

LABORATOIRE  
de MECANIQUE  
de LILLE  
UMR CNRS 8107



Numéro d'ordre : 40699

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE  
LILLE,  
UFR DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES,  
DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE FONDAMENTALE,

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE ET  
MATÉRIAUX

par

GEREMINO ELLA ENY

## Instabilités thermiques et thermodiffusives de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux

Soutenue le 5 décembre 2011 devant le jury :

<i>Président</i>	: V. PAVLOV	Professeur à Lille 1
<i>Rapporteurs</i>	: H. BEJI	Professeur, IUT-LTI, Amiens
	: D. HENRY	Directeur de recherche LMFA, CNRS-UMR 5509
<i>Examineurs</i>	: A. DELACHE	Maître de conférences, Université de Saint-Etienne
	: H. NAJI	Professeur, Université d'Artois
<i>Directeur de Thèse</i>	: M.N. OUARZAZI	Professeur à Lille 1.

Laboratoire de Mécanique de Lille (LML), UMR CNRS 8107, Cité Scientifique, Bâtiment  
M3, 59655 Villeneuve D'Ascq Cédex, France.



## Remerciements :

*Ce travail a été effectué au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML). Je tiens personnellement à adresser mes remerciements à l'ensemble du personnel enseignant et administratif pour leur accueil et toute l'attention qu'ils ont pu m'accorder.*

*Je voudrais remercier **M. Najib Ouarzazi**, professeur à l'USTL Lille 1, qui a été mon directeur de thèse, il m'a permis ainsi de faire mes premiers pas dans le monde de la recherche scientifique. Ses précieux et judicieux conseils, mais surtout la rigueur dont il a fait preuve dans ce travail m'ont toujours encouragé à aller de l'avant. Merci infiniment! Ces quelques lignes ne peuvent témoigner de toute ma gratitude.*

*Je remercie **M. Vadim Pavlov**, professeur à l'USTL Lille 1 d'avoir accepté de présider le jury de cette thèse.*

*Un grand merci à **M. Beji Hassen**, professeur à l'IUT-LTI d'Amiens et **M. Henry Daniel**, Directeur de recherche LMFA de Lyon qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier.*

*Un grand merci également à **M. Naji Hassan**, professeur à l'Université d'Artois et **M. Delache Alexandre**, Maître de conférences à l'Université de Saint-Etienne d'avoir accepté d'examiner mon mémoire.*

*Je remercie l'ensemble du personnel du département de mécanique fondamentale de Lille 1, particulièrement **M. Loic Lam** et **M. Hakim Ramzi**, du LML, certains amis et ex collègues **Qifeng Jiang**, **Adama Maiga Mahamadou**, **Qi Zhang**, **Fatah Mejni** et **Eric Verdun** qui m'ont tous permis d'effectuer cette thèse dans de très bonnes conditions et une bonne humeur. Un merci particulier pour **Mme Silvia Hirata** pour ses conseils et nos discussions enrichissantes.*

*Je remercie **le gouvernement Gabonais** qui a rendu possible la réalisation de cette thèse.*

Et pour finir, un merci à :

*Mon père **Eni Ella Alphonse** et ma mère **Meyé Abessolo Clémence** pour leur patience et tous les encouragements pendant mes années d'études universitaires.*

*Ma famille, mes petite-soeurs **Carine**, **Kathia**, **miriam**, mon petit-frère **Charles**, ma nièce **Laurel**, mon grand-père **Abessolo Zang**, ma grand-mère **Carmen Bindang**, mes oncles **Ondo Ella Michel**, **Nguema Menié Jacques** et **Antoine Bee**,*

mon frère **Nguema Glenn**, mes tantes **Madeleine**, **Oyane Abessolo**, **Abaga Abessolo**, **Miboui Abessolo**, **Mengue Abessolo**, **Ntsame Abessolo** pour leur soutien moral pendant cette thèse. Un merci à **Arlette Eya** et ma fille **Océane Clémence**.

Mes amis de Lille **Koumba Pambolt Marlène**, la famille **Igondjo**, **Bénédicté**, mes amis de Libreville **Mintsa Bengono Trésor** et **Nka Bengono Yan-nick** pour leur soutien sans faille.

*A Ella Obiang Raphaël,  
Meyé Abessolo Clémence,  
Eni Ella Alphonse.*



# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Présentation des fluides viscoélastiques et de la convection en milieu poreux</b>	<b>13</b>
1.1 Convection . . . . .	13
1.2 Caractérisation d'un milieu poreux . . . . .	14
1.2.1 Définition du milieu poreux . . . . .	14
1.2.2 Paramètres des milieux poreux . . . . .	14
1.3 Fluides viscoélastiques et modèle de type Oldroyd . . . . .	17
1.3.1 Modèle d'Oldroyd-B . . . . .	18
1.4 Formulation mathématique de l'étude des fluides viscoélastiques purs	19
1.4.1 Modélisation du problème . . . . .	19
1.4.2 Equation de conservation de la masse . . . . .	20
1.4.3 Equation de conservation de la quantité de mouvement . . . . .	21
1.4.4 Equation de conservation de l'énergie . . . . .	22
1.4.5 Conditions aux limites . . . . .	24
1.4.6 Adimensionnement et conditions aux limites . . . . .	24
1.4.7 Solution de conduction . . . . .	27
1.5 Formulation du problème pour les mélanges binaires de fluides visco- élastiques . . . . .	27
1.5.1 Phénomène de thermodiffusion-Effet Soret . . . . .	28
1.5.2 Formulation du problème . . . . .	30
1.6 Conclusion . . . . .	33
<b>2 Analyse linéaire et faiblement non linéaire en milieu illimité</b>	<b>35</b>
2.1 Etude de stabilité de la solution de conduction . . . . .	35
2.1.1 Formulation du problème de stabilité et équation de dispersion	35
2.1.2 Approche temporelle . . . . .	38
2.1.3 Nature convective ou absolue des instabilités . . . . .	42
2.1.4 Equations de Ginzburg-Landau linéaire pour les structures os- cillatoires . . . . .	47

2.2	Dynamique faiblement non linéaire . . . . .	50
2.2.1	Equations de Ginzburg-Landau couplées . . . . .	50
2.2.2	Stabilité des ondes progressives vis-à-vis des ondes fixes . . . . .	52
2.2.3	Stabilité des ondes progressives par rapport à une perturbation quelconque . . . . .	53
2.2.4	Transfert de chaleur . . . . .	56
2.3	Conclusion . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Dynamique linéaire et faiblement non linéaire en milieu confiné</b>	<b>65</b>
3.1	Etude de stabilité de la solution de conduction en milieu confiné . . . . .	65
3.1.1	Analyse linéaire . . . . .	65
3.2	Etude non linéaire dans une cavité carrée . . . . .	72
3.2.1	Dynamique loin du point de codimension 2 . . . . .	72
3.2.2	Equation d'amplitude au voisinage du point de codimension 2 . . . . .	75
3.3	Comparaison avec les résultats issus des simulations numériques directes . . . . .	78
3.4	Conclusion . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Convection de mélanges binaires de fluides viscoélastiques en milieu poreux</b>	<b>85</b>
4.1	Equations linéarisées et conditions aux limites . . . . .	85
4.2	Fluide de Maxwell pour $Pr_D \rightarrow \infty$ . . . . .	87
4.2.1	Approche analytique . . . . .	88
4.2.2	Illustrations des propriétés linéaires de l'instabilité . . . . .	92
4.3	Effet de l'inertie sur la stabilité des mélanges binaires viscoélastiques . . . . .	93
4.3.1	Parois perméables : approche analytique . . . . .	94
4.3.2	Résultats numériques issus du cas imperméable . . . . .	105
4.3.3	Comparaison des résultats : modèles perméable/imperméable . . . . .	110
4.3.4	Bilan énergétique . . . . .	113
4.4	Conclusion . . . . .	120
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Calculs annexes</b>	<b>127</b>
A.1	Equations de Ginzburg-Landau couplées . . . . .	127
A.1.1	Equation d'amplitude pour les structures oscillatoires . . . . .	132
A.1.2	Equation d'amplitude pour les structures stationnaires . . . . .	134
A.2	Calcul de $\alpha_r - \gamma_r$ . . . . .	135



# Nomenclature

$Ra = (Kg\alpha_f H(T_0 - T_1)(\rho c)_f) / \lambda^* \nu_f$  : nombre de Rayleigh

$Le = D^* / D_{th}$  : nombre de Lewis.

$Da = K / H^2$  : nombre de Darcy.

$Pr_D = \phi Pr / Da$  : nombre de Prandtl-Darcy.

$Pr = \nu / D_{th}$  : nombre de Prandtl.

$\vec{V}$ ,  $V_f$  : vitesse et vitesse de filtration du milieu poreux.

$T$  : température,  $K$

$Nu$  : nombre de Nusselt.

$K$  : perméabilité,  $m^2$

$P$  : pression, Pa

$\mathbf{g}$  : accélération de la pesanteur,  $m.s^{-2}$

$H$  : hauteur entre les deux plaques,  $m$

$k$  : nombre d'onde.

$w$  : composante verticale de la vitesse,  $m.s^{-1}$

$D_{th}$  : diffusivité thermique.

$D^*$  : diffusion de la concentration.

$S_T$  : coefficient de thermodiffusion.

$C_0$  : concentration de référence.

$V_G, V_\phi$  : vitesse de groupe du paquet d'onde et vitesse de phase adimensionnée.

$m$  : nombre de cellules convectives.

$a$  : rapport de forme entre la longueur et la hauteur.

## Symbole grecs

$\psi$  : rapport de séparation.

$\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$  : temps de relaxation et de retardation dimensionnés.

$\lambda_1, \lambda_2$  : temps de relaxation et de retardation adimensionnés.

$\lambda_1^*, \lambda_2^*$  : valeur des temps de relaxation et de retardation au point de codimension 2.

$\omega$  : fréquence.

$\lambda$  : conductivité thermique,  $W.m^{-1}.K^{-1}$

$\alpha$  : coefficient d'expansion thermique,  $K^{-1}$

$\mu$  : viscosité dynamique,  $Pa.s$

$\nu$  : viscosité cinématique,  $m^2.s^{-1}$

$(\rho c)$  : chaleur spécifique,  $J.K^{-1}.m^{-3}$

$\theta$  : perturbation de la température.

$\varepsilon$  : paramètre de la perturbation.

$\phi$  : porosité.

$\varphi$  : fonction de courant.

$\sigma = (\rho c)^*/(\rho c)_f$  : rapport des chaleur spécifique équivalente du milieu poreux et du fluide.

$\rho$  : densité volumique.

$\beta$  : coefficient de dilatation du soluté.

$\varepsilon^* = \phi/\sigma$  : porosité relative.

$\mu_s, \mu_p$  : viscosités du solvant et du polymère.

$\lambda_s, \lambda_f, \lambda^*$  : coefficient de conductivité thermique du solide et du fluide, et coefficient de conductivité thermique équivalent du milieu poreux.

## Indice et exposants

$c$  : critique.

$r$  : partie réelle.

$i$  : partie imaginaire.

$s$  : stationnaire.

$o$  : oscillatoire.

$f$  : relatif au fluide.

$m$  : relatif au milieu.



# Introduction

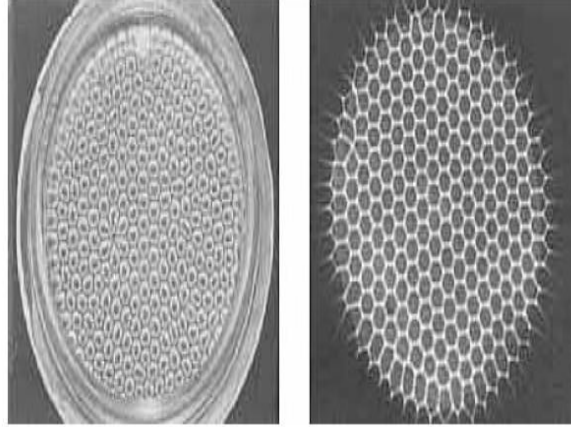
L'étude des instabilités hydrodynamiques qui se développent dans un milieu fermé a bénéficié d'un intérêt considérable depuis les trente dernières années. Citons par exemple le problème de Rayleigh-Bénard.

Ce problème consiste à chauffer un fluide entre deux plaques planes horizontales. Celle du bas est maintenue à une température  $T_0$  supérieure à la température  $T_1$  imposée à celle du haut. On parle alors de convection naturelle car le mouvement est induit dans le champ de pesanteur par les variations suffisantes de masse volumique dues aux différences de température. Lorsque la différence de température est en dessous d'un certain seuil, il y a un transport de chaleur par conduction thermique (profil linéaire de la température). Au premier abord cette situation semblerait être en déséquilibre car les particules de fluides les plus légères se trouvent en dessous des éléments les plus lourds. Mais le freinage visqueux et la diffusion de la chaleur atténuent toutes perturbations sur une particule quelconque : ce sont des effets stabilisants. L'état de conduction est donc un état d'équilibre mécanique. Mais lorsque la différence de température est au dessus de ce seuil critique, une perturbation sur une particule des couches inférieures, moins denses, entraîne un mouvement ascendant par la poussée d'Archimède. Les effets stabilisants ne sont plus assez forts pour lutter contre l'ascension de la particule. Une structure spatiale périodique apparaît (figure (1)).

L'équivalent du problème de Rayleigh-Bénard en milieu poreux est le très célèbre problème de Horton-Rogers-Lapwood, étudié en premier par Horton et Rodgers [26] et par la suite par Lapwood [33]. Le livre de Nield et Bejan [46] constitue une documentation des plus complètes sur le sujet.

Par ailleurs, les applications liées aux écoulements des fluides viscoélastiques sont nombreuses et variées de telle sorte que leur modélisation a suscité un vif intérêt de la communauté scientifique. L'objectif était, et reste encore, d'arriver à une meilleure compréhension des phénomènes viscoélastiques. Les physico-chimistes ont élaboré plusieurs modèles rhéologiques permettant de bien représenter le comportement de ces fluides. De leur côté, les numériciens ont développé des méthodes plus ou moins efficaces pour résoudre numériquement les équations liées à ces modèles.

Le cas de la convection des fluides viscoélastiques, dont les applications sont



**FIGURE 1** – Cellules hexagonales obtenues dans des conditions similaires à celles de Bénard par Koschmieder et Pallas [30]

nombreuses notamment dans le cas des industries pétrolières etc., a été très peu étudié par la communauté scientifique. Mais depuis une dizaine d’années l’intérêt suscité par ce problème est de plus en plus grandissant. En effet, la compréhension de la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide non-newtonien a de grandes importances dans les réservoirs pétroliers, en géophysique etc. Les performances d’un réservoir dépendent dans une large mesure de la nature physique du pétrole brut présent dans le réservoir. Le brut léger est un fluide Newtonien. Alors que le brut lourd est un fluide non-Newtonien. En outre, le sable pétrolier contenant du brut cireux à des hauteurs peu profondes du réservoir pétrolier est considéré comme un fluide viscoélastique.

Récemment, Kim et al. [42] ont mené une étude linéaire et faiblement non linéaire de la convection thermoconvective de fluides viscoélastiques en milieu poreux de grande extension horizontale en utilisant le modèle de Darcy-Oldroyd. Leur investigation a été étendue par Zhang et al. [66] en utilisant comme équation du mouvement le modèle de Darcy-Brinkman-Oldroyd. Il a été montré dans [42] et [66] que les structures bifurquées peuvent être stationnaires ou oscillatoires suivant les valeurs prises par les temps de relaxation et de retardation associés à l’élasticité du fluide. Lorsque la convection est de nature stationnaire, ces auteurs ont montré que le transfert de chaleur demeure insensible à l’élasticité du fluide et se comporte comme pour un fluide Newtonien. Dans le cas où le système est le siège d’une bifurcation de Hopf, leur étude non linéaire s’est focalisée sur les ondes fixes et le transfert de chaleur associé à ces ondes sans se soucier de leur stabilité.

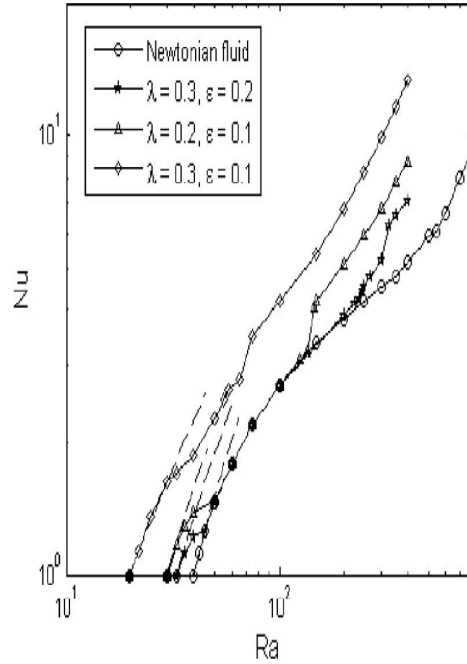
Du point de vue de la simulation numérique, Fu et al. [7] se sont intéressés aux différentes bifurcations qui se produisent dans un massif poreux de forme carrée et ont comparé le transfert de chaleur qui en résulte à celui observé pour un fluide Newtonien. Trois combinaisons du temps de relaxation  $\lambda$  et du temps de retardation  $\varepsilon$  caractérisant l'élasticité du fluide ont été considérées : i)  $\lambda = 0.3$ ;  $\varepsilon = 0.2$ , ii)  $\lambda = 0.2$ ;  $\varepsilon = 0.1$  et iii)  $\lambda = 0.3$ ;  $\varepsilon = 0.1$ .

La figure (2) illustre les variations du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction du nombre de Rayleigh de filtration ( $Ra$ ) pour les trois jeux de paramètres en plus du cas Newtonien pour lequel  $\lambda = \varepsilon = 0$ . Si l'état de conduction perd sa stabilité en faveur de structures stationnaires pour un fluide Newtonien, les simulations numériques directes montrent que l'élasticité du fluide favorise l'émergence et le développement de structures oscillantes dans le temps et pour les trois jeux de paramètres utilisés. Au delà de la première bifurcation, et en augmentant les valeurs de  $Ra$ , ces simulations numériques attestent d'une seconde transition qui se produit pour les deux combinaisons i) et ii) d'un état de convection oscillatoire monocellulaire vers un état convectif stationnaire et monocellulaire. La figure (2) illustre bien cette seconde bifurcation observée pour les deux cas i) et ii) vers un état stationnaire par le comportement des courbes associées au nombre de Nusselt qui finissent par se confondre avec la courbe du Nusselt stationnaire caractéristique du transfert de chaleur d'un fluide Newtonien. Remarquons que cette seconde bifurcation ne se produit pas pour la combinaison des paramètres iii) pour laquelle l'élasticité du fluide contraint la convection à continuer d'osciller dans le temps pour des grands  $Ra$ .

Du point de vue expérimental, malheureusement jusqu'à ce jour, et à notre connaissance, il n'existe aucune investigation expérimentale sur la convection naturelle de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux. Cependant, dans le cas d'un fluide viscoélastique confiné en milieu clair (i.e. non poreux), la convection naturelle est documentée par des données expérimentales très peu abondantes. L'investigation expérimentale de Kolodner [29] constitue une documentation des plus complètes sur le sujet. Kolodner avait entrepris des essais de convection naturelle en utilisant des suspensions de molécules d'ADN mélangées avec de l'eau salée confinées dans une cavité annulaire chauffée par le bas.

La visualisation du champ de vitesse et l'enregistrement de l'évolution de la température au sein du milieu a permis de dégager les points suivants :

- Les expériences menées sans les molécules d'ADN montrent que la convection s'établit sans aucune oscillation temporelle de celle-ci et ce sur des temps très grands.
- Les expériences menées en présence d'ADN ont montré que les premiers types de structures convectives observées étaient oscillatoires. La valeur critique du nombre de Rayleigh qui correspond à la naissance de la convection est trouvée en bon accord avec celle prédite par la théorie dans le cas de fluides viscoélastiques purs. Par contre, les fréquences d'oscillations mesurées diffèrent de



**FIGURE 2** – Représentation du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh [7].

celles prédites par la théorie par plusieurs ordres de grandeur. Kolodner avait suggéré que ce désaccord serait dû au caractère binaire du mélange utilisé, la théorie ne tenant pas compte de l'effet Soret inhérent à ce genre de mélanges binaires.

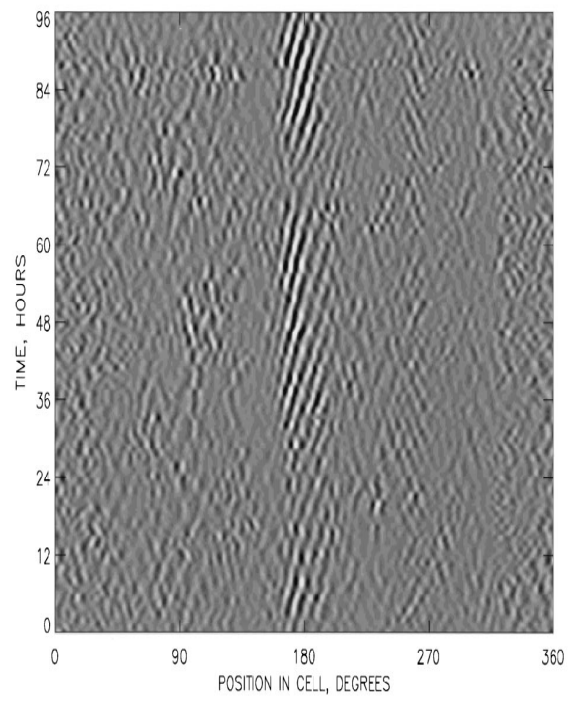
- En augmentant la différence de température entre les plaques inférieures et supérieures, une transition se produit d'une instabilité oscillatoire (figure 3(a)) vers une instabilité stationnaire (figure 3(b)).

Un bref résumé des travaux analytiques, numériques et expérimentaux très récents traitant de la convection naturelle des fluides viscoélastiques permet la mise en perspective des points majeurs proposés dans cette thèse.

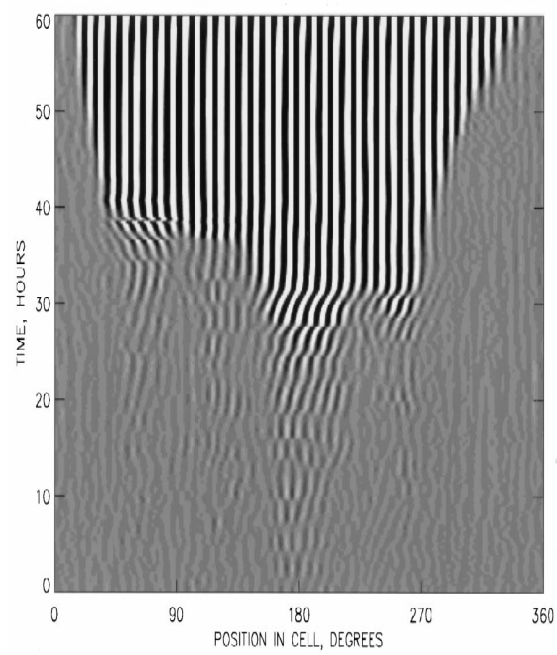
*L'objectif de cette étude est de mener une analyse de stabilité linéaire et non linéaire de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux chauffé par le bas. Alors que les différentes transitions de structures convectives qui s'opèrent dans ce système peuvent être décrites à l'aide de simulations numériques directes du problème, une alternance théorique est proposée le long de ce travail. Les outils mathématiques développés montrent que la dynamique de ces structures peut être décrite par un ensemble*



(a)



(b)



**FIGURE 3** – Apparition des différentes formes de structures convectives dans le temps. [29]

*réduit d'équations différentielles non linéaires de formes génériques. Ces équations décrivent l'évolution temporelle des modes instables présents dans le système. Le rapport de forme du milieu poreux en plus des paramètres caractérisant l'élasticité du fluide conditionne le nombre de modes instables. Lorsque le rapport de forme du milieu est supposé non borné, des instabilités sous la forme de paquets d'ondes peuvent se développer. On distinguera deux sortes d'ondes, celles provenant d'oscillations temporelles de la vitesse à l'intérieur de rouleaux spatialement fixes (ondes fixes) et celles qui peuvent provenir du déplacement de l'ensemble des rouleaux convectifs (ondes progressives). La dynamique spatio-temporelle de ces ondes est décrite par des équations aux dérivées partielles, appelées **équations d'amplitude ou équations d'enveloppe**. Dans ce cadre, nous étudierons la stabilité de ces deux types de structures convectives et discuterons de l'influence de l'élasticité du fluide sur le transfert de chaleur. La partie non linéaire de ce travail constitue une généralisation et une extension à la dynamique spatio-temporelle de l'étude réalisée dans [42] et [66]. Dans le cas où le massif poreux se présente sous la forme d'une boîte carrée, on montre que la sélection linéaire d'un mode plus amplifié que les autres tombe en défaut au voisinage d'un point singulier que l'on désignera par point de codimension 2. Au voisinage de ce point et lorsque l'état de conduction se déstabilise, le système hésite à s'organiser en rouleaux stationnaires ou en rouleaux oscillatoires. Indépendamment de l'intérêt théorique de comprendre la dynamique non linéaire au voisinage de cette singularité, nous espérons apporter une explication aux résultats des simulations numériques de Fu et al. [7] et à ceux obtenus expérimentalement par Kolodner [29].*

*Enfin, une dernière partie traite le fluide viscoélastique comme un mélange binaire. Dans ce cas trois sources d'instabilités sont en compétition : l'échauffement, le caractère viscoélastique du fluide et l'effet Soret dû au caractère binaire du fluide. Les prévisions issues de l'interaction entre ces différents moteurs d'instabilités sont en bon accord qualitatif avec les observations expérimentales de Kolodner [29] en milieu non poreux.*

Le présent document est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre de cette thèse est composé de deux parties. Après une première partie qui traite des caractéristiques rhéologiques des milieux poreux, et des fluides viscoélastiques ; dans la deuxième partie nous proposons une modélisation mathématique du problème. Nous terminons en mettant en évidence l'état de base, ainsi que les paramètres caractéristiques du problème des instabilités thermiques des fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude linéaire et non linéaire en milieu illimité horizontalement dans l'espace. Dans une première partie, on étudiera la stabilité de la solution de conduction vis-à-vis des perturbations. Les caractéristiques

---

linéaires des structures convectives susceptibles de se former au seuil de l'instabilité sont déterminées et leur dépendance vis-à-vis des paramètres représentant l'élasticité du fluide viscoélastique est discutée. La deuxième partie de ce chapitre portera sur la dynamique non linéaire des structures stationnaires et oscillatoires.

Le troisième chapitre est consacré à une analyse de stabilité linéaire et faiblement non linéaire du problème lorsque le milieu poreux est confiné horizontalement. La théorie des systèmes dynamiques permet une analyse fine de l'interaction non linéaire entre les deux modes convectifs les plus instables. Une comparaison quantitative est menée entre nos prédictions issues de modèles réduits et des résultats numériques de Fu et al. [7].

Le quatrième chapitre aborde la question de la convection des fluides viscoélastiques lorsque ces derniers sont considérés comme des mélanges binaires. Cette étude fait suite aux nombreuses interrogations issues d'études sur des suspensions de molécules d'ADN. Dans cette partie, nous trouvons que les seuils de l'instabilité (nombre d'onde critique, fréquence et nombre de Rayleigh critique) ne dépendent plus uniquement des paramètres rhéologiques des milieux poreux, des fluides viscoélastiques, mais à cela s'ajoutent des propriétés qui sont propres aux mélanges des fluides.

A la fin de ce mémoire, les résultats obtenus tout le long de ce travail sont synthétisés sous forme d'une conclusion générale, avec l'énoncé de certaines perspectives. Les annexes détaillent certains calculs utilisés dans le chapitre (2).



# Chapitre 1

## Présentation des fluides viscoélastiques et de la convection en milieu poreux

Ce premier chapitre est une présentation des fluides viscoélastiques et de la convection en milieu poreux. Nous allons définir les notions fondamentales tant pour les fluides viscoélastiques, les milieux poreux que pour les mélanges binaires.

### 1.1 Convection

La convection est une notion très ancienne remontant au moins au XVIII-ème siècle puisqu'elle était invoquée pour expliquer les mouvements atmosphériques. L'étude scientifique commence avec les expériences de Bénard (1905) et l'analyse théorique de Rayleigh (1916). Récemment ce sujet de mécanique des fluides assez traditionnel a reçu une attention considérable, tant théorique qu'expérimentale, car le mécanisme d'instabilité primaire est particulièrement intuitif et, de plus, le système peut être défini de façon suffisamment "propre" pour permettre une comparaison détaillée entre théorie et expérience.

On parle de convection naturelle d'origine thermique lorsque le milieu est limité par des plaques imperméables et qu'il est chauffé par le bas.

Le problème de l'étude de la convection naturelle en milieux poreux a bénéficié d'un intérêt considérable ces dernières années. Le livre de Nield et Bejan [46] constitue une excellente référence sur le sujet. Lorsque le fluide confiné est un fluide viscoélastique, on peut se référer au travail de Do-young et al [12], tant du point de vue des conditions d'apparition de la convection, que du transfert de chaleur.

## 1.2 Caractérisation d'un milieu poreux

On trouve de nombreux exemples de milieu poreux dans la vie courante : textiles, cuirs, papiers, tissus etc. Les écoulements de fluide à travers les milieux poreux se rencontrent dans des domaines très variés des sciences et techniques. A titre d'exemple, on peut citer les problèmes de purification de l'eau, de dépollution des sols, d'extraction de pétrole et de gaz, les problèmes géophysiques,...

### 1.2.1 Définition du milieu poreux

Un milieu poreux est composé d'une matrice solide, à l'intérieur de laquelle se trouvent des pores reliés entre eux ou éventuellement isolés. On peut distinguer :

- les matrices solides non consolidées où la phase solide est formée de grains (par exemple le sable, le gravier, les billes de verre, d'acier, les lits de particules pas encore fluidisées...), configurations pratiques pour l'expérimentation.
- Les matrices solides consolidées (par exemple les roches calcaires, le grès, l'argile, le bois, le tissu biologique...).

Dans la nature les roches et les sols sont certainement les milieux poreux les plus exploités. Les roches poreuses peuvent contenir des hydrocarbures.

D'une manière générale, les milieux poreux sont définis par deux critères :

- (1) Le matériau doit contenir de petits espaces vides appelés pores, délimités par une matrice solide.
- (2) Le matériau doit être perméable à un écoulement de fluide (gaz ou liquide).

### 1.2.2 Paramètres des milieux poreux

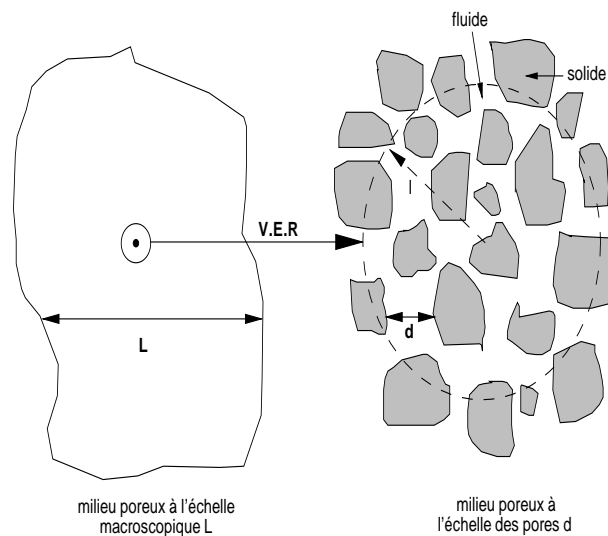
#### 1.2.2.1 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)

L'échelle du pore  $d$  varie généralement de  $0.5\mu m$  pour les nanopores, à  $0.05mm$  pour les macropores. Or la distribution des pores est généralement très irrégulière. A cette échelle, la pression, la vitesse, la température varient donc très irrégulièrement d'un point à l'autre du domaine. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Elle a pour but d'éliminer les fluctuations à l'échelle du pore, mais pas les fluctuations à l'échelle macroscopique du milieu poreux  $L$ . Cette moyenne s'effectue donc sur de nombreux pores par l'intermédiaire d'un *Volume Élémentaire Représentatif* V.E.R (voir figure 1.1) du milieu. De plus, l'échelle  $l$  du V.E.R doit vérifier :

$$d \ll l \ll L$$

On obtient donc les caractéristiques de la vitesse, la pression et la température, en

les moyennant sur le V.E.R. Cela permet de représenter un point dans un nouveau milieu continu fictif par changement d'échelle. Il est équivalent au domaine poreux étudié mais à l'échelle macroscopique. Lorsque les propriétés locales, définies sur le V.E.R, sont indépendantes de la position de celui-ci, le milieu est dit homogène, à l'échelle macroscopique. Dans la suite, sauf cas particulier, toutes les grandeurs (pression, vitesse, température) apparaissant dans les différents modèles seront définies sur le V.E.R.



**FIGURE 1.1** – La figure illustre la taille intermédiaire  $l$  du volume élémentaire représentatif (V.E.R) entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique  $L$  et à l'échelle des pores  $d$

### 1.2.2.2 Porosité

La porosité  $\phi$  est définie comme le rapport du volume vide occupé par les pores, sur le volume total soit :

$$\phi = \frac{\text{volume des pores}}{\text{volume total}}$$

La proportion occupée par la matrice solide est donc donnée par  $1 - \phi$ . En fait  $\phi$  est plus exactement appelé *porosité totale*. En effet, cette définition prend en compte les pores fermés.

Beaucoup de résultats sont issus de modèles géométriques particuliers de grains ou de pores. Ils sont obtenus dans le cas d'empilements réguliers de sphères de même diamètre. Ces empilements forment des réseaux et la porosité dépend fortement de l'arrangement (voir figure 1.2). Dans le cas d'un réseau cubique il y a beaucoup plus d'espace pour le fluide ( $\phi = 0.476$ ) que dans le cas d'un réseau cubique à face centrée ( $\phi = 0.255$ ) qui est le réseau régulier le plus compact que l'on puisse obtenir avec des sphères de même diamètre.

Il existe de nombreux cas où la porosité est variable mais on la considère comme uniforme.

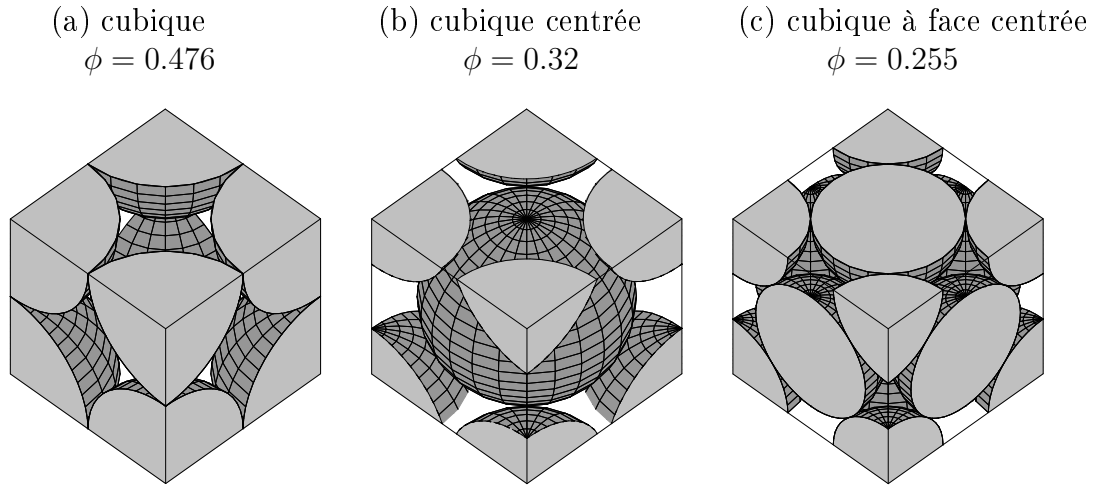


FIGURE 1.2 – Arrangements réguliers de sphères de même diamètre avec la porosité  $\phi$  associée.

### 1.2.2.3 Perméabilité

La perméabilité  $K$  se réfère à la capacité du milieu poreux à laisser passer le ou les fluides à l'intérieur des pores. Elle ne dépend que de la géométrie de la matrice solide, en particulier de la porosité et de la tortuosité. Ainsi le milieu est d'autant plus perméable que les pores sont connectés entre eux.

Généralement  $K$  est déterminé par des mesures expérimentales, par le biais de la loi de Darcy régissant le mouvement du fluide dans le milieu poreux. Il existe de nombreux travaux répertoriant la perméabilité pour différents milieux. On pourra consulter [46], pour trouver quelques valeurs de  $K$  ; elles se situent entre  $10^{-7} - 10^{-9}$  pour le gravier et  $10^{-13} - 10^{-16}$  pour l'argile stratifiée.

Il est possible d'évaluer la perméabilité  $K$  grâce à des géométries particulières du milieu, par l'intermédiaire de  $\phi$  et d'une dimension caractéristique de la matrice solide à l'échelle du pore. On note notamment :

- La relation de Kozeny-Carman(1937) [1] qui donne une estimation satisfaisante de  $K$  pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométries simples :

$$K = \frac{D^2 \phi^3}{36C_0(1 - \phi)^2}, \quad (1.1)$$

$D$  est une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse,  $C_0$  est un coefficient de forme, il est compris entre 3.6 et 5. Il est égal à 4.8 pour les grains sphériques.



- Le modèle de faisceaux de tubes capillaires ondulés, parallèles en moyenne à une direction donnée qui est donc fortement anisotrope [22] :

$$K = \phi \frac{D^2}{32\mathcal{T}}$$

avec  $\mathcal{T}$  la tortuosité des tubes capillaires ondulés,  $D$  le diamètre des tubes. Il existe également des modèles statistiques permettant le calcul de la perméabilité. Cela se révèle utile lorsque le milieu poreux présente des inhomogénéités dans une large gamme d'échelle (il n'y a plus de description continue fictive équivalente).

### 1.3 Fluides viscoélastiques et modèle de type Oldroyd

Un fluide viscoélastique est un exemple de fluide complexe. Il s'agit d'un matériau intermédiaire entre un fluide simple (de l'eau, de l'huile, etc.) et un matériau élastique (du caoutchouc, voire tout type de solide). Le comportement viscoélastique est fréquemment observé dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. Un fluide viscoélastique soumis à une déformation donnée présente une réponse intermédiaire entre celle d'un solide élastique, et celle d'un fluide visqueux pour lequel la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation. Cette réponse va dépendre en partie du rapport entre le temps de la sollicitation et le temps caractéristique (appelé aussi temps de relaxation) du matériau viscoélastique. Si le temps de sollicitation est petit devant le temps caractéristique du matériau, les composantes du matériau n'ont pas le temps de se déformer et on observe une réponse élastique. Si le temps de sollicitation est grand devant le temps caractéristique, la réponse sera de type visqueux. Certaines propriétés non-Newtoniennes des fluides viscoélastiques sont fondamentales pour la modélisation, et ont des conséquences directes sur la description théorique de ces derniers. Parmi les phénomènes les plus importants, on peut citer :

1. *La dépendance de la viscosité vis-à-vis du taux de cisaillement*
2. *Anisotropie des contraintes normales*
3. *Relaxation de contraintes et effet de mémoire*

Plusieurs approches existent afin de modéliser le comportement des fluides viscoélastiques. Ces approches proposent une représentation assimilant le comportement viscoélastique à une association de ressort (contribution élastique) et d'amortisseur (contribution visqueuse), contributions montées en parallèle ou en série afin d'obtenir la représentation la plus proche possible du comportement dynamique du fluide. Ces modèles analogiques sont des moyens efficaces pour construire une loi de comportement, et constituent la base des modèles actuels. Un des modèles les plus

présents dans la littérature est celui développé par James Gardner Oldroyd<sup>1</sup> aussi appelé modèle d'Oldroyd-B.

### 1.3.1 Modèle d'Oldroyd-B

Oldroyd a introduit plusieurs modèles, des modèles à six et à huit constantes pour décrire le comportement viscoélastique des fluides. Nous allons décrire un modèle viscoélastique simple qui est le modèle d'Oldroyd-B.

Le tenseur des tensions viscoélastiques pour le modèle d'Oldroyd-B obéit à l'équation suivante :

$$\tau + \bar{\lambda}_1 \frac{D}{Dt} \tau = 2\mu_0 (D + \bar{\lambda}_2 \frac{D}{Dt} D), \quad (1.2)$$

$D = d_{ij}$  défini par  $d_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$  représente le tenseur des déformations.  $\mu_0$  n'est autre que la viscosité statique.  $\bar{\lambda}_1 > 0$  est le temps de relaxation qui représente le temps que le tenseur des contraintes a besoin pour réagir au changement de déformation dans le système.  $\bar{\lambda}_2 > 0$ , temps de retardation, représente le temps nécessaire à la déformation pour se propager.

