

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE 1

ÉCOLE DOCTORALE RÉGIONALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DE LILLE - UMR CNRS 8107

Thèse de Doctorat en Mécanique

N° d'ordre 40744

par

Guillaume BARRAS

**Interaction fluide-structure :
Application aux explosions sous-marines
en champ proche**

Soutenue publiquement le

1^{er} février 2012

~ Composition du Jury ~

Mhamed SOULI	Professeur, Université des Sciences et Technologie de Lille	Président
Moji MOATAMEDI	Professeur, Université de Narvik, Norvège	Rapporteur
Yves-Marie SCOLAN	Enseignant-Chercheur HDR, ENSTA Bretagne, Brest	Rapporteur
Michel ARRIGONI	Enseignant-Chercheur, ENSTA Bretagne, Brest	Examineur
Nicolas COUTY	Ingénieur de Recherches, Hydrocéan, Nantes	Examineur
Christine ESPINOSA	Professeur Associé, ISAE, Toulouse	Examineur
Bruno LEBLÉ	Ingénieur de Recherches, DCNS, Lorient	Examineur
Bernard AUROIRE	Ingénieur, DGA Techniques navales, Toulon	Invité
Tanguy QUESNEL	Ingénieur de Recherches, PRINCIPIA, Nantes	Invité

Directeur de thèse : Mhamed SOULI (USTL)

Lieu de soutenance : DGA Techniques navales, Bâtiment René Malabiau
Avenue de la Tour Royale, BP 40915, 83050 TOULON Cedex

GRATITUDE

Je n'ai pu mener à terme ce travail de longue haleine sans l'aide et les encouragements dont j'ai bénéficié.

Avant toute chose, je tiens à remercier Moji Moatamedi et Yves-Marie Scolan pour avoir accepté la tâche fastidieuse de relire mon mémoire. Mes remerciements sont également adressés à Christine Espinosa et Michel Arrigoni qui ont bien voulu participer au jury de ma thèse.

Je remercie vivement Mhamed Souli, Professeur à l'Université de Lille 1 et Directeur de ma thèse, de m'avoir accompagné tout au long de ces années en me faisant bénéficier de son savoir pour mener à bien mes travaux. Je n'oublierai jamais sa disponibilité et son accueil lors de mes visites au Laboratoire. Je veux également associer Nicolas Aquelet à mes travaux, développeur LS-DYNA à Livermore Software Technology Corp., avec qui j'ai pu travailler en interaction directe malgré la distance et les fuseaux horaires. Merci pour son aide inconditionnelle de tous les instants.

Je remercie très amicalement mon ex-collègue de bureau, Nicolas Couty, ingénieur de recherches à Hydrocéan, qui a encadré mes travaux et avec lequel j'ai pu entretenir des débats scientifiques, passionnés et passionnants, sans fonds ni fins... Un grand merci à Bruno Leblé, ingénieur à DCNS, d'avoir bien voulu suivre mon travail et relire une partie de mon mémoire. C'est aussi très chaleureusement que je remercie Bernard Auroire, ingénieur à la Direction Générale de l'Armement, pour son aide très précieuse en me faisant profiter de son expérience ô combien inestimable ! Merci de son soutien dans les derniers jours qui ont précédé le rendu de ce mémoire.

Je ne peux oublier, non plus, l'aide appréciable apportée aux origines par Hervé Le Sourne et Natacha Buannic lors de la mise en place de la thèse au sein de PRINCIPIA. Merci à tous, chers anciens collègues de cette même société nantaise, vous qui m'avez vu grandir (professionnellement) et qui avez, d'une manière certaine, contribué à mon épanouissement. Une pensée émue à Christian Decolon et Gérard Wollensack me ramène quelques années en arrière sur les bancs du Conservatoire National des Arts et Métiers. Merci également à eux de m'avoir fait aimer la Mécanique.

Je vous remercie tous, très chers amis, de m'avoir témoigné votre soutien et intérêt pour mon travail tout au long de ces années, nos élucubrations nocturnes me laisseront toujours une saveur particulière...

À toute ma famille, c'est avec beaucoup de bonheur et de fierté, que je veux dédier ce mémoire. À toi Papa qui nous a quitté trop tôt, à vous Maman et Jean-Paul et mes deux frères aimés Stéphane et Damien, à vous tous Nantais et Jurassiens de la Vallée de la Valserine, je ne vous serai jamais assez reconnaissant d'avoir œuvré à la construction de notre bonheur dans la simplicité et le souvenir des Anciens ; Simone, Émile, Louis et Joseph.

C'est enfin et surtout à ma future femme que je veux dédier ce travail, et au futur petit Être qui ne manquera pas de combler nos vies... si ce n'est déjà le cas.

RÉSUMÉ

INTERACTION FLUIDE-STRUCTURE : APPLICATION AUX EXPLOSIONS SOUS-MARINES EN CHAMP PROCHE

En construction navale militaire, les navires sont conçus pour résister à des menaces conventionnelles comme les mines ou les torpilles. Ces conceptions s'appuient notamment sur des calculs de réponses des structures aux explosions sous-marines lointaines, qui est un sujet relativement bien maîtrisé aujourd'hui. Depuis la Seconde Guerre Mondiale, la thématique des explosions sous-marines a en effet bénéficié d'importants travaux de recherche. Ceux-ci ont abouti à des méthodes numériques robustes qui permettent de simuler l'essentiel des phénomènes caractérisant ces événements ; détonation du matériau explosif, propagation du choc dans le fluide, dynamique de la bulle de gaz formée par les produits de détonation, interaction fluide-structure et dynamique non-linéaire des structures pouvant aboutir localement à la ruine de celles-ci.

Ces méthodes, utilisées en ingénierie, s'appuient cependant sur des hypothèses restrictives qui limitent leur champ d'application. Ces restrictions sont discriminantes si l'on souhaite simuler les explosions sous-marines en champ proche. En effet, celles-ci se caractérisent par des phénomènes fortement non-linéaires qui doivent être pris en compte dans la modélisation de tels scénarios. Parmi ces non-linéarités géométriques et matérielles on retiendra, d'une part, la formation d'un jet liquide perforant la bulle de gaz au moment de son collapse. Dirigé vers les structures déjà endommagées par l'onde de choc initiale, ce jet est susceptible, suivant les cas, de provoquer des dommages supplémentaires importants. D'autre part, la rupture à plus ou moins grande échelle des structures se traduit par l'apparition de discontinuités au niveau de l'interface fluide-structure au cours du temps.

Dans ce cadre, la méthode Euler-Lagrange Multi-Matériaux avec Couplage Euler-lagrange, pour la modélisation de l'interaction fluide-structure, est choisie pour simuler ces problèmes. La discrétisation spatiale du problème est basée sur la Méthode des Éléments Finis. Pour rendre la méthode plus facilement applicable en ingénierie, les évolutions dont elle fait l'objet dans la thèse s'articulent autour de deux points. (1) Tout d'abord la méthode est développée en deux dimensions pour résoudre les problèmes 2D axisymétriques avec une rapidité et une précision accrues par rapport aux simulations 3D. (2) Ensuite, la projection des résultats 2D sur des grilles de calculs différentes 2D ou 3D est implémentée. Ces projections d'une grille à l'autre permettent de résoudre le problème complet par des phases successives dont la physique se situe sur des échelles de temps et d'espace très différentes, et qui nécessitent des maillages adaptés ; (i) onde de détonation ($\approx \mu\text{s}$ et cm), (ii) onde de choc ($\approx \text{ms}$ et m), (iii) interaction du choc avec la structure ($\approx 10 \text{ ms}$ et m), (iv) dynamique de bulle et collapse contre les structures ($\approx 100 \text{ ms}$ et m). Les développements effectués sont intégrés dans le code de calcul LS-DYNA version 5.1.1, et validés pour les différentes phases du problème à partir de formulations théoriques et de résultats expérimentaux. Une méthodologie générale, adaptée aux explosions sous-marines en champ proche, est enfin proposée pour guider les choix de modélisation en ingénierie.

Mots-clés : Euler-Lagrange Arbitraire Multi-Matériaux, Méthode Éléments finis, Explosion Sous-Marine, Détonation, Onde de choc, Interaction Fluide-Structure, Hydrodynamique de Bulle, Construction Navale Militaire.

ABSTRACT**FLUID-STRUCTURE INTERACTION : APPLICATION TO NEAR FIELD UNDERWATER EXPLOSIONS**

In military shipbuilding, ships are designed to withstand conventional threats such as mines or torpedoes. These designs are based primarily on calculations of structural response to underwater explosions in far field, what is relatively well controlled today. The thematic of underwater explosions has indeed benefited from extensive research since the Second World War. This has resulted in robust numerical methods to simulate the main phenomena that characterize such events ; detonation of high explosive, propagation of shockwave, hydrodynamics of gas bubble formed by detonation products, fluid-structure interaction and nonlinear dynamics of structures that can lead to extensive damage.

These methods used in engineering are based on assumptions that limit their scope. On the one hand, fluid acoustic formulations assuming small perturbations can not simulate properly the flow for large motions of material interfaces. On the other hand, potential flow formulations based on the boundary element method are not suitable for calculations of shockwave propagation in explosives and inert materials. In addition their numerical implementation is complicated or impossible for large disturbances at the boundaries of the fluid domain. These restrictions are discriminatory when we attempt to simulate underwater explosions in near field. Among the phenomena that characterize them in such cases we note, firstly, the formation of a liquid jet that penetrates the gas bubble during its collapse. This liquid jet is directed towards the structure already weakened by the primary shockwave and is likely to cause significant additional damage. On the other hand, the rupture of the structure leads to huge discontinuities at the fluid-structure interface. These geometrical and material nonlinearities must be taken into account in the modeling of such scenarios.

In this context, the Multi-Material Arbitrary Lagrangian-Eulerian method with Euler-Lagrange coupling for the fluid-structure interaction is chosen to simulate these problems. The spatial discretization of the problem is performed with the Finite Element Method. To make the method more easily applicable in engineering, its adaptation is based on two points. (1) Firstly the method is developed for two-dimensional cases in order to solve 2D axisymmetric problems with higher speed and accuracy compared to 3D simulations. (2) Then the projection of results from two-dimensional analysis on 2D or 3D grids is implemented. The projection from one grid to the other allows to solve the whole problem through successive phases for physics on very different time scales and space scales, what necessitates adapted meshes e.g. (i) detonation wave ($\approx \mu\text{s}$ and cm), (ii) shock wave ($\approx \text{ms}$ and m), (iii) interaction of the shock with structures ($\approx 10 \text{ ms}$ and m), (iv) hydrodynamics of bubble and its collapse against structures ($\approx 100 \text{ ms}$ and m). The developments are implemented in LS-DYNA code for the revised version 5.1.1 and validated for the different phases of the problem from theoretical formulations and experimental results. A general methodology, adapted to near field underwater explosions, is finally proposed to guide the choice of modelling in engineering.

Keywords : Multi-Material Arbitrary Lagrangian-Eulerian, Finite Element Method, Underwater Explosion, Detonation, Shockwave, Fluid-Structure Interaction, Bubble Hydrodynamics, Military Shipbuilding.

Table des matières

Table des figures	xi
Liste des tableaux	xiii
Préambule	xv
1 Introduction générale	1
1.1 Revue de travaux antérieurs	3
1.2 Objectifs	10
1.3 Méthodologie	11
1.4 Plan général	12
2 Description phénoménologique des explosions sous-marines	13
2.1 Généralités	14
2.2 Caractérisation de l'onde de choc primaire	20
2.3 Caractérisation de la dynamique de bulle	24
2.4 Coefficients empiriques pour le TNT	26
2.5 Une mesure de la sévérité : le facteur de choc	28
2.6 Cas d'application	30
3 Formulation Euler-Lagrange du problème couplé fluide-structure	33
3.1 Formulation Lagrangienne	34
3.2 Formulation ALE et Eulérienne multi-matériaux	53
3.3 Modélisation de l'IFS et couplage Euler-Lagrange	79
4 Ondes de détonation	85
4.1 Éléments théoriques	86
4.2 Simulations numériques relatives aux ondes de détonation	106
5 Ondes de choc sous-marines	117
5.1 Éléments théoriques	118
5.2 Théorie de propagation de Kirkwood-Bethe	126
5.3 Simulations numériques relatives aux ondes de choc	147

6 Hydrodynamique de bulle et interactions	157
6.1 Hydrodynamique de bulle	158
6.2 Cas d'application avec IFS en champ proche	179
7 Conclusion	185
Annexes	187
A Éléments d'analyse dimensionnelle	187
A.1 Unités physiques indépendantes	187
A.2 Théorème de Vaschy-Buckingham	187
A.3 Exemple appliqué à l'expansion d'une cavité gazeuse suite à une explosion	188
A.4 Similitude	189
B Potentiel Retardé de Kirchhoff	191
B.1 Fluide acoustique et équation d'ondes	191
B.2 Potentiel retardé de Kirchhoff	193
B.3 Application du RPF à une structure plane déformable	194
B.4 Approximations de l'interaction fluide-structure	195
C Modèle de Taylor	199
C.1 Approximation onde plane PWA	199
C.2 Simple exponentielle décroissante	200
C.3 Double exponentielle décroissante	203
D Méthode DAA	209
D.1 Formulation théorique	209
D.2 Application scalaire au cas 1D plan	212
Références classées par thèmes	217
Ouvrages généraux	217
Explosions sous-marines	217
Méthodes numériques	233
Références non-classées	239

Table des figures

1	Exemples d'agressions terroristes contre des navires	xvi
1.1	Exemple de ruine complète de poutre navire	2
2.1	Configuration générale d'un problème d'explosion sous-marine	14
2.2	Représentation schématique des évolutions temporelles de pression et de bulle	16
2.3	Répartition de l'énergie totale issue d'une explosion sous-marine de TNT	17
2.4	Courbes de similitude pour l'explosif TNT	23
2.5	Facteur de choc $K = 0.5$: Pression et vitesse particulière	31
2.6	Facteur de choc $K = 0.5$: Dynamique de bulle	32
3.1	Configurations initiale (non déformée) et courante (déformée) de la structure	35
3.2	Élément quadrangle bilinéaire Q4	44
3.3	Domaines Lagrangien, Eulérien et ALE	54
4.1	Représentation du processus de détonation sur le diagramme (p, v)	89
4.2	Influence des trois termes de l'équation d'état JWL pour le TNT	94
4.3	Onde de détonation théorique plane	104
4.4	Ondes de détonations théoriques plane, cylindrique et sphérique	105
4.5	Onde de détonation idéale : Principe de modélisation	109
4.6	Onde de détonation idéale : Discontinuités cinétique et thermodynamiques	110
4.7	Étude de sensibilité au maillage pour l'onde de détonation plane	111
4.8	Ondes de détonation cylindrique et sphérique : Présentation de la grille de calcul	112
4.9	Onde de détonation cylindrique : Influence du nombre d'éléments	113
4.10	Onde de détonation sphérique : Influence du nombre d'éléments	113
4.11	Ondes de détonation 1D théoriques et numériques	114
4.12	Ondes de détonation 2D théoriques et numériques	114
5.1	Représentation du processus de choc sur le diagramme (p, T)	119
5.2	Vitesses au front d'onde de choc en fonction des pressions	124
5.3	Représentation des trajectoires matérielles et des caractéristiques pour le choc	127
5.4	Résultats théorique et numérique pour la vitesse de l'interface liquide/gaz	135
5.5	Évolution de la fonction G à l'interface liquide/gaz	137

5.6	Résultats théorique et numérique pour la coordonnée du choc en champ proche	144
5.7	Résultats théorique et numérique pour la pression de choc en champ proche	145
5.8	Différents modèles numériques pour la cavité gazeuse	148
5.9	Pressions calculées dans l'eau par différents modèles	149
5.10	Projection sur modèle identique pour un choc cylindrique	150
5.11	Influence de la finesse de maillage pour un choc cylindrique	151
5.12	Mapping maillage fin vers grossier pour un choc cylindrique	152
5.13	Pressions en eau libre pour une charge de 500 kg après projection	153
5.14	Influence du nombre d'éléments utilisés en détonique sur la dynamique de bulle	154
6.1	Représentation du comportement des produits de détonation du TNT	163
6.2	Modèles théoriques de bulle : Évolution du rayon	165
6.3	Modèles théoriques de bulle : Évolution du nombre de Mach à l'interface	166
6.4	Description générale du problème de pulsation de bulle	168
6.5	Pulsation de bulle : Modèles éléments finis utilisés	169
6.6	Pulsation de bulle : Évolution du rayon de la sphère gazeuse	170
6.7	Convergence spatiale de la solution pour la dynamique de bulle	170
6.8	Pulsation de bulle : Comparaison des résultats théoriques et numérique	171
6.9	Effets du modèle tronqué sur les pulsations de bulle	173
6.10	Développement de l'instabilité d'interface aux instants de contraction maximale	174
6.11	Pulsation de bulle : Influence des conditions aux limites	175
6.12	Vitesses particulières à la frontière eulérienne	176
6.13	Pressions à la distance adimensionnelle $r' = 3$ du centre de la bulle	177
6.14	Influence de la frontière absorbante et de l'étendue du modèle	178
6.15	Effets cumulatifs du choc et de la bulle sur une cible déformable	179
6.16	Comparaisons des calculs avec les essais MEDUSE sur cible déformable	180
6.17	Interaction fluide-structure pour le choc primaire	181
6.18	Déplacement au centre de la cible en fonction de la distance de tir	182
6.19	Visualisation de l'interaction bulle/structure	183
C.1	Approximation onde plane	199
C.2	Temps de coupure relatif en fonction de β	202
C.3	Vitesse maximale relative et énergie relative en fonction de β	203
C.4	Diagramme représentatif du paramètre β	205
C.5	Iso-contours du paramètre β pour des plaques de 10 mm	206
C.6	Iso-contours du paramètre β pour des plaques de 50 mm	206
C.7	Vitesse de plaque et pressions en fonction de l'onde de pression pour $\beta = 2$	207
D.1	Résultats théoriques relatifs à l'approximation DAA pour $\beta = 0.5$	215
D.2	Résultats théoriques relatifs à l'approximation DAA pour $\beta = 2.0$	216

Liste des tableaux

2.1	Paramètres relatifs à la première pulsation de bulle	25
2.2	Paramètres du matériau explosif TNT	26
2.3	Grandeurs caractéristiques d'une explosion pour un facteur de choc $K = 0.5$	30
4.1	Explosif TNT : Paramètres de Chapman-Jouguet et coefficients JWL	106
5.1	Propriétés hydrodynamiques de l'eau salée au niveau du front d'onde choc	123
6.1	Paramètres physiques pour l'étude de la dynamique de bulle	167
6.2	Pulsation de bulle : Caractéristiques des modèles éléments finis et performances	169

Préambule

L'ÉTUDE du comportement des structures immergées aux explosions sous-marines a bénéficié d'importants travaux de recherche depuis la fin de la Seconde Guerre Mondiale et tout au long de la Guerre Froide. Ils ont abouti à des méthodes numériques robustes comme celle implémentée dans le code de calcul USA (Underwater Shock Analysis) qui fait aujourd'hui référence dans le traitement numérique des explosions sous-marines. Cependant ce sujet, situé en marge du métier d'ingénieur en analyse des structures, constitue aujourd'hui encore un large champ d'investigations qui renferme un grand nombre de difficultés.

Parmi elles, on notera l'étendue des connaissances requises dans des domaines aussi variés que la physique-chimie des explosifs, la mécanique des fluides et la mécanique des structures. Cette première source de difficultés en fait un sujet compliqué à appréhender, et de surcroît, à maîtriser. En outre, la multiplicité des phases (solide, liquide, gazeuse) intervenant lors d'une explosion sous-marine implique de bien tenir compte des interactions entre les différents milieux et des traitements particuliers à chaque interface pour reproduire le plus fidèlement possible les phénomènes physiques mis en jeu.

Des difficultés supplémentaires apparaissent lorsque l'on veut traiter les explosions sous-marines en champ proche. Dans ces configurations, les méthodes numériques utilisées doivent permettre de prendre en compte les non-linéarités matérielles, géométriques et de contact. En contrepartie, une solution numérique suffisamment précise s'obtient au détriment du temps de calcul. En effet pour des applications industrielles courantes, la durée des calculs s'étend de quelques heures à plusieurs jours sur les moyens informatiques actuels en fonction des cas traités.

Une autre source de difficulté réside dans le caractère stratégique et confidentiel du sujet qui intéresse en premier lieu les départements de défense nationaux à travers le monde. Ces derniers sont généralement les seuls à disposer des moyens et des compétences nécessaires à la mise en place des campagnes expérimentales (manipulation des explosifs, bassins de détonique, barges de chocs et navires instrumentés, etc...). Ce dernier point explique le peu de résultats expérimentaux disponibles dans la littérature ouverte pour le domaine naval militaire.

On doit cependant nuancer ce constat. Le contexte géopolitique de la planète évolue rapidement et, depuis les attentats du 11 septembre 2001 contre le World Trade Center aux États-Unis, le Monde à pris conscience de la fragilité des intérêts privés face à d'éventuelles attaques terroristes de grande envergure. Parmi les sources potentielles d'attentats, les explosions aériennes ou sous-marines constituent un axe de recherche majeur. Désormais les explosions, comme thématique de recherche, intéressent non plus seulement les forces militaires, mais de plus en plus les grands groupes industriels dont les installations, en certaines régions du Globe, peuvent se trouver menacées par d'éventuelles attaques ciblées. Cette remarque est illustrée sur la figure 1 qui montre les effets d'agressions terroristes par embarcation suicide à l'encontre d'un destroyer américain et d'un pétrolier français au début des années 2000 au large des côtes yéménites.

Ce préambule permet d'introduire les travaux menés dans le cadre de la thèse qui porte sur la modélisation numérique des explosions sous-marines à proximité des structures navales immergées.



(a) USS Cole (2000)



(b) Limburg (2002)

FIGURE 1 – Exemples d'endommagements structurels suite à des agressions terroristes perpétrées par des embarcations suicides contre des navires militaires et civils ; (a) destroyer américain USS Cole le 12 octobre 2000 à Aden (Yémen), (b) pétrolier français Limburg le 6 octobre 2002 au terminal de Ash Shihr (Yémen).

Chapitre 1

Introduction générale

DANS un contexte de réduction des essais, des efforts et progrès réels dans les techniques de modélisation et de simulations par calculs de structures en dynamique rapide ont été accomplis, précisément dans les applications particulières concernant le comportement des structures navales aux explosions sous-marines. Outre l'aspect coût, l'intérêt de la simulation numérique par rapport aux essais est de faciliter l'accès à des informations nouvelles avec une précision, une rapidité et une fiabilité accrues pour des configurations diverses ; explosions lointaines ou rapprochées, en eau profonde ou près de la surface.

Une explosion sous-marine conventionnelle donne naissance, d'une part, à une onde de choc se propageant quasiment à la célérité du son dans l'eau, et d'autre part, à une bulle de gaz (produits de la détonation) qui remonte vers la surface en pulsant. Actuellement, les scénarios d'explosions dans lesquels la charge est située suffisamment loin du navire sont correctement simulés en tenant compte des effets combinés du choc et de la bulle. Dans ces configurations, que l'on qualifie de **champ lointain**, la bulle de gaz migre en direction de la surface libre sans que son mouvement soit perturbé par la présence du navire.

Par contre, lorsque la charge explose à proximité des structures, un effet d'attraction lié à la dissymétrie de l'écoulement de l'eau s'opère entre la bulle de gaz et la structure, allant dans certains cas, jusqu'à provoquer le collapse de la bulle contre la paroi. Dans ce cas, que l'on qualifie de **champ proche**, un jet de particules fluide orienté vers la structure se forme au moment du collapse de la bulle et peut provoquer localement des dommages relativement importants qui s'ajoutent aux effets de l'onde de choc seule. Au réel, des ruptures à grande échelle des bordés de navires, voire des double-coques, sont constatées (comme le montre la figure 1 en préambule). Elles peuvent mener, dans les cas pires, à la ruine complète de la poutre navire et au naufrage de celui-ci, comme l'illustre bien la figure 1.1 montrant les dommages provoqués par le torpillage d'un navire déclassé australien, le destroyer d'escorte Torrens.

Ces phénomènes, qui mettent en jeu des interactions complexes entre les fluides et les structures, ne sont pas simulés aujourd’hui avec une précision telle que l’on puisse remettre en cause l’intérêt des expérimentations. Ils constituent de ce fait une voie d’exploration intéressante qui contribue à l’amélioration des méthodes numériques actuelles, ce à quoi s’attachent ces travaux de thèse.

Ces derniers requièrent un savoir-faire dans les domaines de la mécanique des solides, la mécanique des fluides, et la mise en œuvre de méthodes numériques spécifiques pour modéliser l’interaction fluide-structure. A ce titre, ils s’appuient sur l’expertise mise en place autour d’un partenariat entre le Laboratoire de Mécanique de Lille (LML), la société d’ingénierie PRINCIPIA (Nantes) et DCNS Ingénierie (Lorient). Par ailleurs, la Direction Générale de l’Armement (DGA), a apporté son concours tout au long des travaux en donnant son avis d’expert dans le domaine de la détonique sous-marine et des effets sur les structures.



FIGURE 1.1 – Exemple de ruine complète de poutre navire suite au torpillage du destroyer d’escorte australien *Torrens* (2700 T) dans le cadre d’un tir d’essai de la torpille Mark-48 (≈ 500 kg TNT) le 14 juin 1999, lancée depuis le sous-marin HMAS *Farncomb* de la classe *Collins*.
[Source : US Navy]

1.1 Revue de travaux antérieurs

Les phénomènes qui accompagnent l'explosion d'une charge sous-marine et la propagation d'une onde de choc dans le milieu fluide ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche dans le passé. Outre l'onde de choc primaire susceptible d'impacter les structures environnantes, la détonation de l'explosif produit des gaz résiduels qui forment, dès les premiers instants suivant l'explosion, une bulle de gaz adoptant un comportement dynamique oscillatoire interagissant avec le fluide environnant et les obstacles éventuels ; structure déformable, surface libre et fond marin. La somme des travaux expérimentaux, théoriques et numériques, qui ont porté sur l'analyse de ces phénomènes est très vaste. Par souci de clarté, on a catégorisé les investigations antérieures par thèmes, de sorte que les références bibliographiques sont présentées de deux façons différentes à la fin de ce rapport ; références classées par thèmes en page 217, et références non-classées en page 239.

1.1.1 Des investigations théoriques et empiriques initiales ...

Le processus suivant lequel se déroulent les explosions sous-marines a été étudié systématiquement à partir de 1940, à commencer par le grand nombre de recherches indépendantes qui ont été effectuées pendant la Seconde Guerre Mondiale en Angleterre, au Canada et aux États-Unis. Dans ce cadre, on doit citer le recueil de travaux américains et britanniques publié en 1950 « *Underwater explosion research - A compendium of British and American reports* ». Cet ouvrage incontournable est une compilation de l'essentiel des observations expérimentales et formulations théoriques disponibles à l'époque concernant les explosions sous-marines. Répartis en trois tomes, ces travaux portent respectivement sur l'étude de l'onde de choc sous-marine [Hartmann et Hill, 1950a], de la bulle issue des produits de détonation [Hartmann et Hill, 1950b], et des effets sur les structures [Hartmann et Hill, 1950c]. De manière plus concise, ces travaux ont été consignés dans l'ouvrage remarquable de Cole [Cole, 1948] qui fait encore aujourd'hui référence dans le domaine¹. Au cours de cette période, les performances des explosifs ont été évaluées en eau libre pour aboutir à des relations empiriques qui permettent de paramétrer les chargements hydrodynamiques [Coles et al., 1946], [Arons et Yennie, 1948] et la dynamique de bulle [Swift et Decius, 1948], [Snay, 1962b]. On trouve notamment dans [Swisdak, 1978] une compilation des paramètres applicables aux explosifs courants. En complément de ces travaux relativement précis, on peut utilement se référer à [Schneider et al., 1946], [Snay, 1957a] et [Holt, 1977] qui passent en revue l'ensemble des processus accompagnant une explosion sous-marine et permettent ainsi d'en améliorer la compréhension globale.

A la lecture de ces références, on s'aperçoit que l'étude des différents aspects du chargement hydrodynamique issu d'explosions a constitué une partie importante du travail aux origines. Ce n'est qu'un aspect des choses car, en parallèle, l'effort s'est évidemment porté sur l'étude de la réponse des struc-

1. Dans ces travaux de thèse, on se réfère systématiquement à l'édition de 1965 [Cole, 1965].

tures navales à ces chargements. Qu'il s'agisse de sous-marins ou de bâtiments de surface, l'objectif est effectivement de garantir des conceptions robustes en environnement militaire et d'en évaluer la vulnérabilité face aux différents types d'agressions. Dans ce cadre, on peut notamment citer [Kennard, 1941], [Fox, 1947] et [Keil, 1961] qui décrivent les différents modes d'endommagement des structures navales en fonction des agressions sous-marines.

Pour l'étude de la réponse transitoire des structures, on distingue généralement (i) les effets locaux liés à l'interaction de l'onde de choc primaire avec les éléments structuraux, et (ii) les effets globaux issus de la mise en mouvement du navire provoquée par les pulsations de bulle. En fonction de la configuration et de la nature des phénomènes étudiées, on peut généralement analyser les effets (i) et (ii) pris séparément.

(i) Les effets localisés se situent dans la gamme des hautes fréquences et peuvent être circonscrits à des éléments structuraux, d'architecture plus ou moins simples, à commencer par les tôles de bordé. Ainsi Kennard pose les bases théoriques du problème en présentant l'étude systématique de l'interaction du choc sous-marin avec une plaque déformable [Kennard, 1944]. Il s'appuie sur des travaux antérieurs [Butterworth, 1924], [Butterworth, 1942] et [Taylor, 1942] en reprenant notamment les hypothèses de Taylor [Taylor, 1941b] pour la description de l'IFS² et la détermination de l'énergie cinétique maximale transmise à la structure dans les premiers instants de l'interaction. Le problème revient alors à évaluer l'état de déformation résiduel suite au choc après transfert de l'énergie cinétique maximale en énergie de déformation. Dans ces théories, les auteurs insistent sur la nécessité de prendre en compte le phénomène de cavitation. Celui-ci apparaît, d'une part, à l'interface fluide-structure lorsque la plaque est mise en vitesse, comme analysé dans [Temperley, 1944], [Temperley et Chambers, 1944] et [Temperley, 1945], et d'autre part, à la surface libre où les ondes incidentes se réfléchissent, ce qui est étudié par [Kennard, 1943a]. Ces considérations sont essentielles pour les navires en surface et deviennent négligeables en profondeur.

Les hypothèses précédentes sont utilisées, aujourd'hui encore, dans le cadre d'analyses théoriques appliquées à des structures élémentaires simples. On peut notamment citer les travaux relativement récents de Rajendran *et al.* [Rajendran et Narasimhan, 2006], [Rajendran et Lee, 2009] pour l'étude des déformations et de la rupture des structures soumises aux explosions sous-marines, en parallèle d'expérimentations menées sur des plaques circulaires et rectangulaires [Rajendran et Narasimhan, 2001a], [Rajendran et Narasimhan, 2001b] et [Rajendran, 2008]. Les coques cylindriques, représentatives de sous-marins à échelle réduite, sont également des structures simples dont le comportement aux explosions est largement étudié. Dans ce cadre on peut mentionner les essais réalisés par Brett *et al.* en Australie sur des coques non-raïdiées [Brett *et al.*, 2000] et [Brett et Yiannakopoulos, 2008], et par [Hung *et al.*, 2009] sur des coques raïdiées.

2. Dans la suite de ce rapport, on utilisera les abréviations IFS et FS, respectivement pour interaction fluide-structure et fluide-structure.

(ii) Concernant les modes globaux de réponses des structures navales, on s'intéresse aux phénomènes basses fréquences qui correspondent au fouettement de la poutre navire lié aux pulsations de bulle (autour de 5 Hertz approximativement). Ils peuvent entraîner la ruine totale de la structure dans la mesure où la réponse de la poutre navire entre en résonance avec l'excitation de bulle. La formulation théorique de ces phénomènes est proposée la première fois par Chertock dans [Chertock, 1952], [Chertock, 1953] et [Chertock, 1964]. Elle est confrontée dans les années suivantes à des résultats d'essais menés sur deux types de maquettes ; un caisson raidi rectangulaire flottant (représentative d'un bâtiment de surface), et une coque cylindrique raidie immergée (représentative d'un sous-marin). Les résultats obtenus sont présentés dans [Chertock, 1970] et confirment la théorie. Celle-ci est reprise par [Hicks, 1972] en discrétisant la poutre navire par éléments finis. L'étude détaillée des phénomènes est réalisée par [Bannister, 1980] puis [Vernon, 1986] en couplant un modèle de bulle formulé en fluide incompressible à un modèle élastique de poutre navire calculé par superposition modale. Plus récemment, la prise en compte de la plastification dans la section de poutre navire est proposée dans [Zong, 2003] et [Zong, 2005] pour décrire l'apparition des modes de ruine.

1.1.2 ... aux méthodes numériques actuelles

L'avènement des méthodes numériques dans la seconde moitié du xx^e siècle, notamment de la méthode des éléments finis, a permis d'étendre le champ des études à des structures plus complexes, représentatives des navires au réel, dans les domaines de la mécanique linéaire et non-linéaire. Si l'on se réfère à [Geers, 1975], les méthodes employées pour modéliser l'IFS, et calculer ainsi la réponse transitoire des structures immergées, sont apparues un peu plus tard. Une revue générale de ces méthodes appliquées aux calculs dynamiques des structures CSD (Computational Structure Dynamics) en réponse aux chocs sous-marins est présentée par [Liang *et al.*, 2001]. Si la modélisation des structures repose essentiellement sur les éléments finis, les techniques utilisées pour représenter le fluide diffèrent considérablement, et, par voie de conséquence, les formulations de l'IFS également. On peut cependant catégoriser ces méthodes comme suit (points 1 à 6 suivants) :

1. Méthode de transfert d'énergie basée sur les hypothèses de Taylor [Taylor, 1941b] dont la formulation théorique est détaillée en Annexe C à partir de l'approximation d'onde plane. Comme évoquée précédemment, cette méthode simplifiée revient à calculer la structure « sèche » après détermination de la vitesse impulsioneuse issue des premiers instants de l'interaction avec le choc sous-marin (voir notamment nos travaux antérieurs [Barras, 2007] sur le sujet). Elle est appliquée avec succès par [Rajendran, 2009] pour des réponses de plaques dans le domaine élastique mais montre ses limites pour des explosions rapprochées où l'énergie de rechargement liée à la fermeture de la zone de cavitation n'est pas prise en compte.
2. Méthode du potentiel retardé (RPF) basée sur la formulation du potentiel retardé de Kirchhoff en fluide acoustique dont les fondements sont présentés en Annexe B. Bien qu'exacte, cette méthode présente néanmoins l'inconvénient d'être non-locale en temps et en espace (équations intégrales-différentielles) et nécessite donc de stocker, en tout point de l'interface fluide-structure, l'ensemble

de l'historique pour pouvoir résoudre le problème aux instants ultérieurs.

Cette formulation présentée par Huang [Huang *et al.*, 1977], et couplée à un code de mécanique des structures par Dyka *et al.* [Dyka et Tamm, 1992], [Dyka *et al.*, 1997], est appliquée à l'étude de l'interaction d'une onde de choc plane avec une coque sphérique déformable [Dyka et Ingel, 1998] dont la solution théorique est fournie par [Huang, 1969].

3. Méthode d'approximation doublement asymptotique DAA (Doubly Asymptotic Approximation) introduite par Geers [Geers, 1971], [Geers, 1978] qui est une généralisation des approximations PWA (Plane Wave Approximation) et VMA (Virtual Mass Approximation) valides respectivement aux très hautes et très basses fréquences. La dérivation de cette formulation proposée par [Felippa, 1980b] montre que la DAA est une approximation de la méthode RPF précédente. Elle est implémentée dans le code de calcul USA [DeRuntz, 1989] en formulation de fluide acoustique pour calculer le champ de pression diffusée, c.-à-d. la somme des termes de pression réfléchi et rayonné. La méthode DAA couplée à la méthode des éléments finis (FEM) pour la réponse structurelle est présentée en Annexe D. On y présente également la réduction des équations couplées FEM-DAA tridimensionnelles au cas scalaire 1D plan, ce qui permet d'interpréter physiquement les deux cas limites PWA et VMA évoqués.

Dans la mesure où cette méthode s'appuie sur des éléments de frontière pour modéliser l'IFS, les temps nécessaires à la modélisation et au calcul sont réduits par rapports à des méthodes qui nécessitent de discrétiser le domaine fluide (comme les points 4 et 6 suivants). Les applications relatives aux explosions sous-marines sur des navires complets sont donc plus facilement mises en œuvre, comme par exemple dans [Liang et Tai, 2006].

4. Méthodes éléments finis (FEM) formulés en fluide acoustique, et basée sur la discrétisation du domaine fluide entourant les structures. Dans ces méthodes, passées en revue par [Everstine, 1997], le fluide peut être formulé en pression [Everstine, 1976], déplacement, potentiel des déplacements ou potentiel des vitesses [Everstine, 1981], et des termes de couplage entre les variables fluide et structure permettent de traduire l'interaction forte qui s'opère entre les deux milieux. En raison des hypothèses de linéarité faites pour le fluide, les inconnues du problème peuvent concerner indifféremment le champ de pression totale ou diffusée.

Parmi les applications les plus marquantes, on peut mentionner les études récentes réalisées par [Zhang *et al.*, 2011b], [Qiankun et Gangyi, 2011] et [Zhang *et al.*, 2011a]. Elles s'appuient sur la modélisation complète de navires pour en étudier la réponse aux chocs en décrivant l'explosion sous-marine à l'aide de modèles combinant les effets du choc primaire et de la bulle suivant le modèle de [Geers et Hunter, 2002].

5. Méthodes d'éléments de frontière BEM (Boundary Element Method) où seules les discontinuités de contact sont discrétisées. Dans les problèmes d'explosions sous-marines, les interfaces matérielles concernent essentiellement la surface de la bulle et l'interface fluide-structure. Dans certaines configurations, la surface libre ou le fond marin doivent également être pris en compte. Suivant l'hypothèse de fluide incompressible formulé en potentiel des vitesses, l'écoulement satisfait

l'équation de Laplace³ qui est résolue aux frontières du domaine après application du théorème de Green. Les variations de pression au niveau des interfaces sont décrites à l'aide de l'équation de Bernoulli instationnaire. Dans les applications relatives aux explosions sous-marines, la pression des gaz est supposée homogène dans la bulle et varie en fonction du volume par une loi appropriée (généralement de gaz parfait).

À partir de développements 2D axisymétrique et 3D, Wilkerson montre la capacité de la méthode BEM à reproduire le comportement des bulles d'explosions en champ libre. Il présente ses travaux dans [Wilkerson, 1993] et [Wilkerson, 1992], en confrontant notamment ses résultats numériques à ceux issus d'expérimentations menées par [Swift et Decius, 1948]. Sous l'effet du champ gravitationnel, il met également en évidence la formation d'un jet liquide qui se développe au moment du collapse de la bulle. Celle-ci passe alors d'une forme sphérique à une forme toroïdale. Ce changement de topologie de l'interface, lié à la gravité, complique le traitement numérique par la BEM comme étudié dans [Best, 1991] et [Best, 2002]. En outre, la présence de frontières matérielles comme une paroi rigide ou la surface libre perturbent l'écoulement autour de la bulle qui se déforme alors sous l'effet combiné de l'attraction terrestre et de ces discontinuités matérielles. Pour lever les difficultés liées au changement topologique de la bulle, un traitement numérique particulier au moment du collapse est nécessaire. Il est implémenté dans les formulations 3D actuelles en s'appuyant sur les développements proposés par [Zhang *et al.*, 2001] à partir des travaux antérieurs de [Wang *et al.*, 1996]. Ces développements ont permis de modéliser le comportement dynamique des bulles d'explosion à proximité d'interfaces matérielles. On peut ainsi mentionner les travaux de [Harris *et al.*, 1999], [Pearson *et al.*, 2004a] et [Brujan *et al.*, 2005] qui étudient l'influence d'une frontière rigide. Les phénomènes occasionnés par la présence de la surface libre sont quant à eux analysés dans [Wang *et al.*, 1996] et [Pearson *et al.*, 2004b]. Les déformations de bulles à proximité de corps rigide, mobile ou fixe, sont simulées dans [Chahine *et al.*, 2003] [Klaseboer *et al.*, 2005b] [Zhang *et al.*, 2008b].

Ces études portent uniquement sur la dynamique de bulle sans tenir compte de l'IFS, mais la réponse des structures aux sollicitations de bulles d'explosions peut également être étudiée en couplant par exemple la BEM et la FEM au niveau de l'interface FS. Dans ce cadre on peut citer les travaux de [Kalumuck *et al.*, 1995] et [Chahine et Kalumuck, 1998] utilisant les codes 2D et 3D_{DYN}FS de Dynaflow Inc. couplés aux codes NIKE2D et 3D pour étudier l'influence réciproque de la bulle et d'une structure déformable. Suivant une formulation équivalente, [Milligan et Zilliacus, 1992] et [Duncan *et al.*, 1996] présentent des résultats sur une coque sphérique déformable. De même, la BEM est couplée au code de structures PAM-CRASH dans [Klaseboer *et al.*, 2005a] pour comparer les résultats numériques à des essais d'explosions sur plaques circulaires. Pour la réponse de struc-

3. Les hypothèses qui sous-tendent cette formulation, à savoir un écoulement isovolume et irrotationnel, sont généralement valides durant la majeure partie du cycle de pulsation de bulle d'explosion. L'hypothèse d'incompressibilité est vérifiée à l'aide du nombre de Mach ($M = u/c < 0.3$) qui, à la surface de la bulle, est très inférieur à 1, hormis durant la phase initiale de transmission du choc primaire dans l'eau. L'hypothèse d'écoulement laminaire est vérifiée à l'aide du nombre de Reynolds ($Re = ud/\nu \gg 1$) en prenant par exemple le rayon de bulle comme dimension caractéristique de l'écoulement.

tures navales aux excitations de bulle, on peut citer les travaux récents de [Zhang *et al.*, 2008a] et [Zhang et Yao, 2008] qui portent sur l'analyse d'ensemble d'un bâtiment de surface grâce à la BEM couplée à la FEM.

6. Les méthodes numériques CFD (Computational Fluid Dynamics) multi-matériaux sont utilisées pour simuler l'ensemble des processus hydrodynamiques allant de la détonation de l'explosif jusqu'à la dynamique de bulle en passant par la propagation des chocs dans le fluide. L'intérêt de ces méthodes implémentées dans les hydrocodes⁴ actuels porte essentiellement sur leurs capacités à modéliser les non-linéarités liées au comportement des matériaux, aux grandes déformations et grands déplacements, et aux suivis d'interfaces matérielles complexes. L'IFS est généralement prise en compte soit (i) par couplage externe avec un code CSD, soit (ii) par développement d'algorithmes spécifiques internes au code qui permettent d'imposer les conditions de couplage entre l'écoulement du fluide et la vitesse de la structure.

(i) Pour illustrer le premier type de couplage, on peut citer les travaux de Link [Link *et al.*, 2002] [Link *et al.*, 2003] utilisant le code CFD Eulérien Chinook couplé au code LS-DYNA pour étudier la réponse dynamique de plaques circulaires soumises à des explosions sous-marines en champ proche. Un autre exemple concerne le développement par [Swegle et Attaway, 1995] d'un couplage spécifique entre la méthode sans maillage SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics) et le code éléments finis PRONTO [Taylor et Flanagan, 1987]. Ils évaluent ainsi les capacités de la méthode SPH à simuler les problèmes d'IFS appliqués à la détonique sous-marine aux temps courts mais identifient des difficultés numériques aux temps longs concernant la dynamique de bulle. De même, si l'on s'intéresse aux résultats présentés dans [Liu *et al.*, 2002] et [Liu *et al.*, 2003], il semble que la méthode SPH est bien adaptée à la simulation des processus rapides que sont la détonation et la propagation des chocs dans les fluides, mais reproduit difficilement la dynamique de bulle caractérisée par des écoulements plus lents du type fluide incompressible.

(ii) Parmi les implémentations des équations de l'IFS dans un code unique, évitant ainsi d'avoir recours au couplage externe de codes, le Couplage Euler-Lagrange (CEL) est très utilisé dans les hydrocodes actuels. Il permet notamment de modéliser directement l'IFS pour la réponse des structures aux chocs sous-marins comme étudié dans [Webster, 2007] et [Kim et Shin, 2008]. La prise en compte des non-linéarités matérielles et géométriques en CSD permet également de représenter les modes de rupture dans les structures couplées aux chargements hydrodynamiques provoqués par les effets combinés du choc et du collapse de la bulle. À ce titre, les comparaisons calculs/essais réalisées par [Yiannakopoulos *et al.*, 2008] et [Riley *et al.*, 2010] pour des explosions rapprochées sur plaques circulaires et rectangulaires en sont une bonne illustration.

4. Par hydrocodes on entend la définition donnée par Benson dans l'introduction de [Benson, 1992a] : « *A hydrocode may be loosely defined as a code for solving large deformation, finite strain, transient problems that occur on a short time scale* ». Cette acception relativement large permet d'englober les descriptions eulériennes et lagrangiennes (ou mixte ALE) de l'écoulement pour différents types de discrétisation spatiale (éléments finis, volumes finis, différences finies, méthodes sans maillages, etc...).

En complément de l'exposé des différentes méthodes, on doit insister sur une non-linéarité importante à prendre en compte, en champ proche comme en champ lointain. Celle-ci concerne la cavitation du fluide liée à la mise en vitesse de la paroi au moment du choc et à la réflexion des ondes incidentes sur la surface libre. Pour cela, un élément fini acoustique cavitant, dit CAFE (Cavitating Acoustic Finite Element), a été développé par [Felippa et Deruntz, 1982] à partir des travaux de Newton [Newton, 1980b]. Ce nouvel élément, formulé en potentiel des déplacements, inclut une relation bilinéaire entre la pression et la masse volumique qui permet de modéliser le seuil de coupure à pression de vaporisation constante représentatif du phénomène physique. Ces développements sont validés dans [Felippa et Deruntz, 1984] par comparaison avec la solution exacte 1D plane d'un choc impactant une plaque, obtenue par [Bleich et Sandler, 1970] grâce à la méthode des caractéristiques. L'étude décrite par [Newton, 1981], qui concerne un choc à front raide impactant une coque cylindrique infiniment longue, fournit un autre élément de validation. Bien adaptés à des formulations du type (4), les éléments CAFE peuvent également être utilisés conjointement à la méthode DAA (3), en modélisant autour de la structure immergée une couche de fluide, dont l'étendue doit être suffisante pour circonscrire la zone de cavitation. Dans ce cas, les équations de la DAA sont appliquées à la frontière extérieure du fluide. Cette méthode est notamment utilisée dans le cadre de calculs de tenue aux chocs des bâtiments de surface, comme l'illustrent bien les travaux menés par l'équipe du Professeur Young S. Shin aux États-Unis. L'étude qui est décrite dans [Shin, 2004], vise à reproduire la campagne d'essais aux chocs sous-marins menés par l'U.S. Navy sur le destroyer USS Winston S. Churchill (DDG81) de la classe Arleigh-Burke en juin 2001. La mise en œuvre décrite dans [Schneider, 2003] et [Didoszak, 2004] s'appuie notamment sur la modélisation du navire complet et d'une partie du fluide entourant le navire. Pour limiter les inconvénients liés à l'utilisation d'éléments CAFE⁵, des éléments finis spectraux, dits CASE (Cavitating Acoustic Spectral Element), ont été récemment formulés par [Sprague et Geers, 2004]. Ils sont enrichis en ordre-p par rapport aux éléments CAFE en remplaçant les fonctions de base bilinéaires par des polynômes de Legendre d'ordres élevés. Ils sont mis en œuvre dans le cadre d'une étude théorique sur un navire de surface dans [Sprague et Geers, 2006].

On ne peut clôturer ce tour d'horizon des méthodes numériques disponibles pour modéliser les explosions sous-marines et les phénomènes qui s'y rapportent, sans faire référence à [Wardlaw, 1998] à [Mair, 1999]. Ces derniers recensent en effet un grand nombre de cas tests utiles pour qualifier et valider les développements numériques dans le domaine des explosions sous-marines :

- * Dans [Wardlaw, 1998], 19 cas tests sont proposés, concernant la propagation des chocs et le traitement numérique des interfaces en mécanique des fluides. Leur évaluation repose sur des solutions analytiques exactes ou des solutions numériques qui ont convergé.
- * Dans [Mair, 1999], 39 cas tests sont recensés, portant sur la réponse des structures aux explosions en IFS et sur des problèmes hydrodynamiques liés essentiellement aux ondes de choc et

5. Ces inconvénients sont essentiellement dus au niveau d'enrichissement en ordre-h nécessaire pour modéliser correctement les propagations d'ondes et l'IFS, et donc les temps de calculs CPU qui en découlent.

dynamiques de bulles. L'évaluation repose sur 21 solutions analytiques et 18 résultats empiriques. Outre la collection importante de références utilisées (environ 150), ce travail de recensement présente l'intérêt majeur de catégoriser les problèmes traités. On peut simplement regretter qu'aucun n'a trait à la modélisation des ondes de détonation.

1.1.3 Applicabilité aux explosions sous-marines en champ proche

À partir de l'exposé précédent, on peut ajouter que les méthodes du type RPF, DAA et FEM formulées en fluide acoustique sont bien adaptées pour les problèmes d'explosion en champ lointain, c.-à-d. lorsque les perturbations dans le fluide sont suffisamment faibles pour que l'on puisse linéariser les équations locales de conservation. La BEM quant à elle, formulée en fluide potentiel, permet de modéliser correctement les écoulements incompressibles liés à la dynamique de bulle et aux grands mouvements d'interface (FS et surface libre). En outre, le couplage de ces méthodes à des codes CSD permet de simuler la réponse dynamique des structures impactées.

En contrepartie, toutes ces méthodes s'appuient sur des hypothèses restrictives pour les fluides, qui limitent leur champ d'application. D'un côté, les formulations du type fluide acoustique ne permettent pas de simuler les écoulements qui s'opèrent autour des grands mouvements d'interfaces matérielles. D'un autre côté, les formulations du type écoulement potentiel ne sont pas adaptées aux calculs de propagation des ondes de choc en milieu explosif ou inerte. En outre, elles deviennent compliquées à mettre en œuvre, voire inopérantes, lorsque la topologie des frontières est fortement perturbée ; jet liquide perforant la surface de la bulle de gaz au moment de son effondrement, déchirure de la structure et naissance de discontinuités au niveau de l'interface FS.

De ce fait, les méthodes numériques traditionnelles ne permettent pas de modéliser avec une précision suffisante les phénomènes physiques liés aux explosions sous-marines en champ proche. Pour cela, des méthodes de couplage CFD-CSD, permettant en outre de modéliser les interfaces multi-matérielles dans les fluides, doivent être utilisées. Ces remarques introduisent les objectifs assignés à ces travaux de thèse et la méthodologie choisie pour y répondre.

1.2 Objectifs

Le but recherché dans cette thèse est de développer et mettre en œuvre les méthodes numériques permettant de simuler complètement les effets provoqués par l'explosion d'une charge sous-marine située dans l'environnement immédiat d'un navire. Dans le domaine naval militaire, ce type de scénario est rencontré pour des agressions conventionnelles par torpille et mine explosant à proximité. Les attaques terroristes par embarcation suicide constituent en outre des menaces asymétriques qui peuvent

entrer dans le champ d'application de ces travaux ⁶.

Suite aux développements récents des codes de calcul des structures et de mécanique des fluides, et au vu des ressources informatiques disponibles, la simulation des écoulements multi-matériaux (bulle de gaz, eau environnante) et des interactions complexes entre les fluides et la structure deviennent envisageables dans certaines configurations.

L'objectif fixé dans le cadre de la thèse vise donc à élaborer, mettre en œuvre et qualifier, à partir de données expérimentales et de formulations théoriques, un outil de simulation numérique du comportement de structures navales aux explosions sous-marines en champ proche. L'objectif sous-jacent est de proposer une méthodologie cohérente et applicable au niveau industriel en justifiant les hypothèses prises, tout en précisant leurs domaines de validité.

1.3 Méthodologie

La méthode éléments finis utilisée pour la thèse est basée sur la formulation Euler-Lagrange Arbitraire Multi-Matériaux MMALE (Multi-Material Arbitrary Lagrangian-Eulerian) développée dans le code commercial tridimensionnel LS-DYNA, ainsi que le couplage Euler-Lagrange (CEL) pour modéliser l'IFS. Dans les problèmes d'explosions sous-marines, les échelles de temps et d'espace sont très différentes suivant que l'on considère la détonation de l'explosif (de l'ordre de μs et cm), la propagation de l'onde de choc (de l'ordre de ms et m), ou la dynamique de bulle (de l'ordre de 100 ms et m). Or, suivant le schéma d'intégration temporelle explicite que l'on utilise, le pas de temps est très petit, de l'ordre de la microseconde, pour assurer la stabilité numérique du calcul (suivant la condition de Courant-Friedrichs-Lewy, dite CFL). Ainsi le temps CPU nécessaire pour simuler quelques périodes de pulsation de la bulle peut atteindre des semaines, voire des mois, pour un problème tridimensionnel, ce qui est absolument prohibitif en ingénierie. Afin de remédier à ces difficultés, on a retenu une méthodologie qui s'articule autour de deux points :

1. Il s'agit tout d'abord de développer au sein du code LS-DYNA, la méthode MMALE pour les problèmes bidimensionnels axisymétriques. Cette méthode peut être directement utilisée pour les problèmes d'explosion sous-marine, sans interaction avec les structures, dans la mesure où ces problèmes possèdent, pour la plupart, un axe de symétrie de révolution (généralement l'axe d'application de la gravité). Cette méthode 2D permet, dès lors, de mieux appréhender la physique relative aux différents phénomènes que sont, la détonation, l'onde de choc, et la dynamique de bulle, en se basant sur des finesses de maillage adaptées à chaque problème. Elle est validée en utilisant les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature ou à partir de formulations théoriques spécifiques que l'on s'est réapproprié dans le cadre de la thèse. Pour les problèmes

6. Néanmoins, l'objectif visé ici n'est pas de modéliser ce type d'agression, même si la méthode le permet a priori, dans la mesure où des expérimentations au préalable sont indispensables pour améliorer la compréhension des phénomènes.

d'IFS axisymétriques, la méthode de couplage tridimensionnelle implémentée dans le code LS-DYNA est également adaptée aux cas bidimensionnels.

2. La seconde étape consiste à développer au sein du programme, des procédures de projection de résultats qui permettent de résoudre le problème par phases successives, sur des grilles 2D et 3D différentes. Ainsi, les résultats axisymétriques issus du calcul préliminaire de détonation et d'onde de choc avant IFS, sont projetés sur une grille 2D ou 3D pour continuer le calcul de propagation de l'onde de pression et son interaction avec les structures déformables.

Ces implémentations sont disponibles dans la version actuelle 5.1 du code LS-DYNA. L'élément essentiel qui motive ces développements est de pouvoir adapter la finesse de grille au phénomène physique, sans être pénalisé par des pas de temps trop petits, là où la solution ne le nécessite plus. Par exemple, pour être correctement représentée, l'onde de détonation nécessite beaucoup d'éléments au sein de l'explosif en raison du fort gradient de pression au passage de l'onde, dont la constante de temps est par ailleurs très faible. Dès lors que le choc est transmis au fluide et qu'il se propage dans le milieu, la finesse de maillage autour du point source peut être adaptée pour ne pas pénaliser le pas de temps de calcul sur l'ensemble de la grille. Le raisonnement est le même pour la phase suivante, lorsque l'interaction de l'onde de choc avec la structure est terminée. En effet, la dynamique de bulle, caractérisée par des temps beaucoup plus longs et un écoulement quasi-incompressible, ne nécessite pas un maillage aussi fin pour être correctement représentée.

1.4 Plan général

La suite du mémoire s'articule autour de plusieurs chapitres dont l'enchaînement est le suivant. Le chapitre 2 présente la thématique générale des explosions sous-marines. Elle est abordée en décrivant notamment les principaux phénomènes physiques qui les caractérisent. Certaines grandeurs et notions essentielles sont ainsi introduites, et sont utilisées tout au long du mémoire. On consacre ensuite le chapitre 3 à la description de la méthode numérique sur laquelle repose nos travaux. La méthode de résolution Euler-Lagrange avec prise en compte du couplage fluide-structure est présentée en détaillant certains aspects de l'implémentation. Les chapitres 4, 5 et 6 suivants, portent respectivement sur l'étude séparée des mécanismes de détonation, de choc, et de bulle. On propose cette démarche de façon à dégager les phénomènes qui permettent de définir la méthodologie de résolution du problème complet. L'étude systématique, théorique et numérique, de chaque phénomène pris séparément permet de construire cette méthodologie. Au terme de ces travaux, on présente dans la seconde partie du chapitre 6, l'étude d'explosions en champ proche avec prise en compte de l'interaction fluide-structure. Pour ce cas d'application, la comparaison des résultats numériques aux mesures expérimentales permet de valider nos choix méthodologiques.

Chapitre 2

Description phénoménologique des explosions sous-marines

On ne peut débiter la description de ces travaux de thèse sans présenter de façon générale les différents phénomènes qui caractérisent les explosions sous-marines. Le domaine d'application concerne les agressions sous-marines par moyens conventionnels rencontrés dans le domaine naval militaire, qu'il s'agisse des armes de type mines, grenades ou torpilles. On se place donc volontairement hors du cadre des explosions nucléaires qui constituent un moyen d'action à très longue distance et ne font pas l'objet de ces travaux.

On expose tout d'abord quelques généralités ayant trait à la configuration d'étude classique, en s'intéressant aux mécanismes de formation du choc sous-marin et de la bulle de gaz issus des produits de détonation. Dans un second temps, on présente la répartition des énergies entre ces différents mécanismes, ce qui permet d'appréhender leur importance relative dès qu'il s'agit d'étudier la réponse des structures à ces sollicitations extrêmes. La description des principes de similitude ayant trait aux dynamiques de choc et de bulle permet ensuite de caractériser les différents phénomènes et les principales grandeurs physiques qui y sont liés. Ces lois générales dépendent directement des caractéristiques de l'explosif et permettent d'évaluer l'efficacité d'une arme pour une cible et un rayon d'action donnés. Dans ce cadre, on traduit généralement l'agression en terme de facteur de choc qui représente une mesure de la sévérité de l'explosion face à la tenue mécanique des structures.

Pour clôturer ce chapitre, on illustre les phénomènes liés à l'explosion d'une charge TNT de 500 kg située à 50 m de profondeur sous la surface libre, et à une distance de 50 m d'une structure immergée. Ce cas d'application permet de fixer les ordres de grandeurs associés à la physique du choc et de la bulle des gaz résiduels.

2.1 Généralités

La figure 2.1 illustre en deux dimensions la configuration générale d'un problème d'explosion sous-marine. On appelle « point source » la localisation initiale du centre de la charge au moment de l'explosion. Le « *standoff point* » correspond au premier point de la structure impacté par l'onde de choc. On note r la distance de tir correspondant à la distance initiale du point source au *standoff point*. Le profil de pression $p_I(t)$ désigne l'onde de choc incidente provenant de l'explosion sous-marine, et $\bar{p}_I(t)$ la pression incidente au niveau du *standoff point*.

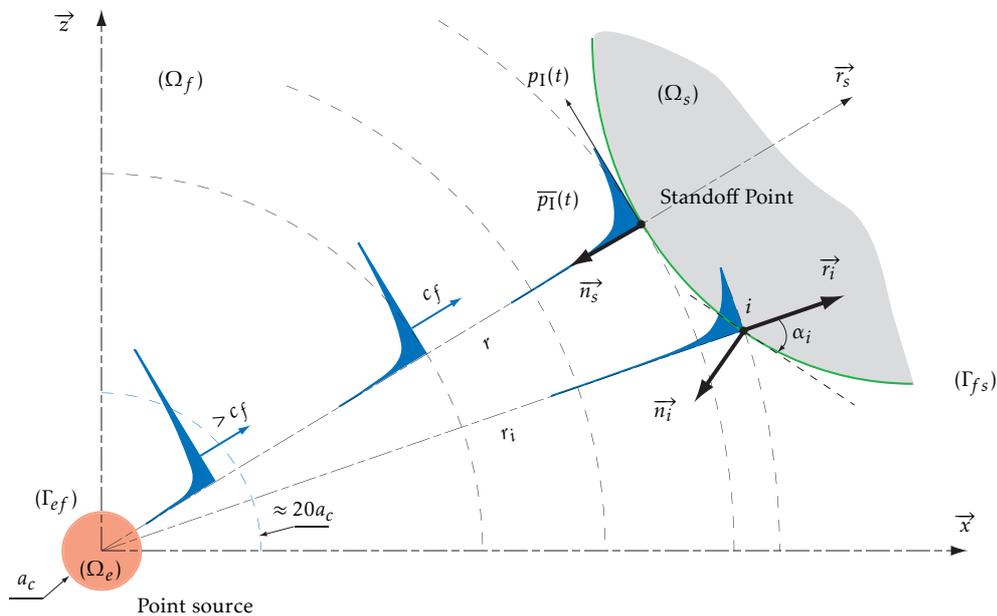


FIGURE 2.1 – Configuration générale d'un problème d'explosion sous-marine

Les charges employées dans l'agression sous-marine de navires fonctionnent généralement par détonation, c'est-à-dire que la libération soudaine d'une grande quantité d'énergie de nature chimique s'effectue au passage d'une onde explosive dans le matériau constitutif de la charge (domaine Ω_e), et ce, à une vitesse et des pressions élevées qui dépendent grandement de la nature même de l'explosif utilisé (de l'ordre de 20000 MPa, 6500 m/s et 3000 °C pour la tolite). La pression atteinte dans l'onde ne doit pas être confondue avec celle de la bulle des gaz résiduels se formant après l'explosion et avant la détente.

Lorsque l'onde de détonation arrive à la frontière externe de l'explosif Γ_{ef} , une onde de choc est transmise dans le domaine fluide environnant Ω_f dont la vitesse, égale à plusieurs fois la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans l'eau (régime supersonique), décroît très rapidement pour se stabiliser à la célérité du son dans l'eau ($c_f = 1500$ m/s) après un parcours très court de l'ordre de 20 à 25

fois le rayon a_c de la charge. Pendant cette durée du parcours, il y a dégradation d'énergie, puis celle-ci se stabilise au fur et à mesure que l'onde de choc tend vers la vitesse du son. On parle alors d'onde de choc primaire.

L'onde de choc primaire en pleine eau est caractérisée par une montée de la pression quasi-instantanée (de l'ordre de la microseconde) suivie d'une baisse de pression qui peut être assimilée, en première approximation, à une simple exponentielle décroissante de la forme :

$$\begin{cases} p_I(t) = 0 & , \quad t < 0 \\ p_I(t) = p_m e^{-t/\theta} & , \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où p_m est la pression maximale et θ la constante de temps qui caractérise l'explosion. Comme on le voit plus loin, ces deux grandeurs dépendent exclusivement de la charge explosive et de la distance du point considéré à la charge. La grandeur temporelle θ caractérise la durée de l'onde de choc, et on note qu'à l'instant $t = \theta$, la pression est égale à p_m/e soit environ le tiers de la pression maximale. En raison de la forme sphérique de l'onde de choc, le pic de pression p_m décroît dans le fluide dû au terme de divergence géométrique.

Les gaz résiduels donnent naissance à une bulle qui va croître en eau libre. Durant cette phase de croissance, la pression interne diminue à mesure que le volume augmente. A la recherche d'un équilibre avec le milieu environnant, c'est-à-dire avec la pression hydrostatique, la bulle adopte un comportement oscillatoire assimilable à celui d'un système masse-ressort initialement comprimé. La dynamique de bulle crée alors des mouvements d'eau alternatifs de flux et de reflux et les phases de contraction maximale génèrent des ondes de surpression secondaires dans le fluide, d'amplitude moins élevée que l'onde de choc primaire mais de durée plus longue. Un phénomène de migration verticale de la bulle en direction de la surface libre est généralement observé. Il est dû à la poussée hydrostatique s'exerçant sur la bulle. Ce mouvement n'est pas linéaire en fonction du temps et dépend des oscillations de la bulle. La migration vers la surface libre est en effet plus rapide autour des phases de contraction maximale, et beaucoup plus lente pendant les phases d'expansion. On note également une diminution du rayon maximal de la bulle au fil des oscillations, cela est dû aux pertes d'énergie lors des phases de contraction maximale. Il est important de signaler que ce comportement dynamique de bulle peut être grandement perturbé par la présence d'obstacles (paroi rigide, structure déformable, fond sous-marin) qui modifient les gradients de pression dans le fluide autour de la bulle et peuvent de ce fait jouer le rôle d'attracteurs pour la bulle.

En guise d'illustration, on présente de façon schématique sur la figure 2.2 l'évolution de la pression enregistrée en un point du fluide au cours du temps, ainsi que l'évolution temporelle de la bulle de gaz en eau libre. Les phases d'expansion de la bulle de gaz coïncident avec les maximum dépressionnaires, alors que les phases de contraction émettent des surpressions secondaires dans l'eau. La remontée de la bulle en direction de la surface libre n'est pas linéaire, elle s'accélère par diminution des forces de traînée lorsque la bulle se contracte.

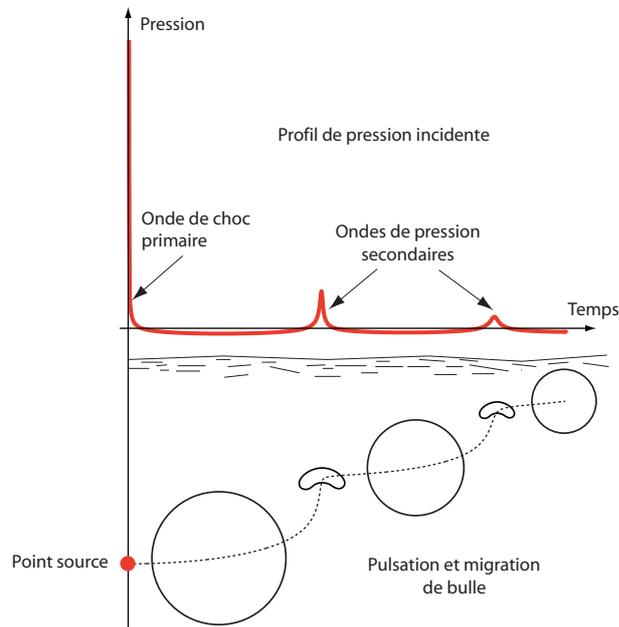


FIGURE 2.2 – Représentation schématique inspirée de [Snay, 1957a] qui présente les évolutions temporelles de la pression (en haut) et de la bulle des gaz résiduels en eau libre (en bas).

2.1.1 Répartition d'énergie

En se basant sur les calculs théoriques de [Arons et Yennie, 1948] menés à partir de relevés expérimentaux issus de [Coles *et al.*, 1946] et [Arons *et al.*, 1948], la part de l'énergie chimique de l'explosion transmise au fluide par l'intermédiaire de l'onde de choc est de l'ordre de 54%, puis elle diminue rapidement pour se stabiliser aux alentours de 30% lorsque la célérité du son est atteinte par l'onde de choc. La part d'énergie restante (environ 50%) est stockée sous forme d'énergie potentielle dans la bulle des gaz résiduels, ce qui va entretenir un régime pulsatoire, moyennant des pertes dans les phases de contraction maximale de la bulle (essentiellement par rayonnement acoustique) correspondant à la recompression des gaz. La figure 2.3 récapitule sous forme schématique les principaux résultats traduits de la référence [Arons et Yennie, 1948]. Ils sont établis pour la détonation d'une charge TNT dont l'énergie spécifique initiale est égale à 4396 J/g (soit 1050 cal/g). La répartition de cette énergie en fonction des différents phénomènes physiques au cours de l'explosion est présentée sur le diagramme.

Les calculs présentés par [Arons et Yennie, 1948] sont d'un intérêt majeur pour quantifier les énergies respectivement liées au choc et à la dynamique de bulle. Ils s'appuient notamment sur le calcul de l'énergie potentielle E_p stockée dans l'eau pendant la pulsation de bulle à son rayon maximum R_{max} (issu des travaux expérimentaux de [Swift et Decius, 1948]) avec :

$$E_p = \frac{4\pi}{3} R_{max}^3 \rho_{hyd} \quad (2.1.2)$$

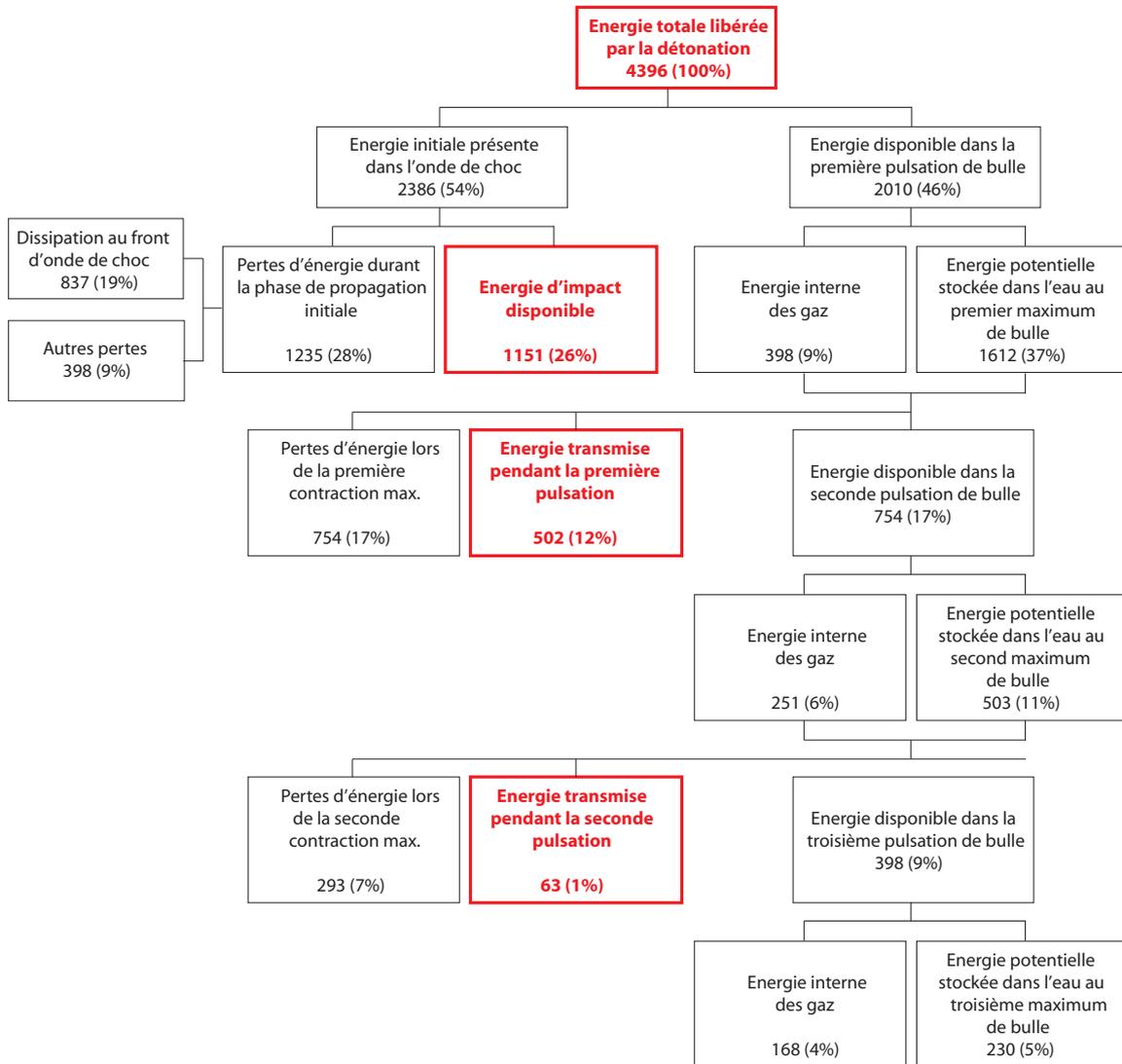


FIGURE 2.3 – Répartition de l'énergie totale issue de l'explosion sous-marine de charges TNT traduit de la référence [Arons et Yennie, 1948]. Les énergies spécifiques sont exprimées en J/g et en pourcentage de l'énergie totale initiale. La radiation acoustique et la dissipation au niveau du front d'onde de choc sont évaluées à une distance $r = m_c^{1/3}/0.352$.

