UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE
LABORATOIRE PAUL PAINLEVÉ

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : **Mathématiques Pures**

Présentée par : **Orlando CAU**

Composantes de l'espace de Hurwitz

Soutenue le 9 décembre 2011 devant le jury constitué de :

Anna CADORET	(Ecole Polytechnique)	
Pierre DEBES	(Université Lille 1)	directeur de thèse
Michael DETTWEILER	(Universität Bayreuth)	
Jean-Claude DOUAI	(Université Lille 1)	
Michel EMSALEM	(Université Lille 1)	directeur de thèse
Pierre LOCHAK	(Université Paris 6)	rapporteur
Stephan WEWERS	(Universität Hannover)	rapporteur

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Thèse de Orlando Cau, Lille 1, 2011

Composantes de l'espace de Hurwitz

Cau Orlando

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Résumé

Le contexte de cette thèse est le problème de la théorie inverse de Galois et en particulier son approche moderne qui consiste à trouver des points rationnels sur des espaces de modules de G-revêtements. Nous nous intéressons à un problème préliminaire à cette approche : celui de trouver des composantes irréductibles des espaces de Hurwitz définies sur un petit corps de nombres. Nos résultats permettent de construire, quel que soit le groupe fini, de telles composantes définies sur le corps des nombres rationnels en gardant une grande souplesse quant au type de ramification des revêtements appartenant à la composante. Ces composantes sont obtenues par déformation de certains revêtements du bord des espaces de modules. Le second thème de cette thèse est une version profinie des constructions ; on étudie des tours d'espaces de Hurwitz et en particulier la tour modulaire. Nous obtenons ainsi des systèmes projectifs de composantes de la tour modulaire définis sur le corps des nombres rationnels.

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Abstract

The context of this thesis is the inverse problem of Galois theory and in particular the modern approach which consists in finding rational points on moduli spaces of G-covers. More specifically we are interested in the irreducible components of Hurwitz spaces and their field of definition. Our results allow to construct, for any finite group, such components defined over the field of rational numbers. Our method offers more flexibility as to the ramification type of the covers. These components are obtained by deformation of certain covers in the border of the moduli spaces. A second part is a profinite version of the construction : we study towers of Hurwitz spaces and in particular modular towers. Our constructions are compatible along a modular tower ; we obtain projective systems of components defined over the field of rational numbers.

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Table des matières

1 Préliminaires **5**
1.1 Les problèmes inverses de Galois 5
1.1.1 Forme arithmétique 5
1.1.2 Théorème d'irréductibilité de Hilbert & problème inverse de Galois régulier arithmétique 6
1.1.3 Revêtement algébrique sur un corps et forme régulière géométrique du problème inverse de Galois 7
1.2 Le problème inverse de Galois régulier : un problème de descente 8
1.2.1 Le problème inverse de Galois régulier sur un corps algébriquement clos 8
1.2.2 Action de Galois sur les revêtements, corps de définition et corps de modules 10
1.3 Espace de Hurwitz 15
1.3.1 Espace de Hurwitz et description combinatoire de ses composantes 15
1.3.2 Construction de composantes 17

2 Delta-composantes de l'espace de Hurwitz **20**
2.1 Définitions, premières propriétés et exemples 20
2.2 Contrôle du corps de définition d'une Δ-composante 23
2.2.1 Résultat principal 23
2.2.2 Compactification de Wewers de l'espace de Hurwitz et Δ-revêtements admissibles. 24
2.2.3 Démonstration du théorème 2.2.5 27

3 Structures de dégénérescence complètes et applications **34**
3.1 Autour du nombre de Δ-composantes 34
3.1.1 Critère d'irréductibilité de $\mathrm{ni}(\Delta)$ 34
3.1.2 Majoration du nombre de Δ-composantes 39

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

3.1.3 Démonstration du théorème 3.1.9 40
3.1.4 Un autre critère d'irréductibilité 42
3.2 Δ-composantes et tour modulaire 45
3.2.1 Δ-revêtement et morphisme de Frattini 45
3.2.2 Tour modulaire 48

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Introduction

Ce travail est consacré à l'étude géométrique et arithmétique des espaces de Hurwitz. Etant donnés un groupe fini G et un entier r, l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$ est l'espace de modules grossier pour la catégorie des G-revêtements de groupe G de la droite projective à r points de branchement ; il s'agit d'une $\mathbb{Q}$-variété non irréductible en général.

Le *théorème d'irréductibilité de Hilbert* fournit un angle d'attaque géométrique pour aborder le *Problème Inverse de Galois*. En effet, lorsque le centre du groupe G est trivial, un $\mathbb{Q}$-point de $\mathrm{H}_r(G)$ donne par spécialisation une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe G. Un travail préliminaire à la recherche de $\mathbb{Q}$-points consiste à trouver des $\mathbb{Q}$-composantes irréductibles des espaces de Hurwitz.

Dans sa thèse [21] Wewers construit une compactification des espaces de Hurwitz ; il montre aussi comment utiliser sa compactification pour créer de nouveaux invariants, généralisant l'invariant canonique de l'inertie, pour les G-revêtements. Dans [8], Dèbes et Emsalem utilisent les méthodes de Wewers pour montrer que les composantes HM, introduites par Fried [12], sont permutées par le groupe de Galois de $\mathbb{Q}$. La méthode consiste à déformer un revêtement de type HM vers un objet plus simple : un HM-revêtement admissible. De manière rapide, il s'agit d'un assemblage connexe de revêtements cycliques à 2 points de branchement. L'image par un élément de $G_{\mathbb{Q}}$ d'un tel assemblage de revêtements reste un HM-revêtement admissible. Sous certaines conditions, ceci permet de calculer le corps de définition d'une composante HM. Nous nous proposons de généraliser la notion de revêtement HM et d'améliorer les méthodes s'y rapportant.

Soient G un groupe fini et $\mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_s)$ un s-uplet de sous-groupes de G engendrant G. Fixons un s-uplet d'entiers $(r_1, \ldots, r_s)$ et notons r leur somme. Nous définirons une application :

$$\Phi : \mathrm{Comp}(\mathrm{H}_{r_1}(G_1)) \times \cdots \times \mathrm{Comp}(\mathrm{H}_{r_s}(G_s)) \longrightarrow \mathrm{Comp}(\mathrm{H}_r(G))$$

$$(M_1, \ldots, M_s) \longmapsto M_1 \star \cdots \star M_s$$

associant une composante $M_1 \star \cdots \star M_s$ de $\mathrm{H}_r(G)$ à tout s-uplet $(M_1, \ldots, M_s)$ de

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

composantes M_i de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$ pour $i = 1, \ldots, s$. Cette composante $M_1 \star \cdots \star M_s$ sera particulièrement intéressante sous l'hypothèse suivante, dite de *complétude* du système de sous-groupes $\mathbf{G}$: quels que soient $i = 1, \ldots, s$ et $h_1, \ldots, h_s \in G$, le groupe G est engendré par les sous-groupes

$$\{G_1^{h_1}, \ldots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \ldots, G_s^{h_s}\}$$

Sous cette hypothèse, nous obtiendrons la formule suivante :

$$\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}}, (M_1 \star \cdots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \cdots \star M_s^\sigma \tag{1}$$

qui permet de comprendre l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur la composante $M_1 \star \cdots \star M_s$ en fonction de son action sur les composantes M_i. Par exemple, si les composantes $M_1, \ldots, M_s$ ont pour corps de définition $\mathbb{Q}$, *i.e* $M_i^\sigma = M_i$ pour tout $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, alors il en est de même pour la composante $M_1 \star \cdots \star M_s$. Cette formule nous permet aussi d'obtenir le théorème suivant, qui est à rapprocher du théorème de Conway-Parker, annexe de [15] :

<u>Théorème</u> 0.0.1. *Soient G un groupe fini, r un entier supérieur à 2 et n le nombre de composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$. Alors l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{nr}(G)$ contient une $\mathbb{Q}$-composante irréductible.*

Dans le cas général, la formule (1) n'est pas vérifiée ; il nous faut introduire les notions plus intrinsèques de *structure de dégénérescence* et de Δ-*composante* (section 2.1).

Une structure de dégénérescence Δ est constituée des données suivantes :

- un s-uplet $(G_1, \ldots, G_s)$ de sous-groupes de G,
- pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$, un entier r_i et une composante irréductible M_i de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$.

On notera de manière rapide

$$\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$$

ou simplement Δ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre.

Une structure de dégénérescence Δ permet de construire un sous-ensemble fermé $\mathrm{ni}(\Delta)$ de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$ (ici $r = r_1 + \cdots + r_s$) à partir des composantes M_i d'espaces de Hurwitz associées aux sous-groupes G_i de G. De plus, cette sous-variété contient la composante $M_1 \star \cdots \star M_s$. Le théorème suivant (théorème 2.2.2 dans le texte) est le plus important de ce travail. Le théorème suivant (théorème 2.2.2) dans le texte) est le plus important de ce travail.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Théorème 0.0.2. *Si on se fixe un corps de nombres $\mathbb{K}$ et $\sigma \in G_{\mathbb{K}}$, alors :*

$$\mathrm{ni}(\Delta)^{\sigma} = \mathrm{ni}(\Delta^{\sigma}) \tag{2}$$

Ici la structure Δ^{σ} est $(G, (G_i)_i, (M_i)_i^{\sigma})$.

La formule (1) ci-dessus s'obtient en utilisant la formule (2) et le théorème suivant (théorème 3.1.2 dans le texte) :

Théorème 0.0.3. *Soient G un groupe fini et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence complète. Alors la sous-variété $ni(\Delta)$ est irréductible et égale à la composante $M_1 \star \cdots \star M_s$.*

La démonstration de ce théorème s'obtient au moyen de calculs de tresses généralisant ceux de [12] et la formule (2) s'obtient en généralisant les méthodes de [8] (section 2.2).

Le premier chapitre a pour objectifs d'introduire les notions de revêtements, d'espaces de Hurwitz et de présenter le problème qui nous a conduit à étudier les composantes irréductibles des espaces de Hurwitz.

Dans le deuxième chapitre nous définirons et étudierons les notions de structure de dégénérescence et de Δ-composantes. Nous utiliserons ces notions ainsi que la compactification stable des espaces de Hurwitz pour obtenir le théorème 3.1.9.

Le dernier chapitre a pour objectif d'étudier l'irréductibilité de l'ensemble $\mathrm{ni}(\Delta)$ et d'en déduire des applications arithmétiques du théorème 3.1.9. Les méthodes que l'on utilise sont élémentaires (action du groupe de tresses). Nous obtenons plusieurs résultats. Le premier (théorème 3.1.9) est une estimation générale du corps de définition d'une Δ-composante ; celle-ci repose sur une estimation de leur nombre qui conduit au critère de complétude présenté dans cette introduction. Le deuxième est un raffinement de ce critère de complétude (corollaire 3.1.2) ; il est particulièrement performant lorsque le groupe en question est simple. On obtient par exemple le résultat suivant : l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{15}(M_{23})$ contient une composante irréductible définie sur le corps des nombres rationnels, ici M_{23} désigne le groupe de Mathieu selon la terminologie de l'$\mathbb{ATLAS}$. Nous étudierons aussi les Δ-composantes dans une tour d'espaces de Hurwitz. Nous obtenons un dernier résultat qui consiste en la construction d'une tour de composantes irréductibles dans la tour modulaire de Fried avec contrôle du corps de définition (théorème 3.2.8).

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Chapitre 1

Préliminaires

Le but de ce chapitre préliminaire est d'introduire les objets étudiés dans le cadre de cette thèse. Nous rappelons d'abord les différentes versions du problème inverse de la théorie de Galois qui est son point de départ. Nous nous concentrons rapidement vers sa forme régulière et les espaces de Hurwitz. Nous ne donnerons aucune preuve, la plupart des résultats étant très classiques et nous renvoyons à la vaste littérature du domaine. Nous terminons ce chapitre en énonçant les différents problèmes que nous étudierons.

1.1 Les problèmes inverses de Galois

1.1.1 Forme arithmétique

Historiquement, la question inverse de la théorie de Galois est posée pour le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et malgré la simplicité de son énoncé elle n'a toujours pas obtenu de réponse. Nous donnons la version sur un corps quelconque. Etant donné un corps k, il s'agit de comprendre les groupes finis qui s'obtiennent comme groupes de Galois des extensions galoisiennes $E|k$. La théorie de Galois classique montre qu'il est équivalent de comprendre quels sont les quotients finis du groupe de Galois absolu $G_k := \mathrm{Gal}(k^s|k)$ de k où k^s est une clôture séparable de k.

Donnons les deux versions équivalentes de la question principale :

(IGP$_k$)	Etant donné un groupe fini G, existe-t-il une extension galoisienne $(E\|k)$ de groupe de Galois isomorphe à G ?
(IGP$_k$)	Etant donné un groupe fini G, existe-t-il un morphisme surjectif $G_k \twoheadrightarrow G$?

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Remarquons que le problème inverse de Galois n'est pas stable par changement de corps ; par exemple une réponse positive à $\mathrm{IGP}_{\mathbb{Q}}$ n'entraine pas, automatiquement, une réponse positive à IGP_k où k est un corps de nombres. Chaque corps doit donc être traité de manière indépendante. Si $k = \mathbb{C}$ (ou un corps algébriquement clos quelconque) le problème est trivial puisqu'il n'existe pas d'extension algébrique non triviale de $\mathbb{C}$. Si $k = \mathbb{R}$ alors il existe un unique groupe de Galois sur $\mathbb{R}$, le groupe cyclique d'ordre 2. Dans le cas du corps des rationnels $k = \mathbb{Q}$, le problème est résolu, positivement, dans les cas suivants :

- les groupes abéliens.
- les groupes résolubles.
- certain groupes simples.

Le cas des groupes abéliens peut se traiter d'un point de vue élémentaire ; nous renvoyons au chapitre 2 de [4] pour les détails. La réalisation des groupes résolubles est plus complexe et est connue sous le théorème de Safarevitch [19].

La réalisation de certains groupes simples sur $\mathbb{Q}$ [1] utilise des techniques plus évoluées (théorème d'irréductibilité de Hilbert, espace de Hurwitz et critère de rigidité) que nous présenterons dans la suite de cette partie.

1.1.2 Théorème d'irréductibilité de Hilbert & problème inverse de Galois régulier arithmétique

Le théorème d'irréductibilité de Hilbert est un des piliers de l'approche moderne du problème inverse de Galois. Il s'agit d'un résultat permettant de conserver l'irréductibilité de polynômes en plusieurs variables par spécialisation. Nous donnons la forme la plus simple et la conséquence pratique importante dans le contexte qui nous occupe ; nous renvoyons le lecteur à la section 2.2 de [4] pour plus d'information sur le sujet.

Théorème 1.1.1. *Soit $P(T, Y)$ un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}(T)[Y]$. Alors il existe une infinité d'éléments $t \in \mathbb{Q}$ tels que $P(t, Y)$ soit irréductible dans $\mathbb{Q}[Y]$.*

Nous appelerons corps *hilbertien* un corps vérifiant la conclusion de ce théorème. Ainsi le corps des nombres rationnels est hilbertien. La conséquence la plus intéressante vis-à-vis du problème inverse de Galois est la suivante :

Corollaire 1.1.2. *Soit k un corps hilbertien. Si un groupe fini G est groupe de Galois sur $k(T)$, alors G est groupe de Galois sur k.*

1. pour simplifier le language nous dirons que l'on réalise un groupe G sur un corps k si l'on construit une extension galoisienne $E|k$ de groupe de Galois G.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Ainsi pour résoudre le problème inverse de Galois sur un corps hilbertien k, il suffit de le résoudre sur le corps $k(T)$ des fractions rationnelles.

Introduisons la notion d'extension régulière, son importance sera mise en évidence dans les sections 1.1.3 et 1.2.

Définition 1.1.3. *Etant donné un corps k, une k-*extension régulière de $k(T)$ *est une extension séparable $E|k(T)$ vérifiant $E \bigcap \overline{k} = k$.*

Nous pouvons énoncer la forme régulière (arithmétique) du problème inverse de Galois :

(RIGP$_k$) Etant donné un groupe fini G, existe-t-il une extension régulière galoisienne ($E|k(T)$) de groupe de Galois isomorphe à G ?

Remarquons pour le moment les deux choses suivantes :

- lorsque k est un corps hilbertien RIGP$_k$ $\Rightarrow$IGP$_k$.
- le problème RIGP$_k$ est stable par extension des scalaires ; il nous suffit de traiter les corps premiers.

1.1.3 Revêtement algébrique sur un corps et forme régulière géométrique du problème inverse de Galois

Rappelons qu'un k-revêtement algébrique de la droite projective $X := \mathbb{P}^1_k$ est un k-morphisme $f : Y \to X$ fini, plat et génériquement étale, où Y est une courbe lisse projective géométriquement irréductible. Un k-morphisme entre deux k-revêtements $f : Y \to X$ et $g : Z \to X$ est un k-morphisme $h : Y \to Z$ vérifiant $g \circ h = f$. Si f est un k-revêtement de la droite projective nous noterons $\mathrm{Aut}(f)$ son groupe de k-automorphismes. Un k-revêtement algébrique de la droite projective est ramifié en un nombre fini de points que l'on notera souvent $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_r)$. On appelle *diviseur de branchement* de f le diviseur associé à cet ensemble fini, *i.e.*, $t_1 + \ldots t_r$. Pour tout point non ramifié $t_0 \in X$, le groupe $\mathrm{Aut}(f)$ agit sur la fibre géométrique $f^{-1}(t_0)$. Lorsque cette action est transitive on dit que le revêtement est galoisien de groupe de Galois $\mathrm{Aut}(f)$; il est équivalent de demander que l'extension régulière $k(Y)|k(T)$ (obtenu par le foncteur corps de fonctions) soit galoisienne ; son groupe de Galois est alors anti-isomorphe à $\mathrm{Aut}(f)$.

Théorème 1.1.4. *Le foncteur corps de fonctions est une équivalence contravariante entre la catégorie des k-revêtements et celle des k-extensions régulières de $k(T)$.*

Démonstration. Voir la section 6 du chapitre 1 de [17]. □

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Nous pouvons énoncer la forme géométrique du problème inverse de Galois régulier (qui est équivalente à sa forme arithmétique).

(RIGP$_k$) Etant donné un groupe fini G, existe-t-il un k-revêtement algébrique galoisien de la droite projective de groupe de Galois isomorphe à G ?

