamma_0^{(2)}(3)) = \mathbb{C}[\theta_2, \nabla_2^2, E_4, F_4, \theta_6, f_6, F_6].$$

Les formes θ_2, θ_6 et f_6 sont données dans [Ib] p.20. La forme E_4 est la série d'Eisenstein introduite au paragraphe 5.3.2, les formes F_4 et F_6 sont définies, pour tout $Z \in \mathbb{H}_2$, par :

$$F_4(Z) = \frac{1}{10}(E_4(Z) + 100\theta_2(Z)^2 - 81E_4(3Z))$$

et

$$F_4(Z) = \frac{1}{15120}(7290E_6(3Z) - 10E_6(Z) + 75600f_6(Z) + 91E_4(Z)\theta_2(Z) - 7371E_4(3Z)\theta_2(Z)),$$

où E_6 est la série d'Eisenstein de poids 6 pour $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$.

Proposition 5.22 *Soit $F \in M_{2k}(\Gamma_0^{(2)}(3))$ alors $F|_{\mathcal{H}_1}$ est un polynôme isobare en*

$$g_2(\tau)g_2(\omega), \quad e_4(\tau)e_4(\omega), \quad g_2^3(\tau)g_6(\omega) + g_2^3(\omega)g_6(\tau),$$

$$g_6(\tau)g_6(\omega), \quad g_2^2(\tau)e_4(\omega)+g_2^2(\omega)e_4(\tau) \quad \textit{et} \quad g_2(\tau)e_4(\tau)g_6(\omega)+g_2(\omega)e_4(\omega)g_6(\tau).$$

La preuve de cette proposition se trouve dans [Ib] (proposition 3.1, p.25).
Pour pouvoir appliquer la même méthode que précédemment, il suffit de trouver six formes modulaires pour $\Gamma_0^{(2)}(3)$ telles que leurs restrictions à $\mathcal{H}_1$ soient égales à chacune des six formes de la proposition 5.22. Pour cela on utilise les formules de [Ib] p.27 dont on reprend les notations ainsi que leurs corrections dans [AI]. On a :

$$\theta_2(\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)) = g_2(\tau)g_2(\omega), \quad \theta_6(\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)) = 96g_6(\tau)g_6(\omega),$$

$$E_4(\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)) = e_4(\tau)e_4(\omega), \quad f_6(\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \omega \end{smallmatrix}\right)) = g_2^3(\tau)g_6(\omega) + g_2^3(\omega)g_6(\tau),$$

$$F_4((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = g_2^2(\tau)e_4(\omega) + g_2^2(\omega)e_4(\tau)$$

et

$$F_6((\begin{smallmatrix}\tau & 0\\ 0 & \omega\end{smallmatrix})) = g_2(\tau)e_4(\tau)g_6(\omega) + g_2(\omega)e_4(\omega)g_6(\tau).$$

Compte tenu de la proposition 5.15, la méthode précédente s'applique et nous obtenons ainsi le théorème 5.21.

5.4 Perspectives

Pour terminer, nous indiquons quelques directions pour de prochains travaux dans divers domaines.

Le groupe $\Gamma_1(N) < \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$
La méthode de construction de formes de Jacobi du paragraphe 2.2 à partir des séries thêta avec caractéristiques a essentiellement été utilisée pour obtenir des formes de Jacobi pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_0(N)$. Cette méthode s'applique également à la construction de formes de Jacobi pour le sous-groupe de congruence $\Gamma_1(N)$. Le relèvement arithmétique de telles formes est alors possible (voir théorème 3.5) et fournit des formes modulaires de Siegel pour certains groupes paramodulaires avec niveaux. Pour ces groupes paramodulaires avec niveaux, on peut également obtenir un théorème de classification analogue à celui obtenu au paragraphe 5.1.1 et ainsi espérer de nouvelles dd-formes. Ces nouvelles dd-formes seraient également importantes en physique théorique (voir les travaux de A. Dabholkar et de ses collaborateurs [DG] et [DN]).

Le groupe $\Gamma_t(N, N_1, L, K; S)$
Le cadre naturel pour le problème de classification de dd-formes est le sous-groupe de congruence $\Gamma_t(N, N_1, L, K; S)$ du groupe paramodulaire Γ_t. Ce groupe possède cinq paramètres dont la polarisation. Pour ce groupe, nous avons obtenu la possibilité de construire des formes modulaires via le relèvement arithmétique du théorème 3.5 et de construire des produits de Borcherds semblables à ceux du théorème 4.3. Notons que le groupe paramodulaire Γ_4 est le groupe modulaire pour la série thêta de Siegel $\Delta_{1/2}$ (voir [GN2]). Une question intéressante est de trouver d'autres exemples de formes modulaires de poids $\frac{1}{2}$ pour certains sous-groupes de congruence du groupe paramodulaire pouvant s'écrire comme produits automorphes de Borcherds.