La méthodologie présentée dans [Arons et Yennie, 1948] consiste à évaluer les flux d'énergie associés à chaque phénomène puis à établir un bilan global qui permet de quantifier les dissipations énergétiques. Faisant l'hypothèse de symétrie sphérique (hypothèse acceptable quand les paramètres de l'explosion sont tels que la migration de bulle est négligeable au regard de son mouvement pulsatoire), le flux d'énergie F évalué en un point situé à une distance r de la source explosive est uniforme sur la surface sphérique S_r de rayon r , ce qui permet d'exprimer l'énergie passant au travers de la surface S_r par la relation $E = 4\pi r^2 F$. Si l'on écrit maintenant le flux d'énergie F sous la forme d'une somme de flux

variant en puissance inverses de r ,

$$F = \frac{F_1}{r^{n_1}} + \frac{F_2}{r^{n_2}} + \frac{F_3}{r^{n_3}} + \dots \quad (2.1.3)$$

on note qu'une puissance $n_i = 2$ correspond à une énergie totale se conservant quelque soit le rayon r choisi pour l'intégration (rayonnement à l'infini). Une puissance $n_i \geq 2$ correspond à une énergie qui diminue à mesure que le rayon r augmente, cette diminution s'explique par une partie de l'énergie qui est cédée au domaine liquide derrière la surface de rayon r . En dehors des phénomènes dissipatifs synonymes d'élévation de la chaleur dans l'eau, cette énergie est généralement stockée sous forme d'énergie cinétique ou tout autre processus réversible.

2.1.2 Grandeurs physiques associées au choc

L'approximation de l'onde de choc primaire caractérisée par une décroissance exponentielle n'est représentative de l'évolution de pression qu'au tout début de la détente, c'est-à-dire pour l'onde de choc primaire seule jusqu'au temps $t \approx \theta$. En effet, la suite de la baisse de pression est moins rapide que ne l'indique la loi exponentielle du fait de la proximité de la bulle dont la détente est plus lente et qui est encore à une pression bien plus élevée que la pression hydrostatique. Ce phénomène doit être pris en compte dans les modèles théoriques lorsque l'on souhaite inclure les effets liés à la dynamique de bulle. L'exploitation des mesures expérimentales publiées par [Coles *et al.*, 1946] met en évidence la déviation de la forme exponentielle décroissante par rapport à la courbe de pression mesurée. Ces mesures concernent l'évolution temporelle de la pression en un point du liquide situé à une distance réduite $m_c^{1/3}/r = 0.242$ de la charge (m_c étant la masse initiale de l'explosif). À partir de ces données, la construction d'une courbe de tendance de forme double exponentielle décroissante sur la période $t \leq 7\theta$ permet de mieux décrire l'évolution temporelle de la pression, comme indiqué dans [Geers et Hunter, 2002] :

$$p_1(t) = p_m f(t) \quad \begin{cases} f(t) = 0 & , \quad t < 0 \\ f(t) = e^{-t/\theta} & , \quad 0 \leq t < \theta \\ f(t) = 0.8251 e^{-1.338t/\theta} + 0.1749 e^{-0.1805t/\theta} & , \quad \theta \leq t \leq 7\theta \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Dans le cas d'explosions se situant relativement loin de la structure impactée, on a vu que l'on pouvait considérer l'onde de choc, qui est un moyen d'action à distance des explosifs sous-marins, comme une onde se propageant à vitesse constante caractérisée en un point par la pression maximale p_m et la constante de temps θ . A ces grandeurs qui caractérisent l'onde de choc, on peut ajouter l'impulsion I qui est l'intégrale de la pression en un point donné, entre deux instants. Ce cours intervalle de temps entre l'apparition du front raide de pression et la durée d'impulsion est égal à $6,7\theta$ pour ne pas englober de

phénomènes secondaires liés à la détente de la bulle des gaz résiduels. L'impulsion s'écrit :

$$I = \int_0^{6,7\theta} p_I(t) dt \quad (2.1.5)$$

Le calcul de l'impulsion à partir de la forme exponentielle décroissante de l'onde de choc primaire Eq. (2.1.1) donne :

$$I = \int_0^{6,7\theta} p_m e^{-t/\theta} dt \approx \theta p_m \quad (2.1.6)$$

En considérant la forme double exponentielle Eq. (2.1.4) plus représentative des relevés expérimentaux, l'impulsion s'écrit :

$$I = \int_0^{6,7\theta} p_m (0.8251 e^{-1.338t/\theta} + 0.1749 e^{-0.1805t/\theta}) dt \approx 1.30 \theta p_m \quad (2.1.7)$$

soit une impulsion 30% plus élevée que celle donnée par la simple exponentielle. Cette considération n'est peut-être pas sans importance du point de vue des effets du choc sur les structures immergées¹. Selon une approche conservatrice, la prise en compte d'une forme double exponentielle (ou tout autre forme plus représentative de l'onde réelle mesurée) semble en effet mieux appropriée du point de vue dimensionnement des structures. On verra dans le paragraphe 2.4 que les mesures d'impulsion relatives au choc primaire semblent confirmer cette remarque.

L'énergie contenue dans le choc primaire est donnée par :

$$E = \frac{1}{\rho c} \int_0^{6,7\theta} p_I^2(t) dt \quad (2.1.8)$$

Le calcul de l'énergie par unité de surface à partir de la forme exponentielle décroissante Eq. (2.1.1) donne :

$$E = \frac{1}{\rho c} \int_0^{6,7\theta} p_m^2 e^{-2t/\theta} dt \approx \frac{\theta p_m^2}{2\rho c} \quad (\text{J.m}^{-2}) \quad (2.1.9)$$

1. En pratique, on estime en effet le niveau de réponse des structures navales par le transfert de la totalité de l'énergie cinétique transmise par le choc aux premiers instants de l'IFS, sous forme d'énergie de déformation (élastique et plastique) dans les structures. C'est le principe de réponse à une vitesse impulsionnelle dont le domaine de validité est conditionné par un temps caractéristique d'impulsion très inférieur au temps caractéristique de réponse des structure impactées. Les développements théoriques de Taylor s'appuyant sur cette hypothèse sont détaillés en Annexe C.

L'intégration de la forme empirique Eq. (2.1.4) donne quant à elle une énergie analogue :

$$E = \frac{1}{\rho c} \int_0^{6,7\theta} p_m^2 \left(0.8251 e^{-1.338t/\theta} + 0.1749 e^{-0.1805t/\theta} \right)^2 dt \approx 1.058 \frac{\theta p_m^2}{2\rho c} \quad (2.1.10)$$

2.2 Caractérisation de l'onde de choc primaire

La prédiction la plus directe du comportement des ondes de choc est contenue dans le principe de similitude en vertu duquel, si on applique un facteur d'échelle λ aux dimensions de la charge ainsi qu'à toutes les autres longueurs pour deux explosions différentes, l'onde de choc engendrera un champ de pression analogue en un point situé à une distance amplifiée du facteur λ , en un temps également amplifié du même facteur. Ce principe de similitude peut être vérifié par des mesures expérimentales menées sur des explosions de charges différentes en appliquant le même facteur d'échelle λ aux longueurs et au temps [Cole, 1965].

On note que ce principe de similitude, né d'observations expérimentales, obéit en fait à une similitude dynamique de Mach (voir en annexe A) qui privilégie les forces d'inertie et les forces de compressibilité locales, et selon laquelle le rapport de ces forces est invariant avec l'échelle utilisée pour l'expérimentation. Autrement dit, si on exprime ce principe de similitude en terme de pressions, le rapport de la pression dynamique ρu^2 sur la pression acoustique $\rho c u$ est invariant avec l'échelle (avec ρ la masse volumique du liquide, c la célérité des ondes acoustiques et u une vitesse caractéristique du problème) :

$$\frac{\rho u^2}{\rho c u} = \text{invariant avec l'échelle} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\hat{u}}{\hat{c}} = 1 \quad (2.2.1)$$

où la grandeur notée d'un accent circonflexe correspond au rapport de la grandeur mesurée à deux échelles différentes. La masse volumique du liquide ρ étant bien souvent identique aux deux échelles, le nombre de Mach invariant avec l'échelle s'exprime simplement dans ce cas comme le rapport de la vitesse particulière u sur la célérité acoustique c :

$$\mathcal{M}_a = \frac{u}{c} \quad (2.2.2)$$

Pour un même liquide, le rapport des célérités acoustiques \hat{c} est égal à 1, soit $\hat{u} = 1$, et l'on déduit des principes de similitude cinématique et dynamique par analyse dimensionnelle les différents facteurs d'échelle sur le temps, t , l'accélération a , l'effort F et la pression p :

$$\hat{t} = \lambda \quad ; \quad \hat{a} = \lambda^{-1} \quad ; \quad \hat{F} = \lambda^2 \quad ; \quad \hat{p} = 1 \quad (2.2.3)$$

où λ est le facteur d'échelle géométrique, rapport des longueurs à échelle réduite par rapport à l'échelle réelle. On vérifie ainsi les considérations évoquées au début de ce paragraphe. Des courbes de similitude obtenues à partir d'essais réalisés sur différents types d'explosifs, permettent donc de caractériser les grandeurs principales associées à l'onde de choc ; le pic de pression p_m , la constante de temps θ , l'impulsion I et l'énergie par unité de surface E .

Ces grandeurs dépendent de la masse d'explosif utilisée m_c , et de la distance de tir r . En faisant abstraction des phénomènes de viscosité et des réactions chimiques secondaires de l'explosion, l'onde de choc primaire obéit aux lois de similitude, c'est-à-dire que deux charges dont les dimensions sont dans un rapport λ , les volumes, et par extension les charges, sont dans un rapport λ^3 , donnent en des points homologues des pressions égales pendant un temps multiplié par λ car les vitesses doivent se conserver (valable uniquement pour des explosions en champ infini où les phénomènes de réflexion, diffraction et de cavitation n'interviennent pas). Les courbes de similitude sont établies pour un type d'explosif (par exemple le TNT) de forme et de masse volumique initiales données.

À partir de relevés expérimentaux, les variations du pic de pression p_m et du flux d'énergie réduit $E/m_c^{1/3}$ en fonction de la distance réduite $m_c^{1/3}/r$ (où r représente la distance de la charge au point considéré dans le liquide) sont bien représentées par des lois mathématiques de puissance de la forme :

$$K \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^A$$

où K et A sont des paramètres déterminés à partir des mesures expérimentales. Le tracé des fonctions $K x^A$ (où x représente la distance réduite) en échelle bi-logarithmique correspond à des droites de pente A et d'ordonnée $\ln K$ à l'origine. En ce qui concerne les variations de l'impulsion réduite $I/m_c^{1/3}$ et de la constante de temps réduite $\theta/m_c^{1/3}$, l'utilisation de lois de puissance de la même forme n'est valable que pour des distances supérieures à 10 fois le rayon initial de la charge. On peut ainsi exprimer les différentes grandeurs physiques de l'explosion (pic de pression, énergie, impulsion et constante de temps) sous la forme générale d'une loi de puissance dépendant de la charge employée :

$$\begin{aligned}
 \text{Pic de pression :} \quad p_m &= K_1 \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^{A_1} && (\text{N.m}^{-2}) \\
 \text{Constante de temps :} \quad \theta &= K_2 m_c^{1/3} \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^{A_2} && (\text{ms}) \\
 \text{Impulsion :} \quad I &= K_3 m_c^{1/3} \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^{A_3} && (\text{N.m}^{-2}.\text{s}) \\
 \text{Énergie par unité de surface :} \quad E &= K_4 m_c^{1/3} \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^{A_4} && (\text{J.m}^{-2})
 \end{aligned}
 \tag{2.2.4}$$

On note que [Hunter et Geers, 2004] proposent une réécriture intéressante des lois de similitude Eq. (2.2.4) pour p_m et θ en fonction de la distance réduite a_c/r , où a_c représente le rayon de la charge à l'état solide,

$$p_m(r) = P_c \left(\frac{a_c}{r} \right)^{A_1} \quad (2.2.5a)$$

$$\theta(r) = \frac{a_c}{v_c} \left(\frac{a_c}{r} \right)^{A_2} \quad (2.2.5b)$$

ce qui permet de faire apparaître les paramètres P_c et v_c (au lieu de K_1 et K_2), homogènes respectivement à la pression et la vitesse. En posant $r = a_c$ dans Eq. (2.2.5a) et (2.2.5b), le paramètre $P_c = p_m(a_c)$ représente la pression maximale à la frontière de l'explosif, et $v_c = a_c/\theta(a_c)$ une vitesse caractéristique du choc. Ces paramètres s'expriment en fonction des K_i et A_i ($i = 1, 2$) par les relations :

$$P_c = K_1 \left(\frac{4\pi\rho_e}{3} \right)^{A_1/3}$$

$$v_c = \left[K_2 \left(\frac{4\pi\rho_e}{3} \right)^{(1+A_2)/3} \right]^{-1}$$

où ρ_e est la masse volumique de la charge explosive à l'état solide, c.-à-d. avant détonation, telle que :

$$m_c = \frac{4\pi\rho_e a_c^3}{3}$$

Les iso-contours du pic de pression p_m et de la constante de temps θ donnés par les relations empiriques Eq. (2.2.4), ou Eq. (2.2.5), sont présentés respectivement sur les figures 2.4(a) et 2.4(b) en fonction de la distance r et de la masse d'explosif m_c en échelle bi-logarithmique. Suivant [Cole, 1965], leur domaine de validité exprimé en terme de rapport $(m_c^{1/3}/r)$ est globalement compris entre 0.08 (faibles charges, grandes distances) et 2.50 (charges importantes, petites distances) dans les unités du système international ($\text{kg}^{1/3} \cdot \text{m}^{-1}$). La plage du domaine de validité de la distance réduite $m_c^{1/3}/r$ comprise entre les valeurs 0.08 à 2.50 est donc également reportée sur les graphiques.

Par lecture directe des graphiques de la figure 2.4, on détermine ainsi les grandeurs p_m et θ pour un problème donné en fonction du couple {distance de tir, masse d'explosif}, relativement au domaine de validité des mesures.

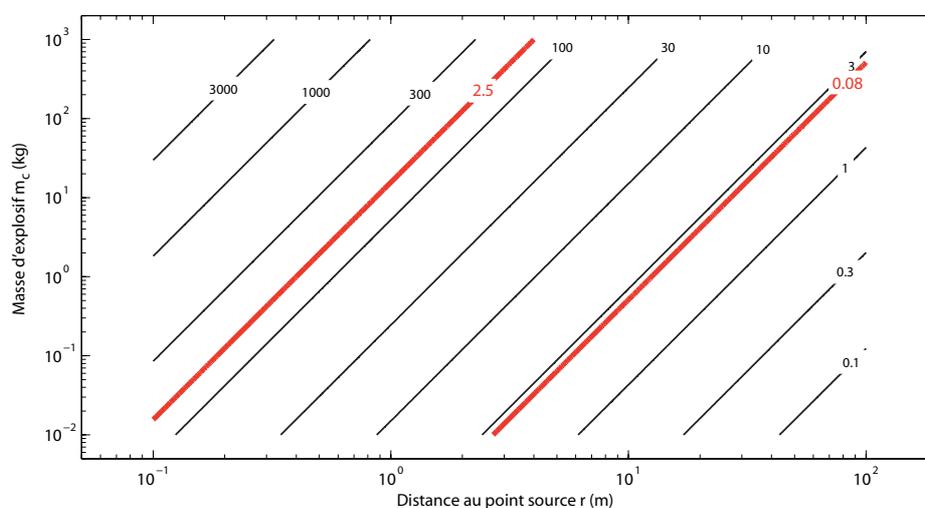
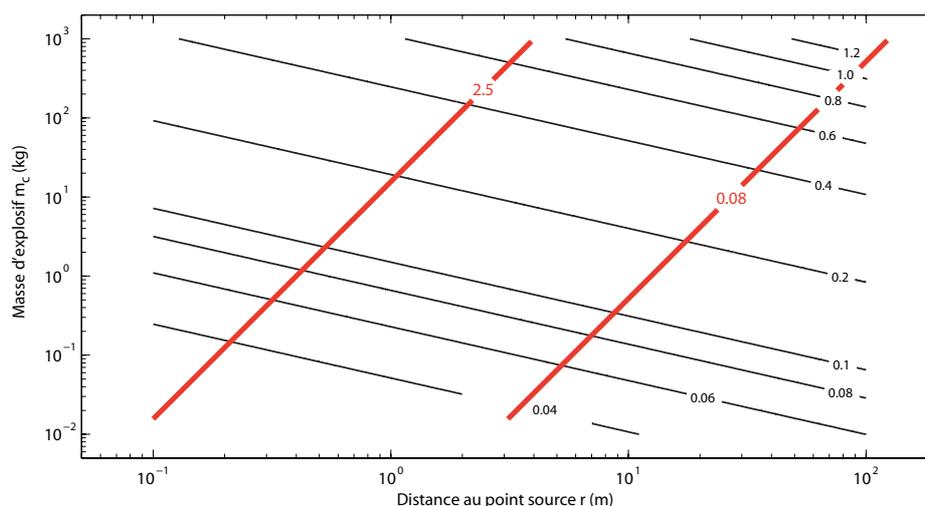
(a) Pic de pression p_m (en MPa)(b) Constante de temps θ (en ms)

FIGURE 2.4 – Iso-contours du pic de pression p_m (en MPa) et de la constante de temps θ (en ms) relatifs au choc primaire en fonction de la distance de tir et de la masse d'explosif exprimés dans les unités du Système International. Suivant [Cole, 1965] le domaine de validité, qui s'exprime en fonction de la distance réduite $m_c^{1/3}/r$, est compris entre les valeurs 0.08 à 2.50. Ces bornes inférieure et supérieure sont reportées en traits forts sur les figures

2.3 Caractérisation de la dynamique de bulle

2.3.1 Lois de similitude

Telles que décrit dans [Snay, 1962b] et [Snay et Tipton, 1962], des lois de similitude peuvent également être établies pour décrire le comportement de la bulle en terme de pseudo-période T_p , de premier rayon maximal R_{max} et minimal R_{min} . Sous leur forme générale, ces lois s'écrivent :

$$\text{Pseudo-période de bulle :} \quad T_p = K_5 \frac{m_c^{1/3}}{(D+10)^{5/6}} \quad (s) \quad (2.3.1a)$$

$$\text{Rayon maximal de bulle :} \quad R_{max} = K_6 \frac{m_c^{1/3}}{(D+10)^{1/3}} \quad (m) \quad (2.3.1b)$$

$$\text{Rayon minimal de bulle :} \quad R_{min} = K_7 m_c^{1/3} \quad (m) \quad (2.3.1c)$$

où D est la profondeur d'immersion de la charge sous la surface libre exprimée en mètres (le terme $D+10$ correspond à la hauteur de colonne d'eau équivalente intégrant la pression atmosphérique au niveau de la surface libre). On notera l'indépendance de la valeur de rayon minimum R_{min} au premier rebond de la bulle par rapport à la valeur d'immersion de la charge. La pseudo-période Eq. (2.3.1a) a été obtenue par [Willis, 1941] et l'on s'y réfère généralement sous le terme de « formule de Willis ». En se basant sur les prédictions de [Arons et Yennie, 1948] liées à la répartition des énergies, cette formule a été améliorée par [Herring, 1941] en prenant correctement en compte l'énergie interne de la bulle durant la première pulsation. La relation Eq. (2.3.1b) a été établie par [Swift et Decius, 1948] à partir de l'analyse des clichés photographiques issus de leurs expérimentations. Les développements théoriques proposés par [Shiffman et Friedman, 1944] puis [Friedman, 1947] concernant la dynamique de bulle permettent également d'aboutir à des formes équivalentes à Eq. (2.3.1a) et (2.3.1b).

Les paramètres K_5 et K_6 tirés de la référence [Swisdak, 1978] sont présentés dans le Tab. 2.1 pour différents explosifs. On y présente également les coefficients de conversion² permettant de relier les performances de chaque explosif à celles d'un explosif de référence, ici le TNT. Ils expriment :

- * l'énergie de bulle relative $RBE^{(tnt)} = \left(K_5 / K_5^{(tnt)} \right)^3$
- * l'énergie potentielle de bulle relative $RPBE^{(tnt)} = \left(K_6 / K_6^{(tnt)} \right)^3$

2. Les coefficients de conversion pour les énergies de bulle sont tirés de [Swisdak, 1978] et sont valables pour des charges explosives supérieures à 20 kg.

A partir d'essais [Heathcote et Niffenegger, 1967] repris dans [Swisdak, 1978], on note que ces performances dépendent quelque peu de la masse volumique initiale qui, pour un explosif donné, s'exprime en pourcentage de la masse volumique théorique maximum notée %TMD. Par exemple, pour des explosifs HBX-1 (TMD égale à $1760 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), de masses volumiques 85 et 98% TMD, les énergies relatives à la pentolite $\text{RBE}^{(\text{pent})}$ valent respectivement 1.49 et 1.40, ce qui se traduit par des écarts sur la pseudo-période de l'ordre de 2%. En terme de rayon maximum, les énergies potentielles relatives correspondantes $\text{RPBE}^{(\text{pent})}$ sont respectivement égales à 1.31 et 1.23, soit des écarts de l'ordre de 2% également.

Explosif	K_5	K_6	K_7	$\text{RBE}^{(\text{tnt})}$	$\text{RPBE}^{(\text{tnt})}$
TNT (1.60)	2.11	3.50	1.25	1.00	1.00
RDX (1.82)	2.63	4.27	1.53	1.93	1.82
PETN (–)	2.52	4.09	1.46	1.69	1.59
Pentolite (1.71)	2.11	3.52	1.26	1.00	1.02
HBX-1 (1.72)	2.41	3.95	1.41	1.48	1.44
HBX-3 (1.84)	2.63	4.27	1.53	1.93	1.82
H-6 (1.76)	2.52	4.09	1.46	1.69	1.59

TABLE 2.1 – Paramètres relatifs à la première pulsation de bulle (période et rayons maximum et minimum), et coefficients de conversion par rapport au TNT pour des explosifs de compositions différentes (masses volumiques notées entre parenthèses, en g/cm^3)

2.3.2 Analyse dimensionnelle

On établit dans ce paragraphe les relations de similitude théorique pour la dynamique de bulle à l'aide du théorème de Vaschy-Buckingham, ou théorème π (voir annexe A). L'objectif de l'analyse dimensionnelle est de mettre en évidence un ou plusieurs nombres sans dimension traduisant une relation entre les différentes grandeurs physiques du problème.

Pour la pseudo-période de bulle T_p , on fait l'hypothèse que celle-ci dépend de l'énergie initiale de la bulle E , de la pression hydrostatique p_∞ au niveau de l'explosion, et de la masse volumique de l'eau entourant la bulle ρ_∞ . Suivant le cheminement décrit en annexe A, le théorème π permet de mettre en évidence un nombre sans dimension, noté k_5 tel que :

$$k_5 = E^{-2/5} \rho_\infty^{-3/5} T_p^{6/5} p_\infty^1 \quad (2.3.2)$$

Écrite différemment sous la forme Eq. (2.3.3), on montre que cette relation est équivalente à la formule de Willis Eq. (2.3.1a) (voir [Willis, 1941]) présentée précédemment, en notant que l'énergie de la bulle E est proportionnelle à la masse de l'explosif m_e , que la pression hydrostatique p_∞ est proportion-

nelle à la profondeur d'explosion D , et en assimilant le terme $k_5^{5/6} \rho_\infty^{1/2}$ à la constante K_5 :

$$T_p = k_5^{5/6} \rho_\infty^{1/2} \frac{E^{1/3}}{p_\infty^{5/6}} \quad (2.3.3)$$

Le rayon maximal R_{max} de la bulle atteint au cours de sa première pulsation peut-être décrit par un raisonnement similaire qui mène à l'expression du nombre adimensionnel k_6 suivant :

$$k_6 = E^{-1} \rho_\infty^0 R_{max}^3 p_\infty^1 \quad (2.3.4)$$

Écrite différemment sous la forme Eq. (2.3.5), on montre également que cette expression est équivalente à la formule Eq. (2.3.1b) :

$$R_{max} = k_6^{1/3} \frac{E^{1/3}}{p_\infty^{1/3}} \quad (2.3.5)$$

2.4 Coefficients empiriques pour le TNT

Le Tab. 2.2 présente les valeurs des paramètres A_i et K_i pour l'explosif TNT, obtenues à partir d'une charge sphérique de masse volumique $1600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Ces valeurs sont celles implémentées dans le code de calcul USA [DeRuntz, 1989].

Pic de pression	p_m	K_1	$52.117 \cdot 10^6$	P_c	$1.667 \cdot 10^9$
		A_1	1.180	A_c	0.180
Constante de temps	θ	K_2	0.090	v_c	$1.020 \cdot 10^3$
		A_2	-0.185	B_c	0.185
Impulsion	I	K_3	6519.945		
		A_3	0.980		
Flux d'énergie	E	K_4	$94.324 \cdot 10^3$		
		A_4	2.155		
Pseudo-période de bulle	T_p	K_5	2.064		
Rayon max. de bulle	R_{max}	K_6	3.383		
Rayon min. de bulle	R_{min}	K_7	0.125		

TABLE 2.2 – Paramètres du matériau explosif TNT (masse volumique $1600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) dans les unités du Système International

A partir de ces grandeurs (issues de mesures) et des formules de similitude, il semble intéressant de poursuivre la réflexion menée au paragraphe 2.1 (voir page 19) concernant l'impulsion contenue dans le choc primaire. Comme suggéré par les expressions théoriques Eq. (2.1.6) et (2.1.7), on cherche ici à exprimer l'impulsion I en fonction du produit du pic de pression p_m et de la constante de temps θ . En se servant des relations empiriques Eq. (2.2.4), ce produit s'écrit :

$$\theta p_m = K_1 K_2 m_c^{1/3} \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^{A_1 + A_2} \quad (2.4.1)$$

Suivant les valeurs présentées dans la Tab. 2.2, la somme ($A_1 + A_2$) est égale à ($A_3 - 0.015$), ce qui permet d'écrire la relation précédente sous la forme :

$$\theta p_m = \alpha K_1 K_2 m_c^{1/3} \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^{A_3} \quad \text{avec} \quad \alpha = \left(\frac{m_c^{1/3}}{r} \right)^{-0.015} \quad (2.4.2)$$

On peut ainsi exprimer l'impulsion en fonction de θp_m :

$$I = \frac{K_3}{\alpha K_1 K_2} \theta p_m \approx \frac{1.4}{\alpha} \theta p_m \quad (2.4.3)$$

Comme mentionné précédemment, [Cole, 1965] décrit le domaine de validité des relations empiriques Eq. (2.2.4) en terme du rapport ($m_c^{1/3}/r$). Ce domaine est compris entre 0.08 (faibles charges, grandes distances) et 2.5 (charges importantes, petites distances) dans les unités du système international. Cela permet de circonscrire les valeurs du paramètre α entre les bornes 0.96 et 1.01. L'impulsion mesurée par intégration du signal de pression du choc primaire jusqu'à 6.7θ est donc approximativement comprise entre 1.38 et $1.45\theta p_m$. Ces valeurs sont à comparer aux valeurs théoriques Eq. (2.1.6) et (2.1.7) calculées respectivement pour les formes simple et double exponentielle décroissante. La forme simple exponentielle Eq. (2.1.1) (d'impulsion θp_m) n'est donc représentative de l'impulsion que dans la première portion du profil de pression incidente $t \leq \theta$, tandis que l'impulsion correspondant à une forme de type double exponentielle Eq. (2.1.4) (d'impulsion $1.30\theta p_m$), quoique légèrement inférieure à l'impulsion empirique, est toutefois plus représentative du signal de choc primaire jusqu'à $t \leq 6.7\theta$. On gardera donc à l'esprit que la forme simple exponentielle sous-estime de l'ordre de 40% la valeur de l'impulsion incidente³.

3. D'un point de vue théorique, on montre au §C.3 de l'annexe C que cette différence a très peu d'influence sur la valeur de l'énergie cinétique maximale transmise aux structures immergées. Suivant la théorie onde plane de Taylor, cette valeur maximale est en effet atteinte dans les premiers instants de l'interaction entre le choc incident et la structure ($t < \theta$), temps au-delà duquel les phénomènes de cavitation liés à la mise en mouvement de la structure sont susceptibles d'intervenir, ce que l'on peut assimiler

2.5 Une mesure de la sévérité : le facteur de choc

La grandeur utilisée pour caractériser la sévérité d'une explosion sous-marine est le facteur de choc, noté K . Celui-ci dépend de la charge explosive de masse m_c et de la distance de tir r . Il est défini comme :

$$K = \frac{\sqrt{m_c}}{r} \quad (2.5.1)$$

où m_c est exprimé en kilogrammes (kg) et r en mètres (m) dans les unités du Système International. L'application de la similitude géométrique (de coefficient λ sur les longueurs) au facteur de choc, montre que celui-ci, du fait de sa dimension, n'est pas invariant dans des essais à échelle modifiée. En notant K' le coefficient à échelle modifiée, on a en effet :

$$K' = \frac{\sqrt{m'_c}}{r'} = \lambda^{1/2} K \quad (2.5.2)$$

On notera que le facteur de choc caractérise l'énergie par unité de surface portée par l'onde de choc incidente. En effet, en reprenant la dernière relation empirique Eq. (2.2.4) et en notant que la constante A_4 est approximativement égale à 2 (voir le tableau Tab. 2.2), on peut dire que l'énergie est proportionnelle au rapport m_c/r^2 (coefficient de proportionnalité K_4). A partir de la définition Eq. (2.5.1) du facteur de choc, on établit finalement une relation de proportionnalité entre le facteur de choc K et la racine carrée de l'énergie par unité de surface contenue dans le choc :

$$K \propto E^{1/2} \quad (2.5.3)$$

Cette remarque est importante du point de vue de l'interaction fluide-structure aux premiers instants du choc primaire. En reprenant le modèle de plaque de Taylor détaillé en Annexe C, on montre en effet que l'énergie cinétique maximale E_c transmise à une plaque immergée aux premiers instants de l'interaction avec une onde de choc est proportionnelle à l'énergie portée par le choc incident dans le liquide (voir Eq. (C.2.11) en Annexe C) :

$$E_c \propto E \quad (2.5.4)$$

à une annulation de la pression totale appliquée à la structure. Or les formes simple et double exponentielle utilisées pour décrire le profil de pression incident sont tout à fait comparables jusqu'à l'instant $t = 0$, ce qui explique le peu de différences obtenues par l'une ou l'autre forme dans le calcul de mise en vitesse des structures.

Le facteur de choc est donc proportionnel à la racine carrée de l'énergie cinétique maximale transmise à la plaque au premiers instants de l'interaction fluide-structure $K \propto E_c^{1/2}$. Par ailleurs, si l'on considère en première approche que l'énergie cinétique maximale transmise E_c est intégralement transformée en énergie de déformation E_d dans les structures soumises à l'explosion⁴, on en déduit globalement un rapport de proportionnalité entre le facteur de choc et la racine carrée de l'énergie de déformation totale (élastique et inélastique) des structures soumises au choc :

$$K \propto E_d^{1/2} \quad (2.5.5)$$

La sévérité du choc se mesure en terme de vitesse ou de déplacement transmis (respectivement proportionnels aux racines carrées des énergies cinétique ou de déformation), ce qui, suivant les relations Eq. (2.5.3) à (2.5.5), revient finalement à établir le rapport de proportionnalité entre le facteur de choc et la sévérité, justifiant en outre l'intitulé de ce paragraphe.

La définition Eq. (2.5.1) du facteur de choc est valable lorsque l'onde de choc impacte perpendiculairement la surface immergée de la structure, autrement dit, lorsque la direction de propagation est normale à la structure au *standoff point*. Une autre définition tient compte de l'angle d'incidence α (voir figure 2.1) de l'onde de choc avec la structure, elle s'écrit :

$$K = \frac{\sqrt{m_c}}{r} \frac{1 + \sin \alpha}{2} \quad (2.5.6)$$

Dans le cas où l'incidence est normale avec $\alpha = \pi/2$, on retrouve bien la même définition du facteur de choc précédente Eq. (2.5.1).

Dans le langage anglo-saxon, on appelle "Hull Scale Factor" (noté *HSF*) le facteur de choc relatif à la définition Eq. (2.5.1), et "Keel Scale Factor" (noté *KSF*) pour la définition Eq. (2.5.6).

4. Cette considération est à la base des raisonnements basés sur les excitations de type vitesse impulsionnelle (*kick-off velocity*), qui nécessitent notamment que les temps d'excitation soient de très faibles durée par rapport aux temps de réponse des structures ; hypothèse généralement vérifiée pour les structures navales soumises à des explosions sous-marines.

2.6 Cas d'application

Afin d'illustrer nos propos, on donne ici en exemple les résultats obtenus à partir de l'explosion d'une charge immergée de masse $m_c = 500$ kg de TNT dans un milieu fluide supposé infini. Cette charge explose à une profondeur $D = 50$ m sous la surface libre et est située à une distance $r = 50$ m de la structure impactée. Cette configuration correspond à un facteur de choc $K = 0.5$.

Le calcul des grandeurs caractéristiques de l'explosion à l'aide des lois de similitude Eq. (2.2.4) et (2.3.1), et des caractéristiques de l'explosif données dans le Tab. 2.2 est présenté dans le Tab. 2.3.

Pic de Pression	p_m	(Pa)	$5.9 \cdot 10^6$
Constante de temps	θ	(ms)	1.0
Impulsion	I	(Pa.s)	8522.6
Flux d'énergie	E	(J.m ⁻²)	36.7
Pseudo-période de bulle	T_p	(s)	0.5
Rayon max. de bulle	R_{max}	(m)	6.6

TABLE 2.3 – Grandeurs caractéristiques d'une explosion pour un facteur de choc $K = 0.5$

On trace à titre indicatif les évolutions temporelles de certaines grandeurs physiques du problème issues des calculs semi-analytiques implémentés dans le code USA 6.5 :

- * Pression incidente au *standoff point*
- * Vitesse particulaire incidente au *standoff point*
- * Rayon de la bulle
- * Profondeur de la bulle
- * Vitesse de migration verticale de la bulle

La figure 2.5(a) présente le profil de pression incidente $p_1(t)$ au niveau du *standoff point*. Le pic de pression initial à $t = 0$ correspond à l'onde de choc primaire, il est égal à 5.9 MPa et cohérent avec la loi de similitude. Cette courbe est à mettre en correspondance avec celle de la figure 2.5(b) qui montre l'évolution de la vitesse particulaire incidente $v_1(t)$ au *standoff point*. Celle-ci est maximale (3.9 m/s) à l'instant initial au niveau de la singularité d'onde de choc.

Les pics secondaires de surpression aux instants $t = 0.54$ s et $t = 1.10$ s, d'intensité respective 0.8 et 0.3 MPa, proviennent des phases de contraction maximale de la bulle. A ces instants en effet, comme présenté sur la figure 2.6(a), le rayon de la bulle passe par un minimum et génère dans le fluide des surpressions de plus faible intensité mais de durée plus longue. La pseudo-période de pulsation de bulle T_p est donnée sur la même figure entre l'instant initial et la première contraction maximale, on a donc $T_p = 0.54$ s. Pendant cette période, la bulle passe par un rayon maximal $R_{max} = 6.6$ m cohérent

avec les résultats du Tab. 2.3. On note que le rayon maximal diminue à chaque pulsation en raison des pertes d'énergie enregistrées lors des phases de contraction successives⁵.

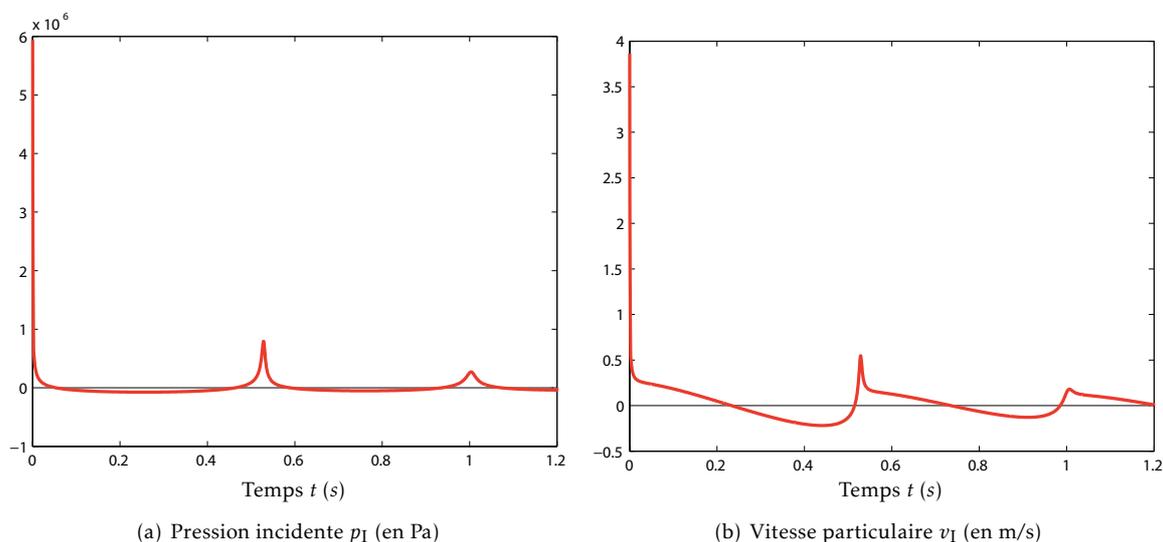


FIGURE 2.5 – Facteur de choc $K = 0.5$: Évolutions de la pression (figure 2.5(a)) et de la vitesse particulaire (figure 2.5(b)) incidentes au niveau du standoff point

D'un point de vue réponse des structures, on note que le mouvement alternatif de flux et reflux des masses d'eau entourant la bulle (voir figure 2.5(b)) est assimilable à une vitesse d'excitation harmonique u de fréquence $f = 1/T_p$ et d'amplitude u_m telle que :

$$u = u_m \sin(2\pi f t) \quad (2.6.1)$$

On peut donc envisager, sous des configurations de choc particulières, la concordance des pulsations de bulle avec celles des suspensions de certains équipements et systèmes à bord des navires, et par là-même, utiliser cette propriété pour dimensionner les systèmes correspondants. D'un point de vue dimensionnement des structures navales (bâtiments de surface ou sous-marin), on retiendra également que les pulsations de bulle sont susceptibles d'exciter les premiers modes propres de la poutre navire, et de ce fait, peuvent être dommageables pour la résistance ultime de la structure. Ces considérations motivent les études de fouettement de la poutre navire lié aux pulsations de bulle comme évoquées en introduction.

5. Ces pertes d'énergie sont essentiellement dues à l'émission des ondes acoustiques secondaires et aux phénomènes de turbulence autour de la bulle lors des phases de remontée.

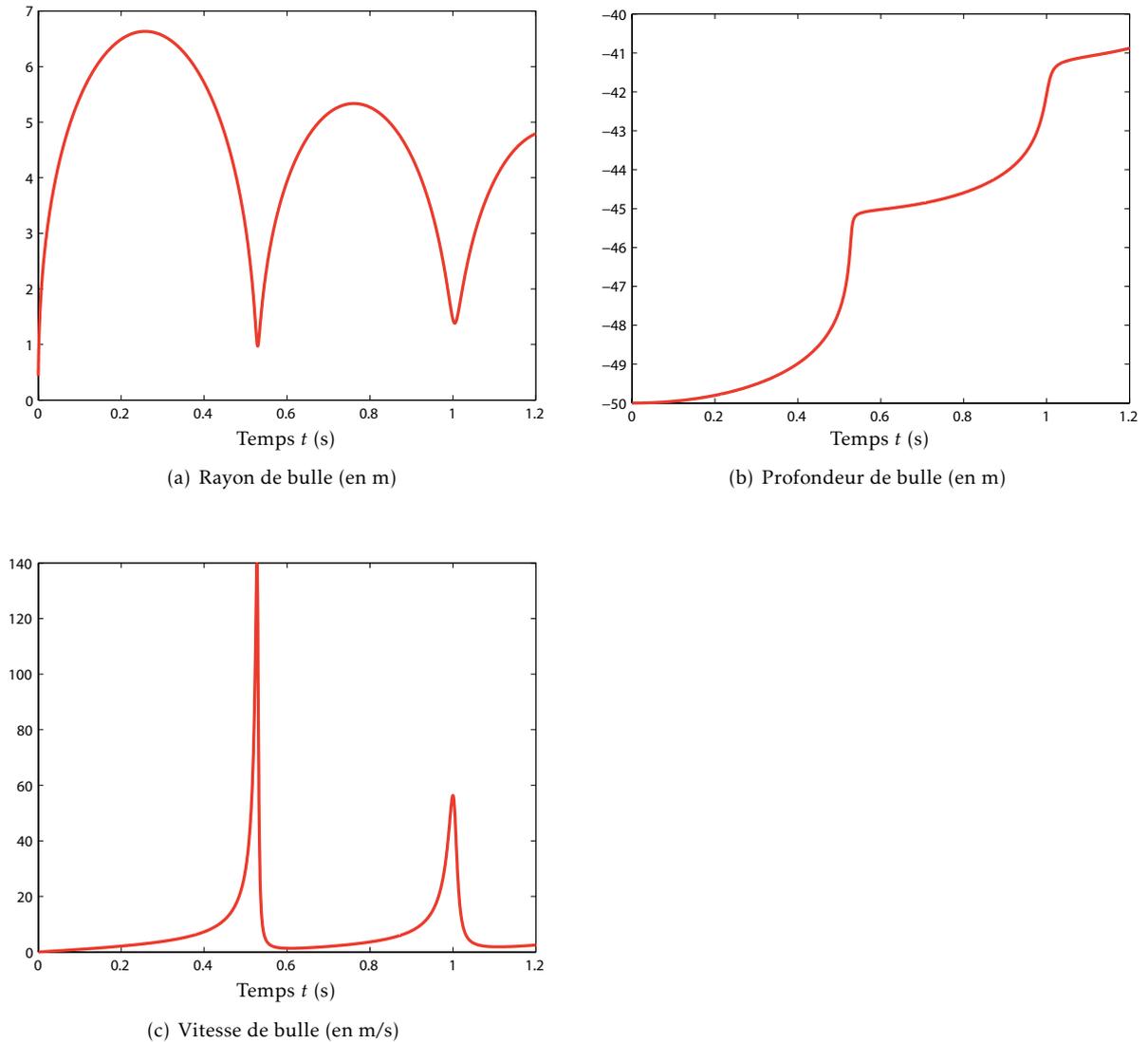


FIGURE 2.6 – Facteur de choc $K = 0.5$: Évolution du rayon de la bulle (figure 2.6(a)), de sa profondeur (figure 2.6(b)) et de sa vitesse de migration verticale (figure 2.6(c))

La figure 2.6(b) présente l'évolution de la profondeur de la bulle sous la surface libre en fonction du temps. On note que la bulle migre verticalement en direction de la surface libre en raison de la poussée hydrostatique, et que cette migration n'est pas linéaire en fonction du temps. En effet, comme présenté sur la figure 2.6(c), la vitesse du centre de la bulle augmente rapidement autour des phases de contraction maximale puis diminue ensuite à mesure que le rayon de bulle augmente, pour s'annuler autour des phases d'expansion maximale.

Chapitre 3

Formulation Euler-Lagrange du problème couplé fluide-structure

Ce chapitre présente les formulations utilisées pour résoudre, au sein d'un même programme, les équations de la mécanique relatives au fluide et à la structure. Ces formulations s'appuient sur la méthode des éléments finis appliquée à la mécanique non-linéaire des milieux continus et des structures, et sont décrites dans [Benson, 1992a] et [Belytschko *et al.*, 2000]. La modélisation de l'IFS est intégrée dans la formulation de façon à résoudre simultanément le problème couplé fluide et structure. L'intégration temporelle des équations est basée sur un schéma explicite qui avance la solution dans le temps à partir de la solution calculée à l'instant précédent. L'approche ainsi décrite permet de traiter les phénomènes dynamiques rapides qui caractérisent les explosions sous-marines en champ proche. Au sein d'une méthode unifiée on calcule, d'une part, les chargements hydrodynamiques qui s'appliquent aux structures immergées, et d'autre part, la réponse non-linéaire de ces structures. La modélisation des structures est effectuée en description Lagrangienne suivant laquelle les nœuds du maillage sont attachés au mouvement des particules matérielles. Cette méthode permet de prendre en compte les non-linéarités géométriques et matérielles qui caractérisent la réponse des structures aux explosions. Dans le cadre de nos travaux on se limite volontairement au domaine de réponse élasto-plastique avant rupture du matériau qui constitue, en soi, un champ d'investigation à part entière, tant pour la modélisation numérique que pour l'étude des modes de rupture. La résolution du problème fluide en description Eulérienne est basée sur la méthode *split*. Selon cette méthode, et pour un incrément temporel donné, les équations aux dérivées partielles qui décrivent le problème sont résolues en deux phases. Un premier cycle de calcul Lagrangien permet d'avancer la solution dans le temps en déformant le maillage suivant le mouvement des particules fluide. Un second cycle, dit d'advection, projette les résultats obtenus sur la grille de calcul Eulérienne. La modélisation de l'IFS est effectuée en couplant les descriptions Eulérienne et Lagrangienne par une méthode de pénalité.

3.1 Formulation Lagrangienne

Les formulations éléments finis Lagrangiennes sont couramment utilisées en mécanique des structures pour plusieurs raisons. Dans la mesure où les nœuds du maillage suivent le mouvement de matière, les frontières matérielles coïncident en permanence avec les bords des éléments, ce qui facilite l'application des conditions aux limites. De plus les équations constitutives sont évaluées aux points de quadrature qui se déplacent également avec la matière, ce qui en facilite le traitement pour des lois de comportement dépendant de l'histoire du chargement. En contrepartie, les grandes déformations de la matière peuvent engendrer des distorsions importantes du maillage qui mènent à des résultats erronés, et limitent ainsi le champ d'application des formulations Lagrangiennes. Dans le cadre qui nous intéresse ici, ces formulations sont toutefois bien adaptées pour décrire la réponse des structures aux explosions, les écoulements de la matière étant très localisés et menant rapidement à des phénomènes de rupture. Comme on le verra dans la section 3.2 suivante, la description Lagrangienne est utilisée pour résoudre le problème fluide avant de projeter les résultats sur une grille Eulérienne. De cette façon, la description faite ici s'applique également à la première étape de résolution du problème fluide.

Deux types de discrétisation par éléments finis sont classiquement utilisées pour résoudre les équations du mouvement en description Lagrangienne. D'un côté, la formulation totale fait intervenir des intégrales sur le domaine de référence dans l'écriture de la forme faible, et les gradients sont évalués en fonction des coordonnées matérielles. Dans ce cas, les variables sont calculées à l'instant t à partir de leur valeur initiale à $t = 0$. De l'autre, la formulation actualisée fait intervenir des intégrales sur le domaine courant dans l'écriture de la forme faible, et les gradients sont évalués en fonction des coordonnées spatiales. Les variables sont calculées à l'instant $t + \Delta t$ à partir de leur valeur à l'instant t précédent. Dans ces deux formulations, la description est lagrangienne ; les variables dépendantes sont fonctions des coordonnées matérielles et du temps. C'est la formulation Lagrangienne actualisée qui est développée dans la suite et qui est utilisée dans les applications. Pour simplifier, nous nous y référons sous le terme de formulation Lagrangienne.

Pour commencer, nous considérons deux domaines représentant le même milieu continu observé à deux instants différents, comme schématisé sur la figure 3.1 ; le domaine initial Ω_0 de frontière Γ_0 , correspondant à l'espace occupé par l'ensemble continu de matière à l'instant $t = 0$, et le domaine courant Ω de frontière Γ , correspondant à l'espace occupé par ce même ensemble à un instant t ultérieur. De façon arbitraire, on choisit le domaine initial Ω_0 comme domaine de référence par rapport auquel s'exprime le mouvement de la matière. En outre, cette configuration initiale est supposée coïncider avec l'état non-déformé, c.-à-d. par rapport auquel s'expriment les mesures de déformation¹. Le mouvement de matière entre les configurations initiale et courante est décrit à l'aide de la transformation injective $\vec{\Phi}$ qui associe, à tout point matériel de coordonnées \vec{X} et à chaque instant t , une position dans l'espace

1. Rigoureusement, la configuration non-déformée devrait correspondre à un état hypothétique de la matière, vierge de toute déformation, ce qui est rarement le cas dans la nature, cette notion est donc purement relative.

de coordonnées \vec{x} :

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) \quad (3.1.1)$$

Les coordonnées \vec{X} , dites matérielles ou Lagrangiennes, sont liées au mouvement de la matière. Elles sont indépendantes du temps, du point de vue de la configuration de référence. Les coordonnées \vec{x} , dites spatiales ou Eulériennes, donnent leur position dans l'espace. Le système de coordonnées Eulériennes est invariant avec le temps, quelque soit le point de vue suivant lequel on se place.

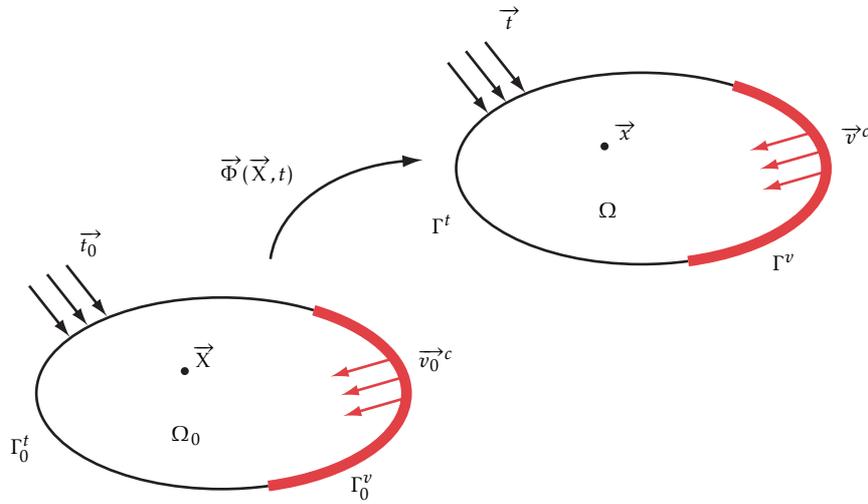


FIGURE 3.1 – Configurations initiale (non déformée) et courante (déformée) de la structure

Suivant Eq. (3.1.1), le déplacement \vec{u} d'un point matériel s'écrit comme la différence entre les vecteurs de coordonnées courantes et initiales :

$$\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) - \vec{X} \equiv \vec{x} - \vec{X} \quad \text{ou} \quad u_i(\vec{X}, t) = \Phi_i(\vec{X}, t) - X_i \equiv x_i - X_i \quad (3.1.2)$$

où les valeurs prises par l'indice i en notation intrinsèque dépendent des dimensions du problème. La vitesse \vec{v} et l'accélération \vec{a} d'un point matériel sont obtenues par la dérivée temporelle à \vec{X} constant, respectivement du déplacement Eq. (3.1.2) et de la vitesse Eq. (3.1.3) :

$$\vec{u} \equiv \vec{v}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad \text{ou} \quad \dot{u}_i \equiv v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} \quad (3.1.3)$$

$$\vec{v} \equiv \vec{a}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{\Phi}}{\partial t^2}(\vec{X}, t) \quad \text{ou} \quad \dot{v}_i \equiv a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} \quad (3.1.4)$$

En description eulérienne, les expressions Eq. (3.1.3) et (3.1.4) s'écrivent en fonction des coordonnées spatiales en considérant la composition de fonctions ($v \circ \Phi$) à laquelle on applique la règle de chaînage :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \quad (3.1.5)$$

où (\cdot) désigne le produit tensoriel contracté une fois, et D/Dt est la dérivée temporelle matérielle (ou dérivée convective) qui correspond à la variation temporelle, en un point fixe de l'espace, d'une grandeur liée au mouvement de la matière. Elle est égale à la dérivée temporelle exprimée par rapport aux coordonnées matérielles :

$$\frac{D}{Dt}(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad (3.1.6)$$

L'accélération Eq. (3.1.4) s'écrit alors comme la somme de la dérivée temporelle spatiale et d'un terme convectif, produit du gradient et de la vitesse :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt}(\vec{x}, t) = \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(\vec{x}, t) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} \quad \text{ou} \quad \frac{Dv_i}{Dt} = \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad (3.1.7)$$

où le point placé sur la variable v désigne la dérivée temporelle matérielle. Sauf mention contraire, la convention de sommation sur l'indice muet est appliquée dans les écritures condensées.

Le tenseur des gradients de déformation, aussi appelé matrice jacobienne de la transformation $\vec{\Phi}$, permet de relier un segment de longueur infinitésimale $d\vec{X}$ dans la configuration de référence au segment correspondant $d\vec{x}$ dans la situation actuelle. Il est défini par :

$$\underline{\underline{F}} := \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{X}} \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \quad \text{ou} \quad F_{ij} := \frac{\partial \Phi_i}{\partial X_j} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (3.1.8)$$

et le déterminant du jacobien de la transformation (appelé simplement jacobien par la suite), qui est noté J , s'écrit :

$$J := \det(\underline{\underline{F}}) = \frac{dV}{dV_0} \quad (3.1.9)$$

Le jacobien Eq. (3.1.9) permet notamment de relier les intégrales écrites sur les domaines courant et de référence, soit pour une fonction f quelconque :

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega_0} f(\vec{\Phi}(\vec{X}, t), t) J d\Omega_0 \quad (3.1.10)$$

Le tenseur des gradients de vitesse est défini par :

$$\underline{\underline{L}} := \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{x}} \quad \text{ou} \quad L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.1.11)$$

En formulation Lagrangienne actualisée, la mesure des déformations s'exprime à l'aide du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$ qui correspond à la partie symétrique du tenseur des gradients de vitesse Eq. (3.1.11). En appliquant la décomposition standard pour un tenseur du second ordre,

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T) \quad (3.1.12)$$

on fait apparaître les tenseurs symétrique $\underline{\underline{D}}$ et antisymétrique $\underline{\underline{W}}$ (celui-ci est égal au tenseur vitesse de rotation en l'absence de déformation dans une rotation de corps rigide) qui s'écrivent :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} + \underline{\underline{L}}^T) \quad \text{ou} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} (L_{ij} + L_{ji}) \quad (3.1.13)$$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T) \quad \text{ou} \quad W_{ij} = \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji}) \quad (3.1.14)$$

Le tenseur des taux de déformation s'exprime alors en fonction des gradients de vitesse à l'aide de la définition Eq. (3.1.11) :

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \left[\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{v} \right) + \left(\vec{\nabla} \otimes \vec{v} \right)^T \right] \quad \text{ou} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1.15)$$

où \otimes désigne le produit tensoriel non contracté. La mesure des contraintes est issue de la loi de Cauchy qui relie le tenseur des contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ au vecteur de traction \vec{t} dans la configuration courante. On parle aussi de contraintes vraies puisqu'elles s'expriment par rapport à la surface actuelle et non par rapport à la configuration de référence, comme c'est par exemple le cas pour le tenseur de contrainte nominale $\underline{\underline{P}}$ ou le second tenseur de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{S}}$ utilisés en formulation Lagrangien total :

$$\vec{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} d\Gamma := \vec{t} d\Gamma \quad \text{ou} \quad n_j \sigma_{ji} d\Gamma := t_i d\Gamma \quad (3.1.16)$$

où n_j sont les composantes de la normale extérieure à la frontière Γ , σ_{ji} celles du tenseur des contraintes de Cauchy, et t_i celles du vecteur de traction, au point considéré.

3.1.1 Équations locales du problème en formulation Lagrangienne

Le système qui décrit le mouvement de la structure est composé des équations locales de conservation de la masse et la quantité de mouvement qui s'expriment en fonction des coordonnées matérielles \vec{X} et du temps t . Il est complété par une équation constitutive qui relie les contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ aux taux de déformation $\underline{\underline{D}}$. L'équation de conservation de l'énergie n'est pas utilisée ici dans la mesure où les transferts d'énergie ne sont pas pris en compte dans nos applications ; seules des transformations adiabatiques sont considérées.

L'équation de conservation de la masse exprime l'invariance de la masse m du domaine matériel Ω au cours du temps, c.-à-d. $Dm(\Omega)/Dt = 0$, dans la mesure où aucun flux de matière au travers de la frontière Γ n'est permis et que l'on ne modélise pas les conversions de masse en énergie. On traduit cette condition par la relation :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho(\vec{X}, t) d\Omega = 0 \quad (3.1.17)$$

En description Lagrangienne, Eq. (3.1.17) est intégrée directement par rapport au temps,

$$\int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho_0 d\Omega_0 = \text{Constante}$$

ce qui, en utilisant la relation Eq. (3.1.10), permet d'écrire l'équation de conservation de la masse sous la forme :

$$\rho(\vec{X}, t)J(\vec{X}, t) = \rho_0(\vec{X})J_0(\vec{X}) = \rho_0(\vec{X}) \quad (3.1.18)$$

où la seconde égalité est obtenue en remarquant que le jacobien J_0 est égal à 1. Comme le maillage coïncide avec les déplacements de la matière en formulation Lagrangienne, l'équation de conservation de la masse Eq. (3.1.18) se ramène donc à une simple équation algébrique $\rho J = \rho_0$ qui est facilement résolue.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est déduite de la seconde loi de Newton qui établit l'égalité entre la dérivée matérielle de la quantité de mouvement et les efforts appliqués. Elle s'écrit :

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (3.1.19)$$

où ρb_i sont les composantes du vecteur des efforts volumiques². Pour les problèmes axisymétriques de variables spatiales indépendantes (r, θ, z) , la solution ne dépend pas de la coordonnée orthoradiale θ , soit $\partial/\partial\theta = 0$, et les équations de conservation de la quantité de mouvement dans les deux autres directions r et z s'écrivent :

$$\rho \frac{Dv_r}{Dt} = \rho \dot{v}_r = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho b_r \quad (3.1.20)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho \dot{v}_z = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho b_z \quad (3.1.21)$$

Dans le cas d'un comportement élastique-plastique pour un matériau comme l'acier utilisé dans nos applications, l'équation constitutive est décrite par une loi hypoélastique qui établit les relations entre les taux de contrainte et de déformation. De façon générale elle s'écrit :

$$\frac{D\underline{\underline{\hat{\sigma}}}}{Dt} = \underline{\underline{\hat{C}}} : \underline{\underline{\hat{D}}} \quad \text{ou} \quad \frac{D\hat{\sigma}_{ij}}{Dt} = \hat{C}_{ijkl} \hat{D}_{lk} \quad (3.1.22)$$

où $(:)$ désigne le produit tensoriel contracté deux fois entre le tenseur de réponse du matériau et le tenseur des taux de déformation. La relation Eq. (3.1.22) est écrite ici dans le repère local de l'élément aux points de quadrature. Ce repère local, appelé repère corotationnel est utilisé pour le calcul des efforts internes dans les éléments de type coque 3D. C'est une estimation du déplacement de corps rigide (qui, sauf prescrit, n'est jamais connu a priori) dans le champ de déplacement total de l'élément³. Une des propriétés fondamentales associée à l'utilisation de ce repère est que le tenseur des contraintes de Cauchy corotationnelles $\underline{\underline{\hat{\sigma}}}$ est invariant pour les grandes rotations rigides. La matrice de transformation orthogonale qui permet de passer des coordonnées corotationnelles aux coordonnées globales est notée sous la forme du tenseur $\underline{\underline{R}}$, de sorte que les tenseurs des taux de déformation et des contraintes de Cauchy s'expriment en fonction de leurs composantes corotationnelles par la transformation suivante :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\hat{D}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \quad \text{ou} \quad D_{ij} = R_{ik} \hat{D}_{kl} R_{lj}^T \quad (3.1.23a)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\hat{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = R_{ik} \hat{\sigma}_{kl} R_{lj}^T \quad (3.1.23b)$$

Les contraintes de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ ne sont pas invariantes dans un rotation rigide, ce qui nécessite alors d'exprimer le taux de contrainte à l'aide d'une dérivée objective comme celle de Jaumann $\underline{\underline{\sigma}}^{VJ}$ décrite

2. Le vecteur \vec{b} exprime une force par unité de masse qui est homogène à une accélération. Dans nos applications, ce terme correspond à l'accélération produite par le champ gravitationnel terrestre, que l'on note encore \vec{g} .

3. Dans la suite de cette partie consacrée à la formulation Lagrangienne, les variables indicées par un chapeau sont exprimées dans le repère corotationnel.

dans [Belytschko *et al.*, 2000]. Pour la loi hypoélastique considérée, elle s'écrit :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{\nabla J} = \underline{\underline{\underline{C}}}^J : \underline{\underline{\underline{D}}} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij}^{\nabla J} = C_{ijkl}^J D_{lk} \quad (3.1.24)$$

La dérivée temporelle matérielle du tenseur des contraintes de Cauchy Eq. (3.1.25) s'écrit alors comme la superposition de la dérivée objective due à la réponse du matériau Eq. (3.1.24), et de la variation de contrainte liée à la rotation qui correspond aux deux derniers termes dans l'équation suivante :

$$\frac{D\underline{\underline{\underline{\sigma}}}}{Dt} = \underline{\underline{\underline{\sigma}}}^{\nabla J} + \underline{\underline{\underline{W}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}} + \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\underline{W}}}^T \quad \text{ou} \quad \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} = \sigma_{ij}^{\nabla J} + W_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}W_{jk} \quad (3.1.25)$$

Comme présenté sur la figure 3.1, les conditions aux limites en effort et en vitesse, imposées respectivement sur les frontières extérieures Γ^t et Γ^v telles que $\Gamma^t \cup \Gamma^v = \Gamma$ et $\Gamma^t \cap \Gamma^v = 0$, s'écrivent ⁴ :

$$n_j \sigma_{ji} = t_i \quad \text{sur} \quad \Gamma^t \quad (3.1.26)$$

$$v_i = v_i^c \quad \text{sur} \quad \Gamma^v \quad (3.1.27)$$

Le système à résoudre est formé par les équations de conservation Eq. (3.1.18) et (3.1.19), les expressions des taux de contraintes et de déformation Eq. (3.1.22) et (3.1.15), et les conditions aux limites Eq. (3.1.26) et (3.1.27). Il est complètement décrit en lui adjoignant les conditions initiales suivantes exprimées en vitesses et contraintes (ou vitesses et déplacements) :

$$\vec{v}(\vec{X}, 0) = \vec{v}_0(\vec{X}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\underline{\sigma}}}(\vec{X}, 0) = \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_0(\vec{X}) \quad \text{sur} \quad \Omega_0 \quad (3.1.28)$$

3.1.2 Principe des puissances virtuelles

Une solution approchée du problème physique est recherchée en développant le principe des puissances virtuelles (PPV) qui est la forme faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq. (3.1.19) associée aux conditions aux limites en effort Eq. (3.1.26). Pour cela, on définit l'espace des fonctions de pondération \mathcal{U}_0 formé à partir du champ des vitesses virtuelles δv_i cinématiquement admissible à 0, et de continuité C^0 sur le domaine de référence :

$$\delta v_i(\vec{X}) \in \mathcal{U}_0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{U}_0 = \left\{ \delta v_i \mid \delta v_i \in C^0(\vec{X}) \quad \text{et} \quad \delta v_i = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma^v \right\} \quad (3.1.29)$$

4. Les efforts de couplage FS sont appliqués sur la frontière Γ^t

L'approximation de la solution est réalisée en définissant l'espace des fonctions de base de l'approximation \mathcal{U} formé à partir du champ des vitesses cinématiquement admissibles v_i dont la continuité est également C^0 sur le domaine de référence :

$$v_i(\vec{X}, t) \in \mathcal{U} \quad \text{avec} \quad \mathcal{U} = \left\{ v_i \mid v_i \in C^0(\vec{X}) \quad \text{et} \quad v_i = v_i^c \quad \text{sur} \quad \Gamma^v \right\} \quad (3.1.30)$$

Ces définitions sont identiques à ceci près que le champ des vitesses virtuelles est nul sur la frontière à vitesses imposées Γ^v . Elles permettent d'introduire la méthode d'approximation par éléments finis utilisée dans nos travaux. La forme faible est obtenue en pondérant par δv_i l'erreur commise lorsque l'on introduit le champ des vitesses approchées v_i dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq. (3.1.19), que l'on intègre ensuite sur le domaine courant :

$$\int_{\Omega} \delta v_i \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i - \rho \dot{v}_i \right) d\Omega = 0 \quad (3.1.31)$$

Dans cette relation, bien que l'intégrand dépende des coordonnées spatiales x_i , l'expression explicite des variables en fonction de ces coordonnées n'est pas nécessaire pour l'implémentation de la méthode des éléments finis. En effet, les variables sont exprimées par rapport aux coordonnées paramétriques de l'élément parent, qui sont transformées ensuite dans la situation courante (ou initiale). L'intégration par parties du premier terme de l'intégrand dans Eq. (3.1.31) permet d'éliminer la dérivée sur les contraintes sans quoi, celles-ci devraient être de continuité C^0 et les vitesses de continuité C^1 . Cette étape préliminaire s'écrit :

$$\int_{\Omega} \delta v_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i \sigma_{ji}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (3.1.32)$$

L'application du théorème de Gauss au premier terme du membre de droite dans Eq. (3.1.32), permet de transformer l'intégrale de volume en intégrale de surface. Celle-ci se limite à la frontière Γ^t dans la mesure où le champ des vitesses virtuelles est nul sur la frontière complémentaire Γ^v :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta v_i \sigma_{ji}) d\Omega = \int_{\Gamma^t} \delta v_i n_j \sigma_{ji} d\Gamma = \int_{\Gamma^t} \delta v_i t_i d\Gamma \quad (3.1.33)$$

où la deuxième égalité provient des conditions aux limites en effort Eq. (3.1.26). La forme faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et des conditions aux limites en effort s'obtient finalement en substituant Eq. (3.1.32) et (3.1.33) dans Eq. (3.1.31). Elle s'écrit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta v_i t_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega = 0 \quad (3.1.34)$$

où $v_i \in \mathcal{U}$ vérifie la solution $\forall \delta v_i \in \mathcal{U}_0$

Cette relation est l'expression du principe des puissances virtuelles que l'on écrit encore sous la forme générale suivante :

$$\delta\mathcal{P} = \delta\mathcal{P}^{\text{int}} - \delta\mathcal{P}^{\text{ext}} + \delta\mathcal{P}^{\text{cin}} = 0 \quad \forall \delta v_i \in \mathcal{U}_0 \quad (3.1.35)$$

où $\delta\mathcal{P}^{\text{int}}$, $\delta\mathcal{P}^{\text{ext}}$ et $\delta\mathcal{P}^{\text{cin}}$ sont respectivement les puissances virtuelles des efforts intérieurs, extérieurs et d'inertie, et s'écrivent :

$$\delta\mathcal{P}^{\text{int}} = \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega \quad (3.1.36a)$$

$$\delta\mathcal{P}^{\text{ext}} = \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega + \int_{\Gamma^t} \delta v_i t_i d\Gamma \quad (3.1.36b)$$

$$\delta\mathcal{P}^{\text{cin}} = \int_{\Omega} \delta v_i \rho \dot{v}_i d\Omega \quad (3.1.36c)$$

La forme faible Eq. (3.1.34) est bien adaptée aux problèmes tri-dimensionnels pour lesquels on développe une méthode d'approximation du type Bubnov-Galerkin. Son application directe dans le cadre des problèmes axisymétriques décrits par les équations de conservation de la quantité de mouvement Eq. (3.1.20) et (3.1.21) présente toutefois un inconvénient majeur ; le volume infinitésimal $2\pi r dr dz$ dépend en effet du rayon r qui tend vers zéro pour les points proches de l'axe de symétrie. Ainsi le poids pris par le volume infinitésimal est très faible pour les nœuds situés à proximité de l'axe, voire nul pour les points dans l'axe. Comme décrit dans [Benson, 1992a], cette particularité liée à la pondération par le volume (*volume-weighted element*) entraîne des solutions non-physiques autour de l'axe de symétrie qui nécessitent d'adapter la formulation du problème. Pour cela la forme faible Eq. (3.1.34) est modifiée en pondérant par la surface infinitésimale $dr dz$ (*area-weighted element*) plutôt que le volume. Cette approche a été introduite par [Goudreau et Hallquist, 1979] et développée dans le code DYNA2D [Hallquist, 1984]. On regroupe en outre le facteur r avec les vitesses virtuelles δv_r et δv_z , et le théorème de Gauss n'est pas appliqué aux termes de contraintes en facteur de $1/r$. La forme faible pour les problèmes axisymétriques s'écrit alors :

$$\delta\mathcal{P}_r = \int_{\Omega} \left[\left(\rho \dot{v}_r - \rho b_r - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right) (r \delta v_r) - \sigma_{rr} \frac{\partial(r \delta v_r)}{\partial r} - \sigma_{rz} \frac{\partial(r \delta v_r)}{\partial z} \right] dr dz - \int_{\Gamma^t} t_r (r \delta v_r) d\Gamma = 0 \quad (3.1.37)$$

$$\delta\mathcal{P}_z = \int_{\Omega} \left[\left(\rho \dot{v}_z - \rho b_z - \frac{\sigma_{zr}}{r} \right) (r \delta v_z) - \sigma_{zz} \frac{\partial(r \delta v_z)}{\partial z} - \sigma_{zr} \frac{\partial(r \delta v_z)}{\partial r} \right] dr dz - \int_{\Gamma^t} t_z (r \delta v_z) d\Gamma = 0 \quad (3.1.38)$$

où Ω et Γ désignent maintenant les domaines d'intégration surfacique et linéiques dans le plan (r, z) , t_r et t_z sont les composantes des efforts imposés sur la frontière Γ^t . L'intégration suivant θ n'est pas nécessaire et les équations ainsi obtenues sont valables pour un radian.

