

UNIVERSITE LILLE 1

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR  
L'INGENIEUR

Doctorat

Génie électrique

Mathieu AUBERTIN

CONTRIBUTION A LA MODELISATION 3D DES  
SYSTEMES ELECTROMAGNETIQUES : ETUDE DE  
METHODES DE RECOLLEMENT DE MAILLAGES

Soutenu le 28 janvier 2011

Devant le jury composé de :

|                        |                               |
|------------------------|-------------------------------|
| M. Joao Pedro BASTOS   | Président du jury             |
| M. Frédéric BOUILLAULT | Rapporteur                    |
| M. Mouloud FELIACHI    | Rapporteur                    |
| M. Thomas HENNERON     | Examineur, Co-encadrant       |
| M. Jean-Claude MIPO    | Examineur                     |
| M. Francis PIRIOU      | Examineur, Directeur de thèse |



# Remerciements

Mes travaux, financés par une bourse CIFRE par Valeo, se sont déroulés au sein du L2EP (Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance) à Lille, dans l'équipe modélisation. Je tiens d'ailleurs à remercier l'ensemble des membres de cette équipe pour leur accueil et leur soutien.

Je remercie aussi chaleureusement MM PIRIOU, et MIPO, qui ont encadré ma thèse au laboratoire et à Valeo, pour leurs conseils, et leurs idées, toujours intéressantes et constructives.

Je remercie aussi Thomas HENNERON, qui a suivi de près mes travaux. Il a aidé à la compréhension, la réalisation de cette recherche, et aussi a su se rendre disponible dans les moments difficiles, et a même développé d'autres applications pendant la thèse !

Je tiens aussi à remercier M. Joao Pedro BASTOS, qui a aimablement accepté de présider mon jury de thèse, loin de son laboratoire brésilien.

Je remercie aussi MM Frédéric BOUILLAULT, et Mouloud FELIACHI pour avoir accepté le rôle de rapporteur de mes travaux, et de les juger.

Je tiens à remercier M. TINZEFTE, avec qui nous avons énormément travaillé, discuté. Il a permis beaucoup d'avancées, et de comprendre beaucoup de choses concernant la résolution des systèmes !

J'ai une pensée toute particulière pour mes voisins de bureau : Francisc, Julien, Keyu et Loïc, qui m'ont aidé tout au long de ma thèse et ont supporté ma présence, ainsi qu'à l'ensemble des thésards du labo en général, et du P2 en particulier.

Je remercie aussi l'ensemble des personnels du P2 à la fac, professeurs ou non, car sans eux aucune thèse ne serait possible

Je remercie toute les personnes qui de près ou de loin ont permis à ces travaux de voir le jour, et de se réaliser dans de si bonnes conditions.

Et surtout, je remercie mes parents, et ma famille pour leur soutien, les encouragements, les petites attentions, même lointaines qui m'ont aidé à avancer, et m'ont permis de garder courage.

*Ce mémoire est dédié à celle qui va partager ma vie.  
Pour toi, Khadija...*

## **Contribution à la modélisation 3D des machines électriques par décomposition de domaines et recollement de maillages**

### **Résumé :**

La méthode des éléments finis est une méthode de modélisation des systèmes, utilisée dans l'ensemble des domaines de la physique ainsi que dans l'ingénierie. Elle permet d'obtenir des résultats précis. Cependant la nécessité de modéliser des systèmes de plus en plus complexes, avec une précision de plus en plus grande, demande une puissance de calcul qui n'est pas toujours disponible. Il est ainsi nécessaire, afin de résoudre ces problèmes, de trouver des méthodes de calcul permettant de conserver cette précision, mais de réduire le temps de calcul.

Une solution pour tenter de palier à ce défaut est de décomposer le problème complexe initial en plusieurs sous-problèmes, maillés indépendamment, et entre lesquels il est nécessaire de coupler les solutions. Quelques méthodes, permettant de recoller des maillages, sont étudiées dans ce présent mémoire. Elles sont présentées ainsi que quelques outils liés, telles que des méthodes de résolution, et des fonctions de formes plus adaptées à leur utilisation. Il est montré, à travers ces travaux, qu'il est tout à fait possible de recoller les maillages en électrotechnique, et par là d'obtenir des résultats intéressants en termes de précision, et de qualité de solution.

**Mots clés :** modélisation électromagnétique, recollement de maillages, multiplicateurs de Lagrange, méthode Mortar, méthodes de résolution.

## **Contribution to the 3D modelling of electrical devices with domain decomposition and mesh reconnection**

### **Abstract:**

The finite element method is used to model complex systems in all the physics and engineering. This method has a good accuracy. Because of the complexity of the systems, and the require precision, this method need a very large computing capacity, which is not always available. Consequently it is necessary to find calculation methods which allow preserving the accuracy, and reducing the computation time.

One way to solve this situation is to decompose the complex problem in several sub-problems, with non-connecting meshes, and reconnect them. Some methods used to reconnect are developed in this work, with some tools, like resolution methods, and new shape functions necessary for this configuration of non-connecting meshes. This work shows the possibility of those methods: they reconnect the different meshes, conserve the accuracy and the quality of the solution. But the solving methods used here do not reduce consequently the computation time.

**Keywords:** electromagnetic modelling, mesh reconnection, Lagrange multipliers, Mortar method, solving methods.

# Sommaire

|  |           |
|--|-----------|
| <i>Remerciements</i> .....   | 1         |
| <i>Sommaire</i> .....  | 5         |
| <i>Index des figures</i> .....   | 9         |
| <i>Index des tableaux</i> .....  | 13        |
| <i>Notations</i> .....   | 15        |
| <i>Introduction générale</i> .....   | 17        |
| <b>Chapitre 1 Les problèmes d'électromagnétisme en basse fréquence</b> ..... | <b>20</b> |
| I. Introduction.....   | 20        |
| II. Le domaine continu .....   | 21        |
| A. Les espaces fonctionnels .....  | 21        |
| 1. Définitions .....   | 21        |
| 2. Propriétés .....  | 22        |
| B. Les équations de Maxwell en basse fréquence .....                         | 23        |
| C. Lois de comportement .....  | 24        |
| D. Conditions aux limites.....   | 25        |
| E. Diagramme de Tonti .....  | 26        |
| F. Formulation en potentiels.....  | 28        |
| 1. Le champ source $H_s$ associé à un bobinage .....                         | 28        |
| 2. Les formulations magnétostatiques .....                                   | 29        |
| 3. Les formulations magnétodynamiques.....                                   | 30        |
| a. Formulation magnétique T- $\Omega$ .....                                  | 30        |
| b. Formulation électrique A- $\varphi$ .....                                 | 31        |
| III. Une méthode de résolution : les éléments finis.....                     | 32        |
| A. Les éléments de Whitney.....  | 32        |
| B. Discrétisation des équations .....  | 35        |
| 1. Formulation scalaire $\Omega$ .....                                       | 35        |
| 2. Formulation vectorielle A.....  | 36        |
| 3. Formulation magnétique T- $\Omega$ .....                                  | 38        |
| 4. Formulation électrique A- $\varphi$ .....                                 | 40        |
| C. Discrétisation temporelle .....   | 43        |
| D. Résolution des systèmes matriciels linéaires.....                         | 44        |
| 1. La décomposition de Cholesky.....   | 45        |
| 2. Le gradient conjugué .....  | 45        |
| 3. La méthode Uzawa .....  | 46        |

|  |   |           |
|--|---|-----------|
| 4.   | La méthode MRTR.....  | 46        |
| 5.   | Comparaison des méthodes.....                                 | 46        |
| 6.   | Deux préconditionneurs pour le recollement.....               | 48        |
| a.   | Le préconditionnement par blocs.....                          | 48        |
| b.   | Décomposition QR [58].....                                    | 49        |
| IV.  | Conclusion.....   | 49        |
| <b>Chapitre 2 Le recollement de maillages.....</b> |   | <b>50</b> |
| I.   | Introduction.....   | 50        |
| II.  | Positionnement du problème.....                               | 51        |
| A.   | Domaine discret.....  | 51        |
| B.   | Opérateurs matriciels de couplage.....                        | 53        |
| 1.   | Cas des potentiels scalaires.....                             | 53        |
| 2.   | Cas des potentiels vecteurs.....                              | 55        |
| III.   | Formulation à deux sous-domaines.....                         | 56        |
| A.   | Les multiplicateurs de Lagrange.....                          | 56        |
| 1.   | La formulation en potentiel scalaire $\Omega$ [42].....       | 56        |
| 2.   | Les doubles multiplicateurs de Lagrange.....                  | 58        |
| 3.   | Utilisation de solveurs adaptés.....                          | 58        |
| B.   | La méthode Mortar.....  | 60        |
| 1.   | Principe.....   | 60        |
| 2.   | Utilisation de solveurs adaptés.....                          | 61        |
| C.   | Fonctions particulières pour les matrices de couplage.....    | 62        |
| 1.   | Cas des opérateurs pour le recollement nodal.....             | 62        |
| 2.   | Cas des opérateurs pour le recollement en arêtes.....         | 64        |
| a.   | Deuxième famille de fonctions d'arêtes.....                   | 64        |
| b.   | Fonctions bi-orthogonales d'arêtes.....                       | 64        |
| c.   | Utilisation des fonctions nodales bi-orthogonales.....        | 65        |
| IV.  | Analyse des méthodes sur des cas académiques.....             | 66        |
| A.   | Cas magnéto-statique.....                                     | 66        |
| 1.   | Présentation.....   | 67        |
| 2.   | Résultats en formulation en potentiel scalaire $\Omega$ ..... | 69        |
| 3.   | Résultats en formulation en potentiel vecteur $A$ .....       | 78        |
| 4.   | Conclusion.....   | 84        |
| B.   | Cas magnéto-dynamique.....                                    | 84        |
| 1.   | Présentation.....   | 84        |
| 2.   | Etude de la première configuration.....                       | 89        |
| a.   | Formulation $T-\Omega$ .....                                  | 89        |
| b.   | Formulation $A-\varphi$ .....                                 | 93        |
| 3.   | Seconde configuration.....                                    | 98        |
| 4.   | Conclusion.....   | 100       |



|  |                   |
|--|-------------------|
| V. Bilan .....   | 100               |
| <b>Chapitre 3 Etude de systèmes électrotechniques.....</b>                           | <b>102</b>        |
| I. Introduction.....   | 102               |
| II. Exemple magnétostatique : le circuit magnétique.....                             | 103               |
| A. Présentation du système étudié.....   | 103               |
| B. Résultats.....  | 105               |
| 1. Formulation $\Omega$ .....  | 105               |
| 2. Formulation A.....  | 107               |
| C. Bilan.....  | 108               |
| III. Exemple magnétodynamique : la plaque ferromagnétique.....                       | 109               |
| A. Présentation du système étudié.....   | 109               |
| B. Résultats.....  | 111               |
| 1. Formulation T- $\Omega$ .....   | 111               |
| 2. Formulation A- $\varphi$ .....  | 114               |
| C. Conclusion .....  | 115               |
| IV. Structure à griffes simplifiée.....  | 116               |
| A. Présentation du système .....   | 116               |
| B. Résultats.....  | 118               |
| 1. Formulation T- $\Omega$ .....   | 118               |
| 2. Formulation A- $\varphi$ .....  | 121               |
| C. Conclusion .....  | 124               |
| V. Bilan .....   | 124               |
| <b><i>Conclusion générale et perspectives de travail.....</i></b>                    | <b><i>126</i></b> |
| <b><i>Annexes.....</i></b>   | <b><i>129</i></b> |
| <b>Annexe 1 Méthodes itératives et préconditionneurs .....</b>                       | <b>130</b>        |
| I. Quelques solveurs .....   | 130               |
| A. La méthode directe par la décomposition de Cholesky.....                          | 130               |
| B. Le gradient conjugué .....  | 131               |
| C. La méthode Uzawa .....  | 133               |
| D. MRTR.....   | 134               |
| E. Le bigradient conjugué .....  | 136               |
| II. Préconditionneurs .....  | 137               |
| A. Définition.....   | 137               |
| B. Préconditionneur diagonal .....   | 137               |
| C. Préconditionnement par la méthode de Cholesky incomplet, et Crout incomplet ..... | 137               |
| D. Préconditionnement SSOR.....  | 138               |
| E. Préconditionnement par blocs.....   | 139               |
| F. Décomposition QR.....   | 139               |

|  |                   |
|--|-------------------|
| III. Utilisation des préconditionneurs dans le gradient conjugué.....                  | 141               |
| A. Gradient conjugué préconditionné à gauche .....                                     | 142               |
| B. Gradient conjugué préconditionné en split .....                                     | 143               |
| <b>Annexe 2 Méthode d'intégration pour le calcul des matrices de recollement .....</b> | <b>144</b>        |
| <b>Annexe 3 Les multiplicateurs de Lagrange dans les différentes formulations.....</b> | <b>146</b>        |
| I. Formulation A.....  | 146               |
| II. Formulation T- $\Omega$ .....  | 148               |
| III. Formulation A- $\varphi$ .....  | 153               |
| <b>Annexe 4 Les fonctions bi-orthogonales.....</b>                                     | <b>157</b>        |
| I. Cas des fonctions de forme nodales.....   | 157               |
| A. Fonction de degré 1 .....   | 157               |
| B. Fonctions de degré 2 .....  | 159               |
| II. Cas de la première famille de fonctions d'arêtes.....                              | 160               |
| <b>Annexe 5 Validation de la deuxième famille de fonctions d'arêtes .....</b>          | <b>163</b>        |
| <b><i>Bibliographie.....</i></b>   | <b><i>164</i></b> |

# Index des figures

|  |    |
|--|----|
| Figure 1 : Définition du domaine d'étude $D$ .....   | 20 |
| Figure 2 : Complexe de De Rham, $D$ étant contractile [57] .....   | 23 |
| Figure 3 : Les frontières du système d'étude .....   | 25 |
| Figure 4 : Diagramme de Tonti .....  | 27 |
| Figure 5 : Diagramme de Tonti appliqué à l'électrotechnique [3, 4, 38] .....   | 27 |
| Figure 6 : Les éléments géométriques d'un maillage tétraédrique .....  | 32 |
| Figure 7 : Graphe des différentes convergences .....   | 47 |
| Figure 8 : Décomposition de domaines .....   | 50 |
| Figure 9 : Discrétisation de $D$ dans le cas de maillages non-conformes .....  | 51 |
| Figure 10 : Décomposition de $D$ en électromagnétisme .....  | 53 |
| Figure 11 : Maillages de $\Gamma_R$ .....  | 53 |
| Figure 12 : Triangle de référence $\Delta$ .....   | 62 |
| Figure 13 : Structure étudiée : cube de 1m de côté .....   | 67 |
| Figure 14 : Décomposition du cube en deux sous domaines .....  | 67 |
| Figure 15 : Maillages M1, M2 et M3 utilisés .....  | 68 |
| Figure 16 : Définition de la ligne d'étude de $B$ .....  | 68 |
| Figure 17 : Induction magnétique par les deux types de fonctions de formes sur $\Gamma_R$ ,<br>formulation $\Omega$ .....            | 70 |
| Figure 18 : Induction magnétique obtenue avec les différentes méthodes de recollement<br>sur $\Gamma_R$ , formulation $\Omega$ ..... | 71 |
| Figure 19 : Répartition de l'induction magnétique sur $\Gamma_R$ , formulation $\Omega$ .....  | 71 |
| Figure 20 : Comparaison des répartitions de $B$ sur $\Gamma_R$ , formulation $\Omega$ .....  | 72 |
| Figure 21 : Composantes de l'induction magnétique, formulation $\Omega$ .....  | 72 |
| Figure 22 : Graphique de convergences, SL, formulation $\Omega$ .....  | 73 |
| Figure 23 : Evolution de la convergence, méthode DL, formulation $\Omega$ .....  | 74 |
| Figure 24 : Graphique des convergences, Mortar, formulation $\Omega$ .....   | 77 |
| Figure 25 : Répartition de l'induction magnétique sur $\Gamma_R$ , formulation A .....   | 80 |
| Figure 26 : Répartition de l'induction magnétique sur $\Gamma_R$ , formulation A .....   | 81 |
| Figure 27 : Composantes de l'induction en fonction de la position, formulation A .....   | 81 |
| Figure 28 : La sphère creuse .....   | 85 |
| Figure 29 : Définition des conditions aux limites du système .....   | 85 |

|   |     |
|---|-----|
| Figure 30 : Sphère creuse étudiée.....  | 86  |
| Figure 31 : Recollement dans la sphère creuse.....  | 86  |
| Figure 32 : Maillages de la sphère creuse, première configuration.....  | 86  |
| Figure 33 : Position du plan d'observation de la densité de courants induite.....                                   | 87  |
| Figure 34 : Ligne d'observation $l_1$ pour la densité de courants induite.....                                      | 87  |
| Figure 35 : Ligne d'observation $l_2$ de l'induction magnétique .....   | 87  |
| Figure 36 : Zone recollée pour la seconde configuration .....   | 88  |
| Figure 37 : Maillages de la sphère de la seconde configuration.....   | 88  |
| Figure 38 : Densité de courants induite de la coque externe de la sphère, formulation T- $\Omega$ .....             | 89  |
| Figure 39 : Densité de courants induite de la coque interne de la sphère, formulation T- $\Omega$ .....             | 90  |
| Figure 40 : Courants induits en fonction de la position dans la sphère, formulation T- $\Omega$ .....               | 90  |
| Figure 41 : Répartition des densités de courants induites dans la sphère, formulation T- $\Omega$ .....             | 91  |
| Figure 42 : Puissance instantanée dans la sphère, à 100 Hz, formulation T- $\Omega$ .....                           | 91  |
| Figure 43 : Composantes de la densité de courants induite dans la sphère, à 100 Hz, formulation T- $\Omega$ .....   | 92  |
| Figure 44 : Induction selon l'axe x sur la ligne, à 100 Hz, formulation T- $\Omega$ .....                           | 92  |
| Figure 45 : Répartition des densités de courants induites dans la sphère, formulation A- $\varphi$ .....            | 94  |
| Figure 46 : Densités de courants induites le long de la ligne $l_1$ , à 1 Hz, formulation A- $\varphi$ .....        | 95  |
| Figure 47 : Répartition des densités des courants induites dans la sphère, à 100 Hz, formulation A- $\varphi$ ..... | 95  |
| Figure 48 : Puissance instantanée au cours du temps à 100 Hz, formulation A- $\varphi$ .....                        | 96  |
| Figure 49 : Composantes des densités de courants induites le long de la ligne $l_1$ .....                           | 96  |
| Figure 50 : Composante $B_x$ de l'induction magnétique le long de la ligne $l_2$ .....                              | 97  |
| Figure 51 : Répartition des densités de courants induites, seconde configuration, formulation T- $\Omega$ .....     | 99  |
| Figure 52 : Répartition des densités des courants induites, seconde configuration, formulation A- $\varphi$ .....   | 100 |

|  |     |
|--|-----|
| Figure 53 : Circuit magnétique étudié .....  | 103 |
| Figure 54 : Dimensions du circuit magnétique modélisé .....  | 103 |
| Figure 55 : Maillage étudié avec la partie recollée.....   | 104 |
| Figure 56 : Maillages du circuit magnétique utilisés.....  | 104 |
| Figure 57 : Répartition de l'induction magnétique au voisinage de l'entrefer.....                                    | 106 |
| Figure 58 : Répartition de l'induction magnétique au voisinage de l'entrefer, formulation<br>A.....                  | 108 |
| Figure 59 : Système étudié .....   | 109 |
| Figure 60 : Dimensions de la plaque ferromagnétique.....   | 110 |
| Figure 61 : Volume recollé pour la plaque ferromagnétique.....   | 110 |
| Figure 62 : Maillages de la plaque.....  | 111 |
| Figure 63 : Plan d'observation de la densité de courants induite dans la plaque.....                                 | 111 |
| Figure 64 : Densité de courants induite sur la face inférieure de la plaque, formulation<br>T- $\Omega$ .....        | 112 |
| Figure 65 : Puissance instantanée dans la plaque, formulation T- $\Omega$ .....                                      | 113 |
| Figure 66 : Puissance instantanée au cours du temps, formulation A- $\varphi$ .....                                  | 114 |
| Figure 67 : Structure à griffes étudiée .....  | 116 |
| Figure 68 : Définition du système .....  | 116 |
| Figure 69 : Maillages de la griffe (vue de face) .....   | 117 |
| Figure 70 : Plan d'observation de l'induction magnétique.....  | 117 |
| Figure 71 : Plan d'observation des densités de courants induites.....  | 118 |
| Figure 72 : Energie globale en fonction du temps, formulation T- $\Omega$ .....                                      | 119 |
| Figure 73 : Puissances instantanées calculées formulation T- $\Omega$ .....  | 119 |
| Figure 74 : Répartition des densités de courants induites à la surface des griffes,<br>formulation T- $\Omega$ ..... | 120 |
| Figure 75 : Energie globale du système, formulation A- $\varphi$ .....   | 122 |
| Figure 76 : Puissances instantanées calculées en A- $\varphi$ .....  | 122 |
| Figure 77 : Répartition des densités de courants induites, formulation A- $\varphi$ .....                            | 123 |
| Figure 78 : Facettes considérées, et zone commune.....   | 144 |
| Figure 79 : Décomposition de la zone commune .....   | 144 |
| Figure 80 : Projection du triangle dans un repère de référence .....   | 144 |
| Figure 81 : Projection des points de Gauss dans le repère d'origine.....   | 145 |
| Figure 82 : Positionnement des points de Gauss dans les facettes .....   | 145 |

## Index des figures

|   |     |
|---|-----|
| Figure 83 : Facette de référence $\Delta$ .....   | 157 |
| Figure 84 : Résultats avec les deux familles..... | 163 |

# Index des tableaux

|  |    |
|--|----|
| Tableau 1 : Les champs de l'électromagnétisme .....  | 23 |
| Tableau 2 : Schémas de discrétisation temporelle.....  | 43 |
| Tableau 3 : Comparaison des solveurs sur un cas simple.....  | 47 |
| Tableau 4 : Allure de $[C_a]$ pour les arêtes.....   | 66 |
| Tableau 5 : Propriétés des maillages du cube.....  | 68 |
| Tableau 6 : Propriétés des matrices pour le cube, formulation $\Omega$ .....                           | 69 |
| Tableau 7 : Energies magnétiques calculées pour le cube, formulation $\Omega$ .....                    | 70 |
| Tableau 8 : Temps et nombre d'itérations pour les SL, formulation $\Omega$ .....                       | 73 |
| Tableau 9 : Temps et nombre d'itérations pour les DL, formulation $\Omega$ .....                       | 74 |
| Tableau 10 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec construction, formulation $\Omega$ .....    | 75 |
| Tableau 11 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar sans construction, formulation $\Omega$ .....    | 75 |
| Tableau 12 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec QR Gram-Schmidt, formulation $\Omega$ ..... | 76 |
| Tableau 13 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec QR Householder, formulation $\Omega$ .....  | 76 |
| Tableau 14 : Propriétés des matrices pour le cube, formulation A.....                                  | 78 |
| Tableau 15 : Energies magnétiques, formulation A .....   | 79 |
| Tableau 16 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec construction, formulation A.....            | 83 |
| Tableau 17 : Résultats sans construction du système en Mortar, formulation A .....                     | 83 |
| Tableau 18 : Caractéristiques des maillages M1, M2 et M3 .....   | 86 |
| Tableau 19 : caractéristiques des maillages M4, M5 et M6 .....   | 88 |
| Tableau 20 : Tailles des matrices pour la sphère creuse, formulation T- $\Omega$ .....                 | 89 |
| Tableau 21 : Puissance instantanée à 1 Hz, formulation T- $\Omega$ .....                               | 90 |
| Tableau 22 : Pertes Joules dans la sphère, formulation T- $\Omega$ .....                               | 93 |
| Tableau 23 : Temps de calcul, formulation T- $\Omega$ .....  | 93 |
| Tableau 24 : propriétés des matrices, formulation A- $\varphi$ .....                                   | 94 |
| Tableau 25 : Puissance instantanée, à 1 Hz, formulation A- $\varphi$ .....                             | 94 |
| Tableau 26 : Pertes Joules formulation A- $\varphi$ .....  | 97 |

|   |     |
|---|-----|
| Tableau 27 : Temps de calcul pour les différents maillages, formulation A- $\varphi$ .....      | 98  |
| Tableau 28 : Caractéristiques des matrices M4, M5 et M6, formulation T- $\Omega$ .....          | 98  |
| Tableau 29 : Caractéristiques des matrices, seconde configuration, formulation A- $\varphi$ ... | 99  |
| Tableau 30 : Caractéristiques des maillages du circuit magnétique .....                         | 105 |
| Tableau 31 : Systèmes matriciels, formulation $\Omega$ .....                                    | 105 |
| Tableau 32 : Comparaison des résultats, formulation $\Omega$ .....                              | 106 |
| Tableau 33 : Caractéristiques des systèmes matriciels, formulation A .....                      | 107 |
| Tableau 34 : Comparaison des résultats, formulation A .....                                     | 108 |
| Tableau 35 : Caractéristiques des maillages .....   | 111 |
| Tableau 36 : Tailles des systèmes matriciels, formulation T- $\Omega$ .....                     | 112 |
| Tableau 37 : Temps de calcul pour les différents maillages, formulation T- $\Omega$ .....       | 113 |
| Tableau 38 : Tailles des systèmes matriciels, formulation A- $\varphi$ .....                    | 114 |
| Tableau 39 : Temps de calcul, formulation A- $\varphi$ .....                                    | 115 |
| Tableau 40 : Caractéristiques des maillages .....   | 117 |
| Tableau 41 : Caractéristiques des matrices, formulation T- $\Omega$ .....                       | 118 |
| Tableau 42 : Temps de calcul, formulation T- $\Omega$ .....                                     | 121 |
| Tableau 43 : Caractéristiques des matrices, formulation A- $\varphi$ .....                      | 121 |
| Tableau 44 : Temps de calcul, formulation A- $\varphi$ .....                                    | 123 |



# Notations

|  |  |
|--|--|
| $\Gamma$   | Frontière du domaine $D$   |
| $\Gamma_B$   | Sous frontières de $D$ où on impose $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$                  |
| $\Gamma_H$   | Sous frontière de $D$ où on impose $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$                   |
| $\Gamma_R$   | Frontière de recollement entre les sous-domaines $D_1$ et $D_2$                        |
| $\lambda$  | Multiplicateur de Lagrange   |
| $\lambda_n$  | Multiplicateur de Lagrange lié aux nœuds   |
| $\lambda_a$  | Multiplicateur de Lagrange lié aux arêtes  |
| $\mu_0$  | Perméabilité magnétique du vide ( $4 \pi 10^{-7}$ H/m)                                 |
| $\mu_r, \mu$   | Perméabilité relative d'un matériau, perméabilité d'un matériau ( $4 \pi 10^{-7}$ H/m) |
| $\rho$   | Densité volumique de charges ( $C/m^3$ )   |
| $\sigma$   | Conductivité d'un matériau ( $W^{-1} m^{-1}$ )   |
| $\varphi$  | Potentiel scalaire électrique (pour la magnétodynamique)                               |
| $\Omega$   | Potentiel scalaire magnétostatique   |
| $\mathbf{A}$   | Potentiel vecteur magnétostatique  |
| $\mathbf{B}, \mathbf{B}_r$   | Induction magnétique, induction magnétique rémanente (T)                               |
| $\mathbf{D}$   | Induction électrique ( $C/m^2$ )   |
| $D, D_1, D_2$  | Domaine d'étude, sous-domaine 1, sous-domaine 2  |
| $D_c$  | Domaine où prennent naissance des courants induits                                     |
| $D_{c1}, D_{c2}$   | Intersection de $D_c$ avec $D_1$ , de $D_c$ avec $D_2$                                 |
| $\mathbf{E}$   | Champ électrique (V/m)   |
| $\mathbf{H}, \mathbf{H}_s$   | Champ magnétique, Champ magnétique source (A/m)  |
| $H(\mathbf{grad}, D), H(\mathbf{rot}, D), H(\mathbf{div}, D), \text{Im}(\mathbf{div})$ | Espaces de fonctions   |
| $H_E(\mathbf{grad}, D), H_E(\mathbf{rot}, D), H_E(\mathbf{div}, D)$                    | Espaces de fonctions conditionnées sur $\Gamma_E$                                      |
| $H_H(\mathbf{grad}, D), H_H(\mathbf{rot}, D), H_H(\mathbf{div}, D)$                    | Espaces de fonctions conditionnées sur $\Gamma_H$                                      |
| $\mathbf{J}$   | Densité de courants ( $A/m^2$ )  |
| $\mathbf{J}_{\text{ind}}, \mathbf{J}_s$  | Densité de courants induits, densité de courants sources ( $A/m^2$ )                   |
| $L^2(D)$   | Espace des fonctions scalaires de carré sommable sur $D$                               |
| $L^2(\mathbf{D})$  | Espace des fonctions vectorielles de carré sommable sur $D$                            |
| $\mathbf{n}$   | Vecteur normal à une surface   |
| $\mathbf{T}$   | Potentiel vecteur magnétique (pour la magnétodynamique)                                |
| $w_n$  | Fonction de forme associée aux nœuds   |

## Notations

|  |       |   |
|--|-------|---|
| $w_a$  | _____ | Fonction de forme associée aux arêtes                     |
| $w_f$  | _____ | Fonction de forme associée aux facettes                   |
| $w_e$  | _____ | Fonction de forme associée aux éléments                   |
| $W^0, W^1, W^2, W^3$                             | _____ | Espaces discret des fonctions scalaires et vectorielles   |
| $W_B^0, W_H^0, W_B^1, W_H^1, W_B^2, W_H^2$       | _____ | Espaces discrets de fonctions avec conditions aux limites |
| $[C], [D], [C_n], [D_n], [C_a], [D_a], [K], [T]$ | _____ | Matrices de recollement                                   |
| $[D], [L], [L_1], [P], [Q], [R]$                 | _____ | Matrices de préconditionnement                            |
| $[E], [G], [M], [R]$                             | _____ | Matrice éléments finis                                    |
| $[\varphi], [\Omega], [A], [F_H], [F_J], [T]$    | _____ | Vecteurs éléments finis                                   |

# Introduction générale

Les travaux présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans le cadre d'une convention CIFRE entre Valeo Systèmes Electriques (division alternateurs), basée à Créteil, et le L2EP (Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance) de Lille.

Modéliser un système consiste à mettre en place une structure mathématique qui permet d'obtenir une solution approchée au problème posé. Ce cadre est défini par les éléments finis dans la plupart des domaines de la physique (acoustique, électromagnétisme, mécanique, thermique...). Ces éléments finis sont utilisés et développés aussi bien dans le monde industriel, que dans le monde de la recherche. Cette méthode permet en effet aux industriels de réduire leurs coûts en prototypage, puisque le comportement d'un nouveau système peut être étudié très rapidement. Par ailleurs, elle est étudiée en laboratoire, car cet outil doit continuellement évoluer et être amélioré pour répondre toujours plus efficacement aux demandes des utilisateurs. A l'heure actuelle, bien que les puissances de calculs soient toujours en augmentation, une nouvelle piste est envisagée en électromagnétisme afin de rendre encore plus performants les codes de modélisation par éléments finis : le recollement de maillages.

Cette technique de recollement permet de séparer un problème en plusieurs sous-problèmes, qui peuvent être résolus indépendamment les uns des autres : ils peuvent ainsi être parallélisés, ce qui divise les temps de calcul [48]. Mais le recollement a d'autres utilisations possibles. Il permet par exemple de modéliser finement des phénomènes dans des petits volumes, tout en gardant un modèle plus grossier dans le reste du système étudié, ou de réaliser un mouvement beaucoup moins contraint qu'avec la méthode du pas bloqué [56], ou encore de prendre en compte une symétrie complexe [43].

Cependant, lors des travaux menés durant cette thèse, et présentés dans ce mémoire, seule la modélisation fine de phénomènes prenant naissance dans de petits volumes est abordée. Cette problématique des phénomènes localisés dans de petits volumes, par rapport à la taille globale du système, est inhérente à la modélisation en général, et en particulier en électromagnétisme. Dans le cas des machines, par exemple, les courants induits prennent naissance dans de petits domaines en regard du reste de la structure. De même, dans le cas des transformateurs de forte puissance, les points chauds liés à la présence de défauts (impuretés, court-circuit entre tôles...) introduisent des phénomènes dans des volumes très limités... Dans

ces deux cas, le maillage doit être fin au niveau des phénomènes intéressants, et peut être beaucoup plus grossier autour. Malheureusement, les éléments finis classiques ne permettent pas d'avoir un tel maillage, ou une telle discontinuité de tailles d'éléments. Il y a en effet diffusion de la taille des éléments, qui peut augmenter considérablement le nombre d'inconnues du système, donc le temps de calcul et l'espace mémoire utilisé. Cette diffusion va certes permettre la modélisation fine du phénomène étudié, mais va engendrer un maillage fin dans des parties de la structure où cela n'est pas nécessaire. En introduisant des techniques de recollement de maillages, il est possible de mailler finement la zone importante, et donc d'y avoir une solution précise, tout en conservant pour le reste du système un maillage plus grossier, plus régulier, suffisant pour avoir une solution satisfaisante.

Cette thèse s'inscrit dans une dynamique de développement du code de calcul du laboratoire (*code\_Carmel*). Ainsi, X. Shi [56], qui a étudié des méthodes de mouvement, G. Parent [29], [30], qui a travaillé sur le multiphysique, G. Krebs, qui a implanté la méthode Overlapping [27], [28], [34], ont ajoutés des fonctionnalités, menés des études qui ont abouti aujourd'hui à cette thèse. L'objectif affiché étant de toujours étendre les domaines de compétences du laboratoire, ainsi que les possibilités du code.

De plus, cette thèse est réalisée dans un contexte industriel. Valeo Systèmes Electriques est toujours à la recherche de nouveaux moyens de calculs, de nouvelles fonctionnalités, qui permettent de répondre à un besoin toujours croissant de calculs précis. Ainsi, dans le cadre des alternateurs à griffes, la question des courants induits devient un point central à résoudre. Les travaux menés [14] ont montré les limites rencontrées par les modèles. Le recollement de maillages apparaît ainsi comme une solution à un problème industriel : comment obtenir avec un temps de calcul raisonnable une solution la plus exacte possible ? A l'heure actuelle, ces deux points sont opposés. En effet, pour avoir une durée de résolution rapide, il faut avoir un nombre d'inconnues réduit. En revanche, pour avoir une solution précise, il faut augmenter le nombre d'inconnues, donc le temps de calcul. Le recollement de maillages apparaît alors comme une réponse possible à cette difficulté : le nombre d'inconnues va pouvoir être limité, et leur répartition optimisée, rendant la solution *a priori* satisfaisante. La question qui reste à se poser porte sur le temps de calcul : est-il réduit ?

Le recollement de maillages est ainsi un outil à double vocation. D'une part il doit permettre de compléter les codes de recherche en laboratoire, afin de permettre de nouveaux champs d'études. D'autre part, il doit permettre d'affiner encore les modèles existants, afin de réaliser des modèles toujours meilleurs.

Pour les techniques du recollement de maillage de nombreux travaux ont été réalisés en 2D et 3D. Dans le domaine de l'électromagnétisme les travaux menés portent principalement sur les multiplicateurs de Lagrange et la méthode Mortar [17, 20, 22, 10, 47]. Ces deux méthodes vont être développées en 3D avec des surfaces de recollement. Les différentes formulations, basées sur les formulations en potentiels, dans le cas de la magnéto-statique et de la magnéto-dynamique, vont être analysées. En outre, une importante partie de l'étude portera sur le conditionnement du système matriciel à résoudre.

Dans ce contexte, ce mémoire s'articulera autour de trois chapitres.

Le premier présentera le cadre mathématique de l'étude. Au cours de ce chapitre, les espaces fonctionnels continus seront présentés, ainsi que les équations de Maxwell. Suite à cela, le domaine discret sera introduit. Les éléments finis seront présentés, ainsi que les nouveaux espaces fonctionnels associés. Les équations seront alors discrétisées sur ces espaces, et les différents systèmes matriciels à résoudre seront donnés. Enfin, ce chapitre se terminera par une présentation de quelques méthodes de résolution des systèmes matriciels.

Le deuxième chapitre portera lui sur le recollement de maillages à proprement parlé. Quelques notions mathématiques seront tout d'abord introduites. Puis la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode Mortar seront abordées. Ces techniques de recollement seront présentées ainsi que quelques outils et nouvelles fonctions de discrétisation qui leur sont propres. Enfin, deux exemples seront traités pour valider ces deux approches.

Le dernier chapitre présentera quelques applications du recollement. Trois applications seront présentées : un circuit magnétique à entrefer, une plaque conductrice soumise à un champ, et une structure linéaire à griffes. L'objectif de cette partie est de vérifier les possibilités du recollement sur des exemples plus complexes que ceux traités auparavant.

# Chapitre 1 Les problèmes d'électromagnétisme en basse fréquence

## I. Introduction

Ce chapitre rappelle les équations fondamentales et les hypothèses d'étude des systèmes électrotechniques dans le cadre de la méthode des éléments finis. Ces derniers se composent de matériaux ferromagnétiques et/ou conducteurs, et de sources de champs (bobines ou aimants permanents). L'étude se limite à un domaine fini  $D$  composé d'un système électrotechnique quelconque et d'un volume d'air qui l'entoure. La frontière de  $D$  est notée  $\Gamma$  (Figure 1). Si le système électromagnétique présente des symétries, il est possible de réduire  $D$ . La partie du système où peuvent prendre naissance des courants induits sera notée  $D_c$  par la suite.

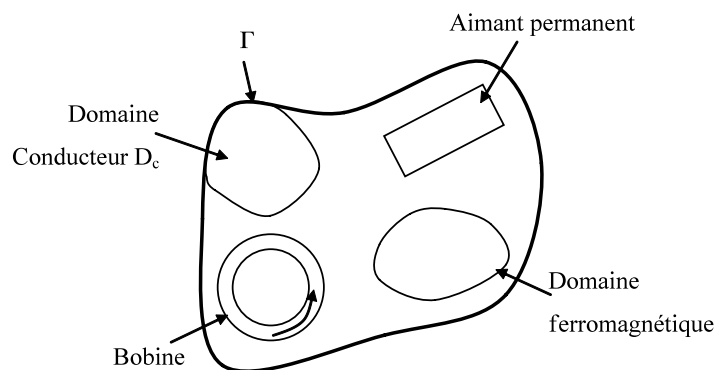


Figure 1 : Définition du domaine d'étude  $D$

L'objectif est de calculer la répartition spatiale et temporelle, dans un intervalle de temps  $[0, T]$ , des différents champs électromagnétiques (induction magnétique, champ

magnétique, courants induits). L'étude ne se rapporte qu'aux cas de la magnétodynamique et de la magnéto-statique.

Ce chapitre se décompose en 2 parties.

La première porte sur le domaine continu. Tout d'abord, les espaces fonctionnels utilisés y sont définis. Puis les équations de Maxwell sont rappelées, ainsi que les lois de comportement et conditions aux limites. Finalement, les formulations en potentiels permettant de simplifier les résolutions sont introduites.

La seconde décrit ces phénomènes dans le domaine discret. Tout d'abord les éléments de Whitney sont présentés [3-5], ainsi que les fonctions de formes associées [25, 31, 49, 54]. Ces éléments font apparaître des espaces fonctionnels discrets, correspondants aux espaces fonctionnels définis dans le domaine continu. Une fois ces nouveaux espaces introduits, les systèmes matriciels associés à la discrétisation des équations de Maxwell sont présentés. Quelques méthodes liées à la résolution de ces systèmes sont brièvement abordées.

## II. Le domaine continu

### A. Les espaces fonctionnels

#### 1. Définitions

Avant de rappeler les équations à résoudre, il est nécessaire de définir les différents espaces fonctionnels qui interviennent. Ces espaces introduits sur  $D$  accueillent les différents champs de l'électromagnétisme, et les équations de Maxwell.

Les premiers espaces à introduire sont les espaces de fonctions scalaires et vectorielles de carré sommable sur  $D$ . Ces espaces sont notés respectivement  $L^2(D)$  et  $\mathbf{L}^2(D)$ . Un produit scalaire est associé à chacun des espaces, tels que :

$$\forall (u, v) \in L^2(D), \text{ le produit scalaire est défini par : } \int_D u v \, d\tau \quad (1.1)$$

$$\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{L}^2(D), \text{ le produit scalaire est défini par : } \int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\tau \quad (1.2)$$

Les notations  $u$  et  $v$  représentent des champs scalaires et  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  des champs vectoriels.

A partir de ces définitions, plusieurs sous-espaces de  $L^2(D)$  et  $\mathbf{L}^2(D)$  peuvent être introduits, chacun relatif à un opérateur vectoriel, et associé au produit scalaire défini en (1.1) ou (1.2).

L'espace  $H_{\text{grad}, D}$  est associé à l'opérateur gradient :

$$H_{\text{grad}, D} = \{ \mathbf{u} \in L^2(D), \mathbf{grad} \mathbf{u} \in L^2(D) \} \quad (1.3)$$

L'opérateur rotationnel se rapporte à l'espace  $H_{\text{rot}, D}$  :

$$H_{\text{rot}, D} = \{ \mathbf{u} \in L^2(D), \mathbf{rot} \mathbf{u} \in L^2(D) \} \quad (1.4)$$

Et enfin,  $H_{\text{div}, D}$  est associé à l'opérateur divergence :

$$H_{\text{div}, D} = \{ \mathbf{u} \in L^2(D), \text{div} \mathbf{u} \in L^2(D) \} \quad (1.5)$$

Un dernier espace est introduit :  $\text{Im}(\text{div})$ , qui rassemble l'ensemble des fonctions scalaires images par l'opérateur divergence des fonctions vectorielles de  $H_{\text{div}, D}$  :

$$\text{Im}(\text{div}) = \{ u \in L^2(D), \exists \mathbf{v} \in H_{\text{div}, D}, \text{div} \mathbf{v} = u \} \quad (1.6)$$

Les fonctions scalaires seront, d'une façon générale, définies dans l'espace  $H_{\text{grad}, D}$ . Les champs de vecteur dérivant d'un gradient seront définies dans  $H_{\text{rot}, D}$ , ceux dérivants d'un rotationnel dans  $H_{\text{div}, D}$ .

## 2. Propriétés

Dans le cas d'un domaine  $D$  contractile, il est possible d'écrire [5] :

$$\text{Ker}(\mathbf{rot} H_{\text{rot}, D}) = \text{Im}(\mathbf{grad} H_{\text{grad}, D}) \quad (1.7)$$

$$\text{Ker}(\text{div} H_{\text{div}, D}) = \text{Im}(\mathbf{rot} H_{\text{rot}, D}) \quad (1.8)$$

avec  $\text{Ker}(f)$  représentant le noyau de l'application  $f$ , et  $\text{Im}(f)$  représentant son image. Ces relations permettent d'établir un lien entre les différents espaces fonctionnels. En effet, elles montrent que :

$$\forall \mathbf{u} \in H_{\text{rot}, D}, \mathbf{rot} \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in H_{\text{grad}, D}, \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad (1.9)$$

$$\forall \mathbf{u} \in H_{\text{div}, D}, \text{div} \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in H_{\text{rot}, D}, \mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{u} \quad (1.10)$$

Ce qui signifie que tout élément de  $H_{\text{rot}, D}$  dont le rotationnel est nul a un antécédent par le gradient dans  $H_{\text{grad}, D}$ . Et de même, tout élément de  $H_{\text{div}, D}$  dont la divergence est nulle a un antécédent par le rotationnel dans  $H_{\text{rot}, D}$ . Dans le cas d'un domaine non simplement connexe, les égalités entre les noyaux et images ne sont plus vraies. Elles deviennent :

$$\text{Ker}(\mathbf{rot} H_{\text{rot}, D}) \subset \text{Im}(\mathbf{grad} H_{\text{grad}, D}) \quad (1.11)$$

$$\text{Ker}(\text{div} H_{\text{div}, D}) \subset \text{Im}(\mathbf{rot} H_{\text{rot}, D}) \quad (1.12)$$



Ces relations peuvent être représentées grâce au complexe de De Rham [49]. Il est représenté Figure 2 dans le cas d'un domaine  $D$  contractile, qui sera le seul cas étudié dans toute la suite.

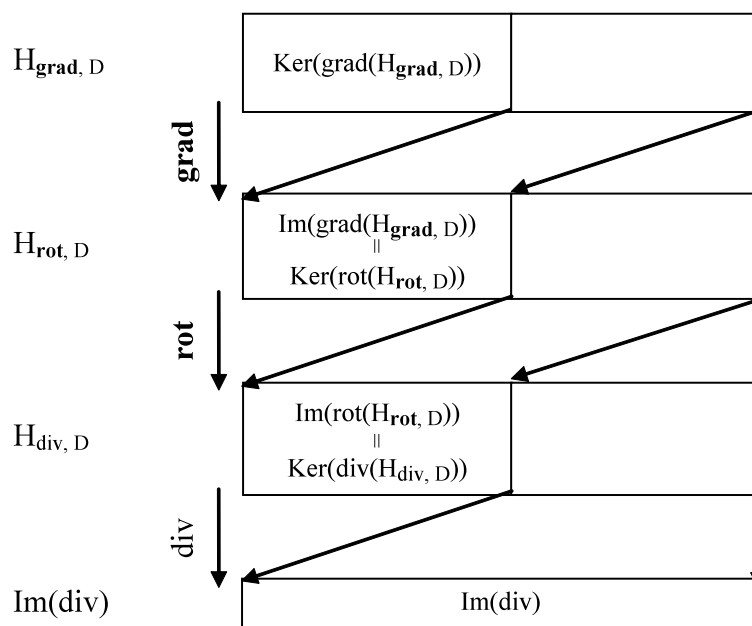


Figure 2 : Complexe de De Rham,  $D$  étant contractile [57]

## B. Les équations de Maxwell en basse fréquence

Dans le domaine d'étude  $D$ , les 4 équations de Maxwell permettent de déterminer la répartition spatiale et temporelle des différents champs de l'électromagnétisme :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.13)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.14)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.15)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1.16)$$

Le Tableau 1 donne les différentes définitions des champs introduits dans ces équations.

| Notation     | Nom du champ                | Unité            | Espace fonctionnel associé |
|--------------|-----------------------------|------------------|----------------------------|
| $\mathbf{H}$ | Champ magnétique            | A/m              | $H_{\text{rot}, D}$        |
| $\mathbf{J}$ | Densité de courant          | A/m <sup>2</sup> | $H_{\text{div}, D}$        |
| $\mathbf{D}$ | Induction électrique        | C/m <sup>2</sup> | $H_{\text{div}, D}$        |
| $\mathbf{E}$ | Champ électrique            | V/m              | $H_{\text{rot}, D}$        |
| $\mathbf{B}$ | Induction magnétique        | T                | $H_{\text{div}, D}$        |
| $\rho$       | Densité volumique de charge | C/m <sup>3</sup> | $\text{Im}(\text{div})$    |

Tableau 1 : Les champs de l'électromagnétisme

Les équations (1.13) et (1.14) montrent les couplages entre les différents champs et les inductions. Dans le cadre de l'ARQS (Approximation des Régimes Quasi Stationnaires), généralement vérifié en électrotechnique, le terme  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  est négligé devant  $\mathbf{J}$ . L'équation (1.13) se réécrit alors sous la forme :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.17)$$

Cette équation permet en outre d'ajouter la conservation de la densité de courants :

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (1.18)$$

### C. Lois de comportement

Les lois de comportement caractérisent les différents matériaux composant le domaine d'étude. Elles permettent de lier entre eux d'une part le champ électrique à la densité de courants, et d'autre part l'induction au champ magnétique.

Ainsi, dans tous les matériaux conducteurs, le champ électrique et la densité de courant sont liés par la relation :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.19)$$

avec  $\sigma$  ( $\Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ ) la conductivité du milieu considéré.

En négligeant les effets d'hystérésis, la relation entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  peut s'écrire :

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{H}) \quad (1.20)$$

Dans le cas d'un matériau ferromagnétique, il est possible d'écrire :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r(\mathbf{H}) \mathbf{H} \quad (1.21)$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité du vide et  $\mu_r$  la perméabilité relative du matériau considéré. Dans le cas d'un aimant permanent, l'équation (1.20) devient :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r(\mathbf{H}) \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (1.22)$$

où  $\mathbf{B}_r$  représente l'induction rémanente de l'aimant.

Ces différentes caractéristiques de matériau ( $\mu_r$ ,  $\sigma$ ,  $\mathbf{B}_r$ ) dépendent de nombreux paramètres, comme la température, ou les contraintes mécaniques. Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, le phénomène d'hystérésis peut aussi être pris en compte. Néanmoins, dans la suite de l'étude, ces différents paramètres seront pris constants, l'effet d'hystérésis et la non linéarité seront négligés.

Le comportement des matériaux ferromagnétiques sera donc considéré comme linéaire :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \text{ dans les aimants} \quad (1.23)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \text{ dans les matériaux ferromagnétiques} \quad (1.24)$$

## D. Conditions aux limites

Pour que le système soit complet et afin d'assurer l'unicité de la solution, des conditions aux limites doivent être imposées.

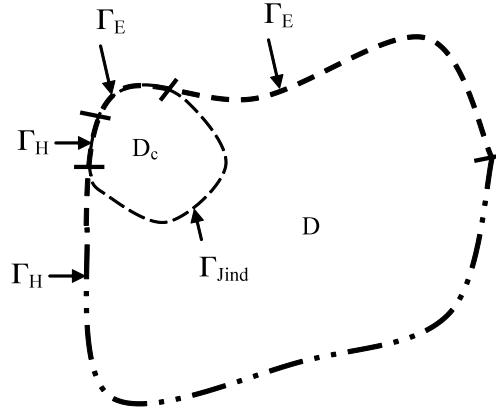


Figure 3 : Les frontières du système d'étude

La frontière  $\Gamma$  est divisée en deux parties complémentaires, notées  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_E$ . Ces 2 parties vérifient  $\Gamma_H \cap \Gamma_E = \emptyset$  et  $\Gamma_H \cup \Gamma_E = \Gamma$  (Figure 3). Elles permettent d'imposer des conditions aux limites différentes. La condition sur  $\Gamma_E$  s'écrit :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_E} = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

L'équation (1.25) représente une condition aux limites de type Neumann sur  $\mathbf{E}$ . L'équation (1.14), permet d'écrire, à une constante près par rapport au temps :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_E} = 0 \quad (1.26)$$

cette équation représente une condition aux limites de type Dirichlet sur  $\mathbf{B}$ .

Sur  $\Gamma_H$ , la contrainte s'applique à  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = \mathbf{0} \quad (1.27)$$

Cette équation, compte tenu de (1.17), permet de vérifier également :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = 0 \quad (1.28)$$

Ces conditions aux limites permettent de définir des sous-espaces des espaces fonctionnels  $H_{\text{grad},D}$ ,  $H_{\text{rot},D}$ ,  $H_{\text{div},D}$ . Ainsi, deux sous-espaces de  $H_{\text{grad},D}$  peuvent être introduits :

$$H_{\text{grad},E} = \left\{ \mathbf{u} \in H_{\text{grad},D}, \mathbf{u}|_{\Gamma_E} = \mathbf{0} \right\} \quad (1.29)$$

$$H_{\text{grad},H} = \left\{ \mathbf{u} \in H_{\text{grad},D}, \mathbf{u}|_{\Gamma_H} = \mathbf{0} \right\} \quad (1.30)$$

chacun prenant en compte l'une ou l'autre condition. De même pour  $H_{\text{rot},D}$  :

$$H_{\text{rot},E} = \left\{ \mathbf{u} \in H_{\text{rot},D}, \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_E} = \mathbf{0} \right\} \quad (1.31)$$

$$H_{\text{rot},H} = \left\{ \mathbf{u} \in H_{\text{rot},D}, \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = \mathbf{0} \right\} \quad (1.32)$$

Et pour  $H_{\text{div},D}$  :

$$H_{\text{div},E} = \left\{ \mathbf{u} \in H_{\text{div},D}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_E} = 0 \right\} \quad (1.33)$$

$$H_{\text{div},H} = \left\{ \mathbf{u} \in H_{\text{div},D}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_H} = 0 \right\} \quad (1.34)$$

Ces différents sous-espaces permettent de définir plus précisément les espaces d'expressions des différentes grandeurs utilisées. Ainsi,  $\mathbf{E}$  s'exprime dans  $H_{\text{rot},E}$ ,  $\mathbf{B}$  dans  $H_{\text{div},E}$ ,  $\mathbf{H}$  dans  $H_{\text{rot},H}$ ,  $\mathbf{J}$  dans  $H_{\text{div},H}$ .

Pour finir, il est possible de définir à l'intérieur de  $D$  une frontière séparant  $D_c$ , où prennent naissance des courants induits, du reste du domaine d'étude. Cette frontière est notée  $\Gamma_{\text{Jind}}$  et permet d'imposer que les courants induits  $\mathbf{J}_{\text{ind}}$  soient tangents à cette surface :

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{\text{Jind}}} = 0 \quad (1.35)$$

## E. Diagramme de Tonti

Il est nécessaire d'introduire, pour compléter ce qui précède, les identités de Green. Elles font apparaître un lien de dualité entre les différents opérateurs vectoriels :

$$\forall \mathbf{u} \in H_{\text{grad},D}, \forall \mathbf{v} \in H_{\text{div},D}, \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} \, dD = - \int_D \text{div} \mathbf{v} \mathbf{u} \, dD + \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} \, ds \quad (1.36)$$

$$\forall \mathbf{u} \in H_{\text{rot},D}, \forall \mathbf{v} \in H_{\text{rot},D}, \int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dD = \int_D \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, dD + \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \quad (1.37)$$

Il reste cependant les intégrales de surface relatives aux conditions aux limites de  $D$ . Elles disparaissent en choisissant convenablement les espaces d'expression de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  :

$$\left. \begin{array}{l} \forall \mathbf{u} \in H_{\text{grad},E}, \forall \mathbf{v} \in H_{\text{div},H} \\ \forall \mathbf{u} \in H_{\text{grad},H}, \forall \mathbf{v} \in H_{\text{div},E} \end{array} \right\}, \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{u} \, dD = - \int_D \text{div} \mathbf{v} \mathbf{u} \, dD \quad (1.38)$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall \mathbf{u} \in H_{\text{rot},H}, \forall \mathbf{v} \in H_{\text{rot},E} \\ \forall \mathbf{u} \in H_{\text{rot},E}, \forall \mathbf{v} \in H_{\text{rot},H} \end{array} \right\}, \int_D \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} \, dD = \int_D \mathbf{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, dD \quad (1.39)$$

Ainsi l'opérateur dual du gradient est l'opposé de la divergence, et le rotationnel est autoadjoint.