Dans le cas des polymères, le temps de relaxation est plus important.

Le temps de retardation  $\bar{\lambda}_2$  permet de distinguer la partie élastique de la partie visqueuse du fluide : il est compris entre 0 et  $\bar{\lambda}_1$ . Si  $\bar{\lambda}_2$  est proche de 0 alors le fluide est très élastique et inversement si  $\bar{\lambda}_2$  est proche de  $\bar{\lambda}_1$  alors le fluide est plutôt newtonien. Le cas  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$  correspond à un fluide purement visqueux, tandis que le cas  $\bar{\lambda}_2 = 0, \bar{\lambda}_1 > 0$ , correspond au cas d'un fluide purement élastique (modèle de Maxwell).

Comme exemple, nous pouvons citer le fluide de Boger qui est constitué d'eau (1.6%), de sirop (98.3%) et de polyacrylamide (0.1%). Les temps de relaxation et de retardation sont respectivement  $\bar{\lambda}_1 = 2.54s$  et  $\bar{\lambda}_2 = 1.94s$

La dérivée invariante  $D/Dt$  s'écrivant :

$$\frac{D}{Dt} \tau = \frac{\partial}{\partial t} \tau + (\vec{v} \cdot \nabla) \tau - (\nabla \vec{v}) \cdot \tau - \tau \cdot (\nabla \vec{v})^T. \quad (1.3)$$

Le comportement des fluides viscoélastiques peut être plus ou moins compliqué, mais ils ont en commun le fait que le tenseur des contraintes peut être décomposé en deux parties :

$$\tau = \tau_s + \tau_p. \quad (1.4)$$

---

1. James Gardner Oldroyd (1921-1982) est un ancien président de la société britannique de rhéologie. Il a formulé le modèle d'Oldroyd-B pour décrire le comportement viscoélastique des fluides non newtoniens.

## Formulation mathématique de l'étude des fluides viscoélastiques purs 19

En effet, un fluide viscoélastique est composé d'un solvant et d'un polymère. Ainsi le tenseur des contraintes  $\tau_s$  représente la contribution du solvant soit  $\tau_s = 2\mu_s D$ , tandis que la contribution du polymère est transmise respectivement par la viscosité des solvants et des polymères  $\mu_s$  et  $\mu_p$ . Les temps de relaxation et de retardation sont liés par la relation :

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_p} \bar{\lambda}_1 \quad (1.5)$$

Pour de faibles variations de la vitesse, la relation 1.2 devient :

$$(1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t})\tau = 2\mu_0(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t})D \quad (1.6)$$

## 1.4 Formulation mathématique de l'étude des fluides viscoélastiques purs

### 1.4.1 Modélisation du problème

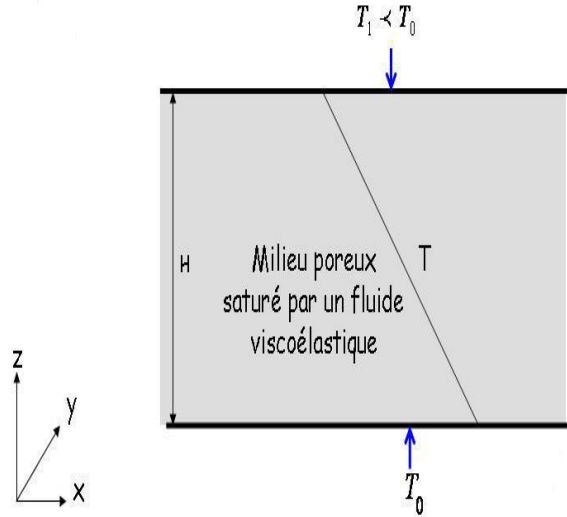
On considère un milieu poreux (voir figure 1.3) d'épaisseur  $H$ , saturé par un fluide viscoélastique. La paroi inférieure est chauffée à une température constante  $T_0$ , tandis que la plaque supérieure est maintenue à une température inférieure  $T_1 < T_0$ . Le milieu est dans le champ gravitationnel  $\vec{g}$ .

Le fluide a une viscosité cinématique  $\nu_f$ , une viscosité dynamique  $\mu_f$ , une masse volumique  $\rho_f$ , et une conductivité thermique  $\lambda_f$ .

Comme nous l'avons vu précédemment, les grandeurs sont moyennées sur un V.E.R (les moyennes volumiques sont définies dans [38]-[63]). De plus la méthode d'homogénéisation [51]-[52] permet le changement d'échelle pour obtenir de nouvelles grandeurs continues d'un milieu poreux continu fictif équivalent. Elle repose essentiellement sur des développements asymptotiques de la vitesse et de la pression à l'échelle du pore, puis sur l'application d'un opérateur moyen d'intégration, qui permet de passer à l'échelle macroscopique. Les coefficients des équations macroscopiques ainsi obtenues reflètent la nature complexe du milieu à l'échelle microscopique.

On introduit donc la vitesse de filtration  $V_f$ , moyenne de la vitesse du fluide sur tout le V.E.R c'est à dire pores remplis + solides. On peut également définir la vitesse interstitielle  $V_i$  qui représente la vitesse moyenne du fluide mais à l'intérieur des pores. La relation de Dupuit-Forchheimer permet de relier les deux vitesses.

$$V_f = \phi V_i$$



**FIGURE 1.3** – Configuration du domaine physique : milieu poreux saturé d’un fluide viscoélastique de hauteur  $H$ , chauffé par le bas et refroidi par le haut

On peut construire le nombre de Reynolds  $Re_p$  basé sur la taille moyenne des pores  $d$  et la vitesse intersticielle :

$$Re_p = V_i \frac{d}{\nu_f} \quad (1.7)$$

### 1.4.2 Equation de conservation de la masse

L’équation de conservation de la masse la plus générale s’écrit sous la forme suivante :

$$\phi \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \text{div}(\rho_f \vec{V}_f) = 0.$$

En première approximation la densité s’écrit comme fonction linéaire de la température :

$$\rho_f = \rho_0(1 - \alpha_f(T - T_0)).$$

## Formulation mathématique de l'étude des fluides viscoélastiques purs 21

$\alpha_f$  est le coefficient d'expansion thermique,  $T$  la température en un point donné et  $T_0$  une température de référence par exemple la température de la plaque du bas dans le cas de notre étude. Dans les gaz et les liquides, le coefficient d'expansion thermique  $\alpha$  est très petit,  $10^{-4} < \alpha < 10^{-3}C^{-1}$ . Nous adoptons donc l'hypothèse **Oberbeck-Boussinesq** [3] pour la densité du fluide qui montre que les variations de densité sont négligeables, excepté dans le terme gravitationnel  $\rho_f \vec{g}$  où elles rendent compte de la poussée d'Archimède qui est la cause de la convection thermique.

L'équation de conservation de la masse s'écrit alors :

$$\text{div} \vec{V}_f = 0 \quad (1.8)$$

### 1.4.3 Equation de conservation de la quantité de mouvement

#### 1.4.3.1 Loi de Darcy pour les fluides viscoélastiques

A partir d'expériences de percolation d'eau à travers une colonne de sable verticale saturée de hauteur  $H$  Henry Darcy dans les années 1950 déduisit la relation :

$$Q = K' S \frac{\Delta P_m}{H} \quad (1.9)$$

où  $Q$  représente le débit de l'eau percolant à travers la colonne,  $\Delta P_m$  la différence de pression motrice entre le haut et le bas de la colonne,  $K'$  une constante dépendant de la perméabilité de la couche poreuse du milieu et du fluide. On montre [54] que  $K' = K/\mu_f$  avec  $K$  la perméabilité et  $\mu_f$  la viscosité dynamique du fluide.

Afin de tenir compte du comportement des fluides viscoélastiques, comme dans le cas d'un fluide Newtonien, l'équation du mouvement pour un fluide viscoélastique saturant un milieu poreux s'obtient grâce à la théorie d'homogénéisation [31]. Cette équation prend la forme d'une loi de Darcy généralisée et s'écrit sous la forme :

$$(1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{V}_f = -\frac{K}{\mu_f} (1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}) (\nabla P + \rho_f g \vec{e}_z), \quad (1.10)$$

Dans cette réécriture de la loi de Darcy pour les fluides viscoélastiques, on peut immédiatement remarquer que pour le cas particulier  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = 0$ , l'équation 1.10 correspond à la loi de Darcy habituellement utilisée pour un fluide newtonien.

L'équation de Darcy (1.10) généralisée aux fluides viscoélastiques néglige les effets d'inertie du fluide. Or, P. Vadasz [60] a souligné l'importance de ces effets lorsqu'on s'intéresse au phénomène de propagation d'onde en milieu poreux. En effet, l'étude de stabilité linéaire et faiblement non linéaire de la convection naturelle en milieu poreux soumis à une rotation uniforme autour de son axe vertical menée par P.

Vadasz [60], montre que la prise en compte du terme instationnaire d'inertie peut induire une convection oscillante, qui n'est pas prévue lorsque ce terme d'inertie est négligé. Ainsi, dans le chapitre 3 et le chapitre 4, le modèle utilisé tient compte du terme instationnaire, souvent négligé dans la plupart des études liées à la convection. Pour une fluide viscoélastique pur, un terme instationnaire est rajouté à l'équation (1.10) qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\rho_0 K}{\phi \mu_f} \left( 1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \vec{V}_f}{\partial t} + (1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{V}_f = -\frac{K}{\mu_f} (1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t}) (\nabla P + \rho_f g \vec{e}_z). \quad (1.11)$$

#### 1.4.4 Equation de conservation de l'énergie

La convection en milieu poreux favorise le transfert de chaleur entre la paroi chaude et la paroi froide. Ce transfert est assuré à la fois par la phase fluide et la phase solide. Or ces deux phases ne possèdent ni la même capacité thermique (respectivement  $(\rho c)_f$  et  $(\rho c)_s$ ), ni la même conductivité thermique (respectivement  $(\lambda)_f$  et  $(\lambda)_s$ ). Pour cette raison et dans le but de tenir compte du transfert de chaleur lié à la présence des 2 phases, Combarrous et Bories [10] avaient proposé un modèle de deux équations d'énergie décrivant l'évolution de la température des deux phases :

$$\phi (\rho c)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho c)_f \phi \vec{V} \cdot \nabla T_f = \text{div}[\lambda_f^* \nabla T_f] - h(T_f - T_s), \quad (1.12)$$

$$(1 - \phi) (\rho c)_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \text{div}[\lambda_s^* \nabla T_s] - h(T_s - T_f). \quad (1.13)$$

avec  $T_{f,s}$  désignant la température, moyennée sur un V.E.R, les indices  $f,s$  désignant la partie fluide et la matrice solide. Au regard de (1.12) et (1.13), on constate que si  $T_s > T_f$ , soit  $T_s - T_f > 0$ , le transfert de chaleur est compté positivement de la matrice solide vers la phase fluide.

Les scalaires  $\lambda_f^*$  et  $\lambda_s^*$  sont des coefficients de conductivité thermique équivalente et dépendent<sup>2</sup> des coefficients de conductivité thermique propre  $\lambda_f$  et  $\lambda_s$  et de la porosité  $\phi$ . Ils dépendent aussi entre autres paramètres :

- pour  $\lambda_f^*$ , de la dispersion hydrodynamique due à la présence du squelette solide.
- pour  $\lambda_s^*$  de l'état de division de la phase solide.

Le coefficient de transfert entre les deux phases,  $h$ , dépend, par analyse dimensionnelle :

- des caractéristiques thermiques de la phase fluide et de la matrice solide (conductivité et chaleur volumique)

---

2. si le milieu est isotrope ce sont des scalaires ; si le milieu est anisotrope, ce sont des tenseurs, par hypothèse ils sont sphériques

## Formulation mathématique de l'étude des fluides viscoélastiques purs 23

- de la porosité  $\phi$
  - une dimension caractéristique du milieu poreux par exemple  $\sqrt{K}$  avec  $K$  la perméabilité ou alors la taille d'un pore, d'un grain, d'une fibre.
- $h$  peut être déterminé expérimentalement de manière indirecte [46].

Lorsque que l'on suppose l'équilibre thermique entre la phase fluide et la matrice solide on a alors  $T_f = T_s$  (le coefficient de transfert  $h \rightarrow \infty$ ). Sa justification repose sur la comparaison des temps caractéristiques de mise à l'équilibre thermique du milieu poreux. Sa validité a été systématiquement étudié dans [49]. Pour les modèles variant entre  $10^{-2} < \frac{\lambda_s}{\lambda_f} < 10^3$ , on observe qu'au cours d'un processus transitoire, l'écart maximal entre les températures moyennes adimensionnées de chaque phase est de l'ordre de 10%.

On en déduit par sommation terme à terme des équations (1.12) et (1.13), le modèle de transfert de chaleur le plus couramment utilisé pour les milieux poreux (équation de transport-diffusion) :

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \vec{V}_f \cdot \nabla T = \text{div}[\lambda^* \nabla T], \quad (1.14)$$

avec  $T$  la température équivalente du milieu poreux,  $(\rho c)^* = \phi(\rho c)_f + (1 - \phi)(\rho c)_s$  la chaleur spécifique volumique équivalente (car additivité des enthalpies donc des chaleurs spécifiques volumiques) et  $\lambda^* = \lambda_f^* + \lambda_s^*$ . Généralement  $\lambda^*$  est mesuré expérimentalement mais il dépend de la température. On le prendra constant dans la suite. On peut quand même en donner une approximation assez simple. Parmi les modèles les plus usuels [46], on distingue :

- les modèles séries  $\lambda^\perp$ , définis par un milieu constitué de strates de solide et de fluide perpendiculaires au transfert de chaleur qui donnent :

$$\lambda^\perp = \phi \lambda_f + (1 - \phi) \lambda_s$$

- les modèles parallèles  $\lambda^\parallel$ , définis par un milieu constitué de strates solides et de fluides parallèles au transfert de chaleur qui donnent :

$$\frac{1}{\lambda^\parallel} = \frac{\phi}{\lambda_f} + \frac{1 - \phi}{\lambda_s}$$

Ces approximations permettent d'encadrer  $\lambda^*$  :

$$\lambda^\perp < \lambda^* < \lambda^\parallel,$$

Si  $\lambda^*$  ne varie pas spatialement, on peut écrire :

$$\frac{(\rho c)^*}{(\rho c)_f} \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}_f \cdot \nabla T = D_{th} \Delta T,$$

avec  $D_{th} = \frac{\lambda^*}{(\rho c)_f}$  le coefficient de diffusivité thermique équivalente.

### 1.4.5 Conditions aux limites

On impose les conditions aux limites suivantes :

- pour la vitesse, on utilise l'équation de Darcy pour les fluides viscoélastiques, avec les conditions d'imperméabilité à la frontière :

$$\vec{V}_f \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur la surface en } z = 0, H$$

- pour la température, on utilise l'équation de l'énergie avec les conditions :

$$\text{En } z = 0, \quad T = T_0$$

$$\text{En } z = H, \quad T = T_1$$

### 1.4.6 Adimensionnement et conditions aux limites

#### 1.4.6.1 Equations adimensionnées

Toutes les grandeurs physiques du problème peuvent être exprimées à l'aide de quatre grandeurs fondamentales : la longueur [m], la masse [kg], la température [K] et le temps [s]. Or les phénomènes physiques sont indépendants du choix de l'unité, ils dépendent donc de nombres sans dimension. D'autre part, cette analyse va orienter tout notre travail, en mettant par exemple en évidence un petit paramètre qui suggère un développement asymptotique. Pour cela on va adimensionner toutes les grandeurs par les échelles de références suivantes :

- Longueur :

$$x^* = \frac{x}{H} ; \quad y^* = \frac{y}{H} ; \quad z^* = \frac{z}{H}$$

- Temps :

$$t^* = \frac{t}{\frac{H^2(\rho c)^*}{\lambda^*}} = \frac{t}{t_0} \quad \text{avec} \quad t_0 = \frac{H^2(\rho c)^*}{\lambda^*}$$

$$\lambda_1^* = \frac{\lambda_1}{t_0} \quad \text{et} \quad \lambda_2^* = \frac{\lambda_2}{t_0}$$

- Température :

$$T^* = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$$

Avec  $T_0 - T_1$  : la différence de température entre les deux plaques.

- Vitesse de filtration :

$$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}_f}{\frac{\lambda^*}{H(\rho c)_f}}$$

- Pression :

$$P^* = \frac{P}{\frac{\lambda^* \mu_f}{K(\rho c)_f}}$$



## Formulation mathématique de l'étude des fluides viscoélastiques purs 25

La longueur de référence représente la hauteur  $H$  sur laquelle se développe principalement le phénomène de convection.

Le temps de référence représente le temps de diffusion thermique équivalent sur une surface  $H^2$ .

La température au sein du milieu est comprise entre la température de la plaque du haut et celle de la plaque du bas, alors la différence de température est prise comme référence.

En milieu poreux, la vitesse de filtration de référence est basée sur le temps caractéristique de diffusion thermique  $D_{th}$  et la longueur caractéristique  $H$  où seule la partie fluide est en mouvement d'où le terme  $(\rho c)_f$  et non  $(\rho c)^*$ .

Au regard de la loi de Darcy pour les fluides viscoélastiques, on construit la pression de référence et la longueur de référence.

Par souci de simplification, dans la suite de ce document, on ôte les étoiles aux grandeurs adimensionnées. Les équations du problème deviennent :

$$div(\vec{V}) = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{Da}{\phi Pr} \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}) \vec{V} = (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}) (-\nabla P + Ra T \vec{z}), \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (1.17)$$

Les conditions aux limites associées deviennent :

Pour la vitesse :

$$w = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1, \quad (1.18)$$

Pour la température :

$$T = 1 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad T = 0 \quad \text{en} \quad z = 1, \quad (1.19)$$

Ces équations font intervenir les nombres sans dimension suivants :

– **Nombre de Rayleigh de filtration :**

Le nombre de Rayleigh caractérise les effets convectifs au sein d'un fluide. Il est défini par :

$$Ra = \frac{Kg\alpha_f H(T_0 - T_1)(\rho c)_f}{\lambda^* \nu_f}$$

En effet, en convection naturelle, les effets stabilisants se traduisent par la diffusion thermique du fluide en mouvement où le temps caractéristique lors d'un trajet  $H$  d'une particule est  $H^2 \frac{(\rho c)_f}{\lambda^*}$ . Les effets stabilisants sont également dus à la viscosité où le temps caractéristique associé est  $\frac{K}{\nu_f}$ . De ce fait, le temps caractéristique de stabilisation est  $t_{stabilisation}^2 = \frac{H^2(\rho c)_f K}{\lambda^* \nu_f}$ . Les effets déstabilisants proviennent de la poussée d'Archimède par variation de la densité, le temps de relaxation associé est donc  $t_{dstabilisation}^2 = \frac{H}{\alpha_f(T_0 - T_1)g}$ . Le nombre de Rayleigh est donc le rapport des 2 temps :

$$Ra = \frac{t_{stabilisation}^2}{t_{dstabilisation}^2}$$

– **Coefficient de relaxation**  $\lambda_1$

Ce coefficient représente le comportement élastique du fluide, il est défini comme suit :

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\lambda}_1}{(\lambda^*/(\rho C_p)^* H^2)}$$

où  $(\lambda^*/(\rho C_p)^* H^2)$  est le temps de diffusion thermique verticale.

Dans le cas du modèle de type Oldroyd-B et dans toute la suite de notre travail, nous aurons toujours :

$$0 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$$

– **Coefficient de retardation**  $\lambda_2$

Il représente également le comportement élastique du fluide. Il s'écrit de façon explicite :

$$\lambda_2 = \frac{\bar{\lambda}_2}{(\lambda^*/(\rho C_p)^* H^2)}$$

– **Le nombre de Prandtl-Darcy**

Cette grandeur est définie par :

$$Pr_D = \frac{\phi Pr}{Da}$$

où :

- Nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{D_{th}}$$

La diffusivité thermique  $D_{th}$  et la viscosité cinématique  $\nu$  ayant même dimension, leur rapport définit une grandeur sans dimension  $Pr$  appelée nombre de Prandtl.  $Pr$  permet d'évaluer l'efficacité relative du transport de chaleur et de quantité de mouvement.

- Nombre de Darcy

Le nombre de Darcy  $Da$  est caractéristique de la finesse du milieu poreux.

$$Da = \frac{K}{H^2}$$

### 1.4.7 Solution de conduction

Une solution stationnaire simple du système (1.15)-(1.16)- (1.17) avec les conditions aux limites peut être trouvée et ce quels que soient  $Ra$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , c'est la solution de conduction :

$$V_0 = 0, \tag{1.20}$$

$$T_0 = 1 - z, \tag{1.21}$$

$$P_0 = Ra\left(z - \frac{z^2}{2}\right). \tag{1.22}$$

Cette solution est caractérisée par un profil linéaire de la température.

## 1.5 Formulation du problème pour les mélanges binaires de fluides viscoélastiques

Les travaux publiés sur la convection thermique des fluides viscoélastiques dans des milieux poreux décrivent des polymères avec des modèles de fluides viscoélastiques purs sans se soucier de l'aspect de mélanges binaires. On suppose maintenant que le fluide viscoélastique est un mélange de deux fluides miscibles. Dans ce cas la séparation des constituants du fluide binaire se fait par couplage thermodiffusion-convection. Les applications de tels phénomènes sont nombreuses, et notamment dans l'industrie pétrolière où la thermodiffusion convection peut aider à expliquer la redistribution de divers hydrocarbures constituant les huiles naturelles sous l'influence de gradients thermiques naturels dans les roches-réservoirs.

### 1.5.1 Phénomène de thermodiffusion-Effet Soret

Le fluide viscoélastique étant un mélange de deux fluides miscibles, on définit par  $C$  la concentration du mélange, cette concentration étant le rapport de la masse de l'un des constituants à la masse totale du fluide contenu dans un élément de volume donné.

La thermodiffusion appelée Effet Soret, est la formation d'un flux de matière induit par un gradient de température appliqué à un mélange binaire initialement homogène. Elle a été découverte il y a plus d'un siècle par Ludwig (1856) et Soret (1880). Soret donne son nom à cet effet [56], qui représente le couplage entre la diffusion thermique et la diffusion du soluté. Les applications sont nombreuses et notamment l'effet Soret permet de séparer des constituants au sein d'un mélange. C'est Klaus Clusius [8] qui a découvert une séparation possible des éléments d'un mélange avec son tube à séparation, processus appelé plus tardivement diffusion thermogravitationnelle. L'effet de séparation est faible et nécessite une cascade de plusieurs étapes, par exemple 20 pour le néon et plusieurs milliers pour l'uranium.

Dans un mélange binaire, la première loi de Fick datant du 19<sup>e</sup> siècle, montre que le vecteur flux de diffusion (quantité de matière traversant par seconde une surface d'aire normale au mouvement) est donné en fonction de la chute de concentration. S'il existe en plus un gradient de température, le flux de matière contiendra, à côté du terme provenant de la loi de Fick, un terme traduisant la contribution du gradient de température. Cette contribution est pondérée par un coefficient de diffusion thermique ou coefficient de thermodiffusion  $S_T$ . Le flux de diffusion de l'un des constituants du mélange s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{J} = -D^* (\nabla C + S_T C_0 (1 - C_0) \nabla T). \quad (1.23)$$

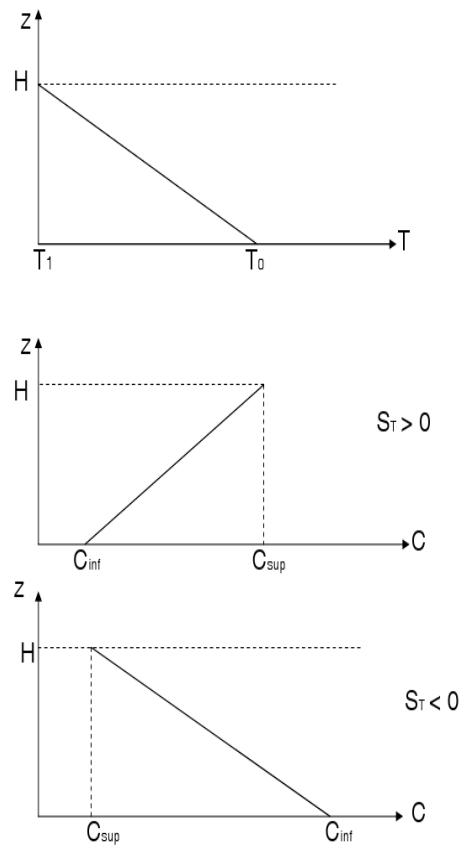
$C_0$  est la concentration du composant le plus lourd,  $D^*$  la diffusion de la concentration. L'expression de ce flux montre bien que le gradient de température engendre un flux de matière. L'effet contraire i.e. l'apparition d'un flux thermique sous l'influence d'un gradient de concentration est nommé Effet Dufour ; présent essentiellement dans les gaz, il sera négligé dans ce travail. A l'état stationnaire, le flux total est nul et on a pour un mélange binaire :

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -S_T C_0 (1 - C_0) \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (1.24)$$

Si l'on suppose que la couche fluide est chauffée par le bas (gradient de température négatif), on voit d'après l'expression du flux à l'état stationnaire que le sens de migration des constituants n'est connu que si le signe du rapport de thermodiffusion

$S_T$  est connu. Ainsi si  $S_T$  est positif, le constituant de concentration  $C$  se déplace vers la paroi froide (gradient de concentration positif) et inversement si le rapport de thermodiffusion  $S_T$  est négatif. Le signe du coefficient de thermodiffusion n'est pas déterminé a priori (voir figure 1.4).

Les mesures du coefficient de thermodiffusion sont rares, dues à de grandes difficultés expérimentales, telles que l'apparition de rouleaux convectifs dans le liquide.



**FIGURE 1.4** – Profil de température dans le cas où le fluide est chauffé par le bas et profils de concentration correspondants. Ils montrent le déplacement du constituant de concentration  $C$  vers la paroi froide (chaude) lorsque  $S_T$  est positif (négatif)

## 1.5.2 Formulation du problème

### 1.5.2.1 Modélisation mathématique

On considère une couche poreuse homogène et isotrope d'épaisseur  $H$ , saturée par un mélange binaire de fluide viscoélastique. La paroi inférieure est chauffée à la température  $T_0$ , tandis que la paroi supérieure est maintenue à une température  $T_1 < T_0$  (figure 1.3).

### 1.5.2.2 Hypothèse adoptée

La densité du fluide est désormais considérée comme une fonction linéaire de la température et de la concentration :

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0))$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont respectivement le coefficient de dilatation thermique et le coefficient de dilatation du soluté.  $T_0$  et  $C_0$  sont respectivement la température et la concentration de référence.

### 1.5.2.3 Equation de continuité

Le fluide étant supposé incompressible, l'équation de conservation de la masse est exprimée par l'équation d'incompressibilité :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \tag{1.25}$$

### 1.5.2.4 Loi de Darcy pour les mélanges binaires de fluides viscoélastiques

Afin de tenir compte de l'ajout de la concentration dans l'expression de la densité du fluide, la loi de Darcy pour les mélanges binaires de fluides viscoélastiques peut être réécrite selon :

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{K} \left( 1 + \bar{\lambda}_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{u} + \frac{\rho_0}{\phi} \left( 1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \\ & - \left( 1 + \bar{\lambda}_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \{ \nabla P + \rho_0 [\alpha(T - T_0) - \beta(C - C_0)] \mathbf{g} \}, \end{aligned} \tag{1.26}$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique,  $K$  la perméabilité du milieu,  $\phi$  la porosité,  $\bar{\lambda}_2$  et  $\bar{\lambda}_1$  les temps de retardation et de relaxation respectivement;  $\rho_0$  est la densité uniforme.

### 1.5.2.5 Equation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie pour les mélanges binaires de fluide viscoélastiques reste la même que celle utilisée pour les fluides viscoélastiques purs en milieu poreux et s'écrit :

$$(\rho C_p)^* \frac{\partial}{\partial t} T + (\rho C_p)_f \mathbf{u} \cdot \nabla T = \lambda^* \nabla^2 T. \quad (1.27)$$

$\lambda^*$  étant la conductivité thermique équivalente.

### 1.5.2.6 Equation de la diffusion moléculaire

Elle détermine la distribution de la concentration dans le fluide et le transport des constituants du fluide dans le milieu poreux. Elle s'écrit :

$$\phi \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) C = D^* [\nabla^2 C + S_T C_0 (1 - C_0) \nabla^2 T]. \quad (1.28)$$

$\phi$  représente la porosité,  $D^*$  la diffusion de la concentration et  $S_T$  le coefficient de Soret.

### 1.5.2.7 Conditions aux limites

- La température est imposée à la fois sur la plaque inférieure en  $z = 0$  et sur la plaque supérieure en  $z = H$  :

$$T = T_0 \text{ en } z = 0 \text{ et } T = T_1 \text{ en } z = H, \quad (1.29)$$

- La composante normale de la vitesse de filtration doit s'annuler sur les parois :

$$w = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = H, \quad (1.30)$$

- La condition aux limites sur la concentration traduit que la composante normale du flux de diffusion doit s'annuler aux bords de la matière  $J_{\mathbf{e}_z} = \mathbf{0}$  :

$$\frac{\partial C}{\partial z} = -S_T C_0 (1 - C_0) \frac{\partial T}{\partial z} \text{ en } z = 0 \text{ et } z = H, \quad (1.31)$$

### 1.5.2.8 Etat de base : solution de conduction

Le système (1.25-1.28) est fermé et admet une solution appelée solution de base. Elle est obtenue en supposant que le fluide est au repos et que la température, la concentration et la pression dépendent de la coordonnée verticale  $z$ . Si nous cherchons des solutions des équations sous la forme  $T_B(z)$  et  $C_B(z)$ , on obtient l'état de base :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1.32)$$

$$T_B = T_0 - \frac{T_0 - T_1}{H} z, \quad (1.33)$$

$$C_B = S_T C_0 (1 - C_0) \frac{\Delta T}{H} z + C_0. \quad (1.34)$$

Cette solution du système est aussi appelée solution de conduction pure, puisque le transfert de chaleur s'effectue sans changement macroscopique, l'énergie thermique se propageant grâce à des chocs non élastiques entre molécules.

### 1.5.2.9 Adimensionnalisation et linéarisation autour de la solution de conduction

Les équations du mouvement peuvent être adimensionnées, en notant  $\sigma = \frac{(\rho C_p)^*}{(\rho C_p)_f}$ , et  $D_{th} = \frac{\lambda^*}{(\rho C_p)_f}$ . On choisit alors les échelles de référence  $H$ ,  $D_{th}/H$ ,  $H^2 \sigma / D_{th}$ ,  $T_0 - T_1$  et  $-S_T C_0 (1 - C_0) (T - T_0)$  respectivement pour la longueur, la vitesse de filtration, le temps, la perturbation de la température  $\theta$  et la perturbation de la concentration  $C$ . On définit également une nouvelle variable  $\xi$  telle que  $\xi = C - \theta$ .

En prenant deux fois le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et en tenant compte de l'équation de continuité ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ), on obtient en projetant sur l'axe vertical  $z$ , le système d'équations linéarisées autour de (1.32-1.34) vérifiées par les perturbations  $u$ ,  $\theta$  et  $\xi$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 W + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{Pr_D} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 W\right) \\ - Ra \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla_h^2 [(1 + \psi)\theta + \psi\xi] = 0, \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - W - \nabla^2 \theta = 0, \quad (1.37)$$



$$\varepsilon^* \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \varepsilon^*)W + \varepsilon^* \nabla^2 \theta - Le \nabla^2 \xi = 0, \quad (1.38)$$

Avec le laplacien horizontal :

$$\nabla_h^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

En plus des nombres sans dimension  $Ra$ ,  $Pr_D$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  s'ajoutent trois autres nombres sans dimension :

– Rapport de séparation  $\psi$

$\psi$  est le rapport de séparation, il peut être stabilisant ou déstabilisant en fonction du mélange binaire considéré.

$$\psi = \frac{\beta}{\alpha} S_T C_0 (1 - C_0).$$

Dans le cas d'un fluide pur  $\psi = 0$ .

– Nombre de Lewis

$$Le = \frac{D^*}{D_{th}}$$

De manière similaire au nombre de Prandtl, le nombre de Lewis représente le rapport entre les temps de diffusion thermique et massique. Dans la suite de ce travail, nous prendrons un nombre de Lewis de l'ordre de  $10^{-2}$ .

– porosité relative

Cette grandeur est définie par :

$$\varepsilon^* = \frac{\phi}{\sigma}$$

### 1.5.2.10 Condition aux limites

Les parois sont imperméables :

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1 \quad (1.39)$$

$$\theta = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1 \quad (1.40)$$

$$W = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1. \quad (1.41)$$

## 1.6 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons déterminé les caractéristiques rhéologiques des milieux poreux, et nous avons présenté une modélisation mathématique du problème basée sur l'équation de Darcy généralisée aux fluides viscoélastiques.

Les paramètres adimensionnés du problème et l'état de conduction ont été déterminés. La partie introductive sur les mélanges binaires de fluides viscoélastiques en milieu poreux nous a permis de présenter et de modéliser le problème physique. Le milieu, constitué de deux phases, l'une fluide (elle même composée de deux fluides miscibles), l'autre solide, est assimilé à un fluide fictif, continu et unique. En supposant que le fluide vérifie l'hypothèse de Boussinesq, ce problème physique est régi par les équations adimensionnées du mouvement où l'équation de la quantité de mouvement est exprimée sous la forme de la Loi de Darcy généralisée aux fluides viscoélastiques dans le modèle d'Oldroyd-B. Ce problème admet une solution dite solution de conduction.

# Chapitre 2

## Analyse linéaire et faiblement non linéaire en milieu illimité

Ce chapitre est consacré à l'étude linéaire des instabilités qui apparaissent lorsque l'état de conduction se déstabilise. Pour cela, il faut étudier l'évolution au cours du temps d'une perturbation infinitésimale, qui peut simuler, par exemple, le bruit inhérent aux situations réelles. La solution de conduction est dite instable lorsque cette perturbation s'amplifie asymptotiquement dans le temps, cependant dans le cas contraire on parle d'état de conduction stable.

Deux approches de stabilité linéaire sont alors possibles, temporelles et spatio-temporelles.

### 2.1 Etude de stabilité de la solution de conduction

#### 2.1.1 Formulation du problème de stabilité et équation de dispersion

L'analyse linéaire qui correspond à l'étude de l'évolution d'une perturbation infinitésimale, donne une condition suffisante d'instabilité, l'état étudié est linéairement stable ou instable. En effet, même si un état peut être stable vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale, il ne l'est peut être pas vis-à-vis d'une perturbation d'amplitude finie (analyse non linéaire). Néanmoins l'analyse linéaire permet d'obtenir les seuils d'instabilité primaires, les nombres d'ondes et les fréquences des structures bifurquées.

Pour le problème de la convection des fluides viscoélastiques, le système (1.15)-(1.16)-(1.17) avec les conditions aux limites (1.18)-(1.19), dépend de trois paramètres :

- Le nombre de Rayleigh  $Ra$
- Le coefficient de relaxation  $\lambda_1$

– Le coefficient de retardation  $\lambda_2$

En superposant des petites perturbations de la vitesse  $\vec{v} = (u, v, w)^T$  de la température  $\theta$  et de la pression  $p$  à la solution de conduction, on peut écrire :

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{v}(x, y, z, t), \\ T = T_0 + \theta(x, y, z, t), \\ P = P_0 + p(x, y, z, t), \end{cases} \quad (2.1)$$

En reportant (2.1) dans le système initial (1.15)-(1.16)-(1.17), on obtient après linéarisation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ (1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}) \mathbf{V} - (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t})(-\nabla p + Ra\theta \vec{e}_z) = 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - w = \nabla^2 \theta. \end{cases} \quad (2.2)$$

Les conditions aux limites pour les perturbations sont :

$$w(z=0) = w(z=1) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(z=0) = \theta(z=1) = 0. \quad (2.3)$$

En prenant deux fois le rotationnel de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et en tenant compte de l'équation de continuité ( $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ) et l'équation de l'énergie, on obtient en projetant sur l'axe vertical  $z$ , une seule équation vérifiée par la perturbation  $\theta$ , soit :

$$(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2)\nabla^2 \theta = (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t})Ra\Delta_h \theta, \quad (2.4)$$

avec le laplacien horizontal :

$$\Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Les conditions aux limites (2.3) se réduisent aux conditions limites pour  $\theta$  :

$$\theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1. \quad (2.5)$$

L'analyse en modes normaux est désormais classique pour une étude de stabilité linéaire.

En effet, celle-ci consiste à chercher des solutions écrites en modes de Fourier, dits modes normaux. Ces solutions sont développées sur une base de fonctions adaptées à la géométrie du système.

Ainsi l'équation (2.4) admet des solutions de la forme :

$$\theta = e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]} \theta_1 \sin(n\pi z) + C.C, \quad (2.6)$$

où C.C est le complexe conjugué,  $\theta_1$  est l'amplitude,  $k_x$  et  $k_y$  sont respectivement les nombres d'onde suivant l'axe des abscisses et des ordonnées. Cette hypothèse signifie qu'on étudie une perturbation périodique qui s'étend indéfiniment dans l'espace. Les solutions proposées représentent alors des ondes qui se déplacent à la vitesse de phase  $\vec{V}_\phi = \left( \frac{\omega_r}{k_x}, \frac{\omega_r}{k_y} \right)$  et s'accroissent ou s'amortissent avec un taux de croissance temporelle.

En injectant la forme de la perturbation de la température  $\theta$  dans l'équation (2.4), cela conduit à une expression appelée relation de dispersion qui relie le nombre d'onde  $k$  à la pulsation  $\omega$ .

Cette équation s'écrit :

$$D_\phi(k, \omega) = (-B_2 \omega^2 - B_1 i \omega + B_0) = 0, \quad (2.7)$$

Les coefficients  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  dépendent des nombres sans dimension.

$$B_2 = \lambda_2 (k^2 + n^2 \pi^2), \quad (2.8)$$

$$B_1 = \lambda_2 (k^2 + n^2 \pi^2)^2 + (k^2 + n^2 \pi^2) - Rak^2 \lambda_1, \quad (2.9)$$

$$B_0 = (k^2 + n^2 \pi^2)^2 - Rak^2. \quad (2.10)$$

Avec les paramètres  $\phi = [Ra, \lambda_1, \lambda_2]$ , en toute généralité  $k = k_r + ik_i \in \mathbb{C}$  et  $\omega = \omega_r + i\omega_i \in \mathbb{C}$ , avec l'interprétation suivante :

1.  $\Re(k) = k^r$  : nombre d'onde  
 $-\Im(k) = -k^i$  : taux de croissance spatial (à un temps fixé  $t$ , lorsque  $k_i < 0$  l'instabilité s'amplifie dans l'espace pour  $x > 0$  sinon elle s'amortit).
2.  $\Re(\omega) = \omega^r$  : fréquence de l'onde,  
 $\Im(\omega) = \omega^i$  : taux de croissance temporelle (à une position fixée. Lorsque  $\omega_i > 0$  l'instabilité s'amplifie sinon elle s'amortit).

Deux approches de stabilité linéaire sont adoptées. Lorsque la perturbation est supposée être étendue dans tout le système, une approche temporelle est suffisante. En revanche, la réponse du système à une perturbation localisée nécessite une analyse spatio-temporelle.

### 2.1.2 Approche temporelle

Comme l'écoulement n'est pas tout le temps instable, on s'intéresse pour l'instant à la naissance des premiers modes déstabilisant la solution de conduction. Pour cela il faut effectuer une étude d'instabilité temporelle. Elle consiste à étudier l'évolution temporelle de la perturbation en supposant :

$$k \in \mathbb{R} \text{ et } \omega \in \mathbb{C}$$

Lorsque la perturbation n'est ni amplifiée ni atténuée, nous sommes dans les conditions de stabilité marginale qui sont atteintes pour :

$$\omega_i = 0$$

Dans ce cas  $\omega_r$  contrôle le reste de la dépendance temporelle :

- $\omega_r = 0$ , une instabilité stationnaire s'installe.
- $\omega_r \neq 0$ , Le comportement oscillatoire apparaît.

#### 2.1.2.1 Caractéristique linéaire de l'instabilité stationnaire $\omega_r = 0$

On peut dès lors calculer les seuils critiques du nombre de Rayleigh  $Ra$  et du nombre d'onde  $k$ . En tenant compte du fait que nous sommes au seuil marginal ( $\omega_i = 0$ ) et que  $\omega_r = 0$ , on injecte ces deux conditions dans la relation de dispersion (2.7). Il nous vient automatiquement :  $B_0 = 0$ .

