



Numéro d'ordre : 40597

Université Lille 1, Sciences et Technologies
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur Lille
Nord-de-France

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR en Mathématiques

présentée par

Walid Ben Hammouda

Soutenue le 04 novembre 2011

Topologie des Fonctions Rationnelles dans une Grassmannienne et Espaces de Lacets sur les Espaces de Configurations

Thèse dirigée par Sadok Kallel (Lille 1)

Avec la collaboration scientifique de Paolo Salvatore (Roma 2) - Projet Egide/Galilée

Codirigée à Tunis par Dorra Bourguiba (Faculté des Sciences de Tunis)

Rapportée par

Luc Menichi (Angers)

Geoffrey Powell (Paris 13)

Soutenue devant le jury composé de

Dorra Bourguiba	Faculté des Sciences de Tunis	Codirectrice
Benoit Fresse	Université de Lille I	Président
Sadok Kallel	Université de Lille I	Directeur
Luc Menichi	Université d'Angers	Rapporteur
Geoffrey Powell	Université de Paris 13	Rapporteur
Daniel Tanré	Université de Lille I	Examineur
Said Zarati	Faculté des Sciences de Tunis	Examineur

À la mémoire de ma mère

Remerciements

J'aimerais exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à M. Sadok Kallel pour avoir dirigé cette thèse avec constance et bienveillance. Je lui dois beaucoup pour les efforts qu'il a fournis pour développer en moi l'esprit de recherche et d'analyse et pour m'avoir fait profiter de ses qualités scientifiques et humaines. Sa rigueur et son esprit critique m'ont sans cesse guidé tout au long de ces années. Je n'oublierai jamais son accueil et son soutien lors de tous mes stages effectués. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance, de ma forte admiration et de mes respects.

Mes remerciements vont également à Mme Dorra Bourguiba qui n'a jamais épargné de son temps pour me diriger, m'aider et m'encourager tout au long de cette thèse.

Je remercie énormément M. Paolo Salvatore pour tout le temps passé à travailler avec lui, pour sa contribution à cette thèse et pour sa perspicacité.

Je remercie également M. Geoffrey Powell pour avoir accepté de rapporter ce travail de thèse. Ses remarques pertinentes et ses suggestions m'ont été d'une grande aide et m'ont permis d'améliorer la qualité de mon document de thèse.

Je remercie M. Luc Menichi pour avoir accepté de rapporter ce travail et de faire partie de ce jury. Ses remarques et ses suggestions précises et développées ont contribué à clarifier et à enrichir ce travail.

Je remercie de tout coeur M. Said Zarati qui m'honore en acceptant d'être membre examinateur et de se déplacer pour faire partie de ce jury malgré ses nombreux engagements .

Je remercie vivement M. Daniel Tanré qui m'a fait l'honneur d'accepter chaleureusement de faire partie de mon Jury de thèse.

Mes remerciements vont également à M. Benoit Fresse pour avoir accepté de présider le jury de thèse.

J'aimerais remercier de tout coeur Nafaa Chbili pour son accueil et son aide précieuse lors de mon stage effectué à Max-Planck.

Je remercie particulièrement tous mes enseignants de la F.S.T, je suis fier d'avoir été leur étudiant durant ma formation. Je ne saurais oublier mes enseignants de l'E.P.T qui ont contribué à mes études de mastère.

Un grand merci à toute ma famille pour son encouragement continu et sans faille, son soutien hors pair. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma très grande reconnaissance, en particulier mon père Jamaïel, ma soeur Wafa et mon frère Khaled.

Je remercie tous mes collègues et membres des équipes de recherche de topologie algébrique de Tunis et de Lille 1, particulièrement David Chataur, Walid Taamallah et Mouhamed El Haouari. Je remercie tous mes amis particulièrement Fethi Neji, Mohamed Cherif, Bassem Ksila, Sahbi Keraani, Serap Gurer, Ahmed Maalej, Khaled Kilani, Baligh Ayari, Achref Ben Amar, Chiham Chahed, Meriam Ezzoug, Faten Labassi, Arwa Abbasi.

Je ne saurais oublier de remercier toutes les Universités suivantes : Lille1 Science et technolo-

gie, Faculté des Sciences de Tunis, UBC (Vancouver), Max-Planck (Bonn), aussi bien chercheurs, enseignants et personnel administratif, pour m'avoir donné l'opportunité et les conditions favorables pour effectuer mes travaux de recherche de cette thèse.

Que tous ceux que j'ai cotoyé de près ou de loin et qui, d'une façon ou d'une autre, m'ont apporté leur soutien, trouvent ici l'expression de mes sincères remerciements.

Enfin, j'aimerais remercier tout particulièrement une grande dame qui se reconnaitra et qui sait tout ce que je lui dois. N'ayant épargné aucun effort pour veiller à mon bonheur et à ma réussite, aucune expression ne serait à la hauteur de ma gratitude et de ma reconnaissance envers elle.

Résumé

Dans cette thèse nous étudions d'un point de vue topologique deux espaces dont l'utilité et l'importance dépassent le cadre de la topologie algébrique. Le premier espace est constitué de toutes les fonctions holomorphes de la sphère de Riemann dans une variété de Grassmann complexe. Cet espace se scinde en composantes connexes et nous identifions entièrement le type d'homotopie de la composante des applications de degré un. Nous en déduisons des calculs homologiques explicites. Dans le cas des applications pointées, nous explicitons une action de l'opérade des deux petits disques sur l'espace des fonctions rationnelles, simplifiant ainsi quelques travaux de Mann et Milgram. Nous étudions également les espaces de fonctions continues et dans le cas de la Grassmannienne des deux plans complexes dans \mathbb{C}^4 , nous obtenons une décomposition homotopique de son espace de lacet. Finalement le second espace que nous étudions est l'espace des lacets libres sur les configurations de points distincts dans \mathbb{R}^n . Dans le cas de 3 points, nous obtenons de façon simple et élégante un résultat de scindement homologique dû à Fadell et Husseini et nous l'étendons au cas de la sphère.

Abstract

In this thesis we study from a topological point of view two spaces whose usefulness and importance go beyond the scope of algebraic topology. The first space consists of all holomorphic maps of the Riemann sphere into a complex Grassmannian manifold. This space is divided into connected components and we identify the homotopy type of the component of degree one. We deduce explicit homological calculations. In the case of based maps, we explain an action of the operad of little two disks on the space of rational functions, simplifying some work of Mann and Milgram. We also study the spaces of continuous maps and in the case of the Grassmannian of complex two planes in \mathbb{C}^4 , we obtain a homotopy decomposition of its based loop space. Finally, the second space that we study is the free loop space of configurations of distinct points in \mathbb{R}^n . In the case of three points, we obtain a simple and elegant derivation of a homological splitting result due to Fadell and Husseini and we extend it to the case of points on the sphere.

Table des matières

Introduction	7
1 Définitions et Constructions	13
1.1 Résultats Classiques sur la Variété de Grassmann	13
1.2 Fibrés au-dessus de la Variété de Grassmann	14
1.3 Cohomologie de la Grassmannienne	16
1.3.1 Point de Vue Géométrique	18
1.4 Espace des Lacets de $Gr(n, m)$	19
1.4.1 La Structure de l'Anneau de Pontryagin	20
1.4.2 Le type d'homotopie de $\Omega Gr(2, 2)$	23
1.5 Modèles Rationnels	24
1.6 Espace des Lacets Doubles et un Résultat de Non-Scindement	26
1.6.1 Algèbres de Dyer-Lashof	27
2 Applications Holomorphes dans une Variété de Grassmann	31
2.1 Propriétés Globales	32
2.2 Représentations Matricielles de $\text{Hol}(Gr(n, m))$	33
2.3 L'Espace des Applications Pointées	34
2.4 Forme Normale et Structure de Variété	35
2.5 Formes Triangulaires Supérieures et Stratification de Mann-Milgram	40
2.5.1 Formes Triangulaires Supérieures	40
2.5.2 La Stratification de Mann-Milgram	41
2.5.3 Homologie de $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$	43
2.6 L'action de l'opéade des petits disques	45
3 Applications de Degré Un et Calculs Homologiques	51
3.1 L'Espace des Applications Pointées	51
3.2 Théorème Principal	54
3.3 La Grassmannienne Quadratique	57
3.3.1 Calcul Homologique	63
3.3.2 Le cas des $(1, 2, n + 2)$ -drapeaux	65

3.3.3 Cas de $Gr(2, 3)$	67
4 Homologie de l'espace des lacets des espaces de configurations	69
4.1 Introduction et constructions	69
4.2 L'espace de lacets libres de l'espace de configurations de trois points dans \mathbb{R}^n . .	73
4.3 L'espace de lacets libres de l'espace de configurations de trois points dans une Sphère	75
4.4 Cohomologie de $LF(\mathbb{R}^n, 4)$ à Coefficients dans \mathbb{Z}_2	78

Introduction

Les espaces des applications holomorphes et continues d’une surface de Riemann dans les espaces projectifs ou dans des variétés de grassmann complexes, ou encore plus généralement dans des variétés de drapeaux, ont été beaucoup étudiées ces dernières années. Ce sont des espaces qui interviennent naturellement dans la physique (sigma-modèles et théorie de jauge) et en ingénierie (théorie du contrôle).

Nous désignons par $\text{Hol}(M)$ l’espace des fonctions holomorphes de la sphère de Riemann dans M . Cet espace est un sous-espace de l’espace de toutes les applications continues qu’on dénote par $L^2M = \{f : S^2 \longrightarrow M\}$. Il hérite de sa topologie compact-ouverte. On écrira $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann, et on dénotera pas $x_0 \in M$ un “point base” choisi. Les sous-espaces des fonctions pointées, c’est à dire des fonctions $f : S^2 \longrightarrow M$ tel que $f(\infty) = x_0$, holomorphes et continues sont notées respectivement par $\text{Rat}(M)$ et Ω^2M , et nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Rat}(M) & \longrightarrow & \text{Hol}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^2M & \longrightarrow & L^2M \end{array}$$

où toutes les flèches sont des inclusions. Notre objectif est d’étudier l’homologie et idéalement le type d’homotopie de ces espaces, ainsi que de déterminer l’effet des flèches induites en homologie et en homotopie entre ces espaces. Il est à noter que les espaces de lacets pointés Ω^2M sont ceux qui sont généralement les mieux compris et pour lesquels une panoplie d’outils de calcul existe. Les espaces de lacets libres par contre, notés $LM = \{S^1 \longrightarrow M\}$ et L^2M comme ci-haut ont fait l’objet de plusieurs travaux plus récents motivés surtout par l’apparition de la string topologie inventée par D. Sullivan et M. Chas à la fin des années 90 (voir [33]).

On peut dire que l’étude de la topologie des espaces de fonctions holomorphes a démarré avec Segal en 1979 lequel a travaillé sur l’espace des fonctions holomorphes pointées $\text{Rat}(\mathbb{P}^n)$, où \mathbb{P}^n dénote l’espace projectif complexe. Il est commode de noter $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$ le sous-espace de toutes les applications de degré (topologique ou géométrique) égal à $k \in \mathbb{N}$. Segal montre alors le joli théorème de stabilité suivant

Théorème 1. (Segal [48]) *L’inclusion $\iota_k : \text{Rat}_k(\mathbb{P}^n)$ dans $\Omega_k^2\mathbb{P}^n$ induit une équivalence d’homotopie faible jusqu’à la dimension $k(2n - 1)$.*

L'énoncé du théorème veut dire que les groupes d'homotopie supérieurs sont isomorphes par le biais de ι_k jusqu'au degré $k(2n - 1)$. On dira que $k(2n - 1)$ est une *borne de stabilité*.

A la suite des travaux de Segal, le sujet a pris une envolée. Ainsi F. Kirwan [36] démontre en 1986 un théorème de stabilité analogue pour $M = Gr(n, m)$; la variété de Grassmann des n -plans complexes dans \mathbb{C}^{n+m} , alors que M. Guest [20] établit un résultat similaire pour les variétés toriques et que Boyer-Hurtubise-Mann-Milgram [4] démontrent la stabilité pour les variétés de drapeaux généralisées. Ces résultats établissent des bornes de stabilité qui ne sont pas toujours optimales. De plus, comparer l'homologie de ces espaces n'est pas calculer explicitement les groupes d'homologie.

Dans [33], Kallel et Salvatore étudient les espaces des fonctions non-pointées $L^2(\mathbb{P}^m)$ et $\text{Hol}(\mathbb{P}^m)$. Ils arrivent à calculer complètement les groupes d'homologie avec coefficients dans un corps de ces espaces. Pour cela ils utilisent des techniques de la string topologie et se basent sur une observation fondamentale de Cohen-Cohen-Mann-Milgram [13] qui montrent que l'inclusion $\text{Rat}(\mathbb{P}^m) \longrightarrow \Omega^2 \mathbb{P}^m$ est une inclusion compatible avec l'action de l'opérade des petits disques (voir section 2.6), et que l'homologie de $\text{Rat}(\mathbb{P}^m)$ est essentiellement engendrée par l'homologie des applications de degré 1 sous l'action de l'algèbre de Dyer-Lashof (voir section 1.6.1).

Un objectif premier de notre travail est donc d'essayer de généraliser les travaux de Kallel-Salvatore de $\mathbb{P}^m = Gr(1, m)$ à $Gr(n, m)$ pour n quelconque. Idéalement, nous souhaitons décrire assez précisément l'homologie de $\text{Hol}_k(Gr(n, m))$. Ceci s'avère difficile en général mais nous réussissons à bien comprendre les composantes de degrés $k = 1$ et à clarifier le cas $k = 2$. Il s'avère que les techniques de la string topologie ne sont pas suffisantes pour tout expliquer et qu'il faut faire appel à d'autres méthodes. Evidemment et tout d'abord, il est nécessaire de bien comprendre l'espace $\text{Hol}_1(Gr(n, m))$. Le théorème principal suivant donne une description complète de cet espace.

Théorème 2. *Soit $Fl(1, n, n+m) = U(n+m)/U(1) \times U(n-1) \times U(m)$ la variété de drapeaux de tous les drapeaux $(1, n)$ dans \mathbb{C}^{n+m} avec les projections*

$$\begin{aligned} p_1 & : Fl(1, n, n+m) \longrightarrow \mathbb{P}^{n+m-1} \\ p_2 & : Fl(1, n, n+m) \longrightarrow Gr(n, m) \end{aligned}$$

alors $\text{Hol}_1(Gr(n, m))$ est, à homotopie près, le fibré en sphère au-dessus de $Fl(1, n, n+m)$ associé au fibré vectoriel de rang complexe m donné par

$$p_1^*(H) \otimes p_2^*(Q)$$

où $H = \mathcal{O}(1)$ est l'hyperplan dual au fibré en droite tautologique au-dessus de \mathbb{P}^{n+m-1} , et Q le fibré anti-tautologique au-dessus $Gr(n, m)$.

Les définitions et constructions qui vont avec le théorème sont dans le chapitre 3. Ce résultat nous permet par exemple d'utiliser la suite de Gysin d'un fibré en sphères, les classes

Introduction

caractéristiques ainsi que la description dûe à Paul Baum de la cohomologie d'une variété de drapeaux [3], pour donner une description complète de l'homologie de la composante $\text{Hol}_1(Gr(n, m))$. Voici un exemple intéressant et concret (voir section 3.3.1).

$$\text{Corollaire 1. } \tilde{H}_*(\text{Hol}_1(Gr(2, 2)); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 13 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 11 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 9 \\ \mathbb{Z}_4, & * = 8 \\ \mathbb{Z}, & * = 7 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4, & * = 6 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 4 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 2 \end{cases}$$

L'homologie est nulle en tout autre degré.

Notons que $\text{Hol}_1(Gr(n, m))$ se déforme par rétracte sur une variété orientée de dimension réelle $2nm + 2n + 2m - 3$, d'où la classe en top degré 13 dans le cas $Gr(2, 2)$. Des calculs similaires mais avec coefficients dans \mathbb{Q} peuvent être donnés pour $\text{Hol}_1(Gr(2, m))$ pour tout m .

Un corollaire intéressant du Théorème 2 est de retrouver un résultat de Cohen-Lupercio-Segal [14] sur le type d'homotopie des applications rationnelles dans la Grassmannienne $Gr(n, \infty)$, également connue pour être $BU(n)$ l'espace classifiant du groupe unitaire. En particulier, on en déduit qu'il existe une équivalence d'homotopie (voir section 3.2)

$$\text{Rat}_1(BU(n)) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$$

Il est à noter que [14] compare le type d'homotopie de $\text{Rat}_k(BU(n))$ aux composantes d'une certaine filtration de Mitchell de $\Omega SU(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les méthodes qu'ils utilisent sont très différentes des nôtres.

Un joli et difficile résultat de Mann et Milgram [40] énonce que l'inclusion

$$\iota : \text{Rat}_k(Gr(n, m)) \longrightarrow \Omega_k^2 Gr(n, m)$$

induit un monomorphisme en homologie. Les auteurs donnent même une borne de stabilité optimale. Ceci généralise les résultats de Segal mentionnés plus haut. Le calcul de l'homologie de $\text{Rat}(Gr(n, m))$ ou de celle de $\text{Hol}(Gr(n, m))$ revient donc et dans une certaine mesure à la détermination de l'homologie des espaces de lacets, pointés et libres, sur $Gr(n, m)$. Dans le chapitre 1 nous faisons la collecte de plusieurs résultats sur $\Omega^2 Gr(n, m)$ et $L^2 Gr(n, m)$, leurs modèles rationnels et dans le cas de $Gr(2, 2)$ le type d'homotopie. Un de nos plus intéressants résultats est la décomposition suivante :

Théorème 3. *L'espace des lacets sur $Gr(2, 2)$ se décompose comme produit*

$$\Omega Gr(2, 2) \simeq S^1 \times S^3 \times \Omega S^5 \times \Omega S^7$$

Cette décomposition n'est pas une décomposition de H -espaces.

Dans la deuxième et dernière partie de cette thèse, nous étudions les espaces de lacets d'espaces de configurations dans un espace Euclidien. Nous rappelons que pour tout espace X , $F(X, n) \subset X^n$ est le sous-espace des uplets de points (x_1, \dots, x_n) tel que $x_i \neq x_j, i \neq j$. Ces espaces, et leurs analogues non-ordonnés $B(X, n) = F(X, n)/\mathfrak{S}_n$ sont l'objet de nombreux travaux en géométrie et en théorie de l'homotopie [32]. En analyse fonctionnelle, ils sont utilisés pour donner des estimations sur l'existence de solutions pour des systèmes Hamiltoniens du type N -corps. Plus particulièrement on considère pour $i, 1 \leq i \leq k$, des "masses" m_i qui se meuvent le long de trajectoires $q_i(t) : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $q_i(t) \neq q_j(t)$ pour tout $t, i \neq j$, et qui satisfont à l'équation Hamiltonienne du type N -corps

$$m_i \ddot{q}_i + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \tag{1}$$

où V est un potentiel d'interaction

$$V : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(\vec{q}) = \sum V_{ij}(t, q_i - q_j)$$

Le vecteur des orbites $q(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$ prend ses valeurs dans

$$LF(\mathbb{R}^n, k) := \text{Map}(S^1, F(\mathbb{R}^n, k))$$

l'espace *des lacets* qui consiste en toutes les fonctions continues du cercle dans $F(\mathbb{R}^n, k)$. Comme $F(\mathbb{R}^n, k-1)$ peut être vu comme un sous-espace de $F(\mathbb{R}^n, k)$, on dénote par $b_q(X)$ le q -ème nombre de Betti. L'importante remarque suivante, qui découle directement du théorème de Bahri-Rabinowitz [2], généralisé par H. Riahi dans [46] et a initié de nombreux travaux dans le domaine.

Remarque 1. *Sous certaines conditions facilement identifiables sur V et $q(t)$, les nombres de Betti $b_q(LF(\mathbb{R}^n, 3))$ sont non bornés, alors le système (1) possède une infinité de solutions.*

Ce résultat a servi de motivation à Fadell et Husseini pour étudier les espaces de lacets sur $F(\mathbb{R}^n, k)$. Dans leur livre [18] ils donnent des estimations de la croissance des nombres de Betti de ces espaces pour tout n et k . Leurs résultats ne sont pas toujours complets.

Dans le chapitre 4 de cette thèse, nous étudions en détail les espaces $LF(\mathbb{R}^n, 3)$ et $LF(S^n, 3)$ et nous essayons de combler certains points manquants de [18]. Notre approche consiste à établir tout d'abord un résultat utile sur la *formalité* de ces espaces (voir section 4.2), en utilisant un critère de M. El Haouari [17], et ensuite d'appliquer un théorème clé de J.D. Jones reliant la cohomologie des espaces de lacets à l'homologie de Hochschild [43]. Ceci nous permet de retrouver facilement et de façon plus conceptuelle les résultats de scindement homologiques établis par

Introduction

Fadell et Husseini. Dans ce qui suit, nous donnons notre dernier résultat principal.

Théorème 4. *Les espaces $F(\mathbb{R}^n, 3)$ et $F(S^n, 3)$ sont formels sur tout corps \mathbb{K} . Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$H^*(LF(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{K}) \cong H^*(LS^{n-1}; \mathbb{K}) \otimes H^*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1}); \mathbb{K})$$

valable pour tout n si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ et pour n pair si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. De même nous avons l'isomorphisme

$$H^*(LF(S^n, 3); \mathbb{K}) \cong H^*(LS^{n-1}; \mathbb{K}) \otimes H^*(LS^n; \mathbb{K})$$

pour n impair à coefficients dans \mathbb{Z} , ou pour n pair et $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$.

Voici un résumé du contenu de cette thèse. Nous commençons par rappeler des définitions et des constructions qui vont nous servir ultérieurement. Dans un premier chapitre nous résumons les propriétés topologiques des variétés de Grassmann complexes ainsi que de leurs espaces de lacets. Nous y démontrons le théorème 3 ainsi qu'un résultat de non-scindement de $H_*(\Omega^2 Gr(2, 2); \mathbb{Z}_p)$ en tant que module sur l'algèbre de Dyer-Lashof. Dans un second chapitre, nous définissons les espaces des fonctions holomorphes dans la variété de Grassmann et nous donnons une description matricielle de telles fonctions en nous basant sur les travaux de Mann-Milgram et Havlicek. Le côté géométrique est revu en détail. En utilisant la description des fonctions holomorphes pointées comme des matrices rationnelles (point de vue de la théorie du contrôle), nous obtenons une construction limpide de l'action des opérades des deux petits disques sur $\text{Rat}(Gr(n, m))$. Les calculs homologiques avec la suite de Gysin pour le cas de $\text{Rat}_1 Gr(2, 2)$ sont relégués au troisième chapitre. Dans le quatrième et dernier chapitre nous développons notre approche sur les espaces de lacets sur les espaces de configurations et démontrons le Théorème 4.

Cette thèse aboutit à de nombreuses questions ouvertes que nous espérons étudier à l'avenir. Par exemple, la structure de $H_*(\Omega^2 Gr(n, m); \mathbb{K})$ en tant que module sur l'algèbre de Dyer-Lashof n'est pas connue (pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ ou \mathbb{Z}_p). Dans le cas rationnel, on aimerait savoir si $\text{Rat}(Gr(n, m))$ pour $n > 1$ se scinde stablement comme dans le cas $n = 1$ (Théorème de [13]). L'homologie de $\text{Hol}_k(Gr(n, m))$ pour $k \geq 2$ reste encore à élucider et est assez complexe. D'un autre côté l'introduction du complexe de Hochschild dans le calcul de $H_* LF(\mathbb{R}^n; \mathbb{K})$ nous permet de simplifier les calculs et les appliquer à d'autres espaces de configurations.

Le chapitre 3 fait partie d'une prépublication conjointe avec S. Kallel et P. Salvatore [34].

Chapitre 1

Définitions et Constructions

1.1 Résultats Classiques sur la Variété de Grassmann

Soit $Gr(n, m)$ la Grassmannienne de n -plans complexes dans \mathbb{C}^{n+m} . Elle est identifiée à un espace homogène $U(n+m)/U(n) \times U(m)$. C'est une variété complexe de dimension nm .

Nous pouvons décrire la Grassmannienne autrement. Soit $M_{n, n+m}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices complexes $n \times (n+m)$ et $P_{n, n+m}(\mathbb{C})$ le sous-espace des matrices dont les vecteurs lignes sont linéairement indépendants. En particulier, $GL_n(\mathbb{C}) := P_{n, n}(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices inversibles. Plus généralement, $P_{n, n+m}(\mathbb{C})$ est la variété de Stiefel des n -repères dans \mathbb{C}^{n+m} . Le repère associé à $M \in P_{n, n+m}(\mathbb{C})$ est constitué de l'ensemble des vecteurs lignes. L'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur M par multiplication à gauche se traduit par des opérations sur les lignes et donc, elle conserve le span des vecteurs lignes. Nous obtenons ainsi l'identification

$$Gr(n, m) = P_{n, n+m}(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C}) \quad (1.1.1)$$

Le lemme suivant découle de la définition.

Lemme 1.1.1 *Une matrice M est dans $P_{n, n+m}(\mathbb{C})$ si et seulement si les déterminants des $n \times n$ mineurs de M ne s'annulent pas tous en même temps.*

Ceci veut dire, en particulier, en prenant les $n \times n$ déterminants (dans un certain ordre), que nous avons une application bien définie

$$P_{n, n+m}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1}$$

La multiplication à gauche par $A \in GL_n(\mathbb{C})$ ne change pas la valeur de cette application puisque ça revient à multiplier toutes les entrées homogènes par le déterminant de A . Nous avons donc une application

$$\wp : Gr(n, m) \longrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1} \quad (1.1.2)$$

qui est un plongement et réalise $Gr(n, m)$ comme une variété algébrique [1]. En effet, c'est le plongement de *Plucker*. Notons que pour $m = 1$, $\wp : Gr(n, 1) \longrightarrow \mathbb{P}^n$ est un isomorphisme.

Exemple 1.1.2 (La Grassmannienne Quadrique) La variété que nous allons traiter comme exemple dans tout ce travail est $Gr(2, 2) \subset \mathbb{P}^5$. En identifiant $Gr(2, 2)$ comme des classes de matrices dans $P_{2,4}(\mathbb{C})$, l'application de Plucker est donnée comme suit

$$\wp : \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \longmapsto (d_{12} : d_{13} : d_{14} : d_{23} : d_{24} : d_{34})$$

où $d_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$. Nous pouvons facilement vérifier que ces relations réalisent $Gr(2, 2)$ en tant qu'une hypersurface dans \mathbb{P}^5 de degré 2, ayant l'équation

$$z_0 z_5 - z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0 \tag{1.1.3}$$

1.2 Fibrés au-dessus de la Variété de Grassmann

Nous allons rassembler les constructions et les définitions cruciales pour notre travail. Le fibré tautologique γ_n au-dessus de $Gr(n, m)$ est le fibré complexe de dimension n d'espace total

$$\{(P, v) \in Gr(n, m) \times \mathbb{C}^{n+m} \mid P \in Gr(n, m), v \in P\}$$

Il existe une suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow \gamma_n \longrightarrow Gr(n, m) \times \mathbb{C}^{n+m} \longrightarrow Q_m \longrightarrow 0 \tag{1.2.1}$$

où Q_m est le fibré *anti-tautologique* de rang m . Il est donc utile de considérer parfois la Grassmannienne $Gr(n, m)$ comme le quotient de \mathbb{C}^{n+m} de rang m au lieu de sous-espaces linéaires de rang n .

Une autre manière de voir γ et Q est de les considérer comme les fibrés associés. Par la suite, il pourrait être utile de considérer la variété de drapeaux

$$Fl(i_1, i_2, \dots, i_n) := U(i_1 + i_2 + \dots + i_n) / U(i_1) \times \dots \times U(i_n)$$

que nous voyons comme l'espace de tous les drapeaux orthonormaux imbriqués (i.e. sous-espaces linéaires) $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_{n-1} \subset \mathbb{C}^{i_1 + \dots + i_n}$, avec $\dim P_k = i_k$. Au-dessus de $Fl(i_1, i_2, \dots, i_n)$ existe le fibré tautologique de rang n d'espace total

$$\gamma_k := \mathbb{C}^{i_k} \times_{U(i_k)} \left[\frac{U(i_1 + i_2 + \dots + i_n)}{U(i_1) \times \dots \times \hat{U}(i_k) \times \dots \times U(i_n)} \right]$$

où \hat{U} veut dire la suppression du produit. Pour $n = 2$, nous appelons γ_1 le fibré tautologique et

γ_2 son orthogonal qui est isomorphe au fibré anti-tautologique Q_{i_1} .