Suivant [Goudreau et Hallquist, 1979], une approximation du type Petrov-Galerkin est développée à partir de la forme faible Eq. (3.1.37) et (3.1.38) en remplaçant les fonctions de pondération standards de Galerkin par $(\delta v_r/r)$ et $(\delta v_z/r)$. Cette méthode permet en outre de rendre l'implémentation des formulations 2D déformations planes et axisymétriques très similaires (aux termes en $1/r$ près).

3.1.3 Discrétisation par éléments finis

La discrétisation par éléments finis du problème structure est réalisée en subdivisant le domaine Ω en sous-domaines élémentaires Ω_e tels que $\Omega = \bigcup_e \Omega_e$. Les coordonnées des nœuds dans la configuration courante sont notées x_{iI} où, comme précédemment, l'indice i désigne la composante (dépendant de la dimension du problème) et l'indice I le numéro du nœud. La méthode de calcul par éléments finis repose sur l'approximation du mouvement $\vec{x}(\vec{X}, t)$. Le champ des vitesses au sein de chaque élément est approché par la relation :

$$v_i(\vec{X}, t) = v_{iI}(t)N_I(\vec{X}) \quad (3.1.39)$$

où $v_{iI}(t)$ représente les composantes de la vitesse relative au nœud I , et $N_I(\vec{X})$ sont les fonctions de base de l'approximation qui sont des interpolations linéaires du champ des vitesses nodales. Elles vérifient en outre la condition $N_I(\vec{X}_J) = \delta_{IJ}$ (ou δ_{IJ} est le symbole de Kronecker, égal à 1 si $I = J$ et nul sinon) qui assure que le déplacement des nœuds est Lagrangien, c.-à-d. $\vec{x}(\vec{X}_J, t) = \vec{x}_J(t)$. L'approximation Eq. (3.1.39) repose sur la méthode de séparation des variables dans la mesure où les fonctions de forme ne dépendent que des coordonnées matérielles dans la formulation Lagrangienne alors que la dépendance au temps réside dans les variables nodales liées au mouvement de matière. Le champ des vitesses virtuelles quant à lui ne dépend pas du temps, et il est approximé par :

$$\delta v_i(\vec{X}) = \delta v_{iI}N_I(\vec{X}) \quad (3.1.40)$$

où δv_{iI} sont les composantes de la vitesse virtuelle nodale, et $N_I(\vec{X})$ sont les mêmes fonctions que celles utilisées pour l'approximation du champ solution. Dans nos applications, les éléments finis quadrangles à 4 nœuds (Q4) sont utilisés, tant pour modéliser les problèmes 2D (élément solide axisymétrique) que 3D (élément coque). Ces éléments sont décrits à partir d'un l'élément parent défini par ses coordonnées paramétriques ξ et η , comme présenté sur la figure 3.2. Les fonctions d'interpolation bilinéaires utilisées dans les approximations Eq. (3.1.39) et (3.1.40) sont écrites sous la forme générale suivante :

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \xi \in [-1 ; +1] & \eta \in [-1 ; +1] \\ \xi_I = \pm 1 & \eta_I = \pm 1 \end{cases} \quad (3.1.41)$$

Les grandeurs ξ_I et η_I ($I = 1, \dots, 4$) sont les coordonnées paramétriques du nœud I . Elles prennent les valeurs -1 ou $+1$ en fonction de la position du nœud dans l'espace paramétrique (voir figure 3.2) :

$$\begin{cases} \xi_I \\ \eta_I \end{cases} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.42)$$

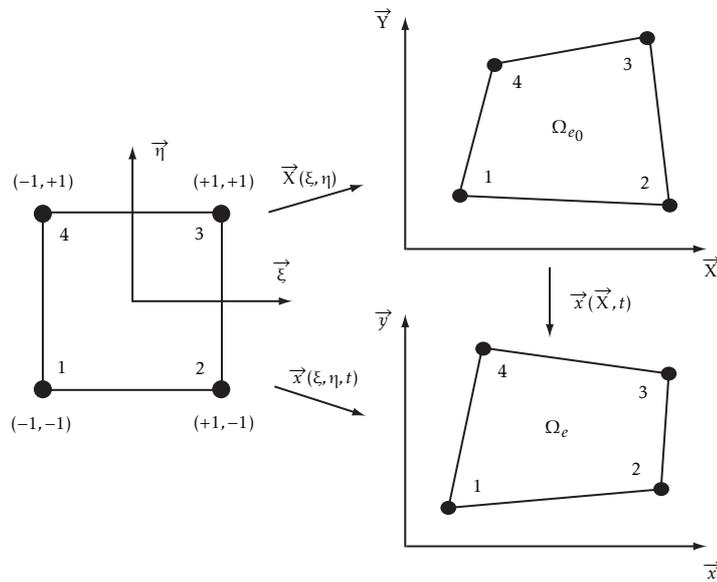


FIGURE 3.2 – Élément quadrangle bilinéaire Q4 - élément parent et transformations vers l'élément de référence et courant 2D

L'emploi des coordonnées paramétriques nécessite de relier l'intégrale d'une fonction quelconque $g(\vec{x})$ sur la configuration courante à l'intégrale sur l'élément parent, ce que l'on écrit :

$$\int_{\Omega_e} g(\vec{x}) d\Omega_e = \int_{\square} g(\vec{\xi}) J_{\xi} d\square \quad (3.1.43)$$

où \square représente le domaine de l'élément parent, et J_{ξ} est le déterminant du jacobien de la transformation entre l'élément parent et l'élément courant $F_{ij}^{\xi} = \partial x_i / \partial \xi_j$. Ce dernier s'écrit exactement en fonction des coordonnées

La première étape dans la construction des équations discrètes est la substitution de Eq. (3.1.40)

dans l'écriture du principe des puissances virtuelles Eq. (3.1.34) :

$$\sum_e \left[\delta v_{iI} \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega_e - \delta v_{iI} \int_{\Omega_e} N_I \rho b_i d\Omega_e - \delta v_{iI} \int_{\Gamma_e^t} N_I t_i d\Gamma_e + \delta v_{iI} \int_{\Omega_e} N_I \rho \dot{v}_i d\Omega_e \right] = 0 \quad (3.1.44)$$

où $v_i \in \mathcal{U}$ vérifie la solution $\forall \delta v_{iI} \mid \delta v_{iI} = 0$ sur Γ^v

Dans l'équation Eq. (3.1.44), le signe \sum_e est utilisé pour désigner la sommation sur l'ensemble des éléments finis Ω_e formant le domaine Ω . Dans cette expression Γ_e^t représente les frontières élémentaires appartenant à la frontière à effort imposé Γ^t . Dans la mesure où le champ des vitesses virtuelles est arbitraire sur l'ensemble du domaine sauf sur la frontière à vitesse imposée Γ^v où $\delta v_{iI} = 0$, la forme faible de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est réduite aux seuls nœuds et degrés de liberté non contraints :

$$\sum_e \left[\delta v_{iI} \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega_e - \delta v_{iI} \int_{\Omega_e} N_I \rho b_i d\Omega_e - \delta v_{iI} \int_{\Gamma_e^t} N_I t_i d\Gamma_e + \delta v_{iI} \int_{\Omega_e} N_I \rho \dot{v}_i d\Omega_e \right] = 0 \quad (3.1.45)$$

où $v_i \in \mathcal{U}$ vérifie la solution $\forall \delta v_{iI} \mid (i, I) \notin \Gamma_e^v$

3.1.4 Calcul des efforts internes

Dans l'expression Eq. (3.1.45), le premier terme correspond à la puissance virtuelle développée par les efforts intérieurs qui s'écrit $\delta \mathcal{P}^{\text{int}} = \delta v_{iI} f_{iI}^{\text{int}}$. Ainsi les forces nodales internes relatives à l'élément sont calculées par :

$$f_{iI}^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega_e \quad (3.1.46)$$

Pour l'implémentation, on écrit cette relation sous forme matricielle en utilisant la notation de Voigt. Suivant cette règle, le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy s'écrit sous la forme d'un vecteur colonne $\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{xy}]$, ainsi que le tenseur des taux de déformation $\{D\}^T = [D_{xx} \ D_{yy} \ D_{zz} \ 2D_{yz} \ 2D_{xz} \ 2D_{xy}]$. Pour un élément Q4, les vitesses nodales sont regroupés au sein d'un même vecteur colonne $\{v\}$ tel que $\{v\}^T = [v_{x1} \ v_{y1} \ v_{z1} \ v_{x2} \ \dots \ v_{z4}]$ et l'écriture du vecteur des efforts suit la même logique. Ainsi on introduit la matrice $[B]$, formée à partir des gradients des fonctions de forme, et ordonnés de telle façon que $[B]$ relie les taux de déformation au champ des vitesses nodales par $\{D\} = [B]\{v\}$. Le calcul des efforts internes Eq. (3.1.45) s'écrit donc sous la forme matricielle suivante :

$$\{f^{\text{int}}\} = \int_{\Omega_e} [B]^T \{\sigma\} d\Omega_e \quad (3.1.47)$$

Plutôt que d'évaluer Eq. (3.1.47) sur l'élément courant, l'intégration des efforts internes est effectuée sur l'élément parent \square en utilisant la relation Eq. (3.1.43), soit :

$$\{f^{\text{int}}\} = \int_{\square} [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} J_{\xi} d\square = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} J_{\xi} d\xi d\eta \quad (3.1.48)$$

L'intégration numérique des efforts est effectuée par la méthode de quadrature de Gauss qui, en utilisant n_Q points de quadrature dans une direction donnée, permet d'intégrer exactement des polynômes de degré inférieur ou égal à $(2n_Q - 1)$ dans cette même direction. Dans nos applications, les éléments finis sont développés en intégration réduite avec un seul point de quadrature au centre de l'élément en $\xi = 0$ et $\eta = 0$ (en 2D comme en 3D), ce qui est exacte pour des intégrands à variation linéaire. Pour les problèmes à deux dimensions, le déterminant J_{ξ} s'écrit :

$$J_{\xi} = A_0 + A_1 \xi + A_2 \eta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_0 = (y_{42} x_{31} - y_{31} x_{42})/8 \\ A_1 = (y_{34} x_{21} - y_{21} x_{34})/8 \\ A_2 = (y_{41} x_{32} - y_{32} x_{41})/8 \end{cases} \quad (3.1.49)$$

où $4A_0$ est égale à l'aire du quadrangle A et les grandeurs $x_{ij} = x_i - x_j$ et $y_{ij} = y_i - y_j$ représentent les longueurs des côtés de l'élément projetées dans le repère global. Avec un point de quadrature au centre de l'élément on a $J_{\xi} = A/4$, et le calcul des efforts internes Eq. (3.1.48) se réduit simplement à l'expression suivante Eq. (3.1.50) où la matrice $[\mathbf{B}]$ et les contraintes $\{\sigma\}$ sont évaluées au point de quadrature central.

$$\{f^{\text{int}}\} = A [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} \quad (3.1.50)$$

En formulation 2D axisymétrique (voir Eq. (3.1.37) et (3.1.38) précédentes), on utilise le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Pour l'implémentation, le vecteur des contraintes s'écrit $\{\sigma\}^T = [\sigma_{rr} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{\theta\theta} \ \sigma_{rz}]$, celui des taux de déformation $\{\mathbf{D}\}^T = [D_{rr} \ D_{zz} \ D_{\theta\theta} \ 2D_{rz}]$ et celui des vitesses nodales $\{v\}^T = [v_{r1} \ v_{z1} \ v_{r2} \ v_{z2} \ \dots \ v_{z4}]$. Ainsi la matrice $[\mathbf{B}]$ calculée en $\xi = \eta = 0$ est donnée par Eq. (3.1.51); les composantes de la troisième ligne correspondent à la contribution de la contrainte orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$ dans le calcul des efforts internes.

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} z_{24} & 0 & z_{31} & 0 & -z_{24} & 0 & -z_{31} & 0 \\ 0 & -r_{24} & 0 & -r_{31} & 0 & r_{24} & 0 & r_{31} \\ A/2r_0 & 0 & A/2r_0 & 0 & A/2r_0 & 0 & A/2r_0 & 0 \\ -r_{24} & z_{24} & -r_{31} & z_{31} & r_{24} & -z_{24} & r_{31} & -z_{31} \end{bmatrix} \quad (3.1.51)$$

où r_0 est le rayon moyen de l'élément calculé à partir des coordonnées nodales $\sum_{I=1}^4 r_I/4$.

Pour les éléments de coque 3D, l'expression des efforts internes en fonction des coordonnées corotationnelles \hat{x}_i est développé de la même façon à partir de Eq. (3.1.46). Pour cela on applique la règle de chaînage aux gradients des fonctions de forme :

$$\frac{\partial N_I}{\partial x_j} = \frac{\partial N_I}{\partial \hat{x}_k} \frac{\partial \hat{x}_k}{\partial x_j} = \frac{\partial N_I}{\partial \hat{x}_k} R_{kj}^T = \hat{B}_{Ik} R_{kj}^T \quad (3.1.52)$$

Par suite, en substituant Eq. (3.1.52) dans Eq. (3.1.46) et en utilisant la relation de transformation Eq. (3.1.23b), les efforts internes s'écrivent :

$$f_{li}^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \hat{B}_{Ik} \hat{\sigma}_{kl} R_{li}^T d\Omega_e = \hat{f}_{ll}^{\text{int}} R_{li}^T \quad \text{avec} \quad \hat{f}_{ll}^{\text{int}} = \int_{\Omega_e} \hat{B}_{Ik} \hat{\sigma}_{kl} d\Omega_e \quad (3.1.53)$$

où $\hat{f}_{ll}^{\text{int}}$ sont les efforts internes nodaux exprimés dans le repère corotationnel de l'élément. En notant h l'épaisseur courante de l'élément coque (suivant la direction locale \hat{z}), et $[\hat{B}] \equiv [\partial N_I / \partial \hat{x}_k]$ la matrice des gradients par rapport aux coordonnées corotationnelles, l'intégration effectuée sur l'élément parent s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :

$$\{\hat{f}^{\text{int}}\} = \int_{\square} [\hat{B}]^T \{\hat{\sigma}\} J_{\xi} d\square = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\hat{B}]^T \{\hat{\sigma}\} J_{\xi} d\xi d\eta d\hat{z} \quad (3.1.54)$$

L'expression du jacobien J_{ξ} donnée par Eq. (3.1.49) est également valable ici pour les éléments coque 3D dans la mesure où les efforts internes sont calculés dans le repère corotationnel Eq. (3.1.54). Il s'agit seulement de remplacer dans Eq. (3.1.49) les coordonnées spatiales x_I et y_I par les coordonnées corotationnelles \hat{x}_I et \hat{y}_I . Dans nos applications 3D, on utilise les éléments de coque à 4 nœuds issus des développements de [Belytschko *et al.*, 1984]. Ils sont formulés à partir de la théorie de Reissner-Mindlin pour les plaques en petites déformations suivant laquelle le champ de vitesse en tout point est décrit par :

$$\vec{v}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \vec{v}_m(\hat{x}, \hat{y}) - \hat{z} \vec{z} \wedge \vec{\theta}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (3.1.55)$$

où \vec{v}_m est le champ de vitesse dans le plan de la fibre moyenne et $\vec{\theta}$ la vitesse de rotation de la fibre moyenne. Les équations sont écrites dans le repère corotationnel $(\vec{\hat{x}}, \vec{\hat{y}}, \vec{\hat{z}})$ qui suit les grands déplacements de l'élément de sorte que les hypothèses de petites déformations sont vérifiées localement. Un faible gauchissement de l'élément est autorisé, qui se traduit par une tolérance δ sur l'écart angulaire entre l'orientation de section \vec{f} et le vecteur normal à l'élément \vec{z} , soit $|\vec{f} \cdot \vec{z} - 1| < \delta$, où δ est de l'ordre

de 10^{-2} . Suivant Eq. (3.1.54), les efforts et moments calculés aux nœuds s'écrivent :

$$\begin{array}{l|l} \hat{f}_{Ix}^{\text{int}} = A \left(\hat{B}_{Ix} \hat{N}_{xx} + \hat{B}_{Iy} \hat{N}_{xy} \right) & \hat{m}_{Ix}^{\text{int}} = A \left(\hat{B}_{Iy} \hat{M}_{yy} + \hat{B}_{Ix} \hat{M}_{xy} - \kappa \hat{T}_{yz}/4 \right) \\ \hat{f}_{Iy}^{\text{int}} = A \left(\hat{B}_{Iy} \hat{N}_{yy} + \hat{B}_{Ix} \hat{N}_{xy} \right) & \hat{m}_{Iy}^{\text{int}} = -A \left(\hat{B}_{Ix} \hat{M}_{xx} + \hat{B}_{Iy} \hat{M}_{xy} - \kappa \hat{T}_{xz}/4 \right) \\ \hat{f}_{Iz}^{\text{int}} = A \kappa \left(\hat{B}_{Ix} \hat{f}_{xz} + \hat{B}_{Iy} \hat{f}_{yz} \right) & \hat{m}_{Iz}^{\text{int}} = 0 \end{array} \quad (3.1.56)$$

où \hat{B}_{Ii} a déjà été défini au travers de Eq. (3.1.52). Les grandeurs $\hat{N}_{\alpha\beta} = \int_{\hat{z}} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} d\hat{z}$, $\hat{M}_{\alpha\beta} = -\int_{\hat{z}} \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{z} d\hat{z}$ et $\hat{T}_{\alpha z} = \int_{\hat{z}} \hat{\sigma}_{\alpha z} d\hat{z}$ représentent respectivement les tenseurs des efforts de membrane, de flexion et de cisaillement transverse évalués au centre de l'élément. Ces efforts sont calculés en intégrant les contraintes dans l'épaisseur de coque par une quadrature numérique (de Gauss ou Lobatto) avec plusieurs points dans l'épaisseur. Le nombre de points choisis dépend du type de réponse de la coque ; 3 points minimum en élasticité linéaire pour représenter correctement le champ de membrane et flexion, 5 points minimum dès que la plastification locale intervient. Dans Eq. (3.1.56) le facteur κ correspond au facteur de correction de cisaillement transverse selon la théorie de Mindlin. Dans [Belytschko *et al.*, 1984], ce facteur κ est un paramètre de pénalisation permettant d'assurer la condition de normalité de Kirchhoff dès que l'épaisseur de coque devient trop faible. En pratique, ce coefficient est fixé à 5/6.

3.1.5 Calcul des efforts externes

Les deuxième et troisième termes dans Eq. (3.1.45) traduisent la puissance virtuelle des efforts extérieures $\delta \mathcal{P}^{\text{ext}} = \delta v_{iI} f_{iI}^{\text{ext}}$, et les forces nodales externes sont calculées par :

$$f_{iI}^{\text{ext}} = \int_{\Omega_e} N_I \rho b_i d\Omega_e + \int_{\Gamma_e^t} N_I t_i d\Gamma_e \quad (3.1.57)$$

Comme pour les efforts nodaux internes, les efforts externes sont intégrés sur le domaine de l'élément parent.

3.1.6 Calcul des efforts d'inertie

Le dernier terme dans Eq. (3.1.45) correspond à la puissance virtuelle des efforts d'inertie $\delta \mathcal{P}^{\text{cin}} = \delta v_{iI} f_{iI}^{\text{cin}}$, et les forces nodales d'inertie sont déterminées à partir de la relation :

$$f_{iI}^{\text{cin}} = \int_{\Omega_e} \rho N_I \dot{v}_i d\Omega_e \quad (3.1.58)$$

Suivant Eq. (3.1.39) la dérivée temporelle du champ d'approximation des vitesses est donnée par $\dot{v}_i = N_J \dot{v}_{iJ}$ que l'on inclut dans la relation Eq. (3.1.58) pour le calcul des forces nodales d'inertie :

$$f_{iI}^{\text{cin}} = \int_{\Omega_e} \rho N_I N_J d\Omega_e \dot{v}_{iJ} \quad (3.1.59)$$

où \dot{v}_{iJ} sont les composantes du champ d'accélération nodal relatif au nœud J. À partir de Eq. (3.1.59) on introduit la matrice de masse M relative aux degrés de liberté non contraints :

$$M_{iJIJ} = \delta_{ij} \int_{\Omega_e} \rho N_I N_J d\Omega_e = \delta_{ij} \tilde{M}_{IJ} \quad \text{où} \quad \tilde{M}_{IJ} = \int_{\Omega_e} \rho N_I N_J d\Omega_e \quad (3.1.60)$$

où le symbole de Kronecker δ_{ij} est utilisé ici pour tenir compte du fait que les efforts d'inertie calculés dans la direction i ne dépendent que des accélérations nodales dans cette même direction. De ce fait, la dimension de la matrice de masse M est réduite à la forme compacte \tilde{M} d'un facteur égal aux dimensions du problème⁵. Suivant Eq. (3.1.59) les forces nodales d'inertie sont issues du produit de la matrice de masse et des accélérations nodales, et s'écrivent encore sous la forme condensée suivante :

$$f_{iI}^{\text{cin}} = M_{iJIJ} \dot{v}_{jJ} = \delta_{ij} \tilde{M}_{IJ} \dot{v}_{jJ} = \tilde{M}_{IJ} \dot{v}_{iJ} \quad (3.1.61)$$

En formulation Lagrangienne, on montre que la matrice de masse ne dépend pas du temps pour les problèmes 2D plan et 3D. En effet à partir de l'expression Eq. (3.1.60) de la matrice compacte \tilde{M} , et en utilisant successivement les relations Eq. (3.1.10) et (3.1.18) qui permettent de relier le domaine élémentaire courant Ω_e au domaine initial Ω_{e_0} , on obtient :

$$\tilde{M}_{IJ} = \int_{\Omega_e} \rho N_I N_J d\Omega_e = \int_{\Omega_{e_0}} \rho N_I N_J J d\Omega_{e_0} = \int_{\Omega_{e_0}} \rho_0 N_I N_J d\Omega_{e_0} \quad (3.1.62)$$

où on a utilisé les relations Eq. (3.1.10) et (3.1.18) pour écrire respectivement la deuxième et la troisième égalité. Suivant Eq. (3.1.62) il est évident que l'intégrant dans le dernier membre de droite est indépendant du temps, et l'intégrale également car elle est calculée sur le domaine élémentaire initial. La matrice de masse peut ainsi être qualifiée de Lagrangienne totale dans la mesure où elle est évaluée une seule fois au début du calcul sur la configuration de référence.

5. La matrice \tilde{M} est avantageusement utilisée dans les méthodes d'intégration temporelle explicites qui utilisent une matrice de masse consistante pour résoudre le problème, ce qui permet de rendre l'opération d'inversion de la matrice \tilde{M} moins coûteuse en temps de calcul CPU que pour M. On notera que ceci n'est possible que lorsque les fonctions de forme sont identiques dans toutes les directions du problème.

Pour les problèmes 2D axisymétriques, de variables spatiales indépendantes (r, z) , ces considérations ne sont plus vraies dans la mesure où l'intégration sur le domaine élémentaire fait intervenir la distance r (mesure entre l'axe de symétrie et le centre de l'élément) qui dépend du temps, comme le montre l'Eq. (3.1.63). La matrice de masse doit donc être évaluée à chaque pas de temps.

$$\int_{\Omega_e} f(r, z, t) d\Omega_e = \int_z \int_r f(r, z, t) 2\pi r(t) dr dz \quad (3.1.63)$$

Dans les méthodes d'intégration temporelle explicites, la matrice de masse consistante est généralement diagonalisée, ce qui permet notamment de réduire le temps de calcul CPU associé à l'évaluation des accélérations nodales. Cette technique numérique est bien adaptée aux problèmes de dynamique rapide dans la mesure où cela revient à découpler les accélérations nodales, ce qui permet de représenter correctement la physique des chocs⁶. Ici on applique la technique du *row-sum* suivant laquelle, tous les termes extra-diagonaux de la matrice \tilde{M} sont additionnés sur le terme diagonal de la ligne correspondante. À partir de Eq. (3.1.62), cette technique se traduit pour l'élément Q4 par l'opération de sommation suivante :

$$\tilde{M}_{II} = \sum_{j=1}^4 \int_{\Omega_{e_0}} \rho_0 N_I N_j d\Omega_{e_0} = \int_{\Omega_{e_0}} \rho_0 N_I d\Omega_{e_0} \quad (3.1.64)$$

où la seconde égalité provient du fait que la somme des fonctions de forme Eq. (3.1.41) sur tous les nœuds de l'élément est égale à 1, $\sum_{j=1}^4 N_j = 1$. L'intégration numérique des forces nodales et des matrices élémentaires comme la matrice de masse est évaluée à l'aide d'un point de quadrature centré sur l'élément en $\xi = 0$ et $\eta = 0$ dans l'espace des coordonnées paramétriques. Pour la matrice de masse Eq. (3.1.64), appliquée à un élément coque, le résultat de cette intégration est simplement :

$$\tilde{M}_{II} = \frac{1}{4} \rho_0 A_0 h_0 \quad (3.1.65)$$

où A_0 et h_0 sont respectivement la surface et l'épaisseur initiales de l'élément coque.

Suivant les relations Eq. (3.1.46), (3.1.57), (3.1.58) et (3.1.61), la forme condensée de Eq. (3.1.45) s'écrit :

$$\delta v_{iI} \left(\tilde{M}_{IJ} \dot{v}_{jJ} + f_{iI}^{\text{int}} - f_{iI}^{\text{ext}} \right) = 0 \quad \forall \delta v_{iI} \quad (3.1.66)$$

6. On peut illustrer cette remarque par l'étude une barre impactée à une extrémité ; l'utilisation d'une matrice de masse consistante entraîne la propagation d'un signal bruité en aval du choc dans la mesure où les accélérations nodales sont couplées, ce qui n'est pas le cas pour une matrice diagonalisée qui respecte la propagation d'onde physique.

Cette relation étant vraie quelque soit le champ des vitesses virtuelles nodales δv_{iI} , le problème discret mène à la résolution du système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\widetilde{M}_{IJ} \dot{v}_{iI} + f_{iI}^{\text{int}} - f_{iI}^{\text{ext}} = 0 \quad (3.1.67)$$

Comme mentionné précédemment, l'utilisation de la matrice de masse diagonale Eq. (3.1.64) au lieu de la matrice consistante Eq. (3.1.62) permet de découpler les équations du système Eq. (3.1.67). Dès lors, connaissant à l'instant t^n les efforts internes et externes ainsi que la masse \widetilde{M}_{II} relatifs au nœud I, le champ des accélérations nodales est facilement calculé en divisant le bilan des efforts nodaux par la masse, soit :

$$\dot{v}_{iI} = \frac{f_{iI}^{\text{ext}} - f_{iI}^{\text{int}}}{\widetilde{M}_{II}} \quad (3.1.68)$$

3.1.7 Intégration temporelle

La méthode d'intégration temporelle des équations discrètes Eq. (3.1.67) est basée sur un schéma d'avance en temps explicite. À partir des accélérations nodales calculées à l'instant t^n par Eq. (3.1.68), l'intégration sur le pas de temps Δt^n à l'aide d'un schéma en différences finies centrées permet de déduire la vitesse nodale à l'instant $t^{n+1/2}$ et la nouvelle position du nœud I à l'instant t^n :

$$v_{iI}^{n+1/2} = v_{iI}^{n-1/2} + \dot{v}_{iI} \Delta t^n \quad (3.1.69)$$

$$x_{iI}^{n+1} = x_{iI}^n + v_{iI}^{n+1/2} \Delta t^n \quad (3.1.70)$$

La valeur du pas de temps d'intégration Δt^n est limitée par la condition de Courant, Friedrichs et Lewy, dite CFL [Courant *et al.*, 1967] qui assure la stabilité du schéma d'intégration. Cette condition implique un pas de temps pour l'ensemble du modèle inférieur ou égal au minimum des pas de temps élémentaire Δt_e . Physiquement, le pas de temps Δt_e correspond à la durée de propagation d'une onde acoustique⁷ au travers de l'élément. La condition CFL s'écrit :

$$\Delta t^n \leq \min(\Delta t_e) \quad \text{avec} \quad \Delta t_e = \frac{L}{c} \quad (3.1.71)$$

7. Pour les problèmes faisant intervenir des impacts hyper-véloces, le pas de temps critique doit être diminué d'un facteur dépendant de la vitesse du phénomène dans la mesure où la célérité des ondes est supérieure à celle du son

où c est la vitesse du son dans l'élément (qui dépend de la formulation solide 2D axisymétrique ou coque 3D), et L une dimension caractéristique de l'élément calculée par le rapport de la surface élémentaire A et du maximum des longueurs de diagonales d_1 et d_2

$$L = \frac{A}{\max(d_1, d_2)} \quad (3.1.72)$$

3.1.8 Résumé du cycle de calcul Lagrangien

En conclusion de cette première partie consacrée à la description Lagrangienne des équations du mouvement relatives à la mécanique des structures, on peut résumer les différentes étapes du calcul pour un incrément de temps Δt^n entre les instants t^n et t^{n+1} comme suit :

1. Connaissant à l'instant t^n le champ des contraintes, la pression, les forces de hourglass et la viscosité de choc dans chaque élément, les efforts internes nodaux sont évalués par Eq. (3.1.50) ou Eq. (3.1.56), et les accélérations sont calculées en divisant les efforts nodaux par les accélérations Eq. (3.1.68),
2. les accélérations sont intégrées suivant Eq. (3.1.69) pour évaluer les vitesses à $t^{n+1/2}$,
3. les vitesses sont intégrées à l'aide de Eq. (3.1.70) pour évaluer les déplacements à t^{n+1} ,
4. le mouvement étant complètement déterminé, les taux de déformation sont calculés par Eq. (3.1.15), et l'équation constitutive Eq. (3.1.22) ou Eq. (3.1.25) est intégrée de t^n à t^{n+1} pour calculer les efforts internes liés à la réponse du matériau,
5. les forces liées aux viscosités artificielles de hourglass et de choc sont calculées en fonction du champ de vitesses à $t^{n+1/2}$ et ajoutées aux efforts internes,
6. l'énergie interne est incrémentée en se basant sur le travail des efforts entre t^n et t^{n+1} ,
7. la masse volumique et l'énergie étant déterminées à l'instant t^{n+1} , la pression est calculée à l'aide de l'équation d'état du matériau,
8. un nouveau pas de temps critique Δt^{n+1} est évalué suivant Eq. (3.1.71) pour assurer la stabilité du schéma d'intégration temporelle,
9. le temps suivant $t^{n+2} = t^{n+1} + \Delta t^{n+1}$ est calculé et on boucle sur l'étape (1).

Certaines étapes décrites ici sont spécifiques au cycle de calcul Lagrangien avant advection qui détermine le mouvement des fluides par la méthode *split* (décrite dans la section 3.2 suivante). Elles concernent le calcul de l'énergie interne (6) et de la pression (7). En outre, l'étape de calcul (5) liée aux viscosités artificielles (de hourglass et de choc) est également présentée dans la section 3.2 suivante bien qu'elle ne soit pas spécifiquement liée aux fluides. Cela étant, le cycle de calcul Lagrangien ainsi présenté s'inscrit également, au travers de la méthode *split*, dans la boucle de calcul relative aux fluides. Les seules étapes manquantes concernent la relaxation du maillage et la projection des variables sur la grille Eulérienne ou ALE. Ces précisions nous permettent d'introduire la seconde partie de ce chapitre relative à la formulation ALE et Eulérienne multi-matériaux utilisée dans nos travaux.

3.2 Formulation ALE et Eulérienne multi-matériaux

En mécanique des milieux continus, la principale difficulté associée à l'utilisation de la formulation Lagrangienne est mise en évidence dans les problèmes qui engendrent des distorsions excessives du maillage (souvent associées à des jacobiens négatifs et une augmentation importante de l'erreur de calcul). Les grandes déformations matérielles ou les grands mouvements d'interfaces sont souvent à l'origine de ces distorsions. Pour les cas d'applications relatifs aux explosions sous-marines, ces non-linéarités sont mises en évidence pour différents phénomènes physiques ; grands déplacements au niveau des discontinuités matérielles (interface de la bulle, surface libre et surface de contact FS), compressibilité du fluide au voisinage du front d'onde de choc, écoulements incompressibles liés à la dynamique de bulle (pulsation et migration), éventuellement grandes déformations des structures pouvant mener à la rupture. Elles nécessitent donc de décrire les mouvements de la matière sur des grilles non plus nécessairement attachées à l'écoulement, on parle alors de :

- * Méthode Eulérienne basée sur une grille de calcul fixe au travers de laquelle passe la matière, ce qui nécessite un traitement particulier lié à l'advection.
- * Méthode ALE qui est une méthode hybride pour laquelle le mouvement de la grille est intermédiaire entre les descriptions Lagrangienne et Eulérienne. En fonction des problèmes traités, elle permet de combiner les avantages liés à l'emploi de l'une ou l'autre méthode tout en minimisant leurs inconvénients.

Pour les applications présentées dans nos travaux, la méthode Eulérienne est utilisée pour décrire et résoudre les équations de la mécanique des fluides. Cependant, un formalisme basé sur la description ALE est adopté ici pour présenter la méthode dans la mesure où les formulations Lagrangienne et Eulérienne en sont issues comme cas particuliers. Pour cela, on définit trois domaines pour décrire le mouvement du fluide comme schématisé sur la figure 3.3 : comme précédemment un domaine spatial ou Eulérien qui correspond à la configuration courante Ω , un domaine matériel ou Lagrangien correspondant à la configuration initiale Ω_0 et enfin un domaine ALE dit de référence, noté $\hat{\Omega}$, qui représente la grille de calcul. On notera que la description Lagrangienne est obtenue quand le domaine ALE coïncide en permanence avec le domaine matériel, c.-à-d. lorsque $\hat{\Omega} = \Omega_0$. D'un autre côté, la description est Eulérienne lorsque le domaine ALE est tel que $\hat{\Omega} = \Omega$.

Pour la description Lagrangienne, nous avons vu précédemment que le mouvement de la matière, décrit par la coordonnées spatiales \vec{x} , s'exprime à l'aide de la transformation injective $\vec{\Phi}(\vec{X}, t)$. De la même manière, en formulation ALE on définit la transformation $\vec{\Phi}(\vec{\chi}, t)$ qui, à chaque instant, fait correspondre les coordonnées ALE $\vec{\chi}$ (ou coordonnées de grille) aux coordonnées spatiales \vec{x} . Ainsi le mouvement de la grille de calcul en fonction du temps est décrit, indépendamment du mouvement de la matière, par la relation :

$$\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{\chi}, t) \tag{3.2.1}$$

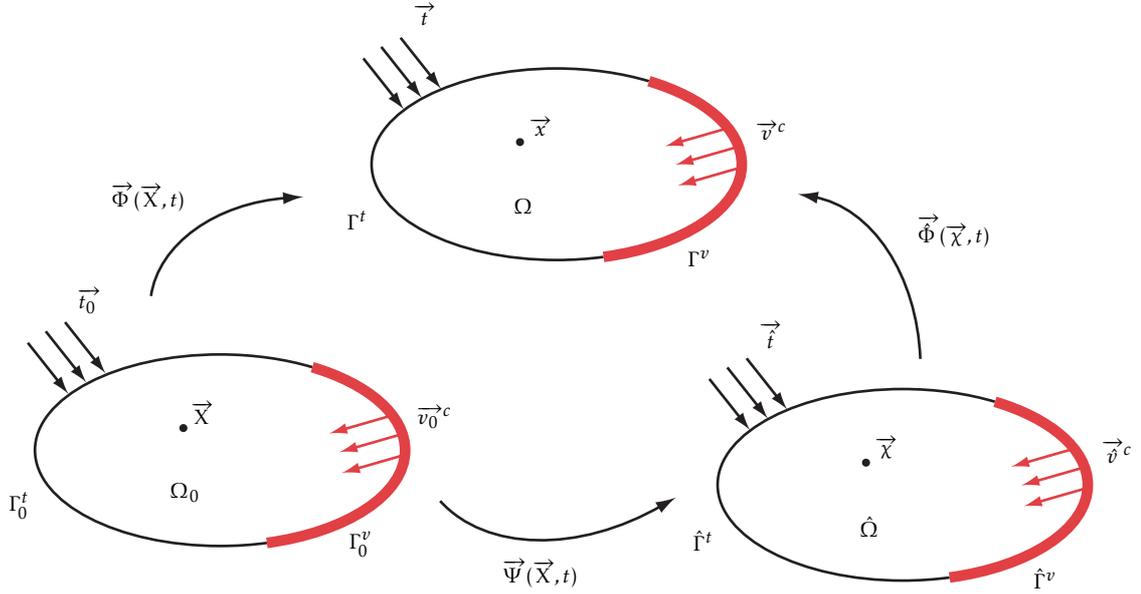


FIGURE 3.3 – Représentation schématique des trois domaines utilisés pour décrire le mouvement du fluide :
 Domaine Lagrangien Ω_0 (coordonnées matérielles \vec{X}), domaine Eulérien Ω (coordonnées spatiales \vec{x}) et domaine de référence ALE $\hat{\Omega}$ (coordonnées $\vec{\chi}$)

Dans l'implémentation, le domaine $\hat{\Omega}$ est utilisé pour décrire le maillage initial, de sorte que les coordonnées ALE initiales $\vec{\chi} = \vec{\Phi}(\vec{X}, 0)$ coïncident avec celles des particules de matière, c.-à-d. $\vec{\chi}(\vec{X}, 0) = \vec{X}$.

Suivant Eq. (3.2.1), et par analogie avec le déplacement matériel Eq. (3.1.2), le déplacement de grille s'écrit :

$$\vec{u}(\vec{\chi}, t) = \vec{\Phi}(\vec{\chi}, t) - \vec{\chi} \equiv \vec{x} - \vec{\chi} \quad \text{ou} \quad \hat{u}_i = \hat{\Phi}_i(\vec{\chi}, t) - \chi_i \equiv x_i - \chi_i \quad (3.2.2)$$

La vitesse de la grille de calcul est obtenue par dérivation temporelle de Eq. (3.2.2) à coordonnée $\vec{\chi}$ constante, soit :

$$\vec{v}(\vec{\chi}, t) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(\vec{\chi}, t) = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t}(\vec{\chi}, t) \quad \text{ou} \quad \hat{v}_i(\vec{\chi}, t) = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}(\vec{\chi}, t) = \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial t}(\vec{\chi}, t) \quad (3.2.3)$$

Pour les besoins de présentation de la méthode et conformément à la figure 3.3, on définit également la transformation $\vec{\Psi}(\vec{X}, t)$ qui, à chaque instant, fait correspondre les coordonnées matérielles \vec{X} aux coordonnées ALE $\vec{\chi}$, ce que l'on écrit :

$$\vec{\chi} = \vec{\Psi}(\vec{X}, t) \quad (3.2.4)$$

En description ALE, les variables dépendent des coordonnées de référence $\vec{\chi}$ et du temps t . La dérivée temporelle matérielle D/Dt d'une fonction $f(\vec{\chi}, t)$ doit donc être écrite en considérant la composition de fonctions ($f \circ \Psi$) et en appliquant la règle de chaînage, de sorte que :

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \dot{f}(\vec{\chi}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \frac{\partial f}{\partial \chi_i}(\vec{\chi}, t) w_i \quad (3.2.5)$$

où l'on a introduit la vitesse w_i qui correspond à la vitesse matérielle exprimée dans le référentiel $\hat{\Omega}$, et qui s'écrit :

$$w_i = \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\vec{X}, t) \quad (3.2.6)$$

Cette même vitesse peut également s'exprimer en fonction des coordonnées matérielles \vec{X} . Le mouvement matériel $\vec{\Phi}$ donné par Eq. (3.1.1), s'écrit encore à l'aide de la composition de fonction ($\vec{\Phi} \circ \Psi$) dans la mesure où $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{X}, t) = \vec{\Phi}(\vec{\Psi}(\vec{X}, t), t)$. Par suite, la vitesse matérielle s'obtient en appliquant la règle de chaînage :

$$v_i(\vec{X}, t) = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t}(\vec{X}, t) = \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial \chi_j}(\vec{\chi}, t) \frac{\partial \Psi_j}{\partial t}(\vec{X}, t) = \hat{v}_i + \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} w_j \quad (3.2.7)$$

où la troisième égalité provient des relations Eq. (3.2.3) et (3.2.6). L'équation Eq. (3.2.7) permet d'introduire la vitesse convective, notée c_i , qui correspond à la différence entre la vitesse matérielle et la vitesse de la grille :

$$c_i = v_i - \hat{v}_i = \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j}(\vec{\chi}, t) w_j \quad (3.2.8)$$

Pour écrire la dérivée totale Eq. (3.2.5) en fonction du gradient $\partial/\partial x_i$, on applique la règle de chaînage à partir de Eq. (3.2.1) :

$$\frac{\partial f}{\partial \chi_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \chi_i} \quad (3.2.9)$$

Après substitution de Eq. (3.2.9) dans Eq. (3.2.5), et en utilisant la vitesse convective Eq. (3.2.8), la dérivée temporelle matérielle s'exprime finalement sous la forme suivante :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \frac{\partial f}{\partial x_j} c_j \quad (3.2.10)$$

Cette relation permet d'expliciter les deux descriptions Lagrangienne et Eulérienne :

- * Lorsque le domaine de référence $\hat{\Omega}$ est confondu avec le domaine matériel Ω_0 , on a $\vec{\chi} = \vec{X}$ et $\vec{\Phi} \equiv \vec{\Phi}$. De ce fait, le mouvement de la grille est identique au mouvement de la matière et la description est Lagrangienne avec une vitesse d'advection nulle $\vec{c} = \vec{0}$.
- * Lorsque le domaine de référence $\hat{\Omega}$ est confondu avec le domaine spatial Ω , on a $\vec{\chi} = \vec{x}$. Dans ce cas le mouvement de la grille est donné par $\vec{x} = \vec{\Phi}(\vec{x}, t) = \vec{I}(\vec{x})$ qui correspond à la transformation identité et $\vec{\Phi} = \vec{\Psi}$. La vitesse d'advection est égale à la vitesse matérielle $\vec{c} = \vec{v}$.

En résumé les réductions de la descriptions ALE aux formes Lagrangienne et Eulérienne sont duales l'une par rapport à l'autre. En passant d'une description ALE à une description Lagrangienne, la transformation $\vec{\Psi}$ devient l'identité et le mouvement du maillage devient le mouvement matériel. En passant à une description Eulérienne, le mouvement du maillage devient l'identité et la transformation $\vec{\Psi}$ devient le mouvement matériel.

3.2.1 Équations locales du problème en formulation ALE

L'équation de conservation de la masse est issue du théorème de transport de Reynolds qui, lorsqu'on l'applique à la masse volumique, s'écrit :

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (3.2.11)$$

Les deux premiers termes de l'intégrant dans le membre de droite correspondent à la dérivée temporelle matérielle D/Dt (exprimée par rapport aux coordonnées spatiales). Par suite, en l'exprimant par rapport aux coordonnées ALE à l'aide de Eq. (3.2.10), et en précisant que cette équation est valable quelque soit le domaine d'intégration Ω , on obtient finalement l'équation de conservation de la masse en description ALE :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} c_i = -\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (3.2.12)$$

De même pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq. (3.1.19), en exprimant la dérivée temporelle matérielle en description ALE, on a :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} c_j = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad (3.2.13)$$

Un raisonnement identique appliqué à l'équation de conservation de l'énergie permet d'écrire celle-ci sous la forme suivante :

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \rho \frac{\partial E}{\partial x_j} c_j = \frac{\partial(\sigma_{ij} v_i)}{\partial x_j} + \rho b_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} \right) + \rho s \quad (3.2.14)$$

où E est l'énergie totale spécifique (en $J.Kg^{-1}$), k_{ij} les composantes de la matrice de conductivité thermique (en $W.K^{-1}.m^{-1}$), Θ la température (en K) et s la source de chaleur (en $J.Kg^{-1}.s^{-1}$). Cette équation s'applique aux problèmes thermomécaniques pour lesquels les sources d'énergie proviennent du travail mécanique et de la chaleur. Dans nos applications, on néglige généralement les transferts thermiques dans la mesure où les phénomènes étudiés sont extrêmement rapides. Ainsi en l'absence de conduction thermique et de source de chaleur, la conservation de l'énergie totale Eq. (3.2.14) se réduit aux processus purement mécaniques, de sorte que :

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \rho \frac{\partial E}{\partial x_j} c_j = \frac{\partial(\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} + \rho b_i v_i \quad (3.2.15)$$

L'énergie totale E est liée à l'énergie interne e par $E = e + v_i v_i / 2$, ce qui permet d'exprimer une forme équivalente à Eq. (3.2.15) en terme d'énergie interne :

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \rho \frac{\partial e}{\partial x_j} c_j = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} \quad (3.2.16)$$

3.2.2 Équation constitutive pour les fluides

Aux équations locales précédentes Eq. (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.16) on adjoint une équation constitutive qui permet de décrire le tenseur des contraintes en fonction des vitesses de déformation du fluide. Pour cela, on décompose le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ en une partie relative aux forces de pression (partie sphérique) et une autre relative aux forces de viscosité $\underline{\underline{\sigma}}'$ (partie déviatorique) :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' + \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \mathbb{I} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \frac{1}{3} (\sigma_{kk} \delta_{ij}) \quad (3.2.17)$$

où \mathbb{I} est le tenseur identité et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. La partie volumétrique correspond aux contraintes de pression qui seules agissent en l'absence de gradients de vitesse (fluide au repos ou écoulement global de translation). Cette composante est purement diagonale (contraintes normales) et isotrope (les trois coefficients diagonaux ont la même valeur). La partie déviatorique $\underline{\underline{\sigma}}'$ est liée aux déformations des éléments de fluide. Dans le cas des fluides visqueux newtoniens, dont on peut citer par exemple l'eau ou l'air, l'hypothèse de Newton postule que la partie déviatorique relative aux forces

de viscosité dépend linéairement du tenseur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}$. La condition d'isotropie du comportement permet en outre de relier le tenseur des contraintes aux valeurs instantanées des déformations à l'aide des coefficients de Lamé du fluide λ et μ . Dans ce cadre, le comportement du fluide est décrit de façon générale par l'équation constitutive :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \mathbb{I} + 2\mu \underline{\underline{D}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{D}}) \mathbb{I} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu D_{ij} + \lambda (D_{kk} \delta_{ij}) \quad (3.2.18)$$

où $p = p(\rho, T)$ représente la pression thermodynamique qui dépend de l'équation d'état du fluide considéré (pression positive en état de compression). Comme pour le tenseur des contraintes, on décompose le tenseur symétrique $\underline{\underline{D}}$ en un tenseur sphérique associé à la variation de volume des éléments de fluide, et un tenseur déviatorique $\underline{\underline{D}}'$ de trace nulle, relatif aux déformations sans changement de volume des éléments de fluide. Cette décomposition permet d'aboutir aux relations suivantes :

$$\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = -p + \eta \text{tr}(\underline{\underline{D}}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}' = 2\mu \underline{\underline{D}}' \quad (3.2.19)$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique (le coefficient de viscosité cinématique ν est égal à μ/ρ), et η le coefficient de viscosité volumique égal à $(2\mu + 3\lambda)/3$. En pratique, pour les fluides comme l'eau ou l'air, η présente des valeurs très faibles. Dans ce cadre, on adjoint à l'équation constitutive l'hypothèse de Stokes $2\mu + 3\lambda = 0$, pour aboutir classiquement à l'expression du tenseur des contraintes de Stokes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \mathbb{I} + 2\mu \left[\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{D}}) \mathbb{I} \right] \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.2.20)$$

Contrairement à l'équation constitutive hypoélastique utilisée pour les matériaux solides, le tenseur $\underline{\underline{D}}$ est invariant pour les grandes rotations de corps rigide. Comme la contrainte (et non plus le taux de contrainte) dépend linéairement des taux de déformation pour un fluide newtonien, le tenseur de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$ est également invariant, ce qui ne nécessite pas de traitement supplémentaire pour assurer cette condition.

3.2.3 Conditions aux limites et conditions initiales

Comme présenté sur la figure 3.3, les conditions aux limites en effort et en vitesse, imposées respectivement sur les frontières extérieures Γ^t et Γ^v telles que $\Gamma^t \cup \Gamma^v = \Gamma$ et $\Gamma^t \cap \Gamma^v = \emptyset$, s'écrivent⁸ :

8. Les efforts de couplage FS sont appliqués sur la frontière Γ^t

$$n_j(\vec{\chi}, t) \sigma_{ji}(\vec{\chi}, t) = t_i(\vec{\chi}, t) \quad \text{sur } \Gamma^t \quad (3.2.21)$$

$$v_i(\vec{\chi}, t) = v_i^c(\vec{\chi}, t) \quad \text{sur } \Gamma^v \quad (3.2.22)$$

Le système à résoudre, formé des équations Eq. (3.2.12), (3.2.13), (3.2.16) et (3.2.20) et des conditions aux limites Eq. (3.2.21) et (3.2.22), est complètement décrit en lui adjoignant les conditions initiales exprimées en vitesses et contraintes (ou vitesses et déplacements) :

$$\vec{v}(\vec{X}, 0) = \vec{v}_0(\vec{X}) \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}(\vec{X}, 0) = \underline{\underline{\sigma}}_0(\vec{X}) \quad \text{sur } \Omega_0 \quad (3.2.23)$$

3.2.4 Forme faible des équations locales

3.2.4.1 Traitement direct

La résolution classique et la plus directe des équations précédentes repose sur une méthode d'approximation du type Galerkin. Pour cela, la forme faible des équations locales est construite en multipliant chaque forme forte Eq. (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.16) par une fonction de pondération et en intégrant le résultat sur le domaine courant Ω . En suivant un formalisme équivalent à celui décrit au paragraphe 3.1.2, on obtient :

$$\int_{\Omega} \delta \rho \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{\chi}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \delta \rho \frac{\partial \rho}{\partial x_i} c_i d\Omega + \int_{\Omega} \delta \rho \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (3.2.24a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{\chi}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \delta v_i \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} c_j d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \dots \\ \dots - \int_{\Gamma^t} \delta v_i t_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.2.24b)$$

$$\int_{\Omega} \delta e \rho \frac{\partial e}{\partial t}(\vec{\chi}, t) d\Omega + \int_{\Omega} \delta e \rho \frac{\partial e}{\partial x_i} c_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta e \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega = 0 \quad (3.2.24c)$$

où les fonctions tests $\delta \rho$, δv_i et δe pondèrent l'erreur commise respectivement sur la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. La fonction δv_i appartient à l'espace \mathcal{U}_0 , défini comme précédemment par Eq. (3.1.30), et les fonctions tests $\delta \rho$ et δe sont de continuité C^0 sur le domaine Ω .

Une approximation standard du type Bubnov-Galerkin pose des difficultés lorsque le terme d'advection dans Eq. (3.2.24b) est élevé. Ce problème est mis en évidence en considérant l'équation d'advection-

diffusion Eq. (3.2.25) qui est une forme linéarisée stationnaire de la conservation de la quantité de mouvement Eq. (3.2.13) :

$$v_i \frac{d\phi}{dx_i} - \nu \frac{d}{dx_i} \left(\frac{d\phi}{dx_i} \right) = 0 \quad (3.2.25)$$

En restreignant l'équation Eq. (3.2.25) au cas mono-dimensionnel décrit sur le domaine $[0, L]$ par,

$$\nu \frac{d\phi}{dx} - \nu \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \phi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \phi(L) = 1 \quad (3.2.26)$$

L'analyse théorique de la stabilité spatiale de la solution discrète obtenue par une approximation standard de Eq. (3.2.25) peut être menée en comparant le résultat à la solution exacte. On montre ainsi que la stabilité de la solution dépend du nombre de Péclet :

$$\mathcal{P}_e = \frac{v\Delta x}{2\nu} \quad (3.2.27)$$

où v est la vitesse de l'écoulement, Δx une longueur caractéristique prise égale à la longueur de discrétisation, et ν le coefficient de viscosité cinématique. Pour un nombre de Péclet $\mathcal{P}_e < 1$ la solution discrète est proche de la solution exacte, tandis que pour $\mathcal{P}_e > 1$, la solution présente des oscillations non-physiques autour de la solution recherchée ; ce sont des instabilités spatiales de la discrétisation numérique. Pour stabiliser la solution, une méthode d'approximation de type Petrov-Galerkin (PG) est généralement développée en utilisant une fonction test δv_i^{PG} de la forme :

$$\delta v_i^{\text{PG}} = \delta v_i + |\alpha| \frac{L}{2} \frac{c_j}{\|\vec{c}\|} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \quad (3.2.28)$$

où le premier terme du membre de droite correspond à l'approximation standard de Galerkin, et le second est un terme de stabilisation suivant la ligne de courant. Physiquement, cela revient à ajouter une viscosité artificielle dans la direction de l'écoulement qui se superpose à la viscosité naturelle ν . Le paramètre L correspond à la longueur caractéristique de l'élément, et $\alpha > 0$ est un coefficient choisi de telle façon que les oscillations spatiales non-physiques sont éliminées dans le cas où $\mathcal{P}_e > 1$. La valeur du paramètre α est discutée dans [Hughes et Tezduyar, 1984] et [Hughes et Mallet, 1986]. Elle peut être déterminée à partir du problème 1D précédent Eq. (3.2.26) ; dans ce cas, la stabilisation de la solution numérique est obtenue en attribuant à α une valeur physique dépendant du nombre de Péclet Eq. (3.2.27) :

$$\alpha = \left[\coth(\mathcal{P}_e) - \frac{1}{\mathcal{P}_e} \right] \quad (3.2.29)$$

La formulation Eq. (3.2.28) introduite par [Brooks et Hughes, 1981] est connue sous le nom de SUPG (*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*). La méthode GLS (*Galerkin Least Square*) est autre méthode d'approximation qui a été introduite par [Hughes et al., 1989] et peut être utilisée pour résoudre directement les équations Eq. (3.2.24a) à (3.2.24c). Ces approches ne sont cependant pas utilisées dans nos travaux qui s'appuient plutôt sur la résolution séquentielle de la forme faible Eq. (3.2.24a) à (3.2.24c). Cette approche, dite méthode *split*, fait l'objet du paragraphe suivant.

3.2.4.2 Méthode *split*

Les méthodes précédentes basées sur l'approximation directe des équations d'advection sont a priori plus précises mais aussi plus compliquées à développer. C'est la raison pour laquelle, dans le cadre de nos travaux, nous mettons en œuvre la méthode *split* qui permet de décomposer l'ensemble des équations aux dérivées partielles Eq. (3.2.24a) à (3.2.24c) en deux sous-ensembles plus simples à résoudre [Chorin et al., 1978]. On opère cette décomposition en séparant, pour chaque incrément temporel, la phase de calcul Lagrangienne et la phase Eulérienne [Benson, 1992a]. Cette méthode est illustrée à partir de l'équation d'advection linéaire 1D suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = S(x, t) \quad \text{avec} \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad (3.2.30)$$

où ϕ est la variable solution, c la vitesse d'advection et S un terme source. La méthode *split* revient à écrire Eq. (3.2.30) sous la forme de deux équations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = S(x, t) \quad (3.2.31a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.2.31b)$$

La première équation Eq. (3.2.31a) a la même forme qu'en description Lagrangienne ($c = 0$). Pour un incrément temporel donné, elle est résolue lors de la phase Lagrangienne avec la grille de calcul qui suit les mouvements de la matière selon les étapes résumées au §3.1.8. Ensuite, l'équation Eq. (3.2.31b) est résolue lors de la seconde phase en projetant les résultats sur la grille de calcul initiale (pour un calcul Eulérien), ou sur un maillage différent (pour un calcul ALE). Cette seconde étape, dite d'advection, ne fait pas intervenir le temps physique et d'un point de vue conceptuel, peut être simplement considérée comme une projection des résultats de la grille déformée sur la grille de référence (Eulérienne ou ALE).

La méthode numérique développée pour la phase Lagrangienne est équivalente à celle présentée dans la section 3.1. L'équation de conservation de la masse se ramène à l'équation algébrique Eq. (3.1.18) et les formes faibles pour les équations de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent :

$$\int_{\Omega} \delta v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} d\Omega - \int_{\Gamma^t} \delta v_i t_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta v_i \rho b_i d\Omega = 0 \quad (3.2.32a)$$

$$\int_{\Omega} \delta e \rho \frac{De}{Dt} d\Omega - \int_{\Omega} \delta e D_{ij} \sigma_{ji} d\Omega = 0 \quad (3.2.32b)$$

où l'on a fait apparaître le tenseur des taux de déformation dans Eq. (3.2.32b) dans la mesure où $L_{ij} \sigma_{ji} = (D_{ij} + W_{ij}) \sigma_{ji}$ et que le produit $W_{ij} \sigma_{ji}$ est nul.

La phase Eulérienne résout le problème d'advection des variables calculées dans la phase Lagrangienne lorsque la grille de calcul est déplacée indépendamment du mouvement matériel. Les équations de transport à résoudre correspondent aux formes homogènes des équations Eq. (3.2.12), (3.2.13) et (3.2.16), soit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} c_i = 0 \quad (3.2.33a)$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_j} c_j = 0 \quad (3.2.33b)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \rho \frac{\partial e}{\partial x_j} c_j = 0 \quad (3.2.33c)$$

Comme déjà précisé, le temps t ici ne correspond pas au temps physique car les équations Eq. (3.2.33a) à (3.2.33c) ne gouvernent pas l'advection proprement dite, liée à l'écoulement du fluide. Les conditions « initiales » du problème d'advection Eq. (3.2.33) correspondent aux valeurs calculées lors de la phase Lagrangienne :

$$\rho(\vec{\chi}, 0) = \rho(\vec{X}) \quad ; \quad \vec{v}(\vec{\chi}, 0) = \vec{v}(\vec{X}) \quad ; \quad e(\vec{\chi}, 0) = e(\vec{X}) \quad (3.2.34)$$

Le problème est résolu par une méthode de volume finis en considérant la forme conservative des équations d'advection Eq. (3.2.33a) à (3.2.33c) pour le transport des quantités ρ , ρv_i et ρe :

$$\frac{\partial(\rho J_{\Phi})}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + J_{\Phi} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho c_i) = 0 \quad (3.2.35a)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i J_{\Phi})}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + J_{\Phi} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho c_i v_j) = 0 \quad (3.2.35b)$$

$$\frac{\partial(\rho e J_{\Phi})}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + J_{\Phi} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho c_i e) = 0 \quad (3.2.35c)$$

où J_{Φ} est le jacobien de la transformation $\vec{\Phi}(\vec{\chi}, t)$. Les relations Eq. (3.2.35a) à (3.2.35c) permettent de projeter la solution issue du cycle Lagrangien sur la grille de référence (Eulérienne ou ALE). Pour cela, un nouveau maillage est généré, soit par relaxation du maillage Lagrangien dans un calcul ALE, soit en revenant à la position fixe initiale dans un calcul Eulérien. Les variables centrées dans l'élément (contrainte, énergie interne, ...) sont projetées ensuite par un algorithme de type Godunov. Les vitesses centrées aux nœuds, quant à elles, sont projetées par une technique HIS (Half Index Shift) qui revient à décaler les mailles d'un demi pas dans toutes les directions de sorte que les centres des mailles correspondent aux nœuds du maillage initial.

3.2.5 Viscosité de hourglass

Les éléments finis utilisés pour la discrétisation possèdent un seul point de quadrature au centre. Ils sont simples à implémenter et rapides à calculer mais présentent l'inconvénient de développer des modes singuliers parasites, dits de hourglass (en référence à la forme de sablier caractéristique de certains de ces modes). Si l'on s'en tient à la définition donnée par [Belytschko *et al.*, 2000], tout mouvement qui n'est pas une translation ou une rotation rigide et qui entraîne malgré tout des déformations nulles dans l'élément est un mode de hourglass. Dans le cas d'un élément Q4 en 2D (nœuds I numérotés de 1 à 4), on peut mettre en évidence ce mode singulier en explicitant les composantes de la matrice [B] évaluées au point de quadrature ($\xi = 0, \eta = 0$) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x}(0,0) &= -\frac{\partial N_3}{\partial x}(0,0) = \frac{y_2 - y_4}{2A} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x}(0,0) &= -\frac{\partial N_4}{\partial x}(0,0) = \frac{y_3 - y_1}{2A} \end{aligned} \right| \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial y}(0,0) &= -\frac{\partial N_3}{\partial y}(0,0) = \frac{x_4 - x_2}{2A} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y}(0,0) &= -\frac{\partial N_4}{\partial y}(0,0) = \frac{x_1 - x_3}{2A} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

où on a utilisé les fonctions de forme bilinéaires N_I décrites par Eq. (3.1.41). Suivant Eq. (3.2.36), le calcul des composantes en $\xi = 0$ et $\eta = 0$ du tenseur des taux de déformation par $\{D\} = [B]\{v\}$ montre qu'elles sont toutes nulles si les vitesses des nœuds diagonalement opposés sont égales, ce qui correspond à un mode possible de hourglass. Suivant des considérations très pratiques évoquées par exemple dans [Benson, 1992a], l'élément Q4, seul, possède en effet 8 degrés de liberté (2 par nœud) dont 3 modes rigides (1 rotation, 2 translations) auxquels ne doit s'opposer aucune contrainte. Pour résister aux 5 modes de déformation restant, seules 3 contraintes sont disponibles (σ_{rr} , σ_{zz} et σ_{rz} en 2D axisymétrique). Il reste donc 2 modes de hourglass auxquels l'élément ne peut apporter aucune résistance.

Ces modes parasites se communiquent rapidement de proche en proche dans la mesure où ils se développent sans déformation au sein de l'élément sous-intégré. On parle aussi de mode à énergie nulle comme aucune énergie n'est absorbée par la déformation. La raideur de ce mode est très faible et la fréquence qui lui est associée est beaucoup plus basse que la plus basse des fréquences du problème physique. C'est une instabilité spatiale directement visible dans un calcul Lagrangien si l'on observe

les déformées des mailles qui sont très caractéristiques. Pour stabiliser la solution, des forces d'amortissement (ou de raideur suivant la formulation adoptée) qui s'opposent aux modes de hourglass, sont ajoutées dans le calcul des efforts nodaux. La difficulté est d'appliquer ces efforts sans perturber la solution physique liée à l'écoulement. Pour cela, la procédure de contrôle du hourglass s'opère en deux étapes ; la première consiste à choisir les modes de hourglass et à construire une nouvelle base de vecteurs orthogonaux, la seconde à définir l'effort résistant à appliquer dans cette nouvelle base. Une forme appropriée pour le vecteur de base du hourglass h_I , s'écrit pour une direction donnée :

$$\{h\}^T = [1, -1, 1, -1] \quad (3.2.37)$$

On vérifie immédiatement que les vecteurs de base h_I respectent la condition d'orthogonalité par rapport aux modes de translation rigide. De même suivant Eq. (3.2.36), ils sont orthogonaux aux déformations, $B_{iI} h_I = 0$ ($i = 1, 2$). Suivant [Flanagan et Belytschko, 1981], la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt Eq. (3.2.38) peut dès lors être appliquée pour bâtir les vecteurs de forme du hourglass ϕ_I en utilisant le vecteur de base h_I comme première approximation. Ces vecteurs de forme sont les covecteurs des vecteurs de base h_I . Dans Eq. (3.2.38), l'orthogonalisation est effectuée par rapport aux vecteurs de base B_{iI} dont les covecteurs sont x_{iI} (ces vecteurs vérifient en effet la condition de bi-orthogonalité $B_{iI} x_{jI} = \delta_{ij}$).

$$\phi_I = h_I - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^4 x_{ij} h_j \right) \quad (3.2.38)$$

Suivant cette procédure, les covecteurs ϕ_I sont orthogonaux au mode de translation rigide et à un champ de vitesses linéaire en x_{iI} ce qui limite l'influence du contrôle de hourglass dans le calcul des champs physiques associés à l'écoulement. On note que les vecteurs de base h_I et les vecteurs de forme du hourglass ϕ_I sont identiques, si et seulement si, l'élément Q4 se déforme en parallélogramme. S'il prend une forme quelconque au cours de la déformation, la différence entre les deux est importante. Dans nos applications, un contrôle de hourglass en viscosité est effectué dans la mesure où les phénomènes étudiés sont caractérisés par des vitesses relativement élevées sur des temps très courts. Pour cela les taux de déformation du hourglass généralisés sont donnés par :

$$\dot{q}_i = \sum_{I=1}^4 v_{iI} \phi_I \quad (3.2.39)$$

Les efforts de stabilisation du hourglass résistant aux 2 modes parasites sont ajoutés aux efforts internes. Ils sont calculés en chaque nœud de l'élément par l'expression générale suivante :

$$f_{iI}^{\text{stab}} = C^Q \dot{q}_i \phi_I = C^Q (v_{ij} \phi_j) \phi_I \quad (3.2.40)$$

où le coefficient C^Q donne l'intensité de l'effort de stabilisation qui s'oppose aux modes de hourglass. Sa valeur dépend de la formulation utilisée [Belytschko *et al.*, 2000].

3.2.6 Viscosité de choc

Contrairement aux méthodes qui nécessitent de suivre explicitement les discontinuités de choc pour leur appliquer les conditions de saut de Rankine-Hugoniot, la méthode utilisée ici s'appuie sur les travaux relativement anciens de [VonNeumann et Richtmyer, 1950]. Cette formulation permet un traitement automatique des ondes de choc en traduisant les processus thermodynamiques irréversibles qui s'opèrent au passage de la discontinuité par un terme de viscosité artificielle. Physiquement, l'augmentation d'entropie au passage d'un choc de forte intensité est liée à l'élévation de température dans le fluide qu'il s'agit de prendre en compte artificiellement dans nos modèles purement mécaniques. Si la méthode est simple et robuste, elle présente toutefois l'inconvénient de lisser la discontinuité sur quelques éléments (de 3 à 6) dans la direction du choc ce qui nécessite un pas de maillage adapté à la géométrie du problème, et notamment au temps de montée du choc. C'est la raison pour laquelle un grand nombre de travaux sont consacrés, aujourd'hui encore, aux techniques d'adaptation de maillage ou de remaillage autour des discontinuités pour améliorer la précision dans les zones d'intérêt.

La méthode a été développée à l'origine pour les ondes de choc planes en introduisant un terme de viscosité q homogène à une pression, qui tient compte des mécanismes de dissipation. On suppose en outre que cette viscosité est négligeable en dehors de la zone entourant le front d'onde de choc. La forme initialement proposée par [VonNeumann et Richtmyer, 1950] pour décrire q est la suivante :

$$\begin{aligned} q &= C_0 \rho (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 & \text{pour } \frac{\partial v}{\partial x} < 0 \\ q &= 0 & \text{pour } \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

où C_0 est une constante sans dimension proche de 1, et Δx est le pas de maillage. Cette viscosité artificielle, appelée *bulk viscosity*, s'ajoute au terme de pression p dans les équations de conservation de la quantité de mouvement Eq. (3.2.32a) et de l'énergie interne Eq. (3.2.32b). Elle intervient donc dans le calcul des efforts internes en sommant le terme q aux termes de pression dans σ_{ij} . Une modification de cette méthode, issue des travaux de [Landshoff, 1955] et développée par [Wilkins, 1980] pour être implémentée dans le logiciel HEMP [Giroux, 1973], est effectuée en ajoutant un terme linéaire au terme quadratique dans Eq. (3.2.41). Cette modification est généralement adoptée dans tous les codes actuels et la viscosité s'écrit alors sous la forme générale suivante :

$$q = C_0 \rho (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + C_1 c \rho \Delta x \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| \quad \text{pour } \frac{\partial v}{\partial x} < 0 \quad (3.2.42)$$

où c est la célérité du son dans le fluide et les valeurs des coefficients C_0 et C_1 sont égales à 1.5 et 0.06 respectivement. L'extension aux problèmes 2D et 3D est effectuée en prenant la divergence de la vitesse, qui correspond à la trace du tenseur des taux de déformations D_{kk} , et le pas de maillage monodimensionnel Δx est remplacé par la longueur caractéristique L des éléments finis. Pour des éléments surfaciques et volumiques, la longueur caractéristique L correspond respectivement à la racine carrée de l'aire et la racine cubique du volume élémentaire. On a donc :

$$q = C_0 \rho L^2 D_{kk}^2 + C_1 c \rho L |D_{kk}| \quad \text{pour} \quad D_{kk} < 0 \quad (3.2.43)$$

La viscosité scalaire s'exerce indépendamment de la direction du choc. Pour dépasser cette limitation, un tenseur des viscosités de choc $\underline{\underline{Q}}$ est développé suivant [Maenchen et Sack, 1963]; la partie sphérique de ce tenseur correspond à q donné par l'équation Eq. (3.2.43) (terme de pression indépendant de la direction considérée), et la partie déviatorique dépend linéairement du déviateur des taux de déformation $\underline{\underline{D}}'$. Les composantes du tenseur des viscosités $\underline{\underline{Q}}$ s'écrivent :

$$Q_{ij} = \left(C_0 \rho L^2 D_{kk}^2 + C_1 c \rho L |D_{kk}| \right) \delta_{ij} + C \rho L D'_{ij} \quad (3.2.44)$$

Cette extension n'est pas nécessaire pour les problèmes 2D axisymétriques lorsque la formulation de Petrov-Galerkin en pondérant par la surface est utilisée.