D'où :

$$Ra^{(s)} = \frac{(k^2 + n^2\pi^2)^2}{k^2} \quad (2.11)$$

On notera toutefois que le seul paramètre de contrôle est ici le nombre de Rayleigh  $Ra^{(s)}$  lequel dépend exclusivement de  $k$ . On remarque que le  $Ra^{(s)}$  ne dépend pas du coefficient de relaxation  $\lambda_1$  et du coefficient de retardation  $\lambda_2$ .

Pour déterminer le mode qui se déstabilise en premier (mode le plus instable), on doit calculer le nombre d'onde qui minimise le paramètre de contrôle  $Ra^{(s)}$ . Comme  $Ra^{(s)}$  est une fonction croissante de  $n$ , le minimum est atteint pour  $n = 1$  et on obtient ainsi le mode critique  $(k_c^s, Ra_c^s)$ , au-delà duquel l'écoulement cesse d'être stable et fait place à la convection. La valeur du nombre d'onde critique est obtenue en imposant :

$$\frac{\partial Ra^{(s)}}{\partial k} = 0 \implies k_c^s = \pi \quad (2.12)$$

ce qui donne :

$$Ra_c^s = 4\pi^2 \quad \text{et} \quad k_c^s = \pi$$

On retrouve là le résultat bien connu pour la convection naturelle d'un fluide Newtonien saturant un milieu poreux.

### 2.1.2.2 Caractéristique linéaire de l'instabilité oscillatoire $\omega_r \neq 0$

La valeur du  $Ra$  dans le cas de l'instabilité oscillatoire est obtenue en posant  $B_1 = 0$  et  $\omega_i = 0$  dans la relation de dispersion, ce qui conduit à :

$$Ra^{osc} = \frac{(k^2 + n^2\pi^2) + \lambda_2(k^2 + n^2\pi^2)^2}{k^2\lambda_1} \quad (2.13)$$

La courbe neutre de stabilité est illustrée sur la figure (2.1) pour différentes valeurs des temps de relaxation et de retardation.

En minimisant  $Ra^{osc}$  comme précédemment, les valeurs critiques du nombre de Rayleigh oscillatoire  $Ra_c^{osc}$  et du nombre d'onde  $k_c^{osc}$  obtenues pour  $n = 1$  sont :

$$Ra_c^{osc} = \frac{1}{\lambda_1} \left[ 1 + 2\lambda_2\pi \left( \pi + \left( \pi^2 + \frac{1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (2.14)$$

$$k_c^{osc} = \pi^{\frac{1}{2}} \left( \pi^2 + \frac{1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.15)$$

Cependant  $B_1 = 0$  impose à la fréquence  $\omega = \omega_r$  de vérifier :

$$-B_2\omega^2 + B_0 = 0$$

ce qui implique

$$B_0B_2 > 0$$

A l'état critique, la fréquence pour la convection oscillatoire s'écrit :

$$\omega_c^\pm = \pm \sqrt{\frac{\pi^4 + 2k_c^{osc2}\pi^2 + k_c^{osc4} - Ra_c^{osc}k_c^{osc2}}{\lambda_2(\pi^2 + k_c^{osc2})}}$$

La figure (2.3) illustre la dépendance de la fréquence critique vis-à-vis de  $\lambda_2$  pour  $\lambda_1 = 0.5$ .

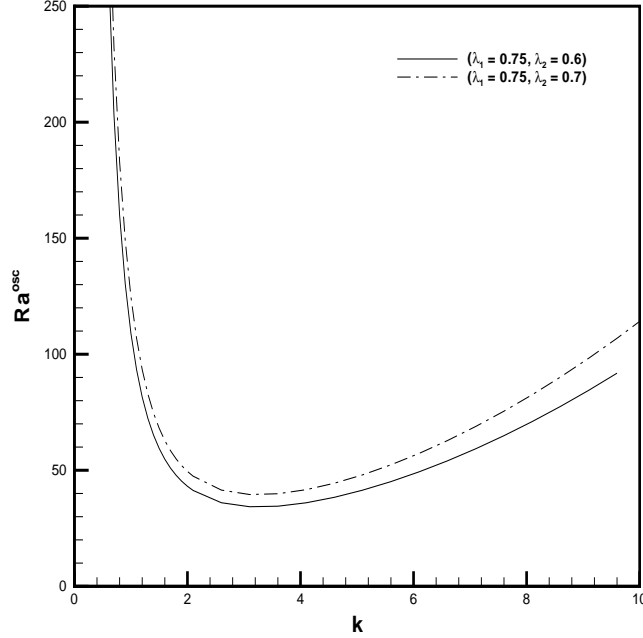


FIGURE 2.1 – Courbe neutre de stabilité.

Le mode avec une fréquence  $\omega^+$  ( $\omega^-$ ) correspond à une onde progressive descendante (montante). Remarquons que tous les modes dont le vecteur d'onde décrit un cercle de rayon  $k_c^s$  pour l'instabilité stationnaire et  $k_c^{osc}$  pour l'instabilité oscillatoire peuvent émerger simultanément indiquant qu'il y a absence d'une direction privilégiée du vecteur d'onde.

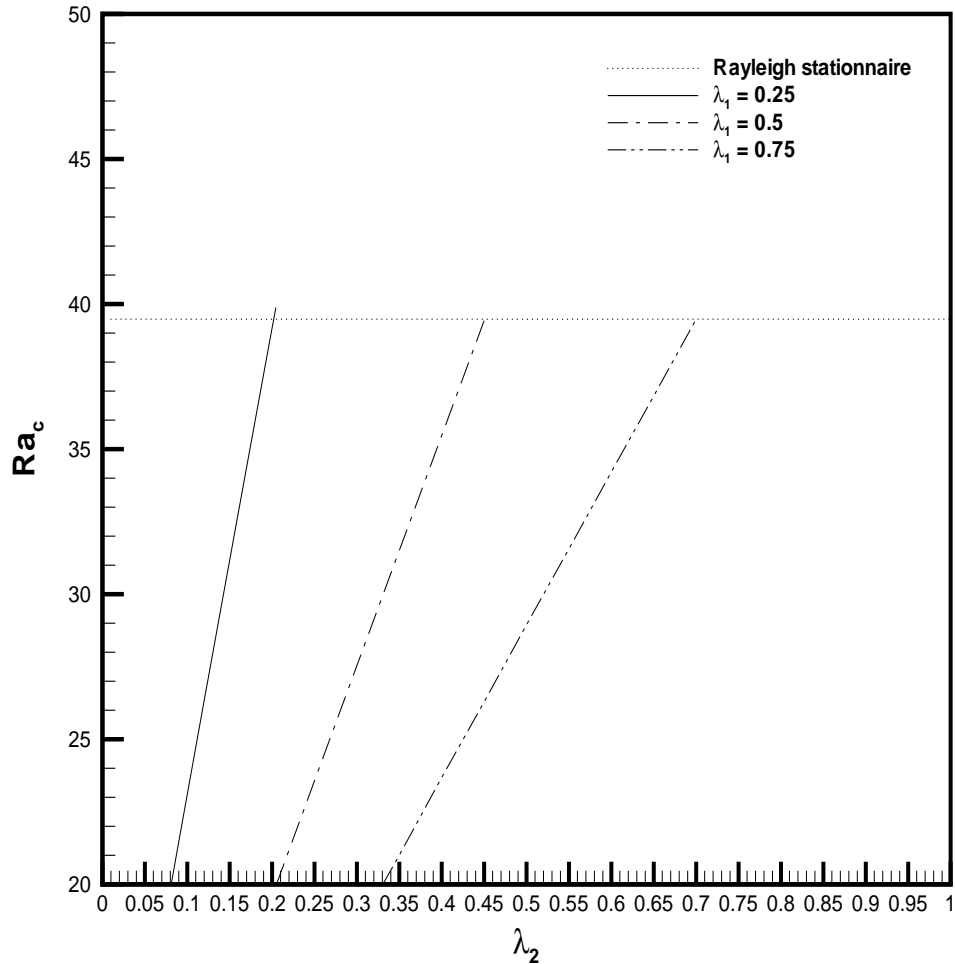
Nous avons représenté sur la figure (2.2), les deux seuils  $Ra_c^{osc}$  et  $Ra_c^s$  en fonction de  $\lambda_2$  pour différentes valeurs de  $\lambda_1$ . **Le résultat très important dans cette courbe concerne principalement l'effet déstabilisant du temps de relaxation  $\lambda_1$  et l'effet stabilisant du temps de retardation  $\lambda_2$ .**

La deuxième condition d'existence d'une instabilité oscillatoire :

$$\frac{(k^2 + n^2\pi^2) + \lambda_2(k^2 + n^2\pi^2)^2}{k^2\lambda_1} < \frac{(k^2 + n^2\pi^2)^2}{k^2} \quad (2.16)$$

Conduit à l'expression :



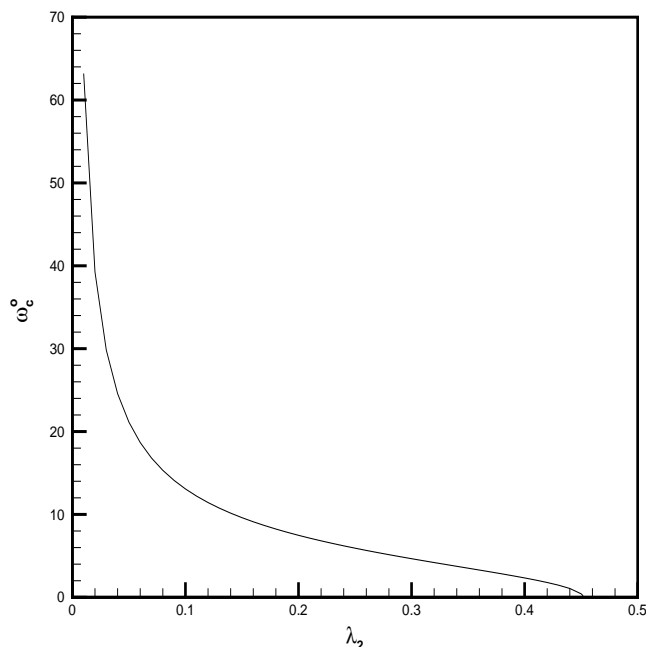


**FIGURE 2.2** – Dépendance du nombre de Rayleigh critique pour les instabilités stationnaire et oscillatoire en fonction de  $\lambda_2$  pour différentes valeurs de  $\lambda_1$ .

$$\lambda_1 > \lambda_2 + \frac{1}{k^2 + n^2\pi^2}$$

Ce qui délimite la zone d'existence d'une instabilité oscillatoire dans le plan des paramètres  $(\lambda_1, \lambda_2)$

La courbe de la figure (2.4) représente, dans le plan  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , la frontière qui sépare la zone des paramètres où l'instabilité est stationnaire de celle où l'instabilité est oscillatoire. Cette figure montre bien que l'étendue de la région où se produit

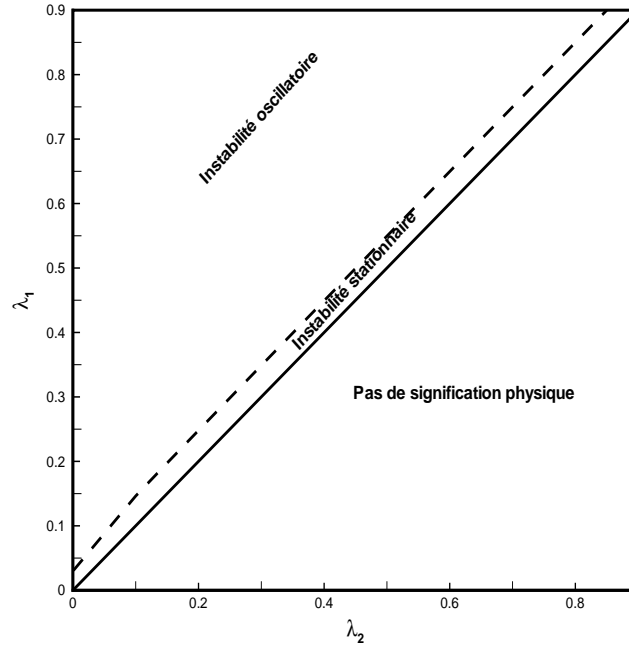


**FIGURE 2.3** – Fréquence critique oscillatoire en fonction du temps de retardation pour  $\lambda_1 = 0.5$ .

une bifurcation de Hopf est plus large que celle où le système observe une transition vers une instabilité stationnaire.

### 2.1.3 Nature convective ou absolue des instabilités

La réponse linéaire du système à une perturbation localisée permet d'étudier sa stabilité linéaire et constitue un critère local d'instabilité. Le système est stable si toute perturbation décroît dans le temps. Dans le cas où la perturbation n'est ni amplifiée ni atténuée, la stabilité est dite marginale. En complément à cette étude, il est important de distinguer les instabilités convectives des instabilités absolues. Les notions d'instabilités convectives et absolues apparaissent pour la première fois dans un contexte général dans un article de Twiss en 1952 [59], puis de Landau et Lifshitz [32] et Briggs [5]. Ces notions ont été introduites par les physiciens des plasmas, puis ont été appliquées par Huerre et Monkewitz [27] aux écoulements cisailés ouverts, tels que les jets, les couches de mélange ou de sillages. La théorie de stabilité temporelle linéaire est très bonne pour prédire un grand nombre de comportements d'écoulements. Le nombre  $k$  est réel, et l'objectif de cette étude est de déterminer une fréquence complexe  $\omega$  fonction de  $k$ . Cette théorie temporelle est utilisée no-

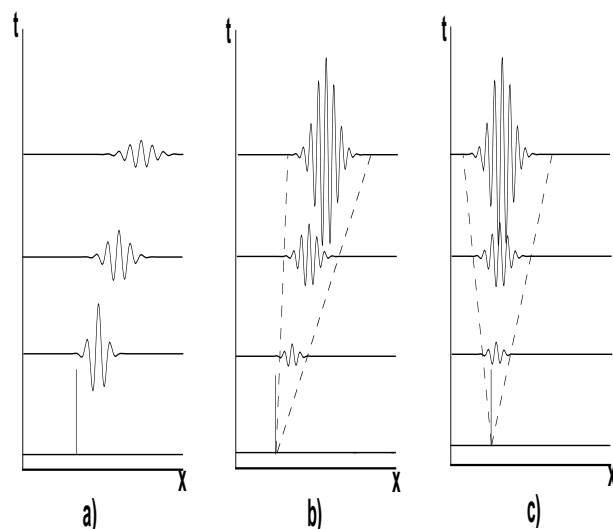


**FIGURE 2.4** – Régions dans le plan  $(\lambda_1, \lambda_2)$  où le déclenchement de l'instabilité se produit en mode stationnaire ou oscillatoire.

tamment dans les études de Taylor-Couette et de Rayleigh-Bénard. Toutefois, pour l'étude d'instabilités dans des écoulements parallèles tels que les couches limites, le mécanisme d'instabilité est souvent contrôlé par un forçage périodique de l'écoulement à une certaine fréquence. Il faut distinguer l'analyse spatiale de l'analyse temporelle. Dans cette dernière, les perturbations évoluent temporellement à partir d'une perturbation spatiale initiale. L'approche spatiale consiste elle à se donner  $\omega$  réel et le nombre d'onde complexe. L'évolution des perturbations localisées en régime linéaire est décrite en termes d'instabilités convectives et d'instabilités absolues. Dans une telle situation comment choisir entre l'aspect temporel et l'aspect spatial ?

Le régime de conduction pure est **convectivement instable** quand la perturbation, apparaissant en  $(t_0, x_0)$ , s'amplifie dans un repère mobile, tout en s'atténuant en chaque point du domaine pour des temps asymptotiquement grands ; ainsi, le système retourne à son état de base non perturbé en absence de bruit. L'effet de cette instabilité est donc temporaire. Physiquement, puisqu'en régime instable, les perturbations croissent spatio-temporellement sous la forme de paquets d'ondes ; les deux fronts possédant un taux d'accroissement nul, se propagent dans la même di-

rection, c'est à dire dans la direction du centre du paquet d'ondes. Si le système est soumis à un bruit microscopique continu dû à l'expérience par exemple, des structures macroscopiques se créent et sont entretenues par le bruit.



**FIGURE 2.5** – Evolution d'une perturbation localisée en  $x = 0$ ,  $t = 0$  dans le plan  $(x, t)$ , stable en a), convectivement instable en b) et absolument instable c).

Le régime est **absolument instable** quand la perturbation est amplifiée à la fois à l'aval et à l'amont. Elle grossit et envahit totalement le domaine d'étude jusqu'à saturation et formation des structures. Ainsi, le paquet d'ondes se répand aussi bien dans la direction du mouvement, que dans la direction opposée [23]. Ici, le bruit est amplifié mais ne modifie pas les structures macroscopiques propres à la dynamique du système i.e. ces structures sont dites auto-entretenu. Par exemple, l'instabilité primaire en convection de Rayleigh-Bénard est absolue, tandis que l'écoulement de Poiseuille plan est convectif.

### 2.1.3.1 Branches spatiales

La condition nécessaire pour que l'instabilité soit absolue est qu'il existe un point  $k$  dans le plan complexe relié à une fréquence  $\omega$  telle que :

$$\begin{cases} D_{[Ra, \lambda_1, \lambda_2]}(k, \omega(k)) = 0, \\ \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} = 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

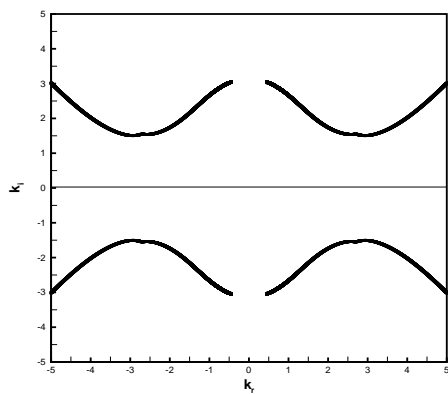
De plus, une condition suffisante impose que les branches spatiales dans le plan complexe  $k$  suivent un processus de pincement décrit ci-dessous.

**Structures stationnaires**

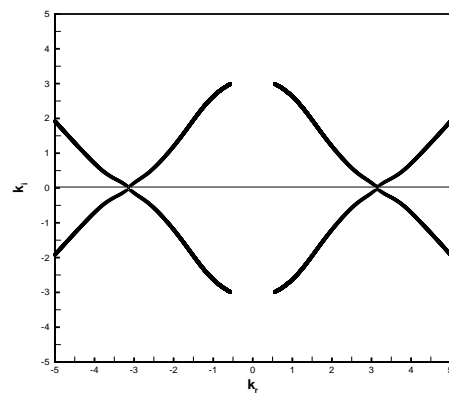
Les branches spatiales sont représentées par les courbes définies par  $[k \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{R} / D_{[Ra, \lambda_1, \lambda_2]}(k, \omega) = 0]$

La relation de dispersion 2.7 peut être développée en polynôme de degré 4 en  $k$ . Cette équation est alors résolue numériquement en faisant varier  $Ra$ , pour des valeurs du temps de relaxation  $\lambda_1$  et du temps de retardation  $\lambda_2$  fixés. Nous observons distinctement quatre branches spatiales dans le plan  $(k_r, k_i)$ . Un exemple est illustré sur la figure 2.6.

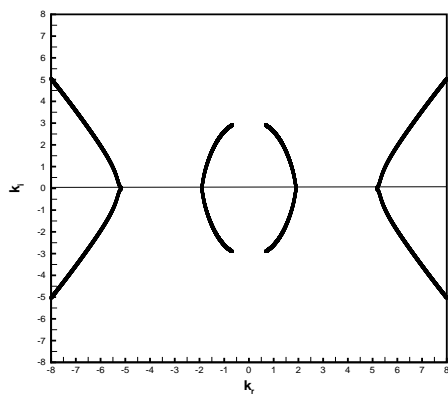
Lorsqu'on augmente le nombre de Rayleigh  $Ra$ , les branches spatiales se déforment. En augmentant  $Ra$  jusqu'au seuil de l'instabilité absolue marginale, des branches émanant de part et d'autre de l'axe réel se pincent 2.6(b). Le point de pincement correspond à un point où une fréquence d'oscillation est sélectionnée. Le système agit alors comme un oscillateur auto-entretenu.



(a)



(b)

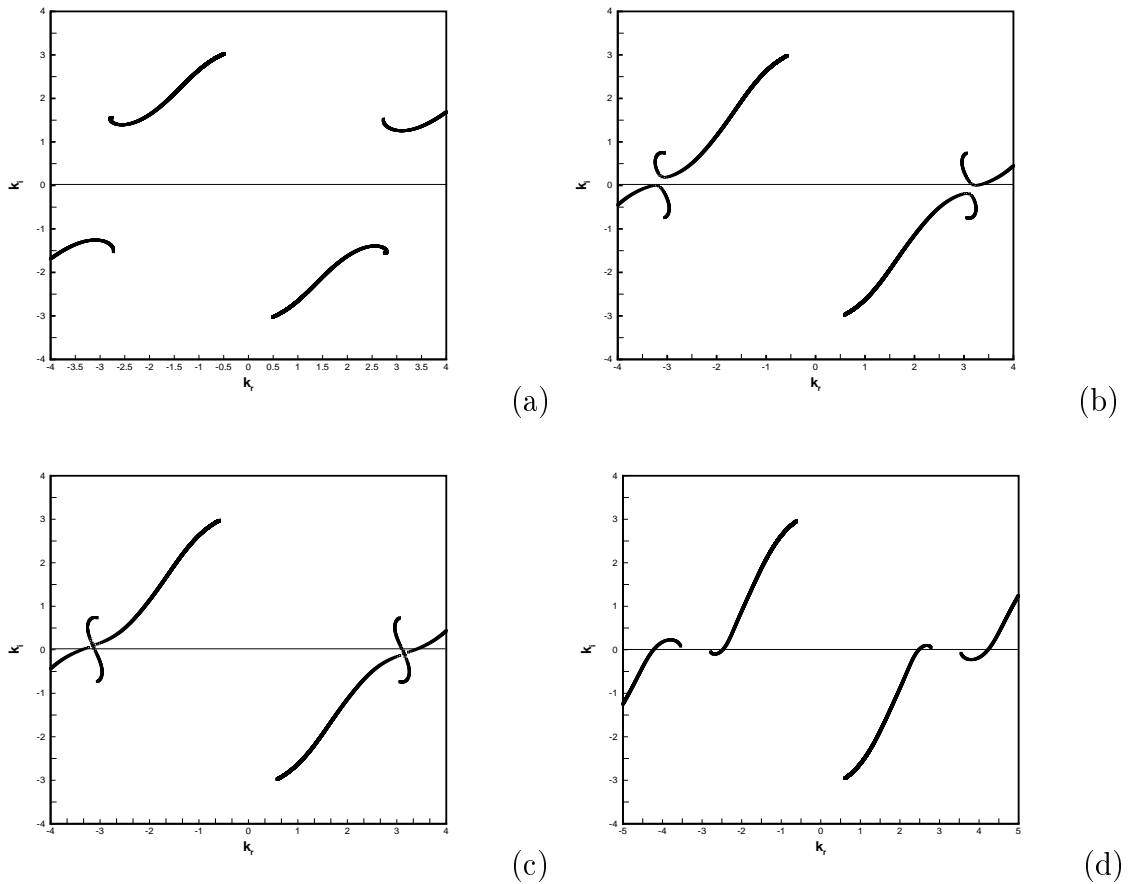


(c)

**FIGURE 2.6** – Comportement des branches spatiales des structures stationnaires pour l'analyse spatiale, avec  $\lambda_1 = 0.82$ ,  $\lambda_2 = 0.8$ , à différentes valeurs de  $Ra$ , avant le seuil absolu  $Ra = 30$  (a), au seuil absolu  $Ra \simeq 39.47$  (b) et dans le régime absolu  $Ra = 50$  (c).

## Structures oscillatoires

En procédant comme précédemment, on augmente le nombre de Rayleigh jusqu'au seuil de l'instabilité convective 2.7(b). Le système devient convectivement instable lorsque l'une des branches spatiales traverse l'axe des réels. Le système agit alors comme un amplificateur de perturbations permanentes. En augmentant  $Ra$  jusqu'au seuil de l'instabilité absolue, des branches spatiales émanant de part et d'autre de l'axe des réels se pincent 2.7(c). Le système se comporte comme un oscillateur auto-entretenu.



**FIGURE 2.7** – Comportement des branches spatiales pour les structures oscillatoires pour l'analyse spatiale à différentes valeurs de  $Ra$ , avec  $\lambda_1 = 0.9$ ,  $\lambda_2 = 0.8$ , avant le seuil convectif  $Ra = 30$  (a), au seuil convectif  $Ra \simeq 37.28$  (b), au seuil absolu  $Ra \simeq 37.34$  (c), dans le régime absolu  $Ra = 50$  (d)

### 2.1.4 Equations de Ginzburg-Landau linéaire pour les structures oscillatoires

Le comportement dynamique des structures au seuil peut être décrit phénoménologiquement sous une forme très générale à l'aide de deux équations couplées non linéairement de type Ginzburg-Landau. Ces équations rendent compte de la modulation spatio temporelle lente des amplitudes complexes  $A(x, t)$  des ondes. Nous nous arrêterons juste à établir les termes de la partie linéaire de cette équation. Une étude plus détaillée sera réalisée ultérieurement en prenant en compte les termes non linéaires (voir Annexe A).

Les termes linéaires de l'équation d'amplitude ont été calculés à partir de l'équation de dispersion. Si on écrit l'équation de Ginzburg-Landau complexe linéarisée sous la forme suivante :

$$\tau_0 \left( \frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \varepsilon (1 + ic_0) A + \xi_0^2 (1 + i\beta) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (2.18)$$

cette équation admet dans la plus grande généralité des coefficients complexes. L'équation contient un terme instationnaire ( $\frac{\partial A}{\partial t}$ ), un terme d'advection ( $\frac{\partial A}{\partial x}$ ) à la vitesse de groupe  $V_g$ , un terme d'instabilité  $\varepsilon A$ , un terme diffusif ( $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ ) et un terme dispersif ( $i\beta \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ )

Le calcul des termes linéaires est classique et conduit à :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{Ra_c^o \left[ \frac{\partial \omega_i}{\partial Ra} \right]_c}, \\ \tau_0 &= \frac{2\lambda_2}{1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)}, \\ \varepsilon &= \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}, \\ V_g &= \left[ \frac{\partial \omega_r}{\partial k} \right]_c, \\ V_g &= \frac{k_c^o}{\omega_c^o} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right), \\ c_o &= Ra_c \tau_o \left[ \frac{\partial \omega_r}{\partial Ra} \right]_c, \\ c_o &= - \frac{2k_c^2 Ra_c^o}{\omega_c^o (1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)) (k_c^2 + \pi^2)}, \end{aligned}$$

$$\xi_0^2 = \frac{1}{2Ra_c} \left[ \frac{\partial^2 Ra}{\partial k^2} \right]_c,$$

$$\xi_0^2 = \frac{1}{(k_c^2 + \pi^2)(1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2))} \left( \lambda_2 k_c^2 + \frac{3\pi^2(1 + \lambda_2\pi^2)}{k_c^2} \right),$$

$$\beta = - \left[ \frac{\tau_0}{2\xi_0^2} \frac{\partial^2 \omega_r}{\partial k^2} \right]_c.$$

On peut écrire différemment l'équation d'amplitude linéarisée afin de simplifier son écriture en divisant 2.18 par  $\tau_0$  et en arrangeant à nouveau l'équation, on obtient alors :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V_g \frac{\partial A}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)A + (\beta_r + i\beta_i) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

Où les coefficients  $\mu_r$ ,  $\mu_i$ ,  $\beta_r$  et  $\beta_i$  sont :

$$\mu_r = \frac{Ra - Ra_c^o}{2\lambda_2 Ra_c^o} (1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)),$$

$$\mu_i = - \frac{k_c^2 (Ra - Ra_c^o)}{2\omega_c^o \lambda_2 (k_c^2 + \pi^2)},$$

$$\beta_r = \frac{1}{2\lambda_2(k_c^2 + \pi^2)} \left( \lambda_2 k_c^2 + \frac{3\pi^2(1 + \lambda_2\pi^2)}{k_c^2} \right),$$

$$\beta_i = \frac{1}{2\omega_c} \left[ \frac{k_c^2 \lambda_1 \lambda_2}{(k_c^2 + \pi^2)(\lambda_1 - \lambda_2) - 1} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)^2 - \left( \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \frac{4k_c^2}{\lambda_1(k_c^2 + \pi^2)} \right) \right],$$

On cherche les solutions de l'équation 2.19 sous la forme :

$$A = e^{ikx - i\omega t}$$

avec  $k \in \mathbb{C}$  et  $\omega \in \mathbb{C}$

D'autre part au seuil de l'instabilité absolue, on aura  $\frac{\partial \omega}{\partial k} = 0$  et  $\omega_i = 0$ , on obtiendra :

$$\mu_r^A = \frac{V_g^2 \beta_r}{4(\beta_r^2 + \beta_i^2)}, \quad (2.20)$$

$$k^A = -i \frac{V_g \beta_r - i\beta_i}{2 \beta_r^2 + \beta_i^2}. \quad (2.21)$$

Le seuil absolu ainsi que le nombre d'onde absolu sont donnés en fonction des paramètres de l'équation d'amplitude linéarisée. La figure (2.8) est une comparaison



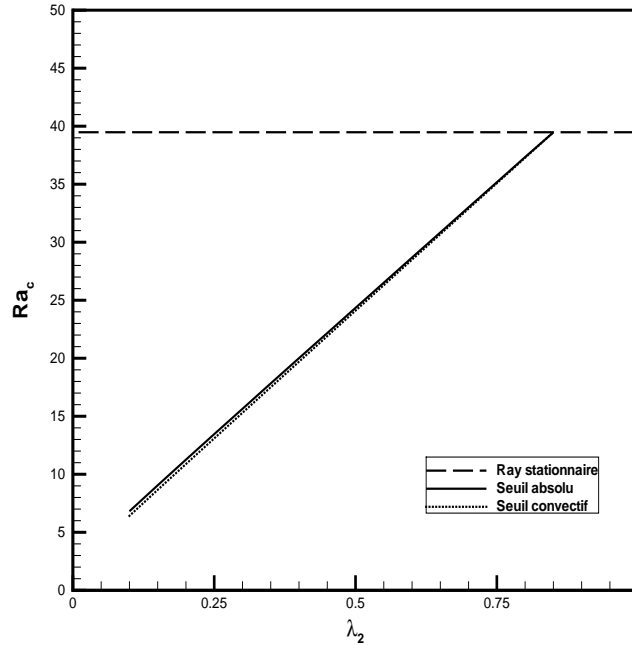
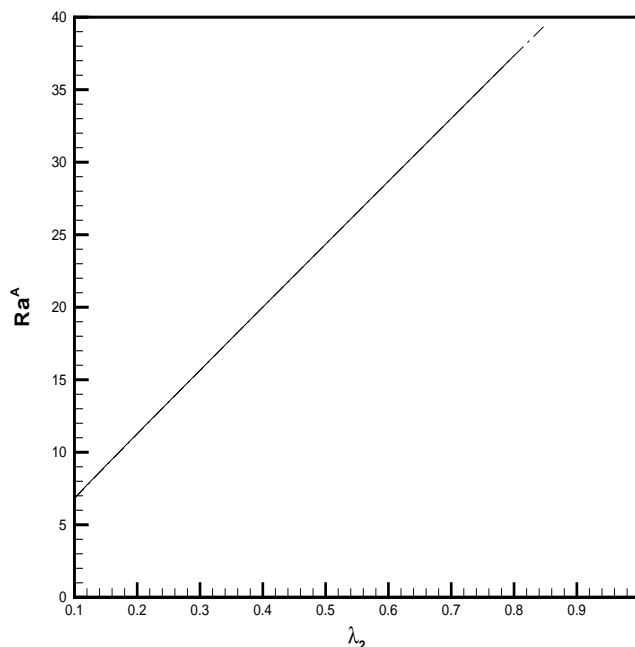


FIGURE 2.8 – Comparaison des seuils absolus et convectifs pour  $\lambda_1 = 0.9$ .

des seuils critiques à la naissance des instabilités convectives et absolues. Les deux seuils sont très proches. On peut également comparer la valeur approchée du  $Ra^A$  à la solution exacte.

Comme on peut le remarquer à l'aide de la figure (2.9), **les deux courbes coïncident parfaitement et l'approximation de l'équation d'amplitude est donc valable près du seuil**. Lorsque la vitesse de groupe s'annule, le seuil absolu est confondu avec le seuil de l'instabilité critique. L'état de base est convectivement instable si les perturbations se propagent vers l'aval loin de la source, tandis que pour un écoulement linéairement absolument instable, les perturbations se répandent à la fois vers l'amont et vers l'aval, envahissant de ce fait tout le domaine d'étude.



**FIGURE 2.9** – Comparaison des seuils absolus issus de l'équation de dispersion (trait discontinu) et de l'équation d'amplitude (trait plein) pour  $\lambda_1 = 0.9$ .

## 2.2 Dynamique faiblement non linéaire

### 2.2.1 Equations de Ginzburg-Landau couplées

L'analyse temporelle de stabilité menée dans la section précédente a permis de déterminer le seuil d'apparition des structures convectives ainsi que le nombre d'onde et les fréquences associées  $\omega_c^+$  et  $\omega_c^-$ . Au delà de ce seuil où se produit une bifurcation, le taux de croissance temporelle devient positif indiquant que l'instabilité s'amplifie linéairement. La prise en compte des termes non linéaires devient nécessaire car ils permettent d'endiguer cette amplification linéaire. Nous limitons l'étude non linéaire à une instabilité bidimensionnelle.

Le comportement dynamique au voisinage du seuil peut être décrit par deux équations couplées non linéairement de type Ginzburg-Landau.

Historiquement, l'équation de Ginzburg-Landau a été obtenue, d'une façon plus ou moins indépendante, par plusieurs auteurs. Les articles les plus pertinents sont ceux de Newell et Whitehead en 1969 [45], Segel la même année [53] (qui ont obtenu une équation de Ginzburg Landau avec des coefficients réels dans le cas du problème

de Rayleigh-Bénard), Stewartson et Stuart en 1971 [58] (ils ont étudié le problème de l'écoulement de Poiseuille et ont obtenu une équation de Ginzburg-Landau avec des coefficients complexes) et enfin Diprima et al. en 1974 [11] (ils ont étudié des problèmes d'instabilités hydrodynamiques dans un contexte plus général). En 1965, la version stationnaire de cette équation a été obtenue par Landau et Ginzburg [17] dans un article sur la supraconductivité.

Dans notre étude les deux équations couplées non linéairement de type Ginzburg-Landau obtenues rendent compte de la modulation spatio-temporelle des amplitudes des ondes. Une analyse classique basée sur des méthodes de développements asymptotiques et d'échelles multiples permet de chercher les solutions à l'ordre dominant. On pourra à cet effet consulter l'ouvrage [3] pour une introduction aux méthodes d'échelles multiples et faiblement non linéaires et aux méthodes perturbatives dans [44].

Comme on s'intéresse à la convection bidimensionnelle, il est commode d'introduire la fonction de courant  $\varphi$  définie par

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (2.22)$$

$$w = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.23)$$

Les solutions à l'ordre dominant sont recherchées sous la forme :

$$\theta_1 = (A_1(x, t)e^{i\omega_c t + ik_c x} + A_2(x, t)e^{i\omega_c t - ik_c x}) \sin(\pi z) + c.c.; \quad (2.24)$$

$$\varphi_1 = (B_1(x, t)e^{i\omega_c t + ik_c x} + B_2(x, t)e^{i\omega_c t - ik_c x}) \sin(\pi z) + c.c. \quad (2.25)$$

où  $A_1(x, t)$  et  $A_2(x, t)$  représentent respectivement les amplitudes de l'onde montante et de l'onde descendante. Pour la clarté de ce chapitre, la dérivation des équations d'enveloppe est détaillée dans l'Annexe A.

On aboutit à deux équations de type Ginzburg-Landau complexe vérifiées par les amplitudes  $A_1(x, t)$  et  $A_2(x, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + v_g^- \frac{\partial A_1}{\partial x} &= (\mu_r + i\mu_i)A_1 + (\beta_r + i\beta_i) \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} \\ &\quad - (\alpha_r + i\alpha_i)A_1|A_1|^2 - (\gamma_r + i\gamma_i)A_1|A_2|^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_g^+ \frac{\partial A_2}{\partial x} &= (\mu_r + i\mu_i)A_2 + (\beta_r + i\beta_i) \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} \\ &\quad - (\alpha_r + i\alpha_i)A_2|A_2|^2 - (\gamma_r + i\gamma_i)A_2|A_1|^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les coefficients qui apparaissent dans (2.26) et (2.27) dépendent des temps de relaxation  $\lambda_1$  et de retardation  $\lambda_2$  et sont donnés explicitement dans l'annexe A.

Chaque terme correspond à une caractéristique macroscopique du système. Considérons par exemple l'équation (2.26). Elle contient un terme décrivant l'accroissement linéaire de l'instabilité ( $\mu_r A_1$ ), une correction linéaire de la fréquence ( $\mu_i A_1$ ), un terme diffusif ( $\beta_r \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}$ ), la dispersion de l'onde ( $\beta_i \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}$ ), un terme d'advection ( $v_g^- \frac{\partial A_1}{\partial x}$ ), un terme de saturation non linéaire ( $-\alpha_r A_1 |A_1|^2$ ), une correction non linéaire de la fréquence ( $-\alpha_i A_1 |A_1|^2$ ) et un terme de couplage entre l'onde descendante et l'onde montante ( $(\gamma_r + i\gamma_i) A_1 |A_2|^2$ ).

Les solutions homogènes ( $\frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial A_2}{\partial x} = 0$ ) du système (2.26) et (2.27), autre que la solution triviale ( $A_1 = 0, A_2 = 0$ ), sont de deux types :

- Celles qui correspondent à des ondes progressives «travelling waves» :

$$A_1^s = \sqrt{\frac{\mu_r}{\alpha_r}} \exp\left(i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \mu_r\right)t\right) \quad \text{et} \quad A_2^s = 0 \quad \text{ou} \quad A_1^s = 0 \quad \text{et} \quad A_2^s = \sqrt{\frac{\mu_r}{\alpha_r}} \exp\left(i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \mu_r\right)t\right),$$

- Celles qui correspondent à des ondes fixes «Standing waves» :

$$A_1^m = A_2^m = \sqrt{\frac{\mu_r \alpha_r}{\alpha_r + \gamma_r}} \exp\left(i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i + \gamma_i}{\alpha_r + \gamma_r} \mu_r\right)t\right)$$

La question qui se pose à ce stade est celle de savoir laquelle de ces solutions est physiquement acceptable sachant que les deux solutions ne peuvent se manifester simultanément. Une analyse de stabilité de l'une par rapport à l'autre est alors suffisante.

## 2.2.2 Stabilité des ondes progressives vis-à-vis des ondes fixes

Si on s'intéresse à la stabilité des ondes progressives vis-à-vis des ondes fixes, on introduit alors des perturbations homogènes  $a(t)$  et  $b(t)$ . On pose donc :

$$A_1 = \left(\sqrt{\frac{\mu_r}{\alpha_r}} + a\right) \exp\left[i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \mu_r\right)t\right], \quad (2.28)$$

$$A_2 = 0 + b. \quad (2.29)$$

Il vient en reportant dans les équations (2.26, 2.27) :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\mu_r \left(1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}\right) (a + \bar{a}), \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = -\mu_r \left(1 - i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}\right) (a + \bar{a}), \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \mu_r \left(1 - i \frac{\gamma_i}{\alpha_r} - \frac{\gamma_r}{\alpha_r}\right) b. \quad (2.32)$$

Le taux de croissance temporelle de la perturbation  $b$  est :

$$\sigma_b = \frac{\mu_r}{\alpha_r} (\alpha_r - \gamma_r)$$

Ce taux s'avère être négatif, après calcul de la différence  $(\alpha_r - \gamma_r)$ , pour toutes les valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Par conséquent, on conclut que **les ondes progressives sont stables par rapport aux ondes fixes**. Les travaux menés par Zhang et al [66] se sont focalisés sur les ondes fixes sans se soucier de leur stabilité.

En ce qui concerne les perturbations de  $A_1$ , on est amené à calculer les valeurs propres associées à  $a$  et  $\bar{a}$ . Elles s'écrivent  $\sigma_1 = 0$  et  $\sigma_2 = -2\mu_r$ . L'existence du mode marginal ( $\sigma_1 = 0$ ) est liée à l'invariance de l'équation d'amplitude (2.26) par la transformation  $(A_1, 0) \rightarrow (A_1 e^{i\theta}, 0)$ . L'existence de ce mode marginal pourrait être la signature d'instabilités de phases.