Dans la suite de cette thèse nous nous occuperons uniquement de revêtements et donc du problème inverse de Galois régulier géométrique.

1.2 Le problème inverse de Galois régulier : un problème de descente

Comme nous l'avons vu la forme régulière permet de créer des liens entre RIGP sur différents corps. Nous expliquons l'approche moderne pour tenter de résoudre le problème inverse de Galois régulier. La méthode se passe en deux temps :

(i) résoudre RIGP sur les corps algébriquement clos.
(ii) descendre le *corps de définition* d'un revêtement.

Nous donnerons des exemples d'utilisation de cette méthode dans le cas des groupes abéliens et de certains groupes simples plus bas dans le texte.

1.2.1 Le problème inverse de Galois régulier sur un corps algébriquement clos

Le théorème d'existence de Riemann est une autre pierre angulaire de l'approche moderne, c'est le résultat principal présenté de cette partie. Il s'agit d'une équivalence de catégories entre revêtements algébriques et revêtements topologiques. Nous verrons qu'il permet de résoudre RIGP$_{\mathbb{C}}$. Sa généralisation par Grothendieck permet de passer de la situation topologique à la situation sur un corps algébriquement clos de caractérisitque 0.

Commençons par la définition centrale de G-revêtement :

Définition 1.2.1. *Un G-revêtement de groupe G est la donnée d'un revêtement galoisien f de groupe de Galois G et d'un isomorphisme γ_f entre $Aut(f)$ et G. Un morphisme entre deux G-revêtements f et g est un morphisme entre les revêtements compatible avec γ_f et γ_g.*

Dans la suite nous utilisons librement les notions de catégorie galoisienne et de groupe fondamental (on pourra consulter [3] pour une introduction complète). Nous utiliserons deux types de groupe fondamental :

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

– le groupe fondamental topologique $\pi_1^{top}(\bullet, *)$
– le groupe fondamental étale $\pi_1^{et}(\bullet, *)$

Soit $\mathbf{t} := \{t_1, \ldots, t_r\}$ un ensemble fini de points de la droite projective complexe. Nous pouvons introduire plusieurs catégories :

– la catégorie $\mathcal{R}_{\mathbf{t},G}^{alg}$ des G-revêtements algébriques complexes de groupe G de la droite projective non ramifiés hors de $\mathbf{t}$.
– la catégorie $Rep_G^{et}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t})$ dont les objets sont les épimorphismes $\phi : \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t})^{et} \twoheadrightarrow G$ et les morphismes entre deux objets ϕ_1 et ϕ_2 sont les morphismes intérieurs $i_g \in \mathrm{Inn}(G)$ tels que $i_g \circ \phi_1 = \phi_2$.
– la catégorie $\mathcal{R}_{\mathbf{t},G}^{top}$ des G-revêtements topologiques finis et galoisiens de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t}$ de groupe de Galois G.
– la catégorie $Rep_G^{top}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t})$ dont les objets sont les épimorphismes $\pi_1(X \setminus \mathbf{t})^{top} \twoheadrightarrow G$ et un morphisme entre deux morphismes ϕ_f et ϕ_g est un morphisme intérieur $i_g \in \mathrm{Inn}(G)$ tel que $i_g \circ \phi_f = \phi_g$.

La théorie des catégories galoisiennes montre que les catégories $\mathcal{R}_{\mathbf{t},G}^{alg}$ et $Rep_G^{et}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t})$ sont équivalentes et qu'il en est de même pour les catégories $Rep_G^{top}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t})$ et $\mathcal{R}_{\mathbf{t},G}^{top}$.

<u>Théorème</u> 1.2.2 (Théorème d'existence de Riemann)**.** *Les 4 catégories ci-dessus sont équivalentes. En conséquence, on a un isomorphisme entre les groupes fondamentaux :*

$$\pi_1^{top}(\widehat{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \setminus \boldsymbol{t}) \simeq \pi_1^{et}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \boldsymbol{t})$$

Démonstration. Nous renvoyons au chapitre 3 de [4], pour le lien entre les revêtements topologiques, algébriques et analytiques. □

L'intérêt de cette équivalence vient du calcul du groupe fondamental topologique de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}$ via le théorème de Van Kampen. On a la notion classique de *bouquet topologique* pour $\mathbf{t}$: il s'agit d'un r-uplet de classes d'homotopie $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ de lacets $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t}$ basés en un point $t_0 \notin \mathbf{t}$ tournant une fois autour des points t_i et vérifiant certaines conditions techniques ([8] section 1.1). Ces conditions entraînent la propriété importante suivante : le r-uplet $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ engendre le groupe fondamental topologique $\pi_1^{top}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}, t_0)$ avec l'unique relation $\Gamma_1 \ldots \Gamma_r = 1$. Ainsi la donnée d'un G-revêtement algébrique complexe f est équivalente à la donnée des points de branchement et d'un morphisme surjectif $\phi_f : \pi_1^{top}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}, t_0) \to G$, elle-même équivalente à la donnée des points de ramification, du choix d'un bouquet topologique et d'un r-uplet $(g_1, \ldots, g_r) \in G^r$ vérifiant les deux conditions suivantes :

– le r-uplet $(g_1, \ldots, g_r)$ engendre le groupe G.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

– Le produit $g_1 \ldots . g_r$ vaut 1.

L'ensemble des r-uplets vérifiant ces deux conditions sera noté $\mathrm{ni}_r^*(G)$. De plus deux G-revêtements sont isomorphes si et seulement si ils ont mêmes points de branchement et les r-uplets correspondants, calculés relativement à un même bouquet topologique, sont conjugués par un élément de G. L'ensemble $\mathrm{ni}_r^*(G)$ quotienté par la relation de conjugaison est appelé l'ensemble des classes de Nielsen et on le note $\mathrm{ni}_r(G)$. Explicitement

$$\mathrm{ni}_r(G) = \left\{ (g_1, \ldots, g_r) \in G^r \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle g_1, \ldots, g_r \rangle = G \\ g_1 \ldots g_r = 1 \end{array} \right\} /conj$$

où par "*conj*" nous entendons la conjugaison composante par composante par un même élément de G.

Il est clair que si r est suffisamment grand l'ensemble $\mathrm{ni}_r(G)$ est non vide. On en déduit :

<u>Théorème</u> 1.2.3. *Le problème inverse de Galois régulier a une réponse positive sur le corps des nombres complexes.*

La situation sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0 est semblable. Etant données un corps k et un r-uplet $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s)$ de $\overline{k}$-points globalement k-rationnel (*i.e.*, l'ensemble de points sous-jacent au r-uplet $\mathbf{t}$ est invariant par l'action de G_k), on note $\mathcal{R}_{k,\mathbf{t},G}$ la catégorie des k-G-revêtements de groupe G de la droite projective non ramifiés hors de $\mathbf{t}$. Une extension de corps $i : k \hookrightarrow l$ induit un foncteur $i^\star : \mathcal{R}_{k,\mathbf{t},G} \to \mathcal{R}_{l,\mathbf{t},G}$. Le théorème de spécialisation de Grothendieck nous dit que si k et l sont algébriquement clos de caractéristique 0, alors ce foncteur est une équivalence de catégories, ce qui induit un isomorphisme :

$$\pi_1(X_k \setminus \mathbf{t})^{et} \simeq \pi_1(X_l \setminus \mathbf{t})^{et}$$

1.2.2 Action de Galois sur les revêtements, corps de définition et corps de modules

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, on comprend parfaitement les revêtements algébriques sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Néanmoins le cas intéressant pour le problème inverse de Galois reste celui des corps non algébriquement clos et en particulier celui des corps de nombres. On introduit alors la notion de corps de définition.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Définition 1.2.4. *Soient k un corps et $f : Y \to \mathbb{P}^1_{k^s}$ un k^s-G-revêtement. Nous dirons que k est un corps de définition pour f s'il existe un k-G-revêtement $f_k : Y_k \to \mathbb{P}^1_k$ tel que le revêtement $f_k \times_k k^s$ (obtenu par extension des scalaires) est isomorphe au G-revêtement f. Le revêtement f_k est appelé un k-modèle de f.*

Un moyen de comprendre les corps de définition d'un k^s-G-revêtement est de considérer son *corps de modules*. Commençons par définir l'action de Galois sur les k^s-G-revêtements.

Définition 1.2.5. *Soient k un corps, $\sigma \in G_k$ et $f : Y \to \mathbb{P}^1_{k^s}$ un k^s-G-revêtement. L'automorphisme σ agit naturellement sur f, son image f^σ est définie par le diagramme cartésien suivant :*

$$\begin{tikzcd} Y^\sigma \arrow[r] \arrow[d, "f^\sigma"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{P}^1_{k^s} \arrow[r, "\sigma"] & \mathbb{P}^1_{k^s} \end{tikzcd}$$

Le sous-groupe $I(f) := \{\sigma \in G_k, f^\sigma \simeq f\}$ de G_k est un objet important, et son corps des invariants $M(f) := K^{I(f)}$ est appelé le corps des modules du revêtement f relativement au corps de base k (ou simplement corps de modules lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le corps de base).

Remarque 1. Si un G-revêtement f admet un k-modèle alors $M(f) = k$. Le corps $M(f)$ est contenu dans tous les corps de définition de f, il s'agit donc du plus petit corps de définition possible pour le revêtement f. Mais il n'est pas toujours un corps de définition pour f.

Nous pouvons résumer l'approche régulière pour résoudre le problème inverse de la théorie de Galois sur $\mathbb{Q}$ à l'aide des points suivants :

(1) Trouver un système de générateurs $(g_1, \ldots, g_r)$ de G dont le produit vaut 1.
(2) Choisir des points de branchement dans $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}$ et un bouquet topologique pour construire un $\overline{\mathbb{Q}}$-revêtement f.
(3) Calculer le corps des modules $M(f)$ relativement à $\mathbb{Q}$.
(4) Si $M(f) = \mathbb{Q}$ alors trouver, si possible, un $\mathbb{Q}$-modèle de f.
(5) Utiliser l'équivalence entre les extensions régulières et les revêtements algébriques pour obtenir une extension régulière galoisienne de $\mathbb{Q}(t)$ de groupe de Galois G.
(6) Utiliser le théorème d'irréductibilité de Hilbert pour spécialiser le revêtement et obtenir une extension de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois G.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Les points (1) et (2) sont simples. Les points (5) et (6) sont automatiques. Le point (4) relève de méthodes cohomologiques, on pourra consulter [7]. Le coeur du problème est le point (3) : comprendre le corps de module d'un revêtement.

Invariants des revêtements et *branch cycle lemma*

Une méthode pour calculer le corps des modules d'un revêtement f consiste à séparer les différents revêtements à l'aide d'invariants sur lesquels on sait contrôler l'action galoisienne. Il y a 3 invariants classiques pour les G-revêtements : le groupe de monodromie G, l'ensemble $\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_r\}$ des points de branchement et pour chaque $t \in \mathbf{t}$, la classe de conjugaison C_t de l'inertie au-dessus de t. Le r-uplet $\mathbf{C} = (C_{t_1}, \ldots, C_{t_r})$ est appelé l'invariant canonique de l'inertie. Nous pouvons décrire ces invariants de manière algébrique ou topologique ; ces descriptions coincident via l'équivalence de catégories du théorème d'existence de Riemann. Nous adoptons ici le point de vue topologique. Etant donné $\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_r\}$, considérons un G-revêtement f ramifié au-dessus de $\mathbf{t}$ et un point $t_0 \notin \mathbf{t}$. L'action de monodromie induit une représentation $\Phi_f : \pi_1^{top}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathbf{t}, t_0) \to \mathrm{Per}(f^{-1}(t_0))$, où le groupe $\mathrm{Per}(f^{-1}(t_0))$ désigne le groupe des permutations de la fibre du revêtement f au-dessus du point t_0. Le groupe de monodromie, qui est anti-isomorphe à $\mathrm{Aut}(f)$, est l'image de ce morphisme. Si l'on se fixe un bouquet topologique $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ pour $\mathbf{t}$ basé en t_0, l'invariant canonique de l'inertie est le r-uplet des classes de conjugaison de G des éléments $\Phi_f(\Gamma_i)$, $i = 1, \ldots, r$. Nous noterons aussi $\mathrm{BCD}_\Gamma(f)$ le r-uplet $(\Phi_f(\Gamma_1), \ldots, \Phi_f(\Gamma_r))$.

Le lemme suivant est très classique et est connu sous le nom de *Branch cycle lemma* :

Lemme 1.2.6. *Soit f un G-revêtement de groupe de Galois G défini sur la clôture algébrique $\overline{k}$ d'un corps k, ramifié uniquement en $\{t_1, \ldots, t_r\}$ et d'invariant canonique de l'inertie $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_r)$. Alors le revêtement image f^σ par un élément $\sigma \in G_k$ a pour invariant $(G, \{t_1^\sigma, \ldots, t_r^\sigma\}, (C_1^{\chi(\sigma)^{-1}}, \ldots, C_r^{\chi(\sigma)^{-1}})$, où $\chi(\sigma)^{-1}$ est l'inverse dans $\mathbb{Z}/\mathrm{card}(G)\mathbb{Z}$ du caractère cyclotomique $\chi(\sigma)$.*

Démonstration. On trouve plus de détails et une preuve dans [4]. Il faut décrire les invariants d'un revêtement de manière algébrique. Nous renvoyons aux sections 3.1.3.3 et 3.1.3.4 de [4]. □

Pour chaque r-uplet $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ non ordonné de classes de conjugaison de G notons $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}}$ le corps fixé par le sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ des automorphismes τ tel que $\mathbf{C}^{\chi(\tau)} = \mathbf{C}$.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Exemples

Dans la majorité des cas ces invariants ne permettent pas de séparer complètement les G-revêtements. Citons cependant les deux exemples intéressants suivants :

Théorème 1.2.7. *Soit $D \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ un ensemble fini. Considérons le groupe cyclique G de cardinal n et $g \in G$ un générateur de G. Notons $\boldsymbol{C} := (\{g\}^a)_{a \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times}$. Il existe un G-revêtement algébrique de groupe G d'invariant canonique de l'inertie $\boldsymbol{C}$ défini sur $\mathbb{Q}$ et non ramifié au-dessus de chaque point de D.*

Démonstration. Lorsque G est un groupe abélien, la classe de conjugaison d'un élément de G est réduite à un unique élément. De sorte que les invariants classiques classifient complétement les G-revêtements abéliens. L'utilisation du branch cycle lemma permet alors d'en calculer leurs corps de modules. Un bon choix des points de branchements et des classes de conjugaison de l'inertie permet alors de construire des $\mathbb{Q}$-G-revêtements de groupe G ; une $\mathbb{Q}$-homographie permet ensuite de bouger les points de branchement du $\mathbb{Q}$-G-revêtement de manière à éviter l'ensemble fini D. Nous renvoyons à [6] pour une démonstration formelle. □

Le second cas intéressant concerne en pratique les groupes simples. Introduisons pour commencer quelques définitions.

Définition 1.2.8. *Soient G un groupe fini, C une classe de conjugaison et $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ un r-uplet de classes de conjugaison.*

- *La classe de conjugaison C est dite* rationnelle *lorsque pour tout entier a premier au cardinal de G on a : $C^a = C$.*
- *Le r-uplet de classes de conjugaison $\boldsymbol{C}$ est dit* globalement rationnel *lorsque pour tout a premier au cardinal de G il existe une permutation $\tau \in S_r$ telle que pour tout entier $i = 1, \ldots, r$, on a : $C_i^a = C_{\tau(i)}$.*

Définition 1.2.9. *En conservant les notations de la définition précédente, nous noterons $sni_r(G, \boldsymbol{C})$ le sous-ensemble de $ni_r(G)$ défini par :*

$$sni_r(G, \boldsymbol{C}) = \left\{ (g_1, \ldots, g_r) \in G^r \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle g_1, \ldots, g_r \rangle = G \\ g_1 \ldots g_r = 1 \\ g_i \in C_i \end{array} \right\} /conj$$

Le r-uplet de classes de conjugaison $\boldsymbol{C}$ est dit rigide *lorsque le cardinal de $sni_r(G, \boldsymbol{C})$ est égal à 1 .*

Nous pouvons énoncer le théorème dit de *rigidité*.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Théorème 1.2.10. *Soient G un groupe de centre trivial, $\boldsymbol{C}$ un r-uplet rigide de classes de conjugaison rationnelles de G et $D \subset \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ un ensemble fini. Il existe un G-revêtement algébrique de groupe G d'invariant canonique de l'inertie $\boldsymbol{C}$ défini sur $\mathbb{Q}$ et non ramifié au-dessus de chaque point de D.*

Démonstration. Sous l'hypothèse de rigidité les invariants classiques séparent totalement les G-revêtements de groupe G. La condition de rationalité montre qu'il existe des G-revêtements de groupe G de corps des modules $\mathbb{Q}$ et la condition de trivialité du centre permet de montrer que le corps des modules est également un corps de définition pour ces revêtements. Nous renvoyons à [18] pour une preuve complète, des améliorations et des exemples. □

Construction d'un G-revêtement particulier

Partons d'un groupe fini G. Il est engendré par des groupes cycliques $G_1, \ldots, G_s$. Choisissons des G-revêtements $f_i : X_i \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ de groupe G_i définis sur $\mathbb{Q}$ ayant des ensembles $\mathbf{t}_i$ de points de branchement disjoints. Pour tout $i = 1, \ldots, s$, on pose $\mathbf{g}_i = \mathrm{BCD}_{\Gamma_i}(f_i)$ où Γ_i est un bouquet topologique pour $\mathbf{t}_i$. Notons r la somme $r_1 + \cdots + r_s$ et $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_s\}$ le r-uplet de points réunion des ensembles $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_s$. Choisissons un point $t_0 \notin \mathbf{t}$ et un bouquet topologique Γ pour t basé en t_0. On peut alors considérer le G-revêtement f qui a $\mathbf{t}$ pour ensemble de points de branchement et déterminé par $\mathrm{BCD}_{\Gamma}(f) = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s)$. On peut se demander si l'on peut calculer le corps des modules de f, en utilisant la particularité de sa forme. Dans l'idéal on voudrait que ce corps des modules soit $\mathbb{Q}$ ce qui permettrait de résoudre $RIGP_{\mathbb{Q}}$. On n'apportera pas de réponse à cette difficile question, le problème résidant principalement dans le choix du bouquet topologique Γ de la construction. On peut cependant se poser la question du corps de définition de l'ensemble de ces revêtements quand on fait varier le bouquet topologique. Cette question, qui est une des principales motivations de ce travail, se formule plus précisément de la façon suivante :

- Est-ce que l'ensemble E de tous les revêtements algébriques f définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ tels qu'il existe un bouquet topologique tel que $\mathrm{BCD}_{\Gamma}(f) = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s)$, est stable par l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur les revêtements ?