Algèbres de Kac–Moody
Les quatre dd-formes (Δ_5, Δ_2, Δ_1 et $\Delta_{1/2}$) construites dans l'article [GN2] permettent de déterminer des nouvelles algèbres de Kac–Moody de type de

Borcherds. Les trois nouvelles dd-formes (∇_3, ∇_2 et $\nabla_{3/2}$) obtenues dans cette thèse permettent également la mise au jour de telles algèbres. De plus, le tableau du paragraphe 5.1.2 laisse apparaître une symétrie entre t et N. En utilisant le théorème 5.2.1 de [GN2], on peut obtenir une certaine dualité entre ces différentes algèbres lorentziennes de Kac-Moody. Notons que la forme Q_1 est auto-duale dans ce sens. Il semble alors intéressant de donner explicitement ces algèbres.

Géométrie algébrique

Le caractère χ_2 de la dd-forme ∇_3 est un sous-groupe d'indice 2 de $\Gamma_0^{(2)}(2)$ et on peut montrer que la variété modulaire $\mathrm{Ker}\chi_2\backslash\mathbb{H}_2$ est de dimension de Kodaira nulle. On peut comparer la forme ∇_3 avec la forme modulaire Δ_1^3 qui définit la forme différentielle canonique de la quintique de Barth-Nieto (voir [GH1]). Ce pose alors le problème de savoir si la variété modulaire $\mathrm{Ker}\chi_2\backslash\mathbb{H}_2$ possède un modèle compact birationnellement équivalent à une variété de Calabi-Yau de dimension 3.
Nous supposons que la variété modulaire de Siegel $\Gamma_2(2)\backslash\mathbb{H}_2$ est rationnelle. Il paraît alors fort intéressant de trouver les générateurs de l'anneau gradué des formes modulaires pour ce groupe.

Index

Bibliographie

[AI] H. Aoki, T. Ibukiyama, *Simple graded rings of Siegel modular forms, differential operators and Borcherds products,* Int. J. of Math. **16** (2005), 249-279.

[B1] R.E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians.* Invent. Math. **132** (1998), 491-562.

[B2] R.E. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products.* Invent. Math. **120** (1995), 161-213.

[C] G.L. Cardoso, *Pertubative gravitational couplings and Siegel modular forms in $D = 4$, $N = 2$ string models,* Nucl. Phys. Proc. Suppl. **56B** (1997), 94-101.

[CCL] G.L. Cardoso, G. Curio, D. Lüst, *Pertubative coupling and modular forms in $N = 2$ string models with a Wilson line,* Nucl. Phys. **B491** (1997), 147-183.

[DJS] J.R. David, D.P. Jatkar, A. Sen, *Product representation of dyon partition function in CHL models,* J.H.E.P. **0606** (2006), 064.

[DS] J.R. David, A. Sen, *CHL Dyons and Statistical Entropy Function from D1-D5 System,* J.H.E.P. **0611** (2006), 072.

[DG] A. Dabholkar, D. Gaiotto, *Spectrum of CHL Dyons from Genus-Two Partition Function.* J.H.E.P. **0712** (2007), 087.

[DN] A. Dabholkar, S. Nampuri, *Spectrum of Dyons and Black Holes in CHL orbifolds using Borcherds Lift.* J.H.E.P. **0711** (2007), 077

[DVV] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde , *Counting Dyons in $N = 4$ string theory,* Nucl. Phys. **B484** (1997), 543-561.

[EZ] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics **55**. Birkhäuser, Boston, Mass., 1985.

[FK] H.M. Farkas, I. Kra, *Theta constants, Riemann Surfaces and the Modular group.* Graduate Studies in Mathematics **37**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[F] E. Freitag, Siegelsche Modulfunktionen. Grunglehren Math. Wiss., vol. 254. Springer Verlag, 1983.

[Fr] E. Freitag, *Zür Theorie der Modulformen zweiten Grades.* Nachr. Akadem. Wiss. Göttingen (1965), 151-157.

[Fre] E. Freitag, *Singular Modular Forms and Theta Relations* Lecture Notes in Mathematics **1487**, Springer-Verlag Berli Heidelberg 1991.

[G1] V. Gritsenko, *Modular forms and moduli spaces of abelian and $K3$ surfaces.* Algebra i Analiz **6** (1994), 65–102 ; English translation in St. Petersburg Math. J. **6** (1995), 1179-1208.

