N°ORDRE : 40115

Université Lille 1 Sciences et Technologies
Ecole Doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur
Lille Nord-de-France

Thèse pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Université Lille 1

présentée par **Manal HUSSEIN**

le 17 Décembre 2009

Discipline : Mathématiques Appliquées

Comportement asymptotique des solutions d'équations de type Schrödinger non linéaires faiblement amorties

Codirecteurs de thèse : Thierry Goudon et Olivier Goubet

Membres du Jury

Examinateur	Christophe BESSE	Professeur, Université Lille 1
Rapporteur	Rémi CARLES	Chargé de recherches CNRS, Université Montpellier2
Examinateur	Cédric GALUSINSKI	Professeur, Université du Sud Toulon Var
Directeur	Olivier GOUBET	Professeur, Université de Picardie Jules Verne
Directeur	Thierry GOUDON	Directeur de recherches à l'INRIA, Université Lille 1
Rapporteur	Alain MIRANVILLE	Professeur, Université de Poitiers

Résumé

Les systèmes de Davey-Stewartson DS sont des modèles pour les équations d'ondes hydrodynamiques. Ces systèmes dans le cas dissipatif s'écrivent

$$iu_t + i\gamma u + \delta u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + \chi|u|^2u + f(x_1, x_2)$$
$$\varphi_{x_1x_1} + m\varphi_{x_2x_2} = |u|^2_{x_1},$$

où $\gamma > 0$ désigne le coefficient de dissipation, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ désigne le teme de la force, u représente l'amplitude complexe de l'onde, et φ et le potentiel moyen de vitesse.
Les paramètres m, δ, χ et b sont des paramètres réels dont δ et m peuvent prendre les deux valeurs +1 et -1.
On peut classer ces systèmes en elliptique-elliptique (E-E), elliptique-hyperbolique (E-H), hyperbolique-hyperbolique (H-H), et hyperbolique-elliptique (H-E), cela suivant les valeurs prises par (δ, m), soit respectivement (+,+), (+,-), (-,-), (-,+).
Ces systèmes sont des généralisations des équations de Schrödinger non linéaires NLS qui s'écrivent dans le cas dissipatif comme

$$u_t + \gamma u + iu_{x_1x_1} + \delta iu_{x_2x_2} + i|u|^pu = f,$$

où p est l'exposant du terme non linéaire, $\gamma > 0$ est le paramètre du terme de dissipation, f est la force extérieure, δ un paramètre réel qui vaut +1 ou -1. Dans le cas où $\delta = -1$ on a l'équation de Schrödinger non elliptique NES.
Notre travail se divise en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on considère un modèle réduit uni-dimensionnel d'un système de Davey-Stewartson, une équation aux dérivées partielles de type Schrödinger non linéaire avec une non linéarité non locale, avec un terme de force et un terme d'amortissement. On démontre l'existence d'un attracteur global régulier pour le système dynamique associé.
Dans le deuxième chapitre, on travaille sur un système de Davey-Stewartson DS dans le cas elliptique-elliptique. On démontre l'existence et la régularité d'un attracteur global avec données initiales assez petites.
Dans le troisième chapitre, on considère l'équation de Schrödinger non elliptique NES avec une non linéarité sous-critique. On démontre que le système dynamique associé à cette équation possède un attracteur global, pour des données initiales assez petites.
Dans le quatrième chapitre, on reprend les problématiques de deux premiers chapitres, mais avec discrétisation en temps par un schéma de relaxation. On démontre l'existence d'un attarcteur global régulier pour les systèmes dynamiques discrets associés en dimension infinie.

Mots clés : équations de Schrödinger non linéaires , équations de Schrödinger non elliptique , systèmes de Davey-Stewartson , attracteur global, schéma numérique, méthode de relaxation.

Classification Mathématique primaire : 35Q55, 35B41

Classification Mathématique secondaire : 37L65

Abstract

The Davey-Stewartson systems (DS) are asymptotical models for water waves. These systems in the damped case read as follows

$$iu_t + i\gamma u + \delta u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + \chi|u|^2u + f(x_1, x_2)$$

$$\varphi_{x_1x_1} + m\varphi_{x_2x_2} = |u|^2_{x_1},$$

where $\gamma > 0$ is the damping parameter and where the external force $f(x, y)$ does not depend on t. The four parameters b, χ, δ and m are real numbers. We classify these systems as elliptic-elliptic (E-E), elliptic-hyperbolic (E-H), hyperbolic-elliptic (H-E), hyperbolic-hyperbolic (H-H) according to the sign of (δ, m) : (+,+), (+,-), (-,+), and (-,-). These systems are generalizations of nonlinear Schrödinger equations NLS (with a non local nonlinearity) that read as

$$u_t + \gamma u + iu_{x_1x_1} + \delta iu_{x_2x_2} + i|u|^pu = f,$$

where p is the nonlinearity exponent, $\gamma > 0$ is the damping parameter and f is the external force, δ is a real parameter which is +1 ou -1. When $\delta = -1$ we have the non elliptic Schrödinger equation NES.

Our work is subdivided in four chapters. In the first chapter, we consider a simplified 1-D model of a weakly damped forced Davey-Stewartson equation, which is a partial differential equation of Schrödinger type with a non local nonlinearity and with forcing and damping terms. We prove the existence of a regular global attractor for the associated dynamical system.

In the second chapter, we are interested in the Davey-Stewartson system in the elliptic-elliptic case. We prove the existence and the regularity of a global attractor for sufficient small initial datas.

In the third chapter, we consider the non elliptic Schrödinger equation NES with a subcritical nonlinearity. We prove that the associated dynamical system has a global attractor for sufficient small initial datas.

In the fourth chapter, we go back to the issue of the first and the second chapter, but with discrete time using the relaxation scheme. We prove the existence and the regularity of a global attractor for the infinite-dimensional discrete associated dynamical systems.

Keywords : nonlinear Schrödinger equations, non elliptic Schrödinger equation, Davey-Stewartson systems, Global attractor, numerical scheme, relaxation method.

Primary Mathematics Classification : 35Q55, 35B41

Secondary Mathematics Classification : 37L65

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes co-directeurs de thèse :

Monsieur Thierry Goudon pour m'avoir accueillie dans son équipe durant toutes ces années. J'ai beaucoup apprécié sa gentillesse, son soutien, je l'assure de ma profonde reconnaissance.

Monsieur Olivier Goubet pour avoir dirigé ce travail avec talent et m'avoir constamment guidée et épaulée. Je le remercie du fond du coeur pour sa grande disponibilité, ses conseils et sa confiance qu'il m'a accordé tout au long de ces années de travail.

Ce fut pour moi un grand honneur que Messieurs Rémi Carles et Alain Miranville aient accepté de rapporter cette thèse. Leurs lectures attentives m'ont révélé certaines imprécisions, ce qui a permis d'améliorer mon travail. Je les remercie de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et au temps qu'ils ont consacré à sa lecture.

Je suis très honorée de la participation de Christophe Besse et Cédric Galusinski au jury de cette thèse.

Je n'oublierai pas aussi de remercier les membres du laboratoire Paul Painlevé et le personnel administratif pour leur aide précieuse.

Durant ces années, j'ai également profité d'un environnement de travail très agréable. Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous mes collègues, actuels et anciens, pour les bons moments passés. Je pense en particulier à Saja, Amandine, Qidi, Youcef, Houcine, Alexi, Chunjin.

Je remercie mes parents proches et éloignés qui m'ont suivi et encouragé de loin. Mes pensées vont aussi à ma soeur Razan, mes frères Ammar, Ali.

Enfin, je termine par remercier ceux que je ne saurai et je ne pourrai jamais remercier par des mots, je pense à ma fille Mira, à mon époux Louay avec qui j'ai partagé mes joies et mes soucis.

Table des matières

Introduction

1. Quelques modèles asymptotiques pour l'évolution d'ondes hydrodynamiques

Nous nous intéressons ici à des modèles asymptotiques pour la propagation des ondes à la surface de l'eau. Les modèles asymptotiques sont des modèles obtenus à partir des équations d'Euler (en négligeant les effets visqueux à l'intérieur du fluide).

Pour la propagation des ondes mono-directionelles on peut mettre en avant deux modèles :

– dans le cas d'une faible profondeur, l'équation de Korteweg-de Vries KdV est un modèle asymptotique pour la propagation des ondes unidirectionnelles de faible amplitude et de grande longueur d'onde (par rapport à la profondeur) en faible profondeur (voir [56], [42])

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{0.1}$$

– dans le cas d'une profondeur infini, l'équation de Schrödinger non linéaire NLS est un modèle de l'évolution d'une onde en profondeur infinie (voir [36], [72])

$$iu_t + u_{xx} = |u|^2 u. \tag{0.2}$$

Une autre équation qui est du même ordre d'approximation que l'équation KdV, est l'équation BBM, est introduite par Benjamin, Bona et Mahony [11] en remplaçant le quatrième terme de (0.1)

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0. \tag{0.3}$$

Si on prend en compte les effets transverses à la direction de propagation, nous obtenons respectivement les modèles bi-dimensionels suivant :

– la généralisation bi-dimensionnelle de l'équation KdV est due à Kadomtsev et Petviashvili [52], l'équation KP, elle modélise les ondes bi-dimensionnelles avec faible perturbation transverse

$$\partial_{x_1}(u_t + u_{x_1} + uu_{x_1} + u_{x_1x_1x_1}) + ku_{x_2x_2} = 0,\ k = \pm 1. \tag{0.4}$$

– la généralisation bi-dimensionnelle de NLS, en supposant que l'amplitude dépend faiblement de la variable transverse x_2, a été obtenue par Zakharov [80], Benney et

Roskes [12], Davey et Stewartson [27] et Djordjevic et Redekopp [30], et a conduit aux systèmes de Davey-Stewartson DS

$$iu_t + \delta u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + \chi|u|^2u$$

$$\varphi_{x_1x_1} + m\varphi_{x_2x_2} = |u|^2_{x_1},$$

où u représente l'amplitude complexe de l'onde, et φ est le potentiel moyen de vitesse. Les paramètres $m,\ \delta,\ \chi$ et b sont des paramètres réels dont δ et m peuvent prendre les deux valeurs $+1$ et -1.
Dans cette thèse nous allons considérer une version dissipative de ces modèles, avec un terme de dissipation d'ordre 0 comme introduit dans [29]

$$iu_t + i\gamma u + \delta u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + f(x_1, x_2)$$

$$\varphi_{x_1x_1} + m\varphi_{x_2x_2} = |u|^2_{x_1}.$$

Le cadre de notre étude est alors celui des systèmes dynamiques en dimension infinie.

2. Un système dynamique en dimension infinie

Cette thèse porte sur l'étude du comportement asymptotique de quelques équations dissipatives en présence d'un amortissement et une force extérieure (voir [48], [66], [61]). Soit une équation d'évolution

$$u_t + F(u) = 0, \tag{0.5}$$

avec une donnée initiale u_0 dans un espace de Banach H. On suppose pour tout $u_0 \in H$ qu'on peut associer une unique solution $u(t)$. De plus l'application $u_0 \to u(t)$ est continue sur H. On introduit la notion de semi-groupe $S(t)$ comme $S(t)u_0 = u(t)$ est le flot des solutions, avec $S(t+s) = S(t)S(s)$ pour tout temps positif. Si l'équation sous-jacente est réversible en temps, on employera aussi la terminologie groupe ou $S(t)$, la relation $S(t+s) = S(t)S(s)$ étant vérifiée pour tous temps réels.

2.1. Borné absorbant

Définition 1 *Soit $\beta \subset H$ un ensemble borné, on dit que β est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t)$ s'il capture toutes les trajectoires après un temps fini. En d'autres termes, $\forall B$ borné $\subset H$, $\exists\ t_0(B)$ tel que*

$$S(t)B \subset \beta,\ \forall t \geq t_0(B).$$

Le semi-groupe $S(t)$ est dit dissipatif s'il possède un ensemble borné absorbant ; l'existence d'un ensemble borné absorbant traduit le caractère dissipatif de l'équation d'évolution.

2.2. Attracteur global

Définition 2 *On dit que $X \subset H$ est positivement invariant par $\{S(t),\, t \geq 0\}$ si $S(t)X \subset X$, $\forall t \geq 0$; cela signifie que $\forall u_0 \in X$, $u(t) = S(t)u_0 \in X$.*

Définition 3 *On dit que $X \subset H$ est négativement invariant par $\{S(t),\, t \geq 0\}$ si $\forall t \geq 0$, $S(t)^{-1}X$ existe, est non vide et est contenue dans X ; ici $S(t)^{-1}X = \{u^* \in H, S(t)u^* \in X\}$.*

Si $S(t)$ est réversible en temps, i.e si $S(t)$ est un groupe, alors $S(t)^{-1}(X) = S(-t)X$.

Définition 4 *On dit que $X \subset H$ est invariant si seulement s'il est positivement et négativement invariant ;*

$$S(t)X = X,\, \forall t \geq 0.$$

Définition 5 *Soit $B \subset H$, on appelle ensemble ω-limite de B l'ensemble noté $\omega(B)$ défini par*

$$\omega(B) = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq s}S(t)B} = \{a \in H; \exists b_n \in B \text{ et } t_n \to +\infty;\, S(t_n)b_n \to a\}.$$

On pose

$$\operatorname{dist}(B_0, B_1) = \sup_{x\in B_0}\inf_{y\in B_1} d_H(x,y),$$

avec d_H qui est une distance sur H. On dit que dist est une semi-distance (appelé la semi-distance de Hausdorff).

Définition 6 *On appelle attracteur global $\mathcal{A}$ du système dynamique donné par $S(t)$ un ensemble de H qui vérifie les propriétés suivantes*

- *$\mathcal{A}$ est compact dans H ;*
- *$\mathcal{A}$ est invariant par le flot, i.e $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$;*
- *$\mathcal{A}$ attire les bornés de H, i.e $\forall B$ borné de H,*

$$dist(S(t)B, \mathcal{A}) = \sup_{\phi\in B}\inf_{a\in\mathcal{A}} |S(t)\phi - a|_H \to 0, \text{ quand } t \to +\infty.$$

Théorème 0.0.1 (voir [74]) *On suppose que $S(t)$ possède un borné absorbant β, on suppose aussi que $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ avec $S_1(t)$ est uniformément compact pour t assez grand (i.e $\forall C \subset H$ borné, $\exists t_1(C)$ tel que $\cup_{t\geq t_1}S_1(t)C$ est relativement compact), et $S_2(t)$ est continu de H dans H avec $\sup_{\varphi\in C}|S_2(t)\varphi|_H \to 0$ quand $t \to +\infty$ pour tout borné C dans H, alors $S(t)$ possède un attracteur global $\mathcal{A} = \omega(\beta)$.*

Remarque 1 *Un attracteur quand il existe est*

- *unique ;*
- *le plus grand compact invariant par le flot des solutions ;*
- *le plus petit ensemble qui attire toutes les trajectoires lorsque le temps va à l'infini.*

Une fois établie l'existence de l'attracteur global, une question classique qui se pose est la question de la *régularité* de l'attracteur, i.e de savoir si l'attracteur global est inclus dans un ensemble plus petit que l'espace d'énergie ambiant. Si par exemple l'espace d'énergie est $H^1(\mathbb{R})$ et qu'il est possible de montrer que l'attracteur global est inclus dans $H^2(\mathbb{R})$, alors les semi-groupes définis respectivement sur $H^1(\mathbb{R})$ et $H^2(\mathbb{R})$ pour la même equation ont un même attracteur. Du point de vue de la physique, cela veut dire que l'attracteur global du système, qui presente le régime permanent du flot, ne dépend pas du cadre mathématique choisi.

On peut distinguer deux sortes d'équations aux dérivées partielles dissipatives, les équations paraboliques dissipatives (par exemple les équations de Naviers-Stokes en dimension deux (voir [74], [60]) et les équations de Cahn-Hilliard (voir [74], [4])) et équations d'ondes non-linéaires amorties (par exemple les équations KdV, BBM et NLS). La difference essentielle entre les deux est l'existence d'un effet régularisant en temps fini ou non. En effet une équation d'évolution parabolique possède un effet régularisant en temps fini (positif), c'est à dire que le semi-groupe $S(t)$ envoie par exemple H^k dans $H^{(k+p)}$ pour $t > 0$. Alors l'attracteur global associé à $S(t)$ est inclus dans $H^{(k+p)}$ pour un certain $p > 0$. Pour les équations d'ondes amorties le semi-groupe associé n'est pas régularisant (car le flot est reversible en temps), mais il apparait que certaines de ces équations possèdent un effet régularisant assymptotique, c'est à dire que le flot agissait comme si $S(+\infty)$ présentait un effet régularisant. Un premier résultat pour une équation d'onde, l'équation de Sine-Gordon, de l'existence d'un effet régularisant asymptotique a été établi par Haraux (voir [50]). Ceci a été dévelopé pour étudier l'asymptotique de telle équation d'ondes amortie (voir [37], [49]).

Pour les équations faiblement amorties, les résultats connus sont les suivants :
les premiers résultats obtenus relatifs à la dynamique des solutions de ces équations étaient l'existence d'un attracteur faible i.e qui attire les trajectoires pour la topologie faible de l'espace d'énergie ambiant (voir [32], [33]). Ensuite en appliquant un argument du à J. Ball (voir [9]) on arrive à montrer que cet attracteur faible est en fait un attracteur fort (voir [75], [77], [57], [34]). Pour l'équation NLS on cite [39] et [1], pour l'équation KdV on cite [62], [41] et [45], et enfin pour l'équation BBM on cite [8].

3. Schéma numérique et système dynamique

L'appréhension numérique de l'équation (0.5) conduit à discrétiser en temps (puis en espace) l'équation en

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + \tilde{F}(u^n, u^{n+1}) = 0. \tag{0.6}$$

Chaque schéma numérique fournit un exemple d'un système dynamique discret $S : u^n \to u^{n+1}$ dont il est intéressant d'étudier les propriétés dynamiques pour les grands temps (existence de l'attracteur, régularité de l'attracteur, ...).

Pour les équations de type NLS la première famille de schémas étudiée dans ce cadre a été la famille des schémas de type Crank-Nicolson (voir [3], [46]).
Nous nous intéressons ici au schéma de relaxation introduit par C. Besse, (confer [13], [14],

[15] pour la description de ce schéma dans le cadre conservatif), mais pour un système dissipatif.

4. Résultats obtenus dans la thèse

Dans cette thèse, on s'intéresse à plusieurs modèles, un modèle réduit 1-D de l'équation de Davey-Stewartson, le système de Davey-Stewartson dans le cas elliptique-elliptique et une équation de Schrödinger non elliptique. Dans la suite on décrit les résultats obtenus et qui sont développés dans les différents chapitres de cette thèse.

4.1. Modèle réduit 1-D

On considère une équation aux dérivées partielles de type Schrödinger non linéaire avec une non-linéarité non locale, avec un terme de force et un terme d'amortissement. Ce problème s'écrit habituellement

$$iu_t + i\gamma u + u_{xx} = \chi |u|^2 u + buE(|u|^2) + f(x), \tag{0.7}$$

$$u(0) = u_0,$$

où $\chi, b \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ est le paramètre de dissipation, et $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ est le terme de force qui est indépendant du temps. Le terme $\chi|u|^2u$ étant analogue au terme $buE(|u|^2)$ nous prendrons dans la suite du manuscrit $\chi = 0$. E est un opérateur linéaire, auto-adjoint et borné sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

On s'intéresse au comportement asymptotique pour ce modèle qui est un modèle réduit uni-dimensionnel du système DS. On démontre l'existence d'un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R})$, qui est en fait compact dans $H^2(\mathbb{R})$ (un attracteur global régulier) pour le système dynamique donné par l'équation (0.7). Les résultats obtenus dans ce chapitre prolongent ceux de l'étude ([7], [8]) pour l'équation NLS cubique en 1-D .

Ce premier chapitre n'a pas fait l'objet d'une publication.

4.2. Systèmes de Davey-Stewartson

Les systèmes de Davey-Stewartson s'écrivent

$$iu_t + i\gamma u + \delta u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + \chi|u|^2u + f(x_1, x_2)$$

$$\varphi_{x_1x_1} + m\varphi_{x_2x_2} = |u|^2_{x_1},$$

où $\gamma > 0$ désigne le paramètre du terme de dissipation, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ désigne le terme de force, u représente l'amplitude complexe de l'onde, et φ est le potentiel moyen de vitesse. Les paramètres m, δ, χ et b sont des paramètres réels dont δ et m peuvent prendre les deux valeurs $+1$ et -1.
On peut classer ces systèmes en suivant Ghidaglia et Saut [35] en elliptique-elliptique (E-E), elliptique-hyperbolique (E-H), hyperbolique-hyperbolique (H-H), et hyperbolique-

elliptique (H-E), cela suivant les valeurs prises par (δ, m), soit respectivement (+,+), (+,-), (-,-), (-,+).

On s'intéresse au cas (E-E) en prenant $\chi = 0$, car le terme $\chi|u|^2u$ peut se traiter comme le terme non local $buE(|u|^2)$ défini comme suit : en inversant l'équation liant φ à $|u|^2$ on obtient $\varphi_{x_1} = E(|u|^2)$ où E est défini en variable de Fourier par son symbole $\hat{E}(\xi) = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}$ où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Ce système est une généralisation de l'équation de Schrödinger non linéaire NLS (avec un terme non local). On démontre l'existence de l'attracteur global dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, qui est compact dans $H^2(\mathbb{R}^2)$, pour le système dynamique associé.

Les résultats obtenus sont une amélioration de ceux de l'étude (voir [76], [81]) où le cas correspond au cas défocalisant dans l'équation de Schrödinger non linéaire est traité $(\chi + b \geq 0)$. Nos résultats sont faits sans supposer un signe sur $(\chi + b)$, mais le prix à payer est une condition naturelle sur la taille des données initiales pour éviter l'explosion en temps fini (on prend les données initiales assez petites dans $L^2(\mathbb{R}^2)$).

Ce deuxième chapitre fait l'objet de l'article [44], paru dans Communication on Pure and Applied Analysis.

4.3. Equations de Schrödinger non elliptiques

On considère une équation de Schrödinger non elliptique avec une non-linéarité sous critique $|u|u$ qui s'écrit

$$iu_t + i\gamma u + u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} + |u|u = if,$$

ou de manière équivalente, en multipliant par i et en passant au conjugué

$$u_t + \gamma u + iu_{x_1x_1} - iu_{x_2x_2} + i|u|u = f,$$

où $u(t, x_1, x_2)$ est l'amplitude complexe, $\gamma > 0$ est le paramètre du terme de dissipation et la force extérieure f ne dépend pas de t ; on suppose que f est dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ et que sa norme $L^2(\mathbb{R}^2)$ est assez petite. Cette équation avec le terme de dissipation et le terme de force extérieure fournit un exemple d'un système dynamique de dimension infinie.
On s'intéresse au comportement asymptotique des solutions lorsque le temps tend vers l'infini. La difficulté ici est de prouver l'existence d'un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, car on travaille sur un opérateur non-elliptique $\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2$ qui n'est pas coercif sur $H^s(\mathbb{R}^2)$, et alors la méthode habituelle d'énergie n'est pas efficace ici. En prenant des données initiales petites et une force assez petite aussi, et en travaillant sur la formule de Duhamel de cette équation on prouve que ce système dynamique a en fait un ensemble borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Nous pensons que ce travail peut se prolonger pour le système DS en prenant le terme non local $uE(|u|)$ comme une non-linéarité sous-critique.

Ce troisième chapitre fait l'objet de l'article [51], soumis à Nonlinear Analysis TMA.

4.4. Problèmes semi-discrets

Dans un premier temps, on reprend la problématique de la première section, mais après discrétisation en temps par un schéma de relaxation du à C. Besse. On considère une méthode de type relaxation en temps qui consiste à écrire le terme non local $E(|u^n|^2)$ à l'aide d'un potentiel discrétisé au temps $t = (n+\frac{1}{2})\tau$. On définit alors les variables $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ et u^{n+1} qui représentent respectivement les approximation de $E(|u|^2)$ au temps $t_{n+\frac{1}{2}}$ et de u au temps t_{n+1}. Soit $\tau = \delta t$ le pas de temps, $u^0 = u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, et $\delta = e^{-\gamma\tau}$, on a

$$e^{\gamma t} u|_{t=(n+\frac{1}{2})\tau} \sim e^{\gamma(n+1)\tau} \frac{u^{n+1} + \delta u^n}{2},$$

et

$$e^{2\gamma t} \varphi|_{t=n\tau} \sim e^{2\gamma n\tau} \frac{\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2},$$

alors le schéma de relaxation associé à l'équation (0.7) s'écrit

$$i\frac{u^{n+1} - \delta u^n}{\tau} + \Delta\frac{u^{n+1} + \delta u^n}{2} = b\frac{u^{n+1} + \delta u^n}{2}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\delta + 1}{2}f,$$

$$E(|u^n|^2) = \frac{\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2},$$

avec $u^0 = u_0$ et $\delta\varphi^{-\frac{1}{2}} = \delta^{-1}\varphi^{+\frac{1}{2}} = E(|u^0|^2)$. Ce schéma définit un semi-groupe discret

$$\begin{aligned} S_\tau : H^1(\mathbb{R}) &\rightarrow H^1(\mathbb{R}) \\ u^n &\mapsto u^{n+1}. \end{aligned}$$

On démontre l'existence d'un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R})$ qui est un sous-ensemble compact dans $H^2(\mathbb{R})$ pour le système dynamique discret associé en dimension infinie.

Dans un deuxième temps, on prolonge ce dernier travail pour le système DS en 2-D avec une condition sur la taille des données initiales. Ici on reprend la problématique de la seconde section avec une discrétisation en temps par le schéma de relaxation. On choisit une méthode de type relaxation en temps qui consiste à écrire le terme non local $E(|u^n|^2)$ à l'aide d'un potentiel discrétisé au temps $t = (n+\frac{1}{2})\tau$. On définit alors les variables $\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}$ et u^{n+1} qui représentent respectivement les approximations de $E(|u|^2)$ au temps $t_{n+\frac{1}{2}}$ et de u au temps t_{n+1}. Soit $\tau = \delta t$ le pas de temps, $u^0 = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$, et $\delta = e^{-\gamma\tau}$, on a

$$e^{\gamma t} u|_{t=(n+\frac{1}{2})\tau} \sim e^{\gamma(n+1)\tau} \frac{u^{n+1} + \delta u^n}{2},$$

$$e^{2\gamma t} \varphi_{x_1}|_{t=n\tau} \sim e^{2\gamma n\tau} \frac{\delta^{-1}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi_{x_1}^{n-\frac{1}{2}}}{2},$$

et

$$e^{2\gamma t} |u|_{x_1}^2|_{t=n\tau} \sim e^{2\gamma n\tau} \Delta\frac{\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Alors le schéma de relaxation pour le système dissipatif s'écrit

$$i\frac{u^{n+1}-\delta u^n}{\tau}+\Delta\frac{u^{n+1}+\delta u^n}{2}=b\frac{u^{n+1}+\delta u^n}{2}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}+\frac{\delta+1}{2}f,$$

$$E(|u^n|^2)=\frac{\delta^{-1}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}+\delta\varphi_{x_1}^{n-\frac{1}{2}}}{2},$$

avec $u^0=u_0$ et $\delta\varphi_{x_1}^{-\frac{1}{2}}=\delta^{-1}\varphi_{x_1}^{+\frac{1}{2}}=E(|u^0|^2)$. Ce schéma définit un semi-groupe discret

$$\begin{array}{rcl} S_\tau : H^1(\mathbb{R}^2) & \rightarrow & H^1(\mathbb{R}^2) \\ u^n & \mapsto & u^{n+1}. \end{array}$$

On se restreint à des données initiales et à une force extérieure *assez petites* dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour assurer la non-explosion des trajectoires, on démontre l'existence d'un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ qui est un sous-ensemble compact dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ pour le système dynamique discret associé en dimension infinie.

Ce quatrième chapitre fait l'objet de l'article [43], paru dans Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta.

Chapitre 1

La dissipativité pour un modèle réduit 1-D de l'équation de Davey-Stewartson

Sommaire

1.1 Introduction

Les équations de Davey-Stewartson, appelées DS dans la suite, sont des équations de type équations de Schrödinger non linéaires NLS faisant intervenir une nonlinearité cubique comprenant un terme non local. Dans ce premier chapitre nous allons étudier le comportement asymptotique pour un modèle réduit 1-D du système DS. Ce problème s'écrit

$$iu_t + i\gamma u + u_{xx} = buE(|u|^2) + f(x), \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0,$$

où $b \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ est le paramètre de dissipation, et $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ est le terme de force qui est indépendant du temps.
E est un opérateur linéaire, auto-adjoint et borné sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$; en particulier

- $E(\rho)$ à valeurs réelles si ρ à valeurs réelles.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} E(\rho)\psi = \int_{\mathbb{R}} \rho E(\psi)$ si $\rho, \psi \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Nous allons établir que le système dynamique donné par l'équation (1.1) vérifie les mêmes propriétés que l'équation NLS cubique en 1-D (voir [7], [8]).

Nous complétons cette courte introduction en introduisant quelques notations. Les ensembles $L^2(\mathbb{R})$, $H^1(\mathbb{R})$ sont les espaces de Sobolev classiques et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz.
On notera respectivement $\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\xi x}dx$ la transformée de Fourier d'une fonction de l'espace de Schwartz (ou par dualité d'une distribution tempérée dont l'ensemble sera noté $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$), et $\mathcal{F}^{-1}$ la transformée de Fourier inverse.
Pour un opérateur différentiel P (ou plus généralement un opérateur pseudo-différentiel) on appellera symbole la fonction $\hat{P}(\xi)$ telle que

$$Pu = f \text{ ssi } \hat{P}(\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (ici, et tout au long de cette section sauf mention explicite du contraire la transformée de Fourier sera par rapport à la variable d'espace x, $\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi)$).
L'opérateur linéaire E sera défini par son symbole $\hat{E}(\xi)$ via $E(\rho) = \psi$ si et seulement si $\hat{E}(\xi)\hat{\rho}(\xi) = \hat{\psi}(\xi)$. L'hypothèse E opérateur linéaire borné sur $L^2(\mathbb{R})$ revient à dire $\hat{E}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R})$ (voir [68] par exemple). Dans la suite on supposera $|\hat{E}|_{L^\infty_\xi} = 1$.
Nous désignerons par $C_b([0, +\infty[; H^1(\mathbb{R}))$ l'espace des fonctions continues et bornées à valeurs dans $H^1(\mathbb{R})$.

Dans cette section nous appelerons c une constante numérique qui peut varier d'une ligne à l'autre.

1.2 Un système dynamique bien posé et dissipatif

1.2.1 Problème de Cauchy bien posé

L'objectif est de démontrer que (1.1) est associée à un groupe $S(t)$

$$S(t) : H^1(\mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{R})$$

$$u(t) = S(t)u_0,$$

défini pour tout temps. L'équation considérée est réversible en temps. Même si la terminologie "groupe" est plus appropriée, nous utiliserons parfois le terme "semi-groupe" pour désigner $S(t)$.
Dire qu'on définit un semi-groupe sur $H^1(\mathbb{R})$ revient à établir que le problème de Cauchy est localement bien posé au sens de Hadamard, i.e que l'on a une unique solution dans $C_b([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$ pour $T > 0$ petit et $u(t)$ dépend continûment de la donnée initiale u_0. Le cas $T < 0$ est analogue en remplaçant γ par $-\gamma$; le sens du temps ne joue aucun rôle sauf pour les estimations pour les grands temps. La démarche est classique comme pour NLS dans le cas conservatif (voir [38], [21], [23]). Néanmoins, nous esquissons la démonstration pour expliciter la prise en charge du terme non local.

Proposition 1 *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, l'équation (1.1) admet une unique solution*

$$u \in C_b([0, +\infty[; H^1(\mathbb{R})).$$

De plus $u_0 \mapsto u(t)$ est continue sur $H^1(\mathbb{R})$.

Remarque 2 *Dans le cas conservatif $\gamma = 0$, la démonstration d'un tel résultat apparait par exemple dans [20], dans le cas plus général de la dimension plus petite ou égale à 3. La clef de la démonstration est l'estimation L^∞_ξ sur le symbole $\hat{E}$. L'extension au cas $\gamma > 0$ ne présente pas de difficulté.*

Démonstration: on commence par démontrer quelques lemmes sur le terme non local $E(|u|^2)$

Lemme 1 *Pour $\rho \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$|E(\rho)|_{L^2_x} \leq |\rho|_{L^2_x}.$$

Démonstration: grâce à la définition de E et au théorème de Plancherel, on écrit

$$\begin{aligned}
|E(\rho)|^2_{L^2_x} &= \frac{1}{2\pi}\int |\hat{E}(\xi)|^2|\hat{\rho}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq |\hat{E}(\xi)|^2_{L^\infty_\xi}|\hat{\rho}|^2_{L^2_\xi} \\
&\leq |\rho|^2_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 2 *Pour $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a*

$$|E(|u|^2)|_{H^1_x} \leq c|u|_{L^\infty_x}|u|_{H^1_x} \leq c|u|^2_{H^1_x}. \tag{1.2}$$

Démonstration: en fait

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial E(|u|^2)) &= i\xi\hat{E}(\xi)\widehat{|u|^2}(\xi) \\
&= \mathcal{F}(E(\partial(|u|^2))).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|E(|u|^2)|^2_{H^1_x} &= |\partial E(|u|^2)|^2_{L^2_x} + |E(|u|^2)|^2_{L^2_x} \\
&\leq |2\mathrm{Re}\overline{u}\partial u|^2_{L^2_x} + c||u|^2|^2_{L^2_x} \\
&\leq c|u|^2_{L^\infty_x}(|\partial u|^2_{L^2_x} + |u|^2_{L^2_x}) \\
&\leq c|u|^2_{L^\infty_x}|u|^2_{H^1_x}.
\end{aligned}$$

Qui donne grâce à l'inégalité d'Agmon (voir [74])

$$|u|_{L^\infty_x} \leq c|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|u_x|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x} \leq c|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|u|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x}, \tag{1.3}$$

que
$$|E(|u|^2)|_{H^1_x} \leq c|u|^2_{H^1_x}.$$

$\square$

Lemme 3 *Pour $u \in H^1(\mathbb{R})$, on a*
$$\begin{aligned} |uE(|u|^2)|_{H^1_x} &\leq c|u|^2_{L^\infty_x}|u|_{H^1_x} + c|u|^{\frac{3}{2}}_{H^1_x}|u|_{L^4_x}|u|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty_x} \\ &\leq c|u|_{L^2_x}|u|^2_{H^1_x} \leq c|u|^3_{H^1_x}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Démonstration: en utilisant (1.2), (1.3) et l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (voir [19], [38])
$$|u|^4_{L^4_x} \leq c|u|^3_{L^2_x}|u_x|_{L^2_x} \leq c|u|^3_{L^2_x}|u|_{H^1_x}, \tag{1.5}$$
on trouve
$$\begin{aligned} |uE(|u|^2)|_{H^1_x} &\leq c|u|_{L^\infty_x}|E(|u|^2)|_{H^1_x} + c|u|_{H^1_x}|E(|u|^2)|_{L^\infty_x} \\ &\leq c|u|^2_{L^\infty_x}|u|_{H^1_x} + c|u|_{H^1_x}|E(|u|^2)|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|E(|u|^2)|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x} \\ &\leq c|u|^2_{L^\infty_x}|u|_{H^1_x} + c|u|_{H^1_x}|u|_{L^4_x}|u|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty_x}|u|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x} \\ &\leq c|u|_{L^2_x}|u|^2_{H^1_x} \\ &\leq c|u|^3_{H^1_x}. \end{aligned}$$

$\square$

Maintenant on montre que le problème de Cauchy est localement bien posé ; pour $T_* > 0$ on définit $X = C_b([0,T_*]; H^1(\mathbb{R}))$ qui est un espace de Banach muni de la norme
$$|u|_X = \sup_{t\in[0,T_*]} |u(t)|_{H^1_x}.$$
Soit A l'opérateur différentiel non borné $A = -i\gamma - \Delta$; soit le groupe libre correspondant $T(t) = e^{-itA}$. On écrit (1.1) sous la forme intégrale
$$G(u(t)) = T(t)u_0 - i\int_0^t T(t-s)F(u(s))ds,$$
$$F(v) = bvE(|v|^2) + f,$$
où G est une application de X dans X (ce point sera vérifié bientôt).
$T(t)$ est un semi-groupe de contraction sur $H^1(\mathbb{R})$ (et sur tout espace $H^s(\mathbb{R})$ d'ailleurs). Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ l'équation (1.1) s'écrit
$$u_t + (\gamma - i\Delta)u = -ibuE(|u|^2) - if. \tag{1.6}$$
On intègre (1.6) sur $[0,t]$, on trouve
$$u(t) = e^{-itA}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)A}F(u(s))ds.$$

Lemme 4 *Pour t positif, le semi-groupe $T(t)$ est contractant sur $H^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on estime $T(t)$ en norme $H^1(\mathbb{R})$

$$|T(t)|_{H^1_x} = |e^{(-\gamma t + it\Delta)}|_{H^1_x} = e^{-\gamma t}\ |e^{it\Delta}|_{H^1_x}.$$

On pose

$$U(t) = e^{it\Delta}.$$

Vérifions que $U(t)$ est unitaire sur $H^1(\mathbb{R})$. Ce résultat est classique en utilisant l'analyse de Fourier ; puisque le symbole $\exp(-it\xi^2)$ de $U(t)$ est de module 1, $U(t)$ est unitaire sur tous les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$. En particulier

$$|U(t)|_{H^1_x} = 1.$$

Finalement

$$|T(t)|_{H^1_x} = e^{-\gamma t}|U(t)|_{H^1_x} \leq 1,\ \forall t \in [0, T_*].$$

□

Proposition 2 *Pour T_* assez petit dépendant de $|f|_{L^2_x}$ et de $|u_0|_{H^1_x}$, l'application G est bien définie de X dans X.*

Démonstration: soit $C_0 > 0$ tel que $C_0 \geq 2(|u_0|_{H^1_x} + c_\gamma |f|_{L^2_x})$, où c_γ constante bien choisie qui dépend de γ, et soit $u \in B(0, C_0) \subset X$; ici $B(0, C_0)$ désigne la boule fermée de rayon C_0 dans X.
On a

$$G(u(t)) = T(t)u_0 - i\int_0^t T(t-s)f(x)ds - ib\int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds.$$

On veut montrer que G envoie la boule de rayon C_0 dans elle même si T_* petit. On a

$$|G(u(t))|_{H^1_x} \leq |T(t)u_0|_{H^1_x} + |\int_0^t T(t-s)f(x)ds|_{H^1_x} + |b|| \int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds|_{H^1_x}.$$

Comme $T(t)$ est contractant sur $H^1(\mathbb{R})$, alors

$$|T(t)u_0|_{H^1_x} \leq |u_0|_{H^1_x}.$$

On estime la norme dans $H^1(\mathbb{R})$ de $\displaystyle\int_0^t T(t-s)f(x)ds$; on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t T(t-s)f(x)ds &= (\int_0^t T(t-s)ds)f(x) \\
&= (\int_0^t e^{-i(t-s)A}ds)f(x) \\
&= iA^{-1}(Id - e^{-itA})f(x);
\end{aligned}$$

comme $A = -i\gamma - \Delta$ est un opérateur continu et inversible de $H^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, alors il existe c_γ qui dépend de γ tel que pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ on a

$$|A^{-1}f|_{H^1_x} \leq c|A^{-1}f|_{H^2_x} \leq c_\gamma |f|_{L^2_x}.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|\int_0^t T(t-s)f(x)ds|_{H^1_x} &= |iA^{-1}(Id-e^{-itA})f|_{H^1_x} \\
&\leq |A^{-1}f|_{H^1_x} + |e^{-itA}A^{-1}f|_{H^1_x} \\
&\leq c_\gamma |f|_{L^2_x}.
\end{aligned}
$$

Il reste à estimer le terme non local. En utilisant (1.4) on trouve

$$
|b||\int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds|_{H^1_x} \leq c|b|C_0^3 \int_0^{T_*} ds \leq c|b|C_0^3 T_*.
$$

$$
\begin{aligned}
|G(u(t)|_{H^1_x} &\leq |u_0|_{H^1_x} + c|f|_{L^2_x} + c|b|C_0^3 T_* \\
&\leq \frac{C_0}{2} + c|b|C_0^3 T_*.
\end{aligned}
$$

On choisit T_* tel que

$$
c|b|C_0^2 T_* < \frac{1}{2};
$$

alors

$$
|G(u(t))|_X = \sup_{t\in[0,T_*]} |G(u(t))|_{H^1_x} \leq C_0.
$$

□

Lemme 5 *Pour $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, il existe $T_* > 0$ assez petit, dépendant de $|f|_{L^2_x}$ et de $|u_0|_{H^1_x}$, tel que l'équation (1.1) admette une unique solution "mild" dans $C([0,T_*];H^1(\mathbb{R}))$.*

Remarque 3 *Par solution "mild" nous entendons fonction dans $X = C([0,T_*];H^1(\mathbb{R}))$ solution de la forme de Duhamel de l'équation considéré, i.e. de l'équation écrite sous forme intégrale. Pour les différentes notions de solution d'une EDP dispersive, nous renvoyons à [73] et aux références qui s'y trouvent. De plus, comme la non-linéarité est une fonction continue en t à valeurs dans $H^1(\mathbb{R})$, en dérivant l'équation intégrale, on peut montrer que la solution "mild" est une solution faible, au sens des distributions, de l'équation (confer [38], [23]).*

Démonstration: on vient de prouver que G envoie la boule de rayon C_0 dans $H^1(\mathbb{R})$ dans elle même si T_* petit. Reste à montrer que G est contractante sur les bornés de X. Soient $u, v \in B(0,C_0) \subset X$ avec $|u|_X^2 \leq C_0^2$, $|v|_X^2 \leq C_0^2$.
Il vient

$$
\begin{aligned}
|uE(|u|^2) - vE(|v|^2)|_{H^1_x} &\leq |(u-v)E(|u|^2)|_{H^1_x} + |vE(|u|^2-|v|^2)|_{H^1_x} \\
&\leq c|u-v|_{H^1_x}|E(|u|^2)|_{H^1_x} + c|v|_{H^1_x}|E(|u|^2-|v|^2)|_{H^1_x} \\
&\leq c|u-v|_{H^1_x}|u|^2_{H^1_x} + c|v|_{H^1_x}||u|^2-|v|^2|_{H^1_x} \\
&\leq c|u-v|_{H^1_x}|u|^2_{H^1_x} + c|v|_{H^1_x}|u\overline{u}-v\overline{v}|_{H^1_x} \\
&\leq c|u-v|_{H^1_x}|u|^2_{H^1_x} + c|v|_{H^1_x}|u(\overline{u}-\overline{v})+\overline{v}(u-v)|_{H^1_x} \\
&\leq cC_0^2|u-v|_{H^1_x}.
\end{aligned}
$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} |G(u)-G(v)|_{H^1_x} &\leq \int_0^t |T(t-s)[F(u(s))-F(v(s))]|_{H^1_x} ds \\ &\leq \int_0^t |F(u(s))-F(v(s))|_{H^1_x} ds \\ &\leq c|b|C_0^2 \int_0^t |u-v|_{H^1_x} ds. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} |G(u)-G(v)|_X &\leq c|b|C_0^2 |u-v|_X \int_0^{T_*} ds \\ &\leq c|b|C_0^2 T_* |u-v|_X. \end{aligned}$$

On choisit T_* tel que

$$c|b|C_0^2 T_* < \frac{1}{2}.$$

Donc G est contractante sur les bornés de X. D'après le théorème de point fixe il existe une unique u dans X solution “mild“ de (1.1) tel que $G(u) = u$, d'où une solution unique u de l'équation (1.1) sur $[0, T_*]$ à valeurs dans $B(0, C_0)$. □

Lemme 6 *Pour t dans l'intervalle $[0, T_*]$, où T_* est défini dans le Lemme 5, le semi-groupe $S(t)$ est fortement continu sur $H^1(\mathbb{R})$.*

Remarque 4 *On verra dans la suite que la restriction sur t n'a pas lieu d'être et que la continuité est vraie en tout temps où le semi-groupe est défini.*

Démonstration: soient $u(t), v(t)$ deux solutions issues de $u_0,\ v_0$ dans $H^1(\mathbb{R})$. On veut montrer que

$$\text{si } u_0 \to v_0 \text{ alors } u(t) = S(t)u_0 \to v(t) = S(t)v_0 \text{ dans } H^1(\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} |u(t)-v(t)|_{H^1_x} &\leq |T(t)(u_0-v_0)|_{H^1_x} + \int_0^t |T(t-s)(F(u(s))-F(v(s))|_{H^1_x} ds \\ &\leq |u_0-v_0|_{H^1_x} + \int_0^t c|b|C_0^2 |(u-v)(s)|_{H^1_x} ds \\ &\leq |u_0-v_0|_{H^1_x} + c|b|C_0^2 \int_0^t |(u-v)(s)|_{H^1_x} ds. \end{aligned}$$

On applique alors le lemme de Gronwall à la fonction $\varphi(t) = \int_0^t |(u-v)(s)|_{H^1_x} ds$; il vient

$$|u-v|_{H^1_x} \leq |u_0-v_0|_{H^1_x} \frac{e^{c|b|C_0^2 t}}{c|b|C_0^2}. \tag{1.7}$$

D'où le résultat voulu. □

Remarque 5 *La méthode de point fixe local s'itère. On peut résoudre successivement l'équation avec conditions initiales en $T_0 = 0$ jusqu'à T_*, $T_1 = T_*$ jusqu'à T_2,... où T_2 dépend de $|f|_{L^2_x}$ mais aussi de $|u(T_1)|_{H^1_x}$. Par concaténation on construit une solution maximale sur $[0, T_{max}[$ avec $T_{\max} = \sup T_m$; $m = 1, 2, \ldots$. Cette solution appartient à $C([0, T_{max}[, H^1)$ et vérifie l'alternative d'explosion suivante*

$$T_{max} = +\infty \text{ ou } T_{max} < +\infty \text{ et } |u(t)|_{H^1_x} \to +\infty, \text{ quand } t \to T_{max}.$$

Si on contrôle la norme H^1_x de $u(t)$ jusqu'à T_{max} la solution maximale sera globale et vérifiera $T_{max} = +\infty$. Pour ce faire on utilise l'astuce suivante. On montre aisément récursivement sur T_m que (1.7) s'itère en, pour $t \leq T_m$

$$|(u-v)(t)|_{H^1_x} \leq |u_0 - v_0|_{H^1_x} \frac{e^{c|b|C_0^2 T_m}}{c|b|C_0^2}.$$

En choisissant par exemple $v(t) = v_0$ une solution stationaire de l'équation (1.1), il vient alors la non-explosion de la norme H^1_x de $u(t)$. La solution maximale est alors globale. On a en outre prouvé au passage la continuité de $S(t)$ pour tout temps.

1.2.2 Existence d'un borné absorbant

On suit ici le cadre des systèmes dynamiques en dimension infinie (voir [74], [61], [48], [66]). On procède en deux étapes. L'existence d'un borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R})$, puis l'existence d'un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R})$.