L'approche pour attaquer ce problème consiste à créer de nouveaux invariants, généralisant l'invariant canonique de l'inertie, puis de montrer que sous une hypothèse technique, sur le groupe G, ces nouveaux invariants séparent l'ensemble E des autres G-revêtements.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

1.3 Espace de Hurwitz

Le but de cette partie est d'interpréter notre problème au sein des espaces de Hurwitz. Rappelons que pour tout entier $r > 1$ et tout groupe fini G on peut définir le champ (de Deligne-Mumford) des G-revêtements de groupe G de la droite projective dont le diviseur de branchement est de degré r. Ce champ admet un espace de modules grossier qui est un schéma normal sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$. On le note $\mathrm{H}_r(G)$ et on l'appelle espace de Hurwitz.

La propriété d'espace de modules grossier s'interprète de la manière suivante : les points de $\mathrm{H}_r(G)(\overline{\mathbb{Q}})$ correspondent aux classes d'isomorphismes de $\overline{\mathbb{Q}}$-G-revêtements de la droite projective de groupe de Galois G. De plus, l'action du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}}$ sur les points de cet espace correspond à l'action de Galois sur les revêtements. C'est-à-dire, si un point x représente la classe d'isomorphisme d'un revêtement f, alors le point x^σ représente la classe d'isomorphisme du revêtement f^σ ; ainsi le corps de définition du point x est le corps des modules du revêtement f représenté par x.

L'ensemble E, que l'on a défini dans le chapitre précédent, s'interprètera comme une composante irréductible d'un certain espace de Hurwitz et nous chercherons à trouver son corps de définition.

1.3.1 Espace de Hurwitz et description combinatoire de ses composantes

Pour réaliser notre projet partons du morphisme de champ qui à un G-revêtement associe son diviseur de branchement. Il induit au niveau des espaces de modules grossiers un revêtement étale :

$$\Phi_{r,G} : \mathrm{H}_r(G) \to \mathcal{U}_r$$

L'espace $\mathcal{U}_r$ désigne l'espace des modules grossier du champ des droites projectives muni d'un diviseur de degré r. Nous avons besoin pour la suite, d'étudier l'action de monodromie du revêtement topologique induit par $\Phi_{r,G}$,

Notons $\mathcal{B}_0$ le groupe des difféomorphismes qui préservent l'orientation de la sphère de Riemann, que l'on munit de la topologie compact-ouvert. Pour chaque $\mathbf{t} \in \mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ nous noterons $\mathcal{B}_{0,\mathbf{t}}$ la fibre de $\mathcal{B}_0$ en $\mathbf{t}$; il s'agit des éléments de $\mathcal{B}_0$ conservant globalement $\mathbf{t}$. On a un morphisme d'évaluation $\varepsilon_{\mathbf{t}} : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ qui est une fibration de Serre. Cette fibration donne naissance à une suite longue d'homotopie, et en particulier à un épimorphisme de groupes

$$\delta_{\mathbf{t}} : \pi_1(\mathcal{U}_r(\mathbb{C}), \mathbf{t}) \to \pi_0(\mathcal{B}_{0,\mathbf{t}})$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Le groupe $\pi_1(\mathcal{U}_r(\mathbb{C}), \mathbf{t})$ est le groupe des tresses de Hurwitz à r brins, on le note traditionnellement H_r et il est engendré par $r-1$ tresses élémentaires $\mathcal{Q}_1 \ldots, \mathcal{Q}_{r-1}$ (la tresse $\mathcal{Q}_i$ échange les points t_i et t_{i+1}). Le groupe $\pi_0(\mathcal{B}_{0,\mathbf{t}})$ est le *mapping class group*, noté $M_{0,r}$ chez Birmann [2]. On dispose d'une action extérieure de $M_{0,r}$ sur $\pi_1(S^2 \setminus \mathbf{t})$ qui, composée avec le morphisme $\delta_{\mathbf{t}}$, donne l'action du groupe des tresses sur le groupe fondamental $\pi_1(S^2 \setminus \mathbf{t})$:

$$\Upsilon : \pi_1(\mathcal{U}_r(\mathbb{C}), \mathbf{t}) \to \mathrm{Out}(\pi_1(S^2 \setminus \mathbf{t})$$

La notion de bouquet topologique pour $\mathbf{t}$ permet d'expliciter davantage cette action : on a vu qu'un bouquet topologique $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ engendre le groupe fondamental topologique $\pi_1^{top}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}, t_0)$ avec l'unique relation $\Gamma_1 \ldots \Gamma_r = 1$. On montre que :

$$\Upsilon(\mathcal{Q}_i)(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r) = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{i-1}, \Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+1}^{-1}\Gamma_i\Gamma_{i+1}, \Gamma_{i+2}, \ldots, \Gamma_r)$$

D'autre part, le bouquet topologique Γ induit une bijection BCD_Γ entre la fibre de $\Phi_{r,G}$ au-dessus de $\mathbf{t}$ et l'ensemble $\mathrm{ni}_r(G)$ des classes de Nielsen. L'action de monodromie de $\pi_1(\mathcal{U}_r(\mathbb{C}), \mathbf{t})$ sur $\Phi^{-1}(\mathbf{t})$ est donnée par l'action du groupe des tresses : un G-revêtement f ayant pour description $\mathrm{BCD}_\Gamma(f) = (g_1, \ldots, g_r)$ est transformé, par la tresse $\mathcal{Q}_i$, en un G-revêtement g ayant pour description $\mathrm{BCD}_{\Upsilon(\mathcal{Q}_i)(\Gamma)}(g) = (g_1, \ldots, g_r)$. Un simple calcul nous donne :

$$\mathrm{BCD}_\Gamma(g) = (g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, \ldots, g_r)$$

En identifiant, via BCD_Γ, la fibre de $\Phi_{r,G}$ au-dessus de $\mathbf{t}$ et l'ensemble des classes de Nielsen $\mathrm{ni}_r(G)$, on obtient :

$$\mathcal{Q}_i(g_1, \ldots, g_r) = (g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, \ldots, g_r)$$

Par la théorie des revêtements topologiques les orbites de $\mathrm{ni}_r(G)$ sont en correspondance bijective avec les composantes connexes de $\mathrm{H}_r(G)(\mathbb{C})$. Par G.A.G.A., les composantes connexes (topologie transcendante) de $\mathrm{H}_r(G)(\mathbb{C})$ sont en correspondance bijective avec les composantes connexes du schéma $\mathrm{H}_r(G)_{\mathbb{C}}$. Comme $\mathrm{H}_r(G)_{\mathbb{C}}$ est normal, ses composantes connexes sont aussi ses composantes irréductibles. On en déduit le fait suivant : les composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$ sont en bijection avec les orbites de $\mathrm{ni}_r(G)$ sous le groupe des tresses H_r.

De manière plus précise, soient $\mathbf{t} \in \mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ et Γ un bouquet topologique pour $\mathbf{t}$. On considère l'application qui à un élément $\mathbf{g}$ de $\mathrm{ni}_r(G)$ fait correspondre la composante irréductible du revêtement déterminé par $(\mathbf{t}, \mathbf{g}, \Gamma)$. On montre que cette application ne dépend ni du choix du bouquet topologique ni de $\mathbf{t}$. Elle nous permet l'identification

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

canonique entre composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$ et orbites de l'action du groupe des tresses sur $\mathrm{ni}(G)$. Nous ferons toujours la confusion entre ces deux points de vue. Pour insister encore sur ce fait, deux G-revêtements topologiques f et g de la droite projective complexe sont dans une même composante d'un espace de Hurwitz si et seulement si les propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :

(a) Il existe deux bouquets topologiques Γ_f et Γ_g, respectivement pour $\mathbf{t}_f$ et $\mathbf{t}_g$, telle que $\mathrm{BCD}_{\Gamma_f}(f)$=$\mathrm{BCD}_{\Gamma_g}(g)$.

(b) Pour tous bouquets topologiques Γ_f et Γ_g, il existe une tresse $\mathcal{Q} \in \mathrm{H}_r$ telle que $\mathcal{Q}(\mathrm{BCD}_{\Gamma_f}(f)) = \mathrm{BCD}_{\Gamma_g}(g)$.

Nous dirons qu'un r-uplet $(g_1, \ldots, g_r) \in G^r$ appartient à une composante M de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$ lorsqu'il existe un G-revêtement f appartenant à la composante M et un bouquet topologique Γ_f pour $\mathbf{t}_f$ tels que $\mathrm{BCD}_{\Gamma_f}(f) = (g_1, \ldots, g_r)$. Les propriétés équivalentes (a) et (b) montrent qu'un r-uplet $(g_1, \ldots, g_r)$ appartient, au plus, à une composante M d'un espace de Hurwitz.

1.3.2 Construction de composantes

Etant donnés un entier positif s et un s-uplet $(r_1, \ldots, r_s)$ d'entiers nous noterons r la somme $r_1 + \cdots + r_s$. Soient maintenant G un groupe fini, $\mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_s)$ un s-uplet de sous-groupes de G engendrant G et pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$, un r_i-uplet $\mathbf{g}_i = (g_{i,1}, \ldots, g_{i,r_i})$ de $\mathrm{ni}^*_{r_i}(G_i)$. On définit $\Phi^*(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s)$ comme étant le r-uplet de $\mathrm{ni}^*(G)$ obtenu en concaténant les r_i-uplets $\mathbf{g}_i$, explicitement :

$$\Phi^* : \mathrm{ni}^*_{r_1}(G_1) \times \cdots \times \mathrm{ni}^*_{r_s}(G_s) \longrightarrow \mathrm{ni}^*_r(G)$$

$$((g_{1,1}, \ldots, g_{1,r_1}), \ldots, (g_{s,1}, \ldots, g_{s,r_s})) \longmapsto (g_{1,1}, \ldots, g_{1,r_1}, \ldots, g_{s,1}, \ldots, g_{s,r_s})$$

L'application Φ^* passe au quotient :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ni}^*_{r_1}(G_1) \times \cdots \times \mathrm{ni}^*_{r_s}(G_S) & \longrightarrow & \mathrm{ni}^*_r(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Comp}(\mathrm{H}_{r_1}(G_1)) \times \cdots \times \mathrm{Comp}(\mathrm{H}_{r_s}(G_s)) & \longrightarrow & \mathrm{Comp}(\mathrm{H}_r(G)) \end{array}$$

En effet, soient $(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s)$ et $(\mathbf{g}'_1, \ldots, \mathbf{g}'_s)$ deux représentants de classes d'éléments de $\mathrm{ni}_{r_1}(G_1) \times \cdots \times \mathrm{ni}_{r_s}(G_S)$, c'est-à-dire que pour chaque $i = 1, \ldots, s$ il existe $h_i \in G_i$ tel que $\mathbf{g}_1 = h_i \mathbf{g}'_i h_i^{-1}$. Le lemme 3.1.3 (ii) du chapitre suivant montre qu'il existe des tresses $Q_1, \ldots, Q_s$ vérifiant $Q_i \mathbf{g}_i = \mathbf{g}'_i$. Le produit $Q = Q_1 \ldots Q_s$ vérifie

$$Q(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s) = (\mathbf{g}'_1, \ldots, \mathbf{g}'_s)$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

L'application quotient est notée Φ. En identifiant composantes de l'espace de Hurwitz et les orbites des classes de Nielsen sous l'action du groupe des tresses, on a :

$$\Phi(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s) = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s)$$

On écrit : $\Phi(M_1, \ldots, M_s) = M_1 \star \cdots \star M_s$.

Cette construction formalise celle de l'ensemble E de la section précédente : en effet, si pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$, on note M_i la composante de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$ contenant le revêtement f_i, alors l'ensemble E est exactement la composante $M_1 \star \cdots \star M_s$.

question :

- Soient k un corps de caractérisque 0 et $\sigma \in G_k$. Sous quelles conditions la formule ci-dessous est valable :

$$(M_1 \star \cdots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \cdots \star M_s^\sigma$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Chapitre 2

Delta-composantes de l'espace de Hurwitz

L'objet de cette partie, qui constitue le centre de ce travail, consiste à définir et étudier les notions de structure de dégénérescence et de Δ-composante. Nous verrons le lien entre ces notions et la notion de composante construite par concaténation présentée dans la partie préliminaire (exemple 3). L'avantage des Δ-composantes est d'être plus intrinsèque, ce qui nous permet d'obtenir un *bon* résultat concernant leurs corps de définition (théorème 2.2.2).

2.1 Définitions, premières propriétés et exemples

Soient G un groupe fini et $(G_1, \ldots, G_s)$ un s-uplet de sous-groupes de G. Pour chaque sous-groupe G_i, on fixe un entier r_i et une composante irréductible M_i de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$. L'ensemble de ces données sera noté

$$\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$$

et appelé *une structure de dégénérescence*. Notons également $r = r_1 + \cdots + r_s$.

Une structure de dégénérescence permet de créer des composantes particulières de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$ que l'on appelle Δ-composantes.

<u>Définition</u> 2.1.1. *Soient G un groupe et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence. Un* Δ-représentant *est un r-uplet d'éléments de G de la forme :*

$$(\underbrace{g_{1,1}, \ldots, g_{1,r_1}}_{\boldsymbol{g}_1}, \ldots, \underbrace{g_{i,1}, \ldots, g_{i,r_i}}_{\boldsymbol{g}_i}, \ldots, \underbrace{g_{s,1}, \ldots, g_{s,r_s}}_{\boldsymbol{g}_s})$$

vérifiant la condition suivante :

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

(A) il existe $h_1, \ldots, h_s \in G$ tels que pour tout entier $i = 1, \ldots, s$, le r_i-uplet $\boldsymbol{g}_i^{h_i} = (h_i g_{i,1} h_i^{-1}, \ldots, h_i g_{i,r_i} h_i^{-1})$ appartient à la composante M_i de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$.

Un revêtement complexe f (représenté par un $\mathbb{C}$-point de $\mathrm{H}_r(G)$) est appelé Δ-revêtement *lorsqu'il existe un bouquet topologique Γ tel que :*

$$\mathrm{BCD}_\Gamma(f) \text{ est un } \Delta\text{-représentant}$$

La composante d'un Δ-revêtement (ou l'orbite d'un Δ-représentant) est appelée une Δ-composante. On note $\mathrm{ni}(\Delta)$ *la réunion des Δ-composantes.*

Exemple 1. Soient G un groupe fini et $\mathbf{C} = (C_1, C_1^{-1}, \ldots, C_s, C_s^{-1})$ une inertie de type *HM* selon la terminologie de Fried [12]. Choisissons un s-uplet $(g_1, \ldots, g_s)$ d'éléments des classes $(C_1, \ldots, C_s)$. On note :

- $G_i = \langle g_i \rangle$.
- $\mathfrak{C}_i = \{g_i\}$.
- $M_i = \mathrm{H}_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i^{-1}\})$.
- $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$.

Alors Δ est une structure de dégénérescence, que l'on appellera structure HM. Dans ce cas les Δ-composantes sont les composantes qui correspondent à des $2s$-uplets de la forme $(g_1, g_1^{-1}, \ldots, g_s, g_s^{-1})$ où $g_i \in C_i$ pour $i = 1, \ldots, s$. Il s'agit exactement des composantes HM introduites par Fried [12]. Les composantes HM ont été étudiées par Dèbes , Emsalem dans [8] et Fried ; ils ont montré qu'elles sont permutées par l'action du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}}$; nous reviendrons plus en détails sur cette question dans la partie 2.2.

L'ensemble $\mathrm{ni}(\Delta)$ est une donnée importante dans le contexte de ce travail. Nous introduisons une relation d'équivalence sur les structures de dégénérescence : $\Delta \equiv \Delta'$ si et seulement si $\mathrm{ni}(\Delta) = \mathrm{ni}(\Delta')$.

Proposition 2.1.2. *Soient G un groupe fini, $\Delta = (G, G_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence.*

(i) Si σ est un élément du groupe symétrique S_s, alors $\Delta \equiv \Delta_\sigma := (G, G_{\sigma(i)}, (M_{\sigma(i)})_i)$

(ii) Si $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_s)$ est un s-uplet d'éléments de G, alors $\Delta \equiv \Delta^{\boldsymbol{k}}$ où $\Delta^{\boldsymbol{k}} := (G, (G_i^{k_i})_i, (M_i)^{k_i})$.

Ici, $G_i^{k_i} := k_i G_i k_i^{-1}$ et $M_i^{k_i}$ est la composante correspondant à la composante M_i dans l'espace de Hurwitz $H_{r_i}(G_i^{k_i})$ via l'isomorphisme $f_{k_i} : G_i \mapsto G_i^{k_i}$ qui envoie x sur $x^{k_i} := k_i x k_i^{-1}$.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Démonstration. Pour (i) il suffit de montrer que si $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$ est un Δ-représentant alors il existe une tresse $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = (\mathbf{g}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{g}_{\sigma(s)})$$

Comme le groupe S_n est engendré par les transpositions, on peut aussi supposer que σ est une transposition, par exemple $\sigma = (1, 2)$. On doit alors montrer qu'il existe une tresse $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = (\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_1, \dots)$$

On peut utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.1.3. *Soient G un groupe fini et $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_r) \in G^r$ tels que le produit $g_1 \dots g_r$ soit égal à 1. S'il existe des entiers k et i tels que le produit $g_k \dots g_{k+i}$ soit égal à 1, alors il existe une tresse $\mathcal{T}$ telle que :*

$$\mathcal{T}\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_{k+i}, g_k, \dots, g_{k+i-1}, g_{k+i+1}, \dots, g_r)$$

Démonstration du lemme. Il s'agit d'un simple calcul de tresses. On vérifie sans peine que

$$Q_k \dots Q_{k+i-1}\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_{k-1}, g_{k+i}^t, g_k, \dots, g_{k+i-1}, g_{k+i+1}, \dots, g_r)$$

où $t = g_k \dots g_{k+i} = 1$, ce qui permet de conclure. □

Les éléments de $\mathbf{g}_1$ et $\mathbf{g}_2$ ont pour produit 1 donc le produit

$$g_{1,1} \cdots g_{1,r_1} g_{2,1} \cdots g_{2,r_2}$$

vaut également 1. On peut donc utiliser le lemme 2.1.3 à r_2 reprises, ce qui permet de conclure.