Une fois ces espaces et opérateurs définis, les relations peuvent se représenter graphiquement au moyen du diagramme de Tonti (Figure 4) [19]

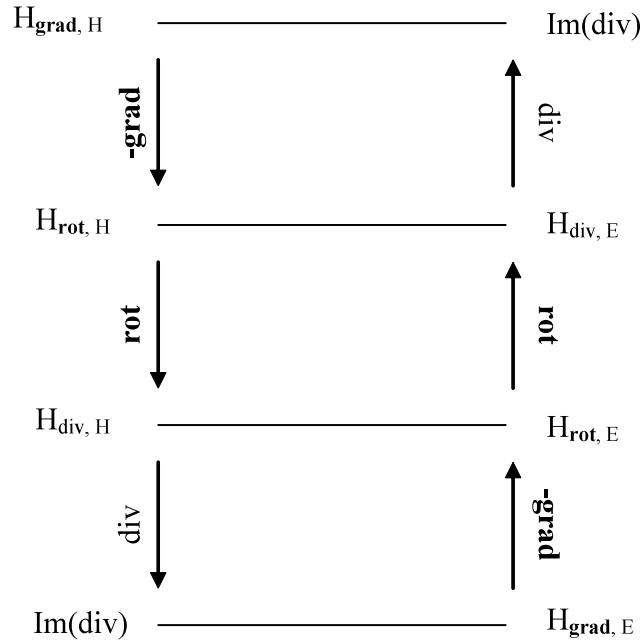


Figure 4 : Diagramme de Tonti

Ce diagramme peut s'appliquer plus concrètement aux champs de l'électromagnétisme (Figure 5). Il faut cependant ajouter une dimension au diagramme précédent pour faire apparaître la dérivée temporelle, laquelle intervient dans les équations de Maxwell.

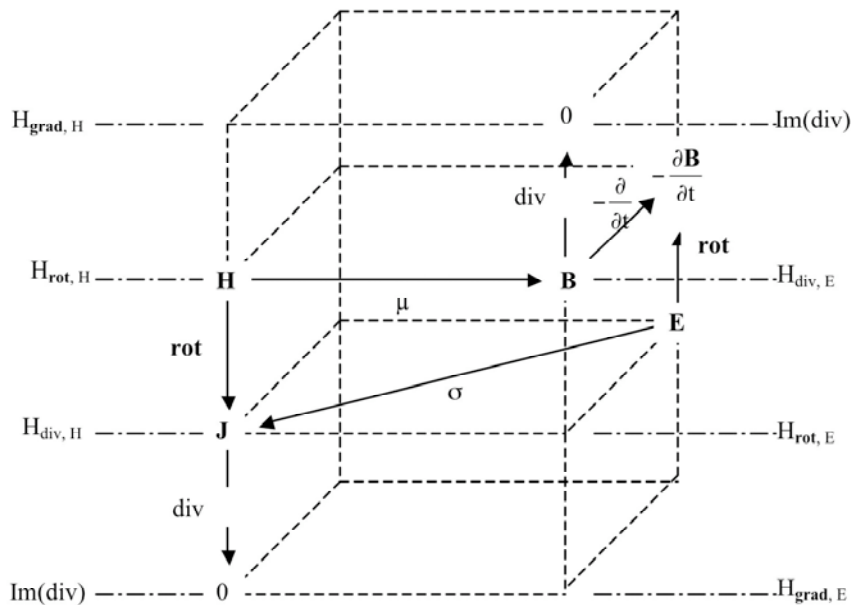


Figure 5 : Diagramme de Tonti appliqué à l'électrotechnique [3, 4, 38]

## F. Formulation en potentiels

Sur la base des différents outils mis en place, il est possible de résoudre les équations de Maxwell, en considérant les différents champs de l'électromagnétisme ( $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{J}$ ) comme inconnus [6, 7, 38, 49, 59]. Néanmoins il est en général préférable d'exprimer ces champs en fonction de potentiels. Ces différentes formulations en potentiels, utilisées en électromagnétisme, sont présentées ci-dessous. Tout d'abord le champ source créée par un inducteur bobiné, ensuite les potentiels utilisés en magnétostatique, et enfin ceux de la magnétodynamique.

### 1. Le champ source $\mathbf{H}_s$ associé à un bobinage

Dans le cas d'un problème d'électrotechnique, le champ source est souvent créé par un bobinage multifilamentaire, parcouru par un courant. Dans ce cas, ce dernier est représenté par un domaine parcouru par une densité de courants  $\mathbf{J}_s$ , supposée uniforme dans la section du bobinage, orthogonal à celle-ci, et à divergence nulle. Le reste des courants existant dans le système représente les courants induits  $\mathbf{J}_{ind}$ , et ne concerne que  $D_c$ . Ainsi la densité de courant dans  $D$  s'écrit :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{ind} \quad (1.40)$$

Le champ  $\mathbf{J}_s$ , étant à divergence nulle par définition, un champ de vecteurs  $\mathbf{H}_s$  peut être introduit (1.10), appelé champ magnétique source, tel que :

$$\mathbf{J}_s = \text{rot } \mathbf{H}_s \quad (1.41)$$

$\mathbf{H}_s$  vérifie la condition définie en (1.27), et peut exister dans tout le domaine d'étude  $D$ . Par définition,  $\mathbf{H}_s$  appartient à  $H_{\text{rot}, H}$ . Par ailleurs, dans le cas général, il existe plusieurs champs vérifiant l'équation (1.41). Cette définition permet de réécrire l'équation (1.17) dans  $D$  :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{ind} + \text{rot } \mathbf{H}_s \quad (1.42)$$

et dans ce cas :

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.43)$$

Dans la suite nous supposerons que  $\mathbf{H}_s$  est nul dans le domaine  $D_c$ , où des courants induits prennent naissance.

## 2. Les formulations magnétostatiques

Dans le cas où les courants induits ne sont pas pris en compte dans le domaine d'étude  $D$ , le problème est dit magnétostatique. Par ailleurs, dans ce cas, le champ  $\mathbf{E}$  n'est plus défini, la frontière  $\Gamma_E$  est alors notée  $\Gamma_B$ , et seule la condition (1.26) est prise en compte. Deux formulations peuvent être introduites : en potentiel scalaire magnétique  $\Omega$  et en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ .

Ces hypothèses permettent de réécrire les équations à résoudre :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s, \text{ avec } \mathbf{H} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_H} = 0 \quad (1.44)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{B} = 0, \text{ avec } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_B} = 0 \quad (1.45)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.46)$$

### Formulation en potentiel scalaire magnétique $\Omega$ :

En tenant compte de la définition de  $\mathbf{J}_s$  (1.41), l'équation (1.44) peut se réécrire :

$$\mathbf{rot} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_s) = \mathbf{0} \quad (1.47)$$

L'équation (1.10) permet de définir le potentiel scalaire magnétique  $\Omega$  :

$$-\mathbf{grad} \Omega = \mathbf{H} - \mathbf{H}_s \quad (1.48)$$

En tenant compte de la loi de comportement (1.46), et de la définition du potentiel (1.48), l'équation (1.45) s'écrit :

$$\mathbf{div} (\mu (-\mathbf{grad} \Omega + \mathbf{H}_s)) = 0 \quad (1.49)$$

Dans ces conditions, imposer  $\mathbf{H} \times \mathbf{n}_{|\Gamma_H} = 0$  revient à imposer que  $\Omega = 0$  sur toute la surface  $\Gamma_H$ , car par définition  $\mathbf{H}_s$  vérifie déjà cette hypothèse.  $\Omega$  appartient donc à l'espace  $H_{\mathbf{grad}, H}$ .

### Formulation en potentiel vecteur magnétique $\mathbf{A}$ :

L'équation (1.45) permet d'introduire directement le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , à partir de (1.8) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A} \quad (1.50)$$

L'équation à résoudre s'obtient en tenant compte de cette définition dans (1.44) :

$$\mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s \quad (1.51)$$

Avec ces définitions, imposer  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_B} = 0$  revient à imposer que  $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_B$ . Le potentiel  $\mathbf{A}$  appartient donc à  $H_{\text{rot}, B}$  (équivalent à  $H_{\text{rot}, E}$ ).

### 3. Les formulations magnétodynamiques

Dans le cadre de la magnétodynamique, deux formulations en potentiels peuvent être introduites. Ces formulations ne sont valables que dans le domaine  $D_c$ , où des courants induits peuvent exister. Ce domaine sera supposé contractile, de frontière  $\Gamma_c$  décomposée en trois parties :  $\Gamma_E$  (où les conditions (1.25) et (1.26) sont imposées),  $\Gamma_H$  (où les conditions (1.27) et (1.28) sont imposées) et  $\Gamma_{\text{Jind}}$  (où seule la condition (1.35) est imposée), telles que  $\Gamma_{\text{Jind}} \cap \Gamma_E = \emptyset$ ,  $\Gamma_{\text{Jind}} \cap \Gamma_H = \emptyset$ ,  $\Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset$ , et  $\Gamma_{\text{Jind}} \cup \Gamma_E \cup \Gamma_H = \Gamma_c$ , avec  $\Gamma_{\text{Jind}}$  simplement connexe (voir Figure 3). Ces formulations demandent la résolution des équations (1.14), (1.15), (1.17) et (1.18) couplées aux lois de comportement (1.19) et (1.23) dans  $D_c$ .

#### a. Formulation magnétique T-Ω

Comme le terme  $\mathbf{J}_{\text{ind}}$  est à divergence nulle, il est possible d'écrire grâce à (1.10) :

$$\text{rot } \mathbf{T} = \mathbf{J}_{\text{ind}} \quad (1.52)$$

L'équation (1.52) permet d'introduire le potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$ . Ce potentiel  $\mathbf{T}$  appartient au sous-espace  $H_{\text{rot}, H}$ . En outre, il est nul en dehors de  $D_c$ . En imposant la condition  $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur  $\Gamma_{\text{Jind}}$ ,  $\mathbf{J}_{\text{ind}}$  vérifie (1.35) (Figure 3). L'équation (1.17) peut donc s'écrire, avec les différentes définitions, dans tout le domaine  $D$  :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{T} + \text{rot } \mathbf{H}_s \quad (1.53)$$

si l'étude est limitée à  $D_c$ , alors elle s'écrit :

$$\text{rot } \mathbf{H}|_{D_c} = \text{rot } \mathbf{T} \quad (1.54)$$

et dans le reste du domaine  $D$  :

$$\text{rot } \mathbf{H}|_{(D-D_c)} = \text{rot } \mathbf{H}_s \quad (1.55)$$

car par définition,  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{H}_s$  ne sont définis respectivement que dans  $D_c$  et  $(D-D_c)$ .

L'équation (1.53) montre que  $\text{rot } (\mathbf{H} - \mathbf{H}_s - \mathbf{T}) = \mathbf{0}$ . Un potentiel scalaire magnétique  $\Omega$  peut être introduit (1.9). Dans ces conditions,  $\mathbf{H}$  s'exprimera dans tout le domaine  $D$ , à partir des différentes grandeurs définies, par :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \text{grad } \Omega + \mathbf{H}_s \quad (1.56)$$



Dès lors, imposer  $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur la frontière  $\Gamma_H$  revient à imposer d'une part  $\mathbf{T} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  (ce qui est le cas par définition de  $\mathbf{T}$ ),  $\mathbf{H}_s \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  (ce qui est le cas par définition de  $\mathbf{H}_s$ ), et  $\Omega = 0$ . Le potentiel  $\Omega$  appartient donc à  $H_{\text{grad},H}$  comme dans le cas de la formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ .

En utilisant cette définition de  $\mathbf{H}$  dans (1.14) et (1.15), il apparaît que :

$$\mathbf{rot} \left( \frac{1}{\sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{T}) \right) + \frac{\partial \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega)}{\partial t} = 0 \text{ dans } D_c \quad (1.57)$$

$$\text{div} (\mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega + \mathbf{H}_s)) = 0 \text{ dans } D \quad (1.58)$$

Ces équations admettent une infinité de solutions. Afin d'en assurer l'unicité, il est possible d'imposer une jauge au potentiel vecteur  $\mathbf{T}$ , par exemple  $\text{div}(\mathbf{T}) = 0$ , ou une condition de type  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{W} = 0$ , avec  $\mathbf{W}$  un champ de vecteur dont les lignes ne forment pas de boucles, et relie tous les points du domaine [1, 40].

### b. Formulation électrique $\mathbf{A}$ - $\varphi$

La définition du potentiel  $\mathbf{A}$ , ainsi que l'espace auquel il appartient est le même en magnétostatique et en magnétodynamique. Ainsi,  $\mathbf{A}$  se définit par l'équation (1.50), Avec la condition  $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  sur la frontière  $\Gamma_E$ . Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  appartient donc à  $H_{\text{rot},E}$ . Cette définition de  $\mathbf{A}$  peut être introduite dans (1.14) :

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.59)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\mathbf{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (1.60)$$

Le champ vectoriel  $\left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$  est à rotationnel nul. Il peut donc s'écrire comme dérivant du gradient d'une fonction scalaire  $\varphi$  (1.9). Il est alors possible d'exprimer directement  $\mathbf{E}$  en fonction de  $\varphi$  et de  $\mathbf{A}$  :

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.61)$$

Dans ces conditions, imposer  $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  revient à imposer d'une part  $\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , et d'autre part  $\varphi = 0$ . Nous avons donc  $\varphi$  défini dans le sous-espace  $H_{\text{grad},E}$ .

Ces potentiels peuvent être utilisés dans les équations (1.17) et (1.18) :

$$\mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) + \sigma \left( \mathbf{grad} \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{J}_s \text{ dans } D \quad (1.62)$$

$$\mathbf{div} \left( \sigma \left( \mathbf{grad} \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right) = 0 \text{ dans } D_c \quad (1.63)$$

Ici encore, différentes jauges peuvent être introduites afin d'assurer l'unicité de la solution, comme par exemple la jauge de Coulomb, ou la condition de type  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{W} = 0$ , comme en  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$  [1].

### III. Une méthode de résolution : les éléments finis

Dans la partie précédente, les équations à résoudre dans le cas des problèmes d'électromagnétisme ont été définies dans le domaine continu. Celles-ci peuvent parfois être résolues de façon analytique dans des cas simples. Mais généralement, la complexité du problème rend difficile une telle résolution. Discrétiser les équations en utilisant les éléments de Whitney permet d'élaborer des solutions approchées de la solution continue [3, 25, 49, 54, 57].

#### A. Les éléments de Whitney

Dans le cas des éléments finis, le volume du domaine  $D$  est décomposé en un nombre fini de petits éléments. Lorsque l'espace est ainsi discrétisé, divers objets géométriques apparaissent (Figure 6). Les éléments constituant le maillage peuvent être de différents types (tétraèdres, hexaèdres...) [25]. Seul le cas des tétraèdres sera présenté dans toute l'étude de ce mémoire.

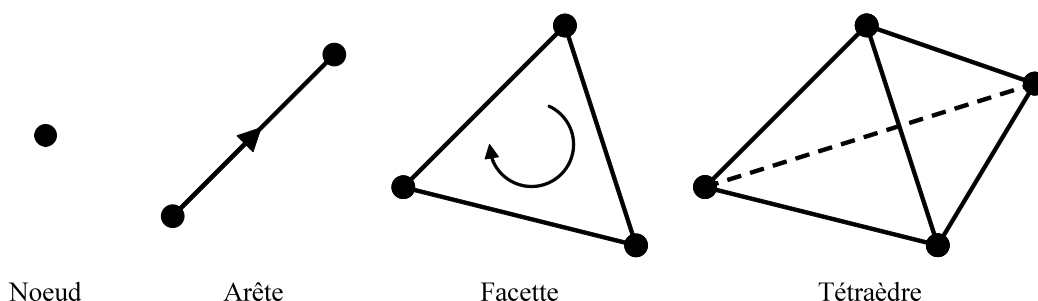


Figure 6 : Les éléments géométriques d'un maillage tétraédrique

L'ensemble des nœuds, arêtes, facettes, et tétraèdres forme le maillage. Chacun de ces objets est défini par une fonction de forme, et permet de discrétiser l'un des sous-espaces du domaine continu décrit précédemment. Les différentes fonctions de formes sont liées les unes aux autres.

Ainsi, la première fonction de forme à introduire est celle associée aux nœuds. Cette fonction est considérée comme linéaire entre un nœud et ses plus proches voisins, passant de 1 au nœud considéré à 0 sur tous les autres. Pour un nœud  $i$ , la fonction de forme nodale  $w_{ni}$  s'exprime au nœud  $j$  par :

$$w_{ni}(n_j) = \delta_{i,j} \quad (1.64)$$

où  $\delta_{i,j}$  représente le symbole de Kronecker qui vaut 1 si  $i = j$ , et 0 si  $i \neq j$ . L'ensemble de ces fonctions permet de définir l'espace  $W^0$ , espace dans lequel sont discrétisées les grandeurs scalaires. Cet espace est inclus dans  $H_{\text{grad}, D}$ .

De par la définition de  $W^0$ , une fonction  $u$  s'exprime à partir des fonctions nodales :

$$u = [W_n][U] = \sum_{k=1}^{N_n} w_{nk} u_k \quad (1.65)$$

avec  $N_n$  le nombre total de nœuds du maillage de  $D$  et  $u_k$  la valeur de  $u$  au nœud  $k$ . Le vecteur  $[U]$ , ayant  $u_k$  comme  $k^{\text{ième}}$  composante est donc le vecteur représentant  $u$  dans la base des fonctions  $w_n$ , tandis que  $[W_n]$  est un vecteur reprenant l'ensemble des fonctions  $w_n$ .

La fonction de forme liée aux arêtes  $w_{ak}$  se construit à partir des fonctions de formes liées aux nœuds. L'arête  $k$  est définie par les nœuds  $i$  et  $j$ , et par un sens d'orientation. Ainsi, la fonction  $w_{ak}$  associée à l'arête  $k$  est donnée par :

$$w_{ak} = w_{ni} \mathbf{grad} w_{nj} - w_{nj} \mathbf{grad} w_{ni} \quad (1.66)$$

Ces fonctions discrètes engendrent l'espace  $W^1$ , dans lequel seront discrétisées les grandeurs relatives aux arêtes, et correspondant à  $H_{\text{rot}, D}$ . Par ailleurs la circulation de  $w_{ak}$  vaut 1 sur l'arête  $k$ , et 0 sur toutes les autres arêtes. La fonction de forme d'arête est continue sur chaque élément et sa composante tangentielle est continue sur les facettes du maillage.

Une fonction  $v$  de  $W^1$  se construit sur les éléments d'arêtes selon :

$$v = [W_a][V] = \sum_{k=1}^{N_a} w_{ak} V_k \quad (1.67)$$

avec  $N_a$  le nombre d'arêtes du maillage, et  $v_k$  la circulation de  $\mathbf{v}$  le long de l'arête  $k$ . Le vecteur  $[V]$ , ayant  $v_k$  comme  $k^{\text{ième}}$  composante est donc le vecteur représentant  $\mathbf{v}$  dans la base des  $\mathbf{w}_a$ , qui forment les composantes de  $[W_a]$ .

La fonction de facette  $\mathbf{w}_{fm}$ , associée à la facette  $m$ , dont les sommets sont les nœuds  $i, j$  et  $k$ , se définit par :

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{fm} = & 2 w_{ni} (\mathbf{grad} w_{nj} \times \mathbf{grad} w_{nk}) \\ & + 2 w_{nj} (\mathbf{grad} w_{nk} \times \mathbf{grad} w_{ni}) \\ & + 2 w_{nk} (\mathbf{grad} w_{ni} \times \mathbf{grad} w_{nj}) \end{aligned} \quad (1.68)$$

Ces fonctions génèrent l'espace  $W^2$ , qui correspond aux grandeurs discrétisées sur les facettes, associé à l'espace  $H_{\text{div}, D}$ . La fonction  $\mathbf{w}_{fm}$  a un flux unitaire au travers de la facette  $m$ , et un flux nul à travers les autres facettes du système. Cette fonction est aussi continue dans chaque élément du maillage, et la composante normale est conservée à travers chaque facette du maillage.

Une fonction  $\mathbf{u}$  de  $W^2$  peut être discrétisée par une somme sur les  $N_f$  facettes :

$$\mathbf{u} = [W_f] [U] = \sum_{k=1}^{N_f} \mathbf{w}_{fk} u_k \quad (1.69)$$

avec  $u_k$  les flux de  $\mathbf{u}$  au travers de la facette  $k$ . Le vecteur  $[U]$ , ayant  $u_k$  comme  $k^{\text{ième}}$  composante est donc le vecteur représentant  $\mathbf{u}$  dans la base des  $\mathbf{w}_f$ , eux-mêmes rassemblés dans le vecteur  $[W_f]$ .

Enfin, il reste les fonctions élémentaires, associées à chaque élément  $i$  du maillage :

$$w_{ei} = \frac{1}{\text{vol}(e_i)} \text{sur } e_i, \text{ et } 0 \text{ sur les autres éléments} \quad (1.70)$$

avec  $\text{vol}(e_i)$  le volume de l'élément  $i$ . Ces fonctions génèrent l'espace  $W^3$ , lequel correspond à  $\text{Im}(\text{div})$ .

Une fonction  $v$  de  $W^3$  peut être exprimée par une somme sur les  $N_e$  éléments :

$$v = [W_e] [V] = \sum_{k=1}^{N_e} w_{ek} v_k \quad (1.71)$$

avec  $v_k$  l'intégrale volumique de  $v$  dans l'élément  $k$ . Le vecteur  $[V]$ , ayant  $v_k$  comme  $k^{\text{ième}}$  composante est donc le vecteur représentant  $v$  dans la base des  $w_e$ , représentée par  $[W_e]$ .

Les différents espaces  $W^0, W^1, W^2$  permettent de définir des sous espaces  $W_E^0, W_H^0, W_E^1, W_H^1, W_E^2, W_H^2$  de la même façon que dans le domaine continu [3]. Dans le cas des éléments finis, les conditions aux limites signifient que les valeurs aux nœuds, arêtes, et facettes au niveau des frontières  $\Gamma_E$  ou  $\Gamma_H$  sont imposées.

## B. Discrétisation des équations

Les outils présentés ci-dessus peuvent être utilisés pour exprimer dans le domaine discret les équations de Maxwell définies auparavant dans le domaine continu. Dans la suite du propos, chaque formulation sera discrétisée. Les formulations magnétostatiques seront d'abord développées, puis les formulations magnétodynamiques.

### 1. Formulation scalaire $\Omega$

Dans le cas de la magnétostatique, il est possible d'utiliser les formulations  $\mathbf{A}$  et  $\Omega$ . En formulation en potentiel scalaire magnétique, l'équation à résoudre correspond à (1.49). En premier lieu, la méthode des résidus pondérés est utilisée :

$$\forall \psi_\Omega \in L^2(D), \int_D \psi_\Omega \operatorname{div} (\mu (-\mathbf{grad} \Omega + \mathbf{H}_s)) dD = 0 \quad (1.72)$$

avec  $\psi_\Omega$  une fonction test. La formule de Green (1.36) peut être appliquée à l'équation (1.72) :

$$\int_D \mu \mathbf{grad} \psi_\Omega \cdot \mathbf{grad} \Omega dD + \int_\Gamma \mu ((\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega) \cdot \mathbf{n}) \psi_\Omega dD = \int_D \mu \mathbf{grad} \psi_\Omega \cdot \mathbf{H}_s dD \quad (1.73)$$

La méthode de Galerkin peut être utilisée. Cette méthode consiste à définir comme fonction test  $\psi_\Omega$  une fonction dont les propriétés sont les mêmes que  $\Omega$ , grandeur à laquelle cette fonction test se rapporte. Ainsi,  $\psi_\Omega$  est choisie comme appartenant à  $H_{\mathbf{grad}, H}$ .

Or, le terme surfacique se décompose selon :

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \mu ((\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega) \cdot \mathbf{n}) \psi_\Omega dD = \\ \int_{\Gamma_B} \mu ((\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega) \cdot \mathbf{n}) \psi_\Omega dD + \int_{\Gamma_H} \mu ((\mathbf{H}_s - \mathbf{grad} \Omega) \cdot \mathbf{n}) \psi_\Omega dD \end{aligned} \quad (1.74)$$

Par définition de  $\psi_\Omega$ , l'intégration sur  $\Gamma_H$  s'annule. L'intégrale sur  $\Gamma_B$  ( $\mathbf{E}$  n'étant plus défini,  $\Gamma_E$  devient  $\Gamma_B$ ) est considérée nulle, afin d'imposer au sens faible la condition (1.26). Le terme surfacique est donc considéré nul dans (1.73).

Il est alors possible de discrétiser les différents potentiels apparaissant dans (1.73).  $\Omega$  se discrétise sur  $W_H^0$ ,  $\mathbf{H}_s$ , défini sur  $H_{\text{rot},H}$ , se discrétise sur  $W_H^1$ . Dès lors, les potentiels s'expriment comme suit, dans le domaine discret :

$$\Omega = \sum_{k=1}^{N_n} w_{nk} \Omega_k \quad (1.75)$$

$$\mathbf{H}_s = \sum_{j=1}^{N_a} \mathbf{w}_{aj} H_{sj} \quad (1.76)$$

L'équation (1.73) peut alors s'écrire :

$$\sum_{k=1}^{N_n} \int_D \mu \Omega_k \mathbf{grad} w_{nk} \cdot \mathbf{grad} \psi_\Omega \, dD = \sum_{j=1}^{N_a} \int_D \mu H_{sj} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{grad} \psi_\Omega \, dD \quad (1.77)$$

La fonction test  $\psi_\Omega$  est alors choisie comme parcourant l'ensemble des fonctions de forme nodales, car elle se rapporte à  $\Omega$ , discrétisé dans  $W_H^0$  (méthode de Galerkin). Ainsi, l'équation (1.77) devient :

$$\forall m \in [1; N_n] \sum_{k=1}^{N_n} \Omega_k \int_D \mu \mathbf{grad} w_{nk} \cdot \mathbf{grad} w_{nm} \, dD = \sum_{j=1}^{N_a} H_{sj} \int_D \mu \mathbf{grad} w_{nm} \cdot \mathbf{w}_{aj} \, dD \quad (1.78)$$

Equation qui peut être mise sous la forme matricielle suivante :

$$[G^\mu] [\Omega] = [F_H] \quad (1.79)$$

avec  $[\Omega]$  le vecteur des valeurs du potentiel scalaire à chaque nœud du maillage, et  $[F_H]$  le vecteur des valeurs du champ source, défini par :

$$[F_H]_i = f_{Hi} = \sum_{j=1}^{N_a} H_{sj} \int_D \mu \mathbf{grad} w_{ni} \cdot \mathbf{w}_{aj} \, dD \quad (1.80)$$

Les termes de la matrice  $[G^\mu]$  s'expriment par :

$$[G^\mu]_{ij} = g_{ij}^\mu = \int_D \mu \mathbf{grad} w_{ni} \cdot \mathbf{grad} w_{nj} \, dD \quad (1.81)$$

## 2. Formulation vectorielle A

Dans le cas du potentiel vecteur magnétique, L'équation à résoudre est l'équation (1.51). En y appliquant la méthode des résidus pondérés, tout comme pour la formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , elle s'écrit :

$$\forall \psi_A \in L^2(D), \int_D \psi_A \cdot \left( \mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) - \mathbf{J}_s \right) dD = 0 \quad (1.82)$$

En appliquant l'équation de Green (1.37) à (1.82), l'équation se réécrit :

$$\int_D \mathbf{rot} \psi_A \cdot \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \, dD + \int_{\Gamma} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} \right) \cdot \psi_A \, dS = \int_D \psi_A \cdot \mathbf{J}_s \, dD \quad (1.83)$$

La méthode de Galerkin peut alors être utilisée. Elle permet de définir la fonction test comme appartenant au même espace que  $\mathbf{A}$ , soit  $H_{\mathbf{rot},B}$ . Le terme surfacique se décompose alors selon :

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} \right) \cdot \psi_A \, dS = \int_{\Gamma_B} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} \right) \cdot \psi_A \, dS + \int_{\Gamma_H} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n} \right) \cdot \psi_A \, dS \quad (1.84)$$

Or par définition de  $\psi_A$ , le terme sur  $\Gamma_B$  s'annule. Le terme sur  $\Gamma_H$  est pris nul afin d'imposer la condition (1.27). Dans ce cas, cette condition est imposée au sens faible.

Dans (1.83),  $\mathbf{A}$  appartient à  $H_{\mathbf{rot},B}$ , et  $\mathbf{J}_s$  à  $H_{\mathbf{div},H}$ . Ils se discrétisent respectivement dans  $W_B^1$  et  $W_H^2$ . Ils peuvent donc se mettre sous la forme discrète suivante :

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{N_a} \mathbf{w}_{aj} A_j \quad (1.85)$$

$$\mathbf{J}_s = \sum_{o=1}^{N_f} \mathbf{w}_{fo} J_{so} \quad (1.86)$$

L'équation (1.83) devient alors, pour toute fonction  $\psi_A$  :

$$\sum_{k=1}^{N_a} \int_D \frac{1}{\mu} A_k \mathbf{rot} \mathbf{w}_{ak} \cdot \mathbf{rot} \psi_A \, dD = \sum_{j=1}^{N_f} \int_D J_{sj} \mathbf{w}_{fj} \cdot \psi_A \, dD \quad (1.87)$$

La fonction test est alors exprimée, en utilisant la méthode de Galerkin, dans  $W_B^1$ . Elle parcourt donc l'ensemble des fonctions de forme d'arêtes, par équivalence entre les différents espaces fonctionnels. L'équation (1.87) peut au final s'écrire :

$$\forall m \in [1; N_a] \sum_{k=1}^{N_a} A_k \int_D \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{ak} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{am} \, dD = \sum_{j=1}^{N_f} J_{sj} \int_D \mathbf{w}_{am} \cdot \mathbf{w}_{fj} \, dD \quad (1.88)$$

Qui permet d'écrire la forme matricielle du système :

$$[\mathbf{R}^{1/\mu}] [\mathbf{A}] = [\mathbf{F}_J] \quad (1.89)$$

avec  $[\mathbf{A}]$  le vecteur des composantes du potentiel vecteur, et  $[\mathbf{F}_J]$  dont le  $i^{\text{ème}}$  terme se définit par :

$$[\mathbf{F}_J]_i = f_{Ji} = \sum_{j=1}^{N_f} \int_D J_{sj} \mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{w}_{fj} \, dD \quad (1.90)$$

Et la matrice  $[R^{1/\mu}]$  dont les termes s'écrivent :

$$[R^{1/\mu}]_{ij} = r_{ij}^{1/\mu} = \int_D \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{w}_{ai} \cdot \text{rot } \mathbf{w}_{aj} dD \quad (1.91)$$

### 3. Formulation magnétique T-Ω

Dans cette formulation, le système à résoudre se compose des équations (1.57) et (1.58). De plus, le potentiel vecteur  $\mathbf{T}$  n'est défini que dans  $D_c$ . En appliquant à chaque équation la méthode des résidus pondérés, le système devient :

$$\forall \boldsymbol{\psi}_T \in L^2(D), \int_{D_c} \left( \boldsymbol{\psi}_T \cdot \text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \right) + \boldsymbol{\psi}_T \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{T}}{\partial t} \right) dD - \int_{D_c} \boldsymbol{\psi}_T \cdot \frac{\partial (\mu \mathbf{grad } \Omega)}{\partial t} dD = 0 \quad (1.92)$$

$$\forall \psi_\Omega \in L^2(D), \int_D \psi_\Omega \text{div} (\mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad } \Omega + \mathbf{H}_s)) dD = 0 \quad (1.93)$$

avec les fonctions  $\boldsymbol{\psi}_T$  et  $\psi_\Omega$  des fonctions tests. Les formules de Green (1.36) et (1.37) peuvent être appliquées à (1.92) et (1.93) :

$$\int_{D_c} \frac{1}{\sigma} \text{rot } \boldsymbol{\psi}_T \cdot \text{rot } \mathbf{T} dD + \int_{D_c} \boldsymbol{\psi}_T \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{T}}{\partial t} dD - \int_{D_c} \boldsymbol{\psi}_T \cdot \mathbf{grad} \frac{\partial (\mu \Omega)}{\partial t} dD + \quad (1.94)$$

$$\int_{\Gamma_c} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \times \mathbf{n} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_T dS = 0$$

$$\int_D \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad } \Omega + \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{grad} \psi_\Omega dD + \int_\Gamma \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad } \Omega + \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{n} \psi_\Omega dS = 0 \quad (1.95)$$

La méthode de Galerkin peut alors être utilisée. Cette méthode définit  $\boldsymbol{\psi}_T$  dans le même espace que le potentiel vecteur  $\mathbf{T}$ , et  $\psi_\Omega$  dans le même que le potentiel scalaire  $\Omega$ . Ainsi,  $\boldsymbol{\psi}_T$  appartient à  $H_{\text{rot},H}$ , et n'est définie que sur  $D_c$ , et  $\psi_\Omega$  à  $H_{\text{grad},H}$  dans  $D$ .

Le terme surfacique de (1.94) peut s'écrire :

$$\int_{\Gamma_c} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \times \mathbf{n} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_T dS = \int_{\Gamma_H} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \times \mathbf{n} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_T dS + \quad (1.96)$$

$$\int_{\Gamma_E} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \times \mathbf{n} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_T dS + \int_{\Gamma_{\text{Jind}}} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{T} \times \mathbf{n} \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_T dS$$

Par définition de  $\boldsymbol{\psi}_T$ , les intégrales sur  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_{\text{Jind}}$  s'annulent. Par ailleurs l'intégrale sur  $\Gamma_E$  est prise nulle, ce qui impose la condition (1.25) au sens faible.



Dans (1.95), le terme surfacique s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega + \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{n} \psi_{\Omega} dS &= \int_{\Gamma_E} \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega + \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{n} \psi_{\Omega} dS + \\ &\int_{\Gamma_H} \mu (\mathbf{T} - \mathbf{grad} \Omega + \mathbf{H}_s) \cdot \mathbf{n} \psi_{\Omega} dS \end{aligned} \quad (1.97)$$

Là encore, par définition de  $\psi_{\Omega}$ , l'intégrale sur  $\Gamma_H$  est nulle. La condition (1.26) sur  $\Gamma_E$  est imposée au sens faible en posant que l'intégrale sur  $\Gamma_E$  est nulle. Dans (1.97), comme indiqué Figure 3,  $\Gamma_E$  appartient exclusivement à  $D_c$ .

Le potentiel scalaire magnétique se discrétise comme en (1.75), dans  $W_H^0$ , et  $\mathbf{H}_s$  dans  $W_H^1$  comme en (1.76). Le potentiel vecteur électrique  $\mathbf{T}$  étant défini dans  $H_{\text{rot},H}$ , il s'exprime dans  $W_H^1$  selon :

$$\mathbf{T} = \sum_{j=1}^{N_a} \mathbf{w}_{aj} T_j \quad (1.98)$$

Les définitions des potentiels sont alors introduites dans les équations (1.94) et (1.95) :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \frac{1}{\sigma} T_j \mathbf{rot} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{rot} \psi_T dD + \sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \frac{\partial \mu T_j}{\partial t} \mathbf{w}_{aj} \cdot \psi_T dD - \\ \sum_{k=1}^{N_n} \int_{D_c} \frac{\partial (\mu \Omega_k)}{\partial t} \mathbf{grad} w_{nk} \cdot \psi_T dD = 0 \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \mu T_j \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega} dD - \sum_{k=1}^{N_n} \int_D \mu \Omega_k \mathbf{grad} w_{nk} \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega} dD \\ = - \sum_{j=1}^{N_a} \int_D \mu H_{sj} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega} dD \end{aligned} \quad (1.100)$$

De plus, en utilisant la méthode de Galerkin, la fonction test  $\psi_T$  parcourt l'ensemble des fonctions d'arêtes de  $D_c$  (par équivalence entre  $H_{\text{rot},H}$  et  $W_H^1$ ), tandis que  $\psi_{\Omega}$  parcourt les fonctions de forme nodale de  $D$  ( $H_{\text{grad},H}$  et  $W_H^0$  son équivalent).

Le système devient :

$$\begin{aligned} \forall m \in [1; N_a] \sum_{j=1}^{N_a} T_j \int_{D_c} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{am} dD + \sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{w}_{am} \frac{\partial \mu T_j}{\partial t} dD - \\ \sum_{k=1}^{N_n} \int_{D_c} \mathbf{w}_{am} \cdot \mathbf{grad} w_{nk} \frac{\partial (\mu \Omega_k)}{\partial t} dD = 0 \end{aligned} \quad (1.101)$$

$$\begin{aligned} \forall p \in [1; N_n] \sum_{j=1}^{N_a} T_j \int_{D_c} \mu \mathbf{grad} w_{np} \cdot \mathbf{w}_{aj} dD - \sum_{k=1}^{N_n} \Omega_k \int_D \mu \mathbf{grad} w_{np} \cdot \mathbf{grad} w_{nk} dD = \\ - \sum_{j=1}^{N_a} H_{sj} \int_D \mu \mathbf{grad} w_{np} \cdot \mathbf{w}_{aj} dD \end{aligned} \quad (1.102)$$

Il est possible de le mettre sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} R^{1/\sigma} + E^\mu \frac{\partial}{\partial t} & -M^\mu \frac{\partial}{\partial t} \\ M^{\mu t} & -G^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_H \end{bmatrix} \quad (1.103)$$

Le terme source  $[F_H]$  a été défini en (1.80). Les différentes matrices s'expriment comme suit ( $[G^\mu]$  est semblable à (1.81), et  $[R^{1/\sigma}]$  à (1.91)) :

$$[E^\mu]_{ij} = e_{ij}^\mu = \int_D \mu \mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{w}_{aj} dD \quad (1.104)$$

$$[M^\mu]_{ij} = m_{ij}^\mu = \int_D \mu \mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{grad} w_{nj} dD \quad (1.105)$$

Les valeurs prises par  $\Omega$  aux nœuds étant regroupées dans le vecteur  $[\Omega]$ , et celles prises par  $T$  aux arêtes dans  $[T]$ .

**Remarque :** Il est possible d'obtenir le système (1.103) à partir de (1.101) en posant  $\psi_T = \mathbf{w}_a - \mathbf{grad} w_n$ .

#### 4. Formulation électrique A-φ

Dans cette seconde formulation magnétodynamique, les équations (1.62) et (1.63) doivent être résolues. Tout d'abord, en appliquant la méthode des résidus pondérés, comme pour la formulation  $T$ - $\Omega$ , le système devient :

$$\forall \psi_A \in L^2(D), \int_D \left( \psi_A \cdot \mathbf{rot} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \right) + \psi_A \cdot \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dD + \int_{D_c} \psi_A \cdot \sigma \mathbf{grad} \varphi dD = \int_D \psi_A \cdot \mathbf{J}_s dD \quad (1.106)$$

$$\forall \psi_\varphi \in L^2(D), \int_{D_c} \psi_\varphi \operatorname{div} \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dD + \int_{D_c} \psi_\varphi \operatorname{div} (\sigma \mathbf{grad} \varphi) dD = 0 \quad (1.107)$$

avec  $\psi_A$  et  $\psi_\varphi$  des fonctions tests.

Les formules de Green ((1.36), (1.37)) sont appliquées aux équations :

$$\int_D \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot} \psi_A \, dD + \int_{D_c} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \psi_A \, dD + \int_{D_c} \sigma \mathbf{grad} \varphi \cdot \psi_A \, dD - \quad (1.108)$$

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}) \cdot \psi_A \, dS = \int_D \mathbf{J}_s \cdot \psi_A \, dD$$

$$\int_{D_c} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{grad} \psi_\varphi \, dD + \int_{D_c} \sigma \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{grad} \psi_\varphi \, dD - \int_{\Gamma_c} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{n} \psi_\varphi \, dS = 0 \quad (1.109)$$

La méthode de Galerkin consiste à prendre pour l'équation (1.108), comme fonction test, les fonctions définies dans  $H_{\mathbf{rot},E}$  correspondant au potentiel  $\mathbf{A}$ . Ainsi, l'intégrale surfacique de (1.108) peut s'écrire comme :

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}) \cdot \psi_A \, dS = \int_{\Gamma_E} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}) \cdot \psi_A \, dS + \int_{\Gamma_H} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A} \times \mathbf{n}) \cdot \psi_A \, dS \quad (1.110)$$

Par définition de  $\psi_A$ , l'intégrale sur  $\Gamma_E$  s'annule au sens fort. Par ailleurs, l'intégrale sur  $\Gamma_H$  est supposée nulle, ce qui permet d'imposer (1.27) au sens faible. Le terme surfacique n'apparaît donc plus dans (1.108). De la même façon,  $\psi_\varphi$  parcourt des fonctions appartenant à  $H_{\mathbf{grad},E}$  et ayant les mêmes propriétés que le potentiel  $\varphi$ .

L'intégrale sur  $\Gamma_c$  de (1.109) peut se décomposer selon :

$$\int_{\Gamma_c} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{n} \right) \psi_\varphi \, dS = \int_{\Gamma_E} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{n} \right) \psi_\varphi \, dS + \quad (1.111)$$

$$\int_{\Gamma_H} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{n} \right) \psi_\varphi \, dS + \int_{\Gamma_{\text{ind}}} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi \right) \cdot \mathbf{n} \right) \psi_\varphi \, dS$$

Par définition de  $\psi_\varphi$ , le terme sur  $\Gamma_E$  s'annule. Les intégrales sur  $\Gamma_H$  et  $\Gamma_{\text{ind}}$  sont prises nulles, ce qui permet d'imposer au sens faible les conditions (1.28) et (1.35).

Les potentiels sont alors discrétisés. Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  se définit dans  $W_E^1$  comme en (1.85), et la densité de courant source  $\mathbf{J}_s$  se discrétise dans  $W_H^2$ , comme en (1.86). Le potentiel  $\varphi$  appartient à  $H_{\mathbf{grad},E}$ , et s'exprime dans  $W_E^0$ , et se discrétise aux nœuds :

$$\varphi = \sum_{p=1}^{N_n} w_{np} \varphi_p \quad (1.112)$$

Ces définitions permettent d'obtenir les équations suivantes :

$$\sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \frac{1}{\mu} A_j \mathbf{rot} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_A dD + \sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \sigma \frac{\partial A_j}{\partial t} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{w}_A dD + \quad (1.113)$$

$$\sum_{p=1}^{N_n} \int_{D_c} \sigma \varphi_p \mathbf{grad} \mathbf{w}_{np} \cdot \mathbf{w}_A dD = \sum_{o=1}^{N_f} \int_{D_c} \mathbf{w}_{fo} \mathbf{J}_{so} \cdot \mathbf{w}_A dD$$

$$\sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \sigma \frac{\partial A_j}{\partial t} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{grad} \psi_\varphi dD + \sum_{p=1}^{N_n} \int_{D_c} \sigma \varphi_p \mathbf{grad} \mathbf{w}_{np} \cdot \mathbf{grad} \psi_\varphi dD = 0 \quad (1.114)$$

Les fonctions tests telles  $\psi_A$  parcourent l'ensemble des fonctions de forme d'arêtes et  $\psi_\varphi$  l'ensemble des fonctions de forme nodales. Le système devient alors :

$$\forall m \in [1; N_a] \sum_{j=1}^{N_a} A_j \int_{D_c} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}_{am} dD + \sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \sigma \mathbf{w}_{aj} \cdot \mathbf{w}_{am} \frac{\partial A_j}{\partial t} dD + \quad (1.115)$$

$$\sum_{k=1}^{N_n} \varphi_k \int_{D_c} \sigma \mathbf{w}_{am} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{w}_{nk} dD = \sum_{o=1}^{N_f} \mathbf{J}_{so} \int_{D_c} \mathbf{w}_{am} \cdot \mathbf{w}_{fo} dD$$

$$\forall p \in [1; N_n] \sum_{j=1}^{N_a} \int_{D_c} \sigma \mathbf{grad} \mathbf{w}_{np} \cdot \mathbf{w}_{aj} \frac{\partial A_j}{\partial t} dD + \quad (1.116)$$

$$\sum_{k=1}^{N_n} \varphi_k \int_{D_c} \sigma \mathbf{grad} \mathbf{w}_{nk} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{w}_{np} dD = 0$$

Il peut être mis sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}^{1/\mu} + \mathbf{E}^\sigma \frac{\partial}{\partial t} & \mathbf{M}^\sigma \\ \mathbf{M}^{\sigma t} \frac{\partial}{\partial t} & \mathbf{G}^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_J \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.117)$$

Les matrices  $[\mathbf{R}^{1/\mu}]$ ,  $[\mathbf{E}^\sigma]$ ,  $[\mathbf{M}^\sigma]$  et  $[\mathbf{G}^\sigma]$  se définissent par des expressions semblables à (1.91), (1.104), (1.105), (1.81) respectivement, et  $[\mathbf{F}_J]$  est défini par (1.80).

**Remarque :** Tout comme en formulation magnétique  $\mathbf{T}$ - $\Omega$ , il est possible de retrouver (1.117) à partir de (1.113) en posant  $\boldsymbol{\psi}_A = \mathbf{w}_a + \mathbf{grad} \mathbf{w}_n$ .

### C. Discrétisation temporelle

Afin de faciliter la résolution des systèmes matriciels obtenus en magnétodynamique ((1.84) et (1.101)). Il est possible d'utiliser la  $\Theta$ -méthode, qui correspond à une discrétisation temporelle [33].

Elle permet de résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} + A u(t) = f(t) \quad (1.118)$$

dans un intervalle d'étude de durée  $T$ , avec un pas de discrétisation temporelle  $\Delta t$ , et  $N_t$  le nombre de pas de temps ( $N_t = T/\Delta t$ ). La fonction  $f$  représente la source,  $u$  la réponse, et  $A$  une constante.

En appliquant la  $\Theta$ -méthode, la dérivée temporelle peut s'écrire :

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \Theta (f_{n+1} - A u_{n+1}) + (1 - \Theta)(f_n - A u_n) \quad (1.119)$$

avec  $u_n$  et  $f_n$  respectivement la réponse et la source à  $t_n = n \Delta t$ . Selon la valeur de  $\Theta$ , plusieurs schémas de discrétisation peuvent être utilisés (Tableau 2).

| Valeur de $\Theta$ | Schéma de discrétisation |
|--------------------|--------------------------|
| 0                  | Euler implicite          |
| 1/3                | Galerkin                 |
| 1/2                | Crank-Nicholson          |
| 1                  | Euler explicite          |

**Tableau 2 : Schémas de discrétisation temporelle**

Pour avoir un système stable, il a été démontré que  $\Theta$  doit prendre une valeur comprise entre 0 et 1/2.

En appliquant cette méthode à l'équation matricielle de la formulation  $\mathbf{T}$ - $\Omega$  (1.103), le système suivant est obtenu :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{E}{\Delta t} & -\frac{M}{\Delta t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \Omega \end{bmatrix}_{t_{n+1}} - \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \Omega \end{bmatrix}_{t_n} \right) &= \Theta \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_H \end{bmatrix}_{t_{n+1}} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{1/\sigma} & 0 \\ \mathbf{M}^{\mu t} & -\mathbf{G}^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \Omega \end{bmatrix}_{t_{n+1}} \right) + \\ (1 - \Theta) \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_H \end{bmatrix}_{t_n} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{1/\sigma} & 0 \\ \mathbf{M}^{\mu t} & -\mathbf{G}^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \Omega \end{bmatrix}_{t_n} \right) \end{aligned} \quad (1.120)$$

En prenant 0 pour valeur de  $\Theta$ , ce qui correspond à la méthode d'Euler implicite, le système devient :

$$\begin{bmatrix} R^{1/\sigma} + \frac{E^\mu}{\Delta t} & -\frac{M^\mu}{\Delta t} \\ M^{\mu t} & -G^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T] \\ [\Omega] \end{bmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ [F_H] \end{bmatrix}_{t_n} - \begin{bmatrix} \frac{E^\mu}{\Delta t} & -\frac{M^\mu}{\Delta t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T] \\ [\Omega] \end{bmatrix}_{t_n} \quad (1.121)$$

Et en multipliant la première ligne par  $\Delta t$ , et la seconde par -1, le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \Delta t R^{1/\sigma} + E^\mu & -M^\mu \\ -M^{\mu t} & G^\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T] \\ [\Omega] \end{bmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -[F_H] \end{bmatrix}_{t_n} - \begin{bmatrix} E^\mu & -M^\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T] \\ [\Omega] \end{bmatrix}_{t_n} \quad (1.122)$$

Par une méthode similaire, la formulation  $A-\varphi$  (1.117) peut aussi être rendue symétrique.

La  $\Theta$ -méthode permet d'obtenir l'expression matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} R^{1/\mu} + \frac{E^\sigma}{\Delta t} & M^\sigma \\ \frac{M^{\sigma t}}{\Delta t} & G^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [\varphi] \end{bmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{bmatrix} [F_J] \\ 0 \end{bmatrix}_{t_n} - \begin{bmatrix} \frac{E^\sigma}{\Delta t} & 0 \\ \frac{M^{\sigma t}}{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [\varphi] \end{bmatrix}_{t_n} \quad (1.123)$$

En multipliant la deuxième ligne par  $\Delta t$ , le système peut être rendu symétrique :

$$\begin{bmatrix} R^{1/\mu} + \frac{E^\sigma}{\Delta t} & M^\sigma \\ M^{\sigma t} & \Delta t G^\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [\varphi] \end{bmatrix}_{t_{n+1}} = \begin{bmatrix} [F_J] \\ 0 \end{bmatrix}_{t_n} - \begin{bmatrix} \frac{E^\sigma}{\Delta t} & 0 \\ M^{\sigma t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A] \\ [\varphi] \end{bmatrix}_{t_n} \quad (1.124)$$

## D. Résolution des systèmes matriciels linéaires<sup>1</sup>

D'une façon générale, un système matriciel linéaire peut se mettre sous la forme :

$$[M][X] = [F] \quad (1.125)$$

dans cette équation,  $[M]$  représente la matrice du système à résoudre,  $[X]$  le vecteur recherché, solution de l'équation, et  $[F]$  le second membre. Cette forme générique représente les différentes formulations introduites auparavant. L'objectif est de résoudre le système, soit de trouver  $[X]$  vérifiant (1.125).

Selon les propriétés de  $[M]$ , différents solveurs peuvent être utilisés [58]. Par exemple, si  $[M]$  est inversible, il est possible d'utiliser un solveur direct. Si  $[M]$  est symétrique définie

---

<sup>1</sup> Je tiens à remercier M. Tinzeffe, ingénieur de recherche au laboratoire, pour son aide précieuse concernant les méthodes de résolution des systèmes matriciels, aussi bien dans le cadre classique présenté ici que pour le recollement de maillages. Sans lui, cette partie du travail n'aurait pu avancer aussi loin.

positive (toutes ses valeurs propres sont strictement positives), le gradient conjugué est adapté à la résolution, et construit une suite de solutions approchées [16], de même le Bi Gradient Conjugué (BiCG) est adapté à une matrice dont les termes sont des complexes... Chaque méthode a son comportement, et ses contraintes d'utilisation.

## 1. La décomposition de Cholesky

Lorsqu'une méthode de résolution directe est utilisée, elle permet de trouver la solution unique du système. La principale contrainte liée à l'utilisation de ce type de méthode est que  $[M]$  doit être symétrique et définie positive : si elle ne l'est pas, cette méthode ne peut être utilisée.

Une méthode directe couramment utilisée est la décomposition de Cholesky. Cette décomposition permet de définir une matrice  $[L]$  telle que :

$$[M] = [L][L]^t \quad (1.126)$$

dont l'expression des différents termes est donnée en Annexe 1. Une fois cette matrice  $[L]$  calculée, il suffit de parcourir l'ensemble des lignes de  $[L]$  pour obtenir la solution du système.

## 2. Le gradient conjugué

Le gradient conjugué est une méthode très souvent utilisée pour la résolution des systèmes matriciels obtenus par éléments finis. En effet dans le cas général, une matrice obtenue par cette méthode est symétrique définie positive, et le gradient conjugué est l'une des méthodes les mieux adaptées à de tels systèmes (son algorithme est donné en Annexe 1). Elle se base sur les projections sur les espaces de Krylov.

Pour accélérer la convergence, un préconditionneur peut être associé à la méthode de résolution. Cela signifie qu'il est possible de multiplier l'équation (1.125) par une matrice  $[P]$  convenablement choisie pour améliorer le conditionnement de la matrice du système, et donc améliorer la convergence. Diverses méthodes et algorithmes de préconditionnement sont présentés en Annexe 1. Les préconditionneurs les plus utilisés sont la diagonale (notée  $D$  par la suite), et la décomposition incomplète de Crout (notée  $Cr$ ). Mais d'autres préconditionneurs peuvent être utilisés, comme le préconditionnement par la méthode SSOR (noté  $S$ ) [58], la décomposition incomplète de Cholesky ou, dans certains cas, des préconditionneurs par bloc, ou issus d'autres décompositions de la matrice  $[M]$ . Dans le présent mémoire, le préconditionnement se fera, sauf indication contraire, par la méthode dite du « split » définie dans l'Annexe 1.

### 3. La méthode Uzawa

Dans le cas du recollement de maillages, comme il apparaîtra dans la suite du mémoire, il est possible d'avoir un système à résoudre de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M & K^t \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.127)$$

Ce système représente un problème de point selle. Une méthode qui peut être utilisée est la méthode d'Uzawa, dont chaque itération est décomposée de la manière suivante :

$[X_{n+1}]$  est obtenu en résolvant le système de la première ligne, en considérant  $[K]^t [\lambda_n]$  comme un terme source. Puis le terme  $[\lambda_{n+1}]$  est calculé en utilisant la deuxième ligne du système :  $[\lambda_{n+1}] = [\lambda_n] + \alpha [K]^t [X_{n+1}]$ , avec  $\alpha$  un paramètre fixé au départ par l'utilisateur.

Cette méthode a été utilisée dans le cadre du recollement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange [52]. Elle est explicitée dans [45], et peut être préconditionnée avec des préconditionneurs par blocs, ou par la méthode de Schur [52]. Néanmoins, les travaux menés pendant la thèse, ainsi que la référence [53], ont montré qu'elle est très lente à converger, bien qu'adapté aux systèmes matriciels obtenus par recollement.

### 4. La méthode MRTR

La méthode MRTR (Minimized Residual method based on Three term Recurrence formula of CG type [39]) s'apparente au gradient conjugué, mais elle est moins contraignante quand aux propriétés de la matrice. Elle nécessite seulement que la matrice soit symétrique. D'autre part, elle utilise une méthode de minimisation de résidus pour déterminer la direction à suivre : à partir du résidu de l'itération  $n$ , elle définit la direction à prendre pour aller chercher la solution  $n+1$ .

Cette méthode peut être préconditionnée, avec les mêmes préconditionneurs que le gradient conjugué, voire d'autres [8]. Son algorithme est donné en Annexe 1.

### 5. Comparaison des méthodes

Afin de comparer les différentes méthodes de résolution décrites précédemment, un système magnétostatique très simple va être modélisé par éléments finis. Il s'agit d'un cube de matériau ferromagnétique, soumis à une différence de potentiel magnétique. Le système sera résolu par la méthode des éléments finis, avec un maillage de 21 633 nœuds, et 119 916 éléments tétraédriques, en formulation en potentiel scalaire magnétique  $\Omega$ . Le système matriciel compte 20 657 inconnues, et 158 725 termes non nuls. Les différents calculs



donnent des résultats équivalents du point de vue de l'énergie ou de la répartition de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , mais il est intéressant d'observer les comportements (les méthodes sans préconditionneurs sont données à titre indicatif). Le Tableau 3 reprend les temps de calcul et nombre d'itérations nécessaires pour la résolution des systèmes.

