

Simulation numérique en interaction fluide structure : Application aux problèmes vibroacoustiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4 Décembre 2012

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille
(Spécialité Mécanique)

par

Mohammed AMDI

Composition du jury

<i>Président :</i>	Abdelwaheb AMROUCHE, (Professeur)	Université d'Artois
<i>Rapporteurs :</i>	Fouad ERCHIQUI, (Professeur) Moji MOATAMEDI, (Professeur)	Université du Québec, Canada Université de Narvik, Norvège
<i>Examineurs :</i>	Hassan NAJI, (Professeur) Walid LARBI, (Maître de conférences) Arnaud RINGEVAL, (Ingénieur calcul)	Université d'Artois CNAM Paris CIMES France
<i>Directeur de thèse :</i>	Mhamed SOULI, (Professeur)	Université de Lille I

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Laboratoire de Mécanique de Lille — UMR 8107

Boulevard Paul Langevin – Bât. M6 – 59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

Tél. : +33 (0)3 20 33 71 52 – Télécopie : +33 (0)3 20 33 71 53 – email : lm1@univ-lille1.fr

Remerciements

Tout d'abord, je remercie vivement le professeur Mhamed Souli de m'avoir accueilli au sein de son équipe pour réaliser ma thèse. Je le remercie pour m'avoir guidé, conseillé et soutenu tout au long de la thèse.

Je remercie également Mlle Alia Ahlem, pour ses nombreux conseils et son soutien. Grâce à elle j'ai beaucoup appris sur la recherche, je lui en suis très reconnaissant.

Je tiens à remercier les professeurs Fouad Erchiqui et Moji Maotamadi pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon mémoire de thèse. Je remercie vivement les professeurs Abdelwahab Amrouche, Hassan Naji ainsi que Monsieur Walid Larbi et Monsieur Arnaud Ringeval pour avoir accepté d'être membre du jury de ma thèse. Je remercie aussi l'ensemble des membres du LML, doctorants, chercheurs et personnels administratifs et tout particulièrement mes collègues de bureau, Ramzi Messahel et Malik Atik.

Une pensée pour mes parents, mes frères et sœurs, mes amis, qui m'ont supportés tout au long de ces travaux et apportés leurs soutiens sans faille. C'est enfin et surtout à ma femme que je veux dédier ce travail, et à notre futur bébé.

Résumé

Dans beaucoup de cas les nuisances sonores auxquelles nous sommes quotidiennement exposés sont dues à la vibration d'une structure (machine industrielle, véhicule, appareil ménager ...). Néanmoins, tous les bruits que nous percevons ne sont pas forcément dûs à la vibration d'une structure, par exemple, les bruits aérodynamiques, les bruits de turbine ou les bruits de jet ... La recherche en vibroacoustique est étroitement liée avec des applications industrielles, car l'industrie a besoin des nouveaux outils numériques, développés dans les centres de recherche, pour concevoir de nouveaux produits silencieux. En effet, les démarches purement expérimentales sont en général longues, compliquées et coûteuses, elles peuvent être, de plus, très peu efficaces. Puisque l'objectif ultime est la conception d'une structure qui permet de réduire le bruit pour un très bon confort acoustique, les simulations numériques peuvent être incluses dans l'optimisation de la conception avec des techniques de conception optimales de forme et l'optimisation des matériaux. Une fois les simulations validées par les résultats expérimentaux, elles peuvent être utilisées comme outil de conception pour l'amélioration de la structure du système concerné.

L'objectif principal de mon travail de thèse est le développement des outils de prédiction numériques permettant la réduction des nuisances sonores dues à la vibration des structures. Pour ce faire, des formulations théoriques originales ont été formulées, puis implémentées afin de favoriser la conception de produits silencieux. D'une manière plus spécifique, deux parties vont être

traités :

La première partie aborde le problème bien connu des fréquences irrégulières de la méthode des éléments finis de frontière, la BEM, pour le rayonnement acoustique dans un domaine extérieur. La perte de l'unicité de la solution de la BEM se produit à un ensemble de fréquences irrégulières associées à des fréquences propres du problème interne correspondant. Afin de contourner cette difficulté nous avons implémenté la méthode de Burton et Miller. Pour surmonter le problème de l'hypersingularité du noyau due à cette méthode, nous avons étendu le traitement utilisé initialement par Kirkup pour des triangles aux quadrangles. Finalement, nous avons comparé deux techniques couramment utilisées, la méthode CHIEF et la méthode de Burton et Miller.

Le principal inconvénient de la BEM, sous sa forme traditionnelle, est de conduire à un système linéaire dont la matrice est pleine et non symétrique. Cela crée des difficultés sérieuses pour un nombre de degré de liberté élevé et en particulier limite fortement (en termes de géométrie, longueur d'onde, domaines de fréquences . . .) les configurations accessibles à la méthode. L'objectif du travail présenté ici, est d'utiliser la méthode des éléments de frontière couplée à un algorithme visant à s'affranchir des difficultés émergeant numériquement de l'utilisation des méthodes intégrales et visant à réduire très significativement les coûts de calcul. Dans la deuxième partie de cette thèse la formulation de la méthode multipôlaire rapide FMM mono-niveau pour l'équation de Helmholtz, ainsi que sa mise en œuvre et validation ont été effectuées afin de repousser les limites de la BEM en terme de temps de calcul ainsi que de mémoire. Cette méthode a fait l'objet de nombreuses validations qui ont permis de montrer qu'elle donne des résultats précis validés par des codes commerciaux.

Abstract

In many cases the noise which we are daily exposed due to the vibration of a structure (industrial machinery, vehicle, home appliance ...). Nevertheless, all the sounds we perceive are not necessarily due to the vibration of a structure, for example, wind noise, turbine noise or the sounds of jet ... The research is closely linked with vibroacoustic industrial applications, because the industry needs the new digital tools, developed in research centers to develop new products silent. Indeed, purely experimental approaches are usually long, complicated and expensive, they can be, again, very inefficient. Since the ultimate objective is a design of structure that reduce the noise for acoustic comfort, numerical simulations can be included in shape design optimization with shape optimal design techniques, and material optimisation. Once simulations are validated by test results, it can be used as design tool for the improvement of the system structure involved.

The main objective of my thesis is the development of predictive tools for the digital noise reduction due to the vibration of structures. To do this, the original theoretical formulations were developed, and implemented to facilitate product design muffler. In a more specific, both parts will be covered :

The first part addresses the familiar problem of irregular frequencies of the finite element boundary, the BEM for the acoustic radiation in an external field. The loss of the uniqueness of the solution of the BEM occurs in a set of irregular frequencies associated with frequencies of the corresponding internal problem. To circumvent this difficulty we have implemented

the method of Burton and Miller in our code. To overcome the problem of hypersingularité kernel due to this method, we extended the treatment used initially by Kirkup for triangles to quadrangles. Finally, we made comparisons of the two commonly used techniques, the method and CHIEF method of Burton and Miller.

The main drawback of the BEM, in its traditional form, is to lead to a linear system whose matrix is full and not symmetrical. This creates serious difficulties for a number of degrees of freedom and in particular raise greatly limits (in terms of geometry, wavelength, frequency ranges . . .) configurations accessible to the method. The aim of the present work is to use the boundary element method coupled with an algorithm to overcome the difficulties emerging numerically using integral methods and to reduce very significantly the computational costs. In the second part of this thesis the formulation of the fast multipole method FMM single level for Helmholtz equation, and its implementation and validation were performed in order to push the boundaries of the BEM in terms of computation time and memory. This method has undergone numerous validations have shown that it gives accurate results validated with commercial codes.

Table des matières

1	Interaction fluide structure pour les problèmes acoustiques et vibroacoustiques - État de l'art -	15
1.1	Contexte général	15
1.2	État de l'art	16
1.2.1	Rayonnement acoustique	16
1.2.1.1	Méthodes analytiques	17
1.2.1.2	Méthodes numériques en acoustique	18
1.2.1.2.1	Méthode des éléments finis	18
1.2.1.2.2	Méthode des éléments finis de frontière BEM	19
1.2.2	Problème des fréquences irrégulières	22
1.2.2.1	Méthode de CHIEF	22
1.2.2.2	Méthode de Burton et Miller	23
1.2.3	Méthodes d'accélération de la BEM	25
1.2.3.1	Méthode d'interpolation de la matrice	25
1.2.3.2	Méthode Low-Rank	26
1.2.3.3	Méthode multipolaire rapide FMM	28
1.2.4	Couplage vibroacoustique faible	30
1.3	Organisation et contributions de la thèse	32
2	Vibrations des structures	34

2.1	Vibrations	34
2.1.1	Définition	34
2.1.2	Sources vibratoires dans un véhicule	35
2.1.3	Sources de bruits dans un véhicule	36
2.2	Analyse temporelle de la structure	36
2.3	Étude fréquentielle de la structure	40
2.3.1	Vibrations périodiques	40
2.3.2	Vibrations aléatoires	44
2.3.2.1	Définition d'une densité spectrale de puissance	45
2.3.2.2	DSP du déplacement	46
2.3.2.3	DSP et RMS de l'accélération	47
2.3.2.4	DSP et RMS des contraintes	47
2.3.3	Endommagement par fatigue	47
2.3.3.1	La courbe S-N	48
2.3.3.2	Loi d'endommagement de Miner	49
2.3.3.3	Analyse de la fatigue dans le domaine fré- quentiel	50
2.3.3.4	Prédiction de la fatigue d'une pièce métallique	55
2.4	Conclusion	58
3	Méthode des éléments finis de frontière BEM	60
3.1	Introduction	60
3.2	Mise en équation du problème	61
3.2.1	Équation de propagation des ondes	61
3.2.2	Équation d'Helmholtz	63
3.3	La BEM directe	64
3.3.1	Identité de Green	64
3.3.2	Problème de rayonnement interne	65
3.3.3	Problème de rayonnement externe	68

3.3.4	Discrétisation	70
3.3.5	Intégration numérique	73
3.4	La BEM indirecte	75
3.5	Résolution du système linéaire	78
3.6	Accélération de la BEM par low-rank	80
3.7	Approximation de la BEM indirecte	83
3.7.1	Méthode de Rayleigh	83
3.7.2	Méthode d'onde plane	86
3.7.3	Le lien entre la méthode de Rayleigh et la méthode d'onde plane	86
3.7.4	Méthode de Kirchhoff	87
3.8	Application numérique	87
3.8.1	Rayonnement d'une plaque	87
3.8.2	Analyse du bruit produit par l'impact d'un club de golf frappant une balle	92
3.9	Conclusion	94
4	Simulation numérique des problèmes de rayonnement ex- terne	97
4.1	Introduction	97
4.2	Illustration du problème des fréquences irrégulières	98
4.3	Méthode de Burton & Miller	100
4.3.1	Principe de la méthode	100
4.3.2	Intégration numérique du noyau $\frac{\partial^2 G}{\partial n_p \partial n_q}$	103
4.4	Résultats numériques	105
4.4.1	Exemple de validation : Rayonnement acoustique d'un cube	106
4.4.2	Application numérique : Cube excité par un marteau rigide	107

4.5	Conclusion	111
5	Méthode multipôlaire rapide FMM	112
5.1	Formulation de la FMM	113
5.1.1	Développement de la méthode multipôlaire FMM . . .	113
5.1.2	Nombre de pôle L de la série de Gegenbauer	117
5.1.3	Discrétisation de la sphère unité	118
5.2	Mise en œuvre	120
5.2.1	Découpage du domaine	120
5.2.2	Parcours de l'arbre	122
5.2.2.1	Différentes étapes de l'algorithme	122
5.2.2.2	Optimisation de l'étape de transfert	125
5.2.2.3	Taille des cubes	127
5.3	Résultats numériques	127
5.3.1	Validation de la sphère	127
5.3.2	Application industrielle : problème de passage d'un train	129
5.3.2.1	Description du modèle	129
5.3.2.2	Résultats numériques	132
5.4	Conclusion	133
6	Conclusion générale et perspectives	134
6.1	Conclusion	134
6.2	Perspectives	136
A	Intégration numérique singulière du terme dérivée seconde de la fonction de Green	138
A.1	Procédure de régularisation	138
A.2	Calcul des angles A et B	141
A.3	Calcul de l'intégrale N_0	142
A.4	Calcul de l'intégrale L_0	143

TABLE DES MATIÈRES	10
--------------------	----

B Solution analytique de la sphère	144
---	------------

Table des figures

2.1	Différents types de chaussées	35
2.2	Problème de la structure	37
2.3	Mesures acoustique et vibratoire	41
2.4	Vibromètre laser, Pot vibrant et Marteau de choc	41
2.5	Fraction de durée de vie associée à une amplitude donnée d'un cycle de contrainte	50
2.6	Dimensions de la pièce en aluminium	55
2.7	Maillage de la pièce en aluminium	56
2.8	Densité spectrale d'accélération	56
2.9	Dispositif expérimental	57
3.1	Problème acoustique interne	66
3.2	Rayonnement acoustique externe	69
3.3	Éléments quadrilatérale et triangulaire	70
3.4	Transformation en coordonnées polaires généralisées	75
3.5	Découpage de l'élément	75
3.6	Définition des variables primaires	76
3.7	Rayonnement acoustique de la structure au point d'écoute X .	76
3.8	Rayonnement acoustique externe	77
3.9	Structure fine avec une épaisseur négligeable	77
3.10	Partition du domaine	80
3.11	Matrice symbolique factorisée	83

3.12	Propagation en milieu semi-infini	85
3.13	Piston encastré dans un baffle rigide infini	85
3.14	Plaque vibrante utilisant la méthode de Kirchhoff	88
3.15	Déscription du modèle BEM	89
3.16	La force nodale appliquée à la structure en fonction du temps	89
3.17	Comparaison entre la BEM indirecte et SYSNOISE	90
3.18	Pression calculée par la méthode de Rayleigh comparée à SYS- NOISE	91
3.19	Pression calculée par la méthode de Kirchhoff comparée à SYSNOISE	92
3.20	Variation de la pression rayonnée calculée par différentes mé- thodes	93
3.21	Maillage du modèle	94
3.22	Variation de la pression rayonnée calculée par la méthode de Rayleigh et comparée à la BEM	95
3.23	Pics de pression prédits par la méthode de Rayleigh et par la BEM	95
4.1	Maillage de la sphère (5400 éléments)	100
4.2	Pression au point (4.,0.,0.) : comparaison entre la BEM et la solution analytique	100
4.3	Découpage en triangles	104
4.4	Triangle avec tout les paramètres	105
4.5	Exemple du cube pulsant : (gauche) Maillage BEM, (droite) variation de la pression en fonction de la fréquence	107
4.6	Exemple du cube de face vibrante : (gauche) Maillage BEM, (droite) la pression rayonnée en des points d'observation situés sur le cercle de rayon $r = 5m(z = 0)$	108

4.7	Pression (Pa) rayonnée d'un cube excité par un marteau (gauche) aux points d'observation localisés sur un cercle de rayon $r = 5m$ pour $f = 400Hz$ (milieu) et $f = 442Hz$ (droite)	109
4.8	Effet de la position, de la vitesse d'impact et de la masse du marteau sur la pression rayonnée (Pa) pour la fréquence $400Hz$	110
5.1	Points de développement multipolaire et locale	114
5.2	Traitement des interactions sans la FMM	116
5.3	Traitement des interactions avec la FMM	117
5.4	Découpage de la sphère 15000 éléments dans une grille $3D$	121
5.5	Disposition de maillage dans un carré (cas $2D$)	121
5.6	Découpage du carré en une grille $2D$	122
5.7	Cellules voisines et la liste C	123
5.8	Calcul des moments	123
5.9	Transfert des moments de la liste C	124
5.10	Interactions directes et la descente locale	125
5.11	Résultats de la sphère : pression calculée par notre code et Waon128	128
5.12	Différents types de bruits lors du passage d'un train	131
5.13	Dimension du problème et placement des microphones	131
5.14	Modèle numérique du train	132
5.15	Résultats numériques du train	133
A.1	La géométrie d'un élément de la surface	140
A.2	Transformation géométrique	141

Liste des tableaux

2.1	Durée de vie théorique et expérimentale	57
5.1	Résultats pour milles fréquences	128
5.2	Résultats pour dix fréquences	129

Chapitre 1

Interaction fluide structure pour les problèmes acoustiques et vibroacoustiques - État de l'art -

1.1 Contexte général

Le confort acoustique est l'une des prestations qu'attendent aujourd'hui les acheteurs d'automobile, c'est un indicateur de qualité ainsi qu'un argument de vente très important au même titre que la sécurité ou la consommation. Dans un contexte de réduction des temps de développement des produits industriels, afin d'étudier les niveaux sonores induits par les équipements, la modélisation et la simulation prennent une importance croissante. Cependant, la multiplicité des méthodes et des outils force à la prudence quant à la qualité des résultats. De nombreux industriels s'intéressent à la recherche des solutions antibruit innovantes dès le stade de la conception, ils veulent prévoir, analyser et éventuellement corriger les nuisances sonores engendrées par une structure pour améliorer leur compétitivité.

Le plus souvent, les entreprises privilégient l'apparence (marketing) et

les conditions de lancement du produit comme les considérations primaires de conception. Tout au long du cycle de conception, les prototypes sont fabriqués et testés pour aider à mieux développer le produit. Les résultats de tels travaux expérimentaux aident l'ingénieur à comprendre comment le bruit se génère et ainsi décider comment la conception peut être modifiée pour réduire le bruit. Cependant, le développement de cette manière est très coûteux, c'est pourquoi, encouragés par le développement important des ressources informatiques, les industriels et les centres de recherches se tournent depuis quelques années vers les méthodes de calcul numériques, capables de résoudre des problèmes beaucoup plus réalistes avec la prise en compte de géométries complexes. Les recherches dans ce domaine ont donc une retombée industrielle importante.

Le présent travail concerne la prédiction du bruit rayonné par les structures. Ce thème de recherche est très étudié depuis les années 1960, dans le but de réduire les nuisances sonores des structures vibrantes. Le contexte pris en compte ici est la prédiction du rayonnement acoustique d'une structure vibrante à partir des données vibratoires qui est cruciale dans la conception des structures à bruit faible.

1.2 État de l'art

1.2.1 Rayonnement acoustique

Sous l'effet d'une excitation mécanique impulsionnelle ou stationnaire et des mouvements de déformation de la structure, le fluide environnant est mis en mouvement (il y a égalité des vitesses à l'interface) cette agitation du fluide se propage au loin (bruit rayonné, champ lointain). La zone immédiatement voisine de la structure est donc le siège d'un réarrangement important entre le champ vibratoire et le champ acoustique. Lorsqu'une particule d'air est déplacée de sa position d'équilibre, il se produit une hausse locale temporaire

de pression par rapport à la pression atmosphérique. Avant de rejoindre sa position d'équilibre, cette particule transmet la perturbation aux particules adjacentes. La propagation de ce cycle de compression et dépression constitue l'onde sonore. Théoriquement, ce mouvement du fluide est entièrement décrit par l'équation des ondes qui est fonction de l'espace et du temps, en régime harmonique le champ de pression vérifie l'équation de Helmholtz qui ne dépend que de l'espace.

On distingue deux types de méthodes qui permettent la résolution de cette équation : les méthodes analytiques et les méthodes numériques. Les premières sont employées depuis longtemps dans l'industrie et offrent l'avantage d'être simples d'utilisation, rapides, et de permettre une bonne compréhension des phénomènes physiques. Leur application, en revanche, est souvent limitée par des hypothèses simplificatrices.

1.2.1.1 Méthodes analytiques

Les méthodes analytiques ou semi-analytiques sont la base de la compréhension et de la mise en évidence des principaux comportements acoustiques de structures. Leurs intérêts est particulièrement basé dans le fait qu'elles permettent de conduire très souvent à des formules explicites, ce qui rend possible l'extraction des paramètres physiques pertinents ; tout ceci dans le but de faciliter l'analyse et l'interprétation des résultats. Elles sont essentiellement adaptées aux structures canoniques de type sphère ou cylindre infinie ou à des géométries voisines [56].

En pratique, il n'est possible d'avoir une solution analytique que dans le cas où la surface vibrante est définie par un système de coordonnées dont l'une est constante c'est-à-dire que l'on obtient des formes géométriques simples fermées comme les sphères ou non plaque infinie et cylindre de longueur infinie. Morse P. M. et Feshbach H. [52] ont répertoriés les 11 systèmes de coordonnées qui permettent de déterminer les fonctions propres en appliquant

la méthode de séparation de variables. Ces méthodes ont pour faiblesse de ne pouvoir traiter les systèmes complexes dans leur ensemble contrairement aux méthodes numériques. L'étude de structures variées nécessite l'emploi de méthodes numériques.

Les méthodes analytiques ne s'appliquent donc pas au calcul du rayonnement acoustique d'une surface vibrante quelconque qui peut être réalisé grâce à différentes méthodes numériques approchées. Par contre, les méthodes analytiques sont couramment utilisées pour la validation de ces méthodes numériques sur des cas de rayonnement dont la solution analytique exacte est connue. Les méthodes analytiques et numériques sont complémentaires les unes des autres.

1.2.1.2 Méthodes numériques en acoustique

Le développement de méthodes numériques en acoustique répond au besoin de prédire numériquement le champ sonore. Pour cela la résolution de l'équation d'onde sous sa forme originale ou sous sa forme dite "réduite" (équation d'Helmholtz) peut s'opérer via la mise en œuvre de méthodes discrètes (différences finies, éléments finis, éléments frontières ...) avec des performances variables d'une méthode à l'autre.

1.2.1.2.1 Méthode des éléments finis Plusieurs méthodes numériques ont été utilisées pour résoudre des problèmes d'acoustique, de vibration de structure et de couplage vibro-acoustique. La méthode des éléments finis FEM (Finite Element Method) est, généralement, préférée quand il s'agit de résoudre numériquement le problème de structure. Cette méthode a pour but de modifier le système différentiel en un système d'équations linéaires creux et symétrique. En fait, elle est adaptée pour résoudre les problèmes de structure vibrante caractérisée par une certaine non linéarité comme les inhomogénéités, l'anisotropie des matériaux, et les grandes déformations [15].

Les solutions issues de la FEM peuvent être qualifiées de référence pour des problèmes réels ayant des géométries complexes.

La méthode des éléments finis est une méthode approchée dans la mesure où le comportement acoustique du domaine infini est réduit à un volume fini entourant la structure. Afin d'utiliser la FEM pour la résolution du rayonnement acoustique dans un milieu infini, un traitement spécial doit être envisagé pour éviter la réflexion des ondes acoustiques sur les zones délimitant le calcul [12]. Le caractère non borné du milieu de propagation ne favorisent pas à priori la mise en œuvre de la FEM le recours à une formulation intégrale apparaît dès lors judicieux.

1.2.1.2.2 Méthode des éléments finis de frontière BEM La méthode des éléments finis de frontière BEM (Boundary Element Method) est largement utilisée pour prédire le rayonnement acoustique à partir des structures vibrantes, elle repose sur la discrétisation des équations intégrales de frontière. L'avantage des équations intégrales sur d'autres méthodes numériques est le gain d'une dimension d'espace lors de la discrétisation, avec une réduction des inconnues à la frontière du domaine étudié [25]. Elle reste la technique la plus pertinente pour les problèmes de rayonnement acoustique [77] car le rayonnement en champ libre, traduit par la condition de Sommerfeld, est inclus dans la formulation de BEM.

De multiples représentations intégrales sont disponibles afin de traiter le rayonnement d'une structure présentant une géométrie fermée ou ouverte. On distingue deux formulations intégrales de type "direct" ([47],[24]) (exploitant les variables "pression" et "vitesse normale" sur la surface) ou "indirect" [78] (mettant en œuvre des potentiels de simple couche et/ou de double couche sur la surface moyenne). Ces diverses représentations supportent le développement de méthodes discrètes d'éléments frontières. À nouveau, divers schémas de solution sont associés à ces méthodes : méthode classique par collocation

aux nœuds ou méthode variationnelle. On distingue donc deux méthodes :

- La méthode nommée BEM directe, basée sur la méthode de collocation pour la résolution des équations intégrales, consiste à satisfaire l'équation intégrale pour un ensemble de point sur la surface et est adaptée aux structures de volume fermé.
- La seconde, nommée BEM indirecte, basée sur la méthode variationnelle pour la résolution des équations intégrales, est adaptée aux structures de volume ouvert ou fermé, se construit en multipliant l'équation intégrale par une fonction test admissible et en l'intégrant sur toute la surface.

La solution s'obtient en résolvant un système d'équations linéaires. Par conséquent, la méthode de collocation s'avère plus simple, puisque la méthode variationnelle nécessite une intégration supplémentaire sur la surface, ce qui la rend extrêmement coûteuse en terme de temps de calcul. En revanche, la méthode variationnelle, contrairement à la méthode de collocation, conduit à un système symétrique.

Comme la FEM, la BEM présente certains inconvénients. Malgré leurs utilisation dans plusieurs domaines, les formulations BEM même si elles réduisent le problème d'une dimension, elles engendrent des matrices entièrement remplies due à l'interaction de chaque nœud du maillage avec tout les autres nœuds, conduisant à des gros besoins en mémoire et à un temps prohibitif d'analyse, elles atteignent donc rapidement leurs limites. Contrairement à la FEM dans laquelle l'interaction du nœud est limitée seulement à ses voisins et par conséquent la matrice résultante est creuse. Pour cette raison, la FEM reste la plus adaptée pour des problèmes acoustiques internes.

La BEM est limitée en terme de la gamme de fréquence de calcul, la taille de l'élément régit la fréquence maximale à laquelle un modèle BEM est valide. Une règle empirique de six éléments par longueur d'onde est couramment utilisée dans l'industrie. L'idée d'utiliser un nombre fixe d'élément par

longueur d'ondes est une conséquence directe du théorème de Shannon [39]. La taille de l'élément est reliée à la longueur d'onde $\lambda = 6 \times$ "Longueur de l'élément". En effet, le nombre d'éléments dans un maillage correspondant à une fréquence maximale f_{max} se calculant par $f_{max} = c/\lambda$ avec c est la célérité du son.

En résumé ce problème est donc lié à la taille de la matrice à inverser, elle-même directement liée à la finesse du maillage de la structure étudiée et donc de la gamme de fréquence voulue (afin de respecter la contrainte de six éléments par longueur d'onde). Au plus le maillage est fin au plus la matrice sera grande et la fréquence f_{max} sera élevée, nous aurons donc une grande gamme de fréquence de calcul.

En raison de la limitation de la taille du modèle BEM, l'enveloppe d'un maillage structurelle des éléments finis ne peut pas être utilisée pour l'analyse acoustique. Il est donc nécessaire de travailler avec un maillage grossier pour la BEM à partir du maillage éléments finis de la structure. Le maillage grossier est donc nécessaire seulement en raison de l'incapacité de la BEM à traiter les grands modèles. L'inversion de la matrice issue de la BEM peut être effectuée directement par factorisation avec un coût de calcul très élevé ou indirectement avec une résolution itérative. Le calcul limitant un algorithme itératif est le coût du produit matrice-vecteur, qui pour une matrice pleine de taille N , est proportionnel à N^2 . Pour pouvoir accélérer les calculs nous avons donc besoin d'accélérer les interactions sans construire la matrice.

En outre, malgré sa capacité de traiter le rayonnement en milieu infini, cette méthode présente des solutions non uniques à des fréquences caractéristiques qui sont les fréquences propres du problème acoustique interne associé.

1.2.2 Problème des fréquences irrégulières

Les deux formulations BEM directe et indirecte extérieure admettent une infinité de solutions à certaines fréquences correspondantes aux valeurs propres du problème intérieur associé. Il est à souligner que ce problème provient de la formulation en équation intégrale elle-même dont l'origine est liée au fait que l'équation d'Helmholtz appartienne aux équations de Fredholm de second espèce. Elle engendre des instabilités numériques au voisinage de chaque fréquence irrégulière se manifestant par un mauvais conditionnement de la matrice [77], ainsi l'équation d'Helmholtz ne présente pas de problème d'unicité, donc ces fréquences particulières n'ont aucune signification physique.

Le traitement de cette difficulté requiert soit la mise en œuvre d'une méthode de surdétermination (afin de forcer un champ intérieur identiquement nul CHIEF) ou l'exploitation d'une représentation intégrale combinée (Burton-Miller) pour laquelle l'unicité de la solution est garantie.

Ceci étant développé pour la méthode directe, pour la BEM indirecte la tâche n'est pas aussi simple que cela. En effet, dans ce cas certains auteurs ont proposé de considérer des éléments absorbants à l'intérieur de la cavité afin d'isoler son intérieur de l'extérieur pour plus détails, le lecteur est invité à consulter [77].

1.2.2.1 Méthode de CHIEF

Outre une modification du noyau de Green de l'équation intégrale ([43], [45]), de nombreuses méthodes ont été appliquées pour surmonter le problème d'unicité appelé aussi problème des fréquences irrégulières ou encore fictives. La première méthode, connue sous le nom CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) a été proposée par Schenck [68]. Elle consiste à surdéterminer le système en lui ajoutant quelques équations supplémentaires pour des points à l'intérieur de la surface fermée pour lesquels une pression

nulle est imposée. Le système obtenu peut être résolu par la méthode de moindre carré [77], multiplicateur de Lagrange [58]. Même si cette méthode est trop simple à mettre en œuvre, le nombre de points internes ainsi que leurs positions ne sont pas connus a priori. En outre, pour maintenir la précision en haute fréquence un nombre élevé de points intérieurs est nécessaire, ce qui limite l'efficacité de la méthode en raison de l'augmentation de la taille de la matrice en fonction du nombre de points. Il est habituellement recommandé de choisir des points intérieurs à proximité de la surface pour éviter qu'ils soient positionnés sur la surface nodale.

Mohsen et al [51] ont proposé une mise en œuvre efficace pour résoudre le système surdéterminé et choisir les points internes optimaux dans la méthode CHIEF. Il s'agit de résoudre l'équation intégrale par la décomposition LU et si une résonance est détectée, le champ acoustique est calculé pour certains points intérieurs. Les points dont le champ est trop différent de zéro sont choisis comme points internes pour la méthode CHIEF.

Une autre variante de CHIEF est nommée IHI (Interne Helmholtz Integral). Elle a été proposée d'abord par Copley [13] dans le cas d'un problème axisymétrique pour lequel les points d'observation sont strictement limités dans le volume délimité par la structure vibrante. Dans le travail de Provatidis et al [58], les points sources sont situés à l'intérieur de la surface fermée et disposée de telle sorte à construire une frontière fictive géométriquement semblable à la surface réelle. Cela a permis de faire passer les fréquences irrégulières à des valeurs plus élevées par rapport à celles correspondant à la surface réelle.

1.2.2.2 Méthode de Burton et Miller

CHIEF reste particulièrement célèbre car elle évite la discrétisation de l'opérateur impliquant la dérivée normale seconde de la fonction de Green. Cette dernière est nécessaire à la méthode de Burton et Miller ou HGF (Helm-

holtz Gradient Formulation). Elle repose sur la combinaison de l'équation intégrale et sa dérivée normale en utilisant un facteur imaginaire. Il a été prouvé que cette méthode aboutissait à une solution unique. Elle reste plus générale que la méthode CHIEF qui dépend du nombre et de la position des points internes. Cette méthode continue d'être largement utilisée dans de nombreuses études [69].

La grande difficulté de la méthode de Burton et Miller consiste à évaluer l'intégrale hyper-singulière donnée par la dérivée normale seconde de la solution fondamentale ([11],[40], [27], [28]). Ceci conduit à utiliser des techniques de régularisation qui augmentent la complexité de la méthode de calcul. Généralement, deux différentes approches ont été adoptées pour faire la régularisation [77]. Dans la première, la régularisation est effectuée avant le calcul de la dérivée normale. Toutefois, dans la seconde, la dérivée normale est prise lorsque le point de collocation est dans le domaine, la régularisation de l'intégrale est faite avant que la limite à la frontière ne soit atteinte. Dans le cas des éléments constants, Terai [73] et Kirkup [42] ont transformé l'intégrale hyper-singulière surfacique en une intégrale sur le contour.