Définition 1.2.1 Soit $\mathcal{O}(d)$ le fibré en droite au-dessus de \mathbb{P}^n dont l'espace total est la construction de Borel

$$\mathbb{C} \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) := \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

qui est le quotient obtenu par identification des uplets

$$(x, z_0, \dots, z_n) \sim (\lambda^d x, \lambda z_0, \dots, \lambda z_n) \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, d \in \mathbb{Z}$$

Il est clair que le fibré trivial en droite est $\epsilon = \mathcal{O}(0)$. Nous pouvons vérifier que

- $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}(n), \epsilon) = \mathcal{O}(-n)$, et que
- $\mathcal{O}(d_1) \otimes \mathcal{O}(d_2) \cong \mathcal{O}(d_1 + d_2)$, plus particulièrement $\mathcal{O}(\pm d) := \mathcal{O}(\pm 1)^{\otimes d}$.

Il est évident que les fibrés en droite complexes au-dessus de \mathbb{P}^n sont classifiés par $H^2(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, et que $\mathcal{O}(d)$ est le fibré correspondant à $d \in \mathbb{Z}$. Ceci est un fibré classifié par l'application $\mathbb{P}^n \longrightarrow BS^1 = \mathbb{P}^\infty$ ayant un degré topologique d .

Exemple 1.2.2 Le fibré tautologique γ_1 au-dessus de \mathbb{P}^n est isomorphe à $\mathcal{O}(-1)$. Ce fibré n'a pas de section globale non-nulle. Le fibré γ_1 est appelé le fibré de Hopf en droite puisque le complémentaire de sa section nulle est le fibré γ_1^* d'espace total

$$\mathbb{C}^* \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

et qui est précisément la fibration de Hopf.

Exemple 1.2.3 Le dual du fibré en droite de Hopf est le fibré *hyperplan* H ([27]). C'est un fibré obtenu par projection

$$\mathbb{P}^{n+1} - \{[0 : \dots : 0 : 1]\} \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad [z_0 : \dots : z_n : z] \mapsto [z_0 : \dots : z_n]$$

Notons que l'espace total peut être décrit comme

$$\mathbb{P}^{n+1} - \{[0 : \dots : 0 : 1]\} = \mathbb{C} \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$$

où l'action de la diagonale par $\lambda \in \mathbb{C}^*$ sur $(z; z_0, \dots, z_n)$ est donnée par $(\lambda z; \lambda z_0, \dots, \lambda z_n)$. Ce qui montre que $H = \mathcal{O}(1)$ est le dual de $\mathcal{O}(-1)$.

Remarque 1.2.4 Si η est le fibré au-dessus de \mathbb{P}^n , nous écrivons $n\eta$ la somme de Whitney de n -copies de η et nous notons η^* le complémentaire de sa section nulle. Il ne faut pas confondre la notation de $\mathcal{O}(n)$ avec $n\mathcal{O}(1)$ qui est de rang n .

1.3 Cohomologie de la Grassmannienne

Nous allons travailler avec une expression explicite de $H^*(Gr(n, m))$. Cette cohomologie est engendrée par les classes de Chern du fibré tautologique de $Gr(n, m)$. Nous allons présenter des outils standards que nous allons utiliser par la suite et qui existent dans [44, 1].

Proposition 1.3.1 *Il existe un isomorphisme d'anneau gradué*

$$H^*(Gr(n, m); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m] / \left(\sum_{i+j=k} c_i \cdot \bar{c}_j; 1 \leq k \leq n+m \right)$$

avec $\deg c_i = \deg \bar{c}_i = 2i$.

PREUVE : L'argument peut-être donné rapidement en se basant sur un résultat principal de Baum (Théorème 1.3.6). Par contre, nous reprenons un argument tout aussi rapide de [21] (voir la section 2). Le point de départ est la fibration des espaces classifiants

$$Gr(n, m) \xrightarrow{i} BU(n) \times BU(m) \xrightarrow{\phi} BU(n+m)$$

La cohomologie de $BU(n) = Gr(n, \infty)$ est donnée par $H^*(BU(n); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$ où les c_i sont les classes de Chern universelles. De même, $H^*(BU(m)) = \mathbb{Z}[\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m]$ et $H^*(BU(n+m)) = \mathbb{Z}[c'_1, \dots, c'_{n+m}]$. La cohomologie de $Gr(n, m)$ est concentrée en degrés pairs car $Gr(n, m)$ admet une décomposition cellulaire avec des cellules de dimensions paires (en utilisant la décomposition de Ehresmann voir [16], paragraphe 5 et 7), donc la cohomologie de tous les espaces concernés est concentrée en degrés pairs, la suite spectrale de Serre pour cette fibration dégénère et i^* est surjective de noyau l'idéal engendré par l'image de ϕ^* des classes de degrés strictement positifs ; i.e.

$$H^*(Gr(n, m)) \cong \frac{H^*(BU(n) \times BU(m))}{\langle \phi^* H^*_+(BU(n+m)) \rangle} \quad (1.3.1)$$

L'inclusion de $U(1)^n \rightarrow U(n)$ induit un monomorphisme en cohomologie qui envoie c_i au i -ème polynôme symétrique élémentaire $\sigma_i(t_1, \dots, t_n)$ sur les générateurs $t_j \in H^2(BU(1)^n)$. De même, \bar{c}_i s'envoie sur $\sigma_i(t_{n+1}, \dots, t_{n+m})$ et c'_i sur $\sigma_i(t_1, \dots, t_{n+m})$. La formule

$$\phi^*(c'_k) = \sum_{i=0}^k c_i \times \bar{c}_{k-i}$$

résulte à partir de la formule de correspondance pour les polynômes symétriques. ■

Plusieurs remarques s'imposent.

Remarque 1.3.2 Définissons la classe de Chern totale d'un fibré complexe ζ^n de dimension n comme étant $c(\zeta^n) = 1 + c_1 + \dots + c_n$. Nous avons la relation $c(\zeta^m \oplus \zeta^n) = c(\zeta^m)c(\zeta^n)$ (voir [19])

par exemple). En particulier et comme $\gamma_n \oplus Q_m = \epsilon_{n+m}$, où γ_n et Q_m sont dans (1.2.1) et ϵ_{n+m} est le fibré trivial, nous avons la relation $c(\gamma_n \oplus Q_m) = 1$, c'est à dire

$$(1 + c_1 + \cdots + c_n)(1 + \bar{c}_1 + \cdots + \bar{c}_m) = 1 \quad (1.3.2)$$

Remarque 1.3.3 Puisque les relations $\sum_{i=0}^k c_i \times \bar{c}_{k-i} = 0$ pour $k = 1, \dots, m$ peuvent être résolues par récurrence pour exprimer $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m$ en terme de c_1, \dots, c_n , l'anneau $H^*(Gr(n, m))$ est un quotient de $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$ par un idéal (ρ_1, \dots, ρ_n) . Pour $m \geq n \geq 2$, $H^*(Gr(n, m)) = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]/(\rho_1, \dots, \rho_n)$ avec $\deg \rho_i = 2m + 2i$, $1 \leq i \leq n$. Les ρ_i forment ce qu'on appelle une *suite régulière* ([38], lemme 2.3).

Exemple 1.3.4 Pour $n = 2$, et par la remarque (1.3.3), $H^*(Gr(2, m)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2]/(\rho_1, \rho_2)$ avec

$$\rho_i = \sum_{p_1+2p_2=m+i} (-1)^{p_1+p_2} \binom{p_1+p_2}{p_1} c_1^{p_1} c_2^{p_2} \quad (1.3.3)$$

En particulier, rappelons que $Gr(2, m) = U(m+2)/U(2) \times U(m)$ est de dimension complexe $2m$, et que la classe d'orientation peut être déterminée à partir de (1.3.3) et est donnée par c_2^m . La classe c_1^{2m} , en d'autres termes, quand elle est évaluée sur la classe d'orientation $[Gr(2, n)]$ est le nombre de Catalan

$$c_1^{2m} = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$$

Nous explicitons le cas de la Grassmannienne quadratique $G(2, 2)$.

Lemme 1.3.5 $H^*(Gr(2, 2)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2]/(\rho_1, \rho_2)$ où $\rho_1 = c_1^3 - 2c_1c_2$ et $\rho_2 = c_1^4 - 2c_2^2$.

PREUVE : Nous allons exploiter les relations qui découlent de $(1 + c_1 + c_2)(1 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2) = 1$. En degré 2, $c_1 + \bar{c}_1 = 0$ ainsi $\bar{c}_1 = -c_1$. En degré 4, $c_1\bar{c}_1 + c_2 + \bar{c}_2 = 0$ d'où $\bar{c}_2 = c_2 - c_1^2$. En degré 6, $c_1\bar{c}_2 + \bar{c}_1c_2 = 0$ conduisant à la première relation $c_1^3 - 2c_1c_2 = 0$. La relation $c_1^4 = 2c_2^2$ résulte de la même manière. Ceci est bien compatible avec (1.3.3).

Plus généralement, nous avons le résultat suivant de Baum, qui sera appelé dans la section 3.3 pour calculer la cohomologie de certaines variétés de drapeaux.

Théorème 1.3.6 [3] *Si G est un groupe de Lie compact connexe et H est un sous groupe fermé connexe dont les cohomologies sont des algèbres extérieures sur les générateurs de degrés impairs (sur les entiers), alors la suite*

$$H^*(BG) \xrightarrow{\rho^*} H^*(BH) \xrightarrow{\sigma^*} H^*(G/H)$$

a la propriété que le noyau de σ^ est l'idéal de $H^*(BH)$ généré par les éléments de degrés positifs dans l'Image (ρ^*).*

1.3.1 Point de Vue Géométrique

Soit X un espace topologique métrisable et séparable. On appelle *stratification* de X une partition localement finie $S = (X(s))_{s \in S}$ de X dont les éléments, appelés strates, sont localement fermés.

La variété $Gr(n, m)$ est stratifiée par les sous-variétés de *Schubert*, une pour chaque partition λ constituée d'une suite décroissante d'entiers non négatifs

$$\lambda := (m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0) \tag{1.3.4}$$

Une telle sous-variété X_λ est construite comme suit. Fixons un drapeau

$$F_\bullet : 0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n+m} = \mathbb{C}^{n+m} \tag{1.3.5}$$

Le choix d'un tel drapeau influe sur les constructions seulement par une action par un élément de $GL_{n+m}(\mathbb{C})$ près). Alors

$$X_\lambda = \{V \in Gr(n, m) \mid \dim(V \cap F_{m+i-\lambda_i}) \geq i, \forall 1 \leq i \leq n\}$$

La classe de Schubert associée à λ est alors $\sigma_\lambda := Pd[X_\lambda] \in H^{2 \sum \lambda_i}(Gr(n, m); \mathbb{Z})$, où *Pd* veut dire le dual de Poincaré. Additivement

$$H^*(Gr(n, m); \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{Z} \sigma_\lambda$$

où λ varie selon toutes les partitions de la forme (1.3.4). Les générateurs pour $H^*(Gr(n, m))$ sont les classes de *Schubert spéciales* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ où σ_i est la classe de Schubert associée à la partition λ avec $\lambda_1 = i \leq m$, et $\lambda_j = 0$ pour $j > 1$. Les relations sont de type déterminant.

Théorème 1.3.7 $H^*(Gr(n, m), \mathbb{Z})$ est l'anneau polynomial $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ quotienté par les relations

$$D_{m+1} = D_{m+2} = \dots = D_{n+m} = 0$$

où $D_k = \det(\sigma_{i+j-i})_{1 \leq i, j \leq k}$. Ici, nous supposons que $\sigma_p = 0$ si $p \notin \{1, \dots, m\}$. Plus précisément (Giambelli [51]), $\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i+j-i})_{1 \leq i, j \leq m}$.

Exemple 1.3.8 Nous allons illustrer le théorème 1.3.7 en étudiant le cas de la Grassmannienne quadratique $Gr(2, 2)$. Cette variété peut être écrite comme l'union de six cellules de Schubert

$$\sigma_0 = 1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{1,1}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2} = [pt]$$

Ici, $[pt]$ veut dire le dual de Poincaré du point. Une formule de Pieri (voir Exemple 1 [51])

implique que

$$\sigma_1^2 = \sigma_2 + \sigma_{1,1} , \sigma_1^3 = 2\sigma_{2,1} = 2\sigma_1\sigma_2 , \sigma_1^4 = 2\sigma_{2,2} = 2\sigma_2^2 = 2[pt]$$

et ceci est bien vérifié par les calculs dans le lemme 1.3.5.

1.4 Espace des Lacets de $Gr(n, m)$

Soit $V_{n,m} = U(n+m)/U(m)$ la variété de Stiefel de tous les n -repères orthonormaux dans \mathbb{C}^{n+m} . Nous avons un fibré principal $U(n) \longrightarrow V_{n,m} \longrightarrow Gr(n, m)$, duquel nous pouvons déduire la fibration des lacets

$$\Omega V_{n,m} \longrightarrow \Omega Gr(n, m) \longrightarrow U(n) \quad (1.4.1)$$

Nous savons que

1. Nous avons les équivalences $U(n) \simeq S^1 \times SU(n)$ et $\Omega U(n) \simeq \mathbb{Z} \times \Omega SU(n)$. D'autre part $H_*(U(n); \mathbb{Z}) \cong H_*(S^1 \times S^3 \times \dots \times S^{2n-1}; \mathbb{Z})$ et

$$H_*(\Omega_0 U(n)) \cong H_*(\Omega SU(n)) \cong H_*(\Omega S^3 \times \dots \times \Omega S^{2n-1})$$

où $\Omega_0 U(n)$ désigne n'importe quelle composante connexe de $\Omega U(n)$. En fait, il existe une application $\mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \Omega SU(n)$ qui induit une injection en homologie et donne lieu à un isomorphisme $H_*(\Omega SU(n)) \cong S(\tilde{H}_*(\mathbb{P}^{n-1}))$, où S est l'algèbre symétrique (voir Remarque 3.2.7).

2. Nous avons des fibrations itérées

$$\Omega V_{n-1,m} \longrightarrow \Omega V_{n,m} \longrightarrow \Omega S^{2(n+m)-1}$$

tel que l'homologie de la base et celle de la fibre sont concentrées en degrés pairs. Par récurrence, nous en déduisons l'isomorphisme

$$H_*(\Omega V_{n,m}) \cong H_*(\Omega S^{2m+1} \times \dots \times \Omega S^{2(n+m)-1})$$

Lemme 1.4.1 *Il existe des scindements additifs pour $n \leq m$*

$$H_*(\Omega Gr(n, m); \mathbb{Z}) \cong H_*(\Omega V_{n,m}; \mathbb{Z}) \otimes H_*(U(n); \mathbb{Z})$$

PREUVE : L'homologie de $U(n)$ est générée multiplicativement par des classes de degrés $\leq 2n - 1$. D'autre part, l'homologie de $\Omega V_{n,m}$ commence en degré $2m$. Toutes les différentielles sur les générateurs de $H_*(U(n))$ sont nulles dans la suite spectrale de Serre dans (1.4.1). Puisque la projection $\Omega Gr(n, m) \longrightarrow U(n) \simeq \Omega BU(n)$ est une application de lacets, la fibration (1.4.1) est une fibration multiplicative. Les différentielles dans la suite spectrale de Serre étant des

dérivations, elles sont nulles sur $H_*(U(n))$. Mais si toutes les classes d'homologie provenant de la base dans une fibration multiplicative sont des cycles infinis, alors la suite spectrale dégénère nécessairement, d'où le résultat. ■

Le scindement ci-dessus n'est pas toujours un scindement multiplicatif (voir section 1.4.1).

1.4.1 La Structure de l'Anneau de Pontryagin

Nous rappelons que ΩX est un espace muni d'une multiplication $\mu : \Omega X \times \Omega X \longrightarrow \Omega X$ associative à homotopie près. La flèche μ_* induite en homologie confère à $H_*(\Omega X; \mathbb{F})$ la structure d'anneau que nous appellerons anneau de Pontryagin de ΩX .

En considérant les lacets sur une fibration (F, E, B) , nous obtenons une fibration *multiplicative* $(\Omega F, \Omega E, \Omega B)$ dont la suite spectrale de Serre associée est multiplicative dans le sens que les E^r -termes ont une structure d'algèbre et ils convergent vers le terme gradué associé E^∞ comme algèbres. La structure d'algèbre dans le E^2 -terme est la structure produit dans $H_*(\Omega B) \otimes H_*(\Omega F)$, en supposant que B est simplement connexe et que nous travaillons sur un corps. Toutefois, il n'est généralement pas le cas que $E^\infty \cong H_*(\Omega E)$ en tant qu'algèbre.

Exemple 1.4.2 Nous pouvons illustrer cela par l'exemple simple de la fibration de Hopf

$$S^3 \longrightarrow S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^\infty$$

de laquelle nous tirons $\Omega S^3 \longrightarrow \Omega S^2 \longrightarrow S^1$. Notons que $E^\infty = T[b] \otimes \Lambda(e)$ avec $T[b]$ l'algèbre tensorielle sur un générateur b de dimension 2 et $\Lambda(e)$ l'algèbre extérieure sur e de degré 1. Mais $H_*(\Omega S^2) = T[a]$ avec $\deg a = 1$. Nous voyons alors que $e^2 = 0$ mais $a^2 \neq 0$.

De même et dans le cas de $\Omega Gr(2, 2)$, le lemme 1.5.1 montre que

$$H_*(\Omega Gr(2, 2); \mathbb{Z}) \cong H_*(U(2)) \otimes H_*(\Omega V_{2,2}) \cong \Lambda(e_1, e_3) \otimes \mathbb{Z}[a_4, a_6]$$

Ceci n'est cependant pas un isomorphisme d'anneau de Pontryagin comme nous allons le voir.

Proposition 1.4.3 *La suite spectrale cobar convergeant vers $H_*(\Omega Gr(2, 2); \mathbb{Z})$ a pour terme E_2 l'algèbre différentielle $H_*(T[x_1, a_3, b_3, z_5, t_7], d)$ avec*

$$d_2x = d_2a = 0, \quad d_2b = x^2, \quad d_2z = ax + xa \quad \text{et} \quad d_2t = a^2 + ab + ba + xz + zx$$

PREUVE : Rappelons que pour un CW complexe 1-connexe X , il existe un isomorphisme d'anneaux

$$H_*(\Omega X) \cong H_*(\underline{\Omega} C_* X)$$

où $\underline{\Omega} C_* X$ est la construction cobar d'Adams sur les complexes de chaînes de X qui est une algèbre. En effet, $\underline{\Omega}$ est un foncteur qui envoie une coalgèbre différentielle graduée à une algèbre

différentielle graduée. De façon explicite, $H_*(\underline{\Omega}C_*X)$ est l'homologie de l'algèbre différentielle graduée $(\bigoplus A^{\otimes n}, d)$ où $A = s^{-1}C_*(X)$ et d_c est la différentielle donnée sur les générateurs par

$$d_c|\sigma| = \pm \sum |\sigma'|\sigma''| \quad (1.4.2)$$

où $|\sigma| := s^{-1}\sigma$, $\sigma \in C_*(X)$, et $\sum \sigma' \otimes \sigma''$ est le coproduit réduit sur σ . Elle est étendue à l'algèbre comme une dérivation. En filtrant par le nombre de bar, il résulte une suite spectrale de terme $E_2 = (H_*(\underline{\Omega}H_*X), d_2)$ avec sa différentielle cobar $d_2 = d_c$.

Nous appliquons cette méthode à $X = Gr(2, 2)$. Ici, l'homologie de X est concentrée en degrés pairs de sorte que $d_2|\sigma| = \sum |\sigma'|\sigma''|$, et sa structure de coalgèbre est déduite à partir de son algèbre de cohomologie (coefficients dans \mathbb{Z})

$$H^*(Gr(2, 2)) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2]/(c_1^3 = 2c_1c_2 \text{ et } c_1^4 = 2c_2^2 = 2c_1^2c_2) \quad (1.4.3)$$

Etant sans torsion, nous identifions $H_*(Gr(2, 2))$ avec $Hom(H^*(Gr(2, 2)), \mathbb{Z})$ et nous écrivons x^* la classe d'homologie qui est hom-duale à la classe de cohomologie x . Nous posons

$$x_1 = |c_1^*|, \quad a_3 = |c_2^*|, \quad b_3 = |(c_1^2)^*|, \quad z_5 = |(c_1c_2)^*|, \quad t_7 = |(c_1^2c_2)^*|$$

(les indices indiquent le degré homologique). Le terme E^2 de la suite spectrale cobar associée à $\underline{\Omega}Gr(2, 2)$ est maintenant l'homologie de l'algèbre tensorielle sur ces générateurs avec la différentielle d_c qui peut être déterminée à l'aide (1.4.3), et le fait standard que si $\tilde{\Delta}_*$ est le coproduit réduit; $\tilde{\Delta}_*(x) = \sum x' \otimes x''$, alors en cohomologie le cup produit $(x')^*(x'')^* = x^*$.

Puisque les classes c_1^* et c_2^* sont primitives, nous voyons que $d_2x_1 = d_2a_3 = 0$. Ensuite $\tilde{\Delta}_*(c_1^2)^* = (c_1^*)^* \otimes (c_1^*)^*$, et donc $d_2b = d_2|(c_1^2)^*| = |c_1^*|c_1^*| = x^2$ par définition de d_2 dans (1.4.2). Plus intéressant est le cas de $c_1^2c_2 = c_1(c_1c_2) = c_2^2$ où on trouve que

$$\tilde{\Delta}_*(c_1^2c_2)^* = \Delta_*(c_2^2)^* = (c_1^2)^* \otimes (c_2)^* + (c_2)^* \otimes (c_1^2)^* + (c_1)^* \otimes (c_1c_2)^* + (c_1c_2)^* \otimes (c_1)^* + (c_2)^* \otimes (c_2)^*$$

A partir de cette expression nous déduisons que $d_2t = a^2 + ab + ba + xz + zx$. Nous calculons d_2z de la même façon. On trouve le début du terme E_2 (on note $[a]$ la classe d'homologie de a)

$$E_2 = \begin{cases} \mathbb{Z}\{[x]\} \\ \mathbb{Z}\{[a_3]\} \\ \mathbb{Z}\{e_4, \alpha_4\} \\ \mathbb{Z}\{e_5\} \\ \mathbb{Z}\{e_6\} \\ \vdots \end{cases} \quad (1.4.4)$$

avec $deg x = 1$, $deg a_3 = 3$, $deg e_4 = deg \alpha_4 = 4$, $deg e_5 = 5$ et $deg e_6 = 6$, $e_4 = [ax]$,

$\alpha_4 = [xb - bx]$ et $e_5 = [x^2b - bx^2]$. ■

Remarque 1.4.4 Nous pensons que cette suite spectrale dégénère au terme E^2 . Ceci serait le cas si $Gr(2, 2)$ était un espace formel (voir section 4.2). On montre dans la section 1.4.2 que

$$H_*(\Omega Gr(2, 2)) \cong H_*(\Omega S^4) \otimes H_*(\Omega S^5) \otimes H_*(S^1)$$

Les deux classes de non torsion en dimension 4 correspondent à $[S^1 \times S^3]$ et à la plus basse classe dans $H_4(\Omega S^5)$.

Le corollaire suivant est utile dans la démonstration du Théorème 1.6.5.

Corollaire 1.4.5 *Dans l'anneau de Pontryagin $H_*(\Omega Gr(2, 2))$, il existe une classe $a \in H_3$ dont le carré est non nul.*

PREUVE : On notera $H_* = H_*(\Omega Gr(2, 2))$. Décrivons tout d'abord le générateur du H_6 . Dans l'algèbre tensorielle nous avons les classes a^2, b^2, ab, ba, zx, xz en degré 6. On voit que a^2 est un cycle. En utilisant la formule $d(xy) = dx \cdot y + (-1)^{|x|} x dy$, on vérifie que si

$$\alpha_1 b^2 + \alpha_2 ab + \alpha_3 ba + \alpha_4 xz + \alpha_5 zx \quad , \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

est un cycle, alors $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \dots = \alpha_5$. Ceci nous donne deux cycles en degré 6 : a^2 et $ab + ba + xz + zx$. Mais ces deux cycles donnent au terme E^2 deux classes opposées puisque $dt = a^2 + ab + ba + zx + xz$. Donc a^2 engendre le terme E^2 en degré 6 et sa classe est notée $[a^2]$.

Nous pouvons affirmer ensuite que les classes $[a]$ et $[a^2]$ doivent nécessairement survivre au terme E^∞ car nous savons que $H_3 \neq 0 \neq H_6$, ceci étant une conséquence du fait par exemple que rationnellement $\Omega Gr(2, 2) \simeq S^1 \times S^3 \times \Omega S^5 \times \Omega S^7$ (voir (1.5.1)). Mais comme la suite spectrale cobar est une suite spectrale d'algèbres, convergeant vers $H_*(\Omega Gr(2, 2))$ en tant qu'algèbre, alors forcément $[a^2] = [a]^2$ et la preuve est faite. ■

Nous pouvons maintenant revenir à la fibration (1.4.1) et faire des déductions supplémentaires. Notons que dans le cas $n = 1$, $\Omega \mathbb{P}^2 \longrightarrow S^1$ admet une section, qui est également multiplicative. Ce n'est cependant pas le cas en général.

Corollaire 1.4.6

(i) *L'application $\Omega Gr(2, 2) \longrightarrow U(2)$ n'a pas de section multiplicative.*

(ii) *Il ne peut pas y avoir de scindement d'anneaux de Pontryagin $H_*(\Omega Gr(2, 2)) \cong H_*(\Omega V_{2,2}) \otimes H_*(U(2))$.*

PREUVE : Ecrivons $H_*(U(2)) \cong \Lambda(e_1, e_3)$ une algèbre extérieure sur les générateurs de degrés 1 et 3 respectivement. Si une telle section s existe, alors forcément $s_*(e_1) = x_1$ et $s_*(e_3) = a_3$, où x_1, a_3 sont comme dans le Théorème 1.4.3, mais $e_3^2 = 0$ alors que $a_3^2 \neq 0$ dans $H_*(\Omega Gr(2, 2))$ qui empêche s d'être multiplicatif. ■

1.4.2 Le type d'homotopie de $\Omega Gr(2, 2)$

L'objet de cette section est de démontrer le théorème 3 présenté dans l'introduction.

