

Université Lille I
École Doctorale de Mathématiques et Informatiques ED (184)

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE I

Spécialité : Mathématiques

par

Stylian ZANOS

Directeur de thèse : Sadok KALLEL

Méthodes de Scindements Homologiques en Topologie et en Géométrie

Rapportée par

M. Pascal Lambrechts Université de Louvain la Neuve
M. Paolo Salvatore Université Tor Vergata, Roma II.

Soutenue le 06 Novembre 2009 devant le jury composé de

M. David Chataur	Université de Lille I	(Examineur)
M. Sadok Kallel	Université de Lille I	(Directeur)
M. Pascal Lambrechts	Université de Louvain la Neuve	(Rapporteur)
M. Paolo Salvatore	Université Tor Vergata, Roma II	(Rapporteur)
M. Lionel Schwartz	Université Paris 13	(Président)
M. Daniel Tanré	Université de Lille I	(Examineur)

Remerciements

à mes parents
à ma femme Hana
à Ammouzdig

Il est écrit "tu accoucheras dans la douleur". Cela a été vrai pour moi jusqu'au moment où je me suis libéré en arrivant au terme de mon doctorat. Mais aujourd'hui le résultat est là, sous vos yeux. Il justifie tous les sacrifices qui ont été faits tant par moi et mon directeur de thèse que par mes proches qui m'ont soutenu.

J'aimerais ici exprimer ma profonde gratitude à un grand homme dont j'admire autant ses qualités de mathématicien que ses qualités humaines : M. Sadok Kallel mon directeur de thèse. Sans lui ce travail n'aurait jamais abouti. Maintes fois il a relancé la machine, au moment où je croyais que tout était perdu, sans jamais cesser de croire en moi. Je l'en remercie du fond du coeur.

Je remercie également mon épouse Hana qui a accepté les sacrifices et m'a toujours soutenu dans mes choix. Je suis également fier de présenter ce travail à mes parents qui m'ont permis d'arriver au but et m'ont encouragé dans cette voie. Cette thèse est tout particulièrement dédiée à mon père qui m'a, le premier, fait découvrir la beauté des mathématiques.

Je remercie mes collègues, l'équipe de Lille, particulièrement David Chataure pour son amitié et Daniel Tanré qui m'a fait découvrir en Licence la beauté de la Topologie. Je remercie Walid Benhammouda pour les journées entières passées ensemble à travailler, Paolo Salvatore pour son incroyable perspicacité. Enfin je remercie tous mes amis particulièrement Lefteri Halari, Kalamia Denaxas, Arnaud Fache, Philippe Bazin, Yves Quiniou, Romain Vareille, Robin, Martin et Joël Quiniou, Jean-Paul Bonnet, Pierre-Marie Moyaux, Vincent Houseaux, Nicolas Jozefowicz, Axelle Amon, Stéphane Zhand, Stéphane Flon, et tous ceux que je n'ai pas nommés ici et qui m'ont côtoyé durant ces années de thèse. Je remercie également mes récents amis et collègues : Anthony, Vivien, Christophe, Vanessa, Robert, Veronique, Laetitia. Enfin cette thèse est dédiée à Ammouzdig qui se reconnaîtra et qui sait tout ce que je lui dois!

Table des matières

Remerciements	1
1 Critères de Scindements	9
1.1 Notations et Premières Définitions	9
1.2 Scindement à la Dold-Steenrod	10
1.3 Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen	15
1.3.1 Dérivation et Formalisme	20
1.3.2 Exemples de Références	21
2 Scindements Homologiques	27
2.1 Produits de Permutations I	27
2.2 Produits Symétriques et Généralisation du Théorème de Steenrod	30
2.3 Produits de Permutations II	34
2.3.1 Produits Alternés	34
2.3.2 Produits Cycliques	36
2.3.3 Produits Diédraux	37
2.4 Constructions de Borel et Généralisations	38
2.5 Constructions Etiquetées	41
2.6 Espaces de Polynômes et Stratifications de Young-Samuel	43
3 Scindements Stables	47
3.1 Espaces de Configurations et Analogues	47
3.1.1 Orbit Configurations	50
3.2 Configurations ordonnées	52
3.3 Analogues Fiberwise	53
3.3.1 Fibrés associés	56
3.4 Tresses et Espaces Classifiants	57
3.4.1 Vector Braids	58
3.4.2 Produit en Couronne	59
3.5 Espaces Polyédraux	60
3.5.1 Moment Angulaire Généralisé	64

4 Constructions Etiquetées	67
4.1 Produits Tronqués	67
4.2 Produits Symétriques Généralisés	68
4.2.1 Homotopie avec Coefficients	70
4.3 Un Théorème de Scindement	71
4.4 Fonctions Rationnelles	73
4.4.1 $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$ et le Scindement de Segal	74
4.4.2 Fonctions Rationnelles dans les Grassmanniennes	76
A Espaces Fonctionnels et Modèle de May-Milgram	77
A.0.3 Analogues Equivariants	79

Introduction générale

L'objectif de cette thèse est d'étudier les scindements (ou "splittings") homotopiques et homologiques d'espaces filtrés, et de développer des critères simples permettant d'établir ces scindements. Une deuxième partie de notre travail consiste à illustrer nos théorèmes principaux par une longue liste d'exemples touchant à la fois à la topologie et à la géométrie algébriques. On étudiera par exemple les espaces de configurations (cf. section 3.1), les espaces de tresses (cf. section 3.4) et les fonctions rationnelles (cf. section 4).

Soit X un espace topologique, que l'on supposera généralement du type d'homotopie d'un CW -complexe fini, connexe et pointé. Supposons que l'on puisse avoir une filtration d'espaces

$$* \subseteq F_0(X) \subset F_1(X) \subset \cdots \subset F_n(X) \subset \cdots \quad (0.0.1)$$

qui dépend "fonctoriellement" de X (voir chapitre 1). On supposera $F_i = \emptyset, i < 0$. On se pose alors la question de savoir si cette filtration se scinde en homologie. C'est-à-dire si

$$\begin{aligned} h_*(F_n(X)) &\cong h_*(F_n(X), F_{n-1}X) \oplus h_*(F_{n-1}X) \\ &\cong \bigoplus_{i=0}^n h_*(F_i(X), F_{i-1}(X)) \end{aligned}$$

pour h_* une théorie de l'homologie généralisée. On se pose également la question de savoir si une telle filtration se scinde *stablement* ; c'est-à-dire pour tout n il existe une équivalence d'homotopie

$$\Sigma^\infty F_n(X) \simeq \bigvee_{i=0}^n \Sigma^\infty (F_i(X)/F_{i-1}X)$$

compatiblement avec les inclusions (définition 1.2.13). Un scindement stable conduit à un scindement pour toute théorie généralisée de l'homologie.

Il existe dans la littérature une pléthore de tels scindements obtenus par des techniques plus diverses les unes que les autres [4, 20, 54]. Un des objectifs premiers de notre travail est d'unifier un grand nombre de tels scindements et de donner une méthode simple et générale pour les obtenir. Nos idées et techniques sont basées principalement sur des idées de Dold [24] et de Fred Cohen ([16], annexe, [20]).

La base de notre échafaudage consiste tout d'abord à construire des applications appelées

applications de *James-Hopf* et qui permettent de comparer un terme de la filtration avec ses sous-termes. Ces applications de James-Hopf sont une sorte “d’application transfer”. Leur existence a permis à Albrecht Dold de donner une courte démonstration d’un théorème de scindement homologique énoncé mais non démontré par Steenrod (chapitre 2). Une idée similaire mais plus fine a permis à Fred Cohen de donner des scindements stables (dans le cas d’espaces de configurations). Une généralisation de ces deux techniques de splittings a été bien entamée dans [20]. Dans cette thèse nous allons plus loin non seulement dans la généralisation mais également dans les applications.

Dans le Chapitre 1 nous introduisons les notations et les premières définitions. Nous présentons et démontrons les techniques et critères de scindement de filtrations *admissibles* par rapport à certains foncteurs *linéaires* (dans le sens de Goodwillie) associés à des théories généralisées de l’homologie. Deux critères principaux seront énoncés et démontrés. Le premier (théorème 1.2.4) donne un splitting général par rapport à tout foncteur linéaire G . Une sous-version de ce critère (théorème 1.2.6) raffine l’énoncé pour les foncteurs qui sont des *triples* (ou monades). Le second critère de scindement, et peut-être notre plus important, est le théorème 1.3.3 qui donne un critère de scindement stable. Ce théorème est ensuite utilisé partout dans la thèse pour retrouver et raffiner de nombreux splittings connus. La fin de ce chapitre 1 contient deux exemples “de références” complètement détaillés servant de prototype pour nos démonstrations.

Dans le Chapitre 2, nous étudierons les scindements homologiques classiques associés au foncteur SP^∞ . On généralise le scindement de Dold-Steenrod 2.1.3 dans plusieurs directions. Tout d’abord nous en donnons une version pour les produits de permutations alternés, cycliques et diédraux (sections 2.3.2, 2.3.3). Plus important nous montrons que la filtration d’un produit symétrique $SP^n X$ par la multiplicité des points se trouvant dans un sous-espace $A \subset X$ se scinde en homologie si et seulement si $H_*(A)$ se plonge dans $H_*(X)$ (Théorème 2.2.4). Dans la section 2.4 nous scinderons en homologie, et même stablement sous certaines conditions, des constructions de Borel associées à des groupes de permutations. En fin de chapitre nous donnerons une filtration de Pol_n l’espace des polynômes complexes unitaires de degré n et la scinderons en homologie singulière.

Dans le Chapitre 3 nous étudierons les scindements stables des espaces de configurations de n -points non ordonnés sur un espace X , ou *espaces de tresses* $B(X, n)$. La difficulté consistant à construire dans ce cas une bonne filtration (3.1.3). En appliquant ce scindement à la sphère $B(S^m - p, n)$ on obtient un résultat bien connu de V. Snaith (dans le cas m fini) ou de D. Kahn (si $m = \infty$). Également nous utiliserons nos critères principaux pour donner des scindements d’espaces classifiants de groupes classiques comme les groupes symétriques, les groupes de tresses et les produits en couronnes §3.4.2. Enfin ce chapitre sera clos par l’étude et le scindement des espaces polyédraux. Pour cela nous systématisons la construction des applications de James-Hopf qui deviennent une forme de “dérivation le long d’un simplexe”.

Le chapitre 4, dernier chapitre de cette thèse, étudie les produits symétriques généralisés $SP_G(X)$ qui sont grosso modo la donnée de points de X étiquetés par des monoïdes abéliens G

(construction de McCord). Ces espaces correspondent, dans le cas où G est un groupe abélien finiment engendré, à l'homologie à coefficients dans G (théorème 4.2.3). Nous énonçons un théorème de scindement pour ces espaces lorsque les étiquettes sont des groupes cycliques (théorème 4.3.1)¹. Ce théorème généralise un scindement de Milgram-Loeffler donné pour les produits tronqués [38] et répond à des questions de [32]. Finalement et dans la section 4.4 nous étudions le scindement homologique de l'espace de fonctions rationnelles $Rat_k(\mathbb{P}_n)$ (scindement de Segal). Notre espoir est de pousser nos techniques plus loin et de donner plus généralement un scindement homologique des applications rationnelles dans une grassmannienne quelconque, généralisant ainsi [50] et simplifiant des calculs de Mann et Milgram.

Une partie de notre travail sera publiée conjointement [35].

1. Résultat obtenu également et indépendamment par J. Wang dans sa thèse [56].

Chapitre 1

Critères de Scindements

1.1 Notations et Premières Définitions

On pose $I = [0, 1]$ et D^n le disque fermé unité de \mathbb{R}^n .

Sauf mention du contraire, tous les espaces topologiques qui interviennent dans cette thèse sont supposés connexes par arcs et ayant le type d'homotopie d'un CW complexe de type fini (c'est-à-dire ayant un nombre fini de cellules). On dénotera donc par CW (resp. CW^*) la catégorie de tels espaces (resp. de tels espaces pointés). Dans la catégorie CW , nous rappelons que le type d'homotopie faible coïncide avec le type d'homotopie, nous ne ferons donc pas de distinction entre les deux.

Une filtration (croissante) $F_\bullet := \{F_k\}_{k \geq 0}$ est une collection d'espaces dans CW et d'inclusions de sous-espaces fermés

$$F_0 \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_k \hookrightarrow \dots \quad (1.1.1)$$

Cette filtration est finie car elle se stabilise, c'est à dire si $F_k = F_{k+1} = \dots$ après un certain cran k . On supposera également que $F_i = \emptyset$ pour tout $i < 0$.

On désignera par \bar{F}_n la cofibre de $F_{n-1} \hookrightarrow F_n$.

Si $f : A \subset X$ est un sous-espace fermé, on notera par q l'application quotient $X \longrightarrow C_f$, ou C_f est le mapping cone de f . On rappellera que si f est une cofibration (voir plus bas), alors C_f est du même type d'homotopie que X/A . L'image d'un élément $x \in X$ par $q(x) := [x]$. En général, dans cette thèse, l'écriture $[-]$ se référera à une classe d'équivalence.

Rappelons qu'une inclusion $i : A \hookrightarrow X$ d'un sous-espace fermé est une cofibration si $A \times I \cup_{A \times \{0\}} X$ est un rétracte de $X \times I$. Pour $A \hookrightarrow X$ une cofibration, on dira aussi que A est cofibrant dans X . Ce que l'on retient est qu'un sous-espace cofibrant A possède un voisinage ouvert $U \subset X$ qui se rétracte par déformation sur A . Cette condition assure à l'inclusion $A \hookrightarrow X$ de bonnes propriétés homotopiques.

Définition 1.1.1 *Une filtration sera dite admissible si c'est une suite de cofibrations (1.1.1) d'espaces $F_k \in CW$ ou CW^* . On notera $q_k : F_k \longrightarrow \bar{F}_k$ l'application quotient.*

1.2 Scindement à la Dold-Steenrod

Commençons par rappeler que G est un endo-foncteur *linéaire* sur CW si G est un foncteur *covariant* ayant les propriétés suivantes :

- $G(*) \simeq *$,
- Toute famille d'espaces pointés $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ avec l'inclusion $* \hookrightarrow X_\alpha$ non-dégénérée¹, induit une équivalence faible d'homotopie $\prod_{\alpha \in I} G(X_\alpha) \simeq G(\bigvee_{\alpha \in I} X_\alpha)$ où \prod est la colimite indexée sur un ensemble dénombrable I .
- G transforme toute cofibration $A \hookrightarrow X$ en quasifibration $G(X) \longrightarrow G(X/A)$ de fibre $G(A)$.

Remarque 1.2.1 La covariance du foncteur G est importante puisque le foncteur $\text{Map}(-, Y)$, pour Y un espace fixé, satisfait aussi aux propriétés ci-dessus mais n'est pas un foncteur linéaire.

Définition 1.2.2 *Étant donné une filtration $F_\bullet := \{F_k\}_{k \geq 0}$ comme en (1.1.1), nous dirons que la filtration F_\bullet se scinde par rapport au foncteur G s'il existe pour tout $n \geq 0$ une équivalence faible d'homotopie*

$$G(F_n) \simeq G\left(\bigvee_{0 \leq k \leq n} \bar{F}_k\right)$$

*Habituellement on demandera que $F_0 = *$ mais tous les résultats restent vrais si le premier terme F_0 de la filtration n'est que faiblement contractible.*

Remarque 1.2.3 Les foncteurs linéaires donnent les théories connectives d'homologie h_* . Ainsi il existe toujours un spectre \mathbf{E} tel que $G(X) \simeq \Omega^\infty(\mathbf{E} \wedge X)$, et on a que

$$\pi_i(G(X)) =: \tilde{h}_i(X)$$

la valeur de la théorie. Ainsi dire qu'une filtration croissante F_\bullet se scinde par rapport à G revient à dire que

$$\tilde{h}_i(F_n) \cong \bigoplus_{k=1}^n h_i(F_k, F_{k-1}) = \bigoplus_{k=0}^n \tilde{h}_i(\bar{F}_k)$$

ou l'homologie réduite est $\tilde{h}_*(X) := h_*(X, \{p\})$. Pour se débarrasser de la notation réduite, on posera $F_k = \emptyset$ si $k < 0$. Dans ce cas le splitting homologique ci-haut prendra la forme

$$h_i(F_n) \cong \bigoplus_{k=0}^n h_i(F_k, F_{k-1})$$

Notre premier résultat énonce un critère simple et général de scindement ; l'idée clé étant que les foncteurs linéaires transforment les cofibrations en quasifibrations.

1. $* \in X$ est non-dégénérée si c'est un rétracte par déformation d'un voisinage ouvert de X .

1.2. Scindement à la Dold-Steenrod

Théorème 1.2.4 Soit $F_\bullet = \{F_k\}_{k \geq 0}$ une filtration admissible avec $F_0 \simeq *$ et G un foncteur linéaire. Supposons également qu'il existe pour chaque entiers naturels $k \leq n$ des applications de "James-Hopf" $\partial_{n,k} : G(F_n) \longrightarrow G(\overline{F}_k)$ vérifiant deux conditions

1. **condition de compatibilité :**

Pour $k < n$, le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} G(F_n) & & \\ \uparrow & \searrow \partial_{n,k} & \\ G(F_{n-1}) & & G(\overline{F}_k) \\ & \nearrow \partial_{n-1,k} & \end{array}$$

2. **condition "∂_{n,n}" :** $\partial_{n,n}$ est l'image à homotopie près de la flèche quotient $q_n : F_n \longrightarrow \overline{F}_n$ par le foncteur G .

Sous les hypothèses précédentes la filtration F_\bullet se scinde par rapport à G .

PREUVE. Nous avons deux suites de cofibrations $F_{n-1} \longrightarrow F_n \longrightarrow \overline{F}_n$ et

$$\bigvee_{k \leq n-1} \overline{F}_k \longrightarrow \bigvee_{k \leq n} \overline{F}_k \longrightarrow \overline{F}_n$$

en leur appliquant le foncteur G les applications de James-Hopf nous permettent de les comparer. Précisément on a des flèches $\prod \partial_{n,k} : G(F_n) \longrightarrow \prod_{k \leq n} G(\overline{F}_k) \simeq G(\bigvee_{k=0}^n \overline{F}_k)$. Les hypothèse du théorèmes montrent que le diagramme suivant est commutatif à homotopie près et que les suites de flèches verticales sont des quasifibrations.

$$\begin{array}{ccc} G(F_{n-1}) & \xrightarrow{\prod \partial} & G(\bigvee_0^{n-1} \overline{F}_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(F_n) & \xrightarrow{\prod \partial} & G(\bigvee_0^n \overline{F}_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(\overline{F}_n) & \xrightarrow{=} & G(\overline{F}_n) \end{array} \quad (1.2.1)$$

La commutativité de la partie supérieure est obtenue par les conditions de compatibilité et la commutativité de la partie inférieure est obtenue par la condition "∂_{n,n}". On procède maintenant par récurrence. Pour $n = 1$, $\overline{F}_1 = F_1$. (La filtration se scinde par rapport à G au 1^{er} cran.) Supposons que la filtration se scinde par rapport à G au cran $n - 1$ c'est-à-dire que l'on a $G(F_{n-1}) \simeq G(\bigvee_0^{n-1} \overline{F}_k)$. L'hypothèse de récurrence montre alors que la flèche supérieure est une équivalence faible d'homotopie, la flèche inférieure est aussi une équivalence faible d'homotopie.

topie. Le lemme des cinq permet alors de conclure que la flèche horizontale du milieu est une équivalence faible d'homotopie ce qui conclut la démonstration. ■

L'appellation "James-Hopf" est expliquée dans la remarque 1.3.12.

Remarque 1.2.5 (Triples) En pratique les applications de James-Hopf seront souvent données à travers des flèches $\partial_{n,k} : F_n \longrightarrow G(\overline{F}_k)$ vérifiant à homotopie près

$$\partial_{n-1,k} : F_{n-1} \xrightarrow{i_{n-1,n}} F_n \xrightarrow{\partial_{n,k}} G(\overline{F}_k) \quad , \quad \partial_{n,k} \circ i_{n-1,n} \simeq \partial_{n-1,k} \quad (1.2.2)$$

Les applications de James-Hopf s'obtiennent alors en appliquant G

$$G(F_{n-1}) \longrightarrow G(F_n) \longrightarrow GG(\overline{F}_k)$$

On définit un *triple* comme étant un endofoncteur G de CW^* qui est linéaire et équipé de transformations naturelles

$$\eta : Id \longrightarrow G \quad , \quad \mu : G^2 \longrightarrow G$$

tel que

$$\mu \circ G\eta = \mu \circ \eta G = id \quad , \quad \mu \circ G\mu = \mu \circ \mu G$$

Les foncteurs G qui sont des triples possèdent donc une rétraction $GG(\overline{F}_k) \longrightarrow G(\overline{F}_k)$ qui permet d'étendre (1.2.2) en un diagramme comme dans les hypothèses du théorème 1.2.4. L'existence donc de (1.2.2) c'est-à-dire d'un diagramme commutatif à homotopie près de la forme

$$\begin{array}{ccc} & F_n & \\ & \uparrow & \searrow \partial_{n,k} \\ & & G(\overline{F}_k) \\ & \uparrow & \nearrow \partial_{n-1,k} \\ F_{n-1} & & \end{array} \quad (1.2.3)$$

est suffisante pour donner un scindement lorsque G est un triple. Les exemples classiques de triples sont $G = SP^\infty$ ou $G = \Omega^\infty \Sigma^\infty$ (voire ci-dessous) et plus généralement tout foncteur de la forme $G(-) = \Omega^\infty(R \wedge \Sigma^\infty -)$ où R est un spectre unitaire en anneaux.

Précisément voici un critère de scindement par rapport à un triple.

Théorème 1.2.6 Soit $F_\bullet = \{F_k\}_{k \geq 0}$ une filtration admissible et G un foncteur triple. Supposons également qu'il existe pour chaque entiers naturels $k \leq n$ des applications de "James-Hopf" $\partial_{n,k} : F_n \longrightarrow G(\overline{F}_k)$ vérifiant deux conditions

1. **condition de compatibilité** : Pour $k < n$ le diagramme (1.2.3) commute à homotopie près.

1.2. Scindement à la Dold-Steenrod

2. **condition "∂_{n,n}"** : ∂_{n,n} est homotope à la composée η_{F_n} ∘ q_n.

Alors la filtration F_• se scinde par rapport à G :

$$G(F_n) \simeq G \left(\bigvee_{0 \leq k \leq n} \bar{F}_k \right)$$

Remarque 1.2.7 En pratique et si on considère F_{n-i} comme un sous-espace de F_n, on définit ∂_{n,k} pour tout k ≤ n et on obtient les ∂_{n-i,k} par restriction.

Exemple 1.2.8 Quand la filtration est donnée par des rétractes F_k ↪ F_{k+1} ayant pour rétraction r_k : F_{k+1} → F_k, on prend alors comme applications de James-Hopf la composée ∂_{n,k} := η_{F_k} r_k r_{k+1} ... r_{n-1}. Les conditions du théorème sont alors clairement satisfaites et nous retrouvons le scindement par rapport à toute théorie d'homologie.

Exemple 1.2.9 (Scindement en Homologie Entière et Produit Symétrique). Définissons le n^{ème} produit symétrique SPⁿX comme étant le quotient de Xⁿ sous l'action par permutation du n^{ème} groupe symétrique S_n.

Nous écrirons les élément de SP^kX comme des classes d'équivalences

$$X^k \longrightarrow \text{SP}^k X \quad , \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto [x_1, \dots, x_n]$$

La classe [x₁, ..., x_n] est alors un n-uplet non ordonné de points de X, on le notera par moment multiplicativement sous forme de produit abélien x₁x₂...x_k. Remarquons que nous avons un produit (*concaténation*) pour tout couple d'entiers naturels (n, m)

$$\text{conc} : \text{SP}^n X \times \text{SP}^m(X) \longrightarrow \text{SP}^{n+m}(X)$$

Dans la suite il sera commode d'identifier SPⁿ⁻¹(X) avec la sous espace de SPⁿ(X) constitué de tous les n-uplets (non ordonnés) comprenant le point base. Le produit symétrique infini SP[∞]X est alors la limite directe des plongements SPⁿX → SPⁿ⁺¹X appliquant ζ ↦ [ζ, *] où * ∈ X désigne le point base. Ainsi pour résumer

$$\begin{aligned} \text{SP}^n X &= \{[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots] \mid \text{au plus } n \text{ points } \neq *\} \\ \text{SP}^\infty X &= \{[x_1, x_2, \dots] \mid \text{un nombre fini de points } x_i \neq *\} \end{aligned}$$

Le foncteur SP[∞] est un triple (donc aussi un foncteur linéaire) et un théorème classique de Dold et Thom [26] affirme que pour des espaces connexes X

$$\pi_i(\text{SP}^\infty(X)) \cong \tilde{H}_i(X; \mathbb{Z})$$

où \tilde{H} représente l'homologie réduite. En fait, comme discuté dans l'introduction,

$$\mathrm{SP}^\infty(X) \simeq \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega^n(K(\mathbb{Z}, n) \wedge X) \quad (1.2.4)$$

Encore plus généralement on a le théorème suivant.

Théorème 1.2.10 (*Dold-Thom*) *Pour un CW connexe X , $\mathrm{SP}^\infty(X) \simeq \prod_i K(\tilde{H}_i(X), i)$.*

(Voir Hatcher [28] pour une démonstration de ce résultat.)

Lemme 1.2.11 *Une filtration F_\bullet comme ci-dessus se scinde par rapport à SP^∞ si et seulement si elle se scinde en homologie c'est-à-dire que $\tilde{H}_*(F_n; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{k=1}^n \tilde{H}_*(\bar{F}_k; \mathbb{Z})$ pour tout n .*

PREUVE. La condition est clairement nécessaire d'après le théorème de Dold-Thom et la linéarité de SP^∞ (la connexité des espaces de la filtration est ici nécessaire). Pour prouver que la condition est suffisante il faut montrer que $H_*(X; \mathbb{Z}) \cong H_*(Y; \mathbb{Z})$ implique une équivalence faible $\mathrm{SP}^\infty(X) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(Y)$. Or cette dernière implication découle du théorème 1.2.10 ainsi que de l'unicité à homotopie près des espaces d'Eilenberg-MacLane. ■

Exemple 1.2.12 (Scindements Stables) Le foncteur Q est obtenu comme limites des applications d'adjonction

$$Q(X) := \Omega^\infty \Sigma^\infty(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega^n(S^n \wedge X) \quad (1.2.5)$$

Par définition on obtient les groupes d'homotopies stables

$$\pi_i^s(X) := \pi_i(QX)$$

En comparant (1.2.5) et (1.2.4) on voit qu'il existe une transformation naturelle $QX \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(X)$ qui induit un homomorphisme d'Hurewicz $\pi_i^s(X) \longrightarrow H_i(X; \mathbb{Z})$ pour tout $i \geq 0$.

Définition 1.2.13 *On dit que deux espaces X et Y sont stablement équivalents si $\Sigma^\infty X \simeq \Sigma^\infty Y$. Et quand X et Y sont du même type d'homotopie qu'un CW complexe fini (ce qui est souvent le cas pour nous), cela revient à dire que $\Sigma^N X \simeq \Sigma^N Y$ pour un certain entier $N \geq 0$. On écrit dans ce cas $X \simeq_s Y$. On dit qu'une filtration $F_\bullet = \{F_k\}_{k \geq 0}$ se scinde stablement si pour tout $n > 0$, il existe $N \geq 0$ et un diagramme commutatif à homotopie près*

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^N F_{n-1} & \longrightarrow & \Sigma^N \bigvee^{n-1} \bar{F}_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma^N F_n & \longrightarrow & \Sigma^N \bigvee^n \bar{F}_k \end{array}$$

ou les applications verticales sont des inclusions et les applications horizontales sont des équivalences d'homotopie.

1.3. Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen

Une filtration se scinde donc stablement si toute pièce de la filtration se scinde en terme des quotients successifs de sa sous-filtration, et que ces scindements sont compatibles entre eux.

Les scindements stables sont d'une importance capitale en topologie puisqu'avoir un tel scindement permet de décomposer et de déterminer n'importe quelle homologie généralisée de F_n à partir de l'homologie (souvent plus "simple") des \overline{F}_k .

Exemple 1.2.14 Si $[f] \in \pi_{n-1}(X)$ est une classe d'homotopie tel que sa suspension $\Sigma^k f \simeq *$ est nulle homotope, alors l'espace $Y = X \cup_f D^n$ se scinde stablement

$$\Sigma^k Y \simeq \Sigma^k X \vee S^{n+k}$$

(on utilise ici le fait que $\Sigma(X \cup_f D^n) \simeq \Sigma X \cup_{\Sigma f} D^{n+1}$).

Lemme 1.2.15 Une filtration F_\bullet d'espaces dans CW (i.e. type fini) se scinde par rapport à Q si et seulement si elle se scinde stablement c'est-à-dire que $F_n \simeq_s \bigvee_{k=0}^n \overline{F}_k$.

