

N° ORDRE : 40607



École doctorale régionale Sciences Pour l'Ingénieur Lille Nord-de-France

Université Lille 1 Sciences et Technologies

ANALYSE ET MISE EN ŒUVRE DES SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR LA PHYSIQUE DES PLASMAS IONOSPHERIQUES ET DE TOKAMAKS

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 28 novembre 2011

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Lille 1

(spécialité: mathématiques appliquées)

par

Chang YANG

Composition du jury

Christophe BESSE	Directeur	Université Lille 1
Jean-Jacques BERTHELIER	Examineur	LATMOS
Claire CHAINAIS	Examineur	Université Lille 1
Fabrice DELUZET	Examineur	Université Toulouse 3
Francis FILBET	Examineur	Université Lyon 1
Gérard GALLICE	Examineur	CEA CESTA
Luc MIEUSSENS	Rapporteur	Université de Bordeaux
Eric SONNENDRÜCKER	Rapporteur	Université de Strasbourg



Mis en page avec la classe thloria.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur la modélisation et la simulation numérique des plasmas ionosphérique et Tokamak.

La première partie de ce travail concerne la modélisation et la simulation numérique des effets de perturbations ionosphériques sur les communications terre-satellite. Le point départ de cette partie est l'analyse asymptotique du modèle de Euler-Maxwell conduisant ainsi au modèle Dynamo, qui se traduit en un couplage en 3D entre une équation elliptique pour le potentiel électrique et une équation de conservation de masse pour la densité du plasma. Du fait de la forte anisotropie de la matrice de diffusion associée à l'équation elliptique, on a développé un schéma numérique préservant l'asymptotique permettant ainsi le bon conditionnement du système linéaire. La simulation de l'équation de conservation de masse est faite à l'aide de schémas de lois de conservation d'ordre élevé. La validation de ce modèle Dynamo s'obtient par une étude comparative avec le modèle Striation en 2D.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse au plasma Tokamak. On extrait du modèle TOKAM3D, une équation de balance d'énergie de type non-linéaire en dimension 2 contenant toutes les difficultés numériques. Les méthodes numériques standard étant très coûteux en temps CPU, on développe un schéma implicite-explicite prouvé efficace et stable pour ce type de problème. Enfin, ce schéma est combiné à une méthode de splitting dimensionnelle pour la discrétisation et des expériences numériques sont alors présentées.

Mots-clés: Modèle Dynamo ionosphérique, schéma préservant l'asymptotique, schémas de lois de conservation, plasma Tokamak, équation de chaleur non-linéaire, schéma implicite-explicite.

Abstract

This thesis focuses on modeling and numerical simulation of ionospheric and Tokamak plasmas.

The first part of this work concerns the modeling and simulation of ionospheric perturbations effects for earth-satellite communications. The starting point of this part is an asymptotic analysis of Euler-Maxwell model leading to Dynamo model, which results into a 3D coupling problem between an elliptic equation for the electric potential and a mass conservation equation for the plasma density. Because of the strong anisotropy of the diffusion matrix associated with the elliptic equation, we developed an asymptotic preserving numerical scheme thus allowing the well conditioned linear system. The simulation of the mass conservation equation is made by using high order conservation laws scheme. The validation of this model Dynamo is obtained by a comparison with the 2D Striation model.

In the second part, we are interested in tokamak plasma. We extract from TOKAM3D model, a 2D nonlinear energy balance equation containing all the numerical difficulties. Standard numerical methods are very CPU consuming, thus we develop an implicit-explicit scheme shown efficient and stable for this type of problem. Finally, this scheme is combined with dimensional splitting method for the discretization and numerical experiments are then presented.

Keywords: Ionospheric Dynamo model, asymptotic preserving scheme, conservation laws schemes, Tokamak plasma, nonlinear heat equation, implicit-explicit scheme.

Remerciements

Avant tout, un grand merci à Christophe pour avoir accepté d'être mon directeur de thèse. Merci pour sa disponibilité, toutes ses heures passées, ses encouragements durant ces trois années.

Merci à Pierre Degond pour ses idées importantes dans ma recherche. Merci à Fabrice pour son soutien au calcul scientifique et pour m'avoir accueilli à Toulouse. Merci à Claudia pour son aide en analyse mathématique. Merci à Francis pour avoir accepté de me choisir dans son projet de CEMRACS et m'avoir invité à travailler à Lyon. Merci à Ingrid d'avoir corrigé l'orthographe française de ma thèse. Merci aussi à Jean-Jacques pour ses réponses concernant la physique des plasmas.

Je veux remercier tous les membres de l'équipe SIMPAF de l'INRIA Lille : Thierry, Guillaume, Pauline, Stephan, Caterina, Emmanuel, Antoine, Mathias, Claire, et etc. Grâce à l'humour de tous les membres, nous avons eu une ambiance de travail sympathique. Surtout j'ai bien progressé en langue française pendant les pauses café. J'ai passé trois années très agréables ici. Merci à Sandrine pour m'avoir beaucoup aidé sur les procédures administratives, les réservations de mes voyages, les commandes de machines de calcul, ...

Je suis également reconnaissant envers le laboratoire Paul Painlevé. J'y ai fait mes études pendant cinq ans depuis mon master. Merci à Changgui Zhang pour sa proposition d'échange entre l'université de Wuhan et l'université de Lille 1, où j'ai eu l'opportunité de profiter de la vie française.

Je tiens de plus à remercier Luc Mieussens et Eric Sonnendrüker d'avoir accepté de rapporter ma thèse et pour l'avoir lue avec attention, ainsi que Gérard Gallice pour avoir accepté de faire partie du jury.

À tous mes collègues quotidiens : à Léon, il est toujours très patient pour répondre mes questions ; à Martin et ses suggestions pour mes difficultés numériques ; à Anne et Bénédicte, elles ont apporté beaucoup de sourires dans notre bureau ; à Stella et Sebastian et les soirées de jeux de sociétés chez eux ; à Benjamin et ses réponses à mes questions de latex ; à Yohan et son organisation de laser game ; à Eric, nous nous excusons qu'il attendait les Inriens souvent devant le RU...

À tous mes amis chinois : Ying Chen, Jing Ming, Qidi Peng, Zuqi Tang, Qi Wang, Yiyi Wei, Wenyuan Yang, Tao Zeng, Shuang Zhou... Nous avons fêté plusieurs nouveaux ans chinois, nous avons partagé les cuisines chinoises, nous avons voyagé en Europe, nous avons fait du sport...

Et enfin et surtout, mon plus grand merci va à mes parents. Ils m'ont donné ma naissance et beaucoup de supports de mes études.

Pour conclure, merci encore à tous et pardon pour ceux que j'ai oublié !

Table des matières

Introduction	1
--------------	---

Partie I Modélisations et simulations des irrégularités du plasma ionosphérique terrestre

Chapitre 1

Modélisations des irrégularités du plasma ionosphérique terrestre
--

1.1	Introduction	7
1.2	L'environnement spatial : quelques notions de base	10
1.2.1	Introduction	10
1.2.2	Qu'est ce qu'un plasma ?	10
1.2.3	La magnétosphère terrestre	12
1.2.4	L'ionosphère	12
1.3	Modélisation des irrégularités ionosphériques	15
1.3.1	Introduction	15
1.3.2	Modèle d'Euler-Maxwell	16
1.3.3	Adimensionnement du modèle	20
1.3.4	Modèle Dynamo tridimensionnel	24
1.3.5	Modèle Striation bidimensionnel	28
1.3.6	Instabilité de dérive en $E \times B$: théorie phénoménologique	29
1.4	Conclusion	34

Chapitre 2

Méthodes numériques efficaces pour des équations elliptiques anisotropes

2.1	Introduction	37
2.2	Dérivation d'un nouveau schéma préservant l'asymptotique (AP) pour ε constant	39
2.2.1	Investigation sur le modèle de perturbation singulière et de son régime limite	39
2.2.2	Reformulation préservant l'asymptotique	40
2.2.3	Formulation faible	42
2.2.4	Procédure itérative	45
2.2.5	Méthodes numériques et expériences	47
2.3	Vers un problème modèle bien adapté pour le cas ε variable	54
2.3.1	Motivation et conception d'un problème modèle plus général	54
2.3.2	Reformulation préservant l'asymptotique pour les taux d'anisotropie hétérogènes	56
2.3.3	De forts gradients de taux d'anisotropie hétérogènes	58
2.3.4	Résultats numériques	59
2.4	Un cas test physique en dimension trois	62
2.4.1	Le modèle en dimension trois	63
2.4.2	La reformulation AP	64
2.4.3	Des expériences numériques	65
2.5	Conclusion	67
2.6	Annexe A : Simulations en dimension un pour un taux d'anisotropie fort	68
2.6.1	Le schéma AP standard	68
2.6.2	Le schéma AP non-conservatif	69
2.6.3	Le schéma AP avec moyenne harmonique	69
2.6.4	Le schéma AP Scharfetter-Gummel	70
2.6.5	Résultats numériques	70
2.7	Annexe B : Résolution itérative du système linéaire pour le schéma AP	72

Chapitre 3

Simulations numériques des modèles ionosphériques pour B non-uniforme

3.1	Introduction	75
3.2	Les modèles Dynamo et Striation ionosphériques	77
3.2.1	Potentiels d'Euler pour un champ magnétique axisymétrique	77
3.2.2	Calcul des Potentiels d'Euler	80
3.2.3	Modèle Dynamo dans le système des Potentiels d'Euler	81
3.2.4	Modèle Striation dans le système des Potentiels d'Euler	85
3.3	Domaine de calcul	87
3.3.1	Données initiales : le modèle IRI	87
3.3.2	Maillage de discrétisation	89
3.4	Approximation numérique du modèle Striation ionosphérique	91
3.4.1	Calcul du potentiel électrique	94
3.4.2	Calcul de la densité du plasma	97
3.5	Approximation numérique du modèle Dynamo ionosphérique	106
3.5.1	Calcul du potentiel électrique	106
3.5.2	Calcul de la densité du plasma	110
3.6	Expériences numériques	112
3.6.1	Expériences numériques de Cas1	113
3.6.2	Expériences numériques de Cas2	122
3.7	Conclusion	122
3.8	Annexe : Méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1	129
3.8.1	Méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 en 2D	129
3.8.2	Méthode d'éléments finis type \mathbb{Q}_1 en 3D	132

Chapitre 4

Irrégularités du plasma : prise en compte du gradient de pression
--

4.1	Introduction	135
4.2	Modèles ionosphériques prenant en compte du gradient de pression	136
4.2.1	Modèle Dynamo prenant en compte du gradient de la pression	137
4.2.2	Modèle Striation prenant en compte le gradient de la pression	139
4.3	Schémas numériques	140
4.3.1	Discrétisation du modèle Striation	140
4.3.2	Discrétisation du modèle Dynamo	145
4.4	Expériences numériques	148
4.4.1	Résultats numériques du modèle Striation	148
4.4.2	Difficultés du modèle Dynamo	149

4.5	Conclusion	154
4.6	Annexe : Résolution d'une équation d'advection-diffusion en 1D	156

Partie II Etude numérique de l'équation de la chaleur non linéaire pour plasma du Tokamak

Chapitre 5 Etude numérique d'une équation non linéaire de la chaleur pour les plasmas
--

5.1	Introduction	163
5.2	Le problème 1D non linéaire	166
5.2.1	Étude Mathématique	167
5.2.2	Une approximation volumes finis.	170
5.2.3	Discrétisation explicite en temps.	170
5.2.4	Discrétisation implicite en temps.	171
5.2.5	Preuve du Théorème 2.4.	173
5.2.6	Un schéma implicite-explicite (IMEX).	180
5.2.7	Résultats numériques.	182
5.3	Le problème 2D	185
5.3.1	Schéma de splitting en temps.	185
5.3.2	Une approximation volumes finis.	188
5.3.3	Résultats numériques.	188
5.4	Le problème couplé	194
5.4.1	Schéma de splitting en temps	194
5.4.2	Résultats numériques	196
5.5	Conclusion	196
5.6	Annexe A : Un schéma semi-implicite	199

Introduction

Dans cette thèse, nous étudions la modélisation et la simulation numérique des plasmas ionosphériques et de Tokamak. Cette thèse se décompose en deux parties : dans la première partie, nous présentons d'abord certaines notions liées à l'environnement ionosphérique, puis nous introduisons des modèles Dynamo et Striation ionosphériques et développons des schémas numériques correspondants; dans la deuxième partie, nous développons un schéma numérique efficace pour traiter la difficulté numérique de l'équation de la chaleur non-linéaire du modèle TOKAM3D [50].

Partie I : modélisation et simulation des irrégularités du plasma ionosphérique terrestre

La motivation de cette partie est d'étudier des perturbations ionosphériques, qui sont les sources potentielles d'indisponibilité du système Galileo. Le système Galileo est un système de navigation développé par l'Europe comme un compétiteur du système GPS américain. Il est différent du GPS grâce à sa capacité à fournir des informations d'intégrité temps réel à l'utilisateur. Cependant des perturbations ionosphériques peuvent interrompre les communications terre-satellites, ce qui limite l'avantage du système Galileo. Nous désirons dans cette partie modéliser et simuler l'évolution de densité du plasma ionosphérique.

Dans le chapitre 1, nous donnons d'abord des notions liées à l'environnement spatial. Un plasma est un gaz de particules ionisées où les atomes sont dissociés en ions et électrons. Un plasma ionosphérique a des températures inférieures à plusieurs centaines de milliers de Kelvins, où la densité de molécules neutres est en général très supérieure à la densité des espèces chargées, ainsi il est un milieu collisionnel. L'ionosphère terrestre est une couche ionisée de l'atmosphère. Le plasma y est fortement influencé par la présence d'un champ magnétique terrestre, par exemple l'effet de la dérive en $E \times B$. En effet, dans la basse ionosphère les effets du vent de neutre ou de la gravité peuvent induire un champ électrique (effet dynamo ionosphérique), qui en présence du champ magnétique terrestre crée une dérive en $E \times B$ entraînant le déplacement des particules chargées.

Pour modéliser l'évolution du plasma, le point de départ est le système d'Euler-Maxwell à deux espèces *i.e.* ions et électrons. En faisant l'adimensionnement de ce système, une collection de paramètres sans dimension apparaît, montrant les différents ordres de grandeur. En passant à la limite dans un certain ordre, nous obtenons les modèles Dynamo et Striation ionosphériques. Une analyse d'instabilité de la dérive en $E \times B$ est donnée sous l'hypothèse que toutes les quantités sont indépendantes de la direction alignée au champ magnétique.

Dans le chapitre 2, nous développons un schéma préservant l'asymptotique (schéma AP) pour résoudre l'équation elliptique anisotrope. En effet, le modèle Dynamo ionosphérique peut être écrit comme un système composé d'une équation elliptique pour le potentiel électrique couplée à une équation de conservation de la masse pour la densité du plasma. La matrice de diffusion de l'équation elliptique représente les mobilités de particules chargées. La mobilité alignée au champ magnétique est beaucoup plus grande que celles dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Ainsi l'équation elliptique est un problème anisotrope. Une discrétisation standard pour ce problème conduit à un système linéaire mal-conditionné.

Nous proposons un schéma AP, qui est une reformulation du schéma AP introduit initialement dans [18]. Nous considérons un problème elliptique anisotrope

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0, \text{ sur } \partial\Omega_D, \quad \partial_z\phi = 0, \text{ sur } \partial\Omega_z, \end{cases} \quad (1)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine rectangulaire ou cubique de frontières $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_z$ et \mathcal{A} une matrice de diffusion de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_\perp & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}A_z \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Les termes A_\perp et A_z sont du même ordre de grandeur, le paramètre ε pouvant fortement varier. Le problème (1) devient mal-posé quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous introduisons la décomposition $\phi = \bar{\phi} + \phi'$, où $\bar{\phi}$ est la valeur moyenne le long de la direction anisotrope z , ϕ' est la partie de fluctuation. En intégrant (1) le long de la direction z , nous obtenons une équation de moyenne. Puis en introduisant la décomposition de $\phi = \bar{\phi} + \phi'$ dans (1), nous avons une équation de fluctuation. Le schéma AP consiste en l'équation de moyenne, l'équation de fluctuation et une contrainte $\bar{\phi}' \equiv 0$. Ce schéma AP est bien-posé pour tous les choix de ε , ainsi son système linéaire de discrétisation est bien-conditionné. De plus son système linéaire est creux, tandis que celui du schéma AP initial dans [18] est plein. Le nouveau schéma AP est donc plus efficace que le schéma AP initial. Les cas test en 2D et 3D sont donnés pour montrer l'efficacité du schéma AP.

Dans le chapitre 3, nous développons les schémas numériques des modèles ionosphériques dans un champ magnétique non-uniforme. Nous introduisons d'abord un système de potentiels d'Euler de telle manière que le domaine de calcul forme un tube de champ magnétique. Puis nous récrivons les modèles Dynamo et Striation dans le système des potentiels d'Euler. Nous supposons que dans ce chapitre le gradient de la pression contre-balance l'effet de la gravité dans la direction alignée au champ magnétique et nous négligeons aussi le gradient de la pression dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Sous cette hypothèse, le modèle Dynamo consiste en une équation de conservation de la masse en 3D et une équation elliptique en 3D. Le modèle Striation consiste en une équation de conservation de la masse en 3D et une équation elliptique en 2D.

Nous considérons un domaine de calcul formant un tube de champ magnétique dont les pieds sont immergés dans la couche neutre de l'atmosphère. Nous divisons ce domaine en trois parties le long du champ magnétique, la zone centrale formant un domaine régulier. Nous maillons uniformément la zone centrale, et non-uniformément les deux zones

externes. Ainsi le domaine de calcul est divisé en plusieurs couches le long du champ magnétique. Nous développons d'abord des schémas numériques pour le modèle Striation. Nous discrétisons l'équation elliptique du modèle Striation par une méthode de différences finies classique. Pour discrétiser l'équation de conservation de la masse, nous utilisons premièrement un schéma upwind en 3D. Cependant, ce schéma est très diffusif car il est d'ordre un en espace. Deuxièmement en appliquant la méthode de splitting dimensionnel dans la zone centrale, nous obtenons des équations de conservation de la masse en 1D. Puis nous utilisons des schémas d'ordre élevé en 1D pour discrétiser ces équations en 1D. Dans les deux zones externes, nous utilisons encore le schéma upwind en 3D. Pour discrétiser l'équation de conservation de la masse du modèle Dynamo, nous pouvons utiliser les mêmes schémas que ceux du modèle Striation. Notons que l'équation elliptique du modèle Dynamo est un problème anisotrope, ainsi nous appliquons le schéma AP développé dans le chapitre 2.

Deux types de simulations sont considérés : une bulle de sous-densité du plasma perturbée par la gravité ; une bulle de sur-densité du plasma perturbée par le vent neutre. Dans le premier cas, nous observons que la bulle de sous-densité du plasma montre vers la haute altitude et son profil supérieur est strié. Enfin la bulle est divisée en plusieurs sous-bulles de sous-densité. Dans le deuxième cas, nous considérons le vent neutre dans la direction de longitude. La bulle de sur-densité bouge par la force du vent neutre, et le profil en opposition du vent neutre est strié. Finalement, la bulle de sur-densité devient plusieurs sous-bulles de sur-densité. Un caractère commun des modèles Striation et Dynamo est que la perturbation propage aux couches initialement non-perturbées. Deux différences importantes entre les deux modèles sont : le phénomène de striation du modèle Dynamo paraît plus tôt que celle du modèle Striation et l'intensité de la perturbation dans les différentes couches du modèle Dynamo variée parmi toutes les couches, tandis que celle du modèle Striation est invariante pour toutes les couches.

Dans le chapitre 4, nous faisons des simulations numériques prenant en compte le gradient de pression. Pour simplifier le problème, nous considérons un domaine de calcul régulier et simulons une bulle de sous-densité perturbée par la gravité. Dans le système des potentiels d'Euler, les modèles Striation et Dynamo s'écrivent comme la somme d'une équation d'advection-diffusion pour la densité et d'une équation elliptique pour le potentiel. Nous pouvons discrétiser ces modèles par des schémas similaires à ceux développés dans le chapitre 3. Cependant, la condition CFL de l'équation d'advection-diffusion est limitée par le terme de diffusion. En appliquant la méthode de splitting dimensionnel, nous discrétisons le terme d'advection explicitement et le terme de diffusion implicitement.

Nous considérons premièrement le modèle Striation. Le domaine de calcul s'étend de la basse ionosphère à la haute ionosphère. Nous considérons comme donnée initiale une bulle de sous-densité du plasma dans la basse ionosphère. La bulle monte par la force de la gravité. Similairement le profil fait apparaître des striations dans la partie supérieure par effet de la dérive en $E \times B$. La bulle est écrasée dès qu'elle entre dans la haute ionosphère. En effet, dans la basse ionosphère la densité des particules neutres est grande, ainsi la collision entre des particules neutres et des particules chargées est importante, ce qui limite le déplacement des particules chargées. En revanche dans la haute ionosphère, la densité des particules neutres est faible, ainsi le déplacement des particules chargées le long du champ magnétique est libre. La bulle est donc écrasée rapidement par la force du

gradient de la pression.

Deuxièmement, nous découvrons que le modèle Dynamo ne peut pas reproduire l'évolution des striations de manière satisfaisante. Dans le modèle Dynamo, nous pouvons définir deux échelles de temps distinctes : une très rapide associée à la mobilité des particules le long des lignes de champ ; l'autre plus lente associée aux mobilités perpendiculaires. Notons que la mobilité alignée est très grande comparativement aux mobilités transverses. Le modèle Dynamo conduit alors à la mise à l'équilibre dans la direction alignée de manière à annuler les forces qui s'exercent le long des lignes de champ. Cette mise à l'équilibre sera très rapide et la dynamique perpendiculaire n'a pas le temps de se développer sur ces échelles de temps.

Partie II : étude numérique d'une équation non-linéaire de la chaleur pour les plasmas

Dans le chapitre 5, nous étudions l'évolution du flux d'énergie d'un tokamak. Un tokamak est une chambre de confinement magnétique destinée à contrôler un plasma pour étudier la possibilité de la production d'énergie par fusion nucléaire. Les interactions plasmas-mur ont un impact important sur les propriétés de confinement du plasma. La région de ces interactions est appelée SOL ("scrape of layer"), dont l'évolution du flux d'énergie se traduit par une équation non-linéaire de la chaleur.

Nous extrayons à partir du modèle TOKAM3D un système d'équation non-linéaire de la chaleur pour deux espèces, qui contient toutes les difficultés numériques. En appliquant la méthode de splitting, nous obtenons un sous-problème non-linéaire en 1D. Nous développons respectivement des schémas explicite, implicite et explicite-implicite pour ce sous-problème. Le schéma explicite-implicite est le plus efficace parmi les trois schémas. En effet, le schéma explicite est limité par la condition CFL. La matrice du schéma implicite est une fonction de température, qui change dans chaque pas de temps. Ainsi nous devons résoudre un nouveau système linéaire dans chaque pas de temps. Le point principal du schéma explicite-implicite est d'écrire le problème non-linéaire sous une forme différente afin de décomposer l'opérateur non-linéaire en une somme d'une partie linéaire dissipative, qui peut être résolue de façon implicite, et une partie non-linéaire non dissipative, qui sera résolue par un solveur en temps explicite. Avec cette décomposition, la matrice de discrétisation change beaucoup moins fréquemment par rapport au schéma implicite. Ainsi nous gagnons beaucoup de temps de calcul en utilisant la résolution directe du système linéaire.

Nous appliquons ensuite le schéma explicite-implicite dans le système d'équation non-linéaire de la chaleur pour deux espèces. Nous observons que dans SOL la température d'électrons décroît rapidement grâce au le terme de diffusion non-linéaire et aux conditions aux limites non-linéaires. La température d'ions varie plus lent à cause des conditions aux limites de Neumann homogène. Un terme de source d'équilibrage balance la différence des températures entre les deux espèces. Ainsi nous voyons à partir des simulations numériques que la région SOL contrôle bien la température du Tokamak.

Première partie

Modélisations et simulations des irrégularités du plasma ionosphérique terrestre

Chapitre 1

Modélisations des irrégularités du plasma ionosphérique terrestre

1.1 Introduction

Dans la dernière décennie, les dispositifs de positionnement par satellite sont devenus l'un des moyens les plus intéressants de navigation pour le déplacement des marchandises et des personnes. La seule solution actuelle est basée sur la constellation de satellites Navstar du système GPS américain. Toutefois, afin de garantir son autonomie, l'Europe a décidé de lancer un programme concurrent appelé Galileo. Il est composé de 27 satellites en orbite moyenne (23000 km d'altitude) complété par trois autres complémentaires. Le système Galileo est différent du GPS grâce à sa capacité à fournir des informations d'intégrité temps réel à l'utilisateur.

Afin de garantir ce niveau de service d'intégrité, il est fondamental de prendre en compte les différents problèmes qui peuvent affecter la mission et d'identifier toutes les sources potentielles d'indisponibilité du système. L'une des principales sources d'indisponibilité des données, qui a été identifiée, est le phénomène des scintillations ionosphériques. En effet la scintillation provoque une atténuation de l'amplitude du signal radio et des variations de phase pendant la traversée des signaux satellitaires traversant l'ionosphère. Ces effets peuvent induire la perte du verrouillage ou des sauts de cycles sur les émissions de signaux de satellites Galileo qui les rend totalement inutilisables pour la détermination de l'intégrité des informations exactes.

Des scintillations sont clairement identifiées comme une source de perturbations venant de l'environnement. Elles apparaissent comme l'aspect turbulent d'une plus grande perturbation de la densité du plasma ionosphérique, qui ont la forme de bulles de sur-densité du plasma ou de bulles de sous-densité du plasma. La difficulté de leur modélisation est due au manque de mesures in situ à les concernant.

"Global Ionospheric Scintillation Model" (GISM) [1], [2], un modèle mixte climatologie / physique, est traditionnellement utilisé pour donner les paramètres permettant de prédire l'évolution du signal dans le milieu ionosphérique. L'état de l'ionosphère est donné par la densité électronique à l'intérieur du milieu, qui est elle-même calculée par le modèle NeQuick développé dans les universités de Graz et de Trieste. Toutefois, le modèle

NeQuick ne fournit que l'état moyen de l'ionosphère et ne permet donc pas de donner des réponses correctes lorsque les perturbations sont très importantes. Deux solutions peuvent être proposées : améliorer le modèle par plus de considérations physiques et combler le manque de données in situ.

Besse et *al.* [4] ont développé une hiérarchie de modèles dans le but de représenter l'évolution d'instabilités du plasma ionosphérique. Elle est basée sur une analyse asymptotique du système Euler-Maxwell à l'aide d'échelles typiques des paramètres physiques dans la couche F de l'ionosphère. Parmi ces modèles, le plus simple, dénommé modèle Striation, décrit l'évolution du plasma quasi-neutre dans un plan perpendiculaire au champ magnétique terrestre. Le champ magnétique est supposé constant, et l'inertie des électrons et des ions est négligée. Dans ce modèle, la mobilité des particules de charge est supposée infinie le long des lignes de champ magnétique, de sorte qu'ils constituent un équipotentiel du champ électrique. Cette propriété permet le calcul du champ électrique au moyen d'une équation elliptique en 2D avec des coefficients intégrés le long des lignes de champ magnétique. Cette équation est couplée à une équation de conservation de la masse en dimension deux ou trois décrivant l'évolution de la densité du plasma.

Une version entièrement en dimension deux du modèle suppose que toutes les variables sont indépendantes de la coordonnée alignée avec le champ magnétique. Ce modèle est largement utilisé pour l'analyse et la simulation. Une étude de stabilité linéaire [4] démontre la capacité du modèle Striation à décrire les instabilités du plasma ionosphérique, et par exemple l'instabilité de dérive en $E \times B$ [57]. Ce modèle est également très bien adapté pour la simulation de l'électrojet équatorial [43]. Ce succès peut s'expliquer par l'efficacité des outils de simulation développés pour ce modèle. Les coûts d'utilisation de mémoire et de CPU sont raisonnables en raison de la réduction à la dimension 2 des problèmes elliptiques permettant le calcul du champ électrique. Cependant des études analytiques ont souligné l'importance de la troisième dimension (celle alignée avec le champ magnétique terrestre) sur la précision des résultats [46]. Les variations des propriétés matérielles le long des lignes de champ magnétiques sont principalement responsables des différences observées lorsqu'on compare les résultats de simulations et de mesures expérimentales.

Les variations de l'environnement le long des lignes de champ magnétique ont été pour la première fois introduites dans les simulations en étendant le modèle 2D à une version multi-couches [8]. Le champ électrique reste toujours calculé grâce à une équation elliptique 2D, mais les coefficients de cette équation sont intégrés le long des lignes de champ magnétique sur différentes couches. La densité du plasma ionosphérique est calculée par une équation de conservation de la masse en 3D. Sur des petites échelles d'espace, le champ magnétique terrestre peut être supposé uniforme. Cette hypothèse n'est plus réaliste sur des échelles d'espace plus grandes et une approximation précise du champ magnétique doit être apportée. Keskinen et *al.* [33] [34], dans le code MIDAS, ainsi que Besse et *al.* [4], utilisent un champ dipolaire magnétique axisymétrique. Dans [8], [21] un système de coordonnées curvilignes est introduit afin de réaliser des simulations dans ce cadre. Les simulations soulignent la propriété non-locale du phénomène en raison de la grande mobilité des particules le long des lignes de champ magnétique. Cependant, le tube de champ magnétique s'étend sur un large domaine, (en altitude et latitude) avec de grandes variations de la densité de particules neutres. Par exemple aux basses altitudes, la densité de particules neutres est beaucoup plus élevée que celle de plus haute

altitude. Pour cette raison, la mobilité des particules peut être supposée infinie pour haute ionosphère. Cependant en altitudes plus basses, cette hypothèse n'est plus valide à cause d'une fréquence de collisions avec les neutres très importante. Ainsi la validité du modèle Striation implique qu'il soit limité à un média où il n'y a pas très grande variation de fréquence de collision. Pour que le modèle soit valable dans le champ magnétique tout entier, il est nécessaire d'un modèle moins restrictif.

Un tel modèle, appelé modèle Dynamo-3D développé dans la hiérarchie de [8], est beaucoup plus coûteux en CPU et mémoire. En effet, les mobilités alignées étant finies, toutes les composantes du champ électrique doivent être calculées au moyen d'une équation elliptique en 3D. Cette équation elliptique est couplée à une équation de conservation de la masse en 3D donnant l'évolution de la densité du plasma. La vitesse du plasma est soit calculée par la loi de conservation, dans le code de MIDAS, ou une relation algébrique dans la version sans masse du modèle Dynamo utilisé dans [21] pour laquelle l'inertie est négligée. L'avantage du modèle Dynamo-3D est que le domaine de validité est un tube de champ magnétique entier. Cependant d'un point de vue numérique, le calcul du champ électrique est un véritable défi sur un tel domaine. Les mobilités de particules alignées avec le champ magnétique sont beaucoup plus grandes que les mobilités transverse (*i.e.* Pedersen et Hall), de sorte que le système linéaire associé au calcul du potentiel électrique est mal conditionné. Les expériences numériques préliminaires effectuées dans [21] sur de grandes échelles d'espace montrent que la convergence des méthodes itératives est très difficile. En outre, les dynamiques perpendiculaires et parallèles sont très différentes et nécessitent des méthodes de pas fractionnaire en temps afin de maintenir un coût de calcul acceptable [33].

Pour contourner ce problème, nous proposons une stratégie dans le but d'améliorer le calcul du potentiel électrique du modèle Dynamo-3D. Une des difficultés dans la résolution de l'équation elliptique peut être expliquée par les conditions aux limites appliquées dans la direction alignée au champ magnétique. Les extrémités du tube de champ magnétique sont immergées dans la thermosphère, où la densité du plasma s'annule. La composante alignée du champ électrique devrait être zéro aux extrémités de tube de champ magnétique. Cela se traduit par des conditions aux limites de Neumann homogènes pour le potentiel électrique. Cela signifie que, dans l'équation elliptique de Dynamo-3D, les coefficients de plus grande amplitude (mobilités alignées) sont associés à des conditions aux limites de Neumann. Cette partie de l'opérateur elliptique, dominante aux plus hautes altitudes, ne donne pas une solution unique. Cet opérateur n'est donc pas inversible, et ne fournit pas d'informations pour les variations de potentiel dans la direction alignée.

Dans un travail récent de Degond et *al.* [18], un schéma préservant l'asymptotique (AP) a été développé pour la résolution numérique d'un problème elliptique anisotrope équivalent. Cette méthode consiste à décomposer la solution du problème dans sa moyenne (qui ne dépend pas de la coordonnée alignée au champ magnétique) et sa fluctuation. La partie de fluctuation est une fonction avec moyenne nulle le long des lignes de champ magnétique. Grâce à cette propriété, la solution numérique de ce problème peut être calculée en résolvant un système linéaire avec un conditionnement qui ne dépend pas du taux d'anisotropie. Toutefois, la condition de moyenne nulle implique une matrice avec des blocs denses. Une extension de ce travail [7] basée sur une reformulation alternative du schéma AP évite d'inclure des blocs denses. De plus une méthode de résolution directe

pour ce schéma AP a été introduite, qui a une efficacité accrue par rapport à une méthode de résolution itérative dans [18], surtout pour des problème anisotrope en 2D. Ce travail sera détaillé dans le chapitre 2.

Certains améliorations doivent être ajoutées au modèle de [8] afin d'intégrer une physique plus précise. Jusqu'à présent, Besse et *al.* se sont concentrés sur l'instabilité de dérive initiée par des vents thermosphérique de particules neutres. Le modèle ne prend pas en compte les effets de gravité. Ce terme de force sera ajouté dans le cadre des coordonnées curvilignes définies pour le champ magnétique bipolaire.

Dans ce chapitre, nous introduisons le concept de modélisation des irrégularités ionosphériques. Dans la section 1.2, on introduit les bases physiques pour la modélisation du plasma ionosphérique. Dans la section 1.3, on introduit le modèle d'Euler-Maxwell, puis on le simplifie après un adimensionnement pour arriver aux modèles Dynamo et Striation. La stabilité linéaire du modèle Dynamo et du modèle Striation est aussi présentée.

1.2 L'environnement spatial : quelques notions de base

1.2.1 Introduction

Pour mieux comprendre les modèles de plasma ionosphérique, il est nécessaire de connaître l'environnement spatial. Dans la section 1.2.2, on introduit les notions de base de physique des plasmas. La définition générale du plasma est brièvement donnée suivie d'une comparaison entre les plasmas froids et les plasmas chauds. Certains compléments seront donnés pour quelques aspects des plasmas. Dans la section 1.2.3, on décrit la magnétosphère. On présente respectivement les sources du plasma magnétosphérique, les circulations du plasma chaud et du plasma froid, les conséquences sur les satellites. Dans section 1.2.4 nous décrivons l'ionosphère, région de base du modèle. On montrera d'abord la structure stratifiée de l'ionosphère, qui entraîne différents phénomènes, et par exemple celui des scintillations. Puis on considérera les sources du champ électrique et des courants ionosphériques. Nous soulignerons l'effet dynamo, qui est fondamental, dans section 1.3.

1.2.2 Qu'est ce qu'un plasma ?

Définition générale

Un plasma est un gaz de particules ionisées où les atomes sont dissociés en ions et électrons [17], [19], [35]. Les particules composant le plasma sont donc électriquement chargées, et par conséquent susceptibles d'interagir entre elles par interaction électromagnétique. Il s'agit là d'une différence fondamentale entre un plasma et un gaz au sens usuel, lequel est constitué de particules électriquement neutres et n'interagissant entre elles que par contact (ou par le biais de forces à très courte portée).

Il nous serait difficile de coexister avec un plasma, car sa température est supérieure à l'énergie d'ionisation des atomes le constituant. Cette dernière étant de l'ordre de quelque eV (électron Volt), la température d'un plasma est généralement supérieure à une dizaine de milliers de Kelvin, en vertu de la correspondance :

$$1\text{eV}=11600 \text{ Kelvin.}$$

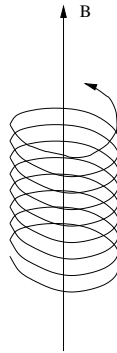


FIGURE 1.1 – Trajectoire hélicoïdale des particules chargées des plasmas le long des lignes de champ magnétique.

Plasmas froids et plasmas chauds

Les plasmas froids ont des températures inférieures à quelques eV (c'est à dire à quelques dizaines de milliers de Kelvins). Dans ces plasmas, la densité de molécules neutres est donc en général très supérieure à la densité des espèces chargées (ions et électrons). Des exemples de tels plasmas sont l'ionosphère, les décharges lumineuses (celles d'un tube au néon, d'une lampe à mercure, ...).

Les plasmas chauds ont des températures supérieures à plusieurs dizaines d'eV (plusieurs centaines de milliers de Kelvins). Dans ce cas il n'y a quasiment plus de molécules neutres. Des exemples de plasmas chauds sont les plasmas stellaires (soleil, étoiles, etc), le vent solaire, les plasmas artificiels utilisés pour la fusion thermonucléaire (plasmas des Tokamaks, plasmas obtenus par irradiation de cibles par faisceaux lasers intenses, etc).

Les plasmas chauds et froids ont des comportements radicalement différents en raison de la nature des collisions entre les particules à l'échelle microscopique. En effet, dans un plasma chaud, les particules chargées interagissant via l'interaction électrostatique (on dit encore Coulombienne). Or, lorsque, la vitesse relative des particules est très grande, l'interaction Coulombienne a peu d'effet. Les plasmas chauds sont donc essentiellement des milieux non collisionnels. Dans un plasma froid au contraire, les particules chargées interagissent avec l'espèce prédominante, que constituent les molécules neutres. L'interaction est donc médiatisée par des forces à beaucoup plus courte portée que l'interaction Coulombienne. Il s'agit de forces dites de Van der Waals. Ces collisions dévient les particules de manière beaucoup efficace. Les plasmas froids sont donc des milieux collisionnels.

Autres aspects des plasmas

Champ magnétique Les plasmas sont fortement influencés par la présence ou non d'un champ magnétique extérieur. En effet, un champ magnétique confine les particules chargées à se déplacer principalement le long des lignes de champ, selon une trajectoire hélicoïdale (voir la figure 1.1). Les mouvements transverses au champ magnétique sont possibles (dérive en $E \times B$, diffusion, etc), mais sont beaucoup plus lents lorsque le champ magnétique est intense.

Quasineutralité Le dépôt d'une particule chargée dans un plasma va créer un champ électrique qui aura tendance à rétablir la neutralité électrique. A cause de ce phénomène de rappel, la différence relative de densité entre les ions positifs et les électrons se maintient globalement à un niveau assez faible. On a donc les relations suivantes :

$$\rho_e - \rho_i \ll \rho_e, \rho_i, \quad \rho_i \approx \rho_e,$$

où ρ_e est la densité électronique et ρ_i la densité des ions positifs. Ces relations traduisent la quasineutralité du plasma qui, bien que constituée de particules chargées, reste localement électriquement neutre.

Oscillations de plasma Dans un plasma, la fréquence d'oscillations électronique prend la valeur :

$$\omega_{pe}^2 = \frac{\rho q^2}{\varepsilon_0 m_e},$$

où ρ est la densité du plasma, q la charge élémentaire (positive), ε_0 la permittivité du vide et m_e la masse de l'électron. De même, on a la fréquence plasma ionique

$$\omega_{pi}^2 = \frac{\rho q^2}{\varepsilon_0 m_i}.$$

Toutefois, la masse ionique est beaucoup plus grande que la masse électronique. Donc la dynamique des électrons est beaucoup plus rapide que celle des ions.

1.2.3 La magnétosphère terrestre

La magnétosphère terrestre est située au-delà de l'ionosphère, c'est-à-dire au-dessus de 800 à 1000 km d'altitude. S'il n'y avait pas de vent solaire, le spectre magnétique de la Terre serait semblable à celui d'un aimant droit isolé. En réalité, la magnétosphère agit comme un écran et protège la surface terrestre des excès du vent solaire, nocif pour la vie. Elle s'oppose au vent solaire comme une pile de pont dévie le courant d'une rivière. En contrepartie le vent solaire déforme le spectre magnétique de la Terre en lui donnant une forme de queue de comètes.

1.2.4 L'ionosphère

Structure stratifiée de l'ionosphère

L'atmosphère est ionisée sur toute la surface du globe à partir de 60 km côté jour et de 120 km côté nuit jusqu'à la magnétopause. L'ionosphère désigne la région de l'espace où la densité des particules ionisées est la plus élevée. Au delà de 1000 km, c'est la magnétosphère : la densité des particules ionisées et des neutres est très faible. Il y a donc peu de collisions et le mouvement des particules est régi par le champ magnétique terrestre.

L'origine des ions et des électrons réside principalement dans l'interaction du flux du rayonnement photonique solaire et des molécules de l'atmosphère neutre. Un photon

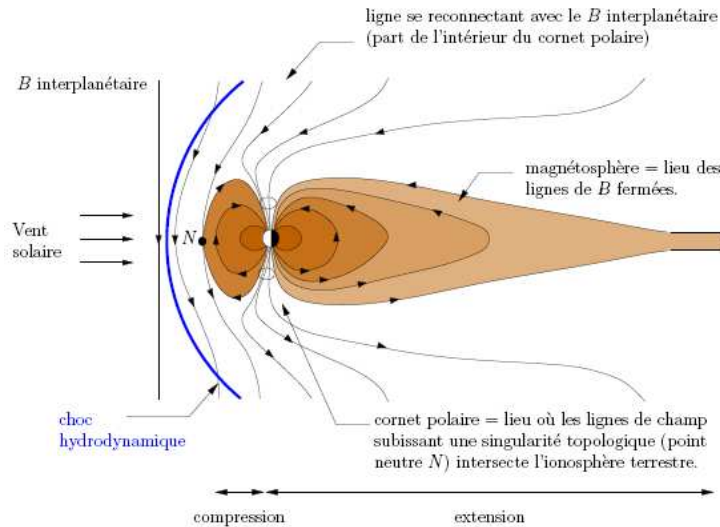


FIGURE 1.2 – La magnétosphère terrestre

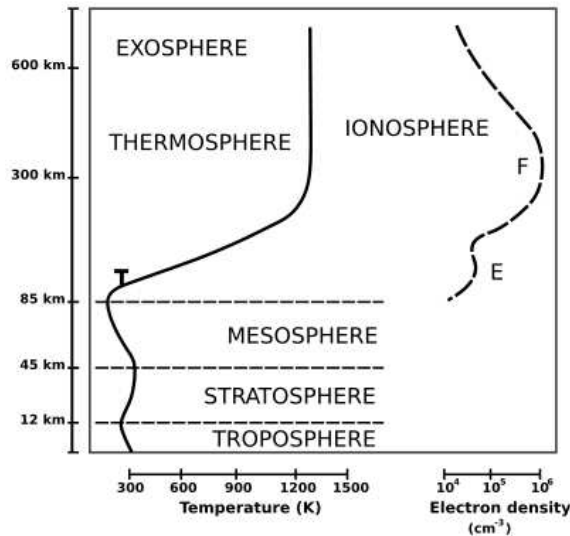
d'énergie supérieure au seuil d'ionisation peut arracher un électron à une molécule créant ainsi un ion. Un autre phénomène est la précipitation des particules du vent solaire par les cornets polaires (donnant lieu aux aurores boréales). De plus, il y a aussi des transformations chimiques ions-neutres ou des recombinaisons ions-électrons par exemple, qui compliquent la modélisation.

La densité maximale de plasma est située dans la région F (voir la figure 1.3) entre 200 et 400 km d'altitude avec des valeurs de 4×10^4 à $4 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$. Ceci correspond à des fréquences de résonance naturelle du plasma de 1.8 à 18 MHz. Toutes les ondes qui sont de fréquences inférieures à 18 MHz sont réfléchies par l'ionosphère. Par exemple, les ondes moyennes sont réfléchies par la couche E, les ondes courtes sont réfléchies par la couche F, alors que les ondes ultra-courtes ne sont pas réfléchies : elles traversent l'ionosphère et permettent ainsi l'établissement de communications avec les satellites.

Cependant les caractéristiques des couches E et F ainsi que la fréquence limite de 18 MHz varient en fonction de l'activité solaire ou d'instabilités ionosphériques. D'autre part, l'ionosphère est très perturbée dans les régions de hautes latitudes (précipitations) et à l'équateur (électrojet équatorial). Ces instabilités perturbent alors les signaux qui subissent des variations de phase et d'amplitude (phénomènes de scintillations).

En conclusion, l'ionosphère est stratifiée en couches, sous l'effet de la gravité et des différents mécanismes de création et de la recombinaison du plasma.

- Aux altitudes inférieures, l'atmosphère neutre joue un rôle prépondérant et la dynamique du plasma est fortement influencée par les collisions entre les ions ou les électrons d'une part et les neutres d'autre part. En particulier, les vents de neutres entraînent le plasma.
- L'altitude où la densité de plasma est maximale (10^5 à 10^6 cm^{-3}) se situe aux alentours de 200 à 400 km.
- Aux altitudes supérieures, la densité des neutres diminue très vite et le plasma



Région	Altitude	Description
D	< 90 km	absorbe les rayonnements les plus énergétiques (Hard X-Ray). Cette zone disparaît la nuit (en quelques minutes après le coucher du soleil)
E	< 105 km	absorbe les rayons X mous
F	105 à 600 km	absorbe les Extrême UV. subdivisée en deux zones : F1 (170 km) et F2 (250 km)

FIGURE 1.3 – Caractéristiques de l'atmosphère et de l'ionosphère

peut être considéré comme totalement ionisé au delà des quelques milliers de km d'altitude. Il se reconnecte alors au plasma magnétosphérique.

Les lignes de champ magnétique relient des régions d'altitudes différentes (sauf au voisinage de l'équateur où le champ magnétique est quasiment horizontal). Ainsi, par le mouvement rapide des particules (et en particulier des électrons) le long des lignes de champ magnétique, les plasmas aux différentes altitudes sont interconnectés.

Les sources du champ électrique et des courants ionosphériques

Dans l'ionosphère, les sources principales contribuant à la génération de champs électriques de grande échelle sont la dynamo ionosphérique, la dynamo magnétosphérique de vent solaire et l'activité orageuse. Ici, on s'intéresse plus particulièrement à la dynamo ionosphérique.

Les particules neutres, sous l'effet du vent dans la basse ionosphère, entraînent par collisions de particules chargées. En coupant les lignes de champ magnétique, elles créent un champ électrique induit (effet dynamo). Le champ électrique se traduit en la différence de potentiel. Or les électrons peuvent se déplacer librement et très rapidement le long des lignes de champ magnétique. En effet, la conductivité alignée le long du champ magnétique est de 100 S/m (Siemens par mètre), alors que la conductivité orthogonale au champ

magnétique est inférieure à 10^{-4} S/m. Par conséquence, la différence de potentiel créée dans la basse d'ionosphère est instantanément transmise aux altitudes supérieures.

1.3 Modélisation des irrégularités ionosphériques

1.3.1 Introduction

L'ionosphère joue un rôle important dans la propagation des ondes radio dans certaines gammes de fréquences, aussi bien pour les communications terrestres, que pour les liaisons terre-satellite. Cette couche de l'atmosphère est un milieu non-homogène et instable, perturbée par des forces liées au vent neutre ou vent solaire. Ce phénomène de perturbation, connu comme les scintillations ionosphériques, provoque la diffusion des ondes électromagnétiques. L'objet de cette section est d'établir et d'étudier un modèle mathématique permettant d'étudier ce phénomène pour aider à concevoir et à améliorer les dispositifs de communications entre la terre et les satellites.

Le point de départ sera une description fluide composée du système d'Euler-Maxwell pour un plasma composé de deux espèces *i.e.* électrons et ions. On met ce système en forme adimensionnelle par un choix approprié d'échelles des unités. Par cette mise à l'échelle, une collection de paramètres sans dimension apparaît, montrant les différents ordres de grandeur. Dans [4], deux hiérarchies sont étudiées, *i.e.* la hiérarchie MHD et la hiérarchie Dynamo. La hiérarchie Dynamo est adaptée à la situation standard de l'ionosphère, alors que la hiérarchie MHD est mieux adaptée à la situation d'anormales de forte sur-densité.

Dans cette section, on se concentre sur la hiérarchie Dynamo. Dans cette hiérarchie, le modèle le plus couramment utilisé est le modèle Dynamo, dans lequel le champ magnétique est réduit au champ magnétique terrestre, et le champ électrique est irrotationnel. Le potentiel électrique qui en résulte est la solution d'une équation elliptique déduite de l'équation de conservation du courant. Elle est couplée avec des équations de conservation de la masse et du moment (sans terme d'inertie). Le modèle Dynamo a été utilisé comme outil de base pour étudier ces instabilités [40] [49]. Les simulations numériques du modèle Dynamo dans un champ magnétique non-uniforme sont développées dans le chapitre 3.

Le modèle terminal de cette hiérarchie est le modèle Striation. Ce modèle est une réduction du modèle Dynamo dans lequel le champ électrique est forcé à être orthogonal au champ magnétique, donc donnant une équation elliptique en dimension deux. Cette équation est toujours couplée avec les équations de conservation de la masse et de la quantité de moment sans masse. Le modèle Striation a été largement utilisé dans la littérature physique parce que la réduction à une équation elliptique en dimension deux génère une augmentation considérable de l'efficacité de calcul.

Cette section est organisée comme suit : dans la section 1.3.2, le modèle d'Euler-Maxwell isotherme bifluide est indiqué. Puis dans la section 1.3.3, ce modèle est adimensionné et les paramètres sans dimension sont introduits. Dans la section 1.3.4, le modèle Dynamo est obtenu en faisant passer à la limite certains paramètres sans dimension, tandis que dans la section 1.3.5, le modèle final, dénommé modèle Striation, est établi. Enfin dans la section 1.3.6, nous étudions les instabilités de ces modèles.

1.3.2 Modèle d'Euler-Maxwell

Notations et unités

Nous considérons un plasma constitué de deux espèces de particules : des électrons de charge $-q$ et des ions de charge $+q$. Toutes les quantités relatives aux électrons seront indexées par e et celles relatives aux ions par i . Nous noterons $\rho_e(x, t)$, $\rho_i(x, t)$ les densités électroniques et ioniques, dépendant de la position $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et du temps t . De même, les vitesses moyennes des fluides électroniques et ioniques seront notées $u_e(x, t)$, $u_i(x, t)$, qui sont des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Les masses électroniques et ioniques seront respectivement notées m_e et m_i . On rappelle que $m_e \approx 10^{-30}$ kg. Pour les ions, on prendra l'exemple de l'ion O^+ dont la masse est approximativement $m_i \approx 40000m_e$. Ainsi, on peut introduire le petit paramètre : $\varepsilon := \frac{m_e}{m_i} \ll 1$.

On dénotera les pressions électroniques et ioniques par p_e et p_i . Les fréquences de collision électrons-neutres et ions-neutres sont notées ν_e et ν_i . Les collisions entre électrons et ions seront modélisées par une constante K . La gravité des électrons et ions est notée par $m_{e,i}g$, où $g := \frac{MG}{R^2}$ est l'accélération de la pesanteur, G la constante gravitationnelle, M la masse de la terre, R la distance entre le centre de la terre et l'objet.

On suppose que les températures $T_{e,i}$ sont constantes et égales, et pour simplifier notées T . Elle est associée à une énergie thermique égale à $k_B T$. La quantité $k_B T/q$ est homogène à un potentiel électrique et s'appelle potentiel thermique. Nous rappelons que 1 Volt correspondant à une température de 11600 Kelvin.

On notera $E(x, t)$ et $B(x, t)$ les champs électrique et magnétique. Notons qu'un champ électrique est homogène au produit d'un champ magnétique par une vitesse et donc que 1 tesla=1 Vsm⁻². L'ionosphère est plongée dans le champ magnétique terrestre, que l'on notera B_0 .

Les ondes électromagnétiques sont influencées par les matériaux qu'elles traversent. Les paramètres caractéristiques sont la permittivité électrique ε_r et la perméabilité magnétique μ_r . Dans le vide, ils sont égaux à ε_0 et μ_0 .

On résume toutes les quantités dans le tableau 1.1 [27].

Équations de conservation de densité

Les équations de conservation de la densité d'électrons et d'ions s'écrivent

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e u_e) = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i u_i) = 0, \quad (1.2)$$

où $\nabla \cdot$ désigne l'opérateur divergence.

(a) Quantités physiques

Quantité	Notation	Unité
Position	$x = (x_1, x_2, x_3)$	mètre (m)
Temps	t	seconde (s)
Densité électronique	ρ_e	m^{-3}
Densité ionique	ρ_i	m^{-3}
Vitesse électronique	u_e	m/s
Vitesse ionique	u_i	m/s
Vitesse neutre	u_n	m/s
Fréquence de collision e-n	ν_e	s^{-1}
Fréquence de collision i-n	ν_i	s^{-1}
Masse électronique	m_e	kg
Masse ionique	m_i	kg
Pression électronique	p_e	Pa
Pression ionique	p_i	Pa
Température	T	Kelvin (K)
Champ électrique	E	Volt/m
Champ magnétique	B	Tesla (T)
Densité de charge	ρ_q	Coulomb m^{-3}
Courant	j	Ampère m^{-2}
Accélération de la pesanteur	g	m s^{-1}
Distance objet-terre	R	m
Collision entre électron-ion	K	$\text{kg m}^3 \text{s}^{-1}$

(b) Constantes physiques

Quantité	Notation	Valeur
Charge élémentaire	q	10^{-19} Coulomb
Constante de Boltzmann	k_B	10^{-23} JK ⁻¹
Champ magnétique terrestre	B_0	5×10^{-5} T
Permittivité électrique du vide	ε_0	10^{-11} Fm ⁻¹
Perméabilité magnétique du vide	μ_0	10^{-6} Hm ⁻¹
Vitesse lumière	c	3×10^8 ms ⁻¹
Constante gravitationnelle	G	6.67259×10^{-11} m ³ s ⁻² kg ⁻¹
Masse de la terre	M	5.9742×10^{24} kg
Rayon de la terre	R_E	6.3710×10^6 m

TABLE 1.1 – Quantités physiques et constantes physiques

Équations de bilan d'impulsion des particules

L'équation de bilan d'impulsion pour les électrons s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(m_e \rho_e u_{ek}) + \nabla \cdot (m_e \rho_e u_{ek} u_e) \\ &= -\frac{\partial p_e}{\partial x_k} - q \rho_e (E_k + (u_e \times B)_k) + \rho_e m_e g - \nu_e m_e \rho_e (u_{ek} - u_{nk}) - K \rho_e \rho_i (u_{ek} - u_{ik}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

où l'indice k dénote la k -ème composante d'un vecteur ($k \in \{1, 2, 3\}$). Au membre de droite de (1.3), des termes de forces se décomposent en la force de la pression $-\nabla p_e$, la force de Lorentz $q \rho_e (E + (u_e \times B))$, la gravité $\rho_e m_e g$, les collisions entre les électrons et les molécules d'air neutre $-\nu_e m_e \rho_e (u_{ek} - u_{nk})$ et les collisions entre les électrons et les ions $-K \rho_e \rho_i (u_{ek} - u_{ik})$.

Sur les échelles de temps et d'espace considérées, la température peut être supposée constante. Les deux fluides sont donc isotherme de température T donnée, identique pour les électrons et les ions. Par cette hypothèse, la relation entre la pression et la densité s'exprime par la loi d'état des gaz parfaits isothermes :

$$p_e = \rho_e k_B T. \quad (1.4)$$

La force de Lorentz $-q(E + (u_e \times B))$ est la force qui s'exerce sur toute particule individuelle de charge q en mouvement dans des champs électriques et magnétiques. On la multiplie par ρ_e pour calculer la densité d'impulsion.

Dans l'ionosphère, les collisions entre les électrons et les molécules d'air neutre peuvent être décrites par une force de friction s'écrivant $-\nu_e m_e (u_e - u_n)$. Elle a une tendance à équilibrer la vitesse des électrons et celle des molécules d'air. Les collisions entre les électrons et les ions sont modélisées par une constante de taux K . On remarque que cette force est très faible dans l'ionosphère basse par rapport aux collisions entre les électrons et les molécules d'air neutre, car les densités électroniques et ioniques sont beaucoup plus faibles que la densité de neutres. En revanche, dans l'ionosphère haute, cette force est importante en raison d'un plasma complètement ionisé.

L'équation de bilan d'impulsion pour les ions s'écrit de manière analogue :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(m_i \rho_i u_{ik}) + \nabla \cdot (m_i \rho_i u_{ik} u_i) \\ &= -\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + q \rho_i (E_k + (u_i \times B)_k) + \rho_i m_i g - \nu_i m_i \rho_i (u_{ik} - u_{nk}) - K \rho_e \rho_i (u_{ik} - u_{ek}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

On remarque le changement de signe de la charge dans la force de Lorentz dû à la charge positive des ions.

Équations de Maxwell

Les équations régissant l'évolution des champs électromagnétiques sont les équations de Maxwell

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 j, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_q, \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.9)$$

où $\rho_q(x, t)$ et $j(x, t)$ désignent respectivement les densités de charge et de courant électrique :

$$\rho_q(x, t) = q(\rho_i - \rho_e), \quad (1.10)$$

$$j(x, t) = q(\rho_i u_i - \rho_e u_e). \quad (1.11)$$

Les équations (1.6) à (1.9) s'appellent respectivement équations de Maxwell-Ampère, Maxwell-Faraday, Maxwell-Gauss et équation de conservation du flux de B .

Bilan des équations décrivant le plasma

On peut donc résumer le système d'équations décrivant le plasma suivant : le fluide électronique est décrit par sa densité ρ_e et sa vitesse moyenne u_e , solutions du système :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e u_e) = 0, \quad (1.12a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (m_e \rho_e u_{ek}) + \nabla \cdot (m_e \rho_e u_{ek} u_e) \\ & = -\frac{\partial p_e}{\partial x_k} - q \rho_e (E_k + (u_e \times B)_k) + \rho_e m_e g - \nu_e m_e \rho_e (u_{ek} - u_{nk}) - K \rho_e \rho_i (u_{ek} - u_{ik}), \end{aligned} \quad (1.12b)$$

avec $p_e = \rho_e k_B T$.

Le fluide ionique est décrit par sa densité ρ_i et sa vitesse moyenne u_i , solutions du système :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i u_i) = 0, \quad (1.12c)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (m_i \rho_i u_{ik}) + \nabla \cdot (m_i \rho_i u_{ik} u_i) \\ & = -\frac{\partial p_i}{\partial x_k} + q \rho_i (E_k + (u_i \times B)_k) + \rho_i m_i g - \nu_i m_i \rho_i (u_{ik} - u_{nk}) - K \rho_e \rho_i (u_{ik} - u_{ek}), \end{aligned} \quad (1.12d)$$

avec $p_i = \rho_i k_B T$.

Ces équations sont couplées au système de Maxwell pour les champs E et B :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\mu_0 j, \quad (1.12e)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (1.12f)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_q, \quad (1.12g)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.12h)$$

via les sources du champ :

$$\rho_q(x, t) = q(\rho_i - \rho_e), \quad (1.12i)$$

$$j(x, t) = q(\rho_i u_i - \rho_e u_e). \quad (1.12j)$$

Ces équations, bien que déjà simplifiées par certaines hypothèses, restent trop coûteuses pour une simulation réaliste. Nous allons donc procéder à un adimensionnement permettant d'identifier les termes prépondérants.

1.3.3 Adimensionnement du modèle

Jeu de grandeurs de référence pour la modélisation de l'ionosphère

On considère dans cette section des grandeurs de référence typique d'un plasma ionosphérique [4]. Toutes les grandeurs de référence sont résumées dans le tableau 1.2a.

- Longueur de référence \bar{x} : On s'intéressera à une région de l'espace de quelques centaines de kilomètres d'étendue et donc on choisira $\bar{x} = 10^5 \text{m}$.
- Vitesse de référence \bar{u} : L'ionosphère étant mise en mouvement par le vent neutres, l'ordre de grandeur des vitesses électronique et ionique est équivalente par rapport à celle du vent de neutres. On prendra $\bar{u} = 10^2 \text{ms}^{-1}$.
- Temps de référence \bar{t} : Il est calculé à partir des choix de la longueur et de la vitesse de référence. On a $\bar{t} = \bar{x}/\bar{u} = 10^3 \text{s}$.
- Densité de référence $\bar{\rho}$: On choisit la densité caractéristique de l'ionosphère non perturbée à son maximum de densité, soit environ 10^{12}m^{-3} .
- Champ magnétique \bar{B} : On verra que le champ magnétique induit par le mouvement du plasma est très faible devant le champ magnétique terrestre B_0 . On choisit donc $\bar{B} = B_0 = 10^{-5} \text{T}$.
- Champ électrique \bar{E} : C'est le champ électrique induit par le mouvement du plasma à travers les lignes du champ magnétique terrestre. Il a donc pour valeur $\bar{E} = \bar{u}\bar{B} = 10^{-3} \text{Vm}^{-1}$.
- Pression de référence \bar{p} : On a la relation entre la pression et la densité $p = \rho k_B T$. En supposant un équilibre thermodynamique, *i.e.* $T = T_e = T_i$ à l'altitude de 300km, on a $\bar{T} = 10^3 \text{K}$. Donc dans la situation calme, $\bar{p} = \bar{\rho} k_B \bar{T} = 10^{-8} \text{Pa}$.

1.3. Modélisation des irrégularités ionosphériques

(a) Unités de mesure et quantités adimensionnées

Quantité	Unité de mesure	Quantité adimensionnée	Valeur
Longueur	\bar{x}	$x' = x/\bar{x}$	10^5m
Temps	\bar{t}	$t' = t/\bar{t}$	10^3s
Densité	$\bar{\rho}$	$\rho'_{e,i} = \rho_{e,i}/\bar{\rho}$	10^{12}m^{-3}
Vitesse	$\bar{u} = \bar{x}/\bar{t}$	$u'_{e,i,n} = u_{e,i,n}/\bar{u}$	10^2m/s
Fréquence de collision e-n	$\bar{\nu}_e$	$\nu'_e = \nu_e/\bar{\nu}_e$	10^2s^{-1}
Fréquence de collision i-n	$\bar{\nu}_i = \frac{m_e}{m_i}\bar{\nu}_e$	$\nu'_i = \nu_i/\bar{\nu}_i$	10^{-2}s^{-1}
Pression	\bar{p}	$p'_{e,i} = p_{e,i}/\bar{p}$	10^{-8}Pa
Température	\bar{T}	$T'_{e,i} = T_{e,i}/\bar{T}$	10^3K
Accélération de la pesanteur	\bar{g}	$g' = g/\bar{g}$	10^1m/s
Champ magnétique	\bar{B}	$B' = B/\bar{B}$	10^{-5}T
Champ électrique	$\bar{E} = \bar{u}\bar{B}$	$E' = E/\bar{E}$	10^{-3}V/m
Densité de charge	$\bar{\rho}_q = q\bar{\rho}$	$\rho'_q = \rho_q/\bar{\rho}$	10^{-7}C m^{-3}
Densité de courant	$\bar{j} = q\bar{\rho}\bar{u}\kappa$	$j' = j/\bar{j}$	10^{-9}A m^{-2}
Collision entre électron-ion	\bar{K}	$K' = K/\bar{K}$	$10^{-39}\text{kg m}^3 \text{s}^{-1}$

(b) Paramètres sans dimension

Paramètre sans dimension	Description	Valeur
$\varepsilon = \frac{m_e}{m_i}$	Rapport de la masse ionique à la masse électronique	10^{-4}
$\tau = \frac{1}{\nu_i \bar{t}} = \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{\nu_e \bar{t}}$	Temps moyen entre les collisions i-n	10^{-1}
$\eta = \frac{\bar{p}}{m_i \bar{\rho} \bar{u}^2} \frac{1}{\bar{\nu}_i \bar{t}}$	Mesure de l'énergie thermique	10^1
$\kappa = \frac{m_e \bar{\nu}_e}{qB} = \frac{m_i \bar{\nu}_i}{qB}$	Nombre de collisions entre e-n ou i-n par période de rotation dans le champ magnétique	10^{-4}
$\kappa_{ei} = \frac{\bar{K}}{\mu_0 \bar{x} q^2 \bar{u}}$	Mesure de fréquence de collisions entre e-i	10^{-2}
$\alpha = \frac{\bar{u}^2}{c^2}$	Rapport du carré de la vitesse au carré de la vitesse de la lumière	10^{-12}
$\beta = \frac{m_i \bar{\rho} \bar{u}^2 \mu_0 \nu_i \bar{t}}{B^2}$	Énergie de dérive par rapport à l'énergie magnétique	10^{-5}
$\zeta = \frac{\bar{g}}{\bar{\nu}_i \bar{u}}$	Accélération de la pesanteur par rapport à l'accélération ionique	10^1

TABLE 1.2 – Quantités adimensionnées et paramètres sans dimension

- Accélération de pesanteur de référence : L'accélération de pesanteur est définie par $\frac{MG}{R^2}$. Sur la terre, cette quantité moyenne est égale à 9.8m/s. Donc on prend $\bar{g} = 10^1\text{m/s}$.
- Fréquence de collisions avec les neutres $\bar{\nu}_{e,i}$: On suppose que $\nu_{e,i}$ est indépendant de t . $\bar{\nu}_i$ est choisie à la valeur moyenne de la fréquence de collision ions-neutres $\bar{\nu}_i = 10^{-2}\text{s}^{-1}$. Les électrons se déplacent plus vite que les ions, donc $\bar{\nu}_e = \frac{m_i}{m_e}\bar{\nu}_i = 10^2\text{s}^{-1}$.
- Fréquence de collisions ions-électrons \bar{K} : $\bar{K} = 10^{-39}\text{kg m}^3 \text{s}^{-1}$.
- Densité de charge de référence $\bar{\rho}_q$: On la lie à la densité caractéristique du plasma par $\bar{\rho}_q = q\bar{\rho} = 10^{-7}\text{Cm}^{-3}$.
- Densité de courant de référence \bar{j} : Comme pour la densité de charge, on écrit $\bar{j} = q\bar{\rho}\bar{u} = 10^{-5}\text{Am}^{-2}$. Toutefois, on note le fait que le rapport entre fréquence de collisions électrons-neutres et ions-neutres est équivalent au rapport entre les masses ionique et électronique. L'échelle de courant est plus petite que $q\bar{\rho}\bar{u}$ par un facteur $\kappa = \frac{\bar{K}}{\mu_0\bar{x}q^2\bar{u}}$ parce que les électrons et les ions ont tendance à dériver à la même vitesse à travers le champ magnétique. Une mesure typique de leur vitesse relative est $\mu_p\bar{E}$, où μ_p est la mobilité Pedersen, donnée par $\mu_p = \kappa/\bar{B}$. Ainsi la valeur typique du courant est $\bar{j} \approx q\bar{\rho}\mu_p\bar{E} = q\bar{\rho}\bar{u}\kappa = 10^{-9}\text{Am}^{-2}$.

Adimensionnement des équations d'Euler

Équations de conservations des densités On reprend les équations de conservations des densités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{e,i} + \nabla_x \cdot (\rho_{e,i}u_{e,i}) = 0.$$

On introduit $\rho_{e,i} = \bar{\rho}\rho'_{e,i}$, $t = \bar{t}t'$, $x = \bar{x}x'$ et $u_{e,i} = \bar{u}u'_{e,i}$ dans ces équations, et on obtient

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{t}}\frac{\partial}{\partial t'}\rho'_{e,i} + \frac{\bar{\rho}\bar{u}}{\bar{x}}\nabla_{x'} \cdot (\rho'_{e,i}u'_{e,i}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\rho'_{e,i} + \nabla_{x'} \cdot (\rho'_{e,i}u'_{e,i}) = 0.$$

Notons que l'adimensionnement ne change pas les équations de conservation des densités électroniques et ioniques. Dans toute la suite, on omettra les primes. Il est convenu désormais que toutes des notations $\rho_{e,i}$, $u_{e,i}$, E , etc..., désignent des quantités adimensionnées. Donc les équations de conservation adimensionnées sont

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e u_e) = 0, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i u_i) = 0. \tag{1.14}$$

Équations de bilan d'impulsion De la même manière, on obtient les équations de bilan d'impulsion adimensionnées suivantes

$$\begin{aligned} & \tau \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{ek}) + \nabla \cdot (\rho_e u_{ek} u_e) \right) \\ &= -\eta \frac{\partial p_e}{\partial x_k} - \kappa^{-1} \rho_e (E_k + (u_e \times B)_k) + \varepsilon \zeta \rho_e g_k - \nu_e \rho_e (u_{ek} - u_{nk}) \\ & \quad - \frac{\kappa_{e,i} \beta}{\kappa^2} K \rho_e \rho_i (u_{ek} - u_{ik}), \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} & \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u_{ik}) + \nabla \cdot (\rho_i u_{ik} u_i) \right) \\ &= -\eta \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \kappa^{-1} \rho_i (E_k + (u_i \times B)_k) + \zeta \rho_i g_k - \nu_i \rho_i (u_{ik} - u_{nk}) \\ & \quad - \frac{\kappa_{e,i} \beta}{\kappa^2} K \rho_e \rho_i (u_{ik} - u_{ek}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

où les paramètres sans dimension sont résumés dans le tableau 1.2b. Les significations des paramètres sont suivantes : κ est le nombre de collisions électron-neutre (ou collisions d'ions-neutres) par rapport à une période de rotation d'un électron dans le champ magnétique terrestre. De même, κ_{ei} est une mesure de la force de collisions d'électron-ion. β mesure la force du champ magnétique induit par rapport à celle du champ magnétique terrestre.

Adimensionnement des équations de Maxwell

L'adimensionnement des équations de Maxwell donne :

$$\alpha \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\beta j, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (1.18)$$

$$\frac{\kappa \alpha}{\beta} \nabla \cdot E = \rho_q, \quad (1.19)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.20)$$

où α est le rapport de la vitesse caractéristique du système à la vitesse de lumière. L'adimensionnement des équations des sources du champ est immédiate

$$\rho_q = \rho_i - \rho_e, \quad (1.21)$$

$$\kappa j = \rho_i u_i - \rho_e u_e. \quad (1.22)$$

Bilan des équations d'Euler-Maxwell adimensionnées

Le modèle d'Euler-Maxwell adimensionné s'écrit de la manière suivante :

– Pour les électrons

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_e u_e) = 0, \quad (1.23a)$$

$$\begin{aligned} & \tau \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_e u_{ek}) + \nabla \cdot (\rho_e u_{ek} u_e) \right) \\ &= -\eta \frac{\partial p_e}{\partial x_k} - \kappa^{-1} \rho_e (E_k + (u_e \times B)_k) + \varepsilon \zeta \rho_e g_k - \nu_e \rho_e (u_{ek} - u_{nk}) \\ & \quad - \frac{\kappa_{e,i} \beta}{\kappa^2} K \rho_e \rho_i (u_{ek} - u_{ik}). \end{aligned} \quad (1.23b)$$

– Pour les ions

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i u_i) = 0, \quad (1.23c)$$

$$\begin{aligned} & \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u_{ik}) + \nabla \cdot (\rho_i u_{ik} u_i) \right) \\ &= -\eta \frac{\partial p_i}{\partial x_k} + \kappa^{-1} \rho_i (E_k + (u_i \times B)_k) + \zeta \rho_i g_k - \nu_i \rho_i (u_{ik} - u_{nk}) \\ & \quad - \frac{\kappa_{e,i} \beta}{\kappa^2} K \rho_e \rho_i (u_{ik} - u_{ek}). \end{aligned} \quad (1.23d)$$

– Pour les équations de Maxwell

$$\alpha \frac{\partial E}{\partial t} - \nabla \times B = -\beta j, \quad (1.23e)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (1.23f)$$

$$\frac{\kappa \alpha}{\beta} \nabla \cdot E = \rho_q, \quad (1.23g)$$

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (1.23h)$$

– Pour les sources du champ

$$\rho_q = \rho_i - \rho_e, \quad (1.23i)$$

$$\kappa j = \rho_i u_i - \rho_e u_e. \quad (1.23j)$$

1.3.4 Modèle Dynamo tridimensionnel

Dans cette section, nous faisons une analyse asymptotique conduisant le modèle d'Euler-Maxwell ainsi au modèle Dynamo.

Premièrement, faisant la limite $\alpha \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ du système d'Euler-Maxwell bifluide

(1.23) avec les autres paramètres gardés finis donne le système suivant :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (1.24a)$$

$$\begin{aligned} & \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i u_{ik}) + \nabla \cdot (\rho_i u_{ik} u_i) \right) \\ & = -\eta \frac{\partial p}{\partial x_k} + (j \times B)_k + \zeta \rho g_k - \nu_e \rho (u_{ek} - u_{nk}) - \nu_i \rho (u_k - u_{nk}), \end{aligned} \quad (1.24b)$$

$$E + u_e \times B - \beta \kappa_{ei} K j = -\kappa \left[\nu_e (u_e - u_n) + \eta \frac{\nabla p_e}{\rho} \right], \quad (1.24c)$$

$$\nabla \times B = \beta j, \quad (1.24d)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (1.24e)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.24f)$$

$$\kappa j = \rho (u - u_e), \quad (1.24g)$$

où $\rho = \lim \rho_i = \lim \rho_e$, $u = \lim u_i$, et $p = p_i + p_e$.

En effet, avec $\alpha \rightarrow 0$ et β borné loin de 0, on en déduit que ρ_i et ρ_e convergent à la même limite ρ (quasineutralité). De même, dans (1.23e) la loi d'Ampère se réduit à (1.24d). L'équation de densité de conservation ionique (1.23c) donne (1.24a). L'équation de bilan d'impulsion électronique, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, implique (1.24c). La somme d'équations d'impulsion électronique (1.23b) et ionique (1.23d), dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, entraîne (1.24b). La loi de Faraday (1.23f) et (1.23h) sont inchangées et conduisent à (1.24e), (1.24f), ainsi que (1.23j) entraîne (1.24g). Ensuite en passant $\tau \rightarrow 0$, nous avons formellement le modèle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (1.25a)$$

$$-\eta \frac{\partial p}{\partial x_k} + (j \times B)_k + \zeta \rho g_k - \nu_e \rho (u_{ek} - u_{nk}) - \nu_i \rho (u_k - u_{nk}) = 0, \quad (1.25b)$$

$$E + u_e \times B - \beta \kappa_{ei} K j = -\kappa \left[\nu_e (u_e - u_n) + \eta \frac{\nabla p_e}{\rho} \right], \quad (1.25c)$$

$$\nabla \times B = \beta j, \quad (1.25d)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (1.25e)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.25f)$$

$$\kappa j = \rho (u - u_e). \quad (1.25g)$$

Il est plus général de restituer la symétrie entre les électrons et les ions en faisant la somme

de (1.25b) et (1.25c) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i) = 0, \quad (1.26a)$$

$$E + u_i \times B = \kappa \left[\nu_i(u_i - u_n) + \eta \frac{\nabla p_i}{\rho} - \zeta g \right] + \beta \kappa_{ei} K j, \quad (1.26b)$$

$$E + u_e \times B = -\kappa \left[\nu_e(u_e - u_n) + \eta \frac{\nabla p_e}{\rho} \right] + \beta \kappa_{ei} K j, \quad (1.26c)$$

$$\nabla \times B = \beta j, \quad (1.26d)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times E = 0, \quad (1.26e)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (1.26f)$$

$$\kappa j = \rho(u_i - u_e). \quad (1.26g)$$

Nous avons également restitué l'indice i pour la vitesse des ions. Enfin dans la limite $\beta \rightarrow 0$, le champ magnétique B converge vers une solution du système :

$$\nabla \times B = 0, \quad \nabla \cdot B = 0, \quad (1.27)$$

B étant un champ magnétique externe donné, supposé indépendant de l'échelle de temps t choisi, nous faisons le choix du champ magnétique terrestre, qui respecte à ces contraintes.

Lorsque $\beta \rightarrow 0$, le modèle d'Euler-Maxwell converge formellement vers le modèle Dynamo :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i) = 0, \quad (1.28a)$$

$$E + u_i \times B = \kappa \left[\nu_i(u_i - u_n) + \eta \frac{\nabla p_i}{\rho} - \zeta g \right], \quad (1.28b)$$

$$E + u_e \times B = -\kappa \left[\nu_e(u_e - u_n) + \eta \frac{\nabla p_e}{\rho} \right], \quad (1.28c)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (1.28d)$$

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (1.28e)$$

$$\kappa j = \rho(u_i - u_e), \quad (1.28f)$$

où B est la solution de (1.27), le champ magnétique externe et indépendant de temps.

Nous notons que la pression vérifiant la hypothèse des gaz parfaits isothermes (1.4). En faisant adimensionner cette relation, on obtient

$$p_i = p_e = \nabla(\rho T). \quad (1.29)$$

Puis en injectant (1.29) dans les équations (1.28b)–(1.28c), on a

$$E + u_i \times B = \kappa \left[\nu_i(u_i - u_n) + \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} - \zeta g \right], \quad (1.30)$$

$$E + u_e \times B = -\kappa \left[\nu_e(u_e - u_n) + \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right]. \quad (1.31)$$

Les équations (1.30)–(1.31) peuvent être écrites de manière équivalente comme une équation elliptique pour le potentiel électrique. En effet, (1.30), (1.31) prennent également la forme

$$\kappa\nu_i u_i - u_i \times B = F_i := E + \kappa \left(\nu_i u_n - \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} + \zeta g \right), \quad (1.32)$$

$$\kappa\nu_e u_e + u_e \times B = F_e := -E + \kappa \left(\nu_e u_n - \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right). \quad (1.33)$$

Dans une première étape, pour simplifier, nous supposons que B_0 est uniforme. On introduit alors un système de coordonnées dans lequel la troisième composante est parallèle à B_0 (voir la figure 1.4(b)). Nous supposons aussi que la température est constante, en particulier $T = 1$. On munit l'espace du repère orthonormé $(0, x_1, x_2, x_3)$ où la direction x_3 est définie par le vecteur directeur $e_3 = \frac{B}{|B|}$. Pour un vecteur A arbitraire, on note

$$\begin{aligned} A_\perp &= A_1 e_1 + A_2 e_2, \quad A_\parallel = A_3 e_3, \quad A^\perp = -A_2 e_1 + A_1 e_2, \\ \nabla_\perp \cdot A_\perp &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}, \quad \nabla_\parallel \cdot A_\parallel = \frac{\partial A_3}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

et enfin, si f est un scalaire

$$\nabla_\perp f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, 0 \right), \quad \nabla_\parallel f = \left(0, 0, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right).$$

Avec ces notations le système (1.32)–(1.33) peut être résolu en :

$$u_i = \mathbb{M}_i F_i, \quad u_e = \mathbb{M}_e F_e, \quad (1.34)$$

avec les matrices de mobilités ioniques et électroniques

$$\mathbb{M}_i = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\nu_i}{\kappa^2\nu_i^2+|B|^2} & \frac{|B|}{\kappa^2\nu_i^2+|B|^2} & 0 \\ \frac{-|B|}{\kappa^2\nu_i^2+|B|^2} & \frac{\kappa\nu_i}{\kappa^2\nu_i^2+|B|^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa\nu_i} \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\mathbb{M}_e = \begin{pmatrix} \frac{\kappa\nu_e}{\kappa^2\nu_e^2+|B|^2} & \frac{-|B|}{\kappa^2\nu_e^2+|B|^2} & 0 \\ \frac{|B|}{\kappa^2\nu_e^2+|B|^2} & \frac{\kappa\nu_e}{\kappa^2\nu_e^2+|B|^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\kappa\nu_e} \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

où les matrices de mobilités \mathbb{M}_i et \mathbb{M}_e sont exprimées en vecteurs de base, dans lesquels le dernier vecteur de base est parallèle au champ magnétique. De (1.28d), on déduit

$$E = -\nabla\phi, \quad (1.37)$$

et (1.28e) implique :

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot (\rho(\mathbb{M}_i + \mathbb{M}_e)\nabla\phi) \\ & = -\kappa\nabla \cdot \left\{ \rho \left[\mathbb{M}_i \left(\nu_i u_n - \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} + \zeta g \right) - \mathbb{M}_e \left(\nu_e u_n - \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ainsi (1.38) est une équation elliptique en dimension trois pour ϕ . On note également la relation suivante, qui est obtenue en prenant la différence de (1.30) et (1.31) :

$$j \times B = \rho(\nu_i u_i + \nu_e u_e) - \rho u_n(\nu_i + \nu_e) + 2\eta\nabla\rho - \zeta\rho g. \quad (1.39)$$

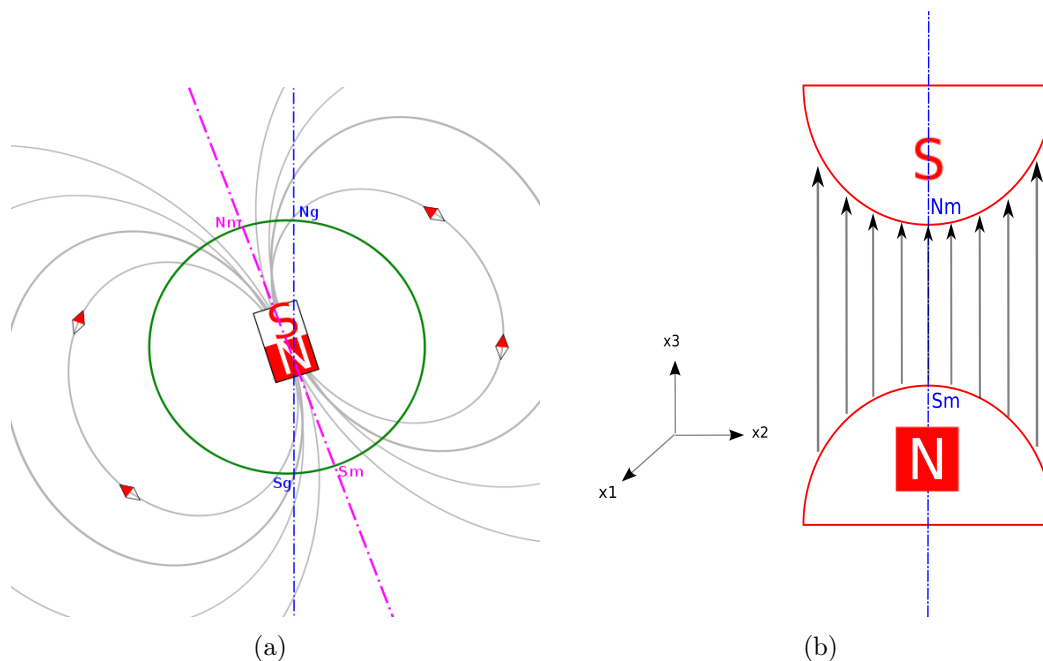


FIGURE 1.4 – (a) le champ magnétique terrestre ; (b) le champ magnétique uniforme.