Dans ce tableau, et par la suite, la notation CG représentera le gradient conjugué, la notation D le préconditionneur diagonal, S le préconditionneur par la méthode SSOR, Cr par la méthode de Crout. Les méthodes de résolution utilisées seront notées, par exemple, CG S, pour un gradient conjugué préconditionné par la méthode SSOR.

| Méthode             | CG     | CG D  | CG S  | CG Cr | MRTR   | MRTR D | MRTR S | MRTR Cr | Directe |
|---------------------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|---------|
| Temps de calcul (s) | 14,213 | 9,041 | 8,989 | 9,045 | 13,657 | 9,285  | 9,165  | 9,145   | 424,77  |
| Nombre d'itérations | 1938   | 141   | 61    | 52    | 1701   | 135    | 62     | 53      | /       |

Tableau 3 : Comparaison des solveurs sur un cas simple

Il apparaît clairement que la méthode directe utilisée ici (décomposition de Cholesky) est peu intéressante. Elle demande beaucoup trop de temps pour obtenir la solution. Néanmoins, il faut souligner qu'en optimisant la numérotation des inconnues, il est possible de réduire le temps de calcul. Ce tableau montre aussi que le gradient conjugué (GC) préconditionné par la décomposition de Crout nécessite le moins d'itérations, alors que le préconditionneur SSOR avec un GC met le moins de temps. Cette différence est liée à la construction du préconditionneur Crout, plus longue que pour le préconditionneur SSOR.

Les convergences des différentes méthodes peuvent être observées (Figure 7). Les convergences du GC et de la méthode MRTR non préconditionnées n'ont pas été représentées : leurs convergences sont trop lentes comparées aux méthodes préconditionnées.

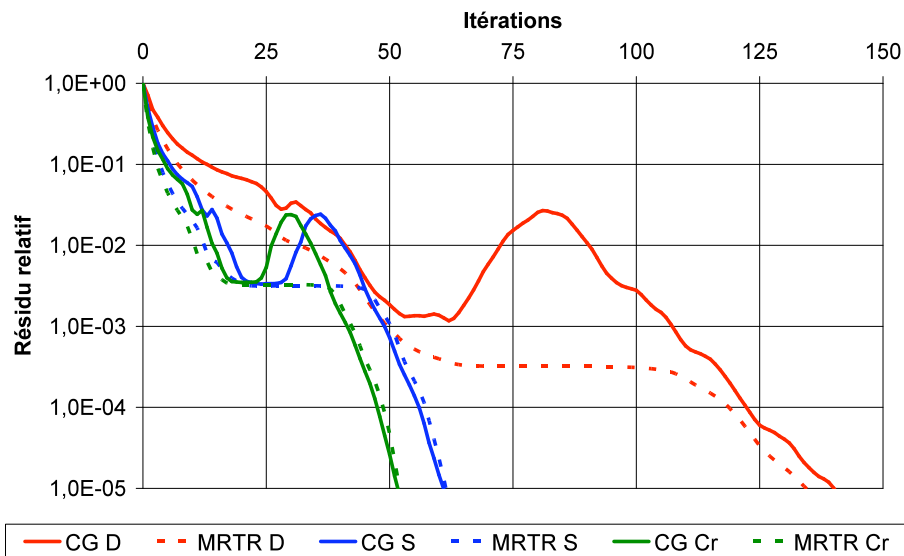


Figure 7 : Graphe des différentes convergences

Pour les différentes méthodes itératives de résolution, pour l'itération  $i$ , le résidu relatif  $r_i$  est défini par :

$$r_i = \frac{\| [F] - [M][X_i] \|}{\| [F] - [M][X_0] \|} \quad (1.128)$$

où  $[F]$  et  $[M]$  sont définis comme dans l'équation (1.125),  $[X_i]$  représente la solution à l'itération  $i$ , et  $[X_0]$  le point initial choisi par l'utilisateur.

Ce graphique montre bien les vitesses de convergence. Par ailleurs, les comportements du gradient conjugué et de MRTR apparaissent aussi : le gradient oscille, là où la méthode MRTR reste sur un palier.

## 6. Deux préconditionneurs pour le recollement

### a. Le préconditionnement par blocs

Nous verrons que dans le cas du recollement de maillages, la matrice apparaît composée de plusieurs sous blocs de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & K_1^t \\ 0 & M_2 & K_2^t \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

Dans ce cas là, il est possible de construire un préconditionneur par blocs dont l'allure est la suivante :

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} \quad (1.130)$$

Chaque bloc est relatif à une partie de la matrice définie en (1.129). Ainsi,  $[P_1]$  est le préconditionneur de  $[M_1]$ ,  $[P_2]$  de  $[M_2]$ . Le bloc  $[K_1 \ K_2 \ K_3]$  étant rectangulaire, il ne peut pas être préconditionné par les préconditionneurs classiques. Pour pouvoir construire un préconditionneur pour ce bloc, il est intéressant de construire une matrice carrée  $[K']$ , définie par :

$$[K'] = [K_1 \ K_2 \ K_3] \begin{bmatrix} K_1^t \\ K_2^t \\ K_3^t \end{bmatrix} = [K_1 K_1^t + K_2 K_2^t + K_3 K_3^t] \quad (1.131)$$

Le préconditionneur  $[P_3]$  est construit de façon classique à partir de la matrice  $[K']$ . Le préconditionneur  $[P]$  s'utilise alors comme un préconditionneur classique.

### b. Décomposition QR [58]

Lors du recollement de maillages par la méthode Mortar, une matrice rectangulaire peut être introduite dans le système à résoudre. Dans ce cas, les préconditionneurs présentés ci-dessus ne peuvent plus être utilisés, car ils ne sont valables que pour des matrices carrées. Ainsi, un préconditionneur a été implanté pour ce cas particulier, à partir de la décomposition QR de cette matrice rectangulaire (différents algorithmes sont donnés en Annexe 1). Cette décomposition se définit par :

$$[T] = [Q][R] \text{ avec } [Q] \text{ orthogonale et } [R] \text{ triangulaire supérieure} \quad (1.132)$$

Cette décomposition permet de préconditionner le système obtenu en suivant la démarche présentée en Annexe 1.

## IV. Conclusion

Dans ce chapitre, les espaces fonctionnels sur lesquels s'appuient les équations de Maxwell ont été rappelés, ainsi que leurs propriétés. Elles ont été complétées par les lois de comportement, et les conditions aux limites. Finalement, les différentes formulations ont été exposées, introduisant les différents potentiels facilitant la résolution de ces équations.

Ces mêmes équations ont été ensuite présentées dans le domaine discret. Le principe des éléments finis a tout d'abord été rappelé, ainsi que les fonctions de formes associées. Les espaces fonctionnels du domaine continu ont pu alors être exprimés dans le domaine discret. Par la suite, les champs et les potentiels ont eux aussi été définis dans les espaces fonctionnels discrets correspondants aux espaces fonctionnels continus.

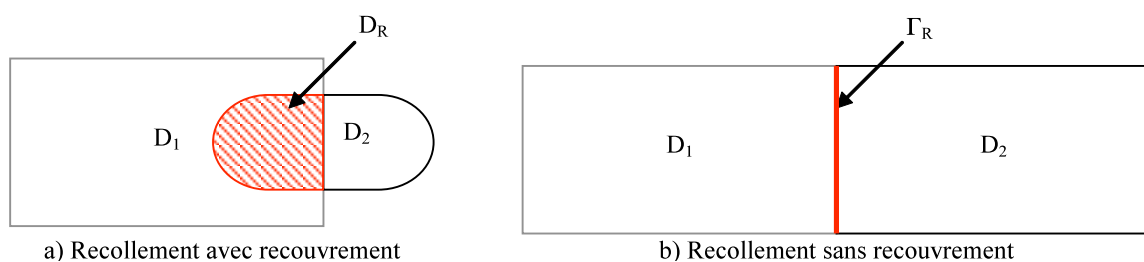
Enfin, des méthodes de résolution des systèmes matriciels obtenus ont été introduites et comparées. Elles seront par la suite utilisées dans le cadre du recollement de maillages.

## Chapitre 2 Le recollement de maillages

### I. Introduction

Dans le domaine des mathématiques la décomposition de domaines est étudiée depuis plus d'un siècle (la méthode de Schwarz date de 1870) [21]. Les méthodes ont depuis bien sûr évoluées, et ont été appliquées d'un point de vue théorique à la méthode des éléments finis.

Ces méthodes sont utilisées afin de décomposer un problème complexe en plusieurs sous-problèmes liés par une ou plusieurs équations, assurant la transmission des informations aux interfaces [2, 9, 20, 24, 48]. Cela permet, par exemple, de résoudre en parallèle les différents systèmes matriciels obtenus [12]. Ces méthodes se divisent en 2 familles, selon qu'il y a ou non superposition des sous-domaines (Figure 8). Dans ce mémoire, seules des méthodes sans recouvrement seront présentées.



**Figure 8 : Décomposition de domaines**

Comme il a été dit dans l'introduction générale, l'utilisation qui sera faite ici du recollement de maillages est la modélisation locale fine de phénomènes électromagnétiques. Il existe bien sûr d'autres applications possibles, comme le mouvement [17, 26, 27, 32, 34, 46, 47, 56] ou la prise en compte de symétrie complexe du système étudié [43].

Dans le chapitre précédent les équations générales régissant les problèmes d'électromagnétisme, étudiés dans ce mémoire, ont été introduites. Ce chapitre se concentre sur le recollement de maillages, objet principal du travail mené pendant ces trois années.

Ce chapitre sera composé de trois grandes parties.

La première est consacrée aux outils mathématiques du recollement de maillages. Les opérateurs utilisés plus particulièrement lors de la thèse sont introduits, ainsi que quelques aspects particuliers de leur calcul.

La deuxième partie revient sur les méthodes de recollement étudiées et implantées dans le code de calcul *code\_Carmel*. La méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode Mortar sont présentées dans le cas de l'électromagnétisme. De plus, les méthodes de résolution introduites au Chapitre 1 seront appliquées à la résolution des systèmes matriciels obtenus dans le cas du recollement de maillages.

Enfin, la troisième et dernière partie permettra de valider le recollement de maillages sur deux exemples académiques, en magnétostatique et en magnétodynamique.

## II. Positionnement du problème

### A. Domaine discret

Dans le cas général, lorsque le domaine d'étude est décomposé en deux sous-domaines  $D_1$  et  $D_2$  distincts, les maillages mis en jeu ne sont pas coïncidents (Figure 9).

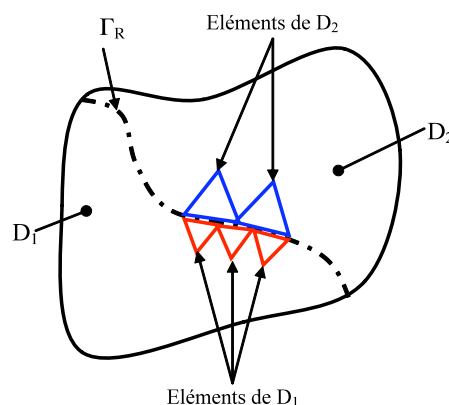


Figure 9 : Discrétisation de D dans le cas de maillages non-conformes

Dans chaque sous-domaine, on peut écrire un système matriciel à résoudre de la forme :

$$[M_1][X_1] = [F_1] \quad (2.1)$$

$$[M_2][X_2] = [F_2] \quad (2.2)$$

avec  $[M_i]$ ,  $[X_i]$  et  $[F_i]$  respectivement la matrice de raideur, les inconnues et les termes sources associés au sous-domaine  $i$ .

Il est de plus possible de décomposer chacun des termes de ce système en fonction de son appartenance à un sous-domaine et à la frontière  $\Gamma_R$ . Par hypothèse, les termes sources au niveau de  $\Gamma_R$  sont supposés nuls. Ainsi, les vecteurs  $[X]$  et  $[F]$  se mettent sous la forme :

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1\Gamma} \\ X_{1\Gamma} \\ X_{2\Gamma} \\ X_{2\Gamma} \end{bmatrix}, \text{ et } [F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1\Gamma} \\ 0 \\ F_{2\Gamma} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Dans cette équation,  $[X_{i\Gamma}]$  représente l'ensemble des inconnues de  $[X]$  qui appartiennent au sous-domaine  $i$ , mais qui n'appartiennent pas à la frontière  $\Gamma_R$ ,  $[X_{i\Gamma}]$  représente l'ensemble des inconnues du sous-domaine  $i$  appartenant à l'interface de recollement  $\Gamma_R$ .

Et par extension, les équations (2.4) et (2.5) peuvent se réécrire comme deux systèmes d'équations indépendants :

$$[M_1][X_1] = [F_1] \Leftrightarrow \begin{cases} [M_{11}][X_{1\Gamma}] + [M_{1\oplus\Gamma}][X_{1\Gamma}] = [F_1] \\ [M_{1\oplus\Gamma}][X_{1\Gamma}] + [M_{1\Gamma}][X_{1\Gamma}] = [0] \end{cases} \quad (2.4)$$

$$[M_2][X_2] = [F_2] \Leftrightarrow \begin{cases} [M_{22}][X_{2\Gamma}] + [M_{2\oplus\Gamma}][X_{2\Gamma}] = [F_2] \\ [M_{2\oplus\Gamma}][X_{2\Gamma}] + [M_{2\Gamma}][X_{2\Gamma}] = [0] \end{cases} \quad (2.5)$$

Les matrices  $[M_{ii}]$  représentant les interactions dans un sous-domaine  $i$ , en dehors de la frontière,  $[M_{i\oplus\Gamma}]$  le lien entre le sous-domaine  $i$  et la frontière  $\Gamma_R$ , et enfin  $[M_{i\Gamma}]$  les interactions entre les éléments finis au niveau de la frontière  $\Gamma_R$  du côté du sous-domaine  $i$ .

Le système sans recollement peut alors être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{1\oplus\Gamma} & 0 & 0 \\ M_{1\oplus\Gamma}^t & M_{1\Gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{22} & M_{2\oplus\Gamma} \\ 0 & 0 & M_{2\oplus\Gamma}^t & M_{2\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\Gamma} \\ X_{1\Gamma} \\ X_{2\Gamma} \\ X_{2\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

La résolution de ce système équivaut à résoudre deux systèmes indépendants. Il faut lui adjoindre l'équivalent discret de l'équation de couplage. Pour ce faire, un opérateur de couplage  $[K]$  est introduit, tel que :

$$[X_{1\Gamma}] = [K][X_{2\Gamma}] \quad (2.7)$$

Cet opérateur peut se calculer de différentes manières. Dans le cas des problèmes d'électromagnétisme résolus par la méthode des éléments finis, il assure la continuité des champs au niveau de l'interface de recollement  $\Gamma_R$  (Figure 10).

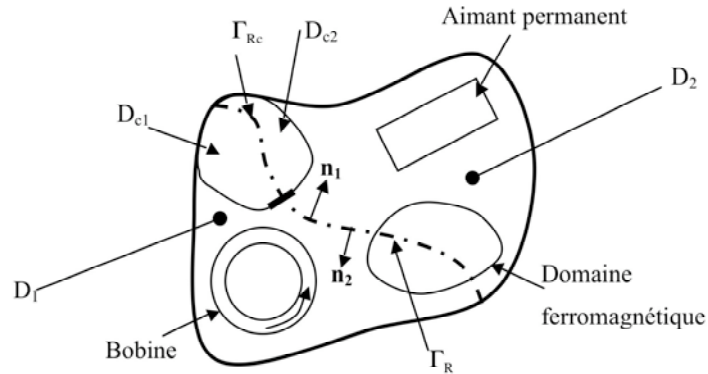


Figure 10 : Décomposition de D en électromagnétisme

## B. Opérateurs matriciels de couplage

Dans le cas de la décomposition de domaines, les maillages au niveau de  $\Gamma_R$  ne sont pas coïncidents (Figure 11).

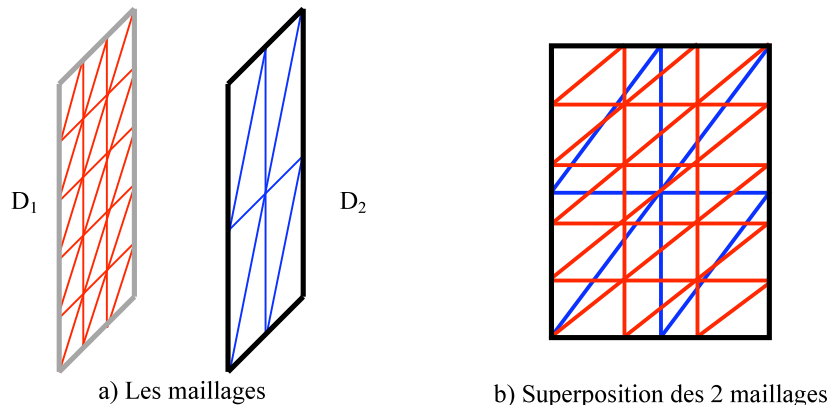


Figure 11 : Maillages de  $\Gamma_R$

A partir de l'intersection des deux maillages, il est possible de construire plusieurs opérateurs de couplage différents, utilisable dans les différentes formulations [13, 50, 51, 55, 56]. Dans la suite, seuls les opérateurs de couplage utilisés dans le cadre de la thèse, pour les potentiels scalaires et vecteurs, seront développés.

### 1. Cas des potentiels scalaires

Les formulations ont été développées au Chapitre 1. Dans toute la suite, le potentiel scalaire ( $\Omega$  ou  $\varphi$ ) est représenté par  $X$ , car la démarche est rigoureusement la même pour ces deux potentiels.

La dernière équation du système (2.7) permet d'écrire (dans le domaine continu) :

$$X_{1\Gamma} - X_{2\Gamma} = 0 \quad (2.8)$$

Pour imposer cette condition, il est possible, comme dans le cas des formulations développées auparavant, d'appliquer la méthode des résidus pondérés à l'équation (2.10) :

$$\forall \psi_X \in H_{\text{grad},D}, \int_{\Gamma_R} \psi_X (X_{1\Gamma} - X_{2\Gamma}) d\Gamma = 0 \quad (2.9)$$

avec  $\psi_X$  une fonction test. En discrétisant les potentiels  $X_{1\Gamma}$  et  $X_{2\Gamma}$ , (2.9) devient :

$$\sum_{k=1}^{N_{ni\Gamma}} X_k \int_{\Gamma_R} \psi_X w_{nk} d\Gamma - \sum_{l=1}^{N_{n2\Gamma}} X_l \int_{\Gamma_R} \psi_X w_{nl} d\Gamma = 0 \quad (2.10)$$

avec  $N_{ni\Gamma}$  le nombre de nœuds du sous-domaine  $i$  se trouvant sur l'interface de recollement  $\Gamma_R$ . Il est alors possible d'appliquer la méthode de Galerkin à (2.10). La fonction test  $\psi_X$  est alors prise comme parcourant les fonctions nodales de l'un des sous-domaines, associées à  $\Gamma_R$ . Elle sera ici prise comme appartenant au sous-domaine dont le maillage est le plus fin, ce qui, dans notre étude, correspond à  $D_1$  :

$$\forall w_{nm} \in D_1 \cap \Gamma_R, \sum_{k=1}^{N_{ni\Gamma}} X_k \int_{\Gamma_R} w_{nm} w_{nk} d\Gamma - \sum_{l=1}^{N_{n2\Gamma}} X_l \int_{\Gamma_R} w_{nm} w_{nl} d\Gamma = 0 \quad (2.11)$$

Une forme matricielle apparaît alors naturellement :

$$[C_n][X_1] = [D_n][X_2] \quad (2.12)$$

avec les matrices  $[C_n]$  et  $[D_n]$  définies par leurs termes élémentaires :

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_R} w_{ni} w_{nj} d\Gamma \quad (2.13)$$

$$d_{ik} = \int_{\Gamma_R} w_{ni} w_{nk} d\Gamma \quad (2.14)$$

avec  $w_{ni}$ ,  $w_{nj}$  représentant des fonctions nodales appartenant à la frontière  $\Gamma_R$  et au sous-domaine  $D_1$ , tandis que  $w_{nk}$  représente une fonction nodale appartenant à  $\Gamma_R$  et au sous-domaine  $D_2$ . Ces matrices permettent de faire apparaître l'opérateur de couplage  $[K_n]$  utilisé dans ce cas :

$$[X_1] = [C_n]^{-1} [D_n][X_2] = [K_n][X_2] \quad (2.15)$$

La méthode d'intégration utilisée pour le calcul des termes des matrices  $[C_n]$  et  $[D_n]$  est donnée en Annexe 2 [28].



## 2. Cas des potentiels vecteurs

Les formulations ont déjà été présentées au Chapitre 1. Dans cette partie, les potentiels vecteurs ( $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{T}$ ) sont représentés par  $\mathbf{X}$ . Les démarches sont en effet identiques pour ces deux potentiels.

La même méthode que celle vue pour les potentiels scalaires va être suivie. Tout d'abord, à l'interface de recollement, (2.7) permet d'écrire dans le domaine continu :

$$(\mathbf{X}_{1\Gamma} - \mathbf{X}_{2\Gamma}) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

En appliquant la méthode des résidus pondérés, avec une fonction test  $\boldsymbol{\psi}_X$ , l'équation (2.16) devient :

$$\forall \boldsymbol{\psi}_X \in H_{\text{rot},D}, \int_{\Gamma_R} \boldsymbol{\psi}_X \cdot (\mathbf{X}_{1\Gamma} - \mathbf{X}_{2\Gamma}) \wedge \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (2.17)$$

Les potentiels peuvent alors être discrétisés sur les arêtes des deux sous-domaines liés à l'interface  $\Gamma_R$  :

$$\sum_{k=1}^{N_{a1\Gamma}} X_k \int_{\Gamma_R} \boldsymbol{\psi}_X \cdot \mathbf{w}_{ak} \, d\Gamma - \sum_{l=1}^{N_{a2\Gamma}} X_l \int_{\Gamma_R} \boldsymbol{\psi}_X \cdot \mathbf{w}_{al} \, d\Gamma = 0 \quad (2.18)$$

avec  $N_{a1\Gamma}$  le nombre d'arêtes du sous-domaine  $i$  appartenant à l'interface  $\Gamma_R$ . En appliquant la méthode de Galerkin, la fonction test parcourant l'ensemble des arêtes du sous-domaine  $D_1$  appartenant aussi à  $\Gamma_R$  :

$$\forall \mathbf{w}_{am} \in D_1 \cap \Gamma_R, \sum_{k=1}^{N_{a1\Gamma}} X_k \int_{\Gamma_R} \mathbf{w}_{am} \cdot \mathbf{w}_{ak} \, d\Gamma - \sum_{l=1}^{N_{a2\Gamma}} X_l \int_{\Gamma_R} \mathbf{w}_{am} \cdot \mathbf{w}_{al} \, d\Gamma = 0 \quad (2.19)$$

Equation qui fait apparaître les expressions des matrices  $[C_a]$  et  $[D_a]$ , semblables aux matrices  $[C_n]$  et  $[D_n]$  vues précédemment, dont les termes élémentaires s'écrivent :

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_R} \mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{w}_{aj} \, d\Gamma \quad (2.20)$$

$$d_{ik} = \int_{\Gamma_R} \mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{w}_{ak} \, d\Gamma \quad (2.21)$$

avec  $\mathbf{w}_{ai}$ ,  $\mathbf{w}_{aj}$  des fonctions d'arêtes liées à  $D_1$  et  $\Gamma_R$ ,  $\mathbf{w}_{ak}$  une fonction d'arête appartenant à  $D_2$  et  $\Gamma_R$ . Ces matrices permettent d'écrire :

$$[C_a] \llbracket X_1 \rrbracket = [D_a] \llbracket X_2 \rrbracket \quad (2.22)$$

L'opérateur de couplage  $[K_a]$  apparaît alors :

$$\llbracket X_1 \rrbracket = [C_a]^{-1} [D_a] \llbracket X_2 \rrbracket = [K_a] \llbracket X_2 \rrbracket \quad (2.23)$$

La méthode d'intégration utilisée pour le calcul de  $[C_a]$  et  $[D_a]$  est donnée en Annexe 2.

### **III. Formulation à deux sous-domaines**

Les opérateurs de couplage définis précédemment peuvent être utilisés de façons différentes. Dans le cadre des travaux présentés ici, deux méthodes sont utilisées pour recoller les maillages : la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode Mortar.

#### **A. Les multiplicateurs de Lagrange**

Une seule formulation est présentée dans la suite. La démarche pour chaque autre formulation est détaillée en Annexe 3.

##### **1. La formulation en potentiel scalaire $\Omega$ [42]**

La formulation en potentiel scalaire magnétique demande la résolution de l'équation (1.72). Cette équation peut être écrite dans chaque sous-domaine. Elle peut ainsi être développée dans  $D_1$  grâce à la formule de Green (1.36), et du fait que  $\mathbf{H}_{s1}$  est nul sur  $\Gamma_R$  :

$$\int_{D_1} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_1} \cdot \mathbf{grad} \Omega_1 \, dD + \int_{\Gamma_R} \mu ((-\mathbf{grad} \Omega_1) \cdot \mathbf{n}_1) \psi_{\Omega_1} \, dS + \int_{\Gamma_{B1}} \mu ((\mathbf{H}_{s1} - \mathbf{grad} \Omega_1) \cdot \mathbf{n}_1) \psi_{\Omega_1} \, dS + \int_{\Gamma_{H1}} \mu ((\mathbf{H}_{s1} - \mathbf{grad} \Omega_1) \cdot \mathbf{n}_1) \psi_{\Omega_1} \, dS = \int_{D_1} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_1} \cdot \mathbf{H}_{s1} \, dD \quad (2.24)$$

La méthode de Galerkin est alors utilisée. La fonction test  $\psi_{\Omega_1}$  a donc des propriétés similaires à  $\Omega_1$ . Dès lors, comme au Chapitre 1, l'intégrale sur  $\Gamma_{B1}$  est prise nulle et impose la condition (1.26) au sens faible, et le terme intégré sur  $\Gamma_{H1}$  est nul par définition de la fonction test. Il ne reste donc que l'intégrale sur  $\Gamma_R$ , qui fait intervenir la composante normale de  $\mathbf{B}$  à l'interface  $\Gamma_R$  :

$$\int_{\Gamma_R} \psi_{\Omega_1} ((-\mu \mathbf{grad} \Omega_1) \cdot \mathbf{n}_1) \, dS = \int_{\Gamma_R} \psi_{\Omega_1} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1) \, dS \quad (2.25)$$

En appliquant une démarche similaire, l'équation dans  $D_2$  s'obtient :

$$\int_{D_2} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_2} \cdot \mathbf{grad} \Omega_2 \, dD + \int_{\Gamma_R} \mu ((-\mathbf{grad} \Omega_2) \cdot \mathbf{n}_2) \psi_{\Omega_2} \, dS = \int_{D_2} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_2} \cdot \mathbf{H}_{s2} \, dD \quad (2.26)$$

Tout comme pour  $D_1$ , le terme surfacique fait intervenir la composante normale de  $\mathbf{B}$  :

$$\int_{\Gamma_R} \psi_{\Omega_2} ((-\mu \mathbf{grad} \Omega_2) \cdot \mathbf{n}_2) \, dS = \int_{\Gamma_R} \psi_{\Omega_2} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \, dS \quad (2.27)$$

La continuité de la composante normale de  $\mathbf{B}$  est imposée au travers de  $\Gamma_R$ , le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_B$  associé au recollement se définit alors par :

$$\lambda_B = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \quad (2.28)$$

Cette nouvelle inconnue peut se discrétiser sur les nœuds de  $\Gamma_R$  et de  $D_1$  [23].

Il est ainsi possible d'écrire le système à résoudre :

$$\begin{cases} \int_{D_1} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_1} \cdot \mathbf{grad} \Omega_1 \, dD + \int_{\Gamma_R} \lambda_B \psi_{\Omega_1} \, dS = \int_{D_1} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_1} \cdot \mathbf{H}_{s1} \, dD \\ \int_{D_2} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_2} \cdot \mathbf{grad} \Omega_2 \, dD - \int_{\Gamma_R} \lambda_B \psi_{\Omega_2} \, dS = \int_{D_2} \mu \mathbf{grad} \psi_{\Omega_2} \cdot \mathbf{H}_{s2} \, dD \\ \int_{\Gamma_R} \psi_{\Omega_1} (\Omega_{1\Gamma} - \Omega_{2\Gamma}) \, d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

Le potentiel scalaire a été discrétisé en (1.75). L'expression du champ source pour cette formulation est donnée en (1.76). La fonction test est définie comme au Chapitre 1. L'expression de la matrice du système est donnée en (1.81). Cette matrice peut se décomposer par bloc, comme en (2.6).

Il reste à discrétiser le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_B$ . Ce dernier est exprimé aux nœuds de  $D_1$  liés à  $\Gamma_R$  et s'écrit :

$$\lambda_B = \sum_{i=1}^{N_{n\Gamma}} \lambda_{Bi} w_{ni} \quad (2.30)$$

avec  $N_{n\Gamma}$  le nombre de nœuds liés à  $D_1$  et à  $\Gamma_R$ . Cette discrétisation fait apparaître les matrices  $[C_n]$  et  $[D_n]$  définies en (2.13) et (2.14).

Le système peut alors être mis sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}^\mu & \mathbf{G}_{1\oplus\Gamma}^\mu & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{G}_{1\oplus\Gamma}^{\mu \, t} & \mathbf{G}_{1\Gamma}^\mu & 0 & 0 & \mathbf{C}_n^t \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{22}^\mu & \mathbf{G}_{2\oplus\Gamma}^\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{G}_{2\oplus\Gamma}^{\mu \, t} & \mathbf{G}_{2\Gamma}^\mu & -\mathbf{D}_n^t \\ 0 & \mathbf{C}_n & 0 & -\mathbf{D}_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \lambda_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{H1} \\ 0 \\ \mathbf{F}_{H2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Le système à résoudre est un problème de point selle, qui demande l'utilisation de solveurs et préconditionneurs particuliers [45].

Cette méthode de recollement sera appelée par la suite simple multiplicateurs de Lagrange et notée SL.

## 2. Les doubles multiplicateurs de Lagrange

Afin d'améliorer le conditionnement de la matrice, la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange peut être utilisée [44].

En décomposant  $\lambda_B$  tel que :  $[\lambda_B] = [\lambda_{B1}] + [\lambda_{B2}]$  et  $[\lambda_{B1}] = [\lambda_{B2}]$ , l'équivalence suivante apparaît, pour la formulation en potentiel scalaire  $\Omega$  :

$$[C_n][\Omega_{1\Gamma}] - [D_n][\Omega_{2\Gamma}] = [0] \Leftrightarrow \begin{cases} [C_n][\Omega_{1\Gamma}] - [D_n][\Omega_{2\Gamma}] + \alpha[\text{Id}][\lambda_{B1}] - \alpha[\text{Id}][\lambda_{B2}] = [0] \\ [C_n][\Omega_{1\Gamma}] - [D_n][\Omega_{2\Gamma}] - \alpha[\text{Id}][\lambda_{B1}] + \alpha[\text{Id}][\lambda_{B2}] = [0] \end{cases} \quad (2.32)$$

avec  $\alpha$  un réel, qui représente un coefficient permettant de modifier le conditionnement de la matrice du système, afin d'améliorer la convergence des méthodes itératives de résolution.

Le système matriciel (2.31) devient :

$$\begin{bmatrix} G_{11}^\mu & G_{1\oplus\Gamma}^\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_{1\oplus\Gamma}^{\mu\ t} & G_{1\Gamma}^\mu & 0 & 0 & C_n^t & C_n^t \\ 0 & 0 & G_{22}^\mu & G_{2\oplus\Gamma}^\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{2\oplus\Gamma}^{\mu\ t} & G_{2\Gamma}^\mu & -D_n^t & -D_n^t \\ 0 & C_n & 0 & -D_n & \alpha \text{Id} & -\alpha \text{Id} \\ 0 & C_n & 0 & -D_n & -\alpha \text{Id} & \alpha \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_{1/\Gamma} \\ \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_{2/\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \lambda_{B1} \\ \lambda_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{s1} \\ 0 \\ H_{s2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Cette nouvelle façon de connecter les inconnues avec les multiplicateurs de Lagrange sera dénommée par la suite double multiplicateurs de Lagrange, et notée DL.

Une démarche similaire peut être effectuée pour chaque formulation avec recollement par la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange (Annexe 3).

## 3. Utilisation de solveurs adaptés

Du fait de leurs formes particulières, les matrices obtenues par les multiplicateurs de Lagrange peuvent nécessiter l'utilisation de solveurs et préconditionneurs adaptés.

### Simple multiplicateurs de Lagrange

Dans le cas des simples multiplicateurs de Lagrange, le système final obtenu peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & C^t \\ 0 & M_2 & -D^t \\ C & -D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Ce système représente un problème de point selle, comme vu au Chapitre 1. Une méthode classique de résolution pouvant être utilisée dans ce cas est la méthode Uzawa. Il a cependant été montré que cette méthode ne donnait pas de résultats satisfaisants.

Le solveur utilisé lors des travaux pour résoudre ces systèmes est le solveur MRTR (Minimized Residual method based on Three term Recurrence formula of CG type [39]).

Plusieurs préconditionneurs ont été testés, notamment des préconditionneurs par blocs. Le principe général est donné en Annexe 1. Dans le cas des simples multiplicateurs de Lagrange, la matrice à préconditionner est une matrice de forme semblable à celle définie en (2.34).

Un préconditionneur  $[P]$  par bloc utilisable pour cette matrice est de la forme :

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_R \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Chaque terme de  $[P]$  est relatif à un terme de  $[M]$ .  $[P_1]$  est construit à partir de  $[M_1]$ ,  $[P_2]$  à partir de  $[M_2]$ , en utilisant des méthodes de préconditionnement classique. La dernière ligne de la matrice du système (2.34) ne peut pas être préconditionnée par des méthodes classiques, car le bloc  $\begin{bmatrix} C & -D \end{bmatrix}$  est rectangulaire. Pour pouvoir le préconditionner, il faut tout d'abord construire à partir de cette sous-matrice de  $[M]$  une matrice carrée à laquelle une méthode de préconditionnement pourra être appliquée. Une telle matrice s'obtient en réalisant le produit suivant (cf relation 1.131) :

$$\begin{bmatrix} C & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^t \\ -D^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CC^t + DD^t \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Cette matrice  $\begin{bmatrix} CC^t + DD^t \end{bmatrix}$  est préconditionnée de façon classique, ce qui permet d'obtenir le bloc  $[P_R]$  de la matrice de préconditionnement  $[P]$ .

Les différents blocs peuvent donc être construits indépendamment les uns des autres. Dans la suite, cependant, les blocs  $[P_1]$  et  $[P_2]$  seront calculés de la même façon. Ainsi, lors de l'utilisation d'un tel préconditionneur, il sera noté P1 (méthode de préconditionnement pour les blocs  $[M_1]$  et  $[M_2]$ ) – P2 (méthode de préconditionnement pour le calcul de  $[P_R]$ ).

### **Double multiplicateurs de Lagrange**

Dans le cas des doubles multiplicateurs de Lagrange, il est possible de réutiliser des méthodes classiques de résolutions et de préconditionnement. Néanmoins, il est intéressant

d'utiliser les propriétés de la matrice pour essayer d'optimiser son préconditionnement, et sa résolution. Il est aussi possible de faire varier la valeur de  $\alpha$ .

Dans ce cas, le système à résoudre est de la forme :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & C^t & C^t \\ 0 & M_2 & -D^t & -D^t \\ C & -D & \alpha \text{Id} & -\alpha \text{Id} \\ C & -D & -\alpha \text{Id} & \alpha \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Le préconditionneur utilisé pour ce type de matrices a la même forme que celui vu en (2.37). Les blocs  $[P_1]$  et  $[P_2]$  correspondent toujours aux blocs  $[M_1]$  et  $[M_2]$  et sont calculés par la même méthode. Le bloc  $[P_R]$  est le préconditionneur de la matrice :

$$\begin{bmatrix} C & -D & \alpha \text{Id} & -\alpha \text{Id} \\ C & -D & -\alpha \text{Id} & \alpha \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^t & C^t \\ -D^t & -D^t \\ \alpha \text{Id} & -\alpha \text{Id} \\ -\alpha \text{Id} & \alpha \text{Id} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C C^t + D D^t + 2 \alpha^2 \text{Id} & C C^t + D D^t \\ C C^t + D D^t & C C^t + D D^t + 2 \alpha^2 \text{Id} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

## B. La méthode Mortar

### 1. Principe

Il est possible d'introduire la méthode Mortar en substituant des inconnues au niveau de l'interface de recollement  $\Gamma_R$  [20, 22]. Une autre approche consiste à exprimer les multiplicateurs de Lagrange en fonction des autres inconnues du système, méthode développée ici [47].

Le système (2.31) peut s'écrire tel que :

$$\begin{cases} [G_{11}^\mu] [\Omega_{1/\Gamma}] + [G_{1\oplus\Gamma}^\mu] [\Omega_{1\Gamma}] = [F_{H1}] \\ [G_{1\oplus\Gamma}^\mu] [\Omega_{1/\Gamma}] + [G_{1\Gamma}^\mu] [\Omega_{1\Gamma}] + [C_n]^t [\lambda_B] = [0] \\ [G_{22}^\mu] [\Omega_{2/\Gamma}] + [G_{2\oplus\Gamma}^\mu] [\Omega_{2\Gamma}] = [F_{H2}] \\ [G_{2\oplus\Gamma}^\mu] [\Omega_{2/\Gamma}] + [G_{2\Gamma}^\mu] [\Omega_{2\Gamma}] - [D_n]^t [\lambda_B] = [0] \\ [C_n] [\Omega_{1\Gamma}] - [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] = [0] \end{cases} \quad (2.39)$$

Ce qui permet d'exprimer  $\lambda_n$  en fonction des inconnues nodales  $\Omega_1$  :

$$[\lambda_B] = - [C_n]^t \left( [G_{1\oplus\Gamma}^\mu] [\Omega_{1/\Gamma}] + [G_{1\Gamma}^\mu] [\Omega_{1\Gamma}] \right) \quad (2.40)$$

Cette expression peut être utilisée dans les équations du système (2.39) :

$$\begin{cases} [G_{11}^{\mu}] [\Omega_{1/\Gamma}] + [G_{1\oplus\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] = [F_{H1}] \\ [G_{22}^{\mu}] [\Omega_{2/\Gamma}] + [G_{2\oplus\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] = [F_{H2}] \\ [G_{2\oplus\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2/\Gamma}] + [G_{2\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] + [D_n]^t [C_n]^t \left( [G_{1\oplus\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1/\Gamma}] + [G_{1\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] \right) = [0] \\ [C_n] [\Omega_{1\Gamma}] - [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] = [0] \end{cases} \quad (2.41)$$

La dernière équation du système permet d'exprimer directement les inconnues  $[\Omega_{1\Gamma}]$  en fonction des  $[\Omega_{2\Gamma}]$  :

$$[\Omega_{1\Gamma}] = [C_n]^{-1} [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] \quad (2.42)$$

Soit en remplaçant dans le système (2.43) :

$$\begin{cases} [G_{11}^{\mu}] [\Omega_{1/\Gamma}] + [G_{1\oplus\Gamma}^{\mu}] [C_n]^{-1} [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] = [F_{H1}] \\ [G_{22}^{\mu}] [\Omega_{2/\Gamma}] + [G_{2\oplus\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] = [F_{H2}] \\ [G_{2\oplus\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2/\Gamma}] + [G_{2\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] + [D_n]^t [C_n]^t [G_{1\oplus\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1/\Gamma}] + [D_n]^t [C_n]^t [G_{1\Gamma}^{\mu}] [C_n]^{-1} [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] = [0] \end{cases} \quad (2.43)$$

Système d'équations qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} G_{11}^{\mu} & 0 & G_{1\oplus\Gamma}^{\mu} C_n^{-1} D_n \\ 0 & G_{22}^{\mu} & G_{2\oplus\Gamma}^{\mu} \\ D_n^t C_n^{-t} G_{1\oplus\Gamma}^{\mu} & G_{2\oplus\Gamma}^{\mu} & G_{2\Gamma}^{\mu} + D_n^t C_n^{-t} G_{1\Gamma}^{\mu} C_n^{-1} D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\Omega_{1/\Gamma}] \\ [\Omega_{2/\Gamma}] \\ [\Omega_{2\Gamma}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{H1}] \\ [F_{H2}] \\ [0] \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Ce système peut s'écrire comme un produit de matrices. En effet, en définissant la matrice  $[T]$ , telle que :

$$[T] \begin{bmatrix} [\Omega_{1/\Gamma}] \\ [\Omega_{2/\Gamma}] \\ [\Omega_{2\Gamma}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Omega_{1/\Gamma}] \\ [\Omega_{1\Gamma}] \\ [\Omega_{2/\Gamma}] \\ [\Omega_{2\Gamma}] \end{bmatrix}, \text{ soit } [T] = \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_n^{-1} D_n \\ 0 & \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Le système (2.46) se met sous la forme :

$$[T]^t \begin{bmatrix} G_{11}^{\mu} & G_{1\oplus\Gamma}^{\mu} & 0 & 0 \\ G_{1\oplus\Gamma}^{\mu} & G_{1\Gamma}^{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{22}^{\mu} & G_{2\oplus\Gamma}^{\mu} \\ 0 & 0 & G_{2\oplus\Gamma}^{\mu} & G_{2\Gamma}^{\mu} \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} [\Omega_{1/\Gamma}] \\ [\Omega_{2/\Gamma}] \\ [\Omega_{2\Gamma}] \end{bmatrix} = [T]^t [G^{\mu}] [T] \begin{bmatrix} [\Omega_{1/\Gamma}] \\ [\Omega_{2/\Gamma}] \\ [\Omega_{2\Gamma}] \end{bmatrix} = [T]^t \begin{bmatrix} [F_{H1}] \\ 0 \\ [F_{H2}] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

## 2. Utilisation de solveurs adaptés

Le système matriciel global (2.44) est semblable à un système classique, et peut donc être résolu par les solveurs et préconditionneurs utilisés pour la méthode des éléments finis.

Durant les travaux de thèse, le choix a été fait de construire la matrice  $[T]$ . Cela implique de réaliser plusieurs produits matriciels pour obtenir les équations finales à résoudre, ou d'optimiser le solveur pour qu'il considère les différentes matrices séparément (l'Annexe 1 donne les algorithmes du gradient conjugué et de la méthode MRTR modifiés pour ce cas). D'autres méthodes de calcul de la matrice ne nécessitant pas la construction de  $[T]$  peuvent être envisagées.

Une seconde approche peut être utilisée qui vise à préconditionner chaque matrice séparément.  $[T]$  étant rectangulaire, il faut utiliser un préconditionneur particulier. Le principe du préconditionnement d'une matrice rectangulaire passe par exemple par la décomposition en deux matrices  $[Q]$  et  $[R]$ , la première étant orthogonale, la deuxième triangulaire supérieure, telle que :  $[T] = [Q][R]$ . Dans un tel contexte, un préconditionneur global peut être calculé comme le produit des matrices  $[Q]$ ,  $[R]$  et d'un préconditionneur  $[P]$  de la matrice éléments finis  $[G^h]$  de (2.46).

## C. Fonctions particulières pour les matrices de couplage

Dans le cadre du recollement de maillages, les fonctions utilisées pour définir les opérateurs de couplage sont généralement les fonctions de forme classiques [10, 11, 18, 20]. Néanmoins, au vu des utilisations faites de ces matrices de couplage, il est intéressant de réduire le nombre de termes non nuls. Pour ce faire, de nouvelles fonctions de formes peuvent être définies pour les nœuds et les arêtes.

### 1. Cas des opérateurs pour le recollement nodal

Les opérateurs définis en (2.13) et (2.14) permettent de recoller des grandeurs nodales.

Dans cette partie, de nouvelles fonctions de forme nodale vont être définies sur un cas de référence (Figure 12). Ce triangle de référence est défini par ses trois sommets  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$ , de coordonnées  $(0 ; 0)$ ,  $(1 ; 0)$ , et  $(0 ; 1)$  respectivement :

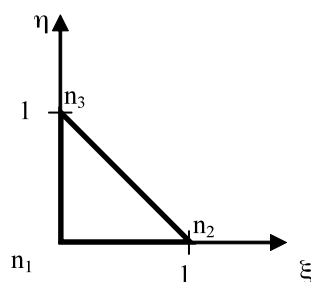


Figure 12 : Triangle de référence  $\Delta$



Les fonctions de forme classiques (1.64) peuvent se définir dans cet élément de référence comme suit :

$$w_{n1}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (2.47)$$

$$w_{n2}(\xi, \eta) = \xi \quad (2.48)$$

$$w_{n3}(\xi, \eta) = \eta \quad (2.49)$$

Le calcul de la matrice  $[C_n]_{\Delta}$  pour ce triangle  $\Delta$  est relativement simple, et s'écrit :

$$[C_n]_{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Dans ce cas, il apparaît que la matrice  $[C_n]_{\Delta}$  est pleine. Or il est nécessaire, pour améliorer les temps de calculs, de réduire au maximum le nombre de termes non nuls de  $[C_n]_{\Delta}$ , notamment dans le cas de la méthode Mortar. Ainsi, d'autres fonctions de formes nodales peuvent être utilisées pour la discrétisation des multiplicateurs de Lagrange [10, 11, 18, 35, 36], fonctions qui sont dites « bi-orthogonales ».

### **Définition des fonctions bi-orthogonales**

Soient deux familles de fonctions  $(a_i)$  et  $(b_j)$  définie dans un espace de fonctions  $H$ , muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Les familles  $(a_i)$  et  $(b_j)$  sont dites bi-orthogonales si :

$$\forall (i, j), \langle a_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.51)$$

Le produit scalaire sur  $W^0$  est le même que celui sur  $L^2(D)$ , donné en (1.1). A partir de ces hypothèses, plusieurs familles de fonctions bi-orthogonales [18] aux fonctions de formes classiques peuvent être définies. Le détail du calcul de deux familles est donné en Annexe 4.

Des fonctions vont être données ici, sur le cas de référence (Figure 12), dans le cas de polynômes de degré un :

$$w'_{n2}(\xi, \eta) = 18 - 24\xi - 24\eta \quad (2.52)$$

$$w'_{n2}(\xi, \eta) = 24\xi - 6 \quad (2.53)$$

$$w'_{n3}(\xi, \eta) = 24\eta - 6 \quad (2.54)$$

Ces fonctions bi-orthogonales peuvent être utilisées dans le calcul de  $[C_n]$  et  $[D_n]$  :

$$c_{ij} = \int_{\Gamma_R} w'_{ni} w_{nj} d\Gamma \quad (2.55)$$

$$d_{ik} = \int_{\Gamma_R} w'_{ni} w_{nk} d\Gamma \quad (2.56)$$

avec  $w'_{ni}$  et  $w_{nj}$  appartenant à  $D_1 \cap \Gamma_R$ , et  $w_{nk}$  appartenant à  $D_2 \cap \Gamma_R$ .

## 2. Cas des opérateurs pour le recollement en arêtes

Le Chapitre 1 a présenté les champs de vecteurs définis dans  $H_{rot, D}$ , ainsi que leur expression sur les fonctions de formes d'arêtes, données en (1.66). Dans le cas du recollement de maillages, il a été montré [22, 23] que ces fonctions n'étaient pas satisfaisantes et que des perturbations des champs de vecteurs apparaissent à l'interface  $\Gamma_R$ .

### a. Deuxième famille de fonctions d'arêtes

Afin d'assurer un recollement optimal, il est nécessaire d'introduire une seconde famille de fonctions d'arêtes. Elle est utilisée pour les arêtes situées au niveau du recollement, cette seconde famille associe à chaque arête deux degrés de liberté, donc deux fonctions de forme. Une arête  $k$  étant définie par ses nœuds extrêmes  $i$  et  $j$ , il est possible de définir  $w_{a1k}$  et  $w_{a2k}$ , telles que [22, 35, 36] :

$$w_{a1k} = w_{ni} \mathbf{grad} w_{nj}, \text{ et } w_{a2k} = w_{nj} \mathbf{grad} w_{ni} \quad (2.57)$$

La fonction  $w_{ak}$  définie en (1.66) se retrouve par :  $w_{ak} = w_{a1k} - w_{a2k}$ .

Lors du recollement de maillages ces fonctions ne sont utilisées que pour les arêtes associées à  $\Gamma_R$ , et pour le calcul des opérateurs de recollement. Les autres arêtes n'ont qu'une seule fonction associée. Ainsi une famille de fonctions d'arêtes, « enrichie » par rapport à la première famille, est construite, qui s'utilise de la même façon que la base classique de la première famille [22, 23].

Il est à noter que cette deuxième famille peut être utilisée pour représenter les arêtes dans un cadre éléments finis classique. Dans ce cas, le nombre total d'inconnues est multiplié par deux, et le nombre de termes de la matrice par quatre (Annexe 5).

### b. Fonctions bi-orthogonales d'arêtes

Tout comme pour les fonctions de formes nodales, il est possible de définir des fonctions de formes d'arêtes bi-orthogonales. Ces fonctions peuvent tout d'abord se construire

relativement à la première famille de fonctions d'arêtes  $\mathbf{w}_{aj}$ , en suivant la même définition que pour les fonctions nodales bi-orthogonales. Ainsi, le terme élémentaire s'écrit :

$$\mathbf{c}_{ai,j} = \int_{\Delta} \mathbf{w}_{ai} \cdot \mathbf{w}'_{aj} ds = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (2.58)$$

Une méthode de calcul de ces fonctions est donnée en Annexe 4. Néanmoins, ces fonctions bi-orthogonales, associées à la première famille, ne permettent pas d'obtenir un recollement de bonne qualité. En fait, le même défaut que pour les fonctions de la première famille se retrouve tout naturellement (perturbations des champs au niveau de l'interface de recollement, comme cela sera montré dans la suite).

### c. Utilisation des fonctions nodales bi-orthogonales

Pour la deuxième famille de fonctions d'arêtes, des fonctions aux propriétés intéressantes peuvent être construites à partir des fonctions nodales bi-orthogonales. Ces fonctions seront notées  $\mathbf{w}''_{ai_1}$  et  $\mathbf{w}''_{ai_2}$  pour une arête  $i$  donnée. Elles peuvent être utilisées pour la construction de  $[C_a]$  et  $[D_a]$  ((2.20) et (2.21)). Soit  $k$  et  $l$  des indices de valeur 1 ou 2, alors le terme élémentaire de  $[C_a]$  s'écrira :

$$\mathbf{c}_{i,j,k,l} = \int_{\Gamma_R} \mathbf{w}''_{ai_k} \cdot \mathbf{w}'_{aj_l} dS \quad (2.59)$$

En notant  $m$  et  $o$  les nœuds de l'arête  $i$ , et  $p$  et  $q$  ceux de l'arête  $j$ , il est possible d'écrire, par définition des fonctions d'arêtes :

$$\mathbf{w}''_{ai_k} = w'_{nm} \mathbf{grad} w'_{no} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{w}'_{aj_l} = w_{np} \mathbf{grad} w_{nq} \quad (2.61)$$

Dans ce cas, en prenant des éléments nodaux du 1<sup>er</sup> ordre (*i. e.* les fonctions nodales et les fonctions nodales bi-orthogonales sont de degré un), les termes de la matrice  $[C_a]_{\Delta}$  se répartissent de la façon suivante :

$$[C_a] = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & c_{25} & 0 \\ c_{13} & 0 & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & c_{46} \\ 0 & c_{25} & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Et représentent les interactions entre les arêtes définies dans le Tableau 4 :

|         |           | Arête 1   |           | Arête 2   |           | Arête 3   |           |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|         |           | $W_{a11}$ | $W_{a12}$ | $W_{a21}$ | $W_{a22}$ | $W_{a31}$ | $W_{a32}$ |
| Arête 1 | $W_{a11}$ | $C_{11}$  | -         | $C_{13}$  | -         | -         | -         |
|         | $W_{a12}$ | -         | $C_{22}$  | -         | -         | $C_{25}$  | -         |
| Arête 2 | $W_{a21}$ | $C_{13}$  | -         | $C_{33}$  | -         | -         | -         |
|         | $W_{a22}$ | -         | -         | -         | $C_{44}$  | -         | $C_{46}$  |
| Arête 3 | $W_{a31}$ | -         | $C_{25}$  | -         | -         | $C_{55}$  | -         |
|         | $W_{a32}$ | -         | -         | -         | $C_{46}$  | -         | $C_{66}$  |

Tableau 4 : Allure de  $[C_a]$  pour les arêtes

Ces nouvelles fonctions d'arêtes, bien que ne rendant pas la matrice diagonale, permettent de réduire le nombre d'éléments non nuls de la matrice complète  $[C_a]$ .

#### **IV. Analyse des méthodes sur des cas académiques**

Dans ce paragraphe les méthodes de recollement introduites précédemment vont être testées sur des exemples académiques. Le premier exemple, magnétostatique, est un cube parcouru par une densité de courant, et le second exemple, magnétodynamique, une sphère creuse soumise à un champ sinusoïdal.

##### **A. Cas magnétostatique**

Cette partie va permettre de valider les méthodes de recollement sur un exemple magnétostatique. Ce système sera tout d'abord décrit, puis les résultats des deux formulations seront présentés. Cette partie se conclura sur un bilan des résultats obtenus.

## 1. Présentation

Le système étudié est un cube d'un mètre de côté, de perméabilité  $\mu_0$  traversé par une densité de courant de  $10^7 \text{ A/m}^2$  (Figure 13) [1]. Il est défini avec des conditions aux limites de type  $\Gamma_B$  sur toute sa frontière. Pour ce cas test, il existe une solution analytique pour l'énergie magnétique ( $W_{\text{mag}} = 2,208 \text{ MJ}$ ).

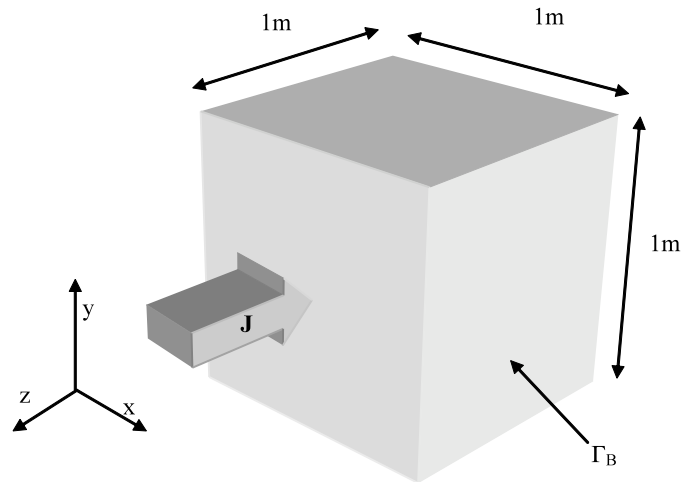


Figure 13 : Structure étudiée : cube de 1m de côté

Le recollement se fera sur un plan traversant le cube au tiers. Le domaine  $D_1$  représente les deux tiers du cube et le domaine  $D_2$  la partie restante (Figure 14).

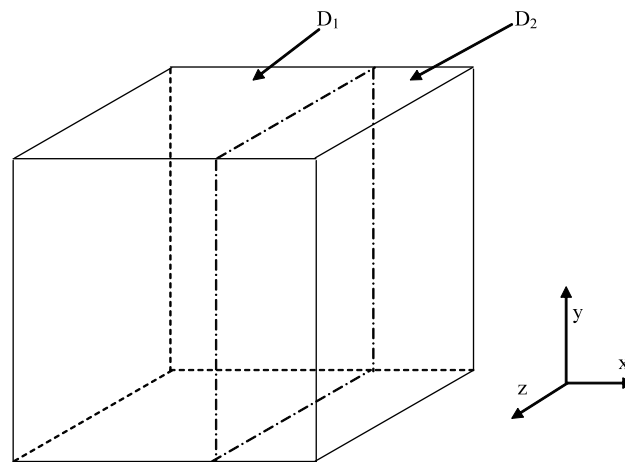


Figure 14 : Décomposition du cube en deux sous domaines

L'objectif est de valider le recollement de maillages en magnétostatique. Ainsi, trois séries de calculs sont proposés : les premiers sur un maillage grossier sans recollement, les deuxièmes sur un maillage fin sans recollement, et les derniers sur un maillage avec recollement.