Pour (ii), si $\mathbf{g}$ est un Δ-représentant et $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_s)$ un s-uplet vérifiant la condition (A) de la définition 2.1.1 pour la structure de dégénérescence Δ, alors l'uplet $\boldsymbol{h}.\boldsymbol{k} := (h_1k_1, \dots, h_sk_s)$ vérifie la condition (A) pour la structure de dégénérescence $\Delta^{\boldsymbol{k}}$. On en déduit que $\mathbf{g}$ est un $\Delta^{\boldsymbol{k}}$-représentant.

□

Exemple 2. Si l'on reprend l'exemple 1, la structure HM ne dépend pas, à équivalence de structure près, du choix du s-uplet $(g_1, \dots, g_s)$ d'éléments des classes $(C_1, \dots, C_s)$.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Exemple 3. La composante $M_1 \star \cdots \star M_s$ introduite dans la section 1.3.2 est, de manière évidente, une Δ-composante où $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$. De manière plus précise, on a l'égalité :

$$\mathrm{ni}(\Delta) = \bigcup_{h_1,\ldots,h_s \in G} M_1^{h_1} \star \cdots \star M_s^{h_s}$$

Lorsque l'ensemble $\mathrm{ni}(\Delta)$ est irréductible (i.e. le groupe de tresses agit de manière transitive sur les Δ-représentants), on obtient l'égalité importante :

$$\mathrm{ni}(\Delta) = M_1 \star \cdots \star M_s$$

Nous étudierons cette question importante dans le troisième chapitre de cette thèse.

Remarquons également que pour tout élément σ du groupe symétrique S_s on a :

$$M_1 \star \cdots \star M_s = M_{\sigma(1)} \star \cdots \star M_{\sigma(s)} \tag{2.1}$$

La démonstration est identique à celle de la proposition 2.1.2 (i).

2.2 Contrôle du corps de définition d'une Δ-composante

Nous continuons notre étude des Δ-composantes ; nous passons au point de vue arithmétique et nous intéressons à la question suivante : *Quel est le corps de définition d'une Δ-composante ?*

2.2.1 Résultat principal

Définition 2.2.1. *Soient G un groupe et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence. Si $\mathbb{K}$ est un corps de nombres, on définit une action de $G_{\mathbb{K}}$ sur Δ par la formule suivante :*

$$\Delta^\tau := (G, (G_i)_i, (\tau(M_i))_i)$$

On dit que Δ est définie sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ lorsque :

$$\Delta \equiv \Delta^\tau$$

pour tout $\tau \in G_{\mathbb{K}}$.

Le théorème suivant montre que cette action correspond à l'action de $G_{\mathbb{K}}$ sur les Δ-composantes. Nous le démontrons plus bas ; voir proposition 2.2.5 et la partie 3.3.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Théorème 2.2.2. *Soient G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence. Si $\mathbb{K}$ est un corps de nombres et $\tau \in G_{\mathbb{K}}$ alors*

$$\mathrm{ni}(\Delta)^{\tau} = \mathrm{ni}(\Delta^{\tau})$$

Autrement dit, l'image par τ d'une Δ-composante est une Δ^{τ}-composante. Si l'on suppose que Δ est définie sur un corps de nombres $\mathbb{K}$ alors les Δ-composantes sont permutées par l'action de $G_{\mathbb{K}}$.

Comme nous l'avons remarqué, lorsque l'ensemble $\mathrm{ni}(\Delta)$ est irréductible on a l'égalité $\mathrm{ni}(\Delta) = M_1 \star \cdots \star M_s$ et on obtient la formule valable pour tout $\tau \in G_{\mathbb{K}}$:

$$(M_1 \star \cdots \star M_s)^{\tau} = M_1^{\tau} \star \cdots \star M_s^{\tau}$$

qui est une réponse positive au problème posé dans la partie préliminaire.

2.2.2 Compactification de Wewers de l'espace de Hurwitz et Δ-revêtements admissibles.

Dans cette partie, nous décrivons rapidement la compactification de l'espace de Hurwitz due à Wewers. Nous renvoyons à [21] et [1] pour plus de détails. Nous définirons ensuite la notion centrale de Δ-revêtement admissible et nous expliquerons la stratégie pour la preuve du théorème 2.2.2.

Compactification de l'espace de Hurwitz

Etant donnés un groupe fini G et un entier $r \geq 3$, S. Wewers a construit une compactification de $\mathrm{H}_r(G)$ comme schéma sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/|G|])$. Le revêtement étale $\Theta : \mathrm{H}_r(G) \to \mathrm{U}_r$ s'étend en un morphisme ramifié que l'on note :

$$\overline{\Theta} : \overline{\mathrm{H}_r(G)} \to \overline{\mathrm{U}_r}$$

Les points géométriques du bord de l'espace $\overline{\mathrm{U}_r}$ correspondent à des arbres stables de droites projectives à r points marqués et à racine distinguée (voir par exemple [10]). Dans la suite nous utilisons uniquement un cas particulier de telles courbes.

Définition 2.2.3. *Soit $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_s)$ un s-uplet d'entiers supérieurs à 2, notons $r = r_1 + \cdots + r_s$. Un $\boldsymbol{r}$-*peigne *$\mathcal{P}$ sur un corps algébriquement clos k est un k-arbre stable de genre 0 marqué en r points, composé d'une racine $\mathcal{P}_0$ de genre 0 à laquelle sont attachées s k-courbes de genre 0, que l'on note $\mathcal{P}_i$ et que l'on appelle composantes finales. Chaque composante finale $\mathcal{P}_i$ est marquée par r_i points.*

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Exemple 4. Comme cas particulier on retrouve les peignes de [8] : il s'agit de $(2, \ldots, 2)$-peignes.

Les points de $\overline{\mathrm{H}_r(G)} \setminus \mathrm{H}_r(G)$ au-dessus d'un r-peigne $\mathcal{P}$ représentent des *revêtements admissibles* de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire des revêtements de $\mathcal{P}$ modérément ramifiés aux points marqués et aux points singuliers vérifiant la propriété suivante : un générateur de l'inertie au-dessus d'un point singulier (i.e. intersection de deux branches) le long d'une branche est égal à l'inverse d'un générateur de l'inertie le long de l'autre branche.

Δ-revêtement admissible

Soient G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence. On note $\mathbf{r}$ le s-uplet d'entiers $(r_1, \ldots, r_s)$ provenant de la structure de dégénérescence, *i.e.*, pour tout $i = 1, \ldots, s$, l'entier r_i est égal au nombre de points de ramification des G-revêtements de groupe G_i appartenant à la composante M_i. Considérons un $\mathbf{r}$-peigne $\mathcal{P}$ (nous dirons que ce peigne est attaché à Δ) et un revêtement admissible $\mathcal{F}$ sur un corps algébriquement clos k. Pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$, nous noterons $\overline{x}_{i,1}, \ldots, \overline{x}_{i,r_i}$ les r_i points marqués de la composante finale $\mathcal{P}_i$ et $\overline{a}_i$ l'intersection de $\mathcal{P}_i$ et de la racine $\mathcal{P}_0$. Dans la suite nous utilisons des G-revêtements admissibles non ramifiés aux différents points singuliers a_i du peigne. Cette hypothèse nous permet de parler du groupe fondamental étale du $\mathbf{r}$-peigne $\mathcal{P}$ privé des points marqués.

Notons $\mathcal{P}^\star = \mathcal{P} \setminus \{\overline{x}_{i,j}, i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, r_i\}$ et pour chaque $i = 1, \ldots, s$, $\mathcal{P}_i^\star = \mathcal{P}_i \setminus \{\overline{x}_{i,j}; j = 1, \ldots, r_i\}$. Notons également $\mathcal{P}_i^\star \to \mathcal{P}^\star$ les différentes inclusions des composantes irréductibles du peigne. Par fonctorialité du π_1, on obtient des morphismes :

$$\pi_1(\mathcal{P}_i^\star, a) \to \pi_1(\mathcal{P}^\star, b)$$

où a et b sont des points-base. Le revêtement admissible $\mathcal{F}$ correspond à un morphisme surjectif $\Phi : \pi_1(\mathcal{P}^\star, b) \to G$. On obtient pour chaque $i = 1, \ldots, s$ un morphisme qui correspond à la restriction du revêtement admissible $\mathcal{F}$ à la composante $\mathcal{P}_i$:

$$\Phi_i : \pi_1(\mathcal{P}_i^\star, a) \to G$$

Définition 2.2.4. *Nous dirons que $\mathcal{F}$ est un Δ-revêtement admissible lorsque :*

- *le morphisme Φ_0 est trivial.*
- *pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$, il existe $c_i \in G$ tel que le morphisme $c_i \Phi_i c_i^{-1}$ a pour image G_i et représente un point de la composante $M_i \subset \mathrm{H}_{r_i}(G_i)$.*

Exemple 5. Lorsque Δ est une structure HM classique, un Δ-revêtement admissible est un HM-revêtement admissible (cf. [8]).

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Le théorème 2.2.2 se déduit du résultat suivant dont nous démontrerons les deux assertions dans les deux parties suivantes.

Théorème 2.2.5. *Soient G un groupe fini, Δ une structure de dégénérescence et $\mathbb{K}$ un corps de nombres.*

(i) Les Δ-composantes d'un espace de Hurwitz sont les composantes qui contiennent un Δ-revêtement admissible sur leur bord.

(ii) Soient $\sigma \in G_{\overline{\mathbb{K}}}$ et $\mathcal{F}$ un Δ-revêtement admissible de groupe G défini sur $\overline{\mathbb{K}}$. L'image par σ de $\mathcal{F}$ est un Δ^σ-revêtement admissible.

Addendum Dans (i) le revêtement admissible dont la présence sur le bord caractérise une Δ-composante peut être défini sur un corps de caractéristique $p > 0$. L'argument suivant permettra de se ramener à la caractéristique nulle et même de construire un Δ-revêtement admissible défini sur $\overline{\mathbb{K}}$.

Soit G un groupe fini et $\mathcal{C}$ une composante contenant sur son bord un Δ-revêtement admissible ϕ défini sur un corps κ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit k un corps hensélien de caractéristique nulle de corps résiduel κ. Notons $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers. On peut prendre par exemple l'anneau des vecteurs de Witt de κ.

L'espace de base du revêtement ϕ est un $\mathbf{r}$-peigne $\mathcal{P}$ défini sur κ, il est consitué de la racine $\mathcal{P}_0$ marquée en s points $a_1, \ldots, a_s$ où sont attachées s κ-courbes $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_s$ de genre 0 marquées ; pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$, la courbe $\mathcal{P}_i$ est marquée par r_i points. On choisit une déformation de la courbe marquée $\mathcal{P}_0$ sur l'anneau $\mathcal{O}$: c'est une droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ marquée par s sections $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_s$ se spécialisant en $a_1, \ldots, a_s$. Pour chaque section $\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_s$, on attache une copie de $\mathbb{P}^1_{\mathcal{O}}$ marquée par r_i points. On obtient ainsi une déformation $\widetilde{P}$ du $\mathbf{r}$-peigne $\mathcal{P}$ sur l'anneau $\mathcal{O}$.

Pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$, la restriction ϕ_i de ϕ à la composante $\mathcal{P}_i$ est un revêtement appartenant à la composante M_i de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$. Le théorème de spécialisation de Grothendieck permet d'étendre le revêtement modéré ϕ_i en un $\mathcal{O}$-revêtement dont la fibre générique géométrique appartient encore à la composante M_i de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$. La restriction de ϕ à la racine est un revêtement trivial qui s'étend en un revêtement trivial sur l'anneau $\mathcal{O}$. Les données de recollement s'étendent en données de recollement. On obtient ainsi une déformation du revêtement admissible ϕ sur l'anneau $\mathcal{O}$ dont la fibre générique géométrique est un Δ-revêtement admissible défini sur une clôture algébrique $\overline{k}$ de k et appartenant au bord de la composante $\mathcal{C}$.

En fait, ce revêtement admissible peut être défini sur la clôture algébrique $\overline{k}_0 \subset \overline{k}$ du corps de définition des points marqués, et même sur $\mathbb{C}$ si l'on se fixe une inclusion

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

$\overline{k}_0 \subset \mathbb{C}$. Une autre déformation permet alors de choisir les points marqués dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Le Δ-revêtement admissible obtenu par cette dernière déformation est donc défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et appartient encore au bord de la composante $\mathcal{C}$.

Démonstration du théorème 2.2.2. Si M est une Δ-composante définie sur $\overline{\mathbb{K}}$, alors elle contient un Δ-revêtement admissible défini sur $\overline{\mathbb{K}}$ sur son bord. L'image par $\sigma \in G_{\mathbb{K}}$ de ce Δ-revêtement admissible est un Δ^σ-revêtement admissible (proposition 2.2.5 (ii)) qui est sur le bord de la composante M^σ. On en déduit que M^σ est une Δ^σ-composante. Si Δ est définie sur $\mathbb{K}$, l'image d'une Δ-composante par un élément de $G_{\mathbb{K}}$ est une Δ-composante. $\square$

2.2.3 Démonstration du théorème 2.2.5

Les deux sections suivantes sont consacrées aux démonstrations des deux parties de la proposition 2.2.5.

Caractérisation des Δ-composantes

Dans un premier temps, nous construisons une déformation, paramétrée par l'intervalle D d'une sphère privée de certains points vers un peigne, le but étant de pouvoir définir et suivre un bouquet topologique le long de la déformation. Notre construction est *ad hoc* mais son résultat peut être vu comme une conséquence d'un énoncé plus général (voir [11]).

Construction d'une déformation. Soit $s \geq 3$ un entier, et $r_1, \ldots, r_s$ des entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit $b_1, \ldots, b_s$ des points équidistants sur le cercle de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ (qui sera identifié au plan complexe). Considérons s disques disjoints de centres respectifs $b_1, \ldots, b_s$ et de rayon $\rho > 0$.

On peut construire une famille de sphères marquées de $r = r_1 + \cdots + r_s$ points et paramétrée par $t \in D$ (où D est le disque unité du plan complexe) de la façon suivante : pour tous entiers i et j, $1 \leq i \leq s$ et $1 \leq j \leq r_i$, définissons les marques $x_{i,j}(t) = b_i + \frac{1}{2}\rho|t|e^{\frac{2\pi i}{r_i}j}$ qui sont r_i points équidistants sur le cercle de centre b_i et de rayon $\frac{\rho|t|}{2}$ de $\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$. On notera $a_i(t)$ le point d'intersection du segment $[0, b_i]$ avec le cercle de centre b_i et de rayon $\frac{3}{4}\rho|t|$ (figure 2.1).

Lorsque t tend vers 0, les points $x_{i,j}(t)$, $1 \leq j \leq r_i$, tendent vers b_i. Par des éclatements en $(t, y) = (0, b_i)$, d'équations locales $vt = u(y - b_i)$ (où (u, v) sont des coordonnées homogènes), on complète la famille en une famille $X \to D$, dont la fibre en $t = 0$ de X est noté $\mathcal{P}$; elle est constituée de s fibres exceptionnelles $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_s$, isomorphes à des sphères attachées en des points $x_1, \ldots, x_s$ à une sphère principale $\mathcal{P}_0$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

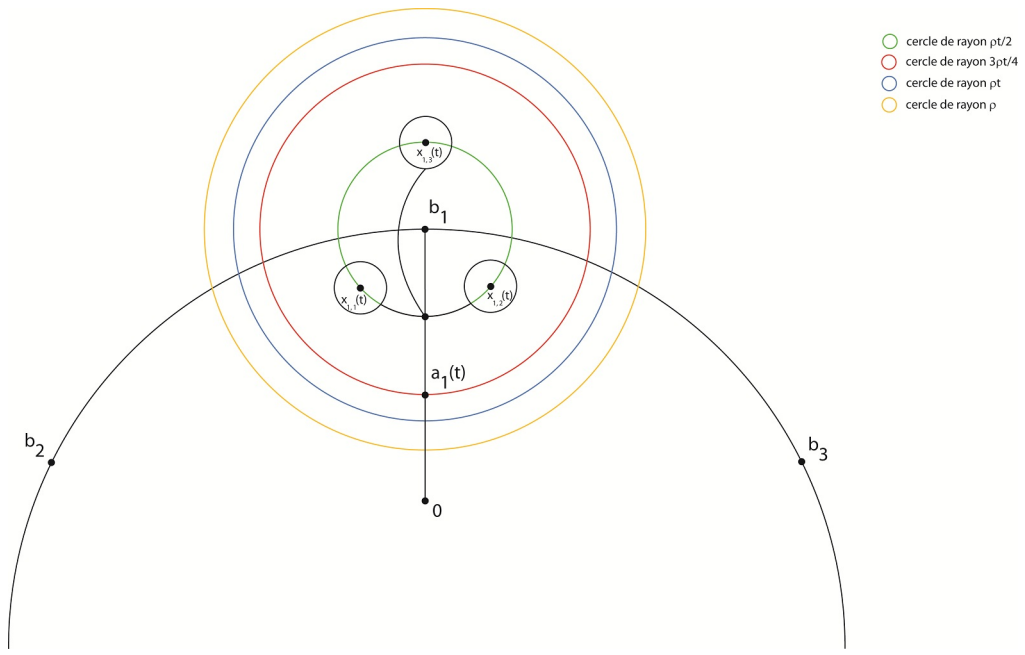

FIGURE 2.1 –

(le point $x_i \in \mathcal{P}_i$ étant confondu avec le point $b_i \in \mathcal{P}_0$). La courbe $\mathcal{P}$ est un **r**-peigne. Les points $x_{i,j}(t)$, $1 \leq j \leq r_i$ se spécialisent, lorsque t tend vers 0, en r_i points sur un cercle B_i tracé sur $\mathcal{P}_i$ centré en x_i : leurs coordonées sur le fibre execptionnelle sont donées par les formules $v_{i,j}(t) = \frac{1}{2}u_{i,j}(t)\rho e^{\frac{2\pi i}{r_i}j}$, soit en coordonnés affines $\frac{v_{i,j}}{u_{i,j}} = \frac{1}{2}\rho e^{\frac{2\pi i}{r_i}j}$. Le cercle de centre b_i et de rayon $\rho|t|$ se spécialise, lorsque t tend vers 0, en un cercle C_i sur $\mathcal{P}_i$, concentrique au précédent (dans les coordonnées affines $\frac{v}{u}$, C_i est le cercle de centre x_i et de rayon ρ.