Lemme 7 *Il existe $c_1 > 0$ qui dépend des données de l'équation $|f|_{L^2_x}$ et γ, et qui est indépendant de u_0, tel que pour $u(t)$ solution de (1.1), il existe t_1 qui dépend de $|u_0|_{L^2_x}$ tel que*

$$|u(t)|_{L^2_x} \leq c_1 \ \forall t \geq t_1.$$

Démonstration: Comme $E(|u|^2)$ et $|u|^2$ sont à valeurs réelles, il vient

$$\mathrm{Im} \int E(|u|^2)|u|^2 = 0.$$

On multiplie l'équation (1.1) par $\overline{u}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on intègre en prenant la partie imaginaire, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2_x} + \gamma |u(t)|^2_{L^2_x} = \mathrm{Im} \int f\overline{u},$$

donc

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2_x} + 2\gamma |u(t)|^2_{L^2_x} = 2\mathrm{Im} \int f\overline{u}.$$

Comme on a

$$2\mathrm{Im} \int f\overline{u} \leq 2|f|_{L^2_x}|u|_{L^2_x} \leq \gamma |u|^2_{L^2_x} + \frac{1}{\gamma}|f|^2_{L^2_x},$$

alors

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2_x} + \gamma |u(t)|^2_{L^2_x} \leq \frac{1}{\gamma}|f|^2_{L^2_x}.$$

On obtient

$$|u(t)|^2_{L^2_x} \leq e^{-\gamma t}|u_0|^2_{L^2_x} + (1-e^{-\gamma t})\frac{|f|^2_{L^2_x}}{\gamma^2} \leq c_1^2 = \frac{2|f|^2_{L^2_x}}{\gamma^2}, \forall t > t_1, \tag{1.8}$$

où $t_1 = \dfrac{2}{\gamma} ln \dfrac{|u_0|_{L^2_x}\gamma}{|f|_{L^2_x}}$. □

Maintenant on va établir la borne supérieure de u_x dans $L^2(\mathbb{R})$;

Lemme 8 *Il existe $c_2 > 0$ qui dépend des données de l'équation $|f|_{L^2_x}$ et γ, et qui est indépendant de u_0, tel que pour $u(t)$ solution de (1.1), il existe t_2 qui dépend de $|u_0|_{H^1_x}$ tel que*

$$|u_x(t)|_{L^2_x} \leq c_2 \ \forall t \geq t_2.$$

Démonstration: les calculs sont faits en prétendant que toutes les intégrations par parties sont licites. Cela peut être justifié de la façon suivante. On démontrer les inégalités pour u_0^ε une donnée initiale dans l'espace de Schwartz par exemple. On conclut ensuite par densité de l'espace de Schwartz dans $H^1_x(\mathbb{R})$ en utilisant que pour chaque temps $S(t)$ est continu sur $H^1_x(\mathbb{R})$. Cet argument est standard (voir [22] par exemple). Nous indiquons ici seulement comment obtenir les estimations a priori. Le passage à la limite étant omis. Rappelons que c est une constante numérique qui peut varier d'une ligne à l'autre. on multiplie l'équation (1.1) par $(-\overline{u}_t - \gamma\overline{u})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on intègre en prenant la partie réelle

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_x|^2_{L^2_x} + \gamma|u_x|^2_{L^2_x} = &- \frac{b}{2}\int E(|u|^2)|u|^2_t - \mathrm{Re}\int f\overline{u}_t \\ &- \gamma b\int E(|u|^2)|u|^2 - \gamma\mathrm{Re}\int f\overline{u}.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\int E(|u|^2)|u|^2_t &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int \widehat{E(|u|^2)}\overline{\widehat{|u|^2_t}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\int \hat{E}(\xi)\widehat{|u|^2}\overline{\widehat{|u|^2_t}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\int \hat{E}(\xi)\widehat{|u|^2}\overline{\widehat{|u|^2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\int \widehat{E(|u|^2)}\overline{\widehat{|u|^2}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int E(|u|^2)|u|^2.\end{aligned}$$

On trouve dès lors

$$\frac{d}{dt}q(u) + 2\gamma q(u) = H(u),$$

où

$$q(u) = |u_x|^2_{L^2_x} + \frac{b}{2}\int E(|u|^2)|u|^2 + 2\mathrm{Re}\int f\overline{u},$$

$$H(u) = -\gamma\ b \int E(|u|^2)|u|^2 + 2\gamma \mathrm{Re} \int f\overline{u}.$$

On a

$$-\gamma b \int E(|u|^2)|u|^2 \leq \gamma|b||E(|u|^2)|_{L^2_x}|u|^2_{L^4_x} \leq \gamma|b||u|^4_{L^4_x},$$

car $|E(|u|^2)|_{L^2_x} \leq ||u|^2|_{L^2_x} = |u|^2_{L^4_x}$.
Maintenant on démontre que

$$q(u) \geq \frac{1}{2}|u_x|^2_{L^2_x} - c(|u|^6_{L^2_x} + |u|^2_{L^2_x}) - |f|^2_{L^2_x},$$

pour u dans $H^1(\mathbb{R})$; en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg (1.5) on trouve

$$\begin{aligned} q(u) &\geq |u_x|^2_{L^2_x} - \frac{|b|}{2}|u|^4_{L^4_x} - |f|_{L^2_x}|u|_{L^2_x} \\ &\geq |u_x|^2_{L^2_x} - \frac{c}{2}|u_x|_{L^2_x}|u|^3_{L^2_x} - |f|_{L^2_x}|u|_{L^2_x} \\ &\geq |u_x|^2_{L^2_x} - \frac{1}{2}|u_x|^2_{L^2_x} - c|u|^6_{L^2_x} - |f|^2_{L^2_x} - c|u|^2_{L^2_x} \\ &\geq \frac{1}{2}|u_x|^2_{L^2_x} - c(|u|^6_{L^2_x} + |u|^2_{L^2_x}) - |f|^2_{L^2_x}. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} H(u) &\leq c\gamma|b||u_x|_{L^2_x}|u|^3_{L^2_x} + 2|f|_{L^2_x}|u|_{L^2_x} \\ &\leq \frac{\gamma}{2}|u_x|^2_{L^2_x} + c\gamma(|u|^6_{L^2_x} + |u|^2_{L^2_x}) + \gamma|f|^2_{L^2_x} \\ &\leq \gamma q(u) + c\gamma(|u|^6_{L^2_x} + |u|^2_{L^2_x}) + 2\gamma|f|^2_{L^2_x}. \end{aligned}$$

Qui donne

$$\frac{d}{dt}q(u) + \gamma q(u) \leq c\gamma(|u|^6_{L^2_x} + |u|^2_{L^2_x}) + 2\gamma|f|^2_{L^2_x}. \tag{1.9}$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$q(u) \leq q(u_0)e^{-\gamma t} + 2\gamma|f|^2_{L^2_x} + c\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\gamma(|u(s)|^6_{L^2_x} + |u(s)|^2_{L^2_x})ds.$$

On en déduit

$$|u_x|^2_{L^2_x} \leq q(u_0)e^{-\gamma t} + 2\gamma|f|^2_{L^2_x} + c(|u|^6_{L^2_x} + |u|^2_{L^2_x}) + c\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\gamma(|u(s)|^6_{L^2_x} + |u(s)|^2_{L^2_x})ds.$$

On veut alors utiliser le contrôle de $|u|_{L^2_x}$, pour $t \geq t_1$, donné par le Lemme 7. On applique l'estimation précédente à $v(t) = S(t)u(t_1) = u(t+t_1)$. Il vient alors, puisque $v(t)$ reste pour tout temps positif captif dans le borné absorbant $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} |u_x(t+t_1)|^2_{L^2_x} &\leq q(u(t_1))e^{-\gamma t} + 2\gamma|f|^2_{L^2_x} + c(c_1^6 + c_1^2) + c\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\gamma(c_1^6 + c_1^2)ds \\ &\leq q(u(t_1))e^{-\gamma t} + 2\gamma|f|^2_{L^2_x} + 2c(c_1^6 + c_1^2), \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} q(u(t_1)) &= |u_x(t_1)|^2_{L^2_x} + \frac{b}{2}\int E(|u(t_1)|^2)|u(t_1)|^2 + 2\mathrm{Re}\int f\overline{u(t_1)} \\ &\leq K, \end{aligned}$$

où K dépend de $|u_0|_{H^1_x}, |f|_{L^2_x}, b.$ via par exemple $\sup_{[0,t_1]}|u(t)|_{H^1_x(\mathbb{R})}$.
Par conséquent

$$|u_x(t_1+t)|^2_{L^2_x} \leq Ke^{-\gamma t} + 2\gamma|f|^2_{L^2_x} + 2c(c_1^6 + c_1^2). \tag{1.10}$$

On peut alors choisir $c_2^2 = 4\gamma|f|^2_{L^2_x} + 4c(c_1^6 + c_1^2)$ et $t_2 = t_1 + \frac{1}{\gamma}\log(\frac{2K}{c_2^2})$.
Poser $M_1^2 = c_1^2 + c_2^2$ complète la preuve de la proposition. □

D'où la preuve de la Proposition 1. □
On résume alors les deux Lemmes précédents

Proposition 3 *Il existe un sous ensemble borné β de $H^1(\mathbb{R})$ qui satisfait à*

$$S(t)\beta \subset \beta, t \geq 0,$$

et pour tout sous ensemble borné B de $H^1(\mathbb{R})$, il existe $t_0(B) > 0$ tel que

$$S(t)B \subset \beta, t \geq t_0(B).$$

Démonstration: on trouve grâce aux Lemmes 7, 8

$$|u|_{H^1_x} \leq M_1, \ \forall t \geq t_0,$$

où $t_0 = t_2$. Donc il existe un borné absorbant β qui est une boule de rayon M_1 dans $H^1(\mathbb{R})$.
On peut aussi utiliser la démonstration précédente pour construire un borné absorbant positivement invariant par le flot des solutions. De l'équation (1.8), on déduit que si $|u_0|_{L^2_x} \leq M_0 = \frac{\sqrt{2}|f|_{L^2_x}}{\gamma}$, alors $|u(t)|_{L^2_x} \leq M_0$ pour tout temps positif. De la même manière, on déduit de (1.9) que si $|u_0|_{L^2_x} \leq M_0$ alors

$$q(u(t)) \leq e^{-\gamma t} + c(1 - e^{-\gamma t})\gamma(M_0^6 + M_0^2) + 2|f|^2_{L^2_x}. \tag{1.11}$$

Dès lors on déduit que pour $K^2 = c(M_0^6 + M_0^2 + |f|^2_{L^2_x})$, l'ensemble

$$\beta = \{u \in H^1_x; |u|_{L^2_x} \leq M_0 \text{ et } q(u) \leq K^2\}$$

est positivement invariant par le flot et absorbe toutes les trajectoires après un temps fini.
□

1.3 Existence d'un attracteur global $\mathcal{A}$

Rappelons tout d'abord la définition d'un attracteur global

Définition 7 *(voir [74])*
$\mathcal{A}$ est un attracteur global pour $(S(t))_{t\geq 0}$ si
- *$\mathcal{A}$ est compact dans $H^1(\mathbb{R})$;*
- *$\mathcal{A}$ est invariant,i.e : $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$;*
- *$\forall B$ borné de $H^1(\mathbb{R})$,*

$$dist(S(t)B, \mathcal{A}) = \sup_{\phi\in B} \inf_{a\in\mathcal{A}} |S(t)\phi - a|_{H^1_x} \to 0, \text{ quand } t \to +\infty.$$

La difficulté majeure ici est que l'injection de $H^1(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas compacte. On va utiliser une méthode due à Laurençot [57] pour démontrer le résultat suivant

Théorème 1.3.1 *$S(t)$ possède un attracteur global et compact dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on fait la démonstration en trois étapes. Dans une première étape, on montre la précompacité des trajectoires pour une norme plus faible. Dans une seconde étape, on montre la précompacité des trajectoires dans $H^1(\mathbb{R})$ fort. La dernière étape explicite alors l'existence de l'attracteur comme ensemble $\omega-$limite du borné absorbant.

Première étape : précompacité des trajectoires dans $L^2(\mathbb{R})$

Pour $\alpha > 0$, on considére χ_α une fonction de troncature C^∞ vérifiant

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0, & \text{si } |x| > 2\alpha. \end{cases}$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, $(f\chi_\alpha)$ converge vers f quand $\alpha \to +\infty$, alors $\forall\eta \in [0, 1]$, il existe $\alpha(\eta) > 0$ tel que

$$|f - f_\eta|_{L^2_x} \leq \eta, \forall\eta \in [0, 1],$$

où

$$f_\eta = f\chi_{\alpha(\eta)}.$$

Soit maintenant une trajectoire captive pour $t \geq 0$ dans le borné absorbant β. Puisque nous sommes intéressés à montrer la précompacité lorsque le temps va vers l'infini des trajectoires (ou plus précisément d'ensemble de trajectoires issues d'un même borné), nous pouvons, quitte à opérer une translation en temps (confer le t_0 de la Proposition 3), supposer que $u(t) \in \beta$ pour $t_0 \geq 0$.

On décompose maintenant la fonction u solution de (1.1) comme somme de deux fonctions v et w, où v est une solution du problème

$$\begin{cases} iv_t + i\gamma v + v_{xx}(1 - i\eta) - bE(|u|^2)v = f - f_\eta - i\eta u_{xx}, \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

Et w est solution du problème

$$\begin{cases} iw_t + i\gamma w + w_{xx}(1 - i\eta) - bE(|u|^2)w = f_\eta, \\ w(0) = 0. \end{cases}$$

Lemme 9 *Pour $u_0 \in \beta$ et $\eta \in [0,1]$, il existe $t(\eta) > 0$ et $K > 0$ qui dépend de $\gamma,\ f,\ M_1$ tels que*

$$|v|^2_{L^2_x} \leq |u_0|^2_{L^2_x} e^{-\gamma t} + \eta K,$$

$$|v|_{L^2_x} \leq \eta^{\frac{1}{2}} K,\ \forall t \geq t(\eta).$$

Démonstration: v vérifie l'équation suivante

$$iv_t + i\gamma v + v_{xx}(1 - i\eta) - bE(|u|^2 v = f - f_\eta - i\eta u_{xx}. \tag{1.12}$$

On multiplie l'équation (1.12) par $\overline{v}$, on intègre en prenant la partie imaginaire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2_{L^2_x} + \gamma |v|^2_{L^2_x} + \eta |v_x|^2_{L^2_x} &= \mathrm{Im} \int (f - f_\eta)\overline{v} + \eta \mathrm{Re} \int u_x \overline{v}_x \\ &\leq |f - f_\eta|_{L^2_x} |v|_{L^2_x} + \eta |u_x|_{L^2_x} |v_x|_{L^2_x} \\ &\leq \frac{1}{2\gamma}|f - f_\eta|^2_{L^2_x} + \frac{\gamma}{2}|v|^2_{L^2_x} + \eta |v_x|^2_{L^2_x} + \frac{\eta}{4}|u_x|^2_{L^2_x}; \end{aligned}$$

or $|f - f_\eta|_{L^2_x} \leq \eta$ et $|u_x|^2_{L^2_x} \leq M_1^2$, par conséquent

$$\frac{d}{dt}|v|^2_{L^2_x} + \gamma |v|^2_{L^2_x} \leq \frac{\eta}{2}(M_1^2 + \frac{2}{\gamma}).$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$|v|^2_{L^2_x} \leq |u_0|^2_{L^2_x} e^{-\gamma t} + \frac{\eta}{2\gamma}(M_1^2 + \frac{2}{\gamma})(1 - e^{-\gamma t}).$$

Comme $u_0 \in \beta \subset L^2(\mathbb{R})$, alors $|u_0|^2_{L^2_x} \leq M_1^2$, et

$$|v|^2_{L^2_x} \leq M_1^2 e^{-\gamma t} + \eta K,$$

où K dépend de $\gamma,\ f,\ M_1$.
Finalement pour $t \geq t(\eta) = \frac{1}{\gamma}\log(\frac{M_1^2}{K\eta})$ il vient $|v|_{L^2_x} \leq \eta^{\frac{1}{2}} K$. En d'autres termes $v(t)$ est captif après un temps transitoire d'une petite boule fermée $B_{L^2}(O, \sqrt{K\eta})$ dans $L^2_x(\mathbb{R})$. On démontrera dans la suite que v et w (liés par la condition $v = u - w$) sont bornés dans H^1_x.
Dans la suite M_2 désignera le rayon de la boule dans $H^1(\mathbb{R})$ où v reste captif.

Lemme 10 *Pour $\eta \in [0,1]$, il existe une constante K' qui dépend de $\gamma,\ |f|_{L^2_x},\ \eta$ telle que pour $u_0 \in \beta$*

$$|xw|_{L^2_x} \leq K'.$$

Démonstration: soit w solution de l'équation suivante

$$iw_t + i\gamma w + w_{xx}(1 - i\eta) - bE(|u|^2)w = f_\eta. \tag{1.13}$$

On multiplie l'équation (1.13) par $x^2\overline{w}$, on intègre en prenant la partie imaginaire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|xw|^2_{L^2_x} + \gamma|xw|^2_{L^2_x} + \mathrm{Im}\int x^2\overline{w}w_{xx} - \eta\mathrm{Re}\int x^2\overline{w}w_{xx} = \mathrm{Im}\int x^2\overline{w}f_\eta.$$

Or

$$\mathrm{Im}\int x^2\overline{w}w_{xx} = -2\mathrm{Im}\int x\overline{w}w_x,$$

et

$$-\eta\mathrm{Re}\int x^2\overline{w}w_{xx} = 2\eta\mathrm{Re}\int xw\overline{w}_x + \eta\int x^2|w_x|^2.$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|xw|^2_{L^2_x} + \gamma|xw|^2_{L^2_x} + \eta\int x^2|w_x|^2 &= 2\mathrm{Im}\int xw_x\overline{w} - 2\eta\mathrm{Re}\int xw\overline{w}_x + \mathrm{Im}\int x^2 f_\eta\overline{w} \\
&\leq 2(1+\eta)|w|_{L^2_x}|xw_x|_{L^2_x} + \int x^2|f_\eta\overline{w}| \\
&\leq (\frac{1}{\eta}+1)|w|^2_{L^2_x} + \eta|xw_x|^2_{L^2_x} + \frac{\gamma}{2}|xw|^2_{L^2_x} + \frac{1}{2\gamma}|xf_\eta|^2_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

Comme $w = u - v$, $|u|^2_{L^2_x} \leq M_1^2$, $|v|^2_{L^2_x} \leq M_2^2$, où M_1 dépend de γ, f et M_2 dépend de K, η, alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|xw|^2_{L^2_x} + \frac{\gamma}{2}|xw|^2_{L^2_x} \leq c(M_1^2 + M_2^2)(\frac{1}{\eta}+1) + \frac{1}{2\gamma}|xf_\eta|^2_{L^2_x}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on trouve

$$|xw|^2_{L^2_x} \leq K',$$

où K' dépend de η, $|f|_{L^2_x}$, γ. □

Donc, $w(t)$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}, (1+x^2)dx)$. On démontre maintenant

Lemme 11 *Pour $u_0 \in \beta$ la fonction w est bornée dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration: comme $w = u - v$ et $|w|_{L^2_x} \leq |u|_{L^2_x} + |v|_{L^2_x} \leq M_1 + M_2$, donc il suffit d'estimer la norme de w_x en $L^2(\mathbb{R})$. On multiplie l'équation (1.13) par $-\overline{w}_{xx}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on intègre en prenant la partie imaginaire, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_x|^2_{L^2_x} + \gamma|w_x|^2_{L^2_x} + \eta|w_{xx}|^2_{L^2_x} &= -b\mathrm{Im}\int E(|u|^2)w\overline{w}_{xx} - \mathrm{Im}\int f_\eta\overline{w}_{xx} \\
&\leq |b||E(|u|^2)|_{L^\infty_x}|w|_{L^2_x}|w_{xx}|_{L^2_x} + |f_\eta|_{L^2_x}|w_{xx}|_{L^2_x} \\
&\leq c|b|(M_1+M_2)|E(|u|^2)|_{H^1_x}|w_{xx}|_{L^2_x} + |f_\eta|_{L^2_x}|w_{xx}|_{L^2_x} \\
&\leq c|b|(M_1+M_2)|u|^2_{H^1_x}|w_{xx}|_{L^2_x} + |f_\eta|_{L^2_x}|w_{xx}|_{L^2_x} \\
&\leq \frac{\eta}{2}|w_{xx}|^2_{L^2_x} + \frac{c(M_1+M_2)^2|b|^2M_1^4}{2\eta} \\
&\quad + \frac{\eta}{2}|w_{xx}|^2_{L^2_x} + \frac{1}{2\eta}|f_\eta|^2_{L^2_x}.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$|w_x|^2_{L^2_x} \leq |w_x(0)|^2_{L^2_x} e^{-\gamma t} + (\frac{c(M_1+M_2)^2|b|^2M_1^4}{\eta} + \frac{1}{\eta}|f_\eta|^2_{L^2_x})(1-e^{-\gamma t}).$$

Comme $w(0)=0$, alors $w_x(0)=0$. Qui donne

$$|w_x|^2_{L^2_x} \leq \frac{c(M_1+M_2)^2|b|^2M_1^4}{\eta} + \frac{1}{\eta}|f_\eta|^2_{L^2_x}.$$

□

On conclut de ces deux Lemmes précédents que $w(t)$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R},(1+x^2)dx)$.

Lemme 12 $H^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R},(1+x^2)dx) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ *est une injection compacte.*

Ce résultat est classique (voir [26], page 432, par exemple).

Démonstration: en fait $H^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R},(1+x^2)dx) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ est une injection continue. Pour démontrer qu'elle est compacte on prend w_n une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R},(1+x^2)dx)$, alors il existe $w \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $w_n \rightharpoonup w$ dans $L^2(\mathbb{R})$ faible. On veut démontrer que $w_n \to w$ dans $L^2(\mathbb{R})$ fort, pour cela on écrit w_n comme

$$w_n = \chi_\alpha w_n + (1-\chi_\alpha)w_n,$$

avec

$$|w_n|_{H^1(\mathbb{R})} + |w_n|_{L^2(\mathbb{R},(1+x^2)dx)} \leq M.$$

On pose $s_n = w_n - w$, on a $s_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$, en plus cette suite est bornée par $2M$ dans $H^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R},(1+x^2)dx)$. On écrit

$$|s_n|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq c(|\chi_\alpha s_n|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |(1-\chi_\alpha)s_n|^2_{L^2(\mathbb{R})}).$$

On estime $|(1-\chi_\alpha)s_n|^2_{L^2(\mathbb{R})}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (1-\chi_\alpha)^2 s_n^2 dx &= \int_{|x|>\alpha} (1-\chi_\alpha)^2 s_n^2 dx \\
&\leq \int_{|x|>\alpha} s_n^2 \frac{1+x^2}{1+x^2} dx \\
&\leq \sup_{|x|>\alpha} (\frac{1}{1+x^2}) \int_{|x|>\alpha} s_n^2(1+x^2)dx \\
&\leq \frac{1}{1+\alpha^2}|s_n|^2_{L^2(\mathbb{R},(1+x^2)dx)} \\
&\leq \frac{4M^2}{1+\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\chi_\alpha s_n$ est bornée dans $H^1([-2\alpha,+2\alpha])$, et $H^1([-2\alpha,+2\alpha]) \hookrightarrow L^2([-2\alpha,+2\alpha])$ avec injection compacte, alors il existe une sous-suite de $\chi_\alpha s_n$ qui converge fortement vers 0 dans $L^2([-2\alpha,+2\alpha])$. Ceci donne par l'unicité de la limite

$$\chi_\alpha s_{n_k} \to 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to+\infty} |s_{n_k}|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq c(|\limsup_{k\to+\infty} \chi_\alpha s_{n_k}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \limsup_{k\to+\infty} |(1-\chi_\alpha)s_{n_k}|^2_{L^2(\mathbb{R})}) \\ &\leq 0 + \frac{4cM^2}{1+\alpha^2}.\end{aligned}$$

Quand $\alpha \to +\infty$, on a $s_n \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Donc, pour $t \geq t(\eta)$, on a

$$S(t)\beta \subset B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}K) + K_n \subset L^2(\mathbb{R}),$$

où K_n est un compact de $L^2(\mathbb{R})$. On en déduit que $S(t)\beta$ est précompact ; en effet

Lemme 13 $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0$ *tel que* $\forall t \geq t(\eta)$ *on a*

$$S(t)\beta \subset \cup_x B_{L^2}(x, 2\epsilon),$$

cette réunion étant finie.

Démonstration: comme K_n est compact, alors il existe un recouvrement fini tel que

$$K_n \subset \cup_x B_{L^2}(x, \epsilon).$$

Donc

$$K_n + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}K) \subset \cup_x B_{L^2}(x, \epsilon) + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}K) \subset \cup_x (B_{L^2}(x, \epsilon) + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}K)).$$

Alors

$$B_{L^2}(x, \epsilon) + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}K) \subset B_{L^2}(x, \epsilon + \eta^{\frac{1}{2}}K).$$

On prend $(\eta^{\frac{1}{2}}K) < \epsilon$, on obtient

$$K_n + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}K) \subset \cup_x B_{L^2}(x, 2\epsilon).$$

□

On démontre maintenant la proposition suivante

Proposition 4 *Pour tout temps t positif fixé, $S(t)$ est continue sur les bornés de $H^1(\mathbb{R})$ pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R})$.*

Ce résultat est aussi vrai pour $t < 0$.

Démonstration: soient $u(t) = S(t)u_0$ et $v(t) = S(t)v_0$ deux solutions de l'équation (1.1) tels que $u_0, v_0 \in \beta$ et $u_0 \to v_0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. On pose $w = u - v$ qui vérifie l'équation suivante

$$\begin{cases} iw_t + i\gamma w + w_{xx} = b(uE(|u|^2) - vE(|v|^2)), \\ w(0) = u_0 - v_0 = w_0. \end{cases}$$

On multiplie cette dernière équation par $\overline{w}$, en prenant la partie imaginaire, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2_{L^2_x} + \gamma|w|^2_{L^2_x} &= b\mathrm{Im}\int (uE(|u|^2) - vE(|v|^2))\overline{w} \\ &\leq |b|(\int (u-v)E(|v|^2)\overline{w} + \int E(|u|^2 - |v|^2)u\overline{w}) \\ &\leq |b|(|E(|v|^2)|_{L^\infty_x}|w|^2_{L^2_x} + |u|_{L^\infty_x}|E(|u|^2 - |v|^2)|_{L^2_x}|w|_{L^2_x}) \\ &\leq c|b|(|E(|v|^2)|_{H^1_x}|w|^2_{L^2_x} + |u|_{H^1_x}||u|^2 - |v|^2|_{L^2_x}|w|_{L^2_x}) \\ &\leq c|b|(|v|^2_{H^1_x}|w|^2_{L^2_x} + |u|_{H^1_x}(|u|_{L^\infty_x} + |v|_{L^\infty_x})|w|^2_{L^2_x}) \\ &\leq c|b|(|v|^2_{H^1_x}|w|^2_{L^2_x} + |u|_{H^1_x}(|u|_{H^1_x} + |v|_{H^1_x})|w|^2_{L^2_x}) \\ &\leq c|b|M_1^2|w|^2_{L^2_x}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2_{L^2_x} + (\gamma - c|b|M_1^2)|w|^2_{L^2_x} \leq 0.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on trouve

$$|w|^2_{L^2_x} \leq e^{-2(\gamma - c|b|M_1^2)t}|w_0|^2_{L^2_x}.$$

Donc, quand $w_0 \to 0$, on a $S(t)u_0 \to S(t)v_0$ dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Lemme 14 *$\forall t_n$ une suite telle que $t_n \to +\infty$ et $u_n \in \beta$, il existe une sous-suite de $S(t_n)u_n$ qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R})$*

Démonstration: grâce au Lemme 13, $\forall t_n \geq t_n(\eta)$, on a $\{S(t_n)u_n\} \subset \cup_x B_{L^2}(x, 2\epsilon) \subset L^2(\mathbb{R})$, cette réunion étant finie.
Donc $\{S(t_n)u_n\}$ est précompact dans $L^2(\mathbb{R})$, donc $\forall u_n \in \beta$ il existe une sous-suite de $\{S(t_n)u_n\}$ qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R})$. □

Deuxième étape : précompacité des trajectoires dans $H^1(\mathbb{R})$

Proposition 5 *Pour toute suite $u_j \in \beta$ et $t_j \to +\infty$, il existe $z \in H^1(\mathbb{R})$ et une sous-suite de $S(t_j)u_j$ qui converge fortement vers z dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on applique ici un argument de J. Ball [9]. Comme β est borné dans $H^1(\mathbb{R})$, alors β est faiblement sequentiellement compact. Donc $\forall t_j \to +\infty$ et $u_j \in \beta$, on peut supposer que $S(t_j)u_j \rightharpoonup z$ dans $H^1(\mathbb{R})$. D'après le Lemme 14, il existe une sous-suite de $S(t_j)u_j$ qui converge fortement vers z' dans $L^2(\mathbb{R})$, alors

$$S(t_j)u_j \rightharpoonup z \text{ dans } H^1(\mathbb{R}) \Rightarrow S(t_j)u_j \rightharpoonup z \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

$$S(t_j)u_j \to z' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow S(t_j)u_j \rightharpoonup z' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Par unicité de la limite on a $z = z'$. Comme β est positivement invariant,

$$S(t)\beta \subset \beta, \forall t \geq 0,$$

alors pour $T > 0$ et $t_j > T$ on a $S(t_j - T)u_j \in \beta$, une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R})$, alors grâce au Lemme 14 il existe une sous-suite $S(t_j - T)u_j$ qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R})$ et faiblement dans $H^1(\mathbb{R})$ vers $S(-T)z$.
Comme $S(t)$ est fortement continu sur les bornés de $H^1(\mathbb{R})$ pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R})$ alors

$$S(t_j + t - T)u_j = S(t)S(t_j - T)u_j \to S(t-T)z \text{ dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Lemme 15 *Pour toute suite $t_j \to +\infty$ et $u_j \in \beta$, alors*

$$\limsup_{j\to+\infty} |S(t_j)u_j|^2_{H^1_x} \leq |z|^2_{H^1_x}.$$

Démonstration: on multiplie l'équation (1.1) par $(-\overline{u}_t - \gamma\overline{u})$, en prenant la partie réelle, on trouve

$$\frac{d}{dt}(|u|^2_{H^1_x} + G(u(t))) + 2\gamma(|u|^2_{H^1_x} + G(u(t))) = H(u(t)) \tag{1.14}$$

tels que

$$G(u) = -|u|^2_{L^2_x} + \frac{b}{2}\int E(|u|^2)|u|^2 + 2\text{Re}\int f\overline{u},$$

$$H(u) = 2\gamma\text{Re}\int f\overline{u} - b\gamma\int E(|u|^2)|u|^2.$$

En intégrant (1.14) entre 0 et t on obtient

$$|S(t)u_0|^2_{H^1_x} + G(S(t)u_0) = e^{-2\gamma t}(|u_0|^2_{H^1_x} + G(u_0)) + \int_0^t e^{2\gamma(s-t)}H(S(s)u_0).$$

Alors, pour $u_0 = S(t_j - T)u_j$, $t = T$ et $j \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{j\to+\infty}\Big(|S(t_j)u_j|^2_{H^1_x} + G(S(t_j)u_j)\Big) \leq \\
&e^{-2\gamma T}\limsup_{j\to+\infty}\Big(|S(t_j - T)u_j|^2_{H^1_x} + G(S(t_j - T)u_j)\Big) + \\
&\limsup_{j\to+\infty}\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}H(S(s + t_j - T)u_j)ds.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Lemme 16 *Pour $u,\ v \in \beta \subset H^1(\mathbb{R})$, avec $u \to v$ dans $L^2(\mathbb{R})$ on a*

$$G(u) \to G(v) \text{ dans } \mathbb{R},$$

$$H(u) \to H(v) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Démonstration: comme $u \to v$ dans $L^2(\mathbb{R})$ et $u \in \beta$ alors on trouve grâce à l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg $|u|_{L^4_x} \leq |u|^{\frac{3}{4}}_{L^2_x}|u|^{\frac{1}{4}}_{H^1_x}$ que u converge fortement vers v dans $L^4(\mathbb{R}^2)$ quand $j \to +\infty$, et

$$\int f\overline{u} \to \int f\overline{v}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\int E(|u|^2)|u|^2 - E(|v|^2)|v|^2 &\leq \int (E(|u|^2) - E(|v|^2))|u|^2 + \int E(|v|^2)(|u|^2 - |v|^2)\\ &\leq |E(|u|^2) - E(|v|^2)|_{L^2_x}|u|^2_{L^4_x} + |E(|v|^2)|_{L^2_x}||u|^2 - |v|^2|_{L^2_x}\\ &\leq ||u|^2 - |v|^2|_{L^2_x}(|u|^2_{L^4_x} + |v|^2_{L^4_x})\\ &\leq (|u|^2_{L^4_x} + |v|^2_{L^4_x})(|u|_{L^4_x} + |v|_{L^4_x})|u - v|_{L^4_x}.\end{aligned}$$

Donc si $u \to v$ dans $L^4(\mathbb{R})$ il vient

$$\int E(|u|^2)|u|^2 \to \int E(|v|^2)|v|^2.$$

Qui donne le résultat. $\square$

Grâce au Lemme 16, quand $j \to +\infty$, on a

$$G(S(t_j - T)u_j) \to G(S(-T)z),$$
$$H(S(s + t_j - T)u_j) \to H(S(s - T)z).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to+\infty} \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} H(S(s + t_j - T)u_j)ds = \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} H(S(s - T)z)ds\\ &= |z|^2_{H^1_x} + G(z) - (|S(-T)z|^2_{H^1_x} + G(S(-T)z))e^{-2\gamma T}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

En plus, comme $S(t_j - T)u_j$ reste dans le borné absorbant $\beta \subset H^1(\mathbb{R})$ pour t_j assez grand ; en effet la famille $\{S(-T)u_j\}$ demeure dans un borné B de H^1_x, donc dès que $t_j \geq t_0(B)$ $S(t_j - T)u_j \in \beta$. Par conséquent, $\limsup_{j\to+\infty} |S(t_j - T)u_j|_{H^1_x} \leq M_1$ et

$$e^{-2\gamma T} \limsup_{j\to+\infty} \Big(|S(t_j - T)u_j|^2_{H^1_x} + G(S(t_j - T)u_j)\Big) \leq M_1 e^{-2\gamma T} + G(S(-T)z)e^{-2\gamma T}.$$

On obtient grâce à (1.15) que

$$\begin{aligned}&\limsup_{j\to+\infty} \Big(|S(t_j)u_j|^2_{H^1_x} + G(S(t_j)u_j)\Big) \leq \\ &M_1 e^{-2\gamma T} + G(S(-T)z)e^{-2\gamma T} + |z|^2_{H^1_x} + G(z) - (|S(-T)z|^2_{H^1_x} + G(S(-T)z))e^{-2\gamma T}.\end{aligned} \tag{1.17}$$

Grâce au Lemme 16 on a $\lim_{j\to+\infty} G(S(t_j)u_j) = G(z)$, en plus $|S(-T)z|_{H^1_x} \leq \liminf_j |S(t_j - T)u_j|_{H^1_x} \leq M_1$ alors, quand $T \to +\infty$, on obtient

$$\limsup_{j\to+\infty} |S(t_j)u_j|^2_{H^1_x} \leq |z|^2_{H^1_x}. \tag{1.18}$$

Par conséquence $S(t_j)u_j \to z$ dans $H^1(\mathbb{R})$. □
Donc on a la précompacité des trajectoires dans $H^1(\mathbb{R})$. Alors la preuve de la Proposition 5 est achevée. □

Troisième étape : conclusion

Tout d'abord, on démontre l'existence d'une solution stationnaire de l'équation (1.1).

Théorème 1.3.2 *Il existe u dans $H^1(\mathbb{R})$ tel que*

$$|u|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R})}}{\gamma},$$

et

$$u_{xx} + i\gamma u = buE(|u|^2) + f.$$

Démonstration: rappelons le lemme classique (voir [18])

Lemme 17 *Pour F une fonction continue de $\mathbb{R}^D$ dans $\mathbb{R}^D$, et $R > 0$ tel que $F(\xi).\xi > 0$ pour tout ξ; $|\xi| = R$. Alors il existe $\xi \in \mathbb{R}^D$ avec $|\xi| < R$, et tel que $F(\xi) = 0$.*

Démonstration: raisonnons par l'absurde. Soit $U = \{\xi \in \mathbb{R}^D : |\xi| \leq R\}$.
Si $F(\xi)$ ne s'annule pas dans U, on introduit

$$G(\xi) = -\frac{RF(\xi)}{|F(\xi)|}.$$

G est continue de U dans U. D'après le théorème de point fixe de Brouwer, il existe $\xi_0 \in U$ tel que $G(\xi_0) = \xi_0$, donc

$$-\frac{RF(\xi_0)}{|F(\xi_0)|} = \xi_0, \tag{1.19}$$

qui donne que $|\xi_0| = R$. On prend le produit scalaire dans $\mathbb{R}^D$ de (1.19) avec ξ_0, on obtient

$$-\frac{RF(\xi_0).\xi_0}{|F(\xi_0)|} = \xi_0^2.$$

Qui donne la contradiction avec $F(\xi_0).\xi_0 > 0$. □

En utilisant le Lemme 17 on se ramène à la résolution d'un problème approché en dimension finie par la méthode de Galerkin. Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $H^1(\mathbb{R})$, et soit V_m l'espace vectoriel engendré par $(e_0, ..., e_m, ie_0, ..., ie_m)$, on résoud :
trouver $u_m \in V_m$; $\forall v_m \in V_m$

$$((u_m)_{xx}, v_m) + \gamma(iu_m, v_m) = (bu_m E(|u_m|^2), v_m) + (f, v_m), \tag{1.20}$$

avec $(.,.)$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$(u, v) = \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}} u\overline{v}dx.$$

On considère $P_m : L^2 \to V_m$ la projection orthogonale, qui est un opérateur auto-adjoint. Comme $L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $H^{-1}(\mathbb{R})$ on peut écrire $P_m : H^{-1} \to V_m$, alors

$$F(u_m) = P_m\left((u_m)_{xx} + i\gamma u_m - bu_m E(|u_m|^2) - f\right). \tag{1.21}$$

En prenant $v_m = -iu_m$ dans (1.20) il vient

$$(F(u_m), u_m) = \gamma |u_m|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \mathrm{Im}\int f\overline{u}_m.$$

Soit ε petit destiné à tendre vers 0. Alors $(F(u_m), u_m) > 0$ pour $|u_m|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R})}}{\gamma} + \varepsilon$. D'après le Lemme 17 il existe u_m^ε tel que $F(u_m^\varepsilon) = 0$ et $|u_m^\varepsilon|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R})}}{\gamma} + \varepsilon$. La suite u_m^ε étant bornée dans un espace V_m de dimension finie, on peut en extraire une sous-suite, toujours notée u_m^ε, qui converge vers une fonction u_m dans V_m. D'une part, toutes les normes étant équivalentes sur V_m, alors $F(u_m) = \lim F(u_m^\varepsilon) = 0$ par continuité de F sur $H^k(\mathbb{R})$ avec k assez grand. D'autre part on a bien sur $|u_m|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R})}}{\gamma}$.
Il reste à passer à la limite pour dire que u_m converge vers un point fixe, qui est la solution stationnaire de l'equation NLS quand m tend vers $+\infty$. Pour cela, on a besoin d'estimations a priori. On pose $v_m = -u_m$ dans (1.20). On obtient

$$|(u_m)_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} = -b\mathrm{Re}\int |u_m|^2 E(|u_m|^2) - \mathrm{Re}\int f\overline{u}_m dx; \tag{1.22}$$

comme u_m est borné dans $L^2(\mathbb{R})$, en utilisant l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg pour contrôler $\int |u_m|^2 E(|u_m|^2)$ par $|u_m|^4_{L^4_x} \leq c|u_m|_{H^1_x}|u_m|^3_{L^2_x}$, on obtient que u_m est borné dans $H^1(\mathbb{R})$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $u_m \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R})$, alors $(u_m)_{xx}$ converge faiblement vers u_{xx} dans $H^{-1}(\mathbb{R})$. En plus comme u_m est borné dans $H^1(\mathbb{R})$ alors $E(|u_m|^2)u_m$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$, ce qui donne puisque P_m est un opérateur borné alors $P_m E(|u_m|^2)u_m$ est borné dans $L^2(\mathbb{R})$, donc $\exists \phi$ dans $L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$P_m E(|u_m|^2)u_m \rightharpoonup \phi \text{ faiblement dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Ceci donne par la convergence faible dans (1.21), que u, ϕ sont solutions de l'équation

$$u_{xx} + i\gamma u = b\phi + f. \tag{1.23}$$

Il reste à prouver que $\phi = uE(|u|^2)$.

Lemme 18 *Pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ on a $(\phi, iu) = 0$, où $(.,.)$ désigne le produit scalaire $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on observe tout d'abord que si $P_m E(|u_m|^2)u_m$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ alors $E(|u_m|^2)u_m$ converge *aussi* vers ϕ faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$. En effet, si ψ est une fonction dans $L^2(\mathbb{R})$, en utilisant le caractère auto-adjoint de P_m, le fait que $P_m\psi$ converge fortement vers ψ dans $L^2(\mathbb{R})$ (par densité des V_m dans $L^2(\mathbb{R})$), et le fait que $E(|u_m|^2)u_m$ soit une suite bornée, il vient

$$((Id - P_m)E(|u_m|^2)u_m, \psi) = (E(|u_m|^2)u_m, \psi - P_m\psi) \to 0.$$

Soit maintenant $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction test à valeurs réelles. Soit K le support de θ. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que

$$u_m \to u \text{ dans } L^2(K) \cap L^\infty(K),$$

et

$$u_m E(|u_m|^2) \to \phi \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ faible.}$$

Il vient alors

$$0 = \mathrm{Re} \int E(|u_m|^2) u_m i\theta \overline{u}_m \to \mathrm{Re} \int \phi i \overline{u} \theta.$$

Ceci étant vrai $\forall \theta$, alors $(\phi, iu) = 0$. □

En appliquant le Lemme 18, on multiplie (1.23) par $i\overline{u}$ dans $L^2(\mathbb{R})$ on trouve

$$\gamma |u|^2_{L^2_x} = (f, i\overline{u}) = \lim_{m \to +\infty} (f, i\overline{u}_m) = \lim_{m \to +\infty} \gamma |u_m|^2_{L^2_x}.$$

Alors $u_m \to u$ dans $L^2(\mathbb{R})$ fort, donc par interpolation $u_m \to u$ dans $L^4(\mathbb{R})$ fort et

$$u_m E(|u_m|^2) \to uE(|u|^2) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \subset H^{-1}(\mathbb{R}).$$

Qui donne

$$\phi = uE(|u|^2).$$

Alors on a une solution stationnaire u dans $H^1(\mathbb{R})$. □

Proposition 6 *Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble suivant*

$$\mathcal{A} = \{a \in \beta, \exists \varphi_n \in \beta \textit{ et } t_n \to +\infty, \textit{ tel que } S(t_n)\varphi_n \to a \textit{ dans } H^1\}.$$

Cet ensemble est un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R})$ pour l'équation (1.1).

Démonstration: on démontre que $\mathcal{A}$ est un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R})$ pour l'équation (1.1), via le Théorème 1.1.1 de [74], donc on démontre l'égalité

$$\mathcal{A} = \cap_{s \geq 0} \overline{\cup_{t \geq s} S(t)\beta}.$$

D'abord, $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide car il contient au moins les solutions stationnaires de l'équation (1.1).

Ensuite on a

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0;$$

en effet, si $b \in S(t)\mathcal{A}$ alors $\exists a \in \mathcal{A}$ tel que $b = S(t)a$.
Par conséquent $\exists \varphi_n \in \beta; \exists t_n \to +\infty$ tel que $S(t_n)\varphi_n \to a$.
Donc par continuité de $S(t)$ on a

$$S(t)S(t_n)\varphi_n \to S(t)a = b.$$

De plus

$$S(t)S(t_n)\varphi_n = S(t+t_n)\varphi_n,$$

$$S(t+t_n)\varphi_n \to b = S(t)a,$$

mais $t+t_n \to +\infty,\ \varphi_n \in \beta$, alors $b \in \mathcal{A}$.
Donc

$$S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}.$$

Si $a \in \mathcal{A}$, alors $\exists \varphi_n \in \beta;\ \exists t_n \to +\infty$ tel que $S(t_n)\varphi_n \to a$, donc $a = \lim_{n\to+\infty} S(t_n - t)S(t)\varphi_n$. On pose $v_n = S(t_n - t)\varphi_n$, on applique la Proposition 5 à v_n, donc il existe v_{nk} une sous-suite qui converge vers b dans $H^1(\mathbb{R})$. Par continuité de $S(t)$ on trouve

$$S(t)v_{nk} \to S(t)b.$$

De plus $v_{nk} = S(t_{nk} - t)\varphi_{nk}$, donc

$$S(t)v_{nk} = S(t_{nk})\varphi_{nk} \to a.$$

Donc $S(t)b = a$, et $\mathcal{A} \subset S(t)\mathcal{A}$.

Maintenant on montre que $\mathcal{A}$ est compact dans $H^1(\mathbb{R})$; soit x_n une suite à valeurs dans $\mathcal{A}$, comme $S(t)$ est réversible en temps alors

$$x_n = S(t)S(-t)x_n,\ \forall t \geq 0.$$

Pour $t = n$, on pose $y_n = S(-n)x_n \in \mathcal{A} \subset \beta$, donc $x_n = S(n)y_n \subset \beta$. On applique la Proposition 5 à x_n donc, il existe une sous-suite de $S(n)y_n = x_n$ qui converge fortement dans $H^1(\mathbb{R})$, i.e

$$\lim_{i\to+\infty} x_{n_i} = \lim_{i\to+\infty} S(n_i)y_{n_i} = x \in \mathcal{A}.$$

Donc $\mathcal{A}$ est compact dans $H^1(\mathbb{R})$.

Il reste à montrer que $\mathcal{A}$ attire les bornés de $H^1(\mathbb{R})$, i.e pour tout borné B de $H^1(\mathbb{R})$

$$dist(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0,\ \text{quand } t \to +\infty.$$

On le montre par l'absurde. On prend B_0 tel que

$$\exists \delta > 0,\ t_j \to +\infty,\ \text{tel que } dist(S(t_j)B_0, \mathcal{A}) \geq \delta.$$

Pour chaque j il existe u_j dans B_0 tel que

$$dist(S(t_j)u_j, \mathcal{A}) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

On sait que

$$S(t)B_0 \subset \beta,\ \forall t \geq t_0.$$

On applique la Proposition 5 à $S(t_j)u_j = S(t_j - t_0)S(t_0)u_j$, on trouve qu'il existe une sous-suite $S(t_{j_i})u_{j_i}$ qui converge fortement dans $H^1(\mathbb{R})$

$$\lim_{j_i \to +\infty} S(t_{j_i})u_{j_i} = \lim_{j_i \to +\infty} S(t_j - t_0)S(t_0)u_j = u.$$

Alors il existe une suite $S(t_0)u_j$ de β, et $t_j - t_0 \to +\infty$ tel que $S(t_j - t_0)S(t_0)u_j \to u$, qui donne grâce à la définition de $\mathcal{A}$ que $u \in \mathcal{A}$, ce qui est une contradiction. En appliquant le Théorème 1.1.1 de [74], on trouve que $\mathcal{A}$ est un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R})$ pour l'équation (1.1). □

Alors, la démonstration du Théorème 1.3.1 est achevée. □

1.4 Régularité de l'attracteur $\mathcal{A}$

On va maintenant démontrer que l'attracteur $\mathcal{A}$ est en fait inclus dans un espace de Sobolev plus petit, $H^2(\mathbb{R})$, i.e constitué de fonctions régulières. Les solutions stationnaires, qui sont dans l'attracteur, appartiennent elles aussi à $H^2(\mathbb{R})$; par conséquent ce résultat de régularité est optimal. On suit dans cette section les références [39], [7].
On commence par démontrer quelques lemmes sur le terme non local $E(|u|^2)$

Lemme 19 *Pour $u \in H^2(\mathbb{R})$, on a*

$$|E(|u|^2)|_{H^2_x} \leq c|u|^2_{H^2_x}. \tag{1.24}$$

Démonstration: en vertu du Lemme 2, il suffit de montrer que $|\Delta E(|u|^2)|_{L^2_x} \leq c|u|^2_{H^2_x}$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Delta E(|u|^2)) &= -\xi^2 \hat{E}(\xi)\widehat{|u|^2}(\xi) \\ &= \mathcal{F}(E(\Delta(|u|^2))). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |\Delta E(|u|^2)|^2_{L^2_x} &\leq c(|\partial_x u|^4_{L^4_x} + |2\mathrm{Re}\overline{u}\partial_{xx}u|^2_{L^2_x} \\ &\leq c(|\partial_x u|^4_{L^4_x} + |u|^2_{L^\infty_x}|\partial_{xx}u|^2_{L^2_x}. \end{aligned}$$

Ceci donne grâce à (1.3) et (1.5), et au Lemme 2 que

$$|E(|u|^2)|_{H^2_x} \leq c|u|^2_{H^2_x}.$$

□

Lemme 20 *Pour $u \in H^2(\mathbb{R})$, on a*

$$|uE(|u|^2)|_{H^2_x} \leq c|u|^3_{H^2_x}. \tag{1.25}$$

Démonstration: en utilisant (1.2), (1.3), (1.5) et (1.24) on trouve

$$\begin{aligned}
|uE(|u|^2)|_{H^2_x} &\leq c|u|_{L^\infty_x}|E(|u|^2)|_{H^2_x} + c|u|_{H^2_x}|E(|u|^2)|_{L^\infty_x} \\
&\leq c(|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|u|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x}|u|^2_{H^2_x} + |u|_{H^2_x}|E(|u|^2)|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|E(|u|^2)|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x}) \\
&\leq c(|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|u|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x}|u|^2_{H^2_x} + |u|_{H^2_x}|u|_{L^4_x}|u|_{H^1_x}) \\
&\leq c(|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|u|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x}|u|^2_{H^2_x} + |u|_{H^2_x}|u|^{\frac{3}{4}}_{L^2_x}|u|^{\frac{5}{4}}_{H^1_x}) \\
&\leq c|u|^3_{H^2_x}.
\end{aligned}$$

□

1.4.1 Problème auxiliaire

Nous allons approcher pour les grands temps les trajectoires du système dynamique donné par notre équation. Comme précédemment, quitte à opérer une translation en temps, nous supposons que nous regardons une trajectoire $u(t)$ captive pour tout temps positif dans le borné absorbant. L'idée de l'approximation est la suivante.

Soit u solution de l'équation (1.1) qui s'écrit sous la forme, en omettant la variable t,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

où $\hat{u}$ désigne transformée de Fourier de u. Pour un niveau donné N, on définit la partie basse fréquence de u par

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\leq N} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

De même, on définit la partie haute fréquence de u par

$$z(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\geq N} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

La fonction z est solution de l'équation suivante

$$iz_t + i\gamma z + z_{xx} = bQ(E(|y+z|^2)(y+z)) + Qf, \tag{1.26}$$

avec une donnée initiale $z(0) = Qu_0 = z_0$ où Q est le projecteur orthogonal sur

$$QH^1 = \{z = \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\geq N} \hat{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,\ z \in H^1(\mathbb{R})\}.$$

Remarque 6 *si $\hat{u}$ n'est pas intégrable, il faut substituer à l'intégrale ci-dessus la distribution tempérée $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u}\chi(|\xi| \geq N))$.*

Finalement on écrit $u = y + z$ et on définit $Pu = (Id - Q)u = y$, le projecteur sur les basses fréquences.

Proposition 7 *Pour chaque k dans $\mathbb{N}^*$, pour tout temps positif, la fonction y demeure bornée dans une boule de $H^k(\mathbb{R})$ de rayon $O(N^{k-1})$.*

Démonstration: la démonstration est classique et repose sur des inégalités inverses et le fait que u demeure pour tout temps positif dans le borné absorbant. Soit $k \geq 1$, on estime y en norme H^k.

$$|y|_{H^k}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^k |\hat{y}(\xi)|^2 d\xi.$$

Mais

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|\leq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi)\chi(|\xi|\leq N) e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned}$$

On obtient

$$\hat{y}(\xi) = \hat{u}(\xi)\chi(|\xi| \leq N).$$

Donc, pour $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 2\pi|y|_{H^k}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^k |\hat{y}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^k |\hat{u}(\xi)|^2 \chi(|\xi|\leq N) d\xi \\ &\leq (1+N^2)^{k-1} \int_{\mathbb{R}} |(1+|\xi|^2)\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2\pi(1+N^2)^{k-1}|u|_{H_x^1}^2 \\ &\leq 2\pi M_1^2 (1+N^2)^{k-1}, \end{aligned}$$

où M_1 est le rayon de la boule absorbante de u dans $H^1(\mathbb{R})$, on en déduit le résultat. □

Puisque $\cap H^k \subset C^\infty$, y est C^∞ par rapport à x, alors la régularité de u dépend de celle de z. L'idée est alors d'approcher la composante haute fréquence de u pour les grands temps.

On considère z la fonction définie pour $t \geq 0$ comme solution de l'équation (1.26) sur $QH^1(\mathbb{R})$ avec donnée initiale $z(0) = Qu(0)$.