Comme pour la méthode de CHIEF, une forme modifiée de la méthode de Burton et Miller appelée CHI (Coupled Helmholtz Integral), a été proposée par Cunefare et al [14]. Contrairement à HGF dans laquelle les points de collocation sont situés sur la surface, les points d'observation CHI sont considérés à l'extérieure du domaine. Ainsi, les points source et de collocation ne coïncident jamais ce qui élimine la singularité. Cependant, cette méthode nécessite le calcul du gradient aux points de collocation pour une direction. Pour ce faire, Cunefare et al [14] ont créé les points internes ayant la géométrie initiale mais de taille plus petite grâce à la normale de chaque élément.

1.2.3 Méthodes d'accélération de la BEM

Plusieurs méthodes ont été utilisées afin de contourner le problème de mémoire rencontré par la BEM standard. Contrairement aux matrices éléments finis, les matrices BEM sont pleines et dense et ne peuvent pas être stockées sous forme de tableaux denses puisque l'exigence de mémoire grandie très vite avec la taille du système. Afin de limiter l'exigence de mémoire, une décomposition de domaine se fait sur le maillage de la BEM, qui divise les matrices BEM en sous-matrices. Il consiste à diviser le maillage en des groupes de nœuds appelés sous-domaines. L'interaction de chaque sous-domaine avec lui-même est considérée comme proche et par conséquent elle représente le champ d'interaction proche. L'interaction entre deux domaines différents est considérée comme lointaine. Ainsi, elle est plus appropriée pour être approximée.

Sur les sous-matrices hors diagonale différentes méthodes ont été utilisées afin d'approcher les interactions lointaines parmi ces méthodes nous citons l'approximation de rang faible (Low-Rank) basé sur une décomposition QR ([29], [9]) ainsi que la technique d'interpolation de la matrice. Les sous-matrices diagonales se calculent via la BEM standard.

1.2.3.1 Méthode d'interpolation de la matrice

Dans son article, Raveendra [61] a utilisé l'interpolation quadratique pour toutes les composantes de la matrice BEM. Cette méthode est basée sur l'interpolation de l'interaction lointaine dans la matrice BEM afin de réduire le temps de calcul de la matrice. L'interaction proche, contenant toutes les singularités, est calculée directement avec la BEM sans faire appel à une approximation. Ceci peut être obtenu par considération de la décomposition de domaine. Dans ce cas la matrice est divisée en deux parties :

$$A = A_{near} + A_{far} \quad (1.1)$$

Le calcul de A_{far} et A_{near} est basé sur un algorithme de décomposition de domaine.

1.2.3.2 Méthode Low-Rank

Pour les sous-matrices correspondant aux domaines loin, le rang peut être nettement plus petit que la taille de la sous-matrice, réduisant ainsi le stockage de la sous-matrice. Pour chaque sous matrice hors diagonale nous procédons à une décomposition QR ([29], [9]), le rang de la matrice A est égale à celui de la matrice R , qui est égale au nombre des éléments diagonaux non nuls. Ensuite nous classons les éléments diagonaux par ordre décroissant, la méthode de rang faible consiste à tronquer la décomposition QR en gardant les plus grandes valeurs singulières et en forçant les valeurs les plus faibles à zéros.

Le classement des éléments diagonaux du plus grand au plus petit n'est pas toujours automatique. Dans plusieurs cas nous avons besoin de pivoter les colonnes pendant la factorisation pour garantir ce classement. C'est pourquoi des algorithmes qui échangent les éléments de façon à avoir le pivot le plus grand possible ont été développés. Les programmes optimisés intervertissent les lignes (ou les colonnes) à chaque étape de façon à placer en pivot le terme de coefficient le plus élevé de la ligne : c'est la méthode du pivot partiel.

Nous décomposons la matrices $A = M + N$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \dots & A_{p,p} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

M est la matrice qui contient les sous matrices dense (les blocs diagonaux)

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

N est la matrice qui contient les sous matrices approchée par Low-Rank (les blocs hors diagonaux)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & Q_{1,2}R_{1,2} & \dots & Q_{1,p}R_{1,p} \\ Q_{2,1}R_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_{p-1,p}R_{p-1,p} \\ Q_{p,1}R_{p,1} & \dots & Q_{p,p-1}R_{p,p-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Low-Rank permet de réduire la mémoire de stockage de la matrice d'un facteur de 20 entre la matrice plein et la matrice low-rank. ([29], [9]).

La décomposition en valeurs singulières SVD (Singular Value Decomposition) permet aussi de déterminer des approximations d'une matrice afin de simplifier la résolution d'un problème. Elle permet aussi de calculer le rang d'une matrice. Dans ce cas le rang d'une matrice est le nombre de valeurs singulières non nulles.

Bien que ces méthodes permettent de gagner en mémoire de stockage de la matrice, elles permettent également d'accélérer le produit matrice vecteur demandé par le solveur itérative, elles sont loin de traiter des problèmes de très grandes tailles, vu qu'elles stockent la matrice. C'est pour cette raison que nous faisons appel à la méthode multipolaire rapide qui quant à elle, ne stocke pas la matrice mais elle calcule rapidement le produit matrice-vecteur approché sans perdre en efficacité.

1.2.3.3 Méthode multipolaire rapide FMM

La méthode multipôles rapide, notée FMM (Fast Multipole Method) [63], figure parmi les dix algorithmes de calcul scientifique découvert durant le 20ième siècle [76]. Dans les travaux de Rokhlin [63] une idée originale de l'algorithme multipolaire rapide, pour calculer le potentiel dans les systèmes à grande échelle a été proposée, Greengard [30] a développé un algorithme général de l'évaluation des champs de potentiel dans les systèmes de particules. Au départ, cet algorithme a été activement utilisé pour les simulations de particules dans les domaines de l'astrophysique et de la dynamique moléculaire ([31], [4]), puis il fut appliqué à des problèmes acoustiques. Initialement développée pour les problèmes à N corps de l'astronomie par Rokhlin et Greengard dans les années 80. Elle a été ensuite étendue au problème des équations de Laplace résolues par des méthodes intégrales (V. Rokhlin et L. Greengard dans [32], [33] et [36]). Le cas des équations de Helmholtz a été abordé par V. Rokhlin dans le cas 2D dans l'article [64] puis en 3D dans [65]. Ces algorithmes conduisent à une complexité en $(N^{3/2})$ pour la méthode mono-niveau, qui a été améliorée par R.L. Wagner et W.C. Chew dans [75] en utilisant le concept de propagation de rayons. La complexité est alors réduite à $(N^{4/3})$. Nous désignons ici par complexité l'ordre des coûts de calcul et de mémoire de l'algorithme numérique correspondant. La version multi-niveaux a été mise au point en 2D dans [46] et étendu au cas tridimensionnel dans [70] par l'équipe de W.C. Chew. En France, E. Darve a présenté la FMM multi-niveaux dans le cadre des équations de Helmholtz/Maxwell ([18], [20] et [19]). En s'inspirant des travaux de Rokhlin effectués dans le cadre de l'équation de Helmholtz ([59], [64] et [65]), il aboutit à un algorithme d'une complexité en $O(N \ln N)$. La FMM est une méthode qui accélère radicalement le calcul du potentiel d'un grand nombre de sources en utilisant un développement multipolaire. Son application à l'analyse BEM s'avère plus performante que la BEM classique ainsi que la FEM. L'intégration de la méthode multipolaire

rapide FMM avec la formulation BEM conduit à des performances largement supérieures.

Pour des détails précis concernant les estimations d'erreurs [17], nous renvoyons le lecteur à l'article de E. Darve [20]. De même, concernant une étude numérique de la méthode, nous renvoyons à l'article [19]. Compte tenu des intérêts de cette méthode, de nouvelles applications sont envisagées notamment pour la résolution des équations de Maxwell en régime temporel ([1], [16]) ou les problèmes inverses en scattering [7], mais aussi dans d'autres domaines d'application de l'analyse numérique tels que la dynamique moléculaire [37] ou les intégrales multidimensionnelles [44]. Dans le cadre de la méthode multipôles en elle-même, des travaux de recherche ont été effectués concernant la parallélisation de la méthode par G. Sylvand ([72], [41]) ou encore, le développement du noyau de Green pour parer le problème dit "des basses fréquences". Ce problème apparaît lorsque le maillage présente des raffinements locaux à cause de détails géométriques de petite taille devant la longueur d'onde ([36], [5], [21]).

La FMM est basée sur une réduction des interactions engendrées par le noyau de Green. Par un développement judicieux de ce noyau, avec un regroupement des éléments du maillage éléments-finis dans des boîtes multipolaires, la méthode multipôles réduit les interactions entre mailles à des interactions entre les boîtes multipolaires. Elle consiste à réécrire la fonction de Green sous forme de fonctions de Bessel et de polynômes de Legendre au-delà d'une certaine distance entre la source et le point d'observation. Cette considération permet de ne pas conserver la matrice du système et de recalculer les interactions nécessaires à chaque produit matrice-vecteur de la résolution itérative à un coût très réduit. La méthode doit son qualificatif "rapide" à sa complexité numérique. En effet, la méthode multipôles rapide permet de réduire la complexité de calcul des produits matrice-vecteur de (N^2) à $(N^{3/2})$ pour la méthode à un niveau et à $O(N \ln(N))$ pour la version

multi-niveaux.

La FMM permet une accélération de chaque itération, elle permet d'accélérer les calculs en accélérant les interactions et sans construire la matrice. Cette accélération provient du fait que la FMM, qui consiste en une réorganisation complète du produit matrice-vecteur pour une matrice issue de la BEM, permet d'effectuer ces produits en un temps proportionnel au nombre d'inconnues nodales N (l'approche classique de ce produit matrice-vecteur demandant un temps de calcul proportionnel à N^2). On considère la résolution terminée quand le résidu est inférieur à une limite fixée à l'avance par l'utilisateur.

1.2.4 Couplage vibroacoustique faible

La simulation de l'interaction fluide-structure peut être effectuée soit en utilisant une approche couplée ou découplée. Dans les systèmes fortement couplés, la structure et le fluide doivent être modélisés simultanément parce que l'évolution de chacun des deux éléments dépend de celle de l'autre. On pourrait citer un très grand nombre d'exemples, parmi ceux-ci les écoulements autour d'un navire, d'un sous-marin, le mouvement de liquides dans un réservoir dans ce cas il s'agit de prévoir le comportement du fluide en cas de mouvement de la structure. Le comportement du fluide est d'ailleurs difficile à prévoir, puisqu'un modèle linéaire (en fait en petites perturbations) prédit un comportement assez différent des modèles plus complets (comprenant l'impact du fluide). La question se pose de manière très importante aussi bien pour tous les véhicules terrestres (camions citernes), maritimes (tankers) et aériens (avions civils et militaires, satellites, lanceurs) que pour les réservoirs fixes au sol, dont la résistance aux séismes doit être assurée. Comme dernier exemple, en acoustique sous marine, le comportement vibratoire des structures submergées est influencé par le fluide qui entoure ces structures en raison de l'importante valeur de l'impédance acoustique [25].

L'effet d'inertie ou de masse ajoutée, c'est l'effet de base. Le fluide n'intervient que par sa masse. Son calcul s'effectue en faisant l'hypothèse de l'incompressibilité. On peut déjà dire que si le fluide est dense (eau . . .), l'interaction fluide-structure sera importante et va modifier fortement le comportement vibratoire de la structure. Si le fluide est peu dense (air . . .), l'interaction fluide-structure sera faible : les caractéristiques vibratoires seront voisines de celles dans le vide.

Pour plusieurs problèmes, il n'est pas souvent nécessaire de considérer un couplage fort. En raison de la faible densité de l'air et de la rigidité des structures, la charge acoustique modifie généralement peu le schéma modal de la structure dans le vide. Réciproquement l'amplitude de la vibration normale des structures est suffisamment petite pour que les modes acoustiques dans la cavité soient proches des modes de la cavité avec des parois rigides. Comme le montre [55] la notion de couplage faible entre le fluide et la structure est associée au fait que les modes propres et les fréquences de résonance de la structure et de la cavité ne sont que légèrement perturbés par le couplage. Dans cette approche, la réponse mécanique de la structure dans le vide est calculée dans un premier temps. Les résultats obtenus sont considérés comme conditions aux limites pour la partie acoustique du problème.

Après l'application d'une force sur la structure, la structure se met alors à vibrer, selon des mouvements et déformation complexes, qui ont pour caractéristique d'osciller autour d'une position d'équilibre. Le passage de la force au bruit suit donc les étapes suivantes : force, vibrations, bruit. La structure vibrante est modélisée dans le domaine temporel en utilisant la FEM explicite basée sur des éléments surfaciques quadrilatères ou triangulaires. Les vitesses obtenues sur les nœuds de la structure sont transformées en des vitesses fréquentielles en utilisant la FFT. La simulation numérique dans le domaine fréquentiel du champ acoustique rayonné par la structure vibrante est effectuée par la BEM. La vitesse dans le domaine fréquentiel est utilisée

comme condition aux limites pour la BEM (problème de Neumann).

1.3 Organisation et contributions de la thèse

À la lumière de cette étude bibliographique la méthode des équations intégrales est largement utilisée pour la résolution numérique des problèmes de rayonnement. Notre choix s'est arrêté sur la méthode de Burton et Miller pour résoudre le problème des fréquences irrégulières présenté par ces équations intégrales. Concernant l'accélération de la BEM nous avons adopté la méthode multipolaire rapide FMM pour réaliser ce travail. Le contenu du présent travail s'articule autour de quatre chapitres organisé comme suit :

Dans ce premier chapitre, nous avons passé en revue les différentes méthodes numériques de calcul de rayonnement acoustique et vibroacoustique la BEM et la FEM ainsi que quelques méthodes d'accélération de la BEM. Ensuite, nous avons cités certaines méthodes pour résoudre le problème des fréquences irrégulières.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la structure qui peut être menée dans le domaine temporel par la méthode des éléments finis MEF explicite ainsi que dans le domaine fréquentiel par la méthode de superposition modale. Un avantage très important de l'étude dans le domaine fréquentiel est la réduction du nombre de paramètres permettant de représenter le comportement dynamique de la structure. La dernière partie est dédiée aux vibrations aléatoires afin de prédire la réponse des structures soumises à des environnements aléatoires. Enfin, quelques méthodes d'analyse de la fatigue dans le domaine fréquentiel ont été présentés et appliqués sur une pièce métallique.

Le troisième chapitre, introductif, présente le contexte général des phénomènes de propagation d'ondes : la modélisation physique. Il présente ainsi les fondements théoriques de la méthode des équations intégrales, basés sur

la représentation intégrale et sa résolution numérique par la méthode des éléments finis de frontière. Il est illustré par des validations numériques de la BEM variationnelle.

Le quatrième chapitre, détaille la méthode de résolution du problème de l'unicité de la solution dans les fréquences irrégulières via la méthode de Burton et Miller comparé à la méthode de CHIEF, suivit de résultats numériques afin de montrer l'efficacité de la méthode que nous avons adoptée.

La FMM étant une amélioration de la BEM ; une présentation succincte du principe de la méthode FMM est exposée dans le chapitre 5. Suivi d'une étude paramétrique de la FMM afin de cerner les paramètres qui entrent en jeux dans la FMM, et enfin des validations numériques concluent le chapitre.

Nous avons regroupé dans les annexes quelques formules ainsi que les détails de calcul que nous avons utilisé tout au long de cette étude.

Chapitre 2

Vibrations des structures

Les vibrations mécaniques peuvent être une source de problèmes pour beaucoup de produits. Elles peuvent engendrer des phénomènes néfastes pour le produit lui-même, comme la fatigue, mais également pour les utilisateurs, les vibrations peuvent être désagréables pour l'oreille ou l'organisme. Communément appelé NVH (Noise, Harshness, Vibration) ou bien (Bruit, vibration, rudesse), ce problème est l'un des plus importants critères de qualité perçus d'un produit, le domaine est donc prioritaire pour une équipe de développement qui cherche à démarquer son offre de la concurrence.

2.1 Vibrations

2.1.1 Définition

Une vibration mécanique est un mouvement oscillatoire d'un milieu fluide ou solide autour de sa position d'équilibre statique ou dynamique. Elle peut être quantifiée par la mesure de l'accélération $m.s^{-2}$, de la vitesse $m.s^{-1}$ ou du déplacement m qu'elle entraîne. Le passage de l'une à l'autre de ces grandeurs s'effectue par dérivation ou par intégration temporelle. Cependant, seule la valeur d'accélération est communément utilisée pour la représentation

de phénomènes vibratoires.

Il existe bien entendu une infinité de mouvements vibratoires possibles. Toutefois, ils peuvent être regroupés en différentes catégories selon leurs caractéristiques temporelles ou fréquentielles (mouvement déterministe ou aléatoire, stationnaire ou transitoire, périodique ou non périodique, etc ...).

2.1.2 Sources vibratoires dans un véhicule

Les vibrations auxquelles sont soumis les passagers d'un véhicule proviennent essentiellement du moteur ou d'intermédiaires mécaniques entre le moteur et les roues, de la rotation des roues ainsi que du sol. En phase de roulage basse vitesse sur une route dégradée, les vibrations du siège provenant de la rotation des roues et du moteur sont masquées par les sollicitations dues aux irrégularités de la route. Ces dernières imposent aux roues des mouvements dont la composition en fréquence, la nature et l'amplitude dépendent du profil de terrain et de la vitesse de circulation [Fig. 2.1]. Tout se passe alors comme si le véhicule était fixe et se trouvait excité par un processus vibratoire [3].



FIGURE 2.1: Différents types de chaussées

On suppose que le terrain peut fournir successivement ou simultanément trois sortes d'excitations [Fig. 2.1] :

- des excitations uniques : il s'agit de chocs ou d'oscillations courtes susceptibles de provoquer une réponse transitoire du véhicule. Ce type de sollicitation peut par exemple être causé par le passage d'une roue

- du véhicule sur une irrégularité très marquée de la chaussée (plaque d'égout, bande rugueuse, saignée dans le revêtement, etc.);
- des excitations périodiques : ce type de sollicitations correspond au passage du véhicule sur un revêtement présentant lui-même des propriétés périodiques généralement dues à sa structure (plaques de goudron ou de béton raccordées, bandes « bruyantes » sur le coté des routes, etc.);
 - des excitations aléatoires : celles-ci peuvent être constituées par des excitations du premier type, plus ou moins rapprochées et dont les caractéristiques varient de façon imprévisible. Elles peuvent également correspondre à un état globalement dégradé du revêtement.

2.1.3 Sources de bruits dans un véhicule

Il existe plusieurs sources de bruit au sein du véhicule. La première provient du moteur qui transmet des vibrations par l'intermédiaire de ses fixations au reste de la structure. La deuxième source réside dans les roulements ; les vibrations et les tressautements des roues sur la chaussée remontent aussi dans l'habitacle. La troisième source de bruit est due à l'air dans lequel le véhicule se déplace, la quatrième aux équipements dits de confort (essuie-glaces, ventilation) qui viennent apporter leur contribution [3].

2.2 Analyse temporelle de la structure

Considérons une structure isotrope occupant un volume Ω_s [Fig. 2.2]. Quand elle est soumise à une force f , l'équation régissant son comportement vibratoire est donnée par l'équation dynamique suivante :

$$\rho \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \text{div}(\bar{\sigma}) + \vec{f} \quad (2.1)$$

avec \vec{u} est le déplacement, $\bar{\sigma}$ est la contrainte de Cauchy et ρ est la densité.

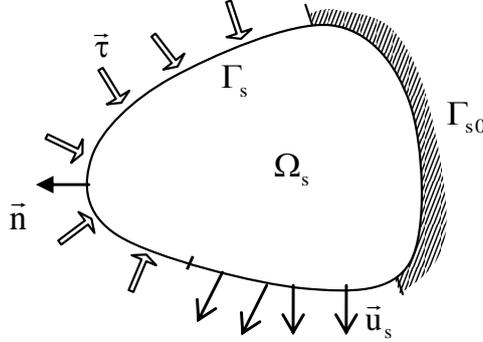


FIGURE 2.2: Problème de la structure

Soit Γ_{s0} et Γ_s les deux surfaces soumises respectivement à un déplacement et une traction. Les conditions aux limites associées à la structure s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{u}_s & \text{sur } \Gamma_{s0} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{\tau} & \text{sur } \Gamma_s \end{cases} \quad (2.2)$$

avec \vec{n} est la normale unitaire dirigée vers l'extérieur.

Numériquement, la structure est modélisée utilisant une formulation Lagrangienne par la méthode des éléments finis, dans laquelle le mouvement de la structure est décrit à l'aide de $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) qui est exprimé en fonction des coordonnées de référence X_β ($\beta = 1, 2, 3$) et du temps t [Eq.2.3].

$$x_i = x_i(X_\beta, t) \quad (2.3)$$

Dans la plupart des applications, les modèles en éléments finis sont principalement utilisés dans la simulation des structures [49]. La description détaillée de l'algorithme des éléments finis utilisé n'est pas le but de ce chapitre. Généralement, deux méthodes peuvent être utilisées pour l'analyse de la dynamique des structures.

La première méthode concerne un schéma d'intégration implicite en temps.

Dans cette méthode, la discrétisation de la forme variationnelle de la réponse mécanique d'un système en utilisant la MEF se réduit au système d'équations linéaires suivant :

$$[M] \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + [k]U = F \quad (2.4)$$

où t désigne le temps, $[M]$ et $[K]$ représentent, respectivement, les matrices de masse et de rigidité de la structure et F est le vecteur de chargement mécanique. Pour calculer le vecteur de déplacement nodale de la structure vibrante, nous sommes amenés à résoudre un système linéaire. Notons dans ce cas que le schéma est inconditionnellement stable.

La seconde approche est basée sur un schéma explicite donné par l'équation suivante :

$$[M]\ddot{U}_n = F_n^{ext} - F_n^{int} \quad (2.5)$$

Contrairement à la méthode implicite, dans la méthode explicite, la condition CFL (Courant, Friedrichs et Lewy) limite le pas de temps à des valeurs petites comparées à celle qu'on pourrait utiliser dans la méthode implicite. De plus, cette méthode ne mène pas à un système d'équations linéaires. Comme M est une matrice de masse diagonale (lumped masse matrix), on utilise dans cette partie un schéma explicite pour résoudre la partie structurale du problème vibroacoustique. La solution est avancée dans le temps en utilisant un schéma centré du second ordre. La résolution est avancée dans le temps avec la méthode de différence centrale, qui fournit une précision du second ordre pour intégration dans le temps. Pour chaque nœud, la vitesse et le déplacement sont mis à jour en utilisant la méthode de différence finie centrée de second ordre dans le temps :

$$\dot{U}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{U}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t M^{-1}(F_n^{ext} + F_n^{int}) \quad (2.6)$$

Donc :

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Avec F_{int} est le vecteur de force interne et F_{ext} est le vecteur de force externe, M est la matrice de masse diagonale et U est la vitesse. Dans chaque nœud, la force interne est calculer comme suit :

$$F_{int} = \sum_{k=1}^{Nelem} \int_k B^t \sigma dv \quad (2.8)$$

Où B est la matrice gradient est $Nelem$ est le nombre des éléments. Le pas de temps est limité par la condition CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) exprimée comme suit :

$$\Delta t \leq \frac{l}{c}$$

Avec l est la longueur caractéristique de l'élément est c est la célérité du son à travers l'élément. Pour des matériaux solides, la célérité du son est définie comme :

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Avec ρ est la densité est K est le module de compressibilité.

Les vitesses nodales calculées à partir de l'analyse structurale sont exprimées dans le domaine temporel. Pour chaque élément de la structure, nous calculons la vitesse normale en moyennant les vitesses normales nodales. Toutefois, afin d'utiliser les normales des éléments comme conditions aux limites pour la BEM, nous sommes amenés à les transformer dans le domaine fréquentiel en utilisant la transformé de Fourier :

$$V(x, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x, t) e^{2i\pi f t} dt$$

2.3 Étude fréquentielle de la structure

Les domaines temporel et fréquentiel sont analytiquement équivalents. Cependant, il y a des avantages numériques d'une mise en œuvre dans le domaine fréquentiel pour la modélisation par différences finies/éléments finis. S'il est naturel et efficace d'analyser la structure dans le domaine temporel pour des problèmes transitoires, tels que l'impact et la résistance aux chocs, dans certains cas, l'analyse dans le domaine fréquentiel est plus avantageuse que l'analyse temporelle. Par exemple, pour des structures soumises à des charges périodiques ou harmoniques, il peut être plus efficace d'aborder le problème dans le domaine fréquentiel, car il pourrait y avoir seulement quelques fréquences concernées.

Par ailleurs, l'analyse dans le domaine fréquentiel est également appropriée pour des problèmes avec un historique de chargement extrêmement long, comme des éoliennes exposées à la charge du vent à long terme et les pièces utilisées dans un environnement de fatigue mégacyclique, où il est trop coûteux de faire une analyse temporelle. L'analyse fréquentielle peut révéler la dépendance de la réponse structurelle à des fréquences d'excitation de sorte que les fréquences de résonance peuvent être évitées dans la phase de conception de nouvelles structures.

2.3.1 Vibrations périodiques

L'objectif de cette partie est l'étude du comportement dynamique d'un système à plusieurs degrés de libertés. L'analyse modale permet la détermination de ces caractéristiques dynamiques des structures. La connaissance de ces paramètres structuraux est essentielle à la résolution de plusieurs problèmes de vibration. La réalisation d'un essai d'analyse modale nécessite la mesure de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) qui est le quotient de la réponse de la structure sur l'excitation de celle-ci en plusieurs endroits

sur la structure [Fig. 2.3]. Plusieurs méthodes sont usuellement utilisées pour la transmission de la force d'entrée sur la structure dont le pot vibrant et le marteau d'impact [Fig. 2.4].



FIGURE 2.3: Mesures acoustique et vibratoire

Le pot vibrant permet la caractérisation vibratoire de la pièce (détermination des fréquences de résonance), des essais de fatigue vibratoire, ... Le marteau de choc est utilisé pour une analyse modale de la structure, la pièce étant excitée successivement en plusieurs points et la réaction vibratoire mesurée à l'aide d'un capteur d'accélération (accéléromètre, vibromètre laser) [Fig. 2.4].



FIGURE 2.4: Vibromètre laser, Pot vibrant et Marteau de choc

L'analyse modale est une technique couramment utilisée pour alléger les dimensions du problème à résoudre. Cette dernière permet de décrire le système en fonction de ses caractéristiques naturelles, les modes propres. Un avantage important est la réduction du nombre de paramètres permettant de

représenter le comportement dynamique de la structure, à toutes fins d'analyse (simuler un comportement, mettre au point un prototype, suivre un risque d'instabilité).

Comme l'étude du comportement dynamique d'une structure peut difficilement se concevoir sans une analyse du système en régime libre, fournissant ainsi les premiers modes propres de même que les pulsations propres et coefficients modaux d'amortissement associés, il serait souhaitable de tirer directement profit de la disponibilité de ces paramètres modaux et de développer des outils reposant sur ces informations pour le calcul de la réponse en régime forcé. Une telle stratégie, connue sous le nom de la méthode de superposition modale dont nous rappelons brièvement le principe de la résolution. Le régime forcé de la structure est régi par le système matriciel des équations du mouvement :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t) \quad (2.9)$$

Avec :

- m : matrice globale de masse
- c : matrice globale d'amortissement
- k : matrice globale de rigidité
- $f(t)$: vecteur globale des sollicitations

Afin de résoudre cette équation, nous commençons d'abord par la détermination des fréquences propres ω et les modes propres Φ associés du système libre non amortie :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.10)$$

Les vecteurs propres sont tous indépendants et par conséquent, ils définissent une base au sens mathématique du terme. L'idée de la décomposition modale est d'utiliser les propriétés d'orthogonalisation des vecteurs propres pour diagonaliser le système couplé. La solution de cette équation s'écrit donc :

$$u = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n(t) = \Phi q \quad (2.11)$$

En remplaçant cette dernière équation dans la première équation (2.9) et en multipliant l'équation résultante à gauche par Φ^T , on trouve :

$$\Phi^T m \Phi \ddot{q} + \Phi^T c \Phi \dot{q} + \Phi^T k \Phi q = \Phi^T f(t)$$

Finalement :

$$M \ddot{q} + C \dot{q} + K q = F(t)$$

avec : $K = \Phi^T k \Phi$ est la matrice modale de l'énergie cinétique, $M = \Phi^T m \Phi$ la matrice modale de compressibilité et $F(t) = \Phi^T f(t)$ est le vecteur modal de force. Avec les éléments diagonaux de ces deux matrices s'écrivent : $K_n = \Phi_n^T k \Phi_n$ et $M_n = \Phi_n^T m \Phi_n$.

Cette écriture en fonction des variables principales permet de séparer les équations du système. Ces équations sont la projection sur la base modale du système, ce qui nous amène à un système à n équations séparées. Chaque équation s'écrit comme une équation complète (avec amortissement et chargement) à un degré de liberté. Nous la résolvons, de la même façon qu'un système à 1D.D.L.

$$M_n \ddot{q}_n + C_n \dot{q}_n + K q_n = F_n(t)$$

Avec pour chaque mode, nous avons la relation entre M et K :

$$K_n = \omega_n^2 M_n$$

Donc :

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{F_n(t)}{M_n}$$

Où : $\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n}$ est l'amortissement modal.

Par l'application de la transformé de Fourier sur cette dernière équation nous avons :

$$(-\omega^2 + 2i\zeta_n\omega_n\omega + \omega_n^2)q_n(\omega) = \frac{F_n(\omega)}{M_n}$$

Une fois toutes les équations résolues, nous obtenons la solution projetée dans la base modale.

$$u(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{\phi_n}{(-\omega^2 + 2i\zeta_n\omega_n\omega + \omega_n^2)} \frac{F_n(\omega)}{M_n} \quad (2.12)$$

En dernière étape, on revient aux variables physiques en faisant une re-composition inverse de la solution.

2.3.2 Vibrations aléatoires

La théorie des vibrations aléatoires a été développée afin de prédire la réponse des structures soumises à des environnements aléatoires. Les ingénieurs sont confrontés à ce type de problème lorsqu'ils souhaitent prédire par exemple :

- la réponse des ponts et des bâtiments soumis à l'action du vent ou encore aux tremblements de terre,
- la réponse des bateaux ou des plates-formes de forage soumis à l'action de la houle,
- la réponse des châssis et éléments de suspensions de véhicules qui dépendent de la rugosité de la route,
- la réponse des avions soumis à des turbulences atmosphériques ou les lanceurs spatiaux soumis à des environnements acoustiques sévères lors du lancement,
- la réponse des équipements embarqués soumis aux vibrations des supports, etc ...

L'une des hypothèses en vibrations aléatoires est que la structure est déterministe, sa géométrie et les caractéristiques des matériaux qui la constituent sont données. Elle est également supposée linéaire. Sa réponse à une excitation aléatoire est prédite à partir d'un modèle numérique souvent réalisé en utilisant la méthode des éléments finis. La difficulté majeure de l'analyse d'une structure soumise à des excitations aléatoires se situe dans la définition même de l'excitation physique qui agit sur celle-ci. Cette excitation doit être définie afin d'être compatible avec la modélisation par éléments finis. Elle peut être appliquée soit aux supports (excitation de type sismique) soit à des nœuds du maillage (excitation de type force ponctuelle ou champs de pressions).