Le cercle C'_i de centre b_i et de rayon ρ dans X_t se spécialise quant à lui, lorsque t tend vers 0, en lui-même sur $\mathcal{P}_0$. La couronne $E_i(t)$ définie par les inégalités $\rho|t| \leq |b_i - y| \leq \rho$, se spécialise en l'union de deux disques fermés, l'un D_i sur $\mathcal{P}_i$ de centre x_i et de bord C_i, l'autre D'_i sur $\mathcal{P}_0$ de centre b_i et de bord C'_i.

Pour tout $t \in D \setminus \{0\}$, ôtons à la fibre X_t les couronnes $E_i(t)$, $1 \leq i \leq s$, et, pour $t = 0$, ôtons à $\mathcal{P}_0$ l'union $D_i \cup D'_i$. Le sous-espace marqué $X' \subset X$ ainsi obtenu est muni d'une fibration $X' \to D$ qui est localement triviale. La fibre en t est constituée de s disques ouverts disjoints $\Delta_1(t), \ldots, \Delta_s(t)$, le disque $\Delta_i(t)$ étant marqué par les r_i points $S_i(t) := \{x_{i,1}(t), \ldots, x_{i,r_i}(t)\}$ équirépartis sur un cercle concentrique au bord de $\Delta_i(t)$, et d'une sphère constante privée des s disques fermés de centres b_i et rayon ρ.

Les groupes fondamentaux de $\Delta_i(t) \setminus S_i(t)$ basés en $a_i(t)$ sont constants. On en déduit l'isomorphisme :

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

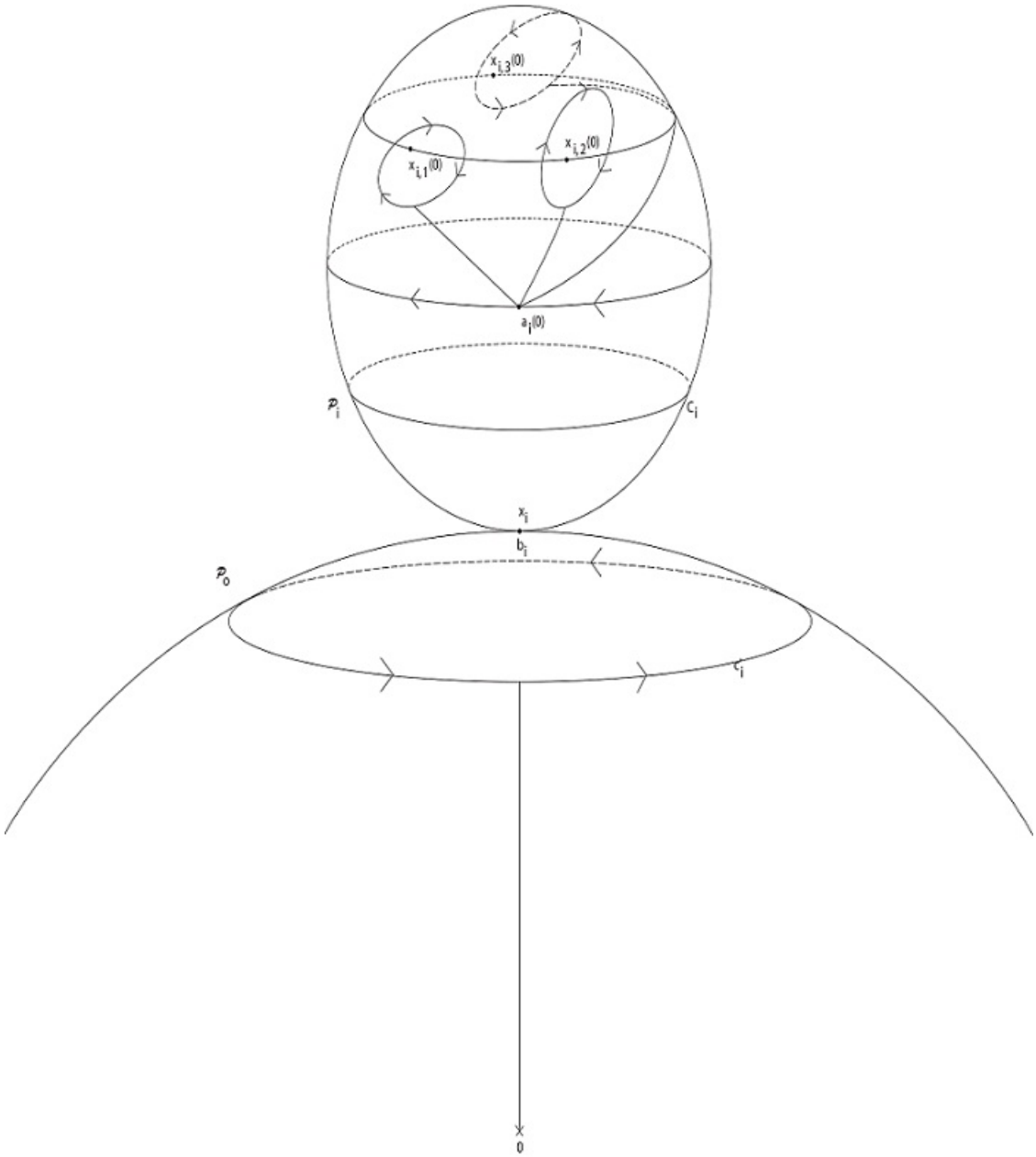

FIGURE 2.2 –

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

$$\pi_1(\Delta_i(0) \setminus S_i(0); a_i(0)) \simeq \pi_1(\Delta_i(1) \setminus S_i(1); a_i(1))$$

D'autre part en notant $S_i := S_i(0) \cup \{x_i\}$, on remarque que $\Delta_i(0) \setminus S_i(0)$ est homotope à $\mathcal{P}_i \setminus S_i$, ce qui conduit à un isomorphisme :

$$\pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \simeq \pi_1(\Delta_i(1) \setminus S_i(1); a_i(1))$$

et l'inclusion $\Delta_i(1) \setminus S_i(1) \hookrightarrow X_1 \setminus S$ conduit à un morphisme $\psi_i' : \pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \to \pi_1(X_1 \setminus S, a_i(1))$, où S est la réunion $\bigcup_{i=1}^{s} S_i(1)$.

On dispose de même d'un morphisme

$$\psi_0 : \pi_1(\mathcal{P}_0 \setminus S_0, 0) \to \pi_1(X_1 \setminus S, 0)$$

ici $S_0 := \{b_0, \ldots, b_s\}$.

Considérons pour chaque i, $1 \leq i \leq s$, un bouquet topologique sur $\mathcal{P}_i$ basé en $a_i(0)$ autour des points $x_{i,1}(0), \ldots, x_{i,s}(0), x_i$, le dernier lacet étant le cercle de centre x_i passant par $a_i(0)$ parcouru dans le sens positif vu de x_i : on note $\Gamma_i := (\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,r_i}, \gamma_i)$ l'ensemble des classes d'homotopie de ces lacets ; ils vérifient les deux propriétés suivantes :

- le $r+1$-uplet $(\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,r_i}, \gamma_i)$ engendre le groupe $\pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0))$,
- le produit $\gamma_{i,1} \ldots \gamma_{i,r_i} \gamma_i$ vaut 1.

Notons de même $\Gamma_0 = (\delta_1, \ldots, \delta_s)$ un bouquet topologique sur $\mathcal{P}_0 \setminus S_0$ basé en 0, chaque δ_i tournant une fois autour de b_i dans le sens positif vu de b_i.

Les segments joignant 0 à $a_i(1)$ permettent de passer des points bases $a_i(1)$ au point base commun 0 et définissent des isomorphismes $\pi_1(X_1 \setminus S, a_i(1)) \simeq \pi_1(X_1 \setminus S, 0)$. Notons $\psi_i : \pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \to \pi_1(X_1 \setminus S, 0)$ le composé de ψ_i' avec cet isomorphisme.

On constate que

$$\psi_i(\gamma_i)\psi_0(\delta_i) = 1$$

et donc que

$$\psi_i(\gamma_{i,1}) \ldots \psi_i(\gamma_{i,r_i}) = \psi_0(\delta_i)$$

De la relation $\delta_1 \ldots \delta_s = 1$, on déduit alors

$$\psi_1(\gamma_{1,1}) \ldots \psi_1(\gamma_{1,r_1}) \ldots \psi_s(\gamma_{s,1}) \ldots \psi_s(\gamma_{s,r_s}) = 1$$

On se convainc que les lacets précédents constituent un bouquet topologique basé en 0 pour $X_1 \setminus S$ que l'on note Γ.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Démonstration du théorème 2.2.5 (i). On conserve les notations de la partie ci-dessus.

Soient G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence. Soient M une Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ et $\mathbf{g} = (g_{i,k})_{i,k}$ un Δ-représentant de la composante M.

On considère le revêtement f de $X_1 \setminus S$ associé au morphisme surjectif défini par $\Phi(\psi_i(\gamma_{i,k})) = g_{i,k}$, i.e.

$$\mathrm{BCD}_\Gamma(f) = (g_{1,1}, \ldots, g_{1,r_1}, \ldots, g_{s,1}, \ldots, g_{s,r_s})$$

Il s'agit d'un Δ-revêtement appartenant à la composante M. Ce revêtement s'étend en un revêtement de X, dont la spécialisation en 0 est un revêtement admissible F de X_0. Pour chaque entier $i = 0, \ldots, s$, on considère sa restriction f_i à la composante $\mathcal{P}_i$ de $\mathcal{P}$. Le morphisme $\Phi : \pi_1(X_1 \setminus S, 0) \to G$ définissant f permet de déduire le morphisme $\Phi_i : \pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0))) \to G$ définissant f_i ; on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathcal{P}_i \setminus S_i; a_i(0)) \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[dr, "\Phi_i"'] & \pi_1(X_1 \setminus S, 0) \arrow[d, "\Phi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Nous allons montrer que les morphismes $\Phi_0, \ldots, \Phi_s$ vérifient les conditions de la définition 2.2.4 de Δ-revêtement admissible. Pour cela nous allons calculer les différentes *Branch Cycle Description* des revêtements f_i par rapport au bouquet topologique Γ_i introduit ci-dessus.

Pour tout $i \geq 1$ et $k = 1, \ldots, r_i$:

$$\Phi_i(\gamma_{i,k}) = \Phi(\psi_i(\gamma_{i,k})) = g_{i,k}$$

et :

$$\Phi_i(\gamma_i) = \prod_{k \neq 0} (\Phi_i(\gamma_{i,k}))^{-1} = \prod_{k=1}^{r_i} g_{i,k} = 1$$

Ainsi le revêtement f_i est non ramifié en x_i et l'inertie au dessus de $x_{i,k}$ est égal à $g_{i,k}$, c'est-à-dire :

$$BCD_{\Gamma_i}(f_i) = (g_{i,1}, \ldots, g_{i,r_i}, 1)$$

Par définition de Δ-représentant, le revêtement f_i appartient à la composante M_i (à conjugaison près).

D'autre part, la relation $\psi_0(\delta_i)\psi_i(\gamma_i) = 1$ montre que :

$$\Phi_0(\delta_i) = \Phi(\psi_0(\delta_i) = \Phi(\psi_i(\gamma_i))^{-1} = (\Phi_i(\gamma_i))^{-1} = 1$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

C'est-à-dire que la restriction à la racine $\mathcal{P}_0$ est triviale. La composante M contient donc un Δ-revêtement admissible sur son bord.

Réciproquement, partons d'un Δ-revêtement admissible sur un r-peigne $\mathcal{P}$. Quitte à effectuer une déformation nous pouvons supposer que le r-peigne $\mathcal{P}$ est la fibre spéciale de la courbe stable X construite plus haut. Ainsi nous pouvons compléter le Δ-revêtement admissible en un revêtement $\mathcal{F}$ de X. En reprenant les calculs précédents on vérifie que la spécialisation en 1 de $\mathcal{F}$ est un Δ-revêtement (sa description des cycles de branchement par rapport au bouquet Γ est un Δ-représentant).

□

Dans la partie direct de la preuve, le revêtement admissible construit est topologique. Néanmoins on peut passer à des revêtements admissibles définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ En effet, on peut d'abord algébriser le revêtement admissible en utilisant les principes G.A.G.A sur chaque restriction du revêtement pour former un revêtement admissible algébrique complexe et ensuite descendre le corps de définition en remarquant que les points marqués de chaque composante $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_s$ du r-peigne $\mathcal{P}$ sont dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

Action de Galois sur les Δ-revêtements admissibles.

Nous passons à la démonstration de la partie (ii) du théorème 2.2.5.

Proposition 2.2.6. *Soient :*

- *G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence.*
- *$\mathbb{K}$ un corps, $\overline{\mathbb{K}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{K}$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{K}}|\mathbb{K})$.*
- *$\mathcal{F}$ un Δ-revêtement admissible de groupe G défini sur $\overline{\mathbb{K}}$.*

Alors l'image par σ de $\mathcal{F}$ est un Δ^σ-revêtement admissible.

Démonstration. Considérons un morphisme entre $\overline{\mathbb{K}}$-schémas $g : Y \to X$ et notons X^σ et Y^σ les images galoisiennes respectives de X et Y. On choisit un point géométrique $\underline{a} \in Y(\overline{\mathbb{K}})$, on note a son image par f, $\underline{a}^\sigma$ son image par σ et a^σ l'image de a par σ.

Par fonctorialité du π_1, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{et}(Y^\sigma, \underline{a}^\sigma) & \longrightarrow & \pi_1^{et}(X^\sigma, a^\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{et}(Y, \underline{a}) & \longrightarrow & \pi_1^{et}(X, a) \end{array}$$

Considérons maintenant un G-revêtement f de X ; il lui correspond un morphisme

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

surjectif $\Phi : \pi_1(X, a) \to G$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y^\sigma, \underline{a}^\sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(X^\sigma, a^\sigma) \arrow[d] \\
\pi_1(Y, \underline{a}) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_1(X, a) \arrow[d] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

Les différentes flèches à valeurs dans G du diagramme précédent ont une interprétation géométrique :

- L'image par σ du G-revêtement f correspond à la flèche $\pi_1(X^\sigma, a^\sigma) \to G$.
- Le morphisme $\pi_1(Y, \underline{a}) \to G$ correspond au revêtement (non nécessairement connexe) obtenu à partir de f par le changement de base $Y \to X$.
- Le morphisme $\pi_1(Y^\sigma, \underline{a}^\sigma) \to G$ correspond à l'image galoisienne, par σ, de ce dernier.

Comme cas particulier, on considère l'inclusion $\Phi_i : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}$ d'une composante irréductible d'un $\mathbf{r}$-peigne, et comme G-revêtement de $\mathcal{P}$ le Δ-revêtement admissible $\mathcal{F}$. Par définition, le morphisme $\pi_1(\mathcal{P}_i, \underline{a}) \to G$ a pour image G_i, on en déduit qu'il en est de même pour $\pi_1(\mathcal{P}_i^\sigma, \underline{a}^\sigma) \to G$. De plus, chaque $\mathcal{P}_i$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ et le morphisme $\pi_1(\mathcal{P}_i, \underline{a}) \to G$ correspond à un point de M_i, son image galoisienne $\pi_1(\mathcal{P}_i^\sigma, \underline{a}^\sigma) \to G$ correspond donc à un point de M_i^σ.

$\square$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Chapitre 3

Structures de dégénérescence complètes et applications

Dans ce dernier chapitre nous allons donner des applications du théorème 2.2.2. Toutes les applications passent par une estimation du nombre de Δ-composantes. Idéalement on veut que l'ensemble $\mathrm{ni}(\Delta)$ soit irréductible de manière à obtenir la formule suivante (reformulation pratique du théorème 2.2.2 dans le cas où $\mathrm{ni}(\Delta)$ est irréductible) :

$$\forall \sigma \in G_{\mathbb{Q}}, (M_1 \star \cdots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \cdots \star M_s^\sigma \tag{3.1}$$

L'objet principal de ce chapitre est de donner des exemples théoriques et pratiques d'irréductibilité. Nous étudierons également le comportement des Δ-composantes dans les tours d'espaces de Hurwitz.

3.1 Autour du nombre de Δ-composantes

3.1.1 Critère d'irréductibilité de $\mathrm{ni}(\Delta)$

La question de l'irréductibilité de $\mathrm{ni}(\Delta)$ est très importante en vue d'applications du théorème 2.2.2. Nous présentons un premier critère d'irréductibilité ainsi que certaines applications.

Définition 3.1.1. *Soient G un groupe et $\boldsymbol{G} = (G_1, \ldots, G_s)$ un s-uplet de sous-groupes de G. Nous dirons que $\boldsymbol{G}$ est un système complet de sous-groupes, lorsque quels que soient $i = 1, \ldots, s$ et $h_1, \ldots, h_s \in G$, le groupe G est engendré par les sous-groupes*

$$\{G_1^{h_1}, \ldots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \ldots, G_s^{h_s}\}$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Si $\boldsymbol{G}$ *est attaché à une structure de dégénérescence* $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$*, nous dirons que la structure de dégénérescence est complète lorsque* $\boldsymbol{G}$ *l'est.*

Exemples de systèmes complets de sous-groupes

Exemple 1 : Soit Δ la structure HM de l'exemple 1. En reprenant la terminologie de Fried [12], si $\mathbf{C}$ est HM-g-complet alors la structure de dégénérescence Δ est complète.

Exemple 2 : Soient G un groupe fini et r un entier supérieur à 2. Notons $M_1, \ldots, M_s$ les différentes composantes de $\mathrm{H}_r(G)$ et $\Delta := (G, (G)_i, (M_i)_i)$ (les sous-groupes G_i sont tous égaux au groupe G). Lorsque s est supérieur ou égal à 2, la structure Δ est complète.

Exemple 3 : Si $G = A \rtimes B$ est un groupe fini produit semi-direct de deux groupes, le système de sous-groupes (A, B, A, B) est complet. En effet, le sous-groupe A est distingué dans G et $A \bigcap_G B := \{1\}$, donc si $h_1, h_2 \in G$ et $x \in A^{h_1} \bigcap B^{h_2}$ alors $x \in A^{h_2} \bigcap B^{h_2} = \{1\}$. On en déduit que :

$$\mathrm{Card}(A^{h_1} B^{h_2}) = \mathrm{Card}(A)\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(G)$$

et que (A, B, A, B) est complet.