PREUVE. Il faut savoir que pour deux CW -complexes X et Y de type fini on a le résultat suivant : $QX \simeq QY$ sont homotopiquement équivalents si et seulement si stablement $X \simeq_s Y$. C'est le résultat principal de [11] qui démontre que la condition est suffisante. (La nécessité étant évidente.) ■

Remarque 1.2.16 Les foncteurs SP^∞ et Q peuvent être utilisés comme un moyen de tester un scindement. Il est clair par l'axiome du wedge (bouquet) que si une filtration finie F_\bullet se scinde stablement alors elle se scinde par rapport à toute théorie de l'homologie. De ce point de vue le foncteur Q est le "plus fort". On serait tenté d'affirmer que le foncteur SP^∞ ou ceux analogues SP_G^∞ qui décrivent les homologies ordinaires à coefficients dans G (chapitre 4) sont les plus "faibles" mais ceci n'est pas le cas [35].

1.3 Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen

Nous souhaitons maintenant scinder stablement une filtration admissible donnée $\{F_k\}_{k \geq 0}$ de CW ; c'est-à-dire prouver l'équivalence d'homotopie suivante

$$\Sigma^\infty F_n \simeq \Sigma^\infty \left(\bigvee_{k=0}^n \overline{F}_k \right)$$

\overline{F}_k désignant comme d'habitude la cofibre de $F_{k-1} \hookrightarrow F_k$, de façon compatible avec les inclusions (définition 1.2.13). Nous possédons déjà un théorème qui permet de scinder stablement (théorème 1.2.4 en prenant $G := Q$). Dans cette section nous allons raffiner ce résultat et donner un critère simple et fort pratique. Tout d'abord voici une définition.

Définition 1.3.1 Définissons le sous-espace $B(X, n)$ de $SP^n(X)$ qui consiste à prendre tous les uplets $[x_1, \dots, x_n]$ ayant des composantes x_i deux à deux distinctes. Définissons de même le sous-espace $B^*(X, n)$ de $SP^n(X)$ constitué de tous les uplets $[x_1, \dots, x_n]$ dont les composantes x_i différentes du point base $*$, sont deux à deux distinctes. Le point base dans $B^*(X, n)$ est donc le seul à pouvoir être répété. Nous avons les inclusions

$$B(X, n) \hookrightarrow B^*(X, n) \hookrightarrow SP^n(X)$$

La répétition du point base dans B^* permet d'obtenir les inclusions $B^*(X, n) \hookrightarrow B^*(X, n+1)$ et en prenant la limite directe sur ces inclusions on obtient $B^*(X, \infty)$. En bref

$$B^*(X, \infty) = \{[x_1, x_2 \dots] \in SP^\infty(X) \mid x_i \neq x_j \text{ ou } x_i = x_j = *\}$$

Notons que l'on peut toujours plonger $X = B^*(X, 1) \xrightarrow{\iota_X} B^*(X, \infty)$ en envoyant x sur $[x, *, *, \dots]$.

Exemple 1.3.2 On peut aisément voir que $B^*(\mathbb{R}^k, n)$ est contractible en envoyant radialement les coordonnées sur l'origine (cette contraction est une isotopie en dehors de l'origine).

Dans le théorème suivant, il faut que nos espaces soient du type d'homotopie d'un CW et qu'ils admettent des plongements dans \mathbb{R}^∞ . Pour simplifier la démonstration nous supposons qu'ils sont des CW -complexes de type fini.

Théorème 1.3.3 Considérons une filtration admissible $F_\bullet = \{F_k\}_{k \geq 0}$ de CW -complexes connexes et de type fini. Supposons qu'il existe pour chaque entiers naturels $k \leq n$ des "applications de James-Hopf" $\partial_{n,k} : F_n \longrightarrow B^*(\overline{F}_k, \infty)$ vérifiant deux conditions

1. **condition de compatibilité :**

Pour $k < n$, le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 F_n & \xrightarrow{\partial_{n,k}} & B^*(\overline{F}_k, \infty) \\
 \uparrow & & \nearrow \partial_{n-1,k} \\
 F_{n-1} & &
 \end{array}
 \tag{1.3.1}$$

2. **condition "∂_{n,n}" :**

$\partial_{n,n} = \iota_{\overline{F}_k} \circ q_n$, où $\iota_{\overline{F}_k}$ désigne l'inclusion naturelle $\overline{F}_k \hookrightarrow B^*(\overline{F}_k, \infty)$

Alors la filtration F_\bullet se scinde stablement et on écrira

$$F_n \simeq_s \bigvee_{k \leq n} \overline{F}_k$$

1.3. Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen

PREUVE. L'idée clé est d'utiliser le théorème de May-Milgram qui est présenté dans l'annexe A (voir corollaire A.0.10) et qui est amplement détaillé dans la littérature (par exemple [7, 17, 33]). Ce théorème donne un *modèle de configurations* pour le foncteur Q ; c'est-à-dire, pour tout $X \in CW^*$, une flèche naturelle par rapport à X qui est une équivalence d'homotopie

$$\Phi_X : C(\mathbb{R}^\infty; X) \xrightarrow{\simeq} QX \quad (1.3.2)$$

où $C(\mathbb{R}^\infty; X)$ désigne l'espace de configurations de points distincts de \mathbb{R}^∞ avec étiquettes dans X modulo les relations point-base. Plus précisément

$$C(M; X) := \{[(m_1, x_1), \dots, (m_n, x_n)] \in SP^\infty(M \rtimes X) \mid m_i \neq m_j, i \neq j\} \quad (1.3.3)$$

avec $M \rtimes X$ désignant le demi-smash c'est-à-dire le quotient $M \times X / M \times *$. Cet espace est naturellement pointé par le collapse de $M \times *$ (voir annexe A et §2.5 pour constructions similaires). Remarquons que l'écriture $[(m_1, x_1), \dots, (m_n, x_n)]$ avec tous les $x_i \neq *$ est unique.

Observons que tout CW -complexe fini X se plonge d'une façon continue dans un espace Euclidien $\phi_X : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^\infty$ ce qui permet de construire un plongement

$$B^*(X, \infty) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^\infty, X) \quad \phi_X \quad (1.3.4)$$

$$[x_1, \dots, x_n, *, *, \dots] \longmapsto [(\phi(x_1), x_1), \dots, (\phi(x_n), x_n)]$$

Remarquons que ϕ_X est bien définie car les x_i sont deux à deux distincts et donc les $\phi(x_i)$ le sont aussi puisque ϕ_X est un plongement. De plus pour la même raison ϕ_X est clairement injective. Définissons maintenant pour tout $k \leq n$ une flèche $\theta_{n,k} : F_n \longrightarrow C(\mathbb{R}^\infty; \overline{F}_k) \simeq Q\overline{F}_k$ comme suit. Puisque \overline{F}_k est un CW -complexe fini on peut donc construire $\phi_{\overline{F}_k} : B^*(\overline{F}_k, \infty) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^\infty, \overline{F}_k)$. On prend alors la composée

$$\theta_{n,k} : F_n \xrightarrow{\partial_{n,k}} B^*(\overline{F}_k, \infty) \xrightarrow{\phi_k} C(\mathbb{R}^\infty, \overline{F}_k) \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{\overline{F}_k}} Q\overline{F}_k \quad (1.3.5)$$

L'hypothèse de compatibilité donne la commutativité à homotopie près du diagramme suivant pour tout $k < n$

$$\begin{array}{ccccccc} F_n & \xrightarrow{\partial_{n,k}} & B^*(\overline{F}_k, \infty) & \xrightarrow{\phi_k} & C(\mathbb{R}^\infty, \overline{F}_k) & \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{\overline{F}_k}} & Q\overline{F}_k \\ \uparrow \subset & \nearrow \partial_{n-1,k} & & & & & \\ F_{n-1} & & & & & & \end{array} \quad (1.3.6)$$

ou $\Phi_{\overline{F}_k}$ est l'équivalence de May-Milgram, ce qui entraîne la commutativité à homotopie près de

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{\theta_{n,k}} & Q\overline{F}_k \\ \uparrow \subset & \nearrow \theta_{n-1,k} & \\ F_{n-1} & & \end{array} \quad (1.3.7)$$

Pour vérifier toutes les hypothèses du théorème 1.2.6 et démontrer notre résultat, il reste à montrer que la flèche $\theta_{n,n} : F_n \longrightarrow Q\overline{F}_n$ est à homotopie près la composée

$$ad : F_n \longrightarrow \overline{F}_n \longrightarrow Q\overline{F}_n$$

où $\overline{F} \longrightarrow Q\overline{F}$ est l'adjointe de $\Sigma^\infty \overline{F} \longrightarrow \Sigma^\infty \overline{F}$. Pour cela on a besoin de mieux comprendre l'équivalence de May-Milgram $\Phi_X : C(\mathbb{R}^\infty, X) \longrightarrow QX$. Remplaçons tout d'abord l'espace à gauche par un rétracte par déformation

$$C^{\geq 2}(\mathbb{R}^\infty, X) := \{[v_1, \dots, v_s; x_1, \dots, x_s] \in C(\mathbb{R}^\infty, X) \text{ tel que } \|v_i - v_j\| \geq 2, i \neq j\}$$

Un tel élément $\zeta := [v_1, \dots, v_s; x_1, \dots, x_s]$ définit maintenant une flèche $\Psi_\zeta : S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \longrightarrow \Sigma^n X$ de la façon suivante

$$\Psi_\zeta : v \longmapsto \begin{cases} T_{v_i}^{-1}(v) \wedge x_i, & v \in B_1(v_i) \\ * & \text{sinon} \end{cases}$$

ou $B_1(v_i)$ est la boule unité centrée en v_i et $T_{v_i}^{-1}$ est la translation qui envoie v_i à l'origine; i.e. $T_{v_i}^{-1}(B_1(v_i)) = B_1$ la boule unité centrée en 0. Cette flèche est bien définie sur $C^{\geq 2}$. Cette flèche est une équivalence d'homotopie comme nous l'avons affirmé.

Généralement pour X un CW complexe connexe muni d'un plongement $\phi : X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ pour un certain N , considérons la composée

$$\theta : B^*(X, \infty) \longrightarrow C(\mathbb{R}^N, X) \longrightarrow C^{\geq 2}(\mathbb{R}^N, X) \xrightarrow[\text{May-Milgram}]{\simeq} \Omega^N \Sigma^N X$$

construite comme auparavant et envoyant (dans l'ordre)

$$\begin{aligned} \zeta = [x_1, \dots, x_n, *, \dots] &\longmapsto [\phi(x_1), \dots, \phi(x_n); x_1, \dots, x_n] \\ &\longmapsto [H_1(\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)); x_1, \dots, x_n] \\ &\longmapsto \Psi_{\phi(\zeta)} : S^N \longrightarrow \Sigma^N X \end{aligned}$$

ou $H_t : C(\mathbb{R}^N, n) \longrightarrow C(\mathbb{R}^N, n)$ est une homotopie tel que l'image de H_1 est dans les configurations de points distincts (m_1, \dots, m_k) avec $|m_i - m_j| \geq 2$ (voir Remarque 1.3.4). Ce qu'on

1.3. Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen

souhaite montrer revient à vérifier que la composée

$$\bar{F} \longrightarrow B^*(X, \infty) \xrightarrow{\theta} \Omega^N \Sigma^N X$$

est homotope à

$$ad : x \longmapsto f : \begin{cases} S^N & \longrightarrow S^N \wedge X \\ v & \longmapsto v \wedge x \end{cases}$$

Une distinction à faire ici : dans la définition de θ , $S^N = \mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ est le compactifié à un point, alors que dans la définition de ad , S^N est le compactifié de la boule unité. On peut voir que cette homotopie est donnée par $H : X \times I \longrightarrow \Omega^N \Sigma^N X$ ou

$$H(x, t) : S^N \longrightarrow S^N \wedge X \quad , \quad v \longmapsto \Psi_{[t\phi(x), x]}(v) := \begin{cases} T_{t\phi(x)}^{-1}(v) \wedge x, & v \in B_1(t\phi(x)) \\ * & \text{sinon} \end{cases}$$

avec de nouveau T_y^{-1} la translation de \mathbb{R}^N qui envoie y à l'origine. On voit clairement que $H_1 = \Theta$ et $H_0 = ad$.

En posant maintenant que $X = \bar{F}_n$, on montre donc que $QF_n X \simeq Q(\bigvee_{k=0}^n \bar{F}_k)$ puisque toutes les conditions du théorème 1.2.6 sont réunies. Pour finalement en déduire le scindement stable, nous n'avons pas besoin de recourir au lemme 1.2.15 car en effet dans notre cas nous avons construit une flèche

$$\theta_n : F_n(X) \longrightarrow Q\left(\bigvee_{k=0}^n \bar{F}_k\right)$$

dont l'extension $QF_n X \longrightarrow Q(\bigvee_{k=0}^n \bar{F}_k)$ est une équivalence. Ceci implique forcément que l'adjointe $\Sigma^\infty F_n \longrightarrow \Sigma^\infty \bigvee_{k=0}^n \bar{F}_k$ est une équivalence (de spectres)². ■

Remarque 1.3.4 Nous avons affirmé l'existence, pour tout entier naturel k , d'une homotopie $H_t^k : C(\mathbb{R}^k, n) \longrightarrow C(\mathbb{R}^k, n)$, avec $H_0 = id$ et tel que l'image de H_1 est dans les configurations de points ayant une distance entre eux ≥ 2 . On dira qu'une telle homotopie *éloigne les points*. Cette homotopie peut se construire en munissant les points de la configuration d'une charge électrique de même signe et en laissant ces points se repousser sous l'action des forces électriques répulsives ainsi créées. Le diagramme suivant commute (strictement)

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}^k, n) & \xrightarrow{H^k} & C(\mathbb{R}^k, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(\mathbb{R}^{k+1}, n) & \xrightarrow{H^{k+1}} & C(\mathbb{R}^{k+1}, n) \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions standard $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$.

2. Si $f : X \longrightarrow QY$ tel que son extension $Qf : QX \longrightarrow QQY \longrightarrow QY$ est une équivalence, alors $X \simeq_s Y$.

1.3.1 Dérivation et Formalisme

Dans cette sous-section nous allons introduire la notion de *dérivée* et plus précisément la notion de dérivation selon une face d'un simplexe (ou si l'on veut *projection*). Par notre point de vue, une application de James-Hopf sera souvent un produit de dérivées. Ceci nous munit d'un formalisme qui, lorsqu'il s'applique, devient fort pratique pour vérifier les conditions du théorème 1.2.4. La notion de dérivation selon une face prendra tout son sens dans la section 3.5 du chapitre 3 concernant les espaces polyédraux.

On note $\Delta[n] = [0, 1, \dots, n]$ le n -simplexe (abstrait) dont les sommets forment l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$. Une k -face σ de $\Delta[n]$ revient à choisir $k+1$ sommets, c'est à dire σ est un k -simplexe de la forme $\sigma := [i_0, i_1, \dots, i_k] \in \Delta[n]$ avec $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Le $n - 1$ -squelette de $\Delta[n]$ sera noté $\partial\Delta[n]$ ou encore $\Delta[n]_{n-1}$. De même on définit pour $0 \leq k \leq n$, $\partial^k\Delta[n] = \Delta[n]_{n-k}$ le $n - k$ -squelette comme étant le complexe simplicial formé par toutes les $n - k$ -faces de $\Delta[n]$. Ces définitions se généralisent aisément à tout complexe simplicial K de sommets $\{0, 1, \dots, n\}$. On rappelle que les squelettes forment une filtration naturelle

$$K = (K)_n \supset (K)_{n-1} \supset \dots \supset (K)_0 = \{[0], [1], \dots, [n]\}$$

Remarque 1.3.5 Parfois il sera commode d'indexer les sommets par $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ on aura alors comme n -simplexe $\Delta[n] = [1, 2, \dots, n + 1]$. La dimension de $\Delta[n]$ étant toujours donnée par le nombre de ses sommets moins un. Le lecteur prendra donc garde aux indices.

Définition 1.3.6 Soit $X := X_0 \times X_1 \times \dots \times X_n$ un produit d'espaces pointés (on notera indifféremment $*$ le point base de ces espaces) et $\sigma := [i_0, i_1, \dots, i_k]$ une k -face de $\Delta[n]$. On appelle *dérivée selon la face σ* la flèche $\partial_\sigma : X \longrightarrow X$ définie pour tout $\xi := (x_0, \dots, x_n) \in X$ par

$$\partial_\sigma \xi = \partial_{[i_0, i_1, \dots, i_k]}(x_0, \dots, x_n) := (*, \dots, x_{i_0}, *, \dots, x_{i_k}, *, \dots, *)$$

Autrement dit la rétraction ∂_σ conserve les coordonnées qui sont indexées par les sommets $i \in \sigma$ et annule toutes les autres.

Les termes "annuler" ou "mettre au point base" une coordonnée x_i , seront librement utilisés pour signifier que l'on remplace cette coordonnée par le point base $*$.

Exemple 1.3.7

- $\partial_{[2,4]}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (*, x_2, *, x_4)$.
- $\partial_{[1,3,4]}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots) = (x_1, *, x_3, x_4, *, \dots)$. On peut également composer les dérivées.
- $\partial_{[1,2,4]}\partial_{[1,3,4]}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \partial_{[1,2,4]}(x_1, *, x_3, x_4) = (x_1, *, *, x_4)$. On remarque la composée $\partial_{[1,2,4]}\partial_{[1,3,4]} = \partial_{[1,2,4] \cap [1,3,4]} = \partial_{[1,4]}$
- Dire que $\xi := (x_0, x_1, \dots, x_n)$ possède k coordonnées au point base (i.e. nulles) c'est dire qu'il existe une $k - 1$ -face σ telle que $\xi = \partial_\sigma \xi$

1.3. Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen

- Dans la suite les applications de James-Hopf seront souvent des composées

$$\partial_{n,k} := \prod_{\sigma=[i_1, \dots, i_k]} [\partial_\sigma] = \prod_{\sigma \in \Delta[n]_{k-1}} [\partial_\sigma]$$

où \prod désigne le produit non ordonné et $[\partial_\sigma]$ la composée de ∂_σ avec la projection sur le quotient X/\mathfrak{S}_{n+1} . Cette application envoie ξ sur la configuration (non ordonnée) de toutes les manières de conserver k coordonnées non nulles et de mettre les autres au point base. En faisant $k = 2$ et $n = 3$ on a par exemple :

$$\partial_{3,2}(x_1, x_2, x_3) = [\partial_{[1,2]}\xi, \partial_{[1,3]}\xi, \partial_{[2,3]}\xi] = [(x_1, x_2, *), (x_1, *, x_3), (*, x_2, x_3)]$$

Les dérivées possèdent les propriétés suivantes faciles à prouver que nous utiliserons souvent dans la suite.

Proposition 1.3.8 *Pour σ et τ deux faces de $\Delta[n]$ on a les propriétés :*

- $\partial_\sigma \partial_\sigma = \partial_\sigma$
- $\partial_\sigma \partial_\tau = \partial_{\sigma \cap \tau}$ et on posera par convention que $\partial_\emptyset = *$
- Si $\partial_\sigma = \partial_\tau$ alors $\partial_\sigma = \partial_{\sigma \cap \tau}$
- (ξ possède k coordonnées nulles) $\iff (\xi = \partial_\sigma \xi$ pour une certaine $k - 1$ -face σ).

PREUVE. Démontrons la troisième affirmation les autres découlant directement de la définition de la dérivée. Si $\partial_\sigma = \partial_\tau$ en composant par ∂_σ on obtient $\partial_\sigma \partial_\sigma = \partial_\sigma \partial_\tau$ en utilisant les deux premières propriétés on obtient finalement que $\partial_\sigma = \partial_{\sigma \cap \tau}$. ■

1.3.2 Exemples de Références

De nombreux exemples de scindement stable dans la littérature peuvent s'obtenir par le théorème 1.3.3 (cf. Chapitre 3). Nous donnons ci-dessous trois exemples simples et particulièrement illustratifs de ces méthodes. Les preuves des corollaires 1.3.9 et 1.3.17 serviront plus loin de référence.

Le premier exemple de référence est un classique attribué à Hilton et à James.

Corollaire 1.3.9 *Étant donné une famille de CW-complexes X_1, \dots, X_n , pointés et connexes, on a une équivalence d'homotopie stable*

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \simeq_s \bigvee_{k=1}^n \left(\bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \wedge X_{i_2} \wedge \dots \wedge X_{i_k} \right)$$

On obtient habituellement ce corollaire en prouvant que $\Sigma(X_1 \times X_2) \simeq \Sigma(X_1 \wedge X_2) \vee \Sigma(X_1 \vee X_2)$ et en procédant par récurrence. En fait il est facile de voir que cette équivalence est une

équivalence d'homotopie après seulement une suspension. Bien entendu nos outils ne permettent pas, pour l'instant, de contrôler le nombre de suspensions. Par contre on peut donner une démonstration rapide de ce résultat en utilisant le point de vue du théorème 1.3.3. Le point important est que les arguments utilisés ici se généralisent dans de nombreuses autres situations. En particulier on construira ici et pour la première fois une filtration donnée par la multiplicité du point base. Cette filtration apparaîtra dans nombreux contextes et nous l'appellerons tout simplement *filtration par multiplicité du point base*.

PREUVE. Considérons la filtration “par multiplicité” de $X_1 \times \cdots \times X_n$ suivante :

$$F_k = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{au plus } k \text{ coordonnées } \neq *\}$$

Autrement dit F_k est l'ensemble des uplets ayant au plus k coordonnées “non nulles”. On voit facilement que $F_0 = *$, $F_1 = X_1 \vee \cdots \vee X_n$ est le wedge et que $F_n = X_1 \times \cdots \times X_n$ est le produit. Cette filtration est admissible comme en (0.0.1). Remarquons aussi que les quotients sont donnés par

$$\overline{F}_k = \bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{i_1} \wedge X_{i_2} \wedge \cdots \wedge X_{i_k}$$

En effet pour chaque choix des indices $i_1 < \dots < i_k$ correspondants à une composante de valeur différente du point base donne un élément de F_k avec l'identification que si l'une des composantes est au point base alors le uplet collapse. Il suffit maintenant de trouver des applications de James-Hopf comme dans le théorème (1.2.6) pour prouver le corollaire.

Considérons l'application qui à un uplet $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ associe la configuration (non ordonnées) de tous les uplets formés en fixant k coordonnées et annulant les $n - k$ coordonnées restantes. Il y a $\binom{n}{k}$ manières de construire un tel uplet. Explicitement

$$\xi := (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (*, \dots, x_{i_1}, *, \dots, x_{i_k}, *, \dots, *) \quad (1.3.8)$$

Les uplets ainsi obtenus sont dans F_k et sont deux à deux distincts sauf si au départ au moins deux coordonnées x_i sont au point base. Ceci veut dire que nous avons construit une flèche

$$F_n \longrightarrow B^* \left(\overline{F}_k, \binom{n}{k} \right)$$

qui se prolonge en $\partial_{n,k} : F_n \longrightarrow B^* \left(\overline{F}_k, \binom{n}{k} \right) \hookrightarrow B^* \left(\overline{F}_k, \infty \right)$. Par restriction on définit les autres applications de James Hopfs $\partial_{p,k}$ pour $0 \leq k \leq p \leq n$ ce qui assure également les conditions de compatibilités. ■

Remarque 1.3.10 Utilisons notre formalisme dans §1.3.1 pour montrer que $\partial_{n,k}$, définie par (1.3.8), est bien à valeurs dans B^* et que les conditions de compatibilité sont vérifiées. Pour cela

1.3. Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen

réécrivons (1.3.8) sous la forme

$$\xi := (x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{\sigma \in (\Delta[n-1])_{k-1}} [\partial_\sigma \xi] \quad (1.3.9)$$

L'idée ensuite est que si $\sigma \neq \tau$ sont deux $(k-1)$ -faces du simplexe $\Delta[n-1] = [1, \dots, n]$ et que $\partial_\sigma \xi = \partial_\tau \xi$ c'est est que l'on a aussi $\partial_\sigma \xi = \partial_\tau \xi = \partial_{\sigma \cap \tau} \xi$ qui est équivalent au point base $*$ dans le quotient \overline{F}_k puisque $\sigma \cap \tau$ est au moins une $(k-2)$ -face et par suite $\partial_{\sigma \cap \tau} \xi \in F_{k-1}$. la condition " $\partial_{k,k}$ " s'obtient en remarquant qu'un élément $\xi \in F_k$ s'écrit $\xi = \partial_\tau \xi$ pour une certaine $(k-1)$ -face $\tau \in [1, \dots, n]$. Ainsi $\partial_{k,k} \xi = \prod_{\sigma \in (\Delta[n-1])_{k-1}} [\partial_\sigma \partial_\tau \xi]$ et d'après le raisonnement précédent $\partial_\sigma \partial_\tau \xi = \partial_{\sigma \cap \tau} \xi$ est équivalent au point base $*$ pour $\sigma \neq \tau$ ce qui donne finalement $\partial_{k,k} \xi = [\partial_\tau \partial_\tau \xi, *, \dots] = [\xi, *, \dots]$ et montre la condition " $\partial_{k,k}$ ".

Exemple 1.3.11 (Splitting de James) Il est bien connu que pour un CW connexe pointé $(X, *)$, $\Omega \Sigma X$ est équivalent en homotopie à la "construction de James" $J(X)$ donné comme le quotient

$$J(X) := \bigcup_{k \geq 1} X^k / \sim$$

ou \sim est la relation du point base $(x_1, \dots, x_k) \sim (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k)$ si $x_i = *$, ou \hat{x} signifie que l'on supprime cette coordonnée. Cette construction est filtré par $J_n(X) = \bigcup_{k=1}^n X^k / \sim$. Il est connu que cette filtration se scinde stablement

$$\Omega \Sigma X \simeq J(X) \simeq_s \bigvee X^{\wedge k} \quad (1.3.10)$$

ou $X^{\wedge n}$ est le quotient de $F_n = \bigcup_{k \geq 0} X^k / \sim$ par F_{n-1} . Si on suit la démonstration du corollaire 1.3.9 mot pour mot, alors on aboutit à des flèches $\partial_{n,k} : J_n(X) \longrightarrow \text{SP}^\infty(\overline{J}_k(X))$ et on montre que cette filtration se scinde en homologie. Par contre les flèches ∂ ne se factorise pas par $B^*(\overline{J}_k X, *)$ comme on peut le voir déjà pour $n = 2, k = 1$: dans ce cas $\partial[x, x] = [[x, *], [*], [x]] = [[x], [x]]$ ce qui appartient à $\text{SP}^2(X)$ et non pas à $B^*(X, 2)$. Pour obtenir le scindement stable il faudra utiliser un autre modèle noté $C(\mathbb{R}, X)$ et équivalent à $J(X)$ (voir §2.5, corollaire 2.5.4).

Remarque 1.3.12 (Invariants de James-Hopf) Dans le cas des sphères, le splitting de James (1.3.10) prend la forme suivante pour $k \geq 0$

$$\Omega S^{n+1} \simeq_s \bigvee S^{kn}$$

Ce splitting est accompli après une seule suspension. En projetant $\Sigma \Omega S^{n+1} \longrightarrow \Sigma S^{kn} = S^{kn+1}$, et en prenant l'adjointe, on obtient une flèche $\Omega S^{n+1} \longrightarrow \Omega S^{kn+1}$ et donc au niveau de l'homotopie

$$\pi_i(S^{n+1}) \longrightarrow \pi_i(S^{kn+1}) \quad , \quad i, k = 1, 2, \dots$$

Il a été démontré par James et Toda que ces flèches s'insèrent dans des longues suites exactes

de composantes p - premières, lorsque n est pair et p premier

$$\longrightarrow \pi_i(S_{p-1}^n) \xrightarrow{E_p} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H_p} \pi_{i+1}(S^{pn+1}) \xrightarrow{Q_p} \pi_{i-1}(S_{p-1}^n) \longrightarrow$$

Ces suites exactes ont été ensuite généralisées pour des suspensions (Whitehead) ou pour n impair et certaines valeurs de r (Hardie).

La deuxième famille d'exemples que nous considérons dans cette section sont les "commuting tuples" et les "almost commuting tuples" dans les groupes de Lie. Plus précisément, considérons l'espace $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$ de tous les homomorphismes de groupes de \mathbb{Z}^n dans G . Ceci correspond à la donnée de tous les n -uplets $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ tels que $g_i g_j = g_j g_i$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Cet espace a été étudié par Adem et Cohen [2] et nous montrons comme eux que la filtration naturelle par la multiplicité du point base se scinde. Comme auparavant définissons

$$F_k := \{(g_1, \dots, g_n) \in Hom(\mathbb{Z}^n, G) \mid \text{au plus } k \text{ coordonnées } \neq 1\}$$

où $1 \in G$ est l'identité de G (le point base). Alors

Corollaire 1.3.13 [2] $Hom(\mathbb{Z}^n, G) \simeq_s \bigvee_{k=1}^n \bar{F}_k$.

PREUVE. La filtration $\{F_k\}_{k \geq 0}$ est admissible [2]. Il reste à remarquer que les applications de James-Hopf utilisées dans l'exemple précédent et qui permettent de scinder G^n se restreignent à $Hom(\mathbb{Z}^n, G)$. ■

Les mêmes techniques s'appliquent pour scinder en homologie les espaces suivants toujours par rapport à la filtration donnée par la multiplicité du point base :

- L'espace $Hom(\mathbb{Z}^n, G)/\mathfrak{S}_n$ qui consiste en les "commuting tuples" de uplets de points non ordonnés. La filtration associée se scinde en homologie.
- L'espace des commuting tuples à conjugaison près i.e. $Hom(\mathbb{Z}^n, G)/G^{ad}$ où G^{ad} désigne l'action de G sur G^n par conjugaison : $g \in G$ agit sur (g_1, \dots, g_n) en l'envoyant sur $(g^{-1}g_1g, \dots, g^{-1}g_n g)$. Cet espace est noté dans la littérature par $Rep(\mathbb{Z}^n, G)$ [3].