### 2.2.3 Stabilité des ondes progressives par rapport à une perturbation quelconque

Les rouleaux installés dans le système au-dessus du seuil de l'instabilité primaire peuvent être désormais considérés comme le nouvel état de base dont la stabilité doit être étudiée. Comme pour le cas de l'instabilité primaire, la stabilité de ces solutions non linéaires est recherchée en introduisant des perturbations infinitésimales de grande longueur d'onde. C'est par l'action de brisure de symétries présentes dans le système que des instabilités secondaires sont créées.

Une solution homogène de l'équation (2.27) est écrite sous la forme d'une onde progressive :

$$A_0 = Z \exp[i(\Omega t + px)], \quad (2.33)$$

avec  $Z^2 = \mu_r - p^2$  et  $\Omega = \mu_i + \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_r} - \beta_i\right)p^2 - \frac{\alpha_i}{\alpha_r}\mu_r - v_g p$ . Afin d'étudier la stabilité de (2.33), on pose  $A = (Z + a) \exp[i(\Omega t + px)]$ , et on calcule

l'équation linéarisée régissant l'évolution de la perturbation :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (\beta_r + i\beta_i) \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2ip \frac{\partial a}{\partial x} \right) - (1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2 (a + \bar{a}) - v_g^- \frac{\partial a}{\partial x}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = (\beta_r - i\beta_i) \left( \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial x^2} - 2ip \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} \right) - (1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2 (a + \bar{a}) - v_g^- \frac{\partial \bar{a}}{\partial x}. \quad (2.35)$$

On prend la transformée de Fourier des deux équations :

$$\frac{\partial \hat{a}}{\partial t} = -(\beta_r + i\beta_i) (k_x^2 + 2pk_x) \hat{a} - (1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2 (\hat{a} + \hat{\bar{a}}) - iv_g^- k_x \hat{a}, \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \hat{\bar{a}}}{\partial t} = -(\beta_r - i\beta_i) (k_x^2 - 2pk_x) \hat{\bar{a}} - (1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2 (\hat{a} + \hat{\bar{a}}) - iv_g^- k_x \hat{\bar{a}}. \quad (2.37)$$

On doit trouver les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

avec :

$$a_{11} = -[(\beta_r + i\beta_i)(k_x^2 + 2pk_x) + (1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2 - iv_g^- k_x], \quad (2.38)$$

$$a_{12} = -(1 + i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2, \quad (2.39)$$

$$a_{21} = -(1 - i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2, \quad (2.40)$$

$$a_{22} = -[(\beta_r - i\beta_i)(k_x^2 - 2pk_x) + (1 - i \frac{\alpha_i}{\alpha_r}) Z^2 - iv_g^- k_x]. \quad (2.41)$$

Si on note  $T_r$  la trace de cette matrice et  $D$  son déterminant, les valeurs propres sont données par la relation :

$$\sigma_{\pm} = \frac{T_r}{2} \pm \sqrt{\frac{T_r^2}{4} - D}. \quad (2.42)$$

On trouve après calcul en remplaçant  $\sqrt{\frac{T_r^2}{4} - D}$  par son développement limité à l'ordre deux en  $k_x$  :

$$Re(\sigma_{\pm}) = -(Z^2 + iv_g k_x + \beta_r k_x^2 + 2ip\beta_i k_x) \pm Z^2 + 2ip \frac{\alpha_i}{\alpha_r} k_x + \left[ \frac{2p^2(1 + \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_r}\right)^2)}{Z^2} - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \beta_i \right] k_x^2.$$

La valeur propre  $\sigma_-$  est toujours négative :  $Re(\sigma_-) = -2Z^2 + 0(k_x^2)$ . Les perturbations proportionnelles au vecteur propre qui lui est associé seront donc amorties au cours du temps. Par contre la partie réelle de  $\sigma_+$  est nulle à l'ordre zéro, ce qui traduit l'existence d'un mode marginal dû à la liberté de choix de l'origine des phases pour la solution  $A_0$  :

$$Re(\sigma_+) = \left[ \frac{2p^2(1 + \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_r}\right)^2)}{Z^2} - \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_r} \beta_i + \beta_r\right) \right] k_x^2 \quad (2.43)$$

### 2.2.3.1 Instabilités de Benjamin Feir

Une solution homogène de l'équation (2.27) est écrite sous la forme où l'on considère  $p = 0$  :

$$A_0 = Z \exp[i\Omega t]. \quad (2.44)$$

Si on pose  $p = 0$  dans l'expression de la valeur propre de  $Re(\sigma_+)$ , les perturbations sont associées à :

$$\sigma_{BF} = -\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_r} \beta_i + \beta_r\right) k_x^2. \quad (2.45)$$

Ainsi, une instabilité de Benjamin-Feir [2] peut s'installer dans le système si  $\alpha_i \beta_i + \alpha_r \beta_r$  est négatif. Cette instabilité correspond physiquement à une turbulence faible.

**L'instabilité de Benjamin-Feir n'apparaît jamais dans notre système.** En effet nous avons représenté sur la figure (2.10) la quantité  $-(\alpha_i \beta_i + \alpha_r \beta_r)$  dans le plan des paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , cette grandeur est toujours négative, indiquant par la même occasion que le terme  $\alpha_i \beta_i + \alpha_r \beta_r$  est toujours positif.

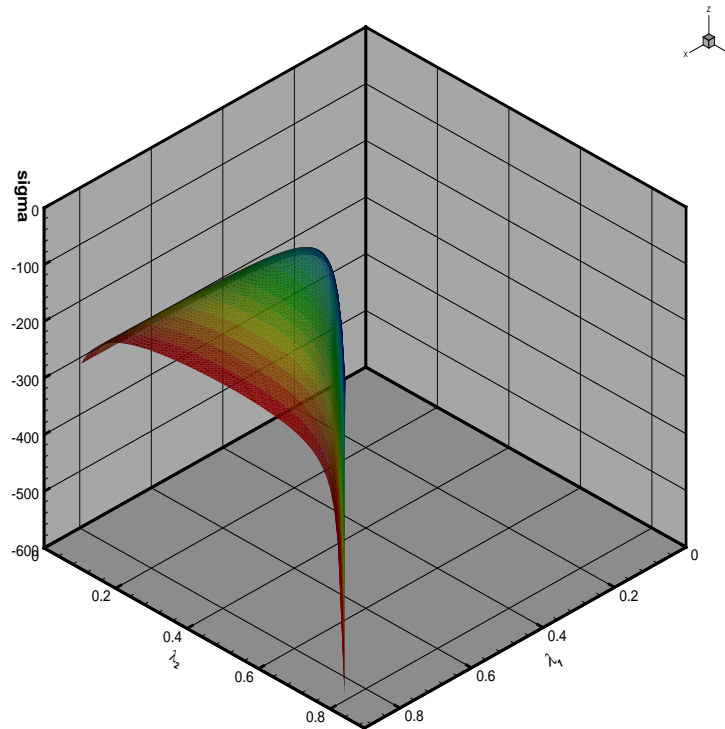


FIGURE 2.10 – Représentation de la quantité  $\sigma = -(\alpha_i\beta_i + \alpha_r\beta_r)$  en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

### 2.2.4 Transfert de chaleur

L'importance du transfert de chaleur est caractérisée par le nombre de Nusselt. Ce dernier est défini comme le rapport du flux de chaleur total au flux de chaleur de l'état de conduction pure, traversant un élément  $dS$ . Le principal transfert de chaleur s'effectue verticalement, le flux de chaleur total à travers  $dS$  s'écrit en grandeur adimensionnée :

$$dQ = \left( W.T - \frac{\partial T}{\partial z} \right) dS. \quad (2.46)$$

Lorsque l'élément de surface est pris sur l'une des deux plaques horizontales en  $z = -\frac{1}{2}$  ou  $z = \frac{1}{2}$ , en vertu de l'imperméabilité de ces plaques, l'expression du flux de chaleur se réduit à :

$$dQ = -\frac{\partial T}{\partial z} \left( z = \pm \frac{1}{2} \right) dS. \quad (2.47)$$



Le flux de chaleur moyen traversant l'une ou l'autre plaque est obtenu en introduisant la moyenne spatiale suivant  $x$  :

$$\langle Q(z = \pm \frac{1}{2}, t) \rangle = -\frac{1}{2L} \int_{-L}^L \frac{\partial T}{\partial z}(z = \pm \frac{1}{2}, t) dx. \quad (2.48)$$

Comme le flux de chaleur de l'état de conduction est égale à  $-1$ , le nombre de Nusselt global instantané est alors :

$$Nu(t) = - \langle Q(z = \pm \frac{1}{2}, t) \rangle. \quad (2.49)$$

#### 2.2.4.1 Nombre de Nusselt pour les ondes progressives

Pour les ondes progressives, l'expression totale de  $T(x, z, t)$  est :

$$T(x, z, t) = 1 - z + [A_1^s e^{i\omega_c t + ik_c x} + C.C] \sin(\pi z) - \frac{k_c^2 + \pi^2}{2\pi} |A_1^s|^2 \sin(2\pi z) \quad (2.50)$$

où on rappelle que  $A_1^s$  s'écrit :

$$A_1^s = \sqrt{\frac{\mu_r}{\alpha_r}} \exp\left(i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \mu_r\right)t\right). \quad (2.51)$$

En injectant  $T(x, z, t)$  dans (2.48) et (2.49) et en tenant compte de l'expression de  $A_1^s$ , pour la convection bidimensionnelle structurée en ondes progressives, on trouve :

$$Nu = 1 + 2 \left( \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right). \quad (2.52)$$

La relation (2.52) montre que la droite décrivant la dépendance de Nusselt vis-à-vis de la distance au seuil admet une pente égale à 2. **Le nombre de Nusselt moyen instantané relatif aux ondes progressives est indépendant du temps.**

Nous avons représenté sur la figure (2.11), les variations du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, pour différentes valeurs fixées des temps de relaxation et de retardation. Cette figure montre bien que **le transfert de chaleur augmente avec le temps de relaxation  $\lambda_1$  et diminue avec le temps de retardation  $\lambda_2$ .**

#### 2.2.4.2 Nombre de Nusselt pour les ondes fixes instables

De même pour les ondes fixes l'expression totale de  $T(x, z, t)$  est :

$$T(x, z, t) = 1 - z + [A_1^m (e^{i\omega_c t + ik_c x} + e^{i\omega_c t - ik_c x}) + C.C] \sin(\pi z) - \frac{k_c^2 + \pi^2}{\pi} |A_1^m|^2 \sin(2\pi z) - \pi \left( \frac{k_c^2 + \pi^2 + i\omega_c}{2\pi^2 + i\omega_c} |A_1^m|^2 e^{2i\omega t} + C.C \right) \sin(2\pi z) \quad (2.53)$$

avec :

$$A_1^m = \sqrt{\frac{\mu_r \alpha_r}{\alpha_r + \gamma_r}} \exp\left(i \left( \mu_i - \frac{\alpha_i + \gamma_i}{\alpha_r + \gamma_r} \mu_r \right) t\right) \quad (2.54)$$

Le transfert de chaleur moyen pour les ondes fixes est donné par :

$$Nu - 1 = \frac{4\mu_r}{\alpha_r + \gamma_r} \left( \frac{C}{2} + \pi^2 \frac{\sqrt{C^2 + \omega_c^2}}{\sqrt{4\pi^4 + \omega_c^2}} \cos[2(\omega_c + \phi)t + \phi_0] \right). \quad (2.55)$$

avec  $C = k_c^2 + \pi^2$ ,  $\phi = \mu_i - \frac{(\alpha_i + \gamma_i)}{\alpha_r + \gamma_r} \mu_r$  et  $\phi_0$  est une constante.

Le nombre de Nusselt moyen instantané relatif aux ondes fixes instables oscille près du seuil avec une fréquence  $2\omega_c$ . Ce nombre de Nusselt dépend des paramètres caractéristiques du problème, les temps de relaxation  $\lambda_1$  et de retardation  $\lambda_2$ .

Comme précédemment, nous avons représenté sur la figure (2.12), les variations du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh. Le résultat trouvé conforte bien la conclusion tirée précédemment : **le transfert de chaleur augmente avec le temps de relaxation  $\lambda_1$  et diminue avec le temps de retardation  $\lambda_2$ .**

Nos résultats théoriques qui prédisent que les ondes fixes sont instables au profit des ondes progressives peuvent être vérifiés expérimentalement par évaluation du transfert thermique et vérification de son caractère oscillatoire ou indépendant du temps.

### 2.2.4.3 Comparaison des transferts de chaleur pour les ondes progressives et fixes

Il est intéressant de comparer le nombre de Nusselt moyenné dans l'espace et le temps pour les deux structures thermoconvectives.

La figure (2.13) représente les variations du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'écart au seuil critique du nombre de Rayleigh pour les ondes progressives et les ondes fixes pour différentes valeurs de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Cette figure montre clairement que **le transfert de chaleur est plus important lorsque la convection est structurée en ondes progressives. Ce résultat est nouveau et n'a pas été prédit par Zhang et al. [66].**

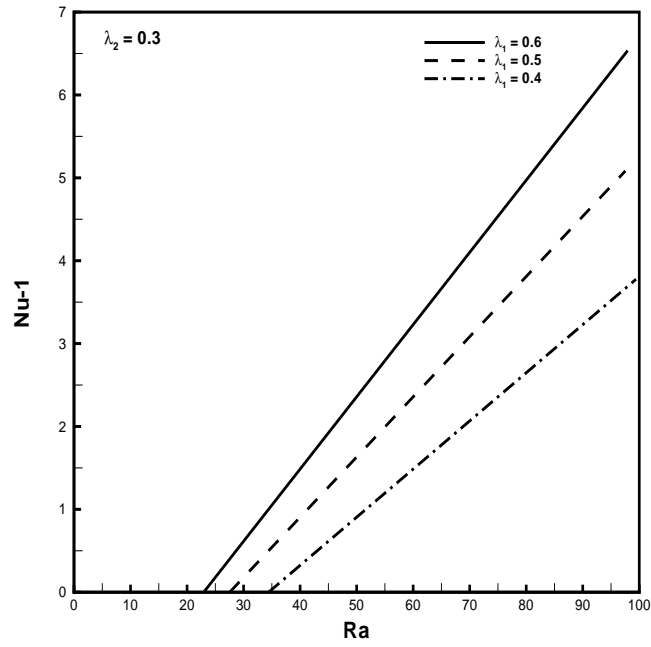
## 2.3 Conclusion

A l'aide du modèle de Darcy étendu aux fluides viscoélastiques, nous avons mené une étude linéaire et faiblement non linéaire de la convection naturelle d'un fluide non-Newtonien de type Oldroyd-B.

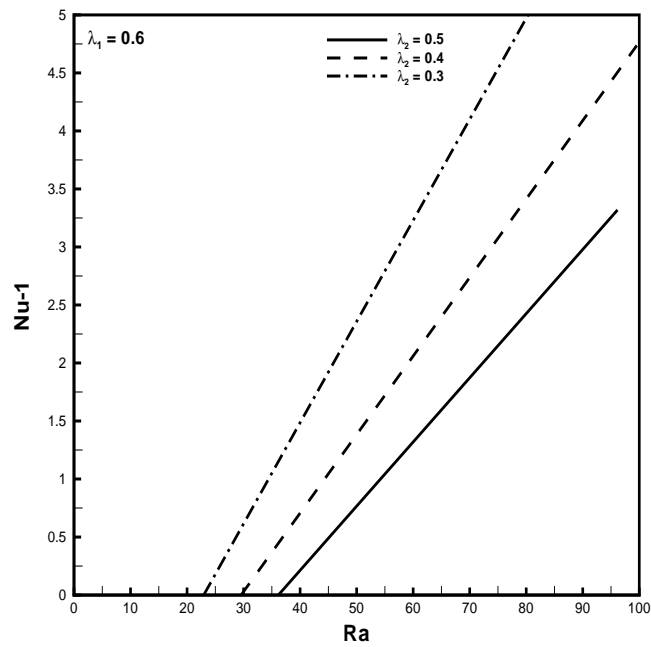
Dans le régime linéaire nous avons montré que deux types de structures sont susceptibles de se former au seuil de l'instabilité lorsque la solution de conduction perd sa stabilité. Un premier type de structures stationnaires dont les caractéristiques, à savoir le nombre de Rayleigh et le nombre d'onde ne dépendent pas des propriétés viscoélastiques du fluides, et un deuxième type de structures dont les caractéristiques sont entièrement dépendantes de l'élasticité. Une comparaison de ces deux types de structures a permis de voir le rôle déstabilisant joué par le temps de relaxation associé à l'élasticité du fluide.

Dans le régime non linéaire, nous avons obtenu par des méthodes asymptotiques appropriées deux équations couplées de type Ginzburg-Landau complexes qui décrivent l'évolution spatio temporelle de l'amplitude des structures convectives. Ce modèle non linéaire réduit admet deux solutions d'équilibre, à savoir des ondes progressives ou des ondes fixes. Une analyse de stabilité de ces deux solutions d'équilibre a permis de conclure que les ondes progressives sont stables, contrairement aux ondes fixes qui demeurent instables indépendamment des valeurs prises par les nombres sans dimension du problème.

L'évaluation du nombre de Nusselt associé à ces ondes progressives stables indique que le temps de relaxation favorise le transfert de chaleur, alors que le temps de retardation provoque l'effet inverse.

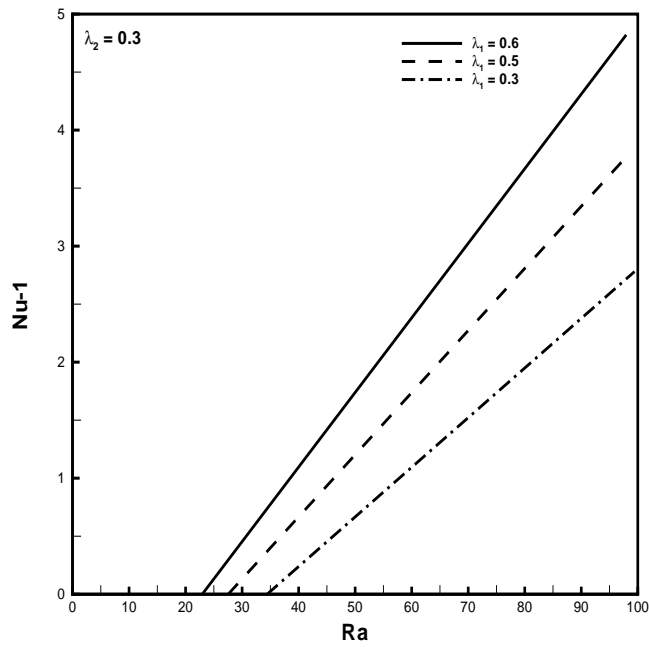


(a)

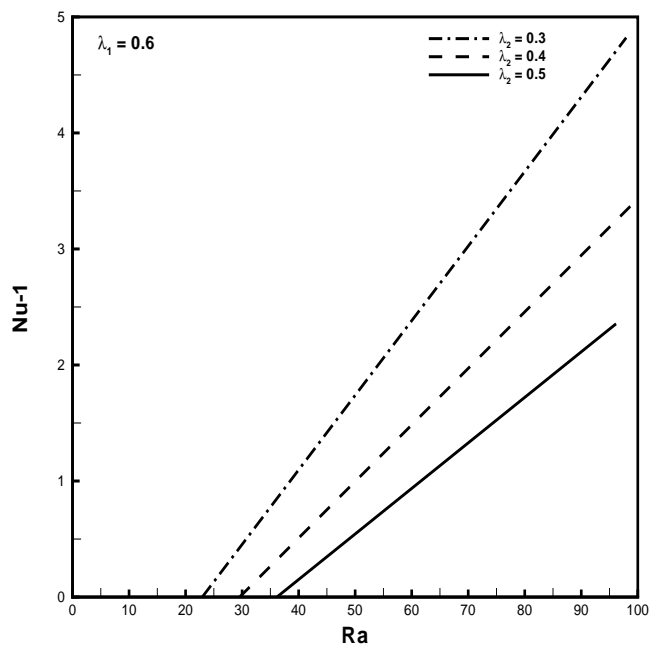


(b)

**FIGURE 2.11** – Influence du temps de relaxation(a) et de retardation(b) sur le transfert de chaleur : cas des ondes progressives

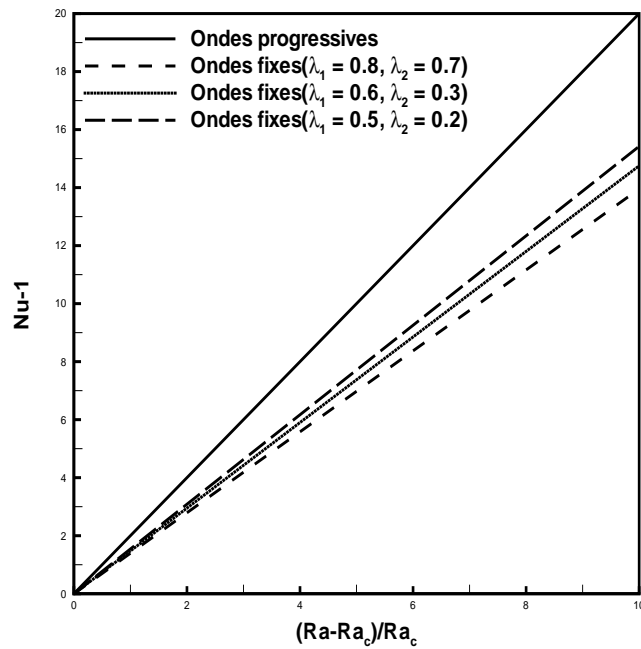


(a)



(b)

**FIGURE 2.12** – Influence du temps de relaxation(a) et du temps de retardation(b) sur le transfert de chaleur : cas des ondes fixes.



**FIGURE 2.13** – Comparaison des transferts de chaleur pour les ondes progressives stables (trait plein) et fixes instables (traits discontinus et points).





# Chapitre 3

## Dynamique linéaire et faiblement non linéaire en milieu confiné

Le chapitre précédent, consacré à la convection de fluides viscoélastiques saturant un milieu poreux d'extension illimitée nous a permis de mettre en évidence les différents types de structures pouvant apparaître dès lors que la solution de conduction perd sa stabilité.

A ce niveau, une question se pose, quelle sera l'influence du confinement latéral sur ces différents types de structures ?

### 3.1 Etude de stabilité de la solution de conduction en milieu confiné

#### 3.1.1 Analyse linéaire

Nous considérons donc une couche poreuse rectangulaire saturée par un fluide viscoélastique de hauteur  $H$ , longueur  $aH$  et largeur  $bH$ , telle que  $b \leq 1$ , chauffée par le bas. Toutes les grandeurs adimensionnées ont été définies dans le chapitre précédent. Les équations adimensionnées deviennent alors :

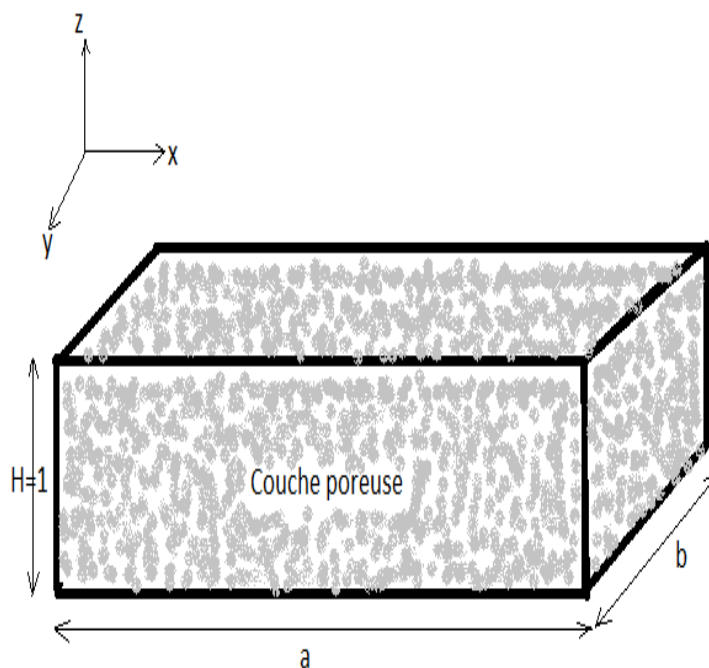
$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\left( \left( 1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) + \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{1}{Pr_D} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 w - Ra \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla_h^2 \theta = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w + (\vec{u} \cdot \nabla) \theta - \nabla^2 \theta = 0, \quad (3.3)$$

On considère une couche poreuse représentée par la figure (3.1) :

Les conditions aux limites pour la vitesse expriment l'imperméabilité des parois et s'écrivent :



**FIGURE 3.1** – Configuration du domaine étudié : une couche poreuse saturée par un fluide viscoélastique.

$$w = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1, \quad u = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } a, \quad \text{et } v = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } b, \quad (3.4)$$

Les parois horizontales sont supposées parfaitement conductrices de la chaleur alors que les parois verticales sont considérées comme adiabatiques. Les conditions aux limites s'écrivent alors pour les fluctuations de la température :

$$\theta = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ et } a, \quad \text{et } \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } b. \quad (3.5)$$

Avec l'approximation  $b \leq 1$  le problème de stabilité peut être simplifié en un problème bidimensionnel. Dans de telles conditions on peut chercher  $u$ ,  $w$  et  $\theta$  sous la forme de modes de Fourier. Le système (3.1-3.3) admet des solutions vérifiant les conditions aux limites (3.4) et (3.5) de la forme :

$$w = w_1 \sin(\pi z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-i\omega t} + c.c \quad (3.6)$$

$$\theta = \theta_1 \sin(\pi z) \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-i\omega t} + c.c \quad (3.7)$$

$$u = u_1 \cos(\pi z) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-i\omega t} + c.c \quad (3.8)$$

où  $\omega = \omega_r + i\omega_i$ , et  $m$  représente le nombre de cellules convectives. Le nombre  $\omega_i$  est le taux de croissance temporelle, et  $\omega_r$  la fréquence des oscillations.

En remplaçant (3.6-3.8) dans (3.1-3.3), on obtient après linéarisation l'équation caractéristique :

$$A_3 i\omega^3 - A_2 \omega^2 - A_1 i\omega + A_0 = 0, \quad (3.9)$$

avec,

$$A_3 = \frac{\lambda_1}{Pr_D} \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right) \quad (3.10)$$

$$A_2 = \left(\lambda_2 + \frac{1}{Pr_D} + \frac{\lambda_1}{Pr_D} \pi^2 \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right)\right) \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right) \quad (3.11)$$

$$A_1 = \left(1 + \pi^2 \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right) \left(\frac{1}{Pr_D} + \lambda_2\right)\right) \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right) - \frac{m^2}{a^2} Ra \lambda_1 \quad (3.12)$$

$$A_0 = \pi^2 \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right)^2 - \frac{m^2}{a^2} Ra \quad (3.13)$$

On peut remarquer que pour  $Pr_D \rightarrow \infty$  et  $\lambda_2 = 0$ , c'est-à-dire dans le cas d'un fluide de Maxwell, les coefficients de l'équation de dispersion (3.9) donnent  $A_3 = A_2 = 0$ . Dans ce cas le système peut être le siège d'une instabilité stationnaire pour  $\omega_r = 0$ .

### 3.1.1.1 Instabilité dans une cavité carrée

L'état de stabilité marginale, pour lequel les perturbations ne sont ni amplifiées ni atténuées est atteint pour  $\omega_i = 0$ . L'équation (3.9) permet alors de distinguer deux types de structures :

### Instabilité stationnaire

Les structures stationnaires sont obtenues pour  $\omega = 0$ , cela entraîne automatiquement  $A_0 = 0$ .

$$Ra^s = \frac{\pi^2 (1 + m^2)^2}{m^2}. \quad (3.14)$$

Le minimum de  $Ra^s$  se produit pour  $m = 1$  (régime monocellulaire), ce qui donne la valeur critique du nombre de Rayleigh :

$$Ra_c^s = 4\pi^2 \quad (3.15)$$

### Instabilité oscillatoire

Le système présente une instabilité oscillatoire pour  $\omega_r \neq 0$ . En tenant compte de l'équation caractéristique on trouve que  $\omega_r^2 = \frac{A_0}{A_2}$ . En posant au seuil  $\omega = \omega_r$ , dans ce cas la valeur critique du nombre de Rayleigh et la fréquence d'oscillation associée sont :

$$Ra_c^o = Ra_c^s - 2\omega_c^2 \left( 2\pi^2 \frac{\lambda_1}{Pr_D} + \lambda_2 + \frac{1}{Pr_D} \right), \quad (3.16)$$

et :

$$\omega_c^2 = \frac{2\pi^2(\lambda_1 - \lambda_2 - 1/Pr_D) - 1}{\lambda_1(\lambda_2 + 2\pi^2\lambda_1/Pr_D)}, \quad (3.17)$$

La condition d'existence d'une solution oscillatoire impose à  $\omega_c^2$  d'être strictement positive. Cette condition impose au temps de relaxation  $\lambda_1$  d'être supérieur à une valeur particulière  $\lambda_1^*$ , ou d'une façon équivalente le temps de retardation  $\lambda_2$  doit être inférieur à une valeur seuil  $\lambda_2^*$ . Soit

$$\lambda_1 > \lambda_1^* = \lambda_2 + 1/Pr_D + 1/(2\pi^2), \quad (3.18)$$

$$\lambda_2 < \lambda_2^* = \lambda_1 - 1/Pr_D - 1/(2\pi^2), \quad (3.19)$$

Lorsque la relation (3.18) ou (3.19) est satisfaite, l'expression de  $Ra_c^o$  donnée par (3.16) montre que l'émergence de l'instabilité oscillatoire précède la naissance de l'instabilité stationnaire (i.e  $Ra_c^o < Ra_c^s$ ).

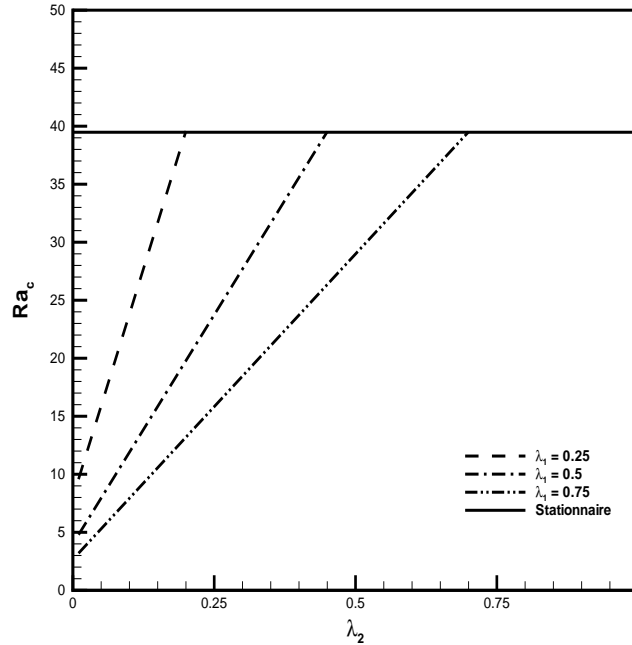


FIGURE 3.2 – Nombre de Rayleigh critique pour les instabilités stationnaire et oscillatoire.

### 3.1.1.2 Point de bifurcation de codimension 2

Il est important de noter que lorsque  $\lambda_1 = \lambda_1^*$  ou  $\lambda_2 = \lambda_2^*$ , la fréquence s'annule et le seuil  $Ra_c^s$  de l'instabilité stationnaire est confondu avec celui de l'instabilité oscillatoire  $Ra_c^o$ . Dans ce cas, l'analyse de stabilité linéaire ne peut prédire le type de structures convectives naissantes.

Par la suite le point  $(\lambda_1^*, Ra^*)$  ( $Ra_c^s = Ra_c^o$ ) ou  $(\lambda_2^*, Ra^*)$  est appelé un point de bifurcation de codimension 2. Au voisinage de ce point, une compétition entre les deux types d'instabilités a lieu et la compréhension de la dynamique associée à cette compétition nécessite de prendre en compte les non linéarités du problème. Cette tâche fera l'objet d'une étude particulière au paragraphe (3.2).

Notons enfin que les expressions (3.18) et (3.19) montrent que les temps de relaxation et de retardation sont d'autant plus proches que le nombre de Darcy-Prandtl  $Pr_D$  est grand. Lorsque  $Pr_D$  tend vers l'infini, le rapport  $\lambda_1^*/\lambda_2$  tend vers 1. Or les temps de relaxation et de retardation sont liés par la relation :

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_p}. \quad (3.20)$$

où  $\mu_s$  et  $\mu_p$  représentent respectivement la viscosité du solvant et celle du polymère constituant la solution viscoélastique. Le rapport entre les deux temps tend vers 1 signifie que la solution viscoélastique est très fortement diluée ( $\mu_p \rightarrow 0$ ). Telle est la condition expérimentale pour l'observation d'une bifurcation de codimension 2 pour des valeurs du nombre de Darcy-Prandtl très élevées. En revanche pour des valeurs modérées de  $Pr_D$ , on peut s'attendre à détecter expérimentalement la bifurcation de codimension 2 pour des solutions de polymères qui ne sont pas forcément très diluées.

### 3.1.1.3 Influence du rapport de forme

#### Structures stationnaires

En tenant compte du rapport de forme  $a$ , à l'état marginal le seuil des structures stationnaires est obtenu en posant  $A_0 = 0$  dans la relation de dispersion, on a :

$$Ra^s = \frac{\pi^2 \left[1 + \left(\frac{m}{a}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{m}{a}\right)^2}. \quad (3.21)$$

Le nombre  $m$  de cellules convectives dépend de  $a$  :

- Lorsque  $a$  est entier,  $Ra^s$  présente un minimum pour  $m = a$  soit  $Ra_c^s = 4\pi^2$ .
- Lorsque  $a$  n'est pas entier et  $a^2 < a_c^{s2} = m(m+1)$  alors on aura  $m = [a]$  cellules convectives qui vont se former.  $[a]$  représente la partie entière de  $a$ .
- Lorsque  $a^2 > a_c^{s2} = m(m+1)$  on aura  $m = [a] + 1$
- Si  $a^2 = m(m+1)$ , le système va hésiter entre  $[a]$  et  $[a] + 1$  cellules convectives qui pourront se former.

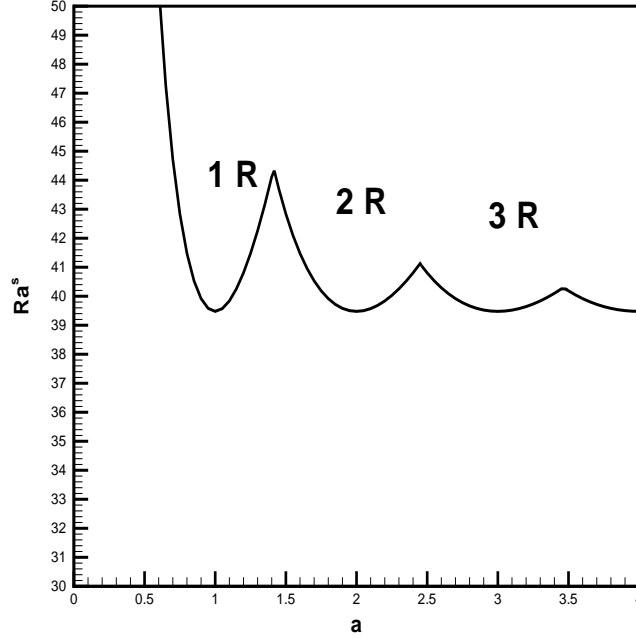
Ces comportements sont illustrés sur la figure (3.3)

#### Structures oscillatoires

Le seuil d'apparition des structures oscillatoires est obtenu en posant  $\omega_r \neq 0$  dans la relation de dispersion et en tenant compte du fait que  $\omega_r = \frac{A_0}{A_2}$  et que  $\omega = \omega_r$ , on trouve :

$$Ra_c^o = \left(1 + \frac{a^2}{m^2}\right) \left[\frac{1}{\lambda_1} + \pi^2 \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1 Pr_D}\right) - \frac{\omega^2}{Pr_D}\right]. \quad (3.22)$$

et



**FIGURE 3.3** – Nombre de Rayleigh critique en fonction du rapport de forme  $a$  pour les structures stationnaires.

$$\omega_c^2 = \frac{\pi^2 \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 Pr_D}\right) - \frac{1}{\lambda_1}}{\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{Pr_D} \pi^2 \left(1 + \frac{m^2}{a^2}\right)}. \quad (3.23)$$

Nous pouvons déterminer le rapport critique pour lequel deux modes, constitués de  $[a]$  et  $[a] + 1$  cellules convectives sont simultanément amplifiés,

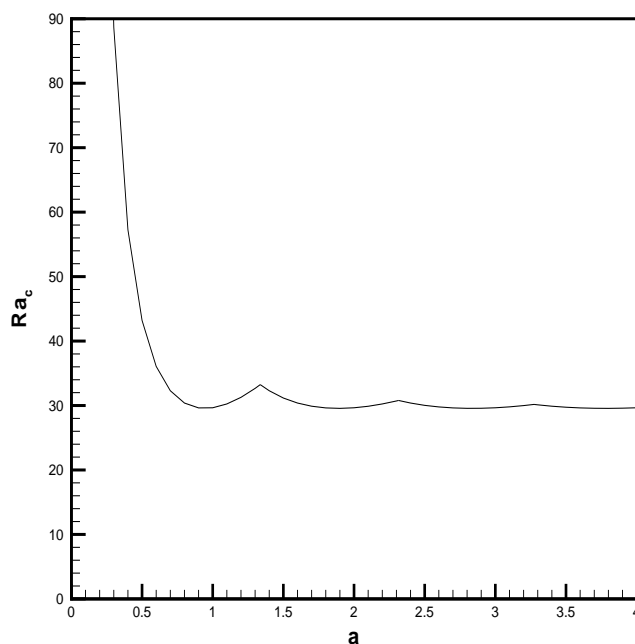
$Ra_m^{osc} = Ra_{m+1}^{osc}$ , ceci conduit pour  $Pr_D \Rightarrow \infty$  à :

$$a_c^{osc4} = \frac{\pi^2 \lambda_2 m^2 (m+1)^2}{1 + \lambda_2 \pi^2} \quad (3.24)$$

Les résultats sont représentés sur les figures (3.4) et (3.5). Nous désignons par  $R$  les cellules convectives. Comme dans le cas des structures stationnaires ( $\omega = 0$ ), le nombre de cellules convectives dans le cas des structures oscillatoires dépend également du rapport de forme  $a$ .

- Lorsque  $a$  est entier, il y a exactement  $m = a$  cellules convectives.
- Lorsque  $a^4 = a_c^{osc4}$ ,  $[a]$  et  $[a] + 1$  cellules sont simultanément amplifiées.

La figure (3.5) confirme les résultats sur le rôle joué par le temps de relaxation. En effet, les seuils d'apparition des structures oscillatoires sont inférieurs à  $4\pi^2$ , valeur seuil pour le cas des structures stationnaires. On retrouve bien que le temps de relaxation joue un rôle déstabilisant dans le système.