Pour N fixé et pour une trajectoire u, et pour $y = Pu$, on introduit la fonction Z tel que

$$Z : [0, +\infty[\longrightarrow QH^1,$$

et qui vérifie l'équation suivante

$$\begin{cases} iZ_t + i\gamma Z + Z_{xx} = bQ(E(|y+Z|^2)(y+Z)) + Qf, \\ Z(0) = 0. \end{cases} \tag{1.27}$$

Démontrer que cette EDP non autonome admet une telle solution fait l'objet de la proposition suivante

Proposition 8 *Pour N assez grand, i.e pour chaque $N \geq N_0$ où N_0 seuil dépendant des données $|f|_{L_x^2}, \gamma$, il existe une unique solution Z continue et bornée dans $QH^2(\mathbb{R})$ pour (1.27), qui vérifie de plus les estimations suivantes : il existe K dépendant de la taille du borné absorbant (et indépendant de N) tel que*

$$|Z|_{H_x^1} + \frac{1}{N}|Z|_{H_x^2} \leq K. \tag{1.28}$$

Démonstration: on rappelle tout d'abord que l'on a supposé que les trajectoires entrent et restent dans le borné absorbant pour les temps positifs. On pourra aussi supposer sans perte de généralité que $N \geq 1$. On fait la démonstration en trois étapes.

Première étape : construction d'une solution locale en temps à valeurs dans $H^2(\mathbb{R})$.

La démonstration de l'existence d'une solution locale (qui est en fait classiquement une solution faible) est très similaire à la démonstration de la Proposition 2 et du Lemme 5, mis à part que l'on opére un point fixe dans QH^2_x et pas dans H^1_x. Soit $T_* > 0$, on définit ici l'espace $X = C_b([0, T_*], QH^2)$ muni de la norme

$$|Z|_X = \sup_{t\in[0,T_*]} |Z|_{QH^2} = \sup_{t\in[0,T_*]} |Z|_{H^2_x},$$

car $Z \in QH^2(\mathbb{R})$ implique $QZ = Z$.
L'équation (1.27) peut s'écrire

$$Z_t + (\gamma - i\Delta)Z = -ibQ(E(|y+Z|^2)(y+Z)) - iQf, \tag{1.29}$$

ou sous forme intégrale

$$Z(t) = -i\int_0^t e^{-i(t-s)A}F(Z(s))ds = -i\int_0^t T(t-s)F(Z(s))ds, \tag{1.30}$$

où $T(t)$ est le semi-groupe linéaire de contraction sur $QH^2(\mathbb{R})$ défini par $T(t) = e^{-itA}$ avec $A = \gamma - i\Delta$, et $F(Z) = Qf + bQ(E(|y+Z|^2)(y+Z))$.
Soit G l'application de X dans X (ce point sera vérifié dans la suite), définie pour $t \in [0, T_*]$ par

$$G(Z(t)) = -i\int_0^t T(t-s)F(Z(s))ds.$$

On cherche un point fixe pour G.

Lemme 21 *Pour chaque temps positif, le semi-groupe $T(t)$ est contractant sur $QH^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration: $T(t) = e^{-\gamma t}U(t)$ avec U unitaire. Le résultat s'en déduit immédiatement. □

Lemme 22 *Pour T_* assez petit, l'application G est bien définie de X dans X.*

Remarque 7 *Le même résultat est valable avec une donnée initiale $Z(0)$ non nulle le temps T_* étant une fonction décroissante de la norme de $Z(0)$ dans H^2_x. A noter que T_* le temps d'existence local dans H^2_x dépend de N.*

Démonstration: la démonstration est très similaire à celle de la Proposition 2. Soit

$$C_0 \geq 2c_\gamma |Qf|_{L^2_x},$$

où c_γ est une constante numérique. Soit Z dans la boule fermée $B(0, C_0)$ de rayon C_0 de X. Soit

$$G(Z(t)) = -ib \int_0^t T(t-s)Q(E(|y+Z|^2)(y+Z))ds - i \int_0^t T(t-s)Qf ds.$$

D'abord on estime la norme $H^2(\mathbb{R})$ de

$$\int_0^t T(t-s)Q(E(|y+Z|^2)(y+Z))ds.$$

On trouve grâce à (1.25), à la Proposition 7 et en utilisant le fait que H^2_x soit une algèbre que

$$\begin{aligned} |\int_0^t T(t-s)Q(E(|y+Z|^2)(y+Z))ds|_{H^2_x} &\leq \int_0^t |E(|y+Z|^2)(y+Z)|_{H^2_x} ds \\ &\leq c \int_0^t |y+Z|^3_{H^2_x} \\ &\leq c((M_1 N)^3 + C_0^3)T_*. \end{aligned}$$

On choisit T_* tel que $c((M_1N)^3 + C_0^3)T_* \leq \frac{C_0}{2}$.
On estime la norme $H^2(\mathbb{R})$ de $\int_0^t T(t-s)Qf ds$. On a

$$\int_0^t T(t-s)Qf ds = [\int_0^t T(t-s)ds]Qf = [\int_0^t e^{-i(t-s)A} ds]Qf = iA^{-1}(Id - e^{-itA})Qf.$$

A est un opérateur continu et inversible de $H^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, alors on a pour $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$|A^{-1}Qf|_{H^2_x} \leq c_\gamma |Qf|_{L^2_x},$$

où c_γ une constante qui dépend de γ. Alors

$$\begin{aligned} |\int_0^t T(t-s)Qf ds|_{H^2_x} &\leq |A^{-1}Qf|_{H^2_x} + |e^{-itA}A^{-1}Qf|_{H^2_x} \\ &\leq c|A^{-1}Qf|_{H^2_x} \\ &\leq c_\gamma |Qf|_{L^2_x} \\ &\leq \frac{C_0}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|G(Z(t))|_{QH^2} \leq C_0,$$

qui donne que G est bien définie de X dans X. □

Lemme 23 *Pour T_* assez petit comme précédemment, G est contractant sur les bornés de X.*

Démonstration: soient Z, W dans $B(0, C_0) \subset X$, donc tels que $|Z|^2_{QH^2} \leq C_0$ et $|W|^2_{QH^2} \leq C_0$, comme on a $H^2(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$ et $|y|^2_{H^2_x} \leq c(M_1 N)^2$ d'après la Proposition 7, alors

$$\begin{aligned}
& |QE(|y+Z|^2)(y+Z) - QE(|y+W|^2)(y+W)|_{H^2_x} \\
\leq\; & |E(|y+Z|^2)(y+Z) - E(|y+W|^2)(y+W)|_{H^2_x} \\
\leq\; & |(Z-W)E(|y+Z|^2)|_{H^2_x} + |(y+W)E(|y+Z|^2 - |y+W|^2)|_{H^2_x} \\
\leq\; & c|Z-W|_{H^2_x}|E(|y+Z|^2)|_{H^2_x} + |(y+W)|_{H^2_x}|E(|y+Z|^2 - |y+W|^2)|_{H^2_x} \\
\leq\; & c|Z-W|_{H^2_x}|y+Z|^2_{H^2_x} + |(y+W)|_{H^2_x}||y+Z|^2 - |y+W|^2|_{H^2_x} \\
\leq\; & c|Z-W|_{H^2_x}|y+Z|^2_{H^2_x} + |(y+W)|_{H^2_x}|Z^2 - W^2 + 2y(Z-W)|_{H^2_x} \\
\leq\; & c(M_1^2 N^2 + C_0^2)|Z-W|_{H^2_x}.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
|G(Z) - G(W)|_{QH^2} &\leq \int_0^t |T(t-s)[F(Z(s)) - F(W(s))]|_{QH^2} ds \\
&\leq \int_0^t |F(Z(s)) - F(W(s))|_{QH^2} ds \\
&\leq c(M_1^2 N^2 + C_0^2) \int_0^t |Z-W|_{QH^2} ds.
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}
|G(Z) - G(W)|_X &\leq c(M_1^2 N^2 + C_0^2)|Z-W|_X \int_0^t ds \\
&\leq c(M_1^2 N^2 + C_0^2) T_* |Z-W|_X.
\end{aligned}$$

On choisit T_* tel que

$$c(M_1^2 N^2 + C_0^2) T_* \leq \frac{1}{2} < 1.$$

Donc G est contractante sur les bornés de X. □

D'après le théorème de point fixe, il existe Z tel que $G(Z) = Z$, d'où on a une solution unique Z de l'équation (1.27) sur $[0, T_*]$.

Deuxième étape : non explosion dans $H^1(\mathbb{R})$ de la solution Z.

La preuve de la première étape s'applique de la même manière pour construire une solution locale sur QH^1_x définie jusqu'à un temps $\tilde{T}$ assez petit. On va maintenant établir que cette solution vue comme solution dans QH^1_x est globale, en démontrant que la norme H^1_x de Z n'explose pas en temps fini. On va en fait montrer un résultat quantitatif plus fort : que la norme QH^1_x est contrôlée pour tout temps positif par une quantité K qui dépend des données de l'équation $|f|_{L^2_x}$ et γ mais qui est indépendante de $N \geq N_0$. Dans la suite K pourra changer de valeur d'une ligne à l'autre et sera parfois indéxée par une indice $K_1, K_2, ...$ si nécessaire.

Proposition 9 *Pour N assez grand, i.e pour chaque $N \geq N_0$ où N_0 seuil dépendant des données $|f|_{L^2_x}, \gamma$, l'équation (1.27) admet une unique solution Z telle que*

$$Z \in C_b([0, +\infty[, QH^1);$$

de plus il existe K indépendant de N tel que $|Z|_{H^1_x} \leq K$ pour tout temps positif.

Démonstration: il existe $Z \in C_b([0, T[, QH^1)$ où T est le temps maximal d'existence de Z, avec l'alternative suivante

$$T = +\infty \text{ ou } T < +\infty \text{ et } |Z(t)|_{H^1_x} \to +\infty.$$

On procède par estimations a priori sur Z. On multiplie l'équation (1.27) par $(-\overline{Z}_t - \gamma \overline{Z})$, on intègre en prenant la partie réelle on trouve

$$\frac{1}{2} q(Z) + \gamma q(Z) = H(Z), \tag{1.31}$$

où

$$q(Z) = |Z_x|^2_{L^2_x} + \frac{b}{2} \int E(|y + Z|^2)(y + Z)^2 + 2\mathrm{Re} \int f\overline{Z},$$

et

$$\begin{aligned} H(Z) \quad &= \quad b\gamma \int E(|y + Z|^2)(y + Z)\overline{y} + b \int E(|y + Z|^2)(y + Z)\overline{y}_t & (1.32) \\ &\quad -\frac{b}{2}\gamma \int E(|y + Z|^2)|y + Z|^2 + \gamma \mathrm{Re} \int f\overline{Z}. & (1.33) \end{aligned}$$

Maintenant on démontre le lemme suivant, pour $N \geq 1$

Lemme 24 *Pour Z dans $QH^1(\mathbb{R})$, Z satisfait à*

$$|Z|_{L^2_x} \leq \frac{1}{N} |Z|_{H^1_x}, \tag{1.34}$$

$$|Z|_{L^\infty_x} \leq \frac{c}{\sqrt{N}} |Z|_{H^1_x}, \tag{1.35}$$

$$|Z|_{L^4_x} \leq \frac{c}{N^{\frac{3}{4}}} |Z|_{H^1_x}. \tag{1.36}$$

Démonstration: on estime Z en norme $H^1(\mathbb{R})$

$$|Z|^2_{H^1_x} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\hat{Z}(\xi)|^2 d\xi.$$

Or

$$\begin{aligned} Z(x) \quad &= \quad \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq N} \hat{Z} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{Z}(\xi) \chi(|\xi| \geq N) e^{ix\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Alors

$$\hat{Z}(\xi) = \hat{Z}(\xi)\chi(|\xi| \geq N).$$

Donc

$$\begin{aligned} 2\pi|Z|^2_{H^1_x} &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)|\hat{Z}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)|\hat{Z}(\xi)|^2 \chi(|\xi| \geq N) d\xi \\ &\geq (1+N^2)\int_{\mathbb{R}} |\hat{Z}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq 2\pi N^2 |Z|^2_{L^2_x}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité d'Agmon (1.3), on obtient

$$|Z|_{L^\infty_x} \leq c|Z|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|Z|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x} \leq \frac{c}{\sqrt{N}}|Z|_{H^1_x}.$$

Par l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (voir [38]), on trouve

$$|Z|^4_{L^4_x} \leq c|Z|^3_{L^2_x}|Z|_{H^1_x} \leq \frac{c}{N^3}|Z|^4_{H^1_x}.$$

□

Lemme 25 *Pour Z dans $QH^1(\mathbb{R})$, alors il existe K qui dépend de M_1, f, γ tel que, pour N assez grand on a*

$$q(Z) \geq \frac{1}{2}|Z|^2_{H^1_x} - c\frac{|b|}{N^3}|Z|^4_{H^1_x} - K.$$

Démonstration: comme on a

$$\hat{Z}_x = \frac{i\xi}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} Z dx = i\xi\hat{Z},$$

donc

$$|Z_x|^2_{L^2_x} = |\hat{Z}_x|^2_{L^2_\xi} = |\xi Z|^2_{L^2_\xi},$$

et

$$|Z_x|^2_{L^2_x} \leq |Z|^2_{H^1_x} = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)|\hat{Z}|^2 d\xi \leq (\frac{1}{N^2}+1)\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{Z}|^2 d\xi \leq (\frac{1}{N^2}+1)|Z_x|^2_{L^2_x}.$$

Alors, en utilisant les Lemmes 1 et 24,

$$\begin{aligned} q(Z) &= |Z_x|^2_{L^2_x} + \frac{b}{2}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)^2 + 2\mathrm{Re}\int f\overline{Z} \\ &\geq |Z|^2_{H^1_x} - \frac{|b|}{2}|y+Z|^4_{L^4_x} - \frac{1}{2\gamma}|f|^2_{L^2_x} - 2\gamma|Z|^2_{L^2_x} \\ &\geq |Z|^2_{H^1_x} - c\frac{|b|}{2}|y|^4_{L^4_x} - c\frac{|b|}{2}|Z|^4_{L^4_x} - \frac{1}{2\gamma}|f|^2_{L^2_x} - \frac{2\gamma}{N^2}|Z|^2_{H^1_x}. \end{aligned}$$

Il vient alors une première condition à imposer sur N_0. On impose $\dfrac{2\gamma}{N^2} \leq \dfrac{2\gamma}{N_0^2} \leq \dfrac{1}{2}$, ce qui permet de minorer $|Z|^2_{H^1_x} - \frac{2\gamma}{N^2}|Z|^2_{H^1_x}$ par $\frac{1}{2}|Z|^2_{H^1_x}$. De plus, on a, par injection de Sobolev et puisque u est captif dans le borné absorbant

$$|y|_{L^4_x} \leq |y|_{H^1_x} \leq c|u|_{H^1_x} \leq cM_1. \tag{1.37}$$

Enfin, par l'inégalité (1.36) on trouve

$$q(Z) \geq \frac{1}{2}|Z|^2_{H^1_x} - c\frac{|b|}{N^3}|Z|^4_{H^1_x} - K, \tag{1.38}$$

qui conclut la démonstration du Lemme. □

Lemme 26 *Il existe des constantes K_1, K_2 dépendants de γ, $|f|_{L^2_x}$ mais indépendantes de $N \geq N_0$, telles que l'inégalité suivante soit vérifiée*

$$\frac{d}{dt}q(Z) + \gamma q(Z) \leq K_1 + \frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^4_{H^1_x}.$$

Démonstration: on veut majorer la fonction $H(Z)$ définie précédemment ; commençons par le terme d'ordre principal, celui faisant intervenir y_t. On trouve grâce à (1.4)

$$\begin{aligned} & \mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)|y+Z|\overline{y}_t \\ \leq\ & |y_t|_{H^{-1}_x}|E(|y+Z|^2)|y+Z||_{H^1_x} \\ \leq\ & c|y_t|_{H^{-1}_x}(|y+Z|^2_{L^\infty_x}|y+Z|_{H^1_x} + |y+Z|^{\frac{3}{2}}_{H^1_x}|y+Z|_{L^4_x}|y+Z|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty_x}). \end{aligned}$$

D'une part en revenant à l'équation initiale (1.1) on observe que si u est dans le borné absorbant pour t positif, alors pour ces mêmes temps u_t reste borné dans H^{-1}_x, disons $|u_t|_{H^{-1}_x} \leq M'$. Comme $y_t = Pu_t$ et que le projecteur P est borné sur tous les espaces de Sobolev H^s_x on en déduit que y_t reste borné dans H^{-1}_x, uniformément en N, i.e

$$|y_t|^2_{H^{-1}_x} \leq |u_t|^2_{H^{-1}_x} \leq M'.$$

D'autre part on contrôle en utilisant l'inégalité d'Agmon (1.3), les inégalités de Gagliardo-Nirenberg, on obtient

$$(|y+Z|^2_{L^\infty_x}|y+Z|_{H^1_x} + |y+Z|^{\frac{3}{2}}_{H^1_x}|y+Z|_{L^4_x}|y+Z|^{\frac{1}{2}}_{L^\infty_x}) \leq c|y+Z|^{\frac{1}{2}}_{L^2_x}|y+Z|^{\frac{5}{2}}_{H^1_x}.$$

Alors on trouve grâce aux (1.34), (1.35) et (1.36), et au fait que y demeure pour tout temps positif dans un borné de H^1_x (confer Proposition 7) que pour des constantes K dépendant des bornes sur le borné absorbant (et donc indépendantes de N)

$$\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)|y+Z|\overline{y}_t \leq c(K + \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x})(K + |Z|^{\frac{5}{2}}_{H^1_x}).$$

Le membre de droite de cette inégalité se contrôle par $K(1+\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^4_{H^1_x}+\frac{\gamma}{4}|Z|^2_{H^1_x})$ par l'inégalité de Young $ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q$.
On va maintenant contrôler le premier et le troisième terme dans la définition de H (1.32). Il vient, grâce à (1.37), et (1.36),

$$\begin{aligned} & \mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)|y+Z|\overline{y} \\ \leq\ & |y|_{L^\infty_x}|E(|y+Z|^2)|_{L^2_x}|y+Z|_{L^2_x} \\ \leq\ & c|y|_{H^1_x}|y+Z|^2_{L^4_x}|y+Z|_{L^2_x} \\ \leq\ & c|y|_{H^1_x}|y+Z|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x}|y+Z|^{\frac{5}{2}}_{L^2_x} \\ \leq\ & K(1+|Z|^{\frac{1}{2}}_{H^1_x})(1+\frac{1}{N^{\frac{5}{2}}}|Z|^{\frac{5}{2}}_{H^1_x}) \\ \leq\ & K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^4_{H^1_x}. \end{aligned}$$

On a de nouveau utilisé le contrôle uniforme sur y et les inégalités de Young. De la même façon on trouve

$$\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)|y+Z|^2 \leq K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^4_{H^1_x}.$$

Le dernier terme dans (1.32) se contrôle en

$$\gamma\mathrm{Re}\int f\overline{Z} \leq \gamma|f|_{L^2_x}|Z|_{L^2_x} \leq \frac{K}{N}|Z|_{H^1_x} \leq K+\frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^4_{H^1_x}.$$

En regroupant toutes ces informations et la pseudo-coercivité de q sur H^1_x donnée par le Lemme 25, il vient

$$\frac{d}{dt}q(Z)+\gamma q(Z) \leq K_1+\frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^4_{H^1_x}.$$

□

On va maintenant conclure la preuve de la Proposition 9. En intégrant en temps l'inéquation précédente il vient, en explicitant de nouveau la dépendance en temps

$$q(Z(t)) \leq q(Z(0))e^{-\gamma t}+\frac{K_1}{N^{\frac{1}{2}}}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|Z(s)|^4_{H^1_x}ds+K_2.$$

Mais, pour $Z(0)=0$, on a, puisque $y(0)$ est uniformément borné dans H^1_x

$$|q(0)| = |\frac{b}{2}\int E(|y(0)|^2)|y(0)|^2dx| \leq \frac{|b|}{2}|y(0)|^4_{L^4_x} \leq K.$$

Alors grâce à (1.38), on a

$$2q(Z)+K+c\frac{|b|}{N^3}|Z|^4_{H^1_x} \geq |Z|^2_{H^1_x}.$$

Il vient finalement,

$$\sup_{[0,t]} |Z(s)|^2_{H^1_x} \leq \frac{K_1}{N^3}|Z(t)|^4_{H^1_x} + \frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|Z(s)|^4_{H^1_x}ds + K_3.$$

On pose $w(t) = \sup_{[0,t]} |Z(s)|^2_{H^1_x}$, alors

$$w(t) \leq \frac{K_1}{N^3}w(t)^2 + \frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}w(t)^2 ds + K_3.$$

Donc

$$w(t) \quad \leq \quad K_1 + \frac{K_2}{N^{\frac{1}{2}}}w(t)^2.$$

On introduit la fonction numérique $F(x) = x - \frac{K_1}{N^{\frac{1}{2}}}x^2 - K_2$ de la variable $x \in \mathbb{R}^+$. On impose à N_0 d'être suffisament grand par rapport à K_1, K_2 pour avoir $F(2K_2) > 0$, i.e $\frac{4K_1K_2}{N_0^{\frac{1}{2}}} < 1$. Puisque $t \mapsto w(t)$ est continue en temps, vérifie $w(0) = 0$ et $F(w(t)) \leq 0$ pour tout temps ou la solution Z existe, alors $w(t)$ reste captive de l'intervalle $[0, 2K_2]$. Ceci assure la non-explosion dans H^1_x de Z et complète la preuve de la Proposition 9. $\square$

Troisième étape : construction d'une solution globale à valeurs dans $QH^2(\mathbb{R})$, (non explosion dans $H^2(\mathbb{R})$).

Nous allons maintenant établir que l'on peut controler la norme H^2_x de Z tout au long de son temps de vie par une quantité qui s'écrit KN où K est comme précédemment. Cela donnera la non explosion de Z dans H^2_x et complètera la démonstration de la Proposition 8. On pose $v = y + Z,\ Z_x = w$. On utilisera à plusieurs reprises que $|v|_{H^1_x}$ reste borné uniformément en N ; ceci est du aux Propositions 7 et 9. On dérive l'équation (1.29) par rapport à $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned} iw_t + i\gamma w + w_{xx} &= b\partial_x(y+Z)E(|y+Z|^2) + b(y+Z)E(2\mathrm{Re}(\overline{y+Z})\partial_x(y+Z)) + Qf_x \\ &= bvE(2\mathrm{Re}\overline{v}w) + bwE(|v|^2) + bvE(2\mathrm{Re}\overline{v}y_x) + by_xE(|v|^2) + Qf_x. \end{aligned}$$

On multiplie cette équation par $(-\overline{w}_t - \gamma\overline{w})$, on intègre en prenant la partie réelle, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w_x|^2_{L^2_x}+\gamma|w_x|^2_{L^2_x}=\\
-&\ b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{v}w)(\overline{w}_tv+\overline{w}v_t)+b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{v}w)\overline{w}v_t\\
-&\ b\mathrm{Re}\int E(|v|^2)w\overline{w}_t-b\mathrm{Re}\int E(\mathrm{Re}\overline{v}v_t)|w|^2+b\mathrm{Re}\int E(\mathrm{Re}\overline{v}v_t)|w|^2\\
-&\ b\gamma\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{v}w)v\overline{w}-b\gamma\mathrm{Re}\int E(|v|^2)|w|^2\\
-&\ b\mathrm{Re}\int y_xE(|v|^2)\overline{w}_t-b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{v}y_x)\overline{w}_tv\\
-&\ b\gamma\mathrm{Re}\int y_x\overline{w}E(|v|^2)-b\gamma\mathrm{Re}\int v\overline{w}E(2\mathrm{Re}\overline{v}y_x)\\
-&\ \mathrm{Re}\int Qf_x\overline{w}_t-\gamma\mathrm{Re}\int Qf_x\overline{w}.
\end{aligned}$$

Alors, on synthétise cette inégalité en

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(w)+\gamma q(w)=H(w),$$

où

$$q(w)=|w_x|^2_{L^2_x}+b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{v}w)\overline{w}v+b\mathrm{Re}\int E(|v|^2)|w|^2+2\mathrm{Re}\int G\overline{w},$$

$$\begin{aligned}
H(w)\ &=\ \gamma\mathrm{Re}\int G\overline{w}+\mathrm{Re}\int G_t\overline{w}+b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}w\overline{v})\overline{w}v_t\\
&\quad +b\mathrm{Re}\int E(\mathrm{Re}\overline{v}v_t)|w|^2,
\end{aligned}$$

$$G=by_xE(|v|^2)+bvE(2\mathrm{Re}\overline{v}y_x)+Qf_x.$$

Lemme 27 *Il existe N_0 qui dépend de γ, et K qui dépend de M_1, f, γ, tel que pour $N\geq N_0$, alors pour $Z\in QH^2(\mathbb{R})$ on a*

$$q(w)\geq\frac{1}{2}|w|^2_{H^1_x}-K.$$

Démonstration: on rappelle que la constante K peut varier d'un endroit à un autre. En appliquant le Lemme 24 sur w et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que v reste borné dans $H^1(\mathbb{R})$ on trouve

$$\begin{aligned}
\int E(2\mathrm{Re} w\overline{v})v\overline{w} &\leq |vw|_{L_x^2}|E(vw)|_{L_x^2} \qquad (1.39)\\
&\leq |vw|_{L_x^2}^2\\
&\leq |v|_{L_x^4}^2|w|_{L_x^4}^2\\
&\leq \frac{K}{N^{\frac{3}{2}}}|w|_{H_x^1}^2\\
&\leq \frac{K}{N}|w|_{H_x^1}^2.
\end{aligned}$$

De la même façon on trouve

$$\mathrm{Re}\int E(|v|^2)|w|^2 \leq \frac{K}{N}|w|_{H_x^1}^2.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int y_x E(|v|^2)\overline{w} &\leq |w|_{L_x^2}|y_x E(|v|^2)|_{L_x^2}\\
&\leq |y_x|_{L_x^4}|w|_{L_x^2}|v|_{L_x^4}^2\\
&\leq \frac{K}{N^{\frac{1}{2}}}|w|_{H_x^1}\\
&\leq \frac{K_1}{N}|w|_{H_x^1}^2 + K.
\end{aligned}$$

De la même façon on trouve

$$\mathrm{Re}\int vE(2\mathrm{Re}\overline{v}y_x)\overline{w} \leq \frac{K}{N}|w|_{H_x^1}^2.$$

En plus

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\int Qf_x\overline{w} &= -\mathrm{Re}\int Qf\partial_x\overline{w}\\
&\leq c|Qf|_{L_x^2}|w_x|_{L_x^2}\\
&\leq K|w|_{H_x^1}\\
&\leq \frac{1}{8}|w|_{H_x^1}^2 + K.
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\mathrm{Re}\int G\overline{w} \leq (\frac{K_1}{N} + \frac{1}{8})|w|_{H_x^1}^2 + K. \qquad (1.40)$$

Ceci donne

$$q(w) \geq |w|_{H_x^1}^2 - (\frac{K_1}{N} + \frac{1}{8})|w|_{H_x^1}^2 - K.$$

On impose alors à N_0 de vérifier la condition supplémentaire $\frac{K_1}{N_0}+\frac{1}{8}<\frac{1}{2}$. Alors, il vient

$$q(w)\geq\frac{1}{2}|w|^2_{H^1_x}-K.$$

□

Maintenant on veut contrôler $H(w)$, pour cela on doit contrôler $\int G_t\overline{w}$;

Lemme 28 *Il existe N_0 qui dépend de γ, et K qui dépend de M_1, f, γ, tel que pour chaque $N\geq N_0$, pour $Z\in QH^2(\mathbb{R})$ solution de (1.27) on a*

$$|\int G_t\overline{w}|\leq\frac{5\gamma}{28}|w|^2_{H^1_x}+KN^2,\tag{1.41}$$

$$|\int E(2Rew\overline{v})\overline{w}v_t|\leq\frac{\gamma}{28}|w|^2_{H^1_x}+KN^2,\tag{1.42}$$

et

$$|\int E(Re\overline{v}v_t)|w|^2|\leq\frac{\gamma}{28}|w|^2_{H^1_x}+KN^2.\tag{1.43}$$

Démonstration: on a

$$G_t=by_{xt}E(|v|^2)+by_xE(2\mathrm{Re}\overline{v}v_t)+bv_tE(2\mathrm{Re}\overline{v}y_x)+bvE(2\mathrm{Re}v_ty_x+2\mathrm{Re}vy_{xt}).$$

La clef de l'estimation suivante tient au fait que y_t vérifie le même type d'estimations inverses que y commes décrites dans la Proposition 7. Plus spécifiquement, $|y_{xt}|_{H_x^{-1}}\leq cN|y_t|_{H_x^{-1}}\leq KN$ car y_t est captif dans un borné de H_x^{-1}, uniformément en N. Il vient alors, en utilisant l'inégalité de Young et le fait que v reste borné dans $H^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
&|\int y_{xt}E(|v|^2)w|\leq|y_{xt}|_{H_x^{-1}}|E(|v|^2)w|_{H^1_x}\\
\leq\;& c|y_{xt}|_{H_x^{-1}}(|E(|v|^2)|_{H^1_x}|w|_{L^\infty_x}+|E(|v|^2)|_{L^\infty_x}|w|_{H^1_x})\\
\leq\;& c|y_{xt}|_{H_x^{-1}}(|v|^2_{H^1_x}|w|_{L^\infty_x}+|v|^2_{H^1_x}|w|_{H^1_x})\\
\leq\;& KN|w|_{H^1_x}\\
\leq\;& \frac{\gamma}{28}|w|^2_{H^1_x}+KN^2.
\end{aligned}$$

Par la définition de l'opérateur E, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&|\int y_x\overline{w}E(2\overline{v}v_t)|=2|\int E(y_x\overline{w})\overline{v}v_t|\\
\leq\;& |v_t|_{H_x^{-1}}|E(y_x\overline{w})\overline{v}|_{H^1_x}\\
\leq\;& c|v_t|_{H_x^{-1}}(|E(y_x\overline{w})|_{H^1_x}|v|_{L^\infty_x}+|E(y_x\overline{w})|_{L^\infty_x}|v|_{H^1_x})\\
\leq\;& c|v_t|_{H_x^{-1}}|v|_{H^1_x}(|y_x\overline{w}|_{H^1_x}+|y_x\overline{w}|^{\frac12}_{L^2_x}|y_x\overline{w}|^{\frac12}_{H^1_x})\\
\leq\;& c(|y_x|_{L^\infty_x}|w|_{H^1_x}+|y_x|_{H^1_x}|w|_{L^\infty_x}+|y_x|^{\frac12}_{L^\infty_x}|w|^{\frac12}_{L^2_x}(|y_x|^{\frac12}_{L^\infty_x}|w|^{\frac12}_{H^1_x}+|y_x|^{\frac12}_{H^1_x}|w|^{\frac12}_{L^\infty_x})).
\end{aligned}$$

On utilise alors que v_t, à l'instar de u_t reste borné (uniformément en N) dans H_x^{-1}. On utilise aussi les inégalités inverses sur y (confer Proposition 7 ; en particulier $|y_x|_{L_x^\infty} \leq |y_x|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}} |y_x|_{H_x^1}^{\frac{1}{2}}) \leq KN^{\frac{1}{2}}$) pour en déduire la majoration

$$|\int y_x \overline{w} E(2\overline{v}v_t)| \leq K(N^{\frac{1}{2}}|w|_{H_x^1} + N|w|_{L_x^\infty} + N^{\frac{1}{4}}|w|_{L_x^2}^{\frac{1}{2}}(N^{\frac{1}{4}}|w|_{H_x^1}^{\frac{1}{2}} + N^{\frac{1}{2}}|w|_{L_x^\infty}^{\frac{1}{2}})).$$

En utilisant le Lemme 24 appliqué à $w = Qw$ il vient alors

$$\begin{aligned} &|\int y_x \overline{w} E(2\overline{v}v_t)| \\ &\leq K(N^{\frac{1}{2}}|w|_{H_x^1} + N^{-\frac{1}{4}}|w|_{H_x^1}^{\frac{1}{2}} N^{\frac{1}{4}} |w|_{H_x^1}^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq \frac{\gamma}{28}|w|_{H_x^1}^2 + KN. \end{aligned}$$

De la même façon on peut démontrer aussi que

$$|\int \overline{w} v_t E(2\mathrm{Re}\overline{v}y_x)| \leq \frac{\gamma}{28}|w|_{H_x^1}^2 + KN,$$

et

$$|\int \overline{w} v E(2\mathrm{Re}v_t y_x + 2\mathrm{Re}v y_{xt})| \leq \frac{\gamma}{28}|w|_{H_x^1}^2 + KN^2.$$

Alors

$$|\int G_t \overline{w}| \leq \frac{\gamma}{28}|w|_{H_x^1}^2 + KN^2.$$

De même

$$|\int E(2\mathrm{Re}w\overline{v})\overline{w}v_t| \leq \frac{\gamma}{28}|w|_{H_x^1}^2 + K,$$

et

$$|\int E(\mathrm{Re}\overline{v}v_t)|w|^2| \leq \frac{\gamma}{28}|w|_{H_x^1}^2 + K.$$

□

Maintenant on trouve grâce aux (1.39), (1.40), (1.41), (1.42), et (1.43) que

$$H(w) \leq \frac{K_1}{N}|w|_{H_x^1}^2 + \frac{\gamma}{4}|w|_{H_x^1}^2 + KN^2.$$

On impose de nouveau une restriction sur N_0 : celle de vérifier $\frac{\gamma}{4} + \frac{K_1}{N_0} \leq \frac{\gamma}{2}$, alors

$$\frac{d}{dt}q(w) + \gamma q(w) \leq \frac{\gamma}{2}|w|_{H_x^1}^2 + KN^2.$$

Le Lemme 27 et le lemme de Gronwall assurent alors que

$$|w|_{H_x^1}^2 \leq 2q(w) + K \leq KN^2.$$

Alors, les démonstrations du Lemme 28 et de la Proposition 8 sont achevées. □

1.4.2 Comparaison entre Z et z pour les grands temps

Nous avons construit une fonction Z à valeurs dans l'espace des hautres fréquences qui est plus régulière que la partie haute fréquence $z = Qu$ de la solution. Nous allons maintenant montrer que Z et z sont asymptotiquement proches.

Proposition 10 *Il existe N_0, K dépendant seulement des données $|f|_{L^2_x}$ et γ de l'équation tels que si $z = Qu$ est la partie haute fréquence d'une trajectoire incluse dans le borné absorbant pour $t \geq 0$, pour un $N \geq N_0$, et si Z est la solution du problème auxiliaire (1.27) alors pour tout temps positif*

$$|Z - z|_{H^1_x} \leq K \exp(-\gamma t). \tag{1.44}$$

Démonstration: soient $v = y + Z$ et $\chi = v - u = Z - z$, alors χ est une solution de l'équation suivante

$$i\chi_t + i\gamma\chi + \chi_{xx} = bQ(E(|v|^2)v - E(|u|^2)u) = bQ(E(|v|^2)\chi + E(\chi\overline{v} + \overline{\chi}u))u. \tag{1.45}$$

On multiplie l'équation (1.45) par $(-\overline{\chi}_t - \gamma\overline{\chi})$, on intègre en prenant la partie réelle, avec

$$b\int E(\chi\overline{v})u\overline{\chi_t} = b\int E(\chi\overline{v})(v-\chi)\overline{\chi_t},$$

et

$$b\gamma\int E(\chi\overline{v})u\overline{\chi} = b\gamma\int E(\chi\overline{v})(v-\chi)\overline{\chi}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\chi_x|^2_{L^2_x} + \gamma|\chi_x|^2_{L^2_x} = &- b\mathrm{Re}\int E(|v|^2)\chi\overline{\chi}_t - \gamma b\mathrm{Re}\int E(|v|^2)\chi\overline{\chi} \\
&- b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{v})u\overline{\chi}_t - b\gamma\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{v})u\overline{\chi} \\
&- b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{u})u\overline{\chi}_t - b\gamma\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{u})u\overline{\chi}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi) + \gamma q(\chi) = H(\chi),$$

avec

$$q(\chi) = |\chi_x|^2_{L^2_x} + b\mathrm{Re}\int E(u\overline{v})|\chi|^2 + b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{v})(v\overline{\chi}) + b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{u})(u\overline{\chi}), \tag{1.46}$$

$$H(\chi) = b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{v})v_t\overline{\chi} - \frac{b}{2}\mathrm{Re}\int E(|\chi|^2)(\overline{u}v_t + \overline{u}_t v) + b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{u})\overline{\chi}u_t. \tag{1.47}$$

Lemme 29 *Pour χ solution de (1.45), on a*

$$q(\chi) \geq \frac{1}{2}|\chi|^2_{H^1_x}.$$

Démonstration: en appliquant le Lemme 24 sur χ on trouve

$$\begin{aligned} q(\chi) &\geq |\chi|^2_{H^1_x} - c|b||v|^2_{L^4_x}|\chi|^2_{L^4_x} - c|b||u|_{L^4_x}|v|_{L^4_x}|\chi|^2_{L^4_x} - c|b||u|^2_{L^4_x}|\chi|^2_{L^4_x} \\ &\geq |\chi|^2_{H^1_x} - \frac{K_1}{N^{\frac{3}{2}}}|\chi|^2_{H^1_x}, \end{aligned}$$

puisque u et v restent captifs dans un borné de H^1_x. On impose alors à N_0 de satisfaire $1 - \frac{K_1}{N_0^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{1}{2}$. Pour $N \geq N_0$, alors

$$q(\chi) \geq \frac{1}{2}|\chi|^2_{H^1_x}. \tag{1.48}$$

□

Après avoir établit la coercivité de q, on contrôle le second membre.

Lemme 30 *Pour χ solution de (1.45), on a*

$$H(\chi) \leq \frac{K}{\sqrt{N}}|\chi|^2_{H^1_x},$$

pour un K comme dans l'énoncé de la Proposition 10.

Démonstration: en appliquant le Lemme 24 sur χ, en utilisant une nouvelle fois que u et v restent bornés dans H^1_x et u_t, v_t dans H^{-1}_x, on trouve

$$\begin{aligned} H(\chi) &\leq c|b||v_t|_{H^{-1}_x}\left(|\chi|_{L^\infty_x}|\chi v|_{H^1_x} + |\chi|_{H^1_x}|\chi v|_{L^\infty_x} + |u|_{L^\infty_x}|\chi^2|_{H^1_x} + |u|_{H^1_x}|\chi^2|_{L^\infty_x}\right) \\ &\quad + c|b||u_t|_{H^{-1}_x}\left(|\chi^2|_{L^\infty_x}|v|_{H^1_x} + |\chi^2|_{H^1_x}|v|_{L^\infty_x} + |\chi|_{L^\infty_x}|u\chi|_{H^1_x} + |\chi|_{H^1_x}|u\chi|_{L^\infty_x}\right) \\ &\leq c|b||v_t|_{H^{-1}_x}|\chi|_{L^\infty_x}\left(|\chi|_{L^\infty_x}|v|_{H^1_x} + |\chi|_{H^1_x}|v|_{L^\infty_x} + |u|_{L^\infty_x}|\chi|_{H^1_x} + |u|_{H^1_x}|\chi|_{L^\infty_x}\right) \\ &\quad + c|b||u_t|_{H^{-1}_x}|\chi|_{L^\infty_x}\left(|\chi|_{L^\infty_x}|v|_{H^1_x} + |\chi|_{H^1_x}|v|_{L^\infty_x} + |\chi|_{L^\infty_x}|u|_{H^1_x} + |\chi|_{H^1_x}|u|_{L^\infty_x}\right) \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{N}}|\chi|^2_{H^1_x}. \end{aligned}$$

□

On conclut maintenant la démonstration de la Proposition 10. Il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi) + (\gamma - \frac{2K_1}{\sqrt{N}})q(\chi) \leq 0.$$

On impose maintenant la dernière condition sur N_0 qui est

$$\frac{2K_1}{\sqrt{N}} \leq \frac{2K_1}{\sqrt{N_0}} \leq \frac{\gamma}{2}.$$

On prend $N \geq N_0$, et on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi) + \frac{\gamma}{2}q(\chi) \leq 0,$$

donc
$$q(\chi(t)) \leq q(\chi(0))e^{-\gamma t}.$$
Comme
$$\chi(0) = -z_0 = -Qu_0,$$
et
$$\begin{aligned} q(-z_0) &= |(z_0)_x|^2_{L^2_x} + b\mathrm{Re}\int E(u\overline{v})|z_0|^2 + b\mathrm{Re}\int E(z_0\overline{v})(v\overline{z}_0) + b\mathrm{Re}\int E(z_0\overline{u})(u\overline{z}_0) \\ &\leq K = K(f,\gamma), \end{aligned}$$
alors
$$|\chi|^2_{H^1_x} \leq Ke^{-\gamma t}.$$
Alors, pour les grands temps lorsque $t \to +\infty$, on a $\chi \to 0$. □

1.4.3 La régularité de $\mathcal{A}$

Théorème 1.4.1 *L'attracteur $\mathcal{A}$ est borné et compact dans $H^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on procède en deux étapes. Tout d'abord la régularité. Ensuite la compacité dans H^2_x. Soit $u_0 \in \mathcal{A}$. Alors la trajectoire $u(t) = S(t)u_0$ est pour tout temps dans $\mathbb{R}$ captive du borné absorbant. On choisit alors pour m entier arbitrairement grand de prendre comme temps initial $t_0 = -m$. On va approcher $z(t) = Qu(t)$, pour $t \geq -m$, par $Z(t) = Z^m(t)$ solution de l'équation suivante
$$iZ^m_t + i\gamma Z^m + Z^m_{xx} = bQE(|y + Z^m|^2(y + Z^m) + Qf,$$
avec
$$Z^m(-m) = 0$$
D'après ce que l'on a démontré avant (confer les Propositions 8, 10), Z^m est une solution globale sur $[-m, +\infty[$, de plus
$$|Z^m|^2_{H^2_x} \leq K(\gamma, f)N,$$
$$|Z^m(t) - z(t)|_{H^1_x} \leq K(\gamma, f)e^{-\gamma(t+m)}.$$
On note $Z_m = Z^m(0)$, alors
$$|Z_m|^2_{H^2_x} \leq K(\gamma, f)N,$$
$$|Z_m - z_0|_{H^1_x} \leq Ke^{-\gamma m},$$
et comme $H^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, Z_m est une suite bornée dans $H^2(\mathbb{R})$ alors on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers Z_0 dans $H^2(\mathbb{R})$, et fortement vers z_0 dans $H^1(\mathbb{R})$, et d'après l'unicité de la limite on a
$$Z_0 = z_0 \Longrightarrow z_0 = Qu_0 \in H^2(\mathbb{R}).$$

Comme on a $y_0 \in H^2(\mathbb{R})$, alors $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$. Finalement on a $\mathcal{A} \subset H^2(\mathbb{R})$. On va montrer que $\mathcal{A}$ est borné dans $H^2(\mathbb{R})$. Fixons $N = N_0$. Comme on a $Z^m(0) = Z_m$ bornée dans $H^2(\mathbb{R})$ alors

$$Z_m \rightharpoonup z_0,$$

avec

$$|z_0|^2_{H^2_x} \leq \liminf |Z_m|^2_{H^2_x} \leq K(\gamma, f, N_0) = K(\gamma, f).$$

Donc z_0 est borné dans $H^2(\mathbb{R})$ ainsi que u_0, alors $\mathcal{A}$ est borné dans $H^2(\mathbb{R})$. Pour montrer la compacité on va utiliser l'argument de J. Ball [9]. Soit u une solution de l'équation (1.1) incluse dans l'attracteur global $\mathcal{A}$, on dérive cette équation par rapport à x.

$$iu_{tx} + i\gamma u_x + u_{xx} = bu_x E(|u|^2) + buE(2\mathrm{Re}\overline{u}u_x) + f_x. \tag{1.49}$$

On multiplie l'équation (1.49) par $(-\overline{u}_{tx} - \gamma\overline{u}_x)$, en prenant la partie réelle

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_{xx}|^2_{L^2_x} + \gamma|u_{xx}|^2_{L^2_x} \quad = \quad & -b\int E(|u|^2)\mathrm{Re}u_x\overline{u}_{tx} - b\gamma\int E(|u|^2)|u_x|^2 \\
& -b\mathrm{Re}\int u\overline{u}_{tx}E(2\mathrm{Re}\overline{u}u_x) - b\gamma\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{u}u_x)u\overline{u}_x \\
& -\int f_x\overline{u}_{tx} - \gamma\int f_x\overline{u}_x,
\end{aligned}$$

qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(u) + \gamma q(u) = H(u),$$

tels que

$$q(u) = |u_{xx}|^2_{L^2_x} + G(u),$$

$$G(u) = b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{u}u_x)u\overline{u}_x + b\int E(|u|^2)|u_x|^2 - 2\mathrm{Re}\int f\overline{u}_{xx},$$

$$H(u) = -\gamma\mathrm{Re}\int f\overline{u}_{xx} + b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}u_x\overline{u})\overline{u}_x u_t + b\int E(\mathrm{Re}\overline{u}u_t)|u_x|^2.$$

Alors on obtient

$$q(u) = q(u_0)e^{-2\gamma t} + \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}H(u)ds.$$

Pour $u(t) = S(t)u_0$

$$|(S(t)u_0)_{xx}|_{L^2_x} + G(S(t)u_0) = (|u_{0xx}|_{L^2_x} + G(u_0))e^{-2\gamma t} + \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}H(S(s)u_0)ds. \tag{1.50}$$

Cette égalité d'énergie est en fait vraie sur tout trajectoire incluse dans H^2_x. Soit maintenant x_j une suite à valeurs dans $\mathcal{A}$ qui est borné dans $H^2(\mathbb{R})$, alors il existe une sous-suite x_j qui converge faiblement vers ρ dans $H^2(\mathbb{R})$ et fortement dans $H^1(\mathbb{R})$, puisque l'attracteur est un sous-ensemble compact de $H^1(\mathbb{R})$. Notre but est de montrer que

$$\limsup_{j\to+\infty} |\Delta x_j|_{L^2(\mathbb{R})}| \leq |\Delta\rho|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui impliquera la convergence forte. Pour t fixé positif, soit $u_0 = S(-t)x_j$, en remplaçant dans l'équation (1.50) avec le passage à la limite sup on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{j\to+\infty}(|(x_j)_{xx}|_{L^2_x} + G(x_j)) &\leq \limsup_{j\to+\infty}(|(S(-t)x_j)_{xx}|_{L^2_x} + G(S(-t)x_j))e^{-2\gamma t} \\ &\quad + \limsup_{j\to+\infty}\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}H(S(s-t)x_j)ds. \qquad (1.51)\end{aligned}$$

Lemme 31 *$H(S(s-t)x_j)$ (respectivement $G(S(s-t)x_j)$) converge vers $H(S(s-t)\rho)$ (respectivement $G(S(s-t)\rho)$) dans $\mathbb{R}$*

Démonstration: les trajectoires $u^j(s) = S(s-t)x_j$ sont captives dans l'attracteur qui est un sous-ensemble borné de $H^2(\mathbb{R})$ et compact de $H^1(\mathbb{R})$. Puisque x_j converge dans $H^2(\mathbb{R})$ faible et $H^1(\mathbb{R})$ fort vers ρ, alors nécessairement $S(s-t)x_j$ converge vers $S(s-t)\rho$ dans $H^2(\mathbb{R})$ faible et $H^1(\mathbb{R})$ fort, puisque $S(s-t)$ est continu sur $H^1(\mathbb{R})$ et par unicité de la limite faible dans $H^2(\mathbb{R})$. Par conséquent

$$\gamma\int f\overline{u}^j_{xx} \to \gamma\int f\overline{\Delta S(s-t)\rho}.$$

Pour les deux derniers termes de H on procède comme suit. La suite u^j_t converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R})$ vers $(S(s-t)\rho)_t$; ceci se voit sur l'équation en utilisant que $u^j = S(s-t)x_j$ converge vers $S(s-t)\rho$ dans $H^2(\mathbb{R})$ faible et $H^1(\mathbb{R})$ fort. Par ailleurs par interpolation u^j converge fortement vers $S(s-t)\rho$ dans $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R})$ fort, donc par injection de Sobolev dans $W^{1,4}(\mathbb{R})$ fort. L'opérateur E étant continu sur tous les espaces $L^p(\mathbb{R}); 1 < p < +\infty$, (confer [68]) il vient $E(2\mathrm{Re}u^j_x\overline{u}^j)$ converge fortement dans $L^4(\mathbb{R})$ vers $E(2\mathrm{Re}(S(s-t)\rho)_j\overline{S(s-t)\rho})$. En écrivant le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R})$ et en combinant convergence forte et faible il vient alors

$$(u^j_t, E(2\mathrm{Re}u^j_x\overline{u}^j)u^j_x) \to ((S(s-t)\rho)_t, E(2\mathrm{Re}S(s-t)\rho_x\overline{S(s-t)\rho}^j)S(s-t)\rho_x),$$

c'est à dire

$$\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}u^j_x\overline{u}^j)\overline{u}^j_x u^j_t \to \mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}S(s-t)\rho_x\overline{S(s-t)\rho})\overline{S(s-t)\rho}_x(S(s-t)\rho_t).$$

Le dernier terme se traite de manière similaire. Par conséquent

$$H(S(s-t)x_j) \to H(S(s-t)\rho).$$

Maintenant pour passer à la limite dans le premier terme définissant G on utilise que $\mathrm{Re}\overline{u}^j u^j_x$ converge fortement dans $L^2(\mathbb{R})$ puisque par exemple u^j converge fortement dans $H^1(\mathbb{R})$. E étant continu sur $L^2(\mathbb{R})$, alors

$$b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{u}^j u^j_x)u^j\overline{u}^j_x \to b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{S(s-t)\rho}\partial_x(S(s-t)\rho))(S(s-t)\rho)\overline{\partial_x S(s-t)\rho}.$$

Le deuxième terme de G se traite de manière similaire. Par conséquent

$$G(S(s-t)x_j) \to G(S(s-t)\rho).$$

□

Maintenant on pose $u_0 = S(-t)\rho$ et en remplaçant dans l'équation (1.50) on a

$$|\rho_{xx}|^2_{L^2_x} + G(\rho) = (|(S(-t)\rho)_{xx}|^2_{L^2_x} + G(S(-t)\rho))e^{-2\gamma t} + \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} H(S(s-t)\rho)ds.$$

Donc

$$\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} H(S(s-t)\rho)ds = |\rho_{xx}|^2_{L^2_x} + G(\rho) - (|(S(-t)\rho)_{xx}|^2_{L^2_x} + G(S(-t)\rho))e^{-2\gamma t}.$$

En passant à la limite dans l'expression (1.51) grace au Lemme 31 et en remplaçant cette expression dans l'équation limite obtenue on trouve

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\to+\infty}(|(x_j)_{xx}|^2_{L^2_x} + G(x_j)) &= \limsup_{j\to+\infty} |(x_j)_{xx}|^2_{L^2_x} + G(\rho) \\
&\leq \limsup_{j\to+\infty}(|(S(-t)x_j)_{xx}|^2_{L^2_x} + G(S(-t)x_j))e^{-2\gamma t} \\
&\quad + |\rho_{xx}|^2_{L^2_x} + G(\rho) - (|(S(-t)\rho)_{xx}|^2_{L^2_x} + G(S(-t)\rho))e^{-2\gamma t}.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant que les suite $|(S(-t)x_j)_{xx}|^2_{L^2_x}$ et $G(S(-t)x_j)$ sont bornées uniformément en j et t car les trajectoires $S(s)x_j$ pour $s \in \mathbb{R}$ sont incluses dans l'attracteur. Alors pour t tend vers l'infini on a

$$\limsup_{j\to+\infty} |x_j|_{H^2_x} \leq |\rho|_{H^2_x}.$$

Donc $\mathcal{A}$ est compact dans $H^2(\mathbb{R})$. □

Chapitre 2

La dissipativité pour Les systèmes de Davey-Stewartson

Ce chapitre fait l'objet de l'article [44], paru dans Communication on Pure and Applied Analysis.