Dans tous ces exemples il est possible de démontrer que la filtration par multiplicité reste toujours admissible (ce point est discuté dans [52, 3] ; voir aussi section 2).

Exemple 1.3.14 Les espaces de commuting tuples apparaissent naturellement dans de nombreux contextes. Il est par exemple aisé de voir que

$$Rep(\mathbb{Z}^2, U(2)) := Hom(\mathbb{Z}^2, U(2))/U(2)^{ad} = SP^2(S^1 \times S^1)$$

et ceci décrit les espaces de modules de $U(2)$ -fibrés plats sur le tore.

Encore plus généralement on peut splitter l'espace suivant.

1.3. Scindements Stables et Méthode de Séparation de Fred Cohen

Définition 1.3.15 Soit G un groupe de Lie et $K \subset Z(G)$ un sous-groupe fermé du centre $Z(G)$. Un n -uplet $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ est dit un “ K -almost commuting” n -uplet si le commutateur $[x_i, x_j] \in K \subset Z(G)$ pour $1 \leq i, j \leq n$. L’espace de tous ces “almost commuting elements” de longueur n est dénoté $B_n(2, G, K)$ [3].

Soit $\{F_k(B_n)\}_{k \geq 0}$ la filtration par multiplicité du point base. Le gros du travail (Adem-Cohen-Gomez) est de montrer que cette filtration est admissible. Une fois ceci établi, le corollaire suivant est facile.

Corollaire 1.3.16 Si $\{F_k(B_n)\}_{k \geq 0}$ est la filtration par multiplicité du point base, alors il existe un scindement stable $B_n(2, G, K) \simeq_s \bigvee_{k=1}^n \overline{F}_k(B_n)$.

La notation $B(2, G, K)$ fait partie d’une construction un peu plus générale d’espaces $B(n, G, K)$ et nous renvoyons vers [3] pour plus de détails et pour une détermination des quotients $\overline{F}_k(B_n)$ dans certains cas. Il est clair que notre méthode s’applique à tous ces cas et la liste de tels scindements est longue. Notons que les “almost commuting tuples” dans un groupe de Lie et à conjugaison près font l’objet d’un livre [10].

Enfin nous allons traiter, comme dernier exemple de cette section, une version non-ordonnée du scindement de James en scindant stablement, comme l’on pouvait s’y attendre, les espaces $B^*(X, m)$.

Corollaire 1.3.17 La filtration $(B^*(X, k))_{k \leq m}$ pour X un CW-pointé de dimension finie se scinde stablement :

$$B^*(X, m) \simeq_s \bigvee_{k \leq m} \overline{B}^*(X, k)$$

PREUVE. La filtration étant donnée par des inclusions, les applications de James-Hopf seront définies par des restrictions. Considérons, pour $k \leq m$, les applications de James-Hopf $\partial_{m,k} : B^*(X, m) \longrightarrow B^*(\overline{B}^*(X, k), \infty)$ qui envoient

$$[\xi] = [x_1, \dots, x_n] \longmapsto \prod_{\sigma \in ([1, 2, \dots, n])_{k-1}} [\partial_\sigma \xi] = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} [[*, \dots, x_{i_1}, *, \dots, x_{i_k}, *, \dots]] \quad (1.3.11)$$

Cette flèche est bien définie sur la classe $[\xi]$ (configuration non ordonnée) et prend ses valeurs dans B^* puisque, si $\sigma \neq \tau$ sont deux $k-1$ -faces de $[1, \dots, n]$ et que $[\partial_\sigma \xi] = [\partial_\tau \xi]$, alors $\partial_\sigma \xi = \partial_\tau \xi$ puisque toutes les coordonnées non nulles de ξ sont distinctes. Le reste de la preuve procède exactement comme pour la remarque 1.3.10 : $\partial_\sigma \xi = \partial_\tau \xi$ donne alors $\partial_\sigma \xi = \partial_\tau \xi = \partial_{\sigma \cap \tau} \xi$ qui est équivalent au point base $*$ dans le quotient $\overline{B}^*(X, k)$ puisque $\sigma \cap \tau$ est au moins une $k-2$ -face et par suite $[\partial_{\sigma \cap \tau} \xi] \in B^*(X, k-1)$. La condition “ $\partial_{k,k}$ ” s’obtient en remarquant qu’un élément $[\xi] \in B^*(X, k)$ s’écrit $[\xi] = [\partial_\tau \xi]$ pour une certaine $k-1$ -face $\tau \in [1, \dots, n]$. Ainsi $\partial_{k,k}[\xi] = \prod_{\sigma \in (\Delta_{[n-1]})_{k-1}} [\partial_\sigma \partial_\tau \xi]$ et d’après le raisonnement précédent $[\partial_\sigma \partial_\tau \xi] = [\partial_{\sigma \cap \tau} \xi]$ est équivalent

au point base $*$ pour $\sigma \neq \tau$ ce qui donne finalement que $\partial_{k,k}[\xi] = [[\partial_\tau \partial_\tau \xi], *, \dots] = [[\xi], *, \dots]$ et prouve la condition " $\partial_{k,k}$ ". Les hypothèses de (1.3.3) sont vérifiées et la conclusion s'en suit. ■

Les idées et constructions qui apparaissent dans les démonstrations des corollaires 1.3.9 et 1.3.17 serviront de modèles pour un grand nombre d'exemples qui vont suivre.

Chapitre 2

Scindements Homologiques

2.1 Produits de Permutations I

Étant donné un sous groupe $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$, on peut considérer le quotient $\Gamma P^n X := X^n/\Gamma$. Quand $\mathfrak{S}_n = \Gamma$ on obtient le n -ème produit symétrique. Comme d'habitude on note $[x_1, \dots, x_n]$ l'image de (x_1, \dots, x_n) dans l'espace quotient $X^n \longrightarrow \Gamma P^n X$. Considérons maintenant, comme dans la preuve du corollaire de référence 1.3.9, la filtration par multiplicité du point base, mais ici le point base sera remplacé par tout un sous-espace.

Soit A un sous espace fermé de X , filtrons $\Gamma P^n X$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F_k^A(\Gamma P^n X) &= \{[x_1, \dots, x_n] \in \Gamma P^n X \mid \text{au plus } k \text{ coordonnées } x_i \notin A\} \\ &= \{[x_1, \dots, x_n] \in \Gamma P^n X \mid \text{au moins } n - k \text{ coordonnées } x_i \in A\} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Autrement dit c'est l'ensemble des configurations ayant au plus k coordonnées non contenues dans A . On obtient ainsi une filtration croissante

$$F_0^A(\Gamma P^n X) = \Gamma P^n A \subset F_1^A(\Gamma P^n X) \dots \subset F_n^A(\Gamma P^n X) = \Gamma P^n X$$

Nous allons maintenant démontrer que l'inclusion $F_{k-1}^A(\Gamma P^n X) \hookrightarrow F_k^A(\Gamma P^n X)$ pour $k > 0$ est une cofibration si A dans X est une cofibration.

Lemme 2.1.1 *Si $A \hookrightarrow X$ est une cofibration, alors $F_\bullet^A(\Gamma P^n X)$ est admissible.*

PREUVE. Nous donnons ici un aperçu de la preuve qui ne nécessite rien de spécial. Si (X, A) est une paire NDR, alors ([40], lemma A.4, ou [52], §6.3), la paire

$$(X^n, \bigcup_{i=1}^n X^{i-1} \times A \times X^{n-i})$$

est une NDR paire \mathfrak{S}_n -equivariante. Le sous-espace à droite correspond à l'ensemble des uplets

avec au moins un point dans A et la démonstration s'étend verbatim pour montrer que $(X^n, W_k(X, A))$ est une NDR paire également \mathfrak{S}_n -equivariante, ou

$$W_k(X, A) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{au moins } k \text{ coordonnées } x_i \in A\}$$

Les déformations étant équivariantes, elles donnent des déformations par retraction au niveau des espaces quotients. Ces déformations préservent les filtrations $W_k(X, A)$ et donc montrent que $(W_k(X, A)/\Gamma, W_{k+1}(X, A)/\Gamma)$ est une NDR paire pour tout sous groupe $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$. Or par définition $W_k(X, A)/\Gamma = F_{n-k}^A(\Gamma P^n X)$. ■

Comme d'habitude on dénotera $\overline{F}_k^A(\Gamma P^n X) := F_k^A(\Gamma P^n X)/F_{k-1}^A(\Gamma P^n X)$ les quotients.

Exemple 2.1.2 Les filtrations comme dans (2.1.1) apparaissent naturellement dans différents contextes. Les espaces $F_k^A(\mathrm{SP}^n X) = W_{n-k}(X, A)/\mathfrak{S}_n$ (ici on prend $\Gamma = \mathfrak{S}_n$) sont des exemples de foncteurs produits diédraux qui sont étudiés plus loin dans la section 3.5. Si CX est le cône sur X , alors

$$W_1(CX, X) = CX \times X \cup_{X \times X} X \times CX$$

est le join $X * X$ et en passant au quotient par \mathfrak{S}_2 on obtient le "join symétrique" habituellement noté $\mathrm{sym}^{*2}(X)$. Un joli résultat de James, Thomas, Toda et Whitehead [30] affirme que

$$\mathrm{sym}^{*2}(S^k) = \Sigma^{k+1} \mathbb{R}P^k$$

Le théorème suivant est une version remaniée du théorème de Dold qui s'obtient dans le cas où $A = *$ (voir [24] en annexe).

Théorème 2.1.3 *Étant donné un rétracte A de X , la filtration $\{F_k^A(\Gamma P^n X)\}_{k \leq n}$ décrite dans (2.1.1) se scinde par rapport à SP^∞ ; c'est-à-dire on peut écrire pour tout $m \leq n$ que*

$$SP^\infty(F_m^A(\Gamma P^n X)) \simeq SP^\infty \left(\bigvee_{k \leq m} \overline{F}_k^A(\Gamma P^n X) \right) \quad (2.1.2)$$

En particulier on en déduit un scindement en homologie :

$$H_*(\Gamma P^n X) \cong \bigoplus_{k=0}^n H_*(F_k^A(\Gamma P^n X), F_{k-1}^A(\Gamma P^n X))$$

PREUVE. Évidemment la seconde affirmation découle de la première en faisant $m := n$ et en appliquant le foncteur π_* . Pour prouver 2.1.2. nous allons construire des dérivées comme dans l'exemple de référence (corollaire 1.3.17). Soit $r : X \rightarrow A$ une rétraction sur l'espace A . La filtration étant donnée par des inclusions, les applications de James-Hopf seront définies par des

2.1. Produits de Permutations I

restrictions. Définissons donc les applications de James-hopf, pour tout $k \leq n$

$$\partial_{n,k} : \Gamma P^n X \longrightarrow \text{SP}^{(n)}(\overline{F}_k^A(\Gamma P^n X)) \subset \text{SP}^\infty(\overline{F}_k^A(\Gamma P^n X)) \quad (2.1.3)$$

en envoyant

$$[\xi] = [(x_1, \dots, x_n)] \longmapsto \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} [[\dots, x_{i_1}, r(x_{i_1+1}), \dots, x_{i_k}, r(x_{i_k+1}), \dots]]$$

Ces applications consistent à multiplier dans SP^∞ toutes les configurations possibles où k coordonnées sont rétractées dans A les autres restant fixées. En utilisant le formalisme des dérivées ces applications s'écrivent

$$\partial_{n,k}[\xi] = \prod_{\sigma \in ([1, \dots, n])_{k-1}} [\partial_\sigma \xi]$$

avec $\partial_\sigma \xi = (y_1, \dots, y_n)$ où $y_i = r(x_i)$ pour tout sommet i de la face σ et $y_i = x_i$ sinon. Par exemple pour $n = 3$ et $k = 2$ cette application devient

$$\partial_{3,1} : [x_1, x_2, x_3] \longmapsto [[r(x_1), r(x_2), x_3], [r(x_1), x_2, r(x_3)], [x_1, r(x_2), r(x_3)]]$$

Ces applications sont bien définies, la compatibilité des applications de James-Hopf est automatique par restriction et la condition " $\partial_{k,k}$ " s'obtient exactement comme dans la preuve des exemples de références (ou par inspection). On applique alors le théorème 1.2.6. \blacksquare

Puisque $F_1(\Gamma P^n X) = X$, on en déduit le corollaire suivant (comparer [32]).

Corollaire 2.1.4 *Pour tout sous groupe $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$, $H_*(X)$ se plonge dans $H_*(\Gamma P^n X)$.*

Remarque 2.1.5 On peut considérer la filtration *duale "au-moins"* donnée par

$$F_A^k(\Gamma P^n X) = \{[x_1, \dots, x_n] \in \Gamma P^n X \mid \text{au moins } k \text{ coordonnées } x_i \notin A\}$$

cette filtration est décroissante avec $F_A^0(\Gamma P^n X) = \Gamma P^n(X)$ et $F_A^n(\Gamma P^n X) = \Gamma P^n(X - A)$. En général elle *ne se scinde pas* en homologie pour des raisons évidentes. En effet en prenant $\Gamma = \mathfrak{S}_n$ et $A = *$ on en déduit que $F^0(\Gamma P^n X) = \text{SP}^n(X - \{*\})$ qui, en général, ne se plonge pas en homologie dans $H_*(F^n(\text{SP}^n X)) = H_*(\text{SP}^n X)$ à moins que $H_*(X - \{*\})$ ne se plonge dans $H_*(X)$.

Exemple 2.1.6 (Scindement de Steenrod) Il est obtenu pour $A = *$, $\Gamma_n = \mathfrak{S}_n$ et donc $\Gamma P^n X = \text{SP}^n X$. La filtration est donnée par multiplicité du point base

$$F_k(\text{SP}^n X) = \{[x_1, \dots, x_n] \in \text{SP}^n X \mid \text{au plus } k \text{ coordonnées } x_i \neq *\} \quad (2.1.4)$$

En identifiant $\text{SP}^k X$ avec $F_k(\Gamma P^n X)$ (il suffit pour cela d'identifier un n -uplet $[x_1, \dots, x_k, *, \dots, *]$

avec $[x_1, \dots, x_k]$, le théorème 2.1.3 conduit au fameux scindement

$$H_*(\mathrm{SP}^\infty X; \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{k \geq 0} H_*(\mathrm{SP}^k X, \mathrm{SP}^{k-1} X; \mathbb{Z}) \quad (\text{Steenrod}) \quad (2.1.5)$$

Les applications de James-Hopf prennent dans ce cas la forme concise suivante

$$\partial_{n,k} : [x_1 \cdots x_n] \mapsto \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} [[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]] \quad (2.1.6)$$

Des démonstrations du théorème du scindement de Steenrod (2.1.5) se trouve dans les travaux de Liao [37] et Nakaoka [46]. Leurs approches sont par contre très différentes de celle que nous adoptons ici et qui est déduite des méthodes de Dold, Cohen-May-Taylor.

2.2 Produits Symétriques et Généralisation du Théorème de Steenrod

Le cas où $\Gamma = \mathfrak{S}_n$ admet des raffinements importants que nous indiquons ci-dessous. Les scindements que nous donnons dans cette section utilisent des méthodes autres que celles utilisées jusqu'à présent.

Tout d'abord il est intéressant de noter que le scindement de Steenrod n'est pas valable pour des théories de l'homologie autres que l'homologie singulière. Dans le cas de la K -théorie complexe par exemple, il est connu d'après les travaux d'Anderson et Hodgkin, que $K_*(K(G, n)) = 0$. Ceci montre que l'application $\mathrm{SP}^k(S^n) \rightarrow \mathrm{SP}^\infty(S^n) = K(\mathbb{Z}, n)$ ne peut être injective en K -théorie. En fait l'homologie singulière est la seule homologie ayant le scindement de Steenrod pour tout CW-complexe.

Théorème 2.2.1 [25] *Soit h_* une théorie généralisée de l'homologie telle que, pour tout CW-complexe connexe X , la flèche induite par adjonction d'un point base ; $h_*(\mathrm{SP}^n X) \hookrightarrow h_*(\mathrm{SP}^{n+1} X)$ soit un plongement. Alors h_* est l'homologie singulière.*

Il est également possible de voir que le foncteur $\mathrm{SP}^n(-)$ préserve les scindements homologiques. Soit $F_\bullet : F_0 \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow F_k \hookrightarrow \cdots$ une filtration de CW finis, et définissons $\mathrm{SP}^n(F_\bullet)$ la filtration

$$\mathrm{SP}^n(F_0) \hookrightarrow \mathrm{SP}^n(F_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{SP}^n(F_k) \hookrightarrow \cdots$$

On montre que si $A \subset X$ est une cofibration, alors $\mathrm{SP}^n(A) \subset \mathrm{SP}^n X$ est également une cofibration et donc la filtration $\mathrm{SP}^n(F_\bullet)$ est admissible d'après le lemme 2.1.1.

Définition 2.2.2 *On dira que A est un rétracte homologique de X si $H_*(A; \mathbb{Z})$ est un rétracte de $H_*(X; \mathbb{Z})$ (ou de façon équivalente un plongement ou encore si la paire (X, A) se scinde en homologie). Il sera commode d'écrire dans ce cas que A est H_* -retract of X . Par exemple le*

2.2. Produits Symétriques et Généralisation du Théorème de Steenrod

1-squelette $\bigvee^{2g} S^1$ d'une surface de Riemann X de genre $g \geq 0$ est un H_* -rétracte de X mais n'est pas rétracte.

Lemme 2.2.3 Pour $n \geq 1$, F_\bullet se scinde en homologie si et seulement si il en est de même pour $SP^n(F_\bullet)$.

PREUVE. On fixera l'entier positif n . Il suffit de montrer que $i : A \hookrightarrow X$ est un rétracte homologique si et seulement si l'extension $SP^n(i) : SP^n A \hookrightarrow SP^n X$ est un rétracte homologique. On considère les diagrammes commutatifs d'inclusions

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & SP^n A & \longrightarrow & SP^\infty A \\ \downarrow (1) & & \downarrow (2) & & \downarrow (3) \\ X & \longrightarrow & SP^n X & \longrightarrow & SP^\infty X \end{array}$$

D'après le splitting de Steenrod, les flèches horizontales du haut et du bas sont des rétractes homologiques toujours.

Supposons que $H_i(A)$ se plonge dans $H_i(X)$ comme facteur direct. Alors $K(H_i A, i)$ est un rétracte homotopique de $K(H_i X, i)$ et par suite d'après le théorème 1.2.10, $SP^\infty A$ est un rétracte de $SP^\infty X$. La verticale (3) est alors rétracte homologique et par suite la verticale (2) l'est aussi. Réciproquement, si $SP^n(i) : SP^n A \hookrightarrow SP^n X$ induit un plongement en homologie, alors la flèche (2) est rétracte homologique et il en est de même pour (1). ■

Un peu plus généralement et si A est rétracte de X , nous avons déjà démontré que la filtration donnée par les

$$F_k^A(\Gamma P^n X) = \{[x_1, \dots, x_n] \in \Gamma P^n X \mid \text{au plus } k \text{ coordonnées } x_i \notin A\}$$

se scindait en homologie. Le théorème principal suivant va plus loin et donne une condition nécessaire et suffisante dans le cas des espaces simpliciaux pour qu'un tel scindement existe.

Théorème 2.2.4 Soit X un espace simplicial et A un sous-espace simplicial de X . Pour $n \geq 1$ fixé, la filtration $F_\bullet^A := \{F_k^A(SP^n X)\}_{k \leq n}$ se scinde en homologie si et seulement si A est un rétracte homologique de X .

PREUVE. Supposons tout d'abord que la filtration F_\bullet^A se scinde. Alors l'inclusion $j : F_0^A = SP^n A \hookrightarrow F_n^A = SP^n(X)$ induit un plongement en homologie. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ SP^n A & \xrightarrow{j} & SP^n X \end{array}$$

Les flèches verticales sont des plongements en homologie (Steenrod). La flèche j_* est un plongement également d'après le lemme 2.2.3. Il s'ensuit que la composée des flèches donnant le bas

du diagramme est une composée de plongements et donc $H_*(A)$ se plonge dans $H_*(\mathbb{S}P^n X)$. Le haut du diagramme donne nécessairement que $H_*(A)$ se plonge dans $H_*(X)$.

Réciproquement supposons maintenant que A soit un rétracte homologique de X et montrons que la filtration par la multiplicité dans A se scinde. Notons que pour $n = 1$ la filtration devient $F_\bullet^A(\mathbb{S}P^1 X) = \{A, X\}$ et donc elle se scinde par hypothèse.

Pour montrer donc que $F_\bullet(\mathbb{S}P^n X)$ se scinde pour $n \geq 2$, il suffit de montrer que $H_*(F_{k-1}^A)$ se plonge dans $H_*(F_k^A)$ for tout $k \leq n - 1$. On peut ensuite conclure par une récurrence et en montrant que la suite exacte

$$0 \rightarrow H_*(F_{k-1}^A) \rightarrow H_*(F_k^A) \rightarrow H_*(\overline{F}_k^A) \longrightarrow 0 \quad (2.2.1)$$

se scinde. Pour cela construisons une section $H_*(\overline{F}_k^A) \longrightarrow H_*(F_k^A)$.

Remarquons tout d'abord l'identification

$$\begin{aligned} \overline{F}_k^A &\cong \mathbb{S}P^{n-k} A \times \mathbb{S}P^k X / \mathbb{S}P^{n-k} A \times F_1^A(\mathbb{S}P^k X) \\ &= \mathbb{S}P^{n-k} A \times \mathbb{S}P^k X / \sim \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

ou \sim identifie $[a_1, \dots, a_{n-k}] \times [x_1, \dots, x_k]$ au point base dès que l'un au moins des $x_i \in A$. Pour voir ceci, on remarque qu'un élément de $\overline{F}_k^A = F_k^A / F_{k-1}^A$ est représenté par la classe d'un uplet $[x_1, \dots, x_n]$ contenant exactement $n - k$ coordonnées dans A avec la topologie que si l'une des k coordonnées restante est aussi dans A , alors tout le uplet est identifié au point base.

Considérons la flèche quotient $X \longrightarrow X/A$ qui envoie A au point base canonique de X/A . On peut réécrire $\mathbb{S}P^k(X) / F_1^A(\mathbb{S}P^k X)$ comme $\overline{\mathbb{S}P}^k(X/A)$ qui désigne le quotient de $\mathbb{S}P^k(X/A) / \mathbb{S}P^{k-1}(X/A)$ le sous-espace des uplets contenant le point base. Avec cette identification

$$\overline{F}_k^A(\mathbb{S}P^n X) \cong (\mathbb{S}P^{n-k} A)_+ \wedge \overline{\mathbb{S}P}^k(X/A) \quad (2.2.3)$$

qui est le demi-smash. Notons que l'homologie de ce demi-smash se plonge dans l'homologie du produit $\mathbb{S}P^{n-k} A \times \overline{\mathbb{S}P}^k(X/A)$.

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{F}_k^A & \longleftarrow & \mathbb{S}P^{n-k} A \times \overline{\mathbb{S}P}^k(X/A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbb{S}P^{n-k} A \times \mathbb{S}P^k(X/A) \\ & & \uparrow \\ F_k^A & \xleftarrow{\text{conc}} & \mathbb{S}P^{n-k} A \times \mathbb{S}P^k X \end{array}$$

ou *conc* est le produit de concaténation et la flèche $\mathbb{S}P^k X \longrightarrow \mathbb{S}P^k(X/A)$ est l'extension au produit symétrique du quotient $X \rightarrow X/A$. Trouver une section en homologie pour la flèche verticale

2.2. Produits Symétriques et Généralisation du Théorème de Steenrod

à gauche revient à trouver des sections en homologie pour les deux flèches verticales à droite. La première de ces flèches admet une section $H_*(\overline{SP}^k(X/A)) \longrightarrow H_*(SP^k(X/A))$, provenant du scindement de Steenrod (qui donne que $H_*(SP^k Y) \cong \tilde{H}_*(\overline{SP}^k Y) \oplus H_*(SP^{k-1} Y)$, on prend ensuite $Y = X/A$). Que la seconde flèche admette une section homologique $H_*(SP^k(X/A)) \longrightarrow H_*(SP^k X)$ est l'objet du lemme 2.2.5 démontré à la suite. Ceci conclut notre démonstration. ■

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve du théorème 2.2.4 ci-dessus. C'est ici qu'interviendra l'hypothèse que (X, A) est une paire d'espaces simpliciaux. On notera $SP^n q$ l'extension au produit symétrique du quotient $q : X \longrightarrow X/A$.

Lemme 2.2.5 *Soit (X, A) est une paire d'espaces simpliciaux. Si A est un rétracte homologique de X , alors la flèche $SP^n q : SP^n X \longrightarrow SP^n(X/A)$ admet une section homologique.*

PREUVE. On a besoin ici de s'adosser à un théorème fondamental de Dold qui affirme que l'homologie d'un produit symétrique $SP^m(Y)$ est un foncteur de l'homologie de Y (et ne dépend donc que de cette homologie). En particulier si A est un H_* -rétracte de X alors

$$H_*(SP^n X) \cong H_*(SP^n(A \vee X/A)) \quad , \quad \forall n \geq 1$$

et que de plus le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H_*(SP^n X) & \xrightarrow{\cong} & H_*(SP^n(A \vee X/A)) \\ \downarrow & & \downarrow sp^n(p_2) \\ H_*(SP^n(X/A)) & \xrightarrow{=} & H_*(SP^n(X/A)) \end{array}$$

ou $p_2 : A \vee X/A \longrightarrow X/A$ est la projection. L'inclusion $SP^n(X/A) \hookrightarrow SP^n(A \vee X/A)$ donne une section de $SP^n(p_2)$ et donc une section en homologie de la flèche verticale à gauche. Ceci donne bien sur une section en homologie de $SP^n X \longrightarrow SP^n(X/A)$. ■

Corollaire 2.2.6 *Soit (X, A) est une paire d'espaces simpliciaux. Si A est un rétracte homologique de X , alors pour des coefficients dans un corps on a*

$$H_*(F_k^A(SP^n X)) \cong \bigoplus_{i=0}^k H_*(SP^{n-i} A) \otimes \tilde{H}_*(\overline{SP}^i(X/A))$$

où dans cette écriture on pose $\overline{SP}^0(X/A) = S^0$.

PREUVE. Il suffit d'écrire $H_*(F_k^A) \cong \bigoplus_{i=0}^k H_*(\overline{F}_i^A)$ (avec toujours la convention que $F_{-1}^A = \emptyset$ et donc $\overline{F}_0^A = F_0^A$). On utilise ensuite (2.2.3) et la formule de Künneth pour conclure. ■

Exemple 2.2.7 (Le cas $n = 2$). On peut voir le scindement du corollaire 2.2.6 de la façon

suivante. On réécrit $F_1^A = F_1^A(\mathrm{SP}^2 X)$ comme un pushout

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \xrightarrow{i} & A \times X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{SP}^2 A & \longrightarrow & F_1^A \end{array}$$

ou les deux flèches verticales sont les flèches quotients $(x, y) \mapsto [x, y]$. Par le biais de la suite de Mayer-Vietoris et du fait que la flèche induite i_* en homologie est injective, on peut montrer avec des coefficients dans un corps que

$$H_*(F_1^A(\mathrm{SP}^2 X)) \cong H_*(\mathrm{SP}^2 A) \oplus H_*(A) \otimes \tilde{H}_*(X/A)$$

On retrouve ainsi pour ce cas particulier le corollaire 2.2.6.

2.3 Produits de Permutations II

Il existe des familles de sous groupes $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$ comme les groupes alternés, cycliques ou diédraux dont les produits de permutations $(\Gamma P^n X)_n$ (n variant dans un certain ensemble d'indices) sont les morceaux de filtrations croissantes qui se scindent en homologie. un tel exemple à déjà été rencontré pour $\Gamma = \mathfrak{S}_n$ qui donnait le scindement de la filtration des produits symétriques $(\mathrm{SP}^k X)_{k \leq n}$.

2.3.1 Produits Alternés

On supposera pour cette section l'entier naturel $n \geq 2$. Soit $A_n \subset \mathfrak{S}_n$ le sous-groupe alterné et posons

$$AP^n(X) := X^n / A_n$$

que nous appellerons le $n^{\text{ème}}$ produit alterné de l'espace pointé X . Comme dans le cas du produit symétrique nous avons des flèches pointées $AP^n(X) \longrightarrow AP^{n+1}(X)$ (pour tout $n > 0$) appliquant $[x_1, \dots, x_n] \mapsto [x_1, \dots, x_n, *]$ où $*$ $\in X$ est le point base. Attention cependant ces flèches *ne sont plus* des inclusions comme l'illustre l'exemple suivant.

$$[* , x] \mapsto [* , x , *] \quad , \quad [x , *] \mapsto [x , * , *]$$

où $[* , x , *] = [x , * , *] \in AP^3(X)$ mais $[* , x] \neq [x , *] \in AP^2(X)$. Pour contourner ce problème nous allons définir $F_k AP^n(X) := \text{Image}(AP^k(X) \longrightarrow AP^n(X))$ qui par construction correspond au sous-espace introduit plus tôt consistant à prendre $[x_1, \dots, x_n] \in AP^n(X)$ ayant au plus k coordonnées non nulles (c'est-à-dire au moins $n - k$ répétition du point base). Remarquons que,

2.3. Produits de Permutations II

pour $n - k \geq 2$, $F_k AP^n(X) = \text{SP}^k X$ et donc les quotients s'écrivent

$$\overline{F}_k AP^n(X) = \overline{\text{SP}}^k X$$

Également on voit que, pour $n > 2$, $\overline{F}_{n-1} AP^n(X) = F_{n-1} AP^n(X) / F_{n-2} AP^n(X) = \overline{F}_{n-1} AP^{n-1}(X)$. Nous avons maintenant un corollaire directe du théorème 2.1.3.