Théorème 1.4.7 *Nous avons une équivalence d'homotopie $\Omega Gr(2, 2) \simeq S^1 \times S^3 \times \Omega S^5 \times \Omega S^7$ qui n'est pas une équivalence de H -espaces.*

PREUVE : Tout d'abord, remarquons que si cette décomposition était une décomposition de H -espace (le terme à droite ayant la structure multiplicative du produit), alors les deux espaces auraient des anneaux de Pontryagin isomorphes, ce qui n'est pas le cas d'après le Corollaire précédent. Pour analyser le type d'homotopie de $\Omega Gr(n, m)$, nous utilisons une construction géométrique que nous pouvons retrouver dans [45]. On montre en effet que $Gr(2, 2)$ est difféomorphe à l'hypersurface de Fermat $Q_4 = \{\sum z_i^2 = 0\} \subset \mathbb{P}^5$. Ceci découle du fait général que les hypersurfaces lisses dans \mathbb{P}^n de même degré sont "ambiently" difféomorphes, c'est à dire qu'il existe un difféomorphisme de \mathbb{P}^n qui prend une hypersurface dans l'autre. Un difféomorphisme explicite $Q_4 \cong Gr(2, 2)$ est dans [34]. On peut alors remplacer $Gr(2, 2)$ par Q_4 et on considère le pullback de la fibration de Hopf

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Q}_4 & \longrightarrow & S^{11} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_4 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^5 \end{array} \quad (1.4.5)$$

Écrivons $u_i = Re(z_i)$ et $v_i = Im(z_i)$. Alors

$$S^{11} = \left\{ (u_1, v_1, \dots, u_6, v_6) \mid \sum u_j^2 + \sum v_j^2 = 2 \right\}$$

Le pullback est donc donné par

$$\tilde{Q}_4 = \left\{ (u_1, v_1, \dots, u_6, v_6) \mid \sum u_j^2 = \sum v_j^2 = 1 \mid \sum u_j v_j = 0 \right\}$$

et ceci est de façon évidente difféomorphe à l'espace de Stiefel des 2-repères orthonormaux dans \mathbb{R}^6 qui s'identifie au tangent en sphères $ST(S^5)$ de S^5 . Ceci est un S^1 -fibré au dessus de $Gr(2, 2)$ et en prenant les espaces de lacets, nous obtenons la fibration

$$\Omega ST(S^5) \longrightarrow \Omega Gr(2, 2) \xrightarrow{p} S^1 \quad (1.4.6)$$

Notons que la projection p induit un isomorphisme au niveau du groupe fondamental. Cette fibration (1.4.6) possède de plus un retracte à homotopie près $S^1 \rightarrow \Omega Gr(2, 2)$. Voici une justification pour ceci : soit $\Omega E \xrightarrow{p} \Omega B \xrightarrow{i} F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} B$ une suite de fibration induite par f . Alors il est connu que la flèche i est homotopiquement triviale, si et seulement si, p admet une section à homotopie près. L'existence de cette section pour (1.4.6) implique d'autre part que

$$\Omega Gr(2, 2) \simeq S^1 \times \Omega ST(S^5)$$

Là aussi la justification est la suivante : Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{s} B$ une fibration avec section et E un H -espace avec produit $*$. Alors la flèche $F \times B \longrightarrow E$, $(x, y) \longrightarrow i(x) * s(y)$ est une équivalence faible (ceci se voit immédiatement à travers le fait que la suite exacte longue en homotopie se scinde). Si tous les espaces sont des CW finis, alors $i * s$ est une équivalence d'homotopie.

Pour conclure, la projection $ST(S^5) \longrightarrow S^5$ admet également une section et pour les mêmes raisons que précédemment

$$\begin{aligned} \Omega Gr(2, 2) &\simeq S^1 \times \Omega ST(S^5) \simeq S^1 \times \Omega S^4 \times \Omega S^5 \\ &\simeq S^1 \times S^3 \times \Omega S^7 \times \Omega S^5 \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Ici, nous avons utilisé le fait que $\Omega S^4 \simeq S^3 \times \Omega S^7$. ■

1.5 Modèles Rationnels

Soit $V = \bigoplus_{i \geq 0} V^i$ un espace vectoriel sur \mathbb{Q} positivement gradué, et soit $\bigwedge V$ l'algèbre graduée, commutative, libre engendrée par V , i.e,

$$\bigwedge V = S[V^{pair}] \otimes \wedge[V^{impair}]$$

où $S[\]$ est l'algèbre symétrique (sur les éléments de degrés pairs) et $\wedge[\]$ l'algèbre extérieure (sur les éléments de degrés impairs).

Définition 1.5.1 *Un modèle minimal de Sullivan d'une ADGC A est la donnée de V , avec $V^0 = 0$, et d'un homomorphisme d'algèbre de $\bigwedge V$ dans A qui est un isomorphisme en cohomologie.*

Pour tout CW-complexe X , simplement connexe, avec tous les groupes d'homologie rationnelle de dimension finie, il existe une algèbre minimale de Sullivan $\bigwedge V$ qui a la propriété que $V^1 = 0$ et que tous les V^k sont de dimension finie. Ce modèle satisfait à :

- La cohomologie rationnelle de l'espace est la cohomologie de son modèle minimal.
- L'espace V est le dual des groupes d'homotopie rationnels de l'espace X .
- Deux espaces simplement connexes ont le même type d'homotopie rationnelle si et seulement si leurs algèbres minimales de Sullivan sont isomorphes.

Nous pouvons rapidement donner le modèle rationnel de $Gr(n, m)$ et de ses espaces de lacets, en renvoyant à [26] pour les détails de la théorie.

Puisque $H^*(Gr(n, m))$ est le quotient $\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]/(r_1, \dots, r_n)$, avec r_i une suite régulière (voir remarque 1.3.3), alors le modèle minimal de Sullivan pour $Gr(n, m)$ a la forme

$$(\Lambda(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n); d) \quad dy_i = r_i$$

Les degrés des y_i sont $\dim r_i = 2(m+i)$ comme cela a été affirmé dans la remarque 1.3.3. D'autre part, $\Omega Gr(n, m)$ est un H -espace et le modèle minimal pour tout H -espace est juste l'algèbre

libre sur les groupes d'homotopie avec la différentielle identiquement nulle. Cela signifie que le modèle minimal pour $\Omega Gr(n, m)$ est

$$\Lambda(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n); d = 0$$

avec $deg(\bar{x}) = deg(x) - 1$. Nous obtenons que $\Omega Gr(n, m)$ a le type d'homotopie rationnelle

$$\Omega Gr(n, m) \simeq_{\mathbb{Q}} S^1 \times \dots \times S^{2n-1} \times \Omega S^{2m+1} \times \dots \times \Omega S^{2(n+m)-1} \quad (1.5.1)$$

Cela coïncide avec le type d'homotopie rationnelle de $U(n) \times \Omega V_{n,m}$.

D'autre part et toujours rationnellement, l'homologie de $LGr(n, m)$ peut être déduite à partir du modèle minimal de $Gr(n, m)$ selon un théorème de Vigué-Poirrier et Sullivan [47] :

Théorème 1.5.2 *Si M est un CW-complexe simplement connexe fini, et si M a le modèle minimal $\Lambda(x_1, x_2, \dots, d)$, alors l'espace de courbes fermées sur M a le modèle $\Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots, d)$ où $dim \bar{x}_i = dim x_i - 1$, d est définie par $di + id = 0$ où i est la dérivation de $\Lambda(x_1, x_2, \dots)$ dans $\Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots)$ définie par $i x_j = \bar{x}_j$.*

Notons que $\Lambda(x_1, x_2, \dots)$ est un d -sous-complexe de $A_L := \Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots)$ et que l'image de d dans A_L est contenue dans l'idéal de (x_1, x_2, \dots) . Ainsi, la différentielle d induite sur le quotient $\Lambda(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i, \dots)$ est nulle. Cette image algébrique correspond à la fibration naturelle

$$\Omega M \longrightarrow LM \longrightarrow M$$

où M est un retract de LM via la section envoyant $x \in M$ au lacet constant en x , et où le modèle de ΩM est $\Lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots; d = 0)$, comme nous l'avons discuté.

Exemple 1.5.3 Soit $M = S^n$ avec le modèle minimal $\Lambda(e; d = 0)$ si n est impair. Dans ce cas, le modèle minimal de LS^n est $\Lambda(e, \bar{e}; d)$ et $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Q}) = \Lambda(\bar{e}; d) = \mathbb{Q}[\bar{e}]$ en tant qu'anneau. Si n est pair alors le modèle minimal de S^n est $\Lambda(e, a; d)$ avec $da = e^2$ et le modèle minimal de LS^n est $\Lambda(e, \bar{e}, a, \bar{a}; d)$ avec $de = d\bar{e} = 0$, $da = e^2$. Puisque $di(a) + id(a) = 0$ alors

$$d\bar{a} = -id(a) = -i(x^2) = -2x\bar{x}$$

et $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Q}) = \Lambda(\bar{e}, \bar{a}; d) = \Lambda(\bar{e}) \otimes \mathbb{Q}[\bar{a}]$. Ceci n'est pas un isomorphisme d'anneau car en tant qu'anneau $H^*(\Omega S^n; \mathbb{Q})$ est une algèbre tensorielle sur un générateur de degré $n - 1$.

Exemple 1.5.4 Le modèle minimal de \mathbb{P}^n est donné par $(\bigwedge(x, y), d)$ avec $d(y) = x^{n+1}$, $|x| = 2$, $|y| = 2n + 1$. Le modèle minimal de $L\mathbb{P}^n$ est

$$\left(\bigwedge(x, \bar{x}, y, \bar{y}), d \right) \quad , \quad d(\bar{x}) = 0 \quad , \quad d(\bar{y}) = -(n+1)x^n \bar{x}$$

Une base linéaire de la cohomologie

$$H^*(\mathbb{L}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q}) \cong H^*(\bigwedge(x, \bar{x}, \bar{y})/(y^{n+1}), d) \cong \mathbb{Q} \cdot 1 \oplus \left(\bigwedge(x, \bar{x})/(x^{n+1}, x^n \bar{x}) \otimes \bigwedge \bar{y} \right)$$

est donnée par $1, x^p \gamma_q(y), x^r \bar{x} \gamma_s(y)$, $p = 1, \dots, n$, $q \geq 0$, $s \geq 0$, $r = 0, \dots, n-1$, et avec $\gamma_s(y) = \bar{y}^s / s!$.

Corollaire 1.5.5 *La cohomologie rationnelle de $LGr(2, 2)$ est la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée $\Lambda(x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}, t, \bar{t}; d)$, avec la différentielle $dx = d\bar{x} = dy = d\bar{y} = 0$,*

$$dz = x^3 - 2xy \quad , \quad dt = x^4 - y^2 \quad , \quad d\bar{t} = 2y\bar{y} - 4x^3\bar{x}$$

et $d\bar{z} = \bar{x}(2y - 3x^2) + 2x\bar{y}$

PREUVE : Ceci est une conséquence du modèle minimal de $Gr(2, 2)$ donné par $\Lambda(x, y, z, t; d)$ voir le lemme 1.3.5, avec $dz = x^3 - 2xy$ et $dt = x^4 - y^2$. Nous appliquons alors le formalisme précédent. ■

1.6 Espace des Lacets Doubles et un Résultat de Non-Scindement

Dans cette section, nous entamons l'étude des espaces des lacets doubles pour la variété de Grassmann complexe et la variété de Stiefel. On remarquera que $\Omega^2 Gr(n, m)$ se scinde en des composantes connexes indexées par un degré $k \in \mathbb{Z}$ (les détails sur ce degré dans le chapitre 2). On écrira $\Omega^2 Gr(n, m) = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k^2 Gr(n, m)$ où $\Omega_k^2 Gr(n, m)$ est la composante de degré k .

– La fibration $U(n) \longrightarrow V_{n,m} \longrightarrow Gr(n, m)$ induit la fibration

$$\Omega^2 V_{n,m} \longrightarrow \Omega_0^2 Gr(n, m) \longrightarrow \Omega_0 U(n)$$

Cette fibration est homologiquement triviale exactement pour les mêmes raisons que pour le lemme 1.4.1 et

$$H_*(\Omega_0^2 Gr(n, m); \mathbb{Z}) \cong H_*(\Omega^2 V_{n,m}; \mathbb{Z}) \otimes H_*(\Omega_0 U(n); \mathbb{Z}) \quad (1.6.1)$$

– Il existe un scindement additif pour $n \leq m$ (voir [39])

$$H_*(\Omega^2 V_{n,m}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\Omega^2 S^{2m+1} \times \dots \times \Omega^2 S^{2(n+m)-1}; \mathbb{Z}) \quad (1.6.2)$$

La structure d'algèbre de Hopf de $H_*(\Omega^2 V_{n,m}; \mathbb{Z}_p)$ et $H_*(\Omega U(n))$ avec l'action duale de l'algèbre de Steenrod sont décrites dans [52].

Remarque 1.6.1 Selon (1.6.2), $\Omega^2 V_{n,m}$ a l'homologie de $\Omega^2 S^{2m+1} \times \dots \times \Omega^2 S^{2(n+m)-1}$ mais pas le même type d'homotopie. En effet, nous pouvons vérifier que $V_{n,m}$ et le produit $S^{2n+1} \times$

$\dots \times S^{2(n+m)-1}$ n'ont pas les mêmes groupes d'homotopie. Notons que $V_{n,m}$ est $2n$ -connexe et

$$\pi_{2m+1}V_{n,m} \cong \mathbb{Z}$$

généralisé par l'inclusion de $V_{1,m} = S^{2m+1}$ (voir par exemple [50]). Les Calculs de Gilmore [23] montrent par exemple que pour $n \geq 2$

$$\pi_{2n+2}(V_{n,m}) = \begin{cases} 0 & m \text{ impair} \\ \mathbb{Z}_2 & m \text{ pair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \pi_{2n+3}(V_{n,m}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m \text{ impair} \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & m \text{ pair} \end{cases}$$

Il est possible de donner un modèle explicite pour les doubles lacets libres d'une façon qui est complètement analogue au corollaire 1.5.5. Ceci est obtenu à partir du modèle minimal des espaces de fonctions donné par Brown et Szczarba [9].

Soient X et Y deux CW complexes finis et simplement connexes. Alors $\text{Map}(X, Y)$, ainsi que toute composante $\text{Map}_f(X, Y)$ de toutes les applications homotopes à f , sont des espaces nilpotents et donc admettent des modèles minimaux. Supposons que (A, d) est un modèle connexe et de dimension fini pour X .

Théorème 1.6.2 [9] *Soit X un espace simplement connexe avec $\pi_2(X) = \mathbb{Z}$. Soit $(\Lambda V, d)$ un modèle de X , avec $\Lambda V = \Lambda(x_1, \dots, x_n)$, $|x_1| = 2$ et $|x_j| > 2$ pour $j > 1$. Alors un modèle pour $L_f^2 X$ est $\Lambda(x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ avec $|\bar{x}_i| = |x_i| - 2$ et $\bar{x}_1 = 0$ si f est homotopiquement nulle, et $\bar{x}_1 = 1$ sinon. La différentielle d est définie sur les x_i par la différentielle provenant du modèle de X , et sur les \bar{x}_i par la formule $di + id = 0$, sachant que i est la dérivation de $\Lambda(x_1, x_2, \dots)$ dans $\Lambda(x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, \dots)$ définie par $i x_j = \bar{x}_j$.*

Le corollaire suivant sera utile dans la démonstration du Théorème 3.3.5.

Corollaire 1.6.3 *La cohomologie rationnelle de $L_1^2 Gr(2, 2)$, où $L_1^2 Gr(2, 2)$ est la composante connexe de degré 1 de $L^2 Gr(2, 2)$, est la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée*

$\Lambda(x_2; \bar{x}_0; y_4; \bar{y}_2; z_5; \bar{z}_3; t_7; \bar{t}_5; d)$, avec différentielle :

$$dx = d\bar{x} = dy = d\bar{y} = 0, \quad dz = x^3 - 2xy; \quad dt = x^4 - y^2 \quad \text{et}$$

$$d\bar{t} = 2y\bar{y} - 4x^3, \quad d\bar{z} = (2y - 3x^2) + 2x\bar{y}$$

PREUVE : $di(t) + id(t) = 0$ donc $d\bar{t} + i(x^4 - y^2) = 0$.
 $di(z) + id(z) = 0$ donc $d\bar{z} + i(x^3 - 2xy) = 0$. ■

1.6.1 Algèbres de Dyer-Lashof

Nous rappelons ce que c'est qu'une telle structure et comment elle agit sur l'homologie des espaces de *lacets pointés*.

L'opérade des petits disques $\{D_k(\mathbb{R}^n)\}_{k \geq 0}$ agit sur les espaces de lacets n -itérés $\Omega^n X$ pour tout X . Par $D_k(\mathbb{R}^n)$ nous dénotons l'espace de k -disques dans \mathbb{R}^n deux à deux disjoints (voir [42]). Cette action prend la forme de flèches

$$D_k(\mathbb{R}^n) \times (\Omega^n X)^k \longrightarrow \Omega^n X$$

qui sont compatibles avec la structure de l'opérade [42] (voir aussi la section 2.6). En passant à l'homologie sur un corps quelconque et en utilisant le théorème de Kunneth, on obtient des actions

$$H_*(D_k(\mathbb{R}^n)) \otimes H_*(\Omega^n X)^{\otimes k} \longrightarrow H_*(\Omega^n X)$$

et $\{H_*(D_k(\mathbb{R}^n))\}_{k \geq 0}$ est également une opérade dans la catégorie des espaces vectoriels. Chaque classe d'homologie dans $H_m(D_k(\mathbb{R}^n))$ donne lieu à une *opération homologique*

$$H_*(\Omega^n X)^{\otimes k} \longrightarrow H_{*+m}(\Omega^n X)$$

Dans le cas où $k = 2$, une telle opération est le "crochet de Browder" qui utilise le fait que $D_2(\mathbb{R}^n) \simeq F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$ et qui donne l'opération

$$[\cdot, \cdot]_n : H_i(\Omega^n X) \otimes H_j(\Omega^n X) \longrightarrow H_{i+j+n-1}(\Omega^n X) \quad (1.6.3)$$

Cette opération est définie sur \mathbb{Z} puisque S^{n-1} n'a pas de torsion dans son homologie. Lorsqu'on travaille sur \mathbb{Z}_p , p premier, ou dans \mathbb{Z}_2 , d'autres opérations existent qui ne proviennent pas directement de l'action des petits disques, mais d'une version équivariante de cette action. Ces opérations engendrent, par composition et addition, une algèbre qu'on appelle l'algèbre de Dyer-Lashof (bien que Dyer-Lashof n'ont étudié que le cas $n = \infty$). Nous avons par exemple les opérations

$$Q_i : H_q(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H_{pq+i(p-1)}(\Omega^n X; \mathbb{Z}_p) \quad , \quad i < n$$

Pour $n = 2$, nous ne sommes en présence que de Q_1 . Les itérés de Q_1 sont écrits $Q_1^s = Q_1(Q_1(\cdots Q_1))$. Dans le cas où $n = 2 = p$, nous écrivons $Q_1 = Q$.

Nous renvoyons à [12] pour une définition de cette algèbre, de ses générateurs et relations. Nous utilisons par contre la structure de module sur cette algèbre pour filtrer l'homologie de $\Omega^2 Gr(n, m)$.

Définition 1.6.4 [40] *Réécrivons*

$$H_*(\Omega^2 Gr(n, m); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[b_2, \dots, b_{2n-2}] \otimes H_*(\Omega^2 S^{2m+1}; \mathbb{Z}_2) \otimes \cdots \otimes H_*(\Omega^2 S^{2m+2n+1}; \mathbb{Z}_2)$$

On sait d'après [12] que

$$H_*(\Omega^2 S^{2s+1}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[f, Q_1(f), \dots, Q_1^i(f), \dots]$$

où $f \in H_{2s-1}(\Omega^2 S^{2s+1}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. On définit alors “le poids” sur cette homologie comme étant le morphisme

$$W = W_2 : H_*(\Omega^2 Gr(n, m); \mathbb{Z}_p) \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$

tel que :

1. $W(b_{2i}) = 1$ pour $1 \leq i \leq n - 1$,
2. $W(f_{2s-1}) = 1$ pour $m \leq s \leq m + n - 1$,
3. $W(x * y) = W(x) + W(y)$,
4. $W(Q_1(x)) = 2W(x)$

où $*$ est le produit de Pontryagin.

Dans l’isomorphisme (1.6.1), chaque composante est un module sur l’algèbre de Dyer-Lashof. Nous allons montrer dans cette section que ce scindement n’est pas un scindement de modules. Cela se produit parce que les extensions dans la suite spectrale de Serre pour la fibration (1.4.1) ne sont pas triviales. Plus précisément, nous allons voir que si $H_*(\Omega^2 Gr(n, m))$ se scindait au-dessus de l’algèbre de Dyer-Lashof, alors ce serait imposer certaines extensions dans le scindement

$$H_*(\Omega Gr(n, m)) \cong H_*(\Omega V_{n,m}) \otimes H_*(U(n))$$

comme anneau de Pontryagin et à partir de ceci nous obtenons une contradiction à notre calcul précédent (Théorème 1.4.3). Pour mener à bien cette idée, nous faisons quelques rappels encore.

Rappels :

- La suspension homologie σ . Soit X un espace pointé et $\sigma : S^1 \times \Omega X \longrightarrow X$ l’évaluation. Alors la suspension homologique toujours notée σ est l’homomorphisme

$$\sigma : \tilde{H}_*(\Omega X) \longrightarrow H_{*+1}(X) \quad , \quad \sigma(a) = \sigma_*([S^1] \times a) \quad (1.6.4)$$

Cette application est naturelle par rapport aux applications entre les espaces. L’image de σ_* est incluse dans les primitives de $H_*(X)$ ([53], chapter VIII).

- Si $\sigma : \tilde{H}_*(\Omega^n X) \longrightarrow H_{*+1}(\Omega^{n-1} X)$ est la suspension homologique, alors nous avons la propriété ([12], Théorème 1.4)

$$\sigma[x, y]_n = [\sigma x, \sigma y]_{n-1}$$

où $[-]_n$ est l’opération de Browder (1.6.3). Quand $n = 1$, $[x, y] = xy - (-1)^{|x||y|}yx$ est le commutateur gradué.

Contrairement à ce qui a été avancé dans [39], le splitting dans (1.6.1) n’est pas un splitting de double lacets.

Théorème 1.6.5 *Supposons $n = m = 2$. Alors le scindement homologique dans (1.6.1) est un scindement multiplicatif mais n'est pas un scindement de modules au-dessus de l'algèbre de Dyer-Lashof.*

PREUVE : En tant que groupes abéliens (coefficients dans \mathbb{Z}), nous avons la décomposition

$$H_*(\Omega^2 Gr(n, m)) \cong H_*(\Omega^2 V_{n,m}) \otimes H_*(\Omega U(n))$$

Nous avons une application $H_*(\Omega^2 V_{n,m}) \longrightarrow H_*(\Omega^2 Gr(n, m))$ qui est une application de modules sur l'algèbre de Dyer-Lashof car induite d'une application de double lacets. Il en est de même pour l'application $H_*(\Omega^2 Gr(n, m)) \longrightarrow H_*(\Omega U(n))$. Or, $\Omega U(n) \simeq \mathbb{Z} \times \Omega SU(n)$ et $H_*(\Omega SU(n)) \cong \mathbb{Z}[b_2, b_4, \dots, b_{2n-2}]$ est *libre*, donc nécessairement la structure d'algèbre de Pontryagin sur $H_*(\Omega^2 Gr(n, m))$ est isomorphe à la structure de produit.

Pour étudier l'action de l'algèbre de Dyer-Lashof pour p impair, considérons le cas de $Gr(2, 2)$. Nous avons montré dans le corollaire 1.4.5 qu'il existe une classe $a \in H_3(\Omega Gr(2, 2))$ telle que $0 \neq a^2 \in H_6(\Omega Gr(2, 2))$. Considérons les diagrammes commutatifs suivants d'espaces et d'éléments

$$\begin{array}{ccc} H_2(\Omega^2 Gr(2, 2)) & \xrightarrow{\sigma} & H_3(\Omega Gr(2, 2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_2(\Omega U(2)) & \xrightarrow{\sigma} & H_3(U(2)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bar{a} & \xrightarrow{\sigma} & a \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{b} & \xrightarrow{\sigma} & b \end{array}$$

La classe a s'envoie sur un générateur $b \in H_3(U(2))$ qui est dans l'image de

$$\sigma : H_2(\Omega U(2)) \longrightarrow H_3(U(2))$$

qui dans ce cas est un isomorphisme. Il existe donc une classe \bar{a} dans $H_2(\Omega^2 Gr(2, 2))$ avec $\sigma(\bar{a}) = a$ comme dans le diagramme. Nous savons ([12], Théorème 1.4) que σ commute avec l'opération de Browder. Cela implique que $\sigma[\bar{a}, \bar{a}] = [a, a] = 2a^2 \neq 0$ d'où $[\bar{a}, \bar{a}] \neq 0$ dans $H_5(\Omega^2 Gr(2, 2))$. Si les opérations d'homologie sont compatibles avec le scindement dans (1.6.1), alors $[\bar{b}, \bar{b}]$ serait également non trivial dans $H_5(\Omega^2 BU(2)) = H_5(\Omega U(2))$. Or, ce dernier groupe est nul, ce qui conduit à une contradiction. ■

Chapitre 2

Applications Holomorphes dans une Variété de Grassmann

Dans ce chapitre, nous allons introduire l'espace des fonctions holomorphes et décrire ses différentes applications en géométrie, analyse et topologie.

Soit $\text{Hol}(M)$ l'espace des applications holomorphes de la sphère de Riemann dans une variété complexe M , et soit $\text{Rat}(M)$ le sous-espace des applications qui préserve le point base. Cet espace est muni de la topologie compacte-ouverte. Pour un espace homogène complexe $M = G/H$, le groupe G agit sur $\text{Hol}(M)$ et le stabilisateur d'un point est un sous-groupe conjugué à H . Il existe une construction de Borel reliant les deux espaces

$$\text{Hol}(M) = \text{Rat}(M) \times_H G$$

où H agit à droite de G et à gauche sur M . La projection sur G/H est équivalente à l' "évaluation" qui prend $f \in \text{Hol}(M)$ et l'évalue au point base de \mathbb{P}^1 [24].

Dans le cas de la Grassmannienne $Gr(n, m)$, nous avons

$$\text{Hol}(Gr(n, m)) = \text{Rat}(Gr(n, m)) \times_H GL_{n+m}(\mathbb{C}) \quad (2.0.1)$$

$$\text{où } H = \begin{pmatrix} GL_n(\mathbb{C}) & 0 \\ 0 & GL_m(\mathbb{C}) \end{pmatrix}.$$

À une application $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr(n, m)$, nous associons un degré $d \in \mathbb{N}$. Géométriquement, c'est le degré de l'application induite sur le second groupe d'homologie que nous écrivons :

$$\begin{aligned} d := \langle f_*[\mathbb{P}^1], c_1 \rangle &= \# (Pd(c_1) \cap f_*[\mathbb{P}^1]) \\ &= \# f^{-1}(X_1(F_\bullet)) \end{aligned}$$

où $\#$ est le cardinal, \cap est l'intersection algébrique des classes d'homologie et $Pd(c_1)$ est le dual de Poincaré correspondant à la variété de Schubert $X_1(F_\bullet)$. Ici F_\bullet est une variété de drapeaux en

position générale (1.3.5) (voir [51]). Nous utilisons cette description dans le lemme 2.2.3. Notons que $X_1(F_\bullet)$ s'envoie sur l'hyperplan dans \mathbb{P}^N par l'inclusion de Plucker.

Deux applications dans $\text{Hol}(M)$ sont reliées par un chemin, si et seulement si, elles ont le même degré (voir proposition 2.4.7). Nous écrivons $\text{Hol}_d(\text{Gr}(n, m))$ la composante connexe par arc de degré d , $d \geq 0$, et nous définissons $\text{Rat}_d(\text{Gr}(n, m))$ le sous espace des applications pointées de degré d . Nous avons donc le fibré suivant :

$$\text{Rat}_d(M) \longrightarrow \text{Hol}_d(M) \xrightarrow{ev} M \quad , \quad ev(f) = f(x_0) \quad (2.0.2)$$

Il est évident que $\text{Hol}_0(\text{Gr}(n, m)) = \text{Gr}(n, m)$ est le sous espace des applications constantes.

2.1 Propriétés Globales

- **Point de vue Algébrique.** Les équations algébriques pour $\text{Gr}(n, m)$ comme une variété projective sont données par l'inclusion de Plucker $\mathcal{P} : \text{Gr}(n, m) \hookrightarrow \mathbb{P}^N$; $N = \binom{n+m}{m} - 1$. Elles peuvent être utilisées pour donner une description explicite de $\text{Hol}_d(\text{Gr}(n, m))$ comme un sous-espace de $\text{Hol}_d(\mathbb{P}^N)$. Ceci est bien illustré dans le cas de la quadrique $\text{Gr}(2, 2)$ qui est plongée \mathbb{P}^5 comme les zéros de l'équation

$$z_0 z_5 - z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0 \quad (2.1.1)$$

Dans ce cas, une application $f : [x : y] \mapsto [p_0 : p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5]$ dans $\text{Hol}_d(\mathbb{P}^5)$, avec les $p_i(x, y)$ des polynômes homogènes de degré d , est un élément de $\text{Hol}_d(\text{Gr}(2, 2))$ si et seulement si $p_0 p_5 - p_1 p_4 + p_2 p_3 = 0$. Ainsi par exemple (voir [24], exemple 2.10), l'application

$$g : [x : y] \mapsto [x^3 : xy^2 : x^2y : -x^2y : 0 : y^3]$$

est un élément bien défini de $\text{Hol}_3(\text{Gr}(2, 2))$. Une représentation matricielle de g dans $\text{Gr}(2, 2)$, vu comme $P_{2,4}(\mathbb{C})$ modulo l'action à gauche de $GL_2(\mathbb{C})$ (1.1.1), est

$$f : [x : y] \mapsto \begin{pmatrix} x & -x & 0 & -y \\ 0 & x^2 & y^2 & xy \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{P} \circ f = g$. Cette description des applications dans $\text{Gr}(n, m)$ en terme de matrices va être discutée plus tard dans la section 2.2.