1.3.5 Modèle Striation bidimensionnel

L'ultime limite conduit au modèle Striation. Elle implique la combinaison d'un problème en dimension deux pour le calcul du potentiel électrique couplée à une équation de conservation de la masse en dimension trois.

La limite formelle de $\kappa \rightarrow 0$ du modèle Dynamo est le modèle Striation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (1.40a)$$

$$j \times B = \nu \rho (u - u_n) + 2\eta \nabla \rho - \zeta \rho g, \quad (1.40b)$$

$$E + u \times B = 0, \quad (1.40c)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (1.40d)$$

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (1.40e)$$

où B est la solution de (1.27) et $\nu = \nu_i + \nu_e$.

En effet, l'équation (1.40c) est obtenue de (1.28b) ou (1.28c) quand $\kappa \rightarrow 0$. De même, (1.28f) implique $u_i = u_e$, que nous notons u . Enfin, (1.39) conduit à (1.40b).

Dans le modèle Striation, le champ électrique est orthogonal au champ magnétique, car la relation (1.40c) implique $E = -u \times B = -u_2 e_1 + u_1 e_2$, ainsi $E_{\parallel} = 0$. Nous avons également par (1.40c) que $u_{\perp} = -\left(\frac{\nabla \phi \times B}{|B|^2}\right)_{\perp}$. En faisant le produit scalaire entre (1.40b) et B , on a $u_{\parallel} = u_{n\parallel} - 2\frac{\eta \nabla \rho}{\nu \rho} \frac{B}{|B|} + \frac{\zeta}{\nu} g_{\parallel}$. Donc u se décompose en composantes orthogonales

et parallèles aux lignes de champ magnétique

$$u = -\frac{\nabla\phi \times B}{|B|^2} + \left(\left(u_n - 2\frac{\eta\nabla\rho}{\nu\rho} + \frac{\zeta}{\nu}g \right) \cdot \frac{B}{|B|} \right) \frac{B}{|B|}. \quad (1.41)$$

En faisant ensuite le produit vectoriel entre (1.40b) et B , on obtient

$$j_{\perp} = -\frac{1}{|B|^2} (\nu\rho(u - u_n) \times B + 2\eta\nabla\rho \times B - \zeta\rho g \times B)_{\perp}. \quad (1.42)$$

Donc le passage du modèle Dynamo au modèle Striation implique une réduction de la dimension du problème elliptique à résoudre pour trouver ϕ . En supposant que B est uniforme et que j s'annule à l'infini, on a

$$E = -\nabla\phi \quad (1.43)$$

où $\phi = \phi(x_1, x_2)$ est indépendant de x_3 et est une solution du système elliptique suivant :

$$\nabla_{\perp} \cdot J_{\perp} = 0, \quad (1.44)$$

$$J_{\perp} = \int j_{\perp} dx_3, \quad (1.45)$$

avec j_{\perp} définie dans (1.42).

Dans la littérature physique, le modèle (1.40) est souvent désigné comme le modèle Striation multi-couches, parce que la coordonnée x_3 est discrétisée en un nombre fini de couches. Le cas particulier d'une seule couche est obtenu lorsque u_n et g sont orthogonaux à B et toutes les données et les inconnues sont indépendantes de x_3 . Alors, le modèle Striation mono-couche est écrit :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (1.46a)$$

$$u = -\frac{\nabla\phi \times B}{|B|^2}, \quad (1.46b)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot (\rho h) = 0, \quad (1.46c)$$

$$h = -\frac{1}{|B|^2} \left(\nu(u - u_n) \times B + 2\eta\frac{\nabla\rho}{\rho} \times B - \zeta g \times B \right)_{\perp}, \quad (1.46d)$$

où la quantité h représente la vitesse relative d'électrons-ions. On remarque que dans le système (1.46) la vitesse u est de divergence nulle. En effet, en prenant la divergence en $\nabla\phi \times B$, il est facile de vérifier $\nabla \cdot \nabla\phi \times B = 0$. Ainsi $\nabla \cdot u = 0$.

1.3.6 Instabilité de dérive en $E \times B$: théorie phénoménologique

Introduction et phénoménologie

Afin de présenter le phénomène conduisant à l'instabilité, considérons le cas ne présentant que la gravité. Supposons un état d'équilibre consistant en une densité discontinue

$\rho_1 > \rho_2$, avec $\nabla\phi^0 = 0$ (cf. figures 1.5(a) et 1.5(b)). On perturbe légèrement l'interface qui est représentée par le graphe de la fonction $x_2 = \varepsilon \sin(\xi x_1)$, où ε représente la magnitude de la perturbation et ξ est sa fréquence spatiale.

Le terme $g \times B$ dans (1.46d) crée une modulation de charge le long de l'interface qui est alternativement positive et négative (cf. figures 1.5(e) et 1.5(f)). Alors un champ électrique $-\nabla\phi$ se crée. Puis par (1.46b) une composante non nulle de la vitesse u dans la direction normale à l'interface est créée avec des signes alternatifs (cf. figures 1.5(g) et 1.5(h)). Dans le premier cas (cf. figures 1.5(i)), la densité en bas est plus lourde, alors cette composante de la vitesse permet l'amortissement de la modulation de l'interface; dans le deuxième cas (cf. figures 1.5(j)), la densité en bas est plus légère, alors cette composante de la vitesse permet l'augmentation de la modulation de l'interface. Ce comportement peut être expliqué par l'analyse de stabilité linéaire.

Analyses de stabilité linéaire : profil de densité exponentielle en dimension deux

Dans le reste de cette section, on suppose que ν est une constante uniforme, et par un choix convenable des unités de l'échelle, on pose $\nu = 1$, $\zeta = 1$, $|B| = 1$ et $B = e_3$. Notons $(\rho^0, u^0, h^0, \phi^0)$ l'état non perturbé, *i.e.* une solution indépendante du temps du système Striation (1.46). On considère un profil de densité exponentiel dans la direction x_2 , c'est à dire $\rho^0 = N \exp(x_2/\lambda)$, où $\lambda > 0$ est la longueur de gradient, et $(u^0, h^0, \nabla\phi^0)$ sont des constantes uniformes. On suppose que le vent de neutres est aussi uniforme et a des composantes $u_n = (V, U)$.

En injectant ρ^0 et u^0 dans (1.46a), on obtient $\frac{\rho^0}{\lambda} u_2^0 = 0$, ainsi $u_2^0 = 0$. En utilisant l'expression de vitesse $u^0 = \begin{pmatrix} -\partial_{x_2}\phi^0 \\ \partial_{x_1}\phi^0 \end{pmatrix}$, on a $\partial_{x_1}\phi^0 = 0$. Ensuite en mettant ρ^0 et u^0 dans (1.46d), on obtient $h^0 = \begin{pmatrix} U + g_2 - \frac{2\eta}{\lambda} \\ -\partial_{x_2}\phi^0 - V - g_1 \end{pmatrix}$. Enfin en développant (1.46c), on a $-\partial_{x_2}\phi^0 - V - g_1 = 0$. Par conséquent une condition nécessaire et suffisante de l'état stationnaire est $u^0 = (V + g_1, 0)$, $h^0 = (U + g_2 - \frac{2\eta}{\lambda}, 0)$, $\nabla\phi = (0, -V - g_1)$.

Maintenant, on introduit la perturbation $\rho = \rho^0(1 + \varepsilon\rho^1 + O(\varepsilon^2))$, $(u, h, \phi) = (u^0, h^0, \phi^0) + \varepsilon(u^1, h^1, \phi^1) + O(\varepsilon^2)$ avec $\varepsilon \ll 1$ dans le modèle Striation et nous négligeons les termes d'ordre supérieur à ε . Encore une fois, en mettant ρ, u dans (1.46a), on obtient l'équation de la perturbation du premier ordre :

$$\partial_t \rho^1 + \lambda^{-1} \partial_{x_1} \phi^1 + (V + g_1) \partial_{x_1} \rho^1 = 0, \quad (1.47a)$$

En développant (1.46d), on a

$$h^0 + \varepsilon h^1 = \begin{pmatrix} -\partial_{x_1}(\phi^0 + \varepsilon\phi^1) + U + g_2 - \frac{2\eta}{\lambda} - \frac{\varepsilon\rho^0\partial_{x_2}\rho^1}{\rho^0 + \varepsilon\rho^1} \\ -\partial_{x_2}(\phi^0 + \varepsilon\phi^1) - V - g_1 + \frac{\varepsilon\rho^0\partial_{x_2}\rho^1}{\rho^0 + \varepsilon\rho^1} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$h^1 = \begin{pmatrix} -\partial_{x_1}\phi^1 - \partial_{x_2}\rho^1 \\ -\partial_{x_2}\phi^1 + \partial_{x_1}\rho^1 \end{pmatrix}.$$

Enfin en injectant h^1 dans (1.46c), on obtient

$$-\lambda^{-1}\partial_{x_2}\phi^1 - \Delta\phi^1 + (U + g_2)\partial_{x_1}\rho^1 = 0. \quad (1.47b)$$

Remarquons que le terme de pression ne contribue pas dans les équations de la perturbation de premier ordre. En omettant les exposants 1 dans (ρ^1, ϕ^1) , on développe la solution de (1.47) en ondes planes $(\rho, \phi) = (\bar{\rho}, \bar{\phi}\lambda|U + g_2|) \exp(i\lambda^{-1}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \omega t|U + g_2|))$, où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ est le vecteur d'ondes de la perturbation et ω sa fréquence. Introduisant cet ansatz dans (1.47), on obtient

$$(\theta\xi_1 - \omega)\bar{\rho} + \xi_1\bar{\phi} = 0, \quad (1.48a)$$

$$i\sigma\xi_1\bar{\rho} + (\xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2)\bar{\phi} = 0, \quad (1.48b)$$

où $\theta = \frac{V+g_1}{|U+g_2|}$, $\sigma = \text{sgn}(U + g_2)$. Ce système a une solution non triviale si et seulement si son déterminant est nul, soit

$$\begin{vmatrix} \theta\xi_1 - \omega & \xi_1 \\ i\sigma\xi_1 & \xi_1^2 + \xi_2^2 - i\xi_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.49)$$

Cette condition donne la relation de dispersion

$$\omega = \frac{\theta\xi_1((\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2) + \sigma\xi_1^2\xi_2 - i\sigma\xi_1^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \xi_2^2}. \quad (1.50)$$

Définition 1.1. *La perturbation est stable si ρ et ϕ restent bornés dans leur évolution par rapport à t . Une perturbation stable correspond à $\Im(\omega) \leq 0$ et instable si $\Im(\omega) > 0$. Un état stationnaire est dit stable si toutes les perturbations sont stables pour tout ξ . Il est instable dès qu'il existe un ξ qui rende la perturbation instable.*

La quantité $\delta = |\Im(\omega)|\frac{|U+g_2|}{\lambda}$ est appelée taux de croissance de l'instabilité ou taux d'amortissement. Grâce à (1.50), on a $\text{sgn}(\Im(\omega)) = -\sigma$. Il suit la proposition :

Proposition 1.2. *La configuration d'équilibre $(\rho_0, u_0, h_0, \phi^0)$ est stable si $U + g_2 \geq 0$. Dans le cas où $U + g_2 < 0$, tous les vecteur d'ondes $\xi \neq 0$ sont instables. Et pour $\xi_2 = 0$, le taux de croissance δ est indépendant de ξ .*

Analyses de stabilité linéaire : profil de densité exponentielle en dimension trois

Nous développons maintenant l'analyse de stabilité linéaire pour le modèle Dynamo. On considère l'état stationnaire avec profil de densité exponentielle. Pour simplifier l'analyse et pour la rendre aussi proche que celle du modèle Striation, on considère toujours un champ magnétique uniforme pointant dans la direction x_3 et on suppose que u_n et g sont orthogonaux à B . Supposons aussi que ν_e et ν_i sont des constantes et telles que $\nu = \nu_e + \nu_i = 1$, de plus $\zeta = 1$, $|B| = 1$ et $B = e_3$.

On rappelle le modèle Dynamo :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i) = 0, \quad (1.51a)$$

$$\mathbb{M}_i^{-1} u_i = F_i := E + \kappa (\nu_i u_n + \zeta g - \eta \nabla \log \rho), \quad (1.51b)$$

$$\mathbb{M}_e^{-1} u_e = F_e := -E + \kappa (\nu_e u_n - \eta \nabla \log \rho), \quad (1.51c)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (1.51d)$$

$$\nabla \cdot (\rho h) = 0, \quad (1.51e)$$

$$h = \kappa^{-1} (u_i - u_e), \quad (1.51f)$$

où les matrices de mobilités sont définies dans (1.35). Nous présentons les sous-matrices suivantes

$$\mathbb{M}_{e\perp} = \begin{pmatrix} \mu_e^P & -\mu_e^H \\ \mu_e^H & \mu_e^P \end{pmatrix}, \quad \mathbb{M}_{i\perp} = \begin{pmatrix} \mu_i^P & \mu_i^H \\ -\mu_i^H & \mu_i^P \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

où les mobilités électroniques et ioniques de Pedersen et de Hall sont définies par $\mu_e^P = \frac{\kappa \nu_e}{\kappa^2 \nu_e^2 + |B|^2}$, $\mu_e^H = \frac{|B|}{\kappa^2 \nu_e^2 + |B|^2}$, $\mu_i^P = \frac{\kappa \nu_i}{\kappa^2 \nu_i^2 + |B|^2}$, $\mu_i^H = \frac{|B|}{\kappa^2 \nu_i^2 + |B|^2}$. Notons $(\rho^0, u_i^0, u_e^0, h^0, \phi^0)$ l'état non perturbé, c'est à dire une solution indépendante du temps du système (1.51). On considère un profil de densité exponentiel dans la direction x_2 , c'est à dire $\rho^0 = N \exp(x_2/\lambda)$, où $\lambda > 0$ est la longueur de gradient, et $(u_i^0, u_e^0, h^0, \phi^0)$ sont des constantes uniformes. Enfin supposons que le vent de neutre $u_n = (V, U)$ est aussi uniforme.

Mettons maintenant $(\rho^0, u_i^0, u_e^0, h^0, \phi^0)$ dans le système (1.51). L'équation (1.51a) implique $u_{i,2} = 0$. L'équation (1.51e) se réduit que $\lambda^{-1} \rho^0 (u_{e,2} - u_{i,2}) = 0$, qui implique $u_{e,2} = 0$. Les équations (1.51b) et (1.51c) deviennent un système linéaire avec les inconnues $\partial_{x_1} \phi^0$ et $\partial_{x_2} \phi^0$:

$$-\mu_i^H (-\partial_{x_1} \phi^0 + \kappa (\nu_i V + \zeta g_1)) + \mu_i^P \left(-\partial_{x_2} \phi^0 + \kappa \left(\nu_i U + \zeta g_2 - \frac{\eta}{\lambda} \right) \right) = 0, \quad (1.53)$$

$$\mu_e^H (\partial_{x_1} \phi^0 + \kappa \nu_e V) + \mu_e^P \left(-\partial_{x_2} \phi^0 + \kappa \left(\nu_i U - \frac{\eta}{\lambda} \right) \right) = 0. \quad (1.54)$$

En résolvant ce système, on obtient

$$\nabla \phi^0 = \begin{pmatrix} -\kappa^2 \nu_e \nu_i (U - 2\frac{\eta}{\lambda}) + \kappa \nu_e g_1 - \kappa^2 \nu_e \nu_i g_2 \\ -\kappa (\nu_e - \nu_i) (U - \frac{\eta}{\lambda}) - V - g_1 + \kappa g_2 \end{pmatrix}. \quad (1.55)$$

En mettant (1.55) dans (1.51b), (1.51c) et (1.51f), on obtient

$$u_i^0 = \begin{pmatrix} \kappa \nu_e (U - 2\frac{\eta}{\lambda}) + V + g_1 + \kappa \nu_e g_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

$$u_e^0 = \begin{pmatrix} -\kappa \nu_i (U - 2\frac{\eta}{\lambda}) + V + g_1 - \kappa \nu_i g_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.57)$$

$$h^0 = \begin{pmatrix} U + g_2 - 2\frac{\eta}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.58)$$

On introduit la perturbation $\rho = \rho^0(1 + \varepsilon\rho^1 + O(\varepsilon^2))$, $(u_i, u_e, h, \phi) = (u_i^0, u_e^0, h^0, \phi^0) + \varepsilon(u_i^1, u_e^1, h^1, \phi^1) + O(\varepsilon^2)$, avec $\varepsilon \ll 1$. En injectant $(\rho, u_i, u_e, h, \phi)$ dans le système (1.51), on peut prouver que (ρ^1, ϕ^1) sont solutions du système linéarisé

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho^1 + \lambda^{-1}(\mu_i^H(\partial_{x_1}\phi^1 + \kappa\eta\partial_{x_1}\rho^1) - \mu_i^P(\partial_{x_2}\phi^1 + \kappa\eta\partial_{x_2}\rho^1)) \\ & + u_{i,1}^0\partial_{x_1}\rho^1 - \mu_i^P(\Delta\phi^1 + \kappa\eta\Delta\rho^1) = 0, \end{aligned} \quad (1.59a)$$

$$\begin{aligned} & \lambda^{-1}[\mu_-^H\partial_{x_1}\phi^1 - \mu_+^P\partial_{x_2}\phi^1 + \kappa\eta\mu_+^H\partial_{x_1}\rho^1 - \kappa\eta\mu_-^P\partial_{x_2}\rho^1] \\ & + \partial_{x_1}\rho^1(u_{i,1}^0 - u_{e,1}^0) - \mu_+^P\Delta\phi^1 - \kappa\eta\mu_-^P\Delta\rho^1 = 0. \end{aligned} \quad (1.59b)$$

où $\mu_-^H = \mu_i^H - \mu_e^H$, $\mu_+^H = \mu_i^H + \mu_e^H$, $\mu_-^P = \mu_i^P - \mu_e^P$ et $\mu_+^P = \mu_i^P + \mu_e^P$. On développe la solution en ondes planes

$$\rho^1 = \bar{\rho} \exp[i\lambda^{-1}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \omega t|U + g_2|)], \quad (1.60a)$$

$$\phi^1 = \bar{\phi} \lambda|U + g_2| \exp[i\lambda^{-1}(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 - \omega t|U + g_2|)]. \quad (1.60b)$$

Notons $X = \xi_1\mu_i^H - \xi_2\mu_i^P$, $Y = \xi_1\mu_-^H - \xi_2\mu_+^P$, $Z = \xi_1\mu_+^H - \xi_2\mu_-^P$, $A = \mu_i^P|\xi|^2 + iX$, $B_1 = \mu_-^P|\xi|^2 + iZ$ et $B_2 = \mu_+^P|\xi|^2 + iY$, avec la convention $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

Alors, en injectant (1.60b) dans (1.59a) et (1.59b), on obtient

$$\left(-i\omega|U + g_2| + i\xi_1 u_{i,1}^0 + \frac{\kappa\eta}{\lambda}A\right)\bar{\rho} + |U + g_2|A\bar{\phi} = 0, \quad (1.61a)$$

$$\left(i\xi_1(u_{i,1}^0 - u_{e,1}^0) + \frac{\kappa\eta}{\lambda}B_1\right)\bar{\rho} + |U + g_2|B_2\bar{\phi} = 0. \quad (1.61b)$$

Le système (1.61) permet une unique solution si et seulement si le déterminant du système est nul. On détermine alors la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \frac{\xi_i(u_{i,1}^0|B_2|^2 - (u_{i,1}^0 - u_{e,1}^0)AB_2^*) + i\frac{\kappa\eta}{\lambda}A(B_1 - B_2)B_2^*}{|U + g_2||B_2|^2}, \quad (1.62)$$

où l'étoile désigne le complexe conjugué.

L'expression de $\mathfrak{I}(\omega)$ peut être décrit :

$$\mathfrak{I}(\omega) = \frac{\mu_i^P\mu_e^P}{|B|^2} \left\{ -\frac{\sigma\nu^2}{\nu_i\nu_e}\xi_1^2|\xi|^2 - \frac{2\kappa\eta}{\lambda|U + g_2|} [\mu_+^P|\xi|^6 + \mu_+^P|\xi|^2(\xi_2^2 - \xi_1^2) - 2\mu_-^H|\xi|^2\xi_1\xi_2] \right\}, \quad (1.63)$$

où $\sigma = \frac{U+g_2}{|U+g_2|}$.

Si on passe à la limite $\kappa \rightarrow 0$, le modèle Dynamo se réduit au modèle Striation. Il en est de même de la relation de dispersion (1.62) qui tend vers (1.50). Dans le cas $\eta \rightarrow 0$, on a la même conséquence par rapport à la proposition 1.2, *i.e.* le profil reste stable si $U + g_2 \geq 0$; il est instable si $U + g_2 < 0$. Enfin, une analyse générale peut être trouvée dans [5] : supposons que $\eta > 0$ et $\kappa > 0$, alors le profil est stable si et seulement si $\lambda(U + g_2) \geq 2\eta\kappa^2\nu_i\nu_e$; dans le cas $\lambda(U + g_2) < 2\eta\kappa^2\nu_i\nu_e$, il existe $R_0(\eta, \kappa) > 0$, tel que si $|\xi| < R_0$, alors ξ est un onde instable. De plus, $R_0 = O((\sqrt{\eta\kappa})^{-1})$ quand $\sqrt{\eta\kappa} \rightarrow 0$.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit deux modèles pour décrire certaines irrégularités du plasma ionosphérique. Nous avons présenté certaines bases physiques (plasma, magnétosphère terrestre, ionosphère etc). Ensuite, on utilise le système d'Euler-Maxwell isotherme pour décrire des fluides électroniques et ioniques. Pour simplifier ce système, on réalise d'abord l'adimensionnement de ce système, qui conduit à des paramètres sans dimension. Puis on fait tendre des paramètres sans dimension vers 0 dans un certain ordre, qui conduit aux modèles Dynamo et Striation. Nous étudions les instabilités linéaires de la dérive en $E \times B$ pour ces deux modèles dans le cas où toutes les quantités sont orthogonales au champ magnétique.

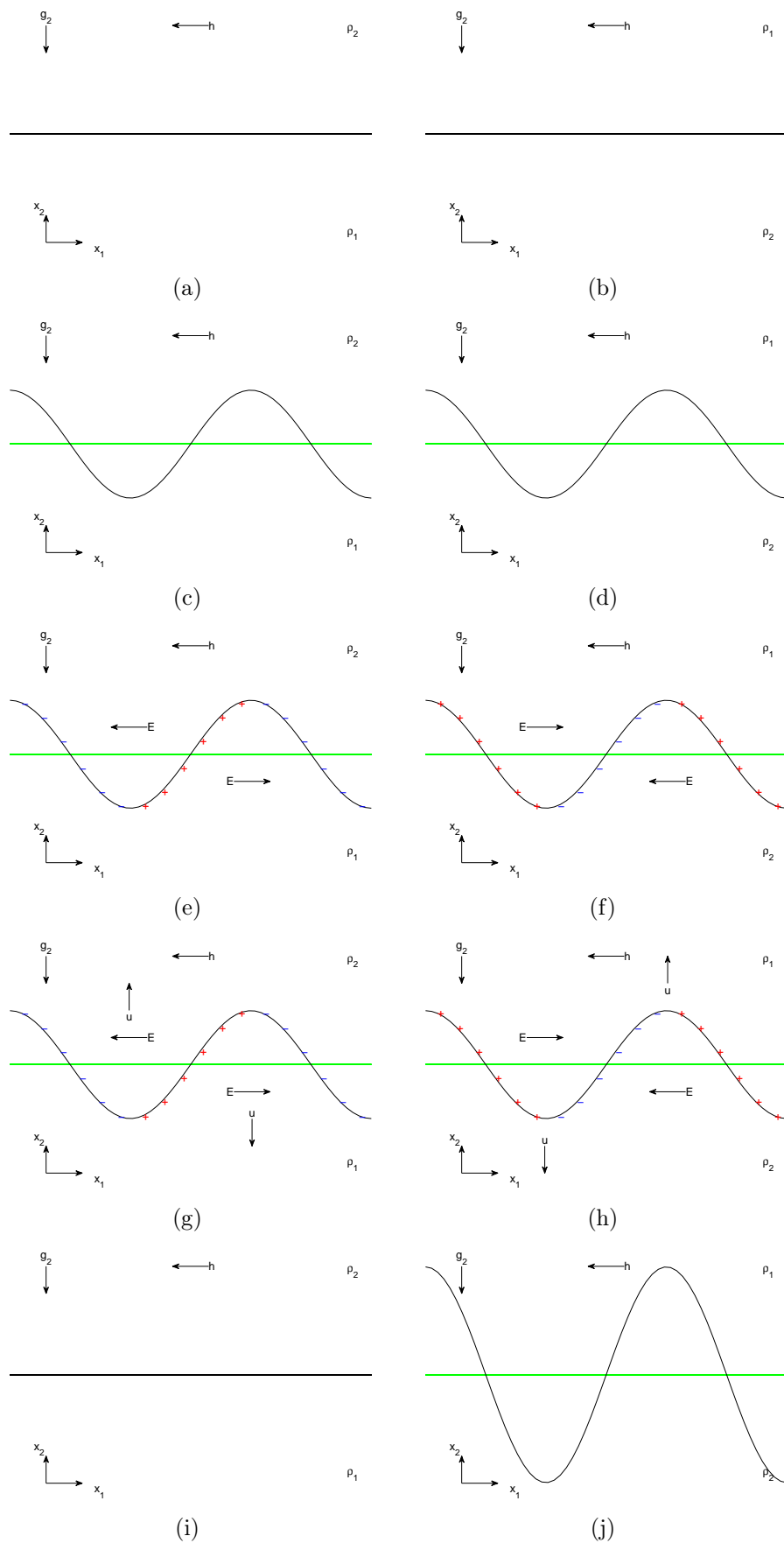


FIGURE 1.5 – Phénoménologie du modèle Striation. Gauche : le profil stable ; Droite : ³⁵ profil instable.

Chapitre 2

Méthodes numériques efficaces pour des équations elliptiques fortement anisotrope¹

2.1 Introduction

Dans la section 1.3.4, nous avons vu que l'évolution du plasma ionosphérique est décrite par une équation de conservation de la masse couplée à une équation elliptique anisotrope (1.38) de la forme

$$-\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = f, \quad (2.1)$$

où \mathcal{A} est la matrice de diffusion

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Les termes A_1 et A_2 sont les mobilités transverses et alignées d'électrons ou d'ions par rapport au champ magnétique terrestre. La magnitude de A_1/A_2 est de l'ordre de 1 en basse altitude, alors qu'elle est très grande en haute altitude. Cette forte anisotropie du phénomène physique conduit à des difficultés importantes pour les simulations numériques. Le but de ce chapitre est d'introduire un schéma numérique efficace pour résoudre ce problème elliptique anisotrope dans son contexte physique réel. Plusieurs améliorations sont proposées par rapport aux travaux de Degond *et al.* [18], dans le but de proposer un schéma utilisable dans des conditions réalistes dans le chapitre 3.

Dans l'article [18], le problème elliptique anisotrope

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0, \text{ sur } \partial\Omega_D, & \partial_z\phi = 0, \text{ sur } \partial\Omega_z, \end{cases} \quad (2.3)$$

a été étudié, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine rectangulaire ou cubique de frontières $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_z$ et \mathcal{A} une matrice de diffusion de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_\perp & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}A_z \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

1. Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis

Les termes A_{\perp} et A_z sont du même ordre de grandeur, le paramètre ε peut fortement varier. L'anisotropie de ce modèle est considérée le long de la direction z , vérifiant $0 < \varepsilon \ll 1$. Si on fait tendre ε vers 0, le modèle réduit de (2.3) est mal-posé lorsqu'il est associé aux conditions aux limites de Neumann sur $\partial\Omega_z$. C'est la raison pour laquelle les méthodes standard ne sont pas adaptées pour la résolution (2.3) avec $\varepsilon \ll 1$.

En conséquence, un schéma préservant l'asymptotique a été introduit dans [18]. L'idée principale de ce schéma est d'intégrer l'équation (2.3) le long de l'axe z , ce qui donne une équation de moyenne. La soustraction de (2.3) à l'équation de moyenne donne une équation de fluctuation. Ces deux équations sont bien posées indépendamment du choix de ε . Nous appellerons l'approximation numérique du couple de l'équation de moyenne et de l'équation de fluctuation, le schéma préservant l'asymptotique (schéma AP).

Dans [18], le schéma AP est résolu itérativement entre l'équation de moyenne et l'équation de fluctuation. Or la convergence de cette procédure itérative peut être lente, induisant ainsi des temps de calcul importants. Dans ce chapitre, nous proposons de réorganiser ces deux équations de telle manière que l'on puisse résoudre le système AP sans itérations et gagner par ce mode en temps de calcul. Outre le fait d'éviter les itérations permet d'accélérer les simulations, la discrétisation proposée dans cette nouvelle version du schéma AP conduit à des matrices creuses, alors que dans la première version du schéma AP dans [18], la matrice n'est pas creuse, et cela en raison de certains termes de moyenne dans la formulation variationnelle, remplissant la matrice.

En outre, on s'intéresse au cas ε variable. On prend ainsi une fonction ε de z qui a un gradient fort, représentant l'anisotropie réelle de l'ionosphère. On introduit donc un schéma AP approprié dans le cas de ε variable. On note que les résultats numériques sont moins précis que dans le cas de ε constant en raison du gradient fort. Nous proposons donc quelques améliorations, par exemple en utilisant le schéma de Scharfetter-Gummel [44].

Enfin, nous proposons une extension en dimension trois du schéma AP, où le bloc de diffusion correspondant aux directions perpendiculaires A_{\perp} n'est plus diagonal, mais peut contenir des termes extra-diagonaux, provenant des mobilités transverses du modèle plasma ionosphérique en dimension trois (voir la section 1.3.4). Notons que ces termes extra-diagonaux conduisent à une anisotropie variable. Nous adaptons à nouveau le schéma AP à ce problème et vérifions son efficacité par des simulations numériques avec ε constant ainsi qu'une fonction de ε variable.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2.2, nous rappelons le schéma AP de [18], basé sur une résolution itérative, et présentons la nouvelle version du schéma AP réarrangée ainsi que sa formulation faible. Ces deux approches sont ensuite discrétisées par une méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 et les résultats numériques sont comparés pour des valeurs de ε allant de 10^{-20} à 1. Dans la section 2.3, le schéma AP est étendu pour le cas ε variable, avec des gradients importants. La discrétisation et les résultats numériques sont présentés. Enfin, dans la section 2.4, nous étudions un problème anisotrope elliptique en dimension trois qui a la même structure que le modèle réel dynamo ionosphérique, contenant des termes extra-diagonaux. Les résultats numériques du cas ε constant et du cas ε variable sont comparés, compte tenu de différents maillages.

2.2 Dérivation d'un nouveau schéma préservant l'asymptotique (AP) pour ε constant

2.2.1 Investigation sur le modèle de perturbation singulière et de son régime limite

Pour des raisons de simplicité, nous considérons d'abord un modèle en dimension deux avec Ω un domaine rectangulaire défini comme $\Omega = \Omega_x \times \Omega_z$, où $\Omega_x \subset \mathbb{R}$ et $\Omega_z \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles. Les coefficients A_\perp et A_z de la matrice de diffusion \mathcal{A} sont des fonctions scalaires dans ce cas. Le cas en dimension trois sera pris en compte dans la dernière partie de ce chapitre.

Le problème elliptique en dimension deux est donné par

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A} \nabla \phi^\varepsilon) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \phi^\varepsilon = 0, \text{ sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \quad \partial_z \phi^\varepsilon = 0, \text{ sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z, \end{cases} \quad (2.5)$$

où \mathcal{A} est donnée par (2.4) et $A_\perp(x, z)$ et $A_z(x, z)$ sont des fonctions connues du même ordre de grandeur. Le problème singulièrement perturbé (2.5) peut être réécrit sous la forme (modèle-SP)

$$(SP) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon A_\perp \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \phi^\varepsilon}{\partial z} \right) = \varepsilon f, & \text{dans } \Omega, \\ \phi^\varepsilon = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \partial_z \phi^\varepsilon = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z. \end{cases} \quad (2.6)$$

Dans le reste de ce chapitre, nous faisons l'hypothèse suivante

Hypothèse 2.1. *Les fonctions de diffusion $A_\perp \in L^\infty(\Omega)$ et $A_z \in L^\infty(\Omega)$ satisfont $0 < c_\perp \leq A_\perp(x, z) \leq M_\perp$, $0 < c_z \leq A_z(x, z) \leq M_z$, où $c_\perp = c_z$, $M_\perp = M_z$ sont constantes positives. De plus $f \in L^2(\Omega)$.*

Le modèle (2.6) est un problème aux limites bien posé qui a une solution unique pour tous les $\varepsilon > 0$ fixés. Cependant par la limite formelle $\varepsilon = 0$ dans cette équation, on obtient le problème dégénéré :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \psi = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \partial_z \psi = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z. \end{cases} \quad (2.7)$$

Le modèle (2.7) est mal-posé en raison de la perte de l'unicité. En effet, toutes les fonctions ψ dépendant uniquement de la coordonnée x et vérifiant la condition à la limite $\psi = 0$ sur $\partial\Omega_x \times \Omega_z$ satisfont l'équation (2.7). Toutefois, ϕ^0 , la limite de la suite ϕ^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$, comprenant les solutions du problème de perturbation singulière (2.6), est unique et peut

être déterminée par un problème bien-posé appelé dans la suite problème-L (problème de limite) : Trouvez $\phi^0 : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}$ solution de

$$(L) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{A}_\perp \frac{\partial \phi^0}{\partial x} \right) = \overline{f}, & \text{dans } \Omega_x, \\ \phi^0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x, \end{cases} \quad (2.8)$$

où \overline{f} désigne la valeur moyenne de la fonction f le long de la direction d'anisotropie, *i.e.*

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{\text{mes}(\Omega_z)} \int_{\Omega_z} f(x, z) dz, \quad \forall x \in \Omega_x.$$

Nous ne montrons pas ici la convergence asymptotique de la suite ϕ^ε , ce qui peut être trouvée dans le théorème 2.2.

Ayant maintenant présenté le problème-SP et son problème limite (L), l'objectif est d'introduire une reformulation équivalente du problème-SP, qui permet de passer continuellement du problème-SP (2.6) au problème limite (2.8) quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Le problème-SP (2.6) ne vérifie pas cette caractéristique, comme on l'a mentionnée ci-dessus : c'est la caractéristique principale du schéma AP classique.

L'idée principale du schéma préservant l'asymptotique introduite dans [18] est de décomposer la solution du problème de perturbation singulière ϕ^ε en deux parties : $\overline{\phi}^\varepsilon$, la partie de moyenne intégrée le long de l'axe z , complétée avec la partie de fluctuation $(\phi^\varepsilon)'$ définie par $(\phi^\varepsilon)' = \phi^\varepsilon - \overline{\phi}^\varepsilon$. Avec ces nouvelles inconnues, le système (2.6) est décomposé en une équation de moyenne pour $\overline{\phi}^\varepsilon$ et une équation de fluctuation pour $(\phi^\varepsilon)'$. L'équation de moyenne est très similaire au problème limite (2.8) et apporte une condition précise pour calculer la partie moyenne pour tout $\varepsilon > 0$. En outre, la partie de fluctuation satisfait $(\phi^\varepsilon)' = 0$, ce qui est la propriété fondamentale en dérivant le schéma AP, et en particulier qui doit permettre d'obtenir une précision indépendant du paramètre ε . Ce point est détaillé dans la section 2.2.2.

2.2.2 Reformulation préservant l'asymptotique

Pour des raisons de simplicité, posons $\Omega_x = [0, L_x]$ et $\Omega_z = [0, L_z]$ et omettons l'indice ε de la solution ϕ^ε . Il y a quelques propriétés utiles des opérations de moyenne et de la fluctuation, énumérées ci-dessous

$$\overline{f'} = 0, \quad \overline{fg} = \overline{f}\overline{g} + \overline{f'g'}, \quad \overline{f'g'} = \overline{f'g} = \overline{fg'}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f'}{\partial z}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)' = \frac{\partial f'}{\partial x}, \quad (2.10)$$

$$(fg)' = f'g' - \overline{f'g'} + \overline{f}g' + f'\overline{g}. \quad (2.11)$$

En prenant maintenant la moyenne de l'équation (2.6) le long de l'axe z et en considérant les propriétés (2.9), l'équation pour la partie de moyenne de la solution s'exprime :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{A}_\perp \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x} \right) = \overline{f} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{A}_\perp \frac{\partial \overline{\phi}'}{\partial x} \right), & \text{dans } \Omega_x, \\ \overline{\phi} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x. \end{cases} \quad (2.12)$$

L'équation de la partie de fluctuation, proposée dans ce chapitre, est obtenue en introduisant la décomposition $\phi(x, z) = \phi(x, z) + \bar{\phi}(x)$ dans (2.6) et en appliquant (2.10), donnant donc

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) = \varepsilon f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right), & \text{dans } \Omega, \\ \phi' = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \partial_z \phi' = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z, \\ \bar{\phi}' = 0, & \text{dans } \Omega_x. \end{cases} \quad (2.13)$$

Le système (2.12), (2.13) sera appelé la nouvelle reformulation-AP. Il diffère du schéma AP original [18] par l'équation pour la partie de fluctuation, dont la dérivation est brièvement détaillée ici dans le but de comparaison. En soustrayant l'équation de moyenne (2.12) à (2.6) et en utilisant (2.11), on obtient le système de fluctuation différent

$$\begin{cases} -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(A'_{\perp} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) = \\ \varepsilon f' + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(A'_{\perp} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right), & \text{dans } \Omega, \\ \phi' = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \partial_z \phi' = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z, \\ \bar{\phi}' = 0, & \text{dans } \Omega_x. \end{cases} \quad (2.14)$$

Le système couplé (2.12), (2.14) a été présenté et analysé dans [18]. Les deux reformulations (2.12), (2.13) resp. (2.12), (2.14) sont équivalentes. On étudie ci-dessous leurs propriétés de préservation de l'asymptotique et leur capacité à apporter un calcul précis de la solution de (2.6) pour toutes les valeurs de ε . Notons d'abord que l'équation de moyenne (2.12) constitue un problème de condition aux limites bien-posé, qui est indépendant de ε . En outre, faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ dans l'équation de fluctuation (2.13) ou (2.14), nous obtenons

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \phi' = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \partial_z \phi' = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z, \\ \bar{\phi}' = 0, & \text{dans } \Omega_x. \end{cases} \quad (2.15)$$

Contrairement à (2.7), ce problème est bien-posé avec une solution unique $\phi \equiv 0$. En effet, la contrainte $\bar{\phi}' = 0$ implique l'unicité de la solution. C'est aussi cette propriété de valeur moyenne nulle pour la partie de fluctuation ϕ' dans (2.13) resp. (2.14), qui apporte la propriété d'une équation avec un nombre de conditionnement indépendant de la valeur de ε .

Maintenant, en mettant $\phi' = 0$ dans l'équation de moyenne (2.12), nous obtenons le modèle limite (2.8). Cela démontre que les systèmes reformulés (2.12), (2.13) resp. (2.12), (2.14) sont des perturbations régulières du problème-L pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

L'équation (2.14) pour la partie de fluctuation ϕ' a été conçue dans [18] afin d'avoir un second membre de moyenne nulle, assurant ainsi que la partie de fluctuation vérifie cette propriété et justifiant de cette manière l'introduction de la contrainte essentielle $\bar{\phi}' = 0$. Cependant cette équation comporte un terme du type $\frac{\partial}{\partial x} \left(A'_\perp \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)$, qui remplit la matrice dans l'étape de discrétisation. Pour cette raison, le présent document se concentrera sur l'alternative creuse (2.12), (2.13), plus efficace en termes d'utilisation de la mémoire et des calculs. En raison de l'équivalence des deux reformulations-AP, on a la propriété importante $\bar{\phi}' \equiv 0$, même dans le système (2.12), (2.13), bien que le second membre de (2.13) ne vérifie pas cette propriété de la valeur de moyenne nulle.

Notons que pour les deux formulations, la partie de moyenne et la partie de fluctuation sont couplées. Deux stratégies seront proposées dans la section 2.2.4 afin de résoudre ce système couplé.

2.2.3 Formulation faible

Afin d'introduire la formulation faible du système AP (2.12), (2.13), on introduit les deux espaces de Hilbert :

$$\mathbb{V} = \{\psi(x, z) \in H^1(\Omega) / \psi = 0 \text{ on } \partial\Omega_x \times \Omega_z\}, \quad \mathbb{W} = \{\bar{\psi}(x) \in H^1(\Omega_x) / \bar{\psi} = 0 \text{ on } \partial\Omega_x\},$$

et les produits scalaires correspondants

$$(\phi, \psi)_{\mathbb{V}} = \varepsilon(\partial_x \phi, \partial_x \psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_z \phi, \partial_z \psi)_{L^2(\Omega)}, \quad (\bar{\phi}, \bar{\psi})_{\mathbb{W}} = (\partial_x \bar{\phi}, \partial_x \bar{\psi})_{L^2(\Omega_x)}.$$

Pour simplifier, on note dans la suite le produit scalaire L^2 par les parenthèses simples (\cdot, \cdot) . En définissant les formes bilinéaires suivantes

$$\begin{aligned} a_0(\phi', \psi') &:= \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A_z(x, z) \frac{\partial \phi'}{\partial z}(x, z) \frac{\partial \psi'}{\partial z}(x, z) dx dz, \\ a_1(\phi', \psi') &:= \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A_\perp(x, z) \frac{\partial \phi'}{\partial x}(x, z) \frac{\partial \psi'}{\partial x}(x, z) dx dz, \\ a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) &:= \int_0^{Lx} \bar{A}_\perp(x) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}(x) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}(x) dx, \\ a(\phi', \psi') &:= a_0(\phi', \psi') + \varepsilon a_1(\phi', \psi'), \\ b(\bar{P}, \psi') &:= \int_0^{Lx} \bar{P}(x) \int_0^{Lz} \psi'(x, z) dz dx, \\ c(\bar{\phi}, \psi') &:= \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A_\perp(x, z) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}(x) \frac{\partial \psi'}{\partial x}(x, z) dx dz, \end{aligned} \tag{2.16}$$

on peut écrire les formulations faibles des problème-SP et problème-L suivantes

$$(SP) \quad \varepsilon a_1(\phi^\varepsilon, \psi) + a_0(\phi^\varepsilon, \psi) = \varepsilon(f, \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{V}, \tag{2.17}$$

$$(L) \quad a_2(\phi^0, \psi^0) = (\bar{f}, \psi^0), \quad \forall \psi^0 \in \mathbb{W}. \tag{2.18}$$

Introduisant dans (SP) la décomposition $\phi^\varepsilon = \bar{\phi}^\varepsilon + \phi^{\varepsilon'}$ et prenant la fonction test $\psi' \in \mathbb{V}$ resp. $\bar{\psi} \in \mathbb{W}$ conduisent à la reformulation du problème-SP suivante

$$\begin{cases} a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) = (\bar{f}, \bar{\psi}) - \frac{1}{L_z} c(\bar{\psi}, \phi'), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}, & (a) \\ a(\phi', \psi') = \varepsilon(f, \psi') - \varepsilon c(\bar{\phi}, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}. & (b) \end{cases} \quad (2.19)$$

Afin de rester bien posé, même à la limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, on doit introduire la contrainte $\bar{\phi}' \equiv 0$ dans l'équation de fluctuation que l'on a mentionné dans la section (2.2.2). Ceci est réalisé par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange \bar{P} [18] comme suit : Trouver $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x)$, solution de

$$(AP) \begin{cases} a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) = (\bar{f}, \bar{\psi}) - \frac{1}{L_z} c(\bar{\psi}, \phi'), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}, & (a) \\ a(\phi', \psi') + b(\bar{P}, \psi') = \varepsilon(f, \psi') - \varepsilon c(\bar{\phi}, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}, & (b) \\ b(\bar{Q}, \phi') = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_x). & (c) \end{cases} \quad (2.20)$$

Ce système sera appelé dans la suite reformulation AP du problème-SP. Le théorème suivant prouve le caractère bien-posé de la reformulation AP (2.20) pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'équivalence avec le problème (2.19) et analyse la convergence de la solution $(\bar{\phi}^\varepsilon, \phi^{\varepsilon'}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$. En particulier, il montre également que le schéma AP est bien-posé, même dans les limite $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 2.2. *Sous l'hypothèse 2.1, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une unique solution $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)', \bar{P}^\varepsilon) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x)$ satisfaisant (2.20). La fonction $\phi^\varepsilon = \bar{\phi}^\varepsilon + (\phi^\varepsilon)'$ est l'unique solution de (2.17). De plus, le système (2.20) est équivalent à (2.19) avec la contrainte $(\phi^\varepsilon)'$. En particulier $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)') \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$ est l'unique solution de (2.19) si et seulement si $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)', \bar{P}^\varepsilon) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x)$ est l'unique solution de (2.20), avec $\bar{P}^\varepsilon \equiv 0$. Enfin, dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la paire $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)')$ converge vers une fonction $(\bar{\phi}^0, (\phi^0)') \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$, où $\bar{\phi}^0$ est l'unique solution faible du problème-L et $(\phi^0)' \equiv 0$.*

Preuve. Sous l'hypothèse 2.1 et d'après le lemme de Lax-milgram, le problème-SP (2.17) possède une unique solution $\phi^\varepsilon \in \mathbb{V}$. Or d'après la procédure de décomposition du schéma AP, (2.17) et (2.19) sont équivalentes. C'est à dire que $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)') \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$ est l'unique solution de (2.19). Maintenant pour montrer que (2.20) possède une unique solution, il suffit de montrer l'équivalence entre (2.19) avec la contrainte $(\phi^\varepsilon)' \equiv 0$ et (2.20).

Soit $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)') \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$ l'unique solution de (2.19), alors $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)', 0)$ est la solution de (2.20). Pour le sens réciproque, nous considérons $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)', \bar{P}^\varepsilon) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x)$ est l'unique solution de (2.20). Prenant la fonction test ψ' ne dépendant que de x dans (2.20b) implique

$$a_1((\phi^\varepsilon)', \psi'(x)) + b(\bar{P}^\varepsilon, \psi'(x)) = \varepsilon(f, \psi'(x)) - \varepsilon c(\bar{\phi}^\varepsilon, \psi'(x)). \quad (2.21)$$

En mettant $\psi'(x)$ dans (2.20a) et comparant avec (2.21), on obtient $b(\bar{P}^\varepsilon, \psi'(x)) = 0$. Enfin prenant $\psi'(x) = \bar{P}^\varepsilon$ donne $\bar{P}^\varepsilon \equiv 0$. Ainsi $(\bar{\phi}^\varepsilon, (\phi^\varepsilon)', \bar{P}^\varepsilon)$ résout (2.19).

Deuxièmement, on montre la convergence à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Des résultats de stabilités standard pour des problèmes elliptiques donnent l'estimation indépendante de ε pour la solution du modèle de perturbation singulière (2.17)

$$\|\phi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C'(\|\partial_x \phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\partial_z \phi^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2) \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)} \|\phi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\|\phi^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.22)$$

où C' et C sont des constantes indépendantes de ε . On déduit immédiatement

$$\|\overline{\phi^\varepsilon}\|_{H^1(\Omega_x)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad \|(\phi^\varepsilon)'\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.23)$$

Ainsi, il existe des fonctions $(\overline{\phi^0}, (\phi^0)') \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$, telles qu'on peut extraire une sous-suite $(\phi^\varepsilon)' \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\phi^0)'$ dans $H^1(\Omega_x)$ et $\overline{\phi^\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\phi^0}$ dans $H^1(\Omega)$. Par conséquent, on a

$$\int_0^{L_z} \int_0^{L_x} (\phi^\varepsilon)'(x, z)\psi(x, z) dx dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} (\phi^0)'(x, z)\psi(x, z) dx dz, \quad \forall \psi \in \mathbb{V}. \quad (2.24)$$

En prenant ici $\phi(x) \in \mathbb{V}$ dépendant seulement de la coordonnée x , on observe que la caractéristique $\overline{(\phi^\varepsilon)'} \equiv 0$ implique que $\overline{(\phi^0)'} \equiv 0$. En faisant tendre ε vers 0 dans l'équation (2.19b), on obtient que $(\phi^0)'$ est la solution de

$$a_0((\phi^0)', \psi') = 0, \quad \forall \psi' \in \mathbb{V}, \quad \text{avec } \overline{(\phi^0)'} \equiv 0, \quad \text{sur } \Omega_x. \quad (2.25)$$

Ce qui implique que $(\phi^0)' \equiv 0$. Enfin, passant à la limite dans l'équation (2.19a) donne que $\overline{\phi^0}$ est l'unique solution du modèle limite (2.18). En raison de l'unicité de la limite $((\phi^0)', \overline{\phi^0})$, on en déduit que la suite entière $((\phi^\varepsilon)', \overline{\phi^\varepsilon})$ converge faiblement vers cette limite. Pour terminer la preuve, on doit montrer que cette suite converge fortement. Pour cela, en prenant dans (2.19b) $(\phi^\varepsilon)'$ comme fonction test et en passant à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, nous obtenons $\partial_z(\phi^\varepsilon)' \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ dans $L^2(\Omega)$. Or $(\phi^\varepsilon)' \in \mathbb{V}$ et $\overline{(\phi^\varepsilon)'} \equiv 0$, l'inégalité de Poincaré implique que $(\phi^\varepsilon)' \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ dans $H^1(\Omega)$. Puis, on remarque que $\overline{\phi^\varepsilon} - \overline{\phi^0} \in \mathbb{W}$ est la solution de

$$a_2(\overline{\phi^\varepsilon} - \overline{\phi^0}, \bar{\psi}) = -\frac{1}{L_z}c((\phi^0)', \bar{\psi}), \quad \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}. \quad (2.26)$$

En choisissant $\bar{\psi} = \overline{\phi^\varepsilon} - \overline{\phi^0}$, on a $\|\overline{\phi^\varepsilon} - \overline{\phi^0}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\partial_x(\phi^\varepsilon)'\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Encore, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on en déduit que $\overline{\phi^\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\phi^0}$ dans $H^1(\Omega_x)$. Notons que \mathbb{V} resp. \mathbb{W} sont les sous-espaces de $H^1(\Omega)$ resp. $H^1(\Omega_x)$, donc la paire $(\overline{\phi^\varepsilon}, (\phi^\varepsilon)')$ converge vers $(\overline{\phi^0}, (\phi^0)')$ dans $\mathbb{W} \times \mathbb{V}$. \square

Remarquons si on demande plus de régularité des coefficients A_\perp et A_z , alors on peut obtenir une solution plus régulière du modèle-SP (2.6). Il s'agit d'un simple résultat de régularité pour des équations elliptiques.

Hypothèse 2.3. *Les fonctions de diffusion $A_\perp \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $A_z \in W^{1,\infty}(\Omega)$ satisfont $0 < c_\perp \leq A_\perp(x, z) \leq M_\perp$, $0 < c_z \leq A_z(x, z) \leq M_z$, où $c_\perp = c_z$, $M_\perp = M_z$ sont constantes positives. De plus $f \in L^2(\Omega)$.*

Remarque 2.4. *Sous l'hypothèse 2.3, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une solution unique du problème-SP (2.6), satisfaisant $\phi \in \mathbb{V} \cap H^2(\Omega)$. De plus, on peut développer les mêmes arguments que dans le théorème 2.2 en remplaçant \mathbb{V} resp. \mathbb{W} par $\mathbb{V} \cap H^2(\Omega)$ resp. $\mathbb{W} \cap H^2(\Omega_x)$.*

2.2.4 Procédure itérative

Le système AP couplé (2.20) peut être résolu soit directement, soit de manière itérative, comme proposé dans [18]. Étudions dans cette sous-section la convergence de la procédure itérative.

Définissons l'espace de Hilbert

$$\mathbb{U} := \{\phi \in \mathbb{V} \cap H^2(\Omega) / \bar{\phi} = 0\},$$

associé au produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{\mathbb{U}} = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} A_z \partial_z \phi \partial_z \psi dz dx + \varepsilon \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_z} A_{\perp} \partial_x \phi \partial_x \psi dz dx.$$

Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Supposons l'hypothèse 2.3 satisfaite et fixons $\varepsilon > 0$. Construisons une application de point fixe $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ suivante*

$$T : \phi' \in \mathbb{U} \xrightarrow{(2.20a)} \bar{\phi} \in \mathbb{W} \cap H^2(\Omega_x) \xrightarrow{(2.20b), (2.20c)} \theta' = T(\phi') \in \mathbb{U}.$$

Alors pour chaque point de départ $\phi'_0 \in \mathbb{U}$, la suite $\phi'_k := T(\phi'_{k-1}) = T^k(\phi'_0)$ converge dans \mathbb{U} vers l'unique point fixe $\phi'_* \in \mathbb{U}$ de T .

La preuve de cette proposition est basée sur le lemme suivant

Lemme 2.6. [12] *Soit $(\mathbb{U}, \|\cdot\|_{\mathbb{U}})$ est un espace normé et $T : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ une application contractive, i.e.*

$$\|T(\phi) - T(\psi)\|_{\mathbb{U}} < \|\phi - \psi\|_{\mathbb{U}}, \quad \forall \phi, \psi \in \mathbb{U} \text{ avec } \phi \neq \psi. \quad (2.27)$$

Alors l'ensemble de points fixes de T , dénoté par $FP(T)$, est identique à l'ensemble des points d'accumulation des suites $\{T^k(\phi)\}_{k \in \mathbb{N}}$, avec $\phi \in \mathbb{U}$, dénotons par $AP(T)$. De plus, ces deux espaces ne contiennent au plus qu'un élément.

Preuve de la proposition 2.5. On montre d'abord que l'application T est bien définie. Le caractère bien-posé de la première étape $T_1 : \phi' \in \mathbb{U} \xrightarrow{(2.20a)} \bar{\phi} \in \mathbb{W} \cap H^2(\Omega_x)$ est immédiate par le lemme de Lax-Milgram. La deuxième étape est équivalente à la question : pour $\bar{\phi} \in \mathbb{W} \cap H^2(\Omega_x)$ résolvant (2.20a), y a-t-il un unique couple $(\theta', \bar{P}) \in \mathbb{U} \times L^2(\Omega_x)$ résolvant (2.20b), (2.20c)? Étudions donc le problème de point selle suivant : Trouver $(\theta', \bar{P}) \in \mathbb{U} \times L^2(\Omega_x)$ solution de

$$\begin{cases} a(\theta', \psi') + b(\bar{P}, \psi') = \varepsilon(f, \psi') - \varepsilon c(\bar{\phi}, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}, \\ b(\bar{Q}, \theta') = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_x). \end{cases} \quad (2.28)$$

Nous réécrivons $\varepsilon(f, \psi') - \varepsilon c(\bar{\phi}, \psi')$ comme suit

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(f, \psi') - \varepsilon c(\bar{\phi}, \psi') &= \varepsilon((f' + \bar{f}), \psi') + \varepsilon \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} (A'_\perp + \bar{A}_\perp) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx dz \\
 &= \varepsilon(f', \psi') + \varepsilon \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A'_\perp \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx dz \\
 &\quad + \varepsilon L_z \int_0^{Lx} \bar{f} \bar{\psi}' dx + \varepsilon L_z \int_0^{Lx} \bar{A}_\perp \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial x} dx \\
 &= \varepsilon(f', \psi') + \varepsilon \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A'_\perp \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx dz + \varepsilon \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A_\perp \frac{\partial \phi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial x} dx dz \\
 &= \varepsilon(f', \psi') + \varepsilon \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A'_\perp \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx dz + \varepsilon \int_0^{Lx} \overline{A_\perp \frac{\partial \phi'}{\partial x}} \int_0^{Lz} \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial x} dz dx \\
 &= \varepsilon(f', \psi') + \varepsilon \int_0^{Lz} \int_0^{Lx} A'_\perp \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx dz + \varepsilon \int_0^{Lx} \overline{A'_\perp \frac{\partial \phi'}{\partial x}} \int_0^{Lz} \frac{\partial \bar{\psi}'}{\partial x} dz dx
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Dans [18], on a montré l'existence et l'unicité du problème suivant : Trouver $\theta' \in \mathbb{U}$ solution de

$$\begin{cases} a(\theta', \psi') - \varepsilon \int_0^{Lx} \overline{A'_\perp \frac{\partial \theta'}{\partial x}} \int_0^{Lz} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dz dx = \varepsilon(f', \psi') + \varepsilon \int_\Omega A'_\perp \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dx dz, & \forall \psi' \in \mathbb{V}, \\ b(\bar{Q}, \theta') = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_x). \end{cases} \tag{2.30}$$

En injectant (2.29) dans (2.30), on obtient

$$\begin{cases} a(\theta', \psi') - \varepsilon \int_0^{Lx} \overline{A'_\perp \frac{\partial}{\partial x} (\theta' - \phi')} \int_0^{Lz} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dz dx = \varepsilon(f, \psi') - \varepsilon c(\bar{\phi}, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}, \\ b(\bar{Q}, \theta') = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_x). \end{cases} \tag{2.31}$$

En définissant ensuite \bar{P} comme

$$\bar{P}(x) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{A'_\perp \frac{\partial}{\partial x} (\theta' - \phi')} \right),$$

on déduit que $(\theta', \bar{P}) \in \mathbb{U} \times L^2(\Omega_x)$ résout (2.28).

L'unicité de la solution de (2.28) est immédiate. En prenant deux solutions différentes $(\theta'_1, \bar{P}_1), (\theta'_2, \bar{P}_2) \in \mathbb{U} \times L^2(\Omega_x)$, et en dénotant $\tilde{\theta}' := \theta'_1 - \theta'_2$, $\tilde{P} := \bar{P}_1 - \bar{P}_2$, on a

$$\begin{cases} a(\tilde{\theta}', \psi') + b(\tilde{P}, \psi') = 0, & \forall \psi' \in \mathbb{V}, \\ b(\bar{Q}, \tilde{\theta}') = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_x). \end{cases}$$

Choissant maintenant $\psi' := \tilde{\theta}'$ implique $a(\tilde{\theta}', \tilde{\theta}') = 0$. Ainsi $\tilde{\theta}' \equiv 0$ par l'argument de coercivité et $b(\tilde{P}, \psi') = 0, \forall \psi' \in \mathbb{V}$. Par arguments de densité cette dernière équation est valide pour tous les $\psi' \in L^2(\Omega_x)$, ainsi en prenant $\psi' := \tilde{P}$, on a $b(\tilde{P}, \tilde{P}) = 0$, et donc

$\tilde{P} \equiv 0$. Par conséquent, il existe un unique $(\theta, \bar{P}) \in \mathbb{U} \times L^2(\Omega_x)$ solution de (2.20 b), (2.20c) et l'application de point fixe T est donc bien définie.

Nous montrerons que T admet pour $\varepsilon > 0$ fixé un unique point fixe, noté $\phi'_* \in \mathbb{U}$. Supposons maintenant qu'on a montré que T est contractive, alors le lemme 2.4 implique que $FP(T) = AP(T) = \{\phi'_*\}$. Ainsi en choisissant un point de départ arbitraire $\phi'_0 \in \mathbb{U}$, et en construisant la suite $\phi'_k := T(\phi'_{k-1}) = T^k(\phi'_0)$, on en déduit que cette suite a un point unique d'accumulation ϕ'_* dans \mathbb{U} . Cela signifie que la suite $\{\phi'_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{V} \cap H^2(\Omega_x)$ vers ϕ'_* .

Il reste à montrer que T est contractive, *i.e.* soient $\varphi'_1, \varphi'_2 \in \mathbb{U}$, et $\varphi' := \varphi'_1 - \varphi'_2$, $\bar{\varphi} := T_1(\varphi'_1) - T_1(\varphi'_2)$, $\eta' := T(\varphi'_1) - T(\varphi'_2)$, on montrera $\|\eta'\|_{\mathbb{U}} < \|\varphi'\|_{\mathbb{U}}$. Avec les notations précédentes, on a le système suivant

$$\begin{cases} a_2(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = -\frac{1}{L_z} c(\varphi', \bar{\psi}), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}, & (a) \\ a(\eta', \psi') = -\varepsilon c(\psi', \bar{\varphi}), & \forall \psi' \in \mathbb{V}. & (b) \end{cases} \quad (2.32)$$

En prenant $\bar{\psi} = \bar{\varphi}$ dans (2.32a), et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient l'inégalité suivante

$$\left(\int_0^{L_x} \bar{A}_\perp |\partial_x \bar{\varphi}|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x \varphi|^2 dz dx \right)^{1/2}.$$

Finalement, en prenant $\psi' = \eta'$ dans (2.32b), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_z |\partial_z \eta'|^2 dz dx + \varepsilon \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x \eta'|^2 dz dx \\ & \leq \left(\varepsilon L_z \int_0^{L_x} \bar{A}_\perp |\partial_x \bar{\varphi}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\varepsilon \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x \eta'|^2 dz dx \right)^{1/2} \\ & \leq \left(\varepsilon \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x \varphi'|^2 dz dx \right)^{1/2} \left(\varepsilon \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x \eta'|^2 dz dx \right)^{1/2} \\ & < \left(\int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_z |\partial_z \varphi'|^2 dz dx + \varepsilon \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x \varphi'|^2 dz dx \right)^{1/2} \\ & \quad \left(\int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_z |\partial_z \eta'|^2 dz dx + \varepsilon \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x \eta'|^2 dz dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est stricte à cause du fait que $\varphi' \neq 0$. Ceci implique $\|\eta'\|_{\mathbb{U}} < \|\varphi'\|_{\mathbb{U}}$. \square

2.2.5 Méthodes numériques et expériences

Le but de cette sous-section est d'introduire une discrétisation numérique de la reformulation AP (2.20), et étudier l'existence et l'unicité de solutions discrètes et d'analyser les résultats obtenus.

Une discrétisation d'éléments finis

Pour discrétiser le système (2.20), on introduit les partitions homogènes du maillage, *i.e.* $x_i = i\Delta x$, $i = 0, \dots, N_x + 1$, et $z_k = k\Delta z$, $k = 0, \dots, N_z + 1$, et les fonctions de base d'éléments finis de type \mathbb{P}_1

$$\begin{aligned} \chi_i(x) &= \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{\Delta x}, & x \in [x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1}-x}{\Delta x}, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} & i = 1, \dots, N_x, \\ \kappa_0(z) &= \begin{cases} \frac{z_1-z}{\Delta z}, & z \in [z_0, z_1), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \\ \kappa_k(z) &= \begin{cases} \frac{z-z_{k-1}}{\Delta z}, & z \in [z_{k-1}, z_k), \\ \frac{z_{k+1}-z}{\Delta z}, & z \in [z_k, z_{k+1}), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} & k = 1, \dots, N_z, \\ \kappa_{N_z+1}(z) &= \begin{cases} \frac{z-z_{N_z}}{\Delta z}, & z \in [z_{N_z}, z_{N_z+1}), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Notons que dans un maillage cartésien le produit tensoriel de fonctions de chapeau χ_i et κ_k coïncide avec les fonctions de base d'éléments finis \mathbb{Q}_1 . Les espaces discrets $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V}$, $\mathbb{W}_h \subset \mathbb{W}$ et $\mathbb{L}_h \subset L^2(\Omega_x)$ sont générés respectivement par les fonctions de base $(\chi_i)_{i=1, \dots, N_x}$ et $(\kappa_k)_{k=0, \dots, N_z+1}$. Ainsi, on peut exprimer les approximations des inconnues $\phi'_h \in \mathbb{V}_h$, $\bar{\phi}_h \in \mathbb{W}_h$, $\bar{P}_h \in \mathbb{L}_h$ sous la forme

$$\phi'_h(x, z) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{k=0}^{N_z+1} \alpha_{ik} \chi_i(x) \kappa_k(z), \quad \bar{\phi}_h(x) = \sum_{i=1}^{N_x} \beta_i \chi_i(x), \quad \bar{P}_h(x) = \sum_{i=1}^{N_x} \gamma_i \chi_i(x). \quad (2.33)$$

La discrétisation du problème AP peut maintenant être exprimée comme suit : Trouver $(\bar{\phi}_h, \phi'_h, \bar{P}_h) \in \mathbb{W}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{L}_h$ solution de

$$(AP)_h \begin{cases} a_2(\bar{\phi}_h, \bar{\psi}_h) = (\bar{f}, \bar{\psi}_h) - \frac{1}{L_z} c(\bar{\psi}_h, \phi'_h), & \forall \bar{\psi}_h \in \mathbb{W}_h, \\ a(\phi'_h, \psi'_h) + b(\bar{P}_h, \psi'_h) = \varepsilon(f, \psi'_h) - \varepsilon c(\bar{\phi}_h, \psi'_h), & \forall \psi'_h \in \mathbb{V}_h, \\ b(\bar{Q}_h, \phi'_h) = 0, & \forall \bar{Q}_h \in \mathbb{L}_h. \end{cases} \quad (2.34)$$

Désignons par $A_2 \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$, $A \in \mathbb{R}^{N_x(N_z+2) \times N_x(N_z+2)}$, $B, C \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x(N_z+2)}$ les matrices associées aux formes bilinéaires a_2 , a , b , c respectivement, et par ailleurs définissons les seconds membres $F_1 \in \mathbb{R}^{N_x(N_z+2)}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{N_x}$ par

$$F_1(ik) := \varepsilon(f, \chi_i \kappa_k), \quad F_2(i) := (\bar{f}, \chi_i), \quad \forall i = 1, \dots, N_x, \quad k = 0, \dots, N_z + 1,$$

alors le système discret peut être réécrit en : Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{N_x(N_z+2)} \times \mathbb{R}^{N_x} \times \mathbb{R}^{N_x}$ solution de

$$\begin{pmatrix} A & \varepsilon C & B \\ \frac{1}{L_z} C^T & A_2 & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Grâce au théorème 2.2 et à la proposition 2.5, deux stratégies sont proposées pour la résolution de ce système linéaire : une résolution directe consistant à résoudre directement (2.35) avec un solveur linéaire approprié et une résolution itérative basée sur le découplage suivant

$$A_2 \beta^{(n+1)} = F_2 - \frac{1}{L_z} C^T \alpha^{(n)}, \quad (2.36a)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{(n+1)} \\ \gamma^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta^{(n+1)} \end{pmatrix}. \quad (2.36b)$$

Cela consiste à résoudre l'équation pour la partie de moyenne en utilisant une estimation de la partie de fluctuation, puis de calculer une meilleure estimation de la partie de fluctuation grâce à la mise à jour de partie de moyenne. Dans la sous-section suivante, nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution discrète correspondant à ces deux approches.

Existence / Unicité d'une résolution directe resp. itérative

Nous avons vu dans les sections précédentes que la reformulation AP (2.20) admet une unique solution faible $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x)$. L'objectif de la présente sous-section est de prouver que la reformulation AP discrète (2.34) a également une solution unique, c'est à dire que le système linéaire (2.35) est inversible.

Théorème 2.7. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé et supposons que l'hypothèse 2.1 est satisfaite. Alors la reformulation AP discrète (2.34) admet une unique solution $(\bar{\phi}_h, \phi'_h, \bar{P}_h) \in \mathbb{W}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{L}_h$.*

Preuve. Comme on considère maintenant un système linéaire de dimension finie, on ne vérifie que l'unicité de la solution. Pour cela, posons $f \equiv 0$ et montrerons que cela implique $(\bar{\phi}_h, \phi'_h, \bar{P}_h) \equiv 0$. La preuve est très similaire à la preuve de l'unicité de la solution dans le cas continu.

La première étape est de montrer que $\bar{P}_h = 0$. Pour cela, en prenant dans la deuxième équation de (2.34) des fonctions de test $\psi'_h \in \mathbb{W}_h$ dépendant seulement en coordonnée x , et en utilisant la première équation, on implique que $b(\bar{P}_h, \psi'_h) = 0$ pour toutes les $\psi'_h \in \mathbb{W}_h$, et donc $\bar{P}_h = 0$.

La deuxième étape consiste à montrer que $(\bar{\phi}_h, \phi'_h) \equiv (0, 0)$. Pour cela, prenons dans la deuxième équation de (2.34) la fonction de test $\psi'_h := \bar{\phi}_h + \phi'_h \in \mathbb{V}_h$. Cela donne

$$\int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_z |\partial_z \phi'_h|^2 dz dx + \varepsilon \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} A_\perp |\partial_x (\phi'_h + \bar{\phi}_h)|^2 dz dx = 0,$$

ce qui implique donc $\bar{\phi}_h + \phi'_h \equiv cst$. Du fait des conditions aux limites de Dirichlet, on obtient $\bar{\phi}_h + \phi'_h \equiv 0$. La troisième équation de (2.34) toutefois indique (après quelques calculs simples) que $\phi'_h = 0$, telle que l'intégration en z de l'équation $\bar{\phi}_h + \phi'_h \equiv 0$ donne immédiatement $(\bar{\phi}_h, \phi'_h) \equiv (0, 0)$ et ce qui termine la preuve. \square

Comme on l'a fait pour la résolution directe, on peut prouver maintenant que la procédure itérative admet également une solution unique.

Proposition 2.8. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé et supposons que l'hypothèse 2.3 est satisfaite. Alors la procédure itérative de la reformulation AP (2.36) admet une unique solution $(\bar{\phi}_h, \phi'_h, \bar{P}_h) \in \mathbb{W}_h \times \mathbb{V}_h \times \mathbb{L}_h$, si l'on commence la procédure avec une fonction $\phi'_{0,h}$, satisfaisant $\bar{\phi}'_{0,h} = 0$.*

Preuve. Tout d'abord, on montre immédiatement que la suite itérative est bien-posée, en particulier, que la matrice du système linéaire (2.36a) est inversible. Pour cela, posons $f = 0$ et $\bar{\phi}_h = 0$ dans l'équation (2.34), de plus posons $\psi'_h = \phi'_h$ et $\bar{Q}_h = \bar{P}_h$, on en déduit $a(\phi'_h, \phi'_h) = 0$, et donc $\phi'_h = 0$ et $b(\bar{P}_h, \psi'_h) = 0$ pour tous les $\psi'_h \in \mathbb{W}_h$. Enfin, on prend $\psi'_h = \bar{P}_h$, ce qui implique $\bar{P}_h = 0$. Ainsi la matrice de (2.36a) est inversible.

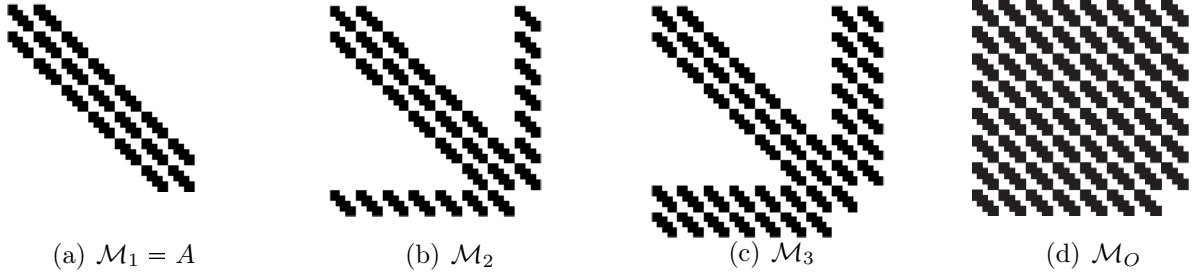
La convergence de cette suite itérative est immédiate, selon les mêmes arguments que dans le cas continu. \square

Comparaison des matrices de différentes discrétisations

Dans l'équation (2.36b), A , notée dans la suite par \mathcal{M}_1 , est la matrice associée au modèle de perturbation singulière, discrétisée par la méthode d'éléments finis introduite ci-dessus. La matrice associée à l'équation (2.36b), apportant la partie de fluctuation et l'approximation de Lagrange dans la méthode itérative, sera notée par \mathcal{M}_2 . Enfin, on introduit \mathcal{M}_3 la matrice associée à la solution du système entier apportant les approximations discrètes $(\phi'_h, \bar{\phi}_h, \bar{P}_h)$. Les structures et la taille de ces matrices sont affichées sur la figure 2.1. Pour être complet, la matrice associée au schéma AP original (2.12), (2.14), notée \mathcal{M}_O , est également incluse dans cette comparaison.

La matrice \mathcal{M}_2 est facilement construite grâce à la matrice du problème de perturbation singulière en ajoutant les deux blocs liés au multiplicateur de Lagrange, correspondant à la contrainte de moyenne nulle. La discrétisation de cette équation de fluctuation est donc simple, nécessitant de petites modifications localisées du code apportant le problème de perturbation singulière. La matrice \mathcal{M}_O dérivée du système AP original a la même taille que \mathcal{M}_2 , mais avec un nombre beaucoup plus important de coefficients non-nuls. Ceci s'explique facilement par la contribution de l'opérateur intégrodifférentiel du côté gauche de l'équation de fluctuation dans (2.14). Dans la nouvelle reformulation, cet opérateur est déplacé dans le second membre donnant un système linéaire plus creux. Cela souligne les avantages essentiels de la nouvelle reformulation-AP introduite dans le présent document par rapport à celle de [18]. La résolution directe augmente la taille du système linéaire, car elle donne l'approximation de partie moyenne, partie de fluctuation et le Lagrangien. Notons, cependant, que cette augmentation de la taille de la matrice n'est pas dramatique, puisque les parties de Lagrange et de moyenne ne dépendent pas de z . La taille des blocs à ajouter dans la matrice, dénotés B et C , est donc petite par rapport à la taille de A . Naturellement les deux reformulations-AP nécessitent la résolution de systèmes linéaires de grande taille comme le problème-SP initial. Cependant, l'avantage essentiel est qu'aucun effort numérique supplémentaire n'est nécessaire lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui n'est pas le cas pour le problème-SP. Dans ce dernier cas, le nombre de points de maillage doit augmenter avec $\varepsilon \rightarrow 0$ afin d'obtenir la précision désirée.

Pour souligner les arguments précités avec des exemples concrets, on compare dans le tableau 2.1, pour les deux exemples $(N_x, N_z) = (50, 50)$ et $(N_x, N_z) = (500, 500)$, les éléments non-nuls des quatre différentes matrices \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 et \mathcal{M}_O . On observe que



Mat.	$\mathcal{M}_1 = A$	$\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$
Taille	$N_x(N_z + 2)$	$N_x(N_z + 3)$
Nnz	$(3N_z + 4)(3N_x - 2)$	$(5N_z + 8)(3N_x - 2)$
Mat.	$\mathcal{M}_3 = \begin{pmatrix} A & \varepsilon C & B \\ \frac{1}{L_z} C^T & A_2 & 0 \\ B^T & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\mathcal{M}_O = \begin{pmatrix} \tilde{A} & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$
Taille	$N_x(N_z + 4)$	$N_x(N_z + 3)$
Nnz	$(7N_z + 13)(3N_x - 2)$	$(N_z^2 + 6N_z + 8)(3N_x - 2)$

FIGURE 2.1 – La structure (éléments non-nuls (Nnz)) et la taille de la matrice de discrétisation (méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1) pour un maillage de taille $(N_x, N_z) = (5, 5)$: (a) matrice associée au problème de perturbation singulière (2.6), (b) matrice associée à l'équation de fluctuation reformulée (2.36b), (c) matrice associée à la résolution directe du schéma AP (2.35), (d) matrice associée à l'équation de fluctuation de la reformulation AP originale (2.14).

la matrice \mathcal{M}_O correspondant au schéma AP de [18] est de 11 fois, même 101 fois dans le cas 500×500 , plus remplie que la matrice \mathcal{M}_2 correspondante. Ceci est assez drastique et permet de démontrer les avantages du schéma AP introduit ici par rapport à celui précédent. Il est intéressant d'observer aussi que le rapport entre la matrice \mathcal{M}_1 et de la matrice \mathcal{M}_2 resp. entre la matrice \mathcal{M}_1 et de la matrice \mathcal{M}_3 est presque invariant, ce qui signifie que les efforts numériques dans la résolution du modèle-SP ou de la reformulation AP sont presque les mêmes.

Étude numérique de la nouvelle reformulation AP

Dans cette sous-section, la nouvelle reformulation AP (2.20) du problème de perturbation singulière (2.6) sera étudiée. En particulier, on montrera que la nouvelle reformulation donne les mêmes propriétés par rapport à l'originale, présentée dans [18], cependant avec quelques avantages importants. Pour cela, l'expérience numérique proposée dans [18] est reproduite. Elle consiste à fabriquer un cadre analytique mis en place pour le problème, avec une solution exacte notée ϕ_e et définie comme

$$\phi_\varepsilon(x, z) := \sin\left(\frac{2\pi}{L_x}x\right) \left(1 + \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi}{L_z}z\right)\right). \quad (2.37)$$

Les coefficients du problème elliptique (2.6) (vérifiant l'hypothèse 2.3) sont définis par $A_\perp(x, z) = c_1 + xz^2$, $A_z(x, z) = c_2 + xz$, avec deux constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$. Le second

		\mathcal{M}_1	\mathcal{M}_O	\mathcal{M}_2	\mathcal{M}_3
		modèle-SP	original AP	itératif AP	direct AP
50×50	$p_1(\mathcal{M})$	0.34%	5.92%	0.54%	0.74%
	$p_2(\mathcal{M})$	1	18.2338	1.6753	2.3571
500×500	$p_1(\mathcal{M})$	0.00358%	0.6%	0.00594%	0.00829%
	$p_2(\mathcal{M})$	1	168.2234	1.6676	2.3358

TABLE 2.1 – Comparaison du nombre d’éléments non-nuls (Nnz) dans les systèmes linéaires associés au problème de perturbation singulière discrète, le schéma AP original, et les deux nouveaux schémas AP itératif et direct, *i.e.* $p_1(\mathcal{M}) = Nnz(\mathcal{M})/\text{rk}(\mathcal{M})^2$, $p_2(\mathcal{M}) = Nnz(\mathcal{M})/Nnz(\mathcal{M}_1)$ où \mathcal{M} est \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_O , \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}_3 respectivement et $\text{rk}(\mathcal{M})$ dénote le rang de matrice \mathcal{M} .

membre f du problème est analytiquement calculé par l’injection de la solution exacte ϕ_e dans (2.6). Une approximation de cette fonction ϕ_h peut alors être calculée grâce aux différentes méthodes numériques présentées ci-dessus, leur précision étant analysées par l’erreur relative

$$\|\phi_e - \phi_h\|_r = \frac{\|\phi_e - \phi_h\|_2}{\|\phi_e\|_2}. \quad (2.38)$$

Notons que $\|\phi_e\|_2^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{\varepsilon^2}{2})LxLz$, ainsi cette norme ne s’annule pas lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans des expériences suivantes, le domaine de simulation $[0, 1] \times [0, 1]$ est discrétisé uniformément en 50×50 , 250×250 et 500×500 points, et on utilise une méthode d’éléments finis de type \mathbb{Q}_1 , et une formule de quadrature de Gauss-Legendre à trois points comme la quadrature d’intégrale discrète. Nous comparons dans la figure 2.2 les précisions du modèle de perturbation singulière (2.6), de la résolution directe (2.35) et itérative (2.36) du schéma AP et du problème de limite (2.8).

On peut observer que le modèle limite ne donne des approximations précises que pour des petites valeurs de ε . Pour d’assez grandes valeurs de ε , la partie de fluctuation ne peut pas être négligée et un modèle plus complet doit être utilisé. Le modèle de perturbation singulière donne des résultats précis seulement pour de grandes valeurs de ε . La précision de l’approximation se détériore de manière significative pour ε inférieur à 10^{-10} sur un maillage grossier (voir la figure 2.2(a)). Le domaine de validité (précision) du système-SP devient encore plus petit sur un maillage raffiné (voir la figure 2.2(b)). Ceci est dû au fait que le conditionnement du problème de maillage raffiné est supérieur à celui du problème avec un maillage grossier. Par exemple, quand $\varepsilon = 10^{-12}$, le conditionnement pour maillage 50×50 est 3.6387×10^{15} , alors qu’il vaut 3.3079×10^{17} pour maillage 500×500 . La précision de la solution, calculée par le schéma AP, est presque indépendante de ε montrant donc l’efficacité de cette nouvelle reformulation AP pour toute anisotropie.