Corollaire 2.3.1 *pour $n > 2$ on a*

$$\begin{aligned} H_*(AP^n(X)) &\cong H_*(AP^n(X), F_{n-1}(AP^n(X)) \oplus H_*(AP^{n-1}(X), F_{n-2}(AP^{n-1}(X))) \\ &\oplus \bigoplus_{0 \leq k \leq n-2} H_*(\text{SP}^k(X), \text{SP}^{k-1}(X)) \end{aligned}$$

PREUVE. En utilisant le théorème 2.1.3 on écrit le scindement suivant.

$$\tilde{H}_*(AP^n(X)) \cong \bigoplus_{k=1}^n \tilde{H}_*(F_k AP^n(X), F_{k-1} AP^n(X)) \quad (2.3.1)$$

Le groupe relatif $H_*(F_k AP^n(X), F_{k-1} AP^n(X))$ s'identifie à $H_*(\text{SP}^k(X), \text{SP}^{k-1}(X))$ lorsque $k \leq n - 2$. D'autre part $F_n AP^n(X) = AP^n(X)$ et en se rappelant de la remarque juste avant l'énoncé du corollaire, on obtient le résultat. ■

Exemple 2.3.2 Pour $n = 2$, on a $AP^2(X) = X^2$ et $F_1(AP^2(X)) = X \vee X$. Le scindement 2.3.1 ci-dessus donne dans ce cas le scindement standard $H_*(X \times X) \cong \tilde{H}_*(X \wedge X) \oplus H_*(X \vee X)$ qui provient bien entendu du scindement stable de James $\Sigma(X \times X) \simeq \Sigma(X \wedge X) \vee \Sigma(X \vee X)$.

Exemple 2.3.3 Pour $n = 3$, on a $AP^3 X = \text{CP}^3(X)$ qui est le produit cyclique X^3/\mathbb{Z}_3 (voir section suivante) et $F_1(AP^3(X)) = X$. Les éléments de $F_2(AP^3 X)$ sont de la forme $[x_1, x_2, *]$ avec $[x_1, x_2, *] \neq [x_2, x_1, *]$ si $x_1, x_2, *$ sont deux à deux distincts. Autrement dit $F_2(AP^3 X)$ est l'espace obtenu à partir de $X \times X$ en identifiant $(x, *) \sim (*, x)$ pour tout $x \in X$.

Dans le cas où par exemple $X = S^1$, on peut montrer que $\text{CP}^3(S^1) = S^1 \times S^2$ [55]. D'après ce qui précède $F_2 := F_2 AP^3(S^1)$ devient un tore $S^1 \times S^1$ avec les identifications $(1, *) \sim (*, 1)$. Un tore étant obtenu en recollant un carré à son bord selon le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$. Mais l'identification dans F_2 identifie a et b de tel sorte que le commutateur devient trivial et que par conséquent $F_2 \simeq S^2 \vee S^1$. Le scindement de $AP^3(S^1) = \text{CP}^3(S^1)$ prend alors la forme familière

$$\begin{aligned} H_*(S^2 \times S^1) &\cong H_*(S^2 \times S^1, S^2 \vee S^1) \oplus H_*(S^2 \vee S^1, S^1) \oplus H_*(S^1) \\ &\cong \tilde{H}_*(S^3) \oplus \tilde{H}_*(S^2) \oplus H_*(S^1) \end{aligned}$$

Les espaces $AP^n(X)$ pour X une variété $(n - 1)$ -connexe de dimension $2n$ sont étudiés plus en détail dans [8].

2.3.2 Produits Cycliques

Soit \mathbb{Z}_n le groupe cyclique vu comme un sous-groupe de \mathfrak{S}_n . Définissons le *produit cyclique* (ou “cyclic product” [53])

$$\mathbb{C}P^n X := X^n / \mathbb{Z}_n$$

Comme précédemment $[x_1, \dots, x_n]$ désigne la projection de (x_1, \dots, x_n) par l’application quotient $X^n \longrightarrow \mathbb{C}P^n(X)$. Remarquons que contrairement au cas de $\mathbb{S}P^n(X)$, $\mathbb{C}P^n X$ ne se voit plus comme le sous-espace de $\mathbb{C}P^{n+1} X$ des configurations avec point base. L’exemple suivant le montre bien : on a $[x_1, x_2] = [x_2, x_1] \in \mathbb{C}P^2 X$ mais pour $x_1 \neq x_2$ différents du point base, $[x_1, x_2, *] \neq [x_2, x_1, *] \in \mathbb{C}P^3(X)$.

On peut néanmoins construire pour $k \geq 2$, un plongement $\mathbb{C}P^n X \longrightarrow \mathbb{C}P^{nk}(X)$ en envoyant

$$[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow [x_1, \underbrace{*, \dots, *}_{k-1}, x_2, *, \dots, *, x_n, \underbrace{*, \dots, *}_{k-1}] \quad (2.3.2)$$

Cette flèche respecte l’action du groupe cyclique et donc passe en effet aux produits cycliques. En itérant cette flèche on arrive à $\Phi_{i, i+s} : \mathbb{C}P^{nk^i} \longrightarrow \mathbb{C}P^{nk^{i+s}}$ (et à la limite on obtient un espace qui est noté $\mathbb{C}P^{nk^\infty}(X)$). Ces flèches sont des plongements et donc on peut voir $\mathbb{C}P^{nk^i}$ comme un sous-espace de $\mathbb{C}P^{nk^{i+s}}$ et on obtient une filtration $\{\mathbb{C}P^{nk^i}\}_{i \geq 0}$.

On peut construire des applications de James-Hopf à partir de flèches

$$d_{k, k-1} : \mathbb{C}P^{nk}(X) \longrightarrow \mathbb{C}P^n(\mathbb{C}P^{n(k-1)}(X))$$

qui envoient

$$\begin{aligned} d_{k, k-1} : [x_1, \dots, x_{nk}] \longrightarrow & \quad [[\hat{x}_1, x_2, \dots, x_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_{n(k-1)+1}, \dots, x_{nk}], \dots \\ & \quad [x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_{k+i}, \dots, \hat{x}_{i+kj}, \dots, x_{nk}] \dots \\ & \quad [x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_{2k}, \dots, \hat{x}_{kj}, \dots, \hat{x}_{nk}]] \end{aligned}$$

Où ‘chapeau’ signifie la suppression de l’entrée ; i.e. cette flèche consiste à supprimer périodiquement les coordonnées k à k . L’existence de ces flèches est assez remarquable.

Ce procédé se généralise et donne $d_{k, j} : \mathbb{C}P^{nk} \longrightarrow \mathbb{S}P^\infty(\mathbb{C}P^{nj} X)$ pour $1 \leq j \leq k$ qui est un produit sur toutes les configurations possibles

$$[\dots \underbrace{\hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_{k-j}}}_{\text{ces indices étant répétés mod } n}, \dots, \hat{x}_{i_1+k}, \dots, \hat{x}_{i_{k-j}+k}, \dots, \hat{x}_{i_1+k(n-1)}, \dots, \hat{x}_{i_{k-j}+k(n-1)} \dots]$$

où $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-j} \leq k$. Voici quelques exemples :

Exemple 2.3.4 pour $n = 2, k = 3$ on a une flèche

$$d_{3,2} : [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] \mapsto [[x_2, x_3, x_5, x_6], [x_1, x_3, x_4, x_6], [x_1, x_2, x_4, x_5]]$$

2.3. Produits de Permutations II

et $d_{3,1} : [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6] \mapsto [[x_3, x_6], [x_2, x_5], [x_1, x_4]]$.

Le résultat suivant est à comparer avec le résultat principal de [15].

Théorème 2.3.5 *Étant fixé $n, k \in \mathbb{N}^*$, nous avons un splitting en homologie*

$$H_*(CP^{nk^i} X) \cong \bigoplus_{1 \leq j \leq i} H_*(CP^{nk^j} X, CP^{nk^{j-1}} X)$$

PREUVE. Il suffit de construire des applications de James-Hopf pour $j < i$

$$\partial_{k^i, k^j} : CP^{nk^i} X \xrightarrow{d_{k^i, k^j}} SP^\infty(CP^{nk^j} X) \xrightarrow{SP^\infty(q)} SP^\infty(CP^{nk^j} X / CP^{nk^{j-1}} X)$$

et vérifier les hypothèse du théorème 1.2.6. La condition " ∂_{k^i, k^i} " est ici évidente puisque d_{k^i, k^i} est l'inclusion naturelle $CP^{nk^i} X \rightarrow SP^\infty(CP^{nk^i} X)$. Pour prouver la compatibilité des applications de James-Hopf, il faut montrer que

$$\partial_{k^{i-1}, k^j} : CP^{nk^{i-1}} X \xrightarrow{\Phi_{i-1, i}} CP^{nk^i} X \xrightarrow{d_{k^i, k^j}} SP^\infty(CP^{nk^j} X) \xrightarrow{SP^\infty(q)} SP^\infty(CP^{nk^j} X / CP^{nk^{j-1}} X)$$

Le calcul est long mais se vérifie. ■

Remarque 2.3.6 Il est intéressant de remarquer que les applications de James-Hopf sont en fait des flèches de la forme

$$\partial_{k, j} : CP^{nk}(X) \longrightarrow CP^{\binom{k}{j}}(\overline{CP^{nj}(X)}) \quad (2.3.3)$$

avec $1 \leq j \leq k$. L'exemple 2.3.4 ayant déjà illustré cela. Pour voir ceci de plus près, soit $[x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{nk}] \in CP^{nk}(X)$. Pour obtenir $\partial_{k, j}$, on prend le premier bloc $[x_1, \dots, x_k]$ et on supprime $n - j$ coordonnées $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-j}}$. Ainsi si x_i est supprimé alors tous ses itérés x_{i+k}, x_{i+2k}, \dots le seront aussi. On supprime donc successivement

$$x_1 x_2 \dots x_{n-j}, \quad x_1 x_2 \dots x_{n-j-1} x_{n-j+1}, \quad \dots, \quad x_1 x_2 \dots x_{n-j-1} x_n$$

puis encore $x_1 x_2 \dots x_{n-j} x_n, \quad x_1 x_2 \dots x_{n-j-2} x_{n-j+1} x_n, \quad \dots, \quad x_1 x_2 \dots x_{n-j-2} x_{n-1} x_n$, etc. Cette procédure est compatible à l'action du groupe symétrique et produit (2.3.3).

2.3.3 Produits Diédraux

Soit $D_n = \{x, y \mid x^n = y^2 = 1, yxy = x^{-1}\}$ le groupe diédral. Pour $n \geq 3$, D_n est un sous-groupe de \mathfrak{S}_n qui correspond au sous-groupe de toutes les transformations linéaires qui fixe le n -gone régulier. D'ailleurs $D_3 = \mathfrak{S}_3$. Si on dénote par $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des sommets de ce n -gone, alors les générateurs x et y du groupe correspondent aux permutations suivantes

$$x = (1 \dots n) \quad , \quad y = (1n)(2(n-1)) \cdots (([n/2] - 1)([n/2] + 1)) \quad (2.3.4)$$

Définissons le $n^{\text{ème}}$ produit diédral de X par $DP^n X := X^n/D_n$. Comme \mathbb{Z}_n est un sous-groupe de D_n (qui est engendré par x), nous avons une application quotient $CP^n(X) \longrightarrow DP^n X$.

Lemme 2.3.7 *L'application Φ dans (2.3.2) se spécialise aux produits diédraux et donne un plongement $DP^{nk^i} X \longrightarrow DP^{nk^j} X$ pour $j \geq i$.*

PREUVE. Au vu de (2.3.4), il faut vérifier que $\Phi([x_1, \dots, x_n])$ coïncide avec $\Phi([x_n, x_1, \dots, x_{n-1}])$ (ce que nous savons déjà) ainsi qu'avec $\Phi([x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1])$ ce qui se vérifie rapidement. ■

Nous avons donc une filtration $\{DP^{nk^i}(X)\}_{i \geq 0}$ qui se scinde.

Corollaire 2.3.8 $H_*(DP^{nk^j}(X)) \cong \bigoplus_{1 \leq i \leq j} H_*(DP^{nk^i}(X), DP^{nk^{i-1}}(X))$.

PREUVE. Les applications de James-Hopf pour $CP^{nk}(X)$ de la section précédente s'étendent au produit diédral

$$DP^{nk}(X) \longrightarrow \text{SP}^{(k)}(DP^{nj}(X)) \quad \text{pour } j \leq k$$

ce qui conduit au scindement. ■

2.4 Constructions de Borel et Généralisations

La construction $\Gamma P^n X$ admet des extensions sous la forme de constructions de Borel. Ici aussi il est possible d'énoncer des critères très explicites de scindements.

Soit Γ un groupe opérant à gauche sur un espace E et à droite sur un espace pointé X . Alors Γ agit *diagonalement* sur le produit $X \times E$ suivant la formule

$$(\gamma, (x, e)) \longmapsto (x \cdot \gamma, \gamma^{-1} \cdot e)$$

Le quotient par cette action est appelée *construction de Borel* et noté

$$\Gamma_E X := X \times_{\Gamma} E$$

Toute flèche Γ -équivariante $f : X \longrightarrow Y$ induit une flèche $\Gamma_E X \longrightarrow \Gamma_E Y$ en envoyant $[x; e] \mapsto [f(x); e]$. En particulier le foncteur Γ_E préserve les cofibrations équivariantes [35].

On dira qu'une action d'un groupe G sur un espace pointé X est une action *pointée* si G fixe le point base. Si Γ agit sur X , alors il agit sur $SP^n X$, pour tout $n > 0$, par

$$(g, [x_1, \dots, x_n]) \longmapsto [gx_1, \dots, gx_n] \quad , \quad g \in \Gamma \tag{2.4.1}$$

Si l'action est pointée, alors cette action de Γ s'étend à $SP^\infty(X)$ et $B^*(X, \infty)$.

On dit qu'une filtration F_\bullet est Γ -admissible si Γ agit sur chacun des F_k et si les inclusions $F_k \longrightarrow F_{k+1}$ sont équivariantes. Dans un tel cas l'action de Γ s'étend à $SP^\infty(\overline{F}_k)$ et $B^*(\overline{F}_k, \infty)$.

2.4. Constructions de Borel et Généralisations

Par exemple si Γ agit sur X de façon pointée, alors la filtration de Steenrod $\{\mathrm{SP}^n X\}_{n \geq 0}$ est Γ -admissible.

Nous allons introduire une nouvelle filtration de constructions de Borel et nous argumenterons que les critères des théorèmes 1.2.6 et 1.3.3 admettent des analogues équivariants. Soit donc $F_\bullet = \{F_k\}_{0 \leq k \leq n}$ une filtration admissible et soit Γ un groupe qui agit sur cette filtration de façon à ce qu'elle soit Γ -admissible. Ceci induit une filtration $\Gamma_E F_\bullet := (\Gamma_E F_k)_{k \geq 0}$ de constructions de Borel. Remarquons que

$$\Gamma_E F_k / \Gamma_E F_{k-1} = (F_k / F_{k-1}) \wedge_\Gamma E_+ = \overline{F}_k \wedge_\Gamma E_+$$

Supposons que la filtration de départ F_\bullet vérifie les deux conditions du théorème 1.2.6 et qu'elle se scinde en homologie par rapport à des applications du type James-Hopf

$$\partial_{n,k} : F_n \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(\overline{F}_k) \quad , \quad k \leq n \quad (2.4.2)$$

Si ces applications sont Γ -equivariantes et si de plus il existe un diagramme (1.2.3) qui commute à homotopie près Γ -équivariante (en particulier s'il commute strictement), alors

Théorème 2.4.1 *Sous les hypothèses de Γ -équivariance énoncés ci-dessus, $\Gamma_E F_\bullet$ se scinde en homologie et pour $n > 0$,*

$$\mathrm{SP}^\infty(\Gamma_E F_n) \simeq \mathrm{SP}^\infty \left(\bigvee_{0 \leq k \leq n} (\overline{F}_k \wedge_\Gamma E_+) \right)$$

Si de plus l'action de Γ sur E est libre et que les applications $\partial_{n,k}$ dans (2.4.2) se factorisent par $B^(\overline{F}_k, \infty)$, alors ce scindement est stable.*

PREUVE. Écrivons les applications de James-Hopf dans (2.4.2) pour F_\bullet de la façon suivante

$$\partial_{n,k}(\zeta) = [\zeta_1, \dots, \zeta_N] \in \mathrm{SP}^\infty(\overline{F}_k) \quad , \quad \zeta \in F_n$$

pour un certain N qui peut dépendre de n, k . Ces flèches étant équivariantes elles s'étendent à des applications

$$\partial_{n,k}^E : \Gamma_E F_n \longrightarrow \Gamma_E \mathrm{SP}^\infty(\overline{F}_k) \xrightarrow{\psi} \mathrm{SP}^\infty(\Gamma_E \overline{F}_k) \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(\overline{F}_k \wedge_\Gamma E_+)$$

envoyant

$$[\xi; e] \longmapsto [[\xi_1; e], [\xi_2; e], \dots, [\xi_N; e]]$$

L'application $\psi : \Gamma_E \mathrm{SP}^N \overline{F}_k \longrightarrow \mathrm{SP}^N(\Gamma_E \overline{F}_k)$ envoie $[[x_1, \dots, x_N]; e] \mapsto [[x_1; e], \dots, [x_N; e]]$ pour $x_i \in \overline{F}_k$. Les flèches $\partial_{n,k}^E$ sont des applications de James-Hopf pour la filtration $\Gamma_E F_\bullet$; i.e. elles sont compatibles et vérifient les conditions du théorème 1.2.6, d'où le scindement homologique.

Si l'action de Γ sur E est libre et que les $\partial_{n,k}$ sont des flèches $F_n \longrightarrow B^*(\overline{F}_k, \infty)$, par hypothèse équivariantes, alors ψ devient une application

$$\psi' : \Gamma_E B^*(\overline{F}_k, \infty) \longrightarrow B^*(\overline{F}_k \wedge_{\Gamma} E_+, \infty) \quad (2.4.3)$$

qui envoie toujours $[[x_1, \dots, x_N]; e] \mapsto [[x_1; e], \dots, [x_N; e]]$, où maintenant $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ et $x_i \neq * \neq x_j$. Notons que $B^*(\overline{F}_k \wedge E_+, \infty)$ est défini par rapport au point base canonique de $\overline{F}_k \wedge E_+$. L'application ψ' est bien définie car si $[x_i; e] = [x_j; e]$ dans $\Gamma_E \overline{F}_k$, et que l'action de Γ sur E est libre, alors $x_i = x_j$. Il s'ensuit que les $\partial_{n,k}^E$ arrivent bien dans B^* , elles ont les bonnes propriétés de compatibilité et donc on a un scindement stable d'après le théorème 1.3.3. \blacksquare

Nous allons appliquer ce théorème à la construction de Borel suivante.

Définition 2.4.2 Avec $\Gamma \subset \mathfrak{S}_n$ et E un Γ -espace, on notera

$$\Gamma P_E^n X := X^n \times_{\Gamma} E$$

Dans le cas où $E = *$ on retrouve $\Gamma P^n X$, et dans le cas où $E = \Gamma$ (l'espace discret à $|\Gamma|$ éléments) on retrouve X^n .

On pose comme auparavant

$$F_k^A(\Gamma P_E^n X) = \{[(x_1, \dots, x_n); e] \in \Gamma P_E^n X \mid \text{au plus } k \text{ coordonnées } x_i \notin A\}$$

et nous considérons que le point base $*$ est dans $A \subset X$. La proposition suivante est une application immédiate du théorème 2.4.1.

Proposition 2.4.3 On supposera A un rétracte de X . alors la filtration $(F_k^A(\Gamma P_E^n X))_{k \leq m}$ se scinde en homologie. Si de plus l'action de Γ sur E est libre alors ce scindement est stable

$$F_m^A(\Gamma P_E^n X) \simeq_s \bigvee_{k \leq m} \overline{F}_k^A(\Gamma P_E^n X) \quad (2.4.4)$$

Le scindement ci-dessus correspond au scindement de Hilton-James (Corollaire 1.3.9) lorsque $E = \mathfrak{S}_n$ (ensemble discret), $\Gamma = \mathfrak{S}_n$ et $X = Y^n$. Il correspond au scindement de Steenrod lorsque $E = *$, Γ et $X = Y^n$.

Exemple 2.4.4 Le quotient $E\mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_n} X^n$ a été fort étudié par Steenrod et Nakaoka et il intervient dans la construction des carrés de Steenrod. L'homologie a une description assez explicite et on a le calcul complet suivant sur tout corps

$$H_*(E\mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_n} X^n) \cong H_*(\mathfrak{S}_n; H_*(X)^{\otimes n})$$

2.5 Constructions Etiquetées

Pour tout espace $M \in CW$, on considère une famille d'espaces

$$L_0(M) = *, L_1(M), \dots, L_k(M) \dots$$

qui satisfont aux conditions suivantes :

- (i) $L_k(M)$ est un sous-espace \mathfrak{S}_k -invariant de M^k ,
- (ii) Les projections de $M^k \longrightarrow M^{k-1}$ donnés par le choix de coordonnées se restreignent à des applications $L_k(M) \longrightarrow L_{k-1}(M)$.

Soit $X \in CW^*$ un espace pointé. Comme dans l'annexe A.0.10 on peut construire l'espace étiqueté par X

$$C(M, X) = \coprod_{k \geq 0} L_k(M) \times_{\mathfrak{S}_k} X^k / \sim \quad (2.5.1)$$

ou \sim est la relation du point base (A.0.1). Cette construction est filtrée par les

$$C_n(M, X) = \coprod_{k \leq n} L_k(M) \times_{\mathfrak{S}_k} X^k / \sim$$

Lorsque X est connexe (ce que l'on supposera toujours), l'espace ci-dessus l'est aussi. Lorsque $L_k(M) = F(M, k)$ l'espace des k -uplets ordonnés de points distincts de X (espace de configuration), il est commun de noter la cofibre par

$$D_k(M, X) := C_k(M, X) / C_{k-1}(M, X) = \overline{C}_k(M, X)$$

Voici maintenant un théorème qui peut se déduire de [20].

Théorème 2.5.1 *Soit X un CW connexe. La filtration $C_\bullet(M, X) = \{C_k(M, X)\}_{k \geq 0}$ se scinde en homologie. Si de plus $L_k(M) = F(M, k)$ l'espace de configurations de points deux à deux distincts, alors $C_\bullet(M, X)$ se scinde stablement.*

PREUVE. Les espaces $C(M, X)$ peuvent se voir comme des sous-espaces de $SP^\infty(M \rtimes X)$ ou $M \rtimes X = M \times X / M \times *$. Les conditions satisfaites par les espaces $L_k(M)$ et l'inspection de la formule (2.1.6) donnant les applications de James-Hopf usuelles pour $\partial_n, k : SP^n(M \rtimes X) \longrightarrow SP^\infty(SP^k(M \rtimes X))$ montre que l'on peut les restreindre à $\partial_n, k : C_n(M, X) \longrightarrow SP^\infty(C_k(M, X))$, ce qui termine la preuve. Si de plus les $L_k(M)$ sont des espaces de configurations ces flèches se factorisent par $B^*(C_k(M, X))$ et le théorème 1.3.3 s'appliquent. $C_n(M, X)$ se scinde donc pour tout n fini, en passant par une limite inductive, on montre que $C(M, X)$ se scinde aussi. ■

Exemple 2.5.2 Le scindement de $C(M, X)$ se traduit quand M est une variété parallélisable par un scindement de $\text{Map}(M, \Sigma^d X)$, $d = \dim X$ (voir annexe A). Ce corollaire a des répercussions énormes en théorie de l'homotopie (voir [7, 20]). En voici un exemple élémentaire.

Corollaire 2.5.3 Soit $LX = \{f : S^1 \rightarrow X\}$ l'espace de lacets (libres) sur un espace connexe X . Alors il existe un scindement stable

$$L\Sigma X \simeq_s \bigvee_{k \geq 0} D_k(S^1, X) \simeq X \vee \Sigma X \vee D_2(S^1, X) \vee \dots$$

avec ici $L_k(M) = F(M, k)$.

PREUVE. Un joli théorème (voir annexe et aussi [13]) montre que pour X connexe, $L\Sigma X$ est homotopiquement équivalent à $C(S^1, X)$. Le terme $X \vee \Sigma X$ apparaît alors comme $D_1(S^1, X) = S^1_+ \wedge X$ dans le scindement stable de $C(S^1, X)$. ■

Corollaire 2.5.4 (James) $\Omega\Sigma X \simeq_s \bigvee_{n \geq 0} X^{\wedge n}$.

PREUVE. On remarque que $\Omega\Sigma X \simeq J(X)$ et que $J(X) \simeq \bigcup_k X^k / \sim$ est à homotopie près

$$C(\mathbb{R}, X) = \coprod F(\mathbb{R}, k) \times_{\mathfrak{S}_k} X^k / \sim \simeq \coprod \mathfrak{S}_k \times_{\mathfrak{S}_k} X^k / \sim \simeq J(X)$$

où nous avons utilisé le fait que $F(\mathbb{R}, k)$ se rétracte par déformation sur un espace discret à $n!$ éléments noté \mathfrak{S}_k . Pour voir cette dernière affirmation, on écrit les éléments de \mathfrak{S}_n comme étant tous les uplets obtenus par permutation de $(1, 2, \dots, n)$, alors la rétraction consiste à envoyer (x_1, \dots, x_n) au uplet (i_1, \dots, i_n) si $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_n}$. Maintenant on utilise le scindement de $C(\mathbb{R}^1, X)$ comme dans le théorème 2.5.1. ■

Supposons à ce stade que M est un Γ -espace où Γ est un groupe et que $L_k(M)$ est Γ -invariant dans M^n . Pour tout Γ -espace E , on peut considérer le quotient de Borel

$$\Gamma_E(M, X) := E \times_{\Gamma} C(M, X)$$

On définit les D_i^E comme étant les quotients successifs de cette filtration

$$D_k^E(M, X) := E \times_{\Gamma} C_k(M, X) / E \times_{\Gamma} C_{k-1}(M, X)$$

Nous avons par exemple que $C_0(M, X) = *$ et que $D_0^E(M, X) = E/\Gamma$. Une application directe du théorème 2.4.1 donne

Proposition 2.5.5 $\Gamma_E(M, X)$ se scinde par rapport à SP^∞

$$SP^\infty(\Gamma_E(M, X)) \simeq SP^\infty \left(\bigvee_{n \geq 0} D_n^E(M, X) \right)$$

Si Γ agit librement sur E et que $L_k(M) = F(M, k)$ est l'espace de configurations de points deux à deux distincts, alors $\Gamma_E(M, X)$ se scinde stablement.

2.6. Espaces de Polynômes et Stratifications de Young-Samuel

PREUVE. Ce qu'il faut voir pour appliquer le théorème 2.4.1 est que les James-Hopf maps définies pour scinder $C_\bullet(M, X)$ sont Γ -équivariantes. Or ceci est évident car les projections

$$L_n(M) \longrightarrow L_k M \quad , \quad k \leq n$$

sont Γ -équivariantes. ■

Une application de ce résultat est de scinder l'homologie des groupes de tresses rubannées (lemma 3.4.4). Un autre a trait aux mapping class group comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 2.5.6 (Mapping class group) L'utilité de la proposition 2.5.5 apparaît en particulier dans les travaux de Fred Cohen [9, 18]. Soit $Diff^+(M_g)$ le groupe de difféomorphismes d'une surface de Riemann de genre g qui préservent l'orientation. Alors

$$EDiff^+(M_g) \times_{Diff^+(M_g)} B(M_g, k) \tag{2.5.2}$$

est un espace $K(\Gamma_g^k, 1)$ si $g \geq 2$ où Γ_g^k est le sous-groupe du mapping class group Γ_g de toutes les classes d'isotopies de difféomorphismes de M_g qui laissent k -points invariants. Si on se permet de remplacer M_g par $M_g - point$ ou si on se permet des étiquettes dans un espace connexe, alors (2.5.2) se scinde stablement d'après la proposition 2.4.1 en posant $E = Diff^+$ et $M = EDiff^+$.