- **Point de vue Géométrique.** Nous pouvons associer à un élément dans $\text{Hol}(\text{Gr}(n, m))$ un noyau et un Span [7]. Le *noyau* d'un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Gr}(n, m)$ est l'intersection de tous les sous-espaces $V \subset \mathbb{C}^{n+m}$ correspondant à l'image des points par f . Similairement,

le *span* de f est le sous-espace engendré par ces sous-espaces. Alternativement

$$\ker(f) = \bigcap_{p \in \mathbb{P}^1} f(p) \quad , \quad \text{sp}(f) = \sum_{p \in \mathbb{P}^1} f(p)$$

Notons que $\ker(f) \subset \text{sp}(f) \subset \mathbb{C}^{n+m}$. Le degré d de f se reflète dans les dimensions de son noyau et span. Nous montrons dans [34] que la paire $(\ker(f), \text{sp}(f))$ détermine complètement f à $PGL_2(\mathbb{C})$ près.

2.2 Représentations Matricielles de $\text{Hol}(Gr(n, m))$

Les applications holomorphes dans $Gr(n, m)$ admettent des descriptions explicites en termes de matrices avec des entrées polynômiales (voir Hurtubise [28]). Ce point de vue est ce qui a été utilisé pour étudier l'espace des fonctions holomorphes pointées [39, 40] et nous poursuivons cette idée dans ce travail. Nous considérons la sphère de Riemann dans la suite comme étant $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Soit $M_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$ l'espace des matrices $n \times (n+m)$ à coefficients dans l'anneau des polynômes $\mathbb{C}[z]$, et soit $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$ le sous-espace des matrices dont les vecteurs lignes sont linéairement indépendants en tout point (i.e les lignes sont indépendantes lorsqu'elles sont évaluées en tout point $z \in \mathbb{C}$). En particulier, $GL_n(\mathbb{C}[z]) := P_{n,n}(\mathbb{C}[z])$ est l'ensemble des matrices dont les déterminants sont non nuls lorsqu'ils sont évalués pour tout $z \in \mathbb{C}$. La description équivalente suivante est utilisée à plusieurs reprises et nous l'avons donc enregistrée séparément :

Une matrice M est dans $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$ si et seulement si les déterminants de ses $n \times n$ mineurs n'ont pas tous des zéros en commun. En particulier, les coefficients polynômiaux sur une même rangée ne peuvent pas avoir un zéro en commun

Une application *polynômiale* est un élément de $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$. Une telle matrice A lorsqu'elle est évaluée en tout point z , donne un élément de $V(n, m) := V_{n,m}(\mathbb{C})$ la variété de Stiefel des n -repères dans \mathbb{C}^{n+m} en considérant les rangées de A . Le groupe $GL_n(\mathbb{C}[z])$ agit à gauche sur $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$ et deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles sont linéairement équivalentes. Cela signifie que chaque élément de $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])/GL_n(\mathbb{C}[z])$ correspond à une application $\mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr(n, m)$ en prenant le span des vecteurs lignes. Une telle correspondance est une bijection. En outre, il est un *homéomorphisme* si nous considérons la topologie compacte-ouverte sur $\text{Hol}(Gr(n, m))$ et la topologie quotient sur $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])/GL_n(\mathbb{C}[z])$; qui est la topologie induite par les coefficients de la matrice. Il s'agit d'un résultat classique qui est traité en détail dans [28] :

Théorème 2.2.1 [28] (*version non pointée*) *Il existe un homéomorphisme*

$$\text{Hol}(Gr(n, m)) = P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])/GL_n(\mathbb{C}[z])$$

où $GL_n(\mathbb{C}[z])$ agit par multiplication matricielle à gauche. La correspondance envoie la classe d'une matrice $P(z)$ à l'application qui à z associe l'unique n -plan dans \mathbb{C}^{n+m} défini par les vecteurs lignes de $P(z)$.

Remarque 2.2.2 Il en résulte que pour chaque application holomorphe $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr(n, m)$, il existe un polynôme $\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow V_{n,m}$ tel que $f = \pi \circ \tilde{f}$, où $\pi : V_{n,m} \longrightarrow Gr(n, m)$ est la projection de $GL_n(\mathbb{C})$ -fibration principale. Bien sûr, un tel relèvement ne provient pas d'un relèvement global (ou section globale) $Gr(n, m) \longrightarrow V_{n,m}$ car, généralement, une telle section n'existe pas.

Rappelons que nous avons défini $\text{Hol}_d(Gr(n, m))$ comme étant le sous-espace de degré d au début de ce chapitre. Grâce à notre description ci-dessus, ce sous-espace peut être identifié comme suit.

Lemme 2.2.3 $\text{Hol}_d(Gr(n, m))$ correspond au sous-espace de $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])/GL_n(\mathbb{C}[z])$ composé de matrices telles que les déterminants de ses mineurs sont tous des polynômes de degrés $\leq d$ avec au moins un déterminant de degré d .

PREUVE : Nous pouvons identifier $\text{Hol}_d(Gr(n, m))$ avec son image dans $\text{Hol}_d\left(\mathbb{P}^{\binom{n+m}{n}-1}\right)$ induite par l'inclusion de Plucker \wp de $Gr(n, m)$. Si $f \in \text{Hol}_d(Gr(n, m))$, alors le composé

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{f} Gr(n, m) \xrightarrow{\wp} \mathbb{P}^N$$

est une courbe rationnelle de degré d et envoie donc z à $[p_0(z) : \dots : p_N(z)]$, où les p_i sont des polynômes de degré au plus d , et au moins l'un des polynômes est exactement de degré d . Mais ces polynômes sont précisément les déterminants des $n \times n$ mineurs de chaque application polynômiale représentant f . ■

Remarque 2.2.4 Notons que $\text{Hol}_d(Gr(n, m))$ est le quotient d'une variété de dimension infinie et donc, il n'est pas clair que ce quotient est de dimension finie. Nous expliquerons dans la section 2.4 que ceci est pourtant le cas. En fait et en vue de la construction de Borel (2.0.1), il suffit de montrer que $\text{Rat}_d(Gr(n, m))$ est une variété complexe pour pouvoir en déduire une structure de variété sur l'espace des applications non-pointées. La fibration de l'évaluation

$$\text{Rat}_d(Gr(n, m)) \longrightarrow \text{Hol}_d(Gr(n, m)) \longrightarrow Gr(n, m)$$

peut être utilisée pour donner une relation entre les dimensions de ces variétés

$$\dim \text{Hol}_d(Gr(n, m)) = \dim(\text{Rat}_d(Gr(n, m))) + nm = d(m+n) + mn$$

2.3 L'Espace des Applications Pointées

Le sous-espace des applications pointées est l'ensemble des applications holomorphes $f \in \text{Hol}(Gr(n, m))$ qui envoient ∞ à une classe d'équivalence de matrices fixée dans $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$.

Le sous espace en question ne dépend pas, à homéomorphisme près, de ce choix puisque \mathbb{P}^1 est un espace homogène. Nous allons donc faire le choix de pointage suivant : Ecrivons un élément de $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$ comme la concaténation de deux matrices $(D(z) : N(z))$, avec $D(z)$ une matrice $n \times n$ (un mineur), $N(z)$ est $n \times m$, et tel que D et N soient co-premières. Ceci veut dire qu'il existe des matrices $A(z)$ et $B(z)$ tel que

$$N(z)A(z) + D(z)B(z) = I \in M_{n,n}(\mathbb{C}[z])$$

Il s'ensuit que pour tout z , la matrice $(D(z), N(z))$ est de rang n , et définit donc correctement un élément dans $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$. Elle définit également pour tout $z \in \mathbb{C}$ un unique n -plan dans \mathbb{C}^{n+m} donné par le span des vecteurs lignes. La classe d'équivalence d'une telle matrice sous l'action de $GL_n(\mathbb{C}[z])$ est notée $[D(z), N(z)]$. Définissons l'application $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr(n, m)$ qui envoie z au plan défini par les vecteurs lignes de $(D(z), N(z))$. Choisissons $D(z)$ de façon à ce que son déterminant soit un polynôme en z de degré maximal. Pour $|z|$ assez grand, le déterminant de $D(z)$ est non nul et donc $D(z)$ est inversible. La condition sur le degré du déterminant montre que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} D^{-1}(z)N(z) = 0$$

Ceci implique que $f(\infty) = [Id : 0]$.

Nous pouvons donc résumer la discussion ci-dessus comme suit : Soient e_1, \dots, e_{n+m} les vecteurs de base standards de \mathbb{C}^{n+m} .

Théorème 2.3.1 [39] (*version pointée*) *Il y a une correspondance bijective*

$$\left\{ \begin{array}{l} [D, N] \in P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z]), \text{ rang} = n, \\ \lim_{z \rightarrow \infty} D^{-1}(z)N(z) = 0 \end{array} \right\} \text{ mod } GL_n(\mathbb{C}[z]) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f \in \text{Rat}(Gr(n, m)) \\ f(\infty) = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\} \end{array} \right\}$$

Notons que l'action à gauche de $GL_n(\mathbb{C}[z])$ ne modifie pas la condition sur le rang et ne change pas la limite quand $z \rightarrow \infty$. Pour être en mesure de travailler avec la description ci-dessus, nous allons réfléchir à des représentations simplifiées des matrices pour chaque application holomorphe considérée comme une matrice modulo l'action de $GL_n(\mathbb{C}[z])$. Nous obtenons des représentations sous des "formes normales" (qui nous donnent un recouvrement par des ouverts et donc des cartes pour $\text{Rat}_d(Gr(n, m))$; voir preuve de théorème 2.4.3 après), et les formes triangulaires supérieures (qui nous donnent une stratification de $\text{Rat}_d(Gr(n, m))$; voir section 2.5).

2.4 Forme Normale et Structure de Variété

Nous allons voir que $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$ est une variété complexe de dimension complexe $k(n+m)$. Ceci est un fait bien connu des géomètres algébristes [37] ainsi que des experts de la théorie du contrôle en génie électrique [11]. La démonstration constructive de Clark est par contre très difficile à suivre en terminologie et en notation. Une présentation succincte de cette construction

est dans [39] et une autre plus complète dans [24]. Nous allons clarifier un tant soit peu cette dernière description de Havlicek nous basant sur le Théorème 2.3.1, et nous en tirons quelques conséquences.

Nous avons décrit une application $f \in \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$ par une classe de matrices $[D(z), N(z)]$, où D est $n \times n$ et N est $n \times m$ comme précédemment. Nous prétendons qu'on peut trouver un représentant D

$$D = \begin{pmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

de façon que :

- Les polynômes de la diagonale soient unitaires, $\deg p_{ii} = k_i$, $\sum k_i = k$, et
- $\deg p_{ij} < \deg p_{ii}$ (le plus haut degré polynômial dans chaque colonne est sur la diagonale).

Lorsque D est sous cette forme, nous dirons qu'elle est sous *forme normale* de multi-degré $K = (k_1, \dots, k_n)$. Nous dirons aussi et plus simplement que D , ou encore (D, N) , est une *K-forme normale* de l'application $f = [D, N]$. Dans la proposition 2.5.1, nous indiquons la procédure pour obtenir, via des opérations sur les lignes, une forme normale unique qui est triangulaire supérieure. Une application polynômiale peut admettre plusieurs formes normales pour différents multidegrés K . Par contre, on peut vérifier que si deux matrices ont la même K -forme normale, alors elles sont égales ([24], lemme 2.22).

Exemple 2.4.1 (exemple 2.21 dans [24]) Soit $D = \begin{pmatrix} z & z^2 + z \\ 1 & z^2 + 1 \end{pmatrix}$. Alors en multipliant à gauche par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}[z])$, nous pouvons changer D à la $(0, 3)$ -forme normale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & z^2 + z \\ 1 & z^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^2 + 1 \\ 0 & z^3 - z^2 \end{pmatrix}$$

tandis que la multiplication à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ le rend sous le $(1, 2)$ -forme normale

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & z^2 + z \\ 1 & z^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z - 1 & z - 1 \\ 1 & z^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Définition 2.4.2 On définit pour chaque multidegré fixé K , la K -sous variété normale

$$\mathcal{U}_K := \{[D : N] \mid D \text{ dans la } K\text{-forme normale}\}$$

Puisqu'on ne peut associer qu'une seule application pour chaque forme normale de (D, N) , on

a une inclusion $\mathcal{U}_K \hookrightarrow \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$, et une décomposition

$$\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m)) = \bigcup_K \mathcal{U}_K$$

Nous allons argumenter dans la démonstration du théorème suivant que \mathcal{U}_K est un sous ensemble ouvert de $\mathbb{C}^{k(n+m)}$.

Théorème 2.4.3 *$\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$ est une variété complexe connexe de dimension complexe $k(n + m)$.*

PREUVE : La preuve de ce théorème est éparpillée dans [24] et nous faisons donc l'exercice d'isoler les points les plus importants et de les expliquer. En ce faisant, on fera un calcul de la dimension. Ecrivons

$$(D, N) = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} & q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} & q_{21} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} & q_{n1} & \cdots & q_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

une K -forme normale de $f \in \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$, où D est donnée en terme de p_{ij} , et N en terme des q_{rs} . Ceci veut dire que D est K -normale, que nous avons la condition de pointage $f(\infty) = [Id : 0]$ et que finalement (D, N) sont co-premières.

Les polynômes définissant D ont des coefficients libres (ou paramètres libres). Chaque polynôme p_{ii} étant unitaire et de degré k_i nous donne k_i paramètres. Chaque entrée au dessus et en dessous de p_{ii} est de degré $k_i - 1$ au plus, ce qui nous donne k_i paramètres supplémentaires. Au total, la matrice D nous donne $n \sum k_i = nk$ paramètres complexes (le *degré de liberté de D*). Essayons de calculer le degré de liberté de la deuxième matrice N . Nous avons besoin de décortiquer la condition du pointage

$$\lim_{z \rightarrow \infty} D^{-1}(z)N(z) = 0 \quad (2.4.2)$$

Les entrées polynômiales de N sont donc les $q_{ij}(z)$ avec $1 \leq i \leq n$ (les lignes) et $1 \leq j \leq m$ (les colonnes). La condition de pointage donne tout de suite que $\deg p_{nn} = k_n > \deg q_{nj}$ pour $1 \leq j \leq m$ (i.e. dans la dernière ligne, le plus haut degré apparaît sur la diagonale). *Il n'est par contre pas vrai que les entrées q_{ij} , $j > n$, ont des degrés inférieurs ou égaux à $k_i - 1$.* Il peut arriver que $\deg q_{ij} > k_i$ pour certains $j > n$ (voir remarque 2.5.3). Ce qui est cependant important à retenir est que les coefficients a_ℓ d'un tel polynôme q_{ij} qui apparaissent avec les exposants $a_i z^{k_i} + a_{i+1} z^{k_i+1} + \cdots$ sont *non libres* car complètement déterminés par les coefficients des polynômes précédents q_{rj} , $r > i$, provenant des lignes inférieures (c'est le point discuté dans p. 312 de [39] et illustré dans l'exemple 2.5.3 et l'exemple 2.5.6 ci-dessous). Le seul terme de q_{ij} qui a des coefficients libres est le terme de degré inférieur ou égal à k_i . En faisant le compte, on

trouve que chaque q_{ij} contribue k_i paramètres et donc comme nous le souhaitons la matrice N contribue $m \sum k_i = mk$ degrés de liberté.

Si on prend toutes les matrices (D, N) comme dans (2.4.1), avec la condition de pointage uniquement, alors on voit qu'elles forment un sous-espace homéomorphe à $\mathbb{C}^{k(n+m)}$. Le sous-espace \mathcal{U}_K des K -formes normales est le complémentaire dans ce $\mathbb{C}^{k(n+m)}$ de l'ensemble des matrices (D, N) (un fermé) qui ne sont pas de plein rang ; c'est à dire qui ont le défaut de ne pas être dans $P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$. Par conséquent, \mathcal{U}_K est de dimension complexe $k(n+m)$, qui est la dimension de $\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$. Notons que généralement \mathcal{U}_K n'est pas une "carte" (i.e. il n'est pas difféomorphe à $\mathbb{C}^{k(n+m)}$; voir exemple 2.4.5).

Si nous regardons maintenant dans les intersections $\mathcal{U}_K \cap \mathcal{U}_{K'}$, on peut y représenter une application f sous deux formes normales (D, N) et (D', N') , de multidegrés respectifs K et K' . Pour passer d'une forme à l'autre, on multiplie par une matrice de $GL_n(\mathbb{C}[z])$. Si on identifie ces formes normales avec des points de $\mathbb{C}^{k(n+m)}$ comme précédemment expliqué, nous voyons alors que ce passage revient à transformer les coordonnées par des fonctions rationnelles. Il n'est alors qu'un pas pour voir que $\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$ est une variété complexe. L'exemple suivant explique la procédure de passage en détail. ■

Exemple 2.4.4 Nous donnons l'exemple d'un changement de "cartes" dans $\text{Rat}_2(\text{Gr}(2, 1))$, lequel sera donné par les fonctions rationnelles. Les formes normales associées dans $\text{Rat}_2(\text{Gr}(2, 1))$ sont

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{(1,1)} &= \left\{ [D : N] = \begin{pmatrix} x + z_1 & x + z_3 & z_5 \\ z_2 & x + z_4 & z_6 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{U}_{(0,2)} &= \left\{ [D : N] = \begin{pmatrix} 1 & w_1x + w_2 & \alpha \\ 0 & x^2 + w_3x + w_4 & w_5x + w_6 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

et similairement $\mathcal{U}_{(2,0)}$. Nous identifions les formes normales dans $\mathcal{U}_{(1,1)}$ avec leurs coefficients $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) \in \mathbb{C}^6$, et nous identifions les formes dans $\mathcal{U}_{(0,2)}$ avec $(w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$. Notons que α n'est pas un paramètre libre (comme nous le savons déjà) puisque la condition de pointage $\lim_{z \rightarrow \infty} D^{-1}N = 0$ implique que

$$w_1w_5 = \alpha$$

Une matrice A est dans l'intersection $\mathcal{U}_{(1,1)} \cap \mathcal{U}_{(0,2)}$ si et seulement si $z_2 \neq 0$. La raison derrière une telle affirmation est que si f était dans l'intersection et admettait une représentation avec $z_2 = 0$, alors f admettrait deux formes normales distinctes qui sont triangulaires supérieures, et ceci n'est pas possible d'après l'unicité de telles formes triangulaires (Proposition 2.5.1). La procédure décrite dans la démonstration de la Proposition 2.5.1 nous explique comment passer de $\begin{pmatrix} x + z_1 & x + z_3 & z_5 \\ z_2 & x + z_4 & z_6 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 1 & w_1x + w_2 & \alpha \\ 0 & x^2 + w_3x + w_4 & w_5x + w_6 \end{pmatrix}$ quand $z_2 \neq 0$. Dans notre cas, il

suffit de multiplier tout simplement par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1/z_2 \\ -z_2 & x + z_1 \end{pmatrix}$. Traduisons cela en termes de coordonnées. Nous voyons que cela correspond au changement de variables

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) &\longmapsto (1/z_2, z_4/z_2, z_1 + z_4, z_1 z_4 - z_2 z_3, z_6, z_6 z_1 - z_5 z_2) \\ &= (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6) \end{aligned}$$

qui est holomorphe.

Exemple 2.4.5 Pour $n = 1$, $Gr(1, m) = \mathbb{P}^m$. Alors $f \in \text{Rat}_k(\mathbb{P}^m)$ est décrite par une matrice avec une seule rangée à coordonnées homogènes (c'est à dire à $GL_1(\mathbb{C}[z]) = \mathbb{C}^*$ près)

$$[D, N] = [g, p_1, \dots, p_n] \quad , \quad D = g, \quad N = [p_1, \dots, p_n]$$

La condition du pointage $f(\infty) = [1 : 0 : \dots : 0]$ revient à la condition $\lim_{z \rightarrow \infty} g^{-1} p_i = 0$ et donne que $\deg p_i < \deg g = k$. Le fait que $[D, N] \in P_{1,1+n}(\mathbb{C})$ signifie que g, p_1, \dots, p_n n'ont pas de zéros en commun. Dans ce cas, il existe un unique multidegré $K = k$ et $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^m) = \mathcal{U}_k$ est ouvert dans $\mathbb{C}^{k(n+1)} = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^k)^n$, où le premier facteur \mathbb{C}^k donne les racines de g et le terme de droite sont les coefficients des p_i .

Notons que pour $k = 1$, les éléments dans $\text{Rat}_1(\mathbb{P}^m)$ sont de la forme $f(z) = [z - z_0 : a_1 : \dots : a_m]$ avec a_1, \dots, a_m non tous nuls. Le choix de z_0 et des a_i donne un homéomorphisme

$$\text{Rat}_1(Gr(1, m)) \cong \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^m - \{0\}) \simeq S^{2m-1} \tag{2.4.3}$$

Cette remarque est généralisée dans le corollaire 3.1.1 plus loin.

Exemple 2.4.6 Nous pouvons combiner les deux exemples précédents car, en effet, $Gr(2, 1) = Gr(1, 2) = \mathbb{P}^2$. Les sous-variétés $\mathcal{U}_{(1,1)}$ et $\mathcal{U}_{(0,2)}$ s'identifient avec des sous-espaces de $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^2)$ que nous identifions comme suit. L'application $\mathcal{U}_{(1,1)} \longrightarrow \text{Rat}_2(\mathbb{P}^2)$ envoie $\begin{pmatrix} x + z_1 & x + z_3 & z_5 \\ z_2 & x + z_4 & z_6 \end{pmatrix}$ vers l'application

$$x \longmapsto [x^2 + (z_1 + z_4)x + (z_1 z_4 - z_2 z_3) : z_6 x + z_1 z_6 - z_2 z_5 : -z_5 x + z_3 z_6 - z_5 z_4]$$

où les entrées sont données par les déterminants des mineurs comme dans la formule de Plucker, similairement pour $\mathcal{U}_{(0,2)} \longrightarrow \text{Rat}_2(\mathbb{P}^2)$.

Finalement un corollaire facile mais utile.

Corollaire 2.4.7 $\text{Hol}_d(Gr(n, m))$ est connexe par arc.

PREUVE : Il suffit de montrer que $\text{Rat}_d(Gr(n, m))$ est connexe. Ceci se fait en montrant que \mathcal{U}_K et $\mathcal{U}_{(0, \dots, 0, k)}$ se coupent toujours pour tout multi-indice K , de plus elles sont connexes ([24], proposition 2.32). Comme ces variétés couvrent $\text{Rat}_d(Gr(n, m))$, le résultat résulte. ■

2.5 Formes Triangulaires Supérieures et Stratification de Mann-Milgram

2.5.1 Formes Triangulaires Supérieures

Les formes triangulaires supérieures sont utilisées pour stratifier l'espace $\text{Rat}(Gr(n, m))$ et en déduire un calcul homologique précis dans la section 2.5.2. Fixons un degré $k > 0$ et soit $f : \mathbb{P}^1 \longrightarrow Gr(n, m)$ une application holomorphe de degré k . Choisissons un relèvement de f dans $V_{n,m}(\mathbb{C})$ telle que $f(z)$ est donnée par les vecteurs lignes d'une matrice à coefficients polynomiaux $(D(z), N(z)) \in P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$. Nous allons écrire

$$D = (p_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \quad \text{et} \quad N = (q_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$$

Proposition 2.5.1 *Soit $f \in \text{Rat}_k(Gr(n, m))$. Alors f peut être représentée par une unique matrice $(D, N) \in P_{n,n+m}(\mathbb{C}[z])$ telle que :*

- (a) D est triangulaire supérieure et les p_{ii} sont unitaires,
- (b) $\deg p_{ji} < \deg p_{ii}$ pour tout $j < i$ (i.e. p_{ii} est de degré maximal en chaque colonne).
- (c) $\deg q_{nj} < \deg p_{nn}$.
- (d) Les degrés des q_{ij} sont déterminés par la condition du pointage. Si $\deg p_{ii} = k_i$, alors $\deg q_{ij}$ doit satisfaire

$$\deg q_{ij} \leq k_i + k_{i+1} + \dots + k_n$$

On peut donner quelques précisions supplémentaires :

- (i) Le polynôme diagonal p_{ii} est unitaire de degré k_i veut dire que $p_{ii}(z) = z^{k_i} + \alpha_{i-1}z^{k_i-1} + \dots$.
- (ii) Notons que contrairement au cas des lignes du bas, $\deg(q_{ij})$ pour $i < n$ peut être supérieur à $\deg p_{ii}$.
- (iii) Pour représenter une flèche dans $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$, il faut bien évidemment que (D, N) soit de rang maximal pour tout $z \in \mathbb{C}$ (voir section 2.2). Ceci implique en particulier la condition que $p_{nn}, q_{n1}, \dots, q_{nm}$ n'ont pas de zéros en commun.

Remarque 2.5.2 Notons que deux couples de matrices (D, N) et (D', N') sont équivalents et représentent le même élément dans $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$ si et seulement s'il existe une matrice $U \in GL_n(\mathbb{C}[z])$ tel que $UD = D'$ et $UN = N'$.

Nous ne donnons pas une démonstration de cette longue et fastidieuse proposition, mais nous renvoyons à la thèse de Havlicek [24] (en particulier son Lemma 2.19) et à [39] (voir p. 312). La clé réside dans la manière de triangulariser la matrice D . Nous illustrons un peu la méthode avec le cas $n = 2$. Considérons la matrice des polynômes $D_0 = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$. Soit $g = \text{pgcd}(r_1, s_1)$ le

plus grand diviseur en commun, et $d = \det D$. Il existe des polynômes a, b tels que $ar_1 + bs_1 = g$. Si nous multiplions D à gauche par $\begin{pmatrix} a & b \\ -s_1/g & r_1/g \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}[z])$, nous obtenons la matrice $D_1 = \begin{pmatrix} g & ar_2 + bs_2 \\ 0 & d/g \end{pmatrix}$. L'algorithme euclidien nous donne une matrice h telle que $ar_2 + bs_2 = h(d/g) + t$ avec $\deg t < \deg(d/g)$. Multiplions D_1 à gauche par $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nous amène à la forme triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} g & t \\ 0 & d/g \end{pmatrix}$$

Le cas général est similaire et procède par induction. L'étape de récurrence est d'écrire α le pgcd unitaire des entrées de la première colonne d'une application polynomiale $A = [D : N]$ et ensuite d'éliminer les autres entrées de la première colonne pour obtenir $A_1 = [D_1 : N_1]$ avec

$$D_1 = \begin{pmatrix} \alpha & * \\ 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Par induction, B est sous forme triangulaire supérieure. En utilisant la division euclidienne, nous pouvons réduire les degrés des entrées $*$ pour arriver à la forme triangulaire désirée.

Exemple 2.5.3 Considérons dans $\text{Rat}_3(\text{Gr}(2, 2))$ les applications avec les formes triangulaires supérieures tel que $k_1 = 0$ et $k_2 = 3$ (Il s'agit de la strate notée $X(0, 3)$, voir la section suivante). La forme triangulaire supérieure est donc

$$[D : N] = \begin{pmatrix} 1 & az^2 + bz + c & z + \alpha & z + \beta \\ 0 & z^3 + dz^2 + ez + f & q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$$

avec q_{21} et q_{22} de degrés au plus 2. Dans ce cas, $q_{11} = z + \alpha$ et $q_{12} = z + \beta$ sont de degrés $1 > 0 = \deg p_{11}$. La condition du pointage $\lim_{z \rightarrow \infty} D^{-1}N = 0$ donne les relations entre α (resp. β) et les coefficients de q_{21} et q_{22} . Il s'avère que $\dim(X(0, 3)) = 12$.

