

Université des Sciences et Technologies de LILLE

Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)

Ecole Doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur Lille Nord-de France

Année 2011 - N° d'ordre : 40717

# THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LILLE I

*Discipline : Génie Civil*

présentée et soutenue publiquement par

**Wanqing SHEN**

date de soutenance : le 09 Décembre 2011

## **Modélisations micro-macro du comportement mécanique des matériaux poreux ductiles : application à l'argilite du Callovo-Oxfordien**

### **JURY**

M. Gărăjeu	Maître de Conférences, HDR, Universités d'Aix-Marseille	Rapporteur
A. Giraud	Professeur, INPL, LAEGO	Rapporteur
G. De Saxcé	Professeur, USTL, LML	Examineur
L. Dormieux	Professeur, ENPC, Champs-sur-Marne	Examineur
F. Plas	Chef de service, Direction Scientifique Andra	Examineur
J-F. Shao	Professeur, USTL, LML	Examineur
D. Kondo	Professeur, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI	Directeur de thèse

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML). Je souhaite tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Monsieur Djimédo Kondo, pour sa grande patience et le soutien qu'il m'a apporté tout au long de thèse. Ses connaissances et sa rigueur scientifique m'ont permis de mener à bien les différents sujets abordés dans ce mémoire.

Je voudrait exprimer ma gratitude tout particulièrement envers Monsieur Jian-Fu Shao pour m'avoir accueilli dans son groupe depuis mes études en DEA et pour avoir éveillé ma curiosité scientifique. Je le remercie également pour avoir participé à l'évaluation de ce travail.

Je souhaite remercier Monsieur Géry De Saxcé qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de soutenance de thèse ainsi que Messieurs Mihaïl Gărăjeu et Albert Giraud qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je tiens également à remercier Monsieur Luc Dormieux et Frédéric Plas, membres du jury en tant qu'examinateurs.

J'exprime ma reconnaissance au Ministère Français de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche qui a financé ce travail par une Allocation de Recherche.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble de l'équipe ER4 du LML pour leur accueil et leur amitié. Je pense en tout premier lieu à Qizhi ZHU pour son aide pendant mon stage de DEA mais également (dans le désordre) à : Jian, Dawei, Marie-Christine, Nathalie, Anne-Marie,...

Enfin, je remercie sincèrement mes parents et ma copine Yinglin pour leur patience et leurs encouragements tout au long de ce travail.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Principales Notations</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>

## Chapitre 1

### Critère de plasticité isotrope de milieux ductiles poreux

1.1	Introduction . . . . .	14
1.2	Micromécanismes d'endommagement et de rupture des milieux poreux ductiles . . . . .	14
1.3	Le critère de Gurson . . . . .	16
1.3.1	Méthodologie générale . . . . .	16
1.3.2	Expression du critère de Gurson . . . . .	18
1.4	Critères issus de l'homogénéisation non-linéaire des milieux poreux . . . . .	21
1.5	Extension récente du critère de Gurson proposée par Monchiet et al.[39] . . . . .	23
1.6	Comparaisons de critères . . . . .	26
1.7	Conclusion . . . . .	28

## Chapitre 2

### Critère macroscopique de milieux ductiles poreux : cas des cavités sphéroïdales aléatoirement orientées

2.1	Résumé du chapitre . . . . .	32
2.2	Introduction . . . . .	34
2.3	Formulation du critère macroscopique pour milieux poreux avec des cavités sphéroïdales aléatoirement orientées . . . . .	35

2.3.1	Expression générale du critère de plasticité pour une cavité sphéroïdale allongée ou aplatie[38] . . . . .	35
2.3.2	Critère macroscopique de plasticité pour des cavités sphéroïdales aléatoirement orientées . . . . .	37
2.4	Evaluation du critère établi . . . . .	40
2.4.1	Cas de cavités allongées . . . . .	40
2.4.2	Cas de cavités aplaties . . . . .	40
2.5	Cas particulier des fissures circulaires (“penny-shaped cracks”) . . . . .	43
2.6	Conclusion . . . . .	45
2.7	Annexe . . . . .	47

<p><b>Chapitre 3</b></p> <p><b>Plasticité de milieux poreux à matrice plastiquement compressible de type Green</b></p>
--

3.1	Introduction . . . . .	54
3.2	Critère macroscopique pour un milieu poreux à matrice compressible de type Green . . . . .	55
3.2.1	Critère local elliptique et fonction d’appui associée . . . . .	55
3.2.2	Champ de vitesse utilisé . . . . .	57
3.2.3	Critère macroscopique du milieu poreux . . . . .	58
3.3	Recherche de la solution exacte pour des chargements hydrostatiques . . .	62
3.4	Applications aux matériaux poreux avec deux populations de cavités . . .	65
3.4.1	Cas d’un matériau poreux à matrice de type Gurson [27] . . . . .	65
3.4.2	Cas où la matrice microporeuse est régie par le critère de [45] . . .	67
3.4.3	Cas de la matrice microporeuse régie par le critère de [35] . . . . .	69
3.5	Conclusion . . . . .	71
3.6	Annexe . . . . .	72

<p><b>Chapitre 4</b></p> <p><b>Homogénéisation par approche incrémentale du comportement de l’argilite</b></p>
--

4.1	Introduction . . . . .	78
4.2	Microstructure de l’argilite du Callovo-Oxfordien et propriétés effectives . .	80
4.3	Homogénéisation du comportement non-linéaire de l’argilite . . . . .	85
4.3.1	Principe de l’approche incrémentale . . . . .	85

4.3.2	Implémentation numérique . . . . .	87
4.4	Implémentation de l'approche incrémentale avec une plasticité associée : application à l'argilite du COx . . . . .	89
4.4.1	Modèle de plasticité associée de la matrice argileuse microporeuse . . . . .	89
4.4.2	Procédure d'isotropisation . . . . .	94
4.4.3	Evaluation expérimentale du modèle macro associé . . . . .	95
4.5	Modèle micro-macro de plasticité de l'argilite avec une règle d'écoulement non associé pour la matrice argileuse . . . . .	97
4.5.1	Formulation du modèle de plasticité non associée . . . . .	97
4.5.2	Calibration et validations expérimentales du modèle non associé . . . . .	100
4.6	Conclusion . . . . .	108
4.7	Annexe . . . . .	111

## **Chapitre 5**

### **Modèle simplifié du comportement non-linéaire de l'argilite**

5.1	Introduction . . . . .	124
5.2	Formulation du critère pour le milieu poreux renforcé par des inclusions rigides . . . . .	125
5.3	Application à l'argilite du Callovo-Oxfordien . . . . .	130
5.3.1	Propriétés effectives de l'argilite du Callovo-Oxfordien . . . . .	130
5.3.2	Formulation et mise en oeuvre du modèle simplifié dans le cadre d'une règle d'écoulement associée . . . . .	131
5.3.3	Identification des paramètres du modèle associé-Résultats et discus- sions . . . . .	132
5.4	Extension heuristique du modèle par introduction d'une règle d'écoulement non-associée . . . . .	133
5.4.1	Identification des paramètres du modèle non-associé . . . . .	135
5.4.2	Validations expérimentales . . . . .	135
5.5	Conclusion . . . . .	140

**Conclusion générale et perspectives** **141**

**Bibliographie** **145**





# Principales Notations

## • Notations tensorielles

$T$	scalaire	.	contraction simple
$\underline{T}$	vecteur	:	double contraction
$\mathbf{T}$	tenseur d'ordre deux	$\otimes$	produit tensoriel
$\mathbb{T}$	tenseur d'ordre quatre	$\overset{s}{\otimes}$	produit tensoriel symétrisé
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon		
$\mathbf{1}$	tenseur identité d'ordre deux		
$\mathbb{I}$	tenseur identité d'ordre quatre symétrique		$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$
$\mathbb{J}$	Projecteur sphérique des tenseurs d'ordre 4 isotrope		$\mathbb{J} = \frac{1}{3}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})$
$\mathbb{K}$	projecteur déviatorique de tenseurs d'ordre 4		$\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$
$tr\mathbf{T}$	trace du tenseur $\mathbf{T}$		
$\mathbf{T}'$	déviateur du tenseur $\mathbf{T}$		$\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \frac{1}{3}tr\mathbf{T}\mathbf{1}$
$\underline{\underline{gradT}}$	gradient d'un champ vectoriel		
$\underline{\underline{divT}}$	divergence d'un champ tenseur d'ordre 2		

• **Notations communes à tous les chapitres**

$\sigma$	tenseur des contraintes microscopiques
$\varepsilon$	tenseur des déformations locales
$d$	taux des déformations locales
$\pi$	dissipation locale
$\underline{\xi}$	vecteur déplacement
$\varepsilon^e$	tenseur des déformations élastiques locales
$\varepsilon^p$	tenseur des déformations plastiques locales
$\Sigma$	tenseur des contraintes macroscopiques
$\mathbf{E}$	tenseur des déformations macroscopiques
$\mathbf{D}$	taux des déformations macroscopiques
$\Pi$	dissipation macroscopique
$\underline{v}$	champ de vitesse
$f$	porosité
$T^{hom}$	grandeur homogénéisée
$T_r$	grandeur associée à la phase $r$
$\mathbb{C}$	tenseur d'élasticité
$\mathbb{L}$	opérateur tangent
$\mathbb{A}$	tenseur de localisation (élastique ou tangent)
$\mathbb{P}$	tenseur de Hill
$\mathbb{S}^E$	tenseur d'Eshelby
$\kappa$	module de compressibilité
$\mu$	module de cisaillement
$E$	module d'Young
$\nu$	coefficient de Poisson

# Introduction générale

L'endommagement des matériaux ductiles est lié à la présence de micro-cavités au sein du matériau. Il est aujourd'hui largement reconnu que la rupture ductile survient suivant les trois étapes successives que sont la nucléation (ou germination) des cavités, la croissance des cavités (endommagement) sous l'effet d'un chargement approprié et leur coalescence à un stade plus avancé de la déformation. La modélisation de cet endommagement peut se faire à l'aide du critère de plasticité macroscopique du matériau poreux. Deux types d'approches sont utilisées dans ce domaine. La première est celle utilisée par Gurson [27] pour dériver son critère. Elle s'appuie sur l'analyse limite d'une sphère creuse dont la matrice est supposée rigide parfaitement plastique et obéit au critère de von Mises. Elle conduit à un couplage fort entre la déformation plastique et l'endommagement par croissance de cavités. Le champ de vitesse considéré par Gurson est d'une précision reconnue pour des états de contraintes proches de l'hydrostatique, mais s'avère peu pertinent en cisaillement. C'est cette constatation qui a justifié la seconde approche, dont un exemple est le critère de Ponte Castañeda [45]. Cette seconde catégorie de méthode, utilise un cadre variationnel d'homogénéisation non linéaire, en impliquant l'introduction d'un composite linéaire de comparaison. Le critère issu de cette démarche s'avère pertinent en chargement déviatorique mais se révèle de moins bonne qualité en hydrostatique<sup>1</sup>.

Se plaçant dans le cadre des approches par analyse limite, de nombreux auteurs ([60] [42] [22] [31]) ont proposé diverses améliorations du critère de Gurson. Plus récemment,

---

1. [10] a corrigé ce fait

au Laboratoire de Mécanique de Lille (LML), Monchiet et al.[38] (voir également [36]) ont formulé un nouveau critère de plasticité de type Gurson en considérant des champs de vitesse de type Eshelby. Ce nouveau critère semble apporter un certain nombre de modifications à celui de Gurson et ses extensions dans la littérature traitant de la rupture ductile des métaux.

En dépit des progrès significatifs réalisés dans le cadre des travaux précités, y compris en termes de calcul de structure, les modèles disponibles sont souvent inappropriés pour certains matériaux tels que les polymères, les géomatériaux, ou même les métaux à double porosité. La raison principale de cette insuffisance réside dans l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice solide qui sous tend les modèles précédemment évoqués. L'extension de ces modèles aux géomatériaux cohérents (p.ex. roches, bétons, etc.), en particulier pour l'étude de la compaction des pores, soulève de nombreuses difficultés dont la plus importante est précisément celle de la prise en compte de la compressibilité plastique de la matrice. Considérant une cellule élémentaire avec une matrice de type Drucker-Prager [14], Guo et al. [26] ont récemment réussi, à l'aide d'une démarche d'analyse limite, à obtenir de nouveaux critères macroscopiques qui s'avèrent de grand intérêt pour les géomatériaux. Il convient également de mentionner les travaux menés à l'ENPC sur la même thématique [33] en mettant en oeuvre des approches d'homogénéisation non linéaire.

Le présent travail de recherche vise à développer des modèles microscopiques couplant plasticité et porosité, dans les géomatériaux poreux. Le mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est à caractère bibliographique. Nous y rappelons d'abord brièvement les principaux mécanismes physiques qui gouvernent la rupture ductile des matériaux. Puis, est exposé le cadre d'obtention du critère de Gurson, et de certains de ses dérivés. En particulier nous exposons brièvement les récents travaux de Monchiet et al.[38] que nous mettons à profit au second chapitre.

Le deuxième chapitre concerne précisément le développement d'une modélisation micromécanique de milieux poreux ductile composés d'une matrice rigide parfaitement plas-

---

tique de type von Mises et d'un grand nombre de cavités sphéroïdales (allongées ou aplaties) uniformément distribuées et aléatoirement orientées. Nous établissons de nouveaux critères macroscopiques, établis pour ces milieux en se basant sur les travaux de Monchiet et al. [38]. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont comparés à ceux disponibles dans la littérature [62] pour des cavités aplaties. On notera que nos développements fournissent une expression analytique dans le cas de fissures circulaires. Ils s'étendent aussi aux cavités allongées. Des comparaisons seront effectuées pour évaluer les nouveaux critères proposés. Enfin, un accent particulier sera mis sur le cas particulier des milieux plastiques multifissurés.

Le troisième chapitre est dédié à la modélisation micromécanique d'une classe de milieux poreux à matrice plastiquement compressible. Une extension cohérente du modèle de Gurson [27] est ainsi proposée pour des matrices obéissant à un critère de plasticité elliptique, de type Green. Le critère macroscopique approché est ensuite appliqué à des milieux à double porosité pour lesquels la séparation entre les deux échelles de porosité autorise la réalisation d'une homogénéisation en deux étapes. Nos résultats seront comparés et discutés par rapport à ceux qui sont disponibles dans la littérature.

La modélisation micromécanique du comportement non linéaire de l'argilite du Callovo-Oxfordien fait l'objet du chapitre 4. À l'échelle mésoscopique, l'argilite est schématisée comme un milieu à trois phases : les grains de quartz et de calcite (supposés élastiques) plongés dans une matrice argileuse considérée elle-même comme un milieu poreux. Ce chapitre se présente sous la forme d'une publication récemment soumise. Cette dernière est organisée comme suit : après une brève présentation d'éléments de la micro(méso)structure de l'argilite du COX, l'approche d'homogénéisation incrémentale de Hill est décrite dans ses grands principes. Un premier niveau de modélisation est d'abord proposé en supposant à l'échelle mésoscopique un comportement plastique associé de la matrice argileuse poreuse. Dans ce cadre, on s'appuie pour le passage micro-méso sur le critère de plasticité de [26], obtenu par analyse limite d'une cellule constituée d'une phase solide de

type Drucker-Prager et d'une porosité sous forme de vides sphériques. Un tel critère a été récemment validé par comparaison à des bornes numériques établis par [55] (cf. l'annexe présenté à la fin du chapitre). Il est complété ici par des lois d'écrouissage appropriées. L'approche incrémentale de Hill, adoptée pour le passage méso-macro, permet alors de déboucher sur une loi de comportement associée de l'argilite. Les insuffisances d'une telle loi, en particulier pour décrire quantitativement la dilatance plastique ont motivé la mise en oeuvre d'un second niveau de modélisation ; celui-ci est basé sur une démarche d'homogénéisation d'un milieu ductile poreux non associé, récemment proposée par Maghous et al. [33] et adaptée ici au contexte de l'argilite. Les comparaisons entre les prédictions de ce modèle non associé et les données expérimentales permettront de montrer son aptitude à décrire les principaux traits comportementaux de l'argilite. Quelques simulations complémentaires, non incluses dans la publication faisant office de chapitre, sont également fournies en annexe de ce chapitre.

L'idée de simplification mise en oeuvre au chapitre 5 consiste à revisiter la microstructure de l'argilite, de sorte à pouvoir formuler analytiquement un critère macroscopique du matériau poreux renforcé par les inclusions. Le critère mis au point par homogénéisation non linéaire sera complété par la formulation d'une règle d'écoulement macroscopique. On aboutit ainsi à une formulation analytique de la loi de comportement à l'échelle macroscopique. Notons que la modélisation proposée dans ce chapitre a tiré profit de résultats récents établis en matière d'homogénéisation non linéaire de matériaux non associés, par [33].

Le mémoire s'achève sur quelques conclusions et perspectives de l'étude, dont en particulier la prise en compte de fluides interstitiels dans les matériaux considérés.

# Chapitre 1

## Critère de plasticité isotrope de milieux ductiles poreux

## **1.1 Introduction**

Dans le domaine de la modélisation de l'endommagement des métaux poreux ductiles, l'approche locale basée sur l'utilisation de lois constitutives fines est la mieux à adoptée pour rendre compte des mécanismes physiques à l'origine de la rupture ductile. Les modèles de McClintok [34], de Rice et Tracey [47], proposés à la fin des années 1960, sont les premiers travaux de référence dans ce domaine. Les lois d'évolution de l'endommagement (en pratique la porosité) établies dans ces modélisations ne sont cependant pas couplées à la plasticité du matériau. Afin de remédier à cette limitation, des modèles dits "couplés" ont été développés par la suite. Dérivé dans un cadre micromécanique approprié, le critère de Gurson [27], s'appuyant sur l'analyse limite d'une sphère creuse, introduit explicitement un couplage entre la déformation plastique et l'endommagement. Il a été ensuite étudié et amélioré par de nombreux auteurs dont notamment Tvergaard et Needleman [9] [60], pour aboutir à des modélisations complètes permettant le calcul de structure.

Dans ce chapitre, à caractère essentiellement bibliographique, nous présentons d'abord les mécanismes physiques de la rupture ductile. Puis, nous exposerons brièvement les théories de plasticité-endommagement couplés. On se limitera volontairement à des modèles isotropes (cavités sphériques, matrice plastique isotrope).

## **1.2 Micromécanismes d'endommagement et de rupture des milieux poreux ductiles**

Il est aujourd'hui reconnu que la rupture ductile, tout au moins des métaux, survient suivant les trois étapes successives que sont la nucléation (ou germination) des cavités, la croissance des cavités sous l'effet d'un chargement mécanique et leur coalescence à un stade plus avancé de la déformation. Nous présentons dans cette très brève section une description de ces trois étapes.



– **Nucléation des cavités**

La nucléation des cavités constitue la première phase du processus d'endommagement ductile. Elle correspond à la création de vides (généralement au niveau des inclusions), par décohésion de l'interface inclusion-matrice, ou par rupture interne de l'inclusion. Cette étape correspond à une transition, à l'échelle microscopique, d'un milieu continu à un milieu discontinu.

Les sites de nucléation sont essentiellement des zones de concentration de contraintes ou de déformations ; ils induisent l'apparition et la croissance de surfaces de discontinuités. D'une manière générale, l'analyse quantitative et la modélisation de tels mécanismes sont délicates, car les résultats sont extrêmement dispersés en raison de la dépendance avec la répartition spatiale des inclusions, les caractéristiques du matériau et la qualité de la résistance de l'interface inclusion-matrice.

– **Croissance des cavités**

La phase de croissance des cavités correspond au grossissement des cavités germées par nucléation. Elle se produit en liaison avec l'écoulement plastique de la matrice qui provoque un durcissement de celle-ci autour du vide. Les bords de la cavité deviennent alors solidaires de la matrice plastique et évoluent avec elle suivant le chargement. En effet, l'augmentation de la déformation plastique dans la matrice induit une croissance de la porosité des cavités qui peut être significative. Cette étape est, comme on le verra, celle qui se prête le mieux à une modélisation micro-mécanique couplant plasticité et endommagement.

– **Coalescence des cavités**

Dans cette dernière phase, la rupture des métaux poreux apparaît par la coalescence entre microfissures ou entre cavités. Il est observé expérimentalement que les jonctions entre cavités ou entre microfissures apparaissent très rapidement au dessus

d'une valeur seuil de la porosité, de la taille des cavités ou de la distance entre les défauts issus de la nucléation et de la croissance de ceux-ci. Cette jonction se produit par fissuration des ligaments de la matrice, souvent dans des zones écrouies autour des sites de nucléation. L'étude de la coalescence des cavités est un sujet peu abordé qui n'a connu un regain d'intérêt que très récemment ([31], [44], [54] et [53]).

## 1.3 Le critère de Gurson

Deux types d'approches micromécaniques sont disponibles pour élaborer des critères de plasticité de milieux poreux ductiles. La première est, dans le cas isotrope, basée sur l'analyse limite d'une sphère creuse. Le champ de vitesse considéré dans ce cadre par Gurson [27] est d'une précision reconnue pour des états de contraintes proches d'hydrostatique, mais s'avère peu pertinent en cisaillement. La seconde approche, dont un exemple est le critère de Ponte Castañeda [45], utilise des techniques d'homogénéisation non linéaire, à travers d'un cadre variationnel requérant l'introduction d'un composite linéaire de comparaison. Le critère issu de cette démarche s'avère pertinent en cisaillement pur mais présente de moins bons résultats pour des chargements hydrostatiques.

Dans cette section, on se propose d'abord de faire une brève synthèse bibliographique des critères macroscopiques de plasticité des milieux poreux dont la matrice rigide plastique parfaite obéit au critère de von Mises. La problématique de modélisation des milieux poreux ductiles dans le cas de matrices plastiquement compressibles sera ultérieurement étudiée aux chapitres 3 à 5.

### 1.3.1 Méthodologie générale

Bien que l'approche de base soit due à [27], la présentation faite ici s'inspire de [42] [31] ou encore [12].

Nous considérons une cellule  $\Omega$  d'un matériau poreux avec une porosité  $f$ .  $\Omega$  est soumis

à des conditions de taux de déformation homogène au bord :

$$\forall \underline{x} \in \partial\Omega \quad \underline{v}(\underline{x}) = \mathbf{D} \cdot \underline{x} \quad (1.1)$$

La matrice solide obéit à un critère définissant le domaine  $G^s$  de résistance convexe :

$$G^s = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, f^s(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0\} \quad (1.2)$$

On associe à ce domaine une fonction d'appui  $\pi^s(\mathbf{d})$  définie sur l'ensemble des vitesses de déformation (partie symétrique du gradient de  $\underline{v}$ )

$$\pi^s(\mathbf{d}) = \sup(\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}, \boldsymbol{\sigma} \in G^s) \quad (1.3)$$

L'approche par analyse limite s'intéresse à la contrepartie macroscopique de  $\pi^s(\mathbf{d})$ , qui est définie comme :

$$\Pi(\mathbf{D}) = (1 - f) \min_{\underline{v} \in \mathcal{V}(\mathbf{D})} \overline{\pi^s(\mathbf{d})}^s \quad (1.4)$$

où l'infimum est pris sur les champs cinématiquement admissibles.  $\overline{(\cdot)}^s$  désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine  $s$ . S'appuyant sur le lemme de Hill, on peut montrer que  $\Pi(\mathbf{D})$  est la fonction d'appui du domaine  $G^{hom}$  des contraintes macroscopiques admissibles :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \sup(\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}, \boldsymbol{\Sigma} \in G^{hom}) \quad (1.5)$$

l'état limite admissible est alors donnée par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \partial\Pi/\partial\mathbf{D} \quad (1.6)$$

### 1.3.2 Expression du critère de Gurson

Le critère de Gurson, est obtenu à partir de l'analyse limite d'une sphère creuse dont la matrice est incompressible, de type von Mises (avec la contrainte d'écoulement notée  $\sigma_0$ ) :

$$f^s(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} \quad (1.7)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}'$  est la partie déviatorique de  $\boldsymbol{\sigma}$ . En conséquence, la fonction d'appui  $\pi^s(\mathbf{d})$ , est telle que :

$$\begin{cases} \text{tr } \mathbf{d} = 0 : & \pi^s(\mathbf{d}) = \sigma_0 d_{eq} \quad \text{avec} \quad d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d}' : \mathbf{d}'} \\ \text{tr } \mathbf{d} \neq 0 : & \pi^s(\mathbf{d}) = +\infty \end{cases} \quad (1.8)$$

La sphère creuse, de rayons interne et extérieur notés respectivement  $a$  et  $b$  (porosité

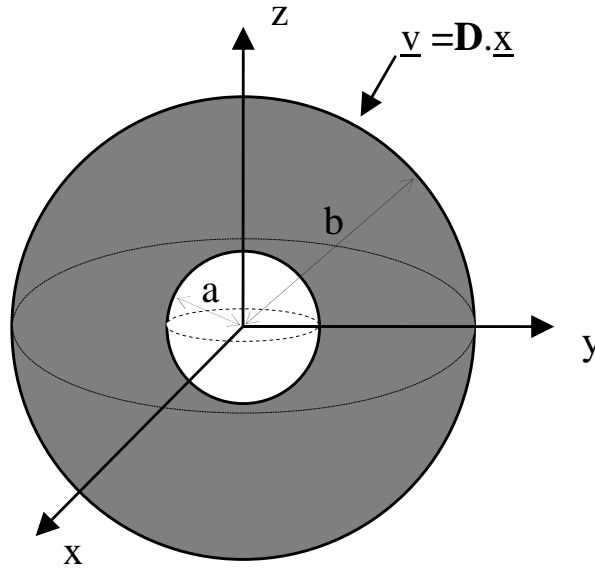


FIGURE 1.1 – Modèle de la sphère creuse en conditions de taux de déformation homogène au bord

$f = a^3/b^3$ ), est soumise à des conditions de taux de déformation homogène au bord  $\underline{v} = \mathbf{D}.\underline{x}$ . La démarche de Gurson s'appuie sur le choix d'un champ de vitesse (dans la matrice) qui se décompose en une partie correspondant à un changement de volume de la cavité sans changement de forme<sup>2</sup>et une seconde partie correspondant à un changement

2. Cette partie est en fait issue de la solution exacte de la sphère creuse sous chargement hydrostatique

de forme de la cavité sans changement de volume. La considération des conditions aux limites permet d'aboutir à :

$$\underline{v}^G(\underline{x}) = \mathbf{D}' \cdot \underline{x} + \frac{D_m a^3}{f r^2} \underline{e}_r \quad \text{avec} \quad D_m = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{D} \quad (1.9)$$

Il convient de noter que ce champ de vitesse est entièrement déterminée par la donnée  $\mathbf{D}$ . Par conséquent, aucune étape de minimisation n'est requise lors de l'établissement du critère de Gurson. Les calculs dont le détail est omis ici, nécessitent quelques approximations qui préservent cependant le statut de borne du critère qui s'en déduit. Ils permettent d'aboutir à l'expression suivante

$$\Pi(\mathbf{D}) \leq \Pi^G(\mathbf{D}) = \sigma_o f D_{eq} \left( \xi (\text{arcsinh}(\xi) - \text{arcsinh}(f\xi)) + \frac{\sqrt{1 + f^2 \xi^2}}{f} - \sqrt{1 + \xi^2} \right) \quad (1.10)$$

avec  $D_{eq} = \sqrt{2\mathbf{D}' : \mathbf{D}'/3}$  et  $\xi = 2D_m/(fD_{eq})$ .

D'où l'on déduit les équations paramétrique des états de contraintes admissibles :

$$\begin{cases} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma} = 2\sigma_o (\text{arcsinh}(\xi) - \text{arcsinh}(f\xi)) \\ \Sigma_{eq} = \sigma_o \left( \sqrt{1 + f^2 \xi^2} - f \sqrt{1 + \xi^2} \right) \end{cases} \quad (1.11)$$

dans laquelle  $\Sigma_{eq}$  et  $\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_m$  représentent respectivement la contrainte équivalente de von Mises et la contrainte hydrostatique.

L'élimination de  $\xi$  entre les parties sphérique et déviatorique de  $\boldsymbol{\Sigma}$ , mène immédiatement au critère de Gurson :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (1.12)$$

Ce critère appelle quelques commentaires :

- il dépend de la contrainte d'écoulement  $\sigma_0$  de la matrice solide et de la porosité  $f$ . Cette dernière dépendance est bien la signature du couplage entre plasticité et

endommagement comme précédemment mentionné.

- il ne dépend de la contrainte macroscopique  $\Sigma$  qu'à travers les premier et second invariants. Ceci est la conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée pour son établissement. Des travaux récents de la littérature semblent indiquer l'existence d'un effet du troisième invariant des contraintes [10] [41] [19]. C'est sur l'importance de cet effet que les avis des divers auteurs divergent. Dans toute la suite de ce mémoire, l'influence du troisième invariant ne sera pas considérée.
- le critère de Gurson est non seulement une borne supérieure pour le problème de la sphère creuse, mais aussi pour un assemblage de sphères composites d'Hashin (cf. par exemple : [18][42][31]). Il convient également de souligner que la solution purement déviatorique donnée par le critère de Gurson correspond à la borne supérieure de type Voigt ( $\sigma_0(1 - f)$ , ce qui est rustique), alors que, par construction, le point purement hydrostatique donné par ce critère correspond à la solution exacte du problème de la sphère creuse soumise à ce type de chargement.

Afin de remédier aux insuffisances du critère du Gurson à faible triaxialités de contraintes,  $\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}}$ , différentes modifications ont été apportées dans la littérature au critère initial de Gurson [27] (sur la base de résultats de simulation numérique sur cellule), la plus connue étant celle proposée par Tvergaard [58][59] :

$$\frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 f \cosh\left(\frac{3}{2}q_2 \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - q_3 f^2 = 0 \quad (1.13)$$

Les paramètres heuristique  $q_1, q_2$  et  $q_3$  sont introduits afin, d'une part, de donner un meilleur accord entre le critère de type Gurson et les différentes simulations numériques par éléments finis, et d'autre part, d'améliorer les prédictions dans le domaine des faibles triaxialités de contraintes par le critère initial de Gurson. A l'aide d'une analyse autocohérente, Perrin et Leblond [43] aboutissent à  $q_1 = 4/e$ . Besson [6] suggère  $q_1 \in [1.25 - 2]$ ,  $q_2 \simeq 1$ ,  $q_3 = q_1^2$ . Des travaux numérique récents de [17] sur un volume élémentaire re-

présentatif (VER) ont conduit à des résultats approximés par  $q_1 = 1.69 - f$ ,  $q_2 \simeq 0.92$ ,  $q_3 = q_1^2$ .

## 1.4 Critères issus de l'homogénéisation non-linéaire des milieux poreux

Ponte Castañeda [45] a introduit une approche variationnelle d'homogénéisation non linéaire qui a été appliquée à un VER d'un milieu poreux isotrope dont la matrice de type rigide plastique parfait obéit également au critère de von Mises. A l'aide de cette approche variationnelle, on obtient pour le milieu poreux le critère suivant :

$$\left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4}f \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1 - f)^2 = 0 \quad (1.14)$$

Plus tard, il a été démontré que la méthode sécante modifiée [52] conduit au même résultat que l'approche variationnelle. A la différence du critère de Gurson, il s'agit d'un critère elliptique en  $\Sigma_{eq}$  et en  $\Sigma_m$ , et qui dépend également de la porosité  $f$  et de seuil  $\sigma_0$ .

Il est intéressant de noter que (1.14) est également une borne supérieure pour tout milieu poreux macroscopiquement isotrope avec une matrice rigide parfaitement plastique de type von Mises. Cette borne s'avère de meilleure qualité que le critère de Gurson pour un chargement purement déviatorique. La solution purement déviatorique prédite par le critère de Ponte Castañeda vaut  $\sigma_0(1 - f)/\sqrt{1 + \frac{2}{3}f}$ , à comparer à la borne supérieure de type Voigt de Gurson.

Le point purement hydrostatique donnée par (1.14) majore cependant de façon trop importante (notamment à faible porosité) la solution exacte de la sphère creuse soumise à un chargement hydrostatique homogène au bord extérieur. Très clairement il s'agit d'un point faible de l'approche variationnelle qui a été progressivement corrigée dans des travaux qui ont suivi. Par exemple, Michel et Suquet (1992) ont proposé de modifier le

terme en  $\Sigma_m$  dans le critère (1.14) afin de retrouver la solution exacte en chargement hydrostatique. Le critère de Michel et Suquet (1992) s'écrit :

$$\left(1 + \frac{2}{3}f\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{1-f}{\ln(f)}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1-f)^2 = 0 \quad (1.15)$$

Il s'agit également d'un critère elliptique en  $\Sigma_{eq}$  et en  $\Sigma_m$ . Il est tout à fait remarquable que (1.15) et (1.14) sont de la forme elliptique proposée par Green [25] à partir d'une démarche quasi phénoménologique aboutissant toutefois à une forme :

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4} \left[\frac{3(1-f^{1/3})}{(3-2f^{1/4})\ln(f)}\right]^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - \left[\frac{3(1-f^{1/3})}{3-2f^{1/4}}\right]^2 = 0 \quad (1.16)$$

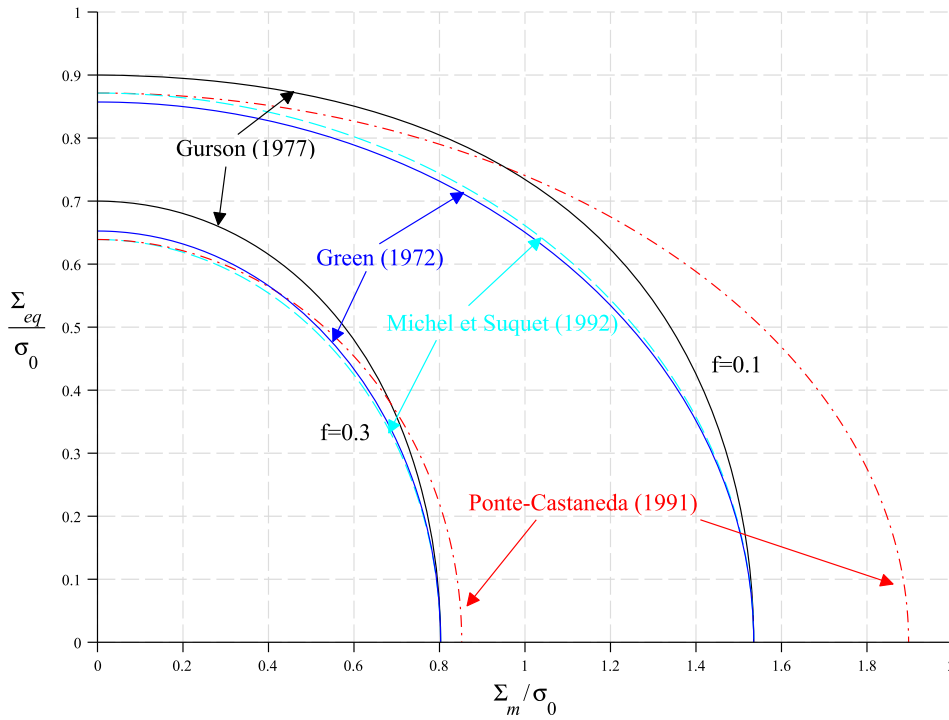


FIGURE 1.2 – Critères de plasticité avec différentes porosités : Trait solide noir : critère de Gurson (1.12). Trait discontinu : critère de Ponte Castañeda (1991) (1.14). Trait mixte : Michel et Suquet (1992) (1.15). Trait solide bleu : Critère de Green (1970) (1.16)

Sur la figure 1.2 sont comparées les performances des divers modèles. On note un



accord relatif entre les prédictions de (1.16) et (1.15), ce qui à nouveau est remarquable. Enfin pour être complet, on mentionnera les travaux de Găărăjeu [18] [19] qui ont apporté une amélioration au critère de Gurson, grâce à la considération d'un champ de vitesse dont la partie décrivant le changement de forme sans changement de volume n'est plus homogène. Le critère obtenu à l'aide de ce champ de vitesse se présente sous la forme<sup>3</sup> :

$$B(f) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (1.18)$$

$$\text{avec } B(f) = \frac{1 - f}{1 - \frac{5f(16 + 19f^{7/3})}{(3 + 2f)(16 + 19f^{7/3}) + 168f(1 - f^{2/3})^2}}.$$

## 1.5 Extension récente du critère de Gurson proposée par Monchiet et al.[39]

Dans l'esprit de la démarche utilisée par [18], Monchiet et al. [38] ont développé plus récemment un nouveau critère en utilisant des champs de vitesse plus riches que ceux mis en oeuvre par Gurson (1.9). Ces champs de vitesse sont inspirés de la solution d'Eshelby du problème de l'inclusion inhomogène en milieu infini [16] [40].

Dans l'inclusion (le vide) sphérique occupant le domaine  $\omega$ , ayant un rayon  $a$ , un taux de déformation libre homogène  $\mathbf{d}^*$  est imposé. Conformément aux résultats d'Eshelby [16], le champ de vitesse en un point extérieur à l'inclusion prend la forme suivante :

$$\underline{v}^E = \frac{a^5}{5r^4} \left[ 5d_m^* \mathbf{1} + 2\bar{\mathbf{d}}^* \right] \cdot \underline{e}_r + \frac{a^3}{r^2} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} \right] d_{rr}^* \underline{e}_r \quad (1.19)$$

---

3. On notera qu'une proposition de ce type avait été faite par [32], mais de façon tout à fait heuristique pour faire converger aux faibles triaxialités le modèle de Gurson vers celui de Ponte Castañeda. Cette proposition se présente sous la forme :

$$\left( 1 + \frac{2f}{3} \right) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (1.17)$$

dans laquelle  $d_m^* = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{d}^*)$ , et en suivant la notation de [39],  $\bar{\mathbf{d}}^*$  est la partie déviatorique de  $\mathbf{d}^*$ .

Suivant l'approche de Gurson, le champ de vitesse d'essai dans la matrice solide, noté  $\underline{v}$ , est donc défini par :

$$\underline{v}(\underline{x}) = \mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{v}^E(\underline{x}) \quad (1.20)$$

$\mathbf{A}$  étant un tenseur constant. Le taux de déformation qui en résulte est donné par :

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} + \mathbf{d}^E \quad (1.21)$$

où  $\mathbf{d}^E = \nabla_s \underline{v}^E$ .

Compte tenu du fait que le champ du type Eshelby ne vérifie pas les conditions en taux de déformation uniforme au bord, les relations de moyenne entre les taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  et microscopique  $\mathbf{d}$  sont utilisées :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{d} dV \quad (1.22)$$

La dissipation macroscopique  $\Pi(\mathbf{D})$  s'écrit :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \min_{\bar{\mathbf{d}}^*} \left[ \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} d_{eq}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) dV \right] \quad (1.23)$$

En cohérence avec la nécessité d'une procédure de minimisation de la fonctionnelle par rapport aux variables inconnues  $\bar{\mathbf{d}}^*$ , deux approximations ont été introduits pour l'évaluation de  $\Pi(\mathbf{D})$ .

Approximation  $\mathcal{A}1$  :

La valeur moyenne de  $d_{eq}$  sur la surface de la sphère unité, i.e.  $\langle d_{eq} \rangle_{S(r)}$ , est remplacée

par  $\sqrt{\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}}$ ; on obtient, en posant  $\Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) = \frac{\sigma_0}{|\Omega|} \int_{\Omega-\omega} d_{eq}(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) dV$  :

$$\Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) = \sigma_0 f \int_{u=f}^{u=1} \sqrt{A_{eq}^2 + \left(4d_m^{*2} + \frac{6G(u)}{25} d_{eq}^{*2}\right) u^2} \frac{du}{u^2} \quad (1.24)$$

avec  $G(u) = \frac{1}{3} (15 - 40u^{2/3} + 28u^{4/3})$ ,  $u = a^3/r^3$ .

Concernant l'expression de  $G(u)$ , Monchiet et al.[38] considèrent la deuxième approximation suivante :

Approximation  $\mathcal{A}2$  : la fonction  $G(u)$  est remplacée par sa valeur moyenne,  $g(f)$ , calculée sur l'intervalle  $[u_1, u_2] = [1, f]$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) &= \sigma_0 f \int_f^1 \{A_{eq}^2 + B^2 u^2\}^{1/2} \frac{du}{u^2} \\ &= \sigma_0 f \left[ B \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{uB}{A_{eq}} \right\} - \frac{\sqrt{A_{eq}^2 + u^2 B^2}}{u} \right]_f^1 \end{aligned} \quad (1.25)$$

avec

$$B^2 = 4d_m^{*2} + \frac{6g(f)}{25} d_{eq}^{*2} = \frac{4}{f^2} D_m^2 + \frac{6g(f)}{25} d_{eq}^{*2} \quad (1.26)$$

où  $g(f) = 1 - 4f \frac{(1 - f^{2/3})^2}{1 - f}$ .