Ce troisième maillage reprendra une partie du maillage grossier (dans  $D_1$ ), et une partie du maillage fin (dans  $D_2$ ) (Figure 15). Lors de la réalisation du maillage M3, le sous-domaine  $D_1$  a été maillé de la même façon que M1. Par contre, pour le maillage de  $D_2$  dans M3, il n'a pas été possible d'imposer exactement le même que dans M2.

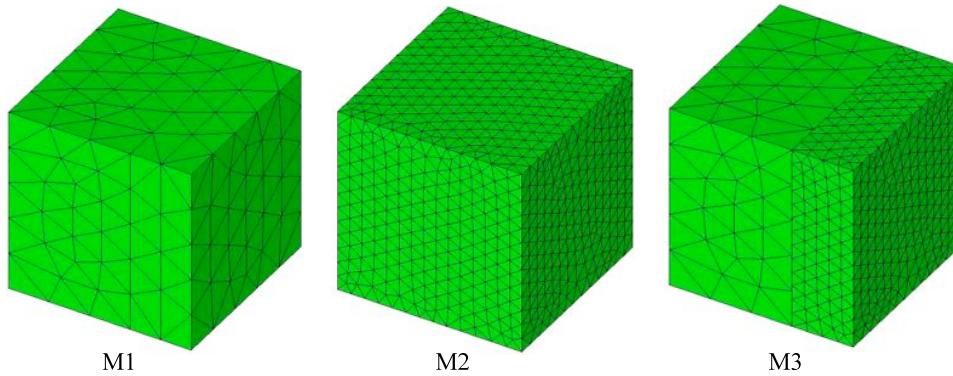


Figure 15 : Maillages M1, M2 et M3 utilisés

Le Tableau 5 regroupe les caractéristiques des différents maillages.

| Maillage | Nombre d'éléments | Nombre de nœuds |
|----------|-------------------|-----------------|
| M1       | 839               | 244             |
| M2       | 10 191            | 2 312           |
| M3       | 4 162             | 1 130           |

Tableau 5 : Propriétés des maillages du cube

Pour valider le recollement, plusieurs aspects seront étudiés. Tout d'abord les tailles des matrices seront comparées. Ensuite les énergies calculées seront confrontées pour s'assurer de la conservation d'une grandeur globale. Puis, une grandeur locale (l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ ) sera comparée. Cette comparaison sera d'abord effectuée sur des répartitions de l'induction magnétique, qui vont permettre de visualiser l'impact du recollement sur le système. Enfin, les composantes de  $\mathbf{B}$  seront également comparées le long de la ligne définie sur la Figure 16.

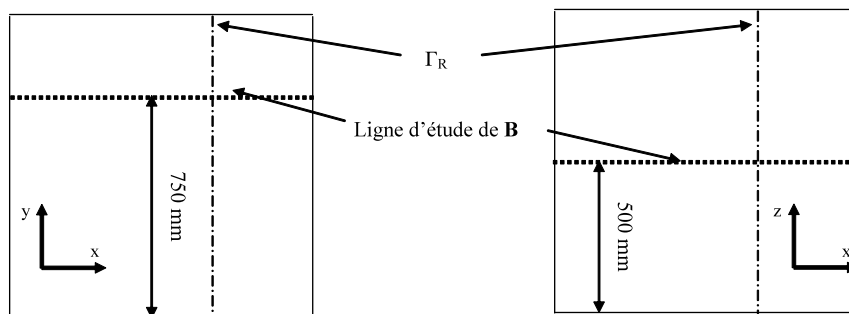


Figure 16 : Définition de la ligne d'étude de  $\mathbf{B}$

Les résultats présentés dans cette partie ont été effectués avec des méthodes de résolution itératives. Il est ainsi possible de comparer les différentes convergences obtenues.

De plus, lors de la résolution, les conditions suivantes sont imposées :

- Critère d'arrêt  $r_i \leq 10^{-7}$ , critère défini en (1.128), et rappelé ici :

$$r_i = \frac{\| [F] - [M][X_i] \|}{\| [F] - [M][X_0] \|} \quad (2.63)$$

- Nombre d'itérations maximum  $It_{\max} = 10\,000$ , chiffre excessivement élevé, permettant de s'assurer la résolution n'a pas convergé.

Les calculs ont été mené avec un processeur Intel Xeon 5130 à 2 Ghz et 24 Go de ram.

## 2. Résultats en formulation en potentiel scalaire $\Omega$

Pour la formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , l'étude sera menée en considérant les différentes méthodes de recollement, ainsi que les différentes familles de fonctions. Les calculs seront menés en utilisant les fonctions de formes nodales classiques, puis les fonctions nodales bi-orthogonales (utilisées uniquement pour le calcul des matrices  $[C_n]$  et  $[D_n]$ ). Ces fonctions seront utilisées pour chaque méthode (SL, DL et Mortar).

Le Tableau 6 reprend les principales caractéristiques des matrices de cette formulation.

| Maillages   | Nombre d'inconnues<br>(dont liées au<br>recollement) | Nombre de termes non-nuls total<br>(dont associés au recollement) |                               |       |
|-------------|--|---|-------------------------------|-------|
|             |  | Fonctions<br>classiques   | Fonctions bi-<br>orthogonales |       |
| M1          | 244  | 1 502   |                               |       |
| M2          | 2 312  | 15 972  |                               |       |
| M3 (SL)     | 1 348 (218)  | 9 796 (2 590)   | 8 587 (1 381)                 |       |
| M3 (DL)     | 1 566 (436)  | 13 040 (5 834)  | 10 622 (3 416)                |       |
| M3 (Mortar) | $[T]^t [M] [T]$                                      | 912   | 9 039                         | 7 111 |
|             | $[M]$  | 1 130 (218)   | 7 206                         | 7 206 |
|             | $[T]$  |   | 3 172                         | 2 073 |

**Tableau 6 : Propriétés des matrices pour le cube, formulation  $\Omega$**

Ce tableau montre bien les différences entre les matrices obtenues, et donc les espaces mémoires nécessaires pour chaque formulation. L'intérêt des fonctions bi-orthogonales apparaît ici clairement : les tailles des matrices obtenues pour M3 sont réduits grâce à l'utilisation de ces fonctions pour le calcul des opérateurs  $[C_n]$  et  $[D_n]$ . Par ailleurs, le recollement permet aussi de réduire les espaces mémoires alloués aux différents systèmes.

**Comparaison d’une grandeur globale et d’une grandeur locale**

Pour ce problème, l’énergie globale peut être calculée analytiquement (2,208 MJ). Il est ainsi possible de comparer une grandeur globale (l’énergie magnétique), afin de s’assurer que les solutions sont équivalentes (Tableau 7).

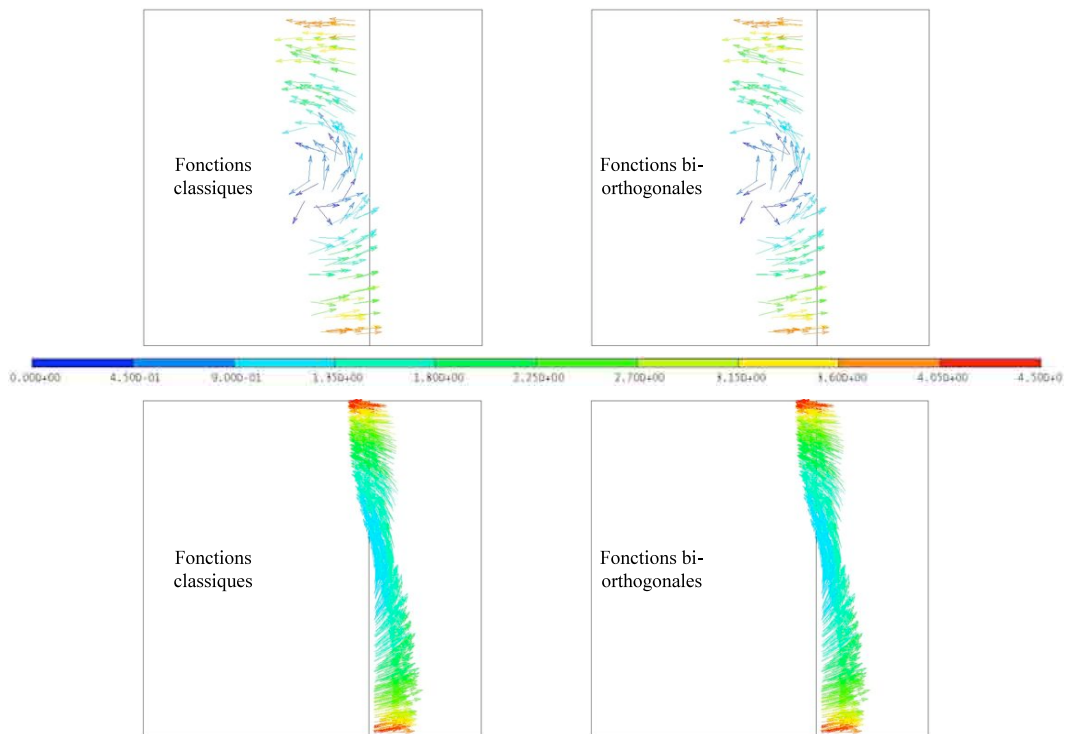
| Maillage     | Fonctions       | M1    | M2    | M3 (SL) | M3 (DL) | M3 (Mortar) | Analytique |
|--------------|-----------------|-------|-------|---------|---------|-------------|------------|
| Energie (MJ) | Classiques      | 2,321 | 2,231 | 2,284   | 2,284   | 2,284       | 2,208      |
|              | Bi-orthogonales |       |       |         |         |             |            |

**Tableau 7 : Energies magnétiques calculées pour le cube, formulation  $\Omega$**

Ce tableau montre que les trois méthodes de recollement donnent des résultats identiques et cohérents du point de vue énergétique, quelle que soit la fonction utilisée. La valeur calculée avec recollement se situe entre les deux valeurs de références. Cela s’explique par le fait qu’une partie du maillage recollé est fin.

Afin de valider la qualité de la solution, la répartition d’une grandeur locale, à savoir l’induction magnétique **B**, est comparée au travers de cartes de champs, et de graphiques représentant ses différentes composantes, calculées le long de la ligne définie Figure 16.

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus selon la fonction de forme choisie pour le calcul de  $[C_n]$  et  $[D_n]$ . La Figure 17 présente l’induction sur la surface de recollement obtenue avec la méthode Mortar.



**Figure 17 : Induction magnétique par les deux types de fonctions de formes sur  $\Gamma_R$ , formulation  $\Omega$**



Sur cet exemple, on peut vérifier que les fonctions de formes n'ont pas d'effet sur la qualité du recollement, quelle que soit la méthode utilisée (SL, DL ou Mortar).

De même, la répartition de l'induction magnétique est la même au niveau de l'interface de recollement (Figure 18).

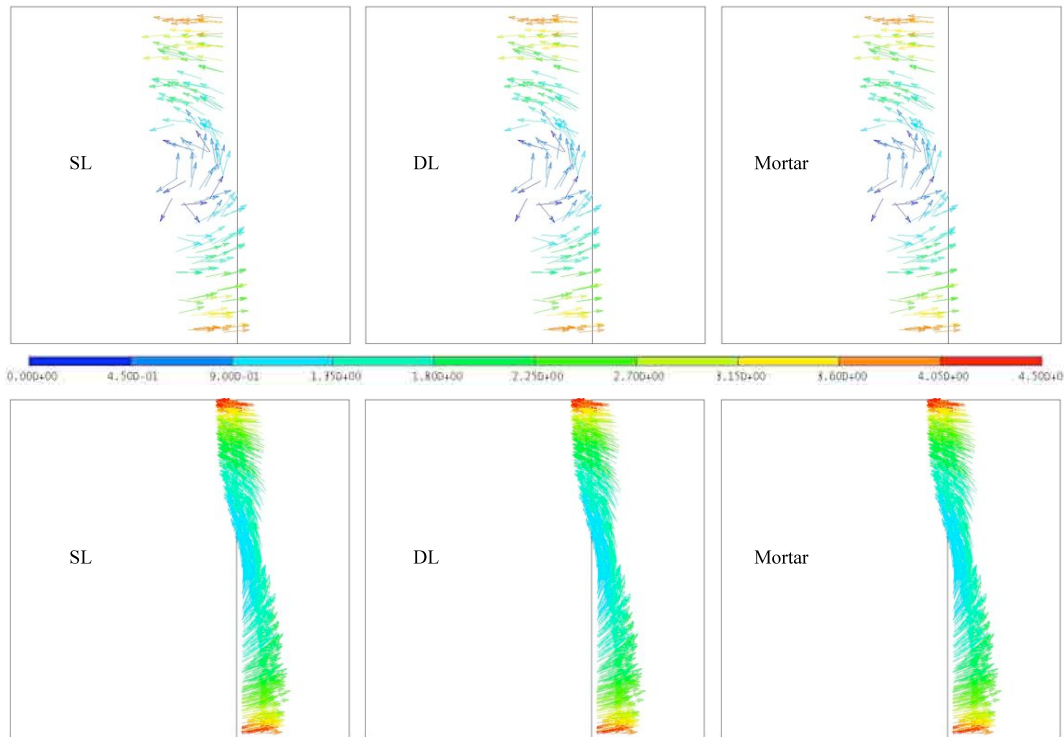


Figure 18 : Induction magnétique obtenue avec les différentes méthodes de recollement sur  $\Gamma_R$ , formulation  $\Omega$

En dernier lieu, les répartitions de  $\mathbf{B}$  dans le maillage recollé peut être comparée à celle dans les maillages sans recollement de référence. Ainsi, la répartition dans le sous-domaine  $D_1$ , au niveau de l'interface de recollement, sera comparée à celle obtenue dans le maillage M1 (Figure 19).

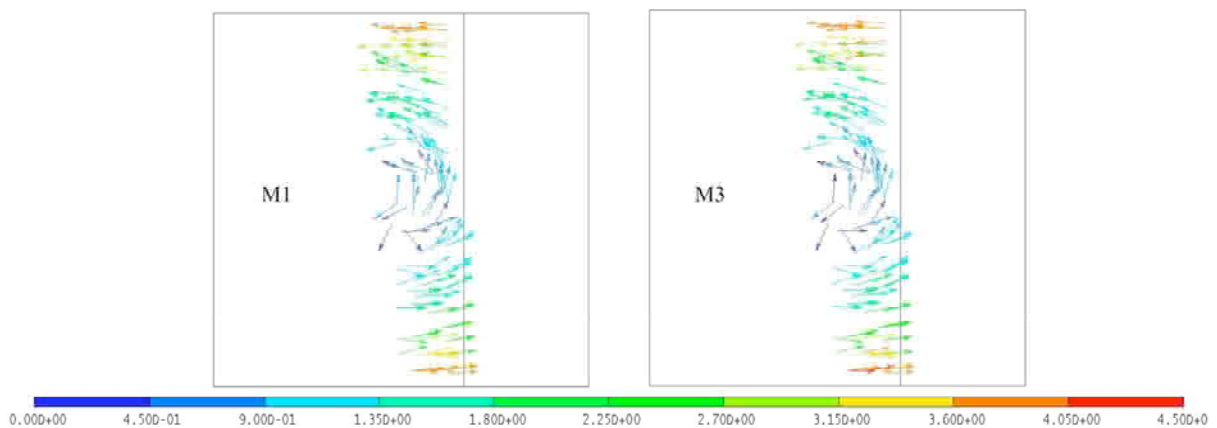


Figure 19 : Répartition de l'induction magnétique sur  $\Gamma_R$ , formulation  $\Omega$

De même la répartition de  $\mathbf{B}$  dans  $D_2$  est comparée à celle obtenue dans M2 (Figure 20).

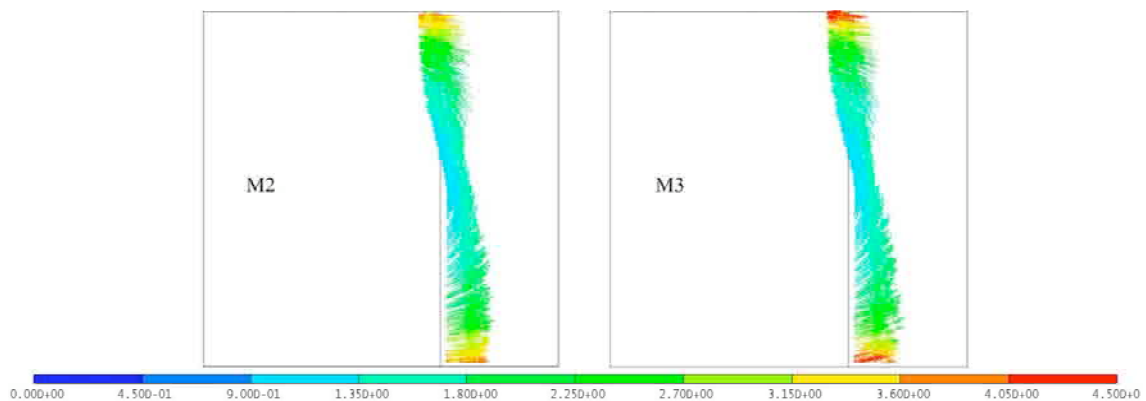


Figure 20 : Comparaison des répartitions de  $\mathbf{B}$  sur  $\Gamma_R$ , formulation  $\Omega$

Ces figures permettent de voir que le recollement donne une répartition d'induction magnétique proche de celles obtenues sur les références. Le recollement permet donc bien, dans ce cas, de transmettre les inconnues entre les deux sous-domaines.

Afin de compléter cette étude, les composantes de l'induction magnétique sont tracées le long de la ligne définie Figure 17. Compte tenu de l'orientation de la densité de courant, la composante  $B_z$  est nulle. Les évolutions  $B_x$  et  $B_y$  sont représentées Figure 22.

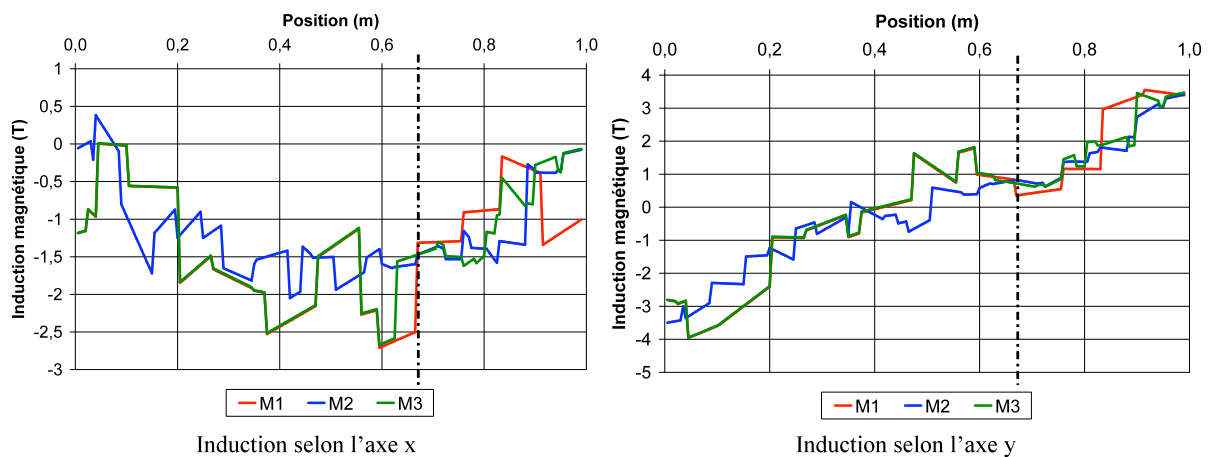


Figure 21 : Composantes de l'induction magnétique, formulation  $\Omega$

Ces deux graphiques permettent de vérifier les répartitions de l'induction magnétique dans le cube pour M3. Ils montrent que dans le domaine  $D_1$ , qui correspond au maillage M1, les valeurs de l'induction magnétique sont égales à celles de M3. En effet, lors de la réalisation du maillage M3, le sous-domaine  $D_1$  a été maillé de la même façon que M1. Pour le maillage de M3 de  $D_2$ , il n'a pas été possible d'imposer avec le mailleur exactement le même maillage que M2. Néanmoins, malgré les différences, les valeurs calculées en fonction de la position sont très proches.

**Comparaison des temps de calculs et nombres d'itérations**

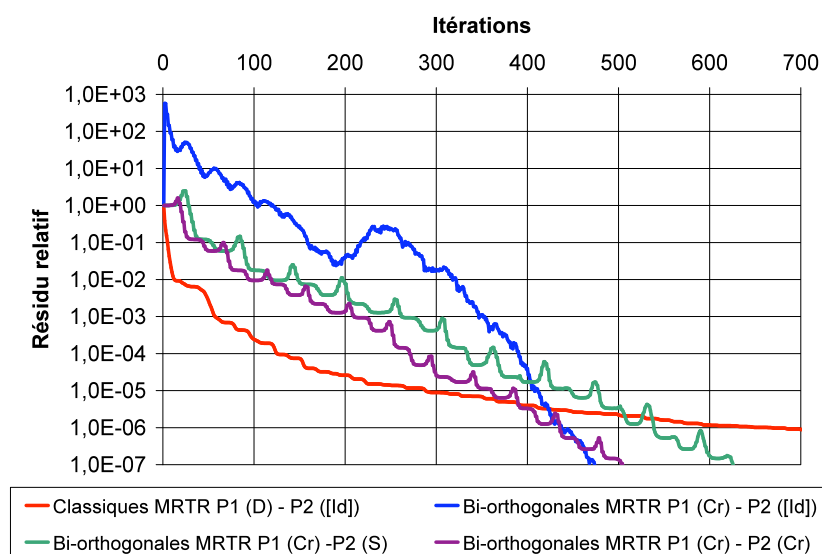
Le dernier aspect à comparer sur cet exemple est le temps de calcul. En formulation  $\Omega$ , le maillage grossier demande, par la méthode du gradient conjugué avec préconditionnement de type Crout, 14 itérations (0,24 s), et le maillage fin 28 itérations (1,03 s).

Tout d'abord, le Tableau 8 présente les résultats des méthodes de résolution pour les simples multiplicateurs de Lagrange (SL). Pour mémoire, la notation [Id] représente l'identité (donc pas de préconditionneur), D est noté pour un préconditionneur diagonal, S un préconditionneur SSOR, et Cr signifie qu'un préconditionneur Crout est utilisé. La notation P1 (D) – P2 ([Id]) correspond à un préconditionneur par bloc (cf Chapitre 2).

| Fonctions utilisées   | Classiques              | Bi-orthogonales         |                          |                       |                        |      |
|-----------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|-----------------------|------------------------|------|
| Méthode de résolution | MRTR P1 (D) – P2 ([Id]) | MRTR P1 (D) – P2 ([Id]) | MRTR P1 (Cr) – P2 ([Id]) | MRTR P1 (Cr) - P2 (S) | MRTR P1 (Cr) - P2 (Cr) | BiCG |
| Temps (s)             | 1,18                    | 0,55                    | 0,62                     | 0,68                  | 0,65                   | 0,96 |
| Nombre d'itérations   | 1123                    | 444                     | 473                      | 625                   | 504                    | 3058 |

**Tableau 8 : Temps et nombre d'itérations pour les SL, formulation  $\Omega$**

En premier lieu, ce tableau montre que les fonctions classiques, dans le cas des SL, demandent un temps et un nombre d'itérations plus élevé que les fonctions bi-orthogonales. En outre, la méthode de résolution la plus rapide est la méthode MRTR avec un préconditionneur diagonal. La Figure 22 représente les convergences de ces résolutions.



**Figure 22 : Graphique de convergences, SL, formulation  $\Omega$**

Ce graphique des convergences permet de valider les fonctions bi-orthogonales comme les fonctions les plus intéressantes pour la résolution d'un système matriciel obtenu par le recollement, dans le cas des SL.

Le Tableau 9 reprend les méthodes de résolution propres aux doubles multiplicateurs de Lagrange. L'impact du paramètre  $\alpha$  est mis en évidence avec la méthode MRTR par les trois dernières colonnes du tableau (pour les autres calculs, ce paramètre est fixé à un). En ajustant le paramètre  $\alpha$ , il est possible d'obtenir des valeurs discrètes associées au Lagrangien du même ordre de grandeur que les potentiels scalaires recherchés.

| Fonctions utilisées | Classiques              | Bi-orthogonales |       |                         |         |                         |                         |                         |
|---------------------|-------------------------|-----------------|-------|-------------------------|---------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| Méthode             | MRTR P1 (D) – P2 ([Id]) | CG D            | CG Cr | MRTR P1 (D) – P2 ([Id]) | MRTR Cr | MRTR $\alpha = 10^{-3}$ | MRTR $\alpha = 10^{-5}$ | MRTR $\alpha = 10^{-7}$ |
| Temps (s)           | 2,48                    | 0,52            | 0,48  | 0,57                    | 0,5     | 0,67                    | 0,64                    | 0,77                    |
| Nombre d'itérations | 9 561                   | 533             | 73    | 495                     | 73      | 1025                    | 826                     | 1538                    |

Tableau 9 : Temps et nombre d'itérations pour les DL, formulation  $\Omega$

Comme pour les SL, ce tableau montre que les fonctions de forme classiques, bien que permettant de résoudre le système, demandent un temps et un nombre d'itérations trop élevés.

De plus, il apparaît que les meilleures méthodes de résolution pour un système avec les DL sont le gradient conjugué classique ou la méthode MRTR avec une décomposition de Crout. Cela peut être illustré par le graphique de convergences (Figure 23).

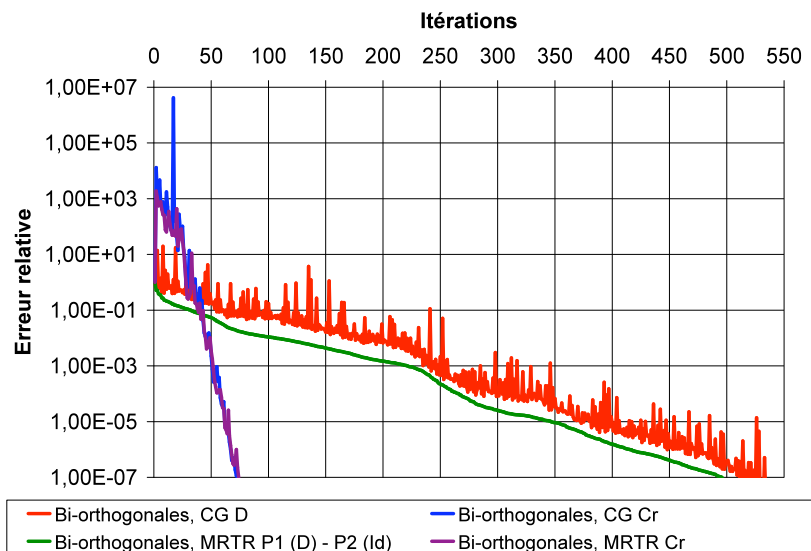


Figure 23 : Evolution de la convergence, méthode DL, formulation  $\Omega$

Ce graphique confirme le gain en nombre d'itérations obtenu par le préconditionnement de type Crout. Par ailleurs, le tableau montre également un autre phénomène : en agissant sur le paramètre  $\alpha$ , la convergence peut être sensiblement accélérée. Néanmoins, il est difficile de trouver une valeur optimale à  $\alpha$ .

Dans le cas du recollement par la méthode Mortar, deux possibilités ont été envisagées pour la résolution. La première consiste à construire les matrices  $[T]$  et  $[M]$  du système, puis à faire le produit  $[T]^t [M] [T]$ , et utiliser un solveur classique. Cette construction permet d'obtenir un système matriciel global à résoudre. La seconde consiste à adapter les solveurs pour qu'ils prennent en compte les matrices séparément, comme présenté en Annexe 1. Ces solveurs ne nécessitent donc pas la construction du système global.

Ainsi en premier lieu, le Tableau 10 présente les résultats obtenus en construisant le système matriciel global à résoudre, et en calculant directement le préconditionneur à partir de cette matrice.

| Méthode                   |                     | CG   | CG D | CG S | CG Cr | MRTR S | MRTR Cr |
|---------------------------|---------------------|------|------|------|-------|--------|---------|
| Fonctions bi-orthogonales | Temps (s)           | 0,68 | 0,69 | 0,66 | 0,67  | 0,68   | 0,68    |
|                           | Nombre d'itérations | 103  | 62   | 26   | 23    | 26     | 23      |

**Tableau 10 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec construction, formulation  $\Omega$**

Dans ce tableau, il apparaît que la méthode la plus rapide est le gradient conjugué avec un préconditionneur SSOR. Le préconditionneur de type Crout, bien que demandant moins d'itérations pour la résolution, est plus long à construire que celui de la méthode SSOR.

Ensuite, le Tableau 11 présente les résultats pour des méthodes sans construction du système global, mais préconditionnant néanmoins l'ensemble du système (exemple d'algorithme donné en Annexe 1).

| Fonctions utilisées | Classiques | Bi-orthogonales |      |        |
|---------------------|------------|-----------------|------|--------|
| Méthode             | MRTR D     | CG              | CG D | MRTR D |
| Temps (s)           | 1,08       | 0,6             | 1,02 | 0,58   |
| Nombre d'itérations | 58         | 103             | 62   | 58     |

**Tableau 11 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar sans construction, formulation  $\Omega$**

Comme pour les méthodes basées sur les opérateurs de Lagrange, les fonctions de forme classiques convergent. Le temps nécessaire à la résolution est cependant plus court lors de

l'utilisation des fonctions bi-orthogonales : le calcul de  $[C_n]$ ,  $[D_n]$ , et  $[T]$  est plus rapide dans ce cas.

Les deux tableaux précédents montrent qu'il est intéressant de conserver les matrices  $[T]$  et  $[M]$  séparées, et d'adapter solveur et préconditionneur à ce type de structure matricielle. En effet, si le CG non préconditionné est pris comme référence, il apparaît que la construction du système global est un facteur pénalisant la durée du calcul. Par ailleurs, il apparaît dans ce tableau que la méthode la plus rapide, pour la résolution du système, est la méthode MRTR avec un préconditionneur diagonal.

Si le système global n'est pas construit, alors la matrice  $[T]$  peut être décomposée selon la méthode QR. Cette décomposition peut se faire selon trois algorithmes différents : Gram-Schmidt, Householder et Givens [58] (Annexe 1). Dans la suite, seules les méthodes de Gram-Schmidt et Householder ont été étudiées.

Dans le Tableau 12, les temps de résolution avec la méthode de Gram-Schmidt sont présentés dans le cas de préconditionneurs à gauche et en split. Les systèmes matriciels associés à ces deux types de préconditionnements sont précisés en Annexe 1.

| Méthode                   |                     | CG QR | CG QR D | CG QR D à gauche | CG QR Cr | CG QR Cr à gauche |
|---------------------------|---------------------|-------|---------|------------------|----------|-------------------|
| Fonctions bi-orthogonales | Temps (s)           | 0,74  | 0,68    | 0,69             | 0,68     | 0,68              |
|                           | Nombre d'itérations | 465   | 246     | 246              | 138      | 139               |

**Tableau 12 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec QR Gram-Schmidt, formulation  $\Omega$**

Il apparaît que le meilleur préconditionneur associé à la matrice  $[M]$  est une décomposition de Crout. Le Tableau 13 reprend les méthodes de résolution avec la décomposition QR par la méthode de Householder.

| Méthode                   |                     | CG QR | CG QR D | CG QR D à gauche | CG QR S à gauche | CG QR Cr | CG QR Cr à gauche |
|---------------------------|---------------------|-------|---------|------------------|------------------|----------|-------------------|
| Fonctions bi-orthogonales | Temps (s)           | 1,04  | 1,02    | 1,04             | 0,88             | 0,87     | 1,1               |
|                           | Nombre d'itérations | 108   | 62      | 62               | 36               | 31       | 76                |

**Tableau 13 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec QR Householder, formulation  $\Omega$**

Il apparaît dans ces tableaux que la méthode la plus rapide est la décomposition QR par la méthode de Gram-Schmidt, et préconditionnement de la partie éléments finis de type Crout.

Selon la méthode de décomposition (Gram-Schmidt ou Householder), les temps de calculs ne sont pas les mêmes avec des préconditionneurs *a priori* identiques. L'explication se

trouve essentiellement dans la programmation, puisque les algorithmes utilisés durant les travaux de thèse ne donnent pas les mêmes éléments : l’algorithme du Gram-Schmidt donne directement les matrices [Q] et [R], tandis que celui de Householder donne [R] et un ensemble de vecteurs  $[w_i]$  qui définissent [Q] par leur produit (voir Annexe 1).

Ces différents tableaux sont complétés par l’évolution des convergences (Figure 24).

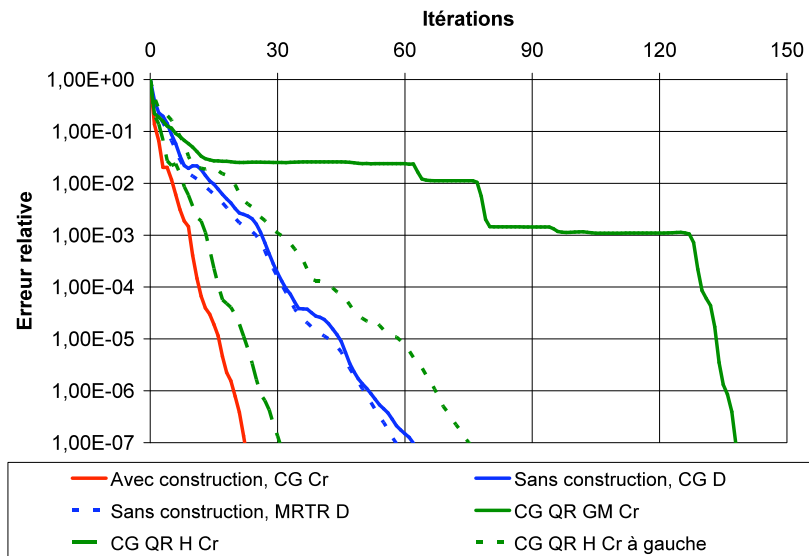


Figure 24 : Graphique des convergences, Mortar, formulation  $\Omega$

Pour la méthode Mortar, dans le cas du cube, la meilleure méthode (en considérant le temps de calcul) est la méthode MRTR, sans construction du système  $[T]^t [M] [T]$ , avec un préconditionneur diagonal global. En considérant le nombre d’itération, la meilleure méthode est le gradient conjugué (ou MRTR) avec un préconditionnement par la méthode de Crout.

### Conclusion

Cet exemple permet tout d’abord de valider les méthodes de recollement, dans le cas de la formulation  $\Omega$ .

Les différentes fonctions de forme ont été testées. Il est apparu que les différentes familles permettaient de réaliser un recollement satisfaisant. Néanmoins, les tailles des matrices, les temps de calculs, et les nombres d’itérations sont plus élevés en utilisant les fonctions de formes nodales classiques, qu’avec les fonctions bi-orthogonales. Cela confirme donc l’intérêt de ces fonctions bi-orthogonales, pour la formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ .

Les différentes méthodes de recollement ont aussi été comparées. Pour ce système, elles sont équivalentes en terme de qualité de recollement, aussi bien sur une grandeur globale que sur une grandeur locale. Il semble que les DL soient la méthode de recollement la plus

intéressante. Les SL et la méthode Mortar demandent un temps plus long pour résoudre le système. Néanmoins, les DL nécessitent plus d'itérations, et plus d'espace mémoire que les autres méthodes de recollement.

### 3. Résultats en formulation en potentiel vecteur A

Les calculs vont être menés en utilisant la formulation magnétostatique en potentiel vecteur **A**. Tout comme pour l'étude précédente en formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , les différentes fonctions de formes ainsi que les différentes méthodes seront comparées. Cette étude s'appuiera sur la comparaison d'une grandeur globale (l'énergie), d'une grandeur locale (l'induction magnétique), et des temps de calculs nécessaires à l'obtention d'une solution.

Dans le tableau 14, nous donnons les principales propriétés des systèmes d'équations obtenus avec les différentes fonctions de forme.

| Fonctions utilisées pour $[C_a]$ et $[D_a]$ | Maillage    | Nombre de lignes de la matrice (dont liées au recollement) | Nombre de termes dans la matrice (dont liés au recollement) |         |
|---|-------------|--|---|---------|
|   | M1          | 730  | 5 175   |         |
|   | M2          | 10 186   | 80 052  |         |
| Classiques                                  | M3 (SL)     | 4 886 (547)  | 37 493 (5 687)  |         |
|   | M3 (DL)     | 5 433 (1 094)  | 44 821 (13 015)   |         |
|   | M3 (Mortar) | $[T]^t [M] [T]$  | 3 792   | 52 744  |
|   |             | $[M]$  | 4 339 (547)   | 31 806  |
|   |             | $[T]$  |   | 44 207  |
| Deuxième famille                            | M3 (SL)     | 6 054 (1 094)  | 62 563 (22 748)   |         |
|   | M3 (DL)     | 7 148 (2 188)  | 88 593 (48 778)   |         |
|   | M3 (Mortar) | $[T]^t [M] [T]$  | 3 866   | 120 482 |
|   |             | $[M]$  | 4 960 (1 094)   | 39 815  |
|   |             | $[T]$  |   | 165 778 |
| Fonctions $w_a^{//}$                        | M3 (SL)     | 6 054 (1 094)  | 55 193 (15 378)   |         |
|   | M3 (DL)     | 7 148 (2 188)  | 73 853 (34 038)   |         |
|   | M3 (Mortar) | $[T]^t [M] [T]$  | 3 866   | 50 516  |
|   |             | $[M]$  | 4 960 (1 094)   | 39 815  |
|   |             | $[T]$  |   | 20 022  |

Tableau 14 : Propriétés des matrices pour le cube, formulation A



Comme vu auparavant, l'utilisation de la deuxième famille augmente le nombre d'inconnues et le nombre de termes dans les différentes matrices. De même, l'utilisation des fonctions  $\mathbf{w}_a''$ , définies en (2.62) et (2.63), permet de réduire la taille des différents opérateurs de recollement de façon importante dans le cas de la méthode Mortar, même par rapport à la première famille de fonctions de forme.

**Comparaison d'une grandeur globale et d'une grandeur locale**

Quelle que soit les fonctions de forme utilisées, les calculs utilisant les simples multiplicateurs de Lagrange n'ont pas convergés compte tenu de la précision fixée à  $10^{-7}$ . Il en est de même pour les calculs utilisant les DL et la deuxième famille de fonctions d'arêtes.

Les résultats présentés ici ne prendront en compte que les DL, avec la première famille de fonctions et les fonctions  $\mathbf{w}_a''$ , et la méthode Mortar avec les trois types de fonctions.

En premier lieu, les énergies obtenues pour les différents calculs réalisés avec les différentes méthodes de recollement (DL et Mortar) sont identiques (Tableau 15).

| Maillage     | Fonctions                  | M1    | M2    | M3 (DL) | M3 (Mortar) | Analytique |
|--------------|----------------------------|-------|-------|---------|-------------|------------|
| Energie (MJ) | Première famille           | 2,181 | 2,039 | 2,091   | 2,091       | 2,208      |
|              | Deuxième famille           |       |       | /       | 2,096       |            |
|              | Fonctions $\mathbf{w}_a''$ |       |       | 2,096   |             |            |

**Tableau 15 : Energies magnétiques, formulation A**

Ce tableau permet de mettre en évidence un écart entre les différentes fonctions de formes utilisées. L'utilisation de la première famille pour calculer les opérateurs de recollement  $[C_a]$  et  $[D_a]$  conduit, dans tous les cas, à une solution globalement moins précise qu'avec la deuxième famille ou les fonctions  $\mathbf{w}_a''$ .

Tout comme dans le cas des éléments finis classique, en comparant le Tableau 7 et le Tableau 15, la notion de solution par excès et par défaut se retrouve ([15] et [37]).

Les répartitions de l'induction magnétique à l'interface de recollement, du côté de  $D_2$ , peuvent être comparées selon les fonctions de forme et la méthode utilisées (Figure 25).

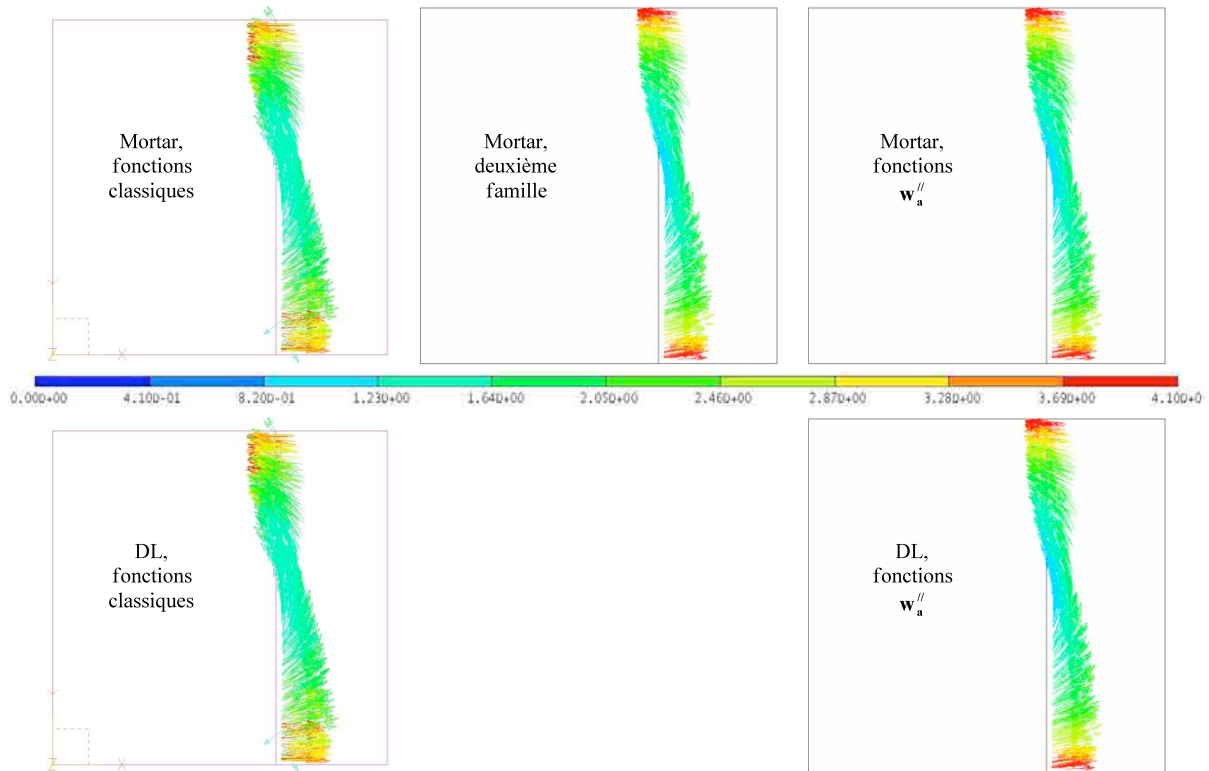


Figure 25 : Répartition de l'induction magnétique sur  $\Gamma_R$ , formulation A

Comme en formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , les différentes méthodes de recollement (DL et Mortar) donnent des répartitions de l'induction magnétiques identiques. Néanmoins, la première famille de fonction donne un résultat perturbé au niveau de l'interface quelle que soit la méthode de recollement utilisée [22]. Ce type de fonctions ne sera donc plus considéré par la suite. La deuxième famille de fonctions, ou les fonctions  $\mathbf{w}_a''$ , permettent d'obtenir un recollement d'allure satisfaisante. De fait, l'utilisation de cette deuxième famille ou des fonctions  $\mathbf{w}_a''$  est justifiée par la meilleure qualité du recollement. De plus, ces deux fonctions donnent des solutions équivalentes dans le sous-domaine  $D_1$ . De même, la méthode de recollement n'intervient pas sur la répartition de l'induction magnétique.

Pour finir, les résultats sont comparés aux références obtenues sur les maillages M1 et M2. La deuxième famille de fonctions et les fonctions  $\mathbf{w}_a''$  donnent les mêmes résultats, il n'est donc pas nécessaire de les représenter ici. De même, il n'est pas nécessaire de représenter les deux méthodes de recollement, qui donnent pour ce système des résultats identiques.

Ainsi, la Figure 26 présente uniquement les références, et le résultat obtenu par recollement dans le cas de la méthode Mortar, avec les fonctions  $\mathbf{w}_a''$ .

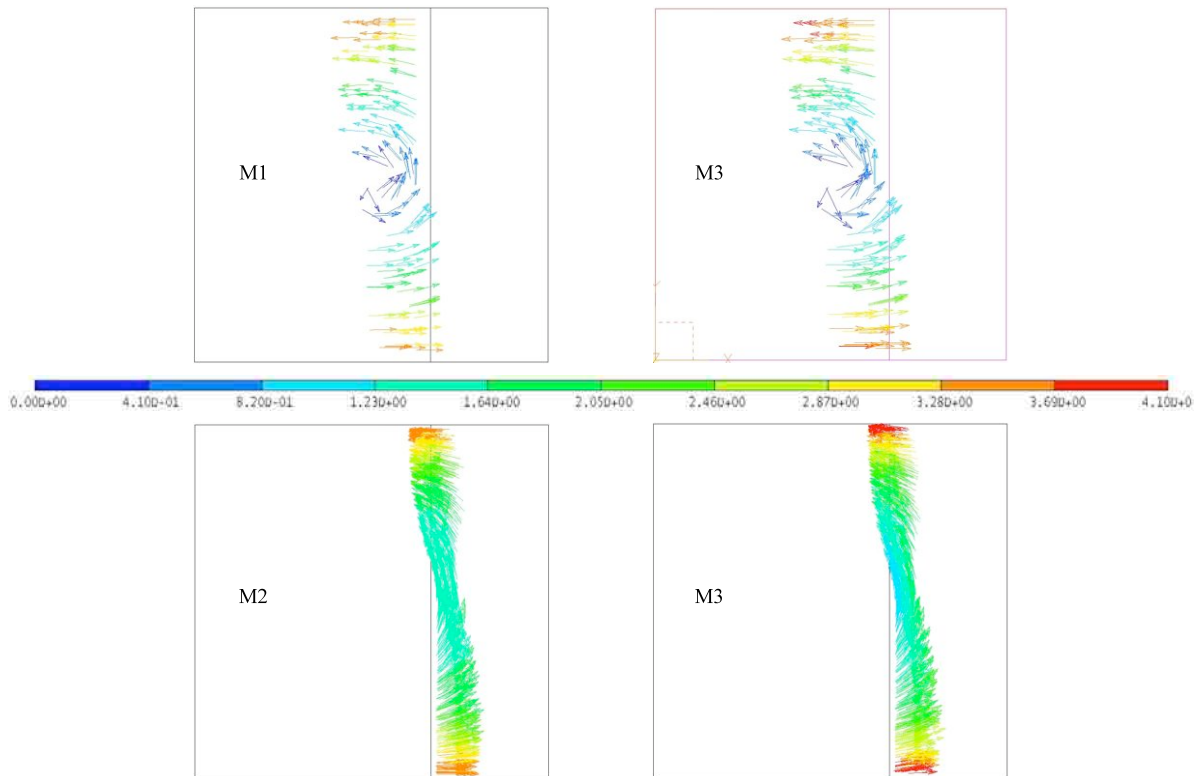


Figure 26 : Répartition de l'induction magnétique sur  $\Gamma_R$ , formulation A

Ici encore, comme en formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , les résultats au niveau de l'interface  $\Gamma_R$  sont identiques dans chaque sous-domaine du système, entre les références, et le maillage M3 recollé. Le recollement permet bien de reconstruire une solution équivalente aux solutions obtenues sur les maillages non recollés.

Il est possible de tracer la valeur des composantes  $B_x$  et  $B_y$  de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  le long de la ligne définie Figure 16, pour cette formulation (Figure 27).

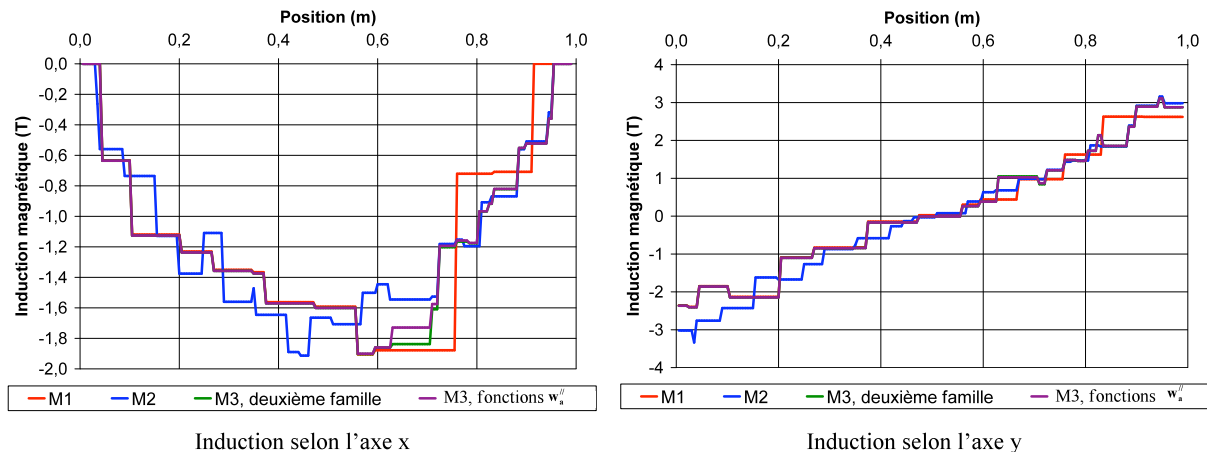


Figure 27 : Composantes de l'induction en fonction de la position, formulation A

Tout comme pour la formulation  $\Omega$ , les différentes composantes de l'induction magnétique, calculées dans M3, sont proches de celles calculées avec M1 dans  $D_1$  et de M2 dans  $D_2$ .

### **Comparaison des temps de calculs et nombres d'itérations**

A titre indicatif, la résolution en formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  du système éléments finis du maillage fin demande 1,08 s, et 46 itérations, tandis que le maillage grossier demande 21 itérations et 0,23 s.

Comme souligné auparavant, la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange ne permet pas de résoudre le système dans des temps et nombres d'itérations satisfaisants. En effet, pour la formulation en potentiel vecteur, le système est plus délicat à inverser.

Par ailleurs, dans le cas des SL et des DL, il semblerait que la différence des ordres de grandeurs entre les termes de la matrice relatifs aux éléments finis et ceux représentant le recollement rende le conditionnement de la matrice mauvais. Cet écart est dû aux définitions des matrices :  $[R^{1/\mu}]$  qui définit la formulation en  $\mathbf{A}$  dans le domaine discret fait apparaître le terme  $1/\mu$ . Les termes de cette matrice sont donc de l'ordre de la centaine de millier... Tandis que les termes de  $[C_a]$  et  $[D_a]$  sont de l'ordre de l'unité. Dans ce cas, sans précautions particulières, le recollement n'est pas pris numériquement en compte lors de la résolution, et le résultat se révèle faux.

Une solution envisagée pour palier ce problème est de faire intervenir un préconditionneur dans toutes les résolutions. Ce préconditionneur se définit par  $\mu_0 [\text{Id}]$ , et permet de réduire l'écart entre les termes de  $[R^{1/\mu}]$  et les matrices  $[C_a]$  et  $[D_a]$ . Cela correspond à adimensionner le système matriciel avant de commencer la résolution. Mais il ne permet pas d'obtenir une convergence satisfaisante en utilisant les SL.

Dans le cas des doubles multiplicateurs de Lagrange, seul un préconditionneur a abouti. Il s'agit du gradient conjugué préconditionné par la diagonale, avec les fonctions  $\mathbf{w}_a''$  utilisées pour le calcul de  $[C_a]$  et  $[D_a]$ . Dans ces conditions, la résolution dure 2,38 s, et 3 400 itérations.

Pour la méthode Mortar les différents calculs peuvent être regroupés en plusieurs catégories, selon que le système global est calculé ou non.

Tout d'abord, dans le Tableau 16, les résultats obtenus en construisant le système matriciel global sont donnés.

| Fonctions utilisées pour $[C_a]$ et $[D_a]$ | Fonctions $w_a''$ |      |      |      |       |        |
|---|-------------------|------|------|------|-------|--------|
|   | Méthode           | CG   | CG D | CG S | CG Cr | MRTR S |
| Temps (s)                                   | 5,43              | 4,22 | 3,43 | 3,42 | 3,9   | 4,16   |
| Nombre d'itérations                         | 4640              | 2774 | 1057 | 1035 | 1126  | 1316   |

**Tableau 16 : Temps et nombre d'itérations pour Mortar avec construction, formulation A**

Il apparaît ici que la méthode du gradient conjugué préconditionné par la méthode de Crout donne les meilleurs résultats.

Le Tableau 17 reprend les résultats obtenus par des algorithmes adaptés au système décomposé et qui préconditionnent le système global.

| Fonctions utilisées pour $[C_a]$ et $[D_a]$ | Deuxième famille | Fonctions $w_a''$ |      |      |
|---|------------------|-------------------|------|------|
|   |                  | Méthode           | CG   | CG D |
| Temps (s)                                   | MRTR D           | 5,17              | 3,48 | 1,24 |
| Nombre d'itérations                         | 12,48            | 4898              | 2750 | 328  |

**Tableau 17 : Résultats sans construction du système en Mortar, formulation A**

Cette fois-ci, le préconditionneur diagonal semble donner les meilleurs résultats, avec la méthode MRTR. Il apparaît aussi que la deuxième famille de fonctions demande un nombre d'itérations et un temps de calcul beaucoup plus long que les fonctions  $w_a''$ . Cela est en partie lié à l'inversion de la matrice  $[C_a]$ , beaucoup plus coûteuse en temps dans le cas de la deuxième famille de fonctions, du fait du nombre plus importants de termes dans la matrice.

Enfin, le préconditionnement par la décomposition QR a été testé. Mais les temps de calculs et nombre d'itérations sont rédhibitoires, pour les deux algorithmes testés.

Pour le recollement de maillages par la méthode Mortar, en formulation en potentiel vecteur **A**, la méthode la plus rapide pour résoudre le système matriciel est un solveur MRTR, adapté pour un système décomposé en plusieurs matrices, avec un préconditionneur diagonal.

## **Conclusion**

Il a tout d'abord été montré que, pour cette formulation, la méthode des SL ne donne pas de résultats satisfaisants. La matrice est mal conditionnée, donc son inversion par une méthode itérative requiert trop de temps et d'itérations.

La première famille de fonctions, comme signalé dans [22], ne permet pas d'avoir un recollement de bonne qualité. Il est nécessaire pour avoir un recollement satisfaisant, d'utiliser la deuxième famille de fonctions, ou les fonctions  $\mathbf{w}_a''$  construites à partir des fonctions nodales bi-orthogonales.

Enfin, en comparant les temps de calculs, il semble que la meilleure méthode de recollement dans ce cas soit la méthode Mortar, avec un solveur de type MRTR adapté au système à trois matrices, et un préconditionneur diagonal.

## **4. Conclusion**

Ce premier cas test a permis de comparer les différentes méthodes de recollement.

En formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , il est apparu que les trois méthodes de recollement (SL, DL et Mortar) donnent des résultats identiques aussi bien d'un point de vue global (avec l'énergie), que d'un point de vue local (avec l'induction magnétique). Mais les méthodes des SL et Mortar sont pénalisées en temps de calcul par rapport aux doubles multiplicateurs de Lagrange, même si elles nécessitent moins d'itérations.

La formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  a montré que la méthode des simples multiplicateurs de Lagrange a un conditionnement très pénalisant, au point de la rendre inutilisable. Par contre, les doubles multiplicateurs et la méthode Mortar convergent vers des résultats équivalents. Néanmoins, la méthode Mortar semble, dans ce cas, résoudre le système matriciel plus rapidement que la méthode des doubles multiplicateurs de Lagrange.

## **B. Cas magnétodynamique**

### **1. Présentation**

Le système étudié en magnétodynamique est une sphère creuse conductrice, soumise à une induction magnétique (Figure 28). Le rayon interne de la sphère est 35 mm, le rayon externe 50 mm, la perméabilité de la sphère est égale à  $\mu_0$ , la perméabilité de l'air, et sa

conductivité vaut  $10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . Le champ  $\mathbf{B}$  imposé au système est sinusoïdal, d'amplitude 1 T et de fréquence prise successivement à 1 Hz, 100 Hz, 1 000 Hz.

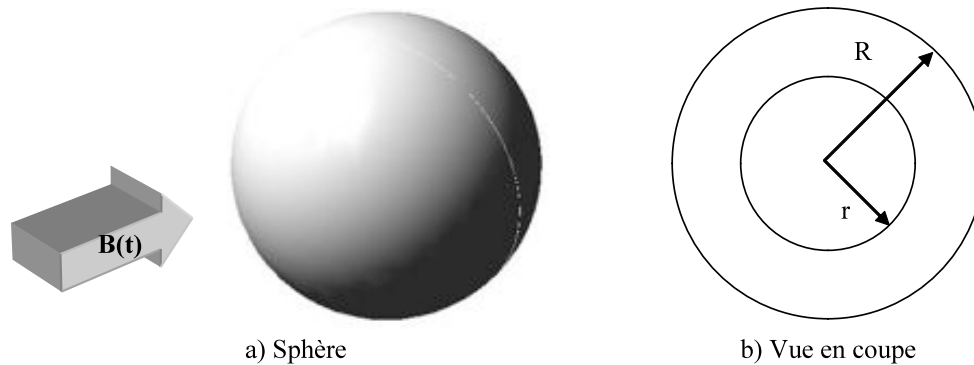


Figure 28 : La sphère creuse

Pour notre étude, afin d'avoir un nombre d'inconnues significatif, un quart de la structure, compte tenue des symétries, sera étudié. Les conditions aux limites sont définies sur la Figure 29.

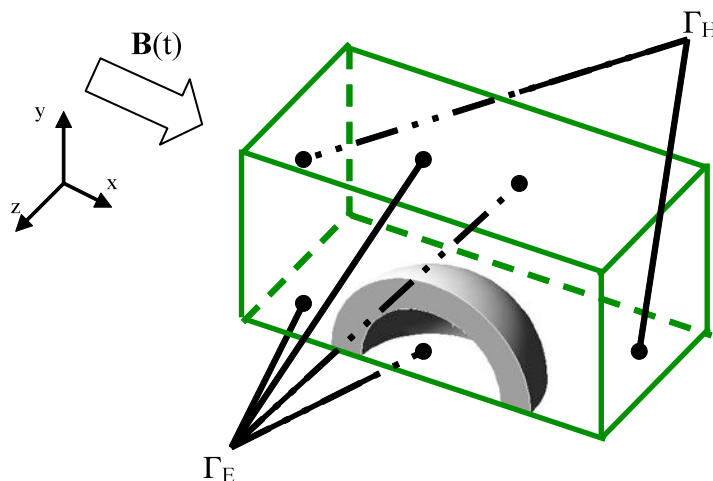


Figure 29 : Définition des conditions aux limites du système

Afin de valider le recollement, deux configurations seront utilisées. La première permettra de mettre en évidence l'intérêt du recollement. La seconde configuration validera de façon plus qualitative un recollement plus complexe.

**Première configuration :**

Dans le cadre des travaux réalisés au cours de la thèse, le choix a été fait de se limiter au recollement de surfaces planes.

Dans ce contexte, afin d'étudier la sphère creuse, les différentes surfaces sphériques ont été décomposées par une suite de 98 plans (Figure 30).

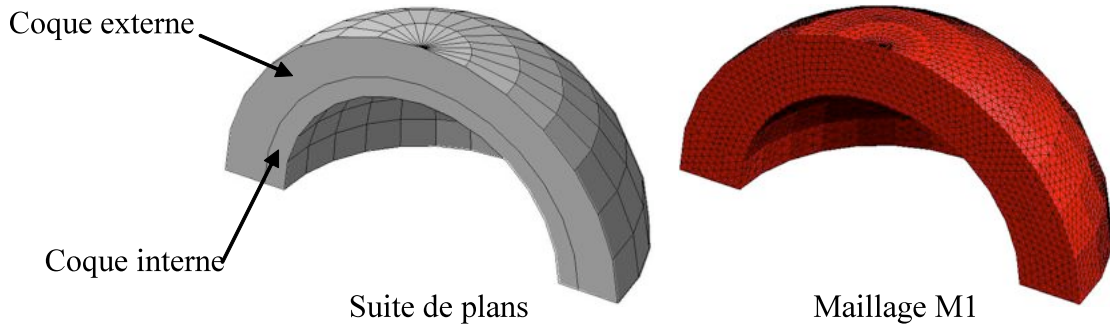


Figure 30 : Sphère creuse étudiée

Pour ce système, le recollement se fera d'une part sur l'extérieur de la sphère, et d'autre part sur une coupe interne comme indiqué sur la Figure 31.

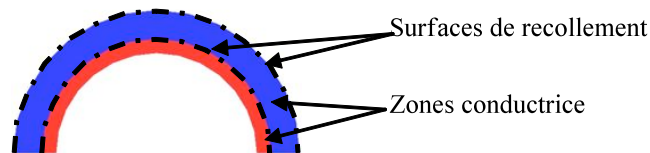


Figure 31 : Recollement dans la sphère creuse

Les calculs ont été menés sur trois maillages différents, deux de références M1 et M2 sans recollement et un avec recollement M3 (Figure 32).

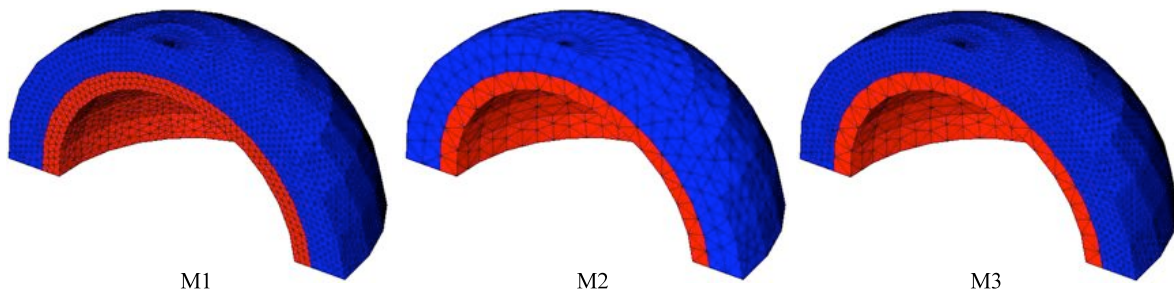


Figure 32 : Maillages de la sphère creuse, première configuration

Le Tableau 18 présente les différentes caractéristiques des maillages.

| Maillages | Nombre de nœuds | Nombre d'éléments |
|-----------|-----------------|-------------------|
| M1        | 21 123          | 113 358           |
| M2        | 2 622           | 13 096            |
| M3        | 10 994          | 47 157            |

Tableau 18 : Caractéristiques des maillages M1, M2 et M3

La grandeur globale de comparaison sera la puissance dissipée par effet Joule dans la sphère.



La répartition des courants induits sera observée en  $x_1$ , dans le plan  $(y ; z)$  (Figure 33).

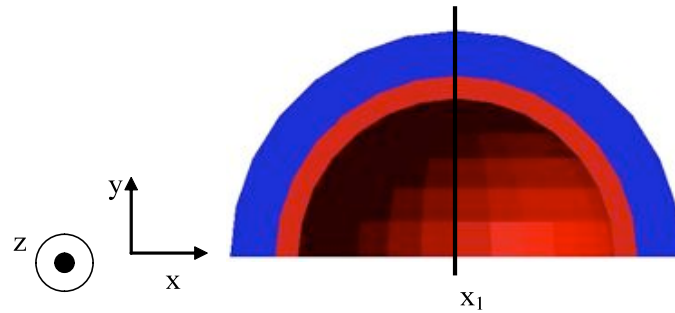


Figure 33 : Position du plan d'observation de la densité de courants induite

Par ailleurs, l'évolution des composantes des courants induits dans la sphère sera représentée le long de la ligne  $l_1$  présentée sur la Figure 34, qui se trouve dans le plan d'observation des courants induits. Dans ce cas, les différentes composantes des courants induits seront tracés en fonction de la position dans la sphère (0 mm correspondant à l'intérieur de la sphère, 15 mm à l'extérieur). Le long de cette ligne, les composantes des courants induits selon les axes  $y$  et  $z$  sont égales.

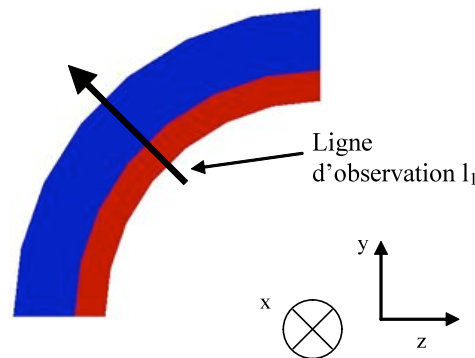


Figure 34 : Ligne d'observation  $l_1$  pour la densité de courants induite

Enfin, l'évolution de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  sera observée le long de la ligne  $l_2$  définie Figure 35. Le long de cette ligne,  $B_y$  et  $B_z$  sont nulles, donc seule l'évolution de  $B_x$  sera considérée.

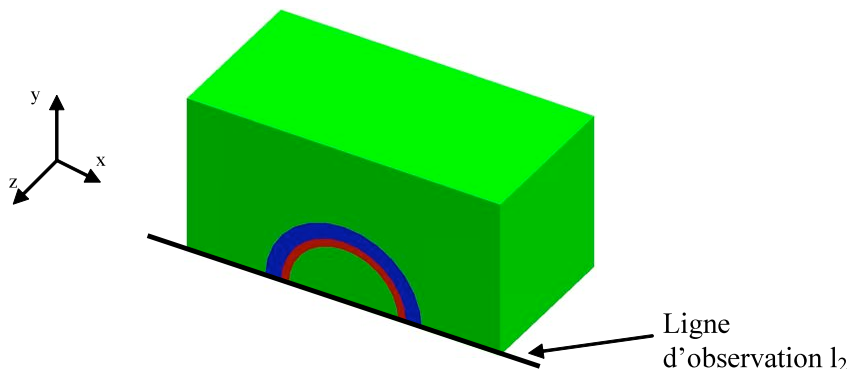
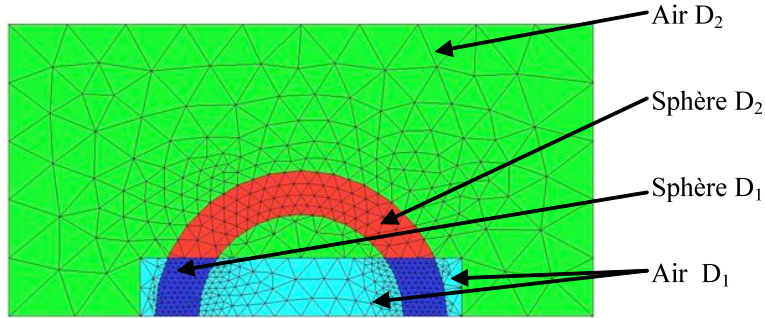


Figure 35 : Ligne d'observation  $l_2$  de l'induction magnétique

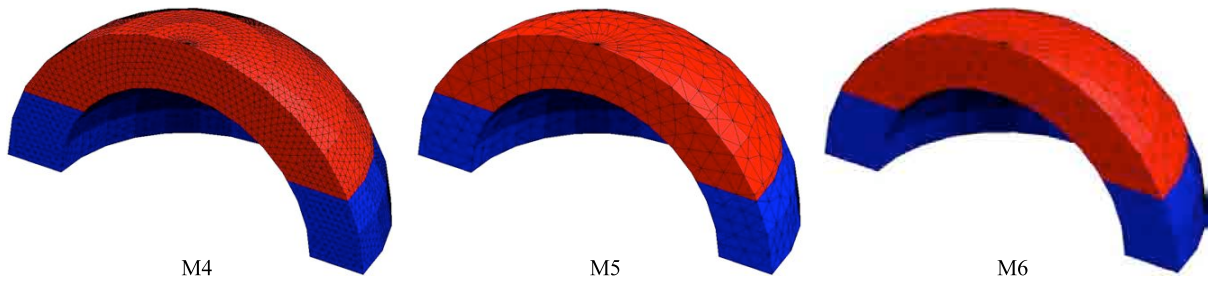
**Seconde configuration :**

Dans ce cas, le recollement est réalisé autour d'un volume englobant une partie de la sphère et de l'air (Figure 36).



**Figure 36 : Zone recollée pour la seconde configuration**

Pour cette configuration, les calculs ont été menés sur les maillages sans recollement M4 et M5 et avec recollement M6 (Figure 37).



**Figure 37 : Maillages de la sphère de la seconde configuration**

Cette configuration a été choisie afin de valider un recollement magnétodynamique plus complexe que dans la première configuration. En effet, dans la première configuration, les courants induits sont tangents aux surfaces de recollement. Dans cette seconde configuration, le recollement est traité de façon plus générale. Les caractéristiques des maillages sont données dans le Tableau 19.

| Maillages | Nombre de nœuds | Nombre d'éléments |
|-----------|-----------------|-------------------|
| M4        | 17 638          | 94 682            |
| M5        | 2 292           | 11 309            |
| M6        | 8 864           | 43 300            |

**Tableau 19 : caractéristiques des maillages M4, M5 et M6**

Compte tenu des résultats obtenus précédemment en magnétostatique, sur le cube, les calculs menés ici pour l'étude de la sphère creuse sont fait uniquement avec la méthode Mortar. Les fonctions choisies pour les opérateurs de couplage sont les fonctions bi-

orthogonales nodales, et les fonctions de forme d'arêtes  $w_a''$ , construites à partir des fonctions bi-orthogonales nodales.

La méthode de résolution choisie pour les systèmes sans recollement est le gradient conjugué avec un préconditionneur diagonal, tandis que les systèmes d'équations avec recollement sont résolus par la méthode MRTR avec un préconditionneur diagonal.

## 2. Etude de la première configuration

### a. Formulation T-Ω

Le Tableau 20 reprend les différentes tailles de matrices intervenant dans cette formulation.

| Maillages   |     | Nombre de lignes total<br>(dont liées au recollement) | Nombre de termes<br>non-nuls total |
|-------------|-----|---|------------------------------------|
| M1          |     | 76 204  | 991 572                            |
| M2          |     | 7 266   | 86 045                             |
| M3 (Mortar) | [M] | 61 619 (12 777)                                       | 838 292                            |
|             | [T] |   | 217 330                            |

Tableau 20 : Tailles des matrices pour la sphère creuse, formulation T-Ω

### Comparaison d'une grandeur globale et d'une grandeur locale

Les premiers calculs ont été menés avec une fréquence de 1 Hz, et un pas de temps de 0,05 s. A cette fréquence l'épaisseur de peau est d'environ 160 mm, soit plus de dix fois l'épaisseur de la sphère. Les courants se répartissent donc de façon quasi homogène dans l'épaisseur de la sphère. La Figure 38 montre les densités de courants induites dans la coque externe de la sphère.

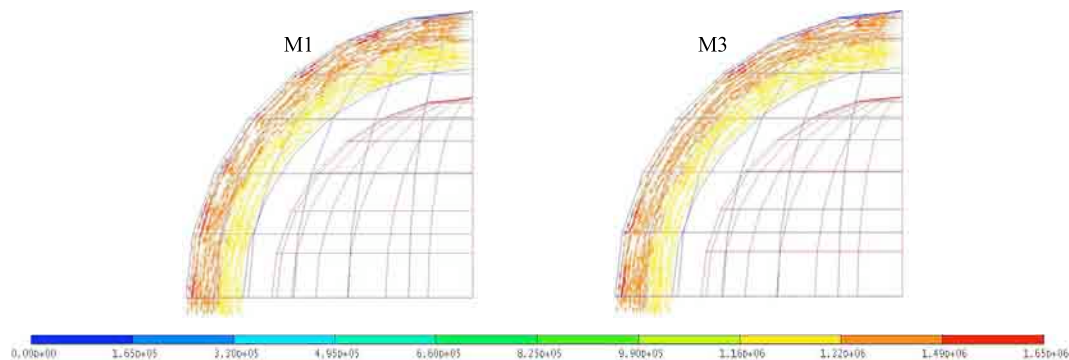


Figure 38 : Densité de courants induite de la coque externe de la sphère, formulation T-Ω

Les répartitions des courants induits sont proches entre M1 et M3. La Figure 39 représente les courants induits sur la coque interne de la sphère.

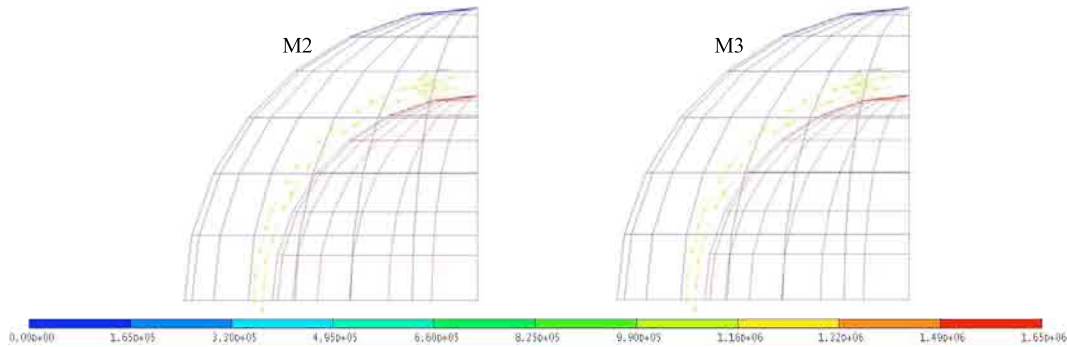


Figure 39 : Densité de courants induite de la coque interne de la sphère, formulation T-Ω

Les répartitions des courants induits sont identiques entre les deux maillages. Il apparaît que pour ce problème, à l'interface  $\Gamma_R$ , l'égalité  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0$  est imposée. A cette fréquence, du fait de l'épaisseur de peau très grande, les maillages donnent des valeurs de pertes par effet Joules très proches. Le Tableau 21 regroupe, pour les trois maillages, les valeurs maximales, minimales et moyennes, en régime permanent, de la puissance instantanée.

| Maillage            | M1   | M2   | M3   |
|---------------------|------|------|------|
| Valeur minimale (W) | 0,77 | 0,84 | 0,99 |
| Valeur maximale (W) | 40,2 | 40,1 | 40,0 |
| Valeur moyenne (W)  | 20,1 | 20,1 | 19,9 |

Tableau 21 : Puissance instantanée à 1 Hz, formulation T-Ω

Pour ce système, la densité de courant n'a pas de composante selon x. La Figure 41 montre l'évolution suivant la ligne  $l_1$  définie Figure 35, des composantes  $J_y$  et  $J_z$ . Sur cette figure, la position 0 mm correspond à l'intérieur de la sphère, la position 15 mm à l'extérieur.

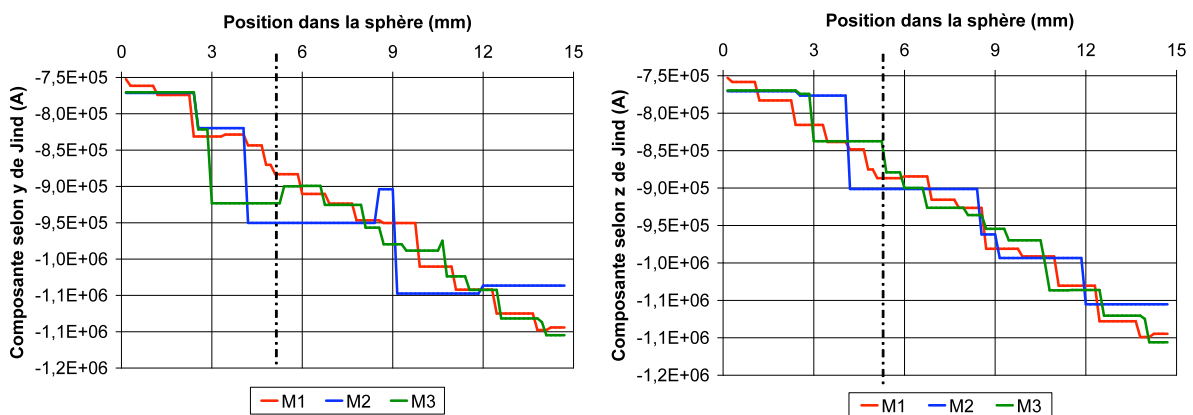


Figure 40 : Courants induits en fonction de la position dans la sphère, formulation T-Ω

Comme observé pour les formulations magnéto-statiques, dans la partie maillée grossièrement les maillages M2 et M3 ont des résultats similaires, et dans la partie maillée finement, M1 et M3 donnent des valeurs proches. Afin de compléter l'étude, il est intéressant d'augmenter la fréquence. Ainsi, en prenant une fréquence de 100 Hz, l'épaisseur de peau se réduit à 16 mm. La Figure 41 montre les courants induits dans la sphère pour cette fréquence.

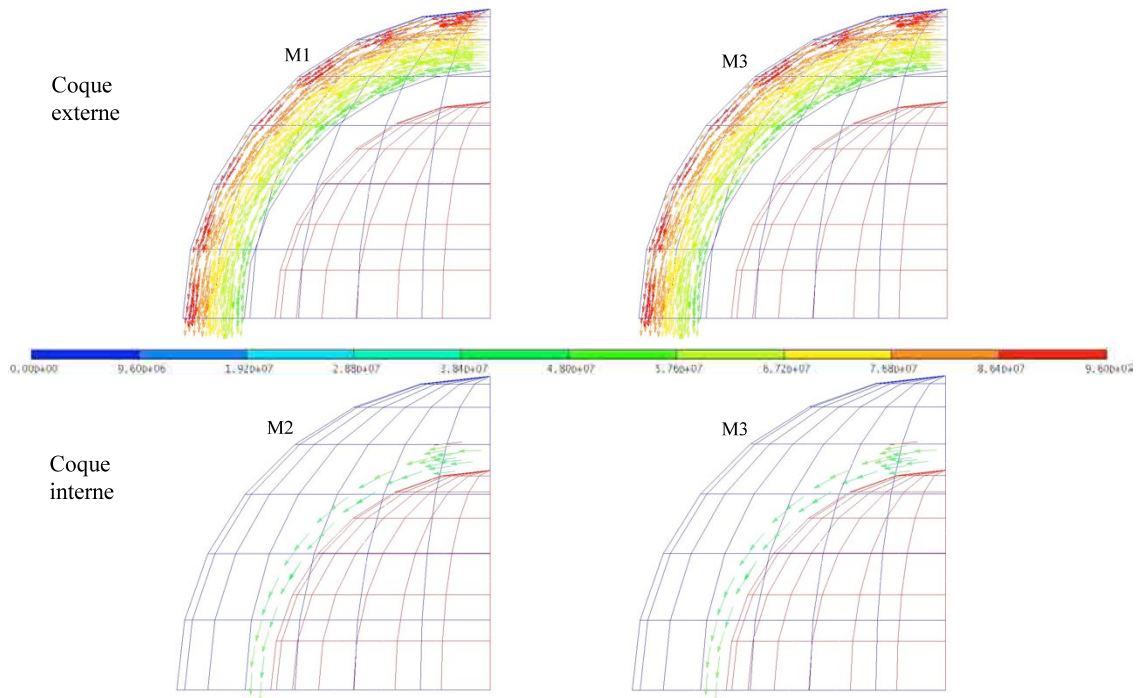


Figure 41 : Répartition des densités de courants induites dans la sphère, formulation T- $\Omega$

Dans cet exemple, l'impact de l'épaisseur de peau apparaît (Figure 42).

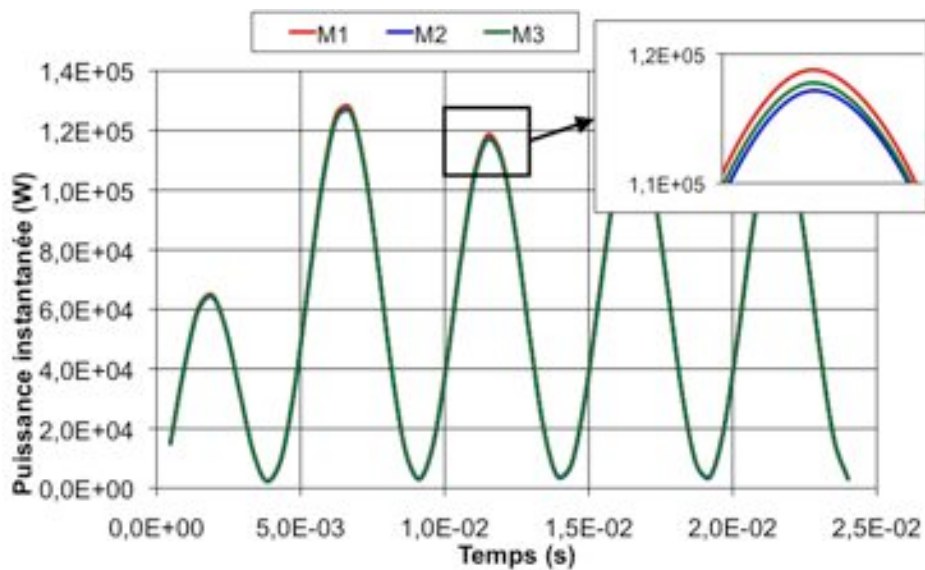


Figure 42 : Puissance instantanée dans la sphère, à 100 Hz, formulation T- $\Omega$

Ce graphique montre que le maillage recollé donne une solution intermédiaire entre le maillage fin et le maillage grossier. Le recollement permet ainsi de conserver une précision satisfaisante, tout en réduisant le nombre global d'inconnues.

Comme précédemment, la Figure 43 montre l'évolution des composantes  $J_y$  et  $J_z$ .

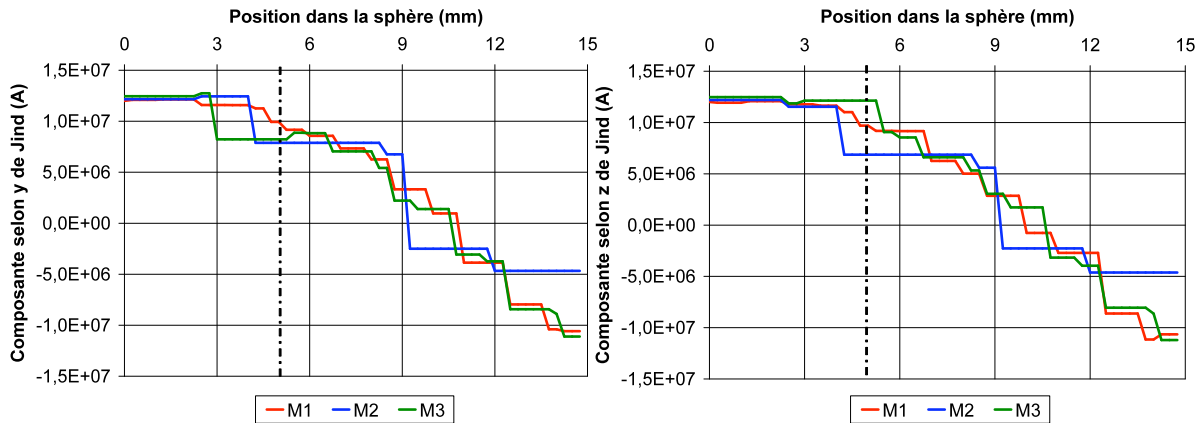


Figure 43 : Composantes de la densité de courants induite dans la sphère, à 100 Hz, formulation T- $\Omega$

Le Figure 45 permet de comparer la composante  $B_x$  de l'induction magnétique suivant la ligne d'observation  $l_2$  définie Figure36.

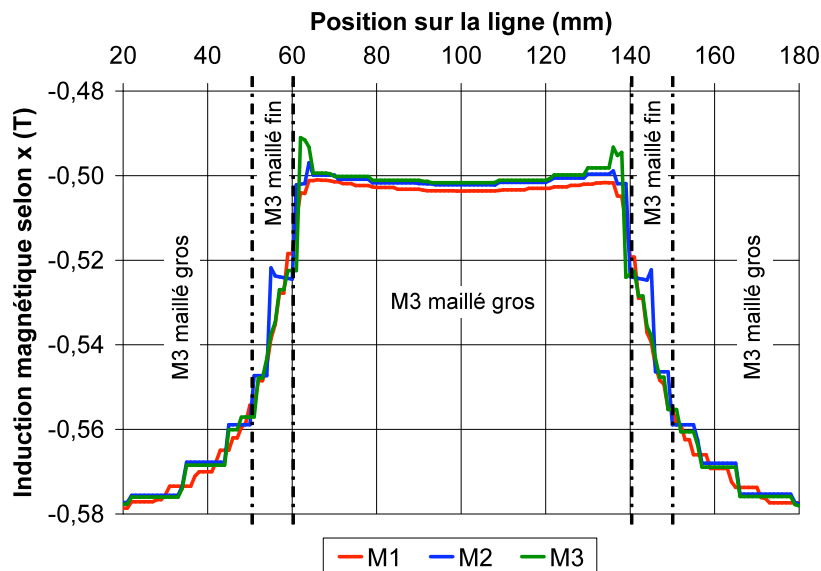


Figure 44 : Induction selon l'axe x sur la ligne, à 100 Hz, formulation T- $\Omega$

Si la fréquence est encore augmentée, l'écart entre les maillages grossier et fin se creuse d'autant plus. L'induction magnétique, dans le cas du maillage recollé, reste compris entre les valeurs des maillages de référence.

Pour valider cet aspect, il suffit de comparer les valeurs moyennes de la puissance en régime permanent en fonction de la fréquence (Tableau 22).

| Fréquence |  | 1 Hz            | 100 Hz                       | 1 000 Hz                     |
|-----------|--|-----------------|------------------------------|------------------------------|
| M1        | Valeur moyenne (W)                             | 20,1            | $6,12 \cdot 10^4$            | $2,23 \cdot 10^5$            |
| M2        | Valeur moyenne (W)<br>(écart par rapport à M1) | 20,1<br>(0,13%) | $6,02 \cdot 10^4$<br>(1,53%) | $2 \cdot 10^5$<br>(10,46%)   |
| M3        | Valeur moyenne (W)<br>(écart par rapport à M1) | 19,9<br>(0,86%) | $6,07 \cdot 10^4$<br>(0,75%) | $2,21 \cdot 10^5$<br>(1,02%) |

**Tableau 22 : Pertes Joules dans la sphère, formulation T- $\Omega$**

Le recollement permet de conserver une solution précise tout en diminuant le nombre d'inconnues du système. De plus les résultats ont montré que la qualité locale du recollement était comparable à celle obtenue avec le maillage M1.

### **Comparaison des temps de calculs**

Les temps de calcul pour les trois fréquences et avec les trois maillages M1, M2 et M3 sont indiqués dans le Tableau 23.

| Maillages             |          | M1       | M2     | M3       |
|-----------------------|----------|----------|--------|----------|
| Méthode de résolution |          | CG D     | CG D   | MRTR D   |
| Temps de calcul (s)   | 1 Hz     | 1 402.11 | 115.42 | 946.71   |
|                       | 100 Hz   | 1 813.19 | 136.42 | 1 094.22 |
|                       | 1 000 Hz | 3 162.74 | 238.70 | 1 272.46 |

**Tableau 23 : Temps de calcul, formulation T- $\Omega$**

On notera que pour cet exemple, les temps de calcul avec recollement sont nettement réduits par rapport à M1.

### **b. Formulation A- $\varphi$**

Comme pour la formulation T- $\Omega$ , seule la méthode Mortar est comparée aux maillages sans recollement. Les fonctions utilisées pour le calcul des opérateurs  $[C_a]$  et  $[D_a]$  sont les fonctions  $\mathbf{w}_a''$ , et les fonctions nodales bi-orthogonales sont utilisées pour le calcul de  $[C_n]$  et  $[D_n]$ .

Les propriétés des matrices sont données dans le Tableau 24.

| Maillages   |     | Nombre de lignes total<br>(dont liées au recollement) | Nombre de termes non-nuls<br>total |
|-------------|-----|---|------------------------------------|
| M1          |     | 136 426   | 1 599 307                          |
| M2          |     | 15 308  | 172 043                            |
| M3 (Mortar) | [M] | 80 212 (23 304)                                       | 1 081 783                          |
|             | [T] |   | 419 205                            |

Tableau 24 : propriétés des matrices, formulation A-φ

### **Comparaison d'une grandeur globale et d'une grandeur locale**

Les répartitions des densités de courants induites dans la sphère à 1 Hz sont comparées Figure 45.

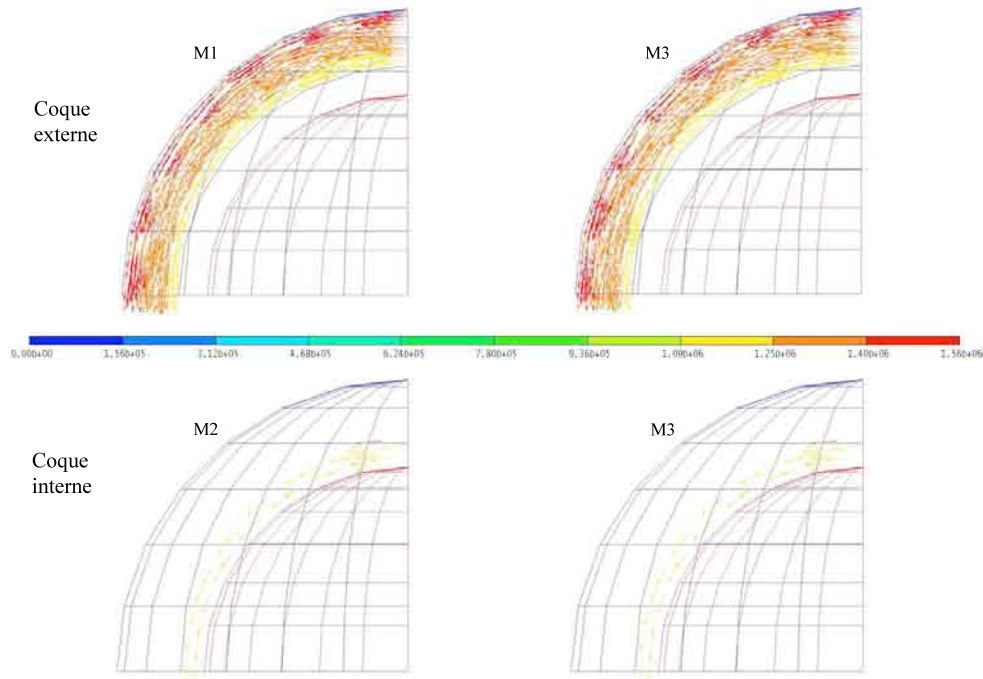


Figure 45 : Répartition des densités de courants induites dans la sphère, formulation A-φ

Comme précédemment, les valeurs maximales, minimales et moyennes de la puissance sont comparées. Le Tableau 25 regroupe les résultats obtenus.

| Maillage            | M1   | M2   | M3   |
|---------------------|------|------|------|
| Valeur minimale (W) | 0,84 | 0,84 | 0,84 |
| Valeur maximale (W) | 40,2 | 40,2 | 40,2 |
| Valeur moyenne (W)  | 20,1 | 20,1 | 20,1 |

Tableau 25 : Puissance instantanée, à 1 Hz, formulation A-φ



La Figure 46 représente les composantes selon y et z des densités de courants induites le long de la ligne  $l_1$  (Figure 34).

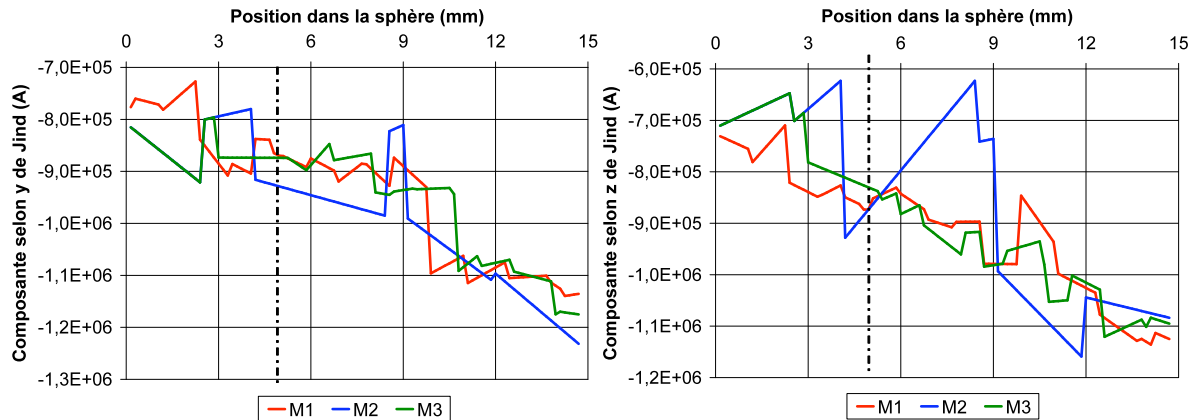


Figure 46 : Densités de courants induites le long de la ligne  $l_1$ , à 1 Hz, formulation A- $\varphi$

Comme en T- $\Omega$ , le maillage M3 donne, dans la partie maillée plus fin, un résultat proche du maillage M1, et dans la partie maillée plus gros, les composantes sont semblables à celles du maillage M2. Afin de compléter l'étude, la fréquence du champ d'excitation est augmentée à la valeur de 100 Hz. Les courants induits se répartissent alors dans la sphère comme le montre la Figure 47.

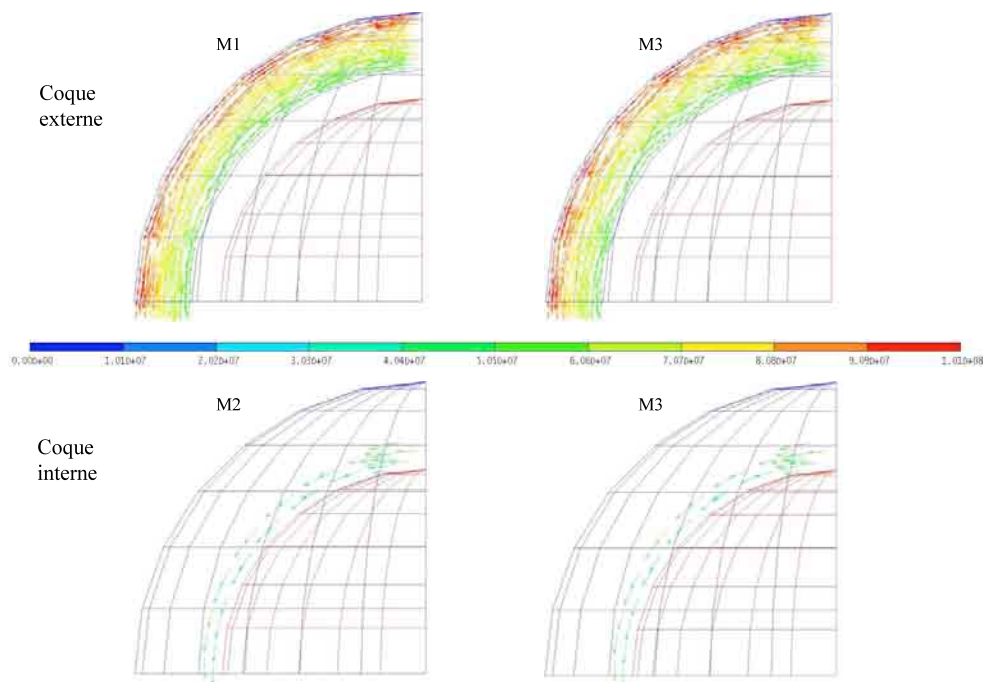


Figure 47 : Répartition des densités des courants induites dans la sphère, à 100 Hz, formulation A- $\varphi$

L'évolution de la puissance instantanée est représentée sur la Figure 48. Comme dans la formulation T- $\Omega$ , un léger écart apparaît.

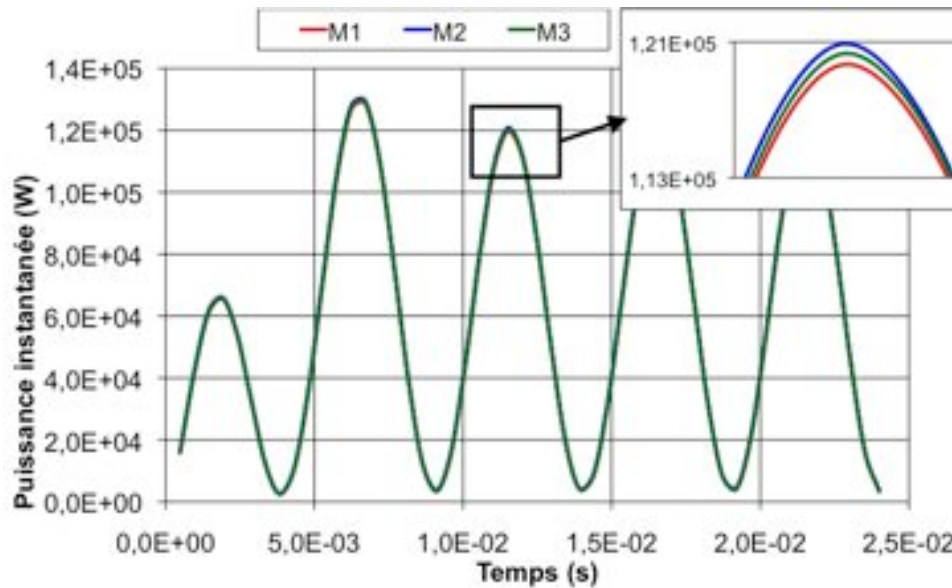


Figure 48 : Puissance instantanée au cours du temps à 100 Hz, formulation A- $\varphi$

Les composantes selon les axes y et z des densités de courants induites peuvent être tracés le long de la ligne  $l_1$  traversant la sphère (Figure 49).

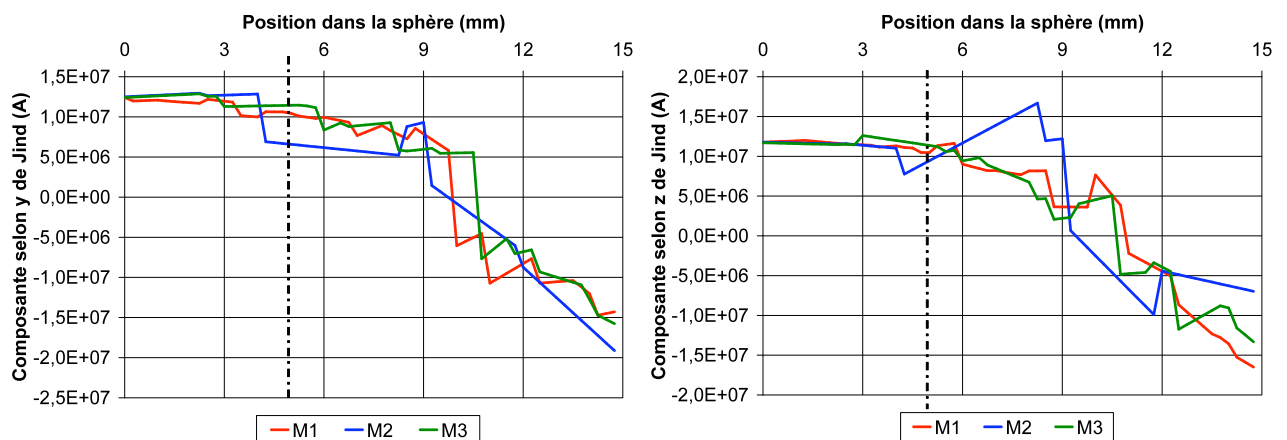


Figure 49 : Composantes des densités de courants induites le long de la ligne  $l_1$

Comme dans la formulation T- $\Omega$ , les différentes composantes des courants induits sont semblables dans les différents domaines.

Cela se retrouve également sur la représentation de la composante  $B_x$  le long de la ligne  $l_2$ .

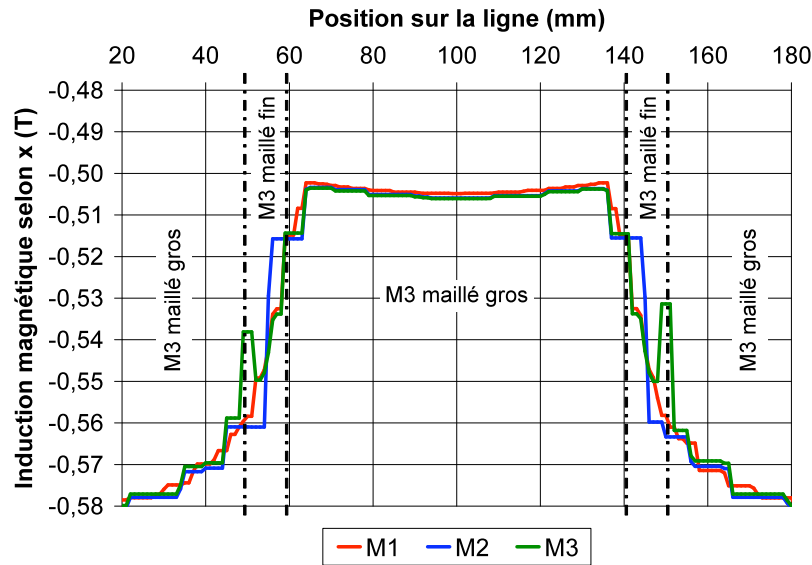


Figure 50 : Composante  $B_x$  de l'induction magnétique le long de la ligne  $l_2$

Comme observé auparavant, pour le maillage M3, les résultats sont proches des solutions donnés par M1 et M2.

Pour finir, les valeurs moyennes de la puissance instantanée calculées aux différentes fréquences, en régime permanent, peuvent être comparées (Tableau 26).

| Fréquence |  | 1 Hz            | 100 Hz              | 1 000 Hz            |
|-----------|--|-----------------|---------------------|---------------------|
| M1        | Valeur moyenne (W)                             | 20,1            | 6,17 104            | 2,35 105            |
| M2        | Valeur moyenne (W)<br>(écart par rapport à M1) | 20,1<br>(0,04%) | 6,24 104<br>(1,23%) | 2,54 105<br>(8,35%) |
| M3        | Valeur moyenne (W)<br>(écart par rapport à M1) | 20,1<br>(0,02%) | 6,2 104<br>(0,48%)  | 2,36 105<br>(0,62%) |

Tableau 26 : Pertes Joules formulation  $A-\varphi$

Ce tableau montre bien que le recollement permet d'obtenir une solution avec une précision tout à fait satisfaisante, pour un maillage comptant moins d'inconnues.

**Comparaison des temps de calculs**

Pour finir, il reste à comparer les différents temps de calcul en formulation  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$  (Tableau 27).

| Maillages               |          | M1       | M2     | M3       |
|-------------------------|----------|----------|--------|----------|
| Méthode de résolution   |          | CG D     | CG D   | MRTR D   |
| Temps de résolution (s) | 1 Hz     | 1 725.83 | 133.69 | 5 295.25 |
|                         | 100 Hz   | 1 707.96 | 121.79 | 3 450.17 |
|                         | 1 000 Hz | 1 677.98 | 123.98 | 2 924.59 |

**Tableau 27 : Temps de calcul pour les différents maillages, formulation  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$**

Contrairement à la formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$ , pour la formulation en  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$ , le recollement est moins intéressant en temps de calcul.

**3. Seconde configuration**

Pour le premier type de recollement, les densités de courants étaient tangentes aux interfaces  $\Gamma_R$ . Pour cette nouvelle configuration, les surfaces de recollement vont traverser des domaines ayant des caractéristiques physiques différentes (conducteur ou non conducteur).

**Résultat en formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$**

Compte tenu des maillages présentés Figure 38, les caractéristiques des systèmes matriciels sont rassemblées dans le Tableau 28.

| Maillage    |     | Nombre de lignes total<br>(dont liées au recollement) | Nombre de termes non-nuls total |
|-------------|-----|---|---------------------------------|
| M4          |     | 62 832  | 814 650                         |
| M5          |     | 6 934   | 82 905                          |
| M6 (Mortar) | [M] | 36 307 (4 260)  | 471 007                         |
|             | [T] |   | 87 417                          |

**Tableau 28 : Caractéristiques des matrices M4, M5 et M6, formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$**

Dans le cas de la formulation  $T-\Omega$ , pour une fréquence de 100 Hz, les densités de courants induites se répartissent dans les différents maillages selon la Figure 51.

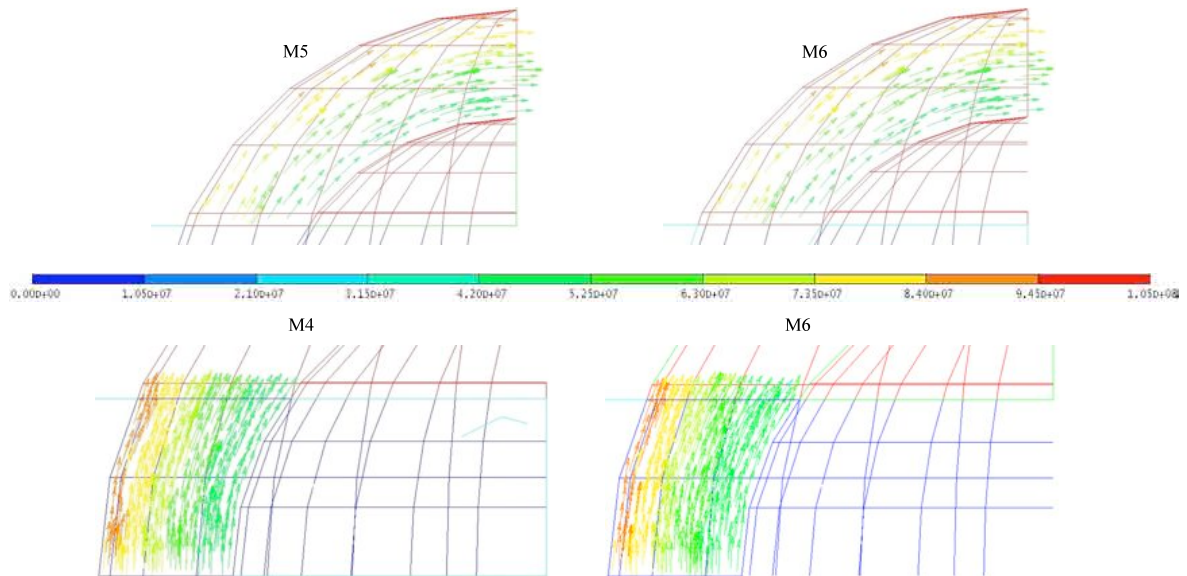


Figure 51 : Répartition des densités de courants induites, seconde configuration, formulation  $T-\Omega$

Pour cet exemple, le recollement assure une transmission satisfaisante de la répartition des densités des courants induites.

### Résultat en formulation $A-\varphi$

Le même recollement peut être fait en formulation  $A-\varphi$ . Le Tableau 29 reprend les différentes caractéristiques des systèmes matriciels.

| Maillages   | Nombre de lignes total (dont liées au recollement) | Nombre de termes non-nuls total |         |
|-------------|--|---------------------------------|---------|
| M4          | 110 557  | 1 313 808                       |         |
| M5          | 12 878   | 146 119                         |         |
| M6 (Mortar) | 57 931 (6 596)                                     | [M]                             | 704 947 |
|             |  | [T]                             | 163 588 |

Tableau 29 : Caractéristiques des matrices, seconde configuration, formulation  $A-\varphi$

Afin de valider le recollement dans cette configuration, il faut comparer les répartitions de courants induits obtenus pour chacun des maillages (Figure 52).

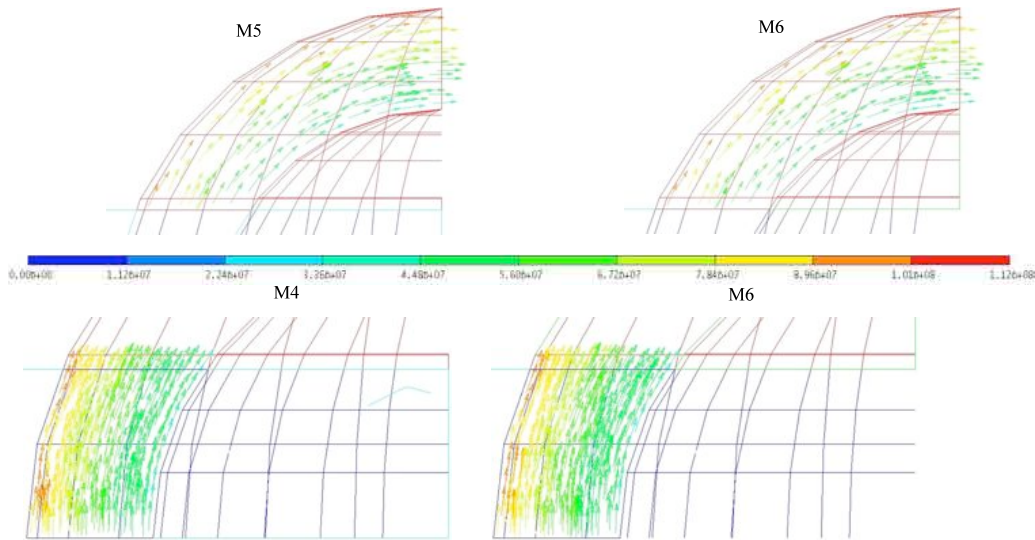


Figure 52 : Répartition des densités des courants induites, seconde configuration, formulation  $A-\varphi$

Là encore, les répartitions des courants induits sont semblables. Le recollement permet bien de transmettre les courants induits de façon.

#### 4. Conclusion

Dans le cas de la magnétodynamique, et des formulations  $T-\Omega$  et  $A-\varphi$ , la méthode Mortar est apparue comme une méthode qui permet d'effectuer un recollement.

En effet, dans les deux formulations, elle transmet de façon satisfaisante les informations à l'interface, permettant ainsi de reconnecter les solutions. Cette méthode a permis, dans le cas de la sphère, de conserver une précision de calcul satisfaisante, tout en réduisant globalement le nombre d'inconnues.

De plus en formulation  $T-\Omega$ , il est apparu que le système matriciel obtenu par recollement était plus rapide à résoudre que celui obtenu avec le maillage le plus fin.

En revanche, pour la formulation  $A-\varphi$ , les temps de calcul ne sont pas satisfaisants.

#### V. Bilan

Dans ce chapitre les méthodes de recollement ont été présentées. Tout d'abord, quelques notions mathématiques ont été introduites. Les opérateurs de recollement utilisés dans le cadre des travaux de thèse ont été ensuite développés. Des fonctions de formes simplifiant les

opérations sur ces matrices ont été introduites. Pour finir, le recollement a été validé sur deux exemples en magnéto-statique et en magnéto-dynamique.