Le conditionnement des différents systèmes linéaires est tracé sur la figure 2.3(a), en fonction de ε . Il est calculé grâce à l’algorithme de l’estimation de norme 1 du conditionnement par bloc [26]. Le nouveau schéma AP donne les mêmes caractéristiques avantageuses que le schéma AP original schéma, avec une matrice dont le conditionnement est presque indépendant de la valeur de ε pour les grands rapports d’anisotropie. Le problème de perturbation singulière discrétisé conduit à une matrice dont le conditionnement explose à la

2.2. Dérivation d'un nouveau schéma préservant l'asymptotique (AP) pour ε constant

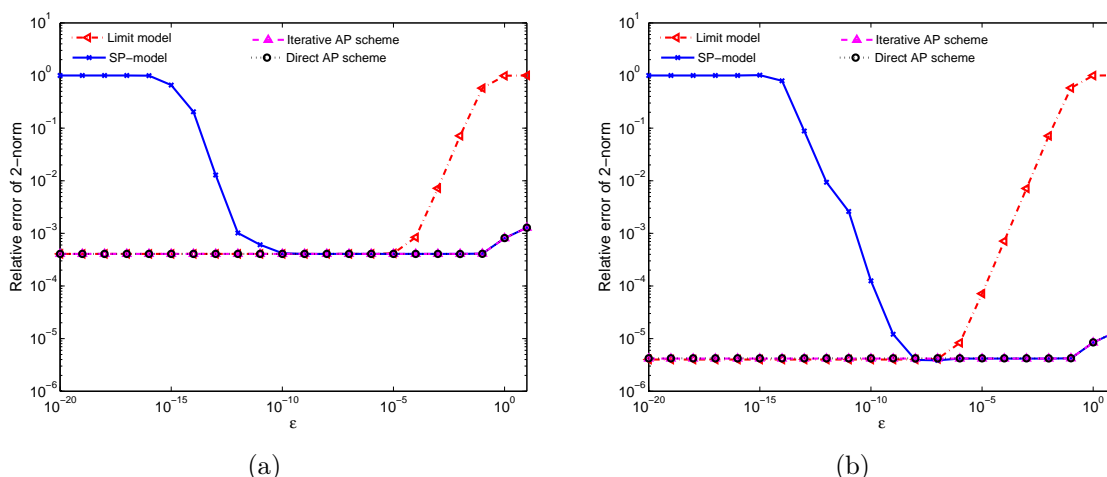
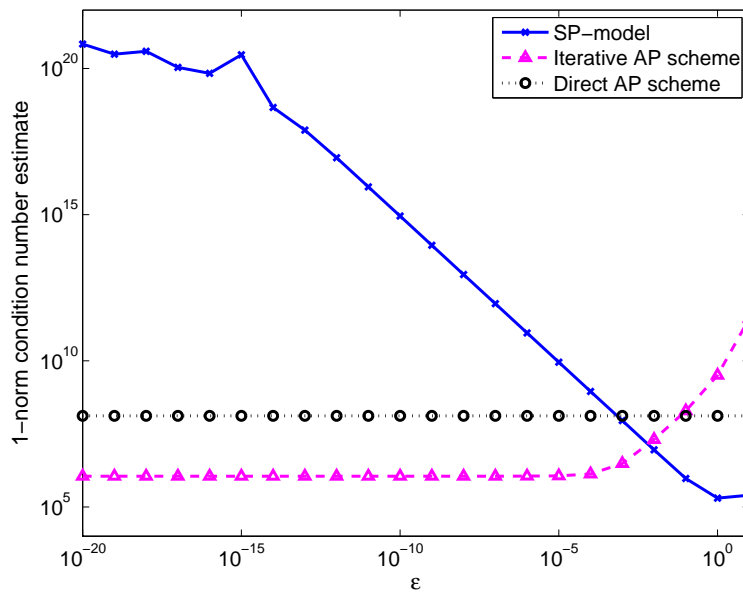


FIGURE 2.2 – Erreur relative entre la solution exacte et ses approximations calculées avec le modèle limite (2.8), le modèle original (perturbation singulière) (2.6) ainsi que les nouveaux schémas itératif (2.36) et direct (2.35) pour les maillages (a) : 50×50 et (b) : 500×500 nœuds.

limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Ceci explique la mauvaise précision de ce schéma pour les grands rapports d'anisotropie.

L'efficacité de calcul, en fonction du taux d'anisotropie, est évaluée dans le tableau 2.3(b) pour les différentes approches. Le temps CPU du modèle de perturbation singulière est utilisé comme référence. Ces calculs sont effectués grâce à un solveur linéaire direct creux PARDISO [45], [36] et indépendant de la valeur de ε . Pour la résolution directe, le système linéaire n'est résolu qu'une seule fois, alors que pour la résolution itérative, deux systèmes linéaires de tailles différentes sont résolus plusieurs fois jusqu'à la différence entre deux solutions successives du système (2.36) soit petite. Dans le cas test, on prend la critère d'arrêt comme $\max(|(\phi')^{(n)} - (\phi')^{(n+1)}|) < 10^{-4}$ && $\max(|\bar{\phi}^{(n)} - \bar{\phi}^{(n+1)}|) < 10^{-4}$. Notons que la partie la plus coûteuse de la résolution directe est la factorisation de la matrice. Aussi, dans la procédure itérative, on peut stocker les matrices factorisées, et utiliser ensuite ces matrices à chaque itération. Par conséquent, il est possible de gagner du temps de calcul par cette factorisation dans la résolution itérative.

Un plus grand nombre d'éléments non-nuls ainsi qu'une augmentation de la taille du système linéaire, expliquent la plus grande quantité de calculs requis par le schéma AP. La résolution directe est environ 80 % plus lente que celle du modèle-SP. Toutefois, la reformulation AP donne une matrice avec un meilleur conditionnement et conduit à des solutions correctes pour toute valeur de ε . Il est prévisible que le schéma AP soit plus efficace que le modèle-SP avec une méthode de Krylov utilisée pour la résolution des systèmes linéaires. Ce point est présenté dans la section 2.7. De plus, on note l'efficacité de la résolution itérative. Pour les plus petites valeurs de ε , son efficacité est comparable à celle de la résolution directe. Pour les plus grandes valeurs, cette approche demande plus de calculs, en raison d'un grand nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence. Pour $\varepsilon = 1$, 18 itérations sont en effet nécessaires pour calculer une approximation



(a)

ε		1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-20}
Dire.	r_D	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
Iter.	r_I	6.0	5.4	5.0	4.0	3.4	2.2	2.0	2.0	1.7	1.7	1.7
	n_I	18	16	14	11	8	4	3	3	2	2	2

(b)

FIGURE 2.3 – Comparaison entre le modèle original en dimension deux (2.6), le schéma AP itératif (2.36) et le schéma AP direct (2.35) avec une taille de maillage 250×250 . (a) Estimation du conditionnement pour la matrice de discrétisation ; (b) Temps de calcul de la résolution AP direct resp. AP itérative, divisée par le temps de calcul de la résolution du modèle-SP, noté par r_D et r_I respectivement. Le nombre d'itération de la résolution itérative, noté par n_I , est aussi indiqué. Les systèmes linéaires sont résolus par le solveur direct creux PARDISO.

précise, donnant lieu à un effort de calcul presque trois fois plus grand que celui de la résolution directe.

2.3 Vers un problème modèle bien adapté pour le cas ε variable

2.3.1 Motivation et conception d'un problème modèle plus général

Le second objectif de ce document est de donner une méthode numérique capable de gérer des modèles anisotropes liés à des problèmes de la physique des plasmas et plus

particulièrement dans les simulations de plasma ionosphérique où l'anisotropie du milieu est liée au champ magnétique terrestre. Dans ce contexte, les collisions d'ions-neutres sont responsables d'une grande mobilité des particules [6], [20] le long des lignes de champ magnétique, tandis que les mobilités transverses sont assez faibles. Toutefois, la fréquence de collisions est soumise à de grandes variations avec l'altitude, comme cela présentée dans la figure 2.4(a). Elles peuvent atteindre dix ordres de grandeur sur une plage d'altitudes de mille kilomètres ([9], [28]). L'anisotropie de ce paramètre dans l'ionosphère est donc très grande à haute altitude tandis qu'elle diminue pour les plus basses (voir la figure 2.4(b)).

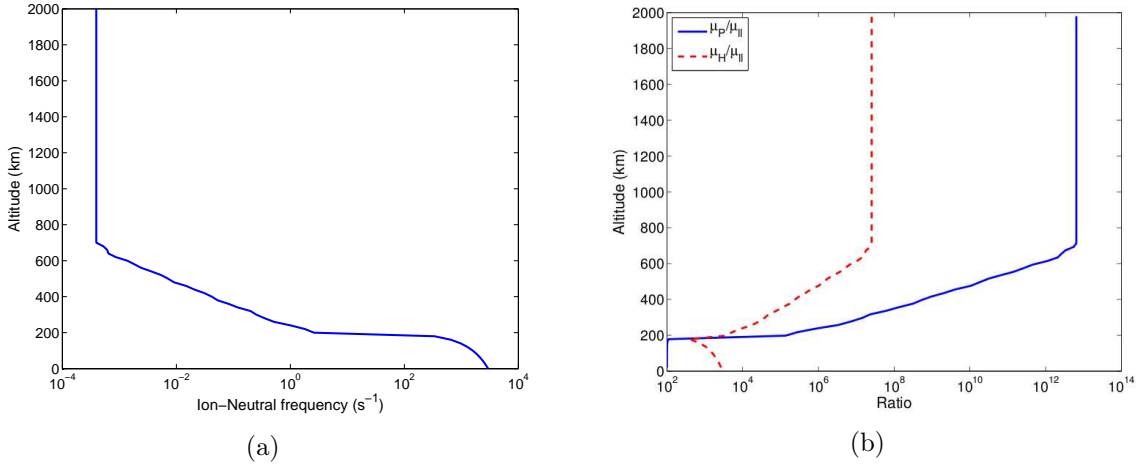


FIGURE 2.4 – Caractéristiques typiques du plasma ionosphérique en fonction de l'altitude. (a) La fréquence des collisions ion-neutre. (b) Rapport des mobilités transverses et alignée (par rapport au champ magnétique terrestre). μ_P , μ_H , $\mu_{||}$ désignent les mobilités de Pedersen, de Hall, et alignée présentées dans la section 1.3.4.

Le problème modèle considéré jusqu'à présent est représentatif de l'ionosphère dans les plus hautes altitudes. Afin de traiter cette grande variation des paramètres dans tout le champ des altitudes, le modèle considéré dans la suite utilisera un taux d'anisotropie non homogène, en fonction de l'espace des coordonnées (x, z) . Ce problème modèle consiste à trouver $\phi(x, z)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp}(x, z) \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z(x, z)}{\varepsilon(x, z)} \frac{\partial \phi(x, z)}{\partial z} \right) = f(x, z), & \text{on } \Omega, \\ \phi(x, z) = 0, & (x, z) \in \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \partial_z \phi(x, z) = 0, & (x, z) \in \Omega_x \times \partial\Omega_z, \end{cases} \quad (2.39)$$

où A_{\perp} , A_z et ε sont des fonctions positives, ε représente de forte gradient. Le système (2.39) est une version simplifiée du modèle Dynamo-3D présenté dans la section 1.3.4.

2.3.2 Reformulation préservant l'asymptotique pour les taux d'anisotropie hétérogènes

Dans cette sous-section, la reformulation préservant l'asymptotique est dérivée pour les taux d'anisotropie non-homogènes. En prenant en compte que ε est une fonction des variables d'espace, les reformulations des équations de moyenne et de fluctuation sont maintenant écrites (pour comparaison voir (2.12),(2.13))

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{A_{\perp}} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) = \bar{f} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\overline{A_{\perp}} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right), & \text{dans } \Omega_x, \\ \bar{\phi} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x. \end{cases} \quad (2.40a)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z}{\varepsilon} \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) = f + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right), & \text{dans } \Omega, \\ \phi' = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_z, \\ \partial_z \phi' = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_z, \\ \bar{\phi}' = 0, & \text{dans } \Omega_x. \end{cases} \quad (2.40b)$$

L'équation de moyenne (2.40a) est dérivée du cas ε homogène, l'équation de fluctuation (2.40b) est elle légèrement modifiée. On introduit les mêmes espaces de Hilbert \mathbb{V} , \mathbb{W} , comme définis dans la sous-section 2.2.2, et un nouveau produit scalaire indépendant de ε

$$(\phi, \psi)_{\mathbb{V}} = (\partial_x \phi, \partial_x \psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_z \phi, \partial_z \psi)_{L^2(\Omega)}.$$

En redéfinissant certains termes de la forme bilinéaire (2.16), essentiellement $a_0(\cdot, \cdot)$, $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$, on a

$$\begin{aligned} a_0(\phi', \psi') &:= \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} \frac{A_z(x, z)}{\varepsilon(x, z)} \frac{\partial \phi'}{\partial z}(x, z) \frac{\partial \psi'}{\partial z}(x, z) dx dz, \\ a_1(\phi', \psi') &:= \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} A_{\perp}(x, z) \frac{\partial \phi'}{\partial x}(x, z) \frac{\partial \psi'}{\partial x}(x, z) dx dz, \\ a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) &:= \int_0^{L_x} \bar{A}_{\perp}(x) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}(x) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x}(x) dx, \\ a(\phi', \psi') &:= a_0(\phi', \psi') + a_1(\phi', \psi'), \\ b_1(\bar{P}, \psi') &:= \int_0^{L_x} \bar{P}(x) \int_0^{L_z} \frac{1}{\varepsilon(x, z)} \psi'(x, z) dz dx, \\ b_2(\phi', \bar{Q}) &:= \frac{1}{L_z} \int_0^{L_x} \bar{Q}(x) \int_0^{L_z} \phi'(x, z) dz dx, \\ c(\bar{\phi}, \psi') &:= \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} A_{\perp}(x, z) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x}(x) \frac{\partial \psi'}{\partial x}(x, z) dx dz, \end{aligned} \quad (2.41)$$

et la formulation faible de (2.40) s'écrit

$$\begin{cases} a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) = (\bar{f}, \bar{\psi}) - \frac{1}{L_z} c(\bar{\psi}, \phi'), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}, \\ a(\phi', \psi') = (f, \psi') - c(\bar{\phi}, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}. \end{cases} \quad (2.42)$$

La reformulation AP du problème (2.42) est de nouveau déduite en introduisant un multiplicateur de Lagrange \bar{P} , correspondant à la contrainte $\bar{\phi}' \equiv 0$. On a donc

$$(AP)_{var} \begin{cases} a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) = (\bar{f}, \bar{\psi}) - \frac{1}{L_z} c(\bar{\psi}, \phi'), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}, \\ a(\phi', \psi') + b_1(\bar{P}, \psi') = (f, \psi') - c(\bar{\phi}, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}, \\ b_2(\bar{Q}, \phi') = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_x). \end{cases} \quad (2.43)$$

Remarque 2.9. Notons que le système linéaire discret obtenu pour la partie de fluctuation n'est pas symétrique à cause des taux d'anisotropie non-homogène. La forme bilinéaire b définie dans (2.16) par

$$b(\bar{P}, \psi') := \int_0^{L_x} \bar{P}(x) \int_0^{L_z} \psi'(x, z) dz dx$$

est maintenant réécrite comme

$$b_1(\bar{P}, \psi') := \int_0^{L_x} \bar{P}(x) \int_0^{L_z} \frac{1}{\varepsilon(x, z)} \psi'(x, z) dz dx.$$

Avec cette nouvelle définition, si on adimensionne tous les termes contenus dans la deuxième équation de (2.43) par $1/\varepsilon$, alors il garantit la propriété de préservation de l'asymptotique du schéma.

On va maintenant prouver que le système (2.43) est équivalent au problème (2.42).

Hypothèse 2.10. Nous supposons dans la suite que $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, satisfaisant $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon(x, z) \leq \varepsilon_M \leq 1$ avec ε_0 resp. ε_M deux constantes.

Proposition 2.11. Sous l'hypothèse 2.1 et l'hypothèse 2.10, il existe un unique $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x)$ satisfaisant (2.43). De plus, la paire $(\bar{\phi}, \phi')$ est l'unique solution de (2.42) et $\bar{P} \equiv 0$.

Preuve. Le caractère bien-posé du système (2.42) peut être prouvé comme on l'a fait dans le cas ε constant. Il est donc nécessaire de prouver l'équivalence entre le système (2.42) et le système (2.43).

Soit $(\bar{\phi}, \phi') \in \mathbb{W} \times \mathbb{V}$ l'unique solution du système (2.42), alors $(\bar{\phi}, \phi', 0)$ est solution du système (2.43). Inversement, on suppose que $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x)$ est la solution du système (2.43). Prenant dans la deuxième équation du système (2.43) des fonctions de test ψ' ne dépendant que de x conduit à

$$\begin{aligned} & L_z \int_0^{L_x} \overline{A_\perp \partial_x \bar{\phi}'} \partial_x \psi' dx + \int_0^{L_x} \bar{P}(x) \psi'(x) \int_0^{L_z} \frac{1}{\varepsilon(x, z)} dz dx \\ &= L_z \int_0^{L_x} \bar{f} \psi' dx - L_z \int_0^{L_x} \overline{A_\perp \partial_x \bar{\phi}} \partial_x \psi' dx. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que $L_z \int_0^{L_x} \overline{A_\perp} \partial_x \phi' \partial_x \psi' dx + L_z \int_0^{L_x} \overline{A_\perp} \partial_x \bar{\phi} \partial_x \psi' dx = L_z \int_0^{L_x} \bar{f} \psi' dx$ grâce à la première équation du système (2.43). Ainsi, on obtient

$$\int_0^{L_x} \bar{P}(x) \psi'(x) \int_0^{L_z} \frac{1}{\varepsilon(x, z)} dz dx = 0, \quad \forall \psi' \in \mathbb{W}.$$

Comme $\int_0^{L_z} \frac{1}{\varepsilon(x, z)} dz > 0$, on en déduit que $\bar{P} \equiv 0$, par des arguments de densité. \square

2.3.3 De forts gradients de taux d'anisotropie hétérogènes

Avant de discrétiser le système AP (2.43), on doit d'abord réfléchir aux problèmes numériques résultant de variations rapides de la fonction $\frac{1}{\varepsilon}$. Comme on le sait, une fonction continue à variation rapide peut être considérée numériquement comme une fonction discontinue dans certains intervalles d'un maillage. On peut affiner le maillage de discrétisation pour obtenir une solution approchée plus précise, mais avec des efforts de calcul plus importants. Par exemple, dans les simulations en 3 dimensions, la complexité de calcul est égale à N^3 , où N est le nombre d'intervalles dans chaque direction. Un raffinement ne peut pas être acceptable pour N grand.

Pour contourner cette difficulté liée à la discrétisation des forts gradients, on est guidé par les idées proposées par Saito *et al.* [44]. Ils considèrent un problème aux limites de la forme

$$-(pu')' = f(x \in I), \quad u|_{x=0,1} = 0,$$

où $p \in L^\infty$ et $f \in L^2$ sont des fonctions données. Le gradient de p est très raide. Saito *et al.* [44] étudient l'estimation de l'erreur d'une méthode d'éléments finis standard via la fonction de Green de la solution. En effet, en désignant par $AU = F$ le système linéaire correspondant à la méthode des éléments finis, on note que $G := A^{-1}$ est une approximation de cette fonction de Green. Ainsi Saito *et al.* [44] ont proposé d'utiliser une moyenne harmonique pour approximer la fonction de Green. Plus en détails, les coefficients de la matrice A de discrétisation-EF sont donnés par $a_i = \frac{1}{\Delta x^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p dx$, alors que leurs

moyennes harmoniques sont $\tilde{a}_i = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} p^{-1} dx \right)^{-1}$. L'analyse d'erreur a été présentée par T. Tsuchiya *et al.* [52]. Ils montrent que la méthode de moyenne harmonique est plus précise que celle de la moyenne arithmétique dans le cas où le gradient de p est très grand. En outre, le schéma de Scharfetter-Gummel (SG), qui est une formule quadrature particulière de la moyenne harmonique, est connu pour avoir une estimation d'erreur ne dépendant que de $\ln p$ [44]. Ainsi, le schéma SG doit fournir une précision plus importante des résultats numériques par rapport à la méthode des éléments finis standard surtout quand le gradient de p est très grand.

On propose donc ici trois approches pour traiter le problème de forts gradients (2.43). On va considérer, pour des raisons de simplicité, des anisotropies $\varepsilon(z)$ ne dépendant que de z . La première approche consiste à utiliser une formulation non-conservative de l'équation

de fluctuation. En développant $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z}{\varepsilon} \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)$ dans (2.40b), on obtient l'équation suivante

$$-\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp} \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial \phi'}{\partial z} \right) + \frac{\partial(\ln \varepsilon)}{\partial z} A_z \frac{\partial \phi'}{\partial z} = \varepsilon f + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(A_{\perp} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right).$$

Pour mettre en œuvre cette approche, nous utilisons de nouveau les formes bilinéaires (2.16), mais changeons seulement $a(\phi, \psi')$ en

$$a_0(\phi', \psi') := \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} A_z(x, z) \frac{\partial \phi'}{\partial z}(x, z) \frac{\partial \psi'}{\partial z}(x, z) + \frac{\partial \ln \varepsilon(z)}{\partial z} A_z(x, z) \frac{\partial \phi'}{\partial z}(x, z) \psi'(x, z) dx dz.$$

Cependant, cette expression n'est plus sous une forme conservative.

Dans une deuxième approche, on utilise la méthode moyenne harmonique. Pour cela, nous considérons $\frac{A_z}{\varepsilon}$ dans (2.43) comme la fonction à la variation rapide p , et on utilise la forme moyenne harmonique \tilde{a} proposée ci-dessus. La troisième approche est le schéma Scharfetter-Gummel proposé dans [44]. Nous précisons ces approches dans la section 2.6.

Dans la suite on utilisera ces trois approches pour discrétiser problème (2.43) et nous les comparerons avec une discrétisation d'éléments finis standard.

2.3.4 Résultats numériques

Pour vérifier l'efficacité du schéma AP pour des problèmes avec des taux d'anisotropie très hétérogènes, on choisit un cas test avec la variable ε construite artificiellement. De toute évidence, elle ne correspond pas aux taux physiques. Cependant, si le schéma AP se comporte bien pour ces cas test formels, il devrait également être efficace pour les vrais problèmes physiques. Nous utilisons de nouveau la solution exacte et la matrice de diffusion dans le cas ε constant, mais remplaçant la constante ε par une variable de la forme

$$\varepsilon_1(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\varepsilon_{\max} (1 + \tanh(q(0.1L_z - z))) + \varepsilon_{\min} (1 - \tanh(q(0.1L_z - z)))) , & \text{si } 0 \leq z \leq \frac{L_z}{2}, \\ \frac{1}{2} (\varepsilon_{\max} (1 + \tanh(q(z - 0.9L_z))) + \varepsilon_{\min} (1 - \tanh(q(z - 0.9L_z)))) , & \text{si } \frac{L_z}{2} \leq z \leq L_z. \end{cases} \quad (2.44)$$

La variable ε_1 est contrôlée par trois paramètres $q, \varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min}$: q décrit la raideur de la courbe, $\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\min}$ contrôlent les valeurs maximum et minimum de ε_1 . Un exemple de fonction ε_1 est illustré dans la figure 2.5. Il est construit de façon à esquisser la variation des paramètres physiques présentés dans la figure 2.4(b).

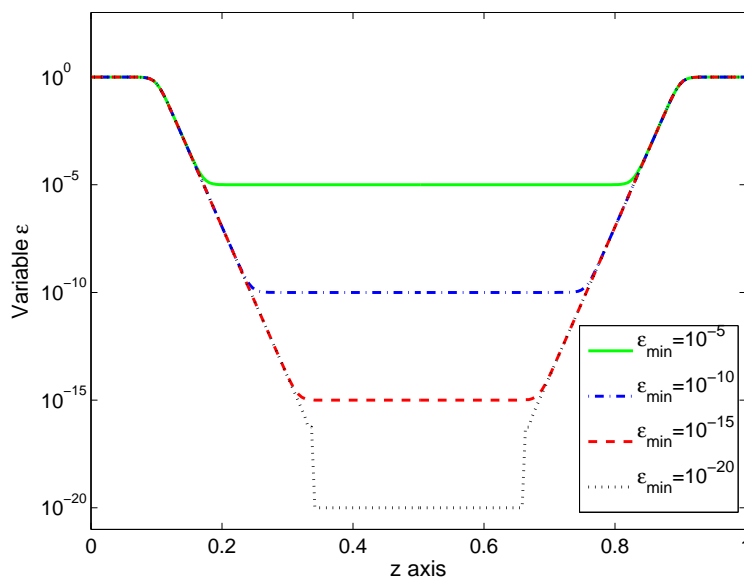


FIGURE 2.5 – Fonction ε_1 pour des ε_{\min} différents. On fixe $q = 80$, $\varepsilon_{\max} = 1$ et trace la courbe ε_1 pour différents ε_{\min} égaux à 10^{-5} , 10^{-10} , 10^{-15} et 10^{-20} .

Dans les tests numériques suivants, nous fixons les paramètres $\varepsilon_{\max} = 1$, $q = 80$ et faisons varier le paramètre ε_{\min} de 10^{-20} à 1. Le second membre f est obtenu en injectant $\phi_e(x, z)$ dans l'équation (2.39). On compare les résultats numériques obtenus par toutes les méthodes mentionnées ci-dessus : le modèle-SP en dimension deux (2.39), discrétisé par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 , le schéma AP standard (2.43), le schéma AP non-conservatif, le schéma AP avec moyenne harmonique, et le schéma AP de type Scharfetter-Gummel. Les quatre schémas AP sont résolus à l'aide des deux types de résolutions itératives et directes. Après des essais numériques, nous constatons que les erreurs relatives de ces deux résolutions sont les mêmes. Ainsi, nous ne présentons que les résultats numériques de la résolution directe.

Dans la figure 2.6(a), on observe que l'erreur relative en norme L^2 du modèle-SP augmente avec la diminution de la valeur de ε_{\min} . Cette erreur reste proche de 10^{-3} pour ε_{\min} entre 10^{-3} et 10^{-11} , mais explose quand $\varepsilon_{\min} \leq 10^{-11}$. La courbe du schéma AP coïncide avec celle du modèle-SP quand $\varepsilon_{\min} > 10^{-11}$, mais la précision du schéma AP reste indépendante de ε_{\min} pour les grands taux d'anisotropie. Le schéma AP non-conservatif montre une évolution non monotone de la précision, avec un pic obtenu pour $\varepsilon_{\min} = 10^{-2}$. Cependant, la norme de l'erreur est proche de 2×10^{-4} pour ε_{\min} inférieur à 10^{-5} . La courbe du schéma AP avec moyenne harmonique est similaire à celle du schéma AP standard mais avec une erreur relative plus petite. Enfin, le schéma Scharfetter-Gummel AP donne la meilleure précision avec l'erreur relative d'un ordre de grandeur inférieure à celle du schéma AP standard.

Dans la figure 2.6(b) les estimations du conditionnement des différentes méthodes sont affichées. Ces estimations de conditionnement sont calculées après qu'un équilibrage des matrices soit effectué. En effet, le conditionnement peut être très grand à cause de la forte variation de $1/\varepsilon$. Ainsi en multipliant ε dans la seconde équation de (2.43), on peut

améliorer le conditionnement. Numériquement, cette procédure consiste à multiplier \mathcal{M}_2 , respectivement \mathcal{M}_3 , par les matrices d'équilibre de lignes \mathcal{P}_2 , respectivement, \mathcal{P}_3 , définies par

$$\mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathcal{E}_{N_z+1} & \\ & & & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathcal{E}_{N_z+1} & \\ & & & I \\ & & & & I \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{E}_k = \varepsilon(z_k)I$ pour $0 \leq k \leq N_z + 1$ et I est la matrice d'identité de taille $N_x \times N_x$. Comme dans le cas ε homogène, le conditionnement du modèle-SP augmente avec le taux d'anisotropie, tandis que les courbes correspondant aux quatre schémas AP coïncident presque et restent tout à fait indépendantes de la valeur ε_{\min} .

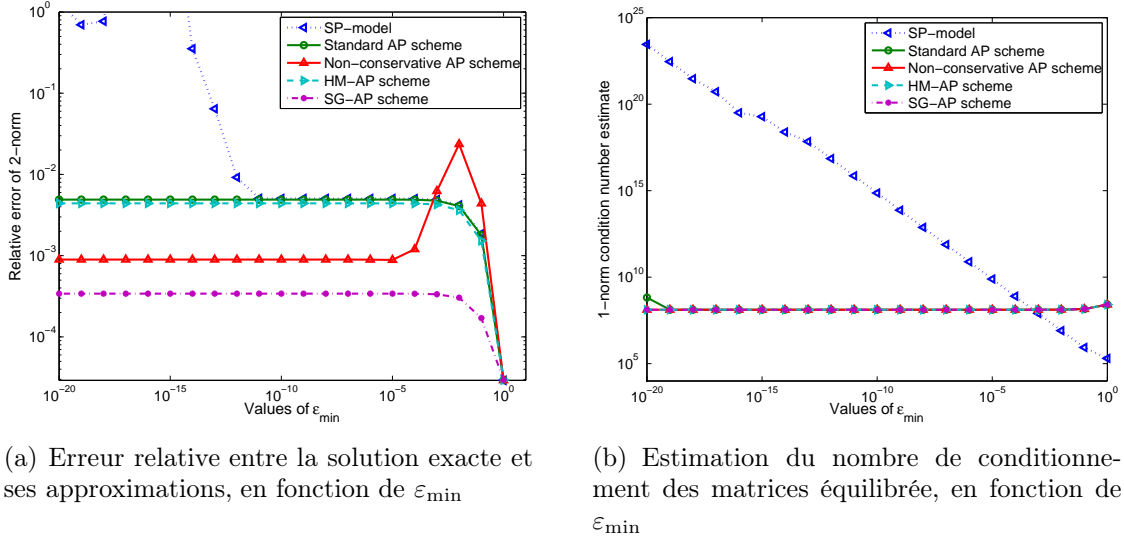


FIGURE 2.6 – Comparaison du modèle-SP, le schéma AP standard, le schéma AP non-conservatif, le schéma AP avec moyenne harmonique et le schéma AP Scharfetter-Gummel pour un calcul en dimension deux dans un maillage 250×250 , en utilisant une méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 .

Enfin, on étudie l'efficacité des résolutions itérative et directe du schéma AP. Dans le tableau 2.2 les deux résolutions sont comparées pour des calculs effectués dans des maillages avec de 50×50 , 250×250 et 500×500 cellules. Le taux d'anisotropie est donné comme avant avec $\varepsilon_{\max} = 1$, $q = 80$ et des valeurs ε_{\min} allant de 10^{-20} à 1. Pour la résolution itérative, la suite est initiée avec $\phi' = x(x - L_x) \cos\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right)$. On note que le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence augmente faiblement avec la taille des mailles, mais de façon significative avec les valeurs des taux d'anisotropie. Le nombre d'itérations nécessaire pour les plus petites valeurs de ε_{\min} est de trois à quatre fois inférieur à celui de la configuration isotrope. Pour les deux tests en dimensions deux étudiés jusqu'ici, la résolution directe, bien que produisant un plus grand système linéaire,

se montre plus efficace que la résolution itérative. La tableau 2.2 présente également le temps de calcul pour les deux approches divisés par celui du modèle-SP. L'efficacité du solveur direct ne se détériore pas de manière significative avec le raffinement de maillage. En effet, avec un maillage composé de 50×50 cellules, le schéma AP est 40% plus lent que le modèle-SP. Dans l'utilisation d'un maillage plus raffiné, avec cent fois le nombre de cellules, le schéma AP est environ deux fois plus lent que le modèle-SP. La résolution itérative demande plus de temps de calcul, entre 2 et 4 fois, que la résolution directe. Notons cependant que l'efficacité relative de ces deux résolutions peut être modifiée si on a une bonne estimation de la solution pour l'initialisation de la suite.

ε_{\min}			1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-20}
50×50	Iter.	n_I	17	13	10	7	5	5	5	5
		r_I	6.5	5.3	4.6	4.3	3.5	3.5	3.5	3.5
	Dire.	r_D	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
250×250	Iter.	n_I	18	15	12	10	7	5	5	5
		r_I	7.7	6.8	6.1	5.5	4.8	4.2	4.2	4.2
	Dire.	r_D	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
500×500	Iter.	n_I	19	15	13	11	8	6	5	5
		r_I	7.3	6.4	5.9	5.4	4.8	4.4	4.1	4.1
	Dire.	r_D	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1

TABLE 2.2 – L'efficacité de calcul des résolutions itératives et directes du schéma AP sur des maillages avec 50×50 , 250×250 et 500×500 points : n_I est le nombre d'itérations de la résolution itérative, r_I (resp. r_D) est le temps de calcul de la résolution itérative (resp. directe) divisé par le temps de calcul du modèle-SP. Tous les systèmes linéaires sont résolus grâce à un solveur direct creux [45].

2.4 Un cas test physique en dimension trois

L'objectif de cette section est de généraliser le schéma AP présenté précédemment afin de l'appliquer à un problème réel de plasma ionosphérique en dimension trois dans la section 1.3.4. En fait, dans ce modèle la matrice de diffusion \mathcal{A} est de la forme suivante

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mu^P & \mu^H & 0 \\ -\mu^H & \mu^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

où μ^P , μ^H , μ^{\parallel} sont respectivement les mobilités de Pedersen, de Hall et alignée [3]. Grâce aux modèles ionosphériques standard (voir par exemple le modèle IRI [9] ou le modèle SAMI2 [28], [29]), ces quantités peuvent être estimées et montrent de grandes différences pour μ^P et μ^H par rapport à μ^{\parallel} (voir figure 2.4(b)). De plus, le rapport entre μ^P/μ^H en fonction de l'altitude est aussi très important dans certaines couches ionosphériques. Ainsi, les variations d'anisotropie ne sont pas limités à une seule direction. Dans cette section, on va donc se concentrer sur un problème elliptique anisotrope en dimension trois et montrer que le schéma AP est valable pour un problème anisotrope hétérogène plus complexe et réaliste.

2.4.1 Le modèle en dimension trois

Considérons maintenant le problème elliptique anisotrope en dimension trois $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suivant

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathcal{A}\nabla\phi) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{A}\nabla\phi \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z \cup \Omega_x \times \Omega_y \times \partial\Omega_z, \\ \phi = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_y \times \Omega_z, \end{cases} \quad (2.46)$$

où \mathcal{A} est la matrice de diffusion de la forme

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & -\varepsilon D & 0 \\ \varepsilon D & B & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon}C \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

et $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z)$ resp. $D(x, y, z)$ sont des fonctions connues du même ordre de grandeur. Le paramètre $0 < \varepsilon \leq 1$ peut être une fonction (ou une constante) de toutes les variables provoquant l'anisotropie du problème.

Étudions d'abord les propriétés de problème (2.46)-(2.47). Pour cela, on définit l'espace de Hilbert suivant

$$\mathbb{V} = \{\phi \in H^1(\Omega) / \phi = 0 \text{ sur } \Omega_x \times \partial\Omega_y \times \Omega_z\},$$

avec le produit scalaire correspondant

$$(\phi, \psi)_{\mathbb{V}} = (\partial_x\phi, \partial_x\psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_y\phi, \partial_y\psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_z\phi, \partial_z\psi)_{L^2(\Omega)}.$$

La formulation faible de (2.46) s'écrit

$$a(\phi, \psi) = (f, \psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{V} \quad (2.48)$$

avec $a(\phi, \psi) := \int_{\Omega} (\mathcal{A}\nabla\phi) \cdot \nabla\psi \, dx dy dz$. On montre dans la proposition suivante que (2.48) admet une unique solution faible sous l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2.12. *Nous supposons que les fonctions de diffusion $A, B, C, D \in L^\infty(\Omega)$ ainsi que l'anisotropie $\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ et satisfont $0 < c_{\min} \leq A, B, C \leq c_{\max}$ resp. $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_M \leq 1$ où c_{\min} , c_{\max} , ε_0 , ε_M sont des constantes positives. De plus, posons $f \in L^2(\Omega)$.*

Proposition 2.13. *Sous l'hypothèse (2.12), l'équation (2.48) admet une unique solution faible $\phi \in \mathbb{V}$.*

Preuve. Pour prouver cette proposition, on utilise le lemme de Lax-Milgram. En effet, la coercivité de la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est immédiat, comme

$$\begin{aligned} a(\phi, \phi) &= \int_{\Omega} A|\partial_x\phi|^2 + B|\partial_y\phi|^2 + \frac{1}{\varepsilon}C|\partial_z\phi|^2 \, dx dy dz \\ &\geq c_{\min}\|\phi\|_{\mathbb{V}}^2, \quad \phi \in \mathbb{V}. \end{aligned}$$

La continuité de $a(\cdot, \cdot)$ peut être facilement vérifiée. □

2.4.2 La reformulation AP

Nous introduirons dans cette sous-section la reformulation AP du modèle (2.48). On ne considère que le cas de ε variable, puisque le cas ε constant revient juste à une multiplication par ε de cette reformulation. En suivant la même procédure que dans les sections précédentes, en particulier la décomposition de ϕ comme $\phi = \bar{\phi} + \phi'$, nous trouvons le schéma AP correspondant au problème (2.46), consistant en une équation de moyenne

$$\begin{cases} -\nabla_{\perp} (\bar{\mathcal{A}}_{\perp} \nabla_{\perp} \bar{\phi}) - \nabla_{\perp} (\overline{\bar{\mathcal{A}}_{\perp} \nabla_{\perp} \phi'}) = \bar{f}, & \text{dans } \Omega_x \times \Omega_y, \\ \bar{\mathcal{A}}_{\perp} \nabla_{\perp} \bar{\phi} \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_y, \\ \bar{\phi} = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_y, \end{cases} \quad (2.49a)$$

et une équation de fluctuation

$$\begin{cases} -\nabla (\mathcal{A} \nabla \phi') - \nabla_{\perp} (\mathcal{A}_{\perp} \nabla_{\perp} \bar{\phi}) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{A} \nabla \phi' \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_x \times \Omega_y \times \Omega_z \cup \Omega_x \times \Omega_y \times \partial\Omega_z, \\ \phi' = 0, & \text{sur } \Omega_x \times \partial\Omega_y \times \Omega_z, \\ \bar{\phi}' = 0, & \text{dans } \Omega_x \times \Omega_y. \end{cases} \quad (2.49b)$$

Encore une fois, on définit l'espace de Hilbert

$$\mathbb{W} = \{ \bar{\psi}(x, y) \in H^1(\Omega_x \times \Omega_y) / \bar{\psi} = 0 \text{ on } \Omega_x \times \partial\Omega_y, \},$$

avec le produit scalaire correspondant

$$(\bar{\phi}, \bar{\psi})_{\mathbb{W}} = (\partial_x \bar{\phi}, \partial_x \bar{\psi})_{L^2(\Omega_x \times \Omega_y)} + (\partial_y \bar{\phi}, \partial_y \bar{\psi})_{L^2(\Omega_x \times \Omega_y)}.$$

Comme précédemment, on définit aussi les formes bilinéaire légèrement différentes

$$\begin{aligned} a_0(\phi', \psi') &:= \int_{\Omega} \frac{C}{\varepsilon} \partial_z \phi' \partial_z \psi' dx dy dz, \\ a_1(\phi', \psi') &:= \int_{\Omega} ((\nabla_{\perp} \phi')^T \mathcal{A}_{\perp} \nabla_{\perp} \psi') dx dy dz, \\ a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) &:= \int_{\Omega_x \times \Omega_y} ((\nabla_{\perp} \bar{\phi})^T \bar{\mathcal{A}}_{\perp} \nabla_{\perp} \bar{\psi}) dx dy, \\ a(\phi', \psi') &:= a_0(\phi', \psi') + a_1(\phi', \psi'), \\ b_1(\bar{P}, \psi') &:= \int_{\Omega_x \times \Omega_y} \bar{P} \int_{\Omega_z} \frac{1}{\varepsilon} \psi' dz dx dy, \\ b_2(\phi', \bar{Q}) &:= \frac{1}{Lz} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} \bar{Q} \int_{\Omega_z} \phi' dz dx dy, \\ c(\bar{\phi}, \psi') &:= \int_{\Omega} ((\nabla_{\perp} \bar{\phi})^T \mathcal{A}_{\perp} \nabla_{\perp} \psi') dx dy dz. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Ainsi on obtient la forme faible de la reformulation AP (2.49) : Trouver $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x \times \Omega_y)$

$$(AP) \begin{cases} a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) + \frac{1}{L_z}c(\bar{\psi}, \phi') = (\bar{f}, \bar{\psi}), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}, \\ a(\phi', \psi') + b_1(\bar{P}, \psi') + c(\bar{\phi}, \psi') = (f, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}, \\ b_2(\phi', \bar{Q}) = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_x \times \Omega_y). \end{cases} \quad (2.51)$$

La proposition suivante prouve que la forme faible (2.51) constitue un problème bien-posé

Proposition 2.14. *Sous l'hypothèse (2.10) et l'hypothèse (2.12), il existe une unique solution $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W} \times \mathbb{V} \times L^2(\Omega_x \times \Omega_y)$ satisfaisant (2.51), telle que $\bar{\phi} + \phi'$ est la solution faible du problème (2.46).*

La preuve de cette proposition est similaire que celle du théorème 2.2.

2.4.3 Des expériences numériques

La procédure utilisée maintenant est de reproduire les investigations numériques du schéma AP. La solution exacte du système est définie par

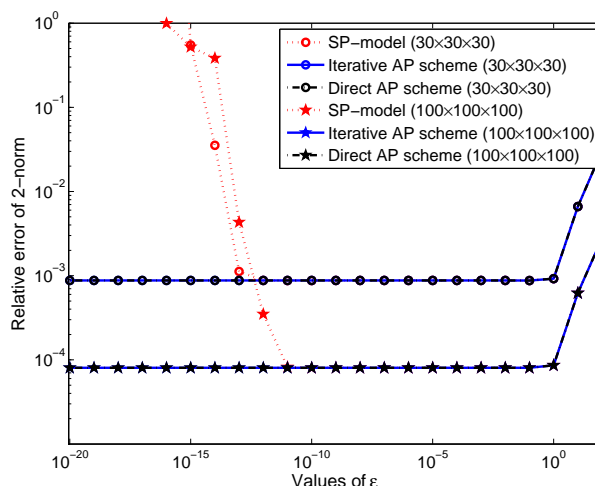
$$\phi_e(x, y, z) = x^2(L_x - x)^2 y^2(L_y - y)^2 \left(1 + \varepsilon \sin^2 \left(\frac{2\pi z}{L_z} \right) \cos^2 \left(\frac{2\pi z}{L_z} \right) \right),$$

qui satisfait les conditions aux limites (2.46). Les coefficients de diffusion dans la matrice sont définis par

$$A = c_1 + x^2 y z, \quad B = c_2 + x y^2 z, \quad C = c_3 + x y z^2, \quad D = c_4 + x y z.$$

Le second membre f est calculé analytiquement, en injectant ϕ_e dans (2.46). Cela donne la configuration des différentes expériences étudiées dans la suite. Les techniques de discrétisation sont facilement étendue du cas de la dimension deux détaillées dans la section 2.3.3 en utilisant la méthode d'éléments finis standard de type \mathbb{Q}_1 .

Premièrement, le cas de ε constant est étudié avec la procédure utilisée pour le cas en dimension deux : les valeurs de ε varient de 10^{-20} à 10^2 et la norme d'erreur entre la solution exacte et les approximations numériques calculées grâce au modèle-SP et le schéma AP standard est présenté. Ces résultats sont rassemblés dans la figure 2.7(a) pour les calculs effectués dans un maillage de $30 \times 30 \times 30$ et $100 \times 100 \times 100$. Le modèle-SP échoue à donner des approximations précises pour $\varepsilon < 10^{-12}$ sur le maillage plus raffiné. L'efficacité de calcul des résolutions itérative et directe du schéma AP est également étudiée dans le tableau 2.7(b). La conclusion des expériences en dimension deux reste valable pour le cas en dimensions trois, avec une faible dépendance en nombre d'itérations par rapport à la taille des mailles, sauf pour les plus grandes valeurs de ε . Pour cette valeur un taux de convergence faible est observé. Cependant, même dans la configuration la plus défavorable, la résolution itérative est la plus efficace. Cela peut s'expliquer par la perte d'efficacité du solveur direct pour le problème elliptique en dimension trois avec un remplissage dramatique de la matrice factorisée [55], [54]. La résolution itérative permet



(a) Erreur relative entre la solution exacte et ses approximations

ε			10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-10}	10^{-20}
$30 \times 30 \times 30$	Dire.	r_D	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
	Iter.	r_I	2.1	1.7	1.6	1.6	1.6	1.6	1.4	1.4	1.4
		n_I	7	4	3	3	3	3	2	2	2
$100 \times 100 \times 100$	Dire.	r_D	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6
	Iter.	r_I	2.4	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
		n_I	22	3	2	2	2	2	2	2	2

(b) Rapport des temps de calcul entre les résolutions du schéma AP et du modèle-SP

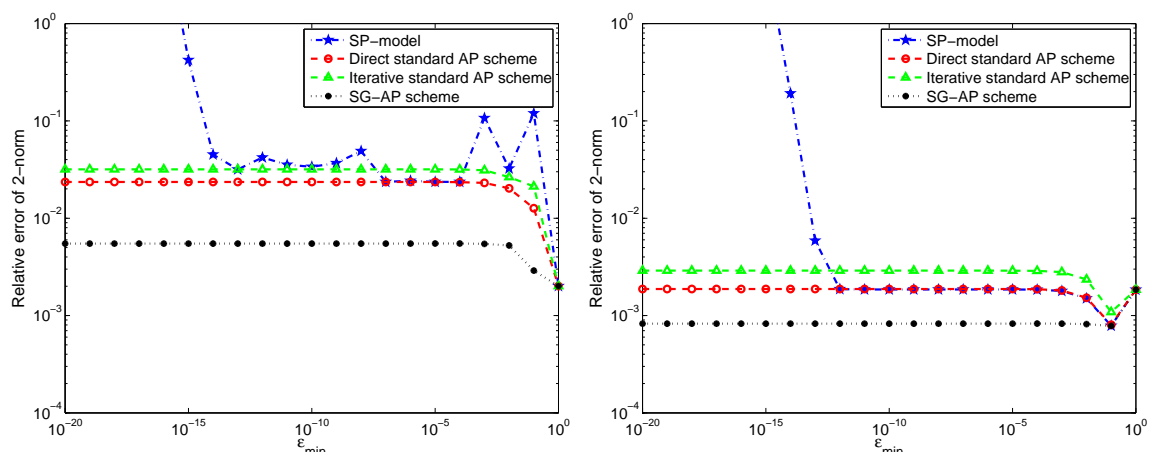
FIGURE 2.7 – Comparaison entre le modèle-SP en dimension trois et le schéma AP dans le cas ε constant (pour les deux types de résolutions itératives et directes). Les valeurs de ε varie entre 10^{-20} et 10^2 . Deux tailles différentes $30 \times 30 \times 30$ et $100 \times 100 \times 100$ sont comparées. Nous notons r_I et r_D le rapport des temps de calcul entre le schéma AP direct resp. itératif et le SP-modèle, n_I le nombre d'itération de la résolution itérative.

de réduire la taille des systèmes linéaires ce qui explique la relative efficacité de cette approche par rapport à la résolution directe.

Ensuite, on considère un cas ε variable qui est représentatif du cas physique, *i.e.* les variations d'anisotropie sont dans toutes les directions et plus notables dans la direction z . Une telle fonction ε est donnée par

$$\varepsilon_2(x, y, z) = \varepsilon_1(z) \frac{(x - x_{mid})^2 + (y - y_{mid})^2 + (z - z_{mid})^2 + 1}{x_{mid}^2 + y_{mid}^2 + z_{mid}^2 + 1}, \quad (2.52)$$

où $\varepsilon_1(z)$ est la même que (2.44), x_{mid} , y_{mid} , z_{mid} dénotent le point milieu de l'intervalle dans chaque direction. De plus, les paramètres sont fixés à $q = 80$, $\varepsilon_{\max} = 1$ et avec les valeurs de ε_{\min} allant de 10^{-20} à 1. La précision des approximations du modèle-SP, du schéma AP standard et du schéma SG-AP est analysée dans les figures 2.8(a) et 2.8(b). Tous les schémas donnent les qualités d'approximation similaire à celles des investigations en dimensions deux : le modèle-SP n'étant précis que pour de grandes valeurs de ε_{\min} et



(a) Erreur relative entre la solution exacte et ses approximations pour un maillage $30 \times 30 \times 30$ (b) Erreur relative entre la solution exacte et ses approximations pour un maillage $100 \times 100 \times 100$

ε			1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-20}
$30 \times 30 \times 30$	Dire.	r_D	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0
	Iter.	r_I	2.0	2.0	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9	1.9
		n_I	3	3	2	2	2	2	2	2
$100 \times 100 \times 100$	Dire.	r_D	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6	2.6
	Iter.	r_I	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
		n_I	3	2	2	2	2	2	2	2

(c) Rapport de temps de calcul entre les résolutions du schéma AP et du modèle-SP

FIGURE 2.8 – Comparaison entre le modèle-SP en dimension trois et le schéma AP dans le cas ε variable (pris comme (2.52)). La valeur de ε_{\min} varie entre 10^{-20} et 1. On compare deux différentes tailles de maillage $30 \times 30 \times 30$ et $100 \times 100 \times 100$.

la précision du schéma AP indépendant du taux d'anisotropie. On note que la résolution itérative est moins précise que la résolution directe dans ce cas test. Le tableau 2.8(c) indique que l'efficacité de calcul du schéma AP en résolutions directe et itérative. Ces résultats confirment que, contrairement aux expériences en dimension deux, pour le cas en dimension trois la résolution directe est plus lente que celle itérative.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit une nouvelle reformulation préservant l'asymptotique pour une équation elliptique fortement anisotrope et l'avons comparé au schéma AP proposé initialement dans [18]. La nouvelle reformulation reste basée sur une décomposition de l'inconnu en sa partie de moyenne et sa partie de fluctuation, mais l'équation de fluctuation est différente. La matrice de discrétisation associée à cette nouvelle reformulation AP est beaucoup plus creuse que celle de l'originale, établissant ainsi l'efficacité significative de cette nouvelle méthode. La propriété AP du schéma est également étudiée, en particulier le caractère bien-posé dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Les résolutions directe et

itérative du système linéaire sont testées et comparées. On note que la résolution directe est plus efficace pour des problèmes en dimension deux, mais pour des problèmes en dimension trois la résolution itérative peut prendre moins de temps. Enfin on considère les problèmes de taux d'anisotropie très hétérogènes, compte tenu d'applications physiques réelles. Un schéma AP de type Scharfetter-Gummel est proposé afin de traiter avec de forts gradients d'anisotropies avec ε variable.

2.6 Annexe A : Simulations en dimension un pour un taux d'anisotropie fort

Dans cette section, on étudie numériquement les trois discrétisations-AP proposées dans la section (2.3.3) pour un problème en dimension un extrait du modèle-SP (2.5). L'objectif est de détecter la meilleure méthode dans les cas où on doit faire face à des forts gradients d'anisotropie.

2.6.1 Le schéma AP standard

Considérons le modèle-SP en dimension un suivant

$$(\text{SP}_{-1\text{d}}) \begin{cases} -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{du}{dz} \right) + u = f, & \text{dans } \Omega_z, \\ \frac{d}{dz} u = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z. \end{cases} \quad (2.53)$$

où u est l'inconnue du problème, ε est une fonction positive de z et $\Omega_z = [0, L_z]$. Notons que l'équation (2.53) est bien-posé pour $\varepsilon(z) > 0$. Cependant, prenant $\varepsilon(z) := \delta \chi(z)$ et passant à la limite $\delta \rightarrow 0$ donnent un problème dégénéré

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\chi(z)} \frac{du}{dz} \right) = 0, & \text{dans } \Omega_z, \\ \frac{d}{dz} u = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z, \end{cases} \quad (2.54)$$

qui est mal-posé, car toutes les constantes sont les solutions de (2.54).

Pour construire le schéma AP correspondant à ce modèle-SP, on décompose u dans sa partie moyenne \bar{u} et sa partie fluctuation u' . En intégrant l'équation (2.53) dans Ω_z , on obtient l'équation de moyenne

$$\bar{u} = \bar{f}. \quad (2.55)$$

Soustrayant (2.55) de (2.53) conduit alors l'équation de fluctuation

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{du'}{dz} \right) + u' = f', & \text{dans } \Omega_z, \\ \frac{d}{dz} u' = 0, & \text{sur } \partial\Omega_z, \\ \overline{u'} = 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Le système (2.55)–(2.56) est bien-posé, même dans la limite $\delta \rightarrow 0$. En introduisant le multiplicateur de Lagrange λ , on obtient la reformulation AP suivante

$$(AP_1d) \begin{cases} \bar{u} = \bar{f}, \\ \int_0^{L_z} \left[\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{du'}{dz} \frac{dv'}{dz} + u'v' \right] dz + \lambda \int_0^{L_z} \frac{1}{\varepsilon(z)} v' dz = \int_0^{L_z} f'v' dz, \quad \forall v' \in H^1(\Omega_z), \\ \int_0^{L_z} u' dz = 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

Ce schéma AP sera discrétisé par une méthode d'éléments finis de type \mathbb{P}_1 . Toutefois, notons que la difficulté ici est d'approcher une forte anisotropie. Pour traiter ce problème, on propose ici trois méthodes différentes.

2.6.2 Le schéma AP non-conservatif

Dans cette approche, on essaie de “détruire” le terme d'anisotropie $\frac{1}{\varepsilon}$ dans l'équation de fluctuation (2.56). Cela se fait par le développement de $\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{du'}{dz} \right)$, afin d'obtenir

$$\frac{d}{dz} (\ln \varepsilon(z)) \frac{du'}{dz} - \frac{d^2 u'}{dz^2} + \varepsilon u' = \varepsilon f'. \quad (2.58)$$

En injectant (2.58) dans la reformulation AP, on obtient une autre reformulation, *i.e.*

$$(NC_AP_1d) \begin{cases} \bar{u} = \bar{f}, \\ \int_0^{L_z} \left[\frac{d}{dz} (\ln \varepsilon(z)) \frac{du'}{dz} v' + \frac{du'}{dz} \frac{dv'}{dz} + \varepsilon u'v' \right] dz + \lambda \int_0^{L_z} v' dz \\ = \int_0^{L_z} \varepsilon f'v' dz, \quad \forall v' \in H^1(\Omega_z), \\ \int_0^{L_z} u' dz = 0. \end{cases} \quad (2.59)$$

On discrétise de nouveau (2.59) par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{P}_1 .

2.6.3 Le schéma AP avec moyenne harmonique

Le schéma AP avec moyenne harmonique est juste une discrétisation particulière de la reformulation AP (2.57). Pour le présenter, on considère de nouveau la partition de Ω_z et les fonctions de base définies dans la section 2.2.5. Prenant dans (2.57) comme les fonctions

test $\kappa_k(z)$ et remplaçant $u'(z)$ par $\sum_{l=0}^{N_z+1} \alpha_l \kappa_l(z)$, nous obtenons pour $k = 1, \dots, N_z$

$$\begin{aligned} & -\frac{p_k}{\Delta z^2} \alpha_{k-1} + \left(\frac{p_k}{\Delta z^2} + \frac{p_{k+1}}{\Delta z^2} \right) \alpha_k - \frac{p_{k+1}}{\Delta z^2} \alpha_{k+1} \\ & + \sum_{l=k-1}^{k+1} \alpha_l \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \kappa_l(z) \kappa_k(z) dz + q_k \lambda = f_k, \end{aligned}$$

où $p_k = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{1}{\varepsilon(z)} dz$, $q_k = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \frac{1}{\varepsilon(z)} \kappa_k(z) dz$, $f_k = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f'(z) \kappa_k(z) dz$. Si l'on discrétise p_k par une formule de quadrature numérique standard, le schéma obtenu sera donc juste une méthode d'éléments finis de type \mathbb{P}_1 . Dans cette autre méthode, on utilise plutôt une moyenne harmonique approchée de p_k , *i.e.*

$$p_k \approx \Delta z^2 \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon(z) dz \right)^{-1}.$$

Enfin, l'intégration $\int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon(z) dz$ est approchée par une quadrature numérique standard, par exemple une quadrature de Gauss-Legendre.

2.6.4 Le schéma AP Scharfetter-Gummel

Le schéma AP Scharfetter-Gummel est une amélioration de la méthode avec la moyenne harmonique. En particulier, une formule de quadrature spéciale suivante est utilisée pour approcher p_k . En simplifiant $\varepsilon(z_k)$ par ε_k , on approche p_k par

– si $\varepsilon_{k-1} \neq \varepsilon_k$,

$$\begin{aligned} p_k &\approx \Delta z^2 \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \varepsilon(z) dz \right)^{-1} \\ &= \Delta z^2 \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} e^{\ln \varepsilon(z)} dz \right)^{-1} \\ &= \Delta z^2 \left(\int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{de^{\ln \varepsilon(z)}}{d \ln \varepsilon(z)} dz \right)^{-1} \\ &\approx \Delta z^2 \left(\Delta z \frac{e^{\ln \varepsilon_k} - e^{\ln \varepsilon_{k-1}}}{\ln \varepsilon_k - \ln \varepsilon_{k-1}} \right)^{-1} \quad \text{approximations de } \ln \varepsilon \text{ par } \sum_{k=0}^{N_z+1} \ln \varepsilon_k \kappa_k \\ &= \Delta z \frac{\ln \varepsilon_k - \ln \varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}}, \end{aligned}$$

– si $\varepsilon_{k-1} = \varepsilon_k$,

$$p_k \approx \Delta z \frac{1}{\varepsilon_k}.$$

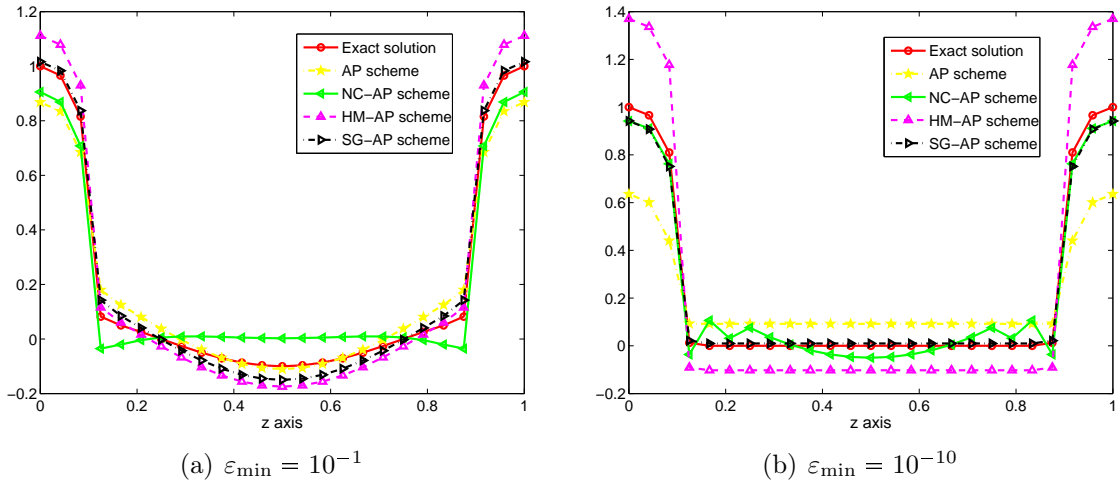
2.6.5 Résultats numériques

Pour comparer ces approches, on prend une solution exacte de l'équation (2.53) de la forme

$$u_e(z) := \varepsilon(z) \cos \left(\frac{2\pi}{L_z} z \right), \quad (2.60)$$

avec $\varepsilon(z)$ définie dans (2.44). En injectant (2.60) dans l'équation (2.53), on obtient le second membre f . On compare le modèle-SP, le schéma AP standard, le schéma AP non-conservatif, le schéma AP avec la moyenne harmonique et le schéma AP Scharfetter-Gummel respectivement. Pour cela, on choisit $q = 80$, $\varepsilon_{\max} = 1$ et varie ε_{\min} .

En observant les résultats numériques dans la figure 2.9, on note que le schéma AP est robuste pour tous les choix de ε_{\min} , même pour le maillage grossier $N_z = 25$. Dans la figure 2.9(a), 2.9(b), on voit que le modèle-SP ne peut pas bien approcher la solution. Le schéma AP par rapport au modèle-SP fonctionne bien, mais il reste encore imprécis dans la région où le gradient d'anisotropie est fort. Le schéma AP-NC présente des oscillations. Le schéma AP-HM est comparable au schéma AP standard pour les deux cas de ε_{\min} . Enfin, le schéma AP-SG a le meilleur comportement parmi toutes les méthodes. Les mêmes résultats sont également vu dans le tableau 2.9(c).



ε_{\min}	SP-modèle	Schéma AP	Schéma AP-NC	Schéma AP-HM	Schéma AP-SG
10^{-1}	26.4022	0.1652	0.1486	0.1532	0.0734
10^{-10}	11.5878	0.4310	0.1171	0.4434	0.0653

(c) Erreurs relatives entre la solution exacte et ses approximations

FIGURE 2.9 – Comparaison entre le modèle-SP, le schéma AP, le schéma AP non-conservatif, le schéma AP avec la moyenne harmonique et le schéma AP Scharfetter-Gummel. On prend $N_z = 25$. (a) Solutions approchées par les différentes méthodes dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-1}$; (b) Même dessin dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-10}$; (c) Erreurs relatives entre la solution exacte et ses approximations pour les deux cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-1}$ et $\varepsilon_{\min} = 10^{-10}$.

Dans la figure 2.10, on trace le taux de convergence du schéma AP standard et du schéma AP Scharfetter-Gummel. On observe dans les deux cas, $\varepsilon_{\min} = 10^{-1}$ et $\varepsilon_{\min} = 10^{-10}$, que les taux de convergence de ces deux schémas sont les mêmes, sauf que l'erreur relative du schéma AP Scharfetter-Gummel est plus petite que celle du schéma AP standard. C'est à dire que la constante près du schéma AP Scharfetter-Gummel est plus petite. Ce qui confirme que l'estimation d'erreur dépend en la logarithme naturel du coefficient de diffusion.

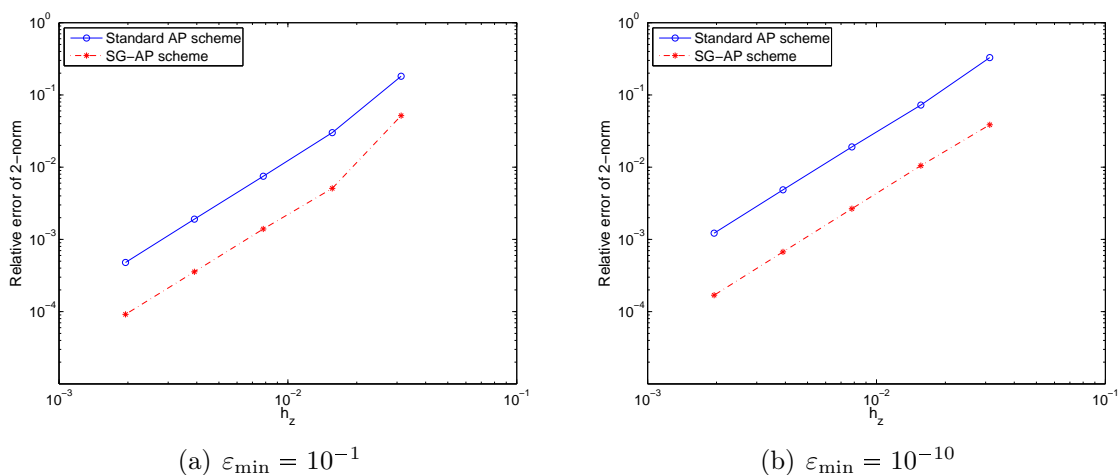


FIGURE 2.10 – Taux de convergence du schéma AP et du schéma AP Scharfetter-Gummel. (a) Erreurs relatives entre la solution exacte et ses approximations en fonction du pas d’espace dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-1}$; (b) Même dessin dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-10}$.

2.7 Annexe B : Résolution itérative du système linéaire pour le schéma AP

Dans cette section, nous étudions la résolution itérative du système linéaire pour le schéma AP. On considère d’abord le problème SP (2.6). On discrétise ce problème avec la méthode d’éléments finis de type \mathbb{Q}_1 . Comme on l’a vu, la matrice de la discrétisation est mal-conditionnée quand ε est très petit. Le tableau 2.3 présente le temps CPU des différentes résolutions du système linéaire. On observe que pour le problème SP la convergence des méthodes BiCG et GMRES devient de plus en plus lentes quand ε décroît. Quand $\varepsilon < 10^{-3}$, les deux méthodes ne convergent plus. La résolution directe par PARDISO est plus robuste. Cependant, le solveur direct PARDISO ne donne des résultats du système linéaire précis que jusqu’à $\varepsilon = 10^{10}$.

Ensuite, on résout le système linéaire du schéma AP avec des méthodes itératives BiCG et GMRES. Ici, on ne considère que la résolution directe (2.35) du schéma AP. La convergence des méthodes itératives de (2.36b) du schéma AP est très lente. Ceci demanderait la construction d’un préconditionneur ce qui n’est pas considérée dans cette section. On observe de nouveau dans le tableau 2.3 que les méthodes itératives BiCG et GMRES pour le schéma AP convergent pour tous les choix de ε . Contrairement au problème SP, la convergence de la méthode itérative devient plus rapide quand ε est très petit. On résout enfin le système linéaire du schéma AP en utilisant la résolution directe PARDISO. Le temps CPU est indépendant de choix de ε , et il est plus court que celui des méthodes itératives.

2.7. Annexe B : Résolution itérative du système linéaire pour le schéma AP

ε		1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-20}
SP	BiCG	1.3	2.2	4.7	12.3	N	N	N	N	N
	GMRES	9.3	39.5	121.5	N	N	N	N	N	N
	PARDISO	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	-	-
AP	BiCG	18.2	26.0	28.1	17.3	9.7	6.7	1.3	1.3	1.3
	GMRES	21.7	18.8	10.9	7.0	4.5	3.9	3.9	3.9	3.9
	PARDISO	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9

TABLE 2.3 – Comparaison des temps CPU des différentes résolutions du système linéaire pour le problème (2.6). La taille de maillage est $N_x \times N_z = 100 \times 100$. L'unité de temps CPU est en seconde. 'N' signifie que la convergence échoue et '-' signifie que le résultat obtenu par PARDISO diffère significativement de la solution exacte.

Maintenant on considère le problème SP (2.39) avec ε variable. La fonction ε est la même que dans (2.44). On fixe $\varepsilon_{\max} = 1$ et nous faisons varier ε_{\max} entre 10^{-20} et 1. En utilisant la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 , on obtient le système linéaire du problème SP. En utilisant les méthodes itératives BiCG et GMRES, on observe dans le tableau 2.4 que les méthodes convergent seulement pour $\varepsilon_{\min} \geq 10^{-2}$. Puis, les solveurs itératifs convergent pour tous les choix de ε_{\min} pour résoudre le système linéaire du schéma AP. On conclut que le schéma AP est plus robuste et précis en utilisant les solveurs direct et itératif que la méthode d'éléments finis standard pour le problème elliptique anisotrope.

ε_{\min}		1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-20}
SP	BiCG	1.3	2.1	5.4	16.8	N	N	N	N	N
	GMRES	9.3	14.2	119.3	N	N	N	N	N	N
	PARDISO	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	-	-
AP	BiCG	18.2	19.8	16.8	18.7	17.9	17.0	12.9	18.3	21.6
	GMRES	21.7	19.9	13.6	11.5	11.0	10.9	10.6	11.0	12.1
	PARDISO	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9

TABLE 2.4 – Comparaison des temps CPU des différentes résolutions du système linéaire pour le problème (2.39). La taille de maillage est $N_x \times N_z = 100 \times 100$. L'unité de temps CPU est en seconde. 'N' signifie que la convergence échoue et '-' signifie que le résultat obtenu par PARDISO diffère significativement de la solution exacte.

Chapitre 3

Simulations numériques des modèles ionosphériques dans un champ magnétique non-uniforme

3.1 Introduction

Dans le chapitre 1, nous avons vu que l'atmosphère terrestre est un milieu stratifié, décomposable en différentes couches. Par exemple, pour les altitudes inférieures à 100 kilomètres, le milieu est neutre, alors que pour des altitudes supérieures, l'atmosphère est ionisée par les radiations solaires. Ce phénomène peut être découvert par la propagation d'ondes de radio. En effet, le plasma ionosphérique reflète les ondes de fréquence basse et permet leur transmission vers la surface de terre. Des ondes de fréquence plus élevée sont transmises à travers le plasma ionosphérique permettant ainsi la transmission entre la terre et les satellites. La propriété d'une onde électromagnétique à être transmise ou réfléchie par un plasma est liée à la densité du plasma et à ses irrégularités, ce qui peut altérer considérablement la qualité de la communication en produisant des distorsions de signal, interférences destructives, ou en empêchant complètement la transmission des ondes. C'est la raison pour laquelle on s'intéresse à la modélisation des irrégularités du plasma ionosphérique [33, 37, 10, 49, 41, 42, 23].

Une série de modèles [4] a été présentée dans le chapitre 1 pour modéliser le plasma ionosphérique. Le point de départ est le modèle d'Euler-Maxwell. Une analyse asymptotique permet de réduire ce modèle aux modèles Dynamo et Striation. Le modèle Striation est largement utilisé pour simuler et analyser les instabilités ionosphériques [24, 41, 57]. Il décrit l'évolution du plasma quasi-neutre dans un plan perpendiculaire au champ magnétique terrestre. Dans ce modèle, la mobilité des particules est supposée infinie le long des lignes de champ magnétique, de sorte qu'elles constituent des équipotentiels pour le champ électrique réduisant son calcul à une équation elliptique en dimension deux en intégrant les coefficients de matrice de diffusion et de second membre le long des lignes de champ magnétique. Elle est couplée à une équation de conservation de la masse en dimension deux ou en dimension trois pour l'évolution de la densité du plasma.

Le modèle Striation est très bien adapté pour la simulation [24, 41, 57] en raison de la

réduction de l'équation elliptique en dimension deux. Cependant, ce modèle est trop simpliste et des études ont souligné l'importance de la troisième dimension pour obtenir une bonne précision du taux de croissance des instabilités simulées [46]. La direction alignée a tout d'abord été incluse dans les simulations en étendant le modèle 2D à une version de multi-couches [24, 32, 57]. La prise en compte de champs de vitesse à composante non nulle dans la direction alignée permet de rendre le modèle striation plus réaliste [8]. Pour accentuer la précision du modèle, il est nécessaire d'introduire un système de coordonnées curvilignes adapté, coordonnées des Potentiels d'Euler. Ceci permet de prendre en compte une topologie plus réaliste du champ magnétique terrestre. Les simulations du modèle Striation étendu à une géométrie réaliste montrent que le développement de l'instabilité due à une perturbation locale du plasma ionosphérique ambiant se propage sur des couches initialement non perturbées. C'est une caractéristique très importante des striations, et c'est la raison principale de l'utilisation de la troisième direction. Cependant les simulations doivent être réalistes sur un domaine de grande amplitude afin de quantifier précisément ces effets. Malheureusement, à ces échelles spatiales, certains paramètres physiques varient beaucoup, comme par exemple la fréquence de collision du plasma avec les neutres. En effet, comme on peut le voir sur la figure 3.1, cette dernière quantité présente de fortes variations par rapport à l'altitude et par rapport à la latitude. Le modèle Striation sera moins réaliste dans la basse ionosphère.

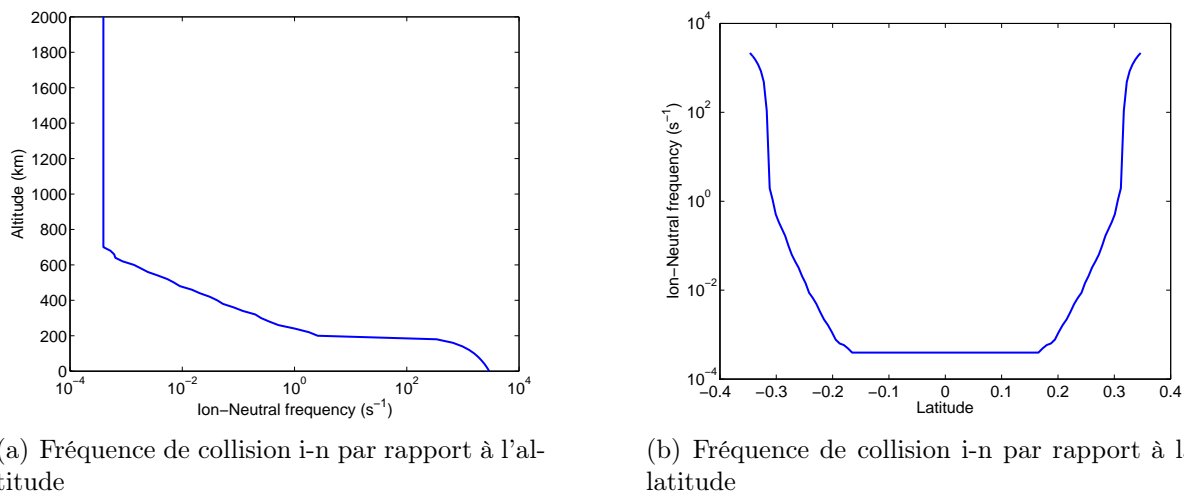


FIGURE 3.1 – Les fréquences de collision d'ions-neutres par rapport à l'altitude et par rapport à la latitude.

Pour répondre à la demande de simulation, il est nécessaire de considérer le modèle Dynamo-3D, qui suppose que la mobilité alignée est finie. Ce modèle peut être utilisé dans le domaine entier sans restrictions. Malheureusement le champ électrique dépendant de toutes les coordonnées, le modèle Dynamo est ainsi vraiment tridimensionnel. En outre, la forte anisotropie du milieu pour les plus hautes altitudes (où la densité de neutre disparaît) rend le calcul du champ électrique par l'équation elliptique très délicat. L'anisotropie nous conduit donc à utiliser un schéma préservant l'asymptotique [7] développé dans le chapitre 2 pour régler ce problème.

Les simulations d'instabilités ionosphériques dues à un vent neutre sont présentées dans [8]. Nous considérons aussi dans ce chapitre le cas de perturbations dues à la gravité. Par exemple, nous étudions le cas de bulles de sous-densité du plasma qui montent vers la haute altitude et en même temps qui sont striées par l'effet de l'instabilité en $E \times B$ [5]. Ce phénomène a par exemple été observé lors d'une mission satellitaire récente, DEMETER [38], dans la zone de l'ionosphère au-dessus de l'équateur magnétique terrestre. Notons que pour faciliter la discrétisation de l'équation de conservation de la masse, un domaine cartésien était utilisé dans [8], ce qui entraînait une troncature artificielle des tubes de champ magnétique constituant le domaine de calcul. Cependant les pieds des tubes de champ magnétique sont très aussi importants. Pour corriger cela, on considérera un domaine trapézoïdal (illustré dans la Figure 3.9). Les schémas numériques pour un maillage non-uniforme seront donc développés.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.2, nous introduisons les modèles Striation et Dynamo-3D dans le cadre des coordonnées liées aux Potentiels d'Euler. Dans la section 3.4, nous développons les schémas numériques du modèle Striation ionosphérique. Dans la section 3.5, on développe les schémas numériques pour le modèle Dynamo-3D. L'équation elliptique est résolue par le schéma préservant l'asymptotique développé dans le chapitre 2. Finalement, dans la section 3.6, on présente des expériences numériques. Nous utilisons successivement le modèle Striation pour simuler une bulle de sous-densité du plasma perturbée par la gravité terrestre et une bulle de sur-densité perturbée par un vent neutre dans la haute ionosphère, puis nous répéterons les simulations avec le modèle Dynamo-3D dans un milieu où la fréquence de collision d'ions-neutres ou d'électrons-neutres varie fortement.

3.2 Les modèles Dynamo et Striation ionosphériques dans un champ magnétique non-uniforme

3.2.1 Potentiels d'Euler pour un champ magnétique axisymétrique

Afin de faciliter les mises en œuvre numériques, nous utilisons un système de coordonnées adapté, lié aux Potentiels d'Euler. En effet, le domaine de calcul est aligné au champ magnétique terrestre. Ainsi des coordonnées alignées au champ magnétique sont plus appropriées pour la discrétisation numérique. Dans un tel système de coordonnées, le domaine de calcul de la figure 3.2(a) peut être transformé dans un domaine cartésien illustré dans la figure 3.2 (b).