3.2.7 Calcul de la pression et actualisation de l'énergie interne

Dans nos calculs, la pression p est fonction de l'énergie interne spécifique e et de la masse volumique ρ . Le calcul de l'énergie interne s'effectue, comme pour les contraintes, en un point de quadrature au centre de l'élément. Dans ce cas, la forme faible Eq. (3.2.32b) relative à la conservation de l'énergie se simplifie dans la mesure où les variables e , ρ , σ_{ij} , D_{ij} sont constantes dans l'élément Ω_e . Comme l'équation Eq. (3.2.32b) est vérifiée quelque soit δe , le calcul de l'énergie interne se ramène à la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$\rho \dot{e} \equiv \rho \frac{De}{Dt} = D_{ij} \sigma_{ji} \quad (3.2.45)$$

La relation Eq. (3.2.45) est réécrite en incluant le tenseur des viscosités de choc Eq. (3.2.44) et en décomposant chaque tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$, $\underline{\underline{Q}}$ et $\underline{\underline{D}}$ en sa partie sphérique et déviatorique, de sorte que la dérivée temporelle de l'énergie interne s'écrit :

$$\rho \dot{e} = \left(D'_{ij} + \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right) \left(\sigma'_{ij} - p \delta_{ij} + Q'_{ij} + \frac{1}{3} Q_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.2.46)$$

En tenant compte du fait que le tenseur des viscosités de choc Eq. (3.2.44) est symétrique, et que $(\cdot)'_{ij} \delta_{ij} = (\cdot)'_{kk} = 0$, la relation Eq. (3.2.46) se réduit à :

$$\rho \dot{e} = (\sigma'_{ij} + Q'_{ij}) D'_{ij} + \left(\frac{1}{3} Q_{kk} - p \right) \frac{\Delta V}{V \Delta t} \quad (3.2.47)$$

où V est le volume élémentaire donné par $\int_{\Omega_e} d\Omega_e$, Δt l'incrément temporel, et $\Delta V/(V \Delta t)$ est égal à la trace du tenseur des taux de déformation qui correspond au taux de déformation volumétrique. La discrétisation temporelle de l'équation différentielle Eq. (3.2.47) est réalisée par un schéma de différences finies centrées. L'énergie interne totale dans l'élément est $E = \rho e V$, et l'on a :

$$E^{n+1} = E^n + \Delta t \left[(\sigma'_{ij}{}^{n+1/2} + Q'_{ij}{}^{n+1/2}) D'_{ij}{}^{n+1/2} V^{n+1/2} \right] + \left(\frac{1}{3} Q_{kk}{}^{n+1/2} - p^{n+1/2} \right) \Delta V^{n+1/2} \quad (3.2.48)$$

avec les grandeurs calculées au demi pas de temps à $t^{n+1/2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\sigma'_{ij}{}^n + \sigma'_{ij}{}^{n+1}) \quad ; \quad D'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (D'_{ij}{}^n + D'_{ij}{}^{n+1}) \\ Q'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (Q'_{ij}{}^n + Q'_{ij}{}^{n+1}) \\ p^{n+1/2} = \frac{1}{2} (p^n + p^{n+1}) \end{array} \right. \quad (3.2.49)$$

La relation Eq. (3.2.47) est implicite puisque l'énergie à l'instant t^{n+1} dépend de la pression à t^{n+1} qui dépend elle-même de l'énergie au travers d'une équation d'état. Elle est réécrite en regroupant sous un même terme, \tilde{E} , l'ensemble des variables connues, soit :

$$E^{n+1} = \tilde{E} - \frac{1}{2} p^{n+1} (E^{n+1}, \rho^{n+1}) \Delta V^{n+1/2} \quad (3.2.50a)$$

$$\tilde{E} = E^n + \Delta t \left[(\sigma'_{ij}{}^{n+1/2} + Q'_{ij}{}^{n+1/2}) D'_{ij}{}^{n+1/2} V^{n+1/2} \right] + \left(\frac{1}{3} Q_{kk}{}^{n+1/2} - \frac{1}{2} p^n \right) \Delta V^{n+1/2} \quad (3.2.50b)$$

Les équations d'état utilisées dans nos travaux sont linéaires en énergie interne et peuvent être écrites sous la forme générale suivante :

$$p(E, \rho) = A_1(\rho) + A_2(\rho) E \quad (3.2.51)$$

En remplaçant l'énergie E^{n+1} donnée par Eq. (3.2.50a) dans l'équation d'état Eq. (3.2.51), on obtient une expression explicite de la pression à l'instant t^{n+1} :

$$p^{n+1} = \frac{A_1(\rho^{n+1}) + A_2(\rho^{n+1}) \tilde{E}}{1 + \frac{1}{2} A_2(\rho^{n+1}) \Delta V^{n+1/2}} \quad (3.2.52)$$

où \tilde{E} est donné par Eq. (3.2.50b). Une fois la pression calculée, l'énergie interne est actualisée dans chaque élément à l'aide de Eq. (3.2.50a). Si dans l'équation d'état, la pression n'est pas une fonction linéaire de l'énergie interne, un processus itératif est nécessaire pour converger vers une solution qui satisfait l'équation d'état et la relation Eq. (3.2.48).

3.2.8 Méthodes d'advection

À l'issue du cycle Lagrangien, le cycle d'advection permet de replacer le maillage, soit à sa position initiale pour un calcul Eulérien, soit dans une position arbitraire pour un calcul ALE. Le déplacement des mailles est indépendant du mouvement du fluide. De ce fait, des flux de matières entre les mailles sont générés. Ces flux sont caractérisés par le transport des variables physiques de leur position issue du cycle Lagrangien vers la nouvelle grille Eulérienne ou ALE. La projection des variables centrées telles que la masse, l'énergie, ou la contrainte se fait par des algorithmes de Godunov, parmi lesquels le schéma *Donor Cell* (que l'on traduit littéralement par cellule donneuse) qui est une méthode de Godunov du premier ordre [Godunov, 1959], et le schéma MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) qui est du second ordre [van Leer, 1977b] [van Leer, 1979]. Une revue des différents schémas d'advection appliqués aux chocs hydrodynamiques est proposée dans [Woodward et Colella, 1984] et étendue dans [Benson, 1992a]. Outre les schémas *Donor Cell* et MUSCL, on peut également citer les algorithmes PPM (Piecewise Parabolic Method) [Woodward et Colella, 1980] [Colella et Woodward, 1984], BBC [DeBar, 1974] [Sutcliffe, 1974], et MacCormack [MacCormack, 1971] qui est une évolution du schéma de Lax-Wendroff [Richtmyer et Morton, 1967]. Ces principaux schémas d'advection développés aux origines de la méthode des différences finies sont à la base des méthodes numériques actuelles. Pour nos applications numériques, l'algorithme de Van Leer est systématiquement utilisé dans la mesure où la précision obtenue est supérieure au schéma du premier ordre. Les grandeurs centrées dans la maille sont représentées par la variable générique ϕ qui s'identifie, soit à la masse volumique ρ , à la quantité de mouvement par unité de volume dans une direction donnée (ρv_i), ou à l'énergie interne par unité de volume (ρe).

Les méthodes d'advection doivent être précises, stables, conservatives et monotones. La condition de monotonie se traduit par le fait qu'aucun minimum ou maximum local ne doit être généré au cours du cycle d'advection, soit entre l'état « initial » de la variable ϕ^n et « final » ϕ^{n+1} :

$$\max(\phi^{n+1}) \leq \max(\phi^n) \quad \text{et} \quad \min(\phi^{n+1}) \geq \min(\phi^n)$$

La condition de conservatisme traduit le fait que le schéma d'advection ne change pas la masse totale, la quantité de mouvement et l'énergie interne :

$$\int_V \phi^{n+1} dV = \int_V \phi^n dV$$

Dans nos cas d'applications on considère seulement la formulation Eulérienne pour laquelle le jacobien de la transformation $J_{\Phi} = 1$. Ainsi la forme générique des équations hyperboliques Eq. (3.2.35a) à (3.2.35c) gouvernant le transport des variables physiques est donnée par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\vec{\chi}, t) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\phi c_i) = 0 \quad (3.2.53a)$$

$$\phi(\vec{\chi}, 0) = \phi(\vec{X}) \quad (3.2.53b)$$

où la condition initiale est donnée par Eq. (3.2.53b). Dans l'équation Eq. (3.2.53a), le temps t n'a pas de sens physique, et le transport de la variable ϕ d'un état n à un état $n + 1$ doit être simplement vu comme une projection des résultats issus de la phase de calcul Lagrangien sur la grille de calcul Eulérienne. Pour un incrément Δt donné, la stabilité des schémas d'advection est assurée en limitant le déplacement de grille à une dimension caractéristique L du maillage, ce qui se traduit par la condition suivante imposée au nombre de Courant :

$$\mathcal{C} \equiv \frac{c \Delta t}{L} \leq 1 \quad (3.2.54)$$

où, comme précédemment, c correspond à la différence de vitesse entre le mouvement matériel et la grille Eq. (3.2.8). Comme le déplacement de grille ne s'effectue pas sur un temps physique, l'incrément Δt est arbitraire, et la grandeur $V = c \Delta t$ correspond au volume transporté entre les mailles adjacentes. On considère ainsi les flux de masse ρV , de quantité de mouvement par unité de volume $\rho v_i V$, et d'énergie interne $\rho e V$, qui s'opèrent entre les mailles adjacentes, mais cette phase de transport est purement géométrique. Dans la suite on note les flux $f = \phi c \Delta t$.

Dans la présentation des schémas d'advection qui suit, on adopte le principe de notation suivant :

- * Les exposants n et $n + 1$ se réfèrent à la grandeur aux instants n et $n + 1$ respectivement.
- * Les indices $(i - 1/2)$, (i) et $(i + 1/2)$ correspondent respectivement à la position décentrée en aval, centrée et décentrée en amont du nœud dans la direction i . Ainsi pour une variable donnée, si l'indice est décalé d'un demi-pas $(i + 1/2)$, cela correspond à une variable centrée sur l'élément en amont, c.-à-d. suivant la coordonnée croissante dans la direction i considérée. Inversement pour un décalage $(i - 1/2)$, cela correspond à la variable centrée en aval, c.-à-d. suivant la coordonnée décroissante.

Suivant ce principe, un volume noté $V_{(i+1/2, j+1/2)}$ est le volume de la maille située en amont dans les directions i et j . Par contre le volume transporté entre deux mailles adjacentes est noté $V_{(i, j+1/2)}$, ce qui correspond au volume passant de la maille $(i - 1/2, j + 1/2)$ à la maille $(i + 1/2, j + 1/2)$. Dans ce cas, l'indice i entier correspond à l'arête de la maille par laquelle passe ce volume.

3.2.8.1 Méthode *Donor Cell*

Cette méthode de Godunov du premier ordre, présente les caractéristiques d'un bon schéma d'advection ; elle est stable, monotone, et simple à implémenter (donc peu coûteuse en temps CPU). Pour un problème 1D, l'advection de la grandeur ϕ s'écrit selon le schéma décentré suivant :

$$\phi_{i+1/2}^{n+1} = \phi_{i+1/2}^n + \frac{1}{\Delta x_{i+1/2}} (f_i^n - f_{i+1}^n) \quad (3.2.55)$$

où les flux entrant f_i^n et sortant f_{i+1}^n à l'instant « initial », sont calculés par :

$$f_i^n = \frac{1}{2} c_i \Delta t (\phi_{i-1/2}^n + \phi_{i+1/2}^n) + \frac{1}{2} |c_i| \Delta t (\phi_{i-1/2}^n - \phi_{i+1/2}^n) \quad (3.2.56)$$

Dans ces expressions, $\Delta x_{i+1/2}$ est la longueur de cellule en $(i + 1/2)$, $\phi_{i-1/2}^n$ et $\phi_{i+1/2}^n$ correspondent respectivement aux états gauche (aval) et droit (amont) de la variable ϕ entourant la position i , et c_i est la vitesse de la discontinuité de contact à cette position. Suivant Eq. (3.2.56), la valeur du flux f_i^n dépend du signe de la vitesse c_i au nœud i qui en définit donc l'orientation :

- * Si $c_i > 0$, alors le flux $f_i^n = c_i \Delta t \phi_{i-1/2}^n = V_i \phi_{i-1/2}^n$ est orienté de la gauche vers la droite, c.-à-d. suivant les indices croissants en i .
- * Si $c_i < 0$, alors le flux $f_i^n = c_i \Delta t \phi_{i+1/2}^n = V_i \phi_{i+1/2}^n$ est orienté de la droite vers la gauche, c.-à-d. suivant les indices décroissants en i .

3.2.8.2 Algorithme de van Leer (MUSCL)

Van Leer a introduit une famille de méthodes de Godunov d'ordre plus élevé par rapport à la méthode *Donor Cell* en améliorant l'estimation des états gauche et droite du problème de Riemann [van Leer, 1977b]. Pour nos applications on utilise le schéma du second ordre MUSCL qui remplace la distribution constante par morceaux de la variable ϕ par une distribution linéaire $\phi_{i+1/2}^n(x)$ tout en garantissant la conservation de la quantité ϕ :

$$\phi_{i+1/2}^n(x) = S_{i+1/2}^n (x - x_{i+1/2}^n) + \phi_{i+1/2}^n \quad (3.2.57)$$

où x est la coordonnée le long de l'élément, $x_{i+1/2}^n$ la coordonnée du centre de maille en $(i + 1/2)$, et $S_{i+1/2}^n$ la pente de la droite utilisée dans l'approximation de la distribution linéaire. Dans ce contexte, $\phi_{i+1/2}^n$ correspond à la valeur moyenne de la variable le long de l'élément (au lieu de la valeur effective-ment calculée en $x_{i+1/2}^n$) :

$$\phi_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta x_{i+1/2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1/2}^n(x) dx \quad (3.2.58)$$

La monotonie du schéma est assurée en limitant la pente $S_{i+1/2}^n$ qui conditionne de ce fait l'intervalle $[\phi_{i+1/2}^{\min}, \phi_{i+1/2}^{\max}]$. Cette limitation s'effectue en fonction des maximum et minimum dans les cellules adjacentes en $(i - 1/2)$ et $(i + 3/2)$.

La première approche consiste à calculer la pente telle que la valeur maximum admissible ne soit pas dépassée sur les frontières de la cellule en i et $i + 1$:

$$S_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left[\text{sgn}(s^L) + \text{sgn}(s^R) \right] \min(|s^L|, |s_{i+1/2}^n|, |s^R|) \quad (3.2.59a)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} s^L = \frac{1}{2\Delta x_{i+1/2}} (\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n) \\ s^R = \frac{1}{2\Delta x_{i+1/2}} (\phi_{i+3/2}^n - \phi_{i+1/2}^n) \end{cases} \quad (3.2.59b)$$

où s^L et s^R sont les limiteurs de pente respectivement à gauche et à droite de la cellule $(i + 1/2)$, et $s_{i+1/2}^n$ est l'approximation de la pente au second ordre calculée à partir d'une interpolation quadratique des valeurs moyennes de ϕ aux centres des trois cellules adjacentes en $(i - 1/2)$, $(i + 1/2)$ et $(i + 3/2)$:

$$s_{i+1/2}^n = \frac{(\phi_{i+3/2}^n - \phi_{i+1/2}^n) \Delta x_i^2 + (\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n) \Delta x_{i+1}^2}{\Delta x_i \Delta x_{i+1} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} \quad (3.2.60)$$

$$\Delta x_i = x_{i+1/2}^n - x_{i-1/2}^n$$

La seconde approche est similaire à Eq. (3.2.59), à l'exception des limiteurs de pente s^L et s^R de Eq. (3.2.59b) qui sont évalués différemment :

$$\begin{cases} s^L = \frac{(\phi_{i+1/2}^n - \phi_{i-1/2}^n)}{x_{i+1/2} - \left[x_i + \max(0, c_i) \Delta t / 2 \right]} \\ s^R = \frac{(\phi_{i+3/2}^n - \phi_{i+1/2}^n)}{\left[x_{i+1} - \min(0, c_{i+1}) \Delta t / 2 \right] - x_{i+1/2}} \end{cases} \quad (3.2.61)$$

Le flux au nœud i est ensuite évalué par un schéma similaire à celui de la méthode *Donor Cell* Eq. (3.2.56) :

$$f_i = \frac{1}{2} c_i \Delta t (\phi^- + \phi^+) + \frac{1}{2} |c_i| \Delta t (\phi^- - \phi^+) \quad (3.2.62a)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \phi^- = S_{i-1/2}^n (x^c - x_{i-1/2}^n) + \phi_{i-1/2}^n \\ \phi^+ = S_{i+1/2}^n (x^c - x_{i+1/2}^n) + \phi_{i+1/2}^n \end{cases} \quad \text{et} \quad x^c = x_i^n + \frac{\Delta t c_i}{2} \quad (3.2.62b)$$

Comme pour la méthode *Donor Cell*, l'advection de la variable ϕ s'écrit à l'aide des flux entrant et sortant :

$$\phi_{i+1/2}^{n+1} = \phi_{i+1/2}^n + \frac{1}{\Delta x_{i+1/2}} (f_i^n - f_{i+1}^n) \quad (3.2.63)$$

Cette méthode d'advection du second ordre est utilisée dans nos travaux pour les variables centrées dans chaque cellule. L'advection de la quantité de mouvement, quant à elle, nécessite un traitement numérique différent dans la mesure où les vitesses sont centrées aux nœuds.

3.2.8.3 Advection de la quantité de mouvement

Pour garantir le conservatisme du schéma, l'advection de la quantité de mouvement ρv est effectuée au lieu des vitesses. Celles-ci étant centrées sur les nœuds, et non sur les éléments, un traitement particulier est nécessaire pour advecter les quantités de mouvement nodales.

La première approche, introduite la première fois dans le code YAQUI par [Amsden et Hirt, 1973] et [Hirt et al., 1974] est de décaler d'un demi-pas dans toutes les directions de l'espace les indices de l'algorithme d'advection Eq. (3.2.63). Cela revient à construire une nouvelle grille décalée par rapport au maillage Eulérien de sorte que les nœuds initiaux correspondent aux centroïdes des nouvelles cellules.

$$M'_i v'_i = M_i v_i + (\rho v)_{i-1/2} V_{i-1/2} - (\rho v)_{i+1/2} V_{i+1/2} \quad (3.2.64)$$

où M_i représente la masse nodale au nœud i et $(\cdot)'$ correspond à une quantité projetée sur la nouveau maillage. L'advection de la masse nodale est effectuée à l'aide de Eq. (3.2.65) en interpolant les masses advectées aux centres des cellules ; $M'_{i\pm 1/2} V_{i\pm 1/2}$ avec $V_{i\pm 1/2}$ le volume de la cellule en $(i \pm 1/2)$, qui correspond dans le cas 1D à la longueur $\Delta x_{i\pm 1/2}$. En se servant de Eq. (3.2.64), on a alors :

$$\begin{aligned} M'_i &= \frac{1}{2} (M'_{i+1/2} + M'_{i-1/2}) \\ &= \frac{1}{2} [M_{i+1/2} + (\rho V)_i - (\rho V)_{i+1} + M_{i-1/2} + (\rho V)_{i-1} - (\rho V)_i] \\ &= M_i + \frac{1}{2} [(f_i - f_{i+1}) + (f_{i-1} - f_i)] \end{aligned} \quad (3.2.65)$$

L'algorithme développé dans les codes SALE (Simple Arbitrary Lagrangian Eulerian) et SALE-3D par [Amsden et al., 1980] et [Amsden et Ruppel, 1981], est basé sur l'approximation des quantités de mouvement centrées en prenant simplement la moyenne des quantités de mouvement nodales. Suivant Eq. (3.2.64), la variation de quantité de mouvement au centre de la cellule en $(i+1/2)$ est alors donnée par

$[(\rho v)_{i-1/2} V_{i-1/2} - (\rho v)_{i+1/2} V_{i+1/2}]$. La variation de la quantité de mouvement au nœud i est alors calculée en prenant la moitié de cette grandeur associée à chaque cellule encadrant la position i :

$$M'_i v'_i = M_i v_i + \frac{1}{2} [(\rho v)_{i-1} V_{i-1} - (\rho v)_{i+1} V_{i+1}] \quad (3.2.66)$$

Selon [Margolin et Beason, 1988], cette méthode du premier ordre a tendance à générer des oscillations parasites dans les zones à forts gradients. Pour corriger ce problème, [Margolin et Beason, 1988] ont développé un algorithme du second ordre dans le code SHALE [Demuth *et al.*, 1985] similaire à celui décrit précédemment dans le code SALE. En plus de la moyenne de la conservation de la quantité de mouvement, ils prennent en compte la moyenne de sa dérivée. Les algorithmes développés dans les codes SALE et SHALE présentent l'inconvénient de ne pas assurer la monotonie des variables nodales. L'amélioration proposée par [Benson, 1992b] permet de corriger ce problème. Cet algorithme appelé HIS (Half Index Shift) se base sur les deux schémas précédents en prenant des précautions particulières dans la projection des quantités de mouvement centrées sur les cellules pour obtenir les vitesses nodales ; la matrice de transformation entre les variables centrées et nodales doit être diagonale. Dans nos applications, l'algorithme HIS est utilisé avec le schéma MUSCL de van Leer pour la projection du champ des vitesses sur la grille de calcul Eulérienne.

3.2.9 Formulation multi-matériaux et équilibre des pressions aux interfaces

3.2.9.1 Lois de mélanges

La description Eulérienne implique de calculer les mouvements d'interfaces matérielles au travers des éléments. Dans nos applications, on rencontre notamment ce cas à l'interface de la bulle des gaz résiduels (frontière gaz/liquide), et à l'interface FS (frontière liquide/solide). À chaque instant un élément Eulérien peut ainsi contenir plusieurs matériaux (que l'on indice par m), qui occupent chacun une fraction volumique $V_f^m \leq 1$ du volume total de l'élément. Au sein d'une cellule traversée par une interface matérielle, chaque matériau a son propre comportement et des conditions thermodynamiques sont imposées afin de former un système d'équations dont les M fractions volumiques V_f^m sont les inconnues.

Des lois de mélange doivent donc être développées pour modéliser ces cellules multi-matérielles [Benson, 1992a] [Benson, 1997]. Les théories développées autour de ces lois diffèrent par la façon dont on répartit les taux de déformation entre les différents matériaux. Si l'on note $\dot{\epsilon}^m$ le taux de déformation du matériau m , et $\dot{\bar{\epsilon}}$ le taux de déformation moyen de l'élément, la répartition doit respecter la condition suivante :

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \sum_m \dot{\epsilon}^m V_f^m \quad (3.2.67)$$

En l'absence d'échanges de chaleur, les deux approches généralement utilisées pour décrire cette répartition sont les suivantes :

1. La première consiste à égaliser les taux de déformation dans chaque matériau au taux de déformation moyen de l'élément de sorte que la condition Eq. (3.2.9.1) est automatiquement vérifiée. Cette approche est simple, robuste et conserve exactement l'énergie. Mais elle trouve ses limites lorsque les compressibilités de chaque matériau sont d'un ordre de grandeur très différent, comme c'est par exemple le cas entre l'eau et les gaz produits par la détonation. À taux de déformation égaux, cela entraîne des niveaux de pressions très élevés et irréalistes dans l'eau alors que, physiquement, c'est le gaz fortement compressible qui devrait enregistrer les déformations les plus élevées. Cette approche n'est donc pas retenue ici.
2. La seconde approche, utilisée dans nos travaux, consiste à égaliser les pressions entre chaque matériau tout en vérifiant la condition Eq. (3.2.9.1). Comparée à la première approche, celle-ci présente l'avantage de favoriser l'écrasement des matériaux à faible module de compressibilité comme l'air (ou le vide). Elle est largement répandue dans les lois des mélanges implémentées dans les hydrocodes actuels.

Pour décrire la méthode, on définit une pression d'équilibre inconnue p_T , et les pressions $p^m(e^m, \rho^m)$ calculées par l'équation d'état dans chaque matériau sont imposées égales à cette pression d'équilibre, ce que l'on traduit par :

$$p^m(e^m, \rho^m) - p_T = 0 \quad , \quad p_T = p^m V_f^m \quad (3.2.68)$$

avec la condition supplémentaire que la somme des fractions volumiques doit être égale à 1 :

$$\sum_m |V_f^m| = 1 \quad (3.2.69)$$

Cette fraction volumique intervient dans le calcul de la pression au travers de l'équation d'état. Suivant une procédure introduite par [Harlow et Amsden, 1975], les M équations non-linéaires auxquelles on adjoint la condition supplémentaire Eq. (3.2.68) sont résolues pour déterminer la fraction volumique de chaque matériau m . Pour cela, on utilise un schéma itératif de Newton-Raphson, qui décrit la variation de fraction volumique par :

$$\Delta V_f^m = \frac{p_T - p^m}{\partial p^m / \partial V_f^m} \quad (3.2.70)$$

où la dérivée $\partial p^m / \partial V_f^m$ est calculée à partir de l'équation d'état du matériau. L'expression de la pression d'équilibre Eq. (3.2.71) est déduite de la relation Eq. (3.2.70) à laquelle on adjoint la condition

supplémentaire $\sum_m (V_f^m + \Delta V_f^m) = 1$, ce qui donne :

$$p_T = \frac{1 + \sum_{m=1}^M \left(p^m \left/ \frac{\partial p^m}{\partial V_f^m} - V_f^m \right. \right)}{\sum_{k=1}^M 1 \left/ \frac{\partial p^k}{\partial V_f^k} \right.} \quad (3.2.71)$$

3.2.9.2 Suivi d'interface par la méthode VOF

Une fois calculé le champ des fractions volumiques dans le maillage, la position de l'interface est déterminée par une méthode VOF (Volume Of Fluid) basée sur la technique PLIC (Piecewise Linear Interface Construction) développée par Youngs pour les géométries 2D [Youngs, 1982] et 3D [Youngs, 1987]. Cette méthode permet de traquer l'interface multi-matérielle dans un élément en l'approximant par une droite (en 2D) ou un plan (en 3D). C'est une amélioration de la technique SLIC (Simple Line Interface Calculation) introduite par [Noh et Woodward, 1976] qui fixe l'orientation de l'interface parallèlement ou perpendiculairement à la direction d'advection. Selon la technique décrite par [Youngs, 1982] la construction de l'interface s'effectue en deux étapes :

1. La normale \vec{n} à l'interface est déterminée à l'aide du gradient des fractions volumiques calculées dans les cellules adjacentes

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}(V_f)}{\|\vec{\nabla}(V_f)\|} \quad (3.2.72)$$

2. La position de l'interface à l'intérieur de l'élément est ensuite calculée en ajustant la distance projetée $d = \vec{n} \cdot \vec{x}$ telle que la fraction volumique de l'élément derrière l'interface soit égale à la fraction volumique V_f du matériau considéré.

Pour les problèmes 2D plan à grille structurée orthogonale, [Youngs, 1982] calcule le gradient de fraction volumique dans l'élément en $(i + 1/2, j + 1/2)$ à l'aide des 8 cellules adjacentes par :

$$\frac{\partial V_f}{\partial x} = \frac{V_f^*(i+3/2, j+1/2) - V_f^*(i-1/2, j+1/2)}{x_{i+3/2, j+1/2} - x_{i-1/2, j+1/2}} \quad (3.2.73a)$$

$$\frac{\partial V_f}{\partial y} = \frac{V_f^*(i+1/2, j+3/2) - V_f^*(i+1/2, j-1/2)}{y_{i+1/2, j+3/2} - y_{i+1/2, j-1/2}} \quad (3.2.73b)$$

avec les grandeurs interpolées suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{f(i+3/2,j+1/2)}^* = \frac{1}{4} [V_{f(i+3/2,j-1/2)} + 2V_{f(i+3/2,j+1/2)} + V_{f(i+3/2,j+3/2)}] \\ V_{f(i-1/2,j+1/2)}^* = \frac{1}{4} [V_{f(i-1/2,j-1/2)} + 2V_{f(i-1/2,j+1/2)} + V_{f(i-1/2,j+3/2)}] \\ V_{f(i+1/2,j+3/2)}^* = \frac{1}{4} [V_{f(i-1/2,j+3/2)} + 2V_{f(i+1/2,j+3/2)} + V_{f(i+3/2,j+3/2)}] \\ V_{f(i+1/2,j-1/2)}^* = \frac{1}{4} [V_{f(i-1/2,j-1/2)} + 2V_{f(i+1/2,j-1/2)} + V_{f(i+3/2,j-1/2)}] \end{array} \right. \quad (3.2.74)$$

Cet algorithme est étendu dans le code CAVEAT [Addessio *et al.*, 1992] aux grilles non-orthogonales et aux problèmes axisymétriques. Son adaptation aux problèmes 3D suit la même logique, en étendant le calcul du gradient dans la troisième direction et en considérant les 26 cellules adjacentes. Ces calculs sont effectués après avoir testé la présence d'une frontière multi-matériau à l'aide de la fraction volumique.

3.2.10 Méthode de projection des résultats

Dans le cadre de nos travaux, l'idée principale qui a motivé le développement de cette technique particulière est de pouvoir, par des analyses successives, résoudre un même problème physique gouverné par des échelles de temps et d'espace très différentes suivant la chronologie des événements qui lui sont associés. Pour les explosions sous-marines, les phénomènes de détonation, de propagation des chocs et de dynamique de bulle se déroulent, en soi, sur des échelles spatio-temporelles très différentes ; de l'ordre du centimètre et de la microseconde pour la détonation, de l'ordre du mètre et de la milliseconde pour les chocs, et enfin de l'ordre du mètre et de plusieurs centaines de millisecondes pour la dynamique de bulle. Il semble alors tout à fait naturel de chercher à les résoudre en adaptant la grille de calcul (donc le pas d'intégration temporelle en explicite) au problème étudié.

La technique de mise en œuvre dans le code de calcul est décrite par [Aquelet et Souli, 2008] et appliquée à la modélisation des explosions aériennes par [Lapoujade *et al.*, 2010].

Si l'on considère deux modèles ALE simulant un même cas d'étude et ayant des maillages différents désignés M1 et M2, la projection fait référence ici, à une interpolation linéaire des variables du maillage M1 sur M2. Cette technique permet de poursuivre, avec un maillage M2 différent, un calcul qui a débuté avec le maillage M1. L'interpolation a lieu, au début du second calcul, pour initialiser les variables de M2 à partir de leurs valeurs issues du dernier cycle du calcul précédent. Il s'agit donc d'interpoler toutes les variables aux éléments et nœuds de M1 sur M2 à l'instant initial du second calcul. Il est possible aussi, à chaque instant, de n'interpoler qu'une sélection d'éléments du domaine M1 sur des éléments frontières de M2. La projection devient ainsi une condition appliquée aux limites du second modèle. Ce cas d'application n'est cependant pas décrit ici.

Si un problème peut être considéré comme axisymétrique ou sphérique jusqu'à un instant t donné, la projection permet un gain de temps CPU en décomposant cette simulation en deux étapes successives :

- * La première est basée sur un maillage M1 constitué d'éléments linéiques pour un cas sphérique ou d'éléments quadrangles pour un cas axisymétrique peut résoudre le problème jusqu'à l'instant t . Les données du calcul pour cet instant sont alors sauvegardées pour être interpolées sur M2.
- * Le second prend alors le relais, à l'instant t , après une phase de projection des résultats précédents pour initialiser les variables de M2. Le domaine de calcul M2 est, en général, plus étendu que le modèle M1. Il peut être constitué d'éléments linéiques si M1 est aussi 1D ou d'éléments quadrangles si M1 est 1D ou 2D. Le gain de temps CPU est toutefois plus probant si M2 est un domaine 3D.

Les enchaînements de calculs peuvent ainsi être multipliés en envisageant, suivant les phénomènes étudiés, différents cas de projection possibles ; 1D vers 2D (ou 3D), 2D vers 2D (ou 3D), et enfin 3D vers 3D. La projection ne se fait bien évidemment, que dans le sens de l'augmentation de la dimension du problème.

Les éléments ALE étant des éléments à un point d'intégration, les variables sont centrées aux éléments, exceptée la vitesse qui est nodale. En vertu des principes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, les variables de M1 à interpoler sur M2 sont la masse volumique, la vitesse, l'énergie interne, la fraction volumique, le volume relatif (volume courant du matériau rapporté au volume de référence dans les conditions initiales), les contraintes et d'autres variables internes si l'équation constitutive du matériau modélisé l'exige.

Afin de déterminer les fonctions d'interpolation, la position nodale ou la position du centre de l'élément dans M2 suivant la variable considérée est projetée sur M1. Ainsi, par exemple, si M1 est un maillage quadrangle axisymétrique et M2, un maillage hexaèdre, la direction de l'axe de symétrie et la position du centre de M1 sont définies dans l'espace de M2 afin de déterminer les positions radiales et verticales (suivant l'axe de symétrie) de chaque nœud et centre d'élément de M2. Si un nœud de M2 se trouve à proximité du centre d'un élément de M1, sa vitesse est interpolée à partir des vitesses nodales de cet élément. Si un centre d'élément de M2 se trouve à proximité d'un nœud de M1, les variables centrées sont interpolées à partir des variables au centre des éléments connectés à ce nœud.

3.2.11 Résumé du cycle de calcul Eulerien

Cette deuxième partie a été consacrée à la description Eulerienne des équations du mouvement pour les fluides. Comme présenté, la résolution s'appuie sur la méthode *split* qui, pour un incrément temporel donné, décompose le problème en une phase Lagrangienne et une phase dite d'advection. Le cycle Lagrangien a d'ores et déjà été présenté au §3.1.8 en page 52. Seule la phase de projection des résultats sur la grille Eulerienne (ou ALE) manque dans la description. On peut donc compléter le cycle Lagrangien complet (1) à (9) en ajoutant les étapes suivantes :

10. Une nouvelle grille de calcul est générée, soit par relaxation du maillage Lagrangien dans un calcul ALE, soit en revenant à la grille de calcul fixe initiale dans un calcul Eulérien,
11. les variables centrées dans l'élément (contrainte, pression, énergie interne, ...) sont projetées sur la nouvelle grille par un algorithme d'advection de Godunov,
12. les vitesses aux nœuds sont projetées sur le nouveau maillage par la technique HIS pour calculer l'advection de la quantité de mouvement.

Les différentes phases des calculs Lagrangien et Eulérien étant décrites, la prise en compte du couplage qui s'opère entre les milieux fluide et structure doit maintenant être présentée. L'interaction fluide-structure est en effet un point crucial des applications relatives aux explosions sous-marines proches des structures. Elle dépend fortement des spécificités liées aux chargements hydrodynamiques aux très courtes et très longues durées (quelques millisecondes à plusieurs centaines), mais également des modes de réponse structurelle pouvant aller jusqu'à la rupture.

3.3 Modélisation de l'IFS et couplage Euler-Lagrange

Les formulations Lagrangienne et Eulérienne présentées dans les sections 3.1 et 3.2 précédentes sont utilisées pour décrire respectivement les mouvements de la structure et du fluide. Elles sont couplées pour décrire l'IFS au travers d'une méthode de couplage Euler-Lagrange (CEL) qui permet, d'une part, de transmettre les pressions du fluide s'exerçant sur la structure, et d'autre part d'imposer au fluide les vitesses issues des mouvements de la structure. Nos applications relatives aux explosions sous-marines nécessitent en effet de modéliser le couplage fort qui s'opère entre les deux milieux, dans la mesure où le mouvement de la structure modifie le champ de pression dans le fluide, et inversement. Par ailleurs, la méthode permet de suivre les grands déplacements de l'interface FS qui s'opèrent lorsque les explosions ont lieu en champ proche.

Parmi les différents types de méthodes numériques utilisées pour décrire l'IFS, on distingue généralement (1) le couplage monolithique pour lequel les solutions fluide et structure sont avancées simultanément dans le temps, et (2) le couplage partitionné pour lequel l'avance en temps du fluide et de la structure est séquentielle. Chaque méthode a ses propres avantages et inconvénients. (1) Le couplage monolithique est précis et possède une convergence optimale mais il pose des difficultés d'implémentation liées notamment à l'hétérogénéité des matrices raideur fluide et structure. (2) Le couplage partitionné est plus souple à implémenter et permet de faire dialoguer des codes CSD et CFD existants, mais la méthode est dissipative et pose des problèmes de convergence. En pratique, on tente de combiner les avantages de ces deux approches au travers de méthodes de couplage mixte.

Dans ce cadre, la méthode CEL peut être qualifiée de couplage mixte dans la mesure où elle possède les caractéristiques d'une approche monolithique (code de calcul unique, avance simultanée des solutions dans le fluide et la structure), mais aussi celles d'un couplage partitionné (prédiction de la force d'interaction, schéma d'intégration temporel explicite). La méthode CEL utilisée dans nos travaux s'appuie sur le même principe que les algorithmes de couplage par pénalité utilisés dans les contacts structure/structure. Selon ce principe, le couplage s'articule en deux points. Tout d'abord les conditions d'interaction sont établies au §3.3.1. Quand ces conditions sont vérifiées (détection du contact), les forces d'interaction sont ensuite prédites par la méthode de pénalité décrite au §3.3.2.

3.3.1 Conditions d'IFS

L'approche utilisée pour établir le contact repose en premier lieu sur la condition d'impenétrabilité des domaines fluide et structure en présence, que l'on traduit par $\Omega^F \cap \Omega^S = 0$ (les exposants ^F et ^S se réfèrent respectivement au fluide et à la structure). La surface de couplage notée Γ^c est définie par l'intersection des frontières fluide et structure $\Gamma^c = \Gamma^F \cap \Gamma^S$. En tout point de la surface Γ^c les normales fluide et structure sont égales et opposées $\vec{n}^S = -\vec{n}^F$. Pour deux particules matérielles fluide et structure en

contact, la condition d'impénétrabilité est alors décrite sous forme cinématique par la relation suivante :

$$\dot{d}_n(\vec{x}, t) = \vec{v}^S \cdot \vec{n}^S + \vec{v}^F \cdot \vec{n}^F = v_n^S(\vec{x}, t) - v_n^F(\vec{x}, t) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \vec{x} \in \Gamma^c \quad (3.3.1)$$

où v_n^S et v_n^F sont les vitesses structure et fluide projetées dans la direction normale à l'interface Γ^c au point considéré \vec{x} . La grandeur \dot{d}_n correspond donc au taux d'interpénétration des deux milieux (d_n étant la distance de pénétration). Si \dot{d}_n est négatif, alors $v_n^S < v_n^F$ ce qui traduit une séparation des surfaces Γ^S et Γ^F . Si \dot{d}_n est nul, on a $v_n^S = v_n^F$ correspondant à la continuité de la vitesse normale à l'interface.

La seconde condition imposée à l'interface FS traduit le principe des actions réciproques, c.-à-d. $\vec{t}^S + \vec{t}^F = \vec{0}$ où \vec{t} sont les vecteurs des contraintes de Cauchy relatifs à la structure $\underline{\sigma}^S \cdot \vec{n}^S$ et au fluide $\underline{\sigma}^F \cdot \vec{n}^F$. La projection de cette relation suivant la normale à l'interface \vec{n}^S s'écrit $t_n^S + t_n^F = 0$. En l'absence d'adhésion entre les deux surfaces dans la direction normale, la traction normale t_n est négative ou nulle, ce que l'on traduit par la condition de compression suivante :

$$t_n \equiv t_n^S(\vec{x}, t) = -t_n^F(\vec{x}, t) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \vec{x} \in \Gamma^c \quad (3.3.2)$$

Cette expression n'est pas symétrique par rapport aux milieux fluide et structure. On a fait arbitrairement le choix ici d'exprimer la traction par rapport à la normale extérieure au domaine structure qui pointe en direction du fluide. Si l'on néglige la viscosité dans le fluide, la traction tangentielle est supposée nulle, ce qui n'apporte pas de condition supplémentaire dans la formulation de l'IFS.

La combinaison des relations Eq. (3.3.1) et (3.3.2) permet d'exprimer la condition de contact unilatéral liant le taux d'interpénétration \dot{d}_n et la traction normale t_n :

$$\dot{d}_n(\vec{x}, t) t_n(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{pour} \quad \vec{x} \in \Gamma^c \quad (3.3.3)$$

La relation Eq. (3.3.3) implique les deux cas de figures suivants qui caractérisent le contact unilatéral. (1) Si un état de compression maintient les deux milieux en contact, $t_n < 0$, alors \dot{d}_n est nul. (2) Si le contact cesse, $\dot{d}_n \leq 0$, et la traction t_n s'annule.

La modélisation numérique de l'IFS ne respecte la condition d'impénétrabilité Eq. (3.3.1) que de façon approchée dans la mesure où, comme on le décrit ensuite, le schéma de couplage par pénalité autorise un certain degré d'interpénétration entre les deux milieux. Suivant Eq. (3.3.1), cette violation de la condition d'impénétrabilité intervient à partir du moment où le taux d'interpénétration dans la direction normale \dot{d}_n devient positif.

3.3.2 Efforts de couplage par la méthode de pénalité

Le principe de calcul des efforts de couplage par la méthode de pénalité s'appuie sur la modélisation de ressorts (et éventuellement d'amortisseurs) entre le fluide et la structure. Ces ressorts agissent entre les deux domaines lorsque la pénétration d'une surface par rapport à une autre est détectée. L'effort de rappel appliqué est alors proportionnel à la distance de pénétration (où la vitesse relative dans le cas d'un amortisseur). Dans un contact classique structure/structure, la description des interfaces est Lagrangienne, ce qui permet une application directe des efforts de raideur sur les nœuds. Pour le couplage Euler-Lagrange, la frontière matérielle du fluide n'est pas modélisée explicitement dans la mesure où elle est décrite par la méthode VOF présentée au §3.2.9.2. La structure Lagrangienne est noyée dans la grille Eulérienne, ce qui nécessite d'adapter les algorithmes de couplage en recherchant les nœuds et particules susceptibles d'interagir. Dans ce cas, la distance de pénétration est calculée entre la particule fluide et un point interne de l'élément structure. En fonction des applications et de la taille de maille relative fluide/structure, plusieurs points internes sont pris en compte dans chaque élément structure (4 points au minimum pour un élément coque). Pour ces points internes structure comme pour les particules fluide, les variables efforts de couplage calculés sont redistribués sur les nœuds de l'élément par les fonctions de forme.

Comme décrit dans [Aquelet *et al.*, 2006], le vecteur pénétration \vec{d} entre le point Lagrangien considéré et la particule Eulérienne la plus proche est incrémentée à chaque pas de temps en multipliant la vitesse relative ($\vec{v}_S - \vec{v}_F$) par l'incrément temporel Δt , :

$$\vec{d}^{n+1} = \vec{d}^n + \Delta t (\vec{v}_S^{n+1/2} - \vec{v}_F^{n+1/2}) \quad (3.3.4)$$

Dans cette approche, le point structure est considéré esclave, et la particule fluide est maître. Le vecteur pénétration \vec{d} représente un certain niveau de violation de la condition d'impénétrabilité entre les particules maître et esclave décrite par Eq. (3.3.1). La vitesse et la masse de la particule fluide \vec{v}_F sont interpolées à partir des variables nodales de l'élément fluide au temps considéré. L'activation du couplage, donc du calcul des efforts d'interaction FS, s'effectue dès que la condition d'impénétrabilité Eq. (3.3.1) est violée, ce que l'on écrit encore :

$$d \equiv \vec{d} \cdot \vec{n}^S > 0 \quad (3.3.5)$$

où la normale au niveau du point structure \vec{n}^S est dirigée vers le domaine fluide. Par la méthode de pénalité, l'intensité de l'effort d'interaction F est proportionnelle à la distance de pénétration d et à une raideur de couplage k , soit $F = kd$. Les efforts appliqués par le fluide sur la structure d'une part, et par la structure sur le fluide d'autre part, sont notés \vec{F}^S et \vec{F}^F respectivement. Ils sont d'intensité égale et s'exercent suivant la direction normale \vec{n}^S et en sens opposés, ce que l'on écrit :

$$\vec{F}^S = -k d \vec{n}^S \quad (3.3.6a)$$

$$\vec{F}^F = k d \vec{n}^S \quad (3.3.6b)$$

L'effort structure et fluide ainsi calculé est ensuite distribué sur les nœuds des éléments Lagrangiens et Eulériens, en pondérant par la fonction de forme N_I associée au nœud I. Cette fonction de forme décrite par Eq. (3.1.41) dépend des coordonnées paramétriques (ξ, η) de la particule fluide (maître) ou du point structure (esclave) sur lequel s'applique l'effort de couplage. Les efforts de couplage nodaux s'écrivent :

$$F_{iI}^S = N_I(\xi, \eta) F_i^S = -N_I(\xi, \eta) k d n_i^S \quad (3.3.7a)$$

$$F_{iI}^F = N_I(\xi, \eta) F_i^F = N_I(\xi, \eta) k d n_i^S \quad (3.3.7b)$$

Comme $\sum_I F_{iI} = F_i$, le principe d'action-réaction est vérifié à l'interface FS.

L'inconvénient de la méthode de couplage par pénalité est l'estimation de la raideur de couplage car celle-ci dépend fortement des applications. L'approche retenue pour nos problèmes provient d'une adaptation des méthodes explicites de contact structure/structure par pénalité [Zhong, 1993]. La raideur de pénalité k dépend du module de compressibilité K^F du fluide (qui est de l'ordre de 2 GPa pour l'eau), du volume V de l'élément fluide auquel appartient la particule maître, et de l'aire de l'élément structure en contact divisée par le nombre de points internes que l'on note A_q :

$$k = p_f \frac{K^F A_q^2}{V} \quad (3.3.8)$$

Le facteur de pénalité p_f est un scalaire, $0 \leq p_f \leq 1$, qui est introduit pour éviter les instabilités numériques. L'expression Eq. (3.3.8) utilisée pour la raideur de pénalité peut être déduite de l'équation d'état utilisée pour l'eau. Au premier ordre, si l'on suppose que l'équation d'état est linéaire en masse volumique, la pression p s'écrit alors $p = -K^F \Delta V/V$. La variation de volume liée au mouvement relatif du fluide et la structure dépend de la surface comprimée et de la distance de pénétration, soit $\Delta V = -A_q d$. Par suite, l'effort appliqué sur la structure s'obtient en multipliant par la surface A_q , soit, au facteur de pénalité près :

$$F^S = p_f \frac{K^F A_q^2 d}{V} \quad (3.3.9)$$

où le module de compressibilité linéaire de l'eau dépend de la masse volumique et de la vitesse du son de référence, $K = \rho c^2$. Dans la relation Eq. (3.3.9), le volume V de fluide comprimé peut être estimé

par l'extrusion de la surface A_q sur une longueur $L = c\Delta t^F$ correspondant à la distance parcourue par l'onde acoustique pendant un incrément de temps, Δt^F étant le pas de temps critique associé au fluide. La longueur L représente donc la taille caractéristique de l'élément fluide dans la zone d'interaction FS. Suivant [Hallquist, 2006], la raideur de pénalité associée au fluide k^F est donc évaluée par la relation :

$$k^F = p_f \frac{K^F A_q}{c \Delta t^F} \quad (3.3.10)$$

Une expression analogue est utilisée pour la raideur de pénalité k^S associée à la structure :

$$k^S = p_f \frac{K^S A_q}{L} \quad (3.3.11)$$

où L correspond à une longueur caractéristique de l'élément structure, et K^S est le module de compressibilité de la structure (de l'ordre de 200 GPa pour l'acier). À partir de Eq. (3.3.10) et (3.3.11), on peut écrire la raideur de pénalité équivalente k_{eq} du système couplé FS :

$$k_{eq} = \frac{k^S k^F}{k^S + k^F} \approx p_f \frac{K^S K^F}{K^S + K^F} \quad (3.3.12)$$

où l'approximation écrite dans le dernier membre à droite peut être faite dans la mesure où les tailles de maille fluide et structure sont du même ordre de grandeur dans nos applications, c.-à-d. $L \approx c\Delta t^F$. On note par ailleurs que le rapport des modules de compressibilité structure et fluide est d'un ordre 100 dans nos applications qui mettent en jeu l'eau et la coque métallique en acier. Considérant alors $K^S \gg K^F$, la raideur de pénalité équivalente Eq. (3.3.12) est proche de la raideur de pénalité associée au fluide K^F , de sorte que l'on retient l'expression Eq. (3.3.10) pour l'estimation de la raideur de couplage.

Chapitre 4

Ondes de détonation

« Je considère le déterminisme laplacien - confirmé comme il semble l'être par le déterminisme des théories physiques, et par leur succès éclatant - comme l'obstacle le plus solide et le plus sérieux sur le chemin d'une explication et d'une apologie de la liberté, de la créativité, et de la responsabilité humaines. »

L'univers irrésolu, Karl Popper (1982)

PARMI les phénomènes physiques qui caractérisent les explosions sous-marines, les premiers, par ordre chronologique concernent bien évidemment les ondes de détonation. Ils se situent sur des échelles de temps (de l'ordre de la μs) et d'espace (de l'ordre du cm) très inférieures aux dimensions du problème général. Afin de disposer d'éléments de comparaison théoriques permettant de critiquer les simulations numériques, la mise en équations du problème pour des charges explosives de géométries simples est développée à partir de modèles inspirés de [Taylor, 1950]. Pour cela, la détente des produits de détonation est calculée à l'aide de l'équation d'état Jones-Wilkins-Lee relative au TNT. Les solutions relatives aux ondes plane, cylindrique et sphérique sont ainsi présentées et commentées.

Dans un second temps, la modélisation numérique de ces problèmes est effectuée en recherchant la convergence spatiale par rapport à la solution exacte. Cette analyse nous permet de trouver le paramètre de convergence nécessaire pour obtenir une représentation correcte du profil d'onde de détonation en fonction de la géométrie de la charge. Les résultats obtenus mettent ainsi en évidence un nombre minimal d'éléments dans la direction de propagation en-deçà duquel, la représentation de la discontinuité explosive est très éloignée de la solution exacte. Cela étant, ces premiers résultats aboutissent à des tailles d'éléments très petites inadaptées au cas d'application finale. Cette restriction justifie le développement d'une méthode permettant de projeter les résultats numériques relatifs à l'onde de détonation sur une grille de calcul moins dense mais adaptée à la propagation du choc sous-marin.

4.1 Éléments théoriques

Cette section est consacrée à l'étude théorique des ondes de détonation dans un matériau explosif solide classique. Pour introduire les équations de la mécanique qui régissent les phénomènes, on s'intéressera tout d'abord à un régime de détonation stationnaire et bidimensionnel. Ce régime nominal correspond à une onde de détonation plane qui se propage dans un milieu infini en générant un écoulement unidimensionnel et stationnaire. On parle alors d'onde de détonation idéale sans effets de bord liés aux frontières physiques du domaine explosif. De plus, le régime d'établissement qui représente la phase transitoire entre l'initiation (amorçage de la détonation) et la stabilisation n'est pas abordé. Dans un second temps, la détente des produits de détonation derrière le front d'onde sera analysée pour des écoulements unidimensionnels à symétries plane, cylindrique et sphérique. Ces éléments théoriques nous permettront de confronter les résultats de calculs numériques abordés dans la seconde partie de ce chapitre. Théoriquement, on distingue trois zones le long du matériau explosif :

1. Une première zone située en amont de l'onde de détonation correspond à la zone solide de l'explosif qui n'a pas encore détoné. Elle est associée à un état initial noté (0) (dans la suite les grandeurs qui s'y rapportent sont indicées par 0).
2. Une deuxième notée (r) correspond à la zone de réaction dans laquelle l'explosif se transforme en produits de détonation par un processus de décomposition chimique (brisure des liaisons interatomiques lors du passage de l'onde de choc). Elle est encadrée par le plan de l'onde de choc noté (Ω) qui se déplace à la vitesse de détonation U_d et le plan dans lequel la décomposition chimique est terminée noté (Ω_1).
3. La zone située en aval de l'onde de détonation correspond à l'espace occupé par les produits de détonation dans lequel l'écoulement u_1 est permanent. Elle est associée à un état final noté (1) (grandeurs indicées par 1).

On doit préciser que les processus de décomposition chimique dans la zone de réaction ne font pas l'objet de notre étude. L'analyse théorique des phénomènes et leur modélisation numérique est purement mécanique. Comme on le verra, cela implique un certain nombre d'hypothèses pour pouvoir les représenter correctement.

4.1.1 Équations fondamentales de la détonation

Dans la mesure où le processus de détonation est assimilable à une onde de choc en milieu réactif, on peut adopter théoriquement un traitement et un formalisme analogue à celui des ondes de choc en milieu inerte. On fait en outre l'hypothèse d'un écoulement permanent dans l'onde de détonation. En ignorant ce qui se passe dans la zone de réaction (r), on se concentre sur ce qui se passe entre l'état initial (0) et final (1), c.-à-d. ce qui rentre et qui sort d'un volume de contrôle qui se déplace à la même vitesse que le front d'onde. L'onde de détonation est donc assimilée à une discontinuité pour les grandeurs cinétiques et thermodynamiques de l'écoulement ; la pression p , la masse volumique ρ , la température

T (ou l'énergie interne spécifique e), et la vitesse u . La solution est établie en décrivant les relations entre ces grandeurs données par les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus¹ ; conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie.

Le traitement des ondes de détonation diffère de celui des ondes de choc dans la mesure où l'approche est fondamentalement différente pour le bilan d'énergie. En effet, pour un choc à travers un milieu inerte, l'énergie spécifique du matériau au repos se limite à son énergie interne thermique ($e_0 = 0$ si $p_0 = 0$). En revanche pour un explosif, même à pression nulle, il existe une énergie spécifique non nulle qui est égale à la différence d'énergie thermodynamique entre l'état initial et les produits de détonation en fin de détente.

On écrit pour commencer le bilan de masse pendant une durée infinitésimale dt , appliqué au volume de contrôle de section dS . Celui-ci encadre le front d'onde tout en étant animé de la même vitesse U_d . Il constitue de ce fait un système ouvert par lequel transitent des flux entrant et sortant aux niveaux de ces frontières situées respectivement en amont et en aval du front. Sur la période dt , la masse de matière entrante est donnée par $m_0 = \rho_0 (U_d - u_0) dS dt$. De même en aval de la discontinuité, la masse de matière sortante s'écrit $m_1 = \rho_1 (U_d - u_1) dS dt$. On traduit la conservation de la masse en égalant m_0 et m_1 . Si l'on suppose en outre l'écoulement nul en amont du choc $u_0 = 0$ (hypothèse classiquement retenue pour les explosifs solides), l'équation de conservation de la masse au travers de la discontinuité s'écrit :

$$\rho_0 U_d = \rho_1 (U_d - u_1) \quad (4.1.1)$$

La variation de la quantité de mouvement appliquée au même volume de contrôle s'écrit $m(u_1 - u_0)$. Elle doit être égale à la somme des efforts extérieurs liés aux pressions p_0 et p_1 qui s'exercent en amont et en aval. En tenant compte de l'expression de la masse $m = \rho_0 (U_d - u_0) dS dt$ et comme u_0 est nul, l'expression de la conservation de la quantité de mouvement traduit le saut de pression :

$$p_1 - p_0 = \rho_0 U_d u_1 \quad (4.1.2)$$

La conservation de l'énergie décrit l'égalité du travail des efforts extérieurs liés aux forces de pression $\Delta W = (p_1 u_1 - p_0 u_0) dS dt$ et de la variation d'énergie totale Δe_t . La variation d'énergie totale est la somme des variations d'énergie interne $\Delta e = e_1 - e_0$ et d'énergie cinétique $\Delta e_c = (u_1^2 - u_0^2)/2$. Comme précédemment, l'expression de conservation de l'énergie $\Delta W = m \Delta e_t$ s'écrit en considérant un écoulement nul dans l'explosif solide $u_0 = 0$, soit :

$$e_1 - e_0 = \frac{u_1}{U_d} \left(\frac{p_1}{\rho_0} - \frac{u_1 U_d}{2} \right) \quad (4.1.3)$$

1. Les bilans de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ne sont pas affectés par le changement d'espèces chimiques, c.-à-d. passage de l'état de l'explosif solide à l'état des produits de détonation gazeux.

où e_0 et e_1 représentent les énergies internes spécifiques respectivement de l'explosif et des produits de détonation dans l'état d'équilibre thermochimique atteint en fin de réaction. L'énergie e_0 contient l'énergie de formation de la molécule explosive aux conditions initiales de volume v_0 et de pression p_0 . Dans Eq. (4.1.3), les termes u_1/U_d et $u_1 U_d$ sont remplacés par leur expression issue respectivement de la conservation de la masse Eq. (4.1.1) et la quantité de mouvement Eq. (4.1.2) ce qui, après arrangement, permet d'aboutir à la relation de saut d'énergie interne au travers de la discontinuité :

$$e_1 - e_0 = \frac{1}{2} (p_1 + p_0)(v_0 - v_1) \quad (4.1.4)$$

avec $v_0 = 1/\rho_0$ et $v_1 = 1/\rho_1$ sont les volumes spécifiques respectivement en amont et en aval de la zone de réaction. Cette expression est représentative d'une surface dans l'espace (p, v, e) et définit le lieu des états de détonation possibles à partir des conditions en amont (p_0, v_0, e_0) .

Le système ainsi constitué des équations Eq. (4.1.1), (4.1.2) et (4.1.4) forme les relations de sauts, dites de Rankine-Hugoniot, écrites ici dans le cas où l'écoulement dans l'explosif qui n'a pas encore réagi est nul ($u_0 = 0$). En supposant connues les énergies internes en amont et en aval de la zone de réaction (e_0 et e_1 connus), le système est composé de trois équations à quatre inconnues ρ_1 , p_1 , u_1 et U_d . Pour le résoudre on adjoint au système une quatrième équation. Cette relation formulée par [Chapman, 1899] puis [Jouguet, 1905], exprime la condition de sonicité des ondes acoustiques par rapport au milieu (1) situé en aval de la zone de réaction et s'écrit :

$$U_d = u_1 + c_1 \quad (4.1.5)$$

où c_1 est la vitesse du son dans le milieu (1). Cette condition supplémentaire, dite de Chapman-Jouguet, est vérifiée par l'expérience et assure la stabilité hydrodynamique de l'onde explosive. Elle constitue une différence fondamentale par rapport aux chocs en milieux inertes pour lesquels, la vitesse du front d'onde de choc est inférieure à la célérité locale $u_1 + c_1$, c.-à-d. les perturbations qui naissent en aval se déplacent à une vitesse supérieure à celle du front d'onde et modifient de ce fait son comportement.

Généralement, l'énergie interne e_1 des gaz produits par la détonation est inconnue, et on doit fermer le système à l'aide d'une cinquième relation représentant l'équation d'état des produits gazeux de la forme générale $e_1 = e_1(p_1, v_1)$. Le système complet à résoudre est donc formé par Eq. (4.1.1), (4.1.2), (4.1.4) et (4.1.5) auxquelles on adjoint une équation d'état qui traduit le comportement des gaz brûlés dans leur processus de détente derrière la zone de réaction. L'équation d'état est représentative d'une surface dans le diagramme (p, v, e) . Son intersection avec la relation de saut d'énergie interne Eq. (4.1.4) forme donc une courbe que l'on appelle adiabatique de détonation, dite courbe de Crussard (notée (H) sur la figure 4.1). Cette courbe correspond à l'ensemble des points de détonation possibles situés dans le plan (p, v) tels que $p \geq p_0$. Le pôle de l'adiabatique de détonation, noté P, représente l'état initial (p_0, v_0) de l'explosif qui n'a pas encore réagi. Le prolongement de la courbe de Crussard représenté en pointillés

sur la figure 4.1) correspond aux points de déflagration possibles tels que $p < p_0$. Les phénomènes de déflagration ne sont pas étudiés dans nos travaux.

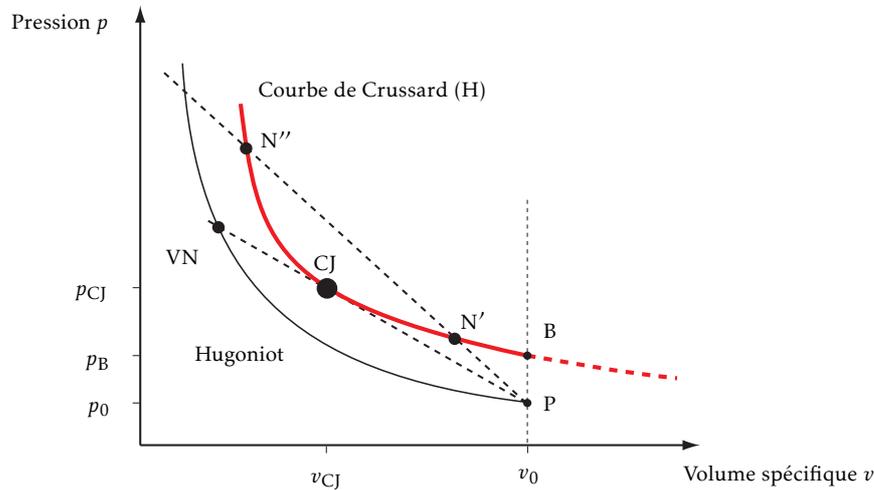


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du processus de détonation sur le diagramme (p, v) . Les états de détonation possibles à partir du pôle (p_0, v_0) sont décrits par la courbe de Crussard (H). La droite de Rayleigh, dont la pente est proportionnelle à la vitesse de détonation au carré U_d^2 , coupe (H) aux points de détonation inférieure et supérieure, respectivement N' et N'' . Le point de détonation de Chapman-Jouguet, noté CJ, correspond à l'état de détonation stable.

On doit insister sur le fait que, contrairement à l'adiabatique dynamique caractérisant un choc en milieu inerte, l'adiabatique de détonation ne passe pas par son pôle. Cette différence fondamentale entre chocs en milieux inertes et chocs réactifs provient de ce que la décomposition chimique au travers de la zone de réaction est un processus exothermique. On peut le mettre en évidence en considérant un point B sur la courbe de Crussard dont le volume spécifique est égal à celui du pôle P (voir figure 4.1). En imposant l'égalité $v_B = v_0$ dans la relation de saut Eq. (4.1.4), l'énergie interne des produits de détonation est alors égale à celle de l'explosif solide, soit $e_0 = e_1(p_B, v_0)$. Si l'on imposait maintenant au point B d'être confondu avec le pôle de l'adiabatique P, l'énergie interne des produits de détonation dans les conditions initiales $e_1(p_B, v_0)$ serait identique à celle de l'explosif. Or, le processus de décomposition chimique constitue une réaction exothermique que l'on peut traduire par $e_0 = e_1(p_0, v_0) + \Delta H$ où le terme ΔH est toujours positif et correspond à une production d'enthalpie. Il en découle nécessairement que $e_0 = e_1(p_B, v_0) > e_1(p_0, v_0)$. Par suite, l'équation d'état des produits de détonation étant une fonction croissante de la pression à volume constant, la pression au point B est forcément supérieure à celle du pôle P, soit $p_B > p_0$, comme schématisé sur la figure 4.1

La courbe de Crussard permet d'étudier les différents états de détonation possibles. Si l'on combine les relations Eq. (4.1.1) et (4.1.2) en cherchant à éliminer la vitesse d'écoulement u_1 , on obtient :

$$\frac{p_1 - p_0}{v_1 - v_0} = -(\rho_0 U_d)^2 \quad (4.1.6)$$

Cette expression représente une droite dans le diagramme (p, v) dont la pente est égale, en valeur absolue, à $(\rho_0 U_d)^2$, comme schématisé sur le figure 4.1. Elle relie le pôle de l'adiabatique (p_0, v_0) au point de détonation sur la courbe de Crussard (p_1, v_1) . On montre classiquement que l'intersection de cette droite, dite de Rayleigh, avec la courbe de Crussard est susceptible d'intervenir, au maximum, en deux points appartenant à la même adiabatique dynamique. Ces deux points caractérisent les états de détonation inférieur et supérieur correspondant à une même vitesse de détonation. Ils sont notés respectivement N' et N'' sur la figure 4.1.

Parmi tous les points de détonation théoriquement possibles, celui étudié dans nos travaux est l'état de détonation de Chapman-Jouguet, noté CJ. Il correspond au point de tangence entre la courbe de Rayleigh et la courbe de Crussard et correspond de ce fait à la vitesse de détonation minimum. L'état CJ sépare la courbe de Crussard entre les états de détonation inférieurs (ensemble des points N') et supérieurs (ensemble des points N''). On peut caractériser ces différents états de détonation en étudiant la variation d'entropie d'un point à un autre sur la courbe de Crussard. On exprime la variation d'entropie en différenciant tout d'abord la relation Eq. (4.1.4), ce qui permet d'obtenir la différentielle d'énergie interne $de_{(H)}$ le long de l'adiabatique de détonation. En vertu des Premier et Second Principe de la thermodynamique on a $de_{(H)} = -pdv_{(H)} + Tds_{(H)}$ et, par suite, la variation d'entropie s'écrit :

$$T \left. \frac{ds}{dv} \right|_{(H)} = \frac{1}{2} (v_0 - v) \left(\left. \frac{dp}{dv} \right|_{(H)} + \frac{p - p_0}{v_0 - v} \right) \quad (4.1.7)$$

L'étude de cette expression montre qu'en allant du point N' au point CJ sur la courbe de Crussard, la variation $|dp_{(H)}/dv|$ est inférieure en valeur absolue à la pente de la droite de Rayleigh, donc l'entropie décroît. À l'inverse si l'on se déplace de CJ à N'' , la variation $|dp_{(H)}/dv|$ est supérieure à la pente de la droite et l'entropie croît. Au point CJ enfin, la courbe (H) étant tangente à la droite de Rayleigh, la variation d'entropie est nulle. L'état de détonation de Chapman-Jouguet coïncide donc avec le minimum d'entropie des produits de détonation sur la courbe de Crussard (H) et correspond au régime normal de détonation qui est utilisé dans nos travaux. Ces considérations nous permettent en outre de justifier la condition de Chapman-Jouguet donnée par Eq. (4.1.5). En effet, au point CJ, l'isentropique des produits de détonation est minimum et tangente à la droite de Rayleigh. La pente de l'isentropique est simplement donnée par $(\partial p/\partial v)_s = -(\rho_1 c_1)^2$, et doit être égale à celle de la droite de Rayleigh $-(\rho_0 U_d)^2$, ce qui donne l'égalité $\rho_1 c_1 = \rho_0 U_d$. Par suite, en utilisant l'équation de conservation de la masse Eq. (4.1.1), on retrouve la condition de sonicité de l'onde Eq. (4.1.5) au point de détonation de Chapman-Jouguet, c.-à-d. $U_d = c_1 + u_1$.

L'expression de la courbe de Crussard est explicitée dans le cas où le comportement des gaz issus de la détonation peut être assimilé, en première approximation, à celui d'un gaz parfait de coefficient polytropique γ . On doit insister sur le fait que cette approximation n'est pas valable tout au long du processus de détente des produits de détonation. En réalité, le coefficient polytropique γ n'est pas constant et varie en fonction du niveau de détente. Ce comportement des gaz réels est généralement pris en compte dans des lois empiriques telles que celles inventoriées dans [Kedrinskii, 2005]. Toutefois, l'estimation de γ au point de Chapman-Jouguet fournit un ensemble de relations simples qui peuvent servir

de point de départ aux calculs d'écoulements liés à la détente isentropique que l'on présente ensuite au §4.1.3. Pour les explosifs courants, on trouve notamment dans la littérature des mesures empiriques de γ au point CJ, comme par exemple dans [Dobratz et Crawford, 1985]. Ainsi pour le TNT, le coefficient γ des produits de détonation dans le plan CJ est de l'ordre de 3.0. Partant de l'équation d'état $e = pv/(\gamma - 1)$ des produits gazeux, et en faisant l'hypothèse de détente adiabatique réversible derrière le front de détonation, l'équation de Laplace $pv^\gamma = \text{Constante}$ permet d'exprimer la célérité du son :

$$c^2 = -v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s = \gamma p v \quad (4.1.8)$$

Dans le plan de Chapman-Jouguet situé en arrière de la zone de réaction, la connaissance du coefficient polytropique $\gamma \equiv \hat{\gamma}$ permet d'estimer toutes les grandeurs thermodynamiques et cinétiques associées à l'état de détonation stationnaire². Pour cela, on injecte successivement Eq. (4.1.8) dans Eq. (4.1.5) pour éliminer \hat{e} , puis la quantité de mouvement Eq. (4.1.2) (en faisant l'hypothèse $p \gg p_0$) pour éliminer \hat{p} , et enfin la conservation de la masse Eq. (4.1.1) pour éliminer la variable \hat{v} et obtenir la relation $\hat{U}_d - \hat{u} = \hat{\gamma} \hat{u}$. De cette dernière, on tire en ensemble d'équations simples et utiles pour l'étude théorique de l'état de détonation au niveau du pic de Chapman-Jouguet :

$$\hat{U}_d = \hat{u} (\hat{\gamma} + 1) \quad (4.1.9a)$$

$$\frac{\hat{v}}{v_0} = \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma} + 1} \quad (4.1.9b)$$

$$\hat{c} = \hat{\gamma} \hat{u} \quad (4.1.9c)$$

$$\hat{p} = \rho_0 \frac{\hat{U}_d^2}{(\hat{\gamma} + 1)} \quad (4.1.9d)$$

Les relations Eq. (4.1.9a) à (4.1.9d) seront utilisées dans le §4.1.3, comme conditions aux limites de nos calculs théoriques relatifs à la forme de l'onde de détonation en fonction de la géométrie de l'écoulement.

2. Dans ce qui suit, les variables décrites dans le plan de Chapman-Jouguet sont repérées par un circonflexe où simplement par l'indice CJ; ainsi \hat{p} et p_{CJ} désignent la pression de détonation de Chapman-Jouguet. Seule exception, la vitesse de détonation que l'on écrit \hat{U}_d ou D_{CJ} .

4.1.2 Équation d'état des produits de détonation

Comme évoqué dans le paragraphe précédent, une équation d'état est nécessaire pour décrire le comportement des gaz résiduels issus de la détonation. Elle permet de représenter la phase de détente isentropique de ces gaz chauds derrière le front d'onde. Pour cela, plusieurs lois d'état empiriques, passées en revue dans [Kedrinskii, 2005], ont été formulées à partir de résultats d'essais de détonation parmi lesquelles l'équation d'état polytropique (loi- γ), l'équation de Becker-Kistiakowski-Wilson (BKW), l'équation de Jones-Wilkins-Lee (JWL) ou encore l'équation de Kihara-Hikita-Tanaka (KHT). Dans nos travaux c'est l'équation JWL qui est utilisée pour décrire le comportement thermodynamique des produits de détonation. Cette équation d'état est empirique et trouve son origine dans différentes équations successives. Tout d'abord celle proposée par [Jones et Miller, 1948] relie la pression p^J au volume relatif v_r et à la température T :

$$p^J(v_r, T) = Ae^{-Rv_r} - B + CT \quad (4.1.10)$$

où le volume relatif v_r est égal au volume spécifique v des produits de détonation à l'état gazeux rapporté au volume spécifique v_0 de l'explosif à l'état solide. On trouve ensuite l'équation proposée par [Wilkins, 1964] reliant la pression p^W au volume relatif et à l'énergie interne par unité de volume E :

$$p^W(v_r, E) = \frac{\alpha}{v_r^Q} + B \left(1 - \frac{\omega}{Rv_r} \right) e^{-Rv_r} + \frac{\omega E}{v_r} \quad (4.1.11)$$

où $\alpha = a(Q - 1)/(Q - 1 - \omega)$. Dans sa forme isentropique, Eq. (4.1.11) s'écrit :

$$p_s^W(v_r) = \frac{a}{v_r^Q} + Be^{-Rv_r} + \frac{C}{v_r^{\omega+1}} \quad (4.1.12)$$

Finalement, les équations Eq. (4.1.10) et (4.1.11) furent étendues à l'équation proposée par Lee dans [Lee et al., 1968], et baptisée Jones-Wilkins-Lee (JWL) en référence à ses différents contributeurs. Elle relie la pression p^{JWL} au volume relatif et à l'énergie interne E (exprimée par unité de volume de référence) et s'écrit :

$$p^{JWL}(v_r, E) = A \left(1 - \frac{\omega}{R_1 v_r} \right) e^{(-R_1 v_r)} + B \left(1 - \frac{\omega}{R_2 v_r} \right) e^{(-R_2 v_r)} + \frac{\omega E}{v_r} \quad (4.1.13)$$

Dans sa forme isentropique, Eq. (4.1.13) s'écrit encore :

$$p_s^{JWL}(v_r) = Ae^{-R_1 v_r} + Be^{-R_2 v_r} + Cv_r^{-(\omega+1)} \quad (4.1.14)$$

L'équation d'état JWL est très largement employée dans les hydrocodes actuels dans la mesure où elle a été corrélée à partir de nombreux tests d'expansion de cylindre. On peut se référer à ce sujet à différents travaux décrits dans [Kury *et al.*, 1965], [Lee *et al.*, 1968], [Lee et Hornig, 1969] et [Lee *et al.*, 1973]. Ces corrélations ont été effectuées pour une large variété d'explosifs dont les principaux résultats sont accessibles dans [Lee *et al.*, 1973] et recensés, parmi d'autres caractéristiques, dans l'ouvrage complet [Dobratz et Crawford, 1985]. Les coefficients de corrélation A, B et C sont homogènes à des pressions, R_1 , R_2 et ω sont sans dimension, et leur valeur dépend du matériau explosif. La méthode de corrélation est basée sur la mesure de la vitesse d'expansion d'un tube cylindrique en métal confinant la matière explosive, dont la détonation est amorcée dans un plan à l'une des extrémités. La méthode employée s'appuie notamment sur la théorie proposée par Taylor [Taylor, 1941a] qui permet de relier l'accélération du métal de confinement à l'expansion des gaz derrière le front d'onde. Le métal de confinement est généralement en cuivre si l'on se réfère aux premières publications sur le sujet [Lee *et al.*, 1968]. La méthode de corrélation est notamment présentée par [Hornberg, 1986] et [Lan *et al.*, 1993] pour la détermination des paramètres JWL relatifs à différents explosifs ; compositions B, TNT, HBX, ou PBX-9404.

