

UNIVERSITE LILLE I
ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES
POUR L'INGENIEUR

Doctorat

Génie électrique

Julien KORECKI

CONTRIBUTION A LA MODELISATION
3D DES SYSTEMES
ELECTROMAGNETIQUES BASSE
FREQUENCE A L'AIDE DE LA METHODE
D'INTEGRATION FINIE (FIT)

Soutenue le 15 mai 2009

Devant le jury composé de :

M. Jean-Pierre DUCREUX	Examineur
M. Patrick DULAR	Rapporteur
M. Yvonnick LE MENACH	Examineur
M. Lionel PICHON	Rapporteur, Président du jury
M. Francis PIRIOU	Examineur, Directeur de thèse

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, M. le Professeur Francis Piriou, qui m'a accueilli au sein de son équipe au L2EP pour effectuer ces travaux de thèse. Je le remercie plus particulièrement, ainsi que M. Jean-Pierre Ducreux pour la confiance qu'ils m'ont accordée depuis le début de ces travaux lorsque j'effectuais mon master.

De la même manière, je remercie M. Yvonnich Le Menach, Maître de Conférences, pour son encadrement de grande qualité, spécialement en ce qui concerne le travail scientifique, ainsi ses qualités humaines.

Je tiens aussi à remercier :

- Monsieur Lionel Pichon, Directeur de recherche au CNRS, pour avoir accepté de siéger dans mon jury et de l'avoir présidé.
- Monsieur P. Dular, Chercheur qualifié FNRS, pour avoir accepté de participer à mon jury et d'avoir accepté de juger mes travaux de thèse en tant que rapporteur.

Je remercie également l'ensemble des enseignants chercheurs et non chercheurs pour les nombreuses discussions constructives en termes de recherche et d'enseignement. Je n'oublie pas l'ensemble des doctorants du L2EP qui ont contribué à entretenir une ambiance de travail dans la bonne humeur. Merci à eux.

Et pour m'avoir soutenu durant ces longues années, j'adresse un grand merci à l'ensemble des membres de ma famille.

CONTRIBUTION A LA MODELISATION 3D DES SYSTEMES ELECTROMAGNETIQUES BASSE FREQUENCE A L'AIDE DE LA METHODE D'INTEGRATION FINIE (FIT)

Résumé :

La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée pour résoudre numériquement des problèmes rencontrés en mécanique, en thermique, en électromagnétisme, etc. Dans le domaine du génie électrique elle permet de réaliser la simulation de dispositifs électromagnétiques avec une grande précision. Cependant, devant les capacités grandissantes des outils de calcul, on est amené à modéliser des systèmes de plus en plus complexes. Paradoxalement, devant les temps de calcul importants que cela engendre, l'intérêt des industriels se porte sur des méthodes alternatives permettant d'obtenir des résultats plus rapidement.

Les travaux menés durant cette thèse se sont portés sur l'étude d'une méthode alternative, la technique d'intégration finie (FIT). Cette méthode permet d'obtenir un bon compromis entre rapidité des temps de calcul et qualité de la solution. À travers des problèmes d'électrocinétique, de magnétostatique et de magnétodynamique, il est montré, avec ces travaux, que les résultats obtenus à l'aide de la FIT sont de bonnes qualités comparés à la méthode des éléments finis. Des outils appliqués à l'imposition des grandeurs globales électriques et magnétiques sont aussi présentés dans ce travail.

Mots clefs : Technique d'intégration finie, modélisation électromagnétique, électrocinétique, magnétostatique, magnétodynamique, grandeurs globales.

CONTRIBUTION TO THE 3D MODELLING OF LOW FREQUENCY ELECTROMAGNETIC SYSTEMS USING FINITE INTEGRATION TECHNIQUE (FIT)

Abstract :

To solve numerically the mechanics, thermals and magnetodynamics problems, the finite element method is the most used. In electrical engineering, this method allows the simulation of electromagnetic devices with a great accuracy. However, in spite of growing capacity of the computers, the studied models become more and more complicated. From an industrial point of view, these computation times are not acceptable. Therefore, a fast and reliable numerical tool is necessary.

The developments realized during this thesis concern an alternative method, the finite integration technique. This method allows finding a compromise between computation times and accuracy. For the cases of electrokinetics, magnetostatics and magnetodynamics, simulations using FIT proved that results are accurate. Mathematical tools used to impose the electric and magnetic quantities.

Keywords : Finite integration technique, electromagnetic modeling, electrokinetic, magnetostatic, magnetodynamique, global quantities.

Sommaire

Introduction	25
Chap I. Description des problèmes électromagnétiques	27
A. Équations de Maxwell	28
B. Lois de comportement	29
C. Conditions aux limites	30
D. Définition des espaces fonctionnels	31
E. Formulations utilisées	33
E.1. Électrocinétique	34
E.1.a. Formulation ϕ	34
E.1.b. Formulation T	35
E.2. Magnétostatique	37
E.2.a. Formulation Ω	39
E.2.b. Formulation A	40
E.3. Magnétodynamique	41
E.3.a. Formulation A - ϕ	42
E.3.b. Formulation T - Ω	43
F. Imposition des grandeurs globales	45
F.1. Outils mathématiques	45
F.1.a. Vecteurs N et K	45
F.1.b. Vecteur β et scalaire α	46
F.2. Électrocinétique	47
F.2.a. Formulation en potentiel vecteur électrique T	47
- Imposition du courant	47
- Imposition de la tension	48
F.2.b. Formulation en potentiel scalaire électrique ϕ	48

- Imposition de la tension.....	49
- Imposition du courant.....	49
F.2.c. Cas des domaines non simplement connexes	50
F.3. Magnétostatique	53
F.3.a. Formulation en potentiel vecteur magnétique A	53
- Imposition du flux	53
- Imposition d'une différence de potentiels magnétiques	54
F.3.b. Formulation en potentiel scalaire magnétique Ω	54
- Imposition d'une différence de potentiels magnétiques	54
- Imposition du flux	55
F.4. Magnétodynamique.....	56
F.4.a. Formulation A - φ	56
- Imposition d'un flux et d'une tension.....	56
- Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant	56
F.4.b. Formulation T - Ω	57
- Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant	57
- Imposition d'un flux et d'une tension.....	58
Chap II. Schéma de discrétisation du problème.....	61
A. Discrétisation de l'espace	61
A.1. Notion de maillage primal et dual	61
A.2. Construction Delaunay Voronoï.....	63
A.3. Construction de type barycentrique.....	63
A.4. Cas particulier de la FIT	64
B. Discrétisation des opérateurs	66
B.1. L'opérateur rotationnel	66
B.2. L'opérateur divergence.....	67
B.3. L'opérateur gradient	68
C. Discrétisation des lois de comportement	69
C.1. Cas de la technique d'intégration finie	70
- Cas de la FIT approchée	75
C.2. Cas de la Cell-Method	77
C.2.a. Cas des formulations en potentiel scalaire	77
C.2.b. Cas des formulations en potentiel vecteur	81
C.3. Cas des éléments finis.....	85
D. Discrétisation des termes sources	86
D.1. Construction de N et de K	86
D.2. Construction de β et de α	89
E. Formulations discrètes	90

E.1. Électrocinétique	91
E.1.a. Formulation T	91
- Courant imposé	92
- Tension imposée	92
E.1.b. Formulation φ	92
- Tension imposée	93
- Courant imposé	93
E.2. Magnétostatique	94
E.2.a. Formulation A	94
- Flux imposé	94
- Force magnétomotrice imposée	95
E.2.b. Formulation Ω	95
- Force magnétomotrice imposée	96
- Flux imposé	96
E.3. Magnétodynamique	96
E.3.a. Formulation T - Ω	97
- Courant et force magnétomotrice imposés	97
- Tension et flux imposés	98
E.3.b. Formulation A - φ	99
- Flux et tension imposés	99
- Courant et force magnétomotrice imposés	100
Chap III. Applications et comparaisons	103
A. Électrocinétique	103
A.1. Système mono-Source	103
A.2. Système multi-Sources	106
A.3. Système mono-Source non simplement connexe	109
A.4. Comparaison FIT approchée – Cell Method – EF	110
B. Magnétostatique	112
B.1. Exemple académique	112
B.2. Bobine à noyau de fer	116
B.3. Imposition des grandeurs globales magnétiques	117
C. Magnétodynamique	120
C.1. Effet de proximité	120
C.2. Barreaux conducteurs	124
C.3. Tores conducteurs	126
C.3.a. Réponse à un échelon de tension	127
C.3.b. Réponse à une excitation sinusoïdale	128
Conclusion et perspectives	131

Annexes.....	133
A. Formulations discrètes magnétodynamiques en potentiels	134
A.1. Formulation T - Ω	134
A.1.a. Courant et force magnétomotrice imposés.....	134
A.1.b. Tension et flux imposés	134
A.2. Formulation A - ϕ	135
A.2.a. Tension et flux magnétique imposés.....	135
A.2.b. Courant et force magnétomotrice imposés	135
B. Formulations en champs B ou H	136
C. Résolution des systèmes linéaires.....	138
C.1. Factorisation de Cholesky.....	138
C.2. Méthode de la dissection emboîtée.....	139
Références bibliographiques.....	145

Index des figures

Figure I.1. Natures des domaines.	27
Figure I.2. Cycle d'hystérésis magnétique.	29
Figure I.3. Cas d'un conducteur et frontières associées.	30
Figure I.4. Complexe de De Rham.	32
Figure I.5. Diagramme de Tonti.	33
Figure I.6. Exemple de cas électrocinétique.	34
Figure I.7. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation φ	35
Figure I.8. Définition du contour C	36
Figure I.9. Diagramme de Tonti appliqué a la formulation \mathbf{T}	37
Figure I.10. Coupure, définie sur la frontière Γ_J non simplement connexe, permettant de prendre en compte le courant.	37
Figure I.11. Cas magnétostatique.	38
Figure I.12. Cas magnétostatique.	39
Figure I.13. Contraintes sur la distribution du champ.	39
Figure I.14. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation Ω	40
Figure I.15. Définition d'une coupure sur un cas magnétostatique.	40
Figure I.16. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation \mathbf{A}	41
Figure I.17. Domaine d'étude et conditions limites.	41
Figure I.18. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation \mathbf{A} - φ	43
Figure I.19. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation \mathbf{T} - Ω	44
Figure I.20. Exemple de parcours de \mathbf{N}	46
Figure I.21. Exemple d'utilisation de la fonction α multi-sources électriques.	50
Figure I.22. Exemple d'utilisation du champ de vecteurs \mathbf{N} multi-sources électriques.	50
Figure I.23. Système non-simplement connexe.	51
Figure I.24. Termes sources \mathbf{N} et \mathbf{N}' permettant de prendre en compte la non connexité.	52
Figure I.25. Exemple magnétostatique.	53

Figure II.1. Différents volumes pour la discrétisation de l'espace.....	62
Figure II.2. Orientation des arêtes et des facettes dans le cas d'un tétraèdre.....	62
Figure II.3. Maillages primal et dual (type Delaunay Voronoï).....	63
Figure II.4. Cas particulier de maillage dual (type Delaunay Voronoï).....	63
Figure II.5. Maillages primal et dual (type barycentrique).....	64
Figure II.6. a) Approximation géométrique due à la discrétisation spatiale. b) Maillage lâche. c) Maillage fin.	64
Figure II.7. Maillages primal et dual utilisés pour la F.I.T.....	64
Figure II.8. Micro-cellules d'un élément primal triangulaire.....	65
Figure II.9. Micro-cellules d'un élément primal carré.	65
Figure II.10. Exemple de maillage utilisé pour la FIT conforme.....	65
Figure II.11. Maillage type éléments finis.....	65
Figure II.12. Maillage type FIT.	65
Figure II.13. Décomposition du contour C.....	66
Figure II.14. Détermination de la matrice d'incidence rotationnelle.	66
Figure II.15. Décomposition de la surface S.	67
Figure II.16. Détermination de la matrice d'incidence divergence.	67
Figure II.17. Détermination de la matrice d'incidence gradient.....	69
Figure II.18. Diagramme de Tonti discret.	70
Figure II.19. Circulation électrique définie sur le maillage primal.	71
Figure II.20. Arête primale et facette duale associée.	71
Figure II.21. Maillage de quatre éléments de conductivité différente.....	72
Figure II.22. Tube de flux de courant électrique, \mathbf{E} défini sur le maillage primal.....	73
Figure II.23. Circulation électrique définie sur le maillage dual.....	73
Figure II.24. Maillage de deux éléments de conductivité différente.....	74
Figure II.25. Tube de flux de courant électrique, \mathbf{E} défini sur le maillage dual.....	74
Figure II.26. Maillage hexaédrique déformé.....	75
Figure II.27. Maillage hexaédrique déformé et son maillage dual.....	75
Figure II.28. Tube de flux issu d'un maillage déformé, \mathbf{E} sur le maillage primal.....	76
Figure II.29. Tube de flux équivalent, \mathbf{E} sur le maillage primal.	76
Figure II.30. Tube de flux issu d'un maillage déformé, \mathbf{E} sur le maillage dual.....	77
Figure II.31. Tube de flux équivalent, \mathbf{E} sur le maillage dual.....	77
Figure II.32. Tétraèdre et maillage dual associé.....	78
Figure II.33. Décomposition du tétraèdre en micro-cellules.....	78
Figure II.34. Éléments d'une micro-cellule.....	78
Figure II.35. Micro-cellules communes à une arête d'un élément.....	80
Figure II.36. Éléments et micro facettes considérées.....	80
Figure II.37. Représentation 2D du tube de flux considéré.....	81

Figure II.38. Représentation d'un tube de flux pour un maillage tétraédrique de 6 éléments. E défini sur les arêtes primales.	81
Figure II.39. Éléments d'une micro-cellule.	82
Figure II.40. Micro-cellules relatives à un élément dual.	83
Figure II.41. Éléments et micro-facettes considérées.	84
Figure II.42. Tube de flux considéré 84	84
Figure II.43. Représentation d'un tube de flux pour un maillage tétraédrique de 6 éléments. E défini sur les arêtes duales.	84
Figure II.44. Domaine D	86
Figure II.45. Définition de N sur une frontière Γ_A ou Γ_C	87
Figure II.46. Exemple de calcul de N_f	88
Figure II.47. Exemple d'arbre d'arêtes.	88
Figure II.48. Exemple d'une coupure appliquée à un système non simplement connexe.	89
Figure II.49. N et K relatif à la coupure.	89
Figure II.50. Définition de β et d'un parcours quelconque γ	90
Figure II.51. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation T	91
Figure II.52. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation ϕ	93
Figure II.53. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation A	94
Figure II.54. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation Ω	96
Figure II.55. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation $T-\Omega$	97
Figure II.56. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation $A-\phi$	100
Figure III.1. Maillage du U conducteur.	104
Figure III.2. Exemple de calcul de N pour le U conducteur.	104
Figure III.3. Distribution du courant pour le U conducteur.	105
Figure III.4. Maillage à 7000 éléments.	106
Figure III.5. Vecteur source $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ pour les quatre conducteurs sources fictifs.	107
Figure III.6. Distribution de la densité de courant.	108
Figure III.7. Structure mono-source, cas d'un domaine non simplement connexe.	109
Figure III.8. Champs de vecteurs sources pour le système non simplement connexe.	109
Figure III.9. Distribution de la densité de courant.	110
Figure III.10. Cas test électrocinétique curviligne.	111
Figure III.11. Maillage de 64 éléments.	111
Figure III.12. Distribution de la densité de courant dans une coupe transversale du conducteur.	111
Figure III.13. Puissances dissipées (W) dans le conducteur pour $15^\circ < \theta < 90^\circ$	112
Figure III.14. Exemple académique.	113

Figure III.15. Distribution de l'induction obtenue pour le maillage de 4 096 éléments avec la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω .	114
Figure III.16. Énergie (J) en fonction du nombre d'éléments.	114
Figure III.17. Bobine à noyau de fer.	116
Figure III.18. Maillage des parties ferromagnétiques et de la bobine inductrice.	116
Figure III.19. Distribution de l'induction.	116
Figure III.20. Géométrie du système magnétostatique.	117
Figure III.21. Tracé de terme source $N \phi$.	118
Figure III.22. Tracé de la densité de courant source.	118
Figure III.23. Induction, flux imposé dans la direction de l'inducteur.	118
Figure III.24. Induction, flux imposé dans la direction opposée de l'inducteur.	118
Figure III.25. Schéma équivalent à réluctances, flux imposé dans le sens de l'inducteur.	119
Figure III.26. Schéma équivalent à réluctances, flux imposé dans le sens contraire de l'inducteur.	119
Figure III.27. Deux conducteurs cylindriques maillés à l'aide d'hexaèdres	120
Figure III.28. Conditions limites	120
Figure III.29. Induction magnétique.	121
Figure III.30. Courants induits.	121
Figure III.31. Tensions (V) relevées aux bornes des deux conducteurs en fonction du temps (s) pour les deux formulations à courants imposés dans le cas de la FIT.	122
Figure III.32. Comparaison FEM FIT de l'évolution du courant (A) en fonction du temps (s) pour la formulation $A-\phi$.	123
Figure III.33. Comparaison FEM FIT de l'évolution du courant (A) en fonction du temps (s) pour la formulation $T-\Omega$.	123
Figure III.34. Dispositif d'étude en magnétodynamique.	124
Figure III.35. Description des inducteurs	124
Figure III.36. Evolution du courant (A) dans l'inducteur (conducteur numéro 2).	125
Figure III.37. Evolution du courant (A) dans l'induit (conducteur numéro 1).	125
Figure III.38. a) Représentation de la distribution de l'induction dans une coupe transversale et b) distribution de la densité de courant à la première itération.	125
Figure III.39. a) Représentation de la distribution de l'induction dans une coupe transversale et b) distribution de la densité de courant à $t = 10$ ms.	126
Figure III.40. Deux tores conducteurs.	127
Figure III.41. Un huitième de la géométrie.	127
Figure III.42. Evolution du courant (A) dans l'inducteur (conducteur numéro 2).	128
Figure III.43. Evolution du courant (A) dans l'induit (conducteur numéro 1).	128
Figure III.44. Densité de courant dans l'induit à la première itération.	128
Figure III.45. Densité de courant dans l'induit à $t = 10$ ms.	128

Figure III.46. Courant (A) dans le conducteur 2 avec $\sigma_1=\sigma_2=100$ M S/m.	129
Figure III.47. Courant (A) dans le conducteur 2 avec $\sigma_1 = 100$ et $\sigma_2=20$ M S/m.	129
Figure A.1. Circuit électrique et magnétique.	136
Figure A.2. Structure de la matrice de raideur de la formulation en potentiel scalaire électrique pour 75 inconnues.	139
Figure A.3. Structure de la matrice triangulaire inférieure obtenue pour la formulation en potentiel scalaire électrique pour 75 inconnues.	139
Figure A.4. Domaine d'étude D décomposé en deux sous-domaines.	140
Figure A.5. Structure de la matrice de raideur utilisant la numérotation de la dissection emboîtée. Deux sous-domaines.	140
Figure A.6. Domaine d'étude D décomposé en quatre sous-domaines.	140
Figure A.7. Structure de la matrice de raideur utilisant la numérotation issue de la dissection emboîtée. Quatre sous-domaines.	140
Figure A.8. Structure de la matrice triangulaire inférieure utilisant la numérotation issue de la dissection emboîtée. Quatre sous-domaines.	141
Figure A.9. Structures de la matrice de raideur. Numérotation classique et renumérotation à l'aide de la dissection emboîtée. Huit sous-domaines.	141
Figure A.10. Structures de la matrice L. Numérotation classique et renumérotation à l'aide de la dissection emboîtée. Huit sous-domaines.	141
Figure A.11. Structure de la matrice de raideur utilisant la numérotation issue de la dissection emboîtée. Huit sous-domaines.	142
Figure A.12. Structure de la matrice triangulaire inférieure utilisant la numérotation de la dissection emboîtée.	142
Figure A.13. Schéma de parallélisation.	143
Figure A.14. Structure de la matrice de raideur obtenue en magnétodynamique.	144

Index des tableaux

Tableau I.1. Formes locales et intégrales des équations de Maxwell.....	28
Tableau I.2. Formulations en électrocinétique à grandeurs globales électriques imposées.	50
Tableau I.3. Formulations en magnétostatique à grandeurs globales magnétiques imposées.	55
Tableau I.4. Champs sources en fonction des formulations et des grandeurs globales..	58
Tableau II.1. Correspondances entre les éléments du maillage primal et du maillage dual.	63
Tableau III.1. Résultats à courant imposé puis à tension imposée pour la formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T}	105
Tableau III.2. Résultats à tension imposée puis à courant imposé pour la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ	105
Tableau III.3. Configurations testées sur le cas du conducteur multi-sources.	107
Tableau III.4. Résultats pour la formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T} à courant et à tension imposée.....	108
Tableau III.5. Résultats pour la formulation ϕ à courant et à tension imposée.....	108
Tableau III.6. Résultats à courant imposé puis à tension imposée pour la formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T}	109
Tableau III.7. Résultats à courant imposé puis à tension imposée pour la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ	110
Tableau III.8. Caractéristiques des maillages utilisés.....	113
Tableau III.9. Énergie calculée en fonction de la nature du maillage et de la formulation utilisée.....	115
Tableau III.10. Caractéristiques des différentes formulations utilisées.....	115
Tableau III.11. Comparaison entre la F.I.T. et la F.E.M.	117
Tableau III.12. Résultats obtenus à flux imposé.	119
Tableau III.13. Résultats obtenus à force magnétomotrice imposée.....	119
Tableau III.14. Amplitudes et déphasages des tensions relevées à l'aide de la FIT pour	

les formulations $\mathbf{A}-\varphi$ et $\mathbf{T}-\Omega$	122
Tableau III.15. Nombre d'inconnues résultant des maillages utilisés pour la FIT et la MEF en fonction des potentiels utilisés et des formulations magnétodynamiques.....	127
Tableau III.16. Temps de calcul nécessaire à la résolution du problème pour la FIT et la MEF.....	129
Tableau A.1. Analogie entre les grandeurs magnétiques discrètes et les grandeurs électriques.....	136

Introduction

Les méthodes numériques de simulation sont utilisées dans de nombreux domaines : en mécanique pour, par exemple, déterminer la répartition des efforts sur une structure (code ASTER), en thermique, pour obtenir la distribution de température, en météorologie ou encore en électromagnétisme (flux3D). Ces méthodes numériques sont de plus en plus utilisées. Les industriels se sont rapidement tournés vers celles-ci, réduisant de ce fait leurs coûts de prototypage. Les performances des calculateurs augmentant continuellement, des systèmes de plus en plus importants peuvent être modélisés. Que ce soit en mécanique ou en électromagnétisme la méthode de référence largement mise en œuvre est la méthode des éléments finis (FEM) [20]. Il existe cependant d'autres méthodes permettant d'étudier les mêmes systèmes tout en facilitant la mise en œuvre, réduisant de ce fait les temps d'études. La technique d'intégration finie (*Finite Integration Technique, FIT*), proposée par T. Weiland en 1977 [51] en est une.

L'objectif de cette thèse est d'étudier et de développer la méthode d'intégration finie pour, à terme, faire cohabiter un code basé sur la FIT avec un code basé sur la méthode des éléments finis (Finite Element Method) développé au L2EP (*code_CARMEL*) afin de traiter des applications similaires en vue de comparer les résultats entre ces deux méthodes. Elle s'inscrit dans le cadre du projet de recherche du Centre National de Recherche Technologique du Nord-Pas-de Calais FUTURELEC IV dont le thème est la modélisation avancée du comportement du matériel électrique. Cette thèse est effectuée dans le cadre d'une collaboration entre EDF R&D et le Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Lille (L2EP).

Dans le premier chapitre de ce mémoire une structure mathématique est définie. Cette structure permet d'accueillir le système d'équations de Maxwell qui traduit le comportement électromagnétique des systèmes électrotechniques. Les domaines de l'électrocinétique, de la magnétostatique, et de la magnétodynamique sont rappelés. Pour chacun de ces domaines les formulations permettant d'établir un système d'équations sont présentées. On y introduit des potentiels, images des grandeurs électriques et magnétiques. La détermination et l'imposition des grandeurs globales magnétiques et électriques sont développées pour chacune des formulations. Des outils mathé-

matiques sont introduits à cet effet.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéressera au problème d'un point de vue numérique. En effet, sauf cas académique, la résolution des équations aux dérivées partielles s'avère impossible analytiquement. Il est alors nécessaire de discrétiser à la fois le système spatialement, les opérateurs vectoriels ainsi que les lois de comportement afin d'établir un modèle numérique. Différentes méthodes de discrétisation spatiale sont présentées ainsi que différentes techniques de discrétisation des lois de comportement.

Enfin, dans le troisième chapitre, les formulations, ainsi que les outils permettant d'imposer les grandeurs globales, seront testées à travers des exemples en électrocinétique, en magnétostatique et en magnétodynamique. Les méthodes et les termes sources permettant d'imposer les grandeurs globales électriques et magnétiques seront développées pour chaque formulation à travers ces exemples. Les résultats obtenus à l'aide de la FIT seront comparés à ceux de la FEM en termes de qualité de la solution et de temps de calcul.

Chap I. Description des problèmes électromagnétiques

En électrotechnique, les problèmes rencontrés se composent de matériaux ferromagnétiques et/ou conducteurs ainsi que de sources électriques et magnétiques. Un domaine d'étude D incluant un ou plusieurs sous-domaines conducteur D_C est alors considéré (Figure I.1).

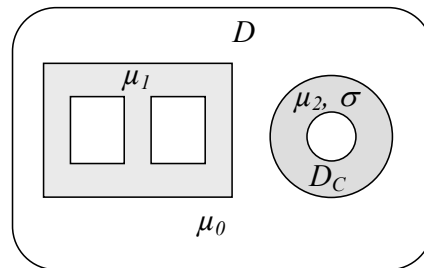


Figure I.1. Natures des domaines.

Dans ces différents domaines, les répartitions spatiales et temporelles des champs électriques (\mathbf{E} et \mathbf{J}) et magnétiques (\mathbf{H} et \mathbf{B}) sont à déterminer. Ces différentes grandeurs dépendent des paramètres géométriques du système étudié, du temps ainsi que de la nature des matériaux. Dans certains cas académiques il est possible de déterminer analytiquement la répartition de ces différents champs de vecteurs. Mais pour des systèmes réels, compte tenu des difficultés engendrées par la complexité des géométries et des lois de comportement magnétique et électrique, l'utilisation de méthodes numériques est nécessaire. Afin d'entreprendre la modélisation d'un système, il est nécessaire d'établir un modèle mathématique. Le comportement magnétique et électrique des grandeurs mises en jeu est régi par les équations de Maxwell.

Dans ce chapitre sont décrites les différentes notions nécessaires à l'établissement d'un modèle. Il y sera présenté les différents espaces solutions où sont définies les différentes grandeurs électriques et magnétiques, vectorielles et scalaires. Le système

d'équations de Maxwell sera également rappelé dans le cas général. Pour définir complètement un modèle de comportement électromagnétique, les différents types de conditions aux limites et lois de comportement seront énoncés. Des outils mathématiques permettant d'imposer et de calculer les grandeurs globales électriques et magnétiques seront également présentés. Leurs utilisations seront illustrées par l'utilisation des différentes formulations en électrocinétique, en magnétostatique ainsi qu'en magnétodynamique.

A. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles. Elles traduisent le comportement des phénomènes électromagnétiques. Le tableau ci-dessous récapitule les équations de Maxwell sous leurs formes locales ainsi que sous leurs formes intégrales. Les formes intégrales des équations de Maxwell sont utiles à la compréhension de la technique d'intégration finie. L'avantage de cette forme d'écriture sera présenté dans le chapitre suivant.

Formes locales	Formes intégrales	
$\text{Rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	Loi de Maxwell-Faraday
$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	Théorème de Maxwell-Ampère
$\text{Div } \mathbf{B} = 0$	$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	Conservation du flux magnétique
$\text{Div } \mathbf{J} = 0$	$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0$	Conservation du flux de la densité de courant
$\text{Div } \mathbf{D} = \rho$	$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$	Théorème de Gauss

Tableau I.1. Formes locales et intégrales des équations de Maxwell.

Avec \mathbf{H} : Le champ magnétique (A/m)

\mathbf{B} : L'induction magnétique (T)

\mathbf{E} : Le champ électrique (V/m)

\mathbf{J} : La densité de courant (A/m²)

\mathbf{D} : L'induction électrique (C/m²)

Aux fréquences utilisées en électrotechnique le terme correspondant au courant de déplacement ($\partial \mathbf{D} / \partial t$) peut être négligé. Sous forme locale on peut écrire l'équation

suivante :

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{I.1})$$

Dans ces conditions, on retrouve le théorème d'Ampère en exprimant cette équation sous forme intégrale :

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{I.2})$$

B. Lois de comportement

Pour compléter le système d'équations de Maxwell, il est nécessaire de tenir compte des lois de comportement des matériaux qui ajoutent un aspect métrique au problème. Dans le cas linéaire, ces lois de comportement s'écrivent sous les formes suivantes :

$$\text{Loi de comportement électrique : } \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.3})$$

$$\text{Loi de comportement magnétique : } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{I.4})$$

$$\text{Loi de comportement diélectrique : } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{I.5})$$

Avec σ : La conductivité électrique (S/m)

μ : La perméabilité magnétique (H/m)

ε : La permittivité électrique (F/m)

De manière générale, on écrit : $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ avec μ_0 la perméabilité magnétique de l'air ($4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) et μ_r la perméabilité relative du matériau. Il en est de même pour la permittivité électrique : $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ avec ε_0 la permittivité du vide ($8,854187 \cdot 10^{-12}$ F/m) et ε_r la permittivité relative.

Dans le cas de prise en compte de la saturation magnétique et du phénomène hystérétique (Figure I.2), la loi de comportement magnétique peut être non linéaire :

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H}) \mathbf{H} \quad (\text{I.6})$$

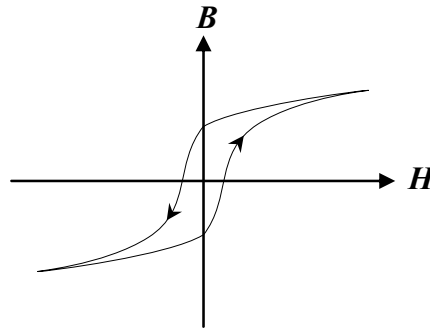


Figure I.2. Cycle d'hystérésis magnétique.

Elle peut aussi traduire localement la présence d'aimant :

$$\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (\text{I.7})$$

Avec \mathbf{B}_r l'induction rémanente et μ_a la perméabilité de l'aimant.

C. Conditions aux limites

Pour compléter le modèle mathématique, on introduit des conditions aux limites sur les champs. En considérant le cas d'un problème d'électrocinétique (Figure I.3), la frontière Γ du domaine d'étude D peut se décomposer en plusieurs frontières sur lesquelles différentes conditions seront imposées.

Dans le cas d'une étude en électrocinétique, une condition sur le champ électrique \mathbf{E} s'applique aux frontières Γ_E et une autre concernant la densité de courant \mathbf{J} sur la frontière Γ_J . Avec $\Gamma_J \cup \Gamma_E = \Gamma$ et $\Gamma_J \cap \Gamma_E = \emptyset$.

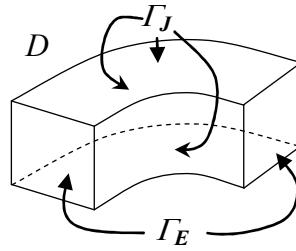


Figure I.3. Cas d'un conducteur et frontières associées.

Ces conditions aux limites s'énoncent de la façon suivante :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_J \quad (\text{I.8})$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_E \quad (\text{I.9})$$

On impose à zéro la composante normale de la densité de courant \mathbf{J} sur la frontière Γ_J ainsi que la composante tangentielle de la circulation de champ électrique \mathbf{E} sur Γ_E . Les mêmes types de conditions aux limites peuvent s'appliquer sur les composantes tangentielles du champ magnétique \mathbf{H} (I.10) et normales et de l'induction \mathbf{B} (I.11) dans le cas d'un problème magnétostatique.

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \quad (\text{I.10})$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \quad (\text{I.11})$$

Avec $\Gamma_B \cup \Gamma_H = \Gamma$ et $\Gamma_B \cap \Gamma_H = \emptyset$.

Pour un problème magnétodynamique, ces quatre conditions aux limites se retrouvent également.

D. Définition des espaces fonctionnels

Pour résoudre les équations de Maxwell, on définit des espaces fonctionnels permettant d'accueillir les fonctions auxquelles on appliquera les opérateurs vectoriels : *Gradient* (**Grad**), *Divergence* (*Div*) et *Rotationnel* (**Rot**). On appelle $L^2(\mathbf{D})$ et $\mathbf{L}^2(\mathbf{D})$, les espaces fonctionnels des fonctions scalaires et vectorielles de carré intégrable dans \mathbf{D} dans lesquels sont définis les produits scalaires suivants :

$$\int_{\mathbf{D}} u v d\tau \quad \text{Avec : } u \in L^2(\mathbf{D}) \text{ et } v \in L^2(\mathbf{D}) \quad (\text{I.12})$$

$$\int_{\mathbf{D}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\tau \quad \text{Avec : } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D}) \text{ et } \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D}) \quad (\text{I.13})$$

Pour l'opérateur *Gradient*, on définit un espace \mathbf{H}^0 tel que :

$$\mathbf{H}^0 = \{u \in L^2(\mathbf{D}) ; \mathbf{Grad} u \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D})\} \quad (\text{I.14})$$

Pour l'opérateur *Rotationnel* :

$$\mathbf{H}^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D}) ; \mathbf{Rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D})\} \quad (\text{I.15})$$

Et pour l'opérateur *Divergence* :

$$\mathbf{H}^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{D}) ; \text{Div} \mathbf{u} \in L^2(\mathbf{D})\} \quad (\text{I.16})$$

Avec u une fonction scalaire et \mathbf{u} un champ vectoriel.

Appliqué à un domaine d'étude D contractile, on peut écrire :

$$\text{Ker}(\mathbf{Rot}(\mathbf{H}^1)) = \text{Im}(\mathbf{Grad}(\mathbf{H}^0)) \quad (\text{I.17})$$

$$\text{Ker}(\text{Div}(\mathbf{H}^2)) = \text{Im}(\mathbf{Rot}(\mathbf{H}^1)) \quad (\text{I.18})$$

Où *Ker* représente le noyau de l'opérateur et *Im* l'image de l'opérateur.

Pour compléter l'ensemble des espaces, on introduit un quatrième espace \mathbf{H}^3 , qui accueillera l'image de la divergence des fonctions définies dans \mathbf{H}^2 . Ces relations montrent que si une fonction vectorielle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2$ telle que $\text{Div} \mathbf{u} = 0$, alors il existe une fonction vectorielle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1$ vérifiant $\mathbf{Rot} \mathbf{v} = \mathbf{u}$. Elles montrent également que si une fonction vectorielle \mathbf{v} est à rotationnel nul, $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1$; $\mathbf{Rot} \mathbf{v} = 0$, alors il existe une fonction scalaire $w \in \mathbf{H}^0$ telle que $\mathbf{Grad} w = \mathbf{v}$.

Le complexe de Rham (Figure I.4) représente une suite d'espaces fonctionnels solutions reliées par les opérateurs vectoriels dans le cas d'un domaine contractile.

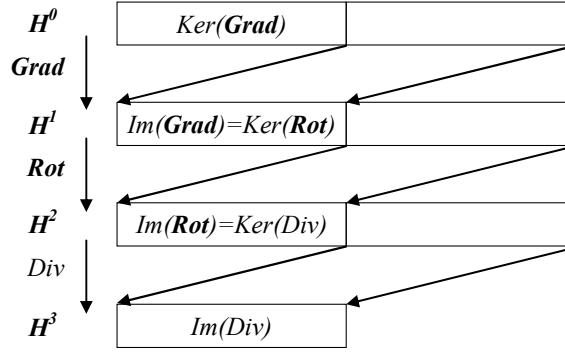


Figure I.4. Complexe de De Rham.

Pour un domaine non simplement connexe, ces relations ne sont plus vraies, on a alors :

$$\text{Im}(\text{Grad}(\mathbf{H}^0)) \subset \text{Ker}(\text{Rot}(\mathbf{H}^1)) \quad (\text{I.19})$$

$$\text{Im}(\text{Rot}(\mathbf{H}^1)) \subset \text{Ker}(\text{Div}(\mathbf{H}^2)) \quad (\text{I.20})$$

D'une manière générale, les fonctions scalaires seront définies dans l'espace \mathbf{H}^0 , les champs de vecteur issus d'un gradient seront définis dans l'espace \mathbf{H}^1 , l'utilisation du rotationnel donnera naissance à un champ de vecteurs défini sur \mathbf{H}^2 et le résultat scalaire d'une divergence sera défini sur \mathbf{H}^3 .

Des espaces incluant les conditions aux limites sont également définis, tel que si :

$$u \text{ est une fonction scalaire : } \mathbf{H}_0^0 = \{u \in \mathbf{H}_u^0 ; u|_{\Gamma_u} = 0\} \quad (\text{I.21})$$

$$\mathbf{u} \text{ est une fonction vectorielle : } \mathbf{H}_0^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_u^1 ; \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_u} = 0\} \quad (\text{I.22})$$

$$\text{Ou : } \mathbf{H}_0^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_u^2 ; \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_u} = 0\} \quad (\text{I.23})$$

La notion d'opérateur adjoint permet d'établir le lien entre deux suites d'espaces, \mathbf{H}_u et \mathbf{H}_v incluant les sous-espaces \mathbf{H}_u^0 à \mathbf{H}_u^3 et \mathbf{H}_v^0 à \mathbf{H}_v^3 . Soit \mathcal{L} un opérateur et \mathcal{L}^* son opérateur adjoint, \mathcal{L}^* est défini par l'identité de Green tel que :

$$\int_D \mathcal{L}(u) \cdot v \, d\tau = \int_D u \cdot \mathcal{L}^*(v) \, d\tau + \int_{\Gamma} (u * v) \cdot d\mathbf{s} \text{ Avec } u \in \mathbf{H}_u \text{ et } v \in \mathbf{H}_v. \quad (\text{I.24})$$

La suite d'espace \mathbf{H}_v est duale à la suite définie dans \mathbf{H}_u . L'opérateur « * » représente soit un produit scalaire, soit un produit vectoriel en fonction des sous-espaces où sont définies les fonctions u et v .

Pour les grandeurs dont il faut vérifier la divergence, définies sur \mathbf{H}_u^2 ou \mathbf{H}_v^2 , on utilisera des conditions aux limites de type Dirichlet ($u \in \mathbf{H}_u^2 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$) qui conditionne la composante normale de la fonction \mathbf{u} sur la frontière Γ . Tandis que pour les circulations définies sur \mathbf{H}_u^1 ou \mathbf{H}_v^1 , la condition limite de type Neumann ($u \in \mathbf{H}_u^1 : \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0$) sera utilisée sur la frontière Γ .

Appliquée aux opérateurs vectoriels, l'identité de Green permet d'écrire :

$$\int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{Grad} u \, d\tau = - \int_D u \cdot \mathbf{Div} \mathbf{v} \, d\tau + \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \, ds \quad \text{Avec } u \in \mathbf{H}_u^0 \text{ et } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_v^2 \quad (\text{I.25})$$

$$\text{Et : } \int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{Rot} \mathbf{v} \, d\tau = \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{Rot} \mathbf{u} \, d\tau + \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \quad \text{Avec } \mathbf{u} \in \mathbf{H}_u^1 \text{ et } \mathbf{v} \in \mathbf{H}_v^1 \quad (\text{I.26})$$

Dans notre cas les intégrales sur la frontière Γ sont annulées compte tenu des conditions aux limites. Ces relations établissent un lien entre les deux suites d'espaces \mathbf{H}_u et \mathbf{H}_v . Ces deux suites d'espaces peuvent se représenter graphiquement à l'aide d'un diagramme de Tonti [48] (Figure I.5). Ce diagramme permet d'illustrer le passage d'un espace à un autre via les opérateurs vectoriels.