Sommaire

2.1 Introduction

Les systèmes de Davey-Stewartson sont des modèles pour les équations d'ondes hydrodynamiques, ils apparaissent aussi dans plusieurs domains de la physique, par exemple : la physique des plasmas (voir [63]), l'optique non linéaire (voir [64]), la gravité interne (voir [47]), le ferromagnétisme (voir [58], [59]).
Ces systèmes s'écrivent

$$\begin{aligned} iu_t + i\gamma u + \delta u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + \chi|u|^2u + f(x_1, x_2), \\ \varphi_{x_1x_1} + m\varphi_{x_2x_2} = |u|^2_{x_1}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\gamma > 0$ désigne le coefficient de dissipation, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ désigne le terme de force, u représente l'amplitude complexe de l'onde, et φ est le potentiel moyen de vitesse.
Les paramètres m, δ peuvent prendre une des deux valeurs $+1$ ou -1, et χ et b sont des paramètres réels.
On peut classer ces systèmes en suivant Ghidaglia et Saut [35] en elliptique-elliptique (E-E), elliptique-hyperbolique (E-H), hyperbolique-hyperbolique (H-H), et hyperbolique-

elliptique (H-E), cela suivant les valeurs prises par (δ, m), soit respectivement (+,+), (+,-), (-,-), (-,+).

Notre objectif est l'analyse du comportement pour les grands temps des solution de DS dans le cas (E-E), pour cela on est intéressé à étudier l'existence et la régularité de l'attracteur global pour ce système (voir [74], [48], [66], [61]).

Comme notre système est une généralisation de l'équation de Schrödinger non linéaire NLS (avec un terme non local), on donne quelques résultats connus pour l'équation NLS. Dans le cas d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$, avec des conditions limites périodiques, l'existence d'un attracteur global pour la topologie faible de H^1 est prouvée dans [32]. Ensuite la démonstration que cet attracteur faible est en fait un attracteur fort est faite dans [77]. La régularité de cet attracteur est prouvée dans [39]. Pour Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, l'existence de l'attracteur global dans H^1 est démontrée dans [2]. Dans [57] l'auteur a démontré l'existence de l'attracteur global dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors que la régularité de cet attracteur est prouvée dans [40], (voir aussi [8] pour le cas où $x \in \mathbb{R}$).

Pour le système de Davey-Stewartson dans le cas (E-E), les résultats connus sont dans le cas $\chi + b \geq 0$ (voir [76], [81]), qui correspond au cas défocalisant dans l'équation de Schrödinger non linéaire. Dans ce deuxième chapitre, on veut étudier le cas focalisant, c'est à dire sans supposer $\chi + b$ positif dans (2.1). On supposera dans la suite que $\chi = 0$. En effet le terme $\chi|u|^2u$ peut se traiter comme le terme $bu\varphi_{x_1}$, où φ et $|u|^2$ sont liés par $\Delta\varphi = |u|^2_{x_1}$.

On introduit maintenant quelques notations ; la transformée de Fourier sera par rapport à la variable d'espace $x = (x_1, x_2)$

$$\mathcal{F}_{(x_1,x_2)\to(\xi_1,\xi_2)}(u) = \hat{u}(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x_1, x_2) \exp(-ix_1\xi_1 - ix_2\xi_2) dx_1 dx_2.$$

On introduit alors un opérateur E dont le symbole est

$$\widehat{E(u)}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 + m\xi_2^2}\hat{u}(\xi_1, \xi_2).$$

Dans le cas (E-E), on a $m = 1$, alors $\Delta\varphi = |u|^2_{x_1}$, si et seulement si

$$\varphi_{x_1} = E(|u|^2);\ \widehat{E(|u|^2)} = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}\widehat{|u|^2}.$$

E est un opérateur borné de L^p dans L^p (voir [68], page 59, Proposition 3), c'est à dire qu'il existe une constante c, dépendant de p, telle que pour tout fonction ρ dans L^p

$$|E(\rho)|_{L^p} \leq c|\rho|_{L^p}; 1 < p < +\infty.$$

Ce point sera utilisé plusieurs fois dans la suite.

Tout au long de cette section, c désignera une constante numérique qui peut varier d'une ligne à l'autre. K désignera une constante dépendant des données de l'équation $|f|_{L^2_{x_1,x_2}}$, γ et $|b|$, et qui peut aussi varier d'une ligne à l'autre. Ici et dans la suite nous utiliserons la notation $L^2_{x_1,x_2} = L^2(\mathbb{R}^2)$ pour exprimer quelles sont les variables utilisées.

2.2 Un système dynamique bien posé et dissipatif

2.2.1 Problème de Cauchy localement bien posé dans le cas (E-E)

Nous esquissons ici la démonstration de la résolution locale du problème de Cauchy dans le cas (E-E) ; nous suivons essentiellement [36]. Le système de Davey-Stewartson DS s'écrit :

$$iu_t + i\gamma u + u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + f(x_1, x_2),$$
$$\Delta\varphi = |u|^2_{x_1},$$

ou de manière équivalente

$$iu_t + i\gamma u + u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = buE(|u|^2) + f(x_1, x_2), \tag{2.2}$$

muni d'une condition initiale

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2). \tag{2.3}$$

Nous introduisons des espaces mixtes espace-temps qui seront utilisés dans la suite. Classiquement $C_t \cap L^\infty_t(H^1_{x_1,x_2})$ (ou $C_b(H^1_{x_1,x_2})$) désignera l'espace des fonctions continues et bornées en temps à valeur dans $H^1(\mathbb{R}^2)$; les indices t, x_1, et x_2 rappellent les variables considérées. $L^4_t(W^{1,4}_{x_1,x_2})$ sera l'espace de Banach classique muni de la norme

$$|u|_{L^4_tW^{1,4}_{x_1,x_2}} = \left(\int_{\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2}} (|u|^4 + |\nabla u|^4)dtdx_1dx_2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ce choix est motivé par l'utilisation des inégalités de Strichartz. On définit l'espace $X = C([0,T_*]; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap L^4([0,T_*]; W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$ muni de la norme,

$$|u|_X = |u|_{L^\infty([0,T_*];H^1_{x_1,x_2})} + |u|_{L^4([0,T_*];W^{1,4}_{x_1,x_2})}.$$

Maintenant on démontre que le problème (2.2)-(2.3) est localement bien posé ;

Proposition 11 *Soit $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Pour $T_* > 0$ assez petit (T_* étant une fonction décroissante de $|u_0|^2_{H^1_{x_1,x_2}}$), l'équation (2.2) admet une solution mild locale unique u dans $X = C([0,T_*]; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap L^4([0,T_*]; W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$.*

Remarque 8 *Par solution "mild" nous entendons solution de la formulation de Duhamel de l'équation, obtenue comme un point fixe dans X de cette formulation intégrale. L'avantage de ce procédé est qu'en utilisant le théorème de point fixe de Picard, nous aurons la stabilité de la solution par rapport aux variations de la condition initiale u_0, ce qui est nécessaire pour la définition de semi-groupe. Par ailleurs, une solution mild sera a fortiori une solution faible au sens des distributions de l'équation car l'application $t \mapsto uE(|u|^2)$ est une fonction continue à valeurs dans $H^{-1}_{x_1,x_2}$. Nous renvoyons à [73] et aux références qui s'y trouvent pour les différentes notions de solution d'une EDP dispersive. Par ailleurs, nous allons donner ici une démonstration non "optimale" de cette proposition, au sens qu'il existe des démonstrations plus courtes et plus modernes de ce résultat classique utilisant les inégalités de Strichartz inhomogènes ; nous renvoyons à l'article [20] où le cas d'une nonlinéarité non-locale est traité et aux références qui s'y trouvent notamment [22], [55].*

Démonstration: on commence par démontrer quelques lemmes sur le terme non local $E(|u|^2)$

Lemme 32 *Pour $u,\ v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$|uE(|u|^2)|_{W^{1,\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \le c|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}, \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}&|uE(|u|^2) - vE(|v|^2)|_{W^{1,\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \le c|u|_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u-v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + \\ &c\left((|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}})|v|_{H^1_{x_1,x_2}} + (|u|_{H^1_{x_1,x_2}} + |v|_{H^1_{x_1,x_2}})|v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}\right)|u-v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Démonstration: pour la première inégalité, on trouve en utilisant l'inégalité de Hölder et l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^2)$ que

$$\begin{aligned}|uE(|u|^2)|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} &\le c|u|_{L^4_{x_1,x_2}}|E(|u|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|_{L^4_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}.\end{aligned}$$

On utilise sans mention explicite que E commute avec les opérateurs différentiels comme ∇. Comme $\nabla(uE(|u|^2)) = \nabla uE(|u|^2) + 2uE(\overline{u}\nabla u)$, alors on doit controler la norme dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)$ de $\nabla uE(|u|^2)$, et $uE(\overline{u}\nabla u)$;

$$\begin{aligned}|\nabla uE(|u|^2)|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} &\le c|\nabla u|_{L^4_{x_1,x_2}}|E(|u|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}}\\ &\le c|\nabla u|_{L^4_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|uE(\overline{u}\nabla u)|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} &\le c|u|_{L^4_{x_1,x_2}}|\overline{u}\nabla u|_{L^2_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|\nabla u|_{L^4_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}\\ &\le c|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}.\end{aligned}$$

Alors

$$|uE(|u|^2)|_{W^{1,\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \le c|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}.$$

Pour la deuxième inégalité (2.5), en utilisant le fait que

$$uE(|u|^2) - vE(|v|^2) = (u-v)E(|u|^2) + vE(|u|^2 - |v|^2),$$

et l'injection $W^{1,4}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$, on peut démontrer (2.5) de façon analogue à la démonstration de (2.4). □

Lemme 33 *Pour* $u,\ v \in H^1(\mathbb{R}^2)$*, on a*

$$|uE(|u|^2)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq c|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}, \tag{2.6}$$

$$|uE(|u|^2) - vE(|v|^2)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq c\left(|u|^2_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + (|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}})|v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}\right)|u-v|_{H^1_{x_1,x_2}}. \tag{2.7}$$

Démonstration: on commence par démontrer la première inégalité. On trouve par l'inégalité de Hölder, l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^8(\mathbb{R}^2)$ et le fait que E est borné sur $L^p,\ 1 < p < \infty$, que

$$\begin{aligned}
|uE(|u|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq c|u|_{L^4_{x_1,x_2}}|E(|u|^2)|_{L^4_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{L^4_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^8_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^8_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

En plus comme $\nabla(uE(|u|^2)) = \nabla uE(|u|^2) + 2uE(\overline{u}\nabla u)$, alors on doit controler la norme dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de $\nabla uE(|u|^2)$, et $uE(\overline{u}\nabla u)$;

$$\begin{aligned}
|\nabla uE(|u|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq c|\nabla u|_{L^4_{x_1,x_2}}|E(|u|^2)|_{L^4_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^8_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|uE(\overline{u}\nabla u)|_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq c|u|_{L^8_{x_1,x_2}}|E(\overline{u}\nabla u)|_{L^{\frac{8}{3}}_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{L^8_{x_1,x_2}}|\overline{u}\nabla u|_{L^{\frac{8}{3}}_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|^2_{L^8_{x_1,x_2}}|\nabla u|_{L^4_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^8_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité (2.7), en utilisant le fait que

$$uE(|u|^2) - vE(|v|^2) = (u-v)E(|u|^2) + vE(|u|^2 - |v|^2),$$

on peut démontrer (2.7) de façon analogue à la démonstration de (2.6). □

Maintenant on va utiliser le théorème de point fixe ; on cherche une solution à (2.2) sous la forme d'un point fixe pour l'équation intégrale

$$G(u(t)) = T(t)u_0 - i\int_0^t T(t-s)F(u(s))ds,$$

ou F contient les termes non-linéaires et de force, et où $T(t)$ est un semi-groupe de contraction sur $H^1(\mathbb{R}^2)$.
Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ l'équation (2.2) s'écrit

$$u_t + (\gamma - i\Delta)u = -ibuE(|u|^2) - if \tag{2.8}$$

où $\Delta u = u_{x_2x_2} + u_{x_1x_1}$. On intègre l'équation (2.8) sur $[0,t]$, on trouve

$$u(t) = e^{-itA}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)A}F(u(s))ds,$$

avec $F(v) = bvE(|v|^2) + f$, $A = -i\gamma - \Delta$ et $T(t) = e^{-itA}$. On définit

$$G(u) = e^{-itA}u_0 - i\int_0^t e^{-i(t-s)A}uE(|u|^2)ds$$

et on cherche un point fixe pour G dans X.

Avant de procéder au calcul proprement dit, on énonce deux résultats sur $T(t)$.

Lemme 34 *Pour t positif, le semi-groupe $T(t)$ est contractant sur $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on estime $T(t)$ en norme $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$|T(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} = |e^{(-\gamma t + it\Delta)}|_{H^1_{x_1,x_2}} = e^{-\gamma t}\ |e^{it\Delta}|_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

On pose $U(t) = e^{it\Delta}$. Cet opérateur est unitaire sur $H^s(\mathbb{R}^2)$ pour tout s car son symbole $e^{-it(\xi_1^2+\xi_2^2)}$ est de module 1. □

On va maintenant démontrer quelques inégalités de Strichartz qui restent vraies en temps local ; pour $T > 0$, on introduit

$$|\phi|_{L^4_T} = (\int_0^T |\phi(s)|^4 ds)^{\frac{1}{4}}.$$

De manière analogue on notera L^4_{T,x_1,x_2} l'espace $L^4([0,T]; L^4(\mathbb{R}^2))$.
La proposition suivante est un cas particulier d'un résultat plus général qui se trouve dans [22].

Lemme 35 *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ et $f \in L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}$, avec $T > 0$ on a, pour $U(t) = e^{it\Delta}$*

$$|U(t)u_0|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \leq c|u_0|_{L^2_{x_1,x_2}}, \tag{2.9}$$

$$|\int_0^T U(t-s)f(s)ds|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \leq c|f|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}}. \tag{2.10}$$

Démonstration: pour la première inégalité, on trouve grâce à l'inégalité de Strichartz (voir [70], [22], [35]) que

$$|U(t)u_0|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \leq |U(t)u_0|_{L^4(\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2})} \leq c_{str}|u_0|_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

Pour la deuxième inégalité, on introduit $\chi_{[0,T]}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,T]$. Alors

$$\int_0^T U(t-s)f(s)ds = \int_{\mathbb{R}_s} U(t-s)(\chi_{[0,T]}(s)f(s))ds. \tag{2.11}$$

En utilisant l'inégalité de Strichartz (voir [70], [22], [35])

$$\begin{aligned} &|\int_0^T U(t-s)f(s)ds|_{L^4_{T,x_1,x_2}} = |\int_{\mathbb{R}_s} U(t-s)(\chi_{[0,T]}(s)f(s))ds|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \leq \\ &|\int_{\mathbb{R}_s} U(t-s)(\chi_{[0,T]}(s)f(s))ds|_{L^4(\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2})} \leq c|\chi_{[0,T]}f|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2})}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

qui donne le résultat voulu. □

Remarque 9 *On peut utiliser le Lemme 35 avec $T(t)$ à la place de $U(t)$ car la multiplication par $e^{-\gamma t} \leq 1$ ne joue aucun rôle.*

Lemme 36 *Soit c_{str} la meilleure constante dans l'inégalité de Strichartz. Soit c une constante numérique bien choisie. Pour*

$$R = 4\max(1,\ c_{str})(|u_0|_{H^1_{x_1,x_2}} + c\frac{|f|_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma}),$$

et pour T_* assez petit dépendant de R, l'application G envoie la boule fermée $B_X(0,R)$ de X dans elle même.

Démonstration: soit u une fonction dans X telle que $|u|_X \leq R$. On veut démontrer $|G(u)|_X \leq R$. D'abord on controle $G(u(t))$ en norme $L^4([0,T_*];W^{1,4}_{x_1,x_2})$. Pour le terme libre, il vient alors

$$|T(t)u_0|_{L^4([0,T_*];W^{1,4}_{x_1,x_2})} \leq c|u_0|_{H^1_{x_1,x_2}}. \tag{2.13}$$

On estime maintenant le terme non-linéaire. En utilisant (2.6) et (2.10), il vient

$$\begin{aligned} |\int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} &\leq c_{str}||u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}|_{L^{\frac{4}{3}}_{T_*}} \\ &\leq cc_{str}T_*^{\frac{1}{2}}|u|^2_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}}|u|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \\ &\leq \frac{R}{8}. \end{aligned}$$

Passons au terme de force. On estime la norme dans $W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$ de $\int_0^t T(t-s)f(x_1,x_2)ds$;

$$\begin{aligned}\int_0^t T(t-s)f(x_1,x_2)ds &= \int_0^t T(t-s)dsf(x_1,x_2) \\ &= \int_0^t e^{-i(t-s)A}dsf(x_1,x_2) \\ &= -iA^{-1}(Id-e^{-itA})f(x_1,x_2).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Comme A est un opérateur continu et inversible de $H^2(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors

$$|A^{-1}f|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} \le c|A^{-1}f|_{H^2_{x_1,x_2}} \le c\frac{|f|_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma}, \tag{2.15}$$

et

$$|A^{-1}f|_{H^1_{x_1,x_2}} \le c|A^{-1}f|_{H^2_{x_1,x_2}} \le c\frac{|f|_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma}. \tag{2.16}$$

Donc en choisissant $cT_*^{\frac14} \le 1$ on trouve

$$\begin{aligned}|\int_0^t T(t-s)f(x)ds|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} &= |iA^{-1}(Id-e^{-itA})f|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \\ &\le |A^{-1}f|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |T(t)A^{-1}f|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \\ &\le cT_*^{\frac14}|A^{-1}f|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + cc_{str}|A^{-1}f|_{H^1_{x_1,x_2}} \\ &\le cT_*^{\frac14}\frac{|f|_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma} + cc_{str}\frac{|f|_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma} \\ &\le cT_*^{\frac14}\frac{R}{16} + \frac{R}{16} \le \frac{R}{8}.\end{aligned}$$

On a alors établi

$$|G(u(t))|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \le \frac{R}{2}.$$

Maintenant on controle $G(u(t))$ en norme $C([0,T_*];H^1_{x_1,x_2})$; on a

$$|T(t)u_0|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} = |u_0|_{H^1_{x_1,x_2}} \le \frac{R}{4}. \tag{2.17}$$

On estime la norme dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de $\int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds$; on trouve grâce à (2.6) que

$$\begin{aligned}|\int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds|_{H^1_{x_1,x_2}} &\le \int_0^t |uE(|u|^2)|_{H^1_{x_1,x_2}}ds \\ &\le c\int_0^t |u|^2_{H^1_{x_1,x_2}}|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} &\leq c|u|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}(\int_0^{T_*}|u|^{\frac{8}{3}}_{H^1_{x_1,x_2}}ds)^{\frac{3}{4}}\\
&\leq c|u|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}}T_*^{\frac{3}{4}}\\
&\leq cT_*^{\frac{3}{4}}R^3.
\end{aligned}$$

On choisit T_* tel que $c|b|T_*^{\frac{3}{4}}R^2 \leq \frac{1}{8}$, alors

$$|b||\int_0^t T(t-s)uE(|u|^2)ds|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} \leq \frac{R}{8}.$$

On estime la norme dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de $\int_0^t T(t-s)f(x_1,x_2)ds$; en utilisant (2.14) et (2.16) on trouve

$$\begin{aligned}
|\int_0^t T(t-s)f(x)ds|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} &= |iA^{-1}(Id-e^{-itA})f|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}}\\
&\leq |A^{-1}f|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} + |T(t)A^{-1}f|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}}\\
&\leq c|A^{-1}f|_{H^1_{x_1,x_2}}\\
&\leq \frac{c}{\gamma}|f|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \frac{R}{8}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|G(u(t))|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} \leq \frac{R}{2}.$$

Ceci donne

$$|G(u(t))|_X \leq R,$$

et la démonstration du lemme est complète. □

Lemme 37 *Soit c_{str} la meilleure constante dans l'inégalité de Strichartz. Pour R comme dans l'énoncé du Lemme 36, et pour T_* assez petit dépendant de R, l'application G est une stricte contraction sur $B_X(0,R)$.*

Démonstration: soient $u, v \in B_X(0,R)$. On a par l'estimation (2.10) du Lemme 35, et à l'inégalité (2.5)

$$\begin{aligned}
&|G(u)-G(v)|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \leq c|b||uE(|u|^2)-vE(|v|^2)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T_*}W^{1,\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}\\
\leq\ & c|b|(|u|_{L^4_{T_*}H^1_{x_1,x_2}}|u|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |v|_{L^4_{T_*}H^1_{x_1,x_2}}|v|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}})|u-v|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}\\
&+c|b|(|u|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}|v|_{L^4_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} + |u|_{L^4_{T_*}H^1_{x_1,x_2}}|v|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}})|u-v|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}\\
\leq\ & c|b|R^2T_*^{\frac{1}{4}}|u-v|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

En plus, on trouve grâce à (2.7) que pour $t \in [0, T_*]$

$$
\begin{aligned}
&|G(u) - G(v)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq c|b| \int_0^t |uE(|u|^2) - vE(|v|^2)|_{H^1_{x_1,x_2}} ds \\
\leq\ & c|b| \int_0^t (|u|^2_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + (|u|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}})|v|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}})|u - v|_{H^1_{x_1,x_2}} ds \\
\leq\ & c|b| \left((\int_0^t |u|^4_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} ds)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^t |u|^2_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} |v|^2_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} ds)^{\frac{1}{2}} + (\int_0^t |v|^4_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} ds)^{\frac{1}{2}} \right) \\
& (\int_0^t |u - v|^2_{H^1_{x_1,x_2}} ds)^{\frac{1}{2}} \\
\leq\ & c|b| T_*^{\frac{1}{2}} (|u|^2_{L^4_{T_*} W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |v|^2_{L^4_{T_*} W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |v|_{L^4_{T_*} W^{1,4}_{x_1,x_2}} |u|_{L^4_{T_*} W^{1,4}_{x_1,x_2}})|u - v|_{L^\infty_{T_*} H^1_{x_1,x_2}} \\
\leq\ & c|b| R^2 T_*^{\frac{1}{2}} |u - v|_{L^\infty_{T_*} H^1_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$|G(u) - G(v)|_{L^\infty_{T_*} H^1_{x_1,x_2}} \leq c|b| R^2 T_*^{\frac{1}{2}} |u - v|_{L^\infty_{T_*} H^1_{x_1,x_2}}.$$

On choisit T_* tel que $c|b|R^2(T_*^{\frac{1}{4}} + T_*^{\frac{1}{2}}) \leq \frac{1}{2}$, alors

$$|G(u) - G(v)|_X \leq \frac{1}{2}|u - v|_X,$$

qui donne la contraction de G sur $B_X(0, R)$. D'après le théorème de point fixe, il existe un unique u tel que $G(u) = u$, d'où l'existence d'une solution unique u de l'équation (2.2) sur $[0, T_*]$. □

On pose $S(t)u_0 = u(t)$ la solution de l'équation de Davey-Stewartson. On vérifie maintenant la continuité par rapport à la donnée initiale.

Lemme 38 *Soit T_* assez petit comme précédemment. Pour t dans $[0, T_*]$, le semi-groupe $S(t)$ est fortement continu sur $H^1(\mathbb{R}^2)$ (i.e continu pour la topologie forte de $H^1(\mathbb{R}^2)$).*

Remarque 10 *On établira dans la suite que $S(t)$ est défini pour tout temps positif. Le résultat du Lemme 38 s'étendra par induction à tout temps positif. Par ailleurs, on pourrait en fait énoncer le Lemme de manière plus forte en disant que l'application qui à u_0 donne $S(t)u_0$ est continue de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans X.*

Démonstration: soient $u(t),\ v(t)$ deux solutions issues de $u_0,\ v_0$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, on veut montrer si $u_0 \to v_0$, alors $u(t) = S(t)u_0 \to v(t) = S(t)v_0$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, et comme on a que F est contractante sur les bornés de $H^1(\mathbb{R}^2)$ alors

$$
\begin{aligned}
|u(t) - v(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} &\leq |T(t)(u_0 - v_0)|_{H^1_{x_1,x_2}} + \int_0^t |T(t-s)(F(u) - F(v))|_{H^1_{x_1,x_2}} ds \\
&\leq |u_0 - v_0|_{H^1_{x_1,x_2}} + c|b|R^2 (\int_0^t |(u - v)(s)|^2_{H^1_{x_1,x_2}} ds)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |u_0 - v_0|_{H^1_{x_1,x_2}} + c|b|R^2 T_*^{\frac{1}{2}} |u - v|_{L^\infty_{T_*} H^1_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}
$$

On choisit T_* tel que $c|b|R^2T_*^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$, alors

$$|u-v|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} \leq 2|u_0-v_0|_{H^1_{x_1,x_2}},$$

d'où le résultat voulu. □

2.2.2 Passage du local au global et l'existence du borné absorbant dans Y dans le cas (E-E) pour données petites

On va traiter le cas (E-E) pour (2.2), (i.e $\delta = m = 1$). En fait dans le cas conservatif où $\chi < \max(-b,0)$, il existe des données initiales qui donnent une explosion en temps fini (voir [35]). Pour éviter l'explosion en temps fini, on prend seulement les données initiales petites en norme $L^2(\mathbb{R}^2)$. On introduit c_{gn} la meilleure constante dans l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$|u|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq c_{gn}|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.18}$$

On suppose maintenant et dans la suite que la force extérieure est assez petite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, i.e

$$c_{gn}|b|\frac{|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma^2} \leq \frac{1}{3}. \tag{2.19}$$

On introduit alors Y défini comme

$$Y = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2); c_{gn}|b||u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \frac{1}{3}\}.$$

Lemme 39 *Muni de la topologie de la norme dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, l'ensemble Y est un espace métrique complet.*

Démonstration: on vérifie que Y est un sous-ensemble fermé de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Ceci est immédiat car l'application $u_0 \mapsto |u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}}$ est continue sur $H^1(\mathbb{R}^2)$. □

Nous allons maintenant vérifier que sous ces hyptohèses de petitesse le système de DS dans le cas (E-E), qui s'écrit

$$iu_t + i\gamma u + u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = buE(|u|^2) + f(x_1,x_2), \tag{2.20}$$

avec une condition initiale

$$u(0,x_1,x_2) = u_0(x_1,x_2), \tag{2.21}$$

dans Y est globalement bien posé dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Proposition 12 *Toute trajectoire commençant en $u_0 \in Y$ reste pour tout temps positif dans un ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^2)$. Dès lors l'équation définit un semi-groupe $S(t), t \geq 0$,*

$$S(t) : H^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2),$$

$$u(t) = S(t)u_0,$$

où $u(t)$ est une solution pour (2.20)-(2.21). De plus, il existe un sous ensemble borné (borné absorbant) β de $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ satisfaisant à

$$S(t)\beta \subset \beta, t \geq 0,$$

et tel que, pour tout sous ensemble borné B de $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$, il existe $t_0(B) > 0$ tel que

$$S(t)B \subset \beta, t \geq t_0(B).$$

Démonstration: en utilisant les Lemmes 36 et 37 sur $[0, T_1 = T_*]$, puis avec la donnée initiale $u(T_1)$ sur $[T_1, T_2]$, et en recollant les solutions obtenues on construit une solution maximale définie sur $[0, T_{max}[$. Pour le passage du local au global, on va utiliser le fait que cette solution maximale vérifie l'alternative suivante

$$\text{soit } T_{max} = +\infty, \text{soit } T_{max} < +\infty \text{ et } |u(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} \to +\infty \text{ quand } t \to T_{max}.$$

Il suffit d'exhiber alors $M_1 > 0$ tel que $|u(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq M_1 \ \forall t;\ t < T_{max}$ pour avoir une solution définie pour tout temps positif.

Lemme 40 *Soit $u_0 \in Y$. Alors pour tout temps positif, $u(t)$ la solution de (2.20)-(2.21) reste dans Y.*

Démonstration: on multiplie l'équation (2.20) par $\overline{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, on intègre en prenant la partie imaginaire on trouve comme $E(|u|^2)$ et $|u|^2$ sont à valeurs réelles et $\operatorname{Im} \int E(|u|^2)|u|^2 = 0$, que

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + 2\gamma|u(t)|^2_{L^2_{x_1,x_2}} = 2\operatorname{Im} \int f\overline{u}.$$

Mais

$$2\operatorname{Im} \int f\overline{u} \leq 2|f|_{L^2_{x_1,x_2}}|u|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \gamma|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma},$$

alors

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|u(t)|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \frac{|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma}.$$

On obtient grâce au lemme de Gronwall, $u_0 \in Y$ et l'hypothèse (2.19), que

$$|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq e^{-\gamma t}|u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + (1 - e^{-\gamma t})\frac{|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma^2} \leq \frac{1}{3c_{gn}|b|}. \tag{2.22}$$

Ceci établit l'invariance de Y. □

Lemme 41 *Il existe une constante K dépendant des données $|f|_{L^2_{x_1,x_2}}$ $|b|$, et γ de l'équation, telle que pour tout ensemble borné $B \subset Y$, pour toute $u(t)$ solution de (2.20)-(2.21) issue de u_0 appartenant à B, il existe un temps t_1 dépendant de B, tel que $|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K \ \forall t \geq t_1$.*

Démonstration: on va proceder aux intégrations par parties en supposant que tous les calculs sont licites. En fait, en toute rigueur, il faudrait établir les estimations pour des trajectoires issues de données initiales très régulières dans Y, et alors étendre ces estimations par densité à toute trajectoire commençant dans Y. Le passage à la limite, qui utilise la continuité de $S(t)$ est standard. Nous nous bornons ici à donner les estimations a priori. Pour $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ on a, en utilisant la formule de Plancherel,

$$\begin{aligned}
\int E(|u|^2)|u|_t^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{Re}\int \widehat{E(|u|^2)}\overline{\widehat{|u|_t^2}} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\mathrm{Re}\int \frac{\xi_1^2}{\zeta_1^2+\xi_2^2}\widehat{|u|^2}\overline{\widehat{|u|_t^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\int \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}\widehat{|u|^2}\overline{\widehat{|u|^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\int \widehat{E(|u|^2)}\overline{\widehat{|u|^2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int E(|u|^2)|u|^2,
\end{aligned}$$

alors

$$\int E(|u|^2)|u|_t^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int E(|u|^2)|u|^2.$$

On multiplie l'équation (2.20) par $-\overline{u}_t - \gamma\overline{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, on intègre en prenant la partie réelle on trouve

$$\frac{d}{dt}q(u) + 2\gamma q(u) = H(u), \tag{2.23}$$

où

$$q(u) = |\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{b}{2}\int E(|u|^2)|u|^2 + 2\mathrm{Re}\int f\overline{u},$$

$$H(u) = -\gamma\ b\int E(|u|^2)|u|^2 + 2\gamma\mathrm{Re}\int f\overline{u}.$$

En utilisant l'inégalité (2.18) et le fait que E soit un opérateur borné de norme 1 sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ on obtient

$$-b\int E(|u|^2)|u|^2 \le |b||E(|u|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}} \le |b||u|^4_{L^4_{x_1,x_2}}.$$

Alors on trouve grâce à la définition de Y, en utilisant la borne $L^2(\mathbb{R}^2)$ du Lemme précédent, que

$$\begin{aligned}
q(u) &\ge |\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} - \frac{|b|}{2}|u|^4_{L^4_{x_1,x_2}} - 2|f|_{L^2_{x_1,x_2}}|u|_{L^2_{x_1,x_2}} \\
&\ge |\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} - \frac{c_{gn}|b|}{2}|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}}|\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} - 2|f|_{L^2_{x_1,x_2}}|u|_{L^2_{x_1,x_2}} \\
&\ge (1 - \frac{c_{gn}|b|}{2}|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}})|\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} - 2|f|_{L^2_{x_1,x_2}}|u|_{L^2_{x_1,x_2}} \\
&\ge \frac{1}{3}|\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} - K.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Rappelons que K est une constante qui dépend des données f, b, γ et qui peut varier d'une ligne à l'autre. En plus

$$\begin{aligned} H(u) &\leq \gamma|b||u|^4_{L^4_{x_1,x_2}} + 2\gamma|f|_{L^2_{x_1,x_2}}|u|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq |b|\gamma c_{gn}|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}}|\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma(|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + |u|^2_{L^2_{x_1,x_2}}) \\ &\leq \frac{\gamma}{3}|\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + K \leq \gamma q(u) + K. \end{aligned}$$

En utilisant (2.23), on obtient

$$\frac{d}{dt}q(u) + \gamma q(u) \leq K.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$q(u) \leq q(u_0)e^{-\gamma t} + (1 - e^{-\gamma t})K_1. \tag{2.25}$$

On a

$$\begin{aligned} q(u_0) &= |\nabla u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{b}{2}\int E(|u_0|^2)|u_0|^2 + 2\mathrm{Re}\int f\overline{u}_0 \\ &\leq |u_0|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + \frac{|b|}{2}|u_0|^4_{L^4_{x_1,x_2}} + 2|f|_{L^2_{x_1,x_2}}|u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq C(u_0, \gamma, |b|, f), \end{aligned}$$

où $C(u_0, f)$ dépend de $|u_0|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$, γ, b et de f. D'une part, on conclut grâce à (2.24), (2.25) qu'il n'y a pas une explosion en temps fini dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. D'autre part, on déduit de (2.25) que l'ensemble

$$\beta = \{u \in Y; q(u) \leq K_1\}, \tag{2.26}$$

est un ensemble absorbant pour $S(t)$ dans $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$; rappelons que la condition (2.19) et la définition de Y donnent un contrôle en norme $L^2(\mathbb{R}^2)$ des trajectoires pour tout temps positif. Cet ensemble β est positivement invariant par $S(t)$ et borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. □

2.3 Existence d'un attracteur global $\mathcal{A}$

Rappelons la définition d'un attracteur global (voir [74])

Définition 8 *$\mathcal{A}$ est un attracteur global pour $(S(t))_{t\geq 0}$ si*
- *$\mathcal{A}$ est compact dans $H^1(\mathbb{R}^2)$;*
- *$\mathcal{A}$ est invariant par le flot, i.e $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$;*
- *$\forall B$ borné de $H^1(\mathbb{R}^2)$,*

$$dist(S(t)B, \mathcal{A}) = \sup_{\phi\in B}\inf_{a\in\mathcal{A}}|S(t)\phi - a|_{H^1_{x_1,x_2}} \to 0, \ \textit{quand } t \to +\infty.$$

Théorème 2.3.1 *$S(t)$ possède un attracteur global et compact dans $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on suit la démarche de [57]. Pour une décomposition adaptée utilisant des espaces à poids, on démontre la précompacité des trajectoires dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On en déduit la précompacité dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ par l'argument de J. Ball [9]. On conclut ensuite. On démontre la compacité asymptotique pour des trajectoires incluses dans le borné absorbant après un certain temps transitoire ; quitte à opérer une translation en temps, on pourra se restreindre à des trajectoires incluses pour tout temps positif dans le borné absorbant.

Pour $\alpha > 0$, on considére χ_α une fonction de troncature C^∞ telle que

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1+\alpha. \end{cases}$$

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $(f\chi_\alpha)$ converge vers f quand $\alpha \to +\infty$, alors $\forall \eta \in]0,1]$, il existe $\alpha(\eta) > 0$ tel que

$$|f - f_\eta|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \eta, \forall \eta \in]0,1],$$

où

$$f_\eta = f\chi_{\alpha(\eta)}.$$

On décompose la fonction u solution de (2.20) comme somme de deux fonctions v et w, où v est une solution du problème

$$\begin{aligned} iv_t + i\gamma v + (1-i\eta)\Delta v - bE(|u|^2)v = f - f_\eta - i\eta\Delta u \\ v(0) = u_0. \end{aligned} \tag{2.27}$$

De même w est solution du problème

$$\begin{aligned} iw_t + i\gamma w + (1-i\eta)\Delta w - bE(|u|^2)w = f_\eta \\ w(0) = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Lemme 42 *Pour $u_0 \in \beta$ et $\eta \in]0,1]$, il existe $K > 0$ qui dépend de γ, f, b, et $t(\eta) > 0$ qui dépend de η, γ, f, b tels que*

$$|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} e^{-\gamma t} + \eta K,$$

$$|v|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \eta^{\frac{1}{2}} K, \ \forall t \geq t(\eta).$$

Démonstration: on multiplie l'équation (2.27) par $\overline{v}$, on intègre en prenant la partie imaginaire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \eta|\nabla v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} = \text{Im}\int (f-f_\eta)\overline{v} + \eta\text{Re}\int \nabla u\overline{\nabla v} \\ \leq\ & |f-f_\eta|_{L^2_{x_1,x_2}}|v|_{L^2_{x_1,x_2}} + \eta|\nabla u|_{L^2_{x_1,x_2}}|\nabla v|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ \leq\ & \frac{1}{2\gamma}|f-f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{\gamma}{2}|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \eta|\nabla v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{\eta}{4}|\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}}. \end{aligned}$$

Or $|f - f_\eta|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \eta$ et $|\nabla u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq M_1^2$, où M_1 désigne ici et dans la suite la taille de la boule absorbante dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ définie par le Lemme 41. Par conséquent

$$\frac{d}{dt}|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \eta(M_1^2 + \frac{1}{\gamma}).$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} e^{-\gamma t} + \frac{\eta}{\gamma^2}(\gamma M_1^2 + 1)(1 - e^{-\gamma t}), \tag{2.29}$$

et comme $u_0 \in \beta \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, alors $|u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq M_1^2$, donc

$$|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq M_1^2 e^{-\gamma t} + \eta K,$$

où k dépend de $\gamma,\ f$.
Finalement

$$|v|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \eta^{\frac{1}{2}} K,\ \forall t \geq t(\eta).$$

□

Remarque 11 *L'estimation (2.29) nous donne qu'il existe une constante K telle que $|v|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K$ pour tout temps $t \geq 0$.*

On démontrera dans la suite que v reste borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour t positif, en démontrant que $w = u - v$ reste borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On démontre maintenant une première estimation sur w.

Lemme 43 *Il existe une constante K dépendant des données f, γ, b de l'équation telle que pour $u_0 \in \beta$, pour t positif, $|w|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq K$.*

Démonstration: on sait que $w = u - v$ reste borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ car v l'est en vertu de la remarque précédente. On montre maintenant une estimation sur ∇w. On multiplie l'équation (2.28) par $-\overline{\Delta w}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, on intègre en prenant la partie imaginaire, on trouve avec l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^8(\mathbb{R}^2)$ que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \eta|\Delta w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \\
= \quad & -b\mathrm{Im}\int E(|u|^2) w\overline{\Delta w} - \mathrm{Im}\int f_\eta \overline{\Delta w} \\
\leq \quad & |b||E(|u|^2)|_{L^4_{x_1,x_2}} |w|_{L^4_{x_1,x_2}} |\Delta w|_{L^2_{x_1,x_2}} + |f_\eta|_{L^2_{x_1,x_2}} |\Delta w|_{L^2_{x_1,x_2}} \\
\leq \quad & c|b||u|^2_{L^8_{x_1,x_2}} |w|^{\frac{1}{2}}_{L^2_{x_1,x_2}} |\nabla w|^{\frac{1}{2}}_{L^2_{x_1,x_2}} |\Delta w|_{L^2_{x_1,x_2}} + |f_\eta|_{L^2_{x_1,x_2}} |\Delta w|_{L^2_{x_1,x_2}} \\
\leq \quad & \eta|\Delta w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + K_\eta + \frac{\gamma}{2}|\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{1}{2\eta}|f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}},
\end{aligned}$$

où K_η dépend de γ, f, b, η. Alors

$$\frac{d}{dt}|\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K_\eta + \frac{1}{\eta}|f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on obtient

$$|\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |\nabla w(0)|^2_{L^2_{x_1,x_2}} e^{-\gamma t} + (K_\eta + \frac{1}{\eta}|f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}})(1-e^{-\gamma t}).$$

Mais $\nabla w(0) = 0$, et

$$|\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K_\eta + \frac{1}{\eta}|f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

□

On montre maintenant une estimation dans un espace à poids.

Lemme 44 *Il existe une constante K_η qui dépend de $\gamma,\ f,\ b,\ \eta$ telle que pour $u_0 \in \beta$, et pour le poids $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on a*

$$|\rho w|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K_\eta.$$

Démonstration: soit $\overrightarrow{\rho} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ le gradient de $\frac{1}{2}\rho^2$. On multiplie l'équation (2.28) par $\rho^2\overline{w}$, on intègre en prenant la partie imaginaire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \mathrm{Im}\int \rho^2\overline{w}\Delta w - \eta\mathrm{Re}\int \rho^2\overline{w}\Delta w = \mathrm{Im}\int \rho^2\overline{w} f_\eta,$$

où

$$\mathrm{Im}\int \rho^2\overline{w}\Delta w = -2\mathrm{Im}\int (\overrightarrow{\rho}.\nabla w)\overline{w},$$

et

$$-\eta\mathrm{Re}\int \rho^2\overline{w}\Delta w = 2\eta\mathrm{Re}\int (\overrightarrow{\rho}.\nabla w)\overline{w} + \eta\int \rho^2|\nabla w|^2.$$

On obtient dès lors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \eta\int \rho^2|\nabla w|^2 \\
= \;& 2\mathrm{Im}\int (\overrightarrow{\rho}.\nabla w)\overline{w} - 2\eta\mathrm{Re}\int (\overrightarrow{\rho}.\nabla w)\overline{w} + \mathrm{Im}\int \rho^2 f_\eta\overline{w} \\
\leq \;& 2(1+\eta)|w|_{L^2_{x_1,x_2}}|\rho\nabla w|_{L^2_{x_1,x_2}} + \int \rho^2|f_\eta\overline{w}| \\
\leq \;& (\eta + 2 + \frac{1}{\eta})|w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \eta|\overrightarrow{\rho}.\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{\gamma}{2}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{1}{2\gamma}|\rho f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

Comme $|w|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |u|_{L^2_{x_1,x_2}} + |v|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K$, où K dépend de $\gamma,\ b,\ f$, alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{\gamma}{2}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K(\eta + 2 + \frac{1}{\eta}) + \frac{1}{2\gamma}|\rho f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

En appliquant le lemme de Gronwall on trouve

$$|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K_\eta,$$

où K_η dépend de $\eta,\ f,\ \gamma,\ b.$ $\square$

Conclusion 1 *$w(t)$ est captive dans un borné de $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left(\mathbb{R}^2, (1+\rho^2)dx_1dx_2\right)$.*

On démontre ensuite un résultat très classique dont un énoncé plus général se trouve dans [26].

Lemme 45 *L'injection $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left(\mathbb{R}^2, (1+\rho^2)dx_1dx_2\right) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ est compacte.*

Démonstration: soit w_n une suite bornée par M dans $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left(\mathbb{R}^2, (1+\rho^2)dx_1dx_2\right)$. Il existe une sous-suite toujours notée w_n telle que $w_n \rightharpoonup w$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ faible. On veut démontrer que $w_n \to w$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Pour $w_n \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left(\mathbb{R}^2, (1+\rho^2)dx_1dx_2\right)$ on écrit

$$w_n = \chi_\alpha w_n + (1-\chi_\alpha)w_n,$$

avec

$$|w_n|_{H^1(\mathbb{R}^2)} + |w_n|_{L^2(\mathbb{R}^2,(1+\rho^2)dx_1dx_2)} \leq M.$$

On pose $s_n = w_n - w$, on a $s_n \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, et cette suite est bornée par $2M$ dans $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2\left(\mathbb{R}^2, (1+\rho^2)dx_1dx_2\right)$. On écrit

$$|s_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq |\chi_\alpha s_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |(1-\chi_\alpha)s_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On estime $|(1-\chi_\alpha)s_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}(1-\chi_\alpha)^2 s_n^2 dx_1dx_2 &= \int_{\rho>\alpha}(1-\chi_\alpha)^2 s_n^2 dx_1dx_2 \\
&\leq \int_{\rho>\alpha} s_n^2 \frac{1+\rho^2}{1+\rho^2} dx_1dx_2 \\
&\leq (\sup_{\rho>\alpha}\frac{1}{1+\rho^2})\int_{\rho>\alpha} s_n^2(1+\rho^2)dx_1dx_2 \\
&\leq \frac{1}{1+\alpha^2}|s_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2,(1+\rho^2)dx_1dx_2)} \\
&\leq \frac{4M^2}{1+\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Comme $\chi_\alpha s_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)\,;\ \Omega = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2;\ \rho \leq 1+\alpha\}$, et $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte, alors il existe une sous-suite de $\chi_\alpha s_n$ qui converge fortement vers 0 dans $L^2(\Omega)$. Ceci donne par l'unicité de la limite

$$\chi_\alpha s_{n_k} \to 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2).$$

On obtient

$$\begin{aligned} |s_{n_k}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq |\chi_\alpha s_{n_k}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |(1-\chi_\alpha)s_{n_k}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq 0 + \frac{4M^2}{1+\alpha^2}. \end{aligned}$$

Quand $\alpha \to +\infty$, on a $s_n \to 0$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. □

Conclusion 2 *On a pour $t \geq t(\eta)$, $S(t)\beta \subset B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}k) + K_\eta$, où K_η est un compact de $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

On va maintenant en déduire la compacité dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 46 *$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\forall t \geq t(\eta)$ alors*

$$S(t)\beta \subset \cup_x B_{L^2}(x, 2\varepsilon),$$

cette réunion étant finie.

Démonstration: comme K_η est compact, il existe un recouvrement fini tel que

$$K_\eta \subset \cup_x B_{L^2}(x, \varepsilon).$$

Donc

$$K_\eta + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}k) \subset \cup_x B_{L^2}(x, \varepsilon) + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}k) \subset \cup_x (B_{L^2}(x, \varepsilon) + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}k)),$$

où

$$B_{L^2}(x, \varepsilon) + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}k) \subset B_{L^2}(x, \varepsilon + \eta^{\frac{1}{2}}k).$$

On choisit $\eta^{\frac{1}{2}}k < \varepsilon$, on obtient

$$K_\eta + B_{L^2}(0, \eta^{\frac{1}{2}}k) \subset \cup_x B_{L^2}(x, 2\varepsilon).$$

□

On démontre maintenant la compacité asymptotique dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Lemme 47 *Pour toutes suites $t_n \to +\infty$ et $u_n \in \beta$, il existe une sous-suite de $S(t_n)u_n$ qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: pour $t \geq t(\eta)$ par le Lemme 46, on a

$$S(t_n)u_n \subset \cup_x B_{L^2}(x, 2\varepsilon) \subset L^2(\mathbb{R}^2),$$

cette réunion étant finie. Donc $S(t_n)u_n$ est précompact dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, par conséquent pour toute suite u_n dans β, il existe une sous-suite de $S(t_n)u_n$ qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. □

On a besoin d'un résultat intermédiaire.