2.5.2 La Stratification de Mann-Milgram

Etant donné un multi-indice (k_1, \dots, k_n) , $\sum k_i = k$, nous définissons $X(k_1, \dots, k_n)$ le sous-espace de toutes les fonctions $f \in \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$ qui admettent une forme triangulaire supérieure comme dans la Proposition 2.5.1, avec $\deg p_{ii} = k_i$. Ces sous-espaces sont des sous-variétés complexes de $\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$ ([39], Proposition 4.2) et forment une stratification (voir section 1.3.1).

On peut écrire (en tant qu'ensemble)

$$\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m)) = \bigsqcup_{(k_1, \dots, k_n)} X(k_1, \dots, k_n)$$

La fermeture d'une strate contient les strates de plus petites dimensions. La strate de plus grande dimension (ouverte et dense) est $X(0, 0, \dots, 0, k)$ et a donc pour dimension complexe $k(n + m)$. Les autres strates ont des dimensions complexes données dans la même proposition de [39]

$$\dim_{\mathbb{C}}(X(k_1, \dots, k_n)) = (m + 1)k + \sum_{i=2}^n (i - 1)k_i \quad (2.5.1)$$

Nous pouvons par exemple déterminer de façon explicite la strate de plus basse dimension $X(k, 0, \dots, 0)$ et celle de plus grande dimension $X(0, \dots, 0, k)$.

Proposition 2.5.4 *En tant que variété complexe, $X(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, k) \cong \mathbb{C}^{k(n-1)} \times \text{Rat}_k(\mathbb{P}^m)$.*

PREUVE : Les éléments dans $X(0, \dots, 0, k)$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{1n} & q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_{nn} & q_{n1} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}$$

avec des 1 le long de la diagonale sauf pour p_{nn} , $\deg p_{nn} = k$, $\deg q_{ni} < k$, $\deg p_{1n}, \dots, \deg p_{n-1,n} < k$. Les p_{ij} avec $i < n$ peuvent varier librement et donc par leurs coefficients ils définissent un $\mathbb{C}^{k(n-1)}$. Ce dont il faut se rappeler (preuve du Théorème de 2.4.3) est que les autres polynômes q_{ij} ont des coefficients qui dépendent totalement de p_{nn} et q_{ni} . En effet et pour rappel, si $k_i = \deg p_{ii}$ (qui est ici égale à 1 pour $i \neq n$), la condition de pointage fait de sorte que les coefficients des puissances $z^{k_i+\dots}$ dans l'expression q_{ij} dépendent des coefficients des polynômes q_{rj} , $r > i$. Dans notre cas, $k_i = 0$ pour $i \neq n$, et donc les q_{ij} pour $i \neq n$ ne jouent aucun rôle. Reste la ligne du bas formée de polynômes n'ayant aucun zéro en commun. La ligne du bas est précisément la donnée qui définit $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^m)$ (Exemple 2.4.5). Le résultat en découle. ■

Exemple 2.5.5 La strate $X(k, 0, \dots, 0)$ de toutes les fonctions admettant la forme triangulaire

$$\begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \cdots & 0 & q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \deg p_{11} = k, \quad \deg q_{1j} \leq k - 1$$

est une copie de $\text{Rat}_k(\mathbb{P}^m)$ (comme précédemment, nous référons à l'exemple 2.4.5). Nous pouvons vérifier que cette strate est l'image de l'inclusion

$$\text{Rat}_k(\mathbb{P}^m) \hookrightarrow \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$$

induite du plongement $\mathbb{P}^m = Gr(1, m) \hookrightarrow Gr(n, m)$.

Exemple 2.5.6 $\text{Rat}_2(Gr(2, 2))$ se décompose en trois strates $X(0, 2)$, $X(1, 1)$ et $X(2, 0)$ dont les éléments admettent respectivement des formes triangulaires supérieures suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & az + b & ac & ae \\ 0 & z^2 + \alpha z + \beta & cz + d & ez + f \end{pmatrix} \in X(0, 2)$$

$$\begin{pmatrix} z + \alpha & a & b & c \\ 0 & z + \beta & d & e \end{pmatrix} \in X(1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} z^2 + \alpha z + \beta & 0 & az + b & cz + d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in X(2, 0)$$

Les coefficients ae et ac dans la première matrice apparaissent en raison de la condition de pointage comme nous avons discuté. Toutes les coordonnées sont libres dans \mathbb{C} qui donne $\dim X(0, 2) = 8$, $\dim X(1, 1) = 7$ et $\dim X(2, 0) = 6$. Il faut bien évidemment que toutes les matrices soient de rang maximal. D'après l'exemple 2.5.5, $X(2, 0)$ est une copie de $\text{Rat}_2(\mathbb{P}^2)$, tandis que la Proposition 2.5.4 montre que $X(0, 2) \cong \mathbb{C}^2 \times \text{Rat}_2(\mathbb{P}^2)$. La strate $X(1, 1)$, d'un autre côté, est un peu plus difficile à déterminer. Elle est le complémentaire dans \mathbb{C}^7 du sous-espace défini par toutes les matrices $\begin{pmatrix} z + \alpha & a & b & c \\ 0 & z + \beta & d & e \end{pmatrix}$ comme ci-dessus avec

- (i) $|a| + |b| + |c| = 0$ ou, (ii) $|d| + |e| = 0$, ou,
- (iii) $c = e, b = d = a = 0$ ou, (iv) $b = d, c = e = a = 0$

La première condition dit que a , b et c ne peuvent être tous nuls (de même pour d, e).

Remarque 2.5.7 [39] Notons que par élimination de la première ligne, nous obtenons une projection bien définie $X(k_1, \dots, k_n) \longrightarrow X(k_2, k_3, \dots, k_n)$. Cette projection a la structure d'une fibration de fibre homotopique $\text{Rat}_{k_1}(\mathbb{P}^m)$ et est largement étudiée dans [39]. En fait, le résultat principal affirme que ces fibrations sont homologiquement triviales. Dans le cas de $X(1, 1)$, nous avons une fibration

$$\text{Rat}_1(\mathbb{P}^2) \longrightarrow X(1, 1) \longrightarrow \text{Rat}_1(\mathbb{P}^2)$$

Comme $\text{Rat}_1(\mathbb{P}^2) \simeq S^3$, nous avons trivialement dans ce cas que $H_*(X(1, 1)) \cong H_*(S^3)^{\otimes 2}$.

2.5.3 Homologie de $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$

La stratégie de [39] pour calculer l'homologie de $\text{Rat}_k(Gr(n, m))$ est d'étudier la suite spectrale associée à une filtration obtenue à partir de la stratification de May-Milgram. Tout d'abord, les auteurs vérifient que pour tout $K = (k_1, \dots, k_n)$, $X(K)$ est une variété lisse de fibré normal

trivial dans $\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$. On introduit alors la filtration de $\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$ par les

$$Y(K) = \bigcup_{(l_1, \dots, l_n) \geq (k_1, \dots, k_n)} X(l_1, \dots, l_n)$$

où \geq est l'ordre lexicographique, c'est à dire $(l_1, \dots, l_n) < (k_1, \dots, k_n)$ si $l_n < k_n$ ou $l_i = k_i$ pour $i > j$ et $l_j < k_j$. Les $Y(K)$ induisent une filtration décroissante telle que $Y(K)/Y(K+1)$ est homéomorphe à l'espace de Thom de $X(L)$ dans $\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$. Comme le fibré normal de $X(L)$ est trivial, on a que $Y(K)/Y(K+1) \cong \Sigma^{2t(K)} X(K)_+$ et on a que le terme E^2 de la suite spectrale associée à cette filtration est la somme des $H_*(\Sigma^{2t(K)} X(K)_+)$, où $t(k)$ est défini dans l'équation 2.5.2. Le résultat principal de ([39], section 6) est que cette suite spectrale dégénère au terme E^2 .

Théorème 2.5.8 [39] *Pour tout k, n, m , et à coefficients dans un corps \mathbb{K} ,*

$$\begin{aligned} H_*(\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m)); \mathbb{K}) &= \tilde{H}_*(\Sigma^{2t(k)} (X(k_1, \dots, k_n)_+)) \\ &\cong \bigoplus_K H_*(\Sigma^{2t(k)} (\text{Rat}_{k_1}(\mathbb{P}^m) \times \dots \times \text{Rat}_{k_n}(\mathbb{P}^m))_+; \mathbb{K}) \end{aligned}$$

où $K = (k_1, \dots, k_n)$ toutes les partitions possibles de k et

$$t(K) := k(n-1) - \sum_{i=2}^n (i-1)k_i \quad (2.5.2)$$

qui est la codimension complexe de $X(K) = X(k_1, \dots, k_n)$ dans $\text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$

Exemple 2.5.9 Nous pouvons expliciter l'homologie de $\text{Rat}_1(\text{Gr}(2, 2))$ et $\text{Rat}_2(\text{Gr}(2, 2))$ en utilisant le Théorème 2.5.8. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_*(\text{Rat}_1(\text{Gr}(2, 2))) &\cong \tilde{H}_*(\Sigma^2(\text{Rat}_1\mathbb{P}^2)_+) \oplus \tilde{H}_*(\text{Rat}_1\mathbb{P}^2_+) \\ &\cong \tilde{H}_*(\Sigma^2(S^3_+) \oplus H_*(S^3)) \\ &\cong \tilde{H}_*(S^2 \vee S^5) \oplus H_*(S^3) \\ H_*(\text{Rat}_2(\text{Gr}(2, 2))) &\cong \tilde{H}_*(\Sigma^{2t(2,0)}\text{Rat}_2\mathbb{P}^2_+) \oplus \tilde{H}_*(\Sigma^{2t(1,1)}(\text{Rat}_1\mathbb{P}^2 \times \text{Rat}_1\mathbb{P}^2)_+) \oplus \tilde{H}_*(\Sigma^{2t(0,2)}\text{Rat}_2\mathbb{P}^2_+) \\ &\cong \tilde{H}_*(\Sigma^4\text{Rat}_2\mathbb{P}^2_+) \oplus \tilde{H}_*(\Sigma^2(\text{Rat}_1\mathbb{P}^2 \times \text{Rat}_1\mathbb{P}^2)_+) \oplus \tilde{H}_*(\text{Rat}_2(\mathbb{P}^2)_+) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$H_i(\text{Rat}_1(\text{Gr}(2, 2)); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 2 \\ \mathbb{Z} & i = 3 \\ \mathbb{Z} & i = 5 \end{cases}$$

On note par u, f_3 et f_5 les générateurs en degrés respectifs 2, 3 et 5. En fait, on montre dans [34] que $\text{Rat}_1(\text{Gr}(2, 2)) \simeq S^2 \times S^3$, ou ce qui revient à dire que la fibration 3.1.1 est triviale dans

le cas $n = m = 2$. Soit le tableau récapitulatif suivant des classes dans $H_*(\text{Rat}_2\text{Gr}(2, 2)); \mathbb{Z}_2$

degré	2	3	4	5	6	7	8	10	11
classes	u	f_3	u^2	f_5, uf_3	f_3^2	uf_5, Qf_3	f_3f_5	f_5^2	Qf_5

Rappelons que nous avons défini dans la définition 1.6.4 un poids sur l'homologie de $\Omega^2\text{Gr}(n, m)$. Comme $H_*(\text{Rat}_2(\text{Gr}(2, 2))) \hookrightarrow H_*(\Omega_2^2\text{Gr}(2, 2))$ alors nous pouvons hériter de cette notion sur $H_*(\text{Rat}_2(\text{Gr}(2, 2)))$. D'après [40] on a que les classes produits f_3^2, uf_3 , etc, et les classes Qf_3 et Qf_5 sont de poids 2.

2.6 L'action de l'opérate des petits disques

À toute application holomorphe pointée $f = [D : N] \in \text{Rat}_k\text{Gr}(n, m)$, nous pouvons associer une fonction rationnelle $T(z) \in M_{n,m}(\mathbb{C}[z])$, que nous appelons *fonction de transfert*, définie par :

$$T(z) = D^{-1}(z)N(z)$$

Cette matrice est *propre* dans le sens où les entrées sont des fractions rationnelles avec le degré du dénominateur supérieur au degré du numérateur. Ceci est le cas car le déterminant de $D(z)$ (un mineur) est de degré maximal d'après la condition de pointage (2.4.2).

Exemple 2.6.1 Soit $f \in \text{Rat}_3\text{Gr}(n, m)$ représentée par

$$(D(z) : N(z)) = \left(\begin{array}{cccc} z+1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & (z+1)(z+2) & -1 & z+1 \end{array} \right)$$

La fonction de transfert associée à cette fonction est :

$$f(z) = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{z+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{z+2}$$

La fonction de transfert représentant une fonction holomorphe dans $\text{Rat}(\text{Gr}(n, m))$ peut donc s'écrire comme somme finie

$$f(z) = \sum_{i,j} \frac{Q_{ij}}{(z - \lambda_i)^j}$$

où les Q_{ij} sont des matrices dans $M_{n,m}(\mathbb{C})$ (matrices $n \times m$) et les λ_i sont les racines du $\det(D)$. La réciproque est vraie. Plus précisément, un théorème de la théorie du contrôle, connu sous le nom de "left coprime factorization" affirme que toute matrice rationnelle $T(z)$ peut s'écrire sous la forme $T(z) = D^{-1}(z)N(z)$, avec D et N des matrices de polynômes en z , co-premières, c'est à dire qu'il existe des matrices de polynômes X et Y telles que $XN + YD = I$. Ces deux matrices sont uniques à multiplication près à gauche par une matrice de $GL_n(\mathbb{C}[z])$. Si la matrice

de transfert est propre, alors $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z)$ est la matrice nulle. Ce théorème implique donc le résultat fondamental suivant (détails dans [25]).

Théorème 2.6.2 *À toute fonction rationnelle propre, on peut associer une unique application dans $\text{Rat}(\text{Gr}(n, m))$.*

Nous allons utiliser ce théorème pour expliciter l'action de l'opérade \mathcal{D}_2 des *petits disques* dans le disque unité sur $\text{Rat}(\text{Gr}(n, m)) := \bigsqcup_{k \geq 0} \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$.

Nous écrivons l'opérade comme étant la collection $\mathcal{D}_2 := \{D(n)\}_{n \geq 1}$, où $D(n)$ est l'ensemble de tous les n -uplets de disques inclus dans \mathbb{R}^2 , dont les intérieurs sont disjoints, vus comme étant les images réciproques des disques dans le disque unité et avec la topologie induite de $\text{Map}(D^2, \mathbb{R}^2)^n$, où D^2 est le disque unité dans \mathbb{R}^2 .

Etant donné un petit disque $D(r, x_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - x_0| \leq r\}$, nous pouvons l'identifier canoniquement avec le plan complexe \mathbb{C} de la façon suivante : écrivons $z = \rho e^{i\theta}$ sous forme polaire. Alors l'application

$$z \longmapsto \frac{2r}{\pi} \arctan(\rho) e^{i\theta}$$

est un homéomorphisme de \mathbb{C} dans le disque ouvert de rayon r . En composant par la translation de vecteur x_0 , on définit une application bijective $h_{D(r, x_0)} : \mathbb{C} \longrightarrow D(r, x_0)$. Il est important de noter que ces applications forment pour $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un choix continu dans \mathbb{R}^2 d'homéomorphismes.

Soit $p(z) = a(z - \lambda_n)(z - \lambda_{n-1}) \cdots (z - \lambda_0)$ un polynôme et soit $D(1)$ l'espace de tous les petits disques dans le disque unité. A tout disque $D = D(r, x_0) \in D(1)$, nous associons un nouveau polynôme p^D , de même degré que celui de p ,

$$p^D := a(z - h_D(\lambda_n))(z - h_D(\lambda_{n-1})) \cdots (z - h_D(\lambda_0))$$

Comme on le voit, on s'arrange pour que les zéros de ce nouveau polynôme soient dans D .

Similairement, si $f(z) = \sum_{i,j} \frac{Q_{ij}}{(z - \lambda_i)^j}$ est une fonction rationnelle à coefficients dans $M_{n,m}(\mathbb{C})$, et qui représente $f \in \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m))$, et si D est un petit disque dans le disque unité, alors nous construisons la nouvelle fonction rationnelle

$$f^D(z) := \sum_{i,j} \frac{Q_{ij}}{(z - h_D(\lambda_i))^j} \tag{2.6.1}$$

Ceci donne une application au niveau des composantes

$$D(1) \times \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m)) \longrightarrow \text{Rat}_k(\text{Gr}(n, m)) \quad , \quad (D, f) \longmapsto f^D$$

De même, nous pouvons construire une application pour tout r positif

$$\theta_r : D(r) \times \text{Rat}_{k_1}(\text{Gr}(n, m)) \times \cdots \times \text{Rat}_{k_r}(\text{Gr}(n, m)) \longrightarrow \text{Rat}_{k_1+k_2+\cdots+k_r}(\text{Gr}(n, m)) \tag{2.6.2}$$

$$\theta_r(D_1, \dots, D_r; f_1, \dots, f_r) = \sum f_i^{D_i}$$

Autrement dit, nous “poussons” les pôles de chaque f_i dans le disque D_i via h_{D_i} , nous obtenons $f_i^{D_i}$, ensuite nous faisons la somme et obtenons une nouvelle fonction rationnelle. Parce que les pôles de $f_i^{D_i}$ sont distincts de ceux des $f_j^{D_j}$, $i \neq j$, les degrés s’additionnent. Nous affirmons que les applications θ_r , $r \geq 1$ confèrent à $\text{Rat}(Gr(n, m))$ une structure d’algèbre sur l’opérade \mathcal{D}_2 , c’est à dire qu’ils satisfont les conditions de compatibilité définies par May [42]. Revoyons la définition.

Définition 2.6.3 Une action d’une opérade C sur un espace X est la donnée d’une application $\theta_j : C(j) \times X^j \longrightarrow X$, pour tout $j \leq 0$, tel que :

1. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 C(k) \times C(j_1) \times \cdots \times C(j_k) \times X^j & \xrightarrow{\gamma \times 1} & C(j) \times X^j \\
 \downarrow 1 \times u & & \searrow \theta_j \\
 C(k) \times C(j_1) \times X^{j_1} \times \cdots \times C(j_k) \times X^{j_k} & \xrightarrow{1 \times \theta_{j_1} \times \cdots \times \theta_{j_k}} & C(k) \times X^k \\
 & & \nearrow \theta_k \\
 & & X
 \end{array}$$

avec u le shuffle évident et $\Sigma j_k = j$.

2. $\theta_1(1, x) = x$ pour tout $x \in X$.

Nous allons justifier la commutativité d’un tel diagramme pour $X = \text{Rat} := \text{Rat}(Gr(n, m))$ et l’action θ explicitée dans 2.6.2. Ce calcul est l’analogie du résultat connu pour le cas de $\text{Rat}(\mathbb{P}^m)$ ([5], Theorem 4.12¹). La commutativité est tout simplement la conséquence du fait que le produit de composition de translations est commutatif et que la somme de fonctions rationnelles est également commutative. On se restreint au cas $k = 2$ pour des raisons de simplicité (l’argument étant le même pour $k > 2$). On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 D(2) \times D(1) \times D(1) \times \text{Rat}_r \times \text{Rat}_s & \longrightarrow & D(2) \times \text{Rat}_r \times \text{Rat}_s \\
 \downarrow & & \searrow \theta_2 \\
 D(2) \times D(1) \times \text{Rat}_r \times D(1) \times \text{Rat}_s & \longrightarrow & D(2) \times \text{Rat}_r \times \text{Rat}_s \\
 & & \nearrow \theta_2 \\
 & & \text{Rat}_{r+s}
 \end{array}$$

En toutes lettres, ceci veut dire que : si f et g sont deux applications holomorphes (que nous voyons comme des matrices rationnelles) et si D_1 et D_2 sont deux disques et si $(B_1, B_2) \in D(2)$,

1. Le pointage dans [5] est différent du notre. Dans notre cas un élément de $\text{Rat}_d(\mathbb{P}^m)$ est de la forme $[g, p_1, \dots, p_m]$ avec $\deg g > \deg p_i$ (voir Exemple 2.4.5) avec le pointage $\infty \mapsto [1 : 0 : \cdots : 0]$, alors que dans [5], une application pointée de degré d est donnée par $[p_0 : p_1 : \dots : p_m]$ où tous les p_i sont des monômes de même degré d et n’ayant pas de zéros en commun. Le pointage dans ce cas est $\infty \mapsto [1 : 1 : \cdots : 1]$. L’action opéradique décrite dans [5] est donc légèrement différente de la nôtre mais équivalente.

alors nous devons comparer $(f^{D_1})^{B_1} + (f^{D_2})^{B_2}$ (la flèche du bas) et $f_1^{h_{B_1}(D_1)} + f_2^{h_{B_2}(D_2)}$ (la flèche du haut). Mais ces deux flèches sont identiques d'après la définition (2.6.1)! Ici nous utilisons le fait que la composition dans l'opérade des petits disques $D(2) \times D(1) \times D(1) \longrightarrow D(2)$ envoie $((B_1, B_2), D_1, D_2) \longmapsto (h_{B_1}(D_1), h_{B_2}(D_2))$.

Remarque 2.6.4 Une première tentative de construire l'action des petits disques est dans [40]. La construction de Mann et Milgram utilise la description des formes normales qui la rend beaucoup plus difficile à décrire. Au fait, Mann et Milgram donnent leur construction pour le produit mais il n'est pas clair comment étendre au cas plus général.

Sur tout espace de lacets doubles $\Omega^2 X$, il existe une action naturelle de \mathcal{D}_2 donnée par des flèches

$$c_k : D_2(k) \times (\Omega^2 X)^k \longrightarrow \Omega^2 X$$

On peut expliciter cette application. Pour cela on représente un lacet $f \in \Omega^2 X$ comme étant une flèche

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow X \quad , \quad \infty \mapsto x_0 \in X$$

Soit D un disque dans \mathbb{R}^2 . Alors l'application $f_D : \mathbb{C} \cup \infty \rightarrow X$ définie par

$$f_D(z) = \begin{cases} f \circ h_D^{-1}(z), & z \in D \\ x_0, & z \notin D \end{cases}$$

représente un nouvel élément de $\Omega^2 X$, de "support" D . On dira que f_D est une application *concentrée* dans D (c'est à dire qu'en dehors de D elle vaut x_0). Ceci définit $c_1 : D(1) \times \Omega^2 X \longrightarrow \Omega^2 X$. De même, si $(D_1, D_2) \in D(2)$, $(f, g) \in (\Omega^2 X)^2$, alors on définit

$$c_2(D_1, D_2, f, g) = \begin{cases} f \circ h_{D_1}^{-1}(z), & z \in D_1 \\ g \circ h_{D_2}^{-1}(z), & z \in D_2 \\ x_0, & z \notin D_1 \cup D_2 \end{cases} \quad (2.6.3)$$

De manière analogue, on obtient toutes les flèches c_k .

Remarque 2.6.5 Le produit de Pontryagin $\Omega^2 X \times \Omega^2 X \longrightarrow \Omega^2 X$ est défini comme l'effet de la flèche $\theta_2(D(1, (-1, 0)), D(1, (0, 1)), -, -)$.

L'application $\iota : \text{Rat}(Gr(n, m)) \longrightarrow \Omega^2(Gr(n, m))$ est une flèche entre deux \mathcal{D}_2 -espaces, et on peut se poser la question si elle même est une \mathcal{D}_2 -application, c'est à dire si elle commute avec les actions de l'opérade. La réponse est rapidement non, puisque l'action d'un élément $c \in \mathcal{D}_2(2)$

ne commute pas avec ι ; i.e. le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Rat}_{k_1}(Gr(n, m)) \times \text{Rat}_{k_2}(Gr(n, m)) & \xrightarrow{\theta_c} & \text{Rat}_{k_1+k_2}(Gr(n, m)) \\ \downarrow \iota \times \iota & & \downarrow \iota \\ \Omega_{k_1}^2(Gr(n, m)) \times \Omega_{k_2}^2(Gr(n, m)) & \xrightarrow{\theta_c} & \Omega_{k_1+k_2}^2(Gr(n, m)) \end{array} \quad (2.6.4)$$

ne commute pas, où $\theta_c = \theta_2(c, -, -)$ (resp. $\lambda_c = c_2(c, -, -)$) avec θ_2 l'application de structure définie dans (2.6.2) pour Rat (resp. dans (2.6.3) pour Ω^2). En effet, l'application en bas est constante en dehors d'un grand disque et ne peut jamais être holomorphe. Par contre et à homotopie près, ce diagramme commute.

Remarque 2.6.6 Les arguments de ([5], Theorem 4.16) suggèrent que fort probablement l'application $\iota : \text{Rat}(Gr(n, m)) \longrightarrow \Omega^2(Gr(n, m))$ est une \mathcal{D}_2 -application à homotopie près. C'est à dire que le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{array}{ccc} D_2(p) \times (\text{Rat}_k(Gr(n, m)))^p & \xrightarrow{\theta_k} & \text{Rat}_{kp}(Gr(n, m)) \\ \downarrow 1 \times \iota & & \downarrow \iota \\ D_2(p) \times (\Omega_k^2(Gr(n, m)))^p & \xrightarrow{c_k} & \Omega_{kp}^2(Gr(n, m)) \end{array}$$

L'affirmation est facile à vérifier pour $p = 1$ et pour tout disque donné D , $c_1(D, -)$ et $\theta_1(D, -)$ sont toutes les deux homotopes à l'identité. Dans ce dernier cas, on peut prendre l'homotopie

$$\begin{array}{ccc} I \times \text{Rat}_k Gr(n, m) & \longrightarrow & \text{Rat}_k Gr(n, m) \\ \left(t, \sum_{i,j} \frac{Q_{ij}}{(z - \lambda_i)^j} \right) & \longrightarrow & \sum_{i,j} \frac{Q_{ij}}{(z - \varphi_t(\lambda_i))^j} \end{array}$$

où $\varphi_t(\lambda_i) = (1 - t)\lambda_i + h_D(\lambda_i)$. Une rédaction complète pour $p > 1$ est fastidieuse (voir [6], Theorem 6.3) et à la remise de cette thèse nous n'avons pas encore vérifié tous les détails.

Remarque 2.6.7 Remarquons que l'action des petits disques $\text{Rat}(Gr(n, m))$ ne respecte pas la stratification de May-Milgram discutée dans la section 2.5.2. Pour l'illustrer, on se limite au cas de l'action de deux petits disques $X(1, 0) \times X(1, 0) \longrightarrow \text{Rat}_2(Gr(2, 2))$. On montre que le produit est soit dans $X(2, 0)$ soit $X(0, 2)$, selon le choix des fonctions. Plus précisément, soit

$$f_1(z) = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2(z) = \begin{pmatrix} z + 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

deux éléments dans $X(1, 0)$ représentant des fonctions dans une forme triangulaire. Les fonctions

de transfert respectives sont

$$T_1(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_2(z) = \frac{1}{z+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Choisissons un élément de $D_2(2)$ qui se compose de deux disques centrés en 0 et 1, l'action correspondante donne

$$T_1(z) + T_2(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{z+1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z(z+1)} \begin{pmatrix} 0 & 2z+1 \\ 0 & -2z-1 \end{pmatrix}$$

et la forme normale de cette somme est

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z(z+1) & 0 & -2z-1 \end{pmatrix} \in X(0,2)$$

D'autre part, si nous choisissons nos éléments dans $X(1,0)$ comme

$$g_1(z) = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(z) = \frac{1}{z+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec des fonctions de transfert $G_1(z), G_2(z)$ et l'action

$$G_1(z) + G_2(z) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{z+1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{z(z+1)} \begin{pmatrix} 2z+1 & 2z+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors la forme triangulaire dans ce cas est

$$\begin{pmatrix} z(z+1) & 0 & 2z+1 & 2z+1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in X(2,0)$$

Chapitre 3

Applications de Degré Un et Calculs Homologiques

Nous étudions dans ce chapitre la géométrie de $\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m))$ et $\text{Hol}_1(\text{Gr}(n, m))$ des espaces de toutes les applications de degré un, ou plus simplement des applications “linéaires”. Nous supposons tout le temps que $n \leq m$.