Le critère macroscopique s'obtient alors par :

$$\Sigma = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)}{\partial \mathbf{D}} \quad \text{avec} : \quad \frac{\partial \Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*)}{\partial \bar{\mathbf{d}}^*} = 0 \quad (1.27)$$

Il se met sous la forme suivante [39] :

$$F(\Sigma, f) = \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \sqrt{\frac{9 \Sigma_m^2}{4 \sigma_0^2} + \frac{2}{3g(f)} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}} \right) - 1 - f^2 \leq 0 \quad (1.28)$$

On notera que pour de faibles porositéz  $g(f) = 1$ .

S'agissant de la détermination de  $\Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}})$ , Monchiet et al.[39] ont également proposé une autre approximation à la place de  $\mathcal{A}2^*$  : la fonction  $6G(u)u^2/25$  est remplacée par sa moyenne notée :  $h(f)$ . L'expression de  $\Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}})$  devient, en posant  $A = \sqrt{A_{eq}^2 + h(f)(d_{eq}^*)^2}$  :

$$\begin{aligned} \Gamma(\mathbf{D}, \bar{\mathbf{d}}^*) &= \sigma_0 \int_f^1 \sqrt{A^2 + \frac{4D_m^2}{w^2}} dw \\ &= \sigma_0 \left[ B \operatorname{arcsinh} \left( \frac{2D_m}{Aw} \right) - \sqrt{A^2 w^2 + B^2} \right]_f^1 \end{aligned} \quad (1.29)$$

D'où l'on déduit l'expression suivante du critère macroscopique :

$$F(\boldsymbol{\Sigma}, f) = \left( 1 + \frac{2}{3}f \right) \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh \left( \frac{3 \Sigma_m}{2 \sigma_0} \right) - 1 - f^2 \leq 0 \quad (1.30)$$

qui est précédemment une proposition faite par Leblond, Perrin et Suquet [32].

Remarque : Compte tenu du fait que le champ de vitesse (1.20) avec (1.19) n'est pas cinématiquement admissible (non vérification des conditions de taux de déformations uniforme au bord), les critères établis par [39] doivent être rigoureusement interprétés comme issus d'une approche cinématique d'un problème correspondant à des conditions de contraintes uniformes au bord. En fait, comme souligné dans [19], il est une estimation du potentiel conjugué de  $\Pi(\mathbf{D})$  introduit par [66].

## 1.6 Comparaisons de critères

On se propose maintenant de comparer les propositions de Monchiet et al. [MCK1 (1.28), MCK2 (1.30)] à différents critères. On note d'abord que, pour faibles valeurs de la porosité  $f$  (figure 1.3), les nouveaux critères (1.28), (1.30) semblent coïncider avec celui de Gurson. Quand la porosité est modérée ou importante (figures 1.4 et 1.5), les deux nouveaux critères améliorent celui proposé par Gurson (1977) (1.12). C'est le cas en particulier pour les faibles triaxialités de contraintes pour lesquels ces critères sont

d'ailleurs très proches de la borne supérieure proposée par Ponte Castañeda (1991) (1.14). Lorsque le taux de triaxialité est élevé, MCK1 (1.28), MCK2 (1.30) sont en accord avec le critère de Gurson.

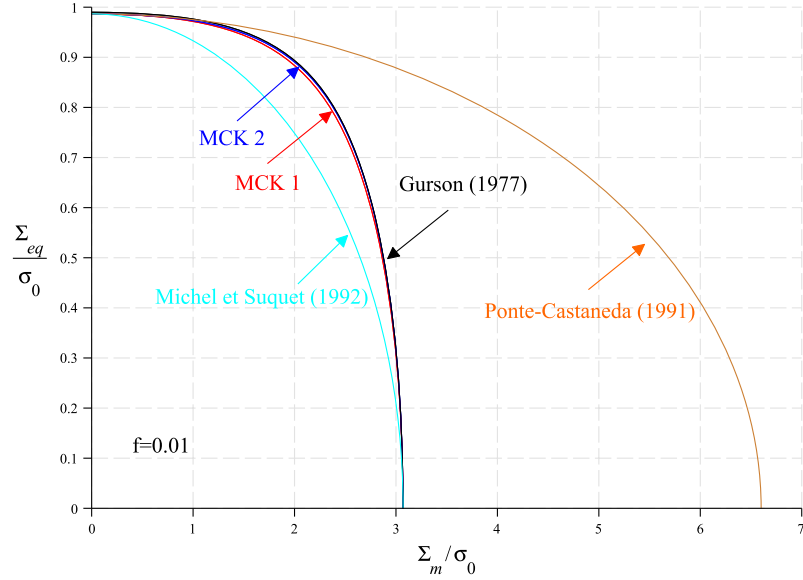


FIGURE 1.3 – *Comparaison entre les critères macroscopiques de plasticité pour une porosité  $f = 0.01$  : critère de Gurson (1.12), critère de Ponte Castañeda (1991) (1.14), critère de Michel et Suquet [35], critère de Monchiet et al. (MCK1(2007), MCK2(2011)).*

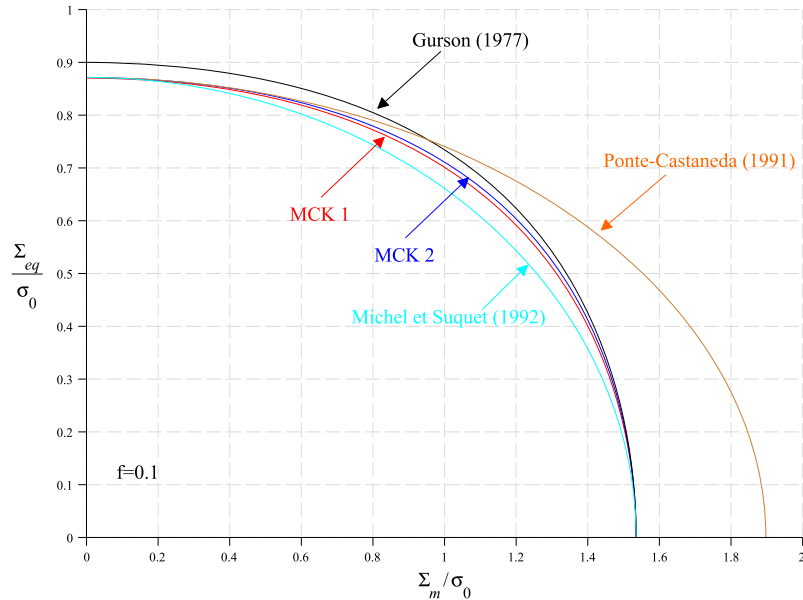


FIGURE 1.4 – *Comparaison entre les critères macroscopiques de plasticité pour une porosité  $f = 0.1$  : critère de Gurson (1.12), critère de Ponte Castañeda (1991) (1.14), critère de Michel et Suquet [35], critère de Monchiet et al. (MCK1(2007), MCK2(2011)).*

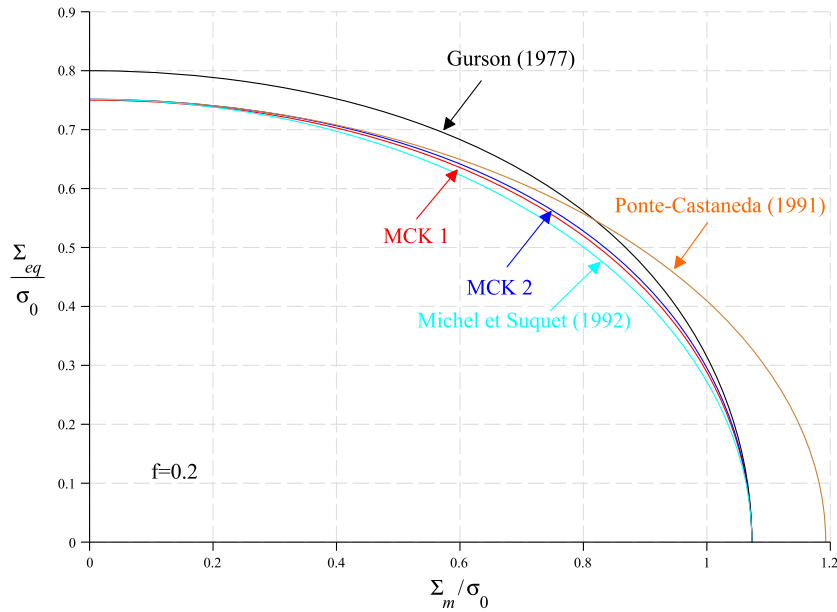


FIGURE 1.5 – Comparaison entre les critères macroscopiques de plasticité pour une porosité  $f = 0.2$  : critère de Gurson (1.12), critère de Ponte Castañeda (1991) (1.14), critère de Michel et Suquet [35], critère de Monchiet et al. (MCK1(2007), MCK2(2011)).

## 1.7 Conclusion

Nous avons d’abord brièvement décrit dans ce premier chapitre les principaux mécanismes physiques qui régissent la rupture des matériaux poreux ductiles. Différentes approches micromécaniques de formulation de critères macroscopiques des milieux poreux ductiles ont été ensuite exposées en se limitant volontairement au contexte des cavités sphériques dans une matrice de von Mises. Le critère de référence dans ce domaine est celui établi par Gurson [27]. Il ne fournit cependant pas de résultats précis dans le domaine des faibles taux de triaxialités de contraintes. C’est ce qui a motivé les travaux réalisés par d’autres auteurs dans le cadre des approches variationnelles d’homogénéisation non linéaire [45] [35] [13]. Ces travaux se sont avérés pertinents pour les faibles triaxialités, mais de moins bonne qualité pour les triaxialités élevées. Le chapitre s’est achevé sur l’exposé des récents travaux menés au LML dans le cadre de la thèse de V. Monchiet [36] (cf. également Monchiet et al. [38] et [39]) et sur une comparaison des divers modèles. Nous exploiterons le cadre de travail introduit par [36] pour de nouveaux développements

qui seront présentés au second chapitre. Enfin, on soulignera que tous les travaux précités concernent exclusivement une matrice rigide plastique parfaite obéissant au critère de von Mises. Dans la perspective d'applications aux géomatériaux, il sera nécessaire de s'attaquer de front à la prise en compte de la compressibilité plastique, sujet pour lequel nous proposerons de nouveaux résultats et/ou nous nous appuierons sur les quelques rares contributions disponibles, pour proposer des applications intéressant la géomécanique.





## Chapitre 2

Critère macroscopique de milieux  
ductiles poreux : cas des cavités  
sphéroïdales aléatoirement orientées

## 2.1 Résumé du chapitre

Ce chapitre s'intéresse à la plasticité de milieux ductiles qui, bien que macroscopiquement isotropes, contiennent des défauts présentant un caractère anisotrope : c'est le cas en particulier de milieux fissurés dont la distribution en orientation des fissures est aléatoire (uniforme). L'étude de tels milieux a été récemment faite par Vincent et Monerie [62] (cf. également [61]) dans le cas de cavités aplaties. Ces auteurs se sont appuyés sur des travaux de Gologanu et al. [23] (voir également [24]).

Tirant profit des recherches menées au Laboratoire de Mécanique de Lille dans le cadre de la thèse de Monchiet [36], [38]), nous avons généralisé l'étude de ces milieux isotropes par la considération non seulement des cavités aplaties, mais également des pores allongés. A cette fin, le recours à la base de Walpole [65] a facilité l'intégration des grandeurs d'intérêt sur toutes les orientations. L'expression approchée, obtenue pour le critère macroscopique isotrope, se présente sous la forme suivante :

$$A \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + B \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + 2(1+g)(g+f) \cosh \left( \sqrt{\kappa_1 \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + \vartheta \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}} \right) - (1+g)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (2.1)$$

Elle diffère de celle établie par [62] essentiellement par les coefficients qui y apparaissent et surtout par le terme sous le *cosh*. Les résultats détaillés de cette étude ont été présentés à l'*European Solids Mechanics Conference à Lisbonne en Septembre 2009* et rassemblés sous la forme d'une publication [49] parue en 2011 dans la revue *International Journal of Damage Mechanics*. C'est cette publication, qui fait office de second chapitre de la thèse.

# Macroscopic Yield Criterion for Ductile Materials Containing Randomly Oriented Spheroidal Cavities

W. Q. SHEN

*LML, UMR 8107 CNRS, USTL, 59655 Villeneuve d'Ascq, France*

J. LIN

*IUT Génie Civil, Université de Strasbourg, 67411 Illkirch Cedex,  
France*

Q. Z. ZHU AND V. MONCHIET

*MSME, UMR 8208 CNRS, Université Paris-Est, 77700 Marne La  
Vallée, France*

D. KONDO

*Institut D'Alembert, UMR 7190 CNRS, UPMC, 75252 Paris Cedex,  
France*

**ABSTRACT:** This study is devoted to a micromechanical approach of the macroscopic yield criterion of ductile porous materials made up of a perfectly plastic von Mises matrix and randomly oriented spheroidal voids (with a same shape ratio, prolate or oblate including penny-shaped crack). The approach is based on recent results established by Monchiet et al. [Monchiet, V., Charkaluk, E. and Kondo, D. (2007). An Improvement of Gurson-type Models of Porous Materials by using Eshelby-like Trial Velocity Fields, *Comptes Rendus Mécanique*, **335**: 32–41.] for a unit cell containing a single family of spheroidal cavities. By adopting an approximation introduced by previous authors and which consists in embedding each void family in a medium submitted to the macroscopic stress, we provide for the studied class of materials closed-form expressions of the isotropic macroscopic yield function. The established results are compared with existing ones, and their interest is clearly shown.

---

\*Author to whom correspondence should be addressed. E-mail: [djimedokondo@upmc.fr](mailto:djimedokondo@upmc.fr)  
Appendix Figure D.1 to appear in color online: <http://ijd.sagepub.com>

*International Journal of DAMAGE MECHANICS*, 2011

1

1056-7895/11/00 0001–19 \$10.00/0 DOI: 10.1177/1056789510395552

© The Author(s), 2011. Reprints and permissions:  
<http://www.sagepub.co.uk/journalsPermissions.nav>

**KEY WORDS:** porous materials, ductile damage, Gurson-type model, numerical modeling, randomly oriented spheroidal cavities, micromechanics.

## INTRODUCTION

THE PIONEERING WORK of Gurson (1977), mainly based on the limit analysis of a hollow sphere considering a radial trial velocity field, provides an appropriate framework for the study of ductile damage of porous media. In the Gurson approach, the solid matrix obeys to a von Mises criterion and the hollow sphere is subjected at its outer boundary to uniform boundary strain rate conditions. The deduced approximate yield function at macro-scale delivers an upper bound for porous media with microstructure of the type *composite spheres assemblage of Hashin* and coincides with the exact solution for purely hydrostatic macroscopic loading. Several extensions of this isotropic yield function have been proposed in literature. The most important ones are probably the followings:

- modification of the Gurson criterion by Tvergaard (1981) on the basis of numerical simulations; this was completed later by a coalescence modeling which allowed to formulate a full constitutive model for ductile porous media (see for instance, Tvergaard and Needleman (1984);
- extensions accounting for voids shape effects by considering a spheroidal cavity (Gologanu et al., 1993) (see also Gologanu et al., (1997) and Garajeu and Suquet (1997)). Such extensions are based on limit analysis of a cell made up of a spheroidal volume containing a confocal spheroidal cavity. They have generated various applications in the domain of structural analysis (see Pardoen and Hutchinson, 2000).

More recently, by considering new trial velocity fields inspired from the exterior point solution of the Eshelby equivalent inclusion problem Eshelby (1957), Monchiet (2006) (cf. also Monchiet et al. (2007)) proposed a unified approach leading to new expressions of the macroscopic yield function in the case of prolate and oblate voids. This brought significant modifications of the criterion provided by Gologanu et al. (1997) which constitutes a reference in the field of anisotropic ductile porous model (see also works by Garajeu and Suquet (1997)).<sup>1</sup> In particular, the new expressions appear to be very relevant in the case of oblate voids with low aspect ratio such as penny-shaped cracks.

Concerning the macroscopic criterion of porous media in the case of randomly oriented prolate voids, a first attempt of modeling has been

---

<sup>1</sup>Subsequently, a modification of the Gurson criterion is also obtained.

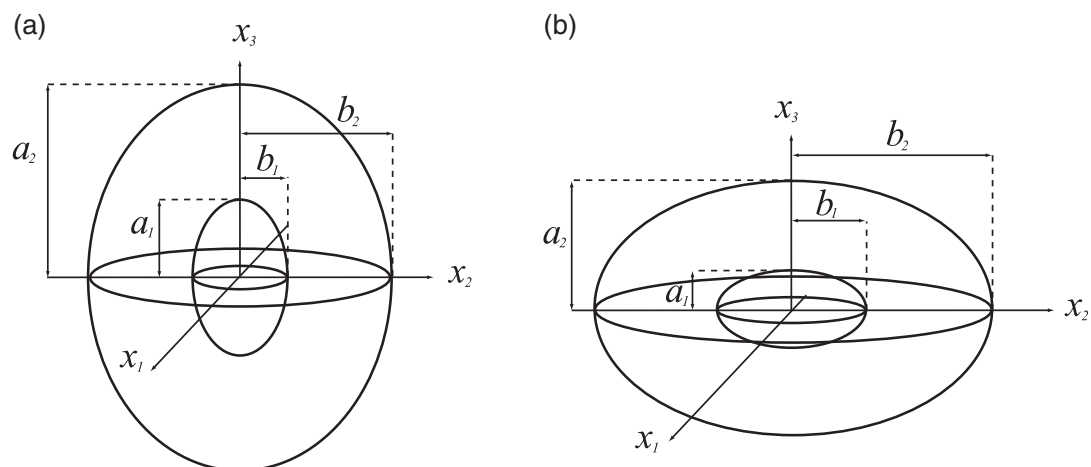
proposed by Gologanu et al. (1993). More recently, Vincent and Monerie (2008) established new results in the case of oblate cavities and applied them to cracked materials. The approach followed by these authors is based on a non-axisymmetric extension of the criterion established by Gologanu et al. (1997) in the case of a cell with a unique spheroidal void. It allowed to derive a new criterion for ductile materials with randomly oriented oblate cavities or cracks.

This study follows a similar approach, but starts from the results by Monchiet (2006) (also Monchiet et al. (2007)) and concerns oblate voids as well as prolate ones. It provides new results (section ‘Macroscopic criterion for randomly oriented spheroidal cavities’), in both cases, which are then compared to those established by Vincent and Monerie (2008) in the case of oblate cavities (section ‘The case of oblate cavities’) and of penny-shaped cracks (section ‘The case ductile materials weakened by penny-shaped cracks’).

## MACROSCOPIC YIELD CRITERION OF THE POROUS MEDIUM IN THE CASE OF RANDOMLY ORIENTED PROLATE OR OBLATE VOIDS

### Basic Results in the Case of a Cell Containing a Single Cavity

Following Gologanu et al. (1997), let us first consider a cell of the porous material made up of a spheroidal volume containing a confocal spheroidal cavity (cf. Figure 1).  $Ox_3$  is the axis of symmetry of the void.



**Figure 1.** Cell made up of a spheroidal domain containing a spheroidal confocal void. (a) case of a prolate void; (b) case of an oblate void.

The cavity shape is characterized by the aspect ratio  $a_1/b_1$ , with  $a_1 > b_1$  corresponding to a prolate void while  $b_1 > a_1$  corresponds to an oblate one (Monchiet et al., 2007). Let us denote  $c = \sqrt{|a_1^2 - b_1^2|} = \sqrt{|a_2^2 - b_2^2|}$  the focal distance and  $e_1, e_2$  the eccentricities of interior and exterior spheroids, respectively :

$$\begin{cases} e_1 = \frac{c}{a_1}; & e_2 = \frac{c}{a_2}; & \text{(prolate void)} \\ e_1 = \frac{c}{b_1}; & e_2 = \frac{c}{b_2}; & \text{(oblate void)} \end{cases} \quad (1)$$

Since the two spheroids are confocal, the material porosity  $f$  can be expressed in terms of these eccentricities  $e_1$  and  $e_2$  as:

$$f = \frac{\omega}{\Omega} = \frac{a_1 b_1^2}{a_2 b_2^2} = \begin{cases} \frac{e_2^3 (1 - e_1^2)}{e_1^3 (1 - e_2^2)}, & \text{(prolate void)} \\ \frac{e_2^3 \sqrt{1 - e_1^2}}{e_1^3 \sqrt{1 - e_2^2}}, & \text{(oblate void)} \end{cases} \quad (2)$$

where  $\omega$  represents the volume of the domain occupied by the spheroidal void and  $\Omega$  the volume of the considered cell.

Since, the starting point of this study is the general expression of the macroscopic criterion recently established by Monchiet (2006) in the case of a single prolate ( $g=0$ ) or oblate cavity (Figure 1(a) and 1(b), respectively), the aim of this subsection is to summarize the results in this case. The limit analysis of the above cell was performed by considering a trial velocity field inspired from the exterior point solution of the well-known Eshelby inhomogeneous inclusion problem. The deduced macroscopic criterion reads (Monchiet, 2006):

$$\frac{\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2G \left[ \cosh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} \right] - (1 + g)^2 - (g + f)^2 = 0 \quad (3)$$

with  $G = (1 + g)(g + f)$  and

$$g = \begin{cases} 0 & \text{(prolate void)} \\ \frac{c^3}{\chi a_2 b_2^2} = \frac{e_2^3}{\chi \sqrt{1 - e_2^2}} & \text{(oblate void)} \end{cases} \quad (4)$$

a fictitious porosity  $\chi$  is a constant whose expression will be specified later.

The anisotropic criterion (3) can be detailed in terms of the transversely isotropic invariants of the macroscopic stress tensor  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} \Sigma_p &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2}(1 - \alpha_2) + \Sigma_{33}\alpha_2; & \Sigma_q &= \frac{\Sigma_{11} + \Sigma_{22}}{2} - \Sigma_{33}; \\ \Sigma_s &= \sqrt{\frac{1}{4}(\Sigma_{22} - \Sigma_{11})^2 + \Sigma_{12}^2}; & \Sigma_t &= \sqrt{\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2}; \end{aligned} \quad (5)$$

with  $\alpha_i = \alpha(e_i)$  and function  $\alpha$  defined by:

$$\alpha(e) = \begin{cases} \frac{1 - e^2}{e^3} \operatorname{arctanh}\{e\} - \frac{1 - e^2}{e^2} & \text{(prolate void)} \\ -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \operatorname{arctan}\left\{\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\right\} + \frac{1}{e^2} & \text{(oblate void)} \end{cases} \quad (6)$$

With these notations, it has been shown that the quantity  $\Sigma_B^2$  reads (Monchiet, 2006):

$$\Sigma_B^2 = \kappa_1 \Sigma_p^2 + \kappa_2 \Sigma_q^2 + \kappa_3 \Sigma_p \Sigma_q + \kappa_4 \Sigma_s^2 + \kappa_5 \Sigma_t^2 \quad (7)$$

while for  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$ , one has:

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = (1 + \mu_1) \Sigma_q^2 + \mu_2 \Sigma_m^2 + \mu_3 \Sigma_m \Sigma_q + 3(1 + \mu_4) \Sigma_s^2 + 3(1 + \mu_5) \Sigma_t^2; \quad (8)$$

The closed-form expressions of coefficients  $\kappa_i$  and  $\mu_i$  are given in (A) in Appendix.

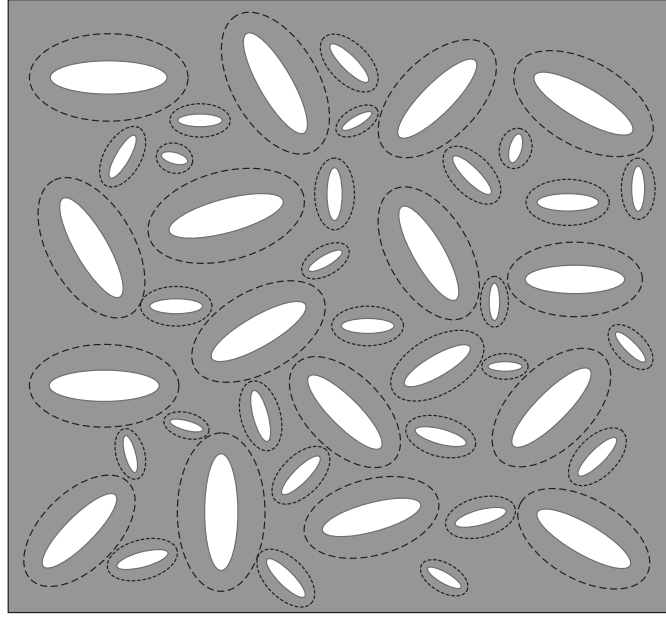
For completeness, the constant  $\chi$  which appears in the definition of  $g$  (Equation (4)) is chosen in order to obtain the best accuracy of (3) together with (7) and (8) with ‘exact’ numerical solutions of the two field criteria proposed in this section. The following expression is used:  $\chi = \frac{4}{3\alpha_1 - 1}$ .

## Macroscopic Criterion for Randomly Oriented Spheroidal Cavities

We aim now at studying a porous material cell made up of a Von mises matrix and randomly oriented spheroidal voids (Figure 2).

For simplicity, we adopt an approximation already introduced by Gologanu et al. (1993) and used by Vincent and Monerie (2008) in their recent study. This approximation<sup>2</sup> consists in considering that each void is embedded in a medium submitted to the macroscopic stress  $\Sigma$ . It allows to take advantage of the previous results (section ‘Basic results in the case of

<sup>2</sup>As the use of an Eshelby-like trial velocity field allows to interpret (3) as corresponding to a porous medium with uniform stress boundary conditions, it is expected that such approximation is probably more justified here than in previous works.



**Figure 2.** Studied cell: matrix containing randomly oriented voids Vincent and Monerie (2008).

a cell containing a single cavity’) in order to derive a macroscopic criterion of the porous material in the case of randomly oriented voids. To this end, an integration of (3) over the surface of the unit sphere  $S^2$ , i.e. over all directions of the space must be performed:

$$\oint \left\{ \frac{\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2G \left[ \cosh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} \right] - (1-g)^2 - (g+f)^2 \right\} ds = 0 \quad (9)$$

This procedure requires first to replace  $\underline{e}_3$  by a unit normal  $\underline{n}$ . To ease the computation it is convenient to express  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  and  $\Sigma_B$  in terms of  $\underline{\Sigma}$  and the vector  $\underline{n}$  (unit vector along the symmetry axis of the considered spheroid). For this reason, it is appropriate to resort to the Walpole’s tensorial algebra (Walpole, 1981) whose basic elements are provided by the fourth-order tensors  $\mathbb{E}_i$  ( $i=1, \dots, 6$ ) given in (B) in Appendix. The quantities  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  and  $\Sigma_B^2$  can then be rewritten in terms of  $\underline{\Sigma}$  and these  $\mathbb{E}_i$  ( $i=1, \dots, 6$ ) tensors (see detailed expressions (B.5) and (B.6) in (B) in Appendix).

Before computing the integral (9), let us recall the following identities:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{n} \otimes \underline{n} dS = \frac{1}{3} \underline{\delta}; \quad \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} \otimes \underline{n} dS = \frac{1}{3} \mathbb{J} + \frac{2}{15} \mathbb{K} \quad (10)$$

for which it is recalled that  $\underline{n}$  is a unit normal,  $S^2$  the surface of the unit sphere. Moreover  $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \underline{\delta} \otimes \underline{\delta}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ , with  $\mathbb{I}$  the fourth-order symmetric



unit tensor and  $\delta$  is the second-order unit tensor. By using (10), (B.5), (B.6) and (B.7), it is readily seen that:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \tilde{\Sigma}_{eq}^2 dS = m \Sigma_{eq}^2 + \mu_2 \Sigma_m^2 \quad (11)$$

and

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \Sigma_B^2 dS = \kappa_1 \Sigma_m^2 + n \Sigma_{eq}^2 \quad (12)$$

for which it is recalled that  $\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma' : \Sigma'}$  is the macroscopic von Mises equivalent stress and  $\Sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \Sigma$  the macroscopic mean stress. The expressions of coefficients  $m$  and  $n$  are given in (A) in Appendix.

Finally, owing to the difficulty to integrate directly the term in (3) and (9), remaining  $\cosh\left\{\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right\}$ , we adopt the approximation proposed by Vincent and Monerie (2008):  $\oint \cosh\left\{\frac{\Sigma_B}{\sigma_0}\right\} dS \approx \cosh\left\{\sqrt{\oint \left(\frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2}\right) dS}\right\}$ . By using this approximation and substituting (11) and (12) into (9), we obtained the following approximate expression of the macroscopic isotropic criterion of the porous medium with randomly oriented spheroidal (prolate or oblate) cavities:

$$A \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + B \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + 2G \cosh\left(\sqrt{\kappa_1 \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + n \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}}\right) - (1+g)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (13)$$

with  $A = m - Gn$ ,  $B = \mu_2 - G\kappa_1$  and  $G = (1+g)(g+f)$

Note that by the presence of  $B \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2}$ , this criterion differs qualitatively from the isotropic one which would be obtained in the case of spherical voids (Monchiet et al., 2007); this is consistently retrieved from (13) when the aspect ratio  $a/b = 1$ ). It is interesting to point out that the proposed macroscopic criterion (13) is convex; the proof of this convexity property is provided in (D) in Appendix . To evaluate the established criterion, we propose to compare also it with the one recently provided by Vincent and Monerie (2008) for a porous medium having randomly oriented oblate cavities:

$$D \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + C\eta^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 + 2G^* \cosh\left(\frac{\kappa}{\sigma_0} \Sigma_m\right) - (g^* + 1)^2 - (g^* + f)^2 = 0 \quad (14)$$

with  $g^* = \chi g$  and then  $G^* = (1+g^*)(g^* + f)$ .

where the coefficients  $C\eta^2$ ,  $D$ ,  $\kappa$ , given in Gologanu et al. (1997), are reported in (C) in Appendix.

It is worth noticing that the proposed criterion (13) has a form similar to that of (14), except the quantity  $\Sigma_{eq}^2$  which also appears in the hyperbolic cosine (cosh) term. Note that these two closed-form expressions are estimates of the macroscopic criterion.

### EVALUATION OF THE ESTABLISHED CRITERION (13)

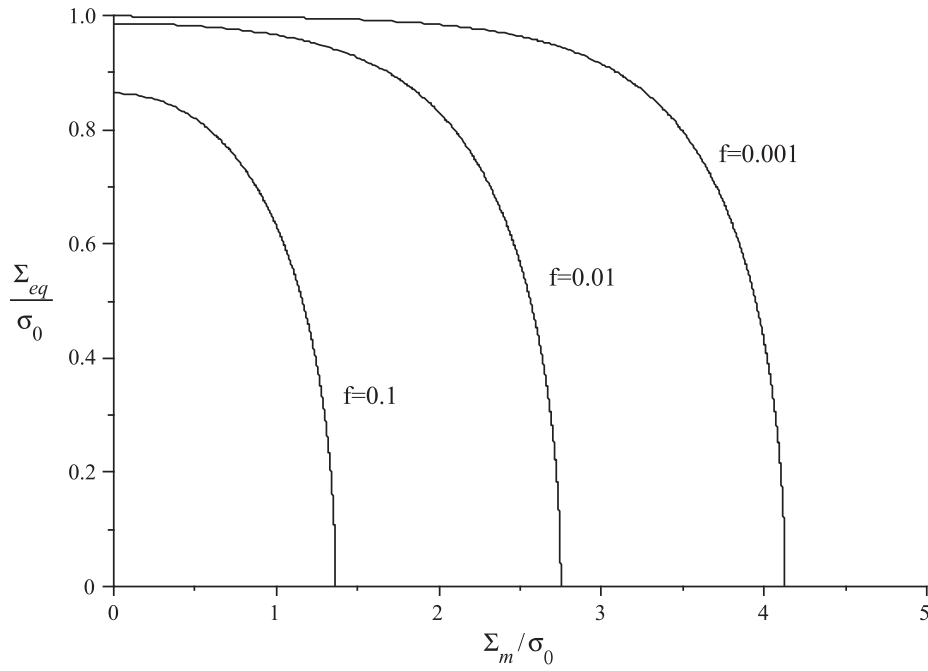
This section aims at evaluating the proposed criteria by comparing them to the one established by Vincent and Monerie (2008). Since only the case of oblate cavities has been studied by these authors, we will first illustrate the predictions of (13) in the case of prolate cavities without any comparison. Then, the case of oblate cavities (section ‘The case of oblate cavities’), and particularly that of penny-shaped cracks (section ‘The case ductile materials weakened by penny-shaped cracks’), will be fully analyzed through a comparison with the yield surfaces predicted by Vincent and Monerie (2008).

#### The Case of Prolate Cavities

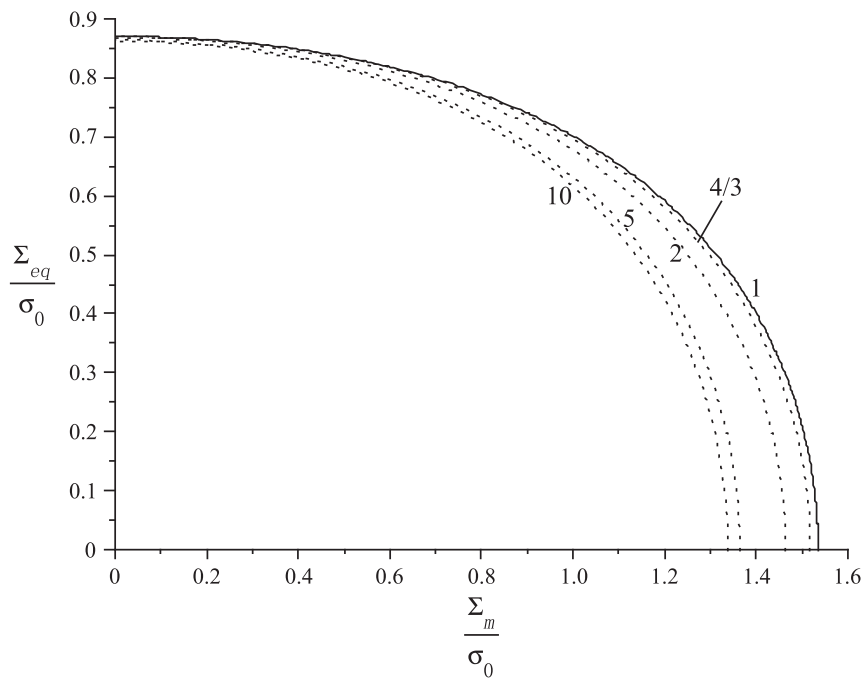
For porous media with randomly oriented prolate cavities, i.e.  $g=0$  in (13), Figure 3 shows the yield surfaces predicted by the new criterion for prolate voids. As an example an aspect ratio  $a_1/b_1=5$  and different values of porosity are considered. A strong effect of porosity on the macroscopic yield surface is observed. Yield surfaces corresponding to  $f=0.1$  for various aspect ratios are represented in Figure 4. It appears that, comparatively to the case of spherical voids, the randomly oriented prolate voids tend to significantly decrease the yield of the porous medium only when the aspect ratio is greater than 2. However, the effect of the voids aspect ratio does not increase after  $a_1/b_1=10$ .

#### The Case of Oblate Cavities

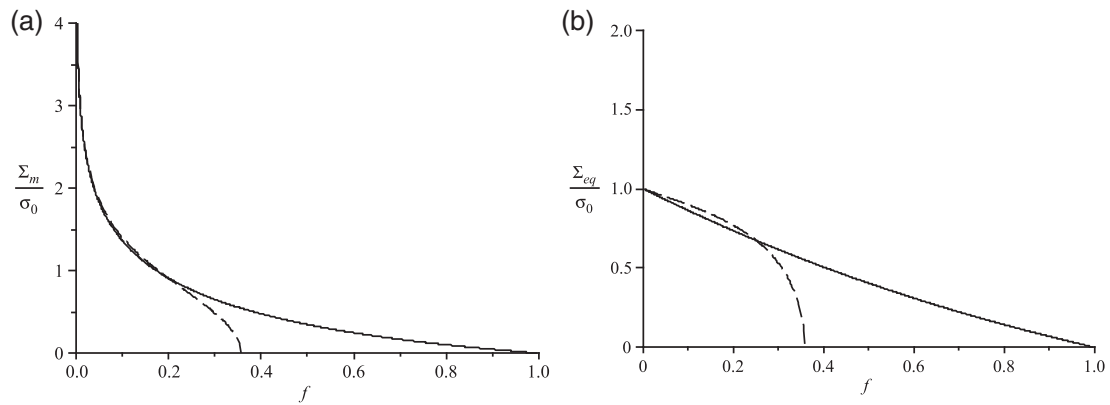
We aim at comparing our results, (13), with the criterion (14) in the case of oblate cavities. For illustration purpose, Figure 5 displays the predictions of the criteria (13) and (14) with aspect ratio  $a_1/b_1=2/5$ , for purely hydrostatic (Figure 5(a)) and purely deviatoric (Figure 5(b)) loadings. It is observed that the percolation threshold of (14) is about  $f=0.36$ . This suggests that the new criterion (13), can be applied for a much large range of porosity than the one proposed by (14). In the domain of porosity where both criteria are valid, the comparison (Figure 6) shows that they are close and in agreement with the numerical upper bound (Vincent and



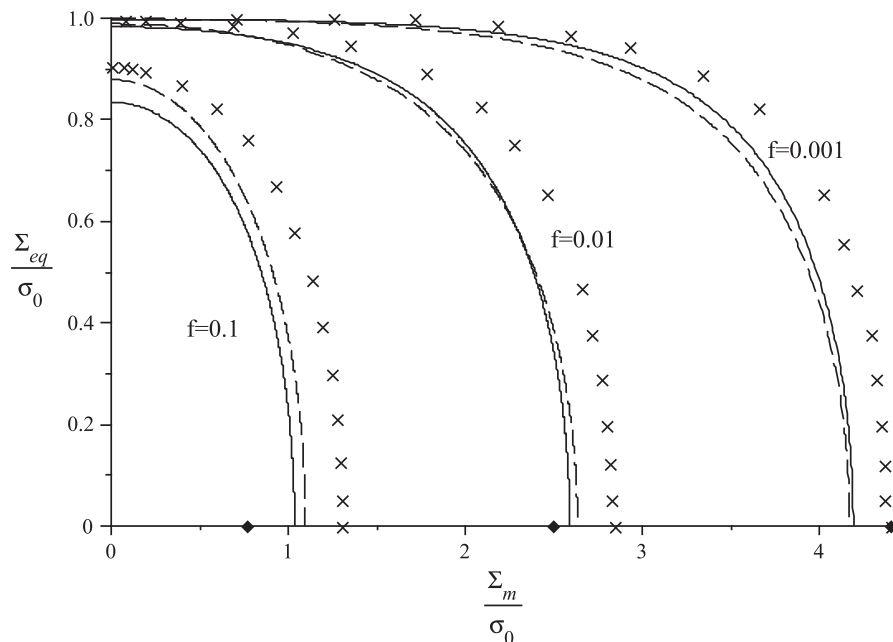
**Figure 3.** Comparison of the yield surfaces given by (13) in the case of prolate cavities with aspect ratio  $a_1/b_1 = 5$ . Different values of porosity are considered.



**Figure 4.** Comparison of the yield surfaces given by (13) in the case of prolate cavities ( $a_1/b_1 > 1$ ) for a porosity  $f=0.1$ . Different values of aspect ratio are considered.



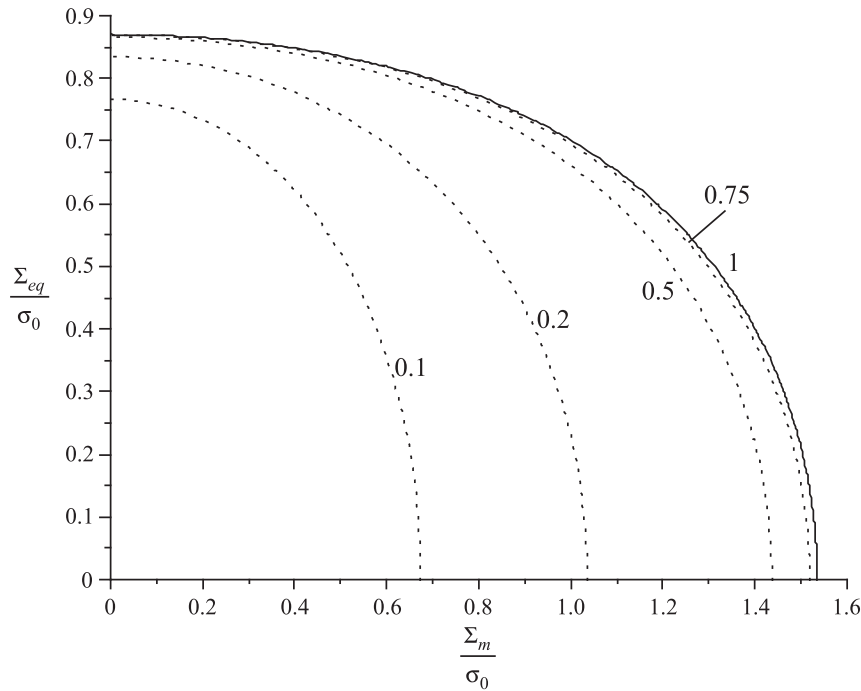
**Figure 5.** Comparison of the purely hydrostatic (a) and purely deviatoric (b) responses of the criterion (13) (solid line) and (14) (dashed line) in the case of oblate cavities with aspect ratio  $a_1/b_1 = 2/5$ .