Les résultats développés ont permis de constater tout d'abord que les multiplicateurs de Lagrange, bien qu'intéressant en formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , car plus rapide que la méthode Mortar, perdent en intérêt avec la formulation  $\mathbf{A}$ , et en magnéto-dynamique. En effet, dans ces derniers cas, le conditionnement de la matrice ne permet plus de résoudre le système dans des délais raisonnables. Il est néanmoins envisageable qu'en améliorant (par un préconditionneur, ou une autre méthode) le conditionnement de la matrice obtenue, les temps de calculs deviennent acceptables.

Les résultats obtenus pour la méthode Mortar semblent encourageants. Cette méthode permet en effet, comme il a été vu, d'assurer un recollement de bonne qualité. Les temps de calcul sont raisonnables en magnéto-statique et en formulation  $\mathbf{T}-\Omega$ , par rapport à la référence sans recollement. Pour les exemples traités, en formulation  $\mathbf{A}-\varphi$ , les temps de calcul sont nettement plus longs pour un recollement par rapport au maillage de référence plus fin.

## Chapitre 3 Etude de systèmes électrotechniques

### I. Introduction

Les chapitres précédents ont présentés les équations de l'électromagnétisme basse fréquence dans le domaine discret, ainsi que le recollement de maillages en électromagnétisme. Ils ont permis de poser tout d'abord les équations fondamentales, avant de valider les travaux sur des exemples académiques.

Ce chapitre a pour objet l'étude de trois systèmes électrotechniques. Le premier est un circuit magnétique à entrefer, excité par une bobine. Le second exemple est une plaque conductrice ferromagnétique excitée par un bobinage multifilamentaire. Enfin, le troisième exemple concerne une structure linéaire à griffes, sur laquelle est utilisée le recollement de maillages.

Compte tenu des résultats obtenus dans le précédent chapitre, la seule méthode de recollement utilisée sera la méthode Mortar. Les fonctions de formes utilisées dans le cas du recollement de grandeurs nodales seront les fonctions bi-orthogonales. Les opérateurs de recollement relatifs aux grandeurs discrétisées aux arêtes seront calculés grâce aux fonctions notées  $\mathbf{w}_a''$  dans ce présent mémoire, et calculées à partir des fonctions nodales bi-orthogonales.

Pour chaque système, une première partie présentera les principales caractéristiques du problème étudié. Puis une étude sera menée avec les différentes formulations. Et enfin, un bilan des résultats sera donné.



## II. Exemple magnétostatique : le circuit magnétique

### A. Présentation du système étudié

Le premier système étudié est un circuit magnétique ( $\mu_r=1\ 500$ ) à entrefer, soumis au champ magnétique créé par un inducteur bobiné. Au vu des symétries du système, le domaine d'étude se limitera à un quart de celui-ci (Figure 53).

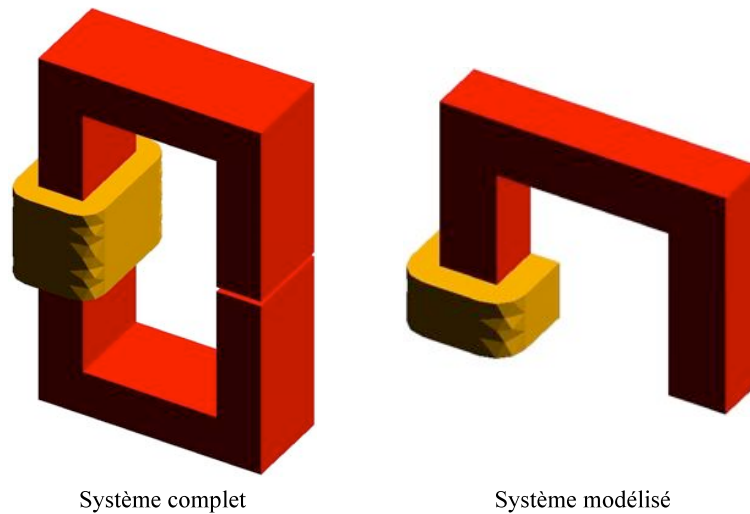


Figure 53 : Circuit magnétique étudié

Les principales caractéristiques du système sont données Figure 54.

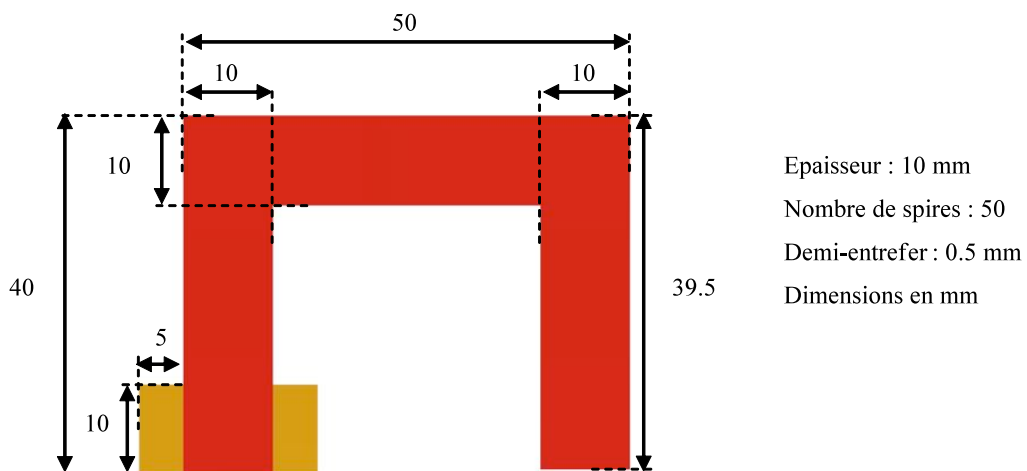


Figure 54 : Dimensions du circuit magnétique modélisé

La bobine est constituée de 50 spires traversée par un courant  $I = 10\text{ A}$ .

Le recollement dans ce système se fait autour d'un cube, englobant l'entrefer, une partie du circuit magnétique, et une partie de l'air (Figure 55). Ce volume est maillé finement, afin

d'avoir la meilleure représentation du champ dans l'entrefer, où se concentre l'énergie magnétique du système.

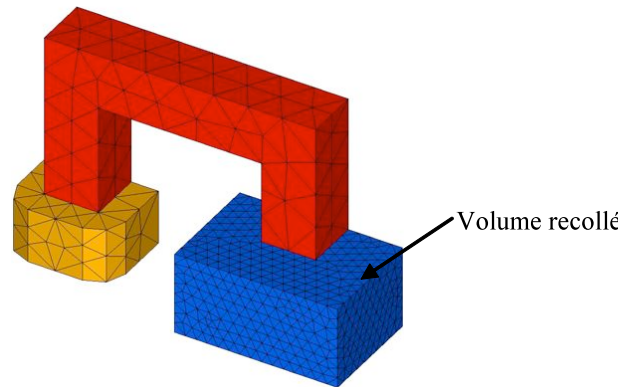


Figure 55 : Maillage étudié avec la partie recollée

L'étude sera menée sur six maillages. Parmi ces maillages, trois sont sans recollement, et servent de référence : M1 (le plus fin), M2 (de taille intermédiaire) et M3 (le plus grossier). Les trois autres maillages M4, M5 et M6, sont avec recollement, avec l'entrefer maillé comme M1, et le reste maillé comme l'un des autres maillages de référence (Figure 56). L'objectif est de comparer la qualité des résultats, leur précision, et les temps de résolutions dans les deux formulations magnétostatique.

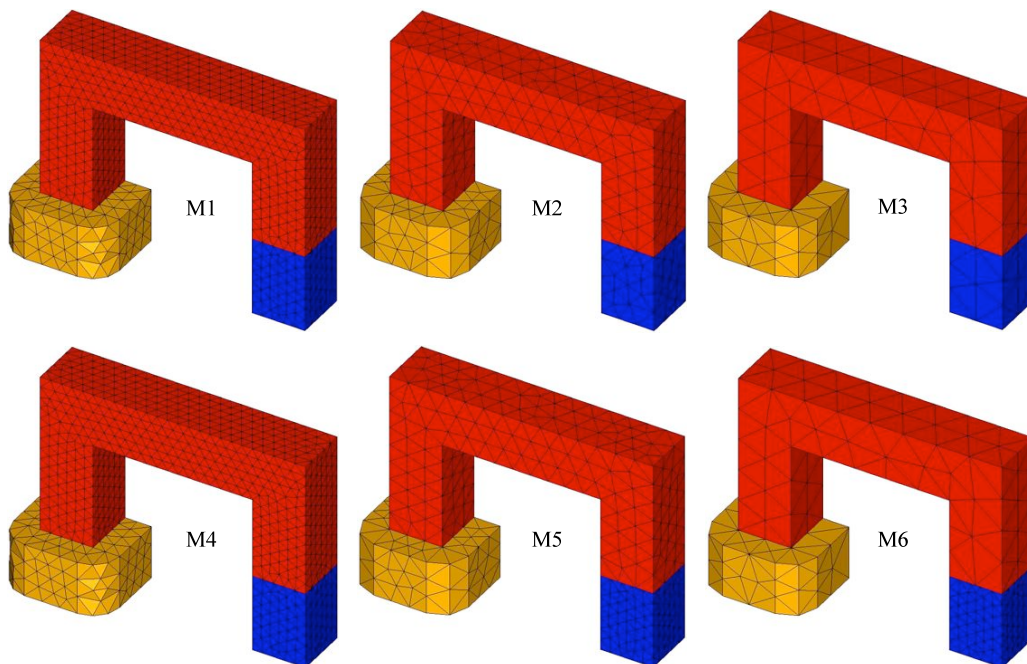


Figure 56 : Maillages du circuit magnétique utilisés

Comme le montre la Figure 56, le maillage M4 correspond au maillage M1. Néanmoins, un recollement est réalisé, mais dans ce cas, il s'effectue sur une interface  $\Gamma_R$  avec un maillage conforme. En revanche, le maillage M5 correspond au maillage M2 avec le volume

recollé de M1 (Figure 56) et le maillage M6 à M3 et également le volume recollé de M1. Les principales caractéristiques des maillages sont rassemblées dans le Tableau 30.

| Maillage          | M1     | M2     | M3    | M4     | M5     | M6    |
|-------------------|--------|--------|-------|--------|--------|-------|
| Nombre de nœuds   | 11 945 | 2 614  | 828   | 12 434 | 3 858  | 2 201 |
| Nombre d'éléments | 59 581 | 12 226 | 3 474 | 59 581 | 17 086 | 9 163 |

Tableau 30 : Caractéristiques des maillages du circuit magnétique

Le maillage M4 compte plus de nœuds que le maillage M1 car à l'interface de recollement conforme les nœuds sont doublés.

## B. Résultats

### 1. Formulation $\Omega$

En formulation en potentiel scalaire, l'équation à résoudre est donnée en (1.107). Le Tableau 31 présente les caractéristiques des matrices obtenues pour les maillages étudiés.

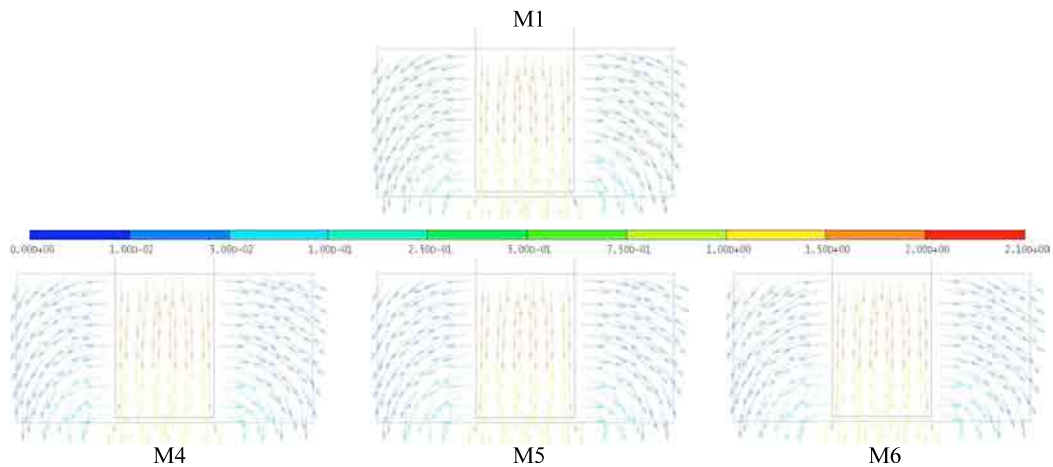
| Maillages |     | Nombre de lignes (dont liées au recollement) | Nombre de termes non nuls |
|-----------|-----|--|---------------------------|
| M1        |     | 11 045                                       | 80 653                    |
| M2        |     | 2 315  | 16 333                    |
| M3        |     | 687  | 4 563                     |
| M4        | [M] | 11 498 (453)                                 | 82 401                    |
|           | [T] |  | 15 316                    |
| M5        | [M] | 3 398 (453)                                  | 23 403                    |
|           | [T] |  | 5 659                     |
| M6        | [M] | 1 869 (453)                                  | 12 461                    |
|           | [T] |  | 3 228                     |

Tableau 31 : Systèmes matriciels, formulation  $\Omega$

Ce tableau montre que l'espace mémoire nécessaire aux systèmes matriciels des maillages M5 et M6 sont inférieurs à celui nécessaire pour le système matriciel du maillage M1.

### Comparaison d'une grandeur locale

La répartition de l'induction magnétique peut être comparée dans la zone de l'entrefer, zone autour de laquelle se fait le recollement (Figure 57).



**Figure 57 : Répartition de l'induction magnétique au voisinage de l'entrefer**

Comparé au maillage M1, quelque soit le maillage recollé, la répartition de l'induction magnétique obtenue est satisfaisante au niveau de l'entrefer.

### Comparaison de l'énergie et des temps de calcul

Le Tableau 32 rassemble les énergies magnétiques globale dans le système étudié et les temps de calcul pour les 6 maillages.

| Maillages                   | M1    | M2    | M3    | M4     | M5     | M6     |
|-----------------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| Energie (mJ)                | 59,64 | 62,52 | 65,67 | 59,59  | 60,00  | 60,90  |
| Erreur par rapport à M1 (%) | 0     | 4,8   | 10,1  | 0,08   | 0,6    | 2,1    |
| Méthode de résolution       | CG Cr | CG Cr | CG Cr | MRTR D | MRTR D | MRTR D |
| Temps de calcul (s)         | 16,16 | 3,26  | 1,02  | 18,24  | 3,34   | 1,84   |

**Tableau 32 : Comparaison des résultats, formulation  $\Omega$**

Ce tableau montre que les maillages M5 et M6 permettent d'obtenir une solution avec une précision globale proche de celle de M1, voire très proche pour M5, avec des temps de calcul réduits (avec un rapport de 5 pour les temps de calcul entre M1 et M5).

### Conclusion

Pour cet exemple, les résultats des calculs ont montré tout d'abord qu'il est plus intéressant d'avoir des maillages différents entre les deux sous-domaines. Il est aussi apparu qu'avec un choix judicieux de la partie maillée finement, les différents maillages recollés

donnent des solutions équivalentes au maillage le plus fin, aussi bien au niveau local, avec les répartitions d'induction magnétique, qu'au niveau global, au travers de l'énergie.

Enfin, les temps de calculs sont en faveur des maillages recollés M5 et M6, qui donnent des solutions dans des temps plus courts, avec des précisions équivalentes au maillage le plus fin M1.

## 2. Formulation A

Pour la formulation en potentiel vecteur, les caractéristiques des systèmes matriciels à résoudre sont définies dans le Tableau 33.

| Maillages |     | Nombre de lignes (dont liées au recollement) | Nombre de termes non nuls |
|-----------|-----|--|---------------------------|
| M1        |     | 66 508                                       | 547 478                   |
| M2        |     | 13 523                                       | 109 050                   |
| M3        |     | 3 773  | 29 244                    |
| M4        | [M] | 72 190 (2 734)                               | 602 065                   |
|           | [T] |  | 168 560                   |
| M5        | [M] | 21 830 (2 734)                               | 182 727                   |
|           | [T] |  | 74 692                    |
| M6        | [M] | 12 704 (2 734)                               | 107 391                   |
|           | [T] |  | 43 906                    |

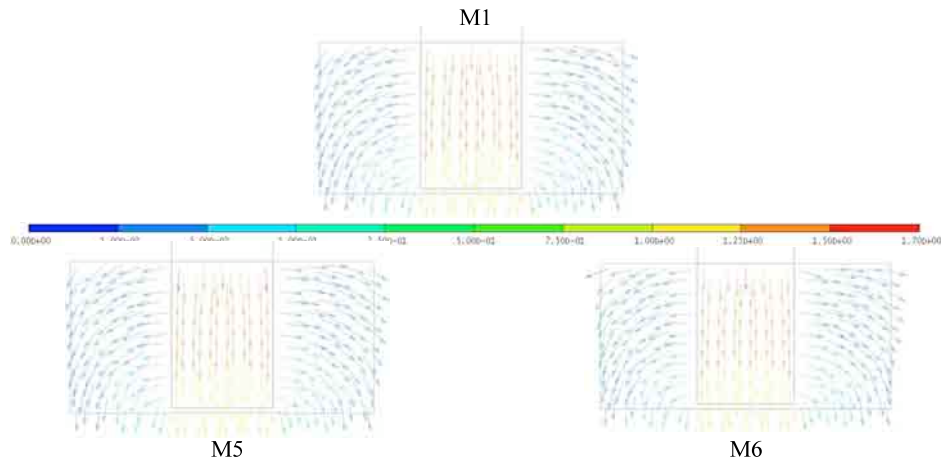
**Tableau 33 : Caractéristiques des systèmes matriciels, formulation A**

Comme dans le cas de la formulation  $\Omega$ , les systèmes avec recollement occupent moins d'espace mémoire que le système maillé finement (maillage M1).

### Comparaison d'une grandeur locale

Dans cette formulation, compte tenu des contraintes fixées (précision et nombre d'itérations maximal), le maillage M4 n'a pas convergé.

Les répartitions de l'induction magnétique au voisinage de l'entrefer pour les maillages M1, M5 et M6 peuvent être comparées (Figure 58).



**Figure 58 : Répartition de l'induction magnétique au voisinage de l'entrefer, formulation A**

Cette figure montre que le recollement permet d'avoir une répartition de l'induction magnétique satisfaisante dans la partie où se concentre l'énergie magnétique du système et sur la frontière de recollement.

### Comparaison de l'énergie et des temps de calcul

Pour les maillages utilisés, les énergies magnétiques et les temps de calculs peuvent être comparées dans le Tableau 34.

| Maillages                   | M1    | M2    | M3    | M5     | M6     |
|-----------------------------|-------|-------|-------|--------|--------|
| Energie (mJ)                | 53.53 | 49.94 | 41.26 | 53.26  | 52.73  |
| Erreur par rapport à M1 (%) | 0     | 6.71  | 22.92 | 0.50   | 1.49   |
| Méthode de résolution       | CG Cr | CG Cr | CG Cr | MRTR D | MRTR D |
| Temps de calcul (s)         | 25.21 | 4.01  | 1.04  | 93.08  | 39.42  |

**Tableau 34 : Comparaison des résultats, formulation A**

Ce tableau montre que le recollement en formulation en potentiel vecteur **A** ne permet pas, pour ce système, d'obtenir une solution pour un temps de calcul satisfaisant. Il est apparu que les espaces mémoires nécessaires au stockage des matrices est plus faible lors de l'utilisation du recollement, pour des maillages non-conforme (M5 et M6).

## **C. Bilan**

Dans cette partie, un circuit magnétique à entrefer, excité par une bobine a été modélisé, avec les deux formulations magnétostatiques  $\Omega$  et **A**.

Tout d'abord il a été vu que les espaces mémoires nécessaires au stockage des différents systèmes matriciels sont réduits grâce au recollement de maillages, et la répartition des inconnues était optimisée.

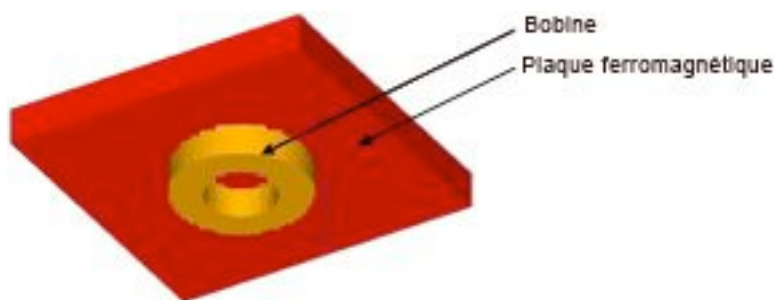
Il est apparu de plus que le recollement de maillages permettait, dans les deux formulations, d'obtenir des solutions satisfaisantes en terme de précision globale et locale. En effet, les énergies calculées, ainsi que les répartitions d'induction magnétique obtenues sont proches de celles obtenues avec le maillage de référence.

Pour la formulation en potentiel scalaire, la méthode est intéressante car pour une qualité de solution équivalente, les temps de calcul sont notablement réduits. En revanche, avec la formulation en potentiel vecteur, bien que la qualité des résultats soit bonne, le recollement implique une augmentation des temps de calcul.

### **III. Exemple magnétodynamique : la plaque ferromagnétique**

#### **A. Présentation du système étudié**

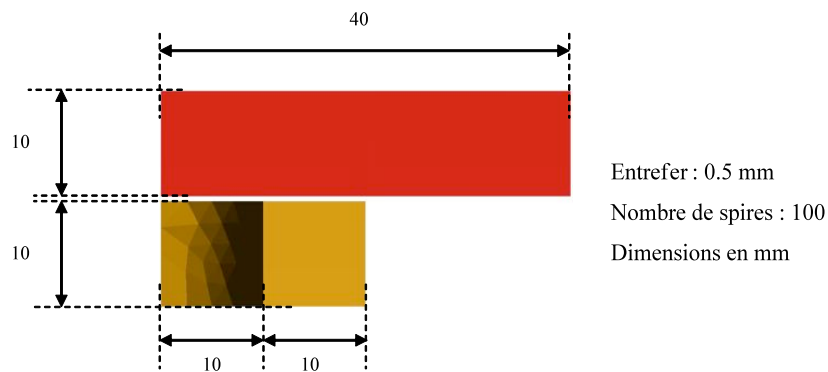
Le système étudié est une plaque ferromagnétique, de conductivité  $10^6 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ , et de perméabilité relative égale à 500, soumise à un champ magnétique créé par un inducteur multifilamentaire alimenté par un courant sinusoïdal de fréquence 10 Hz (Figure 59). Dans ces conditions, l'épaisseur de peau dans la plaque est de 7,1 mm.



**Figure 59 : Système étudié**

Du fait des symétries du problème, seul un quart du système sera modélisé.

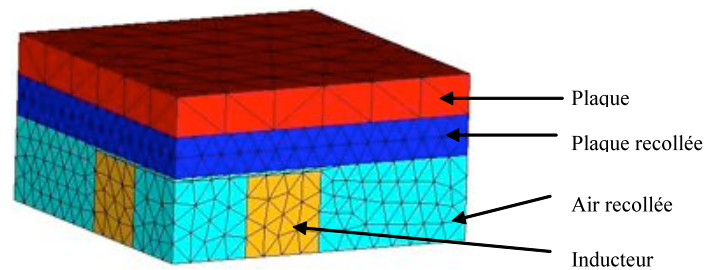
Les principales caractéristiques sont indiquées Figure 60.



**Figure 60 : Dimensions de la plaque ferromagnétique**

L'entrefer entre la plaque et la bobine est de 0,5 mm, et la bobine compte 100 spires.

Comme le montre la Figure 62, la zone recollée comprend la moitié de la plaque, l'entrefer et l'inducteur (Figure 61). Cette partie est maillée de manière plus fine que le reste du domaine.



**Figure 61 : Volume recollé pour la plaque ferromagnétique**

L'étude sera faite sur un ensemble de cinq maillages. Trois maillages sans recollement (M1, M2 et M3) seront des références sans recollement, et les deux autres (M4 et M5) auront une zone recollée (Figure 62).



Comme pour le système précédent, les maillages M4 et M5 reprendront une partie du maillage fin, dans la zone recollée, et un des autres maillages dans le reste du problème.

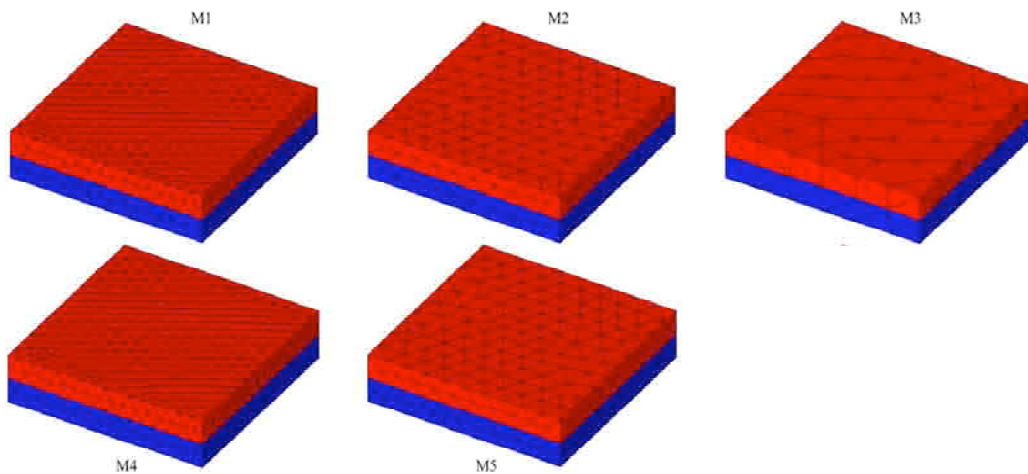


Figure 62 : Maillages de la plaque

Les principales caractéristiques de ces maillages sont données dans le Tableau 35.

| Maillage          | M1     | M2     | M3    | M4     | M5     |
|-------------------|--------|--------|-------|--------|--------|
| Nombre de nœuds   | 9 234  | 2 482  | 693   | 9 785  | 4 036  |
| Nombre d'éléments | 45 127 | 11 518 | 2 876 | 45 136 | 17 668 |

Tableau 35 : Caractéristiques des maillages

Les courants induits seront représentés sur la face inférieure de la plaque (Figure 63).



Figure 63 : Plan d'observation de la densité de courants induite dans la plaque

La puissance dans la plaque sera calculée et comparée. Pour la discrétisation temporelle, un schéma d'Euler implicite a été considéré avec un pas de temps égal à 5 ms.

## B. Résultats

### 1. Formulation T-Ω

Les premiers calculs sur la plaque ferromagnétique ont été réalisés en formulation magnétique T-Ω.

Les différentes tailles des matrices sont données dans le Tableau 36.

| Maillages |     | Nombre de lignes (dont liées au recollement) | Nombre de termes non nuls |
|-----------|-----|--|---------------------------|
| M1        |     | 14 317                                       | 148 330                   |
| M2        |     | 3 669  | 35 823                    |
| M3        |     | 931  | 8 897                     |
| M4        | [M] | 17 423 (2 237)                               | 188 588                   |
|           | [T] |  | 59 231                    |
| M5        | [M] | 9 097 (2 237)                                | 105 284                   |
|           | [T] |  | 55 299                    |

Tableau 36 : Tailles des systèmes matriciels, formulation T- $\Omega$

**Comparaison d'une grandeur locale et d'une grandeur globale**

Sur la Figure 65, nous avons représenté la distribution de la densité de courant induite sur la face inférieure de la plaque pour les maillages M1, M4 et M5.

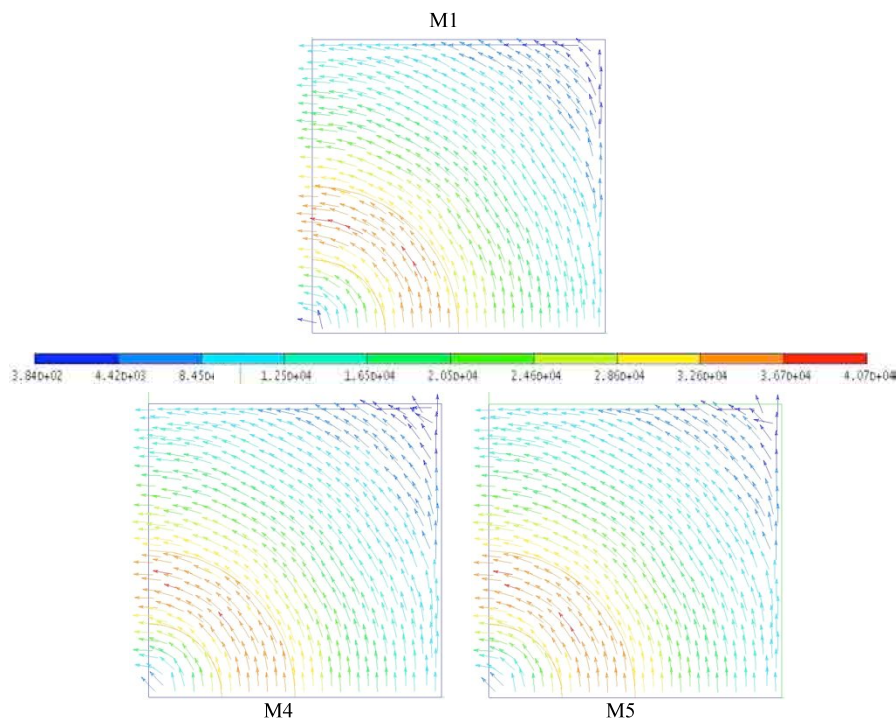


Figure 64 : Densité de courants induite sur la face inférieure de la plaque, formulation T- $\Omega$

La Figure 65 présente l'évolution temporelle de la puissance instantanée.

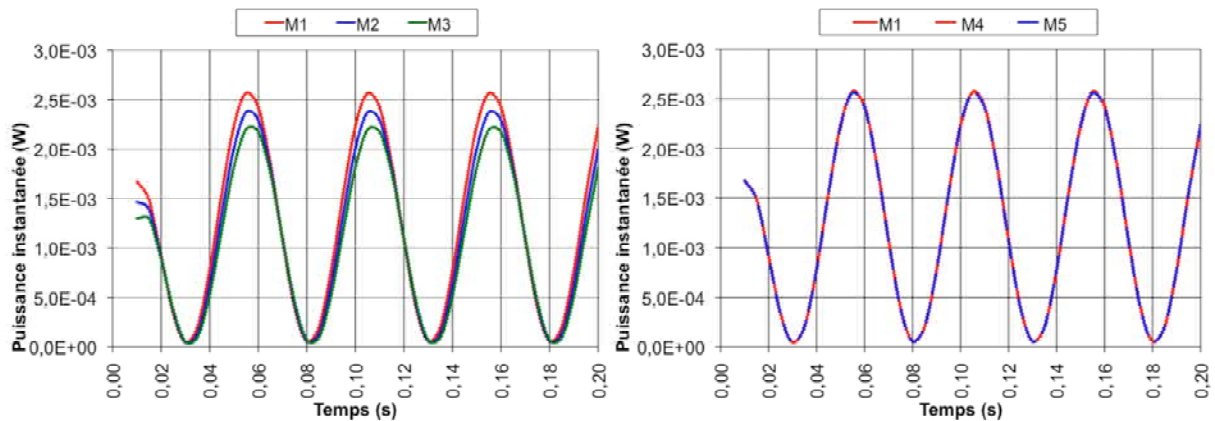


Figure 65 : Puissance instantanée dans la plaque, formulation T- $\Omega$

Les maillages de référence (M1, M2 et M3) donnent des solutions légèrement différentes car les erreurs de discrétisation ne sont pas les mêmes. Les maillages M4 et M5 donnent des résultats proches de ceux de M1, ce qui est satisfaisant pour le recollement.

### Comparaison des temps de calcul

Un dernier point à comparer est le temps total de calcul pour les différents maillages utilisés (Tableau 37).

| Maillage              | M1     | M2       | M3    | M4     | M5     |
|-----------------------|--------|----------|-------|--------|--------|
| Méthode de résolution | CG S   | CG S     | CG S  | MRTR D | MRTR D |
| Temps (s)             | 431,16 | 107,8.85 | 18,95 | 650,92 | 491,56 |

Tableau 37 : Temps de calcul pour les différents maillages, formulation T- $\Omega$

Ces résultats montrent que, pour cet exemple et la configuration choisie, le recollement de maillage ne réduit pas les temps de calcul.

## 2. Formulation A-φ

Les maillages M1, M2, M3, M4 et M5 donnent, en formulation A-φ, les systèmes matriciels dont les dimensions sont regroupées au Tableau 38.

| Maillages |     | Nombre de lignes (dont liées au recollement) | Nombre de termes non nuls |
|-----------|-----|--|---------------------------|
| M1        |     | 51 918                                       | 484 309                   |
| M2        |     | 13 249                                       | 124 320                   |
| M3        |     | 3 369  | 31 198                    |
| M4        | [M] | 56 773 (3 329)                               | 543 631                   |
|           | [T] |  | 136 502                   |
| M5        | [M] | 24 431 (3 329)                               | 252 288                   |
|           | [T] |  | 103 404                   |

Tableau 38 : Tailles des systèmes matriciels, formulation A-φ

Comme dans le cas de la formulation T-Ω, les pertes Joules seront comparées pour ce système.

### Comparaison d'une grandeur globale

La Figure 66 présente l'évolution temporelle de la puissance instantanée en fonction du temps. Le maillage M1 est toujours considéré comme référence.

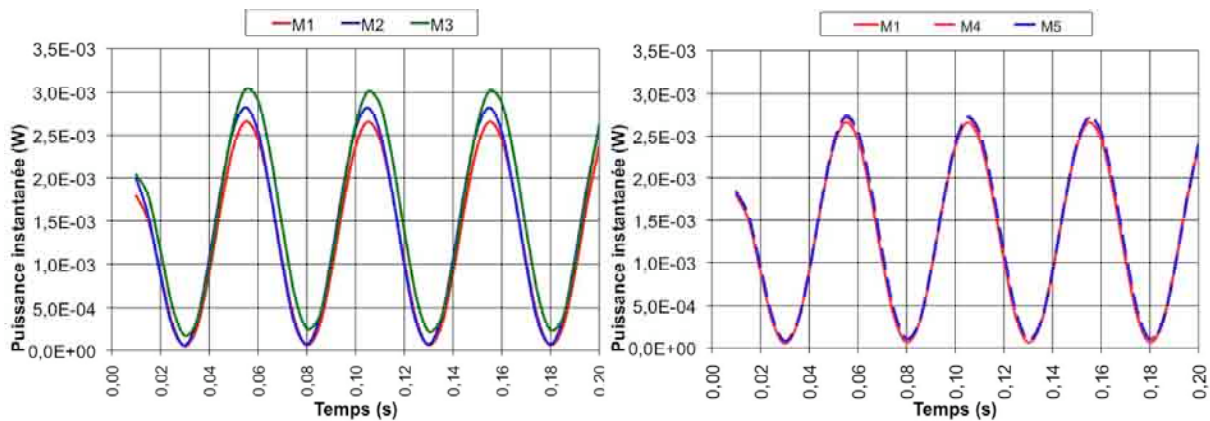


Figure 66 : Puissance instantanée au cours du temps, formulation A-φ

Le maillage M5 permet d'obtenir des résultats proches de ceux de M1, ce qui est satisfaisant pour le recollement.

### **Comparaison des temps de calcul**

Le dernier aspect à comparer pour ces calculs est le temps total mis pour obtenir l'ensemble des résultats (Tableau 39).

| Maillage              | M1    | M2     | M3    | M4       | M5       |
|-----------------------|-------|--------|-------|----------|----------|
| Méthode de résolution | CG S  | CG S   | CG S  | MRTR D   | MRTR D   |
| Temps (s)             | 503,8 | 112,66 | 28,14 | 7 941,31 | 3 377,37 |

**Tableau 39 : Temps de calcul, formulation  $\mathbf{A-\varphi}$**

Pour cet exemple, les temps de calcul en présence d'un recollement de maillage sont beaucoup plus conséquents.

## **C. Conclusion**

Une plaque ferromagnétique soumise à un champ sinusoïdal produit par un bobinage parcouru par un courant a été étudiée avec les deux formulations  $\mathbf{T-\Omega}$  et  $\mathbf{A-\varphi}$ .

Ce système a été maillé de cinq façons différentes. Trois maillages ont servi de références (un maillage fin, un maillage de taille intermédiaire, et un maillage grossier). Les deux autres étaient des maillages recollés.

Les calculs ont montré que pour les deux formulations il est possible d'avoir des résultats d'une précision acceptable en utilisant le recollement. Cette précision s'observe sur une grandeur globale (la puissance dissipée par effet Joules), et sur une grandeur locale (distribution des densités de courants induites).

Malheureusement, pour les deux formulations, les temps de calculs sont trop longs. Le recollement entraîne une forte augmentation des temps de calcul comparés à un maillage sans recollement.

## IV. Structure à griffes simplifiée

### A. Présentation du système

Dans cette partie, une structure linéaire à griffes simplifiée sera étudiée (Figure 67).

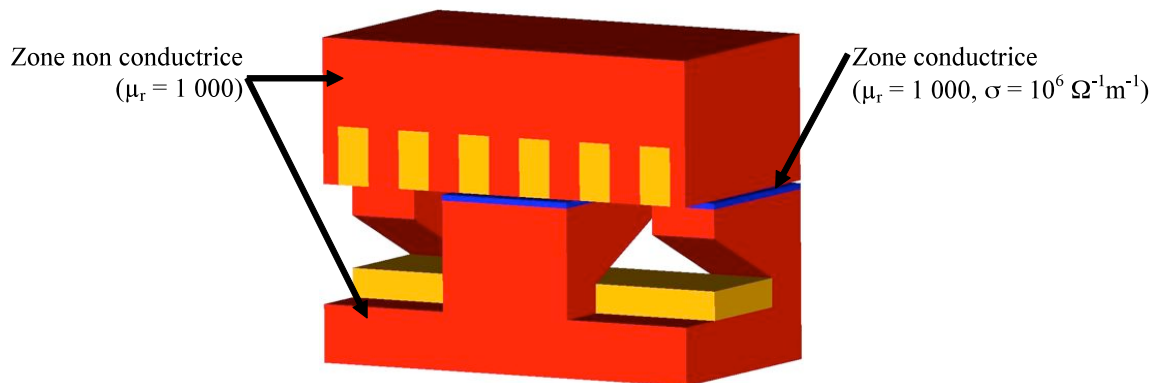


Figure 67 : Structure à griffes étudiée

Les parties ferromagnétiques dans lesquelles les courants induits ne sont pas pris en compte ont une perméabilité relative de 1 000. En revanche, dans la zone conductrice, la perméabilité relative est de 1 000, et la conductivité de  $10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

Par ailleurs, des conditions de périodicité sont imposées comme le montre la Figure 68.

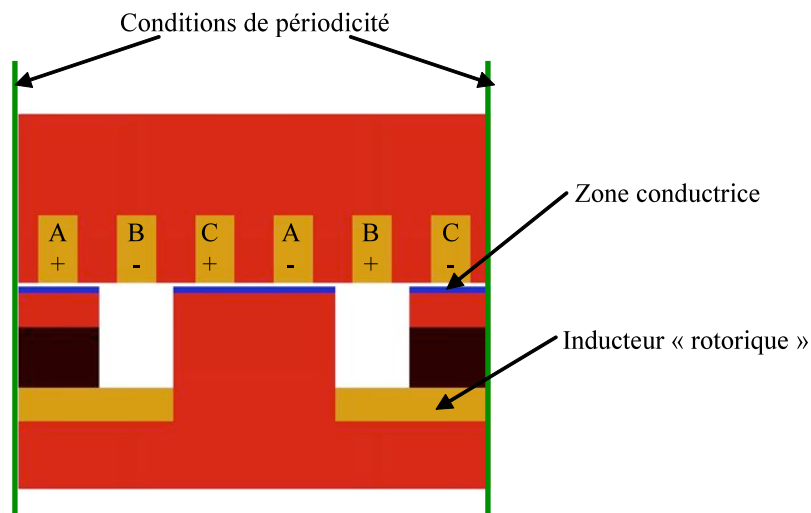
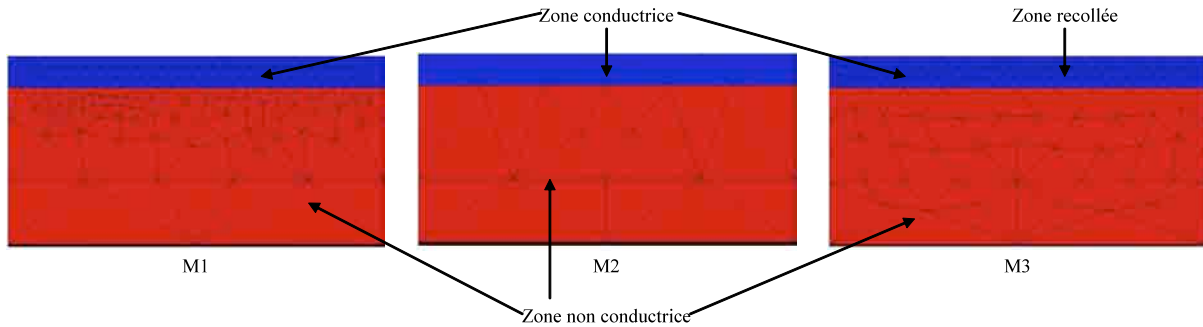


Figure 68 : Définition du système

Le courant est imposé dans les phases A, B et C, avec une fréquence de 2 000 Hz, et une valeur maximale de 7 A, les différentes phases comptant 58 spires. L'inducteur « rotorique » n'est pas alimenté, et aucun mouvement n'est considéré.

Pour l'étude de ce système, le recollement se fera au niveau de la surface des différentes griffes. Trois maillages seront utilisés. Le premier, fin, sans recollement, et le deuxième, grossier, sans recollement, donneront des références. Le dernier, avec recollement, sera comparé aux deux premiers (Figure 69).



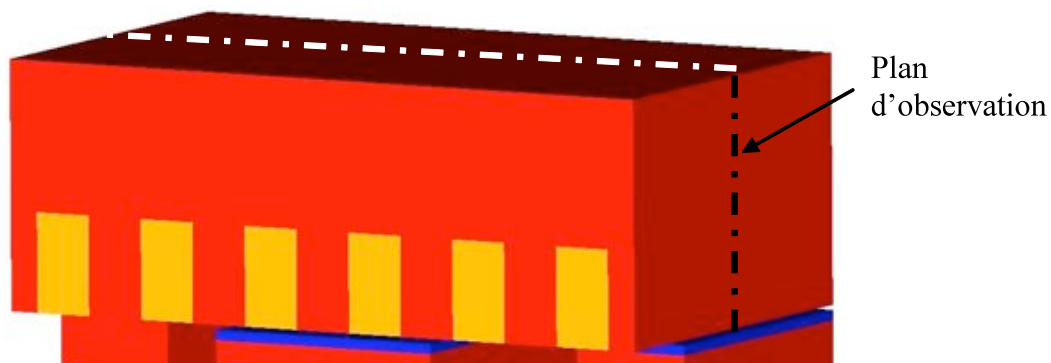
**Figure 69 : Maillages de la griffe (vue de face)**

Les principales caractéristiques des maillages sont données dans le Tableau 40.

| Maillages         | M1      | M2     | M3      |
|-------------------|---------|--------|---------|
| Nombre de nœuds   | 64 769  | 2 824  | 41 393  |
| Nombre d'éléments | 366 662 | 14 156 | 168 104 |

**Tableau 40 : Caractéristiques des maillages**

Pour chaque formulation, l'énergie et les pertes Joules seront comparées pour les différents maillages. Cette étude des grandeurs globales sera complétée par une visualisation locale de l'induction magnétique et des courants induits. L'induction magnétique sera observée dans la partie « statorique », dans le plan défini Figure 70, traversant la structure en son milieu.



**Figure 70 : Plan d'observation de l'induction magnétique**

Les densités de courants induites seront observées sur le plan à la surface des griffes Figure 71.



Figure 71 : Plan d'observation des densités de courants induites

Enfin les temps de calculs seront comparés pour les différents systèmes obtenus.

## B. Résultats

### 1. Formulation T-Ω

En formulation T-Ω les matrices ont les dimensions données dans le Tableau 41.

| Maillage | Nombre d'inconnues (dont liées au recollement) | Nombre de termes non nuls |
|----------|--|---------------------------|
| M1       | 205 344  | 2 547 211                 |
| M2       | 3 715  | 31 542                    |
| M3       | [M]  | 1 873 131                 |
|          | [T]  | 241 434                   |

Tableau 41 : Caractéristiques des matrices, formulation T-Ω

Ce tableau montre qu'effectivement, le système matriciel obtenu grâce au maillage M3 compte moins d'inconnues et globalement moins de termes que pour le maillage M1.

### Comparaison de grandeurs globales et locales

Les premières grandeurs à comparer sont les grandeurs globales, à savoir l'énergie du système, et les pertes Joules calculées.



En premier lieu, il est intéressant de comparer l'énergie calculée sur les différents maillages (Figure 72).

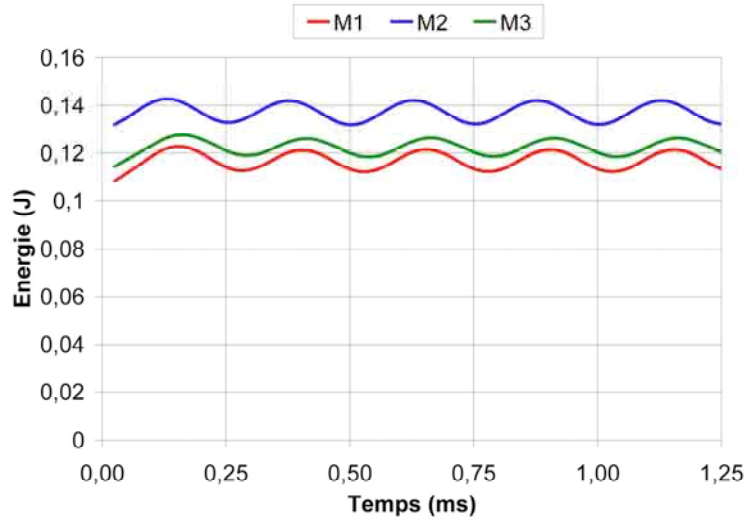


Figure 72 : Energie globale en fonction du temps, formulation T- $\Omega$

Cette figure permet d'observer que pour les deux maillages de référence, les énergies calculées n'ont ni la même amplitude, ni exactement la même phase à l'origine. Ces écarts s'expliquent par la qualité du maillage qui n'est absolument pas la même. Le maillage M1 compte 205 344 inconnues et M2 en compte 3 715.

De même, les puissances instantanées obtenues sur les trois maillages sont comparées sur la Figure 73. On observe un transitoire numérique pour les différents maillages.

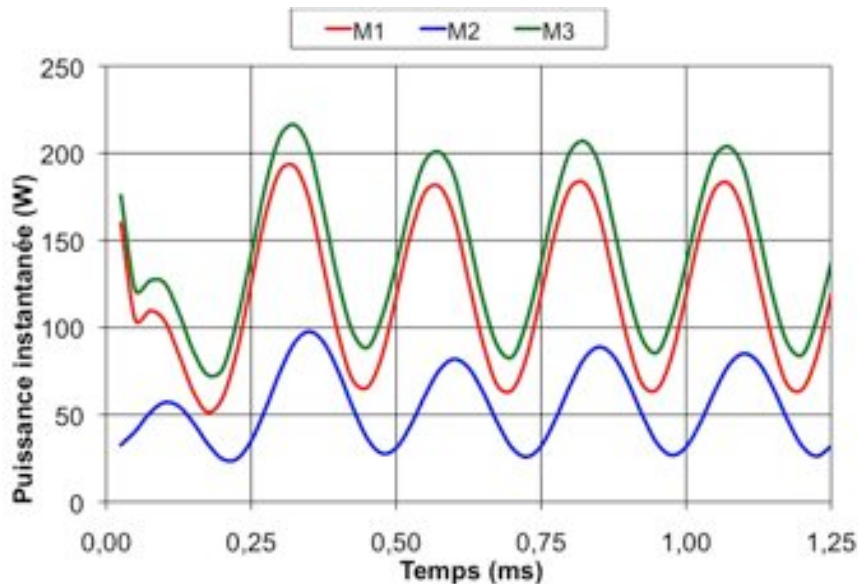
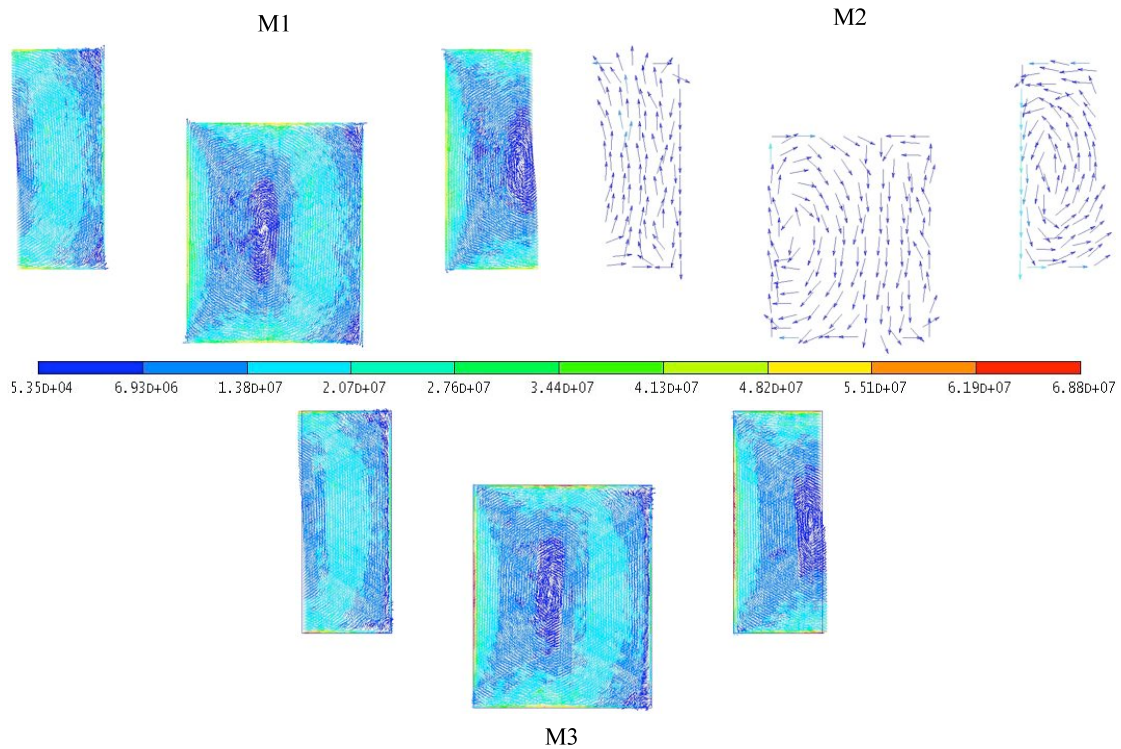


Figure 73 : Puissances instantanées calculées formulation T- $\Omega$

Sur ces courbes, des écarts importants entre M1 et M2 sont mis en évidence. En revanche, les résultats entre les maillages M1 et M3 sont relativement proches.

Il est possible d'observer la répartition des densités de courants induites sur la surface des griffes (Figure 74).



**Figure 74 : Répartition des densités de courants induites à la surface des griffes, formulation T- $\Omega$**

Comme signalé auparavant, les courants induits n'ont ni la même phase, ni la même amplitude, pour les trois maillages. Cela s'observe sur cette figure par les différences de répartition des courants induits entre les maillages M1 et M2, pour un pas de calcul donné. La densité de courants calculée pour le maillage M2 est d'amplitude plus faible, et, de plus, elle est centrée autour d'un axe décalé par rapport aux courants induits calculés pour les autres maillages. Cependant, entre M1 et M3, les courants induits calculés ont des répartitions et des amplitudes tout à fait comparables. Cette figure permet en outre de valider la prise en compte de la périodicité, dans le cas de M3.

### **Comparaison des temps de calcul**

Pour finir les temps de calcul sont comparés.

Le Tableau 42 regroupe les temps de calculs pour chaque maillage en formulation  $T-\Omega$ . Il regroupe en plus le temps lié au calcul des matrices de recollement ( $[C_n]$ ,  $[D_n]$ ,  $[C_a]$ ,  $[D_a]$  et  $[T]$ ), ainsi que le temps moyen relatif à la résolution d'un pas de temps.

| Maillage  | M1    | M2    | M3       |
|---|-------|-------|----------|
| Méthode de résolution                             | CG D  |       | MRTR D   |
| Calcul des opérateurs de recollement (s)          | /     |       | 481,35   |
| Durée moyenne de traitement d'un pas de temps (s) | 30,10 | 0,66  | 25,23    |
| Temps de calcul total (s)                         | 1 517 | 33,23 | 1 694,93 |

**Tableau 42 : Temps de calcul, formulation  $T-\Omega$**

Ce tableau montre que la résolution du système matriciel obtenu avec recollement est plus rapide que celle du système obtenu avec le maillage M1. Néanmoins, dans le cas du maillage M3, la durée totale est pénalisée par le calcul des matrices de recollement (ce calcul représente ici 28,4% du temps total). Dans les conditions, après une centaine de pas de temps, le maillage M3 demande moins de temps de calcul que le maillage M1.

## **2. Formulation $A-\varphi$**

En formulation  $A-\varphi$ , les matrices obtenues pour ce système ont les caractéristiques données dans le Tableau 43.

| Maillage | Nombre d'inconnues (dont liées au recollement) | Nombre de termes non nuls |
|----------|--|---------------------------|
| M1       | 459 246  | 5 335 730                 |
| M2       | 16 541   | 166 721                   |
| M3       | 333 108 (129 552)                              | [M]<br>4 509 403          |
|          |  | [T]<br>2 094 879          |

**Tableau 43 : Caractéristiques des matrices, formulation  $A-\varphi$**

Ce tableau permet de comparer les différentes tailles des matrices, obtenues pour chaque maillage.

### **Comparaison de grandeurs globales et locales**

Les premières grandeurs comparées ici sont les grandeurs globales, à savoir l'énergie et les pertes Joules.

Les énergies calculées pour chaque maillage sont représentées Figure 75.

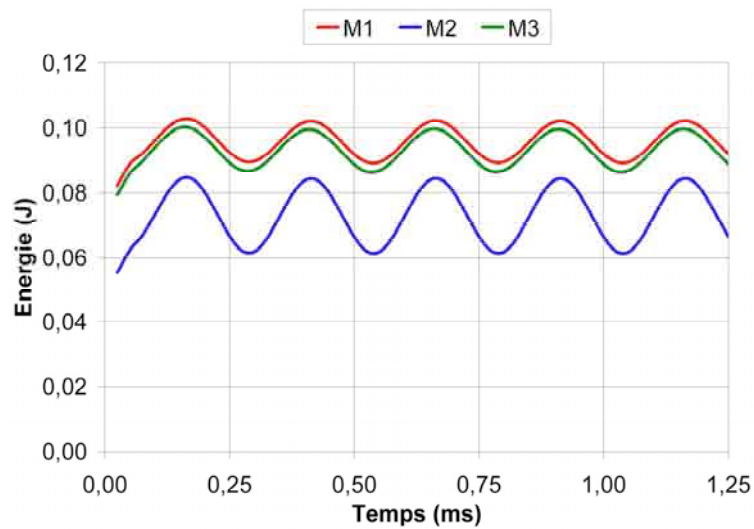


Figure 75 : Energie globale du système, formulation  $\Delta\text{-}\varphi$

Au niveau de l'énergie magnétique, le même phénomène déjà observé avec la formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$  se retrouve. Les résultats obtenus avec le maillage grossier (M2) sont relativement éloignés des maillages M1 et M3. Cette constatation se retrouve sur l'évolution de la puissance instantanée (Figure 27), où les courbes pour les maillages M1 et M3 sont pratiquement identiques.