2.6 Espaces de Polynômes et Stratifications de Young-Samuel

Désignons par Pol_n l'espace des polynômes complexes unitaires de degré n . En identifiant un tel polynôme avec ses racines ou avec ses coefficients nous obtenons que $Pol_n \cong \mathbb{S}P^n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$. Le sous espace discriminant de Pol_n est constitué des polynômes ayant au moins une racine double. Nous le noterons $\Sigma(2)$. Ce discriminant est lui-même stratifié. En suivant [47], on définit une strate par

$$\Sigma(m_1, m_2, \dots, m_k) \subset \Sigma(2) \subset Pol_n \tag{2.6.1}$$

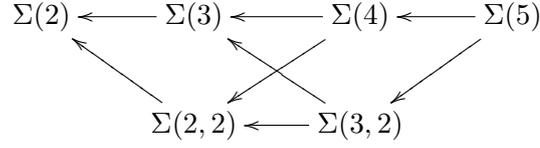
pour $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 2$ par l'ensemble des polynômes unitaires qui peuvent se factoriser de la manière suivante :

$$(z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_k)^{m_k} q(z) \tag{2.6.2}$$

Dans cette écriture, les racines z_1, z_2, \dots, z_k ne sont pas nécessairement distinctes et q est un polynôme de degré $n - \sum m_i$. Pour $I = (m_1, \dots, m_k)$ une suite décroissante de m_i ; $n \geq m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_k \geq 2$, on note $\Sigma_n(I)$ la strate définie dans (2.6.1). On a que $\Sigma_n(\underbrace{1, \dots, 1}_n) = Pol_n$.

On notera $\Sigma_n(I) = \emptyset$ si $n < \sum m_i$. Évidemment pour tout choix de sous-suite $J := m_{i_1} \geq m_{i_2} \geq \dots \geq m_{i_l}$ de I , on a que $\Sigma_n(I) \subset \Sigma_n(J)$. On notera que les espaces $\Sigma_n(I) \subset Pol_n$ sont des sous ensembles algébriques fermés de $\mathbb{C}^n \cong Pol_n$ qui stratifient les discriminants. Ci-dessous la

représentation pour $n = 5$:



où toutes les flèches sont des inclusions. Nous définissons comme dans [47], §1,

$$P_n(m_1, \dots, m_k) = Pol_n - \Sigma_n(m_1, \dots, m_k)$$

lequel espace est noté $P_n(I)$. On peut voir $P_n(I)$ comme le sous-espace de $SP^n(\mathbb{C})$ des points $[x_1, \dots, x_n]$ (les racines) ayant une contrainte sur la multiplicité. Par exemple $P_4(2, 2)$ est le sous-espace des $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ qui ne contient pas les configurations de la forme $[x, x, y, y]$. Il correspond donc à l'espace des polynômes ayant au plus une racine double ou une racine triple.

Exemple 2.6.1 Pour $n > 0$, $\Sigma_n(n) = \{p \mid p(z) = (z - a)^n\}$ et ceci est une copie de \mathbb{C} . Le plongement $\Sigma_n(n) \subset SP^n(\mathbb{C}) \cong Pol_n$ correspond à l'inclusion de la diagonale.

Lemme 2.6.2 $P_n(n) \simeq S^{2n-3}$.

PREUVE. (voir [29]) Notons $v : SP^n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n$ le difféomorphisme qui associe $[x_1, \dots, x_n] \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ où σ_i est la i -ème fonction symétrique élémentaire sur x_1, \dots, x_n . On voit alors que $P_n(n) \cong \mathbb{C}^n - v(\Delta)$ ou $v(\Delta)$ est la courbe rationnelle donnée par l'équation

$$a \mapsto \left(na, \binom{n}{2} a^2, \dots, \binom{n}{n-1} a^{n-1}, a^n \right)$$

Autrement dit, si (a_1, \dots, a_n) est sur la courbe, alors $a_1 = na$ et

$$a_i = \binom{n}{i} \left(\frac{a_1}{n} \right)^i, \quad 2 \leq i \leq n$$

Soit la projection $\pi : P_n(n) \longrightarrow \mathbb{C}$, $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \mapsto a_1$. Cette projection à la structure d'un fibré de fibre au dessus de $a \in \mathbb{C}$

$$\pi^{-1}(a) = \mathbb{C}^{n-1} - \{(a_2, a_3, \dots, a_n)\} \cong \mathbb{C}^{n-1} - \{0\} \simeq S^{2n-3}$$

Comme la base du fibré est contractible, on a bien que $P_n(n) \simeq S^{2n-3}$. ■

Pour toute suite $I = (m_1, \dots, m_k)$, on a une suite de plongements et donc une construction filtrée

$$P_1(I) \hookrightarrow P_2 I \hookrightarrow \dots \hookrightarrow P_n I \xrightarrow{+} P_{n+1} I \tag{2.6.3}$$

2.6. Espaces de Polynômes et Stratifications de Young-Samuel

où $+$ associe au polynôme ayant pour racines z_1, \dots, z_n le polynôme de racines z_1, \dots, z_n et $\sum |z_i| + 1$ (voir exemple 3.1.2). C'est la filtration de Young-Samuel et comme attendu cette filtration se scinde.

Proposition 2.6.3 *La filtration de Young-Samuel pour $I = (m_1, \dots, m_k)$ se scinde en homologie*

$$\tilde{H}_*(P_n(I)) \cong \bigoplus_{i=1}^n H_*(P_i(I), P_{i-1}(I))$$

PREUVE. Il va nous falloir modifier légèrement notre filtration (2.6.3) et nos flèches de stabilisation $+$. Soit $\tilde{P}_{n-1}(I)$ le rétracte par déformation de $P_{n-1}(I)$ qui consiste en tous les polynômes dont les racines sont dans le disque fermé de rayon 2. A un tel polynôme, déterminé par ses racines $[x_1, \dots, x_{n-1}]$, nous associons le polynôme de $\tilde{P}_n(I)$ dont les racines sont

$$[\phi(x_1), \dots, \phi(x_{n-1}), 2]$$

où ϕ est un *isotopie* du disque de rayon 2 vers le disque unité. On écrira $\iota_{n-1} : \tilde{P}_{n-1}(I) \hookrightarrow \tilde{P}_n(I)$ l'inclusion ainsi obtenue. Cette inclusion est fermée (dans le sens où l'image de ι_{n-1} est un sous-espace fermé) et la filtration associée

$$\tilde{P}_1(I) \xrightarrow{\iota_1} \tilde{P}_2(I) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \tilde{P}_n(I) \quad (2.6.4)$$

est admissible. L'application (2.1.3), qui consiste à supprimer k entrées à la fois de toutes les manières possibles se restreint à $\tilde{P}_n(I)$ de façon à ce qu'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_n(I) & \xrightarrow{\partial_{n,k}} & \mathrm{SP}^\infty(\tilde{P}_{n-k}(I)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{SP}^n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\partial_{n,k}} & \mathrm{SP}^\infty(\mathrm{SP}^{n-k}(\mathbb{C})) \end{array}$$

En effet en supprimant une racine à un polynôme ne pouvant être factorisé comme dans (2.6.2) on obtient toujours un polynôme ne pouvant être factorisé comme dans (2.6.2). Il devient alors facile de voir qu'il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{P}_n(I) & & \\ \uparrow & \searrow^{\partial_{n,k}} & \\ \tilde{P}_{n-1}(I) & & \mathrm{SP}^\infty(\tilde{P}_{n-k}(I)) \\ \downarrow & \nearrow_{\partial_{n-1,k}} & \\ \tilde{P}_{n-1}(I) & & \end{array}$$

dont la commutativité à homotopie est une conséquence du fait que ϕ est homotope à l'identité. La seconde condition du théorème 1.2.6 est vérifiée et la filtration (2.6.4) se scinde (et donc également (2.6.3)). ■

La démonstration ci-dessus sera reprise dans la section 3.1 pour scinder les espaces de configurations de variétés plus générales.

Exemple 2.6.4 Posons $n = 4$ et considérons la suite $P_1(3) \subset P_2(3) \subset P_3(3) \subset P_4(3)$. De ce qui précède on a $P_3(3) \simeq S^3$. Et d'autre part $\Sigma_4(3)$ est homéomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ par l'application associant $(z-a)^3(z-b)$ à la paire ordonnée (a, b) . On a donc $P_4(3) = \text{SP}^4(\mathbb{C}) - \Sigma_4(3) \cong \mathbb{C}^4 - v(\mathbb{C}^2)$ où v , pareillement à l'exemple 2.6.1, envoie

$$(a, b) \mapsto (-b - 3a + 3a^2, -3ab, -3a^2b - a^3, a^3b)$$

Cette flèche est un plongement de \mathbb{C}^2 dans \mathbb{C}^4 . En prenant le compactifié d'Alexandroff ("one-point compactification") nous voyons que $P_4(3) \cong S^8 - S^4$ et en appliquant la dualité d'Alexander de sorte que $H_i(P_4(3)) = H^{8-i}(S^8, S^4)$, on obtient

$$H_i(P_4(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 8 \\ \mathbb{Z}, & i = 3 \end{cases}$$

Nous désirons vérifier que $H_*(P_4(3)) = H_*(P_4(3), P_3(3)) \oplus H_*(P_3(3))$. Ce sera une conséquence du fait que $\iota_{3,*} : H_3(P_3(3)) \longrightarrow H_3(P_4(3))$ est un isomorphisme (entre deux copies de \mathbb{Z}). On regarde donc au niveau des complémentaires

$$\iota_3 : P_3(3) = \text{SP}^3(\mathbb{C}) - \Sigma_3(3) \longrightarrow P_4(3) = \text{SP}^4(\mathbb{C}) - \Sigma_4(3)$$

puis on l'étend au compactifié d'Alexandroff

$$P_3(3) = S^6 - S^2 \longrightarrow P_4(3) = S^8 - S^4$$

Par Alexander la classe $H_3(P_3(3))$ est duale à $H^2(S^2)$ et $H_3(P_4(3))$ est duale à $H^4(S^4)$. L'application $\iota_{3,*}$ suivi de la dualité est une flèche $H^2(S^2) \longrightarrow H^4(S^4)$ qui est un isomorphisme car équivalente à une double suspension (voir [35]).

Chapitre 3

Scindements Stables

3.1 Espaces de Configurations et Analogues

Dans cette section nous allons scinder des espaces obtenus comme des quotients de sous-espaces de X^n par l'action du groupe symétrique. Des exemples de sous-espaces \mathfrak{S}_n -invariants dans X^n (avec $n \geq 2$ un entier fixé) sont :

1. Le fat wedge d'ordre d de X^n

$$W_d(X, n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_d} = * \\ \text{pour un sous-ensemble fini } I = \{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, n\}\}$$

Le wedge usuel est donné par $W_{n-1}(X, n) = \bigvee^n X$.

2. La fat diagonale d'ordre d est donnée par

$$F_d(X, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \text{il existe une coordonnée qui se répète au moins } d \text{ fois}\}$$

3. $F^d(X, n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \text{aucune coordonnée ne se répète plus de } d \text{ fois}\}$. Autrement dit

$$F^d(X, n) = X^n - F_{d+1}(X, n)$$

$F^1(X, n) := F(X, n)$ devient l'espace de configurations de points distincts et ordonnés.

4. Finalement on définit les constructions non ordonnées

$$B_d(X, n) = F_d(X, n)/\mathfrak{S}_n \quad \text{and} \quad B^d(X, n) = F^d(X, n)/\mathfrak{S}_n$$

On a $B^1(X, n) := B(X, n)$ et $B_n(X, n) = X$. On appellera les $B(X, n)$ les *espaces de tresses* de X (ou encore les espaces de configurations).

Il est facile de vérifier que

$$B_{n-1}(X, n) = X \times X \quad , \quad n \geq 3$$

5. Pour X un CW complexe, les espaces $F^d(X, n)$ et $B^d(X, n)$, de même $F_d(X, n)$ et $B_d(X, n)$ sont du type d'homotopie d'un CW complexe.

Notons que la construction $F^d(X, n)$ n'est pas fonctorielle puisque l'application constante n'induit pas une self-application de $F^d(X, n)$. Par contre la diagonale épaisse $F_d(X, n)$ est non seulement une construction fonctorielle mais elle est un invariant d'homotopie.

En faisant varier d on obtient deux filtrations naturelles

$$B(X, n) = B^1(X, n) \subset B^2(X, n) \subset \cdots \subset B^n(X, n) = \text{SP}^n X \quad (3.1.1)$$

et

$$B_n(X, n) = X \subset B_{n-1}(X, n) \subset \cdots \subset B_1(X, n) = \text{SP}^n X \quad (3.1.2)$$

La première ne peut pas se scinder en homologie puisque $H_1(B(X, n))$ ne se plonge presque jamais dans $H_1(\text{SP}^n X) = H_1(X)$ pour $n \geq 2$. La seconde ne se scinde pas non plus en homologie puisque que nous avons remarqué que $B_2(S^2, 3) = S^2 \times S^2$ alors que $\text{SP}^3(S^2) = \mathbb{P}^3$ de sorte que l'homologie de $B_2(S^2, 3)$ ne peut pas se plonger dans l'homologie de $\text{SP}^3(S^2)$. Nous pouvons néanmoins construire une filtration qui se scinde.

Étant donné une paire d'espaces non-vides (X, A) satisfaisant une certaine propriété, nous allons construire pour tout entier n une inclusion $B^d(X - A, n) \xrightarrow{s_n} B^d(X - A, n+1)$. L'exemple à retenir est lorsque $A = \partial X$ est le bord non vide d'une variété X . On notera Y l'intérieur de X . Dans ce cas on peut choisir un plongement $\phi : Y \hookrightarrow Y$ qui est isotope à l'identité mais qui évite un point x du bord. En particulier $\phi(Y)$ évite un petit voisinage contractible $V \subset X$ de ce x . Etant donné une configuration $c \in B^d(X - A, n)$, alors $\phi(c)$ est une configuration de n -points qui évite V et donc pour tout choix v à l'intérieur de V , la flèche $\phi(c) + v$ est un plongement de $B^d(X - A, n)$ dans $B^d(X - A, n+1)$

On essaie de formaliser ceci de la façon suivante :

Définition 3.1.1 *On dit qu'une paire (X, A) possède une contraction relative ϕ s'il existe un plongement $\phi : X - A \hookrightarrow X - A$, isotope à l'identité et tel que $\phi(X - A)$ évite un voisinage V de $A \subset X$.*

Soit (X, A) une paire admettant une contraction relative ϕ et choisissons un point $p \in V$ (voir définition). Nous pouvons alors construire des plongements $s_n : B^d(X - A, n) \hookrightarrow B^d(X - A, n+1)$ en envoyant

$$B^d(X - A, n) \xrightarrow{s_n} B^d(X - A, n+1) \quad , \quad [x_1, \dots, x_n] \mapsto [\phi(x_1), \dots, \phi(x_n), p] \quad (3.1.3)$$

3.1. Espaces de Configurations et Analogues

Cette application consiste à “ajouter un point p proche de A ” et déplacer tous les autres points dans $X - V$. Cette application est bien définie puisque ϕ est un homéomorphisme sur son image.

Exemple 3.1.2 Si $A = \{p\} \subset X$ est un point, alors nous noterons $X^* := X - A$. Si X^* est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n = S^n - \{p\}$, alors les applications stabilisantes (3.1.3) peuvent être choisies plus simplement en envoyant $s_n : [x_1, \dots, x_n] \longrightarrow [x_1, \dots, x_n, \sum |x_i| + 1]$

On peut identifier, à travers la flèche s_k le sous-espace $B^d(X - A, k)$ avec son image dans $B^d(X - A, k+1)$. On obtient ainsi une filtration de $B^d(X - A, n)$ qui est par contre non-admissible puisque ces images ne sont pas en général fermées. Pour éviter ce petit problème nous choisissons un petit voisinage ouvert U de A tel que (i) U est strictement inclu dans V (definition 3.1.1), (ii) $X - U$ se rétracte par déformation sur $X - A$ et (iii) $\phi : X - A \longrightarrow X - A$ se restreint à une isotopie $X - U \longrightarrow X - U$. On peut vérifier que

$$B^d(X - U, n) \simeq B^d(X - A, n)$$

Les applications de stabilisation $s_k : B^d(X - U, k) \longrightarrow B^d(X - U, k + 1)$ sont données par le choix d'un point $p \in V - U$. On identifie $B^d(X - U, k)$ avec son image via s_k . Cette image est maintenant fermée dans $B^d(X - U, k + 1)$. On considère alors la filtration associée $B^d(X - U)_\bullet$.

Lemme 3.1.3 $B^d(X - U)_\bullet$ est une filtration admissible.

PREUVE. On rappelle que $\emptyset \neq A \subset U \subsetneq V \subset X$. Il nous faut montrer pour tout n que l'image de s_n admet un voisinage dans $B^d(X - U, n + 1)$ dont elle est rétracte par déformation. Soit ϕ l'isotopie qui contracte $X - U$ dans $X - V$. On choisit $p \in V$ et U_p un petit voisinage de p ouvert dans V . On supposera que pour $t \geq 1/2$, $\phi_t(X - A)$ évite U_p . L'image de s_n consiste en des uplets $[x_1, \dots, x_n, p]$ où $x_i \in \phi(X - U) \subset X - V$. Posons $W = \phi_{1/2}(X - A)$ qui est un voisinage de $X - V$. Le sous-espace

$$\{[x_1, \dots, x_n, q] \text{ , } x_i \in W, q \in V\}$$

est un ouvert de $B^d(X - U, n)$ qui se rétracte par déformation sur $Im(s_n)$ via rétraction par déformation de U_p sur p et de W sur $\phi(X - U)$. ■

Les résultats suivants possèdent de nombreuses applications [7, 33].

Théorème 3.1.4 Soit (X, A) une paire possédant une contraction relative, soit d un entier positif. La filtration $B^d(X - A)_\bullet := \{B^d(X - A, n)\}_{n \geq 1}$ se scinde en homologie et pour $d = 1$ elle se scinde stablement. Autrement dit on a

$$SP^\infty(B^d(X - A, n)) \simeq \prod_{i=1}^n SP^\infty(D^d(X - A, i))$$

où $D^d(X - A, n) := \text{Cofib}(s_n)$, et pour $d = 1$ on a le scindement stable

$$B(X - A, n) \simeq_s \bigvee_{i=1}^n D(X - A, i)$$

PREUVE. Nos applications de James-Hopf $\partial_{n,k} : B^d(X - A, n) \longrightarrow \text{SP}^\infty(\overline{B}^d(X - A, n - k))$ pour $k \geq 1$, appliquent $[x_1, \dots, x_n]$ sur le produit dans SP^∞ de tous les uplets de la forme

$$[[x_1, \dots, \hat{x}_{i_1}, \dots, \hat{x}_{i_2}, \dots, \hat{x}_{i_k}, \dots, x_n]]$$

où $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ et le chapeau signifie omission. Le diagramme suivant commute (strictement)

$$\begin{array}{ccc} B^d(X - A, n) & \xrightarrow{\partial_{n,k}} & \text{SP}^\infty(\overline{B}^d(X - A, n - k)) \\ \uparrow s_{n-1} & & \nearrow \partial_{n-1,k} \circ \phi \\ B^d(X - A, n - 1) & & \end{array} \quad (3.1.4)$$

où $\phi[x_1, \dots, x_n] = [\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)]$ et ϕ est la contraction $X - A$ dans $X - V$. On voit clairement que $\partial_{n,k} \circ s_{n-1} \simeq \partial_{n-1,k}$ puisque $\phi \simeq id$. Les conditions du théorème 1.2.4 sont satisfaites ce qui assure un scindement en homologie. Quand $d = 1$, l'image de ∂ est contenue dans $B^*(\overline{B}^d(X - A, n - k))$ ce qui assure un scindement stable. ■

Remarque 3.1.5 *Scindement de Snaith.* Le scindement stable de $B^1(S^m - p, n) = B(\mathbb{R}^m, n)$ est dû à Snaith pour m fini et à Kahn pour $m = \infty$. Pour $d > 1$ l'espace $B^d(X - A, n)$ ne se scinde pas stablement en général. Par exemple et pour $d > 1$, $B^d(S^3 - \{0, 1\}, 2) \simeq \text{SP}^2(S^2) = \mathbb{P}^2$. La paire (\mathbb{P}^2, S^2) ne se scinde pas comme il est connu car l'opération de Steenrod Sq^2 sur le générateur en bas degré est non-triviale.

3.1.1 Orbit Configurations

Soit G un groupe opérant sur une variété M . On dénotera par $\pi : M^n \longrightarrow (M/G)^n$ le produit n -fois de la projection $\pi : M \longrightarrow M/G$. On définit alors le sous-espace $F_G^d(M, n) \subset M^n$ par

$$F_G^d(M, n) := \pi^{-1}(F^d(M/G, n))$$

où $F^d(M/G, n)$ est comme dans la section 3.1, (3). Ce sous-espace correspond aux uplets de points $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ tel que aucune orbite G_{x_i} parmi G_{x_1}, \dots, G_{x_n} ne se répète plus de d fois. Evidemment $F_G(M, n) := F_G^1(M, n)$ est l'espace de configurations d'orbites distinctes [21]. Dans ce cas et quand l'action de G est libre, $F_G(M, n)$ est un revêtement à $|G|^n$ -feuilletés de

3.1. Espaces de Configurations et Analogues

l'espace de configurations $F(M/G, n)$.

Comme dans la section 3.1 on pose

$$B_G^d(M, n) = F_G^d(M, n)/\mathfrak{S}_n$$

On souhaite évidemment scinder $B_G^d(M, n)$ par rapport à une filtration raisonable.

Exemple 3.1.6 Choisissons $G = SO(2)$, ou tout autre sous groupe de $S^1 = SO(2)$ opérant sur \mathbb{C} par multiplication. Comme dans la remarque 3.1.2 on a les plongements suivants :

$$B_G^d(\mathbb{C}, k) \longrightarrow B_G^d(\mathbb{C}, k+1), [x_1, \dots, x_k] \mapsto [x_1, \dots, x_k, \sum |x_i| + 1]$$

qui donne lieu à une filtration équivalente (comme expliqué dans les sections 2.6 et 3.1) à une filtration admissible. Les James-Hopf maps dans (2.1.3) se restreignent pour $k < n$ à des flèches $B_G^d(\mathbb{C}, n) \longrightarrow \text{SP}^\infty(B_G^d(\mathbb{C}, k))$ satisfaisant aux conditions de la Proposition 1.2.4 par rapport à SP^∞ . Ceci donne

$$H_*(B_G^d(\mathbb{C}, n)) = \bigoplus_{k=0}^n H_*(B_G^d(\mathbb{C}, k), B_G^d(\mathbb{C}, k-1)) \quad (3.1.5)$$

De même on peut remplacer \mathbb{C} par \mathbb{R}^ℓ et G un sous-groupe fini de $O(\ell)$.

Notons que pour G sous-groupe non-trivial de $SO(2)$, l'homologie des $B_G^d(\mathbb{C}, n)$ ne semble pas connue en général.

Exemple 3.1.7 Un autre exemple provient de [21] avec $M = \mathbb{H}$ le demi-plan supérieur (plan hyperbolique) et $G \subset PSL_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe *discret* du groupe d'isométries (i.e groupe Fuchsien). On souhaiterait scinder $H_*(B_G(\mathbb{H}, n))$.

Supposons que $G \subset PSL_2(\mathbb{Z})$ a pour domaine fondamental D contenant la demie-droite imaginaire passant par $i \in \mathbb{C}$. Étant donné $x \in \mathbb{H}$, il existe un unique $\bar{x} \in D$ dans son orbite sous l'action de G . Soit $|x|$ la distance de \bar{x} de $i \in \mathbb{H}$ dans la métrique hyperbolique). Alors l'application

$$[x_1, \dots, x_k] \longmapsto [x_1, \dots, x_n, (\sum |x_i| + 1)i]$$

est bien définie de $B_G(\mathbb{H}, k)$ dans $B_G(\mathbb{H}, k+1)$ puisque $(\sum |x_i| + 1)i$ n'est dans l'orbite d'aucun x_i . Cette application est un plongement et nous avons une filtration associée $\dots B_G(\mathbb{H}, k) \subset B_G(\mathbb{H}, k+1) \dots$ laquelle se scinde pour les mêmes raisons que toujours

$$H_*(B_G(\mathbb{H}, n)) \cong \bigoplus H_*(B_G(\mathbb{H}, k), B_G(\mathbb{H}, k-1))$$

Un scindement analogue existe pour le cas non-ordonnés $F_G(\mathbb{H}, k)$. Dans ce cas et si C_i est la fibre de la projection $F_G(\mathbb{H}, i) \rightarrow F_G(\mathbb{H}, i-1)$, alors

$$H_*(F_G(\mathbb{H}, n)) = H_*(C_1) \otimes H_*(C_2) \otimes \dots \otimes H_*(C_n)$$

avec C_i 's un bouquet de cercles [21].

3.2 Configurations ordonnées

Soi M une variété compacte sans bord et on rappelle que $F^d(M, n)$ est l'ensemble de tous les uplets (x_1, \dots, x_n) tel que aucun des x_i ne se répète plus de d -fois. Si $A \neq \emptyset$ est un sous-espace fermé de M , alors il est tout à fait possible d'écrire un scindement homologique pour $F^d(M - A, n)$ puisque $F^d(M - A, n - 1)$ est un rétracte à homotopie près. Plus précisément si $r : F^d(M - A, n) \longrightarrow F^d(M - A, n - 1)$ est la projection sur la dernière coordonnée, et si $i : F^d(M - A, n - 1) \longrightarrow F^d(M - A, n)$ est l'inclusion analogue de (3.1.3), alors $r \circ i \simeq id$.

Exemple 3.2.1 Pour le scindement de $H_*(F(M^*, n))$, ou M^* est M privé d'un point, les groupes d'homologie relatifs $H_*(F(M^*, k), F(M^*, k - 1))$ sont déterminés en examinant la fibre de la projection $F(M^*, k) \rightarrow F(M^*, k - 1)$ si cette dernière est homologiquement triviale¹. Dans le cas où $M = S^m$, c'est un bouquet de sphères puisque nous avons la fibration

$$\mathbb{R}^m - Q_{n-1} \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, n) \longrightarrow F(\mathbb{R}^m, n - 1)$$

où Q_{n-1} est un ensemble de $n - 1$ points distincts, d'où $\mathbb{R}^m - Q_{n-1} \simeq \bigvee^{n-1} S^{m-1}$. Ces fibrés sont homologiquement triviaux (travaux de Fred Cohen en particulier) et donc par récurrence

$$H_*(F(\mathbb{R}^m, n)) \cong \bigotimes_{k=1}^{n-1} H_*(\bigvee^k S^{m-1})$$

Stablement (après une suspension), $F(\mathbb{R}^m, n)$ est un produit de bouquets $\bigvee S^{m-1}$ ou encore un wedge de sphères de dimensions des multiples de $m - 1$.

Quand M est une variété fermée, nous n'avons pas en général une filtration "naturelle" (i.e. en terme des multiplicités des points) par rapport à laquelle scinder $F(M, n)$. Néanmoins et dans certains cas il existe des astuces qui conduisent à des scindements intéressants. Nous illustrons ceci avec $M = S^2$.

Rappelons que $SO(3) \simeq PGL_2(\mathbb{C})$ opère transitivement sur S^2 et que tout élément de $SO(3)$ est déterminé de manière unique par l'image de $\{0, 1, \infty\}$. Nous avons l'identification

$$F(S^2, 3) = F(\mathbb{R}^2, 2) \times_{SO(2)} SO(3)$$

où $SO(3)$ opère sur S^2 par rotation et $SO(2) = S^1$ le stabilisateur du pôle nord. Ceci donne que $F(S^2, 3)$ est le fibré en sphères $ST(S^2)$. Nous voyons clairement que $H_2(F(S^2, 3)) = 0$. Or $F(S^2, 2) \simeq S^2$ et donc $H_2F(S^2, 2) = H_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Ceci montre que $H_*(F(S^2, 2))$ ne peut se scinder de $H_*(F(S^2, 3))$.

1. C'est à dire l'homologie de l'espace total est produit tensoriel de l'homologie de la fibre et celle de la base.

3.3. Analogues Fiberwise

Néanmoins la chose suivante est possible.

Proposition 3.2.2 *Pour $n \geq 3$, $H_*(F(S^2, n)) \cong \bigoplus_{k \geq 3}^n H_*(F(S^2, k+1), F(S^2, k))$.*

PREUVE. Tout d'abord on explique comment se représenter $F(S^2, k)$ comme sous-espace de $F(S^2, k+1)$ dès que $k \geq 3$. Posons $Q_3 := \{0, 1, \infty\}$. On a un homéomorphisme

$$SO(3) \times F(S^2 - Q_3, k-3) \xrightarrow{\cong} F(S^2, k) \quad (3.2.1)$$

Appliquant $(g, (x_1, \dots, x_{k-3}) \mapsto (g(0), g(1), g(\infty), g(x_1), \dots, g(x_{k-3}))$. Le terme à droite se plonge dans $SO(3) \times F(S^2 - Q_3, k-2)$ grâce au plongement ($SO(3)$ -équivariant)

$$\begin{aligned} F(S^2 - Q_3, k-3) = F(\mathbb{R}^2 - \{0, 1\}, k-3) &\hookrightarrow F(\mathbb{R}^2 - \{0, 1\}, k-2) \\ [x_1, \dots, x_{k-3}] &\mapsto [x_1, \dots, x_{k-3}, \sum |x_i| + 1] \end{aligned}$$

Ceci donne un plongement $F(S^2, k) \hookrightarrow F(S^2, k+1)$ pour $k \geq 3$. On peut dès lors appliquer le théorème 3.1.4 et obtenir le scindement

$$H_*(F(S^2 - Q_3, n-3)) \cong \bigoplus_1^{n-3} H_*(F(S^2 - Q_3, k), F(S^2 - Q_3, k-1)) \quad (3.2.2)$$

D'autre part puisque $H_*(F(S^2 - Q_3, k))$ est sans torsion,

$$H_*(F(S^2, n)) \cong H_*(SO(3)) \otimes H_*(F(S^2 - Q_3, n-3))$$

Pour obtenir le scindement de 3.2.2, on rappelle que pour des espaces M, A, B , $B \subset A$, on a $M \times A/M \times B = M \times (A/B)$ et donc

$$H_*(M \times A, M \times B) \cong \tilde{H}_*(M \times A/B) = H_*(M) \otimes \tilde{H}_*(A/B) = H_*(M) \otimes H_*(A, B)$$

En combinant (3.2.1) et (3.2.2) avec cette égalité on déduit le résultat. ■

Question (Configurations Cycliques). Pour $\Gamma_n = \mathbb{Z}_n \subset \mathfrak{S}_n$, a-t-on des scindements stables ou en homologie pour les configurations cycliques $F(M, n)/\mathbb{Z}_n$?