**Figure 6.** Comparison of yield surfaces given by (13) (solid line) and (14) (dashed line) with the numerical results for oblate cavities ( $a_1/b_1 = 1/5$ ). Crosses: numerical upper bound of the type Gologanu non-axisymmetric (from Vincent and Monerie (2008)); Rhombic point: numerical points (lower bound) obtained by finite element solution (Vincent, 2007).

Monerie, 2008) and with the mean stress lower bound (Vincent, 2007) (except for the very low porosity,  $f=0.001$ , for which the two criteria seems to violate the numerical mean stress  $\Sigma_m$  lower bound).

The yield surfaces of the porous material for  $f=0.1$  and various aspect ratios  $a_1/b_1$  are shown in Figure 7. In comparison with the case of spherical voids, the randomly oriented oblate voids decrease significantly the strength of the material when the aspect ratio decreases. At the difference



**Figure 7.** Comparison of the yield surfaces given by (13) in the case of oblate cavities for a porosity  $f=0.1$ . Different values of aspect ratio are considered.

of the case of prolate voids, these results suggest that this effect will be particularly strong when the aspect ratio tends to 0 (case of penny-shaped cracks which need to be carefully modeled).

### The Case Ductile Materials Weakened by Penny-Shaped Cracks

As just mentioned before, the case of penny-shaped cracks, is derived from that of oblate spheroids by tending the voids aspect ratio to 0, and also the porosity  $f \rightarrow 0$ , the eccentricity  $e_1 \rightarrow 1$ , so that  $\alpha_1 = \alpha(e_1) = 1$  and then  $\chi = 2$ . Let us first observe that the macroscopic yield criterion for a single penny-shaped crack, derived from (3) together with (7) and (8), by properly taking into account the above limits, reads (Monchiet, 2006):

$$\frac{\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{1}{2}(2 + d)d \left[ \cosh \left\{ \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right\} - \frac{1}{2} \frac{\Sigma_B^2}{\sigma_0^2} \right] - \left( 1 + \frac{d}{2} \right)^2 - \frac{d^2}{4} = 0 \quad (15)$$

where  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  is given by:

$$\tilde{\Sigma}_{eq}^2 = \Sigma_{eq}^2 + 3d \frac{\Sigma_{33}^2}{\pi + 2(\alpha_2 - \beta_2 - 1)d} + 12d \frac{\Sigma_{13}^2 + \Sigma_{23}^2}{3\pi + 2(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3)d} \quad (16)$$

From the computation leading to (15) with (16), it has appeared that the effects of cracks on the macroscopic yield surface is determined not by porosity  $f$  (in fact tending to 0) but by the scalar quantity  $d = 2g = b_1^3/(a_2b_2^2)$  which is the well-known cracks density parameter already introduced by Budiansky and O'Connell (1976).

The deduced approximate expression of the macroscopic yield criterion in the case of randomly oriented penny-shaped cracks is obtained by using the same procedure as before in the general case of oblate cavities: integration of (15) on the surface of the unit sphere. Indeed, the integral of  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  on the surface of the unit sphere is computed by taking advantage of the Walpole algebra:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \tilde{\Sigma}_{eq}^2 dS = \Sigma_{eq}^2 + 3d \frac{\Sigma_m^2 + \frac{4}{45} \Sigma_{eq}^2}{\pi + 2(\alpha_2 - \beta_2 - 1)d} + 6d \frac{\frac{4}{15} \Sigma_{eq}^2}{3\pi + 2(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3)d} \quad (17)$$

Concerning the integral of  $\Sigma_B^2$ , its expression (12) is still valid provided that the coefficients  $\kappa_1$  and  $n$  are properly evaluated for penny-shaped cracks.

The final result which can be also directly deduced from (13) by taking the limits (of penny-shaped cracks case), reads:

$$E \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + F \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + \frac{2}{\chi^2} (\chi + d)d \cosh \left\{ \sqrt{\kappa_1 \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + n \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}} \right\} - \frac{2}{\chi^2} (\chi + d)d - 1 = 0 \quad (18)$$

where  $E$  and  $F$  are given by:

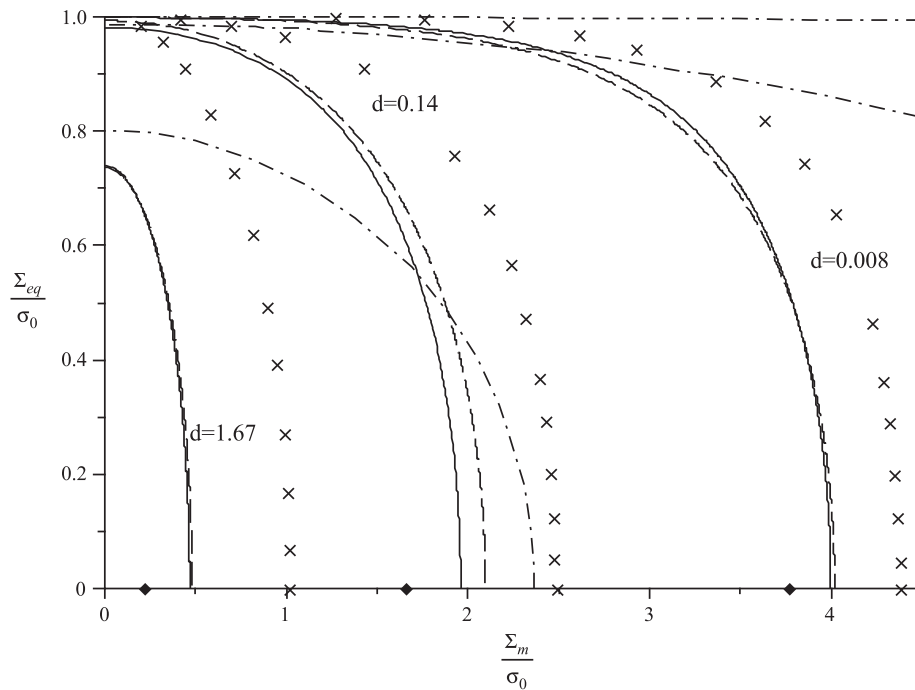
$$E = 1 + \frac{\frac{4}{15}d}{\pi + 2(\alpha_2 - \beta_2 - 1)d} + \frac{\frac{8}{5}d}{3\pi + 2(3\alpha_2 + 2\beta_2 - 3)d} - \frac{n}{\chi^2} (\chi + d)d$$

and

$$F = \frac{3d}{\pi + 2(\alpha_2 - \beta_2 - 1)d} - \frac{k_1}{\chi^2} (\chi + d)d$$

Note that  $n$  is already given in (12).

In the case of circular cracks, Figure 8 shows that for all values of the cracks density parameter  $d$ , the yield surfaces predicted by (18) and by (14) are close and in agreement with the upper bound and with the numerical mean stress lower bound. For moderate values  $d$  (for instance  $d = 0.14$ ), and in the case of purely deviatoric macroscopic loading, (14) violates the upper



**Figure 8.** Comparison of the yield surfaces associated to (18) and (14) with the numerical results in the case of circular cracks. Crosses: numerical upper bound of the type Gologanu non-axisymmetric (Vincent and Monerie, 2008); Rhombic point: numerical points (lower bound) obtained by finite element (Vincent, 2007); Dashed line: yield criterion (14) (Vincent and Monerie, 2008); Solid line: yield criterion (18); Mixed line: result given in Ponte Castaneda and Suquet (1998) (upper bound when  $d \leq 1$ ).

bound of Ponte Castaneda and Suquet (1998) while (18) is correctly inside this upper bound.

## CONCLUSIONS

This study concerned the development of a micromechanical modeling of ductile porous media made up of a von Mises matrix containing randomly oriented prolate or oblate cavities. New general expressions of the macroscopic isotropic criterion have been derived based on previous researches, (Monchiet, 2006; Monchiet et al., 2007), in which a single cavity has been considered. The obtained results generalize existing ones by including prolate voids and by providing closed-form expression in the case of cracked media. Through various illustrations, it was shown that the proposed approach leads to results having interesting features and a much large domain of validity than that provided by existing results. Since the interest of the new isotropic criterion is now demonstrated, a next step of

this study will consist to formulate the corresponding constitutive law by deriving the plastic deformation evolution law, as well as the damage growth.

## ACKNOWLEDGMENTS

The authors are grateful to anonymous reviewers whose suggestions and comments have allowed to clarify some points of this study and to improve its presentation.

## REFERENCES

- Budiansky, B. and O'connell, R.J. (1976). Elastic Moduli of a Cracked Solid, *International Journal of Solids and Structures*, **12**: 81–97.
- Eshelby, J.D. (1957). The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion and Related Problems, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, **241**: 376.
- Garajeu, M. and Suquet, P. (1997). Effective Properties of Porous Ideally Plastic or Viscoplastic Materials Containing Rigid Particles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **45**: 873–902.
- Gologanu, M., Leblond, J.B. and Devaux, J. (1993). Approximate Models for Ductile Metals Containing Non-spherical Voids - Case of Axisymmetric Prolate Ellipsoidal Cavities, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **41**: 1723–1754.
- Gologanu, M., Leblond, J.B., Perrin, G. and Devaux, J. (1997). Recent Extensions of Gurson's Model for Porous Ductile Metals. In: Suquet, P. (ed.), *Continuum Micromechanics*, New York, Springer-Verlag.
- Gurson, A.L. (1977). Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I - yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, **99**: 2–15.
- Monchiet V. (2006). Contributions à la Modélisation Micromécanique de l'endommagement et de la Fatigue Des Métaux Ductiles, PhD Thesis, University of Lille I, France.
- Monchiet, V., Charkaluk, E. and Kondo, D. (2007). An Improvement of Gurson-type Models of Porous Materials by using Eshelby-like Trial Velocity Fields, *Comptes Rendus Mécanique*, **335**: 32–41.
- Pardoën, T. and Hutchinson, J.W. (2000). An Extended Model for Void Growth and Coalescence, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **48**: 2467–2512.
- Ponte Castaneda, P. and Suquet, P. (1998). *Nonlinear Composites. Advances in Applied Mechanics*, Vol. 34, New York, Academic Press, pp. 171–302.
- Salençon, J. (2001). *Handbook of Continuum Mechanics*, Berlin, Springer.
- Tvergaard, V. (1981). Influence of Voids on Shear Bands Instabilities Under Plane Strain Conditions, *International Journal of Fracture*, **17**: 389–407.
- Tvergaard, V. and Needleman, A. (1984). Analysis of the Cup-cone Fracture in a Round Tensile Bar, *Acta Metallurgica*, **32**: 157–169.
- Vincent, P.-G. (2007). Modélisation Micromécanique de la Croissance et de la percolation de pores sous Pression Dans une Matrice Céramique à Haute Température, PhD Thesis, Université d'aix-marseille 1, Provence.
- Vincent, P.-G. and Monerie, Y. (2008). Yield Criterion for a Rigid-ideally Plastic Material with Randomly Oriented Cracks, *Comptes Rendus Mécanique*, **336**: 297–303.



Walpole, L.J. (1981). Elastic Behavior of Composite Materials: Theoretical Foundations, *Advances in Applied Mechanics*, **21**: 169–243.

## APPENDIX

### (A) Expression of Coefficients $\kappa_i$ and $\mu_i$

The expressions of  $\kappa_i$  are the following:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{9p_{22}}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; & \kappa_2 &= \frac{9p_{11}(1 - \alpha_2 - \beta_2)^2}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; & \kappa_3 &= \frac{18p_{12}(1 - \alpha_2 - \beta_2)}{p_{11}p_{22} - p_{12}^2}; \\ \kappa_4 &= \frac{(3 - 3\alpha_2 - \beta_2)^2}{4p_{33}}; & \kappa_5 &= \frac{(2\beta_2 + 3\alpha_2 - 1)^2}{p_{55}}; \end{aligned} \tag{A.1}$$

with  $p_{rs}$  given by:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1+3\alpha_1)(1-\alpha_1) - f(1+3\alpha_2)(1-\alpha_2)] \\ p_{12} &= p_{21} = 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1-3\alpha_1)(1-\alpha_1-\beta_1) \\ &\quad - f(1-3\alpha_2)(1-\alpha_2-\beta_2)] \\ p_{22} &= 3 \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(3\alpha_1+3\beta_1-1)(1-\alpha_1-\beta_1) \\ &\quad - f(3\alpha_2+3\beta_2-1)(1-\alpha_2-\beta_2)] \\ p_{33} &= p_{44} = \frac{1}{12} \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1+3\alpha_1+\beta_1)(3-3\alpha_1-\beta_1) \\ &\quad - f(1+3\alpha_2+\beta_2)(3-3\alpha_2-\beta_2)] \\ p_{55} &= p_{66} = \frac{1}{3} \frac{(1+g)(g+f)}{f(1-f)} [(1-3\alpha_1-2\beta_1)(3\alpha_1+2\beta_1-3) \\ &\quad - f(1-3\alpha_2-2\beta_2)(3\alpha_2+2\beta_2-3)] \end{aligned} \tag{A.2}$$

with  $\alpha_i = \alpha(e_i)$ , the function  $\alpha$  being defined by (6).  $\beta_i = \beta(e_i)$ , with:

$$\beta(e) = \begin{cases} (1 - 3\alpha(e)) \frac{1}{e^2} & \text{(prolate void)} \\ -(1 - 3\alpha(e)) \frac{1 - e^2}{e^2} & \text{(oblate void)} \end{cases} \tag{A.3}$$

Concerning  $\mu_i$ , one has:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{4f}{3\Upsilon} - f; & \mu_2 &= \frac{3f}{2\Upsilon}(3\tilde{\alpha} + 3\tilde{\beta} - 1); & \mu_3 &= \frac{2f}{\Upsilon}(1 - 3\tilde{\alpha}); \\ \mu_4 &= f \frac{3 - 3\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}}{1 + 3\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}}; & \mu_5 &= f \frac{3\tilde{\alpha} + 2\tilde{\beta} - 1}{3 - 3\tilde{\alpha} - 2\tilde{\beta}};\end{aligned}\tag{A.4}$$

where  $\Upsilon = 2\tilde{\beta} + 4\tilde{\alpha} - 3\tilde{\alpha}^2 - 1$ . The parameters  $\tilde{\alpha}$  and  $\tilde{\beta}$  are defined by:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha_1 - f\alpha_2}{1 - f}; \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta_1 - f\beta_2}{1 - f};\tag{A.5}$$

Finally,  $m$  and  $n$  which appear in (11) and (12) read:

$$m = \frac{5 + \mu_1 + 2\mu_4 + 2\mu_5}{5};$$

$$n = \frac{(1 - 3\alpha_2)^2}{45}\kappa_1 + \frac{1}{5}\kappa_2 + \frac{1 - 3\alpha_2}{15}\kappa_3 + \frac{2}{15}\kappa_4 + \frac{2}{15}\kappa_5.$$

### (B) Walpole's Tensorial Algebra for Transversely Isotropic Tensors and Applications

We summarize here some elements of the tensorial algebra introduced by Walpole (1981) for transversely isotropic fourth-order tensors. This algebra eases the mathematical operations between these class of tensors. It requires a basis composed of six tensors which will be introduced below. Let us recall that the transverse isotropy is introduced here by the orientation of the spheroidal cavities, whose axis of revolution is defined by a unit vector  $\underline{n}$ .

The six components of the basis are:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1 &= \frac{1}{2}\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}, & \mathbb{E}_2 &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}, & \mathbb{E}_3 &= \mathbf{b} \overline{\otimes} \mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{b} \otimes \mathbf{b}, \\ \mathbb{E}_4 &= \mathbf{a} \overline{\otimes} \mathbf{b} + \mathbf{b} \overline{\otimes} \mathbf{a}, & \mathbb{E}_5 &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, & \mathbb{E}_6 &= \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}\end{aligned}\tag{B.1}$$

with  $\mathbf{a} = \underline{n} \otimes \underline{n}$ ,  $\mathbf{b} = \boldsymbol{\delta} - \underline{n} \otimes \underline{n}$ ,  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $(\mathbf{a} \overline{\otimes} \mathbf{b})_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ik}b_{jl} + a_{il}b_{jk})$ . It is easy to verify that  $\forall p, q = 1, \dots, 4$

$$\mathbb{E}_p \cdot \mathbb{E}_q = \mathbb{E}_q \quad \text{if } p = q; \quad \mathbb{E}_p \cdot \mathbb{E}_q = 0 \quad \text{if } p \neq q;\tag{B.2}$$

Any fourth-order transversely isotropic tensors,  $\mathbb{U}$ , without the major symmetries, can be written as a linear combination of  $\mathbb{E}_i$ :

$$\mathbb{U} = c \mathbb{E}_1 + d \mathbb{E}_2 + e \mathbb{E}_3 + f \mathbb{E}_4 + g \mathbb{E}_5 + h \mathbb{E}_6 \quad (\text{B.3})$$

For the computation of  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  and  $\Sigma_B^2$  defined by Equations (8) and (7), the following identities are useful,  $\underline{n}$  being taken equal to  $\underline{e}_3$ :

$$\begin{aligned} \Sigma : \mathbb{E}_1 : \Sigma &= \frac{1}{2}(\Sigma_{11} + \Sigma_{22})^2; & \Sigma : \mathbb{E}_2 : \Sigma &= \Sigma_{33}^2; \\ \Sigma : \mathbb{E}_3 : \Sigma &= \frac{1}{2}(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + 2\Sigma_{12}^2; & \Sigma : \mathbb{E}_4 : \Sigma &= 2\Sigma_{13}^2 + 2\Sigma_{23}^2; \\ \Sigma : \mathbb{E}_5 : \Sigma &= (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})\Sigma_{33}; & \Sigma : \mathbb{E}_6 : \Sigma &= (\Sigma_{11} + \Sigma_{22})\Sigma_{33} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

It follows that:

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{eq}^2 &= H_1^A \Sigma : \mathbb{E}_1 : \Sigma + H_2^A \Sigma : \mathbb{E}_2 : \Sigma + H_3^A \Sigma : \mathbb{E}_3 : \Sigma \\ &\quad + H_4^A \Sigma : \mathbb{E}_4 : \Sigma + H_5^A \Sigma : (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) : \Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_B^2 &= H_1^B \Sigma : \mathbb{E}_1 : \Sigma + H_2^B \Sigma : \mathbb{E}_2 : \Sigma + H_3^B \Sigma : \mathbb{E}_3 : \Sigma \\ &\quad + H_4^B \Sigma : \mathbb{E}_4 : \Sigma + H_5^B \Sigma : (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) : \Sigma \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

where the quantities  $H_i^A$  and  $H_i^B$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) are expressed as:

$$\begin{aligned} H_1^A &= \frac{1}{2} + \frac{\mu_1}{2} + \frac{2\mu_2}{9} + \frac{\mu_3}{3}; & H_2^A &= 1 + \mu_1 + \frac{\mu_2}{9} - \frac{\mu_3}{3}; & H_3^A &= \frac{3}{2}(1 + \mu_4); \\ H_4^A &= \frac{3}{2}(1 + \mu_5); & H_5^A &= \frac{1}{2} \left( -1 - \mu_1 + \frac{2\mu_2}{9} - \frac{\mu_3}{6} \right) \\ H_1^B &= \frac{(1 - \alpha_2)^2}{2} \kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{(1 - \alpha_2)}{2} \kappa_3; & H_2^B &= \kappa_1 \alpha_2^2 + \kappa_2 - \kappa_3 \alpha_2; \\ H_3^B &= \frac{\kappa_4}{2}; & H_4^B &= \frac{\kappa_5}{2}; & H_5^B &= \frac{1}{2} \left( \kappa_1 \alpha_2 (1 - \alpha_2) - \kappa_2 + \kappa_3 \frac{2\alpha_2 - 1}{2} \right) \end{aligned}$$

Finally, the integration of  $\tilde{\Sigma}_{eq}^2$  and  $\Sigma_B^2$ , which leads to (11) and (12), is straightforward by noting the following identities:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \mathbb{E}_1 dS &= \frac{2}{3} \mathbb{J} + \frac{1}{15} \mathbb{K}; & \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \mathbb{E}_2 dS &= \frac{1}{3} \mathbb{J} + \frac{2}{15} \mathbb{K}; \\ \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \mathbb{E}_3 dS &= \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \mathbb{E}_4 dS = \frac{2}{5} \mathbb{K}; & \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \frac{1}{2} (\mathbb{E}_5 + \mathbb{E}_6) dS &= \frac{2}{3} \mathbb{J} - \frac{2}{15} \mathbb{K} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Let us recall that  $\mathbb{J} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}$  and  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ .

**(C) The Coefficients of the Criterion (14) Proposed by Vincent and Monerie (2008) are:**

$$\alpha_1 = \frac{-e_1(1 - e_1^2) + (1 - e_1^2)^{1/2} \arcsin(e_1)}{2e_1^3}, \quad \alpha_2 = \frac{(1 - e_2^2)(1 - 2e_2^2)}{3 - 6e_2^2 + 4e_2^4},$$

$$g^* = \frac{e_2^3}{(1 - e_2^2)^{1/2}}, \quad g_f = \frac{g^*}{g^* + f}, \quad g_1 = \frac{g^*}{g^* + 1}, \quad H = 2|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

$$(\kappa)^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{(2/3)(g_f - g_1) + (2/5)(g_f^{5/2} - g_1^{5/2})(4/3 - g_f^{5/2} - g_1^{5/2})}{\ln(g_f/g_1)}$$

$$\eta = \frac{\kappa(1 - f)(g^* + 1)(g^* + f) \sinh(\kappa H)}{(g^* + 1)^2 + (g^* + f)^2 + (g^* + 1)(g^* + f)(\kappa H \sinh(\kappa H) - 2 \cosh(\kappa H))},$$

$$C = \frac{-(\kappa/\eta)(g^* + 1)(g^* + f) \sinh(\kappa H)}{\eta H - (1 - f)},$$

$$D = \frac{4}{15} C \left( \frac{3}{4} + \frac{\eta^2}{3} (1 - 3\alpha_2)^2 + \eta(1 - 3\alpha_2) \right) + \frac{4}{5}$$

**(D) Proof of the Convexity of the Macroscopic Yield Criterion (13):**

Let us first recall that the proposed macroscopic yield function takes the following form:

$$\Phi = A \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + B \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + 2G \cosh(\mathfrak{R}) - (1 + g)^2 - (g + f)^2 \quad (\text{D.1})$$

where  $\mathfrak{R} = \sqrt{\kappa_1 \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + n \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2}}$ .

The aim here is to prove that for any eccentricity ( $e_1 \in [0, 1]$ ) and any porosity ( $f \in [0, 1]$ ), this yield function is convex. To this end, its associated Hessian matrix (second derivatives of  $\Phi$ ) ought to be positive semi-definite, i.e. the following condition must be satisfied (see for instance Salençon, 2001):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{ij} \partial \Sigma_{kl}} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} > 0 \quad (\text{D.2})$$

for any macroscopic stress tensor  $\Sigma$ .

Taking into account the following details of the computation:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{ij}} = \frac{3A}{\sigma_0^2} \Sigma'_{ij} + \frac{2B}{3\sigma_0^2} \Sigma_m \delta_{ij} + 2G \sinh(\mathfrak{R}) \frac{\frac{\kappa_1}{3\sigma_0^2} \Sigma_m \delta_{ij} + \frac{3n}{2\sigma_0^2} \Sigma'_{ij}}{\mathfrak{R}} \quad (\text{D.3})$$

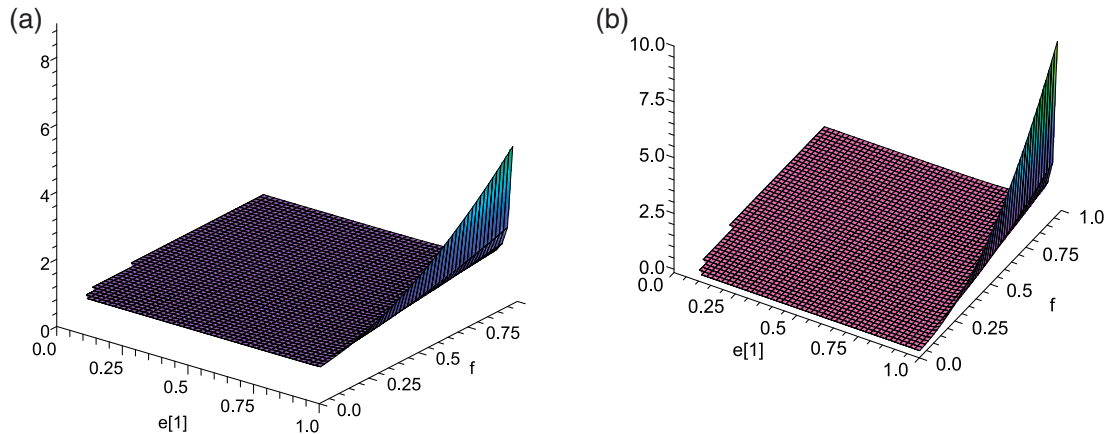
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{ij} \partial \Sigma_{kl}} &= \frac{3A}{\sigma_0^2} K_{ijkl} + \frac{2B}{9\sigma_0^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{2G}{\mathfrak{R}} \sinh(\mathfrak{R}) \left( \frac{\kappa_1}{9\sigma_0^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{3n}{2\sigma_0^2} K_{ijkl} \right) \\ &+ \frac{2G}{\mathfrak{R}^2} \left( \cosh(\mathfrak{R}) - \frac{\sinh(\mathfrak{R})}{\mathfrak{R}} \right) \left( \frac{\kappa_1}{3\sigma_0^2} \Sigma_m \delta_{ij} + \frac{3n}{2\sigma_0^2} \Sigma'_{ij} \right) \\ &\otimes \left( \frac{\kappa_1}{3\sigma_0^2} \Sigma_m \delta_{kl} + \frac{3n}{2\sigma_0^2} \Sigma'_{kl} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

condition (D.2) reads:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Sigma_{ij} \partial \Sigma_{kl}} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} = \frac{2A}{\sigma_0^2} \Sigma_{eq}^2 + \frac{2B}{\sigma_0^2} \Sigma_m^2 + 2G \mathfrak{R}^2 \cosh(\mathfrak{R}) > 0 \quad (\text{D.5})$$

for any macroscopic stress tensor  $\Sigma$ .

Note first that  $G$  is strictly positive. Moreover, from Figure D.1, it is readily seen that  $A = m - Gn > 0$  and  $B = \mu_2 - G\kappa_1 > 0$ , for any eccentricity and any porosity. It follows that the above condition is fulfilled. This proves that the proposed macroscopic yield function (13) is convex.



**Figure D.1.** Coefficients of the yield function (13) in the case of oblate cavities as function of porosity  $f$  and eccentricity  $e_1$ : (a) coefficient  $A$ ; (b) coefficient  $B$ .



## Chapitre 3

Plasticité de milieux poreux à  
matrice plastiquement compressible  
de type Green : application aux  
matériaux à double porosité

## **3.1 Introduction**

Depuis les travaux de Gurson [27] de nombreuses approches de modélisation micromécanique de l'endommagement des milieux poreux ductiles ont été développées, en mettant principalement l'accent sur des méthodes de type analyse limite (cf. par exemple [21], [24], [37]) ou de type variationnel en homogénéisation non linéaire [45] [35] [4]. Ces travaux ont permis d'aboutir, pour des milieux poreux à matrice plastiquement incompressible, à la proposition de nouveaux critères macroscopique de plasticité intégrant notamment les effets de forme de cavité [24] [20] [36] [38] ou encore l'anisotropie plastique de la matrice [5] [37] [30]. En dépit des progrès significatifs réalisés dans le cadre de ces travaux, l'extension des résultats disponibles aux géomatériaux cohérents (p.ex. roches, bétons, etc.) et à d'autres classes de matériaux telles que les polymères poreux soulève de nombreuses difficultés dont l'une des plus importante, est probablement la prise en compte de la compressibilité plastique de la matrice. S'agissant par exemple d'une matrice de Drucker-Prager, les travaux les plus avancés dans ce domaine sont ceux issus des approches variationnelles d'homogénéisation non linéaire (cf. [3] et plus récemment [33]), mais ils conduisent à des résultats dont la validité est limitée à une gamme réduite de chargement. On notera le développement récent de travaux à caractère numérique qui visent à fournir des bornes supérieure et inférieure pour la surface de plasticité de matériaux poreux à matrice de Drucker-Prager (voir [57]) ou à matrice de Coulomb ou de Drucker-Prager [56]. Quelques tentatives théoriques dans le contexte de l'analyse limite commencent à voir le jour pour cette dernière classe de matériaux [26].

Avant d'étudier la modélisation des matériaux poreux à matrice de Drucker-Prager, on se propose dans ce chapitre de traiter le cas des milieux poreux à matrice elliptique. Les applications concernent notamment les milieux à deux populations de cavités et à deux échelles différentes récemment étudiés par Vincent et al. [63]. Pour ces milieux, la compressibilité plastique intervient dans la deuxième d'homogénéisation et s'avère cruciale.



L'objet principal de ce chapitre est de proposer une démarche similaire à celle de [63] pour des matrices obéissant à un critère elliptique de plasticité quadratique. On vise en particulier à établir une expression analytique du critère approché et l'appliquer à des milieux à double porosité.

## 3.2 Critère macroscopique pour un milieu poreux à matrice compressible de type Green

### 3.2.1 Critère local elliptique et fonction d'appui associée

On considère à nouveau pour l'analyse limite le modèle classique de la sphère creuse. Comme précédemment, les rayons interne et externe de cette sphère creuse sont respectivement notés  $a$  et  $b$ . Des conditions de taux de déformation homogène au bord,  $v = \mathbf{D}.x$ , sont appliquées sur la surface externe de la sphère.  $\mathbf{D}$  représente le taux de déformation macroscopique. La matrice solide est à nouveau considérée du type rigide parfaitement plastique, mais obéit à un critère elliptique, sous la forme :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \beta\sigma_{eq}^2 + \frac{\alpha}{2}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 - \sigma_0^2 \leq 0 \quad (3.1)$$

ce critère qui correspond à une matrice plastiquement compressible peut également s'exprimer :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0^2 \leq 0 \quad (3.2)$$

où  $\mathbb{M} = \alpha\mathbb{J} + \beta\mathbb{K}$ , est un tenseur d'ordre quatre, avec des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  spécifiques au critère ;  $\mathbb{J}$  et  $\mathbb{K}$  sont les projecteurs classiques des tenseurs d'ordre quatre isotropes ayant les symétries mineures et majeures,  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur de contraintes microscopiques ;  $\sigma_{eq}$  et  $\text{tr}\boldsymbol{\sigma}$  représentent la contrainte équivalente et la contrainte hydrostatique respectivement.

On notera que ce type de critère correspond à une large classe de propositions faites

ou établies pour les milieux poreux. A titre d'exemple, mentionnons le critère proposé par Green [25] à l'aide d'une démarche semi phénoménologique, ou encore celui de Ponte Castañeda [45], ou de Michiel et Suquet [35], tous obtenues à partir des démarches variationnelles. Comme indiqué au premier chapitre, la proximité entre les prédictions de [25] et [35] est tout à fait remarquable.

Le taux de déformation local est obtenu via la loi de normalité :

$$\mathbf{d} = \dot{\Lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3\dot{\Lambda} \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

où  $\dot{\Lambda}$  est le multiplicateur plastique dont l'expression sera précisée.

D'où l'on déduit la dissipation plastique local  $\pi(\mathbf{d})$  dans la matrice en tenant compte de (3.2) :

$$\pi(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 3\dot{\Lambda} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} = 2\dot{\Lambda} \sigma_0^2 \quad (3.4)$$

Il reste donc à déterminer  $\dot{\Lambda}$ . A cette fin, en posant  $\mathbb{H}$  l'inverse de  $\mathbb{M}$  ( $\mathbb{H} = \frac{1}{\alpha} \mathbb{J} + \frac{1}{\beta} \mathbb{K}$ ), il vient :

$$\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbb{H} : \mathbf{d} = 4\dot{\Lambda}^2 \sigma_0^2 \quad (3.5)$$

si bien que  $\dot{\Lambda}$  s'écrit :

$$\dot{\Lambda} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbb{H} : \mathbf{d}}}{2\sigma_0} \quad (3.6)$$

En reportant (3.6) dans (3.4), on obtient :

$$\pi(\mathbf{d}) = \sigma_0 d_{eq} \quad \text{avec} \quad d_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbb{H} : \mathbf{d}} \quad (3.7)$$

La dissipation macroscopique  $\Pi(\mathbf{D})$  s'obtient à partir de (3.2) et (3.5) :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_{\Omega-\omega} d_{eq} dV \quad (3.8)$$

Le critère macroscopique de plasticité s'en déduit par  $\Sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}}$ , où  $\Sigma$  correspond à l'état limite admissible.

### 3.2.2 Champ de vitesse utilisé

Dans la perspective de l'étude par analyse limite, et suivant en cela P.-G. Vincent [61] (voir également [63]), le champ de vitesse dans la matrice est choisi sous la forme suivante :

$$\underline{v} = A \underline{x} + \underline{v}^G \quad (3.9)$$

$A$  est un scalaire,  $\underline{v}^G$  est un champ de vitesse de type Gurson (matrice incompressible). On rappelle que  $\underline{v}^G$  a deux composantes dont le premier traduit l'expansion de la cavité et du volume extérieur, tandis que le second décrit le changement de forme de la cavité et du volume extérieur. Sa forme est :

$$\underline{v}^G = \frac{P}{r^2} \underline{e}_r + \mathbf{Q} \cdot \underline{x} \quad (3.10)$$

$P$  est une constante et  $\mathbf{Q}$  un tenseur d'ordre 2 symétrique et à trace nulle ( $tr \mathbf{Q} = 0$ ).

Le champ  $A \underline{x}$  permet d'introduire une composante compressible dans  $\underline{v}$ ; le champ  $\underline{v}^G$  est donc pris cinématiquement admissible avec  $(\mathbf{D} - A\mathbf{1})$ , i.e. :

$$\underline{v}^G = (\mathbf{D} - A\mathbf{1}) \cdot \underline{x}, \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (3.11)$$

D'où sa forme finale pour la présente étude :

$$\underline{v} = A \underline{x} + \underline{v}^G = A \underline{x} + \frac{b^3(D_m - A)}{r^2} \underline{e}_r + \mathbf{D}' \cdot \underline{x} \quad (3.12)$$

On vérifie aisément que ce champ  $\underline{v}$  satisfait la condition de taux de déformation homogène au bord extérieur du domaine,  $v = \mathbf{D} \cdot x$ . Le tenseur  $\mathbf{D}'$  représente, comme

auparavant, le déviateur du tenseur  $\mathbf{D}$ .

Le taux de déformation dans la matrice solide, obtenu à partir de (3.12), s'écrit donc en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{d} = A\mathbf{1} + \mathbf{d}^G, \quad \text{avec} \quad \mathbf{d}^G = \mathbf{D}' + \frac{b^3(D_m - A)}{r^3} [\mathbf{1} - 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r] \quad (3.13)$$

La dissipation locale est définie par (3.7), où le taux de déformation plastique équivalent,  $d_{eq}$ , s'écrit à présent, en tenant compte de (3.13) :

$$d_{eq}^2 = \frac{2}{3}A^2(\mathbf{1} : \mathbb{H} : \mathbf{1}) + \frac{4}{3}A(\mathbf{1} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^G) + d_{eq}^{G^2}, \quad \text{avec} \quad d_{eq}^{G^2} = \frac{2}{3}\mathbf{d}^G : \mathbb{H} : \mathbf{d}^G \quad (3.14)$$

Sachant que  $\mathbf{1} : \mathbb{H} : \mathbf{1} = \frac{3}{\alpha}$ ,  $\mathbf{1} : \mathbb{H} : \mathbf{d}^G = 0$ , on déduit :

$$d_{eq}^2 = \frac{2A^2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} \left[ \frac{b^3(D_m - A)}{r^3} \right]^2 + \frac{D_{eq}^2}{\beta} + \frac{4}{3\beta} \frac{b^3(D_m - A)}{r^3} \mathbf{D}' : [\mathbf{1} - 3\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r] \quad (3.15)$$

### 3.2.3 Critère macroscopique du milieu poreux

Il reste à déterminer l'expression de la dissipation macroscopique  $\Pi(\mathbf{D})$ . En raison de la présence du scalaire inconnu  $A$  dans  $\mathbf{d}$ , on introduit la fonctionnelle  $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A)$  définie par :

$$\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A) = \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_{\Omega-\omega} d_{eq} dV \quad (3.16)$$

et qu'il s'agira de minimiser par rapport à la variable inconnue,  $A$ .

La dissipation macroscopique,  $\Pi(\mathbf{D})$ , est alors déduite à l'aide de cette procédure de minimisation de  $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A)$  :

$$\Pi(\mathbf{D}) = \min_A \left[ \tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A) \right] \quad (3.17)$$

ce qui permet d'établir le critère macroscopique de plasticité :  $\Sigma = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}}$ .

La détermination de ce critère macroscopique requiert ainsi l'intégration de (3.16) puis

la minimisation (3.17). Pour cela, on adopte l'approximation utilisée par Gurson [27] (cf. également [42]), et qui consiste à remplacer  $d_{eq}$  par  $\sqrt{\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)}}$  dont l'expression est :

$$\langle d_{eq}^2 \rangle_{S(r)} = \frac{2A^2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} \left[ \frac{b^3(D_m - A)}{r^3} \right]^2 + \frac{D_{eq}^2}{\beta} \quad (3.18)$$

et pour lequel  $\langle \mathbf{1} - 3\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \rangle_{S(r)} = 0$ .

La dissipation macroscopique (cf. équation (3.16)) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A) &= \frac{\sigma_0}{\Omega} \int_a^b \sqrt{\frac{2A^2}{\alpha} + \frac{4}{\beta} \left[ \frac{b^3(D_m - A)}{r^3} \right]^2 + \frac{D_{eq}^2}{\beta}} \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= \sigma_0 \int_1^{\frac{1}{f}} \sqrt{M^2 + N^2 u^2} \frac{du}{u^2} \\ &= \sigma_0 \left[ N \cdot \operatorname{arcsinh}\left(\frac{uN}{M}\right) - \frac{\sqrt{M^2 + N^2 u^2}}{u} \right]_1^{\frac{1}{f}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où l'on a posé  $M^2 = \frac{2A^2}{\alpha} + \frac{D_{eq}^2}{\beta}$ ,  $N^2 = \frac{4}{\beta}(D_m - A)^2$  et  $u = \frac{b^3}{r^3}$

Ayant à disposition une expression approchée de la fonctionnelle  $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A)$ , il s'agit de procéder maintenant à sa minimisation par rapport à l'inconnue  $A$ . C'est en principe après cette minimisation qu'est construit le critère macroscopique de plasticité déduit de  $\Sigma = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{D}}$ . En pratique, plutôt que de traiter ces deux étapes de manière successive, la détermination du critère peut être effectuée en les abordant simultanément (cf. [36]). Il vient :

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A)}{\partial \mathbf{D}}, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A)}{\partial A} = 0 \quad (3.20)$$

Il est judicieux d'effectuer le changement de variable suivant :  $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A) = \tilde{\Pi}(M, N)$ , avec  $M$  et  $N$  définis ci dessus.

Le tenseur de contrainte macroscopique  $\Sigma$  est alors défini par :

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial M} : \frac{\partial M}{\partial \mathbf{D}} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial N} : \frac{\partial N}{\partial \mathbf{D}} \quad (3.21)$$

avec la condition de minimisation par rapport à  $A$  :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial M} : \frac{\partial M}{\partial A} + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial N} : \frac{\partial N}{\partial A} = 0 \quad (3.22)$$

En suivant une démarche similaire à celle de Gurson, s'appuyant sur (3.19), on établit, en posant :

$$\begin{aligned} \Sigma_A &= \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial M} = \sigma_0 \left[ \sqrt{1 + \frac{N^2}{M^2}} - \sqrt{f^2 + \frac{N^2}{M^2}} \right] \\ \Sigma_B &= \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial N} = \sigma_0 \left[ \operatorname{arcsinh}\left(\frac{N}{fM}\right) - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{N}{M}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

que le critère de plasticité se présente sous la forme :

$$\left( \frac{\Sigma_A}{\sigma_0} \right)^2 + 2f \cosh \left( \frac{\Sigma_B}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2 = 0 \quad (3.24)$$

pour laque  $\frac{N}{M}$  a été éliminé entre les 2 relations (3.23).