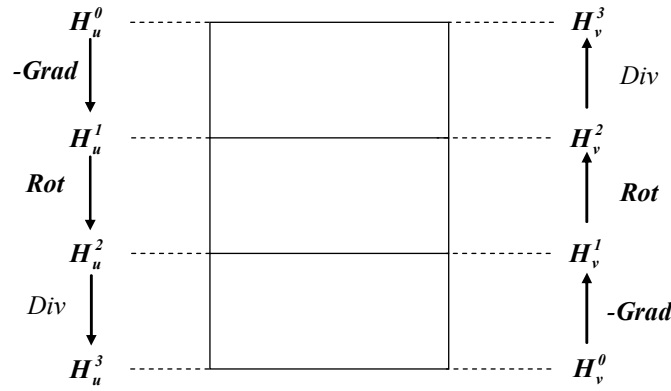


Figure I.5. Diagramme de Tonti.

E. Formulations utilisées

En fonction du type de problème, les équations de Maxwell sont découplées afin de garder celles qui traduisent le comportement des grandeurs intéressantes. Les grandeurs électriques (\mathbf{E} et \mathbf{J}) sont prises en compte en électrocinétique, tandis qu'en magnétostatique seuls les champs magnétiques (\mathbf{B} et \mathbf{H}) sont considérés. La magnétodynamique permet de prendre en compte les champs magnétiques et électriques.

Cette partie présente les différentes équations à résoudre en fonction de la nature du problème (électrocinétique, magnétostatique ou magnétodynamique) ainsi que les formulations en potentiels associées. Ces potentiels sont des images des différentes grandeurs que l'on souhaite déterminer.

L'utilisation des formulations en potentiel permet d'agir sur ces mêmes potentiels pour à la fois imposer des conditions limites, des grandeurs globales ou des termes sources. L'introduction de ces mêmes potentiels permet de satisfaire naturellement certaines équations de Maxwell.

E.1. Électrocinétique

Dans le cas d'un problème d'électrocinétique on cherche à obtenir la distribution de la densité de courant dans un matériau conducteur soumis, par exemple, à une différence de potentiels électrique.

Un exemple est donné sur la figure (Figure I.6). Ce conducteur est constitué de deux conductivités différentes. Le domaine d'étude D_C , ici, se limite au conducteur lui-même.

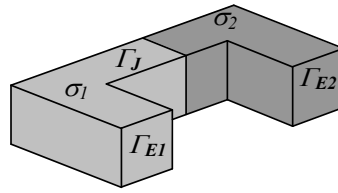


Figure I.6. Exemple de cas électrocinétique.

Dans le cas général, les équations à résoudre sont :

$$\text{Rot } \mathbf{E} = 0 \quad (\text{I.27})$$

$$\text{Div } \mathbf{J} = 0 \quad (\text{I.28})$$

La loi de comportement électrique permet de mettre en relation les champs \mathbf{E} et \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.29})$$

Deux conditions aux limites du type $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sont définies dans notre cas sur les frontières Γ_{E1} et Γ_{E2} , ainsi que la condition $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur la frontière Γ_J .

E.1.a. Formulation ϕ

Comme le champ électrique est à rotationnel nul (I.27), il s'exprime en fonction d'un potentiel scalaire électrique ϕ tel que :

$$\mathbf{E} = - \text{Grad } \phi \quad (\text{I.30})$$

En exprimant la densité de courant \mathbf{J} en fonction du potentiel scalaire ϕ et de la loi de comportement électrique, on résout l'équation (I.28) :

$$\text{Div } \sigma \text{ Grad } \phi = 0 \quad (\text{I.31})$$

Cette formulation permet d'imposer naturellement une différence de potentiels électriques en agissant sur le potentiel électrique ϕ sur les frontières Γ_{Ei} . En décomposant le champ électrique en fonction d'un champ source \mathbf{E}_S et d'un champ inconnu \mathbf{E}_I , on introduit le potentiel électrique source ϕ_S tel que :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_I + \mathbf{E}_S = - \text{Grad } \phi_I - \text{Grad } \phi_S \quad (\text{I.32})$$

Avec ϕ_I : le potentiel scalaire électrique que l'on cherche à déterminer et ϕ_S : le po-

tentiel scalaire source défini sur les surfaces Γ_{E1} et Γ_{E2} tel que :

$$\varphi_{S_{\Gamma_{E2}}} - \varphi_{S_{\Gamma_{E1}}} = V \quad (I.33)$$

En définissant un parcours γ quelconque reliant Γ_{E1} à Γ_{E2} , on obtient les conditions suivantes pour les champs \mathbf{E}_S et \mathbf{E}_I :

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{l} = V \text{ et } \int_{\gamma} \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (I.34)$$

La formulation en potentiel scalaire électrique s'écrit alors :

$$\text{Div } \sigma \mathbf{Grad} \varphi_I = - \text{Div } \sigma \mathbf{Grad} \varphi_S \quad (I.35)$$

Pour assurer l'unicité de la solution on jauge le problème en fixant la valeur d'un potentiel. Les différentes grandeurs utilisées se placent sur le diagramme de Tonti (Figure I.7).

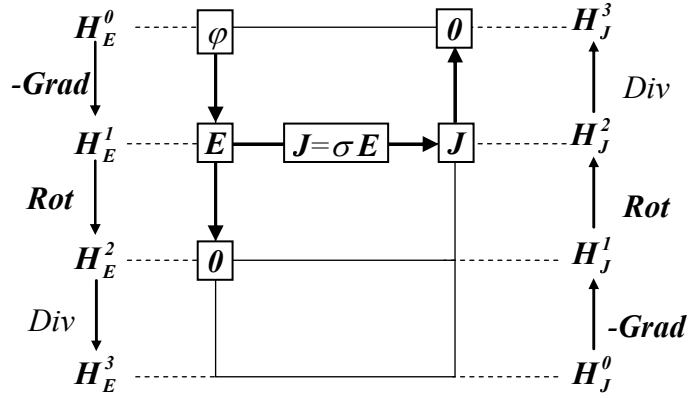


Figure I.7. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation φ .

On vérifie la condition $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_E en imposant le potentiel scalaire électrique φ constant sur cette frontière tel que $(\mathbf{Grad} \varphi) \times \mathbf{n} = 0$.

E.1.b. Formulation T

La densité de courant \mathbf{J} , qui est à divergence nulle (I.28), peut être exprimée à l'aide d'un potentiel vecteur tel que :

$$\mathbf{J} = \text{Rot } \mathbf{T} \quad (I.36)$$

Où \mathbf{T} représente le potentiel vecteur électrique. En écrivant le champ électrique \mathbf{E} en fonction de la loi de comportement électrique et du potentiel vecteur \mathbf{T} , on obtient :

$$\text{Rot} \frac{1}{\sigma} \text{Rot } \mathbf{T} = 0 \quad (I.37)$$

Cette formulation permet d'imposer un courant traversant le conducteur. Pour cela, la densité de courant peut se décomposer en deux termes : un terme inconnu \mathbf{J}_I et un terme

source \mathbf{J}_S tels que :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_I + \mathbf{J}_S = \text{Rot } \mathbf{T}_I + \text{Rot } \mathbf{T}_S \quad (\text{I.38})$$

La densité de courant source est à divergence nulle et vérifie :

$$\iint_{\Gamma_{Ei}} \mathbf{J}_S \cdot d\mathbf{s} = \pm I \quad (\text{I.39})$$

$$\text{Div } \mathbf{J}_S = 0 \quad (\text{I.40})$$

Pour imposer la condition aux limites Γ_J il est nécessaire de contraindre le potentiel vecteur source \mathbf{T}_S .

Soit C un contour non contractile quelconque défini sur la frontière Γ_J :

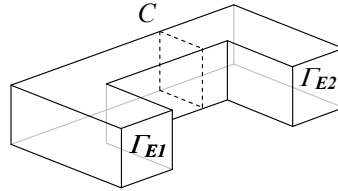


Figure I.8. Définition du contour C .

Les potentiels vecteurs \mathbf{T}_I et \mathbf{T}_S introduits doivent vérifier :

$$\oint_C \mathbf{T}_S \cdot d\mathbf{l} = I \text{ et } \oint_C \mathbf{T}_I \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{I.41})$$

Avec :

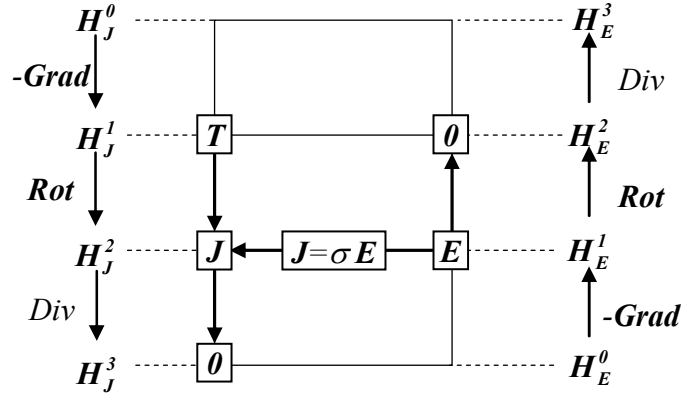
$$\iint_{\Gamma_J} \text{Rot}(\mathbf{T}_I + \mathbf{T}_S) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{I.42})$$

La formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T} s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\text{Rot} \frac{1}{\sigma} \text{Rot } \mathbf{T}_I = -\text{Rot} \frac{1}{\sigma} \text{Rot } \mathbf{T}_S \quad (\text{I.43})$$

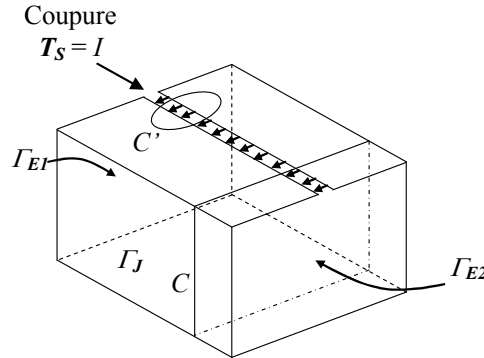
Pour cette formulation, il est nécessaire d'imposer une condition de jauge au potentiel vecteur \mathbf{T} . On utilisera la condition du type : $\mathbf{T} \cdot \mathbf{w} = 0$. Avec \mathbf{w} un champ de vecteur présent dans tout le domaine ne formant pas de boucle [1].

Le diagramme de Tonti (Figure I.9) montre dans quels espaces sont définies les différentes grandeurs utilisées pour la formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T} .

Figure I.9. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation T .

Pour respecter la condition limite $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_J on s'assure que les équations (I.41) et (I.42) sont vérifiées en imposant $\mathbf{T}_I \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_J et en définissant un champ source \mathbf{T}_S tel que $\mathbf{J}_S \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_J .

Comme dans notre exemple (Figure I.6) la frontière Γ_J est non simplement connexe, il est nécessaire d'ajouter une coupure (Figure I.10) [21] qui lie les frontières Γ_{E1} et Γ_{E2} afin de vérifier (I.28) et (I.39). La frontière Γ_E est ici discontinue, $\Gamma_E = \Gamma_{E1} \cup \Gamma_{E2}$ et $\Gamma_{E1} \cap \Gamma_{E2} = 0$. Le long de cette coupure \mathbf{T}_S sera égal à I ($\mathbf{T}_S \times \mathbf{n} \neq 0$ sur Γ_J). De cette manière, la circulation de \mathbf{T}_S le long d'un contour contractile C' sera nulle mais pas le long du contour C (I.41).

Figure I.10. Coupure, définie sur la frontière Γ_J non simplement connexe, permettant de prendre en compte le courant.

E.2. Magnétostatique

Un problème magnétostatique a pour but de déterminer la distribution du champ magnétique \mathbf{H} et de l'induction magnétique \mathbf{B} au sein d'un système soumis à une excitation. Cette excitation peut provenir de la présence d'aimants permanents ou d'une densité de courant circulant dans un inducteur dont la distribution est parfaitement connue.

Considérons le système de la figure (Figure I.11). Le domaine d'étude D représente le système ainsi que son environnement (boîte d'air). Ce domaine se compose de plusieurs sous-domaines : des sous-domaines ferromagnétiques de différentes perméabilités ainsi que de sous-domaines représentant l'excitation magnétique. Dans notre cas, ce dernier représente une bobine inductrice traversée par une densité de courant parfaitement connue.

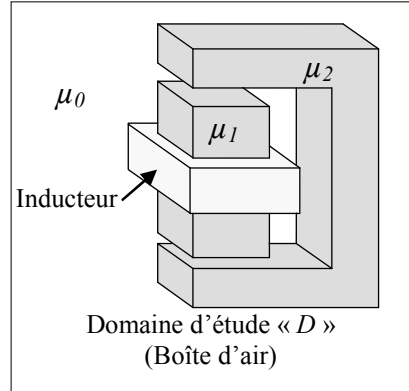


Figure I.11. Cas magnétostatique.

Les équations de Maxwell à vérifier en magnétostatique s'écrivent telles que :

$$\text{Rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{I.44})$$

$$\text{Div } \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.45})$$

On y associe la loi de comportement magnétique que l'on supposera linéaire :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{I.46})$$

Ainsi que les conditions aux limites sur les champs :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_B \quad (\text{I.47})$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_H \quad (\text{I.48})$$

En tenant compte des symétries de l'exemple présenté, il est possible de réduire le domaine d'étude à un quart de sa structure. Les surfaces relatives aux conditions aux limites, Γ_H et Γ_B , sont représentées sur la figure (Figure I.12). La composante normale de l'induction magnétique \mathbf{B} est nulle sur Γ_B et la composante tangentielle du champ magnétique \mathbf{H} est nulle sur Γ_H . La figure (Figure I.13) illustre l'influence de ces conditions limites sur la répartition du champ magnétique.

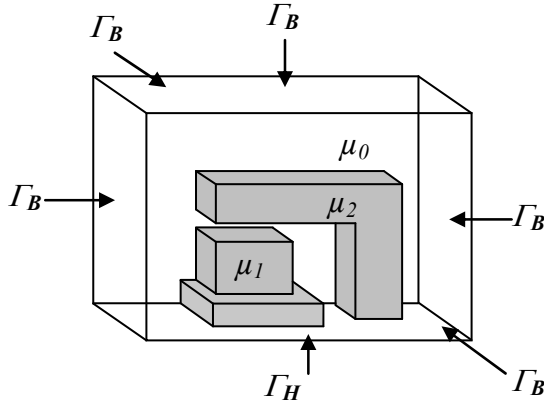


Figure I.12. Cas magnétostatique.

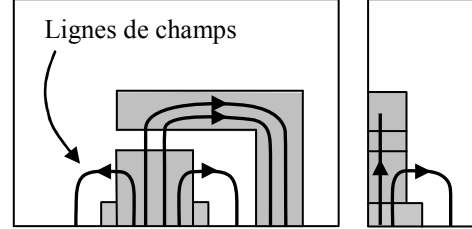


Figure I.13. Contraintes sur la distribution du champ.

E.2.a. Formulation Ω

La première formulation proposée est la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω . Cette formulation permet de résoudre l'équation qui traduit la conservation du flux (I.45). Pour tenir compte de la présence d'excitation, le champ magnétique se décompose à l'aide d'un champ magnétique inconnu \mathbf{H}_I et d'un champ source \mathbf{H}_S :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_I \quad (\text{I.49})$$

\mathbf{H}_S est le terme relatif à l'inducteur. Il permet de vérifier :

$$\text{Rot } \mathbf{H}_S = \mathbf{J} \quad (\text{I.50})$$

Le champ magnétique inconnu vérifie la relation suivante :

$$\text{Rot } \mathbf{H}_I = 0 \quad (\text{I.51})$$

Le potentiel scalaire magnétique Ω se déduit du champ magnétique inconnu \mathbf{H}_I . Ce dernier étant à rotationnel nul, il s'écrit tel que :

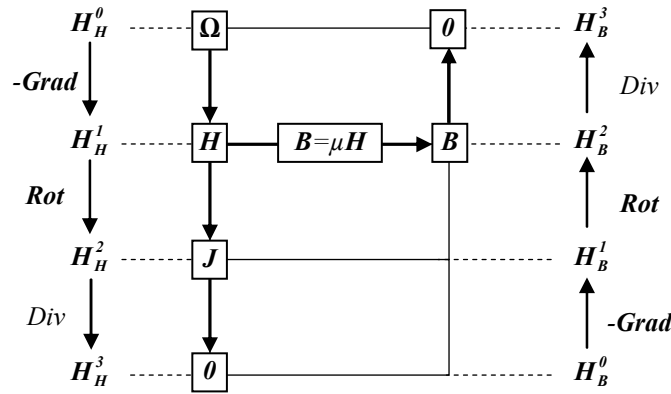
$$\mathbf{H}_I = - \text{Grad } \Omega \quad (\text{I.52})$$

La formulation en potentiel scalaire Ω est établie en exprimant l'équation (I.45) à l'aide du potentiel scalaire magnétique Ω et de la loi de comportement :

$$\text{Div } \mu \text{ Grad } \Omega = \text{Div } \mu \mathbf{H}_S \quad (\text{I.53})$$

La condition limite $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ sur la frontière Γ_H est obtenue car le potentiel scalaire magnétique Ω est défini constant sur cette frontière et que $\mathbf{H}_S \times \mathbf{n} = 0$.

Les différentes grandeurs utilisées dans cette formulation sont représentées sur le diagramme de Tonti de la manière suivante :

Figure I.14. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation Ω .

E.2.b. Formulation A

Cette formulation permet de résoudre l'équation (I.44). Le champ de vecteurs de l'induction magnétique \mathbf{B} étant à divergence nulle, il s'exprime en fonction d'un potentiel vecteur \mathbf{A} tel que :

$$\mathbf{B} = \text{Rot } \mathbf{A} \quad (\text{I.54})$$

Avec \mathbf{A} , le potentiel vecteur magnétique et \mathbf{J} , une densité de courant source parfaitement connue, l'équation (I.44) s'écrit :

$$\text{Rot} \frac{1}{\mu} \text{Rot } \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (\text{I.55})$$

Cette formulation nécessite également une condition de jauge.

Pour obtenir une composante normale nulle de l'induction sur la surface Γ_B , le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} est défini tel que $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$ sur cette frontière. Si la frontière Γ_B est non-simplement connexe, lorsque l'on est en présence d'une frontière Γ_H discontinue, une coupure sera définie. On pourra imposer un flux magnétique ϕ traversant le domaine d'étude grâce à cette coupure (Figure I.15). On introduit alors un terme source \mathbf{A}_S de valeur ϕ le long de cette coupure.

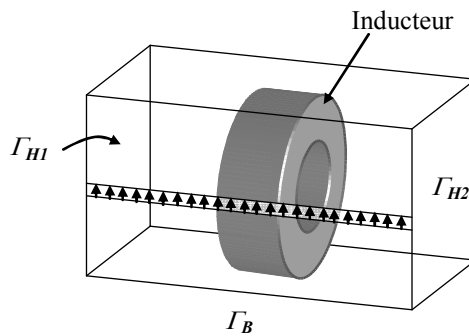


Figure I.15. Définition d'une coupure sur un cas magnétostatique.

Les différentes grandeurs utilisées se placent sur le diagramme de Tonti suivant :

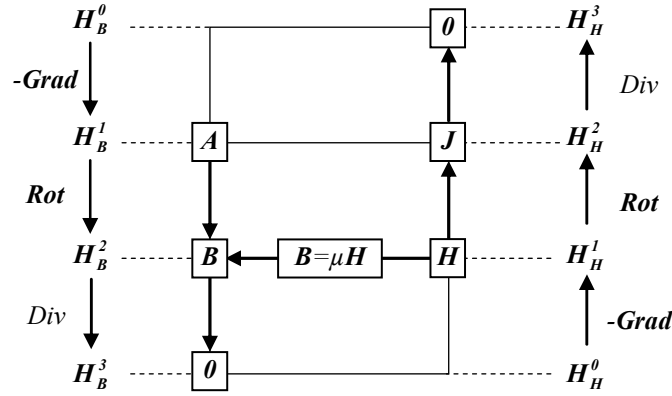


Figure I.16. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation A.

E.3. Magnétodynamique

Considérons le domaine d'étude D ferromagnétique comprenant un domaine conducteur D_C (Figure I.17). Les grandeurs magnétiques évoluent dans ces deux domaines tandis que les grandeurs électriques n'évoluent naturellement que dans le domaine conducteur D_C .

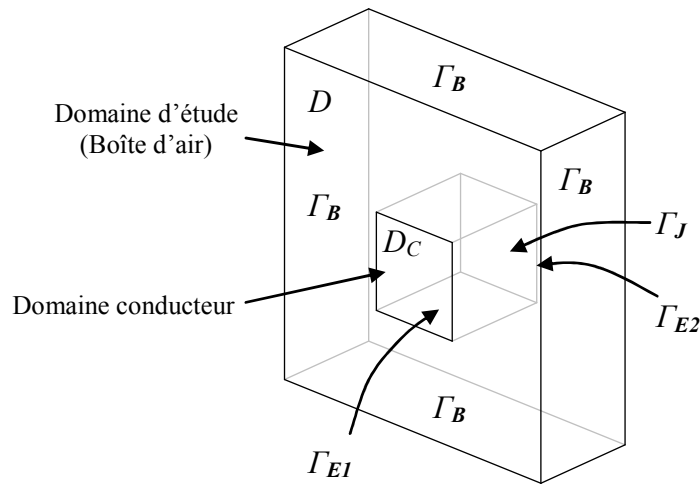


Figure I.17. Domaine d'étude et conditions limites.

Dans le cas de la magnétodynamique les équations de Maxwell suivantes sont à résoudre :

$$\text{Rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{I.56})$$

$$\mathbf{Rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{I.57})$$

$$\text{Div} \mathbf{J} = 0 \quad (\text{I.58})$$

$$\text{Div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{I.59})$$

Pour établir le lien entre les différentes grandeurs électriques et magnétiques les lois de comportement électrique et magnétique sont à prendre en compte :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.60})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{I.61})$$

Les conditions aux limites viennent compléter le problème. Sur les frontières Γ_B seront définies les conditions $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$, sur les frontières Γ_H , les conditions $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$, sur les frontières Γ_E , les conditions $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ et sur Γ_J la condition $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$.

D'une manière générale en définissant quatre surfaces Γ_B , Γ_H , Γ_J et Γ_E . Avec $\Gamma_J \subset \Gamma_H$, imposer la condition $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_H entraîne la condition $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_J . Avec $\Gamma_E \subset \Gamma_B$, imposer la condition $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_E entraîne la condition $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B . Ce sont les conséquences directes des équations $\mathbf{Rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ et de $\mathbf{Rot} \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$.

E.3.a. Formulation \mathbf{A} - φ

Cette formulation résout les équations (I.57) et (I.58) du système d'équations de Maxwell. Les équations (I.56) et (I.59) sont vérifiées par l'introduction des potentiels \mathbf{A} et φ . L'équation (I.57) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{Rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ind} + \mathbf{J}_S \quad (\text{I.62})$$

Le terme source \mathbf{J}_S permet de prendre en compte les inducteurs dont on connaît parfaitement la distribution de courant qui y circule. Le terme \mathbf{J}_{ind} traduit les courants induits à déterminer. Connaissant \mathbf{J}_S , la loi de comportement ne concerne que cette densité de courant induite (I.64).

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_{ind} \quad (\text{I.63})$$

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{I.64})$$

Le problème est alors exprimé en fonction du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et du potentiel scalaire électrique φ . Le potentiel vecteur est déduit de l'équation (I.59) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{Rot} \mathbf{A} \quad (\text{I.65})$$

Il apparaît dans l'expression du champ électrique \mathbf{E} , expression dans laquelle est introduit le potentiel scalaire électrique φ à partir de l'équation (I.56) :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{Grad} \varphi \quad (\text{I.66})$$

A l'aide des équations (I.57) et (I.58), des potentiels introduits et des lois de comportement, la formulation \mathbf{A} - φ s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{Rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} \mathbf{A} = \mathbf{J}_S - \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{Grad} \varphi \right) \\ \mathbf{Div} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{Grad} \varphi \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.67})$$

Le diagramme de Tonti (Figure I.18) montre dans quels espaces se définissent les différentes grandeurs. Pour traduire la variation en fonction du temps, une troisième dimension est ajoutée.

Pour résoudre ce problème en assurant l'unicité de la solution il est nécessaire de jauger le problème en \mathbf{A} et en φ . Les conditions aux limites $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B et $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_E sont vérifiées en imposant $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B et φ constant sur Γ_E .

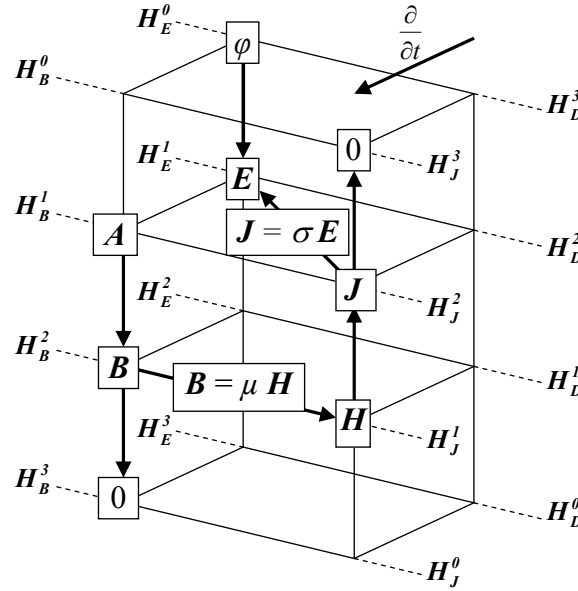


Figure I.18. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation \mathbf{A} - φ .

E.3.b. Formulation \mathbf{T} - Ω

Cette formulation résout les équations (I.56) et (I.59). La densité de courant est décomposée en deux termes : \mathbf{J}_{ind} et \mathbf{J}_S , qui comme dans la formulation précédente représentent respectivement les courants induits et le terme source parfaitement connu. Le champ magnétique \mathbf{H} se décompose alors en trois termes :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_S + \mathbf{T} \quad (\text{I.68})$$

\mathbf{H}_I représente le champ magnétique inconnu. \mathbf{H}_S est le terme relatif aux inducteurs tel que $\mathbf{Rot} \mathbf{H}_S = \mathbf{J}_S$ et \mathbf{T} est issu de l'équation (I.58). L'équation (I.57) s'écrit alors :

$$\mathbf{Rot} (\mathbf{H}_I + \mathbf{H}_S + \mathbf{T}) = \mathbf{J}_S + \mathbf{J}_{ind} \quad (\text{I.69})$$

Compte tenu de la définition de \mathbf{H}_S et de \mathbf{T} , on montre que le champ inconnu est à rotationnel nul, il s'écrit alors en fonction du potentiel scalaire magnétique Ω tel que :

$$\mathbf{H}_I = - \mathbf{Grad} \Omega \quad (\text{I.70})$$

En utilisant ces termes et les lois de comportement, la formulation \mathbf{T} - Ω s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{Rot} \frac{1}{\sigma} (\mathbf{Rot} \mathbf{H}_S + \mathbf{Rot} \mathbf{T}) = - \frac{\partial}{\partial t} \mu (\mathbf{H}_S + \mathbf{T} - \mathbf{Grad} \Omega) \\ \mathbf{Div} \mu (\mathbf{H}_S + \mathbf{T} - \mathbf{Grad} \Omega) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.71})$$

Le diagramme de Tonti (Figure I.19) montre où se placent les différentes grandeurs utilisées dans les espaces solutions.

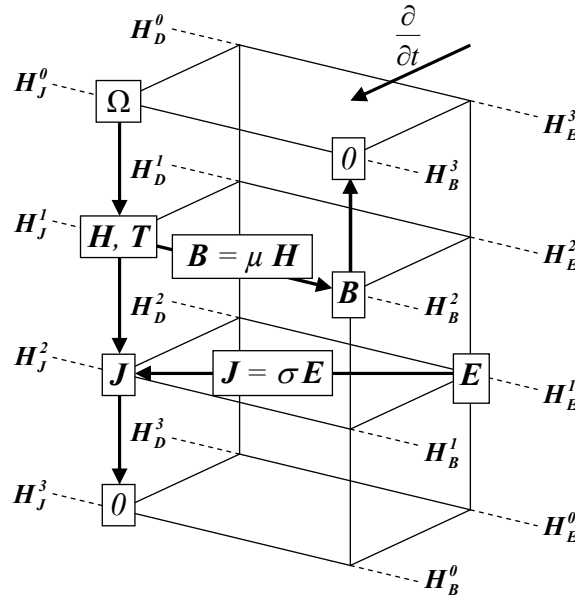


Figure I.19. Diagramme de Tonti appliqué à la formulation \mathbf{T} - Ω .

Le potentiel vecteur électrique \mathbf{T} est défini dans les domaines conducteurs, tandis que le potentiel scalaire magnétique Ω est défini dans tout le domaine. On utilise, ici, la condition de jauge du type $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0$ et on fixe un potentiel scalaire magnétique Ω .

Avec cette formulation on impose au sens fort les conditions aux limites sur Γ_J et Γ_H à l'aide des potentiels Ω , \mathbf{T} et \mathbf{H}_S . Il faut imposer $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_J et Ω constant sur Γ_H . Le terme source \mathbf{H}_S vérifie $\mathbf{Rot} \mathbf{H}_S = 0$ sur Γ_J tout en vérifiant :

$$\oint_C \mathbf{H}_S \cdot d\mathbf{l} = J_S \quad (\text{I.72})$$

Avec C , un contour non contractile défini sur Γ_J .

F. Imposition des grandeurs globales

Il est intéressant pour un utilisateur de pouvoir calculer ou imposer simplement différentes grandeurs comme un courant électrique dans un conducteur, une différence de potentiels électriques, un flux magnétique ou une force magnétomotrice.

Dans cette partie sont présentés des outils permettant d'imposer ces grandeurs globales [23] [27] [28] [31]. Plus précisément des champs de vecteurs supports permettant d'agir sur les termes sources afin d'imposer la grandeur globale désirée. L'utilisation de ces outils sera développée pour chaque formulation de l'électrocinétique, de la magnéto-statique et de la magnétodynamique.

F.1. Outils mathématiques

Dans ce paragraphe sont introduits les champs de vecteurs qui nous permettent d'agir sur les termes sources afin d'imposer les grandeurs globales. Les premiers champs de vecteurs présentés permettent de contraindre le flux de la densité de courant, ou d'induction magnétique. Ensuite seront présentés deux champs de vecteurs permettant d'imposer une différence de potentiel d'une fonction scalaire.

F.1.a. Vecteurs N et K

Considérons le cas du conducteur sur lequel sont définies trois surfaces : Γ_{E1} , Γ_{E2} et Γ_J (Figure I.20). Le champ de vecteurs N peut servir de support à une densité de courant source. Ce champ de vecteurs est défini tel que :

$$\iint_{\Gamma_{E1}} N \cdot ds = 1 \text{ et } \iint_{\Gamma_{E2}} N \cdot ds = -1 \quad (I.73)$$

$$\text{Div } N = 0 \quad (I.74)$$

$$\text{Avec } N \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_J \quad (I.75)$$

En définissant un contour C non contractile sur la frontière Γ_J du conducteur on retrouve la condition suivante :

$$\oint_C N \cdot ds = \pm 1 \quad (I.76)$$

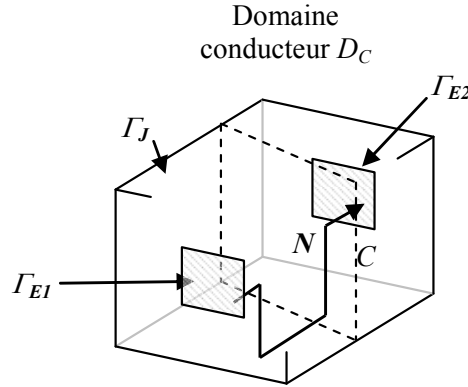


Figure I.20. Exemple de parcours de N .

N peut prendre une infinité de répartitions dans le domaine D_C pour satisfaire les conditions (I.73) et (I.76). N suit un parcours quelconque entre Γ_{E1} et Γ_{E2} comme l'illustre la figure (Figure I.20).

N étant à divergence nulle, il est possible d'introduire un potentiel vecteur, noté K , tel que :

$$\text{Rot } K = N \quad (\text{I.77})$$

À partir de l'équation (I.76), il nous est possible d'écrire :

$$\oint_C K \cdot dl = \pm 1 \quad (\text{I.78})$$

Ces deux fonctions [28] permettent d'imposer des flux de courant ou d'induction à travers des milieux géométriquement complexes en agissant sur les termes sources.

F.1.b. Vecteur β et scalaire α

Les termes β et α sont aussi des outils mathématiques nous permettant d'imposer des termes sources. À titre d'exemple β peut être utilisé pour exprimer un champ source E_S . Dans ces conditions, le champ de vecteurs β est défini tel que :

$$\int_{\gamma} \beta \cdot dl = 1 \quad (\text{I.79})$$

$$\text{Rot } \beta = 0 \quad (\text{I.80})$$

$$\text{Et} \quad \beta \times n = 0 \text{ sur les frontières } \Gamma_{E1} \text{ et } \Gamma_{E2} \quad (\text{I.81})$$

Avec γ un parcours quelconque reliant Γ_{E1} à Γ_{E2} . Quelque soit le parcours γ , la somme des circulations du champ de vecteurs β le long de ce parcours doit être égal à 1. Comme β est à rotationnel nul il existe une fonction scalaire α tel que :

$$\beta = - \text{Grad } \alpha \quad (\text{I.82})$$

Compte tenu de l'équation (I.79) la différence de potentiels de α entre Γ_{E1} et Γ_{E2} doit

être égale à I :

$$\int_{\gamma} -\text{Grad } \alpha \cdot d\mathbf{l} = \alpha_{\Gamma_{E2}} - \alpha_{\Gamma_{E1}} = 1 \quad (\text{I.83})$$

Ces deux fonctions permettent quant à elles d'imposer des différences de potentiels entre deux surfaces [27].

F.2. Électrocinétique

Les problèmes d'électrocinétique consistent à déterminer la distribution de la densité de courant dans un matériau conducteur. Selon la formulation, pour imposer les grandeurs globales électriques il faut vérifier les conditions suivantes :

Pour la tension :
$$V_{\Gamma_{E2}} - V_{\Gamma_{E1}} = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V \quad (\text{I.84})$$

Pour le courant :
$$\iint_{\Gamma_{E1}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{\Gamma_{E2}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (\text{I.85})$$

Ces deux relations peuvent être utilisées pour déterminer la tension, si le courant est imposé et réciproquement après résolution du problème.

F.2.a. Formulation en potentiel vecteur électrique T

Comme exposé précédemment, la densité de courant peut se décomposer en deux termes : Un terme inconnu \mathbf{J}_I et un terme source \mathbf{J}_S (I.86). Dans le cas de cette formulation, il est possible de faire apparaître le courant I dans l'expression du terme source.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_I + \mathbf{J}_S \quad (\text{I.86})$$

- Imposition du courant

Le champ de vecteur \mathbf{N} a les mêmes propriétés que la densité de courant source à I près. Il peut donc être utilisé pour exprimer cette densité de courant source :

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{N} I \quad (\text{I.87})$$

De cette manière on vérifie l'équation (I.85) qui s'écrit à présent sous la forme :

$$\iint_{\Gamma_{E1}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Gamma_{E1}} \mathbf{J}_I \cdot d\mathbf{s} + \iint_{\Gamma_{E1}} \mathbf{J}_S \cdot d\mathbf{s} = I \text{ et } -I \text{ sur } \Gamma_{E2} \quad (\text{I.88})$$

Avec :
$$\iint_{\Gamma_{E1}} \mathbf{J}_I \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \text{et} \quad \iint_{\Gamma_{E1}} \mathbf{J}_S \cdot d\mathbf{s} = \iint_{\Gamma_{E1}} (\mathbf{N} I) \cdot d\mathbf{s} = I \quad (\text{I.89})$$

En considérant C , un contour non contractile défini sur Γ_J , on vérifie également l'équation suivante :

$$\oint_C \mathbf{T} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (\text{I.90})$$

Avec \mathbf{T} le potentiel vecteur électrique se décomposant lui aussi en deux termes :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_I + \mathbf{T}_S \quad (\text{I.91})$$

En introduisant le potentiel vecteur \mathbf{K} dans l'expression du terme source \mathbf{T}_S , la densité de courant s'écrit :

$$\mathbf{J} = \text{Rot} (\mathbf{T}_I + \mathbf{K} I) \quad (\text{I.92})$$

On retrouve la notion de coupure citée précédemment : $\mathbf{K} \times \mathbf{n} \neq 0$ sur Γ_J , mais elle est réalisée par le biais du champ de vecteur \mathbf{K} . A l'aide de ce champ de vecteur, le courant apparaît dans la formulation en potentiel vecteur électrique qui s'écrit à présent sous la forme suivante :

$$\text{Rot} \frac{1}{\sigma} \text{Rot} \mathbf{T}_I = -\text{Rot} \frac{1}{\sigma} \text{Rot} \mathbf{K} I \quad (\text{I.93})$$

Il nous est possible de calculer la tension aux bornes de l'inducteur à l'aide de l'équation (I.84) en utilisant le champ de vecteurs \mathbf{N} qui définit un parcours γ entre Γ_{E1} et Γ_{E2} . L'expression de la tension peut aussi être déterminée à l'aide d'un bilan de puissance [27] :

$$P = \iiint_{D_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = V I \quad (\text{I.94})$$

Après développement, on montre que la différence de potentiels électriques V s'écrit sous la forme suivante :

$$V = \iiint_{D_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\tau \quad (\text{I.95})$$

- Imposition de la tension

Pour imposer la tension dans le cas de cette formulation on utilise l'équation (I.95) que l'on ajoute au système d'équations initial (I.93). Le courant devient alors une inconnue et le système à résoudre s'écrit à l'aide des équations (I.93) et (I.95) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rot} \frac{1}{\sigma} \text{Rot} \mathbf{T}_I + \text{Rot} \frac{1}{\sigma} \text{Rot} \mathbf{K} I = 0 \\ \iiint_{D_c} \frac{1}{\sigma} \text{Rot} (\mathbf{T}_I + \mathbf{K} I) \cdot \mathbf{N} d\tau = V \end{array} \right. \quad (\text{I.96})$$

F.2.b. Formulation en potentiel scalaire électrique ϕ

Le champ électrique \mathbf{E} se décompose ici en deux termes (I.32) où apparaît le champ électrique source \mathbf{E}_S . Ce champ source permet d'introduire la tension V dans l'expression du champ électrique total.

- Imposition de la tension

Ce champ électrique source a les mêmes propriétés que le champ β à V près. Il s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}_S = \beta V \quad (\text{I.97})$$

On vérifie alors :

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}_S \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} (\beta V) \cdot d\mathbf{l} = V \quad (\text{I.98})$$

Le champ électrique inconnu \mathbf{E}_I vérifie quant à lui :

$$\int_{\gamma} \mathbf{E}_I \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{I.99})$$

En utilisant le potentiel α dans l'expression du champ source, on établit la formulation en potentiel électrique φ à tension imposée :

$$\text{Div } \sigma \mathbf{Grad} \varphi_I = - \text{Div } \sigma \mathbf{Grad} \alpha V \quad (\text{I.100})$$

L'équation (I.85) donne l'expression du courant mais le bilan de puissance (I.94), nous permet de déterminer une expression du courant I où le champ de vecteur β apparaît :

$$I = \iiint_{D_C} \beta \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (\text{I.101})$$

- Imposition du courant

Pour imposer le courant avec la formulation en potentiel scalaire, on utilise la relation (I.101). On exprime alors β et \mathbf{J} en fonction de α et du potentiel scalaire électrique φ_I . L'équation (I.101), associée à la formulation (I.100), permet d'établir la formulation en potentiel scalaire électrique à courant imposé :

$$\begin{cases} \text{Div } \sigma \mathbf{Grad} \varphi_I + \text{Div } \sigma \mathbf{Grad} \alpha V = 0 \\ \iiint_{D_C} \mathbf{Grad} \alpha \cdot \sigma \mathbf{Grad} (\varphi_I + \alpha V) d\tau = I \end{cases} \quad (\text{I.102})$$

La tension devient alors une inconnue lorsque l'on impose le courant.