Exemple 4 : Soit G un groupe fini. On choisit, pour chaque diviseur premier p de $\mathrm{Card}(G)$, deux p-Sylow de G que l'on note $P_{p,1}$ et $P_{p,2}$. Alors l'uplet de sous-groupes constitué de tous ces sous-groupes est complet.

Exemple 5 : Soient s supérieur à 3 et G un groupe fini. Alors tout s-uplet de sous-groupes contenant deux sous-groupes maximaux non conjugués est complet.

Enoncé et démonstration

Lorsqu'on a un système de sous-groupes complet, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1.2. *Soient* G *un groupe fini et* $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ *une structure de dégénérescence complète. Alors il existe une unique* Δ*-composante dans l'espace de Hurwitz* $\mathrm{H}_r(G)$*. Dans ce cas la sous-variété* $\mathrm{ni}(\Delta)$ *est irréductible et on a l'égalité :*

$$\mathrm{ni}(\Delta) = M_1 \star \cdots \star M_s$$

Démonstration du théorème 3.1.2. On doit démontrer que si $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r)$ et $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r)$ sont deux Δ-représentants alors il existe une tresse $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = \mathbf{u}$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Par définition, il existe $h_1, \ldots, h_s$ telle que $\mathbf{g}_i^{h_i} \in M_i$.

Le lemme technique 3.1.3 ci-après est présent dans [14] sous une forme un peu différente. En l'utilisant à s reprises (sous l'hypothèse de complétude), on obtient une tresse $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1^{h_1}, \ldots, \mathbf{g}_r^{h_s})$$

De même pour le Δ-représentant $\mathbf{u}$. On peut donc supposer pour démontrer le théorème que les éléments h_i de la condition (A) de la définition 2.1.1 pour $\mathbf{g}$ et $\mathbf{u}$ sont égaux à 1. Comme $\mathbf{g}_i$ et $\mathbf{u}_i$ sont dans la même composante M_i, il existe une tresse $\mathcal{F}_i$ permettant de passer de $\mathbf{g}_i$ à $\mathbf{u}_i$. En concaténant les différentes tresses $\mathcal{F}_i$ on obtient le résultat voulu. □

<u>Lemme</u> 3.1.3. *Soient G un groupe fini et $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_r) \in G^r$. Supposons qu'il existe des entiers i et k tel que $g_k \ldots g_{k+i} = 1$. Soit t un élément du groupe engendré soit par (i) $\{g_1, \ldots, g_r\} \setminus \{g_k, \ldots, g_{k+i}\}$ soit par (ii) $\{g_k, \ldots, g_{k+i}\}$. Il existe une tresse $\mathcal{Q}$ telle que :*

$$\mathcal{Q}(g_1, \ldots, g_r) = (g_1, \ldots, g_{k-1}, g_k^t, \ldots, g_{k+i}^t, g_{k+i+1}, \ldots, g_r)$$

Démonstration. Nous commençons par le cas de (ii) et pour simplifier la démonstration on peut supposer que t est simplement un certain g_n avec $n = k, \ldots, k+i$. On utilise alors la tresse $\mathcal{T}_1 = \mathcal{Q}_n \ldots \mathcal{Q}_{k+i-1}$:

$$\mathcal{T}_1\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_k, \ldots, g_{n-1}, g_{n+1}^{g_n}, \ldots, g_{k+i}^{g_n}, g_n, g_{k+i+1}, \ldots, g_r)$$

On remarque ensuite que le produit $g_k \ldots g_{n-1} g_n g_{n+1} g_n^{-1} \ldots g_n g_{k+i} g_n^{-1} g_n$ vaut 1 ce qui permet d'utiliser le lemme 2.1.3 pour mettre g_n en position k dans le r-uplet. On obtient ainsi une tresse $\mathcal{T}_2$ vérifiant :

$$\mathcal{T}_2\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_{k-1}, g_n, g_k, \ldots, g_{n-1}, g_{n+1}^{g_n}, \ldots, g_{k+i}^{g_n}, g_{k+i+1}, \ldots, g_r)$$

On utilise maintenant la tresse $\mathcal{T}_3 := \mathcal{Q}_k \ldots \mathcal{Q}_{n-1}$ sur le r-uplet $\mathcal{T}_2\mathbf{g}$:

$$\mathcal{T}_3\mathcal{T}_2\mathbf{g} = (g_1, \ldots g_{k-1}, g_k^{g_n}, \ldots, g_{n-1}^{g_n}, g_n, g_{n+1}^{g_n}, \ldots, g_n g_{k+i} g_n^{-1}, g_{k+i+1}, \ldots, g_r)$$

Ce qui nous donne le résultat voulue.

Pour le cas de figure (i), on remarque que l'inverse t^{-1} appartient aussi au groupe engendré par $\{g_1, \ldots, g_r\} \setminus \{g_k, \ldots, g_{k+i}\}$. La partie (ii) montre qu'il existe une tresse $\mathcal{T}_4$ vérifiant :

$$\mathcal{Q}(g_1, \ldots, g_r) = (g_1^{t^{-1}}, \ldots, g_{k-1}^{t^{-1}}, g_k, \ldots, g_{k+i}, g_{k+i+1}^{t^{-1}}, \ldots, g_r^{t^{-1}})$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Maintenant le produit $g_1^{t^{-1}} \dots, g_{k-1}^{t^{-1}} g_k \dots, g_{k+i} g_{k+i+1}^{t^{-1}} \dots, g_r^{t^{-1}}$ vaut 1 et t appartient au groupe engendré par ses éléments (ce groupe est simplement G). Ceci nous permet d'appliquer de nouveau la partie (ii) avec $k = 1$ et $i = r$ pour obtenir la tresse voulu.

□

Applications

Le théorème 3.1.2 nous dit que si Δ est une structure complète alors la sous-variété $\mathrm{ni}(\Delta)$ est égale à la composante $M_1 \star \cdots \star M_s$. Le théorème 2.2.2 entraine la formule suivante :

$$(M_1 \star \cdots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \cdots \star M_s^\sigma$$

Corollaire 3.1.4. *Soient G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence complète.*

(i) Si les composantes M_i sont permutées par $G_\mathbb{Q}$ alors la composante $M = M_1 \star \cdots \star M_s$ est définie sur $\mathbb{Q}$. En particulier, si les composantes M_i sont définies sur $\mathbb{Q}$ alors la composante $M = M_1 \star \cdots \star M_s$ est définie sur $\mathbb{Q}$.

(ii) Si s désigne le nombre de composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$, alors l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{sr}(G)$ contient une $\mathbb{Q}$-composante irréductible.

Démonstration. Pour (i), pour tout $\sigma \in G_\mathbb{Q}$, on applique la formule :

$$(M_1 \star \cdots \star M_s)^\sigma = M_1^\sigma \star \cdots \star M_s^\sigma$$

Or les composantes M_i sont permutées par $G_\mathbb{Q}$. La commutativité de $\star$ (équation 2.1 de l'exemple 2.1.6) permet de conclure que $M = M^\sigma$ pour tout automorphisme $\sigma \in G_\mathbb{Q}$. Pour (ii), notons $\mathbf{G}$ le système complet de sous-groupes de G défini par $G_i = G$ pour $i = 1, \dots, s$ et $M_1, \dots, M_s$ les différentes composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$. La composante $M = M_1 \star \cdots \star M_s$ est définie sur $\mathbb{Q}$. En effet, dire que l'espace $\mathrm{H}_r(G)$ est défini sur $\mathbb{Q}$ revient à dire que les composantes M_i sont permutées par l'action de Galois. La partie (i) permet de conclure. □

Application déjà connue : Lorsque Δ est la structure HM, on obtient le théorème principal de [8] :

Corollaire 3.1.5. *Soit G un groupe fini et $\boldsymbol{C} = (C_1, C_1^{-1}, \dots, C_s, C_s^{-1})$ un r-uplet de classes de conjugaison de type HM. Si l'on suppose $\boldsymbol{C}$ globalement rationnel, alors les HM-composantes sont permutées par $G_\mathbb{Q}$.*

Ce résultat se déduit immédiatement du théorème 2.2.2 et du lemme suivant :

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Lemme 3.1.6. *Si l'uplet d'inertie $\boldsymbol{C} = (C_1, C_1^{-1}, \ldots, C_s, C_s^{-1})$ est globalement rationnel alors la structure Δ de l'exemple 1 est définie sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. En effet, supposons que $\mathbf{C} = (C_1, C_1^{-1}, \ldots, C_s, C_s^{-1})$ est globalement rationnel. Alors pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ on a : $\mathbf{C}^{\chi(\sigma)} = \mathbf{C}$. C'est-à-dire, il existe une permutation τ de $\{1, \ldots s\}$ vérifiant : pour tout i

$$C_i^{\chi(\sigma)} = C_{\tau(i)} \text{ ou } C_i^{\chi(\sigma)} = C_{\tau(i)}^{-1}$$

Supposons que l'on ait $C_i^{\chi(\sigma)} = C_{\tau(i)}$ (l'autre cas est similaire). Il existe alors $h_i \in G$ tel que :

$$g_i^{\chi(\sigma)} = h_i g_{\tau(i)} h_i^{-1} \tag{3.2}$$

D'autre part :

$$H_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i, \mathfrak{C}_i^{-1}\})^\sigma = H_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i^{\chi(\sigma)}, \mathfrak{C}_i^{-\chi(\sigma)}\})$$

La relation (3.2) montre que :

$$H_2(G_i, \{\mathfrak{C}_i^{\chi(\sigma)}, \mathfrak{C}_i^{-\chi(\sigma)}\}) = H_2(G_{\tau(i)}, \{\mathfrak{C}_{\tau(i)}, \mathfrak{C}_{\tau(i)}^{-1}\})^{h_i}$$

Nous renvoyons à la proposition 2.1.2 pour la définition de $H_2(G_{\tau(i)}, \{\mathfrak{C}_{\tau(i)}, \mathfrak{C}_{\tau(i)}^{-1}\})^{h_i}$ Notons $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_s)$, on a :

$$(\Delta_\tau)^{\mathbf{h}} = \Delta^\sigma$$

La proposition 2.1.2 partie (ii) permet de conclure que Δ et Δ^σ sont équivalentes. $\square$

Le théorème suivant donne une autre application des structures de dégénérescence :

Théorème 3.1.7. *Soient $G = K \ltimes L$ un produit semi-direct de deux groupes K et L, r_l et r_k des entiers. S'il existe un r_l-uplet rigide (définition 1.2.9) $\boldsymbol{C}_L$ de classes de conjugaison rationnelles de L et un r_k -uplet rigide $\boldsymbol{C}_K$ de classes de conjugaison rationnelles de K, alors la composante*

$$M = \mathrm{H}_{r_k}(K, C_K) \star \mathrm{H}_{r_k}(K, C_K) \star \mathrm{H}_{r_l}(L, C_L) \star \mathrm{H}_{r_l}(L, C_L)$$

de $H_{2(r_k+r_l)}(G)$ est définie sur $\mathbb{Q}$. De plus, pour tout nombre premier ℓ ne divisant pas le cardinal de G, la composante M contient des $\mathbb{Q}_\ell$-points.

Démonstration. Pour la première partie de la conclusion il suffit de constater que le système de sous-groupes (K, K, L, L) est complet (exemple 3 de la section 3.1.1) et que les composantes $\mathrm{H}_{r_k}(K, C_K)$ et $\mathrm{H}_{r_l}(L, C_L)$ sont définies sur $\mathbb{Q}$. Fixons-nous à présent un nombre premier ℓ ne divisant pas le cardinal de G. La présence de $\mathbb{Q}$-points dans les

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

espaces de Hurwitz $\mathrm{H}_{r_k}(K, C_K)$ et $\mathrm{H}_{r_l}(L, C_L)$ nous permet de construire (par extension des scalaires) des $\mathbb{Q}_\ell$-points. La méthode de patching [16] permet alors de recoller ces $\mathbb{Q}_\ell$-points pour construire un $\mathbb{Q}_\ell$-point dans l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{2(r_k+r_l)}(G)$. En reprenant les arguments de [8] section 2.3, on montre que ce point appartient, pour tout ℓ, à la composante M. □

Un exemple d'utilisation de ce théorème concerne les groupes symétriques S_n pour lesquels on peut donner un 3-uplet rigide que l'on note $\mathbf{C}_n$; l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_3(S_n, C_n)$ est donc irréductible défini sur $\mathbb{Q}$.

Formons un produit semi-direct quelconque $G = S_n \ltimes S_m$. D'après le théorème 3.1.7, la composante M de $H_{12}(G)$ définie par :

$$M = \mathrm{H}_3(S_n, C_n) \star \mathrm{H}_3(S_n, C_n) \star \mathrm{H}_3(S_m, C_m) \star \mathrm{H}_3(S_m, C_m)$$

est définie sur $\mathbb{Q}$. Remarquons que Dèbes-Emsalem et Deschamps dans [8] et [9] ont déjà construit, pour tout groupe G, des composantes irréductibles possédant des $\mathbb{Q}_\ell$-points. La méthode exposée ici permet une construction explicite avec un faible nombre de points de branchement, qui conduit donc à des variétés de dimension plus petite. Dans notre cas, pour $n = m = 3$ et S_3 agissant sur lui même par conjugaison, la méthode de [8] permet de construire une variété de dimension 32 possédant des points ℓ-adiques pour tout ℓ premier et premier à l'ordre de G. Avec notre méthode la variété est de dimension 12.

3.1.2 Majoration du nombre de Δ-composantes

Dans cette section, nous allons généraliser le critère d'irréductibilité 3.1.2 dans 2 directions :

- le théorème 3.1.9 est une majoration du nombre de Δ-composantes.
- le théorème 3.1.11 est un autre critère d'irréductibilité de $\mathrm{ni}(\Delta)$ particulièrement performant lorsque le groupe G est simple (corollaire 3.1.12).

Nous commençons par une définition technique. Elle met en jeu un groupe fini G, un entier positif s et deux s-uplets de sous-groupes $\mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_s)$ et $\mathbf{H} = (H_1, \ldots, H_s)$ de G.

Définition 3.1.8. *Nous dirons que $\boldsymbol{G}$ est $\boldsymbol{H}$-complète lorsque pour tout $i = 1, \ldots, s$ et pour tout $h_1, \ldots, h_s \in G$ le groupe H_i est contenu dans le groupe engendré par les sous-groupes*

$$\{G_1^{h_1}, \ldots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \ldots, G_s^{h_s}\}$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Lorsque $\boldsymbol{G}$ est attaché à la structure de dégénérescence $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$, nous dirons que Δ est $\boldsymbol{H}$-complète lorsque $\boldsymbol{G}$ l'est.

Exemple 6. Si $\mathbf{H}$ est simplement le s-uplet de sous-groupes $(G, \ldots, G)$ de G, on retrouve la définition de complétude donnée plus haut.

Cette définition est motivée par le théorème suivant dont nous présentons une démonstration dans la section 3.1.3.

Théorème 3.1.9. *Soient G un groupe, Δ une structure de dégénérescence et $\boldsymbol{H}$ un s-uplet de sous-groupes. On suppose que la structure de dégénérescence Δ est $\boldsymbol{H}$-complète. Notons n_Δ le nombre de Δ-composantes dans l'espace de Hurwitz $H_r(G)$. On a la majoration suivante :*

$$n_\Delta \leq \prod_{i=1}^{s} \frac{|G|}{|H_i|}$$

Pour illustrer ce théorème nous donnons deux applications :

Exemple 7. Lorsque la structure de dégénérescence est complète la majoration 3.1.9 nous redonne le théorème 3.1.2.

Exemple 8. Partons d'une structure de dégénérescence $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ quelconque, et pour chaque entier $i = 1, \ldots, s$ posons :

$$H_i = \bigcap_{h_1, \ldots h_s \in G} \langle G_1^{h_1}, \ldots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \ldots, G_s^{h_s} \rangle$$

Par construction Δ est $\mathbf{H}$-complète. Si pour tout $i = 1, \ldots, s$ on note $\mathbb{Q}_{M_i}$ le corps de définition de la composante M_i, alors le compositum $k := \mathbb{Q}_{M_1} \ldots \mathbb{Q}_{M_s}$ est un corps de définition de la structure de dégénérescence Δ. Les théorèmes 3.1.9 et 2.2.2 montrent que toutes les Δ-composantes sont définies sur une extension de k de degré inférieur ou égal à $\prod_{i=1}^{s} \frac{|G|}{|H_i|}$.

3.1.3 Démonstration du théorème 3.1.9

Le lemme technique suivant nous permettra d'obtenir le théorème 3.1.9.

Lemme 3.1.10. *Soient G un groupe, Δ une structure de dégénérescence, $\boldsymbol{H}$ un s-uplet de sous-groupes de G, $\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_s)$ un Δ-représentant et $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_s) \in \boldsymbol{H}$. On suppose que la structure de dégénérescence Δ est $\boldsymbol{H}$-complète. Alors il existe une tresse $\mathcal{Q}$ telle que :*

$$\mathcal{Q}\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1^{a_1}, \ldots, \boldsymbol{g}_s^{a_s})$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Démonstration du lemme 3.1.10. Il suffit de montrer le résultat pour les s-uplets $\mathbf{a}$ de la forme $(1,\dots,1,a_i,1,\dots,1)$ avec i variant de 1 à s et a_i appartenant au sous-groupe H_i de G.

Fixons-nous un Δ-représentant $\mathbf{g}=(\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_s)$, un entier $i=1,\dots,s$ et un s-uplet $\mathbf{a}=(1,\dots,1,a_i,1,\dots,1)$ avec $a_i\in H_i$. En particulier $\mathbf{g}$ vérifie les conditions suivantes :

(i) pour $i=1,\dots,s$, le produit $g_{i,1}\dots g_{i,r_i}$ est égal à 1.

(ii) si pour $j=1,\dots,s$, on pose $\beta_j=h_j^{-1}$ où les h_j sont ceux de la définition 2.1.1 pour $\mathbf{g}$, alors pour tout $j=1,\dots,s$, le groupe $G_j^{\beta_j}$ est engendré par les éléments $g_{j,1},\dots,g_{j,r_i}$.

Combiné avec l'hypothèse que Δ est une structure de dégénérescence $\mathbf{H}$-complète cela donne que le groupe H_i est contenu dans le groupe engendré par les éléments :

$$\{g_{1,1},\dots,g_{1,r_1},\dots,g_{i-1,1},\dots,g_{i-1,r_{i-1}},g_{i+1,1},\dots,g_{i+1,r_{i+1}},\dots,g_{s,1},\dots,g_{s,r_s}\}$$

Comme $a_i\in H_i$, on en déduit que :

$$a_i\in\langle\{g_1,\dots,g_r\}\setminus\{g_{i,1},\dots,g_{i,r_i}\}\rangle$$

Il nous suffit d'appliquer le lemme 3.1.3 avec $t=a_i$ pour conclure.