Il reste à opérer maintenant la minimisation dans (3.20).

En remarquant que  $M$  est fonction uniquement de  $\mathbf{D}'$  et de  $A$ , tandis que  $N$  est fonction de  $D_m$  et de  $A$ , on a :

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial D_m} = \frac{2}{3\sqrt{\beta}} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial N} \quad \Sigma' = \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{D}'} = \frac{2\mathbf{D}'}{3\beta M} \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial M} \quad (3.25)$$

d'où :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial N} = \frac{3\sqrt{\beta}}{2} \Sigma_m \quad (3.26)$$

La condition (3.22) assurant le minimum de  $\tilde{\Pi}(\mathbf{D}, A)$ , s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial M} \frac{2A}{\alpha M} - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial N} \frac{2}{\sqrt{\beta}} = 0 \quad (3.27)$$

En tenant compte de (3.26), on a :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial M} = \frac{3\Sigma_m \alpha M}{2A} \quad (3.28)$$

Combinant les deux relations (3.28) et (3.25), on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial M} = \sqrt{\frac{9}{2}\alpha\Sigma_m^2 + \beta\Sigma_{eq}^2} \quad (3.29)$$

D'où pour  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  :

$$\Sigma_A = \sqrt{\frac{9}{2}\alpha\Sigma_m^2 + \beta\Sigma_{eq}^2}, \quad \Sigma_B = \frac{3\sqrt{\beta}}{2}\Sigma_m \quad (3.30)$$

Le critère macroscopique recherché s'obtient en remplaçant dans (3.24) les quantités  $\Sigma_A$  et  $\Sigma_B$  par leurs expressions (3.30) qui viennent d'être établies :

$$\beta \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{9\alpha}{2} \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3\sqrt{\beta}}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \quad (3.31)$$

Bien que l'on retrouve le critère elliptique à porosité nulle, il convient de noter que le critère macroscopique établi est non elliptique. De plus, il contient le critère de Gurson naturellement retrouvé pour  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$  (correspondant à une matrice de von Mises).

Par ailleurs, à l'aide de (3.23) et (3.27), on peut obtenir l'équation implicite donnant  $A$  :

$$\left[ \sqrt{1 + \frac{N^2}{M^2}} - \sqrt{f^2 + \frac{N^2}{M^2}} \right] \frac{A\sqrt{\beta}}{\alpha M} = \left[ \operatorname{arcsinh}\left(\frac{N}{fM}\right) - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{N}{M}\right) \right] \quad (3.32)$$

On note ainsi que  $A$  est une fonction de  $D_{eq}$ ,  $D_m$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .

### 3.3 Recherche de la solution exacte pour des chargements hydrostatiques

Considérons maintenant la sphère creuse, soumise à un chargement hydrostatique sur le bord extérieur  $r = b$ , i.e.  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n} = \Sigma_m \underline{n}$  avec  $\Sigma_m \geq 0$ . On rappelle que la matrice solide est du type rigide parfaitement plastique et obéit au critère elliptique (3.1) :

Du fait que le chargement respecte la symétrie sphérique, le tenseur des contraintes local se réduit aux composantes  $\sigma_{rr}$  et  $\sigma_{\theta\theta} \equiv \sigma_{\varphi\varphi}$  ne dépendant que de  $r$  ; l'équation d'équilibre donne alors :

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = 2 \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}}{r} \quad (3.33)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\sigma_{rr}(a) = 0; \quad \sigma_{rr}(b) = \Sigma_m \quad (3.34)$$

De plus, on a  $\sigma_{eq}^2 = (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr})^2$  et  $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + 2\sigma_{\theta\theta}) = \sigma_{rr} - \frac{2}{3}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})$ , d'où le critère (3.2) :

$$\beta (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + \frac{9}{2}\alpha \left[ \sigma_{rr} - \frac{2}{3}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \right]^2 - \sigma_0 = 0 \quad (3.35)$$

et donc :

$$\frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{\sigma_0} = \frac{6\alpha \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} - \sqrt{8\alpha + 4\beta - 18\alpha\beta \frac{\sigma_{rr}^2}{\sigma_0^2}}}{4\alpha + 2\beta} \quad (3.36)$$

L'équation d'équilibre (3.33) peut être donc réécrite en tenant compte de (3.36) comme :

$$\frac{d\left(\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0}\right)}{dr} + \frac{6\alpha \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} - \sqrt{8\alpha + 4\beta - 18\alpha\beta \frac{\sigma_{rr}^2}{\sigma_0^2}}}{(2\alpha + \beta)r} = 0 \quad (3.37)$$

Il vient, en résolvant (3.37) :

$$2 \ln \left( \frac{a^3}{r^3} \right) + \sqrt{\frac{2\beta}{\alpha}} \arctan \left( 3 \frac{\sqrt{2\beta\alpha} \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0}}{\sqrt{8\alpha + 4\beta - 18\beta\alpha \frac{\sigma_{rr}^2}{\sigma_0^2}}} \right) + \ln(Q) = 0 \quad (3.38)$$



$$\text{où } Q = 2 \frac{\left(4\alpha - 3\beta\sqrt{2\alpha}\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} + 2\beta + \sqrt{2\alpha}\sqrt{8\alpha + 4\beta - 18\beta\alpha\frac{\sigma_{rr}^2}{\sigma_0^2}}\right) \left(3\sqrt{\alpha}\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} + \sqrt{2}\right)}{\left(3\sqrt{\alpha}\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} - \sqrt{2}\right) \left(4\alpha + 3\beta\sqrt{2\alpha}\frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0} + 2\beta + \sqrt{2\alpha}\sqrt{8\alpha + 4\beta - 18\beta\alpha\frac{\sigma_{rr}^2}{\sigma_0^2}}\right) \left(-2 + 9\alpha\frac{\sigma_{rr}^2}{\sigma_0^2}\right)}.$$

En prenant  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta = 1$  (cas d'une matrice de von Mises), la valeur de  $\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}$  en  $r = b$  donne le résultat classique exact :

$$\frac{\Sigma_m}{\sigma_0} = -\frac{2}{3} \ln(f) \quad (3.39)$$

A l'aide du critère (3.31), établi pour un chargement arbitraire, nous pouvons obtenir une valeur approchée de  $\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}$  (dont la valeur exacte est donnée par (3.38), avec  $\Sigma_{eq} = 0$ ). Cette comparaison est illustrée sur les figures 3.1 et 3.2. On note une proximité des 2 résultats, avec la solution approchée qui surestime légèrement la valeur exacte. Cette comparaison est bien mise en évidence en 3D sur la figure 3.3. Cette bonne coïncidence confirme une bonne précision pour le champ de vitesse (3.9).

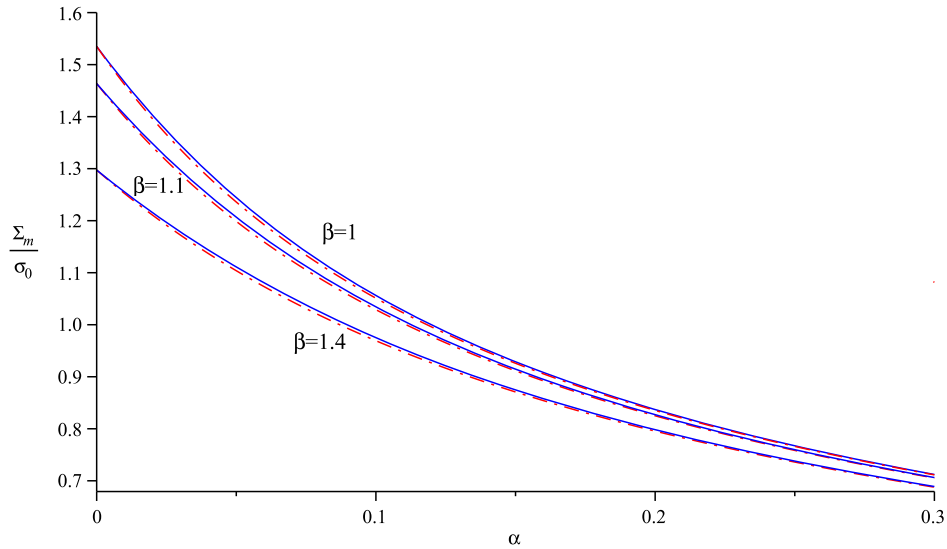


FIGURE 3.1 – Comparaison entre la valeur exacte de  $\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}$  (Trait mixte rouge) et sa valeur approchée obtenue à l'aide de (3.31) (Trait solide bleu) pour différents  $\alpha$  et  $\beta$ , dans le cas d'un chargement purement hydrostatique. La porosité vaut  $f = 0.1$ .

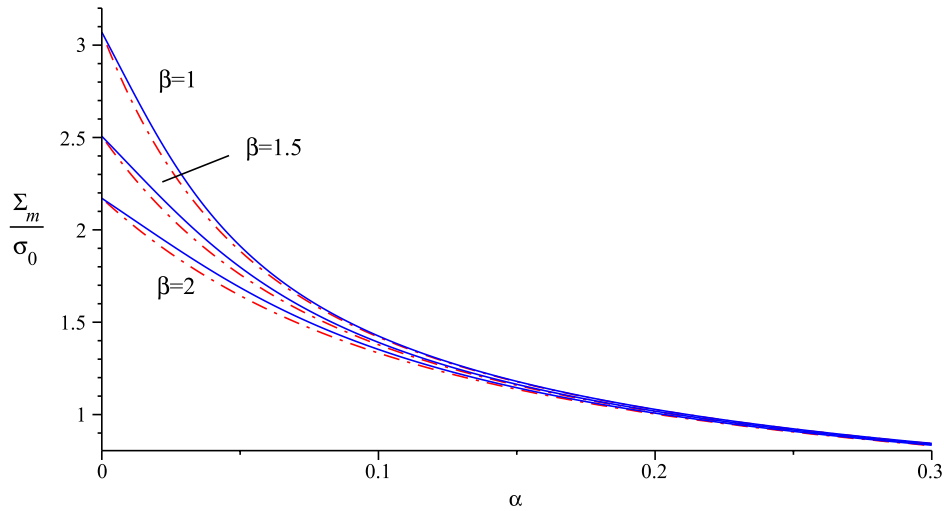


FIGURE 3.2 – Comparaison entre la valeur exacte de  $\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}$  (Trait mixte rouge) et sa valeur approchée obtenue à l'aide de (3.31) (Trait solide bleu) pour différents  $\alpha$  et  $\beta$ , dans le cas d'un chargement purement hydrostatique. La porosité vaut  $f = 0.01$ .

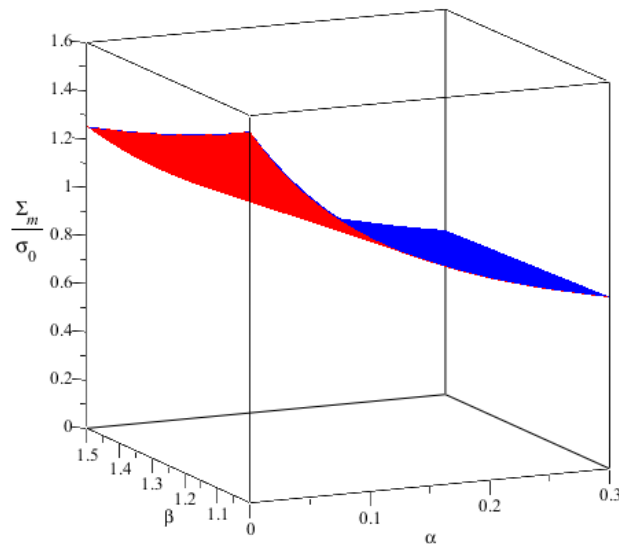


FIGURE 3.3 – Comparaison en 3D entre la valeur exacte de  $\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}$  (Rouge) et sa valeur approchée obtenue à l'aide de (3.31) (bleu) pour différents  $\alpha$  et  $\beta$ , dans le cas d'un chargement purement hydrostatique. La porosité vaut  $f = 0.1$ .

## 3.4 Applications aux matériaux poreux avec deux populations de cavités

On se propose maintenant d'illustrer les prédictions du critère macroscopique établi (3.31), en l'appliquant à un milieu contenant deux populations de cavités sphériques à deux échelles différentes ; la schématisation de ce problème est indiquée sur la figure 3.4. La première population de cavités, qui correspond à l'échelle inférieure (microscopique), est supposée sphérique et distribuée de façon isotrope (la porosité correspondante sera notée  $f_b$ ), tandis que la seconde population est de même nature et se trouve à l'échelle supérieure (mésoscopique). La porosité à cette échelle sera notée  $f_e$  et vaut  $f_e = \frac{a^3}{b^3}$ . Rappelons que ce type de matériau est déjà étudié par Vincent et al.[63] [61].

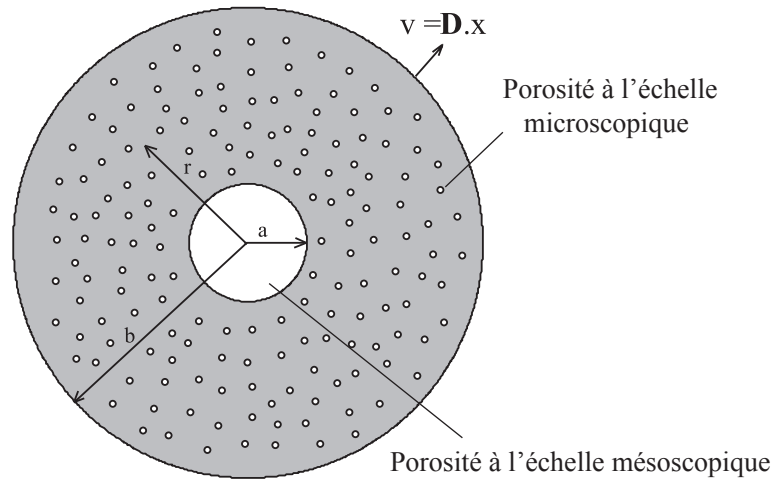


FIGURE 3.4 – Modèle de sphère creuse dans le cas d'un milieu à double porosité

### 3.4.1 Cas d'un matériau poreux à matrice de type Gurson [27]

Dans la perspective d'applications aux graines de combustible dans l'industrie nucléaire, Vincent et al.[64] se sont intéressés à la plasticité des milieux à double porosité tels que l'oxyde d'uranium (UO<sub>2</sub>) fortement irradié. La séparation entre les deux échelles où apparaissent les deux populations de cavités autorise la réalisation d'une homogénéisation en deux étapes. Ces auteurs ont considérés comme résultat de l'homogénéisation

micro-méso un critère de type Gurson modifié (proposition de Tvergaard et Needleman) :

$$q_3 \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1 f_b \cosh\left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - (q_1 f_b)^2 = 0 \quad (3.40)$$

Ceci constituera la différence notable avec nos calculs qui considèrent un critère elliptique.

En utilisant l'approche de type Gurson et le champ de vitesse (3.9) initialement suggéré par ces auteurs, une borne supérieure a pu être obtenue de façon non analytique :

$$\Pi(D) \leq \inf_A \sigma_0 \int_{q_1 f_b}^1 \int_{f_e}^1 \sqrt{\frac{4A^2}{y^2} + \frac{4}{q_3} \frac{(D_m - A)^2}{z^2} + \frac{D_e^2 q}{q_3}} dz dy \quad (3.41)$$

L'exploitation de ce résultat pour obtenir un critère macroscopique analytique a requis deux approximations :

- La première approximation consiste à prendre  $A$  sous la forme :

$$\bar{A} = \frac{q_1 f_b}{f_e + q_1 f_b} D_m \quad (3.42)$$

Il est intéressant de noter que le remplacement de  $A$  par  $\bar{A}$  conserve le statut de borne supérieure pour (3.41). Les points purement déviatorique et purement hydrostatique obtenus avec (3.41) et (3.42) sont donnés par :

$$\Sigma_m = 0, \quad \Sigma_{eq} = \tilde{\sigma}_0 \quad \text{avec} \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \frac{(1 - q_1 f_b)(1 - f_e)}{\sqrt{q_3}} \sqrt{\frac{1}{1 + f_e \frac{2q_3 + 3q_1 f_b}{3q_3 + 2q_1 f_b}}} \quad (3.43)$$

et

$$\Sigma_m = \tilde{p}, \quad \Sigma_{eq} = 0 \quad \text{avec} \quad \tilde{p} = \frac{1}{3} \sigma_0 \frac{2(C_1 + \ln(C_2))}{\sqrt{q_3}(f_{qb} + f_e)} \quad (3.44)$$

avec les expressions de  $C_1$  et  $C_2$  données en annexe de ce chapitre.

- La seconde approximation consiste à proposer un critère arbitraire de type Gurson et passant par les points purement hydrostatique  $\tilde{p}$  et purement déviatorique  $\tilde{\sigma}_0$

Le critère analytique proposé par les auteurs pour un milieu poreux avec deux populations de cavités sphériques s'écrit :

$$\frac{1}{\chi} \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{\gamma} \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 = 0; \quad \gamma \equiv \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\tilde{p}}{\sigma_0} \right) \quad \chi \equiv \frac{\alpha}{\alpha - 1} \left( \frac{\tilde{\sigma}_0}{\sigma_0} \right)^2 \quad (3.45)$$

Le lecteur intéressé par une présentation complète de ces modélisation peut se référer aux publications [63], [64] ou [61]. Noter qu'une extension de ces études aux cas de cavités saturés peut être trouvée dans [29].

### 3.4.2 Cas où la matrice microporeuse est régie par le critère de [45]

Dans cette section, est considérée un matériau double poreux pour lequel la première étape d'homogénéisation est réalisée à l'aide des techniques variationnelles d'homogénéisation non linéaire [46].

Le critère de plasticité à l'échelle méso, en reprenant la notation  $f_b$  de [61] pour la porosité à la micro échelle, s'écrit lors :

$$\left(1 + \frac{2}{3}f_b\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4}f_b \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1 - f_b)^2 = 0 \quad (3.46)$$

qui correspond trivialement dans (3.1) à :

$$\alpha = \frac{f_b}{2(1 - f_b)^2}, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 + \frac{2}{3}f_b}{(1 - f_b)^2} \quad (3.47)$$

Il vient, en notant  $f_e$  la porosité à la deuxième échelle, l'expression approchée du critère macroscopique (3.31) :

$$\frac{1 + \frac{2}{3}f_b}{(1 - f_b)^2} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{9f_b}{4(1 - f_b)^2} \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + 2f_e \cosh \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{3}f_b}{(1 - f_b)^2}} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - f_e^2 = 0 \quad (3.48)$$

Il convient de noter la cohérence immédiatement vérifiée de (3.48) pour les cas limites  $f_e = 0$  ou  $f_b = 0$ . En particulier pour  $f_b = 0$ , on notera que l'on retrouve bien le critère de Gurson.

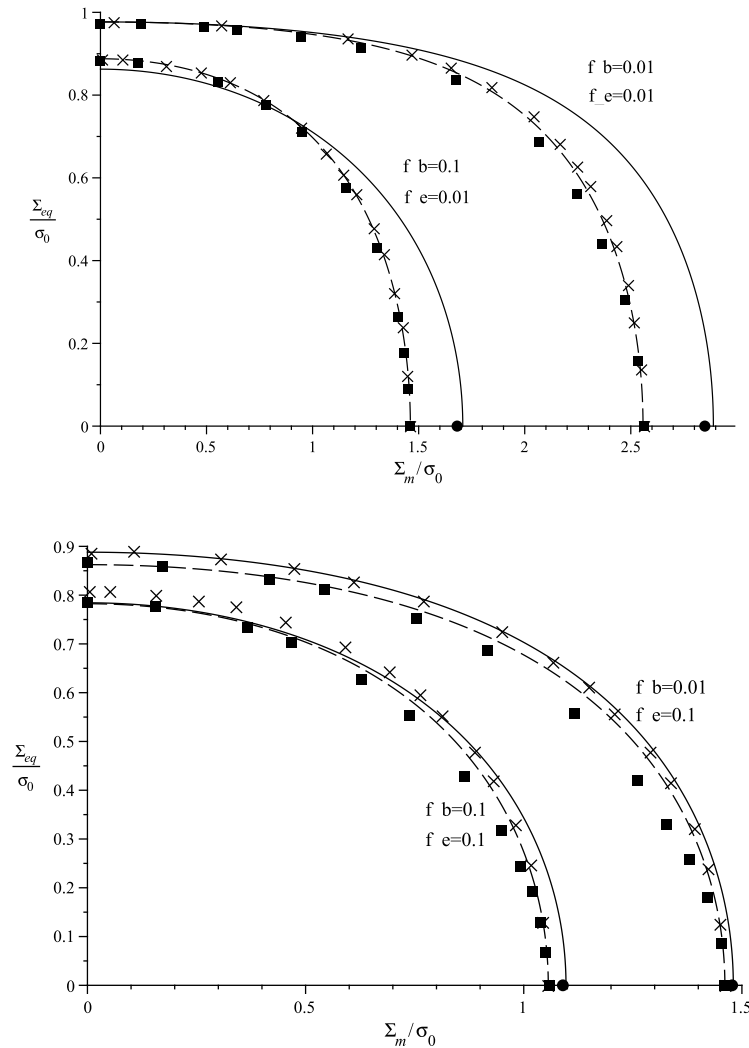


FIGURE 3.5 – Matrice microporeuse de type Ponte Castañeda(1991) : Croix : borne supérieure “4.15” proposée par Vincent [61]; Carré : simulations numériques par éléments finis ; Trait discontinu : critère approché de Vincent et al. [64]; Trait plein : critère (3.48). Le point rond sur l’axe hydrostatique correspond à la solution exacte avec la matrice poreuse elliptique.

Pour évaluer la pertinence de ce nouveau critère (3.48), on le compare à celui proposé par [61] (voir également Vincent et al. [64]) dans laquelle l’homogénéisation à la première échelle a été réalisée en considérant, comme précédemment mentionné, une matrice mi-

croporeuse de type Gurson (donc à priori de meilleure qualité pour les états de contrainte hydrostatiques).

Les figures 3.5 indiquent que dans le cas  $f_b = 0.01$ ,  $f_e = 0.01$ , la surface prédite par (3.48) est à l'extérieur de la borne supérieure, ainsi que des résultats de [61] et des résultats numériques disponibles quand le taux de triaxialité est grand ; cette surface coïncide bien avec les deux autres quand le taux de triaxialité est faible. Dans le cas  $f_b = 0.1$ ,  $f_e = 0.01$ , à faible taux de triaxialité, la surface prédite par (3.48) est à l'intérieur de la borne supérieure, tandis qu'elle se trouve à l'extérieur quand la valeur du taux de triaxialité est grande. Cette mauvaise performance à forte triaxialité provient sans aucun doute du choix du critère elliptique (3.46) pour le changement d'échelle micro-méso (ce critère elliptique conduisant à des valeurs peu précises aux fortes triaxialités). Dans le cas  $f_b = 0.01$  et  $f_e = 0.1$ , puis  $f_b = 0.1$  et  $f_e = 0.1$ , les résultats apparaissent plus concordants.

### 3.4.3 Cas de la matrice microporeuse régie par le critère de [35]

On se propose de recourir maintenant aux travaux de Michel et Suquet [35] qui ont proposé une modification du critère elliptique (3.46) pour le rendre conforme à la solution exacte de la sphère creuse sous chargement hydrostatique. Cette modification se présente sous la forme :

$$\left(1 + \frac{2}{3}f_b\right) \left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{1-f_b}{\ln(f_b)}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right)^2 - (1-f_b)^2 = 0 \quad (3.49)$$

ce qui correspond à :

$$\alpha = \frac{\left(\frac{1-f_b}{\ln(f_b)}\right)^2}{2(1-f_b)^2}, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 + \frac{2}{3}f_b}{(1-f_b)^2} \quad (3.50)$$

En reportant (3.50) dans (3.31), il vient l'expression du critère macroscopique du milieu double poreux :

$$\frac{1 + \frac{2}{3}f_b}{(1 - f_b)^2} \frac{\Sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + \frac{9 \left( \frac{1-f_b}{\ln(f_b)} \right)^2}{4(1 - f_b)^2} \frac{\Sigma_m^2}{\sigma_0^2} + 2f_e \cosh \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1 + \frac{2}{3}f_b}{(1 - f_b)^2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0}} \right) - 1 - f_e^2 = 0 \quad (3.51)$$

La comparaison des prédictions de (3.51) avec celles de [61] est présentée sur la figure 3.6.

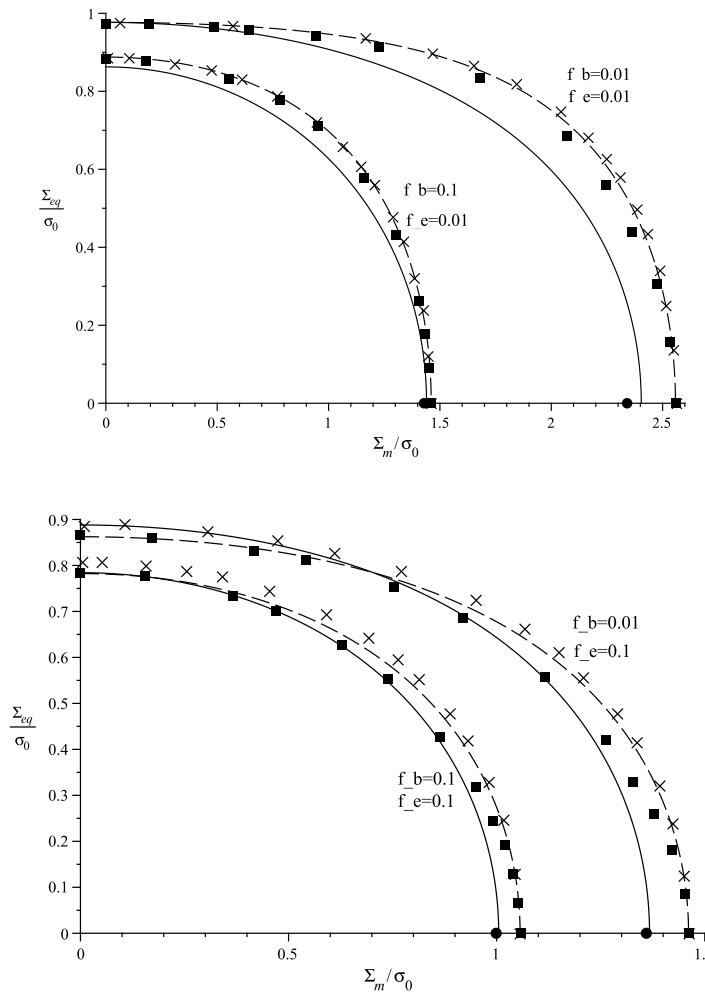


FIGURE 3.6 – Matrice microporeuse de type Michel et Suquet (1992) : Croix : borne supérieure “4.15” proposée par Vincent [61]; Carré : simulations numériques par éléments finis ; Trait discontinu : critère approché de Vincent [64]; Trait plein : critère établi. Le point rond sur l’axe hydrostatique correspond à la solution exacte avec la matrice poreuse elliptique.

On note que dans les cas  $f_b = 0.01, f_e = 0.01$ ;  $f_b = 0.1, f_e = 0.01$  et  $f_b = 0.1, f_e = 0.1$ , les



---

résultats issus du critère établi dans cette étude sont à l'intérieur de la borne supérieure ; dans le cas  $f_b = 0.01$ ,  $f_e = 0.1$ , à fort taux de triaxialité, ces résultats se trouvent à l'intérieur de la borne supérieure, tandis qu'à faible taux de triaxialité ils coïncident bien avec la borne supérieure proposée dans [61].

## 3.5 Conclusion

Pour une large classe de matériaux comme les polymères, les géomatériaux, ou les métaux à double porosité, l'hypothèse d'incompressibilité de la matrice solide faite dans l'analyse initiale de Gurson s'avère inadaptée. Des critères de plasticité sont développés ces dernières années dans l'objectif de prendre en considération la compressibilité plastique du milieu.

Notre contribution à ce domaine dans ce chapitre consisté en la proposition d'une extension du critère de Gurson au cas où la matrice plastique n'est plus de type von Mises mais obéit à un critère elliptique de type Green. Nous avons réussi à obtenir une expression analytique approchée du critère macroscopique de plasticité pour les milieux considérés. Les prédictions de ce critère sont illustrés pour des milieux ayant deux populations de cavités chacune à deux échelles différentes, ou des milieux à une seule porosité mais présentation une dissymétrie de résistance en traction et compression hydrostatique. C'est cette dernière classe de matériaux, dont l'argilite du Callovo-Oxfordien, qui fera l'objet des deux chapitres qui suivent.

# Annexe A

## Milieux à double porosité

### A.1 Expressions de $C_1$ , $C_2$ et $\tilde{\sigma}_0$ intervenant dans le critère de [61]

On se propose dans cette annexe de préciser les expressions de  $C_1$  et  $C_2$  qui interviennent dans (3.43) et (3.44). Ces quantités sont données par :

$$\begin{aligned} B_1 &= \sqrt{f_e^2 + f_{qb}^2 q_3}, & B_2 &= f_{qb} \sqrt{f_e^2 + q_3} \\ B_3 &= f_e \sqrt{1 + f_{qb}^2 q_3}, & B_4 &= f_{qb} f_e \sqrt{1 + q_3} \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$C_1 = 2(B_1 - B_2 - B_3 + B_4),$$

$$\begin{aligned} C_2 &= f_{qb}^{f_{qb}(1-f_e)\sqrt{q_3}} f_e^{(1-f_{qb})f_e} \left( \frac{B_1 - f_e}{B_3 - f_e} \right)^{f_e} \left( \frac{B_4 - f_{qb}f_e}{B_2 - f_{qb}f_e} \right)^{f_{qb}f_e} \\ &\quad \left( \frac{B_1 - f_{qb}\sqrt{q_3}}{B_2 - f_{qb}\sqrt{q_3}} \right)^{f_{qb}\sqrt{q_3}} \left( \frac{B_4 - f_{qb}f_e\sqrt{q_3}}{B_3 - f_{qb}f_e\sqrt{q_3}} \right)^{f_{qb}f_e\sqrt{q_3}} \end{aligned} \tag{A.2}$$

## Chapitre 4

# Homogénéisation par approche incrémentale du comportement non linéaire de l'argilite

## Résumé du chapitre

Les argilites ont été largement étudiés dans le contexte de l'étude de faisabilité du stockage géologique des déchets radioactifs. En raison de leur faible perméabilité, de leur résistance mécanique relativement élevée et de l'absence de fractures majeures, les roches argileuses sont en effet potentiellement envisagées comme l'une des barrières géologiques pour le stockage. Dans cette perspective, l'étude à court et à long terme des comportements thermo-hydro-mécaniques de ces roches s'avère nécessaire. L'Agence Nationale pour la gestion des Déchets Radioactifs (ANDRA) coordonne depuis de nombreuses années un vaste programme de recherches impliquant à la fois des investigations expérimentales et des modélisations du comportement de l'argilite du Callovo-Oxfordien (COx). Les analyses minéralogiques de l'argilite indiquent qu'il s'agit, à l'échelle mésoscopique, d'un matériau composé d'une matrice argileuse et de grains de calcite et de quartz. Des analyses à plus petite échelle montrent que la matrice argileuse est elle-même composée d'une phase solide, assemblage de particules d'argile, et de pores se situant généralement entre les particules. Ces vides interparticulaires constituent la principale source de porosité de l'argilite. Enfin, de nombreuses données d'essais mécaniques macroscopiques indiquent que le comportement mécanique macroscopique de l'argilite est principalement caractérisé par une déformation plastique couplée à des phénomènes d'endommagement, provoqués soit par la croissance de microfissures ([8], [2]), soit par des phénomènes de décohésion aux interfaces.

Le volet de recherche présenté dans ce chapitre est consacré à la modélisation micromécanique du comportement à court terme des argilites. Il se situe dans la suite des travaux d'homogénéisation du comportement non linéaire de l'argilite, menés au LML dans le cadre de la thèse d'A. Guery [1], qu'il étend par la prise en compte explicite de la porosité intra matricielle. La matrice argileuse y est donc traitée comme un matériau ductile poreux, plastiquement compressible, constitué par une phase solide et des pores à une échelle que l'on caractérisera de microscopique. On notera que divers aspects de la

---

modélisation du comportement de l'argilite, dont en particulier la poroélasticité, ont été récemment étudiés dans d'autres équipes, à l'aide des techniques d'homogénéisation. On mentionnera en particulier la thèse de doctorat de S. Cariou [7] à l'ENPC. De même, il convient de faire mention des travaux en cours dans la thèse de Z. He, travaux initiés dans le cadre d'une collaboration entre l'ENPC et le LML.

Le chapitre se présente sous la forme d'une publication récemment soumise. Cette publication<sup>4</sup> est organisée comme suit : après une brève présentation de quelques éléments de la micro(méso)structure de l'argilite du COx, l'approche d'homogénéisation incrémentale de Hill [28] est décrite dans ses grands principes. Un premier niveau de modélisation est d'abord proposé en retenant à l'échelle mésoscopique un comportement plastique associé de la matrice argileuse poreuse. Dans ce cadre, on s'appuie pour le passage micro-méso sur le critère de plasticité de [26], obtenu par analyse limite d'une sphère creuse constituée d'une phase solide de type Drucker-Prager et d'une porosité sous forme de vides sphériques. Un tel critère a été récemment validé par comparaison à des bornes numériques établis par [55] (cf. à ce sujet l'annexe présenté à la fin du présent chapitre). Il est complété ici par des lois d'écrouissage appropriées. L'approche incrémentale de Hill, adoptée pour le passage méso-macro, permet alors de déboucher sur une loi de comportement associée de l'argilite. Les insuffisances d'une telle loi, en particulier pour décrire quantitativement la dilatance plastique, ont motivé la mise en oeuvre d'un second niveau de modélisation ; celui-ci est basé sur une démarche d'homogénéisation d'un milieu ductile poreux non associé, récemment proposée par Maghous et al. [33] et adaptée ici au contexte de l'argilite. On notera que, bien que le critère issu de cette démarche utilisée (approche par modules sécants modifiés) est connu pour conduire dans le cas de la matrice de Drucker-Prager à des résultats peu précis pour certaines gammes de sollicitations (cf. par exemple [57] pour l'évaluation numérique de [3]), l'avantage non négligeable est de pouvoir conduire à la formulation d'une règle d'écoulement non associé. C'est indéniablement ce qui a guidé

---

4. les 2 numérotation des pages de cet article se réfèrent respectivement à celle correspondant à l'envoi de la publication et à celle de la thèse.

cette partie de notre étude.

En dehors de la porosité et des propriétés élastiques, les paramètres de ce modèle seront identifiés par recalage sur un nombre très réduit de tests expérimentaux, toutes les autres expériences sur des trajets variés étant en suite simulées. Les comparaisons entre les prédictions du modèle non associé et les données expérimentales permettront de montrer son aptitude à décrire les principaux traits comportementaux de l'argilite. Quelques simulations complémentaires, non incluses dans la publication faisant office de chapitre, sont également fournies en annexe du chapitre.

# Mesomechanical model for clayey rocks with plastic compressive porous matrix

W.Q. Shen<sup>a</sup>, J.F. Shao<sup>a,\*</sup>, D. Kondo<sup>b</sup>, B. Gatmiri<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*LML, UMR8107 CNRS, University of Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq, France*

<sup>b</sup>*Institut D'Alembert, UMR7190 CNRS, University of Pierre and Marie Curie, 75005 Paris, France*

<sup>c</sup>*Andra, Fluid and Solid Mechanics Department, 78000 Chatenay Malabry, France*

---

## Abstract

This paper is devoted to mesomechanical modeling of plastic deformation in clay rock. The material is composed of a porous clay matrix which is embedded at mesoscale by linear elastic mineral grains. The clay matrix is itself constituted of a solid phase containing spherical micropores. A two-step homogenization procedure, from micro to meso and from meso to macro, is proposed to estimate the macroscopic elastoplastic behavior of the clay rock. The meso-macro upscaling is performed considering the incremental approach initially proposed by Hill (1965) and allows to account for the effects of mineral inclusions. For the micro-meso transition, the pressure sensitive solid phase of clay matrix is taken as a Drucker-Prager plastic one with an associated flow rule. Effects of micropores are taken into account via a limit analysis-based homogenization approach. It is shown that, although the macroscopic model based on an associated plastic solid phase predicts a non linear dilatant response of the clay rock under standard triaxial compression tests, it fails to quantitatively compare to the available data. A significant improvement is then proposed by considering a non-associated plastic flow rule of the solid phase for which recent theoretical results issued from non linear variational homogenization techniques of porous media are available. Comparisons between the predictions of the new model and experimental data show that the improved version is able to capture the main features of mechanical behavior of the studied class of heterogeneous geomaterials.

---

\*Corresponding author

*Email address:* [jianfu.shao@univ-lille1.fr](mailto:jianfu.shao@univ-lille1.fr) (J.F. Shao)

*Keywords:* Multiscale Modeling, Incremental approach, Plastic deformation, ductile porous materials, Particle-reinforced composites, Clay rocks

---

## 1. Introduction

Hard clayey rocks also called argillites have been largely investigated in the context of feasibility study for geological storage of radioactive wastes. Indeed, due to their low permeability, relatively high mechanical strength and absence of major fractures, the clay rocks are envisaged as one of potential geological barriers. In this context, investigations on short and long term thermo-hydro-mechanical behaviors of these materials are needed. An extensive research program has been initiated by the French Agence National de Gestion des Dechets Radioactifs (ANDRA) involving both experimental investigations and constitutive modeling for a Callovo-Oxfordian argillite. The mineralogical analysis has revealed that at a mesoscopic scale this clay rock is composed of a quasi continuous clay matrix which is embedded by mineral inclusions, mainly quartz and calcite grains (Robinet (2008)). Further analysis at smaller scale shows that the clay matrix is itself constituted of a solid phase which is an assembly of clay particles and pores between such particles. The inter-particular porosity constitutes the main porosity of the argillite. On the other hand, various mechanical tests performed in our group and by other teams showed that the macroscopic mechanical behavior of the argillite is mainly characterized by plastic deformation which can be coupled with material damage induced by growth of microcracks (Chiarelli et al. (2003), Andra (2005)). Further, the mechanical behavior is inherently related to the mineralogical compositions and depends on the evolution of microstructure.

The present work is devoted to micro-macro constitutive modeling of short term mechanical behavior of the Callovo-Oxfordian argillite (COX argillite). Various models have been so far proposed to describe plastic deformation and induced damage in this material. Based on the irreversible thermodynamics and experimental data, phenomenological models have been first formulated by Chiarelli et al. (2003) and then Shao et al. (2006), Jia et al. (2010)). These models generally provide an efficient way for mathematical description of macroscopic responses of materials. But they fail to properly take into account the effects of physical micro and meso deformation mechanisms as well as the effects of heterogeneous microstructures. For instance, the



dependency of argillite behavior on mineralogical compositions is not taken into account in these models. For this purpose, significant efforts have been made on two-scale modeling of heterogeneous geomaterials. For instance, Abou-Chakra Guéry et al. (2008a) have proposed a meso-macro mechanical model for the COX argillite based on an adaptation of the incremental approach of Hill (1965). In this model, the argillite was considered as a three phases composite constituted by a clay matrix, calcite and quartz grains. The clay matrix was taken as a homogeneous solid material and described by a classical Drucker-Prager type plastic model. Therefore the inter-particle porosity inside the clay matrix was not taken into account. Since, as mentioned before, the macroscopic behavior of argillite is insensitive to such a porosity, this constitutes a serious limitation of the existing model .

In the present work, we propose an extension and an improvement of the previously mentioned mesomechanical model by the consideration of porosity. The clay matrix will be then seen as a porous plastic compressible material which is constituted by a solid phase and connected pores. The pressure sensitive solid phase of the clay matrix will be assumed to exhibit first an associated and then a non associated plastic behavior. The paper is organized as follows: after a brief description of the COX argillite microstructure, the effective elastic behavior is first determined using a standard linear homogenization scheme. In a second step, the modeling procedure corresponding to the meso-macro transition delivering the macroscopic non linear response of the argillite is determined following the Hill's incremental approach. This procedure allows to account for the influence of mineral inclusions. The effects of matrix porosity will be incorporated firstly through a limit analysis theory when the solid phase is assumed to obey to normality rule. Then, due to the inaccuracy of the corresponding model, the case of non associated plastic solid phase is studied via a recent non linear variational homogenization technique. Comparisons between numerical results and experimental data will be finally presented in order to show that, contrarily to the first (associated) model, the derived non associated constitutive law is able to describe the main features of argillite mechanical responses.