3.1 L’Espace des Applications Pointées

La proposition suivante est due à Mann et Milgram [39, 40]. Si η est un fibré vectoriel, nous noterons η^* ce fibré privé de sa section nulle.

Proposition 3.1.1 [40] *Supposons que $n \leq m$. Il existe un homéomorphisme*

$$\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)) \cong \mathbb{C} \times (m\mathcal{O}(-1))^*$$

avec $\mathcal{O}(-1)$ le fibré au-dessus de \mathbb{P}^{n-1} . En particulier, il existe une fibration

$$S^{2m-1} \longrightarrow \text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)) \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \tag{3.1.1}$$

qui, dans le cas où $m = 1$, est réduite à la fibration de Hopf.

PREUVE : Le fibré $\mathcal{O}(-1)$ est comme dans la définition 1.2.1. Nous allons procéder légèrement différemment de [39] et notre idée est de montrer directement que $\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m))$ est à homotopie près la construction de Borel

$$S^{2n-1} \times_{S^1} S^{2m-1}$$

avec S^1 qui agit diagonalement de façon usuelle. Tout d’abord, dans la section 2.4 nous avons décrit $\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)) = \bigcup \mathcal{U}_i$ en terme d’un recouvrement par des ouverts $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_n}$,

où 1 est dans la i -ème entrée. On rappelle que les éléments de \mathcal{U}_i sont des classes d'applications polynômiales ayant une représentation de la forme :

$$[D_i, N_i] = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & z - a_{ii} & \cdots & 0 & w_{i1} & \cdots & w_{im} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

avec la seule contrainte que les w_{ij} ne soient pas tous nuls (D_i est $n \times n$ et N_i est $n \times m$). Notons que ce n'est pas exactement la manière avec laquelle nous avons décrit les formes normales sachant que nous avons des 1 et non des -1 tout au long de la diagonale, mais les deux descriptions sont équivalentes.

Soit $(\mathbb{C}^n - \{0\}) \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^m - \{0\})$ le quotient du produit par l'identification de la diagonale

$$(z_1\lambda, \dots, z_n\lambda; w_1, \dots, w_m) \sim (z_1, \dots, z_n; w_1\lambda, \dots, w_m\lambda) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C}^* \quad (3.1.3)$$

Si nous avons \mathbb{C}^m au lieu de $\mathbb{C}^m - \{0\}$, alors ce quotient définirait l'espace total de $m\mathcal{O}(-1)$ selon la définition 1.2.1. Avec $\mathbb{C}^m - \{0\}$, nous obtenons le complémentaire de la section nulle de ce fibré. Notre objectif est alors d'établir un homéomorphisme

$$\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)) \cong \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n - \{0\}) \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^m - \{0\}) \quad (3.1.4)$$

Définissons l'application

$$\begin{aligned} \text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)) &\xrightarrow{\Theta} \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n - \{0\}) \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^m - \{0\}) \\ [D_i : N_i] \in \mathcal{U}_i &\longmapsto a_{ii} \times (a_{1i}, \dots, a_{i-1,i}, 1, a_{i+1,i}, \dots, a_{ni}) \times_{\mathbb{C}^*} (w_{i1}, \dots, w_{im}) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Nous avons besoin de vérifier que cette application est bien définie ; i.e. qu'elle donne le même résultat sur l'intersection des \mathcal{U}_i .

Par exemple et lorsque $a_1 \neq 0$, la matrice

$$[D_1 : N_1] = \begin{pmatrix} -1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & z - a_2 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

est équivalente à

$$[D_2 : N_2] = \begin{pmatrix} z - a_2 & 0 & a_1 w_1 & a_1 w_2 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On passe d'une forme à l'autre en multipliant à gauche par la matrice $\begin{pmatrix} a_2 - z & a_1 \\ \frac{-1}{a_1} & 0 \end{pmatrix}$. Ceci donne une classe d'équivalence qui est donc dans l'intersection $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$. On voit que $\Theta[D_1, N_1] = \Theta[D_2 : N_2]$ car

$$a_2 \times (a_1, 1) \times (w_1, w_2) \sim a_2 \times \left(1, \frac{1}{a_1}\right) \times (a_1 w_1, a_1 w_2)$$

Plus généralement, avec la notation (3.1.2), deux formes normales $A_i = [D_i : N_i]$ et $A_k = [D_k : N_k]$ pour $i \neq k$ sont équivalentes si et seulement si

$$a_{ki} \neq 0, \quad a_{kk} = a_{ii}, \quad a_{ik} = \frac{1}{a_{ki}}, \quad a_{jk} = \frac{a_{ji}}{a_{ki}} \quad \forall j \neq k, i, \quad \text{and } w_{kj} = a_{ki} w_{ij}$$

Ce calcul est vérifié dans [24]. Comme pour $n = 2$, l'application Θ est invariante par ce changement de cartes et ainsi elle est bien définie. Il est immédiat de vérifier que Θ est un homéomorphisme. ■

Nous retrouvons (avec une légère correction) un calcul de Delchamps basé sur la théorie de Morse [15]

Corollaire 3.1.2 $H_i(\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 2j, \quad j \leq n - 1 \\ i = 2j - 1, \quad m \leq j \leq n + m - 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

PREUVE : Pour des raisons de degré et lorsque $n \leq m$, la suite spectrale de Serre pour la fibration sphérique d'espace total $\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m))$, dégénère au terme E^2 . On en déduit que

$$H_*(\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m))) \cong H_*(S^{2m-1} \times \mathbb{P}^{n-1}) \quad (3.1.6)$$

d'où la réponse (voir aussi [40], lemme 4.4). ■

Dans le cas de la Grassmannienne quadrique, $n = m = 2$, nous avons la fibration sphérique orientée au-dessus de la sphère de Riemann

$$S^3 \longrightarrow \text{Rat}_1(\text{Gr}(2, 2)) \longrightarrow S^2 \quad (3.1.7)$$

laquelle est classifiée par un élément de $\pi_1(U(2)) = \mathbb{Z}$; la *clutching number*. En effet (3.1.7) est le fibré en sphères associé à un fibré complexe de rang 2 de groupe structural $U(2)$.

Corollaire 3.1.3 *Le fibré (3.1.7) a le clutching number $-2 \in \mathbb{Z}$.*

PREUVE : Puisque (3.1.7) est le fibré en sphère de $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, il est donc associé à un fibré principal de groupe $U(1) \times U(1) \subset U(2)$. Ce fibré principal est classifié par une application $S^2 \longrightarrow B(U(1) \times U(1)) \longrightarrow BU(2)$, où BG veut dire l'espace classifiant du groupe topologique

G. Cette flèche est adjointe à l'application $S^1 \longrightarrow U(1) \times U(1) \longrightarrow U(2)$ envoyant

$$\lambda \longmapsto (\lambda^{-1}, \lambda^{-1}) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

La composée de cette application par le déterminant $det : U(2) \longrightarrow S^1$ envoie $\lambda \longmapsto \lambda^{-2}$. En identifiant $\pi_1(U(2))$ avec $H^1(U(2); \mathbb{Z})$, de générateur l'application déterminant det , on voit que le clutching number est $d = -2$. ■

3.2 Théorème Principal

Dans cette section, nous allons décrire l'espace $Hol_1(Gr(n, m))$.

Théorème 3.2.1 *Soit $Fl(1, n, n+m) = U(n+m)/U(1) \times U(n-1) \times U(m)$ la variété de drapeaux de tous les drapeaux $(1, n)$ dans \mathbb{C}^{n+m} avec les projections*

$$\begin{aligned} p_1 & : Fl(1, n, n+m) \longrightarrow \mathbb{P}^{n+m-1} \\ p_2 & : Fl(1, n, n+m) \longrightarrow Gr(n, m) \end{aligned}$$

alors $Hol_1(Gr(n, m))$ est, à homotopie près, le fibré en sphère au-dessus de $Fl(1, n, n+m)$ associé au fibré vectoriel de rang complexe m donné par

$$p_1^*(H) \otimes p_2^*(Q)$$

où $H = \mathcal{O}(1)$ est l'hyperplan dual au fibré en droite tautologique au-dessus de \mathbb{P}^{n+m-1} , et Q le fibré anti-tautologique au-dessus $Gr(n, m)$.

PREUVE : En utilisant (2.0.1) et (3.1.4), nous pouvons écrire les identifications suivantes

$$\begin{aligned} Hol_1(Gr(n, m)) & = Rat_1(Gr(n, m)) \times_{U(n) \times U(m)} U(n+m) \\ & \simeq [(\mathbb{C}^n - \{0\}) \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^m - \{0\})] \times_{U(n) \times U(m)} U(n+m) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

L'action de $(A, B) \in U(n) \times U(m)$ en terme $(\mathbb{C}^n - \{0\}) \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^m - \{0\})$ est donnée comme suit. Identifions

$$(a_1, \dots, 1, \dots, a_n) \times (w_1, \dots, w_m) \in (\mathbb{C}^n - \{0\}) \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^m - \{0\})$$

avec

$$[D : N] = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & a_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & z-1 & \cdots & 0 & w_1 & \cdots & w_m \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & a_n & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Alors l'action de B sur (w_1, \dots, w_m) peut être vue comme une multiplication à gauche sur le vecteur $[w_1, \dots, w_m]^T$. L'action de A sur D est donnée par DA^T et il n'est pas facile de la voir en terme des formes normales mais c'est obligatoire. Nous définissons

$$\begin{aligned} X(n, m) &:= [\mathbb{C}^m \times_{\mathbb{C}^*} (\mathbb{C}^n - \{0\})] \times_{U(n) \times U(m)} U(n+m) \\ &= \mathbb{C}^m \times_{\mathbb{C}^* \times U(m)} [(\mathbb{C}^n - \{0\}) \times_{U(n)} U(n+m)] \\ &\simeq \mathbb{C}^m \times_{U(1) \times U(m)} \left[\frac{U(n)}{U(n-1)} \times_{U(n)} U(n+m) \right] \\ &= \mathbb{C}^m \times_{U(1) \times U(m)} \left[\frac{U(n+m)}{U(n-1)} \right] \end{aligned}$$

où ici nous avons remplacé $\mathbb{C}^n - \{0\}$ à homotopie près (équivariant) par $S^{2n-1} = U(n)/U(n-1)$ et \mathbb{C}^* par $U(1) = S^1$. La projection

$$X(n, m) \longrightarrow U(n+m)/U(1) \times U(n-1) \times U(m) \quad (3.2.2)$$

envoie $X(n, m)$ dans un fibré vectoriel complexe de dimension m au-dessus de $Fl(1, n, n+m)$ dont (3.2.1) est un fibré en sphère. Notre objectif est donc de montrer que (3.2.2) est un fibré isomorphe à $p_1^*(H) \otimes p_2^*(Q)$. Ici, l'action de $(\lambda, A) \in U(1) \times U(m)$ sur $\vec{v} \in \mathbb{C}^m$ est $\lambda A(\vec{v})$, et l'action de $U(1)$ sur $U(n+m)/U(n-1)$ est -par la multiplication gauche si nous considérons $U(1)$ comme un sous-groupe de $U(n+m)$ - donnée par la matrice standard en haut à gauche.

Notons que la multiplication $U(1) \times U(n-1) \longrightarrow U(n)$ induit la projection $p_2 : Fl(1, n, n+m) \rightarrow Gr(n, m)$ et l'espace total du pullback de Q étant précisément (voir section 1.2)

$$\mathbb{C}^m \times_{U(m)} [U(n+m)/U(1) \times U(n-1)]$$

et le pullback de la projection p_1 induit à partir de $U(n-1) \times U(m) \rightarrow U(n+m-1)$ est

$$\mathbb{C} \times_{U(1)} [U(n+m)/U(n+m-1)]$$

Leur produit tensoriel est donné par le fibré

$$(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^m) \times_{U(1) \times U(m)} [U(n+m)/U(n-1)]$$

où $(\lambda, A) \in U(1) \times U(m)$ agit sur $z \otimes \mathbf{w}$ par $\lambda^{-1}z \otimes A\mathbf{w}$. Après identification $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^m$ avec \mathbb{C}^m , on retrouve précisément le fibré $X(n, m)$ et le théorème est démontré. \blacksquare

Remarque 3.2.2 Notons que la série de Poincaré de $\text{Hol}_1(Gr(n, m))$, à coefficients dans un corps, satisfait la dualité du Poincaré en dimension

$$2m - 1 + \dim Fl(1, 2, n+m) = 2m + (n+m)^2 - (n-1)^2 - m^2 = 2n(m+1) + 2m - 3$$

Corollaire 3.2.3 [33] $Hol_1(\mathbb{P}^m)$ est à homotopie près, le fibré en sphère de \mathbb{P}^m .

PREUVE : D'après le Théorème 3.2.1, Hol_1 est homéomorphe à l'espace total du fibré en sphères $Q^\vee \otimes \gamma$, où γ est le tautologique sur $F(1, 1, m+1) = \mathbb{P}^m$. Nous avons besoin de vérifier que ce produit tensoriel est isomorphe au fibré tangent de \mathbb{P}^m . Nous savons que $Q \oplus \gamma \cong (m+1)\epsilon$ est le fibré trivial de rang $(m+1)$ au-dessus de \mathbb{P}^m (voir (1.2.1)) et ainsi, en prenant les duaux, $Q^\vee \oplus \gamma^\vee \cong (m+1)\epsilon$. Nous pouvons tensoriser des deux cotés par γ et nous obtenons

$$(Q^\vee \otimes \gamma) \oplus \epsilon = (m+1)\gamma$$

utilisant le fait que $\gamma^\vee \otimes \gamma = \epsilon$. D'autre part, il est bien connu [27] que

$$T\mathbb{P}^m \oplus \epsilon \cong (m+1)\gamma$$

Ceci montre que $T\mathbb{P}^m$ et $Q^\vee \otimes \gamma$ sont stablement isomorphes. Mais d'après [27], chapter 9, Theorem 1.5, les deux fibrés doivent être isomorphes. ■

Remarque 3.2.4 La preuve du théorème 3.2.1 montre que pour $n \leq m$, il existe un diagramme de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} S^{2m-1} & \xrightarrow{=} & S^{2m-1} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ Rat_1(Gr(n, m)) & \longrightarrow & Hol_1(Gr(n, m)) & \xrightarrow{ev} & Gr(n, m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ \mathbb{P}^{n-1} & \longrightarrow & Fl(1, n, n+m) & \longrightarrow & Gr(n, m) \end{array}$$

où la fibration verticale de gauche est la même que le fibré en sphère $m\mathcal{O}(-1)$ au-dessus de \mathbb{P}^{n-1} .

Corollaire 3.2.5 $Rat_1(Gr(n, \infty)) = Rat_1(BU(n)) \simeq \mathbb{P}^{n-1}$.

PREUVE : On rappelle que $BU(n)$ est choisi comme étant la limite directe des inclusions $Gr(n, m) \hookrightarrow Gr(n, m+1)$, et que donc l'espace $Rat_1(BU(n))$ est obtenu comme limite directe des plongements $Rat_1(Gr(n, m)) \hookrightarrow Rat_1(Gr(n, m+1))$. Nous avons une flèche de fibrations

$$\begin{array}{ccc} S^{2m-1} & \longrightarrow & S^{2m+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rat_1(Gr(n, m)) & \longrightarrow & Rat_1(Gr(n, m+1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^{n-1} & \xrightarrow{=} & \mathbb{P}^{n-1} \end{array}$$

En passant à la limite directe, on voit que $Rat_1(BU(n))$ est un fibré au dessus de \mathbb{P}^{n-1} de fibre S^∞ , laquelle est contractible. Ceci démontre le corollaire. On aurait pu également argumenter

que l'équivalence $\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)) \simeq S^{2m-1} \times_{S^1} S^{2n-1}$ et le diagramme ci-dessus entraînent que $\text{Rat}_1(\text{BU}(n)) \simeq S^\infty \times_{S^1} S^{2n-1} \simeq \mathbb{P}^{n-1}$. ■

Finalement, nous remarquerons que l'idée principale de [40] est d'analyser l'application

$$\iota : H_*(\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m))) \longrightarrow H_*(\Omega_1^2 \text{Gr}(n, m))$$

en homologie. Rappelons que l'isomorphisme (1.6.1) qui dit que $H_*(\Omega_1^2 \text{Gr}(n, m))$ admet les $f_{2i+1} \in H_{2i+1}(\Omega^2 S^{2(i+1)-1})$ et les $b_{2i} \in H_*(\Omega_0 U(n)) = \mathbb{Z}[b_1, \dots, b_{2i-2}]$, $1 \leq i \leq n$ comme générateurs sur l'algèbre de Dyer-Lashof. D'autre part, $H^*(\text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m))) = \Gamma(e) \otimes \mathbb{Z}[u]/(u^n)$. Cette algèbre est de non torsion et nous indiquerons par x^* le hom-dual de x .

Théorème 3.2.6 [40] *L'inclusion ι induit une injection en homologie et nous avons*

$$\iota_*((u^j)^*) = b_{2j} \quad , \quad \iota_*((eu^j)^*) = f_{2(j+m)-1} + f_{2m-1} \otimes b_{2j}$$

Remarque 3.2.7 De façon un peu surprenante, il ne peut exister d'application de fibrations comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} S^{2m-1} & \longrightarrow & \Omega^2 V_{n,m} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Rat}_1(\text{Gr}(n, m)) & \dashrightarrow & \Omega_1^2(\text{Gr}(n, m)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^{n-1} & \longrightarrow & \Omega SU(n) \end{array} \quad (3.2.3)$$

où nous essayons d'avoir entre les fibres l'application adjointe au générateur de $\pi_{2m+1} V_{n,m} = \mathbb{Z}$, et en bas l'application classique qui à une droite vectorielle de \mathbb{C}^n (représentant un élément de \mathbb{P}^{n-1}) et à un $\theta \in S^1$, associe la rotation d'angle θ autour de l'axe de cette droite. Cette dernière flèche est une injection en homologie et il est connu que $H_*(\Omega SU(n))$ est une algèbre symétrique sur l'image $\tilde{H}_*(\mathbb{P}^{n-1})$. Pour voir qu'un diagramme commutatif comme dans (3.2.3) ne peut pas exister, il suffit de comparer les suites spectrales de Serre de ces fibrations. Si le diagramme était commutatif, alors au terme E^2 , la classe $u \otimes e$, avec $u \in H_2(\mathbb{P}^{n-1})$ et $e = [S^{2m-1}]$, s'enverrait obligatoirement sur $b_2 \otimes f_{2m-1}$, ce qui n'est évidemment pas le cas.

3.3 La Grassmannienne Quadratique

Dans cette section, nous donnons un calcul rationnel complet pour $\text{Hol}_1(\text{Gr}(2, 2))$ où $\text{Gr}(2, 2)$ la Grassmannienne quadrique (voir section 2.1). Nous commençons par comprendre la suite de Gysin pour la fibration décrite dans le théorème 3.2.1

$$S^{2m-1} \longrightarrow \text{Hol}_1(\text{Gr}(n, m)) \longrightarrow \text{Fl}(1, n, n+m) \quad (3.3.1)$$

Celle ci est donné par

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^{i+2m-1} Hol_1 Gr(n, m) &\longrightarrow H^i Fl(1, n, n+m) \xrightarrow{\chi} \\ H^{i+2m} Fl(1, n, n+m) &\longrightarrow H^{i+2m} Hol_1 Gr(n, m) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

où χ est cup-produit par la classe d'Euler de $Fl(1, n, n+m)$; qui est la classe de Chern de plus haut degré du fibré $p_1^*(H) \otimes p_2^*(Q)$ dans le Théorème 3.2.1, donnée par :

$$\chi = c_m(p_1^*(H) \otimes p_2^*(Q)) = \sum_{i=0}^m (-1)^i p_1^*(c_1^i) \cup p_2^*(\bar{c}_{m-i})$$

Dans le cas de la Grassmannienne quadratique, nous avons :

$$S^3 \longrightarrow Hol_1(G(2, 2)) \longrightarrow Fl(1, 2, 4) \quad (3.3.3)$$

Pour commencer, nous avons besoin de la structure de cohomologie de $Fl(1, 2, 4) = U(4)/U(1) \times U(1) \times U(2)$. Notons qu'il existe une fibration

$$\mathbb{P}^1 \longrightarrow Fl(1, 2, 4) \longrightarrow G(2, 2) \quad (3.3.4)$$

qui est triviale en cohomologie (additivement) puisque tous les générateurs sont concentrés en degrés pairs. Ceci veut dire que $H^*(Fl(1, 2, 4))$ est une torsion libre pour le polynôme de Poincaré

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Fl(1, 2, 4)) &= \mathcal{P}(\mathbb{P}^1) \cdot \mathcal{P}(G(2, 2)) \\ &= (1 + t^2)(1 + t^2 + 2t^4 + t^6 + t^8) \\ &= 1 + 2t^2 + 3t^4 + 3t^6 + 2t^8 + t^{10} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Pour avoir la structure de cohomologie, dans ce cas, nous faisons appel au théorème de Baum expliqué dans le Théorème 1.3.6.

Lemme 3.3.1 *Il existe un isomorphisme d'anneau*

$$\begin{aligned} H^*(Fl(1, 2, 4)) &= \mathbb{Z}[x, y]/((x+y)(x^2+y^2), x^3y + xy^3 + x^2y^2) \\ &= \mathbb{Z}[x, y]/((x+y)(x^2+y^2), x^4, y^4) \end{aligned}$$

où $|x| = 2, |y| = 2$.

PREUVE : Considérons la courte suite exacte

$$H^*(BU(4)) \xrightarrow{\rho^*} H^*(BU(1) \times BU(1) \times BU(2)) \xrightarrow{\sigma^*} H^*(Fl(1, 2, 4))$$

avec le noyau de σ^* l'idéal des éléments de degrés positifs dans ρ^* . Ici, $H^*(BU(1) \times BU(1) \times$

$BU(2) = \mathbb{Z}[x, y, z_1, z_2]$ ainsi que

$$H^*(Fl(1, 2, 4)) = \mathbb{Z}[x, y, z_1, z_2]/I$$

où les relations dans I sont données par l'équation : $(1+x)(1+y)(1+z_1+z_2) = 1$ en les regroupant sous forme d'éléments homogènes comme suit :

$$1 + (x + y + z_1) + (z_2 + xy + xz_1 + yz_1) + (yz_2 + xz_2 + xyz_1) + xyz_2 = 1$$

À partir de ceci, nous pouvons déduire que $z_1 = -x - y$, $z_2 = -xz_1 - xy - yz_1 = x^2 + y^2 + xy$ et que $(x + y)(x^2 + y^2) = 0$ et $x^3y + xy^3 + x^2y^2 = 0$. Le second isomorphisme résulte par l'identification des générateurs en chaque dimension comme dans (3.3.5).

Remarque 3.3.2 Comme c'est déjà indiqué, il existe deux applications

$$p_1 : Fl(1, 2, 4) \longrightarrow \mathbb{P}^3 \quad \text{et} \quad p_2 : Fl(1, 2, 4) \longrightarrow Gr(2, 2)$$

et ainsi nous déterminons leurs effets sur la cohomologie. Nous écrivons $H^*(Gr(2, 2)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2]/I$ et $H^*(\mathbb{P}^3) = \mathbb{Z}[u]/(u^4)$. La première application est déterminée par $U(4)/U(1) \times U(1) \times U(2) \longrightarrow U(4)/U(1) \times U(3)$ qui est induite à partir de la multiplication $U(1) \times U(2) \longrightarrow U(3)$. Il existe un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Fl(1, 2, 4) & \longrightarrow & BU(1) \times BU(1) \times BU(2) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^3 & \longrightarrow & BU(1) \end{array}$$

où π est la projection sur la première composante. Puisque le générateur u est induit à partir d'une seule copie de $BU(1)$, $f^*(u) = x$. Similairement, p_2 est déterminée à partir de la multiplication $H^*(BU(2)) \longrightarrow H^*(BU(1) \times BU(1))$ qui envoie $1 + c_1 + c_2$ à $(1+x)(1+y)$ ainsi que

$$p_2^*(c_1) = x + y \quad , \quad p_2^*(c_2) = xy$$

Nous sommes maintenant en mesure de considérer la classe d'Euler du fibré (3.3.3), ou de manière équivalente, la classe de Chern de plus haut degré c_2 de $\zeta(Gr(2, 2)) = p_1^*(\gamma) \otimes p_2^*(Q^\vee)$.

Lemme 3.3.3 $c_2(\zeta) = 3x^2 + y^2 + 2xy \in H^4(Fl(1, 2, 4)) = \mathbb{Z}\{x^2, xy, y^2\}$.