Nous utilisons le champ dipolaire pour approcher le champ magnétique. Pour établir le passage à partir des coordonnées cartésiennes au système des Potentiels d'Euler, on utilisera un système des coordonnées intermédiaire, par exemple les coordonnées sphériques. Rappelons que les coordonnées sphériques (r, α, φ) d'un point peuvent être obtenues à

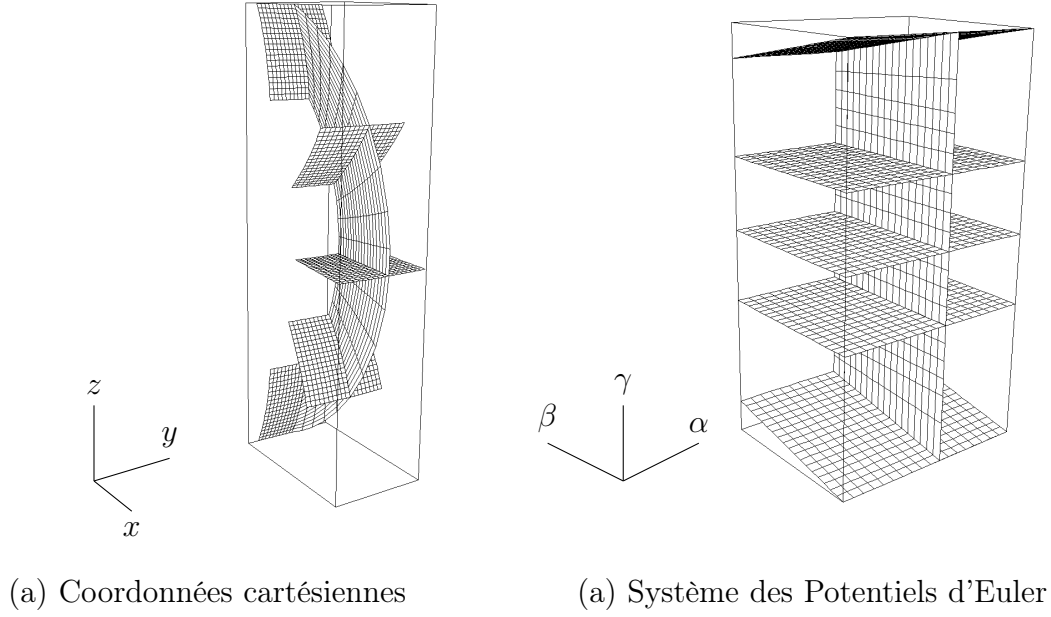


FIGURE 3.2 – Le domaine de calcul ionosphérique et sa géométrie dans le système des Potentiels d'Euler.

partir de ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.1a)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (3.1b)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \quad (3.1c)$$

où $r \in [0, \infty[$, $\alpha \in [0, 2\pi[$, $\varphi \in [0, \pi[$. Inversement, les coordonnées cartésiennes peuvent être récupérées à partir des coordonnées sphériques (r, α, φ) par

$$x = r \cos(\alpha) \sin(\varphi), \quad (3.2a)$$

$$y = r \sin(\alpha) \sin(\varphi), \quad (3.2b)$$

$$z = r \cos(\varphi). \quad (3.2c)$$

Le champ dipolaire axisymétrique B peut être décrit dans le système de coordonnées sphériques par

$$B = (B_r(r, \varphi), 0, B_\varphi(r, \varphi)). \quad (3.3)$$

D'autre part, dans le modèle Dynamo le champ magnétique terrestre est globalement à divergence nulle $\nabla \cdot B = 0$ (absence de charge magnétique) et de rotationnel nul $\nabla \times B = 0$. En injectant (3.3) dans ces deux équations, on peut donc écrire :

$$\nabla \cdot B = 0 \iff \frac{\partial(r^2 \sin(\varphi) B_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r \sin(\varphi) B_\varphi)}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.4)$$

$$\nabla \times B = 0 \iff \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial(B_r)}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.5)$$

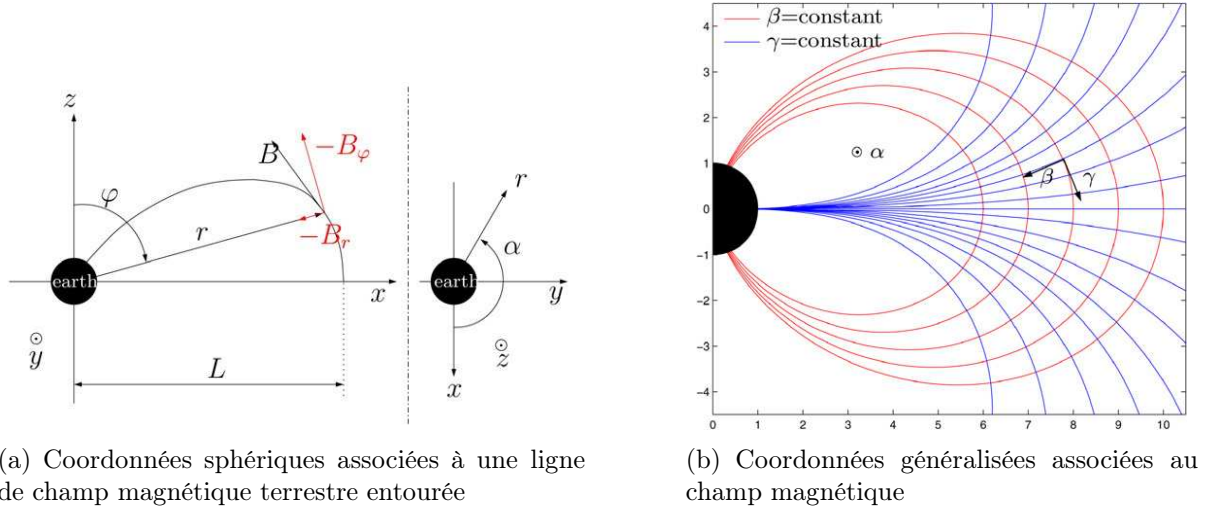


FIGURE 3.3 – Les représentations du système des Potentiels d’Euler

Les équations (3.4), (3.5) impliquent respectivement qu’il existe un potentiel scalaire γ et un potentiel vecteur \mathbf{B} tels que $B = -\nabla\gamma$ et $B = \nabla \times \mathbf{B}$, où on pose la composante- α de \mathbf{B} égale à $\beta/(r \sin \phi)$. Ainsi, en les coordonnées sphériques, on a les relations suivantes

$$\partial_r \beta = r \sin(\varphi) B_\varphi, \quad \partial_\varphi \beta = -r^2 \sin(\varphi) B_r, \quad \partial_\alpha \beta = 0, \quad (3.6a)$$

$$\partial_r \gamma = -B_r, \quad \partial_\varphi \gamma = -r B_\varphi, \quad \partial_\alpha \gamma = 0. \quad (3.6b)$$

De plus, la direction de la longitude du système des Potentiels d’Euler est la même que celle du système de coordonnées sphériques. Ainsi on a la dérivation de la longitude comme :

$$\partial_r \alpha = 0, \quad \partial_\varphi \alpha = 0, \quad \partial_\alpha \alpha = 1, \quad (3.6c)$$

Nous dérivons donc (α, β, γ) dans le système de coordonnées sphériques. Géométriquement, les directions β et γ sont respectivement les vecteurs normal et tangent à la ligne de champ magnétique (voir Figure 3.3(b)). Puis en utilisant la formule de gradient

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \hat{\alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi},$$

on construit la base orthogonale suivante

$$\nabla \alpha = \frac{\hat{\alpha}}{r \sin(\varphi)}, \quad (3.7a)$$

$$\nabla \beta = r \sin(\varphi) B_\varphi \hat{r} - r \sin(\varphi) B_r \hat{\varphi}, \quad (3.7b)$$

$$\nabla \gamma = -B_r \hat{r} - B_\varphi \hat{\varphi}. \quad (3.7c)$$

On note la base orthogonale unitaire par $(\hat{\alpha} = \nabla \alpha / |\nabla \alpha|, \hat{\beta} = \nabla \beta / |\nabla \beta|, \hat{\gamma} = \nabla \gamma / |\nabla \gamma|)$ et

les facteurs de proportionnalité par

$$h_\alpha = \frac{1}{|\nabla\alpha|} = r \sin(\varphi), \quad (3.8a)$$

$$h_\beta = \frac{1}{|\nabla\beta|} = \frac{1}{r \sin(\varphi)|B|}, \quad (3.8b)$$

$$h_\gamma = \frac{1}{|\nabla\gamma|} = \frac{1}{|B|}. \quad (3.8c)$$

En utilisant (3.8), on établit respectivement les formules des opérateurs de gradient, divergence et rotationnel par

$$\nabla f = \left(\frac{1}{r \sin(\varphi)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}, r \sin(\varphi)|B| \frac{\partial f}{\partial \beta}, |B| \frac{\partial f}{\partial \gamma} \right), \quad (3.9a)$$

$$\nabla \cdot A = |B|^2 \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A_\alpha}{r \sin(\varphi)|B|^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r \sin(\varphi)}{|B|} A_\beta \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{|B|} A_\gamma \right) \right), \quad (3.9b)$$

$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} r \sin(\varphi) \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A_\gamma}{|B|} \right) - \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{A_\beta}{r \sin(\varphi)|B|} \right) \right) \\ \frac{1}{r \sin(\varphi)|B|} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} (r \sin(\varphi) A_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A_\gamma}{|B|} \right) \right) \\ \frac{1}{|B|} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A_\beta}{r \sin(\varphi)|B|} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A_\alpha}{|B|} \right) \right) \end{pmatrix}, \quad (3.9c)$$

où les composantes du gradient et du rotationnel sont écrites dans la base $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ et $(A_\alpha, A_\beta, A_\gamma)$ sont les composantes du vecteur A . De plus la matrice de passage à partir des coordonnées sphériques au système des Potentiels d'Euler s'écrit

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_\varphi}{|B|} & -\frac{B_r}{|B|} \\ 0 & -\frac{B_r}{|B|} & -\frac{B_\varphi}{|B|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{r} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

3.2.2 Calcul des Potentiels d'Euler

Dans les régions pas très éloignées de la terre (soit moins de dix rayons terrestres), le champ magnétique terrestre peut être approché par un champ dipolaire

$$B = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos(\varphi) \hat{r} + \sin(\varphi) \hat{\varphi}), \quad (3.11)$$

où $M = 8.05 \times 10^{22} Am^2$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} Hm^{-1}$. On adimensionne cette équation (3.11) comme

$$B' \bar{B} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi (\bar{r})^3 (r')^3} (2 \cos(\varphi) \hat{r} + \sin(\varphi) \hat{\varphi}),$$

et on note $C = \frac{\mu_0 M}{4\pi \bar{B} (\bar{r})^3} = 8.05 \times 10^5$. Alors le champ magnétique s'exprime

$$B = -\frac{C}{r^3} (2 \cos(\varphi) \hat{r} + \sin(\varphi) \hat{\varphi}). \quad (3.12)$$

D'après (3.6a), (3.6b), (3.12), on en déduit les formules explicites des fonctions β et γ comme

$$\beta = C \frac{\sin^2(\varphi)}{r} \text{ et } \gamma = -C \frac{\cos(\varphi)}{r^2}. \quad (3.13)$$

Inversement, on cherche r et φ en fonction de β et γ . Pour cela, on définit $\bar{\beta} = \beta/C$, $\bar{\gamma} = \gamma/C$ et $\vartheta = \pi/2 - \varphi$. Alors (3.13) implique que

$$\bar{\gamma}^2 r^4 + \bar{\beta} r = 1, \quad (3.14)$$

$$\vartheta = \arctan\left(-\frac{r^2 \bar{\gamma}}{\sqrt{r \bar{\beta}}}\right) \in [-\pi/2, \pi/2]. \quad (3.15)$$

Notons que $\bar{\gamma}^2$ et $\bar{\beta}$ sont des quantités positives, donc (3.14), (3.15) admettent une unique solution $r(\bar{\beta}, \bar{\gamma}), \vartheta(\bar{\beta}, \bar{\gamma})$. On résoudra (3.14) par la méthode de Newton suivante : trouver la racine de (3.14) en utilisant la formule itérative

$$r_{m+1} = r_m - \frac{\bar{\gamma}^2 r_m^4 + \bar{\beta} r_m - 1}{4\bar{\gamma}^2 r_m^3 + \bar{\beta}},$$

avec le critère d'arrêt $|r_{m+1} - r_m| < \text{tolérance} = 10^{-5}$. On en déduit aussi la module du champ magnétique par

$$|B| = \sqrt{\frac{4\gamma^2}{r^2} + \frac{C\beta}{r^5}}. \quad (3.16)$$

3.2.3 Modèle Dynamo dans le système des Potentiels d'Euler

Dans cette sous-section, nous introduisons le modèle Dynamo ionosphérique (1.28) dans le système des Potentiels d'Euler. Nous donnons tout d'abord quelques notations suivantes : soient A est un vecteur et f est un scalaire, alors

$$A = \begin{pmatrix} A_\alpha \\ A_\beta \\ A_\gamma \end{pmatrix}, A_\perp = \begin{pmatrix} A_\alpha \\ A_\beta \end{pmatrix}, \nabla^c = \begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ \partial_\beta \\ \partial_\gamma \end{pmatrix}, \nabla_\perp^c = \begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ \partial_\beta \end{pmatrix}, \nabla^c f = \begin{pmatrix} \partial_\alpha f \\ \partial_\beta f \\ \partial_\gamma f \end{pmatrix}, \nabla_\perp^c f = \begin{pmatrix} \partial_\alpha f \\ \partial_\beta f \end{pmatrix}.$$

Rappelons maintenant le modèle Dynamo :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i) = 0, \quad (3.17a)$$

$$E + u_i \times B = \kappa \left[\nu_i (u_i - u_n) - \zeta g + \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right], \quad (3.17b)$$

$$E + u_e \times B = -\kappa \left[\nu_e (u_e - u_n) + \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right], \quad (3.17c)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (3.17d)$$

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (3.17e)$$

$$\kappa j = \rho (u_i - u_e). \quad (3.17f)$$

Dans le système des Potentiels d'Euler, le champ magnétique prend la forme $B = (0, 0, -|B|)^T$. Comme on l'a vu dans la sous-section 1.3.4, les vitesses électroniques et ioniques $u_e(x, t)$, $u_i(x, t)$ peuvent s'exprimer explicitement

$$u_e = \mathcal{M}_e \left(-E + \kappa\nu_e u_n - \kappa\eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right) := \mathcal{M}_e F_e, \quad (3.18a)$$

$$u_i = \mathcal{M}_i \left(E + \kappa\nu_i u_n + \kappa\zeta g - \kappa\eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right) := \mathcal{M}_i F_i, \quad (3.18b)$$

où \mathcal{M}_e et \mathcal{M}_i sont les matrices des mobilités électroniques et ioniques

$$\mathcal{M}_e = \begin{pmatrix} \mu_e^P & \mu_e^H & 0 \\ -\mu_e^H & \mu_e^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_e^\parallel \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} \mu_i^P & -\mu_i^H & 0 \\ \mu_i^H & \mu_i^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i^\parallel \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

avec les composantes de mobilités électroniques et ioniques de Pedersen, de Hall et alignée définies respectivement par

$$\mu_{e,i}^P = \frac{\kappa\nu_{e,i}}{(\kappa\nu_{e,i})^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^H = \frac{|B|}{(\kappa\nu_{e,i})^2 + |B|^2}, \quad \mu_{e,i}^\parallel = \frac{1}{\kappa\nu_{e,i}}. \quad (3.20)$$

En injectant (3.18) dans (3.17f), on obtient

$$j = \frac{1}{\kappa} \rho (u_i - u_e) = \frac{1}{\kappa} \rho (\mathcal{M}_i F_i - \mathcal{M}_e F_e). \quad (3.21)$$

Prenant la différence entre (3.17b) et (3.17c) implique

$$j \times B = \rho(\nu_i u_i + \nu_e u_e) - \rho u_n (\nu_i + \nu_e) - \zeta \rho g + 2\eta \nabla(\rho T). \quad (3.22)$$

Ceci conduit à la détermination de la composante de j transverse à B par la formule

$$j_\perp = -j \times B \times B / |B|^2 = -[\rho(\nu_i u_i + \nu_e u_e) - \rho u_n (\nu_i + \nu_e) - \zeta \rho g + 2\eta \nabla(\rho T)] \times B / |B|^2. \quad (3.23)$$

Rappelons que nous notons le potentiel électrique par ϕ , et le champ électrique associé $E = -\nabla\phi$. L'accélération de la pesanteur s'écrit $g = (0, -|g|, 0)^T$ dans les coordonnées sphériques. Via la matrice de passage (3.10), elle s'exprime $g = (g_\alpha, g_\beta, g_\gamma)^T = (0, -\frac{B_\varphi}{|B|}|g|, \frac{B_r}{|B|}|g|)^T$ dans le système des Potentiels d'Euler. Les composantes transverses

de j s'écrivent alors

$$\begin{aligned}
 j_\alpha &= \rho \left[-(\nu_i \mu_i^H + \nu_e \mu_e^H) \frac{\partial_\alpha \phi}{r \sin \phi} + \kappa u_{n\alpha} (\nu_i^2 \mu_i^H - \nu_e^2 \mu_e^H) \right. \\
 &\quad - (\nu_i \mu_i^H - \nu_e \mu_e^H) \kappa \eta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial_\alpha (\rho T)}{\rho} \\
 &\quad + (-\nu_i \mu_i^P + \nu_e \mu_e^P) r \sin \phi |B| \partial_\beta \phi + \kappa u_{n\beta} (\nu_i^2 \mu_i^P + \nu_e^2 \mu_e^P) + \kappa \zeta \nu_i \mu_i^P g_\beta \\
 &\quad - (\nu_i \mu_i^P + \nu_e \mu_e^P) \kappa \eta r \sin \phi |B| \frac{\partial_\beta (\rho T)}{\rho} \\
 &\quad \left. - (\nu_i + \nu_e) u_{n\beta} - \zeta g_\beta + 2\eta r \sin \phi |B| \frac{\partial_\beta (\rho T)}{\rho} \right] / |B|, \tag{3.24a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j_\beta &= -\rho \left[(\nu_e \mu_e^P - \nu_i \mu_i^P) \frac{\partial_\alpha \phi}{r \sin \phi} + \kappa u_{n\alpha} (\nu_i^2 \mu_i^P + \nu_e^2 \mu_e^P) \right. \\
 &\quad - (\nu_i \mu_i^P + \nu_e \mu_e^P) \kappa \eta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial_\alpha (\rho T)}{\rho} \\
 &\quad + (\nu_i \mu_i^H + \nu_e \mu_e^H) r \sin \phi |B| \partial_\beta \phi + \kappa u_{n\beta} (\nu_e^2 \mu_e^H - \nu_i^2 \mu_i^H) - \kappa \zeta \nu_i \mu_i^H g_\beta \\
 &\quad + (\nu_i \mu_i - \nu_e \mu_e) \kappa \eta r \sin \phi |B| \frac{\partial_\beta (\rho T)}{\rho} \\
 &\quad \left. - (\nu_i + \nu_e) u_{n\alpha} + 2\eta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial_\alpha (\rho T)}{\rho} \right] / |B|, \tag{3.24b}
 \end{aligned}$$

L'équation (3.21) fournit la dernière composante du courant

$$j_\gamma = -\frac{\rho}{\kappa} (\mu_i^\parallel + \mu_e^\parallel) |B| \partial_\gamma \phi + \rho \zeta \mu_i^\parallel g_\gamma - \eta |B| \partial_\gamma (\rho T) (\mu_i^\parallel - \mu_e^\parallel). \tag{3.24c}$$

Enfin, l'équation (3.17e) conduit à une équation elliptique en dimension trois

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(j_\alpha \frac{1}{r \sin \phi |B|^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(j_\beta \frac{r \sin \phi}{|B|} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(j_\gamma \frac{1}{|B|} \right) = 0. \tag{3.25}$$

Cette dernière relation prend la forme matricielle suivante

$$-\nabla^c \cdot (\mathcal{A} \nabla^c \phi) = -\nabla^c \cdot J_n, \tag{3.26}$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{D} & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \tag{3.27}$$

$$J_n = \begin{pmatrix} j_{n\alpha} \\ j_{n\beta} \\ j_{n\gamma} \end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

avec les composantes

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\rho(\nu_i \mu_i^H + \nu_e \mu_e^H)}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^3}, & \mathbf{B} &= \rho(\nu_i \mu_i^H + \nu_e \mu_e^H) \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{|B|}, \\ \mathbf{C} &= \frac{\rho}{\kappa} (\mu_e^\parallel + \mu_i^\parallel), & \mathbf{D} &= \frac{\rho(\nu_i \mu_i^P - \nu_e \mu_e^P)}{|B|^2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

et

$$\begin{aligned} j_{n\alpha} &= \frac{\rho}{r \sin \varphi |B|^3} (\kappa u_{n\alpha} (\nu_i^2 \mu_i^H - \nu_e^2 \mu_e^H) + \kappa u_{n\beta} (\nu_i^2 \mu_i^P + \nu_e^2 \mu_e^P) + \kappa \zeta \nu_i \mu_i^P g_\beta \\ &\quad - (\nu_i + \nu_e) u_{n\beta} - \zeta g_\beta) + 2\eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\beta (\rho T) \\ &\quad - \frac{(\nu_i \mu_i^H - \nu_e \mu_e^H)}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^3} \kappa \eta \partial_\alpha (\rho T) - (\nu_i \mu_i^P + \nu_e \mu_e^P) \kappa \eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\beta (\rho T), \end{aligned} \quad (3.30a)$$

$$\begin{aligned} j_{n\beta} &= \frac{r \sin \varphi \rho}{|B|^2} (-\kappa u_{n\alpha} (\nu_i^2 \mu_i^P + \nu_e^2 \mu_e^P) - \kappa u_{n\beta} (\nu_e^2 \mu_e^H - \nu_i^2 \mu_i^H) + \kappa \zeta \nu_i \mu_i^H g_\beta \\ &\quad + (\nu_i + \nu_e) u_{n\alpha}) - 2\eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\alpha (\rho T) \\ &\quad + (\nu_i \mu_i^P + \nu_e \mu_e^P) \kappa \eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\alpha (\rho T) \\ &\quad - (\nu_i \mu_i^H - \nu_e \mu_e^H) \kappa \eta r^2 \sin^2 \varphi / |B| \partial_\beta (\rho T), \end{aligned} \quad (3.30b)$$

$$j_{n\gamma} = \frac{1}{|B|} \rho \zeta g_\gamma \mu_i^\parallel - \eta \partial_\gamma (\rho T) (\mu_i^\parallel - \mu_e^\parallel). \quad (3.30c)$$

De même, on peut réécrire l'équation de conservation de la masse (3.17a) dans le système des Potentiels d'Euler. La vitesse u_i peut s'exprimer comme

$$\begin{aligned} u_{i\alpha} &= \mu_i^P \left(-\frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \kappa \nu_i u_{n\alpha} - \kappa \eta \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial_\alpha (\rho T)}{\rho} \right) \\ &\quad - \mu_i^H \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \nu_i u_{n\beta} + \kappa \zeta g_\beta - \kappa \eta r \sin \varphi |B| \frac{\partial_\beta (\rho T)}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (3.31a)$$

$$\begin{aligned} u_{i\beta} &= \mu_i^H \left(-\frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \kappa \nu_i u_{n\alpha} - \kappa \eta \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial_\alpha (\rho T)}{\rho} \right) \\ &\quad + \mu_i^P \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \nu_i u_{n\beta} + \kappa \zeta g_\beta - \kappa \eta r \sin \varphi |B| \frac{\partial_\beta (\rho T)}{\rho} \right), \end{aligned} \quad (3.31b)$$

$$u_{i\gamma} = \mu_i^\parallel \left(-|B| \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \kappa \nu_i u_{n\gamma} + \kappa \zeta g_\gamma - \kappa \eta |B| \frac{\partial_\gamma (\rho T)}{\rho} \right). \quad (3.31c)$$

Grâce à l'opérateur de divergence (3.9b), l'équation de conservation de la masse prend la forme conservative

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{u_{i\alpha}}{r \sin \varphi} w \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} (r \sin \varphi |B| u_{i\beta} w) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (|B| u_{i\gamma} w) = 0, \quad (3.32)$$

où $w := \rho/|B|^2$. Notons que dans ce champ de vitesse, le gradient de la pression contribue comme un terme de diffusion. Ainsi l'équation de conservation de masse devient une équation d'advection-diffusion.

Dans le système des Potentiels d'Euler, le modèle Dynamo se compose d'une équation d'advection-diffusion en dimension trois

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^c \cdot (vw) - \nabla^c \cdot (\mathcal{M} \nabla^c (\rho T)) = 0, \quad (3.33a)$$

où $v = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$ avec

$$v_\alpha = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\mu_i^P \left(-\frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \kappa \nu_i u_{n\alpha} \right) - \mu_i^H \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \nu_i u_{n\beta} + \kappa \zeta g_\beta \right) \right), \quad (3.33ba)$$

$$v_\beta = r \sin \varphi |B| \left(\mu_i^H \left(-\frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \kappa \nu_i u_{n\alpha} \right) + \mu_i^P \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \nu_i u_{n\beta} + \kappa \zeta g_\beta \right) \right), \quad (3.33bb)$$

$$v_\gamma = |B| \left(\mu_i^\parallel \left(-|B| \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \kappa \nu_i u_{n\gamma} + \kappa \zeta g_\gamma \right) \right), \quad (3.33bc)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \kappa \eta \frac{\mu_i^P}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^2} & -\kappa \eta / |B| \mu_i^H & 0 \\ \kappa \eta \frac{\mu_i^H}{|B|} & \kappa \eta r^2 \sin^2 \varphi \mu_i^P & 0 \\ 0 & 0 & \mu_i^\parallel \kappa \eta \end{pmatrix}, \quad (3.33c)$$

couplée à une équation elliptique en dimension trois

$$-\nabla^c \cdot (\mathcal{A} \nabla^c \phi) = -\nabla^c \cdot J_n, \quad (3.33d)$$

où \mathcal{A} , J_n sont définies respectivement par (3.27) et (3.28).

3.2.4 Modèle Striation dans le système des Potentiels d'Euler

Nous rappelons que le modèle Striation est obtenu en passant à la limite $\kappa \rightarrow 0$ dans l'équation (3.17)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (3.34a)$$

$$j \times B = \nu \rho (u - u_n) - \zeta \rho g + 2\eta \nabla (\rho T), \quad (3.34b)$$

$$E + u \times B = 0, \quad (3.34c)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (3.34d)$$

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (3.34e)$$

où $\nu = \nu_i + \nu_e$. Dans ce modèle, le champ électrique est orthogonal au champ magnétique car $E = -u \times B = |B|(u_\beta \hat{\alpha} - u_\alpha \hat{\beta})$. En faisant le produit vectoriel entre (3.34c) et B , on obtient $u_\perp = -\frac{\nabla \bar{\phi} \times B}{|B|^2}$. Ensuite, en faisant le produit scalaire entre (3.34b) et B , on a

la troisième composant de la vitesse $u_\gamma = \left(u_n + \frac{\zeta}{\nu}g - 2\frac{\eta}{\nu}\frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right) \cdot \frac{B}{|B|}$. Par conséquent, la vitesse s'écrit

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\nabla\bar{\phi} \times B}{|B|^2} + \left(\left(u_n + \frac{\zeta}{\nu}g - 2\frac{\eta}{\nu}\frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right) \cdot \frac{B}{|B|} \right) \frac{B}{|B|} \\ &= \left(r \sin \varphi \partial_\beta \bar{\phi}, \frac{-1}{r \sin \varphi |B|} \partial_\alpha \bar{\phi}, u_{n\gamma} + \frac{\zeta}{\nu}g_\gamma - 2\frac{\eta}{\nu}|B| \frac{\partial_\gamma(\rho T)}{\rho} \right)^T. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Puis en faisant le produit vectoriel entre (3.34b) et B , on obtient les deux premières composantes du courant

$$\begin{aligned} j_\perp &= -\frac{1}{|B|^2} (\nu\rho(u - u_n) \times B - \zeta\rho g \times B + 2\eta\nabla(\rho T) \times B)_\perp \\ &= \frac{\rho}{|B|} \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{r \sin \varphi |B|} \partial_\alpha \bar{\phi} - \nu u_{n\beta} - \zeta g_\beta + 2\eta r \sin \varphi |B| \frac{\partial_\beta(\rho T)}{\rho} \\ \nu r \sin \varphi \partial_\beta \bar{\phi} + \nu u_{n\alpha} + \zeta g_\alpha - \frac{2\eta}{r \sin \varphi} \frac{\partial_\alpha(\rho T)}{\rho} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

De plus, en développant l'équation (3.34e) dans le système des Potentiels d'Euler, on a

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(j_\alpha \frac{1}{r \sin \varphi |B|^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(j_\beta \frac{r \sin \varphi}{|B|} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(j_\gamma \frac{1}{|B|} \right) = 0. \quad (3.37)$$

En faisant l'hypothèse que le courant j s'annule dans l'atmosphère neutre et en intégrant (3.37) le long du champ magnétique, on obtient une équation elliptique en dimension deux

$$-\int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(j_\alpha \frac{1}{r \sin \varphi |B|^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(j_\beta \frac{r \sin \varphi}{|B|} \right) d\gamma = 0, \quad (3.38)$$

où γ_{\max} , γ_{\min} sont des coordonnées prises dans la basse ionosphère.

On peut donc résumer le modèle Striation dans le système des Potentiels d'Euler par une équation d'advection-diffusion en dimension trois

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^c \cdot (vw) - \partial_\gamma (m_\gamma \partial_\gamma(\rho T)) = 0, \quad (3.39a)$$

où $w = \rho/|B|^2$, avec les composants du champ de la vitesse

$$v_\alpha = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \beta}, \quad v_\beta = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \alpha}, \quad v_\gamma = |B| \left(u_{n\gamma} + \frac{\zeta}{\nu}g_\gamma \right), \quad m_\gamma = \frac{2\eta}{\nu|B|}, \quad (3.39b)$$

couplée à une équation elliptique en dimension deux

$$-\nabla_\perp^c (\mathcal{A}_\perp \nabla_\perp^c \bar{\phi}) = -\nabla_\perp^c J_{n\perp} \quad (3.39c)$$

où $\mathcal{A}_\perp = \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A_\beta \end{pmatrix}$, $J_{n\perp} = \begin{pmatrix} J_{n\alpha} \\ J_{n\beta} \end{pmatrix}$,
avec des coefficients A_α , A_β , $J_{n\alpha}$, $J_{n\beta}$ définies respectivement par

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \rho\nu \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^4} d\gamma, \\ A_\beta &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \rho\nu \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{|B|^2} d\gamma, \\ J_{n\alpha} &= - \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} (\rho\nu u_{n\beta} + \rho\zeta g_\beta - 2\eta r \sin \varphi |B| \partial_\beta(\rho T)) \frac{1}{r \sin \varphi |B|^3} d\gamma, \\ J_{n\beta} &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \left(\rho\nu u_{n\alpha} + \rho\zeta g_\alpha - \frac{2\eta}{r \sin \varphi} \partial_\alpha(\rho T) \right) \frac{r \sin \varphi}{|B|^2} d\gamma. \end{aligned}$$

Remarquons que le modèle Striation (3.39) peut être obtenu directement en passant à la limite $\kappa \rightarrow 0$ dans le modèle Dynamo (3.33).

3.3 Domaine de calcul

On s'intéresse à un domaine de calcul formé par un tube de champ magnétique présenté dans la figure 3.4. Plus précisément pour décrire ce tube de champ magnétique, on introduit les paramètres H_h , H_l , H_e et H_w (voir la figure 3.5) :

- H_h : la plus haute altitude de la couche centrale,
- H_l : la plus basse altitude de la couche centrale,
- H_e : l'altitude des couches externes,
- H_w : la largeur de la couche centrale.

3.3.1 Données initiales : le modèle IRI

Dans la suite de travail, nous utilisons le modèle IRI (International Reference of Ionosphere) [9] comme données initiales. Dans ce modèle, toutes les quantités dépendent en altitude. On utilise les quantités suivantes : la densité du plasma ρ , les fréquences de collision d'ions-neutres ν_i et d'électrons-neutres ν_e , la température T . Nous supposons que les fréquences de collision d'ions-neutres et d'électrons-neutres satisfont la relation suivante

$$\frac{\nu_e}{\nu_i} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \approx 10^2. \quad (3.40)$$

On trace donc les quantités dans un tube de champ magnétique défini par :

$$H_h = 850km, H_l = 450km, H_e = 100km, H_w = 400km.$$

La densité du plasma ρ , les fréquences de collision d'ions-neutres ν_i et la température T sont présentées respectivement dans la figure 3.6. La densité du plasma augmente avec la croissance en altitude et elle atteint sa valeur maximale 4.755×10^{11} à 370 km d'altitude. A partir de 700 km d'altitude, la densité du plasma est invariante avec la valeur constante

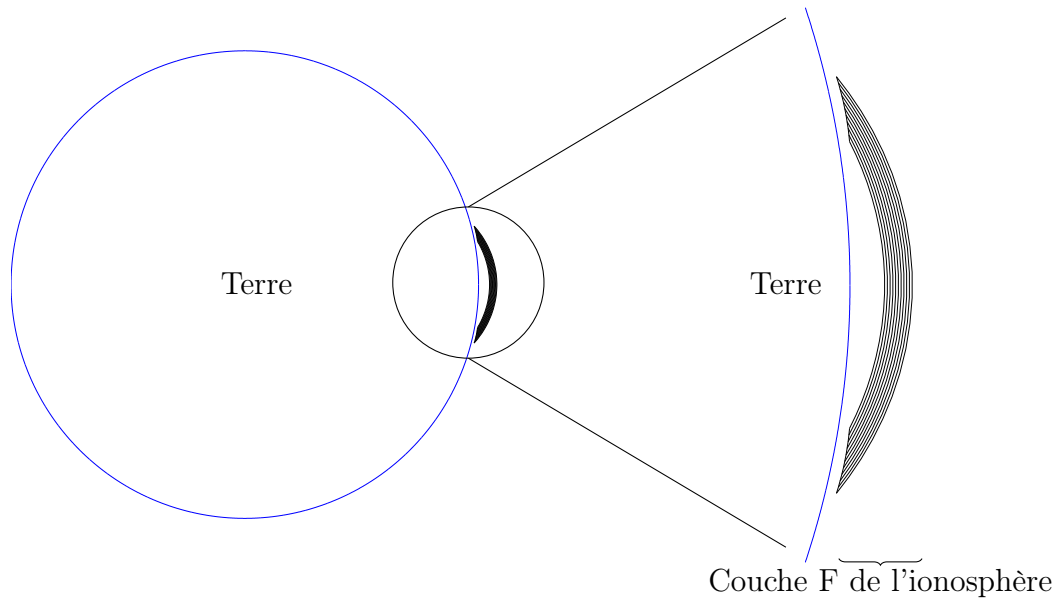


FIGURE 3.4 – Domaine de calcul dans la couche F de l'ionosphère

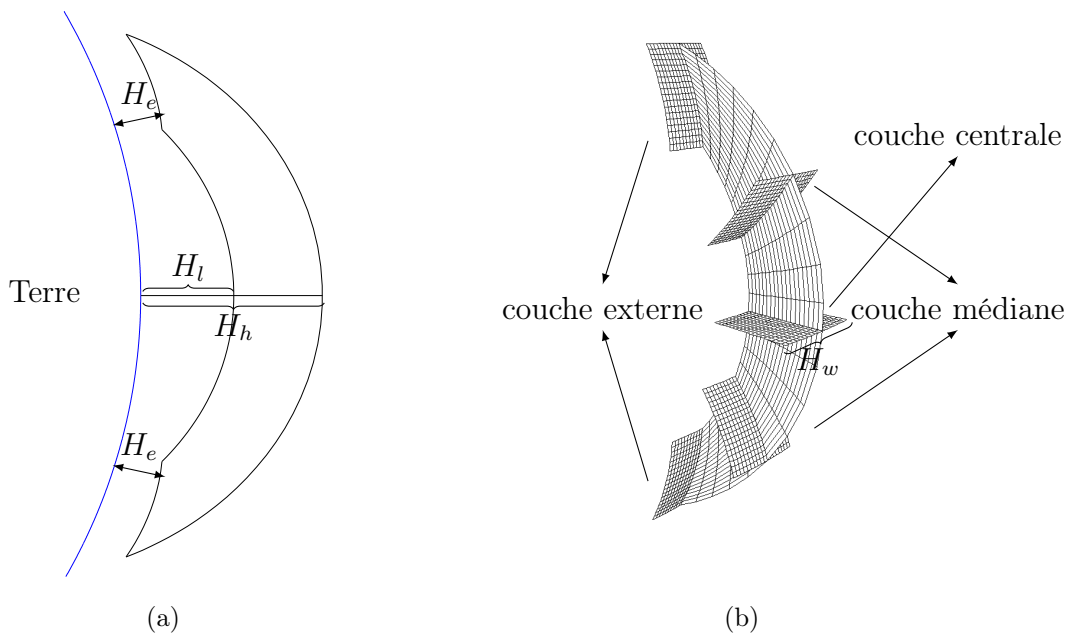


FIGURE 3.5 – Description du tube de champ magnétique.

4.303×10^{10} . La fréquence de collision d'ions-neutres décroît avec l'altitude car la densité de particules neutres est une fonction décroissante de l'altitude. La température du plasma est une fonction croissante de l'altitude.

3.3.2 Maillage de discrétisation

Nous notons dans la suite le tube de champ magnétique dans le système des Potentiels d'Euler par Ω (voir la figure 3.7). On voit que Ω est un tube droit. Le profil de Ω forme un trapèze dans le plan $\beta - \gamma$ et un rectangle dans les plans $\alpha - \beta$ et $\alpha - \gamma$ (voir la figure 3.8). On note les longueurs du domaine de calcul dans les directions α et β par $\Omega_\alpha = (\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ et $\Omega_\beta = (\beta_{\min}, \beta_{\max})$. Dans la direction γ , la longueur la plus longue est $\Omega_{\gamma_l} = (\gamma_{l,\min}, \gamma_{l,\max})$ et la longueur la plus courte est $\Omega_{\gamma_r} = (\gamma_{r,\min}, \gamma_{r,\max})$ (voir la figure 3.7(b)). Avec ces notations, on définit le plan perpendiculaire $\Omega_\perp = \Omega_\alpha \times \Omega_\beta$. Enfin, on note les surfaces du domaine de calcul par S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6 (voir la figure 3.7(a)). Les surfaces correspondant à S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 et S_6 sont respectivement $\sigma_{S_1}, \sigma_{S_2}, \sigma_{S_3}, \sigma_{S_4}, \sigma_{S_5}$ et σ_{S_6} .

On discrétise maintenant le domaine de calcul. On note i, j, k et n les indices associés aux directions α, β, γ et au temps t . On définit aussi les ensembles d'indices

$$\begin{aligned} I_1 &= [1, \dots, i, \dots, N_\alpha], J_1 = [1, \dots, j, \dots, N_\beta], K_1 = [1, \dots, k, \dots, N_\gamma], \\ I_2 &= [1, \dots, i, \dots, N_\alpha + 1], J_2 = [1, \dots, j, \dots, N_\beta + 1], K_2 = [1, \dots, k, \dots, N_\gamma + 1], \\ I_3 &= [2, \dots, i, \dots, N_\alpha], J_3 = [2, \dots, j, \dots, N_\beta], K_3 = [2, \dots, k, \dots, N_\gamma], \\ N &= [1, \dots, n, \dots, N_t]. \end{aligned}$$

où $N_\alpha, N_\beta, N_\gamma, N_t \in \mathbb{N}$.

Dans chaque direction, on introduit la partition suivante :

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= \alpha_{1/2} < \alpha_1 < \alpha_{3/2} < \dots < \alpha_{i-1/2} < \alpha_i < \alpha_{i+1/2} < \dots < \alpha_{N_\alpha-1/2} < \alpha_{N_\alpha} < \alpha_{N_\alpha+1/2} = \alpha_{\max}, \\ \beta_{\min} &= \beta_{1/2} < \beta_1 < \beta_{3/2} < \dots < \beta_{j-1/2} < \beta_j < \beta_{j+1/2} < \dots < \beta_{N_\beta-1/2} < \beta_{N_\beta} < \beta_{N_\beta+1/2} = \beta_{\max}, \\ \gamma_{l,\min} &= \gamma_{l,1/2} < \gamma_{l,1} < \gamma_{l,3/2} < \dots < \gamma_{l,j-1/2} < \gamma_{l,j} < \gamma_{l,j+1/2} < \dots < \gamma_{l,N_\gamma-1/2} < \gamma_{l,N_\gamma} < \gamma_{l,N_\gamma+1/2} = \gamma_{l,\max}, \\ \gamma_{r,\min} &= \gamma_{r,1/2} < \gamma_{r,1} < \gamma_{r,3/2} < \dots < \gamma_{r,j-1/2} < \gamma_{r,j} < \gamma_{r,j+1/2} < \dots < \gamma_{r,N_\gamma-1/2} < \gamma_{r,N_\gamma} < \gamma_{r,N_\gamma+1/2} = \gamma_{r,\max}. \end{aligned}$$

On note aussi les pas d'espace suivants : $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+1/2} - \alpha_{i-1/2}$ pour $i \in I_1$, $\Delta\alpha_{i-1/2} = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ pour $i \in [2, \dots, N_\alpha]$, $\Delta\beta_j = \beta_{j+1/2} - \beta_{j-1/2}$ pour $j \in J_1$, $\Delta\beta_{j-1/2} = \beta_j - \beta_{j-1}$ pour $j \in [2, \dots, N_\beta]$.

Les partitions sont présentées dans la figure 3.8. Plus précisément, on divise uniformément les intervalles $\Omega_\alpha, \Omega_\beta$ et Ω_{γ_r} . Pour l'intervalle Ω_{γ_l} , on le décompose en trois parties : \mathbb{T} avec N_{γ_T} mailles, \mathbb{C} avec N_{γ_C} mailles, \mathbb{B} avec N_{γ_B} mailles, telles que $N_\gamma = N_{\gamma_T} + N_{\gamma_C} + N_{\gamma_B}$. Pour \mathbb{C} , on prend la même partition dans l'intervalle Ω_{γ_r} , c'est à dire que $\gamma_{l,j} = \gamma_{r,j}$, $\forall N_{\gamma_B} + 1 \leq j \leq N_{\gamma_B} + N_{\gamma_C}$; pour \mathbb{T} et \mathbb{B} , on les divise uniformément (voir la figure 3.9).

Les inconnues, leurs positions et symboles associés sont présentés dans le tableau 3.8(d). La densité ρ est positionnée au centre des cellules, le potentiel ϕ est lui aux sommets des cellules. Plus précisément, on présente chaque maille $S_{i,j,k}$ dans la figure 3.10. On note le volume et la surface de $S_{i,j,k}$ respectivement par $V_{i,j,k}$ et $\partial S_{i,j,k}$. Similairement à la figure 3.7(a), on note les surfaces de cellule $S_{i,j,k}$ dans la direction γ par s_1 et s_2 , dans la

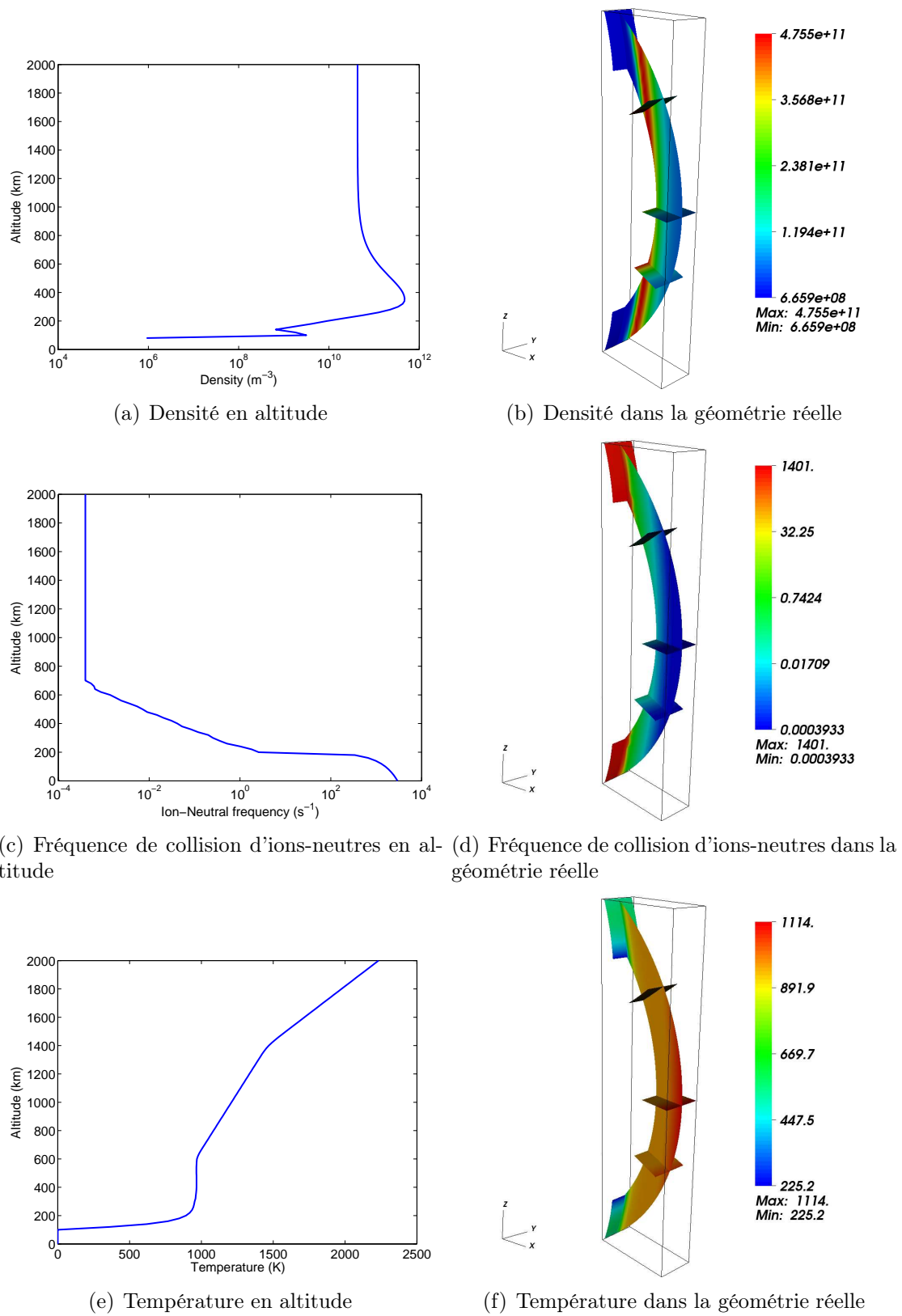


FIGURE 3.6 – Données initiales du modèle IRI.

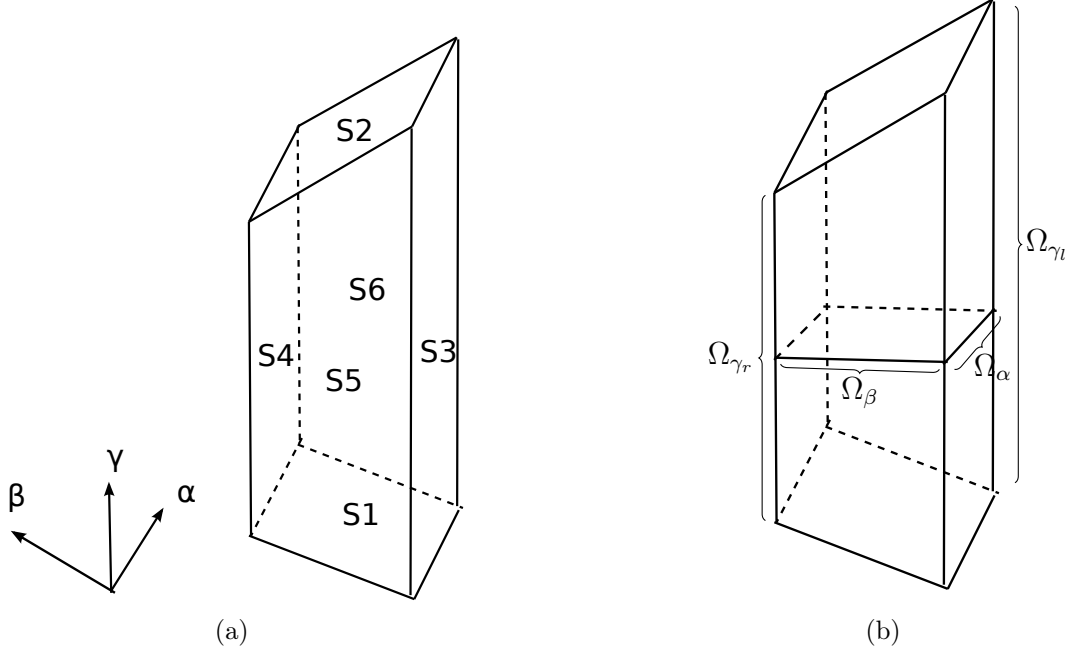


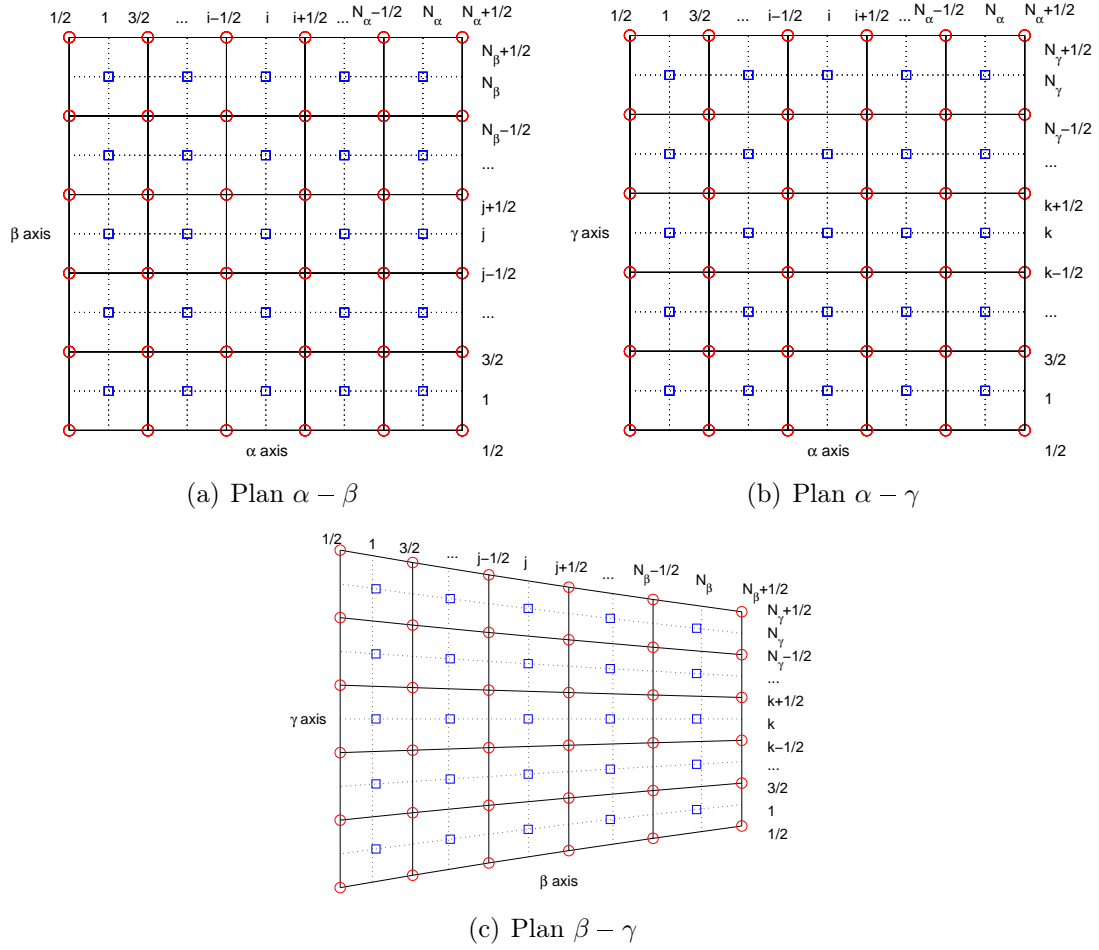
FIGURE 3.7 – Discretisation du domaine de calcul respectivement dans les plans $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$.

direction β par s_3 et s_4 , dans la direction α par s_5 et s_6 . La densité $\rho_{i,j,k}$ est définie dans la position $(\alpha_{i,j,k}, \beta_{i,j,k}, \gamma_{i,j,k})$ pour $(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1$ et le potentiel $\phi_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}$ est défini dans la position $(\alpha_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}, \beta_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}, \gamma_{i-1/2,j-1/2,k-1/2})$ pour $(i, j, k) \in I_2 \times J_2 \times K_2$. Notons aussi qu'on a

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_{i,j,k}, \forall (j, k) \in J_1 \times K_1, \\ \alpha_{i-1/2} &= \alpha_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}, \forall (j, k) \in J_2 \times K_2, \\ \beta_j &= \beta_{i,j,k}, \forall (i, k) \in I_1 \times K_1, \\ \beta_{j-1/2} &= \beta_{i-1/2,j-1/2,k-1/2}, \forall (i, k) \in I_2 \times K_2. \end{aligned}$$

3.4 Approximation numérique du modèle Striation ionosphérique

Le modèle Striation consiste en une équation elliptique couplée à une équation d'advection-diffusion dans la section 3.2.4, ainsi on résout ce modèle itérativement entre les deux équations. Notons que si on résout l'équation d'advection-diffusion par un schéma explicite, alors le pas de temps est limité par $\Delta t \sim O(\Delta\gamma^2)$. C'est à dire que le pas de temps est très petit, ainsi un schéma implicite est plus approprié. Cependant, pour construire un schéma implicite d'ordre élevé sur un maillage non-cartésien, il faut utiliser des méthodes coûteuses en calcul, par exemple la méthode de Galerkin discontinu. Dans ce chapitre,



Inconnue	Nœuds de maillage
$\rho \leftrightarrow \square$	$(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1$
$\phi \leftrightarrow \circ$	$(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \in I_2 \times J_2 \times K_2$
$\bar{\phi} \leftrightarrow \circ$	$(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \in I_2 \times J_2$

(d)

FIGURE 3.8 – Discrétisation du domaine de calcul respectivement dans les plans $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$.

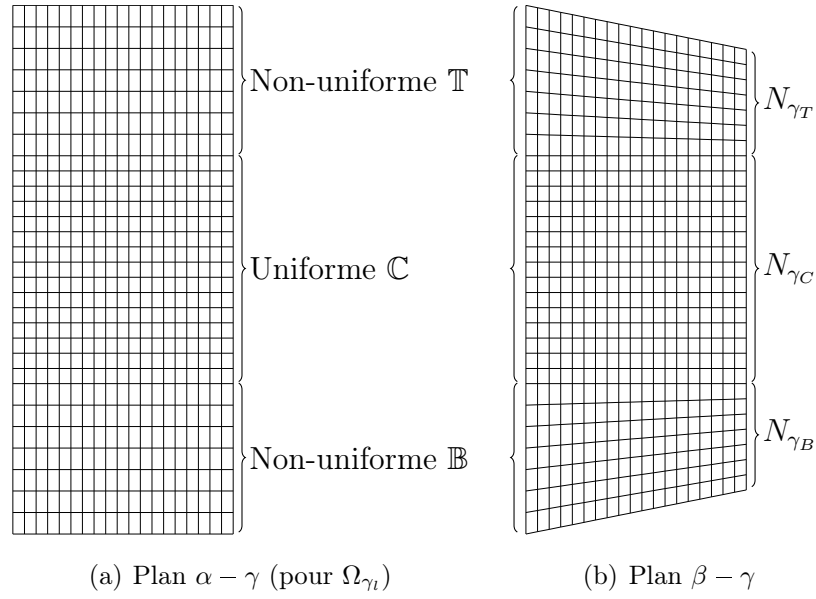


FIGURE 3.9 – Décomposition le domaine de calcul en trois : les maillages non-uniformes \mathbb{T} et \mathbb{B} ; le maillage uniforme \mathbb{C} .

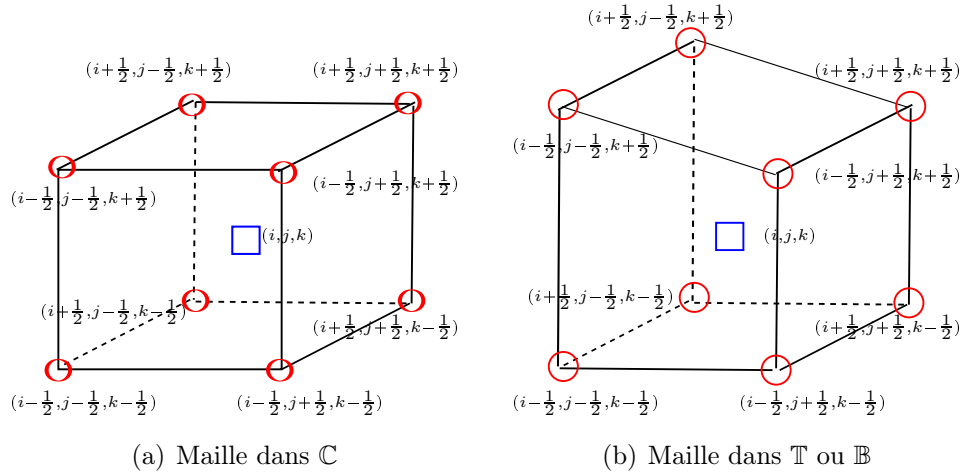


FIGURE 3.10 – Maille $S_{i,j,k}$ respectivement dans \mathbb{T} , \mathbb{C} et \mathbb{B} .

on considère une version du modèle de Striation sans terme du gradient de la pression suivant. En effet, on a vu dans la section 1.3.6 que le terme du gradient de la pression ne contribue pas à la dérive en $E \times B$ dans le plan perpendiculaire Ω_\perp , ainsi on enlève le terme du gradient de la pression dans J_n . De plus dans la direction alignée au champ magnétique, le gradient de la pression contrebalance l'effet de gravité dans cette direction. On enlève donc ces deux termes dans v_γ . Le modèle avec gradient de la pression sera considéré dans le chapitre 4. On a donc le modèle Striation sans gradient de la pression suivant :

une équation de conservation de la masse en dimension trois

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^c \cdot (vw) = 0, \quad (3.41a)$$

où $w = \rho/|B|^2$, avec les composants du champ de la vitesse

$$v_\alpha = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \beta}, \quad v_\beta = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \alpha}, \quad v_\gamma = |B|u_{n\gamma}, \quad (3.41b)$$

couplée à une équation elliptique en dimension deux

$$-\nabla_\perp^c (\mathcal{A}_\perp \nabla_\perp^c \bar{\phi}) = -\nabla_\perp^c J_{n\perp} \quad (3.41c)$$

où $\mathcal{A}_\perp = \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A_\beta \end{pmatrix}$, $J_{n\perp} = \begin{pmatrix} J_{n\alpha} \\ J_{n\beta} \end{pmatrix}$,

avec des coefficients A_α , A_β , $J_{n\alpha}$, $J_{n\beta}$ définies respectivement par

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \rho\nu \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^4} d\gamma, \\ A_\beta &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \rho\nu \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{|B|^2} d\gamma, \\ J_{n\alpha} &= - \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} (\rho\nu u_{n\beta} + \rho\zeta g_\beta) \frac{1}{r \sin \varphi |B|^3} d\gamma, \\ J_{n\beta} &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} (\rho\nu u_{n\alpha} + \rho\zeta g_\alpha) \frac{r \sin \varphi}{|B|^2} d\gamma. \end{aligned}$$

Ainsi il suffit de résoudre une équation de conservation de la masse (3.41a) couplée à une équation elliptique (3.41c). On peut discrétiser (3.41a) par des schémas explicites.

3.4.1 Calcul du potentiel électrique

Nous utilisons la méthode de différences finies pour discrétiser l'équation elliptique (3.39c). On considère deux types des conditions aux limites suivantes :

CL1 : conditions de Dirichlet homogènes nulles sur S_3 , S_4 , S_5 et S_6 ;

CL2 : conditions de Dirichlet homogènes nulles sur S_3 , S_4 et conditions de Neumann homogènes nulles sur S_5 et S_6 .

Notons que les coefficients de la matrice de diffusion A_α , A_β , $J_{n\alpha}$ et $J_{n\beta}$ sont les intégrales le long de la direction γ , ainsi on approche ces quantités par des formules de quadrature multi-couches définies par

$$A_{\alpha,i,j-1/2} = \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho_{i,j-1/2,k} \int_{\gamma_{i,j-1/2,k-1/2}}^{\gamma_{i,j-1/2,k+1/2}} \frac{\nu}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^4} d\gamma \right)_{i,j-1/2}, \quad (i,j) \in I_1 \times J_2, \quad (3.42a)$$

$$A_{\beta,i-1/2,j} = \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho_{i-1/2,j,k} \int_{\gamma_{i-1/2,j,k-1/2}}^{\gamma_{i-1/2,j,k+1/2}} \frac{\nu r^2 \sin^2 \varphi}{|B|^2} d\gamma \right)_{i-1/2,j}, \quad (i,j) \in I_2 \times J_1, \quad (3.42b)$$

$$J_{n\alpha,i,j-1/2} = - \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho_{i,j-1/2,k} \int_{\gamma_{i,j-1/2,k-1/2}}^{\gamma_{i,j-1/2,k+1/2}} (\nu u_{n\beta} + \zeta g_\beta) \frac{1}{r \sin \varphi |B|^3} d\gamma \right)_{i,j-1/2}, \quad (i,j) \in I_1 \times J_2, \quad (3.42c)$$

$$J_{n\beta,i-1/2,j} = \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho_{i-1/2,j,k} \int_{\gamma_{i-1/2,j,k-1/2}}^{\gamma_{i-1/2,j,k+1/2}} (\nu u_{n\alpha} + \zeta g_\alpha) \frac{r \sin \varphi}{|B|^2} d\gamma \right)_{i-1/2,j}, \quad (i,j) \in I_2 \times J_1, \quad (3.42d)$$

où les indices $i, j - 1/2$ et $i - 1/2, j$ signifient que la valeur de la fonction est prise aux points $(\alpha_i, \beta_{j-1/2})$ et $(\alpha_{i-1/2}, \beta_j)$. Puis on discrétise l'équation elliptique (3.39c) par :

$$\begin{aligned} & (-\partial_\alpha(A_\alpha \partial_\alpha \bar{\phi}))_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{A_{\alpha,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_i \Delta\alpha_{i-\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \frac{A_{\alpha,i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_{i-1} \Delta\alpha_{i-\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{i-\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\frac{A_{\alpha,i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_i \Delta\alpha_{i-\frac{1}{2}}} + \frac{A_{\alpha,i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_{i-1} \Delta\alpha_{i-\frac{1}{2}}} \right) \bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.43a)$$

$$\begin{aligned} & (-\partial_\beta(A_\beta \partial_\beta \bar{\phi}))_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{A_{\beta,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\beta_j \Delta\beta_{j-\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \frac{A_{\beta,i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta\beta_{j-1} \Delta\beta_{j-\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{3}{2}} \\ &+ \left(\frac{A_{\beta,i-\frac{1}{2},j}}{\Delta\beta_j \Delta\beta_{j-\frac{1}{2}}} + \frac{A_{\beta,i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta\beta_{j-1} \Delta\beta_{j-\frac{1}{2}}} \right) \bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.43b)$$

$$\begin{aligned} & (-\partial_\alpha(J_{n\alpha}) - \partial_\beta(J_{n\beta}))_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{J_{n\alpha,i,j-\frac{1}{2}} - J_{n\alpha,i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_{i-\frac{1}{2}}} - \frac{J_{n\beta,i-\frac{1}{2},j} - J_{n\beta,i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta\beta_{j-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.43c)$$

On considère premièrement les conditions aux limites de type CL1. Dans ce cas, on a

$$\bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0, \quad \text{si } i \in \{1, N_\alpha + 1\} \text{ ou } j \in \{1, N_\beta + 1\}. \quad (3.44)$$

Il reste à déterminer $\bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, $(i, j) \in I_3 \times J_3$. Pour cela, on a besoin $A_{\alpha,i,j-\frac{1}{2}}$, $(i, j) \in I_1 \times J_3$, $A_{\beta,i-\frac{1}{2},j}$, $(i, j) \in I_3 \times J_1$, $J_{n\alpha,i,j-\frac{1}{2}}$, $(i, j) \in I_1 \times J_3$, $J_{n\beta,i-\frac{1}{2},j}$, $(i, j) \in I_3 \times J_1$. La densité est approchée par

$$\rho_{i,j-\frac{1}{2},k} = \frac{\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j-1,k}}{2}, \quad (i, j, k) \in I_1 \times J_3 \times K_1, \quad (3.45a)$$

$$\rho_{i-\frac{1}{2},j,k} = \frac{\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k}}{2}, \quad (i, j, k) \in I_3 \times J_1 \times K_1. \quad (3.45b)$$

On résume le schéma numérique de l'équation (3.39c) avec conditions aux limites de type CL1 dans l'algorithme suivant :

Algorithme 3.1 calculer le potentiel avec CL1

Donnons $\rho_{i,j,k}$ pour $(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1$

Déterminer la matrice A

$A \leftarrow (3.43a), (3.43b), (3.44)$ pour $(i, j) \in I_3 \times J_3$.

Déterminer le second membre b

$b \leftarrow (3.43c)$ pour $(i, j) \in I_3 \times J_3$.

On résout le système linéaire $A\bar{\Phi} = b$ par PARDISO [45].

Ensuite, on considère les conditions aux limites de type CL2. Dans ce cas, on a

$$\bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0, \quad \text{si } j \in \{1, N_\beta + 1\}. \quad (3.46a)$$

$$\partial_\alpha \bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0, \quad \text{si } i \in \{1, N_\alpha + 1\}. \quad (3.46b)$$

Pour calculer $\bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, $(i, j) \in I_3 \times J_3$, on utilise encore (3.43). Pour calculer $\bar{\phi}_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}$, $(i, j) \in \{1, N_\alpha + 1\} \times J_3$, on a

$$\left(-\partial_\alpha(A_\alpha \partial_\alpha \bar{\phi})\right)_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = -\frac{A_{\alpha,1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_1 \Delta\alpha_{\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{\frac{3}{2},j-\frac{1}{2}} + \frac{A_{\alpha,1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_1 \Delta\alpha_{\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad (3.47a)$$

$$\left(-\partial_\alpha(A_\alpha \partial_\alpha \bar{\phi})\right)_{N_\alpha+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = \frac{A_{\alpha,N_\alpha,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_{N_\alpha} \Delta\alpha_{N_\alpha+\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{N_\alpha+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - \frac{A_{\alpha,i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta\alpha_{N_\alpha} \Delta\alpha_{N_\alpha+\frac{1}{2}}} \bar{\phi}_{N_\alpha-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}, \quad (3.47b)$$

Ensuite, considérons que r , $\sin \varphi$, $|B|$, ν , u_n , g sont indépendants de α dans (3.42c), alors on en déduit que $\partial_\alpha(J_{n\alpha})_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0$ et $\partial_\alpha(J_{n\alpha})_{N_\alpha+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = 0$. Ainsi (3.43c) devient les formules suivantes :

$$\left(-\partial_\alpha(J_{n\alpha}) - \partial_\beta(J_{n\beta})\right)_{\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} = -\frac{J_{n\beta,\frac{1}{2},j} - J_{n\beta,\frac{1}{2},j-1}}{\Delta\beta_{j-\frac{1}{2}}}, \quad (3.48a)$$

$$(-\partial_\alpha(J_{n\alpha}) - \partial_\beta(J_{n\beta}))_{N_\alpha + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}} = -\frac{J_{n\beta, N_\alpha + \frac{1}{2}, j} - J_{n\beta, N_\alpha + \frac{1}{2}, j-1}}{\Delta\beta_{j-\frac{1}{2}}}. \quad (3.48b)$$

Le schéma numérique de l'équation elliptique (3.39c) avec les conditions aux limites de type CL2 est décrit comme :

Algorithme 3.2 calculer le potentiel avec CL2

Donnons $\rho_{i,j,k}$ pour $(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1$

Déterminer la matrice A

$A \leftarrow (3.43a), (3.43b), (3.46)$ pour $(i, j) \in I_3 \times J_3$,

$A \leftarrow (3.47)$ pour $(i, j) \in \{1, N_\alpha + 1\} \times J_3$.

Déterminer le second membre b

$b \leftarrow (3.43c)$ pour $(i, j) \in I_3 \times J_3$,

$b \leftarrow (3.48)$ pour $(i, j) \in \{1, N_\alpha + 1\} \times J_3$.

On résout le système linéaire $A\bar{\Phi} = b$ par PARDISO [45].

3.4.2 Calcul de la densité du plasma

Nous discrétisons maintenant l'équation de conservation de la masse (3.39a). On définit tout d'abord dans chaque cellule $S_{i,j,k}$ la quantité suivante

$$\bar{w}_{i,j,k} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \int_{S_{i,j,k}} w dV = \frac{1}{V_{i,j,k}} \int_{S_{i,j,k}} \frac{\rho}{|B|^2} dV \approx \frac{\rho_{i,j,k}}{|B|_{i,j,k}^2}, \quad (3.49)$$

où dV est l'élément de volume infinitésimal, $|B|_{i,j,k} = |B|(\alpha_{i,j,k}, \beta_{i,j,k}, \gamma_{i,j,k})$.

Premièrement, on utilise un schéma de volumes finis upwind 3D pour résoudre (3.39a). En intégrant l'équation (3.39a) dans la cellule $S_{i,j,k}$ et en appliquant la formule de Green, on a

$$\partial_t \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \int_{\partial S_{i,j,k}} w \vec{n} \cdot v d\sigma = 0, \quad (3.50)$$

où $d\sigma$ est l'élément de surface infinitésimal, \vec{n} est la normale extérieure à la surface $\partial S_{i,j,k}$. En développant (3.50) et en utilisant un schéma d'Euler explicite pour la discrétisation en temps, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} &= \bar{w}_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{V_{i,j,k}} (F_{s_6}^n + F_{s_5}^n + G_{s_4}^n + G_{s_3}^n + H_{s_2}^n + H_{s_1}^n), \\ &(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1, n \in N, \end{aligned} \quad (3.51)$$

où $H_{s_1}, H_{s_2}, G_{s_3}, G_{s_4}, F_{s_5}, F_{s_6}$ sont les flux numériques sur les surfaces $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$. Pour définir ces flux numériques, on a besoin des vitesses moyennes $\bar{v}_{s_1}, \bar{v}_{s_2}, \bar{v}_{s_3}, \bar{v}_{s_4}$,

$\bar{v}_{s_5}, \bar{v}_{s_6}$ dans la direction normale extérieure des surfaces $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$. Les normales extérieures des surfaces $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ sont respectivement

$$\begin{aligned}\vec{n}_{s_1} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma_{i,j+1/2,k-1/2} - \gamma_{i,j-1/2,k-1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k-1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k-1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k-1/2} - \beta_{i,j+1/2,k-1/2})^2}} \\ \frac{\beta_{i,j-1/2,k-1/2} - \beta_{i,j+1/2,k-1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k-1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k-1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k-1/2} - \beta_{i,j+1/2,k-1/2})^2}} \end{pmatrix}, \\ \vec{n}_{s_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma_{i,j-1/2,k+1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k+1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k+1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k+1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k+1/2} - \beta_{i,j+1/2,k+1/2})^2}} \\ \frac{\beta_{i,j+1/2,k+1/2} - \beta_{i,j-1/2,k+1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k+1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k+1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k+1/2} - \beta_{i,j+1/2,k+1/2})^2}} \end{pmatrix}, \\ \vec{n}_{s_3} &= (0, -1, 0)^T, \\ \vec{n}_{s_4} &= (0, 1, 0)^T, \\ \vec{n}_{s_5} &= (-1, 0, 0)^T, \\ \vec{n}_{s_6} &= (1, 0, 0)^T.\end{aligned}$$

Puis, on approche les vitesses moyennes par

$$\begin{aligned}\bar{v}_{s_1} &\approx \vec{v}_{i,j,k-1/2} \cdot \vec{n}_{s_1} \\ &= \frac{\gamma_{i,j+1/2,k-1/2} - \gamma_{i,j-1/2,k-1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k-1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k-1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k-1/2} - \beta_{i,j+1/2,k-1/2})^2}} v_{\beta,i,j,k-1/2} \\ &\quad + \frac{\beta_{i,j-1/2,k-1/2} - \beta_{i,j+1/2,k-1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k-1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k-1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k-1/2} - \beta_{i,j+1/2,k-1/2})^2}} v_{\gamma,i,j,k-1/2}, \\ \bar{v}_{s_2} &\approx \vec{v}_{i,j,k+1/2} \cdot \vec{n}_{s_2} \\ &= \frac{\gamma_{i,j-1/2,k+1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k+1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k+1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k+1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k+1/2} - \beta_{i,j+1/2,k+1/2})^2}} v_{\beta,i,j,k+1/2} \\ &\quad + \frac{\beta_{i,j+1/2,k+1/2} - \beta_{i,j-1/2,k+1/2}}{\sqrt{(\gamma_{i,j-1/2,k+1/2} - \gamma_{i,j+1/2,k+1/2})^2 + (\beta_{i,j-1/2,k+1/2} - \beta_{i,j+1/2,k+1/2})^2}} v_{\gamma,i,j,k+1/2}, \\ \bar{v}_{s_3} &\approx \vec{v}_{i,j-1/2,k} \cdot \vec{n}_{s_3} = -v_{\beta,i,j-1/2,k}, \\ \bar{v}_{s_4} &\approx \vec{v}_{i,j+1/2,k} \cdot \vec{n}_{s_4} = v_{\beta,i,j+1/2,k}, \\ \bar{v}_{s_5} &\approx \vec{v}_{i-1/2,j,k} \cdot \vec{n}_{s_5} = -v_{\alpha,i-1/2,j,k}, \\ \bar{v}_{s_6} &\approx \vec{v}_{i+1/2,j,k} \cdot \vec{n}_{s_6} = v_{\alpha,i+1/2,j,k},\end{aligned}$$

où $\vec{v} = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)^T$ est la vitesse définie dans (3.39b). D'après les formules précédentes, il faut déterminer des termes de vitesse suivantes :

$$v_{\alpha,i-1/2,j,k} = \frac{\bar{\phi}_{i-1/2,j+1/2} - \bar{\phi}_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta\beta_j}, \quad (i, j, k) \in I_2 \times J_1 \times K_1, \quad (3.52a)$$

$$v_{\beta,i,j-1/2,k} = -\frac{\bar{\phi}_{i+1/2,j-1/2} - \bar{\phi}_{i-1/2,j-1/2}}{\Delta\alpha_i}, \quad (i, j, k) \in I_1 \times J_2 \times K_1, \quad (3.52b)$$

$$v_{\beta,i,j,k-1/2} = \frac{(\bar{\phi}_{i+1/2,j+1/2} + \bar{\phi}_{i+1/2,j-1/2}) - (\bar{\phi}_{i-1/2,j+1/2} + \bar{\phi}_{i-1/2,j-1/2})}{2\Delta\alpha_i}, \quad (3.52c)$$

$$(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_2,$$

$$v_{\gamma,i,j,k-1/2} = |B|_{i,j,k-1/2} u_{n\gamma,i,j,k-1/2}, \quad (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_2. \quad (3.52d)$$

En utilisant les approximations de vitesse précédentes, on obtient les flux numériques suivants :

$$\begin{aligned} H_{s_1} &= \sigma_{s_1} (\max(\bar{v}_{s_1}, 0) \bar{w}_{i,j,k-1}^n + \min(\bar{v}_{s_1}, 0) \bar{w}_{i,j,k}^n), \\ H_{s_2} &= \sigma_{s_2} (\max(\bar{v}_{s_2}, 0) \bar{w}_{i,j,k}^n + \min(\bar{v}_{s_2}, 0) \bar{w}_{i,j,k+1}^n), \\ G_{s_3} &= \sigma_{s_3} (\max(\bar{v}_{s_3}, 0) \bar{w}_{i,j-1,k}^n + \min(\bar{v}_{s_3}, 0) \bar{w}_{i,j,k}^n), \\ G_{s_4} &= \sigma_{s_4} (\max(\bar{v}_{s_4}, 0) \bar{w}_{i,j,k}^n + \min(\bar{v}_{s_4}, 0) \bar{w}_{i,j+1,k}^n), \\ F_{s_5} &= \sigma_{s_5} (\max(\bar{v}_{s_5}, 0) \bar{w}_{i-1,j,k}^n + \min(\bar{v}_{s_5}, 0) \bar{w}_{i,j,k}^n), \\ F_{s_6} &= \sigma_{s_6} (\max(\bar{v}_{s_6}, 0) \bar{w}_{i,j,k}^n + \min(\bar{v}_{s_6}, 0) \bar{w}_{i+1,j,k}^n), \\ &\quad (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1. \end{aligned}$$

Notons que dans les formules précédentes, il y a certains $w_{i,j,k}$ qui ne sont pas définis, par exemple $\bar{w}_{0,j,k}^n$. Il nous demande de définir des conditions aux limites pour la densité. Pour simplifier, on impose les conditions aux limites suivantes

$$\bar{w}_{0,j,k}^n = \bar{w}_{1,j,k}^0, \quad (j, k) \in J_1 \times K_1, \quad (3.53a)$$

$$\bar{w}_{N_\alpha+1,j,k}^n = \bar{w}_{N_\alpha,j,k}^0, \quad (j, k) \in J_1 \times K_1, \quad (3.53b)$$

$$\bar{w}_{i,0,k}^n = \bar{w}_{i,1,k}^0, \quad (i, k) \in I_1 \times K_1, \quad (3.53c)$$

$$\bar{w}_{i,N_\beta+1,k}^n = \bar{w}_{i,N_\beta,j,k}^0, \quad (i, k) \in I_1 \times K_1, \quad (3.53d)$$

$$\bar{w}_{i,j,0}^n = \bar{w}_{i,j,1}^0, \quad (i, j) \in I_1 \times J_1, \quad (3.53e)$$

$$\bar{w}_{i,j,N_\gamma+1}^n = \bar{w}_{i,j,N_\gamma}^0, \quad (i, j) \in I_1 \times J_1. \quad (3.53f)$$

Enfin, le pas de temps est limité par la condition de CFL suivante

$$\Delta t_n \leq \min \left(\frac{\min_i \Delta\alpha_i}{\max_{i,j,k} (v_{\alpha,i-1/2,j,k})}, \frac{\min_j \Delta\beta_j}{\max_{i,j,k} (v_{\beta,i,j-1/2,k})}, \frac{\min_{i,j,k} (\gamma_{i,j,k+1/2} - \gamma_{i,j,k-1/2})}{\max_{i,j,k} (v_{\gamma,i,j,k-1/2})} \right). \quad (3.54)$$

On résume maintenant ce schéma de volumes finis upwind 3D dans l'algorithme suivant :

Algorithme 3.3 calculer la densité en utilisant le schéma de volumes finis upwind 3D

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

tantque $t_n \leq t_{\text{total}}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

calculer le potentiel par l'algorithme 3.1 ou 3.2 avec $\rho = \rho^n$.

Calcul de la densité ρ

$$\Delta t_n \leftarrow (3.54)$$

$$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$$

$$w^{n+1} \leftarrow (3.51)$$

$$\rho^{n+1} = w^{n+1} |B|^2$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$$

fin tantque

Le schéma 3.3 est un schéma TVD. Cependant, il est d'ordre 1 en espace et en temps. Pour obtenir des schémas d'ordre élevé, on utilise la méthode de splitting de Strang pour décomposer l'équation (3.39a) en trois équations en 1D, et puis dans chaque équation, on peut utiliser des schémas d'ordre élevé.

Notons d'abord dans la direction α que le maillage est uniforme, ainsi on peut calculer la densité dans cette direction séparément. On introduit la méthode de splitting de Strang suivante :

$$\partial_t w + \partial_\alpha(v_\alpha w) = 0, t \in [0, \frac{1}{2}\Delta t], \quad (3.55a)$$

$$\partial_t w + \partial_\beta(v_\beta w) + \partial_\gamma(v_\gamma w) = 0, t \in [0, \Delta t], \quad (3.55b)$$

$$\partial_t w + \partial_\alpha(v_\alpha w) = 0, t \in [0, \frac{1}{2}\Delta t]. \quad (3.55c)$$

Puis on traite l'équation (3.55b) par décomposition du domaine. C'est à dire que

- dans les zones \mathbb{T} et \mathbb{B} , on utilise un schéma de volumes finis upwind en 2D pour résoudre (3.55b) ;
- dans la zone \mathbb{C} , on applique la méthode de splitting de Strang suivante

$$\partial_t w + \partial_\beta(v_\beta w) = 0 t \in [0, \frac{1}{2}\Delta t], \quad (3.56a)$$

$$\partial_t w + \partial_\gamma(v_\gamma w) = 0, t \in [0, \Delta t], \quad (3.56b)$$

$$\partial_t w + \partial_\beta(v_\beta w) = 0 t \in [0, \frac{1}{2}\Delta t]. \quad (3.56c)$$

Maintenant, on développe des schémas de loi de conservation en 1D d'ordre élevé. On considère dans la direction α par exemple

$$\partial_t w + \partial_\alpha(v_\alpha w) = 0. \quad (3.57)$$

En intégrant (3.57) dans $S_{i,j,k}$ et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{\Delta \alpha_i} (v_{\alpha,i+1/2,j,k} \bar{w}_{\alpha,i+1/2,j,k} - v_{\alpha,i-1/2,j,k} \bar{w}_{\alpha,i-1/2,j,k}) &= 0, \\ (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Il reste à approcher $\bar{w}_{\alpha,i-1/2,j,k}$. On peut appliquer un schéma upwind suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{\Delta \alpha_i} ((v_{\alpha,i+1/2,j,k}^+ \bar{w}_{\alpha,i,j,k} + v_{\alpha,i+1,j,k}^- \bar{w}_{\alpha,i+1,j,k}) \\ - (v_{\alpha,i-1/2,j,k}^+ \bar{w}_{\alpha,i-1,j,k} + v_{\alpha,i-1/2,j,k}^- \bar{w}_{\alpha,i,j,k})) &= 0, \\ (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1, \end{aligned} \quad (3.59)$$

où $v^+ = \max(v, 0)$ et $v^- = \min(v, 0)$. Le schéma (3.59) est d'ordre 1 en espace, ainsi il est très diffusif. Ensuite, on introduit le schéma de haute résolution de Harten [25], qui est basé sur le schéma (3.59), d'où on modifie la flux numérique. En effet, on peut réécrire (3.59) sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{\Delta \alpha_i} (F_{i+1/2,j,k} - F_{i-1/2,j,k}) &= 0, \\ (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1, \end{aligned} \quad (3.60)$$

avec le flux numérique $F_{i-1/2,j,k} := v_{\alpha,i-1/2,j,k}^+ \bar{w}_{\alpha,i-1,j,k} + v_{\alpha,i-1/2,j,k}^- \bar{w}_{\alpha,i,j,k}$. On ajoute un terme de correction dans $F_{i-1/2,j,k}$ comme suit

$$\tilde{F}_{i-1/2,j,k} = v_{\alpha,i-1/2,j,k}^+ \bar{w}_{\alpha,i-1,j,k} + v_{\alpha,i-1/2,j,k}^- \bar{w}_{\alpha,i,j,k} + \frac{1}{2} |v_{\alpha,i-1/2,j,k}| \left(1 - \frac{\Delta t |v_{\alpha,i-1/2,j,k}|}{\Delta \alpha_{i-1/2}} \right) \delta_{i-1/2,j,k}, \quad (3.61a)$$

où $\delta_{i-1/2,j,k}$ est une version limitée de $\bar{w}_{\alpha,i,j,k} - \bar{w}_{\alpha,i-1,j,k}$. Dans le cas $\delta_{i-1/2,j,k} = \bar{w}_{\alpha,i,j,k} - \bar{w}_{\alpha,i-1,j,k}$, le flux numérique est le flux de Lax-Wendroff. Cependant, ce flux ne satisfait pas la propriété de TVD. Pour déterminer $\delta_{i-1/2,j,k}$, on utilisera le limiteur Superbee introduit par Roe *et al.* [39]. On réécrit le limiteur de flux $\delta_{i-1/2,j,k}$ par

$$\delta_{i-1/2,j,k} = \phi(\theta_{i-1/2,j,k}) \Delta \bar{w}_{i-1/2,j,k}, \quad (3.61b)$$

où

$$\theta_{i-1/2,j,k} = \frac{\Delta \bar{w}_{I-1/2,j,k}}{\Delta \bar{w}_{i-1/2,j,k}}. \quad (3.61c)$$

L'indice I est défini par

$$I = \begin{cases} i - 1, & \text{si } v_{i-1/2,j,k} > 0, \\ i + 1, & \text{si } v_{i-1/2,j,k} \leq 0. \end{cases} \quad (3.61d)$$

Alors le limiteur de Superbee est donné par

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)). \quad (3.61e)$$

On peut interpréter cette méthode en passant par une méthode à limiteur de pente. En effet, le flux numérique (3.61a) est équivalent à

$$\tilde{F}_{i-1/2,j,k} = \begin{cases} v_{i-1/2,j,k} \bar{w}_{i-1,j,k} + \frac{1}{2} v_{i-1/2,j,k} (\Delta \alpha_{i-1/2} - v_{i-1/2,j,k} \Delta t) \sigma_{i-1}, & \text{si } v_{i-1/2,j,k} > 0, \\ v_{i-1/2,j,k} \bar{w}_{i,j,k} - \frac{1}{2} v_{i-1/2,j,k} (\Delta \alpha_{i-1/2} + v_{i-1/2,j,k} \Delta t) \sigma_i, & \text{si } v_{i-1/2,j,k} \leq 0. \end{cases} \quad (3.62a)$$

où σ_i est la pente dans la direction α . Ainsi la pente associée au limiteur Superbee s'écrit comme

$$\sigma_i = \max\text{mod}(\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}), \quad (3.62b)$$

où

$$\sigma_i^{(1)} = \min\text{mod} \left(\left(\frac{\bar{w}_{i+1,j,k} - \bar{w}_{i,j,k}}{\Delta \alpha_{i-1/2}} \right), 2 \left(\frac{\bar{w}_{i,j,k} - \bar{w}_{i-1,j,k}}{\Delta \alpha_{i-1/2}} \right) \right), \quad (3.62c)$$

$$\sigma_i^{(2)} = \min\text{mod} \left(2 \left(\frac{\bar{w}_{i+1,j,k} - \bar{w}_{i,j,k}}{\Delta \alpha_{i-1/2}} \right), \left(\frac{\bar{w}_{i,j,k} - \bar{w}_{i-1,j,k}}{\Delta \alpha_{i-1/2}} \right) \right). \quad (3.62d)$$

La fonction de minmod avec deux arguments est définie par

$$\min\text{mod}(a, b) = \begin{cases} a, & \text{si } |a| < |b| \text{ et } ab > 0, \\ b, & \text{si } |b| < |a| \text{ et } ab > 0, \\ 0, & \text{si } ab \leq 0. \end{cases} \quad (3.62e)$$

Géométriquement, c'est une moyenne optimale pour choisir une pente telle que $\forall \alpha \in [\alpha_{i-1/2}, \alpha_{i+1/2}]$

$$\bar{w}_{i,j,k}^{\min} \leq w(\alpha, \beta_j, \gamma_{i,j,k}) \leq \bar{w}_{i,j,k}^{\max} \quad (3.63)$$

où $\bar{w}_{i,j,k}^{\min} = \min(\bar{w}_{i-1,j,k}, \bar{w}_{i,j,k}, \bar{w}_{i+1,j,k})$, $\bar{w}_{i,j,k}^{\max} = \max(\bar{w}_{i-1,j,k}, \bar{w}_{i,j,k}, \bar{w}_{i+1,j,k})$. Ainsi le limiteur de flux (3.61a) est TVD. On résume le schéma semi-discret en espace dans l'algorithme suivant

Algorithme 3.4 schéma semi-discret en espace avec le limiteur Superbee

(3.60) ← intégrer (3.57) dans $S_{i,j,k}$, $(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1$.