Si les signaux périodiques peuvent être décomposés en une somme de signaux harmoniques et les signaux transitoires représentés en intégrale de Fourier, il existe une catégorie importante de signaux impossibles à définir de manière aussi précise. Ils sont caractérisés par une instabilité dans le temps et une absence de reproductibilité au cours d'enregistrements successifs. Les signaux de ce type ne peuvent se décrire de manière précise, mais doivent être traités à partir de bases statistiques. Dans le cas général, une représentation spectrale fait apparaître des composantes pour toutes les fréquences comprises dans un certain intervalle. Cette densité spectrale de puissance donne l'information sur le contenu fréquentiel du signal ainsi que sur la variance du processus.

2.3.2.1 Définition d'une densité spectrale de puissance

On cherche à représenter les signaux aléatoires en fréquence par la densité spectrale de puissance, elle est définie comme étant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R(\tau)$ du signal (théorème de Wiener-Kintchine) :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (2.13)$$

Elle s'exprime en g^2/Hz pour une accélération g . Pour de nombreuses applications, en raison du fait que les relations entrée-sortie, pour les systèmes linéaires, s'expriment par des convolutions dans le domaine temporel et par des produits dans le domaine fréquentiel, il est plus facile de calculer $S(\omega)$ que $R(\tau)$.

La densité spectrale de puissance (DSP) peut également être définie à partir du carré du module de la transformée de Fourier de la fonction aléatoire $f(t)$:

$$S_f(\omega) = \frac{1}{T} \lim_{T \rightarrow \infty} |F(\omega)|^2 \quad (2.14)$$

Avec $F(\omega)$ transformée de Fourier de $f(t)$ et la limite $\lim_{T \rightarrow \infty}$ est une écriture simplifiée signifiant que le temps T (durée de l'échantillon) est suffisamment long pour être représentatif de la fonction $f(t)$ et $S_f(\omega)$ est souvent appelé auto-spectre de $f(t)$, il est positif et réel.

2.3.2.2 DSP du déplacement

Afin de calculer la densité spectrale de contrainte, nous commençons d'abord par le calcul de la densité spectrale de déplacement. Pour plus de détails sur cette partie le lecteur est renvoyé vers l'article [48].

$$W_y(r, \omega) = \frac{A^2 G(\omega)}{\omega^4} \sum_j \sum_m \frac{\phi_j(r) \phi_m(r) J_{jm}(\omega)}{M_j M_m |H_j(\omega)| |H_m(\omega)|} \quad (2.15)$$

avec :

$$H_j(\omega) = \left(-1 + 2i\zeta_j \frac{\omega_j}{\omega} + \frac{\omega_j^2}{\omega^2} \right)$$

2.3.2.3 DSP et RMS de l'accélération

La densité spectrale de l'accélération peut être déduite de celle de déplacement par [48] :

$$W_a(r, \omega) = \omega^4 W_y(r, \omega) = A^2 G(\omega) \sum_j \sum_m \frac{\phi_j(r) \phi_m(r) J_{jm}(\omega)}{M_j M_m |H_j(\omega)| |H_m(\omega)|} \quad (2.16)$$

Avec la valeur efficace dite aussi RMS (root mean square) de l'accélération est défini par :

$$a(r) = \left(\int_{\omega_i}^{\omega_f} W_a(r, \omega) d\omega \right)^{1/2}$$

2.3.2.4 DSP et RMS des contraintes

La densité spectrale des contraintes est déterminée par :

$$W_\sigma(r, \omega) = \frac{A^2 G(\omega)}{\omega^4} \sum_j \sum_m \frac{\gamma_j(r) \gamma_m(r) J_{jm}(\omega)}{M_j M_m |H_j(\omega)| |H_m(\omega)|} \quad (2.17)$$

Avec $\gamma_j(r)$ est le coefficient de contrainte à r due à une unité de déflexion du j^{ième} mode. La RMS des contraintes est calculée par [48] :

$$\sigma(r) = \left(\int_{\omega_i}^{\omega_f} W_\sigma(r, \omega) d\omega \right)^{1/2}$$

2.3.3 Endommagement par fatigue

Des éléments de machines, de matériels de transport et/ou de structure sont fréquemment soumis à des charges répétées, (charges cycliques), et les contraintes cycliques résultantes peuvent conduire à l'endommagement physique microscopique des matériaux impliqués. Même à des niveaux de contraintes bien au-dessous des charges critiques, cet endommagement microscopique peut s'accumuler cycle par cycle jusqu'à l'apparition d'une fissure

ou d'un endommagement macroscopique jusqu'à la défaillance de l'élément. La fatigue est définie comme la détérioration progressive et localisée de la structure qui se produit lorsqu'un matériau est soumis à des charges cycliques [62]. Les données industrielles montrent que près de 80% à 95% des défaillances structurelles se produisent par un mécanisme de fatigue [57].

2.3.3.1 La courbe S-N

Le nombre de cycles à la rupture (durée de vie) dépend du niveau de chargement (contrainte). La courbe représentative de la durée de vie en fonction de la contrainte appliquée est appelée courbe S-N (Stress – Number of cycles) ou courbe de Wöhler [Fig. 2.5]. En ordonnée, nous avons l'amplitude de S contrainte et en abscisse le nombre de cycles à la rupture N .

La courbe de fatigue S-N est obtenue par une grande quantité d'expériences d'essai de fatigue sous des niveaux de contraintes différents. La courbe de fatigue S-N peut également être donnée sous la forme d'équations analytiques :

$$S = C + D \log N$$

avec C et D des constantes déterminées à partir des données expérimentales.

Le modèle de résistance en fatigue sous la forme d'une courbe S-N fournit la durée de vie sous une sollicitation d'amplitude constante. Cependant, dans la réalité, les structures sont rarement soumises à des sollicitations d'amplitude constante. Par conséquent, des méthodes de comptage sont employées pour réduire l'historique complexe des sollicitations en une série de cycles d'amplitude constante. Il existe plusieurs méthodes de comptage qui aboutissent à des résultats différents : des méthodes simples telles que le comptage des pics ou le comptage des étendues, et des méthodes plus complexes telles que la méthode Rainflow ou le comptage des paires d'étendues.

2.3.3.2 Loi d'endommagement de Miner

Presque toutes les données de fatigue destinées au dimensionnement sont basées sur des essais à amplitude constante. Toutefois, dès lors que l'histoire du chargement, traduite par la séquence d'amplitude variable, est plus complexe, les cycles extraits de ce chargement par la méthode Rainflow sont d'amplitudes inégales. Pour prédire la durée de vie dans ce cas, Miner [50] propose une règle simple basée sur l'hypothèse de cumul linéaire du dommage et adoptée dans la plupart des codes de dimensionnement en fatigue [62].

Notons N_1 et N_2 , respectivement, les nombres de cycles admissibles aux amplitudes S_1 et S_2 , donnés par la courbe S-N. Supposons qu'on applique les nombres de cycles n_1 et n_2 d'amplitudes S_1 et S_2 respectivement jusqu'à la rupture de la pièce, où $n_1 < N_1$ et $n_2 < N_2$. La fraction de durée de vie consommée par les n_1 cycles d'amplitude S_1 vaut $\frac{n_1}{N_1}$ (Figure 2.5). La fraction restant à consommer par les n_2 cycles d'amplitude S_2 pour atteindre la rupture vaut : $\frac{n_2}{N_2} = 1 - \frac{n_1}{N_1}$. On en déduit la relation :

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1$$

Plus généralement, Miner fait l'hypothèse que les cycles de contrainte peuvent être regroupés par bloc, chaque bloc ayant un nombre de cycles n_i de même amplitude S_i . La fraction du dommage causé par un bloc de cycles de contrainte est donnée par : $d_i = \frac{n_i}{N_i}$. N_i est obtenu par la courbe S-N comme le nombre de cycles admissibles dont l'amplitude est constante et égale à S_i [50]. La rupture de la pièce est atteinte lorsque le dommage total provoqué par la séquence de cycles de contrainte, obtenu en cumulant les fractions de dommage des différents blocs vaut l'unité :

$$D = \sum_i d_i = \sum_i \frac{n_i}{N_i} = 1$$

Connaissant la DSP du processus de contrainte équivalente, il s'agit à présent d'extraire de ce processus les cycles de contrainte n_i . Mais la contrainte

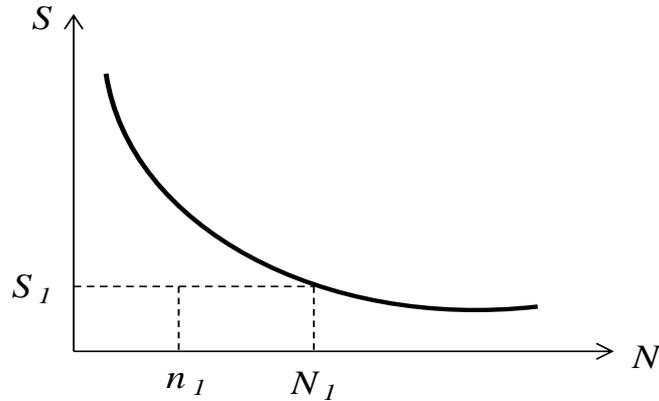


FIGURE 2.5: Fraction de durée de vie associée à une amplitude donnée d'un cycle de contrainte

étant aléatoire, les amplitudes des cycles deviennent elles aussi aléatoires. On cherche donc à estimer la densité de probabilité de ces amplitudes. Pour ce faire, il existe plusieurs méthodes qui nous permettent d'avoir ce nombre de cycle à partir de la connaissance de la densité spectrale des contraintes calculée à partir des vibrations aléatoires, dans le paragraphe suivant nous avons rappelé quelque unes de ces méthodes.

2.3.3.3 Analyse de la fatigue dans le domaine fréquentiel

i) Propriétés statistiques des signaux aléatoires

On présente ici les principales méthodes spectrales pour estimer la distribution des amplitudes des cycles. Les caractéristiques de base d'un processus sont définies à partir de ces moments spectraux [35], [57]. Le moment spectral, m_n , d'ordre n est défini comme suit :

$$m_n = \int_0^{\infty} f^n G(f) df \quad (2.18)$$

avec f est la fréquence et $G(f)$ est la densité spectrale de la contrainte à la fréquence f .

Le nombre de passage par zéros avec une pente positive s'écrit :

$$E[0] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (2.19)$$

Le nombre de pics peut être calculé à partir de ces mêmes moments spectraux selon l'équation :

$$E[P] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (2.20)$$

Les caractéristiques spectrales les plus importantes dans l'analyse de fatigue sont celles qui donnent des indications sur la largeur de bande du processus. On en identifie deux dans la littérature. Le premier est le facteur d'irrégularité, noté I . Il représente le rapport entre le nombre moyen par unité de temps de passages par zéro à pente positive et le nombre moyen par unité de temps de maximums et vaut :

$$I = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \quad (2.21)$$

Le facteur d'irrégularité est compris entre 0 et 1. Le processus est dit à bande étroite lorsque I est proche de 1, il est dit à bande large quand I est proche de 0. L'autre paramètre de largeur de bande souvent utilisé est noté λ et vaut :

$$\lambda = \sqrt{1 - I^2} \quad (2.22)$$

ii) Méthode de Dirlik

La méthode de Dirlik a été développée durant les années 1980 [23], elle utilise une approche analytique empirique de la fonction densité de probabilité de l'amplitude des contraintes basées sur la simulation de Monte-Carlo. Ces simulations dites de Monte-Carlo permettent d'estimer l'espérance mathématique du dommage à partir d'un échantillon

représentatif, le procédé consiste en une série de calculs qui reposent sur les moments des fonctions densité spectrale de puissance DSP [62], [23]. Il s'est avéré que cette méthode très précise comparée avec d'autres méthodes avec des applications plus larges.

Le rapport de cumul de dommage est donné par :

$$E[D] = \sum_i \frac{n_i}{N_i} = \sum_i \frac{p(S_i)E[P]TdS}{N_i} \quad (2.23)$$

Où T est le temps d'exposition et la fonction densité de probabilité $p(S)$ est exprimée par :

$$p(S) = \frac{\frac{D_1}{Q}e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2}{R^2}e^{-\frac{Z^2}{2}} + D_3Ze^{-\frac{Z^2}{2}}}{2\sqrt{m_0}} \quad (2.24)$$

Avec : $Z = \frac{S}{2\sqrt{m_0}}$; $D_1 = \frac{1-I-D_1+D_1^2}{1-R}$; $D_3 = 1 - D_1 - D_2$; $R = \frac{I-X_m-D_1^2}{1-I-D_1+D_1^2}$;
 $Q = \frac{5(1-D_1-D_2R)}{4D_1}$ et $X_m = \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}$.

Comme nous pouvons le remarquer de ces équations X_m , D_1 , D_2 , D_3 et R sont toutes des fonctions des moments m_0 , m_1 , m_2 , et m_4 .

iii) Méthode de Steinberg

D'après la méthode de Steinberg [71], le rapport de cumul de dommage est donné par :

$$E[D] = E[0][0.683(2\sqrt{m_0})^m + 0.271(4\sqrt{m_0})^m + 0.043(6\sqrt{m_0})^m]/a \quad (2.25)$$

Avec $E[0]$ est donné par l'équation (2.19) Il existe d'autres méthodes tel que la méthode de Wirsching ainsi que la méthode de Chauhury and Dover et bien d'autres, la différence entre toutes ces méthodes c'est le domaine d'application de chacune d'elle [62].

iv) Méthode de la bande étroite

Cette méthode a été présentée par Bendat [6]. Bendat a montré que la fonction densité de probabilité de crêtes pour un signal à bande étroite tend vers les distributions de Rayleigh quand la largeur de bande est réduite. Selon la théorie Bendat, les dommages cumulés prédit peut être écrit comme :

$$E[D] = \frac{E[P]T}{a} \int S^m p(S) dS \quad (2.26)$$

Ou bien :

$$E[D] = \frac{E[P]T}{a} S_{eqv}^m \quad (2.27)$$

Avec la contrainte équivalente est définie par :

$$S_{eqv}^m = \left[\int S^m p(S) dS \right]^{1/m} \quad (2.28)$$

Pour une bande étroite :

$$p(S) = \frac{S}{4m_0} e^{-\frac{S^2}{8m_0}} \quad (2.29)$$

Et donc l'équation 2.27 peut être simplifiée à :

$$E[D] = \frac{E[P]T}{a} (\sqrt{2m_0})^m \Gamma(1 + m/2) \quad (2.30)$$

avec, $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma.

De nombreuses expressions ont été proposées pour corriger le conservatisme associé à cette solution. La plupart ont été élaborées en référence à l'industrie offshore. Les solutions de Wirsching, Chaudhury et Douvres, Tunna et Hancock ont tous été calculés à l'aide de cette approche. Elles sont toutes exprimées en fonction des moments spectraux jusqu'à m_4 .

v) **Méthode de Wirsching**

L'équation de Wirsching est donnée par [54] :

$$E[D]_W = \zeta_W E[D]_{NB} \quad (2.31)$$

avec ζ_W est le facteur de correction rain-flow. C'est un facteur empirique dérivée de vastes simulations de Monte Carlo qui incluent une variété de fonctions de densité spectrale. Elle est exprimée comme suit :

$$\zeta_W = a_W + (1 - a_W)(1 - \lambda)^{b_W} \quad (2.32)$$

avec a_W et b_W sont les meilleurs paramètres d'ajustement exprimée comme :

$$a_W = 0.926 - 0.033m$$

$$b_W = 1.587m - 2.323$$

vi) **Méthode de Chaudhury et Dover**

Pour Chaudhury et Dover [10], le rapport du dommage prédit est exprimé par l'équation (2.27) avec la contrainte équivalente est donnée par :

$$S_{eqv} = 2\sqrt{2m_0} \left[\frac{\lambda^{m+2}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{m+1}{2}\right) + erf(\gamma) \frac{\gamma}{2} \left(\frac{m+1}{2}\right) \right]^{1/m}$$

avec :

$$erf(\gamma) = 0.3012\gamma + 0.4916\gamma^2 + 0.9181\gamma^3 - 2.354\gamma^4 - 3.3307\gamma^5 + 15.6254\gamma^6 - 10.7846\gamma^7$$

vii) **Méthode de Tunna**

Tunna a procédé d'une façon similaire à celle de la méthode de Dirlik.

La fonction densité de probabilité est donnée sous la forme [74] :

$$p(S) = \frac{S}{4\gamma m_0} \exp\left(\frac{-S^2}{4\gamma m_0}\right)$$

Pour $\gamma = 1.0$, cette formule est la formule donnée ci-dessus à bande étroite équation (2.29). L'équation Tunna a été développée avec une référence spécifique à l'industrie ferroviaire.

viii) Méthode de Hancock

Pour Hancock le rapport de dommage prédit est exprimé par l'équation (2.27), avec la contrainte équivalente est donnée par [26] :

$$S_{eqv} = 2\sqrt{2m_0}[\gamma\Gamma(1 + m/2)]^{1/m}$$

2.3.3.4 Prédiction de la fatigue d'une pièce métallique

Considérons le cas d'une plaque simple en aluminium [Fig. 2.6] dont les propriétés : la densité $\rho = 2700kg/m^3$, le module de Young $E = 70.000MPa$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0,33$ [62] soumise à des vibrations aléatoires sous une densité spectrale de puissance d'accélération [Fig. 2.8]. Le modèle est composé de 2205 nœuds et 2039 éléments figure [Fig. 2.7].

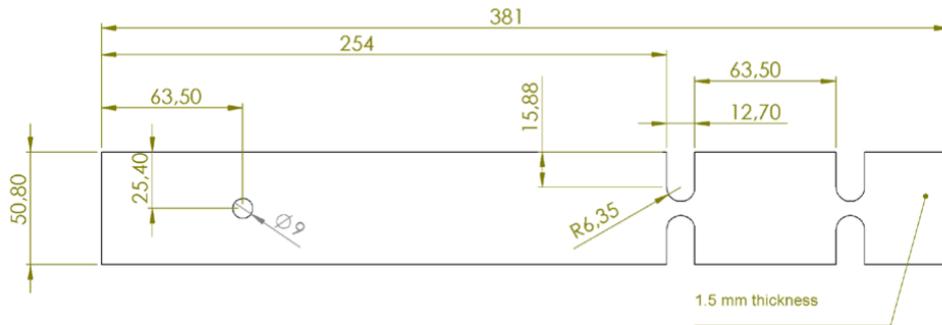


FIGURE 2.6: Dimensions de la pièce en aluminium

Le point de fixation de la pièce est soumis à la densité spectrale d'accélération de base dans la gamme de fréquence de $10 - 300Hz$, illustré à



FIGURE 2.7: Maillage de la pièce en aluminium

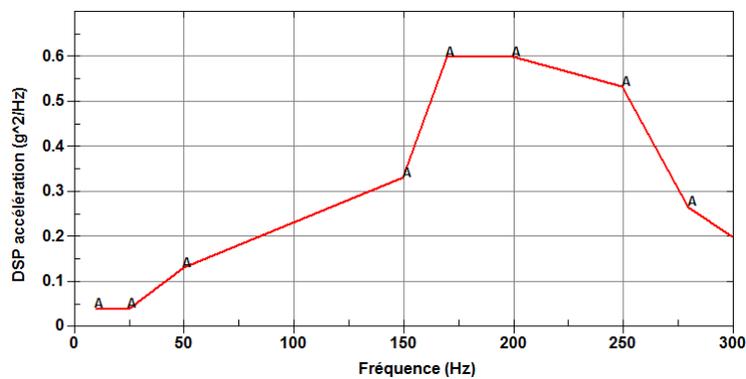


FIGURE 2.8: Densité spectrale d'accélération

la figure 2.8. Une constante d'amortissement modal rapport 0,04 est adoptée. La pièce est exposée à la charge de vibration aléatoire pour 30 minutes (1800 secondes). La densité spectrale de puissance des contraintes dans l'endroit critique est obtenue par la méthode des éléments finis. Les différentes méthodes évoquées précédemment relatives à la rupture par fatigue sous vibrations aléatoires sont utilisées pour prédire la fatigue à partir de la densité spectrale de puissance des contraintes calculées. L'essai est effectué pour la pièce soumise à la même densité spectrale de puissance d'accélération et le temps à laquelle la pièce se fissure est enregistré [Fig. 2.9]. Le modèle est conçu de telle sorte que le défaut se produit à un emplacement prédéterminé. Les résultats expérimentaux sont comparés avec les valeurs théoriques estimées.



FIGURE 2.9: Dispositif expérimental

Méthode	Résistance à la fatigue (min,s)	Cumul de dommage
Expérimentale	7 min 25 s	-
Dirlik	5 min 25 s	5.54
Steinberg	4 min 10 s	7.191
Bande étroite	2 min 05 s	14.41
Wirsching	5 min 45 s	5.08
Chaudhury et Dover	6 min 03 s	6.03
Hancock	4 min 06 s	7.31
Tunna	22 min 18 s	1.35

TABLE 2.1: Durée de vie théorique et expérimentale

Les résultats numériques obtenus sont en accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux le tableau (2.1), bien que les résultats dépendent de la méthode utilisée pour interpréter les résultats RMS. Les méthodes Dirlik, Wirsching et Chaudhury Dover donnent les meilleurs résultats théoriques. Steinberg donne des résultats conservateurs tandis que les prédictions Tunna sont complètement erronées. Ces différentes observations et les résultats sont

tout à fait cohérents avec ceux trouvés dans la littérature sur le même sujet. Le RMS maximum de la contrainte S_x calculée par LS-DYNA[®] étant de $(35,0MPa)$ est en bon accord avec les résultats de calcul effectués par Abaqus[®] qui nous a donné la valeur de $33,5MPa$.

2.4 Conclusion

La structure vibrante peut être modélisée dans le domaine temporel en utilisant la méthode des éléments finis MEF explicite basée sur des éléments surfaciques quadrilatères ou triangulaires. Les vitesses obtenues sur les nœuds de la structure sont transformées en des vitesses fréquentielles en utilisant la FFT. Elle peut être aussi modélisée dans le domaine fréquentiel par la superposition modale qui repose sur les paramètres modaux du système en régime libre pour calculer la réponse en régime forcé afin de calculer la vitesse fréquentielle de la structure. La simulation numérique dans le domaine fréquentiel du champ acoustique rayonné par la structure vibrante est effectuée par la BEM. La vitesse dans le domaine fréquentiel est utilisée comme condition aux limites pour la BEM (problème de Neumann).

Il est important d'étudier la fatigue dans la phase de conception de nouveaux produits. L'analyse de la fatigue peut être menée dans le domaine temporel ainsi que dans le domaine fréquentiel. Dans le domaine temporel, les gens utilisent habituellement l'algorithme de comptage rain-flow pour obtenir le nombre de cycles à chaque niveau de contrainte/déformation, basé sur l'historique du temps contrainte/déformation. Dans de nombreux cas, une description dans le domaine fréquentiel est plus pratique. C'est parce que d'une part la charge de la structure peut être de nature aléatoire, par exemple, la charge du vent sur les éoliennes, dans ce cas la meilleure approche pour l'analyse de la fatigue est d'utiliser la méthode statistique, et d'autre part il peut être trop intense pour calculer la fatigue dans le domaine tem-

porel pour les structures à grande échelle avec un long temps historique de la charge.

Plusieurs méthodes permettant d'avoir le nombre de cycle à partir de la connaissance de la densité spectrale des contraintes calculées à partir des vibrations aléatoires ont été utilisées, les résultats numériques montrent bien que ces méthodes sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux.

Chapitre 3

Méthode des éléments finis de frontière BEM

3.1 Introduction

Un corps qui vibre au sein d'un fluide crée périodiquement autour de lui-même une succession de compression et détente dans le fluide, ce qui se traduit par l'apparition d'ondes acoustique (ou ondes sonores). C'est l'énergie cinétique du corps en mouvement qui est la source de l'énergie qu'emportent ces ondes. Les ondes acoustiques sont donc provoquées par la propagation d'une vibration mécanique du milieu ; en d'autre terme le mouvement de la structure est transmis par le fluide.

Nous nous intéressons au problème de rayonnement qui consiste à calculer le champ extérieur de pression à partir d'un profil de vitesse (ou de pression) connu sur la surface d'une structure vibrante.

Dans la première partie de ce chapitre nous décrivons et formalisons le problème à résoudre, ensuite nous traiterons en détail la méthode des éléments finis de frontière la BEM jusqu'à l'obtention et la résolution du système linéaire avec la méthode GMRES. Dans la dernière partie nous allons

montrer quelques résultats externe et interne du code développé auparavant, suivit de quelques conclusions.

Après une description de la dynamique des structure la BEM indirecte variationnelle sera détaillée, enfin des résultats de validation expérimentales seront exposés suivit de quelques conclusions.

On s'intéresse dans un premier temps au comportement vibratoire d'une structure élastique dans le vide. Sous l'effet de l'excitation dynamique et des mouvements de déformation de la structure, le fluide est mis en mouvement. Le mouvement du fluide est alors décrit par l'équation d'Helmholtz discrétisée par la méthode BEM indirecte variationnelle ; qui sera détaillée dans le second paragraphe. Enfin des résultats de validation numériques seront exposés suivit de quelques conclusions.

3.2 Mise en équation du problème

Toute perturbation dans un milieu fluide est à l'origine d'une déformation locale qui se déplace avec une célérité qui ne dépend que des propriétés physiques du milieu. Théoriquement, ce mouvement est entièrement décrit par l'équation de propagation des ondes qui est une équation aux dérivées partielles (EDP) fonction de l'espace et du temps.

3.2.1 Équation de propagation des ondes

Le problème considéré est soumis aux hypothèses classiques de l'acoustique linéaire : le fluide est compressible, homogène, isotrope, non visqueux. Les équations de l'acoustique linéaire sont :

- Équation de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(V') = 0 \quad (3.1)$$

Or si la perturbation est suffisamment rapide pour pouvoir négliger les

transferts thermiques entre les particules fluides voisines, nous avons à faire à une transformation adiabatique qui s'exprime par l'équation de l'état du fluide :

$$p' \approx c^2 \rho' \quad (3.2)$$

En insérant cette équation dans l'équation de conservation de la masse on obtient :

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div}(V') = 0 \quad (3.3)$$

– Équation d'Euler, conservation de mouvement :

$$\rho_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = -\operatorname{grad} p' \quad (3.4)$$

avec :

$$p = p_0 + p' \quad , \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad \text{et} \quad V = V_0 + V' \quad (3.5)$$

p, ρ et V sont la pression totale, la masse volumique totale et la vitesse totale.

p', ρ' et V' sont la pression acoustique, la masse volumique acoustique et la vitesse acoustique.

p_0, ρ_0 sont la pression atmosphérique. Le fluide initialement au repos $V_0 = 0$.

La combinaison de ces deux équations nous conduit à l'équation de propagation des ondes :

$$\Delta p' - \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (3.6)$$

Les problèmes de propagation d'ondes font parties des problèmes hyperboliques linéaires, la linéarité permet un traitement de la variable temps par transformée de Fourier, on parle d'étude dans le domaine fréquentiel.

3.2.2 Équation d'Helmholtz

En pratique cette équation se réduit à une équation indépendante du temps. Il s'agit de l'équation d'Helmholtz qui est la transformée de Fourier de l'équation de propagation des ondes. En régime harmonique (dont l'évolution temporelle est une fonction sinusoïdale) de pulsation $\omega = 2\pi f$ on suppose une dépendance temporelle de la forme :

$$p'(M, t) = p(M)e^{i\omega t} \quad (3.7)$$

L'injection de cette relation dans l'équation de propagation des ondes nous conduit à l'équation d'Helmholtz :

$$\Delta p(M) + k^2 p(M) = 0 \quad (3.8)$$

avec : $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde.

Pour que le problème d'onde en temporel soit bien posé, il faut rajouter des conditions initiales. Ces conditions permettent de fixer le sens du temps. On appellera solutions causales les solutions nulles aux temps négatifs et anti-causales celles nulles aux temps positifs. L'équation des ondes étant réversible en temps (le changement de variable $t \rightarrow -t$ laisse inchangée l'équation), il est indispensable pour avoir l'unicité d'imposer la causalité, ce qui correspond bien à la réalité physique : soudain il se passe quelque chose (conditions initiales) et on s'intéresse à déterminer l'onde qui en résulte.

Examinons maintenant le problème d'Helmholtz posé en fréquentiel. On ne peut pas définir de conditions initiales puisque la variable temps a disparu après transformation de Fourier. Pour obtenir l'unicité de la solution physique fréquentielle, il importe de retrouver le sens du temps. On doit donc pour fermer le système imposer une condition supplémentaire.

La condition de radiation de Sommerfeld introduite à partir de considérations énergétiques :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial P}{\partial r} - ikp \right) = 0 \quad (3.9)$$

Cette équation admet comme solution fondamentale la fonction de Green. La fonction de Green $G(r, r')$ représente le champ créé en r par une source ponctuelle située au point r' . La fonction G vérifie l'équation d'Helmholtz non homogène (le second membre est remplacé par $\delta(r - r')$), la condition de radiation de Sommerfeld et la relation de symétrie :

$$G(r, r') = G(r', r) \quad (3.10)$$

Cette fonction n'est connue que pour des géométries particulières. Pour des géométries quelconques, la fonction de Green associée à l'espace fluide infini G est utilisée. Elle s'écrit :

$$G(r, r') = \frac{e^{-ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (3.11)$$

où $|r - r'|$ est la distance entre r et r' .

3.3 La BEM directe

3.3.1 Identité de Green

La représentation intégrale d'Helmholtz extérieure est directement issue de la théorie des fonctions de Green. L'identité de Green se déduit du théorème de divergence de Gauss qui transforme l'intégrale de volume d'une divergence en un flux sortant de la surface fermée S qui délimite le volume V .

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{q} dS = \int_V \text{div}(\vec{q}) dV \quad (3.12)$$

où \vec{n} est la normale dirigée vers l'extérieur de S . Si le vecteur se décompose en deux fonctions scalaire f et g tel que :

$$\vec{q} = f \overrightarrow{\text{grad}}g \quad (3.13)$$

nous avons :

$$\overrightarrow{\text{grad}}q = \overrightarrow{\text{grad}}g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f + f \Delta g \quad (3.14)$$

Cela nous conduit :

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int_V (\overrightarrow{\text{grad}}g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f + f \Delta g) dV \quad (3.15)$$

De même si le vecteur \vec{q} se décompose en deux fonctions scalaire f et g tel que :

$$\vec{q} = g \overrightarrow{\text{grad}}f \quad (3.16)$$

nous avons :

$$\int_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int_V (\overrightarrow{\text{grad}}g \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f + g \Delta f) dV \quad (3.17)$$

Par soustraction de ces deux équations on obtient l'identité de Green :

$$\int_V (f \Delta g - g \Delta f) dV = \int_S (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) dS \quad (3.18)$$

Cette identité fournit une relation entre les dérivées normales à la surface S des fonction f et g , et les Laplaciens à l'intérieur du volume V de ces même fonctions.

3.3.2 Problème de rayonnement interne

Pour un problème interne nous cherchons à déterminer le champ de pression dans un domaine V , limité par une surface S [Fig.3.1]. L'identité de

Green est appliquée à la pression qui est une inconnue du problème et à la solution fondamentale G . Dans ce cas de problème, le point de discontinuité peut se situer soit dans le domaine V soit sur la surface S .

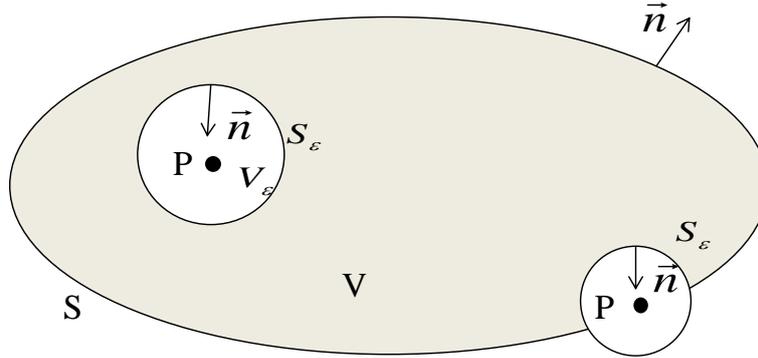


FIGURE 3.1: Problème acoustique interne

Quand le point P est un point du domaine, nous ne pouvons pas appliquer directement l'identité de Green à V car la fonction G n'est pas différentiable en P . Par conséquent, on construit autour de ce point une sphère infinitésimale de surface S_ϵ et de rayon ϵ , afin d'exclure la discontinuité en P [Fig.3.1]. Le théorème de Green sera donc appliqué au volume $V - V_\epsilon$, compris entre la surface S et S_ϵ , et à la surface d'intégration $S + S_\epsilon$.