[G2] V. Gritsenko, *Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces.* Int. Math. Research Notices **6** (1994), 235-243.

[G3] V. Gritsenko, *Arithmetical lifting and its applications.* Number Theory. Proceedings of Paris Seminar 1992-93 (eds. S. David), Cambridge Univ. Press, 1995, 103-126.

[G4] V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi-Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms.* St. Petersburg Math. J. **11** (1999), 100-125.

[G5] V. Gritsenko, *Parabolic extension of Hecke ring of the general linear group,2.* Zap. Nauk. Sem. LOMI **183** (1990), 56-77 ; English transl. in J. Soviet Math. **62** (1992), 2863-2882.

[G6] V. Gritsenko, *The action of modular operators on the Fourier–Jacobi coefficients of modular forms.* Matem. Sbornik **119** (1982), 248-277 ; English transl. in Math. USSR Sbornik **47** (1984), 237-268.

[GC] V. Gritsenko, F. Cléry *The Siegel modular forms of genus 2 with the simplest divisor.* Arxiv0812.3962

[GH1] V. Gritsenko, K. Hulek, *The modular form of the Barth–Nieto quintic.* Intern. Math. Res. Notices **17** (1999), 915-938.

[GH2] V. Gritsenko, K. Hulek, *Minimal Siegel modular threefolds.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), 461-485.

[GN1] V. Gritsenko, V. Nikulin, Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras. Amer. J. Math. **119** (1997), 181-224.

[GN2] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac-Moody algebras. I, II.* International J. Math. **9** (2) (1998), 153-275.

[GN3] V. Gritsenko, V. Nikulin, *The arithmetic mirror symmetry and Calabi–Yau manifolds.* Comm. Math. Phys. **200** (2000), 1-11.

[HBJ] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung *Manifolds and modular forms*, Aspects of Mathematics, Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Vol. E20.

[He] H. O. Herøy, *Hecke-Operatoren auf* $\Gamma_0(N)$. Bonner Mathem. Schriften. Nr. 292 (1996), 84pp. Bonn.

[Hi] H. Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series.* London Math. Soc. Student Texts **26**. Cambridge Univ. Press, 1993.

[I] T. Ibukiyama, *On symplectic Euler factors of genus* 2*,* J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect. **IA** Math. Vol. **30** (1984), 587-614.

[Ib] T. Ibukiyama, *On Siegel modular variety of level* 3*,* Int. J. of Math. **2** (1991), 17-35.

[Ig] J.-I. Igusa, *On Siegel modular forms of genus two,* Amer.J.Math. **84** (1962), 175-200.

[IO] T. Ibukiyama, F. Onodera *On the graded ring of modular forms of the Siegel paramodular group of level 2,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **67** (1997), 297-305.

[K1] T. Kawai $N = 2$ *heterotic string threshold correction,* $K3$ *surfaces and generalized Kac–Moody superalgebra,* Phys. Lett. **B372** (1996), 59-64.

[K2] T. Kawai *String duality and modular forms,* Phys. Lett. **B397** (1997), 51-62.

[K3] T. Kawai *K3 surfaces, Igusa Cusp Forms and string theory,* in « Topological Field Theory, Primitive Forms and related topics. » Birkhäuser (1998), 273-304.

[Kli] H. Klingen, *Introductory lectures on Siegel modular forms*, Cambridge studies in advanced mathematics **20** (1990).

[K] M.I. Knopp *Modular Functions in Analytic Number Theory* Markham Publishing Company, Chicago (1970).

[Ko] N. Koblitz, *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms* Graduate Texts in Mathematics, Second Edition, Springer, **97** (1993).

[Ma] H. Maass, *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades I, II, III*, Invent. Math. **52**, **53** (1979), 95-104, 249-253, 255-265.

[Mi] T. Miyake, *Modular forms.* Springer, 1976.

[Mu] D. Mumford, *Tata lectures on theta I*, Progress in Mathem. **28**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983.

[Sh] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions.* Princeton Univ. Press, 1971.

[Sko] N.-P. Skoruppa, *Memorandum on Dimension Formulas for Spaces of Jacobi Forms*, preprint (2006).

[P] H. Petersson, *Über Betragsmittelwerte und die Fourier-Koeffizienten der ganzen automorphen Formen.* Arch.Math. **9**, 1958, 176-183.

[PS] I.I. Pyatetskii-Shapiro, *Automorphic Fonctions and the Geometry Of Classical Domains.* Gordon and Breach, New-York, London, Paris, 1969.

[vdG] G. van der Geer, *Hilbert modular surfaces.* Erg. Math. Grenzgeb., vol. 16, Springer Verlag, 1988.