3.3 Analogues Fiberwise

Soit E un espace sur X ; c'est à dire un espace équipé d'une surjection $\pi : E \longrightarrow X$ et d'une section $s : X \longrightarrow E$. On définit le produit fibré

$$\underbrace{E \times_X \cdots \times_X E}_n := \{(e_1, \dots, e_n) \in E^n \mid \pi(e_i) = \pi(e_j)\}$$

Le groupe symétrique \mathfrak{S}_n agit par permutation sur ce produit fibré et on définit le quotient $\mathrm{SP}_X^n(E)$ par cette action. Nous avons des inclusions $\mathrm{SP}_X^{n-1}(E) \longrightarrow \mathrm{SP}_X^n(E)$,

$$[e_1, \dots, e_{n-1}] \mapsto [e_1, \dots, e_{n-1}, s\pi(e_1)]$$

Cette flèche de stabilisation est bien définie puisque $s\pi(e_1) = s\pi(e_i)$, $\forall i$. On définit la cofibre de cette inclusion par $\overline{\mathrm{SP}}_X^n(E)$. Notons que $\mathrm{SP}_X^0 E = X$, que $\mathrm{SP}_X^1 E = E$ et que $\overline{\mathrm{SP}}_X^1 E = E/s(X)$.

Dans cette section, nous allons traiter du cas où $E \longrightarrow X$ est un fibré de fibre F . Dans ce cas, la projection $\mathrm{SP}_X^n(E) \longrightarrow X$, $[e_1, \dots, e_n] \mapsto \pi(e_i)$ a la structure d'un fibré de fibre $\mathrm{SP}^n(F)$. Chaque fibre est pointée grâce à la section et donc on peut filtrer fiberwise par les produits symétriques de F . Notons que $\mathrm{SP}_X^{n-1} E$ est un sous-fibré de $\mathrm{SP}_X^n E$. En écrasant fiberwise $\mathrm{SP}^{n-1} F$ dans $\mathrm{SP}^n F$, on obtient un nouveau fibré $\overline{E} \longrightarrow X$ de fibre $\overline{\mathrm{SP}}^n F$. La cofibre $\overline{\mathrm{SP}}_X^n(E)$ est maintenant homéomorphe à la cofibre de la section

$$s' : X \longrightarrow \overline{E}$$

qui envoie $x \in X$ au point d'écrasement de $\mathrm{SP}^{n-1} F$ dans $\overline{\mathrm{SP}}^n F$.

La proposition suivante se spécialise au scindement de Steenrod lorsque $X = \text{point}$.

Proposition 3.3.1 *Soit E un espace sur X . Alors il existe un scindement de Steenrod fiberwise*

$$\tilde{H}_*(\mathrm{SP}_X^n E) \cong \bigoplus_{k=0}^n \tilde{H}_*(\overline{\mathrm{SP}}_X^k E)$$

Ce scindement est naturel par rapport aux flèches au dessus de X .

PREUVE. On définit de façon analogue des applications de James-Hopf $\mathrm{SP}_X^n E \longrightarrow \mathrm{SP}^\infty(\overline{\mathrm{SP}}_X^k E)$ définies sur une trivialisations $\mathrm{SP}^n F \times U$, $U \subset X$, par

$$[[x_1 \cdots x_n], e] \mapsto \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} [[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}], e]$$

On vérifie alors et comme précédemment les propriétés de compatibilité du théorème 1.2.4. ■

Plus intéressant à étudier sont les espaces de configurations fiberwise. Soit $E \longrightarrow X$ un fibré de fibre F et considérons à la fois

$$F_X(E, n) = \{(e_1, \dots, e_n) \in F(E, n) \mid \pi(e_i) = \pi(e_j), \forall i, j\}$$

et sa version non-ordonnée obtenue en faisant agir \mathfrak{S}_n fiberwise

$$B_X(E, n) = \{[e_1, \dots, e_n] \in B(E, n) \mid \pi(e_i) = \pi(e_j), \forall i, j\}$$

Chaque fibre de $B_X(E, n) \longrightarrow X$ est une copie de l'espace de configurations $B(F, n)$. Pour F

3.3. Analogues Fiberwise

une variété ouverte ou avec bord on sait que $B(F, n)$ se scinde par rapport à une filtration $\{B(F, k)\}_{k \leq n}$ (théorème 3.1.4). La question qui se pose est de savoir si $B_X(E, n)$ se scinde stablement aussi? Il s'avère que ceci n'est pas toujours possible comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.3.2 Soit X une variété Riemannienne lisse et fermée de caractéristique d'Euler $\chi(X)$ non nulle et de dimension paire, et soit TX son fibré tangent de fibre \mathbb{R}^n . Nous affirmons que $F_X(TX, 2)$ est homotopiquement le tangent en sphères $ST(X)$ de X . En effet l'application $F_X(TX, 2) \longrightarrow ST(X)$ qui envoie un point (x, v_1, v_2) , avec $v_1 \neq v_2$ deux vecteurs du tangent en $x \in X$, au point

$$\left(x, \frac{v_1 - v_2}{|v_1 - v_2|} \right)$$

induit une équivalence d'homotopie fiberwise. Il s'ensuit bien sûr que $B_X(E, 2)$ est le projectivisé TX du tangent à X .

Supposons que la paire $(B_X(TX, 1), B_X(TX, 2))$ se scinde; c'est à dire en vue de ce qui précède que (X, TX) se scinde et que donc X est un rétracte homologique de TX . Ceci entraînerait que $H_*(X)$ se plonge dans $H_*(TX)$ ce que nous argumentons est impossible si la dimension n de X est paire.

En effet et dans la suite spectrale du fibré en sphères $S^{n-1} \longrightarrow ST(X) \longrightarrow X$, la classe d'orientation $[X] \in H_n(X)$ est transgressive et son image est $\chi(X)[S^{n-1}]$. En passant au projectivisé $\mathbb{R}P^{n-1} \longrightarrow TX \longrightarrow X$ et lorsque n est paire, $\mathbb{R}P^{n-1}$ à une classe d'orientation qui est également dans l'image de la transgression (par comparaison de suites spectrales) et cette image est toujours multiplication par $\chi(X)$. Ceci donne que la classe de $[X]$ dans le terme $E^{n,0}$ ne survit pas dans la suite spectrale et n'apparaît donc pas dans l'homologie de $H_*(TX)$ infirmant ainsi l'existence d'un plongement $H_*(X) \hookrightarrow H_*(TX)$.

L'exemple 3.3.2 montre que la classe d'Euler de la variété est une obstruction essentielle au splitting de $B_X(TX, n)$. La construction de la filtration même n'est pas toujours possible. Ceci se voit dès le départ en voulant construire un plongement $F_X(TX, 1) = TX \simeq X$ dans $F_X(TX, 2) \simeq ST(X)$ au dessus de X . Un tel plongement est équivalent à la donnée d'une section de $ST(X)$. Or d'après un célèbre théorème de Hopf, une telle section existe (c'est à dire un champ de vecteurs non nuls existe sur X) si et seulement si $\chi(X) = 0$. Il est cependant possible lorsque $\chi(X) = 0$ de construire une filtration $B_X(E, \bullet)$ qui se scinde. On assume toujours que X est fermée et lisse.

Théorème 3.3.3 *Si X est une variété de caractéristique d'Euler nulle, alors $B_X(TX, n)$ possède une filtration associée $B_X(TX, \bullet)$ qui se scinde stablement.*

PREUVE. Puisque $\chi(X) = 0$, il existe une section s de $ST(X) \longrightarrow X$. Soit $DT(X)$ le fibré en disques de TX ; c'est à dire le sous-fibré de TX de fibre le disque fermé unitaire. Comme dans

la section 3.1, on remplace $B_X(TX, n)$ par $B_X(DT(X), n)$ qui est un rétracte par déformation et on démontre le splitting pour une filtration équivalente $B_X(DT(X), \bullet)$. Cette filtration est obtenue de manière analogue en faisant usage de ϕ un plongement de $DT(X)$ dans $D_{1/2}TX$, isotope à l'identité *au dessus* de X , et où $D_{1/2}TX$ est le fibré en disques de rayon $1/2$. La composée

$$B_X(DT(X), n) \xrightarrow{\phi} B_X(D_{1/2}T(X), n) \longrightarrow B_X(DT(X), n+1)$$

est définie sur une trivialisaton par

$$(x, [v_1, \dots, v_n]) \longmapsto (x, [\phi([v_1, \dots, v_n]), s(x)])$$

Cette flèche est bien définie puisque $|s(x)| = 1 > |v_i|$. Ceci donne un plongement et on obtient ainsi la filtration $B_X(DT(X), \bullet)$ qui est admissible (ceci justifie le choix de travailler avec $DT(X)$ au lieu de $T(X)$). Les James-Hopf maps habituelles $B_X(DT(X), n) \longrightarrow B^*(B_X(DT(X), n-k), \infty)$ envoyant

$$([v_1, \dots, v_n], x) \longrightarrow \prod_{i_1, \dots, i_k} ([v_1, \dots, \hat{v}_{i_1}, \dots, \hat{v}_{i_k}, \dots, v_n], x)$$

sont bien définies et compatibles une fois qu'on étend ces flèches à $B^*(\overline{B}_X(DT(X), n-k), \infty)$. Ceci donne le splitting requis. ■

3.3.1 Fibrés associés

Supposons que $E \longrightarrow X$ est un fibré associé à une fibration principale $\pi : P \longrightarrow X$ de groupe G ; c'est à dire $E = P \times_G F$. Alors G agit sur $\text{SP}^n(F)$ et par restriction sur $B(F, n)$ en envoyant $(g, [x_1, \dots, x_n]) \longmapsto [gx_1, \dots, gx_n]$. Dans ce cas $B_X(E, n)$ devient un fibré associé.

Lemme 3.3.4 $B_X(E, n) \cong P \times_G B(F, n)$.

PREUVE. Un élément de $B_X(E, n)$ s'écrit comme $[[p_1, f_1], \dots, [p_n, f_n]]$ avec $[p_i, f_i] \neq [p_i, f_j], i \neq j$ et $\pi(p_i) = \pi(p_j) := x \in X$. Soit $p_0 \in P$ un point au dessus de x . Alors pour tout $p_i, \exists g_i$ tel que $p_i = p_0 g_i$. Chaque élément $[p_i, f_i]$ est alors équivalent à $[p_0, g_i^{-1} f_i]$. On a donc une flèche

$$B_X(E, n) \longrightarrow P \times_G B(F, n) \quad , \quad [[p_1, f_1], \dots, [p_n, f_n]] \longrightarrow [p_0, (g_1^{-1} f_1, \dots, g_n^{-1} f_n)]$$

Cette flèche est bien définie car si $g_i^{-1} f_i = g_j^{-1} f_j$, alors $[p_0, g_i^{-1} f_i] = [p_0, g_j^{-1} f_j]$ et donc $[p_i, f_i] = [p_j, f_j]$ ce qui est impossible. Il est facile de voir que cette flèche est un homéomorphisme. ■

Si nous cherchons à construire une section de $B_X(E, n)$, l'observation suivante est très utile

Lemme 3.3.5 Soit $E = F \times_G P$ un fibré associé sur $X = P/G$. Alors les sections de $E \longrightarrow X$ sont en correspondance biunivoque avec les applications $P \longrightarrow F$ qui sont G -équivariantes.

3.4. Tresses et Espaces Classifiants

PREUVE. Soit $f : P \rightarrow F$ une flèche G -équivariante, alors $s([x]) = (x, f(x))$ est une section de E , $[x] \in X = P/G$. ■

3.4 Tresses et Espaces Classifiants

Pour un groupe *discret* G , son classifiant est un $K(G, 1)$ et l'homologie du groupe est définie par $H_*(G) := H_*K(G, 1) = H_*(BG)$. Le théorème 3.1.4 peut être utilisé pour scinder l'homologie de certains groupes discrets.

Nous désignerons comme toujours par \mathfrak{S}_n le groupe symétrique et par \mathfrak{S}_{n-1} le sous-groupe des permutations du sous-ensemble $\{1, \dots, n-1\} \subset \{1, \dots, n\}$. L'inclusion $\mathfrak{S}_{n-1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ ainsi obtenue sera appelée inclusion *canonique*.

Exemple 3.4.1 Rappelons que $B(X, n) := F(X, n)/\mathfrak{S}_n$ et que $B(\mathbb{R}^\infty, n) = B\mathfrak{S}_n$ et $B(\mathbb{R}^2, n) = BB_n$ sont les espaces classifiants respectifs de \mathfrak{S}_n et du groupe de tresse d'Artin B_n . La proposition 3.1.4 devient dans ce cas :

- (i) $H_*(\mathfrak{S}_n) \cong H_*(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1}) \oplus H_*(\mathfrak{S}_{n-1})$ (Nakaoka).
- (ii) $H_*(B_n) \cong H_*(B_k, B_{k-1}) \oplus H_*(B_{k-1})$ (F. Cohen).

Remarque 3.4.2 Le splitting du groupe symétrique donné par Nakaoka et le splitting de Steenrod sont fortement reliés. En effet, on peut obtenir l'un à partir de l'autre par le biais d'un isomorphisme de dualité

$$H_i(\mathfrak{S}_n) \cong H^{nq-i}(\mathrm{SP}^n(S^q)) \quad , \quad i < q, q \text{ pair}$$

Cet isomorphisme est donné essentiellement par un cup produit avec la classe fondamentale $u \in H^q(\mathrm{SP}^{n+1}(S^q))$ (détails dans [35, 46]).

Exemple 3.4.3 Le groupe de tresses rubannées RB_n (ou *Ribbon braid group*) est le produit semi-direct $\mathbb{Z}^n \rtimes B_n$, où B_n opère sur \mathbb{Z}^n par permutation et par le biais de $\Phi_n : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ l'homomorphisme standard ; i.e.

$$\sigma(r_1, \dots, r_n) = (r_{\Phi_n(\sigma)(1)}, \dots, r_{\Phi_n(\sigma)(n)}) \quad , \quad \tau \in B_n$$

Étant donné une présentation du groupe RB_n c'est-à-dire la donnée de générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_n, t_1, \dots, t_n$ avec les relations des tresses ainsi que les relations

$$t_i t_j = t_j t_i \quad , \quad \sigma_i t_j t_{\sigma_i(j)} \sigma_i \quad \forall i, j$$

Un élément de RB_n est noté $t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n} \alpha$ où les r_i 's sont appelés des framings [31]. On a une inclusion RB_{n-1} dans RB_n en envoyant

$$t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n} \alpha \mapsto t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n} t_{n+1}(\alpha, 1)$$

où $(\alpha, 1)$ est l'image de α par l'inclusion canonique $\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{n+1}$. Cela donne une filtration de BRB_n par les classifiants BRB_k avec $k \leq n$. Comme dans la remarque 3.4.1, (ii)

Lemme 3.4.4 $H_*(RB_n) = H_*(RB_k, RB_{k-1}) \oplus H_*(RB_{n-1})$.

PREUVE. L'idée centrale est que BRB_n peut être choisi comme une construction de Borel [31],

$$BRB_n = (S^1)^n \times_{\mathfrak{S}_n} F(\mathbb{C}, n)$$

où \mathfrak{S}_n opère diagonalement en permutant les facteurs. La filtration de BRB_n par les BRB_k correspond alors à la filtration de $(S^1)^k \times_{\mathfrak{S}_k} F(\mathbb{C}, k)$ par les images des inclusions

$$\begin{aligned} (S^1)^k \times_{\mathfrak{S}_k} F(\mathbb{C}, k) &\longrightarrow (S^1)^{k+1} \times_{\mathfrak{S}_{k+1}} F(\mathbb{C}, k+1) \\ (x_1, \dots, x_k) \times_{\mathfrak{S}_k} (m_1, \dots, m_k) &\longmapsto (x_1, \dots, x_k, 1) \times_{\mathfrak{S}_{k+1}} (m_1, \dots, m_k, \sum |m_i| + 1) \end{aligned}$$

Le reste est une conséquence du Théorème 2.5.5. ■

Exemple 3.4.5 (Tresses Colorées) Soit B_n le groupe de tresse à n brins et $\Phi_n B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ comme ci-dessus. Notons $B_{n,P} \subset B_n$ sous groupe dont l'image $\Phi_n(B_{n,P})$ dans \mathfrak{S}_n preserve une partition donnée P de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Pour toute partition P , notons $(P, 1)$ la partition de $\{1, \dots, n+1\}$ obtenue à partir de P en ajoutant $\{n+1\}$, et notons (P, i) le i -ème itéré. Alors on peut vérifier que

Lemme 3.4.6 $H_*(B_{n+k, (P,k)}) = \bigoplus_{0 \leq i \leq k} H_*(\overline{B}_{n+i, (P,i)})$.

Remarque 3.4.7 (Coefficients twistés) Soit A un module sur $\mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n]$ (i.e. une représentation de \mathfrak{S}_n). Alors on peut considérer l'homologie à coefficients dans A ; $H_*(\mathfrak{S}_n; A)$. La question qui se pose est de savoir si on peut scinder ces groupes pour tout A groupe abélien finiment engendré (g.a.f). Ceci n'est pas possible en général. Par contre si A est de la forme $R^{\otimes n}$ avec R un g.a.f. et \mathfrak{S}_n agissant par permutations, alors on peut montrer que ceci est vrai dans certains cas [35].

3.4.1 Vector Braids

Les espaces de configurations admettent un généralisation intéressante donnée sous la forme de "vector braids" et étudiée dans [45]. Considérons l'espace

$$\tilde{V}(\mathbb{C}^m, n) := \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{C}^m)^n \mid n \geq m+1 \text{ et tout } m+1\text{-sous uplet engendre } \mathbb{C}^m\}$$

Ici le terme "engendrer" est à prendre au sens des espaces affines c'est-à-dire que (y_1, \dots, y_{m+1}) engendre si la famille de vecteurs $y_1 - y_i$, $1 < i \leq m+1$ est une base de \mathbb{C}^m . Notons que si $(x_1, \dots, x_n) \in \tilde{V}(\mathbb{C}^m, n)$ alors $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$. En effet le choix de $m+1$ points dont deux sont égaux ne peut pas donner une base de \mathbb{C}^m .

3.4. Tresses et Espaces Classifiants

On vérifie que \mathfrak{S}_n agit sur $V(\mathbb{C}^m, n)$ par permutations. Cette action est libre puisque $V(\mathbb{C}^m, n) \subset B(\mathbb{C}^m, n)$. On notera $V(\mathbb{C}^m, n)$ le quotient de $\tilde{V}(\mathbb{C}^m, n)$ par le groupe symétrique. Par exemple on a que $V(\mathbb{C}, n) = B(\mathbb{C}, n)$.

Pour $m > 1$, il ne semble pas possible de construire des flèches de stabilisation $\tilde{s}_n : \tilde{V}(\mathbb{C}^m, n) \hookrightarrow \tilde{V}(\mathbb{C}^m, n+1)$ qui donnent des rétractes comme dans le cas des espaces de configurations $m = 1$. La flèche inverse $\tilde{V}(\mathbb{C}^m, n+1) \hookrightarrow \tilde{V}(\mathbb{C}^m, n)$ est bien sur donnée par projection sur les n premières coordonnées. D'après un calcul de Moulton [45] (proposition 3.3)

$$\pi_1(\tilde{V}(\mathbb{C}^m, m+1)) \cong \mathbb{Z}$$

Ceci est compatible avec $\tilde{V}(\mathbb{C}, 2) \simeq S^1$ dans le cas $m = 1$. Par ailleurs ([45], Proposition 3.4) montre aussi que $\pi_1(\tilde{V}(\mathbb{C}^m, m+2)) \cong \mathbb{Z}/(m+1)\mathbb{Z}$ pour tout $m > 1$. Ceci montre que $\tilde{V}(\mathbb{C}^m, n)$ n'est pas en général rétracte de $\tilde{V}(\mathbb{C}^m, n+1)$. Il est fort probable aussi que des flèches de stabilisation \tilde{s}_n et s_n qui donnent des scindements homologiques n'existent pas.

3.4.2 Produit en Couronne

Nous rappelons tout d'abord que le produit en couronne de G et \mathfrak{S}_n est le produit semi-direct de G^n avec \mathfrak{S}_n où le groupe symétrique agit sur G^n par permutations. Ce groupe noté $\mathfrak{S}_n \wr G$ a les mêmes éléments que $\mathfrak{S}_n \times G^n$ mais son produit est obtenu de la façon suivante

$$(\sigma, g_1, \dots, g_n) \cdot (\tau, h_1, \dots, h_n) = (\sigma\tau, g_{\tau^{-1}(1)}h_1, \dots, g_{\tau^{-1}(n)}h_n)$$

Lemme 3.4.8 *Nous avons une équivalence d'homotopie*

$$B(\mathfrak{S}_n \wr G) \simeq E\mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_n} (BG)^n$$

PREUVE. On écrira id et e les éléments neutres respectifs de \mathfrak{S}_n et de G . L'espace $E\mathfrak{S}_n \times (EG)^n$ est un espace contractible sur lequel $\mathfrak{S}_n \wr G$ agit de la façon suivante :

$$(\sigma, g_1, \dots, g_n) \times (x, y_1, \dots, y_n) \longmapsto (\sigma(x), g_{\sigma(1)}y_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(n)}y_{\sigma(n)})$$

pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $g_i \in G$ et $y_i \in EG$. On vérifie que c'est bien une action ; c'est à dire que

$$(\sigma, g_1, \dots, g_n)((\tau, h_1, \dots, h_n)(x, y_1, \dots, y_n)) = (\sigma\tau, g_{\tau^{-1}(1)}h_1, \dots, g_{\tau^{-1}(n)}h_n)(x, y_1, \dots, y_n)$$

et que ces deux actions donnent

$$(\sigma\tau(x), g_{\sigma(1)}h_{\sigma\tau(1)}y_{\sigma\tau(1)}, \dots, g_{\sigma(n)}h_{\sigma(n)\tau(n)}y_{\sigma\tau(n)})$$

Cette action est libre puisque si (x, y_1, \dots, y_n) est un point fixe de $(\sigma, g_1, \dots, g_n)$ alors $\sigma(x) = x$ et $\sigma = id$ puisque l'action de \mathfrak{S}_n est libre sur $E\mathfrak{S}_n$. On a alors que $g_i y_i = y_i$ pour tout i , ce

qui entraîne que g_i est l'identité de G car pour la même raison G agit librement sur EG . Par conséquent $(\sigma, g_1, \dots, g_n) = (id, e, \dots, e)$ est l'élément neutre de $\mathfrak{S}_n \wr G$ et l'action est libre.

Ce qui précède montre alors, par définition de l'espace classifiant, que

$$B(\mathfrak{S}_n \wr G) \simeq (E\mathfrak{S}_n \times (EG)^n) / \mathfrak{S}_n \wr G$$

Or on vérifie que le quotient à gauche est également $E\mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_n} (BG)^n$. ■

Remarque 3.4.9 Nous rappelons que, d'après un résultat de Nakaoka, l'homologie de $E\mathfrak{S}_n \times_{\mathfrak{S}_n} (BG)^n$ est donnée par $H_*(\mathfrak{S}_n, H_*(BG)^{\otimes n})$, et par conséquent ceci détermine $H_*(B\mathfrak{S}_n \wr G)$ assez facilement.

Notons qu'il existe une inclusion $\mathfrak{S}_{n-1} \wr G \hookrightarrow \mathfrak{S}_n \wr G$ donnée par

$$(\sigma, g_1, \dots, g_{n-1}) \mapsto (\sigma \times 1, g_1, \dots, g_{n-1}, e)$$

ou $\sigma \times 1$ est l'image de σ par l'inclusion canonique $\mathfrak{S}_{n-1} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$. Cette flèche est un monomorphisme de groupes et induit une inclusion $B(\mathfrak{S}_{n-1} \wr G) \longrightarrow B(\mathfrak{S}_n \wr G)$ et donc une filtration

$$B_\bullet(\mathfrak{S}_n \wr G) = \{B(\mathfrak{S}_k \wr G)\}_{k \geq 0}$$

Lemme 3.4.10 *Cette filtration est admissible.*

On en déduit d'après la proposition 2.4.3 que cette filtration se scinde stablement

Corollaire 3.4.11 *Il existe un splitting $B(\mathfrak{S}_n \wr G) \simeq_s \bigvee_{k=0}^n \overline{B}(\mathfrak{S}_k \wr G)$.*

3.5 Espaces Polyédraux

L'idée de cette section est de scinder des espaces polyédraux et de généraliser le résultat de Hilton-James (Corollaire 1.3.9). C'est dans cette section que le formalisme des dérivées selon une face va prendre tout son sens et permettre d'expliciter complètement les applications de James-Hopf. Le lecteur remarquera comment la preuve du corollaire 1.3.9 de référence se généralise naturellement.

Remarque 3.5.1 Le scindement de James se démontre très facilement avec nos méthodes en considérant la filtration $* \subset X_0 \vee X_1 \subset X_0 \times X_1$ et l'application de James-Hopf suivante $X_0 \times X_1 \longrightarrow B^*(X_0 \wedge X_1)$ qui associe $(x_0, x_1) \mapsto [(x_0, *), (*, x_1)]$

Nous allons définir les espaces polyédraux construits à partir de complexes simpliciaux. Soit $X := (X_0, \dots, X_n)$ une famille d'espaces pointés soit $\Delta[n] = [0, 1, \dots, n]$ le n -simplexe de sommets $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$. Pour tout k -face $\sigma = [i_0, i_1, \dots, i_k]$ de $\Delta[n]$ on définit un sous-espace

3.5. Espaces Polyédraux

du produit $X_0 \times X_1 \times \dots \times X_n$ par

$$X^\sigma := \prod_{i \in \sigma} X_i = X_{i_0} \times X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}$$

et en prenant le quotient par $\bigvee_{i \leq n} X_i$

$$\widehat{X}^\sigma := \bigwedge_{i \in \sigma} X_i = X_{i_0} \wedge X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k}$$

On peut alors définir les espaces polyédraux et les smash polyédraux.

Définition 3.5.2 Soit K un complexe simplicial de sommets $[n]$ et $X := (X_0, \dots, X_n)$ une famille d'espaces pointés. L'espace polyédral est le sous-espace du produit $X^K \subset \prod_{i \leq n} X_i$ défini par

$$X^K := \bigcup_{\sigma \in K} X^\sigma$$

De même on définit le smash polyédral \widehat{X}^K sous espaces de $\bigwedge_{i \leq n} X_i$ par

$$\widehat{X}^K := \bigcup_{\sigma \in K} \widehat{X}^\sigma$$

Remarquons que cet espace est obtenu en prenant le quotient $X^K / \bigvee_{i \leq n} X_i$. Par convention $X^\emptyset = \widehat{X}^\emptyset = *$.

Avant de donner quelques exemples faisons quelques remarques.

- Avec les notations de la dérivée on remarque que

$$X^\sigma = \partial_\sigma(X) = \text{Im} \partial_\sigma$$

(X désigne ici par abus de notation le produit $X_0 \times X_1 \times \dots \times X_n$) et

$$X^K = \bigcup_{\sigma \in K} \text{Im} \partial_\sigma$$

- si deux complexes simpliciaux $K \subset K'$ alors $X^K \subset X^{K'}$ Dans la définition précédente on peut donc se restreindre à ce que $\sigma \in K$ décrive l'ensemble des faces maximales au sens de l'inclusion du complexe K . Ainsi par exemple si on prend $K = \{[0, 1], [0, 2], [0], [1], [2]\}$ ses faces maximales sont les arêtes $[0, 1]$ et $[0, 2]$. On a $X^K = X^{[0,1],[0,2]} = X_0 \times X_1 \cup X_0 \times X_2$ que l'on écrit comme $X_0 \times (X_1 \vee X_2)$.
- On pourra aussi ne regarder que les composantes connexes de K puisque si $K = K_1 \sqcup K_2$ alors X^K que l'on notera aussi X^{K_1, K_2} est égal à $X^{K_1} \vee X^{K_2}$.