L'application du théorème de Green donne :

$$\int_{V-V_\epsilon} (G\Delta p - p\Delta G)dV = \int_{S+S_\epsilon} (G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n})dS \quad (3.19)$$

La pression p et la fonction de Green G vérifient l'équation de Helmholtz donc :

$$\Delta p = -k^2 p$$

$$\Delta G = -k^2 G$$

De là nous avons l'intégrale sur le volume qui s'annule :

$$\int_{V-V_\epsilon} (G\Delta p - p\Delta G)dV = 0$$

Il reste la partie gauche de l'intégrale qui est évaluée sur deux surfaces différentes, la surface S de la cavité et la surface S_ϵ qui contient le point singulier P :

$$\int_{S_\epsilon} (G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n})dS + \int_S (G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n})dS = 0$$

Nous pouvons voir simplement :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} G\frac{\partial p}{\partial n}dS = 0$$

Car G est de l'ordre de $O(\frac{1}{r})$ et dS est de l'ordre de $O(r^2)$ donc l'intégrale tend vers zéros comme r tend vers zéros.

En calculant l'intégrale dans les coordonnées sphériques et en prenant la limite quand r tend vers zéros, nous pouvons montrer que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} p\frac{\partial G}{\partial n}dS = p(P) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \frac{\partial G}{\partial n}dS = p(P)$$

Finalement nous avons l'équation intégrale en remplaçant la pression via la relation d'Euler donnée par $\frac{\partial n}{\partial n} = -i\rho\omega v_n$ avec v_n qui est la vitesse normale et ρ est la densité du fluide.

$$p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n(Q)G(Q, P) + p(Q)\frac{\partial G(Q, P)}{\partial n_Q})ds_Q \quad (3.20)$$

D'après cette équation intégrale le champ de pression en un point quelconque P est exprimé en fonction des valeurs aux limites sur la surface S , c'est l'idée principale de la méthode intégrale. Cette équation ne peut pas être utilisée car sur le même segment, les conditions aux limites donnent soit la pression, soit la vitesse normale ou une combinaison des deux. Pour obtenir les autres valeurs des variables aux limites, on est amené à placer

successivement, le point P sur chaque point de surface. Ce procédé est appelé collocation.

Cette équation intégrale n'est pas exploitable directement quand le point de collocation est un point de surface, car le volume infinitésimal n'est pas une sphère mais une portion de sphère. Dans un cas général, nous pouvons montrer que l'équation intégrale d'Helmholtz s'écrit :

$$C(P)p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n(Q)G(Q,P) + p(Q)\frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q})ds_Q \quad (3.21)$$

avec :

$$C(P) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } P \in S \\ 1 & \text{si } P \in V \\ 0 & \text{si } P \notin (V \cup S) \end{cases} \quad (3.22)$$

où : $\frac{\partial G_L}{\partial n} = \frac{-1}{4\pi r^2}$ [77]

3.3.3 Problème de rayonnement externe

Dans le cas d'un problème de rayonnement externe le domaine V contenant la surface S est infini, une surface temporaire S_R est construite pour limiter le volume V à l'infini [Fig.3.2]. Pour la même raison que pour le problème interne nous devons exclure un petit volume sphérique V_ϵ de surface S_ϵ est de rayon ϵ entourant le point de discontinuité P .

L'application du théorème de Green donne :

$$\int_{V-V_\epsilon} (G\Delta p - p\Delta G)dV = \int_{S+S_\epsilon+S_R} (G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n})dS \quad (3.23)$$

Comme pour le problème interne, on peut montrer que :

$$-p(P) = \int_{S_\epsilon} (G\frac{\partial p}{\partial n} - p\frac{\partial G}{\partial n})dS \quad (3.24)$$

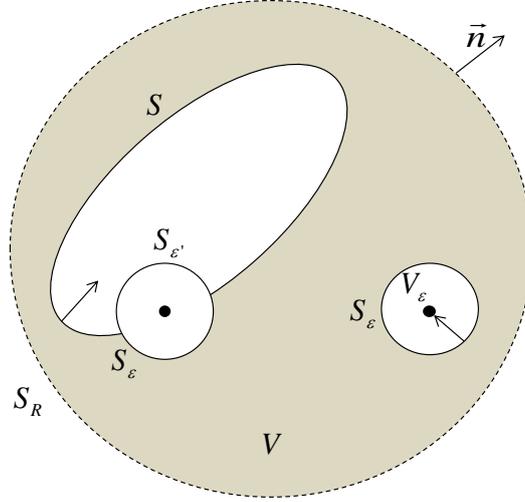


FIGURE 3.2: Rayonnement acoustique externe

L'intégrale sur S_R est nulle en raison de la condition de rayonnement de Sommerfeld :

$$\int_{S_R} (G \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial G}{\partial n}) dS = 0$$

D'où :

$$p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n(Q)G(Q, P) + p(Q) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial n_Q}) ds_Q \quad (3.25)$$

On constate que les équations interne et externe sont identiques sauf que les normales ont des directions opposées.

Lorsque P est un point de la surface, l'on peut montrer dans le cas général que l'équation intégrale d'un problème extérieur s'écrit comme suit :

$$C(P)p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n(Q)G(Q, P) + p(Q) \frac{\partial G(Q, P)}{\partial n_Q}) ds_Q \quad (3.26)$$

avec :

$$C(P) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } P \in S \\ 1 & \text{si } P \in V \\ 0 & \text{si } P \notin (V \cup S) \end{cases} \quad (3.27)$$

3.3.4 Discrétisation

Afin de résoudre l'équation intégrale d'Helmholtz numériquement, la surface est maillée à l'aide de N éléments linéaires quadrilatéraux (4 nœuds) et triangulaires (3 nœuds) de surface S_i qui permettent le maillage de surfaces plus complexes [Fig.3.3].

$$S \cong S^h = \bigcup_{i=1}^{Element} S_i$$

$$\int_S () dS = \sum_{Element} \int_{S^e} () dS$$

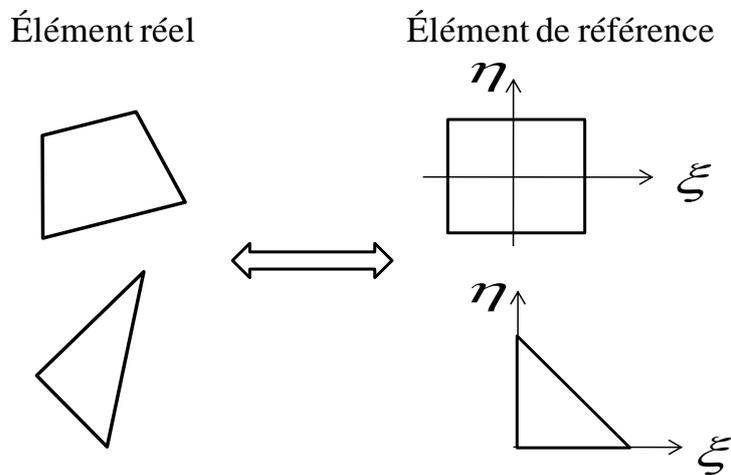


FIGURE 3.3: Éléments quadrilatérale et triangulaire

L'interpolation des nœuds donne la géométrie des différents éléments.
Autrement dit :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{ND} x_j N_j(\xi, \eta)$$

Avec x_j les coordonnées du nœud j et ND est le nombre de nœuds par élément (3 ou 4). Les fonctions $N_j(\xi, \eta)$ sont les fonctions de forme définies sur l'élément de référence elles sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel, elles peuvent être utilisées pour tout les éléments possédant le même élément de référence. La fonction de forme est nulle partout sauf au nœud lui correspondant où elle vaut un. De la même manière, on peut interpoler les dérivées comme suit :

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{ND} x_j \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{ND} x_j \frac{\partial N_j(\xi, \eta)}{\partial \eta}$$

$$dS = \|J\| d\xi d\eta$$

où $\|J\|$ est le Jacobien :

$$\|J\| = \left\| \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right\|$$

Ainsi, la normale est calculée comme suit :

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta}}{\|J\|}$$

La pression p et la vitesse normale V_n sont discrétisées par :

$$p(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{ND} p_j N_j(\xi, \eta)$$

$$V_n(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^{ND} V_{nj} N_j(\xi, \eta)$$

Pour chaque nœud i , nous avons :

$$C(P_i)p(P_i) = -i\rho\omega \sum_{j=1}^{ND} V_{nj} \int_{S_j} G(P_i, P_j) N_j dS - \sum_{j=1}^{ND} p_j \int_{S_j} \frac{\partial G(P_i, P_j)}{\partial n_j} N_j dS \quad (3.28)$$

La dérivée normale de G égale à :

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

avec :

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}r} \cdot \vec{n}$$

Finalement l'équation discrétisée s'écrit :

$$C(P_i)p(P_i) = \sum_j g_{ij} V_{nj} - \sum_j h_{ij} p_j \quad (3.29)$$

où g_{ij} et h_{ij} sont les matrices élémentaires :

$$g_{ij} = -i\rho\omega \int_{S_j} G(P_i, P_j) N_j dS$$

et

$$h_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G(P_i, P_j)}{\partial n_j} N_j dS$$

En regroupant les h_{ij} dans la matrice H' et g_{ij} dans la matrice G , on trouve :

$$Cp + H'p = GV_n$$

En combinant C et H' , on forme une seule matrice H telle que :

$$H = C + H'$$

d'où :

$$Hp = GV_n$$

Comme les conditions aux limites ne spécifient que la moitié des variables aux frontières, on arrange le dernier système de telle sorte que les inconnues (p ou V_n) se trouvent à gauche de l'égalité, nous obtenons le système linéaire suivant :

$$Ax = b$$

Pour le présent travail nous avons choisi de discrétiser l'équation intégrale donnant la pression surfacique par la méthode dite de collocation constante par élément. Ce type de discrétisation souvent effectué est très simple à mettre en œuvre, il consiste à découper la surface en des facettes planes et sur chacune desquelles les champs (la pression et sa dérivée normale) sont supposés constants. Cela nous conduit à la discrétisation de l'équation intégrale suivante, qui est beaucoup plus simple à implémenter :

$$C(P_i)p(P_i) = -i\rho\omega \sum_{j=1}^{nelem} V_{nj} \int_{S_j} G(P_i, P_j) dS - \sum_{j=1}^{nelem} p_j \int_{S_j} \frac{\partial G(P_i, P_j)}{\partial n_j} dS \quad (3.30)$$

La résolution du système détermine la pression surfacique, après injection dans l'équation intégrale d'Helmholtz ce qui donne la pression en n'importe quel point du fluide.

3.3.5 Intégration numérique

Lorsque le point de collocation ne coïncide pas avec un nœud de l'élément, l'intégrand est régulier. L'intégration numérique sur l'élément quadrilatéral régulier se fait par la méthode de Gauss.

$$h_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G(P_i, P_j)}{\partial n_j} N_j dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial G}{\partial n_j} N_j \parallel j_s \parallel d\xi d\eta = \sum_{m=1}^{Ngs} \sum_{k=1}^{Ngs} w_m w_k f(\xi^{(m)}, \eta^{(k)})$$

où, $f = \frac{\partial G}{\partial n} N_j \parallel j_s \parallel Ngs$ étant le nombre de points de Gauss suivant une direction donnée et w est le poids.

Lorsqu'un élément de collocation coïncide avec un élément source, l'intégrale est singulière. En effet, les noyaux G et $\frac{\partial G}{\partial n}$ des intégrales sont deux singuliers et aisément intégrables moyennant un traitement spécial.

Pour la méthode de collocation, dans laquelle les inconnues sont aux nœuds, Wu [77] a proposé d'utiliser la méthode de transformation en coordonnées polaires généralisées afin de calculer l'intégrale singulière impliquant la fonction de Green et sa dérivée. Ainsi, au point singulier il divisait chaque quadrangle en deux triangles et transformait chaque élément de référence triangulaire en un carré unitaire en utilisant la transformation en coordonnées polaires suivante [FIG.3.4] :

$$\begin{cases} \xi = \xi^{(3)} + \rho[\xi^{(1)} - \xi^{(3)} + \theta(\xi^{(2)} - \xi^{(1)})] \\ \eta = \eta^{(3)} + \rho[\eta^{(1)} - \eta^{(3)} + \theta(\eta^{(2)} - \eta^{(1)})] \end{cases} \quad (3.31)$$

Où $\xi^{(n)}$ et $\eta^{(n)}$ représentent les coordonnées sur l'élément de référence avec $n = 1, 2, 3$ désigne le numéros local du nœud, le nœud 3 est pris comme origine du système de coordonnées polaires avec $0 \leq \theta \leq 1$ et $0 \leq \rho \leq 1$.

Pour un triangle donné, la transformation se fait selon Wu [77] de la manière suivante :

D'après la figure [Fig.3.4] l'intégrale h_{ij} devient :

$$h_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial G(P_i, P_j)}{\partial n_j} N_j dS = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial G}{\partial n_j} N_j \parallel j_s \parallel \rho d\tau d\chi$$

Donc cette méthode consiste à étaler le point de singularité sur un segment, et repositionner les points de Gauss près de ce point.

Pour notre part et comme nous utilisons la collocation constante par élément, le point de singularité se trouve au centre de l'élément. C'est pourquoi chaque élément quadrilatère est découpé en quatre triangles et ensuite on

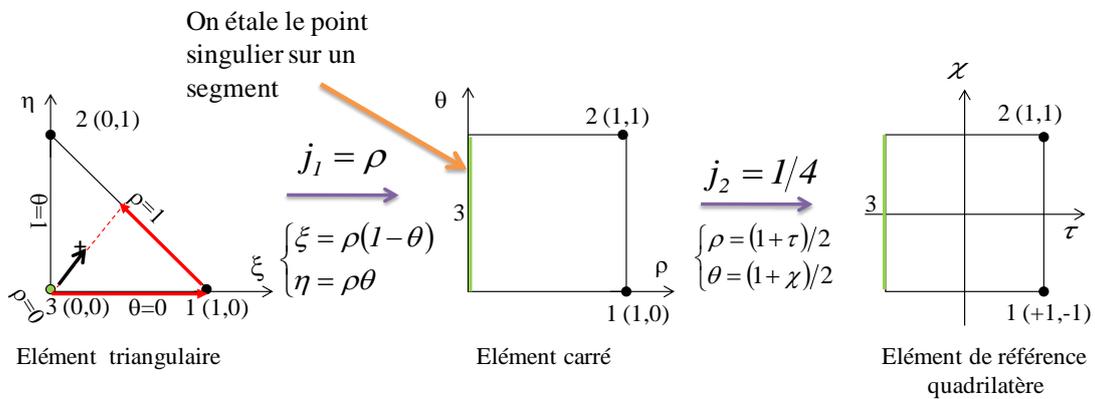


FIGURE 3.4: Transformation en coordonnées polaires généralisées

procède de la même manière que Wu [77] pour chaque triangle [FIG.3.5]. Il en est de même pour un élément triangulaire.

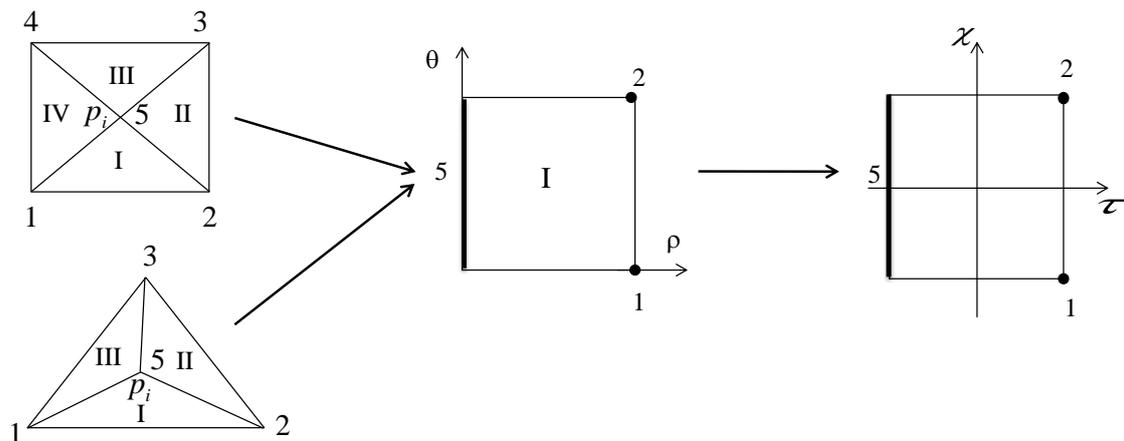


FIGURE 3.5: Découpage de l'élément

3.4 La BEM indirecte

Nous allons considérer la formulation directe d'Helmholtz pour un problème externe le domaine noté (+) et un problème interne le domaine noté (-) fig.[3.6] afin d'établir la formulation indirecte qui permet de traiter si-

multanément les problèmes interne et externe, pour tout types de structures fermées ou ouvertes.

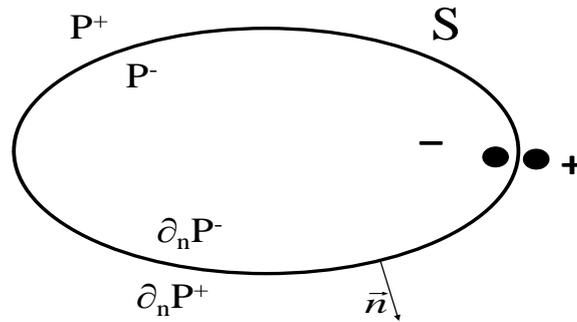


FIGURE 3.6: Définition des variables primaires

Pour toutes surfaces fermées [Fig. 3.7] l'équation intégrale d'Helmholtz directe s'écrit :

$$p(X) = \int_S \left(\frac{\partial p(Y)}{\partial n_Y} G(Y, X) - p(Y) \frac{\partial G(Y, X)}{\partial n_Y} \right) dS \quad (3.32)$$

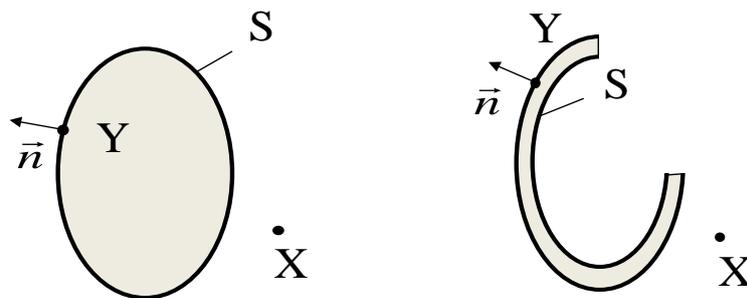


FIGURE 3.7: Rayonnement acoustique de la structure au point d'écoute X

Pour une structure fine la surface $S = S^+ \cup S^-$ [Fig.3.8], et l'intégrale selon S devient :

$$p(X) = \int_{S^+} (G(Y^+, X) \frac{\partial p(Y^+)}{\partial n_{Y^+}} - p(Y^+) \frac{\partial G(Y^+, X)}{\partial n_{Y^+}}) dS^+ + \int_{S^-} (G(Y^-, X) \frac{\partial p(Y^-)}{\partial n_{Y^-}} - p(Y^-) \frac{\partial G(Y^-, X)}{\partial n_{Y^-}}) dS^- \quad (3.33)$$

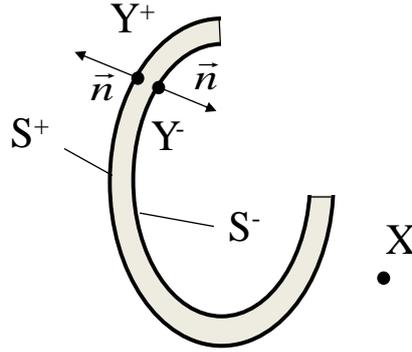


FIGURE 3.8: Rayonnement acoustique externe

Quand l'épaisseur de la structure tend vers zéros [Fig.3.9] nous avons $S = S^- = S^+$ ainsi que $\bar{Y} = Y^- = Y^+$, $n_{Y^+} = -n_{Y^-}$, $G(Y^+, X) = G(Y^-, X)$ et $\frac{\partial G(Y^+, X)}{\partial n_{Y^+}} = -\frac{\partial G(Y^-, X)}{\partial n_{Y^-}}$.

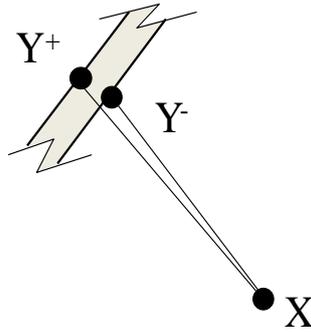


FIGURE 3.9: Structure fine avec une épaisseur négligeable

La pression en un point d'observation quelconque X devient :

$$p(X) = \int_S (\sigma(\bar{Y}) G(\bar{Y}, X) - \mu(\bar{Y}) \frac{\partial G(\bar{Y}, X)}{\partial n_{\bar{Y}}}) dS \quad (3.34)$$

Où : $\mu = p^+ - p^-$ est le potentiel double couche (ou saut de pression) et $\sigma = \frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n}$ est le potentiel simple couche (ou saut de la dérivée normale de la pression).

Dans le cas d'un problème défini par des conditions aux limites de Neumann, la vitesse est imposée sur la surface et par conséquent simple couche s'annule : $\sigma = 0$. De ce fait, l'équation (3.34) se simplifie comme suit :

$$p(X) = - \int_S \mu(Y) \frac{\partial G(\bar{Y}, X)}{\partial n_{\bar{Y}}} dS \quad (3.35)$$

En dérivant l'équation (3.35) par rapport à la normale tout en considérant l'équation d'Euler, on obtient :

$$-i\rho\omega V_n = - \int_S \mu(\bar{Y}) \frac{\partial^2 G(\bar{Y}, X)}{\partial n_X \partial n_{\bar{Y}}} dS \quad (3.36)$$

La résolution de cette équation nous permet de déterminer le potentiel double couche sur la surface. Ce dernier conduit au calcul de la pression en point quelconque du milieu via l'équation (3.35).

3.5 Résolution du système linéaire

Afin de calculer la pression surfacique, étape la plus coûteuse de la BEM, il est nécessaire de résoudre un système linéaire de dimension N (nombre de mailles de la surface vibrante) du type $Ax = b$, où A est une matrice non symétrique. Il est possible de résoudre ce système par une méthode directe, méthode qui ne sera pas choisie en raison de sa complexité trop pénalisante en $O(N^3)$ ou en utilisant une méthode itérative qui ne s'applique pas nécessairement à des matrices symétriques définies positives et dont la robustesse n'est pas dépendante des valeurs initiales. La méthode GMRES (Generalized Minimum RESidual method) répond à ces critères. Il s'agit d'une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires non symétriques mise au point par Saad et Schultz (1986) [67].

L'algorithme GMRES consiste à calculer itérativement la base d'Arnoldi de l'espace de Krylov, la factorisation QR de la matrice de Heisenberg et le calcul de y . Il débute par le choix d'un x_0 et d'une tolérance tol (la méthode donnant une solution approchée du système avec la tolérance désirée) puis il itère. L'algorithme de GMRES s'écrit :

Itération 0 : initialisation de GMRES

- Choix d'un x_0 initial (dans la plupart des cas on considère $x_0 = 0$)
- On fixe la tolérance ϵ
- On fixe le nombre maximum d'itération
- Le résidu : $r_0 = b - Ax_0$
- Calcul de : $v_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2} = \frac{r_0}{\beta}$

Itération j : itération tant que l'erreur > ϵ

Do $j = 1, 2, \dots, \text{maxiter}$

$$v_{j+1} = Av_j$$

Do $i = 1, 2, \dots, j$

$$h_{i,j} = v_{j+1}^T v_i$$

$$v_{j+1} = v_{j+1} - \sum_{i=1}^j h_{i,j} v_i$$

Enddo i

$$h_{j+1,j} = \| v_{j+1} \|_2$$

$$v_{j+1} = \frac{v_{j+1}}{h_{j+1,j}}$$

$$H_j y_j = \beta e_1$$

- On minimise au sens des moindres carrés la norme $\| r_j \| = \| \beta e_1 - H_j y_j \|$
- On évalue r_j si le résidu est suffisamment petit, on s'arrête
- Autrement, on pose $v_0 = v_j$ et on réitère

Enddo j

$x_j = x_0 + V_j y_j$ est la solution approchée à l'étape j

3.6 Accélération de la BEM par low-rank

Contrairement aux matrices éléments finis, la matrice BEM est pleine dense et ne peut pas être stockée comme un tableau dense puisque l'exigence de mémoire grandit très vite avec la taille du système. Afin de limiter les besoins en mémoire, une décomposition de domaine se fait sur le maillage BEM, qui divise les matrices BEM en sous-matrices comme indiqué dans [Fig. 3.10]. Sur les sous-matrices hors diagonale, une approximation de rang faible basée sur la décomposition $RRQR$ est réalisée [29],[9]. Pour les sous-matrices correspondant à des domaines très éloignés, le rang peut être sensiblement inférieur à la taille de la sous-matrice, réduisant ainsi le stockage de la sous-matrice [38]. Nous observons une réduction de la matrice complète dense et de la matrice bloc avec les approximations low-rank. Cette approximation de rang faible accélère aussi l'opération matrice-vecteur utilisée intensivement dans la méthode itérative pour résoudre le système BEM.

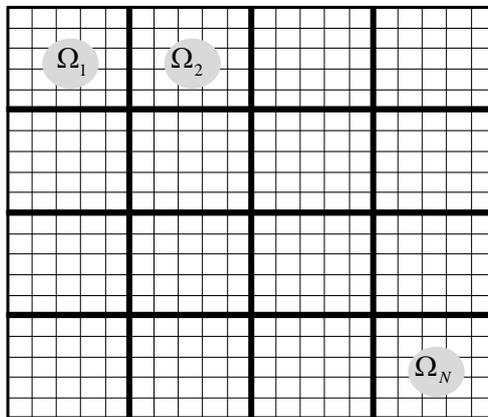


FIGURE 3.10: Partition du domaine

La factorisation Low-Rank (rang faible) d'une matrice est l'un des outils les plus utiles en calcul scientifique et en analyse des données. L'objectif de cette factorisation est de décomposer une matrice en un produit de deux

matrices de rang plus petites afin d'avoir une bonne approximation de la matrice d'origine. Le gain d'une telle décomposition est que moins d'éléments sont nécessaires pour représenter la matrice ($km + kn$ au lieu de mn), ce qui nécessite moins de mémoire et moins d'opérations lors de la réalisation du produit matrice-vecteur. La meilleure façon de montrer cette approximation est de considérer la décomposition QR de Housholder qui décompose la matrice A en deux matrices :

$$A = \underset{m \times n}{Q} \underset{m \times m}{R} \underset{m \times n}{R} \quad (3.37)$$

Telle que Q comporte des colonnes ortho-normales et R est triangulaire supérieure. La base formée par les colonnes de Q est orthogonale. La décomposition QR de Housholder consiste à trouver n matrices de Housholder $H_{q_1} \dots H_{q_n}$ telles que la matrice produit $H_{q_n} \dots H_{q_1} A$ soit triangulaire supérieure avec la matrice H_q de Housholder est de la forme $H_q = I - qq^t$. Avec le vecteur $q = \frac{u}{\|u\|}$ avec u est la colonne de la matrice A . Après n itérations, on obtient $H_{q_n} \dots H_{q_1} A = R$ alors $Q = H_{q_1} \dots H_{q_n}$.

La factorisation QR révélatrice de rang, ou $RRQR$ pour (rank-revealing QR), peut être utilisée pour la décomposition partielle [34]. La $RRQR$ fonctionne de la même façon que la QR standard et détermine également un pivotement des colonnes lorsque la norme de Frobenius des colonnes non transformées est déterminée comme étant négligeable, c'est-à-dire que les colonnes de petite norme sont déplacées vers la droite de la matrice est l'on continue la factorisation.

La modélisation se réduit à la résolution du système linéaire $A\mu = b$, où A est une matrice dense ayant une structure en bloc :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p,1} & A_{p,2} & \dots & A_{p,p} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Les sous-matrices hors diagonale $A_{i,j}$ sont numériquement déficientes dans une certaine mesure, en fonction de la discrétisation, la précision demandée. Ils représentent l'opérateur entre les sous-domaines Ω_i et Ω_j [Fig. 3.10].

La matrice A est divisée en somme de deux matrices M et N : $A = M + N$. Avec M étant la matrice contenant les sous-matrices diagonales :

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

et N contient les sous matrices approximées low-rank :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & Q_{1,2}R_{1,2} & \dots & Q_{1,p}R_{1,p} \\ Q_{2,1}R_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & Q_{p-1,p}R_{p-1,p} \\ Q_{p,1}R_{p,1} & \dots & Q_{p,p-1}R_{p,p-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Pour chaque sous matrices hors diagonale, nous calculons une factorisation partielle $RRQR$:

$$Q \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \\ 0 & R_{2,2} \end{pmatrix} = A_{i,j}P \quad (3.41)$$

La factorisation s'arrête quand [[38]] :

$$\|R_{2,2}\|_F \leq \tau \sqrt{\|A_{i,i}\|_F \cdot \|A_{j,j}\|_F} \quad (3.42)$$

Avec la norme de Frobenius d'une matrice A est défini par :

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2} \quad (3.43)$$

Et finalement la sous matrice approximée s'écrit :

$$\hat{A}_{i,j} = Q \begin{pmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} \end{pmatrix} \simeq A_{i,j} \quad (3.44)$$

Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.11 la matrice approximation prend la forme de la matrice symbolique.

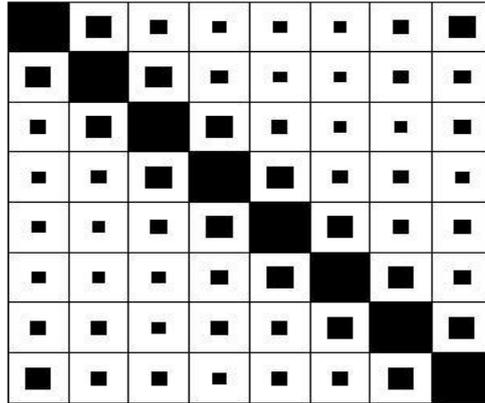


FIGURE 3.11: Matrice symbolique factorisée

3.7 Approximation de la BEM indirecte

3.7.1 Méthode de Rayleigh

L'intégrale ou formule de Rayleigh est une sommation de la contribution d'un ensemble de sources volumiques élémentaires réparties sur une surface

plane à la pression acoustique en un point de l'espace en champ lointain. Elle a été développée en premier pour des problèmes de propagation dans des milieux semi-infinis et a été utilisée dans de nombreuses applications industrielles de part sa facilité et sa rapidité. Cette méthode se base sur le fait, que chaque élément de la structure vibrante est encastré dans un baffle rigide infini et vibre indépendamment des autres éléments. Par conséquent, le champ de pression totale est obtenu en sommant la pression générée par chaque élément. La fonction de Green correspondante est construite en utilisant la méthode des images.