## 2. Microstructure of Callovo-Oxfordian (COx) argillite and elastic properties

### 2.1. Some elements on the microstructure of the COx argillite

An underground research laboratory is constructed by ANDRA near Bure in the North-East region of France. This Laboratory is located at the depth of 445m to 490m and excavated in a 200m thick sub-horizontal layer of Callovo-Oxfordian (COx) argillite. The COx argillite is characterized by its low hydraulic conductivity and compressibility and relatively high mechanical strength. The mineralogical compositions vary with the depth and contain three main phases: clay matrix, calcite and quartz grains. At the depth corresponding to the ANDRA underground research laboratory, the COx argillite is composed of 40 to 50% of clay minerals, 20 to 27% of calcite and 23 to 25% of quartz. A small quantity of other minerals such as pyrite, mica, dolomite, halite and gypse are also identified. As a first approximation, the microstructure of the COx argillite at the meso-scale can be seen as a matrix-inclusion system (see Figure 1 (Robinet (2008))). The clay phase constitutes the continuous matrix in which are embedded calcite and quartz grains. There is a strong correlation between the volume fraction of the clay phase and the porosity which is mainly contained inside (see correlation displayed on Figure 2).

At microscopic scale, the clay matrix is then composed of an assembly of clay particles and inter-particle pores. The inter-particle pores constitute the large majority of connected pores. The typical size distribution of pores is shown in Figure 3 (Andra (2005)). We can see that the pore size of argillite is quite uniform and contains two representative average sizes, 4nm and 20nm respectively. Moreover, the total porosity also varies with the depth. Figure 4 (Robinet (2008)) shows its variation with depth and volume fraction of clay phase. As a consequence of such variation and of that of the argillite constituents, the macroscopic mechanical behavior depends on the geological depth. In order to account for the dependency of mechanical behavior on the mineral compositions and porosity, a homogenization-based model is first due. At mesoscale, the argillite will be then characterized by a three phase composite with a matrix-inclusion morphology. For the sake of simplicity, and in agreement with above comments, it is assumed that the porosity is entirely included in the clay matrix. The effect of such porosity on the behavior of the clay matrix will be obtained through a micro to meso transition.

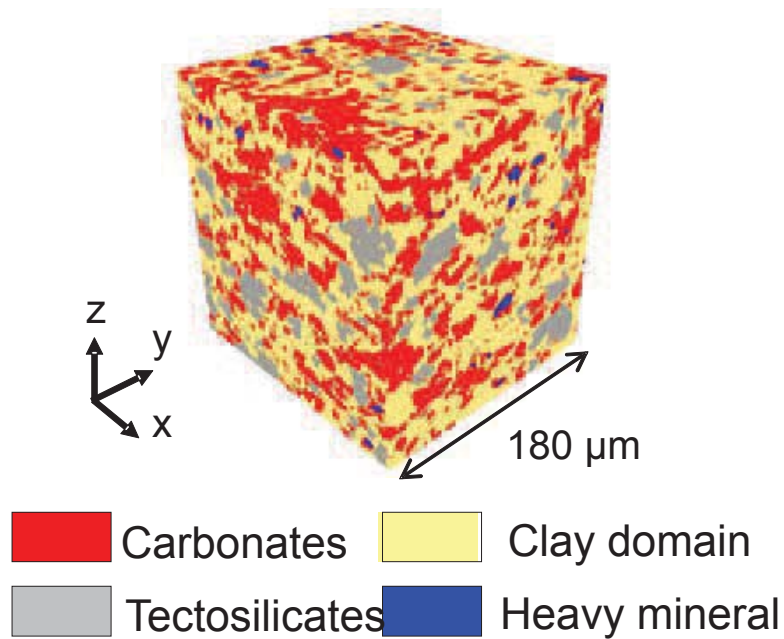
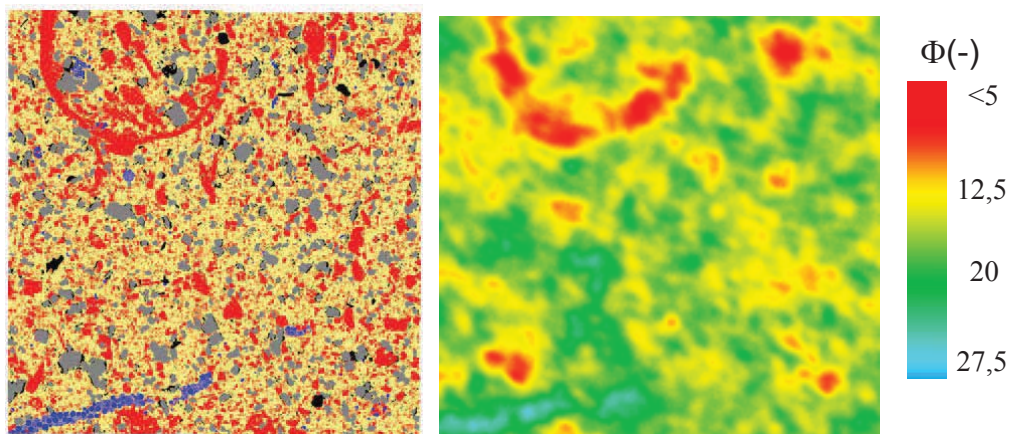


Figure 1: Microstructure of the COx argillite at the meso-scale (Robinet (2008))



- left: distribution of the matrix phase (yellow) and the two mineral phases;
- right: distribution of porosity at the mesoscale

Figure 2: Correlation between the volume fraction of the clay phase and the porosity (Robinet (2008)).

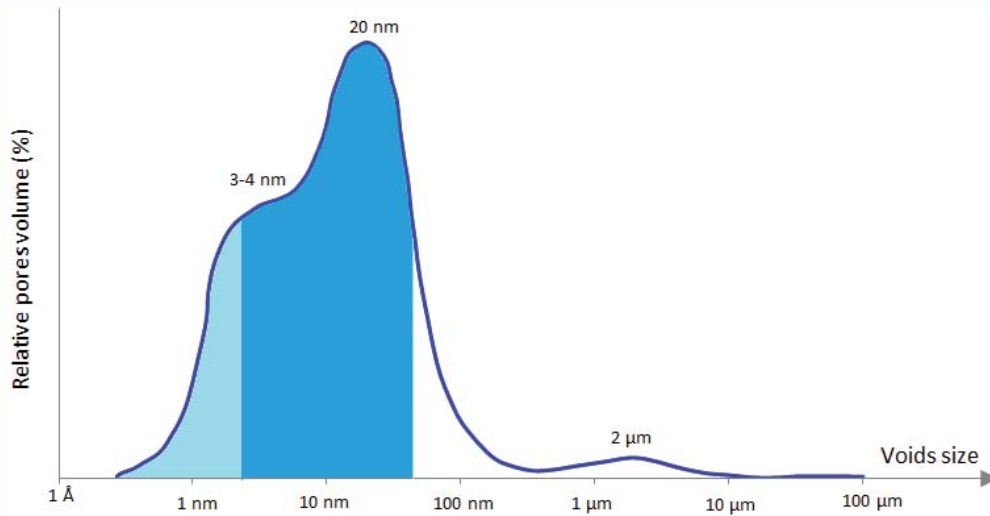


Figure 3: Distribution of pore size in COx argillite (Andra (2005))

## 2.2. Elastic properties of the constituents at mesoscale and link with the homogenized moduli of the argillite

The effective elastic properties of the COx argillite is first determined in this section using a linear homogenization procedure. To this end, a scale separation is required as well as the definition of a representative elementary volume (REV). As mentioned above, three relevant scales must be distinguished for the COx argillite:

- At micro scale ( $\sim \mu m$ ), the clay minerals have a complex organization with several subscales where are found sheets, particles, grains and pores. As seen before, the size of pores varies from nanometer to micrometer and respectively associated with voids between clay sheets, particles and grains. However, in the present work, we don't intend to distinguish the porosities of various scale and we will assume that the porosity is uniformly embedded in the solid clay matrix phase.
- The mesoscopic scale ( $\mu m - cm$ ) corresponds, as previously indicated, to the one at which the grains of quartz and calcite are distinguishable.
- At the macroscopic scale ( $cm - dm$ ), the argillite is constituted by the assembly of mineral grains and the clay matrix, and will be considered as a homogeneous continuum.

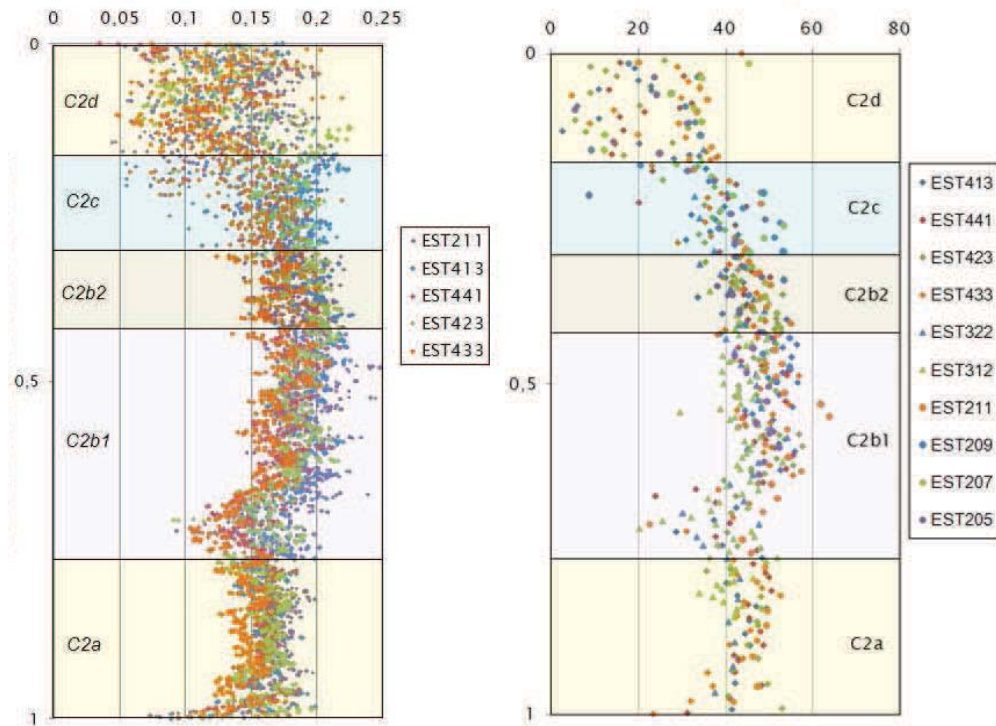


Figure 4: Variation with depth of total porosity (left) and volume fraction of clay matrix phase (right)(Robinet (2008))

Clearly enough, at mesoscale, the argillite is seen as a three phase composite: the calcite and quartz grains are embedded in the clay matrix. The calcite and quartz grains are assumed to be linear isotropic elastic phases with different elastic moduli. The clay matrix is considered as an isotropic elastoplastic porous medium. The mineral grains are assumed spherical and randomly distributed in space so that the macroscopic behavior of argillite remains isotropic in nature. We are firstly interested by the linear regime of all the constituents, the full non linear behavior being addressed in the next sections.

For the determination of the elastic properties of the clay matrix which is not well known, a linear homogenization procedure is now used in order to link the properties of the constituents at mesoscale to the macroscopic moduli of the argillite.

To this end, it is convenient to recall that the elastic properties of calcite and quartz grains are well known and determined from existing data found

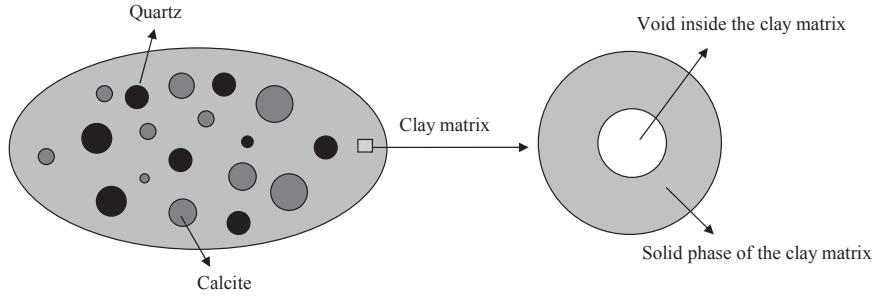


Figure 5: Representative volume element of COx argillite

in literature (Lide (2004), Panet and Fourmaintraux (2004), see also Andra (2005)): for the calcite,  $E_1 = 95GPa$  and  $\nu_1 = 0.27$  and for the quartz  $E_2 = 101GPa$  et  $\nu_2 = 0.06$ . In contrary, as mentioned before, the elastic properties of the clay matrix are not accurately known and there is no direct measurement available. In Abou-Chakra Guéry (2007) , an iterative inverse approach has been proposed for the determination of such elastic properties. Starting then from experimental values of elastic coefficients measured on argillite samples (see Chiarelli (2000),  $E^{hom}$  and  $\nu^{hom}$ ) and those of the calcite ( $E_1$  and  $\nu_1$ ) and of the quartz ( $E_2$  et  $\nu_2$ )), the iterative use of the relations (A.16) and (A.17) allows to determine the elastic moduli of the clay matrix; the following typical values have been obtained:  $E_0 = 3000MPa$  et  $\nu_0 = 0.3$ .

Now, we wish to compute the elastic properties of the solid phase in the clay matrix. Since the overall porosity varies from 11 to 13.85%, and the typical mineralogical compositions are 40 to 50% of clay matrix, 20 to 27% of calcite, 23 to 25% of quartz, 5 to 10% of minor minerals, the relative value of the porosity at the microscale (e.g. inside the clay matrix) is then typically  $f = 25\%$ .

By adopting a Mori-Tanaka (1973)<sup>1</sup> homgenization scheme, the elastic properties of the clay matrix are related to those of its solid phase by:

$$\kappa_0 = \frac{4(1-f)\kappa_s\mu_s}{4\mu_s + 3f\kappa_s}; \quad \mu_0 = \frac{(1-f)\mu_s}{1 + 6f\frac{\kappa_s + 2\mu_s}{9\kappa_s + 8\mu_s}} \quad (1)$$

Therefore, knowing the values of  $\kappa_0$ ,  $\mu_0$  and the porosity of the clay matrix, one obtains the elastic moduli of the solid phase by using (1). The

<sup>1</sup>This corresponds to the Hashin-Shtrikman (1963) upper bound.

following typical values are obtained for the COx argillite:  $\kappa_s = 5000MPa$ ,  $\mu_s = 1875MPa$  or equivalently  $E_s = 5000MPa$  et  $\nu_s = 0.33$ .

### 3. Principle of homogenization of plastic behavior of argillite

Inelastic behavior of argillite is now investigated by considering plastic behavior of the clay matrix. Various non linear homogenization methods have been so far proposed for non linear behaviors of heterogeneous materials. Among them, the incremental approach proposed by Hill (1965) and based on the concept of linear comparison composite, has the advantage of being directly linked to existing linear homogenization schemes. As a consequence, the incremental approach can be easily implemented for arbitrary loading paths.

As mentioned before, the incremental approach is applied here to argillite for the meso-macro transition.

#### 3.1. Principle of incremental method

Let us first recall that the incremental approach of Hill (1965) requires a rate form of constitutive relations for each constituent phase. Stress rate is related to strain rate in the form:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{z}) = \mathbb{L}(\underline{z}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{z}) \quad (2)$$

It is useful to note that the non linearity of constitutive relations (2) is characterized by the tangent stiffness operator,  $\mathbb{L}$ , which depends on loading history. However, at each iteration step, it is possible to introduce a tangent localization tensor,  $\mathbb{A}$ , for the strain rates:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{z}) = \mathbb{A}(\underline{z}) : \dot{\boldsymbol{E}} \quad (3)$$

$\mathbb{A}(\underline{z})$  denotes the tangent strain localization operator in the linear comparison composite issued from the linearization procedure. It depends of tangent stiffness of the constituents.

Accordingly, the rate form of the macroscopic constitutive relations reads:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbb{L}^{hom} : \dot{\boldsymbol{E}} \quad (4)$$

in which the effective tangent stiffness operator is given by:

$$\mathbb{L}^{hom} = \langle \mathbb{L} : \mathbb{A} \rangle \quad (5)$$

Note that the effective tangent stiffness, corresponding to the homogenized material, is obtained as the average over the REV of the product of the local tangent stiffness and tangent strain localization tensor. In general case, the local tangent stiffness is not uniform in each phase; as a consequence, it is not possible to provide closed-form expression of its average. Some simplifications are then needed in order to make the homogenization procedure computationally operable.

- Hypothesis:

The following approximation is introduced in the incremental method:

At all point  $\underline{z}$ , of a given phase ( $r$ ), the local constitutive relation is approximated by:

$$\forall \underline{z} \in (r), \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{z}) = \mathbb{L}_r : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\underline{z}) \quad (6)$$

$\mathbb{L}_r$  being evaluated for a suitably chosen reference state of strain  $\boldsymbol{\epsilon}(\underline{z})$ . The simplest and also largely used choice corresponds to the average value of local strain field of the phase ( $r$ ). This implies that the tangent stiffness is uniform in each phase. Accordingly, the incremental form of the strain localization relation is simplified as follows:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_r = \mathbb{A}_r : \dot{\boldsymbol{E}} \quad (7)$$

where  $\mathbb{A}_r$  is the tangent localization operator corresponding to the average strain per phase  $\dot{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}_r$ .

It is clear that this is a strong assumption which may be far from the reality. Indeed, in many cases, due to effects of inclusions, the local plastic strain field could be heterogeneous. As a consequence, the above simplification generally leads to predicted responses of the homogenized medium which appear to be too stiff, due to cumulated errors in each loading step by neglecting heterogeneity of local plastic strain fields. Various improvement methods have been proposed and this issue will be discussed later in subsection 4.2.

Assume now that the morphology of the linear comparison composite is similar to that of the COx argillite. Being in agreement with the determination of effective elastic properties, the Mori-Tanaka estimation (Mori and Tanaka (1973)) appears is considered for the evaluation of the tangent strain localization operator. Thus, one obtains:

$$\mathbb{A}_r = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{I_r}^0 : (\mathbb{L}_r - \mathbb{L}_0)]^{-1} : \left( \sum_{s=0}^N f_s \mathbb{A}_s^0 \right)^{-1} \quad (8)$$



It is worth recalling that the Hill tensor  $\mathbb{P}_{I_r}^0$  depends on the inclusion form  $I_r$ , its orientation as well as the tangent stiffness of the matrix phase in the linear comparison composite  $\mathbb{L}_0$ . As the calcite and quartz grains have the same morphology one notices that  $\mathbb{P}_{I_1}^0 = \mathbb{P}_{I_2}^0 = \mathbb{P}_I^0$ .  $\mathbb{P}_I^0$  is related to Eshelby tensor  $\mathbb{S}^E$  through :

$$\mathbb{P}_I^0 = \mathbb{S}^E(\mathbb{L}_0) : \mathbb{L}_0^{-1} \quad (9)$$

As the tangent stiffness depends on the direction of plastic deformation, the local tangent operator  $\mathbb{L}_0$  is inherently anisotropic in nature. This implies that in general case Hill tensor  $\mathbb{P}_{I_r}^0$  should be numerically evaluated. Once the Hill tensor and strain localization operator evaluated, the macroscopic tangent stiffness tensor can be easily deduced:

$$\mathbb{L}^{hom} = \sum_{r=0}^N f_r \mathbb{L}_r : \mathbb{A}_r, \quad r = 0..2 \quad (10)$$

where  $f_r$  is the volumetric fraction of the phase( $r$ ).

### 3.2. Numerical implementation

The proposed mesomechanical model is implemented in a finite element code (Abaqus) as a UMAT subroutine. We present here the numerical scheme for the local integration of the model at each Gauss point.

The loading path is divided into a limit number of steps. At the step  $n + 1$ , the material point of argillite at the macroscopic scale is subjected to a macroscopic strain  $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \Delta\mathbf{E}$ , The strain at the step ( $n$ ) is known and the strain increment  $\Delta\mathbf{E}$  is given. The problem to be solved here is to find the corresponding macroscopic stress state at the end of loading step by using the incremental homogenization method presented above. The following numerical scheme is adopted:

1. Input data :  $\mathbf{E}_n, \Delta\mathbf{E}$   
Phase 0 clay matrix :  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0n}, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \boldsymbol{\varepsilon}_{0n}^p$   
Phase 1 calcite grains :  $\boldsymbol{\varepsilon}_{1n}$   
Phase 2 quartz grains:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{2n}$
2. Initial setting of local strain increments in the phases (1) et (2) to be equal to the macroscopic one :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^0 = \Delta\mathbf{E}, \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^0 = \Delta\mathbf{E} \quad (11)$$

3. In the phase 1 and phase 2: the values of  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^i$  and  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^i$  are known, one obtains:  $\boldsymbol{\varepsilon}_{1n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{2n+1}$  and  $\mathbb{L}_1^i$ ,  $\mathbb{L}_2^i$  which are the local stiffness tensors of the phases 1 and 2 respectively.
4. The average local strain in the clay matrix is given by :

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^i := \frac{\Delta\mathbf{E} - f_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^i - f_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^i}{1 - f_1 - f_2} \quad (12)$$

5. At the iterate  $i$  for the phase 0, the values of  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^i$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0n}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0n}^p$  are known, one can compute :  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{0n+1}^p$  and  $\mathbb{L}_0^i$ .
6. The Hill tensor is then numerically evaluated.
7. Determination of the tensors  $\mathbb{A}_1^{0,i}$  et  $\mathbb{A}_2^{0,i}$  by:

$$\mathbb{A}_1^{0,i} := [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{I1}^0 : (\mathbb{L}_1^i - \mathbb{L}_0^i)]^{-1} \quad (13)$$

$$\mathbb{A}_2^{0,i} := [\mathbb{I} + \mathbb{P}_{I2}^0 : (\mathbb{L}_2^i - \mathbb{L}_0^i)]^{-1} \quad (14)$$

8. It is now possible to evaluate the tangent strain localization tensors  $\mathbb{A}_r^i$  for each phase :

$$\mathbb{A}_0^i := [f_0\mathbb{I} + f_1\mathbb{A}_1^{0,i} + f_2\mathbb{A}_2^{0,i}]^{-1} \quad (15)$$

$$\mathbb{A}_1^i := \mathbb{A}_1^{0,i} : \mathbb{A}_0^i \quad (16)$$

$$\mathbb{A}_2^i := \mathbb{A}_2^{0,i} : \mathbb{A}_0^i \quad (17)$$

9. Check the compatibility of local strains between two iterates for the phases (1) et (2) and evaluate the error  $\mathbf{R}$  :

$$\mathbf{R}_1^i := \mathbb{A}_1^i : \Delta\mathbf{E} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^i \quad (18)$$

$$\mathbf{R}_2^i := \mathbb{A}_2^i : \Delta\mathbf{E} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^i \quad (19)$$

If  $\|\mathbf{R}_1^i\| < \text{tolerance 1}$  and if  $\|\mathbf{R}_2^i\| < \text{tolerance 2}$ , the compatibility is reached. Else an additional iterate is needed until the convergence criterion is verified and one gets:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^{i+1} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_1^i + \mathbf{R}_1^i \quad (20)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^{i+1} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_2^i + \mathbf{R}_2^i \quad (21)$$

10. The use of Mori-Tanaka scheme leads to the determination of macroscopic tangent stiffness tensor :

$$\mathbb{L}^{hom} := [f_0\mathbb{L}_0 + f_1\mathbb{L}_1 : \mathbb{A}_1^0 + f_2\mathbb{L}_2 : \mathbb{A}_2^0] : \mathbb{A}_0 \quad (22)$$

so that the macroscopic stress tensor can be calculated as :

$$\Delta\Sigma_{n+1} = \mathbb{L}^{hom} : \Delta\mathbf{E}_{n+1} \quad (23)$$

#### 4. Implementation of the incremental approach in the context of associated plasticity: application to COx argillite

The incremental method is now implemented for the nonlinear homogenization of the COx argillite. As mentioned above, the clay matrix is seen as a porous elastoplastic medium while the calcite and quartz grains are described by a linear elastic model. A first level of modeling is proposed for the non linear behavior of the clay matrix. It consists in an associated plastic model derived by upscaling a Drucker-Prager type model corresponding to the solid phase embedding spherical pores (see subsection 4.1). This associated plastic model is then incorporated in the meso-macro transition and assessed through the performance of the resulting macroscopic model.

##### 4.1. Modeling of the porous clay matrix as an associated plastic solid phase

Like most geomaterials, it is found that the plastic deformation of COx argillite is strongly pressure sensitive and exhibits volumetric compaction and dilation. Therefore, it is assumed that the solid phase of the clay matrix obeys to Drucker and Prager (1952) type criterion, that is:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} + 3\alpha\sigma_m - \sigma_0 \leq 0 \quad (24)$$

where  $\sigma_{eq}$  and  $\sigma_m$  are the local equivalent deviatoric stress and mean stress respectively inside the solid phase.  $\sigma_0$  denotes the initial plastic threshold in pure shearing ( $\sigma_m = 0$ ). The coefficient  $\alpha$  describes the pressure sensitivity and is related to internal friction by:

$$\tan \psi_\alpha = 3\alpha \quad (25)$$

The effective plastic behavior of the porous clay matrix should be first determined. To do this, we make use of the plastic criterion derived by Guo

et al. (2008) from limit analysis of a hollow sphere, considered as unit cell of the porous medium. The solid phase of the hollow sphere is described by an associated plastic flow rule, the yield surface being described by the function given in (24). By considering a suitable velocity field complying with a uniform strain rate boundary condition, and following a standard procedure of limit analysis, Guo et al. (2008) success to formulate an approximate expression of the macroscopic yield function of the porous medium whose matrix obeys to a Drucker-Prager criterion.

$$\Phi = \left[ \frac{\Sigma_{eq}/\sigma_0}{\Theta(\Sigma_m, \alpha, f)} \right]^2 + 2f \cosh[\gamma^{-1} \ln(1 - 3\alpha \frac{\Sigma_m}{\sigma_0})] - (1 + f^2) = 0 \quad (26)$$

in which  $\gamma = \frac{2\alpha}{2\alpha + \text{sgn}(\Sigma_m)}$ ,  $s = 1 + 2\alpha \text{sgn}(\Sigma_m)$ . The function  $\Theta(\Sigma_m, \alpha, f)$  depends on stress state and is given by, for the case of tension ( $\Sigma_m > 0$ ) :

$$\Theta_1 = 1 - \frac{3\alpha \Sigma_m}{\sigma_0(1 - f)^{1-s/2}} \quad (27)$$

and for the case of compression ( $\Sigma_m < 0$ ) :

$$\Theta_2 = 1 - 3\alpha \frac{\Sigma_m}{\sigma_0(1 + \gamma \ln(1 + sf))} \quad (28)$$

The accuracy of the macroscopic yield function given by (26) has been recently assessed by Pastor et al. (2009) who make use of numerical optimization techniques involving both statical and kinematical limit analysis approaches. It was found that the theoretical predictions of (26) are in good agreement with the numerical upper and low bounds.

The macroscopic plastic criterion obtained above is now applied to describe plastic behavior of the clay matrix by taking into account effects of porosity. As the clay matrix is one of three phases of the heterogeneous argillite, for convenience, the mesoscopic stress field in the clay matrix will be noted by the symbol “ $\sim$ ” in order to make difference with the macroscopic stresses of the argillite. Further experimental data showed that the COx argillite exhibit significant plastic hardening. In order to account for such a phenomenon, it is assumed that the yield stress of the solid phase of clay matrix increases with plastic deformation. Therefore, the initial yield threshold  $\sigma_0$  in (26) is extended to the current yield stress noted by  $\bar{\sigma}$ . Finally, the plastic yield function of clay matrix is expressed by:

$$\Phi(\tilde{\Sigma}, \bar{\sigma}, f) = \left[ \frac{\tilde{\Sigma}_{eq}/\bar{\sigma}}{\Theta(\tilde{\Sigma}_m, \alpha, f)} \right]^2 + 2f \cosh[\gamma^{-1} \ln(1 - 3\alpha \frac{\tilde{\Sigma}_m}{\bar{\sigma}})] - (1+f^2) = 0 \quad (29)$$

with :

$$\Theta = 1 - 3\alpha \frac{\tilde{\Sigma}_m}{\bar{\sigma}(1 + \gamma \ln(1 + sf))} \quad (30)$$

As mentioned above, since an associated flow rule is adopted for the solid phase, the normality rule is transposed at the scale of the porous clay matrix, that is at the mesoscale. So, the clay matrix obeys also to an associated flow rule. The plastic flow of the clay matrix is then given by:

$$\tilde{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}}(\tilde{\Sigma}, \bar{\sigma}, f) \quad (31)$$

where  $\tilde{\mathbf{D}}^p$  is plastic strain rate of clay matrix. The plastic multiplier  $\dot{\lambda}$  verifies the following loading-unloading condition:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{if } \Phi < 0 \text{ or if } \Phi = 0 \text{ and } \dot{\Phi} < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{if } \Phi = 0 \text{ and } \dot{\Phi} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

By following an energy-based reasoning introduced by Gurson in the case of a Von Mises solid phase (cf Gurson (1977)), it is possible to relate the plastic strain rate of the clay matrix to that of the solid phase. In the present case of a Drucker-Prager solid phase, one obtains then:

$$(1 - f)\bar{\sigma}\dot{\varepsilon}^p = \tilde{\Sigma} : \tilde{\mathbf{D}}^p \quad (33)$$

in which  $\varepsilon^p$  is the equivalent plastic strain of the solid phase of clay matrix.

The variation of porosity can be determined from the kinematical compatibility as follows:

$$\dot{f} = (1 - f)\text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^p - \Omega^{-1} \int_{\Omega_m} \text{tr}\mathbf{d}^p \, d\Omega \quad (34)$$

where  $\Omega_m$  represents the volume of the solid phase while  $\Omega$  the total volume of the unit cell of clay matrix. According to the local plastic criterion for the

solid phase given in (24), the plastic dilation is related to the plastic shear strain by  $\text{tr}\mathbf{d}^p = 3\alpha\dot{\varepsilon}^p$ . Therefore, one obtains:

$$\dot{f} = (1 - f) \left( \text{tr}\tilde{\mathbf{D}}^p - 3\alpha\dot{\varepsilon}^p \right) \quad (35)$$

The plastic hardening of clay matrix is characterized by the variation of the yield stress  $\bar{\sigma}$  as a function of the hardening variable  $\dot{\varepsilon}^p$ . The determination of the hardening law of clay is generally based on typical mechanical behaviors (see for instance Biarez and Hicher (2002)). Most experimental data suggest that the initial yield stress of clay, denoted  $\sigma_{00}$ , is generally very low and difficult to accurately evaluate in experiment. Further, there exists an asymptotic value of yield stress, denoted  $\sigma_{0m}$ , under large plastic deformation. Therefore, for the present study, the plastic hardening law proposed by Abou-Chakra Guéry et al. (2008a), is adopted :

$$\bar{\sigma} = \sigma_{0m} - (\sigma_{0m} - \sigma_{00})e^{-b_1\varepsilon^p} \quad (36)$$

In figure 6, we have illustrated typical initial yield surfaces respectively for the solid phase with Drucker-Prager criterion and for the porous clay matrix. We can see that the effect of porosity is clearly taken in to account.

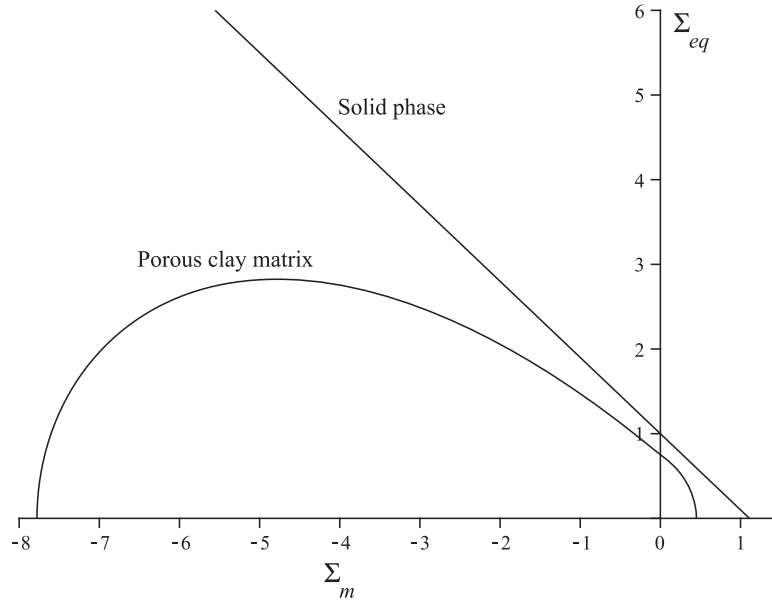


Figure 6: Initial yield surface of the porous clay matrix

The plastic multiplier is now determined from the consistency condition:

$$\dot{\Phi}(\tilde{\Sigma}, \bar{\sigma}, f) = \frac{\partial \Phi(\tilde{\Sigma}, \bar{\sigma}, f)}{\partial \tilde{\Sigma}} : \dot{\tilde{\Sigma}} + \frac{\partial \Phi(\tilde{\Sigma}, \bar{\sigma}, f)}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial \Phi(\tilde{\Sigma}, \bar{\sigma}, f)}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (37)$$

According to (33) and with the associated flow rule, one obtains :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f)\bar{\sigma}} \dot{\lambda} \quad (38)$$

which, by making use of (38), leads to the following evolution law for the porosity:

$$\dot{f} = (1-f) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}_m} - 3\alpha \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f)\bar{\sigma}} \right] \dot{\lambda} \quad (39)$$

Substituting (39) and (38) in (37), one has:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{D}}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} (1-f) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}_m} - 3\alpha \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f)\bar{\sigma}} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f)\bar{\sigma}}} \quad (40)$$

Finally, the rate form of constitutive relations of the clay matrix is obtained by considering (40) for  $\dot{\lambda}$ :

$$\dot{\tilde{\Sigma}} = \mathbb{L}_0 : \tilde{\mathbf{D}} \quad (41)$$

It follows that the effective tangent stiffness of the porous clay matrix  $\mathbb{L}_0$  writes:

$$\mathbb{L}_0 = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \Phi(\tilde{\Sigma}, f, \bar{\sigma}) \leq 0, \quad \dot{\Phi}(\tilde{\Sigma}, f, \bar{\sigma}) < 0 \\ \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}} \otimes \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C}}{H^G} & \text{if } \Phi(\tilde{\Sigma}, f, \bar{\sigma}) = 0, \quad \dot{\Phi}(\tilde{\Sigma}, f, \bar{\sigma}) = 0 \end{cases} \quad (42)$$

with :

$$H^G = \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}} - \frac{\partial \Phi}{\partial f} (1-f) \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}_m} - 3\alpha \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f)\bar{\sigma}} \right] - \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon^p} \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f)\bar{\sigma}} \quad (43)$$

By making the derivatives of the yield function (29), the tangent stiffness tensor of the clay matrix can be rewritten as follows :

$$\mathbb{L}_0 = 3\kappa_1\mathbb{J} + 2\kappa_2\mathbb{K} - \kappa_3\mathbf{1} \otimes \tilde{\Sigma}' - \kappa_4\tilde{\Sigma}' \otimes \mathbf{1} - \kappa_5\tilde{\Sigma}' \otimes \tilde{\Sigma}' \quad (44)$$

The coefficients  $\kappa_i$ ,  $i = 1...5$ , are given by :

$$\kappa_1 = \kappa_0 - \frac{9\kappa_0^2 M^2}{HG}, \quad \kappa_2 = \mu_0, \quad \kappa_3 = \kappa_4 = \frac{18M\kappa_0\mu_0}{\bar{\sigma}^2 N^2 HG}, \quad \kappa_5 = \frac{36\mu_0^2}{\bar{\sigma}^4 N^4 HG} \quad (45)$$

$$\text{with: } M = \frac{2\alpha\tilde{\Sigma}_{eq}^2}{\bar{\sigma}^3 D^3 (1 + \gamma \ln(1 + sf))} + 2f \sinh[\gamma^{-1} \ln(1 - 3\alpha \frac{\tilde{\Sigma}_m}{\bar{\sigma}})] \frac{\alpha}{\gamma(3\alpha\tilde{\Sigma}_m - \bar{\sigma})},$$

$$N = 1 - 3\alpha \frac{\tilde{\Sigma}_m}{\bar{\sigma}(1 + \gamma \ln(1 + sf))}.$$

Note that, due to  $\kappa_3 = \kappa_4$ , the tangent stiffness tensor of the porous clay matrix possesses all the symmetries, and therefore the mechanical behavior of the porous matrix is of associated type. This is a direct consequence of the well known result established by Rice (1971) about the transposition of the normality rule by upscaling.

#### 4.2. Isotropization procedure

Based on the previous works by Doghri and Ouaar (2003), Chaboche and Kanouté (2005) and others, a now standard way to obtain softer macroscopic responses consists in adopting in the computational scheme an Eshelby tensor evaluated by considering isotropic approximation of the anisotropic local tangent stiffness of the matrix. Such a result has been confirmed in somewhat different context for the COx argillite by Abou-Chakra Guéry et al. (2008a). Therefore this isotropization method will be also adopted here.

In this work, we adopt the general method proposed by Bornert et al. (2001) to perform the isotropization. The isotropic part of the tangent stiffness tensor of the clay matrix is given by:

$$\mathbb{L}_0^{iso} = (\mathbb{J} :: \mathbb{L}_0) \mathbb{J} + \frac{1}{5} (\mathbb{K} :: \mathbb{L}_0) \mathbb{K} = 3\kappa_t \mathbb{J} + 2\mu_t \mathbb{K} \quad (46)$$

Using the expression of  $\mathbb{L}_0$  given in (42), one obtains :

$$\kappa_t = \kappa_0 \left( 1 - \frac{9\kappa_0 M^2}{HG} \right), \quad \mu_t = \mu_0 \left[ 1 - \frac{12\mu_0}{5HG\bar{\sigma}^4 N^4} \tilde{\Sigma}_{eq}^2 \right] \quad (47)$$



where  $H^G$  is given in (43).

Due to the isotropic character of  $\mathbb{L}_0^{iso}$  and the fact that the calcite and quartz grains are assumed to be spherical, a closed form expression of the Eshelby tensor can be obtained:

$$\mathbb{S}^E(\mathbb{L}_0^{iso}) = \frac{3\kappa_t}{3\kappa_t + 4\mu_t} \mathbb{J} + \frac{6}{5} \frac{\kappa_t + 2\mu_t}{3\kappa_t + 4\mu_t} \mathbb{K} \quad (48)$$

The Hill tensor  $\mathbb{P}_{I_r}^0$ , used in the step (6) of integration scheme reads then:

$$\mathbb{P}_{I_r}^0 = \mathbb{S}^E(\mathbb{L}_0^{iso}) : \mathbb{L}_0^{-1}, \quad r = 1, 2 \quad (49)$$

#### 4.3. Assessment of the associated micro-macro model by comparison to experimental data on the argillite

The proposed micromechanical model is now used in the simulation of some laboratory tests performed on the COx argillite. The values of elastic parameters for the three phases as well as of the porosity of clay matrix, already presented in subsection 2.2, are reported in Table 1. It remains to identify 4 parameters corresponding to the plastic behavior of the clay matrix. This has been done by using the iterative procedure proposed in Abou-Chakra Guéry et al. (2008a). The general strategy is as follows: identify the plastic parameters by iterative fitting of experimental data for one mineralogical composition (or depth) and then perform the validation against experimental data for other mineralogical compositions. For the present work, the 4 parameters required by the clay matrix plasticity are identified from the stress-strain curves obtained in uniaxial compression tests performed on the sample at the depth of 466.8m; the obtained values are shown in Table 1. The resulting stress-strain curves are shown on figure 7.

One can see that the axial strain is well reproduce. However, the proposed models overestimates the lateral strain and then the volumetric dilatancy. In addition to the very early occurrence of plasticity in the clay matrix, this overestimation of the dilatancy can be explained by the fact that the local constitutive model for the clay matrix is associated.

To assess the consequence of this poor predictive capability of the model, observed for the uniaxial test (at the stage of calibration), we performed simulations of a series of triaxial compression tests. An example corresponding to 5MPa of confining pressure is shown on .

The corresponding numerical results are compared with experimental data and shown in figures 8. It is observed that the axial strain is still

	Phase (0) Clay	Phase (1) Calcite	Phase (2) Quartz
Elastic parameters	$E_s = 5GPa$ $\nu_s = 0.33$	$E_1 = 95GPa$ $\nu_1 = 0.27$	$E_2 = 101GPa$ $\nu_2 = 0.06$
Plastic parameters	$\sigma_{00} = 1MPa$ $\sigma_{0m} = 25MPa$ $b = 125$ $\alpha = 0.3$		
Porosity	$f = 0.25$		

Table 1: Typical values of parameters for mesomechanical model with associated flow rule.