Exemple 3.5.3 Voici une liste d'exemples familiers d'espaces polyédraux :

Produit. Si $K = \Delta[n]$ est le n -simplexe complet (c'est-à-dire $\Delta[n] = [0, 1, \dots, n]$) alors on obtient le produit

$$X^{[0,1,\dots,n]} = X_0 \times X_1 \times \dots \times X_n$$

– **Wedge.** Si $K = [0], [1], \dots, [n]$ est le complexe constitué uniquement des sommets alors on obtient le wedge

$$X^{[0],[1],\dots,[n]} = X_0 \vee X_1 \vee \dots \vee X_n$$

– **Fat Wedge.** Si $K = \partial\Delta[n] = \text{squel}_{n-1}(\Delta[n])$ est complexe constitué par tous les bords du n -simplexe, c'est le $n - 1$ squelette de $\Delta[n]$, alors on obtient le fat wedge

$$X^{\partial[0,1,\dots,n]} = \text{Fat}(X_0 \times X_1 \times \dots \times X_n) = W_{n-1}(X)$$

– **Fat Wedge Généralisé** Si $K = \partial^i\Delta[n] = \text{squel}_{n-i}(\Delta[n])$ est le $(n - i)^{\text{ème}}$ squelette du n -simplexe $\Delta[n]$ alors on obtient le fat wedge généralisé

$$X^{\text{squel}_{n-i}(\Delta[n])} = W_{n-i}(X)$$

– **Espace de David-Janiszkiwicz** Si K est un complexe simplicial quelconque et que tous les $X_i \cong \mathbb{C}P^\infty$, X^K est alors l'espace de David-Janiszkiwicz DJ_K qui joue un rôle important en topologie des variétés toriques. On montre que cet espace est homotopiquement équivalent à un espace de Borel $(\mathbb{C}P^\infty)^K \simeq M^{2n} \times_{T^n} ET^n$.

– Un dernier exemple si K est le complexe donné par les simplexes $[0, 1, 2], [2, 3]$ (ici $n = 3$) alors

$$X^{[0,1,2],[2,3]} = X_0 \times X_1 \times X_2 \cup X_2 \times X_3 = X_2 \times ((X_0 \times X_1) \vee X_3)$$

Définition 3.5.4 Si K est un complexe simplicial on notera ∂K le sous-complexe de K formé par tous les bords des faces de K . Ainsi par exemple pour le simplexe précédent, ∂K est le complexe formé par $\partial[0, 1, 2], \partial[2, 3]$ c'est-à-dire $[0, 1], [0, 2], [1, 2], [3]$. Pour $K = \Delta[n]$ le n -simplexe complet $\partial\Delta[n]$ on retrouve $\partial\Delta[n]$ le complexe constitué des bords.

Voici maintenant le théorème principal de cette section qui permettra comme corollaire de scinder stablement toutes filtration d'espaces polyédraux (corollaire 3.5.7).

Théorème 3.5.5 Soit $X := (X_0, \dots, X_n)$ une famille d'espaces pointés (CW-complexes de dimension finie) et une filtration de complexes simpliciaux dont les sommets sont contenus dans $[n] = \{0, 1, \dots, n\} : K = K_m \supset K_{m-1} \supset \dots \supset K_0 \supset \emptyset$ on suppose également l'hypothèse de "clôture" suivante : $(\forall i < m : K_i \supset \partial K_{i+1})$. La filtration induite

$$X^K = X^{K_m} \supset X^{K_{m-1}} \supset \dots \supset X^{K_0} \supset X^\emptyset = *$$

se scinde stablement

$$X^K \simeq_s \bigvee_{i \leq m} \overline{X^{K_i}}$$

3.5. Espaces Polyédraux

De plus sous l'hypothèse de clôture les quotients s'écrivent $\overline{X^{K_i}} = \widehat{X}^{K_i}$ c'est-à-dire que l'on a le scindement stable

$$X^K \simeq_s \bigvee_{\sigma \in K} \widehat{X}^\sigma$$

Remarque 3.5.6 On peut alléger les hypothèses en omettant l'hypothèse de clôture. En effet on le peut toujours quitte à augmenter la filtration par

$$K = K_m \supset K'_{m-1} \supset K_{m-1} \supset \dots \supset K_0 \supset K'_0 \supset \emptyset$$

en intercalant les complexes $K'_i := K_i \cup \partial K_{i+1}$ l'hypothèse de clôture est alors vérifiée (en remarquant que $K_i \supset \partial K'_i$). On utilise ensuite le fait qu'une sous-filtration, d'une filtration qui se scinde, se scinde. Remarquons aussi que l'hypothèse de clôture est équivalente à demander à ce que pour toute paire de $\sigma \neq \tau$ dans K_i leur intersection $\sigma \cap \tau$ soit dans K_{i-1} . Cette observation sera utilisée dans la preuve du théorème 3.5.5

Corollaire 3.5.7 *Pour toute filtration de complexes simpliciaux de sommets dans $[n]$ $(K_i)_{i \leq m}$ et $X := (X_0, \dots, X_n)$ une famille d'espaces pointés (CW-complexes de dimension finie) la filtration $(X^{K_i})_{i \leq m}$ se scinde stablement*

$$X^K \simeq_s \bigvee_{i \leq m} \overline{X^{K_i}}$$

En prenant des filtration particulière d'un complexe simplicial on retrouve le théorème de James et aussi une généralisation décrite dans [6]. On peut d'ailleurs prouver que l'on a une équivalence d'homotopie après une seule suspension.

Exemple 3.5.8 – **Moment-angulaire.** En prenant la filtration des squelettes $(\text{squel}_i(K))_{i \leq n}$ (cette filtration vérifie l'hypothèse de clôture) on a le scindement

$$X^K \simeq_s \bigvee_{\sigma \in K} \widehat{X}^\sigma$$

– **James.** On retrouve en prenant pour complexe $K = \Delta[n]$ et le scindement stable de James déjà prouvé plus haut (théorème 1.3.9).

PREUVE. Considérons pour, $p \leq l \leq m$, les applications de James-Hopf $\partial_{l,p} : X^{K_l} \longrightarrow B^*(\overline{X^{K_p}}, \infty)$ qui envoient

$$\xi = (x_0, \dots, x_n) \longmapsto \prod_{\sigma \in K_p} [\partial_\sigma \xi] = \prod_{[i_0, i_1, \dots, i_k] \in K_p} [(*, \dots, x_{i_0}, *, \dots, x_{i_k}, *, \dots)] \quad (3.5.1)$$

Ces flèches sont bien à valeurs dans un espace de tresses puisque, pour $\sigma \neq \tau$ dans K_p , si l'on a $\partial_\sigma \xi = \partial_\tau \xi$ c'est que l'on a aussi $\partial_\sigma \xi = \partial_\tau \xi = \partial_{\sigma \cap \tau} \xi$ qui est équivalent au point base $*$ dans le quotient $\overline{X^{K_p}}$ puisque par hypothèse de clôture $\sigma \cap \tau \subset K_{p-1}$ et donc $\partial_{\sigma \cap \tau} \xi \in X^{K_{p-1}}$.

La condition de compatibilité des applications de James-Hopf s'obtient de manière naturelle par restriction et la condition "∂_{l,l}" s'obtient en remarquant qu'un élément $\xi \in X^{K_l}$ s'écrit $\xi = \partial_\tau \xi$ pour une certaine face $\tau \subset K_l$. Ainsi $\partial_{l,l} \xi = \prod_{\sigma \in K_p} [\partial_\sigma \partial_\tau \xi]$ et d'après le raisonnement précédent $\partial_\sigma \partial_\tau \xi = \partial_{\sigma \cap \tau} \xi$ est équivalent au point base $*$ pour $\sigma \neq \tau$ ce qui donne finalement $\partial_{l,l} \xi = [\partial_\tau \partial_\tau \xi, *, \dots] = [\xi, *, \dots]$ et prouve la condition "∂_{l,l}" et termine la preuve du théorème.

Le fait que $\overline{X^{K_i}} = \widehat{X}^{K_i}$ s'obtient en remarquant que si $\sigma \subset K_i$ alors les sommets de σ sont dans K_{i-1} d'après la propriété de clôture. Ainsi si $X_{i_0} \times \dots \times X_{i_k}$ est dans X^{K_i} alors $X_{i_0} \vee \dots \vee X_{i_k}$ est dans $X^{K_{i-1}}$. On a donc une surjection $\widehat{X}^{K_i} \longrightarrow \overline{X^{K_i}} = \widehat{X}^{K_i}$ ■

3.5.1 Moment Angulaire Généralisé

Ces résultats se généralise à une famille (X_i, A_i) de paires d'espaces pointés $* \subset A_i \subset X_i$ (CW-complexes de dimension finie) on définit de manière analogue pour une k -face $\sigma = [i_0, i_1, \dots, i_k]$ du n -simplexe $\Delta[n]$:

$$(X, A)^\sigma := \prod_{\substack{i \in \sigma \\ j \notin \sigma}} X_i \times A_j$$

et en prenant le quotient par $\bigvee_{\substack{i \in \sigma \\ j \notin \sigma}} X_i \vee A_j$

$$\widehat{(X, A)}^\sigma := \bigwedge_{\substack{i \in \sigma \\ j \notin \sigma}} X_i \wedge A_j$$

autrement dit le point base $*$ de la définition 3.5.2 est ici remplacé par le sous-espace A de X . On a une définition analogue.

Définition 3.5.9 Soit K un complexe simplicial de sommets $[n]$ et $X := (X_0, \dots, X_n)$ une famille d'espaces pointés. Le moment angulaire généralisé est le sous-espace du produit $X^K \subset \prod_{i \leq n} X_i$ définit par

$$(X, A)^K := \bigcup_{\sigma \in K} (X, A)^\sigma$$

De même on définit

$$\widehat{(X, A)}^K := \bigcup_{\sigma \in K} \widehat{(X, A)}^\sigma$$

Par convention $(X, A)^\emptyset = \widehat{(X, A)}^\emptyset = *$.

On peut alors énoncer un résultat analogue au corollaire 3.5.7.

Théorème 3.5.10 Pour toute filtration de complexes simpliciaux de sommets dans $[n]$ $(K_i)_{i \leq m}$ et $A_i \subset X_i, i = 0 \dots n$ une famille de rétractes (CW-complexes pointés de dimension finie) la

3.5. Espaces Polyédraux

filtration $((X, A)^{K_i})_{i \leq m}$ se scinde stablement

$$(X, A)^K \simeq_s \bigvee_{i \leq m} \overline{(X, A)^{K_i}}$$

De plus si la condition de clôture ($\forall i < m : K_i \supset \partial K_{i+1}$) est satisfaite alors

$$\overline{(X, A)^{K_i}} = \widehat{(X, A)_i}^K$$

Remarque 3.5.11 Ce théorème est également prouvé dans [6] sans l'hypothèse que les A_i soient des rétractes des espaces X_i et dans le cas où la filtration est celle de squelettes de K . Il y est montré que l'on a une équivalence d'homotopie après une seule suspension.

PREUVE. Comme dans la remarque 3.5.6 on peut supposer, quitte à augmenter la filtration, que l'hypothèse de clôture est satisfaite. Notons $r_i : X_i \rightarrow A_i$ les retractions, dans la suite nous omettrons les indices en les notant simplement r . Et considérons pour, $p \leq l \leq m$, les applications de James-Hopf $\partial_{l,p} : (X, A)^{K_l} \rightarrow B^*(\overline{(X, A)^{K_p}}, \infty)$ qui envoient

$$\xi = (x_0, \dots, x_n) \mapsto \prod_{\sigma \in K_p} [\partial_\sigma \xi] = \prod_{[i_0, i_1, \dots, i_k] \in K_p} [(\dots, x_{i_0}, r(x_{i_0+1}), \dots, x_{i_k}, r(x_{i_k+1}), \dots)] \quad (3.5.2)$$

Le reste de la preuve de théorème 3.5.7 s'applique verbatim. ■

Chapitre 4

Foncteurs de Mc-Cord et Fonctions Rationnelles

Nous démarrons le chapitre en étudiant le cas particulier des produits tronqués [8, 44]. Dans la section suivante on généralisera ces espaces en définissant les produits symétriques avec étiquettes dans un groupe abélien (ou construction de Mc-Cord). Dans une dernière partie, nous appliquerons nos méthodes pour retrouver le scindement de Segal de l'homologie de l'espace des fonctions rationnelles dans une grassmannienne [50]. Il sera commode dans ce chapitre de noter les configurations de $SP^n X$ multiplicativement ; i.e. $x_1 x_2 \cdots x_n := [x_1, \dots, x_n]$. Comme toujours, $*$ $\in X$ est le choix d'un point base.

4.1 Produits Tronqués

Définissons $TP^n(X) = SP^n X / \sim$ l'espace quotient où \sim est l'identification $xy_1 \dots y_{n-2} \sim * * y_1 \dots y_{n-2}$. Ce foncteur joue un rôle important [34], et d'après [26] il représente l'homologie singulière à coefficients dans \mathbb{Z}_2 . C'est-à-dire on a :

$$\pi_i(TP^\infty X) \cong \tilde{H}_i(X; \mathbb{Z}_2)$$

Nous avons une inclusion naturelle $TP^{k-1} X \hookrightarrow TP^k X$ et on notera comme toujours $\overline{TP}^k X = TP^k X / TP^{k-1} X$. On peut montrer que TP^∞ se scinde par rapport à lui-même.

$$TP^\infty(TP^n X) \simeq TP^\infty\left(\bigvee_{k=0}^n TP^k X / TP^{k-1} X\right) \quad (4.1.1)$$

En effet les éléments de $TP^n(X)$ s'écrivent comme $[x_1, \dots, x_n]$ avec la relation $[x, x, \dots] \sim [* , * , \dots]$. Les applications de James-Hopf ∂ dans ce cas sont des flèches

$$\partial_{n,k} : TP^n X \xrightarrow{\partial} TP^\infty(\overline{TP}^k X) \quad k < n$$

Comme dans (2.1.6) on choisit ∂ qui envoie

$$\partial : [x_1 \cdots x_n] \mapsto \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} [[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]]$$

Cette flèche est bien définie ! En effet est de façon assez admirable on a que $\partial[x, x \dots] = \partial[* , * \dots]$ dans $TP^\infty(-)$. En effet considérons l'exemple

$$\begin{aligned} \partial_{3,2}[x, x, z] &= [[x, z], [x, z], [x, x]] \in TP^3(\overline{TP}^2 X) \\ &\sim [[x, z], [x, z]] \sim * = \partial_{3,2}[* , * , z] \end{aligned}$$

Ce qui est également intéressant à remarquer dans cet exemple est que les applications de James-Hopf sont en fait des *itérations* $\partial_n = \partial_1^n$. En appliquant le critère/théorème principal 1.2.4 on voit rapidement que $TP^\bullet X$ se scinde par rapport à TP^∞ comme dans 4.1.1. Notons que le scindement ci-dessus implique en particulier que

$$H_*(TP^n X; \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} H_*(TP^k X, TP^{k-1} X; \mathbb{Z}_2) \quad (4.1.2)$$

Remarque 4.1.1 Le scindement (4.1.2) n'est plus vrai avec des coefficients entiers comme l'illustre le cas où $X = S^1$ puisque on a une équivalence d'homotopie $TP^n(S^1) \simeq \mathbb{R}P^n$ (voir par exemple [8, 34]). En particulier cela signifie que la filtration de $TP^n S^1$ ne se scinde pas par rapport à SP^∞ .

L'exemple 4.1.1 est un cas particulier d'un *espace de particules* avec étiquettes dans \mathbb{Z}_2 comme développé dans [32, 49]. Un cas spécial de cette construction est du à McCord [41] et nous le présentons ci-dessous.

4.2 Produits Symétriques Généralisés

Un élément de $SP^n X$ peut s'écrire *multiplicativement* comme $x_1 x_2 \cdots x_n$ avec $x_i \in X$. Si on écrit le produit de x avec lui même n -fois formellement comme x^n , alors les éléments de $SP^n X$ sont des produits $x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$ avec les relations $x^n x^m = x^{n+m}$. On voit donc que $SP^\infty X$ s'obtient à partir du monoïde abélien $(\mathbb{N}, +)$ et il est lui-même un monoïde topologique abélien. On notera $SP^\infty X = SP_{\mathbb{N}}^\infty X$.

Plus généralement en prenant les coefficients dans un monoïde abélien quelconque on arrive à la définition suivante.

Définition 4.2.1 Soit $(G, +)$ un monoïde abélien et X un CW-complexe pointé. On définit le produit symétrique généralisé

$$SP_G(X, n) := \prod_{k \leq n} X^k \times_{\mathfrak{S}_k} G^k / \sim$$

4.2. Produits Symétriques Généralisés

où l'on identifie

$$(x_1, x_2, \dots, x_r) \times_{\mathfrak{S}_r} (g_1, g_2, \dots, g_r) \sim (x_1, x_3, \dots, x_r) \times_{\mathfrak{S}_{r-1}} (g_1 + g_2, g_3, \dots, g_r)$$

si $x_1 = x_2$. On identifie également $(\dots, x, \dots) \times_{\mathfrak{S}_r} (\dots, g, \dots)$ avec $(\dots, \hat{x}, \dots) \times_{\mathfrak{S}_r} (\dots, \hat{g}, \dots)$ si $(x, g) = (*, g)$ ou $(x, 0)$. On notera une telle classe d'équivalence par $x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_k^{g_k}$. Il est donc sous-entendu que

$$x^g x^{g'} \sim x^{(g+g')} \quad , \quad *^g \sim * \sim x^0$$

L'union sur tous les $k \geq 0$ est dénotée $SP_G^\infty(X)$.

On voit facilement que $SP_G(X, 0) = *$ et $SP_G(X, 1) = X \wedge G$ et que $SP_G^\infty X$ est un monoïde topologique abélien grace au produit de concaténation.

Voici quelques exemples où ces espaces apparaissent.

Exemple 4.2.2 $SP^\infty X = SP_{\mathbb{N}}^\infty X$ et que $SP_{\mathbb{Z}_2}^\infty X = TP^\infty(X)$.

Ces foncteurs sont des foncteurs linéaires. Plus précisément, la propriété suivante est une extension du théorème de Dold-Thom.

Théorème 4.2.3 $\pi_p(SP_G^\infty X) = \bigoplus_{n \geq 0} H_{p+n}(X, \pi_n(G))$.

Une démonstration de ce résultat est dans [32] et consiste à montrer que $\pi_*(SP_G^\infty(\bullet))$ vérifie les axiomes d'une théorie de l'homologie réduite. En particulier si G est un groupe discret on peut écrire que $\pi_*(SP_G^\infty(\bullet)) = H_*(\bullet, G)$. On retrouve ainsi l'homologie à coefficient dans le groupe G .

Voici quelques propriétés de ces foncteurs.

Propriétés

- Dans le cas où G est un anneau unitaire, il est facile de voir que $SP_G^\infty(\bullet)$ est un triple.
- $SP_G^\infty(\bullet)$ transforme les cofibrations en quasifibrations et même en fibrations. De la cofibration $X \hookrightarrow cX \rightarrow \Sigma X$ on en déduit que $\Omega SP_G^\infty(\Sigma X) \simeq SP_G^\infty(X)$. Ainsi $SP_G^\infty(\Sigma X)$ est un décalage de $SP_G^\infty(X)$. En particulier on a $SP_G^\infty(S^0) = G$, $SP_G^\infty(S^1) = BG$ et $SP_G^\infty(S^n) = B^n G$.
- Il s'ensuit que pour un groupe abélien discret G , $SP_G^\infty(S^n) \simeq K(G, n)$ est un espace d'Eilenberg-MacLane.
- On vérifie également que $SP_G^\infty(X \wedge Y) \cong SP_{SP_G^\infty(Y)}^\infty(X)$ [41].

Il n'est pas difficile de voir en appliquant les définitions que les groupes d'homotopie de $SP_G^\infty(X)$ sont reliés aux groupes d'homotopie de $SP^\infty(X)$ avec coefficients. Ceci est un résultat de T. Kobayashi [36] et nous en offrons ci-dessus une démonstration.

4.2.1 Homotopie avec Coefficients

Pour G un groupe finiment engendré, soit $M(G, p)$ l'espace de Moore de type (G, p) qui est l'espace dont la *cohomologie* est concentrée en dimension p et $H^p(M(G, p)) \cong G$. Dans la littérature on définit l'*homotopie de X à coefficients dans G* comme étant les classes d'homotopie pointées d'applications de $M(G, p)$ dans X ; i.e.

$$\pi_p(X, G) := [M(G, p), X]$$

Si G est sans torsion de rang fini, alors $M(G, p)$ est un bouquet de p -sphères. Notons que $\pi_p(X, \mathbb{Z})$ correspond avec la construction classique $\pi_p(X)$ puisque dans ce cas $M(G, p) = S^p$.

On a que $[M(G, p), X]$ est un groupe pour $p \geq 3$, car $M(G, p)$ est une suspension pour $p \geq 3$. C'est un groupe abélien lorsque $p \geq 4$ car $M(G, p)$, dans ce cas, est une double suspension. Si X est un H -espace alors $[M(G, p), X]$ est abélien même pour $p = 3$.

La proposition suivante est une généralisation immédiate du théorème de Dold et Thom.

Proposition 4.2.4 *Pour X un CW complexe 1-connexe, $p \geq 3$ et G un groupe abélien finiment engendré, nous avons une série d'isomorphismes*

$$\pi_p(SP_G^\infty(X)) \cong \pi_p(SP^\infty X, G)$$

PREUVE. Le premier groupe est $H_p(X, G)$ d'après le théorème 4.2.3, et le second est par définition $[M(G, p), SP^\infty X]$. Il faut donc établir l'isomorphisme

$$H_p(X, G) \cong [M(G, p), SP^\infty X] \tag{4.2.1}$$

Ceci est une conséquence non-triviale du théorème des coefficients universels. Comme G est un groupe abélien finiment engendré, c'est un produit de copies de \mathbb{Z} et de groupes cycliques. Comme (4.2.1) est vraie pour $G = \mathbb{Z}$, il suffit de l'établir pour $G = \mathbb{Z}_n$ pour tout n .

Supposons $G = \mathbb{Z}_n$ et rappelons tout d'abord l'équivalence de Dold-Thom; $SP^\infty X \simeq \prod_i K(\tilde{H}_i(X; \mathbb{Z}), i)$ qui est valable pour les CW complexes connexes. En remplaçant dans $[M(\mathbb{Z}_n, p), SP^\infty X]$ on obtient

$$[M(\mathbb{Z}_n, p), SP^\infty X] = \prod_i [M(\mathbb{Z}_n, p), K(\tilde{H}_i(X), i)] = \prod_i H^i(M(\mathbb{Z}_n, p), \tilde{H}_i(X))$$

Notons que puisque $H^p(M(\mathbb{Z}_n, p), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$, alors $H_{p-1}(M(\mathbb{Z}_n, p), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$. On sait que $M(\mathbb{Z}_n, p) = S^p \cup_n e^{p+1}$ est un pushout composé de deux cellules de dimension p et $p+1$ avec comme application d'attachement la multiplication par n . Le complexe de chaînes associé au calcul de $H^*(M(G, p), A)$ est $A \xrightarrow{\times n} A$ allant de dimension $p-1$ à p . L'homologie d'un tel complexe est

$$H^p(M(\mathbb{Z}_n, p), H_p(X)) = \text{coker}(H_p(X) \xrightarrow{\times n} H_p(X)) \tag{4.2.2}$$

4.3. Un Théorème de Scindement

$$H^{p-1}(M(\mathbb{Z}_n, p), H_{p-1}(X)) = \ker(H_{p-1}(X) \xrightarrow{\times n} H_{p-1}(X)) \quad (4.2.3)$$

Nous souhaitons montrer que la somme de ces deux termes est $H_p(X, \mathbb{Z}_n)$. La relation à invoquer ici bien sur est le théorème des coefficients universels

$$0 \rightarrow H_i(X, \mathbb{Z}) \otimes A \rightarrow H_i(X, A) \rightarrow \operatorname{Tor}(H_{i-1}(X, \mathbb{Z}), A) \rightarrow 0.$$

Avec $A = \mathbb{Z}_n$ on voit que $H_p(X; \mathbb{Z}_n)$ est $H_p(X) \otimes \mathbb{Z}_n$ et ceci s'identifie au *coker* de la multiplication par n , alors que $\operatorname{Tor}(H_{p-1}(X), \mathbb{Z}_n)$ s'identifie au noyau *ker* de la multiplication par n . On a donc bien que la somme des deux termes (4.2.2) et (4.2.3) est bien $H_p(X, \mathbb{Z}_n)$ et ceci correspond précisément à $[M(\mathbb{Z}_n, p), \operatorname{SP}^\infty X]$. Notons que l'isomorphisme (4.2.1) est *non-canonique*. ■

4.3 Un Théorème de Scindement

Notre objectif est de scinder les espaces $\operatorname{SP}_G^\infty X$ pour certains G et par rapport à certains foncteurs $\operatorname{SP}_H^\infty$. Il s'avère que nos méthodes sont tout à fait adaptées à ce problème.

Nous définissons tout d'abord une filtration de $\operatorname{SP}_G^\infty(X)$ par multiplicité de la façon suivante. Si $\phi : G \rightarrow H$ est un morphisme de monoides, envoyant identité sur identité, alors on peut l'étendre à une flèche continue

$$\Psi : \operatorname{SP}_G^\infty(X) \longrightarrow \operatorname{SP}_H^\infty(X) \quad , \quad \prod x_i^{g_i} \longmapsto \prod x_i^{\phi(g_i)}$$

Cette application est bien définie. Si $\mathbb{N} \rightarrow G$ est un tel morphisme, nous poserons alors

$$\operatorname{SP}_G^n(X) := \Psi(\operatorname{SP}^n(X))$$

On rappelle que dans notre notation,

$$\operatorname{SP}^n(X) = \{x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \in \operatorname{SP}_\mathbb{N}^\infty(X) \mid \sum n_i \leq n\}$$

Si $\mathbb{N} \rightarrow G$ est surjectif, alors les espaces $\operatorname{SP}_G^n(X)$ forment une filtration croissante de $\operatorname{SP}_G^\infty(X)$.

Le théorème principal de cette section est le suivant ¹

Théorème 4.3.1 *Soit p^r une puissance d'un nombre premier p . Alors $\operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_{p^r}}^n(X)$ se scinde par rapport à $\operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_p}^\infty$:*

$$\operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_p}^\infty(\operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_{p^r}}^n(X)) \simeq \operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_p}^\infty\left(\bigvee_{k=0}^n \overline{\operatorname{SP}}_{\mathbb{Z}_{p^r}}^k(X)\right) \quad (4.3.1)$$

Ceci implique un scindement en homologie à coefficients dans \mathbb{Z}_p

$$H_*(\operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_{p^r}}^n(X); \mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{0 \leq k \leq n} H_*(\operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_{p^r}}^k(X), \operatorname{SP}_{\mathbb{Z}_{p^r}}^{k-1}(X); \mathbb{Z}_p)$$

1. Ce théorème a été également obtenu par Juan Wang dans sa thèse récente [56]

PREUVE. Rappelons que

$$\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_d}^n(X) = \{\xi := x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} \mid \deg(\xi) := \sum_i \tilde{n}_i \leq n \text{ et } x_i \neq *\}$$

\tilde{n}_i désignant le représentant de la classe $n_i \in \mathbb{Z}_d$ qui se trouve dans $\{0, 1, \dots, d-1\}$. Pour un certain $G = \mathbb{Z}_q$ nous souhaitons trouver des James-Hopf maps de la forme

$$\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_d}^n(X) \longrightarrow \mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_q}^\infty(\overline{\mathrm{SP}}_{\mathbb{Z}_d}^m X) \quad , \quad m \leq n \quad (4.3.2)$$

Un élément de $\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_q}^\infty(\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_d}^m X)$ peut s'écrire de la forme $\sum_j g_j x_{j1}^{n_{j1}} x_{j2}^{n_{j2}} \dots x_{jk}^{n_{jk}}$ avec $\sum_i \tilde{n}_{ji} \leq m$ et $g_i \in \mathbb{Z}_q$. Ici nous avons choisi d'écrire les éléments de $\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_q}^\infty$ *additivement* pour les différencier des éléments de $\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_d}^\infty$. Dans le but de construire des James-Hopf maps, on peut essayer d'utiliser les applications usuelles qui consistent à enlever de toutes les manières possibles des points et les remplacer par le point base. Ceci donne pour $\xi := x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$

$$\partial_m \xi = \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq \tilde{n}_1, \dots, 0 \leq i_k \leq \tilde{n}_k \\ i_1 + \dots + i_k = m}} \binom{\tilde{n}_1}{i_1} \binom{\tilde{n}_2}{i_2} \dots \binom{\tilde{n}_k}{i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}$$

Il faut maintenant vérifier sous quelles conditions sur l'entier q , la relation ci-dessus s'étend à une application *bien définie* comme dans (4.3.2). En particulier il faut que $\partial_1 x^d = \partial_2 x^d = \dots = \partial_{d-1} x^d = *$. On détaillant ces conditions, on en déduit que q divise le plus grand commun diviseur

$$\mu(d) = \mathrm{gcd}\left(\binom{d}{1}, \binom{d}{2}, \dots, \binom{d}{d-1}\right)$$

Or $\mu(d)$ vaut presque toujours 1 sauf quand $d = p^r$ est une puissance d'un nombre premier dans ce cas $\mu(p^r) = p$. ■

Exemple 4.3.2 Il est clair que $\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_4}^4(X) = \mathrm{SP}^4(X)/\Delta$, où Δ est la diagonale. D'autre part $\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_4}^3(X) = \mathrm{SP}^3 X$. On a une inclusion $\mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_4}^3(X) \hookrightarrow \mathrm{SP}_{\mathbb{Z}_4}^4(X)$ et le théorème nous dit que la flèche

$$H_*(\mathrm{SP}^3 X; \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow H_*(\mathrm{SP}^4 X, \Delta; \mathbb{Z}_2)$$

est une injection en homologie. De même avec coefficients dans \mathbb{Z}_4 . Ceci n'est pas évident à voir directement. Pour le cas de la sphère $X = S^n$ on peut essayer d'obtenir ce plongement "à la main". On sait que $H_*(\mathrm{SP}^3 X)$ se plonge dans $H_*(\mathrm{SP}^4 X)$ pour tous coefficients. On va donc montrer que $H_*(\mathrm{SP}^4)$ se plonge dans $H_*(\mathrm{SP}^4 X, \Delta)$ pour coefficients dans $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2$. On considère la suite exacte de la paire

$$H_*(\Delta) \longrightarrow H_*(\mathrm{SP}^4 S^n) \longrightarrow H_*(\mathrm{SP}^4 S^n, \Delta) \longrightarrow H_{*-1}(\Delta) \longrightarrow \dots$$

Comme Δ est une copie de S^n plongée dans $\mathrm{SP}^4(S^n)$ par la diagonale aussi nommée $\Delta : x \mapsto$

4.4. Fonctions Rationnelles

$[x, x, x, x]$, il suffit d'étudier le cas $* = n$. Dans ce cas si $\delta : S^n \longrightarrow (S^n)^4$ est la diagonale, alors

$$\delta_*[S^n] = [S^n] \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes [S^n]$$

ce qui donne dans $H_*(\mathbb{S}P^4(S^n))$ que $\Delta_*[S^n] = 4\Delta_*[S^n]$. En travaillant dans \mathbb{Z}_4 ou \mathbb{Z}_2 , la flèche $H_n(\Delta) \longrightarrow H_n(\mathbb{S}P^4(S^n), \Delta)$ est nulle et nous avons bien un monomorphisme $\tilde{H}_n(\mathbb{S}P^4 S^n) \hookrightarrow H_n(\mathbb{S}P^4 S^n, \Delta)$.