La pression en un point de l'espace P s'exprime par l'équation intégrale d'Helmholtz :

$$p(P) = - \int_S (i\rho\omega v_n G(r) + p \frac{\partial G(r)}{\partial n}) dS \quad (3.45)$$

Où $G(r)$ est la fonction de Green en champ libre et r désigne la distance séparant un point P et un point de la surface. En se référant à la figure [Fig. 3.12], l'image du point P par rapport à la surface de réflexion S_R est notée P' et r' est la distance entre P' et un point quelconque Q tel que $Q \in S \cup S_R$. Afin d'éviter toutes perturbations extérieures la fonction de Green d'un domaine semi-infini est donnée par l'ajout de la solution de l'image qui remplacera l'effet du baffle S_R à la solution fondamentale $G(r)$. Ainsi :

$$G_R(r, r') = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{-ikr'}}{4\pi r'} \quad (3.46)$$

Lorsque la surface vibrante fait partie de S_R alors $r = r'$ et $\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{\partial r'}{\partial n}$ et par conséquent la fonction de Green et sa dérivée normale se réduisent à : $G_R(r) = 2G(r)$ et $\frac{\partial G_R(r)}{\partial n} = 0$.

Sous ces conditions, l'équation (3.45) se réduit à l'intégrale classique de Rayleigh :

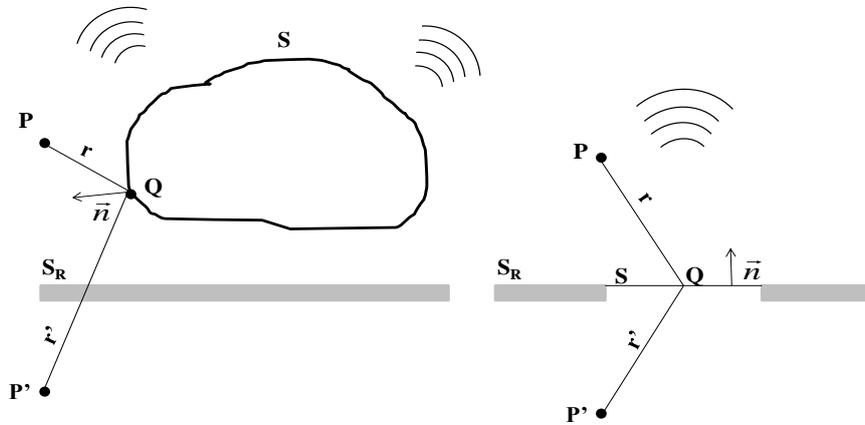


FIGURE 3.12: Propagation en milieu semi-infini

$$p(P) = - \int_S 2i\rho\omega v_n G(r) dS \quad (3.47)$$

Où $G(r)$ est la fonction de Green en champ libre.

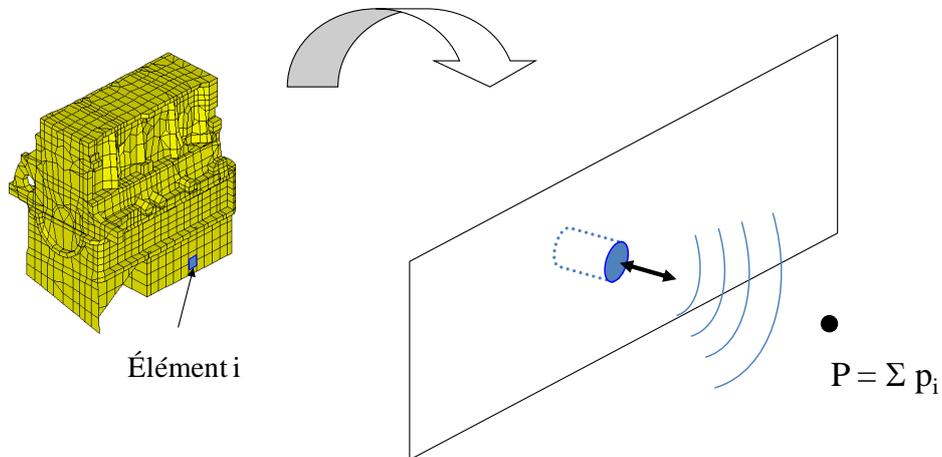


FIGURE 3.13: Piston encastré dans un baffle rigide infini

Connaissant la vitesse normale sur la surface, il est évident que la pression au point P se calcule par une simple sommation [Fig. 3.13]. Ainsi, contrairement à la BEM, la méthode de Rayleigh ne demande pas la résolution

du système linéaire. Ceci la rend très attractive. Néanmoins, les problèmes réels ne sont pas forcément assimilés aux rayonnements des structures planes encastrées dans des baffles rigides infinis. Il s'est avéré que cette méthode s'applique bien pour des surfaces relativement planes tant que leurs plus grandes amplitudes générées proviennent de leurs centres et non pas de leurs bords.

3.7.2 Méthode d'onde plane

La pression sur la surface, à des hautes fréquences, peut être approchée connaissant la vitesse normale sans résoudre l'équation intégrale d'Helmholtz. A des fréquences suffisamment élevées, l'impédance du rayonnement à la surface est approximativement la même que l'impédance caractéristique du milieu. Dans ce cas $p = \rho c v_n$ à la surface. En remplaçant cette dernière dans l'équation intégrale d'Helmholtz, on trouve :

$$p(P) = - \int_S i \rho \omega v_n G(r) \left(1 - \frac{\partial r}{\partial n} \left(1 + \frac{1}{ikr}\right)\right) dS \quad (3.48)$$

Connaissant la vitesse normale sur la surface, cette intégrale peut être évaluée numériquement sans construire ni résoudre un système linéaire d'équation.

3.7.3 Le lien entre la méthode de Rayleigh et la méthode d'onde plane

L'intégrale de Rayleigh représente un cas particulier de l'équation (3.48). En effet, dans le cas où le point d'observation est loin de la surface de sorte que $kr \gg 1$, l'équation (3.48) devient :

$$p(P) = - \int_S i \rho \omega v_n G(r) \left(1 - \frac{\partial r}{\partial n}\right) dS \quad (3.49)$$

Lorsque $\frac{\partial r}{\partial n} = -1$ l'équation (3.49) se réduit à l'intégrale classique de Rayleigh (3.47).

Ceci correspond à un élément visible. Par contre si $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$ alors la pression sera nulle correspondant ainsi à un élément invisible. Par conséquent, dans le cas d'un problème 3D, l'utilisation de l'intégrale de Rayleigh nécessite pour chaque élément un test de visibilité alors que ce dernier est automatiquement inclus dans l'approche asymptotique via la formulation elle-même.

3.7.4 Méthode de Kirchhoff

L'autre alternative est la méthode dite de Kirchhoff, où la BEM est couplée à la FEM utilisé pour l'acoustique dans LS-DYNA en prescrivant des conditions aux limites non réfléchissantes. Dans ce cas au moins une couche de fluide est fusionnée à la structure vibrante, le maillage correspondant à la méthode de Kirchhoff est illustré à la figure [Fig. 3.14]. Cette couche fluide est traitée à l'aide du module acoustique déjà existante de LS-DYNA. Les conditions aux limites non réfléchissantes sont à appliquer sur la couche de fluide afin de modéliser la propagation dans un milieu infini. Enfin, les résultats obtenus de cette analyse de couplage pourrait permettre de calculer la pression en tout point du milieu fluide en utilisant la discrétisation intégrales de frontière BEM.

3.8 Application numérique

3.8.1 Rayonnement d'une plaque

Pour bien traiter un bruit, il faut connaître sa répartition d'énergie acoustique en fonction de la fréquence. En d'autres termes, il faut déterminer les sons qui le composent. Pour cela on procède à une analyse du bruit. Sur un graphique, on porte en ordonnées les niveaux de pression acoustique et en

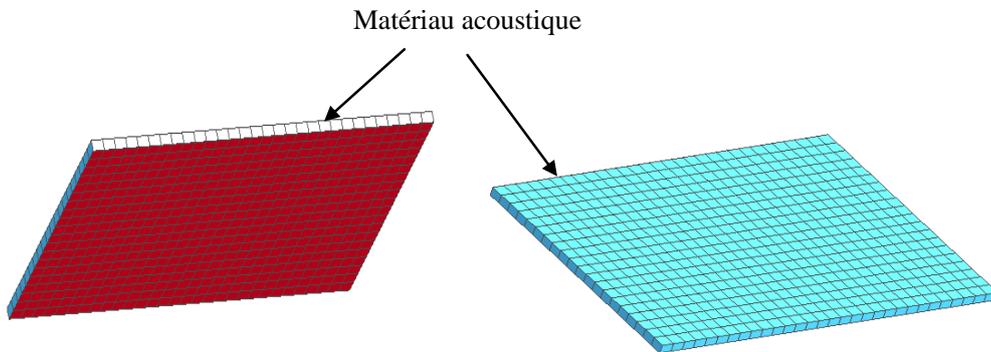


FIGURE 3.14: Plaque vibrante utilisant la méthode de Kirchhoff

abscisse les fréquences. On obtient ainsi, le spectre sonore du bruit.

Afin de calculer la pression acoustique, une application numérique est présentée dans cette section ; la pression prédite à partir de cette simulation est validée à l'aide des résultats numériques de SYSNOISE qui est un code acoustique bien établi et utilisé pour différentes applications industrielles et académique. Le niveau de pression calculé par différentes formulations est comparé au niveau de pression calculé par SYSNOISE utilisé comme solution de référence.

Nous nous sommes intéressés au calcul du rayonnement acoustique d'une plaque élastique en acier $0.6 \times 0.9 \times 0.001m^3$ dont les propriétés mécaniques sont les suivantes : le module d'Young $E = 210GPa$, la densité $\rho = 7800kg/m^3$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La structure est bloquée aux bords et elle est excitée par une force ponctuelle unitaire et impulsionnelle en un point situé en $(0.33, 0.45, 0.0)m$ comme le montre la figure [Fig. 3.15]. Elle est entourée par l'air ($\rho = 1.21kg/m^3, c = 340m/s$). Le modèle BEM a été construit par 600 éléments surfaciques [Fig. 3.15]. L'application de la force nodale en fonction du temps est illustrée à la figure [Fig. 3.16]. Les fluctuations de pression causées par la réponse structurale de la plaque

ont été notées en un point d'observation situé à une distance de $1m$ de la plaque, comme le montre la figure [Fig. 3.15].

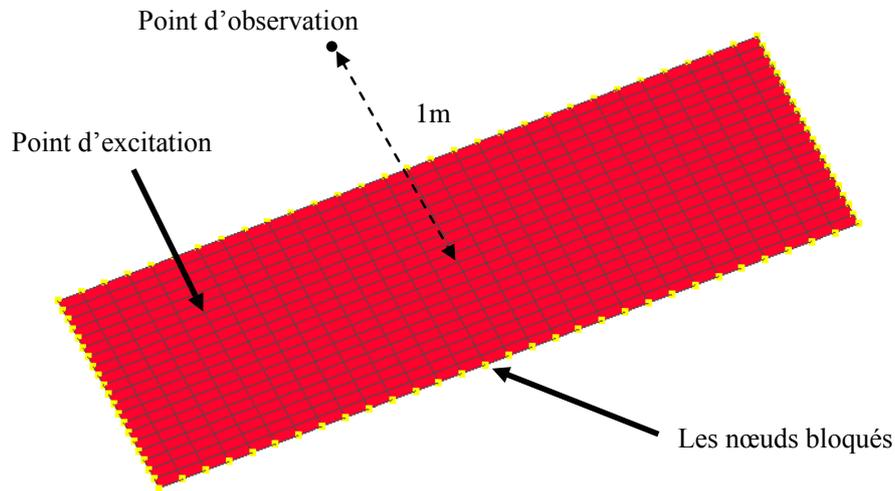


FIGURE 3.15: Description du modèle BEM

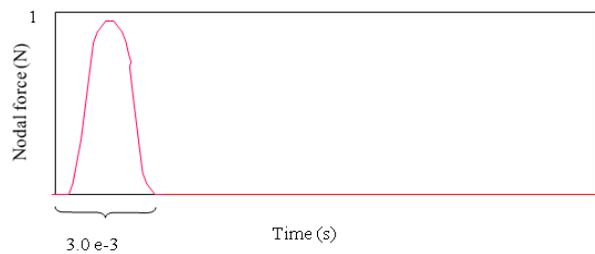


FIGURE 3.16: La force nodale appliquée à la structure en fonction du temps

Nous avons représenté dans la figure [Fig. 3.17], la pression acoustique calculée par le BEM décrite ci-dessus et celle donné par SYSNOISE pour la plaque en mouvement. Ce résultat numérique présenté montre une bonne corrélation avec le résultat de SYSNOISE.

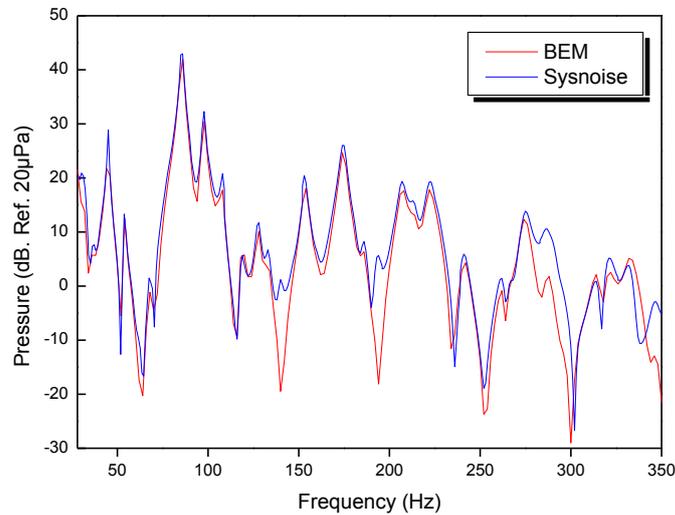


FIGURE 3.17: Comparaison entre la BEM indirecte et SYSNOISE

La figure [Fig. 3.18] montre les pressions acoustiques calculées par la méthode de Rayleigh et celle de SYSNOISE dans le point d'écoute de la plaque sont comparés. Les résultats semblent être en bon accord.

Le niveau de pression acoustique (dB) au point d'observation est calculé en utilisant la méthode de Kirchhoff. Nous observons une forme similaire des deux courbes avec une légère différence dans l'amplitude d'après les résultats de la figure [Fig. 3.19].

Finalement, les résultats de la BEM sont comparés à la méthode de Kirchhoff et de Rayleigh comme le montre la figure [Fig. 3.20]. On voit bien que ces deux méthodes donnent une bonne approximation de la solution obtenue par la BEM.

La solution par la BEM peut atteindre une grande précision, car elle résout l'équation intégrale singulière et obtient les variables primaires inconnues sur chaque nœud sans aucune hypothèse. Les méthodes de Rayleigh

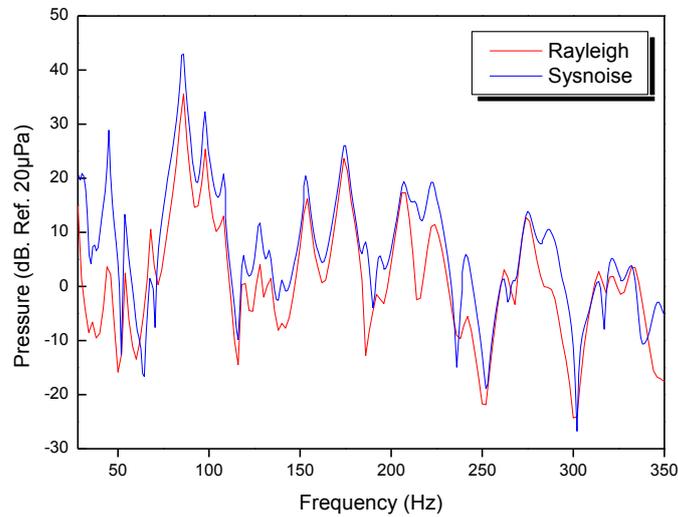


FIGURE 3.18: Pression calculée par la méthode de Rayleigh comparée à SYS-NOISE

et de Kirchhoff sont basées sur certaines hypothèses ainsi elles sont moins précises. Mais les méthodes de Rayleigh et de Kirchhoff peuvent être utilisées comme la première attaque lors de la résolution de grands problèmes, car elles sont beaucoup plus rapides que la BEM, 5 secondes pour Rayleigh et 7 secondes pour Kirchhoff au lieu de 384 secondes pour BEM. On peut voir par cet exemple d'une plaque rectangulaire, les méthodes de Rayleigh et de Kirchhoff peuvent encore donner des résultats satisfaisants. Parce que la géométrie du problème est simple et répond à l'hypothèse des deux méthodes approximatives comme surface plane vibrante. Cependant, lorsqu'elles sont utilisées pour des géométries complexes elles peuvent donner lieu à des résultats erronés.

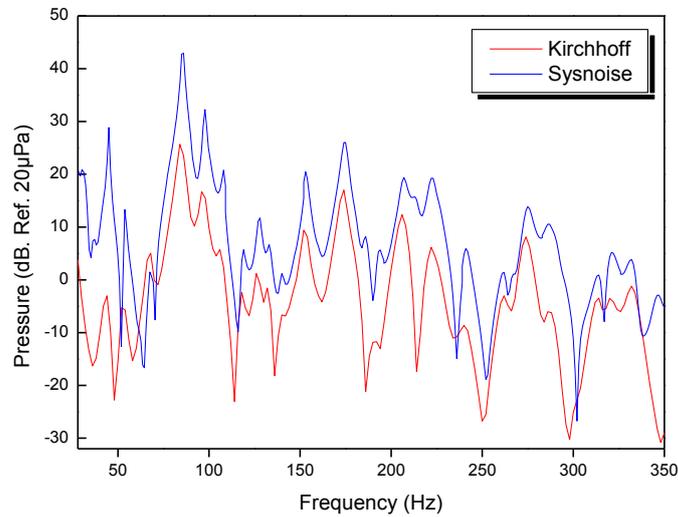


FIGURE 3.19: Pression calculée par la méthode de Kirchhoff comparée à SYSNOISE

3.8.2 Analyse du bruit produit par l'impact d'un club de golf frappant une balle

L'impact d'un club de golf sur une balle produit des bruits qui, si la balle a été correctement frappée, font battre le cœur du joueur beaucoup plus rapidement. Un club de golf doit être capable de produire le son caractéristique qui permet au joueur de savoir qu'il a réalisé un bon tir. Un club de golf d'un nouveau genre qui serait incapable de produire ce son apprécié des joueurs n'aurait aucune chance de survie sur le marché. Même si un joueur de golf ne s'intéresse pas principalement à l'aspect acoustique lorsqu'il choisit son club, il s'agit d'un facteur qui influence inconsciemment sa perception de la qualité. Bien entendu, la ball de golf utilisée influence, elle aussi, le bruit produit. Nous avons modélisé un club de golf constitué de 10433 éléments et de 10455 nœuds maillage [Fig. 3.21]

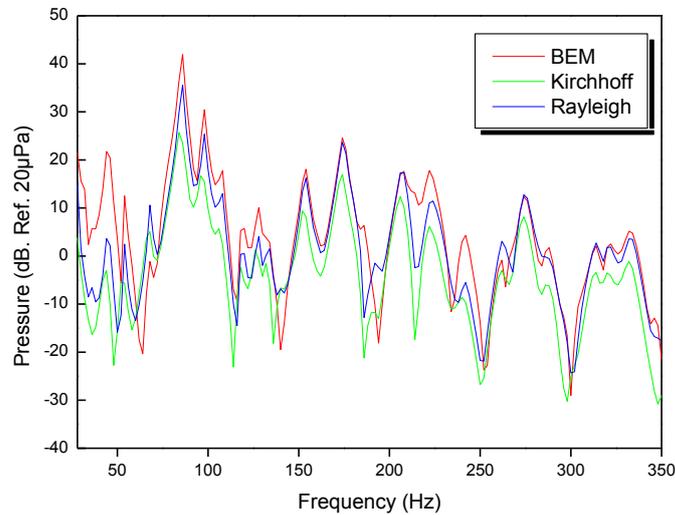


FIGURE 3.20: Variation de la pression rayonnée calculée par différentes méthodes

Le calcul du niveau de pression acoustique est une analyse simple, mais judicieuse dans ce cas. On a, ces derniers temps, beaucoup entendu parler des clubs en titane. Ce type de club permet au joueur de golf d'atteindre de plus grandes distances, mais il produit aussi des bruits d'impact à l'intensité sonore plus élevée que les clubs classiques. Ces événements sonores se situaient pour certains dans des plages pouvant être nuisibles à l'ouïe. L'analyse du niveau ne permet pas de déterminer la qualité des bruits produits par différents clubs de golf, mais elle permet d'identifier les clubs de golf susceptibles de nuire à l'ouïe.

L'analyse du niveau sonore est utilisée pour exclure tout dommage possible de l'ouïe, elle ne permet néanmoins pas forcément d'en tirer des conclusions quant à la qualité perçue. La figure [Fig. 3.22] représente l'analyse du niveau de pression prédit par la méthode de Rayleigh comparé à la BEM lors

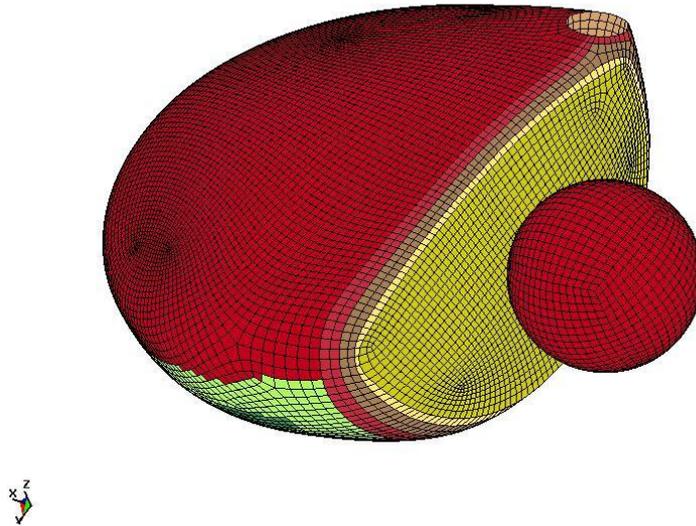


FIGURE 3.21: Maillage du modèle

de l'impact du club de golf sur la balle.

Le calcul par la BEM de 500 fréquences a duré $30h$ alors que le calcul par la méthode de Rayleigh n'a duré que $4min$ pour les 500 fréquences. Nous avons comparé dans la figure [Fig. 3.23] les pics de pression prédits par les deux méthodes, nous voyons bien que la méthode de Rayleigh prédit bien les mêmes pics de pression que la BEM.

3.9 Conclusion

Dans le présent chapitre, différentes formulations ont été utilisées pour modéliser des problèmes vibroacoustiques. Le calcul de la solution d'un problème de rayonnement acoustique donnée consiste d'abord à la sélection d'un modèle de rayonnement acoustique approprié qui sous-tend le choix de la méthode. Par exemple le modèle d'une surface fermée dans un milieu acoustique

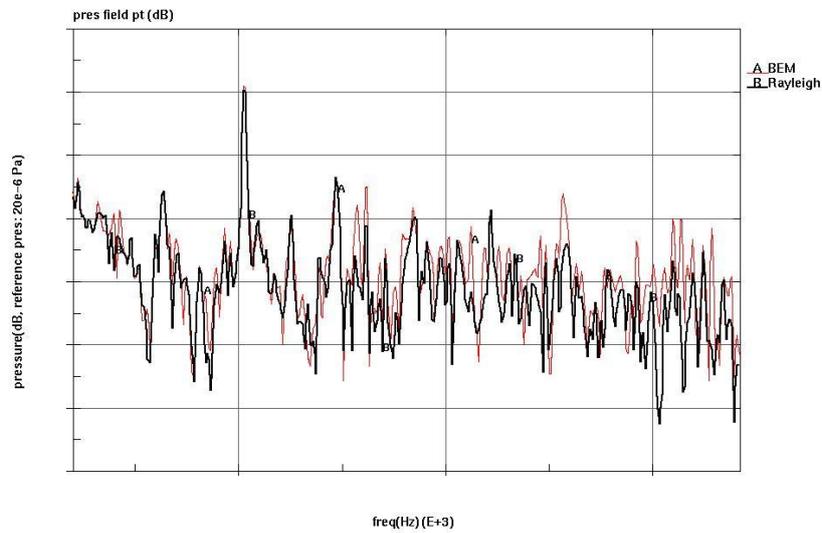


FIGURE 3.22: Variation de la pression rayonnée calculée par la méthode de Rayleigh et comparée à la BEM

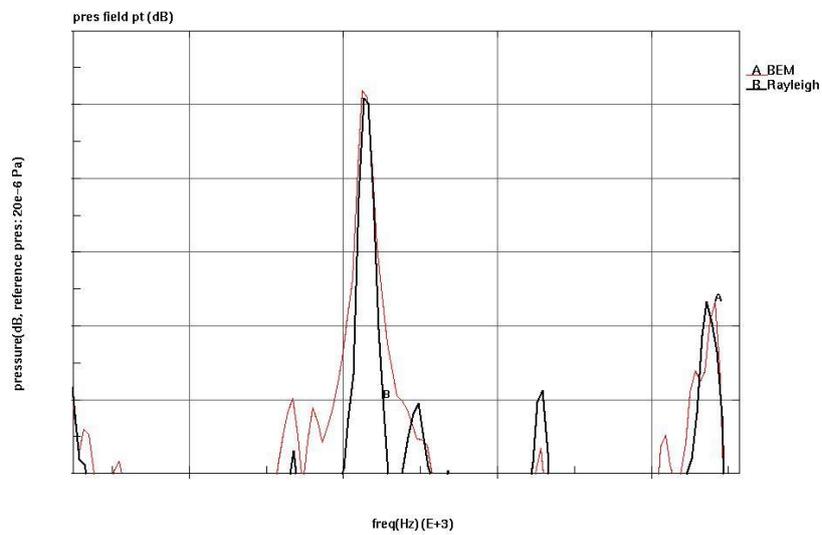


FIGURE 3.23: Pics de pression prédits par la méthode de Rayleigh et par la BEM

infini sous-tend la méthode des éléments de frontières. En terme de précision, la solution par la BEM peut atteindre une grande précision, étant donnée qu'elle résout l'équation intégrale singulière et obtient les variables primaires inconnues sur chaque nœud sans aucune hypothèse. Les deux méthodes de Rayleigh et de Kirchhoff reposent sur certaines hypothèses elles sont ainsi moins précises, mais elles peuvent être utilisées comme première estimation du niveau de pression acoustique lors de la résolution de grands problèmes, car elles sont beaucoup plus rapides que la BEM. Pour les problèmes externes, les méthodes de Rayleigh et de Kirchhoff peuvent encore donner des résultats satisfaisants, ceci n'est pas vrai pour les problèmes internes où la méthode BEM doit être utilisée.

Chapitre 4

Simulation numérique des problèmes de rayonnement externe

4.1 Introduction

Le problème des fréquences dites critiques, caractéristiques ou encore irrégulières est un problème qui caractérise les intégrales de Fredholm de première espèce dont fait partie l'intégrale d'Helmholtz. Il est lié au choix de la fonction de Green en champ libre comme fonction de propagation et se traduit par une perte de l'unicité de la solution. Lorsque la fréquence d'excitation correspond à une fréquence propre du système différentiel de Dirichlet interne celui-ci devient mal conditionné et peut conduire à des résultats erronés. Ces fréquences sont d'autant plus nombreuses que la fréquence augmente. Pour une structure de géométrie quelconque, il est impossible de les prévoir sans résoudre le problème de Dirichlet intérieur. En application réelle, connaître les emplacements exacts des fréquences irrégulières cela n'est finalement pas si important, car ce n'est pas pratique de résoudre un problème intérieur

de Dirichlet juste pour trouver les fréquences propres. Une approche plus raisonnable consiste à appliquer une sorte de traitement de la BEM directe à toutes les fréquences pour éviter la non-unicité de se produire. En fait, à des fréquences élevées, les fréquences propres sont si étroitement espacées que cela est impossible de distinguer les fréquences régulières à partir des fréquences irrégulières.

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, un exemple illustratif des fréquences irrégulières est présenté. Puis après à la suite du problème des fréquences irrégulières qui est surmonté en utilisant la méthode Burton et Miller celle-ci est validée par la suite par la méthode CHIEF. Dans la section applications numériques, la technique de Burton et Miller est validée pour de simples problèmes d'acoustique. Deux cas vibro-acoustique sont traités : le rayonnement acoustique d'une tête de statue ainsi que l'impact d'un cube par un marteau. Dans les deux cas, la méthode des éléments finis MEF est utilisée pour résoudre le problème structural. Cette section est suivie par quelques conclusions.

4.2 Illustration du problème des fréquences irrégulières

Les formulations directes et indirectes souffrent toutes les deux du problème des fréquences irrégulières. C'est un problème qui apparaît pour la solution du problème extérieur à un nombre infini de fréquences correspondant aux fréquences propres du problème interne associé. Ce problème n'est pas physique mais purement d'origine numérique. Il se traduit par des instabilités numériques (mauvais conditionnement des matrices) au voisinage de chaque fréquence singulière. La méthode des éléments finis par exemple ne présente pas ce problème. La grosse difficulté résulte du fait que l'on ne connaît pas la valeur de ces fréquences irrégulières à moins de résoudre le

problème intérieur correspondant.

On peut trouver une discussion détaillée concernant le problème d'existence et d'unicité dans [68], [8]. Une explication mathématique simple de ce phénomène peut être trouvée dans [77], ces fréquences ne représentent aucun type de résonance physique. Mais elles sont dues à la particularité des équations intégrales impliquant le problème interne fictif qui n'a pas de solution unique en quelques fréquences propres. Il a été montré que quelque soit le type de conditions aux limites prescrites pour le problème extérieur (Neuman, Dirichlet ou Robin), l'équation intégrale d'Helmholtz aura toujours une solution non unique à des fréquences propres du problème interne correspondant de Dirichlet [77].

Pour illustrer ce problème, nous avons simulé numériquement le rayonnement d'une sphère pulsante avec une vitesse normale unitaire entourée par l'air ($\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3, c = 343 \text{ m/s}$). Cette sphère de rayon de 1m est composée de 5400 éléments [FIG. (4.1)] et nous l'avons comparé à la solution analytique donnée par l'équation (4.1) [Annex B] :

$$p(r, f) = \frac{\rho c v_n(ika) a}{ika + 1} \frac{a}{r} e^{-ik(r-a)} \quad (4.1)$$

Sur la figure [Fig. 4.2], nous avons représenté la pression acoustique en un point d'observation qui se situe à 4 mètre du centre de la sphère calculée par la BEM et comparée à la solution analytique. Nous pouvons constater l'apparition des pics de fréquences parasites en certaines fréquences dites irrégulières.