PREUVE : Par la formule de la classe de Chern totale du produit tensoriel des deux fibrés L et E ; avec L un fibré en droite, nous obtenons la relation générale $c_2(E \otimes L) = c_2(E) + c_1(E) \times c_1(L) + c_1^2(L)$ (voir [19], p.55). Appliquons ceci dans notre cas avec $L = p_1^*(\gamma)$ donc $c_1(L) = x$ et $E = p_2^*(Q^\vee)$, nous avons : $c_1(E) = x + y$ et $c_2(E) = x^2 + y^2 + xy$ et nous obtenons donc :

$$c_2(\zeta) = (x^2 + y^2 + xy) + x(x + y) + x^2 = 3x^2 + y^2 + 2xy$$

■

Proposition 3.3.4 *Les séries de Poincaré rationnelles pour les espaces des applications holomorphes sont*

$$\mathcal{P}(Hol_1Gr(2, 2)) = 1 + 2t^2 + 2t^4 + t^6 + t^7 + 2t^9 + 2t^{11} + t^{13}$$

$$\text{et } \mathcal{P}(Rat_1Gr(2, 2)) = 1 + t^2 + t^3 + t^5.$$

PREUVE : Les séries de Poincaré pour $Rat_1Gr(2, 2)$ résultent à partir de (3.1.6). Soit b_i le rang de $H^i(Hol_1Gr(2, 2); \mathbb{Q})$. Nous avons besoin d'analyser la suite de Gysin (??) où χ est la multiplication par $3x^2 + y^2 + 2xy$. Puisque la cohomologie de $Fl(1, 2, 4)$ est concentrée en dimension paire, la longue suite exacte se scinde en courtes suites exactes

$$0 \longrightarrow H^{2i+1}Hol_1Gr(2, 2) \longrightarrow H^{2i-2}Fl(1, 2, 4) \xrightarrow{\chi} H^{2i+2}Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^{2i+2}Hol_1Gr(2, 2) \longrightarrow 0$$

à partir de là, nous déduisons que

$$\begin{aligned} H^{impair}Hol_1Gr(2, 2) &= \ker(H^{impair-3}Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^{impair+1}Fl(1, 2, 4)) \\ H^{pair}Hol_1Gr(2, 2) &= \text{coker}(H^{pair-4}Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^{pair}Fl(1, 2, 4)) \end{aligned}$$

Maintenant, nous allons citer les générateurs de $H^*(Fl(1, 2, 4))$

$$\begin{aligned} H^2 &= \mathbb{Z}\{x, y\} \\ H^4 &= \mathbb{Z}\{x^2, xy, y^2\} \\ H^6 &= \mathbb{Z}\{x^3, x^2y, y^2x\} \quad y^3 = -x^3 - x^2y - xy^2 \\ H^8 &= \mathbb{Z}\{x^3y, y^3x\} \quad x^4 = y^4 = 0, \quad x^2y^2 = -xy^3 - x^3y \\ H^{10} &= \mathbb{Z}\{x^3y^2\} \quad x^3y^2 = -x^2y^3 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

où $H^* = H^*(Fl(1, 2, 4))$ et nous avons écrit les relations à droite pour chaque degré, et alors nous analysons la multiplication par la classe d'Euler en chacun d'eux. Pour $i = 2$, nous avons

$$0 \longrightarrow H^5Hol_1Gr(2, 2) \longrightarrow H^2Fl(1, 2, 4) \xrightarrow{\chi} H^6Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^6Hol_1Gr(2, 2) \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 3x^3 + xy^2 + 2x^2y \\ \chi(y) &= 3x^2y + y^3 + 2xy^2 = 3x^2y - x^3 - x^2y - y^2x + 2xy^2 \\ &= -x^3 + 2x^2y + xy^2 \end{aligned}$$

Dans la base choisie (x^3, x^2y, xy^2) , les vecteurs $\chi(x)$ et $\chi(y)$ sont indépendants, et puisque

$$H^5Hol_1G(2, 2) = \ker(H^2Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^6Fl(1, 2, 4))$$

et

$$H^6 Hol_1 G(2, 2) = coker(H^2 Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^6 Fl(1, 2, 4))$$

nous concluons que $b_5 = 0$ et $b_6 = 1$. Similairement, pour $i = 4$ nous obtenons

$$O \longrightarrow H^7 Hol_1 Gr(2, 2) \longrightarrow H^4 Fl(1, 2, 4) \xrightarrow{\chi} H^8 Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^8 Hol_1 Gr(2, 2) \longrightarrow 0$$

où $\chi : \mathbb{Q}^3\{x^2, xy, y^2\} \longrightarrow \mathbb{Q}^2\{x^3y, xy^3\}$. Gardons en mémoire la relation $x^2y^2 = -x^3y - xy^3$, nous voyons que

$$\begin{aligned} \chi(x^2) &= 3x^4 + x^2y^2 + 2x^3y = -x^3y - xy^3 + 2x^3y = x^3y - xy^3 \\ \chi(xy) &= 3x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 = 3x^3y + xy^3 + 2(-x^3y - xy^3) \\ &= x^3y - xy^3 \\ \chi(y^2) &= 3x^2y^2 + y^4 + 2xy^3 = 3(-x^3y - xy^3) + 2xy^3 = -3x^3y - xy^3 \end{aligned}$$

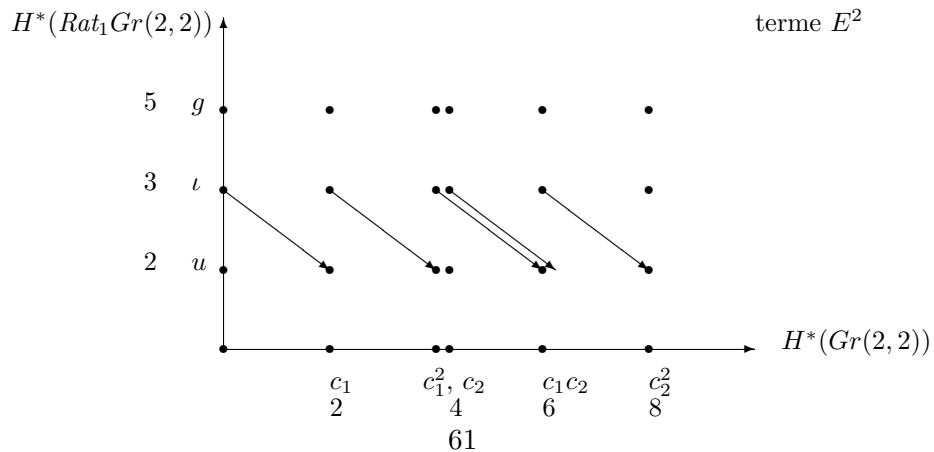
Dans la base choisie (x^3, x^2y, xy^2) , les deux vecteurs $\chi(x)$ et $\chi(y)$ sont indépendants. Ainsi, $b_7 = 1$ et $b_8 = 0$. Le reste résulte similairement. ■

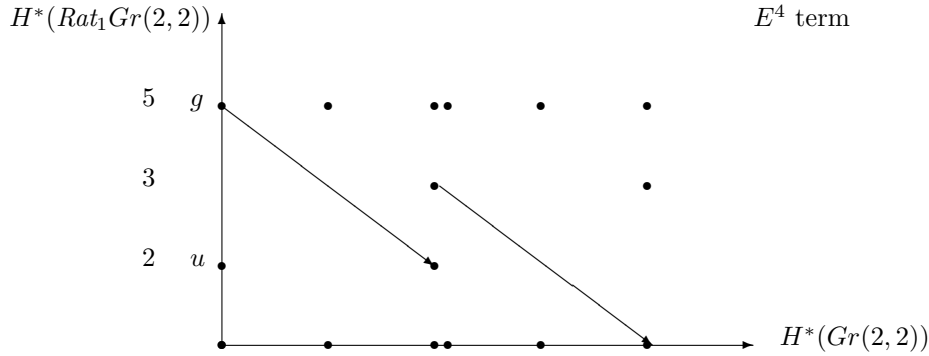
Nous obtenons des calculs précédents le corollaire suivant qui décrit les différentielles dans la fibration de l'évaluation pour $Hol_1(Gr(2, 2))$. Nous nous apercevons qu'il existe plusieurs différentielles internes dont certaines ne peuvent pas être détectées par la "string topologie" comme pour les méthodes de [33]

Théorème 3.3.5 *La suite spectrale de Serre avec coefficients rationnels pour la fibration de l'évaluation*

$$Rat_1 Gr(2, 2) \longrightarrow Hol_1 Gr(2, 2) \xrightarrow{ev} Gr(2, 2) \tag{3.3.7}$$

a les termes E^2 et E^4 suivants et elle dégénère au terme E^5 .





PREUVE : Essayons de traduire tout d’abord le calcul de la Proposition 3.3.4 en terme de cette suite spectrale. Nous avons deux classes en degré 2 et les classes u et c_1 doivent obligatoirement survivre. Nous avons deux classes en degré 4 et on peut se convaincre que la seule possibilité est que ι s’envoie sur αc_1 , $\alpha \in \mathbb{Q}^*$, et par dérivation $d_2(\iota c_1) = \alpha c_1^2$. Il n’y a qu’une seule classe en degré 6 et donc l’une des classes $c_1 c_2$ ou $u c_2$ doit disparaître. Pour cela il existe, soit une différentielle provenant de g au terme E^4 , soit une différentielle provenant de la même classe au terme E^6 . Nous n’avons pas suffisamment de données pour pouvoir décider et nous devons faire appel au modèle minimal. Pour cela, le modèle de Brown-Sczarba présenté dans le Théorème 1.6.2 sera utile.

Le fibré (3.3.7) s’envoie sur la fibration de l’évaluation

$$\Omega_1^2(Gr(2, 2)) \longrightarrow L_1^2(Gr(2, 2)) \longrightarrow Gr(2, 2) \tag{3.3.8}$$

Nous savons qu’au niveau des fibres, nous avons un monomorphisme en homologie. Par comparaison de suites spectrales de Serre, nous pouvons donc lire les différentielles dans la suite spectrale de la fibration (3.3.7) à partir de celle de (3.3.8).

Nous avons montré dans le corollaire 1.6.3 que la cohomologie rationnelle de $L_1^2 Gr(2, 2)$ est la cohomologie de l’algèbre différentielle graduée $\Lambda(x_2; \bar{x}_0; y_4; \bar{y}_2; z_5; \bar{z}_3; t_7; \bar{t}_5; d)$, avec différentielle $dx = d\bar{x} = dy = d\bar{y} = 0$, $dz = x^3 - 2xy$; $dt = x^4 - y^2$ et

$$d\bar{t} = 2y\bar{y} - 4x^3 \quad , \quad d\bar{z} = (2y - 3x^2) + 2x\bar{y}$$

Les classes x et y dans le modèle correspondent à c_1 et c_2 . Alors que les classes $\bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ correspondent aux classes u, ι, g . À partir de ce modèle et rationnellement, nous voyons que nécessairement dans la suite spectrale de Serre, nous avons des différentielles internes qui apparaissent. Dans l’expression de $d\bar{z}$, le terme “ $2x\bar{y}$ ” montre qu’au terme E^2 , nécessairement $d_2(\iota) = 2uc_1$ (comme prévu) et que donc $d_2(c_1^k \iota) = 2uc_1^{k+1}$. De même, la différentielle $d\bar{t} = 2y\bar{y} - 4x^3$ induit dans la suite spectrale la différentielle $d_4g = 2uc_2$.

Au terme E_2 , pour déterminer $d_2(\iota c_1^2)$ et $d_2(\iota c_2)$, nous observons la différentielle totale

$$d(y\bar{z}) = 3x^2y - 2y^2 - 2xy\bar{y}$$

qui donne que $d_2(\iota c_2) = c_1c_2u$, et $d(x^2\bar{z}) = 3x^4 - 2yx^2 - 2x^3\bar{y}$ donne que $d_2(\iota c_1^2) = 2c_1^3u$. Puisque $c_1^3 = 2c_1c_2$, nous remarquons que $d_2(\iota(c_1^2 - c_2)) = 0$ et nous avons un générateur $\iota(c_1^2 - c_2) \in E_2^{3,4}$ -terme.

Maintenant, écrivons la différentielle totale

$$d(\bar{z}(x^2 - y)) = (x^2 - y)(3x^2 - 2y - 2\bar{y}x)$$

Ceci se traduit dans la suite spectrale de Serre comme suit : les classes $xy\bar{y}$ et $x^3\bar{y}$ correspondent à c_1c_2u et c_1^3u respectivement, et elles ont été touchées au niveau du terme E^2 . Il reste le terme en x et y ; $4x^4 - 5yx^2$ et cela correspond à un multiple non trivial de c_2^2 qui est le générateur de $H^8(Gr(2,2))$. Ceci veut dire que d_4 de la classe $\iota(c_1^2 - c_2)$ est non-trivial. ■

3.3.1 Calcul Homologique

Nous souhaitons décrire l'homologie de $\text{Hol}_1(Gr(2,2))$ à coefficients dans \mathbb{Z} . Pour cela, nous devons donner un procédé pour décrire les noyaux et conoyaux de la multiplication par la classe d'Euler comme modules sur \mathbb{Z} . Nous rappelons comment ceci est fait.

Soit $f : \mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ une application linéaire d'un groupe abélien libre de rang m dans un autre de rang n . Soit K le conoyau de f , soient u_1, \dots, u_m une base de \mathbb{Z}^m et v_1, \dots, v_n une base de \mathbb{Z}^n . Alors f est déterminée par une matrice $m \times n$ d'entiers; $R = [a_{ij}]$, où

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

Cette matrice détermine K de la façon suivante : une représentation du groupe abélien K est donnée par :

$$K \cong \langle \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \mid \sum_{j=1}^n a_{i,j}\bar{v}_j \quad , \quad 1 \leq i \leq m \rangle$$

où \bar{v}_i sont les images des v_i dans K .

Les opérations sur les lignes et sur les colonnes de la matrice R nous donnent la forme

canonique de Smith

$$S = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & d_k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

où les d_i , $1 \leq d_i \leq k$, sont des entiers positifs formant une chaîne de diviseurs $d_1|d_2|\dots|d_k$. Ils sont uniques.

En d'autres termes, S est une matrice diagonale $k \times k$ que nous complétons à une matrice $m \times n$ en ajoutant des zéros. Le conoyau K est alors le groupe abélien

$$\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_k} \oplus \mathbb{Z}^{n-k}$$

De plus, les d_i peuvent être déterminés à partir des facteurs invariants de la matrice R comme suit. Le i^{ieme} facteur invariant est le PGCD de tous les $i \times i$ sous-déterminants de R , $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$. Alors $d_1 = E_1, d_1d_2 = E_2, \dots, d_1d_2 \dots d_k = E_k$.

En particulier, K n'a pas de torsion, si et seulement si, pour un entier k nous avons $E_i = 1$ pour $i = 1, \dots, k$, et $E_i = 0$ pour $k + 1 \leq i \leq \min\{m, n\}$. Si cette condition est vérifiée, alors K est un groupe abélien libre de rang $n - k$.

Nous allons maintenant utiliser la méthode décrite ci-dessus pour déterminer l'homologie de $Hol_1(Gr(2, 2))$.

Proposition 3.3.6 $H_*(Hol_1(Gr(2, 2)); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 13 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 11 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 9 \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & * = 8 \\ \mathbb{Z}, & * = 7 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & * = 6 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 4 \\ \mathbb{Z}^2, & * = 2 \\ \mathbb{Z}, & * = 0 \end{cases}$

et 0 pour tout autre degré.

PREUVE. Nous avons besoin d'analyser de nouveau la suite de Gysin (??) mais cette fois ci sur \mathbb{Z} . Les cas les plus intéressants que nous reprenons sont les suivants : Le premier cas est

$$O \longrightarrow H^5 Hol_1 G(2, 2) \longrightarrow H^2 Fl(1, 2, 4) \xrightarrow{x} H^6 Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^6 Hol_1 G(2, 2) \longrightarrow 0$$

où $H^2 Fl(1, 2, 4) = \mathbb{Z}\{x, y\}$ et $H^6 Fl(1, 2, 4) = \mathbb{Z}\{x^3, x^2y, xy^2\}$. La matrice de χ dans les bases (x, y) et (x^3, x^2y, xy^2) est donnée par $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ de forme de Smith associée $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le conoyau de cette application est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_4$ d'où $H^5 Hol_1 G(2, 2) = 0$ et $H^6 Hol_1 G(2, 2) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$. De même pour

$$O \longrightarrow H^7 Hol_1 G(2, 2) \longrightarrow H^4 Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^8 Fl(1, 2, 4) \longrightarrow H^8 Hol_1 G(2, 2) \longrightarrow 0$$

avec $H^4 Fl(1, 2, 4) = \mathbb{Z}^3\{x^2, xy, y^2\}$ et $H^8 Fl(1, 2, 4) = \mathbb{Z}^2\{x^3y, xy^3\}$ et la relation $x^2y^2 = -x^3y - xy^3$. La flèche χ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ de forme de Smith associée $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $H^7 Hol_1 G(2, 2) = \mathbb{Z}$ et $H^8 Hol_1 G(2, 2) = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}$. Le reste se démontre de manière analogue.

■

3.3.2 Le cas des $(1, 2, n+2)$ -drapeaux

Nous essayons d'étendre les résultats de la Grassmannienne quadrique aux applications dans $Gr(2, n)$. Nous généralisons le lemme 3.3.1 d'abord

Lemme 3.3.7 *Nous avons l'isomorphisme d'algèbre*

$$H^* Fl(1, 2, n+2) = \mathbb{Z}[x, y] / \left(\sum_{i+j=n+1} x^i y^j, x^{n+2} = 0 = y^{n+2} \right)$$

PREUVE : $H^* Fl(1, 2, n+2) = \mathbb{Z}[x, y, z_i] / I$ où les relations dans I sont données au terme des éléments homogènes de l'équation suivante :

$$(1+x)(1+y)(1+z_1+z_2+\dots+z_n) = 1$$

à partir duquel nous obtenons les relations récursives

$$(xy) z_{k-2} + (x+y) z_k + z_k = 0, \quad \forall k > 1$$

Nous pouvons écrire ceci sous forme de matrice

$$\begin{pmatrix} z_k \\ z_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x+y) & -xy \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{k-1} \\ z_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x+y) & -xy \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k-1} \begin{pmatrix} -(x+y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Après diagonalisation, nous obtenons la puissance matricielle

$$\begin{pmatrix} -(x+y) & -xy \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{y-x} \begin{pmatrix} (-x)^{k+1} - (-y)^{k+1} & y(-x)^{k+1} - x(-y)^{k+1} \\ (-x)^k - (-y)^k & y(-x)^k - x(-y)^k \end{pmatrix}$$

à partir de laquelle, nous déduisons toutes les relations

$$z_n = (-1)^n \sum_{i+j=n} x^i y^j$$

$$z_{n+1} = 0 = -(xy) z_{n-1} - (x+y) z_n \implies \sum_{i+j=n+1} x^i y^j = 0$$

$$z_{n+2} = 0 = -(xy) z_n - (x+y) z_{n+1} \implies xy \sum_{i+j=n} x^i y^j = 0.$$

Ainsi

$$H^* Fl(1, 2, n+2) = \mathbb{Z}[x, y] / \left\{ \sum_{i+j=n+1} x^i y^j, xy \sum_{i+j=n} x^i y^j = 0 \right\}$$

Maintenant, nous avons besoin de voir que les deux idéaux

$$\left(\sum_{i+j=n+1} x^i y^j, xy \sum_{i+j=n} x^i y^j = 0 \right) \leftrightarrow \left(\sum_{i+j=n+1} x^i y^j, x^{n+2} = 0 = y^{n+2} \right)$$

sont équivalents mais ceci est immédiat.

Ensuite, nous calculons la classe d'Euler du fibré (Théorème 3.2.1)

$$\zeta(Gr(2, n)) : S^{2n-1} \longrightarrow Hol_1(G(2, n)) \longrightarrow Fl(1, 2, n+2)$$

Notons cette classe $e(\zeta(Gr(2, n)))$

Proposition 3.3.8 $e(\zeta(Gr(2, n))) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i+j=n+1} x^i y^j.$

PREUVE : D'après le Théorème 3.2.1, cette classe d'Euler correspond à la classe de Chern de plus haut degré $c_n(p_1^*(\mathcal{O}(1)) \otimes p_2^*Q^\vee)$ de $\zeta(Gr(2, n))$ et ceci peut être calculé par la formule

$$e(Gr(2, n)) = \sum_{i=0}^n c_1^i(p_1^*\mathcal{O}(1)) \cdot c_{n-i}(p_2^*Q^\vee)$$

Nous avons à déterminer les classes de Chern du pullback de Q^\vee . Une étude rapide du diagramme

$$\begin{array}{ccc} Fl(1, 2, n+2) & \xrightarrow{p_2} & Gr(2, n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BU(1) \times BU(1) \times BU(n) & \longrightarrow & BU(2) \times BU(n) \end{array}$$

montre que l'application en cohomologie $H^*(Fl(1, 2, n+2)) \longrightarrow H^*(Gr(2, n)) = \mathbb{Z}[c_1, c_2]/I$ avec I l'idéal généré par $(1 + c_1 + c_2)(1 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 + \dots + \bar{c}_n)$ est telle que

$$c_1 \longmapsto x + y$$

$$\begin{aligned}
c_2 &\longmapsto xy \\
\bar{c}_k = c_k(Q) &\longmapsto z_n = (-1)^k \sum_{i+j=k} x^i y^j
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que la multiplication $BU(2) \longrightarrow BU(1) \times BU(1)$ en cohomologie envoie $c_1 \mapsto x+y$ et $c_2 \mapsto xy$. Mais $c_k(Q^\vee) = (-1)^k \bar{c}_k(Q)$. Ainsi

$$p_2^*(c_k(Q^\vee)) = (-1)^{2k} \sum_{i+j=k} x^i y^j = \sum_{i+j=k} x^i y^j \in H^*(Fl(1, 2, n+2))$$

Pour montrer que $\mathbf{e}(Gr(2, n)) = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i+j=n+1} x^i y^j$, nous procédons par récurrence. Le cas $n = 2$ a été vérifié dans le lemme 3.3.3

$$\mathbf{e}(Gr(2, 2)) = 3x^2 + 2xy + y^2$$

Procédons inductivement

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(Gr(2, n+1)) &= c_{n+1}(Q^\vee) + \mathbf{e}(Gr(2, n)) \\
&= \sum_{i+j=n+1} x^i y^j + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i+j=n+1} x^i y^j \\
&= \sum_{i+j=n+1} x^i y^j + \sum_{i+j=n+1} i x^{i-1} y^j \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i+j=n+2} x^i y^j
\end{aligned}$$

c'est ce que nous voulons prouver.

3.3.3 Cas de $Gr(2, 3)$

Par les calculs explicites précédents pour $H^*(Fl(1, 2, n+2))$ et la classe d'Euler du fibré en sphère $\zeta(Gr(2, n))$, il est possible- en utilisant la suite de Gysin pour $Hol_1(Gr(2, n))$ - d'obtenir des calculs complets pour $H^*(Hol_1(Gr(2, n)))$ à coefficients dans un corps. Ce calcul a été déjà fait pour la Grassmannienne quadrique $Gr(2, 2)$ dans la Proposition 3.3.4. Voici un autre exemple :

Corollaire 3.3.9 *Les nombres de Betti rationnels pour $Hol_1(Gr(2, 3))$ sont les suivants :*

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
b_i	0	2	0	3	0	3	0	2	1	1	2	0	3	0	3	0	2	0	1

Nous remarquons évidemment que ces nombres de Betti satisfont à la dualité de Poincaré.

Chapitre 4

Homologie de l'espace des lacets des espaces de configurations

4.1 Introduction et constructions

Dans [18], Fadell et Husseini ont donné des estimations pour la croissance des nombres de Betti sur le corps \mathbb{Z}_2 des espaces des lacets libres sur l'espace des configurations $F(\mathbb{R}^n, k)$, pour tout n et tout k . Nous rappelons que

$$F(\mathbb{R}^n, k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}.$$

Ces calculs ont été utilisés par H. Riahi [46] pour affirmer l'existence d'orbites périodiques d'un système de type Hamiltonien (voir Introduction).

Pour le cas $k = 3$, dans [18], Fadell et Husseini démontrent la décomposition d'espaces vectoriels suivante

$$H_*(LF(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{Z}_2) \cong H_*(LS^{n-1}; \mathbb{Z}_2) \otimes H_*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1}); \mathbb{Z}_2) \quad (4.1.1)$$

Ceci est un joli résultat, mais les méthodes utilisées sont assez fastidieuses et consistent à calculer dans la suite spectrale de Serre de la fibration (voir section 4.2)

$$L(S^{n-1} \vee S^{n-1}) \longrightarrow LF(\mathbb{R}^n, 3) \longrightarrow LF(\mathbb{R}^n, 2) \simeq LS^{n-1}$$

L'objectif de ce chapitre est de donner une démonstration conceptuelle bien plus rapide de cette décomposition. L'aspect conceptuel se base sur le fait que $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est un *espace formel* sur \mathbb{Z} (voir 4.2). Ceci veut dire en particulier qu'une bonne partie de sa topologie (du moins celle qui nous intéresse) réside dans sa cohomologie, et non pas seulement dans son complexe des cochaines singulières $C^*(X)$. Le côté rapide de notre calcul s'appuie sur l'identification de la cohomologie de LX avec l'homologie de Hochschild des cochaines $C^*(X)$.

Nos méthodes s'appliquent également à la sphère S^n et nous montrons un analogue de (4.1.1) qui prend la forme

$$H^*(LF(S^n, 3)) \cong H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(LS^n)$$

pour n pair et à coefficients dans \mathbb{Z} , ou pour tout n avec coefficients dans \mathbb{Z}_2 . Dans une dernière section, nous donnons une estimation des nombres de Betti de $LF(\mathbb{R}^n, 4)$ se basant sur le complexe de Hochschild.

Soit X un CW-complexe, simplement connexe, à cohomologie de type fini. Soit (A, d) une algèbre différentielle graduée (ADG); $A = \bigoplus_{k \geq 0} A^k$ ayant une augmentation $\epsilon : A \longrightarrow \mathbb{K}$ (l'anneau ou le corps de base) et une différentielle d . On note $\bar{A} = \ker(\epsilon)$ l'idéal associé et on écrira $s\bar{A}$ la suspension de \bar{A} tel que $(s\bar{A})^q = (\bar{A})^{q+1}$.

Définition 4.1.1 “*Double bar construction*” (voir Menichi [43])

La double bar construction sur une ADG augmentée (A, d) est le complexe

$$(B(A, A, A), D) = \bigoplus_k (B_k(A, A, A), D)$$

avec $B_k(A, A, A) := A \otimes (s\bar{A} \otimes \cdots \otimes s\bar{A}) \otimes A$. On note par $a[a_1 | \cdots | a_k]a'$ les éléments $a \otimes (sa_1 \otimes \cdots \otimes sa_k) \otimes a' \in B_k(A, A, A)$. La différentielle D se décompose en deux termes $D = d_1 + d_2$ avec

$$\begin{aligned} d_1 : A \otimes T(s\bar{A}) \otimes A &\longrightarrow A \otimes T(s\bar{A}) \otimes A \\ d_1(a[a_1 | \cdots | a_n]a') &= d(a)[a_1 | a_2 | \cdots | a_k]a' \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\epsilon_i} a[a_1 | \cdots | d(a_i) | \cdots | a_k]a' \\ &\quad - (-1)^{\epsilon_k} a[a_1 | \cdots | a_k]d(a') \end{aligned}$$

avec $\epsilon_i = \deg(a) + \deg(sa_1) + \cdots + \deg(sa_i)$, et puis

$$\begin{aligned} d_2 : A \otimes T(s\bar{A}) \otimes A &\longrightarrow A \otimes T(s\bar{A}) \otimes A \\ d_2(a[a_1 | \cdots | a_k]a') &= (-1)^{\deg a} a a_1 [a_2 | \cdots | a_k]a' \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\epsilon_i} a[a_1 | \cdots | a_i a_{i+1} | \cdots | a_k]a' \\ &\quad - (-1)^{\deg |a_k| \epsilon_{k-1}} a[a_1 | \cdots | a_{k-1}]a_k a' \end{aligned}$$

Le complexe $B(A, A, A)$ est un A -module à droite et à gauche, quasi-isomorphe à A en tant que A -bimodule. On dénotera comme d'habitude A^{op} l'algèbre opposée à A .

Définition 4.1.2 Le complexe de Hochschild $\mathbb{B}_*(A)$ est

$$\mathbb{B}_*(A) := A \otimes T(s\bar{A}) = A \otimes_{A \otimes A^{op}} B(A, A, A)$$

et la différentielle D est aussi la somme de d_1 (différentielle interne) et d_2 (différentielle externe) données par

$$\begin{aligned} d_1(a[a_1|\cdots|a_k]) &= d(a)[a_1|a_2|\cdots|a_k] + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\epsilon_i} a[a_1|\cdots|d(a_i)|\cdots|a_k] \\ d_2(a[a_1|\cdots|a_k]) &= (-1)^{\deg a} aa_1[a_2|\cdots|a_k] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\epsilon_i} a[a_1|\cdots|a_i a_{i+1}|\cdots|a_k] \\ &\quad - (-1)^{\deg|a_k|\epsilon_{k-1}} a_k a[a_1|\cdots|a_{k-1}] \end{aligned}$$

L'homologie de Hochschild, notée $HH_*(A)$, est l'homologie du complexe $\mathbb{B}_*(A)$.

Le théorème suivant est essentiel pour le reste de notre travail et il est dû à plusieurs auteurs (Burghelca[8], Jones, Goodwillie[22]).

Théorème 4.1.3 *Soit X un espace 1-connexe pointé. Alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels $H^*(LX; \mathbb{K}) \cong HH_*(C^*(X; \mathbb{K}))$, où $C^*(X; \mathbb{K})$ sont les cochaines singulières de X à coefficients dans \mathbb{K} .*

En fait, cet isomorphisme est un isomorphisme d'algèbres comme l'ont montré Ndombol-Thomas, Menichi et Idrissi.

En général, il est très difficile de travailler avec les cochaines singulières dans le complexe de Hochschild. Pour cela, on cherche à travailler avec les espaces formels pour simplifier les calculs.

Définition 4.1.4 *Soit \mathbb{A} un anneau commutatif. Un espace X est dit \mathbb{A} -formel s'il existe une algèbre différentielle graduée (A, d) qui est quasi-isomorphe en tant que ADG à la fois à $C^*(X; \mathbb{A})$ avec sa différentielle usuelle δ et à $(H^*(X; \mathbb{A}), 0)$; i.e.*

$$(C^*(X), \delta) \xleftarrow{\text{quasi-iso}} (A, d) \xrightarrow{\text{quasi-iso}} (H^*(X), 0)$$

C'est un résultat standard qu'un quasi-isomorphisme de ADG $(A, d) \xrightarrow{\cong} (A', d')$ induit un isomorphisme $HH_*(A; \mathbb{A}) \cong HH_*(A'; \mathbb{A})$. La \mathbb{A} -formalité de X implique alors immédiatement que

$$H^*(LX; \mathbb{K}) \cong HH_*(H^*(X; \mathbb{K}))$$

en tant qu'espaces vectoriels. Dans ce cas, le calcul dans le complexe de Hochschild se simplifie grandement puisque la différentielle interne d_1 est nulle.

Nous aurons également besoin du critère de formalité très utile suivant.

Théorème 4.1.5 *Pour tout espace X , 1-connexe, à cohomologie de type fini dans un corps \mathbb{A} , ou dans $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. Si cette cohomologie est sans torsion, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- X est \mathbb{A} -formel.

– Le modèle d'Adams-Hilton $(A(X), d_X)$ admet une différentielle purement quadratique.