4.4 Fonctions Rationnelles

L'espace de toutes les fonctions holomorphes de \mathbb{P}^1 dans \mathbb{P}^1 sont les fonctions rationnelles qui s'écrivent dans $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ comme un quotient de polynômes $p(z)/q(z)$. On écrira $\text{Rat}(\mathbb{P}^1)$ l'ensemble de toutes ces fonctions qu'on voudra *pointées*; c'est à dire qui envoient le point base ∞ de \mathbb{P}^1 à un point fixé de \mathbb{P}^1 .

De même on écrira

$$\text{Rat}(\mathbb{P}^n, x_0) = \{\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n \mid f(\infty) = x_0, f \text{ holomorphe}\}$$

Il s'avère qu'une telle fonction peut s'écrire comme un vecteur de fonctions rationnelles. Plus explicitement choisissons comme dans [19, 50] le point base $x_0 = [1 : 1 : \cdots : 1]$ dans les coordonnées homogènes de \mathbb{P}^n et réécrivons $\text{Rat}(\mathbb{P}^n) = \text{Rat}_k(\mathbb{P}^n, [1 : \cdots : 1])$.

Le lemme suivant est dans les livres d'introduction à la géométrie algébrique

Lemme 4.4.1 *Toute application $f \in \text{Rat}(\mathbb{P}^n)$ est de la forme*

$$f(x) = [p_0(z) : \cdots : p_n(z)]$$

avec les p_i des polynômes de même degré $k \geq 0$, unitaires et n'ayant pas de zéros en commun

Le degré k correspond au degré algébrique de l'application $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ lequel correspond au nombre d'images réciproques d'un hyperplan de \mathbb{P}^n . De façon équivalente une flèche $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ est de degré k si et seulement si l'application induite $f_* : H_2(\mathbb{P}^1) \longrightarrow H_2(\mathbb{P}^n)$ est la multiplication par k entre deux copies de \mathbb{Z} .

Il s'avère que deux fonctions sont homotopes si et seulement si elles ont même degré. L'espace $\text{Rat}(\mathbb{P}^n)$ se scinde en des composantes connexes indexées par ce degré que l'on écrira

$$\text{Rat}(\mathbb{P}^n) = \coprod_{k \in \mathbb{N}} \text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$$

4.4.1 $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$ et le Scindement de Segal

On se propose de construire des inclusions

$$\text{Rat}_k(\mathbb{P}^n) \longrightarrow \text{Rat}_{k+1}(\mathbb{P}^n)$$

de la façon suivante. On considère la flèche

$$\begin{aligned} \text{Rat}_k(\mathbb{P}^n) &\longrightarrow \text{SP}^k(\mathbb{C}) \times \cdots \times \text{SP}^k(\mathbb{C}) \\ f = [p_0 : \cdots : p_n] &\longrightarrow (R(p_0), \dots, R(p_n)) \end{aligned}$$

où $R(p)$ veut dire les racines du polynôme p vus comme uplets de points non-ordonnés. Cette flèche est un plongement et représente $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$ comme l'ouvert complémentaire du lieu où les configurations ont un point en commun.

L'inclusion habituelle $\text{SP}^k(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{SP}^{k+1}(\mathbb{C})$ qui consiste à pousser les configurations dans un disque unité et à ajouter un point en dehors de ce disque s'étend au produit $\text{SP}^k(\mathbb{C})^{n+1}$ et de façon évidente à $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$. Ces inclusions donnent une filtrations $\text{Rat}_\bullet(\mathbb{P}^n) := \{\text{Rat}_i(\mathbb{P}^n)\}_{i \leq k}$ et le joli théorème suivant est dû à Segal [50]

Théorème 4.4.2 *$\text{Rat}_\bullet(\mathbb{P}^n)$ se scinde en homologie.*

Nous nous proposons d'en donner la preuve dans la lignée des idées que nous avons développées jusqu'à présent.

Le sous-espace de $\text{SP}^{k_0}(\mathbb{C}) \times \text{SP}^{k_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \text{SP}^{k_n}(\mathbb{C})$ de tous les uplets de configurations (D_0, \dots, D_n) tel que les D_i n'ont pas de points en commun, sera dénoté par Q_{k_0, \dots, k_n} . Évidemment $Q_{k, k, \dots, k} = \text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$. Les applications de James-Hopf pour $\text{SP}^k(\mathbb{C})$;

$$\partial_{k,i} : \text{SP}^k(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{SP}^\infty(\text{SP}^i(\mathbb{C}))$$

induisent de façon évidente des applications de James-Hopf

$$\prod \partial_{k_j, i_j} : Q_{k_1, \dots, k_n} \longrightarrow \text{SP}^\infty(Q_{j_1, \dots, i_j, \dots, j_n})$$

Une application immédiate du théorème 1.2.4 donne

Lemme 4.4.3 $H_*(Q_{k_0, \dots, k_n}) = \bigoplus H_*(\bar{Q}_{k_0, \dots, k_n})$ avec $\bar{Q}_{k_0, \dots, k_n} = Q_{k_0, \dots, k_n} / \bigcup_i Q_{k_0, \dots, k_{i-1}, \dots, k_n}$.

Le scindement de Segal résultera donc du lemme suivant

Lemme 4.4.4 *Il existe une équivalence d'homotopie $Q_{k, \dots, k-1, \dots, k} \simeq Q_{k-1, \dots, k-1, \dots, k-1}$.*

PREUVE. On démontre que $Q_{m,n} \cong Q_{n,n} \times \mathbb{C}^{m-n}$ si $m > n$, le cas plus général étant exactement le même. Un élément de $Q_{m,n}$ peut-être identifié à une paire de polynômes unitaires (p, q) ,

4.4. Fonctions Rationnelles

$\deg p = m$, $\deg q = n$. Mais une telle paire donne une décomposition canonique

$$p/q = h + r/q$$

avec h, r deux polynomes unitaires et $\deg h = m - n$ et $\deg r = n$. Tout choix de h (coefficients dans \mathbb{C}^{m-n}) et de $(r, q) \in Q_{n,n}$ donne une paire unique $(p, q) \in Q_{m,n}$ et vice-versa. ■

Remarque 4.4.5 Écrivons $Q_{m,n}(\mathbb{R}^m)$ le sous-espace de $\mathbb{S}P^m(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{S}P^n(\mathbb{R}^k)$ de paires de configurations n'ayant pas de vecteurs en commun. Le lemme ci-dessus montre que $Q_{m,n}(\mathbb{R}^2) \simeq Q_{n,n}(\mathbb{R}^2)$. On peut se poser la question si cette équivalence est toujours vraie si on remplace \mathbb{R}^2 par \mathbb{R}^k . Nous n'avons pas de division euclidienne pour des vecteurs et donc l'argument de démonstration pour $n = 2$ n'est plus valable. En fait, cette équivalence n'est plus vraie dès que $k \geq 3$. En effet si ceci était le cas alors

$$Q_{m,1}(\mathbb{R}^k) \simeq Q_{1,1}(\mathbb{R}^k) \simeq \mathbb{R}^k - \{0\} \simeq S^{k-1}$$

Or $Q_{m,1}(\mathbb{R}^k) \simeq \mathbb{S}P^m(\mathbb{R}^k - \{0\}) \simeq \mathbb{S}P^m(S^{k-1})$ a le type d'homotopie bien différent de la sphère évidemment si $k > 2$. Le cas $k = 2$ correspondait au cercle et c'est la seule sphère pour laquelle $\mathbb{S}P^m(S^k) \simeq S^k$.

Remarque 4.4.6 (Fonctions Rationnelles Pleines) : Une fonction rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^n$ est pleine (ou "full") si elle est non-dégénérée; c'est à dire si l'image de f n'est pas incluse dans un hyperplan. On notera l'espace de toutes ces applications (pointées et de degré k) par $FRat_k(\mathbb{P}^n)$. Cet espace a été étudié par Crawford [22] qui montre que l'inclusion

$$i_{k,n} : FRat_k(\mathbb{P}^n) \hookrightarrow Rat_k(\mathbb{P}^n)$$

est une équivalence d'homotopie jusqu'au degré $2(k - n)$; i.e. elle induit un isomorphisme de groupes d'homotopie π_* pour $*$ $< 2(k - n)$ et une surjection en degré $2(k - n)$ (résultat de stabilité). Notons que l'application induite n'est généralement pas injective sur les groupes H_* ou π_* pour $*$ $> 2(k - n)$.

Il n'est pas difficile de voir que l'inclusion de $Rat_k(\mathbb{P}^n)$ à $Rat_{k+1}(\mathbb{P}^n)$ se restreint à une inclusion

$$FRat_k(\mathbb{P}^n) \hookrightarrow FRat_{k+1}(\mathbb{P}^n)$$

Ceci nous donne une filtration $\{FRat_j(\mathbb{P}^n)\}_{j \leq k}$ de $FRat_k(\mathbb{P}^n)$ et on peut se demander si elle se scinde. Curieusement ceci n'est pas le cas. En effet [22] montre que

$$H_*(FRat_k(\mathbb{P}^2); \mathbb{Q}) \cong H_*(S^3 \times S^{2k-3}; \mathbb{Q})$$

et donc on voit bien que $H_{2k-3}(FRat_{k+1}(\mathbb{P}^2); \mathbb{Q}) = 0$ while $H_{2k-3}(FRat_k(\mathbb{P}^2); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ et donc le second groupe ne peut pas se plonger dans le premier. Par contre on sait que, d'après le résultat

de stabilité de Crawford et le splitting de la proposition 4.4.2 que

Proposition 4.4.7 $H_*(FRat_k(\mathbb{P}^n)) \cong \bigoplus_{j \leq k} H_*(FRat_j(\mathbb{P}^n), FRat_{j-1}(\mathbb{P}^n))$ pour $* < 2(k - n)$.

4.4.2 Fonctions Rationnelles dans les Grassmanniennes

Définissons $Gr(n, m)$ la “variété de Grassmann” de tous les espaces vectoriels complexes de dimension n dans \mathbb{C}^{n+m} . Evidemment quand $n = 1$, on retrouve $Gr(1, m) = \mathbb{P}^m$. L’espace $Gr(n, m)$ est à la structure d’une variété complexe de dimension nm . On peut donc considérer

$$\text{Rat}(Gr(n, m)) = \{f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr(n, m) \mid f \text{ holomorphe}, f(\infty) = V_0\}$$

où $V_0 = Vect\{e_1, \dots, e_n\}$ l’espace vectoriel engendré pas les premiers n -vecteurs de base. Cet espace a été intensivement étudié par Mann et Milgram [39]. Notons que $f \in \text{Rat}(Gr(n, m))$ induit une flèche entre deux copies de \mathbb{Z} ;

$$H_2(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(Gr(n, m)) \cong \mathbb{Z}$$

qui est multiplication par un entier \mathbb{Z} . Comme dans le cas des applications dans un espace projectif, cet entier determine complètement les composantes connexes de $\text{Rat}(Gr(n, m))$ et deux fonctions rationnelles sont dans la même composante si et seulement si elles ont même degré. On notera $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$ une telle composante.

De la même façon que pour les fonctions rationnelles dans un espace projectif qu’on peut représenter par un vecteurs de polynômes (à \mathbb{C}^* -près), on peut représenter $f \in \text{Rat}(Gr(n, m))$ par une matrice $n \times (n+m)$ de polynômes à action de $GL_n(\mathbb{C})$ -près à droite [39]. Cette description nous donne une façon d’inclure $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$ dans $\text{Rat}_{k+1}(Gr(n, m))$ et d’obtenir ainsi une filtration qui se scinde.

Proposition 4.4.8 *Il existe un splitting*

$$H_*(\text{Rat}_k(Gr(n, m))) \cong \bigoplus_{0 \leq j \leq k} H_*(\text{Rat}_j(Gr(n, m)), \text{Rat}_{j-1}(Gr(n, m)))$$

Ce splitting a été vérifié par W. Ben Hammouda, S. Kallel et P. Salvatore (dans un travail en cours) se basant sur le calcul homologique de [39]. Il est fort probable que nos méthodes puissent donner une démonstration bien plus directe de ce résultat et nous projetons de poursuivre cette idée dans [35].

Annexe A

Espaces Fonctionnels et Modèle de May-Milgram

Nous explicitons dans cet annexe la relation entre espaces de configurations avec étiquettes et certains espaces de fonctions, en particulier le théorème de May et Milgram que nous réécrivons sous la forme

Rappelons la construction $C(M, X) \subset \text{SP}^\infty(M \times X)$ de (1.3.3) que nous réécrivons sous la forme

$$C(M, X) = \coprod_{k \geq 0} F(M, k) \times_{\mathfrak{S}_n} X^n / \sim$$

ou \sim est la relation du point base

$$(m_1, \dots, m_k) \times_{\mathfrak{S}_n} (x_1, \dots, x_n) \sim (m_1, \dots, \hat{m}_i, \dots, m_k) \times_{\mathfrak{S}_n} (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \quad (\text{A.0.1})$$

si $x_i = *$ le point base, avec \hat{m}_i signifiant suppression de cette coordonnée. Cette construction est naturellement filtrée par

$$C_n(M, X) = \coprod_{k \leq n} F(M, k) \times_{\mathfrak{S}_k} X^k / \sim$$

Essayons d'expliciter les trois premiers termes de cette filtration. On posera $C_0(M, X)$ le point base de cette construction. On a que $C_1(M, X) = M \times X = M \times X/M \times *$. D'autre part $C_2(M, X)$ est un strict pushout

$$\begin{array}{ccc} F(M, 2) \times_{\mathfrak{S}_2} (X \vee X) & \longrightarrow & F(M, 2) \times_{\mathfrak{S}_2} X^2 \\ \downarrow f & & \downarrow \\ M \times X & \longrightarrow & C_2(M, X) \end{array}$$

ou $f([(m_1, m_2) \times_{\mathfrak{S}_2} (x_1, *)]) = (m_1, x_1)$. Le cas $M = \mathbb{R}^n$ est très utilisé dans la littérature et dans

ce cas on peut remplacer $F(\mathbb{R}^n, 2)$ par la sphère S^{n-1} qui est un \mathfrak{S}_2 -rétracte par déformation.

Le résultat fondamental suivant est à la base de notre travail (autres variantes dans [32])

Théorème A.0.9 [7] *Soit M une variété compacte et parallélisable (avec éventuellement un bord ∂M). Soit X un CW pointé connexe. Alors il existe une équivalence d'homotopie*

$$C(M; X) \xrightarrow{\simeq_w} \text{Map}(M, \partial M; \Sigma^d X)$$

avec $d := \dim M$ et $\text{Map}(M, \partial M; \Sigma^d X)$ est l'espace des applications de M dans $\Sigma^d X = S^d \wedge X$ envoyant ∂M sur le point base.

Exemple A.0.10 (modèle de May-Milgram) En prenant un disque $M := D^d$ et donc $\partial M = S^{d-1}$ et $\text{Map}(M, \partial M; \Sigma^d X) = \Omega^d \Sigma^d X$ ce qui donne, pour X connexe, l'équivalence faible

$$\lambda : C(\mathbb{R}^d, X) \xrightarrow{\simeq} \Omega^d \Sigma^d X \tag{A.0.2}$$

On vérifie que le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}^d, X) & \longrightarrow & \Omega^d \Sigma^d X \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(\mathbb{R}^{d+1}, X) & \longrightarrow & \Omega^{d+1} \Sigma^{d+1} X \end{array}$$

où la flèche verticale à gauche est induite de l'inclusion standard $\mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ et celle de droite par l'adjonction. Ceci entraîne que le théorème A.0.9 est valide pour $d = \infty$ et on a l'équivalence faible $C(\mathbb{R}^\infty, X) \simeq QX$.

Les quotients successifs $D_k(M, X) := C_k(M, X)/C_{k-1}(M, X)$ dans la construction précédente s'identifient à des quotients de smash-produit $F(M, n)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_n} X^{\wedge n}$. Le splitting suivant devient donc un corollaire du théorème 2.5.1

Corollaire A.0.11 [7] *Pour M une variété compacte et parallélisable avec un bord $\partial M \neq \emptyset$, et X un CW connexe, on a un scindement stable*

$$\text{Map}(M, \partial M, \Sigma^d X) \simeq_s \bigvee_{n \geq 1} F(M, n)_+ \wedge_{\mathfrak{S}_n} X^{\wedge n}$$

Remarque A.0.12 A partir de ce corollaire, G. Arone [5] à étudié les foncteurs $Q\text{Map}(K, X)$ où K est un CW -complexe fini. En utilisant la théorie de Goodwillie, un tel foncteur peut être approché par une suite de foncteurs utilisant des espaces de configurations et des scindements stables peuvent être formulés.

A.0.3 Analogues Equivariants

Prenons G un groupe fini, X un G -espace pointé ayant un point base non dégénéré $*$ et M une G -variété sans bord. On dit que l'action est pointée, ou que X est G -pointé, si le point base est fixe par l'action du groupe. On définit $C^G(M, X) = \bigcup_{q \geq 0} C_q^G(M, X)$ où

$$C_q^G(M, X) = \{(m_1, x_1) + \cdots + (m_q, x_q) \in \text{SP}^q(M \times X) \mid m_i \neq m_j, i \neq j \text{ et cette } q\text{-configuration est } G\text{-équivariante}\}$$

Une configuration de longueur q , $(\mathbf{m}, \mathbf{x}) = (m_1, x_1) + \cdots + (m_q, x_q)$, est équivariante si $g(\mathbf{m}, \mathbf{x}) = (\mathbf{m}, \mathbf{x})$ ou $g(\mathbf{m}, \mathbf{x}) = (gm_1, gx_1) + \cdots + (gm_q, gx_q)$. Pour obtenir $C^G(M, X)$ on prend l'union et on effectue l'identification du point base. C'est-à-dire on filtre ces espaces en identifiant $C_q^G(M, X)$ dans $C_{q+1}^G(M, X)$ via

$$(m_1, x_1) + \cdots + (m_q, x_q) \sim (m_1, x_1) + \cdots + (m_q, x_q) + (m, *)$$

pour $* \in X$ le point base et pour tout $m \in M$.

Soit V une G -représentation. L'action de G étant linéaire, elle fixe le point à l'infini et donc on peut définir S^V comme étant la G -variété qui est le compactifié en un point (à l'infini) de V . S^V admet une action pointée de G et on peut considérer l'espace $\Omega^V \Sigma^V X$ de toutes les applications G -équivariantes de S^V dans $\Sigma^V X := S^V \wedge X$ (lequel admet l'action diagonale de G). On dira aussi que X est un espace G -connexe si pour tout sous-groupe $H \subset G$, l'ensemble des points fixes par H est connexe.

Le théorème suivant de Rourke et Sanderson généralise (A.0.2) et montre l'intérêt de ces constructions.

Théorème A.0.13 [48] *Pour V une G -représentation et X un G -espace pointé connexe, qui est de plus G -connexe, alors il existe une flèche*

$$C^G(V, X) \longrightarrow \Omega^V \Sigma^V(X)$$

qui est une équivalence faible.

Curieusement ce théorème n'est plus vrai pour des groupes infinis G (par exemple $G = S^1$ et opérant par rotation sur $V = \mathbb{R}^2$). Quand G est trivial, on a que $C^G(V, X) =: C(V, X)$ est l'espace des configurations de V étiquetées par des points de X et que $\Omega^V \Sigma^V X = \Omega^n \Sigma^n X$ ou $n = \dim V$. Dans ce cas on retrouve le modèle de May-Milgram. Les espaces de configurations équivariantes $C^G(M, X)$, et donc $\Omega^V \Sigma^V X$ pour X approprié, admettent également un scindement stable (explicité par exemple dans [35]).

Bibliographie

- [1] A. Adem, J. Milgram, *Cohomology of finite groups*, Springer Graduate Texts in Math.
- [2] A. Adem, F. Cohen, *Commuting elements and spaces of homomorphisms*, Math. Ann. **338** (2007), 587–626.
- [3] A. Adem, F. Cohen, J. Gomez, *Stable splittings and almost commuting elements*, preprint.
- [4] G. Arone *The Mitchell-Richter filtration of loops on Stiefel manifolds stably splits*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 4, 1207–1211.
- [5] G. Arone, *A generalization of snaitth-type filtration*, thesis.
- [6] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler *The polyhedral product functor : a method of computation for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, arXiv :0711.4689.
- [7] C.F. Bodigheimer, *Stable splittings of mapping spaces*, Algebraic topology, Proc. Seattle (1985), Springer lecture notes **1286**, 174–187.
- [8] C.-F. Bodigheimer, F. R. Cohen and R. J. Milgram, *Truncated symmetric products and configuration spaces*, Math. Z. **214** (1993) 179–216.
- [9] C.-F. Bodigheimer, F. R. Cohen and , M.D. Peim, *Mapping class groups and function spaces*, Homotopy methods in algebraic topology (Boulder 1999), Contemp. Math., **271**, 17–39
- [10] A. Borel, R. Friedman, Robert, J. Morgan, *Almost commuting elements in compact Lie groups*, Mem. Amer. Math. Soc. bf 157 (2002), no 747.
- [11] R. Bruner, F. Cohen, C. McGibbon, *On stable homotopy equivalences*, Quart. J. Math. **46** (1995), 11–20.
- [12] G. Carlsson, *A simplicial group construction for balanced products*, Topology **23**, no.1 (1984), 85–89.
- [13] G. Carlsson, R.L. Cohen, *The cyclic groups and the free loop space*,
- [14] G. Carlsson, R.J. Milgram, *Stable homotopy and iterated loop spaces*, Handbook of algebraic topology 1995.
- [15] C.A. Carvalho, *On infinite cyclic products*, J. London Math. Soc. (2) 7 (1974), 387–396.
- [16] F.R. Cohen, *The unstable decomposition of $\Omega^2\Sigma^2X$ and its applications*, Math. Zeit. **182** (1983), 553–568.

-
- [17] F. R. Cohen, *Artin's braid groups, classical homotopy theory, and sundry other curiosities*. Braids (Santa Cruz, CA, 1986), Contemp. Math. **78** (1988), 167–206.
- [18] F. R. Cohen, *On the mapping class groups for punctured spheres, the hyperelliptic mapping class groups, $SO(3)$ and $Spin^c(3)$* , American J. of Math. **115** (1993), 389–434.
- [19] F.R. Cohen, R.L. Cohen, B.M. Mann, R.J. Milgram, *The topology of rational functions and divisors of surfaces*, Acta. Math., **166** (1991), 163–221.
- [20] F. Cohen, P. May, L. Taylor, *Splitting of certain spaces CX* , Math. Proc. Cambridge Philo. Soc. **84** (1978), 465–496.
- [21] F. Cohen, T. Kohno, M. Xicotencatl, *Orbit configuration spaces associated to discrete subgroups of $PSL(2, R)$* , math.AT/0310393.
- [22] A. Crawford, *Full holomorphic maps from the Riemann sphere to complex projective spaces*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 1, 161–189.
- [23] A. Dimca, R. Rosian, *The Samuel stratification of the discriminant is Whitney regular*, Geometriae Dedicata **17** (1984), 181–184.
- [24] A. Dold, *Decomposition theorems for S_n -complexes*, Annals of Math. **75**, 1 (1962), 8–16.
- [25] A. Dold, *Ramified coverings, orbit projections and symmetric powers*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99**, (1986), 65–72.
- [26] A. Dold, R. Thom, *Quasifaserungen and unendliche symmetrische Produkte*, Ann. Math. **67**(1958), 239–281.
- [27] E.E. Floyd, W.J. Floyd, *Actions of classical small categories*, 252 pages
www.math.vt.edu/people/floyd/research/papers/acsc.pdf
- [28] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Oxford University Press.
- [29] M. Guest, Kosłowski, K. Yamaguchi, *Stable splittings of polynomials of bounded multiplicity*.
- [30] I. James, E. Thomas, H. Toda, J.H.C. Whitehead, *On the symmetric square of a sphere*, J. mathematics and mechanics, **12**, 5 (1963), 771–776.
- [31] K. Ko, L. Smolinsky, *The framed braid group and 3-manifolds*, Proceedings of AMS, no. 2, **115** (1992), 541–551.
- [32] S. Kallel, *habilitation*, Lille (2003).
- [33] S. Kallel, *An analog of the May-Milgram model for configurations with multiplicities*, Contemp. Math., **279**, (2001) 135–149.
- [34] S. Kallel, *Symmetric products, duality and homological dimension of configuration spaces*, Geometry and Topology Monographs 13 (2008) 499–527.
- [35] S. Kallel, S. Zanos, *Projet en cours de monographie sur les scindements homologiques*.
- [36] T. Kobayashi, *Homotopy groups with coefficients and a generalisation of Dold-Thom's isomorphism theorem*, Proc. Japan Acad. **38** (1962) 660–662.

Bibliographie

- [37] S.D. Liao, *On the topology of cyclic products of spheres*, Trans. Amer. Math. Soc **77** (1954), 520–551.
- [38] Loeffler, R.J. Milgram, *The structure of deleted symmetric products*, Contemp. Math. **78** (1988), 415–424.
- [39] B. Mann, R.J. Milgram, *Some spaces of holomorphic maps to complex Grassmann manifolds*, J. Diff. Geometry **33** (1991), 301–324.
- [40] P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer LNM **271** (1972).
- [41] McCord, *Classifying spaces and infinite symmetric products*, Trans. AMS **146** (1969), 273–297.
- [42] D. McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, Topology **14**(1975), 91–107.
- [43] D. McDuff, G. Segal, *Homology fibrations and the group completion theorem*, Invent. Math. **31** (1976), 279–284.
- [44] J. Mostovoy, *Geometry of truncated symmetric products and real roots of real polynomials*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), no. 2, 159–165.
- [45] V.L. Moulton, *Vector braids*, J. of Pure and applied algebra **131** (1998), 245–296.
- [46] M. Nakaoka, *Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups*, Ann. of Math. **71** (1960), 16–42.
- [47] F. Napolitano, *On some topological invariants of algebraic functions associated to the young stratification of polynomials*, topology and applications **134**, (2003), 189–201.
- [48] C. Rourke, B. Sanderson, *Equivariant configuration spaces*, J. London Math. Soc. **62** (2000), 544–552.
- [49] K. Shimakawa, *Configuration spaces with partially summable labels and homology theories*, Math. J. Okayama Univ. **43** (2001), 43–72.
- [50] G. Segal, *The topology of rational functions*, Acta Math. **143**(1979), 39–72.
- [51] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology **13** (1974), 293–312.
- [52] N. E. Steenrod, *A convenient category of topological spaces*, Michigan Math. J. **14** 2 (1967), 133–152.
- [53] R.G. Swan, *The homology of cyclic products*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 27–68.
- [54] R. Vogt, *Splitting of spaces CX* , Manuscripta Math. **38**, 21–39 (1982), 21–39.
- [55] C. H. Wagner, *Symmetric, cyclic and permutation products of manifolds*, Dissertationes Mathematicae, Warszawa 1980.
- [56] J. Wang, *Generalized Snaitth splittings*, thèse université de Bonn, Décembre 2008.
- [57] S. Wong, *The fiber of the iterated Freudenthal suspension*, Math. Zeitschrift **215** (1994), 377–414.