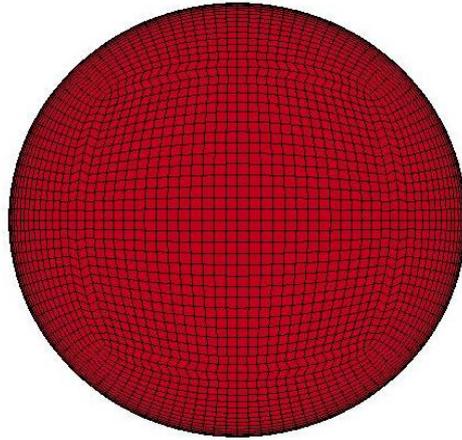
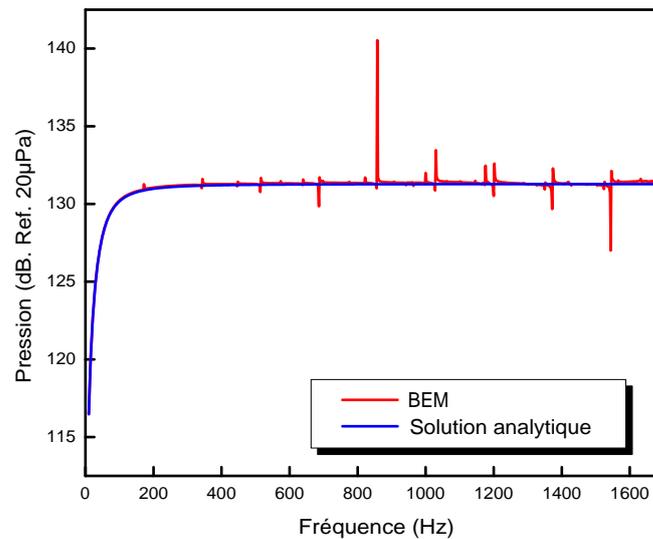


FIGURE 4.1: Maillage de la sphère (5400 éléments)

FIGURE 4.2: Pression au point $(4.,0.,0.)$: comparaison entre la BEM et la solution analytique

4.3 Méthode de Burton & Miller

4.3.1 Principe de la méthode

La méthode proposée par Burton et Miller [8] en 1971 consiste à former un système matriciel à partir d'une combinaison linéaire entre l'équation

intégrale d'Helmholtz et sa dérivée par rapport à la normale en tout point de la surface. L'unicité de la solution aux fréquences caractéristiques est assurée par le choix judicieux d'une constante multiplicative de l'équation dérivée, dite coefficient de couplage. Ce coefficient de couplage doit être imaginaire non nul et certains auteurs préconisent de le fixer égal à i/k (i est la racine complexe de -1 et k le nombre d'onde) pour pouvoir assurer l'unicité de la solution à toutes les fréquences irrégulières [42]. Certaines intégrales font intervenir cette fois la dérivée seconde du noyau de Green. Elles deviennent alors singulières et elles seront calculées par la méthode de Kirkup que nous avons étendu pour un élément quadrilatère [42].

Comme mentionné précédemment, la méthode de Burton et Miller [8] modifie l'équation intégrale proprement afin de trouver une solution unique. Pour se faire la dérivée normale de l'équation intégrale [Eq.(4.2)] est combinée à l'équation originale par un facteur complexe ($\alpha = i/k$) [Eq.(4.3)].

$$C(P)\frac{\partial p(P)}{\partial n_P} = \frac{\partial}{\partial n_P} \int_s \frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q} p(Q) ds_Q - i\rho\omega \int_s \frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_P} v_n(Q) ds_Q \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} C(P)p(P) + \int_s \frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q} p(Q) ds_Q + \alpha \frac{\partial}{\partial n_P} \int_s \frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q} p(Q) ds_Q = \\ -i\rho\omega \int_s G(Q,P) v_n(Q) ds_Q - i\rho\omega\alpha(C(P)v_n(P) - \int_s \frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_P} v_n(Q) ds_Q) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour résoudre l'équation (4.3) avec la BEM, la surface S est divisée en N éléments de surface suffisamment petits tels que la pression et la vitesse normale, sur chaque élément, soient considérées constantes. Ce qui permet de les faire sortir de l'intégrale. Par conséquent, les points de collocation se situent au centre de chaque élément et l'élément est considéré comme constant et plat (surface lisse $C(P) = \frac{1}{2}$).

L'écriture de cette équation pour chaque point de collocation nous conduit à N équations formant le système d'équation suivant :

$$[H]\{p\} = -i\rho\omega[G]\{v_n\} \quad (4.4)$$

avec $\{p\}$ est le vecteur qui contient la pression sur tout les nœuds de la frontière et $\{v_n\}$ contient la vitesse normale en ces éléments.

Lorsque l'élément de collocation est différent de celui d'intégration, l'intégration ordinaire est adoptée. Elle est basée sur la méthode d'intégration de Gauss. Malgré le coût important du temps CPU, nous avons décidé de choisir 4×4 points d'intégration de Gauss pour tout les nombres d'ondes. Toutefois, lorsque l'élément de collocation et l'élément source sont confondus, l'intégration devient singulière. Dans ce cas, chaque élément de frontière quadrilatère ou triangulaire est divisé en 4 ou 3 triangles, respectivement. Par conséquent, tous les sous-éléments ont un point commun qui coïncide avec le point de collocation (centre de l'élément).

Lorsqu'un élément de collocation coïncide avec un élément source, l'intégrale est singulière. En effet, la principale difficulté de cette formulation de Burton et Miller est l'hypersingularité du noyau de l'équation dérivée normale qui est de l'ordre de $\frac{1}{r^3}$. Ce noyau exige une intégration numérique spéciale. Pour calculer l'intégrale singulière impliquant G et sa dérivée normale, la transformation généralisée en coordonnées polaires de Wu [77] est appliquée pour chaque sous-élément triangulaire. Il s'agit de transformer l'élément de référence triangulaire en un carré. La transformation permet de neutraliser la singularité de la solution fondamentale et de sa dérivée normale.

Les propriétés asymptotiques de la solution fondamentale permet la régularisation de l'intégrale hyper-singulière [Eq.(4.5)]. En fait, la première intégrale du côté droit de l'équation [Eq.(4.5)] n'est pas singulière. La seconde peut être calculée analytiquement ou numériquement en utilisant la transformation généralisée en coordonnées polaires proposée par Wu [77]. La dernière intégrale peut être transformée en une intégrale unidimensionnelle en prenant la limite lorsque P' tend vers P donnée par l'équation [Eq.(4.6)] où $P' \notin S$

et $P \in S$. Cette dernière a été évaluée analytiquement par Kirkup pour des éléments triangulaires. Elle reste valable pour les éléments quadrilatères.

$$\frac{\partial}{\partial n_P} \int_s \frac{\partial G(Q,P)}{\partial n_Q} ds_Q = \int_s \left(\frac{\partial^2 G(Q,P)}{\partial n_P \partial n_Q} - \frac{\partial^2 G_0(Q,P)}{\partial n_P \partial n_Q} + \frac{1}{2} k^2 G_0(Q,P) \right) ds_Q - \frac{1}{2} k^2 \int_s G_0(Q,P) ds_Q + \lim_{\substack{P \rightarrow P' \\ P \notin s}} \int_s \frac{\partial^2 G_0(Q,P')}{\partial n_P \partial n_Q} ds_Q \quad (4.5)$$

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P' \\ P \notin s}} \int_s \frac{\partial^2 G_0(Q,P')}{\partial n_P \partial n_Q} ds_Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R(\theta)} d\theta \quad (4.6)$$

4.3.2 Intégration numérique du noyau $\frac{\partial^2 G}{\partial n_p \partial n_q}$

Un certain nombre d'auteurs se sont penchés plus précisément sur le calcul délicat des intégrales hypersingulières. Ces intégrales sont du type :

$$N_k = \int_s \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_P \partial n_Q} ds \quad (4.7)$$

On doit effectuer un traitement spécial avant de prendre l'opérateur différentiel à l'intérieur de l'intégrale. Cette technique consiste à soustraire la singularité et à évaluer la partie restante régulière séparément, elle est issue des propriétés asymptotique du noyau de Green [42]. On utilise alors les techniques de régularisation de cette intégrale qui nécessite de nombreux points de collocation autour du point singulier, ce qui complique la mise en œuvre numérique et le coût du calcul en termes de temps et de mémoire d'ordinateur.

Nous avons adopté la méthode qui a été proposée par Kirkup [42] et ce pour des éléments de frontières triangulaires, nous l'avons adaptée pour des quadrangles. Cette méthode consiste à découper l'élément quadrangulaire en quatre triangles [FIG.4.3]. Afin de calculer l'intégrale faisant intervenir $\frac{\partial^2 G}{\partial n_p \partial n_q}$ on procède d'une manière analytique.

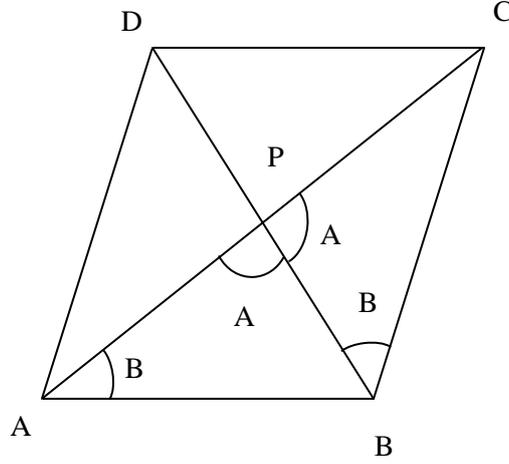


FIGURE 4.3: Découpage en triangles

Pour les intégrales qui contiennent la dérivée seconde du noyau de Green, nous commençons par une procédure de régularisation de l'intégrale en rajoutant et en retranchant les mêmes termes, nous avons donc :

$$N_k = \int_s \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_P \partial n_Q} ds = \int_s \left(\frac{\partial^2 G_k}{\partial n_P \partial n_Q} - \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_P \partial n_Q} + \frac{1}{2} k^2 G_0 \right) ds + N_0 - \frac{1}{2} k^2 L_0 \quad (4.8)$$

$$\text{Où : } G_0 = \frac{1}{4\pi r} \text{ et } N_0 = \int_s \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_P \partial n_Q} ds$$

Et pour la fonction G nous avons :

$$L_k = \int_s G_k(p, q) ds = L_0 + \int_s (G_k(p, q) - G_0(p, q)) ds \quad (4.9)$$

$$\text{Avec : } L_0 = \int_s G_0(p, q) ds$$

Comme indiqué dans l'annexe A, les deux intégrales précédentes N_0 et L_0 , peuvent s'écrire de la façon suivante pour un triangle donné :

$$N_0 = \int_{\Delta\Gamma} \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_P \partial n_Q} ds = -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{R(\theta)} d\theta \quad (4.10)$$

$$L_0 = \int_{\Delta\Gamma} G_0 ds = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} R(\theta) d\theta \quad (4.11)$$

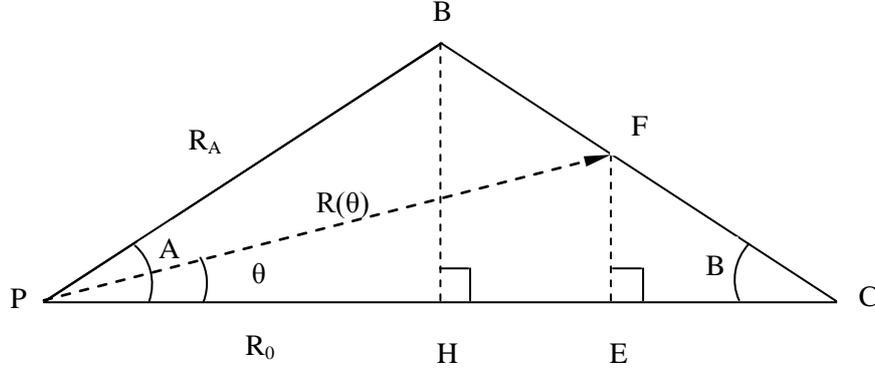


FIGURE 4.4: Triangle avec tout les paramètres

Ces dernières peuvent être calculées analytiquement : [voir annexe A]

$$N_0 = \frac{1}{4\pi R_0} \sum_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \frac{\cos(A+B) + \cos B}{\sin B} \quad (4.12)$$

$$L_0 = \frac{R_0 \sin B}{4\pi} \sum_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} [\ln(\tan(\frac{B+A}{2})) - \ln(\tan(\frac{B}{2}))] \quad (4.13)$$

4.4 Résultats numériques

Pour examiner l'efficacité de la méthode de Burton et Miller telle que nous l'avons implémenté dans notre code, nous avons simulé numériquement quelques problèmes de rayonnement en s'intéressant au calcul de la pression externe.

Pour ce faire, nous avons opté pour le problème d'une sphère pulsante, un cube pulsant ainsi qu'un cube d'une seule facette vibrante.

Avant de simuler le rayonnement extérieur dans des problèmes de couplage vibro-acoustiques faible, nous validons l'approche pour des cas de radiation acoustique simple en comparaison avec la méthode CHIEF. Dans cette dernière, les points internes sont générés arbitrairement en utilisant une fonction

aléatoire et en définissant un point de départ (en général, le centre de la géométrie) et certains nœuds de la surface définis par un pourcentage donné. Par conséquent, les points CHIEF sont créés aléatoirement entre le centre de la géométrie et les nœuds de la surface choisis. Le système linéaire issu de la méthode CHIEF est résolu en utilisant la méthode des moindres carrés. Dans le cas de la méthode HGF, la méthode itérative GMRES (Generalized Minimal Residual) est adoptée.

Dans toutes les simulations, le domaine fluide considéré est l'air ($\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3, c = 340 \text{ m/s}$) afin de satisfaire l'hypothèse de couplage faible. En outre, la pression en dB est calculée pour une référence de $20\mu Pa$.

4.4.1 Exemple de validation : Rayonnement acoustique d'un cube

Dans cette section, un cube $(2 \times 2 \times 2)m^3$ entouré par l'air et pulsant avec une vitesse unitaire est considéré. Il est constitué de 1176 éléments et de 1178 nœud [Fig.4.5]. Sur la même figure, nous avons représenté la variation de la pression en fonction de la fréquence dans la gamme $10 - 1000Hz$ avec un pas de $1Hz$. Elle est tracée pour un point situé à $2,45m$ du centre de la face inférieure du cube représenté sur la figure. Encore une fois, les fréquences irrégulières prévues par la BEM standard ont complètement disparu à l'aide de la méthode Burton Miller et CHIEF qui sont en bon accord l'une avec l'autre.

Une deuxième application consiste à exciter une seule face du cube par une vitesse de $0.001m/s$. Le maillage est composé de 4706 éléments et de 4708 nœuds [Fig. 4.6]. La face excitée est représentée par une couleur foncée. Les autres faces sont maintenues rigides. Le résultat est tracé sur la figure [Fig. 4.6] pour une fréquence de $653Hz$ pour les points d'observation situés à $5m$ du centre du cube et formant un cercle. La même remarque peut être

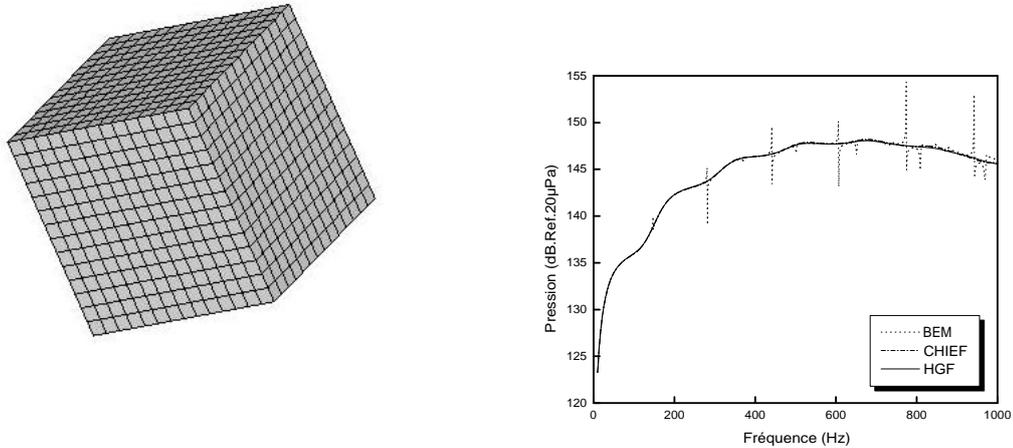


FIGURE 4.5: Exemple du cube pulsant : (gauche) Maillage BEM, (droite) variation de la pression en fonction de la fréquence

donnée : les deux méthodes CHIEF et HGF ont permis la suppression de l'effet des fréquences irrégulières présenté par la BEM.

4.4.2 Application numérique : Cube excité par un marteau rigide

En ce qui concerne la dernière application, nous avons examiné un cube rigide avec une seule plaque flexible. Cette dernière est supposée élastique ayant les propriétés mécaniques suivantes : ($E = 207GPa, \nu = 0.3, \rho = 7900Kg/m^3$). Le cube est entouré par de l'air et modélisé par 4704 éléments surfaciques [Fig. 4.7.a]. Il est excité par un marteau rigide au centre de la face élastique. Le marteau est animé par une vitesse constante de $2.64m/s$.

Comme expliqué précédemment, lorsque l'analyse acoustique est complètement faite par la méthode des éléments finis explicite basée sur l'algorithme de contact, nous transformons les vitesses temporelles de la structure au domaine fréquentiel en utilisant la FFT afin de les appliquer comme conditions

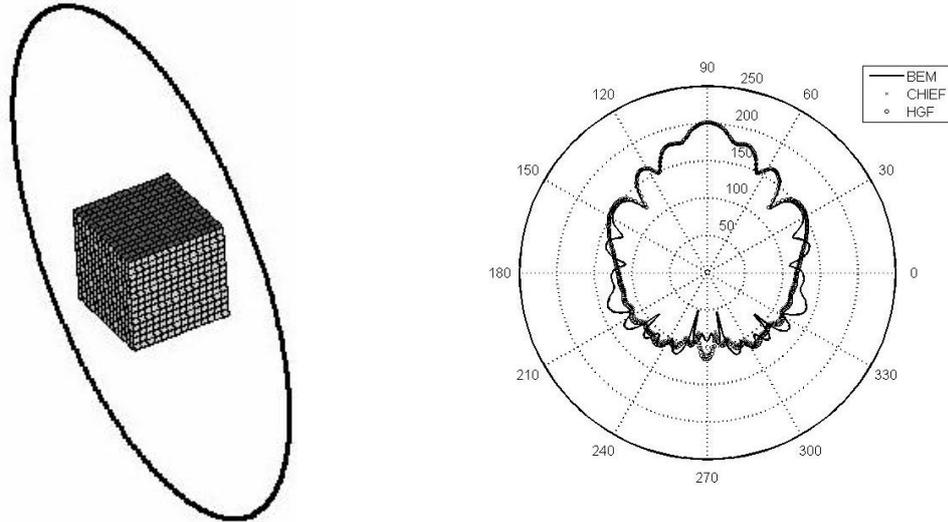


FIGURE 4.6: Exemple du cube de face vibrante : (gauche) Maillage BEM, (droite) la pression rayonnée en des points d'observation situés sur le cercle de rayon $r = 5m(z = 0)$

aux limites pour la BEM.

La figure (4.7.b) et la figure (4.7.c) représentent la pression rayonnée aux points d'observation situés sur le cercle de rayon de $5m$ aux fréquences $f = 400Hz$ et $f = 442Hz$, respectivement. Encore une fois les méthodes BEM, CHIEF et HGF sont en bonne concordance les unes aux autres pour $f = 400Hz$. Cependant, pour $f = 442Hz$ qui est une fréquence irrégulière pour le cube, la BEM standard n'arrive pas à prévoir le même niveau de pression calculé par HGF et CHIEF. Le niveau de pression dû à l'impact du cube et directement influencé par la position, la vitesse et la masse du marteau sont présentées dans la figure [Fig. 4.8].

En effet, la pression rayonnée augmente quand la vitesse ou la masse du marteau augmente. Elle est aussi affectée par la position de l'impact montrée dans la figure (4.8.a) dans laquelle la position 1 représente le centre de la face impactée et la position 2 est donnée par $(0.7, 0.3)$ de la même face.

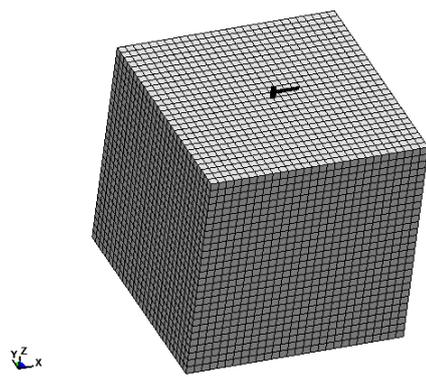


fig. a

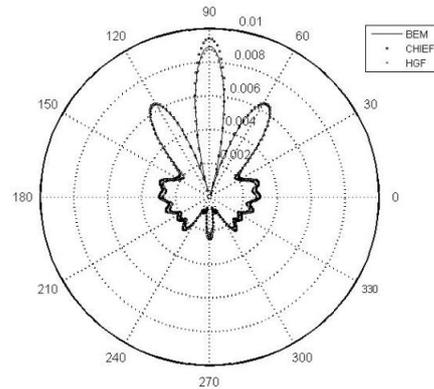


fig. b

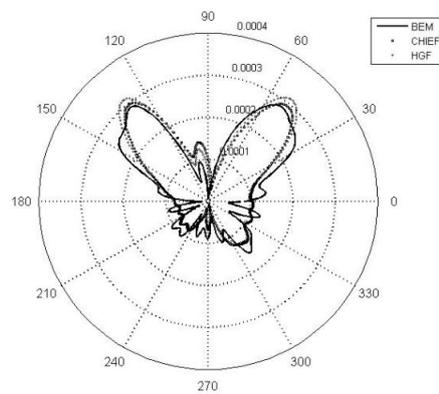


fig. c

FIGURE 4.7: Pression (Pa) rayonnée d'un cube excité par un marteau (gauche) aux points d'observation localisés sur un cercle de rayon $r = 5m$ pour $f = 400\text{ Hz}$ (milieu) et $f = 442\text{ Hz}$ (droite)

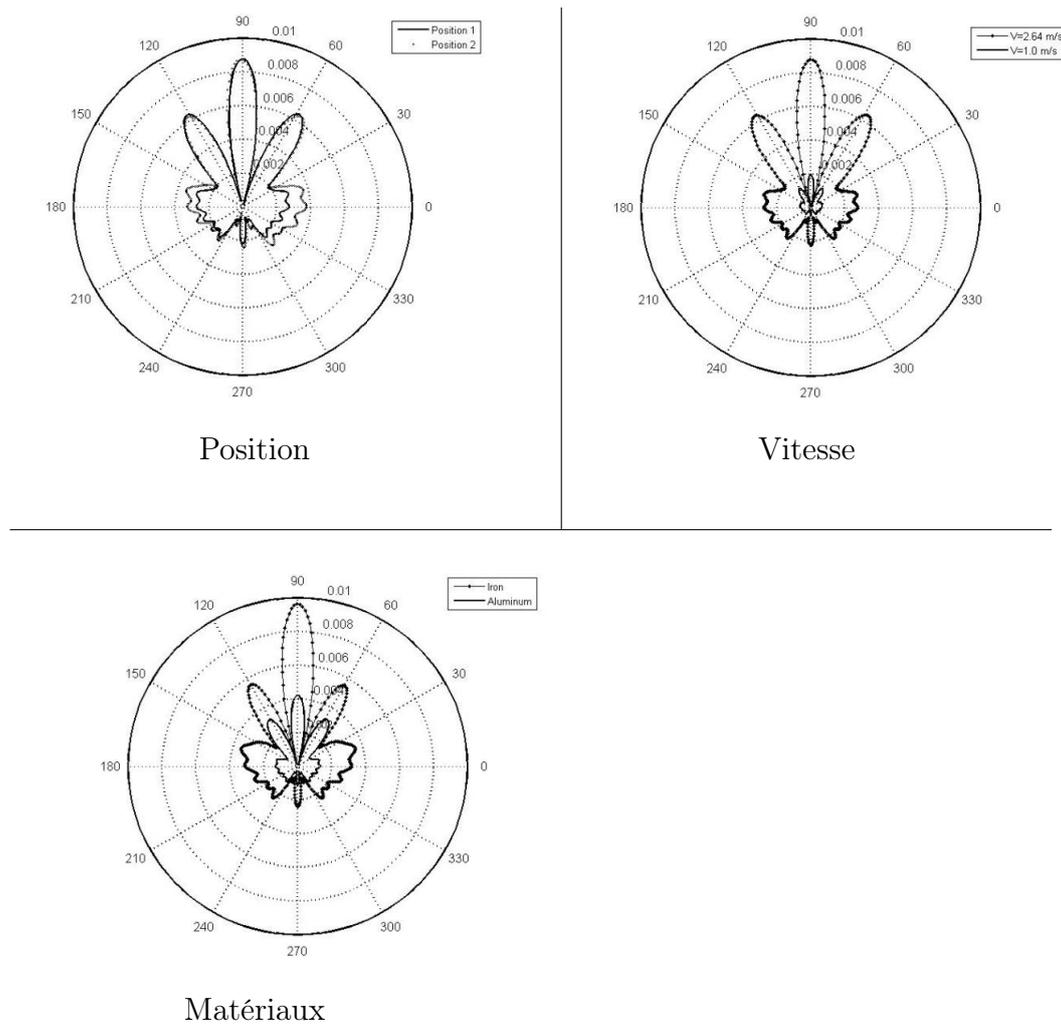


FIGURE 4.8: Effet de la position, de la vitesse d'impact et de la masse du marteau sur la pression rayonnée (Pa) pour la fréquence $400Hz$

4.5 Conclusion

Dans le présent chapitre, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique des problèmes d'acoustique et de vibro-acoustique externes par la méthode BEM constante par élément, consistant à discrétiser la surface de la structure en considérant les variables aux centres des éléments. Dans le cas du problème vibro-acoustique, le couplage est supposé être faible et résolu de façon séquentielle. Celle-ci consiste à résoudre à la fois la structure et le fluide séparément en appliquant les vitesses structurelles comme conditions aux limites pour la partie acoustique du problème. Nous avons validé l'efficacité de cette méthode pour une sphère pulsante, sauf qu'elle représente un problème de perte de l'unicité de la solution pour certaines fréquences irrégulières.

Parmi les différentes méthodes existantes pour surmonter cette difficulté de fréquences irrégulières qui se produit pour des problèmes externes, nous avons adopté la méthode de Burton et Miller qui est très efficace pour ce problème. Cette dernière considère une combinaison de l'équation intégrale de frontière et de sa dérivée normale en utilisant un coefficient imaginaire. Pour évaluer l'intégrale hyper-singulière, nous avons transformé l'intégrale de surface de la dérivée seconde normale de la fonction de Green en une intégrale unidimensionnelle. Les résultats obtenus ont été validés par la méthode de CHIEF. Ils ont montré l'efficacité de la méthode pour des problèmes de rayonnement externe acoustique et vibro-acoustique.

Chapitre 5

Méthode multipôlaire rapide

FMM

Nous présentons la méthode multipôle rapide qui permet de résoudre le système par méthode itérative, réclamant à chaque itération de savoir calculer le produit matrice fois vecteur. Cette méthode permet de calculer une bonne approximation de ce produit sans jamais assembler toute la matrice et avec une complexité en $O(N \ln N)$ au lieu de $O(N^2)$. Cette méthode développée récemment est en train de s'imposer dans l'industrie avec l'extension croissante de son domaine d'application.

La FMM existe sous deux formes mono-niveau et multi-niveaux. Dans ce travail nous proposons d'étudier et de mettre en œuvre la méthode FMM mono-niveau afin de repousser la BEM au-delà de ses limites. Nous exposons une étude paramétrique de la méthode FMM dans ce cas et des tests numériques en se basant sur un code programmé en fortran 90 afin de montrer l'apport de la FMM pour ce problème.

Les sections suivantes de ce chapitre décrivent comment la FMM procède pour résoudre des problèmes de grandes tailles sans perdre en efficacité. Et pour cela nous avons organisé ce chapitre de la manière suivante : dans la

première section, nous allons décrire la méthode multipolaire mono-niveau ; la dernière section va être consacrée à des validations numériques, suivit d'une conclusion.

5.1 Formulation de la FMM

5.1.1 Développement de la méthode multipolaire FMM

L'idée de base de la méthode multipôle est de tenter de séparer les points cibles P des points sources Q afin de pouvoir calculer rapidement le produit matrice-vecteur. Pour cela, il nous faut réécrire le noyau de Green différemment. Cette réécriture déterminera la forme que prendront les fonctions manipulées par la FMM. Pour fixer les idées, nous allons étudier le produit matrice vecteur de la matrice M par le vecteur V , ce produit se décomposera selon la méthode multipolaire en deux parties proche et loin : $[MV] = [MV]_{proche} + [MV]_{loin}$, le produit $[MV]_{proche}$ est calculé d'une manière classique par la BEM. Par contre le calcul du produit $[MV]_{loin}$ est déterminé à l'aide de la méthode FMM. Le calcul de $[MV]_{loin}$ est basé sur un développement judicieux du noyau de Green qui s'écrit : $G(P, Q) = \frac{e^{ikr_{pq}}}{4\pi r_{pq}}$.

La méthode multipolaire rapide FMM repose sur deux identités élémentaires à partir desquelles elle peut être facilement déduite, ces identités se trouvent dans de nombreux manuels sur les méthodes mathématiques [2]. Le point de départ est la formule d'addition de Gegenbauer du noyau Green. Ce théorème permet le découplage entre les distances r_{PQ} et r_{LM} (figure 5.1) et s'écrit :

$$G(P, Q) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (2l+1) h_l^{(1)}(k|r_{LM}|) j_l(k|r_{PL} + r_{MQ}|) P_l(\cos(k|r_{PL} + r_{MQ}|, r_{LM}|)) \quad (5.1)$$

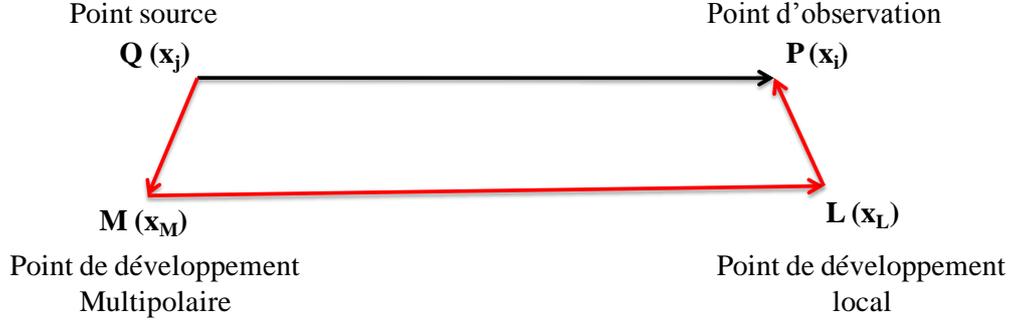


FIGURE 5.1: Points de développement multipolaire et locale

La condition pour que cette série converge est :

$$|r_{MP} + r_{PL}| < |r_{PQ}| \quad (5.2)$$

Cette formule fait intervenir une flopée de fonctions spéciales à savoir : j_l et h_l qui sont respectivement les fonctions de Bessel et Hankel sphérique de première espèce, d'ordre l définies des fonctions de Bessel et Hankel suivant J et H :

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} J_{l+1/2}(x) \quad (5.3)$$

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{x}{2\pi}} H_{l+1/2}^{(1)}(x) \quad (5.4)$$

La fonction de Bessel de 1^{ère} espèce :

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! (n+p)!} (x)^{2p} \quad (5.5)$$

La fonction de Bessel de 2^{ème} espèce :

$$Y_n(x) = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{J_\lambda(x) \cos(\lambda x) + J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda x)} \quad (5.6)$$

La fonction de Hankel de 1^{ère} espèce (dite aussi fonction de Bessel de 3^{ème} espèce) :

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x) \quad (5.7)$$

Les fonctions de Bessel et de Hankel sphérique sont le demi-ordre de la fonction de Bessel et de Hankel de 1^{ère} espèce.

P_l est le polynôme de Legendre d'ordre l , il se calcule à partir de la relation de récurrence suivante [2] :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1, & P_1(x) = x, \\ P_l(x) = \frac{2l-1}{l} x P_{l-1}(x) - \frac{l-1}{l} P_{l-2}(x), & \forall l \geq 2 \end{cases} \quad (5.8)$$

L'intérêt de la relation de récurrence est de calculer tout les polynômes de Legendre d'ordre de 0 à l qui interviennent dans le calcul de la fonction de transfert de la FMM.