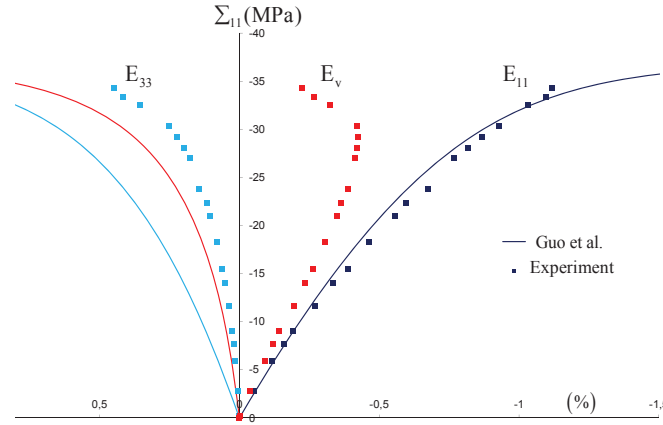


Figure 7: Prof :466.8m,  $f_0 = 51\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 23\%$ , Uniaxial compression test.

well reproduced and the proposed model correctly accounts for the influences of confining pressure. In particular, the micro-macro model can systematically account for the effects of mineralogical compositions on the macroscopic triaxial responses of argillite. This represents a significant advantage with respect to phenomenological models. However, as for the uniaxial test and

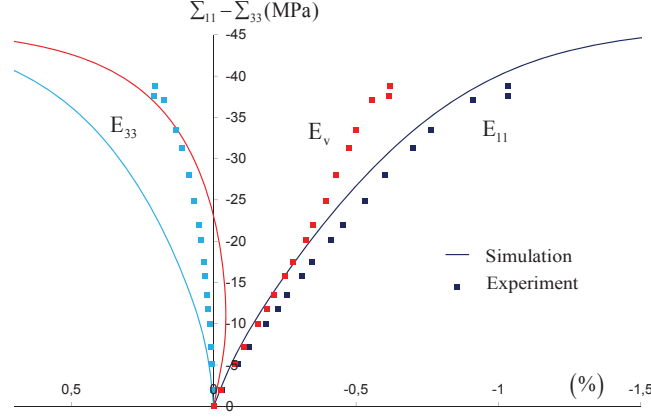


Figure 8: Prof :451.5m,  $f_0 = 49\%$ ,  $f_1 = 19\%$  and  $f_2 = 32\%$ , Triaxial compression test with a confining pressure of  $5MPa$ .

still due to the associated flow rule, the proposed model overestimates the lateral strain (volumetric dilatancy). In order to improve the accuracy of the modeling, we proposed to consider in the next section a non associated plastic model for the solid phase of clay matrix.

## 5. Micro to macro modeling of argillite in the case of non associated flow rule of the solid phase

### 5.1. Formulation of the model incorporating non associated flow of the solid phase

Consider now the clay matrix as a porous medium composed of a solid phase which is described by a pressure sensitive and non associated plastic model. The main and difficult task here is to determine the effective plastic behavior of the porous clay matrix by considering the non associated flow rule in the solid phase. To this end, we took advantage of a very original work by Maghous et al. (2009). For sake of clarity, we follow here the notation used by these authors. The yield function of the Drucker-Prager model which still corresponds to the local plastic behavior is then rewritten in the form:

$$\phi^m(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d + T(\sigma_m - h) \leq 0 \quad (50)$$

The flow rule is given by the following potential:

$$g^m(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d + t\sigma_m, \quad \mathbf{d} = \lambda \frac{\partial g^m}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \lambda \geq 0 \quad (51)$$

In (50) and (51),  $\boldsymbol{\sigma}$  denotes the local stress in the solid phase,  $\sigma_m = \text{tr}\boldsymbol{\sigma}/3$  being the hydrostatic stress,  $\sigma_d = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}$  the generalized deviatoric stress in which  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{1}$  represent the deviatoric stress tensor.

The parameter  $h$  represents the hydrostatic tensile strength while  $T$  denotes the frictional coefficient. The parameter  $t$  defines the so-called dilatancy coefficient which controls the volumetric plastic strain. Note that if  $T = t$  the associated flow rule is recovered.

By using a non linear homogenization procedure based on a modified secant method, Maghous et al. (2009) have obtained closed-form expressions of the effective plastic yield function and plastic potential of the porous medium. These are in the form:

$$F^{hom}(\boldsymbol{\Sigma}, f, T) = \frac{1 + 2f/3}{T^2} \Sigma_d^2 + \left( \frac{3f}{2T^2} - 1 \right) \Sigma_m^2 + 2(1-f)h\Sigma_m - (1-f)^2 h^2 = 0 \quad (52)$$

$$G^{hom}(\boldsymbol{\Sigma}, f, T, t) = \frac{1 + 2f/3}{Tt} \Sigma_d^2 + \left( \frac{3f}{2Tt} - 1 \right) \Sigma_m^2 + 2(1-f)h\Sigma_m \quad (53)$$

where  $\Sigma_d = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}' : \boldsymbol{\Sigma}'}$ , and  $\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{\Sigma} - \Sigma_m \mathbf{1}$ .

The plastic hardening of solid phase is taken into account via the evolution of the frictional coefficient  $T$  as a function of the equivalent plastic strain  $\varepsilon^p$ . Let  $T_0$  be the initial threshold and  $T_m$  the asymptotic value of the frictional coefficient, the following exponential form is used for the hardening law:

$$\bar{T} = T_m - (T_m - T_0)e^{-b_2\varepsilon^p} \quad (54)$$

In most geomaterials, it is generally observed that there is transition from volumetric contractance to dilatancy under deviatoric loading. This indicates that the plastic dilatancy coefficient  $t$  should also vary with loading history. In the present model, we assume that the plastic dilatancy coefficient  $t$  is also a function of the equivalent plastic strain as:

$$\bar{t} = t_m - (t_m - t_0)e^{-b_3\varepsilon^p} \quad (55)$$

Taking into account the plastic hardening law, the contractance-dilatancy transition, the effective plastic yield function and plastic potential for the porous clay matrix are rewritten as:

$$F(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}, f, \bar{T}) = \frac{1 + 2f/3}{\bar{T}^2} \tilde{\Sigma}_d^2 + \left( \frac{3f}{2\bar{T}^2} - 1 \right) \tilde{\Sigma}_m^2 + 2(1-f)h\tilde{\Sigma}_m - (1-f)^2 h^2 \quad (56)$$

$$G(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T}, \bar{t}) = \frac{1 + 2f/3}{\bar{T}\bar{t}} \tilde{\Sigma}_d^2 + \left( \frac{3f}{2\bar{T}\bar{t}} - 1 \right) \tilde{\Sigma}_m^2 + 2(1-f)h\tilde{\Sigma}_m \quad (57)$$

The plastic flow rule then reads:

$$\tilde{\mathbf{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}}(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T}, \bar{t}) \quad (58)$$

where  $\tilde{\mathbf{D}}^p$  represents the effective plastic strain rate tensor of the porous clay matrix.

According to (50), one has:

$$\tilde{\Sigma} : \tilde{\mathbf{D}}^p = \Omega^{-1} \int_{\Omega_m} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, d\Omega = \Omega^{-1} \int_{\Omega_m} \dot{\varepsilon}^p (\sigma_d + \bar{t}\sigma_m) \, d\Omega \quad (59)$$

Using this condition and (33), the equivalent plastic strain of the clay matrix est given by:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\tilde{\Sigma} : \tilde{\mathbf{D}}^p}{(1-f) \left( \bar{T}h + (\bar{t} - \bar{T}) \frac{\tilde{\Sigma}_m}{1-f} \right)} \quad (60)$$

Concerning the evolution of porosity, it is determined by:

$$\dot{f} = (1-f) \left( \text{tr} \tilde{\mathbf{D}}^p - \bar{t} \dot{\varepsilon}^p \right) \quad (61)$$

As for (37), the plastic multiplier  $\dot{\lambda}$  is determined from the consistency condition:

$$\dot{F}(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T}) = \frac{\partial F(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T})}{\partial \tilde{\Sigma}} : \dot{\tilde{\Sigma}} + \frac{\partial F(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T})}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial F(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T})}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon^p} \dot{\varepsilon}^p = 0 \quad (62)$$

Substituting (54), (60), (61) in (62), one obtains:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{D}}}{\frac{\partial F}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}} - \frac{\partial F}{\partial f} \left[ (1-f) \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}_m} - \bar{t} \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(\bar{T}h + (\bar{t} - \bar{T}) \frac{\tilde{\Sigma}_m}{1-f})} \right] - \frac{\partial F}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon^p} \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f) (\bar{T}h + (\bar{t} - \bar{T}) \frac{\tilde{\Sigma}_m}{1-f})}} \quad (63)$$

According to (41), the tangent stiffness tensor  $\mathbb{L}_0$  of the clay solid phase reads:

$$\mathbb{L}_0 = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } F(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T}) \leq 0, \quad \dot{F}(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T}) < 0 \\ \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C}}{H^L} & \text{if } F(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T}) = 0, \quad \dot{F}(\tilde{\Sigma}, f, \bar{T}) = 0 \end{cases} \quad (64)$$

with :

$$H^L = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\Sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}} - \frac{\partial F}{\partial f} \left[ (1-f) \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}_m} - t \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(\bar{T}h + (\bar{t}-\bar{T})\frac{\tilde{\Sigma}_m}{1-f})} \right] - \frac{\partial F}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon^p} \frac{\tilde{\Sigma} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\Sigma}}}{(1-f)(\bar{T}h + (\bar{t}-\bar{T})\frac{\tilde{\Sigma}_m}{1-f})} \quad (65)$$

After making the appropriate derivative of the yield function as well as plastic potential and isotropic hardening law, the tangent stiffness tensor can be rewritten as:

$$\mathbb{L}_0 = 3\kappa_1 \mathbb{J} + 2\kappa_2 \mathbb{K} - \kappa_3 \mathbf{1} \otimes \tilde{\Sigma}' - \kappa_4 \tilde{\Sigma}' \otimes \mathbf{1} - \kappa_5 \tilde{\Sigma}' \otimes \tilde{\Sigma}' \quad (66)$$

with the various coefficients  $\kappa_i$ ,  $i = 1 \dots 5$ , given by:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_0 - \frac{9\kappa_0^2 AB}{H^L}, & \kappa_2 &= \mu_0, & \kappa_3 &= \frac{12B\kappa_0\mu_0(1+2f/3)}{\bar{T}^2 H^L}, \\ \kappa_4 &= \frac{12A\kappa_0\mu_0(1+2f/3)}{\bar{T}\bar{t}H^L}, & \kappa_5 &= \frac{16\mu_0^2(1+2f/3)^2}{\bar{T}^3\bar{t}H^L} \end{aligned} \quad (67)$$

in which  $A = \left(\frac{f}{\bar{T}^2} - \frac{2}{3}\right)\tilde{\Sigma}_m + \frac{2}{3}(1-f)h$ ,  $B = \left(\frac{f}{\bar{T}\bar{t}} - \frac{2}{3}\right)\tilde{\Sigma}_m + \frac{2}{3}(1-f)h$ , and  $H^L$  given in (65).

According to some previous works (Abou-Chakra Guéry et al. (2008b); Jiang and Shao (2009)), even for heterogeneous materials containing non-associated plastic phase, the use of isotropization procedure allows significant improvement of numerical prediction by the incremental model. Therefore, the same isotropization procedure as that for the associated model is here used. The corresponding tangent moduli are given by:

$$\kappa_t = \kappa_0 \left( 1 - \frac{9\kappa_0 AB}{H} \right), \quad \mu_t = \mu_0 \left[ 1 - \frac{8\mu_0(1+2f/3)^2}{5H\bar{T}^3\bar{t}} \tilde{\Sigma}_d^2 \right] \quad (68)$$

## 5.2. Experimental validation of the non-associated model

Considering the same parameter identification procedure as that for the associated model, the 7 parameters involved in the non-associated model are identified from experimental data issued from the uniaxial compression tests already considered in subsection 4.3 and performed on the sample from depth 466.8m. The typical values obtained are reported in Table 2. Using

	Phase (0) Clay	Phase (1) Calcite	Phase (2) Quartz
Elastic parameters	$E_s = 5GPa$ $\nu_s = 0.33$	$E_1 = 95GPa$ $\nu_1 = 0.27$	$E_2 = 101GPa$ $\nu_2 = 0.06$
Plastic parameters	$T_0 = 0.03$ $T_m = 0.94$ $b_2 = 230$ $t_0 = -1.0$ $t_m = 0.3$ $b_3 = 200$ $h = 15$		
Porosity	$f = 0.25$		

Table 2: Values of parameters of the non-associated model identified for the Cox argillite

the values given in Table 2<sup>2</sup>, numerical simulations are now performed for triaxial compression tests with different confining pressures (5 and 10MPa), and on samples at different depths (451.4 – 466.8m, 468.9 – 469.1m and 482.2m). Note that the dependence of macroscopic behavior on the depth is described by the micro-macro model only via the evolution of mineralogical compositions of the argillite with depth. The same set of parameters is used for all the depths.

In Figures 9-17, are shown comparisons between experimental data and numerical results. One can see a good agreement both for axial and volumetric strains. Contrarily to the previous model, the non-associated model appropriately describes the transition from volumetric contractance to dilatancy with the increase of deviatoric stress. The volumetric dilatancy is less pronounced under high confining pressure, clearly demonstrating a significant improvement of the predictions of the associated one. In Figures 18,

---

<sup>2</sup>*It is important to point out here that, except the elastic properties and the porosity value, the calibrated values reported in table 2 differ from the one corresponding to the associated model based on criterion by Guo et al. (2008).*

19 and 20, the evolution of porosity in the clay matrix is shown for different depths ( $451.4 - 466.8m$ ,  $468.9 - 469.1m$  and  $482.2m$ ). It is worth noticing that even if the variation of porosity remains quite small, the plastic behavior of the clay matrix is significantly affected by the presence of inter-particle porosity due to the dependence of the yield function and plastic potential on the porosity.

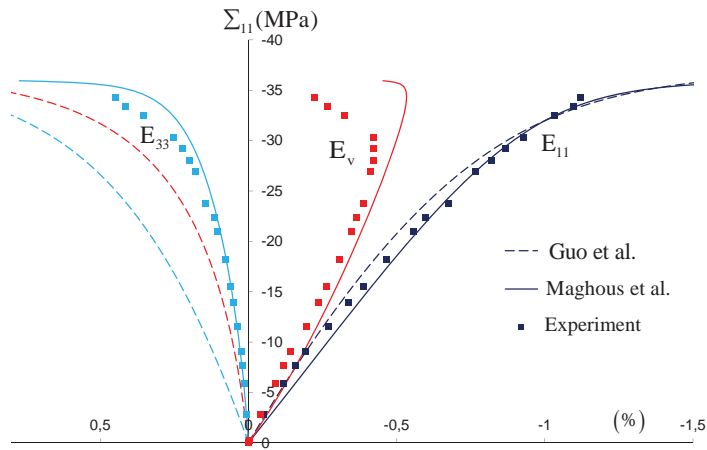


Figure 9: Prof : 466.8m,  $f_0 = 51\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 23\%$ , Uniaxial compression test

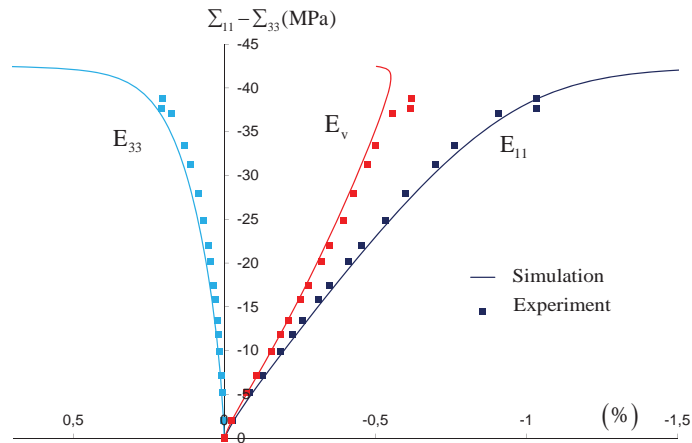


Figure 10: Prof : 451.5m,  $f_0 = 49\%$ ,  $f_1 = 19\%$  and  $f_2 = 32\%$ , triaxial compression test with confining pressure of  $5MPa$ .



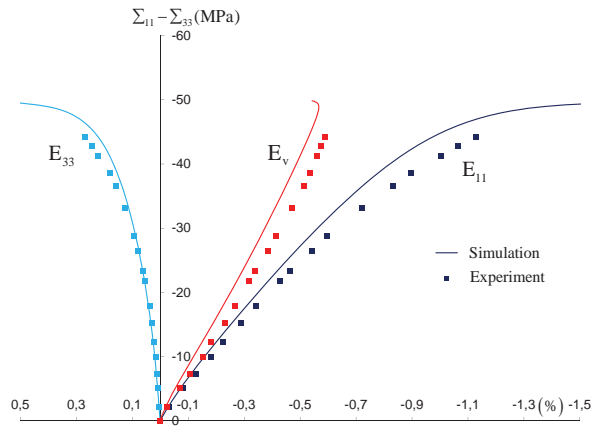


Figure 11: Prof : 451.4m,  $f_0 = 47\%$ ,  $f_1 = 31\%$  and  $f_2 = 22\%$ , triaxial compression test with confining pressure of 10MPa.

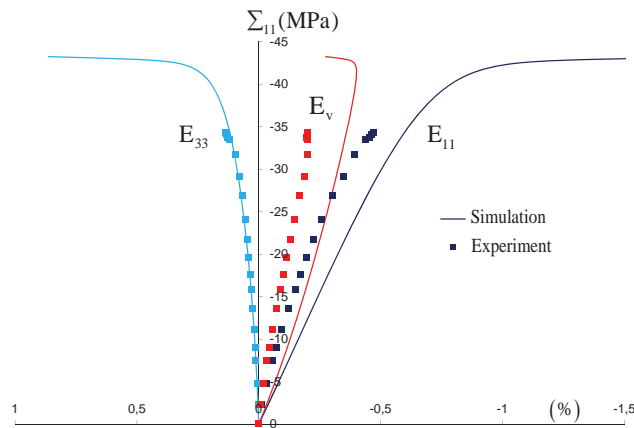


Figure 12: Prof : 468.9m,  $f_0 = 34\%$ ,  $f_1 = 53\%$  and  $f_2 = 13\%$ , Uniaxial compression test

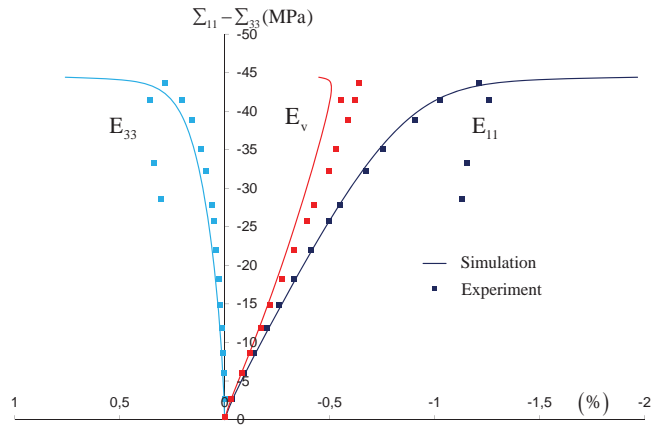


Figure 13: Prof : 469.0m,  $f_0 = 44\%$ ,  $f_1 = 33\%$  and  $f_2 = 23\%$ , triaxial compression test with confining pressure of  $5MPa$ .

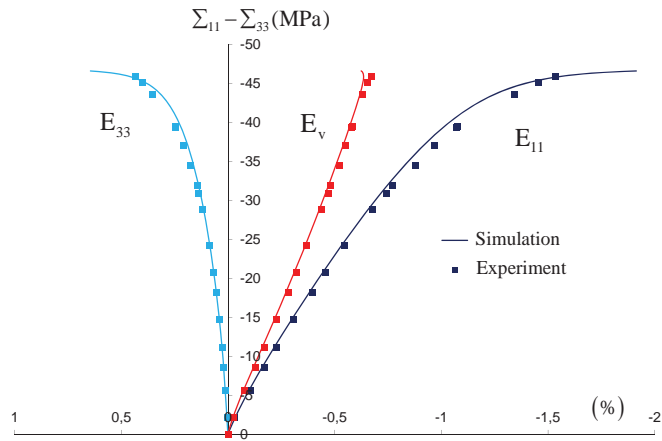


Figure 14: Prof : 469.1m,  $f_0 = 55\%$ ,  $f_1 = 23\%$  and  $f_2 = 22\%$ , triaxial compression test with confining pressure of  $10MPa$ .

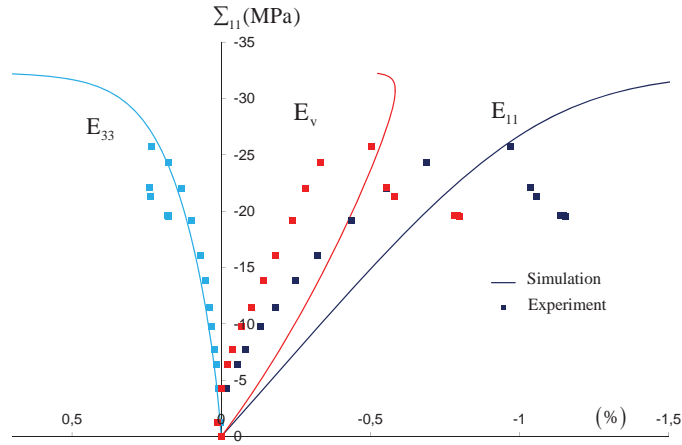


Figure 15: Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 14\%$ , Uniaxial compression test.

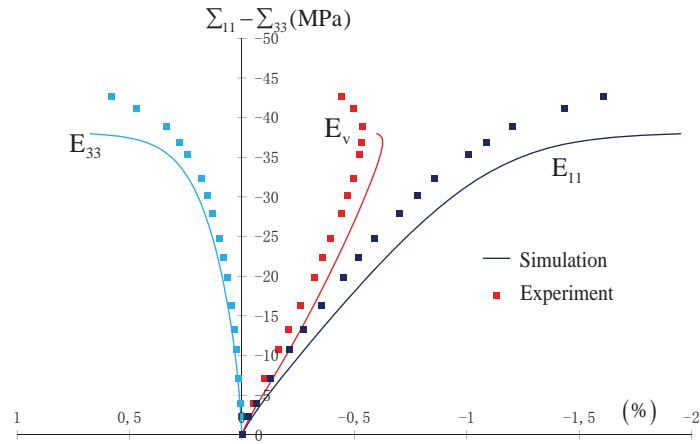


Figure 16: Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 14\%$ , triaxial compression test with confining pressure of 5 MPa.

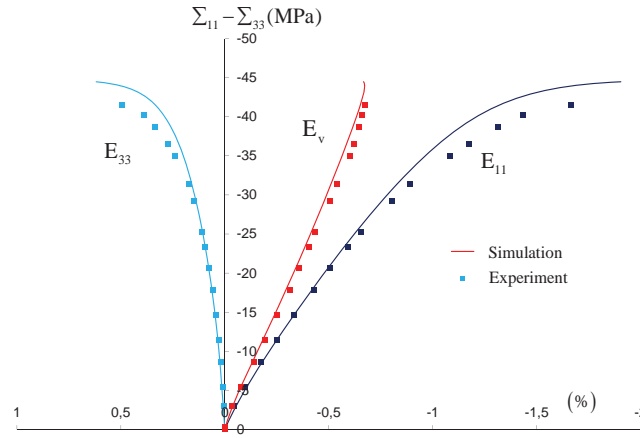


Figure 17: Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 14\%$ , triaxial compression test with confining pressure of  $10\text{MPa}$  .

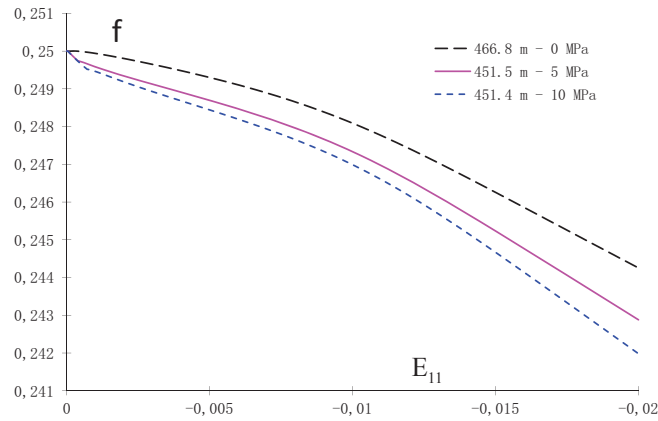


Figure 18: Prof : 451.4m-482.2m, evolution of porosity in clay matrix  $f$  with axial strain.

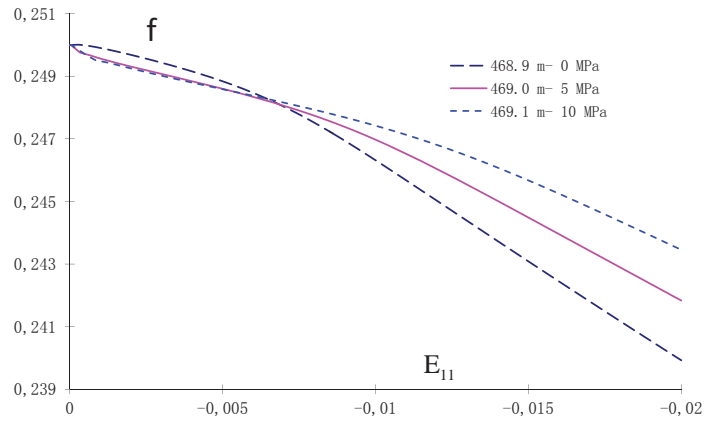


Figure 19: Prof : 468.9m-469.1m, evolution of porosity in clay matrix  $f$  with axial strain.

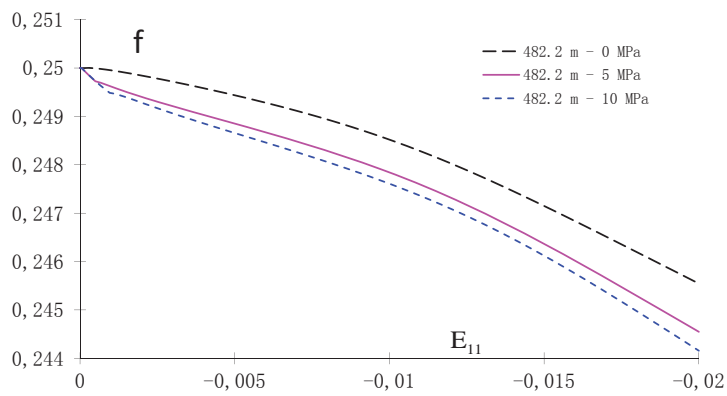


Figure 20: Prof : 482.2m, evolution of porosity in clay matrix  $f$  with axial strain.

## 6. Conclusion

A micro-macro model is proposed to describe the elastoplastic behavior of Callovo Oxfordian argillite dedicated to underground waste storage. We propose two homogenization steps in which at the mesoscopic scale the argillite is considered as a three phase composite : porous clay matrix and two families of mineral inclusions. In the first step, the effective plastic properties of the porous clay matrix is determined by mean of two different non linear homogenization methods, respectively in the case of an associated and a non-associated plastic flow rule for the solid phase. The later is described by a pressure sensitive Drucker-Prager type plasticity which is then explicitly coupled with porosity. In the second step of homogenization, the meso-macro transition which delivers the macroscopic behavior of argillite is performed by using Hill type incremental non linear homogenization procedure. Thus, the whole micro-macro model explicitly accounts for influences of mineralogical compositions as well as matrix porosity on the macroscopic responses of the argillite. The parameters of model are identified from uniaxial compression test for a given mineral composition and then validated for triaxial compression tests and other mineral compositions. A very good agreement is observed between predicted results and experimental data regarding axial strains for both the associated and non-associated model. However, the associated model is not able to correctly describe volumetric strains and the transition from contractance to dilatancy. This crucial feature is accounted by the non-associated model, which is able to describe the main aspects of the mechanical behavior of the argillite in relation with its microstructure at the relevant scales. Current works are devoted to an extension of the proposed model to hydromechanical couplings in saturated and unsaturated conditions. Time dependent behaviors will be the subject of future developments.

## Acknowledgements

The work presented in this paper was partly funded by ANDRA, the French national Agency for the management of radioactive wastes, which is gratefully acknowledged.

## References

Abou-Chakra Guéry, A., 2007. Contribution à la modélisation micromécanique du comportement non linéaire de l'argillite du callovo-oxfordien.

- Phd, thesis, Université de Lille 1, France.
- Abou-Chakra Guéry, A., Cormery, F., Shao, J.-F., Kondo, D., 2008a. A micromechanical model of elastoplastic and damage behavior of a cohesive geomaterial. *Int.J.Solids Struct* 45(5), 1406–1429.
- Abou-Chakra Guéry, A., Cormery, F., Shao, J.-F., Kondo, D., 2008b. A micromechanical model of elastoplastic and damage behavior of a cohesive geomaterial. *Int.J.Solids Struct* 45(5), 1406–1429.
- Andra, 2005. Referentiel du site meuse-haute marne. Report.
- Biarez, J., Hicher, P.-Y., 2002. Mécanismes de déformation des sols. chapitre 2 “elastoplasticité des sols et des roches”. Edité par P-Y. Hicher et J-F. Shao. Hermes Science.
- Bornert, M., Bretheau, T., Gilormini, P., 2001. Homogénéisation en mécanique des matériaux 1: Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques. Hermes Sciences Europe Ltd.
- Chaboche, J.-L., Kanouté, P., 2005. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *Int.Journ.of plasticity* 21(7), 1409–1434.
- Chiarelli, A.-S., 2000. Etude expérimentale et modélisation du comportement mécanique de l’argilite de l’est. Phd, thesis, Université de Lille 1, France.
- Chiarelli, A.-S., Shao, J.-F., Hoteil, N., 2003. Modeling of elastoplastic damage behavior of a claystone. *Int.J.Plasticity* 19, 23–45.
- Doghri, I., Ouavar, A., 2003. Homogenization of two-phase elasto-plastic composite material and structures: study of tangent operator, cyclic plasticity and numerical algorithms. *Int.J.Solids Struct* 40(7), 1681–1712.
- Drucker, D.-C., Prager, W., 1952. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quartely of appl. M ath.* 10, 157–175.
- Guo, T., Faleskog, J., Shih, C., 2008. Continuum modeling of a porous solid with pressure-sensitive dilatant matrix. *J.Mech.Phys.Solids* 56, 2188–2212.

- Gurson, A., 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part1-yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mater. Technol.* 99, 2–15.
- Hill, R., 1965. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J.Mech.Phys.Solids* 13, 89–101.
- Jia, Y., Bian, H., Su, K., Kondo, D., Shao, J., 2010. Elastoplastic damage modelling of desaturation and resaturation in argillites. *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 34, 187–220.
- Jiang, T., Shao, J.-F., 2009. On the incremental approach for nonlinear homogenization of composite and influence of isotropization. *Computational Material Science* 46(2), 447–451.
- Lide, D.-R., 2004. *Handbook of chemistry and physics*. CRC Press.
- Maghous, S., Dormieux, L., Barthèlèmy, J., 2009. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials. *European Journal of Mechanics A/Solid* 28, 179–188.
- Mori, T., Tanaka, K., 1973. Average stress in a matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.Mater* 42(7), 597–629.
- Panet, M., Fourmaintraux, D., 2004. *La mécanique des roches appliquée aux ouvrages du génie-civil*. CRC Press.
- Pastor, J., Thoré, P., Pastor, F., 2009. Limits analysis and numerical modeling of spherically porous solids with coulomb and drucker-prager matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 234(7), 2162–2174.
- Rice, J., 1971. Inelastic constitutive relations for solids : an internal variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 19, 433–455.
- Robinet, J., 2008. *Minéralogie, porosité et diffusion des solutes dans l’argilite du callovo-oxfordien de bure (meuse/haute-marne, france) de l’échelle centimétrique à micrométrique*. Phd, thesis, Université de poitiers, France.



Shao, J., Jia, Y., Kondo, D., Chiarelli, A., 2006. A coupled elastoplastic damage model for semi-brittle materials and extension to unsaturated conditions. *Mechanics of Materials* 38, 218–232.

## Appendix A. Homogenization of elastic properties

The local boundary values problem is expressed as follows:

- equilibrium :

$$\underline{\text{div}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) = \underline{\mathbf{0}} \quad (\text{A.1})$$

- linear elastic relations:

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z}) : \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{z}) \quad (\text{A.2})$$

where  $\mathbb{C}$  is the local elastic stiffness tensor at the point  $\underline{z}$ ,  $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$  the local strain tensor.

- compatibility relation :

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\boldsymbol{\xi}} + {}^t \underline{\underline{\text{grad}}}\underline{\boldsymbol{\xi}} \right) \quad (\text{A.3})$$

- uniform strain condition :

$$\forall \underline{z} \in \partial\Omega, \quad \underline{\boldsymbol{\xi}}(\underline{z}) = \mathbf{E} \cdot \underline{z} \quad (\text{A.4})$$

in which  $\underline{\boldsymbol{\xi}}$  denotes the displacement vector,  $\mathbf{E}$  the macroscopic strain tensor.

The linearity nature of equations implies the existence of a linear relation between the macroscopic and microscopic strain tensors. One deduces the strain localization tensor  $\mathbb{A}$  as follows :

$$\forall \underline{z} \in \Omega, \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\underline{z}) = \mathbb{A}(\underline{z}) : \mathbf{E} \quad (\text{A.5})$$

Note that the strain localization tensor (A.5) verifies the condition  $\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$ , due to the fact that the average of microscopic strain is equal to the macroscopic one.  $\mathbb{I}$  denotes the fourth order unit tensor :  $\mathbb{I} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  with  $\delta_{ij}$  the Kronecher's symbol.

By the combination of the localization relations (A.5), local constitutive equations of constituents and making the volumetric averaging over the RVE, one obtains the following well-known result:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{hom} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \quad (\text{A.6})$$

where  $\mathbb{C}^{hom}$  represents the effective macroscopic elastic stiffness tensor of the homogenized argillite. If the material is composed by  $N$  clearly distinguished phases, the determination of the effective elastic properties comes to the evaluation of the average of strain localization tensor  $\mathbb{A}_r$  for each phase  $r$ , that is:

$$\mathbb{C}^{hom} = \sum_{r=0}^N f_r \mathbb{C}_r : \mathbb{A}_r \quad (\text{A.7})$$

where  $f_r$  is the volume fraction of the phase  $r$ .

One can rewrite (A.7) in the following form :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}_0 + \sum_{r=0}^N f_r (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0) : \mathbb{A}_r \quad (\text{A.8})$$

$\mathbb{C}_0$  is the elastic stiffness tensor of matrix. The determination of  $\mathbb{A}_r$  in each phase  $r$  depends on the homogenization scheme used. In the previous studies Abou-Chakra Guéry (2007), three standard schemes typically used for random materials have been compared: dilute scheme, Mori-Tanaka scheme and self-consistent scheme. It was found that due to Mori-Tanaka scheme is well adapted for describing effects mineral inclusions on the macroscopic properties of the COx argillite. This scheme is then used in this work.

The basic idea of Mori and Tanaka (1973) scheme is to represent a family of ellipsoidal inclusions of same form and orientation by an equivalent ellipsoidal inclusion which is embedded in an infinite medium with the elastic stiffness  $\mathbb{C}_0$  and subjected to the uniform remote strain  $\mathbf{E}^0$  to be precised. Based on the basic solution of Eshelby, the strain field in the phase “r” writes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = (\mathbb{I} + \mathbb{P}_{I_r}^0 : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0))^{-1} : \mathbf{E}^0 \quad (\text{A.9})$$

where  $\mathbb{P}_{I_r}^0$  denotes the fourth order symmetric Hill’s tensor,  $P_{ijkl} = P_{jikl} = P_{ijlk} = P_{klij}$ . Note that the upper index 0 refers to  $\mathbb{C}_0$  and the lower index  $I_r$  implies the dependency of  $\mathbb{P}$  on geometrical form and orientation of inclusions.

In the case of isotropy at both local and overall scales, the Hill's tensor is given by:

$$\mathbb{P}_{Ir}^0 = \frac{\beta_0}{2\mu_0}\mathbb{K} + \frac{\alpha_0}{3\kappa_0}\mathbb{J} \quad (\text{A.10})$$

with  $\alpha_0 = \frac{3\kappa_0}{3\kappa_0 + 4\mu_0}$  et  $\beta_0 = \frac{6(\kappa_0 + 2\mu_0)}{5(3\kappa_0 + 4\mu_0)}$ , the moduli  $\kappa_0$  and  $\mu_0$  respectively denote the bulk and shear moduli of the matrix.

By invoking the averaging rule,  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E}$ , the remote strain tensor  $\mathbf{E}^0$  can be expressed by :

$$\mathbf{E}^0 = \left( \sum_{r=0}^N f_s (\mathbb{I} + \mathbb{P}_{Ir}^0 : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0))^{-1} \right)^{-1} : \mathbf{E} \quad (\text{A.11})$$

Making use of the relation  $\mathbb{A}_r^0 = (\mathbb{I} + \mathbb{P}_{Ir}^0 : (\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0))^{-1}$ , the strain localization tensor for the inclusion phase  $r$  becomes :

$$\mathbb{A}_r = \mathbb{A}_r^0 : \left( \sum_{s=0}^N f_s \mathbb{A}_s^0 \right)^{-1} \quad (\text{A.12})$$

Accordingly, the macroscopic elastic stiffness tensor is given by :

$$\mathbb{C}^{hom} = \sum_{r=0} f_r \mathbb{C}_r : \mathbb{A}_r^0 \left( \sum_{s=0}^N f_s \mathbb{A}_s^0 \right)^{-1} \quad (\text{A.13})$$

and also by:

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}_0 + \sum_{r=0} f_r [(\mathbb{C}_r - \mathbb{C}_0)^{-1} + \mathbb{P}_{Ir}^0]^{-1} \left( \sum_{s=0}^N f_s \mathbb{A}_s^0 \right)^{-1} \quad (\text{A.14})$$

The term  $\left( \sum_{s=0}^N f_s \mathbb{A}_s^0 \right)^{-1}$  in (A.14) accounts for interactions between different phases. For the sake of clarity, we introduce the following notations:

$$\mathbb{C}_r = 2\mu_r \mathbb{K} + 3\kappa_r \mathbb{J}, \quad r = 0..2 \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbb{C}^{hom} = 2\mu^{hom} \mathbb{K} + 3\kappa^{hom} \mathbb{J}$$

where  $\kappa_r$  and  $\mu_r$  respectively denote the bulk and shear moduli of the phase  $r$  while  $\kappa^{hom}$  and  $\mu^{hom}$  those of the homogenized medium, which can be obtained from (A.14) and (A.15) :

$$\kappa^{hom} = \left( \sum_{r=0} f_r \frac{\kappa_r}{3\kappa_r + 4\mu_0} \right) \left( \sum_{s=0} \frac{f_s}{3\kappa_s + 4\mu_0} \right)^{-1} \quad (\text{A.16})$$

$$\mu^{hom} = \frac{\sum_{r=0} f_r \frac{\mu_r}{\mu_0(9\kappa_0 + 8\mu_0) + 6\mu_r(\kappa_0 + 2\mu_0)}}{\sum_{s=0} \frac{f_s}{\mu_0(9\kappa_0 + 8\mu_0) + 6\mu_s(\kappa_0 + 2\mu_0)}} \quad (\text{A.17})$$

# Annexe B

## Annex au chapitre 4

### B.1 Evaluation numérique du critère de Guo et al.[26] par [55]

Cette annexe correspond à une évaluation numérique récente du critère de Guo et al. [26] par Pastor et al. [55]. Cette évaluation est réalisée en comparant les prédictions de ce critère à des bornes numériques obtenues en conditions de taux de déformation uniforme au bord de la cellule élémentaire. Les figures B.1 et B.2 indiquent que le critère proposé par [26] se trouve généralement encadré entre l'approche cinématique (borne supérieure) et l'approche statique (borne inférieure) pour la porosité  $f = 5\%$  et  $f = 10\%$  (se situent légèrement au dessus de la borne supérieure). Sur la base de ces comparaisons, on peut conclure que Guo et al. [26] conduisent à une bonne estimation du critère macroscopique pour le matériau poreux à matrice de Drucker-Prager. Ceci justifie en particulier et a posteriori l'hypothèse d'admissibilité plastique en moyenne faite par les auteurs.