□

Démonstration du théorème 3.1.9. Pour tout k, notons I_k l'indice de H_k dans G et $h_{k,1},\dots,h_{k,I_k}$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H_k. Soit $\mathbf{g}=(\mathbf{g}_1,\dots,\mathbf{g}_s)$ un Δ-représentant. Nous allons montrer que pour tout Δ-représentant $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s)$ il existe une tresse Ω et des entiers $t_1,\dots,t_s$ avec $t_k\in[1,I_k]$, tels que :

$$\Omega\mathbf{u}=(\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}},\dots,\mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$$

Cela montrera que tout Δ-représentant est dans l'orbite d'un élément de la forme $(\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}},\dots,\mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$. On en déduira que le nombre de Δ-composantes est donc inférieur au nombre d'éléments $(\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}},\dots,\mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$, c'est à dire $n_\Delta\leq\prod I_k$.

Soit $\mathbf{u}=(\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_s)$ un Δ-représentant. Quitte à utiliser la partie (i) de la proposition 2.1.2) pour conjuguer la structure de dégénérescence Δ, on peut supposer que pour chaque entier $i=1,\dots,s$, le r_i-uplet $\mathbf{u}_i$ appartient à la composante M_i. Ainsi il

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in G$ tels que $\mathbf{u}_k$ et $\mathbf{g}_k^{\alpha_k}$ appartiennent à la composante M_k. Il existe donc s tresses locales [1] $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_s$ telles que :

$$\mathcal{Q}_1 \ldots \mathcal{Q}_s(\mathbf{u}) = (\mathbf{g}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{g}_s^{\alpha_s})$$

Posons $\alpha_k = h_{k,t_k}.h_k$ où $h_k \in H_k$. Le lemme 3.1.10 appliqué à $(\mathbf{g}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{g}_s^{\alpha_s})$ et à $\mathbf{h} = (h_1^{-1}, \ldots, h_s^{-1})$ nous donne l'existence d'une tresse $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}_1^{\alpha_1}, \ldots, \mathbf{g}_s^{\alpha_s}) = (\mathbf{g}_1^{h_{1,t_1}}, \ldots, \mathbf{g}_s^{h_{s,t_s}})$$

En multipliant les deux tresses $\mathcal{T}$ et $\mathcal{Q}_1 \ldots \mathcal{Q}_s$ on obtient le résultat.

□

3.1.4 Un autre critère d'irréductibilité

Enoncés et exemples

Soient G un groupe fini, $\Delta = (G, (G_i)_{i=1\ldots s}, (M_i)_{i=1\ldots s})$ une structure de dégénérescence et $J := \{j_1, \ldots, j_{s'}\}$ un sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, s\}$. Considérons un Δ-représentant que l'on note [2] $\mathbf{g}$. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, r\}$ et tout entier $k \in \{1, \ldots, r_i\}$ on note $\mathcal{C}_i^k$ la classe de conjugaison [3] dans G de l'élément g_i^k. Nous allons utiliser les deux conditions suivantes :

(H_1) pour tout $j \in J$ et tout $h_1, \ldots, h_s \in G$, le groupe G est engendré par ses sous-groupes $(G_i^{h_i})_{i \neq j}$

(H_2) le groupe G est engendré par la réunion des classes de conjugaison $(\mathcal{C}_j^k)_{j \in J, k \in \{1, \ldots, r_j\}}$.

Le théorème suivant donne une version plus fine du critère de complétude 3.1.2 pour obtenir l'irréductibilité de ni(Δ).

Théorème 3.1.11. *Soient G un groupe fini et Δ une structure de dégénérescence telle que ni$(\Delta) \neq \emptyset$. Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), il existe une unique Δ-composante dans l'espace de Hurwitz $H_r(G)$.*

Exemple 9. Soient p un nombre premier impair, $G = \mathbb{D}_{2p}$ le groupe diédral de cardinal $2p$ et r une rotation. Notons $R = \{r, r^{-1}\}$, S la classe de conjugaison des symétries, $\mathbf{C} = \{R, R, S, S, S, S\}$. Si l'on note Δ la structure HM liée à $\mathbf{C}$ (exemple 1) et $J = \{2, 3\}$ (ici $s = 3$), le théorème s'applique et l'espace $\mathrm{H}_6(D_p, \mathbf{C})$ contient une unique composante HM.

1. i.e la tresse $\mathcal{Q}_k$ agit uniquement sur le k-ième paquet (pour tout $i, j = 1 \ldots s$, les tresses $\mathcal{Q}_i$ et $\mathcal{Q}_j$ ont des supports disjoints).
2. Les notations sont celles de la définition 2.1.1
3. Cette construction ne dépend pas, à permutation près, du choix du Δ-représentant.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Exemple 10. Pour $J := \{1, \ldots, s\}$ on retrouve le critère de complétude 3.1.2.

Lorsque G est un groupe simple, toute classe de conjugaison engendre G et donc pour tout $J \neq \emptyset$ la condition (H_2) est immédiate. Dans ce cas on obtient l'amélioration du théorème 3.1.2 suivante :

Corollaire 3.1.12. *Soient G un groupe simple et Δ une structure de dégénérescence. Supposons qu'il existe un entier k tel que pour tout $h_1, \ldots, h_s$ le groupe G soit engendré par les sous-groupes*

$$\{G_1^{h_1}, \ldots, G_{k-1}^{h_{k-1}}, G_{k+1}^{h_{k+1}}, \ldots, G_s^{h_s}\}$$

Alors il existe une unique Δ-composante dans l'espace de Hurwitz $H_r(G)$.

Démonstration. Il suffit de poser $J = \{k\}$ dans le théorème 3.1.11. □

Exemple 11. Selon l'$\mathbb{ATLAS}$ le groupe de Mathieu M_{23} contient un sous-groupe maximal isomorphe au groupe M_{22} et un autre sous-groupe maximal isomorphe à M_{11}. Par maximalité, le système de sous-groupe $\mathbf{G} := (M_{22}, M_{22}, M_{11})$ vérifie les conditions du corollaire 3.1.12 et pour tout choix de structure de dégénérescence Δ, dont le système de sous-groupe sous-jacent est $\mathbf{G}$, il existe une unique Δ-composante. Si l'on souhaite construire une $\mathbb{Q}$-composante irréductible d'un espace de Hurwitz associé au groupe M_{22}, le théorème 2.2.2 montre qu'il suffit d'en construire pour les groupes M_{22} et M_{11}.

Pour ce faire, on peut par exemple utiliser les réalisations régulières des groupes M_{11} et M_{22} (obtenues par des méthodes utilisant le théorème de rigidité) que l'on trouve dans [18], celles-ci nous permettent de construire des composantes irréductibles définies sur $\mathbb{Q}$. Pour le groupe M_{11} il s'agit d'une composante $\mathcal{C}_{11}$ de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_9(M_{11})$ (voir le théorème 6.12 de [18] pour plus de détails) et pour le groupe M_{22} il s'agit d'une composante $\mathcal{C}_{22}$ de $\mathrm{H}_3(M_{22})$ (voir la proposition 9.1 et le théorème 9.9 de [18]). On obtient alors une $\mathbb{Q}$-composante irréductible de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{15}(M_{23})$.

Démonstrations

Démonstration du théorème 3.1.11. En utilisant la proposition 2.1.2, on peut supposer que $J = \{1, \ldots, s'\}$. Nous adoptons les conventions d'écriture suivantes :

– Un Δ-représentant $\mathbf{g}$ sera noté

$$\mathbf{g} := (\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b)$$

où $\mathbf{g}_a = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{s'})$ et $\mathbf{g}_b = (\mathbf{g}_{s'+1}, \ldots, \mathbf{g}_s)$.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

– étant donnés $\mathbf{h}_a := (h_1, \ldots, h_{s'})$ et $\mathbf{h}_b := (h_{s'+1}, \ldots, h_s)$ des uplets d'éléments de G on notera

$$(\mathbf{g}_a^{\mathbf{h}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b})$$

le r-uplet d'éléments de G défini de la manière suivante :

$$(\mathbf{g}_a^{\mathbf{h}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b}) = ((g_{1,1})^{h_1}, \ldots, (g_{1,r_1})^{h_1}, \ldots, (g_{s,1})^{h_s}, \ldots, (g_{s,r_s})^{h_s})$$

Il suffit de montrer que :

(*) pour tout Δ-représentant $(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b)$ et tout $\mathbf{h}_a, \mathbf{h}_b$ comme ci-dessus, il existe une tresse $\mathcal{Q}$ telle que : $\mathcal{Q}(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{h}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b})$

On divise le problème en deux parties :

Lemme 3.1.13. Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), pour tout Δ-représentant $\mathbf{g}$ et pour tout s'-uplet $\mathbf{k}_a$ (resp. $s - s'$-uplet $\mathbf{h}_b$) d'éléments de G :

(i) il existe un s'-uplet $\mathbf{p}_a$ d'éléments de G et une tresse $\mathcal{Q}'$ tels que :

$$\mathcal{Q}'(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b})$$

(ii) il existe une tresse $\mathcal{Q}$ telle que :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{k}_a}, \mathbf{g}_b)$$

Pour obtenir $(*)$, il nous suffit alors d'appliquer la partie (i) du lemme 3.1.13 et d'utiliser ensuite la partie (ii) avec $\mathbf{k}_a = \mathbf{p}_a^{-1}\mathbf{h}_a$, en remplaçant $\mathbf{g}_a$ par $\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}$ et $\mathbf{g}_b$ par $\mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b}$. □

Démonstration du lemme 3.1.13. Pour la partie (ii), on peut se restreindre aux uplets $\mathbf{k}_a$ de la forme $(1, \ldots, 1, k, 1, \ldots, 1)$ avec k dans G. L'hypothèse (H_1) nous permet d'appliquer le lemme 3.1.3 avec $t = k$.

Pour la partie (i), on se restreint aussi aux $\mathbf{h}_b$ de la forme $(1, \ldots, h, \ldots, 1)$. L'hypothèse (H_2) permet de choisir h dans une certaine classe de conjugaison $\mathcal{C}_j^k$ avec $j \in J$. On peut donc trouver un s'-uplet $\mathbf{p}_a$ tel que h appartient au sous-groupe de G engendré par $\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}$. En utilisant la partie (ii) du lemme 3.1.13 on peut trouver une tresse $\mathcal{T}$ telle que :

$$\mathcal{T}(\mathbf{g}_a, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}, \mathbf{g}_b)$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Le lemme 3.1.3 nous permet de trouver une tresse $\mathcal{R}$ telle que :

$$\mathcal{R}(\mathbf{g}^{\mathbf{p}_a}, \mathbf{g}_b) = (\mathbf{g}_a^{\mathbf{p}_a}, \mathbf{g}_b^{\mathbf{h}_b})$$

Il nous suffit de composer les tresses $\mathcal{T}$ et $\mathcal{R}$ pour obtenir le résultat.

□

3.2 Δ-composantes et tour modulaire

Pour le moment nous nous sommes intéressés au nombre de Δ-composantes d'un espace de Hurwitz. Dans cette partie nous allons travailler avec une tour de Hurwitz ; il s'agit d'une collection $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'espaces de Hurwitz reliés entre eux par des morphismes $\Phi_i : H_i \to H_{i-1}$. Plus particulièrement, notre objectif est d'étudier les différents relèvements d'une composante M_0 de H_0 le long de la tour $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$; c'est-à-dire de trouver les suites de composantes M_n de H_n vérifiant $\Phi_n(M_n) = M_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Nous commençons par délimiter le problème, en travaillant uniquement sur les Δ-composantes dans la tour modulaire de Fried [12]. Nous allons montrer que sous certaines hypothèses, pour chaque composante M_0, il existe une unique suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ relevant M_0 (voir le théorème 3.2.8).

3.2.1 Δ-revêtement et morphisme de Frattini

Morphisme de Frattini et lemme de Schur-Zassenhaus

Avant d'envisager la tour modulaire de Fried nous allons nous concentrer sur l'ingrédient principal permettant sa construction ; on pourra consulter [13].

Définition 3.2.1. *Un épimorphisme de groupe $\Phi : G' \to G$ est dit revêtement de Frattini lorsque pour tout sous-groupe H de G' :*

$$\Phi(H) = G \Longleftrightarrow H = G'$$

De plus, nous dirons que Φ est un p-revêtement de Frattini quand ker(Φ) est un p-groupe.

Le lemme suivant est généralement énoncé dans le cas où K est cyclique. Nous aurons besoin de cette version plus générale.

Lemme 3.2.2. *Soient p un nombre premier et $\Phi : G' \longrightarrow G$ un p-revêtement de Frattini. Si H est un sous-groupe de G d'ordre ρ premier à p, alors il existe un relèvement*

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

H' de H en un sous-groupe de G' d'ordre ρ. De plus si H'_1 est un autre relèvement de H d'ordre ρ, il existe un élément $h' \in \ker(\Phi)$ tel que

$$H'_1 = (H')^{h'}$$

Démonstration. La restriction Ψ du morphisme Φ au sous-groupe $\mathfrak{H} := \Phi^{-1}(H)$ permet de construire la suite exacte :

$$1 \to \ker(\Psi) \to \mathfrak{H} \to H \to 1 \tag{3.3}$$

Les sections de cette suite correspondent aux relèvements de H de même ordre. D'autre part, les groupes H et $\ker(\Psi)$ sont d'ordres premiers entre eux, ce qui nous permet d'utiliser le lemme de Schur-Zassenhaus : la suite se scinde et les sections sont toutes conjuguées entres elles par un élément de $\ker(\Psi)$. □

Relèvement des structures de dégénérescence

Soient $\Phi : G' \to G$ un p-revêtement de Frattini entre groupes finis et $\Delta = (G, (G_i)_i, (M_i)_i)_{i=1,\dots,s}$ une structure de dégénérescence. Supposons que pour chaque entier $i = 1, \dots, s$, le groupe G_i soit un p'-groupe (nous dirons que la structure de dégénérescence Δ est p'). Le lemme 3.2.2, appliqué aux groupes $G_1, \dots, G_s$, nous permet de créer des rélèvements $G'_1, \dots, G'_s$ de $G_1, \dots, G_s$ ainsi que des isomorphismes

$$\psi_i : G_i \longrightarrow G'_i$$

ce sont les sections des différentes suites exactes (3.3). Remarquons que par la propriété de Frattini les sous-groupes $G'_1, \dots, G'_s$ engendrent le groupe G'.

Pour chaque entier $i = 1, \dots, s$, le morphisme ψ_i induit une bijection de l'ensemble des composantes de $\mathrm{H}_{r_i}(G_i)$ sur l'ensemble des composantes de $\mathrm{H}_{r_i}(G'_i)$. Ceci nous permet de créer une structure de dégénérescence sur le groupe G' définie par

$$\Delta' := (G', (\psi(G_i))_i, (\psi(M_i))_i)_{i=1,\dots,s}$$

Pour être précis, la structure de dégénérescence Δ' dépend des sections ψ_i, cependant le lemme 3.2.2 nous dit que deux sections sont conjuguées. On en déduit qu'un autre choix de sections revient à conjuguer les structures de dégénérescences. On a donc défini une classe d'équivalence de structure de dégénérescence. Il n'y a pas d'ambigüité à parler de Δ'-composantes de l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G')$.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Relèvement des Δ-composantes

L'objectif est d'étudier le nombre de Δ-composantes de $\mathrm{H}_r(G')$ en fonction du nombre de Δ-composantes de $\mathrm{H}_r(G)$. La proposition suivante nous donne un critère pour que toute Δ-composante se relève de manière unique en une Δ'-composante.

Proposition 3.2.3. *Soient $\Psi : G' \to G$ un p-revêtement de Frattini et $\Delta = (G, (M_i), (G_i))$ une structure de dégénérescence p'. Si la structure de dégénérescence Δ' est $\boldsymbol{ker}(\Psi)$-complète*[4]*, alors toute Δ-composante de $H_r(G)$ se relève de manière unique en une Δ'-composante de $H_r(G')$.*

Démonstration. Il faut montrer les deux points suivants :

(i) Toute Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ se relève en une Δ'-composante de $\mathrm{H}_r(G')$.

(ii) Si deux Δ-composantes M_1 et M_2 de $\mathrm{H}_r(G')$ vérifient $\Psi(M_1) = \Psi(M_2)$ alors $M_1 = M_2$.

Pour le point (i), notons $\psi_i : G_i \longrightarrow G'_i$ pour tout $i = 1, \ldots, s$, l'isomorphisme obtenu dans le lemme 3.2.2. Soit M une Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ et $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s)$ un Δ-représentant appartenant à M. Posons $\mathbf{g}' = (\psi_1(\mathbf{g}_1), \ldots, \psi_s(\mathbf{g}_s))$; il s'agit d'un r-uplet d'éléments de G' vérifiant :

$$\Psi(\mathbf{g}') = \mathbf{g}$$

Il faut vérifier la définition 2.1.1 pour la structure de dégénérescence Δ'. Par définition, le r-uplet $\mathbf{g}$ engendre le groupe G et $\Psi(\mathbf{g}') = \mathbf{g}$; on en déduit, par la propriété de Frattini, que le r-uplet $\mathbf{g}'$ engendre le groupe G'. Mais $\mathbf{g}$ est un Δ-représentant donc il existe un uplet $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_s) \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{g}^{\mathbf{h}}$ appartient à $M_1 \times \cdots \times M_s$. Il en résulte que :

$$(\psi_1(\mathbf{g}_1^{h_1}), \ldots, \psi_s(\mathbf{g}_s^{h_s})) = (\psi_1(\mathbf{g}_1)^{\psi_1(h_1)}, \ldots, \psi_s(\mathbf{g}_s)^{\psi_s(h_s)}) \in M'_1 \times \cdots \times M'_s$$

C'est-à-dire que $\mathbf{g}' = (\psi_1(\mathbf{g}_1), \ldots, \psi_s(\mathbf{g}_s))$ est un Δ'-représentant qui relève $\mathbf{g}$.