La seconde identité est une expansion du produit $j_l \cdot P_l$ en une onde plane qui se propage afin de découpler les distances r_{MQ} et r_{LP} , cette identité est connue sous le nom du théorème de Funck-Hecke :

$$j_l(k|r_{PL}+r_{MQ}|)P_l(\cos(k|r_{PL}+r_{MQ}, r_{LM}|)) = \frac{1}{4\pi i^l} \int_{S^2} P_l(\cos(S, r_{LM})) e^{ik\langle S, r_{PL} \rangle} e^{ik\langle S, r_{MQ} \rangle} \quad (5.9)$$

Où S^2 désigne la sphère unité et \langle, \rangle le produit scalaire de R^3 .

La première étape de l'approximation va consister à tronquer la série infinie pour une précision ϵ fixée, on choisit un nombre L tel que :

$$G(P, Q) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l (2l+1) h_l^{(1)}(k|r_{LM}|) j_l(k|r_{PL}+r_{MQ}|) P_l(\cos(k|r_{PL}+r_{MQ}, r_{LM}|)) \quad (5.10)$$

Substituons le théorème de Funck-Hecke dans la formule d'addition, nous pouvons déduire la relation de transfert de P vers Q en commutant la sommation avec l'intégrale :

$$G(P, Q) = \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\langle S, r_{PL} \rangle} T_{L, r_{LM}}(S) e^{ik\langle S, r_{MQ} \rangle} \quad (5.11)$$

Avec $T_{L, r_{LM}}(S)$ est la fonction de transfert qui s'écrit :

$$T_{L, r_{LM}}(S) = \sum_{l=0}^L (i)^l (2l+1) h_l^{(1)}(k|r_{LM}|) P_l(\cos(S, r_{LM})) \quad (5.12)$$

Tachons d'interpréter la formule de l'équation 5.11. Elle comporte trois termes : le terme $e^{ik\langle S, r_{MQ} \rangle}$ transporte l'information du point source Q_i au point de développement multipolaire M . le terme $T_{L, r_{LM}}(S)$ assure le transfert de l'information entre M et L . Enfin le terme $e^{ik\langle S, r_{PL} \rangle}$ transporte l'information jusqu'au point destination P_j . On voit que dans cette formule, les variables P et Q sont bien séparées.

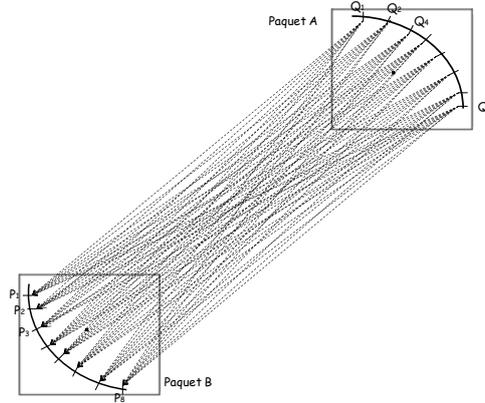


FIGURE 5.2: Traitement des interactions sans la FMM

L'intérêt de cette décomposition du noyau de Green est illustrée sur les figures 5.2 et 5.3. Dans le cas où l'ensemble de points Q_i proche de M agit sur un autre ensemble de points P_j proche de L , la méthode classique (Fig.5.2) génère un grand nombre d'interactions, tandis que la méthode multipôle centralise les informations en M et L et génère ainsi beaucoup moins de calculs Fig. 5.3.

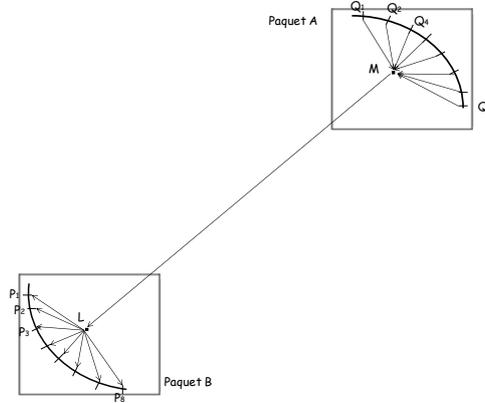


FIGURE 5.3: Traitement des interactions avec la FMM

On voit apparaître ici deux difficultés : d'une part l'intégrale sur la sphère unité S dans (Eq.5.11) va devoir être discrétisée, d'autre part le nombre de termes de la somme (Eq. 5.24) va devoir être fixé, et ces deux approximations devront être réalisées conjointement. Dans les deux sections suivantes, on va s'intéresser à étudier individuellement chacun de ces paramètres ajustables de la méthode multipôle. Le choix du nombre de pôle L nécessaire à une « bonne » approximation ainsi que nombre de points de quadrature sur la sphère unité.

5.1.2 Nombre de pôle L de la série de Gegenbauer

Le nombre de pôles est sans doute le paramètre à la fois le plus important et le plus difficile à déterminer. Idéalement, on cherche une formule qui donne le nombre de pôles L en fonction de la marge d'erreur tolérée ϵ et de l'arrête des cellules d .

Nous devons choisir le paramètre de sommation L , de telle façon que le développement multipolaire de la fonction de Green, Eq. 5.10, converge vers la précision souhaitée. Les fonctions de Bessel $j_l(z)$ et de Hankel $h_l^1(z)$ sont fonction de l , sont à peu près constantes pour $l < z$. Pour $l > z$, $j_l(z)$ croît

rapidement ainsi que $h_l^1(z)$ décroît d'une manière rapide. Donc nous devons trouver un L qui assure un bon compromis pour atteindre la convergence [59]. L ne peut pas être plus grande qu'une certaine valeur ou sinon la fonction de transfert commence à osciller, chose qui va engendrer des inexactitudes dans l'intégration numérique de cette dernière. En pratique, la dépendance de L en ϵ est difficile à intégrer dans une formule. Pour notre implémentation, on a repris une excellente relation semi-empirique proposée dans [22], à savoir :

$$L = kd + C \log(\pi + k|d|) \quad (5.13)$$

Avec les notations :

- d correspond au diamètre des cellules cubiques d'arête d .
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde.
- C_ϵ est le paramètre dépendant de ϵ .

5.1.3 Discrétisation de la sphère unité

Une dernière étape pour aboutir à l'approximation multipolaire FMM est la discrétisation de la sphère unité. En fait, le problème de la discrétisation de l'intégrale sur la sphère unité se ramène à trouver des points de quadrature S_p et des poids ω_p qui intègrent exactement les harmoniques sphériques. Le choix de ces points S_p et leurs poids ω_p ainsi que le nombre de point de Gauss dépendent de l'ordre de troncature L de la série dans la fonction de transfert T [60]. D'après plusieurs études [59], [66] [53] de l'erreur induite par l'intégration numérique sur la sphère unité, il a été démontré que tout les harmoniques sphériques d'ordre $l < 2L$ sont intégrés exactement. Pour cette étude, nous avons choisi le nombre de point de Gauss sur la sphère unité égale à $2L$ points également espacés sur la sphère.

Il nous faut donc trouver ces points de quadrature S_p et de poids ω_p qui intègrent exactement les harmoniques sphériques $h_l^1(x)$ et $j_l(x)$. Le choix le

plus simple est de prendre pour points d'intégration une distribution uniforme sur θ et φ :

On choisit des points S_p de la forme (θ_i, φ_j) , $0 \leq i \leq I$ et $0 \leq j \leq J$ avec : $I = npg$ et $J = 2npg - 1$. Notons $X_g(npg)$ les points de Gauss Legendre sur $[0, \pi]$ et $\omega_g(npg)$ leurs poids associés.

$$\int_s f(S) ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5.14)$$

$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ or : $r = 1$ (sphère unité)

$$S_p = \begin{cases} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{cases} \quad (5.15)$$

Nous commençons par le calcul des coordonnées des points de Gauss $X_g(npg)$ ainsi que leurs poids associés $\omega_g(npg)$ dans l'intervalle $[0, \pi]$. Nous calculons après les angles θ_i et φ_j tel que :

$$\begin{cases} \theta(i) = X_g(i) & \text{avec } 0 \leq i \leq I \\ \varphi(j) = \frac{2\pi j}{2npg-1} & \text{avec } 0 \leq j \leq J \end{cases} \quad (5.16)$$

Ainsi que leurs poids associés :

$$\begin{cases} \omega_\theta = X_g(i) \cdot \sin(\theta(i)) \\ \omega_\varphi = \frac{2\pi}{2npg-1} \end{cases} \quad (5.17)$$

Nous calculons par la suite le vecteur S_p :

$$S_p = \begin{cases} \sin(\theta(i)) \cos(\varphi(j)) \\ \sin(\theta(i)) \sin(\varphi(j)) \\ \cos(\theta(i)) \end{cases} \quad (5.18)$$

Et le poids associé à ce vecteur :

$$\omega_p = \omega_\theta \cdot \omega_\varphi \quad (5.19)$$

$$\int_s f ds = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f(\theta_i, \varphi_j) \sin(\theta_i) \omega(\theta_i) \omega(\varphi_j) \quad (5.20)$$

Finalement, nous obtenons une formule d'intégration exacte pour toutes les harmoniques sphériques.

$$\int_s f ds = \sum_{n=1}^{I*J} f(\vec{S}_p) \omega_p(\vec{S}_p) \quad (5.21)$$

5.2 Mise en œuvre

Dans cette partie, nous allons présenter les aspects pratiques de la mise en œuvre de la FMM. Nous allons voir à présent comment, à partir d'une structure d'arbre effective, les différentes étapes de l'algorithme peuvent être programmées simplement.

5.2.1 Découpage du domaine

Afin de rendre automatique la recherche des cellules proches et lointaines, on va procéder au découpage de la surface du maillage de l'objet traité en sous-domaines de tailles homogènes. Pour se faire, on conçoit une grille 3D cubique de pas a englobant le maillage (Fig. 5.4), chaque intersection non-vide d'un cube de la grille et de la surface constitue un sous-domaine de notre découpage. Le découpage en cellules cubiques non récursif, toutes les boîtes cubiques (i.e. tout les paquets) que l'on appellera cellules ont la même taille, mène à la FMM mono-niveau qui permet le calcul du produit matrice-vecteur en $(N^{3/2})$ opérations.

L'équivalent 2D de ce partitionnement est représenté sur la figure 5.5. Nous disposons le maillage dans un carré puis on le découpe en cellules de même taille a . On considérera, dans un premier temps, que cette dimension

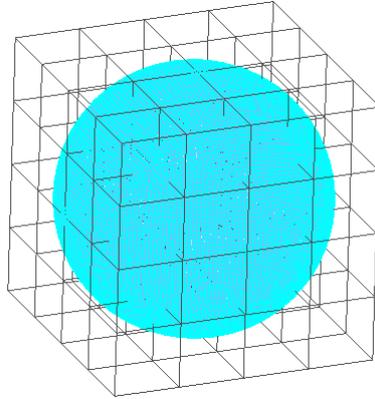


FIGURE 5.4: Découpage de la sphère 15000 éléments dans une grille 3D

est imposée puis l'on discutera de la taille optimale à choisir afin d'obtenir l'efficacité maximale. Les cellules ayant une intersection non vide avec la surface ne seront pas considérées dans les interactions. Ensuite, on numérote les cellules suivant x et suivant y figure 5.6 .

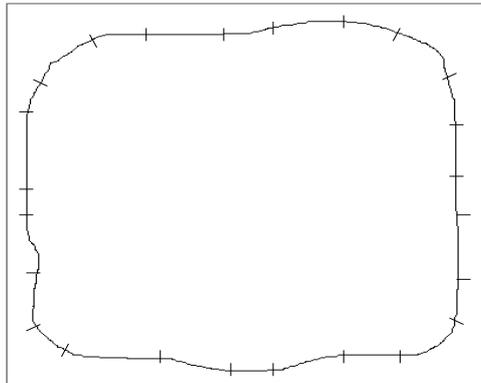


FIGURE 5.5: Disposition de maillage dans un carré (cas 2D)

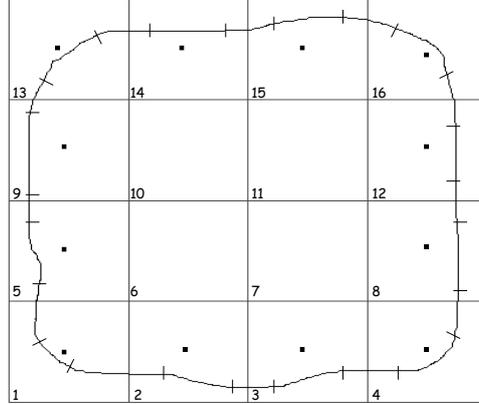


FIGURE 5.6: Découpage du carré en une grille 2D

5.2.2 Parcours de l'arbre

Une fois le découpage effectué, l'algorithme se décompose en trois étapes : initialisation, transfert et intégration. Mais avant d'aborder ces différentes étapes de l'algorithme, nous allons définir un certain nombre de terminologie afin de faciliter le traitement par la suite. On appelle deux cellules voisines toutes cellules qui se partagent au minimum un point, et on appelle cellules de la liste C toutes les autres cellules à intersection non vide avec le maillage qui ne touche pas cette cellule.

5.2.2.1 Différentes étapes de l'algorithme

Considérons maintenant la FMM sur un produit matrice vecteur :

$$\int_{S_Q} G(P, Q)V(Q)dS_Q = \frac{ik}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{ik\langle S_p, x_L - x_i \rangle} T_{L, rLM}(S_p) \left(\int_{S_Q} V(Q)e^{ik\langle S_p, x_j - x_M \rangle} dS_Q \right) \quad (5.22)$$

Initialisation :

Dans cette étape, on calcule les moments au centre de chaque cellule en remplissant la matrice M de taille *nombredecellule* × *nombredepointsdeGauss*

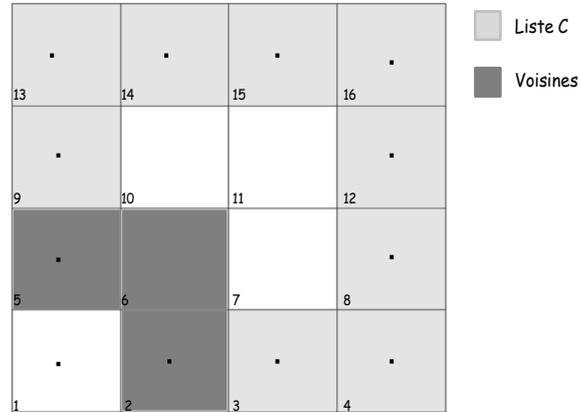


FIGURE 5.7: Cellules voisines et la liste C

figure [Fig. 5.8].

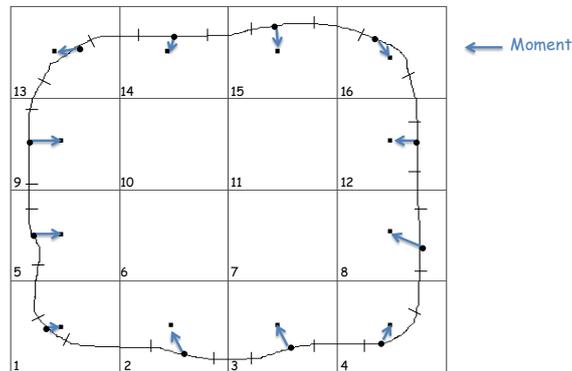


FIGURE 5.8: Calcul des moments

$$M(S_p, j) = \int_{S_Q} V(Q) e^{ik \langle S_p, x_j - x_M \rangle} dS_Q \quad (5.23)$$

Calcul de la fonction de transfert :

Il s'agit de calculer les fonctions de transfert dans toutes les directions S_p :

$$T_{L,r_{LM}}(S) = \sum_{l=0}^L (i)^l (2l+1) h_l^{(1)}(k|r_{LM}|) P_l(\cos(S, r_{LM})) \quad (5.24)$$

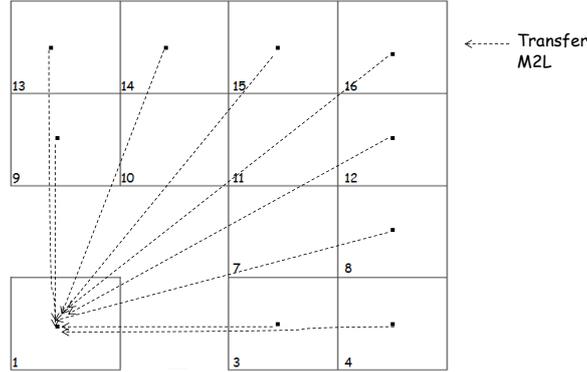


FIGURE 5.9: Transfert des moments de la liste C

Transfert :

Nous allons désigner cette opération par la suite M2L ce qui signifie moment to local. Il s'agit de transférer les moments calculés en multipliant la fonction de transfert par le moment :

$$TM = T_{L,r_{LM}}(S)M(s_p, j) \quad (5.25)$$

Intégration :

une fois le transfert effectué, on termine le calcul en intégrant le résultat du transfert en lui rajoutant la partie proche de l'interaction figure [Fig. 5.10]. Cette dernière étape du calcul de la FMM consiste à passer l'information des centres vers les points d'observations, ceci est possible par le biais de l'opération locale.

$$G(P, Q) = \frac{ik}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^{npg} \omega_p e^{ik\langle S_p, r_{PL} \rangle} T_{L,r_{LM}}(S_p) e^{ik\langle S_p, r_{MQ} \rangle} \quad (5.26)$$

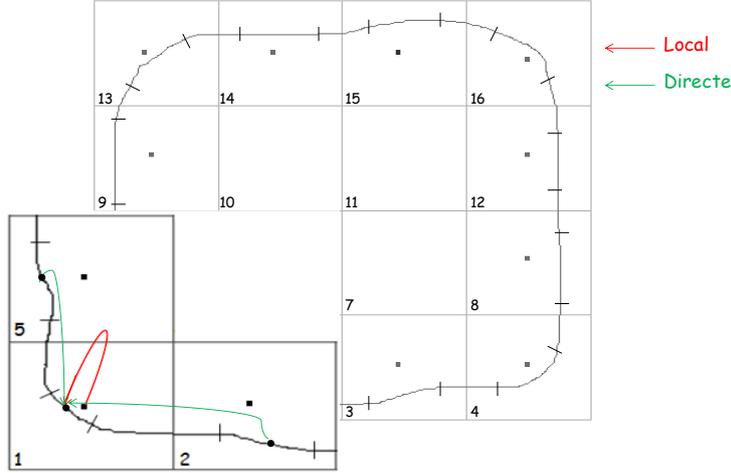


FIGURE 5.10: Interactions directes et la descente locale

Nous faisons la même chose pour la dérivée normale de G :

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n_Q} = \frac{-k^2}{(4\pi)^2} \sum_{p=1}^{npg} \omega_p \langle S_p, n_Q \rangle e^{ik \langle S_p, r_{PL} \rangle} T_{L, r_{LM}}(S_p) e^{ik \langle S_p, r_{MQ} \rangle} \quad (5.27)$$

5.2.2.2 Optimisation de l'étape de transfert

L'étape de transfert correspond au calcul de la fonction de transfert $T_{L, r_{LM}}(S_p)$. Ce calcul comprend notamment le polynôme de Legendre appliqué au cosinus entre les vecteurs r_{LM} et S_p . Cette étape représente une grande part du temps nécessaire à une itération de FMM mono-niveau. Il existe cependant 2 méthodes (cf. Sylvand G. [72]) permettant d'optimiser le calcul de la fonction de transfert $T_{L, r_{LM}}(S_p)$.

i) Tri des vecteurs identiques

Le vecteur de transfert r_{LM} relie le centre de la cellule source au centre de la cellule destination. Ces dernières étant intégrées à la structure d'un arbre, leurs centres sont placés sur une grille (succession de carrés

en $2D$ ou de cubes $3D$) dont le pas dans les directions x , y , et z est égale à l'arête a des deux cellules concernées. Par conséquent, le vecteur r_{LM} a des coordonnées qui sont des multiples entiers de a . On peut donc écrire :

$$r_{LM} = a \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \text{ où } n_x, n_y \text{ et } n_z \text{ sont des entiers relatifs.}$$

De part la régularité de la grille constituée par l'assemblage des cellules, le nombre de triplets (n_x, n_y, n_z) différents est inférieur à la taille du vecteur r_{LM} . Il convient donc de réordonner le vecteur r_{LM} de façon à ne calculer la fonction de transfert $T_{L,r_{LM}}(S_p)$ uniquement pour les triplets différents. Il suffit pour cela de réordonner les transferts de façon à regrouper ceux utilisant la même fonction de transfert. Par conséquent, chaque fonction de transfert $T_{L,r_{LM}}(S_p)$ assemblée doit pouvoir servir plusieurs fois. Concrètement, on calcule le vecteur r_{LM} qui fait le transfert de M à L puis le triplet (n_x, n_y, n_z) . On trie ensuite toutes les opérations à l'intérieur de la liste sur la base de ce triplet (un algorithme de tri rapide comme *quicksort* fait cela très bien).

ii) Symétrie

La prise en compte de la forme du vecteur S_P permet de diminuer le nombre de vecteurs de transfert calculés. En effet, S_P appartient à la sphère unité S s'écrit :

$$S_P = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Soit S_{xoy} la symétrie orthogonale par rapport au plan xoy . Cette symétrie change le signe des Coordonnées z du vecteur r_{LM} et transforme θ en $\pi - \theta$. De plus, on a :

$$\begin{cases} S_{xoy}(r_{LM}) = \|r_{LM}\| \\ \cos(S_P, S_{xoy}(r_{LM})) = \cos(S_{xoy}(S_P), r_{LM}) \end{cases}$$

d'où : $T_{L,S_{xoy}(r_{LM})}(S_p) = T_{L,r_{LM}}(S_{xoy}(S_p))$ Ce résultat permet de ne calculer la fonction de transfert $T_{L,r_{LM}}(S_p)$ uniquement pour la moitié du vecteur r_{LM} et la moitié du vecteur S_p et de déduire le reste par la transformation de la Symétrie S_{xoy} .

5.2.2.3 Taille des cubes

Plus les feuilles sont grandes, plus grand est le nombre d'interactions considéré comme proches et traité classiquement. Du coup, on n'utilisera pas la taille des feuilles tellement grandes que toutes les interactions seraient proches. En revanche, il convient de voir comment évolue la précision lorsque a se rapproche de zéro.

Pour une taille d'arête trop petite, la méthode multipôle diverge. C'est là un fait connu, qui s'explique par la divergence des fonctions de Hankel $h_l^{(1)}(x)$ lorsque x tend vers 0. Or ces fonctions apparaissent dans la définition des fonctions de transfert (Eq. 5.24). Par conséquent, on ne peut pas choisir une taille de boîte trop faible. Une nette dégradation de la précision a été observée [72] pour une arête inférieure à 0.25λ . C'est surtout visible dans le cas de la sphère .

5.3 Résultats numériques

5.3.1 Validation de la sphère

Il s'agit de vérifier la précision de la FMM mono-niveau que nous avons implémenté grâce à une comparaison avec la FMM multi-niveau d'un code commercial bien établi WAON dans le cas de rayonnement acoustique d'une sphère pulsante de rayon $1m$. Le maillage de la sphère est constitué de 15000 éléments. Le découpage est constitué de nombre de boîte d'arête égale à une demi longueur d'onde.

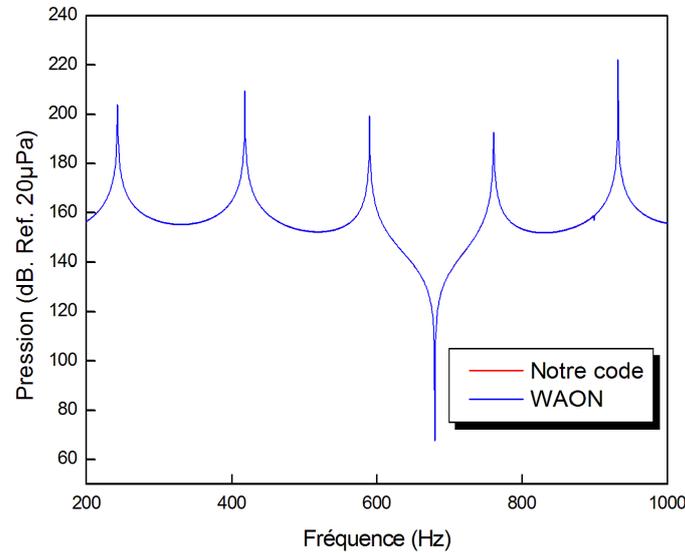


FIGURE 5.11: Résultats de la sphère : pression calculée par notre code et Waon

La comparaison des champs de pression obtenue par les 2 codes [Fig. 5.11] donne des résultats satisfaisants. Le tableau (5.1) nous montre qu'il y a un facteur de 3,5 entre notre FMM mono-niveau et celle de Waon multi-niveaux.

Méthode	Notre code	Waon
Temps CPU	3 Jours 9 h	23 h

TABLE 5.1: Résultats pour milles fréquences

La méthode FMM a été validée en termes de précision par comparaison avec la FMM du code WAON pour le cas de la sphère rayonnante. Il reste maintenant à vérifier si elle est effectivement plus efficace que la BEM au niveau de la vitesse du calcul et de sa gestion de la mémoire. Pour ce faire, nous avons effectué les calculs dans les mêmes conditions pour dix fréquences.

Les gains apportés par la FMM par rapport à la BEM en ce qui concerne la gestion de la mémoire ainsi que le temps de calcul est plus important. Dans le tableau (5.2), nous avons regroupé les résultats obtenus des calculs, on remarque bien le gain en temps de l'ordre 2.5 le temps de la BEM.

Méthode	BEM	FMM
Temps CPU	143 min	46 min
Mémoire par fréquence	1815 Mb	1070 Mb
Nombre d'itérations	9	3

TABLE 5.2: Résultats pour dix fréquences

5.3.2 Application industrielle : problème de passage d'un train

Nous allons terminer ce chapitre par un exemple d'application industrielle, mettant en œuvre un calcul complet sur un objet complexe afin de comparer les deux formulations low-rank et la FMM.

5.3.2.1 Description du modèle

Dans le cadre d'une augmentation dans le monde entier de la planification et la construction de nouveaux chemins de fer, l'impact du bruit de passage de train sur le milieu environnant est particulièrement important pour de nouvelles voies ferrées où les lignes à grande vitesse vont être installées. Les structures de soutiens élevés posent un problème particulier car la résonance structurelle peut souvent être une source majeure de bruit rayonné.

L'atténuation du bruit est nécessaire lorsque les niveaux de bruit réels dépassent les exigences légales ou contractuelles de l'élaboration d'un nouveau chemin de fer. Les critères sont souvent exprimés en valeurs limites d'exposition sonore sur des périodes déterminées (par exemple jour/soir/nuit ou 24

heures) dans le voisinage du chemin de fer tels que les perturbations pour les personnes qui vivent et travaillent à proximité soit réduit au minimum. Lorsque l'atténuation est nécessaire, le concepteur doit développer un système qui répond non seulement à la réduction du bruit et des vibrations, mais aussi à des objectifs de coût, durabilité, et d'autres critères de performance critiques associés à des chemins de fer tels que fiabilité, l'accessibilité, la sécurité . . .

Lors du passage d'un train, nous apercevons trois types de bruit généré [Fig. 5.12] :

- Bruit aérien : Les structures telles que les viaducs et les ponts rayonnent du bruit quand elles sont excitées par des sources vibratoires. Ce bruit est propagé directement de la vibration des roues et des rails. Les vibrations croissent quand la vitesse augmente, donc le bruit aérien devient particulièrement important quand les trains passent à grande vitesse. Le bruit aérien est bien sûr aggravé par des résonances dans les roues et des rails, se produisant typiquement à des fréquences de $500Hz$ et au-dessus. Afin de réduire ce bruit, des barrières tout le long des voies, efficaces dans la réduction du bruit aérien, positionnées de façon appropriée peuvent offrir une protection acoustique des bâtiments voisins en les protégeant des ondes sonores directes.
- Bruit solidien : Lors du passage des roues sur les rails, la rugosité des surfaces en contact produit un déplacement vertical au contact roue/rail. Ce déplacement induit une réponse verticale et transversale dans la roue et le rail. La réponse verticale du rail entraîne la transmission de vibrations aux traverses. Si la voie repose sur un ouvrage d'art, aux composants de celui-ci, les réponses de tous ces éléments (roue, rail, traverses et ouvrage d'art) génèrent un rayonnement acoustique qui, enfin, à travers le filtre de contact et les efficacités de rayonnement, produisent le bruit.
- Bruit à travers le sol : Les vibrations induites par les chemins de fer se

propagent dans les bâtiments adjacents à travers leurs fondations. Une fois dans les colonnes du bâtiment, la vibration est amplifiée dans les modes de vibration des murs et des planchers, d'où il est ensuite rayonné comme bruit dans l'intérieur du bâtiment et/ou directement ressenti par les occupants.

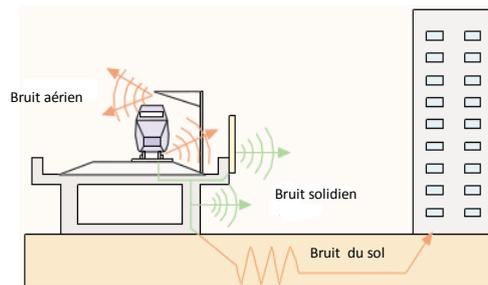


FIGURE 5.12: Différents types de bruits lors du passage d'un train

L'évaluation des performances acoustiques d'un nouveau chemin de fer par des simulations numériques permet de connaître les exigences d'atténuation du bruit dès le stade de conception. Sur la figure [Fig. 5.13], nous avons représenté le maillage du pont portant le chemin de fer, avec l'emplacement des microphones.

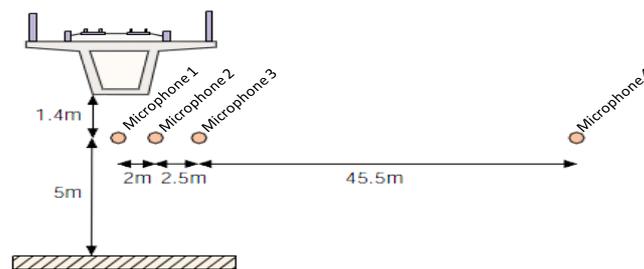


FIGURE 5.13: Dimension du problème et placement des microphones

On se propose de calculer la pression acoustique rayonnée lors du passage d'un train à proximité d'un pont figure [Fig. 5.14] portant un système

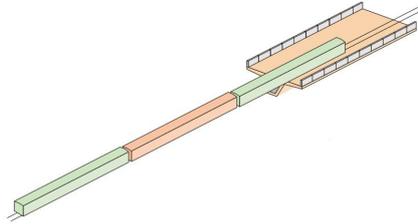


FIGURE 5.14: Modèle numérique du train

ferroviaire à grande vitesse. Quatre microphones ont été positionnés afin de séparer le bruit aérien direct du bruit solidien [Fig. 5.13]. Trois ont été mis à proximité de la face inférieure de la plate-forme, le bruit dans cette zone est principalement solidien, ces points étant entièrement à l'intérieur de la "zone d'ombre" de la source acoustique directe rayonné de l'interface roue/rail. Le quatrième microphone a été placé dans le champ du bruit aérien, les mesures dans cet endroit sont importantes parce qu'elles fournissent des données à des emplacements autour du pont représentant là où les gens pourraient vivre ou travailler.

5.3.2.2 Résultats numériques

Le niveau de bruit généré dans l'environnement est calculé en utilisant trois logiciels de calcul de bruit. La figure [Fig. 5.15] montre l'enregistrement au niveau du microphone 4 lors du passage d'un train.

La comparaison entre les niveaux calculés montre bien que le niveau de pression évolue dans la même gamme de pression en dB . Le temps de calcul de Ls-Dyna est de 179 heures et par Waon de 100 heures, le rapport de temps CPU est de 1,5 entre la FMM et Low-Rank donc la FMM reste plus rapide que la BEM. Une très bonne concordance entre Ls-Dyna est Sysnoise et un léger écart entre Waon et Sysnoise dans basses fréquences et une bonne concordance dans les hautes fréquences.