Lemme 48 *Pour t positif, $S(t)$ est continu sur les ensembles bornés de $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Remarque 12 *On démontre en fait que $u_0 \mapsto u(t)$ est continue de $L^2(\mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$, sur les bornés de $H^1(\mathbb{R}^2)$, pour chaque $T > 0$.*

Démonstration: on peut démontrer ce lemme pour T petit et puis on conclut récursivement sur k, de $k=0$ jusqu'à m tel que $mT \leq t < (m+1)T$.
L'estimation duale de (2.9) est

$$|\int_0^T U(t-s)f(s)ds|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq c|f|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}}. \tag{2.30}$$

Pour $u(t)$ une solution de (2.20) et $U(t)=e^{it\Delta}$, on utilise la forme de Duhamel de (2.20) pour $0<t<T$

$$u(t) = e^{-\gamma t}U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-s)e^{-\gamma(t-s)}f(x)\,ds - ib\int_0^t U(t-s)e^{-\gamma(t-s)}uE(|u|^2)ds. \tag{2.31}$$

Pour u, v deux solutions de (2.20) avec deux données initiales u_0, v_0, on trouve grâce à la Proposition 35 que

$$\begin{aligned}
|u(t)-v(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq e^{-\gamma t}|u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + |b||(u-v)E(|u|^2)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}} \\
&\quad + |b||v(E(|u|^2)-E(|v|^2))|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}} \\
&\leq e^{-\gamma t}|u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + |b||u-v|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^{\frac{8}{3}}_T L^8_{x_1,x_2}} \\
&\quad + |b||v|_{L^8_{T,x}}|u-v|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}|u+v|_{L^{\frac{8}{5}}_T L^8_{x_1,x_2}} \\
&\leq e^{-\gamma t}|u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + |b||u-v|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^{\frac{8}{3}}_T H^1_{x_1,x_2}} \\
&\quad + |b||v|_{L^8_T H^1_{x_1,x_2}}|u-v|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}|u+v|_{L^{\frac{8}{5}}_T H^1_{x_1,x_2}} \\
&\leq e^{-\gamma t}|u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + c|b|T^{\frac{3}{4}}|u-v|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

On choisit T tel que $c|b|T^{\frac{3}{4}} < \frac{1}{2}$, alors

$$|u-v|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |u-v|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}} \leq 2|u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

□

Maintenant on passe à la démonstration de la précompacité des trajectoires dans $H^1(\mathbb{R}^2)$;

Proposition 13 *Pour toute suite $u_j \in \beta$ et pour toute suite $t_j \to +\infty$, il existe $z \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et une sous-suite de $S(t_j)u_j$ qui converge fortement vers z dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on applique ici un argument du à J. Ball [9]. Comme β borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors β est faiblement sequentiellement compact. Donc $\forall t_j \to +\infty$ et $u_j \in \beta$, on peut supposer que $S(t_j)u_j \rightharpoonup z$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On invoque alors le Lemme 47 pour écrire qu'il existe une sous-suite de $S(t_j)u_j$ qui converge fortement vers z' dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.
D'après la première étape on a

$$S(t_j)u_j \rightharpoonup z \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow S(t_j)u_j \rightharpoonup z \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2),$$

$$S(t_j)u_j \to z' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow S(t_j)u_j \rightharpoonup z' \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Par unicité de la limite on a $z = z'$. Comme β est positivement invariant, il vient

$$S(t)\beta \subset \beta, \forall t \geq 0.$$

De même pour $T > 0$, la suite $S(t_j - T)u_j \in \beta$ est une suite bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, donc il existe une sous-suite $S(t_j - T)u_j$ qui converge vers $S(-T)z$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ et fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Comme $S(t)$ est fortement continu sur les bornés de $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^2)$ alors

$$S(t_j + t - T)u_j = S(t)S(t_j - T)u_j \to S(t - T)z \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2).$$

On va alors démontrer

Lemme 49 *Pour toute suite $t_j \to +\infty$ et $u_j \in \beta$, alors*

$$\limsup_{j\to+\infty} |S(t_j)u_j|^2_{H^1_{x_1,x_2}} \leq |z|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

Démonstration: on multiplie l'équation (2.20) par $-\overline{u}_t - \gamma\overline{u}$, en prenant la partie réelle on trouve

$$\frac{d}{dt}(|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(u(t))) + 2\gamma(|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(u(t))) = H(u(t)) \tag{2.32}$$

tels que

$$G(u) = -|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{b}{2}\int E(|u|^2)|u|^2 + 2\mathrm{Re}\int f\overline{u},$$

$$H(u) = 2\gamma\mathrm{Re}\int f\overline{u} - b\gamma\int E(|u|^2)|u|^2.$$

En intégrant (2.32) entre 0 et t on obtient

$$|S(t)u_0|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(S(t)u_0) = e^{-2\gamma t}(|u_0|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(u_0)) + \int_0^t e^{2\gamma(s-t)}H(S(s)u_0)ds. \tag{2.33}$$

Alors, pour $u_0 = S(t_j - T)u_j$, $t = T$ et $j \to +\infty$, on obtient

$$\begin{aligned} &\limsup_{j\to+\infty}\Big(|S(t_j)u_j|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(S(t_j)u_j)\Big) \leq \\ &e^{-2\gamma T}\limsup_{j\to+\infty}\Big(|S(t_j - T)u_j|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(S(t_j - T)u_j)\Big) + \\ &\limsup_{j\to+\infty}\int_0^T e^{2\gamma(s-T)}H(S(s + t_j - T)u_j)ds. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Lemme 50 *Pour $u,\ v \in \beta \subset H^1(\mathbb{R}^2)$, avec $u \to v$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ on a*

$$G(u) \to G(v) \text{ dans } \mathbb{R},$$

$$H(u) \to H(v) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Démonstration: comme $u \to v$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, et comme $u \in \beta$ alors u est borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Comme l'injection $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^2)$ est une injection continue, et $|u|_{H^{\frac{1}{2}}_{x_1,x_2}} \leq c|u|^{\frac{1}{2}}_{L^2_{x_1,x_2}}|u|^{\frac{1}{2}}_{H^1_{x_1,x_2}}$, donc u converge fortement vers v dans $L^4(\mathbb{R}^2)$ quand $j \to +\infty$ j'ai enlevé une virgule et

$$\int f\overline{u} \to \int f\overline{v}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
& \int E(|u|^2)|u|^2 - E(|v|^2)|v|^2 \\
\leq \;& |\int (E(|u|^2) - E(|v|^2))|u|^2| + |\int E(|v|^2)(|u|^2 - |v|^2)| \\
\leq \;& |E(|u|^2) - E(|v|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}} + |E(|v|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}}||u|^2 - |v|^2|_{L^2_{x_1,x_2}} \\
\leq \;& c||u|^2 - |v|^2|_{L^2_{x_1,x_2}}(|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}} + |v|^2_{L^4_{x_1,x_2}}) \\
\leq \;& c(|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}} + |v|^2_{L^4_{x_1,x_2}})(|u|_{L^4_{x_1,x_2}} + |v|_{L^4_{x_1,x_2}})|u - v|_{L^4_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

Donc si $u \to v$ dans $L^4(\mathbb{R}^2)$ il vient

$$\int E(|u|^2)|u|^2 \to \int E(|v|^2)|v|^2.$$

Qui donne le résultat. $\square$

Grâce au Lemme 50, quand $j \to +\infty$, on a

$$G(S(t_j - T)u_j) \to G(S(-T)z),$$

$$H(s + t_j - T)u_j) \to H(s - T)z.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\begin{aligned}
& \lim_{j\to+\infty} \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} H(S(s + t_j - T)u_j)ds = \int_0^T e^{2\gamma(s-T)} H(S(s - T)z)ds \\
& = |z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(z) - (|S(-T)z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(S(-T)z))e^{-2\gamma T}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

En plus, comme $S(t_j - T)u_j$ reste dans le borné absorbant $\beta \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ pour j assez grand, on trouve

$$e^{-2\gamma T} \limsup_{j\to+\infty} \left(|S(t_j - T)u_j|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(S(t_j - T)u_j) \right) \leq (M_1 + G(S(-T)z))e^{-2\gamma T}.$$

On obtient grâce à (2.34) que

$$\begin{aligned}
& \limsup_{j\to+\infty} \left(|S(t_j)u_j|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(S(t_j)u_j) \right) \leq \\
& (M_1 + G(S(-T)z))e^{-2\gamma T} + |z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(z) - (|S(-T)z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + G(S(-T)z))e^{-2\gamma T}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Grâce au Lemme 50 on a $\lim_{j\to+\infty} G(S(t_j)u_j) = G(z)$, en plus $|S(-T)z|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq \liminf_j |S(t_j - T)u_j|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq M_1$ alors, quand $T \to +\infty$, on obtient

$$\limsup_{j\to+\infty} |S(t_j)u_j|^2_{H^1_{x_1,x_2}} \leq |z|^2_{H^1_{x_1,x_2}}. \tag{2.37}$$

Par conséquence $S(t_j)u_j \to z$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ fort. □

Donc on a la précompacité des trajectoires dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Comme on sait que Y est fermé dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors on a la précompacité des trajectoires dans Y.
Maintenant on conclut

Proposition 14 *Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble suivant*

$$\mathcal{A} = \{a \in \beta, \exists \phi_n \in \beta \ \textit{et}\ t_n \to +\infty,\ \textit{tel que}\ S(t_n)\phi_n \to a \ \textit{dans}\ H^1(\mathbb{R}^2)\}.$$

Cet ensemble est un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour l'équation (2.20).

Démonstration: on va utiliser le Théorème 1.1.1 dans [74] pour prouver l'éxistence d'un attracteur global. En fait $\mathcal{A}$ est l'ensemble ω-limite de β défini par

$$\mathcal{A} = \cap_{s\geq 0}\overline{\cup_{t\geq s} S(t)\beta}.$$

D'abord, $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide car il contient au moins les solutions stationnaires de l'équation (2.20). On démontre dans le Lemme 51 ci-dessous qu'il existe au moins une solution stationnaire.

Ensuite on a

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0;$$

en effet, si $b \in S(t)\mathcal{A}$ alors $\exists a \in \mathcal{A}$ tel que $b = S(t)a$.
Par conséquent$\exists \phi_n \in \beta; \exists t_n \to +\infty$ tel que $S(t_n)\phi_n \to a$.
Donc par continuité de $S(t)$ on a

$$S(t)S(t_n)\phi_n \to S(t)a = b.$$

De plus

$$S(t)S(t_n)\phi_n = S(t+t_n)\phi_n,$$

$$S(t+t_n)\phi_n \to b = S(t)a,$$

mais $t + t_n \to +\infty,\ \phi_n \in \beta$, alors $b \in \mathcal{A}$.
Donc

$$S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}.$$

Soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $a = \lim_{n\to+\infty} S(t_n - t)S(t)\phi_n$. On pose $v_n = S(t_n - t)\phi_n$, on applique la Proposition 13 à v_n, donc il existe v_{nk} une sous-suite qui converge vers b dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Par continuité de $S(t)$ on trouve

$$S(t)v_{nk} \to S(t)b.$$

De plus $v_{nk} = S(t_{nk} - t)\phi_{nk}$, donc

$$S(t)v_{nk} = S(t_{nk})\phi_{nk} \to a.$$

Donc $S(t)b = a$, et $\mathcal{A} \subset S(t)\mathcal{A}$.

Maintenant on montre que $\mathcal{A}$ est compact dans $H^1(\mathbb{R}^2)$; soit x_n une suite à valeurs dans $\mathcal{A}$, comme on a que $S(t)$ est réversible en temps alors

$$x_n = S(t)S(-t)x_n, \ \forall t \geq 0.$$

Pour $t = n$, on pose $y_n = S(-n)x_n \in \mathcal{A} \subset \beta$, donc $x_n = S(n)y_n \subset \beta$. On applique la Proposition 13 à x_n donc, il existe une sous-suite de $S(n)y_n = x_n$ qui converge fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ i.e

$$x = \lim_{i\to+\infty} x_{n_i} = \lim_{i\to+\infty} S(n_i)y_{n_i}.$$

Donc $\mathcal{A}$ est compact dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Il reste à montrer que $\mathcal{A}$ attire les bornés de $H^1(\mathbb{R}^2)$, i.e pour tout borné B de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$dist(S(t)B, \mathcal{A}) \to 0, \text{ quand } t \to +\infty.$$

On le montre par l'absurde. On prend B_0 tel que

$$\exists \delta > 0, \ t_j \to +\infty, \text{ tel que } dist(S(t_j)B_0, \mathcal{A}) \geq \delta.$$

Pour chaque j il existe u_j dans B_0 tel que

$$dist(S(t_j)u_j, \mathcal{A}) \geq \frac{\delta}{2} > 0.$$

On sait que

$$S(t)B_0 \subset \beta, \ \forall t \geq t_0.$$

On applique la Proposition 13 à $S(t_j)u_j = S(t_j - t_0)S(t_0)u_j$, alors il existe une sous-suite $S(t_{j_i})u_{j_i}$ qui converge fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$u = \lim_{j_i\to+\infty} S(t_{j_i})u_{j_i} = \lim_{j_i\to+\infty} S(t_j - t_0)S(t_0)u_j.$$

Mais on a

$$S(t_j)u_j \in B_0, \ \forall t_j \geq t_0 \Rightarrow S(t_0)u_j \in B_0.$$

Donc $u \in \mathcal{A}$, c'est une contradiction. En appliquant le Théorème 1.1.1 de [74], on trouve que $\mathcal{A}$ est un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour l'équation (2.20). □

Lemme 51 *Il existe u dans Y tel que*

$$\Delta u + i\gamma u = buE(|u|^2) + f.$$

Démonstration: rappelons le lemme classique (voir [18])

Lemme 52 *Pour F une fonction continue de $(\mathbb{R}^D, |.|)$ euclidien dans $\mathbb{R}^D$, et $R > 0$ tel que $F(\xi).\xi > 0$ pour tout ξ tel que $|\xi| = R$. Alors il existe $\xi \in \mathbb{R}^D$ avec $|\xi| < R$, et tel que $F(\xi) = 0$.*

Démonstration: raisonnons par l'absurde. Soit $U = \{\xi \in \mathbb{R}^D : |\xi| \leq R\}$
Si $F(\xi)$ ne s'annule pas dans U, on introduit

$$G(\xi) = -\frac{RF(\xi)}{|F(\xi)|}.$$

G est continue de U dans U. D'après le théorème de point fixe de Brouwer, il existe $\xi_0 \in U$ tel que $G(\xi_0) = \xi_0$, donc

$$-\frac{RF(\xi_0)}{|F(\xi_0)|} = \xi_0, \tag{2.38}$$

qui donne que $|\xi_0| = R$. On prend le produit scalaire dans $\mathbb{R}^D$ de (2.38) avec ξ_0, on obtient

$$-\frac{RF(\xi_0).\xi_0}{|F(\xi_0)|} = \xi_0^2.$$

Qui donne la contradiction avec $F(\xi_0).\xi_0 > 0$. □

En utilisant le Lemme 52 on se ramène à la résolution d'un problème approché en dimension finie par la méthode de Galerkin. Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $H^1(\mathbb{R}^2)$, et soit V_m l'espace vectoriel engendré par $(e_0, ..., e_m, ie_0, ..., ie_m)$, on résoud :
trouver $u_m \in V_m$; $\forall v_m \in V_m$

$$(\Delta u_m, v_m) + \gamma(iu_m, v_m) = (bu_m E(|u_m|^2), v_m) + (f, v_m), \tag{2.39}$$

avec $(.,.)$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$(u, v) = \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^2} u\overline{v}dx.$$

On considère $P_m : L^2 \to V_m$ la projection orthogonale, qui est un opérateur auto-adjoint. Comme $L^2(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ on peut écrire $P_m : H^{-1} \to V_m$, alors

$$F(u_m) = P_m \left(\Delta u_m + i\gamma u_m - bu_m E(|u_m|^2) - f\right). \tag{2.40}$$

En prenant $v_m = -iu_m$ dans (2.39) il vient

$$(F(u_m), u_m) = \gamma |u_m|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \mathrm{Im} \int f\overline{u}_m.$$

Soit ε petit destiné à tendre vers 0. Alors $(F(u_m), u_m) > 0$ pour $|u_m|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma} + \varepsilon$. D'après le Lemme 52 il existe u_m^ε tel que $F(u_m^\varepsilon) = 0$ et $|u_m^\varepsilon|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma} + \varepsilon$. Ceci étant

vrai pour tout ε, on obtient ainsi une solution stationnaire u_m qui satisfait à $|u_m|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma}$; en effet, l'espace V_m étant de dimensions finie, on peut extraire une sous-suite toujours notée u_m^ε qui converge vers u_m dans V_m pour la topologie $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'application F étant continue sur V_m, il vient alors $F(u_m) = 0$ et bien sur $|u_m|^2 \leq \frac{|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma^2}$.
Il reste à passer à la limite pour dire que u_m converge vers un point fixe, qui est une solution stationnaire de l'equation DS. Pour cela, on a besoin d'estimations a priori. On pose $v_m = -u_m$ dans (2.39). On obtient

$$|\nabla u_m|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -b\mathrm{Re}\int |u_m|^2 E(|u_m|^2) - \mathrm{Re}\int f\overline{u}_m dx; \tag{2.41}$$

comme u_m est borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, en utilisant l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg pour contrôler $\int |u_m|^2 E(|u_m|^2)$ par $|u_m|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \leq c|\nabla u_m|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}|u_m|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$, il vient

$$|\nabla u_m|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq c|b||\nabla u_m|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}|u_m|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|u_m|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Puisque $|u_m|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma}$ assez petit (confer la condition (2.19)) alors on déduit de (2.42) que u_m est borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer $u_m \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors Δu_m converge faiblement vers Δu dans $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$. En plus comme u_m est borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ alors $E(|u_m|^2)u_m$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, ce qui donne puisque P_m est un opérateur borné alors $P_m E(|u_m|^2)u_m$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, donc $\exists\phi$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que

$$P_m E(|u_m|^2)u_m \rightharpoonup \phi \text{ faiblement dans } L^2(\mathbb{R}^2).$$

Ceci donne par la convergence faible dans (2.40), que u, ϕ sont solutions de l'équation

$$\Delta u + i\gamma u = b\phi + f. \tag{2.42}$$

Il reste à prouver que $\phi = uE(|u|^2)$.

Lemme 53 *Pour $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ on a $(\phi, iu) = 0$, où $(.,.)$ désigne le produit scalaire $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on observe tout d'abord que si $P_m E(|u_m|^2)u_m$ converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ alors $E(|u_m|^2)u_m$ converge *aussi* vers ϕ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. En effet, si ψ est une fonction dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, en utilisant le caractère auto-adjoint de P_m, le fait que $P_m\psi$ converge fortement vers ψ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ (par densité des V_m dans $L^2(\mathbb{R}^2)$), et le fait que $E(|u_m|^2)u_m$ soit une suite bornée, il vient

$$((Id - P_m)E(|u_m|^2)u_m, \psi) = (E(|u_m|^2)u_m, \psi - P_m\psi) \to 0.$$

Soit maintenant $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction test à valeurs réelles. Soit K le support de θ. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que

$$u_m \to u \text{ dans } L^2(K),$$

et

$$u_m E(|u_m|^2) \to \phi \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2) \text{ faible.}$$

Il vient alors

$$0 = \text{Re} \int E(|u_m|^2) u_m i\theta \overline{u}_m \to \text{Re} \int \phi i \overline{u} \theta.$$

Ceci étant vrai $\forall \theta$, alors $(\phi, iu) = 0$. □

En appliquant le Lemme 53, on multiplie (2.42) par $i\overline{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ on trouve

$$\gamma |u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} = (f, i\overline{u}) = \lim_{m\to+\infty} (f, i\overline{u}_m) = \lim_{m\to+\infty} \gamma |u_m|^2_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

Alors $u_m \to u$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ fort, donc par interpolation $u_m \to u$ dans $L^4(\mathbb{R}^2)$ fort. Comme

$$\begin{aligned} |u_m E(|u_m|^2) - uE(|u|^2)|_{L^2} &\leq |(u_m - u)E(|u_m|^2)|_{L^2} + |uE(|u_m|^2 - |u|^2)|_{L^2} \\ &\leq c|u_m - u|_{L^4} |u_m|_{L^8} + |u|_{L^8} |(u_m - u)(u + u_m)|_{L^{\frac{8}{3}}} \\ &\leq c|u_m - u|_{L^4} |u_m|_{L^8} + |u|_{L^8} |u_m - u|_{L^4} |u + u_m|_{L^8}, \end{aligned}$$

alors

$$u_m E(|u_m|^2) \to uE(|u|^2) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2) \subset H^{-1}(\mathbb{R}^2).$$

Ceci donne

$$\phi = uE(|u|^2).$$

Alors on a une solution stationnaire u dans $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$. □

2.4 Régularité de l'attracteur $\mathcal{A}$

On suit ici essentiellement la démarche introduite par [40] pour NLS sous critique sur $\mathbb{R}^2$. On considère des trajectoires incluses dans l'attracteur global que l'on découpe en deux parties, une partie basse fréquence et une partie haute fréquence pour un seuil N à choisir convenablement. On va approcher la partie haute fréquence de la trajectoire par la solution d'une EDP non-autonome qui s'avère plus régulière a priori que la trajectoire incluse dans l'attracteur. L'idée est alors de montrer que pour N assez grand en fonction des données $|f|_{L^2_{x_1,x_2}}$, b et γ de l'équation, la solution du problème auxiliaire et la partie haute fréquence de la solution sont asymptotiquement proches quand t tend vers $+\infty$ (en fait on démontrera même que ceci impliquent que la partie haute fréquence et son approximation coincident pour des trajectoires dans l'attracteur). Une difficulté inhérente à la dimension deux d'espace est que l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2)$ n'est pas une algèbre. Pour surmonter cette difficulté technique, nous allons travailler avec des espaces mixtes temps-espace et démontrer que les trajectoires sur l'attracteur sont uniforméments localement intégrables dans des espaces de type $L^4([0,T]; W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$, où la taille T de la fenêtre est fixée assez petite en fonction des données $|f|_{L^2_{x_1,x_2}}$, b et γ. Ce processus d'approximation étant valable pour toute trajectoire après un temps transitoire (le temps d'entrée dans le borné absorbant), nous commençons à décrire le processus pour une trajectoire $u(t)$ incluse dans le borné absorbant pour $t \geq 0$; ceci n'enlève pas de généralité au processus, quitte à effectuer une translation en temps.

2.4.1 Problème auxiliaire

Soit u solution de l'équation (2.20) qui s'écrit sous la forme, en omettant la variable t, pour $x = (x_1, x_2)$ et $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

où $\hat{u}$ désigne la transformée de Fourier de u. Pour un niveau donné $N > 0$ (on supposera même sans se restreindre $N \geq 1$), on définit la partie basse fréquence de u par

$$y(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\max(|\xi_1|,|\xi_2|) \leq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

De même, on définit la partie haute fréquence de u par

$$z(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\max(|\xi_1|,|\xi_2|) \geq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

z est alors solution de l'équation suivante

$$iz_t + i\gamma z + \Delta z = bQ(E(|y+z|^2)(y+z)) + Qf, \tag{2.43}$$

avec une donnée initiale $z(0) = Qu_0 = z_0$ où Q est le projecteur orthogonal sur

$$QH^1 = \{z = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\max(|\xi_1|,|\xi_2|) \geq N} \hat{z}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, \ z \in H^1(\mathbb{R}^2)\}.$$

Finalement on écrit $u = y + z$ et on définit $Pu = (Id - Q)u = y$, le projecteur sur les basses fréquences.

Proposition 15 *Soit $u(t)$ une trajectoire incluse dans le borné absorbant β pour tout temps positif. Il existe alors une constante K (qui est proportionelle à la taille dans $H^1(\mathbb{R})$ du borné absorbant) telle que pour tout t positif, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, alors $|y(t)|_{H^{k+1}(\mathbb{R}^2)} \leq KN^k$.*

Démonstration: soit $k \geq 1$, on estime y en norme H^k.

$$4\pi^2 |y|^2_{H^k} = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{y}(\xi)|^2 d\xi.$$

Mais

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\max(|\xi_1|,|\xi_2| \leq N)} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}(\xi) \chi(\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \leq N) e^{ix\xi} d\xi, \end{aligned}$$

où χ désigne la fonction caractéristique. On obtient

$$\hat{y}(\xi) = \hat{u}(\xi) \chi(\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \leq N).$$

Donc, puisque $\{\xi; \max(|\xi_1|, |\xi_2|) \leq N\} \subset \{\xi; |\xi| \leq \sqrt{2}N\}$, il vient

$$\begin{aligned}
4\pi^2|y|^2_{H^k} &= \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)^k|\hat{y}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)^k|\hat{u}(\xi)|^2(\chi(\max(|\xi_1|, |\xi_2|) \leq N)d\xi \\
&\leq 2(1+N^2)^{k-1}\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= 8\pi^2(1+N^2)^{k-1}|u|^2_{H^1_{x_1,x_2}} \\
&\leq 8\pi^2 M_1^2(2N^2)^{k-1},
\end{aligned}$$

où M_1 est le rayon de la plus petite boule absorbante dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. □

On en déduit que la partie basse fréquence d'une trajectoire est arbitrairement régulière. On considère maintenant z la fonction définie pour $t \geq 0$ comme solution de l'équation (2.43) sur $QH^1(\mathbb{R}^2)$ avec donnée initiale $z(0) = Qu(0)$.
Pour N fixé et pour une solution u, et pour $y = Pu$, on introduit Z tel que

$$Z : [0, +\infty[\longrightarrow QH^1,$$

et qui est solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} iZ_t + i\gamma Z + \Delta Z = bQ(E(|y+Z|^2)(y+Z)) + Qf, \\ Z(0) = 0. \end{cases} \tag{2.44}$$

On veut démontrer que Z est une approximation régulière de z pour les grands temps. On commence par démontrer quelques propositions. Soit $T > 0$ la taille d'une fenêtre qui sera définie dans la suite. On pourra supposer sans restriction aucune que $T \leq 1$. On introduit pour chaque temps $t \geq 0$ la seminorme suivante

$$|\phi|_{L^4_T(t)} = (\int_t^{t+T} |\phi(s)|^4 ds)^{\frac{1}{4}}.$$

La notation $L^4_T(t)$ souligne que chaque semi-norme dépend de t. Pour les fonctions qui dépendent de temps et d'espace on écrit $|u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} = |\ |u|_{L^4_{x_1,x_2}}\ |_{L^4_T(t)}$. On introduit aussi la fonction caractéristique suivante qui est définie $\forall t$ fixé

$$\chi_{[t,t+T]}(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } s \in [t, t+T]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 16 *Il existe un seuil $T_0 \leq 1$ et une constante K qui dépendent de γ, b et $|f|_{L^2(\mathbb{R})}$, tels que $\forall u$ solution de (2.20) incluse pour $t \geq 0$ dans β, alors pour tout temps positif t et pour chaque T vérifiant $T \leq T_0$ alors*

$$|\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} + |u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K.$$

Cela traduit que la solution est localement uniformement en temps de puissance quatrième intégrable dans $W^{1,4}_{x_1,x_2}(\mathbb{R}^2)$.

Démonstration: comme

$$u_t + (\gamma - i\Delta)u = -ibuE(|u|^2) - if,$$

alors, pour $0 \leq t \leq \tau \leq t+T$, on a

$$u(\tau)e^{\gamma\tau} = u(t)U(\tau - t)e^{\gamma t} - i\int_t^\tau U(\tau - s)fe^{\gamma s}ds - ib\int_t^\tau U(\tau - s)uE(|u|^2)e^{\gamma s}ds, \quad (2.45)$$

où $U(t) = e^{i\Delta t}$. On note I_1, I_2, I_3 le premier, le deuxième, et le troisième terme dans cette dérnière égalité. Par l'inégalité de Strichartz (confer [71], [70], [22], [35])

$$|U(\tau)u_0|_{L^4(\mathbb{R}dt, L^4_{x_1,x_2})} \leq c|u_0|_{L^2_{x_1,x_2}}. \quad (2.46)$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} |\nabla I_1|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} &\leq ce^{\gamma t}|U(-t)\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ &= ce^{\gamma t}|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq Ke^{\gamma t}, \end{aligned}$$

où K est comme précédemment une constante dépendant de f, b et γ et pouvant varier d'une ligne à l'autre. D'autre part

$$\begin{aligned} \nabla I_2 &= -i(\int_t^\tau U(\tau - s)e^{\gamma s}ds)\nabla f \\ &= -i(\int_t^\tau e^{-i\Delta(\tau - s)}e^{\gamma s}ds)\nabla f \\ &= -ie^{\gamma\tau}(\gamma - i\Delta)^{-1}\nabla f + ie^{\gamma t}U(\tau - t)(\gamma - i\Delta)^{-1}\nabla f. \end{aligned}$$

Puisque $(\gamma - i\Delta)$ est un opérateur continu et inversible de $H^2(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors on trouve avec l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^2)$ que

$$\begin{aligned} |e^{\gamma\tau}(\gamma - i\Delta)^{-1}\nabla f|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} &= |e^{\gamma\tau}|_{L^4_T(t)}|(\gamma - i\Delta)^{-1}\nabla f|_{L^4_{x_1,x_2}} \\ &\leq e^{\gamma t}\left(\frac{1}{4\gamma}(e^{4\gamma T} - 1)\right)^{\frac{1}{4}}|(\gamma - i\Delta)^{-1}\nabla f|_{H^1_{x_1,x_2}} \\ &\leq Ke^{\gamma t}|f|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq Ke^{\gamma t}. \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à (2.46), on trouve

$$\begin{aligned} |e^{\gamma t}U(\tau - t)(\gamma - i\Delta)^{-1}\nabla f|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} &\leq ce^{\gamma t}|(\gamma - i\Delta)^{-1}\nabla f|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq Ke^{\gamma t}. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$|\nabla I_2|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq Ke^{\gamma t}.$$

On va maintenant traiter le dernier terme. On utilise

$$|\nabla(uE(|u|^2))|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \leq c|\nabla u|_{L^4_{x_1,x_2}}|u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}, \tag{2.47}$$

et l'estimation (2.10) pour obtenir

$$\begin{aligned} |\nabla I_3|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} &\leq c|b||e^{\gamma\tau}|\nabla uE|u|^2|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}(t)} \\ &\leq c|b||e^{\gamma\tau}\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)}|u|^2_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \\ &\leq c|b|M_1^2T^{\frac{1}{2}}|e^{\gamma\tau}\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)}. \end{aligned}$$

On impose alors la première restriction sur T_0 qui est d'écrire $c|b|M_1^2T_0^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$. Les calculs précédents donnent, en reportant dans (2.45)

$$|e^{\gamma\tau}\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq Ke^{\gamma t} + \frac{1}{2}|e^{\gamma\tau}\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)}, \tag{2.48}$$

d'où l'estimation $|\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K$.
Pour la deuxième partie de la norme dans $W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$, on utilise le fait que $L^\infty([t,t+T];H^1_{x_1,x_2}) \hookrightarrow L^4([t,t+T];L^4_{x_1,x_2})$ pour obtenir

$$|u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq c|u|_{L^\infty([0,T];H^1_{x_1,x_2})} = c\sup_{\tau\geq t}|u|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq K.$$

Ceci conclut la démonstration de la Proposition. □
Maintenant on va démontrer une proposition qui donne une estimation sur u_t, pour les grands temps; on introduit $D = (Id - \Delta)^{\frac{1}{2}}$, cet opérateur pseudo-differentiel (voir [69] page 252) vérifie pour $1 < p < +\infty$

$$|D\phi|_{L^p} \leq c|\phi|_{W^{1,p}_{x_1,x_2}}. \tag{2.49}$$

Proposition 17 *Pour T assez petit comme dans l'énoncé de la Proposition 16, il existe K qui dépend de γ, b et f tel que pour toute solution $u(t)$ de (2.20), on a pour tout temps positif*

$$|D^{-1}u_t|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K.$$

Démonstration: on a

$$D^{-1}u_t = -ibD^{-1}uE(|u|^2) - iD^{-1}f - D^{-1}(\gamma - i\Delta)u.$$

Comme D est un opérateur continu et inversible de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ alors on obtient en utilisant $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$, $\forall q < +\infty$, en utilisant que E est un opérateur borné sur $L^q(\mathbb{R}^2)$ pour $1 < q < +\infty$, que

$$\begin{aligned} |D^{-1}uE(|u|^2)|_{L^4_{x_1,x_2}} \leq |D^{-1}uE(|u|^2)|_{H^1_{x_1,x_2}} &\leq c|uE(|u|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq c|u|_{L^4_{x_1,x_2}}|E(|u|^2)|_{L^4_{x_1,x_2}} \leq K, \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$|D^{-1}f|_{L^4_{x_1,x_2}} \leq |D^{-1}f|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq c|f|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq K. \tag{2.51}$$

On intègre (2.50) et (2.51) entre t et $t+T$, on trouve

$$|D^{-1}uE(|u|^2)|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} + |D^{-1}f|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K.$$

Comme $D^{-1}AD^{-1} = D^{-2}A$ est borné sur $L^4(\mathbb{R}^2)$, alors on obtient grâce à la Proposition 16 que

$$|D^{-1}Au(t)|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} = |D^{-2}ADu|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq c|Du|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K.$$

Ceci donne le résultat. □

Maintenant on démontre que Z est une fonction régulière et bornée pour les grands temps ;

Proposition 18 *Soit T fixé assez petit comme dans les hypothèses des Propositions 16 et 17. Il existe un seuil N_0 et une constante K dépendants de γ, b, f, tels que pour $N \geq N_0$, l'équation (2.44) admette une unique solution $Z \in C_b([0,+\infty[; Q_N H^2_{x_1,x_2})$ qui satisfait pour tout temps positif à $|Z(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq K$. De plus il existe une constante $K(N)$ dépendant de γ, b, f, N telle que pour tout temps positif $|Z(t)|_{H^2_{x_1,x_2}} \leq K(N)$.*

Remarque 13 *On conjecture raisonablement que $K(N)$ croît linéairement en N. Comme on n'a pas besoin de ce degré de précision pour démontrer le résultat principal, on n'explicitera pas la dépendance en N de $K(N)$. Le seuil N_0 dépend de T, qui est fixé dépendant de γ, b, f.*

Démonstration: on fait la démonstration en trois étapes
Première étape : construction d'une solution locale en temps à valeurs dans $H^2(\mathbb{R}^2)$

Soit $T_* > 0$, on définit ici l'espace $X = C_b([0,T_*], QH^2)$ muni de la norme

$$|Z|_X = \sup_{t\in[0,T_*]} |Z|_{H^2_{x_1,x_2}}.$$

La forme de Duhamel de (2.44) s'écrit

$$Z(t) = -i\int_0^t e^{-i(t-s)A}F(Z(s))ds, \tag{2.52}$$

avec $A = \gamma - i\Delta, F(Z) = bQ(E(|y+Z|^2)(y+Z)) + Qf$. On pose $T(t) = e^{-itA}$, et on cherche un point fixe dans X à l'équation

$$G(Z(t)) = -i\int_0^t T(t-s)F(Z(s))ds.$$

Avant de procéder à l'argument de point fixe, on vérifie

Lemme 54 *Pour t positif le semi-groupe $T(t)$ est contractant sur $QH^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on observe que $T(t)$ commute avec Q et s'écrit $e^{-\gamma t}U(t)$ où $U(t)$ unitaire sur tous les $H^k(\mathbb{R}^2)$; confer Lemme 39. □

Lemme 55 *Pour $C_0 = 2k|Qf|_{L^2_{x_1,x_2}}$ avec k une constante dépendant de γ bien choisie, pour T_* assez petit dépendant de C_0, l'application G envoie la boule fermée $B_X(0, C_0)$ de X dans elle même.*

Démonstration: soit Z dans $B_X(0, C_0)$. On a

$$G(Z(t)) = -ib \int_0^t Q(E(|y + Z|^2)(y + Z))ds - i \int_0^t Qfds.$$

D'abord on estime la norme dans H^2 de $\int_0^t T(t-s)Q(E(|y+Z|^2)(y+Z))ds$; comme on a $H^2(\mathbb{R}^2)$ est une algèbre, alors

$$\begin{aligned} |E(|u|^2)u|_{H^2_{x_1,x_2}} &\leq c|u|_{H^2_{x_1,x_2}} |E(|u|^2)|_{H^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq c|u|^3_{H^2_{x_1,x_2}}. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant la Proposition 15

$$\begin{aligned} |\int_0^t T(t-s)Q(E(|y+Z|^2)(y+Z))ds|_{H^2_{x_1,x_2}} &\leq \int_0^t |E(|y+Z|^2)(y+Z)|_{H^2_{x_1,x_2}} ds \\ &\leq c \int_0^t |y+Z|^3_{H^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq c(KN^3 + C_0^3)T_*. \end{aligned}$$

On choisit T_* tel que $c(KN^3 + C_0^3)T_* \leq \frac{C_0}{2}$. On estime maintenant la norme H^2 de $\displaystyle\int_0^t T(t-s)Qfds$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^t T(t-s)Qfds &= \left(\int_0^t T(t-s)ds\right) Qf \\ &= \left(\int_0^t e^{-i(t-s)A}ds\right) Qf \\ &= iA^{-1}(Id - e^{-itA})Qf. \end{aligned}$$

A est un opérateur continu et inversible de $H^2(\mathbb{R}^2)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors on a pour $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$|A^{-1}Qf|_{H^2_{x_1,x_2}} \leq k|Qf|_{L^2_{x_1,x_2}},$$

avec k qui dépend de γ. Alors, on a bien

$$\begin{aligned} |\int_0^t T(t-s)Qfds|_{H^2_{x_1,x_2}} &\leq |A^{-1}Qf|_{H^2_{x_1,x_2}} + |e^{-itA}A^{-1}Qf|_{H^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq k|A^{-1}Qf|_{H^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq k|Qf|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq \frac{C_0}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'estimation

$$|G(Z(t))|_{QH^2_{x_1,x_2}} \leq C_0,$$

qui conclut la preuve du Lemme. $\square$

Lemme 56 *Pour T_* assez petit, G est une contraction sur $B_X(0, C_0)$.*

Démonstration: soient Z, W dans $B_X(0, C_0)$. Puisque E envoie $H^2(\mathbb{R}^2)$ dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ qui est une algèbre, en utilisant de nouveau la Proposition 15, il vient

$$\begin{aligned}
& |QE(|y+Z|^2)(y+Z) - QE(|y+W|^2)(y+W)|_{H^2_{x_1,x_2}} \\
\leq\; & |E(|y+Z|^2)(y+Z) - E(|y+W|^2)(y+W)|_{H^2_{x_1,x_2}} \\
\leq\; & |(Z-W)E(|y+Z|^2)|_{H^2_{x_1,x_2}} + |(y+W)E(|y+Z|^2 - |y+W|^2)|_{H^2_{x_1,x_2}} \\
\leq\; & c(|y|^2_{H^2_{x_1,x_2}} + |Z|^2_{H^2_{x_1,x_2}} + |W|^2_{H^2_{x_1,x_2}})|Z-W|_{H^2_{x_1,x_2}} \\
\leq\; & c(KN^2 + 4C_0^2)|Z-W|_{H^2_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
|G(Z) - G(W)|_{QH^2_{x_1,x_2}} & \leq \int_0^t |T(t-s)[F(Z(s)) - F(W(s))]|_{QH^2_{x_1,x_2}} ds \\
& \leq \int_0^t |F(Z(s)) - F(W(s))|_{QH^2_{x_1,x_2}} ds \\
& \leq c(KN^2 + 4C_0^2)T_*|Z-W|_X.
\end{aligned}$$

On choisit T_* tel que $c(KN^2 + 4C_0^2)T_* \leq \frac{1}{2} < 1$, qui donne la stricte contraction. $\square$

D'après le théorème de point fixe, il existe Z tel que $G(Z) = Z$, d'où on a une solution unique Z de l'équation (2.44) sur $[0, T_*]$. Cette solution mild est une solution de l'EDP au sens des distributions.

Deuxième étape : existence de la solution globale à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^2)$

On démontre que cette solution locale n'explose pas dans $H^1(\mathbb{R}^2)$; plus précisément on démontre

Proposition 19 *Soit T fixé petit, $T \leq T_0$ comme précédement. Il existe un seuil N_0 et une constante K dépendants de γ, f, b tels que pour N fixé $N \geq N_0$, pour Z solution de (2.44), pour tout temps positif où cette fonction existe*

$$|Z(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq K.$$

Démonstration: on démontre tout d'abord le lemme suivant

Lemme 57 *Soit Z une solution de l'équation (2.44), alors Z vérifie*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(Z)+\gamma q(Z)=H(Z) \tag{2.53}$$

où

$$q(Z)=|\nabla Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\frac{b}{2}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)^2+2Re\int f\overline{Z},$$

$$\begin{aligned} H(Z) &= b\gamma Re\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y}+bRe\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y_t} \\ &\quad -\frac{b}{2}\gamma\int E(|y+Z|^2)|y+Z|^2+\gamma Re\int f\overline{Z}. \end{aligned}$$

Démonstration: on multiplie l'équation (2.44) par $-\overline{Z}_t-\gamma\overline{Z}$, on intègre en prenant la partie réelle on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\gamma|\nabla Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}}=-b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{Z}_t \\ &-\gamma b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{Z}-\mathrm{Re}\int f\overline{Z}_t-\gamma\mathrm{Re}\int f\overline{Z}. \end{aligned}$$

On calcule tout d'abord le terme

$$\begin{aligned} -b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{Z}_t &= -b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)(\overline{Z}_t+\overline{y_t}) \\ &\quad +b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y_t} \\ &= -\frac{b}{4}\frac{d}{dt}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)^2 \\ &\quad +b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y_t}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} -\gamma b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{Z} &= -\gamma b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)(\overline{Z}+\overline{y}) \\ &\quad +\gamma b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y} \\ &= -\gamma b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)|y+Z|^2 \\ &\quad +\gamma b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\gamma|\nabla Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}} &= -\frac{b}{4}\frac{d}{dt}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)^2-b\gamma\int E(|y+Z|^2)(y+Z)^2\\ &+b\gamma\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y}+b\mathrm{Re}\int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y_t}\\ &-\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\int f\overline{Z}-\gamma\mathrm{Re}\int f\overline{Z}.\end{aligned}$$

Ceci donne (2.53). □

Maintenant, pour démontrer la coercivité de q sur $H^1(\mathbb{R}^2)$ et pour trouver un bon contrôle de H on a besoin les inégalités de Poincaré précisées dans le lemme suivant.

Lemme 58 *Il existe une constante numérique c telle que pour tout Z dans $QH^1(\mathbb{R}^2)$, et pour tout $N \geq 1$*

$$|Z|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \frac{c}{N}|Z|_{H^1_{x_1,x_2}}, \tag{2.54}$$

$$|Z|_{L^4_{x_1,x_2}} \leq \frac{c}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1_{x_1,x_2}}, \tag{2.55}$$

$$|Z|_{L^8_{x_1,x_2}} \leq \frac{c}{N^{\frac{1}{4}}}|Z|_{H^1_{x_1,x_2}}. \tag{2.56}$$

Démonstration: on estime Z en norme $H^1(\mathbb{R}^2)$ par la formule de Plancherel

$$4\pi^2|Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}}=\int_{\mathbb{R}^2}(1+|\xi|^2)|\hat{Z}(\xi)|^2d\xi.$$

Puisque $\hat{Z}$ a son support inclus dans

$$\{\xi\in\mathbb{R}^2;\max(|\xi_1|,|\xi_2)|\geq N\}\subset\{\xi\in\mathbb{R}^2;|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\geq N\},$$

il vient

$$4\pi^2|Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} \quad\geq\quad (1+N^2)\int_{\mathbb{R}^2}|\hat{Z}(\xi)|^2d\xi,$$

ce qui donne (2.54) par la formule de Plancherel. D'autre part, par l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (voir [38])

$$|Z|_{L^4_{x_1,x_2}}\leq c|Z|^{\frac{1}{2}}_{L^2_{x_1,x_2}}|Z|^{\frac{1}{2}}_{H^1_{x_1,x_2}}\leq\frac{c}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|_{H^1_{x_1,x_2}},$$

et

$$|Z|_{L^8_{x_1,x_2}}\leq c|Z|^{\frac{1}{4}}_{L^2_{x_1,x_2}}|Z|^{\frac{3}{4}}_{H^1_{x_1,x_2}}\leq\frac{c}{N^{\frac{1}{4}}}|Z|_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

□

Remarque 14 *Comme conséquence simple de (2.54), on sait que sur $QH^1(\mathbb{R}^2)$ la norme habituelle et la semi-norme de Poincaré $|\nabla Z|_{L^2_{x_1,x_2}}$ sont (uniformément en N) équivalentes, soit*

$$|\nabla Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} \leq 2|\nabla Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}}. \tag{2.57}$$

Maintenant on démontre la pseudo-coercivité de q sur $QH^1(\mathbb{R}^2)$

Lemme 59 *Il existe N_0 assez grand et une constante K dépendants de γ, b, f tel que pour $N \geq N_0$, la solution Z de (2.44) vérifie pour tout temps positif où elle est définie*

$$q(Z) \geq \frac{1}{2}|Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} - c\frac{|b|}{N^2}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}} - K. \tag{2.58}$$

Démonstration: comme y reste borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ alors

$$|y|_{L^4_{x_1,x_2}} \leq c|u|_{L^4_{x_1,x_2}} \leq c|u|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq K. \tag{2.59}$$

En effet on a utilisé le fait que le projecteur orthogonal P est borné, indépendamment de N, sur L^p pour $1 < p < +\infty$ (voir la Proposition 2.6 dans [40]).
En utilisant (2.55), (2.59), et (2.57), on obtient

$$q(Z) \geq |Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} - c\frac{|b|}{2}|y|^4_{L^4_{x_1,x_2}} - c\frac{|b|}{2}|Z|^4_{L^4_{x_1,x_2}} - \frac{1}{2\gamma}|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}} - \frac{2\gamma}{N^2}|Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

On prend $N \geq N_0$ tel que $\frac{2\gamma}{N^2} \leq \frac{2\gamma}{N_0^2} \leq \frac{1}{2}$. Ceci donne le resultat. □

Lemme 60 *Il existe N_0 assez grand et une constante K dépendants de γ, b, f tel que pour $N \geq N_0$, la solution Z de (2.44) vérifie pour tout temps positif où elle est définie*

$$H(Z) \leq K|D^{-1}y_t|^4_{L^4_{x_1,x_2}} + \frac{K}{N^{\frac{2}{3}}}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}} + K + \frac{\gamma}{2}q(Z). \tag{2.60}$$

Démonstration: on pose $v = y + Z$, on trouve grâce à l'inégalité de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg (voir [38], page 12), à l'inégalité de Young, et en utilisant (2.55), (2.56), (2.58) pour contrôler les termes hautes fréquences et la Proposition 15 pour les termes basses fréquences, et aussi au fait que l'opérateur E et le projecteur P soient bornés uniformément en N sur $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour $1 < p < +\infty$, que

$$\begin{aligned}
& |\mathrm{Re} \int E(|v|^2)|v|\overline{y}_t| \\
\leq\ & |< D^{-1}y_t, D(vE(|v|^2)) >| \\
\leq\ & |D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} |D(vE(|v|^2))|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \\
\leq\ & c|D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} (|vE(|v|^2)|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} + |\nabla vE(|v|^2)|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} + |vE(2\mathrm{Re}\overline{v}\nabla v)|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}) \\
\leq\ & c|D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} (|v|_{L^2_{x_1,x_2}} |v|^2_{L^8_{x_1,x_2}} + |\nabla v|_{L^2_{x_1,x_2}} |v|^2_{L^8_{x_1,x_2}} + |v|_{L^8_{x_1,x_2}} |E(2\mathrm{Re}\overline{v}\nabla v)|_{L^{\frac{8}{5}}_{x_1,x_2}}) \\
\leq\ & c|D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} (|v|_{L^2_{x_1,x_2}} |v|^2_{L^8_{x_1,x_2}} + |\nabla v|_{L^2_{x_1,x_2}} |v|^2_{L^8_{x_1,x_2}} + |v|_{L^8_{x_1,x_2}} |v\nabla v|_{L^{\frac{8}{5}}_{x_1,x_2}}) \\
\leq\ & c|D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} |v|_{H^1_{x_1,x_2}} |v|^2_{L^8_{x_1,x_2}} \\
\leq\ & K|D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} (1 + |Z|_{H^1_{x_1,x_2}})(1 + |Z|^2_{L^8_{x_1,x_2}}) \\
\leq\ & K|D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} (1 + \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}|Z|^3_{H^1_{x_1,x_2}} + |Z|_{H^1_{x_1,x_2}}) \\
\leq\ & K|D^{-1}y_t|^4_{L^4_{x_1,x_2}} + \frac{K}{N^{\frac{2}{3}}}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}} + K + \frac{\gamma}{2}q(Z).
\end{aligned}$$

On rappelle que la constante K peut varier d'une ligne à une autre. Pour les autres termes dans H, on trouve en utilisant les mêmes arguments

$$\begin{aligned}
& |b\gamma \mathrm{Re} \int E(|y+Z|^2)(y+Z)\overline{y} - \frac{b}{2}\gamma \int E(|y+Z|^2)|y+Z|^2 + \gamma \mathrm{Re} \int f\overline{Z}| \\
\leq\ & K(|(y+Z)y|_{L^2_{x_1,x_2}} |E(|y+Z|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}} + |y+Z|^4_{L^4_{x_1,x_2}} + |f|_{L^2_{x_1,x_2}} |Z|_{L^2_{x_1,x_2}}) \\
\leq\ & K(|y|_{L^4_{x_1,x_2}} (|y|^3_{L^4_{x_1,x_2}} + |Z|^3_{L^4_{x_1,x_2}}) + (|y|^4_{L^4_{x_1,x_2}} + |Z|^4_{L^4_{x_1,x_2}}) + (|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + |Z|^2_{L^2_{x_1,x_2}})) \\
\leq\ & K + \frac{K}{N^{\frac{3}{2}}}|Z|^3_{H^1_{x_1,x_2}} + \frac{K}{N^2}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}} + \frac{K}{N^2}|Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}} \\
\leq\ & K + \frac{K}{N^{\frac{2}{3}}}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

Ceci donne le résultat. □

On reprend alors la démonstration de la Proposition 19. On revient à l'équation (2.60), on multiplie par $e^{\gamma t}$, on intègre entre 0 et t, on trouve

$$q(Z) \leq q(0)e^{-\gamma t} + K \int_0^t e^{-\gamma t} e^{\gamma s} |D^{-1}y_t|^4_{L^4_{x_1,x_2}} ds + \frac{K}{N^{\frac{2}{3}}} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} |Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}} ds + K.$$

Comme l'opérateur P est un opérateur borné de L^p dans L^p (voir [40]), alors

$$|D^{-1}y_t|_{L^4_{x_1,x_2}} = |D^{-1}Pu_t|_{L^4_{x_1,x_2}} = |PD^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}} \leq c|D^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}}.$$

Soit T la taille de la fenêtre où l'on contrôle les normes espace-temps de Du et $D^{-1}u_t$. Soit t un temps positif et soit m l'entier tel que $mT \leq t < (m+1)T$. Comme on a $|D^{-1}u_t|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K$ pour tout temps positif (confer Proposition 17), alors

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{\gamma s}|D^{-1}y_t|^4_{L^4_{x_1,x_2}}ds &\leq \sum_{r=0}^{m} e^{\gamma(r+1)T}(\int_{rT}^{(r+1)T}|D^{-1}y_t|^4_{L^4_{x_1,x_2}}ds) \\
&\leq \sum_{r=0}^{m}|D^{-1}y_t|^4_{L^4_T L^4_{x_1,x_2}(rT)}e^{\gamma(r+1)T} \\
&\leq K\sum_{r=0}^{m}e^{\gamma rT} \\
&\leq K\frac{e^{\gamma T}}{e^{\gamma T}-1}e^{\gamma t} \\
&\leq Ke^{\gamma t}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Donc

$$q(Z) \leq q(0)e^{-\gamma t} + \frac{K}{N^{\frac{2}{3}}}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}}ds + K.$$

On a en outre, puisque $Z(0) = 0$

$$|q(0)| = \frac{|b|}{2}|\int E(|y(0)|^2)|y(0)|^2dx| \leq c|b||y(0)|^4_{L^4_{x_1,x_2}} \leq K$$

Grâce à (2.58), et comme $N \geq 1$ on a

$$2q(Z) + K + c\frac{|b|}{N^{\frac{2}{3}}}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}} \geq 2q(Z) + K + c\frac{|b|}{N^2}|Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}} \geq |Z|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

Il vient finalement

$$\sup_{[0,t]}|Z(s)|^2_{H^1_{x_1,x_2}} \leq \frac{K_1}{N^{\frac{2}{3}}}(\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}|Z(s)|^4_{H^1_{x_1,x_2}}ds + |Z|^4_{H^1_{x_1,x_2}}) + K_2.$$

On a numéroté ici les constantes K car elles vont jouer un rôle dans la suite. On pose $x(t) = \sup_{[0,t]}|Z(s)|^2_{H^1_{x_1,x_2}}$, alors

$$x(t) \leq \frac{K_1}{N^{\frac{2}{3}}}x(t)^2 + K_2.$$

On pose $F(x) = x - \frac{K_1}{N^{\frac{2}{3}}}x^2 - K_2$. On prend N_0 suffisament grand tel que $\frac{4K_1K_2}{N_0^{\frac{2}{3}}} < 1$. Alors $F(2K_2) = K_2(1 - \frac{4K_1K_2}{N^{\frac{2}{3}}}) > 0$. Puisque $F(x(t)) \leq 0$ pour tout temps positif où Z existe et puisque l'application $t \mapsto x(t)$ est continue alors $x(t) \leq 2K_2$ ce qui conclut la preuve de la Proposition 19. □

Troisième étape : la solution est globale dans $QH^2(\mathbb{R}^2)$ On veut démontrer que

$$|Z|_{H^2_{x_1,x_2}} \leq K(N);$$

ici on veut faire remarquer que la constante va dépendre de N. Cette estimation donnera que la solution Z est globale dans $H^2(\mathbb{R}^2)$.