Imposer un courant avec la formulation en potentiel vecteur et une différence de potentiel avec la formulation en potentiel scalaire est naturel. Dans ce cas, on fait apparaître les grandeurs globales en agissant sur les termes sources. À l'inverse, si l'on souhaite imposer une tension avec la formulation en potentiel vecteur et un courant avec la formulation en potentiel scalaire, il est nécessaire de rajouter une équation issue d'un bilan de puissance, établie à l'aide des champs de vecteurs \mathbf{N} ou β .

Le tableau (Tableau I.2) récapitule les deux formulations en potentiels utilisées en électrocinétique avec imposition des grandeurs globales électriques.

Formulation	Imposition de la tension	Imposition du courant
φ	$Div \sigma \mathbf{Grad}(\varphi_I + \alpha V) = 0$	$\begin{cases} Div \sigma \mathbf{Grad}(\mathbf{J}_I + \alpha V) = 0 \\ \iiint_{D_C} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J} d\tau = I \end{cases}$
\mathbf{T}	$\begin{cases} \mathbf{Rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot}(\mathbf{T}_I + \mathbf{K} I) = 0 \\ \iiint_{D_C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\tau = V \end{cases}$	$\mathbf{Rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot}(\mathbf{T}_I + \mathbf{K} I) = 0$

Tableau I.2. Formulations en électrocinétique à grandeurs globales électriques imposées.

Ces champs de vecteurs sont utilisables sur des systèmes nécessitant la prise en compte de plusieurs sources électriques (courant et/ou tension). On peut définir plusieurs différences de potentiels électriques ainsi que plusieurs sources de courant en fonctions des grandeurs à déterminer.

Comme le montre la figure (Figure I.21) pour la formulation en potentiel scalaire, on cherche à obtenir la distribution du courant dans le conducteur en forme de T en imposant trois potentiels électriques : V_1 sur Γ_{E1} , V_2 sur Γ_{E2} et V_3 sur Γ_{E3} . Ceci est réalisé à l'aide des fonctions scalaires α_i : On pose $\varphi_S = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$.

Si les valeurs des courants sont à imposer à l'aide de la formulation en potentiel vecteur, la figure (Figure I.22) nous montre un exemple de définition des champs de vecteur \mathbf{N} possible pour résoudre le problème. On impose alors deux termes sources : $\mathbf{N}_1 I_1$ et $\mathbf{N}_2 I_2$. La frontière Γ_{E1} sert alors de soupape où l'on appliquera la loi des nœuds.

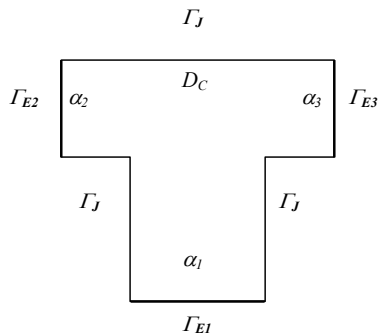


Figure I.21. Exemple d'utilisation de la fonction α multi-sources électriques.

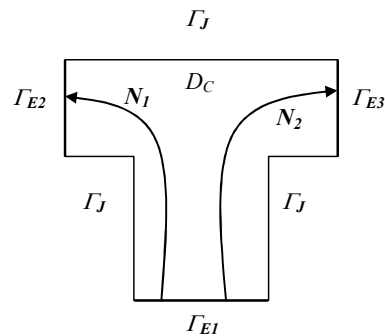


Figure I.22. Exemple d'utilisation du champ de vecteurs \mathbf{N} multi-sources électriques.

F.2.c. Cas des domaines non simplement connexes

Dans le cas d'un problème électrocinétique, la présence de trous dans le domaine conducteur entraîne des difficultés de modélisation. Le domaine n'est plus simplement

connexe. Considérons le domaine conducteur représenté sur la figure (Figure I.23) à travers lequel on souhaite faire circuler un courant I via Γ_{E1} et Γ_{E2} .

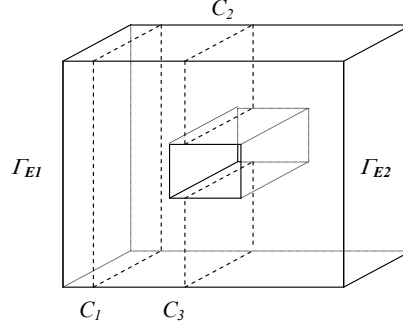


Figure I.23. Système non-simplement connexe.

L'utilisation de la formulation en potentiel scalaire n'entraîne pas de précautions particulières à prendre pour résoudre le problème. En effet quelque soit le parcours non fermé γ entre les frontières Γ_{E1} et Γ_{E2} , la condition (I.95) est vérifiée. Par contre, pour la formulation en potentiel vecteur, en considérant les contours C_1 , C_2 et C_3 , il faut vérifier :

$$\iint_{C_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I, \quad \iint_{C_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I_1 \quad \text{et} \quad \iint_{C_3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = I_2 \quad (\text{I.103})$$

$$\text{Avec} \quad I = I_1 + I_2 \quad (\text{I.104})$$

Cependant ni I_1 ni I_2 ne sont connus. Pour imposer le courant I , un champ de vecteur \mathbf{N} est utilisé. Il est défini tel que :

$$\iint_{C_1} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{s} = I \quad (\text{I.105})$$

Pour prendre en compte qu'une partie du courant traverse les surfaces définies par C_2 et C_3 , un deuxième champ \mathbf{N}' est utilisé. Ce deuxième terme source, auquel est associé un deuxième courant I' , suit un contour autour du trou (Figure I.24) et vérifie les conditions suivantes :

$$\iint_{C_1} \mathbf{N}' \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \iint_{C_2} \mathbf{N}' \cdot d\mathbf{s} = -I' \quad \text{et} \quad \iint_{C_3} \mathbf{N}' \cdot d\mathbf{s} = I' \quad (\text{I.106})$$

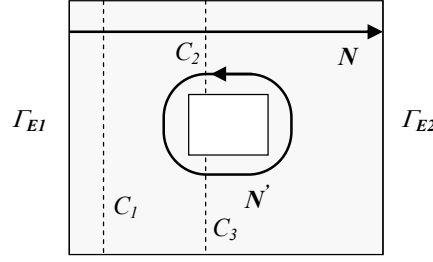


Figure I.24. Termes sources N et N' permettant de prendre en compte la non connexité.

Le courant I' devient une inconnue supplémentaire du problème. Ce deuxième terme source peut être comparé à un conducteur en court-circuit aux bornes duquel sera imposée une tension égale à zéro. La tension est imposée en vérifiant l'équation (I.95) et peut s'exprimer en fonction du champ de vecteur supplémentaire N' :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \iiint_{D_C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}' d\tau = 0 \quad (\text{I.107})$$

Les champs sources, N et N' ainsi définis, vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \iint_{C_1} N I \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{C_1} \mathbf{K} I \cdot d\mathbf{l} = I \\ \iint_{C_2} (N I + N' I') \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{C_2} (\mathbf{K} I + \mathbf{K}' I') \cdot d\mathbf{l} = I - I' = I_1 \\ \iint_{C_3} N' I' \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{C_3} \mathbf{K}' I' \cdot d\mathbf{l} = I' = I_2 \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

La frontière Γ_J n'est pas simplement connexe mais les potentiels vecteurs sources $\mathbf{K} I$ et $\mathbf{K}' I'$ jouent le rôle de coupure définie précédemment.

Dans cette configuration la formulation en potentiel vecteur s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{Rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot} (\mathbf{T}_I + \mathbf{K} I + \mathbf{K}' I') &= 0 \\ \iiint_{D_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot} (\mathbf{T}_I + \mathbf{K} I + \mathbf{K}' I') \cdot \mathbf{N} d\tau &= V_1 \\ \iiint_{D_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot} (\mathbf{T}_I + \mathbf{K} I + \mathbf{K}' I') \cdot \mathbf{N}' d\tau &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{I.109})$$

Les valeurs des courants I et I' sont dans ce cas deux inconnues supplémentaires.

Si le système présente plusieurs trous, autant de termes sources sont ajoutés, augmentant de ce fait le nombre d'équations (I.107) supplémentaires à vérifier.

F.3. Magnétostatique

Dans cette partie est présentée une approche permettant d'imposer des grandeurs globales magnétiques telles que des flux ou des différences de potentiels magnétiques en magnétostatique. En plus des termes sources dus aux inducteurs bobinés, les termes sources provenant de l'imposition des grandeurs globales magnétiques sont introduits à l'aide des champs N et β .

On souhaite imposer une différence de potentiels magnétiques ε entre deux frontières notées Γ_{H1} et Γ_{H2} (I.110) ou le flux total ϕ de l'induction magnétique à travers Γ_{H1} et Γ_{H2} (I.111).

$$\Omega_{\Gamma_{H2}} - \Omega_{\Gamma_{H1}} = \int_{\gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon \quad (\text{I.110})$$

$$\iint_{\Gamma_{H1}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = - \iint_{\Gamma_{H2}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \phi \quad (\text{I.111})$$

Considérons le système représenté sur la figure (Figure I.25). Il se compose de deux conducteurs, placés dans une boîte d'air, dont les densités de courant sont imposées avec les conventions usuelles.

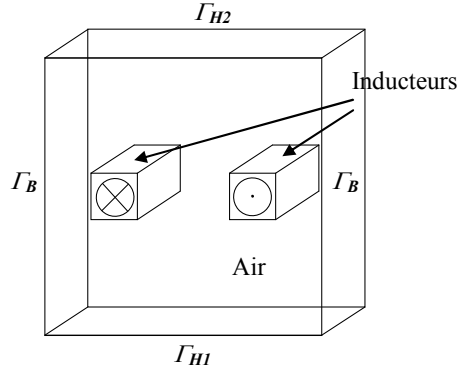


Figure I.25. Exemple magnétostatique.

En plus de la densité de courant source dans les inducteurs, nous allons imposer soit un flux ϕ traversant les surfaces Γ_{H1} et Γ_{H2} soit une différence de potentiel magnétique ε entre ces surfaces.

F.3.a. Formulation en potentiel vecteur magnétique A

En se reportant à la définition de la coupure en magnétostatique, pour la formulation en potentiel vecteur magnétique la grandeur qui s'impose naturellement est le flux d'induction magnétique ϕ .

- Imposition du flux

Comme cela a été fait précédemment pour la densité de courant dans le cas d'un pro-

blème électrocinétique, l'induction magnétique se décompose en deux termes, un terme source \mathbf{B}_S et un terme inconnu \mathbf{B}_I tel que : $\mathbf{B} = \mathbf{B}_I + \mathbf{B}_S$. Le terme source est exprimé en fonction d'un champ de vecteurs \mathbf{N} ou \mathbf{K} et du flux ϕ :

$$\mathbf{B}_S = \mathbf{N} \phi = \text{Rot } \mathbf{K} \phi \quad (\text{I.112})$$

Le champ inconnu \mathbf{B}_I permet d'introduire le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} tel que : $\mathbf{B}_I = \text{Rot } \mathbf{A}$. Le flux apparaît alors dans la formulation à l'aide de l'induction source \mathbf{B}_S :

$$\text{Rot } \frac{1}{\mu} \text{Rot } \mathbf{A} = \mathbf{J} - \text{Rot } \frac{1}{\mu} \text{Rot } \mathbf{K} \phi \quad (\text{I.113})$$

En ne tenant compte que des grandeurs globales magnétiques, ε et ϕ , l'énergie magnétique peut s'écrire sous la forme suivante [27] [28] :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_D \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\tau = \frac{1}{2} \varepsilon \phi \quad (\text{I.114})$$

Après développement, nous pouvons déterminer la différence de potentiels magnétiques ε qu'entraîne l'imposition du flux :

$$\varepsilon = \iiint_D \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} d\tau \quad (\text{I.115})$$

- Imposition d'une différence de potentiels magnétiques

En associant cette équation (I.115) à la formulation (I.113), la différence de potentiels magnétiques peut être imposée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Rot } \frac{1}{\mu} \text{Rot } \mathbf{A} + \text{Rot } \frac{1}{\mu} \text{Rot } \mathbf{K} \phi = \mathbf{J} \\ \iiint_D \frac{1}{\mu} \text{Rot } (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) \cdot \mathbf{N} d\tau = \varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{I.116})$$

Le flux ϕ devient alors une inconnue supplémentaire.

F.3.b. Formulation en potentiel scalaire magnétique Ω

Nous avons vu précédemment qu'à l'aide des potentiels scalaires, l'introduction d'une différence de potentiels est facilitée.

- Imposition d'une différence de potentiels magnétiques

Dans le cas de la formulation en potentiel scalaire, l'imposition d'une différence de potentiels magnétiques ε nécessite d'ajouter un terme \mathbf{H}_G qui s'exprime en fonction du champ de vecteurs $\boldsymbol{\beta}$ tel que :

$$\int_{\gamma} \mathbf{H}_G \cdot d\mathbf{l} = \int_{\gamma} (\boldsymbol{\beta} \varepsilon) \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon \quad (\text{I.117})$$

Avec γ , un parcours quelconque reliant Γ_{H1} à Γ_{H2} .

Le champ magnétique \mathbf{H} se décompose alors en trois termes (I.118). Le terme inconnu \mathbf{H}_I qui introduit le potentiel scalaire magnétique Ω , le terme source \mathbf{H}_S relatif à la présence d'inducteurs et le terme \mathbf{H}_G qui correspond à l'introduction de la grandeur globale ε , la différence de potentiels magnétiques.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_I + \mathbf{H}_S + \mathbf{H}_G = -\mathbf{Grad} \Omega + \mathbf{H}_S - \mathbf{Grad} \alpha \varepsilon \quad (\text{I.118})$$

La formulation en potentiel scalaire magnétique Ω s'écrit alors :

$$\text{Div} \mu \mathbf{Grad} \Omega = -\text{Div} \mu \mathbf{Grad} \alpha \varepsilon + \text{Div} \mu \mathbf{H}_S \quad (\text{I.119})$$

Toujours à l'aide du bilan énergétique (I.114) on peut établir l'équation (I.120), qui nous donne l'expression du flux en fonction de l'induction \mathbf{B} et de la fonction β :

$$\phi = \iiint_D \beta \cdot \mathbf{B} d\tau \quad (\text{I.120})$$

- Imposition du flux

Comparativement à la formulation en potentiel scalaire électrique φ , l'équation (I.120) est utilisée pour imposer le flux magnétique à l'aide de la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω :

$$\begin{cases} \text{Div} \mu \mathbf{Grad} \Omega + \text{Div} \mu \mathbf{Grad} \alpha \varepsilon = \text{Div} \mu \mathbf{H}_S \\ \iiint_D \mathbf{Grad} \alpha \cdot \mu (\mathbf{Grad} (\Omega + \alpha \varepsilon) - \mathbf{H}_S) d\tau = \phi \end{cases} \quad (\text{I.121})$$

Comme pour les formulations de l'électrocinétique certaines grandeurs apparaissent naturellement dans les formulations, comme le flux pour la formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et la différence de potentiels magnétiques pour la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω . Grâce aux outils introduits il est possible d'utiliser l'une ou l'autre des formulations pour résoudre un problème à flux ou à différence de potentiels magnétiques imposée. Le tableau ci-dessous regroupe les différentes formulations de la magnétostatique en fonction des grandeurs que l'on souhaite imposer.

Formulation	Imposition de la ddp magnétique	Imposition du flux
Ω	$\text{Div} \mu (\mathbf{Grad} (\Omega + \alpha \varepsilon) - \mathbf{H}_S) = 0$	$\begin{cases} \text{Div} \mu (\mathbf{Grad} (\Omega + \alpha \varepsilon) - \mathbf{H}_S) = 0 \\ \iiint_D \beta \cdot \mathbf{B} d\tau = \phi \end{cases}$
\mathbf{A}	$\begin{cases} \mathbf{Rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) = \mathbf{J} \\ \iiint_D \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} d\tau = \varepsilon \end{cases}$	$\mathbf{Rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) = \mathbf{J}$

Tableau I.3. Formulations en magnétostatique à grandeurs globales magnétiques imposées.

Pour des cas dont les domaines d'étude ne seraient pas simplement connexes,

l'utilisation des champs de vecteur N et β serait alors nécessaire. L'utilisation faite pour traiter les cas non simplement connexes en magnétostatique est identique au cas électrocinétique.

F.4. Magnétodynamique

Afin de généraliser l'introduction des grandeurs globales en magnétodynamique, l'imposition de flux ou de différence de potentiels (magnétique et/ou électrique) est présentée.

F.4.a. Formulation A - ϕ

Pour cette formulation, les grandeurs qui s'imposent naturellement sont : le flux d'induction magnétique et la tension électrique. Dans un second, temps ces deux grandeurs deviendront des inconnues du problème.

- Imposition d'un flux et d'une tension

Pour la formulation A - ϕ , les grandeurs globales qui apparaissent naturellement sont : Le flux magnétique (via l'introduction du terme source $N \phi$) ainsi que la différence de potentiels électriques (à l'aide du champ électrique source βV). Elles apparaissent en décomposant l'induction magnétique B (I.122) et le champ électrique E en termes sources et inconnues :

$$B = \text{Rot} (A + K \phi) \quad (\text{I.122})$$

$$E = -\text{Grad}(\phi + \alpha V) - \frac{\partial (A + K \phi)}{\partial t} \quad (\text{I.123})$$

La formulation A - ϕ à flux et à tension imposée s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Rot} \frac{1}{\mu} \text{Rot} (A + K \phi) = -\sigma \left(\frac{\partial (A + K \phi)}{\partial t} + \text{Grad}(\phi + \alpha V) \right) \\ \text{Div} \sigma \left(\frac{\partial (A + K \phi)}{\partial t} + \text{Grad}(\phi + \alpha V) \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.124})$$

- Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant

Pour déterminer ou imposer une différence de potentiels magnétiques ε ainsi qu'un courant I , on utilise le bilan de puissance, qui s'exprime soit en fonction des grandeurs électriques (I.125), soit en fonction des grandeurs magnétiques (I.126) [27] [28] :

$$P_e = \iiint_{D_C} E \cdot J d\tau + \iiint_D H \cdot \frac{\partial B}{\partial t} d\tau = VI \quad (\text{I.125})$$

$$P_m = \iiint_{D_C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau + \iiint_D \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\tau = \varepsilon \frac{d\phi}{dt} \quad (\text{I.126})$$

Le bilan de puissance électrique est établi en considérant un système alimenté par une source électrique et, inversement, le bilan de puissance magnétique est établi en considérant un système alimenté par une source magnétique.

À partir de ces bilans de puissance et à l'aide de la méthode des résidus pondérés on peut montrer que le courant I ainsi que la différence de potentiels magnétiques ε s'expriment sous les formes suivantes en utilisant les potentiels sources introduits :

$$I = \iiint_{D_C} \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (\text{I.127})$$

$$\varepsilon = \iiint_D \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} d\tau - \iiint_{D_C} \mathbf{K} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (\text{I.128})$$

L'équation (I.127) est déduite du bilan de puissance électrique (I.125) et l'équation (I.128) est déduite du bilan de puissance magnétique (I.126). La formulation en potentiel \mathbf{A} - ϕ à courant I et à force magnétomotrice ε imposée est obtenue en ajoutant au système d'équations (I.124) les relations (I.127) et (I.128) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) = \sigma \left(-\frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi)}{\partial t} - \mathbf{Grad} (\phi + \alpha V) \right) \\ \mathbf{Div} \sigma \left(-\frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi)}{\partial t} - \mathbf{Grad} (\phi + \alpha V) \right) = 0 \\ \iiint_{D_C} \boldsymbol{\beta} \cdot \sigma \left(-\mathbf{Grad} (\phi + \alpha V) - \frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi)}{\partial t} \right) d\tau = I \\ \iiint_D \frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi) \cdot \mathbf{N} d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{D_C} \mathbf{K} \cdot \sigma \left(-\mathbf{Grad} (\phi + \alpha V) - \frac{\partial (\mathbf{A} + \mathbf{K} \phi)}{\partial t} \right) d\tau = \varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{I.129})$$

F.4.b. Formulation T - Ω

À l'inverse de la formulation précédente, les grandeurs qui apparaissent naturellement dans cette formulation sont le courant I et la différence de potentiels magnétiques ε .

- Imposition d'une force magnétomotrice et d'un courant

Pour faire apparaître le courant I et la différence de potentiels magnétiques ε dans cette formulation, la densité de courant \mathbf{J} et le champ magnétique \mathbf{H} sont décomposés en termes sources et inconnues. Ces grandeurs s'expriment en fonction des champs sources \mathbf{N} , \mathbf{K} , $\boldsymbol{\beta}$ et α (I.130) et (I.131).

$$\mathbf{J} = \mathbf{Rot} (\mathbf{K} I + \mathbf{T}) \quad (\text{I.130})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{Grad}(\Omega + \alpha \varepsilon) \quad (\text{I.131})$$

Ces champs sources font naturellement apparaître ces grandeurs globales au sein de la formulation $\mathbf{T}-\Omega$:

$$\begin{cases} \mathbf{Rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot}(\mathbf{T} + \mathbf{K} I) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu(\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{Grad}(\Omega + \alpha \varepsilon)) \\ \text{Div} \mu(\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{Grad}(\Omega + \alpha \varepsilon)) = 0 \end{cases} \quad (\text{I.132})$$

- Imposition d'un flux et d'une tension

Pour imposer ou calculer un flux ϕ ou une tension V , on établit les équations suivantes à partir des bilans de puissance électrique et magnétique :

$$\phi = \iiint_D \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B} d\tau \quad (\text{I.133})$$

$$V = \iiint_{D_C} \mathbf{E} \cdot \mathbf{N} d\tau + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \mathbf{K} \cdot \mathbf{B} d\tau \quad (\text{I.134})$$

Elles nous permettent d'écrire la formulation $\mathbf{T}-\Omega$ à flux et à tension imposée en définissant le courant I ainsi que la différence de potentiels magnétiques ε comme inconnues :

$$\begin{cases} \mathbf{Rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot}(\mathbf{T} + \mathbf{K} I) = -\frac{\partial}{\partial t} \mu(\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{Grad}(\Omega + \alpha \varepsilon)) \\ \text{Div} \mu(\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{Grad}(\Omega + \alpha \varepsilon)) = 0 \\ \iiint_D \boldsymbol{\beta} \cdot \mu(\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{Grad}(\Omega + \alpha \varepsilon)) d\tau = \phi \\ \iiint_{D_C} \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot}(\mathbf{T} + \mathbf{K} I) \cdot \mathbf{N} d\tau - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_D \mathbf{K} \cdot \mu(\mathbf{K} I + \mathbf{T} - \mathbf{Grad}(\Omega + \alpha \varepsilon)) d\tau = V \end{cases} \quad (\text{I.135})$$

Les champs de vecteurs \mathbf{N} , \mathbf{K} , $\boldsymbol{\beta}$ et la fonction α peuvent servir à imposer plusieurs grandeurs. En effet, en fonction de la nature du problème et de la formulation utilisée, il est possible d'imposer soit un flux magnétique ϕ soit un flux électrique I .

Le tableau (Tableau I.4) montre quelles grandeurs globales s'imposent naturellement en fonction des champs source et des formulations utilisées.

Formulation	\mathbf{A}	Ω	\mathbf{T}	φ	$\mathbf{A} - \varphi$	$\mathbf{T} - \Omega$
\mathbf{N} et \mathbf{K}	ϕ		I		ϕ	I
$\boldsymbol{\beta}$ et α		ε		V	V	ε

Tableau I.4. Champs sources en fonction des formulations et des grandeurs globales.

Dans ce chapitre, les équations de Maxwell appliquées aux domaines de l'électromagnétisme ont été présentées. La structure mathématique ainsi que les espaces fonctionnels qui accueillent les différents champs de vecteurs ont été définis. Pour chaque domaine d'application : électrocinétique, magnétostatique et magnétodynamique, les formulations en potentiel scalaire ou/et vecteur ont été rappelées.

En introduisant des champs sources via les champs et fonctions N , K , β et α , nous avons fait apparaître, dans ces formulations, les grandeurs globales électriques et magnétiques. Pour des problèmes électrocinétiques ou magnétostatiques, l'imposition d'un flux (de courant ou d'induction) est naturelle pour les formulations en potentiels vecteurs T et A . Dans le cas où l'on souhaite imposer des différences de potentiels, il sera nécessaire de prendre en compte une équation supplémentaire.

L'imposition de différence de potentiels est cependant naturelle en utilisant les formulations en potentiel scalaire φ ou Ω . Pour imposer un flux de courant ou d'induction il sera nécessaire d'ajouter une équation. Pour résoudre les problèmes engendrés par les domaines non simplement connexes, une méthode a été présentée consistant à ajouter un terme source.

Chap II. Schéma de discrétisation du problème

Les équations de Maxwell forment un système d'équations aux dérivées partielles. Pour résoudre des cas usuels, industriels, on a recours à des méthodes numériques [5]. Il faut pour cela discrétiser le problème à la fois spatialement et temporellement en garantissant mathématiquement que la solution numérique est proche de la solution exacte.

Dans cette partie, seront présentées les différentes étapes de discrétisation spatiale, la discrétisation des opérateurs vectoriels nécessaire à l'établissement d'un système d'équations ainsi que la discrétisation des lois de comportement.

A. Discrétisation de l'espace

Pour simuler le comportement électrique et magnétique d'un système électromagnétique, il faut définir un domaine d'étude. Selon le cas, il faut prendre en compte uniquement le système étudié ou le système et son environnement. On doit également tenir compte également des symétries géométriques. On ne modélise alors qu'une partie du système. Cette réduction du domaine d'étude permet de diminuer la taille du problème et donc les temps de calcul et le coût en taille mémoire.

A.1. Notion de maillage primal et dual

Une fois le domaine défini, il est discrétisé à l'aide de volumes élémentaires, qui peuvent être de différentes formes présentées sur la figure (Figure II.1).

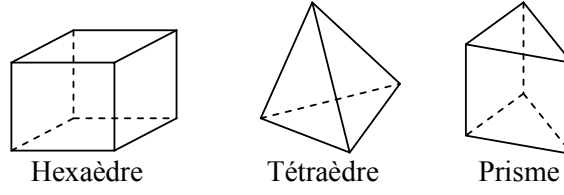


Figure II.1. Différents volumes pour la discrétisation de l'espace.

Cette liste n'est pas exhaustive, il est possible d'utiliser plusieurs autres volumes selon les besoins comme par exemple des éléments pyramidaux. Ce choix se base généralement sur des considérations de modélisation géométrique.

Tous les éléments de ces volumes sont numérotés, les nœuds, les arêtes, les facettes et le volume lui-même, les arêtes et les facettes sont de plus orientées. La figure (Figure II.2) représente un tétraèdre, dont les entités sont numérotées et orientées.

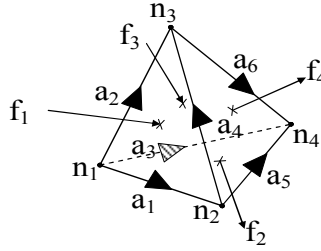


Figure II.2. Orientation des arêtes et des facettes dans le cas d'un tétraèdre.

On appelle le résultat de ce découpage géométrique le *maillage*. On fait correspondre à ce maillage des espaces vectoriels discrets : W^0 , W^1 , W^2 , W^3 respectivement aux espaces H^0 , H^1 , H^2 , H^3 énoncés dans le chapitre précédent. W^0 est l'espace où seront définies les grandeurs scalaires aux nœuds. W^1 et W^2 sont les espaces où sont définies respectivement les grandeurs vectorielles discrètes associées aux arêtes et aux facettes et W^3 est l'espace discret où sont définies les grandeurs discrètes relatives aux volumes.

À ce maillage, on fait correspondre un second maillage [3] [10] [30] [48] que l'on appellera *dual*. Comme son appellation l'indique, ce deuxième maillage est dual au premier maillage, appelé *primal*, de part les propriétés qui lui sont associées. Ce maillage dual permet de définir des supports nécessaires à certaines grandeurs non définies sur le maillage d'origine. Sur ce second maillage est définie une deuxième suite d'espaces discrets. Il est alors possible d'établir le lien entre ces deux suites d'espaces W_u et W_v .

Plusieurs méthodes permettent de construire ce maillage dual. Cependant, d'une manière générale on fait correspondre les entités géométriques du maillage primal aux entités du maillage dual comme indiqué dans le tableau (Tableau II.1). Les grandeurs et les entités relatives au maillage dual seront notées à l'aide du symbole « \sim ».

Primal		Dual
Aux nœuds n	\leftrightarrow	Des volumes \tilde{v}
Aux arêtes a	\leftrightarrow	Des facettes \tilde{f}
Aux facettes f	\leftrightarrow	Des arêtes \tilde{a}
Aux volumes v	\leftrightarrow	Des nœuds \tilde{n}

Tableau II.1. Correspondances entre les éléments du maillage primal et du maillage dual.

A.2. Construction Delaunay Voronoï

La construction du maillage dual par la méthode de type Voronoï se fait tel que le nœud dual d'un élément primal est le centre d'une sphère sur laquelle sont inscrits les nœuds primaux de l'élément primal considéré (Figure II.3). Les nœuds duaux sont reliés entre eux par les arêtes duales qui traversent les facettes primales perpendiculairement.

Cette méthode de construction de maillage dual nécessite de prendre des précautions car pour des cas particuliers, un volume fortement déformé (Figure II.4) peut entraîner que le nœud dual associé se situe à l'extérieur de l'élément primal.

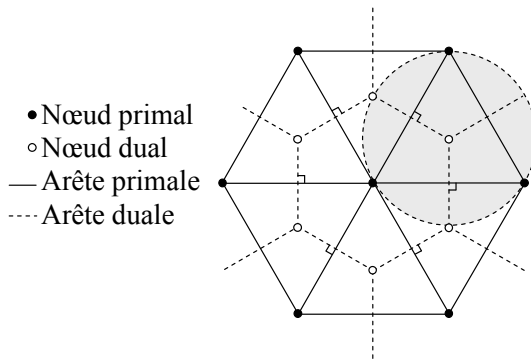


Figure II.3. Maillages primal et dual (type Delaunay Voronoï).

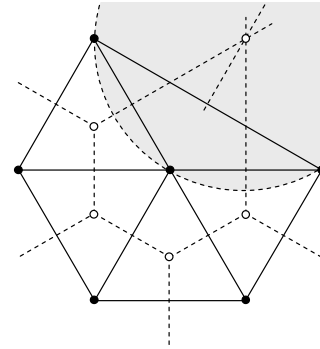


Figure II.4. Cas particulier de maillage dual (type Delaunay Voronoï).

A.3. Construction de type barycentrique

Pour palier au défaut de la construction du type Delaunay Voronoï et ainsi éviter de lourdes opérations de vérification de qualité des éléments, la méthode du type barycentrique est une alternative intéressante. Elle permet une certaine liberté quant à la qualité des éléments utilisés. En effet, ici, les nœuds duaux sont les centres de gravité des éléments primaux. Les nœuds ainsi construits sont reliés entre eux par les arêtes duales qui traversent les facettes primales par leur centre de gravité (Figure II.5). Les arêtes et les facettes duales sont par conséquent fractionnées.

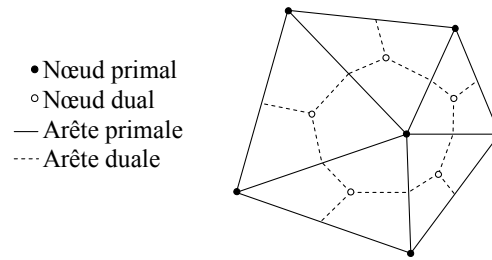


Figure II.5. Maillages primal et dual (type barycentrique).

A.4. Cas particulier de la FIT

La discrétisation de l'espace que nécessite l'utilisation de la FIT [12]-[18], [49]-[52] est particulière. En effet, cette méthode requiert l'utilisation exclusive d'hexaèdres pour mailler un système. Contrairement à la méthode des éléments finis ou à la Cell-méthode [7] [18] où tout type d'éléments est utilisé. On est donc amené à effectuer des simplifications géométriques comme le montre la figure (Figure II.6) qui illustre l'approximation effectuée sur la discrétisation spatiale d'un aimant en forme de U. Cette approximation peut être plus ou moins fine selon la précision des résultats souhaités. Par conséquent, la régularité du maillage primal entraîne la régularité du maillage dual (Figure II.7).

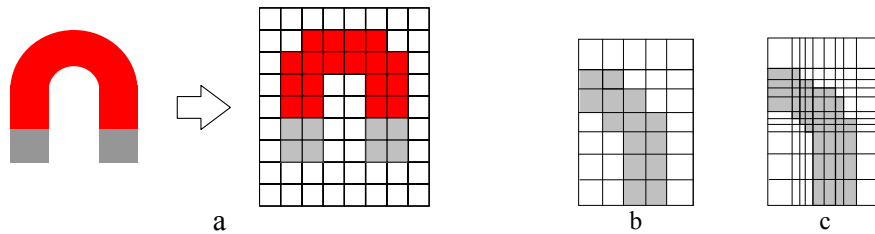


Figure II.6. a) Approximation géométrique due à la discrétisation spatiale. b) Maillage lâche. c) Maillage fin.

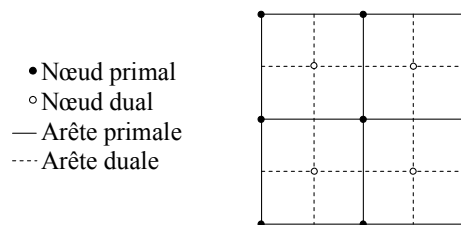


Figure II.7. Maillages primal et dual utilisés pour la F.I.T.

On appelle l'espace commun entre le maillage primal et dual une micro-cellule (Figure II.8 et Figure II.9). Ces figures représentent, pour deux éléments primaux 2D, les micro-cellules que ces éléments incluent.

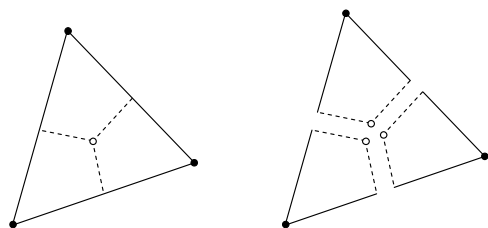


Figure II.8. Micro-cellules d'un élément primal triangulaire.

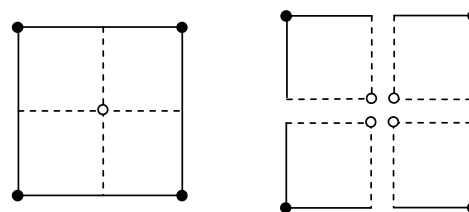


Figure II.9. Micro-cellules d'un élément primal carré.

Il existe des variantes de la technique d'intégration finie comme la FIT conforme [18] qui contrairement à la FIT classique permet de définir plusieurs milieux au sein d'un même élément (Figure II.10). Nous nous limiterons, dans ce mémoire, au cas de la FIT dite classique.

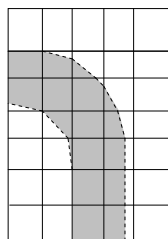


Figure II.10. Exemple de maillage utilisé pour la FIT conforme.

À titre d'exemple la figure (Figure II.11) représente un maillage tétraédrique de type éléments finis tandis que la figure (Figure II.12) représente celui utilisé pour la technique d'intégration finie. La méthode des éléments finis permet d'utiliser différents types d'éléments : tétraèdres, prismes, hexaèdres ou des pyramides. Or, pour la FIT classique nous sommes limités aux hexaèdres réguliers (Figure II.12). À l'aide de ces figures on comprend qu'il sera nécessaire d'effectuer des concessions concernant la précision géométrique de la modélisation d'un système.

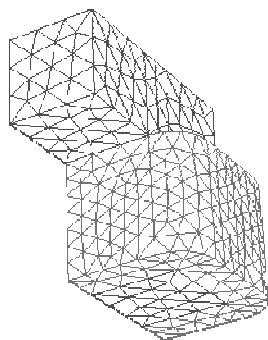


Figure II.11. Maillage type éléments finis.

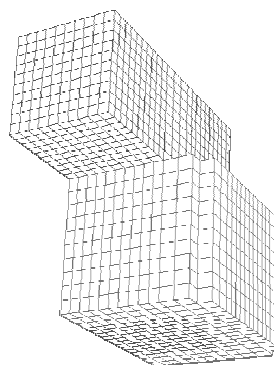


Figure II.12. Maillage type FIT.

B. Discrétisation des opérateurs

Pour établir le système d'équations linéaires, les opérateurs vectoriels sont discrétisés. On montre que ces opérateurs peuvent être représentés sous forme de matrices d'incidence.

B.1. L'opérateur rotationnel

Pour un problème d'électrocinétique, en considérant un contour C d'une section S d'un domaine conducteur, la relation $\text{Rot } \mathbf{E} = 0$ doit être vérifiée. La forme intégrale permet d'exprimer la circulation du champ électrique en décomposant le contour C tel que $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ (Figure II.13).

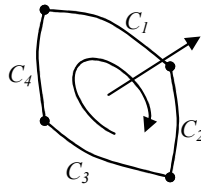


Figure II.13. Décomposition du contour C .

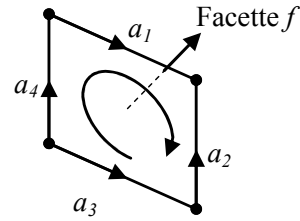


Figure II.14. Détermination de la matrice d'incidence rotationnelle.

La circulation du champ électrique s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \dots + \int_{C_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (\text{II.1})$$

En discrétisant la circulation du champ électrique \mathbf{E} sur les arêtes du maillage primal (Figure II.14), que l'on notera e_a , on peut écrire localement, en définissant le contour C délimité par les arêtes d'une facette, la relation suivante :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = e_{a1} - e_{a2} - e_{a3} + e_{a4} = 0 \quad (\text{II.2})$$

En tenant compte des orientations des arêtes et des facettes, l'opérateur vectoriel *Rotationnel* se traduit, dans le domaine discret, par une matrice d'incidence de dimension [Nombre facettes \times Nombre arêtes] que l'on notera R_{fa} . Les termes de cette matrice valent ± 1 lorsqu'une arête a appartient à la facette f . Le signe est conditionné par l'orientation de cette arête par rapport à celle de la facette. Si l'orientation est la même : $R_{fa} = 1$ et dans le cas contraire : $R_{fa} = -1$. Les arêtes ne faisant pas partie de la facette f n'ont aucune incidence. Les termes correspondants sont alors nuls. Appliquée à une seule facette (Figure II.14), l'équation $\text{Rot } \mathbf{E} = 0$ s'écrit dans le domaine discret :

$$[R_{fa}][e_a] = \begin{bmatrix} +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{a1} \\ e_{a2} \\ e_{a3} \\ e_{a4} \end{bmatrix} = [0] \quad (\text{II.3})$$

En définissant la circulation du champ électrique \mathbf{E} sur les arêtes du maillage primal, on écrit alors l'équation $\text{Rot } \mathbf{E} = 0$ sous la forme :

$$R_{fa} e_a = 0 \quad (\text{II.4})$$

La même démarche peut être effectuée en définissant le champ électrique sur les arêtes du maillage dual. L'équation devient alors :

$$\tilde{R}_{\tilde{f}\tilde{a}} \tilde{e}_{\tilde{a}} = 0 \quad (\text{II.5})$$

B.2. L'opérateur divergence

En considérant le volume conducteur D (Figure II.15), dont la frontière S est décomposée telle que : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, on vérifie que la divergence des flux de la densité de courant traversant ces surfaces est nulle :

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \iint_{S_3} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{II.6})$$

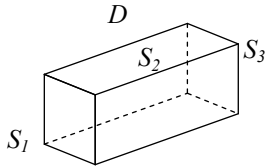


Figure II.15. Décomposition de la surface S .

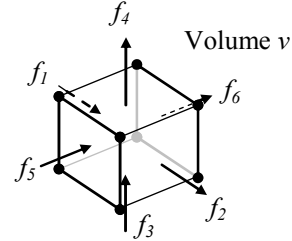


Figure II.16. Détermination de la matrice d'incidence divergence.