Dans nos simulations numériques, c'est l'équation d'état JWL écrite en fonction de l'énergie interne qui est utilisée Eq. (4.1.13). Le coefficient C apparaissant dans l'isentropique Eq. (4.1.14) donne le niveau de référence qui peut être évalué aux grands volumes relatifs, lorsque les deux termes exponentiels sont négligeables. Il n'est pas utile dans l'implémentation de l'équation d'état mais peut toutefois être déduit à partir de l'une ou l'autre des conditions suivantes évaluées au point CJ ; $p_s = p_{CJ}$ ou $(\partial p / \partial v)_s = -(\rho_0 D_{CJ})^2$. La première relation stipule que la valeur de pression calculée sur l'isentropique au niveau du point CJ est égale à la pression de détonation p_{CJ} . Bien que cette condition puisse sembler triviale, elle n'en demeure pas moins approximative dans la mesure où l'évaluation de la pression de détonation par voie expérimentale est une grandeur difficile à obtenir. La seconde condition exprime l'égalité des pentes de l'isentropique et de l'adiabatique de détonation (H) au point CJ. Cette condition émane des éléments théoriques décrits précédemment relatifs au minimum d'entropie sur la courbe de Crussard au point CJ. En outre on notera que, contrairement à la pression de Chapman-Jouguet, la vitesse de détonation D_{CJ} est, elle, plus facilement mesurable. Appliquées à l'équation d'état JWL, on montre que ces conditions permettent d'exprimer le coefficient C de deux façons différentes, qui ne sont pas nécessairement équivalentes en fonction des grandeurs mesurées :

$$C = (p_{CJ} - A e^{-R_1 V_{CJ}} - B e^{-R_2 V_{CJ}}) V_{CJ}^{(\omega+1)} \quad (4.1.15)$$

$$C = \frac{\rho_0 D_{CJ}^2 - A R_1 e^{-R_1 V_{CJ}} - B R_2 e^{-R_2 V_{CJ}}}{\omega + 1} V_{CJ}^{(\omega+2)} \quad (4.1.16)$$

où $V_{CJ} = v_{CJ}/v_0$ est le volume relatif des produits de détonation au point CJ.

La figure 4.2 présente les tracés des différents termes de l'équation d'état JWL Eq. (4.1.14) pour le TNT dont les paramètres sont donnés dans le Tab. 4.1 en page 106. Afin de représenter l'influence relative de chacun de ces termes dans l'isentropique Eq. (4.1.14), on trace leur évolution rapportée à la pression totale p_s en fonction du volume relatif. Sur ce graphique, l'axe des abscisses portant le volume

relatif s'étend pour des valeurs inférieures à 1 dans la mesure où au point CJ, le volume relatif est de l'ordre de 0.7.

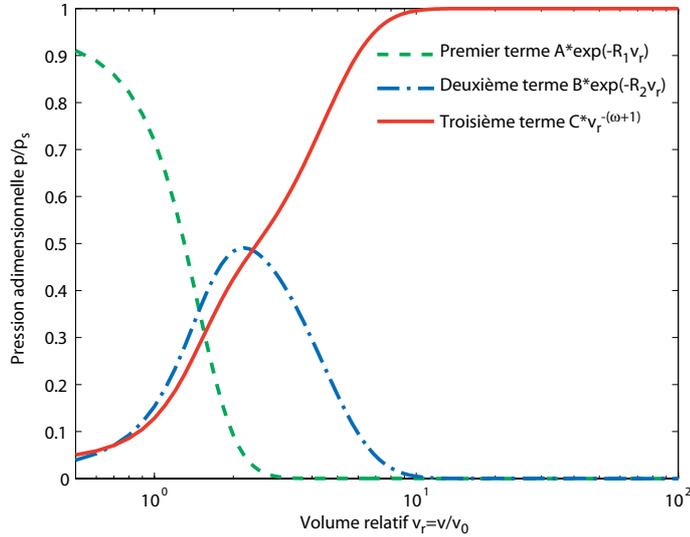


FIGURE 4.2 – Représentation de l'influence relative des trois termes de l'équation d'état JWL pour le matériau explosif TNT en fonction du volume relatif (en échelle logarithmique).

La figure 4.2 permet d'illustrer la prédominance du premier terme $A(\cdot)$ aux grands taux de compression (v_r inférieur à 2), et le second $B(\cdot)$ aux valeurs intermédiaires (v_r inférieur à 10). Pour les grands volumes relatifs, c.-à-d. dans la phase finale de la détente des gaz résiduels (v_r supérieur à 10), on montre que la pression est gouvernée par le dernier terme $C(\cdot)$. Les gaz suivent alors une équation d'état calorimétrique de type gaz parfait $E = p v_r / (\gamma - 1)$. Si l'on identifie le rapport des capacités calorifiques γ à l'exposant $(\omega + 1)$ apparaissant dans le dernier terme de l'isentropique Eq. (4.1.14) on obtient en effet la relation :

$$p v_r^\gamma = C \quad (4.1.17)$$

En première approximation, on peut faire l'hypothèse d'un comportement de type gaz parfait de coefficient polytropique γ_{CJ} évalué dans le plan CJ, c.-à-d. au début de la détente isentropique aux grandes valeurs de pression (à ne pas confondre avec le coefficient polytropique ω qui concerne la phase finale de la détente aux faibles valeurs de pression). On a montré précédemment que la connaissance de γ_{CJ} permettait d'établir des relations simples entre les différentes variables thermodynamiques et cinétiques Eq. (4.1.9a) à (4.1.9d) du problème. Le coefficient polytropique au point CJ peut être évalué à partir de l'expression de l'isentropique Eq. (4.1.14) par :

$$\gamma = - \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln v} \right)_s \quad \text{soit} \quad \gamma_{CJ} = \frac{V_{CJ}}{p_{CJ}} \left[AR_1 e^{-R_1 V_{CJ}} + BR_2 e^{-R_2 V_{CJ}} + C(\omega + 1) V_{CJ}^{-(\omega+2)} \right] \quad (4.1.18)$$

4.1.3 Forme de l'onde de détonation suivant le modèle de Taylor Zel'Dovich (TZ)

Ayant exposé les principaux éléments théoriques relatifs à l'onde de détonation et à son régime de propagation stationnaire, nous nous intéressons maintenant à la forme même de l'onde explosive. Cette étude se place dans le cadre des écoulements monodimensionnels à symétries plane, cylindrique et sphérique et concerne la détente des produits de détonation en arrière du plan de Chapman-Jouguet. On suppose en outre connues les grandeurs cinétiques et thermodynamiques au point CJ qui constitue de ce fait une condition imposée à la frontière de nos modèles. Cette analyse se base sur la formulation théorique originelle de [Taylor, 1950] qui est revue et augmentée en fonction de l'équation d'état JWL relative au comportement réel des produits de détonation. Elle aboutit à des formes analytiques qui permettront de critiquer les modèles numériques décrits plus loin au §4.2.2.

L'onde de détente isentropique qui se développe derrière le front d'onde obéit aux lois de conservation de la masse Eq. (4.1.19a) et de la quantité de mouvement Eq. (4.1.19b). On néglige en outre les effets liés à la viscosité ainsi que les efforts volumiques. Le problème est donc décrit par les équations d'Euler que l'on écrit ici dans le cas des écoulements monodimensionnels en fonction des deux variables indépendantes, r pour l'espace et t pour le temps. La détente étant isentropique, l'équation de conservation de l'énergie n'apporte rien de plus dans le système et les inconnues sont alors la pression p , la vitesse particulière u , et la masse volumique ρ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \eta \frac{u}{r} \right) = 0 \quad (4.1.19a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4.1.19b)$$

Le paramètre η dépend de la géométrie du problème; $\eta = 0$ en symétrie plane, $\eta = 1$ en cylindrique et $\eta = 2$ en sphérique. Suivant le modèle de Taylor Zel'Dovich (TZ) [Taylor, 1950], l'onde de détente isentropique permet d'exprimer la pression en fonction de la masse volumique³ en faisant apparaître la célérité du son c au lieu de p dans la conservation de la quantité de mouvement Eq. (4.1.19b), soit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (4.1.20)$$

En supposant que l'onde de détonation atteint rapidement un état stationnaire au sein de l'explosif (ce qui revient à négliger la phase instationnaire de formation de l'onde explosive), on remarque que

3. $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial r}$

si r et t sont amplifiées d'un facteur β , les grandeurs ρ et u évaluées à la distance βr et au temps βt satisfont les mêmes équations qu'en r et t . Cette propriété d'onde auto-semblable permet de dire que les conditions derrière le front d'onde ne dépendent que de la variable $x = r/t$ où le temps t est égal à R/\hat{U}_d , R étant la distance du point d'amorce de la détonation au front d'onde et $\hat{U}_d = \hat{u} + \hat{c}$ la vitesse de propagation du front d'onde que l'on suppose constante. Le principe de similitude s'exprime donc également en fonction du rapport r/R et est valable quelque soit le type de symétrie (plane, cylindrique ou sphérique) pourvu que le temps mis par l'onde explosive pour s'établir jusqu'à son état stationnaire soit faible. Les équations relatives aux ondes planes sont développées dans le §4.1.3.1, et les ondes cylindriques ou sphériques sont abordées au §4.1.3.2.

4.1.3.1 Ondes planes

On s'intéresse pour commencer au cas théorique d'ondes de détonation planes, ce qui facilite grandement l'analyse en l'absence du terme de divergence géométrique $\eta u/r$ dans l'équation de conservation de la masse Eq. (4.1.19a). Ce cas est purement théorique car, au réel, même en utilisant un tube à choc qui permet de se rapprocher d'une géométrie exacte, les effets de bord liés aux parois du tube existent et ont tendance à rendre la géométrie du front d'onde explosive convexe. Cela étant, il peut être parfaitement modélisé par une approche numérique, ce pourquoi on le développe ici. Le système d'équations d'Euler s'écrit alors en fonction des variables primitives ρ et u sous la forme non conservative suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (4.1.21a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} \quad (4.1.21b)$$

Suivant une démarche classique en mécanique des fluides [Toro, 2009] [Guinot, 2006], on peut réécrire le système Eq. (4.1.21) sous forme conservative à l'aide de ses valeurs propres $\lambda_1 = u - c$ et $\lambda_2 = u + c$ qui correspondent aux caractéristiques gauche et droite. Les équations caractéristiques s'écrivent alors sous la forme des équations aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (4.1.22)$$

Les quantités Ψ_i se propagent de façon constante le long de chacune des caractéristiques λ_i . On peut donc réécrire le système Eq. (4.1.22) sous la forme suivante :

$$\Psi_i = \text{Cste} \quad \text{pour} \quad \frac{dr}{dt} = \lambda_i \quad i = 1, 2 \quad (4.1.23)$$

On en déduit les expressions en fonction des variables primitives ρ et u qui sont valables le long des caractéristiques de célérité $(u - c)$ et $(u + c)$:

$$\Psi_1 = u - \sigma = u - \int_{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \text{Cste} \quad \text{pour} \quad \frac{dr}{dt} = u - c \quad (4.1.24a)$$

$$\Psi_2 = u + \sigma = u + \int_{\rho} \frac{c(\rho)}{\rho} d\rho = \text{Cste} \quad \text{pour} \quad \frac{dr}{dt} = u + c \quad (4.1.24b)$$

où $\sigma = \int c/\rho d\rho$ est la fonction de Riemann [Lamb, 1923]. L'onde de détente qui se développe derrière le front d'onde de détonation correspond à la caractéristique gauche le long de laquelle la grandeur Ψ_1 est constante. L'analyse débute au pic de Chapman-Jouguet où les variables thermodynamique $\hat{\rho}$ et cinétique \hat{u} sont connues. On peut donc évaluer la constante Ψ_1 en ce point $\hat{\Psi}_1 = \hat{u}$, et décrire ainsi l'évolution de la vitesse particulière u le long du processus de détente isentropique derrière le front d'onde [Cole, 1965] :

$$\hat{u} - u = \int_{\rho}^{\hat{\rho}} \frac{c(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} d\tilde{\rho} \quad (4.1.25)$$

où les bornes de l'intégrale ont été permutées ce qui explique la disparition du signe négatif. L'intégration est effectuée à entropie constante, du point considéré au pic de Chapman-Jouguet, à l'aide d'une équation d'état traduisant l'évolution de la vitesse du son c dans les produits de détonation en fonction de la masse volumique ρ .

Gaz parfait : Avant de présenter les résultats obtenus à partir d'une équation d'état représentative des produits gazeux issus d'un explosif conventionnel, il est intéressant, d'un point de vue qualitatif, d'établir les relations théoriques obtenues à partir d'une loi de type gaz parfait $p = \hat{p}(\rho/\hat{\rho})^\gamma$ dont le rapport des capacités calorifiques γ est constant (ce qui n'est généralement pas le cas pour les équations d'état des produits de détonation). La vitesse du son $c = (dp/d\rho)_s^{1/2}$ dans le gaz s'écrit aussi :

$$c = \hat{c} \left(\frac{\rho}{\hat{\rho}} \right)^{(\gamma-1)/2} \quad (4.1.26)$$

où \hat{c} et $\hat{\rho}$ représentent respectivement la vitesse du son et la masse volumique des produits de détonation comprimés dans le plan de Chapman-Jouguet derrière la zone de réaction chimique. En remplaçant cette expression dans l'équation Eq. (4.1.25), on obtient après intégration :

$$\hat{u} - u = \frac{2}{\gamma-1} (\hat{c} - c) \quad (4.1.27)$$

En négligeant la période durant laquelle l'onde de détonation transitoire évolue du point d'amorce jusqu'au processus stable de détonation, on a $r = (c + u)t$. De la même façon, pour le front d'onde de détonation dont la vitesse de propagation supposée constante est $\hat{U}_d = \hat{c} + \hat{u}$ et dont la position dans l'espace est repérée par la variable R , on a $R = (\hat{c} + \hat{u})t$, ce qui fournit la relation supplémentaire :

$$\frac{R - r}{t} = (\hat{c} - c) + (\hat{u} - u) \quad (4.1.28)$$

qui, combinée à la relation Eq. (4.1.27), donne les évolutions de la vitesse particulière et de la vitesse du son en fonction de la distance réduite $r^* = r/R$:

$$\hat{u} - u = \frac{2}{\gamma + 1} (1 - r^*) \hat{U}_d \quad \text{et} \quad \hat{c} - c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (1 - r^*) \hat{U}_d \quad (4.1.29)$$

En se servant des relations Eq. (4.1.9a) et Eq. (4.1.9c) issues des conditions de détonation de Chapman-Jouguet, les expressions Eq. (4.1.29) s'écrivent encore :

$$\frac{u}{\hat{u}} = 2r^* - 1 \quad \text{et} \quad \frac{c}{\hat{c}} = \frac{1 + (\gamma - 1)r^*}{\gamma} \quad (4.1.30)$$

La solution Eq. (4.1.30) obtenue en terme de vitesse particulière u est valable jusqu'au point d'annulation de la vitesse, point au-delà duquel la vitesse d'écoulement dans le gaz est nul pour satisfaire la condition au centre de l'explosif, c.-à-d. au point d'amorce de la détonation. On note que la condition $u = 0$ est satisfaite à partir de la distance réduite $r^* = 1/2$. La vitesse particulière varie donc linéairement le long de l'explosif entre, une valeur pic dans le plan de Chapman-Jouguet, et zéro à la moitié de la distance parcourue par le front d'onde de détonation. La distribution de pression le long de l'explosif suit la loi de détente isentropique Eq. (4.1.26) et s'écrit :

$$\frac{p}{\hat{p}} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (1 - r^*) \frac{\hat{U}_d}{\hat{c}} \right]^{2\gamma/(\gamma-1)} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} (1 - r^*) \right]^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad (4.1.31)$$

où on a utilisé la relation Eq. (4.1.9c) pour établir la seconde relation. On note qu'à la fin de la détente, c.-à-d. à la distance réduite $r^* = 1/2$, la pression dans le gaz est environ égale à 1/3 de la pression au pic de Chapman-Jouguet. La masse volumique derrière le front d'onde est déduite des relations Eq. (4.1.26) et (4.1.30) :

$$\frac{\rho}{\hat{\rho}} = \left[\frac{1 + (\gamma - 1)r^*}{\gamma} \right]^{2/(\gamma-1)} \quad (4.1.32)$$

Les résultats obtenus en termes de vitesse particulière u/\hat{u} et vitesse du son c/\hat{c} Eq. (4.1.30), pression p/\hat{p} Eq. (4.1.31), et masse volumique $\rho/\hat{\rho}$ Eq. (4.1.32) derrière le front d'onde sont tracés sur la figure 4.3 en fonction de la distance réduite $r^* = (c + u)/\hat{U}_d$ pour un gaz parfait de coefficient polytropique $\gamma = 1.4$. Cette idéalisation de gaz parfait ne correspond cependant pas au comportement réel des produits de détonation. On étend donc notre étude théorique aux gaz réels en utilisant une équation d'état représentative des gaz brûlés.

Produits de détonation (gaz réel) : Les équations d'état représentatives du comportement des gaz brûlés derrière le front d'onde de détonation sont généralement plus complexes qu'une simple relation de gaz parfait. Elles nécessitent donc l'intégration numérique de l'équation Eq. (4.1.25) pour déterminer l'évolution de la vitesse particulière et des grandeurs thermodynamiques p et ρ dans la fraction d'explosif qui a détoné. On trouve en référence [Dobratz et Crawford, 1985] un ensemble de données relatives au comportement des produits de détonation suivant l'équation d'état empirique JWL. Dans sa forme isentropique Eq. (4.1.14), celle-ci s'écrit :

$$p_s = A e^{-R_1 \rho_0/\rho} + B e^{-R_2 \rho_0/\rho} + C \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{-(\omega+1)} \quad (4.1.33)$$

où les coefficients de corrélation A, B et C sont homogènes à des pressions, R_1 , R_2 et ω sont adimensionnels et leur valeur dépend du type d'explosif utilisé. Comme précédemment ρ_0 est la masse volumique de référence, dans l'état non détoné. L'expression de la vitesse du son le long du processus isentropique s'en déduit par :

$$c = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_s^{1/2} = \frac{\rho_0}{\rho} \left[\frac{AR_1}{\rho_0} e^{-R_1 \rho_0/\rho} + \frac{BR_2}{\rho_0} e^{-R_2 \rho_0/\rho} + \frac{C(\omega+1)}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{-(\omega+2)} \right]^{1/2} \quad (4.1.34)$$

Le calcul de la constante Ψ_1 est donc effectué en remplaçant l'expression de la vitesse du son Eq. (4.1.34) dans Eq. (4.1.25) :

$$\hat{u} - u = \int_{\rho}^{\hat{\rho}} \frac{\rho_0}{\hat{\rho}^2} \left[\frac{AR_1}{\rho_0} e^{-R_1 \rho_0/\hat{\rho}} + \frac{BR_2}{\rho_0} e^{-R_2 \rho_0/\hat{\rho}} + \frac{C(\omega+1)}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\hat{\rho}} \right)^{-(\omega+2)} \right]^{1/2} d\hat{\rho} \quad (4.1.35)$$

Les calculs sont menés par intégration numérique de l'équation Eq. (4.1.35) de façon à déterminer l'évolution de la vitesse particulière u en fonction de la masse volumique ρ , de laquelle sont déduites la pression p et la vitesse du son c en utilisant respectivement l'isentropique Eq. (4.1.33) et l'équation Eq. (4.1.34). Les résultats obtenus en vitesse particulière, pression, vitesse du son et masse volumique sont présentés en fonction de la distance réduite $r^* = (c + u)/\hat{U}_d$ sur la figure 4.3 à la fin de cette section en

page 104. Sur cette figure, chaque grandeur est adimensionnée par rapport à la valeur calculée au pic de Chapman-Jouguet. Pour comparaison, les résultats obtenus à partir d'une équation d'état de gaz parfait avec un coefficient polytropique constant $\gamma = 1.4$ sont également présentés. Ces résultats constituent une base de comparaison avec les résultats numériques présentés plus loin dans ce chapitre.

4.1.3.2 Ondes cylindrique ou sphérique divergentes

L'étude théorique précédente appliquée au cas des ondes planes présente peu d'intérêt au regard des propriétés géométriques d'explosions au réel. Elle permet néanmoins de valider les développements effectués dans le code de calcul numérique. Pour se rapprocher des conditions de détonations réelles, on étend ici l'analyse aux cas de symétries cylindriques et sphériques plus représentatives des configurations expérimentales couramment étudiées. Elles feront également l'objet de comparaison avec les modèles numériques développés en 2D déformations planes et axisymétrique. La propriété d'onde auto-semblable évoquée précédemment entraîne pour la variable u :

$$\left. \begin{array}{l} dr = xdt + tdx \\ du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial t}dt \end{array} \right\} \Rightarrow du = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial r} \right) dt + t \frac{\partial u}{\partial r} dx$$

Comme u ne dépend que de la variable x , le premier terme du membre de droite doit être nul. Des considérations identiques appliquées à la masse volumique ρ , permettent d'obtenir les deux relations supplémentaires :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + x \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (4.1.36a)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + x \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 \quad (4.1.36b)$$

L'introduction de Eq. (4.1.36a) dans Eq. (4.1.19a) et de Eq. (4.1.36b) dans Eq. (4.1.20) permet de réécrire les équations de conservation en fonction de la variable unique x :

$$(u - x) \frac{du}{dx} + \frac{c^2}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \quad (4.1.37a)$$

$$(u - x) \frac{d\rho}{dx} + \rho \left(\frac{du}{dx} + \eta \frac{u}{x} \right) = 0 \quad (4.1.37b)$$

L'intégration des relations Eq. (4.1.37a) et Eq. (4.1.37b) suivant Taylor [Taylor, 1950] est effectuée en adimensionnant le problème à l'aide des variables $\xi = u/x$ et $\psi = u/c$, ce qui fournit le système suivant à résoudre :

$$\frac{d\xi}{dz} = \xi \frac{\xi^2(\eta+1) - (1-\xi)^2\psi^2}{(1-\xi)^2\psi^2 - \xi^2} \quad (4.1.38a)$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \psi \left(\frac{\eta\xi}{2} \right) \frac{2\xi - (1-\xi)f\psi^2}{(1-\xi)^2\psi^2 - \xi^2} \quad (4.1.38b)$$

où $z = \ln x$ et la fonction $f = 2d(\ln c)/d(\ln \rho)$ est donnée par l'équation d'état des gaz brûlés. Le point de départ z_0 de l'intégration numérique correspond au pic de Chapman-Jouguet $\hat{z} = \ln(\hat{U}_d)$ et les conditions initiales ξ_0 et ψ_0 qui s'en déduisent s'écrivent :

$$\xi_0 = \hat{\xi} = \frac{\hat{u}}{\hat{U}_d} \quad ; \quad \psi_0 = \hat{\psi} = \frac{\hat{u}}{\hat{c}} \quad (4.1.39)$$

L'intégration de ce système différentiel est singulière autour des conditions initiales $\xi_0 = \hat{\xi}$ et $\psi_0 = \hat{\psi}$ au niveau du pic de Chapman-Jouguet où les dérivées $d\xi/dz$ et $d\psi/dz$ tendent vers l'infini. Taylor [Taylor, 1950] contourne cette difficulté en modifiant les premiers pas de l'intégration par un développement en série de Taylor à l'ordre 2 au voisinage du point de Chapman-Jouguet :

$$z(\xi) = z(\hat{\xi}) + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)_{\hat{\xi}} (\xi - \hat{\xi}) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \right)_{\hat{\xi}} (\xi - \hat{\xi})^2$$

Nous ne suivons pas cette démarche ici, et préférons faciliter l'intégration numérique de Eq. (4.1.38) en introduisant une nouvelle variable $\phi = c/\hat{U}_d = x\xi/\psi\hat{U}_d$. On a alors la relation supplémentaire

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{dx}{x} + \frac{d\xi}{\xi} - \frac{d\psi}{\psi} \quad (4.1.40)$$

et le système constitué des relations Eq. (4.1.38a) Eq. (4.1.38b) et Eq. (4.1.40) devient :

$$\frac{dz}{d\phi} = \left(\frac{2}{\eta\xi} \right) \frac{(1-\xi)^2\psi^2 - \xi^2}{\psi^2(1-\xi)\phi f} \quad (4.1.41a)$$

$$\frac{d\xi}{d\phi} = \left(\frac{2}{\eta} \right) \frac{\xi^2(\eta+1) - (1-\xi)^2\psi^2}{\psi^2(1-\xi)\phi f} \quad (4.1.41b)$$

$$\frac{d\psi}{d\phi} = \frac{2\xi - \psi^2(1-\xi)f}{\psi(1-\xi)\phi f} \quad (4.1.41c)$$

On peut écrire le système Eq. (4.1.41) sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d\mathbf{Y}}{d\phi} = \mathbf{F}(\phi, \mathbf{Y}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{Y} = [z, \xi, \psi]^T \\ \mathbf{F}(\phi, \mathbf{Y}) = [f_1(\phi, z, \xi, \psi), f_2(\phi, z, \xi, \psi), f_3(\phi, z, \xi, \psi)]^T \end{cases} \quad (4.1.42)$$

où les fonctions f_1 , f_2 et f_3 sont données respectivement par les différentielles Eq. (4.1.41a) Eq. (4.1.41b) Eq. (4.1.41c). Le type de symétrie de l'onde de détonation dépend du paramètre η , c.-à-d. $\eta = 1$ pour une onde de détonation cylindrique, ou $\eta = 2$ pour une onde sphérique. On développe l'intégration numérique à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 (RK4) à pas variable $\delta\phi^n$, dont l'erreur de précision à chaque pas est d'ordre $\mathcal{O}(\delta\phi^5)$. Suivant un développement en série de Taylor à l'ordre 4, on écrit le schéma au pas d'intégration $n+1$ en introduisant les vecteurs tangents \mathbf{K}_i^n ($i = 1, 2, 3, 4$) :

$$\mathbf{Y}^{n+1} = \mathbf{Y}^n + \frac{\delta\phi^n}{6} (\mathbf{K}_1^n + 2\mathbf{K}_2^n + 2\mathbf{K}_3^n + \mathbf{K}_4^n) \quad (4.1.43)$$

A chaque pas d'intégration la fonction $f = 2d(\ln c)/d(\ln \rho)$ doit être évaluée. Elle dépend de l'équation d'état $c = c(\rho)$ utilisée pour représenter les produits de détonation le long du processus de détente isentropique. La masse volumique dépend de la vitesse locale du son notée c^* et de l'équation d'état $c = c(\rho)$. La recherche du point fixe ρ^* revient donc à chercher la racine de la fonction

$$g(\rho) = c(\rho) - c^* \quad (4.1.44)$$

En considérant l'approximation de la fonction g au premier ordre autour d'un point ρ^0 suffisamment proche de la racine à trouver, la recherche du point fixe revient à résoudre l'équation affine :

$$g(\rho) \approx g(\rho^0) + g'(\rho^0)(\rho - \rho^0) = 0 \quad (4.1.45)$$

Pour cela un processus itératif de Newton-Raphson partant de ρ^0 est construit à l'aide de la suite récurrente :

$$\rho^{k+1} = \rho^k - \frac{g(\rho^k)}{g'(\rho^k)} \quad (4.1.46)$$

Pour prendre en compte le comportement réel des produits de détonation, la fonction $c(\rho)$ est donnée par la relation Eq. (4.1.34) pour l'équation d'état empirique JWL. Dans ce cas, on peut écrire explicitement l'expression de la dérivée $g'(\rho)$:

$$g'(\rho) = \frac{dc}{d\rho} = -\frac{c}{\rho} + \frac{\rho_0^2}{2\rho^4 c} \left[AR_1^2 e^{-R_1 \rho_0/\rho} + BR_2^2 e^{-R_2 \rho_0/\rho} + C(\omega+1)(\omega+2) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{-(\omega+3)} \right] \quad (4.1.47)$$

La connaissance du point fixe ρ^* correspondant à la vitesse locale du son c^* à chaque pas d'intégration du schéma RK4 permet finalement de déterminer la fonction f :

$$f = 2 \frac{\rho^*}{c^*} \frac{dc}{d\rho}(\rho^*) \quad (4.1.48)$$

Le schéma numérique ainsi décrit permet de déterminer complètement l'onde de détente isentropique derrière le front d'onde de détonation à partir des grandeurs évaluées au pic de Chapman-Jouguet et la forme de l'équation d'état des gaz brûlés. Les calculs sont réalisés pour un explosif type TNT pour les deux cas de symétrie cylindrique ($\eta = 1$) et sphérique ($\eta = 2$). Les résultats obtenus en vitesse particulaire, pression, vitesse du son et masse volumique sont présentés en fonction de la distance réduite $r^* = (c + u)/\hat{U}_d$ sur la figure 4.4 en page 105. Les résultats issus des calculs précédents au §4.1.3.1 pour une onde de détonation plane sont également reportés sur la même figure pour comparaison. Les résultats obtenus pour différentes géométries de charge explosive peuvent ainsi être directement comparés à ceux des modèles numériques qui sont présentés dans la suite de ce chapitre en section 4.2. En attendant, on peut analyser ces premiers résultats en discutant les ordres de grandeur obtenus par rapport à la durée caractéristique de l'onde explosive.

Comme mentionné dans les références [Brinkley et Kirkwood, 1950] et [Cole, 1965] qui se basent également sur les travaux de [Taylor, 1950], l'analyse de ces tracés montre que l'intensité de l'onde de détonation devient importante pour des distances r/R supérieures à 0.5 quelque soit la symétrie étudiée, l'écoulement des produits de détonation étant nulle pour les distances inférieures. A l'instant où le front d'onde atteint la frontière de l'explosif, c.-à-d. quand tout l'explosif a détoné, la distance parcourue R est égale à la longueur a_c de l'explosif. On peut évaluer la durée de l'onde correspondant aux coordonnées r/R comprises entre 0.5 et 1 fois la longueur a_c , ce qui donne un ordre de grandeur de la constante de temps θ_d associée à l'onde de détonation. Si l'on prend comme vitesse de détonation $\hat{U}_d \approx 7000$ m/s pour l'explosif TNT, ce temps est de l'ordre de $(3a_c/4) \cdot 10^{-4}$ secondes (a_c étant exprimé en mètres), soit des valeurs θ_d allant de 15 à 30 μ s pour des charges comprises entre 50 et 500 kg. Un ordre de grandeur de la constante de temps θ_c associée à l'onde de choc transmise dans l'eau est donné par le rapport a_c/c_0 , où c_0 est la célérité des ondes acoustiques dans le milieu au repos (environ 1500 m/s). On montre ainsi que le rapport des constantes de temps θ_d/θ_c est de l'ordre de 1/10. On peut donc imaginer que les effets engendrés dans le liquide par la première partie de l'onde de détonation vont rapidement disparaître, dans un intervalle de temps de l'ordre de θ_d , par le fait de l'onde de choc transmise dans le liquide et des ondes de détente dans le gaz. Cette remarque constitue une des hypothèses prises par Kirkwood et Bethe dans l'établissement d'une théorie de propagation des ondes en détonique sous-marine. Elle est décrite au chapitre 5 en page 126.

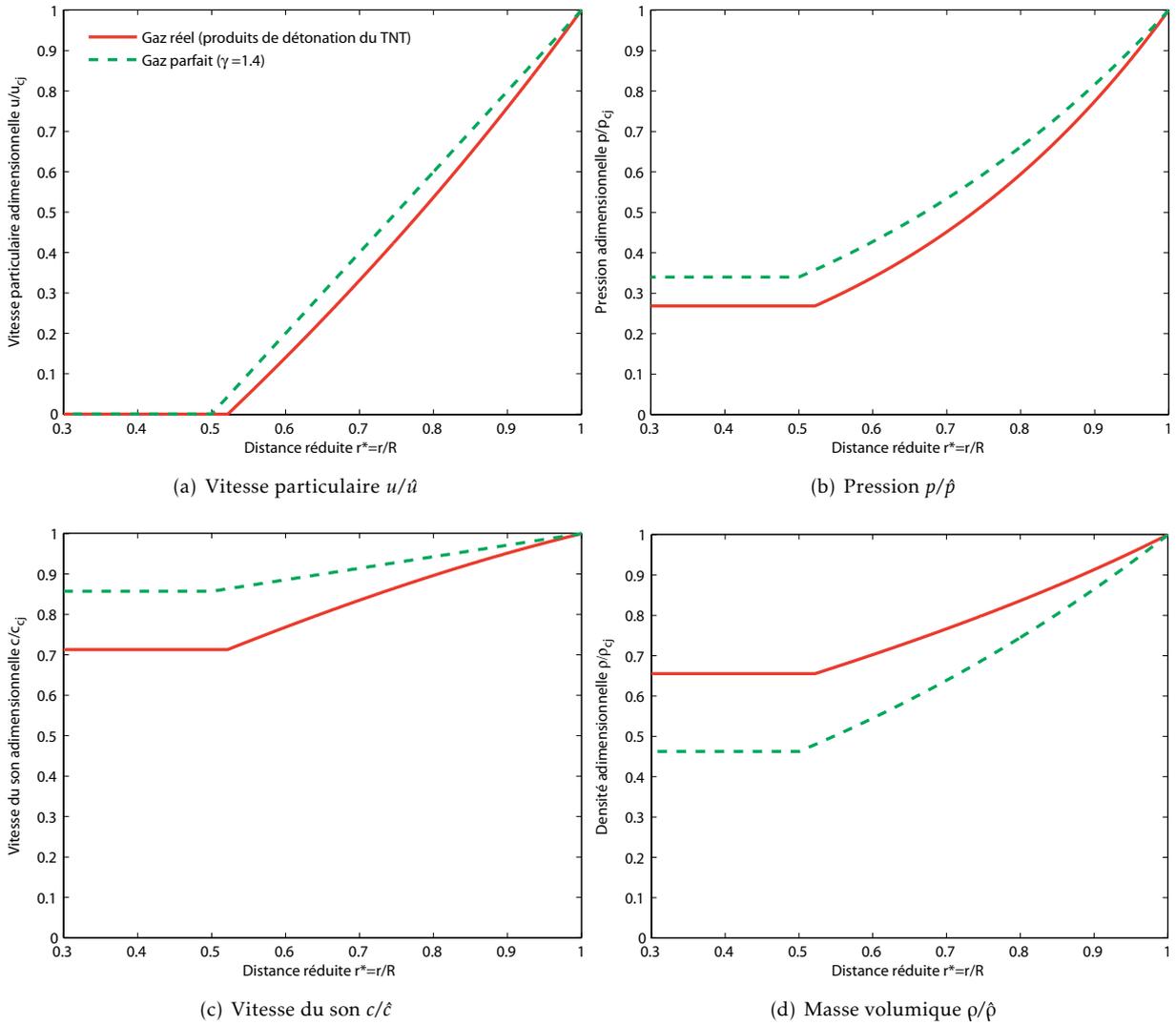


FIGURE 4.3 – Onde de détonation théorique plane calculée à partir de l'équation d'état JWL relative au TNT et une loi de gaz parfait avec $\gamma = 1.4$. Tracés sans dimension de la vitesse particulaire en figure 4.3(a), de la pression en figure 4.3(b), de la vitesse du son en figure 4.3(c) et de la masse volumique en figure 4.3(d), en fonction de la distance réduite r/R . La distance réduite égale à 1 correspond à la position du front d'onde de détonation. Les grandeurs sont adimensionnées par rapport à leur valeur dans le plan de Chapman-Jouguet.

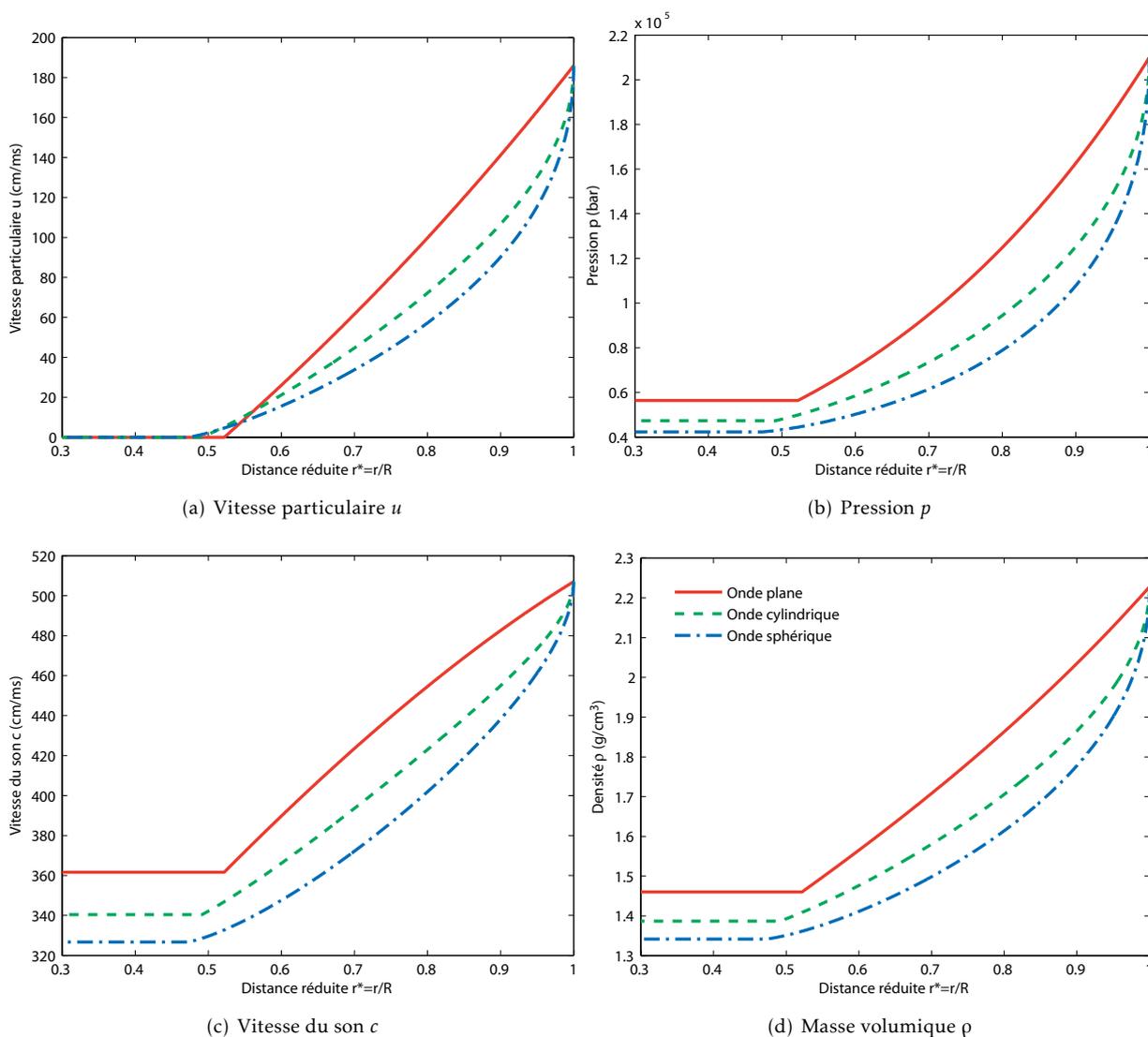


FIGURE 4.4 – Ondes de détonations théoriques plane, cylindrique et sphérique calculées à partir de l'équation d'état JWL relative au TNT de masse volumique initiale $1.63 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Les paramètres de la loi JWL sont tirés de [Dobratz et Crawford, 1985] et récapitulés dans le Tab. 4.1 en page 106. Tracés de la vitesse particulaire en figure 4.4(a), de la pression en figure 4.4(b), de la vitesse du son en figure 4.4(c) et de la masse volumique en figure 4.4(d), en fonction de la distance réduite r/R . La distance réduite égale à 1 correspond à la position du front d'onde de détonation.

4.2 Simulations numériques relatives aux ondes de détonation

On a présenté dans la section précédente un certain nombre d'éléments théoriques qui nous permettent de prédire la forme de l'onde explosive en fonction de la géométrie du problème, c.-à-d. symétries plane, cylindrique ou sphérique. Les résultats obtenus nous servent de base de comparaison avec les modèles numériques qui font l'objet de cette section. Pour cela, on décrit dans un premier temps l'algorithme de calcul de l'onde de détonation. Dans un second temps, les applications numériques relatives aux différentes géométries d'onde sont effectuées et comparées aux résultats théoriques qui ont été présentés en page 105. La formulation Eulérienne est utilisée pour résoudre le problème. Notamment, les nouveaux algorithmes de calcul Eulériens développés en 2D déformation plane et axisymétrique sont testés pour calculer respectivement les ondes de détonation cylindrique et sphérique. Dans chaque cas, l'étude systématique de la convergence spatiale de la solution est menée afin de statuer quant aux choix méthodologiques nécessaires à une bonne représentation des ondes explosives.

Dans nos simulations, l'équation d'état JWL Eq. (4.1.13) décrit le comportement thermodynamique des gaz produits par la détonation. Pour toutes nos applications, on considère simplement un matériau explosif type TNT dont les paramètres tirés de [Dobratz et Crawford, 1985] sont présentés dans le Tab. 4.1. L'état de détonation est donc entièrement déterminé par la connaissance des paramètres du Tab. 4.1 et de l'équation d'état Eq. (4.1.13).

Paramètres C-J	Masse volumique	ρ_0	(g.cm ⁻³)	1.630
	Énergie interne	E_0	(Mbar.cm ³ /cm ³)	0.070
	Vitesse de détonation	D_{CJ}	(cm/ms)	693.0
	Pression de détonation	p_{CJ}	(Mbar)	0.210
Coefficients de l'équation d'état JWL		A	(Mbar)	3.712
		B	(Mbar)	0.03231
		C	(Mbar)	0.01045
		R_1	-	4.15
		R_2	-	0.95
		ω	-	0.30

TABLE 4.1 – Explosif TNT ; Paramètres de Chapman-Jouguet et coefficients de l'équation d'état JWL tirés de [Dobratz et Crawford, 1985]

4.2.1 Algorithme de la fraction brûlée

Comme décrit en détail au début de ce chapitre, les pressions et températures élevées produites par l'onde de détonation, déclenchent des réactions de décomposition des molécules explosives initiales en un ensemble d'autres molécules, en général à l'état gazeux, qu'on appelle les produits de détonation. Ces réactions de décomposition sont exothermiques. Elles sont initiées au passage de la discontinuité

de choc et se développent sur une certaine distance en aval jusqu'à la consommation totale de l'explosif solide, formant ce que l'on appelle la zone de réaction. La libération soudaine d'énergie au passage de l'onde assure sa propagation dans le milieu. Cette propagation s'effectue à la vitesse de détonation qui, en vertu de sa stabilité hydrodynamique, est une caractéristique propre à l'explosif utilisé et constitue de ce fait une donnée d'entrée dans l'algorithme.

L'hypothèse essentielle de nos modélisation numériques est semblable à celle utilisée dans les théories précédentes. Elle néglige l'étendue de la zone de réaction (donc le pic de von Neumann suivant le modèle Zel'Dovitch-Neumann-Döring) en déterminant, à chaque incrément temporel et dans chaque cellule de l'explosif, la fraction volumique η des gaz brûlés en aval de la détonation. Cet algorithme se base sur les développements réalisés par [Wilkins, 1969] et discutés par [Giroux, 1973]. La pression au centre de chaque élément est donnée par :

$$p = \eta p^{\text{JWL}}(v_r, E) \quad (4.2.1)$$

où la fraction volumique η est calculée à l'aide des relations :

$$\eta_1 = \frac{1 - v_r}{1 - V_{\text{CJ}}} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \begin{cases} \frac{2(t - t_l) D_{\text{CJ}} A_{e_{\text{max}}}}{3 V_e} & \text{si } t > t_l \\ 0 & \text{si } t \leq t_l \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Les trois algorithmes de calcul du processus de détonation implémentés dépendent de la façon dont est calculée la fraction brûlée ; $\eta = \max(\eta_1, \eta_2)$, $\eta = \eta_1$ ou $\eta = \eta_2$.

Dans le calcul de la fraction brûlée η_1 , le volume relatif V_{CJ} au niveau du pic de Chapman-Jouguet est déterminé à l'aide de l'équation Eq. (4.1.13) et de la grandeur p_{CJ} . Suivant les données du Tab. 4.1, on peut estimer ce volume relatif à environ 0.75, soit une masse volumique maximale de l'ordre de 2.2 g/cm³. Pour la fraction η_2 , $A_{e_{\text{max}}}$ et V_e correspondent respectivement à la plus grande face et au volume élémentaires de sorte que le rapport $V_e/A_{e_{\text{max}}}$ est une mesure de la longueur caractéristique de l'élément, t est le temps courant et t_l est le temps d'allumage. Ce dernier est déterminé pour chaque élément à partir des données de détonation initiale en calculant la distance L_d entre le centre de l'élément considéré et le détonateur le plus proche (plusieurs points de détonation pouvant être modélisés au sein de l'explosif) et en postulant une vitesse de détonation égale à celle de Chapman-Jouguet D_{CJ} :

$$t_l = t_d + \frac{L_d}{D_{\text{CJ}}} \quad (4.2.3)$$

où t_d est le temps d'activation de chaque détonateur. Dès que la fraction volumique $\eta \geq 1$, elle demeure constante et égale à 1, ce qui correspond à un élément qui a entièrement brûlé, c.-à-d. entièrement transformé en gaz, qui suit alors le comportement donné par l'équation d'état JWL Eq. (4.1.13).

Les deux fractions volumiques η_1 et η_2 correspondent à deux processus de détonation différents :

1. Le processus basé sur le calcul de η_1 permet d'activer la détonation à partir d'un niveau de compression $v_r < 1$ dans l'élément. Cet algorithme permet notamment de modéliser les amorçages par chocs mécaniques. Dans ce cas, l'élément a complètement réagi lorsque $\eta_1 = 1$ pour $v_r = V_{CJ}$, et cet état correspond au début de la détente des gaz brûlés à partir du niveau de Chapman-Jouguet.
2. Le processus basé sur le calcul de η_2 simule une détonation programmée qui est basée sur le temps d'allumage t_l pour chaque élément. Cette approche est valable dans la mesure où la propagation des ondes de détonation obéit à un principe équivalent à celui de Huygens pour les ondes lumineuses. Le niveau de pression de Chapman-Jouguet est atteint lorsque $\eta_2 = 1$ ce qui correspond à une distance de propagation de l'onde explosive égale à 1.5 fois la longueur caractéristique de l'élément.

Cette distinction est d'importance si l'on impose un volume relatif initial v_{r0} différent de 1 dans l'explosif solide ⁴. Suivant l'expression η_1 dans Eq. (4.2.2), cela correspond à initier la détonation avant l'arrivée du front d'onde (déterminée par η_2) à un niveau de pression égal à $\eta_1 p^{JWL}(v_{r0}, E_0)$.

4.2.2 Onde de détonation plane

La résolution numérique du problème d'onde explosive est tout d'abord effectuée en considérant une onde de détonation idéale caractérisée par les propriétés suivantes :

- * onde à symétrie plane,
- * milieu explosif infini,
- * écoulement monodimensionnel.

Comme schématisé sur la figure 4.5, on modélise une colonne d'explosif dont la longueur est fixée forfaitairement à $L = 50$ cm et ne correspond à aucune réalité physique. Le domaine est discrétisé avec des éléments volumiques 3D à 8 nœuds et intégration réduite, de dimensions transversales $dy = dz = 1$ cm et de dimension longitudinale dx uniforme. La finesse de maillage est caractérisée par le nombre N d'éléments le long de l'explosif.

La détonation est amorcée à l'origine $x = y = z = 0$ et se propage suivant les x positifs. L'écoulement transversal est bloqué le long de la colonne et une condition de symétrie est imposée à l'origine, c.-à-d. écoulement nul au point d'amorçage. Le temps de simulation physique est inférieur au temps mis par l'onde de détonation pour se propager jusqu'à l'extrémité de la colonne de sorte que les conditions

4. Sans en détailler l'influence, on peut simplement évoquer le fait que le volume relatif initial imposé dans l'équation JWL engendre un niveau de pré-compression dans l'explosif avant détonation. Un taux de compression élevé (de l'ordre de celui calculé dans le plan de Chapman-Jouguet) ne permet pas de représenter correctement l'onde de détonation et, de surcroît, modifie l'énergie interne initiale de la bulle des gaz résiduels, ce qui en influence directement le comportement ultérieur.

aux limites n'influent pas sur la solution. Pour un explosif solide type TNT à l'état initial (0), la masse volumique et l'énergie interne sont données dans le Tab. 4.1 et l'écoulement dans l'explosif solide est nul $u_0 = 0$.

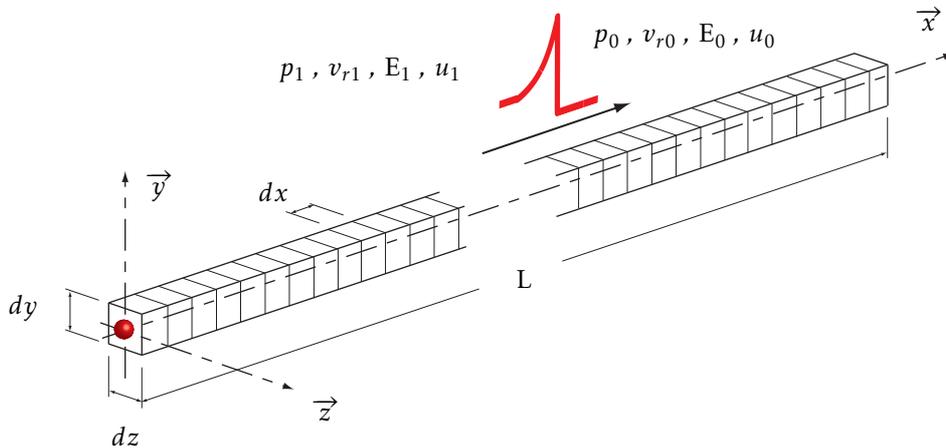


FIGURE 4.5 – Onde de détonation idéale : Principe de modélisation

La figure 4.6 présente à titre d'exemple les résultats Eulériens obtenus en un point fixe du domaine de l'explosif. On trace les évolutions temporelles de pression, volume relatif et vitesse pour une densité de maillage moyenne, $N = 500$ éléments le long de l'explosif. Les discontinuités sur les grandeurs thermodynamiques p , v_r , et cinétique u prévues par la formulation théorique développée dans la section 4.1 sont bien mises en évidence ici. L'état initial $p_0 = 0$, $v_{r0} = 1$ et $u_0 = 0$ situé en amont de l'onde de détonation (portion de courbe située à gauche de la discontinuité sur la figure 4.6) correspond à l'explosif solide. La détente des gaz résiduels débute derrière la discontinuité au point de détonation idéale de Chapman-Jouguet (portion de courbe à droite du saut). On montre ainsi sur la figure de gauche le saut de pression à une valeur maximum proche de $p_{CJ} = 0.21$ Mbar dans le plan de Chapman-Jouguet. Il est suivi de la détente des gaz jusqu'à un niveau de l'ordre de 0.06 Mbar. La figure centrale met en évidence le saut de masse volumique correspondant à une volume relatif de l'ordre de 0.75 ($\rho \approx 2.2$ g/cm³). Cette discontinuité est suivie du processus de détente jusqu'à un palier de l'ordre de 1.1 ($\rho \approx 1.5$ g/cm³), c.-à-d. masse volumique des gaz en fin de détente inférieure à celle de l'explosif solide. Enfin la figure de droite présente le saut de vitesse de 180 cm/ms associé au passage de l'onde qui décroît ensuite dans la phase détente jusqu'à s'annuler. D'un point de vue qualitatif, les résultats de la figure 4.6 sont comparables aux tracés théoriques relatifs à l'onde plane en pression figure 4.4(b), masse volumique figure 4.4(d) et vitesse figure 4.4(a).

Le modèle numérique ainsi décrit permet d'envisager l'étude de la convergence spatiale de la solution en faisant varier la finesse du maillage éléments finis dans la direction de propagation de l'onde. Pour cela, on se sert de la propriété d'onde auto-semblable mise en évidence dans notre étude théorique, en vertu de laquelle les grandeurs qui caractérisent l'onde explosive ne dépendent que de la variable

x/t (en supposant l'onde établie en régime stationnaire). Dans ce cas, on montre que la forme de l'onde explosive calculée avec un nombre N donné d'éléments, est la même à un facteur β près, quelque soit la distance de propagation considérée amplifiée de ce même facteur β . Autrement dit, pour le problème de détonation 1D plan, un choix judicieux pour le paramètre de convergence n'est pas la taille (enrichissement en ordre- h) mais le nombre d'éléments. Par conséquent, les résultats de convergence qui sont présentés ici sont directement transposables à un explosif de taille quelconque, puisque indépendants de sa dimension.

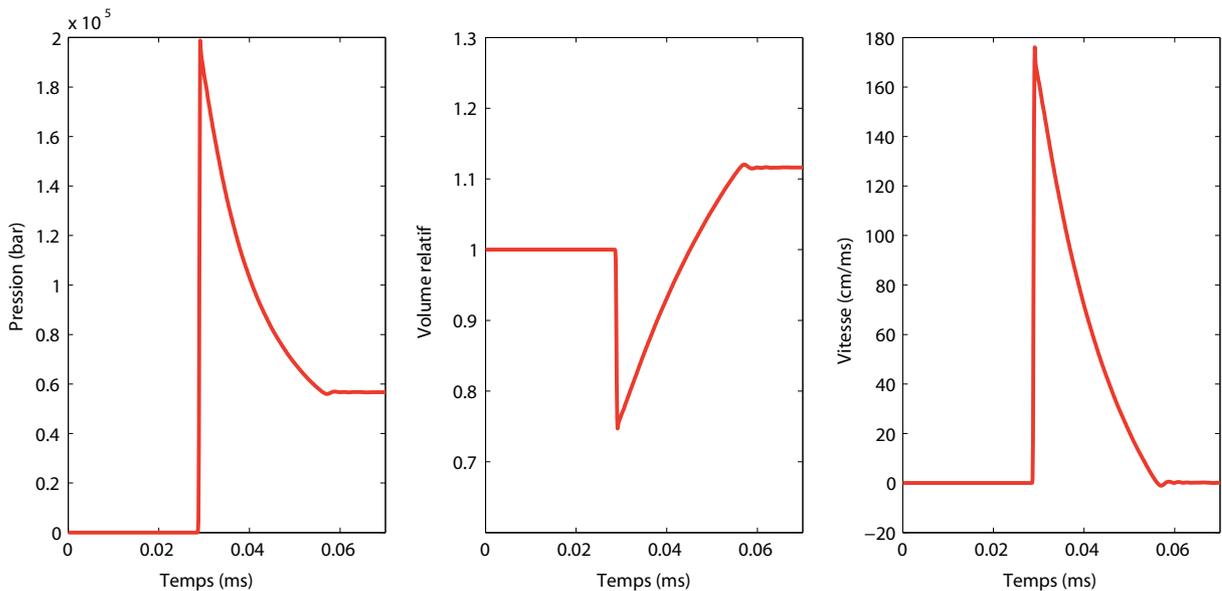


FIGURE 4.6 – Onde de détonation idéale : Mise en évidence des sauts de pression, volume relatif et vitesse

Dans ce cadre, la convergence spatiale est effectuée en faisant varier le nombre d'éléments $N = 100, 500, 1000$ et 5000 sur la longueur de l'explosif. Le critère de convergence choisi est la pression maximale de l'onde de détonation rapportée à la pression de Chapman-Jouguet $p_{CJ} = 0.21$ Mbar renseignée dans la loi matériau.

La figure 4.7 montre la distribution spatiale des pressions le long de l'explosif à différents instants du calcul. Le niveau de pression de Chapman-Jouguet p_{CJ} est indiqué par une ligne horizontale pointillée. Sont reportées en abscisse les coordonnées des points de calcul et en ordonnées les pressions au centre de chaque cellule. L'onde de détonation est initiée au point d'abscisse 0 à gauche du graphique, et se déplace de la gauche vers la droite avec une amplitude qui tend à converger vers une asymptote horizontale que l'on assimile au régime de détonation stationnaire. Ces tests montrent clairement l'influence du maillage sur le niveau de pression effectivement calculé dans l'explosif au cours de la détonation. Le resserrement des points de calcul le long de l'explosif tend à faire converger plus rapidement la solution en terme de pic de pression vers la valeur théorique de Chapman-Jouguet p_{CJ} . Un maillage plus grossier

ne permet pas d'atteindre numériquement ce niveau. La détente des gaz suivant l'équation JWL est quant à elle insensible à la finesse de maillage (pression environ égale à 57 kbar, ce qui nous permet de tirer deux conclusions préliminaires. Suivant le critère p_{CJ} choisi, la représentation correcte de l'onde de détonation nécessite un grand nombre d'éléments le long l'explosif de façon à reproduire un niveau de pression de détonation cohérent avec celui de Chapman-Jouguet. Suivant les résultats présentés sur la figure 4.7, 1000 éléments environ sont nécessaires pour représenter l'onde de détonation théorique idéale. Ensuite le nombre d'éléments N n'a pas, ou peu, d'influence sur le niveau de pression dans les gaz en fin de détente, c.-à-d. lorsque la vitesse de l'écoulement s'annule.

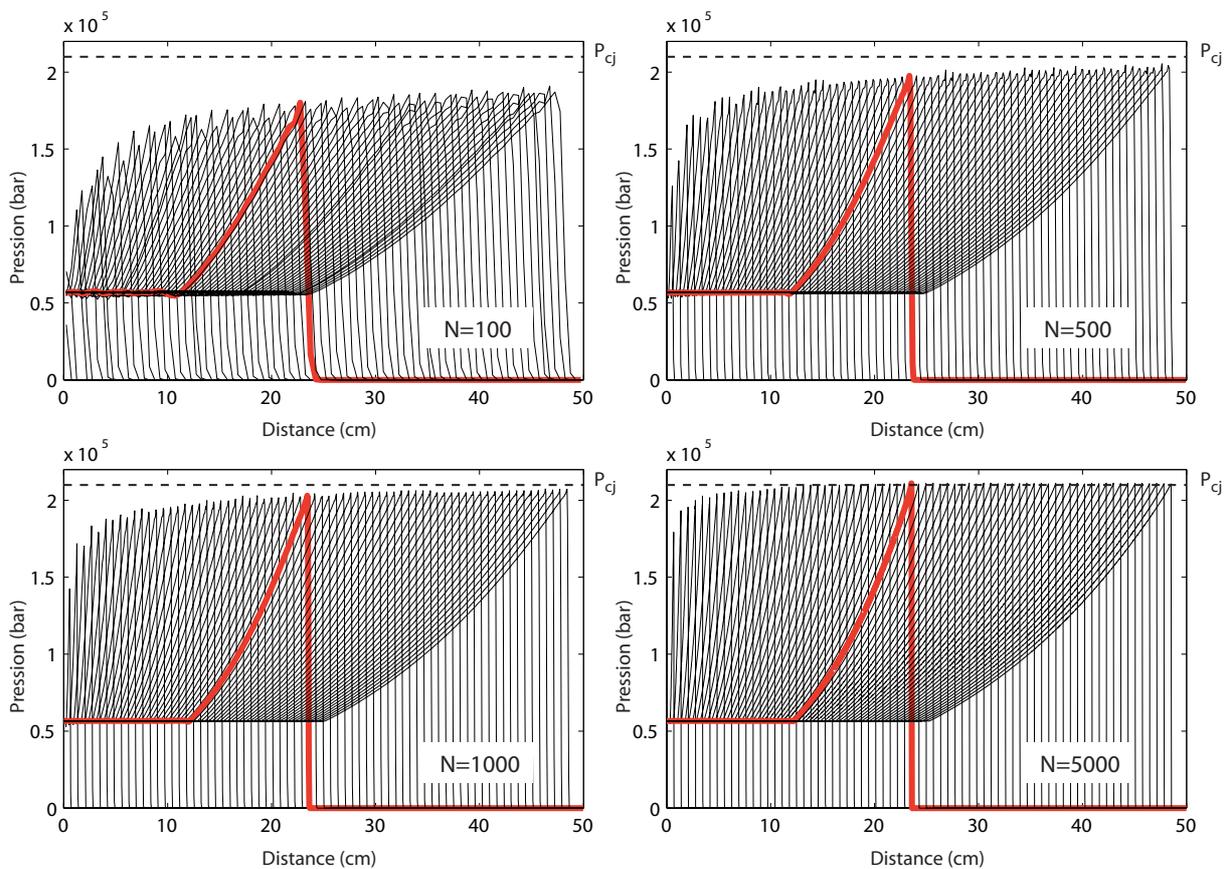


FIGURE 4.7 – Étude de sensibilité au maillage pour l'onde de détonation plane. Résultats obtenus avec 100, 500, 1000 et 5000 éléments le long de l'explosif. L'onde explosive est tracée à différents instants le long du domaine en accentuant celle calculée à mi-distance.

4.2.3 Ondes de détonation divergentes à symétries cylindrique et sphérique

En complément des modélisations numériques relatives à l'onde plane, l'étude de convergence spatiale de la solution est également effectuée pour des ondes de détonation divergentes à symétries cylindrique et sphérique, plus représentatives de configurations au réel. Dans ces cas, la détonation est amorcée en un point au centre de l'explosif. La solution du problème ne dépend que de la distance du centre de l'explosion au point considéré, ce qui permet d'orienter le choix de modélisation vers les formulations 2D déformation plane et axiymétrique développées pour les calculs Eulériens. Les résultats obtenus peuvent être ainsi directement comparés aux solutions théoriques présentées sur la figure 4.4 en page 105.

Comme dans le cas onde plane, les tests de convergence sont effectués en faisant varier le nombre d'éléments $N = 50, 100, 500, 1000$ et 5000 dans un rayon de l'explosif. La détonation est amorcée au centre d'un explosif dont le rayon forfaitaire est égal à 50 cm. Comme présenté figure 4.8, une topologie en « pétale » avec un élément distordu au centre figure 4.8(b) est adoptée pour limiter le domaine explosif à un secteur angulaire, en bloquant l'écoulement orthoradial sur les frontières extérieures.

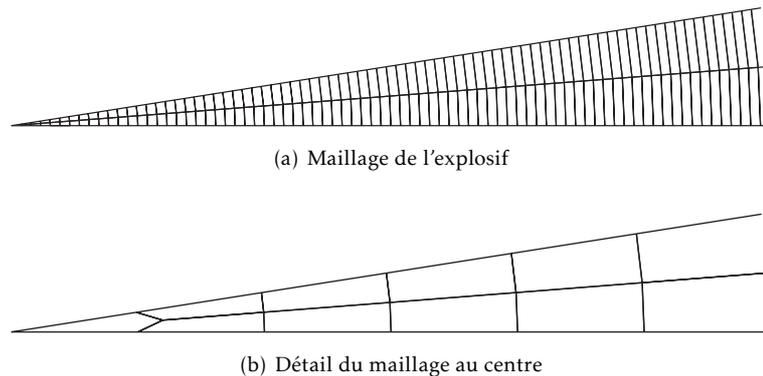


FIGURE 4.8 – Ondes de détonation cylindrique et sphérique : Présentation de la grille de calcul

La figure 4.9 présente le profil de pression calculé dans l'onde cylindrique en un point fixe de l'espace. Les formes obtenues en fonction du nombre N d'éléments dans la direction radiale de l'explosif sont tracées. De la même façon, on présente sur la figure 4.10 l'évolution temporelle de l'onde de détonation sphérique en fonction de N .

Suivant les figures 4.9 et 4.10, on montre que la forme de l'onde explosive n'est que très faiblement modifiée dès lors que le nombre d'éléments dans la direction radiale est supérieur ou égal 500 . Comme pour l'onde plane, la bonne représentation du pic de pression de Chapman-Jouguet est cependant très difficile à obtenir et nécessite un plus grand nombre d'éléments.

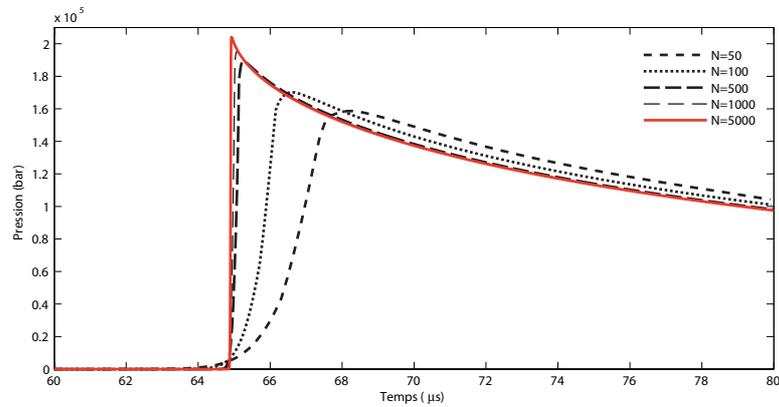


FIGURE 4.9 – Onde de détonation 2D cylindrique : Influence du nombre d'éléments sur la représentation du front d'onde

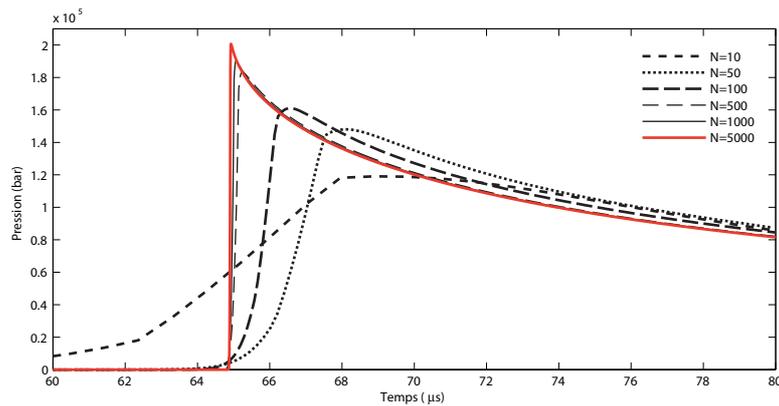


FIGURE 4.10 – Onde de détonation 2D sphérique : Influence du nombre d'éléments sur la représentation du front d'onde

4.2.4 Comparaisons des résultats théoriques et numériques

Les résultats théoriques et numériques obtenus en terme de distribution de la pression le long de l'explosif derrière le front d'onde de détonation sont présentés sur la figure 4.11 pour le cas 1D onde plane, figure 4.12(a) en 1D cylindrique et figure 4.12(b) en 1D sphérique. Pour chaque résultat numérique, on présente seulement 10 points de mesure régulièrement espacés le long de l'explosif entre le front d'onde et le point d'amorçage à l'origine. Pour comparaison, les solutions exactes sont également reportées sur les figures. Dans tous les cas on note une convergence des modèles numériques vers la solution théorique. Cette convergence est obtenue pour des tailles de modèle de l'ordre de 100 éléments dans la direction de propagation.

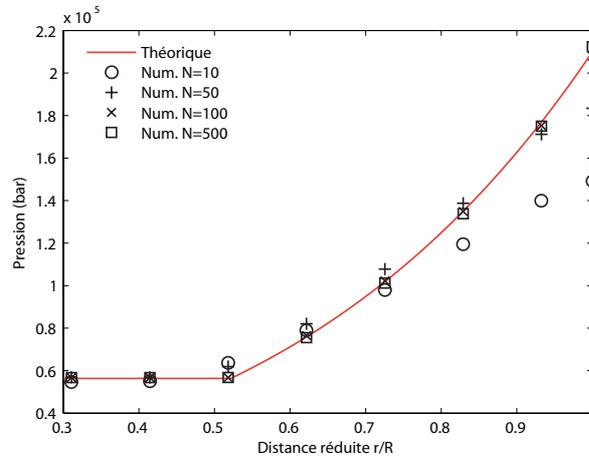
(a) Pression p , onde plane

FIGURE 4.11 – Comparaison des ondes de détonation 1D théorique et numériques avec différents nombres d'éléments le long de la détente

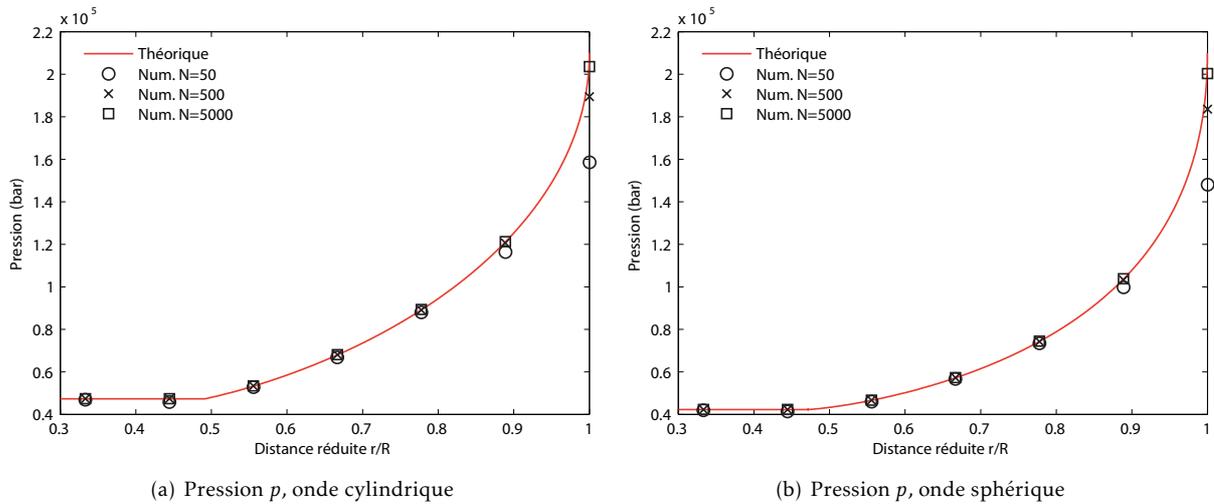
(a) Pression p , onde cylindrique(b) Pression p , onde sphérique

FIGURE 4.12 – Comparaison des ondes de détonation 2D théoriques et numériques avec différents nombres d'éléments le long de la détente. Onde cylindrique en figure 4.12(a), et onde sphérique en figure 4.12(b)

Suivant les figures 4.11 et 4.12, on note que la représentation correcte du pic de pression de Chapman-Jouguet est très difficilement atteignable. Cela étant, la décroissance de pression pour les distances inférieures à 90% de la coordonnée du front d'onde est bien représentée, lorsque le nombre d'éléments dans la direction de propagation est de l'ordre de 100. Le niveau de pression calculé dans la région de

l'explosif où l'écoulement s'annule, c.-à-d. pour les distances réduites inférieures à 0.5, est uniforme et approximativement égal à 20% de la valeur au point CJ. Cette valeur coïncide avec les résultats théoriques.