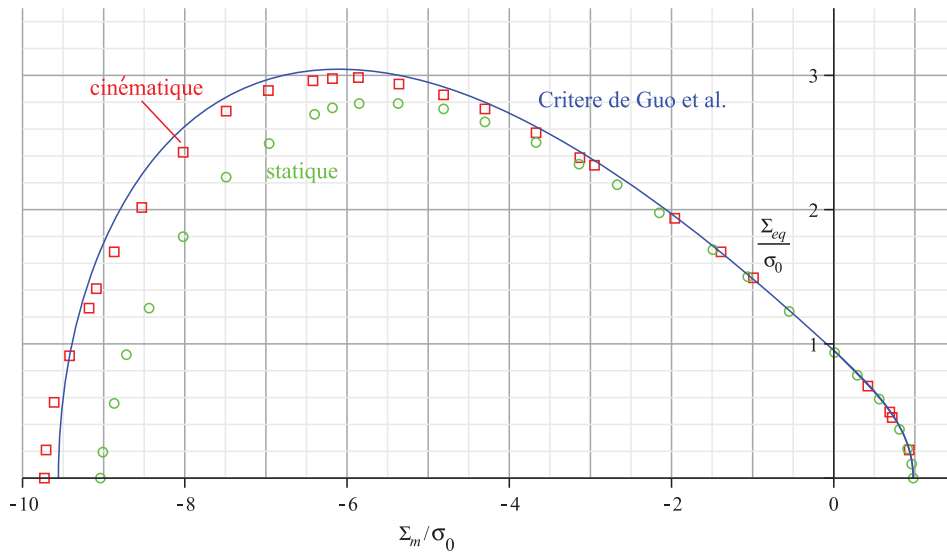


FIGURE B.1 – Comparaison entre le critère proposé par [26] et les résultats éléments finis obtenus par Pastor et al.[41] :  $f = 0.05$ ,  $\psi_\alpha = 30^\circ$

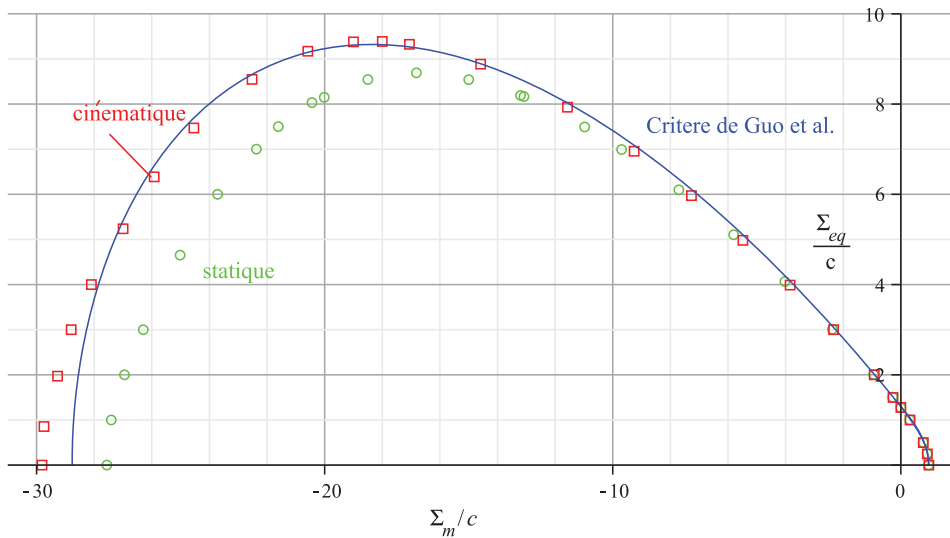


FIGURE B.2 – Comparaison entre le critère proposé par [26] et les résultats éléments finis obtenus par Pastor et al.[41] :  $f = 0.1$ ,  $\psi_\alpha = 40^\circ$

## B.2 Réponses en chargements hydrostatique : prédictions du modèle non associé

L'objectif visé dans cette sous section est simplement de montrer les prédictions par le modèle de la réponse élastoplastique sous compression isotrope. Les diminutions cor-

respondantes de porosité sont également illustrées.

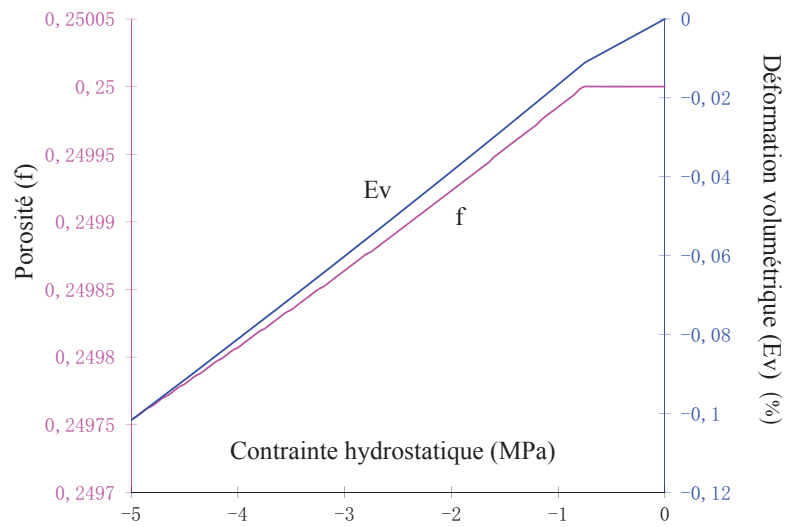


FIGURE B.3 – Prof : 469.0m,  $f_0 = 44\%$ ,  $f_1 = 33\%$  and  $f_2 = 23\%$ , simulation d'essai de compression hydrostatique avec une pression de confinement de 5MPa.

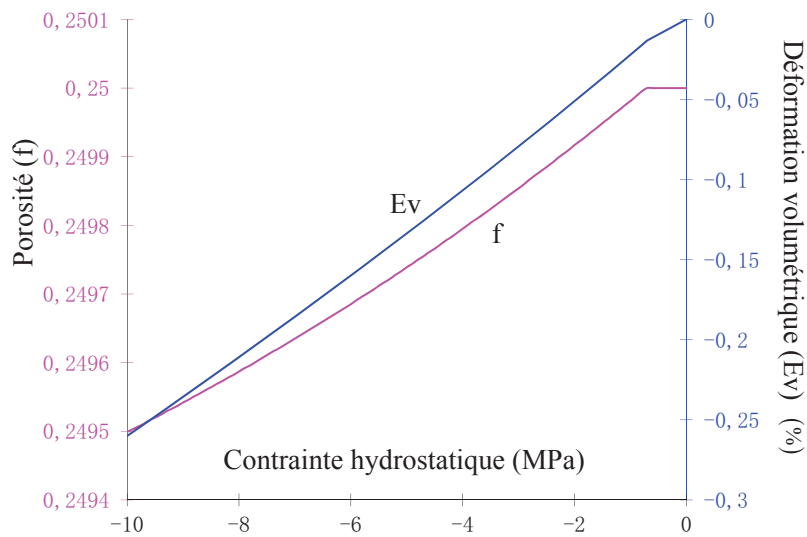


FIGURE B.4 – Prof : 469.1m,  $f_0 = 55\%$ ,  $f_1 = 23\%$  and  $f_2 = 22\%$ , simulation d'essai de compression hydrostatique avec une pression de confinement de 10MPa.

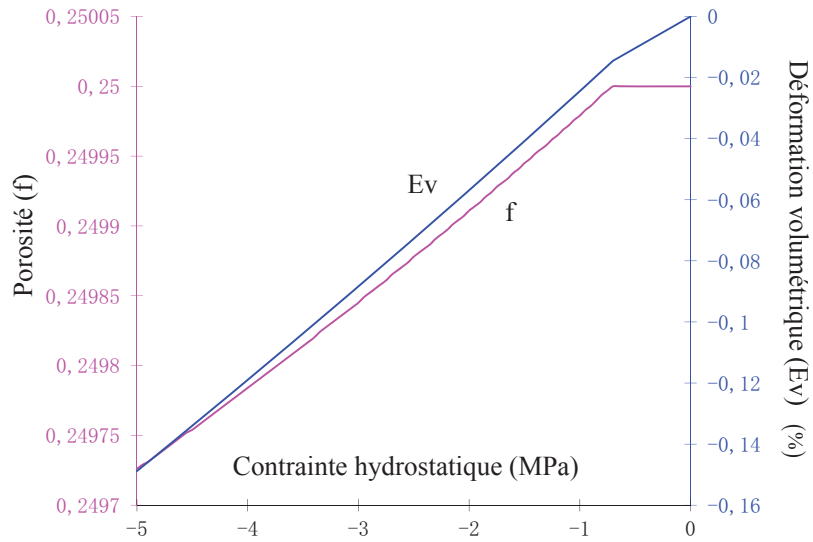


FIGURE B.5 – Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 14\%$ , simulation d'essai de compression hydrostatique avec une pression de confinement de 5MPa.

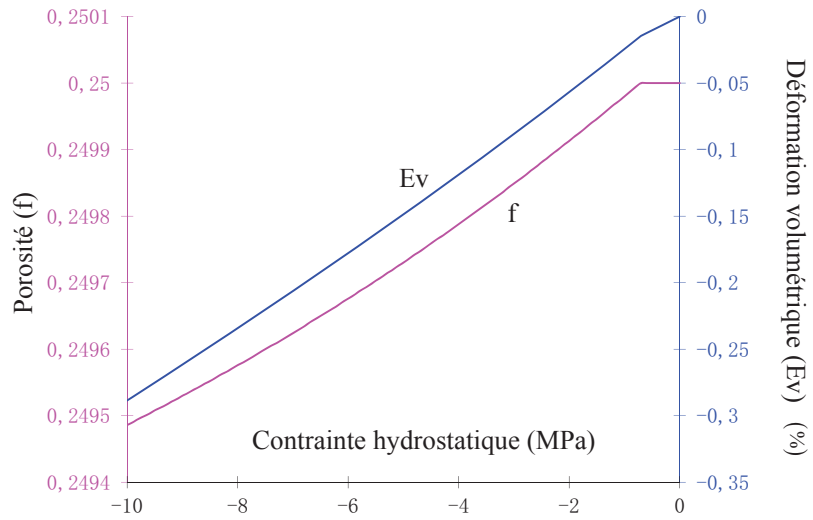


FIGURE B.6 – Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 14\%$ , simulation d'essai de compression hydrostatique avec une pression de confinement de 10MPa .



### B.3 Simulation des réponses en chargement - déchargement par le modèle non associé.

On note une bonne capacité prédictive sur l'ensemble des trajets de sollicitations illustrés.

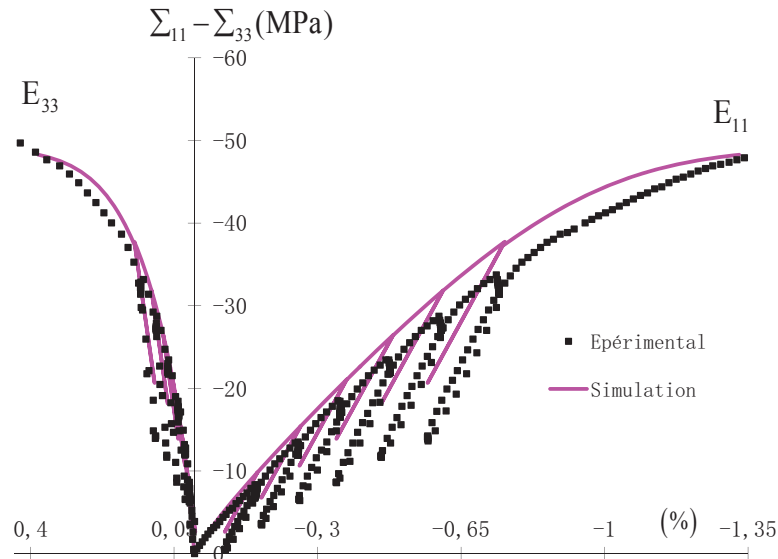


FIGURE B.7 – Prof : 451.4m,  $f_0 = 47\%$ ,  $f_1 = 31\%$  and  $f_2 = 22\%$ , Essai de charge-décharge pour un essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 10MPa.

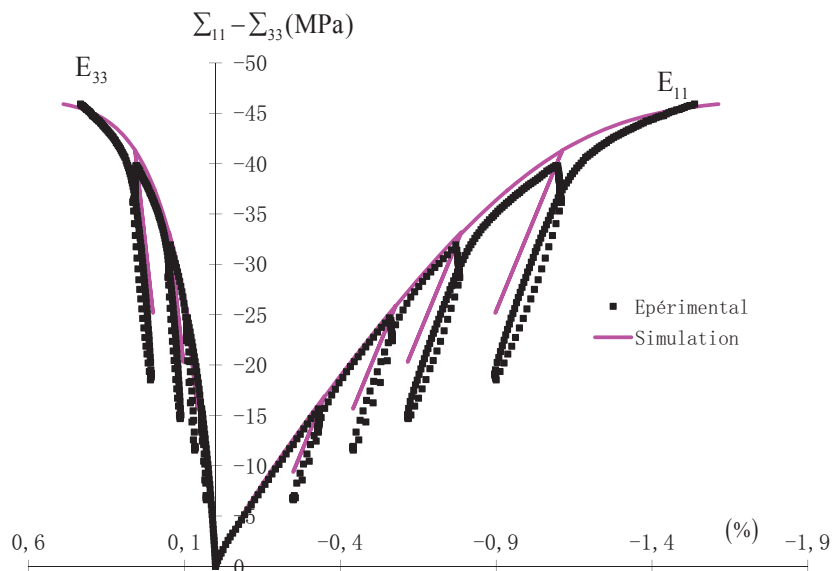


FIGURE B.8 – Prof : 469.1m,  $f_0 = 55\%$ ,  $f_1 = 23\%$  and  $f_2 = 22\%$ , Essai de charge-décharge pour un essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 10MPa.

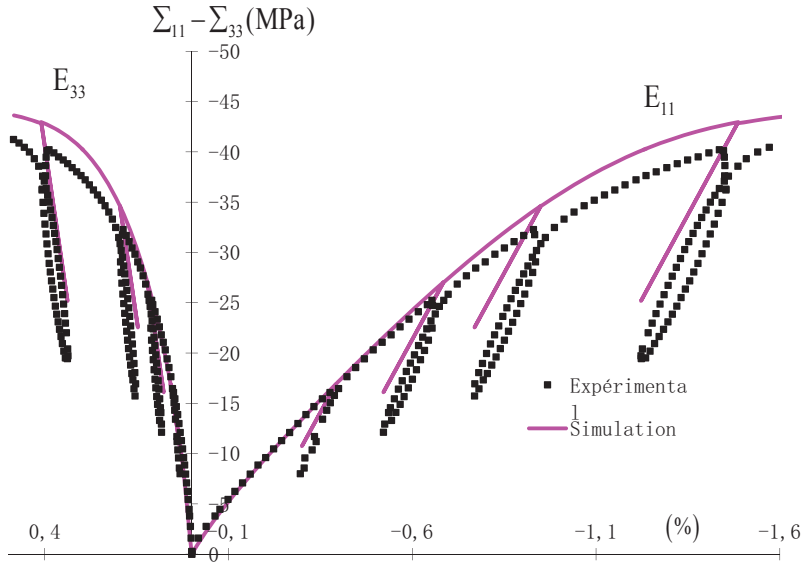


FIGURE B.9 – Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 26\%$  and  $f_2 = 14\%$ , Essai de charge-décharge pour un essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 10MPa.

## B.4 Algorithme d'intégration locale de la matrice argileuse élastoplastique

Nous présentons dans cette annexe un schéma d'intégration locale de la loi de comportement élastoplastique décrite dans le Chapitre 4 pour la matrice argileuse. On a le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \text{ avec } \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ F(\tilde{\Sigma}, f) = 0 \\ \text{ou } \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \text{ sont connus} \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Connaissant la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , la déformation plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et l'écouissage isotrope  $\varepsilon_n^p$  au pas  $n$  et l'incrément de déformation  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , il s'agit de déterminer les valeurs  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$  et  $\varepsilon_{n+1}^p$  ainsi que le tenseur de contrainte  $\tilde{\Sigma}_{n+1}$  en considérant  $\Delta\lambda$  comme inconnue. Ce

schéma est explicite et suit un algorithme de type “cutting point algorithm” [50].

#### B.4.1 Prédiction élastique :

On suppose d'abord que l'incrément est élastique, i.e. tel que  $\Delta\lambda = 0$ . On en déduit que  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p$  et on trouve  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$ .

Si ce prédicteur élastique vérifie  $F(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}, f) \leq 0$  alors l'hypothèse est valable et la procédure locale est achevée. Sinon cet état être corrigé.

#### B.4.2 Phase de correction plastique :

La correction plastique s'effectue de façon itérative. Pour une itération  $i$ , on connaît  $\Delta\lambda^i$  et on cherche  $\Delta\lambda^{i+1}$ . On définit alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}^{i+1} &= \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,i}) - \Delta\lambda^{i+1}\mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,i+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda^{i+1}\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}}{(1-f)(\bar{T}h + (\bar{t} - \bar{T})\frac{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}{1-f})}\end{aligned}\tag{B.2}$$

$$F(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}^{i+1}, f) = F_{n+1}^{i+1}$$

On peut résoudre ce problème à l'aide d'une méthode de Newton. On a :

$$\frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \delta \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} + \frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial f} \delta f + \frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial \bar{T}} \delta \bar{T} + F_{n+1}^i = 0\tag{B.3}$$

$$\delta(\Delta\lambda) \left[ -\frac{\partial F}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} + \frac{\partial F}{\partial f} (1-f) \left( \frac{\partial G}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_m} - \bar{t}\boldsymbol{\gamma} \right) + \frac{\partial F}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon^p} \boldsymbol{\gamma} \right] + F_{n+1}^i = 0\tag{B.4}$$

où :

$$\delta(\Delta\lambda) = \frac{F_{n+1}^i}{\frac{\partial F}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} - \frac{\partial F}{\partial f} (1-f) \left( \frac{\partial G}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_m} - \bar{t}\boldsymbol{\gamma} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon^p} \boldsymbol{\gamma}}\tag{B.5}$$

On obtient alors :

$$\Delta\lambda^{i+1} = \Delta\lambda^i + \delta(\Delta\lambda)\tag{B.6}$$

On peut désormais expliciter l'algorithme correspondant :

Récapitulatif

1. Données d'entrée :  $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ ,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\varepsilon_n^p$
2. Calcul de la déformation qu pas  $n + 1$  :  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
3. Initialisation :  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}^0 := \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$

$$\varepsilon_{n+1}^{p0} := \varepsilon_n^p, \quad \Delta\lambda^0 := 0, \quad i := 0$$

4.  $F_{n+1}^i := F(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}^i, f)$  Test si  $F_{n+1}^i < \text{tolrance}$ , aller en 7, sinon aller en 5.
- 5.

$$\delta(\Delta\lambda) = \frac{F_{n+1}^i}{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} : \mathbb{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\Sigma}} - \frac{\partial F}{\partial f}(1-f) \left( \frac{\partial G}{\partial \Sigma_m} - \bar{t}\gamma \right) - \frac{\partial F}{\partial T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varepsilon^p} \gamma}$$

6. Itération  $i := i + 1$  :

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}^{i+1} := \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}^i - \delta(\Delta\lambda) \mathbb{C} \frac{\partial F_{n+1}^i}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{n+1}^i, f)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{p^{i+1}} := \varepsilon_{n+1}^{p^i} + \delta(\Delta\lambda) \gamma$$

$$\Delta\lambda^{i+1} := \Delta\lambda^i + \delta(\Delta\lambda)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^{i+1}} := \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p^i} + \delta(\Delta\lambda) \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}$$

Aller en 4

7. Sortie
8. Calcul de l'opérateur tangent

Fin Algorithme

## Chapitre 5

# Modèle simplifié du comportement non-linéaire de l'argilite

## 5.1 Introduction

Au chapitre 4, un modèle micro-macro a été proposé pour décrire le comportement non-linéaire de l'argilite du Callovo-Oxfordien. Deux étapes d'homogénéisation non linéaire ont été mises en oeuvre. Le matériau est considéré comme un composite à trois phases à l'échelle mésoscopique : la matrice poreuse et des inclusions. L'influence de la porosité a été explicitement prise en compte dans la première étape homogénéisation en combinaison avec une plasticité, associée ou non associée, de la phase argileuse. A la deuxième étape d'homogénéisation, on a utilisé l'approche incrémentale de Hill pour prendre en compte les effets des inclusions. Cette approche incrémentale a requis dans sa mise en oeuvre une isotropisation dont la justification ne peut être trouvée que dans la simplicité que cela apporte, sachant que la question de fond est celle de l'hétérogénéité intraphase du champ de déformation. Cependant, tirant profit de certaines particularités de l'argilite, mais également par souci de simplicité du modèle micro-macro de l'argilite, on souhaite proposer dans une démarche micromécanique un critère macroscopique analytique pour le matériau constitué de la matrice poreuse renforcée par des inclusions. Soulignons d'emblée que la simplification souhaitée sera rendue possible grâce à une hypothèse d'inclusions rigides. Le critère macroscopique ainsi construit sera complété par la formulation d'un potentiel de dissipation macroscopique, ce qui permettra d'établir la loi de comportement à l'échelle macroscopique. Il convient de préciser que l'étude menée dans ce chapitre s'appuiera principalement sur les travaux récents de Maghous et al. [33] sur l'homogénéisation des géomatériaux ductiles hétérogènes en contexte de plasticité non associée.

## 5.2 Formulation du critère macroscopique pour le milieu poreux renforcé par des inclusions rigides

L'argilite du COx est composée de la phase solide, des pores et des inclusions rigides, avec des tailles des pores systématiquement plus petites que celles des inclusions. Comme déjà indiqué, les pores étant intra matricielles, l'argilite peut être traitée comme un composite triphasé constitué de la matrice (poreuse) et des deux phases inclusionnaires. Une simplification importante adoptée dans ce chapitre de la thèse a consisté à remplacer les deux familles d'inclusions (quartz, calcite) par une unique famille "équivalente". De plus, compte tenu des rigidités réelles du quartz et de la calcite, relativement à celle de la matrice poreuse, on fait l'hypothèse d'une unique famille d'inclusions, supposées rigides. Le volume élémentaire représentatif (VER) simplifié du matériau étudié, de volume  $\Omega$  et montré sur la figure 5.1, est ainsi constitué de la matrice poreuse et des inclusions. La

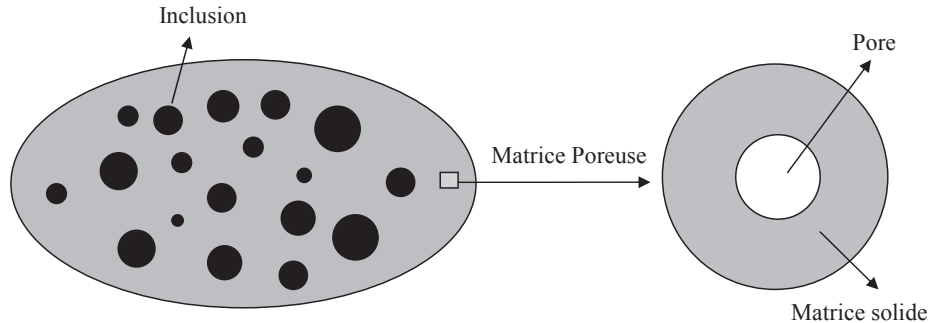


FIGURE 5.1 – Volume élémentaire représentatif du matériau étudié

porosité  $f$  dans la matrice ainsi que la fraction volumique  $\rho$  des inclusions (rigides) sont respectivement données par :

$$f = \frac{\Omega_p}{\Omega_p + \Omega_s}, \quad \rho = \frac{\Omega_i}{\Omega} \quad (5.1)$$

où  $\Omega_p$  est le volume des pores et  $\Omega_s$  celui de la phase solide.

Deux étapes d'homogénéisation vont être utilisées pour déterminer le critère macro-

scopique puis la règle d'écoulement. Pour la première étape d'homogénéisation concernant la matrice poreuse, on considère, comme auparavant, une phase solide obéissant au critère Drucker-Prager [14]<sup>5</sup> :

$$\phi^m(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \tilde{\sigma}_d + T(\tilde{\sigma}_m - h) \leq 0 \quad (5.2)$$

où  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  est la contrainte locale dans la phase solide dans la matrice,  $\tilde{\sigma}_m = \text{tr}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}/3$  représente la contrainte hydrostatique,  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\sigma}_m\mathbf{1}$  est la partie déviatorique de  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ . On introduit la contrainte équivalente  $\tilde{\sigma}_d = \sqrt{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}'}}$  dans la phase solide. Comme au chapitre 4, le paramètre  $h$  représente la résistance en traction hydrostatique de la phase solide ;  $T$  tient lieu de coefficient de frottement. Noter que le tilde “ $\sim$ ” est mis sur les contraintes dans la phase solide à l'échelle microscopique pour distinguer celles-ci des contraintes dans l'argilite à l'échelle mésoscopique et qui seront notées  $\boldsymbol{\sigma}$ .

On s'appuie ici sur la technique d'homogénéisation non-linéaire de type “approche par modules sécants modifiée”, récemment développée par Maghous et al.[33]. Ces auteurs ont ainsi aboutit au critère de plasticité pour le milieu poreux (cf.également [4]) :

$$F^{mp}(\boldsymbol{\sigma}, f, T) = \frac{1 + 2f/3}{T^2} \sigma_d^2 + \left( \frac{3f}{2T^2} - 1 \right) \sigma_m^2 + 2(1 - f)h\sigma_m - (1 - f)^2 h^2 = 0 \quad (5.3)$$

pour lequel on rappelle que :  $\sigma_d = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}$ , et  $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m\mathbf{1}$ .

Nous adoptons ce critère pour décrire les comportements de la matrice poreuse et en tirons profit pour quantifier l'effet des inclusions rigides sur le critère macroscopique simplifié de plasticité de l'argilite.

A cette fin, on considère un cadre de plasticité associée. En se basant sur le critère (5.3), le taux de déformation dans le milieu poreux peut être écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{d} = \frac{T^2}{1 + 2f/3} \frac{d_d}{2\sigma_d} \left[ \frac{1 + 2f/3}{T^2} 2\boldsymbol{\sigma}' + \left( \frac{3f}{2T^2} - 1 \right) \frac{2\sigma_m}{3} \mathbf{1} + \frac{2(1 - f)h}{3} \mathbf{1} \right] \quad (5.4)$$

---

5. On rappelle que cette écriture est adoptée, conformément à [33]



où  $d_d = \sqrt{\mathbf{d}' : \mathbf{d}'}$ ,  $\mathbf{d}' = \mathbf{d} - d_m \mathbf{1}$  est la partie déviatorique de  $\mathbf{d}$ .

On peut vérifier que le domaine défini par  $F^{mp}(\boldsymbol{\sigma}, f, T)$  est convexe et borné dans toutes les directions  $\mathbb{R}^6$ . S'appuyant sur [48], sa fonction d'appui,  $\pi^{mp}(\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$  peut être exprimée sous la forme :

$$\pi^{mp} = \frac{T^2}{1 + 2f/3} \frac{d_d}{2\sigma_d} \left[ \frac{1 + 2f/3}{T^2} 2\sigma_d^2 + \left( \frac{3f}{2T^2} - 1 \right) 2\sigma_m^2 + 2(1 - f)h\sigma_m \right] \quad (5.5)$$

En tenant compte de (5.3) et (5.4), la fonction d'appui (5.5) peut être réécrite comme :

$$\pi^{mp} = (1 - f)h \sqrt{\frac{3f}{3f - 2T^2} \frac{T^2}{1 + 2f/3}} \sqrt{d_d^2 + \frac{1 + 2f/3}{3f/2 - T^2} d_v^2} - (1 - f)h \frac{2T^2}{3f - 2T^2} d_v \quad (5.6)$$

où  $d_v = \text{tr} \mathbf{d}$  est la déformation volumique dans le milieu poreux.  $\pi^{mp}$  dépend ainsi de la déformation volumique  $d_v$ , de la déformation déviatorique  $d_d$ , la porosité  $f$  et de  $T$ .

Suivant en cela la démarche proposée par [33] (voir également [11] ou [7]), la loi de comportement locale peut s'écrire à l'aide des modules sécants et d'une précontrainte sphérique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial \pi^{mp}}{\partial \mathbf{d}} = 2\mu^{mp} \mathbf{d}' + \kappa^{mp} d_v \mathbf{1} + \sigma^p \mathbf{1} \\ \kappa^{mp} &= \frac{1 + 2f/3}{3f/2 - T^2} \frac{N}{M}, \quad 2\mu^{mp} = \frac{N}{M}, \quad \sigma^p = -(1 - f)h \frac{2T^2}{3f - 2T^2} \\ M &= \sqrt{d_d^2 + \frac{1 + 2f/3}{3f/2 - T^2} d_v^2}, \quad N = (1 - f)h \sqrt{\frac{3f}{3f - 2T^2} \frac{T^2}{1 + 2f/3}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Les contraintes définies dans (5.7) doivent saturer le critère, c'est à dire satisfaire la condition (5.3).

Une difficulté intrinsèque à la méthode réside dans la non-uniformité ceci en raison de l'hétérogénéité du taux de déformation  $\mathbf{d}$ . Comme dans [33] et [51], nous considérons la déformation effective  $\mathbf{d}^{eff}$  représentant le champ hétérogène des déformations : ce taux de déformation effectif dépend de la vitesse de déformation macroscopique,  $\mathbf{D}$ . Ces com-

posantes volumique et déviatorique sont données dans la méthode sécante modifiée par :

$$d_v^{eff} = \sqrt{\langle d_v^2 \rangle_{\Omega^{mp}}}; \quad d_d^{eff} = \sqrt{\langle d_d^2 \rangle_{\Omega^{mp}}} \quad (5.8)$$

L'équation d'état s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C}^{mp}(d_v^{eff}, d_d^{eff}) : \mathbf{d} + \sigma_{eq}^p \mathbf{1}; \\ \mathbb{C}^{mp}(d_v^{eff}, d_d^{eff}) &= 3\kappa_{eq}^{mp} \mathbb{J} + 2\mu_{eq}^{mp} \mathbb{K}; \quad \sigma_{eq}^p = \sigma^p \end{aligned} \quad (5.9)$$

Le comportement homogénéisé du composite constitué de la matrice poreuse et des inclusions rigides prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{D} + \Sigma^p \mathbf{1}; \\ \mathbb{C}^{hom}(d_v^{eff}, d_d^{eff}) &= 3\kappa^{hom}(\kappa_{eq}^{mp}, \mu_{eq}^{mp}) \mathbb{J} + 2\mu^{hom}(\kappa_{eq}^{mp}, \mu_{eq}^{mp}) \mathbb{K} \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $\Sigma^p$  est la précontrainte sphérique macroscopique.

L'hypothèse d'inclusions rigides et la considération de comportements homogènes des phases permettent de montrer que la précontrainte macroscopique  $\Sigma^p$  est égale à  $\sigma_{eq}^p$  (lui même égale à  $\sigma^p$ ). Le potentiel macroscopique du composite linéaire, d'équation d'état (5.10), s'écrit alors sous la forme suivante :

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{D} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{D} + \sigma_{eq}^p \text{tr} \mathbf{D} \quad (5.11)$$

où l'on rappelle que  $\sigma_{eq}^p = \sigma^p = -(1-f)h \frac{2T^2}{3f-2T^2}$ .

Les équations d'état correspondantes sont :

$$\Sigma_m = \kappa^{hom} D_v + \sigma_{eq}^p; \quad \Sigma_d = 2\mu^{hom} D_d \quad (5.12)$$

En accord avec [4], le taux de déformation effectif dans la matrice poreuse équivalente

est :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1-\rho)d_v^{eff2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\kappa^{hom}}{\partial\kappa_{eq}^{mp}}D_v^2 + \frac{\partial\mu^{hom}}{\partial\kappa_{eq}^{mp}}D_d^2 \\ (1-\rho)d_d^{eff2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial\kappa^{hom}}{\partial\mu_{eq}^{mp}}D_v^2 + \frac{\partial\mu^{hom}}{\partial\mu_{eq}^{mp}}D_d^2\end{aligned}\quad (5.13)$$

où  $\rho$  est la fraction volumique de l'inclusion. En raison de la morphologie matrice-inclusions, on retient pour les modules homogénéisés la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman :

$$\begin{aligned}\kappa^{hom} &= \frac{3\kappa_{eq}^{mp} + 4\rho\mu_{eq}^{mp}}{3(1-\rho)} \\ \mu^{hom} &= \mu_{eq}^{mp}\frac{\kappa_{eq}^{mp}(6+9\rho) + \mu_{eq}^{mp}(12+8\rho)}{6(1-\rho)(\kappa_{eq}^{mp} + 2\mu_{eq}^{mp})}\end{aligned}\quad (5.14)$$

A l'aide de (5.7), l'expression de  $\mu^{hom}$  se simplifie :

$$\mu^{hom} = \mu_{eq}^{mp}\frac{A}{1-\rho}, \quad A = \frac{4T^2 - 12f - 9}{6T^2 - 13f - 6}\rho + 1 \quad (5.15)$$

En reportant l'expression (5.14) dans (5.13), il vient :

$$\begin{aligned}d_v^{eff2} &= \frac{1}{(1-\rho)^2}D_v^2 + \frac{10\rho}{3(1-\rho)^2\left(\frac{\kappa_{eq}^{mp}}{\mu_{eq}^{mp}} + 2\right)^2}D_d^2 \\ d_d^{eff2} &= \frac{2\rho}{3(1-\rho)^2}D_v^2 + \frac{(6+9\rho)\left(\frac{\kappa_{eq}^{mp}}{\mu_{eq}^{mp}}\right)^2 + (16\rho+24)\left(\frac{\kappa_{eq}^{mp}}{\mu_{eq}^{mp}} + 1\right)}{6(1-\rho)^2\left(\frac{\kappa_{eq}^{mp}}{\mu_{eq}^{mp}} + 2\right)^2}D_d^2\end{aligned}\quad (5.16)$$

D'où par combinaison de (5.7), (5.12), (5.14), (5.15) et (5.16), on aboutit au critère macroscopique suivant pour l'argilite :

$$\Phi(\Sigma, f, T) = \Theta\Sigma_d^2 + \left(\frac{3f}{2T^2} - 1\right)\Sigma_m^2 + 2(1-f)h\Sigma_m - \frac{3+2f+3f\rho}{3+2f}(1-f)^2h^2 = 0 \quad (5.17)$$

$$\text{avec } \Theta = \frac{\frac{1+2f/3}{T^2} + \frac{2}{3}\rho\left(\frac{3f}{2T^2} - 1\right)}{\frac{4T^2-12f-9}{6T^2-13f-6}\rho + 1}.$$

## 5.3 Application à l'argilite du Callovo-Oxfordien

### 5.3.1 Propriétés effectives de l'argilite du Callovo-Oxfordien

Les propriétés élastiques de l'argilite du Callovo-Oxfordien ont déjà été présentées au chapitre 4. Les paramètres élastiques associés aux constituants calcite (phase 1) et quartz (phase 2) sont :  $E_1 = 95GPa$ ,  $\nu_1 = 0.27$  et  $E_2 = 101GPa$ ,  $\nu_2 = 0.06$ ; les modules élastiques de la matrice argileuse obtenus sont les suivantes :  $E_0 = 3000MPa$  et  $\nu_0 = 0.3$ . Les inclusions (calcite et quartz) peuvent être considérées rigides comparativement à la matrice argileuse. Ceci justifie la considération en lieu et place de ces deux familles de minéraux d'une inclusion "effective" qui sera supposée rigide. La fraction volumique de la calcite étant presque du même ordre que celle de quartz, les valeurs retenues pour les paramètres élastiques de l'inclusion "effective" sont :  $E_{ei} = 98GPa$  et  $\nu_{ei} = 0.15$ . A l'aide des modules élastiques de l'inclusion "effective" et ceux de la matrice argileuse poreuse, il est possible de déterminer les modules homogénéisés de l'argilite du COx, toujours en utilisant le schéma de Mori-Tanaka. Les comparaisons avec des résultats expérimentaux disponibles pour trois profondeurs particulières (466.8m, 468.9m et 482.2m) ayant des compositions minéralogiques très différentes sont fournies dans le Tableau 5.1. On note une assez bonne concordance avec ces données.

Prof. (m)	466.8	468.9	482.2
fraction volumique	$f_0 = 51\%$	$f_0 = 34\%$	$f_0 = 60\%$
	$f_1 = 23\%$	$f_1 = 13\%$	$f_1 = 14\%$
	$f_2 = 26\%$	$f_2 = 53\%$	$f_2 = 26\%$
$E^{exp}$ (MPa)	8100	12200	8167
$\nu^{exp}$	0.3	0.3	0.3
Approximation	$f_0 = 51\%$	$f_0 = 34\%$	$f_0 = 60\%$
	$f_{ei} = 49\%$	$f_{ei} = 66\%$	$f_{ei} = 40\%$
$E^{hom}$ (MPa)	8192	12925	6666
$\nu^{hom}$	0.26	0.25	0.27

TABLE 5.1 – Comparaison entre les modules homogénéisés et les données expérimentales pour trois profondeurs ayant des compositions minéralogiques différentes.

### 5.3.2 Formulation et mise en oeuvre du modèle simplifié dans le cadre d'une règle d'écoulement associée

Dans cette section, on se propose d'utiliser le critère macroscopique isotrope (5.17) pour décrire le comportement macroscopique de l'argilite du COx; on notera que par construction, les effets de la porosité intra matricielle et l'impact des inclusions sont pris en compte. Comme dans le chapitre 4, note  $T_0$  le seuil de plasticité initial et  $T_m$  la valeur correspondant au comportement asymptotique du matériau. La forme exponentielle est à nouveau choisie pour décrire l'évolution continue de l'écrouissage plastique :

$$\bar{T} = T_m - (T_m - T_0)e^{-b_2\varepsilon^p} \quad (5.18)$$

d'où la réécriture immédiate du critère macroscopique (5.17) :

$$\Phi(\boldsymbol{\Sigma}, f, \bar{T}) = \Theta \Sigma_d^2 + \left( \frac{3f}{2\bar{T}^2} - 1 \right) \Sigma_m^2 + 2(1-f)h\Sigma_m - \frac{3+2f+3f\rho}{3+2f}(1-f)^2h^2 = 0 \quad (5.19)$$

$$\text{avec } \Theta = \frac{\frac{1+2f/3}{\bar{T}^2} + \frac{2}{3}\rho \left( \frac{3f}{2\bar{T}^2} - 1 \right)}{\frac{4\bar{T}^2 - 12f - 9}{6\bar{T}^2 - 13f - 6}\rho + 1}.$$

A ce stade de la modélisation simplifiée, toujours pour des raisons de simplicité, une règle d'écoulement associé est considérée pour l'argilite. La vitesse de déformation est alors donnée par :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}, f, \bar{T}) \quad (5.20)$$

avec  $\mathbf{D}^p$  le taux de déformation plastique macroscopique,  $\dot{\lambda}$ , le multiplicateur plastique. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{si } \Phi < 0 \text{ ou si } \Phi = 0 \text{ et } \dot{\Phi} < 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{si } \Phi = 0 \text{ et } \dot{\Phi} = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Conformément à (5.2), la loi d'évolution de la contrainte d'écoulement dans la matrice poreuse s'écrit :

$$\Sigma : \mathbf{D}^p = \Omega^{-1} \int_{\Omega_m} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\mathbf{d}} \, d\Omega = \Omega^{-1} \int_{\Omega_m} \dot{\varepsilon}^p \bar{T} h \, d\Omega \quad (5.22)$$

Quant à la déformation plastique équivalente dans la phase solide, on a :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\Sigma : \mathbf{D}^p}{(1-f)(1-\rho)\bar{T}h} \quad (5.23)$$

La loi d'évolution de la porosité et celle de la fraction volumique d'inclusions se présentent sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{1-f}{1-\rho} \text{tr} \mathbf{D}^p - \frac{1}{\Omega_s + \Omega_p} \int_{\Omega_s} \text{tr} \tilde{\mathbf{d}}^p \, d\Omega = \frac{1-f}{1-\rho} \text{tr} \mathbf{D}^p - (1-f) \bar{T} \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{\rho} &= -\rho \text{tr} \mathbf{D}^p \end{aligned} \quad (5.24)$$

### 5.3.3 Identification des paramètres du modèle associé-Résultats et discussions

Il est tout d'abord nécessaire de déterminer les paramètres du modèle : on a au total 4 paramètres pour le comportement plastique de la matrice argileuse. Par recalage sur le comportement de l'essai de compression uniaxiale à la profondeur 466.8m, les valeurs suivantes sont retenues et rassemblées dans le tableau 5.2.