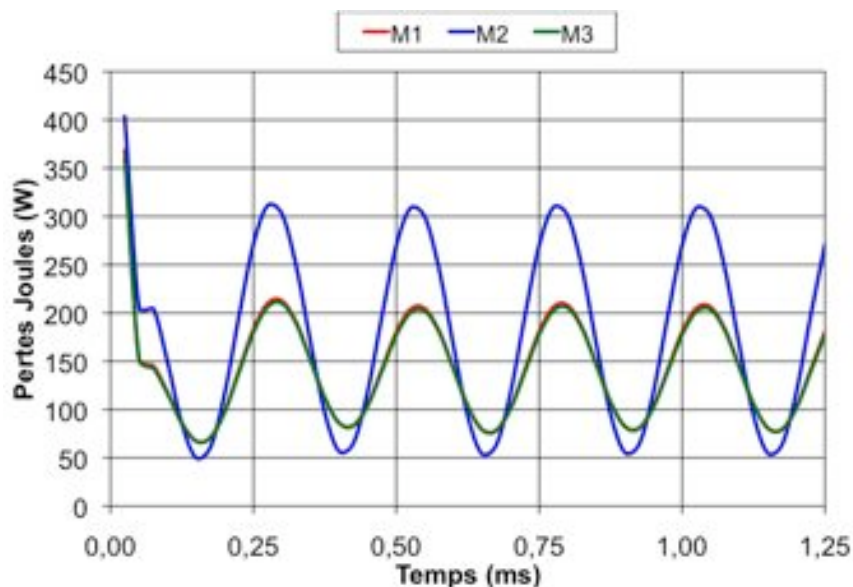


Figure 76 : Puissances instantanées calculées en  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$

Les répartitions des densités de courants induites sur la surface des griffes sont présentées dans la Figure 77.

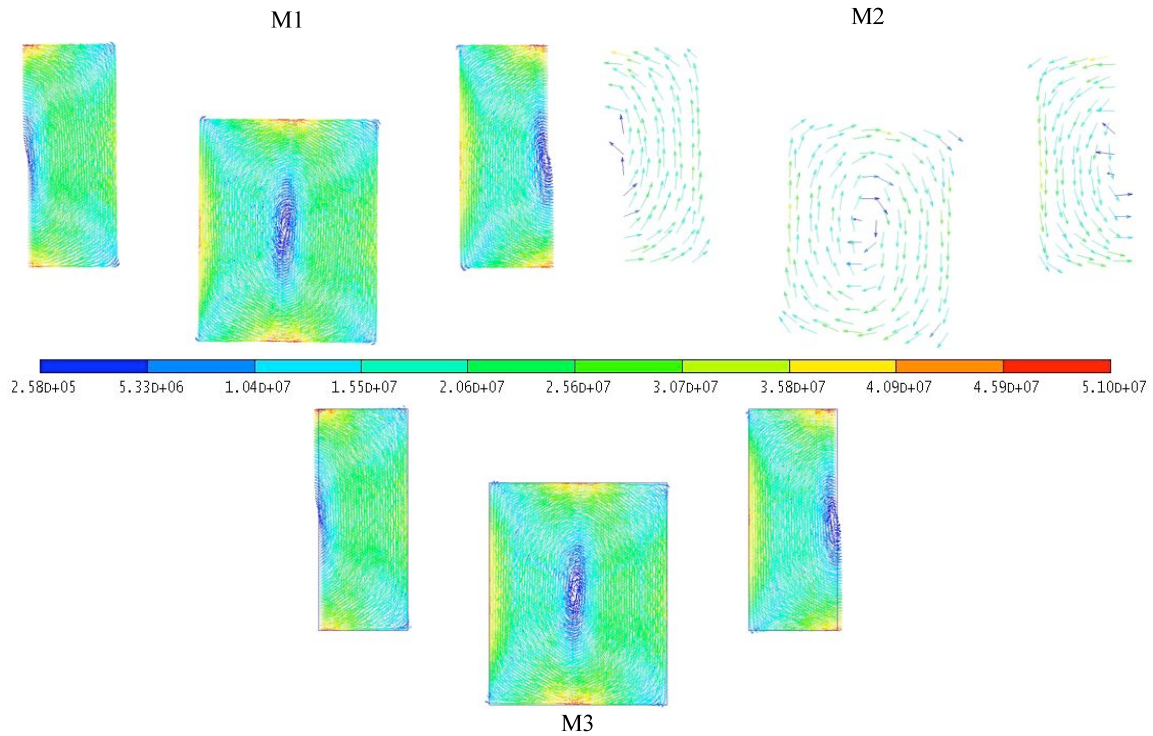


Figure 77 : Répartition des densités de courants induites, formulation A-φ

Les trois maillages donnent des répartitions des courants induits proches, aussi bien en valeur qu'en phase. De même, cette figure illustre bien la prise en compte des conditions de périodicité.

### Comparaison des temps de calcul

Le dernier aspect à comparer pour cette formulation est le temps de calcul. Le Tableau 44 reprend les différents temps de calculs. Le temps de calcul propre au recollement est indiqué (temps qui correspond aux calculs des opérateurs  $[C_n]$ ,  $[D_n]$ ,  $[C_a]$ ,  $[D_a]$ , et  $[T]$ ), ainsi que le temps moyen mis pour traiter un pas de temps, et le temps total nécessaire à l'obtention de l'ensemble des pas de temps.

| Maillage  | M1       | M2    | M3        |
|---|----------|-------|-----------|
| Méthode de résolution                             | CG D     |       | MRTR D    |
| Calcul des opérateurs de recollement (s)          | /        |       | 3 442,28  |
| Durée moyenne de traitement d'un pas de temps (s) | 159,79   | 1,33  | 192,84    |
| Temps de calcul total (s)                         | 8 005,25 | 67,09 | 13 315,72 |

Tableau 44 : Temps de calcul, formulation A-φ

Le tableau précédent montre que dans le cas de la formulation  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$ , deux aspects pénalisent la résolution du système obtenu pour M3. Tout d'abord le calcul des opérateurs de recollement, qui représente ici 25,85% du temps total de la résolution. Mais également, le calcul à chaque pas de temps qui est plus long que celui du maillage M1.

### **C. Conclusion**

Dans cette partie, une structure linéaire à griffes a été étudiée selon les deux formulations magnétodynamiques,  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$  et  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$ .

En formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$ , les calculs ont donné des résultats satisfaisants, aussi bien au niveau des grandeurs globales que des grandeurs locales. Ainsi, les énergies magnétiques et les puissances instantanées calculées pour le maillage fin M1 et pour le maillage recollé M3 sont proches. De plus, les répartitions des densités de courants induites sont également satisfaisantes. Dans cette formulation, les temps de calcul obtenus pour chacun des systèmes matriciels ont montré que le recollement requiert un temps global plus long. Par contre, la résolution du système matriciel à chaque pas de temps est plus rapide que celle du système obtenu pour le maillage fin.

En formulation  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$ , les grandeurs globales et locales calculées sont proches pour les maillages M1 et M3. En effet, l'énergie magnétique et la puissance instantanée calculées pour le maillage M3 sont semblables à celles obtenue pour M1. Les répartitions des densités de courants induites ont permis de confirmer la précision du recollement sur ces grandeurs locales. Malheureusement, pour cette formulation, la résolution du système demande un temps de calcul trop important, rendant l'utilisation du recollement par la méthode Mortar moins compétitive par rapport à un calcul sans recollement.

### **V. Bilan**

Dans ce chapitre, le recollement de maillages a été appliqué à trois systèmes électromagnétiques. Le premier, un circuit magnétique à entrefer, a été étudié en magnétostatique avec les deux formulations. Le deuxième système, magnétodynamique, se composait d'une plaque ferromagnétique soumise à un champ créée par une bobine multifilamentaire. Pour cet exemple, les formulations  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$  et  $\mathbf{A}\text{-}\varphi$  ont été utilisées. Le troisième exemple était constitué d'une structure linéaire à griffes. Celle-ci a été étudiée en magnétodynamique, selon les deux formulations.

Le premier système a permis de valider le recollement dans les deux formulations magnétostatiques. L'étude a porté sur six maillages différents, trois maillages sans recollement et trois avec recollement. Les résultats ont montré que le recollement permettait de conserver la précision des grandeurs globales et locales. Par ailleurs, dans le cas de la formulation en potentiel scalaire, les temps de calcul ont été nettement réduits. Par contre, avec la formulation en potentiel vecteur, les temps de calcul avec recollement sont restés élevés par rapport à ceux des différentes références.

Avec le second système, le recollement nécessitait de projeter des inconnues vectorielles et scalaires sur les surfaces de recollement de par les formulations magnétodynamiques en potentiels. Dans les deux formulations, les résultats obtenus sont satisfaisants en terme de précision. Par contre, les temps totaux de calcul ne permettent pas de considérer le recollement comme une solution intéressante pour la modélisation de ce problème.

Avec le troisième système, une structure linéaire à griffes a été modélisée. Le recollement de maillage choisi se faisait autour d'un volume situé en bout de différentes griffes. Dans ce contexte, le recollement a été validé sur des grandeurs globales et locales. Comme pour les deux autres exemples, les résultats obtenus avec recollement sont satisfaisants en terme de précision par rapport au maillage de référence. Cependant, les temps de calculs sont apparus pénalisant pour le recollement de maillages. Néanmoins, cette étude a également montré que la résolution du système matriciel obtenu par recollement en formulation  $\mathbf{T}-\Omega$  était plus rapide que la résolution du système matriciel obtenu pour le maillage de référence fin. La partie pénalisant les temps de calcul est liée au calcul des opérateurs de recollement.

## Conclusion générale et perspectives de travail

Ce présent mémoire a présenté quelques méthodes de recollement de maillages. Pour ce faire, il s'est articulé autour de trois chapitres.

Le premier chapitre a présenté les outils utilisés dans le cadre des éléments finis classiques, dans le domaine de l'électromagnétisme. Tout d'abord, les espaces fonctionnels mathématiques ont été introduits. Les équations de Maxwell ont alors été explicitées dans ces espaces, ainsi que les différents champs scalaires et vectoriels qui y sont liés (potentiels scalaires  $\Omega$  et  $\varphi$ , potentiels vecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{T}$ , induction magnétique  $\mathbf{B}$ , champ magnétique  $\mathbf{H}$ , champ électrique  $\mathbf{E}$ , densité de courants  $\mathbf{J}$ ). Les différentes équations à résoudre ont alors été introduites : les formulations magnétostatiques en potentiels scalaire magnétique  $\Omega$  et en potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ , et les deux formulations magnétodynamiques, magnétique  $\mathbf{T}$ - $\Omega$ , et électrique  $\mathbf{A}$ - $\varphi$ . Ces formulations ont été discrétisées, et ont permis de définir des systèmes matriciels à résoudre. Ce premier chapitre s'est terminé par une présentation rapide de quelques méthodes de résolution des systèmes matriciels.

Le deuxième chapitre a développé les méthodes de recollement de maillages utilisées dans le cadre des travaux de thèse. Tout d'abord, quelques outils mathématiques ont été évoqués. Ensuite, trois méthodes de recollement de maillages ont été décrites : les simples et doubles multiplicateurs de Lagrange, et la méthode Mortar. Ces méthodes permettent de lier les inconnues des différents sous-domaines d'un même problème, et par là permettent le recollement des maillages. Afin d'améliorer ces méthodes, des fonctions de formes aux propriétés intéressantes, ainsi que des solveurs et préconditionneurs adaptés ont été introduits. Une fois les méthodes explicitées, deux études ont été menées, une première sur un exemple magnétostatique, et une seconde en magnétodynamique. Ces études ont permis de montrer que les différentes méthodes étaient équivalentes en termes de précision. Néanmoins les résultats obtenus en formulation  $\mathbf{A}$ , et en magnétodynamique ont montré que la méthode des multiplicateurs de Lagrange était moins intéressante que la méthode Mortar. Par ailleurs, elles ont aussi montré que la méthode MRTR, adaptée au système de trois matrices de la méthode Mortar, avec un préconditionneur diagonal était la méthode de résolution la plus rapide à résoudre le système.



Une troisième partie a porté sur l'utilisation de la méthode Mortar pour des applications plus complexes : un circuit magnétique à bobinage avec entrefer, une plaque ferromagnétique soumise à un champ sinusoïdal, et une structure linéaire à griffes. Le premier exemple, magnétostatique, a confirmé que le recollement permettait de conserver la précision. De plus en formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , le temps de calcul s'en trouve même réduit. Néanmoins, en formulation en potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , le temps de calcul reste élevé : la convergence est encore plus longue que celle du maillage le plus fin utilisé. Un exemple magnétodynamique (une plaque ferromagnétique soumise à un champ sinusoïdal) a ensuite été traité. Sur cet exemple, bien que le recollement donne des résultats proches des solutions de références, des perturbations apparaissent au niveau des interfaces de recollement, et les temps de calculs restent élevés. Enfin une structure linéaire à griffes a été étudiée en magnétodynamique. Cette étude a permis de confirmer la possibilité du recollement de maillages en magnétodynamique. Les résultats sont en effet satisfaisants en terme de précision pour cet exemple. Néanmoins, les temps de calcul pour les systèmes obtenus dans le cas de maillage recollés restent longs. Cependant, il a été vu qu'en formulation  $\mathbf{T}$ - $\Omega$  le temps de résolution d'un pas de temps pour le système recollé était plus rapide que celui pour le maillage le plus fin. Avec un nombre suffisant de pas de temps, le modèle avec recollement deviendrait ainsi plus rapide à résoudre que le modèle le plus fin.

Les résultats obtenus tendent à montrer plusieurs points. Tout d'abord ils valident la méthode, dans le sens où le recollement par les méthodes de Lagrange (simple et doubles multiplicateurs) et Mortar peuvent être utilisés pour reconnecter les maillages non-conformes. Ils ont aussi montré qu'en formulation  $\Omega$ , le recollement permet de réduire l'espace mémoire, et le temps de calcul. Dans les autres formulations, l'effet du recollement n'est pas aussi flagrant, ni aussi positif : les temps de calculs ne sont pas systématiquement réduits, mais la précision des calculs est satisfaisante.

Par ailleurs, les travaux menés pendant ces trois années de thèse ont permis l'implantation dans le *code\_Carmel*, développé au laboratoire, des différentes méthodes de recollement présentées, et des outils associés (notamment un outil permettant de rechercher les éléments en vis-à-vis), dans le cas d'un recollement entre deux suites de plans.

Il existe plusieurs voies à explorer pour compléter cette étude. Tout d'abord il est possible d'améliorer la programmation. Beaucoup d'éléments de code peuvent être modifiés

afin de l'optimiser globalement pour le recollement, sans pour autant pénaliser le traitement de cas plus classiques. De plus la généralisation à des surfaces courbes est un autre point à développer à la suite de ces travaux.

Un autre aspect nécessitant un travail de recherche concerne les matrices obtenues, et la résolution du système associé. En effet, la matrice  $[T]$ , et la matrice  $[M]$  obtenues dans le cas

du recollement de maillages par la méthode Mortar (ou la matrice  $\begin{bmatrix} M_1 & 0 & K_1^t \\ 0 & M_2 & K_2^t \\ K_1 & K_2 & M_3 \end{bmatrix}$  obtenue

par Lagrange), ont des propriétés qu'il convient d'étudier et d'exploiter lors de la résolution, et du préconditionnement. D'ailleurs les préconditionneurs construits à partir des décompositions QR peuvent être optimisé : un rangement astucieux des inconnues devrait permettre de réduire grandement les temps de calculs.

Un troisième aspect est l'extension du recollement à d'autres éléments que les tétraèdres, voire un couplage entre des éléments de différents types (tétraèdres avec des cubes, ou des prismes...)

Un dernier aspect, et non des moindres, concerne l'utilisation du recollement de maillages dans d'autres situations que la décomposition de domaines. Au cours des travaux de thèse, certaines utilisations ont été présentées, et validées (mouvement [55], prise en compte de symétrie complexe [43]), mais restent à implanter de manière générale.

## **Annexes**

## Annexe 1 Méthodes itératives et préconditionneurs

Cette Annexe présente les différents solveurs et préconditionneurs utilisés lors des travaux. Tout d'abord différents algorithmes de solveurs seront présentés. Puis, les différents préconditionneurs seront abordés. Enfin, les solveurs préconditionnés seront développés.

Dans toute la suite de cette annexe, le système à résoudre se met sous la forme :

$$[M][X] = [F] \quad (\text{A.1.1})$$

Avec  $[X]$  le vecteur recherché,  $[M]$  la matrice du système, carrée, de taille  $N$ , et  $[F]$  le second membre.

### I. Quelques solveurs

#### A. La méthode directe par la décomposition de Cholesky

Une méthode directe de résolution ne peut s'appliquer que si la matrice  $[M]$  est inversible. La décomposition de Cholesky peut s'utiliser avec n'importe quelle matrice  $[M]$  symétrique, définie positive. Cette décomposition permet d'introduire la matrice  $[L]$  triangulaire inférieure telle que :

$$[M] = [L][L] \quad (\text{A.1.2})$$

Les différents termes de la matrice s'expriment comme suit :

$$[L]_j = l_{ij} = \frac{m_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \text{ avec } i + 1 \leq j \quad (\text{A.1.3})$$

$$[L]_i = l_{ii} = \sqrt{m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad (\text{A.1.4})$$

Dans le cas où  $[M]$  est inversible, alors  $[L]$  l'est aussi, et la solution de l'équation (A.1.1) se calcule en trois étapes :

| Etape 1   | Etape 2   | Etape 3   |
|---|---|---|
| <pre> do i = 1, N   a = 0   do j = 1, i - 1     a = a + l<sub>ij</sub> x<sub>j</sub>   end do   y<sub>i</sub> = <math>\frac{f_i - a}{l_{ii}}</math> end do </pre> | <pre> do i = 1, N   x<sub>i</sub> = <math>\frac{y_i}{l_{ii}}</math> end do </pre> | <pre> do i = N, 1, -1   do j = 1, i - 1     x<sub>j</sub> = <math>\frac{x_j - l_{ij} x_i}{l_{jj}}</math>   end do end do </pre> |

Algorithme 1 : Résolution directe par la décomposition de Cholesky

## B. Le gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est l'une des plus utilisées pour résoudre les systèmes matriciels obtenus par la méthode des éléments finis. Cette méthode est itérative : elle construit une suite de solutions approchées. Pour l'arrêter, le résidu relatif  $r_j$  doit atteindre un minimum dont dépend la qualité de la solution.  $[X_0]$  est le premier vecteur de la suite de solutions, choisi arbitrairement par l'utilisateur.

```

ri =  $\|[F] - [M][X_0]$ 
j = 0
 $[D_0] = [F] - [M][X_0]$ 
 $[E_0] = [D_0]$ 
do while rj > tolerance
   $\alpha_j = \frac{[D_j][D_j]}{[M][D_j][D_j]}$ 
   $[X_{j+1}] = [X_j] + \alpha_j [E_j]$ 
   $[D_{j+1}] = [D_j] - \alpha_j [M][E_j]$ 
  rj+1 =  $\frac{\|[D_{j+1}] \|}{ri}$ 
   $\beta_j = \frac{[D_{j+1}][D_{j+1}]}{[D_j][D_j]}$ 
   $[E_{j+1}] = [D_{j+1}] + \beta_j [E_j]$ 
  j = j + 1
end do

```

Algorithme 2 : Gradient conjugué non préconditionné

Afin d'accélérer la convergence, un préconditionneur peut être introduit.

Dans le cas des systèmes obtenus par la méthode Mortar, les produits par la matrice  $[M]$  sont remplacés par trois produits : d'abord par  $[T]$ , puis par  $[M]$ , puis par  $[T]^t$  (voir équation (2.48)).

|   |
|---|
| $[Temp] = [T][X_0]$                               |
| $[Temp] = [M][Temp]$                              |
| $[Temp] = [T][Temp]$                              |
| $r_i = \ [F] - [Temp]\ $                          |
| $j = 0$   |
| $[D_0] = [F] - [Temp]$                            |
| $[E_0] = [D_0]$                                   |
| <b>do while</b> $r_j > \text{tolerance}$          |
| $[Temp] = [T][D_j]$                               |
| $[Temp] = [M][Temp]$                              |
| $[Temp] = [T][Temp]$                              |
| $\alpha_j = \frac{[D_j][D_j]}{[Temp][D_j]}$       |
| $[X_{j+1}] = [X_j] + \alpha_j [E_j]$              |
| $[Temp] = [T][E_j]$                               |
| $[Temp] = [M][Temp]$                              |
| $[Temp] = [T][Temp]$                              |
| $[D_{j+1}] = [D_j] - \alpha_j [Temp]$             |
| $r_{j+1} = \ [D_{j+1}]\ $                         |
| $\beta_j = \frac{[D_{j+1}][D_{j+1}]}{[D_j][D_j]}$ |
| $[E_{j+1}] = [D_{j+1}] + \beta_j [E_j]$           |
| $j = j + 1$                                       |
| <b>end do</b>                                     |

**Algorithme 3 : Gradient conjugué non préconditionné, modifié pour la méthode Mortar**

### C. La méthode Uzawa

Dans le cas des multiplicateurs de Lagrange, un problème de point Selle de la même forme que (A.1.5) apparaît.

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & K_1^t \\ 0 & M_2 & K_2^t \\ K_1 & K_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.5})$$

Pour résoudre ce système, une solution consiste à utiliser la méthode d'Uzawa dont l'algorithme est donné ci-dessous, avec  $\alpha$  un paramètre de la méthode [16], [45] :

```

j = 1
do while rj > tolerance
  solve  $\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_1^t \\ K_2^t \end{bmatrix} X_{3j-1}$ 
   $\begin{bmatrix} X_{3j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{3j-1} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{bmatrix}$ 
   $rj = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \end{bmatrix}$ 
  j = j + 1
end do

```

Algorithme 4 : La méthode Uzawa

La résolution intermédiaire peut être faite par diverses méthodes, souvent itératives car la matrice  $[M]$  n'est pas inversible.

Bien qu'adaptée à ce type de matrices, la méthode Uzawa converge très lentement dans le cas de recollement de maillages.

**D. MRTR**

Pour la méthode MRTR [56], le système à résoudre est de la forme (A.1.1).

$$\begin{aligned}
 & k = 1 \\
 & r_i = \|[F] - [M][X_0] \\
 & [D_0] = [F] - [M][X_0] \\
 & [Y_0] = -[D_0] \\
 & \varepsilon_0 = [Y_0] \cdot [Y_0] \\
 & \zeta_0 = \frac{\varepsilon_0 [D_0] [M][D_0]}{[M][D_0] \cdot [M][D_0]} \\
 & \eta_0 = 0 \\
 & \alpha_0 = 0 \\
 & [Q_0] = 0 \\
 & \mathbf{do\ while\ } r_k > \text{tolerance} \\
 & \quad \zeta_k = \frac{\varepsilon_{k-1} [D_{k-1}] [M][D_{k-1}]}{\varepsilon_{k-1} [M][D_{k-1}] \cdot [M][D_{k-1}] - [Y_{k-1}] [M][D_{k-1}] \cdot [Y_{k-1}] [M][D_{k-1}] \\
 & \quad \quad - [Y_{k-1}] [M][D_{k-1}] [D_{k-1}] \cdot [M][D_{k-1}]} \\
 & \quad \eta_k = \frac{-[Y_{k-1}] [M][D_{k-1}] [D_{k-1}] \cdot [M][D_{k-1}]}{\varepsilon_{k-1} [M][D_{k-1}] \cdot [M][D_{k-1}] - [Y_{k-1}] [M][D_{k-1}] \cdot [Y_{k-1}] [M][D_{k-1}]} \\
 & \quad \alpha_k = \eta_k \frac{\zeta_{k-1}}{\zeta_k} \\
 & \quad \varepsilon_k = \zeta_k [D_{k-1}] \cdot [M][D_{k-1}] \\
 & \quad [Q_k] = [D_{k-1}] + \alpha_k [Q_{k-1}] \\
 & \quad [X_k] = [X_{k-1}] + \zeta_k [Q_k] \\
 & \quad [Y_k] = \eta_k [Y_{k-1}] + \zeta_k [M][D_{k-1}] \\
 & \quad [D_k] = [D_{k-1}] - [Y_k] \\
 & \quad r_k = \frac{\|[D_k]}{r_i} \\
 & \quad k = k + 1 \\
 & \mathbf{end\ do}
 \end{aligned}$$

**Algorithme 5 : Méthode de résolution MRTR**



Cet algorithme peut être modifié pour prendre en compte les différentes matrices dans le cas de la méthode Mortar.

```

k = 1
[Temp] = [T][X0]
[Temp] = [M][Temp]
[Temp] = [T][Temp]
ri = ||[F] - [Temp]
[D0] = [F] - [Temp]
[Y0] = -[D0]
ε0 = [Y0].[Y0]
[Temp] = [T][D0]
[Temp] = [M][Temp]
[Temp] = [T][Temp]
ζ0 =  $\frac{\varepsilon_0 [D_0].[Temp]}{[Temp].[Temp]}$ 
η0 = 0
α0 = 0
[Q0] = 0
do while rk > tolerance
  [Temp] = [T][Dk-1]
  [Temp] = [M][Temp]
  [Temp] = [T][Temp]
  ζk =  $\frac{\varepsilon_{k-1} [D_{k-1}].[Temp]}{\varepsilon_{k-1} [Temp].[Temp] - [Y_{k-1}][Temp].[Y_{k-1}][Temp]}$ 
  ηk =  $\frac{-[Y_{k-1}].[Temp][D_{k-1}].[Temp]}{\varepsilon_{k-1} [Temp].[Temp] - [Y_{k-1}][Temp].[Y_{k-1}][Temp]}$ 
  αk = ηk  $\frac{\zeta_{k-1}}{\zeta_k}$ 
  εk = ζk [Dk-1].[Temp]
  [Qk] = [Dk-1] + αk [Qk-1]
  [Xk] = [Xk-1] + ζk [Qk]
  [Yk] = ηk [Yk-1] + ζk [Temp]
  [Dk] = [Dk-1] - [Yk]
  rk =  $\frac{||[D_k]}{r_i}$ 
  k = k + 1
end do

```

Algorithme 6 : Méthode de résolution MRTR, modifiée dans le cas de Mortar

### E. Le bigradient conjugué

Cet algorithme s'approche du gradient conjugué, mais utilise deux récurrences en parallèle.

```

k = 1
r1 = ||[F] - [M][X0]
[D0] = [F] - [M][X0]
choose [D0*] such that [D0] · [D0*] ≠ 0
[Q0] = [D0]
[Q0*] = [D0*]
do while rk > tolerance
    αk =  $\frac{[D_k] \cdot [D_k^*]}{[M][Q_k] \cdot [Q_k^*]}$ 
    [Xk+1] = [Xk] + αk [Qk]
    [Dk+1] = [Dk] + αk [M][Qk]
    [Dk+1*] = [Dk*] + αk [M][Dk*]
    βk =  $\frac{[D_{k+1}] \cdot [D_{k+1}^*]}{[D_k] \cdot [D_k^*]}$ 
    [Qk+1*] = [Dk*] + βk [Qk*]
    [Qk+1] = [Dk] + βk [Qk]
    k = k + 1
end do

```

Algorithme 7 : Le Bigradient conjugué

**Remarque :** Il existe encore de nombreuses méthodes de résolution, plus ou moins complexes, plus ou moins efficaces, adaptés à des systèmes matriciels aux propriétés différentes. Les méthodes présentées ici sont celles utilisées lors des travaux de thèse.

## II. Préconditionneurs

### A. Définition

Le préconditionnement se fait par multiplication du système par une matrice convenablement choisie. En notant le préconditionneur  $[P] = [L][U]$ , les principales méthodes s'écrivent :

$$[P]^{-1} [M][X] = [P]^{-1} [F] \quad (\text{A.1.6})$$

$$[M][P]^{-1} [V] = [F] \text{ avec } [V] = [P][X] \quad (\text{A.1.7})$$

$$[L]^{-1} [M][U]^{-1} [V] = [L]^{-1} [F] \text{ avec } [V] = [U][X] \quad (\text{A.1.8})$$

L'équation (A.1.6) correspond à un préconditionnement à gauche, (A.1.7) à un préconditionnement à droite, et le préconditionnement en "split" est donné par (A.1.8). Ces équations donnent les nouveaux systèmes à résoudre afin d'obtenir la solution du système initial. Dans la suite, seuls les préconditionneurs à gauche et en « split » sont développés.

### B. Préconditionneur diagonal

Ce préconditionneur est le plus simple à construire. Il s'appuie simplement sur les termes diagonaux de la matrice. Il est nécessaire que la matrice n'ait pas de termes nuls sur la diagonale. Dans ce cas, les termes de la matrice  $[P]$  se définissent comme suit :

$$p_{ii} = m_{ii} \quad (\text{A.1.9})$$

Dans le cas du préconditionnement en split, il est nécessaire de définir les matrices  $[L]$  et  $[U]$  :

$$l_{ii} = u_{ii} = \text{signe}(p_{ii}) \sqrt{\text{abs}(p_{ii})} = \text{signe}(m_{ii}) \sqrt{\text{abs}(m_{ii})} \quad (\text{A.1.10})$$

Dans ce cas, les inverses des matrices peuvent être calculées directement.

**Remarque :** Lors des calculs avec recollement, un second préconditionneur diagonal est utilisé : il s'agit de « l'adimensionnement ». Dans ce cas, la matrice  $[P]$  est diagonale, avec ses termes tous égaux à  $\mu_0$  ou  $1/\mu_0$  selon la formulation magnétostatique utilisée.

### C. Préconditionnement par la méthode de Cholesky incomplet, et Crout incomplet

Les préconditionnements par les méthodes de Cholesky incomplet, ou Crout incomplet sont très proches.

La décomposition de Cholesky a été vue en (A.1.3) et (A.1.4). Dans le cas de la décomposition incomplète de Cholesky, la matrice  $[L]$  est toujours triangulaire inférieure, mais seuls les termes correspondants à un terme de  $[M]$  sont pris en compte :

$$[L]_{ij} = l_{ij} = \frac{m_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, \text{ avec } i+1 \leq j \text{ et } m_{ij} \neq 0 \quad (\text{A.1.11})$$

$$[L]_{ii} = l_{ii} = \sqrt{m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \quad (\text{A.1.12})$$

A partir de cette définition, la matrice  $[P]$  se définit comme le produit de  $[L]$  par sa transposée :  $[P] = [L] [L]^t = [L] [U]$ .

La décomposition de Crout est semblable à la décomposition de Cholesky. Elle vise à calculer les matrices  $[L_1]$  et  $[D]$  telles que :

$$[M] = [L_1] [D] [L_1] \quad (\text{A.1.13})$$

Avec  $[L_1]$  triangulaire inférieure, et  $[D]$  diagonale, dont les termes se définissent par :

$$[L_1]_{ij} = l_{1ij} = \frac{m_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{1ik} l_{1jk}}{\sqrt{d_{ii}}}, \text{ avec } i+1 \leq j, l_{1ii} = 1 \quad (\text{A.1.14})$$

$$[D]_{ii} = d_{ii} = m_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{1ik}^2 \quad (\text{A.1.15})$$

Il apparaît ici que  $[L] = [L_1] \sqrt{[D]}$ . De la même façon que lors de la factorisation incomplète de Cholesky, la factorisation de Crout peut être aussi incomplète, en conservant uniquement les termes de  $[L_1]$  correspondants à des termes de  $[M]$  non nuls. L'avantage de la méthode de Crout par rapport à la méthode de Cholesky est la possibilité d'utiliser des matrices non définies positives. Pour la décomposition incomplète de Crout, la matrice de préconditionnement est :  $[P] = [L_1] [D] [L_1]^t$  et peut se décomposer comme suit :  $[P] = ([L_1] \sqrt{[D]})([L_1] \sqrt{[D]})$ .

#### **D. Préconditionnement SSOR**

Dans le cas de la méthode SSOR, la matrice  $[M]$  est tout d'abord décomposée en trois matrices :  $[D]$ ,  $[E]$  et  $[F]$  telles que :

$$[M] = [D] - [E] - [F] \quad (\text{A.1.16})$$

Avec  $[D]$  les termes diagonaux de  $[M]$ ,  $[E]$  la partie triangulaire inférieure, sans la diagonale de  $[M]$ , et  $[F]$  la partie triangulaire supérieure sans la diagonale de  $[M]$ . Dans le cas où  $[M]$  est symétrique, alors  $[F] = [E]^t$ . A partir de ces définitions, une matrice de préconditionnement  $[P]$  peut être construite :

$$[P] = ([D] - \omega [E])[D]^{-1}([D] - \omega [F]), \text{ avec } \omega \text{ un réel (en général égal à 1)} \quad (\text{A.1.17})$$

Encore une fois, la matrice  $[P]$  peut se décomposer en un produit de deux matrices pour utiliser le préconditionnement en split :

$$[P] = ([D] - \omega [E] \sqrt{[D]^{-1}}) (\sqrt{[D]^{-1}} ([D] - \omega [F])) \quad (\text{A.1.18})$$

### E. Préconditionnement par blocs

Pour pouvoir préconditionner par bloc un système, il faut que  $[M]$  soit de la forme :

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & K_1^t \\ 0 & M_2 & K_2^t \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.19})$$

Dans ce cas, un préconditionneur peut être construit pour chaque partie de la matrice, de façon indépendante. Le bloc  $\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$  est préconditionné par l'une des méthodes décrites ci-dessus, ce qui donne une matrice  $\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$ . Enfin, pour le bloc  $[K_1 \ K_2 \ K_3]$ , le préconditionneur est appliqué à la matrice :

$$[K_1 \ K_2 \ K_3] \begin{bmatrix} K_1^t \\ K_2^t \\ K_3^t \end{bmatrix} = [K_1 \ K_1^t + K_2 \ K_2^t + K_3 \ K_3^t] \quad (\text{A.1.20})$$

Et donne la matrice  $[P_3]$ . La matrice de préconditionnement global  $[P]$  s'écrit :

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.21})$$

Et il s'utilise ensuite comme un préconditionneur classique.

### F. Décomposition QR

La décomposition QR intervient sur une matrice rectangulaire, comme la matrice  $[T]$  obtenue par la méthode Mortar. Comme signalé dans le Chapitre 2, plusieurs algorithmes

permettent d'obtenir la même décomposition QR d'une matrice. Soit le système suivant à résoudre :

$$[T] [M][T][X] = [T] [F] \quad (\text{A.1.22})$$

Un préconditionneur de  $[M]$  peut être calculé par les méthodes présentées ci-dessus. La matrice  $[T]$  (de taille  $N \times n$ ) peut être décomposée par la méthode QR, avec  $[Q]$  orthogonale, et  $[R]$  « triangulaire supérieure » (rectangulaire, de même taille que  $[T]$ , et seuls les  $r_{ij}$  tels que  $i \leq j$  et  $i \leq n$  sont non-nuls). Il apparaît alors par définition :

$$[T] = [Q][R] = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } [R_1] \text{ triangulaire supérieure} \quad (\text{A.1.23})$$

Il n'est pas nécessaire de calculer les termes de  $[Q]$  au-delà de la  $n^{\text{ième}}$  colonne.

Deux algorithmes sont présentés. Le premier est celui de Gram-Schmidt. Les matrices  $[T]$ ,  $[Q]$  et  $[R]$  sont définies ici par leurs termes  $t_{ij}$ ,  $q_{ij}$  et  $r_{ij}$ , et leurs colonnes  $[t_i]$ ,  $[q_i]$ ,  $[r_i]$ .

```

r11 = ||[t1]||
if r11 = 0
    stop
else
    [q1] = [t1] / r11
    do j = 2, n
        [q̂] = [tj]
        do i = 1, j - 1
            rij = [q̂][qi]
            [q̂] = [q̂] - rij[qi]
        end do
        rij = ||[q̂]||
        if rij = 0
            stop
        else
            [qj] = [q̂] / rij
        end if
    end do
end if

```

Algorithme 8 : Décomposition QR par la méthode de Gram-Schmidt

Une autre méthode de calcul des matrices  $[Q]$  et  $[R]$  a été implantée dans le code du laboratoire. Il s'agit de la méthode par orthogonalisation de Householder. Le choix a été fait, dans ce cas, de calculer non pas la matrice  $[Q]$  directement, mais une suite de  $n$  vecteurs  $[w_i]$  qui vérifient :

$$[Q] = \prod_{k=1}^n (\text{Id} - 2[w_k][w_k]^T) \quad (\text{A.1.24})$$

L'algorithme s'écrit alors :

```

do k = 1, n
  [Z] = [T(k : N; k)] (termes de la kième à la dernière ligne dans la colonne k de T)
  [e] =  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  } taille N - k + 1
  [wk] =  $\frac{\text{sign}([Z])\|[Z][e] + [Z]\|}{\|[Z][e] + [Z]\|}$ 
  [R(k : N; k : n)] = [R(k : N; k : n)] - 2[wk][wk]T[R(k : N; k : n)]
end do

```

**Algorithme 9 : Décomposition QR par la méthode Householder**

Une fois les matrices  $[Q]$  et  $[R]$  calculées, et en notant  $[P] = [L][U]$  le préconditionneur de la matrice  $[M]$ , le préconditionneur du système global peut s'écrire :  $[Q][R][P][Q]^T[R]^T = ([Q][R][L])([U][Q]^T[R]^T)$ , et s'utilise comme un préconditionneur classique.

### III. Utilisation des préconditionneurs dans le gradient conjugué

Dans la suite, le système à résoudre est défini comme en (A.1.1). Le préconditionneur sera noté :

$$[P] = [L][U] \quad (\text{A.1.25})$$

Les matrices  $[P]$ ,  $[L]$  et  $[U]$  sont construites à partir de l'une des méthodes présentées précédemment.

### A. Gradient conjugué préconditionné à gauche

Pour préconditionner le système à gauche, l'algorithme du gradient conjugué doit être modifié comme suit :

|  |
|--|
| $r_i = \ [F] - [M][X_0]$ $j = 0$ $r_0 = \frac{\ [F] - [M][X_0]}{r_i}$ $[D_0] = [F] - [M][X_0]$ $[Z_0] = [P]^{-1} [D_0]$ $[E_0] = [Z_0]$ <p><b>do while</b> <math>r_j &gt; \text{precision}</math></p> $\alpha_j = \frac{[D_j][Z_j]}{[M][E_j][E_j]}$ $[X_{j+1}] = [X_j] + \alpha_j [E_j]$ $[D_{j+1}] = [D_j] - \alpha_j [M][E_j]$ $[Z_{j+1}] = [P]^{-1} [D_{j+1}]$ $r_{j+1} = \frac{\ [D_{j+1}]}{r_i}$ $\beta_j = \frac{[D_{j+1}][Z_{j+1}]}{[D_j][Z_j]}$ $[E_{j+1}] = [Z_{j+1}] + \beta_j [E_j]$ $j = j + 1$ <p><b>end do</b></p> |
|--|

**Algorithme 10 : Gradient conjugué préconditionné à gauche**



## B. Gradient conjugué préconditionné en split

Une seconde méthode générale de préconditionnement du gradient conjugué est l'utilisation du « split ».

$$\begin{aligned}
 r_i &= \|[F] - [M][X_0] \\
 [D_0] &= [F] - [M][X_0] \\
 r_0 &= \frac{[D_0]}{r_i} \\
 j &= 0 \\
 [\hat{D}_0] &= [L]^{-1}[D_0] \\
 [E_0] &= [U]^{-1}[\hat{D}_0] \\
 \text{do while } r_j &> \text{tolerance} \\
 \alpha_j &= \frac{[\hat{D}_j][\hat{D}_j]}{[M][E_j][E_j]} \\
 [X_{j+1}] &= [X_j] + \alpha_j[E_j] \\
 [\hat{D}_{j+1}] &= [\hat{D}_j] - \alpha_j[L]^{-1}[M][E_j] \\
 \beta_j &= \frac{[\hat{D}_{j+1}][\hat{D}_{j+1}]}{[\hat{D}_j][\hat{D}_j]} \\
 [E_{j+1}] &= [U]^{-1}[\hat{D}_j] + \beta_j[E_j] \\
 j &= j + 1 \\
 \text{end do}
 \end{aligned}$$

Algorithme 11 : Gradient conjugué préconditionné en split

**Remarque :** La question qui se pose à ce stade, porte sur l'intérêt des différentes méthodes d'implantation du préconditionnement... Or il s'avère qu'*a priori*, aucune méthode n'est plus avantageuse par rapport à une autre [58].

## Annexe 2 Méthode d'intégration pour le calcul des matrices de recollement

Dans cette annexe, la méthode d'intégration utilisée au niveau de l'interface  $\Gamma_R$  pour le recollement va être détaillée. Cette intégrale doit se faire sur les intersections des facettes pour le calcul des matrices  $[D]$ , qui représentent l'interaction entre les maillages au niveau de  $\Gamma_R$ . Cette méthode est directement inspirée des travaux de G. Krebs réalisés au laboratoire [28].

Tout d'abord une facette de  $\Gamma_R$  appartenant à  $D_1$  est considérée, ainsi qu'une facette de  $D_2$  appartenant aussi à  $\Gamma_R$  lui faisant face (Figure 78). Leur intersection permet de déterminer une surface commune.

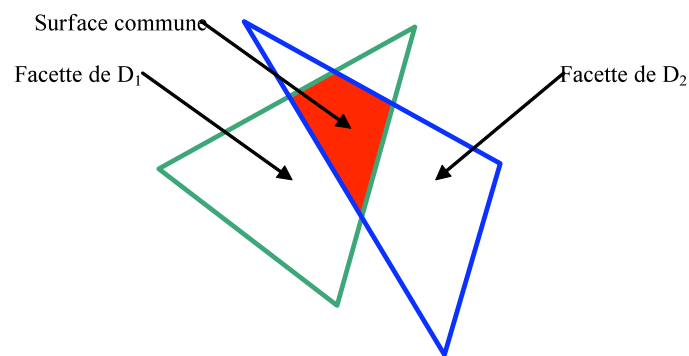


Figure 78 : Facettes considérées, et zone commune

Une fois l'intersection déterminée, elle est décomposée en surfaces triangulaires élémentaires (Figure 79).

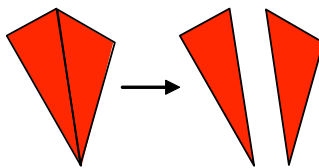


Figure 79 : Décomposition de la zone commune

L'un des triangles obtenus est alors projeté dans son repère de référence (Figure 80), où les points de Gauss sont introduits.

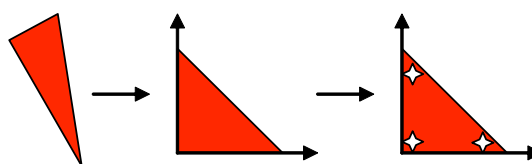
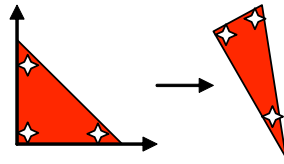


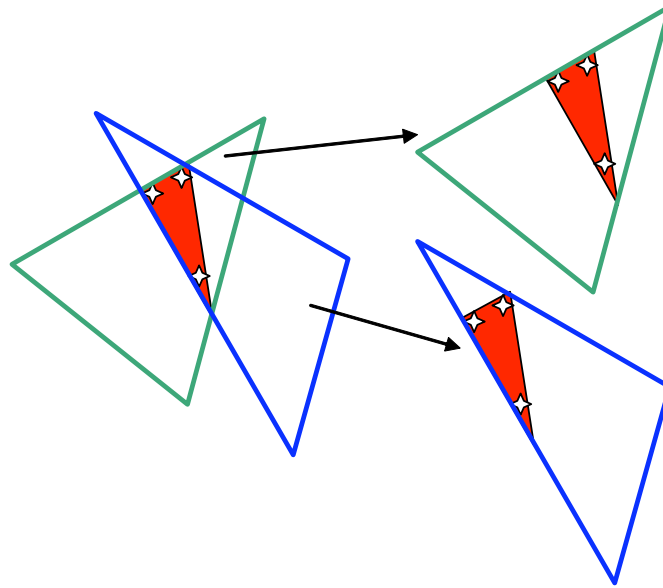
Figure 80 : Projection du triangle dans un repère de référence

Puis les points de Gauss sont projetés dans le repère d'origine (Figure 81).



**Figure 81 : Projection des points de Gauss dans le repère d'origine**

Une fois ces points de Gauss placés dans le triangle de départ, ils sont positionnés dans les facettes d'origine (Figure 82).



**Figure 82 : Positionnement des points de Gauss dans les facettes**

Sur la base des points de Gauss placés dans les facettes d'origine, le calcul des intégrales se fait sur ces points, pour le calcul de la matrice  $[D]$ , aussi bien dans le cas des recollements de grandeurs nodales que de grandeurs discrétisées sur les arêtes. Ainsi, pour le calcul des opérateurs de couplage, il est nécessaire de construire un maillage qui correspond à une intersection des deux maillages d'origines, et d'intégrer sur les facettes ainsi obtenues.

## Annexe 3                      Les multiplicateurs de Lagrange dans les différentes formulations

Le Chapitre 2 présente les opérateurs de couplage ainsi que les multiplicateurs de Lagrange en potentiel scalaire  $\Omega$ . Cette annexe introduit tout d'abord les multiplicateurs de Lagrange dans la formulation magnétostatique  $\mathbf{A}$ , puis dans les deux formulations magnétodynamiques  $\mathbf{T}$ - $\Omega$  et  $\mathbf{A}$ - $\varphi$ .

### I. Formulation $\mathbf{A}$

La formulation en potentiel vecteur magnétique est définie par l'équation (1.82). Dans le cas du recollement de maillages, cette équation s'exprime dans chaque sous domaine. Pour le sous domaine 1, après application de la formule de Green, nous obtenons :

$$\int_{D_1} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{rot} \psi_{A1} \, dD - \int_{\Gamma_R} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 \right) \cdot \psi_{A1} \, dS - \int_{\Gamma_B} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 \right) \cdot \psi_{A1} \, dS - \int_{\Gamma_H} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 \right) \cdot \psi_{A1} \, dS = \int_{D_1} \mathbf{J}_{s1} \cdot \psi_{A1} \, dD \quad (\text{A.3.1})$$

La méthode de Galerkin repose sur l'utilisation d'une fonction test  $\psi_{A1}$  qui a les mêmes propriétés que  $\mathbf{A}_1$ . Comme au Chapitre 1, l'intégrale sur  $\Gamma_{B1}$  s'annule, et celle sur  $\Gamma_{H1}$  est supposée nulle, imposant ainsi la condition (1.27) au sens faible. Par une démarche similaire, il est possible d'obtenir pour le sous-domaine  $D_2$  :

$$\int_{D_2} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{rot} \psi_{A2} \, dD - \int_{\Gamma_R} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n}_2 \right) \cdot \psi_{A2} \, dS = \int_{D_2} \mathbf{J}_{s2} \cdot \psi_{A2} \, dD \quad (\text{A.3.2})$$

De plus, à l'interface sur  $\Gamma_R$ , on a :

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 \Big|_{\Gamma_R} = -\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2 \Big|_{\Gamma_R} = \boldsymbol{\lambda}_H \quad (\text{A.3.3})$$

Ainsi, le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \int_{D_1} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{A1} \, dD - \int_{\Gamma_R} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1 \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_{A1} \, dS = \int_{D_1} \mathbf{J}_{s1} \cdot \boldsymbol{\psi}_{A1} \, dD \\ \int_{D_2} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{A2} \, dD - \int_{\Gamma_R} \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n}_2 \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_{A2} \, dS = \int_{D_2} \mathbf{J}_{s2} \cdot \boldsymbol{\psi}_{A2} \, dD \\ \int_{\Gamma_R} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \wedge \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi}_{A1} \, dS = 0 \end{cases} \quad (\text{A.3.4})$$

Le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  se discrétise comme en (1.85), et  $\mathbf{J}_s$  comme en (1.86). La fonction test  $\boldsymbol{\psi}_A$  est définie comme parcourant l'ensemble des fonctions d'arêtes.

Le multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}_H$  se discrétise sur les arêtes liées au domaine de maillage le plus fin (dans nos cas  $D_1$ ) et s'écrit :

$$\boldsymbol{\lambda}_H = \sum_{i=1}^{N_{a1\Gamma}} \lambda_{Hi} \mathbf{w}_{ai} \quad (\text{A.3.5})$$

avec  $N_{a1\Gamma}$  le nombre d'arêtes liées à  $\Gamma_R$  et au sous-domaine  $D_1$ .

Le système peut alors être mis sous sa forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{1/\mu} & \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu \, t} & \mathbf{R}_{1\Gamma}^{1/\mu} & 0 & 0 & \mathbf{C}_a^t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{22}^{1/\mu} & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu \, t} & \mathbf{R}_{2\Gamma}^{1/\mu} & -\mathbf{D}_a^t \\ 0 & \mathbf{C}_a & 0 & -\mathbf{D}_a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \\ \boldsymbol{\lambda}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{J1} \\ 0 \\ \mathbf{F}_{J2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

Cette matrice fait apparaître un problème de point selle et requiert donc une méthode de résolution adaptée (Annexe 1).

La décomposition en doubles multiplicateurs de Lagrange se fait en séparant le multiplicateur de Lagrange d'origine en deux séries d'inconnues, qui vérifient  $[\boldsymbol{\lambda}_H] = [\boldsymbol{\lambda}_{H1}] + [\boldsymbol{\lambda}_{H2}]$  et  $[\boldsymbol{\lambda}_{H1}] = [\boldsymbol{\lambda}_{H2}]$ . En posant :

$$[\mathbf{C}_a \mathbb{I} \mathbf{A}_{1\Gamma}] - [\mathbf{D}_a \mathbb{I} \mathbf{A}_{2\Gamma}] = [0] \Leftrightarrow \begin{cases} [\mathbf{C}_a \mathbb{I} \mathbf{A}_{1\Gamma}] - [\mathbf{D}_a \mathbb{I} \mathbf{A}_{2\Gamma}] + \alpha [\text{Id} \mathbb{I} \boldsymbol{\lambda}_{H1}] - \alpha [\text{Id} \mathbb{I} \boldsymbol{\lambda}_{H2}] = [0] \\ [\mathbf{C}_a \mathbb{I} \mathbf{A}_{1\Gamma}] - [\mathbf{D}_a \mathbb{I} \mathbf{A}_{2\Gamma}] - \alpha [\text{Id} \mathbb{I} \boldsymbol{\lambda}_{H1}] + \alpha [\text{Id} \mathbb{I} \boldsymbol{\lambda}_{H2}] = [0] \end{cases} \quad (\text{A.3.7})$$

Le système matriciel des doubles multiplicateurs de Lagrange peut être écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{1/\mu} & \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu \, t} & \mathbf{R}_{1\Gamma}^{1/\mu} & 0 & 0 & \mathbf{C}_a^t & \mathbf{C}_a^t \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{22}^{1/\mu} & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu \, t} & \mathbf{R}_{2\Gamma}^{1/\mu} & -\mathbf{D}_a^t & -\mathbf{D}_a^t \\ 0 & \mathbf{C}_a & 0 & -\mathbf{D}_a & \alpha \text{Id} & -\alpha \text{Id} \\ 0 & \mathbf{C}_a & 0 & -\mathbf{D}_a & -\alpha \text{Id} & \alpha \text{Id} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \\ \boldsymbol{\lambda}_{H1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{H2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{J1} \\ 0 \\ \mathbf{F}_{J2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.8})$$

A partir de l'équation (A.3.6), le système matriciel associé à la méthode Mortar peut être introduit. En suivant une démarche similaire à celle vue au Chapitre 2 pour la formulation en potentiel scalaire  $\Omega$ , il apparaît :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{1/\mu} & 0 & \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu} \mathbf{C}_a^{-1} \mathbf{D}_a \\ 0 & \mathbf{R}_{22}^{1/\mu} & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu} \\ \mathbf{D}_a^t \mathbf{C}_a^{-t} \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu t} & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu t} & \mathbf{R}_{2\Gamma}^{1/\mu} + \mathbf{D}_a^t \mathbf{C}_a^{-t} \mathbf{R}_{1\Gamma}^{1/\mu} \mathbf{C}_a^{-1} \mathbf{D}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{J1} \\ \mathbf{F}_{J2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.9})$$

Une matrice  $[\mathbf{T}]$  peut être définie, telle que :

$$[\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{1\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \end{bmatrix}, \text{ soit } [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_a^{-1} \mathbf{D}_a \\ 0 & \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.10})$$

matrice qui peut être introduite dans le système (A.3.9) :

$$[\mathbf{T}]^t \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11}^{1/\mu} & \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu} & 0 & 0 \\ \mathbf{R}_{1\oplus\Gamma}^{1/\mu t} & \mathbf{R}_{1\Gamma}^{1/\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{22}^{1/\mu} & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu} \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_{2\oplus\Gamma}^{1/\mu t} & \mathbf{R}_{2\Gamma}^{1/\mu} \end{bmatrix} [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]^t [\mathbf{R}^{1/\mu}] [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2/\Gamma} \\ \mathbf{A}_{2\Gamma} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]^t \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{J1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{J2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.11})$$

## II. Formulation T- $\Omega$

Cette formulation demande la résolution des équations (1.92) et (1.93) Comme dans le premier chapitre, ces équations intégrales vont être développées avec les formules de Green (1.35) et (1.36). Dans le cas du recollement, comme en formulation en  $\Omega$  ou en  $\mathbf{A}$ , seules les intégrales de surface liées à l'interface  $\Gamma_R$  sont prises en compte (les autres termes surfaciques s'annulent compte tenu des définitions et conditions aux limites).