Concernant la représentation du pic de Chapman-Jouguet, on peut s'interroger sur son importance du point de vue du choc transmis dans l'eau environnante. Cette question a été abordée à la page 103, en évaluant de manière théorique les ordres de grandeur temporels associés à l'onde de détonation et à l'onde de choc transmise. Il en ressort que la constante de temps du choc est approximativement dix fois supérieure à celle de l'explosion. Dans ce cadre, le fait de ne pas calculer finement la partie haute de l'onde explosive n'est peut-être pas discriminant pour une représentation correcte de l'onde de choc sous-marine en champ proche. Ces réflexions sont abordées à la fin du chapitre 5 consacré à l'étude des chocs transmis par l'explosion dans l'environnement immédiat de la charge.

Quoi qu'il en soit, les résultats de convergence qui sont obtenus ici concernent uniquement des ondes simples liées à la détonation. Ils sont difficilement applicables à des calculs aux temps longs incluant les effets de choc et de bulle sur les structures immergées. En effet, la taille des éléments dans l'explosif conditionne le pas de temps de stabilité CFL. Ce paramètre est critique dès lors que l'on souhaite traiter le problème dans son ensemble sur des géométries 2D et a fortiori 3D. Les temps de calcul CPU qui lui sont associés deviennent alors prohibitifs pour des applications industrielles. Un moyen de contourner cette difficulté tout en préservant, dans une certaine mesure, la qualité des résultats, est de projeter la solution issue de la phase de détonation sur une grille Eulérienne différente. Les étapes suivantes du calcul, liées à la propagation du choc et à la dynamique de bulle, peuvent alors être effectuées sur des maillages successifs dont la finesse est adaptée aux ordres de grandeur physiques de chaque phénomène (en temps et en espace). Ce point particulier lié à la technique de projection est décrit à la fin du chapitre 5.

Chapitre 5

Ondes de choc sous-marines

« C'est le plus beau sort d'une théorie physique que d'ouvrir la voie à une théorie plus vaste dans laquelle elle continue à vivre comme cas particulier »

La théorie de la relativité restreinte et générale, Albert Einstein (1916)

DANS le prolongement du chapitre précédent consacré aux ondes de détonation, on analyse ici les chocs sous-marins générés par l'explosion. Le mécanisme de transmission du choc dans l'eau est lié à la discontinuité matérielle et de contact qui apparaît lorsque l'onde de détonation atteint la frontière extérieure de l'explosif. À cet instant précis, le milieu est en effet partagé entre les produits de détonation fortement comprimés (≈ 200 kbar en valeur pic) et l'eau dans les conditions ambiantes. Formellement, cette configuration « initiale » est assimilable à un problème de Riemann caractérisé, dans ses instants ultérieurs, par la propagation d'une onde de choc divergente dans le liquide, à la mise en mouvement de l'interface liquide/gaz matérialisant la frontière de la bulle, et à la génération d'ondes de détente convergentes dans les gaz.

Les développements théoriques présentés dans ce chapitre concernent les premiers stades de la propagation de l'onde de choc sous-marine, pour des distances inférieures à 10 fois le rayon de la charge. Pour formuler le problème analytique, on s'inspire notamment des travaux antérieurs de Kirkwood et Bethe présentés dans [Kirkwood et Bethe, 1942] et [Brinkley et Kirkwood, 1950]. Aux distances considérées, la pression de choc atteint plusieurs dizaines de kilobars dans les premiers instants de la propagation, ce qui nécessite l'emploi d'une équation d'état pour l'eau adaptée à ces niveaux. À défaut de mesures fiables pour les chocs générés en champ proche, on utilise ici l'outil numérique pour critiquer le modèle théorique et l'améliorer. En outre, on montre que la technique de projection décrite au chapitre 3, s'avère efficace pour résoudre successivement les problèmes de détonique et de choc, dans la mesure où ils interviennent sur des échelles spatio-temporelles très différentes. Cette analyse est étendue à l'hydrodynamique de bulle dont l'étude détaillée fait l'objet du prochain chapitre.

5.1 Éléments théoriques

Les principaux éléments théoriques relatifs à la propagation des chocs dans un milieu fluide comme l'eau sont exposés ici. Un formalisme équivalent à celui présenté au début de la section 4.1 pour les ondes explosives permet d'écrire les relations de saut pour les chocs en milieux inertes. Ces équations, dites de Rankine-Hugoniot, furent en effet développées indépendamment dans leur forme originelle par [Rankine, 1870] pour la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, puis [Hugoniot, 1887] [Hugoniot, 1889] en incluant la variation d'énergie interne. La seule différence par rapport à l'onde explosive réside dans l'énergie spécifique du fluide au repos qui se limite à son énergie interne thermique ($e_0 = 0$ si $p_0 = 0$). Comme précédemment, on suppose que la vitesse d'écoulement du fluide dans la zone non-perturbée par le passage du choc est nulle ($u_0 = 0$). En notant U_s la vitesse de propagation du choc, les relations de saut au travers de la discontinuité sont réécrites dans Eq. (5.1.1) en abandonnant l'indice 1 pour les variables derrière le front d'onde de choc. Elles traduisent respectivement la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\rho_0 U_s = \rho(U_s - u) \quad (5.1.1a)$$

$$p - p_0 = \rho_0 U_s u \quad (5.1.1b)$$

$$e - e_0 = \frac{1}{2} (p + p_0)(v_0 - v) \quad (5.1.1c)$$

La relation de saut d'énergie interne Eq. (5.1.1c) combinée à l'équation d'état du fluide $e(p, \rho)$ forme l'adiabatique dynamique du matériau, dite courbe d'Hugoniot notée (H). Elle correspond aux états thermodynamiques de la matière atteignables par choc dans les conditions initiales (p_0, v_0, e_0) . La combinaison des relations Eq. (5.1.1a) et (5.1.1b) permettent d'écrire la vitesse du front d'onde de choc U_s et la vitesse de l'écoulement derrière le front d'onde de choc u , en fonction des sauts de pression et de volume spécifique :

$$U_s = v_0 \left(\frac{p - p_0}{v_0 - v} \right)^{1/2} \quad (5.1.2a)$$

$$u = [(p - p_0)(v_0 - v)]^{1/2} \quad (5.1.2b)$$

La première relation est représentative de la droite de Rayleigh dans le diagramme (p, v) dont la pente constitue le coefficient de proportionnalité entre la vitesse du choc U_s et le volume spécifique initial v_0 . En lui adjoignant une équation d'état appropriée, la relation Eq. (5.1.2a) permet d'exprimer la vitesse du front d'onde en fonction du saut de pression. Il en est de même pour la vitesse particulière Eq. (5.1.2b).

Les relations de Rankine-Hugoniot Eq. (5.1.1) forment donc un système de trois équations avec cinq inconnues (vitesse du front d'onde U_s et variables derrière le choc p, v, u et e). On lui adjoint une équation

tion d'état valable aux forts niveaux de pression rencontrés ainsi que les données de chaleur spécifique relatives au fluide, de sorte que trois des variables p , v , u et U_s peuvent s'exprimer en fonction de la quatrième. Pour cela, la méthode générale est décrite succinctement dans [Cole, 1965] à partir de la différentielle totale de l'énergie interne spécifique écrite en fonction des variables de température T et de pression p :

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_T dp \quad (5.1.3)$$

Dans la mesure où l'énergie interne e est une fonction d'état, le saut d'énergie Δe au travers du choc est indépendante du chemin suivi par le processus pour la faire passer de sa valeur initiale e_0 à sa valeur finale e . Dans [Cole, 1965], cette variation est décrite le long d'un processus isobare (de T_0 à T) à la pression initiale p_0 , suivi d'un processus de compression isotherme (de p_0 à p) à la température finale T comme présenté sur la figure 5.1. Le saut d'énergie s'écrit alors :

$$\Delta e = e - e_0 = \int_{T_0}^T \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_{p_0} dT + \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_T dp \quad (5.1.4)$$

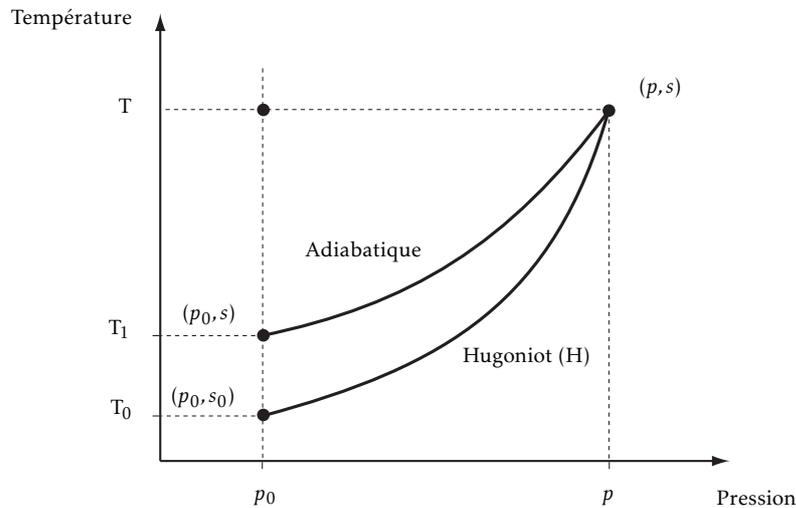


FIGURE 5.1 – Représentation schématique du processus de choc sur le diagramme (p, T) . Les états de détonation possibles à partir du pôle (p_0, T_0) sont décrits par l'adiabatique dynamique (H).

Commodément en thermodynamique, on se ramène volontiers à des grandeurs facilement mesurables. Suivant le Premier Principe, $de = \delta Q - p dv$, on réécrit ainsi la dérivée partielle $(\partial e / \partial T)_{p_0}$ dans l'intégrant du premier terme, en faisant apparaître la capacité calorifique spécifique à la pression constante initiale $c_{p_0} = (\partial Q / \partial T)_{p_0}$ et le coefficient de dilatation isobare $(\partial v / \partial T)_{p_0}$. En vertu des Premier et Second

Principe pour une transformation réversible, $de = Tds - pdv$, l'intégrant du second terme peut s'exprimer, d'une part, en fonction du coefficient de dilatation isobare car, suivant la relation de Cauchy, on a $(\partial s/\partial p)_T = -(\partial v/\partial T)_p$. D'autre part, on fait apparaître le coefficient de compressibilité isotherme $(\partial v/\partial p)_T$. L'expression du saut d'énergie interne Eq. (5.1.4) s'écrit finalement en fonction des coefficients thermoélastiques du fluide :

$$\Delta e = \int_{T_0}^T c_{p_0} dT - p_0[v(T) - v_0] - T \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp - v(T)[p(T) - p_0] + \int_{p_0}^p v(T) dp \quad (5.1.5)$$

où le second terme provient de l'évaluation de l'intégrale $\int p_0 (\partial v/\partial T)_{p_0} dT$ et les deux derniers de l'intégration par parties de $\int p (\partial v/\partial p)_T dp$. En égalant la variation d'énergie Eq. (5.1.5) à la relation de saut Eq. (5.1.1c), on obtient ainsi une relation implicite entre le saut de pression $\Delta p = (p - p_0)$ et la température T au niveau du front d'onde connaissant par ailleurs les propriétés du fluide. Cette approche est notamment décrite par [Richardson *et al.*, 1947] pour calculer les propriétés des ondes de choc sous-marines à des niveaux de pression maximum de l'ordre de 20 kbar.

Dans [Richardson *et al.*, 1947], une approche équivalente aux Eq. (5.1.3) à (5.1.5) est également appliquée afin d'évaluer les propriétés hydrodynamiques de l'eau au niveau du front d'onde pour des chocs forts allant jusqu'à des pressions de l'ordre de 50 kbar. De tels niveaux sont atteints dans les premiers instants de propagation de l'onde de choc primaire dans la région proche de la charge explosive. Ces propriétés nécessitent donc d'être étudiées dans le cadre de nos travaux dans la mesure où elles permettent de formuler les hypothèses relatives à la description du choc en champ proche. Pour cela, on utilise la fonction enthalpie $h = e + pv$ au lieu de l'énergie interne pour décrire l'adiabatique dynamique Eq. (5.1.1c). La variation de l'enthalpie au travers de la discontinuité, c.-à-d. entre l'état non-perturbé et l'état choqué, est décrite par un chemin différent du précédent Eq. (5.1.4). La première intégrale est évaluée le long d'un processus isobare (de S_0 à S) à la pression initiale p_0 faisant passer la température initiale du fluide T_0 à une température intermédiaire notée T_1 . La seconde est décrite suivant le processus isentropique (de p_0 à p) à l'entropie finale S durant lequel la température passe de T_1 à la température au niveau du front d'onde T . Les chemins suivis par chaque processus sont illustrés sur la figure 5.1. La variation d'enthalpie spécifique doit en outre respecter la relation de saut qui s'écrit alors :

$$\Delta h = h - h_0 = \frac{1}{2} (p - p_0)(v_0 + v) \quad (5.1.6)$$

On exprime la différentielle totale de l'enthalpie en fonction des variables d'entropie et de pression, soit :

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_p ds + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s dp \quad (5.1.7)$$

Dans la mesure où l'enthalpie h est une fonction d'état, le saut d'enthalpie Δh au travers du choc est

indépendante du chemin suivi par le processus thermodynamique. Cette variation suivant les processus isobare et isentropique décrits plus haut s'écrit alors :

$$\Delta h = \int_{s_0}^s \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)_{p_0} ds + \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_s dp \quad (5.1.8)$$

Suivant les Premier et Second Principe dans le cas d'un processus réversible la différentielle d'enthalpie s'écrit $dh = Tds + vdp$. Pour la transformation isobare, l'intégrant du premier terme est donc la température $T(p_0, s)$ à pression constante p_0 . De même, l'intégrant dans le second terme relatif à l'isentropique se réduit au volume spécifique $v(p, s)$ à entropie constante s . La variation d'enthalpie Eq. (5.1.8) s'écrit donc finalement comme la somme de l'enthalpie dissipative $\tilde{\omega}$ évaluée le long de l'isobare, et de l'enthalpie réversible ω le long de l'isentropique, soit :

$$\Delta h = \tilde{\omega} + \omega \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tilde{\omega} = \int_{T_0}^{T_1} C_p(p_0, T') dT' \\ \omega = \int_{p_0}^p v(p', s) dp' \end{cases} \quad (5.1.9)$$

Dans ce qui suit, on fait l'hypothèse que la pression initiale p_0 est négligeable par rapport au niveau p atteint par le choc, soit $p_0 \approx 0$. Pour relier la pression au volume le long de l'isentropique, une forme modifiée de l'équation d'état de Tait¹ introduite par [Kirkwood et Bethe, 1942], est utilisée :

$$p(v, s) = B(s) \left[\left(\frac{v_1}{v} \right)^n - 1 \right] \quad (5.1.10)$$

où les volumes spécifiques $v_1 = v(0, s) = v(0, T_1)$ et $v = v(p, s) = v(p, T)$ sont calculés à partir des lois d'évolution du volume en fonction de la température de l'eau. Suivant [Richardson et al., 1947], le paramètre n est supposé constant et égal à 7.15, et $B(s) = B(T_1)$ est fonction de la température. Le terme ω dans Eq. (5.1.9) est évalué par intégration du volume spécifique entre les états $v(0, T_1)$ et $v(p, T)$. En utilisant l'équation Eq. (5.1.10), l'enthalpie réversible s'écrit donc explicitement en fonction v_1 , c_1 et v :

$$\omega = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{c^2}{\rho} d\rho = \frac{c_1^2}{n-1} \left[\left(\frac{v_1}{v} \right)^{n-1} - 1 \right] \quad (5.1.11)$$

1. Sous son appellation « moderne », l'équation d'état de Tait est souvent nommée *stiffened-gas* et s'écrit généralement sous la forme $e = (p + \pi)v/(n-1)$. En appliquant les Premier et Second Principes de la thermodynamique pour une transformation réversible et en posant $B = \pi/n$, on retrouve effectivement l'équation Eq. (5.1.10). On notera que l'équation de Tait appliquée à l'eau est de la même forme que celle d'un gaz parfait $e = pv/(\gamma-1)$ ce qui permet d'aboutir à des expressions théoriques relativement simples.

où la célérité du son $c_1 = c(0, s)$ est calculée par la relation $c_1^2 = n v_1 B(s)$. L'enthalpie dissipative $\tilde{\omega}$ peut s'écrire explicitement en fonction des températures T_0 et T_1 à partir de données de chaleur spécifique. Par suite, en combinant la relation de saut Eq. (5.1.6) avec Eq. (5.1.9) et en remplaçant ω par son expression Eq. (5.1.11) on obtient la forme générale suivante :

$$\frac{\tilde{\omega}}{c_1^2} = \frac{1}{2n} \left[y - \frac{n+1}{n-1} (y^{1-1/n} - 1) - y^{-1/n} \right] - \frac{v_1 - v_0}{2n v_1} (y - 1) \quad \text{avec} \quad y = \left(\frac{v_1}{v} \right)^n \quad (5.1.12)$$

La relation Eq. (5.1.12) est une équation transcendante dont l'inconnue est la température T_1 pour une valeur donnée de y . On la résout par un schéma itératif de Newton-Raphson. Une fois déterminée la loi tabulée entre la température T_1 et y , la relation entre le saut de pression et la température est fournie par l'équation d'état Eq. (5.1.10). Pour un saut de pression donné, la température T_1 est ensuite interpolée à partir des résultats précédents. La connaissance de T_1 , et par suite de $B(T_1)$, v_1 et c_1 , permettent de calculer directement les propriétés thermodynamiques et cinétiques de l'eau au niveau du front d'onde. Ainsi, la vitesse de l'onde de choc U_s et la vitesse particulière u sont respectivement calculées à l'aide de Eq. (5.1.2a) et Eq. (5.1.2b). La célérité du son c et la fonction de Riemann σ (voir Eq. (4.1.24)) sont données par :

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = c_1 \left(\frac{v_1}{v} \right)^{(n-1)/2} \quad (5.1.13a)$$

$$\sigma = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{c}{\rho} d\rho = \frac{2c_1}{n-1} \left[\left(\frac{v_1}{v} \right)^{(n-1)/2} - 1 \right] \quad (5.1.13b)$$

On présente les résultats de ces calculs dans le Tab. 5.1 en fonction du saut de pression pour une eau salée initialement à 20 °C. Il est intéressant de comparer les valeurs d'enthalpie irréversible $\tilde{\omega}$ et réversible ω par rapport à la variation Δh . On constate ainsi que la part d'irréversibilité est de l'ordre de 1.2% à 5 kbar, 4.6% à 20 kbar, et atteint 7.6% à 50 kbar. Cette irréversibilité qui traduit une croissance de l'entropie dans l'eau au moment du passage du choc est donc relativement limitée. De ce fait, l'équation d'état de Tait peut être utilisée dans sa forme isentropique Eq. (5.1.10) en considérant le coefficient B constant. Il est calculé à partir des conditions initiales de l'eau par $B = \rho_0 c_0^2 / n$ et vaut approximativement 3.050 kbar à 20 °C. Les grandeurs σ , c et ω calculées au front d'onde s'expriment alors en fonction de l'état initial par :

$$\sigma = \frac{2c_0}{n-1} \left[\left(\frac{v_0}{v} \right)^{(n-1)/2} - 1 \right] \quad (5.1.14a)$$

$$c = c_0 \left(\frac{v_0}{v} \right)^{(n-1)/2} = c_0 \left(1 + \frac{n-1}{2c_0} \sigma \right) \quad (5.1.14b)$$

$$\omega = \frac{c_0^2}{n-1} \left[\left(\frac{v_0}{v} \right)^{n-1} - 1 \right] = c_0 \sigma \left(1 + \frac{n-1}{4c_0} \sigma \right) \quad (5.1.14c)$$

où σ est utilisé comme variable indépendante pour exprimer la vitesse du son et l'enthalpie dans Eq. (5.1.14b) et (5.1.14c).

p (kbar)	u (cm/ms)	U_s (cm/ms)	c (cm/ms)	σ (cm/ms)	ω (10^{-1} J/g)	$\tilde{\omega}$ (10^{-1} J/g)	Δh (10^{-1} J/g)	v (cm^3/g)
5	25.13	197.6	223.2	24.82	4592	57	4649	0.8667
10	42.54	233.4	275.5	41.54	8790	236	9025	0.8120
15	56.70	262.7	317.5	54.88	12794	494	13288	0.7787
20	68.92	288.2	353.5	66.31	16680	806	17485	0.7555
25	79.84	311.0	385.4	76.52	20485	1154	21639	0.7381
30	89.80	331.8	414.2	85.88	24231	1529	25759	0.7242
35	99.02	351.0	440.6	94.63	27930	1924	29854	0.7129
40	107.64	369.0	465.2	102.91	31593	2334	33927	0.7033
45	115.78	386.0	488.3	110.83	35228	2756	37984	0.6952
50	123.48	402.1	510.0	118.46	38841	3186	42027	0.6881
60	137.80	432.4	550.5	133.02	46029	4058	50086	0.6765
70	150.82	460.9	588.2	146.78	53218	4920	58138	0.6681
80	162.60	488.6	624.2	159.80	60486	5736	66222	0.6625

TABLE 5.1 – Propriétés hydrodynamiques de l'eau salée au niveau du front d'onde choc pour une température initiale $T_0 = 20^\circ\text{C}$ (volume spécifique initial $v_0 = 0.9930 \text{ cm}^3/\text{g}$, vitesse du son initiale $c_0 = 146.5 \text{ cm/ms}$)

En complément du Tab. 5.1, on reporte sur la figure 5.2 les vitesses calculées au niveau du front d'onde; la célérité acoustique c , la vitesse du front d'onde U_s , la vitesse particulière u , et la fonction de Riemann σ . On peut remarquer que la vitesse particulière et la fonction de Riemann présentent des valeurs très proches quelque soit le saut de pression. Comme on le détaille dans la suite, ce résultat $\sigma \approx u$ est utilisé dans la théorie de propagation d'onde de choc développée par Kirkwood et Bethe [Kirkwood et Bethe, 1942] pour calculer la vitesse de propagation des perturbations en arrière du choc. On note également que la vitesse de propagation du choc est toujours inférieure à la vitesse locale $c + u$, ce qui explique que des perturbations nées en aval du choc puissent voyager à une vitesse supérieure à celle du front d'onde, et de ce fait, influent sur ces propriétés hydrodynamiques.

Avant de présenter la théorie de Kirkwood-Bethe en section 5.2, on peut établir une relation simple entre la vitesse du front d'onde et la vitesse particulière en se servant de l'équation d'état adiabatique Eq. (5.1.10). En remplaçant celle-ci dans la relation de saut Eq. (5.1.1c), on obtient l'expression de l'adiabatique dynamique $p = f(v)$ qui peut être réécrite en fonction de la vitesse du front d'onde et la vitesse particulière en utilisant Eq. (5.1.1a) et (5.1.1b). Cette relation est une équation du second degré en U_s dont la solution fournit une expression explicite de la vitesse de propagation de la discontinuité en

fonction de la vitesse particulaire :

$$U_s = c_0 \left[\beta u + \sqrt{1 + (\beta u)^2} \right] \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{n+1}{4c_0} \quad (5.1.15)$$

Dans cette expression, c_0 est la célérité acoustique dans le milieu non-perturbé. Le développement de Taylor au premier ordre appliqué à Eq. (5.1.15) permet d'obtenir Eq. (5.1.16) qui correspond à une relation linéaire de la vitesse du front d'onde de choc en fonction de la vitesse particulaire. La figure 5.2 est complétée par le tracé de cette relation, et l'on constate que cette approximation est très proche de la vitesse U_s calculée précédemment. Elle est utilisée dans la théorie de propagation du choc sous-marin développée ensuite.

$$U_s^{(1)} \approx c_0(1 + \beta u) \quad (5.1.16)$$

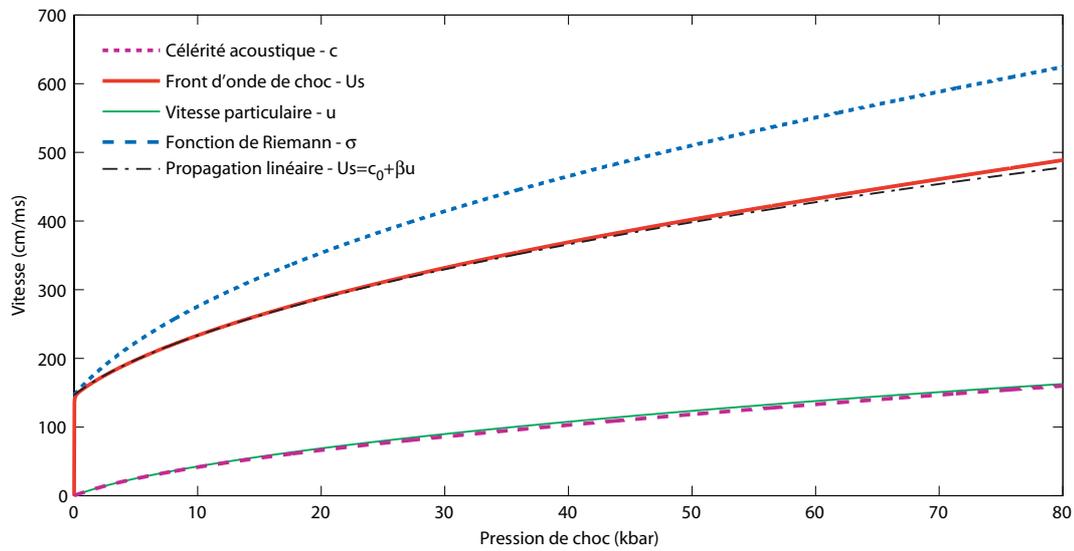


FIGURE 5.2 – Vitesses au front d'onde de choc en fonction du saut de pression pour des pressions élevées. Ces résultats proviennent du Tab. 5.1

L'observation expérimentale des chocs met effectivement en évidence une relation quasi-linéaire de la forme de Eq. (5.1.16) entre la vitesse du front d'onde U_s et la vitesse particulaire u derrière l'onde de choc. Le paramètre n étant approximativement égal à 7 pour l'eau, on a dans ce cas $U_s \approx c_0 + 2u$. Dans nos applications numériques, on utilise l'équation d'état de Gruneisen présentée par [Steinberg, 1991] qui s'écrit :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \mu \left[1 + (1 - \gamma_0/2) \mu - a \mu^2/2 \right]}{\left[1 - \mu (s_1 - 1) - s_2 \mu^2/(\mu + 1) - s_3 \mu^3/(\mu + 1)^2 \right]^2} + (\gamma_0 + a \mu) E \quad (5.1.17)$$

où $\mu = (\rho/\rho_0) - 1$ est une mesure de la compression volumétrique, et les autres paramètres sont des coefficients de corrélation empiriques qui dépendent du matériau utilisé. Pour l'eau, on utilise les valeurs tirées de [Steinberg, 1987], à savoir $c_0 = 148$ cm/ms, $s_1 = 2.56$, $s_2 = -1.986$, $s_3 = 0.2268$, $\gamma_0 = 0.5$ et $a = 2.67$. Les paramètres s_i ($i = 1, 2, 3$) correspondent aux coefficients issus de l'approximation cubique de la vitesse du front d'onde de choc, de la forme :

$$U_s = c_0 + s_1 u + s_2 \left(\frac{u}{U_s} \right) u + s_3 \left(\frac{u}{U_s} \right)^2 u \quad (5.1.18)$$

On constate tout de suite en comparant cette expression à Eq. (5.1.16), que s_1 s'identifie à la grandeur $(n+1)/4$ issue de l'équation de Tait.

Comme le suggèrent les résultats présentés dans le Tab. 5.1, on peut substituer la fonction de Riemann σ à la vitesse particulaire u dans les relations Eq. (5.1.14b), (5.1.16) et (5.1.14c). Cette approximation permet d'exprimer par des relations simples la vitesse locale ($c + u$), la vitesse de propagation du choc U_s , et l'enthalpie cinétique $\Omega = \omega + u^2/2$ qui sont utilisées ensuite dans la théorie de Kirkwood-Bethe :

$$c + \sigma = c_0(1 + 2\beta\sigma) \quad (5.1.19a)$$

$$U_s = c_0(1 + \beta\sigma) \quad (5.1.19b)$$

$$\Omega = c_0\sigma(1 + \beta\sigma) \quad (5.1.19c)$$

5.2 Théorie de propagation de Kirkwood-Bethe

Les éléments théoriques présentés dans la section précédente ont permis d'exprimer simplement, par les relations Eq. (5.1.19a) à (5.1.19c), les principales grandeurs hydrodynamiques au niveau du front d'onde. Ces relations s'appliquent pour les chocs sous-marins à des niveaux de pression élevés. Elles sont essentielles pour aborder la théorie développée par Kirkwood et Bethe [Kirkwood et Bethe, 1942] concernant l'évolution des ondes de choc transmises dans l'eau après détonation complète de l'explosif. Cette théorie a été reprise par [Cole, 1965] pour la description des ondes de choc sphériques et par [Kedrinskii, 1972] pour les ondes cylindriques en comparant avec succès les solutions exactes à des résultats expérimentaux. De ce fait, on peut présumer a priori, de la pertinence de ce modèle pour la propagation du choc en champ proche. On notera cependant que l'accès à des mesures expérimentales fiables en champ proche, voire très proche (rayon d'action inférieur à 10 fois celui de la charge explosive) est difficile, sinon impossible, en raison des limitations liées à la technologie des capteurs de pression. On choisit donc d'analyser les développements théoriques présentés dans cette section à la lumière de simulations numériques représentatives des explosions sous-marines pour les configurations en champ proche. Dans le cadre de cette analyse, l'accès rapide à un niveau de résultat très précis s'appuie sur la formulation ALE Multi-Matériaux développée en 2D axisymétrique pour les ondes sphériques.

5.2.1 Hypothèses

La théorie de Kirkwood-Bethe s'appuie sur plusieurs hypothèses qu'il s'agit de bien comprendre pour être en mesure de l'analyser correctement et éventuellement de la critiquer à la lumière de résultats expérimentaux ou numériques obtenus. La charge explosive est caractérisée par une dimension notée a_c . Elle est immergée dans un domaine liquide considéré infini. La détonation complète de la charge est supposée instantanée, et suivant un processus adiabatique isochore. L'écoulement est isentropique et irrotationnel et ne dépend que d'une seule variable d'espace, notée r et du temps t . L'équation d'état de Tait Eq. (5.1.10) sous la forme isentropique est utilisée pour décrire le comportement du liquide :

$$\frac{p+B}{p_0+B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n \quad \text{soit} \quad c = c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(n-1)/2} = c_0 \left(\frac{p+B}{p_0+B}\right)^{(n-1)/2n} \quad (5.2.1)$$

Les conditions initiales déterminées à l'interface liquide/gaz dérivent, d'une part, des relations de saut de Rankine-Hugoniot Eq. (5.1.1a) à (5.1.1c) côté liquide (auxquelles on adjoint l'équation d'état ci-dessus), et d'autre part, de la détente des produits gazeux issus de la détonation instantanée suivant une transformation adiabatique (à partir de l'état de référence, indicé 0) caractérisée par le coefficient polytropique γ :

$$c_g = c_{g0} \left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}}\right)^{(\gamma-1)/2} = c_{g0} \left(\frac{p_g}{p_{g0}}\right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \quad (5.2.2)$$

Les réflexions internes dans les gaz après émission de l'onde de choc dans le liquide et de l'onde de détente dans les produits gazeux ne sont pas considérées. Les paramètres de l'onde de choc sont déterminés immédiatement derrière le front d'onde, et les évolutions temporelles de la pression p et de l'enthalpie h au niveau de l'interface liquide/gaz sont approchées par une décroissance exponentielle de constante temporelle θ_a à partir de leur valeur initiale, $p(0)$ et $h(0)$. Ces hypothèses s'écrivent :

$$p(a, t) = p(0) \exp(-t/\theta_a) \quad h(a, t) = h(0) \exp(-t/\theta_a) \quad (5.2.3)$$

Les résultats numériques obtenus en se plaçant dans les mêmes hypothèses que celles décrites ici, montrent qu'une simple exponentielle ne suffit pas pour décrire l'ensemble du processus de détente qui s'opère à l'interface liquide/gaz. Dans ce cadre, on propose ici une amélioration au modèle de Kirkwood-Bethe en décrivant la décroissance d'enthalpie par une double décroissance exponentielle suivant Eq. (5.2.4). Cette forme n'est pas sans rappeler celle utilisée par [Geers et Hunter, 2002] (voir Eq. (2.1.4) en page 18) pour décrire la décroissance de pression relative au choc primaire.

$$h(a, t) = h(0) [\alpha_1 \exp(-\beta_1 t/\theta_a) + \alpha_2 \exp(-\beta_2 t/\theta_a)] \quad (5.2.4)$$

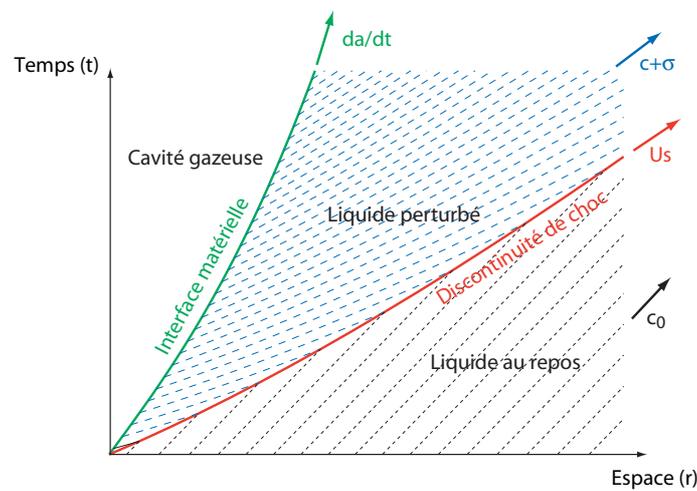


FIGURE 5.3 – Schématisation des trajectoires matérielles, de la discontinuité de choc et des caractéristiques dans les premiers instants de la génération du choc dans le liquide suite à une explosion. Les origines temporelle et spatiale correspondent respectivement à la fin de la détonation et à la frontière de l'explosif solide

Il est utile d'associer les développements qui suivent au schéma de la figure 5.3. Dans l'espace des phases (r, t) , une onde de choc est transmise à l'instant initial dans le liquide au repos (caractéristiques

c_0). Cette onde se déplace à la vitesse $U_s \geq c_0$ en laissant derrière elle une zone de perturbation dans le liquide, telle que les caractéristiques $(c + \sigma) \geq U_s$. Cette zone est comprise entre la frontière de la cavité gazeuse et la discontinuité de choc de coordonnées respectives $a(t)$ et $\int_t U_s dt$. L'interface matérielle liquide/gaz agit donc comme un piston (plan, cylindrique ou sphérique suivant la configuration) qui génère des perturbations dans le liquide susceptibles de rattraper le front d'onde de choc. Le mouvement à la surface de la bulle est décrit par la vitesse Lagrangienne $da/dt \equiv \dot{a}$.

5.2.2 Équation de propagation pour les problèmes à une dimension

En préambule à la théorie de propagation d'onde de Kirkwood et Bethe, on rappelle les équations de conservation de la masse Eq. (5.2.5a) et de la quantité de mouvement Eq. (5.2.5b). La solution du problème ne dépend que d'une seule variable d'espace r , et on néglige les effets liés aux forces volumiques et de viscosité, de sorte que ces équations s'écrivent :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \eta \frac{u}{r} \right) = 0 \quad (5.2.5a)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (5.2.5b)$$

Le paramètre η dépend de la géométrie du problème ; $\eta = 0$ en symétrie plane, $\eta = 1$ en cylindrique et $\eta = 2$ en sphérique. On introduit l'enthalpie spécifique h qui satisfait la relation thermodynamique $dh = Tds + dp/\rho$. Comme on a montré dans la section précédente que la part d'enthalpie irréversible était très faible au passage de la discontinuité, on peut négliger la variation d'entropie, c.-à-d. $ds \approx 0$, ce qui entraîne $dh = dp/\rho$ et $h \equiv \omega$ donné par Eq. (5.1.9). Les équations de conservation peuvent alors être réécrites en utilisant les relations² $d\rho/dt = (\rho/c^2)dh/dt$ et $\partial p/\partial r = \rho \partial h/\partial r$, soit :

$$c^{-2} \frac{Dh}{Dt} + \frac{\partial u}{\partial r} + \eta \frac{u}{r} = 0 \quad (5.2.6a)$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial h}{\partial r} \quad (5.2.6b)$$

Dans leur forme Eulérienne, les relations Eq. (5.2.6) s'écrivent :

2. Ces relations sont développées comme suit :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dh} \frac{dh}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d\rho}{dh} = \frac{d\rho}{dp} \frac{dp}{dh} = \frac{\rho}{c^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial r} = \rho \frac{\partial h}{\partial r}$$

$$c^{-2} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} + \eta \frac{u}{r} = 0 \quad (5.2.7a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (5.2.7b)$$

On fait ainsi apparaître l'enthalpie cinétique $\Omega(r, t) = h + u^2/2$ introduite en fin de section précédente dans Eq. (5.1.19c). En utilisant le potentiel des vitesses ϕ tel que $u = -\partial\phi/\partial r$, la relation Eq. (5.2.7b) devient $\partial\phi/\partial t = \Omega$. En substituant Ω à h dans l'équation continuité Eq. (5.2.7a), celle-ci s'écrit alors en fonction du potentiel des vitesses ϕ sous la forme [Kedrinskii, 1972] :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{u}{2} \frac{\partial u^2}{\partial r} \right) \quad (5.2.8)$$

En approximation acoustique linéaire, on ne conserve que les termes du premier ordre de sorte que le membre de droite disparaisse dans l'équation précédente, qui s'exprime alors en fonction de la célérité acoustique c_0 . Dans ce cadre, on simplifie encore le système en introduisant la fonction $\Phi = r^{\eta/2} \phi$:

$$c_0^{-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{\eta(2-\eta)}{4r^2} \Phi = 0 \quad (5.2.9a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = r^{\eta/2} \Omega \quad (5.2.9b)$$

L'introduction de la fonction Φ permet de trouver facilement une solution de la forme $\Phi = \Phi(\xi)$ avec $\xi = t - r/c_0$, correspondant à une onde divergente. On note cependant que cette solution est exacte pour les cas de symétrie plane ($\eta = 0$) et sphérique ($\eta = 2$), mais approchée pour une symétrie cylindrique ($\eta = 1$). En introduisant une fonction G de la forme $r^{\eta/2} \Omega$, les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = G \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -c_0^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -c_0^{-1} G$$

ce qui permet d'exprimer l'équation des ondes acoustiques sous la forme suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial t} + c_0 \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \quad (5.2.10)$$

Cette équation aux dérivées partielles est ici sous une forme non conservative et ne fait intervenir que des dérivées premières du scalaire $G(r, t)$. Pour un observateur se déplaçant à la célérité $u = c_0$,

en se servant du développement de la dérivée convective D/Dt on obtient la forme caractéristique de l'équation Eq. (5.2.10) :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + c_0 \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad u = \frac{dr}{dt} = c_0 \quad (5.2.11)$$

ce que l'on écrit aussi :

$$G = \text{Constante} \quad \text{pour} \quad \frac{dr}{dt} = c_0 \quad (5.2.12)$$

Ce qui signifie que G ne varie pas pour un observateur se déplaçant à la vitesse c_0 . On met ainsi en évidence l'invariance de la fonction $G(r, t)$ (dans le cas mono dimensionnel) le long des caractéristiques $t \pm r/c_0$ dans l'espace des phases (r, t) . Cette forme est généralisée dans la théorie de Kirkwood et Bethe [Brinkley et Kirkwood, 1950] pour la propagation d'onde d'amplitude finie, lorsque la linéarisation des équations n'est plus valable. Cette approximation se base sur l'hypothèse que les perturbations dans le fluide se déplacent à la vitesse variable $\bar{c} = c + u$. Par analogie avec l'acoustique linéaire, l'équation de propagation des ondes acoustiques Eq. (5.2.10) est donc généralisée aux ondes d'amplitudes finies sous la forme Eq. (5.2.13) qui traduit l'invariance de la fonction G le long des caractéristiques $dr/dt = c + u$.

$$\frac{\partial G}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \quad (5.2.13)$$

5.2.3 Conditions initiales

Nous adoptons ici comme origine des temps $t = 0$, l'instant où l'onde de détonation atteint la frontière extérieure de l'explosif de dimension a_c (noté a_0 par la suite). Cette frontière constitue une discontinuité matérielle entre deux milieux différents, d'un côté les produits de détonation à l'état gazeux, et de l'autre le milieu marin à l'état liquide. Les gaz brûlés sont dans des conditions extrêmes de température et de pression (quelques milliers de degrés Celsius et plusieurs dizaines de kilobars) tandis que l'eau se trouve dans des conditions normales à température et pression ambiantes (quelques degrés Celsius et de 1 à quelques bars en fonction de l'immersion de la charge). A cet instant initial, l'égalité des pressions de part et d'autre de l'interface liquide/gaz doit donc être vérifiée :

$$p_g(a_0, 0) = p(a_0, 0) \quad (5.2.14)$$

Cette pression d'équilibre initiale, notée p par la suite, n'est pas égale à la pression de détonation donnée par les relations de Rankine-Hugoniot et la condition de Chapman-Jouguet décrites au §4.1.1, au niveau du front d'onde explosive. L'égalité des pressions est donc satisfaite par la génération d'une

onde de compression se propageant dans le milieu liquide (onde de choc transmise), et d'une onde de détente dans les produits de détonation convergent vers le centre de l'explosif, (onde réfléchiée par l'interface matérielle). L'écoulement du fluide derrière chacune de ces ondes est caractérisé par une vitesse particulière orientée vers l'extérieur, selon les r croissants. La seconde condition qui doit nécessairement être vérifiée à l'interface liquide/gaz est l'égalité de la composante normale des vitesses particulières (qui est la seule composante non-nulle dans le cas mono-dimensionnel qui nous concerne ici) :

$$u_g(a_0, 0) = u(a_0, 0) \quad (5.2.15)$$

La relation de saut Eq. (5.1.2b) de Rankine-Hugoniot à travers la discontinuité de choc transmise dans le liquide permet d'exprimer la vitesse particulière u dans le milieu perturbé en fonction du saut de pression $p - p_0$. On la réécrit ici en négligeant la pression initiale dans le liquide, c.-à-d. $p \gg p_0$:

$$u = \left[(p - p_0) \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho} \right) \right]^{1/2} \approx \left[\frac{p}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right]^{1/2} \quad (5.2.16)$$

En combinant Eq. (5.2.16) avec l'équation d'état Eq. (5.2.1) utilisée pour décrire le comportement barotrope du liquide, on obtient :

$$u = \left\{ \frac{p}{\rho_0} \left[1 - \left(1 + \frac{p}{B} \right)^{-1/n} \right] \right\}^{1/2} \quad (5.2.17)$$

Dans cette relation, la pression p et la vitesse particulière u sont inconnues. Une seconde condition doit donc nécessairement être établie pour pouvoir exprimer la vitesse particulière u_g dans le gaz en fonction de la pression. Cette relation est déterminée au niveau de l'onde de détente se propageant dans les produits de détonation en direction du centre de l'explosif. Pour ce faire, on utilise l'invariant de Riemann I_1 Eq. (5.2.18) correspondant à la caractéristique gauche de célérité ($u_g - c_g$). Au travers de l'onde de détente, celui-ci est constant et s'écrit :

$$I_1(\rho_g, u_g) = u_g + \int_{\rho_g} \frac{c_g(\rho)}{\rho} d\rho = \text{Cste} \quad \text{au travers de} \quad \lambda_1 = u_g - c_g \quad (5.2.18)$$

où c_g est la célérité du son dans les produits gazeux. L'invariant de Riemann I_1 est évalué dans l'état de référence pour lequel les produits gazeux sont au repos, de sorte que $I_1 = 0$. L'intégrale est calculée au travers de l'onde de détente le long du processus adiabatique à entropie S_{g0} faisant passer les gaz de leur état initial ρ_{g0} à la masse volumique ρ_g qui dépend de la pression d'équilibre $p = p_g$ suivant l'équation d'état considérée Eq. (5.2.2), soit :

$$u_g = - \int_{\rho_{g0}}^{\rho_g} \frac{c_{g0}}{\rho} \left(\frac{\rho}{\rho_{g0}} \right)^{(\gamma-1)/2} d\rho \quad (5.2.19)$$

La seconde condition $u_g = f(p_g)$ s'écrit donc :

$$u_g = \frac{2c_{g0}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \right)^{(\gamma-1)/2} \right] = \frac{2c_{g0}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_g}{p_{g0}} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] \quad (5.2.20)$$

En considérant les équations Eq. (5.2.17) et (5.2.20), la relation Eq. (5.2.15) traduisant la continuité de la vitesse particulaire dans le gaz et dans le liquide s'écrit finalement comme l'équation suivante, fonction de la pression d'équilibre p , seule inconnue :

$$\left\{ \frac{p}{\rho_0} \left[1 - \left(1 + \frac{p}{B} \right)^{-1/n} \right] \right\}^{1/2} = \frac{2c_{g0}}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_{g0}} \right)^{(\gamma-1)/2\gamma} \right] \quad (5.2.21)$$

L'état de référence (p_{g0}, c_{g0}) des gaz chauds traduit un certain état d'équilibre thermodynamique après détonation complète dans tout l'explosif. L'approximation qui est faite concerne la distribution spatiale de cet état de référence. Telle que calculée précédemment aux §4.1.3.1 et 4.1.3.2, l'onde de détente isentropique derrière le front d'onde de détonation est théoriquement caractérisée par le pic de Chapman-Jouguet suivi d'une décroissance dont la forme dépend du type de symétrie considérée si l'on se réfère aux tracés de la figure 4.4 en page 105. On a estimé à la fin du §4.1.3.2 en page 103 que la forme réelle de l'onde de détonation à l'intérieur de l'explosif n'est pas d'une importance capitale quand on s'intéresse aux ondes transmises en détonique sous-marine. Cette supposition s'appuie sur le fait que la constante de temps associée à l'onde de choc transmise est de l'ordre de 10 fois celle calculée au sein des produits gazeux. Les études menées par Taylor et reportées dans les références [Brinkley et Kirkwood, 1950] [Cole, 1965] estiment que l'erreur commise sur la forme de l'onde de choc est relativement faible au-delà de 2 fois le rayon initial de la charge. Cette assertion est confirmée par les résultats de calculs numériques présentés au §5.3.1 en page 149. On fait donc l'hypothèse que les conditions initiales (p_{g0}, c_{g0}) au sein de l'explosif après détonation résultent d'un processus de compression adiabatique à volume constant, la pression étant considérée uniforme dans les produits gazeux qui sont par ailleurs au repos $u_{g0} = 0$. Pour un gaz parfait de coefficient polytropique γ constant, cette hypothèse se traduit par les relations suivantes [Kedrinskii, 1972] :

$$c_{g0}^2 = \gamma \frac{p_{g0}}{\rho_{g0}} \quad \text{et} \quad p_{g0} = \frac{\rho_{g0} U_d^2}{2(\gamma+1)} \quad (5.2.22)$$

où $\rho_{g0} = \rho_e$ est la masse volumique de l'explosif avant détonation, et U_d la vitesse de détonation. Ayant fixé l'état thermodynamique initial dans les gaz brûlés (et connaissant celui de l'eau), on résout alors l'équation transcendante Eq. (5.2.21) par processus itératif pour déterminer les conditions initiales en pression et vitesse au niveau de l'interface matérielle.

5.2.4 Équation du mouvement de l'interface liquide/gaz

L'équation Eq. (5.2.13) est de première importance pour l'étude des propriétés de l'onde de choc en champs proche et lointain, ainsi que pour l'étude des oscillations de la bulle des gaz résiduels. En remplaçant G par son expression $G = r^{\eta/2} \left(h + \frac{u^2}{2} \right)$ dans l'équation Eq. (5.2.13), celle-ci s'écrit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + (c + u) \frac{\partial}{\partial r} \right] \left[r^{\eta/2} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (5.2.23)$$

soit après développement et simplification par $r^{(\eta/2-1)}$:

$$r \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\eta}{2} (c + u) \left(h + \frac{u^2}{2} \right) + r(c + u) \left(\frac{\partial h}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.2.24)$$

On généralise cette relation à la vitesse de propagation \bar{c} qui n'est pas nécessairement égale à la vitesse locale $c + u$:

$$r \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial h}{\partial r} \right) + \frac{\eta}{2} \bar{c} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) + r u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.2.25)$$

La relation Eq. (5.2.24) (ou Eq. (5.2.25) dans le cas général) est valable dans le liquide entourant la bulle ou dans les produits de détonation. Pour écrire les égalités en pression et vitesse normale à l'interface liquide/gaz que l'on suppose en mouvement, on établit la forme lagrangienne de la relation Eq. (5.2.24) à partir de l'expression de la dérivée convective $D/Dt = \partial/\partial t + u \partial/\partial r$, soit :

$$r \frac{Dh}{Dt} + r u \frac{Du}{Dt} + \frac{\eta}{2} h(c + u) + \frac{\eta}{2} \frac{u^2}{2} (c + u) + r c \frac{\partial h}{\partial r} + r c u \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (5.2.26)$$

Par suite, en remplaçant les dérivées partielles $\partial h/\partial r$ et $\partial u/\partial r$ par leur expression donnée respectivement par les lois de conservation de la quantité de mouvement Eq. (5.2.6b) et de continuité Eq. (5.2.6a), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$r \left(1 - \frac{u}{c} \right) \frac{du}{dt} + \frac{3\eta}{4} \left(1 - \frac{u}{3c} \right) u^2 = \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{u}{c} \right) h + \frac{r}{c} \left(1 - \frac{u}{c} \right) \frac{dh}{dt} \quad (5.2.27)$$

Les formes analogues aux relations Eq. (5.2.26) et (5.2.27) généralisées pour la vitesse de propagation \bar{c} [Cole, 1965] sont successivement obtenues à partir de la relation Eq. (5.2.25) :

$$r \frac{Dh}{Dt} + r u \frac{Du}{Dt} + \frac{\eta}{2} h \bar{c} + \frac{\eta}{2} \frac{u^2}{2} \bar{c} + r(\bar{c} - u) \frac{\partial h}{\partial r} + r u (\bar{c} - u) \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad (5.2.28)$$

$$r \left(\frac{\bar{c} - 2u}{c} \right) \frac{du}{dt} + \frac{3\eta}{4} \left(\frac{\bar{c}}{c} - \frac{4u}{3c} \right) u^2 = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\bar{c}}{c} \right) h + \frac{r}{c} \left[1 - \frac{u}{c^2} (\bar{c} - u) \right] \frac{dh}{dt} \quad (5.2.29)$$

L'équation Eq. (5.2.27) (ou Eq. (5.2.29) dans le cas général) est valable pour tout point appartenant au liquide ou situé sur l'interface entre le liquide et la bulle des gaz résiduels. En notant $a(t) = r(a, t)$, $\dot{a}(t) = u(a, t)$, $\ddot{a}(t) = du(a, t)/dt$, $H(t) = h(a, t)$ et $\dot{H}(t) = dh(a, t)/dt$ les grandeurs cinétiques et thermodynamiques sur la frontière du domaine liquide en $r = a$, on obtient une relation permettant de décrire le mouvement de l'interface liquide/gaz dans les premiers instants qui suivent l'interaction de l'onde de détonation avec le liquide environnant, c.-à-d. au moment de la génération de l'onde de choc dans le milieu :

$$a \ddot{a} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) + \frac{3\eta}{4} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{\dot{a}}{3c} \right) = \frac{\eta}{2} H \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} \right) + \frac{a}{c} \dot{H} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) \quad (5.2.30)$$

Suivant la valeur du paramètre de divergence géométrique η , on décrit respectivement les écoulements mono-dimensionnels à symétrie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Plane } (\eta = 0) : \quad \ddot{a} = \frac{a}{c} \dot{H} \\ \text{Cylindrique } (\eta = 1) : \quad a \ddot{a} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) + \frac{3}{4} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{\dot{a}}{3c} \right) = \frac{1}{2} H \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} \right) + \frac{a}{c} \dot{H} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) \\ \text{Sphérique } (\eta = 2) : \quad a \ddot{a} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left(1 - \frac{\dot{a}}{3c} \right) = H \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} \right) + \frac{a}{c} \dot{H} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) \end{array} \right. \quad (5.2.31)$$

Les valeurs locales de la célérité c et de l'enthalpie H dans le liquide doivent être combinées à la relation Eq. (5.2.30). Elles dépendent de l'équation d'état utilisée pour décrire le comportement du liquide. Dans le cas de l'équation de Tait Eq. (5.2.1) la célérité acoustique et l'enthalpie s'expriment simplement par :

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{n(p+B)}{\rho} \quad \text{et} \quad h = \int_{\rho_0}^{\rho} c^2 \frac{d\rho}{\rho} = \frac{c^2 - c_0^2}{n-1}$$

où $c_0^2 = n(p_0 + B)/\rho_0$ est la célérité acoustique dans le liquide non perturbé. Le mouvement de l'interface liquide/gaz est donc décrit dans les premiers instants par l'équation différentielle :

$$\ddot{a} = \left[a \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) \right]^{-1} \left\{ H(0) \exp^{-t/\theta_a} \left[\frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} \right) - \frac{a}{c\theta_a} \left(1 - \frac{\dot{a}}{c} \right) \right] - \frac{3\eta}{4} \dot{a}^2 + \frac{\eta}{4} \frac{\dot{a}^3}{c} \right\} \quad (5.2.32)$$

où l'approximation Eq. (5.2.3) du pic de pression (ou d'enthalpie) a été utilisée. Elle est intégrée par un schéma numérique de Runge-Kutta à l'ordre 4 en imposant les conditions initiales a_0 , \dot{a}_0 et $H(0)$. En

se plaçant dans les mêmes conditions initiales, cette solution en symétrie sphérique est comparée aux résultats numériques sur la figure 5.4 où la vitesse de l'interface liquide/gaz est tracée en fonction du temps. Les résultats obtenus sont tout à fait semblables et valident ainsi les hypothèses prises pour bâtir la théorie.

La forme analogue à la relation Eq. (5.2.30) généralisée pour la vitesse de propagation \bar{c} est obtenue à partir de la relation Eq. (5.2.29) :

$$a\ddot{a}\left(\frac{\bar{c}-2\dot{a}}{c}\right) + \frac{3\eta}{4}\dot{a}^2\left(\frac{\bar{c}}{c} - \frac{4\dot{a}}{3c}\right) = \frac{\eta}{2}H\left(\frac{\bar{c}}{c}\right) + \frac{a}{c}\dot{H}\left[1 - \frac{\dot{a}}{c^2}(\bar{c}-\dot{a})\right] \quad (5.2.33)$$

L'équation correspondante pour les produits de détonation est écrite en remplaçant respectivement les écritures c , \bar{c} , H par c_g , \bar{c}_g , H_g et en notant que la vitesse de propagation est $-\bar{c}_g$ pour une onde convergent vers l'origine de la détonation :

$$-a\ddot{a}\left(\frac{\bar{c}_g+2\dot{a}}{c_g}\right) - \frac{3\eta}{4}\dot{a}^2\left(\frac{\bar{c}_g}{c_g} + \frac{4\dot{a}}{3c_g}\right) = -\frac{\eta}{2}H_g\left(\frac{\bar{c}_g}{c_g}\right) + \frac{a}{c_g}\dot{H}\left[1 + \frac{\dot{a}}{c_g^2}(\bar{c}_g+\dot{a})\right] \quad (5.2.34)$$

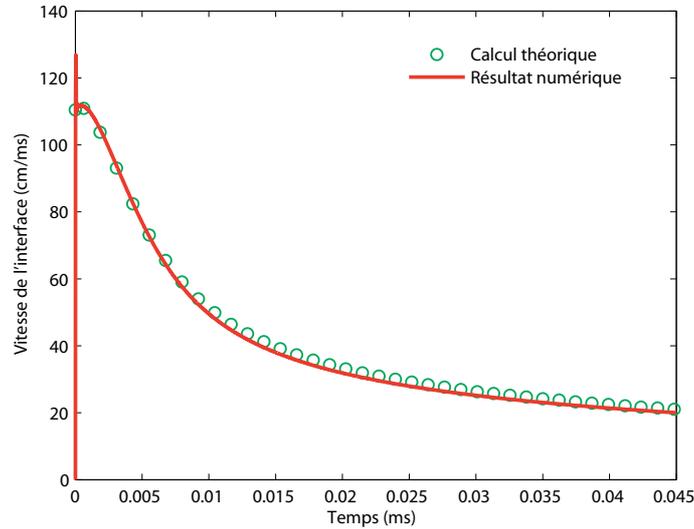


FIGURE 5.4 – Résultats théorique pour la vitesse de l'interface liquide/gaz $\dot{a}(t)$ issus de la résolution de l'équation différentielle Eq. (5.2.32) en symétrie sphérique avec $\eta = 2$. La solution numérique est également tracée pour comparaison.

5.2.5 Détermination de la fonction G et de la constante de temps θ à l'interface liquide/gaz

Suivant [Cole, 1965], on réécrit les relations Eq. (5.2.33) et Eq. (5.2.34), vérifiées respectivement de part et d'autre de l'interface dans le liquide et dans le gaz, en remplaçant la variation d'enthalpie dh par la variation de pression dp à l'aide de la définition $dh = Tds + dp/\rho$ dans le cas d'une transformation isentropique :

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{dp}{dt} = (c^2 - \dot{a}\bar{c} + \dot{a}^2)^{-1} \left\{ (\bar{c} - 2\dot{a}) \ddot{a} - \frac{\eta}{2a} \left[\bar{c} \left(H - \frac{3\dot{a}^2}{2} \right) + 2\dot{a}^3 \right] \right\} \quad (5.2.35a)$$

$$\frac{1}{\rho_g c_g^2} \frac{dp_g}{dt} = (c_g^2 + \dot{a}\bar{c}_g + \dot{a}^2)^{-1} \left\{ -(\bar{c}_g + 2\dot{a}) \ddot{a} + \frac{\eta}{2a} \left[\bar{c}_g \left(H_g - \frac{3\dot{a}^2}{2} \right) - 2\dot{a}^3 \right] \right\} \quad (5.2.35b)$$

En faisant l'approximation selon laquelle la vitesse de propagation de la fonction G est égale à la célérité locale, c.-à-d. $\bar{c} = c + u$ pour l'onde divergente côté liquide et $\bar{c}_g = c_g - u$ pour l'onde convergente côté gaz, les relations Eq. (5.2.35a) et Eq. (5.2.35b) deviennent :

$$\frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt} = \ddot{a} - \frac{\eta}{2a} \frac{(c + \dot{a})(H + \dot{a}^2/2) - 2c\dot{a}^2}{c - \dot{a}} \quad (5.2.36a)$$

$$\frac{1}{\rho_g c_g} \frac{dp_g}{dt} = -\ddot{a} + \frac{\eta}{2a} \frac{(c_g - \dot{a})(H_g + \dot{a}^2/2) - 2c_g\dot{a}^2}{c_g + \dot{a}} \quad (5.2.36b)$$

La condition d'égalité des pressions $p = p_g$ à l'interface entre le gaz et le liquide s'écrit également sous forme dérivée par $dp/dt = dp_g/dt$. En sommant les deux relations Eq. (5.2.36a) et Eq. (5.2.36b) auxquelles on adjoint la condition précédente, on déduit la variation de pression au niveau de l'interface :

$$\left(\frac{dp}{dt} \right)^{-1} = -\frac{2a}{\eta} \left[\frac{\rho c + \rho_g c_g}{\rho \rho_g c c_g (I - I_g)} \right] \quad (5.2.37)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} I = \frac{(c + \dot{a})(H + \dot{a}^2/2) - 2c\dot{a}^2}{c - \dot{a}} \\ I_g = \frac{(c_g - \dot{a})(H_g + \dot{a}^2/2) - 2c_g\dot{a}^2}{c_g + \dot{a}} \end{cases} \quad (5.2.38)$$

Suivant l'approximation du pic d'enthalpie Eq. (5.2.3) $H(t) = H(0) \exp(-t/\theta_a)$ au niveau de l'interface, on peut évaluer la constante de temps de la fonction exponentielle décroissante à l'aide des conditions

initiales calculées dans le liquide :

$$\theta_a = -H(0) \left[\frac{dH}{dt}(a, 0) \right]^{-1} = -\rho(0)H(0) \left[\frac{dp}{dt}(a, 0) \right]^{-1} \quad (5.2.39)$$

ce qui, à l'aide de Eq. (5.2.37), permet d'exprimer explicitement la constante de temps θ_a sous la forme :

$$\theta_a = H(0) \frac{2a_0}{\eta} \left\{ \frac{\rho(0)c(0) + \rho_g(0)c_g(0)}{\rho_g(0)c(0)c_g(0) [I(0) - I_g(0)]} \right\} \quad (5.2.40)$$

où les grandeurs $I(0)$ et $I_g(0)$ sont évaluées à l'instant initial au niveau de l'interface liquide/gaz à partir des relations Eq. (5.2.38), et a_0 est le rayon initial de la cavité gazeuse.

La résolution de l'équation du mouvement Eq. (5.2.32) assortie des conditions initiales a_0 et \dot{a}_0 , et combinée au calcul de la constante de temps θ_a donnée par Eq. (5.2.40) permet de déterminer complètement l'évolution de la fonction $G(a, t)$ au niveau de l'interface :

$$G(a, t) = a^{n/2} \left[H(0) \exp(-t/\theta_a) + \frac{\dot{a}^2}{2} \right] \quad (5.2.41)$$

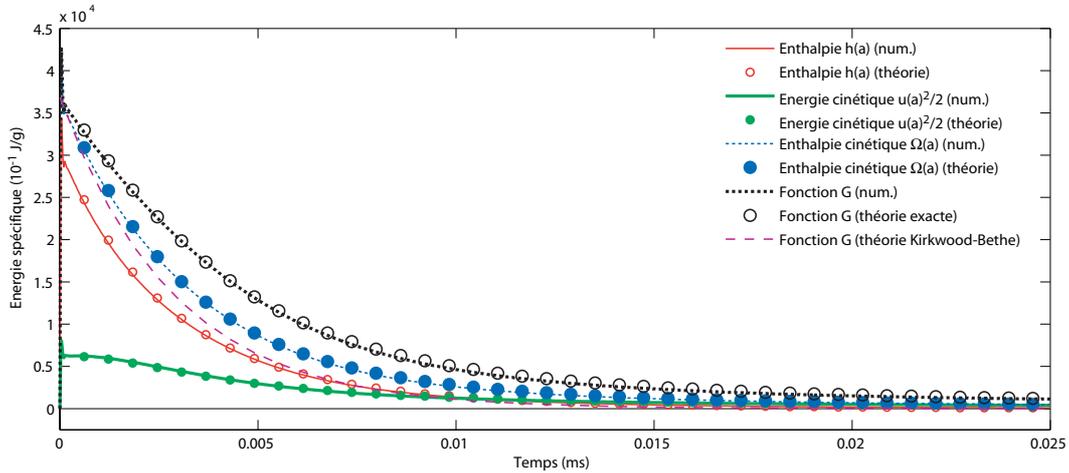


FIGURE 5.5 – Comparaison des solutions théorique et numérique pour les grandeurs calculées à l'interface liquide/gaz. La solution théorique est basée sur la double décroissance exponentielle Eq. (5.2.4) conforme aux résultats numériques. Sur cette figure sont tracées l'enthalpie h , l'énergie cinétique $\dot{a}^2/2$, l'enthalpie cinétique $\Omega = h + \dot{a}^2/2$ et la fonction $G = a\Omega$. La fonction G issue de la théorie de Kirkwood et Bethe correspond à l'approximation Eq. (5.2.42).

En fait, la théorie développée par Kirkwood et Bethe s'appuie sur une approximation de la fonction G différente de Eq. (5.2.41) et de la forme :

$$G(a, t) = G(a_0) \exp(-t/\theta_a) = a_0 \left(H(0) + \frac{\dot{a}_0^2}{2} \right) \exp(-t/\theta_a) \quad (5.2.42)$$

Les calculs numériques effectués en se plaçant dans les mêmes conditions initiales invalident cette approximation dans la mesure où le taux de décroissance de l'enthalpie (qui est caractérisé par la constante de temps θ_a) n'est pas identique à celui de l'énergie cinétique $\dot{a}^2/2$. Même si la forme Eq. (5.2.42) permet de simplifier grandement les développements suivants, la relation Eq. (5.2.41) est plus proche des résultats numériques obtenus. Cela étant, une modification de la décroissance $\exp(-t/\theta_a)$ est appliquée en considérant la double exponentielle Eq. (5.2.4) introduite au début de cette section. La comparaison des résultats obtenus par rapport aux modèles numériques est présentée sur la figure 5.5 en symétrie sphérique. Sur cette figure sont tracées l'enthalpie $h(a, t)$, l'énergie cinétique $\dot{a}^2/2$, l'enthalpie cinétique $\Omega(a, t) = h + \dot{a}^2/2$ et la fonction $G(a, t) = a\Omega$ à l'interface de la bulle dans les premiers instants d'expansion de la cavité gazeuse. Comme on le constate, les résultats obtenus sont quasiment identiques à la solution numérique, ce qui permet de valider l'approximation double exponentielle que l'on a introduite.

En vertu de son invariance le long des caractéristiques $c+u$, l'évaluation de la fonction G à l'interface permet maintenant d'estimer les inconnues du problème au niveau du front d'onde de choc. C'est l'objet des développements théoriques suivants.