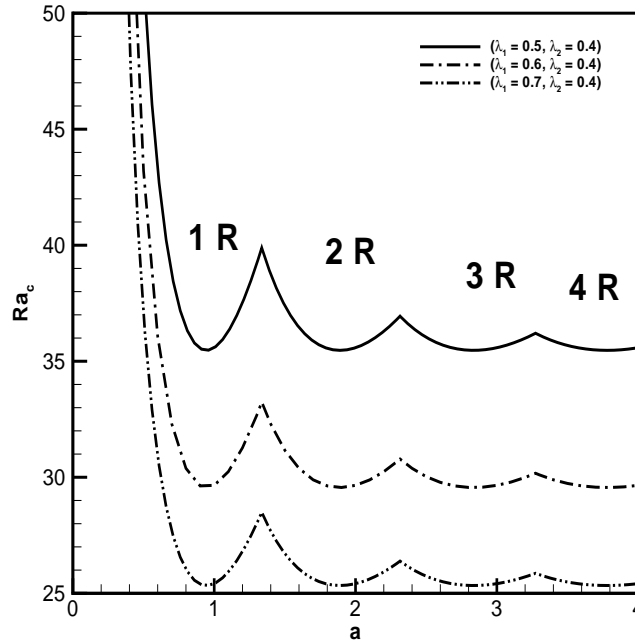
**FIGURE 3.4** – Influence du rapport de forme  $a$  dans le cas des structures oscillatoires pour  $Pr_D \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 = 0.6$  et  $\lambda_2 = 0.4$

## 3.2 Étude non linéaire dans une cavité carrée

### 3.2.1 Dynamique loin du point de codimension 2

Dans une cavité carrée, le confinement interdit toute modulation spatiale de la convection monocellulaire quand elle s'installe, contrairement au cas d'un milieu illimité horizontalement. Les parois verticales forcent la convection à osciller sous la forme d'ondes fixes. La dynamique non linéaire est alors décrite par (2.26) et (2.27) valables pour un milieu illimité, où on pose :





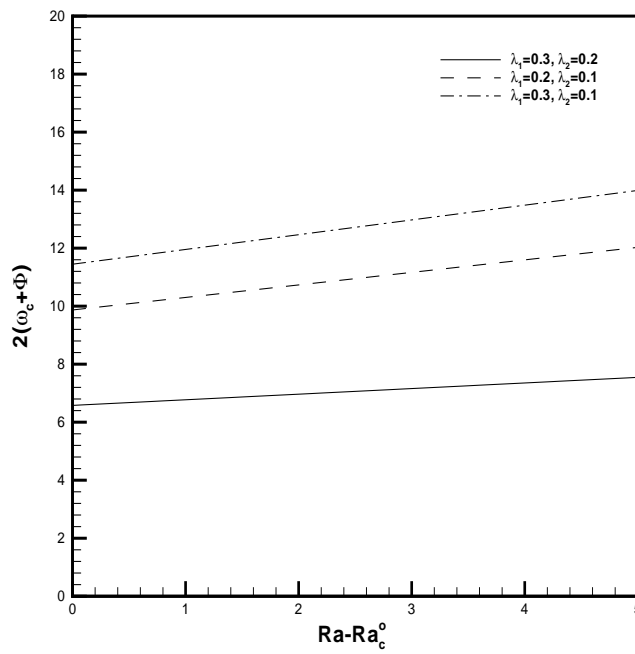
**FIGURE 3.5** – Influence du rapport de forme  $a$  et du temps de relaxation dans le cas des structures oscillatoires pour  $Pr_D \rightarrow \infty$

$$A_1 = A_2 \text{ et } \frac{\partial A_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} = 0$$

Les coefficients de l'équation d'amplitude sont évalués avec un nombre d'onde  $k_c = \pi$  fixé, cette fois, par les parois verticales. Nous avons vérifié que dans ce cas, le nombre de Nusselt se comporte exactement comme pour le cas d'un milieu étendu (voir 2.13).

La figure (3.6) représente les variations de la fréquence d'oscillation en fonction de l'écart au seuil pour les jeux de paramètres des temps de relaxation et de retardation identiques à ceux pris par Fu al. dans [7]. Afin d'analyser ces résultats et de les comparer aux simulations numériques de Fu et al. [7], nous les avons condensés sous la forme d'un tableau (3.1).

On peut voir que les prédictions issues de notre modèle, lequel est basé sur l'équation d'amplitude que nous avons obtenue, sont en très bon accord avec les résultats obtenus numériquement par Fu et al. En effet, pour  $Ra = 39.5$  un écart très faible avec les résultats numériques est observé pour les deux premiers couples de valeurs de  $(\lambda_1, \lambda_2)$  de notre tableau. De même cet écart reste faible dans le cas du troisième jeu de paramètres bien que la distance au seuil soit de près de 100%.



**FIGURE 3.6** – Représentation de la fréquence d'oscillation du Nusselt pour les ondes fixes avec le même jeu de paramètres que dans [7].

**TABLE 3.1** – Comparaison des fréquences d'oscillation de Nusselt obtenues par l'équation d'amplitude et par simulation numérique directe [7] pour  $Ra = 39.5$ .

$(\lambda_1, \lambda_2)$	$Ra_c$	Ecart au seuil en %	Fréquences de notre modèle	Fréquences numériques [7]	Ecart en %
(0.3, 0.2)	32.98	19.7	7.84	7.85	0.12
(0.2, 0.1)	29.74	33	14.08	15.06	6.5
(0.3, 0.1)	19.83	99	21.46	19.5	9.1

### 3.2.2 Equation d'amplitude au voisinage du point de codimension 2

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir une équation d'amplitude non linéaire décrivant l'évolution temporelle au voisinage de  $(\lambda_1^*, Ra^*)$

Dans ce cas on pose :

$$Ra = Ra^* + \varepsilon^2 \bar{R} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_1^* + \varepsilon^2 \bar{\lambda}_1 \quad (3.25)$$

Où  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\bar{R} = O(1)$  et  $\bar{\lambda}_1 = O(1)$ .

En tenant compte de (3.25), dans ce cas l'expression de  $\omega_c^2$  de (3.17) devient :

$$\omega_c^2 = \frac{2\pi^2 \bar{\lambda}_1 \varepsilon^2}{\lambda_1^* (\lambda_2 + 2\pi^2 \lambda_1^* / Pr_D)} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (3.26)$$

L'expression 3.26 suggère l'introduction d'un temps lent

$$\tau = \varepsilon t \quad (3.27)$$

La structure des termes non linéaires dans (3.2) implique que l'expression correcte des solutions convectives est de la forme

$$w = \varepsilon w_1(\tau) \sin(\pi z) \cos(\pi x) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.28)$$

$$u = -\varepsilon w_1(\tau) \cos(\pi z) \sin(\pi x) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.29)$$

$$\theta = \varepsilon \theta_1(\tau) \sin(\pi z) \cos(\pi x) + \varepsilon^2 \theta_2(\tau) \sin(2\pi z) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (3.30)$$

En remplaçant les expressions (3.25), (3.28)-(3.30) dans les équations (3.1)- (3.3), et prenant (3.27) en compte, nous obtenons

$$\varepsilon \frac{d\theta_1}{d\tau} = w_1 + \pi w_1 \theta_2 \varepsilon^2 - 2\pi^2 \theta_1 \quad (3.31)$$

$$\varepsilon \frac{d\theta_2}{d\tau} = -\frac{\pi}{2} w_1 \theta_1 - 4\pi^2 \theta_2 \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \left( \left( 1 + \varepsilon \lambda_2 \frac{d}{d\tau} \right) + \left( 1 + (\lambda_1^* + \varepsilon^2 \bar{\lambda}_1) \varepsilon \frac{d}{d\tau} \right) \frac{\varepsilon}{Pr_D} \frac{d}{d\tau} \right) (-2\pi^2 w_1) \\ & + \pi^2 (Ra^* + \varepsilon^2 \bar{R}) \left( \theta_1 + \varepsilon (\lambda_1^* + \varepsilon^2 \bar{\lambda}_1) \frac{d\theta_1}{d\tau} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

L'équation (3.31) implique que  $\theta_1 = O(w_1)$ . Nous devons pour cela écrire

$$\theta_1 = \frac{1}{2\pi^2} w_1 + \varepsilon \mathcal{F}(\tau) \quad (3.34)$$

De l'équation (3.32) nous avons  $\theta_2 = \mathcal{O}(w_1 \theta_1)$ . En prenant (3.34) en compte, nous écrivons

$$\theta_2 = -\frac{1}{16\pi^3} w_1^2 + \varepsilon \mathcal{G}(\tau) \quad (3.35)$$

Il vient de (3.31) que

$$\mathcal{F}(\tau) = \frac{1}{2\pi} w_1 \theta_2 \varepsilon - \frac{1}{2\pi^2} \frac{dw_1}{d\tau} \quad (3.36)$$

Alors, l'utilisation répétée des équations (3.34) et (3.36) donne

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} w_1 \theta_2 \varepsilon - \frac{1}{4\pi^4} \frac{dw_1}{d\tau} \\ &- \frac{\varepsilon^2}{4\pi^3} \frac{d(w_1 \theta_2)}{d\tau} + \frac{\varepsilon}{8\pi^6} \frac{d^2 w_1}{d\tau^2} + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^4} \left( -\frac{1}{4\pi^4} \frac{d^3 w_1}{d\tau^3} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Où les termes  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  et au delà sont négligés. Avec l'utilisation des équations (3.32) et (3.35), la même démarche peut être appliquée pour éliminer  $\theta_2$  de l'équation (3.37). Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau) &= -\frac{1}{4\pi^4} \frac{dw_1}{d\tau} + \varepsilon \left( -\frac{1}{32\pi^4} w_1^3 + \frac{1}{8\pi^6} \frac{d^2 w_1}{d\tau^2} \right) \\ &+ \varepsilon^2 \left( \frac{3}{64\pi^6} w_1^2 \frac{dw_1}{d\tau} - \frac{1}{16\pi^8} \frac{d^3 w_1}{d\tau^3} + \frac{1}{2\pi} w_1 \mathcal{G}(\tau) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Des équations (3.32) et (3.35) nous avons

$$\mathcal{G}(\tau) = \frac{1}{16\pi^5} w_1 \frac{dw_1}{d\tau} \quad (3.39)$$

La substitution de (3.28)-(3.30) dans (3.33) et en prenant en compte (3.38) et (3.39) donne

$$\begin{aligned} & \left( \left( 1 + \varepsilon \lambda_2 \frac{d}{d\tau} \right) + \left( 1 + (\lambda_1^* + \varepsilon^2 \bar{\lambda}_1) \varepsilon \frac{d}{d\tau} \right) \frac{\varepsilon}{Pr_D} \frac{d}{d\tau} \right) (-2\pi^2 w_1) \\ & + \pi^2 (Ra^* + \varepsilon^2 \bar{R}) \left( \frac{w_1}{2\pi^2} + \varepsilon \mathcal{F}(\tau) + \varepsilon (\lambda_1^* + \varepsilon^2 \bar{\lambda}_1) \left( \frac{1}{2\pi^2} \frac{dw_1}{d\tau} + \varepsilon \frac{d\mathcal{F}(\tau)}{d\tau} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Il est facilement vérifié que les termes  $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$  et  $\mathcal{O}(\varepsilon)$  dans l'équation (3.40) disparaissent identiquement. Les termes d'ordre supérieur donnent alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \frac{d^2 w_1}{d\tau^2} &= -\frac{1}{8} w_1^3 + \frac{1}{2} \bar{R} w_1 + \\ \varepsilon \left( \frac{dw_1}{d\tau} \left( 2\pi^2 \bar{\lambda}_1 - \frac{\bar{R}}{4\pi^2} + \frac{\bar{R}\lambda_1^*}{2} \right) + \left( -\frac{1}{4\pi^4} + \frac{\lambda_1^*}{2\pi^2} \right) \frac{d^3 w_1}{d\tau^3} + w_1^2 \frac{dw_1}{d\tau} \left( \frac{5}{16\pi^2} - \frac{3}{8} \lambda_1^* \right) \right) \\ &+ \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Où  $\mathcal{A} = \lambda_2 + 1/Pr_D + 2\pi^2 \lambda_1^*/Pr_D$ . Nous dérivons les équations ci-dessus et trouvons  $d^3 w_1/d\tau^3$ , qui sont alors remplacés dans les mêmes équations. Après troncation nous obtenons

$$\frac{d^2 w_1}{d\tau^2} + f_1 w_1^3 - \nu_1 w_1 = \varepsilon \frac{dw_1}{d\tau} (\nu_2 - f_2 w_1^2) \quad (3.42)$$

avec  $\nu_1 = \frac{\bar{R}}{2\mathcal{A}}$ ,  $\nu_2 = \frac{\lambda_1^*}{2\mathcal{A}^2} \left( \lambda_2 + 2\pi^2 \frac{\lambda_1^*}{Pr_D} \right) \left( \frac{Ra - Ra_c^o}{\varepsilon^2} \right)$ ,  $f_1 = \frac{1}{8\mathcal{A}}$ , et

$f_2 = -\frac{1}{\mathcal{A}} \left( \left( \frac{5}{16\pi^2} - \frac{3\lambda_1^*}{8} \right) + \frac{3}{8\mathcal{A}} \left( \frac{1}{4\pi^4} - \frac{\lambda_1^*}{2\pi^2} \right) \right)$ . Le signe du coefficient  $f_2$  est toujours positif. En remplaçant  $\frac{d}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt}$ ,  $\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2}{dt^2}$  et  $w = \varepsilon w_1$  dans l'équation (3.42), nous obtenons aisément

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + f_1 w^3 - \varepsilon^2 \nu_1 w - \varepsilon^2 \nu_2 \frac{dw}{dt} + f_2 w^2 \frac{dw}{dt} = 0 \quad (3.43)$$

Si nous posons  $t = (f_2/f_1)t^*$  et  $w = (\sqrt{f_1}/f_2)w^*$ , les équations ci-dessus peuvent être réécrites en un système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{dw^*}{dt^*} = Z(t^*) \\ \frac{dZ(t^*)}{dt^*} = -w^{*3} + \mu_1 w^* + \mu_2 Z(t^*) - w^{*2} Z(t^*) \end{cases} \quad (3.44)$$

avec  $\mu_1 = \varepsilon^2 \nu_1 f_2^2 / f_1^2$  et  $\mu_2 = \varepsilon^2 \nu_2 f_2 / f_1$ .

### 3.2.2.1 Portrait de phase associé à l'équation d'amplitude

Nous avons obtenu grâce à des méthodes asymptotiques une forme explicite de l'équation d'amplitude qui peut représenter la dynamique du système (3.1-3.3) au voisinage du point de bifurcation  $(\lambda_1^*, Ra^*)$ . Le type de stabilité des points fixes, les cycles limites et les trajectoires des bifurcations, ainsi que les portraits de phases associés sont sur les figures (3.7), (3.8) et (3.9) et sont analysés en détail par Guckenheimer et Holmes dans leur livre [21].

La figure (3.7) présente le portrait de phase dans le plan  $(\mu_1, \mu_2)$ , alors que les figures (3.8) et (3.9) le représentent respectivement dans le plan physique  $(\lambda_1, Ra)$  et  $(\lambda_2, Ra)$ .

L'analyse des bifurcations prédit que le point fixe  $(W^*, Z) = (0, 0)$  qui correspond à l'état de conduction pure perd sa stabilité au profit d'une bifurcation de Hopf quand  $Ra = Ra_c^o$  (i.e  $\mu_2=0$ ). Lorsque  $Ra$  augmente un cycle limite apparaît autour du point fixe instable  $(0, 0)$  (région II sur les figures 3.7, 3.8 et 3.9). Quand le nombre de Rayleigh  $Ra$  dépasse  $Ra_c^s = 4\pi^2$ , deux points fixes instables non triviaux  $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$  apparaissent et une orbite fermée autour de ces trois points fixes se développe (région III). Cela indique que les instabilités oscillatoires vont se développer indépendamment des conditions initiales dans cette région.

En augmentant  $Ra$  à  $Ra_1^{NL}$  correspondant à la valeur de Rayleigh pour  $\mu_1 = \mu_2$ , les points fixes  $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$  subissent une bifurcation sous-critique de Hopf, donnant ainsi lieu à deux cycles limites instables, les fréquences des cycles limites augmentent dans la région IV jusqu'à ce qu'elles coïncident avec les trajectoires doubles homocliniques qui relient le point fixe  $(0, 0)$  à lui-même avec une période infinie d'oscillations. Cette bifurcation homoclinique apparaît pour  $Ra = Ra_2^{NL}$  obtenue pour  $\mu_2 = \frac{4}{5}\mu_1$ . Plus loin en augmentant  $Ra$  dans la région V à  $Ra_3^{NL}$  correspondant à  $\mu_2 \simeq 0.752\mu_1$ , le cycle limite instable coïncide avec le stable. Pour  $Ra > Ra_3^{NL}$ , les deux cycles limites disparaissent et nous avons seulement deux points fixes stables  $(\pm\sqrt{\mu_1}, 0)$  et le point fixe instable  $(0, 0)$ .

Nous pouvons résumer comme ci-dessous :

- Pour  $Ra < Ra_1^{NL}$  on va avoir une instabilité oscillatoire.
- Les deux modes convectifs coexistent entre les seuils non linéaires  $Ra_1^{NL}$  et  $Ra_3^{NL}$ . La nature stationnaire ou oscillatoire dépend entre autre des conditions initiales.
- La valeur critique  $Ra_3^{NL}$  représente physiquement le seuil non linéaire de transition d'une instabilité oscillatoire à une instabilité stationnaire indépendamment des conditions initiales.

### 3.3 Comparaison avec les résultats issus des simulations numériques directes

Par simulation numérique directe bidimensionnelle Fu et al. [7] ont mené une investigation sur les effets des paramètres viscoélastiques sur l'évolution des bifurcations et du transfert de chaleur dans un fluide viscoélastique saturant une cavité carrée chauffée par le bas. Ils ont choisi trois combinaisons de valeurs : (i)  $(\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.2)$ , (ii)  $(\lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = 0.1)$  et (iii)  $(\lambda_1 = 0.3, \lambda_2 = 0.1)$  pour un nombre de Darcy-Prandtl infini et pour des valeurs de  $Ra$  allant jusqu'à 400. La valeur moyenne du nombre de Nusselt  $Nu$  est représentée dans la figure (2) de l'introduction de ce mémoire. Ils trouvent que lorsque l'état de base perd sa stabilité, l'écoulement oscille

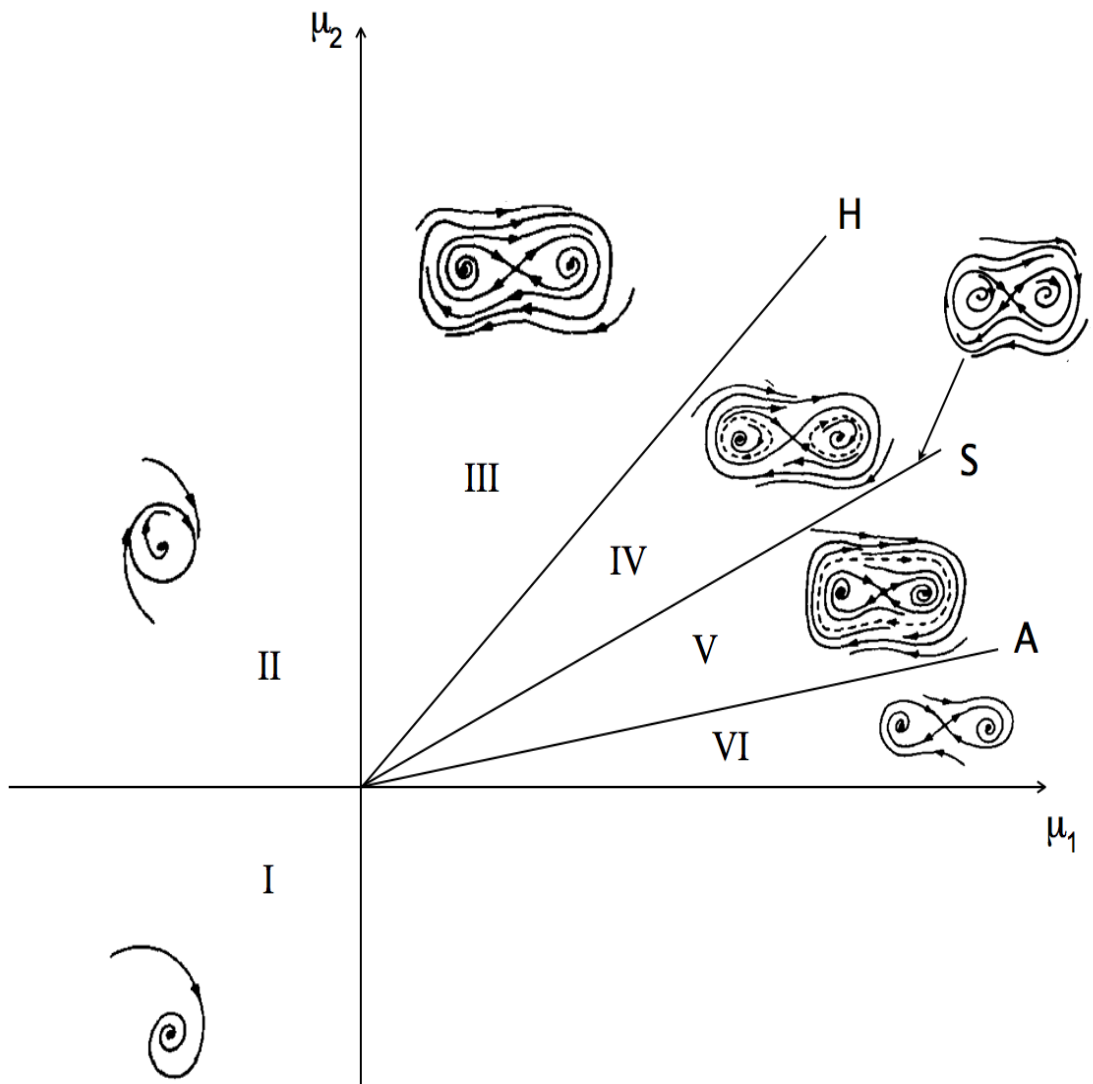
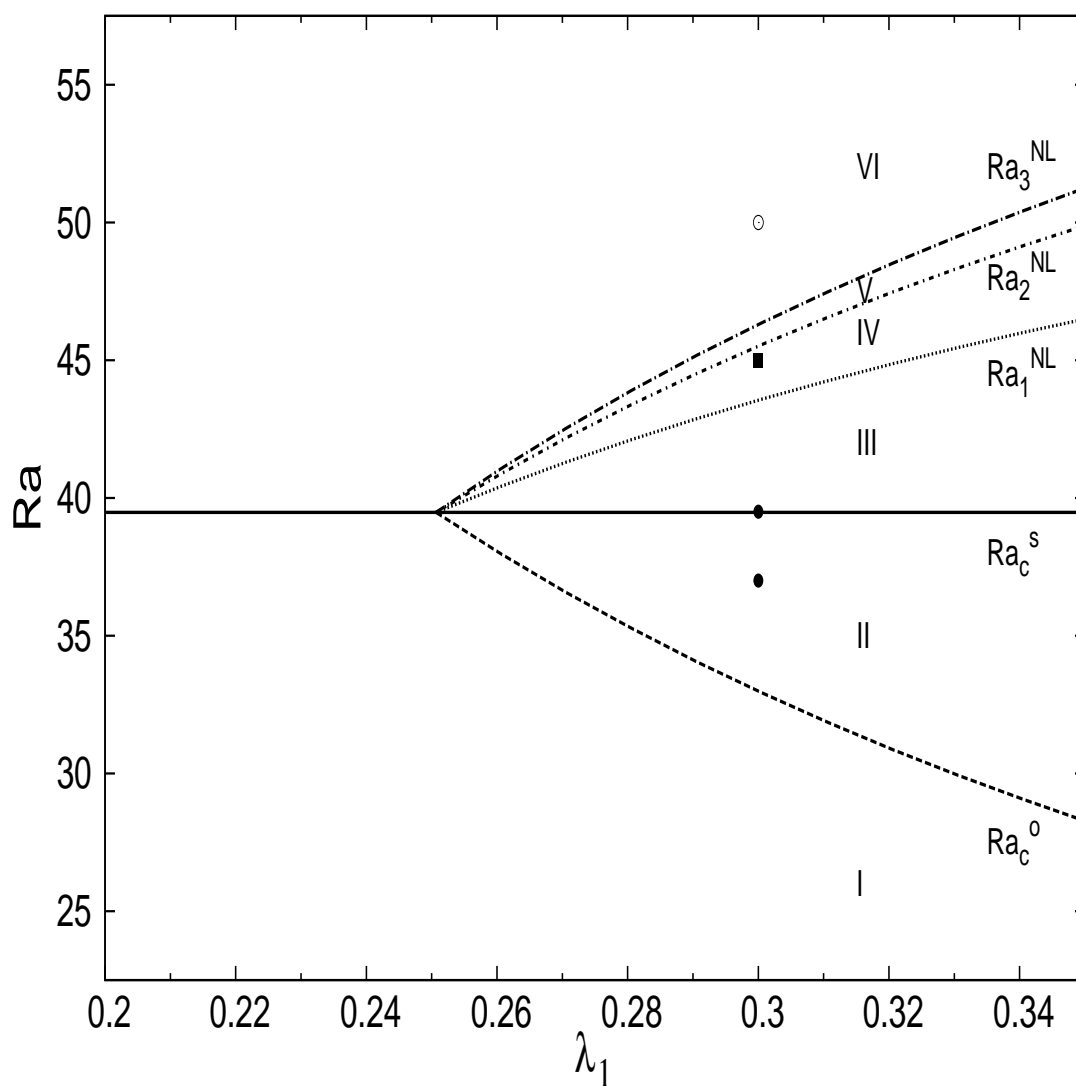
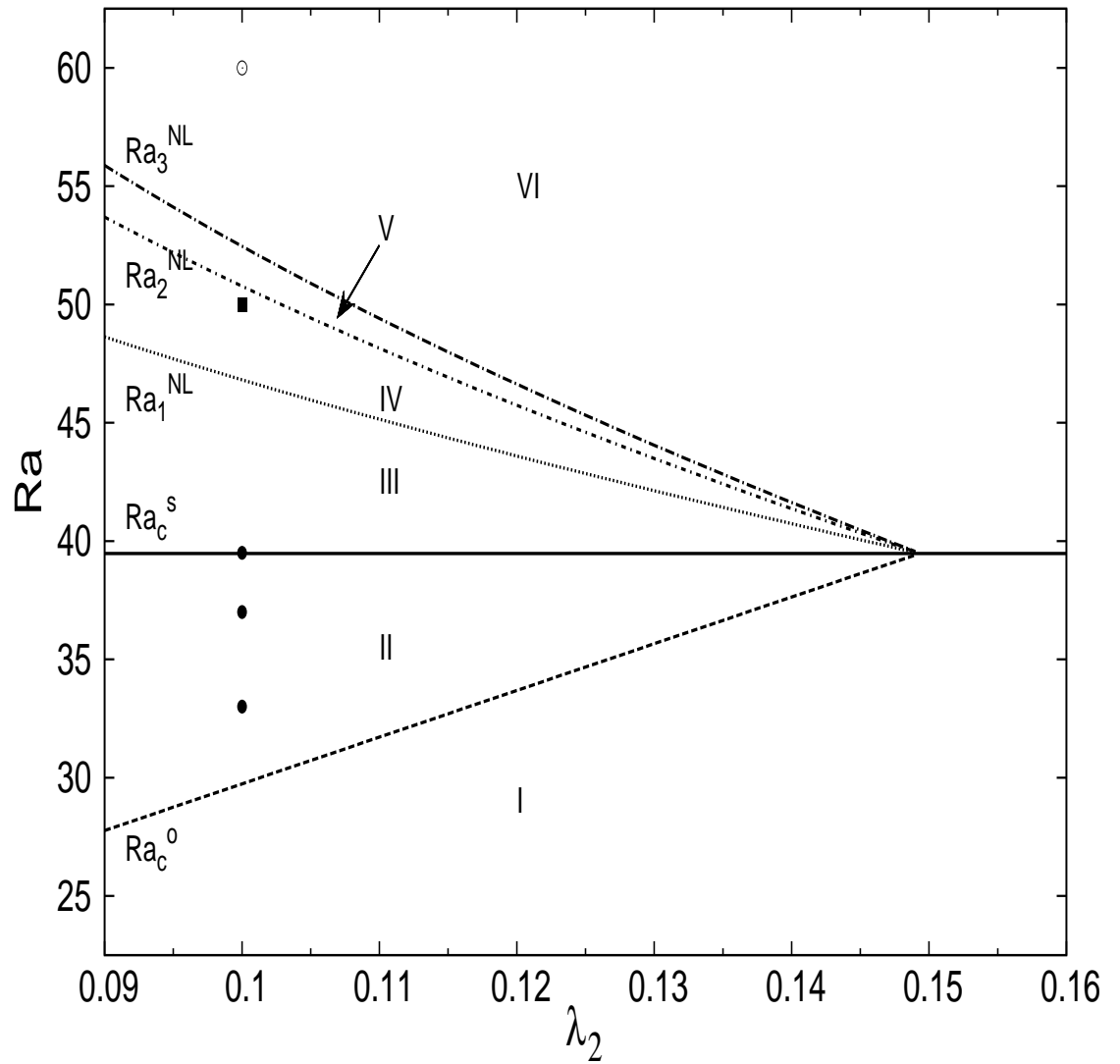


FIGURE 3.7 – Portrait de phase du système (3.44) dans le plan  $(\mu_1, \mu_2)$ .



**FIGURE 3.8** – Portrait de phase dans le plan  $(\lambda_1, Ra)$ . Convection oscillatoire (cercle plein) pour  $\lambda_2 = 0.2$ , convection stationnaire (cercle vide) et état de transition (carré plein).





**FIGURE 3.9** – Portrait de phase dans le plan  $(\lambda_2, Ra)$ . Convection oscillatoire (cercle plein) pour  $\lambda_1 = 0.2$ , convection stationnaire (cercle vide) et état de transition (carré plein).

périodiquement pour tous les couples de valeurs choisies, impliquant des oscillations de  $Nu$  dans le temps. La figure (2) montre par ailleurs que la courbe de  $Nu$  pour la combinaison (iii) des paramètres est complètement éloignée du cas Newtonien quelle que soit la valeur du nombre de Rayleigh. Cette figure atteste aussi que pour les deux jeux de paramètres i) et ii), la courbe représentant  $Nu$  se confond avec celle du cas Newtonien au delà d'une certaine valeur de Rayleigh. Ce dernier comportement de  $Nu$  suggère que dans le régime non linéaire, si  $Ra$  dépasse une valeur critique, la convection oscillatoire pour les cas (i) et (ii) est complètement supprimée et remplacée par la convection stationnaire. Des questions se posent à ce niveau : Pourquoi les simulations numériques révèlent l'existence d'une transition d'une convection oscillatoire à une convection stationnaire pour les cas (i) et (ii) tandis que cette transition n'apparaît jamais pour le cas (iii).

Nous avons répondu à ces questions primordiales en prenant en compte un critère majeur qui est la proximité de la bifurcation au point de codimension 2 de ces trois couples de valeurs des paramètres viscoélastiques utilisés dans les expériences numériques. Cette proximité est mesurée par la fraction  $d = (\lambda_1 - \lambda_1^*)/\lambda_1^*$  au delà de  $\lambda_1^*$ . En accord avec l'analyse de stabilité linéaire, le temps de relaxation  $\lambda_1$  correspondant au point de codimension 2 vaut  $\lambda_1^* = \lambda_2 + 1/Pr_D + 1/2\pi^2$ .

Pour  $Pr_D \rightarrow \infty$  utilisé dans les simulations numériques, nous trouvons  $d = 20\%$  pour le cas (i),  $d = 33\%$  pour le cas (ii) et  $d = 100\%$  pour le cas (iii). Nous avons conclu que des distances au point de codimension 2 raisonnables sont observées pour les cas (i) et (ii) tandis que les paramètres sélectionnés pour le cas (iii) sont très éloignés du point de codimension 2. Ainsi nous ne pouvons espérer observer les effets résultant des interactions entre la convection oscillatoire et stationnaire s'agissant du cas iii).

Pour une comparaison quantitative avec les résultats numériques de [7], nous avons sélectionné des valeurs de  $Ra$  qui appartiennent aux régimes de bifurcation, appelés  $II-VI$  que l'on peut voir sur les figures (3.8) et (3.9). Pour la combinaison i), la figure (3.8) indique les différents types de structures convectives observés dans les expériences numériques pour  $Ra = 37$ ,  $Ra = 39.5$ ,  $Ra = 45$  et  $Ra = 50$ . Dans cette dernière figure les cercles pleins et vides représentent la convection oscillatoire et stationnaire respectivement, tandis que le carré correspond à un état de transition caractérisé par un comportement temporel complexe. Les expériences numériques conduites par Fu et al. [7] montrent un comportement périodique dans le temps du nombre de Nusselt pour  $Ra = 37$ ,  $Ra = 39.5$  et  $Ra = 45$ . En augmentant le nombre de Rayleigh-Darcy à  $Ra = 50$ , ces simulations numériques témoignent d'une transition d'un état de convection oscillatoire à un état stationnaire.

Il est important de noter que cette valeur de  $Ra = 50$ , se situe dans la zone VI du diagramme de bifurcation représenté sur la figure (3.8) et où notre modèle réduit prévoit l'émergence de structures convectives stationnaires uniquement.

Pour le cas (ii) avec  $Ra = 60$ , la figure (3.9) montre qu'un comportement similaire est observé. Cette transition d'un état oscillatoire à un état stationnaire est précédée par un comportement temporel complexe pour  $Ra = 50$  avec un nombre de Nusselt oscillant à 4 fréquences (voir figure 7.a et 7.b de [7]). Il est intéressant de noter que ce phénomène se produit pour un nombre de Darcy-Rayleigh se trouvant dans l'intervalle  $[Ra_1^{NL}, Ra_3^{NL}]$  prédit par l'équation d'amplitude. Quand  $Ra$  diminue successivement à 39.5, 37 et 33, le nombre de Nusselt trouvé dans [7] oscille avec une fréquence dominante. Ces résultats sont en bon accord qualitatif avec l'existence prédite de cycle limite dans la région II de la figure (3.9) de notre étude.

### 3.4 Conclusion

L'étude de stabilité temporelle menée montre que les propriétés des structures thermoconvectives bifurquées dépendent du rapport de forme  $a$  du milieu poreux.

Nous avons également montré que deux type de structures (stationnaires et oscillatoires) peuvent se former lorsque la solution de conduction perd sa stabilité. Toutefois la sélection linéaire d'un type de structure tombe en défaut au voisinage d'un point appelé point de codimension 2. La dynamique non linéaire au voisinage de ce point a été ensuite analysée grâce à une équation d'amplitude que nous avons obtenue par des méthodes asymptotiques appropriées.

Nous avons décrit les bifurcations successives qui résultent de l'interaction non linéaire entre les deux types d'instabilités. Cela nous a permis de donner une interprétation théorique aux résultats de simulations numériques directes menées par Fu et al. [7] et aux observations expérimentales de Kolodner [29].



# Chapitre 4

## Convection de mélanges binaires de fluides viscoélastiques en milieu poreux

Kolodner [29] a effectué une étude expérimentale de convection dans des suspensions d'ADN et a observé des modes oscillants de convection avec des fréquences critiques qui peuvent être différentes de plusieurs ordres de grandeur avec les prédictions théoriques. Il a suggéré qu'une origine possible de cette non-conformité soit due à des aspects de mélanges binaires ( effet Soret). C'est la raison pour laquelle Martinez-Mardones et al [40] ont analysé les seuils de convection thermique pour des mélanges binaires avec des propriétés viscoélastiques dans des milieux non-poreux. A notre connaissance, le cas de ce genre d'étude pour les milieux poreux n'a pas été effectué.

L'objectif de ce chapitre est d'analyser la stabilité linéaire d'un mélange binaire de fluide viscoélastique saturant un milieu poreux. Nous analyserons les effets combinés de thermodiffusion et de l'élasticité du fluide sur le nombre de Rayleigh, le nombre d'onde et la fréquence à la naissance de la convection.

### 4.1 Equations linéarisées et conditions aux limites

Le point de départ est le système d'équations (1.35-1.38) linéarisées autour de la solution de conduction et vérifiées par les perturbations du champ de vitesse  $\vec{v}$ , du champ de température  $\theta$  et de  $\xi = c - \theta$  où  $c$  est le champ de concentration perturbé :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 w + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{Pr_D} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w\right) \\ - Ra \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla_h^2 [(1 + \psi)\theta + \psi\xi] = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w - \nabla^2 \theta = 0, \quad (4.3)$$

$$\varepsilon^* \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \varepsilon^*)w + \varepsilon^* \nabla^2 \theta - Le \nabla^2 \xi = 0, \quad (4.4)$$

Deux types de conditions aux limites seront considérées. Des conditions aux limites réalistes traduisant l'imperméabilité des parois horizontales au flux de chaleur massique :

$$w = \theta = \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1, \quad (4.5)$$

et des conditions aux limites non réalistes qui supposent que les parois sont perméables à la matière et dont l'intérêt est de permettre un traitement analytique donnant lieu à des expressions simples et utiles :

$$w = \theta = \xi = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } z = 1 \quad (4.6)$$

Les résultats issus de ces deux modèles seront systématiquement comparés.

Les milieux poreux les plus usuels admettent une très faible granulométrie caractérisée par un nombre de Darcy  $Da = K/H^2$  très petit (valeurs comprises entre  $10^{-6}$  et  $10^{-8}$ ). Il en découle que le nombre de Darcy-Prandtl  $Pr_D = \phi Pr/Da$  où ( $Pr = \nu/\lambda$ ) prend des valeurs très élevées. Cela justifie de négliger dans la plupart des études consacrées à la convection en milieu poreux le terme instationnaire d'inertie  $\frac{1}{Pr_D} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w$  dans l'équation du mouvement (4.2). Nous verrons que cette approximation pourrait avoir de lourdes conséquences en termes des résultats de stabilité linéaire et de leur interprétation physique. Dans la perspective d'illustrer cela, nous analyserons les deux cas de figure. Dans un premier temps, nous négligeons le terme d'inertie instationnaire et caractérisons les propriétés de l'instabilité à sa naissance pour un fluide viscoélastique de type Maxwell. Ensuite nous explorons les phénomènes physiques liés à la compétition entre les termes d'inertie ( $Pr_D$  fini) et les autres moteurs de l'instabilité, à savoir l'échauffement, le caractère viscoélastique du fluide et la nature thermodiffusive du mélange binaire.

## 4.2 Fluide de Maxwell pour $Pr_D \rightarrow \infty$

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude des fluides de Maxwell ( $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ ), dans le cas où  $Pr_D \rightarrow \infty$  et avec le modèle de parois imperméables.

Dans de telles conditions les équations (1.35)-(1.38) deviennent :

$$\Delta w - Ra \left(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta_h \{(1 + \psi)\theta + \psi\xi\} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta - w - \Delta\theta = 0, \quad (4.8)$$

$$\varepsilon^* \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \varepsilon^*)w + \varepsilon^* \Delta\theta - Le\Delta\xi = 0. \quad (4.9)$$

Les conditions aux limites des parois imperméables s'écrivent :

$$w = \theta = \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et } z = 1. \quad (4.10)$$

On cherche des solutions au système (4.7-4.9) vérifiant les conditions aux limites (4.10) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \\ \xi \end{pmatrix} = e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]} \cdot \begin{pmatrix} \hat{w}(z) \\ \hat{\theta}(z) \\ \hat{\xi}(z) \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

où  $k_x$  et  $k_y$  sont les composantes du vecteur d'onde  $\vec{k}$  dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement et  $\omega$  est la fréquence.

Ensuite, on utilise la méthode de Galerkin en développant les perturbations de vitesse, de température et de concentration de la façon suivante :

$$\hat{w}(z) = \sum_{m=1}^M w_m \sin(m\pi z). \quad (4.12)$$

$$\hat{\theta}(z) = \sum_{m=1}^M \theta_m \sin(m\pi z). \quad (4.13)$$

$$\hat{\xi}(z) = \sum_{m=0}^{M-1} \xi_m \cos(m\pi z). \quad (4.14)$$

Les résultats qui vont suivre et qui sont issus de cette méthode sont obtenus pour un développement à l'ordre  $m = 1$ , c'est à dire que nous allons considérer uniquement  $w_1$ ,  $\theta_1$  et  $\xi_0$  comme dans [35] dans leur étude des mélanges binaires de fluides Newtoniens.

On obtient ainsi une équation de dispersion simplifiée :

$$\begin{aligned} & \frac{2k^2 Ra \psi}{\pi} (1 - i\omega\lambda) \left( -\frac{2i\omega(1 - \varepsilon^*)}{\pi} + \frac{2}{\pi}(k^2 + \pi^2) \right) \\ & + [-i\omega\varepsilon^* + Lek^2] \left( -\frac{k^2 + \pi^2}{2}(-i\omega + k^2 + \pi^2) + \frac{k^2}{2}Ra(1 - i\omega\lambda)(1 + \psi) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

### 4.2.1 Approche analytique

Le taux de croissance temporelle des perturbations est donné par la partie imaginaire  $\omega_i$  de la fréquence. La courbe neutre de stabilité  $Ra(k)$  est obtenue en posant  $\omega_i = 0$ . Cette condition, à laquelle s'ajoute la condition d'un extremum  $Ra(k)$  au point critique ( $\partial Ra / \partial k = 0$ ), nous permet de déterminer le nombre d'onde et la fréquence critique du mode dominant au démarrage de la convection ainsi que le nombre de Rayleigh associé.