Si le flux de la densité de courant est discrétisé sur les facettes primales d'un volume hexaédrique (Figure II.16), noté j_f , on peut écrire que :

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = j_{f_1} - j_{f_2} + j_{f_3} - j_{f_4} + j_{f_5} - j_{f_6} = 0 \quad (\text{II.7})$$

En tenant compte de l'orientation des facettes définie sur la figure (Figure II.16), l'opérateur vectoriel *Divergence* discret se représente par une matrice d'incidence de dimension $[\text{Nombre volumes} \times \text{Nombre facettes}]$ que l'on notera D_{vf} . Les termes de cette matrice valent : $D_{vf} = 1$ si la facette f appartient au volume v et si l'orientation de cette facette est définie entrante dans le volume et $D_{vf} = -1$ si la facette est définie sortante. Si

une facette n'a aucune incidence sur le volume alors $D_{vf} = 0$. Appliquée à un hexaèdre suivant les orientations des facettes définies sur la figure (Figure II.16), la conservation du flux de la densité de courant s'écrit sous la forme :

$$\left[D_{vf} \right] \left[j_f \right] = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{f1} \\ j_{f2} \\ j_{f3} \\ j_{f4} \\ j_{f5} \\ j_{f6} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{II.8})$$

En définissant le flux de la densité de courant traversant les facettes du maillage primales, dans le domaine discret, $\text{Div } \mathbf{J} = 0$ s'écrit :

$$D_{vf} j_f = 0 \quad (\text{II.9})$$

Dans le cas où le flux de la densité de courant est discrétisé sur les facettes duales, cette expression s'écrit :

$$\tilde{D}_{\tilde{v}f} \tilde{j}_f = 0 \quad (\text{II.10})$$

B.3. L'opérateur gradient

Le champ électrique \mathbf{E} à rotationnel nul s'exprime en fonction du potentiel scalaire électrique φ tel que : $\mathbf{E} = - \mathbf{Grad} \varphi$. Entre deux points où sont définis deux potentiels électriques φ_1 et φ_2 reliés par un parcours γ , on peut écrire :

$$\int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (\text{II.11})$$

En discrétisant la circulation du champ électrique sur les arêtes primales, cette circulation s'exprime en fonction des potentiels électriques définis sur les nœuds :

$$e_a = \varphi_{n1} - \varphi_{n2} \quad (\text{II.12})$$

À l'opérateur *Gradient*, correspond une matrice d'incidence notée G_{an} de dimension $[\text{Nombre arêtes} \times \text{Nombre nœuds}]$. Compte tenu de l'orientation des arêtes (Figure II.17), $G_{an} = 1$ si le nœud considéré est le nœud d'origine de l'arête a et $G_{an} = -1$ si le nœud est le nœud à l'extrémité de l'arête. $G_{an} = 0$ si le nœud n n'a aucune incidence sur l'arête considérée.

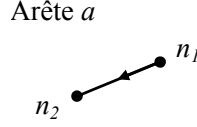


Figure II.17. Détermination de la matrice d'incidence gradient.

On note la relation discrète entre φ et \mathbf{E} telle que : $e_a = -G_{an} \varphi_n$. Avec φ_n le potentiel scalaire électrique discret.

$$[G_{an}][\varphi_n] = \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n1} \\ \varphi_{n2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

Appliqué à l'ensemble d'un maillage, on peut écrire :

$$e_a = -G_{an} \varphi_n \quad (\text{II.14})$$

Si on discrétise le champ électrique sur le maillage dual, l'équation (II.14) prend la forme :

$$\tilde{e}_{\tilde{a}} = -\tilde{G}_{\tilde{a}\tilde{n}} \tilde{\varphi}_{\tilde{n}} \quad (\text{II.15})$$

Les différents opérateurs vectoriels discrets définis sur le maillage primal peuvent s'exprimer en fonction des opérateurs discrets du maillage dual à l'aide des expressions suivantes [4] :

$$G_{an} = -\tilde{D}_{\tilde{a}\tilde{n}}^T \quad (\text{II.16})$$

$$D_{vf} = -\tilde{G}_{\tilde{a}\tilde{n}}^T \quad (\text{II.17})$$

$$R_{fa} = \tilde{R}_{\tilde{f}\tilde{a}}^T \quad (\text{II.18})$$

Ces différents opérateurs définis à partir des maillages primal et dual permettent d'écrire les équations de Maxwell sous formes discrètes.

C. Discrétisation des lois de comportement

Pour continuer à établir le modèle mathématique discret des équations de Maxwell, il faut y associer des lois de comportement discrètes. Le cas des maillages orthogonaux est traité à l'aide de la FIT classique. Pour des maillages plus complexes la FIT dite approchée, la Cell-Method et la méthode des éléments finis seront présentées.

Les lois de comportement discrètes permettent de lier un flux \mathbf{Y} discrétisé à travers les facettes du maillage primal à des circulations \mathbf{X} définies sur les arêtes duales.

$$y_f = M_{f\tilde{a}} \tilde{x}_{\tilde{a}} \quad (\text{II.19})$$

La configuration inverse est à prendre en compte. On peut être amené à établir le lien entre une circulation définie sur les arêtes primales à un flux, qui par conséquent, est discrétisé à travers les facettes duales.

$$\tilde{y}_{\tilde{f}} = M_{\tilde{f}a} x_a \quad (\text{II.20})$$

Ces relations s'établissent à l'aide des matrices de masses. Selon la méthode, elle est déterminée différemment. Deux types de matrices de masse sont à prendre en compte. Un diagramme de Tonti peut être construit dans le domaine discret (Figure II.18).

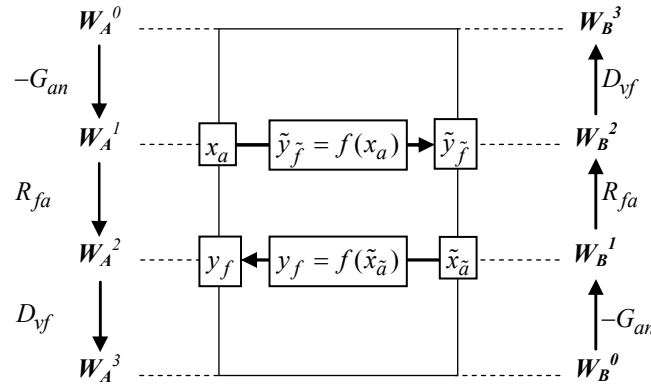


Figure II.18. Diagramme de Tonti discret.

Il permet de situer naturellement les différentes grandeurs dans les différents sous-espaces discrets et illustre le passage d'un maillage à un autre grâce aux lois de comportement discrètes.

C.1. Cas de la technique d'intégration finie

La particularité de la technique d'intégration finie classique (FIT classique) est de n'utiliser que des hexaèdres réguliers orthogonaux pour discrétiser spatialement la géométrie d'un système. Nous allons utiliser cette propriété pour construire les lois de comportement magnétique et électrique discrètes utiles à la mise en place d'un modèle discret.

Considérons le cas lorsque que \mathbf{E} est défini sur les arêtes du maillage primal, noté e_a . Il faut établir une relation discrète entre la circulation du champ électrique et le flux de la densité de courant \mathbf{J} qui, au regard des considérations présentées précédemment, est discrétisée sur les facettes du maillage dual [17] [51] (Figure II.19).

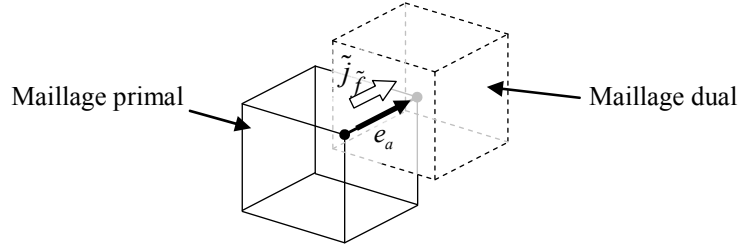


Figure II.19. Circulation électrique définie sur le maillage primal.

Considérons un domaine conducteur D_C de conductivité constante σ (Figure II.20). Ce domaine est maillé à l'aide de quatre éléments hexaédriques et considérons l'arête commune à ces quatre éléments ainsi que la facette duale associée.

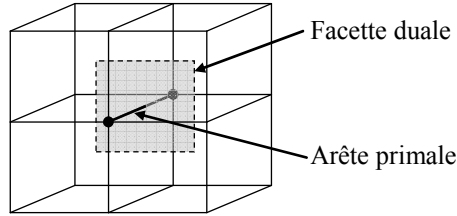


Figure II.20. Arête primale et facette duale associée.

Le flux de la densité de courant s'exprime en fonction de la densité de courant et de la surface de la facette duale et la différence de potentiel électrique dépend de la circulation de champ électrique sur l'arête considérée et de la longueur de l'arête :

$$\tilde{j}_f = \iint_f \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{II.21})$$

$$e_a = \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{II.22})$$

A partir de la loi de comportement électrique continu $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, on peut écrire la relation suivante :

$$\frac{\tilde{j}_f}{\tilde{S}_f} = \sigma \frac{e_a}{l_a} \quad (\text{II.23})$$

Avec \tilde{S}_f , la surface de la facette duale et l_a la longueur de l'arête primale. On retrouve la loi d'Ohm ainsi que l'expression de la résistance du tube de flux. La relation entre le flux de la densité de courant et la différence de potentiel électrique est établie. Cette dernière relation s'étend facilement à tout le maillage :

$$\tilde{j}_f = \tilde{S}_f \sigma l_a^{-1} e_a = M_{fa_{FIT}}^{\sigma} e_a \quad (\text{II.24})$$

Les matrices \tilde{S}_f et l_a sont des matrices carrées et diagonales.

On appelle la matrice M_{fa}^{σ} la matrice de masse.

Dans le cas où des conductivités différentes sont définies dans chaque élément du maillage, la surface duale se décompose en quatre sections (Figure II.21).

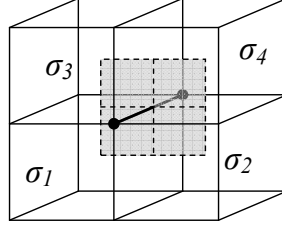


Figure II.21. Maillage de quatre éléments de conductivité différente.

Chaque section de la facette duale est traversée par une partie de la densité de courant. Chacun de ces flux de densité de courant peut s'exprimer en fonction de la différence de potentiel électrique définie sur l'arête primale :

$$\tilde{j}_{\tilde{f}_i} = \sigma_i \frac{\tilde{S}_{\tilde{f}_i}}{l_a} e_a \quad (\text{II.25})$$

La somme des flux de la densité de courant nous donne alors la relation entre le flux qui traverse la surface totale de la facette duale et la différence de potentiel électrique définie sur l'arête primale :

$$\tilde{j}_{\tilde{f}} = \sum_{i=1}^4 \sigma_i \tilde{S}_{\tilde{f}_i} \frac{1}{l_a} e_a \quad (\text{II.26})$$

On voit apparaître dans cette équation l'expression de la conductivité équivalente qui permet d'écrire la loi de comportement discrète :

$$\tilde{j}_{\tilde{f}} = \tilde{S}_{\tilde{f}} \sigma_{\text{moy}} l_a^{-1} e_a \quad \text{avec} \quad \sigma_{\text{moy}(\tilde{f}, a)} = \sum_{i=1}^4 \sigma_i \frac{\tilde{S}_{\tilde{f}_i}}{\tilde{S}_{\tilde{f}}} \quad (\text{II.27})$$

La matrice σ_{moy} est une matrice diagonale.

La détermination de la loi de comportement discrète équivaut à calculer une résistance équivalente à des résistances en parallèle, dans notre cas quatre (Figure II.22). L'ensemble des micro-cellules, dont la facette duale et l'arête primale sont communes, forme ce qu'on appelle un tube de flux de courant. Dans notre cas il se compose de huit micro-cellules.

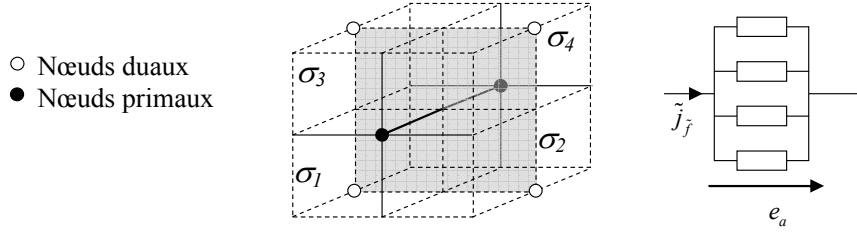


Figure II.22. Tube de flux de courant électrique, \mathbf{E} défini sur le maillage primal.

Un deuxième cas de figure doit être pris en compte. Le choix de discrétiser la circulation du champ électrique sur les arêtes primales est arbitraire. Il est possible de définir cette circulation sur les arêtes duales. Le flux de la densité de courant est par conséquent défini sur les facettes primales (Figure II.23).

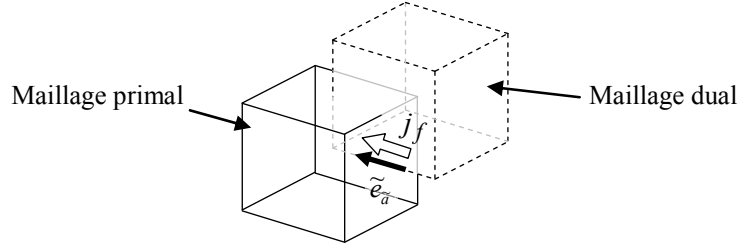


Figure II.23. Circulation électrique définie sur le maillage dual.

Dans le cas d'un maillage où la conductivité électrique est identique pour tous les éléments, la loi de comportement électrique discrète s'écrit par dualité :

$$j_f = S_f \sigma \tilde{l}_a^{-1} \tilde{e}_a = M_{f\tilde{a}_{FIT}}^\sigma \tilde{e}_a \quad (\text{II.28})$$

Avec
$$j_f = \iint_f \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{II.29})$$

Et
$$\tilde{e}_a = \int_{\tilde{a}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{II.30})$$

Dans le cas où des conductivités différentes sont définies pour chaque élément, il faut tenir compte du fait que la circulation de champ se compose de deux parties de part et d'autre de la facette primale. Considérons un maillage constitué de deux éléments de conductivités différentes (Figure II.24).

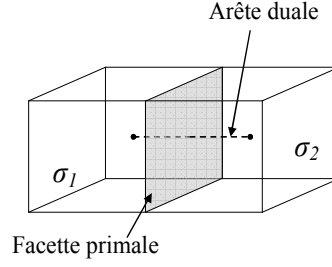


Figure II.24. Maillage de deux éléments de conductivité différente.

La circulation de champ électrique s'exprime alors en fonction du flux de la densité de courant qui traverse la facette primale et des deux conductivités σ_1 et σ_2 :

$$\tilde{e}_{\tilde{a}} = \tilde{e}_{\tilde{a}_1} + \tilde{e}_{\tilde{a}_2} = \left(\frac{\tilde{l}_{\tilde{a}_1}}{\sigma_1} + \frac{\tilde{l}_{\tilde{a}_2}}{\sigma_2} \right) \frac{1}{S_f} j_f \quad (\text{II.31})$$

En introduisant les résistivités ρ_1 et ρ_2 , on voit apparaître la résistivité équivalente. La loi de comportement électrique discrète s'écrit, dans cette configuration :

$$\tilde{e}_{\tilde{a}} = \tilde{l}_{\tilde{a}} \rho_{\text{moy}} S_f^{-1} j_f \quad \text{avec} \quad \rho_{\text{moy}(\tilde{a}, f)} = \frac{\rho_1 \tilde{l}_{\tilde{a}_1}}{\tilde{l}_{\tilde{a}}} + \frac{\rho_2 \tilde{l}_{\tilde{a}_2}}{\tilde{l}_{\tilde{a}}} \quad (\text{II.32})$$

La détermination de la loi de comportement discrète est équivalente, dans ce cas, à calculer une résistance équivalente à des résistances en séries (Figure II.25).

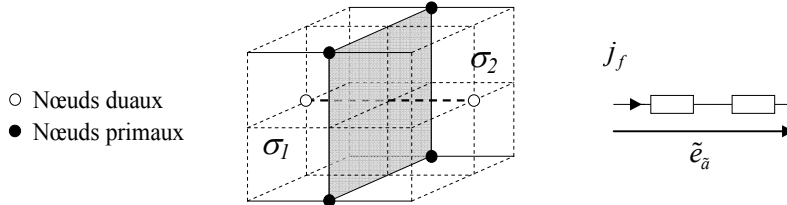


Figure II.25. Tube de flux de courant électrique, E défini sur le maillage dual.

Les matrices de masse ainsi obtenues sont diagonales et carrées. Contrairement à la méthode des éléments finis ou à la Cell-Method, on établit la relation entre une seule arête et sa facette duale et inversement.

Les mêmes techniques peuvent s'appliquer à la loi de comportement magnétique. On construit une matrice de masse à la fois en définissant la circulation du champ magnétique \mathbf{H} sur les arêtes primales (II.33) et sur les arêtes duales (II.34).

$$\tilde{b}_{\tilde{f}} = \tilde{S}_{\tilde{f}} \mu_{\text{moy}} l_a^{-1} h_a \quad (\text{II.33})$$

$$b_f = S_f \mu_{\text{moy}} \tilde{l}_{\tilde{a}}^{-1} \tilde{h}_{\tilde{a}} \quad (\text{II.34})$$

On détermine alors des réluctances équivalentes à partir de réluctances en séries ou

en parallèles.

- Cas de la FIT approchée

L'inconvénient majeur de la FIT classique est que son utilisation se limite à des systèmes ayant une géométrie simple. Néanmoins, Il est possible d'utiliser un artifice permettant de modéliser des systèmes à géométries de révolution. On utilise alors un maillage hexaédrique faiblement déformé (Figure II.26). Ce maillage représente deux conducteurs curvilignes tournant autour d'un axe de rotation. Il est alors possible d'envisager de modéliser un secteur de machine électrique tournante. Nous appellerons cette méthode la FIT dite approchée.

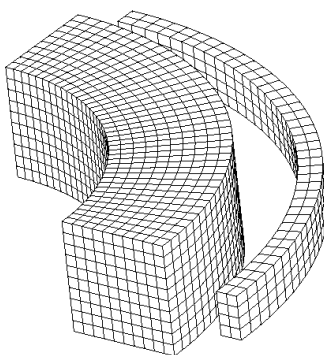


Figure II.26. Maillage hexaédrique déformé.

La difficulté pour ce type de maillage est de discrétiser la loi de comportement des matériaux. Il a été présenté dans le paragraphe précédent que la construction des termes des matrices de masse était basée sur la notion de tubes de flux électrique ou magnétique orthogonaux, que l'on travaille sur le maillage primal ou sur le maillage dual. Pour les maillages faiblement déformés, le maillage dual est construit à l'aide de la méthode barycentrique (Figure II.27). Les tubes de flux ne sont donc plus orthogonaux.

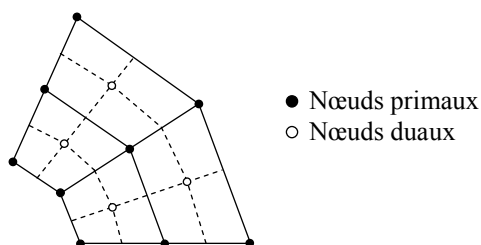


Figure II.27. Maillage hexaédrique déformé et son maillage dual.

Considérons le cas où l'on choisit de définir la circulation électrique sur les arêtes primales. À l'aide d'une représentation en deux dimensions, un tube de flux de courant est représenté sur la figure (Figure II.28).

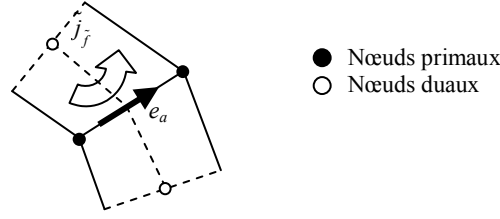


Figure II.28. Tube de flux issu d'un maillage déformé, E sur le maillage primal.

Comme dans le cas de la FIT classique, ce tube de flux est construit à l'aide des micro-cellules. La particularité dans ce cas, est que la surface duale traversée par le flux de la densité de courant n'est pas plane. Elle se compose de fractions de facettes duales.

Pour établir la relation discrète entre la circulation de champ électrique et le flux de la densité de courant nous construisons un tube de flux équivalent. Pour cela les éléments primaux, dont l'arête considérée est commune, sont considérés comme orthogonaux. Les éléments trapézoïdaux sont transformés en hexaèdres réguliers orthogonaux. La figure ci-dessous (Figure II.29) montre dans quelle configuration on se trouve alors. Le but est de déterminer une résistance équivalente à partir de résistances en parallèle.

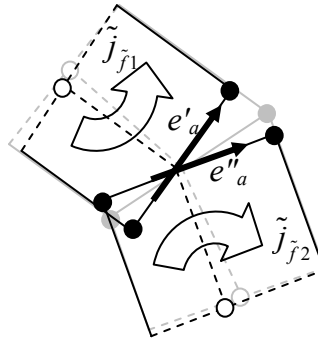


Figure II.29. Tube de flux équivalent, E sur le maillage primal.

L'arête considérée est alors scindée en plusieurs parties mais les circulations définies sur chacune de ces arêtes lient toujours les flux qui traversent la facette duale. En faisant l'hypothèse que le maillage est suffisamment peu déformé pour confondre les circulations, $e'_a = e''_a$, on écrit donc :

$$\tilde{j}_{\tilde{f}} = \left(\frac{\sigma_1 \tilde{S}_{\tilde{f}1}}{l_{a1}} + \frac{\sigma_2 \tilde{S}_{\tilde{f}2}}{l_{a2}} + \frac{\sigma_3 \tilde{S}_{\tilde{f}3}}{l_{a3}} + \frac{\sigma_4 \tilde{S}_{\tilde{f}4}}{l_{a4}} \right) e_a \quad (\text{II.35})$$

Avec $\tilde{S}_{\tilde{f}}$ la surface de la micro-facette duale et l_{ai} la longueur de l'arête.

On néglige donc l'influence de la déformation du tube de flux construit à l'aide du maillage dual en déterminant un tube de flux équivalent.

En définissant la circulation électrique sur les arêtes duales (Figure II.30), on remarque que l'arête duale sur laquelle cette circulation est définie n'est pas rectiligne. Les éléments primaux dont la facette primale est commune sont eux aussi transformés en hexaèdres réguliers orthogonaux (Figure II.31).

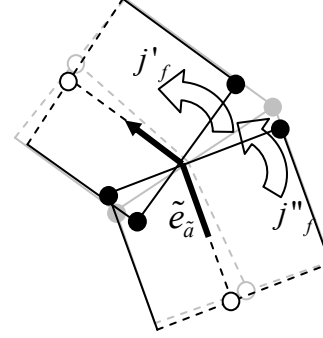
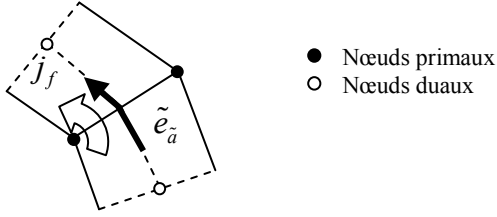


Figure II.30. Tube de flux issu d'un maillage déformé, \mathbf{E} sur le maillage dual.

Figure II.31. Tube de flux équivalent, \mathbf{E} sur le maillage dual.

Pour ce cas de figure, le tube de flux équivalent est de section égale à la surface de la facette primale équivalente et de longueur égale à la somme des deux longueurs de segments de l'arête duale équivalente. On écrit alors :

$$\tilde{e}_a = \left(\frac{\tilde{l}_{a1}}{\sigma_1 S_{f1}} + \frac{\tilde{l}_{a2}}{\sigma_2 S_{f2}} \right) j_f \quad (\text{II.36})$$

Certaines facettes, primales ou duales sont normalement traversées par des composantes supplémentaires dues aux effets de mutuelle entre deux surfaces non orthogonales. Ces composantes supplémentaires sont prises en compte à l'aide la Cell-Method, exposée dans le paragraphe suivant. Pour utiliser la FIT sur ce type de maillage, on néglige donc ces termes. On utilisera cette méthode pour des maillages, que nous appellerons faiblement déformés.

C.2. Cas de la Cell-Method

La Cell-Method permet de déterminer la loi de comportement discrète à partir d'un maillage construit à l'aide de tous types d'éléments [37] [40] [43].

C.2.a. Cas des formulations en potentiel scalaire

Prenons l'exemple de l'électrocinétique et plus particulièrement la formulation en potentiel scalaire électrique φ . On choisit de discrétiser le potentiel scalaire électrique sur les nœuds du maillage primal. Le champ électrique \mathbf{E} est discrétisé sur les arêtes primales. La densité de courant \mathbf{J} est par conséquent discrétisée sur les facettes duales. La relation entre ces deux grandeurs est définie par la loi de comportement électrique

discrète :

$$\tilde{j}_{\tilde{f}} = M_{\tilde{f}aCM}^{\sigma} e_a \quad (\text{II.37})$$

Pour déterminer la matrice de masse à l'aide de la Cell-Method on établit, dans un premier temps, des micro-matrices de masse relative à chaque micro-cellule. Ces micro-cellules sont les intersections volumiques entre le maillage primal et le maillage dual qui est construit à l'aide de la méthode barycentrique. Chaque micro-cellule est constituée de fractions de facettes duales et de fractions d'arêtes primales. En considérant une micro-cellule (Figure II.34) issu d'un tétraèdre et du maillage dual associé (Figure II.32) et en associant une partie du flux de \mathbf{J} aux facettes duales et aux fractions d'arêtes une circulation de \mathbf{E} on construit les micro-matrices de masse.

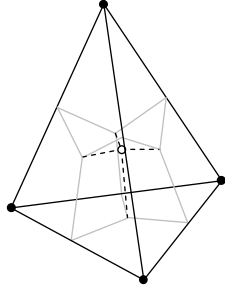


Figure II.32. Tétraèdre et maillage dual associé.

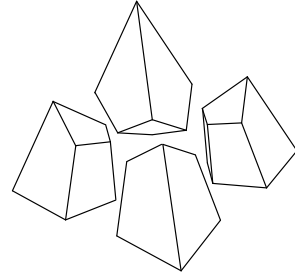


Figure II.33. Décomposition du tétraèdre en micro-cellules.

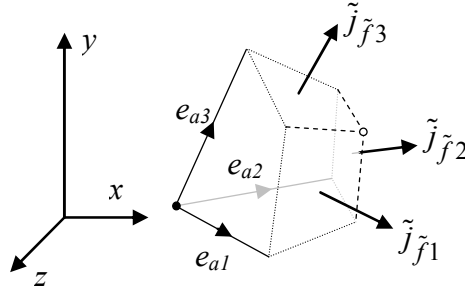


Figure II.34. Éléments d'une micro-cellule.

Dans un premier temps, on projette les surfaces des micro-facettes primales et les longueurs des micro-arêtes duales sur le repère cartésien de référence (II.38) et (II.39). On exprime le flux qui traverse chaque facette duale en fonction des composantes de la densité de courant J_x , J_y et J_z . De même, on exprime les circulations du champ des arêtes primales en fonction des composantes du champ électrique E_x , E_y et E_z .

$$\begin{bmatrix} \tilde{j}_{\tilde{f}_1} \\ \tilde{j}_{\tilde{f}_2} \\ \tilde{j}_{\tilde{f}_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{S}_{\tilde{f}_1x} & \tilde{S}_{\tilde{f}_1y} & \tilde{S}_{\tilde{f}_1z} \\ \tilde{S}_{\tilde{f}_2x} & \tilde{S}_{\tilde{f}_2y} & \tilde{S}_{\tilde{f}_2z} \\ \tilde{S}_{\tilde{f}_3x} & \tilde{S}_{\tilde{f}_3y} & \tilde{S}_{\tilde{f}_3z} \end{bmatrix}}_{[\tilde{S}_{\tilde{f}}]} \begin{bmatrix} J_X \\ J_Y \\ J_Z \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{bmatrix} e_{a_1} \\ e_{a_2} \\ e_{a_3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{a_1x} & L_{a_1y} & L_{a_1z} \\ L_{a_2x} & L_{a_2y} & L_{a_2z} \\ L_{a_3x} & L_{a_3y} & L_{a_3z} \end{bmatrix}}_{[L_a]} \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{bmatrix} \quad (\text{II.39})$$

Les micro-matrices de masse s'écrivent donc sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{j}_{\tilde{f}_{\mu c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{\tilde{f}} \end{bmatrix} \sigma [L_a]^{-1} \begin{bmatrix} e_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\tilde{f}a_{\mu c}}^{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{a_{\mu c}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

Contrairement à la FIT, les matrices informant sur la métrique du système ne sont ni diagonales ni symétriques.

Une fois les micro-matrices de masse déterminées, on cherche à déterminer les matrices de masse élémentaire. On y parvient en exprimant les circulations du champ définies sur les arêtes primales d'un élément en fonction des flux définis sur les micro-facettes duales à l'aide des micro-matrices de masse (II.40) :

$$\begin{aligned} e_{a_1} &= e_{a_1\mu c1} + e_{a_1\mu c2} = \\ & \left[\begin{bmatrix} M_{\tilde{f}a_{\mu c1}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,1)} \quad \begin{bmatrix} M_{\tilde{f}a_{\mu c1}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,2)} \quad \begin{bmatrix} M_{\tilde{f}a_{\mu c1}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,3)} \right] \begin{bmatrix} \tilde{j}_{\tilde{f}_{1\mu c1}} \\ \tilde{j}_{\tilde{f}_{2\mu c1}} \\ \tilde{j}_{\tilde{f}_{3\mu c1}} \end{bmatrix} + \\ & \left[\begin{bmatrix} M_{\tilde{f}a_{\mu c2}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,1)} \quad \begin{bmatrix} M_{\tilde{f}a_{\mu c2}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,2)} \quad \begin{bmatrix} M_{\tilde{f}a_{\mu c2}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,3)} \right] \begin{bmatrix} \tilde{j}_{\tilde{f}_{1\mu c2}} \\ \tilde{j}_{\tilde{f}_{5\mu c2}} \\ \tilde{j}_{\tilde{f}_{6\mu c2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

La figure (Figure II.35) illustre cette étape de reconstitution des circulations.

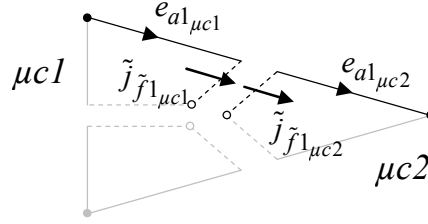


Figure II.35. Micro-cellules communes à une arête d'un élément.

On obtient alors une matrice de masse élémentaire pour chaque élément du maillage. Ces matrices sont carrées de taille égale au nombre d'arêtes de l'élément primal considéré (II.42). Les circulations de champ électrique totales sont exprimées en fonction des flux traversant les micro-facettes duales de l'élément considéré.

$$e_a = M_{\tilde{f}a_e}^{\sigma^{-1}} \tilde{j}_{\tilde{f}_{\mu c}} \quad (\text{II.42})$$

Il reste à reconstituer le flux total traversant les facettes duales en fonction des circulations totales définies sur les arêtes (Figure II.36) à l'aide des matrices de masses élémentaires.

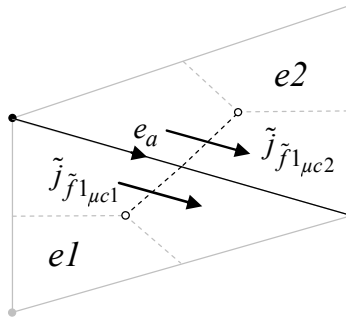


Figure II.36. Éléments et micro-facettes considérées

$$\begin{aligned} \tilde{j}_{\tilde{f}1} &= \tilde{j}_{\tilde{f}1_{\mu c1}} + \tilde{j}_{\tilde{f}1_{\mu c2}} = \\ & \left[\begin{matrix} [M_{\tilde{f}a_{e1}}^{\sigma}]_{(1,1)} & [M_{\tilde{f}a_{e1}}^{\sigma}]_{(1,2)} & [M_{\tilde{f}a_{e1}}^{\sigma}]_{(1,3)} \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} e_{a1} \\ e_{a2} \\ e_{a3} \end{bmatrix} + \\ & \left[\begin{matrix} [M_{\tilde{f}a_{e2}}^{\sigma}]_{(1,1)} & [M_{\tilde{f}a_{e2}}^{\sigma}]_{(1,2)} & [M_{\tilde{f}a_{e2}}^{\sigma}]_{(1,3)} \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} e_{a1} \\ e_{a5} \\ e_{a6} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

Après ces différentes opérations (reconstitution des circulations et des flux) on obtient la matrice de masse appliquée à tout le maillage (II.44).

$$\tilde{j}_{\tilde{f}} = M_{\tilde{f}aCM}^{\sigma} e_a \quad (\text{II.44})$$

Cette matrice de masse est carré mais n'est ni diagonale ni symétrique. C'est la conséquence de l'effet mutuel présent entre les grandeurs définies au sein des micro-cellules et de l'inversion des matrices de masse élémentaires (II.42). Le tube de flux considéré est alors semblable à celui représenté sur la figure (Figure II.37).

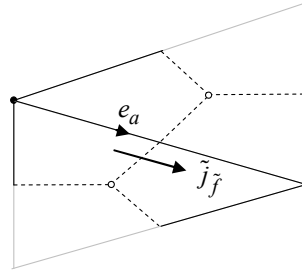


Figure II.37. Représentation 2D du tube de flux considéré.

À titre d'illustration, une représentation 3D d'un maillage de six tétraèdres est représentée sur la figure (Figure II.38). A l'arête primale commune à ces six éléments est représentée la facette duale associée ainsi qu'une des douze micro-cellules permettant de construire le tube de flux liant l'arête à la facette duale.

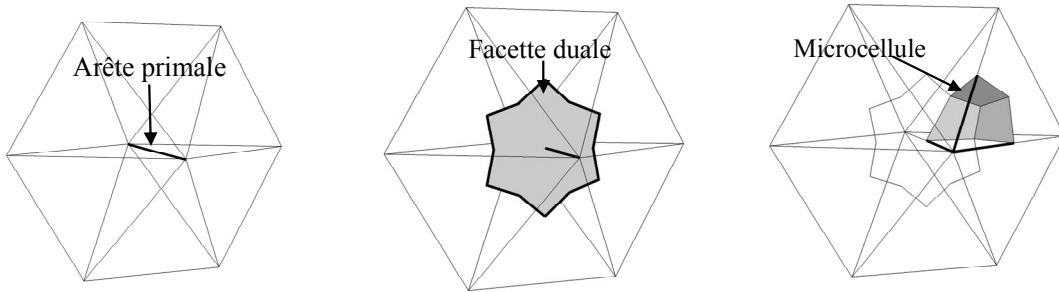


Figure II.38. Représentation d'un tube de flux pour un maillage tétraédrique de 6 éléments. E défini sur les arêtes primales.

C.2.b. Cas des formulations en potentiel vecteur

Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur électrique T , discrétisé sur les arêtes du maillage primal, la densité de courant J est discrétisée sur les facettes primales. Cette densité de courant discrète sera noté j_f . Le champ électrique est par conséquent discrétisé sur les arêtes duales, que l'on notera \tilde{e}_a . La matrice de masse s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$j_f = M_{f\tilde{a}CM}^\sigma \tilde{e}_{\tilde{a}} \quad (\text{II.45})$$

La figure (Figure II.39) représente une micro-cellule avec les flux et les circulations associées.

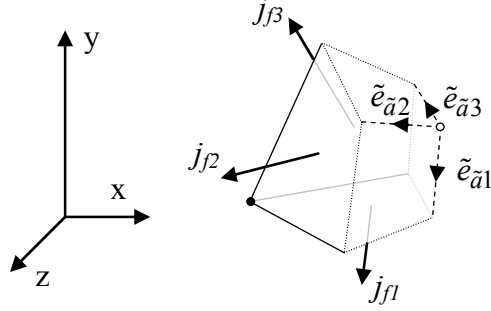


Figure II.39. Éléments d'une micro-cellule.

Les mêmes opérations que précédemment sont effectuées. À savoir : la détermination des micro-matrices de masse, la reconstitution des circulations et la reconstitution des flux. On détermine les micro-matrices de masse à l'aide des projections des surfaces des facettes primales et des longueurs des arêtes duales (II.46) et (II.47) :

$$\begin{bmatrix} j_{f1} \\ j_{f2} \\ j_{f3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{f1x} & S_{f1y} & S_{f1z} \\ S_{f2x} & S_{f2y} & S_{f2z} \\ S_{f3x} & S_{f3y} & S_{f3z} \end{bmatrix}}_{[S_f]} \begin{bmatrix} J_X \\ J_Y \\ J_Z \end{bmatrix} \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}_{\tilde{a}1} \\ \tilde{e}_{\tilde{a}2} \\ \tilde{e}_{\tilde{a}3} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{L}_{\tilde{a}1x} & \tilde{L}_{\tilde{a}1y} & \tilde{L}_{\tilde{a}1z} \\ \tilde{L}_{\tilde{a}2x} & \tilde{L}_{\tilde{a}2y} & \tilde{L}_{\tilde{a}2z} \\ \tilde{L}_{\tilde{a}3x} & \tilde{L}_{\tilde{a}3y} & \tilde{L}_{\tilde{a}3z} \end{bmatrix}}_{[\tilde{L}_{\tilde{a}}]} \begin{bmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

Les matrices issues des projections permettent d'établir les micro-matrices de masse pour chaque micro-cellule :

$$j_{f_{\mu c}} = S_f \sigma \tilde{L}_{\tilde{a}}^{-1} \tilde{e}_{\tilde{a}} = M_{f\tilde{a}\mu c}^\sigma \tilde{e}_{\tilde{a}\mu c} \quad (\text{II.48})$$

Cette fois, pour chaque élément dual, et plus précisément, pour chaque arête duale, à partir des flux traversant les micro-facettes primales, les circulations définies sur les arêtes duales sont reconstituées. L'équation (II.49) exprime une circulation de champ en fonction des flux de chaque facette primale à cette arête (Figure II.40).

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{\tilde{a}1} &= \tilde{e}_{\tilde{a}1_{\mu c1}} + \tilde{e}_{\tilde{a}1_{\mu c2}} = \\
&\left[\begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\mu c1}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,1)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\mu c1}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,2)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\mu c1}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,3)} \right] \begin{bmatrix} j_{f1_{\mu c1}} \\ j_{f2_{\mu c1}} \\ j_{f3_{\mu c1}} \end{bmatrix} + \\
&\left[\begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\mu c2}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,1)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\mu c2}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,2)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\mu c2}}^{\sigma^{-1}} \end{bmatrix}_{(1,3)} \right] \begin{bmatrix} j_{f1_{\mu c2}} \\ j_{f5_{\mu c2}} \\ j_{f6_{\mu c2}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{II.49}$$

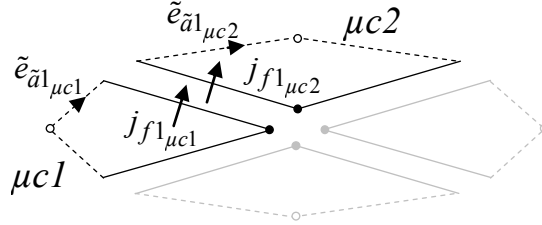


Figure II.40. Micro-cellules relatives à un élément dual.