$F_{i-1/2,j,k} \leftarrow$ (3.61) ou (3.62).

Ensuite pour résoudre l'équation (3.55b), nous utilisons un schéma de volumes finis upwind en 2D dans les zones \mathbb{T} et \mathbb{B} , et appliquons l'algorithme 3.4 pour l'équation (3.56) dans la zone \mathbb{C} . Pour cela, nous développons ainsi le schéma de volumes finis upwind en 2D. Supposons que $S_{i,j,k}$ est dans \mathbb{T} ou \mathbb{B} . En intégrant l'équation (3.55b) dans $S_{i,j,k}$ et en appliquant la formule de Green, on a

$$\partial_t \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{V_{i,j,k}} \int_{\partial S_{i,j,k}} w \vec{n} \cdot v d\sigma = 0, \quad (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1. \quad (3.64)$$

En utilisant les notations du schéma de volumes finis upwind en 3D précédentes, on développe (3.64) comme

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{V_{i,j,k}} (H_{s_1} + H_{s_2} + G_{s_3} + G_{s_4}) &= 0, \\ (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times [1, N_{\gamma B}] \cup [N_{\gamma B} + N_{\gamma C} + 1, N_{\gamma}]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Enfin, en utilisant le schéma d'Euler explicite pour discrétiser en temps, on a l'algorithme suivant

Algorithme 3.5 calculer la densité en utilisant le schéma Superbee

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

tantque $t_n \leq t_{\text{total}}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

calculer le potentiel par l'algorithme 3.1 ou 3.2 avec $\rho = \rho^n$.

Calcul de la densité ρ

$\Delta t_n \leftarrow (3.54)$

$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$

calculer la densité dans la direction α :

discrétiser (3.55a) et (3.55c) par l'algorithme 3.4

calculer la densité dans les directions β et γ :

si dans les zones \mathbb{T} et \mathbb{B} **alors**

discrétiser (3.55b) par (3.65)

finsi

si dans la zone \mathbb{C} **alors**

discrétiser (3.56) par l'algorithme 3.4

finsi

$\rho^{n+1} = w^{n+1}|B|^2$

$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$

fin tantque

Le schéma semi-discret avec le limiteur Superbee est d'ordre 2 en espace. On donne maintenant une autre reconstruction de flux numérique d'ordre élevé. En effet, dans le schéma de limiteur Superbee, on a construit dans chaque maille un polynôme de type \mathbb{P}_1 en utilisant \bar{w} . Maintenant, on construit un polynôme de type \mathbb{P}_2 , tel que le schéma satisfait la propriété de TVD.

On considère trois cellules dans la direction α : $S_{i-1,j,k}$, $S_{i,j,k}$ et $S_{i+1,j,k}$. On construit un polynôme $p(\alpha) = a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0$ tel qu'il satisfait les formules suivantes

$$\frac{1}{\alpha_{\alpha_{i-1/2}} - \alpha_{\alpha_{i-3/2}}} \int_{\alpha_{i-3/2}}^{\alpha_{i-1/2}} p(\alpha) d\alpha = \bar{w}_{i-1,j,k}, \quad (3.66a)$$

$$\frac{1}{\alpha_{\alpha_{i+1/2}} - \alpha_{\alpha_{i-1/2}}} \int_{\alpha_{i-1/2}}^{\alpha_{i+1/2}} p(\alpha) d\alpha = \bar{w}_{i,j,k}, \quad (3.66b)$$

$$\frac{1}{\alpha_{\alpha_{i+3/2}} - \alpha_{\alpha_{i+1/2}}} \int_{\alpha_{i+1/2}}^{\alpha_{i+3/2}} p(\alpha) d\alpha = \bar{w}_{i+1,j,k}. \quad (3.66c)$$

(3.66) est un système linéaire de taille 3×3 . En résolvant (3.66), on obtient la formule explicite de $p(\alpha)$. En injectant $\alpha_{i-1/2}$ et $\alpha_{i+1/2}$ dans $p(\alpha)$, on a $\bar{w}_{i-1/2}^r = p(\alpha_{i-1/2})$ et

$\bar{w}_{i+1/2}^l = p(\alpha_{i+1/2})$. Enfin, en utilisant le flux upwind, on peut écrire le flux numérique suivant

$$F_{i-1/2,j,k} = v_{i-1/2,j,k}^+ \bar{w}_{i-1/2,j,k}^l + v_{i-1/2,j,k}^- \bar{w}_{i-1/2,j,k}^r, \quad (i, j, k) \in I_2 \times J_1 \times K_1. \quad (3.67)$$

Dans le cas d'un maillage uniforme, on peut déterminer $\bar{w}_{i-1/2,j,k}^+$ et $\bar{w}_{i+1/2,j,k}^-$ explicitement par

$$\bar{w}_{i-1/2,j,k}^r = \frac{1}{3} \bar{w}_{i-1,j,k} + \frac{5}{6} \bar{w}_{i,j,k} - \frac{1}{6} \bar{w}_{i+1,j,k}, \quad (3.68)$$

$$\bar{w}_{i+1/2,j,k}^l = -\frac{1}{6} \bar{w}_{i-1,j,k} + \frac{5}{6} \bar{w}_{i,j,k} + \frac{1}{3} \bar{w}_{i+1,j,k}. \quad (3.69)$$

Ensuite, pour assurer que le schéma soit TVD, on fait une étape de limiteur. Pour cela les reconstructions $\bar{w}_{i-1/2}$ et $\bar{w}_{i+1/2}$ doivent satisfaire la contrainte de monotonie

$$\bar{w}_{i,j,k}^{\min} \leq \bar{w}_{i-1/2,j,k}^r, \bar{w}_{i+1/2,j,k}^l \leq \bar{w}_{i,j,k}^{\max}, \quad (3.70a)$$

où

$$\bar{w}_{i,j,k}^{\min} = \min(\bar{w}_{i-1,j,k}, \bar{w}_{i,j,k}, \bar{w}_{i+1,j,k}), \quad \bar{w}_{i,j,k}^{\max} = \max(\bar{w}_{i-1,j,k}, \bar{w}_{i,j,k}, \bar{w}_{i+1,j,k}). \quad (3.70b)$$

En réécrivant les reconstructions par

$$\bar{w}_{i+1/2,j,k}^l = \bar{w}_{i,j,k} + \Delta w_{i,j,k}^l, \quad \bar{w}_{i-1/2,j,k}^r = \bar{w}_{i,j,k} + \Delta w_{i,j,k}^r, \quad (3.71a)$$

alors on peut trouver des expressions équivalentes de la contrainte (3.70) en limitant $\Delta w_{i,j,k}^l$ et $\Delta w_{i,j,k}^r$ par

$$\Delta \tilde{w}_{i,j,k}^l = \min \text{mod}(\Delta w_{i,j,k}^l, \bar{w}_{i+1,j,k} - \bar{w}_{i,j,k}, \bar{w}_{i,j,k} - \bar{w}_{i-1,j,k}), \quad (3.71b)$$

$$\Delta \tilde{w}_{i,j,k}^r = \min \text{mod}(\Delta w_{i,j,k}^r, \bar{w}_{i+1,j,k} - \bar{w}_{i,j,k}, \bar{w}_{i,j,k} - \bar{w}_{i-1,j,k}), \quad (3.71c)$$

où la fonction minmod est

$$\min \text{mod}(x, y, z) = \begin{cases} s \min(|x|, |y|, |z|), & \text{si } s = \text{signe}(x) = \text{signe}(y) = \text{signe}(z), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.71d)$$

En remplaçant $\Delta w_{i,j,k}^l$, $\Delta w_{i,j,k}^r$ par $\Delta \tilde{w}_{i,j,k}^l$, $\Delta \tilde{w}_{i,j,k}^r$, on a

$$\bar{w}_{i+1/2,j,k}^l = \bar{w}_{i,j,k} + \Delta \tilde{w}_{i,j,k}^l, \quad \bar{w}_{i-1/2,j,k}^r = \bar{w}_{i,j,k} + \Delta \tilde{w}_{i,j,k}^r. \quad (3.72)$$

Cela complète ce schéma semi-discret d'ordre élevé :

Algorithme 3.6 schéma semi-discret en espace avec la reconstruction de polynôme \mathbb{P}_2

calculer la densité dans la direction α :

discrétiser (3.55a) et (3.55c) par (3.67) et (3.72)

calculer la densité dans les directions β et γ :

si dans les zones \mathbb{T} et \mathbb{B} **alors**

discrétiser (3.55b) par (3.65)

fin

si dans la zone \mathbb{C} **alors**

discrétiser (3.56) par (3.67) et (3.72)

fin

Pour l'intégration du temps de (3.39a), on emploie la discrétisation TVD de Runge-Kutta en temps introduite dans [47]. Nous notons un pas de temps Δt_n , et définissons $t_n = \sum_n \Delta t_n$, où $n \in \mathbb{N}$, et notons $\bar{w}_{i,j,k} = \bar{w}_{i,j,k}^n$. Le schéma semi-discret en espace peut être écrit comme

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = L(\bar{w}), \quad (3.73a)$$

où

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} \bar{w}_{1,1,1} \\ \vdots \\ \bar{w}_{i,j,k} \\ \vdots \\ \bar{w}_{N_\alpha, N_\beta, N_\gamma} \end{pmatrix}, \quad L(\bar{w}) = \begin{pmatrix} L_{1,1,1}(\bar{w}) \\ \vdots \\ L_{i,j,k}(\bar{w}) \\ \vdots \\ L_{N_\alpha, N_\beta, N_\gamma}(\bar{w}) \end{pmatrix}, \quad (3.73b)$$

$L_{i,j,k}$ est le flux total sur le bord du volume $S_{i,j,k}$. Définissons $\bar{w}^{(0)} = \bar{w}^n$ et $\bar{w}^{n+1} = \bar{w}^{(k)}$. Le schéma d'ordre trois est

$$\bar{w}^{(1)} = \bar{w}^{(0)} + \Delta t_n L(\bar{w}^{(0)}), \quad (3.74a)$$

$$\bar{w}^{(2)} = \frac{3}{4}\bar{w}^{(0)} + \frac{1}{4}\bar{w}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t_n L(\bar{w}^{(1)}), \quad (3.74b)$$

$$\bar{w}^{(3)} = \frac{1}{3}\bar{w}^{(0)} + \frac{2}{3}\bar{w}^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t_n L(\bar{w}^{(2)}). \quad (3.74c)$$

Maintenant, on résume le schéma d'ordre élevé en espace et en temps :

Algorithme 3.7 calculer la densité en utilisant le schéma d'ordre élevé

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

tantque $t_n \leq t_{\text{total}}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

calculer le potentiel par l'algorithme 3.1 ou 3.2 avec $\rho = \rho^n$.

Calcul de la densité ρ

$$\Delta t_n \leftarrow (3.54)$$

$$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$$

discrétiser (3.39a) en espace :

$L(w) \leftarrow$ l'algorithme 3.6

discrétiser (3.39a) en temps :

$$w^{n+1} \leftarrow (3.74)$$

$$\rho^{n+1} = w^{n+1} |B|^2$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$$

fin tantque

3.5 Approximation numérique du modèle Dynamo ionosphérique

Similairement à la section précédente, nous considérons le modèle Dynamo sans gradient de la pression suivant :

une équation de conservation de la masse en dimension trois

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^c \cdot (vw) = 0, \quad (3.75a)$$

où $v = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$ avec

$$v_\alpha = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(\mu_i^P \left(-\frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \kappa \nu_i u_{n\alpha} \right) - \mu_i^H \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \nu_i u_{n\beta} + \kappa \zeta g_\beta \right) \right), \quad (3.75ba)$$

$$v_\beta = r \sin \varphi |B| \left(\mu_i^H \left(-\frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \kappa \nu_i u_{n\alpha} \right) + \mu_i^P \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \nu_i u_{n\beta} + \kappa \zeta g_\beta \right) \right), \quad (3.75bb)$$

$$v_\gamma = |B| \mu_i^H \left(-|B| \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \kappa \nu_i u_{n\gamma} \right), \quad (3.75bc)$$

couplée à une équation elliptique en dimension trois

$$-\nabla^c \cdot (\mathcal{A} \nabla^c \phi) = -\nabla^c \cdot J_n, \quad (3.75c)$$

où \mathcal{A} est définie dans (3.27), et

$$j_{n\alpha} = \frac{\rho}{r \sin \varphi |B|^3} (\kappa u_{n\alpha} (\nu_i^2 \mu_i^H - \nu_e^2 \mu_e^H) + \kappa u_{n\beta} (\nu_i^2 \mu_i^P + \nu_e^2 \mu_e^P) + \kappa \zeta \nu_i \mu_i^P g_\beta - (\nu_i + \nu_e) u_{n\beta} - \zeta g_\beta), \quad (3.75d)$$

$$j_{n\beta} = \frac{r \sin \varphi \rho}{|B|^2} (-\kappa u_{n\alpha} (\nu_i^2 \mu_i^P + \nu_e^2 \mu_e^P) - \kappa u_{n\beta} (\nu_e^2 \mu_e^H - \nu_i^2 \mu_i^H) + \kappa \zeta \nu_i \mu_i^H g_\beta + (\nu_i + \nu_e) u_{n\alpha}), \quad (3.75e)$$

$$j_{n\gamma} = 0. \quad (3.75f)$$

3.5.1 Calcul du potentiel électrique

L'équation elliptique (3.33d) est un problème fortement anisotrope. En effet, les coefficients A et B de la matrice de diffusion (3.27) ont la même magnitude, mais il y a une grande différence entre C et A ou B dans la haute ionosphère. Il y a également une très grande différence entre D et A ou B (voir la figure 3.11). En résolvant (3.33d) par

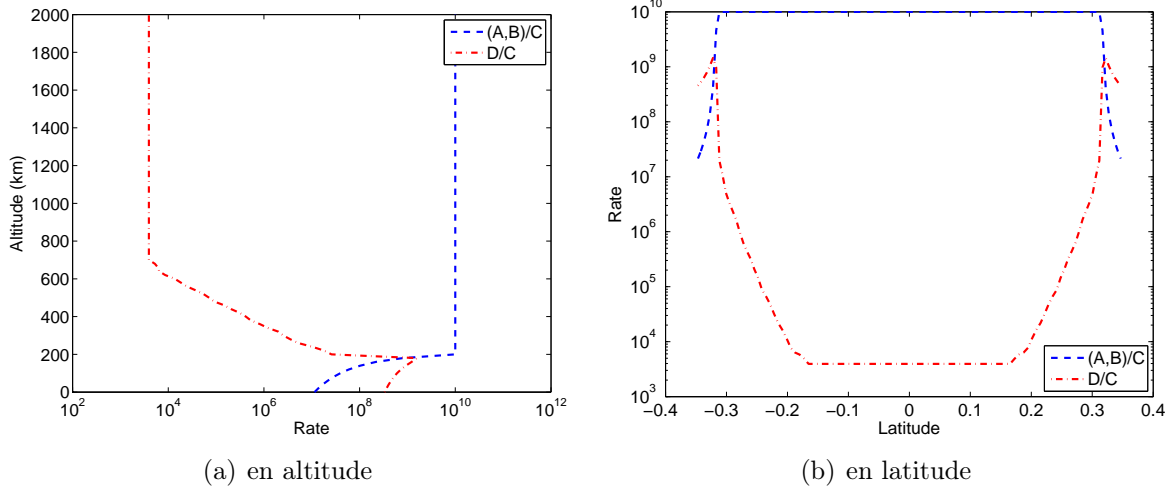


FIGURE 3.11 – Les rapports entre des coefficients de matrice de diffusion en altitude et en latitude.

des méthodes standard, on obtient un système linéaire très mal-conditionné. Pour éviter ceci, on applique le schéma préservant l'asymptotique du chapitre 2, tel que son système linéaire est bien-conditionné indépendant de l'anisotropie.

On associe l'équation (3.33d) deux type de conditions aux limites suivants :

CL1 : conditions de Dirichlet homogènes nulles sur S_3, S_4, S_5 et S_6 , et $\mathcal{A}\nabla^c\phi \cdot \vec{n} = 0$ sur S_1 et S_2 ;

CL2 : conditions de Dirichlet homogènes nulles sur S_3 et S_4 , conditions de Neumann homogènes nulles sur S_5 et S_6 , et $\mathcal{A}\nabla^c\phi \cdot \vec{n} = 0$ sur S_1, S_2 .

Considérons premièrement les conditions aux limites de type CL1. On définit alors les deux espaces de Hilbert

$$\mathbb{V}_1 = \{\psi(\alpha, \beta, \gamma) \in H^1(\Omega) / \psi = 0 \text{ sur } S_3, S_4, S_5 \text{ et } S_6\}, \quad (3.81)$$

$$\mathbb{W}_1 = \{\bar{\psi}(\alpha, \beta) \in H_0^1(\Omega_\perp)\}, \quad (3.82)$$

et les produits scalaires correspondantes

$$(\phi, \psi)_{\mathbb{V}_1} = (\partial_\alpha\phi, \partial_\alpha\psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_\beta\phi, \partial_\beta\psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_\gamma\phi, \partial_\gamma\psi)_{L^2(\Omega)}, \quad (3.83)$$

$$(\bar{\phi}, \bar{\psi})_{\mathbb{W}_1} = (\partial_\alpha\bar{\phi}, \partial_\alpha\bar{\psi})_{L^2(\Omega_\perp)} + (\partial_\beta\bar{\phi}, \partial_\beta\bar{\psi})_{L^2(\Omega_\perp)}. \quad (3.84)$$

Avec ces définitions, on peut écrire la formulation variationnelle de (3.33d) : Trouver $\phi \in \mathbb{V}_1$, solution de

$$\int_{\Omega} ((\nabla^c\phi)^T \mathcal{A}^T \nabla^c\psi) dV = \int_{\Omega} J_n \cdot \nabla^c\psi dV - \int_{S_1} J_n \cdot \vec{n}_1 \psi d\sigma - \int_{S_2} J_n \cdot \vec{n}_2 \psi d\sigma, \quad \forall \psi \in \mathbb{V}_1, \quad (3.85)$$

où \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont les normales extérieures de surfaces S_1 et S_2 . On peut discrétiser (3.85) par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 (détaillée dans la section 3.8). Dans la maille

$S_{i,j,k}$, on approche ρ par

$$\rho(\alpha, \beta, \gamma) \approx \rho_{i,j,k}, \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma) \in S_{i,j,k}. \quad (3.86)$$

Nous utilisons maintenant le schéma préservant l'asymptotique pour résoudre (3.33d). On note la valeur moyenne de ϕ le long de la direction γ par

$$\bar{\phi} := \frac{1}{\gamma_{\max,\alpha,\beta} - \gamma_{\min,\alpha,\beta}} \int_{\gamma_{\min,\alpha,\beta}}^{\gamma_{\max,\alpha,\beta}} \phi d\gamma, \quad (3.87)$$

où $\gamma_{\min,\alpha,\beta}$ et $\gamma_{\max,\alpha,\beta}$ dénotent la coordonnée γ dans les surfaces S_1 et S_2 en donnant (α, β) . La fluctuation de ϕ est définie par $\phi' := \phi - \bar{\phi}$.

En intégrant maintenant (3.33d) le long de direction γ , on obtient l'équation de moyenne

$$\begin{cases} -\nabla_{\perp}^c(\bar{\mathcal{A}}_{\perp} \nabla_{\perp}^c \bar{\phi}) - \nabla_{\perp}^c(\overline{\mathcal{A}_{\perp} \nabla_{\perp}^c \phi'}) = -\partial_{\alpha} \bar{J}_{n\alpha} - \partial_{\beta} \bar{J}_{n\beta}, & \text{dans } \Omega_{\alpha} \times \Omega_{\beta}, \\ \bar{\phi} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_{\alpha} \times \Omega_{\beta} \cup \Omega_{\alpha} \times \partial\Omega_{\beta}. \end{cases} \quad (3.88)$$

En introduisant la décomposition $\phi = \phi' + \bar{\phi}$, on a l'équation de fluctuation :

$$\begin{cases} -\nabla^c(\mathcal{A} \nabla^c \phi') - \nabla_{\perp}^c(\mathcal{A}_{\perp} \nabla_{\perp}^c \bar{\phi}) = -\nabla^c \cdot J_n, & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{A} \nabla \phi' \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } S_1, S_2, \\ \phi' = 0, & \text{sur } S_3, S_4, S_5, S_6, \\ \bar{\phi}' = 0, & \text{dans } \Omega_{\perp}. \end{cases} \quad (3.89)$$

Définissons ensuite les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned} a_0(\phi', \psi') &:= \int_{\Omega} \mathcal{C} \partial_{\gamma} \phi' \partial_{\gamma} \psi' dV, \\ a_1(\phi', \psi') &:= \int_{\Omega} ((\nabla_{\perp}^c \phi')^T \mathcal{A}_{\perp}^T \nabla_{\perp}^c \psi') dV, \\ a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) &:= \int_{\Omega_{\perp}} ((\nabla_{\perp}^c \bar{\phi})^T \bar{\mathcal{A}}_{\perp}^T \nabla_{\perp}^c \bar{\psi}) d\alpha d\beta, \\ a(\phi', \psi') &:= a_0(\phi', \psi') + a_1(\phi', \psi'), \\ b_1(\bar{P}, \psi') &:= \int_{\Omega_{\perp}} \bar{P} \int_{\Omega_{\gamma}} \mathcal{C} \psi' dV, \\ b_2(\phi', \bar{Q}) &:= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\Omega_{\perp}} \bar{Q} \int_{\Omega_{\gamma}} \phi' dV, \\ c(\bar{\phi}, \psi') &:= \int_{\Omega} ((\nabla_{\perp}^c \bar{\phi})^T \mathcal{A}_{\perp}^T \nabla_{\perp}^c \psi') dV. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Enfin, comme dans le chapitre 2 en utilisant le multiplicateur de Lagrange \bar{P} , on obtient la reformulation du schéma AP : Trouver $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W}_1 \times \mathbb{V}_1 \times L^2(\Omega_{\perp})$

$$(AP_1) \begin{cases} a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) + \frac{1}{L_{\gamma}} c(\bar{\psi}, \phi') = (\bar{f}, \bar{\psi}), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}_1, \\ a(\phi', \psi') + b_1(\bar{P}, \psi') + c(\bar{\phi}, \psi') = (f, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}_1, \\ b_2(\phi', \bar{Q}) = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_{\perp}), \end{cases} \quad (3.91)$$

où $f = -\nabla^c \cdot J_n$ et $\bar{f} = -\partial_\alpha \bar{J}_{n\alpha} - \partial_\beta \bar{J}_{n\beta}$. On discrétise (3.91) en utilisant la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 .

Deuxièmement, on considère le cas CL2. La procédure de construction du schéma préservant l'asymptotique est similaire au premier cas. On présente directement les formulations variationnelles comme suit. En définissant deux espaces de Hilbert

$$\mathbb{V}_2 = \{\psi(\alpha, \beta, \gamma) \in H^1(\Omega) / \psi = 0 \text{ sur } S_3, S_4\}, \quad (3.92)$$

$$\mathbb{W}_2 = \{\bar{\psi}(\alpha, \beta) \in H^1(\Omega_\perp) / \bar{\psi} = 0 \text{ sur } \Omega_\alpha \times \partial\Omega_\beta\}, \quad (3.93)$$

et les produits scalaires correspondantes

$$(\phi, \psi)_{\mathbb{V}_2} = (\partial_\alpha \phi, \partial_\alpha \psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_\beta \phi, \partial_\beta \psi)_{L^2(\Omega)} + (\partial_\gamma \phi, \partial_\gamma \psi)_{L^2(\Omega)}, \quad (3.94)$$

$$(\bar{\phi}, \bar{\psi})_{\mathbb{W}_2} = (\partial_\alpha \bar{\phi}, \partial_\alpha \bar{\psi})_{L^2(\Omega_\perp)} + (\partial_\beta \bar{\phi}, \partial_\beta \bar{\psi})_{L^2(\Omega_\perp)}, \quad (3.95)$$

on peut alors écrire la formulation variationnelle de (3.33d) : Trouver $\phi \in \mathbb{V}_1$, solution de

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ((\nabla^c \phi)^T \mathcal{A}^T \nabla^c \psi) dV - \int_{S_5} \mathcal{A} \nabla^c \phi \cdot \vec{n}_5 \psi d\sigma - \int_{S_6} \mathcal{A} \nabla^c \phi \cdot \vec{n}_6 \psi d\sigma \\ &= \int_{\Omega} J_n \cdot \nabla^c \psi dV - \int_{S_1} J_n \cdot \vec{n}_1 \psi d\sigma - \int_{S_2} J_n \cdot \vec{n}_2 \psi d\sigma \\ & \quad - \int_{S_5} J_n \cdot \vec{n}_5 \psi d\sigma - \int_{S_6} J_n \cdot \vec{n}_6 \psi d\sigma, \quad \forall \psi \in \mathbb{V}_2, \end{aligned} \quad (3.96)$$

où $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_5, \vec{n}_6$ sont les normales extérieures aux surfaces S_1, S_2, S_5, S_6 .

Les équations de moyenne et de fluctuation de (3.33d) sont similairement définies par

$$\begin{cases} -\nabla_\perp^c (\bar{\mathcal{A}}_\perp \nabla_\perp^c \bar{\phi}) - \nabla_\perp^c (\overline{\mathcal{A}_\perp \nabla_\perp^c \phi'}) = -\partial_\alpha \bar{J}_{n\alpha} - \partial_\beta \bar{J}_{n\beta}, & \text{dans } \Omega_\alpha \times \Omega_\beta, \\ \bar{\phi} = 0, & \text{sur } \Omega_\alpha \times \partial\Omega_\beta, \\ \partial_\alpha \bar{\phi} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\alpha \times \Omega_\beta, \end{cases} \quad (3.97)$$

et

$$\begin{cases} -\nabla^c (\mathcal{A} \nabla^c \phi') - \nabla_\perp^c (\mathcal{A}_\perp \nabla_\perp^c \bar{\phi}) = -\nabla^c \cdot J_n, & \text{dans } \Omega, \\ \mathcal{A} \nabla \phi' \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } S_1, S_2, \\ \phi' = 0, & \text{sur } S_3, S_4, \\ \partial_\alpha \phi' = 0, & \text{sur } S_5, S_6, \\ \bar{\phi}' = 0, & \text{dans } \Omega_\perp. \end{cases} \quad (3.98)$$

Définissons à nouveau les formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 a_0(\phi', \psi') &:= \int_{\Omega} \mathbf{C} \partial_{\gamma} \phi' \partial_{\gamma} \psi' dV, \\
 a_1(\phi', \psi') &:= \int_{\Omega} ((\nabla_{\perp}^c \phi')^T \mathcal{A}_{\perp}^T \nabla_{\perp}^c \psi') dV + \int_{S_5} \mathbf{D} \partial_{\beta} \phi' \psi' d\sigma + \int_{S_6} \mathbf{D} \partial_{\beta} \phi' \psi' d\sigma, \\
 a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) &:= \int_{\Omega_{\perp}} ((\nabla_{\perp}^c \bar{\phi})^T \bar{\mathcal{A}}_{\perp}^T \nabla_{\perp}^c \bar{\psi}) d\alpha d\beta \\
 &\quad + \int_{\Omega_{\beta}} (\bar{\mathbf{D}} \partial_{\beta} \bar{\phi} \bar{\psi}) (\alpha_{\min}, \beta) d\beta + \int_{\Omega_{\beta}} (\bar{\mathbf{D}} \partial_{\beta} \bar{\phi} \bar{\psi}) (\alpha_{\max}, \beta) d\beta, \\
 a(\phi', \psi') &:= a_0(\phi', \psi') + a_1(\phi', \psi'), \\
 b_1(\bar{P}, \psi') &:= \int_{\Omega_{\perp}} \bar{P} \int_{\Omega_{\gamma}} \mathbf{C} \psi' dV, \\
 b_2(\phi', \bar{Q}) &:= \frac{1}{L_{\gamma}} \int_{\Omega_{\perp}} \bar{Q} \int_{\Omega_{\gamma}} \phi' dV, \\
 c(\bar{\phi}, \psi') &:= \int_{\Omega} ((\nabla_{\perp}^c \bar{\phi})^T \mathcal{A}_{\perp}^T \nabla_{\perp}^c \psi') dV + \int_{S_5} \mathbf{D} \partial_{\beta} \bar{\phi} \psi' d\sigma + \int_{S_6} \mathbf{D} \partial_{\beta} \bar{\phi} \psi' d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Ainsi on obtient la reformulation du schéma AP : Trouver $(\bar{\phi}, \phi', \bar{P}) \in \mathbb{W}_2 \times \mathbb{V}_2 \times L^2(\Omega_{\perp})$

$$(AP_2) \begin{cases} a_2(\bar{\phi}, \bar{\psi}) + \frac{1}{L_{\gamma}} c(\bar{\psi}, \phi') = (\bar{f}, \bar{\psi}), & \forall \bar{\psi} \in \mathbb{W}_2, \\ a(\phi', \psi') + b_1(\bar{P}, \psi') + c(\bar{\phi}, \psi') = (f, \psi'), & \forall \psi' \in \mathbb{V}_2, \\ b_2(\phi', \bar{Q}) = 0, & \forall \bar{Q} \in L^2(\Omega_{\perp}), \end{cases} \tag{3.100}$$

où $f = -\nabla^c \cdot J_n$ et $\bar{f} = -\partial_{\alpha} \bar{J}_{n\alpha} - \partial_{\beta} \bar{J}_{n\beta}$. Enfin, on discrétise les formulations variationnelles (3.96) et (3.100) par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 .

3.5.2 Calcul de la densité du plasma

Pour calculer la densité du plasma, on résout l'équation (3.33a), qui a la même forme que l'équation (3.39a). Ainsi on peut le résoudre en utilisant les algorithmes 3.3, 3.6 et 3.7. Cependant, le vecteur de vitesse (3.31) est différent par rapport à celui du modèle Striation (3.39b). Ainsi, il faut discrétiser (3.31) pour adapter les algorithmes existants.

Similairement à (3.52), on a besoin des approximations de la vitesse suivantes : $v_{\alpha, i-1/2, j, k}, (i, j, k) \in I_2 \times J_1 \times K_1$, $v_{\beta, i, j-1/2, k}, (i, j, k) \in I_1 \times J_2 \times K_1$, $v_{\beta, i, j, k-1/2}$ et $v_{\gamma, i, j, k-1/2}, (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_2$. Plus précisément, on doit calculer $\nabla^c \phi$ aux points où on calcule les termes de vitesse. Ainsi, on présente les approximations suivantes :

– pour calculer $v_{\alpha, i-1/2, j, k}$

$$\begin{aligned}
 \partial_{\alpha} \phi &= \frac{\phi_{i+1/2, j, k} - \phi_{i-3/2, j, k}}{\Delta \alpha_{i-1} + \Delta \alpha_i}, \\
 \partial_{\beta} \phi &= \frac{\tilde{\phi}_{i-1/2, j+1/2, k} - \tilde{\phi}_{i-1/2, j-1/2, k}}{\Delta \beta_j},
 \end{aligned}$$

3.5. Approximation numérique du modèle Dynamo ionosphérique

où $\phi_{i-1/2,j,k} = (\phi_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} + \phi_{i-1/2,j+1/2,k-1/2} + \phi_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} + \phi_{i-1/2,j+1/2,k+1/2})/4$,
 $\tilde{\phi}_{i-1/2,j+1/2,k}$ et $\tilde{\phi}_{i-1/2,j-1/2,k}$ sont les interpolations de ϕ aux points $(\alpha_{i-1/2}, \beta_{j+1/2}, \gamma_{i-1/2,j,k})$
 et $(\alpha_{i-1/2}, \beta_{j-1/2}, \gamma_{i-1/2,j,k})$.

– pour calculer $v_{\beta,i,j-1/2,k}$

$$\begin{aligned}\partial_{\alpha}\phi &= \frac{\phi_{i-1/2,j+1/2,k} - \phi_{i-1/2,j-1/2,k}}{\Delta\alpha_i}, \\ \partial_{\beta}\phi &= \frac{\tilde{\phi}_{i,j+1/2,k} - \tilde{\phi}_{i,j-3/2,k}}{\Delta\beta_j + \Delta\beta_{j-1}},\end{aligned}$$

où $\phi_{i-1/2,j-1/2,k} = (\phi_{i-1/2,j-1/2,k+1/2} + \phi_{i-1/2,j-1/2,k-1/2})/2$, $\tilde{\phi}_{i,j+1/2,k}$ et $\tilde{\phi}_{i,j-3/2,k}$ sont
 les interpolations de ϕ aux points $(\alpha_i, \beta_{j+1/2}, \gamma_{i,j,k})$ et $(\alpha_i, \beta_{j-3/2}, \gamma_{i,j,k})$.

– pour calculer $v_{\beta,i,j,k-1/2}$ et $v_{\gamma,i,j,k-1/2}$

$$\begin{aligned}\partial_{\alpha}\phi &= \frac{(\phi_{i-1/2,j-1/2,k-1/2} + \phi_{i-1/2,j+1/2,k-1/2}) - (\phi_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} + \phi_{i+1/2,j+1/2,k-1/2})}{2\Delta\alpha_i}, \\ \partial_{\beta}\phi &= \frac{\tilde{\phi}_{i,j+1/2,k-1/2} - \tilde{\phi}_{i,j-1/2,k-1/2}}{\Delta\beta_j}, \\ \partial_{\gamma}\phi &= \frac{\phi_{i,j,k+1/2} - \phi_{i,j,k-3/2}}{\gamma_{i,j,k+1/2} - \gamma_{i,j,k-3/2}},\end{aligned}$$

où $\tilde{\phi}_{i,j-1/2,k-1/2}$ est l'interpolation de ϕ au point $(\alpha_i, \beta_{j-1/2}, \gamma_{i,j,k-1/2})$ et $\phi_{i,j,k-3/2} =$
 $(\phi_{i-1/2,j-1/2,k-3/2} + \phi_{i+1/2,j-1/2,k-3/2} + \phi_{i-1/2,j+1/2,k-3/2} + \phi_{i+1/2,j+1/2,k-3/2})/4$.

Enfin, on résume les schémas pour résoudre le modèle Dynamo dans l'algorithme
 suivant :

Algorithme 3.8 schémas numériques pour résoudre le modèle Dynamo

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

tantque $t_n \leq t_{\text{total}}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

écrire (3.33d) sous les formules variationnelles (3.85), (3.96) et les discrétiser par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 ,

ou appliquer la méthode de préservant l'asymptotique (3.91), (3.100) et les discrétiser par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 .

Calcul de la densité ρ

$$\Delta t_n \leftarrow (3.54)$$

$$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$$

discrétiser (3.33a) en espace :

$$L(w) \leftarrow \text{l'algorithme 3.6}$$

discrétiser (3.33a) en temps :

$$w^{n+1} \leftarrow (3.74)$$

$$\rho^{n+1} = w^{n+1} |B|^2$$

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$$

fin tantque

3.6 Expériences numériques

Dans cette section, nous faisons des simulations numériques pour étudier l'évolution du plasma ionosphérique en présence d'inhomogénéités représentées par des bulles de sous-densité de plasma ou de sur-densité de plasma. Pour cela, on considère deux cas tests suivants :

Cas1 : une bulle de sous-densité perturbée par la gravité. La sous-densité considérée ici est de deux ordres de grandeur plus petite que celle du plasma ambiant. La bulle diminue d'intensité exponentiellement dans la direction γ simulant ainsi un étirement aligné avec le champ magnétique (voir la figure 3.12(a)). On associe ce cas test aux conditions aux limites de type CL1 de telle sorte qu'il n'y a pas d'échanges de densité du plasma sur les bords S_3 , S_4 , S_5 et S_6 . Le vent de neutre est supposé nul, ainsi seule la gravité a un effet sur l'évolution du plasma.

Cas2 : une bulle de sur-densité perturbée par le vent neutre. La sur-densité est de deux ordres de grandeur plus grande que celle du plasma ambiant. La bulle diminue d'intensité exponentiellement dans la direction γ (voir la figure 3.12(b)). Dans ce cas, la gravité est ignorée et la vitesse du vent de neutre est une constante d'intensité $u_{n,\alpha} = 45m/s$ dans la direction α . On associe ce cas test aux conditions aux limites de type CL2 de telle sorte que le plasma peut entrer et sortir par les surfaces S_5 et S_6 .

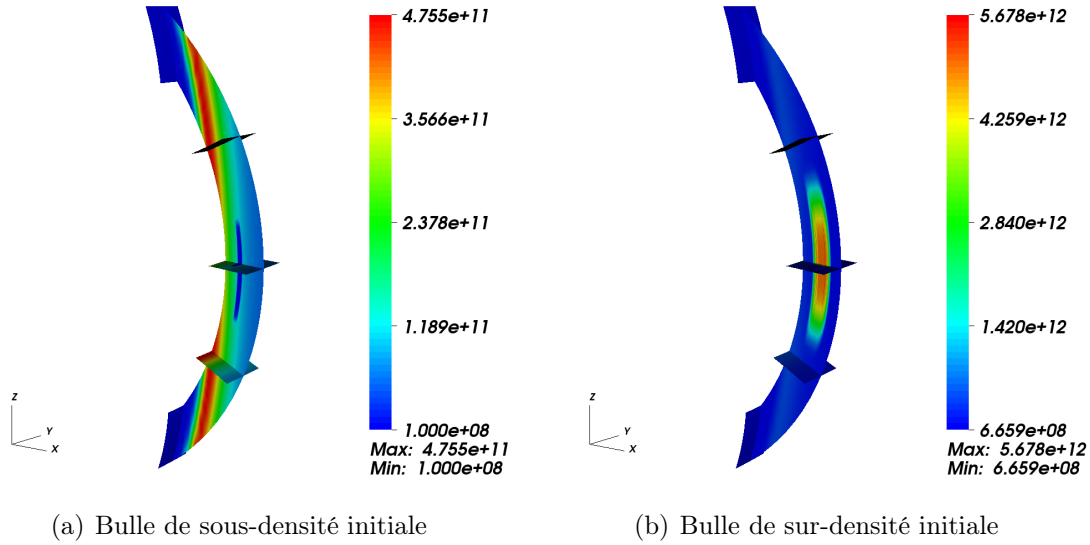


FIGURE 3.12 – Les données initiales sous la forme d’une bulle sous-densité ou sur-densité dans le plasma environnement. Les paramètres pour décrire le tube sont : $H_l = 450\text{km}$, $H_h = 850\text{km}$, $H_e = 100\text{km}$, $H_w = 400\text{km}$.

Notons que le cas en présence de la gravité et du vent de neutre n’est pas considéré, car dans la haute altitude la force de la gravité $\rho_{i,e}m_{i,e}g$ est beaucoup plus grande que la force de friction d’ion-neutre ou d’électron-neutre $\nu_{i,e}\rho_{i,e}(u_{i,e} - u_n)$. Ainsi il est plus raisonnable d’étudier la perturbation de ces deux forces séparément.

3.6.1 Expériences numériques de Cas1

Comparaison des solveurs pour l’équation elliptique

Dans cette section, nous comparons tout d’abord les différents schémas numériques pour résoudre l’équation elliptique. On utilise deux types de tubes suivants :

Tube1 : dans la basse altitude, *i.e.* $H_l = 250\text{km}$, $H_h = 350\text{km}$, $H_e = 100\text{km}$, $H_w = 100\text{km}$;

Tube2 : de la basse altitude à la haute altitude, *i.e.* $H_l = 650\text{km}$, $H_h = 850\text{km}$, $H_e = 100\text{km}$, $H_w = 200\text{km}$.

Nous comparons le temps CPU pour une itération de calcul dans un maillage $(N_\alpha, N_\beta, N_\gamma) = (100, 100, 41)$ (voir le tableau 3.1). On voit que pour lors de la résolution du modèle Striation, le temps de calcul de l’équation de conservation de la masse est comparable à celui de l’équation elliptique, qui est d’environ une seconde. Comme on pouvait s’y attendre, le temps de calcul de l’équation elliptique du modèle Dynamo est beaucoup plus important que celui du modèle Striation. En utilisant la méthode d’éléments finis standard, on a besoin d’environ 8 minutes. Le temps de calcul du schéma préservant l’asymptotique est deux fois plus important que celui de la méthode d’éléments finis standard. Ainsi la résolution du modèle Dynamo est très coûteuse par rapport à celle du modèle Striation.

	(a)	(b)	(c)	(d)
Temps CPU (s)	1	1	526	1105

TABLE 3.1 – Comparaison du temps CPU en seconde dans une itération de calcul avec la taille de maillage $(N_\alpha, N_\beta, N_\gamma) = (100, 100, 41)$. (a) Calcul de la densité du plasma par l’algorithme 3.7; (b) Calcul du potentiel du modèle Striation par l’algorithme 3.1; (c) Calcul du potentiel du modèle Dynamo par la méthode d’éléments finis; (d) Calcul du potentiel du modèle Dynamo par le schéma préservant l’asymptotique (3.91).

Ensuite, on compare le conditionnement du système linéaire liés aux discrétisations de (3.85) et de (3.91) dans le tableau 3.2. On observe que le conditionnement de (3.91) est toujours plus petit que celui de (3.85) pour le Tube1. Cependant, le conditionnement de (3.85) est meilleur que celui de (3.91) pour le Tube2. Ainsi dans des simulations suivantes pour calculer le potentiel, on utilise la méthode d’éléments finis standard pour le Tube1, et on utilise la méthode de préservant l’asymptotique pour le Tube2.

		Schéma AP	EFS
$20 \times 20 \times 21$	Tube 1	9.0706e+08	3.3652e+07
	Tube 2	9.3537e+08	7.4774e+13
$30 \times 30 \times 31$	Tube 1	1.4139e+10	7.6574e+07
	Tube 2	1.3606e+10	3.9113e+12

TABLE 3.2 – Comparaison du conditionnement de la matrice de l’équation elliptique (3.33d) par la méthode d’éléments finis standard (EFS) et le schéma préservant l’asymptotique.

Cas test avec Tube1

Premièrement, on ne considère que le domaine de calcul dans la basse altitude (Tube1). On utilise l’algorithme 3.1 pour calculer le potentiel $\bar{\phi}$ du modèle Striation et la méthode d’éléments finis standard pour calculer la potentiel ϕ du modèle Dynamo. Les résultats sont présentés dans les figures 3.13 et 3.14. On observe que dans la figure 3.13 deux bulles se présentent avec une positive et une autre négative. Les valeurs maximale et minimale de $\bar{\phi}$ sont respectivement 1.65×10^{-3} et -1.63×10^{-3} . Le potentiel ϕ est présenté en 3D dans la figure 3.14. Similairement au potentiel $\bar{\phi}$, deux bulles se présentent au plan perpendiculaire Ω_\perp et elles diminuent dans la direction γ . Les valeurs maximale et minimale de ϕ sont respectivement 5.365×10^{-3} et -5.493×10^{-3} , qui se trouvent à la couche centrale. Ainsi $\bar{\phi}$ est la valeur moyenne de ϕ le long de champ magnétique.

Nous comparons ensuite des schémas numériques pour l’équation de conservation de la masse. Dans la figure 3.15, on présente l’évolution de la densité du plasma sur la couche centrale. On prend une taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. On observe que l’algorithme 3.3 est très diffusif induisant que beaucoup de petites structures d’évolution de la densité du plasma sont omises. Les algorithmes 3.5 et 3.6 sont les schémas d’ordre élevé, ainsi ils préservent plus de petites structures de sous-densité par rapport à l’algorithme 3.3. Si

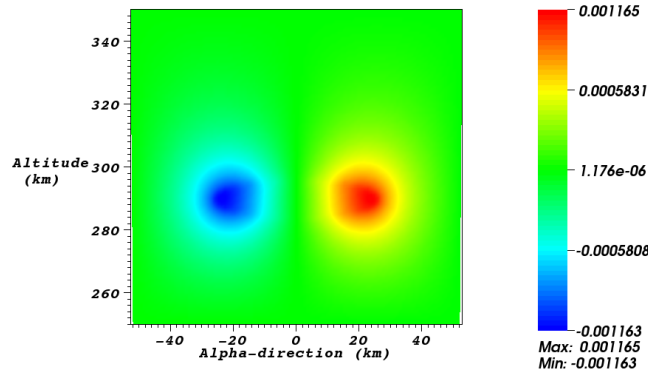


FIGURE 3.13 – Potentiel électrique du modèle Striation résolu par l’algorithme 3.1 avec la taille de maillage $(N_\alpha, N_\beta, N_\gamma) = (100, 100, 41)$.

on raffine le maillage en $(N_\alpha, N_\beta, N_\gamma) = (300, 300, 61)$, on obtient encore plus de petites structures de sous-densité (voir la figure 3.16). En considérant qu’on utilise le polynôme \mathbb{P}_2 pour construire l’algorithme 3.6 tandis que l’algorithme 3.5 est construit par le polynôme \mathbb{P}_1 , donc on utilise l’algorithme 3.6 dans la suite.

Maintenant, on compare les résultats numériques entre le modèle Striation et le modèle Dynamo. On utilise encore le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Les résultats numériques sont présentés dans les figures 3.17, 3.18 et 3.19. On observe un caractère commun à ces deux modèles, c’est que la perturbation se propage aux couches initialement non-perturbées (voir les colonnes au milieu des figures 3.17 et 3.18). Cependant, il existe deux différences importantes :

- La perturbation de la bulle de sous-densité sur la couche centrale du modèle Dynamo apparaît plus tôt que celle du modèle Striation (voir les colonnes à gauche des figures 3.17 et 3.18). C’est parce que le potentiel ϕ sur la couche centrale du modèle Dynamo est plus important que le potentiel $\bar{\phi}$ du modèle Striation. De plus le champ de vitesse est calculé par $\nabla_\perp^c \phi$ et $\nabla_\perp^c \bar{\phi}$. Ainsi on observe que la bulle de sous-densité du modèle Dynamo forme des striations en 80 minutes, tandis que pour celles du modèle Striation, le phénomène apparaît en 4 heures.
- L’intensité de la perturbation dans les différentes couches du modèle Dynamo varie sur toutes les couches, tandis que celle du modèle Striation est la même. C’est parce que le potentiel du modèle Dynamo est en 3D, donc le champ de vitesse perpendiculaire varie parmi toutes les couches. Cependant, le potentiel du modèle Striation est le même dans toutes les couches, ainsi l’intensité de la perturbation dans toutes les couches est identique (voir la figure 3.17). L’intensité de la perturbation du modèle Dynamo devient de plus en plus faible de la couche centrale à la couche externe (voir la figure 3.18).

Enfin, on présente l’évolution de la densité de ces deux modèles en 3D dans la figure 3.19. On peut observer aussi les deux différences importantes dans les deux colonnes de cette figure.

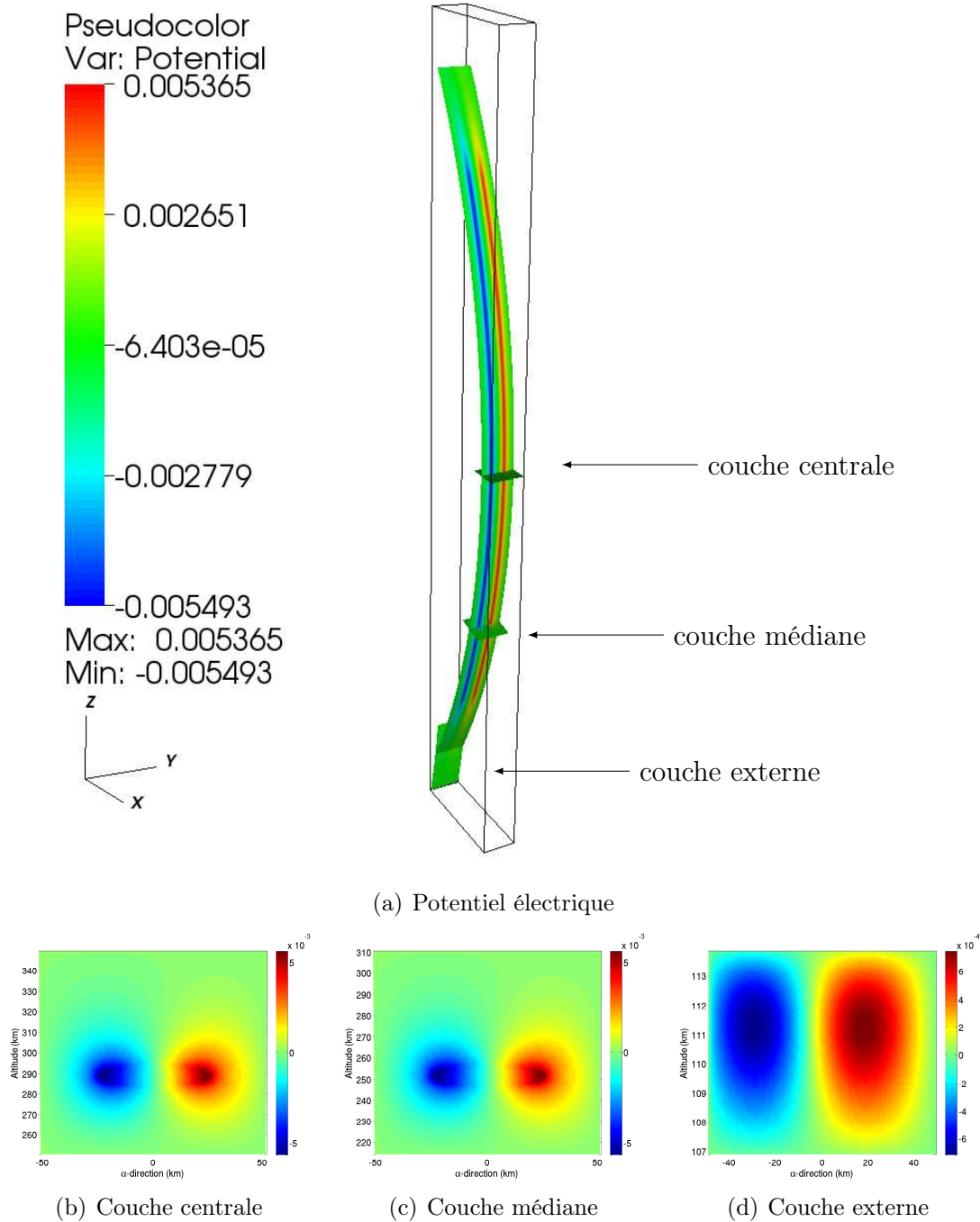


FIGURE 3.14 – Potentiel électrique du modèle Dynamo résolu par la méthode d’éléments finis avec la taille de maillage $(N_\alpha, N_\beta, N_\gamma) = (100, 100, 41)$.

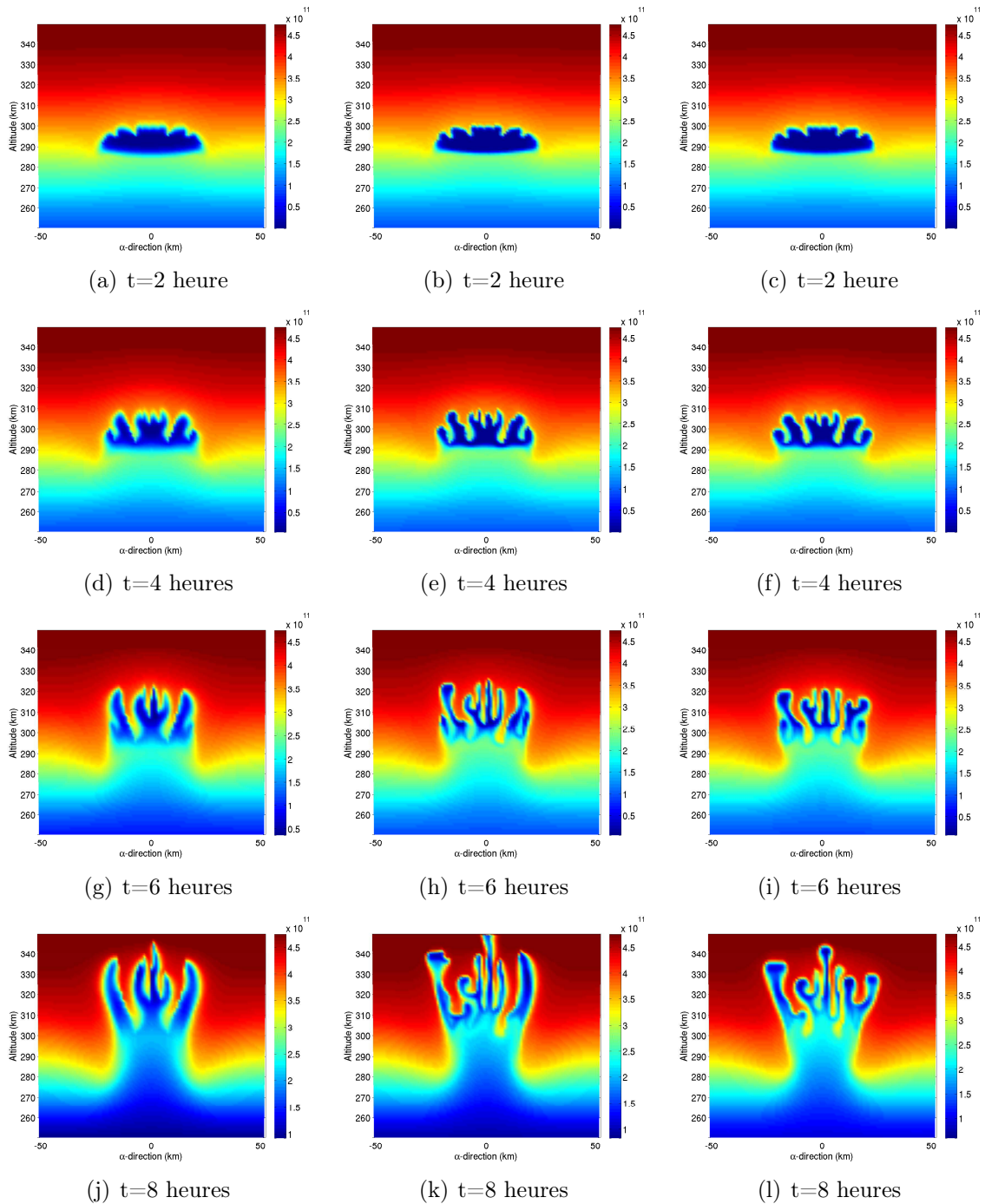


FIGURE 3.15 – Comparaison des schémas numériques de l'équation de conservation de la masse dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. On utilise le Tube1 et compare l'évolution de la densité sur la couche centrale. Colonne à gauche : l'algorithme 3.3; Colonne au milieu : l'algorithme 3.5; Colonne à droite : l'algorithme 3.6.

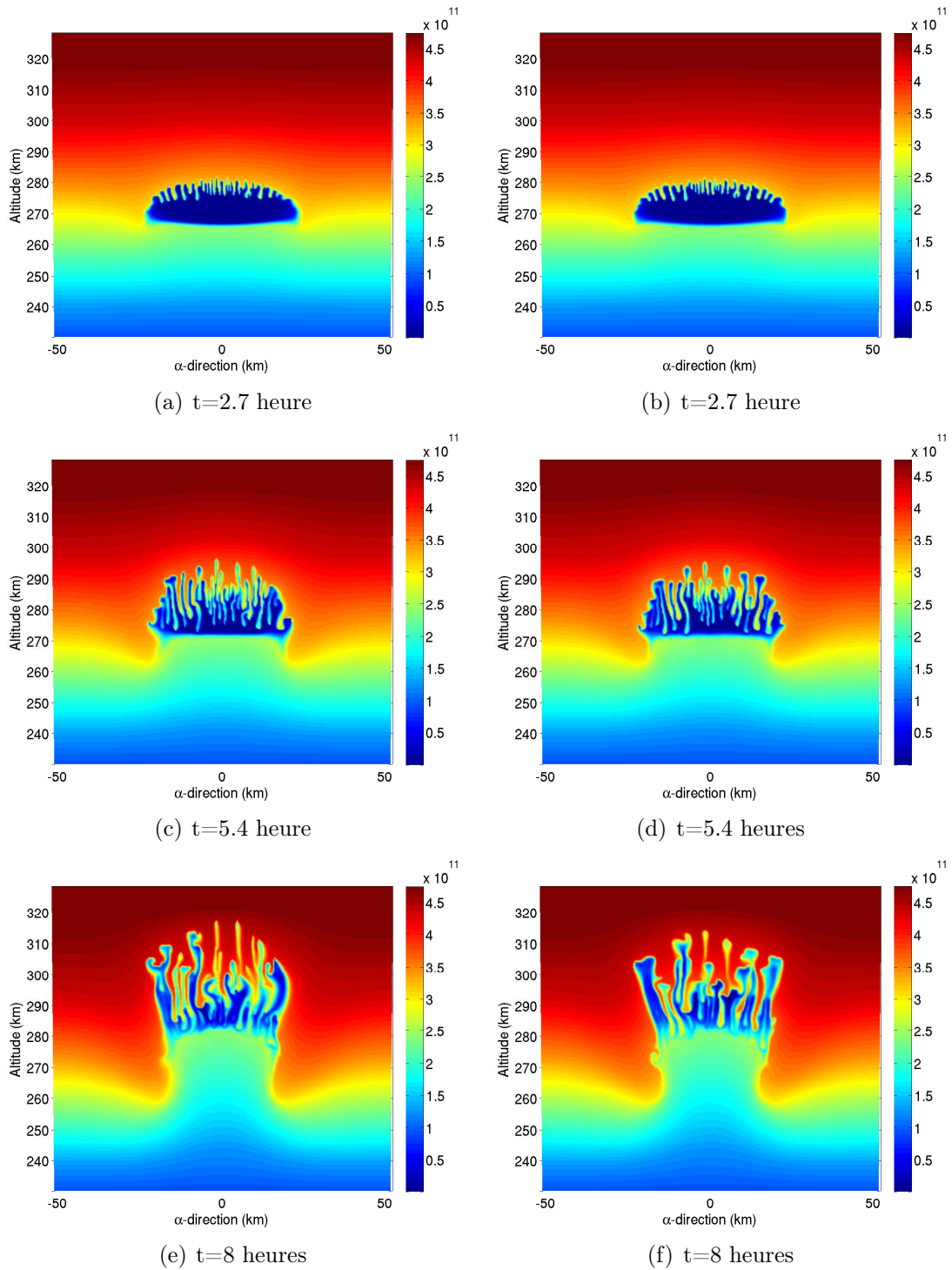


FIGURE 3.16 – Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation dans la couche centrale du Tube1 avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 61$. Colonne à gauche : l’algorithme 3.5 ; Colonne à droite : l’algorithme 3.6.

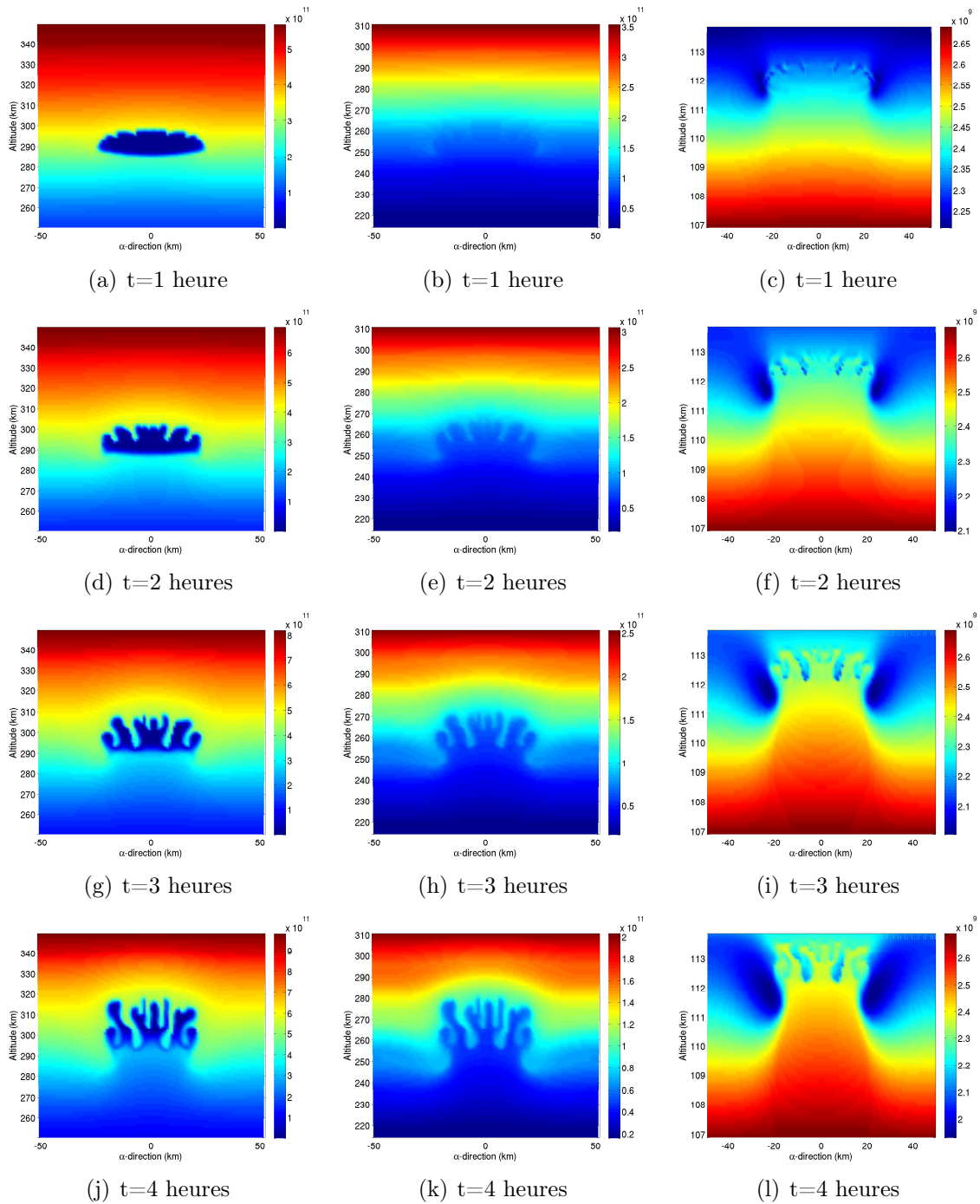


FIGURE 3.17 – Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.

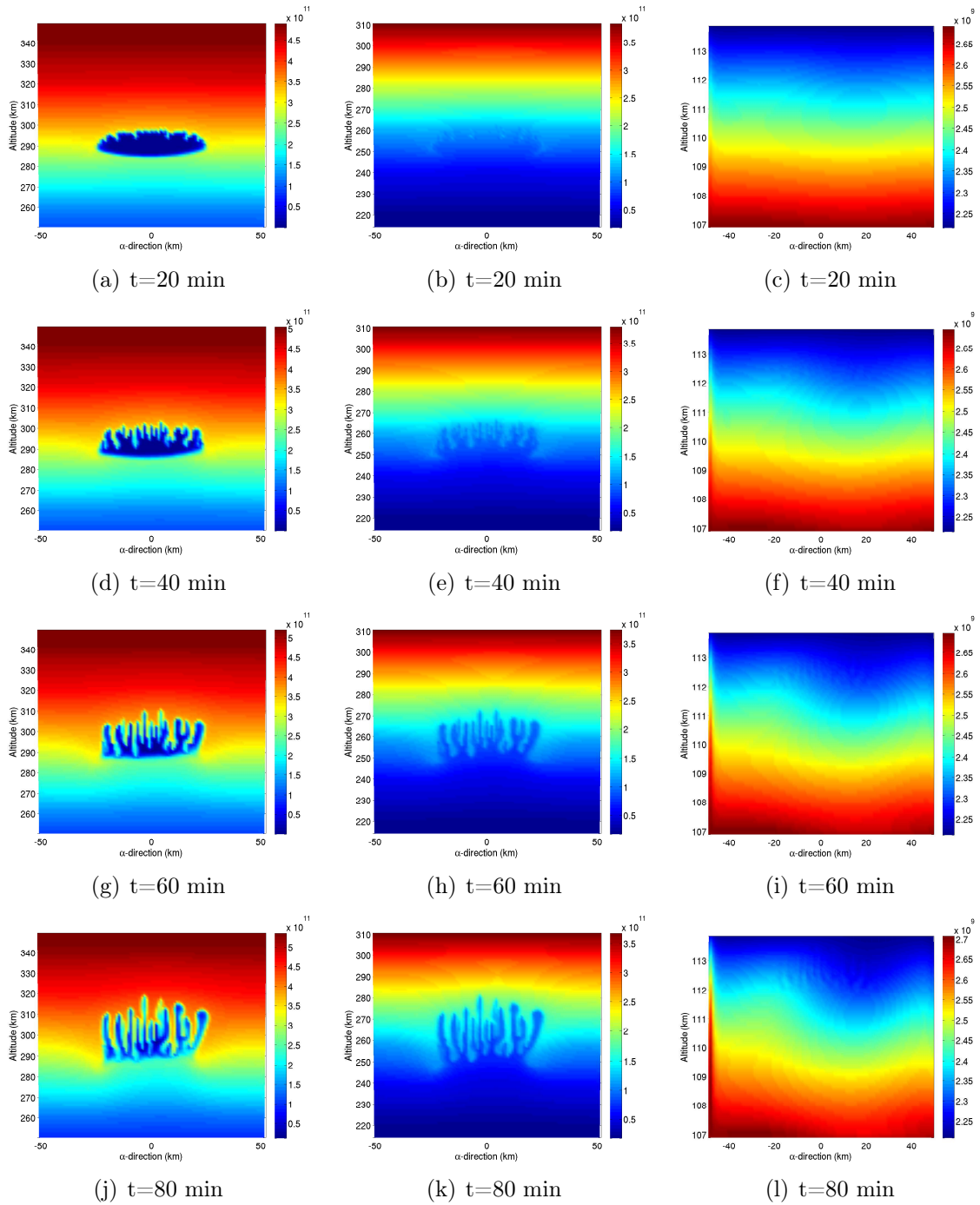


FIGURE 3.18 – Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Dynamo dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.

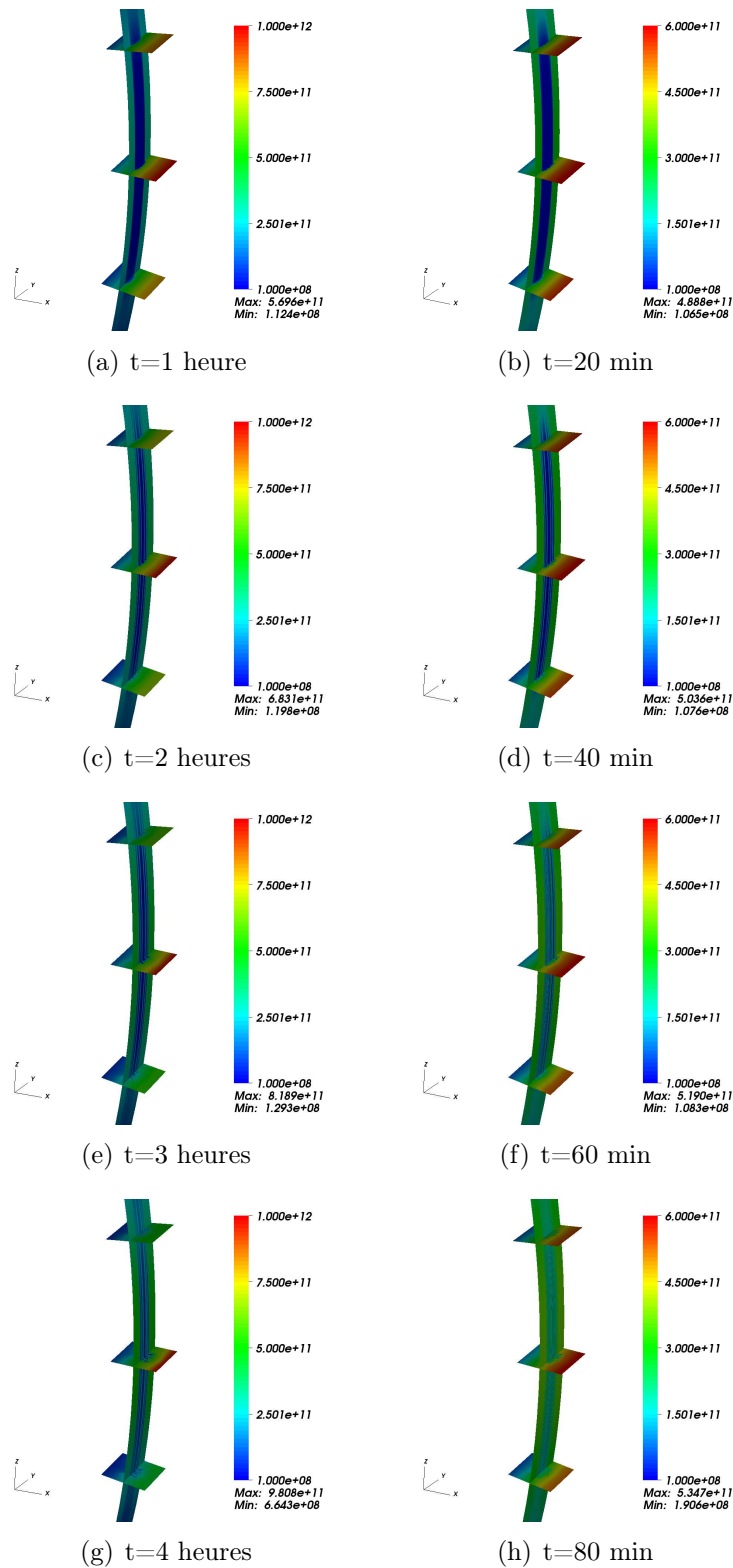


FIGURE 3.19 – Évolution de la bulle de sous-densité du plasma dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : le modèle Striation ; Colonne à droite : le modèle Dynamo.

Cas test avec Tube2

Maintenant on répète les simulations précédentes en utilisant le Tube2. Les résultats numériques sont présentés dans les figures 3.20, 3.21 et 3.22. On observe encore les deux différences entre le modèle Dynamo et le modèle Striation que dans le cas test avec Tube1. Cependant notons que la bulle de sous-densité est striée en 16 heures pour le modèle Striation et en 4 heures pour le modèle Dynamo. C'est à dire que la striation de la bulle apparaît plus tard par rapport au cas test Tube1. Ce qui peut être expliqué par la variation d'accélération de la pesanteur en altitude. En effet, la bulle est striée par la force de gravité, qui décroît en fonction de l'altitude. Dans le cas test avec Tube2, la bulle de sous-densité se trouve initialement à 700 km où l'accélération de la pesanteur est égale 7 m/s, tandis que dans le cas test avec Tube1, la bulle de sous-densité se trouve à 300 km où l'accélération de la pesanteur est égale 9 m/s. Ainsi on observe le phénomène de striation plus tard dans le cas test avec Tube2.

3.6.2 Expériences numériques de Cas2

Dans le deuxième cas test, on considère la bulle de sur-densité striée par la force de friction d'ions et de particule neutre $-\nu_i m_i (u_i - u_n)$. Notons que cette force dépend fortement en la fréquence de collision ν_i . C'est à dire que dans la basse altitude cette force est importante, tandis que dans la haute altitude elle est très faible (voir la figure 3.6(c)).

La fréquence de collision multipliée par la densité du plasma $\rho\nu$ est aussi très faible dans la haute altitude par rapport à celle dans la basse altitude (voir la figure 3.23(a)). En traçant $\rho\nu$ le long du champ magnétique dans les Tube1 et Tube2, on observe que $\rho\nu$ est très faible dans la couche centrale du Tube2 (voir la figure 3.23(b)). Puis on dessine $\rho\nu$ respectivement dans les Tube1 et Tube2 (voir les figures 3.23(c) et 3.23(d)). On observe que $\rho\nu$ à la couche centrale est plus faible qu'aux couches externes dans la figure 3.23(c). Dans la figure 3.23(d), on ne voit plus la bulle de sur-densité. Donc l'effet de striation dans le Tube2 est très faible, et on ne fait la simulation que dans le Tube1. De plus, en intégrant $\rho\nu$ le long de champ magnétique, la valeur de $\rho\nu$ correspondante à la bulle de sur-densité est encore plus faible rapport à celle de environnement. C'est à dire que l'effet de striation est aussi très faible en utilisant le modèle Striation. Ainsi on utilise le modèle Dynamo pour le Cas2.

Les résultats numériques sont présentés dans les figures 3.24, 3.25. On observe que le profil de la bulle en face du vent neutre est stable et celui en opposition est instable. On voit aussi que la perturbation se propage aux couches initialement non-perturbées. Notons que le phénomène de striation apparaît en 40 minutes. Ceci s'explique par le fait que la force de friction est plus importante que la gravité dans le Tube1.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons procédé à la réécriture des modèle Dynamo et Striation dans le système des Potentiels d'Euler. Les modèle Dynamo et Striation s'expriment comme le couplage entre une équation de conservation de la masse pour la densité du plasma et une équation elliptique pour le potentiel électrique. L'équation elliptique du

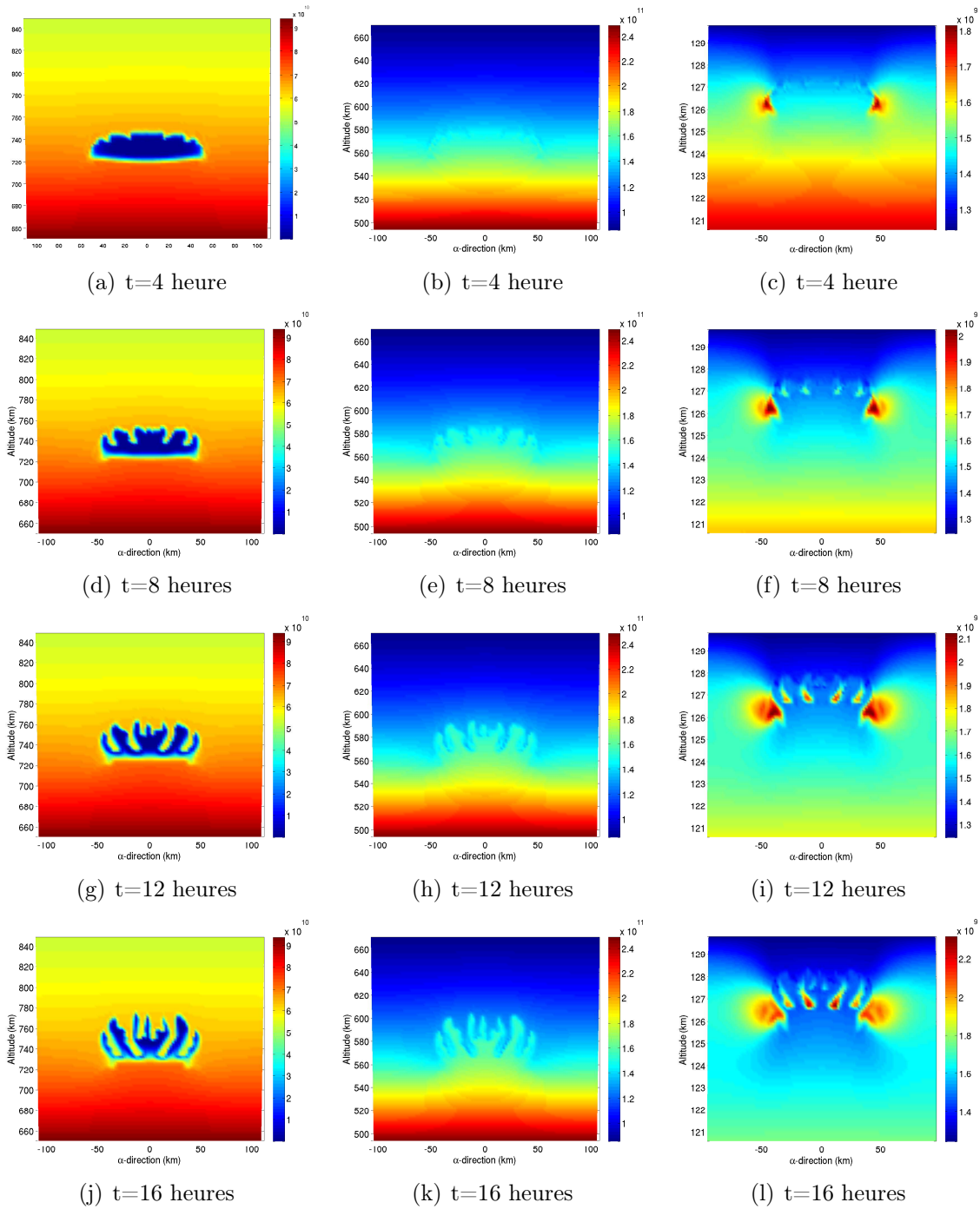


FIGURE 3.20 – Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation dans le Tube2 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.

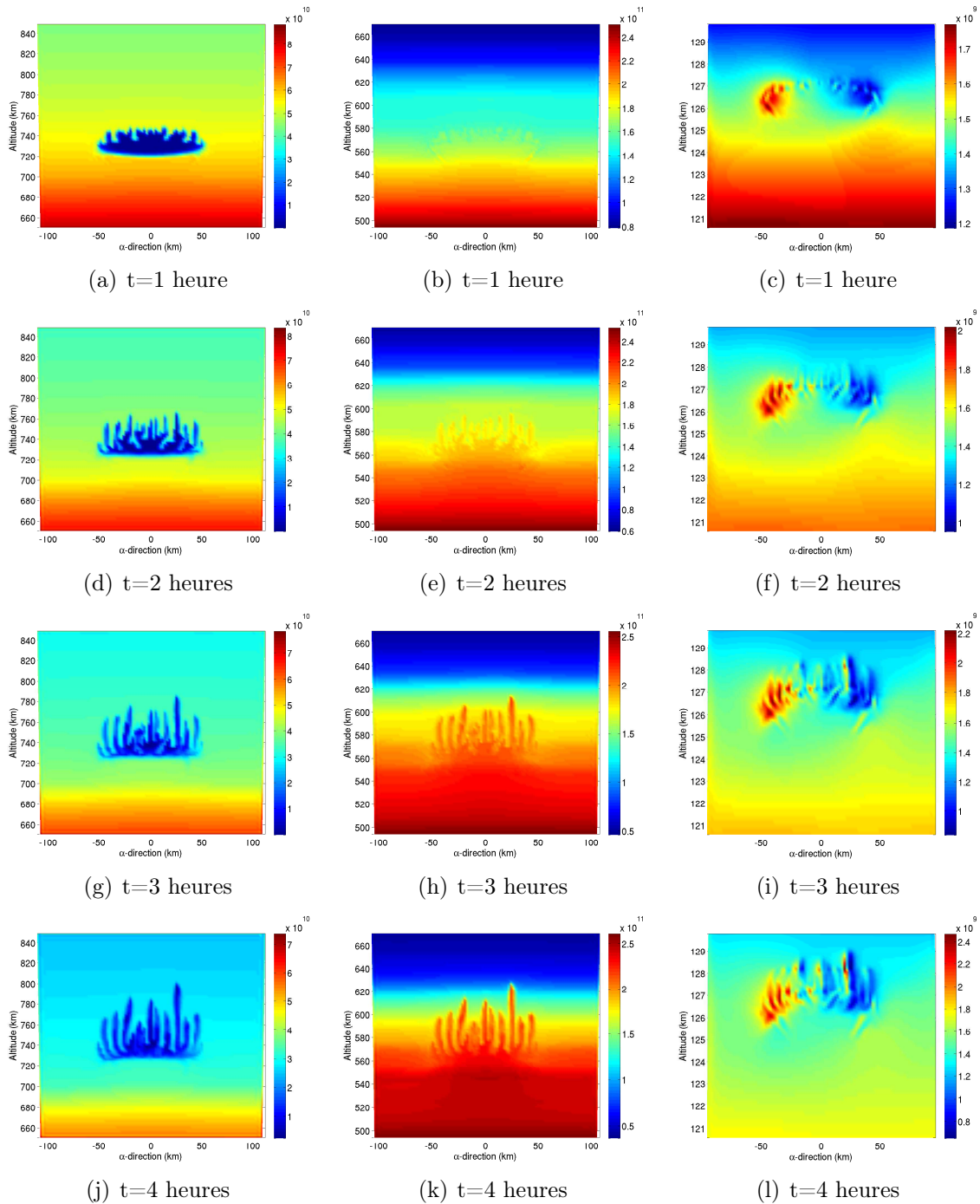


FIGURE 3.21 – Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Dynamo dans le Tube2 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.