#### Structures stationnaires

Dans ce cas les grandeurs critiques sont :

$$Ra_c^s = \frac{4\pi^2 Le^2 (1 + \psi)}{\left(Le + Le\psi + \frac{8\psi}{\pi^2}\right)^2}, \quad (4.16)$$

$$k_c^{(s)2} = \frac{\pi^2 \left(Le + Le\psi - \frac{8\psi}{\pi^2}\right)}{\left(Le + Le\psi + \frac{8\psi}{\pi^2}\right)} \quad (4.17)$$

Ces expressions montrent que lorsque l'état de conduction perd sa stabilité au profit d'une instabilité stationnaire, cette instabilité n'est pas affectée par le caractère viscoélastique du fluide et on retrouve ainsi les résultats des mélanges binaires de fluides Newtoniens.

#### Structures Oscillatoires

Dans la plupart des situations qui sont rencontrées lors des expériences, le nombre de Lewis pour les mélanges de liquide est très petit ( $\simeq 10^{-2}$ ). Aussi dans ce qui suit nous utilisons cette propriété pour donner une approximation des caractéristiques



linéaires de la bifurcation de Hopf. En négligeant dans l'équation (4.15) les termes de l'ordre de Lewis  $Le$ , nous obtenons, le nombre d'onde, le nombre de Rayleigh ainsi que la fréquence critique des oscillations pour l'instabilité oscillatoire :

$$k_c^{(o)2} = \frac{\pi^2(A + 4\lambda\psi)}{A - 4\lambda\psi} \quad (4.18)$$

avec  $A = \frac{4}{\pi^2}\psi(1 - \varepsilon^*) + \frac{1}{2}\varepsilon^*(1 + \psi)$

Dans la limite  $\psi\lambda \rightarrow 0$ , le nombre de Rayleigh critique et la fréquence critique deviennent :

$$Ra_c^o = \frac{4\pi^2\varepsilon^*}{16\psi\lambda + \varepsilon^*(1 + \psi) + \frac{8}{\pi^2}\psi(1 - \varepsilon^*)}, \quad (4.19)$$

$$\omega_c^2 = \frac{-32\pi^2\psi}{\varepsilon^*(1 + \psi) + \frac{8}{\pi^2}\psi(1 - \varepsilon^*) - 2\pi^2\varepsilon^*\lambda}. \quad (4.20)$$

Comme  $\omega_c^2$  doit être positif, l'instabilité oscillatoire peut apparaître si  $\psi$  se trouve dans l'intervalle :

$$[\psi_\infty, 0] \text{ pour } \lambda < \lambda_c \text{ et } [0, \psi_\infty] \text{ pour } \lambda > \lambda_c. \quad (4.21)$$

où  $\lambda_c = 1/(2\pi^2)$  et :

$$\psi_\infty = -(1 - 2\pi^2\lambda)\varepsilon^* / \left( \varepsilon^* \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) + \frac{8}{\pi^2} \right) \quad (4.22)$$

On peut noter que la fréquence de l'instabilité oscillatoire tend vers l'infini si  $\psi = \psi_\infty$ .

A ce stade de l'analyse, l'approche analytique basée sur les approximations  $Le \ll 1$  et  $\psi\lambda \ll 1$  permet de dégager quelques résultats significatifs.

#### – Cas d'un mélange binaire Newtonien

Pour des mélanges binaires Newtoniens (i.e  $\lambda = 0$ ), les relations (4.21) et (4.22) montrent qu'une bifurcation de Hopf, donnant naissance à des structures convectives oscillatoires, se produit pour des valeurs de séparation  $\psi$  négatives et supérieures à

$$\psi_\infty = -\frac{\varepsilon^*}{\left( \varepsilon^* \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \right) + \frac{8}{\pi^2} \right)}$$

Par ailleurs, la bifurcation de Hopf ne se produit jamais pour des rapports de séparation positifs. A contrario, une bifurcation stationnaire peut se manifester dès lors que la valeur du nombre de Rayleigh dépasse la valeur critique donnée par l'expression (4.16). Il est à noter que le nombre d'onde de ces structures stationnaires naissantes peut s'annuler lorsque le rapport de séparation  $\psi$  dépasse la valeur  $\psi_0$  définie par

$$\psi_0 = \frac{Le}{\frac{8}{\pi^2} - Le}$$

cela est illustré sur la figure (4.1)

Dans ce cas, un régime stationnaire de convection monocellulaire s'installe.

Tous ces résultats relatifs aux mélanges binaires Newtoniens sont en parfait accord avec ceux existant dans la littérature (voir par exemple les travaux [19], [20] et [57]).

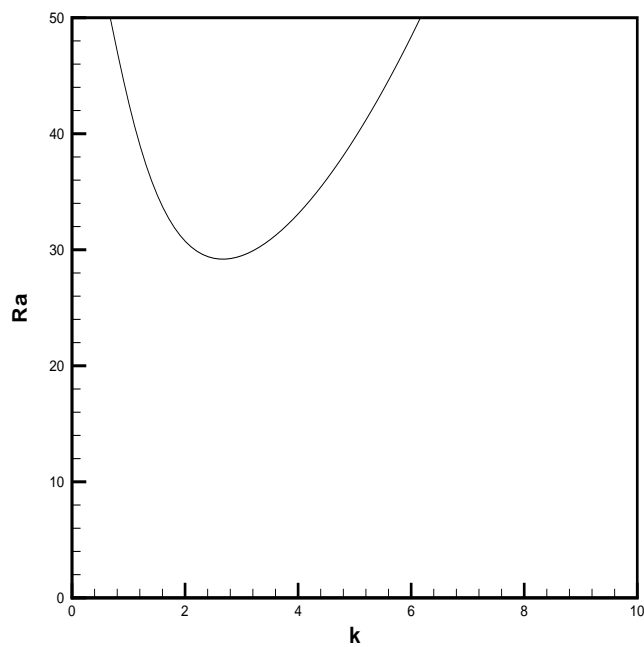
– **Cas d'un mélange binaire de type Maxwell.**

Pour les mélanges binaires viscoélastiques de type Maxwell ( $\lambda \neq 0$ ), l'émergence d'une instabilité oscillatoire est le résultat d'une compétition entre l'effet Soret et le caractère viscoélastique du mélange fluide. Selon les valeurs prises par le rapport de séparation  $\psi$  et le temps de relaxation  $\lambda$ , le scénario suivant est prédit :

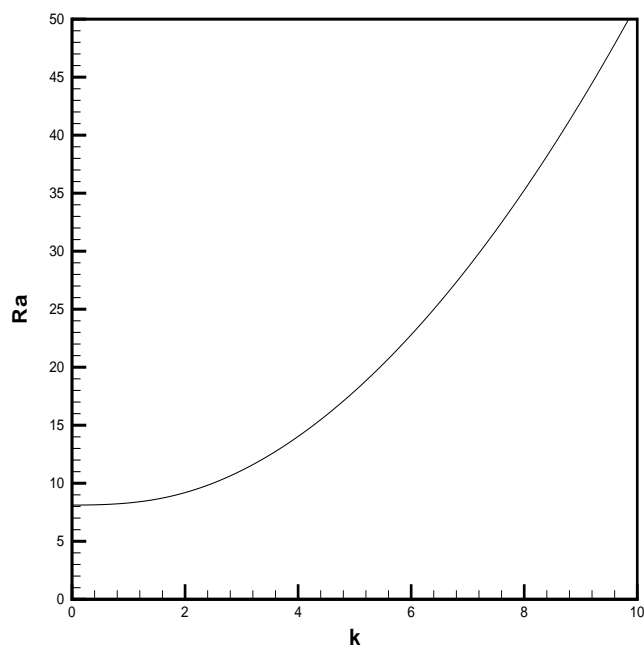
- Pour  $\psi < 0$  et  $\lambda < \lambda_c$ , la région dans le plan  $(\psi, Ra)$  où l'instabilité oscillatoire se produit, comparée au cas Newtonien diminue lorsque  $\lambda$  augmente. Cela signifie physiquement que l'élasticité du fluide contrebalance l'effet Soret. Pour des valeurs de  $\lambda \geq \lambda_c$ , l'état de conduction demeure linéairement stable vis-à-vis de perturbations oscillatoires.
- Pour  $\psi > 0$ , deux situations différentes peuvent être observées selon la valeur du temps de relaxation  $\lambda$ .  
Lorsque  $\lambda < \lambda_c$ , l'élasticité du fluide ne produit aucun effet et le mélange binaire se comporte comme un fluide Newtonien. L'instabilité se présente alors sous la forme d'une structure convective stationnaire dont les caractéristiques au seuil sont données par les relations (4.16) et (4.17).
- Pour des valeurs de  $\lambda$  supérieures à  $\lambda_c$ , l'élasticité du fluide favorise l'émergence de structures convectives oscillatoires pour des valeurs de  $\psi$  comprises dans l'intervalle  $]0, \psi_\infty[$ . Une bifurcation de Hopf peut alors se produire pour des rapports de séparation positifs, contrairement au cas d'un mélange Newtonien pour lequel la bifurcation vers un état de convection est de nature stationnaire.

Le paragraphe suivant illustre ces résultats obtenus numériquement en résolvant l'équation de dispersion approchée (4.15) sans approximations supplémentaires.

(a)



(b)



**FIGURE 4.1** – Courbe neutre de stabilité pour le cas d'un mélange binaire Newtonien,  $\psi = 0.002 < \psi_0(a)$  et  $\psi = 0.015 > \psi_0(b)$ .  $Le = 10^{-2}$

## 4.2.2 Illustrations des propriétés linéaires de l'instabilité

### Rapport de séparation négatif

Les propriétés de l'instabilité oscillatoire pour  $\psi < 0$  ont été identifiées numériquement à l'aide du logiciel Maple, en se servant de l'équation de dispersion (4.15). La figure (4.2) représente les variations du nombre de Rayleigh critique à la naissance de l'instabilité oscillatoire, en fonction du rapport de séparation à différentes valeurs fixées de  $\lambda$ , de la porosité normalisée  $\varepsilon^* = 0.5$ , et du nombre de Lewis  $Le = 10^{-2}$ . Pour comparaison, le cas des résultats pour les mélanges binaires de fluides Newtoniens a été également représenté.

Cette figure montre que **la viscoélasticité gouverne l'intervalle du rapport de séparation dans lequel une bifurcation de Hopf apparaît**. Nous remarquons que l'augmentation de  $\lambda$  de 0 (cas Newtonien) à 0.035 réduit la région de l'instabilité oscillatoire dans le plan  $(\psi, Ra)$ . De plus, les résultats numériques montrent que pour des valeurs  $\lambda$  légèrement au-delà de 0.035, l'état de conduction est linéairement stable vis-à-vis d'une perturbation oscillatoire pour toutes valeurs négatives du rapport de séparation. La valeur 0.035 trouvée numériquement est proche de la valeur  $\lambda = 1/(2\pi^2)$  trouvée analytiquement.

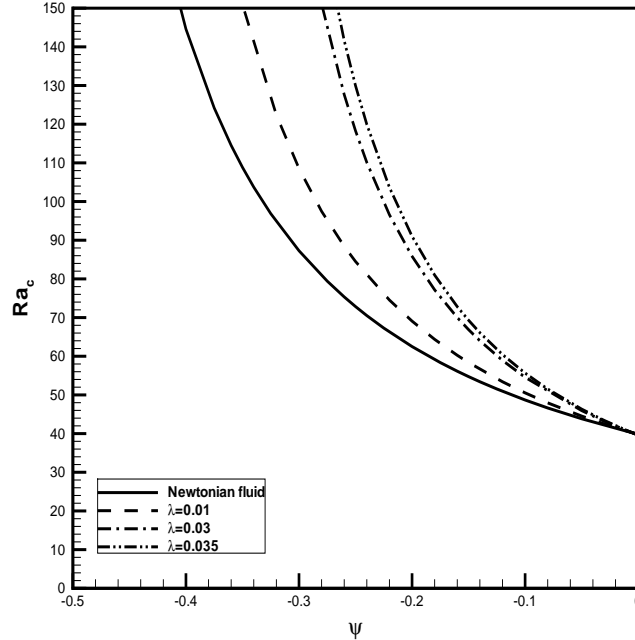
Sur la figure (4.3) où nous avons représenté la fréquence critique en fonction de  $\psi$ , on peut remarquer un écart entre les mélanges de fluides Maxwelliens et Newtoniens. Cet écart augmente de façon considérable avec l'augmentation de  $\lambda$ .

Nous avons également représenté sur la figure (4.4) le nombre d'onde critique au seuil de l'instabilité oscillatoire. L'inspection de cette figure montre que pour le cas Newtonien, le nombre d'onde n'est pas modifié par le rapport de séparation  $\psi$ , alors que l'effet Soret peut influencer fortement le nombre d'onde dans le cas des mélanges de fluides Maxwelliens.

### Rapport de séparation positif

La résolution numérique de l'équation de dispersion de (4.15) pour  $\psi > 0$  et  $\lambda < \lambda_c$  indique que seule l'instabilité stationnaire apparaît, indépendamment du fait que le fluide soit viscoélastique ou pas. Cependant, pour  $\lambda$  suffisamment grand le système peut être le siège aussi bien d'une instabilité stationnaire qu'oscillatoire.

Des résultats présentés sur la figure (4.5(a)) pour des valeurs de  $\varepsilon^*$  et  $Le$  fixées, nous pouvons observer que le Rayleigh critique correspondant à l'instabilité oscillatoire diminue lorsque  $\lambda$  augmente. Autrement dit l'élasticité du fluide a un effet déstabilisant. Nous observons toujours selon cette figure qu'en augmentant  $\lambda$ , la courbe neutre représentant la bifurcation de Hopf croise la courbe neutre de stabi-



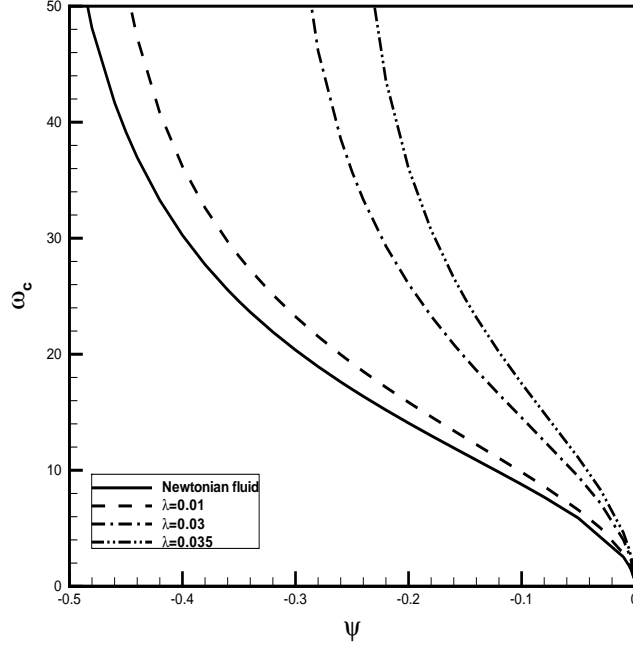
**FIGURE 4.2** – Nombre de Rayleigh critique pour les instabilités oscillatoires,  $Le = 10^{-2}$  et  $\varepsilon^* = 0.5$

lité relative à l'instabilité stationnaire en un point qui se déplace vers le bas par la droite dans le plan  $(\psi, Ra)$ . Ainsi nous pouvons conclure que l'augmentation de l'élasticité du mélange fluide promeut l'instabilité oscillatoire dans un intervalle du rapport de séparation relativement important.

L'effet de la porosité normalisée est représenté sur la figure (4.5(b)). Cette figure nous révèle que l'intervalle du rapport de séparation où se produit une bifurcation de Hopf avant l'instabilité stationnaire augmente avec la diminution de la porosité normalisée.

### 4.3 Effet de l'inertie sur la stabilité des mélanges binaires viscoélastiques

Le paragraphe précédent supposait que le terme instationnaire d'inertie était négligeable dans la limite où  $Pr_D \rightarrow \infty$ . Les résultats qui découlent de ce cas limite n'expliquent pas notamment les différents sauts de la fréquence d'oscillations



**FIGURE 4.3** – Fréquence critique pour l’instabilité oscillatoire avec  $Le = 10^{-2}$  et  $\varepsilon^* = 0.5$

des structures convectives observées expérimentalement par Kolodner [29] lorsque l’élasticité du mélange augmente. La prise en compte du terme instationnaire d’inertie pourrait apporter un nouvel éclairage sur le problème de stabilité. C’est l’objet de la partie qui suit.

### 4.3.1 Parois perméables : approche analytique

On rappelle le système d’équations linéarisées vérifiées par les perturbations de vitesse  $\vec{u}$ , de température  $\theta$  et du champ  $\xi = c - \theta$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 w + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{Pr_D} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w\right) \\ - Ra \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla_h^2 [(1 + \psi)\theta + \psi\xi] = 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w - \nabla^2 \theta = 0, \quad (4.25)$$

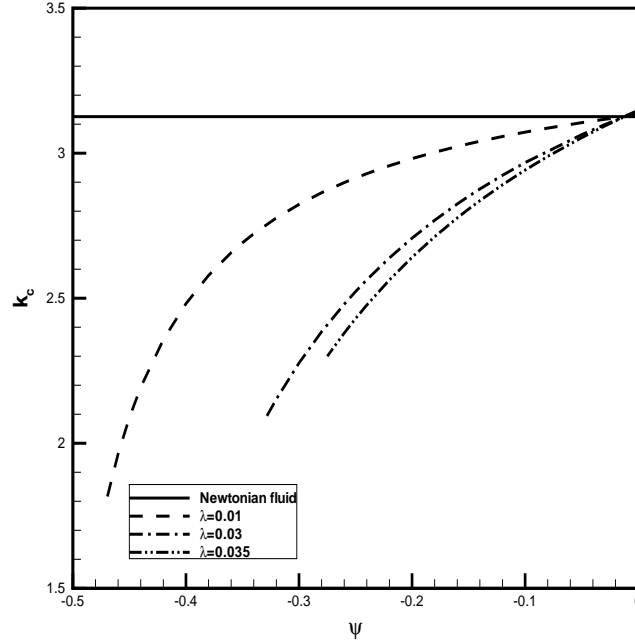


FIGURE 4.4 – Nombre d'onde critique pour l'instabilité oscillatoire  $Le = 10^{-2}$  et  $\varepsilon^* = 0.5$

$$\varepsilon^* \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \varepsilon^*)w + \varepsilon^* \nabla^2 \theta - Le \nabla^2 \xi = 0, \quad (4.26)$$

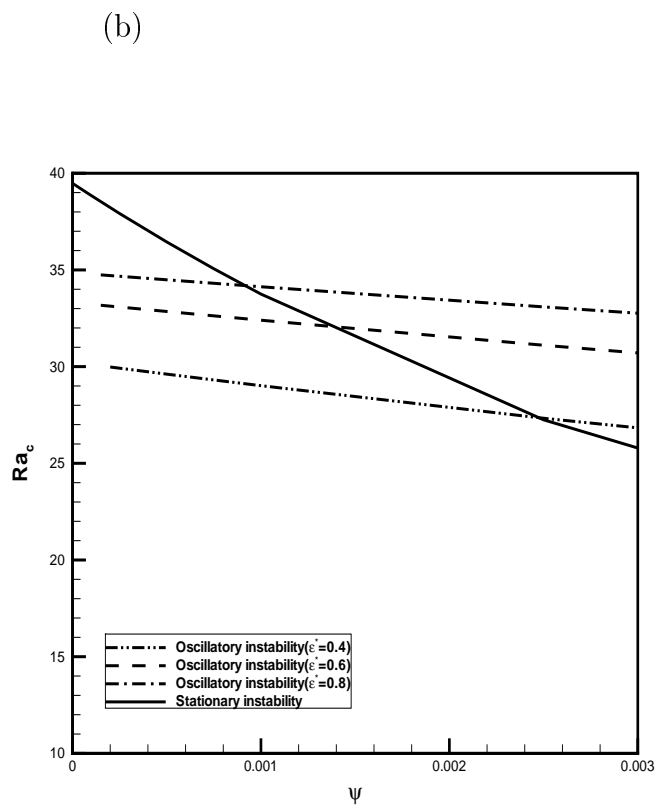
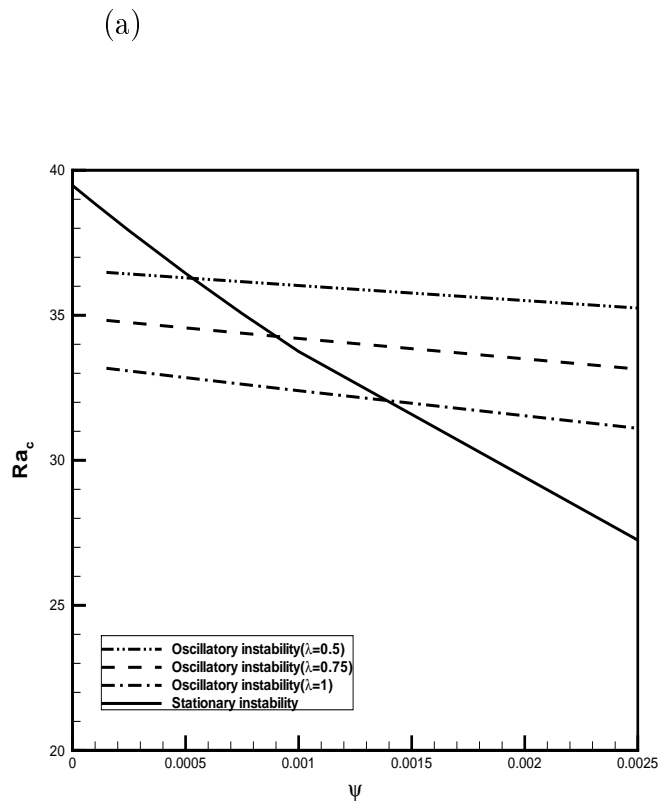
Les conditions aux limites associées s'écrivent pour des parois supposées perméables au flux de matière :

$$w = \theta = \xi = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ et } z = 1, \quad (4.27)$$

Les solutions du système (4.23-4.26) vérifiant les conditions aux limites (4.27) sont recherchées sous la forme de modes normaux :

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \\ \xi \end{pmatrix} = e^{i[(k_x x + k_y y) - \omega t]} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w}(z) \\ \tilde{\theta}(z) \\ \tilde{\xi}(z) \end{pmatrix} \sin(\pi z) \quad (4.28)$$

En remplaçant dans le système (4.23-4.26),  $w$ ,  $\theta$  et  $\xi$  par leur expression (4.28), la condition d'existence d'une solution non triviale conduit à une équation de dispersion analytique exacte qui s'écrit de façon compacte :



**FIGURE 4.5** – Nombre de Rayleigh critique pour les instabilités oscillatoire et stationnaire,  $Le = 10^{-2}$  et  $\varepsilon^* = 0.6$ (a) et  $Le = 10^{-2}$  et  $\lambda = 1$ (b)



$$k^2 Ra = -\frac{D_1 A_1 + D_2 A_2}{A_1^2 + A_2^2} + i \frac{D_2 A_1 - D_1 A_2}{A_1^2 + A_2^2}. \quad (4.29)$$

Avec :

$$A_1 = \omega^2 \lambda_1 (\psi + \varepsilon^*) - c(\psi(1 + Le) + Le), \quad (4.30)$$

$$A_2 = \omega(\lambda_1 c \psi(1 + Le) + \lambda_1 c Le + \psi + \varepsilon^*), \quad (4.31)$$

$$D_1 = (\varepsilon^* \omega^2 - c^2 Le) \left( -1 + \frac{\omega^2 \lambda_1}{Pr_D} \right) c - \omega^2 (Le + \varepsilon^*) \left( \lambda_2 + \frac{1}{Pr_D} \right) c^2, \quad (4.32)$$

$$D_2 = \omega c^2 (\varepsilon^* + Le) \left( -1 + \omega^2 \frac{\lambda_1}{Pr_D} \right) + (\varepsilon^* \omega^2 - c^2 Le) \omega c \left( \lambda_2 + \frac{1}{Pr_D} \right). \quad (4.33)$$

et  $c = k^2 + \pi^2$

La séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire permet d'obtenir une expression explicite du nombre de Rayleigh et une équation algébrique du quatrième ordre pour la fréquence d'oscillations des structures convectives. Celle-ci s'écrit pour le cas général d'un mélange binaire viscoélastique d'Oldroyd-B :

$$E\omega^4 + F\omega^2 + G = 0 \quad (4.34)$$

ou

$$\omega = 0, \quad (4.35)$$

Avec :

$$E = \frac{1}{Pr_D} \lambda_1^2 c [\varepsilon^{*2} + Le\psi(1 - \varepsilon^*)] + \lambda_1 \lambda_2 (\psi + \varepsilon^*) \varepsilon^*. \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{c}{Pr_D} [c^2 Le \lambda_1^2 (\psi + Le\psi + Le) + \varepsilon^{*2} + \psi Le(1 - \varepsilon^*)] \\ &- c(\varepsilon^{*2} + Le\psi(1 - \varepsilon^*)(\lambda_1 - \lambda_2)) + c^2 \lambda_1 \lambda_2 [\varepsilon^* \psi(1 + Le) + (1 + \psi) Le^2] \\ &+ \varepsilon^* (\varepsilon^* + \psi). \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$G = \frac{1}{Pr_D} Lec^3(\psi + \psi Le + Le) - c^3(\psi + \psi Le + Le)Le(\lambda_1 - \lambda_2) + c^2 [\psi \varepsilon^*(1 + Le) + (1 + \psi)Le^2]. \quad (4.38)$$

La relation (4.35) traduit l'existence d'une instabilité stationnaire, alors que l'équation (4.34) régit la dépendance de la fréquence des structures convectives vis-à-vis du rapport de séparation  $\psi$ , du nombre de Lewis  $Le$ , des paramètres caractérisant la viscoélasticité du fluide  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , du nombre de Darcy-Prandtl  $Pr_D$  et de la porosité relative  $\varepsilon^*$  du milieu poreux. Tous ces paramètres agissent en concert dans le phénomène de déstabilisation. La stratégie, à but pédagogique, adoptée par la suite est de considérer des cas limites, avant de traiter le cas général d'un mélange binaire de fluides viscoélastiques de type Oldroyd-B. Ces cas limites consistent à comprendre le phénomène de déstabilisation pour :

- Les mélanges binaires de fluides Newtoniens
- Les fluides purs viscoélastiques de type Maxwell
- Les mélanges binaires viscoélastiques de type Maxwell.

#### 4.3.1.1 Cas d'un mélange binaire de fluides Newtoniens

Cela correspond à  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , ce qui entraîne  $E = 0$  dans (4.34). L'expression de la fréquence est alors donnée par :

$$\omega_1^2 = -\frac{c^2 [\psi(\varepsilon^* + Le^2) + Le^2]}{\varepsilon^*(\varepsilon^* + \psi)}. \quad (4.39)$$

La condition  $\omega_1^2 > 0$  délimite l'intervalle des rapports de séparation  $\psi$  pour qu'une bifurcation de Hopf puisse avoir lieu :

$$-\varepsilon^* < \psi < \psi_{CT} = -\frac{Le^2}{\varepsilon^* + Le^2}$$

Lorsque  $\psi$  dépasse la valeur  $\psi_{CT}$ , l'instabilité se manifeste sous la forme de structures stationnaires. La valeur  $\psi = \psi_{CT}$  correspond à une bifurcation de codimension 2 où les deux types d'instabilités se développent simultanément [Ouarzazi et al. [47].]

#### 4.3.1.2 Cas d'un fluide pur de type Maxwell

Le cas d'un fluide pur correspond à  $\psi = Le = 0$ . La résolution de l'équation (4.34) fournit :

$$\omega_1^2 = 0, \quad (4.40)$$

$$\omega_2^2 = -Pr_D \frac{(1 - (k^2 + \pi^2)\lambda_1)}{\lambda_1^2(k^2 + \pi^2)}. \quad (4.41)$$

A condition que  $\lambda_1$  dépasse une valeur particulière  $\lambda_{1c} = \frac{1}{(k^2 + \pi^2)}$ . Autrement c'est une instabilité stationnaire, correspondant à la solution  $\omega_1^2 = 0$  qui se développe

#### 4.3.1.3 Cas d'un mélange binaire de type Maxwell

L'effet Soret inhérent aux mélanges binaires et les propriétés viscoélastiques propres à un fluide Maxwellien rentrent en compétition dans ce cas. Les deux fréquences d'oscillations  $\omega_1$  due à l'effet Soret et  $\omega_2$  due aux effets viscoélastiques s'écrivent dans la limite des grandes valeurs de  $Pr_D$  :

$$\omega_1^2 = \frac{c^3 Le(\psi + Le)\lambda_1 - c^2 [\psi \varepsilon^* + (1 + \psi)Le^2]}{\varepsilon^{*2}(1 - c\lambda_1) + \varepsilon^* \psi}, \quad (4.42)$$

$$\omega_2^2 = -Pr_D \frac{\varepsilon^{*2}(1 - c\lambda_1) + \varepsilon^* \psi}{\lambda_1^2 c \varepsilon^{*2}}. \quad (4.43)$$

Les conditions d'existence de  $\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$  permettent de déterminer lequel des deux régimes que l'on appellera régime de Soret et régime viscoélastique, est le plus dominant. Ces deux régimes correspondent respectivement à des oscillations avec des petites fréquences  $\omega_1$  et des fréquences élevées  $\omega_2$ . Les résultats de l'analyse peuvent être résumés de la manière suivante :

Posons

$$\psi_{CT} = -\frac{Le^2(1 - (k^2 + \pi^2)\lambda_1)}{\varepsilon^* + Le^2 - (k^2 + \pi^2)Le\lambda_1}. \quad (4.44)$$

et

$$\lambda_{1c} = \frac{1}{\varepsilon^*(k^2 + \pi^2)}(\psi + \varepsilon^*). \quad (4.45)$$

- Pour des valeurs de séparation  $\psi$  inférieures à  $\psi_{CT}$ , le type de régime prévu dépend de la valeur prise par le temps de relaxation  $\lambda_1$ . Lorsque  $\lambda_1 < \lambda_{1c}$  (respectivement  $> \lambda_{1c}$ ), le régime dominant est le régime de Soret (respectivement le régime viscoélastique). Par conséquent, pour une valeur  $\psi$  fixée inférieure à  $\psi_{CT}$ , une transition est observée de structures convectives avec des petites oscillations vers des grandes oscillations lorsque  $\lambda_1$  augmente et dépasse la valeur de transition  $\lambda_{1c}$ .

- Pour des rapports de séparation  $\psi > \psi_{CT}$ , contrairement au cas des mélanges binaires Newtoniens où le seul type d'instabilité est de nature stationnaire, la viscoélasticité du mélange peut induire des oscillations des structures convectives, pourvu que le temps de relaxation  $\lambda_1$  soit supérieur à la valeur  $\lambda_{1c}$ .

Ces résultats obtenus en tenant compte des termes d'inertie diffèrent qualitativement de ceux présentés au paragraphe précédent lorsque  $Pr_D \rightarrow \infty$ . Mathématiquement cette différence qualitative s'explique par la forte dégénérescence de l'équation (4.34) où le coefficient  $E \rightarrow 0$  lorsque  $Pr_D \rightarrow \infty$ , réduisant cette équation à un ordre deux en  $\omega$  au lieu d'un ordre quatre en  $\omega$ .

La suite de ce paragraphe est consacrée à illustrer certains résultats issus de la résolution numérique de l'équation de dispersion (4.29).

#### 4.3.1.4 Résultats pour $\lambda_1$ variable et $\psi$ fixé.

La figure 4.6(a) illustre la variation de la fréquence  $\omega_c$  au seuil, en fonction du temps de relaxation pour différentes valeurs négatives de  $\psi$  et pour  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ . Cette figure montre que pour des valeurs petites de  $\lambda_1$ , la fréquence  $\omega_c$  est pratiquement indépendante de  $\lambda_1$  et est fortement sensible à la valeur prise par le rapport de séparation  $\psi$ . Il s'agit d'un régime de convection dominé par l'effet Soret. En revanche pour des valeurs modérées de  $\lambda_1$ , les fréquences relatives à différentes valeurs de  $\psi$  tendent vers une valeur asymptotique qui ne dépend que de  $\lambda_1$ . Dans ce cas, on observe une prédominance des propriétés viscoélastiques. Entre ces deux régimes, s'opère une transition brutale entre une région de faible fréquence et une autre caractérisée par une fréquence plus élevée de plusieurs ordres de grandeur. Ce résultat est en bon accord et explique qualitativement les observations expérimentale de Kolodner [29].

La figure 4.6(b) montre la dépendance de la valeur critique du nombre de Rayleigh  $Ra_c$  vis-à-vis du temps de relaxation  $\lambda_1$ . Cette figure illustre clairement l'existence d'un régime de convection dominé par l'effet Soret pour des valeurs petites de  $\lambda_1$  et d'un régime où les effets viscoélastiques sont prépondérants pour des valeurs de  $\lambda_1$  un peu plus élevées. Il est à noter que  $Ra_c$  diminue lorsque  $\lambda_1$  augmente, signalant la nature déstabilisante des effets viscoélastiques.

La dépendance du nombre d'onde critique vis-à-vis du temps de relaxation  $\lambda_1$  est illustrée sur la figure 4.7(a). Là aussi, la transition brutale entre ces deux régimes d'instabilités est clairement prononcée. La période spatiale des structures convectives augmente d'autant plus que  $\lambda_1$  est élevé. Nous avons tenté d'expliquer cette transition brutale observée entre le régime Soret et le régime viscoélastique en explorant le comportement de la courbe neutre de stabilité lorsque  $\lambda_1$  varie. La figure 4.7(b) illustre ce comportement pour  $\psi = -0.01$ ,  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$  pour différentes valeurs de  $\lambda_1$ . Pour  $\lambda_1 = 0.03$ , la courbe neutre de stabilité présente un seul minimum  $k = k_c \simeq \pi$ . Lorsque  $\lambda_1$  augmente à  $\lambda_1 = 0.0369$ , la courbe neutre

de stabilité admet deux minimums  $k_{c1} \simeq \pi$  et  $k_{c2} \simeq 7$ , indiquant que deux modes convectifs deviennent simultanément instables. Ces deux modes simultanément instables correspondent à une situation où les deux contributions, viscoélastiques et thermo-diffusives sont de même intensité. Avec l'augmentation de  $\lambda_1$ , à  $\lambda_1 = 0.1$  et puis à  $\lambda_1 = 0.2$ , la courbe neutre de stabilité présente un seul minimum  $k_{c2}$  associé au mode viscoélastique qui, à ces valeurs de  $\lambda_1$ , l'emporte sur le mode purement thermo-convectifs.

### 4.3.1.5 Résultats pour $\psi$ variable et $\lambda_1$ fixé.

Les fréquences d'oscillations des structures convectives et les valeurs critiques du nombre de Rayleigh sont respectivement représentées sur les figures 4.8(a) et 4.8(b) en fonction de  $\psi$  et pour différentes valeurs de  $\lambda_1$ . Pour  $\lambda_1 = 0.001$ , ces figures montrent que les effets viscoélastiques n'ont pratiquement aucune influence puisque  $\omega_c$  et  $Ra_c$  se comportent comme pour un fluide Newtonien. Lorsqu'on augmente  $\lambda_1$  à 0.01, on remarque que l'effet Soret est dominant pour des valeurs de  $\psi$  proches de zéro, alors que pour des valeurs de  $\psi$  suffisamment négatives, c'est plutôt le caractère viscoélastique qui l'emporte. En augmentant  $\lambda_1$  à 0.03 puis à 0.05,  $\omega_c$  et  $Ra_c$  sont pratiquement indépendants du rapport de séparation  $\psi$ .

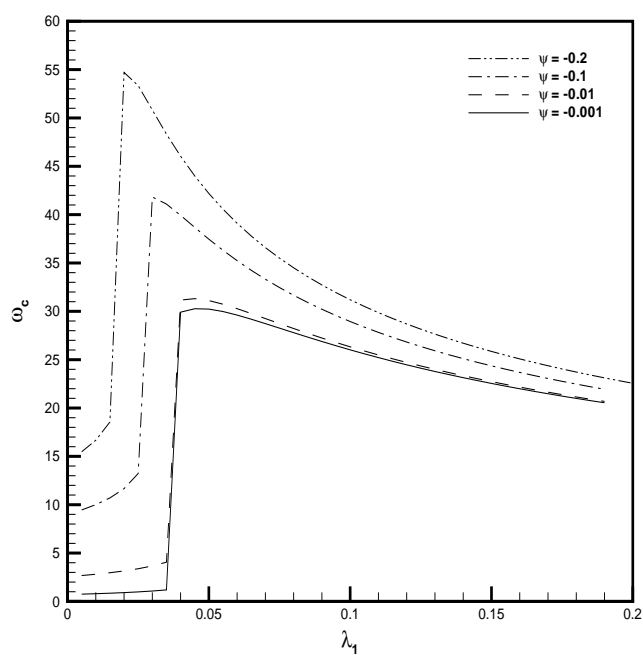
**Il est important de noter que cette prépondérance des modes viscoélastiques pour des valeurs de  $\psi$  suffisamment négatives est due à la prise en compte du terme d'inertie instationnaire. En effet, lorsqu'on néglige ce terme d'inertie ( $Pr_D \rightarrow \infty$ ), les figures (4.2) et (4.3) du paragraphe précédent montrent que pour  $\psi$  suffisamment négatif, la valeur seuil  $Ra_c$  et la fréquence associée  $\omega_c$  tendent vers l'infini, contrairement au comportement observé sur les figures 4.8(a) et 4.8(b).**

Pour des rapports de séparation  $\psi$  positifs, la figure (4.9) représente le seuil de l'instabilité stationnaire (resp. oscillatoire) en trait continu (resp. en traits discontinus) en fonction de  $\psi$  pour différentes valeurs de  $\lambda_1$ . Le résultat le plus important qui émane de cette figure est que les effets viscoélastiques induisent des structures convectives oscillatoires dont le seuil d'apparition  $Ra_c$  précède celui des modes convectifs stationnaires. L'étendue de la région dans le plan  $(\psi, Ra)$  où l'instabilité se manifeste en premier est d'autant plus grande que l'élasticité du fluide augmente.

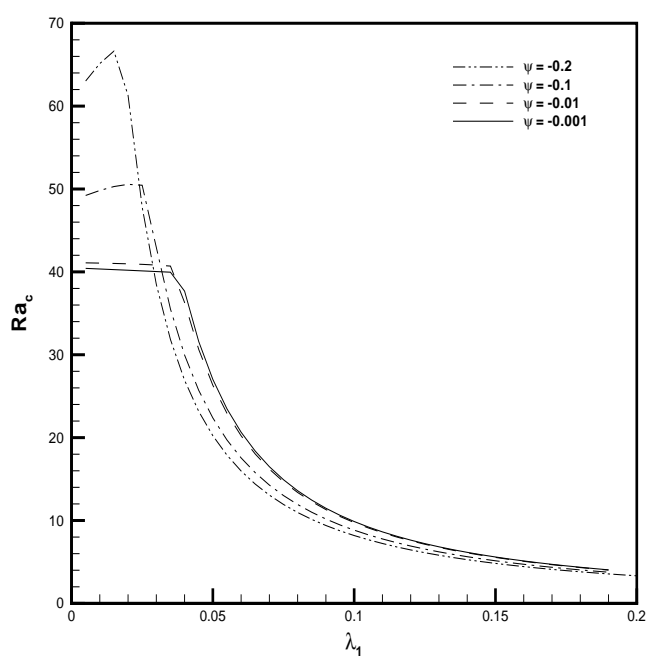
### 4.3.1.6 Cas général :

Le cas général correspond à un mélange binaire viscoélastique de type Oldroyd-B pour lequel les temps de relaxation  $\lambda_1$  et de retardation  $\lambda_2$  sont non nuls. La résolution numérique de l'équation de dispersion (4.29) où on pose  $\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$  permet d'établir les propriétés linéaires de la convection naissante. Certaines de ces propriétés sont illustrées sur les figures 4.10(a), 4.10(b) et 4.11.