La reconstitution des circulations électriques nous permet d'obtenir les matrices de masse élémentaires pour chaque élément dual en fonction des flux à travers les fractions de facettes et des micro-matrices de masse (II.50).

$$\tilde{e}_{\tilde{a}} = M_{f\tilde{a}_{\tilde{e}}}^{\sigma^{-1}} j_{f_{\mu c}} \tag{II.50}$$

En ce qui concerne la reconstitution des flux de la densité de courant (Figure II.41), la même démarche est effectuée que pour la configuration précédente. Chaque flux est exprimé en fonction des circulations déterminées précédemment (II.51) et des termes des matrices de masse élémentaire correspondantes :

$$\begin{aligned}
j_{f1} &= j_{f1_{\mu c1}} + j_{f1_{\mu c2}} = \\
&\left[\begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\tilde{e}1}}^{\sigma} \end{bmatrix}_{(1,1)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\tilde{e}1}}^{\sigma} \end{bmatrix}_{(1,2)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\tilde{e}1}}^{\sigma} \end{bmatrix}_{(1,3)} \right] \begin{bmatrix} \tilde{e}_{\tilde{a}1} \\ \tilde{e}_{\tilde{a}2} \\ \tilde{e}_{\tilde{a}3} \end{bmatrix} + \\
&\left[\begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\tilde{e}2}}^{\sigma} \end{bmatrix}_{(1,1)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\tilde{e}2}}^{\sigma} \end{bmatrix}_{(1,2)} \quad \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}_{\tilde{e}2}}^{\sigma} \end{bmatrix}_{(1,3)} \right] \begin{bmatrix} \tilde{e}_{\tilde{a}1} \\ \tilde{e}_{\tilde{a}5} \\ \tilde{e}_{\tilde{a}6} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{II.51}$$

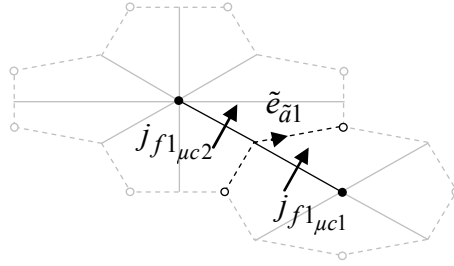


Figure II.41. Éléments et micro-facettes considérées

On obtient alors la matrice de masse appliquée à l'ensemble du maillage :

$$j_f = M_{f\tilde{a}_{CM}}^\sigma \tilde{e}_{\tilde{a}} \quad (\text{II.52})$$

La figure (Figure II.42) représente le tube de flux alors considéré.

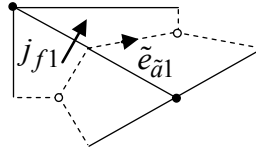


Figure II.42. Tube de flux considéré

À titre d'exemple, la figure (Figure II.43) représente un maillage de six tétraèdres où sont isolées une arête duale et sa facette primale associée. Une micro-cellule est également représentée pour cette configuration.

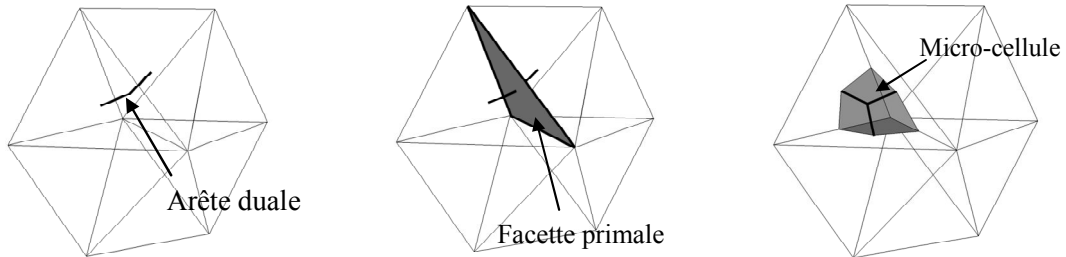


Figure II.43. Représentation d'un tube de flux pour un maillage tétraédrique de 6 éléments. \mathbf{E} défini sur les arêtes duales.

La matrice de masse obtenue est carrée de taille égale au nombre de facettes primales mais, comme la matrice (II.45), elle n'est pas symétrique, toujours dû aux effets des mutuelles et de l'inversion de la matrice de masse élémentaire. Cependant, le système d'équations final est symétrique défini positif. Toutes ces étapes décrites peuvent être naturellement transposées à la détermination des lois de comportement magnétique.

L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas, ou peu, de développements mathématiques mais permet néanmoins de modéliser des systèmes géométriquement

complexes. Par contre, l'inconvénient, est qu'elle nécessite beaucoup d'étapes intermédiaires, notamment les étapes de reconstitutions de circulations et de flux, où de plus, une inversion de matrice est nécessaire.

C.3. Cas des éléments finis

Dans le cas de la méthode des éléments finis (FEM), les mêmes relations discrètes reliant les circulations aux flux peuvent être développées. Par exemple, la loi de comportement électrique discrète s'écrit :

$$\begin{bmatrix} j_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{f\tilde{a}}^\sigma \end{bmatrix}_{EF} \begin{bmatrix} \tilde{e}_{\tilde{a}} \end{bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

La différence avec la méthode d'intégration finie est que dans le cas de la méthode des éléments finis, la construction de la matrice de masse utilise les fonctions d'interpolation [20] [27] [33] et plus particulièrement des fonctions d'interpolation d'arêtes ou de facettes.

Dans le cas d'un tétraèdre (Figure II.2), à chaque nœud du maillage est associée une fonction scalaire continue w_n . Tel que si u est une fonction scalaire :

$$u = \sum_{n=1}^N u_n w_n \quad (\text{II.54})$$

Avec $w_{ni} = 1$ si $n = n_i$ et $w_{ni} = 0$ si $n \neq n_i$.

A chaque arête est associée une fonction vectorielle continue w_a :

$$\mathbf{u} = \sum_{a=1}^A \mathbf{u}_a w_a \quad (\text{II.55})$$

Avec $w_a = w_m \mathbf{Grad} w_n - w_n \mathbf{Grad} w_m$. w_n et w_m étant les fonctions d'interpolation nodale des n et m appartenant à l'arête a .

De même, on associe à chaque facette une fonction vectorielle continue w_f :

$$\mathbf{u} = \sum_{f=1}^F \mathbf{u}_f w_f \quad (\text{II.56})$$

$$\text{Avec : } \mathbf{w}_f = 2 w_l (\mathbf{Grad} w_m \times \mathbf{Grad} w_n) + 2 w_n (\mathbf{Grad} w_l \times \mathbf{Grad} w_m) + 2 w_m (\mathbf{Grad} w_n \times \mathbf{Grad} w_l) \quad (\text{II.57})$$

La facette f étant une surface à trois sommets, les fonctions d'interpolation w_l , w_m et w_n sont les fonctions d'interpolation nodales des nœuds l , m , n .

Enfin, à chaque volume est associée une fonction scalaire w_v .

$$u = \sum_{v=1}^V u_v w_v \quad (\text{II.58})$$

Avec :

$$w_{v_i} = \frac{1}{\text{vol}(v)} \text{ si } v = v_i \quad (\text{II.59})$$

Et

$$w_{v_i} = 0 \text{ si } v \neq v_i$$

À partir de ces fonctions d'interpolation et de l'expression de l'énergie, on peut montrer que la loi de comportement électrique discrète s'écrit à partir des fonctions d'interpolation d'arêtes lorsque la circulation électrique est définie sur les arêtes du maillage primal :

$$[\tilde{j}_{\tilde{f}}] = [M_{\tilde{f}a}^{\sigma}]_{EF} [e_a] \text{ Avec } M_{\tilde{f}a(i,j)}^{\sigma} = \iiint_D \sigma \mathbf{w}_{a(j)}^T \mathbf{w}_{a(i)} d\tau \quad (\text{II.60})$$

Avec N_A , le nombre d'arêtes du maillage : $1 \leq i \leq N_A$ et $1 \leq j \leq N_A$.

Si le problème entraîne la définition de la circulation sur les arêtes duales on utilisera les fonctions d'interpolations de facettes :

$$[\tilde{e}_{\tilde{a}}] = [M_{\tilde{a}f}^{\sigma}]_{EF}^{-1} [j_f] \text{ Avec } M_{\tilde{a}f(i,j)}^{\sigma-1} = \iiint_D \frac{1}{\sigma} \mathbf{w}_{f(j)}^T \mathbf{w}_{f(i)} d\tau \quad (\text{II.61})$$

Avec N_F , le nombre de facettes du maillage : $1 \leq i \leq N_F$ et $1 \leq j \leq N_F$.

Dans le cas de la FEM, les matrices de masse obtenues sont symétriques.

D. Discrétisation des termes sources

Dans ce paragraphe est présenté comment sont construits les champs de vecteurs sources discrets permettant d'imposer ou de calculer les grandeurs globales. Le cas des domaines non simplement connexes est abordé.

D.1. Construction de N et de K

Considérons un domaine D dont la surface Γ est décomposée telle que $\Gamma = \Gamma_A \cup \Gamma_B \cup \Gamma_C$ (Figure II.44).

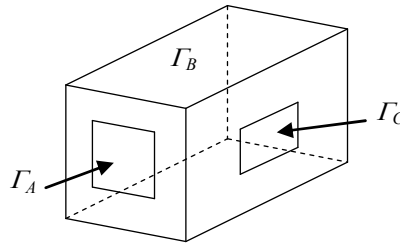


Figure II.44. Domaine D .

Le champ de vecteur N est un champ source servant de support pour, par exemple, la densité de courant source J_S . Dans ces conditions, sur les frontières Γ_A et Γ_C , le champ de vecteurs N doit vérifier les conditions suivantes :

$$\iint_{\Gamma_A \text{ ou } \Gamma_C} N \cdot ds = \pm 1 \quad (\text{II.62})$$

$$\text{Et} \quad N \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_B \quad (\text{II.63})$$

De plus, compte tenu des propriétés de la densité de courant, N vérifie également $\text{Div } N = 0$. Dans le domaine discret, on choisit de discrétiser le flux de N sur les facettes du maillage primal, sur l'espace \mathcal{W}^2 . La conservation du flux de N s'écrit :

$$[D_{vf}] [N_f] = [0] \quad (\text{II.64})$$

Une infinité de solutions permet de vérifier ces équations. Pour en déterminer une, on utilise une méthode basée sur une technique d'arbre de facettes [33] [34]. On impose, à l'aide d'un arbre de facettes, une condition de jauge. On utilise une méthode itérative basée sur cette technique d'arbre pour construire le champ de vecteurs discret de N . L'arbre de facettes est construit de la manière suivante :

- Toutes les facettes appartenant à la frontière Γ_B font partie de l'arbre (Pour imposer $N \cdot n = 0$ sur celles-ci).
- Tous les éléments sont reliés par l'arbre de facettes de Γ_A à Γ_C sans former de boucle.

Préalablement on définit sur une des facettes de Γ_A , ou de Γ_C , $N_f = 1$ et $N_f = 0$ sur les autres (Figure II.45).

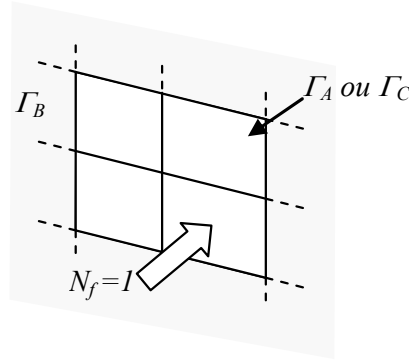


Figure II.45. Définition de N sur une frontière Γ_A ou Γ_C .

En parcourant les éléments du maillage la conservation du flux de N est vérifiée. Les conditions (II.62) à (II.64) sont ainsi satisfaites. Pour plus de clarté un exemple 2D montre comment est calculé N à partir de l'arbre de facettes sur la figure (Figure II.46).

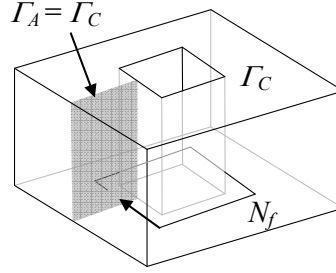


Figure II.48. Exemple d'une coupure appliquée à un système non simplement connexe.

Pour obtenir ce parcours de N_f , on affecte sur certaines arêtes une circulation de K_a égale à 1 tel que $R_{fa} K_a = 1$ à travers chaque facette connectée au trou débouchant (Figure II.49). On retrouve la notion de coupure qui relie la frontière Γ_A à Γ_C .

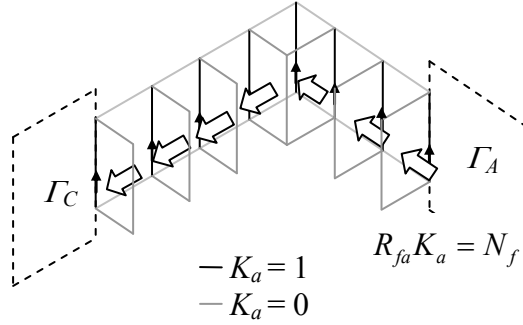


Figure II.49. N et K relatif à la coupure.

Le champ de vecteur discret N_f est alors défini tel que $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Γ_B et $R_{fa} K_a = N_f$ simultanément. À titre d'exemple, dans le cas d'un problème électrocinétique, on pourra imposer le courant circulant autour d'un trou.

D.2. Construction de β et de α

Le champ de vecteur β est utilisé pour imposer une différence de potentiels pour les formulations en potentiels scalaires. Les circulations de champs étant définies sur les arêtes primales, on définira également β sur les arêtes primales afin d'écrire la relation discrète de $\mathbf{E} = \beta \nabla V$ sous la forme :

$$e_a = \beta_a V \quad (\text{II.66})$$

Ce champ de vecteur doit aussi vérifier l'équation (I.79) dans le domaine discret. Cependant β peut prendre une infinité de répartition pour satisfaire cette équation. La solution retenue pour construire β est la suivante : On considère tout d'abord un conducteur dont les frontières Γ_J , Γ_{E1} et Γ_{E2} sont définies et γ un parcours reliant Γ_{E1} à Γ_{E2} .

Une des frontières Γ_{Ei} est isolée. On considère alors les arêtes connectées à cette frontière par une seule extrémité sur lesquelles sera défini $\beta = 1$ (Figure II.50). Sur les autres arêtes sera défini $\beta = 0$. De cette manière, quelque soit le parcours de γ , l'équation (I.79) est vérifiée. Dans le domaine discret cette équation s'écrira :

$$\sum_{a \in \gamma} \beta_a = 1 \quad (\text{II.67})$$

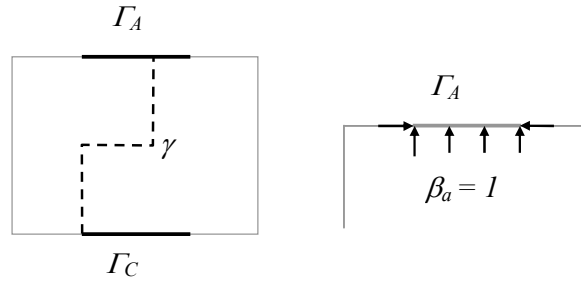


Figure II.50. Définition de β et d'un parcours quelconque γ .

Au même titre que le champ électrique E , le champ de vecteur β est à rotationnel nul. Il peut alors s'écrire en fonction d'un potentiel scalaire que l'on notera α tel que : $\beta = -\text{Grad } \alpha$. Compte tenu de la définition de β , précédemment citée, le potentiel scalaire α est discrétisé sur les nœuds primaux. Ce potentiel sera égal à 1 pour les nœuds appartenant à Γ_{E1} et sera nul pour les autres nœuds.

On vérifie alors l'équation suivante :

$$\alpha_{\Gamma_{E1}} - \alpha_{\Gamma_{E2}} = 1 \quad (\text{II.68})$$

La relation discrète entre β et α s'écrit alors à l'aide de l'opérateur gradient discret :

$$\beta_a = -G_{an} \alpha_n \quad (\text{II.69})$$

Ces deux outils discrétisés vont nous permettre d'introduire les grandeurs globales électriques et/ou magnétiques à l'aide des formulations en potentiels par le biais des termes sources.

E. Formulations discrètes

Pour établir les formulations discrètes, nous avons pris le parti de définir les inconnues, donc les potentiels introduits, dans l'espace du maillage primal pour des raisons de simplicités évidentes. En effet, imposer une condition aux limites sur les frontières d'un maillage dual est délicat. La définition géométrique des éléments duaux au-delà du maillage primal n'est pas définie.

Les potentiels vecteurs électriques \mathbf{T} et magnétiques \mathbf{A} sont donc discrétisés sur les arêtes du maillage primal, on notera ces quantités : T et A pour alléger les notations. Les inconnues scalaires électriques φ et Ω magnétiques sont quant à elles discrétisées sur les nœuds du maillage primal. Ces potentiels seront notés de la même façon dans le domaine discret φ et Ω . Pour des raisons de lisibilité, les matrices d'incidence seront également notées sans les indices d'arêtes, de facettes et de nœuds. À titre d'exemple, la matrice d'incidence correspondant à l'opérateur rotationnel discret R_{fa} sera notée R .

E.1. Électrocinétique

Pour résoudre un problème d'électrocinétique dans le domaine discret, il est possible de discrétiser la circulation du champ électrique soit sur les arêtes primales, soit sur les arêtes duales. Le choix d'utiliser telle ou telle définition sera conditionné par le potentiel, vecteur ou scalaire, que nous introduirons.

E.1.a. Formulation T

Pour cette formulation, en discrétisant le flux de la densité de courant sur les facettes primales, le potentiel vecteur électrique \mathbf{T} est par conséquent discrétisé sur les arêtes du maillage primal. Le système discret que l'on résout à l'aide de cette formulation est donc :

$$\tilde{R} \tilde{e} = 0 \quad (\text{II.70})$$

Avec la loi de comportement électrique :

$$j = M_{fa}^\sigma \tilde{e} \quad (\text{II.71})$$

Le diagramme de Tonti discret (Figure II.51) représente les différentes grandeurs dans leurs espaces respectifs.

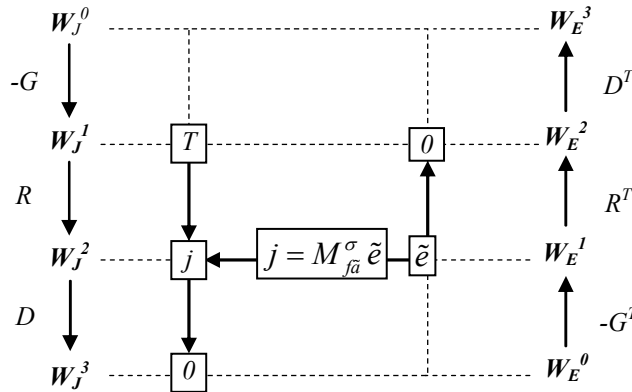


Figure II.51. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation T .

- Courant imposé

En faisant apparaître les grandeurs globales, comme introduites dans les paragraphes précédents la densité de courant s'exprime dans le domaine discret sous la forme suivante :

$$j = j_t + j_s = R T + R K I \quad (\text{II.72})$$

La formulation à courant imposé s'écrit sous la forme :

$$\left[R^T M_{f\bar{a}}^{\sigma^{-1}} R \right] [T] = - \left[R^T M_{f\bar{a}}^{\sigma^{-1}} R \right] [K I] \quad (\text{II.73})$$

En jugeant le problème à l'aide de la technique d'arbre d'arêtes, on élimine du système d'équations les inconnues définies sur les arêtes de l'arbre. Jauger un problème en potentiel vecteur permet de s'assurer de l'unicité de la solution. On utilise la jauge du type $T \cdot w = 0$ [1]. L'arbre d'arêtes correspond au support du champ de vecteurs w qui circule dans tout le domaine sans former de boucle. Le système d'équations obtenu est de taille égale au nombre d'arêtes du maillage moins le nombre d'arêtes conditionnées par les conditions aux limites et la condition de jauge.

- Tension imposée

Pour introduire la différence de potentiels électriques comme terme source, il est nécessaire d'utiliser l'équation (I.95) que l'on écrit sous forme discrète. En introduisant le champ de vecteur N et en utilisant la loi de comportement discrète, on obtient :

$$V = N^T \tilde{e} = (R K)^T (M_{f\bar{a}}^{\sigma^{-1}} R (T + K I)) \quad (\text{II.74})$$

Cette équation est ajoutée à la formulation (II.73). Le courant devient une inconnue supplémentaire et la tension est alors le seul terme source. À tension imposée, la formulation s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} R^T M_{f\bar{a}}^{\sigma^{-1}} R & R^T M_{f\bar{a}}^{\sigma^{-1}} R K \\ K^T R^T M_{f\bar{a}}^{\sigma^{-1}} R & K^T R^T M_{f\bar{a}}^{\sigma^{-1}} R K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \end{bmatrix} \quad (\text{II.75})$$

E.1.b. Formulation φ

Pour cette formulation, en discrétisant la circulation de champ électrique sur les arêtes primales, le potentiel scalaire électrique est défini aux nœuds du maillage primal. La densité de courant est par conséquent discrétisée sur les facettes du maillage dual (Figure II.52) à l'inverse de la formulation en potentiel vecteur électrique. On résout l'équation (I.28) qui, dans le domaine discret, s'écrit sous la forme suivante :

$$\tilde{D} \tilde{j} = 0 \quad (\text{II.76})$$

On tient compte de la loi de comportement électrique discrète qui, dans cette configuration, s'écrit :

$$\tilde{j} = M_{\tilde{j}a}^{\sigma} e \quad (\text{II.77})$$

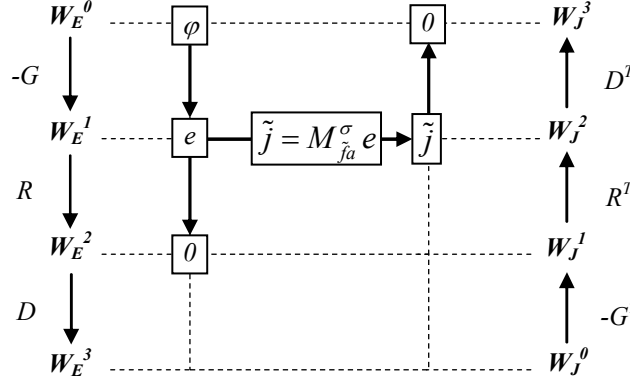


Figure II.52. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation φ .

- Tension imposée

L'utilisation de la fonction α , nous permet de faire apparaître la valeur de la différence de potentiels électriques V dans l'expression de la circulation du champ électrique. Plus précisément α apparaît dans l'expression du champ électrique source :

$$e = e_l + e_s = -G(\varphi + \alpha V) \quad (\text{II.78})$$

En utilisant la loi de comportement discrète et l'expression de la densité de courant en fonction de la circulation du champ électrique dans l'équation (II.76), la formulation en potentiel scalaire électrique s'écrit telle que :

$$\left[G^T M_{\tilde{j}a}^{\sigma} G \right] [\varphi] = - \left[G^T M_{\tilde{j}a}^{\sigma} G \right] [\alpha V] \quad (\text{II.79})$$

D'une manière générale, on jauge le problème afin d'obtenir une solution unique. Pour les formulations utilisant des inconnues scalaires, on fixe un ou plusieurs potentiels pour assurer l'unicité de la solution. En imposant une différence de potentiels entre deux frontières du type Γ_E , les potentiels scalaires électriques appartenant à ces frontières sont fixés. On obtient alors un système d'équation de taille égale au nombre de nœuds du maillage primal moins les nœuds conditionnés par les conditions aux limites Γ_{Ei} .

- Courant imposé

Pour imposer le courant, l'équation (I.101) est utilisée sous forme discrète. On y fait apparaître la fonction scalaire α et à l'aide de la loi de comportement électrique discrète on obtient :

$$I = \beta^T \tilde{j} = (G\alpha)^T \left(M_{\tilde{j}a}^{\sigma} G(\varphi + \alpha V) \right) \quad (\text{II.80})$$

La formulation en potentiel scalaire électrique à courant imposé devient :

$$\begin{bmatrix} G^T M_{fa}^\sigma G & G^T M_{fa}^\sigma G \alpha \\ \alpha^T G^T M_{fa}^\sigma G & \alpha^T G^T M_{fa}^\sigma G \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (\text{II.81})$$

En ajoutant l'équation (II.80) à la formulation (II.79) la différence de potentiels électriques V devient une inconnue.

E.2. Magnétostatique

La même remarque qu'en électrocinétique s'applique pour les problèmes de magnétostatique. Le choix de travailler sur le maillage primal ou sur le maillage dual dépendra de la formulation utilisée.

E.2.a. Formulation A

Ici, le flux de l'induction magnétique est discrétisé sur les facettes du maillage primal, ce qui entraîne que le potentiel vecteur magnétique A est également discrétisé sur les arêtes du maillage primal. Les circulations de champs magnétiques sont de ce fait définies sur les arêtes du maillage dual (Figure II.53).

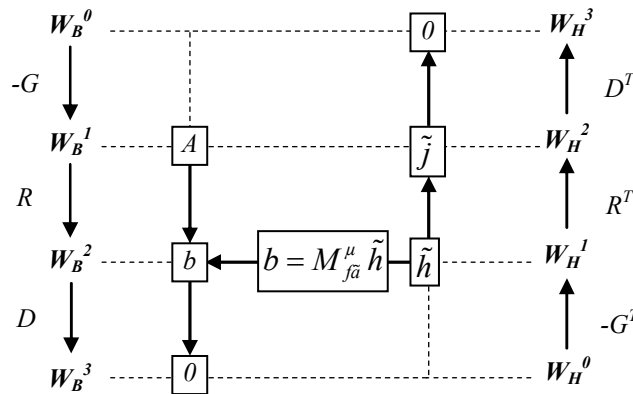


Figure II.53. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation A .

Le système à résoudre est la forme discrète de l'équation (I.44) :

$$\tilde{R} \tilde{h} = \tilde{j} \quad (\text{II.82})$$

La forme discrète de la loi de comportement s'écrit :

$$b = M_{fa}^\mu \tilde{h} \quad (\text{II.83})$$

- Flux imposé

Lorsque l'on cherche à imposer le flux magnétique ϕ , il apparaît dans l'expression de l'induction source en fonction du potentiel vecteur magnétique A et de K (I.112). Dans

le domaine discret l'induction s'écrit :

$$b = R(A + K\phi) \quad (\text{II.84})$$

Le terme A correspond aux inconnues du problème tandis que le terme $K\phi$ correspond au terme source. L'expression de l'induction (II.84) et la loi de comportement nous permettent d'écrire la formulation en potentiel vecteur magnétique à flux imposé :

$$\left[R^T M_{f\tilde{a}}^{\mu-1} R \right] [A] = - \left[R^T M_{f\tilde{a}}^{\mu-1} R \right] [K] \phi + [\tilde{j}] \quad (\text{II.85})$$

On rappelle que le terme \tilde{j} correspond à un second terme source relatif à la présence d'inducteurs dont on connaît parfaitement la distribution de la densité de courant.

Comme la formulation en potentiel vecteur électrique, le nombre d'équations à résoudre est égale au nombre d'arêtes du maillage primal moins celles conditionnées par les conditions aux limites et la condition de jauge.

- Force magnétomotrice imposée

À partir de l'équation (I.115), il nous est possible d'imposer une différence de potentiels magnétiques ε en utilisant cette formulation. Dans le domaine discret, cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\varepsilon = N^T \tilde{h} = (RK)^T M_{f\tilde{a}}^{\mu-1} R(A + K\phi) \quad (\text{II.86})$$

Le flux ϕ devient une inconnue. La formulation en potentiel scalaire s'écrit alors telle que :

$$\begin{bmatrix} R^T M_{f\tilde{a}}^{\mu-1} R & R^T M_{f\tilde{a}}^{\mu-1} R K \\ K^T R^T M_{f\tilde{a}}^{\mu-1} R & K^T R^T M_{f\tilde{a}}^{\mu-1} R K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{j} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.87})$$

E.2.b. Formulation Ω

Le flux de l'induction est discrétisé sur les facettes duales. De cette manière on peut discrétiser le potentiel scalaire magnétique sur les nœuds du maillage primal (Figure II.54). Le système discret que l'on résout à l'aide de cette formulation est la conservation du flux :

$$\tilde{D} \tilde{b} = 0 \quad (\text{II.88})$$

En tenant compte de la loi de comportement magnétique discrète qui, dans cette configuration, s'écrit :

$$\tilde{b} = M_{f\tilde{a}}^{\mu} h \quad (\text{II.89})$$

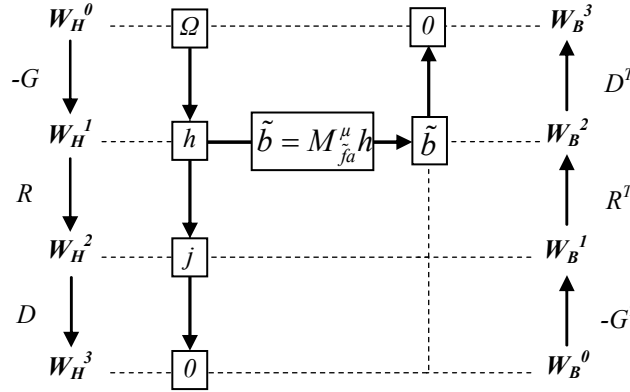


Figure II.54. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation Ω .

- Force magnétomotrice imposée

Pour imposer la force magnétomotrice, on exprime le champ magnétique en fonction du potentiel scalaire magnétique, de la force magnétomotrice à l'aide de la fonction α et du terme source dû à la présence d'inducteurs :

$$h = h_s - G(\Omega + \alpha \varepsilon) \quad (\text{II.90})$$

On peut alors établir la formulation en potentiel scalaire magnétique dans le cas où la force magnétomotrice ε est imposée :

$$\left[G^T M_{fa}^\mu G \right] [\Omega] = \left[G^T M_{fa}^\mu \right] [h_s] - \left[G^T M_{fa}^\mu G \right] [\alpha \varepsilon] \quad (\text{II.91})$$

- Flux imposé

Comme nous l'avons vu précédemment, pour imposer un flux avec la formulation en potentiel scalaire, il est nécessaire d'ajouter une équation supplémentaire (I.120). Sous forme discrète, cette équation s'écrit :

$$\phi = \beta^T \tilde{b} = (-G \alpha)^T M_{fa}^\mu (h_s - G(\Omega + \alpha \varepsilon)) \quad (\text{II.92})$$

En ajoutant cette équation à la formulation (II.91), la force magnétomotrice devient une inconnue, la formulation s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} G^T M_{fa}^\mu G & G^T M_{fa}^\mu G \alpha \\ \alpha^T G^T M_{fa}^\mu G & \alpha^T G^T M_{fa}^\mu G \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^T M_{fa}^\mu \\ \alpha^T G^T M_{fa}^\mu \end{bmatrix} [h_s] \quad (\text{II.93})$$

E.3. Magnétodynamique

La définition des espaces discrets dans lesquels sont définies les grandeurs utilisées pour traiter des problèmes magnétodynamiques est celle utilisée dans les paragraphes précédents. Concernant la formulation \mathcal{A} - ϕ , le potentiel \mathcal{A} est défini sur les arêtes du

maillage primal et le potentiel φ aux nœuds et pour la formulation $T\text{-}\Omega$, T est discrétisé sur les arêtes et Ω sur les nœuds du maillage primal.

E.3.a. Formulation $T\text{-}\Omega$

Le système discret que l'on résout à l'aide de cette formulation est issu de l'équation (I.71). Il s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{R} \tilde{e} = -\frac{d}{dt} \tilde{b} \\ \tilde{D} \tilde{b} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.94})$$

Dans la configuration de cette formulation, les lois de comportement électrique et magnétique discrètes s'écrivent :

$$j = M_{fa}^{\sigma} \tilde{e} \quad (\text{II.95})$$

$$\tilde{b} = M_{fa}^{\mu} h \quad (\text{II.96})$$

Le diagramme de Tonti (Figure II.55) montre où sont définies les différentes grandeurs dans le domaine discret.

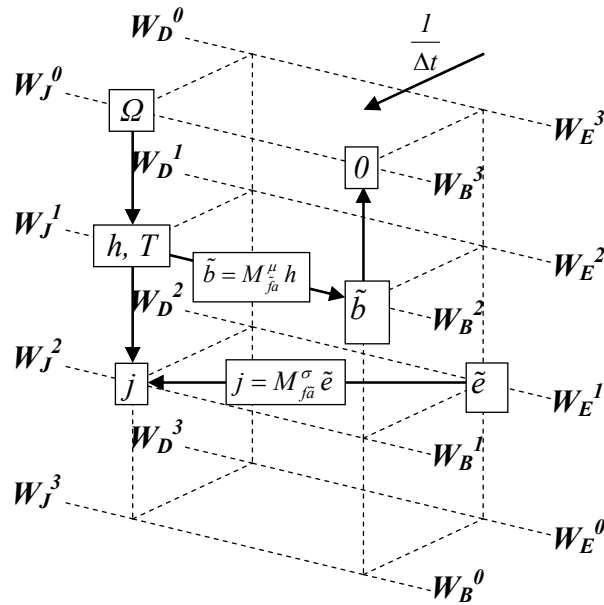


Figure II.55. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation $T\text{-}\Omega$.

Le terme H_S , relatif aux inducteurs bobinés, n'est pas pris en compte ici afin d'alléger les notations. On écrira le champ magnétique sous la forme suivante :

$$H = T + K I - \text{Grad} (\Omega + \alpha \varepsilon) \quad (\text{II.97})$$

- Courant et force magnétomotrice imposés

Pour imposer un courant on utilise le champ de vecteurs \mathbf{K} . La densité de courant s'exprime en fonction du champ source $\mathbf{K} I$ ainsi que du potentiel vecteur magnétique \mathbf{T} (II.98).

Pour imposer une force magnétomotrice, on utilisera la fonction β qui nous permet d'exprimer le champ magnétique source $\beta \varepsilon$. Le champ magnétique s'exprime en fonction du potentiel scalaire magnétique Ω , des champs sources $\mathbf{K} I$ et $\beta \varepsilon$ ainsi que du champ magnétique induit \mathbf{T} (II.99).

$$j = R(T + KI) \quad (\text{II.98})$$

$$h = KI + T - G(\Omega + \alpha \varepsilon) \quad (\text{II.99})$$

On résout alors les équations (II.94) qui s'écrivent respectivement, en faisant apparaître les grandeurs globales et les potentiels, sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{R} M_{fa}^{\sigma-1} R(T + KI) = -\frac{d}{dt} M_{fa}^{\mu} (T + KI - G(\Omega + \alpha \varepsilon)) \\ \tilde{D} M_{fa}^{\mu} (T + KI - G(\Omega + \alpha \varepsilon)) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.100})$$

La formulation développée ici est détaillée en annexe (A.1) page 134.

- Tension et flux imposés

Pour, à l'inverse, imposer le flux et la tension, on utilise la forme discrète des équations (I.133) et (I.134) :

$$\phi = \beta^T \tilde{b} \quad (\text{II.101})$$

$$V = \tilde{e}^T N + K^T \frac{d}{dt} \tilde{b} \quad (\text{II.102})$$

En ajoutant ces équations à celles du système (II.100), on obtient alors le système d'équation suivant à tension et à flux imposé :

$$\begin{cases} \tilde{R} M_{fa}^{\sigma-1} R(T + KI) = -\frac{d}{dt} M_{fa}^{\mu} (T + KI - G(\Omega + \alpha \varepsilon)) \\ \tilde{D} M_{fa}^{\mu} (T + KI - G(\Omega + \alpha \varepsilon)) = 0 \\ \left(M_{fa}^{\sigma-1} R(T + KI) \right)^T N + K^T \frac{d}{dt} M_{fa}^{\mu} (T + KI - G(\Omega + \alpha \varepsilon)) = V \\ \beta^T M_{fa}^{\mu} (T + KI - G(\Omega + \alpha \varepsilon)) = \phi \end{cases} \quad (\text{II.103})$$

Cette formulation est elle aussi détaillée en annexe (A.2) page 134.

La force magnétomotrice ε ainsi que le courant I sont à présent des inconnues supplémentaires du système d'équations.

E.3.b. Formulation A - ϕ

Le système d'équations que l'on résout à l'aide de cette formulation est formé par les équations (I.57) et (I.58) sous leurs formes discrètes :

$$\begin{cases} \tilde{R} \tilde{h} = \tilde{j} \\ \tilde{D} \tilde{j} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.104})$$

Avec les lois de comportement magnétique et électrique :

$$\tilde{j} = M_{\tilde{f}a}^{\sigma} e \quad (\text{II.105})$$

$$b = M_{\tilde{f}a}^{\mu} \tilde{h} \quad (\text{II.106})$$

Le diagramme de Tonti (Figure II.56) montre où sont définies les différentes grandeurs dans le domaine discret.

- Flux et tension imposés

Les grandeurs globales que l'on impose naturellement sont le flux ϕ et la tension V . Le flux est introduit dans l'expression de l'induction grâce au champ source $N \phi$ (II.107) et la tension apparaît dans l'expression du champ électrique via le champ source βV (II.108).

$$b = R(A + K \phi) \quad (\text{II.107})$$

$$e = -\frac{d}{dt}(A + K \phi) - G(\phi + \alpha V) \quad (\text{II.108})$$

En utilisant ces deux équations (II.107) et (II.108) ainsi que les lois de comportement discrètes, le système (II.104) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \tilde{R} M_{\mu}^{-1} R(A + K \phi) = -M_{\tilde{f}a}^{\sigma} \left(\frac{d}{dt}(A + K \phi) + G(\phi + \alpha V) \right) \\ \tilde{D} M_{\tilde{f}a}^{\sigma} \left(\frac{d}{dt}(A + K \phi) + G(\phi + \alpha V) \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.109})$$

On retrouvera également cette formulation détaillée en annexe (A.3) page 135.

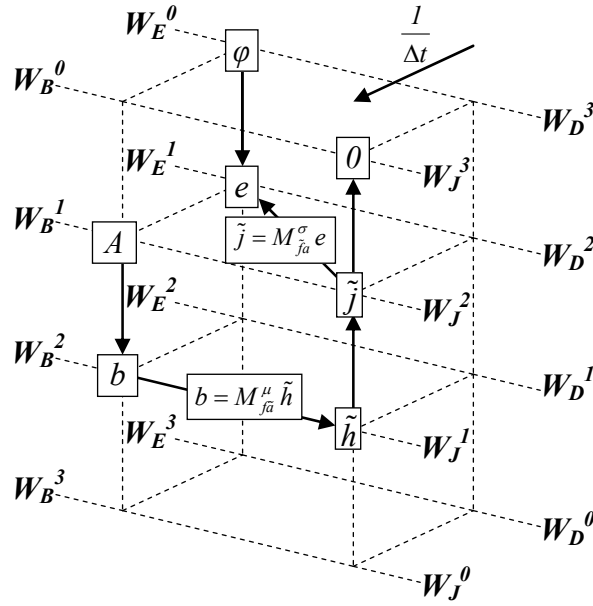


Figure II.56. Diagramme de Tonti discret appliqué à la formulation $A-\phi$.

- Courant et force magnétomotrice imposés

Pour faire apparaître le courant ainsi que la différence de potentiels magnétiques dans la formulation on utilise les équations (I.127) et (I.128) sous leur forme discrète :

$$I = \beta^T \tilde{j} \quad (\text{II.110})$$

$$\varepsilon = N^T \tilde{h} - K^T \tilde{j} \quad (\text{II.111})$$

La formulation $A-\phi$ discrète à courant et à force magnétomotrice imposée s'écrit à l'aide du système (II.109) et des équations (II.110) et (II.111) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{R} M_{ja}^{\mu-1} R (A + K \phi) = -M_{ja}^{\sigma} \left(\frac{d}{dt} (A + K \phi) + G(\phi + \alpha V) \right) \\ \tilde{D} M_{ja}^{\sigma} \left(\frac{d}{dt} (A + K \phi) + G(\phi + \alpha V) \right) = 0 \\ -\beta^T M_{ja}^{\sigma} \left(\frac{d}{dt} (A + K \phi) + G(\phi + \alpha V) \right) = I \\ N^T M_{ja}^{\mu-1} R (A + K \phi) + K^T M_{ja}^{\sigma} \left(\frac{d}{dt} (A + K \phi) + G(\phi + \alpha V) \right) = \varepsilon \end{array} \right. \quad (\text{II.112})$$

La tension V ainsi que le flux magnétique ϕ sont alors deux inconnues supplémentaires. L'équation (A.4) page 135 détaille cette formulation à courant et à force magnétomotrice imposée.

Afin de comparer les solutions obtenues à l'aide de la FIT et de la FEM, on comparera les valeurs des énergies magnétiques ainsi que des puissances dissipées pour chaque

formulation. Effectuer une comparaison concernant les grandeurs locales des champs n'est pas judicieux. En effet la technique d'intégration finie émet l'hypothèse que les champs sont constants dans les éléments, ou plus précisément, dans chaque tube de flux. Ce qui n'est pas le cas avec la méthode des éléments finis, qui, en utilisant des fonctions de forme permet d'obtenir la valeur des champs en tout point d'un élément. On sait a priori qu'il existera une différence notable entre les deux méthodes au niveau local. Notamment si, par exemple, on compare la valeur de l'induction au point chaud d'un circuit magnétique d'un transformateur. On s'intéresse alors aux grandeurs globales comme l'énergie magnétique ou la puissance électrique.