On pose $v = y + Z$, $\partial Z = w$, pour $\partial = \partial_{x_1}$ ou bien pour $\partial = \partial_{x_2}$. On dérive l'équation (2.44), on trouve que w est une solution de

$$iw_t + i\gamma w + \Delta w \;=\; QL.w + QL.\partial y + Q\partial f, \tag{2.62}$$

où $L.w = bE(|v|^2)w + 2bE(\mathrm{Re} v\overline{w})v$. On va établir la non-explosion par estimations a priori. On multiplie (2.62) par $-\overline{w}_t - \gamma\overline{w}$, on intègre la partie réelle sur $\mathbb{R}^2$; on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(w) + \gamma q(w) = H(w), \tag{2.63}$$

où

$$q(w) = |\nabla w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \mathrm{Re}\int L.w\overline{w} + 2\mathrm{Re}\int G\overline{w},$$

$$G = L.\partial y + \partial f,$$

$$H(w) = \gamma \mathrm{Re}\int G\overline{w} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int \dot{L}w.\overline{w} + \mathrm{Re}\int L\partial y_t\overline{w} + \mathrm{Re}\int \dot{L}\partial y.\overline{w},$$

$$\mathrm{Re}\dot{L}w.w = 2E(\mathrm{Re} v_t\overline{v})|w|^2 + 2E(\mathrm{Re} v_t\overline{w})\mathrm{Re} v\overline{w} + 2E(\mathrm{Re} v\overline{w})\mathrm{Re} v_t\overline{w}.$$

Maintenant on démontre le lemme suivant

Lemme 61 *Il existe N_0 assez grand et une constante K dépendants de γ, b, f tel que pour $N \geq N_0$, tels que pour tout temps positif où w est défini*

$$q(w) \geq \frac{1}{2}|w|^2_{H^1_{x_1,x_2}} - K. \tag{2.64}$$

où K dépend de γ, b, f, mais est indépendant de N.

Démonstration: on commence par traiter le terme $\int L.w\overline{w}$, en utilisant le fait que E est borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ on trouve

$$|\int L.w\overline{w}| \leq c(|E(|v|^2)|_{L^2_{x_1,x_2}}|w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + |E(v\overline{w})|_{L^2_{x_1,x_2}}|v\overline{w}|_{L^2_{x_1,x_2}}) \leq c|v|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|w|^2_{L^4_{x_1,x_2}}. \tag{2.65}$$

En plus, grâce à l'inégalité de Poincaré (2.55) et au fait que $v = y + Z$ reste borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ (confer Proposition 19 pour Z et Proposition 15 pour y), alors

$$|\int L.w\overline{w}| \leq \frac{K}{N}|w|^2_{H^1_{x_1,x_2}}. \tag{2.66}$$

Maintenant on veut traiter le terme $\mathrm{Re}\int G\overline{w}$; on a

$$|\int f\partial\overline{w}| \leq |f|_{L^2_{x_1,x_2}}|\nabla w|_{L^2_{x_1,x_2}}. \tag{2.67}$$

En plus, en utilisant le fait que E est borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ on trouve

$$|\int L.\partial y\overline{w}| \leq c|v|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|w|_{L^4_{x_1,x_2}}|\partial y|_{L^4_{x_1,x_2}}. \tag{2.68}$$

On utilise alors l'inégalité de Bernstein suivante [24] : en dimension deux d'espace, pour $p \in [2, +\infty]$, il existe une constante c_p dépendant de p mais indépendant de N telle que pour tout y dans $PH^1(\mathbb{R}^2)$

$$|\partial y|_{L^p_{x_1,x_2}} \leq c_p N^{(1-\frac{2}{p})}|y|_{H^1_{x_1,x_2}}. \tag{2.69}$$

Par l'inégalité de Bernstein dans le cas $p = 4$, l'inégalité de Poincaré

$$|w|_{H^{\frac{1}{2}}_{x_1,x_2}} \leq cN^{-\frac{1}{2}}|w|_{H^1_{x_1,x_2}},$$

et le fait que $y = Pu$ reste borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, il vient

$$|\int L.\partial y\overline{w}| \leq K|w|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq \frac{1}{16}|w|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + K. \tag{2.70}$$

Alors, on obtient

$$q(w) \geq |w|^2_{H^1_{x_1,x_2}} - (\frac{K_1}{N} + \frac{1}{8})|w|^2_{H^1_{x_1,x_2}} - K_2.$$

On impose alors à N_0 de vérifier $\frac{K_1}{N_0} + \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$. On en déduit le résultat. $\square$

Maintenant on cherche à trouver une borne supérieure pour $H(w)$; on commence par le terme $\int \dot{L}\partial y.\overline{w}$. On va traiter le terme $\int E(\text{Re}v_t\overline{v})\partial y\overline{w}$ (le traitement des autres terme est similaire). Comme E est un opérateur auto-adjoint alors

$$\begin{aligned} &|\text{Re}\int E(\text{Re}v_t\overline{v})\partial y\overline{w}| = | < D^{-1}v_t, D(vE(\text{Re}\partial y.\overline{w})) > | \\ \leq \quad & |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}}|D(vE(\text{Re}\partial y.\overline{w}))|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \end{aligned}$$

En utilisant maintenant l'inégalité de Bernstein (2.69) dans le cas $p = +\infty$, les inégalités de Hölder, l'inégalité de Poincaré améliorée (2.56), et le contrôle sur v en norme $H^1(\mathbb{R}^2)$, il vient

$$\begin{aligned} & |\text{Re}\int E(\text{Re}v_t\overline{v})\partial y\overline{w}| \\ \leq \quad & c|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}}((|Dv|_{L^2_{x_1,x_2}}|\partial y|_{L^\infty_{x_1,x_2}} + |D\partial y|_{L^4_{x_1,x_2}}|v|_{L^4_{x_1,x_2}})|w|_{L^4_{x_1,x_2}} \\ & +c|Dw|_{L^2_{x_1,x_2}}|v|_{L^4_{x_1,x_2}}|\partial y|_{L^\infty_{x_1,x_2}}) \\ \leq \quad & c|D^{-1}v_t|^4_{L^4_{x_1,x_2}} + \frac{\gamma}{16}|w|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + K(N), \end{aligned} \tag{2.71}$$

où $K(N)$ dépend de $N,\ b,\ \gamma,\ f$. Pour le terme $\int \dot{L}w.\overline{w}$, on va procéder comme ci-dessus. On a

$$\begin{aligned}
& |\mathrm{Re}\int E(\mathrm{Re} v_t\overline{v})w\overline{w}| \leq |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} |D(vE(|w|^2)|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \\
\leq \ & |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} (|Dv|_{L^2_{x_1,x_2}} |w|^2_{L^8_{x_1,x_2}} + |v|_{L^8_{x_1,x_2}} |DE(|w|^2)|_{L^{\frac{8}{5}}_{x_1,x_2}}) \\
\leq \ & c|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} |Dv|_{L^2_{x_1,x_2}} (|w|^2_{L^8_{x_1,x_2}} + |w|_{L^8_{x_1,x_2}} |Dw|_{L^2_{x_1,x_2}}) \\
\leq \ & \frac{K}{N^{\frac{1}{4}}} |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} |w|^2_{H^1_{x_1,x_2}}. \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

Maintenant on considère $\mathrm{Re}\int L.\partial y_t\overline{w}$ (les autres termes étant d'ordre inférieur).

$$|\mathrm{Re}\int L\partial y_t.\overline{w}| \leq c|\partial y_t|_{L^2_{x_1,x_2}} |w|_{L^6_{x_1,x_2}} |v|^2_{L^6_{x_1,x_2}} \leq KN^2|w|_{H^1_{x_1,x_2}}, \qquad (2.73)$$

grâce à l'inégalité inverse $|\partial y_t|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq cN^2|u_t|_{H^{-1}_{x_1,x_2}} \leq KN^2$.
En utilisant (2.71)-(2.73), la borne inférieure de q et (2.63) on trouve

$$\frac{d}{dt}q(w) + 2\gamma q(w) \leq K_1N(1+|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}})|w|_{H^1_{x_1,x_2}} + \frac{K_2}{N^{\frac{1}{4}}}|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} |w|^2_{H^1_{x_1,x_2}} + K_3(N). \qquad (2.74)$$

Grâce à l'inégalité de Young $2ab \leq \eta a^2 + \eta^{-1}b^2$, où $\eta > 0$, en utilisant (2.64) et (2.74), on trouve

$$\frac{d}{dt}q(w) + 2\gamma q(w) \leq K_1(1+|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}})(\frac{N^2}{\eta} + K_2(N) + (\eta + N^{-\frac{1}{4}})q(w)). \qquad (2.75)$$

On va citer un lemme sans sa démonstration (car la démonstration est très similaire de celle des Propositions 16 et 17

Lemme 62 *Soit T assez petit comme précédemment. Il existe une constante K dépendant de f, b, γ telle que pour toute trajectoire $u(t)$ incluse dans le borné absorbant pour $t \geq 0$, pour $v = y + Z$ l'approximation donnée par (2.44), alors pour tout temps positif où Z existe*

$$|Dv|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} + |D^{-1}v_t|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K,$$

Remarque 15 *Les hypothèses de ce lemme nécéssitent de diminuer la taille $T = T(\gamma, f, b)$ de la fenêtre où on calcule. Il faut observer que T est indépendant de N, ce qui nous permettra d'ajuster N en fonction de T dans la suite.*

Maintenant on introduit le lemme de Gronwall suivant qui est démontré dans [40].

Lemme 63 *Soit $a(t)$ une fonction positive dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ qui satisfait à : il existe $T > 0$ tel que $\forall t \geq 0$,*

$$\int_t^{t+T} a(s)ds \leq \frac{\gamma T}{4} \leq \frac{log2}{12}, \qquad (2.76)$$

alors, si $q(t)$ est une fonction positive qui satisfait

$$\frac{d}{dt}q(t) + 2\gamma q(t) \leq a(t)(q(t) + K), \tag{2.77}$$

où K est une constante positive, alors

$$q(t) \leq 2q(0)e^{-\gamma t} + K. \tag{2.78}$$

Maintenant on va appliquer le Lemme 63 à (2.75) ; on pose $a(t) = 2\eta K(1+|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}})$, on choisit η assez petit tel que (2.76) reste vraie. On choisit aussi N_0 tel que $N \geq N_0, N^{-\frac{1}{4}} \leq \eta$, donc

$$\frac{d}{dt}q(w) + 2\gamma q(w) \leq a(t)(q(w) + K(N)).$$

Par conséquent le Lemme 63 peut être appliqué, alors on obtient, comme $q(w(0)) = 0$, que

$$q(w) \leq K(N),$$

qui donne grâce à (2.64) que

$$|Z|_{H^2_{x_1,x_2}} \leq K(N).$$

La démonstration de troisième étape est établie, d'où la démonstration de la Proposition 18. □

2.4.2 Comparaison entre Z et z pour les grands temps

Proposition 20 *Il existe un N_0 assez grand et une constante K dépendants des données f, b, γ de l'équation tels que pour $u(t)$ une trajectoire incluse dans le borné absorbant pour $t \geq 0$, et pour $v = y + Z$ l'approximation de u donnée par (2.44) alors pour tout temps positif*

$$|Z(t) - z(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq K \exp(-\gamma t). \tag{2.79}$$

Démonstration: soient $v = y + Z$ et $\chi = v - u = Z - z$, alors χ est solution de l'équation suivante

$$i\chi_t + i\gamma\chi + \Delta\chi = bQ(E(|v|^2)v - E(|u|^2)u) = bQ(E(|v|^2)\chi + E(\chi\overline{v} + \overline{\chi}u)u). \tag{2.80}$$

On multiplie l'équation (2.80) par $-\overline{\chi}_t - \gamma\overline{\chi}$, on intègre en prenant la partie réelle, avec

$$b\int E(\chi\overline{v})u\overline{\chi_t} = b\int E(\chi\overline{v})(v-\chi)\overline{\chi_t}$$

et

$$b\gamma\int E(\chi\overline{v})u\overline{\chi} = b\gamma\int E(\chi\overline{v})(v-\chi)\overline{\chi}.$$

On trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi) + \gamma q(\chi) = H(\chi),$$

où

$$\begin{aligned} q(\chi) &= |\nabla\chi|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + b\int E(|v|^2)|\chi|^2 + b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{v})(v\overline{\chi}) \\ &\quad -b\mathrm{Re}\int E((v-u)\overline{v})|\chi|^2 + b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{u})(u\overline{\chi}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H(\chi) &= -b\int E(|\chi|^2)(\mathrm{Re}v\overline{v}_t) + b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{v})v_t\overline{\chi} \\ &+ \frac{b}{2}\mathrm{Re}\int E(|\chi|^2)(\overline{v}-\overline{u})v_t + \frac{b}{2}\mathrm{Re}\int E(|\chi|^2)(\overline{v}_t-\overline{u}_t)v \\ &+ b\mathrm{Re}\int E(\chi\overline{u})\overline{\chi}u_t. \end{aligned}$$

Maintenant on démontre un lemme qui donne la coercivité de $q(\chi)$;

Lemme 64 *Il existe N_0 assez grand dépendant des données de l'équation γ, b, f, tel que pour χ solution de (2.80), on a*

$$q(\chi) \geq \frac{1}{2}|\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

Démonstration: en utilisant l'inégalité de Poincaré (2.55), et le fait que u et v restent bornés dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, on trouve

$$\begin{aligned} q(\chi) &\geq |\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}} - c|b||v|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|\chi|^2_{L^4_{x_1,x_2}} \\ &\quad -c|b||u|_{L^4_{x_1,x_2}}|v|_{L^4_{x_1,x_2}}|\chi|^2_{L^4_{x_1,x_2}} - c|b||u|^2_{L^4_{x_1,x_2}}|\chi|^2_{L^4_{x_1,x_2}} \\ &\geq |\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}} - \frac{K}{N}|\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}}. \end{aligned}$$

On impose à N_0 de vérifier $1-\frac{K}{N_0} \geq \frac{1}{2}$, alors, pour $N \geq N_0$,

$$q(\chi) \geq \frac{1}{2}|\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}}. \tag{2.81}$$

□

Maintenant on veut trouver une borne supérieure pour $H(\chi)$;

Lemme 65 *Il existe une constante K dépendant de γ, f telle que pour χ solution de (2.80), on a*

$$H(\chi) \leq (|D^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}} + |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}})\frac{K}{N^{\frac{1}{4}}}|\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

Démonstration: on utilise ici l'opérateur $D = (Id - \Delta)^{\frac{1}{2}}$, on trouve

$$\begin{aligned}
H(\chi) &\leq |b||DE(|\chi|^2)v|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} + |b||DE(\chi\overline{v})\chi|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} \\
&+ \frac{|b|}{2}|DE(|\chi|^2)(\overline{v}-\overline{u})|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} \\
&+ \frac{|b|}{2}|DE(|\chi|^2)v|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}(|D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}} + |D^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}}) \\
&+ |b||DE(\chi\overline{u}).\overline{\chi}|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}|D^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}}.
\end{aligned}$$

Grâce à (2.49), (2.55), (2.56) on a par exemple

$$\begin{aligned}
|DE(|\chi|^2)v|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} &\leq |v|_{L^4_{x_1,x_2}}|\chi|^2_{L^4_{x_1,x_2}} + |\nabla v|_{L^2_{x_1,x_2}}|\chi|^2_{L^8_{x_1,x_2}} + |v|_{L^8_{x_1,x_2}}|\chi|_{L^8_{x_1,x_2}}|\nabla\chi|_{L^2_{x_1,x_2}} \\
&\leq \frac{K}{N^{\frac{1}{4}}}|\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}}, \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

De la même façon de (2.82) on peut majorer les termes $|DE(\chi\overline{v})\chi|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}$, $|DE(|\chi|^2)(\overline{v} - \overline{u})|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}$, $|DE(\chi\overline{u}).\overline{\chi}|_{L^{\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}}$, par $\frac{K}{N^{\frac{1}{4}}}|\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}}$. Alors

$$H(\chi) \leq \frac{K}{N^{\frac{1}{4}}}(|D^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}} + |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}})|\chi|^2_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

□

On reprend maintenant la démonstration de la Proposition 20. On obtient grâce à l'inégalité de Young et à (2.81)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(\chi) + \gamma q(\chi) \leq \frac{K}{N^{\frac{1}{4}}}(|D^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}} + |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}})q(\chi).$$

On fixe alors N_0 assez grand tel que $a(t) = \frac{K}{N_0^{\frac{1}{4}}}(|D^{-1}u_t|_{L^4_{x_1,x_2}} + |D^{-1}v_t|_{L^4_{x_1,x_2}})$ vérifie les hypothèses du Lemme 63. On a alors que $q(\chi(t)) \leq K\exp(-\gamma t)$ et la démonstration est terminée grace à (2.81). □

2.4.3 La régularité de $\mathcal{A}$

Théorème 2.4.1 *L'attracteur $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble compact de $H^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: la démonstration est en deux étapes. Nous prouvons d'abord que $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble borné de $H^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $u_0 \in \mathcal{A}$. La trajectoire issue de u_0 est définie pour tout temps réel et bornée dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On choisit donc comme temps initial $t_0 = -m$. Soit $Z^m(t)$ la solution de (2.44) avec la condition initiale $Z^m(-m) = 0$.

D'après ce qu'on a démontré avant, Z^m est une solution définie sur $[-m, +\infty[$, et vérifie de plus pour tout temps $t \geq -m$

$$|Z^m|_{H^2_{x_1,x_2}} \leq K(N)$$

$$|Z^m(t) - z(t)|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq Ke^{-\gamma(t+m)},$$

où K et $K(N)$ sont comme dans les sections précédentes. On note $Z_m = Z^m(0)$. Il vient alors

$$|Z_m|^2_{H^2_{x_1,x_2}} \leq K(N)$$

$$|Z_m - z_0|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq Ke^{-\gamma m}.$$

Z_m est une suite bornée dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ alors on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement vers Z_0 dans H^2, et fortement vers z_0 dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. D'après l'unicité de la limite on a

$$Z_0 = z_0 \Longrightarrow z_0 = Qu_0 \in H^2.$$

Et comme on a $y_0 \in H^2$, alors $u_0 \in H^2$. Finalement on a $\mathcal{A} \subset H^2$. En fixant $N = N_0$ et en passant à la limite sur m dans $|Z_m|^2_{H^2_{x_1,x_2}} \leq K(N)$ on montre que $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble borné dans H^2.

Il reste à démontrer la compacité. Pour ce faire on va utiliser l'argument de Ball [9]. Soit u une solution de l'équation (2.20), on dérive cette équation par rapport à (x_1, x_2).

$$i\nabla u_t + i\gamma\nabla u + \Delta u = bE(|u|^2)\nabla u + buE(2\mathrm{Re}\overline{u}\nabla u) + \nabla f. \tag{2.83}$$

On multiplie l'équation (2.20) par $-\overline{\nabla u_t} - \gamma\overline{\nabla u}$, en prenant la partie réelle on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}q(u) + \gamma q(u) = H(u),$$

avec

$$q(u) = |\Delta u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + G(u),$$

$$G(u) = b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\overline{u}\nabla u)u\overline{\nabla u} + b\int E(|u|^2)|\nabla u|^2 - 2\mathrm{Re}\int f\overline{\Delta u},$$

$$\begin{aligned} H(u) &= -\gamma\mathrm{Re}\int f\overline{\Delta u} + b\mathrm{Re}\int E(2\mathrm{Re}\nabla u\overline{u})\overline{\nabla u}u_t \\ &\quad + \int E(\mathrm{Re}\overline{u}u_t)|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

On intègre en temps l'équation précédente et on obtient.

$$|\Delta S(t)u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + G(S(t)u_0) = (|\Delta u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + G(u_0))e^{-2\gamma t} + \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}H(S(t)u_0)ds. \tag{2.84}$$

On va utiliser cette équation d'énergie pour montrer la compacité dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ fort. Soit x_j une suite à valeurs dans $\mathcal{A}$ qui est donc borné dans $H^2(\mathbb{R}^2)$, alors il existe une sous-suite $x_{j'}$ qui converge faiblement vers x dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ et fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ (ce point a été démontré précédemment dans la section 1.3). Pour t fixé positif, soit $u_0 = S(-t)x_{j'}$, en remplaçant dans l'équation (2.84) en prenant $j' \to +\infty$ on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{j'\to+\infty}\left(|\Delta x_{j'}|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + G(x_{j'})\right) &\leq \limsup_{j'\to+\infty}\left(|\Delta S(-t)x_{j'}|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + G(S(-t)x_{j'})\right)e^{-2\gamma t}\\ &\quad + \limsup_{j'\to+\infty}\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}H(S(s-t)x_{j'})ds. \qquad (2.85)\end{aligned}$$

On va tout d'abord démontrer que

$$\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}H(S(s-t)x_{j'})ds \to \int_0^t e^{-2\gamma(t-s)}H(S(s-t)x)ds. \qquad (2.86)$$

La suite $S(t-s)x_{j'}$ converge vers $S(t-s)x$ dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ faible et $H^1(\mathbb{R}^2)$ fort. D'une part par convergence faible

$$\gamma\int f\overline{\Delta S(s-t)x_{j'}} \to \gamma\int f\overline{\Delta S(s-t)x}.$$

Prenons un des termes non linéaires, par exemple

$$\int E(\mathrm{Re}\overline{u}u_t)|\nabla u|^2 =< u_t, E(|\nabla u|^2)u> .$$

D'une part, en reportant dans l'équation, on voit que dans $L^2_{x_1,x_2}$ faible

$$(S(t-s)x_{j'})_t \rightharpoonup (S(t-s)x)_t.$$

D'autre part, par interpolation, en utilisant le fait d'être borné dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ et la compacité dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ de $S(t-s)x_{j'}$, alors

$$|\nabla S(t-s)x_{j'}|^2 \to |\nabla S(t-s)x|^2,$$

dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ fort. Puisque $S(t-s)x_{j'}$ converge uniformément vers $S(t-s)x$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors comme E est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, on a dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ fort

$$E(|\nabla S(t-s)x_{j'}|^2 S(t-s)x_{j'}) \to E(|\nabla S(t-s)x|^2 S(t-s)x).$$

Par le théorème de convergence dominée on en déduit que (2.86) est vérifiée.

On démontre de même que $G(x'_j)$ converge vers $G(x)$. En passant à la limite dans l'équation (2.85) on trouve

$$\begin{aligned}\limsup_{j'\to+\infty}|\Delta x_{j'}|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + G(x_{j'}) &\leq \limsup_{j'\to+\infty}(|\Delta S(-t)x_{j'}|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + G(S(-t)x_{j'}))e^{-2\gamma t}\\ &\quad + q(\rho) - q(S(-t)\rho)e^{-2\gamma t}. \qquad (2.87)\end{aligned}$$

On peut démontrer que G, comme H, est continu pour la topologie forte $W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$, alors $\lim_{j'\to+\infty} G(x_{j'}) = G(\rho)$, qui donne

$$\limsup_{j'\to+\infty}|\Delta x_{j'}|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |\Delta\rho|_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

Alors $\mathcal{A}$ est compact dans $H^2(\mathbb{R}^2)$. □

Chapitre 3

La dissipativité pour les équations de Schrödinger non elliptiques

Ce chapitre fait l'objet de l'article [51], soumis à Nonlinear Analysis TMA.

Sommaire

3.1 Introduction

Les équations de Schrödinger non elliptiques s'écrivent

$$u_t + iu_{x_1x_1} - iu_{x_2x_2} + ig(|u|^2)u = 0, \tag{3.1}$$

où $u(t, x_1, x_2)$ est l'amplitude complexe, et g désigne une fonction vérifiant $g(0) = 0$. Ces équations ont plusieurs applications dans le contexte des ondes hydrodynamiques (voir [36], [72]), dans la physique des plasmas (voir [65]), dans le contexte de la propagation d'un laser ultra-court (voir [72]).

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini des solutions d'une équation de Schrödinger non elliptique dissipative avec une non-linéarité sous critique $g(|u|^2)u = |u|u$ qui s'écrit

$$u_t + \gamma u + iu_{x_1x_1} - iu_{x_2x_2} + i|u|u = f, \tag{3.2}$$

où $\gamma > 0$ est le coefficient de dissipation et la force extérieure f ne dépend pas de t ; on suppose que f est dans $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$ et que sa norme $L^2(\mathbb{R}^2)$ est assez petite. Cette équation avec le terme de dissipation et le terme de force extérieure fournit un exemple d'un système dynamique de dimension infinie, dans le cadre décrit dans [74], [48], [66], [61].

Pour commencer, on rappelle l'histoire de la théorie des attracteurs pour les équations de Schrödinger non linéaires NLS dans le cas elliptique, i.e si on prend un opérateur laplacien à la place de l'opérateur différentiel d'ordre deux dans (3.2). Pour les équations NLS, l'existence d'un attracteur global pour la topologie faible de H^1 a été démontrée dans [32]. Ensuite dans [77] l'auteur a démontré que cet attracteur faible est en fait un attracteur fort. La régularité de cet attracteur a été démontrée dans [39] pour le cas d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$, avec des conditions aux limites périodiques. Pour le cas 2-D, la régularité de l'attracteur a été démontrée dans [40] dans $\mathbb{R}^2$. On renvoie également à [7] pour NLS dans le cas 1-D où $x \in \mathbb{R}$. Pour les équations NES, à notre connaissance il n'y a pas de résultat à ce jour, car les méthodes habituelles reposent sur des estimations d'énergie qui ne sont pas efficaces dans notre cas.

Le problème de Cauchy est associé à une théorie qui est similaire au cas elliptique habituel (avec Δ l'opérateur elliptique, et la non-linéarité cubique ; voir [54], [21], [7]). Il est encore inconnu s'il existe des données initiales qui peuvent provoquer l'explosion en temps fini des solutions.

Quand on cherche l'existence d'un attracteur global, la difficulté est de prouver l'existence d'un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, car on travaille sur un opérateur non-elliptique $\partial^2_{x_1} - \partial^2_{x_2}$. Mais, si on se limite à des données initiales petites, on peut prouver que ce système dynamique a en fait un ensemble borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pour cette raison, on doit travailler sur la forme de Duhamel de cette équation, puisque la méthode habituelle d'énergie n'est pas efficace ici, à cause de l'opérateur non-elliptique $\partial^2_{x_1} - \partial^2_{x_2}$ qui n'est pas coercif sur $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Nous complétons cette courte introduction en introduisant quelques notations.
$W^{1,4}(\mathbb{R}^2)$, $H^1(\mathbb{R}^2)$ sont les espaces de Sobolev classiques. L'espace L^4_{t,x_1,x_2} désignera l'espace mixte des fonctions de puissances quatrième intégrable sur $\mathbb{R}^3$ en les variables t, x_1, x_2. Pour I un intervalle de $\mathbb{R}_t$, l'espace $L^4(I; W^{1,4}_{x_1,x_2})$ désignera l'espace des fonctions temps-espaces u telles $|u|^4_{W^{1,4}_{x_1,x_2}}$ soit intégrable sur I. Si $I = [0,T], T > 0$ on notera cet espace L^4_{T,x_1,x_2}. Ceci n'engendre pas de confusion ; la présence d'une lettre majuscule T indique une localisation en temps. De manière analogue on définit l'espace $L^4_T W^{1,4}_{x_1,x_2}$ muni de la semi-norme

$$|u|_{L^4_T W^{1,4}_{x_1,x_2}} = \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|u(s)|^4 + |\nabla u(s)|^4) dx_1 dx_2 \right) ds \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ici et dans la suite ∇ désignera le gradient par rapport aux variables d'espace.
La lettre c désigne une constante c qui peut varier d'une ligne à l'autre, quand la lettre K désigne une constante qui dépend des données f, γ et qui peut aussi varier d'une ligne à une autre.

3.2 Inégalités de Strichartz localisées

On rappelle quelques inégalités de Strichartz dans des espaces locaux qui seront utilisées dans la suite ; on sait par [36], [35] que les inégalités de Strichartz sont valables pour l'équation NES linéaire, i.e pour le groupe libre $e^{-it(\partial^2_{x_1} - \partial^2_{x_2})} u_0$ défini comme la solution de

$$u_t + i u_{x_1 x_1} - i u_{x_2 x_2} = 0, \tag{3.3}$$

avec la donnée initiale u_0. Pour être précis, on sait qu'il existe c_{str} une constante telle que pour tout u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$|U(t)u_0|_{L^4(\mathbb{R}^3_{t,x_1,x_2})} \leq c_{str}|u_0|_{L^2_{x_1,x_2}}, \tag{3.4}$$

où $U(t) = e^{-it(\partial^2_{x_1}-\partial^2_{x_2})}$.
On va maintenant énoncer un résultat qui donne des versions localisées en temps de ces inégalités.

Lemme 66 *Il existe une constante c_{str} indépendante de T telle que pour tout u_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et pour tout f dans $L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}$,*

$$|U(t)u_0|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \leq c_{str}|u_0|_{L^2_{x_1,x_2}}, \tag{3.5}$$

et

$$|\int_0^t U(t-s)f(s)ds|_{L^4_{T,x_1,x_2}} + |\int_0^t U(t-s)f(s)ds|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}} \leq c_{str}|f|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}}. \tag{3.6}$$

Démonstration: pour la démonstration, nous renvoyons à [55], [22], voire le Lemme 35 de la Section précédente . □

3.3 Définition d'un semi-groupe dissipatif

Dans cette section, on prouve que le problème de Cauchy est bien posé. Ensuite, pour une donnée initiale petite, on dérive l'existence d'un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.

3.3.1 Problème de Cauchy

On écrit le problème de Cauchy pour (NES) comme

$$u_t + \gamma u + iu_{x_1x_1} - iu_{x_2x_2} + i|u|u = f, \tag{3.7}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x_1,x_2) = u_0(x_1,x_2). \tag{3.8}$$

Proposition 21 *Soit u_0 dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Il existe un temps T_* qui est une fonction décroissante de $|u_0|_{H^1(\mathbb{R}^2)}$ tel que le problème de Cauchy (3.7)-(3.8) admette une unique solution mild u dans $X = C([0,T_*];H^1(\mathbb{R}^2)) \cap L^4([0,T_*];W^{1,4}(\mathbb{R}^2))$. En outre l'application $u_0 \mapsto u(t)$ est continue sur $H^1(\mathbb{R}^2)$. De plus cette solution s'étend à une solution globale définie pour $t \geq 0$.*

Remarque 16 *Par solution mild nous entendons une solution obtenue par le théorème de point fixe de Picard sur la forme intégrale de l'équation. Il s'avère classiquement que cette solution mild est une solution faible au sens des distributions de l'équation, puisque la fonctionelle $t \mapsto |u(t)|u(t)$ est continue à valeur dans $H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (voir [21], [38]).*

Démonstration: on commence par le problème de Cauchy local ;
1. Problème de Cauchy local
On utilise l'argument de point fixe sur la forme de Duhamel associée à cette équation (voir [21], [35]) pour démontrer que le système (3.7)-(3.8) admet une unique solution locale en temps.
On intègre l'équation (3.7) sur $[0,t]$, on trouve

$$e^{\gamma t}u(t) = U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}|u|uds + \int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}fds, \tag{3.9}$$

où $U(t)$ est le groupe libre. On appelle $e^{\gamma t}G(u)$ le membre de droite de (3.9).

Lemme 67 *Soit u_0 dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Soit*

$$R = 4\max(1,\ c_{str})\left(|u_0|_{H^1(\mathbb{R}^2)} + c\frac{|f|_{H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}}{\gamma}\right),$$

où c est une constante numérique bien choisie. Il existe un temps T_* assez petit tel que l'application G envoie la boule fermée $B_X(0,R)$ de X dans elle-même.

Démonstration: d'abord on contrôle $G(u(t))$ en norme $L^4([0,T_*];W^{1,4}_{x_1,x_2})$ pour u dans $B_X(0,R)$; en utilisant l'inégalité de Strichartz (3.5) on trouve, puisque $e^{-\gamma t}\le 1$

$$|e^{-\gamma t}U(t)u_0|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \le c_{str}|u_0|_{H^1_{x_1,x_2}} \le \frac{R}{4}. \tag{3.10}$$

Pour estimer le terme non linéaire, on utilisera l'inégalité de Hölder suivante, où Ω est un domaine quelconque en temps-espace,

$$|uv|_{L^{\frac{4}{3}}(\Omega)} \le |u|_{L^2(\Omega)}|v|_{L^4(\Omega)}; \tag{3.11}$$

on estime la norme de $\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}u|u|ds$ et de $\nabla\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}u|u|ds$ dans $L^4_{T_*,x_1,x_2}$ par (3.6). Il vient, par exemple pour le terme avec le gradient spatial, en utilisant l'estimation ponctuelle

$$|\partial_{x_1}(|u|u)| = ||u|u_{x_1} + \mathrm{Re}(\overline{u}\partial_{x_1}u)\frac{u}{|u|}| \le 2|u||u_{x_1}|, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
|e^{-\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}\nabla(u|u|)ds|_{L^4_{T_*,x_1,x_2}} &\le 2c_{str}|e^{\gamma s}\nabla(u|u|)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T_*,x_1,x_2}} \\
&\le 2c_{str}|e^{\gamma s}u|_{L^2_{T_*,x_1,x_2}}|\nabla u|_{L^4_{T_*,x_1,x_2}} \\
&\le 2c_{str}T_*^{\frac{1}{2}}\exp(\gamma T_*)|u|_{L^\infty_{T_*}L^2_{x_1,x_2}}|\nabla u|_{L^4_{T_*,x_1,x_2}} \\
&\le cc_{str}T_*^{\frac{1}{2}}R^2;
\end{aligned}$$

en supposant sans restriction aucune $\gamma T_*\le 2$. Le terme sans gradient se traite de manière analogue. Si maintenant on impose à T_* de satisfaire à $cc_{str}T_*^{\frac{1}{2}}R\le\frac{1}{8}$ alors

$$|\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}u|u|ds|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \leq \frac{R}{8}.$$

Remarque 17 *Remarquons qu'en fait il suffit d'imposer* $cc_{str}|u|_{L^\infty_{T_*}L^2_{x_1,x_2}} \leq \frac{1}{8}$*, et que l'hypothèse sur* T_* *ne porte dans cette estimation que sur la norme* L^2 *de la solution.*

On estime maintenant la norme dans $W^{1,4}_{x_1,x_2}$ de $\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}f(x_1,x_2)ds$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}f(x_1,x_2)ds &= \left(\int_0^t e^{-i(t-s)A}ds\right)f(x_1,x_2)\\ &= -iA^{-1}(Id-e^{-itA})f(x_1,x_2)),\end{aligned}$$

où $A=-i\gamma+\Lambda$ et $\Lambda=\partial^2_{x_1}-\partial^2_{x_2}$. Comme

$$|A^{-1}|_{\mathcal{L}(H^s)} \leq \frac{1}{\gamma},$$

puisque son symbole $\frac{1}{-i\gamma+\xi_1^2-\xi_2^2}$ est dans L^∞_ξ et est borné par $\frac{1}{\gamma}$, alors en utilisant l'injection de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2) \subset L^4(\mathbb{R}^2)$

$$|A^{-1}f|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} \leq c|A^{-1}f|_{H^{\frac{3}{2}}_{x_1,x_2}} \leq c\frac{|f|_{H^{\frac{3}{2}}_{x_1,x_2}}}{\gamma}.$$

Ceci donne grâce à (3.6) que

$$\begin{aligned}|\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}f(x)ds|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} &= |iA^{-1}(Id-e^{-itA})f|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}\\ &\leq |A^{-1}f|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} + |U(t)A^{-1}e^{-\gamma t}f|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}}\\ &\leq cT_*^{\frac{1}{4}}|A^{-1}f|_{W^{1,4}_{x_1,x_2}} + cc_{str}|A^{-1}f|_{H^1_{x_1,x_2}}\\ &\leq c(T_*^{\frac{1}{4}}+c_{str})\frac{|f|_{H^{\frac{3}{2}}_{x_1,x_2}}}{\gamma} \leq \frac{R}{8},\end{aligned}$$

si T_* assez petit.
On a alors établi

$$|G(u(t))|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \leq \frac{R}{2}.$$

Maintenant on contrôle $G(u(t))$ en norme $L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}$; on a

$$|e^{-\gamma t}U(t)u_0|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} \leq |u_0|_{H^1_{x_1,x_2}} \leq \frac{R}{4}.$$

L'estimation du terme non-linéaire dans $L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}$ se traite de manière identique à l'estimation dans $L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}$ en utilisant (3.6).
On passe maintenant au terme de force. Il vient, pour $t \in [0, T_*]$, en utilisant que e^{-itA} est contractant sur $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
& |\int_0^t e^{\gamma(s-t)}U(t-s)f(x_1,x_2)ds|_{H^1_{x_1,x_2}}| = |iA^{-1}(Id - e^{-itA})f|_{H^1_{x_1,x_2}} \\
\leq \; & |A^{-1}f|_{H^1_{x_1,x_2}} + |e^{-itA}A^{-1}f|_{H^1_{x_1,x_2}} \\
\leq \; & 2c\frac{|f|_{H^1_{x_1,x_2}}}{\gamma} \leq \frac{R}{8}.
\end{aligned}$$

Donc

$$|G(u(t))|_{L^\infty_T H^1_{x_1,x_2}} \leq \frac{R}{2}.$$

Ceci complète la preuve du lemme. □

Lemme 68 *Sous les mêmes hypothèses qu'au Lemme 67, l'application G est contractante sur la boule $B_X(0, R)$.*

Démonstration: on utilisera à plusieurs reprises l'estimation ponctuelle suivante

$$|\partial_{x_1}(|u|u - |v|v)| \leq c\left((|u_{x_1}| + |v_{x_1}|)|u - v| + (|u| + |v|)|u_{x_1} - v_{x_1}|\right). \tag{3.13}$$

Soient $u, v \in B(0, R) \subset X$ avec $|u|^2_X \leq R^2$, $|v|^2_X \leq R^2$.
On a directement par l'estimation (3.6) et l'inégalité de Hölder (3.11)

$$\begin{aligned}
|G(u) - G(v)|_{L^\infty_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} \; + \; & |G(u) - G(v)|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \leq c_{str}|e^{\gamma s}(u|u| - v|v|)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T_*}W^{1,\frac{4}{3}}_{x_1,x_2}} \\
\leq \; & cc_{str}e^{\gamma T_*}(|u|_{L^2_{T_*}L^2_{x_1,x_2}} + |v|_{L^2_{T_*}L^2_{x_1,x_2}})|u - v|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \\
& + (|u|_{L^2_{T_*}H^1_{x_1,x_2}} + |v|_{L^2_{T_*}H^1_{x_1,x_2}})|u - v|_{L^4_{T_*,x_1,x_2}} \\
\leq \; & cc_{str}RT_*^{\frac{1}{2}}|u - v|_{L^4_{T_*}W^{1,4}_{x_1,x_2}} \\
\leq \; & cc_{str}RT_*^{\frac{1}{2}}|u - v|_X.
\end{aligned}$$

On obtient alors la contraction si $cc_{str}RT_*^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$. □

On va vérifier la stabilité par rapport à la donnée initiale

Lemme 69 *Pour $t \in [0, T_*]$ assez petit comme précédemment, le semi-groupe $S(t)$ est fortement continu sur $H^1(\mathbb{R}^2)$ (i.e continu pour la topologie forte de $H^1(\mathbb{R}^2)$).*

Démonstration: soient $u(t)$, $v(t)$ deux solutions issues de u_0, v_0 dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, on veut montrer si $u_0 \to v_0$, alors $u(t) = S(t)u_0 \to v(t) = S(t)v_0$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On a, pour $t \in [0, T_*]$, en utilisant de nouveau (3.13), (3.6) et (3.11)

$$\begin{aligned}
|u(t) - v(t)|_X &\leq |e^{-\gamma t}U(t)(u_0 - v_0)|_X + |\int_0^t e^{\gamma(s-t)}U(t-s)(u|u| - v|v|)|_X ds \\
&\leq cc_{str}|u_0 - v_0|_{H^1_{x_1,x_2}} + cc_{str}e^{\gamma T_*}T_*^{\frac{1}{2}}(|u|_X + |v|_X)|u - v|_X \\
&\leq cc_{str}|u_0 - v_0|_{H^1_{x_1,x_2}} + cc_{str}RT_*^{\frac{1}{2}}|u - v|_X.
\end{aligned}$$

On choisit T_* tel que $cc_{str}RT_*^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$, alors

$$|u - v|_X \leq 2cc_{str}|u_0 - v_0|_{H^1_{x_1,x_2}}.$$

D'où le résultat voulu. □

Remarque 18 *On a en fait vérifié que pour T_* assez petit l'application $u_0 \mapsto u$ était continue de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans X. Ce résultat de continuité s'étendra par induction à tout temps où le semi-groupe est défini.*

2. Passage du local au global

La solution $u(t)$ construite précédemment s'étend par concaténation à une solution maximale définie sur $[0, T_{max}[$ avec l'alternative suivante :

$$\text{soit } T_{\max} = +\infty, \text{ soit } T_{max} < +\infty \text{ et } \lim_{t \to T_{max}} |u(t)|_{H^1_x} = +\infty.$$

Pour démontrer que la solution est globale en temps on démontre que $|u(t)|_{H^1}$ ne tend pas vers l'infini. Tout d'abord on contrôle la norme $L^2(\mathbb{R}^2)$ de $u(t)$.

Si $u(t)$ est une solution de (3.7)-(3.8) avec $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on multiplie (3.7) par $\bar{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, on intègre en prenant la partie réelle, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} = \mathrm{Re}\int f\overline{u} \leq \frac{|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}}}{2\gamma} + \frac{\gamma}{2}|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

Grâce au lemme de Gronwall on trouve que pour tout temps positif

$$|u|^2_{L^2_{x_1,x_2}} \leq e^{-\gamma t}|u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + (1 - e^{-\gamma t})\frac{|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma^2} \leq R_0^2 = \max(\frac{|f|^2_{L^2_{x_1,x_2}}}{\gamma^2}, |u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}}). \quad (3.14)$$

Nous allons démontrer que la régularité H^1 de la solution persiste sur un laps de temps qui ne dépend que de la taille *dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de la donnée initiale ; confer Remarque 17.*
On passe maintenant à l'estimation dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Soit $0 \leq t \leq T_0 < \min(\frac{1}{\gamma}, T_{max})$ où T_0 sera précisé dans la suite (la condition $\gamma T_0 \leq 1$ est juste là pour majorer $\exp(\gamma T_0)$ par une constante). On reprend l'équation (3.9) et on calcule la norme $L^2_{x_1,x_2}$ de ∇u via

$$e^{\gamma t}|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + |\int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}\nabla(u|u|)ds|_{L^2_{x_1,x_2}} + K, \tag{3.15}$$

où K dépend des données f, γ de l'équation. En utilisant une nouvelle fois (3.6), (3.12) et (3.11) on contrôle le terme non-linéaire par

$$\begin{aligned} &|\int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}\nabla(u|u|)ds|_{L^4_{T_0,x_1,x_2}} + |\int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}\nabla(u|u|)ds|_{L^\infty_{T_0}L^2_{x_1,x_2}} \\ \leq\ & 2c_{str}|e^{\gamma s}u\nabla u|_{L^{\frac{4}{3}}_{T_0,x_1,x_2}} \leq cc_{str}|\nabla u|_{L^4_{T_0,x_1,x_2}}|u|_{L^2_{T_0,x_1,x_2}} \leq cc_{str}T_0^{\frac{1}{2}}R_0|\nabla u|_{L^4_{T_0,x_1,x_2}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Par ailleurs, on estime la norme $L^4_{T_0,x_1,x_2}$ de ∇u à partir de (3.9), (3.6) et (3.11) de la même manière. Il vient

$$\begin{aligned} |\nabla u(t)|_{L^4_{T_0,x_1,x_2}} \leq c_{str}|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + & \quad |\int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}\nabla(u|u|)ds|_{L^4_{T_0,x_1,x_2}} + K \\ \leq & \quad c_{str}|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + cc_{str}T_0^{\frac{1}{2}}R_0|\nabla u|_{L^4_{T_0,x_1,x_2}} + K. \end{aligned} \tag{3.17}$$

On ajuste maintenant T_0 assez petit ne dépendant que de R_0 tel que $cc_{str}T_0^{\frac{1}{2}}R_0 \leq \frac{1}{2}$. Pour cette valeur de T_0 fixée, on déduit de (3.15)-(3.17) que pour $t \leq T_0$

$$|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq (1+c_{str})|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K. \tag{3.18}$$

On exhibe maintenant $m \in \mathbb{N}$ tel que $mT_0 \leq T_{max} < (m+1)T_0$. Par récurrence sur les intervalles $[mT_0, (m+1)T_0]$ on démontre à partir de (3.18) que pour $t < T_{max}$

$$|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq (1+c_{str})^{(m+1)}(|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K). \tag{3.19}$$

Cette estimation très grossière interdit l'explosion en temps fini. □

3.3.2 Existence d'un borné absorbant

On introduit maintenant

$$Y = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2); |u|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma}\}.$$

L'espace Y muni de la topologie de la norme H^1 est un espace métrique complet sur lequel on peut définir un semi-groupe $S(t);\ t \geq 0$

$$S(t) : Y \subset H^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$$

$$u(t) = S(t)u_0,$$

où $u(t)$ est la solution de (3.7)-(3.8). Sur Y la quantité $R_0 = \frac{|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma}$ ne dépend plus de la donnée initiale.

Proposition 22 *Supposons que*

$$16c_{str}^3|f|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \gamma^3. \tag{3.20}$$

Alors il existe un ensemble β borné dans $H^1_{x_1,x_2}$ qui est un borné absorbant pour le semi-goupe. Pour tout B borné dans Y, il existe un temps $t = t(B)$ tel que $S(t)B \subset \beta$ pour $t \geq t(B)$.

L'hypothèse clef (3.20) sera supposée vérifiée à partir de maintenant.

Démonstration: la démonstration s'effectue en plusieurs étapes. On démontre qu'il existe un pas de temps T, ni trop petit, ni trop grand, tel que pour toute trajectoire il existe une suite $u(mT)$, qui sera absorbée après un temps transitoire. On démontre deux lemmes, le premier donnant une estimation locale, et le deuxième permettant de passer d'une estimation locale à une estimation globale.

Lemme 70 *Il existe T, K_0 dépendant de f, γ tel que pour $t \in [0,T]$, pour tout u_0 dans Y,*

$$e^{\gamma t}|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq e^{c_{str}}|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K_0, \tag{3.21}$$

et tel que $\exp(c_{str} - \gamma T) < 1$.

Remarque 19 *Ce lemme n'assure pas une contraction du semi-groupe pour tout temps, mais assure qu'après un laps de temps fini il devient contractant à cause de la condition* $\exp(c_{str} - \gamma T) < 1$.

Démonstration: soit $t \in [0,T]$, où T sera précisé dans la suite. On prend la forme de Duhamel de (3.7)-(3.8) qui s'écrit

$$e^{\gamma t}u(t) = \quad U(t)u_0 - i\int_0^t U(t-s)e^{\gamma s}|u|u ds \quad + \int_0^t U(t-s)e^{\gamma s} f ds. \tag{3.22}$$

On introduit une fonction auxiliaire $v(t) = e^{\gamma t}u(t)$, on trouve

$$\nabla v(t) = \quad U(t)\nabla u_0 - i\int_0^t U(t-s)\nabla(|u|v)ds \quad + e^{\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f ds. \tag{3.23}$$

On dénote par I_1, I_2, I_3, respectivement le premier, le deuxième, le troisième terme dans la partie droite de la dernière égalité. Pour I_1 ; on trouve comme $U(t)$ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ que

$$|I_1|_{L^2_{x_1,x_2}} = |U(t)\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

Maintenant on va traiter I_3 ; comme le terme de force est indépendant du temps alors

$$|I_3| = |e^{\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f ds| = e^{\gamma t}|A^{-1}\nabla f - e^{-itA}A^{-1}\nabla f|, \tag{3.24}$$

où $A = -i\gamma + \Lambda$. Par conséquent, en utilisant que $U(t)$ est unitaire et que A^{-1} est un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ avec une norme d'ordre $\frac{1}{\gamma}$

$$|I_3|_{L^2_{x_1,x_2}} \le e^{\gamma t}(|A^{-1}\nabla f|_{L^2_{x_1,x_2}} + |U(t)e^{-\gamma t}A^{-1}\nabla f|_{L^2_{x_1,x_2}}) \le \frac{c}{\gamma}e^{\gamma t}|\nabla f|_{L^2_{x_1,x_2}} \le Ke^{\gamma T}.$$

Maintenant on va traiter I_2 ; grâce à l'estimation de Strichartz localisée (3.6) et l'inégalité (3.11) on trouve, comme $|u|_{L^2_{x_1,x_2}} \le R_0$, et en utilisant puisque $v(t) = e^{\gamma t}u(t)$, alors $|u|v = |v|u$ et $\nabla(|u|v) = u\nabla|v| + |u|\nabla v$,

$$\begin{aligned} |I_2|_{L^4_{T,x_1,x_2}} + |I_2|_{L^2_{x_1,x_2}} &= \\ |\int_0^t U(t-s)\nabla(|u|v)ds|_{L^4_{T,x_1,x_2}} + |\int_0^t U(t-s)\nabla(|u|v)ds|_{L^2_{x_1,x_2}} &\le \\ c_{str}|\nabla(|u|v)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}} \le 2c_{str}|u|_{L^2_{T,x_1,x_2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x_1,x_2}} &\le \\ 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x_1,x_2}}&. \end{aligned} \tag{3.25}$$

On résume les calculs précédents par la formule

$$|\nabla v|_{L^2_{x_1,x_2}} \le |\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x_1,x_2}} + Ke^{\gamma T}. \tag{3.26}$$

Ensuite on doit trouver une borne supérieure pour $|\nabla v|_{L^4_{T,x_1,x_2}}$. De la même manière et grâce à (3.23), (3.5), (3.6) et (3.25) on trouve

$$|\nabla v|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \le c_{str}|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + 2c_{str}R_0T^{\frac{1}{2}}|\nabla v|_{L^4_{T,x_1,x_2}} + |e^{\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f ds|_{L^4_{T,x_1,x_2}}.$$

Pour le dernier terme dans l'inégalité précédente on trouve, en utilisant (3.24) et (3.5), que

$$|e^{\gamma t}\int_0^t U(t-s)e^{\gamma(s-t)}\nabla f ds|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \le Ke^{\gamma T},$$

où $K = K(|f|_{H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}, \gamma)$ dépend seulement de γ et f.