(a)

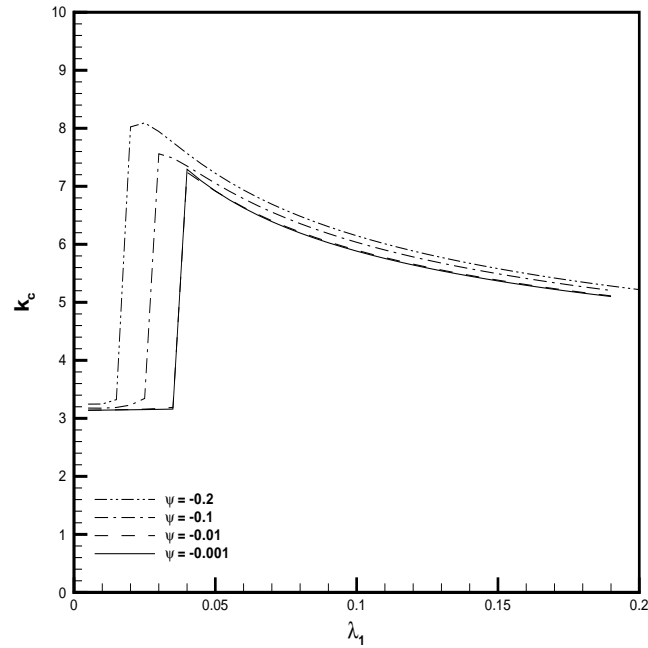


(b)

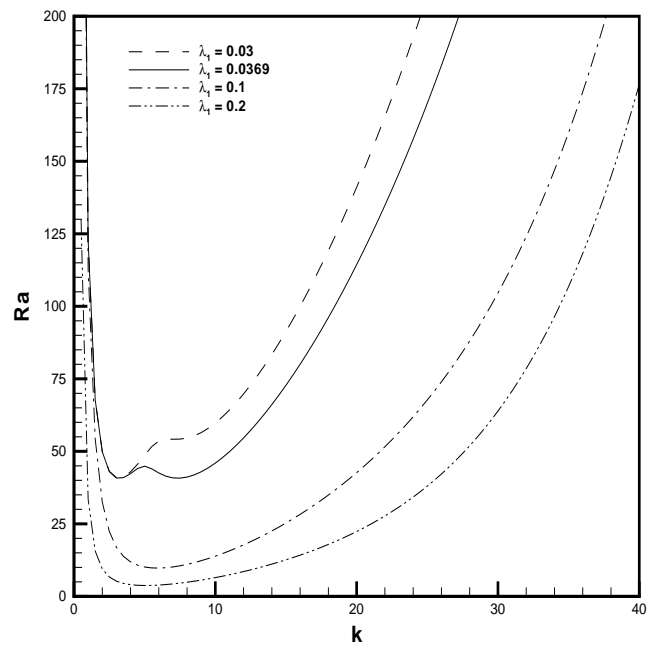


**FIGURE 4.6** – fréquence critique (a) et Rayleigh critique(b) en fonction du temps de relaxation  $\lambda_1$ . Pour  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ , pour des petites valeurs du rapport de séparation  $\psi$ .

(a)

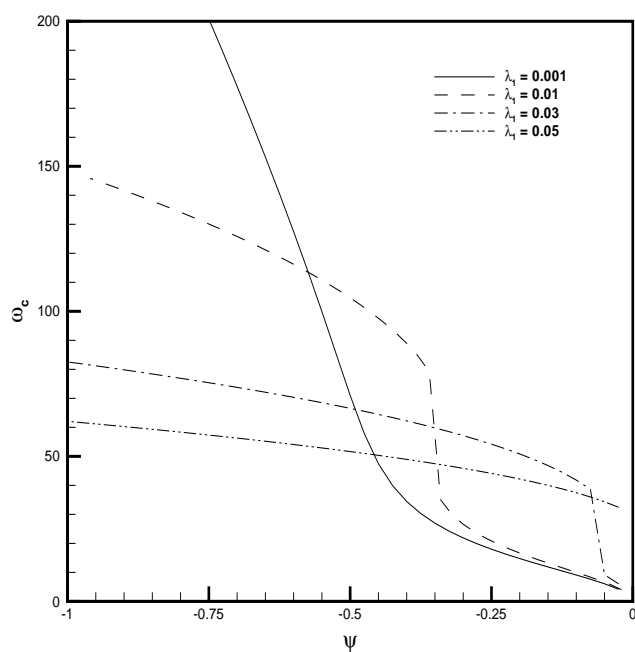


(b)

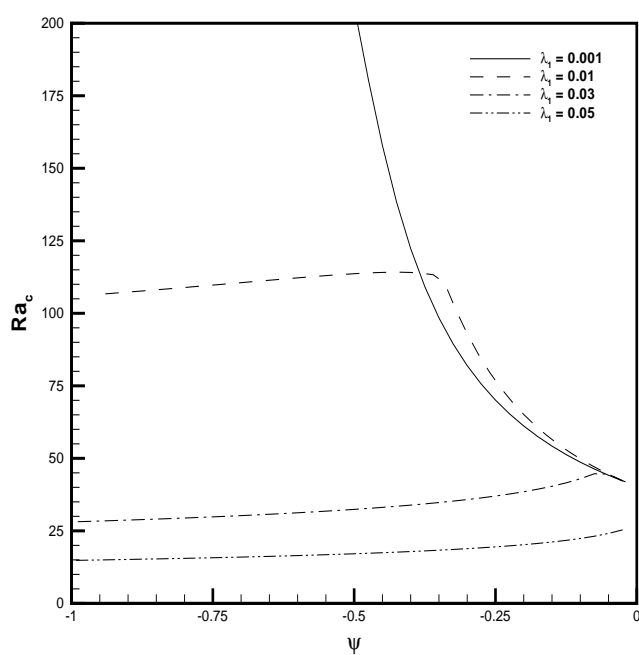


**FIGURE 4.7** – Nombre d'onde critique (a) en fonction du temps de relaxation  $\lambda_1$ . Pour  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_d = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ , pour des petites valeurs du rapport de séparation  $\psi$ . (b) représente la courbe neutre de stabilité pour les mêmes valeurs de  $Le$ ,  $Pr_D$ ,  $\varepsilon^*$  que précédemment avec  $\psi = -0.01$ .

(a)

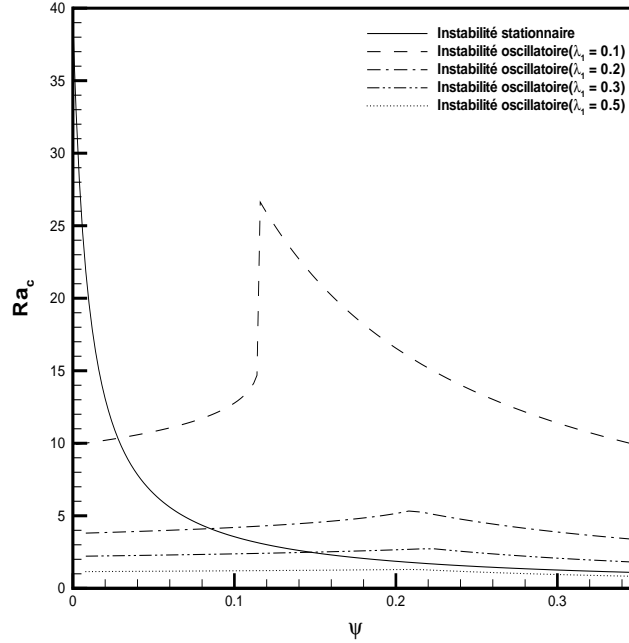


(b)



**FIGURE 4.8** – Caractéristiques linéaires de l'instabilité ( fréquence critique(a) et Rayleigh critique(b)) au seuil en fonction du rapport de séparation  $\psi$  pour des valeurs fixées  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$





**FIGURE 4.9** – Caractéristiques linéaires de l’instabilité (Rayleigh critique) au seuil en fonction du rapport de séparation  $\psi$  pour des valeurs fixées  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$

En vue d’apprécier le rôle joué par le temps de retardation  $\lambda_2$ , ces figures montrent aussi les caractéristiques de l’instabilité pour un mélange binaire Maxwellien. Un bref aperçu de ces trois figures montre que le comportement qualitatif des caractéristiques linéaires de l’instabilité pour un mélange d’Oldroyd-B est similaire à celui observé pour un mélange Maxwellien largement discuté au paragraphe précédent et ne mérite pas de commentaires supplémentaires.

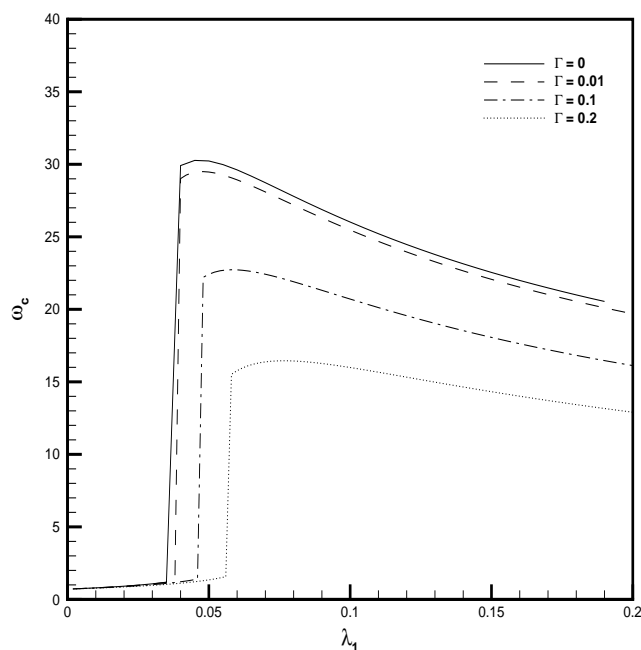
Quantitativement, le temps de retardation  $\lambda_2$  diminue la valeur de la fréquence  $\omega_c$  dans le régime viscoélastique 4.10(a), fait tarder la transition de la convection entre les deux régimes (4.10(a) et 4.10(b)), et joue un rôle stabilisant 4.11.

### 4.3.2 Résultats numériques issus du cas imperméable

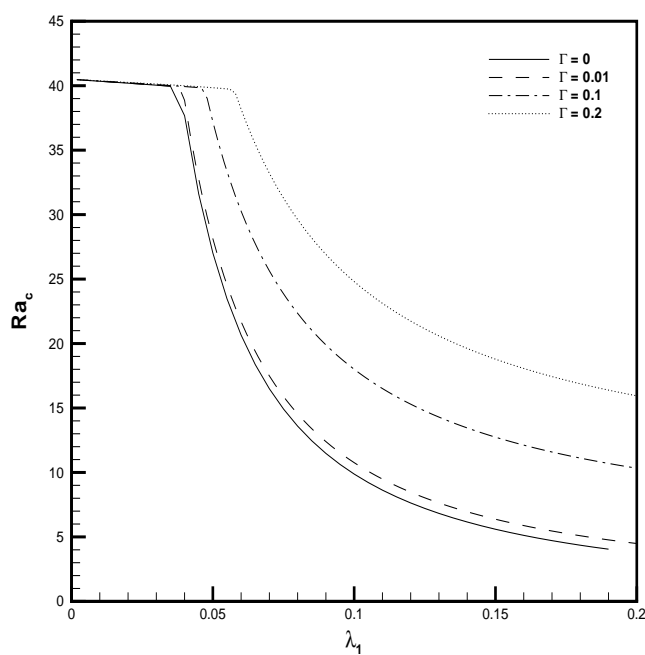
Considérons maintenant ce qui se passe dans le cas des parois imperméables pour lequel on rappelle que le système d’équations s’écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.46)$$

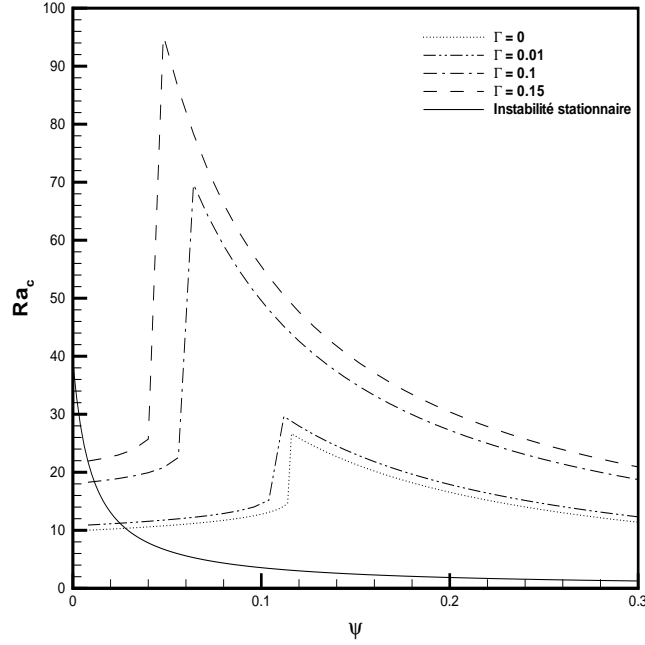
(a)



(b)



**FIGURE 4.10** – Caractéristiques linéaires de l'instabilité ( fréquence critique (a) et Rayleigh critique (b)) au seuil en fonction du temps de relaxation  $\lambda_1$  pour des valeurs fixées  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ .  $\psi = -0.01$ .  $\Gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$



**FIGURE 4.11** – Caractéristiques linéaires de l'instabilité ( Rayleigh au seuil en fonction du rapport de séparation  $\psi$  pour des valeurs fixées  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$

$$\begin{aligned} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 w + \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{1}{Pr_D} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w\right) \\ - Ra \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla_h^2 [(1 + \psi)\theta + \psi\xi] = 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - w - \nabla^2 \theta = 0, \quad (4.48)$$

$$\varepsilon^* \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \varepsilon^*)w + \varepsilon^* \nabla^2 \theta - Le \nabla^2 \xi = 0, \quad (4.49)$$

Avec les conditions aux limites

$$w = \theta = \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ et } 1$$

Dans ce cas, on cherche les solutions sous la forme de modes normaux :

$$(w, \theta, \xi) = \left[ \hat{w}(z), \hat{\theta}(z), \hat{\xi}(z) \right] e^{i(kx - \omega t)}. \quad (4.50)$$

On obtient alors le système linéaire du troisième ordre :

$$\left\{ (1 - i\omega\lambda_2)(D^2 - k^2) - \frac{i\omega}{Pr_D}(1 - i\omega\lambda_1)(D^2 - k^2) \right\} \hat{w}(z) + k^2 Ra(1 - i\omega\lambda_1)(1 + \psi)\hat{\theta}(z) + k^2 Ra(1 - i\omega\lambda_1)\psi\hat{\xi}(z) = 0, \quad (4.51)$$

$$-\hat{w}(z) - (i\omega + D^2 - k^2)\hat{\theta}(z) = 0, \quad (4.52)$$

$$-(1 - \varepsilon^*)\hat{w}(z) + \varepsilon^*[D^2 - k^2]\hat{\theta}(z) + [-i\omega\varepsilon^* - Le(D^2 - k^2)]\hat{\xi}(z) = 0. \quad (4.53)$$

Avec

$$\hat{w}(z) = \hat{\theta}(z) = \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et } z = 1, \quad (4.54)$$

Les amplitudes  $\hat{w}(z)$ ,  $\hat{\theta}(z)$  et  $\hat{\xi}(z)$  vérifiant les conditions aux limites (4.54) sont développées sous la forme :

$$(\hat{w}(z), \hat{\theta}(z), \hat{\xi}(z)) = \sum_{m=1}^M (w_m f_m(z), \theta_m f_m(z), \xi_{m-1} g_{m-1}(z)). \quad (4.55)$$

Avec  $f_m(z) = \sin(m\pi z)$  et  $g_{m-1}(z) = \cos(m-1)\pi z$

On introduit (4.55) dans (4.51-4.53) pour aboutir à un problème aux valeurs propres qui est résolu à l'aide de la méthode de Galerkin. L'application de la méthode de Galerkin conduit au système algébrique de dimension  $3M$  suivant :

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a(-p^2\pi^2-k^2)A_{p,q} & \dots & bB_{p,q} & \dots & cC_{p,q} & \dots \\ \dots & -D_{p,q} & \dots & -(i\omega^2-p^2\pi^2-k^2)E_{p,q} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & -(1-\varepsilon^*)F_{p,q} & \dots & \varepsilon^*(-p^2\pi^2-k^2)G_{p,q} & \dots & [-i\omega\varepsilon^*-L\varepsilon[-(p-1)^2\pi^2-k^2]]H_{p,q} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \\ \vdots \\ w_M \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \\ \vdots \\ \theta_M \\ \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_p \\ \vdots \\ \xi_{M-1} \end{pmatrix} = 0,$$

avec

$$a = (1 - i\omega\lambda_2) - \frac{i\omega}{Pr_D}(1 - i\omega\lambda_1)$$

$$b = k^2 Ra(1 - i\omega\lambda_1)(1 + \psi)$$

$$c = k^2 Ra(1 - i\omega\lambda_1)\psi$$

$$A_{p,q} = \int_0^1 \sin p\pi z \sin q\pi z dz = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

$$B_{p,q} = A_{p,q} = D_{p,q} = E_{p,q}$$

$$C_{p,q} = \int_0^1 \cos(p-1)\pi z \sin q\pi z dz = \begin{cases} 0 & \text{si } p+q \text{ est impaire} \\ \frac{2}{\pi} \frac{q}{q^2-(p-1)^2} & \text{si } p+q \text{ est paire.} \end{cases}$$

$$G_{p,q} = F_{p,q}$$

$$H_{p,q} = \int_0^1 \cos(p-1)\pi z \cos(q-1)\pi z dz$$

$$F_{p,q} = \int_0^1 \cos(q-1)\pi z \sin p\pi z dz$$

Le système matriciel précédent peut s'écrire sous une forme plus simple :

$$M\vec{X} = 0, \quad (4.56)$$

où  $\vec{X}$  est un vecteur composé des coefficients spectraux des amplitudes ( $w_1, \dots, w_M, \theta_1, \dots, \theta_M, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}$ ) et  $M$  est une matrice dont les éléments dépendent de  $Ra, k, \omega, \psi, Le, \lambda_1, \lambda_2, Pr_D$  et  $\varepsilon^*$ .

Le système (4.56) n'admet des solutions non nulles que si :

$$\det M = 0 \quad (4.57)$$

Cette relation conduit à une équation de dispersion reliant la fréquence  $\omega$  au nombre d'onde  $k$  et faisant apparaître le reste des nombres sans dimension du problème. La résolution de cette équation de dispersion grâce au logiciel de calcul symbolique Mathematica permet d'identifier les caractéristiques linéaires de l'instabilité, à savoir le seuil critique du nombre de Rayleigh à partir duquel le système bifurque vers un état de convection, et la fréquence et le nombre d'onde des structures convectives naissantes.

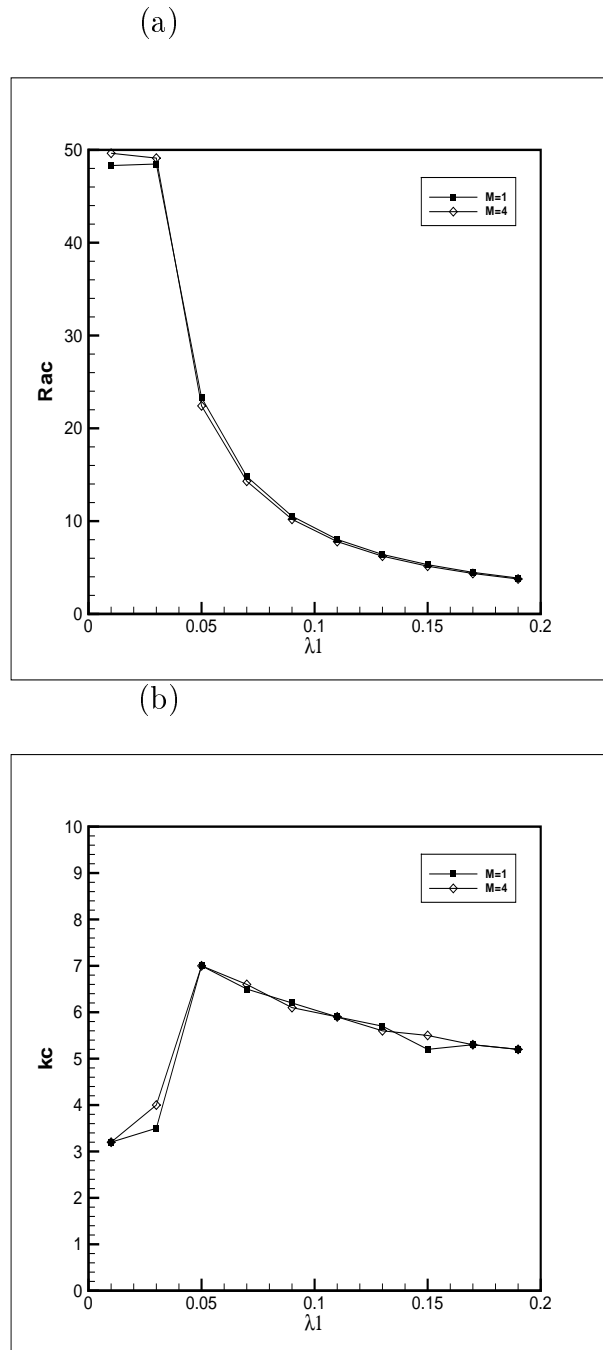
Pour un mélange Maxwellien, nous avons illustré quelques résultats sur les figures (4.12) et (4.13) pour  $\psi = -0.01, Le = 10^{-2}, Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ .

Afin de tester la convergence des séries (4.55), nous présentons les résultats pour  $M = 1$  et  $M = 4$ . Nous constatons que la convergence est très satisfaisante pour  $M = 4$ ; les résultats issus de  $M = 5$  diffèrent de ceux obtenus pour  $M = 4$  d'une quantité de l'ordre du trait. Nous remarquons également que les résultats issus du premier mode  $M = 1$  constituent une bonne approximation.

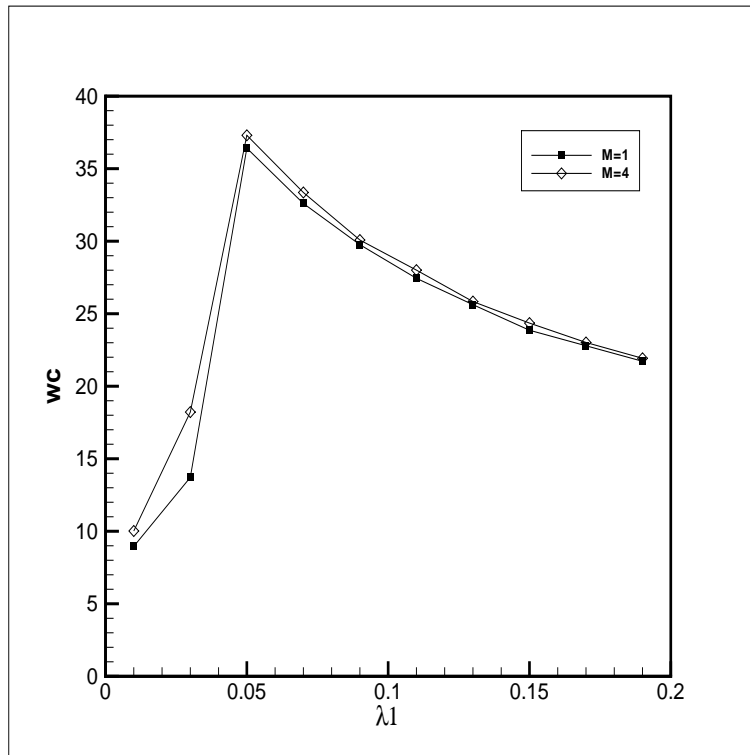
### 4.3.3 Comparaison des résultats : modèles perméable/imperméable

Nous avons obtenu des résultats analytiques exprimés par des expressions simples en considérant des conditions aux limites idéales violant la condition réaliste d'imperméabilité des bords horizontaux du massif poreux au flux de la matière. Il est primordial de vérifier la pertinence de ces expressions analytiques en comparant les résultats qui en découlent à ceux obtenus par voie numérique et respectant les conditions aux limites réalistes physiquement acceptables.

Pour un mélange de type Maxwell avec un temps de relaxation  $\lambda_1 = 0.01$ , nous avons représenté sur les figures (4.14)a, b et figure (4.15) les propriétés linéaires au seuil de l'instabilité à la fois pour le modèle de parois perméables (lignes discontinues) et imperméables (points). Pour comparaison, nous avons aussi illustré ces mêmes propriétés pour un mélange binaire Newtonien (ligne tirets-points : -.). Ces



**FIGURE 4.12** – Représentation des caractéristiques au seuil pour le modèles des parois imperméables en fonction du temps de relaxation. Rayleigh critique (a) et nombre d'onde critique (b). Avec  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ .  $\psi = -0.01$ .



**FIGURE 4.13** – Représentation de la fréquence critique en fonction du temps de relaxation pour le modèle de parois imperméables. Avec  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ .  $\psi = -0.01$ .

trois figures montrent que la dépendance de la valeur critique du nombre de Rayleigh  $Ra_c$ , du nombre d'onde  $k_c$  et de la fréquence d'oscillation  $\omega_c$  des structures oscillatoires naissantes, vis-à-vis du rapport de séparation  $\psi$  est similaire pour les deux modèles correspondant à des parois perméables ou imperméables. Ces trois figures montrent par ailleurs que pour des valeurs de  $\psi$  négatives et voisines de zéro, les caractéristiques de l'instabilité sont presque identiques à celle d'un mélange binaire Newtonien. A contrario, pour des valeurs de  $\psi$  suffisamment négatives, ces caractéristiques s'écartent fortement de celles propres au cas Newtonien. Pour des valeurs positives de  $\psi$ , l'instabilité est de nature stationnaire comme dans le cas d'un mélange Newtonien.

La situation change qualitativement lorsque le temps de relaxation  $\lambda_1$  augmente. A titre d'exemple, pour  $\lambda_1 = 0.2$ , et pour le même jeu de paramètres que précédemment, la figure 4.16 montre que la valeur du nombre de Rayleigh au seuil de l'instabilité oscillatoire ne dépend pratiquement plus de  $\psi$  indiquant une prédominance des effets viscoélastiques. Il est à noter que l'étendue d'un régime de convection oscillatoire s'étend pour des valeurs de  $\psi$  positives et finit par endiguer l'instabilité stationnaire.



### 4.3.4 Bilan énergétique

La compétition entre les trois moteurs de l'instabilité qui sont l'échauffement, les propriétés viscoélastiques et le phénomène de thermodiffusion est analysée ici grace à une approche énergétique.

Cette approche est un outil très utile en vue d'isoler et de comparer les différentes contributions de chacune des sources d'instabilité. Pour cela, il est nécessaire de reformuler les équations de conservation en faisant apparaître la concentration  $c$  comme grandeur physique à la place de  $\xi = c - \theta$ .

L'équation du mouvement s'écrit, après avoir développé les perturbations en modes normaux comme précédemment :

$$(1 - i\omega\lambda_2)u(z) - \frac{i\omega}{Pr_D}(1 - i\omega\lambda_1)u(z) + (1 - i\omega\lambda_1)ikp(z) = 0, \quad (4.58)$$

$$(1 - i\omega\lambda_2)w(z) - \frac{i\omega}{Pr_D}(1 - i\omega\lambda_1)w(z) + (1 - i\omega\lambda_1)\frac{dp}{dz} - (1 - i\omega\lambda_1)Ra(\theta(z) + \psi c(z)) = 0 \quad (4.59)$$

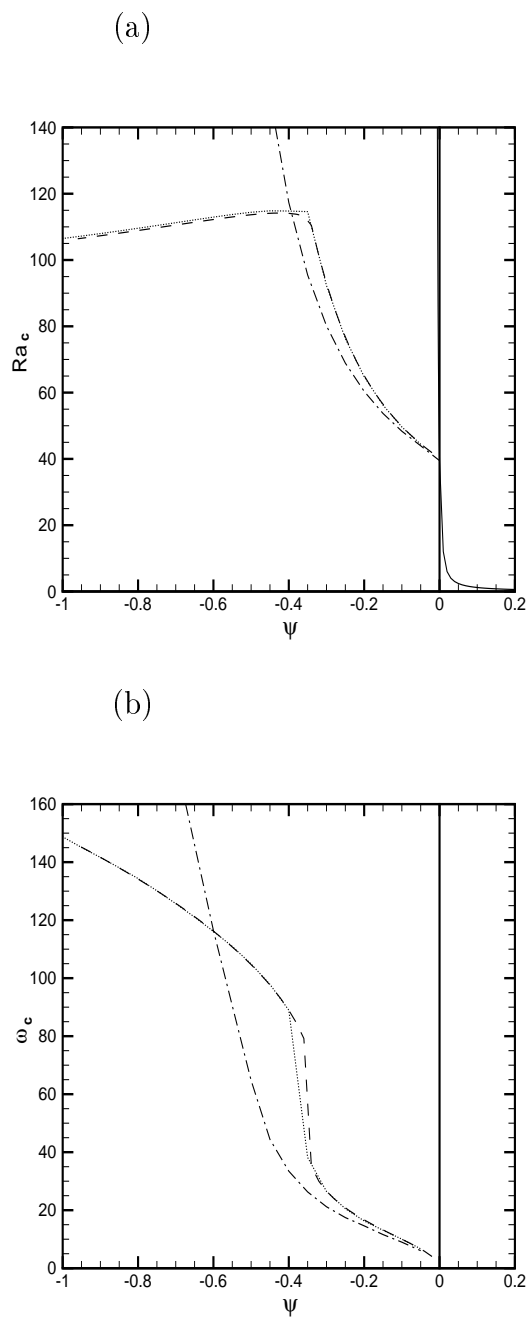
En multipliant (4.58) par  $u^*$  le complexe conjugué de  $u$  et (4.59) par  $w^*$  le complexe conjugué de  $w$ , et en additionnant les deux expressions trouvées, on aboutit à l'équation :

$$(1 - i\omega\lambda_2)(|u|^2 + |w|^2) - \frac{i\omega}{Pr_D}(1 - i\omega\lambda_1)(|u|^2 + |w|^2) + (1 - i\omega\lambda_1)ikpu^* + (1 - i\omega\lambda_1)w^*\frac{dp}{dz} - (1 - i\omega\lambda_1)Ra(w^*\theta + \psi w^*c) = 0. \quad (4.60)$$

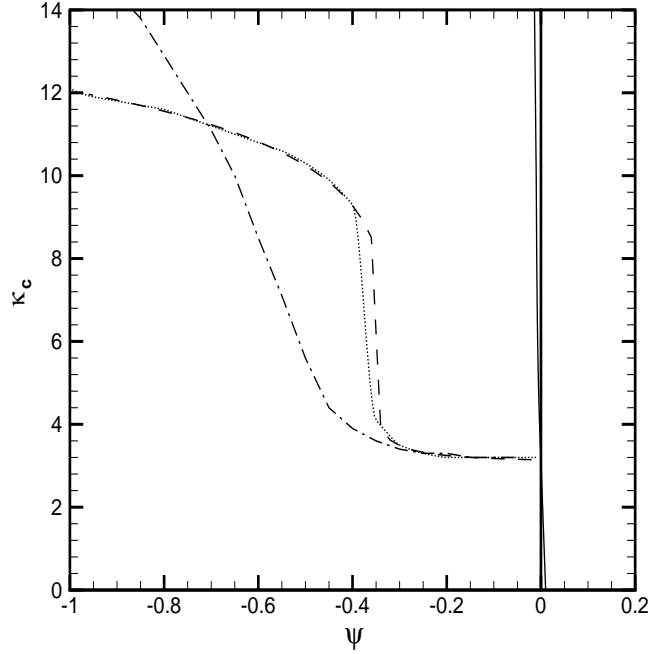
Par intégration de (4.60) le long de la hauteur d'une section droite du massif poreux et en tenant compte des conditions aux limites l'équation (4.60) se réduit au seuil ( $\omega_i = 0$ ) à :

$$E_d + E_v + E_t + E_s + E_{tv} + E_{sv} = 0. \quad (4.61)$$

Avec



**FIGURE 4.14** – Modèle de parois imperméables avec  $M = 4$  (...), modèle de parois perméables (—) et cas Newtonien (-.-) : Rayleigh critique (a) et nombre d'onde critique (b) en fonction du rapport de séparation. Avec  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ .  $\lambda_1 = 0.01$



**FIGURE 4.15** – Modèle de parois imperméables (...) avec  $M = 4$ , modèle de parois perméables (—) et cas Newtonien (-.-) : nombre d'onde critique en fonction du rapport de séparation. Avec  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$ .  $\lambda_1 = 0.01$

$$E_d = -\frac{Pr_D}{2} \int_0^1 (|u|^2 + |w|^2) dz < 0$$

$$E_v = \frac{\omega_c^2 \lambda_1}{2} \int_0^1 (|u|^2 + |w|^2) dz$$

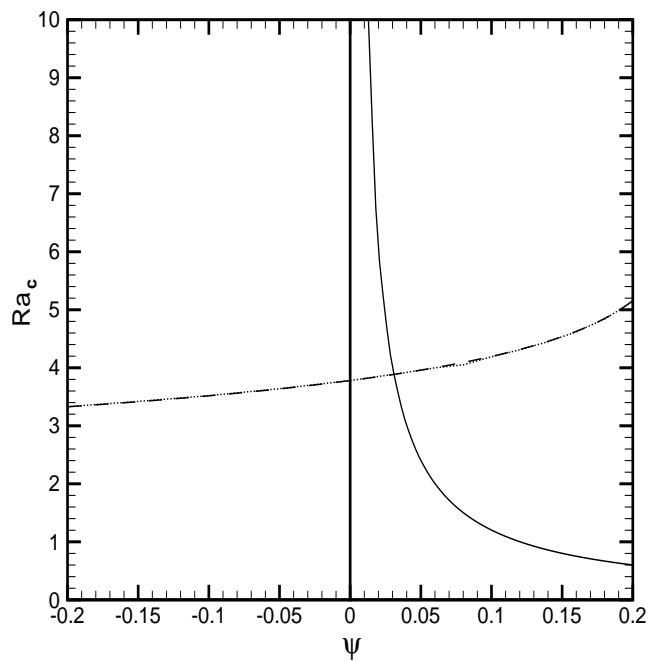
$$E_t = \frac{Pr_D Ra_c}{4} \int_0^1 (w^* \theta + w \theta^*) dz$$

$$E_{tv} = \frac{Pr_D}{2} \omega_c \lambda_1 Ra_c \int_0^1 Im(w^* \theta) dz$$

$$E_s = \frac{Pr_D \psi Ra_c}{4} \int_0^1 (w^* c + w c^*) dz$$

$$E_{sv} = \frac{Pr_D}{2} \omega_c \lambda_1 \psi Ra_c \int_0^1 Im(w^* c) dz$$

Où  $E_d$  représente l'énergie dissipative,  $E_v$  est l'énergie due au caractère viscoélastique du fluide et provenant de la contribution du terme instationnaire d'inertie.



**FIGURE 4.16** – Nombre de Rayleigh stationnaire (trait plein) et Rayleigh oscillatoire pour le modèle de parois imperméables (...) avec  $M = 4$  et modèle de parois perméables (–) en fonction du rapport de séparation, pour les mêmes jeux de paramètres que précédemment avec  $\lambda_1 = 0.2$

L'énergie liée à la poussée d'Archimède est composée :

- d'une partie indépendante de la viscoélasticité du fluide  $E_t + E_s$  ;  $E_t$  étant la production d'énergie d'origine thermique et  $E_s$  est la partie due au caractère thermodiffusif (effet Soret) ;
- d'une deuxième partie  $E_{tv} + E_{sv}$  qui résulte de la viscoélasticité.  $E_{tv}$  étant l'énergie qui découle du couplage de la thermique et de la viscoélasticité, alors que  $E_{sv}$  représente l'apport combiné de la thermodiffusion et des propriétés viscoélastiques du mélange.

Il est important de noter que les 3 contributions d'énergie  $E_v$ ,  $E_{tv}$  et  $E_{sv}$  ne rentrent en jeu que pour une instabilité à caractère oscillatoire avec une fréquence  $\omega_c$  non nulle.

Nous notons que l'énergie dissipative  $E_d$  est toujours négative et joue naturellement un rôle stabilisant. Cette dissipation est compensée ou renforcée par les autres formes d'énergie qui peuvent être stabilisantes ou déstabilisantes de l'état de base.

Pour déterminer l'expression de chacune de ces énergies, nous résolvons le problème linéaire et nous obtenons :

$$u(z) = \tilde{u} \cos(\pi z), \quad (4.62)$$

$$w(z) = \tilde{w} \sin(\pi z), \quad (4.63)$$

$$\theta(z) = \tilde{\theta} \sin(\pi z), \quad (4.64)$$

$$c(z) = \tilde{c} \sin(\pi z). \quad (4.65)$$

avec

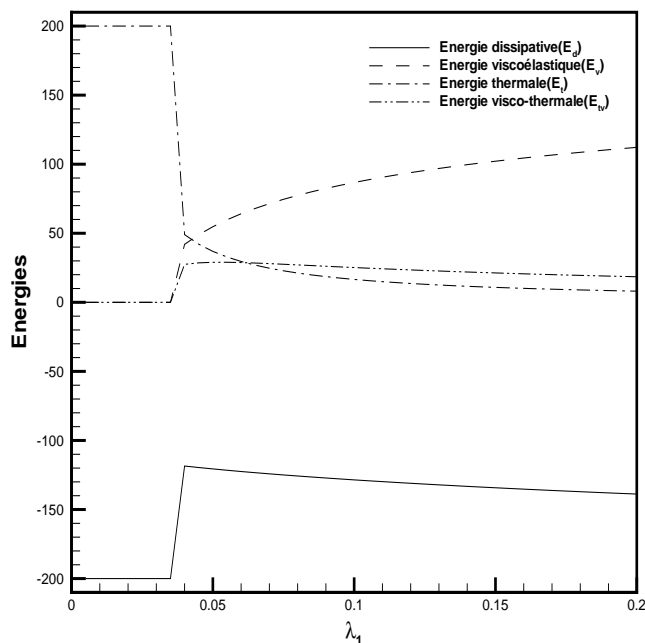
$$\tilde{u} = i \frac{\pi}{k_c} \tilde{w}, \quad (4.66)$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\pi^2 + k_c^2 + i\omega_c}{(k_c^2 + \pi^2)^2 + \omega_c^2}, \quad (4.67)$$

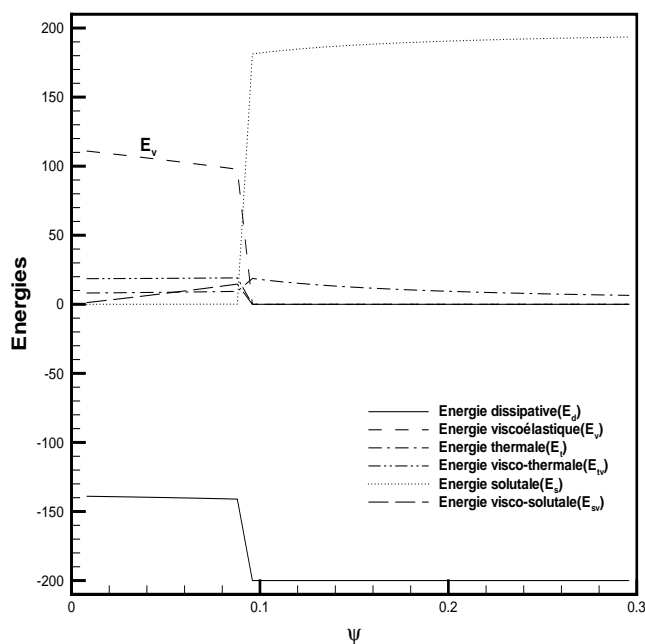
$$\tilde{c} = \frac{1}{-i\omega_c \varepsilon^* + Le(k_c^2 + \pi^2)} \left[ 1 + Le(k_c^2 + \pi^2) \frac{k_c^2 + \pi^2 + i\omega_c}{(k_c^2 + \pi^2)^2 + \omega_c^2} \right]. \quad (4.68)$$

une fois que nous introduisons ces expressions dans (4.61) et en tenant compte des valeurs critiques  $Ra_c$ ,  $\omega_c$  et  $k_c$  obtenues grâce à l'analyse de stabilité linéaire, nous sommes en mesure de comparer la contribution respective de chacune de ces énergies.