Dans le cas d'un problème électrocinétique, le bilan de puissance (I.94) nous permet d'écrire, dans le domaine continu, la puissance sous la forme suivante :

$$P = \iiint_{D_c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (\text{II.113})$$

Pour la FIT et pour la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ , cette relation s'écrit dans le domaine discret tel que :

$$P = \mathbf{e}_a^T \tilde{\mathbf{j}}_{\tilde{f}} \quad (\text{II.114})$$

Pour la formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T} elle prend la forme suivante :

$$P = \tilde{\mathbf{e}}_a^T \mathbf{j}_f \quad (\text{II.115})$$

En ce qui concerne la méthode des éléments finis, il est possible de déterminer les champs en tout point de l'espace à l'aide des fonctions de formes [4] [20]. On effectue alors une intégration volumique dans chaque élément à l'aide de la méthode de Gauss pour obtenir la valeur de la puissance :

$$P = \iiint_{D_c} \mathbf{e}_a^T \mathbf{w}_a^T \mathbf{w}_a \tilde{\mathbf{j}}_{\tilde{f}} d\tau \quad (\text{II.116})$$

La même démarche est suivie concernant la détermination de l'énergie magnétique. À partir du bilan énergétique (I.114), à l'aide de la FIT en formulation Ω , on obtient la valeur de l'énergie par l'équation suivante :

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{h}_a^T \tilde{\mathbf{b}}_{\tilde{f}} \quad (\text{II.117})$$

Et pour la formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} :

$$W = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{h}}_a^T \mathbf{b}_f \quad (\text{II.118})$$

En ce qui concerne la méthode des éléments finis, en utilisant les fonctions de forme on peut écrire :

$$W_{mag} = \frac{1}{2} \iiint_D \tilde{\mathbf{b}}_f^T \mathbf{w}_a^T \mathbf{w}_a \mathbf{h}_a d\tau \quad (\text{II.119})$$

Il est naturel de définir les inconnues des problèmes sur les entités du maillage primal. Ce maillage, saisi par l'utilisateur, suit la géométrie du système à étudier. Mais il est possible de définir les inconnues dans le domaine du maillage dual. On utilise alors la notion de dualité à la fois pour le maillage, pour les opérateurs discrets, grâce à la notion d'opérateurs adjoints et également pour les lois de comportement magnétique et électrique [30].

Cette partie consacrée à la discrétisation d'un problème permet d'établir un modèle discret nécessaire à la résolution numérique d'un système. Les différentes formulations en potentiels et la construction, via des méthodes d'arbres d'arêtes et de facettes, des outils permettant d'imposer les grandeurs globales ont été présentées. Ces arbres d'arêtes et de facettes permettent également de jauger le problème en agissant sur les potentiels vecteurs électriques ou magnétiques. L'imposition de courant, de flux, et de différence de potentiels électriques ou magnétiques a été développée pour chaque formulation en potentiel de l'électrocinétique, de la magnétostatique et de la magnétodynamique. Le cas des domaines non simplement connexes a été abordé.

Chap III. Applications et comparaisons

Ce chapitre est consacré à la comparaison des résultats obtenus à l'aide de la technique d'intégration finie et de la méthode des éléments finis. Les résultats obtenus à l'aide de cette dernière méthode seront nos résultats de référence. Plusieurs systèmes sont traités pour chaque domaine de l'électromagnétisme. Chacun de ces problèmes est résolu à l'aide des deux formulations duales.

Le premier domaine auquel on s'intéressera est l'électrocinétique. Un cas non simplement connexe est traité ainsi qu'un cas multi-sources dans lequel sera montré l'intérêt des champs sources N et β . On s'intéressera ensuite au domaine de la magnétostatique, où l'on traitera des cas simples en 2D extrudées et 3D avec imposition des grandeurs globales. Le cas de la magnétodynamique est également abordé. L'effet de proximité de deux conducteurs est mis en évidence. Puis un cas axisymétrique appliqué à la FIT approchée est présenté, dans lequel est montré l'évolution des courants induits dans un conducteur soumis à un champ magnétique variable.

A. Électrocinétique

Pour tester les formulations de l'électrocinétique à l'aide de la FIT, plusieurs exemples ont été étudiés. Pour chacun d'eux les simulations sont effectuées à l'aide des deux formulations (en potentiel scalaire et vecteur électrique) dans le cas où l'on impose soit un courant soit une tension électrique.

A.1. Système mono-Source

Le premier exemple est un conducteur en forme de U (Figure III.1) dans lequel on cherche à déterminer la distribution de la densité de courant. Dans le cas de la formulation en potentiel vecteur électrique T , imposer une densité de courant source soulève des problèmes, notamment dans les parties coudées. Pour contourner cette difficulté on

utilise les outils introduits précédemment : Le champ de vecteurs N va permettre de construire le support de la densité de courant source pour l'utilisation de la formulation en potentiel vecteur électrique T . De même, le champ de vecteurs β nous permet de construire un champ électrique source avec la formulation en potentiel scalaire électrique φ . À titre d'illustration, une distribution possible de densité source utilisée par la formulation en potentiel vecteur électrique est représentée sur la figure (Figure III.2).

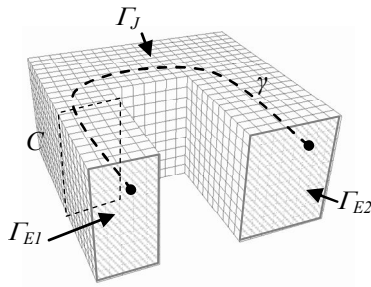


Figure III.1. Maillage du U conducteur.

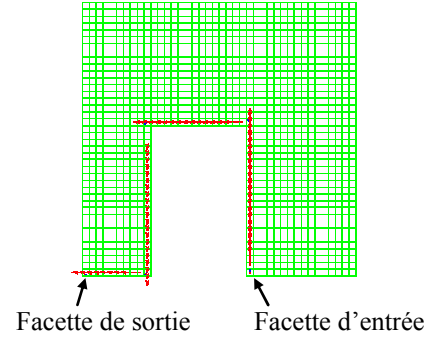


Figure III.2. Exemple de calcul de N pour le U conducteur.

On impose les conditions aux limites du type $E \times n = 0$ sur les frontières Γ_{E1} et Γ_{E2} telles que :

$$\begin{aligned} E \times n &= -\text{Grad}(\varphi + \alpha V) \times n = 0 \text{ sur } \Gamma_E \\ \text{Avec } \int_{\gamma} -\text{Grad } \varphi \cdot dl &= 0 \text{ et } \int_{\gamma} -\text{Grad } \alpha V \cdot dl = V \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Ainsi que la condition $J \cdot n = 0$ sur Γ_J telle que :

$$\begin{aligned} J \cdot n &= \text{Rot}(T + KI) \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma_J \\ \text{Avec } \oint_C T \cdot dl &= 0 \text{ et } \oint_C (KI) \cdot dl = I \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Les deux formulations de l'électrocinétique sont testées ici, à courant et à tension imposée. La démarche entreprise est la suivante : A l'aide de la formulation en potentiel vecteur électrique T , un courant de 100 A est imposé (II.73). La puissance dissipée ainsi que la tension (II.74) apparaissant aux bornes de ce conducteur sont calculées. À travers de nouvelles simulations, la tension précédemment calculée devient le terme source du problème, à la fois de la formulation en potentiel vecteur T et de la formulation en potentiel scalaire φ . On déterminera alors le courant ainsi que la puissance dissipée pour ces deux formulations (II.75) et (II.79). Finalement, la formulation en potentiel scalaire φ est testée à courant imposé (II.81) avec pour valeur de courant, celle déterminée précédemment avec cette même formulation. On effectue donc quatre simulations à courant et tension imposée afin de s'assurer de la réversibilité de la résolution.

Pour la formulation en potentiel vecteur électrique T à courant imposé, la figure

(Figure III.3) représente la distribution de courant obtenue.

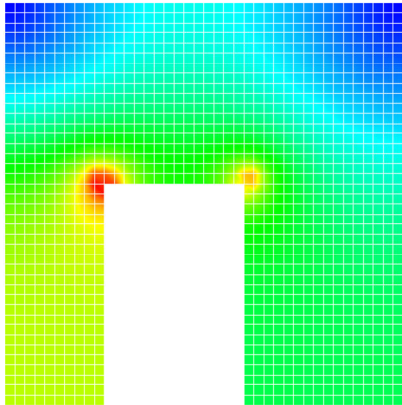


Figure III.3. Distribution du courant pour le U conducteur.

Concernant la formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T} , les valeurs obtenues sont reproduites dans le tableau (Tableau III.1). Afin de vérifier le modèle proposé, le courant est d’abord imposé pour ensuite appliquer la tension obtenue comme terme source. On peut noter que les résultats sont en bonne concordance.

La même démarche a été menée pour la formulation en potentiel scalaire électrique φ . Les résultats obtenus à tension puis à courant imposé sont donnés dans le tableau (Tableau III.2).

I imposé	V	P	→	V imposée	I	P
100 A	3,025 mV	0,302 W		3,025 mV	100 A	0,303 W

Tableau III.1. Résultats à courant imposé puis à tension imposée pour la formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T} .

V imposée	I	P	→	I imposé	V	P
3.025 mV	101,6 A	0,307 W		101,6 A	3,025 mV	0,307 W

Tableau III.2. Résultats à tension imposée puis à courant imposé pour la formulation en potentiel scalaire électrique φ .

Cet exemple démontre que quelque soit la formulation utilisée, formulation en potentiel vecteur électrique \mathbf{T} ou scalaire électrique φ , l’imposition des grandeurs globales électriques est effective et permet d’obtenir des résultats cohérents de bonne qualité.

A.2. Système multi-Sources

Pour aller plus avant concernant le comportement de la FIT couplée à l'imposition des grandeurs globales électriques, un cas multi-sources est étudié. Ce deuxième exemple est un conducteur alimenté par quatre sources électriques (Figure III.4). Cinq frontières du type Γ_E sont définies. Elles permettent de modéliser les quatre sources.

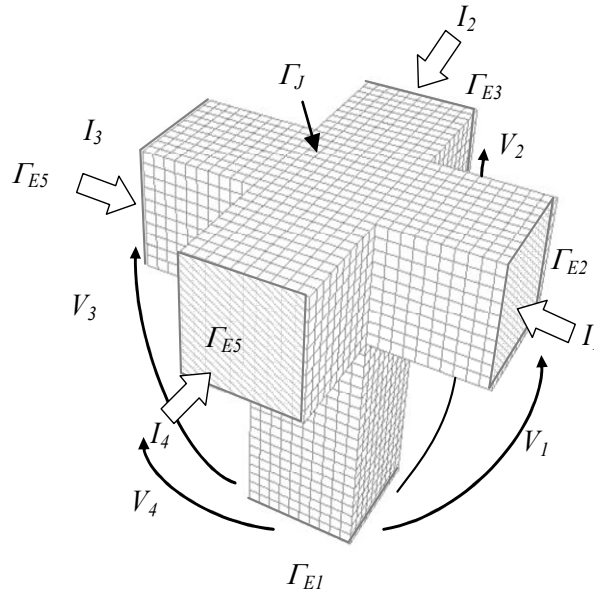


Figure III.4. Maillage à 7000 éléments.

Entre les frontières Γ_{E1} et Γ_{E2} sera définie la première source, on imposera soit une différence de potentiel électrique (V_1), soit un courant circulant de l'une à l'autre des surfaces (I_1). La deuxième source sera définie par le couple Γ_{E1} - Γ_{E3} , la troisième par Γ_{E1} - Γ_{E4} et la dernière source par Γ_{E1} - Γ_{E5} . Dans le cas où l'on impose les tensions la frontière Γ_{E1} est équivalente à un potentiel de référence nul tandis que dans le cas où l'on impose les courants, cette frontière agira comme un puits de courant où l'on pourra appliquer la loi des nœuds.

L'objectif est de déterminer les différentes grandeurs globales électriques dans différentes configurations pour les deux formulations de l'électrocinétique. Par configuration, entendons la manière dont le conducteur est alimenté. Soit par une tension et trois courants ou inversement. Les configurations testées sont représentées dans le tableau (Tableau III.3).

Grandeurs imposées								
Config.	I_1	V_1	I_2	V_2	I_3	V_3	I_4	V_4
1	✓		✓		✓		✓	
2		✓		✓		✓		✓
3	✓			✓	✓			✓
4		✓	✓			✓	✓	

Tableau III.3. Configurations testées sur le cas du conducteur multi-sources.

Sur la figure (Figure III.5), sont représentés les quatre champs de vecteurs sources N utilisés pour la formulation en potentiel vecteur électrique T . Compte tenu des choix que nous avons fait, la facette de départ est la même pour ces quatre champs sources. L'utilisation de la formulation en potentiel scalaire nécessite de définir les potentiels $\alpha = 1$ sur les frontières Γ_{Ei} .

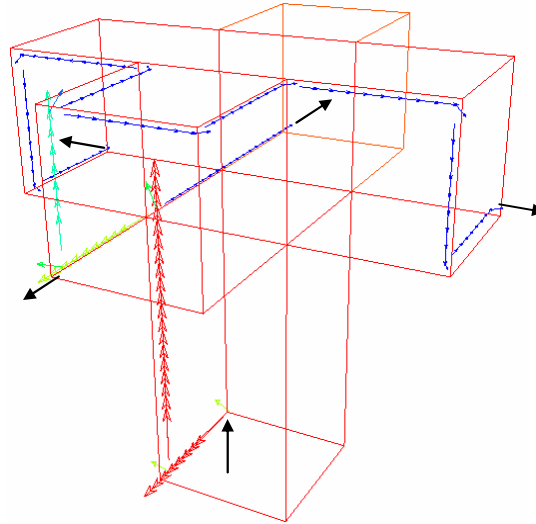


Figure III.5. Vecteur source $N_1 + N_2 + N_3 + N_4$ pour les quatre conducteurs sources fictifs.

Intéressons nous tout d'abord à la formulation en potentiel vecteur électrique T où, dans un premier temps, quatre valeurs de courant sont imposées : 10, 20, 30 et 40 A respectivement appliquées aux frontières Γ_{E2} , Γ_{E3} , Γ_{E4} et Γ_{E5} (Config. 1 Tableau III.3). On détermine donc les valeurs des tensions associées à ces quatre sources ainsi que la puissance dissipée dans le conducteur. Le tableau (Tableau III.4) regroupe les résultats obtenus. La somme des courants qui traverse la frontière Γ_{E1} est naturellement de 100 A. Dans un deuxième temps les tensions obtenues sont les valeurs sources du problème (Config. 2 Tableau III.3). Pour cette formulation on ajoute alors quatre équations (II.74). Les courants déterminés sont alors 10, 20, 30 et 40 A. Les résultats concordent bien entendu en ce qui concerne la valeur de la puissance dissipée. On retrouve également des résultats analogues pour les configurations 3 et 4.

$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E2}$	I1	10 A	V1	1,826 mV
$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E3}$	I2	20 A	V2	1,916 mV
$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E4}$	I3	30 A	V3	2,036 mV
$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E5}$	I4	40 A	V4	2,127 mV

$$P = 0,203 \text{ W}$$

Tableau III.4. Résultats pour la formulation en potentiel vecteur électrique T à courant et à tension imposée.

La figure (Figure III.6) représente la distribution de la densité de courant obtenue à l'aide de cette formulation.

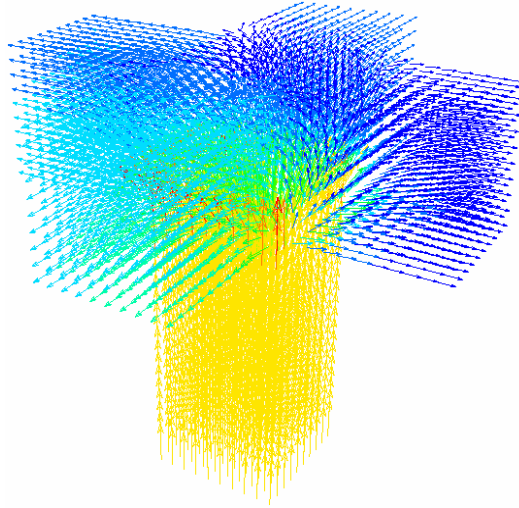


Figure III.6. Distribution de la densité de courant.

Les mêmes calculs ont été effectués à l'aide de la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ . Les courants ont tout d'abord été les termes sources du problème (config. 1) pour ensuite poursuivre la même démarche que pour la formulation en potentiel vecteur. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau (Tableau III.5). On obtient systématiquement les mêmes couples de courant et tension ($I_i V_i$) quelque soit la configuration utilisée.

$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E2}$	I1	10 A	V1	1,802 mV
$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E3}$	I2	20 A	V2	1,892 mV
$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E4}$	I3	30 A	V3	2,008 mV
$\Gamma_{EI}-\Gamma_{E5}$	I4	40 A	V4	2,098 mV

$$P = 0,2 \text{ W}$$

Tableau III.5. Résultats pour la formulation ϕ à courant et à tension imposée.

A.3. Système mono-Source non simplement connexe

Nous allons maintenant étudier le cas d'un domaine non simplement connexe (Figure III.7). Pour résoudre ce problème, à l'aide de la formulation en potentiel vecteur électrique, il est nécessaire, comme développé précédemment, d'introduire un champ de vecteurs N' supplémentaire relatif à un inducteur fictif dont le courant circulera autour du trou. On rappelle que ce champ de vecteurs sert de support au courant I' , de valeur inconnue, associé à ce conducteur fictif. En revanche, pour la formulation en potentiel scalaire électrique, aucune précaution n'est à prendre pour l'étude de ce type de domaine. Sur la figure (Figure III.8) sont représentés les deux champs de vecteurs sources N et N' discrets.

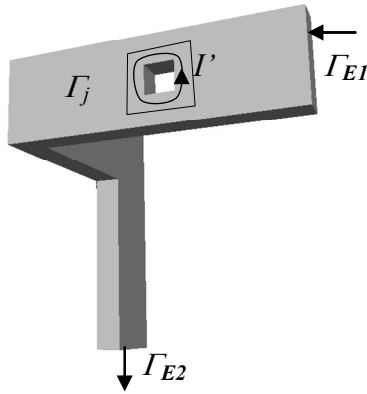


Figure III.7. Structure mono-source, cas d'un domaine non simplement connexe.

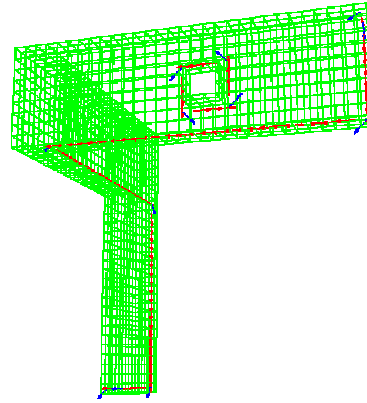


Figure III.8. Champs de vecteurs sources pour le système non simplement connexe.

Comme pour les cas précédents, les deux formulations ont été testées en imposant le courant et la tension. Pour les deux formulations, on impose tout d'abord un courant I de 1 A à travers la frontière Γ_{EI} puis la tension apparaissant aux bornes est calculée ainsi que la puissance dissipée. Le courant I' est de plus une grandeur supplémentaire à déterminer pour la formulation en potentiel vecteur électrique T . Les tensions déterminées sont ensuite les termes sources des deux formulations. Le tableau (Tableau III.6) présente les résultats obtenus à l'aide de la formulation en potentiel vecteur électrique T ainsi que la valeur du courant I' .

I Imposé	V	P (W)	I' (A)	→	V Imposée	I (A)	P (W)	I' (A)
1 A	0,844	0,844	0,499		0,844 V	1	0,844	0,5

Tableau III.6. Résultats à courant imposé puis à tension imposée pour la formulation en potentiel vecteur électrique T .

De même, on trouvera dans le tableau (Tableau III.7) les résultats obtenus à l'aide de la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ . Quant à la figure (Figure III.9) elle représente la densité de courant dans le conducteur.

I Imposé	V (V)	P (W)	→	V Imposée	I (A)	P (W)
1 A	0,828	0,828		0,828 V	0,999	0,827

Tableau III.7. Résultats à courant imposé puis à tension imposée pour la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ .

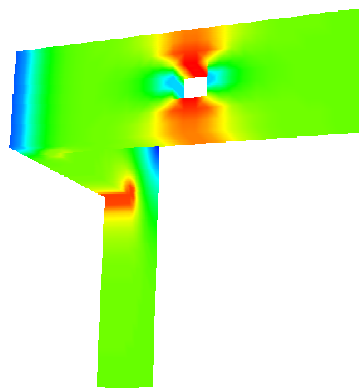


Figure III.9. Distribution de la densité de courant.

Au vu des résultats présentés, on constate qu'il y a une bonne cohérence entre les approches en potentiel vecteur et scalaire. Notamment en ce qui concerne la détermination du courant I' associé au conducteur fictif.

On remarque aussi que lorsque \mathbf{E} est défini sur le maillage primal (formulation en potentiel scalaire) on obtient une solution par excès en ce qui concerne la puissance. Inversement, la puissance est donnée par défaut lorsque \mathbf{E} est défini sur le maillage dual (formulation en potentiel vecteur). Ce phénomène a déjà été analysé et utilisé pour l'estimation des erreurs numériques en magnétostatique avec la méthode des éléments finis [29] [30] [35].

A.4. Comparaison FIT approchée – Cell Method – EF

Dans le chapitre précédent la FIT approchée a été présentée. Cette méthode permet de discrétiser les lois de comportement à l'aide d'un maillage déformé en construisant des tubes de flux équivalents orthogonaux aux tubes de flux issus du maillage déformé. Afin de valider cette méthode, un cas test électrocinétique est résolu à l'aide de la FIT approchée, de la Cell-Method et de la méthode des éléments finis. La formulation utilisée est la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ .

Le cas test présenté sur la figure (Figure III.10) est un conducteur auquel est imposée

une différence de potentiels électriques V . Sur la frontière Γ_{E1} est imposé 0 V et sur la frontière Γ_{E2} est imposé 1 V.

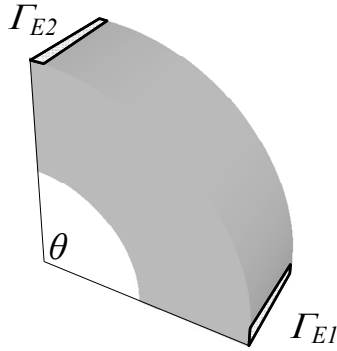


Figure III.10. Cas test électrocinétique curviligne.

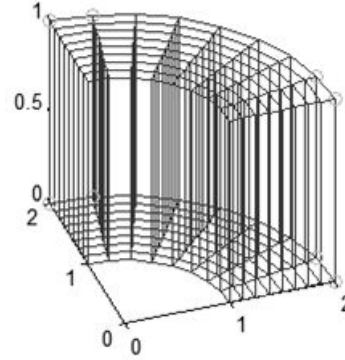


Figure III.11. Maillage de 64 éléments.

La puissance dissipée dans ce conducteur est déterminée à l'aide de ces trois méthodes en faisant varier l'angle θ de la géométrie entre 15° et 90° . Cet angle représente l'angle de développement du conducteur. On modifie alors la géométrie du système dans le but d'estimer l'impact de la déformation des hexaèdres sur la qualité de la solution. Un maillage identique de 64 éléments est utilisé pour la FIT et la Cell-Method (Figure III.11). Pour la méthode des éléments finis, cette méthode étant notre référence, un maillage tétraédrique de 1000 éléments est utilisé. La figure (Figure III.12) représente la distribution du courant dans le conducteur obtenue par la méthode des éléments finis.

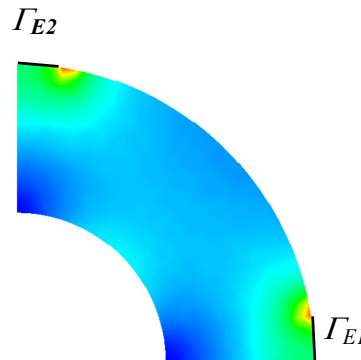


Figure III.12. Distribution de la densité de courant dans une coupe transversale du conducteur.

Sur la figure (Figure III.13) apparaissent les puissances calculées à l'aide des trois méthodes.

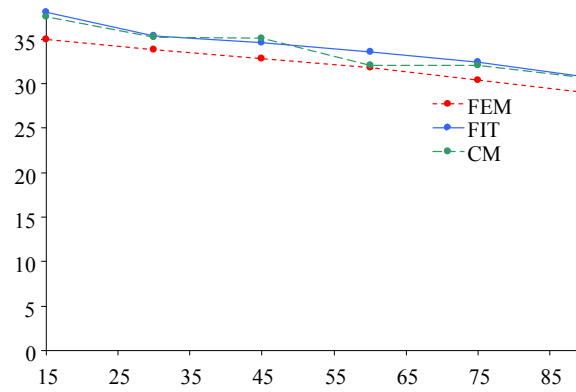


Figure III.13. Puissances dissipées (W) dans le conducteur pour $15^\circ < \theta < 90^\circ$.

Malgré l'écart que l'on constate habituellement entre les résultats EF et FIT, du fait des méthodes de calcul de la puissance différentes, les trois méthodes donnent des résultats comparables. Au vu des résultats obtenus, l'hypothèse émise, qui est de construire des tubes de flux orthogonaux équivalents, est validée pour cet exemple.

B. Magnétostatique

Pour la magnétostatique, nous allons tester les différentes formulations présentées dans les chapitres précédents sur plusieurs exemples. Nous allons comparer les résultats obtenus avec la FIT à ceux obtenus à la méthode des éléments finis sur des systèmes soumis à des densités de courant sources parfaitement connues ainsi qu'avec l'imposition des grandeurs globales.

B.1. Exemple académique

Le système magnétostatique modélisé (Figure III.14) est un cube d'air ($\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) d'un volume d'un mètre cube de dimension traversé par une densité de courant uniforme de 10 MA/m^2 [1]. Les conditions limites aux frontières sont du type $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pour la formulation en potentiel scalaire magnétique, on rappelle que cette condition est implicitement imposée. Pour la formulation en potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , ces mêmes potentiels vecteurs définis sur les arêtes primales sur la frontière $\Gamma_{\mathbf{B}}$, sont annulés et donc exclus du système d'équations.

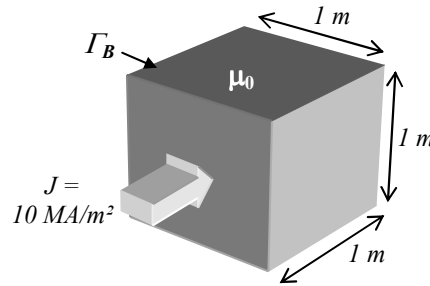


Figure III.14. Exemple académique.

Ce cas test permet de confronter les résultats obtenus à l'aide de la technique d'intégration finie à ceux obtenus avec la méthode des éléments finis car l'énergie magnétique emmagasinée peut être calculée analytiquement ($W_{mag} = 2,208$ MJ). On utilise la valeur de l'énergie calculée à l'aide de la technique d'intégration finie et de la méthode des éléments finis comme critère de comparaison pour quantifier la qualité de la solution fournie par la FIT.

Pour cet exemple, les formulations en champs \mathbf{H} et \mathbf{B} (A.5) et (A.6), présentées en annexe page 136, ainsi que les formulations en potentiels \mathcal{A} et Ω seront utilisées. On exprimera chacune de ces formulations sur le maillage primal et dual afin de constater l'influence de la nature du maillage sur le résultat. Huit simulations sont donc effectuées sur différents maillages : h , \tilde{h} , b , \tilde{b} , \mathcal{A} , $\tilde{\mathcal{A}}$, Ω et $\tilde{\Omega}$. Les caractéristiques des maillages sont représentées dans le tableau (Tableau III.8). Le plus petit maillage possède 8 éléments et le plus important se compose de 15 625 éléments.

	V	N	\mathcal{A}	F
M1	8	27	54	36
M2	1 000	1 331	3 630	3 300
M3	2 197	2 744	7 644	7 098
M4	4 096	4 913	13 872	13 056
M5	8 000	9 261	26 460	25 200
M6	15 625	17 576	50 700	48 750

Tableau III.8. Caractéristiques des maillages utilisés.

À titre d'illustration, le module de l'induction est représenté sur la figure (Figure III.15).

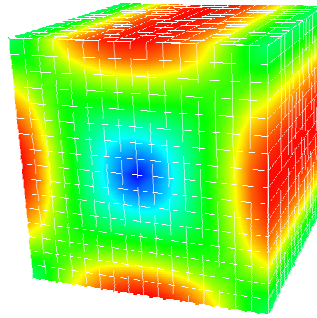


Figure III.15. Distribution de l'induction obtenue pour le maillage de 4 096 éléments avec la formulation en potentiel scalaire magnétique Ω .

Sur la figure (Figure III.16) est représentée l'évolution de l'énergie calculée, à l'aide de la FIT et de la FEM, en fonction du nombre d'éléments du maillage utilisé pour les formulations en potentiel scalaire magnétique Ω et les formulations en potentiel vecteur magnétique A . Avec A et Ω discrétisé sur le maillage primal. Par conséquent, le champ magnétique H est discrétisé sur le maillage dual pour la formulation en potentiel vecteur A , à l'inverse de la formulation en potentiel scalaire Ω où le champ H est discrétisé sur le maillage primal.

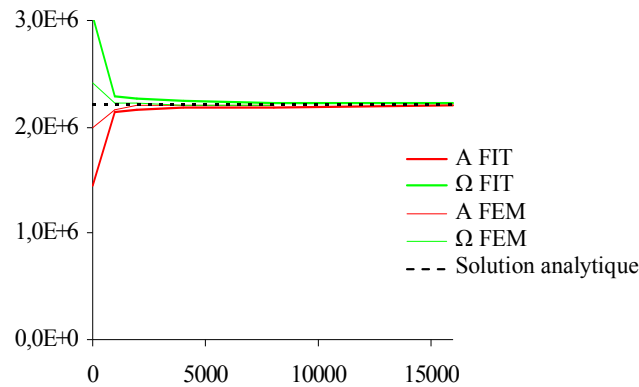


Figure III.16. Énergie (J) en fonction du nombre d'éléments.

On constate que la valeur de l'énergie calculée à l'aide des formulations en potentiel scalaire Ω (FIT et FEM) est supérieure à la valeur analytique et que pour les formulations en potentiel vecteur A elle est inférieure. On retrouve la notion de solution par excès et par défaut [29] [30] [35]. Ce phénomène est d'autant plus marqué lorsque le maillage utilisé possède un faible nombre d'éléments. De plus, un écart plus important subsiste entre les deux méthodes (FIT et FEM) pour ces maillages grossiers. La méthode des éléments finis fournit des résultats plus précis. Ceci est dû à la méthode de calcul de l'énergie. Comme indiqué précédemment, la technique d'intégration finie suppose que les grandeurs sont constantes dans les éléments, tandis que la méthode des éléments finis permet d'obtenir les composantes des champs en tout point du domaine

de par l'utilisation des fonctions de formes.

Comme citées précédemment, ces mêmes formulations ont été testées en définissant les potentiels sur le maillage dual (\tilde{A} et $\tilde{\Omega}$). Les résultats obtenus montrent que l'on obtient les mêmes résultats que pour les formulations précédentes (A et Ω) mis à part que, dans cette configuration, la formulation en potentiel vecteur \tilde{A} fournit une énergie supérieure à la valeur analytique tandis que la formulation en potentiel scalaire $\tilde{\Omega}$, donne une énergie inférieure.

Les formulations en champ \mathbf{H} ou \mathbf{B} ont elles aussi été testées, exprimées soit sur le maillage primal soit sur le maillage dual en effectuant la même série de calcul sur les différents maillages. Des résultats identiques ont été obtenus à ceux montrés sur la figure (Figure III.16). En définissant le champ \mathbf{H} sur le maillage primal, les formulations h et \tilde{b} nous permettent d'obtenir une énergie W_1 supérieure à la valeur analytique de 2 208 kJ. Lorsque le champ \mathbf{H} est défini sur le maillage dual, les formulations \tilde{h} et b donnent, cette fois-ci, une valeur W_2 ($W_2 < W_1$) plus faible de l'énergie par rapport à l'énergie analytique. Les résultats ne dépendent donc pas de la formulation mais de la nature du maillage sur lequel on choisit de discrétiser les différentes grandeurs. Le tableau (Tableau III.9) montre quelle énergie (W_2 ou W_1) sera déterminée en fonction de la formulation utilisée et du maillage sur lequel on travaille.

\mathbf{H} Primal	\mathbf{H} Dual
$h \rightarrow W_1$	$\tilde{h} \rightarrow W_2$
$\tilde{b} \rightarrow W_1$	$b \rightarrow W_2$
$\Omega \rightarrow W_1$	$\tilde{\Omega} \rightarrow W_2$
$\tilde{A} \rightarrow W_1$	$A \rightarrow W_2$

Tableau III.9. Énergie calculée en fonction de la nature du maillage et de la formulation utilisée.

Le tableau (Tableau III.10) regroupe les différentes caractéristiques des formulations utilisées (\mathbf{H} discrétisé sur maillage primal et sur le maillage dual) sur cet exemple pour un maillage de 1000 éléments résolus à l'aide de la FIT.

1000 éléments	En champs \mathbf{H}		En champs \mathbf{B}		En potentiel \mathbf{A}		En potentiel Ω	
Formulation	h	\tilde{h}	\tilde{b}	b	\tilde{A}	A	Ω	$\tilde{\Omega}$
Taille	3 630	2 700	3 630	2 700	2 300	810	1 331	1 000
Nbr de termes $\neq 0$	23 430	19 430	23 430	19 430	10 651	2 250	4 961	3 300
Itérations	46	36	125	146	230	15	30	30

Tableau III.10. Caractéristiques des différentes formulations utilisées.

B.2. Bobine à noyau de fer

En magnétostatique, pour valider les formulations en potentiels, un autre système a été modélisé dont les résultats ont été comparés à la méthode des éléments finis. Il s'agit d'une bobine à noyau de fer, à proximité d'un U ferromagnétique, plongée dans un cube d'air (Figure III.17). La perméabilité relative des matériaux ferromagnétiques est constante et égale à 1000. Le maillage utilisé pour la méthode d'intégration finie et la méthode des éléments finis est le même. Il s'agit d'un maillage hexaédrique de 8000 éléments (Figure III.18).

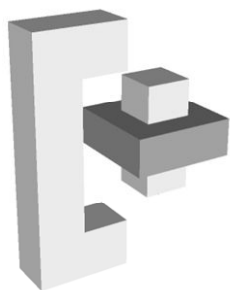


Figure III.17. Bobine à noyau de fer.

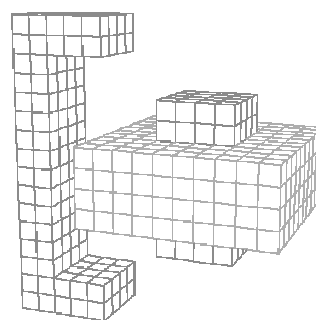


Figure III.18. Maillage des parties ferromagnétiques et de la bobine inductrice.

Sur la figure (Figure III.19) est représentée la distribution des lignes de champs de l'induction dans l'air et dans les parties ferromagnétiques. Pour des raisons de visibilité, seules 80% des valeurs les plus hautes de l'induction sont représentées.

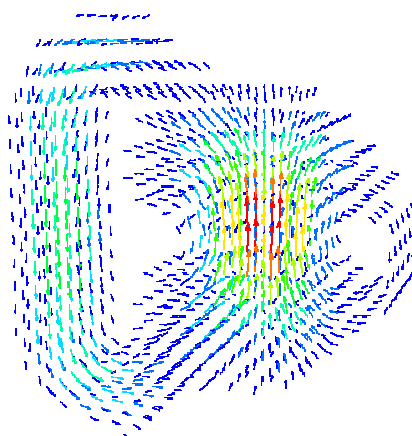


Figure III.19. Distribution de l'induction.

La comparaison entre les deux méthodes (FIT et FEM) porte essentiellement sur le

calcul de l'énergie dont la valeur est reportée dans le tableau (Tableau III.11). On compare donc les résultats que donnent les formulations en potentiel vecteur et scalaire obtenues à l'aide de la FIT et de la FEM.

Formulation	FIT \mathcal{A}	FIT Ω	FEM \mathcal{A}	FEM Ω
Énergie (J)	23,727	26,395	24,239	25,391

Tableau III.11. Comparaison entre la F.I.T. et la F.E.M.

On constate, d'après les résultats obtenus que les formulations \mathcal{A} et Ω encadrent bien la solution et que, comme pour l'exemple précédent, les solutions éléments finis sont plus proches de la valeur exacte que celles obtenues à l'aide de la FIT.

B.3. Imposition des grandeurs globales magnétiques

Considérons la géométrie représentée sur la figure (Figure III.20). Ce système est constitué d'un matériau ferromagnétique et d'un inducteur parcouru par une densité de courant uniforme \mathbf{J} . Deux types de conditions limites sont appliqués au système. Le flux magnétique est nul à travers les surfaces Γ_B . À travers Γ_{H1} et Γ_{H2} , sera imposé un flux ou une force magnétomotrice. La distribution du champ imposé à travers ces dernières surfaces sera donc perturbée par l'inducteur.

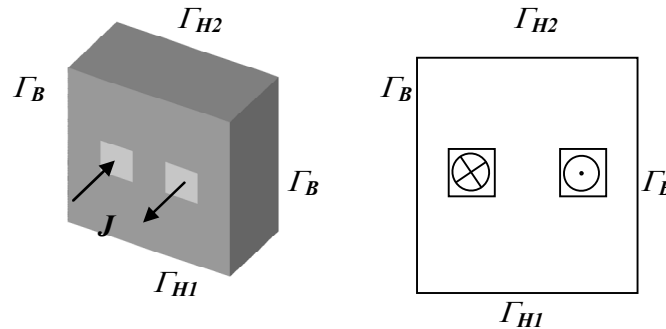


Figure III.20. Géométrie du système magnétostatique.

Le système est soumis à deux excitations, l'une créée par l'inducteur et l'autre, pour la formulation en potentiel vecteur, par le terme $\mathbf{N} \phi$. Les figures (Figure III.21) et (Figure III.22) représentent l'induction source $\mathbf{N} \phi$ ainsi que la densité de courant source imposée. Dans le cas de la formulation en potentiel scalaire on utilisera le champ source $\beta \varepsilon$ pour modéliser cette deuxième excitation magnétique.

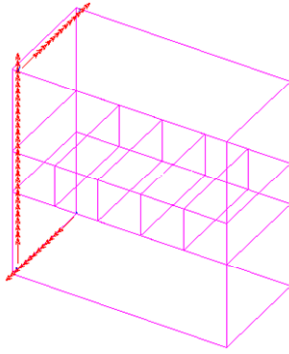


Figure III.21. Tracé de terme source $N \phi$.

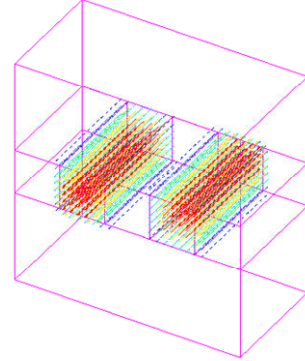


Figure III.22. Tracé de la densité de courant source.

Dans un premier temps, à l'aide des deux formulations en potentiel de la magnétostatique, le sens du flux traversant les surfaces Γ_{H1} et Γ_{H2} sera imposé de telle sorte qu'il renforcera le champ créé par l'inducteur. Dans un second temps on imposera le flux dans le sens opposé. Dans chacun de ces cas nous calculerons l'énergie totale emmagasinée ainsi que la valeur de force magnétomotrice entre Γ_{H1} et Γ_{H2} . Afin de valider le code développé, les forces magnétomotrices seront ensuite imposées pour les deux sens de flux pour chaque formulation. Les figures (Figure III.23 et Figure III.24) représentent la distribution de l'induction pour deux directions du flux que l'on impose à travers Γ_{H1} et Γ_{H2} .