5.2.6 Évaluation du temps de retard

L'origine des temps utilisée pour décrire les premiers instants de la détente des gaz dans le paragraphe précédent coïncide avec l'arrivée de l'onde de détonation à la frontière de l'explosif. Comme la fonction G est invariante le long des caractéristiques \bar{c} , et que l'on suppose qu'elle décroît continument au fur et à mesure de l'expansion de la cavité gazeuse, on peut décrire le système à l'aide d'une seule variable indépendante, notée τ que l'on assimile au temps t utilisé précédemment. L'expression pour τ s'écrit alors comme la différence entre le temps t_s mis par le front d'onde de choc pour se propager de la frontière de l'explosif en a_0 au point considéré (de coordonnée R), et le temps t_d mis par la perturbation $G(a, \tau)$ pour se propager de la frontière de la cavité de coordonnée $a(\tau)$ au point R , soit :

$$\tau = t_s - t_d \quad (5.2.43)$$

En rappelant la vitesse de propagation \bar{c} le long des caractéristiques à G constant, et la vitesse du front d'onde U_s , l'expression du temps précédente s'écrit encore en intégrant la vitesse sur la distance

de parcours des perturbations :

$$\tau = \int_{a_0}^R \frac{dr}{U_s} - \int_{a(\tau)}^R \frac{dr}{\bar{c}} \quad (5.2.44)$$

Dans cette expression, la première intégrale du membre de droite est intégrée sur le parcours du front d'onde et la seconde le long de la caractéristique à $G(a, \tau)$ constant. Dans le cadre de la théorie de Kirkwood-Bethe, la vitesse de propagation des perturbations \bar{c} est remplacée par $c + u$ qui constitue une hypothèse recevable proche du choc :

$$\tau = \int_{a_0}^R \frac{dr}{U_s} - \int_{a(\tau)}^R \frac{dr}{c + u} \quad (5.2.45)$$

Conformément aux résultats de la section précédente relatifs aux propriétés hydrodynamiques calculées au niveau du choc, la célérité locale $c + u$ et la vitesse du front d'onde U_s dépendent seulement de la fonction de Riemann σ . Elles s'écrivent respectivement à l'aide de Eq. (5.1.19a) et (5.1.19b). On introduit ces résultats dans l'expression du temps τ Eq. (5.2.45) pour obtenir :

$$\tau = \int_{a_0}^R \frac{dr}{c_0(1 + \beta\sigma)} - \int_{a(\tau)}^R \frac{dr}{c_0(1 + 2\beta\sigma)} \quad (5.2.46)$$

Le second terme intégral dans le membre de droite, c.-à-d. le temps de retard t_d , correspond au temps mis par toute perturbation pour se propager de la frontière de la cavité gazeuse de coordonnée $a(\tau)$ au front d'onde de choc de coordonnée R conformément à la figure 5.3. La généralisation de l'expression du temps de retard à tout point de coordonnée r le long de la caractéristique à $G(a, \tau)$ constant s'écrit :

$$t_d = \int_{a(\tau)}^r \frac{dr}{c_0(1 + 2\beta\sigma)} \quad (5.2.47)$$

Le développement théorique de cette expression est effectué en changeant la variable r pour σ à l'aide de la relation :

$$G(r, t) = r^{\eta/2} \Omega(r, t) = r^{\eta/2} c_0 \sigma (1 + \beta\sigma) \quad (5.2.48)$$

ce qui permet d'exprimer la variation dr en fonction de $d\sigma$:

$$dr = \frac{2}{\eta} \left\{ \frac{dG(r, t)}{c_0 \sigma (1 + \beta\sigma)} - G(r, t) \frac{c_0 (1 + 2\beta\sigma)}{[c_0 \sigma (1 + \beta\sigma)]^2} d\sigma \right\} \left[\frac{G(r, t)}{c_0 \sigma (1 + \beta\sigma)} \right]^{-1+2/\eta} \quad (5.2.49)$$

En notant que la variation dG est nulle le long de la caractéristique $c + u$ et après simplifications, on obtient finalement :

$$dr = -\frac{2r}{\eta} \frac{(1 + 2\beta\sigma)}{\sigma(1 + \beta\sigma)} d\sigma \quad (5.2.50)$$

Soit, après remplacement dans Eq. (5.2.47) :

$$t_d = -\frac{2}{\eta c_0} \int \frac{r}{\sigma(1 + \beta\sigma)} d\sigma \quad (5.2.51)$$

La relation Eq. (5.2.48) est équivalente à $r = [G(r, t)/\Omega(r, t)]^{2/\eta}$, ce qui permet d'écrire Eq. (5.2.51) sous la forme :

$$t_d = -\frac{2G(a, \tau)^{2/\eta}}{\eta c_0} \int \frac{d\sigma}{\sigma(1 + \beta\sigma)\Omega(r, t)^{2/\eta}} \quad (5.2.52)$$

En effectuant le nouveau changement de variable $\Omega = c_0\sigma(1 + \beta\sigma)$, on a $d\sigma = d\Omega/[c_0(1 + 2\beta\sigma)]$. On montre que $(1 + 2\beta\sigma) = (1 + 4\beta\Omega/c_0)^{1/2}$ (voir la relation Eq. (5.2.57) au paragraphe suivant), de sorte que l'expression Eq. (5.2.52) s'écrit encore :

$$t_d = -\frac{2G(a, \tau)^{2/\eta}}{\eta c_0} \int \frac{d\Omega}{\Omega^{1+2/\eta}(1 + 4\beta\Omega/c_0)^{1/2}} \quad (5.2.53)$$

Un dernier changement de variable est effectué en posant $y = 4\beta\Omega/c_0$ ce qui mène à l'expression suivante du temps de retard t_d :

$$t_d = -\frac{2}{\eta c_0} \left[\frac{4\beta G(a, \tau)}{c_0} \right]^{2/\eta} \int_{y(a)}^{y(r)} \frac{dy}{(1 + y)^{1/2} y^{(1+2/\eta)}} \quad (5.2.54)$$

avec les nouvelles bornes d'intégration $y(a) = 4\beta\Omega(a, \tau)/c_0$ et $y(r) = 4\beta\Omega(r, \tau)/c_0$. Dans Eq. (5.2.54), l'intégrale est évaluée numériquement par la méthode de Simpson. L'enthalpie cinétique $\Omega(r, \tau)$ pour la borne d'intégration supérieure est calculée à l'aide de :

$$\Omega(r, \tau) = \left(\frac{a}{r} \right)^{\eta/2} \Omega(a, \tau) \quad (5.2.55)$$

5.2.7 Évaluation de la position du choc

Partant de l'expression générale Eq. (5.2.46) de la variable temporelle τ « attachée » à l'évolution de l'interface de la cavité gazeuse, il s'agit d'évaluer la coordonnée du front d'onde de choc R en fonction de τ . Pour cela on introduit une nouvelle variable x qui représente la fonction G courante rapportée à sa valeur initiale sur l'interface liquide/gaz :

$$x = \frac{G(a, \tau)}{G(a_0, 0)} = \left(\frac{r}{a_0} \right)^{\eta/2} \frac{c_0 \sigma (1 + \beta \sigma)}{\Omega(a_0)} \approx \exp(-\tau/\theta_a) \quad (5.2.56)$$

où l'on a utilisé l'approximation du pic d'enthalpie Eq. (5.2.42) pour écrire la troisième égalité. De la deuxième égalité on tire une équation du second degré en σ :

$$\beta \sigma^2 + \sigma - x \left(\frac{a_0}{r} \right)^{\eta/2} \frac{\Omega(a_0)}{c_0} = 0$$

dont la solution s'écrit :

$$\beta \sigma = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\beta \Omega(a_0)}{c_0} x \left(\frac{a_0}{r} \right)^{\eta/2}} - 1 \right] \quad (5.2.57)$$

L'introduction de cette solution dans Eq. (5.2.46) donne :

$$c_0 \tau = \int_{a_0}^R \frac{2dr}{1 + \sqrt{1 + Ax (a_0/r)^{\eta/2}}} - \int_{a(\tau)}^R \frac{dr}{\sqrt{1 + Ax (a_0/r)^{\eta/2}}} \quad (5.2.58)$$

où l'on a posé $A = 4\beta \Omega(a_0)/c_0$ pour alléger l'écriture. La relation Eq. (5.2.58) est adimensionnée par rapport à la dimension initiale de la charge explosive a_0 de sorte que $r^* = r/a_0$, $R^* = R/a_0$ et $a^* = a/a_0$. Par ailleurs, en notant $\tau^* = \tau c_0/a_0$ le nouveau temps adimensionnel « attaché » à l'évolution de l'interface de la cavité gazeuse, Eq. (5.2.58) devient :

$$\tau^* = \int_1^{R^*} \frac{2dr^*}{1 + \sqrt{1 + Ax (r^*)^{-\eta/2}}} - \int_{a^*}^{R^*} \frac{dr^*}{\sqrt{1 + Ax (r^*)^{-\eta/2}}} \quad (5.2.59)$$

Pour calculer la propagation du front d'onde de choc, on se base sur une méthode incrémentale. Connaissant deux instants consécutifs τ_i^* ($i = 1, 2$) à l'interface liquide/gaz, on exprime la relation Eq. (5.2.59) à ces deux instants :

$$\tau_i^* = \int_1^{R_i^*} \frac{2dr^*}{1 + \sqrt{1 + Ax_i (r^*)^{-\eta/2}}} - \int_{a_i^*}^{R_i^*} \frac{dr^*}{\sqrt{1 + Ax_{(\tau_i)} (r^*)^{-\eta/2}}} \quad i = 1, 2 \quad (5.2.60)$$

où $a_i^* = a^*(\tau_i)$ représente le rayon de la cavité gazeuse calculé à l'instant τ_i . La variable R_i^* correspond à la coordonnée du front d'onde relative aux perturbations émanant de l'interface liquide/gaz à l'instant antérieur τ_i . L'expression de $x_{(\tau_i)}$ évaluée le long de la caractéristique $G(a, \tau_i)$ est donnée par la troisième égalité dans Eq. (5.2.56), soit :

$$x_{(\tau_i)} \approx \exp(-\tau_i/\theta_a) \quad i = 1, 2 \quad (5.2.61)$$

Dans les relations Eq. (5.2.60), la première intégrale du membre de droite est calculée le long du parcours du front d'onde de choc. Le paramètre x_i varie donc entre une valeur maximum calculée à l'instant initial $\tau = 0$, et une valeur minimum évaluée à la coordonnée R_i^* . À l'aide de la troisième égalité dans Eq. (5.2.56), on a donc :

$$x_i \in [1 ; \exp(-\tau_i/\theta_a)] \quad i = 1, 2 \quad (5.2.62)$$

On peut transformer la première intégrale dans la relation Eq. (5.2.60) pour $i = 2$ en décomposant le domaine d'intégration en deux sous-domaines $[1 ; R_1^*]$ et $[R_1^* ; R_2^*]$ le long du front d'onde :

$$\int_1^{R_2^*} \frac{2dr^*}{1 + \sqrt{1 + Ax_2 (r^*)^{-\eta/2}}} = \int_1^{R_1^*} \frac{2dr^*}{1 + \sqrt{1 + Ax_1 (r^*)^{-\eta/2}}} + \int_{R_1^*}^{R_2^*} \frac{2dr^*}{1 + \sqrt{1 + Ax_{12} (r^*)^{-\eta/2}}} \quad (5.2.63)$$

où $x_{12} \in [\exp(-\tau_1/\theta_a) ; \exp(-\tau_2/\theta_a)]$

Suivant Eq. (5.2.60) et Eq. (5.2.63) on exprime alors l'incrément temporel $\delta\tau^* = \tau_2^* - \tau_1^*$ sous la forme :

$$\delta\tau^* = \int_{R_1^*}^{R_2^*} \frac{2dr^*}{1 + \sqrt{1 + Ax_{12} (r^*)^{-\eta/2}}} - \int_{a_2^*}^{R_2^*} \frac{dr^*}{\sqrt{1 + Ax_{(\tau_2)} (r^*)^{-\eta/2}}} + \int_{a_1^*}^{R_1^*} \frac{dr^*}{\sqrt{1 + Ax_{(\tau_1)} (r^*)^{-\eta/2}}} \quad (5.2.64)$$

L'objectif de cette partie étant de déterminer la position du front d'onde au cours du temps par une méthode incrémentale, si l'on suppose connue la coordonnée R_1^* du front d'onde relative à l'instant τ_1^* , la seule inconnue dans Eq. (5.2.64) est la coordonnée R_2^* du choc relative à l'instant suivant τ_2^* attaché à l'interface de la cavité gazeuse. Pour les calculs, on fait apparaître une intégrale unique bornée par la coordonnée R_2^* en décomposant la deuxième intégrale dans Eq. (5.2.64) en deux sous-domaines $[a_2^* ; R_1^*]$ et $[R_1^* ; R_2^*]$ de sorte que l'incrément $\delta\tau^*$ entre deux instants consécutifs à la surface de la bulle peut s'écrire sous la forme générale :

$$\delta\tau^* = J_1 - J_2 + J_3 \quad (5.2.65)$$

L'expression de chaque intégrale J_1 , J_2 et J_3 est donnée par :

$$J_i = \int_{a_i^*}^{R_1^*} \frac{dr^*}{\sqrt{1 + Ax_{(\tau_i)}(r^*)^{-\eta/2}}} \quad i = 1, 2 \quad (5.2.66a)$$

$$J_3 = \int_{R_1^*}^{R_2^*} \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 + Ax_{12}(r^*)^{-\eta/2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + Ax_{(\tau_2)}(r^*)^{-\eta/2}}} \right] dr^* \quad (5.2.66b)$$

Le calcul incrémental est effectué en cherchant, pour chaque incrément $\delta\tau^*$, la coordonnée du front d'onde R_2^* telle que l'intégrale J_3 vérifie la relation Eq. (5.2.65). Dans cette relation en effet, seul le terme J_3 est inconnu, les autres termes étant complètement déterminés par la variable τ calculée à l'interface de la cavité gazeuse. A chaque incrément $\delta\tau^*$, la valeur cible pour J_3 est notée J_3^0 telle que :

$$J_3^0 = \delta\tau^* - J_1 + J_2 \quad (5.2.67)$$

Une difficulté réside cependant dans le calcul de la variable x_{12} intervenant dans le premier terme de l'intégrale dans Eq. (5.2.66b). On rappelle que ce terme est intégré le long de la discontinuité de choc. La variable x_{12} doit en outre respecter les conditions suivantes aux bornes de l'intégrale dans Eq. (5.2.66b) :

$$\begin{cases} x_{12} = \exp\left(-\frac{\tau_1}{\theta_a}\right) = \exp\left(-\frac{a_0 \tau_1^*}{c_0 \theta_a}\right) & \text{pour } J_3 = 0 \\ x_{12} = \exp\left(-\frac{\tau_2}{\theta_a}\right) = \exp\left(-\frac{a_0 [\tau_1^* + \delta\tau^*]}{c_0 \theta_a}\right) & \text{pour } J_3 = J_3^0 \end{cases} \quad (5.2.68)$$

En l'absence de description explicite de la variable x_{12} , une approximation linéaire du terme dans l'exponentielle respectant les conditions données par Eq. (5.2.68) est utilisée :

$$x_{12} = \exp\left(-\frac{\tau_2}{\theta_a}\right) = \exp\left(-\frac{a_0 [\tau_1^* + \delta\tau^* J_3/J_3^0]}{c_0 \theta_a}\right) \quad (5.2.69)$$

Ainsi, pour chaque incrément temporel $\delta\tau^*$, le calcul itératif de l'intégrale J_3 à partir des relations Eq. (5.2.66b) et (5.2.69) est effectué pour déterminer la position du front d'onde de choc correspondant à la valeur cible J_3^0 . Les intégrales J_1 , J_2 et J_3 sont calculées par la méthode de Simpson basée sur une interpolation quadratique par morceau de la fonction à intégrer. En notant $y = f(x)$ la fonction à intégrer

entre les bornes x_1 et x_3 , et $x_2 = (x_1 + x_3)/2$ le point milieu de l'interpolation quadratique, l'intégrale J est approximée par la relation qui fournit une valeur exacte pour une fonction f quadratique.

$$J = \int_{x_1}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{1}{6} (x_3 - x_1) [f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)] \quad (5.2.70)$$

Les résultats obtenus par cette méthode sont comparés à la solution numérique en champ proche pour des distances inférieures à 10 fois le rayon de la charge explosive. Ils sont présentés sur la figure 5.6 où l'on trace la position théorique du front d'onde dans l'espace (r, t) . Ces résultats sont très proches de ceux obtenus numériquement par la méthode ALE Multi-Matériaux, ce qui permet de valider les développements théoriques précédents. On présente également sur la figure 5.6 les évolutions temporelles théorique et numérique de l'interface liquide/gaz qui sont tout à fait semblables. Dans la zone de liquide perturbé par le passage du choc, les caractéristiques le long desquelles la fonction G est invariante sont tracées. On montre ainsi nettement que les perturbations nées à la surface de la bulle dans les tous premiers instants de l'émission du choc (aux alentours de $5 \mu\text{s}$) ne rejoignent la discontinuité de choc qu'après un parcours de l'ordre de 10 fois le rayon de la charge.

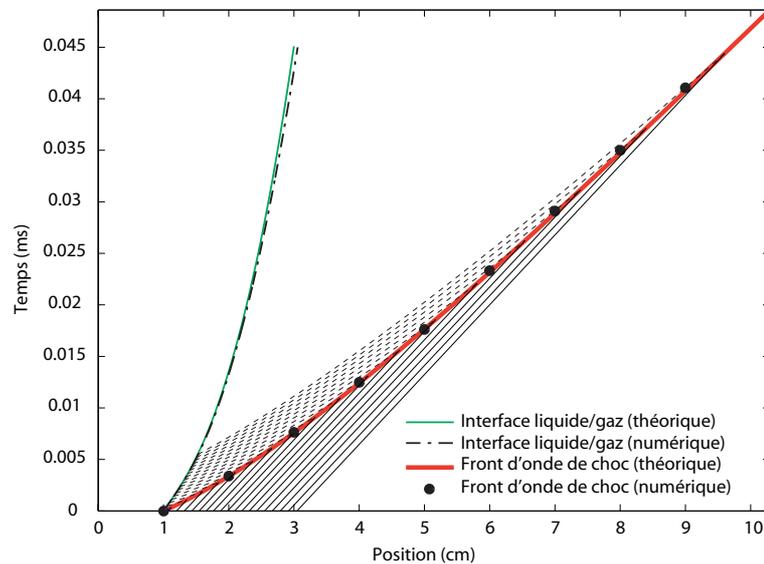


FIGURE 5.6 – Comparaison théorie et numérique pour les coordonnées de l'interface liquide/gaz et de la discontinuité de choc en champ proche ($r \leq 10a_0$). Les abscisses correspondent à la coordonnées spatiale r , et les ordonnées au temps t . Les caractéristiques de célérité $c + u$ le long desquelles la fonction G se propage de façon invariante sont également tracées dans la zone perturbée par le passage du choc.

5.2.8 Calcul de la pression de choc

Connaissant la position du front d'onde de choc au cours du temps, on calcule la pression de choc à l'aide de l'équation d'état du liquide Eq. (5.2.1), que l'on écrit ici en fonction de σ :

$$\frac{p + B}{p_0 + B} = \left[1 + \frac{(n-1)}{2c_0} \sigma \right]^{2n/(n-1)} \quad (5.2.71)$$

L'expression de $\beta\sigma$ donnée par Eq. (5.2.57) s'écrit encore sous la forme :

$$\beta\sigma = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{4\beta G(a, \tau)}{c_0 r^{n/2}} - 1} \right] \quad (5.2.72)$$

où l'on a utilisé les relations Eq. (5.2.48) et (5.2.56). En notant $\bar{p} = p + B$ et $\bar{p}_0 = p_0 + B$, la pression Eq. (5.2.71) en tout point de coordonnée r le long de la caractéristique à $G(a, \tau)$ constant est donc décrite par :

$$\frac{\bar{p}}{\bar{p}_0} = \left\{ 1 + \frac{(n-1)}{(n+1)} \left[\left(1 + \frac{4\beta G(a, \tau)}{c_0 r^{n/2}} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{2n/(n-1)} \quad (5.2.73)$$

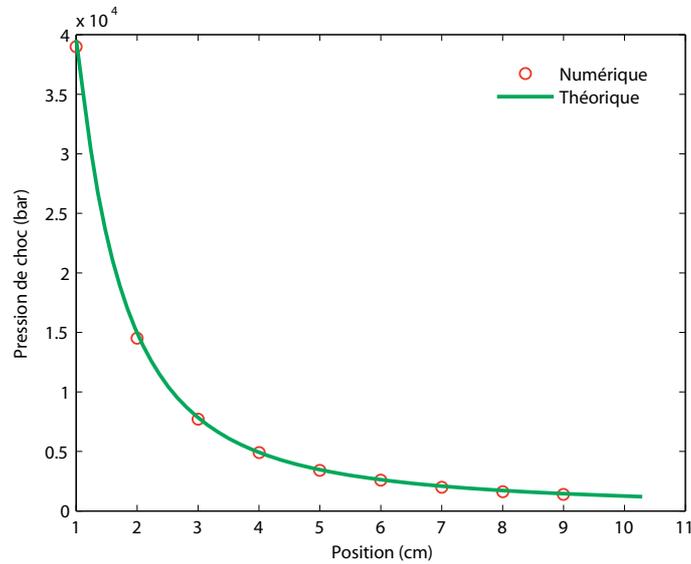


FIGURE 5.7 – Résultats théorique et numérique pour la pression de choc en champ proche. La solution théorique est issue de Eq. (5.2.73) et les valeurs reportées à partir des calculs numériques correspondent au pic de pression mesuré en un point fixe au passage du choc.

On trace sur la figure 5.7 l'évolution de la pression de choc calculée par Eq. (5.2.73) en fonction de la coordonnée spatiale r . Ces tracés sont relatifs au champ proche pour des distances inférieures à 10 fois le rayon de la charge. Comme précédemment, les calculs numériques présentent des résultats tout à fait comparables.

5.3 Simulations numériques relatives aux ondes de choc

5.3.1 Domaine de validité du modèle théorique en champ proche

À la suite des développements théoriques précédents, on peut s'interroger sur la pertinence du modèle de Kirkwood-Bethe concernant les tous premiers instants de la propagation du choc. En effet, la détonation n'est pas prise en compte en tant que telle, comme on l'a étudié au chapitre 4. Au lieu de ça, un modèle que l'on qualifiera de « détonation instantanée » fournit une équivalence qui est basée sur une pression initiale uniforme dans tout l'explosif. Le problème ainsi décrit s'apparente à celui d'une cavité gazeuse initialement comprimée en contact avec l'eau environnante. La détente des gaz est déclenchée, à l'instant initial, en rompant une membrane imaginaire représentative de la frontière de l'explosif. Ce processus génère alors un choc de forte intensité dans l'eau environnante qui se veut représentatif du choc sous-marin provoqué par l'explosion au réel.

Conformément aux résultats obtenus pour les ondes explosives qui ont été présentés sur la figure 4.4 en page 105, il est évident que la théorie ainsi décrite néglige l'interaction de l'onde de détonation avec la frontière extérieure de l'explosif. On peut donc supposer, a priori, que cette approximation sous-estime les niveaux de pression transmis dans l'eau. Pour s'en assurer, et pour estimer l'erreur commise, des calculs numériques sont effectués ici sous différentes hypothèses. Comme précédemment, on considère une charge de TNT sphérique dont le rayon est égal à 1 cm immergée dans un domaine supposé infini. La masse volumique initiale de l'explosif est de 1.63 g/cm^3 et la masse correspondante de 6.8 g. Les calculs effectués se basent sur la méthode Eulérienne 2D axisymétrique en modélisant les deux matériaux en présence, l'explosif et l'eau.

Le premier niveau d'approximation est conforme aux hypothèses prises par Kirkwood et Bethe pour bâtir leur théorie. Les gaz résiduels sont initialement comprimés et l'écoulement est nul au sein de l'explosif. Le processus de détente suit une loi de gaz parfait dont le coefficient polytropique $\gamma = 3$ est cohérent avec celui de produits de détonation dans le plan de Chapman-Jouguet. Le deuxième niveau de modélisation prend en compte le processus de détonation décrit au chapitre précédent. Cependant, la détente des gaz résiduels suit également une loi de gaz parfait (avec $\gamma = 2.73$ pour le TNT) qui, on l'a vu, n'est pas représentative du comportement des gaz brûlés. Le dernier modèle se veut représentatif du processus de détonation et de détente en utilisant l'équation JWL du TNT.

Les résultats obtenus pour chaque modèle sont présentés sur les figures 5.8 et 5.9 suivantes. Les tracés de la figure 5.8 concernent l'évolution de l'interface liquide/gaz en terme de position, vitesse et pression. Les figures 5.9(a) et 5.9(b) présentent les profils de pression calculés dans l'eau en deux points fixes situés à des distances égales respectivement à 3 et 6 fois le rayon initial de la charge a_c . Dans tous ces tracés, les résultats issus du modèle de détonation instantanée sont décalés en abscisse de $1.44 \mu\text{s}$. Ce décalage temporel correspond au temps mis par l'onde de détonation dans les deux autres modèles pour atteindre la surface de l'explosif, c.-à-d. $a_c/U_d = 1/693 \text{ ms}$. On se place ainsi à la même origine temporelle pour l'émission du choc dans l'eau.

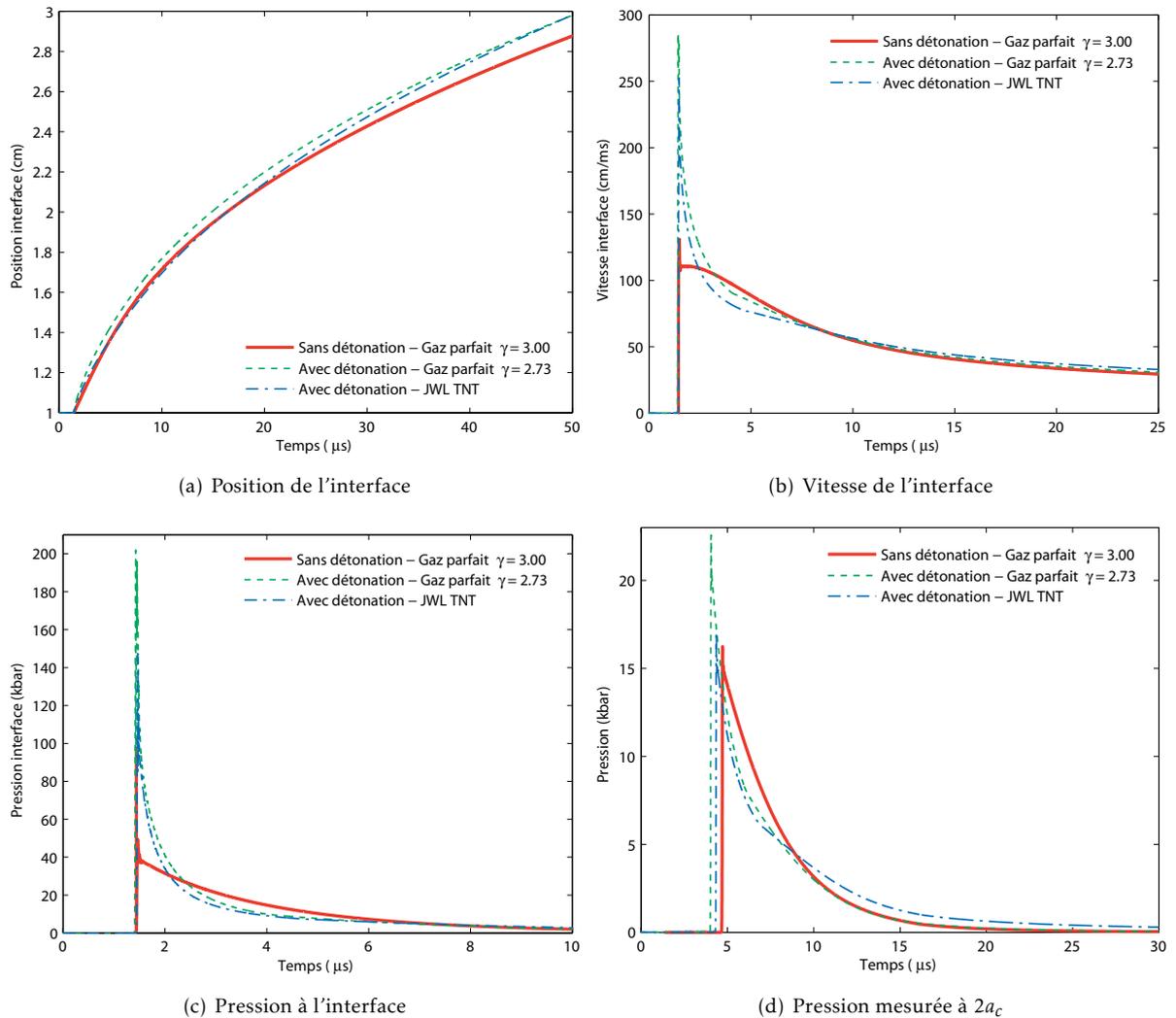


FIGURE 5.8 – Évolutions temporelles du rayon de la cavité gazeuse 5.8(a), de sa vitesse 5.8(b), de la pression à l'interface 5.8(c), et de la pression calculée à 2 rayons de charge 5.8(d). Trois modélisations différentes sont étudiées ; modèle de détonation instantanée avec détente des gaz initialement comprimés suivant une loi de gaz parfait ($\gamma = 3$), détonation et détente suivant une loi de gaz parfait ($\gamma = 2.73$), détonation et détente suivant l'équation d'état JWL du TNT.

Les figures 5.8(b) et 5.8(c) mettent nettement en évidence l'interaction de l'onde de détonation avec l'eau environnante. Elle se caractérise par une mise en vitesse quasi-instantanée de l'interface accompagnée d'un choc de forte intensité dont les niveaux dépendent du modèle utilisé. Pour la détonation instantanée, la vitesse maximum est de l'ordre de 110 cm/ms pour un pic de pression de 40 kbar environ. Ces valeurs sont conformes aux résultats théoriques présentés dans la section précédente. En

revanche, la prise en compte de la détonation dans les modèles modifie très nettement ces niveaux avec des pics de vitesse supérieurs à 250 cm/ms et des pressions comprises entre 150 et 200 kbar. Cela étant, les décroissances de vitesse et de pression sont, dans ce cas, beaucoup plus rapides que dans le modèle de détonation instantanée. L'observation sur la figure 5.8(d) des pressions calculées à la distance $2a_c$ montre que les différences de niveaux sont beaucoup moins marquées qu'à l'interface, comme le laissait supposer la théorie [Brinkley et Kirkwood, 1950].

Pour les distances de propagation supérieures telles que présentées sur les figures 5.9(a) et 5.9(b), les profils de pression deviennent tout à fait comparables. Les différences que l'on constate alors proviennent du coefficient γ qui, pour l'équation JWL du TNT, n'est pas constant et tend vers une valeur asymptotique de l'ordre de 1.25 en fin de détente. Les équations de gaz parfait à coefficient polytropique constant ne rendent pas compte de ce comportement réel. Cela explique la plus grande vitesse de décroissance de la pression pour les deux premiers modèles. Cela étant, ces résultats valident, d'une certaine manière, le modèle théorique développé dans la section précédente dès lors que l'on s'intéresse au profil de choc à des distances supérieures ou égales à 3 fois le rayon de la charge. Pour des distances inférieures, l'interaction de l'onde de détonation à la frontière de l'explosif exerce une influence non-négligeable sur les niveaux et les profils de pression transmis dans l'eau. La théorie prouve dans ce cas ses limites et doit être appliquée, nous semble-t-il, avec prudence.

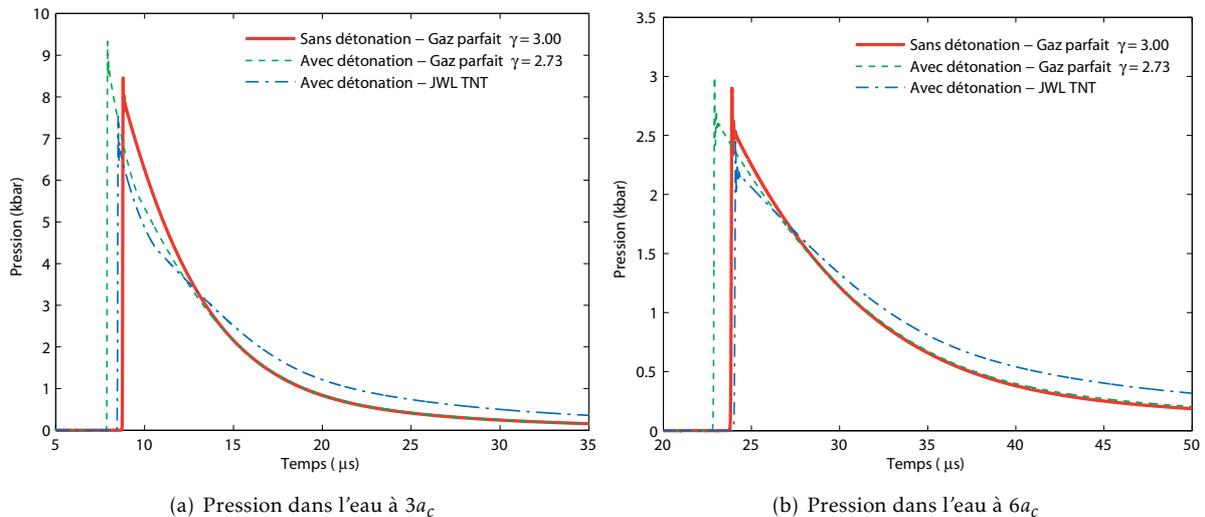


FIGURE 5.9 – Pressions calculées dans l'eau à 3 et 6 rayons de charge pour les différents modèles : détonation instantanée avec gaz parfait, détonation avec gaz parfait, et détonation avec JWL.

5.3.2 Applications de la méthode de projection

On s'intéresse dans ce qui suit à l'analyse de la méthode de projection appliquée à la modélisation des ondes de choc. On étendra également l'analyse à la dynamique de bulle. L'idée principale qui a

motivé le développement de cette technique particulière est de pouvoir, par des analyses successives, résoudre un même problème physique gouverné par des échelles de temps et d'espace très différentes suivant la chronologie des événements qui lui sont associés. Dans le cadre des explosions sous-marines, les phénomènes de propagation des ondes de détonation et des ondes de choc se déroulent, en soi, sur des échelles spatio-temporelles très différentes ; de l'ordre du centimètre et de la microseconde pour les premiers, et de l'ordre du mètre et de la milliseconde pour les seconds. Il semble alors tout à fait naturel de chercher à les résoudre en adaptant la grille de calcul (donc le pas d'intégration temporelle en explicite) au problème étudié.

En guise d'application, on considère une onde de choc cylindrique transmise dans l'eau suite à la détonation d'un explosif TNT supposé infiniment long dans la dimension hors plan. Comme précédemment, la masse volumique de l'explosif est de 1.63 g/cm^3 et son rayon initial a_c est égal à 1 cm, soit une masse par unité de longueur $m_c = 5.12 \text{ g/cm}$. Les calculs sont basés sur la formulation 2D axisymétrique suivant la description Eulérienne. La géométrie cylindrique de l'onde est reproduite en modélisant une tranche de modèle perpendiculaire à l'axe de la charge et en bloquant l'écoulement dans cette direction. Les tests numériques sont effectués à partir de trois finesses de maillage différentes ; grille n°1 avec un maillage fin de 1000 éléments dans la direction de propagation (dont 100 éléments dans l'explosif), grille n°2 présentant un maillage intermédiaire avec 500 éléments (dont 50 éléments dans l'explosif), grille n°3 pour un maillage grossier avec 100 éléments (dont 10 éléments dans l'explosif). Les tailles d'éléments correspondantes sont respectivement de 0.01, 0.02 et 0.10 cm et homogènes le long du domaine modélisé. On s'intéresse dans ce qui suit aux résultats calculés en champ proche pour des distances de tir inférieures à $10 a_c$.

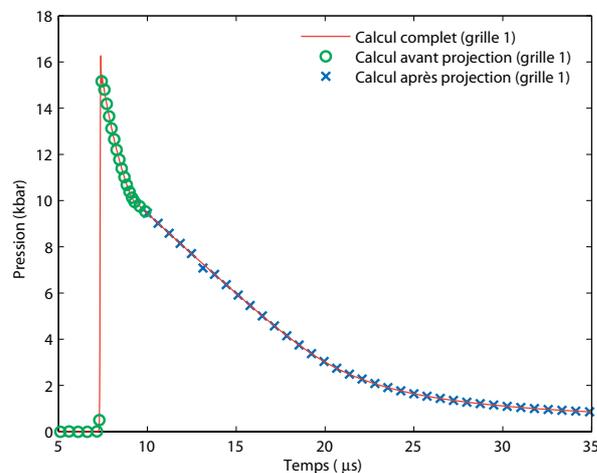


FIGURE 5.10 – *Onde de choc cylindrique : comparaison de la pression à une distance $3 a_c$ obtenue sans projection (modèle complet) et avec projection sur grille de calcul Eulérienne identique*

Le test élémentaire présenté sur la figure 5.10 concerne la projection des résultats d'une grille 2D sur une grille 2D identique. Le calcul complet s'écoule sur un temps physique de 0 à 35 μs . Les résultats

ainsi obtenus sont comparés aux résultats issus d'un premier calcul de 0 à 10 μs , projetés ensuite sur la même grille pour l'initialisation du calcul suivant de 10 à 35 μs . Les pressions calculées en un point fixe situé à $3a_c$ sont présentées sur la figure 5.10. On vérifie ainsi que les résultats sont identiques, ce qui constitue une première validation simple, mais essentielle, de l'implémentation de la méthode de projection dans le code de calcul.

La figure 5.11 présente les pressions calculées aux distances 3 et $6a_c$ sur les grilles 1 à 3. Des résultats supplémentaires pour des maillages très relâchés comptant 50, 20 et 10 éléments sont également présentés. Ces maillages correspondent respectivement à 5, 2 et 1 élément dans le domaine explosif initial. Si la détente derrière le front d'onde est bien représentée pour les grilles 1 à 3, la discontinuité de choc est quant à elle différente. C'est une conséquence directe de la discrétisation spatiale du problème et du lissage de la discontinuité de choc en une solution continue dépendant de l'amortissement numérique lié à la viscosité de choc. Les oscillations en aval du front d'onde sont directement liées à cet amortissement numérique et leur fréquence dépend de la finesse de maillage. Ces différences sont plus significatives pour les maillages grossiers où la discontinuité de choc s'étale sur des distances importantes (proportionnelles à la taille d'élément) et l'amplitude des oscillations en aval très importante.

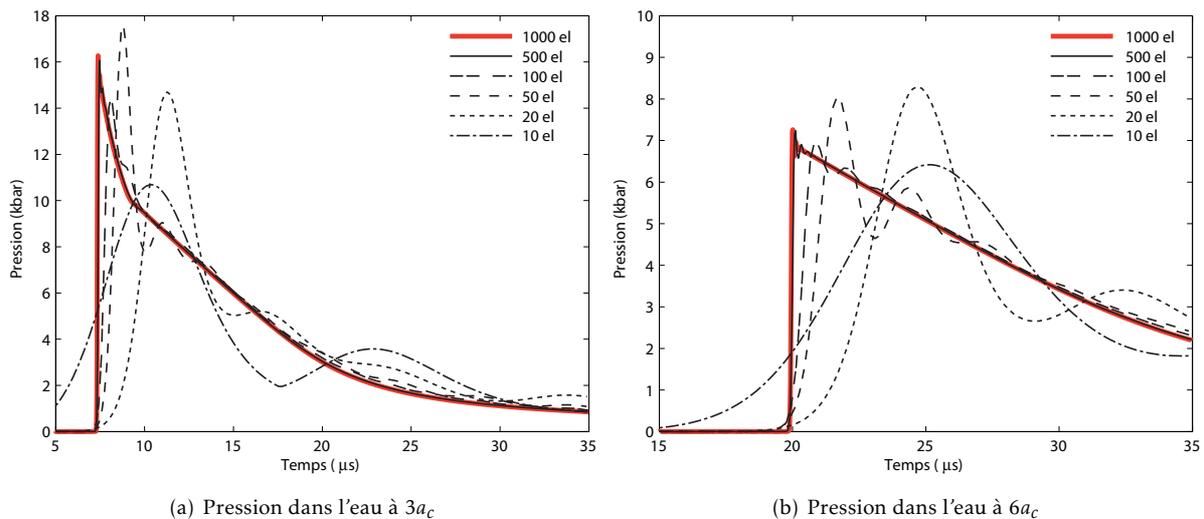


FIGURE 5.11 – *Onde de choc cylindrique : comparaison des pressions calculées aux distances 3 et $6a_c$ en fonction de la finesse de maillage*

Outre ces interprétations numériques, il est important de constater ici que, quelque soit la finesse de maillage dans l'explosif (pour les grilles 1 à 3 le nombre d'éléments représentant l'onde de détonation varie de 10 à 100), le front d'onde de choc transmis dans le liquide se « dégrade » rapidement dans les premiers instants de la propagation de sorte que la forme du choc est pratiquement conservée même dans le cas de maillages « grossiers ». Il faut cependant s'entendre sur la limite à donner entre maillage fin et grossier, ce qui nécessite d'établir un ou plusieurs critères physiques liés à la représentation des

ondes de choc. Pour cela, on peut notamment considérer :

- * la longueur d'étalement du choc en fonction de la distance de tir, donc de la constante de temps θ du choc mesurée en aval de la discontinuité,
- * le nombre d'éléments nécessaires à la représentation de la détente dans la longueur d'onde du choc $U_s \theta$
- * la conservation de l'impulsion sous la courbe de pression dans la mesure où seulement une partie (basse fréquence) du choc est susceptible d'exciter les structures impactées

Le constat précédent confirme les hypothèses prises dans les modèles théoriques utilisés pour décrire la propagation de l'onde de choc en champ proche, qui s'appuient, non pas sur une onde de détonation réelle, mais sur l'hypothèse de détonation instantanée de tout l'explosif avant transmission de l'onde de choc dans le milieu environnant, c.-à-d. pression uniforme des produits de détonation avant détente. On notera toutefois que ces hypothèses ne sont pas recevables dans les premiers instants en champ très proche ($r < 3 a_c$) comme montré précédemment pour l'onde de choc sphérique sur les figures 5.8 et 5.9.

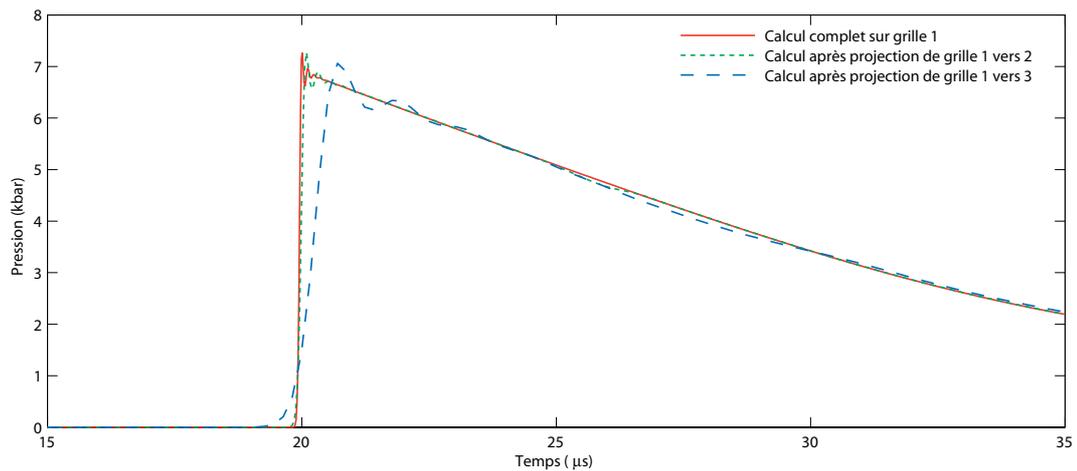


FIGURE 5.12 – Onde de choc cylindrique : pression à $6a_c$ avec projection d'un maillage fin sur un maillage grossier

On présente en figure 5.12 les pressions calculées sur les grilles 2 et 3 après projection des résultats issus de la grille 1. La comparaison de ces résultats avec ceux de la figure 5.11(b) obtenus sur les mêmes grilles 2 et 3 sans projection sont très semblables. Ainsi on constate que la projection d'un maillage fin vers un maillage grossier n'améliore pas la qualité des résultats si on les compare à ceux d'un calcul complet sur maillage grossier sans phase de projection. Ce constat n'a rien d'étonnant en soi dans la mesure où la phase de projection revient à « moyenner » les variables (énergie, quantité de mouvement) dans les cellules et que les grandeurs sont calculées avec un seul point d'intégration au centre de l'élément.

Afin de guider les choix méthodologiques, la technique de projection doit donc être utilisée en fonc-

tion de la précision des résultats attendus et des phénomènes physiques qui régissent le problème. On a en effet montré qu'une représentation physique de l'onde de détonation (en terme de pic de pression ou de détente derrière le front d'onde) dépendait uniquement du nombre d'éléments utilisés pour décrire les phénomènes, et ce de façon forfaitaire, quelque soit la taille du domaine explosif étudié (propriété d'onde auto-semblable). Le nombre d'éléments nécessaires pour faire converger la solution dans un matériau comme le TNT est de l'ordre de plusieurs centaines, ce qui, en fonction de la taille initiale de l'explosif (généralement de l'ordre du centimètre), est inadapté au calcul de l'onde de choc transmise dans le milieu environnant. La projection des résultats du maillage fin issus de la phase de détonation, sur une grille de calcul plus grossière (mais adaptée au phénomène de propagation du choc) peut donc utilement être mise en oeuvre ; ceci afin de ne pas pénaliser la condition CFL sur le pas de temps, tout en préservant la qualité des résultats au niveau du choc. L'application de la méthode à une onde de choc sphérique issue de la détonation de 500 kg de TNT est illustrée sur la figure 5.13. Les pressions en champ lointain sont calculées à différentes distances du point source après projection des résultats issus du processus de détonation. Les pressions de choc obtenues sont comparées aux données empiriques issues du Tab. 2.2 en page 26 et montrent leur très bonne adéquation. De manière anecdotique, on note des irrégularités dans la phase de détente, d'autant plus remarquables en échelle logarithmique. Pour le choc calculé à 5 m par exemple, celles-ci apparaissent aux environs de 5, 10 et 18 ms. Elles correspondent aux émissions successives d'ondes secondaires qui sont piégées entre le centre du modèle et la surface de la bulle. Loin de n'être qu'un problème numérique qui serait lié à l'hypothèse de sphéricité parfaite des ondes, ces irrégularités apparaissent également dans les profils de pression mesurés. Il suffit pour s'en convaincre de se référer à [Cole, 1965] par exemple, qui présente des résultats expérimentaux analogues.

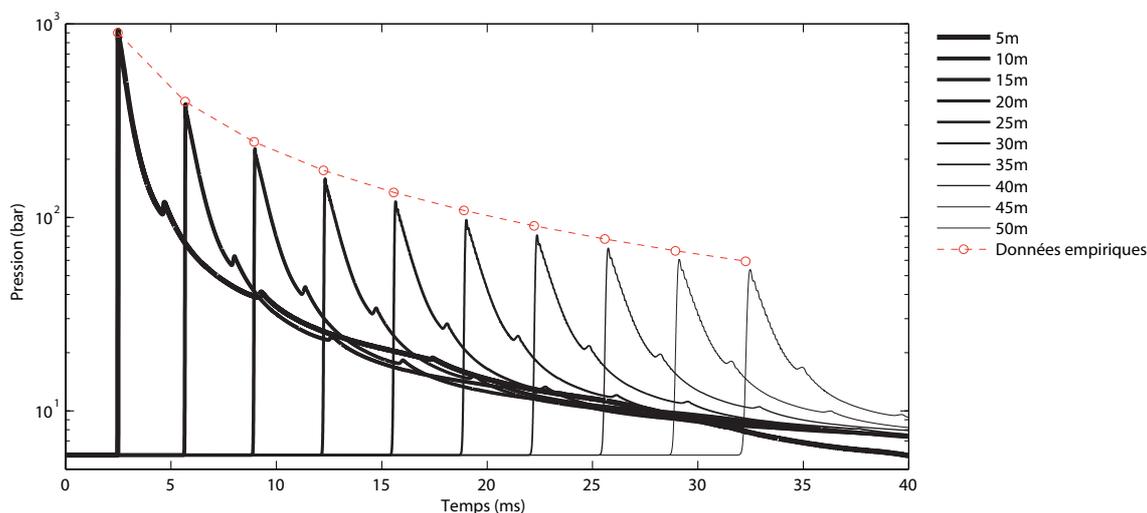


FIGURE 5.13 – Pressions (en échelle logarithmique) calculées en eau libre à différentes distances après projection, pour une charge TNT de 500 kg immergée à 50 m. Les résultats issus des données empiriques pour la pression de choc (voir Tab. 2.2 en page 26) sont tracés à titre de comparaison

Concernant l'application de la méthode de projection, on étend cette analyse pour l'étude de la dynamique de bulle des gaz résiduels. En effet, que l'on soit en champ proche ou lointain, le volume occupé par la bulle initialement comprimée se détend suivant un processus dont les ordres de grandeurs en temps (de quelques dizaines à plusieurs centaines de millisecondes) ou en espace (de plusieurs mètres) sont beaucoup plus grands que dans la phase préliminaire de détonation (microsecondes, millimètres). Abstraction faite des réflexions d'ondes piégées entre la surface de la bulle et son centre que l'on vient d'évoquer, cette phase ne nécessite pas, a priori, un domaine de calcul aussi fin que pour l'onde de choc primaire. Les gradients de pression au sein de la bulle sont en effet très faibles dans les instants ultérieurs de la détente. Cela étant, l'état thermodynamique des gaz à l'issue du processus de détonation conditionne directement la dynamique de bulle. Cette évidence n'apporte rien de plus dans l'exposé, sinon à dire l'inverse, à savoir, qu'une mauvaise évaluation de l'état thermodynamique des produits de détonation est susceptible d'influer directement sur l'hydrodynamique de bulle. Au vu des résultats de convergence spatiale pour l'onde de détonation, on peut donc s'interroger sur la dynamique de bulle aux temps longs. On prolonge ainsi le raisonnement en regardant l'influence du nombre d'éléments utilisés en détonique sur l'évolution temporelle de la bulle.

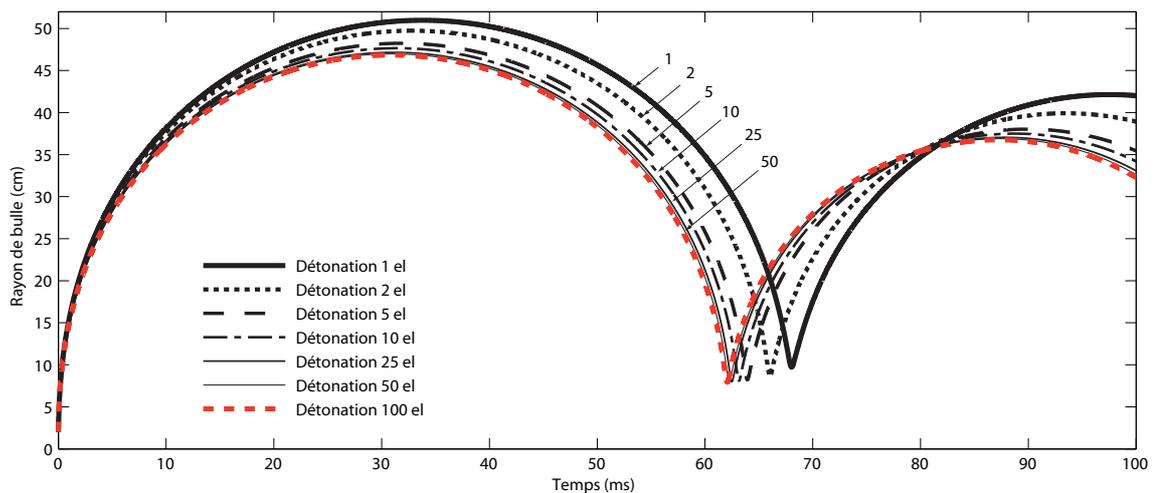


FIGURE 5.14 – Évolution temporelle du rayon de la bulle des gaz résiduels en fonction du nombre d'éléments modélisés dans le rayon d'explosif initial $a_c = 2$ cm pour la phase de détonation (55 g de TNT). Explosion simulée à une profondeur de 10 m, caractérisée par un rayon maximum empirique de 47.3 cm et une pseudo-période de 64.5 ms suivant le Tab. 2.2 de la page 26

Les résultats obtenus pour une bulle parfaitement sphérique (modèle Eulérien 2D axisymétrique) sont tracés sur la figure 5.14. De toute évidence, l'influence est réelle et l'erreur commise, en amplitude comme en période de pulsation, est non-négligeable dès lors que le nombre d'éléments modélisés dans un rayon d'explosif est inférieur à 10. Cette erreur est due à la mauvaise représentation du processus de détonation, donc de l'évaluation de l'énergie interne contenue dans la bulle avant le début de sa détente.

Pour contourner le problème, la technique de projection s'avère efficace. Elle est mise en œuvre à partir des résultats précis issus des processus de détonation et de propagation du choc. Leur projection sur une grille Eulérienne plus grossière et adaptée à la dynamique de bulle permet de poursuivre la résolution sans être pénalisé par le pas de temps, tout en garantissant des résultats fiables aux temps longs. La poursuite de notre étude relative aux explosions sous-marines concerne donc l'hydrodynamique de bulle formée à partir des produits de détonation. Elle est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Hydrodynamique de bulle et interactions

A la suite des chapitres précédents consacrés aux processus de détonation et de propagation des chocs sous-marins en champ proche, il s'agit d'étudier la dynamique de bulle des gaz résiduels produits par la détonation. Dans la séquence des événements liés aux explosions sous-marines, ce problème caractérise les chargements hydrodynamiques aux temps longs vus par les structures impactées. Pour les explosions lointaines, les mouvements de bulle sont susceptibles d'exciter les plus basses fréquences de la poutre navire et peuvent de ce fait, être extrêmement dommageables. Pour les explosions rapprochées, la présence de la structure dans l'environnement immédiat de la bulle influe directement sur son comportement dynamique. Dans ce cas, on observe généralement un jet de particules fluide qui se développe au moment du collapse de la bulle, et qui est dirigé vers les structures voisines. Ce dard liquide à grande vitesse combiné à la re-compression des gaz à l'intérieur de la bulle est susceptible de provoquer des endommagements supplémentaires importants, qui s'ajoutent aux effets initiaux du choc primaire en champ proche.

Pour guider nos choix méthodologiques, on étudie dans un premier temps la dynamique de bulle seule, hors interactions avec des obstacles éventuels. Suivant une démarche cohérente avec le reste de nos travaux, cette partie est effectuée en confrontant les résultats numériques aux modèles théoriques que l'on s'est ré-approprié dans le cadre de la thèse. En se plaçant dans les mêmes hypothèses, on détermine ainsi certains paramètres de modélisation nécessaires à la convergence de nos modèles. Ces travaux sont en cours de publication dans la revue internationale *Ocean Engineering*. Dans un second temps, un cas d'application en champ proche mettant en œuvre l'interaction fluide-structure et les effets combinés du choc primaire et de la bulle est étudié en confrontant les résultats obtenus à des mesures expérimentales. La modélisation de ce cas réel constitue l'aboutissement de nos travaux.

6.1 Hydrodynamique de bulle

6.1.1 Éléments théoriques et travaux antérieurs

Les modèles théoriques développés pour traduire le comportement dynamique des bulles d'explosion diffèrent par les hypothèses prises. Parmi les modèles existants, on peut distinguer d'une part, ceux ayant trait à l'étude combinée des pulsations et de la migration verticale de la bulle en direction de la surface libre [Doinikov, 2005], et d'autre part, ceux qui concernent les pulsations de bulle au sein d'un champ de pression hydrostatique considéré uniforme [Herring, 1941], [Kirkwood et Bethe, 1942], [Keller et Kolodner, 1956a], [Geers et Hunter, 1996]. Sous ces deux grandes classes de modèles, des hypothèses sont faites pour décrire les fluides en présence, à savoir, les produits de détonation (phase gazeuse), et l'eau environnante (phase liquide). Ces hypothèses sont liées à la prise en compte, ou non, de la compressibilité de l'eau, et aux effets d'ondes dans les gaz.

L'hypothèse générale, commune à tous ces modèles, est la forme supposée sphérique de l'interface liquide/gaz au cours du temps. Les relevés expérimentaux par imagerie rapide ou les simulations numériques montrent en effet que cette hypothèse est recevable pendant la majeure partie du cycle d'expansion/contraction de la bulle. Au moment du collapse toutefois, lorsque la bulle atteint son rayon minimum et que la compression des gaz résiduels est maximale, les effets liés à la migration déforment momentanément le contour de la bulle en le faisant passer d'une forme sphérique à une forme de « champignon » [Walters et Davidson, 1963]. Ce phénomène constitue une limitation importante aux hypothèses prises dans les modèles théoriques et nécessitent de recourir à des simulations numériques pour en étudier le comportement.

Les observations et les mesures d'explosions sous-marines au réel mettent en évidence des pertes d'énergie à chaque contraction de bulle comme présenté par exemple sur la figure 2.3 en page 17. Ces dissipations peuvent être attribuées à différents phénomènes, parmi lesquels ; l'émission d'ondes acoustiques secondaires au moment de la re-compression des gaz [Gilmore, 1952] [Hickling et Plesset, 1963], les forces de traînée associées à la migration de bulle [Heaton, 1986a], et les variations topologiques de l'interface liquide/gaz [Pedley, 1968], [Best et Blake, 1994]. Les transferts thermiques entre les gaz résiduels à haute température et l'eau ambiante constituent une autre source possible de dissipation, comme étudié dans [Agafonov et Popov, 1989] et [Naji Meidani et Hasan, 1997], mais ne sont généralement pas pris en compte en raison de la rapidité des phénomènes. Les effets liés à la présence de la surface et du fond marin sur la dynamique de bulle doivent également être appréhendés en fonction des configurations étudiées [Friedman, 1947].

Des simplifications apparaissent lorsque l'on souhaite traiter uniquement les pulsations de bulle en l'absence de migration verticale. C'est le cas lorsque le mouvement de translation est négligeable devant le mode de respiration de la bulle. On suppose alors que le mouvement radial de l'interface sphérique liquide/gaz est uniforme et qu'il est décrit par l'évolution temporelle du rayon $a(t)$. Pour les bulles d'explosion, plusieurs modèles disponibles dans la littérature ont été développés dans le passé pour traduire ce comportement. Les plus importants sont présentés ici, depuis de modèle de Rayleigh-

Plesset faisant l'hypothèse de liquide incompressible jusqu'aux développements relativement récents de [Geers et Hunter, 2002] [Hunter et Geers, 2004] et [Geers et Park, 2005]. Ces derniers sont implémentés dans le code de calcul USA pour tenir compte des effets combinés du choc et de la bulle. Ils utilisent l'approximation DAA [Geers, 1978] écrite au niveau de l'interface liquide/gaz pour tenir compte des effets liés à la compressibilité dans les deux milieux.

En faisant l'hypothèse d'écoulement incompressible dans l'eau et en négligeant les pertes d'énergie liées au rayonnement des ondes acoustiques à l'infini, le rayon de la bulle $a(t)$ en fonction du temps satisfait l'équation différentielle ordinaire Eq. (6.1.1). Dans sa forme originelle, cette équation, dite de Rayleigh-Plesset, a été proposée la première fois par [Lamb, 1923].

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 = \frac{1}{\rho}(p_g - p_{hyd}) \quad (6.1.1)$$

Dans cette relation, \dot{a} est la vitesse radiale de l'interface liquide/gaz, p_g la pression des gaz contenus dans la bulle, p_{hyd} la pression hydrostatique à la profondeur d'explosion, et ρ la masse volumique de l'eau. L'équation Eq. (6.1.1) fournit une bonne représentation de la dynamique de bulle tant que les effets liés à la dissipation d'énergie sont nuls ou négligeables. La solution de cette équation correspond à une évolution temporelle périodique du rayon de bulle caractérisée par des cycles d'expansion et de contraction successifs dont la période et l'amplitude sont constantes, comme présenté sur la figure 6.2 en page 165.

Dans la littérature, les améliorations de l'équation Eq. (6.1.1) pour l'adapter aux bulles d'explosion ont consisté essentiellement à introduire des termes dissipatifs dus à la radiation acoustique dans l'eau et aux effets d'ondes dans les gaz. Ces effets sont liés à la compressibilité des fluides en présence. Dans le prolongement de l'équation de Rayleigh-Plesset, on retranscrit ci-dessous différents modèles théoriques de bulles adaptés aux explosions sous-marines. Pour chaque modèle, les travaux cités en référence renvoient aux développements spécifiques permettant d'aboutir à ces formes mathématiques.

1. [Herring, 1941] :

$$a\ddot{a}\left(1 - 2\frac{\dot{a}}{c}\right) + \frac{3}{2}\dot{a}^2\left(1 - \frac{4}{3}\frac{\dot{a}}{c}\right) = \frac{1}{\rho}\left(p_g - p_{hyd} + \frac{a}{c}\dot{p}_g\right) \quad (6.1.2)$$

2. [Kirkwood et Bethe, 1942] [Brinkley et Kirkwood, 1950] :

$$a\ddot{a}\left(1 - \frac{\dot{a}}{c}\right) + \frac{3}{2}\dot{a}^2\left(1 - \frac{\dot{a}}{3c}\right) = \frac{1}{\rho}\left(p_g - p_{hyd} + \frac{a}{c}\dot{p}_g\right)\left(1 + \frac{\dot{a}}{c}\right) \quad (6.1.3)$$

3. [Keller et Kolodner, 1956a] [Keller et Kolodner, 1956c] :

$$a\ddot{a}\left(1 - \frac{\dot{a}}{c}\right) + \frac{3}{2}\dot{a}^2\left(1 - \frac{\dot{a}}{3c}\right) = \frac{1}{\rho}\left[(p_g - p_{hyd})\left(1 + \frac{\dot{a}}{c}\right) + \frac{a}{c}\dot{p}_g\right] \quad (6.1.4)$$

4. [Geers et Hunter, 2002]:

$$\begin{aligned}
 & a\ddot{a} \left[1 + \xi - \frac{\dot{a}}{c} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho} \right) \right] + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \left[1 + \frac{2}{3} \xi - \frac{1}{3} \frac{\dot{a}}{c} + \frac{1}{3} \frac{\rho_g}{\rho} \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} + \frac{a}{c} \frac{\dot{\rho}_g}{\rho_g} \right) \right] + \dot{a} (\xi c + a \dot{\xi}) = \dots \\
 & \dots \frac{1}{\rho} \left[(p_g - p_{hyd}) \left(1 + \frac{\dot{a}}{c} \right) + \frac{a}{c} \dot{p}_g \right]
 \end{aligned} \tag{6.1.5}$$

Dans ces expressions, les notations a , \dot{a} et \ddot{a} sont utilisées respectivement pour décrire les position, vitesse et accélération matérielles à l'interface liquide/gaz. La masse volumique et la célérité du son dans l'eau sont notées ρ et c . Les grandeurs correspondantes dans les gaz sont indicées par $(\cdot)_g$. Les termes prépondérants $a\ddot{a}$ et $3\dot{a}^2/2$ de l'équation de Rayleigh-Plesset formulée pour un liquide incompressible sont présents dans tous ces modèles. Ces derniers diffèrent entre eux par les termes dissipatifs qui dépendent de l'hypothèse de compressibilité dans le liquide. Le modèle de [Geers et Hunter, 2002] intègre en outre les effets de compressibilité dans le gaz qui se traduisent par les termes en $\dot{\rho}_g$ et \dot{p}_g correspondant respectivement aux taux de masse volumique et de pression à l'intérieur de la bulle. Dans ce modèle, la grandeur $\xi = \rho_g c_g / \rho c$ est le rapport des impédances dans le gaz et le liquide.

Pour être résolues, les conditions initiales à $t = 0$ en position a_0 , vitesse \dot{a}_0 et accélération \ddot{a}_0 , doivent être adjointes aux équations différentielles Eq. (6.1.1) à (6.1.5). Ces conditions jouent un rôle prépondérant dans le comportement dynamique de la bulle. La majorité de ces modèles ont été formulés pour les problèmes d'explosions sous-marines et validés par confrontation des résultats théoriques aux relevés expérimentaux. Les conditions initiales dépendent donc de la configuration étudiée (masse et type d'explosif) et de l'instant initial choisi pour estimer l'énergie disponible dans la bulle et débiter le calcul des pulsations.

Pour illustrer les hypothèses prises dans ces modèles (écoulement potentiel, effets liés à la compressibilité), une formulation théorique présentée dans [Heaton, 1986b] à partir des travaux antérieurs de [Hicks, 1972], est reprise ici en négligeant la migration verticale de la bulle sous l'action du champ de pesanteur. Ce cas d'étude simplifié se ramène donc, comme précédemment, à un problème à symétrie sphérique. Dans le cas d'un écoulement isovolume et irrotationnel, en notant ϕ le potentiel des vitesses tel que $\vec{v} = \vec{\nabla} \phi$, la conservation de la masse se traduit par l'équation de Laplace $\Delta \phi = 0$, où Δ est l'opérateur Laplacien exprimé en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . En négligeant les effets liés à la pesanteur, le problème ne dépend que de la variable r et la seule composante de vitesse est noté v . L'équation de Laplace se ramène alors à la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [r\phi] = 0 \tag{6.1.6}$$

La solution générale de Eq. (6.1.6) s'écrit $\phi(r) = C_1/r$, et la constante C_1 dépend des conditions aux frontières du domaine liquide. À la surface de la bulle, en $r = a$, la vitesse radiale est égale à la dérivée matérielle temporelle du rayon \dot{a} , et le potentiel des vitesses doit vérifier $d\phi/dr = \dot{a}$. La constante C_1

est donc égale à $-\dot{a}a^2$. Par suite, le potentiel des vitesses et la vitesse radiale en tout point du liquide s'écrivent :

$$\phi(r) = -\frac{\dot{a}a^2}{r} \quad \text{et} \quad v(r) = \frac{\dot{a}a^2}{r^2} \quad (6.1.7)$$

Suivant les hypothèses d'écoulement irrotationnel et en négligeant la viscosité du fluide, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme de l'équation de Bernoulli pour les écoulements instationnaires, ce qui permet d'exprimer la pression p dans l'eau à l'aide de :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + p + \rho g z = \text{constante} \quad (6.1.8)$$

où gz est le potentiel dont dérivent les forces gravitationnelles et z est l'élévation au dessus de la surface libre, comptée positive vers le haut. La valeur de la constante dans le membre de droite est déterminée à l'altitude de référence en $z = 0$ pour laquelle, en l'absence de perturbation, la pression est égale à la pression atmosphérique $p = p_{atm}$. En substituant l'expression de ϕ Eq. (6.1.7) dans Eq. (6.1.8), la pression totale à l'immersion z s'écrit :

$$p = p_{hyd} + \frac{\rho}{r} \frac{d}{dt} (a^2 \dot{a}) - \rho \frac{a^4 \dot{a}^2}{2r^4} \quad (6.1.9)$$

où $p_{hyd} = p_{atm} - \rho g z$ est la pression hydrostatique au point considéré dans l'eau. Pour un point suffisamment éloigné de la surface de la bulle, c.-à-d. lorsque $r \gg a$, le dernier terme du membre à droite devient négligeable et la pression dynamique $\bar{p} = p - p_{hyd}$ s'écrit alors :

$$\bar{p}(r, t) = \frac{\rho}{r} \frac{d}{dt} (a^2 \dot{a}) \quad (6.1.10)$$

À partir du volume de gaz $V_g = 4\pi a^3/3$ que l'on dérive par rapport au temps, $\dot{V}_g = 4\pi a^2 \dot{a}$, on note que la pression dynamique est liée à l'accélération du volume \ddot{V}_g au travers de l'équation suivante :

$$\bar{p}(r, t) = \frac{\rho}{4\pi r} \ddot{V}_g \quad (6.1.11)$$

La relation Eq. (6.1.11) est valide en champ lointain en négligeant les effets liés à la compressibilité de l'eau. Elle a été proposée la première fois par [Strasberg, 1956], formulée systématiquement par [Frost et Harper, 1975], discutée par [Pierce, 1989], et finalement utilisée par [Geers et Hunter, 2002] pour relier l'accélération calculée à la surface de la bulle à la phase de choc primaire issue de l'explosion sous-marine.

La vitesse donnée par Eq. (6.1.7) permet d'exprimer l'énergie cinétique E_c du liquide entourant la bulle en intégrant la quantité d'énergie infinitésimale $dE_c = \rho v^2 dV/2$ sur tout le domaine compris entre le rayon de bulle $a(t)$ et l'infini, soit :

$$E_c(t) = 2\pi\rho a^3 \dot{a}^2 = \frac{1}{2}M_a \dot{a}^2 \quad (6.1.12)$$

Dans la seconde égalité, on a introduit la quantité $M_a = 4\pi\rho a^3$ qui représente une masse équivalente de liquide animée de la vitesse uniforme \dot{a} [Axisa, 2001]. Cette masse d'eau ajoutée correspond à trois fois la masse d'eau déplacée. L'énergie potentielle E_p représente le travail des efforts exercés à l'interface liquide/gaz contre la pression hydrostatique qui est supposée uniforme autour de la bulle. En notant a_0 le rayon initial de la bulle, l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p(t) = \frac{4\pi}{3} p_{hyd} (a^3 - a_0^3) \quad (6.1.13)$$

L'énergie interne de la bulle E_i est calculée en faisant l'hypothèse d'un comportement adiabatique des gaz résiduels lors des phases successives d'expansion et de contraction de la bulle. Au premier ordre, et comme on l'a déjà noté au chapitre 4, ce comportement suit une loi de gaz parfait de la forme :

$$p_g \rho_g^{-\gamma} = p_g \left(\frac{V_g}{m_c} \right)^\gamma = K_g \quad (6.1.14)$$

où p_g , ρ_g et m_c représentent respectivement la pression, la masse volumique et la masse des produits de détonation (égale à la masse d'explosif utilisé). Dans l'expression Eq. (6.1.14), le coefficient polytropique γ et la constante K_g sont évalués à partir du diagramme ($p - v$) des produits de détonation pour les grands volumes. On peut se référer par exemple au diagramme de la figure 6.1 relatif au TNT, qui est issu des travaux de Jones reportés dans [Cole, 1965]. Sur cette figure la pression est exprimée en kbar et le volume spécifique en cm^3/g . Le point CJ correspond à l'état de détonation dans le plan de Chapman-Jouguet dont la pression est de l'ordre de 200 kbar. Les lignes pointillées verticales notées $v(a_c)$ et $v(2a_c)$, représentent les volumes spécifiques pour des rayons de bulle égaux respectivement à un et deux fois celui de la charge explosive initiale. Le diagramme de la figure 6.1 est tracé en échelle bi-logarithmique de sorte que l'asymptote pour les grands volumes représente un processus de transformation isentropique suivant une loi de gaz parfait. À partir de ce tracé, le coefficient polytropique γ vaut 1.25 environ et la valeur utilisée pour K_g est approximativement égale à 4100 lorsque les autres grandeurs s'expriment dans le système d'unités (g, cm, ms). L'énergie interne des gaz résiduels prend donc la forme suivante :

$$E_i(t) = \frac{K_g m_c^\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{3}{4\pi a^3} \right)^{(\gamma-1)} \quad (6.1.15)$$

Dans le système mécanique formé par les gaz résiduels d'une part, et le domaine liquide d'autre part, l'énergie totale du système à l'instant initial correspond à l'énergie interne de la bulle E_b . Suivant les hypothèses précédentes sur le comportement du gaz, et en notant ρ_c la masse volumique de l'explosif à l'état solide avant détonation, l'énergie interne initiale s'écrit :

$$E_b = \frac{K_g m_c}{\gamma - 1} \rho_c^{(\gamma-1)} \quad (6.1.16)$$

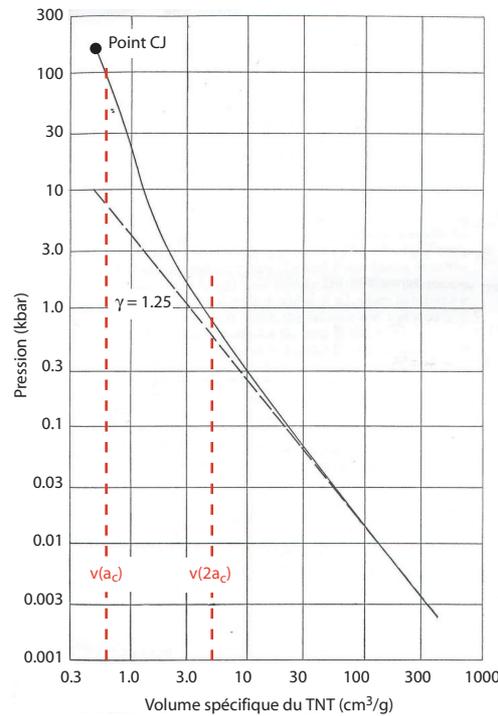


FIGURE 6.1 – Représentation dans le diagramme (pression-volume spécifique) du comportement adiabatique des produits de détonation du TNT à partir des calculs de Jones (reportés dans [Cole, 1965])

Dans ce modèle on tient compte des pertes d'énergie $P_r(t)$ liées à la dissipation par rayonnement acoustique à l'infini qui, suivant [Hicks, 1972], s'écrivent :

$$P_r(t) = \int_0^t \frac{4\pi\rho}{c} (a^2 \ddot{a} + 2a\dot{a}^2)^2 d\tau \quad (6.1.17)$$

On écrit l'équation de conservation de l'énergie sous la forme générale $E_c(t) + E_p(t) + E_i(t) = E_b - P_r(t)$. Dans cette relation, l'expression des différents termes d'énergie sont donnés respectivement par

Eq. (6.1.12) et (6.1.13) et Eq. (6.1.15) à (6.1.17). Par suite, on peut formuler le lagrangien du système dynamique, $\mathfrak{L} = E_c - E_p - E_i$, à partir duquel on déduit les équations de Lagrange non-linéaires :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{a}} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial a} = Q_r \quad \text{avec } Q_r \text{ tel que} \quad P_r(t) = \int_0^t Q_r(\tau) \dot{a}(\tau) d\tau \quad (6.1.18)$$

Dans cette expression, Q_r représente le terme de dissipation par radiation acoustique à l'infini. Le comportement dynamique de la bulle en champ infini est alors complètement décrit par l'évolution temporelle du rayon $a(t)$. Cette variable vérifie l'équation différentielle ordinaire Eq. (6.1.18) que l'on écrit ici en faisant apparaître la pression p_g dans la bulle donnée par Eq. (6.1.14), et la pression hydrostatique ambiante p_{hyd} qui dépend de l'immersion de la bulle :

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 + \frac{1}{c\dot{a}} (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 = \frac{1}{\rho} (p_g - p_{hyd}) \quad (6.1.19)$$

La résolution des équations Eq. (6.1.1) à (6.1.5) et Eq. (6.1.19) est effectuée en utilisant l'algorithme explicite de Runge-Kutta, à partir des paramètres physiques du problème d'explosion sous-marine que sont la masse d'explosif m_c , et le rapport des capacités calorifiques γ qui caractérise la détente adiabatique des gaz issus de la détonation. Pour résoudre ces équations, on leur adjoint les conditions initiales relatives au rayon de la bulle $a(t=0) = a_0$ et à la vitesse de l'interface $\dot{a}(t=0) = \dot{a}_0$. Dans la mesure où l'on souhaite disposer d'un modèle théorique de référence auquel puissent être comparées les simulations numériques, des conditions initiales simplifiées sont imposées aux différents modèles. De façon arbitraire, on impose un rayon de bulle initial égal à deux fois le rayon de la charge explosive avant détonation $a_0 = 2a_c$. De même, on suppose l'écoulement nul dans l'eau $\dot{a}_0 = 0$ de sorte que le problème se ramène à celui d'une cavité gazeuse initialement comprimée dans un domaine liquide au repos. Les données physiques utilisées pour la résolution sont présentées dans le Tab. 6.1 en page 167. Le problème ainsi décrit n'est pas tout à fait représentatif de l'explosion au réel, dans la mesure où ces conditions initiales ne tiennent pas compte de la phase préliminaire liée à la détonation et à l'émission du choc primaire dans l'eau. L'écoulement et le champ de pression initiaux résultant de cette phase sont en effet très différents de celui que l'on impose ici. Cela étant, il est amplement suffisant pour l'étude des différents paramètres de modélisation numérique qui influencent de façon prépondérante les calculs hydrodynamiques de bulle aux temps longs.