	Phase (0) Argile	Phase (1) inclusion
Paramètres élastiques	$E_s = 5GPa$ $v_s = 0.33$	$E_{ei} = 98GPa$ $v_{ei} = 0.15$
Paramètres plastiques	$T_0 = 0$ $T_m = 0.68$ $b_1 = 140$ $h = 30$	
Porosité	$f = 0.25$	

TABLE 5.2 – Paramètres du modèle avec une règle d'écoulement associée.

La simulation de tous les tests (essai de compression uniaxiale et triaxiale à 5 et 10MPa de pression de confinement) sur la base des paramètres identifiés indique que les déformations axiales sont bien prédites par le modèle associé (cf. figures 5.2, 5.3 et 5.4). En particulier, le modèle rend compte des influences des modifications de la fraction volumique d'inclusion et de la pression de confinement. Cependant, même si la qualité des prédictions est un peu meilleure que celle présentée au chapitre 4 en contexte associé, le modèle surestime notablement la dilatance, en raison probablement de la loi d'écoulement associée de la phase argileuse. D'où l'idée d'utiliser une loi d'écoulement non-associée pour l'améliorer.

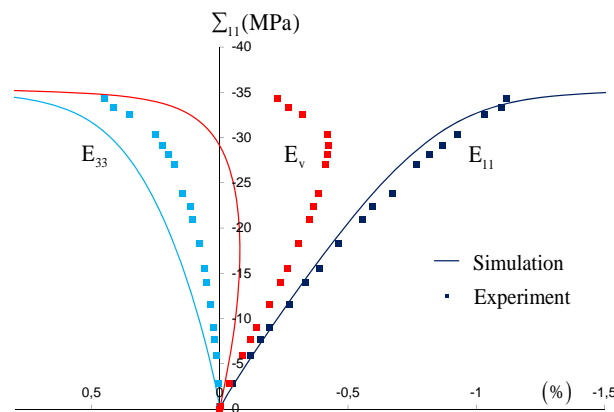


FIGURE 5.2 – Prof : 466.8m,  $f_0 = 51\%$ ,  $f_1 = 49\%$ , essai de compression uniaxiale

## 5.4 Extension heuristique du modèle par introduction d'une règle d'écoulement non-associée

Comme annoncé, une règle d'écoulement non-associée est considérée ici dans le but d'améliorer la version du modèle associé proposé dans la section précédente. Le critère macroscopique (5.19) et la fonction d'écrouissage plastique (5.18) dans la matrice solide continueront à être considérés. Inspiré par [33] dans leurs travaux sur la règle d'écoulement de milieux poreux, on adopte le potentiel plastique suivante pour le matériau poreux

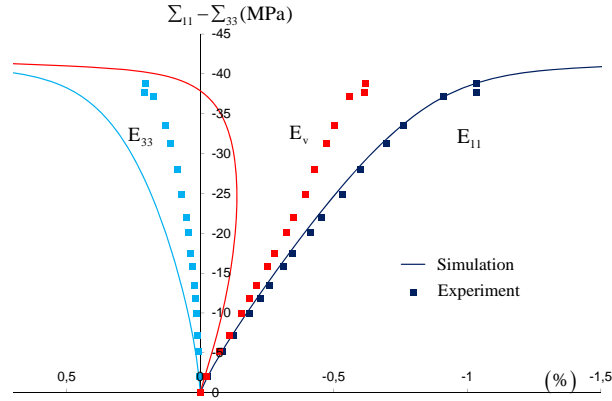


FIGURE 5.3 – Prof : 451.5m,  $f_0 = 49\%$ ,  $f_1 = 51\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 5MPa.

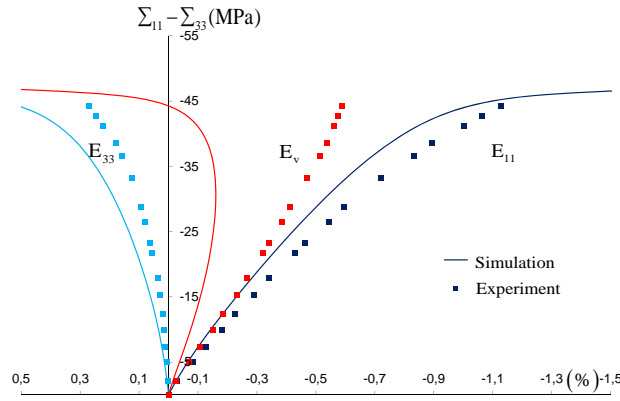


FIGURE 5.4 – Prof : 451.4m,  $f_0 = 47\%$ ,  $f_1 = 53\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 10MPa.

renforcé :

$$G(\Sigma, f, \bar{T}, \bar{t}) = \Theta \Sigma_d^2 + \left( \frac{3f}{2\bar{T}\bar{t}} - 1 \right) \Sigma_m^2 + 2(1-f)h\Sigma_m - \frac{3 + 2f + 3f\rho}{3 + 2f} (1-f)^2 h^2 = 0 \quad (5.25)$$

avec  $\Theta = \frac{1+2f/3}{\bar{T}\bar{t}} + \frac{2}{3}\rho \left( \frac{3f}{2\bar{T}\bar{t}} - 1 \right)$ , potentiel dans lequel est introduit le paramètre  $t$  de dilataance plastique.  $\bar{t}$  contrôle le taux de déformation plastique volumique et la transition de la contractance plastique à la dilataance plastique. La forme retenue pour l'évolution de



ce paramètre est :

$$\bar{t} = t_m - (t_m - t_0)e^{-b_2\varepsilon^p} \quad (5.26)$$

L'écoulement plastique qui s'en déduit, s'écrit :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\Sigma}, f, \bar{T}, \bar{t}) \quad (5.27)$$

Comme (5.22), la déformation plastique équivalente dans la matrice solide est alors :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}^p}{(1-f)(1-\rho) \left[ \bar{T}h + (\bar{t} - \bar{T}) \frac{\Sigma_m}{1-f} \right]} \quad (5.28)$$

L'évolution de la porosité et celle de l'inclusion sont maintenant déterminées par :

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{1-f}{1-\rho} \text{tr} \mathbf{D}^p - (1-f) \bar{t} \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{\rho} &= -\rho \text{tr} \mathbf{D}^p \end{aligned} \quad (5.29)$$

### 5.4.1 Identification des paramètres du modèle non-associé

Comme dans le cas d'écoulement plastique associé, les paramètres sont déterminés par recalage sur la réponse expérimentale d'un essai de compression uniaxiale à la profondeur 466.8m ; les valeurs suivantes sont retenues dans le tableau 5.3.

### 5.4.2 Validations expérimentales

Les paramètres étant identifiés, on se propose d'évaluer les capacités prédictives de ce modèle non-associé, en maintenant les même paramètres identifiés pour les simulations de tous les tests considérés (essai compression uniaxiale et triaxiale à 5 et 10MPa de pression de confinement). Il importe de souligner que c'est notamment la simulation de ces essais à différentes profondeurs (451.4 – 466.8m, 468.9 – 469.1m and 482.2m), c'est à dire pour différentes compositions minéralogiques, qui constitue l'indication principale

	Phase (0) Argile	Phase (1) inclusion
Paramètres élastiques	$E_s = 5GPa$ $\nu_s = 0.33$	$E_{ei} = 98GPa$ $\nu_{ei} = 0.15$
Paramètres plastiques	$T_0 = 0$ $T_m = 0.68$ $b_1 = 200$ $t_0 = -1.1$ $t_m = 0.3$ $b_2 = 150$ $h = 30$	
Porosité	$f = 0.25$	

TABLE 5.3 – Paramètres du modèle avec une règle d'écoulement non-associée

sur la qualité de cette première étape de validation du modèle simplifié.

Dans les Figures 5.5-5.13, nous présentons les comparaisons entre les données expérimentales et les résultats numériques. On note un bon accord, tant pour la déformation axiale que pour la déformation latérale et donc volumétrique. Le modèle non-associé décrit de manière satisfaisante la transition de la contractance plastique volumétrique à la dilatance plastique avec l'augmentation de la contrainte déviatorique. Il améliore significativement les prédictions du modèle associé. La figure 5.14 illustre les évolutions de la porosité dans la matrice argileuse pour les essais à la profondeur de 482.2m, et à différentes pressions de confinement (0, 5 et 10MPa).

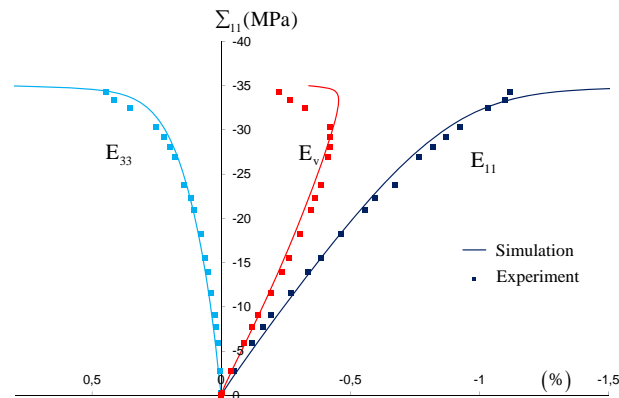


FIGURE 5.5 – Prof : 466.8m,  $f_0 = 51\%$ ,  $f_1 = 49\%$ , essai de compression uniaxiale. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

5.4. Extension heuristique du modèle par introduction d'une règle d'écoulement non-associée

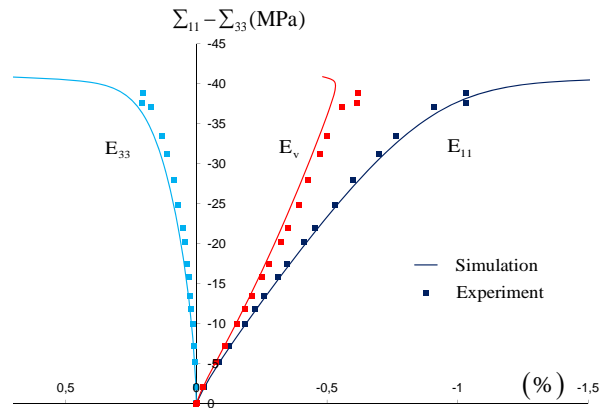


FIGURE 5.6 – Prof : 451.5m,  $f_0 = 49\%$ ,  $f_1 = 51\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 5MPa. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

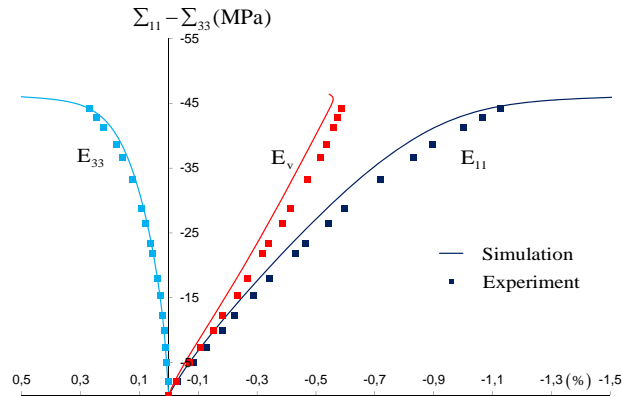


FIGURE 5.7 – Prof : 451.4m,  $f_0 = 47\%$ ,  $f_1 = 53\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 10MPa. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

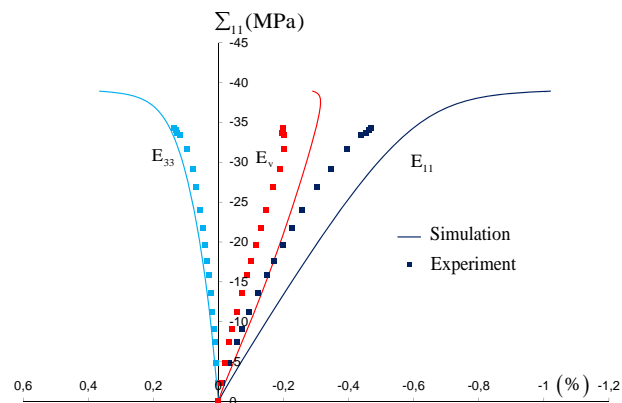


FIGURE 5.8 – Prof : 468.9m,  $f_0 = 34\%$ ,  $f_1 = 66\%$ , essai de compression uniaxiale. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

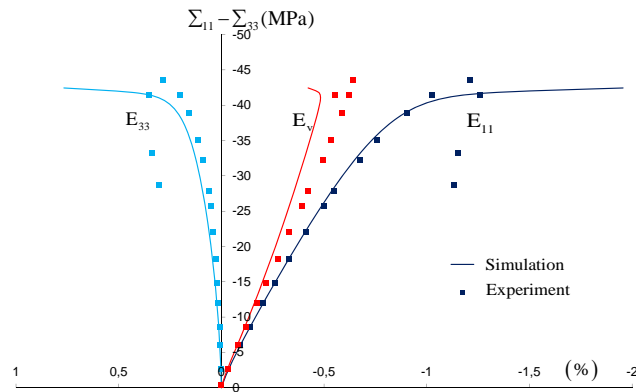


FIGURE 5.9 – Prof : 469.0m,  $f_0 = 44\%$ ,  $f_1 = 56\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 5MPa. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

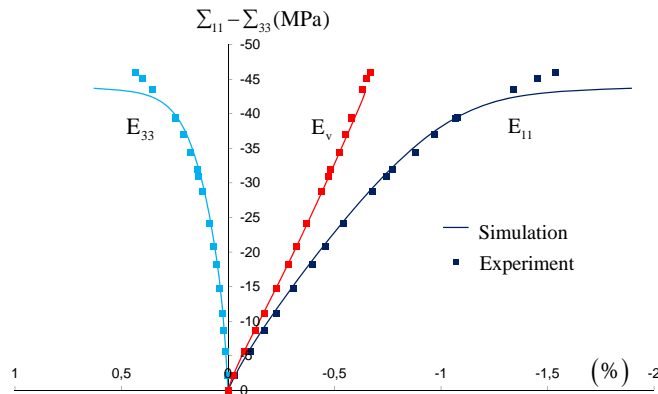


FIGURE 5.10 – Prof : 469.1m,  $f_0 = 55\%$ ,  $f_1 = 45\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 10MPa. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

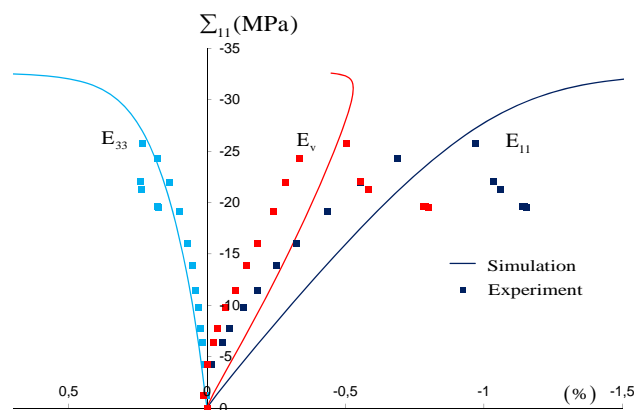


FIGURE 5.11 – Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 40\%$ , essai de compression uniaxiale. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

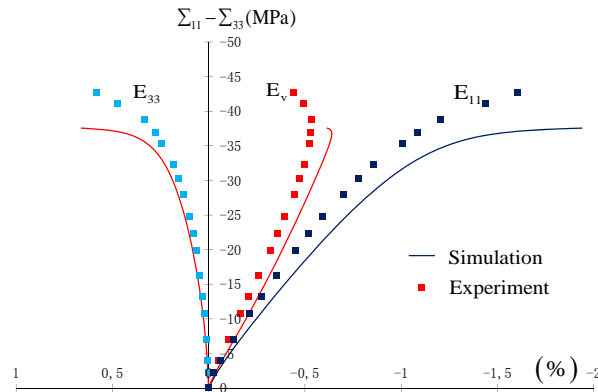


FIGURE 5.12 – Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 40\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 5MPa. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

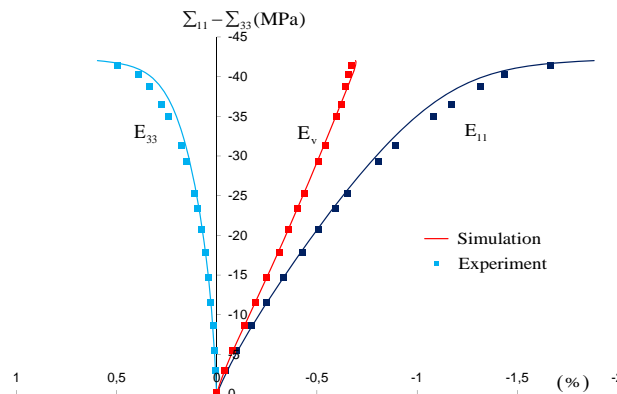


FIGURE 5.13 – Prof : 482.2m,  $f_0 = 60\%$ ,  $f_1 = 40\%$ , essai de compression triaxiale avec une pression de confinement de 10MPa. Comparaison des prédictions du modèle simplifié non associé et des données expérimentales.

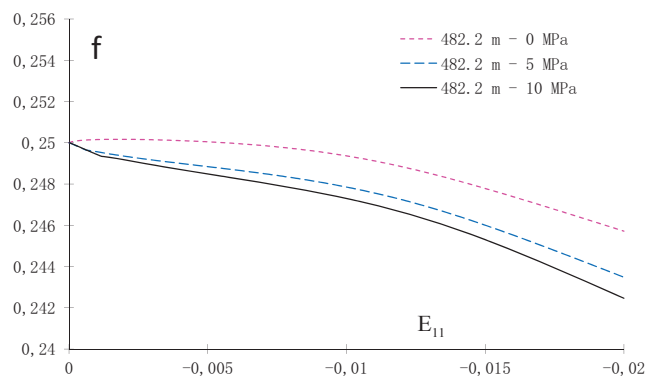


FIGURE 5.14 – Prof : 482.2m. Prédiction par le modèle simplifié non associé, des évolutions de porosité  $f$  dans la matrice argileuse en fonction de la déformation axiale

## 5.5 Conclusion

En utilisant deux étapes d'homogénéisation entièrement analytique, nous avons pu proposer un critère macroscopique isotrope pour des matériaux constitués d'une matrice poreuse, avec une phase solide de type Drucker-Prager, et d'inclusions rigides qui renforcent le milieu. La démarche suivie s'est essentiellement appuyée sur les travaux du groupe de L. Dormieux à l'ENPC [33][11]; ces travaux tirent partie des méthodes d'homogénéisation non linéaire de type modules sécants modifiés en les étendant au cadre de la plasticité non associée. La première étape d'homogénéisation dédiée à l'effet de la porosité dans la matrice poreuse reprend directement des résultats de Maghous et al.[33]. Tandis que notre contribution dans la deuxième étape d'homogénéisation porte sur l'influence des inclusions supposées rigides, sur le critère macroscopique de plasticité de l'argilite. L'application directe de ces résultats, bien entendu, dans un cadre de plasticité associée indique une incapacité à reproduire la transition contractance plastique volumétrique-dilatance. Ceci a motivé l'introduction de façon heuristique d'une règle d'écoulement macroscopique dont la forme est néanmoins inspirée de celle du critère de plasticité macroscopique. L'utilisation du critère macroscopique combinée à la règle d'écoulement non-associée pour décrire les réponses macroscopiques de l'argilite du Callovo-Oxfordien à différentes profondeurs (fractions volumiques des constituants sont différentes) et à différentes pressions de confinement. En effet, les résultats numériques étant en bon accord avec les données expérimentales, il semble que le modèle non-associé a de véritables capacités potentielles à rendre compte du comportement complexe de l'argilite du COx. Enfin, il convient de souligner à nouveau que l'avantage de ce nouveau modèle (non-associé) réside véritablement dans sa simplicité de mise en oeuvre et d'application. A moyen terme, cette simplicité mériterait d'être mise à profit pour une implémentation dans un code de calcul de structures.

# Conclusion générale et perspectives

Ce travail de thèse a porté sur des modélisations (théorique et numérique) de la plasticité et des phénomènes d'évolution de porosité qui surviennent dans les matériaux poreux ductiles. Un accent particulier a été mis sur les milieux à double porosité et sur les géomatériaux dont une caractéristique principale est la compressibilité plastique de la matrice. Dans le cas des géomatériaux, la dissymétrie entre réponse en traction et en compression est un aspect essentiel à prendre en compte.

Au premier chapitre, nous avons d'abord présenté une analyse bibliographique succincte qui a permis de résumer très succinctement les principaux mécanismes physiques qui gouvernent la rupture ductile des matériaux poreux. Nous avons ensuite fait état de deux façons différentes d'obtenir par homogénéisation le critère macroscopique de plasticité des matériaux poreux : analyse limite d'une cellule poreuse ; homogénéisation non linéaire d'un VER de milieu poreux. Nous avons également présenté une brève synthèse des critères macroscopiques de plasticité de milieux poreux dont la matrice rigide plastique parfaite obéit au critère de von Mises. Une attention particulière a été portée aux travaux récents menés au LML [38] et dont nous avons tiré profit au deuxième chapitre pour élaborer un critère macroscopique plasticité d'un matériau ductile contenant des cavités sphéroïdales aléatoirement orientées.

Cette classe de matériaux est précisément celle récemment étudiée par [62]. S'appuyant sur les résultats de Monchiet [38] pour une cavité unique et ayant mis à contribution la base de Walpole [65], nous avons pu obtenir une expression analytique dans le cas général

(cavités sphéroïdales aléatoirement orientées) et, plus particulièrement pour des matériaux multifissurés isotropes. Ces résultats ont été comparés à ceux établis par [62]. Il ressort de cette comparaison que le nouveau critère basé sur les travaux de Monchiet et al. [38] s'applique à une plus large gamme de porosité  $f$  dans le cas de cavités aplaties. Concernant le cas de fissures circulaires, le nouveau critère se trouve à l'intérieur de la borne supérieure, tandis que le critère proposé par [62] viole légèrement la même borne pour certaines valeurs intermédiaires du paramètre densité de fissures. On notera à nouveau que l'étude que nous avons menée inclut également le cas des cavités allongées.

Pour une certaine classe de matériaux ayant une matrice plastiquement compressible, une extension du critère de Gurson a été formulée dans le cadre des méthodes issues de l'analyse limite. La matrice solide compressible considérée est rigide parfaitement plastique et obéit à un critère elliptique. Comme dans [64], un champ de vitesse incorporant un terme de compressibilité est choisi, en cohérence avec le champ de Rice et Tracey [47] utilisé par Gurson [27]. A l'aide de ce nouveau champ de vitesse et des approximations requises pour la détermination de la dissipation macroscopique, une expression analytique du critère approché a été obtenue pour la classe de milieux poreux considérée. Pour évaluer la pertinence du champ de vitesse considéré, le cas de chargements hydrostatiques a été analytiquement solutionné. On trouve un bon accord entre la valeur exacte de la contrainte  $\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}$  et la valeur approximative fournie par le critère proposé. Celui-ci est ensuite appliqué à des matériaux ayant deux populations de cavités sphériques, à différentes échelles. L'hypothèse d'une séparation entre les deux échelles où apparaissent les deux populations de cavités a permis de réaliser l'homogénéisation en deux étapes. Pour la première étape nous avons adopté des résultats issus des techniques variationnelles en homogénéisation non linéaire ; le critère est dans ce cas elliptique et contient un terme de compressibilité. Il a été retenu pour décrire la plasticité de la matrice dans la seconde étape d'homogénéisation. Deux critères elliptiques différents ont été considérés : critère elliptique de Ponte Castañeda [45], critère de Michel et Suquet [35]. Le critère macroscopique qui s'en déduit



---

est comparé à celui proposé dans [64] et aussi à des bornes supérieures. On note sa relative bonne performance, sauf pour quelques cas pour lesquels le critère elliptique adopté pour la première étape d'homogénéisation s'avère moins performante.

Le caractère elliptique de la matrice solide considérée dans les développements du chapitre 3 constitue une limitation sévère pour certains géomatériaux. En effet, le critère elliptique n'est pas en mesure de rendre compte des comportements très différentes en compression et en tension. C'est pour cette raison que nous avons cherché au quatrième chapitre, à étudier le cas d'une matrice de Drucker-Prager [14]. Celle-ci a été utilisée pour décrire la phase solide de la matrice argileuse de l'argilite du Cox.

S'agissant donc du comportement de l'argilite, des stratégies de modélisations micro-mécaniques ont été déployées depuis quelques années au sein de divers laboratoires de géomécanique en France. Ces stratégies sont indispensables pour prendre en compte la microstructure complexe de l'argilite et/ou décrire des phénomènes de couplage (p.ex. hydromécanique) qui s'y déroulent. Notre contribution au quatrième chapitre a porté précisément sur l'incorporation de la porosité intra matricielle dans la démarche incrémentale d'homogénéisation de Hill, précédemment mise en oeuvre au laboratoire [1]. Trois échelles ont été ainsi considérées. Le passage micro-méso a permis de disposer du critère macroscopique de la matrice argileuse poreuse. Celui-ci a été ensuite intégré avec les deux familles d'inclusions dans la méthode incrémentale de Hill pour le passage méso-macro. Pour ce dernier, une isotropisation de l'opérateur tangent de la matrice argileuse a été nécessaire. S'agissant du passage micro-méso, nous avons eu recours à des résultats issus des deux classes de méthodes disponibles que sont l'analyse limite et l'approche variationnelle d'homogénéisation non linéaire. Les premières simulations ont été réalisées dans le cadre d'une plasticité de type associé. Bien qu'intéressantes, les prédictions des modèles micromécaniques associés se sont avérées peu probantes. En particulier, elles surestiment la dilatance plastique volumique de l'argilite. C'est ce qui a motivé le développement d'un modèle micro-macro non associé se basant principalement sur des résultats récents de [33],

intégrés alors dans la procédure incrémentale. Les capacités prédictives de ce modèle ont été démontrées à travers une large validation sur l'argilite du COx.

Pour éviter la procédure d'isotropisation de l'opérateur tangent de la matrice argileuse et par souci de simplification du modèle micro-macro de l'argilite, nous avons opté pour la recherche d'un critère macroscopique isotrope de l'argilite. A cette fin, tirant profit des rigidités relatives des inclusions par rapport à la matrice argileuse, l'argilite est traité comme un biphasé constitué d'une matrice poreuse, avec une phase solide de type Drucker-Prager, et d'inclusions rigides. L'application directe de ces résultats dans le cadre de modèles associés, indique une insuffisance du modèle à décrire la transition contractance plastique et dilatance, caractéristique de l'argilite du COx. L'introduction d'une règle d'écoulement macroscopique non associé a permis des prédictions de bien meilleure qualité.

De façon générale, les résultats obtenus dans le cadre de ce travail sont encourageants et incitent à la poursuite des travaux dans plusieurs directions :

- L'extension de modèle proposé pour l'argilite du COx aux sollicitations hydriques ; dans le cas de pores saturés dans une matrice de Drucker-Prager, il est possible d'exhiber une contrainte effective ([26] [13]). A moyen terme, les effets de la saturation partielle peuvent être considérés.
- Un aspect important des modèles formulés est leur mise en oeuvre dans le cadre de calculs de structures. Bien que notre travail de thèse n'ait comporté que des simulations sur échantillons, les modèles correspondant aux divers stades de développement ont été systématiquement implémentés dans le code ABAQUS via des subroutines UMAT. Avant la réalisation de calculs de structures ou d'ouvrages d'intérêt, il pourrait être utile de procéder à une régularisation des modèles élaborés (cf. [15] pour des modèles non locaux de métaux poreux ductiles).

# Bibliographie

- [1] A. Abou-Chakra Guéry. *Contribution à la modélisation micromécanique du comportement non linéaire de l'argilite du Callovo-Oxfordien*. Phd, thesis, Université de Lille 1, France, 2007.
- [2] Andra. *Referentiel du site Meuse-Haute Marne*. Report, 2005.
- [3] J-F. Barthelemy and L. Dormieux. Détermination du critère de rupture macroscopique d'un milieu poreux par homogénéisation non linéaire. *C.R.Mecanique*, 331 :271–276, 2003.
- [4] J.F. Barthélémy and L. Dormieux. A micromechanical approach to the strength criterion of drucker-prager materials reinforced by rigid inclusions. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28 :565–582, 2004.
- [5] A.A. Benzerga and J. Besson. Plastic potentials for anisotropic porous solids. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(3) :397–434, 2001.
- [6] J. Besson. *Local approach to fracture*. Ecole des Mines de Paris-Les Presses, 2004.
- [7] S. Cariou. *Couplage hydro-mécanique et transfert dans l'argilite de Meuse/Haute-Marne : approches expérimentale et multi-échelle*. Phd, thesis, Université de Lille 1, France, 2010.
- [8] A.-S Chiarelli, J.-F. Shao, and N. Hoteil. Modeling of elastoplastic damage behavior of a claystone. *Int.J.Plasticity*, 19 :23–45, 2003.
- [9] C.C. Chu and A. Needleman. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. *J.Engng.Mater.Technol.*, 102 :249–256, 1980.

- [10] K. Danas, M. I. Idiart, and P. Ponte-Castañeda. A homogenization-based constitutive model for isotropic viscoplastic porous media. *Int. J. Solid. Struct.*, 45 :3392–3409, 2008.
- [11] L. Dormieux, J.F. Barthélémy, and S. Maghous. Résistance d’un composite à renforts rigides : le cas d’une matrice de drucker-prager avec règle d’écoulement plastique non associée. *Comptes Rendus Mécanique*, 334 :111–116, 2006.
- [12] L. Dormieux and D. Kondo. An extension of gurson model incorporating interface stresses effects. *International Journal of Engineering Science*, 48(6) :575–581, 2010.
- [13] L. Dormieux, D. Kondo, and F.-J. Ulm. Microporomechanics. Wiley, 2006.
- [14] D.-C. Drucker and W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quartely of appl. M ath.*, 10 :157–175, 1952.
- [15] K. Enakoutsa and J.-B. Leblond. Numerical implementation and assessment of the glpd micromorphic model of ductile rupture. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 28(3) :445–460, 2009.
- [16] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc.R.Soc.Lond.*, A241 :376, 1957.
- [17] F. Fritzen, S. Forest, T. Böhlke, D. Kondo, and T Kanit. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. *International Journal of Plasticity*, In Press, 2011.
- [18] M. Găărăjeu. *Contribution à l’étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renfort*. Thèse de doctorat, Université de la Méditerranée, France, 1995.
- [19] M. Găărăjeu. *Comportement non linéaire des milieux hétérogènes*. *Mémoire d’habilitation à diriger des recherches*, 2011.
- [20] M. Găărăjeu, J.C. Michel, and P. Suquet. A micromechanical approach of damage in viscoplastic materials by evolution in size, shape and distribution of voids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3-4) :223–246, 2000.

- 
- [21] M. Gărăjeu and P. Suquet. Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :873–902, 1997.
- [22] M. Gologanu, J.B. Leblond, and J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(11) :1723–1754, 1993.
- [23] M. Gologanu, J.B. Leblond, and J. Devaux. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—cas of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. *ASME J.Eng. Mat. Tech.*, 116 :290–297, 1994.
- [24] M. Gologanu, J.B. Leblond, G. Perrin, and J. Devaux. Recent extensions of gurson’s model for porous ductile metals. In : P.Suquet, Editor. *Continuum Micromechanics*, pages 61–130, Springer Verlag, New York 1997.
- [25] R.J. Green. A plasticity theory for porous solids. *Int.J.Mech.Sci.*, 14 :215–224, 1972.
- [26] T.F. Guo, J. Faleskog, and C.F. Shih. Continuum modeling of a porous solid with pressure-sensitive dilatant matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 :2188–2212, 2008.
- [27] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part1-yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engrg. Mater. Technol.*, 99 :2–15, 1977.
- [28] R. Hill. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J.Mech.Phys.Solids*, 13 :89–101, 1965.
- [29] J. Julien, M. Garajeu, and J.-C. Michel. A semi-analytical model for the behavior of saturated viscoplastic materials containing two populations of voids of different sizes. *International Journal of Solids and Structures*, 48(10) :1485–1498, 2011.
- [30] S.M. Keralavarma and A.A. Benzerga. A constitutive model for plastically anisotropic solids with non-spherical voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(6) :874–901, 2010.

- [31] J.B. Leblond. Mécanique de la rupture fragile et ductile. *Hermès Science Publication*, 2003.
- [32] J.B. Leblond, G. Perrin, and P. Suquet. Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids. *International Journal of Plasticity*, 10(3) :213–235, 1994.
- [33] S. Maghous, L. Dormieux, and J.F. Barthélémy. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials. *European Journal of Mechanics A/Solid*, 28 :179–188, 2009.
- [34] F.A. McClintock. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics*, 33 :363–371, 1968.
- [35] J. Michel and P. Suquet. The constitutive law of nonlineaire viscous and porous materials. *J.Mech.Phys. Solids*, 10 :783–812, 1992.
- [36] V. Monchiet. *Contributions à la modélisation micromécanique de l'endommagement et de la fatigue des métaux ductiles*. Phd, thesis, University of Lille I, France, 2006.
- [37] V. Monchiet, O. Cazacu, E. Charkaluk, and D. Kondo. Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. *International Journal of Plasticity*, 24 :1158–1189, 2008.
- [38] V. Monchiet, E. Charkaluk, and D. Kondo. An improvement of gurson-type models of porous materials by using Eshelby-like trial velocity fields. *C.R.Mecanique*, 335 :32–41, 2007.
- [39] V. Monchiet, E. Charkaluk, and D. Kondo. A micromechanics-based modification of the gurson criterion by using eshelby-like velocity fields. *E.J.M.*, 2011.
- [40] T. Mura. *Micromechanics of defects in solids*. Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1987.
- [41] J. Pastor, Ph. Thoré, and F Pastor. Limits analysis and numerical modeling of spherically porous solids with coulomb and drucker-prager matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(7) :2162–2174, 2009.

- 
- [42] G. Perrin. *Contribution à l'étude théorique et numérique de la rupture ductile des métaux*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique Palaiseau, France, 1992.
- [43] G. Perrin and J.B. Leblond. Analytic study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension-application to some problems in ductile fracture of metals. *Int. J. Plast.*, 6 :677–699, 1990.
- [44] G. Perrin and J.B. Leblond. Rudnicki and rice's analysis of strain localization revisited. *Journal of Applied Mechanics*, 60(4) :842–846, 1993.
- [45] P. Ponte Castaneda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J.Mech.Phys.Solids*, 39 :45–71, 1991.
- [46] P. Ponte Castaneda and P. Suquet. Nonlinear composites. *Adv.Appl.Mech.,Academic Press, New York*, 34 :171–302, 1998.
- [47] J.R. Rice and D.M. Tracey. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress field. *J.Mech.Phys.Solids*, 17 :201–217, 1969.
- [48] J. Salençon. De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture. Les éditions de l'école polytechnique, avril, 2002.
- [49] W.Q. Shen, J. Lin, Q.Z. Zhu, V. Monchiet, and D. Kondo. Macroscopic yield criterion for ductile materials containing randomly oriented spheroidal cavities. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(8) :1198–1216, 2011.
- [50] J.-C Simo and T.-J Hugues. Computational inelasticity. *Mechanics and Materials - Interdisciplinary Applied Mathematics*, 7, 1998.
- [51] P. Suquet. Effective behavior of nonlinear composites, in : Continuum micromechanics. Springer-Verlag, New York, 1997,pp,197-264.
- [52] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli approach and its link with pont castaneda's nonlinear variational procedure. *R.R.Acad.Sc.Paris,IIB*, 320, 563-571,1995.

- [53] P.F. Thomason. A three-dimensional model for ductile fracture by the growth and coalescence of microvoids. *Acta Metallurgica*, 33(6) :1087–1095, 1985.
- [54] P.F. Thomason. Ductile fracture of metals. Pergamon Press, 1990.
- [55] Ph. Thoré and J. Pastor, F.and Pastor. Hollow sphere models, conic programming and third stress invariant. *European Journal of Mechanics / A Solids*, page DOI : 10.1016/j.euromechsol.2010.09.004, 2010.
- [56] M. Trillat and J. Pastor. Limit analysis and gurson’s model. *Eur. J. of Mechanics*, 24 :800–819, 2005.
- [57] M. Trillat, J. Pastor, and P. Thoré. Limit analysis and conic programming : ‘porous drucker-prager’ material and gurson’s model. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(10) :599–604, 2006.
- [58] V. Tvergaard. Influence of voids on shear bands instabilities under plane strain conditions. *Int. J. Fracture*, 17 :389–407, 1981.
- [59] V. Tvergaard. Material failure by void coalescence in localized shear bands. *Int. J. Solids Structures*, 18(8) :659–672, 1982.
- [60] V. Tvergaard and A. Needleman. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Met*, 32 :157–169, 1984.
- [61] P.-G. Vincent. *Modélisation micromécanique de la croissance et de la percolation de pores sous pression dans une matrice céramique à haute température*. Thèse de doctorat, Université d’aix-marseille1, Provence, 2007.
- [62] P.-G. Vincent and Y. Monerie. Yield criterion for a rigid-ideally plastic material with randomly oriented cracks. *C.R.Mécanique*, 336 :297–303, 2008.
- [63] P.-G. Vincent, Y. Monerie, and P. Suquet. Ductile damage of porous materials with two populations of voids. *C.R.Mécanique*, 336 :245–259, 2008.
- [64] P.-G. Vincent, Y. Monerie, and P. Suquet. Porous materials with two populations



- 
- of voids under internal pressure : I. instantaneous constitutive relations. *Int. J. of Solids and Structures*, 46 :480–506, 2009.
- [65] L.J. Walpole. Elastic behavior of composite materials : theoretical foundations. *Advances in App.Mech.*, 21 :169–243, 1981.
- [66] J. R. Willis. The structure of overall constitutive relations for a class of nonlinear composites. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 43 :231–242, 1989.

Ce travail porte sur des modélisations, par techniques d'homogénéisation, de la plasticité des matériaux poreux ductiles. Différentes classes de milieux poreux (avec ou sans compressibilité plastique de la matrice) sont considérées. Pour une matrice de von Mises, nous avons obtenu une expression du critère macroscopique de plasticité des milieux contenant des cavités sphéroïdales aléatoirement orientées. Une extension du critère de Gurson est proposée pour des matériaux dont la matrice est plastiquement compressible et obéit à un critère elliptique. Les résultats obtenus sont appliqués et illustrés dans le cas des milieux à double porosité. Un accent particulier a été ensuite mis sur les géomatériaux poreux. L'argilite du Callovo Oxfordien, géomatériau auquel on s'est principalement intéressé dans cette étude, est modélisé comme un milieu hétérogène, constitué à l'échelle mésoscopique d'une matrice élastoplastique poreuse et d'inclusions élastiques. La transition micro-méso aboutissant à la loi de la matrice argileuse est réalisée pour une phase solide de type Drucker-Prager, à écoulement associé ou non, et pour des cavités sphériques. Tandis que le passage méso-macro s'inscrit dans une démarche d'homogénéisation incrémentale de Hill. Les capacités prédictives du modèle basé sur une phase solide à loi d'écoulement non associée ont été démontrées à travers une large validation expérimentale. Enfin, par souci de simplification du modèle micro-macro proposé pour l'argilite, une version simplifiée du modèle est proposée en s'appuyant sur l'hypothèse d'inclusions rigides. L'introduction d'une règle d'écoulement macroscopique non associée a conduit à des prédictions d'excellente qualité pour l'argilite.

**Mot-clés :** Micromécanique, Critère de plasticité, Milieux poreux ductiles, distribution aléatoire, Compressibilité, Homogénéisation non linéaire, Drucker-Prager, Porosité, Inclusion

*This work focused on the plasticity modeling of ductile porous materials. Different classes of porous media (with or without plastic compressibility of the matrix) are considered. Concerning the case of incompressible matrix obeying to the von Mises criterion, by using limit analysis combined with homogenization techniques, we obtained, a closed form expression of the macroscopic yield function for materials containing randomly oriented spheroidal cavities. An extension of the Gurson criterion is proposed for materials whose matrix is plastically compressible and obeys to an elliptic criterion. The obtained results are applied and illustrated in the case of double porous media. Then, an emphasis is put on porous geomaterials. The Callovo Oxfordian argillite, a geomaterial which is of a primary interest in this study, is modeled as a heterogeneous medium made, at the mesoscale, of a porous elastoplastic matrix and elastic inclusions. The micro-meso transition leading to the constitutive law of the clay matrix is performed for an associated or a non-associated Drucker-Prager solid phase and spherical cavities. The meso-macro transition is performed by means of a Hill incremental homogenization method. The predictive capabilities of the micro-macro model based on a non-associated solid phase have been demonstrated via a wide experimental validation. Finally, a simplified version of the micro-macro model is formulated by assuming rigid inclusions. The introduction of a macroscopic non-associated flow rule allows to obtain excellent predictions for the argillite.*

**Keywords :** Micromechanics, Plastic criterion, Ductile porous material, Randomly oriented spheroidals, Compressibility, Nonlinear homogenization, Drucker-Prager, Porosity, Inclusions.