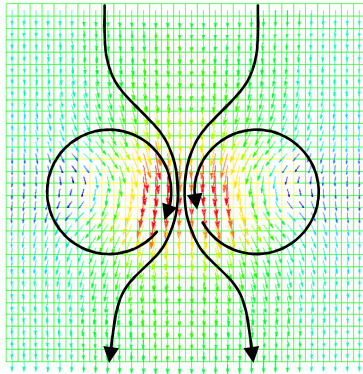


Figure III.23. Induction, flux imposé dans la direction de l'inducteur.

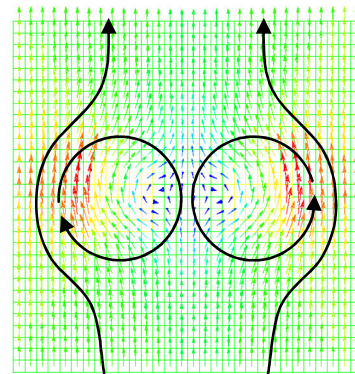


Figure III.24. Induction, flux imposé dans la direction opposée de l'inducteur.

Notons ε' la force magnétomotrice créée par l'inducteur, ϕ' le flux traversant la section entre les deux inducteurs et ϕ'' , la somme du flux traversant les sections à l'extérieur des inducteurs. Avec R' et R'' les réluctances équivalentes respectives à ces flux. Il est possible de déterminer un schéma équivalent magnétique à réluctances pour les deux configurations (Figure III.25 et Figure III.26).

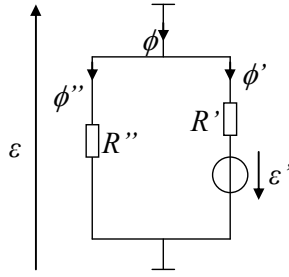


Figure III.25. Schéma équivalent à réluctances, flux imposé dans le sens de l'inducteur.

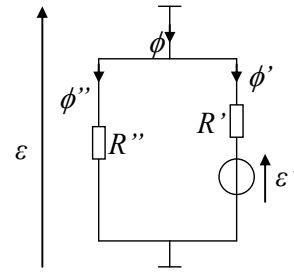


Figure III.26. Schéma équivalent à réluctances, flux imposé dans le sens contraire de l'inducteur.

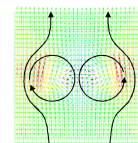
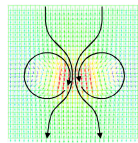
L'expression de la force magnétomotrice s'écrit pour un flux imposé dans le sens de l'inducteur :

$$\varepsilon = \frac{\phi R' R'' - \varepsilon' R'}{R' R''} \quad (\text{III.3})$$

Et pour un flux en sens contraire :

$$\varepsilon = \frac{\phi R' R'' + \varepsilon' R'}{R' R''} \quad (\text{III.4})$$

La force magnétomotrice doit donc être plus importante lorsque le flux créé par l'inducteur est en opposition avec le flux imposé ϕ . C'est ce que l'on constate en s'intéressant aux valeurs regroupées dans le tableau (Tableau III.12). Afin de vérifier la valeur des forces magnétomotrices, la démarche inverse a été effectuée dans le but de retrouver le flux imposé initialement de 1.10^{-4} Wb. Les forces magnétomotrices sont donc les termes sources des problèmes (Tableau III.13).



	Formulation \mathcal{A}	Formulation Ω	Formulation \mathcal{A}	Formulation Ω
Flux imposé $\phi = 1.10^{-4}$ Wb	$\varepsilon = 0,118$ At $W = 9,18.10^{-6}$ J	$\varepsilon = 0,119$ $W = 9,22.10^{-6}$	$\varepsilon = 0,198$ $W = 9,16.10^{-6}$	$\varepsilon = 0,199$ $W = 9,21.10^{-6}$

Tableau III.12. Résultats obtenus à flux imposé.

	$\varepsilon = 0,119$ $\phi = 9,93.10^{-5}$ $W = 9,049.10^{-6}$	$\varepsilon = 0,119$ $\phi = 9,98.10^{-5}$ $W = 9,15.10^{-6}$	$\varepsilon = 0,198$ $\phi = 9,93.10^{-5}$ $W = 9,05.10^{-6}$	$\varepsilon = 0,199$ $\phi = 9,98.10^{-5}$ $W = 9,14.10^{-6}$
F.m.m. imposée				

Tableau III.13. Résultats obtenus à force magnétomotrice imposée.

Concernant la valeur de l'énergie, on retrouve un phénomène déjà rencontré. En effet la valeur déterminée à l'aide de la formulation en potentiel scalaire Ω est supérieure à celle déterminée à l'aide de la formulation en potentiel vecteur \mathcal{A} . Cet exemple montre également que la FIT couplée aux outils d'imposition des grandeurs globales permet d'obtenir des résultats satisfaisants. Bien que les géométries modélisées soient de formes assez simples, il est néanmoins possible de résoudre des problèmes complexes efficacement et de façon assez simple pour un utilisateur.

C. Magnétodynamique

À travers les cas magnétodynamiques suivants, nous mettrons en évidence l'effet de proximité qui apparaît lorsque deux conducteurs proches sont alimentés sous tensions variables. Nous montrerons aussi qu'il apparaît des courants induits dans un matériau conducteur non alimenté lorsque qu'il se trouve près d'une source produisant un champ variable. Ce phénomène bien connu sera étudié à l'aide de la FIT classique et de la FIT dite approchée. Les résultats obtenus seront comparés à la méthode des éléments finis.

C.1. Effet de proximité

Le premier système proposé pour tester les deux formulations de la magnétodynamique est représenté sur la figure (Figure III.27). Il se compose de deux conducteurs cylindriques de conductivités identiques de sections différentes placés dans une boîte d'air. Pour la technique d'intégration finie un maillage hexaédrique est utilisé, on approxime donc la géométrie réelle. Les frontières sur lesquelles sont appliquées les conditions aux limites sont représentées sur la figure (Figure III.28). Sur la frontière Γ_B , on imposera la condition $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$. Sur les frontières Γ_J seront imposées les conditions du type $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$ et la condition $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sera imposée sur les frontières Γ_E .

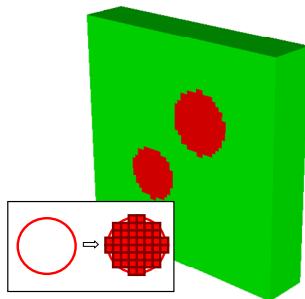


Figure III.27. Deux conducteurs cylindriques maillés à l'aide d'hexaèdres

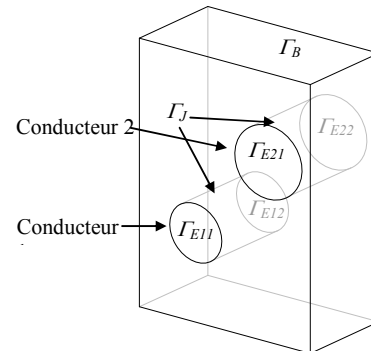


Figure III.28. Conditions limites

Dans un premier temps, on impose à travers les conducteurs des courants sinusoïdaux, d'amplitude 1A et de fréquence 4 kHz. Le temps de simulation totale est de 1ms avec un pas de temps de 5 μ s, soit 200 itérations. On relève l'évolution dans le temps de la tension aux bornes de ces conducteurs. La discrétisation temporelle est réalisée à l'aide de la méthode d'Euler implicite.

Les deux formulations magnétodynamiques sont utilisées et les résultats obtenus à l'aide de la FIT sont comparés à ceux issus de la méthode des éléments finis en utilisant le même maillage. Ensuite la démarche inverse est effectuée, ayant relevé l'évolution des tensions induites par la circulation des courants imposés aux bornes des conducteurs, ces tensions deviennent les termes source du problème dans le but de retrouver les évolutions des courants imposés lors de la première simulation.

À un instant $t = 100 \mu s$, sont représentées sur les figures (Figure III.29 et Figure III.30) respectivement l'induction magnétique et la répartition du courant dans les conducteurs mettant en évidence l'effet de proximité sur l'effet de peau.

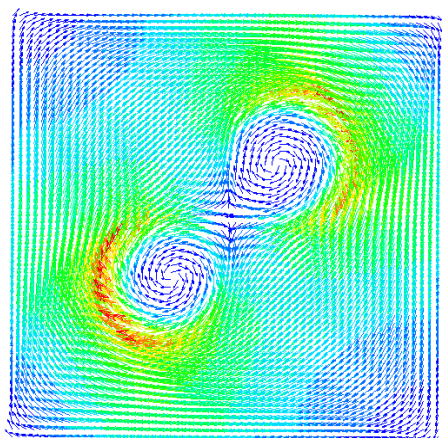


Figure III.29. Induction magnétique.

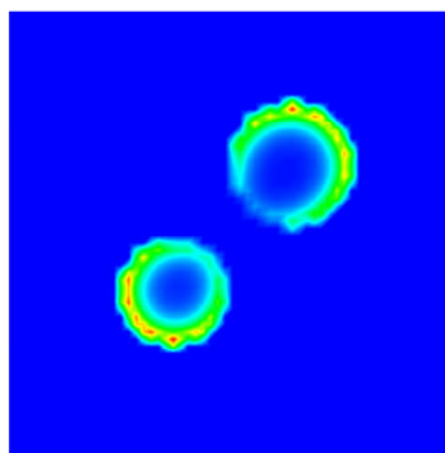


Figure III.30. Courants induits.

La figure (Figure III.31) représente l'évolution des tensions $V1$ et $V2$ en fonction du temps pour les deux formulations à courants imposés. Les valeurs des tensions calculées sont représentées dans le tableau (Tableau III.14), avec $v(t) = V_{max} \sin (wt - \delta)$.

On remarque une différence entre les résultats obtenus à l'aide de ces deux formulations. Les conducteurs n'étant pas de sections égales, les tensions $V1$ et $V2$ ne sont naturellement pas les mêmes. On remarque également que la formulation $A-\phi$ donne des amplitudes de tensions inférieures à celles obtenues à l'aide de la formulation $T-\Omega$.

On retrouve un phénomène analogue à celui de l'encadrement de la solution. Contrairement aux amplitudes, les déphasages relevés sont, quant à eux, quasiment identiques.

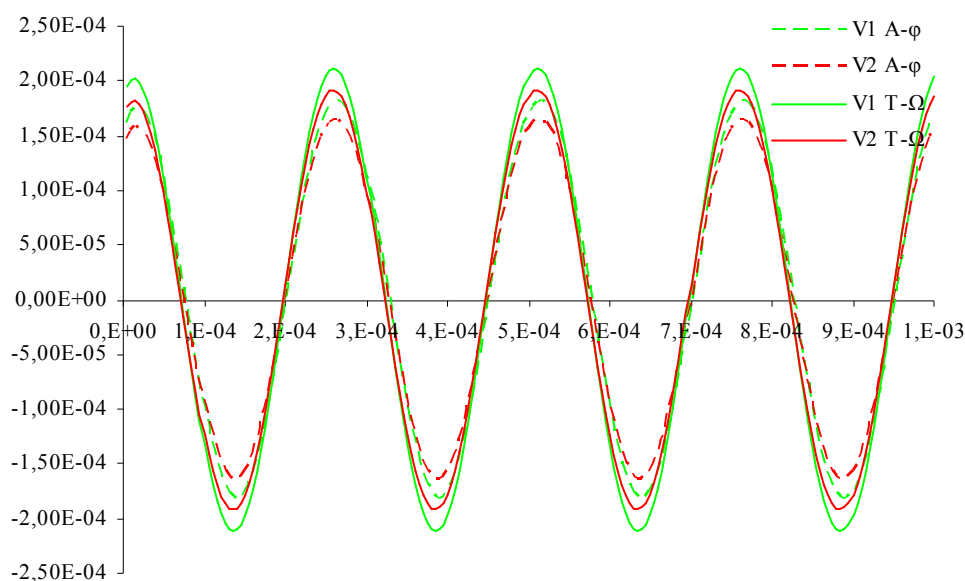


Figure III.31. Tensions (V) relevées aux bornes des deux conducteurs en fonction du temps (s) pour les deux formulations à courants imposés dans le cas de la FIT.

	$V1$	$V2$
$T-\Omega$	$V_{\max} = 211.10^{-6} \text{ V } \delta = 72^\circ$	$V_{\max} = 165.10^{-6} \text{ V } \delta = 72^\circ$
$A-\phi$	$V_{\max} = 192.10^{-6} \text{ V } \delta = 72^\circ$	$V_{\max} = 182.10^{-6} \text{ V } \delta = 72^\circ$

Tableau III.14. Amplitudes et déphasages des tensions relevées à l'aide de la FIT pour les formulations $A-\phi$ et $T-\Omega$.

Nous avons ensuite mené la démarche inverse. C'est-à-dire que les données sources du problème sont à présent les tensions (Tableau III.14). On compare donc les résultats concernant l'évolution du courant dans les conducteurs à l'aide de la FIT et la FEM pour les deux formulations. Sur la figure (Figure III.32) est représentée l'évolution des courants $I1$ et $I2$ en fonction du temps pour la formulation $A-\phi$. Les mêmes relevés sont effectués pour la formulation $T-\Omega$ (Figure III.33).

Lorsque le régime permanent s'établit, les courants calculés tendent vers le courant imposé dans l'essai précédent. C'est-à-dire 1 A d'amplitude, de fréquence 4 kHz , avec un déphasage de 72° . Cependant, pendant le régime transitoire une différence plus marquée apparaît. On retrouve la notion de solutions par excès et par défaut. Au vu des résultats, la formulation $A-\phi$ semble fournir des résultats sous-estimés concernant les amplitudes des tensions à courants imposés et lorsque l'on effectue la simulation à tensions imposées, pendant le régime transitoire, cette formulation semble surestimer les amplitudes des courants.

La constatation inverse est faite pour la formulation $T-\Omega$ qui semble sous-estimer la valeur des courants calculés pendant le régime transitoire. Cependant, au cours du ré-

gime transitoire, les résultats sont satisfaisants comparés à ceux obtenus à l'aide de la FEM et quasiment identiques en régime permanent.

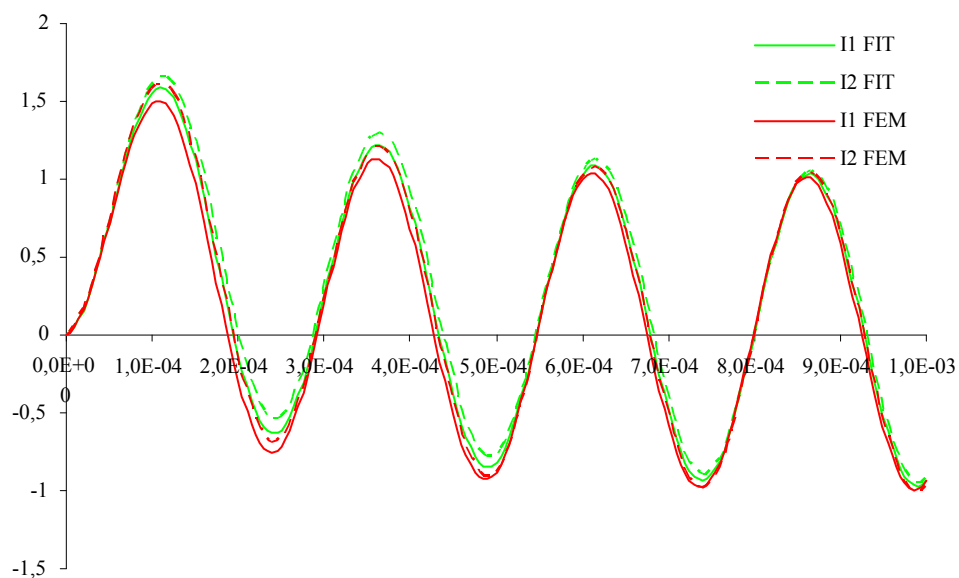


Figure III.32. Comparaison FEM FIT de l'évolution du courant (A) en fonction du temps (s) pour la formulation $A-\varphi$.

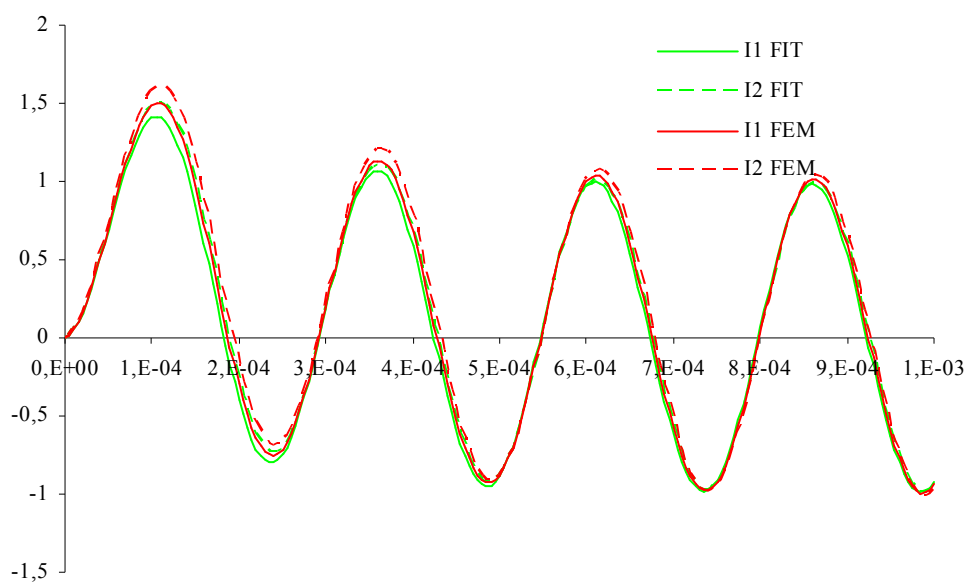


Figure III.33. Comparaison FEM FIT de l'évolution du courant (A) en fonction du temps (s) pour la formulation $T-\Omega$.

C.2. Barreaux conducteurs

A travers cet exemple, nous allons observer et mettre en évidence l'influence du champ créé par un conducteur sur la circulation de courants induits dans un second conducteur à proximité.

Le système se compose de deux conducteurs plongés dans une boîte d'air (Figure III.34). Ces deux conducteurs ont une conductivité électrique de 100 M S/m et pour l'ensemble du système on impose une perméabilité magnétique égale à celle de l'air : $\mu_0 = 4 \pi 10^{-7}$ H/m.

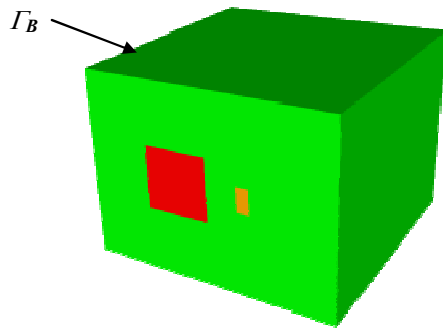


Figure III.34. Dispositif d'étude en magnétodynamique

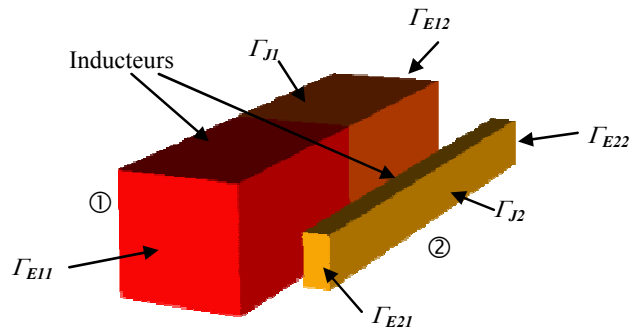


Figure III.35. Description des inducteurs

Un échelon de tension de 1 V sera imposé aux bornes du conducteur numéro 2 en imposant un potentiel électrique nul sur la surface Γ_{E21} et un potentiel de 1 volt sur la surface Γ_{E22} . Quant au conducteur numéro 1, un court-circuit est simulé en imposant une tension nulle à ses bornes (Figure III.35). La simulation s'effectue sur 20 ms et est divisée en 60 points. Ces simulations sont effectuées à l'aide des deux formulations (\mathcal{A} - φ et T - Ω) et les résultats obtenus seront comparés à ceux obtenus à l'aide de la FEM en utilisant le même maillage.

Sur la figure (Figure III.36) est représentée l'évolution du courant dans l'inducteur pour chaque formulation (FIT et FEM). L'évolution du courant dans l'inducteur entraînant une variation de flux magnétique dans l'air, des courants induits prennent naissance dans le conducteur en court-circuit (Figure III.37). Comme c'est au cours du régime transitoire que la variation de champ est la plus importante, le courant induit augmente pendant cet intervalle de temps. Puis au fur et à mesure du temps, le courant dans l'inducteur étant stabilisé, le courant induit décroît jusqu'à zéro. En régime permanent, on obtient la solution en électrocinétique dans les conducteurs et la solution magnétostatique dans tout le domaine.

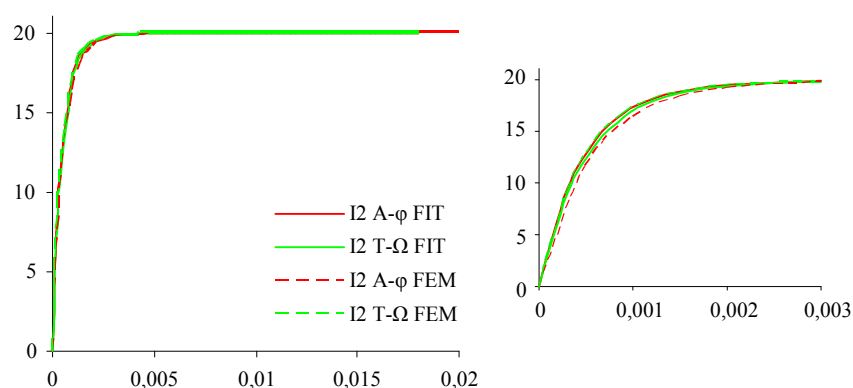


Figure III.36. Evolution du courant (A) dans l'inducteur (conducteur numéro 2).

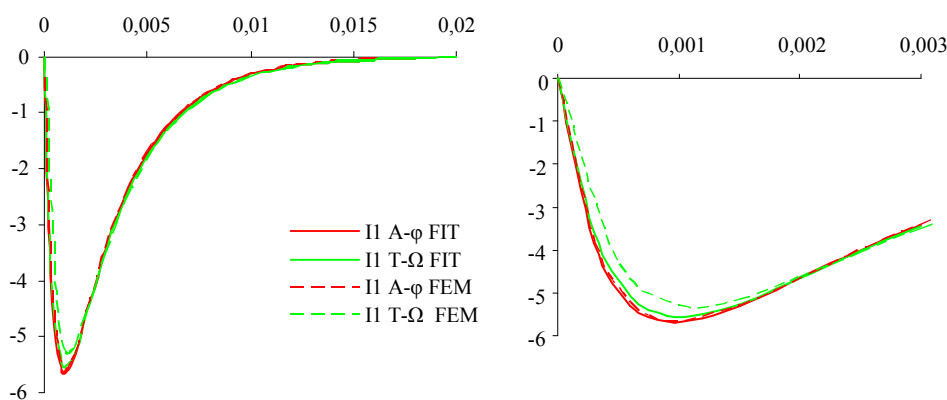


Figure III.37. Evolution du courant (A) dans l'induit (conducteur numéro 1).

Les résultats obtenus à l'aide des deux méthodes (FIT et FEM) sont quasiment identiques. La figure (Figure III.38) montre la répartition des lignes de champ de l'induction ainsi que la distribution des courants dans les conducteurs à la première itération et la figure (Figure III.39) représente les mêmes grandeurs mais à $t = 10$ ms.

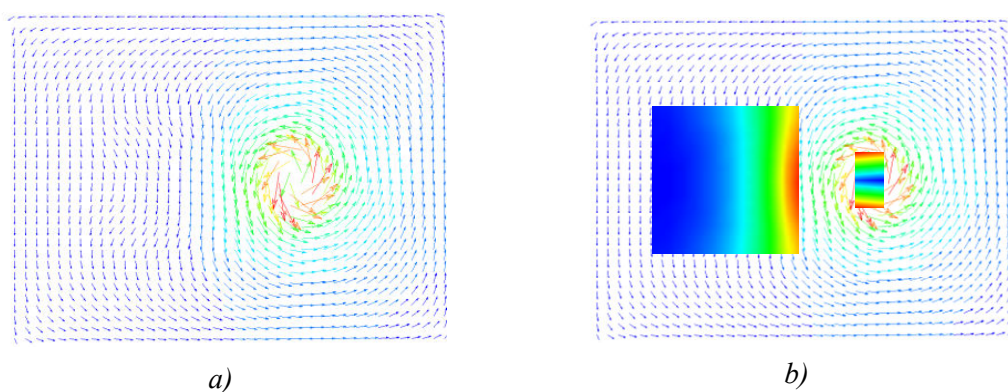


Figure III.38. a) Représentation de la distribution de l'induction dans une coupe transversale et b) distribution de la densité de courant à la première itération.

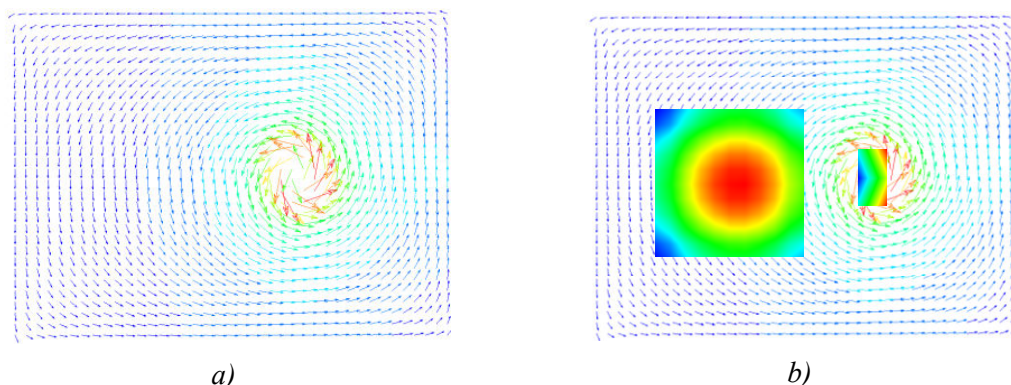


Figure III.39. a) Représentation de la distribution de l'induction dans une coupe transversale et b) distribution de la densité de courant à $t = 10$ ms.

Pour l'inducteur, les courants prennent naissance à la périphérie du conducteur, pour devenir uniformes à la fin du régime transitoire. Tandis que les courants induits tendent à s'opposer à la cause qui leur a donné naissance (Figure III.38.b.) en créant un champ induit perturbant le champ créé par l'inducteur là où la densité de courant induite est la plus élevée (Figure III.38.a.). Ensuite, la variation de champ diminuant, la valeur du courant induit diminue et sa distribution se modifie se déplaçant vers le centre du matériau, là où les courants induits s'annuleront (Figure III.39).

C.3. Tores conducteurs

Cet exemple a pour but, lui aussi, de mettre en évidence l'influence du champ magnétique créé par un conducteur sur un autre conducteur. Le système est représenté sur la figure (Figure III.40). Ce système présente une géométrie de révolution. Pour prendre en compte cette géométrie la FIT approchée est utilisé. Le système se compose de deux conducteurs. Un conducteur externe sur lequel sera imposée une tension ou un courant et un conducteur interne dans lequel on cherche à déterminer l'évolution des courants induits. Ce système présentant des symétries, on ne modélise qu'un huitième de sa géométrie (Figure III.41).

Contrairement à l'exemple précédent, deux maillages ont été utilisés pour comparer les résultats FIT et FEM. Pour la FIT, est utilisé un maillage hexaédrique déformé tandis que pour la FEM on a recours à un maillage tétraédriques. Le nombre d'inconnues relatif aux potentiels utilisés en fonction des formulations $A-\varphi$ et $T-\Omega$ est représenté dans le tableau (Tableau III.15). Un nombre d'inconnues électriques le plus proche possible entre ces deux maillages a été utilisé.

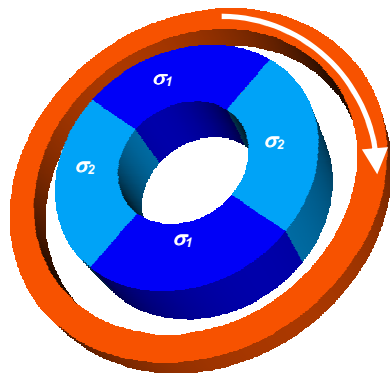


Figure III.40. Deux tores conducteurs.

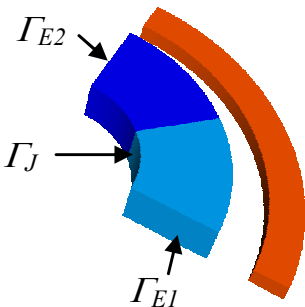


Figure III.41. Un huitième de la géométrie.

Nombre d'inconnues	T	Ω	A	φ
FIT	5 129	25 215	46 960	2 925
FEM	5 785	5 080	29 060	1 674

Tableau III.15. Nombre d'inconnues résultant des maillages utilisés pour la FIT et la MEF en fonction des potentiels utilisés et des formulations magnétodynamiques.

C.3.a. Réponse à un échelon de tension

Comme l'exemple traité précédemment, nous allons relever l'évolution des courants induits en réponse à l'excitation créée par l'imposition d'un échelon de tension aux bornes du conducteur numéro 2. Cette simulation s'effectue aussi sur 20 ms en utilisant 60 points de calculs en imposant un échelon de 1 V.

Sur la figure (Figure III.42) est représentée l'évolution du courant traversant le conducteur numéro 2. On y trouve les résultats FIT et FEM, comme sur la figure (Figure III.43) où est représentée l'évolution du courant dans le conducteur central.

On peut constater que sur ces deux figures (Figure III.42 et Figure III.43) les deux méthodes donnent des résultats équivalents. Sur les figures (Figure III.44 et Figure III.45) sont représentées la distribution des courants induits à deux instants, à la première itération ainsi qu'à $t = 10$ ms. Les répartitions de ce courant sont elles aussi analogues à celles obtenues pour le système précédent. Comparés aux résultats FEM, ceux obtenus à l'aide de la FIT approchée donnent des résultats très satisfaisants.

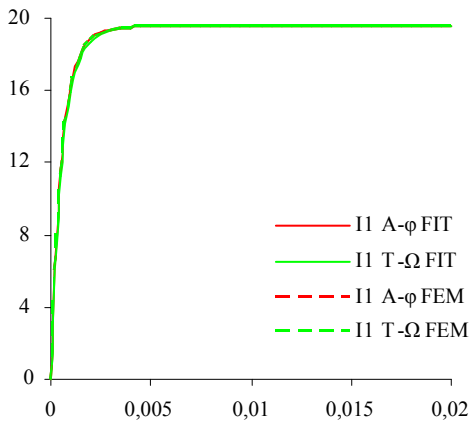


Figure III.42. Evolution du courant (A) dans l'inducteur (conducteur numéro 2).

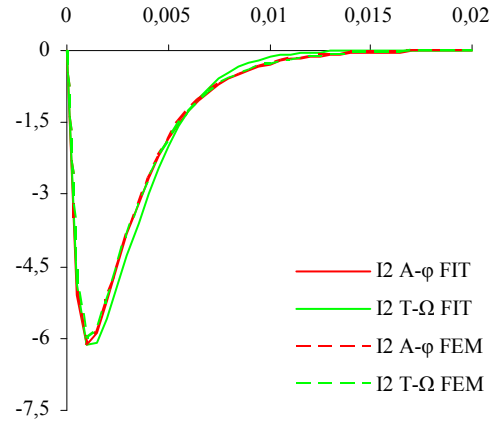


Figure III.43. Evolution du courant (A) dans l'induit (conducteur numéro 1).

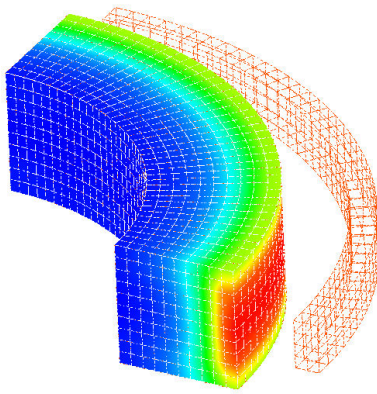


Figure III.44. Densité de courant dans l'induit à la première itération.

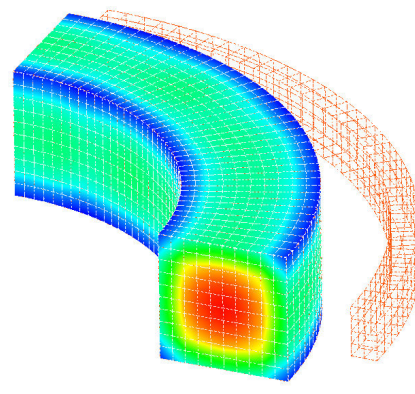


Figure III.45. Densité de courant dans l'induit à $t = 10$ ms.

C.3.b. Réponse à une excitation sinusoïdale

Afin d'évaluer le comportement de la FIT modifiée, nous avons effectué une deuxième simulation en imposant maintenant un courant de 100 A de fréquence 50 Hz à travers le conducteur externe (conducteur numéro 2). Le conducteur central est considéré en court circuit. De plus, une simulation avec $\sigma_1 = \sigma_2 = 100$ M S/m est présentée ainsi qu'avec $\sigma_1 = 100$ M S/m et $\sigma_2 = 20$ M S/m. Le but étant toujours de confronter les résultats obtenus à l'aide de la FIT approchée avec ceux obtenus à l'aide de la FEM. Ces simulations sont effectuées sur deux périodes du signal source, soit 40 ms en utilisant 60 points de calcul. Les évolutions des courants induits obtenues sont représentées sur les figures (Figure III.46 et Figure III.47).

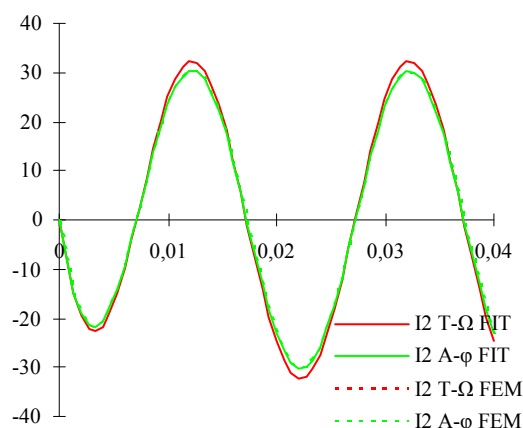


Figure III.46. Courant (I_2) dans le conducteur 2 avec $\sigma_1 = \sigma_2 = 100 \text{ M S/m}$.

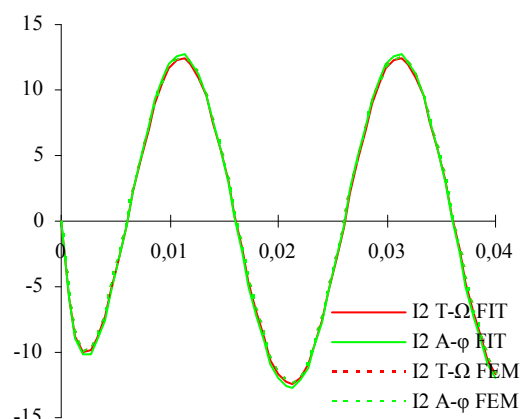


Figure III.47. Courant (I_2) dans le conducteur 2 avec $\sigma_1 = 100$ et $\sigma_2 = 20 \text{ M S/m}$.

Pour cette simulation également, on retrouve à l'aide de la FIT approchée des résultats équivalents à ceux obtenus avec la FEM. On retrouve des amplitudes et des déphasages des courants induits tout à fait semblables : 30,6 A et 54° pour $\sigma_1 = \sigma_2 = 100 \text{ M S/m}$ puis 12,4 A avec un déphasage de $68,4^\circ$ pour $\sigma_1 = 100 \text{ M S/m}$ et $\sigma_2 = 20 \text{ M S/m}$.

De plus il est à noter que, bien qu'ayant plus d'inconnues à résoudre comparativement à la méthode des éléments finis (Tableau III.15), les propriétés de la FIT et plus particulièrement la régularité du maillage, nous permettent de résoudre ce problème pour un temps de calcul moindre (Tableau III.16).

	$T-\Omega$	$A-\phi$
FIT	165 sec	301 sec
EF	221 sec	774 sec

Tableau III.16. Temps de calcul nécessaire à la résolution du problème pour la FIT et la MEF.

Ce gain en temps de calcul est rendu possible principalement grâce à l'association des deux maillages (primal et dual) qui permet de déterminer rapidement les matrices de masses discrètes ainsi que la structure de la matrice de raideur, que ce soit la partie qui concerne les potentiels vecteurs ou scalaires.

À travers ces exemples, est montré que la technique d'intégration finie donne des résultats très satisfaisants comparés à la méthode de référence qui est la méthode des éléments finis et plus particulièrement, comparée au code de calcul *code_CARMEL* développé au L2EP.

Avec l'utilisation des outils permettant l'imposition des grandeurs globales, les cas étudiés à l'aide de la FIT et de la FEM en électrocinétique, magnétostatique et magnétodynamique fournissent des résultats similaires malgré les simplifications intrinsèques de la FIT (grandeurs constantes dans les éléments). Ces simplifications entraînent des erreurs prévisibles que l'on constate sur des cas utilisant des maillages grossiers. En effet l'étude du cas académique (Figure III.14) à l'aide d'un maillage à 27 éléments entraîne une importante disparité des résultats, principalement dû au fait que les grandeurs sont constantes dans les éléments. Localement une erreur importante subsiste, mais en considérant les grandeurs globales comme l'énergie, la puissance ou encore les grandeurs globales, l'utilisation de la FIT permet d'obtenir des résultats exploitables de bonne qualité. Notamment en magnétodynamique, où malgré les erreurs locales commises, on constate que les grandeurs globales obtenues à l'aide de la FIT ou de la FIT approchée sont quasiment similaires à celles obtenues avec la FEM.

Conclusion et perspectives

La première partie de ce mémoire rappelle dans quelle structure mathématique sont définies les équations de Maxwell. La définition des espaces solutions permet de définir le problème et de préciser dans quels espaces se définissent les différentes grandeurs introduites dans les formulations établies en électrocinétique, magnétostatique et magnétodynamique. Les formulations en potentiels scalaires et vecteurs utilisées dans les trois cas de figures précédents ont été présentées. Des outils mathématiques permettant d'agir sur les termes sources et d'imposer les grandeurs globales électriques et magnétiques ont également été présentés. Ces outils sont utilisables dans toutes les formulations quel que soit le domaine d'application et permettent de prendre en compte les domaines non contractiles.

Le deuxième chapitre est dédié aux étapes de discrétisation d'un système. Les éléments de Whitney sont utilisés pour discrétiser spatialement les champs de vecteurs. Les notions de maillage primal et dual ont été introduites. Ces deux maillages permettent de définir les grandeurs discrètes quelque soit la configuration utilisée. Nous avons présenté les matrices d'incidences représentant les opérateurs vectoriels. Ces matrices peuvent être déterminées soit à partir du maillage primal soit à partir du maillage dual. La dernière étape est la discrétisation des lois de comportement. Ces lois de comportement discrètes établissent le lien entre les grandeurs définies sur le maillage primal et celles du maillage dual. Nous avons également présenté comment sont construits les champs de vecteur sources nécessaires à l'imposition des grandeurs globales dans le domaine discret ainsi que leurs utilisations à l'aide des formulations discrètes, en potentiel scalaire et vecteur, dans les trois cas étudiés (électrocinétique, magnétostatique et magnétodynamique).

Le dernier chapitre a permis d'illustrer, à travers plusieurs exemples, que la technique d'intégration finie permet d'obtenir des résultats satisfaisants. Le cas des problèmes non simplement connexe a été abordé. L'efficacité ainsi que la souplesse d'utilisation des champs de vecteurs sources pour ces cas a été montrée. Malgré l'inconvénient majeur de la FIT, qui ne permet de ne modéliser que des systèmes à géométrie simple, nous pouvons aborder des systèmes à géométrie de révolution. Les résultats obtenus à

l'aide de l'artifice présenté (FIT approchée) sont quasiment identiques à ceux obtenues à l'aide de la méthode des éléments finis.