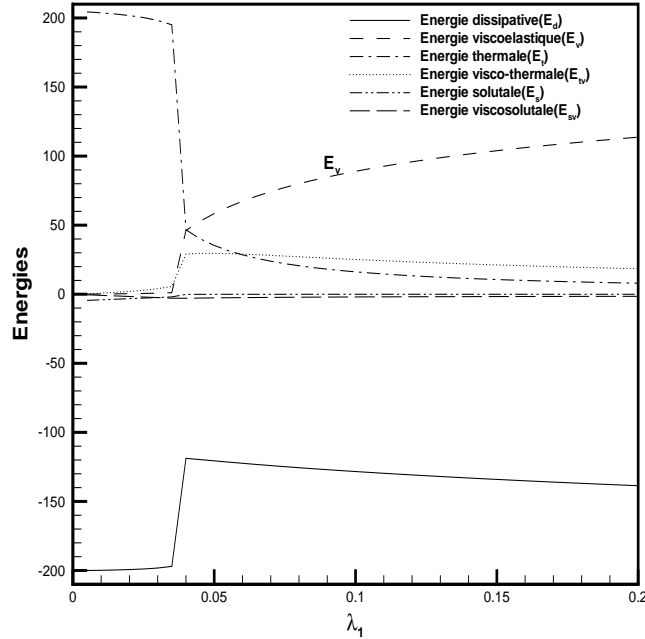
(a)



(b)



**FIGURE 4.17** – Bilan énergétique pour le modèle de paroi perméable en fonction des rapport de séparation et du temps de relaxation. Pour  $\psi = 0$ (a),  $\lambda_1 = 0.2$ (b).  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$



**FIGURE 4.18** – Bilan énergétique pour le modèle de paroi perméable en fonction du temps de relaxation, pour  $\psi = -0.001$ ,  $Le = 10^{-2}$ ,  $Pr_D = 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5$

#### 4.3.4.1 Origine de l'instabilité

##### Echange d'énergie dans le cas d'un fluide viscoélastique pur

Pour un fluide viscoélastique pur ( $\psi = 0$  et  $Le = 0$ ), l'énergie solutale  $E_s$  et l'énergie viscosolutale  $E_{sv}$  s'annulent. La dépendance vis-à-vis du temps de relaxation  $\lambda_1$  est représentée sur la figure 4.17(a) pour les quatre énergies restantes. Cette figure montre bien que pour les valeurs de  $\lambda_1$  voisines de zéro, l'énergie dissipée par le système est complètement restituée par l'apport d'énergie d'origine thermique ; la viscoélasticité ayant une contribution nulle ne joue aucun rôle pour ces valeurs de  $\lambda_1$ . On peut parler dans ce cas d'un régime purement thermique et où l'instabilité se manifeste d'une façon stationnaire comme nous l'avons vu au paragraphe (4.3.1.2). Lorsque  $\lambda_1$  est augmentée au delà de  $\lambda_1 \simeq 0.04$ , l'énergie thermique chute d'une façon drastique, alors que l'énergie due à la viscoélasticité augmente (effet déstabilisant) et compense en grande partie la chute avérée de l'énergie thermique. Il s'agit d'un régime viscoélastique où le mode d'échange se fait d'une façon oscillatoire dans le temps. Pour  $\lambda_1 = \lambda_{1c}$  où s'opère cette transition entre les deux régimes, l'apport d'énergie thermique est comparable à l'apport d'énergie viscoélastique, et agissant en concert pour compenser la dissipation du système.

### Echange d'énergie pour des fluides viscoélastiques avec un rapport de séparation positif

Nous avons illustré les différentes contributions énergétiques sur la figure 4.17(b) pour des rapports de séparation  $\psi$  positifs en fixant  $\lambda_1$ ,  $Le$ ,  $\varepsilon^*$  et  $Pr_D$ . Cette figure montre que l'énergie d'origine thermique  $E_t$  est très faible comparée à l'énergie  $E_v$  d'origine viscoélastique pour des valeurs de  $\psi$  inférieures à  $\psi_c \simeq 0.1$  d'une part et à la contribution énergétique  $E_s$  d'origine thermodiffusive pour  $\psi > \psi_c$  d'autre part. D'un point de vue physique, cela traduit le fait qu'un échauffement faible est de nature à amplifier soit les effets viscoélastiques pour  $\psi < \psi_c$ , soit l'effet Soret pour  $\psi > \psi_c$ . Cela est conforme aux résultats illustrés sur la figure (4.9) où on constate d'une part une forte chute du nombre de Rayleigh critique avec l'accroissement des valeurs de  $\psi$ , et une transition du mode viscoélastique oscillant (traits discontinus) à un mode thermodiffusif stationnaire (trait continu).

### Echange d'énergie dans le cas d'un rapport de séparation négatif

Le bilan énergétique est représenté sur la figure 4.18(c) pour une valeur de  $\psi = -0.001$  en fonction de  $\lambda_1$  à  $Le$ ,  $Pr_D$  et  $\varepsilon^*$  fixés. On constate que pour des faibles valeurs de  $\lambda_1$ , l'énergie  $E_s$  d'origine thermodiffusive est légèrement négative traduisant un effet stabilisant de l'effet Soret alors que la contribution des effets viscoélastiques est très négligeable. Cela se traduit par la prédominance du régime de Soret caractérisé par un mode oscillant à basse fréquence.

Par augmentation de  $\lambda_1$ , l'énergie viscoélastique  $E_v$  augmente d'une façon conséquente forçant la convection à s'organiser sous la forme de structures oscillantes à haute fréquence d'après les résultats issus de l'analyse de stabilité linéaire.

## 4.4 Conclusion

Il est bien reconnu que pour un mélange binaire de fluides Newtoniens, les premières instabilités convectives naissantes sont de nature oscillatoires dans le temps pour des rapports de séparation négatifs, alors que ces instabilités se présentent sous la forme de structures convectives stationnaires pour des rapports de séparation positifs. L'étude linéaire de stabilité de l'état de conduction et une analyse de l'origine de l'instabilité grâce à une approche énergétique montrent l'existence de deux régimes concurrents pour des rapports de séparation négatifs. Un régime dans lequel la viscoélasticité est le principal moteur de l'instabilité et un régime où le phénomène de thermodiffusion est le plus dominant. Les fréquences d'oscillation des structures convectives diffèrent d'un régime à l'autre et de plusieurs ordres de grandeur. Ce résultat est qualitativement conforme aux observations expérimentales de Kolodner [29].



Pour des rapports de séparation positifs, il est clairement établi que l'élasticité du fluide induit des oscillations des structures convectives, au détriment du caractère stationnaire de ces structures naturellement promu par l'effet Soret.



# Conclusion générale et perspectives

Les résultats obtenus le long de ce travail sont synthétisés et une extension possible de ces travaux est suggérée dans cette section.

Ce travail porte sur une étude théorique des instabilités spatio-temporelles pouvant naître et se développer dans un fluide confiné en milieu poreux chauffé par le bas. Deux approches de fluides viscoélastiques ont été abordées : une approche considérant le fluide viscoélastique comme pur et une autre approche dans laquelle le fluide viscoélastique est vu comme un mélange binaire de fluides viscoélastiques miscibles.

La formulation mathématique de l'équation du mouvement repose sur la loi de Darcy étendue aux fluides viscoélastiques.

La stabilité de la solution de l'état de conduction est étudiée aussi bien par rapport à des perturbations spatialement étendues que par rapport à des perturbations localisées. Dans un milieu poreux illimité horizontalement, on montre que la nature des structures thermoconvectives dépend des temps de relaxation et de retardation associés à l'élasticité du fluide.

Deux types de structures sont susceptibles de se former lorsque l'état de conduction perd sa stabilité. Des structures stationnaires ne dépendant pas des paramètres représentant l'élasticité du fluide, et des structures oscillatoires dont les caractéristiques (fréquences, nombre de Rayleigh et nombre d'onde) dépendent des temps de relaxation et de retardation. Les structures oscillatoires peuvent apparaître avant les structures stationnaires. En comparant les seuils d'apparition de ces deux types de structures, on montre que le temps de relaxation joue un rôle déstabilisant dans le système alors que le temps de retardation joue le rôle inverse.

La dynamique non linéaire a été explorée grâce à deux équations couplées, de type Landau-Ginzburg que nous avons obtenues rigoureusement. Chacune de ces équations décrit l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude de la composante verticale du champ de vitesse, composée d'onde descendantes et d'ondes montantes. Ces deux équations admettent deux types de solutions ; les ondes progressives (traveling waves) et les ondes fixes (standing waves). L'analyse de stabilité de chacune de ces deux solutions conduit à conclure que les ondes progressives sont stables, alors que les ondes fixes sont instables indépendamment des valeurs prises par les paramètres

viscoélastiques.

L'évaluation du transfert de chaleur représenté par le nombre de  $Nu$ , pour les deux types de structures a permis de voir que le transfert de chaleur est plus important pour les ondes progressives stables d'une part et que d'autre part le temps de relaxation favorise le transfert de chaleur lorsque le temps de retardation provoque l'effet inverse.

On s'est intéressé à la convection dans un milieu confiné afin d'étudier l'influence jumelé du rapport de forme  $a$  et des temps de relaxation et de retardation sur les caractéristiques linéaires de l'instabilité.

Comme en milieu illimité horizontalement nous avons montré que deux types de structures pouvaient se former au seuil de l'instabilité. Cependant, au voisinage d'un point appelé point de codimension 2, l'instabilité oscillatoire et l'instabilité stationnaire peuvent apparaître simultanément. Dans le régime non linéaire, nous avons étudié l'interaction entre ces deux modes d'instabilité grâce à un modèle réduit que nous avons obtenu au voisinage du point de codimension 2. Ce modèle réduit nous a permis d'identifier les bifurcations successives pouvant se produire en fonction des valeurs prises par les paramètres viscoélastiques. Le succès de ce modèle réduit réside dans le fait qu'il reproduit qualitativement et quantitativement les résultats issus des simulations directes du problème [7] et qu'il apporte un éclairage sur les observations expérimentales [29].

Dans la dernière partie de cette thèse nous avons considéré le fluide viscoélastique comme un mélange de deux fluides parfaitement miscibles, et étudié les effets thermodiffusives sur la naissance des structures thermoconvectives.

Les études menées pour les mélanges binaires de fluides Newtoniens montrent que les premières structures naissantes pour des rapports de séparation négatifs sont de nature oscillatoires tandis qu'elles sont stationnaires dans le cas des rapports de séparation positifs.

Pour les mélanges binaires de fluides viscoélastiques, l'approche de stabilité linéaire et une analyse du bilan énergétique ont permis de mettre en évidence la concurrence entre deux régimes pour des rapports de séparation négatifs. Un premier régime dans lequel l'élasticité du fluide est dominante et caractérisé par une convection oscillante à haute fréquence et un autre régime dans lequel l'effet Soret prend le dessus, donnant lieu à des oscillations à basse fréquence. Les résultats trouvés sont en bon accord avec des observations expérimentales [29]. Pour des rapports de séparation positifs, on montre que l'élasticité du fluide est responsable de la naissance d'un régime de convection oscillatoire.

Des questions intéressantes peuvent donner lieu à des approfondissements de

cette thèse. La partie réservée aux mélanges binaires s'est arrêtée à une analyse de stabilité linéaire. Une perspective intéressante de cette thèse est d'apprécier la dynamique non linéaire, de déterminer la nature des bifurcations et d'élucider le transfert de chaleur qui en résulte. Une autre perspective non moins intéressante est d'élucider les effets de l'élasticité du fluide sur le problème de Rayleigh-Bénard-Poiseuille tant en milieu fluide qu'en milieu poreux. Il est à noter qu'une thèse a débuté actuellement sur ce sujet et j'espère que ce mémoire sera utile pour accomplir cette tâche.



# Annexe A

## Calculs annexes

Cette partie est consacrée à la détermination des équations d'amplitude utilisées au chapitre 2, ainsi que le développement de calculs utiles pour cette thèse.

### A.1 Equations de Ginzburg-Landau couplées

Comme on s'intéresse à la convection bidimensionnelle, les vitesses selon les directions  $x$  et  $z$  peuvent être représentées sous l'expression d'une fonction de courant  $\varphi(x, z, t)$ , tel que :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{et} \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (\text{A.1})$$

Les équations gouvernant le problème bidimensionnel s'écrivent :

$$\begin{cases} \left(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 \varphi + Ra \left(1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta}{\partial x} = O, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nabla^2 \theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z}. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Avec les nouvelles conditions aux limites

$$\varphi = \theta = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1$$

Les équations de (A.2) peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$(L' \partial_t + L(Ra))V = N. \quad (\text{A.3})$$

avec

$$L' = \begin{pmatrix} \lambda_2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & \lambda_1 Ra \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

où le vecteur  $V = (\varphi, \theta)^T$  avec  $\theta$  la perturbation de la température et  $\varphi$  est la fonction de courant. La notation  $^T$  représente la transposée.  $L$  est l'opérateur linéaire :

$$L = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) & Ra \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

$N$  est l'opérateur non linéaire dont les expressions seront explicitées par la suite. On sait d'après l'étude linéaire menée au chapitre 2 que pour  $Ra = Ra_c$ ,  $V$  présente une bifurcation. Pour  $Ra > Ra_c$ , la méthode consiste à introduire un petit paramètre  $\varepsilon$  qui mesure les ordres de grandeur, et à développer  $V$ , le paramètre  $Ra$ , ainsi que les variables de temps et d'espace, en fonction de  $\varepsilon$ .

$$\theta = \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \dots \quad (\text{A.6})$$

$$\varphi = \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots \quad (\text{A.7})$$

Ensuite, on introduit deux variables lentes dans le temps

$$t_1 = \varepsilon t, \quad (\text{A.8})$$

$$t_2 = \varepsilon^2 t, \quad (\text{A.9})$$

$$Ra = Ra_c + \varepsilon^2 R_2. \quad (\text{A.10})$$

De même, on introduit une échelle lente de l'espace :  $X = \varepsilon x$

Ce qui conduit aux dérivées partielles temporelles et spatiales :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X}, \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2}. \quad (\text{A.13})$$



Ces transformations consistent à séparer les ordres de grandeur temporels et spatiaux auxquels interviennent les divers phénomènes.

Lorsque l'état de conduction perd sa stabilité i.e  $Ra = Ra_c$ , le taux d'accroissement temporel de certains modes diverge comme  $\frac{1}{Ra - Ra_c}$ . Cet accroissement temporel linéaire de l'instabilité est compensé par les termes non linéaires d'ordre minimal dans l'équation d'amplitude.

En remplaçant le développement (A.7) et les relations (A.10) et (A.13) dans le système (A.2), et en identifiant les coefficients de même puissance en  $\varepsilon$ , le système s'écrit sous la forme d'une série de problèmes linéaires :

$$(L' \partial_t + L_0)V^1 = 0 = SM_1, \quad (\text{A.14})$$

$$(L' \partial_t + L_0)V^2 = -L' \partial_{t_1} V^1 + N^{(2)} = SM_2, \quad (\text{A.15})$$

$$(L' \partial_t + L_0)V^3 = -L' \partial_{t_1} V^2 - L' \partial_{t_2} V^1 + N^{(3)} = SM_3. \quad (\text{A.16})$$

où  $L_0$  est l'opérateur  $L$  linéaire pour  $Ra = Ra_c$ ,  $N^{(2)}$  et  $N^{(3)}$  sont des termes non linéaires et les  $SM_n$  les seconds membres.

Les équations (A.16) peuvent alors s'écrire comme suit :

$$(L' \partial_t + L_0)V^n = SM_n. \quad (\text{A.17})$$

Ces équations n'ont de solution que si le second membre  $SM_n$  est orthogonal au noyau de l'opérateur adjoint  $(L' \frac{\partial}{\partial t} + L_0)^\dagger$ . Cette condition de compatibilité ou alternative de Fredholm s'écrit :

$$\langle V_p, SM_n \rangle = 0. \quad (\text{A.18})$$

Où  $V_p$  est le vecteur propre qui engendre  $\ker(L' \frac{\partial}{\partial t} + L_0)^\dagger$  et  $\langle, \rangle$  est le produit scalaire. La condition A.18 entraîne l'existence de  $V^n$ , mais pas son unicité. On impose alors une condition d'orthogonalité des solutions d'ordres successifs avec  $V^1$  :

$$\langle V^n, V^1 \rangle = 0$$

en suivant cette démarche on résoud successivement les équations (A.16) à chaque ordre.

A l'ordre  $\varepsilon$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta_1 = 0, \\ \left( 1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_1 + Ra_c \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

Avec

$$\varphi_1 = \theta_1 = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad z = 1$$

On pose donc :

$$\theta_1 = (A_1 e^{i\omega_c t + ik_c x} + A_2 e^{i\omega_c t - ik_c x}) \sin(\pi z) + cc; \quad (\text{A.20})$$

$$\varphi_1 = (B_1 e^{i\omega_c t + ik_c x} + B_2 e^{i\omega_c t - ik_c x}) \sin(\pi z) + cc. \quad (\text{A.21})$$

Les valeurs de  $Ra_c$ ,  $k_c$  et  $\omega_c$  ont déjà été obtenues précédemment, ainsi bien pour une instabilité stationnaire ( $\omega_c = 0$ ) que pour une instabilité oscillante ( $\omega_c \neq 0$ ).

La solution dans les deux cas est :

$$B_1 = \frac{ic - \omega_c}{k_c} A_1 \quad \text{et} \quad B_2 = -\frac{ic - \omega_c}{k_c} A_2. \quad (\text{A.22})$$

Avec  $C = k_c^2 + \pi^2$

A l'ordre  $\varepsilon^2$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( 1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_2 + Ra_c \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = SM_{21} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta_2 = SM_{22}. \end{array} \right. \quad (\text{A.23})$$

où  $SM_{21}$  et  $SM_{22}$ , s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} SM_{21} = - \left( 1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} \varphi_1 \\ \quad - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_1 \\ \quad - Ra_c \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial X} - Ra_c \lambda_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_1 \partial x}, \quad (A.24) \\ \\ SM_{22} = - \frac{\partial \theta_1}{\partial t_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial X} \\ \quad + 2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x \partial X} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}. \end{array} \right.$$

$$\varphi_2 = \theta_2 = 0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } z = 1$$

L'alternative de Fredholm appliquée à cet ordre donne deux équations de compatibilité qui s'écrivent :

$$\frac{\partial A_1}{\partial t_1} = \frac{k_c}{\omega_c} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{\partial A_1}{\partial X}, \quad (A.25)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t_1} = - \frac{k_c}{\omega_c} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{\partial A_2}{\partial X} \quad (A.26)$$

Ces deux équations permettent de décrire le phénomène d'advection des amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  aux vitesses de groupes respectives :

$$V_g^- = \frac{k_c}{\omega_c} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad \text{et} \quad V_g^+ = -V_g^-. \quad (A.27)$$

Ces deux conditions de compatibilité étant vérifiées, on cherche  $\theta_2$  en supposant qu'elle est orthogonale à  $\theta_1$  afin d'éviter d'introduire une nouvelle amplitude. Dans ce cas, on trouve que :

$$\theta_2 = \theta_{20} \sin(2\pi z) + (\theta_{22} e^{2i\omega t} + c.c) \sin(2\pi z). \quad (A.28)$$

avec

$$\theta_{20} = - \frac{c}{2\pi} (|A_1|^2 + |A_2|^2)$$

et

$$\theta_{22} = -\pi \frac{c + i\omega_c}{2\pi^2 + i\omega_c} A_1 A_2$$

$$\varphi_2 = -\frac{i}{k_c} \left\{ -\frac{k_c}{\omega_c} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) - \frac{ic - \omega_c}{k_c} + 2ik_c \right\} \times \quad (\text{A.29})$$

$$\left\{ \frac{\partial A_1}{\partial X} e^{i\omega t + ik_c x} + \frac{\partial A_2}{\partial X} e^{i\omega t - ik_c x} \right\} \sin \pi z + c.c. \quad (\text{A.30})$$

A l'ordre  $\varepsilon^3$

$$\left( 1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_3 + Ra_c \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = SM_{31}, \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \theta_3 = SM_{32}. \quad (\text{A.32})$$

Avec

$$\begin{aligned} SM_{31} &= -\frac{\partial \theta_2}{\partial t_1} - \frac{\partial \theta_1}{\partial t_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial X} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} \theta_2 + \frac{\partial^2}{\partial X^2} \theta_1 \\ &\quad - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial \theta_1}{\partial X} \\ &\quad + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial X} \frac{\partial \theta_1}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned} SM_{32} &= -\left( 1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} \varphi_2 - \left( 1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial X^2} \varphi_1 \\ &\quad - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_2 - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t_2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_1 \\ &\quad - 2\lambda_2 \frac{\partial^3}{\partial t_1 \partial x \partial X} \varphi_1 - R_2 \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - Ra_c \left( 1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_2}{\partial X} \\ &\quad - Ra_c \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - Ra_c \lambda_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_1 \partial X} - Ra_c \lambda_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t_2 \partial x}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

On sait que lorsque l'état de conduction perd sa stabilité, deux types de structures sont susceptibles d'apparaître au seuil, celles pour lesquelles la fréquence  $\omega_c \neq 0$  (instabilité oscillatoire) et celles pour lesquelles la fréquence  $\omega_c = 0$  (instabilité stationnaire).

### A.1.1 Equation d'amplitude pour les structures oscillatoires

Dans le cas des structures oscillatoires pour lesquelles  $\omega_c \neq 0$ ,

A l'ordre  $\varepsilon^3$ , la condition de compatibilité est obtenue en appliquant l'alternative de Fredholm.

Pour obtenir une équation d'amplitude contenant les variables d'espace et de temps originelles  $x$  et  $t$ , il faut réintroduire les relations :

$$\partial_t A_1 = \varepsilon \partial_{t_1} A_1 + \varepsilon^2 \partial_{t_2} A_1, \quad (\text{A.35})$$

$$\partial_x A_1 = \varepsilon \partial_X A_1. \quad (\text{A.36})$$

On obtient les deux équations d'amplitudes couplées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial t} + v_g^+ \frac{\partial A_1}{\partial x} &= (\mu_r + i\mu_i) A_1 + (\beta_r + i\beta_i) \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} \\ &\quad - (\alpha_r + i\alpha_i) A_1 |A_1|^2 - (\gamma_r + i\gamma_i) A_1 |A_2|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_2}{\partial t} + v_g^- \frac{\partial A_2}{\partial x} &= (\mu_r + i\mu_i) A_2 + (\beta_r + i\beta_i) \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} \\ &\quad - (\alpha_r + i\alpha_i) A_2 |A_2|^2 - (\gamma_r + i\gamma_i) A_2 |A_1|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Les coefficients qui apparaissent dans (A.37) et (A.38) dépendent des temps de relaxation  $\lambda_1$  et de retardation  $\lambda_2$  :

$$\begin{aligned} v_g^+ &= \frac{k_c^o}{\omega_c^o} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = -v_g^-, \\ \mu_r &= \frac{Ra - Ra_c^o}{2\lambda_2 Ra_c^o} (1 + \lambda_2 (k_c^2 + \pi^2)), \\ \mu_i &= -\frac{k_c^2 (Ra - Ra_c^o)}{2\omega_c^o \lambda_2 (k_c^2 + \pi^2)}, \\ \beta_r &= \frac{1}{2\lambda_2 (k_c^2 + \pi^2)} \left( \lambda_2 k_c^2 + \frac{3\pi^2 (1 + \lambda_2 \pi^2)}{k_c^2} \right), \\ \beta_i &= \frac{1}{2\omega_c} \left[ \frac{k_c^2 \lambda_1 \lambda_2}{(k_c^2 + \pi^2)(\lambda_1 - \lambda_2) - 1} \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)^2 - \left( \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) + \frac{4k_c^2}{\lambda_1 (k_c^2 + \pi^2)} \right) \right], \\ \alpha_r &= \frac{k_c^2 + \pi^2}{4\lambda_2} (1 + \lambda_2 (k_c^2 + \pi^2)), \end{aligned}$$

$$\alpha_i = -\frac{(k_c^2 + \pi^2)(1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2))}{4\lambda_1\lambda_2\omega_c},$$

$$\gamma_r = \frac{1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)}{2\lambda_2} \times a,$$

$$\gamma_i = -\frac{1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)}{2\lambda_2} \times b,$$

$$a = \frac{k_c^2 + \pi^2}{2} + (1 - \lambda_1(k_c^2 + \pi^2))\left(\frac{1}{\lambda_2} - 2\pi^2\right)\frac{\pi^2}{\lambda_1(4\pi^4 + \omega_c^2)},$$

$$b = \frac{\pi^2(2\pi^2 + (k_c^2 + \pi^2))\omega_c}{4\pi^4 + \omega_c^2} + \frac{k_c^2 + \pi^2}{2\lambda_1\omega_c} + \frac{\pi^2(2\pi^2(k_c^2 + \pi^2) - \omega_c^2)}{\lambda_1\omega_c(4\pi^4 + \omega_c^2)},$$

### A.1.2 Equation d'amplitude pour les structures stationnaires

Par souci de brièveté, nous ne détaillerons pas les calculs qui permettent d'obtenir l'équation d'amplitude dans le cas des structures stationnaires. La même démarche, appliquée précédemment aux structures oscillatoires permet d'obtenir les résultats suivants :

A l'ordre  $\varepsilon$ , les solutions qui décrivent des rouleaux stationnaires sont :

$$\theta_1 = Ae^{ik_c x} \sin(\pi z) + c.c.; \quad (\text{A.39})$$

$$\varphi_1 = Be^{ik_c x} \sin(\pi z) + c.c. \quad (\text{A.40})$$

avec  $k_c = \pi$  et  $B = 2\pi iA$ .

A l'ordre  $\varepsilon^2$ , la condition de compatibilité est automatiquement vérifiée dans ce cas.

Les solutions à cet ordre s'écrivent :

$$\theta_2 = -\pi|A|^2 \sin(2\pi z), \quad (\text{A.41})$$

$$\varphi_2 = 0. \quad (\text{A.42})$$

A l'ordre  $\varepsilon^3$ , l'application de l'alternative de Fredholm fournit l'équation qui décrit l'évolution spatio-temporelle de  $A(x, t)$  :

$$[1 - 2\pi^2(\lambda_1 - \lambda_2)] \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{Ra - 4\pi^2}{2} A + 2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - 2\pi^4 A|A|^2. \quad (\text{A.43})$$

## A.2 Calcul de $\alpha_r - \gamma_r$

On rappelle :

$$\alpha_r = \frac{k_c^2 + \pi^2}{4\lambda_2} (1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)),$$

$$\gamma_r = \frac{1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)}{2\lambda_2} \times a,$$

avec

$$a = \frac{k_c^2 + \pi^2}{2} + (1 - \lambda_1(k_c^2 + \pi^2)) \left( \frac{1}{\lambda_2} - 2\pi^2 \right) \frac{\pi^2}{\lambda_1(4\pi^4 + \omega_c^2)},$$

On aura finalement :

$$\alpha_r - \gamma_r = (1 - (k_c^2 + \pi^2)\lambda_1)\pi^2 \left( 2\pi^2 - \frac{1}{\lambda_2} \right) \left( \frac{1 + \lambda_2(k_c^2 + \pi^2)}{2\lambda_2} \right) \left[ \frac{1}{\lambda_1(4\pi^4 + \omega_c^2)} \right].$$

$$(1 - (k_c^2 + \pi^2)\lambda_1) < 0 \text{ car } \lambda_2 < \lambda_1 - \frac{1}{(k_c^2 + \pi^2)}.$$

D'autre part  $2\pi^2 - \frac{1}{\lambda_2} > 0$  si et seulement si  $2\pi^2 > \frac{1}{\lambda_2}$  soit encore  $\lambda_2 > \frac{1}{2\pi^2} \simeq \frac{1}{20} = 0.05$  or pour les fluides viscoélastiques les plus couramment rencontrés  $\lambda_2 \in [0.1; 1]$  finalement, on obtient que  $\alpha_r - \gamma_r < 0$ .





# Bibliographie

- [1] **BEAR J.**, *Dynamics of fluid in porous media*, New York, 3<sup>e</sup> Ed. University of Toronto Press(1972)
- [2] **BENJAMIN T. B. AND J. E. FEIR**, *The disintegration of wave trains on deep water*, part 1 theory, *J. Fluid Mech.*,27, 417-430 (1967).
- [3] **BOIS P. A.**, *Introduction à la mécanique théorique des fluides*, Ellipses, (200)
- [4] **H. R. BRAND, V. STEINBERG**, *Physica*,119A(2010)327
- [5] **R. J. BRIGGS**, *Electron-Stream Interaction with Plasmas*, MIT Press, (1964)
- [6] **BRINKMAN H. C.**, *A calculation of viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particules*, *Applied Sciences Research*, A1, p.27-34, (1947)
- [7] **CEJI FU, ZHIYONG ZHANG WENCHANG TAN**, *Numerical simulation of thermal convection of a viscoelastic fluid in a porous square box heated from below*, *Phys. Fluids* 19, (2007)104107
- [8] **K. CLUSIUS AND G. DICKEL**, *Das Trennröhrverfahren bei Flüssigkeiten*, *Naturwiss*,27, 148-149 (1939).
- [9] **COMBARNOUS M. & BORIES S. A.**, *Hydrothermal convection in saturated porous media* , *Advances in hydroscience*, 10, p. 231-307, (1975)
- [10] **COMBARNOUS M. & BORIES S. A.**, *Modélisation de la convection d'une couche poreuse horizontale à l'aide d'un coefficient de transfert solide-fluide*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 17, 505-514, (1974)
- [11] **DIPRIMA R. C., ECKHAUS W. & SEGEL L. A.**, *A non-linear wave number interaction in near-vertical two-dimensional flows*, *J. Fluid Mech.*, 49(4), 705-744, (1971).
- [12] **DO-YOUNG YOU & AL**, *The onset of oscillatory convection in a horizontal porous layer saturated with viscoelastic liquid*, *Klwer Academic Publishers*, p. 275-284, (2004).
- [13] **ESSAI SUR LA LOI DE DARCY**, Thèse, Université de Toulouse, (1965)
- [14] **FIRDAOUSS M., GUERMOND J. L. & LE QUÉRÉ P.**, *Non linear correction to Darcy's law at low Reynolds numbers*, *J. Fluid Mech.*, vol. 343, p.331-350, (1997)
- [15] **FORCHHEIMER F.**, *Wassergnengung durch boden*, *Z. Vereines. Deutcher Ingenieure*, XXXV, 49 p. 1736-1741, p. 1781-1788, (1901)
- [16] **C. J. FU, Z. Y. ZHANG, W. C. TAN**, *Phys. Fluids*, 19(2007)104107
- [17] **GINZBURG V. L. & LANDAU L. D.**, *On the theory of superconductivity*, *Collection d'articles de Landau(article No73)*, Edition Pergamon.

- [18] **GIVLER R. C. & ALTABELLI S. A.**, *A determination of effective viscosity for the Brinkman-Forchheimer flow model*, J. Fluid Mech., 258, p.355-370, (1994)
- [19] **B. ELHAJJAR, A. MOJTABI, M. MARCOUX, & M-C CHARRIER-MOJTABI**, *Etude de la thermogravitation dans une couche fluide horizontale*, C. R. Mécanique, 334 (2006), p.621-627
- [20] **B. ELHAJJAR, M-C CHARRIER MOJTABI, & A. MOJTABI**, *Separation of a binary fluid mixture in a porous horizontal cavity*, Physical Review E 77, 026310 (2008)
- [21] **GUCKENHEIMER J. HOLMES P.**, *Nonlinear oscillations, dynamical system and bifurcation of vector fields.*, (2002)
- [22] **GUYON E., PETIT L. & HULIN J.P.**, *Hydrodynamique physique*, EDP sciences/CNRS Edition, (2001)
- [23] **HALL L. S. & HECKROTTE W.**, *Instabilities : Convective versus Absolute*, Phys. Rev., 166, No 1, (1968)
- [24] **HELIN LIONEL**, *Développement des modèles algébriques explicites pour les fluides viscoélastiques*, Thèse de doctorat, lille 1,(2006)
- [25] **S. C. HIRATA, M. N. OUARZAZI**, *Phys. Lett.*, A 374 (2010) 2661
- [26] **HORTON C. W. RODGERS F. T.**, *Convection currents in a porous media*, J. Appl. Phys., 16, 367-370(1945)
- [27] **HUERRE P. & MONKEWITZ P. A.**, *Absolute and convective instabilities in free shear layers*, J. Fluid Mech., 159, p.151-168, (1985)
- [28] **M. C. KIM, S. B. LEE, S. KIM, B. J. CHUNG**, *Int. J. Heat Mass transfer*, 46(2003)5065
- [29] **P. KOLODNER**, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 75 (1998)167
- [30] **KOSCHMIEDER E.L. & PALLAS S.G.**, *Heat transfer through a shallow, horizontal convecting fluid layer*, Int. J. heat Mass Transfer, 17, 991-1002, (1974).
- [31] **B. KHUZHAYOROV, J. L. AURIAULT & P. ROYER**, *Derivation of macroscopic filtration law for transient linear viscoelastic fluid flow in porous media*, Int. J. Eng. Sc., 38(2000) 487-505
- [32] **L. LANDAU & E. M. LIFSHITZ**, *Fluid Mechanics*, London, Pergamon, (1959)
- [33] **LAPWOOD E. R.**, *Convection of a fluid in a porous medium*, Proc. Camb. Phil. Soc., 44, 508-521(1948)
- [34] **LINDQUIST E.**, *Proceeding of premier congrès des grands barrages*, Stockholm (1930)
- [35] **S. J. LINZ, M. LÜCKE**, *Phys. Rev.*, A, 35 (1987) 3997
- [36] **M. S. MALASHETTY, I. S. SHIVAKUMARA, S. KULKANI**, *Phys. Lett*, A 373(2009)781
- [37] **MANNEVILLE P.**, *Structures dissipatives : chaos et turbulences*
- [38] **MARLE C. M.**, *Écoulement monophasique en milieux poreux*, Revue Institut Français du Pétrole, 22, 10 p. 1471-1509, (1967)

- [39] MARTINEZ-MARDONES J., TIEMANN R., WALGRAEF D. & ZELLER W., *Amplitude equations and pattern selection in viscoelastic convection*, Physical Review, vol. 54, number 2, p. 1478-1480, (1996)
- [40] J. MARTINEZ-MARDONES, R. TIEMANN, D. WALGRAEF, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 93 (2001) 1
- [41] MEI C. & AURIAULT J-L. , *The effect of weak inertia on flow through a porous medium*, J. Fluid Mech., 222, p. 647-663, (1991)
- [42] MIN CHAN KIM, SANG BAEK LEE, SIN KIM & BUM JIN CHUNG., *Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media*, Int. J. Heat Mass transfer, 46, (2003),p.5065
- [43] MUSKAT M., *The flow of homogenous fluids through porous media*, The Maple Press Company, York, PA, (1946)
- [44] NAYFEH A. H., *Perturbation methods*, Wiley, New York, (1973).
- [45] NEWELL A. C. & WHITEHEAD J. A., *Finite bandwidth, finite amplitude convection*, J. Fluid Mech., 38, 279-303, (1969).
- [46] NIELD D. A. & BEJAN A., *Convection in porous media*, Springer, Seconde edition 1999
- [47] M. N. OUARZAZI, P. A. BOIS, *Eur. J. Mech., B/Fluids*,13(1994)423
- [48] M. N. OUARZAZI, A. JOULIN, P. A. BOIS, J. K. PLATTEN, *Thermal Nonequilibrium Phenomena in fluid mixtures*, W. Köhler and S. Wiegand(Eds), *Lecture notes in physics*, 584,(2002)428
- [49] QUINTARD M. & WHITAKER S., *One and two-equation models for transient diffusion process in two-phase system*, Advances in Heat Transfert, Vol. 23, p.369-464, (1993)
- [50] RAHIMIAN M. H. & POURSHAGHAGHY, *Direct simulation of forced convection flow in a parallel plate channel filled with porous media*, Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol.29, Numero 6, p. 867-878, (2002)
- [51] SANCHEZ-PALENCIA E., *Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes*, Int. J. Engng. Sc., vol.12, p. 331-351, (1980)
- [52] SANCHEZ-PALENCIA E., *Non-homogenous media and vibration theory*, Lectures Notes in physics , Numero 127, (1980)
- [53] SEGEL L. A., *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection*, J. Fluid Mech., 38, 203-235, (1969).
- [54] SHEIDEGGER A.E, *The physics of flow through porous media*, University of Toronto press, (1960)
- [55] SKJETNE E. & AURIAULT J. L., *New insights on steady non-linear flow in porous media*, European J. Mech. B Fluids, 18, (1), p. 131-145, (1999)
- [56] C. SORET, *Influence de la température sur la distribution des sels dans leurs solutions*, C. R. Acad. Sci., 91, 289-291 (1880).
- [57] O. SOVRAN, M-C. CHARRIER-MOJTABI, A. MOJTABI, *C. R. Acad. Sci.*, 329(2001)287
- [58] STEWARTSON K. & STUART J. T., *A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow*, J. Fluid Mech., 48, 529-545, (1971).

- 
- [59] **R. Q. TWISS**, *Propagation in electronion streams*, Phys. Rev., 88, p.1392-1407, (1952)
- [60] **P. VADASZ**, *Coriolis effect on gravity-driven convection in a rotating porous layer heated from below*, J. Fluid Mech., 376, 351-375 (1998)
- [61] **S. WANG, W. TAN**, *Phys. Lett.*, A 372(2008)3046
- [62] **S. WANG, W. TAN**, *Phys. Lett*, A 373(2009)776
- [63] **WHITAKER S.**, *Advances in theory of fluid motion in porous media*, Industrial and Engineering Chemistry, 61, vol.12, p. 15-26, (1969)
- [64] **WODIE J. C.**, *Contribution à l'étude des milieux poreux par la méthode de l'homogénéisation : filtration non linéaire, milieux fissurés*, Thèse, Université Paris 6, (1992)
- [65] **Z. ZHANG, C. I. FU, W. TAN**, *Phys. Fluids*, 20(2008)084103
- [66] **ZHIYONG ZHANG, CEJI FU & WENCHANG TAN.**, *Linear and nonlinear stability analyses of thermal convection for Oldroyd-B fluids in porous media heated from below*, Physics of fluids, 20, (2008),p.084103-1

## Résumé :

Dans ce travail de thèse, on étudie les différentes instabilités pouvant se développer dans un milieu poreux saturé par un fluide viscoélastique et chauffé par le bas. La formulation mathématique des équations de ce problème repose sur la loi phénoménologique de Darcy généralisée à un fluide viscoélastique vérifiant l'approximation de Boussinesq.

Ce problème admet une solution de conduction, et on trouve que deux types de structures sont susceptibles d'apparaître lorsque l'état de conduction perd sa stabilité : des structures stationnaires et des structures oscillatoires. Les propriétés linéaires de ces structures sont étudiées en fonction des paramètres adimensionnés du problème. L'investigation non linéaire de l'instabilité oscillatoire montre que l'élasticité du fluide favorise l'émergence d'ondes progressives au dépend d'ondes spatialement fixes lorsque le massif poreux est supposé de grande extension horizontale. Le transfert de chaleur qui découle des mouvements convectifs est évalué et discuté en fonction de l'élasticité du fluide.

Lorsque le milieu poreux est confiné, on montre qu'une compétition entre les structures stationnaires et oscillatoires ait lieu au voisinage d'un point appelé point de codimension 2. La dynamique non linéaire montre alors qu'une succession de bifurcations se produit et qui permet une meilleure interprétation physique des résultats issus de simulations numériques directes.

Enfin, s'appuyant sur les propriétés de mélanges binaires des fluides viscoélastiques, une étude théorique est réalisée tenant compte des nombreuses sources physiques de l'instabilité. Nous montrons l'existence de deux régimes : un régime où la viscoélasticité est dominante et un autre où l'effet thermo-diffusif l'emporte. Ce résultat permet d'expliquer certaines observations expérimentales relatives à la convection des fluides viscoélastiques de chaînes d'ADN.

Mots clés : Instabilités, fluides viscoélastiques, mélanges binaires, milieu poreux.

## **Abstract :**

Title : Thermal and thermo-diffusive instabilities of viscoelastic fluids in a porous media

In this theoretical and numerical work, we study different instabilities which can develop in a porous media saturated by a viscoelastic fluid and heated from below. The mathematical formulation of the equations of this problem is based on phenomenological Darcy law generalized to a viscoelastic fluid under Boussinesq approximation.

A conduction state is a solution of this problem, and we find that two types of convective structures may appear when this basic solution loses its stability : stationary and oscillatory structures. The linear properties of these thermo-convective structures are determined and the influence of the fluid elasticity is highlighted. In particular, when the porous layer is considered infinitely extended in the horizontal direction, a nonlinear stability analysis demonstrated that the fluid elasticity promotes the traveling waves. The convective heat transfer associated to stable travelling waves is evaluated by means of Nusselt number.

When the porous medium is confined, it is found that a nonlinear competition between stationary and oscillatory structures may occur near a codimension-two bifurcation point . Near that point, we determined the phase portrait and the successive bifurcations associated with nonlinear dynamics. The theoretical results allows one to better understand the physical mechanisms behind the full numerical simulation results.

Finally, by taking into account binary mixture properties of the viscoelastic fluids, a theoretical study is performed which takes into account different mechanisms of the instability. It is found that there is a competition between two states in which either viscoelasticity or thermo-diffusive effect is dominant. This result shed a new light on the experimental observations dealing with convection with DNA suspensions.

Key words : instabilities, viscoelastic fluid, binary mixtures, porous media.