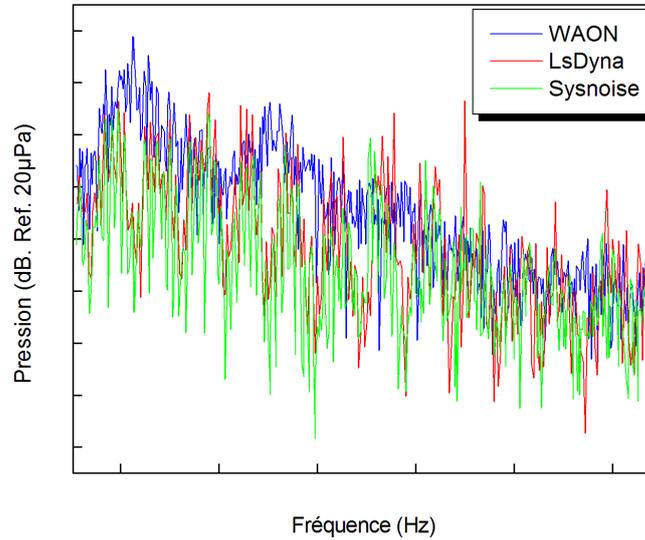


FIGURE 5.15: Résultats numériques du train

5.4 Conclusion

La FMM est plus rapide et possède une meilleure gestion de la mémoire que la BEM quelle que soit sa version : mono-niveau ou multi-niveaux. L'analyse numérique nous a permis de vérifier que l'accélération du calcul de rayonnement acoustique grâce à la FMM ne se fait pas au détriment de la précision. La FMM a été en effet appliquée à plusieurs cas, pour lesquels les résultats s'avèrent satisfaisants. De plus la FMM possède quelques paramètres qui lui sont propres (le paramètre de sommation L , le paramètre de distinction interaction proche / interaction lointaine et le nombre de paquets) dont il est intéressant de connaître une détermination automatique.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

6.1 Conclusion

Différentes formulations ont été utilisées pour modéliser les problèmes acoustiques vibroacoustique dans ce travail de thèse. Le calcul de la solution d'un problème de rayonnement acoustique donnée consiste d'abord à la sélection d'un modèle de rayonnement acoustique appropriée qui sous-tend le choix de la méthode. Par exemple le modèle d'une surface fermée dans un milieu acoustique infini sous-tend la méthode des éléments frontières. En termes de précision, la solution par la BEM peut atteindre une grande précision, étant donné qu'elle résout l'équation intégrale singulière et obtient les variables primaires inconnues sur chaque nœud sans aucune hypothèse. Les deux méthodes de Rayleigh et de Kirchhoff reposent sur certaines hypothèses, elles sont ainsi moins précises, mais elles peuvent être utilisées comme première estimation du niveau de pression acoustique lors de la résolution de grands problèmes, car ils sont beaucoup plus rapide que la BEM. Pour les problèmes externes, les méthodes de Rayleigh et de Kirchhoff peuvent en-

core donner des résultats satisfaisants, ceci n'est pas vrai pour les problèmes internes où la méthode BEM doit être utilisée.

Dans le cas du problème vibroacoustique, le couplage est supposé être faible et résolu de façon séquentielle. Celle-ci consiste à résoudre à la fois la structure et le fluide séparément en appliquant les vitesses structurelles comme conditions aux limites pour la partie acoustique du problème. La structure vibrante peut être modéliser dans le domaine temporel en utilisant la méthode des éléments finis MEF explicite basée sur des éléments surfaciques quadrilatères ou triangulaires. Les vitesses obtenues sur la structure sont transformées en des vitesses fréquentielles en utilisant la FFT. Nous pouvons aussi modéliser la structure dans le domaine fréquentiel par la superposition modale qui repose sur les paramètres modaux du système en régime libre pour calculer la réponse en régime forcé afin de calculer la vitesse fréquentielle de la structure. La simulation numérique dans le domaine fréquentiel du champ acoustique rayonné par la structure vibrante est effectuée par la BEM. La vitesse dans le domaine fréquentiel est utilisée comme condition aux limites pour la BEM (problème de Neumann).

Parmi les différentes méthodes existantes pour surmonter la difficulté de fréquences irrégulières connue par la BEM qui se produit pour des problèmes externes, nous avons adopté la méthode de Burton et Miller qui est très efficace pour ce problème. Cette dernière considère une combinaison de l'équation intégrale de frontière et de sa dérivée normale en utilisant un coefficient imaginaire. Pour évaluer l'intégrale hyper-singulière, nous avons transformé l'intégrale de surface de la dérivée seconde normale de la fonction de Green en une intégrale unidimensionnelle. Les résultats obtenus ont été validés par la méthode de CHIEF. Ils ont montré l'efficacité de la méthode pour des problèmes de rayonnement externe acoustique et vibro-acoustique.

Dans de nombreux cas, une description dans le domaine fréquentiel de la fatigue dans la phase de conception de nouveaux produits est plus pratique.

Elle peut être menée dans le domaine temporel mais vue que d'une part la charge de la structure peut être de nature aléatoire, dans ce cas la meilleure approche pour l'analyse de la fatigue est d'utiliser la méthode statistique, et d'autre part il peut être trop intense pour calculer la fatigue dans le domaine temporel pour les structures à grande échelle avec un long temps historique de la charge. Plusieurs méthodes permettant d'avoir le nombre de cycle à partir de la connaissance de la densité spectrale des contraintes calculées à partir des vibrations aléatoires ont été utilisées, les résultats numériques montre bien que ces méthodes sont en bonne concordance avec les résultats expérimentaux.

Et finalement, afin d'améliorer la BEM nous avons choisi la méthode multipôlaire rapide. Cette méthode est plus rapide et possède une meilleure gestion de la mémoire que la BEM quelque soit sa version : mono-niveau ou multi-niveaux. L'analyse numérique nous a permis de vérifier que l'accélération du calcul de rayonnement acoustique grâce à la FMM ne se fait pas au détriment de la précision. La FMM a été en effet appliquée à plusieurs cas, pour lesquels les résultats s'avèrent satisfaisants. De plus, la FMM possède quelques paramètres qui lui sont propres (le paramètre de sommation L , le paramètre de distinction interaction proche / interaction lointaine et le nombre de paquets) dont il est intéressant de connaître une détermination automatique.

6.2 Perspectives

Le présent travail permet d'envisager plusieurs travaux futurs complémentaires. Le premier concerne le développement de méthode multipôlaire multi-niveaux. La deuxième ouverture possible est de paralléliser la FMM en utilisant le MPI afin de partager la charge sur différentes machines, ce qui optimise davantage le calcul et réduit la taille de stockage. Le calcul des

interactions proches et celui des interactions lointaines sont indépendants, ils peuvent donc être menés en parallèle. De plus, la FMM peut être davantage parallélisée en réalisant une répartition de l'arbre formé par les paquets sur différents processeurs. On gagnerait en rapidité en implémentant l'algorithme sur un cluster. Enfin, la troisième perspective est de développer la BEM temporelle implicite variationnelle.

Annexe A

Intégration numérique singulière du terme dérivée seconde de la fonction de Green

A.1 Procédure de régularisation

Pour un élément quadrilatère, quand l'élément d'intégration coïncide avec l'élément de collocation, nous commençons par une procédure de régularisation de l'intégrale hyper-singulière, en rajoutant et en retranchant les mêmes termes, dans un but de réduire l'ordre de la singularité.

$$\begin{aligned} L_k &= \int_S G_k(p, q) dS = \int_S (G_k(p, q) + G_0(p, q) - G_0(p, q)) dS \\ &= \int_S G_0(p, q) dS + \int_S (G_k(p, q) - G_0(p, q)) dS \\ &= L_0 + \int_S (G_k(p, q) - G_0(p, q)) dS \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
N_k &= \int_S \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_p \partial n_q} dS \\
&= \int_S \left(\frac{\partial^2 G_k}{\partial n_p \partial n_q} + \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} - \frac{\partial^2 G_k}{\partial n_p \partial n_q} + \frac{1}{2} k^2 G_0 - \frac{1}{2} k^2 G_0 \right) dS \\
&= \int_S \left(\frac{\partial^2 G_k}{\partial n_p \partial n_q} - \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} + \frac{1}{2} k^2 G_0 \right) dS + \int_S \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} dS - \frac{1}{2} k^2 \int_S G_0 dS \\
&= \int_S \left(\frac{\partial^2 G_k}{\partial n_p \partial n_q} - \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} + \frac{1}{2} k^2 G_0 \right) dS + N_0 - \frac{1}{2} k^2 L_0
\end{aligned} \tag{A.2}$$

avec : $G_k = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$ et $G_0 = \frac{1}{4\pi r}$

Pour un élément quadrilatère, nous considérons $R(\theta)$ la distance entre le point p centre de l'élément et l'arête du quadrilatère pour $\theta \in [0, 2]$. Les deux intégrales N_0 et L_0 peuvent être écrites sous la forme suivante : Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} &= \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{\partial G_0}{\partial n_q} \right) = \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{\partial G_0}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n_q} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{\partial G_0}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial n_q} + \frac{\partial G_0}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial n_p \partial n_q} \\
&= \frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q} + \frac{\partial G_0}{\partial r} \frac{\partial^2 r}{\partial n_p \partial n_q}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\text{or : } \frac{\partial^2 G_0}{\partial r^2} = \frac{1}{2\pi r^3}, \quad \frac{\partial G_0}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi r^2}$$

$$\text{Et aussi : } \frac{\partial^2 r}{\partial n_p \partial n_q} = -\frac{1}{r} \left(\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q + \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q} \right), \quad \frac{\partial r}{\partial n_q} = -\frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_q}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial n_p} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_p}{r}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} &= -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial n_p \partial n_q} + \frac{1}{2\pi r^3} \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q} \\
&= \frac{1}{4\pi r^3} \left(-r \frac{\partial^2 r}{\partial n_p \partial n_q} + 2 \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi r^3} \left(-r \times -\frac{1}{r} (\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q + \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q}) + 2 \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi r^3} (\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q + 3 \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q})
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Dans notre cas, les vecteurs \vec{n}_p et \vec{n}_q sont colinéaires et perpendiculaires au vecteur \vec{r} donc :

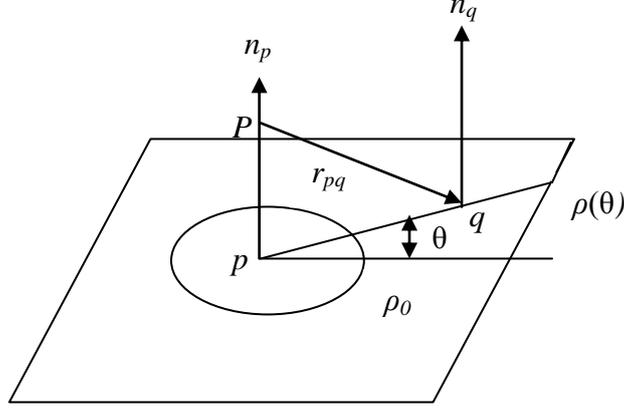


FIGURE A.1: La géométrie d'un élément de la surface

$$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 1, \vec{r}' \cdot \vec{n}_q = 0 \text{ et } \vec{r}' \cdot \vec{n}_p = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} &= \frac{1}{4\pi r^3} (\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q + 3 \frac{\partial r}{\partial n_p} \frac{\partial r}{\partial n_q}) \\ &= \frac{1}{4\pi r^3} (\cos(\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q) - 3 \cos(\vec{r}' \cdot \vec{n}_p) \cos(\vec{r}' \cdot \vec{n}_q)) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

D'après la figure (A.1), nous considérons un élément de la surface infinitésimal entourant le point P et un point $P' \notin S$ [73] $P'P = \epsilon$ et $\cos(r, n) = -\frac{\epsilon}{r}$ ainsi que $\cos(n_p, n_q) = 1$.

Donc :

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} = \frac{1}{4\pi r^3} (1 - 3(\frac{\epsilon}{r})^2) \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} N_0 &= \int_{\Delta\Gamma} \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta}^{2\pi} \int_{\epsilon}^{R(\theta)} \frac{1}{r^3} (1 - 3(\frac{\epsilon}{r})^2) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta}^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{r} (1 - 3(\frac{\epsilon}{r})^2) \right]_{\epsilon}^{R(\theta)} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Faisons tendre ϵ vers zéros :

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N_0 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Delta\Gamma} \frac{\partial^2 G_0}{\partial n_p \partial n_q} dS \\
&= \frac{1}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{r} (1 - 3(\frac{\epsilon}{r})^2) \right]_\epsilon^{R(\theta)} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{R(\theta)} d\theta
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Idem, nous pouvons exprimer l'intégrale de la fonction de Green comme suit :

$$\begin{aligned}
L_0 &= \int_{\Delta\Gamma} G_0 dS \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \frac{1}{r} r dr d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_0^{R(\theta)} dr \right) d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} R(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Exprimons maintenant analytiquement l'intégrale de la fonction de Green et sa dérivée seconde. Considérons l'élément quadrilatère que nous découpons en quatre triangles. Pour chacun des triangles, nous procédons ainsi.

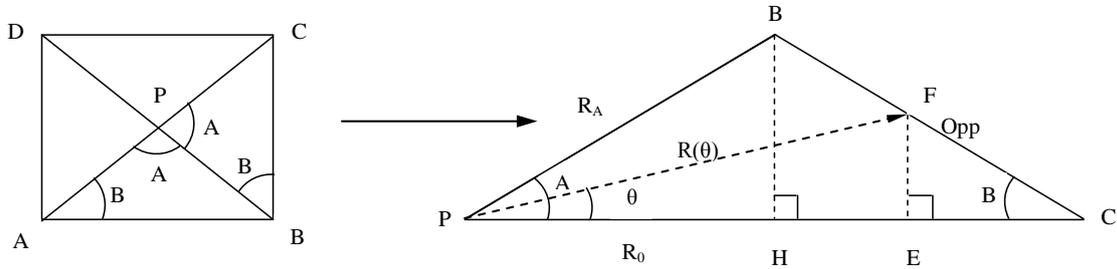


FIGURE A.2: Transformation géométrique

A.2 Calcul des angles A et B

Tout d'abord, le calcul de l'angle A se fait de la manière suivante d'après la figure A.2 :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= PC^2 + PB^2 - 2\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} \\
opp^2 &= R_0^2 + R_A^2 - 2R_0R_A \\
A &= \arccos\left(\frac{R_0^2 + R_A^2 - opp^2}{2R_0R_A}\right)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Ensuite, nous pouvons calculer l'angle B comme suit :

$$\tan B = \frac{BH}{CH} \tag{A.11}$$

$$\text{or : } = \frac{BH}{BA} = \frac{BH}{R_A} \implies BH = R_A$$

$$\text{et : } PC = PH + HC$$

$$HC = PC - PH$$

$$HC = R_0 - R_A$$

donc :

$$\begin{aligned}
\tan B &= \frac{BH}{CH} = \frac{R_A}{R_0 - R_A} \\
B &= \arctan\left(\frac{R_A}{R_0 - R_A}\right)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

d'où :

$$R_A = \frac{R_0}{\sin A + \cos A \tan B} \tag{A.13}$$

Exprimons tout d'abord le $R(\theta)$ en fonction des angles θ et B . Par analogie avec [Eq.A.13] nous pouvons exprimer la distance $R(\theta)$ en fonction de θ et de B en remplaçant R_A par $R(\theta)$ et l'angle A par θ on obtient donc :

$$R(\theta) = \frac{R_0}{\sin \theta + \cos \theta \tan B} \tag{A.14}$$

A.3 Calcul de l'intégrale N_0

$$N_0 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{R(\theta)} d\theta \tag{A.15}$$

Pour un triangle donné, l'angle θ varie entre 0 et A , et par conséquent N_0 correspondant peut être calculé comme suit :

$$\begin{aligned}
N_0 &= -\frac{1}{4\pi R_0} \int_{\theta=0}^A \left(\frac{\sin \theta}{\tan B} + \cos \theta \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{4\pi R_0} \left[-\frac{\cos \theta}{\tan B} + \sin \theta \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{4\pi R_0} \left[\left(-\frac{\cos A}{\tan B} + \sin A \right) - \left(-\frac{\cos 0}{\tan B} + \sin 0 \right) \right] \\
&= -\frac{1}{4\pi R_0} \left[\frac{1 - \cos A}{\tan B} + \sin A \right] \\
&= \frac{1}{4\pi R_0} \left[\frac{\cos B \cos A - \sin B \sin A - \cos B}{\sin B} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi R_0} \left[\frac{\cos(B+A) - \cos B}{\sin B} \right]
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Pour un élément quadrilatère, N_0 représente la somme telle que donnée par l'équation suivante :

$$N_0 = \sum_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \frac{1}{4\pi R_0} \frac{\cos(B+A) - \cos B}{\sin B} \tag{A.17}$$

A.4 Calcul de l'intégrale L_0

Pour un triangle donné, nous avons :

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^A R(\theta) d\theta \\
&= \frac{R_0}{4\pi} \int_{\theta=0}^A \frac{\tan B}{\sin \theta + \cos \theta \tan B} d\theta \\
&= \frac{R_0 \sin B}{4\pi} \int_{\theta=0}^A \frac{1}{\sin(\theta+B)} d\theta
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Or :

$$\int \frac{1}{\sin x} = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) + c \tag{A.19}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{R_0 \sin B}{4\pi} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{B+\theta}{2}\right)\right) \right]_0^A \\
&= \frac{R_0 \sin B}{4\pi} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{B+A}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{B}{2}\right)\right) \right]
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Pour un élément donné, nous avons donc :

$$L_0 = \sum_{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4} \frac{R_0 \sin B}{4\pi} \left[\ln\left(\tan\left(\frac{B+A}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{B}{2}\right)\right) \right] \tag{A.21}$$

Annexe B

Solution analytique de la sphère

Nous considérons une sphère pulsante dans un milieu acoustique infini. La sphère de rayon "a" pulse avec une vitesse normale uniforme v_n . Le problème des valeurs aux frontières est donné par :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -i\rho\omega v_n \quad (\text{B.2})$$

Ce problème représente une symétrie sphérique, pour le résoudre, nous allons considérer les coordonnées sphériques, c.à.d. $p(x, \omega) = p(r, \omega)$ avec r est la coordonnée radiale (voir la figure).

Dans le système de coordonnée sphérique nous avons :

$$\Delta p = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) p = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rp) \quad (\text{B.3})$$

Par conséquent, l'équation gouvernante se réduit à :

$$\frac{d^2}{dr^2}(rp) + krp = 0 \quad (\text{B.4})$$

La solution de cette équation différentielle ordinaire est de la forme suivante :

$$p(r, \omega) = \frac{1}{r}(A_1 e^{-ikr} + A_2 e^{ikr}) \quad (\text{B.5})$$

Avec A_1 et A_2 sont deux constantes d'intégrations. Pour le champ causé par la sphère pulsante, l'onde doit être sortante (c.à.d. elles se propagent de la sphère vers l'infini). Alors, le second terme qui représente l'onde entrante (c.à.d. qui va vers le centre de la sphère) doit disparaître ($A_2 = 0$) nous avons donc :

$$p(r, \omega) = \frac{1}{r}A_1 e^{-ikr} \quad (\text{B.6})$$

Pour déterminer la constante A_1 , nous appliquons les conditions aux limites sur l'équation d'Helmholtz et on trouve :

$$A_1 = \frac{\rho c v_n(ika)}{ika + 1} a e^{+ika} \quad (\text{B.7})$$

D'où la solution du problème de la sphère pulsante est :

$$p(r, \omega) = \frac{\rho c v_n(ika)}{ika + 1} \frac{a}{r} e^{-ik(r-a)} \quad (\text{B.8})$$

Bibliographie

- [1] B. Shanker A. A. Ergin and E. Michielssen. The plane-wave time-domain algorithm for the fast analysis of transient wave phenomena. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 41(4) :39–52, 1999.
- [2] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, INC., New York, 1972.
- [3] M. Amari. *Étude du confort vibro-acoustique automobile en simulateur*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées - Lyon, 2009.
- [4] A. W. Appel. An efficient program for many-body simulation. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 6 :85–103, 1985.
- [5] E. Michielssen B. Hu, W.C. Chew and J. Zhao. Fast inhomogeneous plane-wave algorithm (fipwa) for the fast analysis of two-dimensional scattering problems. *Research Report CCEM-5-99, University of Illinois, Urbana*, 1999.
- [6] J. S. Bendat. Probability functions for random responses. *NASA report on contact NASA-5-4590*, 1964.
- [7] M. Brandfass and W. C. Chew. A multilevel fast multipole based approach for the efficient reconstruction of perfectly conducting scatterers. *J. Electromag. Waves and Appl.*, 15(1) :81–106, 2001.
- [8] A. J. Burton and G. F. Miller. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, 323 :201–210, 1971.

-
- [9] P. A. Businger and G. H. Golub. Linear least squares solution via householder transformations. *Numer. Math.*, 7 :269–276, 1965.
- [10] G. K. Chaudhury and W. D. Dover. Fatigue analysis of offshore platforms subjected to sea wave loadings. *International Journal of Fatigue*, 7(1) :13–19, 1985.
- [11] Ke. Chen and P. J. Harris. Efficient preconditioners for iterative solution of the boundary element equations for the three-dimensional helmholtz equation. *Applied Numerical Mathematics*, 36 :475–489, 2001.
- [12] R. Clayton and B. Engquist. Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations. *B. Seis. Soc. Am*, 67(6) :1529–1540, 1977.
- [13] L. G. Copley. Integral equation method for radiation from vibrating bodies. *Journal of Acoustical Society of America*, 41(4) :807–816, 1967.
- [14] Kenneth A. Cunefare and Gary Koopmann. A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers. *J. Acoust. Soc. Am.*, 85(1) :39–48, 1989.
- [15] O. Czygan and O. Von Estorff. Fluid-structure interaction by coupling bem and non linear fem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26(1) :773–779, 2002.
- [16] E. Michielssen D. Jiao, M. Lu and J. M. Jin. A fast time-domain finite element-boundary integral method for electromagnetic analysis. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 49(10) :1453–1461, 2001.
- [17] E. Darrigrand. *Couplage méthodes multipôles – discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l’électromagnétisme*. PhD thesis, Université Bordeaux I, Septembre 2002.
- [18] E. Darve. Fast multipole method : A mathematical study. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 325 serie I(9) :1037–1042, 1997.
- [19] E. Darve. The fast multipole method : Numerical implementation. *J. Comput. Phys.*, 160(1) :195–240, 2000.

-
- [20] E. Darve. The fast multipole method (i) : Error analysis and asymptotic complexity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(1) :98–128, 2000.
- [21] E. Darve. Efficient fast multipole method for low frequency scattering. *Submitted to J. Comput. Phys.*, 2001.
- [22] E. Darve. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. PhD thesis, Université Paris 6, Juin 1999.
- [23] T. Dirlik. *Application of Computers in Fatigue Analysis*. PhD thesis, University of Warwick, 1985.
- [24] J. Trevelyan E. P. Debain and P. Bettess. Plane wave interpolation in direct collocation boundary element method for radiation and wave scattering : numerical aspects and applications. *J. Sound. Vib.*, 261 :839–858, 2003.
- [25] O. V. Estorff. *Boundary elements in acoustics : Advances and applications*. WITpress, Boston, 2000.
- [26] D. S. Gall and J. W. Hancock. Fatigue crack growth under narrow and broad band stationary loading. *Glasgow University, Marine Technology Center*, 1985.
- [27] X. W. Gao. A evaluation of regular and singular domain integrals with boundary-only discretization - theory and fortran code. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 175(1) :265–290, 2005.
- [28] H. Ghassemi and A. R. Kohansal. Numerical evaluation of various levels of singular integrals, arising in bem and its application in hydrofoil analysis. *Applied Mathematics and computations*, 213(1) :277–289, 2009.
- [29] G. H. Golub and C. F. van Loan. *Matrix Computations, Third Edition*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [30] L. Greengard. *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*. MIT Press, Cambridge, 1987.

-
- [31] L. Greengard and V. Rokhlin. A fast algorithm for particle simulations. *J. Comput. Phys.*, 73 :325–348, 1987.
- [32] L. Greengard and V. Rokhlin. The rapid evaluation of potential fields in three dimensions. *In Vortex Methods in Lecture Notes in Mathematics, 1360, Springer Verlag*, page 121–141, 1988.
- [33] L. Greengard and V. Rokhlin. A new version of the fast multipole method for the laplace equation in three dimensions. *Acta Numerica*, 6 :229–269, 1997.
- [34] M. Gu and S. C. Eisenstat. Efficient algorithms for computing a strong rank-revealing qr factorization. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 17 :848–869, July 1996.
- [35] Z. Guédé. *Approche probabiliste de la durée de vie des structures sollicitées en fatigue thermique*. PhD thesis, Université BLAISE PASCAL - Clermont II, 2005.
- [36] L. Greengard H. Cheng and V. Rokhlin. A fast adaptative multipole algorithm in three dimensions. *J. Comput. Phys.*, 155(2) :468–498, 1999.
- [37] G. Winter H. Schwichtenberg and H. Wallmeier. Acceleration of molecular mechanic simulation by parallelization and fast multipole techniques. *Parallel Computing*, 25 :535–546, 1999.
- [38] Y. Huang, C. Ashcraft, and P. L’Eplattenier. A fast collocation boundary element method for vibro-acoustic problems in ls-dyna. In *Proceedings of the Inaugural International Conference of the Engineering Mechanics Institute (EM08), May 18-21, 2008*, Minneapolis, Minnesota., 2008. International Institute of Informatics and Systemics.
- [39] A. J. Jerry. The shannon sampling theorem – various extensions and applications : A tutorial review. *Proc. IEEE*, 65(11) :1565–1596, 1977.
- [40] G. Karami and D. Derakhshan. An efficient method to evaluate hypersingular and supersingular integrals in boundary integral equations

- analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23 :317–326, 1999.
- [41] S. Velamparambil J. Song K.C. Donepudi, J.-M. Jin and W.C. Chew. A higher order parallelized multilevel fast multipole algorithm for 3-d scattering. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, 49(7) :1069–1078, 2001.
- [42] S. M. Kirkup. *The Boundary Element Method in Acoustics : A Development in FORTRAN*. ISS, West Yorkshire, UK, 1998.
- [43] S. Langer. Bem-studies of sound propagation in viscous fluid. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS*, Jyväskylä :24–28, July 2004.
- [44] M. Lemou. Fast multipole method for multidimensional integrals. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 326, serie I :105–110, 1998.
- [45] Tzu-Chu Lin and Y. Warnapala-Yehiya. The numerical solution of the exterior dirichlet problem for helmholtz’s equation via modified green’s functions approach. *Computers and Mathematics with Applications*, 44 :1229–1248, 2002.
- [46] C. C. Lu and W. C. Chew. A multilevel algorithm for solving a boundary integral equation of wave scattering. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 7(10) :466–470, 1994.
- [47] G. Maier M. Bonnet and C. Polizzotto. Symmetric galerkin boundary element method. *Appl. Mech. Rev*, 51 :669–704, 1998.
- [48] J. C. Lee M. Rassaian, Y. Huang and T. Arkawa. Structural analysis with vibro-acoustic loads in ls-dyna[®]. *10th International LS-DYNA[®] Users Conference*, 2008.
- [49] M. Amdi M. Souli, J. Hargreaves and F. Erchiqui. Numerical investigation of a vibroacoustic analysis with different formulations. *CMES*, 2135(1) :1–17, 2012.

- [50] M. A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Trans. ASME, J. of Appl. Mech.*, 67 :A159–A164, 1945.
- [51] A. Mohsen and M. Hesham. An efficient method for solving the nonuniqueness problem in acoustic scattering. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22 :1067–1076, 2006.
- [52] P. M. Morse and H. Feeschbach. *Methods of theoretical physics*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [53] M. Nilsson. Stability of the high frequency fast multipole methode for helmholtz equation in three dimensions. *BIT Numerical Mathematics*, 44 :773–791, 2004.
- [54] T. L. Paez P. H. Wirshing and K. Ortiz. Random vibration. *John Wiley Sons Inc., New York*, 1995.
- [55] J. PAN and D. A. BIES. The effect of fluid-structural coupling on sound waves in an enclosure – theoretical part. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 87(2) :691–707, 1990.
- [56] A. Pellicier. *Algorithme de calcul accéléré pour les structures rayonnantes à vibration sous-critique*. PhD thesis, Université Clermont II, 2007.
- [57] X. Pitoiset. *Méthodes spectrales pour une analyse en fatigue des structures métalliques sous chargements aléatoires multiaxiaux*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [58] Ch. Provatidis and N. Zafirooulos. On the interior helmholtz equation formulation in sound radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26 :29–40, 2002.
- [59] V. Rokhlin R. Coifman and S. Wandzura. The fast multipole method for the wave equation : A pedestrian prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 35(3) :7–12, 1993.

-
- [60] J. Rahola. Diagonal forms of the translation operators in the fast multipole algorithm for scattering problems. *BIT Numerical Mathematics*, 36(2) :333–358, 1996.
- [61] S. T. Raveendra. An efficient indirect boundary element technique for multi-frequency acoustic analysis. *Int. J. Numer. Engng.*, 44 :59–76, 1999.
- [62] A. Ringeval and Y. Huang. Random vibration fatigue analysis with ls-dyna[®]. *12th International LS-DYNA[®] Users Conference*, 2012.
- [63] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of classical potential theory. *Comput. Phys.*, 60 :187–207, 1985.
- [64] V. Rokhlin. Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions. *J. Comput. Phys.*, 86(2) :414–439, 1990.
- [65] V. Rokhlin. Diagonal forms of translation operators for the helmholtz equation in three dimensions. *Research Report YALEU/DCS/RR-894*, Yale University, 1992.
- [66] V. Rokhlin. Diagonal forms of translation operators for the helmholtz equation in three dimensions. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1 :82–93, 1993.
- [67] Youcef Saad and Martin H. Schultz. Gmres : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. SCI. STAT. COMPUT.*, 7(3) :856–869, Jul 1986.
- [68] H. A. Schenck. Improved integral formulation for acoustic radiation problems. *J. Acoust. Soc. Am.*, 44(1) :41–58, 1968.
- [69] L. Shen and Y. J. Liu. A boundary element method for acoustic radiation valid for all wavenumbers. *Comput Mech*, 40 :461–472, 2007.
- [70] J. M. Song and W.C. Chew. Multilevel fast multipole algorithm for solving combined field integral equations of electromagnetic scattering. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 10(1) :14–19, 1995.

-
- [71] D. S. Steinberg. *Vibration analysis for electronic equipment* (2nd edition). *John Wiley Sons, New York*, 1988.
- [72] G. Sylvand. *La méthode multipôle rapide en électromagnétisme : Performances, parallélisation, applications*. PhD thesis, Université de Nice - Sophia Antipolis, Juin 2002.
- [73] T. Terai. On the calculation of sound fields around three dimensional objects by integral equation methods. *Journal of sound and vibration*, 69(1) :71–100, 1980.
- [74] J. M. Tunna. Fatigue life prediction for gaussian random loads at the design stage. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials Structures*, 9(3) :169–184, 1986.
- [75] R. L. Wagner and W.C. Chew. A ray-propagation fast multipole algorithm. *Microwave Opt. Tech. Letter*, 7(10) :435–438, 1994.
- [76] Y. Wang. *The Fast Multipole Methode for 2D Coulombic Problems Analysis, implementation and visualization*. PhD thesis, 2005.
- [77] T. W. Wu. *Boundary Element Acoustics : Fundamentals and Computer Codes, Advances in Boundary Elements*. WITpress, Boston, 2001.
- [78] N. Vlahopoulos Z. Zhang and S. T. Raveendra. A computational acoustic field reconstruction process based on an indirect boundary element formulation. *J. Sound. Vib.*, 108(5) :2167–2178, 2000.