Les travaux menés pendant cette thèse ont permis le développement d'un code basé sur la technique d'intégration finie. Ce code, initialement dédié FIT s'est vu implanté dans une version de *code_CARMEL* permettant à l'utilisateur de choisir la fois la formulation à utiliser pour résoudre un problème et la méthode de résolution (FEM ou FIT).

Il est possible d'envisager d'étendre l'utilisation de la FIT à des maillages moins réguliers ou encore à des maillages tétraédriques [50] en utilisant la méthode de construction de tubes de flux équivalents. Il serait également intéressant d'examiner le comportement numérique de la technique d'intégration finie en prenant en compte la saturation des matériaux magnétiques ainsi que le mouvement. Des travaux effectués au L2EP concernant la prise en compte du mouvement ont déjà été effectués [46]. La méthode du pas bloqué semble particulièrement bien adaptée à la technique d'intégration finie.

Un autre aspect du travail a été abordé concernant les temps de calcul. La régularité du maillage permet de déterminer très rapidement les matrices de raideurs, mais comme pour la méthode des éléments finis, la résolution du système d'équations est la méthode du gradient conjugué. Cette méthode permet d'obtenir des temps de calcul convenables mais comparée à des méthodes directes, l'avantage est donné à ces dernières. Une résolution, utilisant la factorisation de Cholesky et une renumérotation particulière des inconnues a alors été testée. Cette démarche est présentée en annexe. Au vu des premiers résultats obtenus, on peut envisager la parallélisation de la démarche en résolvant de multiples systèmes matriciels issus du système initial avec des méthodes directes.

La technique d'intégration finie est un outil intéressant car elle permet d'obtenir des résultats satisfaisants pour un faible coût en temps de calcul. Cette méthode peut être utilisée afin de vérifier le comportement de structures de systèmes électrotechniques en première approche avec un bon compromis entre temps de calculs et précisions des résultats. Il serait intéressant de développer un mailleur dédié à la FIT qui permettrait de passer beaucoup moins de temps à la saisie fastidieuse d'un maillage et plus à l'exploitation des résultats de simulation. Le maillage deviendrait alors un élément quasiment transparent pour l'utilisateur.

Annexes

A. Formulations discrètes magnétodynamiques en potentiels

A.1. Formulation T - Ω

A.1.a. Courant et force magnétomotrice imposés

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} R^T M_\sigma^{-1} R + \frac{1}{\Delta t} M_\mu & -\frac{1}{\Delta t} M_\mu G \\ -G^T M_\mu & G^T M_\mu G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \Omega \end{bmatrix}_{(t)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_\mu & -\frac{1}{\Delta t} M_\mu G \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \Omega \end{bmatrix}_{(t-\Delta t)} \\
 &+ \begin{bmatrix} -R^T M_\sigma^{-1} R - \frac{1}{\Delta t} M_\mu \\ G^T M_\mu \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} [KI]_{(t)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_\mu \\ 0 \end{bmatrix} [KI]_{(t-\Delta t)} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_\mu G \\ -G^T M_\mu G \end{bmatrix} [\alpha \varepsilon]_{(t)} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta t} M_\mu G \\ 0 \end{bmatrix} [\alpha \varepsilon]_{(t-\Delta t)}
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

A.1.b. Tension et flux imposés

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} R^T M_\sigma^{-1} R + \frac{1}{\Delta t} M_\mu & -\frac{1}{\Delta t} M_\mu G & -R^T M_\sigma^{-1} N - \frac{1}{\Delta t} M_\mu K & \frac{1}{\Delta t} M_\mu \beta \\ -G^T M_\mu & G^T M_\mu G & -G^T M_\mu \frac{1}{\Delta t} K & -G^T M_\mu \beta \\ N_f^T M_{fa}^{\sigma^{-1}} R_{fa} + K^T \frac{1}{\Delta t} M_\mu & -K^T \frac{1}{\Delta t} M_{fa}^\mu G & N^T M_\sigma^{-1} N + K^T \frac{1}{\Delta t} M_\mu K & K^T \frac{1}{\Delta t} M_\mu \beta \\ \beta^T M_\mu & -\beta^T M_\mu G & \beta^T M_\mu K & \beta^T M_\mu \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \Omega \\ I \\ \varepsilon \end{bmatrix}_{(t)} &= \\
 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V \\ \phi \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_\mu & -\frac{1}{\Delta t} M_\mu G & -\frac{1}{\Delta t} M_\mu K & \frac{1}{\Delta t} M_\mu \beta^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K^T \frac{1}{\Delta t} M_\mu & -K^T \frac{1}{\Delta t} M_\mu G & K^T \frac{1}{\Delta t} M_\mu K & K^T \frac{1}{\Delta t} M_\mu \beta^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \Omega \\ I \\ \varepsilon \end{bmatrix}_{(t-\Delta t)}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.2. Formulation A - ϕ

A.2.a. Tension et flux magnétique imposés

$$\begin{bmatrix} R^T M_\mu^{-1} R + \frac{1}{\Delta t} M_\sigma & M_\sigma G \\ G^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} & G^T M_\sigma G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_\sigma \\ G^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \end{bmatrix}_{(t-\Delta t)} + \begin{bmatrix} -M^\sigma G \\ -G^T M_\sigma G \end{bmatrix} [\alpha V]_{(t)} \\ + \begin{bmatrix} -R^T M_\mu^{-1} R - \frac{1}{\Delta t} M_\sigma \\ -G^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} [K \phi]_{(t)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_\sigma \\ G^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} [K \phi]_{(t-\Delta t)} \quad (\text{A.3})$$

A.2.b. Courant et force magnétomotrice imposés

$$\begin{bmatrix} R^T M_\mu^{-1} R + \frac{1}{\Delta t} M_\sigma & M_\sigma G & -M_\sigma \beta & R^T M_\mu^{-1} N + \frac{1}{\Delta t} M_\sigma K \\ G^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} & G^T M_\sigma G & -G^T M_\sigma \beta & G^T M_\sigma K \frac{1}{\Delta t} \\ -\beta^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} & -\beta^T M_\sigma G & \beta^T M_\sigma \beta & -\beta^T M_\sigma K \frac{1}{\Delta t} \\ N^T M_\mu^{-1} R + K^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} & K^T M_\sigma G & -K^T M_\sigma \beta^T \frac{1}{\Delta t} & N^T M_\mu^{-1} N + K^T M_\sigma K \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \\ V \\ \phi \end{bmatrix}_{(t)} = \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ \varepsilon \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t} M_\sigma & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} M_\sigma K \\ G^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} & 0 & 0 & G^T M_\sigma K \frac{1}{\Delta t} \\ -\beta^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} & 0 & 0 & -\beta^T M_\sigma K \frac{1}{\Delta t} \\ K^T M_\sigma \frac{1}{\Delta t} & 0 & 0 & K^T M_\sigma K \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \phi \\ V \\ \phi \end{bmatrix}_{(t-\Delta t)} \quad (\text{A.4})$$

B. Formulations en champs B ou H

Ces formulations n'ont pas été introduites dans le corps de ce document. Aucune grandeur (potentiel) n'est introduite, les équations de Maxwell sont utilisées sous leurs formes originales.

En faisant l'analogie entre les grandeurs magnétiques discrètes et celles d'un réseau électrique (Tableau A.1), il est possible de construire un système d'équations représentatif du système étudié. On peut appliquer la loi des nœuds aux nœuds primaux et la loi des mailles sur les facettes primales.

Grandeurs magnétiques	Grandeurs électriques
h_a	U
$\tilde{b}_{\tilde{f}}$	I
$h_a = \Re \tilde{b}_{\tilde{f}}$	$U = R I$

Tableau A.1. Analogie entre les grandeurs magnétiques discrètes et les grandeurs électriques.

On peut cependant écrire le système d'équations sous deux formes différentes. Soit en fonction du champ magnétique soit en fonction des flux d'induction (A.5) ou (A.6). En faisant l'analogie avec les circuits électriques (Figure A.1), on exprime le problème soit en fonction des tensions aux bornes des résistances soit en fonction des courants qui les traversent.

$$\begin{bmatrix} R \\ \tilde{D} M_\mu \end{bmatrix} [h] = \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{bmatrix} R M_\mu^{-1} \\ \tilde{D} \end{bmatrix} [\tilde{b}] = \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

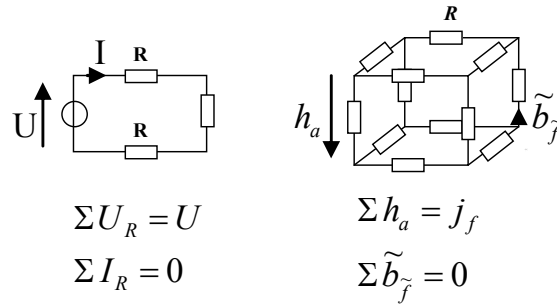


Figure A.1. Circuit électrique et magnétique.

On peut alors construire un réseau de réluctance en trois dimensions. On associe à chaque arête une réluctance à laquelle est associée une circulation de champ et un flux. Le flux magnétique, défini sur les facettes primales, est identifié à une force magnéto-motrice d'une maille composant un circuit électrique. On retrouve ainsi, transposées au cas de la magnétostatique, les lois utilisées dans les réseaux électriques. Avec : R , représentant la loi des mailles et \tilde{D} , la loi des nœuds.

Néanmoins, il apparaît une difficulté due au fait que le système d'équations à résoudre contient plus d'équations que d'inconnues. Pour s'affranchir de cette difficulté, on utilise un artifice pour rendre le système compatible avec la procédure de résolution (méthode du gradient conjugué). Pour cela, on multiplie chaque membre du système par la transposée de la matrice de raideur initiale.

$$\begin{bmatrix} R \\ G^T M_\mu \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R \\ G^T M_\mu \end{bmatrix} [h] = \begin{bmatrix} R \\ G^T M_\mu \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{bmatrix} R^T R + M_\mu G G^T M_\mu \end{bmatrix} [h] = \begin{bmatrix} R^T \end{bmatrix} [j] \quad (\text{A.8})$$

Cette méthode est assez classique pour résoudre les systèmes rectangulaires (nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues). On obtient à l'aide de cette méthode un système dit normal. Toutefois elle entraîne un conditionnement de la matrice élevée. En effet dans ce cas les valeurs propres de la matrice initiale sont élevées au carré. Dans ces conditions, les méthodes itératives, telle que la méthode du gradient conjugué, converge difficilement (voir Tableau III.10 page 115). Pour ces raisons, les formulations en potentiels sont préférées. Les matrices des systèmes d'équations obtenus sont symétriques et définies positives.

C. Résolution des systèmes linéaires

L'avantage de la FIT sur les autres méthodes, ou du moins, l'avantage d'utiliser un maillage régulier, est que les structures des matrices de raideur se déterminent rapidement. De plus, l'utilisation du maillage dual permet d'établir facilement le lien entre les éléments du maillage primal et dual nécessaire à la construction de la matrice de raideur.

À partir de ce constat, la factorisation de Cholesky, suivie d'une résolution directe simple, du type *descente – remonté*, semble intéressante. Cette méthode a été appliquée aux formulations en potentiel scalaire et plus précisément à la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ .

C.1. Factorisation de Cholesky

Le système d'équations linéaires à résoudre s'écrit sous la forme $A X = B$. On appelle A la matrice de raideur et B le terme source. La factorisation de Cholesky permet de décomposer la matrice de raideur A , symétrique et définie positive, en fonction d'une matrice L , une matrice triangulaire inférieure, tel que : $A = LL^T$. L'avantage majeur de cette décomposition est de pouvoir résoudre le système d'équations à l'aide d'une méthode directe. Les méthodes directes sont beaucoup moins coûteuses en temps de calcul. Les termes de la matrice L sont définis tels que :

$$L_{lc} = \frac{A_{lc} - \sum_{k=1}^{c-1} L_{lk} L_{ck}}{L_{cc}} \quad (\text{A.9})$$

Avec l les indices de lignes et c les indices de colonnes. Pour les termes de la diagonale, on utilise la relation suivante :

$$L_{ll} = \sqrt{A_{ll} - \sum_{k=1}^{l-1} L_{lk}^2} \quad (\text{A.10})$$

Il est également possible de décomposer la matrice de raideur à l'aide de la factorisation de Crout telle que $A = L D L^T$. Avec L , inférieure et D diagonale.

Prenons le cas de la formulation en potentiel scalaire. La structure de la matrice de raideur, obtenue à l'aide de la formulation en potentiel scalaire électrique ϕ pour un système à 75 inconnues, est représentée sur la figure (Figure A.2). Numériquement, il n'est pas utile de sauvegarder toute la matrice et plus particulièrement les termes nuls. La matrice A , pour cette formulation contient 415 termes non-nuls. La structure de la matrice L , après factorisation, est représentée sur la figure (Figure A.3).

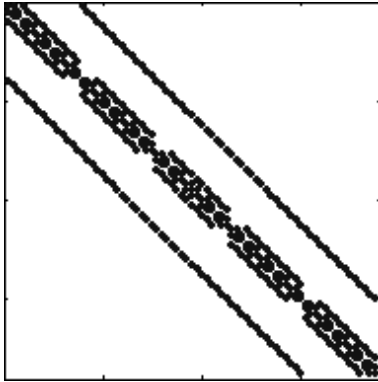
$A (AX = B)$ 415 termes non nuls

Figure A.2. Structure de la matrice de raideur de la formulation en potentiel scalaire électrique pour 75 inconnues.

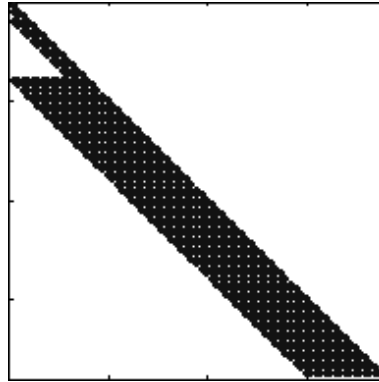
 $L (A = LL^T)$ 1013 termes non nuls

Figure A.3. Structure de la matrice triangulaire inférieure obtenue pour la formulation en potentiel scalaire électrique pour 75 inconnues.

Cette nouvelle matrice contient 1013 termes non-nuls. On constate un remplissage des lignes entre le premier terme d'une ligne et la diagonale de cette même ligne. Il peut être intéressant de diminuer ce remplissage en diminuant l'écart entre le premier terme et la diagonale de la matrice de départ A . Pour effectuer cette opération, on agit sur la numérotation des inconnues.

C.2. Méthode de la dissection emboîtée

Une méthode basée sur la théorie des graphes semble répondre au besoin de diminuer le remplissage de la matrice L . Elle permet la renumérotation des inconnues nodales à l'aide de la méthode de la dissection emboîtée [25] [26]. On agit sur la structure de la matrice de raideur en vu d'un remplissage minimal de la matrice L . Cette méthode consiste à décomposer le domaine d'étude en sous domaines, jusqu'à obtenir des sous-domaines minimum, de numéroté ces sous domaines indépendamment des autres, puis d'affecter les inconnues de rang les plus élevés aux frontières communes à ces sous domaines afin de rétablir le lien entre eux.

Considérons le domaine D un domaine conducteur dans lequel on souhaite déterminer la distribution de courant. Dans un premier temps, l'utilisation de la dissection emboîtée entraîne la décomposition du domaine D en deux sous-domaines (Figure A.4). Les inconnues définies dans les sous-domaines D_1 et D_2 sont numérotées indépendamment avant de réserver les indices d'inconnues les plus élevées pour les inconnues situées sur la frontière Γ_{1-2} . La structure de la matrice de raideur consécutive à cette première étape de dissection est représentée sur la figure (Figure A.5).

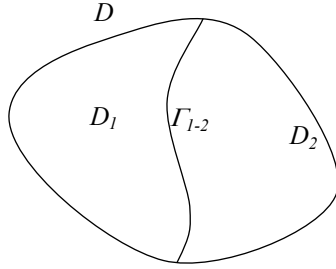


Figure A.4. Domaine d'étude D décomposé en deux sous-domaines.

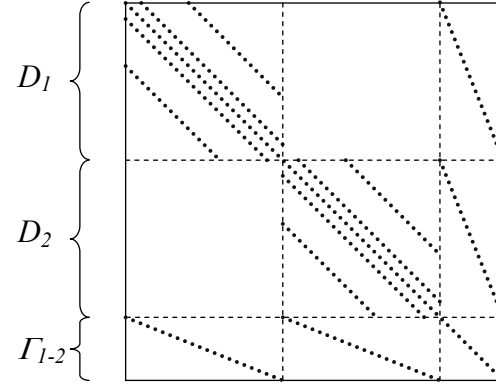


Figure A.5. Structure de la matrice de raideur utilisant la numérotation de la dissection emboîtée. Deux sous-domaines.

Les matrices correspondantes aux domaines D_1 et D_2 sont alors indépendantes l'une de l'autre. Seule la dernière ligne donne une information sur leur relation. On peut alors envisager de traiter ces matrices indépendamment.

En répétant cette décomposition géométrique au sein des sous-domaines D_1 et D_2 , soit jusqu'à obtenir quatre sous domaines numérotés indépendamment (Figure A.6), on constate un affinement de la largeur des structures matricielles de ces quatre sous-domaines (Figure A.7).

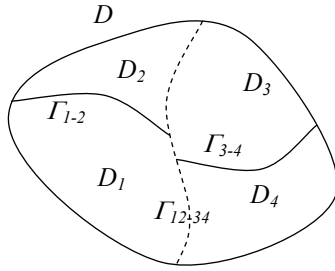


Figure A.6. Domaine d'étude D décomposé en quatre sous-domaines.

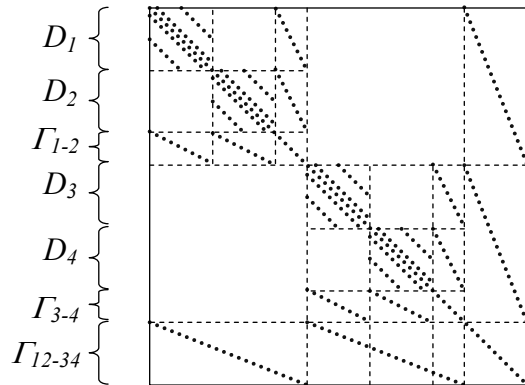


Figure A.7. Structure de la matrice de raideur utilisant la numérotation issue de la dissection emboîtée. Quatre sous-domaines.

Un motif de structure de matrice est créé lors de la première décomposition qui se répète autant de fois que l'on effectue de décomposition en sous-domaines définis. Ces opérations successives influent sur le remplissage de la matrice triangulaire inférieure L (Figure A.8).

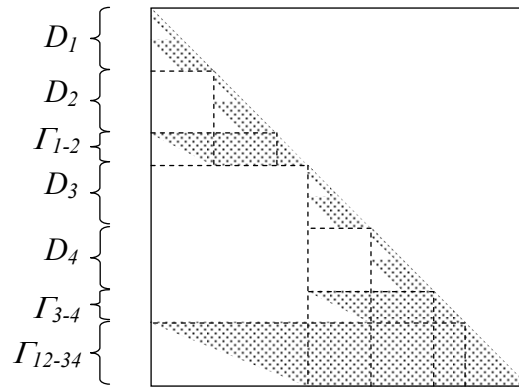
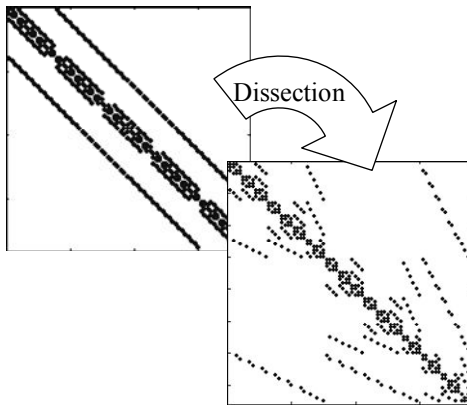
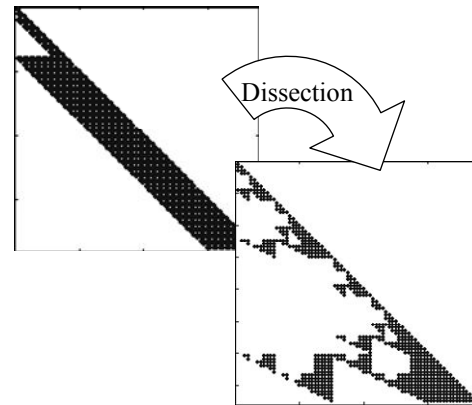


Figure A.8. Structure de la matrice triangulaire inférieure utilisant la numérotation issue de la dissection emboîtée. Quatre sous-domaines.

De cette manière, la renumérotation des inconnues nodales permet de diminuer le nombre de termes non nuls à stoker. Pour le système de 75 inconnues (Figure A.9), d'un remplissage de 1013 termes non nuls, la dissection emboîtée permet de réduire le nombre de termes à 757 termes non nuls (Figure A.10). Ce résultat est obtenu en répétant quatre fois le découpage des sous-domaines, soit au total huit sous-domaines.



415 termes non nuls



1013 → 767 termes non nuls

Figure A.9. Structures de la matrice de raideur. Numérotation classique et renumérotation à l'aide de la dissection emboîtée. Huit sous-domaines.

Figure A.10. Structures de la matrice L . Numérotation classique et renumérotation à l'aide de la dissection emboîtée. Huit sous-domaines.

Une fois la factorisation effectuée il suffit de résoudre les systèmes élémentaires $LY = B$ et $L^T X = Y$. Comparé à la méthode du gradient conjugué, qui est une méthode itérative, résoudre ces deux systèmes ne nécessite que deux boucles sur les inconnues. Pour le même problème l'avantage est indéniablement en faveur de la résolution directe.

Deux inconvénients majeurs existent néanmoins à utiliser la factorisation de Cholesky en vue d'une résolution directe. En effet pour un système à 1089 inconnues, la ma-

trice de raideur initiale nécessite le stockage de 4037 termes non nuls (Figure A.11) tandis que la matrice triangulaire inférieure requiert le stockage de 51767 termes non nuls (Figure A.12), soit près de 13 fois plus de termes.

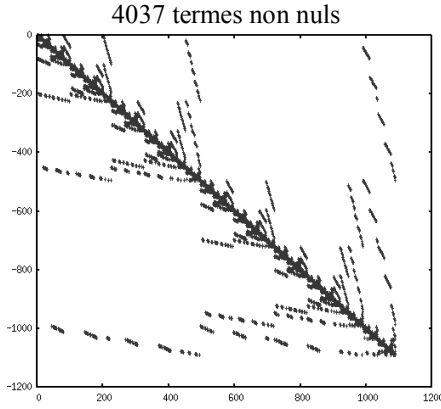


Figure A.11. Structure de la matrice de raideur utilisant la numérotation issue de la dissection emboîtée. Huit sous-domaines.

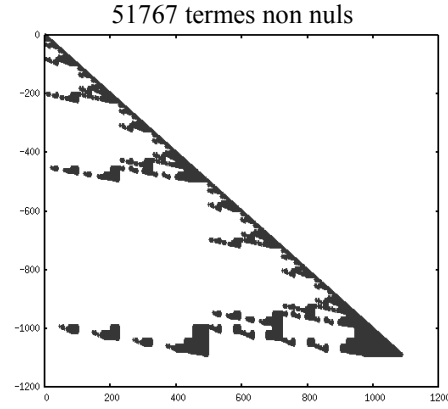


Figure A.12. Structure de la matrice triangulaire inférieure utilisant la numérotation de la dissection emboîtée.

De plus sa construction est d'autant plus coûteuse en temps de calcul, conséquence à la fois de la détermination des termes de la matrice L et du nombre de termes à calculer. Les procédures développées ont permis d'effectuer la construction de la matrice de raideur s'effectue en 0,18 secondes, tandis que celle de la matrice triangulaire s'effectue en 28 secondes. Cependant, il est possible de pallier à ces inconvénients en utilisant les propriétés induites par la méthode de résolution directe ainsi qu'en se servant de la structure de la matrice due à la renumérotation consécutive à la dissection emboîtée. La structure de la matrice triangulaire obtenue à l'aide de la dissection emboîtée entraîne une indépendance des inconnues par blocs. On peut donc envisager une parallélisation de la construction de cette matrice ainsi que de la résolution du système d'équations. En considérant le domaine décomposé en quatre sous-domaines (Figure A.4), la structure de la matrice triangulaire est celle représentée sur la figure (Figure A.8). La relation $LY = B$ peut se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 [L_1][Y_1] &= [B_1] \\
 [L_2][Y_2] &= [B_2] \\
 [L_{12}][Y_1 \ Y_2 \ Y_{12}]^T &= [B_{12}] \\
 [L_3][Y_3] &= [B_3] \\
 [L_4][Y_4] &= [B_4] \\
 [L_{34}][Y_3 \ Y_4 \ Y_{34}]^T &= [B_{34}] \\
 [L_{1234}][Y_1 \ Y_2 \ Y_{12} \ Y_3 \ Y_4 \ Y_{34} \ Y_{1234}]^T &= [B_{1234}]
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

La parallélisation s'effectuerait en quatre étapes (Figure A.13). Tout d'abord, la détermination des sous-vecteurs Y_1 à Y_4 peut se faire lors de la construction des matrices L_1 à L_4 , cette étape est la première phase de parallélisation. Le parcours inverse de la décomposition est ensuite effectué pour remonter à la valeur du vecteur Y entier. Dans notre cas on calculera simultanément les vecteurs Y_{12} et Y_{34} (étape 2) pour, à l'étape suivante, déterminer les derniers termes du vecteur Y (étape 3). Pour finir, ayant construit la matrice L dans les étapes précédentes, il ne reste plus qu'à résoudre le système $L^T X = Y$.

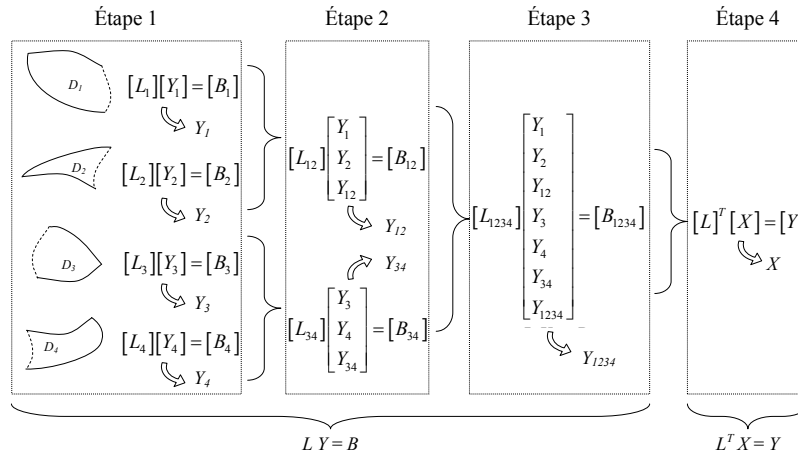


Figure A.13. Schéma de parallélisation.

La dissection emboîtée n'est pas effective pour la renumérotation des inconnues définies sur les arêtes. Par conséquent aucune formulation en potentiel vecteur n'a été résolue à ce jour à l'aide de cette méthode directe dans le cadre de cette thèse.

De ce fait aucun cas magnétodynamique n'a été résolu à l'aide de cette méthode. En effet, le système d'équations obtenu pour un problème magnétodynamique est exprimé en fonction des inconnues nodales et des inconnues définies sur les arêtes. De plus, il faudrait être capable de numérotter les inconnues scalaires et vectorielles avec une certaine dépendance pour utiliser la renumérotation des inconnues à l'aide de la dissection emboîtée. Car, avec une numérotation classique, la structure de la matrice de raideur est semblable à celle représentée sur la figure (Figure A.14). Il faudrait combiner la numérotation des inconnues nodales et d'arêtes, de telle sorte que la dissection emboîtée puisse nous permettre de faire apparaître des blocs indépendants.

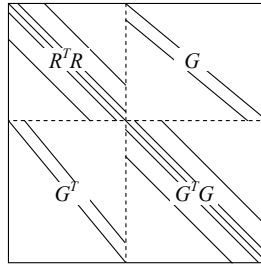


Figure A.14. Structure de la matrice de raideur obtenue en magnétodynamique.

Dans le cas d'une étude en magnétodynamique, en supposant les lois de comportement linéaires, il n'est nécessaire de ne calculer qu'une seule fois la matrice de raideur. Le temps excessif du calcul de la matrice triangulaire inférieure pourrait être négligeable comparé au temps nécessaire à la résolution du même système à l'aide de la méthode du gradient conjugué au fur et à mesure des itérations.

Références bibliographiques

- [1] Albanese R., Rubinacci G., « Magnetostatic field computations in terms of two-component vector potentials », International journal for numerical methods in engineering, vol. 29, pp. 515-532, 1990.
- [2] Albanese R., Rubinacci G., « Integral formulations for 3-D eddy-currents computation using edge-elements », IEE Proc., Part A, 135, 7, p. 457-62, 1988.
- [3] Albertier G., Le Menach Y., Ducreux J-P., Piriou F., « Consideration of the coupling of magnetic and electric equations with Finite Integration Technique (FIT) », European Physical Journal, APPLIED PHYSICS, vol. 30, pp 17-22, 2005.
- [4] Bossavit A., « Electromagnétisme en vue de la modélisation », édition Springer-verlag, 1993.
- [5] Bossavit A., « Generalized finite differences in computational electromagnetics », PIER. 32, pp. 45-64, 2001.
- [6] Bossavit A., « Whitney's form's : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism », IEE Proceedings, Vol. 135, Part A, n° 8, pp 498-499, 1988.
- [7] Bossavit A., Emson C., Mayergoyz I.D., « Méthodes numériques en électromagnétisme », Eyrolles, 1991.
- [8] Bossavit A., Kettunen L., « Yee-Like schemes on staggered cellular grids : A synthesis between FIT and FEM approaches », IEEE Trans. Mag., vol.36, n°4, Juillet 2000.
- [9] Branin F. H., « The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus », 1966.
- [10] Bullo M., Dughiero F., Guarnieri M., Tittone E., « Isotropic and Anisotropic Electrostatic field computation by means of the cell method », IEEE Transactions on magnetics, Vol. 40, No. 2, March 2004, pp. 1013-1016.
- [11] Chevalier M. W., Luebbers R. J., Cable V. P., « FDTD Local Grid with Material Traverse », IEEE Transactions On Antennas And Propagation, vol. 45, N°. 3, pp. 411-421, Sept 1998.
- [12] Clemens M., Feight S., Weiland T., « Geometric Multigrid Algorithms Using the Conformal Finite Integration Technique », IEEE Transactions On Magnetics, vol.

- 40, N°. 2, pp. 1065-1068, Mars 2004.
- [13] Clemens M., Gjonaj E., Pinder P., Weiland T., « Numerical simulation of coupled transient thermal and electromagnetic fields with the finite integration method », IEEE Transactions on magnetics, Vol. 36, No. 36, July 2000, pp. 1448-1452.
 - [14] Clemens M., Weiland T., « Magnetic Field Simulation Using Conformal F.I.T. Formulations », IEEE Transactions On Magnetics, vol. 38, n°. 2, pp. 389-392, mars 2002.
 - [15] Clemens M., Weiland T., Wilke M., « Transient Eddy Current Formulation Including Moving Conductors Using the FI Method », IEEE Trans. Mag. Vol. 36, n°4, pp. 804-808, juillet 2000.
 - [16] Clemens M., Wilke M., Weiland T., « 3-D transient eddy-current simulations using FDTD schemes with variable time-step selection », IEEE Trans. Mag., vol. 38, n°2, pp. 605-608, mars 2002.
 - [17] Clemens M., Weiland T., « Discrete Electromagnetism with the Finite Integration Technique », PIER 32, 65-87, 2001.
 - [18] Clemens M., Weiland T., « Discrete electromagnetics: Maxwell's equations tailored to numerical simulations », Internat. Compumag. Soc. Newsletter 8 (2) (2001) 13-20.
 - [19] Demenko A., Stachowiak D., « Electromagnetic torque calculation using magnetic network methods », COMPEL, vol. 27, n° 1, pp 17-26, 2008.
 - [20] Dhat G., Touzot G., « Une présentation des éléments finis », Universitaire de Compiègne, Éditeur Maloine, 1984.
 - [21] Dular P., « Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires », Thèse de doctorat, Université de Liège - Faculté des Sciences Appliquées, 1994.
 - [22] Dular P., F. Henrotte, F. Robert, A. Genon, W. Legros, « A Generalized Source Magnetic Field Calculation Method for Inductors of any Shape », IEEE Trans. Magn., Vol. 33, No.2, pp. 1398-1401, 1997.
 - [23] Dular P., W. Legros, A. Nicolet, « Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics », IEEE Trans. Magn., Vol. 34, No.5, pp. 3078-3081, 1998.
 - [24] Funieru M., « Simulation of Electromechanical Actuators Using the Finite Integration Technique », dissertation, 2007.
 - [25] Greffet N., « Instabilité non linéaire des grands reservoirs sous séisme », Congrès Giens, 2005.
 - [26] Gueye I., Juvigny X., Roux F-X., Feyel F., Cailletaud G., « Analyse et développement d'algorithmes parallèles pour la résolution directe de grands systèmes linéaires creux », 18^{ème} Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 2007.
 - [27] Henneron T., « Contribution à la prise en compte des grandeurs globales dans les problèmes d'électromagnétisme résolus avec la méthode des éléments finis », Thèse de doctorat, Université de Lille1, 2004.

- [28] Henneron T., Clenet S., Dular P., Piriou F., « Discrete finite element characterisations of source fields for volume boundary constraints in electromagnetic problems », ACOMEN 2005.
- [29] Korecki J., « Résolution de problèmes de magnétostatique à l'aide des formulations en champ », Rapport de Master, 2005, USTL LILLE I.
- [30] Korecki J., Le Menach Y., Ducreux J-P., Piriou F., « Numerical solutions in primal and dual mesh of magnetostatic problem solved with the Finite Integration Technique », COMPEL, vol. 27, n°1, pp. 47-55, 4-2008.
- [31] Korecki J., Le Menach Y., Piriou F., Vérité J-C., « Technique de prise en compte des grandeurs globales appliquée à la technique d'intégration finie dans le cas des problèmes d'électrocinétique », RIGE, vol. 11, n°2-3, pp. 185-203, 2008.
- [32] Larger I-E., Tonti E., de Hoop A-T, Mur G, Marrone M., Finite Formulation and Domain integrated field relations in electromagnetics – A synthesis, IEEE Trans. Mag., Vol. 39, n°3, pp. 1199-1202, mai 2003.
- [33] Le Menach Y., « Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électromagnétiques », Thèse de Doctorat, Université de lille1, 1999.
- [34] Le Ménach Y., Clenet S., Piriou F., « Determination and Utilisation of the Source Field in 3D Magnetostatic Problems », IEEE Trans. Mag. vol. 34, n°5, pp 2509-2512, 1998.
- [35] Li C., Ren Z., Razek A., « Application of complementary formulations and adaptive mesh refinement to non-linear magnetostic problems », IEEE Trans. Mag, vol. 31, pp. 1376-1379, 1995.
- [36] Lucas, J. R., « Matrix analysis of networks », 2001.
- [37] Marrone M., « Computational aspects of the cell method in electrodynamics », PIER 32, pp. 317-356, 2001.
- [38] Marklein, R., « The Finite Integration Technique as a General Tool to Compute Acoustic, Electromagnetic, Elastodynamic, and Coupled Wave Fields », In W. R. Stone (ed.), Review of Radio Science: 1999-2002 URSI, IEEE Press and John Wiley and Sons, Piscataway and New York, pp. 201-244.
- [39] Mattiussi C., « The geometry of time stepping », PIER 32, 123-149, 2001.
- [40] Parent. G., « Utilisation de la notion de maillage dual pour le calcul de champ », Rapport de DEA, 2002, USTL LILLE I.
- [41] Podebrad O., Clemens M., Weiland T., « New Flexible Subgridding scheme for the Finite Integration Technique », IEEE Trans. Magn., vol. 39, n°. 3, pp. 1662-1665, Mai 2003.
- [42] Reinschke K. J., « On network models and the symbolic solution of network equations », Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2001, Vol. 11, No. 1, pp. 237-269
- [43] Repetto M., Trevisan F., « Global formulation of 3D magnetostatics using flux and gauged potentials », International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 60, Issue 4, pp. 755-772, 2004.
- [44] Schuhman R., Weiland T. « Stability of the FDTD algorithm on nonorthogonal grids related to the spatial interpolation scheme », IEEE Trans. Mag. Vol 34, n°5,

septembre 1998.

- [45] Schuman R., Weiland T., Conservation of discrete energy and related laws in the finite integration technique, PIER 32, 301-316, 2001.
- [46] Shi X., « Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis, appliquée à la modélisation des machines électriques », Thèse de Doctorat, Université de Lille1, 2005.
- [47] Thoma P., Weiland T., « Numerical stability of finite difference time domain methods », IEEE Trans. Magn. , vol. 34, pp. 2740-2743, Sept 1998.
- [48] Tonti E., « Finite Formulation of the electromagnetic field », PIER. 32, pp. 1-44, 2001.
- [49] Van Rienen U., « Numerical methods in computational electrodynamics », Edition Springer, 2001.
- [50] Van Rienen U., Weiland T., « Triangular discretization for the evaluation of RF-fields in cylindrically symmetric cavities », IEEE Trans. Mag., Mag. 21, 1985.
- [51] Weiland T., « A Discretization Method for the Solution of Maxwell's Equations for Six-Component Fields », Electronics and Communication (AEÜ), Vol. 31(3), pp. 116-120, 1977.
- [52] Weiland T., « Advances in FIT/FDTD modeling », in Proc. 18th ACES Conf. Monterey, CA, 2002, pp. 1-1-14.

CONTRIBUTION A LA MODELISATION 3D DES SYSTEMES ELECTROMAGNETIQUES BASSE FREQUENCE A L'AIDE DE LA METHODE D'INTEGRATION FINIE (FIT)

Résumé : La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus utilisée pour résoudre numériquement des problèmes rencontrés en mécanique, en thermique, en électromagnétisme, etc. Dans le domaine du génie électrique elle permet de réaliser la simulation de dispositifs électromagnétiques avec une grande précision. Cependant, devant les capacités grandissantes des outils de calcul, on est amené à modéliser des systèmes de plus en plus complexes. Paradoxalement, devant les temps de calcul importants que cela engendre, l'intérêt des industriels se porte sur des méthodes alternatives permettant d'obtenir des résultats plus rapidement.

Les travaux menés durant cette thèse se sont portés sur l'étude d'une méthode alternative, la technique d'intégration finie (FIT). Cette méthode permet d'obtenir un bon compromis entre rapidité des temps de calcul et qualité de la solution. À travers des problèmes d'électrocinétique, de magnétostatique et de magnétodynamique, il est montré, avec ces travaux, que les résultats obtenus à l'aide de la FIT sont de bonnes qualités comparés à la méthode des éléments finis. Des outils appliqués à l'imposition des grandeurs globales électriques et magnétiques sont aussi présentés dans ce travail.

Mots clefs : Technique d'intégration finie, modélisation électromagnétique, électrocinétique, magnétostatique, magnétodynamique, grandeurs globales.

CONTRIBUTION TO THE 3D MODELLING OF LOW FREQUENCY ELECTROMAGNETIC SYSTEMS USING FINITE INTEGRATION TECHNIQUE (FIT)

Abstract : To solve numerically the mechanics, thermals and magnetodynamics problems, the finite element method is the most used. In electrical engineering, this method allows the simulation of electromagnetic devices with a great accuracy. However, in spite of growing capacity of the computers, the studied models become more and more complicated. From an industrial point of view, these computation times are not acceptable. Therefore, a fast and reliable numerical tool is necessary.

The developments realized during this thesis concern an alternative method, the finite integration technique. This method allows finding a compromise between computation times and accuracy. For the cases of electrokinetics, magnetostatics and magnetodynamics, simulations using FIT proved that results are accurate. Mathematical tools used to impose the electric and magnetic quantities.

Keywords : Finite integration technique, electromagnetic modeling, electrokinetic, magnetostatic, magnetodynamique, global quantities.