On choisit T tel que

$$\frac{c_{str}}{\gamma} < T \le \frac{1}{16c_{str}^2R_0^2}, \tag{3.27}$$

alors

$$|\nabla v|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \le 2c_{str}|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + 2K. \tag{3.28}$$

En combinant (3.28) et (3.26), il vient

$$e^{\gamma t}|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq (1 + 4c_{str}^2 R_0 T^{\frac{1}{2}})|\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K,$$

ce qui avec $1 + 4c_{str}^2 R_0 T^{\frac{1}{2}} \leq \exp(4c_{str}^2 R_0 T^{\frac{1}{2}}) \leq \exp(c_{str})$ grâce à (3.27) donne le résultat voulu. □

Maintenant on passe du résultat local au résultat global.

Lemme 71 *Soit T comme précédemment. Soit $\delta = e^{-(\gamma T - c_{str})} < 1$. Il existe une constante K_1 ne dépendant que de f, γ telle que la suite $u(mT)$; $m \in \mathbb{N}$ vérifie l'estimation*

$$|\nabla u(mT)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \delta^m |\nabla u(0)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K_1. \tag{3.29}$$

Démonstration: En spécifiant $t = T$ dans le Lemme 70, il vient

$$|\nabla u(T)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \delta |\nabla u(0)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K.$$

De manière identique, on peut prouver la même estimation sur $[(m-1)T, mT]$ et on prouve ainsi par récurrence sur m que

$$|\nabla u(mT)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \delta |\nabla u((m-1)T)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K; \tag{3.30}$$

la preuve est similaire à la preuve de Lemme 70, en utilisant seulement les bornes dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et les estimations de Strichartz localisées. Par une récurrence immédiate

$$\begin{aligned} |\nabla u(mT)|_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq \delta |\nabla u((m-1)T)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K \\ &\leq \delta^m |\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K(1 + \delta + ... + \delta^{m-1}) \\ &\leq \delta^m |\nabla u_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + \frac{K}{(1-\delta)}, \end{aligned}$$

qui complète la démonstration du Lemme 22 avec $K_1 = \frac{K}{(1-\delta)}$. □

On complète maintenant la démonstration de l'existence du borné absorbant β ; d'une part de (3.29) on déduit qu'il existe un temps t_1 ne dépendant que de $|\nabla u_0|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ tel que pour $mT \geq t_1$ alors $|\nabla u(mT)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq 2K_1$. D'autre part, en reprenant l'estimation locale du Lemme 70 qui s'écrit pour $t \in [mT, (m+1)T]$

$$e^{\gamma t}|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq e^{c_{str}} |\nabla u(mT)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K_0,$$

on obtient que l'ensemble

$$\beta = \{u \in Y; |\nabla u|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq 2K_1 e^{c_{str}} + K_0\},$$

est absorbant dans Y ; rappelons que Y est inclus dans une boule de $L^2(\mathbb{R}^2)$ positivement invariante par $S(t)$. □

Remarque 20 *Notre ensemble absorbant n'est pas positivement invariant par $S(t)$. Ceci n'est pas requis dans la stratégie de construction d'un attracteur (confer [74]). Par contre il existe un temps $t(\beta)$ tel que $S(t)\beta \subset \beta$ pour $t \geq t(\beta)$. On va indiquer maintenant comment construire à partir de β un ensemble absorbant positivement invariant par le semi-groupe, quitte a faire grossir cet ensemble un petit peu. Soit le couple $(\beta, t(\beta))$ comme précédemment. Soit $\Sigma = \cup_{t\in[0,t(\beta)]} S(t)\beta$. L'ensemble Σ est absorbant car il contient un ensemble absorbant. Σ est un sous-ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^2)$ car $S(t)$ est borné sur $H^1(\mathbb{R}^2)$. Il est positivement invariant par construction, puisque $S(t)\beta \subset \beta$ pour $t \geq t(\beta)$. Dans ce qui suit on appelera β ce nouvel ensemble absorbant.*

3.4 Existence d'un attracteur global

Dans cette section, on prouve l'existence d'un attracteur global compact dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Dans ce but on utilise la méthode de [57] pour établir la compacité de trajectoires dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, ensuite on travaille sur la forme de Duhamel de cette équation pour démontrer que ces trajectoires sont en fait relativement compactes dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. En effet, cet attracteur est obtenu comme l'ensemble ω-limite du borné absorbant du semi-groupe.

Théorème 3.4.1 *$S(t)$ possède un attracteur global dans $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: soit $u(t)$ une trajectoire incluse pour tout temps positif dans le borné absorbant. Pour $\alpha > 0$ on considère χ_α une fonction de troncature C^∞ vérifiant la propriété suivante

$$\chi_\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1+\alpha. \end{cases}$$

On trouve $(f\chi_\alpha) \to f$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ quand $\alpha \to +\infty$. Alors $\forall \eta \in]0,1]$, il existe $\alpha(\eta) > 0$ tel que, pour $f_\eta = f\chi_{\alpha(\eta)}$,

$$|f - f_\eta|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \eta, \forall \eta \in]0,1].$$

On écrit u la solution de (3.7) comme $u = v + w$, tel que v soit une solution de

$$v_t + \gamma v + i\Lambda v = -i|u|v + f - f_\eta \tag{3.31}$$
$$v(0) = u_0,$$

et w soit une solution de

$$w_t + \gamma w + i\Lambda w = -i|u|w + f_\eta \tag{3.32}$$
$$w(0) = 0.$$

Tout d'abord, on énonce un lemme qui affirme que v est arbitrairement petit dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour les grands temps.

Lemme 72 *Soit β l'ensemble absorbant de la section précédente, supposé positivement invariant (confer Remarque 20). Pour tout $u_0 \in \beta$, $\forall \eta \in]0,1]$, alors il existe $t(\eta) > 0$, tel que pour $t \geq t(\eta)$*

$$|v(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \frac{\sqrt{2}\eta}{\gamma}.$$

Démonstration: on multiplie (3.31) par $\bar{v}$, on intègre en prenant la partie réelle, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\gamma|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}} &= \mathrm{Re}\int(f-f_\eta)\bar{v}\\ &\leq |f-f_\eta|_{L^2_{x_1,x_2}}|v|_{L^2_{x_1,x_2}}\\ &\leq \frac{1}{2\gamma}|f-f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\frac{\gamma}{2}|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}},\end{aligned}$$

alors

$$\frac{d}{dt}|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\gamma|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}}\leq\frac{\eta^2}{\gamma}.$$

Ceci donne grâce au lemme de Gronwall

$$|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}}\leq e^{-\gamma t}|u_0|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\frac{\eta^2}{\gamma^2}. \tag{3.33}$$

Par conséquent dès que $t\geq t(\eta)$ avec $t(\eta)=\frac{2}{\gamma}\log(\frac{\gamma|u_0|_{L^2_{x_1,x_2}}}{\eta})$ alors $|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}}\leq 2\frac{\eta^2}{\gamma^2}$. □

Remarque 21 *L'équation (3.33) nous indique en outre que $|v|^2_{L^2_{x_1,x_2}}$ reste borné pour tout temps positif dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ par $R_0^2+\frac{\eta^2}{\gamma^2}$. Puisque $w=u-v$, w reste lui aussi borné pour tout temps positif dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Maintenant on démontre le lemme suivant

Lemme 73 *$\forall u_0\in\beta$, pour tout temps $t\geq 0$, w reste dans un ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on va procéder comme dans la démonstration du Lemme 70 et de la Proposition 22. On sait déja que w est borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ par la remarque précédente. Considérons l'intervalle de temps $T=T(f,\gamma)$ utilisé dans la démonstration du Lemme 70. Introduisons la notation suivante

$$|\phi|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)}=\left(\int_t^{t+T}|\phi(s)^4|ds\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{3.34}$$

L'indice t indique que l'on calcule sur une fenêtre de longueur T mais commençant en t. Soient t,τ tels que $0\leq t\leq\tau\leq t+T$. On pose $w_1(s)=w(s)e^{\gamma s}$, alors w_1 est une solution de

$$w_1(\tau)=U(\tau-t)w_1(t)-i\int_t^\tau U(\tau-s)|u|w_1ds+e^{\gamma\tau}\int_t^\tau U(\tau-s)e^{\gamma(s-\tau)}f_\eta ds. \tag{3.35}$$

En utilisant les inégalités de Strichartz localisées du Lemme 66 il vient alors, comme dans la démonstration du Lemme 70

$$
\begin{aligned}
|\nabla w_1|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq c_{str}|\nabla w_1(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} + c_{str}|u|_{L^2_{T,x_1,x_2}(t)}|\nabla w_1|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)}+ \\
c_{str}|w_1|_{L^2_{T,x_1,x_2}(t)}|\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} + K(\eta,T,f,\gamma).
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

D'une part $c_{str}|u|_{L^2_{T,x_1,x_2}(t)} \leq c_{str}T^{\frac{1}{2}}R_0 \leq \frac{1}{2}$, d'autre part $|w_1|_{L^2_{T,x_1,x_2}(t)}|\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq K$ puisque respectivement w et u sont bornés dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et $H^1(\mathbb{R}^2)$. Indiquons par exemple comment contrôler $|\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)}$; l'estimation (3.28) sur l'intervalle de temps $[t, t+T]$ permet d'écrire

$$
|\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq 2c_{str}|\nabla u(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} + 2K \leq \tilde{K}.
$$

D'autre part

$$
|w_1|_{L^2_{T,x_1,x_2}(t)} \leq T^{\frac{1}{2}}e^{\gamma T}|w|_{L^\infty([t,t+T];L^2_{x_1,x_2})} \leq K,
$$

puisque w est borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ pour tout temps positif (confer Remarque 21). Donc

$$
|\nabla w_1|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \leq 2c_{str}|\nabla w_1(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K(\eta,T,f,\gamma). \tag{3.37}
$$

Ici encore $K(\eta,T,f,\gamma)$ peut varier d'une ligne à l'autre. On calcule l'équivalent dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de (3.36). Il vient, en utilisant encore une fois (3.6) et (3.11)

$$
\begin{aligned}
|\nabla w_1(\tau)|_{L^2_{x_1,x_2}(t)} &\leq |\nabla w_1(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} + c_{str}(|u|_{L^2_{T,x_1,x_2}(t)}|\nabla w_1|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)} \\
&\quad +|w_1|_{L^2_{T,x_1,x_2}(t)}|\nabla u|_{L^4_{T,x_1,x_2}(t)}) + K(\eta,T,f,\gamma) \\
&\leq (1+c_{str})|\nabla w_1(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K(\eta,T,f,\gamma).
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

En procédant comme dans la Proposition 22 on trouve qu'il existe $K(\eta,T,f,\gamma)$ tel que $|w|_{H^1} \leq K(\eta,T,f,\gamma)$ pour $t \geq 0$. □

Maintenant on démontre un lemme pour w

Lemme 74 $\forall u_0 \in \beta$, $\forall \eta \in]0,1]$, *alors pour* $t \geq 0$

$$
|\rho w|_{L^2} \leq K_\eta,
$$

où $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, *et* K_η *est une constante qui dépend de* γ, f, η.

Démonstration: on multiplie (3.32) par $\rho^2\bar{w}$, on intègre en prenant la partie réelle, on trouve

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} + \gamma|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} - \mathrm{Im}\int \rho^2\bar{w}\Lambda w = \mathrm{Re}\int \rho^2\bar{w}f_\eta,
$$

avec

$$
-\mathrm{Im}\int \rho^2\bar{w}\Lambda w = 2\mathrm{Im}\int \bar{w}(x_1 w_{x_1} - x_2 w_{x_2}).
$$

Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\gamma|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq c|\rho w|_{L^2_{x_1,x_2}}|\nabla w|_{L^2_{x_1,x_2}}+|\rho w|_{L^2_{x_1,x_2}}|\rho f_\eta|_{L^2_{x_1,x_2}}\\ &\leq \frac{\gamma}{4}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\frac{c}{\gamma}|w|^2_{H^1}+\frac{\gamma}{4}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\frac{1}{\gamma}|\rho f_\eta|^2_{L^2_{x_1,x_2}}\\ &\leq \frac{\gamma}{2}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+K_\eta.\end{aligned}$$

Alors

$$\frac{d}{dt}|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}}+\gamma|\rho w|^2_{L^2_{x_1,x_2}}\leq K_\eta.$$

Grâce au lemme de Gronwall, on conclut la preuve du Lemme 74. □

Maintenant on rappelle sans démonstration le lemme suivant. Nous renvoyons à [26] ou au Lemme 45 de la Section précédente.

Lemme 75 $H^1(\mathbb{R}^2)\cap L^2(\mathbb{R}^2,(1+\rho^2)dx_1dx_2)\subset L^2(\mathbb{R}^2)$ *est une injection compacte.*

On a terminé la première étape de la preuve du théorème, i.e la compacité dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de l'ensemble ω-limite de β. En écrivant u comme $u=v+w$ où v est arbitrairement petit et w reste dans un ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^2)\cap L^2(\mathbb{R}^2,(1+\rho^2)dx_1dx_2)$, alors on obtient

Conclusion 3 *Pour tout $\eta>0$, il existe $t\geq t(\eta)$ et K_η un ensemble compact de $L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que*

$$S(t)\beta\subset B_{L^2}(0,\eta^{\frac{1}{2}}k)+K_\eta.$$

Alors $S(t)\beta$ est relativement compact dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, i.e. pour toute suite $t_j\to+\infty$ et $u_j\in\beta$, il existe une sous-suite $S(t_j)u_j$ qui converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Maintenant on démontre le lemme suivant

Lemme 76 *Pour $t\in[0,T]$, $S(t)$ est continu sur les bornés de $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on peut démontrer le lemme pour T petit, et puis on conclut par récurrence sur k de $k=0$ à m tel que $mT\leq t<(m+1)T$; $m\in\mathbb{N}$.

En utilisant la forme de Duhamel de (3.7)-(3.8) pour $0<t<T$, si u,v deux solutions avec données initiales notées respectivement u_0 et v_0, on trouve grâce à (3.5) et (3.6)

$$\begin{aligned}|u(t)-v(t)|_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq |u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}}+c_{str}(|(u-v)|u||_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}}\\ &\quad+|v(|u|-|v|)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}})\\ &\leq |u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}}+2c_{str}|u-v|_{L^2_TL^2_{x_1,x_2}}(|u|_{L^4_{T,x_1,x_2}}+|v|_{L^4_{T,x_1,x_2}})\\ &\leq |u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}}+2c_{str}T^{\frac{1}{2}}(|u|_{L^4_{T,x_1,x_2}}+|v|_{L^4_{T,x_1,x_2}})|u-v|_{L^\infty_TL^2_{x_1,x_2}}\\ &\leq |u_0-v_0|_{L^2_{x_1,x_2}}+2Kc_{str}T^{\frac{1}{2}}|u-v|_{L^\infty_TL^2_{x_1,x_2}};\end{aligned}$$

comme u, v sont dans le borné absorbant. On choisit T tel que $2Kc_{str}T^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$, alors

$$|u - v|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq 2|u_0 - v_0|_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

□

Maintenant on passe à la démonstration de la compacité asymptotique dans $H^1(\mathbb{R}^2)$;

Proposition 23 *Pour tout suite $t_j \to +\infty$ et $u_j \in \beta$, il existe $z \in H^1(\mathbb{R}^2)$ et une sous-suite $S(t_j)u_j$ qui converge fortement vers z dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: pour $t_j \to +\infty$ et $u_j \in \beta$, on sait grâce à la première étape (confer Conclusion 3) qu'il existe une sous-suite $S(t_j)u_j$ qui converge vers z, faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, et fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On dénote toujours cette sous-suite par (t_j, u_j).
Il est facile de vérifier que, pour tout $T > 0$ fixe la suite $S(t_j - T)u_j$ converge vers $S(-T)z$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, et fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, comme on peut reculer dans le temps pour le semi-groupe et comme $S(t)$ est continu sur les bornés de $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour la topologie forte de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Maintenant on doit démontrer que $\nabla S(t_j)u_j$ converge vers ∇z fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On énonce un résultat qui est le pendant du Lemme 70 pour la différence entre deux solutions. On commence par un résultat local, que l'on étend ensuite par induction.

Lemme 77 *Soit T fixé comme dans la démonstration du Lemme 70. Pour u et r deux solutions de (3.7) issues respectivement de u_0 et r_0 appartenant à β. Il existe $\delta < 1,\ K > 0$ dépendant de $f,\ \gamma$ tels que pour $t \in [0, T]$*

$$|\nabla u(T) - \nabla r(T)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \delta|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K|u_0 - r_0|_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

On démontre aussi par récurrence sur k que

$$|\nabla u(kT) - \nabla r(kT)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \delta^k|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K\sum_{l=0}^{k-1}\delta^{k-l}|u(lT) - r(lT)|_{L^2_{x_1,x_2}}.$$

Démonstration: on introduit les fonctions auxiliaires $v = e^{\gamma t}u$ et $q = e^{\gamma t}r$. On travaille sur la forme de Duhamel (3.9). On commence par une estimation dans L^4 sur le gradient des fonctions. Il vient, en utilisant (3.5), (3.6), et(3.11)

$$\begin{aligned} |\nabla v - \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}} &\leq c_{str}|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + c_{str}|e^{\gamma t}\nabla(|u|u - |r|r)|_{L^{\frac{4}{3}}_{T,x_1,x_2}} \\ &\leq c_{str}|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + c_{str}T^{\frac{1}{2}}(|u - r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}|\nabla v + \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \\ &\quad +|\nabla v - \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}}|u + r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}). \end{aligned} \tag{3.39}$$

D'une part, on écrit via (3.28)

$$c_{str}T^{\frac{1}{2}}|u - r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}|\nabla v + \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \leq K|u - r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}},$$

où K dépend de $\gamma,\ f,\ T$.
D'autre part, on écrit comme $|u|_{L^2_{x_1,x_2}}, |r|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq R_0$, grâce à (3.27)

$$c_{str}T^{\frac{1}{2}}|\nabla v - \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}}|u+r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}} \leq \frac{1}{2}|\nabla v - \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}}. \tag{3.40}$$

On obtient donc

$$|\nabla v - \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}} \leq 2c_{str}|\nabla u_0 - \nabla v_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K|u-r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}. \tag{3.41}$$

Maintenant on estime la norme L^2 de $\nabla v - \nabla q$. Grâce à (3.6), on trouve de manière analogue

$$|\nabla v - \nabla q|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq |\nabla(u_0 - r_0)|_{L^2_{x_1,x_2}} + K|u-r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}} + \frac{1}{2}|\nabla v - \nabla q|_{L^4_{T,x_1,x_2}}.$$

En utilisant (3.41), on trouve

$$\begin{aligned}|\nabla v(T) - \nabla q(T)|_{L^2_{x_1,x_2}} &\leq (1+c_{str})|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K|u-r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}} \\ &\leq e^{c_{str}}|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K|u-r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}.\end{aligned}$$

D'où

$$|\nabla u(T) - \nabla r(T)|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq e^{-(\gamma T - c_{str})}|\nabla u_0 - \nabla r_0|_{L^2_{x_1,x_2}} + K|u-r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}}.$$

On utilise ensuite le Lemme 76 qui nous permet la majoration $|u-r|_{L^\infty_T L^2_{x_1,x_2}} \leq K(T)|u_0 - r_0|_{L^2_{x_1,x_2}}$. La première inégalité du Lemme 77 est établie. La seconde se démontre par une récurrence immédiate, quitte à changer la valeur de K. □

En utilisant le Lemme 77, et comme $S(t_j)u_j$, z sont des solutions de (3.7) alors pour T comme précédemment, et pour k entier

$$\begin{aligned}|\nabla S(t_j)u_j - \nabla z|_{L^2_{x_1,x_2}} \quad \leq \quad & \delta^k|\nabla S(t_j - kT)u_j - \nabla S(-kT)z|_{L^2_{x_1,x_2}} \\ & + K\sum_{l=0}^{k-1}\delta^{k-l}|S(t_j - kT + lT)u_j - S(lT - kT)z|_{L^2_{x_1,x_2}}.\end{aligned}$$

On fixe k et T. Grâce à la convergence forte dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ de chaque $S(t_j - kT + lT)u_j$ vers $S(lT - kT)z$, et grâce au Lemme 76 que

$$\limsup_{j\to+\infty}|\nabla S(t_j)u_j - \nabla z|_{L^2_{x_1,x_2}} \leq \delta^k \limsup_{j\to+\infty}|\nabla S(t_j - kT)u_j - \nabla S(-kT)z|_{L^2_{x_1,x_2}},$$

Comme $S(t_j - kT)u_j$, qui se trouve dans le borné absorbant pour j assez grand, converge vers $S(-kT)z$ faiblement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors $(S(t_j - kT)u_j - S(-kT)z)$ est borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Par conséquent, en laissant $k \to +\infty$, on trouve que $S(t_j)u_j$ converge vers z fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, et la démonstration du Théorème 3.4.1 est achevée. □

On résume les résultats dans cette section par la proposition suivante

Proposition 24 *Soit* $\mathcal{A} = \{a \in \beta, \exists\varphi_n \in \beta$ *et* $t_n \to +\infty$, *tel que* $S(t_n)\varphi_n \to a$ *dans* $H^1(\mathbb{R}^2)\}$, *alors* $\mathcal{A}$ *est l'attracteur global pour (3.7)-(3.8).*

Démonstration: on applique le Théorème I.1.1 de [74] pour établir que $\mathcal{A}$ est un attracteur global dans $Y \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ pour l'équation (3.7). Une démonstration plus détaillée se trouve dans le Chapitre 2 de cette thèse. Par ailleurs, il faut observer que le Théorème I.1.1 de [74] indique que $\mathcal{A}$ est non vide. Contrairement aux chapitres précédents, nous ne sommes pas capable de démontrer que l'équation admet une solution stationnaire. $\square$

Chapitre 4

La dissipativité pour un schéma de relaxation appliqué sur l'équation de Davey-Stewartson en 1-D et en 2-D

Ce chapitre fait l'objet de l'article [43], paru dans Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta.

Sommaire

4.1 Introduction

Le système de Davey-Stewartson DS est une généralisation de l'équation de Schrödinger non linéaire NLS (avec un terme non local), pour cela on donne quelques schémas numériques connus pour l'équation NLS ; dans le cas conservatif (i.e où $\gamma = 0$, et $f = 0$), on cite par exemple le schéma de Crank-Nicolson (voir [28], [67]), le schéma de Runge-Kutta (voir [6], [5], [53]), et le schéma de splitting (voir [78], [16]). Dans le cas dissipatif, on se réfère à [46] où les auteurs utilisent le schéma de Crank-Nicolson pour discrétiser en temps l'équation NLS faiblement amortie en 1-D, et prouvent l'existence d'un attracteur global dans $H^1(\mathbb{T})$ qui est compact dans $H^2(\mathbb{T})$. On se réfère aussi à [31] pour le problème en 2-D. Parmis les autres méthodes numériques, les méthodes de splitting, ont été utilisées dans [10] pour résoudre l'équation NLS avec amortissement.
Le schéma de relaxation en temps pour l'équation NLS et l'équation DS a été introduit par

C. Besse (voir [15], [14], [13]). Le schéma de relaxation de C. Besse consiste à considérer l'équation DS en 2-D, dans le cas conservatif, comme un système de deux équations

$$\begin{aligned} \varphi &= E(|u|^2), \\ iu_t + \Delta u &= bu\varphi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où E est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est par exemple $\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}$ dans le cas du système de Davey-Stewartson dans le cas elliptique, ou l'identité pour les équations NLS. Le schéma d'ordre 2 de ce système, en considérant $u^n \sim u(n\tau)$ et $\varphi^{n+\frac{1}{2}} \sim \varphi((n+\frac{1}{2})\tau)$, s'écrit

$$\begin{aligned} i\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau} + \Delta\frac{u^{n+1}+u^n}{2} &= b\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\varphi^{n+\frac{1}{2}}, \\ E(|u^n|^2) &= \frac{\varphi^{n+\frac{1}{2}}+\varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dans ce chapitre on s'intéresse à étudier le schéma de relaxation dans le cas dissipatif en 1-D et en 2-D.
On introduit quelques notations. c sera une constante numérique qui peut changer de valeur d'un endroit à un autre. k (ou K) désignera une constante qui dépend des données f, γ de l'équation considérée, et qui pourra elle aussi changer de valeur d'une ligne à l'autre.

4.2 La dissipativité pour un schéma de relaxation appliqué sur un modèle réduit 1-D de l'équation de Davey-Stewartson

Dans le premier chapitre de cette thèse on a étudié le comportement asymptotique pour un modèle réduit 1D de l'équation de Davey-Stewartson DS

$$iu_t + i\gamma u + u_{xx} = buE(|u|^2) + f(x). \tag{4.3}$$

Rappelons les hypothèses sur E : E est un opérateur linéaire, auto-adjoint et borné sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$; en particulier

- $E(\rho)$ à valeurs réelles si ρ à valeurs réelles.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} E(\rho)\psi = \int_{\mathbb{R}} \rho E(\psi)$ si $\rho, \psi \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

On a démontré l'existence d'un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R})$ qui est en fait compact dans $H^2(\mathbb{R})$. Dans cette section on s'intéresse à étudier les mêmes propriétés dynamiques mais pour le problème semi-discret en temps de cette équation donné par le schéma de relaxation de C. Besse (voir [15], [14], [13]).

On introduit le schéma de relaxation dans le cas dissipatif. Pour préciser notre schéma, on écrit (4.3) comme

$$\begin{aligned} iu_t + i\gamma u + u_{xx} &= bu\varphi + f(x), \\ \varphi &= E(|u|^2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ce système (4.4) est équivalent à

$$\begin{aligned} i(e^{\gamma t}u)_t + (e^{\gamma t}u)_{xx} &= b(e^{\gamma t}u)\varphi + e^{\gamma t}f(x), \\ e^{2\gamma t}\varphi &= e^{2\gamma t}E(|u|^2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

On choisit une méthode de type relaxation en temps qui consiste à écrire le terme non local $E(|u^n|^2)$ à l'aide d'un potentiel discrétisé au temps $t = (n + \frac{1}{2})\tau$. On définit alors les variables $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ et u^{n+1} qui représentent respectivement les approximations de $E(|u|^2)$ au temps $t_{n+\frac{1}{2}}$ et de u au temps t_{n+1}. Soit $\tau = \Delta t$ le pas de temps, $u^0 = u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, et $\delta = e^{-\gamma\tau}$, on a

$$e^{\gamma t}u|_{t=(n+\frac{1}{2})\tau} \sim e^{\gamma(n+1)\tau}\frac{u^{n+1} + \delta u^n}{2},$$

et

$$e^{2\gamma t}\varphi|_{t=n\tau} \sim e^{2\gamma n\tau}\frac{\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2},$$

alors le schéma de relaxation pour le système dissipatif s'écrit

$$i\frac{u^{n+1} - \delta u^n}{\tau} + \Delta\frac{u^{n+1} + \delta u^n}{2} = b\frac{u^{n+1} + \delta u^n}{2}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\delta + 1}{2}f, \tag{4.6}$$

$$E(|u^n|^2) = \frac{\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \tag{4.7}$$

avec $u^0 = u_0$ et $\delta\varphi^{-\frac{1}{2}} = \delta^{-1}\varphi^{+\frac{1}{2}} = E(|u^0|^2)$.

4.2.1 Un système dynamique bien posé et dissipatif

On démontre que le schéma de relaxation dissipatif est bien posé, pour cela on démontre que pour tout $\tau > 0$ ce schéma définit un semi-groupe discret

$$\begin{aligned} S_\tau : H^1(\mathbb{R}) &\rightarrow H^1(\mathbb{R}) \\ u^n &\mapsto u^{n+1}. \end{aligned}$$

On commence par démontrer que $S_\tau : u^n \mapsto u^{n+1}$ est une application univoque sur $H^1(\mathbb{R})$, ensuite on démontre que S_τ est une application continue sur $H^1(\mathbb{R})$.

Théorème 4.2.1 *L'opérateur S_τ est un opérateur univoque dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on va démontrer que pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, la suite u^{n+1} définie récursivement par (4.6)-(4.7) est bien définie. Pour $u^0 \in H^1(\mathbb{R})$ on a $\varphi^{-\frac{1}{2}}$ et $\varphi^{\frac{1}{2}}$ dans $H^1(\mathbb{R})$. On démontre par récurrence sur n que $(\varphi^{n-\frac{1}{2}}, u^n) \mapsto (\varphi^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+1})$ est une application univoque. En utilisant (4.7), on trouve que $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ est dans $H^1(\mathbb{R})$, comme E est une application de $H^1(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$ et comme $H^1(\mathbb{R})$ est une algèbre. Par récurrence le système revient à résoudre l'équation linéaire suivante

$$(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi^{n+\frac{1}{2}})u^{n+1} = \delta(Id + i\frac{\tau}{2}\Delta - i\frac{\tau}{2}b\varphi^{n+\frac{1}{2}})u^n - i\frac{\delta + 1}{2}\tau f. \tag{4.8}$$

Comme $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ est dans $L^\infty(\mathbb{R})$, on trouve par le théorème de Lax-Milgram que $(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi^{n+\frac{1}{2}})$ est un opérateur bijectif de $H^1(\mathbb{R})$ dans $H^{-1}(\mathbb{R})$, alors il est inversible. Donc

$$u^{n+1} = \delta U^{n+\frac{1}{2}}u^n - i\tau\frac{\delta+1}{2}(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi^{n+\frac{1}{2}})^{-1}f, \tag{4.9}$$

où $U^{n+\frac{1}{2}} = (Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(Id + i\frac{\tau}{2}\Delta - i\frac{\tau}{2}b\varphi^{n+\frac{1}{2}})$. Maintenant on démontre que $U^{n+\frac{1}{2}}$ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$; on pose $v = U^{n+\frac{1}{2}}u$, alors

$$i\frac{v-u}{\tau} + \Delta\frac{v+u}{2} = b\varphi^{n+\frac{1}{2}}\frac{v+u}{2}. \tag{4.10}$$

D'une part, en prenant le produit scalaire de cette équation avec $i(u+v)$, on trouve

$$|v|_{L^2(\mathbb{R})} = |u|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.11}$$

D'autre part, en prenant le produit scalaire de cette équation avec $v-u$, on trouve

$$\begin{aligned} |v_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= |u_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} - b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{n+\frac{1}{2}}(x)(|v(x)|^2 - |u(x)|^2)dx \\ &\leq |u_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |b||\varphi^{n+\frac{1}{2}}(x)|_{L^\infty_x}(|v(x)|^2_{L^2_x} + |u(x)|^2_{L^2_x}). \end{aligned}$$

Grâce à (4.11), et comme $\varphi^{n+\frac{1}{2}} \in L^\infty(\mathbb{R})$ on trouve que si u est dans $H^1(\mathbb{R})$ alors v est aussi dans $H^1(\mathbb{R})$. Comme $(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi^{n+\frac{1}{2}})^{-1}f$ est dans $H^1(\mathbb{R})$ alors $u^{n+1} \in H^1(\mathbb{R})$. $\square$

Proposition 25 *Pour tout τ, pour chaque n, $S_\tau : u^n \mapsto u^{n+1}$ est une application continue dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on démontre par récurrence sur n que si la suite u^0_ε converge vers u^0 dans $H^1(\mathbb{R})$, alors u^n_ε converge vers u^n dans $H^1(\mathbb{R})$. On démontre seulement la première étape (i.e quand $n=1$), l'étape n peut se démontrer de manière similaire. Comme $\varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ converge vers $\varphi^{-\frac{1}{2}}$ dans $H^1(\mathbb{R})$, alors en utilisant (4.7) on trouve que $\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ converge vers $\varphi^{\frac{1}{2}}$ dans $H^1(\mathbb{R})$. on pose $w^n_\varepsilon = u^n_\varepsilon - u^n$, on obtient

$$\frac{i}{\tau}(w^1_\varepsilon - \delta w^0_\varepsilon) + \Delta\frac{w^1_\varepsilon + \delta w^0_\varepsilon}{2} = b(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}})\frac{u^1 + \delta u^0}{2} + b\varphi^{\frac{1}{2}}\frac{w^1_\varepsilon + \delta w^0_\varepsilon}{2}. \tag{4.12}$$

En prenant le produit scalaire de cette équation avec $i(w^1_\varepsilon + \delta w^0_\varepsilon)$ on trouve, comme u^1, u^0, w^1_ε et w^0_ε sont bornés dans $H^1(\mathbb{R})$, que

$$\begin{aligned} |w^1_\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \delta^2|w^0_\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} + b\tau\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}})\frac{u^1+\delta u^0}{2}\overline{w^1_\varepsilon + \delta w^0_\varepsilon}dx \\ &\leq \delta^2|w^0_\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |b|\tau|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}|_{L^\infty_x}\frac{|u^1+\delta u^0|_{L^2_x}}{2}|w^1_\varepsilon + \delta w^0_\varepsilon|_{L^2_x} \\ &\leq \delta^2|w^0_\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |b|\tau|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}|_{H^1_x}\frac{|u^1+\delta u^0|_{H^1_x}}{2}|w^1_\varepsilon + \delta w^0_\varepsilon|_{H^1_x} \\ &\leq \delta^2|w^0_\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R})} + c|b|\tau|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}|_{H^1_x}. \end{aligned}$$

Comme $|w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ converge vers 0 et $\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}$ converge vers 0, alors $|w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.
Pour la convergence dans $H^1(\mathbb{R})$, on prend le produit scalaire de (4.12) avec $w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0$ on trouve, comme u^1, u^0, $\varphi^{\frac{1}{2}}$, w_ε^1 et w_ε^0 sont bornés dans $H^1(\mathbb{R})$, que

$$\begin{aligned}
|\nabla w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \delta^2|\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R})} - b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}})\frac{u^1+\delta u^0}{2}\overline{w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0}dx \\
&\quad -b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{\frac{1}{2}}(|w_\varepsilon^1|^2 - \delta^2|w_\varepsilon^0|^2)dx \\
&\leq \delta^2|\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |b||\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}|_{L_x^\infty}\frac{|u^1+\delta u^0|_{L_x^2}}{2}|w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0|_{L_x^2} \\
&\quad +|b||\varphi^{\frac{1}{2}}|_{L_x^\infty}(|w_\varepsilon^1|^2_{L_x^2} + \delta^2|w_\varepsilon^0|^2_{L_x^2}) \\
&\leq \delta^2|\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R})} + |b||\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}|_{H_x^1}\frac{|u^1+\delta u^0|_{L_x^2}}{2}|w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0|_{L_x^2} \\
&\quad +|b||\varphi^{\frac{1}{2}}|_{H_x^1}(|w_\varepsilon^1|^2_{L_x^2} + \delta^2|w_\varepsilon^0|^2_{L_x^2}) \\
&\leq \delta^2|\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R})} + c(|\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}|_{H_x^1} + |w_\varepsilon^1|^2_{L_x^2} + \delta^2|w_\varepsilon^0|^2_{L_x^2}).
\end{aligned}$$

En utilisant la convergence dans $L^2(\mathbb{R})$ et le fait que $\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varphi^{\frac{1}{2}}$ converge vers 0, on trouve que $|\nabla w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ converge vers 0. D'où la suite u_ε^1 converge vers u^1 dans $H^1(\mathbb{R})$. De même on trouve que u_ε^n converge vers u^n dans $H^1(\mathbb{R})$. □

4.2.1.1 Borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R})$

On commence par démontrer l'existence d'un borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R})$;

Lemme 78 *Le système (4.6)-(4.7) admet un borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on prend le produit scalaire de (4.6) avec $i(u^{n+1} + \delta u^n)$, on trouve

$$\begin{aligned}
|u^{n+1}|^2_{L^2} - \delta^2|u^n|^2_{L^2} &= \frac{1+\delta}{2}\tau Im\int f\overline{u^{n+1}+\delta u^n} \\
&\leq \tau|f|_{L^2(\mathbb{R})}|u^{n+1}+\delta u^n|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Alors

$$|u^{n+1}|_{L^2} - \delta|u^n|_{L^2} \leq \tau|f|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.13}$$

Qui donne grâce au lemme de Gronwall discret

$$|u^n|_{L^2} \leq \delta^n|u_0|_{L^2} + \frac{\tau(1-\delta^n)}{1-\delta}|f|_{L^2}.$$

On choisit τ petit tel que $\frac{\gamma\tau}{1-\delta} \leq 2$, alors il existe $M > 0$ tel que

$$|u^n|_{L^2} \leq \delta^n|u_0|_{L^2} + \frac{2(1-\delta^n)}{\gamma}|f|_{L^2} \leq M = \frac{4}{\gamma}|f|_{L^2}.$$

□

Maintenant on démontre un lemme qui donne une borne pour $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ dans $H^{-1}(\mathbb{R})$, une estimation dont on a besoin pour trouver l'estimation pour u^{n+1} dans $H^1(\mathbb{R})$. Comme on est intéressé au comportement des solutions pour les grands temps on peut supposer que u^n est dans le borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $n \geq 0$. Donc

Lemme 79 *Pour u^n dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe une constante k qui dépend de γ, $|f|_{L^2}$ telle que*

$$|\varphi^{n+\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{\tau}. \tag{4.14}$$

Démonstration: en utilisant (4.7) on trouve

$$\delta^{-1}|\varphi^{n+\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq \delta|\varphi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} + 2|E(|u^n|^2)|_{H^{-1}(\mathbb{R})}. \tag{4.15}$$

Comme E est un opérateur borné dans $H^1(\mathbb{R})$ et auto-adjoint, alors il est aussi borné dans $H^{-1}(\mathbb{R})$; pour $a \in H^{-1}(\mathbb{R})$

$$|E(a)|_{H_x^{-1}} = \sup \frac{< E(a), \phi >}{|\phi|_{H_x^1}} = \sup \frac{< a, E(\phi) >}{|\phi|_{H_x^1}} \leq c|a|_{H_x^{-1}}.$$

Alors en utilisant l'injection de Sobolev $L^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{R})$ on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi^{n+\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq \delta^2|\varphi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} + C\delta||u^n|^2|_{L^1(\mathbb{R})} = \\ \delta^2|\varphi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} + C\delta|u^n|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta(|\varphi^{n-\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} + k). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Grâce au lemme de Gronwall, et si $\gamma\tau$ assez petit pour avoir $1 - e^{-\gamma\tau} \geq \frac{\gamma\tau}{2}$

$$|\varphi^{n+\frac{1}{2}}|_{H^{-1}(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{1-\delta} \leq \frac{2k}{\gamma\tau}.$$

□

Lemme 80 *Le système (4.6)-(4.7) admet un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on prend le produit scalaire de (4.6) avec $-(u^{n+1} - \delta u^n)$, on trouve

$$|u_x^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \delta^2|u_x^n|^2_{L^2(\mathbb{R})} - b\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}(|u^{n+1}|^2 - \delta^2|u^n|^2) - (\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} f(\overline{u^{n+1} - \delta u^n}). \tag{4.17}$$

En utilisant la borne de $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ dans $H^{-1}(\mathbb{R})$ on trouve

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}|u^n|^2| \leq \frac{k}{\tau}||u^n|^2|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{\tau}|u^n|_{L^\infty(\mathbb{R})}|u^n|_{H^1(\mathbb{R})}, \tag{4.18}$$

et

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}|u^{n+1}|^2| \leq \frac{k}{\tau}||u^{n+1}|^2|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{\tau}|u^{n+1}|_{L^\infty(\mathbb{R})}|u^{n+1}|_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{4.19}$$

Grâce à l'inégalité d'Agmon $|u^n|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c|u^n|_{L^2(\mathbb{R})}|u^n_x|_{L^2(\mathbb{R})}$ et le fait que u^n reste borné dans $L^2(\mathbb{R})$ on a

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}|u^n|^2| \leq \frac{k}{\tau}(1 + |u^n_x|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{3}{2}}. \tag{4.20}$$

Ceci donne

$$|u^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^2|u^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{\tau}|b|(1 + |u^{n+1}_x|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2|u^n_x|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}) + k. \tag{4.21}$$

En utilisant l'inégalité de Young pour $\varepsilon > 0$

$$|u^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^2|u^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{\tau} + \frac{k}{\varepsilon^3\tau^4} + \varepsilon|u^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \varepsilon\delta^2|u^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} + k.$$

Alors

$$|u^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta^2|u^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} + k(\tau).$$

On choisit ε tel que $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta \leq 1$, on obtient

$$|u^{n+1}_x|^2_{L^2} \leq \delta|u^n_x|^2_{L^2} + k(\tau).$$

Alors

$$|u^{n+1}_x|^2_{L^2} \leq \delta^n|(u_0)_x|^2_{L^2} + \frac{(1-\delta^n)}{1-\delta}k(\tau) \leq 2k(\tau).$$

Qui donne l'existence d'un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R})$. □

Remarque 22 *Il est important de signaler ici que la borne $H^1(\mathbb{R})$ dans le borné absorbant dépend de τ. Dans la suite cette borne sera appelée $k(\tau)$; $k(\tau)$ pourra aussi désigner une quantité proportionnelle à cette borne, c'est à dire cette borne que multiplie une constante numérique. C'est un problème ouvert de trouver une estimation uniforme en τ.*

On résume alors

Théorème 4.2.2 *Pour $\gamma\tau$ assez petit, le semi-groupe S_τ admet un borné absorbant β qui est positivement invariant par S_τ, i.e pour tout ensemble borné B il existe $n(B)$ tel que pour tout $n \geq n(B)$, $S^n_\tau B \subset \beta$, et $S^k_\tau\beta \subset \beta$ pour $k \geq 0$.*

4.2.2 L'existence de l'attracteur global

Théorème 4.2.3 *Le semi-groupe S_τ admet un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R})$ qui est un sous-ensemble borné de $H^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on fait la démonstration en quelques étapes. Tout d'abord, on démontre la compacité asymptotique des trajectoires dans $L^2(\mathbb{R})$; en fait, on prouve l'existence d'un ensemble borné dans $H^2(\mathbb{R})$ qui attire toutes les solutions. Après on applique le Théorème I-1-1 de [74] pour obtenir l'existence d'un attracteur global, qui est compact dans $H^1(\mathbb{R})$ et borné dans $H^2(\mathbb{R})$.
Dans la suite on suppose que toutes les trajectoires restent, pour $n \geq 0$, dans le borné absorbant $H^1(\mathbb{R})$. On commence par démontrer la proposition suivante

Proposition 26 *Pour tout $\eta > 0$, la trajectoire u^n peut s'écrit comme $u^n = v^n + w^n$ où, pour n assez grand qui dépend seulement du borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R})$, $|w^n|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{3\eta}{\gamma}$, et, pour tout n, v^n reste dans un ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)dx)$.*

Remarque 23 *L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}; (1+x^2)dx)$ est l'espace des fonction v tel que*

$$\int_{\mathbb{R}} (1+x^2)|v(x)|^2 dx < +\infty.$$

Démonstration: on utilise la méthode de [57] dans le cas continu. On prend f_η de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $|f - f_\eta|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \eta$. On écrit $S_\tau^n u^0 = u^n = v^n + w^n$, où

$$i\frac{v^{n+1} - \delta v^n}{\tau} + \Delta\frac{v^{n+1} + \delta v^n}{2} = b\varphi^{n+\frac{1}{2}}\frac{v^{n+1} + \delta v^n}{2} + \frac{\delta+1}{2}f_\eta, \tag{4.22}$$

$$i\frac{w^{n+1} - \delta w^n}{\tau} + \Delta\frac{w^{n+1} + \delta w^n}{2} = b\varphi^{n+\frac{1}{2}}\frac{w^{n+1} + \delta w^n}{2} + \frac{\delta+1}{2}(f - f_\eta), \tag{4.23}$$

avec $v^0 = 0$, $w^0 = u^0$, tel que (4.7) soit vrai pour tout n. D'une part, on prend le produit scalaire de (4.23) avec $i(w^{n+1} + \delta w^n)$, on obtient

$$\begin{aligned} |w^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^2 |w^n|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \tau\frac{\delta+1}{2}\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} (f - f_\eta)\overline{w^{n+1} + \delta w^n} dx \\ &\leq \tau|f - f_\eta|_{L^2(\mathbb{R})}(|w^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta|w^n|_{L^2(\mathbb{R})}). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Alors, après simplification par $|w^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta|w^n|_{L^2(\mathbb{R})}$, on trouve

$$|w^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta|w^n|_{L^2(\mathbb{R})} + \tau\eta. \tag{4.25}$$

Grâce au lemme de Gronwall discret on trouve

$$|w^n|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta^n |u^0|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{\tau\eta}{1-\delta} \leq \frac{3\eta}{\gamma}, \tag{4.26}$$

pour n assez grand tel que $\delta^n |u^0|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\eta}{\gamma}$.
Comme u^n et w^n sont bornés dans $L^2(\mathbb{R})$ alors v^n reste borné dans $L^2(\mathbb{R})$.
D'autre part, on prend le produit scalaire de (4.22) avec $-(v^{n+1} - \delta v^n)$, pour obtenir

$$|v_x^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \delta^2 |v_x^n|^2_{L^2(\mathbb{R})} - b\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}(|v^{n+1}|^2 - \delta^2|v^n|^2) - (\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \overline{f_\eta}(v^{n+1} - \delta v^n). \tag{4.27}$$

En utilisant la borne de $\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ dans $H^{-1}(\mathbb{R})$ on trouve

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}|v^n|^2| \leq \frac{k}{\tau}||v^n|^2|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{\tau}|v^n|_{L^\infty(\mathbb{R})}|v^n|_{H^1(\mathbb{R})}, \tag{4.28}$$

et

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}|v^{n+1}|^2| \leq \frac{k}{\tau}||v^{n+1}|^2|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \frac{k}{\tau}|v^{n+1}|_{L^\infty(\mathbb{R})}|v^{n+1}|_{H^1(\mathbb{R})}. \tag{4.29}$$

Grâce à l'inégalité d'Agmon $|v^n|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c|v^n|_{L^2(\mathbb{R})}|v^n_x|_{L^2(\mathbb{R})}$ et le fait que v^n reste borné dans $L^2(\mathbb{R})$ on obtient

$$|\int_{\mathbb{R}} \varphi^{n+\frac{1}{2}}|v^n|^2| \leq \frac{k}{\tau}(1+|v^n_x|_{L^2(\mathbb{R})})^{\frac{3}{2}}. \tag{4.30}$$

Ceci donne

$$|v^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^2|v^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{k_1}{\tau}|b|(1+|v^{n+1}_x|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{R})} + \delta^2|v^n_x|^{\frac{3}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}) + k_2. \tag{4.31}$$

En utilisant l'inégalité de Young pour $\varepsilon > 0$

$$|v^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^2|v^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{k_1}{\tau} + \frac{k_1}{\varepsilon^3\tau^4} + \varepsilon|v^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \varepsilon\delta^2|v^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} + k_2.$$

Alors

$$|v^{n+1}_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta^2|v^n_x|^2_{L^2(\mathbb{R})} + k(\tau).$$

On choisit ε tel que $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta \leq 1$, on obtient

$$|v^{n+1}_x|^2_{L^2} \leq \delta|v^n_x|^2_{L^2} + k(\tau).$$

Alors

$$|v^{n+1}_x|^2_{L^2} \leq k(\tau). \tag{4.32}$$

Il reste à vérifier que xv^n reste borné dans $L^2(\mathbb{R})$. On prend le produit scalaire de (4.22) avec $ix^2(v^{n+1}+\delta v^n)$, pour obtenir

$$|xv^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^2|xv^n|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \tag{4.33}$$
$$\tau \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}(v^{n+1}_x + \delta v^n_x)\overline{xv^{n+1}+\delta xv^n}dx + \tau\frac{\delta+1}{2}\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}}(xf_\eta)\overline{xv^{n+1}+\delta xv^n}dx.$$

Alors

$$|xv^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^2|xv^n|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq$$
$$\tau(|xv^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta|xv^n|^2_{L^2(\mathbb{R})})(|v^{n+1}_x|_{L^2(\mathbb{R})} + \delta|v^n_x|_{L^2(\mathbb{R})} + |xf_\eta|_{L^2(\mathbb{R})}).$$

Grâce au lemme de Gronwall discret on trouve, en utilisant (4.32), comme $v^0 = 0$

$$|xv^n|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\tau}{1-\delta}(|xf_\eta|_{L^2(\mathbb{R})} + k(\tau)) \leq k(\tau,\eta), \tag{4.34}$$

où $k(\tau,\eta)$ dépend de τ et de η. Ceci complète la démonstration de la proposition. □

Comme l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R};(1+x^2)dx)\hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est compacte, alors grâce à la Proposition 26 le semi-groupe S_τ est asymptotiquement compact dans $L^2(\mathbb{R})$.