Nous rappelons que le modèle d'Adams-Hilton $(A(X), d_X)$ est un modèle pour les chaînes sur ΩX , X simplement connexe. Plus précisément, soit $A(X)$ l'algèbre $Ts^{-1}\tilde{H}_*(X; \mathbb{A})$, où s est l'opérateur de suspension. Si $\{b_0, b_1, \dots\}$ est une base de $H_*(X; \mathbb{A})$, alors $A(X)$ est l'algèbre associative libre engendrée par les $a_i = s^{-1}b_i$. La différentielle d_X est obtenue comme suit

$$d_X(a_i) = d_c(a_i) + \Omega \quad , \quad \Omega \in T^{\geq 3}(A)$$

où d_c est la différentielle de la cobar construction, et $T^{\geq 3}(A)$ veut dire la filtration des termes s'écrivant comme somme de produits ayant au moins 3 facteurs dans $A(X)$ (voir [17], Lemme 1.4.2). La partie quadratique est le terme de la différentielle qui s'écrit sous la forme

$$d_q(a_i) = \sum c_{ijl} a_j \otimes a_l$$

Le Théorème 4.1.5 pour $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ est énoncé et démontré dans [17].

Corollaire 4.1.6 *Les sphères et les wedges des sphères sont des espaces formels sur \mathbb{Z} et sur tout corps.*

PREUVE : La preuve est évidente pour S^n si $n \geq 2$ en vue du paragraphe qui précède. Par contre et comme le cercle S^1 n'est pas 1-connexe, le théorème 4.1.5 ne s'applique pas directement. Mais ce cas peut être traité avec d'autres méthodes et nous renvoyons à [43] par exemple. ■

Exemple 4.1.7 Calculons les nombres de Betti, modulo 2, dans le cas de LS^n . Rappelons que $H^*(S^n) = \Lambda(a)$, l'algèbre extérieure sur a . Dans le complexe de Hochschild, nous aurons un produit tensoriel sur une seule classe, et les classes qui apparaissent dans la bar construction sont de la forme :

$$\begin{aligned} [a|\cdots|a] &\in A \otimes T(s\bar{A}) \\ a[a|\cdots|a] &\in A \otimes T(s\bar{A}) \end{aligned}$$

D'autre part, ces classes sont des cycles car

$$\begin{aligned} d_2([a|\cdots|a]) &= a[a|\cdots|a] + \sum [a|\cdots|a^2|\cdots|a] + a[a|\cdots|a] = 0 \\ d_2(a[a|\cdots|a]) &= a^2[a|\cdots|a] + \sum [a|\cdots|a^2|\cdots|a] + a^2[a|\cdots|a] = 0 \end{aligned}$$

Ces classes ne peuvent pas être des bords, et donc elles forment des classes d'homologie de Hochschild dont la première est de degré $m(n-1)$ et la seconde de degré $m(n-1)+1$ pour tout m dans \mathbb{Z} . D'où la série de Poincaré bien connue

$$P(LS^n; \mathbb{Z}_2) = 1 + (1+z) \sum_{m \geq 1} z^{m(n-1)}$$

Remarque 4.1.8 Rationnellement, il s'avère que $F(\mathbb{R}^n, k)$ est formel pour tout n et pour tout k . Ceci est un important et difficile résultat de Kontsevich. Ceci implique en particulier dans notre cas que

$$H^*(LF(\mathbb{R}^n, k); \mathbb{Q}) \cong HH_*(H^*(F(\mathbb{R}^n, k); \mathbb{Q}))$$

4.2 L'espace de lacets libres de l'espace de configurations de trois points dans \mathbb{R}^n

L'espace de configurations $F(\mathbb{R}^n, 3)$ a été amplement étudié par Massey [41]. Dans le cas où $n = 2$ ou 4 , \mathbb{R}^n est une algèbre à division et $\mathbb{R}^n - \{0\}$ est un groupe. Dans ce cas, nous avons des équivalences

$$F(\mathbb{R}^n, 3) \cong \mathbb{R}^n \times F(\mathbb{R}^n - \{0\}, 2) \cong \mathbb{R}^n - \{0\} \times (\mathbb{R}^n - \{0, 1\})$$

Chacune de ces équivalences est un cas particulier du fait que, lorsque G est un groupe topologique avec identité $\{e\}$, $F(G, k) \cong G \times F(G - \{e\}, k - 1)$ via l'application qui à $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, (x_2x_1^{-1}, \dots, x_kx_1^{-1}))$. Pour le cas de \mathbb{R}^n , nous avons donc l'équivalence

$$F(\mathbb{R}^n, 3) \simeq S^{n-1} \times (S^{n-1} \vee S^{n-1}), \quad n = 2, 4$$

Ceci reste vrai pour $n = 8$, bien que $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ne soit pas un groupe. Pour n général, il existe toujours une fibration du type Fadell-Neuwirth

$$S^{n-1} \vee S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n - Q_2 \longrightarrow F(\mathbb{R}^n, 3) \longrightarrow F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$$

mais cette fibration n'est pas toujours triviale [18]. Ici Q_2 veut dire un ensemble à deux points.

Nous allons montrer dans cette section que $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est \mathbb{Z} -formel et utiliser ce résultat pour calculer complètement l'homologie de $LF(\mathbb{R}^n, 3)$.

Proposition 4.2.1 $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est \mathbb{Z} -formel.

PREUVE : Le cas $n = 2$ est immédiat puisque $F(\mathbb{R}^2, 3) \simeq S^1 \times (S^1 \vee S^1)$ comme déjà expliqué, et puisque le produit de deux espaces formels est formel. Nous pouvons donc supposer que $n \geq 3$. Dans ce cas $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est simplement connexe. La cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est donnée par

$$H^*(F(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[a, b, c]_{/(a^2=b^2=c^2=0, ab+bc+ca=0)} \quad (4.2.1)$$

Le degré des générateurs est $n - 1$, et l'idéal des relations est engendré par les relations de la sphère (carré nul) et la "relation d'Arnold" (voir [12, 18]). Evidemment nous avons également les relations usuelles de commutativité graduée. Nous écrirons additivement cette cohomologie

avec ses générateurs sous la forme

$$H^*(F(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\{a_1, a_2, a_3\} & \text{degré } n-1 \\ \mathbb{Z}\{b_1, b_2\} & \text{degré } 2n-2 \end{cases}$$

Le modèle d'Adams-Hilton de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ est alors donné par $T(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{b}_1, \bar{b}_2; d)$, ($\text{deg}(\bar{x}) = \text{deg}(x) - 1$) avec $d(\bar{a}_1) = d(\bar{a}_2) = d(\bar{a}_3) = 0$. D'autre part et pour des raisons évidentes de degré, la différentielle de \bar{b}_1 et \bar{b}_2 ne peut être que quadratique. L'espace n'ayant pas de torsion dans son homologie, nous invoquons le Théorème 4.1.5 pour établir sa formalité. ■

Théorème 4.2.2 *Il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels*

$$H^*(LF(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{K}) \cong H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1}))$$

valable pour tout n si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ et pour n pair si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

PREUVE : Nous traitons tout d'abord le cas modulo 2. On commence par construire un isomorphisme entre $H^*(F(\mathbb{R}^n, 3))$ et $H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})$. La cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ modulo 2 est donnée par la même expression que dans (4.2.1). D'autre part, $H^*(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2[a]_{/a^2=0}$ et $H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1}) = \mathbb{Z}_2[a, b]_{/a^2=b^2=0}$. On peut alors construire le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1}) & \longrightarrow & H^*F(\mathbb{R}^n, 3) \\ \mathbb{Z}_2[c]_{/(c^2)} \otimes \mathbb{Z}_2[a, b]_{/(a^2, b^2, ab)} & \longmapsto & \mathbb{Z}_2[a, b, c]_{/(a^2, b^2, c^2, ab+bc+ca)} \\ c & \longmapsto & c \\ a & \longmapsto & a + c \\ b & \longmapsto & b + c \end{array}$$

Cette flèche est bien définie car $ab = 0$ s'envoie à $(a+c)(b+c)$ qui est également nulle par la relation d'Arnold. Ce morphisme est un morphisme d'algèbre et c'est clairement un isomorphisme. Nous pouvons donc remplacer dans le complexe de Hochschild

$$\begin{aligned} H^*(LF(\mathbb{R}^n, 3)) &\cong HH_*(H^*(F(\mathbb{R}^n, 3))) \\ &\cong HH_*(H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})) \\ &\cong HH_*(H^*(S^{n-1})) \otimes HH_*(H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})) \\ &\cong H^*(L(S^{n-1})) \otimes H^*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1})) \end{aligned}$$

en utilisant, pour obtenir le dernier isomorphisme, la formalité de la sphère et du wedge (Corollaire 4.1.6). En travaillant avec des coefficients rationnels, et pour n pair, on peut vérifier que le

morphisme

$$\begin{aligned} \psi : H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1}) &\longrightarrow H^*F(\mathbb{R}^n, 3) \\ c &\longmapsto c \\ a &\longmapsto a - c \\ b &\longmapsto b - c \end{aligned}$$

est bien défini et donne également un isomorphisme d'algèbre. En effet, c est le générateur de $H^*(S^{n-1})$ et a et b sont les générateurs de $H^*(S^{n-1} \vee S^{n-1})$. Nous vérifions que $ab = 0$ dans le wedge s'envoie à $(a - c)(b - c) = ab - ac - bc$, et que ceci est égal à $ab + ca + bc = 0$ car $\deg(a) = \deg(b) = \deg(c) = n - 1$ est impair. Notons que sur \mathbb{Q} , on aurait pu également appliquer le théorème de Sullivan-Vigué, Théorème 1.5.2. \blacksquare

Remarque 4.2.3 Notons que dans le cas où n est impair, la flèche ψ n'est pas bien définie en tant que morphisme d'algèbre, et le théorème dans ce cas n'est plus valable comme le montre d'ailleurs l'exemple suivant.

Exemple 4.2.4 Dans cet exemple, nous montrons que le théorème 4.2.2 ci-dessus n'est plus vrai sur \mathbb{Q} et pour n impair. Pour cela, reprenons le complexe de Hochschild et calculons le nombre de classes en degré $2(2n - 1)$. Les classes dans le complexe de Hochschild sont : $[a|a]$, $[a|b]$, $[b|a]$, $[a|c]$, $[c|a]$, $[b|b]$, $[b|c]$, $[c|b]$ et $[c|c]$. Seules $[a|a]$, $[b|b]$ et $[c|c]$ sont des classes d'homologies en plus de la classe qui est la somme de ces trois classes. Donc le nombre total des classes en degré $2(2n - 1)$ est 4. D'autre part, la série de Poincaré du wedge de deux sphères de degrés pairs est donnée dans [31] par :

$$\begin{aligned} P(LS^{2n}; \mathbb{Q}) &= 1 + (1 + z)(z^{2n-1} + z^{3(2n-1)} + \dots) \\ P(L(S^{2n} \vee S^{2n}); \mathbb{Q}) &= 1 + (1 + z)\left(\sum_{m \geq 1} a_m z^{m(2n-1)}\right) \end{aligned}$$

avec $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$ ce qui donne que le nombre de classes de degré $2(2n - 1)$ est $a_1 + a_2 = 5$. Le nombre de classes de degré $2(n - 1)$ dans le produit des séries de Poincaré de LS^{n-1} et $L(S^{n-1} \vee S^{n-1})$ (qui est égal à 5) n'est pas égal au nombre de classes de même degré dans le modèle rationnel de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ (qui est égal à 4). Nous n'avons pas un isomorphisme rationnellement entre $H^*(LF(\mathbb{R}^n, 3); \mathbb{Q})$ et $H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(L(S^{n-1} \vee S^{n-1}))$ pour n impair.

4.3 L'espace de lacets libres de l'espace de configurations de trois points dans une Sphère

Dans cette section, nous proposons un calcul de l'homologie des espaces des lacets sur l'espace de configuration de trois points sur une sphère $LF(S^n, 3)$. Nous commençons par décrire

$F(S^n, 3)$. Nous avons un fibré

$$F(\mathbb{R}^n, 2) \longrightarrow F(S^n, 3) \xrightarrow{p_1} S^n$$

qui est obtenu comme suit : on projette $(x_1, x_2, x_3) \in F(S^n, 3)$ sur la première coordonnée x_1 . La fibre au dessus d'un point est identifiée à $F(S^n - \{p\}, 2) \cong F(\mathbb{R}^n, 2) \simeq S^{n-1}$. La projection p_1 a une structure de fibré d'après un résultat général de Fadell-Neuwirth.

Définition 4.3.1 Soient $E \longrightarrow B$ et $E' \longrightarrow B$ deux fibrés sur B . On dit que E' est un rétracte fiberwise de E s'il existe des flèches sur B

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{r} & E' \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & B & & \end{array}$$

tel que $r \circ i = Id_{E'}$

Lemme 4.3.2 Soit τS^n le fibré tangent en sphère sur S^n . Il existe une flèche de fibrés

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\simeq} & F(\mathbb{R}^n, 2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau S^n & \xrightarrow{f} & F(S^n, 3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n & \xrightarrow{=} & S^n \end{array}$$

qui est un rétracte par déformation fiberwise.

PREUVE : Nous identifions $\tau S^n = \{(x, y) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot y = 0\}$ avec la variété de Stiefel de deux vecteurs orthogonaux dans \mathbb{R}^{n+1} . On peut alors écrire explicitement la flèche $f : \tau S^n \longrightarrow F_3(S^n)$, $(x, y) \mapsto (x, y, -y)$. Cette flèche est au dessus de S^n . Etant donné $(x, y, z) \in F(S^n, 3)$, la projection stéréographique st_x de centre x identifie $S^n - \{x\}$ avec un hyperplan $V_x \subset \mathbb{R}^{n+1}$, la paire (y, z) avec $(st_x(y), st_x(z)) \in F(V_x, 2)$, et la sphère unité du tangent en x avec la sphère unité de V_x .

Considérons l'inclusion $S^{n-1} \hookrightarrow F(\mathbb{R}^n, 2)$, $y \mapsto (y, -y)$ qui est un rétracte par déformation. Cette rétraction F_t est donnée par la composée de deux homotopies

$$f_t(a, b) = \left(a - t \frac{a+b}{2}, b - t \frac{a+b}{2} \right) \quad , \quad t \in I$$

suivie par

$$g_t(x, y) = \left((1-t)x + t \frac{x}{|x|}, (1-t)y + t \frac{y}{|y|} \right) \quad , \quad t \in I$$

L'homotopie g_t est bien définie sur l'image de f_1 . Notons qu'à la fin de la déformation nous obtenons $F_1(a, b)$ qui est une paire de points diamétralement opposés dans la sphère S^{n-1} . De même et pour tout hyperplan V_x , nous avons une rétraction par déformation également notée F_t de $F(V_x, 2)$ dans sa sphère unité. Nous pouvons alors écrire l'homotopie $H : F(S^n, 3) \times I \longrightarrow F(S^n, 3)$;

$$H_t(x, y, z) = (x, F_t(st_x(y), st_x(z)))$$

Cette homotopie est clairement fiberwise. Pour $t = 1$, $(x, F_1(st_x(y), st_x(z)))$ s'identifie à un unique point de la forme $(x, a, -a)$ avec a dans la sphère unité de V_x et donc à un élément de τS^n , donnant ainsi un retracte de l'application f . La démonstration est complète. ■

Pour calculer la cohomologie de $F(S^n, 3)$, il suffit donc de calculer $H^*(\tau S^n)$.

Proposition 4.3.3 *Pour n impair, nous avons un isomorphisme d'anneaux entre $H^*(F(S^n, 3))$ et $H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^n)$ à coefficients dans un corps \mathbb{K} . Ce résultat reste valable pour n pair et à coefficients dans \mathbb{Z}_2 .*

PREUVE : Nous avons identifié $F(S^n, 3)$ à homotopie près avec le fibré unitaire en sphères de S^n . Dans la suite spectrale de Serre associée, il existe une différentielle d_n qui envoie la classe d'orientation $[S^n]$ dans la base à la classe $\chi(S^n)[S^{n-1}]$ dans la fibre, avec $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Ceci est une conséquence connue de la suite de Gysin (Mimura-Toda [44] Theorem 3.5 Remarque 3.6 p. 118). Lorsque n est impair, d_n est nulle et la suite spectrale dégénère totalement. Mais cette suite spectrale est une suite spectrale d'algèbres et il n'y a aucune extension possible au terme E_2 . Il s'ensuit que ce terme E_2 donne la cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, 3)$ en tant qu'algèbre. Le même argument s'applique mot pour mot si n est pair, et la caractéristique du corps est divisible par 2. ■

Pour les mêmes raisons que pour le cas de $F(\mathbb{R}^n, 3)$, l'espace de configurations sur la sphère $F(S^n, 3)$ est formel et nous aboutissons au résultat suivant.

Théorème 4.3.4 *$F(S^n, 3)$ est \mathbb{Z} -formel et on a l'isomorphisme*

$$H^*(LF(S^n, 3)) \cong H^*(LS^{n-1}) \otimes H^*(LS^n)$$

valable pour n impair et coefficients dans \mathbb{Z} , ou pour n pair et coefficients dans \mathbb{Z}_2 .

PREUVE : Le modèle d'Adams-Hilton de $F(S^n, 3)$ est une algèbre tensorielle $T(a_{n-1}, b_n, c_{2n-1})$ avec une différentielle d qui est nécessairement quadratique pour des raisons de degré. En appliquant alors le Théorème 4.1.5, on voit que $F(S^n, 3)$ est \mathbb{Z} -formel. On peut donc considérer comme précédemment la suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} H^*(LF(S^n, 3)) &\cong HH_*(H^*(F(S^n, 3))) \\ &\cong HH_*(H^*(S^{n-1}) \otimes H^*(S^n)) \quad (\text{voir proposition 4.3.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cong HH_*(H^*(S^{n-1})) \otimes HH_*(H^*(S^n)) \\ &\cong H^*(L(S^{n-1})) \otimes H^*(L(S^n)) \end{aligned}$$

et le résultat est démontré. ■

Remarque 4.3.5 Notons que le splitting dans le Théorème 4.3.4 est également un résultat qui peut être déduit des calculs de Chataur et Leborgne (voir [10]).

Remarque 4.3.6 Les arguments de la preuve du Théorème 4.3.4 donnent le résultat plus général suivant : si $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ est une fibration d'espaces 1-connexes et \mathbb{A} -formels, et si $H^*(E) \cong H^*(F) \otimes H^*(B)$, alors toujours avec coefficients dans \mathbb{A}

$$H^*(LE) \cong H^*(LF) \otimes H^*(LB)$$

4.4 Cohomologie de $LF(\mathbb{R}^n, 4)$ à Coefficients dans \mathbb{Z}_2

La cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, k)$ pour tout n et tout k a été calculée par Fred Cohen [12], et une référence détaillée est [18]. Nous pouvons expliciter le cas de 4 points

$$H^*(F(\mathbb{R}^n, 4); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[a, b, c, d, e, f]_I$$

où I est l'idéal donné par les relations sphériques $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 0$ et les relations d'Arnold $ab + da + bd = 0$, $ac + ea + ce = 0$, $cb + fc + bf = 0$ et $ed + fe + df = 0$.

Utilisons de nouveau le complexe de Hochschild sur les générateurs de la cohomologie de $F(\mathbb{R}^n, 4)$. Le complexe de Hochschild est donc $A \otimes T(s\bar{A})$, $A := H^*(F(\mathbb{R}^n, 4); \mathbb{Z}_2)$. Nous commençons par calculer le nombre de classes de degré $k(n-2)$. Ce sont les classes de la forme : $[x_1 | \cdots | x_k] \in T(s\bar{A}) \subset A \otimes T(s\bar{A})$. Ces classes sont de la forme : $[x_1 | \cdots | x_1]$ ou bien $\sum [x_1 | \cdots | x_2 | \cdots | x_1]$ où les termes de la somme sont toutes les permutations possibles de placer x_2 entre les x_1 . Ensuite on place deux termes dans les x_1 ainsi de suite.

Par exemple : pour $k = 2$ les classes sont :

$$[a|a], [a|b] + [b|a], [a|c] + [c|a], \dots, [e|f] + [f|e], [f|f]$$

et le nombre des classes est 21. Nous vérifions que toutes ces classes sont des cycles :

$$d([a|b] + [b|a]) = a[b] + [ab] + b[a] + b[a] + [ba] + a[b] = 0$$

D'autre part, ces classes ne peuvent pas être des bords puisque, dans le complexe de Hochschild, nous n'avons pas de classe de degré $k(n-2) - 1$. Le nombre total de ces classes en chaque degré $k(n-2)$ est donné par la formule suivante :

$$b_{k(n-2)} \geq C_{5+k}^5$$

Bibliographie

- [1] J. Adams, P. Griffiths, *Topics in algebraic and analytic geometry*, Mathematical Notes, Princeton press (1974).
- [2] A. Bahri, P. H. Rabinowitz, *A Minimax Method for a Class of Hamiltonian Systems with Singular Potentials*, Journal of Functional Analysis 82, 412-428 (1989).
- [3] P. Baum, *Cohomology of homogeneous spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 531–533.
- [4] Boyer, C. P. ; Hurtubise, Mann, B. M. ; J. C. ; Milgram, R. J. *The topology of the space of rational maps into generalized flag manifolds*. Acta Math. 173 (1994), no. 1, 61–101.
- [5] C. Boyer, B. Mann, *Monopoles, Non-Linear σ Models, and Two-Fold Loop Spaces*, Commun. Math. Phys. 115, 571-594 (1988)
- [6] C. Boyer, B. Mann, *Homology Operations on Instantons*, J. Differential Geometry, 28 (1988) 423-465
- [7] A.S. Buch, *Quantum cohomology of grassmannians*, Compositio Math. **137** (2003), 227–235.
- [8] Burghelea, D. ; Fiedorowicz, Z. *Cyclic homology and algebraic K-theory of spaces. II*. Topology 25 (1986), no. 3, 303–317.
- [9] Brown, Edgar H.jun. ; Szczarba, Robert H. *On the rational homotopy type of function spaces*. Trans. Am. Math. Soc. 349, No.12, 4931-4951 (1997)
- [10] Chataur, D ; Le Borgne, J-F *Homology of spaces of regular loops in the sphere*. Algebr. Geom. Topol. 9 (2009), no. 2, 935–977.
- [11] J.M. Clark, *The consistent selection of local coordinates in linear system identification*, Proceedings of the joint automatic control conference (1976), 576–580.
- [12] F. Cohen, *Homology of C_{n+1} -spaces*, Lecture Notes in Math. **533**.
- [13] F.R. Cohen, R.L. Cohen, B.M. Mann, R.J. Milgram, *The topology of rational functions and divisors of surfaces*, Acta. Math., **166** (1991), 163-221.
- [14] R. Cohen, E. Lupercio, G. Segal, *Holomorphic spheres in loop groups and Bott periodicity*, Asian J. Math. **3** (1999), no. 4, 801–818.
- [15] D.F. Delchamps, *Global structure of families of multivariable linear systems with an application to identification*, Math. Systems Theory **18** (1985), 329–380.

-
- [16] Ehresmann, Charles, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*. Ann. of Math. (2) 35 (1934), no. 2, 396–443.
- [17] M. El Haouari, *p-formalité des espaces*, J. Pure Appl. Algebra 78 (1992), no. 1, 27–47.
- [18] E.R. Fadell, S.Y. Husseini, *Geometry and topology of configuration spaces*, Springer monograph in mathematics (2000).
- [19] W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, 3rd Series, Springer (1998).
- [20] M. Guest, *Some realtionships between homotopy theory and differential geometry*, Ph.D thesis, Oxford University (1981).
- [21] H. Glover, W. Homer, *Endomorphisms of the cohomology of finite grassmann manifolds*, Springer LNM **657** (1977), 170–193.
- [22] T.G. Goodwillie, *Cyclic homology, derivations, and the free loop space* Topology 24 (1985), no. 2, 187–215.
- [23] M. Gilmore, *Complex Stiefel manifolds, some homotopy groups and vector fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 630–633.
- [24] J. Havlicek, *On spaces of holomorphic maps from two copies of the riemann sphere to complex grassmannians*, Thesis Stanford 1992.
- [25] R. Hermann, C. Martin, *Applications of algebraic geometry to systems theory : the McMillan degree and kronecker indices of transfer functions as topological and holomorphic system invariants*, SIAM J. Control and Optimization **16**, 5, (1978), 743–755.
- [26] K. Hess, *Rational homotopy theory : a brief introduction*, Interactions between homotopy theory and algebra, Contemp. Math., **436** (2007), 175–202.
- [27] D. Husemoller, *Fiber bundles*, Springer graduate texts in mathematics, 3rd edition.
- [28] D. Hurtubise, *Spaces of holomorphic maps from \mathbb{P}^1 to complex grassmann manifolds*, [http ://www.personal.psu.edu/faculty/d/x/dxh40/pub.html](http://www.personal.psu.edu/faculty/d/x/dxh40/pub.html)
- [29] D.L. Johnson, *Presentation of Groups*, London Math. Society Lecture Notes **22**.
- [30] J.D.S. Jones and J. McCleary, *Hochschild homology, Cyclic homology and the Cobar construction*, University of Warwick and Vassar college, the memory of J.F. Adams
- [31] S. Kallel ; D. Sjerve, *On the topology of fibrations with section and free loop spaces*. Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2001), no. 2, 419–442.
- [32] S. Kallel, *Symmetric products, duality and homological dimension of configuration spaces*, Geometry and Topology Monographs **13** (2008), 499–527.
- [33] S. Kallel, P. Salvatore, *Rational maps and string topology*, Geometry and Topology **10** (2006), 2001–2028.
- [34] S. Kallel, P. Salvatore, W. Ben Hammouda, *The Space of Linear Maps into a Grassmann Manifold*, preprint soumis pour publication.

-
- [35] S. Kallel, S. Zanos, *Homological splittings in topology and geometry*, work in progress.
- [36] F. Kirwan, *On spaces of maps from Riemann surfaces to Grassmannians and applications to the cohomology of moduli of vector bundles*. Ark. Mat. 24 (1986), no. 2, 221–275.
- [37] J. Kollar, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 32, Springer Verlag (1996).
- [38] K. Kuribayashi, *On the mod- p cohomology of the space of free loops on the Grassman and Stiefel manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **43**, no. 2 (1991), 331–346.
- [39] B. Mann, R.J. Milgram, *Some spaces of holomorphic maps to complex Grassmann manifolds*, J. Diff. Geometry **33** (1991), 301–324.
- [40] B. Mann, R.J. Milgram, *The topology of rational maps to Grassmannians and a homotopy theoretic proof of the kirwan stability theorem*, Contemp. Math. **146** (1993), 251–275.
- [41] W. S. Massey, *The homotopy type of certain configuration spaces*. Papers in honor of Jose Adem, Bol. Soc. Mat. Mexicana (2) 37 (1992), no. 1-2, 355–365.
- [42] J.P. May, *The geometry of iterated loop spaces*. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972. viii+175 pp.
- [43] L. Menichi, *The cohomology ring of free loop spaces*, Homology Homotopy Appl. 3 (2001), no. 1, 193–224.
- [44] M. Mimura, H. Toda, *Topology of Lie groups I and II*, Translations of mathematical monographs **91**, AMS (1991).
- [45] K.H. Paranjape, V. Srinivas, *Continuous self-maps of quadric hypersurfaces*, Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989), Hindustan Delhi (1993) 135–148.
- [46] H. Riahi, *Periodic orbits of n -body type problems : the fixed period case.*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), no. 12, 4663–4685.
- [47] Vigué-Poirrier, Micheline; Sullivan, Dennis *The homology theory of the closed geodesic problem*. J. Differential Geometry 11 (1976), no. 4, 633–644.
- [48] G. Segal, *The topology of rational functions*, Acta Math. **143** (1979), 39–72.
- [49] K. E. Smith, L. Kahanpää, P. Kekäläinen, W. Traves, *An invitation to algebraic geometry*, Springer Universitext.
- [50] N. Steenrod, *The topology of fiber bundles*, Princeton University Press (1951).
- [51] H. Tamvakis, *Gromov-Witten invariants and quantum cohomology of Grassmannians*, Trends Math., Birkhauser (2005), 271–297.
- [52] A. Yamaguchi, *The homology of double loop space of complex stiefel manifolds*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **22** (1986), 767–800.
- [53] G. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, volume 71, Springer GTM (1978).