Pour le point (ii), fixons $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_s)$ un Δ-représentant. Quitte à conjuguer la structure de dégénérescence Δ (proposition 2.1.2) on peut supposer que pour tout $i = 1, \ldots, s$, le r_i-uplet $\mathbf{g}_i$ appartient à la composante M_i. Soit maintenant $\mathbf{g}' = (\mathbf{g}'_1, \ldots, \mathbf{g}'_s)$ un Δ'-représentant qui relève $\mathbf{g}$ et pour chaque indice $i = 1, \ldots, s$, notons $\mathcal{G}'_i$[5] le sous-groupe de G engendré par le r_i-uplet $\mathbf{g}'_i$. On peut considérer la restriction $\Psi : \mathcal{G}'_i \longrightarrow G_i$ du morphisme de Frattini Ψ au sous-groupe $\mathcal{G}'_i$ de G' :

4. Par définition $\mathbf{ker}(\Psi) = (\ker(\Psi), \ldots, \ker(\Psi))$.
5. Il s'agit d'un conjugué du sous-groupe G'_i de G'.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Ce morphisme est surjectif car il envoie l'uplet $\mathbf{g}'_i$ sur l'uplet $\mathbf{g}$ qui engendre G_i. D'autre part, les deux groupes G_i et $\mathcal{G}_i$ ont même cardinal par construction ; on en déduit qu'il s'agit d'un isomorphisme et que sa réciproque ψ'_i induit une section de la suite exacte (1) présentée dans la démonstration du lemme 3.2.2.

Soit maintenant $\mathbf{g}'' = (\mathbf{g}''_1, \ldots, \mathbf{g}''_s)$ un autre Δ'-représentant qui relève $\mathbf{g}$. Par le même raisonnement on a une autre section ψ''_i de la suite exacte (3.3) vérifiant $\psi''_i(\mathbf{g}_i) = \mathbf{g}''_i$. La conclusion du lemme 3.2.2 nous dit que les deux sections sont conjuguées par un élément de $\ker(\Psi)$; c'est-à-dire que pour tout indice $i = 1, \ldots, s$, il existe un élément $h_i \in \ker(\Psi)$ tel que :

$$\psi''_i = i_{h_i} \circ \psi'_i$$

où i_{h_i} est l'automorphisme intérieur de G' défini par h_i. On en déduit en particulier que :

$$\psi''_i(\mathbf{g}_i) = (i_{h_i} \circ \psi'_i)(\mathbf{g}_i)$$

Ce qui se traduit par la relation :

$$(\mathbf{g}''_1, \ldots, \mathbf{g}''_s) = ((\mathbf{g}'_1)^{h_1}, \ldots, (\mathbf{g}'_s)^{h_s})$$

Pour conclure, rappelons que $\mathbf{g}'$ et $\mathbf{g}''$ sont deux Δ'-représentants et que par hypothèse la structure de dégénérescence Δ' est $\mathbf{ker}(\Psi)$-complète ; cela nous permet d'appliquer le lemme 3.1.10.

□

3.2.2 Tour modulaire

Nous allons définir la tour modulaire de Fried, les références sont [12], [5] et [13].

Revêtement universel de Frattini

Etant donné un groupe fini G, il existe un *plus grand* objet pour la catégorie des p-revêtements de Frattini de G ; on le note traditionnellement ${}_p\Phi : {}_p\tilde{G} \to G$ (voir par exemple [13]) ; il s'agit de l'unique p-revêtement de Frattini projectif de G. On peut définir la série de Frattini $\mathrm{M}_n(G)$ de G à partir du noyau ker de ${}_p\Phi : {}_p\tilde{G} \to G$ par la formule de récurrence :

$$\begin{cases} \ker_0(G) = \ker \\ \ker_n(G) = \ker_{n-1}(G)^p[\ker_{n-1}(G), \ker_{n-1}(G)] \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour chaque $n \geq 0$, on note ${}^n_p\tilde{G}$ le quotient de ${}_p\tilde{G}$ par $\ker_n(G)$. On obtient une suite $({}^n_p\tilde{G})_{n\in\mathbb{N}}$ de quotients finis de ${}_p\tilde{G}$ reliés entre eux par des morphismes :

$${}_p\tilde{G} \longrightarrow \ldots \longrightarrow {}^n_p\tilde{G} \longrightarrow {}^{n-1}_p\tilde{G} \longrightarrow \ldots \longrightarrow G$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Chaque morphisme de cette suite est de Frattini. De plus, elle nous permet de réaliser le groupe profini ${}_p\tilde{G}$ comme une limite projective de groupes finis :

$$ {}_p\tilde{G} = \underleftarrow{lim}_p^n \tilde{G} $$

Notons également pour $n \geq 0$, $\mathrm{M}_n(G)$ le noyau du morphisme de Frattini ${}_p^{n+1}\tilde{G} \to {}_p^n\tilde{G}$; il s'agit de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels dont les dimensions sont reliées par la formule de récurrence :

$$ \dim(M_{n+1}(G)) = 1 + |\mathrm{M}_n(G)|[\dim(M_n)(G) - 1] $$

qu'on obtient grâce à la formule de Nielsen-Schreier (proposition 17.6.2 de [13]).

Nous pouvons définir la tour modulaire de Fried :

<u>Définition</u> 3.2.4. *Soient G un groupe fini, p un diviseur premier du cardinal de G et $\boldsymbol{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ un r-uplet de p'-classes de conjugaison de G. Par le lemme 3.2.2 il existe un r-uplet $\boldsymbol{C}^n = (C_1^n, \ldots, C_r^n)$ de p'-classes de conjugaison de ${}_p^n\tilde{G}$ relevant $\boldsymbol{C}$. Notons $H_n = \mathrm{H}_r({}_p^n\tilde{G}, \boldsymbol{C}^n)$ et $\varphi_n : \mathrm{H}_{n+1} \to \mathrm{H}_n$. La collection des espaces H_n et des morphismes φ_n quand n décrit $\mathbb{N}$ est appelée* tour modulaire *associée au triplet $(G, \boldsymbol{C}, p)$.*

Résultats

Commençons par une définition technique :

<u>Définition</u> 3.2.5. *Soient p un nombre premier, G un groupe fini et H un sous-groupe de G. Nous dirons que G est H-régulier quand pour tout entier n :*

$$ \frac{|{}_n^pG|}{|G|} = \frac{|{}_n^pH|}{|H|} \tag{3.4} $$

ou de manière équivalente $M_n(G) = M_n(H)$

Pour vérifier la H-régularité nous avons ce lemme pratique :

<u>Lemme</u> 3.2.6. *Soient G un groupe H un sous-groupe. Pour que G soit H-régulier il faut et il suffit que :*

$$ \frac{|{}_1^pG|}{|G|} = \frac{|{}_1^pH|}{|H|} \tag{3.5} $$

<u>Démonstration</u>. Les éléments de la suite $\mathrm{M}_n(G)$ sont des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels dont les dimensions sont reliées par :

$$ \dim(M_{n+1}) = 1 + |\mathrm{M}_n|[\dim(M_n) - 1] $$

On en déduit le résultat. □

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Définition 3.2.7. *Soient G un groupe fini et $\Delta := (G, (G_i)_i, (M_i)_i)$ une structure de dégénérescence. Nous dirons que Δ est régulière lorsque pour tout $i = 1, \ldots, s$ et pour tout $h_1, \ldots, h_s \in G$ le groupe G est Θ-régulier où Θ est le sous-groupe de G engendré par $\{G_1^{h_1}, \ldots, G_{i-1}^{h_{i-1}}, G_{i+1}^{h_{i+1}}, \ldots, G_s^{h_s}\}$.*

Nous pouvons énoncer le résultat :

Théorème 3.2.8. *Soient G un groupe fini, p un nombre premier, $\boldsymbol{C}$ un r-uplet de p'-classes de conjugaison de G et Δ une p'-structure de dégénérescence régulière. Alors toute Δ-composante de l'espace de Hurwitz $H_r(G, \boldsymbol{C})$ se relève de manière unique le long de la tour modulaire.*

Ce théorème nous dit que modulo une hypothèse technique le nombre de Δ-composantes dans la tour modulaire est constant. On peut par exemple estimer ce nombre en utilisant les théorèmes 3.1.9 et 2.2.2 ; on trouve un entier ℓ tel que toutes les Δ-composantes de la tour modulaire soient définies sur une extension du compositum des corps de définition des composantes M_i de degré inférieur ou égal ℓ.

Démonstration du théorème 3.2.8

Nous commençons par un lemme technique.

Lemme 3.2.9. *Soient p un nombre premier, G un groupe, H un sous-groupe de G tel que G soit H-régulier et $\Psi : G' \longrightarrow G$ un p-revêtement de Frattini. Alors tout relevé de H à G' (i.e tout sous-groupe H' de G' tel que $\Psi(H') = H$) contient le noyau de Ψ.*

Avant de donner une preuve de ce lemme voyons, comment il permet, à l'aide de la proposition 3.2.3, d'obtenir le théorème 3.2.8.

Démonstration du théorème 3.2.8. Plaçons-nous dans le cadre du théorème et notons $\Psi : G' \longrightarrow G$ un p-revêtement de Frattini de G. Nous allons montrer que le relèvement Δ' de la structure de dégénérescence Δ est $\mathbf{ker}(\Phi)$-complète pour pouvoir appliquer la proposition 3.2.3. Fixons-nous un entier $i = 1, \ldots, s$ et un s-uplet $h_1, \ldots, h_s$ d'éléments de G' et montrons que le sous-groupe $\mathfrak{G}'_i$ de G' engendré par :

$$\{G_1'^{h_1}, \ldots, G_{i-1}'^{h_{i-1}}, G_{i+1}'^{h_{i+1}}, \ldots, G_s'^{h_s}\}$$

contient le noyau de Ψ.

Clairement le groupe $\Psi(\mathfrak{G}'_i)$ est engendré par :

$$\{G_1^{\Psi(h_1)}, \ldots, G_{i-1}^{\Psi(h_{i-1})}, G_{i+1}^{\Psi(h_{i+1})}, \ldots, G_s^{\Psi(h_s)}\}$$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

Or la structure Δ est régulière, on en déduit que G est un groupe $\Psi(\mathfrak{G}'_i)$-régulier. Il suffit de remarquer que $\mathfrak{G}'_i$ est un relèvement de $\Psi(\mathfrak{G}'_i)$ pour pouvoir appliquer le lemme 3.2.9 et conclure que $\mathfrak{G}'_i$ contient le noyau de Ψ. Il nous suffit ensuite d'utiliser la proposition 3.2.3 pour montrer que toute Δ-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ se relève de manière unique en une Δ'-composante de $\mathrm{H}_r(G')$. $\square$

<u>Démonstration du lemme 3.2.9</u>. Par récurrence, il suffit de montrer la proposition pour le morphisme de Frattini $\Phi_1 : {}^1_pG \longrightarrow G$.

Considèrons le p-revêtement universel de Frattini de G :

$$\Phi : {}_pG \longrightarrow G$$

Si H est un sous-groupe de G, il est fermé dans G (ce sont des groupes finis). On en déduit que $\Phi^{-1}(H)$ est fermé dans ${}^p\tilde{G}$, il est donc projectif. Par projectivité de $\Phi^{-1}(H)$ on obtient un relèvement Γ comme dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & {}_p\tilde{H} \arrow[d, two heads] \\
\Phi^{-1}(H) \arrow[ur, "\Gamma"] \arrow[r, two heads] & H
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, le morphisme vertical est le p-revêtement universel de Frattini de H et le morphisme horizontal est la restriction de Φ à $\Phi^{-1}(H)$.

Pour continuer considérons les p-revêtements élémentaires universels de Frattini de G et de H. Le diagramme suivant résume la situation :

$$\begin{tikzcd}
 & & {}_p\tilde{H} \arrow[d, two heads] \\
 & & {}^1_p\tilde{H} \arrow[d, two heads] \\
\Phi^{-1}(H) \arrow[uurr] \arrow[urr] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \Phi_1^{-1}(H) \arrow[ur, dotted] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & H \arrow[d, hook] \\
\tilde{G} \arrow[r, two heads] & {}^1_p\tilde{G} \arrow[r, two heads] & G
\end{tikzcd}$$

Les morphismes horizontaux correspondent à la tour de revêtements de Frattini du groupe G ; dans la troisième ligne on a restreint la dernière ligne au sous-groupe H. Le haut du diagramme correspond au diagramme du début de la démonstration. Le but

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

est de construire le morphisme $\Phi_1^{-1}(H) \longrightarrow {}_p^1\tilde{H}$ en pointillé sur le diagramme. Il s'agit de vérifier la propriété universelle d'un quotient, c'est-à-dire montrer que

$$\ker(\Phi^{-1}(H) \longrightarrow \Phi_1^{-1}(H)) \subset \ker(\Phi^{-1}(H) \longrightarrow {}_p^1\tilde{H})$$

Or les éléments de $\ker(\Phi^{-1}(H) \longrightarrow \Phi_1^{-1}(H))$ sont de la forme $\ker_0^p[\ker_0, \ker_0]$. Soit $x = a^p[b,c]$ avec $a, b, c \in M_0(G)$, on a : $\Gamma(x) = \Gamma(a)^p[\Gamma(b), \Gamma(c)] \in M_0(H)^p[M_0(H), M_0(H)] := M_1(H)$.

On obtient donc un morphisme surjectif $\Gamma_1 : \Phi_1^{-1}(H) \longrightarrow {}_p^1\tilde{H}$. Il est clair que Γ_1 est en fait une bijection car la propriété de régularité implique que les groupes $\Phi_1^{-1}(H)$ et ${}_p^1\tilde{H}$ ont même cardinal. On en déduit que $\Phi : \Phi_1^{-1}(H) \longrightarrow H$ est le p-revêtement universel élémentaire de Frattini ; par la propiété de Frattini il existe un unique relèvement de H par Φ qui est exactement $\Phi_1^{-1}(H)$ et donc ce relèvement contient le noyau de Φ.

$\square$

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Bibliographie

[1] J. Bertin et M. Romagny, *Champs de Hurwitz*, à paraître aux Mémoires de la SMF.

[2] J.S. Birmann, *Braids, Links, and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, (1975).

[3] A. Cadoret, *Galois categories*. Preliminary lecture notes for the Proceedings of the G.A.M.S.C. Summer school 2008 (Istanbul, June 9th - 20th, 2008), http ://www.math.u-bordeaux1.fr/∼cadoret/fg.pdf

[4] P. Dèbes, *Arithmétique des revêtements de la droite*, 2009, http ://math.univ-lille1.fr/∼pde/ens.html

[5] P. Dèbes, *Arithmétique et espace de modules de revêtements*, Proceedings of the number theory conference in Zakopane, (K. Gyory, H. Iwaniec and J. Urbanowicz ed.), Walter de Gruyter, (1999), 75-102.

[6] P. Dèbes, *Regular realization of abelian groups with controlled ramifaication.* In Applications of Curve over Finite Fields,Contemporary Math., vol. 245 (M.D Fried ed.),(1999), 109-115.

[7] P. Dèbes and J.C Douai, *Algebraic covers : field of moduli versus field of definition*, Annales Sci. E.N.S., 30, (1997), 303-338.

[8] P. Dèbes and M. Emsalem, *Harbater-Mumford components and towers of moduli spaces*, J. Math. Inst. Jussieu, **5/03**, (2006), 351-371.

[9] B. Deschamps, *Existence de points p-adiques pour tout p sur un espace de Hurwitz*, in Recent Developments in the inverse Galois Problem Contemporary Math., **186**, (1995), 217-238.

[10] M. Emsalem, *Espaces de Hurwitz*, in Arithmétique des revêtements algébriques, Proceedings des Journées "Revêtements" (St-Etienne 2000), Séminaire et Congrès 5, (éd. B. Deschamps) SMF, (2001), 63-99.

[11] M. Emsalem, *Groupoïde fondamental de courbes stables*, preprint.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

[12] M. Fried, *Introduction to modular towers*, in recent developments in the Inverse Galois problem, Contemporary Math., 186, (1995), 111-171.

[13] M. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, Ergeb. der Math., 3. Folge, Band 11, Springer Verlag, (1986).

[14] M. Fried and R. Biggers, *Moduli spaces of covers of* $\mathbb{P}^1$ *and representations of the Hurwitz monodromy group*, J. für die reine und angew. Math **335**, (1982), 87-121.

[15] M. Fried and H.Völklein, *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces*, Math. Annalen **290**, (1991), 771-800.

[16] D. Harbater, *Patching and Galois theory*, MSRI Publications series 41, Cambridge University Press, (2003), 313-424.

[17] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New-York, (1977).

[18] G. Malle and B. H. Matzat, *Inverse Galois theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1999).

[19] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer, (2008).

[20] H. Völklein, *Groups as Galois groups-an introduction*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **53**, Cambridge Univ. Press, (1996).

[21] S. Wewers, *Construction of Hurwitz spaces*, PhD Thesis, Essen, (1998).

Adresse mail : Orlando.Cau@math.univ-lille1.fr
Laboratoire Paul Painlevé, Mathématiques, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr

© 2012 Tous droits réservés.

http://doc.univ-lille1.fr

Résumé.

Le contexte de cette thèse est le problème de la théorie inverse de Galois et en particulier son approche moderne qui consiste à trouver des points rationnels sur des espaces de modules de G-revêtements. Nous nous intéressons à un problème préliminaire à cette approche : celui de trouver des composantes irréductibles des espaces de Hurwitz définies sur un petit corps de nombres. Nos résultats permettent de construire, quel que soit le groupe fini, de telles composantes définies sur le corps des nombres rationnels en gardant une grande souplesse quant au type de ramification des revêtements appartenant à la composante. Ces composantes sont obtenues par déformation de certains revêtements du bord des espaces de modules. Le second thème de cette thèse est une version profinie des constructions ; on étudie des tours d'espaces de Hurwitz et en particulier la tour modulaire. Nous obtenons ainsi des systèmes projectifs de composantes de la tour modulaire définis sur le corps des nombres rationnels.

Abstract.

The context of this thesis is the inverse problem of Galois theory and in particular the modern approach which consists in finding rational points on moduli spaces of G-covers. More specifically we are interested in the irreducible components of Hurwitz spaces and their field of definition. Our results allow to construct, for any finite group, such components defined over the field of rational numbers. Our method offers more flexibility as to the ramification type of the covers. These components are obtained by deformation of certain covers in the border of the moduli spaces. A second part is a profinite version of the construction : we study towers of Hurwitz spaces and in particular modular towers. Our constructions are compatible along a modular tower ; we obtain projective systems of components defined over the field of rational numbers.

© 2012 Tous droits réservés. http://doc.univ-lille1.fr