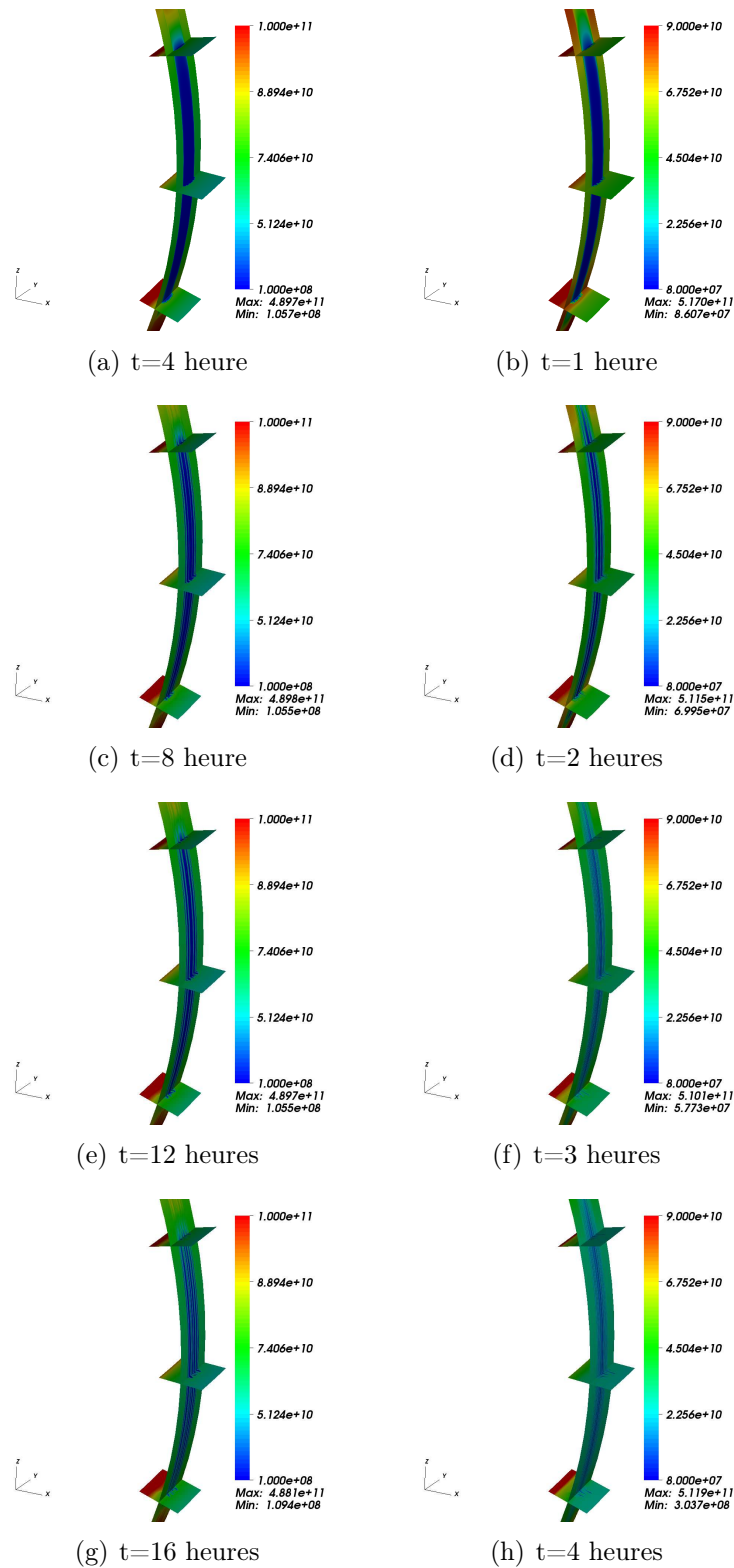


FIGURE 3.22 – Évolution de la bulle de sous-densité du plasma dans le Tube2 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : le modèle Striation ; Colonne à droite : le modèle Dynamique.

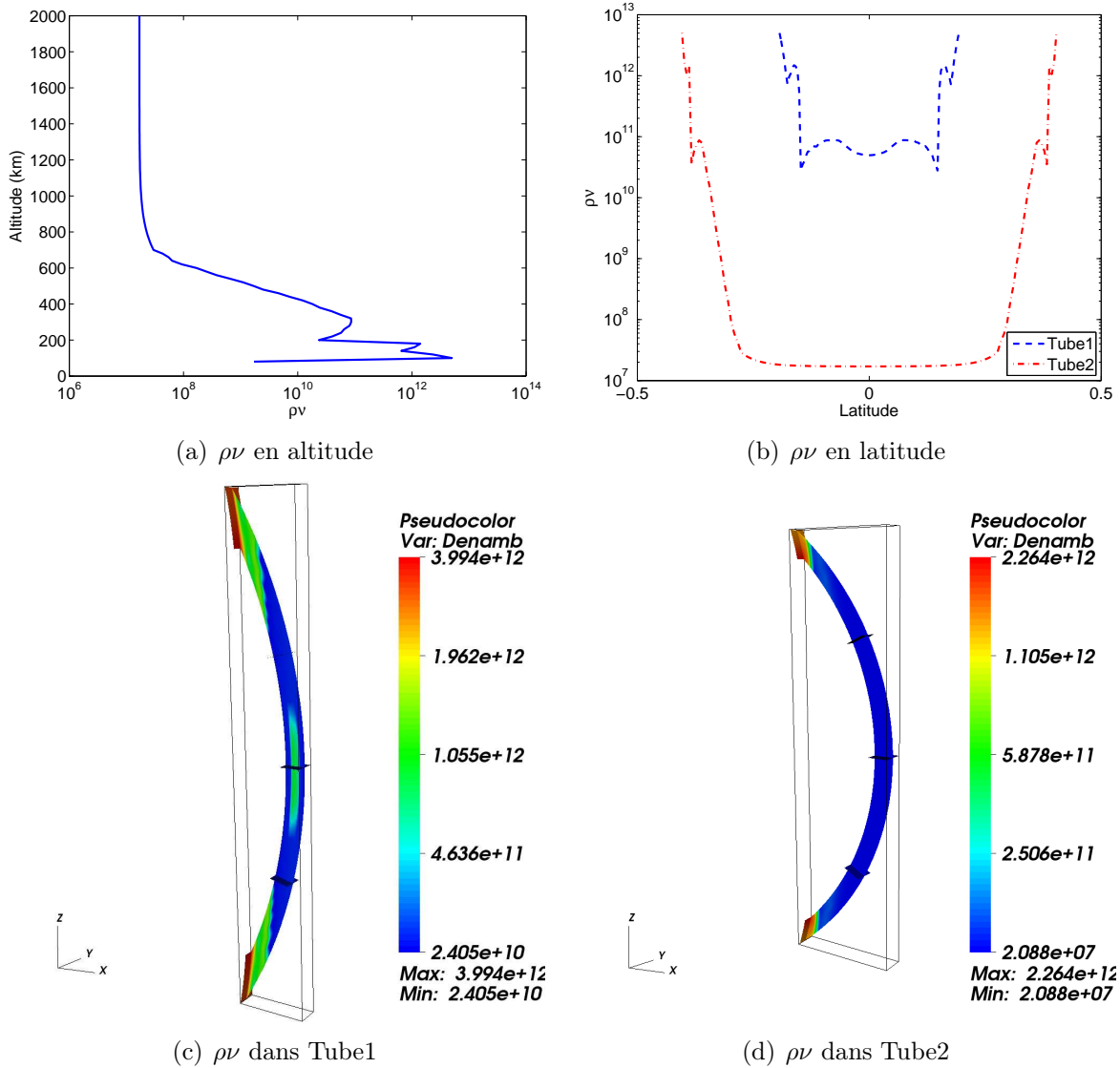


FIGURE 3.23 – La quantité $\rho\nu$ du modèle IRI. On trace $\rho\nu$ en altitude et en latitude dans (a) et (b). (c) et (d) présentent $\rho\nu$ dans le Tube1 et le Tube2 en présence une bulle de sur-densité du plasma.

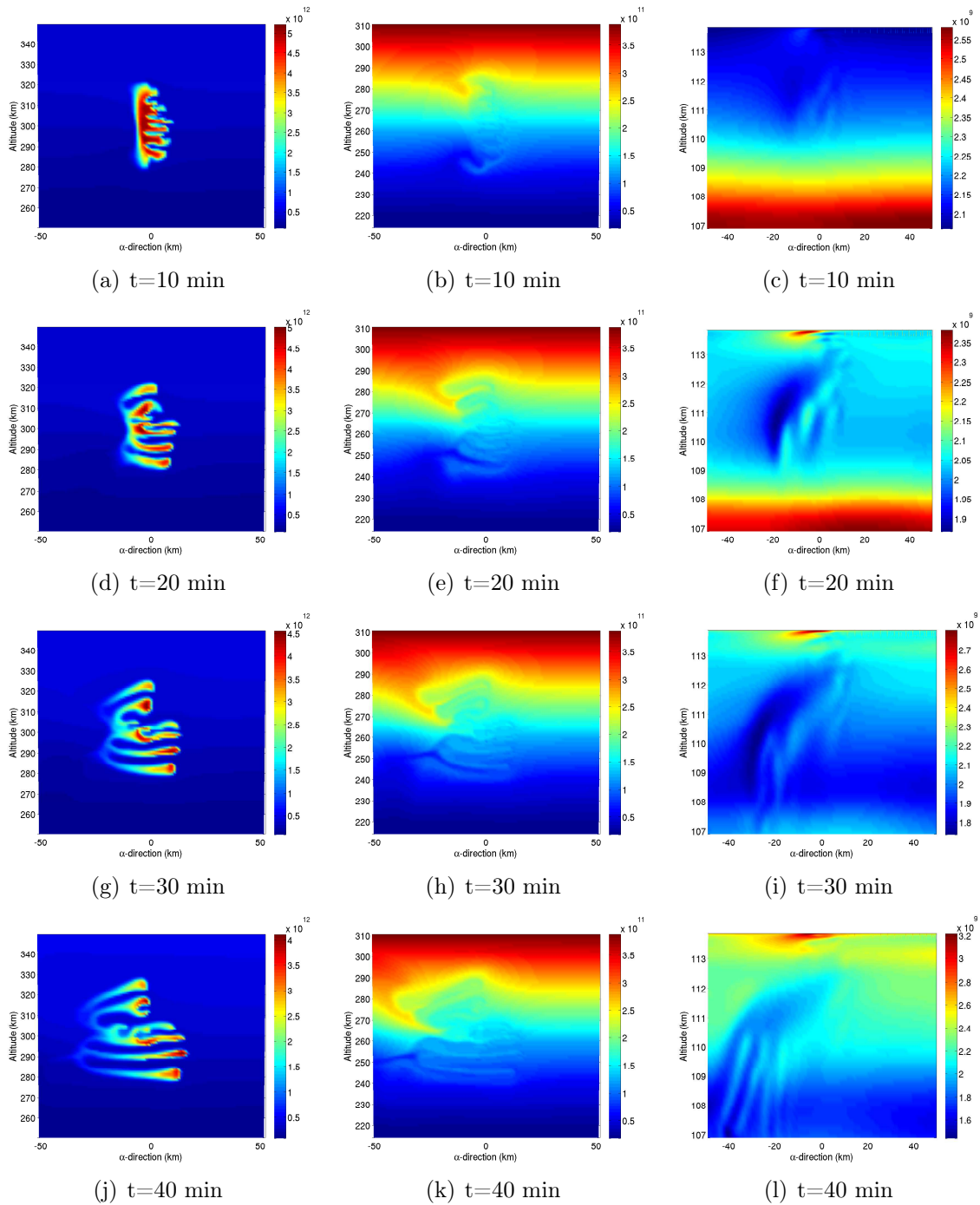


FIGURE 3.24 – Évolution de la bulle de sur-densité du plasma en utilisant le modèle Dynamo dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.

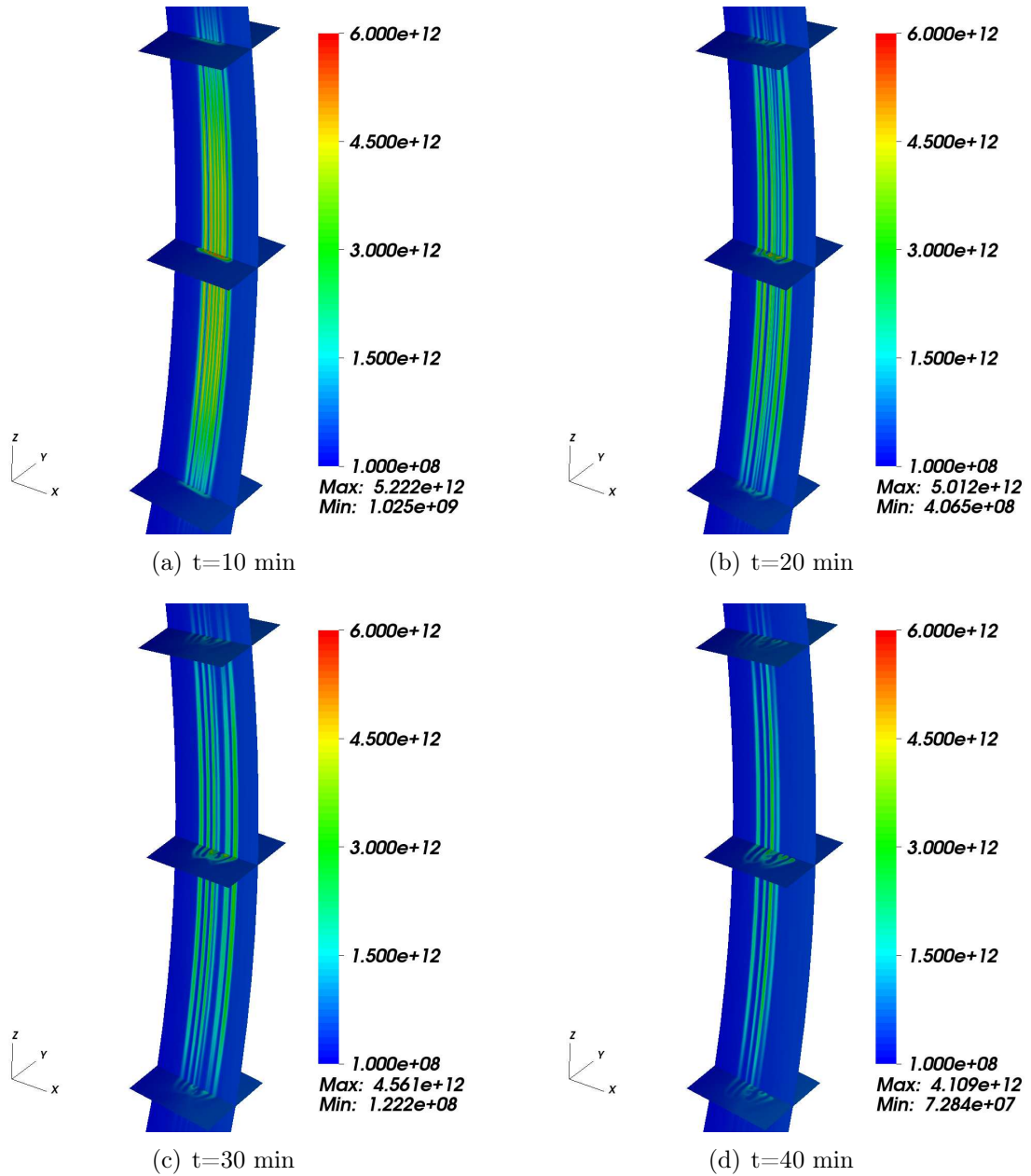


FIGURE 3.25 – Évolution de la bulle de sur-densité du plasma dans un maillage non-uniforme $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : le modèle Striation; Colonne à droite : le modèle Dynamo.

modèle Dynamo est anisotrope, ainsi on a appliqué le schéma préservant l'asymptotique développé dans le chapitre 2, puis on l'a discrétisé par une méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 . Pour discrétiser l'équation de conservation de la masse, on a développé respectivement un schéma upwind 3D, un schéma de résolution haute d'ordre 2 et un schéma d'ordre élevé basé sur la reconstruction du polynôme \mathbb{P}_2 . Pour les simulations, on suppose que le gradient de la pression contrebalance l'effet de la gravité dans la direction alignée de champ magnétique et néglige le terme du gradient de la pression dans le plan perpendiculaire du champ magnétique. Ensuite, on simule la striation effectuant par le vent neutre et la gravité respectivement. On observe un caractère commun des modèles Striation et modèle Dynamo, c'est que la perturbation se propage aux couches initialement non-perturbées. Deux différences importantes entre les deux modèles sont : le phénomène de striation du modèle Dynamo apparaît plus tôt que dans le modèle Striation et l'intensité de la perturbation dans les différentes couches du modèle Dynamo varie sur toutes les couches, tandis que celle du modèle Striation est invariante pour toutes les couches. Ainsi on conclut que le modèle Dynamo nous donne des résultats plus réalistes que le modèle Striation.

3.8 Annexe : Méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1

3.8.1 Méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 en 2D

Dans cette sous-section, on rappelle la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 en 2D. On considère un problème elliptique défini sur un domaine rectangulaire $\Omega = \Omega_\alpha \times \Omega_\beta$ muni de conditions aux limites de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\nabla_\perp \cdot (A\nabla_\perp \phi) = f, & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.101)$$

où A est une matrice à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^\infty(\Omega)$. La formulation variationnelle associée est : Trouver $\phi \in H_0^1(\Omega)$, telle que

$$\int_\Omega A\nabla\phi \cdot \nabla\psi d\sigma = \int_\Omega f\psi d\sigma, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega), \quad (3.102)$$

où $\nabla = (\partial_\alpha, \partial_\beta)^T$, $d\sigma$ est l'élément de surface infinitésimal. Nous notons la forme bilinéaire $a(\phi, \psi) = \int_\Omega A\nabla\phi \cdot \nabla\psi d\sigma$ et la forme linéaire $l(\psi) = \int_\Omega f\psi d\sigma$.

Définissons un espace discret $\mathbb{W}^h \in H_0^1(\Omega)$ engendré par une base de fonctions $\{w_i(\mathbf{x})\}$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$. Le nombre de fonctions de base dans l'approximation des éléments finis \mathbb{Q}_1 est égal au nombre de nœuds du domaine où sont situées les inconnues. Ainsi, toute fonction $\phi^h \in \mathbb{W}^h$ s'écrit

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_i \phi_i^h w_i(\mathbf{x}), \quad (3.103)$$

où ϕ_i^h sont les variables nodales.

Par conséquent, le problème revient à trouver $\phi^h \in \mathbb{W}^h$ telle que :

$$a(\phi^h, \psi) = l(\psi), \quad \forall \psi \in \mathbb{W}^h. \quad (3.104)$$

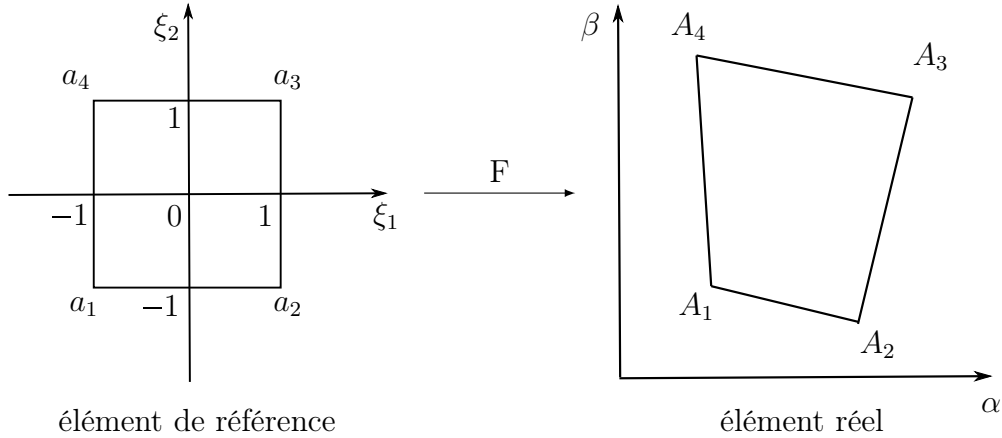


FIGURE 3.26 – Transformation géométrique

En injectant (3.103) dans (3.104) et en remplaçant successivement ψ par $w_j(\mathbf{x})$, on obtient un système linéaire

$$\mathbf{A}\Phi = \mathbf{L}, \quad (3.105)$$

où les termes A_{ij} , qui représentent l'interaction entre deux degrés de liberté i et j , sont construits en "assemblant" les contributions provenant de chacun des éléments qui contiennent les nœuds correspondants. On procède de la même façon pour construire le vecteur \mathbf{L} . Φ est le vecteur d'inconnue, telle que $\Phi = \{\phi_i^h\}$.

Pour le calcul de chaque terme A_{ij} , on se ramène à un élément de référence simple à partir duquel on peut générer tous les éléments d'une même famille par une transformation géométrique. Les termes A_{ij} sont alors calculés sur cet élément générique noté Ω_r , et le transport des grandeurs sur l'élément réel Ω_e est effectué grâce à la transformation géométrique F (voir la figure 3.26).

On définit l'élément de référence carré avec les sommets $a_1 = (-1, -1)$, $a_2 = (1, -1)$, $a_3 = (1, 1)$ et $a_4 = (-1, 1)$. Les sommets de l'élément réel s'obtiennent via la transformation F , *i.e.* $A_i = F(a_i)$, $i = 1, \dots, 4$. On définit quatre fonctions de forme associées aux sommets :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), \\ N_2(\xi) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2), \\ N_3(\xi) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), \\ N_4(\xi) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Ainsi, un point dans l'élément réel peut être exprimé par les coordonnées

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3 + \alpha_4 N_4, \\ \beta &= \beta_1 N_1 + \beta_2 N_2 + \beta_3 N_3 + \beta_4 N_4. \end{aligned} \quad (3.107)$$

La jacobienne de la transformation est donnée par la matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\xi_1} & \frac{\beta}{\xi_1} \\ \frac{\alpha}{\xi_2} & \frac{\beta}{\xi_2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 - \xi_2)(\alpha_2 - \alpha_1) + (1 + \xi_2)(\alpha_3 - \alpha_4) & (1 - \xi_2)(\beta_2 - \beta_1) + (1 + \xi_2)(\beta_3 - \beta_4) \\ (1 - \xi_1)(\alpha_4 - \alpha_1) + (1 + \xi_1)(\alpha_3 - \alpha_2) & (1 - \xi_1)(\beta_4 - \beta_1) + (1 + \xi_1)(\beta_3 - \beta_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Son déterminant et son inverse sont donnés immédiatement par

$$\det \mathbf{J} = \frac{\alpha}{\xi_1} \frac{\beta}{\xi_2} - \frac{\alpha}{\xi_2} \frac{\beta}{\xi_1}, \quad (3.108)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\xi_2} & -\frac{\beta}{\xi_1} \\ -\frac{\alpha}{\xi_2} & \frac{\alpha}{\xi_1} \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Les termes élémentaires à calculer sont de la forme

$$\int_{\Omega_e} f \left(u(\mathbf{x}), \frac{\partial(u(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}}, \dots \right) d\sigma. \quad (3.110)$$

Trois types d'opérations sont à effectuer :

- La transformation des dérivées s'effectue grâce à la matrice jacobienne \mathbf{J} par :

$$\frac{\partial(u(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\sum_{i=1}^4 u_i \hat{N}_i(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^4 u_i \frac{\partial \hat{N}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \sum_{i=1}^4 u_i \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi}, \quad (3.111)$$

où $\hat{N}(\mathbf{x}) = F(N_i(\xi))$.

- Le passage à l'intégration sur l'élément de référence s'effectue en multipliant l'intégrande par la valeur absolue du jacobien :

$$\int_{\Omega_e} f(u(\mathbf{x})) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_e} f(u(F(\xi))) |\det \mathbf{J}| d\xi. \quad (3.112)$$

- La réalisation numérique de cette intégration est réalisée par une formule de quadrature. L'approximation de l'intégrale est donnée sous forme d'une somme pondérée des valeurs de l'intégrande en un certain nombre de points de l'élément appelés points d'intégration :

$$\int_{\Omega_r} g(\xi) d\xi \approx \sum_{\ell} w_{\ell} g(\xi_{\ell}). \quad (3.113)$$

En utilisant les relations précédentes dans (3.104), on a les relations suivantes pour les termes élémentaires

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} A(\mathbf{x}) \nabla_{\mathbf{x}} N_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x}) d\omega \\ &= \int_{\Omega_r} A(\xi) \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} N_i(\xi) \cdot \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} N_j(\xi) |\det \mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 \\ &\approx \sum_{\ell} w_{\ell} A(\xi_{\ell}) \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} N_i(\xi_{\ell}) \cdot \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} N_j(\xi_{\ell}) |\det \mathbf{J}|, \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned}
 L_j^e &= \int_{\Omega_e} J_n(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x}) d\omega \\
 &= \int_{\Omega_r} J_n(\xi) \cdot \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} N_j(\xi) |\det \mathbf{J}| d\xi_1 d\xi_2 \\
 &\approx \sum_{\ell} w_{\ell} J_n(\xi_{\ell}) \cdot \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} N_j(\xi_{\ell}) |\det \mathbf{J}|.
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

On réalise l'assemblage globale des matrices A et L en utilisant pour chaque terme A_{IJ} et L_J les termes A_{ij}^e et L_j^e correspondant dans les matrices et vecteurs élémentaires A_e et L_e . Une fois le système linéaire déterminé, on le résout par un solveur direct ou itératif.

3.8.2 Méthode d'éléments finis type \mathbb{Q}_1 en 3D

La méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 en 3D est analogue que celle en 2D. Nous ne présentons ici que la transformation géométrique. En définissant l'élément de référence cubique avec les sommets $a_1 = (-1, -1, -1)$, $a_2 = (1, -1, -1)$, $a_3 = (-1, 1, -1)$, $a_4 = (1, 1, -1)$, $a_5 = (-1, -1, 1)$, $a_6 = (1, -1, 1)$, $a_7 = (-1, 1, 1)$, $a_8 = (1, 1, 1)$, on peut alors introduit huit fonctions de forme associées aux sommets :

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\
 N_2(\xi) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3), \\
 N_3(\xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3), \\
 N_4(\xi) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_3), \\
 N_5(\xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3), \\
 N_6(\xi) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_3), \\
 N_7(\xi) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3), \\
 N_8(\xi) &= \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_3).
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

Ainsi un point d'élément réel peut être exprimé comme

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3 + \alpha_4 N_4 + \alpha_5 N_5 + \alpha_6 N_6 + \alpha_7 N_7 + \alpha_8 N_8, \\
 \beta &= \beta_1 N_1 + \beta_2 N_2 + \beta_3 N_3 + \beta_4 N_4 + \beta_5 N_5 + \beta_6 N_6 + \beta_7 N_7 + \beta_8 N_8, \\
 \gamma &= \gamma_1 N_1 + \gamma_2 N_2 + \gamma_3 N_3 + \gamma_4 N_4 + \gamma_5 N_5 + \gamma_6 N_6 + \gamma_7 N_7 + \gamma_8 N_8.
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

Avec cette transformation géométrique, on détermine la jacobienne de la transformation

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\xi_1} & \frac{\beta}{\xi_1} & \frac{\gamma}{\xi_1} \\ \frac{\alpha}{\xi_2} & \frac{\beta}{\xi_2} & \frac{\gamma}{\xi_2} \\ \frac{\alpha}{\xi_3} & \frac{\beta}{\xi_3} & \frac{\gamma}{\xi_3} \end{pmatrix}$$

et l'inverse de la jacobienne

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\xi_2} \frac{\gamma}{\xi_3} - \frac{\gamma}{\xi_2} \frac{\beta}{\xi_3} & -\frac{\alpha}{\xi_2} \frac{\gamma}{\xi_3} + \frac{\gamma}{\xi_2} \frac{\alpha}{\xi_3} & \frac{\alpha}{\xi_2} \frac{\beta}{\xi_3} - \frac{\beta}{\xi_2} \frac{\alpha}{\xi_3} \\ -\frac{\beta}{\xi_1} \frac{\gamma}{\xi_3} + \frac{\gamma}{\xi_1} \frac{\beta}{\xi_3} & \frac{\alpha}{\xi_1} \frac{\gamma}{\xi_3} - \frac{\gamma}{\xi_1} \frac{\alpha}{\xi_3} & -\frac{\alpha}{\xi_1} \frac{\beta}{\xi_3} + \frac{\beta}{\xi_1} \frac{\alpha}{\xi_3} \\ \frac{\beta}{\xi_1} \frac{\gamma}{\xi_2} - \frac{\gamma}{\xi_1} \frac{\beta}{\xi_2} & -\frac{\alpha}{\xi_1} \frac{\gamma}{\xi_2} + \frac{\gamma}{\xi_1} \frac{\alpha}{\xi_2} & \frac{\alpha}{\xi_1} \frac{\beta}{\xi_2} - \frac{\beta}{\xi_1} \frac{\alpha}{\xi_2} \end{pmatrix}. \quad (3.118)$$

Chapitre 4

Irrégularités du plasma ionosphérique terrestre : prise en compte du gradient de pression

4.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons développé des schémas numériques pour les modèles Striation et Dynamo dans le système des potentiels d'Euler. Nous avons considéré que la gravité contrebalance l'effet du gradient de pression dans la direction alignée au champ magnétique. Ainsi nous avons négligé le gradient de pression et supprimé la composante de la gravité dans la direction alignée au champ magnétique.

Cependant, l'effet du gradient de pression est important dans la haute altitude de l'ionosphère [53]. En effet, la collision entre les particules chargées et les neutres est très faible dans la haute altitude, ainsi le déplacement du plasma est libre. Toutefois, la collision entre les particules chargées et les neutres est importante dans la basse altitude, limitant de fait le déplacement du plasma dans cette région. On fait l'hypothèse que le plasma est un gaz parfait, donc la pression peut être approchée par la relation $p = \nabla(\rho T)$. Une donnée initiale sous la forme d'une bulle de sous-densité du plasma située à l'origine dans la basse ionosphère montera vers la haute ionosphère en subissant des striations par l'effet de la dérive en $E \times B$. Dès que la bulle entre dans la haute ionosphère, elle est immédiatement écrasée par l'effet du gradient de la pression.

On considère tout d'abord dans ce chapitre le modèle Striation, qui se décompose en une équation d'advection-diffusion pour la densité du plasma et une équation elliptique pour le potentiel. On peut résoudre l'équation elliptique par l'algorithme 3.1 développé dans le chapitre précédent. On est cependant amené à résoudre l'équation d'advection-diffusion par un schéma implicite pour éviter une trop forte limitation sur le pas de temps pour des schémas explicites. Pour simplifier le problème, on considère un domaine de calcul cartésien dans le système des potentiels d'Euler. En appliquant la méthode de splitting dimensionnel, on obtient des équations de conservation de la masse en 1D dans les directions α et β , et une équation d'advection-diffusion en 1D dans la direction γ (direction alignée au champ magnétique). On peut résoudre les équations de conservation de la masse

en 1D par des schémas développés dans le chapitre précédent, par exemple l’algorithme 3.4. Pour résoudre l’équation d’advection-diffusion en 1D, on développe des schémas implicites de telle manière que le pas de temps ne dépende pas du terme de diffusion. On peut utiliser soit la méthode de splitting de Lie et puis discrétiser explicitement le terme d’advection et implicitement le terme de diffusion, soit un schéma implicite complet.

Le modèle Dynamo consiste en une équation elliptique en 3D couplée à une équation d’advection-diffusion en 3D. On peut développer des schémas analogues pour le modèle Dynamo. Cependant ce modèle ne peut pas reproduire l’évolution du plasma perturbé dû à la grande différence des échelles des mobilités transverses et alignée des particules. Une solution possible est de préparer la donnée initiale pour que les forces appliquées soient petites et les vitesses alignées soient comparables aux vitesses transverses.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 4.2, on présente les modèles ionosphériques prenant en compte le gradient de pression. Dans la section 4.3, on développe des schémas numérique pour les modèles Striation et Dynamo respectivement. Enfin, on présente les évolutions du plasma pour le modèle Striation et les difficultés du modèle Dynamo dans la section 4.4 .

4.2 Modèles ionosphériques prenant en compte du gradient de pression

Dans cette section, nous présentons des modèles ionosphériques prenant en compte le gradient de pression. Pour simplifier les schémas numériques, nous considérons un domaine de calcul cartésien $\Omega = \Omega_\alpha \times \Omega_\beta \times \Omega_\gamma$ dans le système des Potentiels d’Euler (voir la figure 4.1(a)), où $\Omega_\alpha = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, $\Omega_\beta = [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, $\Omega_\gamma = [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$. Le domaine est toujours défini par les paramètres H_h , H_l et H_w du chapitre précédent, à l’exception de H_e qui désigne l’altitude dans les couches externes la plus proche de la terre. De plus, on ne considère qu’une bulle de sous-densité du plasma perturbée par la gravité et omettons l’effet du vent neutre.

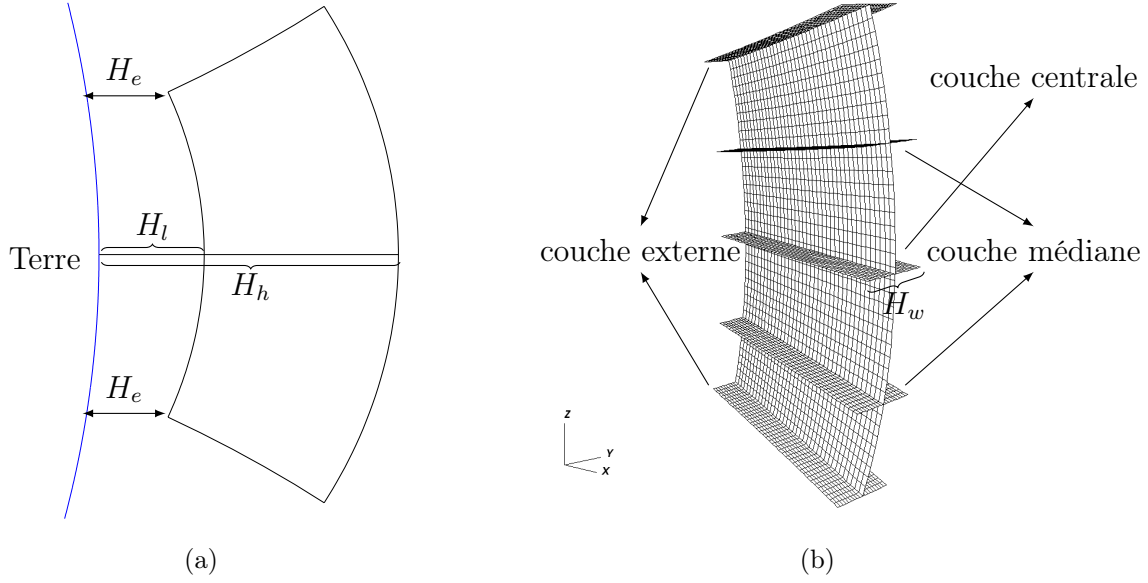


FIGURE 4.1 – Description du tube de champ magnétique.

4.2.1 Modèle Dynamo prenant en compte du gradient de la pression

En omettant le vent neutre dans le modèle Dynamo (3.17), on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i) = 0, \quad (4.1a)$$

$$E + u_i \times B = \kappa \left[\nu_i u_i - \zeta g + \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right], \quad (4.1b)$$

$$E + u_e \times B = -\kappa \left[\nu_e u_e + \eta \frac{\nabla(\rho T)}{\rho} \right], \quad (4.1c)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (4.1d)$$

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (4.1e)$$

$$\kappa j = \rho(u_i - u_e). \quad (4.1f)$$

Nous ensuite écrivons le modèle Dynamo (4.1) dans le système des Potentiels d'Euler suivant :

une équation elliptique en 3D

$$-\nabla^c \cdot (\mathcal{A} \nabla^c \phi) = -\nabla^c \cdot J_n, \quad (4.2)$$

où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & -D & 0 \\ D & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

$$J_n = \begin{pmatrix} j_{n\alpha} \\ j_{n\beta} \\ j_{n\gamma} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

avec les composantes

$$\begin{aligned} A &= \frac{\rho(\nu_i \mu_i^H + \nu_e \mu_e^H)}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^3}, & B &= \rho(\nu_i \mu_i^H + \nu_e \mu_e^H) \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{|B|}, \\ C &= \frac{\rho}{\kappa} (\mu_e^\parallel + \mu_i^\parallel), & D &= \frac{\rho(\nu_i \mu_i^P - \nu_e \mu_e^P)}{|B|^2}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

et

$$\begin{aligned} j_{n\alpha} &= \frac{\rho}{r \sin \varphi |B|^3} (\kappa \zeta \nu_i \mu_i^P g_\beta - \zeta g_\beta) + 2\eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\beta (\rho T) \\ &\quad - \frac{(\nu_i \mu_i^H - \nu_e \mu_e^H)}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^3} \kappa \eta \partial_\alpha (\rho T) - (\nu_i \mu_i^P + \nu_e \mu_e^P) \kappa \eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\beta (\rho T), \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} j_{n\beta} &= \frac{r \sin \varphi \rho}{|B|^2} (\kappa \zeta \nu_i \mu_i^H g_\beta) - 2\eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\alpha (\rho T) \\ &\quad + (\nu_i \mu_i^P + \nu_e \mu_e^P) \kappa \eta \frac{1}{|B|^2} \partial_\alpha (\rho T) - (\nu_i \mu_i^H - \nu_e \mu_e^H) \kappa \eta r^2 \sin^2 \varphi \frac{1}{|B|} \partial_\beta (\rho T), \end{aligned} \quad (4.6b)$$

$$j_{n\gamma} = \frac{1}{|B|} \rho \zeta g_\gamma \mu_i^\parallel - \eta \partial_\gamma (\rho T) (\mu_i^\parallel - \mu_e^\parallel). \quad (4.6c)$$

couplée à une équation d'advection-diffusion en 3D

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^c \cdot (vw) - \nabla^c \cdot (\mathcal{M} \nabla^c (\rho T)) = 0, \quad (4.7)$$

où $v = (v_\alpha, v_\beta, v_\gamma)$ avec

$$v_\alpha = \frac{1}{r \sin \varphi} \left(-\frac{\mu_i^P}{r \sin \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} - \mu_i^H \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \zeta g_\beta \right) \right), \quad (4.8a)$$

$$v_\beta = r \sin \varphi |B| \left(-\frac{\mu_i^H}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} + \mu_i^P \left(-r \sin \varphi |B| \frac{\partial \phi}{\partial \beta} + \kappa \zeta g_\beta \right) \right), \quad (4.8b)$$

$$v_\gamma = |B| \left(\mu_i^\parallel \left(-|B| \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} + \kappa \zeta g_\gamma \right) \right), \quad (4.8c)$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M_a & -M_d & 0 \\ M_d & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

avec les composantes $M_a = \kappa \eta \frac{\mu_i^P}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^2}$, $M_b = \kappa \eta r^2 \sin^2 \varphi \mu_i^P$, $\mu_i^\parallel \kappa \eta$, $M_d = \kappa \eta \frac{\mu_i^H}{|B|}$.

4.2.2 Modèle Striation prenant en compte le gradient de la pression

En passant la limite $\kappa \rightarrow 0$ dans le modèle Dynamo (4.1), on obtient le modèle Striation suivant

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad (4.10a)$$

$$j \times B = \nu \rho u - \zeta \rho g + 2\eta \nabla(\rho T), \quad (4.10b)$$

$$E + u \times B = 0, \quad (4.10c)$$

$$\nabla \times E = 0, \quad (4.10d)$$

$$\nabla \cdot j = 0, \quad (4.10e)$$

où $\nu = \nu_i + \nu_e$. De la même manière que dans la sous-section 3.2.4, on peut réécrire (4.10) dans le système des Potentiels d'Euler. Cependant l'hypothèse que le courant j s'annule sur les couches externes n'est plus valable, car les couches externes ne s'étendent plus à l'atmosphère neutre.

Notons le fait qu'un courant électrique est un déplacement d'ensemble de porteurs de charge électrique. En supposant que le plasma ambiant est initialement stationnaire et en notant que la bulle de sous-densité du plasma monte dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ magnétique, alors le courant est beaucoup plus faible au niveau des couches externes que celui de la couche centrale. Ainsi on peut encore supposer que le courant s'annule au niveau des couches externes. Sous cette hypothèse, on obtient le modèle Striation suivant :

une équation d'advection-diffusion en dimension trois

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^c \cdot (vw) - \partial_\gamma (m_\gamma \partial_\gamma (\rho T)) = 0, \quad (4.11a)$$

où $w = \frac{\rho}{|B|^2}$, avec les composants de la vitesse

$$v_\alpha = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \beta}, \quad v_\beta = -\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \alpha}, \quad v_\gamma = |B| \frac{\zeta}{\nu} g_\gamma, \quad m_\gamma = \frac{2\eta}{\nu |B|}, \quad (4.11b)$$

couplée à une équation elliptique en dimension deux

$$-\nabla_\perp^c (\mathcal{A}_\perp \nabla_\perp^c \bar{\phi}) = -\nabla_\perp^c J_{n\perp} \quad (4.11c)$$

$$\text{où } \mathcal{A}_\perp = \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A_\beta \end{pmatrix}, \quad J_{n\perp} = \begin{pmatrix} J_{n\alpha} \\ J_{n\beta} \end{pmatrix},$$

avec des coefficients A_α , A_β , $J_{n\alpha}$, $J_{n\beta}$ définis respectivement par

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \rho \nu \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^4} d\gamma, \\ A_\beta &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \rho \nu \frac{r^2 \sin^2 \varphi}{|B|^2} d\gamma, \\ J_{n\alpha} &= - \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} (\rho \zeta g_\beta - 2\eta r \sin \varphi |B| \partial_\beta(\rho T)) \frac{1}{r \sin \varphi |B|^3} d\gamma, \\ J_{n\beta} &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \left(\rho \zeta g_\alpha - \frac{2\eta}{r \sin \varphi} \partial_\alpha(\rho T) \right) \frac{r \sin \varphi}{|B|^2} d\gamma. \end{aligned}$$

4.3 Schémas numériques

Avant de discrétiser les modèles ionosphériques, nous donnons une partition du domaine Ω . Pour cela on utilise à nouveau les mêmes notations que dans le chapitre précédent. La partition des intervalles Ω_α et Ω_β est la même que dans la section 3.3.2. On subdivise Ω_γ par

$$\gamma_{\min} = \gamma_{1/2} < \gamma_1 < \gamma_{3/2} < \cdots < \gamma_{k-1/2} < \gamma_k < \gamma_{k+1/2} < \cdots < \gamma_{N_\gamma-1/2} < \gamma_{N_\gamma} < \gamma_{N_\gamma+1/2} = \gamma_{\max}.$$

Nous définissons aussi les pas d'espace dans la direction γ suivants $\Delta\gamma_k = \gamma_{k+1/2} - \gamma_{k-1/2}$, $k \in K_1$, $\Delta\gamma_{k-1/2} = \gamma_k - \gamma_{k-1}$, $k \in K_3$. La densité ρ est définie au centre de la cellule $S_{i,j,k}$ et le potentiel ϕ est défini aux sommets de la cellule $S_{i,j,k}$.

4.3.1 Discrétisation du modèle Striation

Calcul du potentiel électrique du modèle Striation

En imposant les conditions aux limites de Dirichlet pour l'équation elliptique (4.11c), on a

$$\begin{cases} -\nabla_\perp^c(\mathcal{A}_\perp \nabla_\perp^c \bar{\phi}) = -\nabla_\perp^c J_{n\perp}, & \text{dans } \Omega_\perp, \\ \bar{\phi} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\alpha \times \Omega_\beta \cup \Omega_\alpha \times \partial\Omega_\beta, \end{cases} \quad (4.12)$$

On utilise (3.43) pour discrétiser (4.12). Les coefficients A_α , A_β , $J_{n\alpha}$ et $J_{n\beta}$ sont approchés par

$$A_{\alpha,i,j-1/2} \approx \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho_{i,j-1/2,k} \int_{\gamma_{k-1/2}}^{\gamma_{k+1/2}} \frac{\nu}{r^2 \sin^2 \varphi |B|^4} d\gamma \right)_{i,j-1/2}, \quad (i,j) \in I_1 \times J_2, \quad (4.13a)$$

$$A_{\beta,i-1/2,j} \approx \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho_{i-1/2,j,k} \int_{\gamma_{k-1/2}}^{\gamma_{k+1/2}} \frac{\nu r^2 \sin^2 \varphi}{|B|^2} d\gamma \right)_{i-1/2,j}, \quad (i,j) \in I_2 \times J_1, \quad (4.13b)$$

$$J_{n\alpha,i,j-1/2} \approx - \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho \int_{\gamma_{k-1/2}}^{\gamma_{k+1/2}} \frac{\zeta g_\beta}{r \sin \varphi |B|^3} - \frac{2\eta}{|B|^2} \frac{\rho_{i,j,k} T_{i,j,k} - \rho_{i,j-1,k} T_{i,j-1,k}}{\Delta \beta_{j-1/2}} d\gamma \right)_{i,j-1/2},$$

$$(i, j) \in I_1 \times J_2, \quad (4.13c)$$

$$J_{n\beta,i-1/2,j} \approx \sum_{k=1}^{N_\gamma} \left(\rho \int_{\gamma_{k-1/2}}^{\gamma_{k+1/2}} \zeta g_\alpha \frac{r \sin \varphi}{|B|^2} - \frac{2\eta}{|B|^2} \frac{\rho_{i,j,k} T_{i,j,k} - \rho_{i-1,j,k} T_{i-1,j,k}}{\Delta \alpha_{i-1/2}} d\gamma \right)_{i-1/2,j},$$

$$(i, j) \in I_2 \times J_1, \quad (4.13d)$$

où $\rho_{i,j-1/2,k}$ et $\rho_{i-1/2,j,k}$ sont définies dans (3.45). Alors l'équation (4.12) peut être résolue par l'algorithme 3.1 avec les approximations de coefficients précédentes.

Calcul de la densité du modèle Striation

Pour résoudre l'équation d'advection-diffusion (3.39a), on note que le pas de temps du schéma explicite est limité par la condition CFL. Pour cela, on développe des schémas implicites dans cette sous-section.

On applique tout d'abord la méthode de splitting de Strang suivante :

$$\partial_t w + \partial_\alpha(v_\alpha w) = 0, \quad t \in [0, \frac{1}{2} \Delta t], \quad (4.14)$$

$$\partial_t w + \partial_\beta(v_\beta w) = 0, \quad t \in [0, \frac{1}{2} \Delta t], \quad (4.15)$$

$$\partial_t w + \partial_\gamma(v_\gamma w) - \partial_\gamma(m_\gamma \partial_\gamma(|B|^2 T w)) = 0, \quad t \in [0, \Delta t], \quad (4.16)$$

$$\partial_t w + \partial_\beta(v_\beta w) = 0, \quad t \in [0, \frac{1}{2} \Delta t], \quad (4.17)$$

$$\partial_t w + \partial_\alpha(v_\alpha w) = 0, \quad t \in [0, \frac{1}{2} \Delta t]. \quad (4.18)$$

On peut résoudre (4.14), (4.15), (4.17), (4.18) par les algorithmes 3.4 ou 3.6. Il reste à résoudre (4.16). Notons que (4.16) est une équation d'advection-diffusion en 1D, on peut déterminer immédiatement le schéma explicite suivant :

$$\begin{aligned} & \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - \bar{w}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta \gamma_k} (H_{i,j,k+1/2} - H_{i,j,k-1/2}) \\ & - \Delta t m_{\gamma,i,j,k+1/2} \frac{|B|_{i,j,k+1}^2 T_{i,j,k+1} \bar{w}_{i,j,k+1}^n - |B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^n}{\Delta \gamma_{k+1/2} \Delta \gamma_k} \\ & + \Delta t m_{\gamma,i,j,k-1/2} \frac{|B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^n - |B|_{i,j,k-1}^2 T_{i,j,k-1} \bar{w}_{i,j,k-1}^n}{\Delta \gamma_{k-1/2} \Delta \gamma_k} = 0, \\ & (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où $H_{i,j,k-1/2}$ est le flux numérique défini par

$$H_{i,j,k-1/2} = \begin{cases} v_{i,j,k-1/2} \bar{w}_{i,j,k-1} + \frac{1}{2} v_{i,j,k-1/2} (\Delta \gamma_{k-1/2} - v_{i,j,k-1/2} \Delta t) \sigma_{k-1}, & \text{si } v_{i,j,k-1/2} > 0, \\ v_{i,j,k-1/2} \bar{w}_{i,j,k} - \frac{1}{2} v_{i,j,k-1/2} (\Delta \gamma_{k-1/2} + v_{i,j,k-1/2} \Delta t) \sigma_k, & \text{si } v_{i,j,k-1/2} \leq 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

avec σ_k défini dans (3.62b). Pour les conditions aux limites, on suppose que $\bar{w}_{i,j,0}^n = \bar{w}_{i,j,1}^0$, $(i, j) \in I_1 \times J_1$ et $\bar{w}_{i,j,N_\gamma+1}^n = \bar{w}_{i,j,N_\gamma}^0$, $(i, j) \in I_1 \times J_1$. Enfin pour que le schéma explicite soit stable, le pas de temps doit satisfaire la relation suivante

$$\Delta t_n \leq \min \left(\frac{\min_i \Delta \alpha_i}{\max_{i,j,k} (v_{\alpha,i-1/2,j,k})}, \frac{\min_j \Delta \beta_j}{\max_{i,j,k} (v_{\beta,i,j-1/2,k})}, \frac{\left(\min_k \Delta \gamma_k \right)^2}{\max_{i,j,k} (\Delta \gamma_k v_{\gamma,i,j,k-1/2} + 2(m_\gamma)_{i,j,k-1/2} (|B|^2 T)_{i,j,k})} \right). \quad (4.21)$$

On résume le schéma explicite dans l'algorithme suivant :

Algorithme 4.1 calculer la densité en utilisant le schéma explicite

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

tantque $t_n \leq t_{\text{total}}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

 calculer le potentiel par l'algorithme 3.1 avec $\rho = \rho^n$.

Calcul de la densité ρ

$\Delta t_n \leftarrow (4.21)$

$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$

calculer la densité dans la direction α :

 discrétiser (4.14) et (4.18) par l'algorithme 3.4

calculer la densité dans les directions β :

 discrétise (4.15) et (4.17) par l'algorithme 3.4

calculer la densité dans les directions γ :

 discrétise (4.16) par (4.19)

$\rho^{n+1} = w^{n+1} |B|^2$

$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$

fin tantque

Dans le schéma (4.19), le pas de temps est d'ordre $\Delta \gamma^2$. On développe ensuite des schémas implicites pour l'équation (4.16). On utilise deux méthode suivantes :

- on applique la méthode de splitting de Lie pour (4.19), puis on discrétise explicitement l'équation d'advection et discrétise implicitement l'équation de diffusion ;
- on discrétise implicitement l'équation (4.19).

En appliquant la méthode de splitting de Lie, on obtient

$$\partial_t w + \partial_\gamma (v_\gamma w) = 0, \quad t \in [0, \Delta t], \quad (4.22)$$

$$\partial_t w - \partial_\gamma (m_\gamma \partial_\gamma (|B|^2 T w)) = 0, \quad t \in [0, \Delta t]. \quad (4.23)$$

On peut discrétiser encore (4.22) par l'algorithme 3.4 et discrétiser (4.23) par un schéma

implicite suivant :

$$\begin{aligned}
 \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - \Delta t m_{\gamma,i,j,k+1/2} \frac{|B|_{i,j,k+1}^2 T_{i,j,k+1} \bar{w}_{i,j,k+1}^{n+1} - |B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta \gamma_{k+1/2} \Delta \gamma_k} \\
 + \Delta t m_{\gamma,i,j,k-1/2} \frac{|B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - |B|_{i,j,k-1}^2 T_{i,j,k-1} \bar{w}_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta \gamma_{k-1/2} \Delta \gamma_k} = \bar{w}_{i,j,k}^n, \\
 (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1,
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

avec les conditions aux limites $\bar{w}_{i,j,0}^{n+1} = \bar{w}_{i,j,1}^0$, $(i, j) \in I_1 \times J_1$ et $\bar{w}_{i,j,N_\gamma+1}^{n+1} = \bar{w}_{i,j,N_\gamma}^0$, $(i, j) \in I_1 \times J_1$. Puis on peut écrire le schéma (4.24) sous la forme du système linéaire

$$A_{i,j} W_{i,j} = F_{i,j}, \quad (i, j) \in I_1 \times J_1, \tag{4.25}$$

où $A_{i,j}$, $F_{i,j}$ sont la matrice et le second membre correspondant à (4.24), $W_{i,j} = \{\bar{w}_{i,j,1}^{n+1}, \dots, \bar{w}_{i,j,N_\gamma}^{n+1}\}$. Le pas de temps doit satisfaire

$$\Delta t_n \leq \min \left(\frac{\min_i \Delta \alpha_i}{\max_{i,j,k} (v_{\alpha,i-1/2,j,k})}, \frac{\min_j \Delta \beta_j}{\max_{i,j,k} (v_{\beta,i,j-1/2,k})}, \frac{\min_k \Delta \gamma_k}{\max_{i,j,k} (v_{\gamma,i,j,k-1/2})} \right). \tag{4.26}$$

Notons que la matrice $A_{i,j}(\Delta t)$ est une fonction du pas de temps, ainsi la matrice change à chaque pas de temps. Notons aussi que la résolution du système linéaire est la partie la plus coûteuse dans le calcul. Si le pas de temps du schéma numérique est invariant, on alors peut stocker la décomposition LU de la matrice $A_{i,j}$ et utiliser les matrices L et U à chaque itération. On demande donc que le pas de temps du schéma numérique change le moins souvent possible.

Nous utilisons l'astuce précédente de la manière suivante. A partir de la donnée initiale, on peut calculer un pas de temps Δt_{new} par (4.26). Puis, par appel à PARDISO, on fait la décomposition LU de $A_{i,j}$ et pose $\Delta t_{old} = \Delta t_{new}$. Ensuite on met à jour la densité du plasma et recalcule le pas de temps Δt_{new} par (4.26). Si $\Delta t_{new} < \Delta t_{old}$, on refait la décomposition LU et pose $\Delta t_{old} = \Delta t_{new}$; sinon on garde Δt_{old} . Cette procédure évite de recalculer la décomposition LU à chaque pas de temps. On résume le schéma implicite-explicite dans l'algorithme suivant :

Algorithme 4.2 calculer la densité en utilisant le schéma implicite-explicite

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

$\Delta t_{old} \leftarrow \text{inf}$

tantque $t_n \leq t_{\text{total}}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

calculer le potentiel par l'algorithme 3.1 avec $\rho = \rho^n$.

Calcul de la densité ρ

$\Delta t_{new} \leftarrow (4.26)$

si $\Delta t_{new} \neq \Delta t_{old}$ **alors**

$\Delta t_n = \Delta t_{new}$

décomposition LU de $A_{i,j}$, $(i, j) \in I_1 \times J_1$,

$\Delta t_{old} = \Delta t_{new}$

sinon

$\Delta t_n = \Delta t_{old}$

finsi

$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$

calculer la densité dans la direction α :

discrétiser (4.14) et (4.18) par l'algorithme 3.4

calculer la densité dans les directions β :

discrétise (4.15) et (4.17) par l'algorithme 3.4

calculer la densité dans les directions γ :

discrétise (4.22) par l'algorithme 3.4

discrétise (4.23) par (4.26)

$\rho^{n+1} = w^{n+1}|B|^2$

$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$

fin tantque

Enfin, on considère un schéma implicite complètement pour résoudre l'équation (4.16). On utilise un schéma upwind implicite pour discrétiser le terme d'advection, alors ce schéma s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta \gamma_k} & \left((v_{i,j,k+1/2}^+ \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j,k+1/2}^- \bar{w}_{i,j,k+1}^{n+1}) - (v_{i,j,k-1/2}^+ \bar{w}_{i,j,k-1}^{n+1} + v_{i,j,k-1/2}^- \bar{w}_{i,j,k}^{n+1}) \right) \\ & - \Delta t m_{\gamma,i,j,k+1/2} \frac{|B|_{i,j,k+1}^2 T_{i,j,k+1} \bar{w}_{i,j,k+1}^{n+1} - |B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta \gamma_{k+1/2} \Delta \gamma_k} \\ & + \Delta t m_{\gamma,i,j,k-1/2} \frac{|B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - |B|_{i,j,k-1}^2 T_{i,j,k-1} \bar{w}_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta \gamma_{k-1/2} \Delta \gamma_k} = \bar{w}_{i,j,k}^n, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$(i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1,$

On peut aussi écrire (4.27) sous la forme de système linéaire

$$A_{i,j} W_{i,j} = F_{i,j}, \quad (i, j) \in I_1 \times J_1, \quad (4.28)$$

Le schéma (4.27) est inconditionnellement stable. Cependant, comme nous utilisons des schémas explicites pour les équations de conservation de la masse dans les directions α et β du modèle Striation, il existe une conditions de stabilité, le pas de temps devant satisfaire la condition CFL suivante :

$$\Delta t_n \leq \min \left(\frac{\min_i \Delta \alpha_i}{\max_{i,j,k} (v_{\alpha,i-1/2,j,k})}, \frac{\min_j \Delta \beta_j}{\max_{i,j,k} (v_{\beta,i,j-1/2,k})} \right). \quad (4.29)$$

Enfin, on résume ce schéma dans l'algorithme suivant :

Algorithme 4.3 calculer la densité en utilisant le schéma implicite complet pour (4.16)

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

$\Delta t_{old} \leftarrow \text{inf}$

tantque $t_n \leq t_{total}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

 calculer le potentiel par l'algorithme 3.1 avec $\rho = \rho^n$.

Calcul de la densité ρ

$\Delta t_{new} \leftarrow (4.29)$

si $\Delta t_{new} \neq \Delta t_{old}$ **alors**

$\Delta t_n = \Delta t_{new}$

 décomposition LU de $A_{i,j}$, $(i, j) \in I_1 \times J_1$,

$\Delta t_{old} = \Delta t_{new}$

sinon

$\Delta t_n = \Delta t_{old}$

finsi

$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$

calculer la densité dans la direction α :

 discrétiser (4.14) et (4.18) par l'algorithme 3.4

calculer la densité dans les directions β :

 discrétise (4.15) et (4.17) par l'algorithme 3.4

calculer la densité dans les directions γ :

 discrétise (4.16) par (4.27)

$\rho^{n+1} = w^{n+1} |B|^2$

$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$

fin tantque

4.3.2 Discrétisation du modèle Dynamo

Calcul du potentiel du modèle Dynamo

Notons que l'équation (4.2) est sous la même forme que l'équation (3.33d), ainsi on peut écrire les mêmes formules variationnelles que (3.85) et (3.91). Puis on peut discrétiser

les formules variationnelles par la méthodes d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 . Cependant, le gradient de la pression dans le second membre J_n n'est pas donné sous une forme explicite. Nous présentons donc ici sa discrétisation.

Pour projeter le second membre J_n dans le sous-espace de dimension finie \mathbb{V}_h , on a besoin de calculer l'intégrale $\int_{\Omega} J_n \cdot \nabla^c \psi_h dV$, où ψ_h est une fonction test dans \mathbb{V}_h . Puis on écrit $\int_{\Omega} J_n \cdot \nabla^c \psi_h dV = \sum_{i,j,k} \int_{S_{i,j,k}} J_n \cdot \nabla^c \psi_h dV$. Donc on doit intégrer $J_n \cdot \nabla^c \psi_h$ dans chaque maille $S_{i,j,k}$. Pour approcher $\nabla^c(\rho T)$ dans chaque maille, on utilise sa valeur au centre de la maille, *i.e.* $\nabla^c(\rho T)(\alpha, \beta, \gamma) \approx \nabla^c(\rho T)_{i,j,k}$, $\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in S_{i,j,k}$. Plus précisément, on écrit les approximations du gradient de la pression suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{\alpha}(\rho T)_{i,j,k} &= \frac{(\rho T)_{i+1,j,k} - (\rho T)_{i-1,j,k}}{2\Delta\alpha}, \quad (i, j, k) \in (2, \dots, N_{\alpha} - 1) \times J_1 \times K_1, \\ \partial_{\alpha}(\rho T)_{1,j,k} &= \frac{(\rho T)_{2,j,k} - (\rho T)_{1,j,k}}{\Delta\alpha}, \quad \partial_{\alpha}(\rho T)_{N_{\alpha},j,k} = \frac{(\rho T)_{N_{\alpha},j,k} - (\rho T)_{N_{\alpha}-1,j,k}}{\Delta\alpha}, \\ \partial_{\beta}(\rho T)_{i,j,k} &= \frac{(\rho T)_{i,j+1,k} - (\rho T)_{i,j-1,k}}{2\Delta\beta}, \quad (i, j, k) \in I_1 \times (2, \dots, N_{\beta} - 1) \times K_1, \\ \partial_{\alpha}(\rho T)_{i,1,k} &= \frac{(\rho T)_{i,2,k} - (\rho T)_{i,1,k}}{\Delta\beta}, \quad \partial_{\beta}(\rho T)_{i,N_{\beta},k} = \frac{(\rho T)_{i,N_{\beta},k} - (\rho T)_{i,N_{\beta}-1,k}}{\Delta\beta}, \\ \partial_{\gamma}(\rho T)_{i,j,k} &= \frac{(\rho T)_{i,j,k+1} - (\rho T)_{i,j,k-1}}{2\Delta\gamma}, \quad (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times (2, \dots, N_{\gamma} - 1), \\ \partial_{\gamma}(\rho T)_{i,j,1} &= \frac{(\rho T)_{i,j,2} - (\rho T)_{i,j,1}}{\Delta\gamma}, \quad \partial_{\gamma}(\rho T)_{i,j,N_{\gamma}} = \frac{(\rho T)_{i,j,N_{\gamma}} - (\rho T)_{i,j,N_{\gamma}-1}}{\Delta\gamma}. \end{aligned}$$

Calcul de la densité du modèle Dynamo

Pour discrétiser l'équation d'advection-diffusion (4.7), on applique la méthode de splitting suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla^c \cdot (vw) = 0, \quad t \in [0, \Delta t], \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nabla^c \cdot (\mathcal{M} \nabla^c(\rho T)) = 0, \quad t \in [0, \Delta t]. \quad (4.31)$$

Pour résoudre l'équation (4.30), on reproduit les mêmes schémas que dans le chapitre précédent. C'est à dire qu'on applique la méthode de splitting dimensionnel, pour ensuite discrétiser les équations de conservation de la masse en 1D par l'algorithme 3.4. Pour résoudre l'équation (4.31), on la développe d'abord comme :

$$\partial_t w - \partial_{\alpha}(M_a \partial_{\alpha}(\rho T)) - \partial_{\beta} M_d \partial_{\alpha}(\rho T) - \partial_{\beta}(M_b \partial_{\beta}(\rho T)) + \partial_{\alpha} M_d \partial_{\beta}(\rho T) - \partial_{\gamma}(M_c \partial_{\gamma}(\rho T)) = 0. \quad (4.32)$$

En utilisant de nouveau la méthode de splitting dimensionnel, on obtient

$$\partial_t w - \partial_{\alpha}(M_a \partial_{\alpha}(\rho T)) - \partial_{\beta} M_d \partial_{\alpha}(\rho T) = 0, \quad t \in [0, \Delta t], \quad (4.33)$$

$$\partial_t w - \partial_{\beta}(M_b \partial_{\beta}(\rho T)) + \partial_{\alpha} M_d \partial_{\beta}(\rho T) = 0, \quad t \in [0, \Delta t], \quad (4.34)$$

$$\partial_t w - \partial_{\gamma}(M_c \partial_{\gamma}(\rho T)) = 0, \quad t \in [0, \Delta t]. \quad (4.35)$$

On discrétise maintenant les équations (4.33), (4.34), (4.35) respectivement par

$$\begin{aligned}
 & \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - \Delta t M_{a,i+1/2,j,k} \frac{|B|_{i+1,j,k}^2 T_{i+1,j,k} \bar{w}_{i+1,j,k}^{n+1} - |B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta \alpha_{i+1/2} \Delta \alpha_i} \\
 & + \Delta t M_{a,i-1/2,j,k} \frac{|B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - |B|_{i-1,j,k}^2 T_{i-1,j,k} \bar{w}_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta \alpha_{i-1/2} \Delta \alpha_i} \\
 & - \frac{M_{d,i,j+1/2,k} - M_{d,i,j-1/2,k}}{\Delta \beta_j} \frac{|B|_{i+1,j,k}^2 T_{i+1,j,k} \bar{w}_{i+1,j,k}^{n+1} - |B|_{i-1,j,k}^2 T_{i-1,j,k} \bar{w}_{i-1,j,k}^{n+1}}{2 \Delta \alpha_i} = \bar{w}_{i,j,k}^n, \\
 & (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1, \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - \Delta t M_{b,i,j+1/2,k} \frac{|B|_{i,j+1,k}^2 T_{i,j+1,k} \bar{w}_{i,j+1,k}^{n+1} - |B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta \beta_{j+1/2} \Delta \beta_i} \\
 & + \Delta t M_{b,i,j-1/2,k} \frac{|B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - |B|_{i,j-1,k}^2 T_{i,j-1,k} \bar{w}_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta \beta_{j-1/2} \Delta \beta_j} \\
 & + \frac{M_{d,i+1/2,j,k} - M_{d,i-1/2,j,k}}{\Delta \alpha_i} \frac{|B|_{i,j+1,k}^2 T_{i,j+1,k} \bar{w}_{i,j+1,k}^{n+1} - |B|_{i,j-1,k}^2 T_{i,j-1,k} \bar{w}_{i,j-1,k}^{n+1}}{2 \Delta \beta_j} = \bar{w}_{i,j,k}^n, \\
 & (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1, \tag{4.37}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - \Delta t M_{c,i,j,k+1/2} \frac{|B|_{i,j,k+1}^2 T_{i,j,k+1} \bar{w}_{i,j,k+1}^{n+1} - |B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta \gamma_{k+1/2} \Delta \gamma_k} \\
 & + \Delta t M_{c,i,j,k-1/2} \frac{|B|_{i,j,k}^2 T_{i,j,k} \bar{w}_{i,j,k}^{n+1} - |B|_{i,j,k-1}^2 T_{i,j,k-1} \bar{w}_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta \gamma_{k-1/2} \Delta \gamma_k} = \bar{w}_{i,j,k}^n, \\
 & (i, j, k) \in I_1 \times J_1 \times K_1. \tag{4.38}
 \end{aligned}$$

De plus, on prend les mêmes conditions aux limites que dans (3.53). Enfin, on résume les discrétisation du modèle Dynamo dans l'algorithme suivant :

Algorithme 4.4 calculer la densité en utilisant le schéma implicite-explicite

Donner la densité initiale ρ^0 , $n = 0$ et $t_n = 0$

$\Delta t_{old} \leftarrow \inf$
tantque $t_n \leq t_{total}$ **faire**

Calcul du potentiel $\bar{\phi}$

écrire (3.33d) sous les formules variationnelles (3.85) et les discrétiser par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 ,

ou appliquer la méthode de préservant l'asymptotique (3.91) et la discrétiser par la méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1 .

Calcul de la densité ρ

$\Delta t_{new} \leftarrow (4.26)$

si $\Delta t_{new} \neq \Delta t_{old}$ **alors**

$\Delta t_n = \Delta t_{new}$

décomposition LU des systèmes linéaire correspondant aux schémas (4.36), (4.37), (4.38)

$\Delta t_{old} = \Delta t_{new}$

sinon

$\Delta t_n = \Delta t_{old}$

fin

$w^n = \frac{\rho^n}{|B|^2}$

résoudre l'équation (4.30) :

appliquer la méthode de splitting dimensionnel et discrétiser des équation de conservation de la masse en 1D par l'algorithme 3.4

résoudre l'équation (4.31) :

utiliser de nouveau la méthode de splitting dimensionnel et discrétiser l'équations (4.33), (4.34), (4.35) respectivement par (4.36), (4.37), (4.38)

$\rho^{n+1} = w^{n+1}|B|^2$

$t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$

fin tantque

4.4 Expériences numériques

4.4.1 Résultats numériques du modèle Striation

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques du modèle Striation. On considère un domaine de calcul avec les paramètres $H_h = 850$ km, $H_l = 150$ km, $H_e = 100$ km et $H_w = 200$ km. Puis on impose une bulle de sous-densité du plasma à 350 km de l'altitude. La densité de la bulle est de deux ordres de grandeur plus petit que celle du plasma ambiant. La bulle diminue exponentiellement dans la direction γ . On calcule l'évolution du plasma par les algorithmes 4.1, 4.2 et 4.3. Le temps physique de simulation

	Algorithme 4.1	Algorithme 4.2	Algorithme 4.3
Temps CPU (heure)	134.2	4.3	6.2
Nombre d'itérations	34816	1587	992
Nombre de décomposition LU		283	975
Erreur relative		0.0203	0.0368

TABLE 4.1 – Comparaison entre les différents algorithmes. On compare le temps CPU, le nombre d'itérations, le nombre de décomposition LU, et l'erreur relative entre le résultat de l'algorithme 4.1 et celui des algorithmes 4.2 et 4.3 au temps physique $t = 90$ minutes.

est de 90 minutes.

Dans le tableau 4.1, on présente des différentes quantités du calcul de la simulation. On observe que le temps CPU de l'algorithme 4.2 est le plus court, et celui de l'algorithme 4.3 est 1.5 fois celui de l'algorithme 4.2. Le temps CPU de l'algorithme 4.1 n'est pas acceptable, car il est 31 fois celui de l'algorithme 4.2. On peut obtenir un résultat similaire en comparant le nombre d'itérations. Cependant, notons que le nombre d'itérations de l'algorithme 4.3 est plus petit que celui de l'algorithme 4.2, mais il prend plus de temps CPU. Ceci est dû au grand nombre de décompositions LU. On voit que pour l'algorithme 4.2 le pas de temps change 283 fois tandis que celui de l'algorithme 4.3 change 975 fois. Le calcul de décomposition LU étant très coûteux, le temps CPU de l'algorithme 4.3 est donc plus long. On prend le résultat numérique de l'algorithme 4.1 comme une solution de référence. Puis on compare les erreurs relatives entre les résultats numériques des algorithmes 4.2, 4.3. Les résultats numériques des deux algorithmes approchent bien la solution de référence.

On présente l'évolution du plasma dans les figures 4.2, 4.3, 4.4, 4.5. On observe que la bulle de sous-densité monte de la basse altitude vers la haute altitude. La bulle est striée à la basse altitude puis est écrasée dès qu'elle entre dans la haute altitude. On voit aussi que dans la figure 4.4 que les couches initialement non-perturbées sont striées.

4.4.2 Difficultés du modèle Dynamo

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le modèle Dynamo est plus réaliste que le modèle Striation. Malheureusement, en l'état, le modèle Dynamo prenant en compte le gradient de pression ne permet pas de reproduire le phénomène de striations. Dans le modèle Dynamo, on peut définir deux échelles de temps distinctes : une très rapide associée à la mobilité des particules le long des lignes de champ ; l'autre plus lente associée aux mobilités perpendiculaires. Notons que la mobilité alignée est très grande comparativement aux mobilités transverses (voir la figure 3.11).

Les termes de force (gravité et gradient de pression) alignés avec le champ magnétique étant d'ordre un, le pas de temps du modèle numérique va être limité par l'évolution des quantités alignées avec le champ magnétique. La dynamique du modèle Dynamo conduit alors à la mise à l'équilibre du plasma dans la direction alignée de manière à annuler les forces qui s'exercent le long des lignes de champ. Cette mise à l'équilibre étant extrêmement rapide, la dynamique perpendiculaire n'a pas de temps de se développer sur ces échelles de temps.

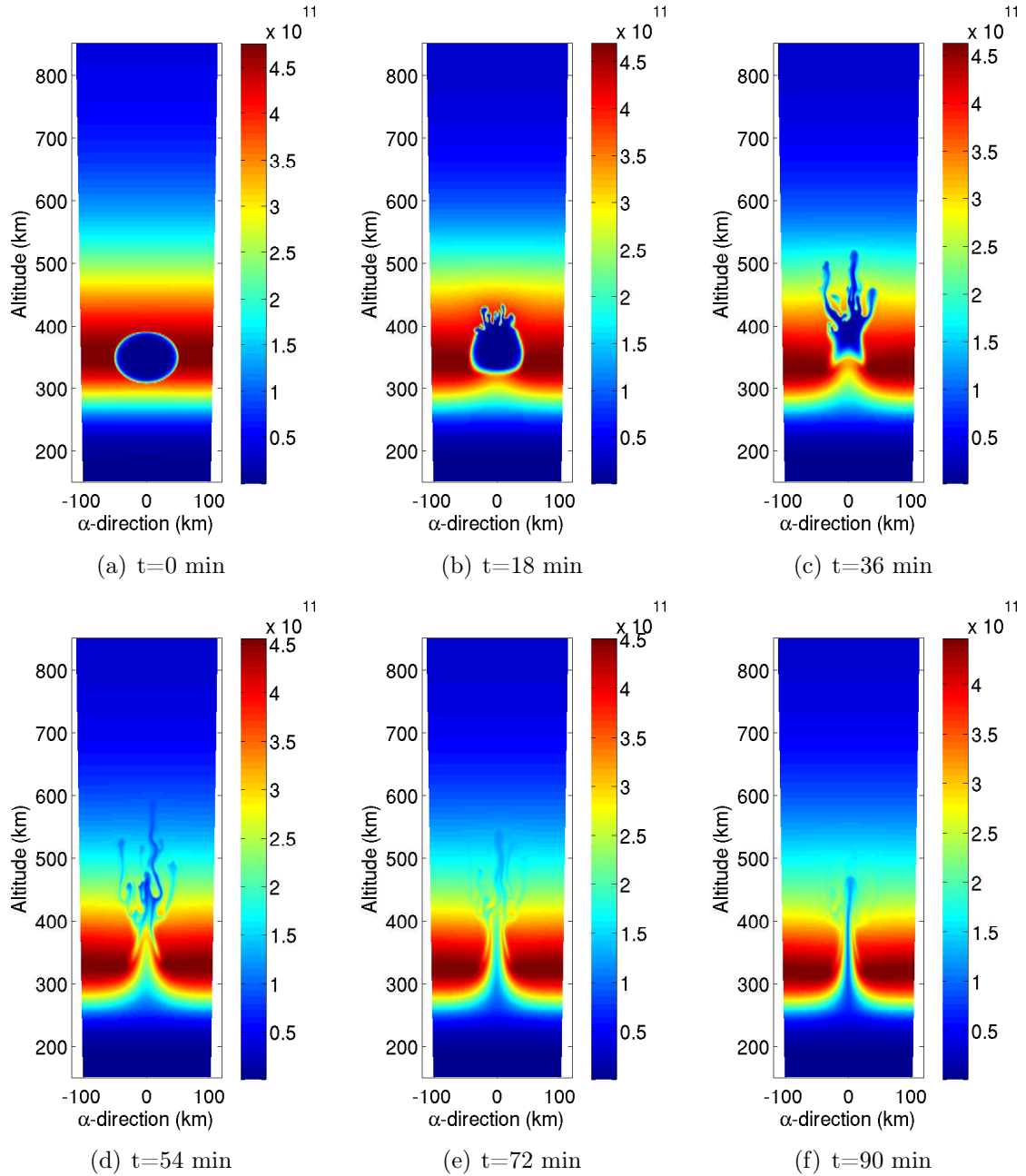


FIGURE 4.2 – Evolution de la bulle de sous-densité du plasma à la couche centrale en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$.

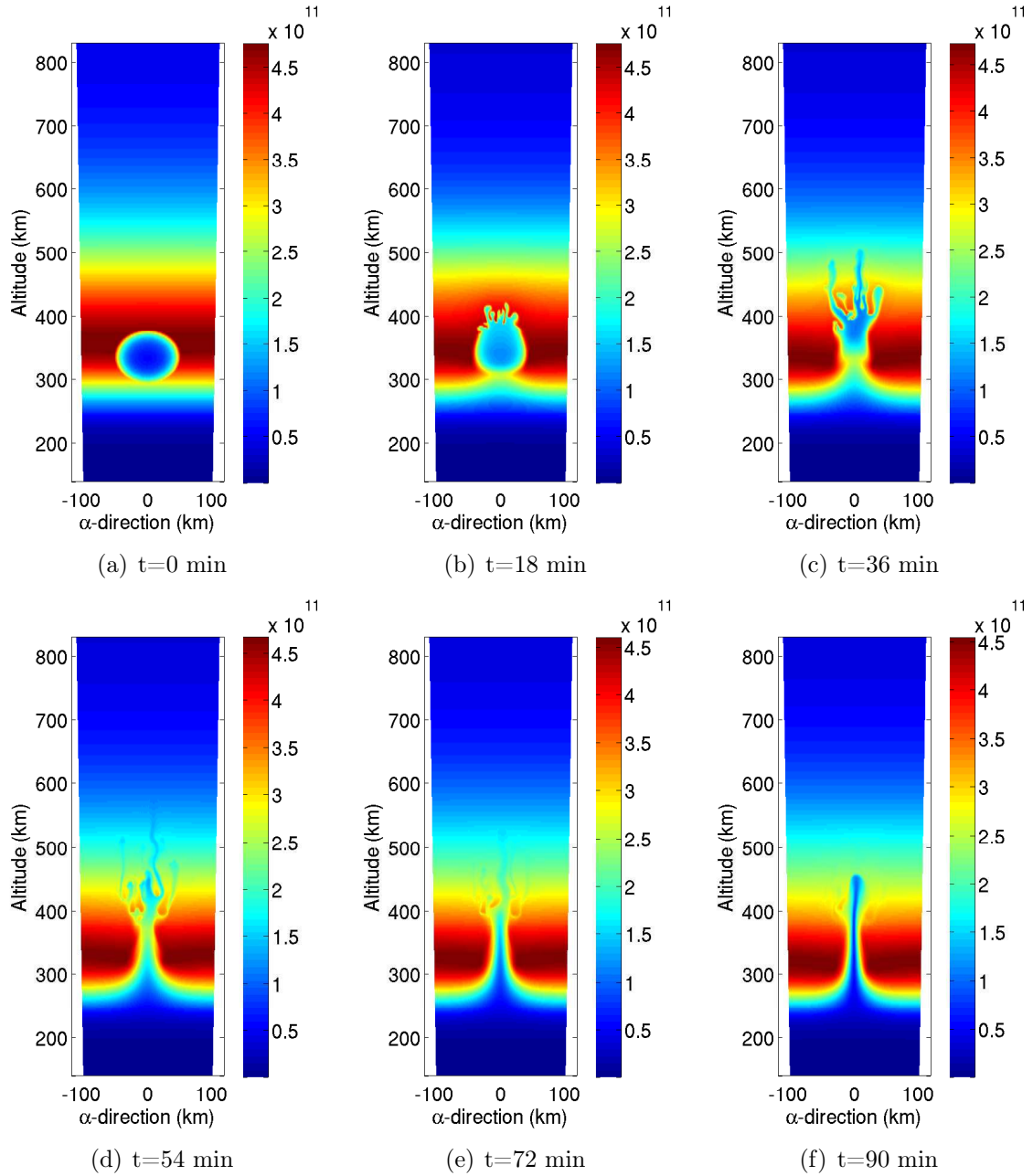


FIGURE 4.3 – Evolution de la bulle de sous-densité du plasma à la couche médiane en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$.

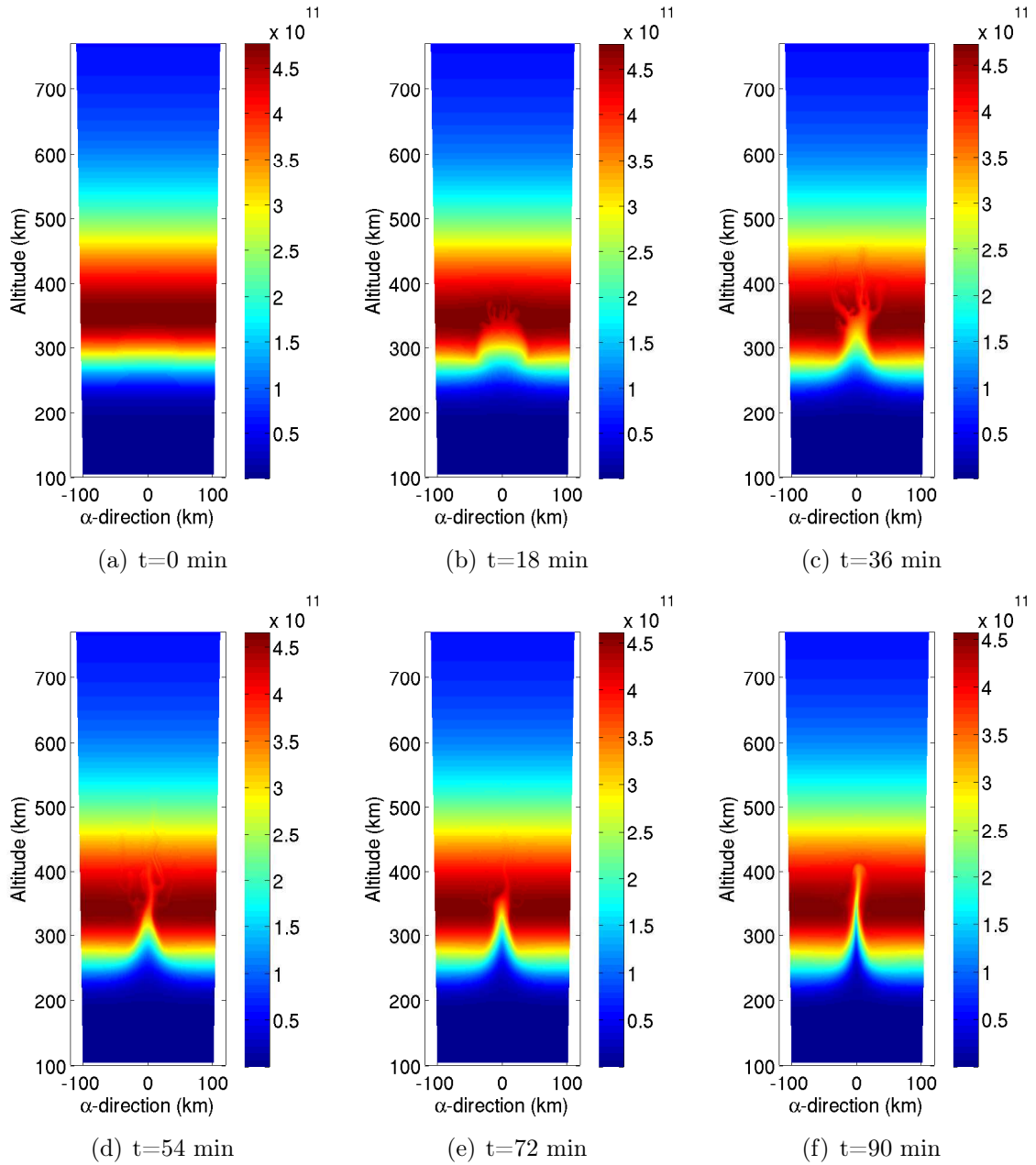


FIGURE 4.4 – Evolution de la bulle de sous-densité du plasma à la couche externe en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$.