Maintenant on démontre une éstimation sur Δv^n. On prend le produit scalaire de (4.22) avec $\Delta(v^{n+1}-\delta v^n)$. Alors

$$\begin{aligned}|\Delta v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \delta^2|\Delta v^n|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\\ b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\varphi^{n+\frac12}(v^{n+1}+\delta v^n)\overline{\Delta(v^{n+1}-\delta v^n)}dx &+ (\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} f_\eta\Delta(\overline{v^{n+1}-\delta v^n})dx.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Comme u^n est dans le borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R})$, alors grâce à (4.7) $\varphi^{n+\frac12}$ est inclu dans un ensemble borné de $H^1(\mathbb{R})$. Par conséquent (4.35) donne

$$|\Delta v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})}-\delta^2|\Delta v^n|^2_{L^2(\mathbb{R})}\le k(\tau)|\Delta(\overline{v^{n+1}-\delta v^n})|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{4.36}$$

Alors

$$|\Delta v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R})}\le\delta|\Delta v^n|_{L^2(\mathbb{R})}+k(\tau).$$

Qui donne par le lemme de Gronwall

$$|\Delta v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R})}\le k(\tau).$$

Alors v^n est borné dans $H^2(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R};(1+x^2)dx)$ qui est compact dans $H^1(\mathbb{R})$. Comme w^n reste borné dans $H^1(\mathbb{R})$, on peut conclure de même façon de la démonstration du Lemme 13 du Chapitre 1 que S_τ est asymptotiquement compact dans $H^1(\mathbb{R})$. Qui donne l'existence d'un attracteur global $\mathcal{A}_\tau$ dans $H^1(\mathbb{R})$ qui est borné dans $H^2(\mathbb{R})$. Ceci complète la démonstration du Théorème 4.2.3. □

4.2.3 Compacité de l'attracteur global dans $H^2(\mathbb{R})$

Théorème 4.2.4 *$\mathcal{A}_\tau$ est compact dans $H^2(\mathbb{R})$.*

Démonstration: on démontre la compacité de l'attracteur par l'argument de J. Ball (voir [9]). Pour u_j une suite de $\mathcal{A}_\tau$ et $u_j^n=S_\tau^n u_j$ la trajectoire correspondante, alors il existe une sous-suite u_j qui converge faiblement dans $H^2(\mathbb{R})$ et fortement dans $H^1(\mathbb{R})$ vers u ; on pose $u^n=S_\tau^n u$ la trajectoire correspondante qui est complète dans $\mathcal{A}_\tau$ (i.e $S_\tau^n u_j\in\mathcal{A}_\tau,\ \forall n\in\mathbb{Z}$). En prenant le produit scalaire de (4.6) avec $\Delta(u_j^{n+1}-\delta u_j^n)$ on obtient

$$\begin{aligned}|\Delta u_j^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \delta^2|\Delta u_j^n|^2_{L^2(\mathbb{R})}+\\ b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}}\varphi_j^{n+\frac12}(\overline{u_j^{n+1}+\delta u_j^n})\Delta(u_j^{n+1}-\delta u_j^n)dx &+ (\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} f\Delta(\overline{u_j^{n+1}-\delta u_j^n})dx.\end{aligned} \tag{4.37}$$

On pose

$$X_j^n = b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} \varphi_j^{n+\frac{1}{2}}\overline{(u_j^{n+1}+\delta u_j^n)}\Delta(u_j^{n+1}-\delta u_j^n)dx + (\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}} f\Delta(\overline{u_j^{n+1}-\delta u_j^n})dx.$$

Si u_j converge faiblement dans $H^2(\mathbb{R})$ et fortement dans $H^1(\mathbb{R})$ (alors $\varphi_j^{n+\frac{1}{2}}$ converge aussi dans $H^1(\mathbb{R})$), donc $X_j^n \to X^n$. Comme on peut reculer en temps pour le semi-groupe, on obtient

$$|\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \delta^{2m}|\Delta u_j^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \sum_{n=-m}^{-1}\delta^{-2(n+1)}X_j^n. \tag{4.38}$$

Comme $|\Delta u_j^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ est borné par $k(\tau)$ alors

$$\limsup_{j\to+\infty}|\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta^{2m}k(\tau) + \sum_{n=-m}^{-1}\delta^{-2(n+1)}X^n. \tag{4.39}$$

Mais

$$\sum_{n=-m}^{-1}\delta^{-2(n+1)}X^n = |\Delta u|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \delta^{2m}|\Delta u^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

alors

$$\limsup_{j\to+\infty}|\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\delta^{2m}k(\tau) + |\Delta u|^2_{L^2(\mathbb{R})}; \tag{4.40}$$

$|\Delta u^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ borné par $k(\tau)$.
Quand m va à l'infini, alors $\limsup_{j\to+\infty}|\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\Delta u|^2_{L^2(\mathbb{R})}$ et u_j converge fortement vers u dans $H^2(\mathbb{R})$. Ceci complète la démonstration du Théorème 4.2.4. □

4.3 La dissipativité pour un schéma de relaxation appliqué à l'équation de Davey-Stewartson (E-E)

L'objet de la seconde partie de cette section est de démontrer que la discrétisation du système de Davey-Stewartson par le schéma de relaxation de C. Besse (avec la même adaptation au cas dissipatif que dans la première partie de cette section) possède des propriétés dynamiques qui correspondent à ce que l'on peut trouver dans le cas continu.

L'énoncé principal est le suivant

Théorème 4.3.1 *Soit le système de Davey-Stewartson dans le cas Elliptique-Elliptique et avec une nonlinéarité focalisante. Soit une discrétisation convenable de ce système par le schéma de relaxation. Alors sous réserve que l'on se restreigne à des données initiales et à une force extérieure assez petite dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ le semi-groupe discret dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ possède un attracteur global qui est un sous-ensemble compact de $H^2(\mathbb{R}^2)$.*

Pour être complet il faudrait signaler que la taille dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ de l'attracteur global du système discret *dépend* du pas de temps τ. Ceci n'est pas consistant avec le fait que le système continu ($\tau \to 0$) possède un attracteur global qui est lui aussi un sous-ensemble de $H^2(\mathbb{R}^2)$. Ce même problème apparait dans les résultats des articles [31], [43] et [46].

Nous reprenons les notations de la section 2 pour le système de Davey-Stewartson. Très vite nous supposerons $b=-1$, pour assurer que nous sommes dans le cas focalisant et nous ne donnons pas ici d'importance à la taille de $|b|$. Le système de Davey-Stewartson dans le cas (E-E) s'écrit

$$\begin{aligned} iu_t + i\gamma u + \Delta u &= bu\varphi_{x_1} + f, \\ |u|^2_{x_1} &= \Delta\varphi. \end{aligned} \tag{4.41}$$

On exprime aussi le lien entre ϕ et u en $\varphi_{x_1} = E(|u|^2)$ où E est l'opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est $\frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}$. Ce système (4.41) est équivalent à

$$\begin{aligned} i(e^{\gamma t}u)_t + \Delta(e^{\gamma t}u) &= b(e^{\gamma t}u)\varphi_{x_1} + e^{\gamma t}f, \\ e^{2\gamma t}|u|^2_{x_1} &= e^{2\gamma t}\Delta\varphi. \end{aligned} \tag{4.42}$$

On choisit une méthode de type relaxation en temps qui consiste à écrire le terme non local $E(|u^n|^2)$ à l'aide d'un potentiel discrétisé au temps $t=(n+\frac{1}{2})\tau$. On définit alors les variables $\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}$ et u^{n+1} qui représentent respectivement les approximations de $E(|u|^2)$ au temps $t_{n+\frac{1}{2}}$ et de u au temps t_{n+1}. Soit $\tau = \Delta t$ le pas de temps, $u^0 = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$, et $\delta = e^{-\gamma\tau}$, on a

$$e^{\gamma t}u|_{t=(n+\frac{1}{2})\tau} \sim e^{\gamma(n+1)\tau}\frac{u^{n+1}+\delta u^n}{2},$$

$$e^{2\gamma t}\varphi_{x_1}|_{t=n\tau} \sim e^{2\gamma n\tau}\frac{\delta^{-1}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi_{x_1}^{n-\frac{1}{2}}}{2},$$

et

$$e^{2\gamma t}|u|^2_{x_1}|_{t=n\tau} \sim e^{2\gamma n\tau}\Delta\frac{\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi^{n-\frac{1}{2}}}{2}.$$

Alors le schéma de relaxation pour le système dissipatif s'écrit

$$i\frac{u^{n+1}-\delta u^n}{\tau} + \Delta\frac{u^{n+1}+\delta u^n}{2} = b\frac{u^{n+1}+\delta u^n}{2}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\delta+1}{2}f, \tag{4.43}$$

$$E(|u^n|^2) = \frac{\delta^{-1}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi_{x_1}^{n-\frac{1}{2}}}{2}, \tag{4.44}$$

avec $u^0 = u_0$ et $\delta\varphi_{x_1}^{-\frac{1}{2}} = \delta^{-1}\varphi_{x_1}^{+\frac{1}{2}} = E(|u^0|^2)$.

4.3.1 Un système dynamique bien posé et dissipatif

On démontre que le schéma de relaxation dissipatif est bien posé, pour cela on démontre que pour tout pas de temps τ ce schéma définit un semi-groupe discret

$$\begin{aligned} S_\tau : H^1(\mathbb{R}^2) &\to H^1(\mathbb{R}^2) \\ u^n &\mapsto u^{n+1}, \end{aligned}$$

où S_τ est une application univoque et continue. On démontre successivement ces deux points.

Théorème 4.3.2 *L'opérateur S_τ est un opérateur univoque de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on va démontrer que pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$, la suite u^{n+1} définie récursivement par (4.43)-(4.44) est bien définie. Pour $u^0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ on a $\varphi_{x_1}^{-\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On démontre par récurrence sur n que $(\varphi_{x_1}^{n-\frac{1}{2}}, u^n) \mapsto (\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+1})$ est une application univoque. En utilisant (4.44), on trouve que $\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}$ est dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Par récurrence le système revient à résoudre l'équation linéaire suivante

$$(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})u^{n+1} = \delta(Id + i\frac{\tau}{2}\Delta - i\frac{\tau}{2}b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})u^n - i\frac{\delta+1}{2}\tau f. \tag{4.45}$$

Lemme 81 *L'opérateur $B_{n+\frac{1}{2}} = -\Delta + b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}$ est un opérateur auto-adjoint non borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$; de plus il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'opérateur $B_{n+\frac{1}{2}} + \lambda Id$ est inversible pour $\lambda > \lambda_0$.*

Démonstration: $B_{n+\frac{1}{2}}u = -\Delta u + b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}u$, alors pour u, v dans $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$(B_{n+\frac{1}{2}}u, v) = \mathrm{Re}\int \nabla u \nabla \overline{v} dx_1 dx_2 + b\int \varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{Re}(u\overline{v}) dx_1 dx_2,$$

alors $B_{n+\frac{1}{2}}$ est symétrique. Ensuite par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg on obtient

$$\begin{aligned}
(B_{n+\frac{1}{2}}u, u) &\geq |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - |b||\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|u|^2_{L^4(\mathbb{R}^2)} \\
&\geq |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - c_{gn}|b||\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|u|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\geq \frac{1}{2}|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \frac{1}{2}c_{gn}^2|b|^2|\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Alors il existe $\lambda_0 = \frac{1}{2}c_{gn}^2|b|^2|\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ tel que $B_{n+\frac{1}{2}} + \lambda Id$ est inversible pour $\lambda > \lambda_0$ par le théorème de Lax Milgram. Ceci complète la preuve du Lemme. □

Corollaire 1 *Le spectre de l'opérateur $B_{n+\frac{1}{2}}$ est inclu dans $]-\infty, \lambda]$ et par conséquent l'opérateur $(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})$ est inversible sur $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

On peut donc écrire

$$u^{n+1} = \delta U^{n+\frac{1}{2}}u^n - i\tau\frac{\delta+1}{2}(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})^{-1}f, \tag{4.46}$$

où $U^{n+\frac{1}{2}} = (Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})^{-1}(Id + i\frac{\tau}{2}\Delta - i\frac{\tau}{2}b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})$.

Maintenant on démontre sucessivement que $U^{n+\frac{1}{2}}$ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, puis que u^{n+1} est bien une fonction de $H^1(\mathbb{R}^2)$; on pose $v = U^{n+\frac{1}{2}}u$, alors

$$i\frac{v-u}{\tau} + \Delta\frac{v+u}{2} = b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}\frac{v+u}{2}. \tag{4.47}$$

En prenant le produit scalaire de cette équation avec $i(u+v)$, on trouve

$$|v|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = |u|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.48}$$

D'autre part, en prenant le produit scalaire de l'équation (4.47) avec $v-u$, on trouve

$$\begin{aligned}
|\nabla v|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - b\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}(|v|^2-|u|^2)dx_1dx_2\\
&\leq |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |b||\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(|v|^2_{L^4(\mathbb{R}^2)} + |u|^2_{L^4(\mathbb{R}^2)})\\
&\leq |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + c_{gn}|b||\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}(|v|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|\nabla v|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |u|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|\nabla u|_{L^2(\mathbb{R}^2)})\\
&\leq |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{2}c_{gn}^2|b|^2|\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}|v|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + (\frac{1}{2}|\nabla v|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{2}|\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}).
\end{aligned}$$

Alors, si u est dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ alors v est aussi dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Comme $(Id - i\frac{\tau}{2}\Delta + i\frac{\tau}{2}b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})^{-1}f$ est dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ alors $u^{n+1} \in H^1(\mathbb{R}^2)$. □

Proposition 27 *Pour tout τ, pour chaque n, $S_\tau : u^n \mapsto u^{n+1}$ est une application continue de $H^1(\mathbb{R}^2)$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on démontre par récurrence sur n que si la suite u_ε^0 converge vers u^0 dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors u_ε^n converge vers u^n dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. On démontre seulement la première étape (i.e quand $n=1$), le passage de l'étape n à l'étape $n+1$ pouvant se démontrer de manière similaire. Comme $(\varphi_\varepsilon^{-\frac{1}{2}})_{x_1}$ converge vers $\varphi_{x_1}^{-\frac{1}{2}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, alors en utilisant (4.44) on trouve que $(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1}$ converge vers $\varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. On pose $w_\varepsilon^1 = u_\varepsilon^1 - u^1$ et on obtient alors

$$\frac{i}{\tau}(w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0) + \Delta\frac{w_\varepsilon^1+\delta w_\varepsilon^0}{2} = b((\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}})\frac{u^1+\delta u^0}{2} + b\varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}\frac{w_\varepsilon^1+\delta w_\varepsilon^0}{2}. \tag{4.49}$$

En prenant le produit scalaire de cette équation avec $i(w_\varepsilon^1 + \delta w_\varepsilon^0)$ on trouve, comme u^1, u^0, w_ε^1 et w_ε^0 demeurent dans un sous-ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^2)$, que

$$\begin{aligned}
|w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \delta^2|w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + b\tau\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^2}((\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}})\frac{u^1+\delta u^0}{2}\overline{w_\varepsilon^1+\delta w_\varepsilon^0}dx_1dx_2\\
&\leq \delta^2|w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |b|\tau|(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\frac{|u^1+\delta u^0|_{L^4(\mathbb{R}^2)}}{2}|w_\varepsilon^1+\delta w_\varepsilon^0|_{L^4(\mathbb{R}^2)}\\
&\leq \delta^2|w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + c|b|\tau|(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\frac{|u^1+\delta u^0|_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{2}|w_\varepsilon^1+\delta w_\varepsilon^0|_{H^1(\mathbb{R}^2)}\\
&\leq \delta^2|w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + K|b|\tau|(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)};
\end{aligned}$$

ici K désigne une constante indépendante de ε. Comme $|w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ converge vers 0 et $(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}$ converge vers 0, alors $|w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Pour la convergence dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, on prend le produit scalaire de (4.49) avec $w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0$ on trouve, comme u^1, u^0, w_ε^1 et w_ε^0 sont bornés dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}$ est borné dans $L^4(\mathbb{R}^2)$, que

$$\begin{aligned}
|\nabla w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \delta^2 |\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - b\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2} ((\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}) \frac{u^1 + \delta u^0}{2} \overline{w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0} dx_1 dx_2 \\
&\quad - b\int_{\mathbb{R}^2} \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}} (|w_\varepsilon^1|^2 - \delta^2 |w_\varepsilon^0|^2) dx_1 dx_2 \\
&\leq \delta^2 |\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |b| |(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{|u^1 + \delta u^0|_{L^4(\mathbb{R}^2)}}{2} |w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0|_{L^4(\mathbb{R}^2)} \\
&\quad + |b| |\varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^4(\mathbb{R}^2)} (|w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta^2 |w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}) \\
&\leq \delta^2 |\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + c|b| |(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \frac{|u^1 + \delta u^0|_{H^1(\mathbb{R}^2)}}{2} |w_\varepsilon^1 - \delta w_\varepsilon^0|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \\
&\quad + c|b| |\varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^4(\mathbb{R}^2)} (|w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta^2 |w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}) \\
&\leq \delta^2 |\nabla w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + K(|(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta^2 |w_\varepsilon^0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}).
\end{aligned}$$

En utilisant la convergence dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et le fait que $(\varphi_\varepsilon^{\frac{1}{2}})_{x_1} - \varphi_{x_1}^{\frac{1}{2}}$ converge vers 0, on trouve que $|\nabla w_\varepsilon^1|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ converge vers 0. D'où la suite u_ε^1 converge vers u^1 dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. De la même manière on pourrait prouver par induction sur n que u_ε^n converge vers u^n dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. □

4.3.1.1 Borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$

L'étape suivante est consacrée à regarder la dissipativité du semi-groupe, c'est à dire a chercher des ensembles absorbants qui capturent toutes les trajectoires en temps fini. On commence par démontrer l'existence d'un borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R}^2)$;

Lemme 82 *Le système (4.43)-(4.44) admet un borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on prend le produit scalaire de (4.43) avec $i(u^{n+1} + \delta u^n)$, on trouve

$$\begin{aligned}
|u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2 |u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \frac{1+\delta}{2} \tau \mathrm{Im} \int f \overline{u^{n+1} + \delta u^n} \\
&\leq \tau |f|_{L^2(\mathbb{R}^2)} |u^{n+1} + \delta u^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$|u^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta |u^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \tau |f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.50}$$

Ceci donne grâce au lemme de Gronwall discret

$$|u^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta^n |u_0|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{\tau(1-\delta^n)}{1-\delta} |f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On choisit τ assez petit tel que $\frac{\gamma\tau}{1-\delta} \leq 2$ (cette hypothèse est naturelle et sera supposée vérifiée dans la suite). Il existe alors $M > 0$ tel que

$$|u^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta^n |u_0|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{2(1-\delta^n)}{\gamma}|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq M = \frac{4}{\gamma}|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

□

Ce résultat indique deux choses. Premièrement l'existence d'un borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, comme spécifié dans l'énoncé plus haut. Deuxièmement qu'une boule de rayon $\frac{2|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma}$ est positivement invariante par le semi-groupe S_τ ; ceci sera utilisé dans la suite.

Lemme 83 *Le système (4.43)-(4.44) admet un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on prend le produit scalaire de (4.43) avec $-(u^{n+1} - \delta u^n)$, on trouve alors

$$|\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \delta^2 |\nabla u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - b\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{n+\frac{1}{2}}_{x_1}(|u^{n+1}|^2 - \delta^2|u^n|^2) - (\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2} f(\overline{u^{n+1} - \delta u^n}). \tag{4.51}$$

On procède alors à des intégrations par parties, qui pourraient être justifiées pour des solutions régulières et un passage à la limite ; on se borne ici à indiquer les calculs

$$\begin{aligned}
\delta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{n+\frac{1}{2}}_{x_1} |u^n|^2 &= -\delta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{n+\frac{1}{2}} |u^n|^2_{x_1} \\
&= -\frac{\delta^2}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{n+\frac{1}{2}} \Delta(\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \delta\varphi^{n-\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{\delta}{2} \int |\nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \frac{\delta^3}{2} \int \nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}} \nabla\varphi^{n-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{n+\frac{1}{2}}_{x_1} |u^{n+1}|^2 &= -\int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{n+\frac{1}{2}} |u^{n+1}|^2_{x_1} \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi^{n+\frac{1}{2}} \Delta(\delta^{-1}\varphi^{n+\frac{3}{2}} + \delta\varphi^{n+\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{\delta}{2} \int |\nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \frac{1}{2\delta} \int \nabla\varphi^{n+\frac{3}{2}} \nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
|\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2 |\nabla u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \frac{-b}{2\delta} \int \nabla\varphi^{n+\frac{3}{2}} \nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b\delta^3}{2} \int \nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}} \nabla\varphi^{n-\frac{1}{2}} \\
- \int f u^{n+1}(1+\delta) + \delta^2 \int f u^n (1+\delta) + \delta(1-\delta^2) \int f u^n.
\end{aligned}$$

On pose

$$J(u^n) = |\nabla u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{b}{2\delta} \int \nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}} \nabla\varphi^{n-\frac{1}{2}} + \int f u^n (1+\delta).$$

Alors

$$J(u^{n+1}) = \delta^2 J(u^n) + \frac{b}{2}(\delta^3 - \delta)\int \nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}\nabla\varphi^{n-\frac{1}{2}} + \delta(1-\delta^2)\int fu^n.$$

Dans le cas focalisant $b = -1$ qui nous interesse on a

$$J(u^{n+1}) = \delta^2 J(u^n) + \frac{1}{2}(\delta - \delta^3)\int \nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}\nabla\varphi^{n-\frac{1}{2}} + \delta(1-\delta^2)\int fu^n,$$

et

$$\begin{aligned} J(u^{n+1}) &= |\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \frac{1}{2\delta}\int \nabla\varphi^{n+\frac{3}{2}}\nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \int fu^{n+1}(1+\delta) \\ &= |\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{2\delta}\int \Delta\varphi^{n+\frac{3}{2}}\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \int fu^{n+1}(1+\delta) \\ &= |\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{1}{2\delta}\int (2\delta|u^{n+1}|^2_{x_1} - \delta^2\Delta\varphi^{n+\frac{1}{2}})\varphi^{n+\frac{1}{2}} + \int fu^{n+1}(1+\delta) \\ &= |\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \int |u^{n+1}|^2\varphi^{n+\frac{1}{2}}_{x_1} + \frac{\delta}{2}\int |\nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \int fu^{n+1}(1+\delta) \\ &\geq |\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{\delta}{4}|\nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \frac{1}{\delta}|u^{n+1}|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} - k \\ &\geq (1 - c_{gn}|u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)})|\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{\delta}{4}|\nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - k, \end{aligned}$$

ici, comme ailleurs, k désigne une constante qui dépend des données $\gamma, \tau, |f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ du système discret (4.43), (4.44). A l'instar du cas continu, on va maintenant spécifier la condition de petitesse sur la norme $L^2(\mathbb{R}^2)$ des données initiales, pour assurer la non-explosion des trajectoires. Dans la suite on supposera alors que f et u_0 satisfont à

$$2c_{gn}(|u_0|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{2|f|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\gamma}) \leq 1. \tag{4.52}$$

Ceci implique en vertu de la démonstration du Lemme 82 qu'on puisse substituer u^{n+1} à u_0 dans (4.52) et que J soit coercive sur $H^1(\mathbb{R}^2)$, i.e

$$J(u^{n+1}) \geq \frac{1}{2}|\nabla u^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{\delta}{4}|\nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - k.$$

Reprenons alors le calcul

$$
\begin{aligned}
J(u^{n+1}) &= \delta^2 J(u^n) + \frac{1}{2}(\delta - \delta^3) \int \nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}} \nabla \varphi^{n-\frac{1}{2}} + \delta(1-\delta^2) \int f u^n \\
&= \delta^2 J(u^n) + (1-\delta^2) \int \varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}} |u^n|^2 - \frac{(1-\delta^2)}{2\delta} |\nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta(1-\delta^2) \int f u^n \\
&\leq \delta^2 J(u^n) + \frac{(1-\delta^2)}{2\delta} |\nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta \frac{(1-\delta^2)}{2} |u^n|^4_{L^4(\mathbb{R}^2)} \\
&\quad - \frac{(1-\delta^2)}{2\delta} |\nabla \varphi^{n+\frac{1}{2}}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + k(1-\delta) \\
&\leq \delta^2 J(u^n) + \delta \frac{(1-\delta^2)}{2} c_{gn} |u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} |\nabla u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + k(1-\delta) \\
&\leq \delta^2 J(u^n) + \delta(1-\delta)(1+\delta) c_{gn} |u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} J(u^n) + k(1-\delta) \\
&\leq \delta^2 J(u^n) + 2\delta(1-\delta) c_{gn} |u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} J(u^n) + k(1-\delta),
\end{aligned}
$$

on choisit $u^0,\ f$ assez petits tels que $2c_{gn}|u^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 1$, alors

$$J(u^{n+1}) \leq \delta J(u^n) + k(1-\delta),$$

qui donne l'existence d'un borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. □

4.3.2 L'existence de l'attracteur global

Théorème 4.3.3 *Le semi-groupe S_τ admet un attracteur global dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ qui est un sous-ensemble borné de $H^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on fait la démonstration en quelques étapes. Tout d'abord, on démontre la compacité asymptotique des trajectoires dans $L^2(\mathbb{R}^2)$; en fait, on prouve l'existence d'un ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^2)$ qui attire toutes les solutions pour cette topologie plus faible. On montre ensuite que cet ensemble est un sous-ensemble de $H^2(\mathbb{R}^2)$. Dès lors on applique le Théorème I-1-1 de [74] pour obtenir l'existence d'un attracteur global, qui est compact dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ et borné dans $H^2(\mathbb{R}^2)$.
Dans la suite on suppose que toutes les trajectoires restent, pour $n \geq 0$, dans le borné absorbant $L^2(\mathbb{R}^2)$. On commence par démontrer la proposition suivante. Soit $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Proposition 28 *Pour tout $\eta > 0$, la trajectoire u^n peut s'écrit comme $u^n = v^n + w^n$ où, pour n assez grand qui dépend seulement du borné absorbant dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, $|w^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{3\eta}{\gamma}$, et, pour tout n, v^n reste dans un ensemble borné de $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2; (1+\rho^2)dx_1dx_2)$.*

Remarque 24 *L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^2; (1+\rho^2)dx_1dx_2)$ est l'espace des fonctions v tel que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+\rho^2)|v|^2 dx_1 dx_2 < +\infty.$$

Démonstration: on utilise la méthode de [57] dans le cas continu. On prend f_η dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tel que $|f-f_\eta|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \eta$. On écrit $S_\tau^n u^0 = u^n = v^n + w^n$, où

$$i\frac{v^{n+1}-\delta v^n}{\tau} + \Delta\frac{v^{n+1}+\delta v^n}{2} = b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}\frac{v^{n+1}+\delta v^n}{2} + \frac{\delta+1}{2}f_\eta, \tag{4.53}$$

$$i\frac{w^{n+1}-\delta w^n}{\tau} + \Delta\frac{w^{n+1}+\delta w^n}{2} = b\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}\frac{w^{n+1}+\delta w^n}{2} + \frac{\delta+1}{2}(f-f_\eta), \tag{4.54}$$

avec $v^0=0$, $w^0=u^0$, tel que (4.44) soit vrai pour tout n. D'une part, on prend le produit scalaire de (4.54) avec $i(w^{n+1}+\delta w^n)$, on obtient

$$|w^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2|w^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \tau\frac{\delta+1}{2}\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^2}(f-f_\eta)\overline{w^{n+1}+\delta w^n}dx_1dx_2. \tag{4.55}$$

Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$|w^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta|w^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \tau\eta. \tag{4.56}$$

Grâce au lemme de Gronwall discret on trouve

$$|w^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta^n|u^0|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{\tau\eta}{1-\delta} \leq \frac{3\eta}{\gamma}, \tag{4.57}$$

pour n assez grand tel que $\delta^n|u^0|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\eta}{\gamma}$.
Comme u^n et w^n sont bornés dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ alors v^n reste borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.
D'autre part, on prend le produit scalaire de (4.53) avec $v^{n+1}-\delta v^n$, on trouve

$$|\nabla v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \delta^2|\nabla v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \int_{\mathbb{R}^2}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}(|v^{n+1}|^2-\delta^2|v^n|^2) - (\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2}\overline{f_\eta}(v^{n+1}-\delta v^n). \tag{4.58}$$

En utilisant la borne de $\nabla\varphi^{n+\frac{1}{2}}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ on trouve

$$|\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|v^n|^2| \leq k||v^n|^2|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq kc_{gn}|v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|\nabla v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \tag{4.59}$$

et

$$|\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|v^{n+1}|^2| \leq k||v^{n+1}|^2|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq kc_{gn}|v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}|\nabla v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.60}$$

Comme v^n reste borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ alors

$$|\int_{\mathbb{R}^2}\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}|v^n|^2| \leq k|\nabla v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.61}$$

Ceci donne

$$|\nabla v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2|\nabla v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq k_1(|\nabla v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta^2|\nabla v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)}) + k_2. \tag{4.62}$$

En utilisant l'inégalité de Young pour $\varepsilon > 0$

$$|\nabla v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2 |\nabla v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{k_1}{\varepsilon} + \varepsilon |\nabla v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \varepsilon \delta^2 |\nabla v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + k_2.$$

Alors

$$|\nabla v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \delta^2 |\nabla v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + k.$$

On choisit ε tel que $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\delta \leq 1$, on obtient

$$|\nabla v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta |\nabla v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + k.$$

Alors

$$|\nabla v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq k(\tau). \tag{4.63}$$

Il reste à vérifier que ρv^n reste borné dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Soit $\overrightarrow{\rho} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ le gradient de $\frac{1}{2}\rho^2$. On prend le produit scalaire de (4.53) avec $i\rho^2(v^{n+1} + \delta v^n)$, on trouve

$$\begin{aligned} &|\rho v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2 |\rho v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \\ &\tau \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v^{n+1} + \delta \nabla v^n)(\overline{v^{n+1} + \delta v^n} \overrightarrow{\rho}) dx_1 dx_2 + \tau \frac{\delta+1}{2} \mathrm{Im} \int_{\mathbb{R}^2} (\rho f_\eta) \overline{\rho v^{n+1} + \delta \rho v^n} dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Alors

$$\begin{aligned} &|\rho v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2 |\rho v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \\ &\tau (|\rho v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta |\rho v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)})(|\nabla v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \delta |\nabla v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + |\rho f_\eta|_{L^2(\mathbb{R}^2)}). \end{aligned}$$

Grâce au lemme de Gronwall discret on trouve, en utilisant (4.63), comme $v^0 = 0$

$$|\rho v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\tau}{1-\delta} (|\rho f_\eta|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + k(\tau)) \leq k(\tau). \tag{4.65}$$

Qui complète la démonstration de la proposition. □

Comme l'injection de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2; (1+\rho^2) dx_1 dx_2) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ est compacte, alors grâce à la Proposition 28 le semi-groupe S_τ est asymptotiquement compact dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Maintenant on démontre une estimation sur Δv^n. On prend le produit scalaire de (4.53) avec $\Delta(v^{n+1} - \delta v^n)$. Alors

$$\begin{aligned} &|\Delta v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \delta^2 |\Delta v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &- \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}} (v^{n+1} + \delta v^n) \overline{\Delta(v^{n+1} - \delta v^n)} dx_1 dx_2 + (\delta+1) \mathrm{Re} \int_{\mathbb{R}^2} f_\eta \Delta(\overline{v^{n+1} - \delta v^n}) dx_1 dx_2. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Comme u^n est dans le borné absorbant dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, alors grâce à (4.44), la suite $\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}}$ est incluse dans un ensemble borné de $L^4(\mathbb{R}^2)$. Par conséquent (4.66) donne

$$|\Delta v^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^2 |\Delta v^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq k(\tau)|\Delta(v^{n+1} - \delta v^n)|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{4.67}$$

Alors

$$|\Delta v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta |\Delta v^n|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + k(\tau).$$

Qui donne par le lemme de Gronwall

$$|\Delta v^{n+1}|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq k(\tau).$$

Alors v^n est borné dans $H^2(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2; (1+\rho^2)dx_1dx_2)$ qui est compact dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Comme w^n reste borné dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, on peut conclure que S_τ est asymptotiquement compact dans $H^1(\mathbb{R}^2)$. Qui donne l'existence d'un attracteur global $\mathcal{A}_\tau$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ qui est borné dans $H^2(\mathbb{R}^2)$. Ceci complète la démonstration du Théorème 4.3.3. □

4.3.3 Compacité de l'attracteur global dans $H^2(\mathbb{R}^2)$

Théorème 4.3.4 *$\mathcal{A}_\tau$ est compact dans $H^2(\mathbb{R}^2)$.*

Démonstration: on démontre la compacité de l'attracteur par l'argument de J. Ball (voir [9]). Pour u_j une suite de $\mathcal{A}_\tau$ et $u_j^n = S_\tau^n u_j$ la trajectoire correspondante, alors il existe une sous-suite u_j qui converge faiblement dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ et fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ vers u ; on pose $u^n = S_\tau^n u$ la trajectoire correspondante qui est complète dans $\mathcal{A}_\tau$ (i.e $S_\tau^n u_j \in \mathcal{A}_\tau, \ \forall n \in \mathbb{Z}$). En prenant le produit scalaire de (4.43) avec $\Delta(u_j^{n+1} - \delta u_j^n)$ on obtient

$$\begin{aligned}|\Delta u_j^{n+1}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \delta^2 |\Delta u_j^n|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})_j \overline{(u_j^{n+1} + \delta u_j^n)} \Delta(u_j^{n+1} - \delta u_j^n) dx_1 dx_2 \\ +(\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2} f \Delta\overline{(u_j^{n+1} - \delta u_j^n)} dx_1 dx_2.\end{aligned} \tag{4.68}$$

On pose

$$\begin{aligned}X_j^n = -\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2} (\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})_j \overline{(u_j^{n+1} + \delta u_j^n)} \Delta(u_j^{n+1} - \delta u_j^n) dx_1 dx_2 \\ +(\delta+1)\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^2} f \Delta\overline{(u_j^{n+1} - \delta u_j^n)} dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Si u_j converge faiblement dans $H^2(\mathbb{R}^2)$ et fortement dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ (alors $(\varphi_{x_1}^{n+\frac{1}{2}})_j$, u_j^n convergent aussi dans $L^4(\mathbb{R}^2)$), donc $X_j^n \to X^n$.

Comme on peut reculer en temps pour le semi-groupe, on obtient

$$|\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \delta^{2m} |\Delta u_j^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{n=-m}^{-1} \delta^{-2(n+1)} X_j^n. \tag{4.69}$$

Comme $|\Delta u_j^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ est borné par $k(\tau)$ alors

$$\limsup_{j\to+\infty} |\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \delta^{2m} k(\tau) + \sum_{n=-m}^{-1} \delta^{-2(n+1)} X^n. \tag{4.70}$$

Mais

$$\sum_{n=-m}^{-1} \delta^{-2(n+1)} X^n = |\Delta u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} - \delta^{2m} |\Delta u^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

alors

$$\limsup_{j\to+\infty} |\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 2\delta^{2m} k(\tau) + |\Delta u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}; \tag{4.71}$$

$|\Delta u^{-m}|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ borné par $k(\tau)$.
Quand m va à l'infini, alors $\limsup_{j\to+\infty} |\Delta u_j|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq |\Delta u|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ et u_j converge fortement vers u dans $H^2(\mathbb{R}^2)$. Ceci complète la démonstration du Théorème 4.3.4 $\square$

Conclusion

Les travaux effectués dans cette thèse portent sur l'étude du comportement asymptotique d'équations de type Schrödinger non linéaires. On a travaillé sur des systèmes dynamiques en dimension infinie issus de ces modèles.

Dans un premier temps, on a traité le cas continu d'un modèle réduit 1-D de système de Davey-Stewartson ; on a démontré l'existence d'un attracteur régulier pour le système dynamique associé à ce modèle pour prolonger l'étude qui est déjà faite pour les équations de Schrödinger cubiques en dimension 1.

Dans un deuxième temps, on a développé une méthode de relaxation introduite par C. Besse pour discrétiser en temps l'équation précédente pour étudier le système dynamique en dimension infinie associé à cette nouvelle équation.

Ensuite, on a généralisé ce travail en 2-D dans le cas où le temps est continu ; on a démontré l'existence d'un attracteur global régulier pour le système de Davey-Stewartson en dimension infinie dans le cas où l'opérateur différentiel principal est elliptique-elliptique. Ce résultat est une amélioration de résultat déjà obtenu dans le cas défocalisant (ce dernier cas est plus facile à traiter).

On a étudié aussi quelques propriétés dynamiques pour les grands temps de système dynamique en dimension infinie obtenu en discrétisant en temps ce dernier problème en 2-D par le schéma de relaxation.

Un autre travail présenté dans cette thèse, une étude sur les équations de Schrödinger non linéaires. On s'est affranchi de l'hypothèse d'ellipticité sur l'opérateur différentiel. On a démontré l'existence d'un attracteur global pour les équations de Schrödinger non elliptiques, mais avec une non-linéarité sous-critique.

Il serait intéressant de développer cette dernière étude et la prolonger sur le système de Davey-Stewartson dans le cas d'un opérateur différentiel hyperbolique-elliptique. Il semble qu'on peut utiliser les mêmes démarches qu'on a utilisées pour étudier les équations de Schrödinger non elliptiques, avec un bon traitement pour le terme non local.

Bibliographie

[1] A. Abounouh and O. Goubet. Attractor for damped cubic Schrödinger equation on a two-dimensional thin domain. *Differential Integral Equations*, 13(1-3) :311–340, 2000.

[2] M. Abounouh. Asymptotic behaviour for a weakly damped Schrödinger equation in dimension two. *Appl. Math. Lett.*, 6(6) :29–32, 1993.

[3] M. Abounouh, H. Al Moatassime, J-P. Chehab, S. Dumont, and O. Goubet. Discrete schrodinger equations and dissipative dynamical systems. *Communication on Pure and Applied Analysis*, 7(2) :211–227, 2008.

[4] N. Abounouh. *Comportement asymptotique de certains équations dissipatives.* Thèse de doctorat, Paris Sud, France, 1993.

[5] G. D. Akrivis. Finite difference discretization of the cubic Schrödinger equation. *IMA J.Numer. Anal.*, 13(1) :115–124, 1993.

[6] G. D. Akrivis, V. A. Dougalis, and O. Karakashian. Solving the systems of equations arising in the discretization of some nonlinear pde's by implicit Runge-Kutta methods. *RAIRO Modl. Math. Anal. Numr.*, 31(2) :251–287, 1997.

[7] N. Akroune. Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation on $\mathbb{R}$. *Appl. Math. Lett*, 12 :45–48, 1999.

[8] N. Akroune. *Comportement asymptotique de certains équations faiblement amorties.* Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, France, Jan 2000.

[9] J. Ball. Global attractors for damped semilinear wave equations. *J. Nonlinear Sci., Partial differential equations and applications*, 10(1-2) :31–52, 2004.

[10] W. Bao and D. Jacksch. An explicit unconditionally stable numerical method for solving damped nonlinear Schrödinger equation with focusing nonlinearity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(4) :1406–1426, 2003.

[11] T. B. Benjamin, J. L. Bona, and J. J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 272(1220) :47–78, 1972.

[12] D. J. Benney and G. J. Roskes. Waves instabilities. *Stud. Appl. Math*, 48 :377–385, 1969.

[13] C. Besse. *Analyse numérique des systèmes de Davey-Stewartson.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, France, 1998.

[14] C. Besse. Schéma de relaxation pour l'équation de Schrödinger non linéaire et les systèmes de Davey et Stewartson. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I*, 326(12) :1427–1432, 1998.

[15] C. Besse. A relaxation scheme for nonlinear Schrödinger equation. *Siam J. Numer. Anal.*, 42(3) :934–952, 2004.

[16] C. Besse, B. Bidégaray, and S. Descombes. Order estimates in time of splitting methods for the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1) :26–40, 2002.

[17] T. Bridges and F. Dias. Enhancement of the Benjamin-Feir instability with dissipation. *J. Differential Equations, Physics of fluids*, 19(104104), 2007.

[18] F. E. Browder. Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems. *Applications of Partial Differential Equations (R. Finn, ed.), American Mathematical Society, Providence*, 17 :24–29, 1965.

[19] H. Brézis. *Analyse fonctionelle.* Edition Masson, Paris, 1983.

[20] R. Carles, P. Markowich, and C. Sparber. On the gross-pitaevskii equation for trapped dipolar quantum gases. *Nonlinearity*, 21 :2569–2590, 2008.

[21] T. Cazenave. *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equation.* Textos de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 1990.

[22] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations.* Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 10, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.

[23] T. Cazenave and A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires.* Ellipses, 1990.

[24] J. Y. Chemin. *Perfect incompressible fluids*, volume 14. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998, Translated from the 1995 French original by I. Gallagher and D. Iftimie.

[25] T. Colin, F. Dias, and J. M. Ghidaglia. On rotational effects in the modulations of weakly nonlinear water waves over finite depth. *Eur. J. Mech. B/Fluids*, 14(6) :775–793, 1995.

[26] R. Dautray and J. L. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, volume 3. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[27] A. Davey and K. Stewartson. On three-dimensional packets of surface waves. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 338 :101–110, 1974.

[28] M. Delfour, M. Fortin, and G. Payre. Finite-difference solutions of a nonlinear Schrödinger equation. *J. Comput. Phys.*, 44(2) :277–288, 1981.

[29] F. Dias, A. Dyashenko, and V. Zakharov. Theory of weakly damped free surface flows : a new approach based on potential flow solution. *Physics Letters A*, 372 :1297–1302, 2008.

[30] V. D. Djorjevic and L. G. Redekopp. On two-dimensional packets of capillary-gravity waves. *J. Fluid Mech.*, 79(4) :703–714, 1977.

[31] E. Ezzoug, O. Goubet, and E. Zahrouni. Semi-discrete weakly damped nonlinear 2-D Schrödinger equation. *to appear.*

[32] J. M. Ghidaglia. Finite dimensional behavior for the weakly damped driven Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 5 :365–405, 1988.

[33] J. M. Ghidaglia. Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time. *J. Differential Equations*, 74 :369–390, 1988.

[34] J. M. Ghidaglia. A note on the strong convergence towards attractors of damped forced KdV equations. *J. Differential Equations*, 110 :356–359, 1994.

[35] J. M. Ghidaglia and J. C. Saut. On the initial value problem for the Davey-Stewartson systems. *Nonlinearity*, 3 :475–506, 1990.

[36] J. M. Ghidaglia and J. C. Saut. Nonelliptic Schrödinger equations. *J. Nonlinear Sci.*, 3(2) :169–195, 1993.

[37] J. M. Ghidaglia and R. Temam. Attractors for damped nonlinear hyperbolic equations. *J. Math. Pures Appl.*, 66 :273–319, 1987.

[38] J. Ginibre. *Introduction aux équations de Schrödinger non lineaire, Cours DEA*. Paris Onze, Paris, 1994-1995.

[39] O. Goubet. Regularity of the attractor for the weakly damped nonlinear Schrödinger equations. *Applicable Anal.*, 60 :99–119, 1996.

[40] O. Goubet. Regularity of the attractor for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^2$. *Adv. Differential Equations*, 3 :337–360, 1998.

[41] O. Goubet. Asymptotic smoothing effect for weakly damped forced Kortewegde Vries equations. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 6(3) :625–644, 2000.

[42] O. Goubet. Ondes hydrodynamiques amorties. *Annals Univ. Craoiva, Ser. Math and Comp. Sciences*, 32 :16–25, 2005.

[43] O. Goubet and M. Hussein. Dynamical properties for a relaxation scheme applied to a weakly damped non local nonlinear Schrödinger equation. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, XVII, fasc. 2, 2009.

[44] O. Goubet and M. Hussein. Global attractor for the Davey-Stewartson in R^2. *CPAA Communication on Pure and Applied Analysis*, 8(5) :1555–1575, 2009.

[45] O. Goubet and R. Rosa. Asymptotic smoothing and the global attractor for a weakly damped KdV equation on the real line. *J. of Diff. Eq.*, 185 :25–53, 2002.

[46] O. Goubet and E. Zahrouni. On a time discretization of a weakly damped forced nonlinear Schrödinger equation. *Comm. in Pure and Applied Analysis*, 7(6) :1429–1442, 2008.

[47] R. Grimshaw. The modulation and stability of an internal gravity wave. *Mémoires Société Royale des sciences de Liège, 6ième série*, tome X :299–314, 1976.

[48] J. Hale. Asymptotic behavior of dissipative systems. *Math. surveys and Monographs, AMS, Providence*, 25, 1988.

[49] J. Hale and G. Raugel. A damped hyperbolic equation on thin domains. *Trans. Am. Math. Soc.*, 329 :185–219, 1992.

[50] A. Haraux. Two remarks on dissipative hyperbolic problems. *Nonlinear partial differential equations and their applications, College de France Seminar*, 7(122) :161–179, 1984. (H. Brezis and J. L. Lions editors), Research Notes in Math., Pitman.

[51] M. Hussein. Global attractor for non elliptic Schrödinger equations. *soumis à Nonlinear Analysis TMA*.

[52] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili. Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems. *Sov. Phys. Dokady.*, 15 :891–907, 1970.

[53] O. Karakashian, G. D. Akrivis, and V. A. Dougalis. On optimal order error estimates for the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(2) :377–400, 1993.

[54] T. Kato. Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations. *Lecture Notes in Math., Springer*, 448 :25–70, 1975.

[55] M. Keel and T. Tao. Endpoint strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5) :955–980, 1998.

[56] D. J. Korteweg and G. de Vries. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationnary waves. *Phil. Maj.*, 39 :422–443, 1895.

[57] P. Laurençot. Long time behaviour for weak damped driven non linear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N, N \leq 3$. *No DEA*, 1995.

[58] H. Leblond. Electromagnetic waves in ferrites : from linear absorption to the nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. A*, 29(15) :4623–4639, 1996.

[59] H. Leblond. Electromagnetic waves in ferromagnets : a Davey-Stewartson-type model. *J. Phys. A*, 32(45) :7907–7932, 1999.

[60] A. Miranville and X. Wang. Upper bound on the dimension of the attractor for nonhomogeneous Navier-Stokes equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2(1) :95–110, 1996.

[61] A. Miranville and S. Zelik. Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains. *Elsevier, Amsterdam, Handbook of Differential Equations, Evolutionary Partial Differential Equations, C.M. Dafermos and M. Pokorny eds.*, 4 :103–200, 2008.

[62] I. Moise and R. Rosa. On the regularity of the global attractor of a weakly damped forced KdV equations. *Adv. in Diff. Eq.*, 2 :257–296, 1997.

[63] S. L. Musher, A. M. Rubenchick, and V. E. Zakharov. Hamiltonian approach to the description of nonlinear plasma phenomena. *Physics report*, 129(5) :285–366, 1985.

[64] A. C. Newell and J. V. Moloney. *Nonlinear Optics*. Adisson-Wesley, 1992.

[65] K. Nishinari, K. Abe, and J. Satsuma. Multi-dimensional behavior of electrostatic ion wave in a magnetized plasma. *Phys. Plasmas*, 1 :2559–2565, 1994.

[66] G. Raugel. Global attractors in partial differential equations. *Handbook of Dynamical Systems, North-Holland, Amsterdam*, 2 :885–982, 2002.

[67] J. M. Sanz-Serna and J. G. Verwer. Conservative and nonconservative schemes for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. *IMA J.Numer. Anal.*, 6(1) :25–42, 1986.

[68] E. Stein. *Singular Integrales and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.

[69] E. Stein. *Harmonic analysis real-variable methods orthogonality, and oscillatory integrals*. Princeton University Press, 1993.

[70] W. Strauss. Nonlinear wave equation. *Regional Conf., Series in Mathematics*, 73, 1989.

[71] R. S. Strichartz. Strichartz restrictions of fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3) :705–714, 1977.

[72] C. Sulem and P-L. Sulem. *The nonlinear Schrödinger equation : Self-focusing and wave collapse*. Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, 1999.

[73] T. Tao. *Nonlinear dispersive equations. Local and global analysis*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 106. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[74] R. Temam. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer-Verlag, Second Edition, 1997.

[75] B. Wang. Strong attractor for the Benjamin-Bona-Mahony equation. *Appl. Math. lett*, 10(2) :23–28, 1997.

[76] B. Wang and B. Guo. Attractors for the Davey-Stewartson systems on $\mathbb{R}^2$. *J. Math. Phys.*, 38(5) :2524–2534, 1997.

[77] X. Wang. An energy equation for the weakly damped driven nonlinear Schrödinger equations and its applications to their attractors. *Physica D*, 88 :167–175, 1995.

[78] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst. Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(3) :485–507, 1986.

[79] M. Willem. *Analyse harmonique réelle*. Hermann, Paris, 1995.

[80] V. E. Zakharov. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 9(2) :190–194, 1968.

[81] C. Zhao, Y. Li, and S. Zhou. Asymptotic smoothing effect of solutions to Davey-Stewartson systems on the whole plane. *Acta Math. Sinica*, 23(11) :2043–2060, 2007.

Résumé

Les systèmes de Davey-Stewartson DS sont des modèles pour les équations d'ondes hydrodynamiques. Ces systèmes dans le cas dissipatif s'écrivent

$$iu_t + i\gamma u + \delta u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = bu\varphi_{x_1} + \chi|u|^2 u + f(x_1, x_2)$$

$$\varphi_{x_1x_1} + m\varphi_{x_2x_2} = |u|^2_{x_1},$$

où $\gamma > 0$ désigne le coefficient de dissipation, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ désigne le teme de la force, u représente l'amplitude complexe de l'onde, et φ et le potentiel moyen de vitesse.
Les paramètres $m,\ \delta,\ \chi$ et b sont des paramètres réels dont δ et m peuvent prendre les deux valeurs $+1$ et -1.
On peut classer ces systèmes en elliptique-elliptique (E-E), elliptique-hyperbolique (E-H), hyperbolique-hyperbolique (H-H), et hyperbolique-elliptique (H-E), cela suivant les valeurs prises par (δ, m), soit respectivement $(+,+)$, $(+,\text{-})$, (-,-), $(\text{-},+)$.
Ces systèmes sont des généralisations des équations de Schrödinger non linéaires NLS qui s'écrivent dans le cas dissipatif comme

$$u_t + \gamma u + iu_{x_1x_1} + \delta iu_{x_2x_2} + i|u|^p u = f,$$

où p est l'exposant du terme non linéaire, $\gamma > 0$ est le paramètre du terme de dissipation, f est la force extérieure, δ un paramètre réel qui vaut $+1$ ou -1. Dans le cas où $\delta = -1$ on a l'équation de Schrödinger non elliptique NES.
Notre travail se divise en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, on considère un modèle réduit uni-dimensionnel d'un système de Davey-Stewartson, une équation aux dérivées partielles de type Schrödinger non linéaire avec une non linéarité non locale, avec un terme de force et un terme d'amortissement. On démontre l'existence d'un attracteur global régulier pour le système dynamique associé.
Dans le deuxième chapitre, on travaille sur un système de Davey-Stewartson DS dans le cas elliptique-elliptique. On démontre l'existence et la régularité d'un attracteur global avec données initiales assez petites.
Dans le troisième chapitre, on considère l'équation de Schrödinger non elliptique NES avec une non linéarité sous-critique. On démontre que le système dynamique associé à cette équation possède un attracteur global, pour des données initiales assez petites.
Dans le quatrième chapitre, on reprend les problématiques de deux premiers chapitres, mais avec discrétisation en temps par un schéma de relaxation. On démontre l'existence d'un attarcteur global régulier pour les systèmes dynamiques discrets associés en dimension infinie.

Mots clés : équations de Schrödinger non linéaires , équations de Schrödinger non elliptique , systèmes de Davey-Stewartson , attracteur global, schéma numérique, méthode de relaxation.

Classification Mathématique primaire : 35Q55, 35B41

Classification Mathématique secondaire : 37L65