Les équations s'écrivent ( $D_{c1}$  est la partie conductrice de  $D_1$  voir Figure 10), telles que :

$$\int_{D_{c1}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{rot} \psi_{T1} dD + \int_{D_{c1}} \frac{\partial \mu \mathbf{T}_1}{\partial t} \cdot \psi_{T1} dD - \int_{D_{c1}} \mathbf{grad} \frac{\partial (\mu \Omega_1)}{\partial t} \cdot \psi_{T1} dD + \text{dans } D_{c1} \quad (\text{A.3.12})$$

$$\int_{\Gamma_{Rc}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_1 \cdot (\psi_{T1} \times \mathbf{n}_1) dS = 0$$

$$\int_{D_1} \mu (\mathbf{T}_1 - \mathbf{grad} \Omega_1 + \mathbf{H}_{s1}) \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega_1} dD + \int_{\Gamma_R} \mu (\mathbf{T}_1 - \mathbf{grad} \Omega_1) \cdot \mathbf{n}_1 \psi_{\Omega_1} dS = 0 \text{ dans } D \quad (\text{A.3.13})$$

avec  $\Gamma_{Rc}$  qui représente la partie conductrice de la frontière  $\Gamma_R$ .  $\psi_{T1}$  et  $\psi_{\Omega 1}$  sont des fonctions tests relatives au sous-domaine  $D_1$ , vérifiant les mêmes propriétés que  $\mathbf{T}$  et  $\Omega$ . Dans (A.3.12), le terme intégré sur  $\Gamma_R$  peut s'écrire :

$$\int_{\Gamma_{Rc}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_1 \cdot (\boldsymbol{\psi}_{T1} \times \mathbf{n}_1) dS = - \int_{\Gamma_{Rc}} \left( \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_1 \times \mathbf{n}_1 \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_{T1} dS = - \int_{\Gamma_{Rc}} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1) \cdot \boldsymbol{\psi}_{T1} dS \quad (\text{A.3.14})$$

De même, le terme surfacique de l'équation (A.3.13) peut s'exprimer par :

$$\int_{\Gamma_R} \mu (\mathbf{T}_1 - \mathbf{grad} \Omega_1) \cdot \boldsymbol{\psi}_{\Omega 1} dS = \int_{\Gamma_R} (\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1) \psi_{\Omega 1} dS \quad (\text{A.3.15})$$

Les mêmes développements sont réalisés (la partie conductrice de  $D_2$  est notée  $D_{c2}$ ) :

$$\int_{D_{c2}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{T2} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T}_2 dD + \int_{D_{c2}} \boldsymbol{\psi}_{T2} \cdot \frac{\partial \mu \mathbf{T}_2}{\partial t} dD - \int_{D_{c2}} \boldsymbol{\psi}_{T2} \cdot \mathbf{grad} \frac{\partial (\mu \Omega_2)}{\partial t} dD - \quad \text{dans } D_{c2} \quad (\text{A.3.16})$$

$$\int_{\Gamma_{Rc}} (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}_2) \cdot \boldsymbol{\psi}_{T2} dS = 0$$

$$\int_{D_2} \mu (\mathbf{T}_2 - \mathbf{grad} \Omega_2 + \mathbf{H}_{s2}) \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega 2} dD + \int_{\Gamma_R} (\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2) \psi_{\Omega 2} dS = 0 \quad \text{dans } D_2 \quad (\text{A.3.17})$$

Or, au niveau de  $\Gamma_R$ , les relations suivantes sont vérifiées :

$$-\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n}_2 = \boldsymbol{\lambda}_E \quad (\text{A.3.18})$$

$$-\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \lambda_B \quad (\text{A.3.19})$$

Ces équations permettent d'écrire le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_{c1}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{T1} dD + \int_{D_{c1}} \frac{\partial \mu \mathbf{T}_1}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}_{T1} dD - \int_{D_{c1}} \frac{\partial (\mu \mathbf{grad} \Omega_1)}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}_{T1} dD + \int_{\Gamma_{Rc}} \boldsymbol{\lambda}_E \cdot \boldsymbol{\psi}_{T1} dS = 0 \\ \int_{D_{c2}} \frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{T2} dD + \int_{D_{c2}} \frac{\partial \mu \mathbf{T}_2}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}_{T2} dD - \int_{D_{c2}} \frac{\partial (\mu \mathbf{grad} \Omega_2)}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\psi}_{T2} dD - \int_{\Gamma_{Rc}} \boldsymbol{\lambda}_E \cdot \boldsymbol{\psi}_{T2} dS = 0 \\ \int_{D_1} \mu (\mathbf{T}_1 - \mathbf{grad} \Omega_1) \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega 1} dD + \int_{\Gamma_R} \lambda_B \psi_{\Omega 1} dS = - \int_{D_1} \mu \mathbf{H}_{s1} \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega 1} dD \\ \int_{D_2} \mu (\mathbf{T}_2 - \mathbf{grad} \Omega_2) \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega 2} dD - \int_{\Gamma_R} \lambda_B \psi_{\Omega 2} dS = - \int_{D_2} \mu \mathbf{H}_{s2} \cdot \mathbf{grad} \psi_{\Omega 2} dD \\ \int_{\Gamma_{Rc}} (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2) \wedge \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\psi}_T dS = 0 \\ \int_{\Gamma_R} (\Omega_1 - \Omega_2) \psi_{\Omega} dS = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.3.20})$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_B$  relatif aux inconnues nodales, se discrétise aux nœuds de  $D_1$  appartenant aussi à  $\Gamma_R$ , comme pour la formulation  $\Omega$  (2.32). Le multiplicateur  $\boldsymbol{\lambda}_E$  est discrétisé sur les arêtes de  $\Gamma_{Rc}$ . Les autres termes sont discrétisés de la même façon que pour la formulation  $\mathbf{T}-\Omega$  classique (1.103).

Le système peut alors se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix}
 R_{11}^{1/\sigma} + E_{11}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & R_{1\sigma\Gamma}^{1/\sigma} + E_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -M_{11}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 R_{1\sigma\Gamma}^{1/\sigma} + E_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & R_{1\Gamma}^{1/\sigma} + E_{1\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & C_a^t & 0 \\
 0 & 0 & R_{22}^{1/\sigma} + E_{22}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & R_{2\sigma\Gamma}^{1/\sigma} + E_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -M_{22}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{2\sigma\Gamma}^{1/\sigma} + E_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & R_{2\Gamma}^{1/\sigma} + E_{2\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -M_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{2\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -D_a^t & 0 \\
 -M_{11}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -G_{11}^{\mu} & -G_{1\sigma\Gamma}^{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -G_{1\sigma\Gamma}^{\mu} & -G_{1\Gamma}^{\mu} & 0 & 0 & 0 & C_n^t \\
 0 & 0 & -M_{22}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -G_{22}^{\mu} & -G_{2\sigma\Gamma}^{\mu} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -M_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{2\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & -G_{2\sigma\Gamma}^{\mu} & -G_{2\Gamma}^{\mu} & 0 & -D_n^t \\
 0 & C_a & 0 & -D_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_n & 0 & -D_n & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 T_{1\Gamma} \\
 T_{1\Gamma} \\
 T_{2\Gamma} \\
 T_{2\Gamma} \\
 \Omega_{1\Gamma} \\
 \Omega_{1\Gamma} \\
 \Omega_{2\Gamma} \\
 \Omega_{2\Gamma} \\
 \lambda_E \\
 \lambda_B
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 F_{H1} \\
 0 \\
 F_{H2} \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (A.3.21)$$

Cette matrice définit un problème de point selle qui demande des méthodes de résolution particulière. Le principe des doubles multiplicateurs de Lagrange peut être appliqué à ce système. Pour ce faire, chaque multiplicateur est décomposé tel que :

$$[\lambda_E] = [\lambda_{E1}] + [\lambda_{E2}] \quad \text{et} \quad [\lambda_{E1}] = [\lambda_{E2}] \quad (A.3.22)$$

$$[\lambda_B] = [\lambda_{B1}] + [\lambda_{B2}] \quad \text{et} \quad [\lambda_{B1}] = [\lambda_{B2}] \quad (A.3.23)$$

Il est alors possible d'écrire les équivalences suivantes :

$$[C_a][T_{1\Gamma}] - [D_a][T_{2\Gamma}] = [0] \Leftrightarrow \begin{cases} [C_a][T_{1\Gamma}] - [D_a][T_{2\Gamma}] + \alpha [Id][\lambda_{E1}] - \alpha [Id][\lambda_{E2}] = [0] \\ [C_a][T_{1\Gamma}] - [D_a][T_{2\Gamma}] - \alpha [Id][\lambda_{E1}] + \alpha [Id][\lambda_{E2}] = [0] \end{cases} \quad (A.3.24)$$

$$[C_n][\Omega_{1\Gamma}] - [D_n][\Omega_{2\Gamma}] = [0] \Leftrightarrow \begin{cases} [C_n][\Omega_{1\Gamma}] - [D_n][\Omega_{2\Gamma}] + \beta [Id][\lambda_{B1}] - \beta [Id][\lambda_{B2}] = [0] \\ [C_n][\Omega_{1\Gamma}] - [D_n][\Omega_{2\Gamma}] - \beta [Id][\lambda_{B1}] + \beta [Id][\lambda_{B2}] = [0] \end{cases} \quad (A.3.25)$$

Et l'introduction de ces nouvelles équations dans le système matriciel (A.3.21) définit la formulation **T-Ω** avec double multiplicateurs de Lagrange.



La méthode Mortar s'obtient, en formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$ , à partir de l'équation matricielle (A.3.21). Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [\mathbf{R}_{11}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{11}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{1\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{11}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} = [0] \\
 [\mathbf{R}_{1\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{1\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{C}_a]^\top [\lambda_E] = [0] \\
 [\mathbf{R}_{22}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{22}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{2\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{22}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} = [0] \\
 [\mathbf{R}_{2\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{2\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{D}_a]^\top [\lambda_E] = [0] \quad (\text{A.3.26}) \\
 -[\mathbf{M}_{11}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{11}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] - [\mathbf{G}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] = [\mathbf{F}_{H1}] \\
 -[\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] - [\mathbf{G}_{1\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] + [\mathbf{C}_n]^\top [\lambda_B] = [0] \\
 -[\mathbf{M}_{22}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{22}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] - [\mathbf{G}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] = [\mathbf{F}_{H2}] \\
 -[\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] - [\mathbf{G}_{2\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] - [\mathbf{D}_n]^\top [\lambda_B] = [0] \\
 [\mathbf{C}_a] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] - [\mathbf{D}_a] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] = [0] \\
 [\mathbf{C}_n] [\Omega_{1\Gamma}] - [\mathbf{D}_n] [\Omega_{2\Gamma}] = [0]
 \end{array} \right.$$

A partir de ce système, les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_E$  et  $\lambda_B$  peuvent s'exprimer en fonction des autres inconnues :

$$[\lambda_E] = -[\mathbf{C}_a]^\top \left( [\mathbf{R}_{1\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{1\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} \right) \quad (\text{A.3.27})$$

$$[\lambda_B] = -[\mathbf{C}_n]^\top \left( -[\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] - [\mathbf{G}_{1\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] \right) \quad (\text{A.3.28})$$

définitions qui peuvent être introduites dans le système (A.26) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [\mathbf{R}_{11}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{11}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{1\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{11}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} = [0] \\
 [\mathbf{R}_{22}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{22}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{2\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{22}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} = [0] \\
 [\mathbf{R}_{2\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{2\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] + [\mathbf{E}_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} + \\
 [\mathbf{D}_a]^\top [\mathbf{C}_a] \left( [\mathbf{R}_{1\otimes\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} + [\mathbf{R}_{1\Gamma}^{1\sigma}] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] + [\mathbf{E}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} \right) = [0] \quad (\text{A.3.29}) \\
 -[\mathbf{M}_{11}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{11}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] - [\mathbf{G}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] = [\mathbf{F}_{H1}] \\
 -[\mathbf{M}_{22}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{22}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] - [\mathbf{G}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] = [\mathbf{F}_{H2}] \\
 -[\mathbf{M}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{2\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{2\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] - [\mathbf{G}_{2\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] + \\
 [\mathbf{D}_n]^\top [\mathbf{C}_n] \left( -[\mathbf{M}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{M}_{1\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\mathbf{T}_{1\Gamma}]}{\partial t} - [\mathbf{G}_{1\otimes\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] - [\mathbf{G}_{1\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] \right) = [0] \\
 [\mathbf{C}_a] [\mathbf{T}_{1\Gamma}] - [\mathbf{D}_a] [\mathbf{T}_{2\Gamma}] = [0] \\
 [\mathbf{C}_n] [\Omega_{1\Gamma}] - [\mathbf{D}_n] [\Omega_{2\Gamma}] = [0]
 \end{array} \right.$$

De même, les potentiels  $[T_{1\Gamma}]$  et  $[\Omega_{1\Gamma}]$  peuvent être exprimés par :

$$[T_{1\Gamma}] = [C_a]^{-1} [D_a] [T_{2\Gamma}] \quad (\text{A.3.30})$$

$$[\Omega_{1\Gamma}] = [C_n]^{-1} [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] \quad (\text{A.3.31})$$

Le système (A.3.29) devient alors, en supposant que le recollement se fait sur une surface constante au cours du temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} [R_{11}^{1\sigma}] [T_{1\Gamma}] + [E_{11}^{\mu}] \frac{\partial [T_{1\Gamma}]}{\partial t} + [R_{1\sigma\Gamma}^{1\sigma}] [C_a]^{-1} [D_a] [T_{2\Gamma}] + [E_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] [C_a]^{-1} [D_a] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{11}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} - [M_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] [C_n]^{-1} [D_n] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} = [0] \\ [R_{22}^{1\sigma}] [T_{2\Gamma}] + [E_{22}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} + [R_{2\sigma\Gamma}^{1\sigma}] [T_{2\Gamma}] + [E_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{22}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} = [0] \\ [R_{2\sigma\Gamma}^{1\sigma}] [T_{2\Gamma}] + [E_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} + [R_{2\Gamma}^{1\sigma}] [T_{2\Gamma}] + [E_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} + \\ [D_a] [C_a]^{-1} \left( [R_{1\sigma\Gamma}^{1\sigma}] [T_{1\Gamma}] + [E_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{1\Gamma}]}{\partial t} + [R_{1\Gamma}^{1\sigma}] [C_a]^{-1} [D_a] [T_{2\Gamma}] + [E_{1\Gamma}^{\mu}] [C_a]^{-1} [D_a] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [\Omega_{1\Gamma}]}{\partial t} - [M_{1\Gamma}^{\mu}] [C_n]^{-1} [D_n] \frac{\partial [\Omega_{2\Gamma}]}{\partial t} \right) = [0] \\ -[M_{11}^{\mu}] \frac{\partial [T_{1\Gamma}]}{\partial t} - [M_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] [C_a]^{-1} [D_a] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [G_{11}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] - [G_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] [C_n]^{-1} [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] = [F_{H1}] \\ -[M_{22}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [G_{22}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] - [G_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] = [F_{H2}] \\ -[M_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [M_{2\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [G_{2\sigma\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] - [G_{2\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{2\Gamma}] + \\ [D_n] [C_n]^{-1} \left( -[M_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] \frac{\partial [T_{1\Gamma}]}{\partial t} - [M_{1\Gamma}^{\mu}] [C_a]^{-1} [D_a] \frac{\partial [T_{2\Gamma}]}{\partial t} - [G_{1\sigma\Gamma}^{\mu}] [\Omega_{1\Gamma}] - [G_{1\Gamma}^{\mu}] [C_n]^{-1} [D_n] [\Omega_{2\Gamma}] \right) = [0] \end{array} \right. \quad (\text{A.3.32})$$

Système qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\left( \begin{array}{cccccc} R_{11}^{1\sigma} + E_{11}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & R_{1\sigma\Gamma}^{1\sigma} C_a^{-1} D_a + E_{1\sigma\Gamma}^{\mu} C_a^{-1} D_a \frac{\partial}{\partial t} & -M_{11}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} C_n^{-1} D_n \frac{\partial}{\partial t} \\ 0 & R_{22}^{1\sigma} + E_{22}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & R_{2\sigma\Gamma}^{1\sigma} + E_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & -M_{22}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \\ D_a^{-1} C_a^{-1} \left( R_{1\sigma\Gamma}^{1\sigma} + E_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \right) & R_{1\sigma\Gamma}^{1\sigma} + E_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & R_{1\Gamma}^{1\sigma} + E_{1\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} + D_a^{-1} C_a^{-1} \left( R_{1\sigma\Gamma}^{1\sigma} C_a^{-1} D_a + E_{1\sigma\Gamma}^{\mu} C_a^{-1} D_a \frac{\partial}{\partial t} \right) & -D_a^{-1} C_a^{-1} M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\Gamma}^{\mu} C_n^{-1} D_n \frac{\partial}{\partial t} \\ -M_{11}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} C_a^{-1} D_a \frac{\partial}{\partial t} & -G_{11}^{\mu} & 0 & -G_{1\sigma\Gamma}^{\mu} C_n^{-1} D_n \\ 0 & -M_{22}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & -G_{22}^{\mu} & -G_{2\sigma\Gamma}^{\mu} \\ -D_n^{-1} C_n^{-1} M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\sigma\Gamma}^{\mu} \frac{\partial}{\partial t} & -M_{1\Gamma}^{\mu} C_a^{-1} D_a \frac{\partial}{\partial t} & -D_n^{-1} C_n^{-1} G_{1\sigma\Gamma}^{\mu} & -G_{1\sigma\Gamma}^{\mu} & -G_{1\Gamma}^{\mu} - D_n^{-1} C_n^{-1} G_{1\Gamma}^{\mu} C_n^{-1} D_n \end{array} \right) \begin{pmatrix} T_{1\Gamma} \\ T_{2\Gamma} \\ T_{2\Gamma} \\ \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{H1} \\ F_{H2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.33})$$

Tout comme pour les formulations magnétostatiques, une matrice  $[T]$  peut être introduite, telle que :

$$[T] \begin{pmatrix} T_{1\Gamma} \\ T_{2\Gamma} \\ T_{2\Gamma} \\ \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{1\Gamma} \\ T_{1\Gamma} \\ T_{2\Gamma} \\ T_{2\Gamma} \\ \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_{1\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \\ \Omega_{2\Gamma} \end{pmatrix}, \text{ soit } [T] = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_a^{-1} D_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_n^{-1} D_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.34})$$

matrice qui permet d'écrire le système (A.3.33) sous la forme d'un triple produit matriciel :

$$[T]^t \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{1/\sigma} + \mathbf{E}^\mu \frac{\partial}{\partial t} & -\mathbf{M}^\mu \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{M}^{\mu t} & -\mathbf{G}^\mu \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} T_{1/\Gamma} \\ T_{2/\Gamma} \\ \Omega_{1/\Gamma} \\ \Omega_{2/\Gamma} \end{bmatrix} = [T]^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{H1} \\ F_{H2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.35})$$

### III. Formulation A-φ

La formulation A-φ est basée sur la résolution des équations intégrales (1.106) et (1.107). Comme pour la formulation T-Ω présentée ci-dessus, les formules de Green sont appliquées aux équations, tout d'abord dans le sous-domaine D<sub>1</sub>, et font apparaître les termes d'intégration sur l'interface Γ<sub>R</sub> :

$$\int_{D_1} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{rot} \psi_{A1} dD + \int_{D_{c1}} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \cdot \psi_{A1} dD + \int_{D_{c1}} \sigma \mathbf{grad} \varphi_1 \cdot \psi_{A1} dD - \quad \text{dans } D_1 \quad (\text{A.3.36})$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1) \cdot \psi_{A1} dS = \int_{D_1} \mathbf{J}_{s1} \cdot \psi_{A1} dD$$

$$\int_{D_{c1}} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{grad} \psi_{\varphi 1} dD + \int_{D_{c1}} \sigma \mathbf{grad} \varphi_1 \cdot \mathbf{grad} \psi_{\varphi 1} dD - \quad \text{dans } D_{c1} \quad (\text{A.3.37})$$

$$\int_{\Gamma_{Re}} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi_1 \right) \cdot \mathbf{n}_1 \right) \psi_{\varphi 1} dS = 0$$

avec ψ<sub>A1</sub> et ψ<sub>φ1</sub> des fonctions test respectant les mêmes propriétés que A<sub>1</sub> et φ<sub>1</sub>. Les différentes intégrales sur l'interface de recollement peuvent se réécrire telles que :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A}_1 \times \mathbf{n}_1) \cdot \psi_{A1} dS = \int_{\Gamma_R} (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1) \cdot \psi_{A1} dS \quad (\text{A.3.38})$$

$$\int_{\Gamma_{Re}} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi_1 \right) \cdot \mathbf{n}_1 \right) \psi_{\varphi 1} dS = \int_{\Gamma_{Re}} (\mathbf{J}_{ind1} \cdot \mathbf{n}_1) \psi_{\varphi 1} dS \quad (\text{A.3.39})$$

Les mêmes développements peuvent être menés sur D<sub>2</sub>.

Dans ce cas, les équations obtenues sont :

$$\int_{D_2} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{rot} \psi_{A2} dD + \int_{D_{c2}} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} \cdot \psi_{A2} dD + \int_{D_{c2}} \sigma \mathbf{grad} \varphi_2 \cdot \psi_{A2} dD - \quad \text{dans } D_2 \text{ (A.3.40)}$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n}_2) \cdot \psi_{A2} dS = \int_{D_2} \mathbf{J}_{s2} \cdot \psi_{A2} dD$$

$$\int_{D_{c2}} \sigma \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} \cdot \mathbf{grad} \psi_{\varphi_2} dD + \int_{D_{c2}} \sigma \mathbf{grad} \varphi_2 \cdot \mathbf{grad} \psi_{\varphi_2} dD - \quad \text{dans } D_{c2} \quad \text{(A.3.41)}$$

$$\int_{\Gamma_{Rc}} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi_2 \right) \cdot \mathbf{n}_2 \right) \psi_{\varphi_2} dS = 0$$

Les différentes intégrales sur l'interface de recollement peuvent se réécrire telles que :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{\mu} (\mathbf{rot} \mathbf{A}_2 \times \mathbf{n}_2) \cdot \psi_{A2} dS = \int_{\Gamma_R} (\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2) \cdot \psi_{A2} dS \quad \text{(A.3.42)}$$

$$\int_{\Gamma_{Rc}} \sigma \left( \left( \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} + \mathbf{grad} \varphi_2 \right) \cdot \mathbf{n}_2 \right) \psi_{\varphi_2} dS = \int_{\Gamma_{Rc}} (\mathbf{J}_{ind2} \cdot \mathbf{n}_2) \psi_{\varphi_2} dS \quad \text{(A.3.43)}$$

Une solution physique impose à la frontière  $\Gamma_R$  les égalités suivantes :

$$\mathbf{H}_1 \times \mathbf{n}_1 = -\mathbf{H}_2 \times \mathbf{n}_2 = \lambda_H \quad \text{(A.3.44)}$$

$$\mathbf{J}_{ind1} \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{J}_{ind2} \cdot \mathbf{n}_2 = \lambda_J \quad \text{(A.3.45)}$$

Ces définitions permettent d'écrire le système d'équations de la formulation  $\mathbf{A}-\varphi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_1} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \psi_{A1} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_1 dD + \int_{D_{c1}} \sigma \psi_{A1} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} dD + \int_{D_{c1}} \sigma \psi_{A1} \cdot \mathbf{grad} \varphi_1 dD + \int_{\Gamma_R} \lambda_H \cdot \psi_{A1} dS = \int_{D_1} \psi_{A1} \cdot \mathbf{J}_{s1} dD \\ \int_{D_2} \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \psi_{A2} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_2 dD + \int_{D_{c2}} \sigma \psi_{A2} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} dD + \int_{D_{c2}} \sigma \psi_{A2} \cdot \mathbf{grad} \varphi_2 dD - \int_{\Gamma_R} \lambda_H \cdot \psi_{A2} dS = \int_{D_2} \psi_{A2} \cdot \mathbf{J}_{s2} dD \\ \int_{D_{c1}} \sigma \mathbf{grad} \psi_{\varphi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} dD + \int_{D_{c1}} \sigma \mathbf{grad} \psi_{\varphi_1} \cdot \mathbf{grad} \varphi_1 dD - \int_{\Gamma_{Rc}} \lambda_J \psi_{\varphi_1} dS = 0 \\ \int_{D_{c2}} \sigma \mathbf{grad} \psi_{\varphi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial t} dD + \int_{D_{c2}} \sigma \mathbf{grad} \psi_{\varphi_2} \cdot \mathbf{grad} \varphi_2 dD - \int_{\Gamma_{Rc}} \lambda_J \psi_{\varphi_2} dS = 0 \\ \int_{\Gamma_R} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) \wedge \mathbf{n} \cdot \psi_A dS = 0 \\ \int_{\Gamma_{Rc}} (\varphi_1 - \varphi_2) \psi_{\varphi_2} dS = 0 \end{array} \right. \quad \text{(A.3.46)}$$

Une fois ce système défini, les différentes inconnues sont discrétisées comme au Chapitre 1. Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_H$  est discrétisé sur les arêtes de  $D_1$  appartenant aussi à  $\Gamma_R$ . Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda_J$  est discrétisé sur les nœuds appartenant à  $D_1$  et  $\Gamma_R$ .

Le système matriciel final apparaît alors :

$$\begin{bmatrix}
 R_{11}^{1/\mu} + E_{11}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & R_{1\otimes\Gamma}^{1/\mu} + E_{1\otimes\Gamma}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & M_{11}^{\sigma} & M_{1\otimes\Gamma}^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 R_{1\otimes\Gamma}^{1/\mu} + E_{1\otimes\Gamma}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & R_{1\Gamma}^{1/\mu} + E_{1\Gamma}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & M_{1\otimes\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & M_{1\Gamma}^{\sigma} & 0 & 0 & C_a^{\text{t}} & 0 \\
 0 & 0 & R_{22}^{1/\mu} + E_{22}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & R_{2\otimes\Gamma}^{1/\mu} + E_{2\otimes\Gamma}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & M_{22}^{\sigma} & M_{2\otimes\Gamma}^{\sigma} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & R_{2\otimes\Gamma}^{1/\mu} + E_{2\otimes\Gamma}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & R_{2\Gamma}^{1/\mu} + E_{2\Gamma}^{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & M_{2\otimes\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & M_{2\Gamma}^{\sigma} & -D_a^{\text{t}} & 0 \\
 M_{11}^{\sigma \text{ t}} & M_{1\otimes\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & 0 & 0 & G_{11}^{\sigma} & G_{1\otimes\Gamma}^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 M_{1\otimes\Gamma}^{\sigma} & M_{1\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & 0 & 0 & G_{1\otimes\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & G_{1\Gamma}^{\sigma} & 0 & 0 & 0 & C_n^{\text{t}} \\
 0 & 0 & M_{22}^{\sigma \text{ t}} & M_{2\otimes\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & 0 & 0 & G_{22}^{\sigma} & G_{2\otimes\Gamma}^{\sigma} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & M_{2\otimes\Gamma}^{\sigma} & M_{2\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & 0 & 0 & G_{2\otimes\Gamma}^{\sigma \text{ t}} & G_{2\Gamma}^{\sigma} & 0 & -D_n^{\text{t}} \\
 0 & C_a & 0 & -D_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_n & 0 & -D_n & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_{1\Gamma} \\
 A_{1\Gamma} \\
 A_{2\Gamma} \\
 A_{2\Gamma} \\
 \varphi_{1\Gamma} \\
 \varphi_{1\Gamma} \\
 \varphi_{2\Gamma} \\
 \varphi_{2\Gamma} \\
 \lambda_H \\
 \lambda_J
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_{J1} \\
 0 \\
 F_{J2} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (\text{A.3.47})$$

Le système obtenu est semblable au système de la formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$ .

La décomposition des simples multiplicateurs de Lagrange en doubles multiplicateurs peut se faire sur ce système.

Ainsi, chaque multiplicateur est décomposé tel que :

$$[\lambda_H] = [\lambda_{H1}] + [\lambda_{H2}] \text{ et } [\lambda_{H1}] = [\lambda_{H2}] \quad (\text{A.3.48})$$

$$[\lambda_J] = [\lambda_{J1}] + [\lambda_{J2}] \text{ et } [\lambda_{J1}] = [\lambda_{J2}] \quad (\text{A.3.49})$$

Cette décomposition permet d'écrire :

$$[C_a][A_{1\Gamma}] - [D_a][A_{2\Gamma}] = [0] \Leftrightarrow \begin{cases} [C_a][A_{1\Gamma}] - [D_a][A_{2\Gamma}] + \alpha [\text{Id}][\lambda_{H1}] - \alpha [\text{Id}][\lambda_{H2}] = [0] \\ [C_a][A_{1\Gamma}] - [D_a][A_{2\Gamma}] - \alpha [\text{Id}][\lambda_{H1}] + \alpha [\text{Id}][\lambda_{H2}] = [0] \end{cases} \quad (\text{A.3.50})$$

$$[C_n][\varphi_{1\Gamma}] - [D_n][\varphi_{2\Gamma}] = [0] \Leftrightarrow \begin{cases} [C_n][\varphi_{1\Gamma}] - [D_n][\varphi_{2\Gamma}] + \beta [\text{Id}][\lambda_{J1}] - \beta [\text{Id}][\lambda_{J2}] = [0] \\ [C_n][\varphi_{1\Gamma}] - [D_n][\varphi_{2\Gamma}] - \beta [\text{Id}][\lambda_{J1}] + \beta [\text{Id}][\lambda_{J2}] = [0] \end{cases} \quad (\text{A.3.51})$$

Ces nouvelles équations permettent de définir le système en doubles multiplicateurs de Lagrange.

En utilisant une méthode similaire à celle vue pour la formulation  $\mathbf{T}\text{-}\Omega$ , il est possible d'obtenir le système matriciel associé à la méthode Mortar. La matrice  $[T]$  se définit alors par :

$$[T] \begin{bmatrix} A_{1\Gamma} \\ A_{1\Gamma} \\ A_{2\Gamma} \\ A_{2\Gamma} \\ \varphi_{1\Gamma} \\ \varphi_{1\Gamma} \\ \varphi_{2\Gamma} \\ \varphi_{2\Gamma} \\ \varphi_{2\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1\Gamma} \\ A_{1\Gamma} \\ A_{2\Gamma} \\ A_{2\Gamma} \\ \varphi_{1\Gamma} \\ \varphi_{1\Gamma} \\ \varphi_{2\Gamma} \\ \varphi_{2\Gamma} \\ \varphi_{2\Gamma} \end{bmatrix}, \text{ soit } [T] = \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_a^{-1} D_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Id} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_n^{-1} D_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Id} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{Id} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.52})$$

Et permet d'obtenir le produit matriciel suivant, équivalent à l'équation (A.3.47) :

$$[T]^t \begin{bmatrix} R^{1/\mu} + E^\sigma \frac{\partial}{\partial t} & M^\sigma \\ M^{\sigma t} \frac{\partial}{\partial t} & G^\sigma \end{bmatrix} [T] \begin{bmatrix} A_{1/\Gamma} \\ A_{2/\Gamma} \\ A_{2/\Gamma} \\ \varphi_{1/\Gamma} \\ \varphi_{2/\Gamma} \\ \varphi_{2/\Gamma} \end{bmatrix} = [T]^t \begin{bmatrix} F_{J1} \\ 0 \\ F_{J1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.53})$$

## Annexe 4 Les fonctions bi-orthogonales

Dans cette annexe, le calcul des fonctions bi-orthogonales va être présenté. Deux séries de fonctions seront introduites dans le cas de référence défini Figure 83. Le nœud  $n_1$  est placé en  $(0 ; 0)$ , le nœud  $n_2$  en  $(1 ; 0)$ , et le nœud  $n_3$  en  $(0 ; 1)$ .

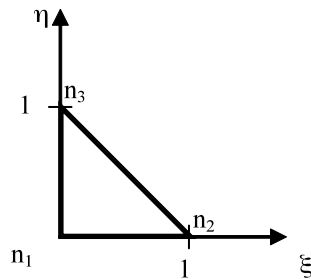


Figure 83 : Facette de référence  $\Delta$

### I. Cas des fonctions de forme nodales

Dans ce cas de figure, les fonctions nodales classiques sont définies en (1.64), et leurs expressions sont données en (2.49), (2.50), et (2.51).

Les fonctions nodales bi-orthogonales sont notées  $w_{ni}'$  et vérifient :

$$\int_{\Delta} w_{ni}' w_{nj}' dS = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (\text{A.4.1})$$

Dans la suite deux séries de fonctions vont être définies pour ce triangle de référence.

#### A. Fonction de degré 1

Les fonctions de forme nodales bi-orthogonales peuvent se définir comme des polynômes, en supposant leur degré égal à un :

$$w_{nj}'(x, y) = a + b x + c y \quad (\text{A.4.2})$$

A partir des fonctions (2.49), (2.50), (2.51), et (A.4.2), et de la définition (A.4.1), un système de trois équations relatif à  $w'_{n1}$  peut être construit, et permet de trouver a, b et c :

$$\begin{cases} 1 = \int_{\Delta} w_{n1} w'_{n1} dS = \frac{4a + 7b + 7c}{24} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n2} w'_{n1} dS = \frac{4a + 2b - 5c}{24} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n3} w'_{n1} dS = \frac{4a - 5b + 2c}{24} \end{cases} \quad (\text{A.4.3})$$

Ce système peut être réécrit relativement à chaque fonction nodale  $w'_{ni}$  du triangle. En résolvant les systèmes obtenus pour chacune des équations bi-orthogonales, les expressions suivantes sont obtenues dans l'élément de référence :

$$w'_{n1}(\xi, \eta) = 18 - 24\xi - 24\eta \quad (\text{A.4.4})$$

$$w'_{n2}(\xi, \eta) = 24\xi - 6 \quad (\text{A.4.5})$$

$$w'_{n3}(\xi, \eta) = 24\eta - 6 \quad (\text{A.4.6})$$

Pour un point quelconque compris dans le triangle de référence, la somme des fonctions d'interpolation est égale à 6.

### **Autre méthode de calcul pour les fonctions de degré 1**

Les fonctions de forme bi-orthogonales appartiennent au même espace que les fonctions de forme nodales classiques. Dès lors, elles peuvent s'exprimer par :

$$w'_{nk} = \alpha_k w_{n1} + \beta_k w_{n2} + \gamma_k w_{n3} \quad (\text{A.4.7})$$

A partir de cette définition, il est possible d'écrire pour le nœud 1 :

$$\begin{cases} 1 = \int_{\Delta} w_{n1} w'_{n1} dS = \alpha \int_{\Delta} w_{n1} w_{n1} dS + \beta \int_{\Delta} w_{n1} w_{n2} dS + \gamma \int_{\Delta} w_{n1} w_{n3} dS \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n2} w'_{n1} dS = \alpha \int_{\Delta} w_{n2} w_{n1} dS + \beta \int_{\Delta} w_{n2} w_{n2} dS + \gamma \int_{\Delta} w_{n2} w_{n3} dS \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n3} w'_{n1} dS = \alpha \int_{\Delta} w_{n3} w_{n1} dS + \beta \int_{\Delta} w_{n3} w_{n2} dS + \gamma \int_{\Delta} w_{n3} w_{n3} dS \end{cases} \quad (\text{A.4.8})$$

Et de même pour les deux autres nœuds.



Dans le cas de référence défini Figure 83, le système (A.4.8) devient :

$$\begin{cases} 1 = \int_{\Delta} w_{n1} w'_{n1} dS = \frac{2\alpha + \beta + \gamma}{24} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n2} w'_{n1} dS = \frac{\alpha + 2\beta + \gamma}{24} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n3} w'_{n1} dS = \frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{24} \end{cases} \quad (\text{A.4.9})$$

Pour  $w'_{n1}$ , la résolution donne :

$$w'_{n1} = 18 w_{n1} - 6 w_{n2} - 6 w_{n3} \quad (\text{A.4.10})$$

En résolvant les systèmes obtenus pour  $w'_{n2}$  et  $w'_{n3}$ , les fonctions obtenues sont, pour le cas de référence :

$$w'_{n2} = 6 w_{n1} + 18 w_{n2} - 6 w_{n3} \quad (\text{A.4.11})$$

$$w'_{n3} = 6 w_{n1} - 6 w_{n2} + 18 w_{n3} \quad (\text{A.4.12})$$

Définitions qui correspondent, en remplaçant les  $w_{ni}$  par leurs expressions, à celles trouvées en (A.4.4), (A.4.5), et (A.4.6).

## **B. Fonctions de degré 2**

Il est possible, en choisissant des polynômes de degré deux, de définir des fonctions bi-orthogonales différentes. La forme générale des fonctions s'écrit :

$$w''_{ij}(x, y) = a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f \quad (\text{A.4.13})$$

La même méthode que précédemment permet d'écrire le système suivant pour la fonction  $w''_{n1}$  :

$$\begin{cases} 1 = \int_{\Delta} w_{n1} w''_{n1} dS = \frac{2a + 2b + c + 5d + 5e + 20f}{120} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n2} w''_{n1} dS = \frac{6a + 2b + 2c + 10d + 5e + 20f}{120} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n3} w''_{n1} dS = \frac{2a + 6b + 2c + 5d + 10e + 20f}{120} \end{cases} \quad (\text{A.4.14})$$

Ce système n'est pas suffisant pour obtenir les valeurs de a, b, c, d, e et f. Il faut y ajouter trois équations.

Par exemple, en fixant  $w'_{n1}(0 ; 0) = 1$ ,  $w'_{n2}(1 ; 0) = 0$  et  $w'_{n3}(0 ; 1) = 0$ , le système se complète de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \int_{\Delta} w_{n1} w_{n1}'' dS = \frac{2a + 2b + c + 5d + 5e + 20f}{120} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n2} w_{n1}'' dS = \frac{6a + 2b + 2c + 10d + 5e + 20f}{120} \\ 0 = \int_{\Delta} w_{n3} w_{n1}'' dS = \frac{2a + 6b + 2c + 5d + 10e + 20f}{120} \\ 1 = w_{n1}''(0;0) = f \\ 0 = w_{n1}''(1;0) = a + d + f \\ 0 = w_{n1}''(0;1) = b + c + f \end{array} \right. \quad (\text{A.4.15})$$

Le système peut alors être résolu. Pour chaque nœud du triangle de référence, la même démarche peut être appliquée, et permet d'obtenir les fonctions de formes bi-orthogonales de degré 2 suivantes dans le cas de référence :

$$w_{n1}''(\xi, \eta) = -45\xi^2 - 45\eta^2 - 150\xi\eta + 44\xi + 44\eta + 1 \quad (\text{A.4.16})$$

$$w_{n2}''(\xi, \eta) = -45\xi^2 + 70\eta^2 + 70\xi\eta + 46\xi - 70\eta \quad (\text{A.4.17})$$

$$w_{n3}''(\xi, \eta) = 70\xi^2 - 45\eta^2 + 70\xi\eta - 70\xi + 46\eta \quad (\text{A.4.18})$$

Ce raisonnement peut être généralisé à des facettes quelconques, par une méthode tout à fait similaire.

## II. Cas de la première famille de fonctions d'arêtes

Les arêtes permettent aussi de définir des fonctions de formes bi-orthogonales. La méthode est la même que pour les fonctions nodales bi-orthogonales. Pour ce faire, les fonctions d'arêtes bi-orthogonales  $w_{ak}'$  vont être exprimées comme une combinaison linéaire des fonctions d'arêtes classiques  $w_{am}$  :

$$w_{ak}' = \alpha_k w_{a1} + \beta_k w_{a2} + \gamma_k w_{a3} \quad (\text{A.4.19})$$

A partir de ces expressions, des systèmes d'équations peuvent être construits pour chaque fonction d'arête bi-orthogonale.

Par exemple, pour l'arête 1, entre les nœuds n1 et n2 de la facette :

$$\begin{cases} 1 = \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a1} \cdot \mathbf{w}'_{a1} \, dS = \alpha \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a1} \cdot \mathbf{w}_{a1} \, dS + \beta \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a1} \cdot \mathbf{w}_{a2} \, dS + \gamma \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a1} \cdot \mathbf{w}_{a3} \, dS \\ 0 = \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a2} \cdot \mathbf{w}'_{a1} \, dS = \alpha \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a2} \cdot \mathbf{w}_{a1} \, dS + \beta \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a3} \cdot \mathbf{w}_{a2} \, dS + \gamma \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a2} \cdot \mathbf{w}_{a3} \, dS \\ 0 = \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a3} \cdot \mathbf{w}'_{a1} \, dS = \alpha \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a3} \cdot \mathbf{w}_{a1} \, dS + \beta \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a3} \cdot \mathbf{w}_{a2} \, dS + \gamma \int_{\Delta} \mathbf{w}_{a3} \cdot \mathbf{w}_{a3} \, dS \end{cases} \quad (\text{A.4.20})$$

Ce système peut se réécrire pour chaque arête de la facette. En résolvant ce système, il est possible d'obtenir l'expression des fonctions d'arêtes bi-orthogonales en fonction des fonctions d'arêtes classiques.



## Annexe 5 Validation de la deuxième famille de fonctions d'arêtes

Dans cette annexe, la seconde famille de fonctions d'arêtes est utilisée pour un système sans recollement, afin de comparer avec la référence obtenue avec la première famille.

L'exemple traité est le même qu'au Chapitre 2. Il s'agit du cube d'un mètre de côté, de perméabilité magnétique  $\mu_0$ , traversé par une densité de courant de  $10^7$  A/m<sup>2</sup>. Le maillage utilisé compte 2 312 nœuds et 10 191 éléments. La matrice obtenue avec la première famille compte 10 186 inconnues, et 80 052 termes non nuls, celle de la deuxième famille 20 372 lignes, et 310 022 termes<sup>2</sup>.

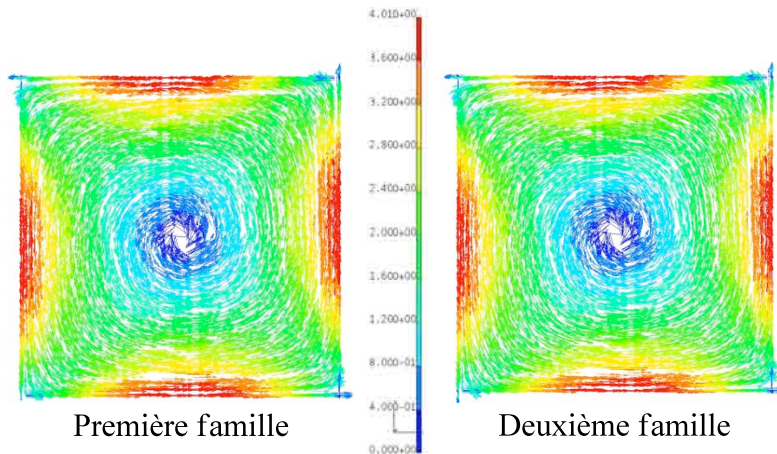


Figure 84 : Résultats avec les deux familles

Dans les deux cas, l'énergie calculée est rigoureusement la même : 2 182 044.65 J. Par ailleurs, les résolutions demandent autant d'itérations dans un cas que dans l'autre, et leur comportement est identique. La seule différence se retrouve au niveau du temps de calcul, qui est multiplié par quatre lorsque la deuxième famille de fonctions de forme d'arêtes est utilisée.

Ainsi, il semble que les deux familles soient équivalentes en terme de précision de calcul. La seule différence tient à la durée des calculs : la seconde famille comptant plus d'inconnues, et plus de termes dans la matrice, est donc plus lente à converger.

<sup>2</sup> Les nombres de termes notés ici correspondent à des « demi-matrices ». Il s'agit du nombre de termes stockés par le code de calcul pour la résolution. Seule la partie triangulaire inférieure est enregistrée. Les matrices « complètes » comptent respectivement 149 918 et 599 672 termes.

## Bibliographie

- [1] A. Albanese, G. Rubinacci, *Magnetostatic field computations in terms of two component vector potentials*, Int. J. Numer. Meth. Engng. Vol. 49, pp. 573-598, 2000
- [2] A. Barchanski, *Simulations of low-frequency electromagnetic fields in the human body*, thèse de doctorat, Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der technischen Universität Darmstadt, 2007
- [3] A. Bossavit, *Computational electromagnetism*, Academic Press, Boston, 1998
- [4] A. Bossavit, *Electromagnétisme en vue de la modélisation*, éd. Springer-Verlag, 1993
- [5] A. Bossavit, *Whitney's forms : a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism*, IEE Proceeding, Vol. 135, Part 1, No 8, pp. 493-499, 1988
- [6] A. Bossavit, J.C. Vérité, *The "TRIFOU" Code: Solving the 3-D eddy-currents problem by using H as state variable*, IEEE Trans. Mag., Vol. 19, n°6, pp. 2465-2470, 1983
- [7] A. Bossavit, *Complementary formulations in steady-state eddy-current theory*, IEE Proceedings a Science, Measurement and Technology, Vol. 139, n°6, pp. 265-272, 1992
- [8] A. Tinzefté, Y. Le Menach, F. Piriou, *Iterative solvers for singular symmetric linear systems in electromagnetism low frequency*, IEEE Trans. Mag., Vol. 45, n°3, pp. 1428-1431, 2009
- [9] B. Flemisch, Y. Maday, F. Rapetti, B. Wohlmuth, *Scalar and vector potentials' coupling on nonmatching grids for the simulation of an electromagnetic brake*, COMPEL, Vol. 24, n° 3, pp. 1061-1070, 2005
- [10] B. Wohlmuth, *A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier*, SIAM, Vol. 38, No 3, pp. 989-1012, 2000
- [11] B. Wohlmuth, *A comparison of dual Lagrange multiplier spaces for mortar finite element discretizations*, M2AN, Vol. 36, n° 6, pp. 995-1012, 2002
- [12] C. Farhat et F. X. Roux, *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Comp. Mec. Adv., n°2, pp. 1-124, 1994

- [13] C. Geuzaine, B. Meys, F. Henrotte, P. Dular, W. Legros, *A galerkin projection method for mixed finite elements*, IEEE Trans. Mag., vol. 35, n°3, pp. 1438-1441, 1999
- [14] C. Kaehler, G. Henneberger, *Transient 3-D FEM computation of Eddy-current losses in the rotor of a claw-pole alternator*, IEEE Trans. Mag. Vol. 40, n°2, pp. 1362-1365, 2002
- [15] C. Li, Z. Ren, A. Razek, *Application of complementary formulations and adaptative mesh refinement to non-linear magnetostatic problems*, IEEE Trans. Mag., vol. 31, n°3, pp. 1376-1379, 1995
- [16] D. Dureisseix, *Méthodes numériques appliqués à la conception par éléments finis*, cours de DEA, 2008
- [17] D. Rodger, H. C. Lai, P. J. Leonard, *Coupled elements for problems involving movement*, IEEE Trans. Mag., vol 26, n° 2, pp. 548-550, 1990
- [18] E. Lange, F. Henrotte, K. Hameyer, *A variational formulation for non-conforming sliding interfaces in finite element analysis of electric machines*, IEEE Trans. Mag., vol. 46, n° 8, pp. 2755-2758, 2010
- [19] E. Tonti, *Finite Formulation of the electromagnetic field*, PIER. 32, pp. 1-44, 2001
- [20] F. Bouillault, A. Buffa, Y. Maday, F. Rapetti, *the mortar edge element method in three dimensions: application to magnetostatics*, SIAM, vol. 24, n°4, pp. 1303-1327, 2002
- [21] F. Nataf, *Interface connections in domain decomposition methods*, 2006
- [22] F. Rapetti, *Approximation des équations de la magnétodynamique en domaine tournant par la méthode des éléments avec joints*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie, 2000
- [23] F. Rapetti, *Discrétisation variationnelle d'ordre élevé sur simplexes : applications à l'électromagnétisme numérique*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Nice Sophia-Antipolis, 2008
- [24] F. X. Roux, *Méthode de décomposition de domaine à l'aide de multiplicateurs de Lagrange et application à la résolution en parallèle des équations de l'élasticité linéaire*, thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie, 1989
- [25] G. Dhat, G. Touzot, *Une présentation des éléments finis*, Collection Universitaire de Compiègne, éd. Maloine, 1984

- [26] G. Golovanof, J. L. Coulomb, Y. Maréchal, G. Meunier, *3D mesh connection techniques applied to movement simulation*, IEEE Trans. Mag., vol. 34, n°5, pp. 3359-3362, 1998
- [27] G. Krebs, S. Clénet, A. Abakar, A. Tounzi, F. Piriou, *Accounting for linear movement in 3D FEM using overlapping method*, EPNC 2008
- [28] G. Krebs, S. Clénet, Y. Le Ménach, F. Locment, F. Piriou, *Method to connect non-conforming mesh in 3D with the overlapping method*, IEEE, Trans. Mag., vol. 45, n°3, pp. 1420-1423, 2009
- [29] G. Parent, *Mise en oeuvre d'une technique de projection de grandeurs discrètes : application aux couplages magnétothermique et magnétomécanique*, thèse de doctorat, USTL Lille 1 & Université de Liège, 2008
- [30] G. Parent, P. Dular, J.-P. Ducreux, F. Piriou, *Using a Galerkin projection method for coupled problems*, IEEE Trans. Mag., vol. 44, n°6, pp. 830-033, 2008
- [31] G. Meunier, sous la Direction de, *Modèles et formulations en électromagnétisme – Electromagnétisme et éléments finis 2*, Hermès Science, Lavoisier, 2002
- [32] H. C. Lai, D. Rodger, P. J. Leonard, *Coupling meshes in 3D problems involving movements*, IEEE Trans. Mag., vol. 28, n° 2, pp. 1732-1734, 1992
- [33] H. De Gerssem, *Simulation of field-circuit coupled motional eddy current problems by krylov subspace methods and multilevel techniques*, Thèse de doctorat, Katholieke universiteit Leuven, 2001
- [34] I. A. Tsukerman, *Overlapping finite elements for problems with movement*, IEEE Trans. Mag. Vol 28, n°5, pp. 2247-2249, 1992
- [35] J. C. Nédélec, *A new family of mixed finite elements in  $R^3$* , Numer. Math., vol. 35, pp. 57-81, 1986
- [36] J. C. Nédélec, *Mixed finite elements in  $R^3$* , Numer. Math., vol. 35, pp. 315-341, 1980
- [37] J. Korecki, *Contribution à la modélisation 3D des systèmes électromagnétiques basse fréquence à l'aide de la méthode d'intégration finie (FIT)*, thèse de doctorat, Université de Lille 1, 2009
- [38] J. Korecki, Y. Le Ménach, J.-P. Ducreux, F. Piriou, *Numerical solutions in primal and dual mesh of magnetostatic problem solved with the Finite Integration Technique*, Compel, vol. 27, n°1, pp. 47-55, 2008



- [39] K. Abe, S. Zhang, T. Mitsui, *MRTR method : an iterative method based on the three-term recurrence formula of CG-type for non symmetric matrix*, JSIAM, vol. 7, pp. 37-50, 1997
- [40] L. Kettunen, K. Forsman, A. Bossavit, *Gauging in Whitney spaces*, IEEE Trans. Mag., Vol. 35, n°3, pp. 1466-1469 , 1999
- [41] M. Aubertin, T. Henneron, F. Piriou, J.-C. Mipo, *Influence of the approximation function of the vector potential formulation with the Lagrange multipliers approach and the mortar method*, EPNC 2010, Essen
- [42] M. Aubertin, T. Henneron, F. Piriou, J.-C. Mipo, P. Guérin, *Décomposition de domaines dans les problèmes de magnétostatique résolus par la méthode des éléments finis*, Numélec 2008, Liège
- [43] M. Aubertin, T. Henneron, F. Piriou, P. Guérin, J.-C. Mipo, *Periodic and anti-periodic boundary conditions with the Lagrange multipliers in the FEM*, IEEE, Trans. Mag., Vol. 46, n° 8, pp. 3417-3420, 2010
- [44] M. Aubertin, T. Henneron, O. Boiteau, F. Piriou, P. Guérin, J.-C.Mipo, *Single and double Lagrange multipliers approaches applied to the scalar potential formulation used in magnetostatic FEM*, Przegląd Elektrotechniczny, vol. 5, 2010
- [45] M. Benzi, G. H. Golub, J. Liesen, *Numerical solution of saddle point problems*, Acta Numerica, pp. 1-137, 2005
- [46] N. Sadowsky, *Modélisation des machines électriques à partir de la résolution des équations du champ en tenant compte du mouvement et du circuit d'alimentation (logiciel EFCAD)*, thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique, Grenoble, 1993
- [47] O. J. Antunes, J. P. A. Bastos, N. Sadoswski, A. Razek, L. Santandrea, F. Bouillault, F. Rapetti, *Using hierarchic interpolation with mortar element method for electrical machines analysis*, IEEE Trans. Mag., vol. 41, n°5, pp. 1472-1475, 2005
- [48] O. Boiteau, *Décomposition de Domaine et Parallélisme : la méthode FETI*, Manuel de référence du code\_Aster, 2008
- [49] P. Dular, *Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires*, Thèse de doctorat, Université de Liège – Faculté des Sciences Appliquées, 1994

- [50] R. V. Sabariego, P. Dular, *Perturbation technique for the finite element modelling of differential probes in non-destructive eddy-current testing*, IET Sci. Meas. Technol., vol 1, pp. 25-29, 2007
- [51] R. Perrin-Bitt, *Modélisation des machines électriques tournantes par la méthode des éléments finis tridimensionnels : calculs des grandeurs magnétiques avec prise en compte du mouvement*, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique, Grenoble, 1992
- [52] S. Koch, H. De Gersem, T. Weiland, *Block-preconditioning for hybrid discretizations in combination with Lagrange-Multiplier coupling*, IEEE Trans. Mag., vol. 46, n°8, pp. 3397-3400, 2010
- [53] S. Schulze, U. van Rienen, *Computation of land mine signatures using domain decomposition with Lagrange multipliers*, IEEE Trans. Mag. Vol. 43, n°4, pp. 1189-1192, 2007
- [54] T. Henneron, *Contribution à la prise en compte des grandeurs globales dans les problèmes d'électromagnétisme résolu avec la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 2004
- [55] T. Henneron, G. Krebs, M. Aubertin, S. Clénet, F. Piriou, *Comparison between overlapping method and Lagrange multipliers approach applied to a movement*, EMF'09, Mondovi, Italie
- [56] X. Shi, *Contribution à la simulation du mouvement en 3D avec la méthode des éléments finis, appliqués à la modélisation des machines électriques*, Thèse de doctorat de l'Université de Lille 1, 2005
- [57] Y. Le Ménach, *Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électromagnétiques*, Thèse de doctorat, Université de Lille 1, 1999
- [58] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Second Edition, éd. SIAM, 2003
- [59] Z. Ren, F. Bouillault, A. Razek, A. Bossavit, J.C. Vérité, *A new hybrid model using electric fields formulation for 3D eddy current problems*, IEEE Trans. Mag., Vol. 26, n°2, pp. 470-473, 1990



## **Contribution à la modélisation 3D des machines électriques par décomposition de domaines et recollement de maillages**

### **Résumé :**

La méthode des éléments finis est une méthode de modélisation des systèmes, utilisée dans l'ensemble des domaines de la physique ainsi que dans l'ingénierie. Elle permet d'obtenir des résultats précis. Cependant la nécessité de modéliser des systèmes de plus en plus complexes, avec une précision de plus en plus grande, demande une puissance de calcul qui n'est pas toujours disponible. Il est ainsi nécessaire, afin de résoudre ces problèmes, de trouver des méthodes de calcul permettant de conserver cette précision, mais de réduire le temps de calcul.

Une solution pour tenter de palier à ce défaut est de décomposer le problème complexe initial en plusieurs sous-problèmes, maillés indépendamment, et entre lesquels il est nécessaire de coupler les solutions. Quelques méthodes permettant de recoller ces maillages sont étudiées dans ce présent mémoire. Elles sont présentées ainsi que quelques outils liés, telles que des méthodes de résolution, et des fonctions de formes plus adaptées à leur utilisation. Il est montré, à travers ces travaux, qu'il est tout à fait possible de recoller les maillages en électrotechnique, et par là d'obtenir des résultats intéressants en terme de précision, et de qualité de solution. Cependant, les méthodes de résolution utilisées ici n'ont pas permis d'obtenir des temps de calculs satisfaisants pour les cas étudiés.

**Mots clés** modélisation électromagnétique, recollement de maillages, multiplicateurs de Lagrange, méthode Mortar, méthodes de résolution

## **Contribution to the 3D modelling of electrical devices with domain decomposition and mesh reconnection**

### **Abstract:**

The finite element method is used to model complex systems in all the physics and engineering. This method has a good accuracy. Because of the complexity of the systems, and the require precision, this method need a very large computing capacity, which is not always available. Consequently it is necessary to find calculation methods which allow preserving the accuracy, and reducing the computation time.

One way to solve this situation is to decompose the complex problem in several sub-problems, with non-connecting meshes, and reconnect them. Some methods used to reconnect are developed in this work, with some tools, like resolution methods, and new shape functions necessary for this configuration of non-connecting meshes. This work shows the possibility of those methods: they reconnect the different meshes, conserve the accuracy and the quality of the solution. But the solving methods used here do not reduce consequently the computation time.

**Keywords:** electromagnetic modelling, mesh reconnection, Lagrange multipliers, Mortar method, solving methods.