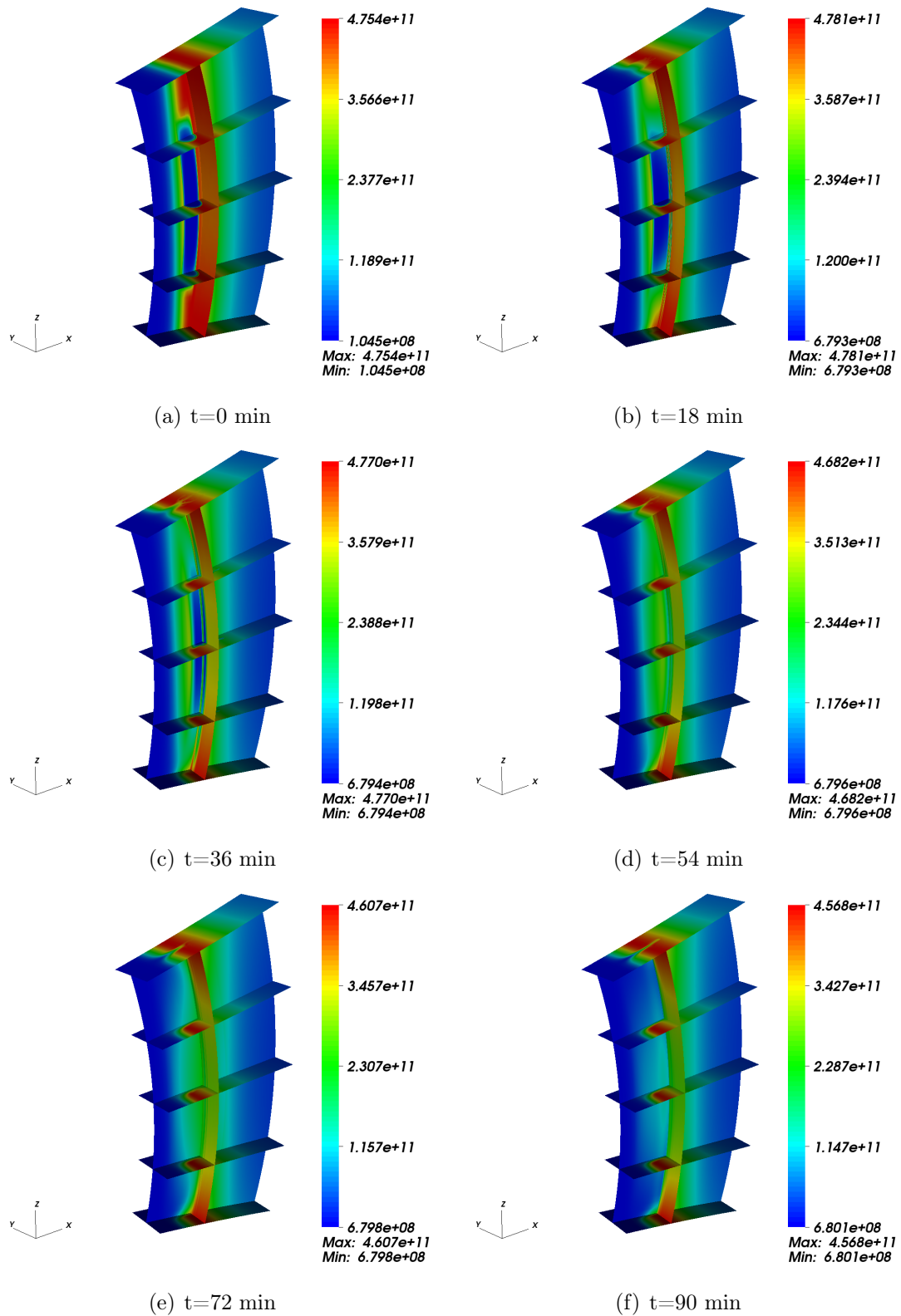


FIGURE 4.5 – Evolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$.

On peut également interpréter ces difficultés en analysant le potentiel résultant du modèle Dynamo avec prise en compte de la gravité et de la pression. Dans le chapitre 3, nous avons supposé que la gravité dans la direction alignée au champ magnétique contrebalance le gradient de pression. Cependant, avec l'environnement initial fourni par le modèle IRI, ces deux forces, la gravité et le gradient de pression, ne se compensent pas dans la direction alignée au champ magnétique. Dans le second membre de l'équation elliptique (4.2) $\nabla^c \cdot J_n = \partial_\alpha j_{n\alpha} + \partial_\beta j_{n\beta} + \partial_\gamma j_{n\gamma}$, les composantes $\partial_\alpha j_{n\alpha}$, $\partial_\beta j_{n\beta}$ sont d'ordre 1 tandis que $\partial_\gamma j_{n\gamma}$ est d'ordre $\frac{1}{\kappa^2}$. On a donc $\nabla^c \cdot J_n \approx \partial_\gamma j_{n\gamma}$, le potentiel étant ainsi quasi indépendant des forces perpendiculaires au champ magnétique. Dans la figure 4.6, on présente les valeurs du second membre. On voit que $\partial_\alpha j_{n\alpha} + \partial_\beta j_{n\beta}$ est très petit devant $\nabla^c \cdot J_n$. En résolvant l'équation elliptique (4.2), on obtient le potentiel présenté dans la figure 4.6(c). Si on suppose que $\partial_\gamma j_{n\gamma} = 0$ (ce qui est vrai si le gradient de pression équilibre la gravité dans la direction alignée), on obtient un autre potentiel illustré dans la figure 4.6(d). Ces deux potentiels sont totalement différents en structure et en magnitude. Le potentiel de la figure 4.6(d) ressemble à celui de la figure 3.14 du chapitre précédent. Le potentiel dans la figure 4.6(c) est quasi indépendant de la structure en forme de bulle de sous densité du plasma, ceci impliquant que les vitesses du plasma dans le plan perpendiculaire sont indépendantes de la présence de la bulle de sous-densité. Ceci explique la non formation des striations du plasma ionosphérique. Dans le modèle Striation, le potentiel est indépendant des forces (la gravité et le gradient de pression) alignées avec champ magnétique, ainsi le potentiel du modèle Striation est lié à la bulle de sous-densité du plasma et donc engendrent dans la basse altitude de l'ionosphère des striations.

Pour reproduire le phénomène de striations ionosphériques dans le cadre du modèle Dynamo avec prise en compte du gradient de pression, il est nécessaire que la mise à l'équilibre dans la direction alignée au champ magnétique soit déjà réalisée au moment où l'on démarre la simulation. Cela signifie qu'il faut préparer convenablement le condition initiale pour que le terme de force aligné au champ magnétique soit petit et que les vitesses alignées soient comparables aux vitesses transverses. Cela demande de revoir l'initialisation et en particulier la prise en compte d'un autre modèle d'ionosphère que celui fourni par IRI. Ces modifications feront l'objet d'un travail ultérieur.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié les modèles prenant en compte le gradient de pression. Ces modèles se traduisent par une équation elliptique pour le potentiel et une équation d'advection-diffusion pour la densité. Pour résoudre l'équation d'advection-diffusion, un schéma explicite est limité par la condition CFL. Pour contourner cette difficulté, on a développé des schémas implicite-explicite, explicite pour le terme d'advection et implicite pour le terme de diffusion. En utilisant le modèle Striation, nous avons observé qu'une bulle de sous-densité du plasma est perturbée par la gravité et elle est écrasée par la force du gradient de pression. Cependant, le modèle Dynamo ne peut pas reproduire une simulation similaire par cause d'une trop grande différence des échelles entre les mobilités transverses et alignées de particules.

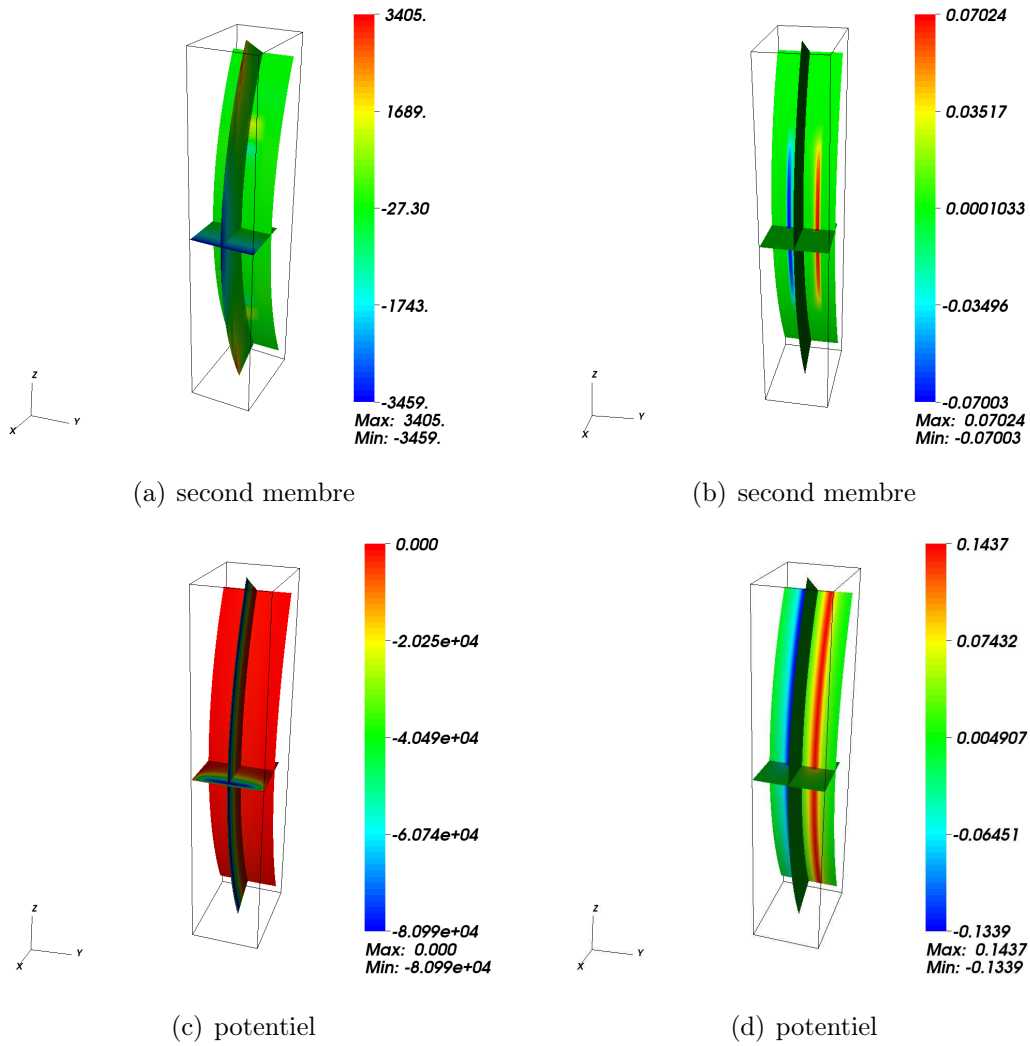


FIGURE 4.6 – Effet des mobilités transverses et alignées pour le potentiel du modèle Dynamo. Le domaine de calcul est défini par $H_h = 650$ km, $H_l = 250$ km, $H_e = 100$ km, $H_w = 400$ km. (a) est le second membre de l'équation (4.2) et (c) est le potentiel calculé par cette équation. (b) le second membre en supposant que $\partial_\gamma j_{n\gamma} = 0$ et (d) est le potentiel correspondant.

4.6 Annexe : Résolution d'une équation d'advection-diffusion en 1D

Dans cette section, nous étudions des schémas numériques pour une équation d'advection-diffusion en 1D. On considère une équation d'advection-diffusion avec des conditions aux limites périodiques suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u - D\partial_{xx}^2 u = 0, & x \in [-1, 1], t \in [0, \infty), \\ \text{C.L. périodique} \end{cases} \quad (4.39)$$

où c et $D > 0$ sont des constantes. On utilise une partition uniforme suivante

$$-1 = x_1 < \dots < x_i < \dots < x_N = 1,$$

où N est le nombre de la partition. Ainsi le pas d'espace est défini par $\Delta x = \frac{2}{N-1}$.

Avec cette partition, on peut déterminer un schéma explicite de (4.39) suivant :

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) = 0, \quad (4.40)$$

avec le flux numérique

$$F_{i-1/2} = \begin{cases} cu_{i-1}^n + \frac{1}{2}c(\Delta x - c\Delta t)\sigma_{i-1}, & \text{si } c > 0, \\ cu_i^n - \frac{1}{2}c(\Delta x + c\Delta t)\sigma_i, & \text{si } c \leq 0, \end{cases} \quad (4.41)$$

où σ_i est le limiteur Superbee défini par

$$\sigma_i = \max\text{mod}(\sigma_i^{(1)}, \sigma_i^{(2)}), \quad (4.42a)$$

$$\sigma_i^{(1)} = \max\text{mod}\left(\left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}\right), 2\left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right)\right), \quad (4.42b)$$

$$\sigma_i^{(2)} = \max\text{mod}\left(2\left(\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x}\right), \left(\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}\right)\right). \quad (4.42c)$$

Le schéma (4.40) est stable si et seulement si le pas de temps satisfait la relation suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{c\Delta x + 2D}. \quad (4.43)$$

Le schéma (4.40) est limité par la condition CFL, ainsi on développe des schémas implicites. Premièrement, on utilise la méthode de splitting de Lie comme suit :

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0, \quad t \in [0, \Delta t], \quad (4.44)$$

$$\partial_t u - D\partial_{xx}^2 u = 0, \quad t \in [0, \Delta t]. \quad (4.45)$$

On discrétise explicitement (4.44) comme

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2} - F_{i-1/2}) = 0, \quad (4.46a)$$

où le flux numérique $F_{i-1/2}$ est défini dans (4.41). Puis on discrétise implicitement (4.45) comme

$$u_i^{n+1} - u_i^n - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = 0. \quad (4.46b)$$

Le schéma (4.46) est stable si et seulement si le pas de temps satisfait la relation suivante

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}. \quad (4.47)$$

Ensuite, on développe des schémas implicites complètement. On discrétise le terme d'advection par les schémas upwind, centré et Crank-Nicolson respectivement. Les trois schémas sont présentés dans (4.48), (4.49), (4.50) :

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}((c^+ u_i^{n+1} + c^- u_{i+1}^{n+1}) - (c^+ u_{i-1}^{n+1} + c^- u_i^{n+1})) - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = 0, \quad (4.48)$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{c\Delta t}{2\Delta x}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = 0, \quad (4.49)$$

$$u_i^{n+1} - u_i^n + \frac{c\Delta t}{4\Delta x}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + \frac{c\Delta t}{4\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) = 0. \quad (4.50)$$

Les trois schémas sont inconditionnellement stable. On étudie maintenant la propriété de TVD du schéma. En effet, supposons que $c < 0$, on peut montrer d'abord que (4.39) vérifie la propriété de TVD. Soit η est une fonction convexe, alors on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \eta(u_x) dx &= \int_{\Omega} \eta'(u_x) \partial_t u_x dx \\ &= \int_{\Omega} \eta'(u_x) (-c u_{xx} + D u_{xxx}) dx \\ &= -c \int_{\Omega} (\eta(u_x))_x dx - D \int_{\Omega} \eta''(u_x) u_{xx}^2 dx \\ &= -D \int_{\Omega} \eta''(u) u_{xx}^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

En prenant $\eta(u_x) = \sqrt{\varepsilon + u_x^2}$ et en appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient la relation suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_x| dx \leq 0. \quad (4.51)$$

Pour tout $0 < t_1 \leq t_2$, on en déduit que

$$\int_{\Omega} |u(t_2, x)| dx \leq \int_{\Omega} |u(t_1, x)| dx. \quad (4.52)$$

Ensuite, on peut vérifier aussi que le schéma (4.48) a la propriété de TVD. En écrivant (4.48) par

$$\left(1 + \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_i^{n+1} - \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) u_{i+1}^{n+1} - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} = u_i^n, \quad (4.53)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) (u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) - \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}) \\ & = (u_i^n - u_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (4.54)$$

On déduit de (4.54) que

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) |u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}| \\ & \leq \left(\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} - \frac{c\Delta t}{\Delta x}\right) |u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}| + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} |u_{i-1}^{n+1} - u_{i-2}^{n+1}| + |u_i^n - u_{i-1}^n|. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Avec les conditions aux limites périodiques, on définit $u_0^{n+1} = u_{N-1}^{n+1}$, $u_N^{n+1} = u_1^{n+1}$. Enfin, en faisant la somme de i entre 1 et $N - 1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{N-1} |u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{N-1} |u_i^n - u_{i-1}^n|. \quad (4.56)$$

Ainsi (4.48) est un schéma TVD. Cependant les schémas (4.49), (4.50) n'ont pas cette propriété.

Maintenant on teste les schémas numériques développés ci-dessus. On considère un pic et un créneau comme la donnée initiale illustrée dans la figure 4.7. On calcule une solution de référence par le schéma explicite avec $N = 300$. Puis on résout (4.39) par les schémas (4.46), (4.48), (4.49), (4.50), et compare les résultats numériques avec la solution de référence. On présente les résultats dans une période dans la figure 4.7. On prend $c = -1$ tel que le flux propage de droite à gauche. On choisit d'abord $D = 10^{-1}$, alors le terme de diffusion est important (voir la colonne à gauche de la figure 4.7). Puis on prend $D = 10^{-10}$ tel que l'effet de diffusion est très faible.

Pour tester les schémas implicite, on prend $N = 100$. On observe dans la colonne à gauche de la figure 4.7 que les schémas (4.46), (4.49), (4.50) peuvent bien approcher la solution de référence. Le schéma (4.48) est d'ordre un en espace, ainsi son erreur relative est très grande. Dans la colonne à droite, on voit que le schéma (4.46) donne le meilleur résultat. Le schéma (4.48) est très diffusif et les schémas (4.49), (4.50) présentent des oscillations. Dans le tableau 4.2, on résume les erreurs relatives entre les solutions approchées et la solution de référence correspondant à la figure 4.7.

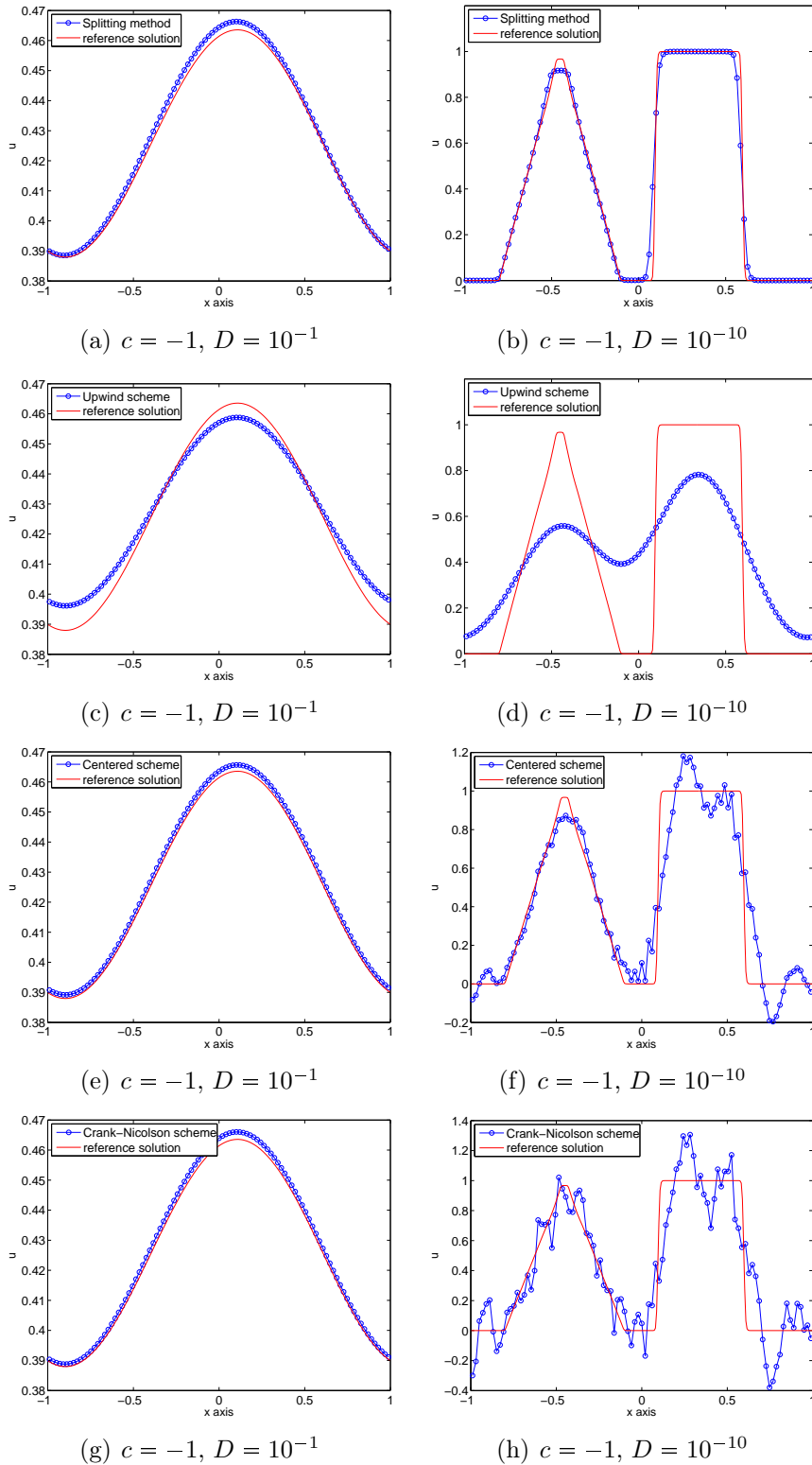


FIGURE 4.7 – Tests de l'équation d'advection-diffusion (4.39) après une période avec différentes méthodes.

	Splitting	Upwind	Centré	Crank-Nicolson
$D = 10^{-1}$	0.0048	0.0111	0.0038	0.0041
$D = 10^{-10}$	0.1280	0.4427	0.2168	0.2974

TABLE 4.2 – Erreur relative entre les solutions approchées et la solution de référence.

Deuxième partie

Etude numérique de l'équation de la
chaleur non linéaire pour plasma du
Tokamak

Chapitre 5

Etude numérique d'une équation non linéaire de la chaleur pour les plasmas²

5.1 Introduction

La description et la simulation du transport, et plus particulièrement de la turbulence de plasmas de bord en fusion magnétiquement confinée dans la région appelée SOL ("scrape of layer") d'un tokamak, est encore un des problèmes importants pour la production d'énergie générée par fusion (ITER). La compréhension des phénomènes physiques dans cette région du tokamak est fondamentale pour les performances de celui-ci. En particulier, les interactions plasmas-mur ainsi que les turbulences qui apparaissent ont un impact important sur les propriétés de confinement du plasma. D'un point de vue numérique, une approximation précise de l'évolution du plasma dans la SOL est essentielle puisque les flux d'énergie comme les flux de particules à la frontière sont utilisés en tant que conditions limites pour le modèle mathématique décrivant l'évolution du plasma dans le coeur du tokamak. Les propriétés physiques de ces deux régions (SOL et coeur) sont assez différentes, de sorte que des modèles différents sont utilisés pour leur modélisation : une approche gyrocinétique est utilisée pour la zone du coeur qui est peu collisionnelle et une approche fluide pour la SOL qui est une région fortement collisionnelle.

On trouve dans la littérature actuelle [30, 51] une grande variété de modèles pour la description de la SOL, modèles qui sont basés sur différentes hypothèses et qui ont pour but de décrire différents phénomènes physiques. On s'intéresse ici à un modèle 3D de tokamak (modèle TOKAM3D) présenté dans [50]. Le but de ce modèle est d'étudier les instabilités qui apparaissent dans la région SOL, comme par exemple l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ou encore les instabilités dues au gradient de température des électrons (ETG) ou des ions (ITG), etc ...

Le modèle TOKAM3D est basé sur une description bi-fluide (ions, électrons) et est composé de l'équation de continuité, du mouvement et d'énergie. Le modèle est fermé par

2. Ce chapitre fait l'objet d'un article soumis

la propriété de fermeture de Braginskii. Les équations sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha u_\alpha) = S_{n_\alpha}, \\ m_\alpha n_\alpha [\partial_t u_\alpha + (u_\alpha \cdot \nabla) u_\alpha] = -\nabla p_\alpha + n_\alpha e_\alpha (E + u_\alpha \times B) - \nabla \cdot \Pi_\alpha + R_\alpha, \\ \frac{3}{2} n_\alpha [\partial_t T_\alpha + (u_\alpha \cdot \nabla) T_\alpha] + p_\alpha \nabla \cdot u_\alpha = -\nabla \cdot q_\alpha - \Pi_\alpha : \nabla u_\alpha + Q_\alpha, \end{cases} \quad (5.1)$$

où n_α correspond à la densité des particules (avec $\alpha = e$ pour les électrons et $\alpha = i$ pour les ions), u_α à la vitesse des particules et $\Gamma_\alpha := n_\alpha u_\alpha$ au flux des particules. La constante m_α représente la masse des particules, e_α la charge des particules (avec $e_e = -1$ et $e_i = 1$), p_α la pression, Π_α le tenseur de viscosité. Le terme S_{n_α} est un terme source provenant du coeur du plasma. Enfin, R_α correspond à la force de friction due aux collisions, T_α à la température, q_α au flux d'énergie et Q_α au terme d'échange d'énergie dû aux collisions. Dans la fermeture de Braginskii, la pression est donnée par la loi des gaz parfaits $p_\alpha := n_\alpha T_\alpha$, la viscosité du plasma est supposée négligeable de sorte que $\nabla \Pi_\alpha = 0$ et $\Pi_\alpha : \nabla u_\alpha = 0$ et le flux d'énergie q_α est lui supposé être diffusif et donné en fonction du gradient de température par : $q_\alpha := -\kappa_\alpha \nabla T_\alpha$ suivant la loi de Fourier avec κ_α le coefficient de conductivité thermique. Le terme d'échange d'énergie Q_α est écrit sous la forme :

$$Q_\alpha := \mp 3 \frac{m_e n_\alpha}{m_i \tau_e} (T_e - T_i),$$

où τ_e est le temps de collision ion/électron.

Dues à la grande complexité du problème, plusieurs autres hypothèses sont faites, permettant de se concentrer sur certains objectifs et de filtrer les détails insignifiants et perturbants. Ces hypothèses, comme par exemple la quasi-neutralité $n_e \sim n_i$, ne sont pas détaillées ici et nous renvoyons le lecteur aux travaux plus physiques [13, 51, 56].

Plusieurs difficultés apparaissent lorsqu'on veut résoudre numériquement le système (5.1). On ne considérera ici que l'équation de température, qui nécessite elle-même encore beaucoup d'efforts à cause des difficultés numériques qu'elle présente. Ces difficultés numériques sont d'abord liées aux coefficients de conductivité thermique qui dépendent de la température elle-même ce qui conduit à un problème non linéaire. De plus, le champ magnétique fort qui confine le plasma du tokamak introduit une forte anisotropie dans le problème. En effet, les particules chargées tournent autour des lignes de champ magnétique, et bougent donc librement le long de ces lignes de champ, alors que leur dynamique dans les directions perpendiculaires est plus restreinte. Des quantités comme par exemple la résistivité ou la conductivité diffèrent de plusieurs ordres de grandeur suivant qu'on les regarde dans les directions parallèles ou perpendiculaires. Enfin, les conditions limites doivent être imposées ce qui est également une difficulté d'un pont de vue physique, mathématique et numérique.

On va maintenant décrire plus précisément le modèle qui nous intéresse ici. Dans ce chapitre on étudie une version simplifiée de l'équation d'évolution pour la température mais qui contient quand même toutes les difficultés présentées précédemment. On s'intéressera en particulier à l'étude des termes non linéaires et des conditions limites, l'anisotropie étant le but d'un autre travail en cours. Le domaine de simulation $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, dont

la frontière sera notée $\partial\Omega$, est présenté dans la Figure 5.1. Il est constitué d'une zone de coeur périodique séparée de la zone SOL non périodique par une séparatrice. Ses axes représentent la direction parallèle aux lignes de champ magnétiques (s) et la direction radiale (r). On supposera ici que toutes les quantités sont invariantes par rapport à l'angle poloidale φ . Les conductivités thermiques parallèles $\kappa_{s,\parallel}$ dépendent de $T_\alpha^{5/2}$ alors que les conductivités perpendiculaires $\kappa_{s,\perp}$, donnée par les turbulences, ne dépendent pas de la température [11].

Le système auquel on s'intéresse est le suivant :

$$\partial_t T_\alpha - \partial_s (K_{\parallel,\alpha} T_\alpha^{5/2} \partial_s T_\alpha) - \partial_r (K_{\perp,\alpha} \partial_r T_\alpha) = \pm \beta_\alpha (T_e - T_i), \quad (s, r) \in \Omega. \quad (5.2)$$

Il est complété des conditions limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_r T_\alpha = -Q_{\perp,\alpha}, \quad r = 0, \quad s \in (0, 1), \\ \partial_r T_\alpha = 0, \quad r = 1, \quad s \in (0, 1), \\ K_{\parallel,\alpha} T_\alpha^{5/2} \partial_s T_\alpha = \gamma_\alpha T_\alpha, \quad r \in (1/2, 1), \quad s = 0, \\ K_{\parallel,\alpha} T_\alpha^{5/2} \partial_s T_\alpha = -\gamma_\alpha T_\alpha, \quad r \in (1/2, 1), \quad s = 1, \\ T(t, 0, r) = T(t, 1, r), \quad r \in (0, 1/2), \end{array} \right. \quad (5.3)$$

et de la condition initiale :

$$T_\alpha(0) = T_\alpha^0 \geq 0. \quad (5.4)$$

Les paramètres de diffusion $0 < K_{\perp,\alpha} \ll K_{\parallel,\alpha}$ et le flux de chaleur du coeur $Q_{\perp,\alpha} > 0$ sont considérés comme donnés. Les conditions limites non linéaires pour le limiteur expriment le fait que le flux de chaleur est continue au bord. En effet, le flux de chaleur au bord $q := \gamma \Gamma_{\parallel} T$ est donné par la somme d'un terme diffusif et d'un terme convectif :

$$\gamma \Gamma_{\parallel} T = \frac{5}{2} \Gamma_{\parallel} T - |\kappa_{\parallel} \partial_s T|, \quad \Gamma_{\parallel} = nu_{\parallel}.$$

En $s = 0$ la vitesse des particules u_{\parallel} est strictement négative alors qu'en $s = 1$ elle est strictement positive ce qui conduit aux conditions limites (5.3). La constante γ_α diffère pour les électrons et les ions et en particulier, $\gamma_i \sim 0$ pour les ions et $\gamma_e \sim 5/2$ pour les électrons. Dans le cas des ions nous avons donc des conditions de type Neumann homogène pour le limiteur.

Ce chapitre se décompose de la façon suivante. Dans la section 5.2, on s'intéresse au problème parabolique non linéaire 1D :

$$\partial_t T - \partial_s (K_{\parallel} T^{5/2} \partial_s T) = 0,$$

complété des conditions limites non linéaires en $s = 0, 1$. On commence par faire une étude mathématique du problème. On compare ensuite la précision et le temps de simulation

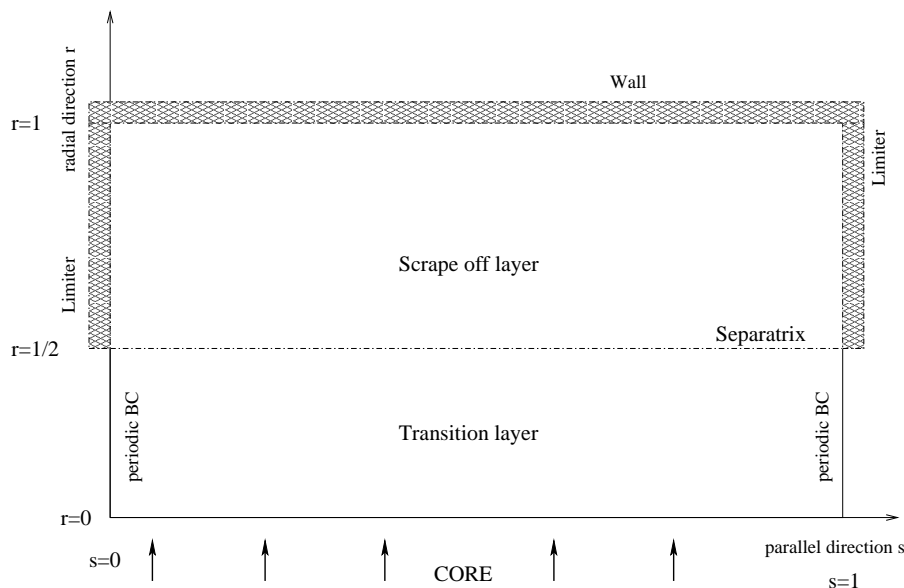


FIGURE 5.1 – Domaine en 2D.

de schémas explicite, implicite et IMEX pour la résolution numérique de ce problème 1D. Dans la section 5.3 on considère le problème 2D complet pour une seule espèce (et sans terme source). Une méthode de splitting directionnel de Lie est utilisé pour transformer le problème 2D en deux problèmes 1D et pouvoir ainsi appliquer les résultats de la section précédente. Finalement dans la dernière section, on résout le problème complet bipolaire. Les formes des températures des ions et des électrons sont comparées.

5.2 Le problème 1D non linéaire

On s'intéresse ici au problème non linéaire 1D correspondant à l'équation de température dans la direction parallèle *i.e.* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t T - \partial_s (K_{\parallel} |T|^{5/2} \partial_s T) = 0, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 1), \\ K_{\parallel} |T|^{5/2} \partial_s T = \gamma T, \quad s = 0, \\ K_{\parallel} |T|^{5/2} \partial_s T = -\gamma T, \quad s = 1, \\ T(0, \cdot) = T^0, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

où $\gamma \geq 0$ est une constante positive donnée, $K_{\parallel} \in L^{\infty}(\Omega)$, $T^0 \in L^2(\Omega)$ avec $T^0 \geq 0$ et $K_{\parallel} \geq 0$ presque partout. On notera ici $\Omega = (0, 1)$ le domaine spatiale et $Q := \mathbb{R}^+ \times (0, 1)$ l'espace-temps. Le but de cette section est d'étudier mathématiquement cette équation et d'introduire un schéma numérique efficace pour sa résolution. D'un point de vue physique le problème (5.5) décrit un processus de diffusion rapide de la température initiale T^0 et du flux sortant au bord.

5.2.1 Étude Mathématique

On commence par donner quelques propriétés de (5.5) comme l'existence et l'unicité de solution, la positivité de la solution ... etc. Pour simplifier la présentation on supposera dans la suite que $K_{\parallel} \equiv 1$, le cas général pouvant être traité de manière analogue.

Pour $p > 2$, on notera $1 < p' := \frac{p}{p-1} < 2$ son conjugué. Le coefficient de diffusion peut alors s'écrire $a(T) := |T|^{p-2}$. On définit de plus sa primitive :

$$\Lambda(T) := \int_0^T a(x) dx = \frac{1}{p-1} |T|^{p-2} T.$$

Avec ces notations, l'équation de diffusion peut être réécrite simplement sous l'une des deux formes

$$\partial_t T - \partial_s(a(T)\partial_s T) = 0, \quad \text{ou} \quad \partial_t T - \partial_{ss}(\Lambda(T)) = 0.$$

On va maintenant introduire dans la définition (5.1) le concept de solution faible et donner dans le théorème 5.2 le résultat d'existence et d'unicité de solution.

Définition 5.1. Soient T^0 dans $L^2(\Omega)$, \mathcal{W} inclus dans $L^p(\Omega)$ l'espace défini par

$$\mathcal{W} := \left\{ T \in L^2(Q), \quad |T|^{\frac{p-2}{2}} \partial_s T \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)), \quad \partial_t T \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, (W^{1,p}(\Omega))^*) \right\},$$

et $\mathcal{D} = \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^+, W^{1,p}(\Omega))$ l'espace des fonctions tests. Alors, la température $T \in \mathcal{W}$ est une solution faible de (5.5) si et seulement si

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} T(t, s) \partial_t \varphi(t, s) ds dt - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} |T(t, s)|^{p-2} \partial_s T(t, s) \partial_s \varphi(t, s) ds dt \\ & - \gamma \int_{\mathbb{R}^+} [T(t, 1)\varphi(t, 1) + T(t, 0)\varphi(t, 0)] dt + \int_{\Omega} T^0(s) \varphi(0, s) ds = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Notons que tous les termes de la formulation variationnelle sont bien définis. De plus, on remarque qu'une fonction $T \in L^p(\mathbb{R} \times \Omega)$ vérifiant $\partial_t T \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+, (W^{1,p}(\Omega))^*)$ appartient à $\mathcal{C}([0, \tau], (W^{1,p}(\Omega))^*)$ pour tout $\tau > 0$, par le lemme d'Aubin, de sorte que la condition initiale est bien définie.

Théorème 5.2. Soient $T^0 \in L^2(\Omega)$ telle que $T^0 \geq 0$. Alors le problème (5.5) admet une unique solution faible $T \in \mathcal{W}$ qui vérifie $T \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$, $T \geq 0$ presque partout et

$$\frac{d}{dt} \|T(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

La preuve de ce résultat est constituée de plusieurs étapes. On commence par supposer : $T^0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $\|T^0\|_\infty \leq M$ pour M fixé. Une troncature permet de traiter le cas plus général $T^0 \in L^2(\Omega)$.

Les deux principales difficultés mathématiques pour l'étude de (5.5) sont la non linéarité du problème et son caractère dégénéré, ce qui signifie que l'équation change de type quand $T = 0$.

Preuve. On commence par régulariser le problème afin de supprimer son caractère dégénéré. Puis dans un deuxième temps, on utilise un théorème de point fixe afin de traiter la non linéarité du problème. Enfin, grâce à des estimations a priori il est possible de passer à la limite et d'obtenir le résultat attendu pour le problème de départ.

Première étape : Régularisation. Soit $0 < \varepsilon < 1$ fixé, on définit le coefficient de diffusion régularisé par :

$$a_{\varepsilon, M}(T) := [\varepsilon^2 + \min(|T|^2, M^2)]^{\frac{p-2}{2}},$$

et la primitive correspondante :

$$\Lambda_{\varepsilon, M}(T) := \int_0^T a_{\varepsilon, M}(x) dx.$$

Les coefficients de diffusion étant maintenant bornés, des arguments standards permettent de montrer que le problème régularisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t T_{\varepsilon, M} - \partial_s (a_{\varepsilon, M}(T_{\varepsilon, M}) \partial_s T_{\varepsilon, M}) = 0, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^+ \times (0, 1), \\ a_{\varepsilon, M}(T_{\varepsilon, M}) \partial_s T_{\varepsilon, M} = \gamma T_{\varepsilon, M}, \quad s = 0, \\ a_{\varepsilon, M}(T_{\varepsilon, M}) \partial_s T_{\varepsilon, M} = -\gamma T_{\varepsilon, M}, \quad s = 1, \\ T(0, \cdot) = T^0, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

admet une unique solution faible $T_{\varepsilon, M} \in L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$ vérifiant la formulation variationnelle : pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} T_{\varepsilon, M}(t, s) \partial_t \phi(t, s) ds dt - \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} a_{\varepsilon, M}(T_{\varepsilon, M}) \partial_s T_{\varepsilon, M}(t, s) \partial_s \phi(t, s) ds dt \\ & - \gamma \int_{\mathbb{R}^+} [T_{\varepsilon, M}(t, 1) \phi(t, 1) + T_{\varepsilon, M}(t, 0) \phi(t, 0)] dt + \int_{\Omega} T^0(s) \phi(0, s) ds = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

On utilise ici le théorème de point fixe de Schauder, appliqué à l'application $\mathcal{T} : B_R \rightarrow B_R$ avec :

$$B_R := \{v \in L^2(Q), \|v\|_{L^2(Q)} \leq R\},$$

où à $v \in B_R$ on associe $\mathcal{T}v$ la solution du problème linéarisé associé à (5.6).

Deuxième étape : Estimations a priori. Pour pouvoir passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a besoin d'estimations a priori de la solution $T_{\varepsilon, M}$ indépendantes de ε . En utilisant $T_{\varepsilon, M}$ comme fonction test dans la formulation variationnelle (5.7) on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T_{\varepsilon, M}(t, s)|^2 ds + \int_0^t \int_{\Omega} a_{\varepsilon, M}(T_{\varepsilon, M}) |\partial_s T_{\varepsilon, M}|^2 ds d\tau \\ & + \gamma \int_0^t [|T_{\varepsilon, M}(\tau, 1)|^2 + |T_{\varepsilon, M}(\tau, 0)|^2] d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T^0(s)|^2 ds \end{aligned}$$

qui implique que pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{cases} \|T_{\epsilon,M}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|T^0\|_{L^2(\Omega)}, \\ \int_0^t \int_{\Omega} a_{\epsilon,M}(T_{\epsilon,M}) |\partial_s T_{\epsilon,M}|^2 ds d\tau \leq \|T^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{cases}$$

Ceci montre également que la suite $\{|T_{\epsilon,M}|^{\frac{p-2}{p}} \partial_s T_{\epsilon,M}\}_{\epsilon}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$ et donc $\{T_{\epsilon,M}\}_{\epsilon}$ est bornée dans $L^p(Q)$. De plus par des arguments classiques pour les problèmes paraboliques on en déduit que $\{\partial_t T_{\epsilon,M}\}_{\epsilon}$ est bornée dans $L^{p'}(\mathbb{R}^+, (W^{1,p}(\Omega))^*)$.

Troisième étape : Passage à la limite. Les estimations a priori de la deuxième étape permettent de montrer qu'il existe une sous-suite et une fonction $T_M \in L^2(Q)$ telles que :

$$T_{\epsilon,M} \rightharpoonup T_M \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0.$$

De plus, par des arguments de compacité classiques [48], on montre que l'ensemble de fonctions mesurables suivant

$$\mathcal{F} := \left\{ u : \mathbb{R}^+ \rightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*, \quad \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} |u|^{p-2} |\partial_s u|^2 ds dt \leq C, \quad \partial_t u \in L^{p'}(\mathbb{R}^+, (W^{1,p}(\Omega))^*) \right\},$$

est compactement contenu dans $L^p(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$, ce qui implique, à une sous-suite près,

$$T_{\epsilon,M} \rightarrow T_M, \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^+ \times \Omega), \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0$$

et donc $T_{\epsilon,M}$ tend vers T_M presque partout dans Q quand ϵ tend vers 0. De plus, comme $\{|T_{\epsilon,M}|^{\frac{p-2}{p}} T_{\epsilon,M}\}_{\epsilon}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$ on a :

$$|T_{\epsilon,M}|^{\frac{p-2}{2}} T_{\epsilon,M} \rightharpoonup |T_M|^{\frac{p-2}{2}} T_M, \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)), \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0,$$

ce qui implique, en utilisant la continuité de la trace :

$$|T_{\epsilon,M}|^{\frac{p-2}{2}} T_{\epsilon,M} \rightharpoonup |T_M|^{\frac{p-2}{2}} T_M, \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^+ \times \partial\Omega), \quad \text{as } \epsilon \rightarrow 0.$$

Finalement, en utilisant les mêmes arguments, on a également quand ϵ tend vers 0 :

$$\begin{cases} \Lambda_{\epsilon,M}(T_{\epsilon,M}) \rightharpoonup \Lambda_M(T_M), \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega)), \\ \partial_t T_{\epsilon,M} \rightharpoonup \partial_t T_M, \quad \text{in } L^{p'}(\mathbb{R}^+, (W^{1,p}(\Omega))^*). \end{cases}$$

Toutes ces convergences permettent de passer à la limite dans la formulation variationnelle (5.7) et d'obtenir l'existence d'une solution faible pour le problème (5.5). En utilisant des techniques analogues à celles utilisées dans l'étape 2, on peut montrer que cette solution est unique et vérifie le principe du maximum. \square

5.2.2 Une approximation volumes finis.

Ici, on se propose d'écrire un schéma numérique pour (5.5) en utilisant une approche volumes finis pour la discrétisation en espace. On considère un ensemble de $n_s + 1$ points de discrétisation $(s_{i-1/2})_{0 \leq i \leq n_s}$ de l'intervalle $(0, 1)$ avec $s_{-1/2} = 0$, $s_{n_s-1/2} = 1$. Pour $0 \leq i \leq n_s - 1$, on note $C_i = (s_{i-1/2}, s_{i+1/2})$ une cellule de contrôle, s_i le milieu de la cellule C_i et Δs_i le pas d'espace $\Delta s_i = s_{i+1/2} - s_{i-1/2}$ pour lequel on suppose qu'il existe $\xi \in (0, 1)$ tel que

$$\xi \Delta s \leq \Delta s_i \leq \Delta s, \quad \forall i \in \{0, \dots, n_s - 1\}, \quad (5.8)$$

avec $\Delta s = \max_i \Delta s_i$. On définit aussi $\Delta s_{i+1/2} = \frac{\Delta s_i + \Delta s_{i+1}}{2}$, $i = 0, \dots, n_s - 2$.

On doit construire un ensemble d'approximation $T_i(t)$ de la moyenne de la solution de (5.5) sur chaque cellule de contrôle C_i . On commence par poser :

$$T_i^0 = \frac{1}{\Delta s_i} \int_{C_i} T^0(s) ds.$$

En utilisant une discrétisation volumes finis de (5.5), T_i est solution d'un système d'EDO qui s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dT_i}{dt}(t) = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}}{\Delta s_i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \\ T_i(t = 0) = T_i^0, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \end{cases} \quad (5.9)$$

où le flux numérique est donné par :

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \frac{2 K_{\parallel}}{7} \frac{(T_{i+1})^{7/2} - (T_i)^{7/2}}{\Delta s_{i+1/2}}, \quad i = 0, \dots, n_s - 2. \quad (5.10)$$

De plus, en $s = 0$ et $s = 1$, on utilise les conditions aux bords :

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \begin{cases} +\gamma T_0, & \text{si } i = -1, \\ -\gamma T_{n_s-1}, & \text{si } i = n_s - 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Notons que la discrétisation en espace ci-dessus est d'ordre 1 à cause de la perte de précision à la frontière. Le schéma volumes finis (5.9)-(5.11) doit être complété par une discrétisation en temps permettant d'avoir la stabilité et la consistance du schéma. Dans la suite on présente plusieurs discrétisation en temps en commençant tout d'abord par des schémas explicite et implicite classiques puis en proposant un autre schéma stable et précis.

5.2.3 Discrétisation explicite en temps.

On note $\Delta t > 0$ le pas de discrétisation en temps, $t^n = n\Delta t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et T^n une approximation de la solution T de (5.5) au temps t^n . Alors, en utilisant un schéma

d'Euler explicite, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n}{\Delta s_i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \\ T_i^0 = T_{0,i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \end{cases} \quad (5.12)$$

avec $\mathcal{F}_{i+1/2}^n$ le flux donné par (5.10)-(5.11) calculé au temps t^n .

Classiquement, la stabilité du schéma (5.12) est garantie par une condition CFL sur le pas de temps Δt .

Proposition 5.3. *Supposons que la donnée initiale T^0 soit positive ou nulle et qu'elle appartienne à $L^\infty(0,1)$, et supposons vérifiée la condition CFL suivante :*

$$\Delta t \leq \frac{\xi^2 \Delta s^2}{\max\left(\frac{4K_{\parallel}}{7} \|T^0\|_\infty^{5/2}, \gamma \Delta s\right)}, \quad (5.13)$$

où ξ est donné par (5.8). Alors, la solution approchée $(T_i^n)_{i,n}$ obtenue par le schéma explicite (5.12) est stable et converge vers la solution exacte de (5.5).

On ne détaille pas ici la preuve de ce résultat puisqu'elle est similaire à la preuve de la proposition 5.5 présentée plus loin. Malheureusement ce schéma numérique simple devient coûteux quand le maillage est très fin, la contrainte sur le pas de temps devenant trop restrictive. En ce sens il n'est donc pas un schéma efficace.

5.2.4 Discrétisation implicite en temps.

Afin d'éliminer la contrainte sur le pas de temps (5.13), un schéma implicite est préférable. On considère donc le schéma de volumes finis (5.9)-(5.11), mais on utilise un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation en temps. On obtient :

$$\begin{cases} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1} - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta s_i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \\ T_i^0 = T_{0,i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \end{cases} \quad (5.14)$$

avec $\mathcal{F}_{i+1/2}^n$ le flux donné par (5.10)-(5.11) calculé au temps t^{n+1} . On doit donc résoudre un système totalement non linéaire à chaque itération en temps.

Le schéma (5.14) couplé à (5.10)-(5.11) est uniformément stable et conduit à une approximation numérique qui converge vers la solution exacte.

Théorème 5.4. *Soit $T^0 \in L^\infty(0,1)$ une condition initiale positive ou nulle. Alors la solution discrète donnée par le schéma (5.14) couplé à (5.10)-(5.11) est uniformément stable dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times (0,1))$ et converge vers la solution faible T de (5.5) quand $h = (\Delta t, \Delta s)$ tend vers 0.*

Pour démontrer ce théorème on commence par montrer un résultat de stabilité puis on utilise la consistance du schéma.

Commençons par la propriété de stabilité et la démonstration d'estimations a priori uniformes par rapport h de la solution discrète.

Proposition 5.5. *Soit $T^0 \in L^\infty(0,1)$ une donnée initiale positive ou nulle. Alors la solution discrète donnée par le schéma implicite (5.14) couplé à (5.10)-(5.11) est inconditionnellement stable i.e. :*

$$0 \leq T_i^n \leq \|T^0\|_{L^\infty}, \quad (5.15)$$

et

$$\sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i |T_i^{n+1}|^2 \leq \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i |T_i^0|^2. \quad (5.16)$$

De plus, la semi-norme discrète suivante est bornée :

$$\sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=0}^{n_s-2} \Delta t \frac{\left[(T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - (T_i^{n+1})^{7/2} \right]^2}{\Delta s_{i+1/2}} \leq C, \quad (5.17)$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de la donnée initiale T^0 .

Preuve. Soit $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction convexe, on a :

$$\phi(T_i^{n+1}) - \phi(T_i^n) \leq \phi'(T_i^{n+1})(T_i^{n+1} - T_i^n). \quad (5.18)$$

D'où, en multipliant le schéma (5.14) par $\Delta t \Delta s_i \phi'(T_i^{n+1})$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i \phi(T_i^{n+1}) - \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i \phi(T_i^n) &\leq \Delta t \sum_{i=0}^{n_s-1} \phi'(T_i^{n+1}) \left(\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1} - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1} \right), \\ &\leq -\Delta t \sum_{i=0}^{n_s-2} \mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1} \left(\phi'(T_{i+1}^{n+1}) - \phi'(T_i^{n+1}) \right) \\ &\quad - \Delta t \mathcal{F}_{-1/2}^{n+1} \phi'(T_0^{n+1}) + \Delta t \mathcal{F}_{n_s-1/2}^{n+1} \phi'(T_{n_s-1}^{n+1}). \end{aligned}$$

En utilisant la définition du flux (5.10) et les conditions limites (5.11), on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i \phi(T_i^{n+1}) - \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i \phi(T_i^n) &\leq -\gamma \Delta t \phi'(T_0^{n+1}) T_0^{n+1} - \gamma \Delta t \phi'(T_{n_s-1}^{n+1}) T_{n_s-1}^{n+1} \\ &\quad - \frac{2K\|}{7} \Delta t \sum_{i=0}^{n_s-2} \left[\phi'(T_{i+1}^{n+1}) - \phi'(T_i^{n+1}) \right] \frac{(T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - (T_i^{n+1})^{7/2}}{\Delta s_{i+1/2}}. \end{aligned}$$

Comme une inégalité similaire est encore vraie lorsque $\phi(x)$ est seulement Lipschitzienne, on choisit $\phi(x) = x^-$, où $x^- = x$ pour $x < 0$ et $x^- = 0$ pour $x \leq 0$ et on montre la positivité de l'approximation T_i^n , i.e. :

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^{n+1})^- \leq \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^0)^- = 0.$$

Alors, en supposant que T_i^0 est positive pour tout $0 \leq i \leq n_s - 1$, on obtient que T_i^n est positive pour tout $0 \leq i \leq n_s - 1$ et $n \in \mathbb{N}$. De plus, en prenant $\phi(x) = (x - M)^+$, avec $M = \|T^0\|_{L^\infty}$, où $(x - M)^+ = x - M$ pour $x > M$ et $(x - M)^+ = 0$ pour $x \leq M$, on a :

$$0 \leq \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^{n+1} - M)^+ \leq \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^n - M)^+ \leq \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^0 - M)^+ = 0.$$

On en déduit donc que $0 \leq T_i^n \leq M$ pour tout $0 \leq i \leq n_s - 1$.

On prend ensuite $\phi(x) = x^2/2$ qui conduit à

$$\sum_{i=0}^{n_s-1} \frac{\Delta s_i}{2} (T_i^{n+1})^2 - \sum_{i=0}^{n_s-1} \frac{\Delta s_i}{2} (T_i^n)^2 \leq C \Delta t \sum_{i=0}^{n_s-2} [T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}] \frac{(T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - (T_i^{n+1})^{7/2}}{2\Delta s_{i+1/2}},$$

et on utilise le fait que T_i^n est uniformément borné pour obtenir :

$$|T_{i+1}^{7/2} - T_i^{7/2}| \leq C |T_{i+1} - T_i|.$$

On a donc l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^{n+1})^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^n)^2 - C \Delta t \sum_{i=0}^{n_s-2} \frac{[(T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - (T_i^{n+1})^{7/2}]^2}{2\Delta s_{i+1/2}}$$

Finalement, en sommant sur $n \in \{0, \dots, N_t\}$ on en déduit immédiatement qu'il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de la donnée initiale T^0 telle que :

$$\Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=1}^{n_s-1} \frac{[(T_i^{n+1})^{7/2} - (T_{i-1}^{n+1})^{7/2}]^2}{\Delta s_{i+1/2}} \leq C.$$

□

5.2.5 Preuve du Théorème 2.4.

Preuve. Pour démontrer la convergence de la solution discrète $(T_i^n)_{i,n}$ vers la solution faible T de (5.5), on construit une approximation constante par morceaux T_h , où $h = (\Delta t, \Delta s)$, telle que :

$$T_h(t, s) := \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-1} T_i^n \mathbf{1}_{C_i}(s) \mathbf{1}_{[t^n, t^{n+1}]}(t), \quad (5.19)$$

Par les bornes uniformes de la proposition 5.5, on sait qu'il existe une sous-suite, encore notée $(T_h)_h$, telle que T_h converge vers $T \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times (0, 1))$ quand h tend vers 0 dans la topologie faible-*

Ensuite on montrera que $T_h^{7/2}$ converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^+ \times (0, 1))$ vers $T^{7/2}$. Pour cela, on va vérifier les conditions du théorème de Kolmogorov.

On note

$$S_h(t, s) := \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-1} (T_i^n)^{7/2} \mathbf{1}_{C_i}(s) \mathbf{1}_{[t^n, t^{n+1}[}(t). \quad (5.20)$$

Premièrement, on vérifie l'estimation de translation en espace sur l'approximation de la solution. Soit $\eta > 0$ et on pose $\Omega_\eta := \{s \in \Omega, [s, s + \eta] \in \Omega\}$, et on a pour tout $x \in \Omega_\eta$

$$|S_h(x + \eta, t^n) - S_h(x, t^n)| \leq \sum_{i=0}^{n_s-2} \chi_{C_i}(x, x + \eta) |(T_{i+1}^n)^{7/2} - (T_i^n)^{7/2}|,$$

où χ_{C_i} est définie par

$$\chi_{C_i}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in C_i, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} & |S_h(x + \eta, t^n) - S_h(x, t^n)|^2 \\ & \leq \left(\sum_{i=0}^{n_s-2} \chi_{C_i}(x, x + \eta) \frac{|(T_{i+1}^n)^{7/2} - (T_i^n)^{7/2}|^2}{\Delta s_{i+1/2}} \right) \left(\sum_{i=0}^{n_s-2} \chi_{C_i}(x, x + \eta) \Delta s_{i+1/2} \right), \end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{i=0}^{n_s-2} \chi_{C_i}(x, x + \eta) \Delta s_{i+1/2} \leq \eta + h.$$

Ainsi en utilisant l'estimation (5.17), on obtient que

$$\begin{aligned} & \|S_h(\cdot + \eta, \cdot) - S_h(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\Omega_\eta \times (0, t^{N_t}))}^2 \\ & = \int_0^{t^{N_t}} \int_{\Omega_\eta} |S_h(x + \eta, t) - S_h(x, t)|^2 dx dt \\ & \leq \int_0^{t^{N_t}} \int_{\Omega_\eta} \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=0}^{n_s-2} \chi_{C_i}(x, x + \eta) \frac{|(T_{i+1}^n)^{7/2} - (T_i^n)^{7/2}|^2}{\Delta s_{i+1/2}} \mathbf{1}_{[t^n, t^{n+1}[} dx dt \\ & \leq \eta(\eta + h) \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=0}^{n_s-2} \frac{|(T_{i+1}^n)^{7/2} - (T_i^n)^{7/2}|^2}{\Delta s_{i+1/2}} \\ & \leq C\eta(\eta + h). \end{aligned}$$

Deuxièmement, on vérifie l'estimation de translation de l'approximation de solution en temps. Soit $\tau > 0$ et en notant que S_h est une fonction lipschitzienne, on a

$$\begin{aligned} & \|S_h(\cdot, \cdot + \tau) - S_h(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\Omega \times (0, t^{N_t} - \tau))}^2 \\ & = \int_0^{t^{N_t} - \tau} \int_0^1 |S_h(s, t + \tau) - S_h(s, t)|^2 ds dt \\ & \leq B \int_0^{t^{N_t} - \tau} \int_0^1 (S_h(s, t + \tau) - S_h(s, t))(T_h(s, t + \tau) - T_h(s, t)) ds dt, \end{aligned}$$

où $B = \frac{7}{2} \|T_h\|_{L^\infty(\Omega \times (0, t_{N_t}))}^{5/2}$. Posons maintenant

$$A(t) = \int_0^1 (S_h(s, t + \tau) - S_h(s, t))(T_h(s, t + \tau) - T_h(s, t)) ds.$$

Avec les définitions de (5.19) et (5.20), on reformule $A(t)$ par

$$\begin{aligned} A(t) &= \sum_{i=0}^{N_s-1} \Delta s_i ((T_i^{n_1(t)})^{7/2} - (T_i^{n_0(t)})^{7/2}) \left(\sum_{n=n_0(t)+1}^{n_i(t)} (T_i^n - T_i^{n-1}) \right) \\ &= \sum_{i=0}^{N_s-1} \Delta s_i ((T_i^{n_1(t)})^{7/2} - (T_i^{n_0(t)})^{7/2}) \left(\sum_{n=1}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) (T_i^n - T_i^{n-1}) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(\sum_{i=0}^{N_s-1} \Delta s_i ((T_i^{n_1(t)})^{7/2} - (T_i^{n_0(t)})^{7/2}) (T_i^n - T_i^{n-1}) \right) \\ &= \Delta t \sum_{n=1}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(\sum_{i=0}^{N_s-1} ((T_i^{n_1(t)})^{7/2} - (T_i^{n_0(t)})^{7/2}) (\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n) \right) \\ &= \Delta t \sum_{n=1}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(\sum_{i=0}^{N_s-2} ((T_{i+1}^{n_1(t)})^{7/2} - (T_{i+1}^{n_0(t)})^{7/2} - (T_i^{n_1(t)})^{7/2} + (T_i^{n_0(t)})^{7/2}) \mathcal{F}_{i+1/2}^n \right. \\ &\quad \left. - ((T_{n_s-1}^{n_1(t)})^{7/2} - (T_{n_s-1}^{n_0(t)})^{7/2}) \gamma T_{n_s-1}^n - ((T_0^{n_1(t)})^{7/2} - (T_0^{n_0(t)})^{7/2}) \gamma T_0^n \right), \end{aligned}$$

où $n_0(t), n_1(t) \in \{0, \dots, N_t\}$ tels que $n_0(t)\Delta t \leq t < (n_0(t) + 1)\Delta t$ et $n_1(t)\Delta t \leq t + \tau < (n_1(t) + 1)\Delta t$. En utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, on obtient

$$A(t) \leq \frac{1}{2} A_0(t) + \frac{1}{2} A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) + A_4(t),$$

avec

$$\begin{aligned} A_0(t) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(\sum_{i=0}^{n_s-1} \frac{((T_{i+1}^{n_0(t)})^{7/2} - (T_i^{n_0(t)})^{7/2})^2}{\Delta s_{i+1/2}} \right), \\ A_1(t) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(\sum_{i=0}^{n_s-1} \frac{((T_{i+1}^{n_1(t)})^{7/2} - (T_i^{n_1(t)})^{7/2})^2}{\Delta s_{i+1/2}} \right), \\ A_2(t) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(\sum_{i=0}^{n_s-1} \frac{((T_{i+1}^n)^{7/2} - (T_i^n)^{7/2})^2}{\Delta s_{i+1/2}} \right), \\ A_3(t) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(-((T_{n_s-1}^{n_1(t)})^{7/2} - (T_{n_s-1}^{n_0(t)})^{7/2}) \gamma T_{n_s-1}^n \right), \\ A_4(t) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(-((T_0^{n_1(t)})^{7/2} - (T_0^{n_0(t)})^{7/2}) \gamma T_0^n \right). \end{aligned}$$

Notons que $t \in (0, t^{N_t} - \tau)$, $n_0(t) \in \{0, \dots, N_t\}$, et pour tout $m \in \{0, \dots, N_t\}$, $n_0(t) = m$ si et seulement si $t \in [m\Delta t, (m+1)\Delta t)$. Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^{N_t} - \tau} A_0(t) dt \\ & \leq \sum_{m=0}^{N_t - \tau} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(\sum_{i=0}^{n_s - 1} \frac{((T_{i+1}^{n_0(t)})^{7/2} - (T_i^{n_0(t)})^{7/2})^2}{\Delta S_{i+1/2}} \right) dt \\ & \leq \Delta t \sum_{m=0}^{N_t - \tau} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \left(\sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \right) dt \left(\sum_{i=0}^{n_s - 1} \frac{((T_{i+1}^m)^{7/2} - (T_i^m)^{7/2})^2}{\Delta S_{i+1/2}} \right). \end{aligned}$$

De plus, on peut vérifier que

$$\int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) dt \leq \tau.$$

Enfin, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_0^{t^{N_t} - \tau} A_0(t) dt & \leq \tau \Delta t \sum_{m=0}^{N_t} \sum_{i=0}^{n_s - 1} \frac{((T_{i+1}^m)^{7/2} - (T_i^m)^{7/2})^2}{\Delta S_{i+1/2}} \\ & \leq C\tau. \end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$\int_0^{t^{N_t} - \tau} A_1(t) dt \leq C\tau.$$

En procédant de manière identique, on obtient l'estimation de $\int_0^{t^{N_t} - \tau} A_2(t) dt$ suivante

$$\begin{aligned} \int_0^{t^{N_t} - \tau} A_2(t) dt & \leq \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \sum_{i=0}^{n_s - 2} \frac{((T_{i+1}^n)^{7/2} - (T_i^n)^{7/2})^2}{\Delta S_{i+1/2}} \int_0^{t^{N_t} - \tau} \chi_n(t, t + \tau) dt \\ & \leq C\tau \end{aligned}$$

Ensuite, on estime le terme en A_3 :

$$\begin{aligned} \int_0^{t^{N_t} - \tau} A_3(t) dt & = \int_0^{t^{N_t} - \tau} \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) \left(-((T_{n_s - 1}^{n_1(t)})^{7/2} - (T_{n_s - 1}^{n_0(t)})^{7/2}) \gamma T_{n_s - 1}^n \right) dt \\ & \leq \|T^0\|_\infty B \gamma \int_0^{t^{N_t} - \tau} \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) |T_{n_s - 1}^{n_1(t)} - T_{n_s - 1}^{n_0(t)}| dt \\ & \leq \|T^0\|_\infty B \gamma \int_0^{t^{N_t} - \tau} \Delta t \sum_{n=0}^{N_t} \chi_n(t, t + \tau) dt \sum_{m=0}^{N_t} |T_{n_s - 1}^{m+1} - T_{n_s - 1}^m| \\ & \leq \tau \|T^0\|_\infty B \gamma \Delta t (N_t + 1) \left| \max_{m=0}^{N_t} T_{n_s - 1}^m - \min_{m=0}^{N_t} T_{n_s - 1}^m \right| \\ & \leq \tau \|T^0\|_\infty^2 B \gamma \Delta t (N_t + 1). \end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\int_0^{t^{N_t}-\tau} A_3(t)dt \leq \tau \|T^0\|_\infty^2 B\gamma \Delta t (N_t + 1).$$

En utilisant les inégalités précédentes, on a finalement

$$\|S_h(\cdot, \cdot + \tau) - S_h(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\Omega \times (0, t^{N_t}-\tau))} \leq C\tau,$$

où C est indépendant de τ . On définit \tilde{S} par $\tilde{S} = S_h$ p.p. dans $\Omega \times (0, t^{N_t})$, et $\tilde{S} = 0$ p.p. dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega \times (0, t^{N_t})$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} & \|\tilde{S}(\cdot + \eta, \cdot + \tau) - \tilde{S}(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ & \leq \|\tilde{S}(\cdot + \eta, \cdot + \tau) - \tilde{S}(\cdot + \eta, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\tilde{S}(\cdot + \eta, \cdot) - \tilde{S}(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ & \leq C_1 \sqrt{\eta(\eta + h)} + C_2 \sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

Ce qui implique qu'il existe une sous-suite, notée encore par S_h , et il existe $\chi \in (\Omega \times (0, t^{N_t}))$ telle que S_h converge vers χ dans $L^2(\Omega \times (0, t^{N_t}))$ quand $h \rightarrow 0$. On en déduit que S_h converge vers $T^{7/2}$ dans $L^1(\Omega \times (0, t^{N_t}))$.

On montre maintenant $\chi = T^{7/2}$. En fait, $x^{7/2}$ est une fonction non-décroissante pour $x \geq 0$, alors on a l'inégalité suivante

$$\int_0^{t^{N_t}} \int_0^1 (S_h - v^{7/2})(T_h - v) ds dt \geq 0, \forall v \in L^\infty(\Omega \times (0, t^{N_t})).$$

En utilisant les faits que T_h converge faiblement-* vers T dans $L^\infty(\Omega \times (0, t^{N_t}))$ et que S_h converge vers $T^{7/2}$ dans $L^1(\Omega \times (0, t^{N_t}))$, on obtient l'inégalité suivante

$$\int_0^{t^{N_t}} \int_0^1 (\chi - v^{7/2})(T - v) ds dt \geq 0, \forall v \in L^\infty(\Omega \times (0, t^{N_t})).$$

On en déduit que $\chi = T^{7/2}$ p.p. dans $\Omega \times (0, t^{N_t})$.

Montrons maintenant que T_h converge vers la solution faible de (5.5) quand h tend vers 0. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, 1])$, on note $\varphi_i^n = \varphi(t^n, s_i)$. De plus, on suppose que $\varphi = 0$ pour $t > t^{N_t}$. En multipliant le schéma (5.14) par $\Delta s_i \varphi_i^n$, et en sommant sur $i \in \{0, \dots, n_s - 1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\mathcal{E}_h^1 + \mathcal{E}_h^2 = 0,$$

avec \mathcal{E}_h^1 relié au pas de discrétisation en temps et donné par :

$$\mathcal{E}_h^1 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i (T_i^{n+1} - T_i^n) \varphi_i^n,$$

alors que \mathcal{E}_h^2 est relié au pas de discrétisation en espace et est donné par :

$$\mathcal{E}_h^2 := \Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n_s-1} (\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1} - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1}) \varphi_i^n.$$

On considère tout d'abord \mathcal{E}_h^1 , et on fait une intégration par partie discrète par rapport à $n \in \mathbb{N}$. En utilisant que φ est à support compact pour $t \in \mathbb{R}^+$ grand, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^1 &= - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i T_i^n (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}) - \sum_{i=0}^{n_s-1} \Delta s_i T_i^0 \varphi_i^0. \\ &= - \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 T_h(t + \Delta t, s) \partial_t \varphi(t, s) ds dt - \int_0^1 T_h(0, s) \varphi(0, s) ds + \langle \mu_h^1, \varphi \rangle \end{aligned}$$

où le terme supplémentaire $\langle \mu_h^1, \varphi \rangle$ est donné par :

$$\begin{aligned} \langle \mu_h^1, \varphi \rangle &= - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-1} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{C_i} \int_s^{s_i} T_i^n \partial_{ts}^2 \varphi(t, \eta) d\eta ds dt \\ &\quad - \sum_{i=0}^{n_s-1} \int_{C_i} \int_s^{s_i} T_i^0 \partial_s \varphi(0, \eta) d\eta ds \end{aligned}$$

et vérifie l'estimation suivante :

$$|\langle \mu_h^1, \varphi \rangle| \leq C \Delta s \left(\|\partial_{ts}^2 \varphi\|_{L^1} + \|\partial_s \varphi(0, \cdot)\|_{L^1} \right).$$

On a donc quand h tend vers 0 :

$$\mathcal{E}_h^1 \rightarrow - \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 T(t, s) \partial_t \varphi(t, s) ds dt - \int_0^1 T^0(s) \varphi(0, s) ds.$$

On applique maintenant une intégration par partie discrète par rapport à $n \in \mathbb{N}$ à \mathcal{E}_h^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^2 &= -\frac{2 K_{\parallel}}{7} \Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n_s-2} \frac{(T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - (T_i^{n+1})^{7/2}}{\Delta s_{i+1/2}} (\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n) \\ &\quad - \gamma \Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}} T_0^{n+1} \varphi_0^n - \gamma \Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}} T_{n_s-1}^{n+1} \varphi_{n_s-1}^n. \end{aligned}$$

On donne maintenant une approximation de \mathcal{E}_h^2 suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{20} &= -\frac{2 K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 S_h \partial_{ss} \varphi ds dt + \frac{2 K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} S_h(t, 1) \partial_s \varphi(t, 1) dt - \frac{2 K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} S_h(t, 0) \partial_s \varphi(t, 0) dt \\ &\quad - \gamma \int_{\mathbb{R}^+} T_h(t + \Delta t, 0) \varphi(t, 0) + T_h(t + \Delta t, 1) \varphi(t, 1) dt \\ &= \frac{2 K_{\parallel}}{7} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-2} ((T_{i+1}^n)^{7/2} - (T_i^n)^{7/2}) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_s \varphi(t, s_{i+1/2}) dt \\ &\quad - \gamma \Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}} T_0^{n+1} \varphi_0^n - \gamma \Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}} T_{n_s-1}^{n+1} \varphi_{n_s-1}^n. \end{aligned}$$

La différence de \mathcal{E}_h^2 et \mathcal{E}_h^{20} s'écrit

$$\mathcal{E}_h^2 - \mathcal{E}_h^{20} = -\frac{2 K_{\parallel}}{7} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-2} (T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - (T_i^{n+1})^{7/2} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{\Delta s_{i+1/2}} - \partial_s \varphi(t, s_{i+1/2}) \right) dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\mathcal{E}_h^2 - \mathcal{E}_h^{20}| \leq \frac{2K_{\parallel}}{7} \left(\Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-2} \frac{(T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - (T_i^{n+1})^{7/2}}{\Delta s_{i+1/2}} \right)^{1/2} \left[\Delta t \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{i=0}^{n_s-2} \Delta s_{i+1/2} \left(\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_i^n}{\Delta s_{i+1/2}} - \partial_s \varphi(t, s_{i+1/2}) \right) dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

En utilisant (5.17) et le développement de Taylor, on obtient

$$|\mathcal{E}_h^2 - \mathcal{E}_h^{20}| \leq C(\|\partial_{ss}\varphi\|_{\infty} + \|\partial_{st}\varphi\|_{\infty})h \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

En passant à la limite quand h tend vers 0, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^2 &\rightarrow -\frac{2K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 T^{7/2} \partial_{ss} \varphi ds dt - \gamma \int_{\mathbb{R}^+} T(t, 0) \varphi(t, 0) + T(t, 1) \varphi(t, 1) dt \\ &\quad + \frac{2K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} T^{7/2}(t, 1) \partial_s \varphi(t, 1) dt - \frac{2K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} T^{7/2}(t, 0) \partial_s \varphi(t, 0) dt \\ &= \frac{2K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 \partial_s T^{7/2}(t, s) \partial_s \varphi(t, s) ds dt - \gamma \int_{\mathbb{R}^+} T(t, 0) \varphi(t, 0) + T(t, 1) \varphi(t, 1) dt. \end{aligned}$$

On obtient donc finalement que T est une solution faible de (5.5). Pour conclure que la suite $(T_h)_h$ converge vers la solution faible de (5.5), il reste montrer que l'unicité de solution du problème (5.5). Pour cela, on suppose qu'il existe deux solutions faibles du problème (5.5) u et v . Notons aussi que $w = u - v$, alors on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} \partial_t w \varphi ds dt + \frac{2K_{\parallel}}{7} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\Omega} (\partial_s u^{7/2} - \partial_s v^{7/2}) \partial_s \varphi ds dt \\ &\quad + \gamma \int_{\mathbb{R}^+} [w(t, 1) \varphi(t, 1) + w(t, 0) \varphi(t, 0)] dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Formellement, en prenant $\varphi = \text{sign}(w)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |w(t, s)| ds + \frac{2K_{\parallel}}{7} \int_0^t \int_{\Omega} (\partial_s u^{7/2} - \partial_s v^{7/2}) \partial_s \text{sign}(w) ds d\tau \\ &\quad + \gamma \int_0^t [|w(t, 1)| + |w(t, 0)|] d\tau = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |w(0, s)| ds. \end{aligned}$$

De plus, on peut vérifier que $(\partial_s u^{7/2} - \partial_s v^{7/2}) \partial_s \text{sign}(w) = (\partial_s u^{7/2} - \partial_s v^{7/2}) \partial_s \text{sign}(u^{7/2} - v^{7/2}) \geq 0$. Ainsi, on a

$$\int_{\Omega} |w(t, s)| ds \leq \int_{\Omega} |w(0, s)| ds = 0.$$

D'où on a l'unicité de solution du problème (5.5). \square

Le schéma implicite (5.14) est inconditionnellement stable, mais il demande la résolution numérique d'un système non linéaire à chaque pas de temps. Pour cette résolution, on utilise une méthode de Newton, qui est présentée dans un maillage uniforme comme suit. On reformule d'abord le schéma implicite comme une fonction de T^{n+1}

$$F(T^{n+1}) = \begin{pmatrix} T_0^{n+1} - T_0^n - \frac{2}{7}K_{\parallel}\frac{\Delta t}{\Delta s^2}((T_1^{n+1})^{7/2} - (T_0^{n+1})^{7/2}) + \gamma\frac{\Delta t}{\Delta s}T_0^{n+1} \\ \vdots \\ T_i^{n+1} - T_i^n - \frac{2}{7}K_{\parallel}\frac{\Delta t}{\Delta s^2}((T_{i+1}^{n+1})^{7/2} - 2(T_i^{n+1})^{7/2} + (T_{i-1}^{n+1})^{7/2}) \\ \vdots \\ T_{N_s-1}^{n+1} - T_{N_s-1}^n + \frac{2}{7}K_{\parallel}\frac{\Delta t}{\Delta s^2}((T_{N_s-1}^{n+1})^{7/2} - (T_{N_s-2}^{n+1})^{7/2}) + \gamma\frac{\Delta t}{\Delta s}T_{N_s-1}^{n+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Puis on construit la formule itérative comme suit

$$\begin{cases} T^{n+1,0} = T^n, \\ T^{n+1,m+1} = T^{n+1,m} - (JF(T^{n+1,m}))^{-1} F(T^{n+1,m}), \end{cases} \quad (5.21)$$

où JF est le jacobien

$$JF(T) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\Delta t}{\Delta s^2}\Phi(T_0)\gamma\frac{\Delta t}{\Delta s} & & -\frac{\Delta t}{\Delta s^2}\Phi(T_1) & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ -\frac{\Delta t}{\Delta s^2}\Phi(T_{i-1}) & & 1 + 2\frac{\Delta t}{\Delta s^2}\Phi(T_i) & & -\frac{\Delta t}{\Delta s^2}\Phi(T_{i+1}) \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & -\frac{\Delta t}{\Delta s^2}\Phi(T_{N_s-2}) & & 1 + \frac{\Delta t}{\Delta s^2}\Phi(T_{N_s-1}) + \gamma\frac{\Delta t}{\Delta s} \end{pmatrix},$$

avec $\Phi(x) := K_{\parallel}x^{5/2}$.

Cette méthode accroît considérablement le coût calcul et rend en ce sens non efficace cette méthode. Une autre stratégie consiste à utiliser un schéma semi-implicite pour la discrétisation en temps (voir l'annexe 5.6), mais ceci demande encore l'implémentation d'un nouveau système linéaire à chaque itération en temps et le coût calcul reste donc important. Dans la suite, on propose un schéma numérique inspiré par le travail de F. Filbet et S. Jin [22] pour palier à ce problème.

5.2.6 Un schéma implicite-explicite (IMEX).

Dans [22], les auteurs considèrent un problème non linéaire et raide. Le point principal est d'écrire le problème non linéaire sous une forme différente afin de décomposer l'opérateur non linéaire en une somme d'une partie linéaire dissipative, qui peut être résolue de façon implicite, et une partie non linéaire non dissipative, qui sera résolue par un solveur en temps explicite. La principale difficulté est de trouver une décomposition adéquate de l'opérateur. L'opérateur non linéaire diffusif peut, par exemple, être écrit :

$$K_{\parallel}\partial_s (T^{5/2}\partial_s T) = \nu\partial_{ss}^2 T + \partial_s ((K_{\parallel}T^{5/2} - \nu)\partial_s T)$$

et la discrétisation en temps de (5.5) devient :

$$\begin{cases} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} - \partial_s (\nu \partial_s T^{n+1}) = \partial_s \left(\left(K_{\parallel} (T^n)^{5/2} - \nu \right) \partial_s T^n \right), \\ -\nu \partial_s T^{n+1}(0) + \gamma T^{n+1}(0) = \left(K_{\parallel} (T^n(0))^{5/2} - \nu \right) \partial_s T^n(0), \\ -\nu \partial_s T^{n+1}(1) - \gamma T^{n+1}(1) = \left(K_{\parallel} (T^n(1))^{5/2} - \nu \right) \partial_s T^n(1). \end{cases} \quad (5.22)$$

Pour choisir un ν approprié pour le schéma (5.22), on utilise une estimation d'énergie de l'approximation numérique.

Proposition 5.6. *Supposons que la viscosité ν satisfait :*

$$K_{\parallel} |T^n|^{5/2} \leq \nu, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.23)$$

Alors, la solution discrète vérifie :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (T^{n+1})^2 ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_0^1 |\partial_s T^{n+1}|^2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (T^n)^2 ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_0^1 |\partial_s T^n|^2 ds. \quad (5.24)$$

Preuve. On multiplie (5.22) par T^{n+1} et on intègre par rapport à s sur $(0, 1)$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |T^{n+1}|^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^1 |T^n|^2 ds &\leq \int_0^1 \left((T^{n+1})^2 - T^{n+1} T^n \right) ds \\ &\leq \Delta t \int_0^1 \left(\left(\nu - K_{\parallel} |T^n|^{5/2} \right) \partial_s T^n \partial_s T^{n+1} - \nu (\partial_s T^{n+1})^2 \right) ds \\ &\quad - \Delta t \gamma \left((T_0^{n+1})^2 + (T_{n_s-1}^{n+1})^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse $K_{\parallel} |T|^{5/2} \leq \nu$ et en appliquant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\nu - K_{\parallel} |T^n|^{5/2} \right) \partial_s T^n \partial_s T^{n+1} &\leq \frac{\varepsilon}{2} (\partial_s T^n)^2 + \frac{\left(\nu - K_{\parallel} |T^n|^{5/2} \right)^2}{2\varepsilon} (\partial_s T^{n+1})^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} (\partial_s T^n)^2 + \frac{\nu^2}{2\varepsilon} (\partial_s T^{n+1})^2. \end{aligned}$$

Alors, en choisissant $\varepsilon = \nu$ on a :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (T^{n+1})^2 ds + \frac{\nu}{2} \Delta t \int_0^1 |\partial_s T^{n+1}|^2 ds \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (T^n)^2 ds + \frac{\nu}{2} \Delta t \int_0^1 |\partial_s T^n|^2 ds.$$

D'où, lorsque $K_{\parallel} |T|^{5/2} \leq \nu$, le schéma est stable. \square

On peut maintenant donner le schéma complètement discret que nous appellerons IMEX dans toute la suite :

$$\begin{cases} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta s_i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \\ T_i^0 = T_{0,i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \end{cases} \quad (5.25)$$

où le flux numérique $\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ est donné pour tout $i \in \{0, \dots, n_s - 2\}$ par :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = 2 \left(K_{\parallel} \left(\frac{(T_{i+1}^n)^{5/2} + (T_i^n)^{5/2}}{2} \right) - \nu \right) \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i} + 2\nu \frac{T_{i+1}^n - T_i^n}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i}, \quad (5.26)$$

Aux frontières $s = 0$ et $s = 1$, on utilise les conditions limites suivantes (écrites dans la forme de (5.22)) :

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{cases} +\gamma T_0^{n+1}, & \text{if } i = -1, \\ -\gamma T_{n_s-1}^{n+1}, & \text{if } i = n_s - 1. \end{cases} \quad (5.27)$$

De plus, la viscosité $\nu > 0$ est initialement choisie comme une borne supérieure de $K_{\parallel} \|T^0\|_{\infty}^{5/2}$ et est donc réajustée à chaque itération $n \in \mathbb{N}$ afin de satisfaire la condition (5.23). L'algorithme pour le calcul de ν est la suivant :

Algorithme pour calculer ν

```

ν := 2 K∥ \|T0\|∞5/2 et n = 0
tantque n ≤ NTend faire
    calcul la solution numérique Tn+1
    si ν ≤  $\frac{4}{5} K_{\parallel} \|T^{n+1}\|_{\infty}^{5/2}$  alors
        ν ← 2 K∥ \|Tn+1\|∞5/2
    finsi

    si ν ≥ 4 K∥ \|Tn+1\|∞5/2 alors
        ν ← K∥ \|Tn+1\|∞5/2 / 2
    finsi
    n ← n + 1
fin tantque
    
```

5.2.7 Résultats numériques.

Pour comparer les résultats numériques obtenus par les différentes méthodes, on prend $\gamma = 2$, $K_{\parallel} = 1$, comme température initiale $T^0 = 5$, et comme temps final $T_{end} = 1$. D'une part, une solution de référence est calculée en utilisant une méthode volumes finis avec le schéma explicite (5.12) sur une grille uniforme avec $n_s = 450$. D'autre part, on compare le schéma implicite (5.14) et le schéma IMEX (5.25)-(5.27) sur des grilles uniformes différentes avec $n_s = 50, 150$. De plus on choisit différents pas de temps *i.e.* on prend alternativement $\Delta t = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$.

Δt		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
Schéma implicite (5.14)	$n_s = 50$	0.05	0.31	2.24	22.06
	$n_s = 150$	0.60	4.07	27.49	249.61
Schéma IMEX (5.25)	$n_s = 50$	0.01	0.09	0.63	5.34
	$n_s = 150$	0.10	0.24	2.24	21.97

TABLE 5.1 – Temps de calcul pour le schéma implicite (5.14) et le schéma IMEX (5.25) en seconde. Le temps de simulation final est $T_{end} = 1$.

On observe dans la Table 5.1 que le schéma IMEX est meilleur que le schéma implicite en terme de coût calcul puisque le système linéaire correspondant à la partie implicite ne dépend pas de l'itération n lorsque la viscosité $\nu > 0$ est assez grande. Pour $n_s = 50$, le temps de calcul du schéma IMEX est quatre fois plus petit que celui du schéma implicite et pour $n_s = 150$ le schéma implicite est dix fois plus coûteux que le schéma IMEX.

Δt		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
Schéma implicite (5.14)	$n_s = 50$	0.0580	0.0612	0.0617	0.0617
	$n_s = 150$	0.0190	0.0184	0.0187	0.0187
Schéma IMEX (5.25)	$n_s = 50$	0.0621	0.0600	0.0598	0.0598
	$n_s = 150$	0.0213	0.0182	0.0181	0.0181

TABLE 5.2 – Erreurs relatives du schéma implicite, du schéma IMEX par rapport à la solution de référence. Encore on compare ces erreurs relatives en temps final $T_{end} = 1$.

Concernant la précision et la stabilité, la Table 5.2 montre que la solution calculée par les schémas implicite et IMEX est stable pour tout pas de temps Δt et que les erreurs sont du même ordre. On obtient des résultats similaires pour un pas de temps plus petit que 10^{-4} . La Figure 5.2 montre que les schémas implicite et IMEX sont d'ordre 1. Bien sûr, lorsqu'on augmente le nombre de points n_s , l'erreur décroît et le schéma IMEX semble être le plus précis. Finalement, dans la Figure 5.3(a), on voit que de grandes erreurs apparaissent près du bord où il y a de forts gradients de température. La Figure 5.3(b) montre l'évolution de la température à différent temps $t = 0.25, 0.50, 0.75, 1$. Notons que la température décroît rapidement au début, puis se stabilise à un état d'équilibre quand t s'approche du temps final $T_{end} = 1$. De plus, on remarque que la température développe de forts gradients à la frontière ce qui modélisent le refroidissement du plasma dû aux effets du limiteur. En effet, d'une part la diffusion thermique dépend du terme $T^{5/2}$ qui est grand au début et devient de plus en plus petit. D'autre part, à cause des flux non linéaires sur les bords, lorsque la température devient petite, le gradient de température devient de plus en plus grand.

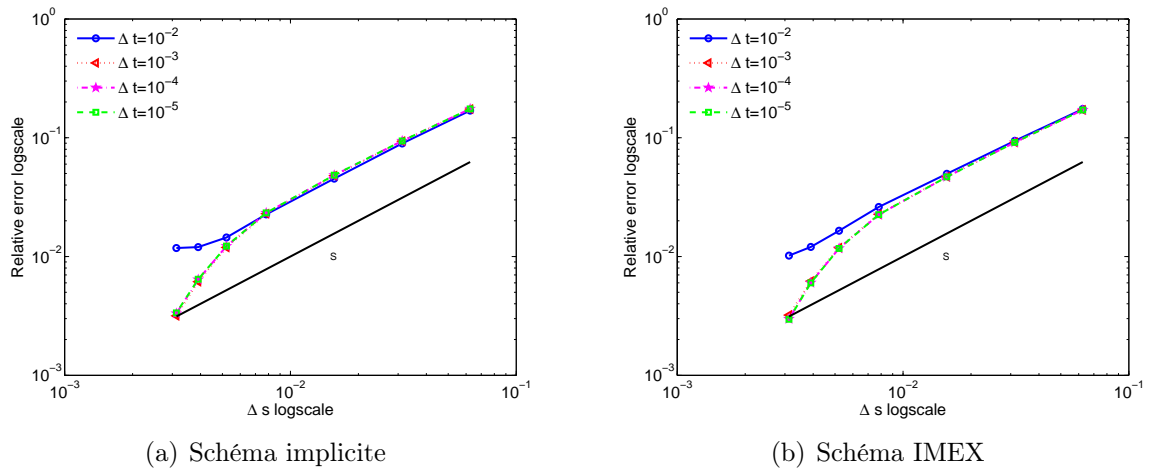


FIGURE 5.2 – Vitesse de convergence des schémas implicite et IMEX. On compare les erreurs relatives dans les tailles du maillage 16, 32, 64, 128, 192, 256 et 320 respectivement en temps final $T_{end} = 1$.

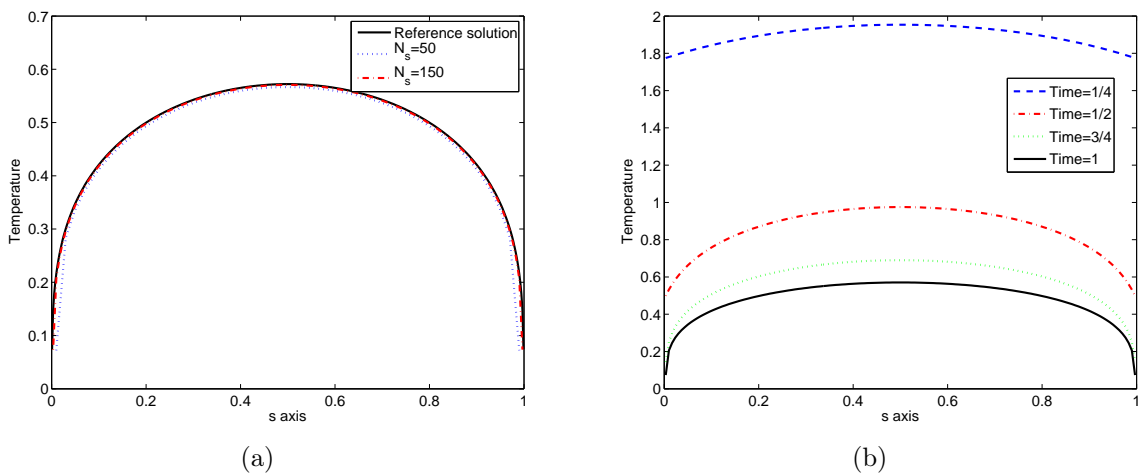


FIGURE 5.3 – Évolution de température évolution du problème (5.5). On utilise le schéma IMEX pour approcher (5.5) et choisit le pas de temps $\Delta t = 10^{-4}$. (a) la solution de référence et les résultats du schéma IMEX pour $n_s = 50, 150$ en temps final $T_{end} = 1$, (b) les résultats du schéma IMEX pour $n_s = 150$ aux différents temps $t = 0.25, 0.50, 0.75$ et 1 respectivement.

5.3 Le problème 2D

Dans cette partie, on considère le problème bidimensionnel où la température T dépend du temps t et de deux variables d'espace $(s, r) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ avec les conditions limites appropriées :

$$\partial_t T - \partial_s (K_{\parallel} T^{5/2} \partial_s T) - \partial_r (K_{\perp} \partial_r T) = 0, \quad t \geq 0, (s, r) \in \Omega, \quad (5.28)$$

où K_{\parallel} et K_{\perp} sont des constantes positives telles que $K_{\perp} \ll K_{\parallel}$. Pour les conditions limites, on impose un flux au bord en $r = 0$ et on suppose qu'en $r = 1$ le flux de température est nulle ce qui donne :

$$\begin{cases} \partial_r T(t, s, 0) = -Q_{\perp}, & s \in (0, 1), r = 0, t \geq 0, \\ \partial_r T(t, s, 1) = 0, & s \in (0, 1), r = 1, t \geq 0, \end{cases} \quad (5.29)$$

et en $s = 0$ et $s = 1$, on considère soit des conditions limites périodiques, soit des conditions limites décrivant les effets du limiteur ce qui permet de faire décroître la température dans l'appareil. Donc dans la couche de transition, on a :

$$T(t, 0, r) = T(t, 1, r), \quad r \in (0, 1/2), t \geq 0 \quad (5.30)$$

et dans la couche de scrape, on a

$$\begin{cases} K_{\parallel} T^{5/2}(t, 0, r) \partial_s T(t, 0, r) = \gamma T(t, 0, r), & r \in (1/2, 1), t \geq 0, \\ K_{\parallel} T^{5/2}(t, 1, r) \partial_s T(t, 1, r) = -\gamma T(t, 1, r), & r \in (1/2, 1), t \geq 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

Le modèle vérifie également l'estimation d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |T(t, s, r)|^2 ds dr &= -\frac{16 K_{\parallel}}{81} \int_{\Omega} |\partial_s T^{9/4}|^2 ds dr - K_{\perp} \int_{\Omega} |\partial_r T|^2 ds dr \\ &\quad - \gamma \int_{1/2}^1 (|T(t, 0, r)|^2 + |T(t, 1, r)|^2) dr + K_{\perp} Q_{\perp} \int_0^1 T(t, s, 0) ds. \end{aligned}$$

Pour discrétiser le système (5.28)-(5.31), on utilise une méthode de volumes finis en espace couplée à un schéma de splitting en temps. On commence par présenter le schéma numérique et par décrire précisément la discrétisation des conditions aux bords. On compare ensuite nos résultats numériques avec ceux obtenus par des discrétisations en temps classiques explicite ou implicite.

5.3.1 Schéma de splitting en temps.

On utilise un schéma de splitting dans les deux directions. Comme pour le cas 1D, on utilise un schéma IMEX pour l'équation non linéaire et on trouve des conditions sur la viscosité $\nu > 0$ pour avoir un schéma uniformément stable. On considère d'abord le problème non linéaire dans la direction s ,

$$\frac{T^* - T^n}{\Delta t} - \partial_s ((K_{\parallel} (T^n)^{5/2} - \nu) \partial_s T^n) = \nu \partial_{ss}^2 T^*, \quad (s, r) \in \Omega, \quad (5.32)$$

complété de les conditions aux limites

$$\begin{cases} T^*(0, r) = T^*(1, r), & r \in (0, 1/2), \\ \left(K_{\parallel} (T^n(0, r))^{5/2} - \nu \right) \partial_s T^n(0, r) = \gamma T^*(0, r) - \nu \partial_s T^*(0, r), & r \in (1/2, 1), \\ \left(K_{\parallel} (T^n(1, r))^{5/2} - \nu \right) \partial_s T^n(1, r) = -\gamma T^*(1, r) - \nu \partial_s T^*(1, r), & r \in (1/2, 1), \end{cases} \quad (5.33)$$

qui permet de calculer une première approximation T^* . On calcule ensuite une approximation de la solution de l'équation de chaleur linéaire :

$$\frac{T^{n+1} - T^*}{\Delta t} - \partial_r (K_{\perp} \partial_r T^{n+1}) = 0, \quad (s, r) \in \Omega, \quad (5.34)$$

à laquelle on associe des conditions aux bords de type Neumann homogène :

$$\begin{cases} \partial_r T^{n+1}(s, 0) = -Q_{\perp}, & s \in (0, 1), r = 0, \\ \partial_r T^{n+1}(s, 1) = 0, & s \in (0, 1), r = 1. \end{cases} \quad (5.35)$$

Pour simplifier la présentation, on donne une estimation de stabilité sur ce schéma semi-discret (discret en temps et continue en espace), mais la démonstration peut être facilement adaptée au cas complètement discret.

Proposition 5.7. *Supposons que le terme de viscosité vérifie :*

$$K_{\parallel} |T^n|^{5/2} \leq \nu, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors la solution semi-discrete satisfait l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^{n+1})^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^{n+1}|^2 dr ds &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^0)^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^0|^2 dr ds \\ &\quad - K_{\perp} \Delta t \sum_{k=1}^{n+1} \left[\int_{\Omega} |\partial_r T^k|^2 dr ds - Q_{\perp} \int_0^1 T^k(s, 0) ds \right]. \end{aligned}$$

Preuve. En multipliant (5.32) par T^* et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((T^*)^2 - (T^n)^2) dr ds &\leq -\Delta t \int_{\Omega} \left(K_{\parallel} (T^n)^{5/2} - \nu \right) \partial_s T^n \partial_s T^* dr ds \\ &\quad - \Delta t \int_{\Omega} \nu |\partial_s T^*|^2 dr ds \\ &\quad - \gamma \Delta t \int_{1/2}^1 |T^*(0, r)|^2 + |T^*(1, r)|^2 dr. \end{aligned}$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Young et en prenant ν telle que pour tout $r \in (0, 1)$,

$$K_{\parallel} |T^n(s, r)|^{5/2} \leq \nu, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

on a :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^*)^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^*|^2 dr ds \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^n)^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^n|^2 dr ds. \quad (5.36)$$

De même, on multiplie (5.34) par T^{n+1} et on intègre par rapport à $(s, r) \in \Omega$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left((T^{n+1})^2 - (T^*)^2 \right) dr ds &\leq -\Delta t K_{\perp} \int_{\Omega} (\partial_r T^{n+1})^2 dr ds \\ &+ \Delta t Q_{\perp} K_{\perp} \int_0^1 T^{n+1}(s, 0) ds. \end{aligned} \quad (5.37)$$

De plus, en dérivant (5.34) par rapport à s , on a :

$$\frac{\partial_s T^{n+1} - \partial_s T^*}{\Delta t} - K_{\perp} (\partial_{rr}^2 \partial_s T^{n+1}) = 0.$$

En multipliant ensuite cette dernière par $\nu \partial_s T^{n+1}$ et en intégrant par rapport à $(s, r) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu \left[(\partial_s T^{n+1})^2 - (\partial_s T^*)^2 \right] dr ds &\leq -2 \Delta t \nu K_{\perp} \int_{\Omega} |\partial_{rs} T^{n+1}|^2 dr ds \\ &+ \nu \Delta t \left[\partial_s (\partial_r T^{n+1}) \partial_s T^{n+1} \right]_{r=0}^{r=1}. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant le fait que $\partial_s (\partial_r T^{n+1}) = 0$, $r \in \{0, 1\}$, ceci conduit à :

$$\int_{\Omega} \nu \left[(\partial_s T^{n+1})^2 - (\partial_s T^*)^2 \right] dr ds \leq 0. \quad (5.38)$$

Par (5.37) et (5.38), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^{n+1})^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} [|\partial_s T^{n+1}|^2 + K_{\perp} |\partial_r T^{n+1}|^2] dr ds - \Delta t K_{\perp} Q_{\perp} \int_0^1 T^{n+1}(s, 0) ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^*)^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^*|^2 dr ds. \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité ci-dessus conjuguée avec (5.36) donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^{n+1})^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} [|\partial_s T^{n+1}|^2 + K_{\perp} |\partial_r T^{n+1}|^2] dr ds - \Delta t K_{\perp} Q_{\perp} \int_0^1 T^{n+1}(s, 0) ds \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^n)^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^n|^2 dr ds. \end{aligned}$$

Par récurrence et en sommant pour $k = 0, \dots, n$ on obtient l'inégalité de la proposition 5.7 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^{n+1})^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^{n+1}|^2 dr ds \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T^0)^2 dr ds + \frac{\nu \Delta t}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T^0|^2 dr ds \\ - K_{\perp} \Delta t \sum_{k=1}^{n+1} \left[\int_{\Omega} |\partial_r T^k|^2 dr ds - Q_{\perp} \int_0^1 T^k(s, 0) ds \right]. \end{aligned}$$

□

5.3.2 Une approximation volumes finis.

Pour la discrétisation en espace, on considère un ensemble de $n_s + 1$ points $(s_{i-1/2})_{0 \leq i \leq n_s}$ de l'intervalle $(0, 1)$ avec $s_{-1/2} = 0$ et $s_{n_s-1/2} = 1$ qui représente les points de discrétisation dans la direction s ; et un ensemble de $n_r + 1$ points $(r_{i-1/2})_{0 \leq i \leq n_r}$ de l'intervalle $(0, 1)$ avec $r_{-1/2} = 0$ et $r_{n_r-1/2} = 1$ qui représente les points de discrétisation dans la direction r . Pour $0 \leq i \leq n_s - 1$, $0 \leq j \leq n_r - 1$, on définit la cellule de contrôle $C_{i,j}$ par $C_{i,j} = (s_{i-1/2}, s_{i+1/2}) \times (r_{j-1/2}, r_{j+1/2})$. On note (r_i, s_i) le centre d'une cellule $C_{i,j}$, Δs_i le pas d'espace dans la direction s : $\Delta s_i = s_{i+1/2} - s_{i-1/2}$ et $\Delta r_j = r_{j+1/2} - r_{j-1/2}$ celui dans la direction r . On suppose qu'il existe $\xi \in (0, 1)$ tel que :

$$\xi h \leq \Delta s_i, \quad \Delta r_j \leq h, \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, n_s - 1\} \times \{0, \dots, n_r - 1\}, \quad (5.39)$$

avec $h = \max_{i,j} \{\Delta s_i, \Delta r_j\}$.

On doit construire un ensemble d'approximations $T_{i,j}(t)$ de la moyenne de la solution de (5.2)-(5.3) sur chaque cellule de contrôle $C_{i,j}$ et on pose :

$$T_{i,j}^0 = \frac{1}{|C_{i,j}|} \int_{C_{i,j}} T^0(s, r) ds dr.$$

D'où la discrétisation volumes finis de (5.32) peut être écrite :

$$\frac{T_{i,j}^* - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta s_i}, \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, n_s - 1\} \times \{0, \dots, n_r - 1\},$$

où le flux $\mathcal{F}_{i+1/2,j}$ correspond au flux unidimensionnel donné par (5.26) et aux conditions limites périodiques pour $r_j \in (0, 1/2)$ et aux conditions (5.27) pour $r_j \in (1/2, 1)$.

Alors, le schéma volumes finis (5.32) peut s'écrire :

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^*}{\Delta t} = \frac{\mathcal{G}_{i,j+1/2}^{n+1} - \mathcal{G}_{i,j-1/2}^{n+1}}{\Delta r_j}, \quad \forall (i, j) \in \{0, \dots, n_s - 1\} \times \{0, \dots, n_r - 1\}$$

où $\mathcal{G}_{i,j+1/2}$ est donné par :

$$\mathcal{G}_{i,j+1/2} = 2 K_{\perp} \frac{T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta r_{j+1} + \Delta r_j}, \quad j = 0, \dots, n_r - 2. \quad (5.40)$$

De plus, aux bords $r = 0$ et $r = 1$, on utilise les conditions limites suivantes :

$$\mathcal{G}_{i,j+1/2} = \begin{cases} -K_{\perp} Q_{\perp}, & \text{if } j = -1, \\ 0, & \text{if } j = n_r - 1. \end{cases} \quad (5.41)$$

5.3.3 Résultats numériques.

On compare ici les différents résultats numériques relatifs au problème 2D (5.28)-(5.31) obtenus en utilisant un schéma de splitting en temps avec un traitement de type explicite, implicite ou de type IMEX à chaque pas. Comme précédemment, on commence

par calculer une solution référence obtenue par un schéma explicite avec un petit pas de temps satisfaisant à la condition CFL $\Delta t \sim h^2$. Dans les simulations numériques qui suivent, on choisit pour les différents paramètres physiques : $K_{\parallel} = 1$, $K_{\perp} = 10^{-2}$, $\gamma = 2$, $Q_{\perp} = 10$. De plus la température initiale est donnée par :

$$T^0(s, r) = 3, \quad (5.42)$$

et le temps final des simulations est $T_{end} = 2$.

Pour calculer la solution de référence, on a choisit $n_s = 300$ et $n_r = 300$ alors que les résultats obtenus par les schémas implicite et IMEX utilisent $n_s = 100$ et $n_r = 100$ pour différents pas de temps : $\Delta t = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$, et 10^{-4} . Tout d'abord, concernant le temps calcul on voit, dans la Table 5.3, que le schéma IMEX est plus rapide que le schéma implicite. De plus, l'erreur numérique présentée dans la Table 5.4 est du même ordre pour chacun des deux schémas. D'où le schéma IMEX est clairement de ce point de vue meilleur que le schéma implicite.

Δt	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Schéma implicite	4.02	25.64	172.95	1327.50
Schéma IMEX	1.62	4.42	36.24	403.63

TABLE 5.3 – Temps de calcul pour le problème en 2D (5.28)-(5.31) en utilisant le schéma implicite et le schéma IMEX au temps final $T_{end} = 2$.

Δt	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
Schéma implicite	0.2245	0.0236	0.0020	2.1985e-04
Schéma IMEX	0.2093	0.0213	0.0018	2.4385e-04

TABLE 5.4 – Erreurs relatives pour le schéma implicite et le schéma IMEX comparées avec la solution de référence pour le problème en 2D (5.28)-(5.31) au temps final $T_{end} = 2$.

On veut maintenant étudier l'effet du schéma de splitting sur l'erreur numérique et sur le coût calcul. On propose donc également une comparaison entre les différents schémas. On compare d'abord le temps de calcul pour le schéma IMEX avec et sans la méthode de splitting pour un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$, $(n_s, n_r) = (50, 50), (100, 100), (300, 300)$ et $(500, 500)$. D'une part, on remarque, dans la Table 5.5, que la méthode de splitting est beaucoup plus rapide que la méthode sans splitting quand le nombre de points de discrétisation augmente.

$n_s \times n_r$	50×50	100×100	300×300	500×500
Schéma IMEX Non-splitting	11	60	505	2112
Schéma IMEX splitting	16	36	219	601

TABLE 5.5 – Temps de calcul du schéma IMEX avec et sans splitting au temps final $T_{end} = 2$.

D'autre part, on compare les erreurs numériques correspondant aux deux stratégies avec $(n_s, n_r) = (100, 100)$, $\Delta t = 10^{-3}$ dans la Table 5.6, et en particulier les schémas implicites (avec et sans splitting) et IMEX (avec et sans splitting). On note que la méthode sans splitting est toujours plus précise que celle avec splitting.

Schéma	Splitting implicite	Splitting IMEX	Implicite	IMEX
Erreur numérique	$2. \times 10^{-3}$	$2. \times 10^{-3}$	$5. \times 10^{-4}$	$5. \times 10^{-4}$

TABLE 5.6 – Erreurs relatives pour les différents schémas numériques comparés avec la solution de référence pour $(n_s, n_r) = (100, 100)$, $\Delta t = 10^{-3}$ au temps final $T_{end} = 2$.

Dans la Figure 5.4, on montre l'évolution de l'approximation de la température (5.28)-(5.31) dans le domaine de calcul Ω , qui est divisé en deux régions : une couche de transition et une couche SOL comme illustrée dans la Figure 5.1. On initialise la température à une constante et on observe immédiatement une décroissance rapide de la température dans la région SOL jusqu'à ce qu'elle devienne singulière proche du limiteur (qui correspond aux bords $s = 0$ et $s = 1$ pour $r \geq 1/2$). D'autre part, dans la couche de transition, la température converge vers un état d'équilibre qui est homogène en $s \in (0, 1)$. Les différents schémas donnent le même comportement qualitatif de la solution.

Dans la Figure 5.5, on trace l'évolution de la température en $r = 0.25$, $r = 0.75$ et $s = 10^{-2}$ et $s = 0.5$ respectivement. D'après Kočan *et al.* [14, 16], la diffusivité thermique parallèle est bien plus grande que la diffusivité thermique perpendiculaire, *i.e* $K_{\parallel} \gg K_{\perp}$. Par conséquent, la température devient constante le long des lignes de champ magnétique qui correspondent à $s \in (0, 1)$. On voit dans la Figure 5.5(a) que la température est constante pour tout temps bien que les forts gradients fassent se développer une couche limite en $s = 0$ et $s = 1$ dans la région SOL. Dans la direction perpendiculaire r la situation est différente. On observe également à $t = 2$ une décroissance linéaire (par rapport à r) de la température dans la couche de transition ($0.5 \leq r \leq 1$), qui est due au flux de chaleur Q_{\perp} sur le bord $r = 0$, et ensuite une décroissance exponentielle dans la SOL ($0.5 \leq r \leq 1$). Ces résultats numériques correspondent à l'analyseur de retard de champ (RFA) [15, 14, 16].

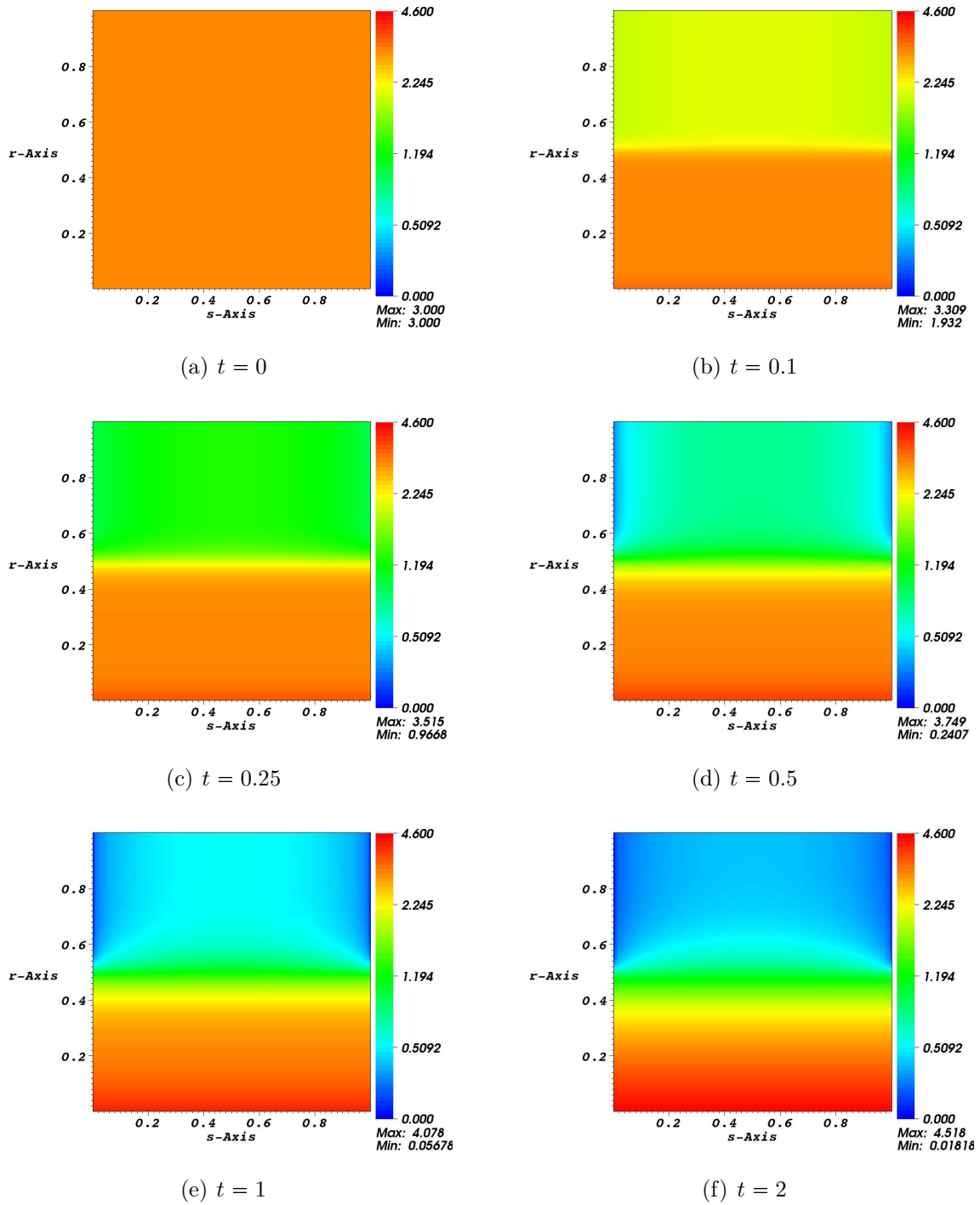


FIGURE 5.4 – Évolution de température du problème (5.28).

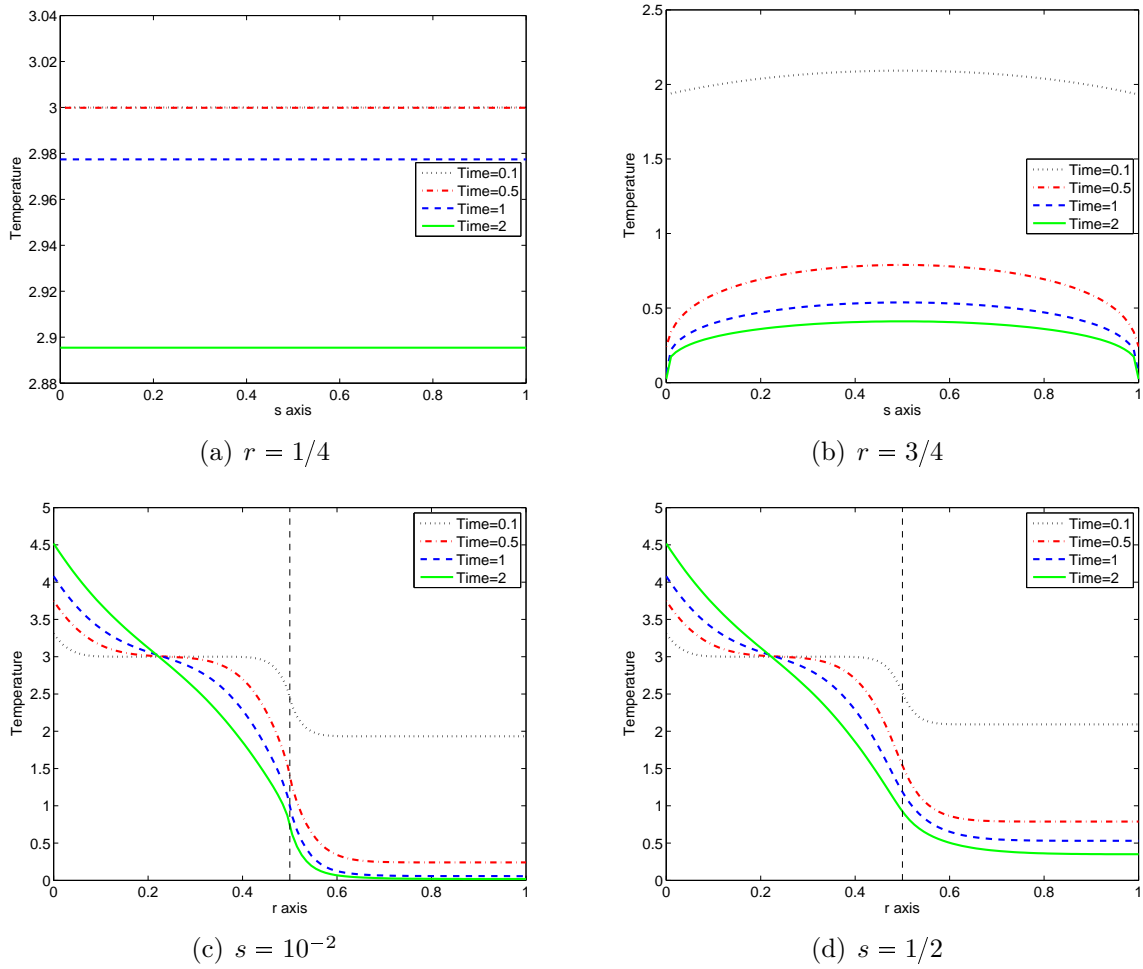


FIGURE 5.5 – Évolution de température aux coupes $r = 1/4$, $r = 3/4$, $s = 10^{-2}$ et $s = 1/2$ en temps $t = 0.1, 0.5, 1$ et 2 respectivement.

On présente finalement l'évolution de la dissipation d'énergie par rapport au temps :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |T(t, s, r)|^2 ds dr = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3,$$

avec :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1 := - \int_{\Omega} \left(K_{\parallel} (T)^{5/2} |\partial_s T|^2 + K_{\perp} |\partial_r T|^2 \right) dr ds, \\ \mathcal{E}_2 := -\gamma \int_{1/2}^1 T(t, 1, r)^2 + T(t, 0, r)^2 dr, \\ \mathcal{E}_3 := +Q_{\perp} K_{\perp} \int_0^1 T(t, s, 0) ds. \end{cases}$$

La Figure 5.6 présente les termes \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 comme des fonctions de t . On trace ces termes obtenus par les schémas implicites et IMEX. Notons que ces deux figures sont quasiment les mêmes. En fait, au début de la simulation, il y a une décroissance rapide de la température, et donc la quantité $-\mathcal{E}_1$, représentant le rapport d'échange de l'énergie totale dans le domaine Ω , est croissante pour $t < 0.1$. Elle converge ensuite vers un état d'équilibre pour des temps plus longs. D'autre part, la quantité $-\mathcal{E}_2$ décroît par rapport au temps, ceci est dû à l'anisotropie entre K_{\parallel} et K_{\perp} . En effet, l'énergie est transférée au limiteur dans la région SOL alors que dans la direction radiale r , la diffusivité thermique est petite. Enfin, comme on l'a vu dans la Figure 5.5, sur le bord du coeur, la température ne varie pas significativement, et donc la quantité \mathcal{E}_3 croît légèrement en temps.

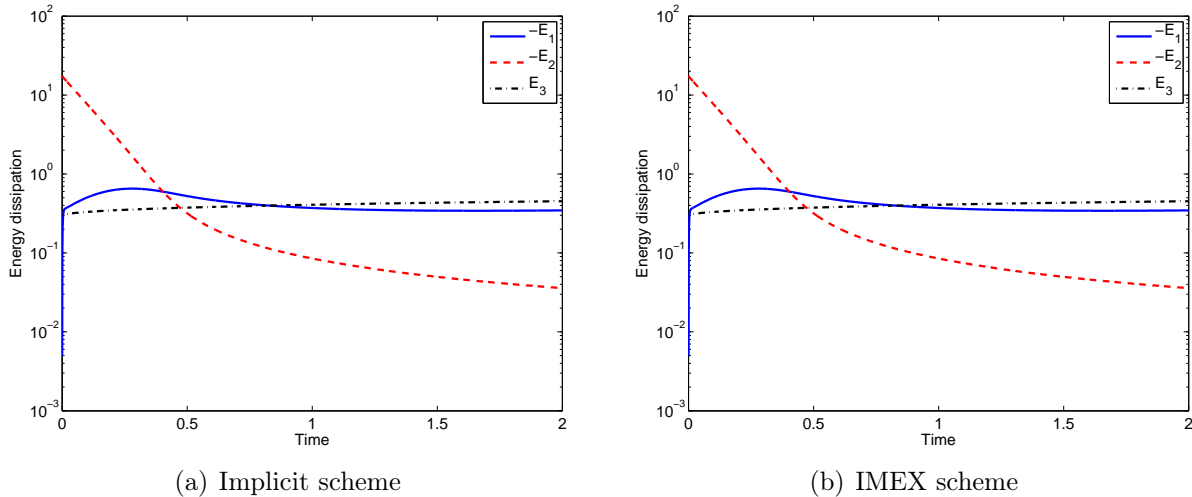


FIGURE 5.6 – Évolution d'énergie de dissipation par rapport au temps du problème (5.28), avec $\Delta t = 0.001$.

5.4 Le problème couplé

Dans cette partie, on considère le modèle 2D complet (5.2) composé de deux espèces de particules différentes, les ions et les électrons. On notera T_i (respectivement T_e) la température des ions (respectivement des électrons) qui dépend du temps et des deux variables d'espace $(s, r) \in \Omega$. Les deux équations sont couplées par un terme source non nul qui équilibre la température entre les deux espèces de particules,

$$\begin{cases} \partial_t T_i - \partial_s(K_{\parallel,i} T_i^{5/2} \partial_s T_i) - \partial_r(K_{\perp,i} \partial_r T_i) = +\beta(T_i - T_e), \text{ for } (s, r) \in \Omega, \\ \partial_t T_e - \partial_s(K_{\parallel,e} T_e^{5/2} \partial_s T_e) - \partial_r(K_{\perp,e} \partial_r T_e) = -\beta(T_i - T_e), \text{ for } (s, r) \in \Omega, \end{cases} \quad (5.43)$$

où $K_{\perp,i} \ll K_{\parallel,i}$, $K_{\perp,e} \ll K_{\parallel,e}$ et β est une constante négative. Ces deux équations sont complétées avec le même type de conditions limites que dans (5.29)-(5.31).

5.4.1 Schéma de splitting en temps

On discrétise maintenant le système complet (5.43) en utilisant un schéma de splitting en trois étapes. Supposons connue une approximation de la solution (T_e, T_i) au temps t^n et notons la (T_e^n, T_i^n) . Alors, on approxime d'abord la partie terme source couplant les deux température T_e et T_i en utilisant un schéma implicite qui conduit à :

$$\begin{cases} T_i^* = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1 - 2\beta\Delta t} \right) T_e^n + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - 2\beta\Delta t} \right) T_i^n, \\ T_e^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - 2\beta\Delta t} \right) T_e^n + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1 - 2\beta\Delta t} \right) T_i^n. \end{cases} \quad (5.44)$$

Il est clair que (5.44) garantit la positivité de la température. On utilise ensuite les mêmes étapes de splitting en temps que précédemment dans la direction s et dans la direction r de la façon suivante. D'une part on calcule T_α^{**} pour $\alpha \in \{e, i\}$ en résolvant (5.32)-(5.33). D'autre part on applique la dernière étape (5.34)-(5.35) dans la direction r .

De plus, pour le schéma (5.32)-(5.33), (5.34)-(5.35) et (5.44), on démontre également une estimation d'énergie donnée dans la proposition suivante.

Proposition 5.8. *Soit T_α^0 une donnée initiale positive et telle que $T_\alpha^0 \in L^\infty(0, 1)$. Supposons que pour $\alpha \in \{e, i\}$, le terme de viscosité soit tel que pour tout $r \in (0, 1)$,*

$$\max_{\alpha \in \{i, e\}} K_{\parallel, \alpha} \|T_\alpha^n\|_\infty^{5/2} \leq \nu, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors, la solution numérique, donnée par (5.44), vérifie :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \{i,e\}} \int_{\Omega} [|T_{\alpha}^{n+1}|^2 + \Delta t \nu |\partial_s T_{\alpha}^{n+1}|^2] dr ds \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \{i,e\}} \int_{\Omega} [|T_{\alpha}^0|^2 + \Delta t \nu |\partial_s T_{\alpha}^0|^2] dr ds \\
 & - \Delta t \sum_{\alpha \in \{i,e\}} \sum_{k=1}^{n+1} K_{\perp,\alpha} \int_{\Omega} |\partial_r T_{\alpha}^k|^2 dr ds \\
 & + \Delta t \sum_{\alpha \in \{i,e\}} \sum_{k=1}^{n+1} K_{\perp,\alpha} Q_{\perp,\alpha} \int_0^1 T_{\alpha}^k(s,0) ds.
 \end{aligned}$$

Preuve. On remarque tout d'abord que l'estimation d'énergie des deux dernières étapes dans les directions s et r sont les mêmes que celles démontrées dans la Proposition 5.7. D'où :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|T_{\alpha}^{n+1}|^2 + \nu \Delta t (|\partial_s T_{\alpha}^{n+1}|^2 + K_{\perp,\alpha} |\partial_r T_{\alpha}^{n+1}|^2)] dr ds \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} [|T_{\alpha}^{**}|^2 + \Delta t \nu |\partial_s T_{\alpha}^{**}|^2] dr ds + \Delta t K_{\perp,\alpha} Q_{\perp,\alpha} \int_0^1 T_{\alpha}^{n+1}(s,0) ds.
 \end{aligned}$$

Par conséquent pour terminer la preuve de l'estimation d'énergie, on observe juste que (5.44) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} T_i^* - T_i^n = + \Delta t \beta (T_i^* - T_e^*), \\ T_e^* - T_e^n = - \Delta t \beta (T_i^* - T_e^*). \end{cases} \quad (5.45)$$

En multipliant la première équation de (5.45) par T_i^* et la seconde par T_e^* et en intégrant suivant $(r, s) \in \Omega$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |T_i^*|^2 + |T_e^*|^2 dr ds \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |T_i^n|^2 + |T_e^n|^2 dr ds$$

De plus, en différenciant (4.3) par rapport à s et en multipliant la première équation par $\nu \partial_s T_i^*$ et la seconde par $\nu \partial_s T_e^*$, on a :

$$\frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T_i^*|^2 + |\partial_s T_e^*|^2 dr ds \leq \frac{\nu}{2} \int_{\Omega} |\partial_s T_i^n|^2 + |\partial_s T_e^n|^2 dr ds.$$

Finalement, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \{i,e\}} \int_{\Omega} [|T_{\alpha}^{n+1}|^2 + \Delta t (\nu |\partial_s T_{\alpha}^{n+1}|^2 + K_{\perp,\alpha} |\partial_r T_{\alpha}^{n+1}|^2)] dr ds \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \{i,e\}} \int_{\Omega} [|T_{\alpha}^n|^2 + \Delta t (\nu |\partial_s T_{\alpha}^n|^2 + K_{\perp,\alpha} |\partial_r T_{\alpha}^n|^2)] dr ds \\
 & - \Delta t \sum_{\alpha \in \{i,e\}} K_{\perp,\alpha} Q_{\perp,\alpha} \int_0^1 T_{\alpha}^{n+1}(s,0) ds.
 \end{aligned}$$

En sommant sur $k = 0, \dots, n$ on termine la preuve. \square

Enfin, la discrétisation en espace est faite en utilisant le schéma de volumes finis présenté dans la section 5.3.2.

5.4.2 Résultats numériques

On compare ici les résultats numériques obtenus par le schéma implicite et le schéma IMEX pour (5.43). On prend $K_{\parallel,i} = 2 \times 0.01$, $K_{\parallel,e} = 1$, $K_{\perp,i} = 0.01$, $K_{\perp,e} = 0.01$, $\gamma_i = 0$, $\gamma_e = 2.5$, $Q_{\perp,i} = Q_{\perp,e} = 10$ et $\beta = -0.02$. La température initiale est telle que :

$$T_i^0(s, r) = 3, \text{ and } T_e^0(s, r) = 3, (s, r) \in \Omega.$$

Le temps final de la simulation est $T_{end} = 1$ et la taille du maillage est choisie de sorte que $n_s = 100$, $n_r = 100$.

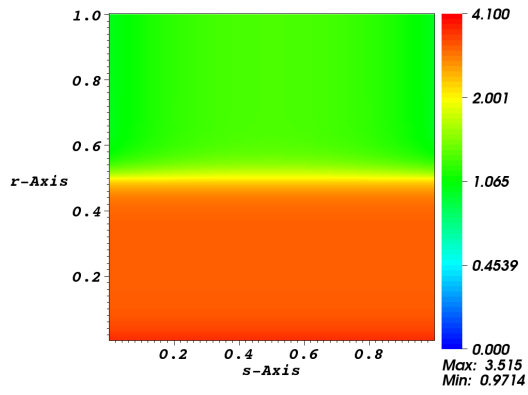
On trace la température des ions et des électrons et on compare leur rapport à différents temps. Le but est de comparer les différents comportements entre les températures des ions et des électrons au bord et dans la SOL d'un Tokamak [31].

On montre dans la Figure 5.7, l'évolution de la température. A gauche, on présente la température des électrons et à droite celle des ions. Notons tout d'abord que la diffusivité thermique parallèle des électrons est presque 100 fois plus grande que celle des ions [11, 56], et que le rapport d'échange d'énergie des électrons au bord $r \in (0.5, 1)$ dépend de $O(T_e^{-3/2})$; d'où la température a une décroissance rapide dans la SOL. Cependant, les conditions limites pour les ions dans la SOL sont données par une condition de type Neumann homogène $\partial_s T_i = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'échange d'énergie dans le limiteur. D'où la température des ions varie peu dans la SOL.

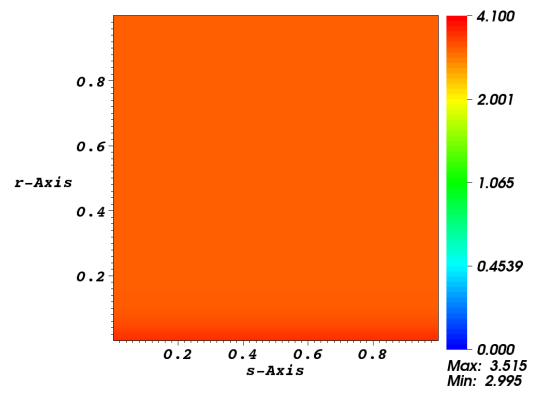
D'autre part, le rapport entre la température des électrons et celle des ions est présenté dans la Figure 5.8. Cette figure illustre le fait que dans la couche de transition, les températures des ions et des électrons sont presque les mêmes. Cependant, dans la SOL, au temps final $T_{end} = 1$ le rapport τ devient grand proche du limiteur à cause de la condition limite $\partial_s T_e \propto T_e^{-3/2}$. L'évolution du rapport τ dans la direction radiale est donnée dans la Figure 5.8. On remarque que dans la couche de transition le rapport τ est presque égal à 1, alors que dans la SOL ce rapport devient grand. Par exemple, au temps $t = 1$, le rapport $\tau = 6$ pour $s = 1/2$ alors qu'il vaut 45 pour $s = 10^{-2}$. Ces comportements correspondent aux résultats obtenus expérimentalement par Kočan *et al.* [14, 16]. Enfin, on fait varier le paramètre β pour étudier le terme source d'équilibre dans la Figure 5.9 et on observe que lorsque le paramètre $|\beta|$ est grand, la rapport τ diminue.

5.5 Conclusion

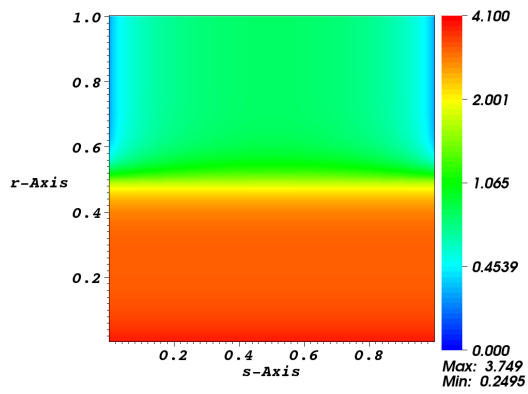
On a présenté dans ce chapitre différentes approximations numériques pour une équation de température non linéaire décrivant l'évolution de la chaleur dans un plasma magnétiquement confiné dans la région du bord d'un Tokamak. Des comparaisons numériques



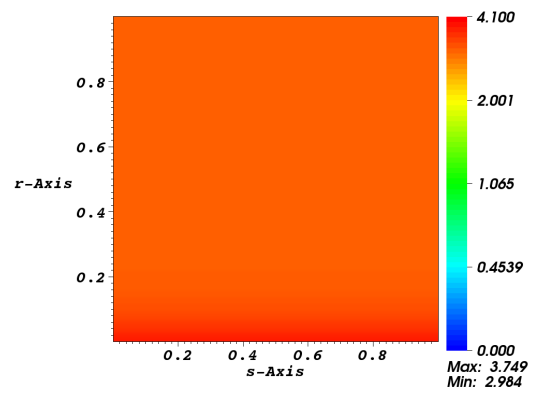
(a) T_e at time=0.1



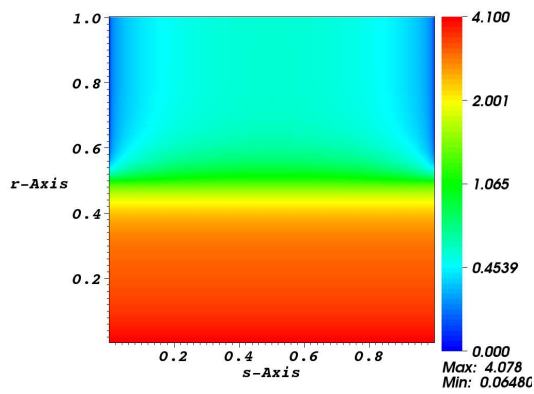
(b) T_i at time=0.1



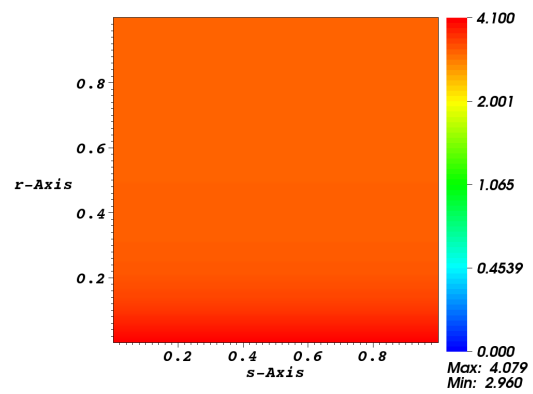
(c) T_e at time=0.25



(d) T_i at time=0.25



(e) T_e at time=1



(f) T_i at time=1

FIGURE 5.7 – Évolution de température du problème (5.43).

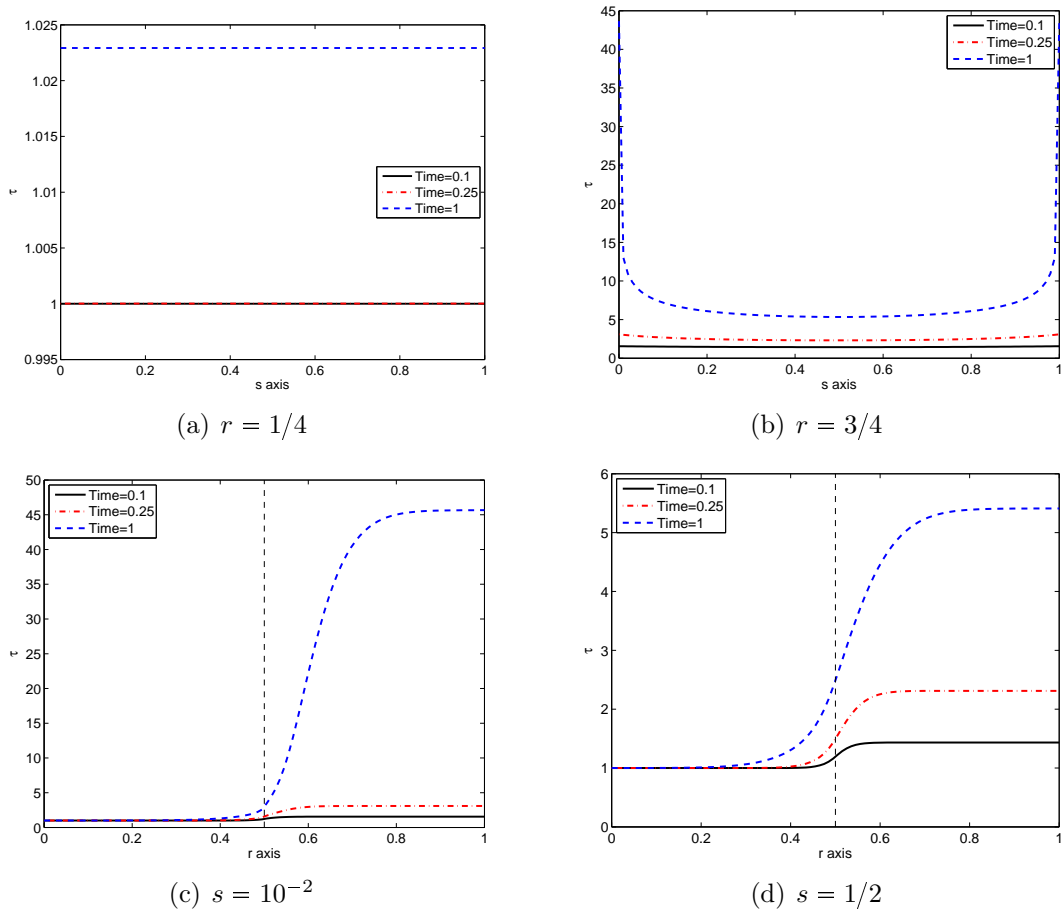


FIGURE 5.8 – Rapport $\tau = T_i/T_e$ aux coupes $r = 1/4$, $r = 3/4$, $s = 10^{-2}$ et $s = 1/2$ en temps $t = 0.1, 0.25$ et 1 respectivement.

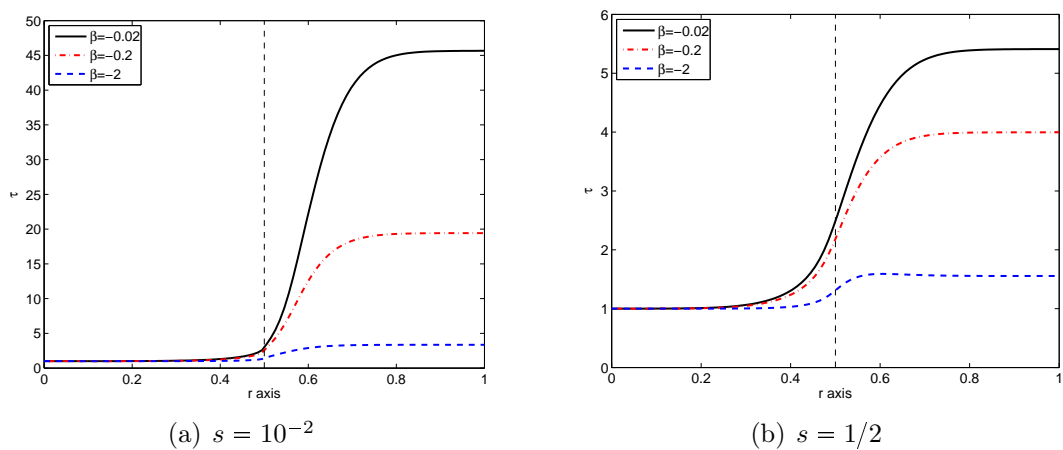


FIGURE 5.9 – Rapport $\tau = T_i/T_e$ aux coupes $s = 10^{-2}$ et $s = 1/2$ pour des différents paramètres $\beta = -2 \times 10^{-2}$, -2×10^{-1} et -2 en temps $t = 1$.

montrent que le schéma IMEX, basé sur une décomposition de l'opérateur de diffusion non linéaire couplé à stratégie de splitting, donne un schéma numérique efficace en terme de précision, stabilité, et temps calcul. L'étape suivante consisterait à coupler le modèle présenté ici avec les équations de transport pour la densité et la quantité de mouvement du plasma.

5.6 Annexe A : Un schéma semi-implicite

On considère ici un schéma semi-implicite pour le problème (5.5) de la forme

$$\begin{cases} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta s_i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \\ T_i^0 = T_{0,i}, & 0 \leq i \leq n_s - 1, \end{cases} \quad (5.46a)$$

avec les flux numériques suivants

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1/2} &= 2K_{\parallel} (T_{i-1/2}^n)^{5/2} (\partial_s T^{n+1})_{i-1/2} \\ &= 2K_{\parallel} \left[\frac{T_i^n + T_{i-1}^n}{2} \right]^{5/2} \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{\Delta s_i + \Delta s_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, N_s - 1, \end{aligned} \quad (5.46b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2} &= 2K_{\parallel} (T_{i+1/2}^n)^{5/2} (\partial_s T^{n+1})_{i+1/2} \\ &= 2K_{\parallel} \left[\frac{T_{i+1}^n + T_i^n}{2} \right]^{5/2} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i}, \quad i = 0, \dots, N_s - 2, \end{aligned} \quad (5.46c)$$

$$\mathcal{F}_{-1/2}^{n+1/2} = \gamma T_0^{n+1}, \quad (5.46d)$$

$$\mathcal{F}_{N_s-1/2}^{n+1/2} = -\gamma T_{N_s-1}^{n+1}. \quad (5.46e)$$

La propriété de stabilité du schéma 5.46 peut être obtenue comme suit. On prend la semi-discrétisation du problème (5.5) suivante

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} = \partial_s (K_{\parallel} (T^n)^{5/2} \partial_s T^{n+1}), \quad (5.47)$$

En multipliant (5.47) par T^{n+1} et en intégrant dans l'intervalle $(0, 1)$, on a

$$\int_0^1 \left((T^{n+1})^2 - T^{n+1} T^n \right) ds = -\Delta t \int_0^1 \left((T^n)^{5/2} (\partial_s T^{n+1})^2 \right) ds - \Delta t \gamma \left((T_0^{n+1})^2 + (T_{N_s-1}^{n+1})^2 \right). \quad (5.48)$$

Ensuite, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 (T^{n+1})^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 (T^n)^2 ds &\leq \int_0^1 \left((T^{n+1})^2 - T^{n+1} T^n \right) ds \\ &\leq -\Delta t \int_0^1 \left((T^n)^{5/2} (\partial_s T^{n+1})^2 \right) ds. \end{aligned} \quad (5.49)$$

On peut prouver la positivité de T^n en suivant la proposition 5.5. Ainsi on a

$$\|T^{n+1}\|_2 \leq \|T^n\|_2 \leq \dots \leq \|T^0\|_2. \quad (5.50)$$

Ce schéma semi-implicite (5.46) est inconditionnellement stable. De plus en utilisant une méthode point-fixe, on obtient un schéma implicite basé sur (5.46). Posons $T^{(0)} = T^n$, on change légèrement (5.46) comme suit

$$\frac{T_i^{(k)} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}}{\Delta s_i}, \quad i = 0, \dots, N_s - 1, \quad (5.51a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i-1/2} &= K_{\parallel} (T_{i-1/2}^{(k-1)})^{5/2} (\partial_s T^{(k)})_{i-1/2} \\ &= 2K_{\parallel} \left[\frac{T_i^{(k-1)} + T_{i-1}^{(k-1)}}{2} \right]^{5/2} \frac{T_i^{(k)} - T_{i-1}^{(k)}}{\Delta s_i + \Delta s_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, N_s - 1, \end{aligned} \quad (5.51b)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1/2} &= K_{\parallel} (T_{i+1/2}^{(k-1)})^{5/2} (\partial_s T^{(k)})_{i+1/2} \\ &= 2K_{\parallel} \left[\frac{T_{i+1}^{(k-1)} + T_i^{(k-1)}}{2} \right]^{5/2} \frac{T_{i+1}^{(k)} - T_i^{(k)}}{\Delta s_{i+1} + \Delta s_i}, \quad i = 0, \dots, N_s - 2, \end{aligned} \quad (5.51c)$$

$$\mathcal{F}_{-1/2} = \gamma T_0^{(k)}, \quad (5.51d)$$

$$\mathcal{F}_{N_s-1/2} = \gamma T_{N_s-1}^{(k)}. \quad (5.51e)$$

Dans chaque pas de temps, on commence la boucle par $k = 1$ et on s'arrête quand la différence entre $T^{(k-1)}$ et $T^{(k)}$ est petite. Enfin, on reproduit les mêmes cas tests de la section 5.2.7. Le tableau 5.7 présente le temps de calcul du schéma semi-implicite (5.46) et du schéma implicite (5.51). On observe que les temps de calcul de ces deux schémas sont presque les mêmes. En comparant avec le tableau 5.1 de la section 5.2.7, on voit que le schéma semi-implicite (5.46) est plus efficace que le schéma implicite résolu par méthode de Newton (5.14). Cependant, le schéma IMEX (5.25) est encore beaucoup plus efficace que ce schéma semi-implicite. Les erreurs relatives sont présentées dans le tableau 5.8. Ces deux schémas ont le même ordre de la précision par rapport au schéma implicite (5.14) et au schéma IMEX (5.25).

Δt		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
Schéma (5.46)	$n_s = 50$	0.02	0.25	2.64	25.40
	$n_s = 150$	0.12	1.12	11.25	115.06
Schéma (5.51)	$n_s = 50$	0.04	0.26	2.69	26.19
	$n_s = 150$	0.18	1.18	11.53	117.05

TABLE 5.7 – Temps de calcul pour le schéma semi-implicite (5.46) et le schéma implicite (5.51) en seconde. Le temps de simulation final est $T_{end} = 1$.

Δt		10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
Schéma (5.46)	$n_s = 50$	0.0598	0.0598	0.0598	0.0598
	$n_s = 150$	0.0181	0.0181	0.0181	0.0181
Schéma (5.51)	$n_s = 50$	0.0571	0.0598	0.0598	0.0598
	$n_s = 150$	0.0177	0.0181	0.0181	0.0181

TABLE 5.8 – Erreurs relatives du schéma semi-implicite (5.46), du schéma implicite (5.51) par rapport à la solution de référence. Encore on compare ces erreurs relatives en temps final $T_{end} = 1$.

Table des figures

1.1	Trajectoire hélicoïdale des particules chargées des plasmas le long des lignes de champ magnétique.	11
1.2	La magnétosphère terrestre	13
1.3	Caractéristiques de l’atmosphère et de l’ionosphère	14
1.4	(a) le champ magnétique terrestre; (b) le champ magnétique uniforme. . .	28
1.5	Phénoménologie du modèle Striation. Gauche : le profil stable; Droite : le profil instable.	35
2.1	La structure (éléments non-nuls (Nnz)) et la taille de la matrice de discrétisation (méthode d’éléments finis de type \mathbb{Q}_1) pour un maillage de taille $(N_x, N_z) = (5, 5)$: (a) matrice associée au problème de perturbation singulière (2.6), (b) matrice associée à l’équation de fluctuation reformulée (2.36b), (c) matrice associée à la résolution directe du schéma AP (2.35), (d) matrice associée à l’équation de fluctuation de la reformulation AP originale (2.14).	51
2.2	Erreur relative entre la solution exacte et ses approximations calculées avec le modèle limite (2.8), le modèle original (perturbation singulière) (2.6) ainsi que les nouveaux schémas itératif (2.36) et direct (2.35) pour les maillages (a) : 50×50 et (b) : 500×500 nœuds.	53
2.3	Comparaison entre le modèle original en dimension deux (2.6), le schéma AP itératif (2.36) et le schéma AP direct (2.35) avec une taille de maillage 250×250 . (a) Estimation du conditionnement pour la matrice de discrétisation; (b) Temps de calcul de la résolution AP direct resp. AP itérative, divisée par le temps de calcul de la résolution du modèle-SP, noté par r_D et r_I respectivement. Le nombre d’itération de la résolution itérative, noté par n_I , est aussi indiqué. Les systèmes linéaires sont résolus par le solveur direct creux PARDISO.	54
2.4	Caractéristiques typiques du plasma ionosphérique en fonction de l’altitude. (a) La fréquence des collisions ion-neutre. (b) Rapport des mobilités transverses et alignée (par rapport au champ magnétique terrestre). μ_P , μ_H , μ_{\parallel} désignent les mobilités de Pedersen, de Hall, et alignée présentées dans la section 1.3.4.	55
2.5	Fonction ε_1 pour des ε_{\min} différents. On fixe $q = 80$, $\varepsilon_{\max} = 1$ et trace la courbe ε_1 pour différents ε_{\min} égaux à 10^{-5} , 10^{-10} , 10^{-15} et 10^{-20}	60

2.6	Comparaison du modèle-SP, le schéma AP standard, le schéma AP non-conservatif, le schéma AP avec moyenne harmonique et le schéma AP Scharfetter-Gummel pour un calcul en dimension deux dans un maillage 250×250 , en utilisant une méthode d'éléments finis de type \mathbb{Q}_1	61
2.7	Comparaison entre le modèle-SP en dimension trois et le schéma AP dans le cas ε constant (pour les deux types de résolutions itératives et directes). Les valeurs de ε varie entre 10^{-20} et 10^2 . Deux tailles différentes $30 \times 30 \times 30$ et $100 \times 100 \times 100$ sont comparées. Nous notons r_I et r_D le rapport des temps de calcul entre le schéma AP direct resp. itératif et le SP-modèle, n_I le nombre d'itération de la résolution itérative.	66
2.8	Comparaison entre le modèle-SP en dimension trois et le schéma AP dans le cas ε variable (pris comme (2.52)). La valeur de ε_{\min} varie entre 10^{-20} et 1. On compare deux différentes tailles de maillage $30 \times 30 \times 30$ et $100 \times 100 \times 100$	67
2.9	Comparaison entre le modèle-SP, le schéma AP, le schéma AP non-conservatif, le schéma AP avec la moyenne harmonique et le schéma AP Scharfetter-Gummel. On prend $N_z = 25$. (a) Solutions approchées par les différentes méthodes dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-1}$; (b) Même dessin dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-10}$; (c) Erreurs relatives entre la solution exacte et ses approximations pour les deux cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-1}$ et $\varepsilon_{\min} = 10^{-10}$	71
2.10	Taux de convergence du schéma AP et du schéma AP Scharfetter-Gummel. (a) Erreurs relatives entre la solution exacte et ses approximations en fonction du pas d'espace dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-1}$; (b) Même dessin dans le cas $\varepsilon_{\min} = 10^{-10}$	72
3.1	Les fréquences de collision d'ions-neutres par rapport à l'altitude et par rapport à la latitude.	76
3.2	Le domaine de calcul ionosphérique et sa géométrie dans le système des Potentiels d'Euler.	78
3.3	Les représentations du système des Potentiels d'Euler	79
3.4	Domaine de calcul dans la couche F de l'ionosphère	88
3.5	Description du tube de champ magnétique.	88
3.6	Données initiales du modèle IRI.	90
3.7	Discrétisation du domaine de calcul respectivement dans les plans $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$	91
3.8	Discrétisation du domaine de calcul respectivement dans les plans $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$	92
3.9	Décomposition le domaine de calcul en trois : les maillages non-uniformes \mathbb{T} et \mathbb{B} ; le maillage uniforme \mathbb{C}	93
3.10	Maille $S_{i,j,k}$ respectivement dans \mathbb{T} , \mathbb{C} et \mathbb{B}	93
3.11	Les rapports entre des coefficients de matrice de diffusion en altitude et en latitude.	107
3.12	Les données initiales sous la forme d'une bulle sous-densité ou sur-densité dans le plasma environnement. Les paramètres pour décrire le tube sont : $H_l = 450\text{km}$, $H_h = 850\text{km}$, $H_e = 100\text{km}$, $H_w = 400\text{km}$	113

3.13	Potentiel électrique du modèle Striation résolu par l'algorithme 3.1 avec la taille de maillage $(N_\alpha, N_\beta, N_\gamma) = (100, 100, 41)$	115
3.14	Potentiel électrique du modèle Dynamo résolu par la méthode d'éléments finis avec la taille de maillage $(N_\alpha, N_\beta, N_\gamma) = (100, 100, 41)$	116
3.15	Comparaison des schémas numériques de l'équation de conservation de la masse dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. On utilise le Tube1 et compare l'évolution de la densité sur la couche centrale. Colonne à gauche : l'algorithme 3.3; Colonne au milieu : l'algorithme 3.5; Colonne à droite : l'algorithme 3.6.	117
3.16	Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation dans la couche centrale du Tube1 avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 61$. Colonne à gauche : l'algorithme 3.5; Colonne à droite : l'algorithme 3.6.	118
3.17	Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.	119
3.18	Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Dynamo dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.	120
3.19	Évolution de la bulle de sous-densité du plasma dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : le modèle Striation; Colonne à droite : le modèle Dynamo.	121
3.20	Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation dans le Tube2 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.	123
3.21	Évolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Dynamo dans le Tube2 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.	124
3.22	Évolution de la bulle de sous-densité du plasma dans le Tube2 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : le modèle Striation; Colonne à droite : le modèle Dynamo.	125
3.23	La quantité $\rho\nu$ du modèle IRI. On trace $\rho\nu$ en altitude et en latitude dans (a) et (b). (c) et (d) présentent $\rho\nu$ dans le Tube1 et le Tube2 en présence une bulle de sur-densité du plasma.	126
3.24	Évolution de la bulle de sur-densité du plasma en utilisant le modèle Dynamo dans le Tube1 avec la taille de maillage $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : la couche centrale; Colonne au milieu : la couche médiane; Colonne à droite : la couche externe.	127
3.25	Évolution de la bulle de sur-densité du plasma dans un maillage non-uniforme $100 \times 100 \times 41$. Colonne à gauche : le modèle Striation; Colonne à droite : le modèle Dynamo.	128
3.26	Transformation géométrique	130

4.1	Description du tube de champ magnétique.	137
4.2	Evolution de la bulle de sous-densité du plasma à la couche centrale en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$	150
4.3	Evolution de la bulle de sous-densité du plasma à la couche médiane en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$	151
4.4	Evolution de la bulle de sous-densité du plasma à la couche externe en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$	152
4.5	Evolution de la bulle de sous-densité du plasma en utilisant le modèle Striation avec la taille de maillage $300 \times 300 \times 41$	153
4.6	Effet des mobilités transverses et alignées pour le potentiel du modèle Dynamo. Le domaine de calcul est défini par $H_h = 650$ km, $H_l = 250$ km, $H_e = 100$ km, $H_w = 400$ km. (a) est le second membre de l'équation (4.2) et (c) est le potentiel calculé par cette équation. (b) le second membre en supposant que $\partial_\gamma j_{n\gamma} = 0$ et (d) est le potentiel correspondant.	155
4.7	Tests de l'équation d'advection-diffusion (4.39) après une période avec différentes méthodes.	159
5.1	Domaine en 2D.	166
5.2	Vitesse de convergence des schémas implicite et IMEX. On compare les erreurs relatives dans les tailles du maillage 16, 32, 64, 128, 192, 256 et 320 respectivement en temps final $T_{end} = 1$	184
5.3	Évolution de température évolution du problème (5.5). On utilise le schéma IMEX pour approcher (5.5) et choisit le pas de temps $\Delta t = 10^{-4}$. (a) la solution de référence et les résultats du schéma IMEX pour $n_s = 50, 150$ en temps final $T_{end} = 1$, (b) les résultats du schéma IMEX pour $n_s = 150$ aux différents temps $t = 0.25, 0.50, 0.75$ et 1 respectivement.	184
5.4	Évolution de température du problème (5.28).	191
5.5	Évolution de température aux coupes $r = 1/4, r = 3/4, s = 10^{-2}$ et $s = 1/2$ en temps $t = 0.1, 0.5, 1$ et 2 respectivement.	192
5.6	Évolution d'énergie de dissipation par rapport au temps du problème (5.28), avec $\Delta t = 0.001$	193
5.7	Évolution de température du problème (5.43).	197
5.8	Rapport $\tau = T_i/T_e$ aux coupes $r = 1/4, r = 3/4, s = 10^{-2}$ et $s = 1/2$ en temps $t = 0.1, 0.25$ et 1 respectivement.	198
5.9	Rapport $\tau = T_i/T_e$ aux coupes $s = 10^{-2}$ et $s = 1/2$ pour des différents paramètres $\beta = -2 \times 10^{-2}, -2 \times 10^{-1}$ et -2 en temps $t = 1$	198

Bibliographie

- [1] Global ionospheric scintillation model. 2007.
- [2] T. L. Aggson, W.J. Burke, N.C. Maynard, W.B. Hanson, P.C. Anderson, J.A. Slavin, W.R. Hoegy, and J.L. Saba. Equatorial bubbles updrafting at supersonic speeds. *J. Geophys. Res.*, 97 :8581–8590, 1992.
- [3] W. G. Baker. Electric currents in the ionosphere. ii. the atmospheric dynamo. *J. Geophys. Res.*, 246 :295–305, 1953.
- [4] C. Besse, J. Claudel, P. Degond, F. Deluzet, G. Gallice, and C. Tessieras. A model hierarchy for ionospheric plasma modeling. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*, 14, 2004.
- [5] C. Besse, J. Claudel, P. Degond, F. Deluzet, G. Gallice, and C. Tessieras. Instability of the ionospheric plasma : modeling and analysis. *SIAM journal on applied mathematics*, 65 :2178–2198, 2005.
- [6] C. Besse, P. Degond, H.J. Hwang, and R. Poncet. Nonlinear instability of the two-dimensional striation model about smooth steady. *Communications in Partial Differential Equations*, 32 :1017–1041, 2007.
- [7] C. Besse, F. Deluzet, C. Negulescu, and C. Yang. Efficient numerical methods for strongly anisotropic elliptic equations. *submitted*.
- [8] Christophe Besse, Jean Claudel, Pierre Degond, Fabrice Deluzet, Gérard Gallice, and Christian Tessieras. Numerical simulations of the ionospheric striation model in a non-uniform magnetic field. *Computer Physics Communications*, 176(2) :75 – 90, 2007.
- [9] D. Biliza. International reference ionosphere 2000. *Radio Sci.*, 36 :261–275, 2001.
- [10] E. Blanc, B. Mercandelli, and E. Houngninou. Kilometric irregularities in e and f regions of the daytime equatorial ionosphere observed by a high resolution hf radar. *Geophysical Research Letters*, 23 :645–648, 1996.
- [11] S.I. Braginskii. Transport processes in a plasma. *Reviews in Plasma Physics, New York Consultant Bureau Edition*, 1965.
- [12] H. Brezis. Points fixes. *Séminaire Choquet, Initiation à l'analyse*, 4 :1–23, 1964-64.
- [13] J.M. Brizard and T.S. Hahm. Foundations of nonlinear gyrokinetic theory. *Rev. Modern Phys.*, 79 :421–468, 2007.
- [14] M. Kočan, J.P. Gunn, T. Gerbaud, J-Y Pascal, G. Bonhomme, C. Fenzi, E. Gauthier, and J-L. Segui. Edge ion-to-electron temperature ratio in tore supra tokamak. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 50 :1250009, 2008.

- [15] M. Kočan, J.P. Gunn, M. Komm, J-Y Pascal, E. Gauthier, and G. Bonhomme. On the reliability of scrape-off layer ion temperature measurements by retarding field analyzers. *Review of Scientific Instruments*, 79 :073502, 2008.
- [16] M. Kočana, J.P. Gunn, J.-Y. Pascal, G. Bonhomme, P. Devynck, I. Ďuran, E. Gauthier, P. Ghendrih, Y. Marandet, B. Pegourie, and J.-C. Vallet. Measurements of scrape-off layer ion-to-electron temperature ratio in tore supra ohmic plasmas. *Journal of Nuclear Materials*, 390-391 :1074–1077, 2009.
- [17] F.F. Chen. *Introduction to plasma physics*. Plenum, 1974.
- [18] P. Degond, F. Deluzet, and C. Negulescu. An asymptotic preserving scheme for strongly anisotropic elliptic problems. *SIAM-MMS (Multiscale Modeling and Simulation)*, 2 :645–666, 2010.
- [19] J.L. Delcroix and A. Bers. *Physique des plasmas*. Interéditions, 1974.
- [20] J. Du and R. J. Stening. Simulating the ionospheric dynamo-ii. equatorial electric fields. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 61 :925–940, 1999.
- [21] C. Besse et al. Modélisation complètement tridimensionnelle d’instabilités du plasma ionosphérique. *Rapport de contrat*, 2007.
- [22] F. Filbet and S. Jin. A class of asymptotic preserving schemes for kinetic equations and related problems with stiff sources. *J. Comput. Phys.*, 229 :7625–7648, 2010.
- [23] X. Garbet. Instabilités, turbulence et transport dans un plasma magnétisé. *Habilitation dissertation, Université de marseille*, 2001.
- [24] C. Grimault. Caractérisation des canaux de propagation satellite-terre shf et ehf en présence de plasma post-nucléaire. *PhD Dissertation, University of Rennes*, 1995.
- [25] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys*, 49 :357, 1983.
- [26] N. J. Higham and F. Tisseur. A block algorithm for matrix 1-norm estimation, with an application to 1-norm pseudospectra. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21 :1185–1201, 2000.
- [27] J.D. Huba. *NRL PLASMA FORMULARY*. Naval Research Laboratory, 2002.
- [28] J.D. Huba, G. Joyce, and J.A. Fedder. Sami2 is another model of the ionosphere (sami2) : A new low-latitude ionosphere model. *J. Geophys. Res.*, 105, 2000.
- [29] J.D. Huba, G. Joyce, and J.A. Fedder. Simulation study of mid-latitude ionosphere fluctuations observed at millstone hill. *Geophys. Res. Lett.*, 30 :1943, 2003.
- [30] L. Isoardi. *Modélisation du transport dans le plasma de bord d’un tokamak*. PhD thesis, Université Paul Cézanne, 2010.
- [31] L. Isoardi, H. Bufferand, G. Chiavassa, G. Ciraolo, F. Schwander, E. Serre, S. Viazzo, N. Fedorczak, Ph. Ghendrih, J. Gunn, Y. Sarazin, and P. Tamain. 2d modelling of electron and ion temperature in the plasma edge and sol. *Journal of Nuclear Materials*, 2011.
- [32] M. J. Keskinen, S. L. Ossakow, S. BAsu, and P.J. Sultan. Mangetic-flux-tube-integrated evolution of equatorial ionospheric plasma bubbles. *J. Geophys. Res.*, 103 :3957–3968, 1998.

-
- [33] M.J. Keskinen, S.L. Ossakow, and B.G. Fejer. Three-dimensional non linear evolution of equatorial ionospheric spread-f bubbles. *Geophys. Res. Lett.*, 30, 2003.
- [34] M.J. Keskinen, S.L. Ossakow, B.G. Fejer, and J. Emmert. Evolution of equatorial ionospheric bubbles during a large auroral electrojet index increase in the recovery phase of a magnetic storm. *J. Geophys. Res.*, 111, 2006.
- [35] N.A. Krall and A.W. Trivelpiece. *Principles of plasma physics*. San Francisco Press, 1986.
- [36] A. Waechter O. Schenk and M. Hagemann. Matching-based preprocessing algorithms to the solution of saddle-point problems in large-scale nonconvex interior-point optimization. *Journal of Computational Optimization and Applications*, 36 :321–341, 2007.
- [37] S. L. Ossakow and P. K. Chaturvedi. Morphological studies of rising equatorial spread f bubbles. *J. Geophys*, 83 :2085–2090, 1978.
- [38] M. Parrot. The micro-satellite demeter. *Journal of Geodynamics*, 33 :535–541, 2002.
- [39] P. L. Roe. Some contributions to the modeling of discontinuous flows. *Lect. Notes Appl. Math.*, 22 :163–19, 1985.
- [40] C. Ronchi, P.L. Similon, and R.N. Sudan. A nonlocal linear theory of the gradient drift instability in the equatorial electrojet. *J. Geophys. Res.*, 94 :1317–1326, 1989.
- [41] C. Ronchi, R. N. Sudan, and D. T. Farley. Numerical simulations fo large-scale plasma turbulence in the daytime equatorial ellectrojet. *J. Geophys Res.*, 96 :21265–21279, 1991.
- [42] C. Ronchi, R. N. Sudan, and P. L. Similon. Effect of short-scale plasma turbulence on kilometer wavelengh irregularities in the equatorial electrojet. *J. Geophys Res.*, 95 :189–200, 1990.
- [43] C. Ronchy. Numerical simulations of large-scale plasma turbulence in the day time equatorial electrojet. *J. Geophys. Res.*, 96 :21263–21279, 1991.
- [44] N. Saito. An interpretation of the scharfetter-gummel finite difference scheme. *Proc. Japan Acad.*, 10 :187–191, 2006.
- [45] O. Schenk and K. Gartner. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. *Journal of Future Generation Computer Systems*, 20 :475–487, 2004.
- [46] C.E. Seyler. A non local theory of the gradient-drift instability in the ionospheric e-region plasma at mid latitudes. *J. Atmos. Solar-Terr.*, 66 :1627–1637, 2004.
- [47] C.-W. Shu. Total-variation-diminishing time discretizations. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 9 :1073, 1988.
- [48] J. Simon. Compact sets in the space $l^p(0, t; b)$. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146 :65–96, 1987.
- [49] R.N. Sudan, J. Akinrimisi, and D.T. Farley. Generation of small scales irregularities in the equatorial electrojet. *J. Geophys*, 78 :240, 1973.
- [50] P. Tamain. *Etude des flux de matière dans le plasma de bord des tokamaks : alimentation, transport et turbulence*. PhD thesis, Université de Provence, 2007.

- [51] P. Tamain, Ph. Ghendrih, E. Tristone, V. Grandgirard, X. Garbet, Y. Sarazin, E. Serre, G. Giraolo, and G. Chiavassa. Tokam-3d : a 3d fluid code for transport and turbulence in the edge plasma of tokamaks. *JCP*, 229 :361–378, 2010.
- [52] T. Tsuchiya, K. Yoshida, and S. Ishioka. Yamamoto’s principle and its applications to precise finite element error analysis. *J.comput. Appl. Math.*, 152 :507–532, 2003.
- [53] Xavier VALLIERES. *Les échelles de la turbulence dans l’ionosphère des hautes latitudes et leurs signatures sur les échos des radars HF du réseau SuperDARN*. PhD thesis, Université d’Orléans, 2002.
- [54] H. A. Van Der Vorst. Krylov subspace iteration. *Computing in science and engineering*, 2000.
- [55] X. Wei. *Three dimensional Rigorous Model for Optical Scattering Problems*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2006.
- [56] J. Wesson. *Tokamaks*. Oxford University Press, third edition, 2009.
- [57] S.T. Zalezak. Nonlinear equatorial spread f : the effect of the neutral wind and background perpendicular conductivity. *J. Geophys. Res.*, 87 :151–166, 1982.