On présente sur la figure 6.2 les résultats obtenus pour chacun des modèles en terme d'évolution temporelle du rayon de bulle. Les résultats en terme de rayon et de pression sont adimensionnés respectivement par rapport au rayon d'équilibre statique a_{hyd} et la pression hydrostatique p_{hyd} . On a alors $a = a' a_{hyd}$ et $p = p' p_{hyd}$. Suivant [Best, 2002], le problème hydrodynamique de bulle est caractérisé par une similitude dynamique qui relie les forces de pression à celles d'inertie. En utilisant le nombre d'Euler pour la similitude dynamique, $Eu = p/\rho v^2 \approx 1$, on impose ainsi une condition supplémentaire relative au temps qui s'écrit $t = t' a_{hyd} (\rho/p_{hyd})^{1/2}$. Pour l'adimensionnalisation, le rayon d'équilibre statique a_{hyd} , correspondant à la pression hydrostatique p_{hyd} , est calculé en tenant compte de l'équation

d'état des gaz parfaits Eq. (6.1.14), soit :

$$a_{hyd} = \left[\frac{3m_c}{4\pi} \left(\frac{K_g}{\rho_{hyd}} \right)^{1/\gamma} \right]^{1/3} \quad (6.1.20)$$

Les résultats théoriques obtenus par les modèles issus de [Herring, 1941], [Kirkwood et Bethe, 1942] et [Keller et Kolodner, 1956a] donnent des évolutions tout à fait semblables (courbes superposées sur la figure 6.2). Par la suite, on ne retient donc que celui de [Keller et Kolodner, 1956a] dans la mesure où les différences de l'un à l'autre sont négligeables. La génération des ondes de chocs secondaires associée aux instants de contraction maximale de la bulle est bien mise en évidence par la variation brutale de la vitesse d'interface liquide/gaz, matérialisée par les points de rebroussement sur les tracés de la figure 6.2. Le modèle de Rayleigh-Plesset [Lamb, 1923] ne présente pas de dissipation de sorte que l'amplitude et la période des pulsations n'évoluent pas au cours du temps. Ce n'est pas le cas pour les autres modèles qui diffèrent entre eux par les termes dissipatifs liés à aux effets de compressibilité dans l'eau. Pour le modèle de [Geers et Hunter, 2002], qui inclue en plus les effets de compressibilité dans les gaz, on note que les pulsations calculées s'atténuent beaucoup plus rapidement que pour les autres. Cela se traduit par des amplitudes et des périodes de pulsations plus faibles. Ces atténuations s'opèrent autour d'une valeur moyenne $a' = 1$ correspondant au rayon d'équilibre statique, vers lequel tendent les pulsations une fois toute l'énergie de bulle dissipée.

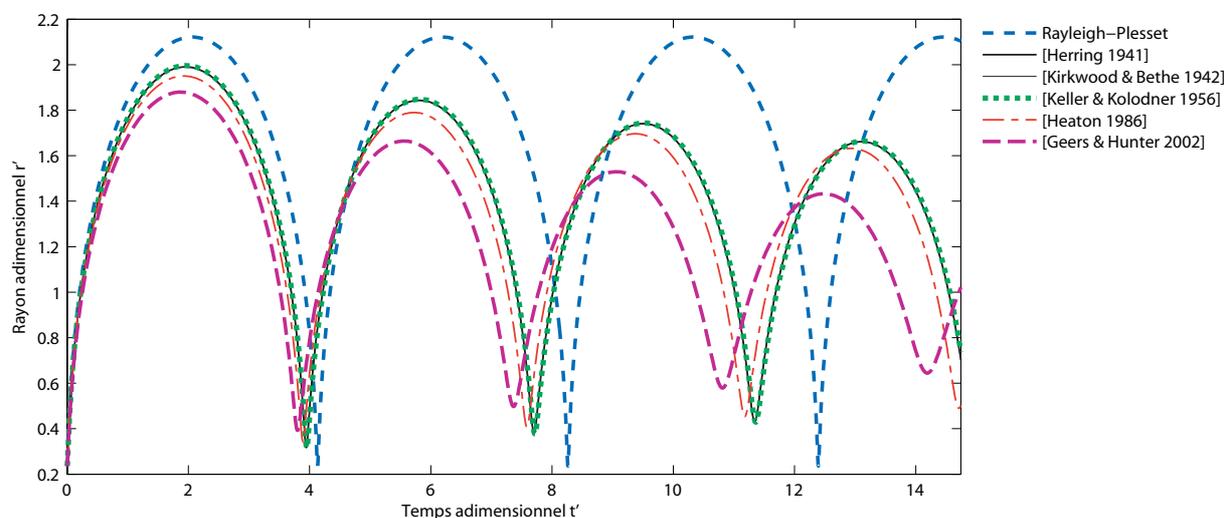


FIGURE 6.2 – Modèles théoriques de bulle : Évolution du rayon

La figure 6.3 présente la vitesse de l'interface liquide/gaz \dot{a} rapportée à la célérité du son dans le liquide c , c.-à-d. nombre de Mach $\mathcal{M} = \dot{a}/c$ à l'interface. Exceptée la formulation de Rayleigh-Plesset, on constate que tous ces modèles présentent un nombre de Mach relativement faible qui valide l'hypothèse de fluide incompressible pour la majeure partie du cycle d'expansion/contraction de bulle. Cependant,

autour des phases de contraction maximale, les pics relevés coïncident avec l'émission d'ondes acoustiques secondaires, phénomène qui ne peut être représenté par le simple modèle de Rayleigh-Plesset. Ces ondes transmises nécessitent donc un traitement particulier qui diffère ici suivant les modèles.

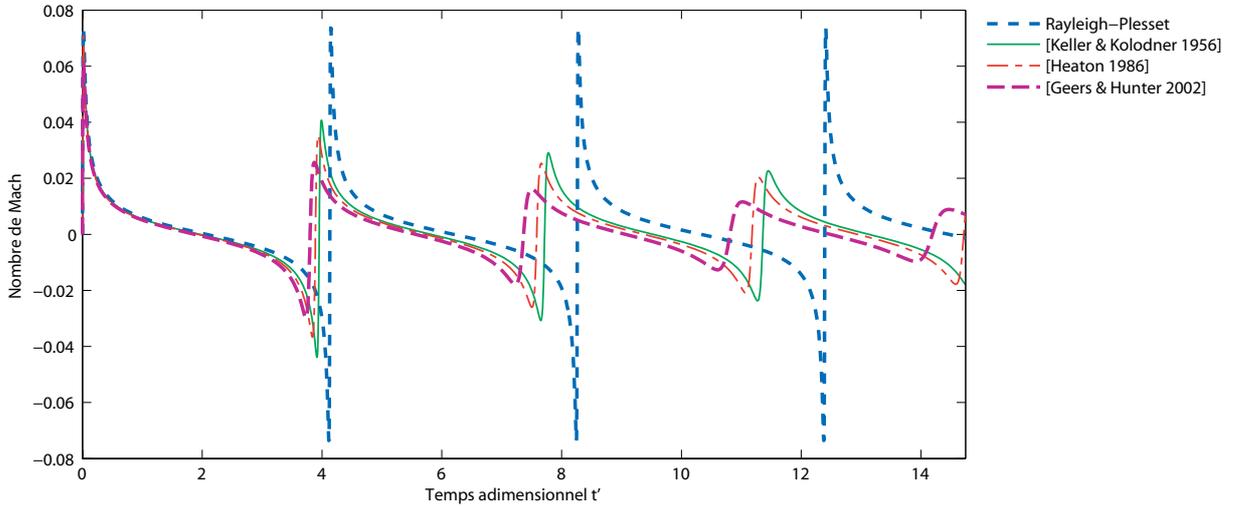


FIGURE 6.3 – Modèles théoriques de bulle : Évolution du nombre de Mach à l'interface

6.1.2 Simulations numériques relatives aux pulsations de bulle

En cohérence avec les différents modèles théoriques présentés dans le paragraphe précédent, on s'intéresse à la simulation du comportement pulsatoire de la bulle en champ infini. Même si éloigné des configurations au réel, ce cas relativement simple nous permet d'étudier l'influence des paramètres de modélisation sur la dynamique de bulle aux temps longs. Les résultats obtenus permettent ainsi de guider les choix méthodologiques dès lors que les effets de bulle sur les structures doivent être pris en compte. On cherche donc à représenter les phases successives d'expansion et contraction de la bulle correspondant respectivement aux phases de détente et compression des produits de détonation. En outre, et conformément aux modèles théoriques précédents, on choisit délibérément de ne pas représenter le mouvement migratoire lié au champ d'attraction terrestre.

6.1.2.1 Conditions initiales et paramètres physiques

Par conséquent, les tests numériques présentés ici s'appuient sur les conditions initiales suivantes ; remplacement du processus de détonation par une pression uniforme dans la bulle p_{g0} supérieure à la pression ambiante dans le liquide, écoulement nul dans le gaz et le liquide à l'instant initial, pression ambiante uniforme p_{hyd} dans le liquide environnant la bulle (pas de champ hydrostatique). De plus, on ne tient pas compte des interactions éventuelles de la bulle avec la surface libre, le fond marin ou une structure immergée. Le comportement de la bulle de gaz suit l'hypothèse de gaz parfait Eq. (6.1.14) que

l'on modélise à l'aide d'une équation d'état de la forme :

$$p_g = (\gamma - 1) E \frac{\rho_g}{\rho_{g0}} \quad (6.1.21)$$

où E est l'énergie interne par unité de volume de référence, ρ_g et ρ_{g0} la masse volumique des gaz résiduels dans l'état courant et de référence. La modélisation de l'eau s'appuie sur une équation d'état linéaire en masse volumique, suffisante pour représenter la compressibilité du fluide linéarisée autour de la position d'équilibre (p_0, ρ_0), et de la forme :

$$p = p_{hyd} + K \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \quad (6.1.22)$$

où $K = \rho_0 c_0^2$ est le module de compressibilité et c_0 la célérité du son à l'état de référence. Les paramètres physiques du problème sont présentés dans le Tab. 6.1. Ils représentent l'explosion d'une charge TNT de 55 g à une profondeur d'immersion de 15 m sous la surface libre. Suivant les coefficients empiriques du TNT présentés dans le Tab. 2.2 en page 26, le rayon maximum et la pseudo-période de bulle correspondants à ces données sont respectivement de 46 cm et 55 ms.

Matériau	Paramètre	Symbole	Unité	Valeur
Explosif (TNT)	Masse	m_c	g	55.00
	Rayon de charge	a_c	cm	2.005
	Masse volumique	ρ_c	g/cm ³	1.630
Produits de détonation (gaz)	Rayon initial	a_0	cm	4.009
	Coefficient polytropique	γ	–	1.250
	Masse volumique	ρ_{g0}	g/cm ³	0.204
	Énergie interne	E_0	bar	17 960
Eau (liquide)	Masse volumique	ρ	g/cm ³	0.998
	Vitesse du son	c	cm/ms	150.0
	Pression hydrostatique	p_{hyd}	bar	2.500

TABLE 6.1 – Paramètres physiques pour l'étude de la dynamique de bulle

La figure 6.4(a) présente de façon schématique les principes de modélisation du problème. Le domaine liquide est tronqué au rayon extérieur noté R_∞ . La bulle de gaz est initialement au repos avec un rayon $a_0 = 2a_c$ où a_c représente le rayon de l'explosif à l'état solide. L'interface liquide/gaz a une vitesse initiale nulle $\dot{a}_0 = 0$. La pression initiale dans la bulle de gaz est égale à $p_{g0} \gg p_{hyd}$ où p_{hyd} représente la pression ambiante uniforme dans le liquide entourant la bulle. En l'absence de migration, le problème est axisymétrique ce qui permet de limiter la modélisation à un demi domaine dans le plan ($r; z$) en formulation 2D axisymétrique. Cette formulation permet de modéliser des grandes tailles de domaine

autour de la bulle sans que les temps de calcul CPU s'en trouvent pénalisés. Suivant le Tab. 6.1, le volume spécifique initial de la bulle $v_{g0} = 1/\rho_{g0}$ est égal à $4.91 \text{ cm}^3/\text{g}$. Ce volume correspond à une bulle dont le rayon initial est fixé arbitrairement à deux fois celui de la charge. Il est choisi suffisamment large pour que l'analyse débute dans la partie linéaire de l'équation d'état des produits de détonation, conformément au diagramme de la figure 6.1. À l'aide des valeurs de γ et K_g déjà spécifiées, la pression initiale des produits de détonation est égale à 561 bar et la valeur d'énergie interne dans le Tab. 6.1 est déterminée à l'aide de l'équation d'état Eq. (6.1.21), .

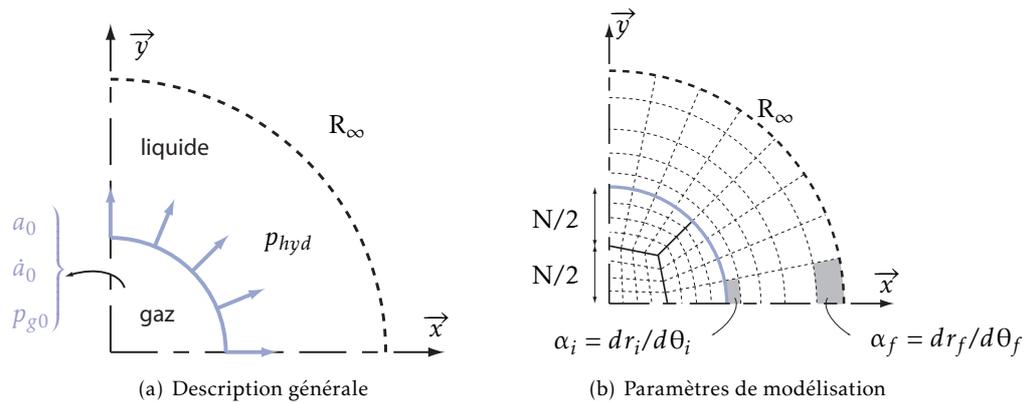


FIGURE 6.4 – Description générale du problème et paramètres de modélisation pour l'étude des pulsations de bulle en champ infini

Afin de guider nos choix méthodologiques pour les cas d'applications réels, on étudie dans les paragraphes suivants l'influence de plusieurs paramètres dans les simulations numériques ; taille des éléments finis utilisés pour modéliser les domaines liquide et gazeux, étendue du domaine liquide modélisé autour de la bulle, et conditions imposées à la frontière extérieure du domaine liquide.

6.1.2.2 Étude de la convergence spatiale de la solution

On étudie tout d'abord l'influence de la finesse de maillage sur les résultats en terme d'évolution temporelle du rayon de l'interface liquide/gaz. Pour cela un modèle paramétrique basé sur une topologie de grille cylindrique est construit. Comme schématisé sur la figure 6.4(b), le paramètre de construction du modèle est le nombre d'éléments N dans les directions radiale et orthoradiale à l'intérieur de la sphère de gaz qui est découpée suivant une topologie *O-Grid*. La discrétisation du domaine liquide est rendue dépendante de N en introduisant deux paramètres supplémentaires α_i et α_f qui correspondent au rapport des longueurs radiale dr et orthoradiale $d\theta$ de l'élément situé, respectivement, à la position initiale a_0 et finale R_∞ . La progression géométrique du maillage entre ces éléments est linéaire.

Pour tester la convergence du modèle, différents maillages sont réalisés en fixant les paramètres α_i et α_f définis précédemment, et en faisant varier le nombre d'éléments N dans la direction tangentielle. Le modèle est tronqué à $R_\infty \gg a_0$ de telle sorte que, sur la durée physique de la simulation, les ondes

acoustiques émanant de la bulle n'aient théoriquement pas le temps d'atteindre les limites du modèle. La durée physique des simulations est fixée à 75 ms correspondant approximativement à deux pulsations de bulle. Ainsi le domaine de calcul est étendu à 115 m ce qui correspond à la distance de parcours des ondes acoustiques sur la durée de la simulation. Dans ce cadre, les conditions imposées aux limites du domaine sur la frontière R_∞ n'ont aucune influence sur les résultats en terme de dynamique de bulle. Le Tab. 6.2 récapitule les caractéristiques générales des différents modèles testés et les performances de calcul sur un processeur AMD Opteron 64 bits cadencé à 2.4 MHz. Des vues des maillages éléments finis autour de la bulle sont présentés dans la Tab. 6.5 pour les modèles à $N = 4, 16, 28$ et 40 éléments dans la circonférence.

N	Nombre d'éléments	Nombre de nœuds	Δt (ms)	Temps CPU
4	172	219	$4.22 \cdot 10^{-3}$	2 sec
6	393	464	$2.77 \cdot 10^{-3}$	6 sec
8	704	799	$2.09 \cdot 10^{-3}$	12 sec
10	1 105	1 224	$1.66 \cdot 10^{-3}$	24 sec
16	2 832	3 022	$1.04 \cdot 10^{-3}$	1 min 32 sec
22	5 357	5 618	$7.56 \cdot 10^{-4}$	4 min 17 sec
28	8 680	9 012	$5.93 \cdot 10^{-4}$	10 min 28 sec
34	12 801	13 204	$4.89 \cdot 10^{-4}$	21 min 26 sec
40	17 720	18 194	$4.15 \cdot 10^{-4}$	37 min 22 sec

TABLE 6.2 – Pulsation de bulle : Caractéristiques des modèles éléments finis et performances

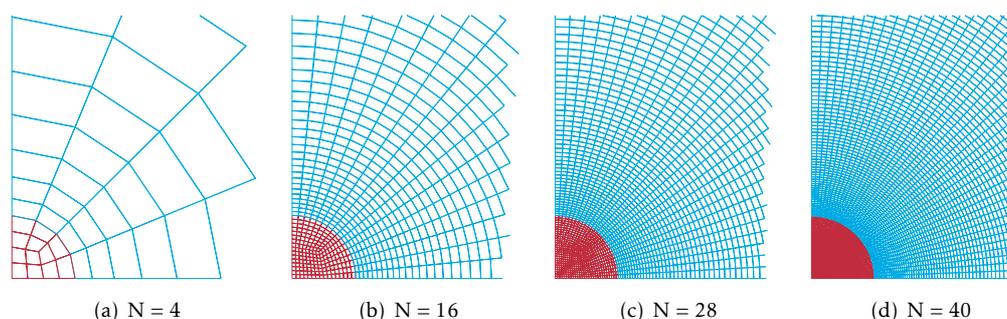


FIGURE 6.5 – Vues des modèles éléments finis autour de la bulle de gaz initiale pour différents niveaux de raffinement $N = 4, 16, 28,$ et 40

Les résultats obtenus en terme d'évolution du rayon de bulle en fonction du temps sont présentés sur la figure 6.6. Pour plus de lisibilité, on présente sur la figure 6.7 cette convergence en fonction du nombre N pour les grandeurs caractéristiques de la pulsation de bulle que sont, le premier rayon maximum R_{max} en figure 6.7(a), et la pseudo-période de bulle T_p en figure 6.7(b). On trace sur la figure 6.7(c) l'erreur relative des grandeurs R_{max} , R_{min} et T_p par rapport au cas de référence avec $N = 40$

éléments dans la circonférence. Par suite, on note qu'à partir de $N = 20$ éléments dans la circonférence, l'erreur commise est inférieure à 1% pour toutes les grandeurs qui caractérisent la dynamique de bulle. Cela justifie l'application de la technique de projection des résultats entre la phase de propagation du choc primaire aux temps courts, et la dynamique de bulle aux temps longs. Pour cette phase, et sans sacrifier à la qualité des résultats, le maillage utilisé peut en effet être relâché par rapport aux phases initiales de détonique et de choc sous-marin.

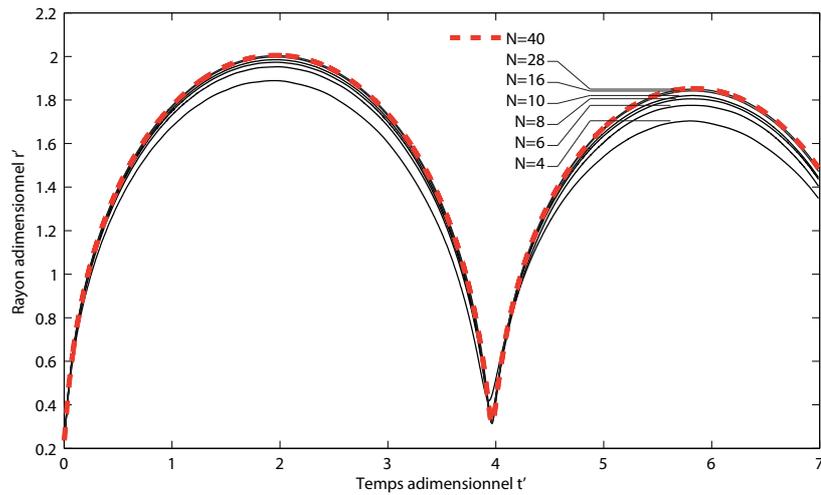


FIGURE 6.6 – Pulsation de bulle : Évolution du rayon de la sphère gazeuse

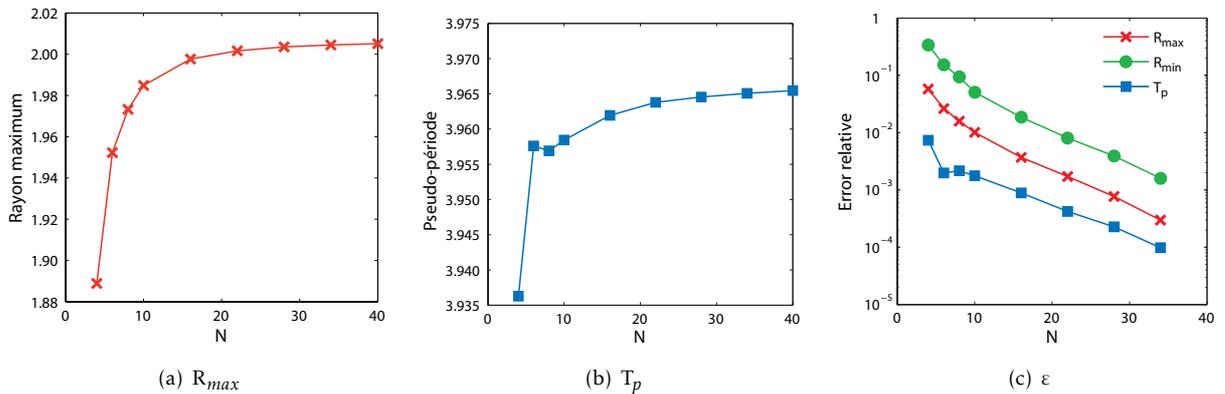


FIGURE 6.7 – Convergence spatiale du premier rayon maximum R_{max} et de la pseudo-période T_p , et erreur relative ϵ par rapport au cas de référence obtenu avec $N = 40$ éléments dans la circonférence

Comme on s'est placé dans les mêmes conditions initiales et que les hypothèses prises sont équivalentes, les résultats de la figure 6.6 peuvent être directement comparés aux formulations théoriques présentées dans le paragraphe précédent. Pour rappel, ces modèles théoriques sont issues de [Lamb, 1923],

[Keller et Kolodner, 1956a], [Heaton, 1986b], [Geers et Hunter, 2002], leur expression mathématique est donnée respectivement par les relations Eq. (6.1.1), (6.1.4), (6.1.19) et (6.1.5). Ces éléments de comparaison sont présentés sur la figure 6.8. On note alors que le modèle de [Keller et Kolodner, 1956a] coïncide parfaitement avec les résultats de l'analyse numérique convergée obtenue pour $N = 40$. Le modèle de Rayleigh-Plesset [Lamb, 1923] s'en éloigne le plus, dans la mesure où il est formulé en fluide incompressible et qu'il ne permet pas de tenir compte des pertes d'énergie liées au rayonnement des ondes acoustiques à l'infini. Le modèle issu de [Heaton, 1986b] présente des différences très faibles avec la simulation. La comparaison avec celui de [Geers et Hunter, 2002] enfin, met en évidence des pertes d'énergie relativement importantes dans le modèle théorique qui interviennent dès le premier cycle de pulsation. Du point de vue de la convergence spatiale de la solution, on note donc qu'un maillage relativement grossier ($N = 16$ éléments environ) permet d'obtenir des résultats qui, comparés à la solution analytique, sont amplement acceptables du point de vue de la dynamique de bulle, traduite ici en terme d'évolution du rayon en fonction du temps.

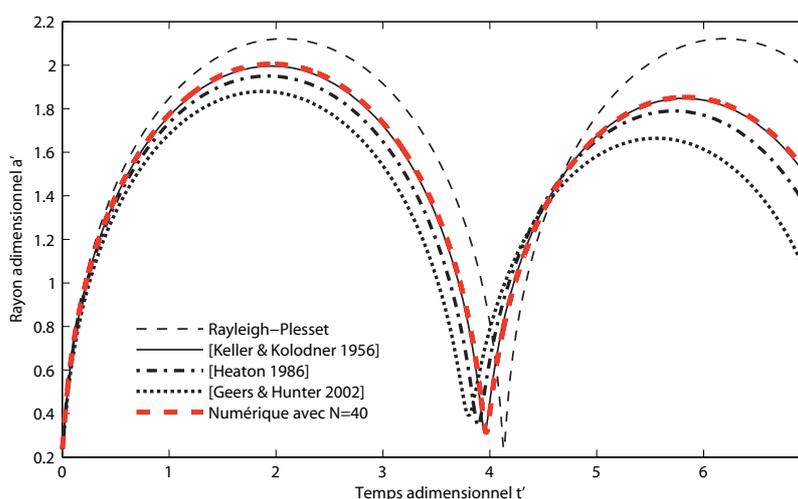


FIGURE 6.8 – Pulsation de bulle : Comparaison des modèles théoriques avec la solution numérique convergée

6.1.2.3 Influence de l'étendue de domaine modélisé

On conçoit aisément que l'étendue du domaine liquide modélisé autour de la bulle influence directement le comportement de celle-ci. Cette question est directement liée à la façon dont on modélise la frontière du domaine, c'est-à-dire au type de condition imposée sur le contour extérieur. On teste dans un premier temps, la convergence du modèle en fonction de la taille du domaine R_∞ que l'on adimensionne en le rapportant au rayon maximum empirique R_{max} calculé à partir du Tab. 2.2 en page 26. Les différents domaines modélisés correspondent aux rapports de confinement $R_\infty/R_{max} = 2, 4, 8, 16$,

32, 64 et 128. Des conditions aux limites de type Dirichlet sont imposées sur la frontière extérieure en bloquant l'écoulement dans la direction radiale, ce qui revient à modéliser les pulsations de bulle dans une enceinte sphérique fermée. Contrairement aux tests précédents pour lesquels R_∞ était suffisamment grand pour ne pas induire de perturbations dans le modèle (liées aux réflexions d'ondes à l'infini), ici, les ondes acoustiques générées par les pulsations de la bulle se trouvent donc emprisonnées entre l'interface liquide/gaz et la frontière extérieure. Le principe de modélisation est identique à celui utilisé pour l'influence de la finesse de maillage comme présenté en figure 6.4(b). Le nombre d'éléments dans la direction orthoradiale est fixé à $N = 28$ dans la mesure où ce modèle présente un niveau de convergence correct. Pour ne pas induire d'incertitude supplémentaire dans l'interprétation des résultats, la zone de modélisation comprise entre $r = 0$ et $r = 10R_{max}$ est identique pour tous les modèles.

On peut bâtir un élément de comparaison théorique en modifiant la formulation analytique détaillée au §6.1.1. Cette modification doit tenir compte d'une troncature du domaine liquide à une distance r finie. On emploie ici le vocable troncature dans la mesure où l'on coupe intentionnellement le domaine de calcul à une position radiale donnée. Dans le modèle originel, l'énergie cinétique donnée par la relation Eq. (6.1.12) est obtenue par intégration sur le domaine $r \in [a, \infty[$. Pour tenir compte des conditions aux limites de type Dirichlet (blocage de l'écoulement radial), on réduit le domaine d'intégration à l'étendue du liquide réellement modélisé pour $r \in [a, R_\infty[$. L'expression de l'énergie cinétique « tronquée » devient alors¹ :

$$\tilde{E}_c(t) = \frac{1}{2} \tilde{M}_a \dot{a}^2 \quad (6.1.23)$$

où l'expression de la masse d'eau ajoutée liée à l'entraînement de la bulle s'écrit $\tilde{M}_a = M_a(1 - a/R_\infty)$. Pour un domaine liquide d'étendue quelconque, cette masse ajoutée est différente de M_a apparaissant dans Eq. (6.1.12). Elle tend cependant vers cette valeur lorsque R_∞ tend vers l'infini. On peut alors écrire l'erreur de troncature η induite par la réduction de l'étendue du modèle :

$$\eta = \frac{M_a - \tilde{M}_a}{M_a} = \frac{a}{R_\infty} \quad (6.1.24)$$

Cette grandeur correspond, de fait, au rapport de confinement courant de la bulle dans l'enceinte. Le travail des efforts à l'interface liquide/gaz est également modifié par la variation de pression moyenne dans la cavité liquide qui dépend directement de l'évolution du rayon de bulle. On conçoit bien que l'expansion de la sphère gazeuse dans l'enceinte fermée modifie la valeur de pression moyenne dans l'eau. Suivant l'hypothèse de comportement linéaire du fluide autour de la position d'équilibre Eq. (6.1.22),

1. Rigoureusement, la formulation en écoulement potentiel utilisée ici pour écrire l'énergie cinétique devrait tenir compte de la condition supplémentaire liée au blocage de l'écoulement sur la frontière extérieure. Cette condition impose au gradient du potentiel d'être nul sur cette frontière, soit $v(R_\infty) = d\phi/dr = 0$. On n'en tient pas compte ici dans la mesure où le terme prépondérant lorsque R_∞ tend vers a concerne l'augmentation de la pression moyenne dans l'enceinte.

$p = p_{hyd} - K(\Delta V/V)$, la pression modifiée dans l'enceinte étanche s'écrit en fonction du rayon de bulle courant $a(t)$:

$$\tilde{p}_\infty(t) = p_{hyd} + \rho c^2 \left[\frac{a^3(t) - a_0^3}{R_\infty^3 - a^3(t)} \right] \quad (6.1.25)$$

Par suite, l'équation différentielle régissant le mouvement de l'interface liquide/gaz s'écrit sous une forme différente de celle décrite précédemment Eq. (6.1.19) en faisant apparaître le rapport de confinement Eq. (6.1.24). On écrit alors ce nouveau modèle qui fait apparaître des termes supplémentaires liés au rapport de confinement η :

$$a\ddot{a}(1-\eta) + \frac{3}{2}\dot{a}^2\left(1 - \frac{4\eta}{3}\right) + \frac{1}{c\dot{a}}(2\dot{a}^2 + a\ddot{a})^2 = \frac{1}{\rho}(p_g - p_{hyd}) - c^2\eta^3 \left[\frac{1 - (a_0/a)^3}{1 - \eta^3} \right] \quad (6.1.26)$$

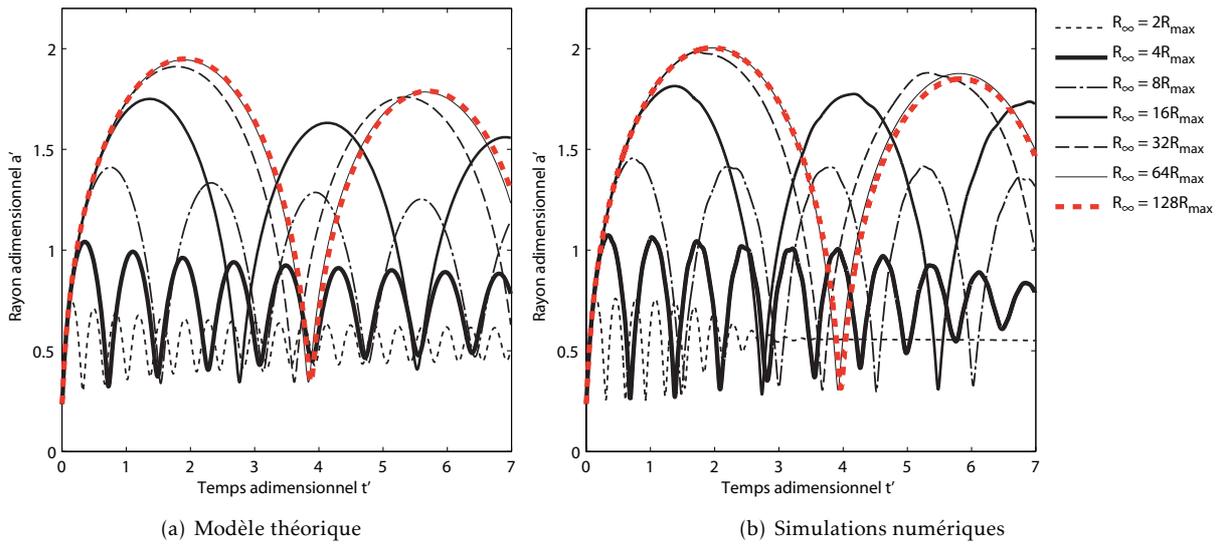


FIGURE 6.9 – Effets du modèle tronqué sur les pulsations de bulle

Les résultats de ce modèle analytique sont présentés sur la figure 6.9(a) en terme d'évolution du rayon de bulle en fonction du temps en valeurs adimensionnelles. Différents rapports de confinement R_∞/R_{max} sont analysés. On met ainsi clairement en évidence l'influence du confinement sur la dynamique de bulle, qui, lorsque le rapport R_∞/R_{max} diminue se caractérise par l'augmentation de la fréquence de pulsation et la diminution de l'amplitude des oscillations.

On reproduit cette analyse à l'aide du modèle numérique en appliquant les mêmes rapports de confinement. Les résultats correspondants sont présentés sur la figure 6.9(b). On montre tout d'abord que les modèles théorique et numérique sont cohérents d'un point de vue qualitatif (mêmes tendances)

et quantitatif (niveaux de fréquence et d'amplitude analogues). Ainsi, la solution converge en fréquence et en amplitude lorsque le rapport de confinement augmente, ce qui correspond au cas de pulsation en champ infini. On remarque également que l'erreur introduite par la troncature de modèle avec la condition de Dirichlet peut-être très importante et nécessite donc l'emploi de domaines de calcul très étendus. Pour des étendues inférieures à 20, voire 30 fois le rayon maximum théorique de la bulle d'explosion, on met très nettement en évidence une dégradation des résultats. Les résultats convergent vers la solution de référence pour des domaines de l'ordre de 60 fois le rayon maximum. Ce constat est une limitation des modèles numériques 3D qui nécessitent un nombre d'éléments tel que la durée des calculs devient prohibitive. Cette remarque s'applique aussi bien aux explosions en champ libre qu'en champ proche. Dans ce dernier cas, il est en effet indispensable de calculer correctement la première pulsation de bulle. Dans ce cadre, la formulation 2D axisymétrique permet de contourner cette difficulté en étendant largement le domaine modélisé.

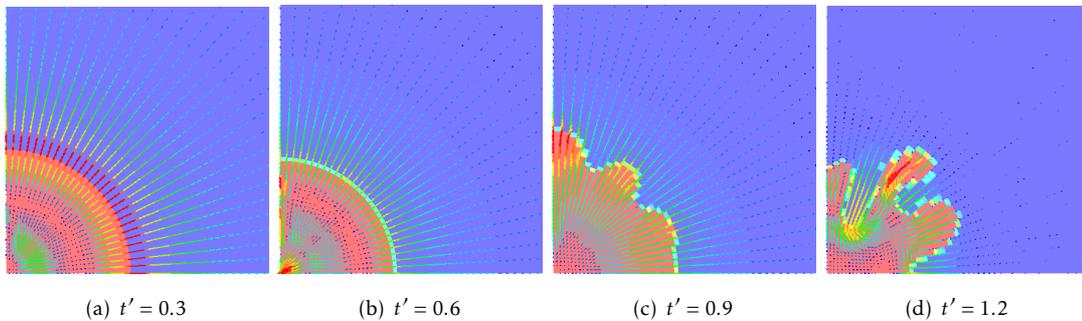


FIGURE 6.10 – Développement de l'instabilité d'interface aux instants de contraction maximale

En complément de ces résultats, on relève pour certains modèles, une instabilité qui se développe à l'interface liquide/gaz et qui provoque l'éclatement de la bulle au bout de plusieurs cycles consécutifs d'expansion/contraction. L'interface liquide/gaz est présentée sur la figure 6.10 pour les quatre premières contractions maximales de la bulle sur le modèle $R_\infty/R_{max} = 2$. On voit que l'instabilité intervient au moment de la troisième contraction (autour du temps adimensionnel $t' = 0.9$ sur la figure 6.10(c)), et les variations de volume de gaz diminuent ensuite jusqu'à devenir négligeables à la moitié du temps de simulation, comme visualisé sur la figure 6.9(b). On observe des comportements analogues sur les modèles à rapport de confinement 4 et 8, également à la troisième contraction de bulle, respectivement aux temps adimensionnels $t' = 2.1$ et $t' = 4.5$. Pour les modèles suivants, le nombre de pulsations simulées n'est pas suffisant pour mettre en évidence ce phénomène.

Le caractère physique de cette instabilité numérique n'est pas analysé dans le cadre de notre travail. Cependant, il n'est pas exclu que ce type d'instabilité hydrodynamique puisse se développer à l'interface entre le liquide et le gaz dans la mesure où le rapport des masses volumiques entre les deux phases, liquide et gazeuse, peut sous certaines conditions engendrer des instabilités de type Rayleigh-Taylor [Guyon *et al.*, 2001] [Clift *et al.*, 1978]. Des études expérimentales [Menon et Lal, 1998] montrent l'importance de ces instabilités dans le cas d'explosions sous-marines, qui permettent d'expliquer une

partie des pertes d'énergie dans la bulle (en dehors de la radiation des ondes acoustiques). Le différentiel d'écoulement tangentiel à l'interface entre le liquide et le gaz est également une autre source d'instabilité de type Kelvin-Helmholtz [Guyon *et al.*, 2001] qui est susceptible de se développer dans les problèmes où la migration de bulle n'est pas négligeable. Une analyse plus fine de ces régimes instables doit donc être envisagée si l'on souhaite en expliquer les causes dues à l'écoulement hydrodynamique, et les effets liés aux pertes d'énergie dans la bulle.

6.1.2.4 Influence des conditions aux limites

On montre dans le paragraphe précédent l'effet de la troncature de modèle sur les résultats. Les conclusions que l'on pourrait être amené à tirer sont cependant très liées au type de conditions imposées à la frontière extérieure. Dans le cas où le problème réel peut être assimilé à un problème infini pour lequel on ne souhaite modéliser que l'environnement sous-marin proche de la bulle, il est nécessaire d'introduire des conditions à la frontière $r = R_\infty$ qui permettent de traduire, le mieux possible, l'influence du domaine virtuel $r \in]R_\infty, \infty[$ sur celui que l'on modélise $r \in [0, R_\infty[$. Dans ce cadre, on teste ici différents types de frontières en imposant des conditions de :

- * Dirichlet, en bloquant l'écoulement radial,
- * Neumann, en appliquant sur la frontière eulérienne une pression uniforme, égale à la pression ambiante p_{hyd} ,
- * non-réflexion d'ondes, notée BNR (*Boundary Non-Reflecting*) en légende des figures suivantes.

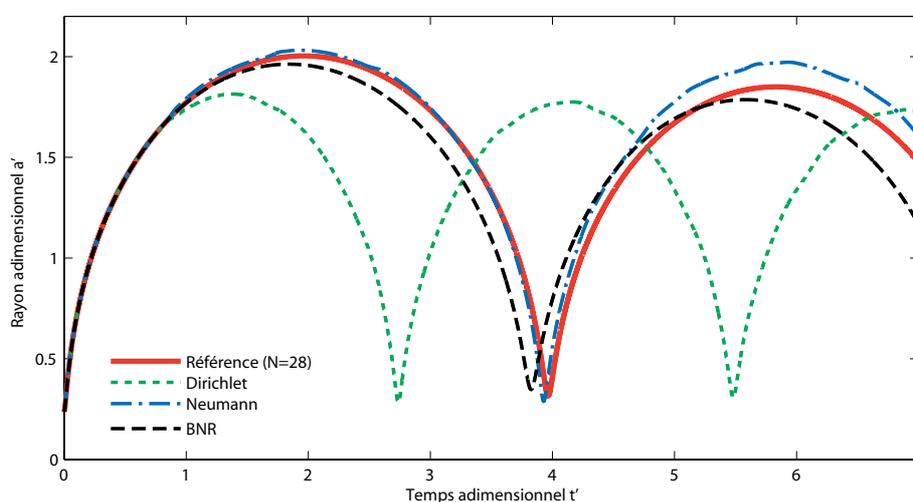


FIGURE 6.11 – Pulsation de bulle : Influence des conditions aux limites sur l'évolution du rayon de bulle adimensionnel en fonction du temps

Pour ces tests, on choisit d'utiliser le modèle tronqué à $R_\infty = 16 R_{max}$ présenté dans le paragraphe précédent pour l'influence du domaine de calcul. Ce modèle présente en effet un rapport de confinement

suffisant pour pouvoir mettre en évidence les difficultés éventuelles posées par le choix des conditions aux limites. Le principe de modélisation est identique aux tests de convergence du maillage.

Les résultats obtenus en terme d'évolution du rayon de bulle sont présentés sur la figure 6.11. Ils sont comparés au modèle de convergence à $N = 28$, dit de « référence » ici, dans la mesure où l'étendue de ce modèle est telle que les conditions aux limites n'ont aucune influence sur les résultats obtenus. Il est en effet suffisamment grand pour que le temps de simulation physique soit inférieur au temps de propagation des ondes émanant de la source. De plus, les résultats obtenus par ce modèle coïncident parfaitement avec ceux du modèle théorique de [Keller et Kolodner, 1956a].

Comme pour les conclusions précédentes, les résultats obtenus sur la figure 6.11 montrent clairement que la condition de Dirichlet n'est pas adaptée au cas d'application lorsque le confinement de la bulle est trop sévère. Les conditions de Neumann appliquées sous forme de pression imposée sur la frontière eulérienne donnent des résultats analogues et coïncident avec le modèle de référence pendant la première pulsation pour s'en écarter ensuite. La condition de non-réflexion présente une solution relativement proche des conditions de Neumann. L'effet de confinement provoqué par la condition de Dirichlet (blocage de l'écoulement radial) prédomine dans la qualité des résultats. Ce type de condition aux limites est donc à proscrire pour des applications à domaine de calcul peu étendu. Le choix se porte plus facilement vers des conditions de Neumann ou de frontière absorbante qui présentent des résultats acceptables par rapport à la solution de référence.

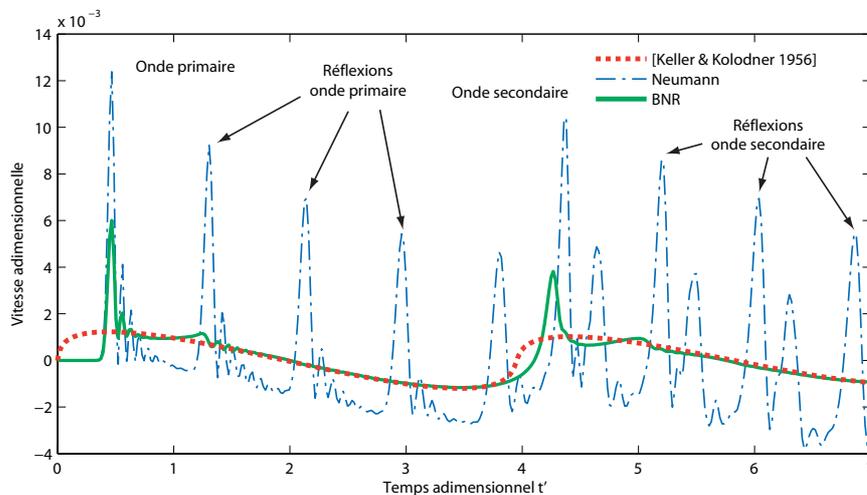


FIGURE 6.12 – Vitesses particulières à la frontière eulérienne

En complément, on trace sur la figure 6.12 les évolutions de la vitesse radiale calculée à la frontière eulérienne pour les cas avec condition de Neumann et frontière absorbante. Suivant les figures 6.11 et 6.12, la phase d'expansion de la bulle se traduit par des vitesses radiales positives à la frontière qui correspondent à un flux de matière sortant du domaine eulérien. Inversement, lors de la contraction

de bulle, les vitesses à la frontière sont négatives et correspondent à un flux de matière entrant dans le domaine. Ces flux de liquide entrant et sortant du domaine de calcul au niveau de la frontière extérieure sont donc directement liés aux déplacements de l'interface liquide/gaz. La frontière eulérienne constitue en effet un système ouvert au sens thermodynamique, au travers duquel des échanges d'énergie (travail et chaleur) et de matière (flux de liquide) peuvent s'opérer. À titre indicatif, on trace également sur la figure 6.12 la solution décrite par le modèle de Keller et Kolodner [Keller et Kolodner, 1956a] pour la vitesse particulière en théorie potentiel. Le calcul numérique avec condition de non-réflexion décrit bien cette évolution avec un écoulement radial au niveau de la frontière absorbante qui n'est pas soumis aux mêmes fluctuations que pour les conditions de Neumann. Cela se traduit par l'évolution monotone de l'énergie totale du système; énergie minimum au rayon maximum de la bulle ($t' \approx 2$) coïncidant avec l'annulation de la vitesse particulière à la frontière extérieure et début de flux entrant, énergie maximum au rayon minimum de la bulle ($t' \approx 4$) avec annulation de la vitesse radiale et début de flux sortant.

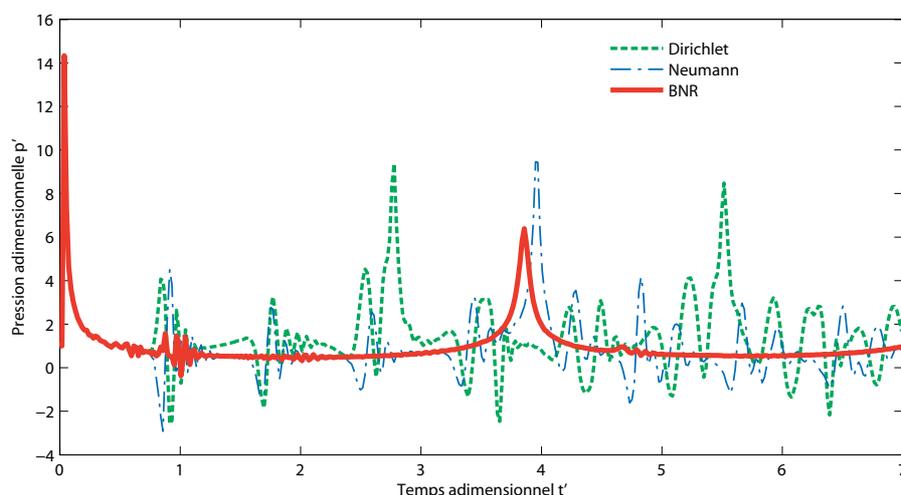


FIGURE 6.13 – Pressions à la distance adimensionnelle $r' = 3$ du centre de la bulle

Sur la figure 6.13, on notera en outre le lissage des fluctuations de pression, calculées en un point du domaine liquide, par l'utilisation de la frontière absorbante. À l'inverse, l'utilisation de conditions aux limites de type Dirichlet provoque des aller-retours d'ondes acoustiques dans le liquide qui se réfléchissent positivement sur la frontière extérieure (même signe) et négativement sur l'interface liquide/gaz (changement de signe). Les conditions de type Neumann entraînent également des aller-retours d'ondes dans le liquide qui se réfléchissent négativement sur la frontière extérieure et l'interface liquide/gaz. Les pics de vitesse particulière notés sur la figure 6.12 traduisent nettement, au cours de la première pulsation de bulle, les réflexions espacées de $t' \approx 1$ correspondant au temps de propagation entre la bulle de gaz et la frontière extérieure. Suite au premier rebond de la bulle, l'onde de pression secondaire se superpose au train d'onde primaire avec un déphasage qui dépend de l'étendue du domaine liquide modélisé.

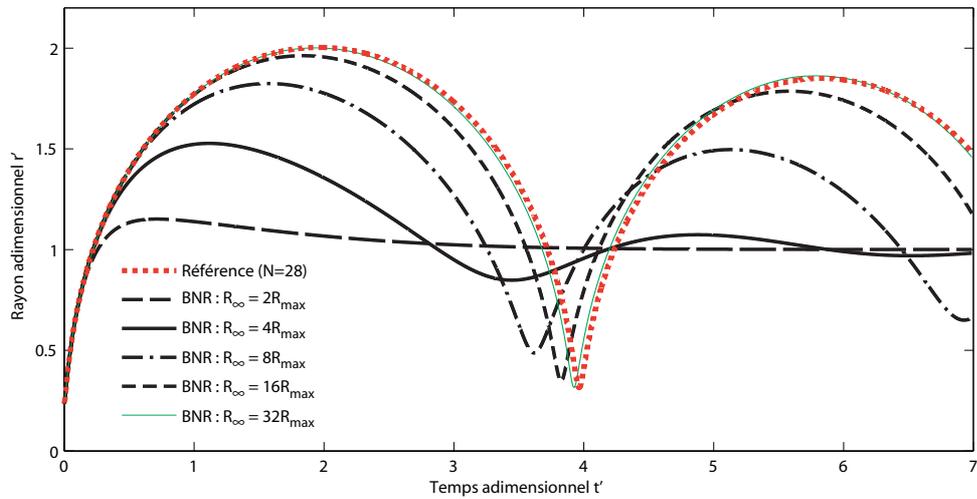


FIGURE 6.14 – Influence de la frontière absorbante et de l'étendue du modèle

Un dernier point est investigué en faisant varier l'étendue du domaine liquide dans le cas où des frontières absorbantes sont modélisées. Les résultats en terme d'évolution du rayon sont présentés sur la figure 6.14. Comme pour la condition de Dirichlet, on voit que l'écart avec la solution de référence est réduit en utilisant un domaine de calcul étendu alors que pour les plus petits modèles, la pulsation est fortement atténuée, voire totalement perdue. La solution converge pour des modèles de l'ordre de $R_\infty = 32 R_{max}$ ce qui diffère des conclusions du paragraphe précédent avec la condition de Dirichlet pour laquelle un domaine de l'ordre de $R_\infty = 64 R_{max}$ est nécessaire pour assurer la convergence du modèle.

6.2 Cas d'application avec IFS en champ proche

En aboutissement de ces travaux de thèse, on met en œuvre la méthode de calcul pour un cas d'application dont on dispose de résultats expérimentaux. Le dispositif d'essais a été conçu dans les années 1990 à la DGA pour étudier la réponse de plaques circulaires aux explosions sous-marines. Il a été exploité lors de plusieurs campagnes en bassin de détonique sur le site d'essais DGA situé à Tourris près de Toulon. Le moyen d'essai MEDUSE (Moyen d'Essai en Détonique Utilisant des Structures Extensibles) consiste en un caisson immergé, réputé rigide, sur lequel est fixé un diaphragme circulaire déformable. Les explosions sont amorcées sous le caisson qui est immergé au centre du bassin. Au cours de l'expérience, le déplacement au centre de la cible métallique est mesuré à l'aide d'un système d'acquisition laser. Pour plusieurs distances de tir, on dispose ainsi des profils de déplacement temporels que l'on cherche à reproduire par la simulation numérique. Un point important mis en évidence dans l'expérience, et que l'on cherche à simuler, concerne les effets cumulatifs du chargement hydrodynamique. Ces effets sont très visibles sur les déplacements permanents de la cible. Ils sont liés d'une part, à l'onde de choc primaire, et d'autre part, aux ondes secondaires issues des pulsations et de la migration verticale de la bulle.

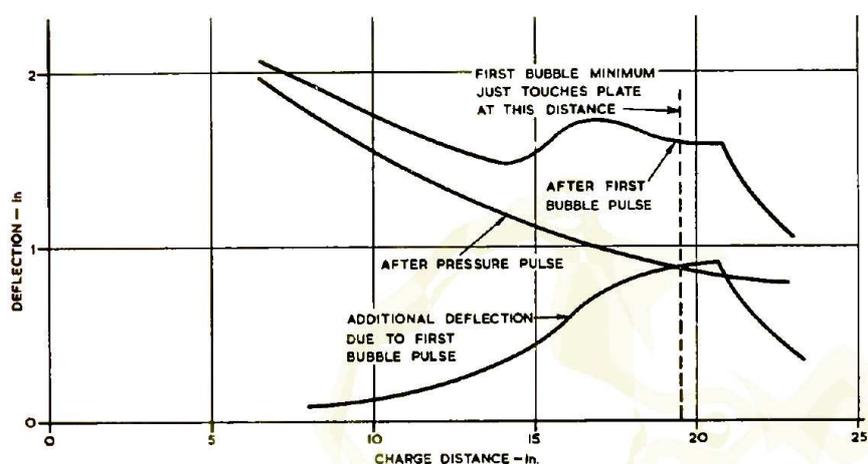


FIGURE 6.15 – Illustration des effets cumulatifs du choc et de la bulle sur les déformations permanentes mesurées au centre d'une cible rectangulaire déformable (de dimensions 30.5 cm*45.7 cm, et d'épaisseur 2.54 mm). Cet exemple est tiré de [Fox, 1947] et concerne des essais d'explosions à échelle réduite utilisant des charges de 28 g à des distances de 20 à 60 cm

Pour illustrer le problème, on présente sur la figure 6.15 des résultats, tirés de la littérature d'après Guerre, sur un dispositif expérimental équivalent [Fox, 1947]. On voit que l'effet du choc primaire sur la déformation permanente, mesurée au centre de cibles rectangulaires, augmente de façon monotone quand la distance de tir diminue. En revanche, les effets du chargement hydrodynamique, provoqué par la première contraction de bulle qui intervient aux temps longs, n'évoluent pas de façon monotone. Pour les petites et grandes distances, ces effets en terme de déformation plastique sont faibles en regard de

ceux du choc. À l'inverse, lorsque la migration de la bulle est telle qu'elle arrive au contact de la plaque au moment de son premier collapse, les effets enregistrés sur la cible sont maximum et du même ordre de grandeur que pour le choc. Sur la figure 6.15, ce phénomène intervient pour des distances de tir de l'ordre de 20 pouces. Dans ce cas, la migration de la bulle s'opère sous l'effet combiné de la gravité et de l'attraction de la cible. La distance de tir est alors approximativement égale au rayon maximum de la bulle à l'immersion considérée.

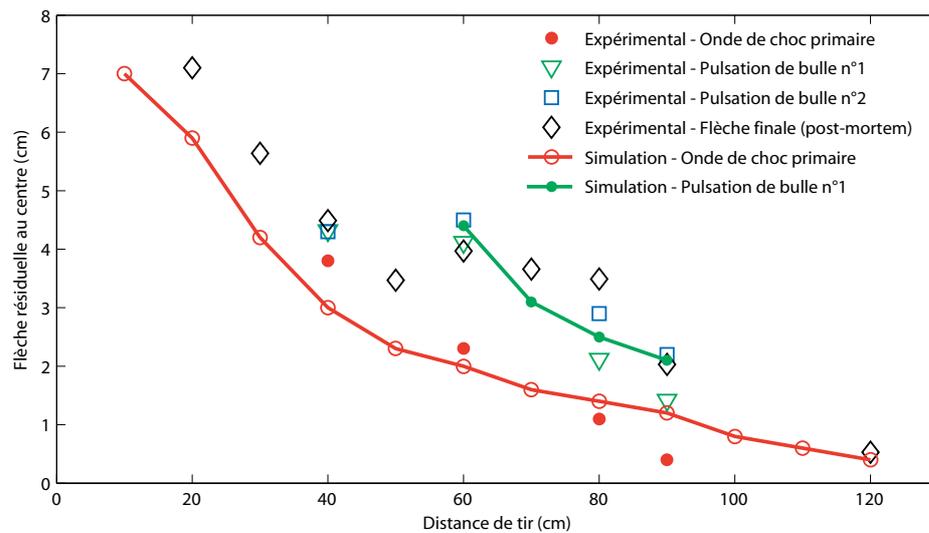


FIGURE 6.16 – Comparaison des résultats numériques aux mesures expérimentales sur dispositif d'essai MEDUSE. Les flèches résiduelles issues des essais correspondent respectivement aux effets de l'onde de choc primaire ●, de la première contraction de bulle ▽, et de la seconde contraction de bulle □. Les résultats notés ◇ correspondent à la flèche résiduelle finale mesurée post-mortem

À partir des mesures issues de la campagne d'essais de 1994 sur le dispositif MEDUSE, qui sont reportées sur la figure 6.16, on peut tirer les mêmes remarques que pour la figure 6.15. Les distances de tir sont comprises entre 20 et 120 cm et les effets du choc et de la bulle sont du même ordre de grandeur lorsque la distance charge-cible est de 60 cm environ. Cette distance correspond approximativement au rayon maximum atteint par la bulle lors de la première pulsation.

La simulation numérique des essais MEDUSE s'appuie sur la formulation 2D axisymétrique. L'axe de symétrie correspond à la direction verticale suivant laquelle sont alignés la charge explosive et l'axe de la plaque déformable. La description Eulérienne Multi-Matériaux est utilisée pour modéliser l'explosif, l'eau contenue dans le bassin, et l'air derrière la plaque (à l'intérieur du caisson). En l'absence de déformations trop importantes et de rupture du matériau, la description Lagrangienne est utilisée pour calculer les mouvements de la plaque. Les interactions des fluides avec la structure sont modélisés par le couplage Euler-Lagrange décrit à la section 3.3 en page 79. À l'aide de simulations préliminaires dans les conditions de l'expérience, et en fonction de la sévérité du choc, on évalue des vitesses de déformation

« macroscopiques » comprises entre 10 et 100 s⁻¹ pour les élongations en membrane. Dans la mesure où le matériau constitutif est un acier doux dont la limite d'élasticité est de l'ordre de 240 MPa, l'influence de la vitesse de déformation sur la limite d'élasticité est susceptible de jouer un rôle non-négligeable dans la réponse du matériau. À défaut de disposer d'essais de caractérisation à grande vitesse pour le matériau considéré, le seuil d'écoulement plastique σ_y dépendant du taux de déformation est modélisé par la loi de Cowper-Symonds :

$$\sigma_y = \sigma_0 \left(1 + \left(\frac{\dot{\epsilon}}{D} \right)^{1/p} \right) \quad (6.2.1)$$

où $\sigma_0 = 240$ MPa est la limite d'élasticité en quasi-statique, et $\dot{\epsilon}$ est le taux de déformation. Les valeurs des paramètres $D = 40.4$ s⁻¹ et $p = 5$ pour l'acier doux sont tirés de [Jones, 1989].

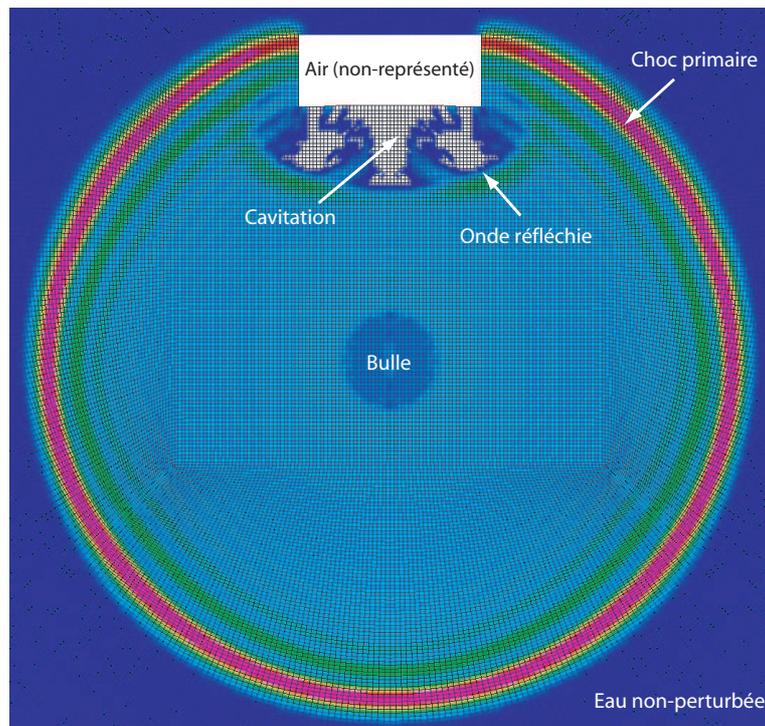


FIGURE 6.17 – Visualisation de l'IFS pour le choc primaire impactant la cible déformable

Pour les calculs 2D axisymétriques, la technique de projection est mise en œuvre ici en décomposant le problème en deux phases. Une première étape est liée au calcul de la détonation et de la propagation du choc avant IFS. Dans un second temps, ces résultats sont projetés sur la grille de calcul finale pour l'IFS aux temps courts, et l'interaction entre la bulle et la plaque aux temps longs. La figure 6.17 présente une vue du modèle dans la zone d'intérêt, et des pressions calculées dans l'eau et l'explosif après

interaction du choc avec la structure. Sur cette figure, la partie grisée matérialise l'étendue de la zone de cavitation liée à la mise en mouvement de la plaque. Cette zone de cavitation est précédée par l'onde de pression réfléchiée qui provient de l'interaction du choc avec la structure. Les flèches résiduelles calculées suite à l'interaction du choc avec la structure sont reportées sur la figure 6.16. Ces résultats sont similaires aux essais pour les distances de tir comprises entre 60 et 100 cm. Aux distances inférieures, les incertitudes associées à la réponse du matériau permettent d'expliquer les écarts obtenus. Une meilleure connaissance de la loi de comportement de l'acier utilisé, et notamment de la sensibilité aux vitesses de déformations, permettrait donc d'améliorer ces résultats.

Cela étant, l'intérêt de ces simulations porte sur la représentation des effets combinés du choc et du collapse de bulle. Dans ce cadre, on trace sur la figure 6.18 l'évolution temporelle du déplacement au centre de la cible pour les tirs à 70, 80 et 90 cm. Les résultats avec, et sans prise en compte des forces gravitationnelles sont présentés respectivement sur les figures 6.18(a) et 6.18(b). Suivant ces tracés, les effets secondaires liés à la première contraction de bulle apparaissent très nettement, aux alentours de 90 ms. Ils se traduisent par un rechargement plastique de la cible du même ordre de grandeur que pour le choc primaire. Pour comparaison avec les essais, les flèches résiduelles associées à la première pulsation de bulle dans le cas où la gravité est prise en compte sont reportées sur la figure 6.16. Ces résultats sont tout à fait cohérents avec l'expérience et permettent de valider les simulations effectuées. Par comparaison des figures 6.18(a) et 6.18(b), on montre en outre le rôle important joué par la gravité. Les flèches résiduelles associées au rechargement provoqué par la bulle sont en effet plus grandes lorsque les forces gravitationnelles sont prises en compte. Dans ce cas, la migration de la bulle en direction de la structure s'opère sous l'effet combiné de la gravité et de l'attraction de la cible. Elle est donc plus marquée sur la figure 6.18(a) que sur la figure 6.18(b), ce qui se traduit par des niveaux de chargements vus par la cible plus importants.

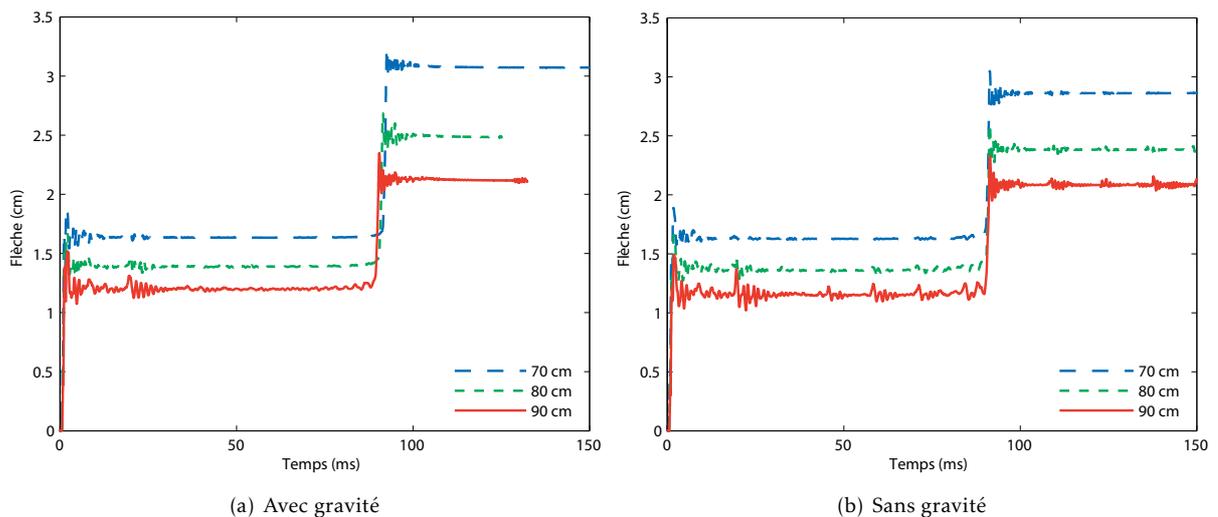


FIGURE 6.18 – Évolution temporelle du déplacement au centre de la cible en fonction de la distance de tir

La dynamique de bulle est illustrée sur la figure 6.19 dans un calcul tridimensionnel. Pour cette application, les résultats 2D axisymétriques précédents, issus de la détonation et de la propagation du choc avant IFS, sont projetés sur la grille de calcul 3D. Dans ce cas, la structure est modélisée par des éléments de type plaque suivant la formulation de Belytschko-Lin-Tsay présentée au §3.1.4 en page 47. La séquence d'images présentées sur la figure 6.19 se lit de bas en haut et de gauche à droite. Elle représente l'interaction de la bulle de gaz avec la structure déformable pour une distance de tir égale à 80 cm. La bulle atteint son premier rayon maximum aux alentours de 40 ms, puis se contracte jusqu'au volume minimum aux alentours de 90 ms. À cet instant, les ondes émises par la re-compression des produits de détonation viennent impacter la plaque circulaire. Le rechargement de la structure dans le domaine plastique modifie alors les niveaux de déformations résiduelles provoqués initialement par l'interaction avec le choc primaire. Durant le collapse entre 40 et 90 ms, la dissymétrie de l'écoulement dû à la présence de la structure, perturbe la topologie initialement sphérique de la bulle.

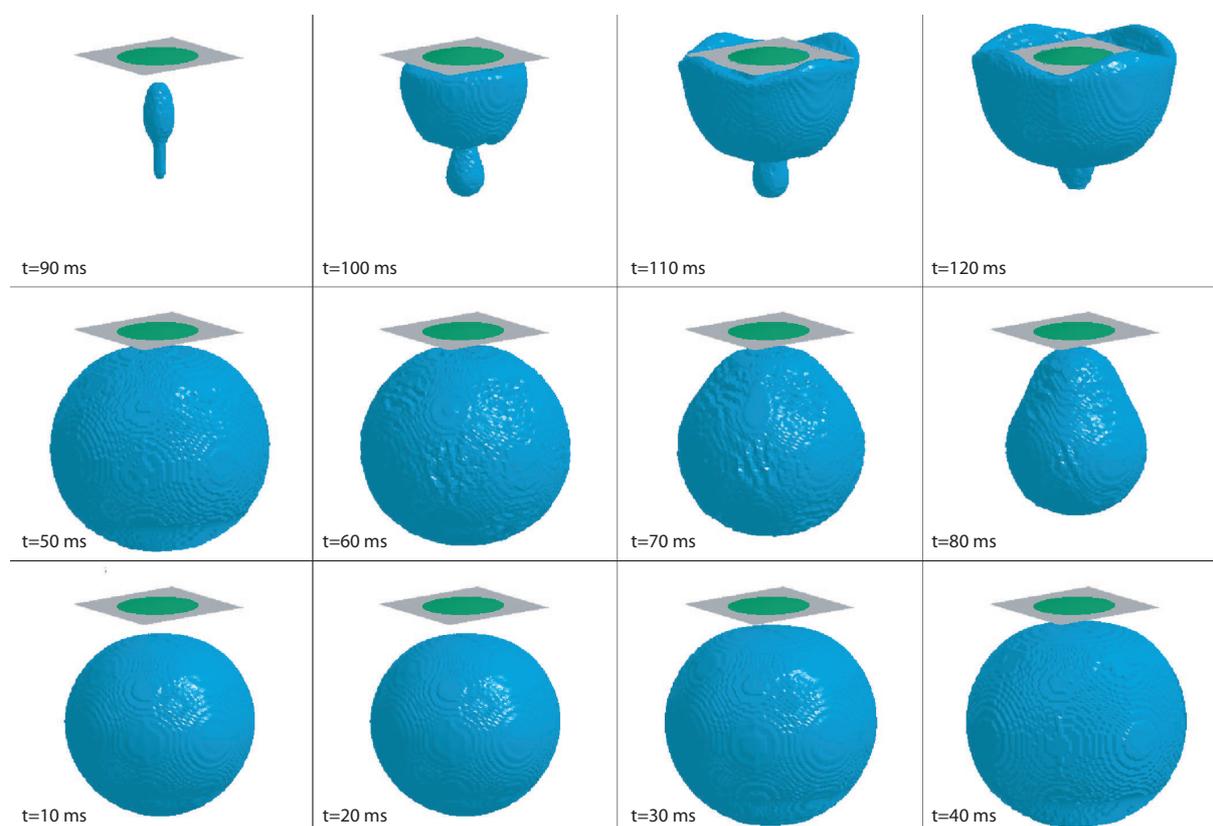


FIGURE 6.19 – Visualisation de l'interaction bulle/structure toutes les 10 ms, pour une distance initiale charge-cible de 80 cm. La séquence chronologique se lit gauche à droite et de bas en haut

Chapitre 7

Conclusion

Ce mémoire synthétise l'essentiel de nos travaux consacrés à l'étude et la modélisation des explosions sous-marines en champ proche, et leurs effets sur les structures. On s'est notamment attaché à étudier, de manière systématique et indépendante, les différents phénomènes hydrodynamiques qui les caractérisent que sont la détonation, le choc sous-marin, et la dynamique de bulle. Cette démarche a été adoptée dans le but de fournir des éléments de compréhension essentiels pour bâtir une méthodologie de simulation, cohérente avec les différents aspects du problème.

Dans ce cadre, on insiste sur l'hétérogénéité des ordres de grandeur spatio-temporels associés à chaque phénomène. À la source du problème, on montre en effet que le processus de détonation dans l'explosif conditionne les événements ultérieurs. Ainsi, la transmission et la propagation de l'onde de choc sous-marine dans l'environnement immédiat de la charge sont influencées par le niveau de précision avec lequel on représente l'onde explosive. De même, le comportement dynamique de la bulle aux instants ultérieurs, dépend directement de l'état thermodynamique des gaz résiduels dont elle est issue, en fin de détonation. En outre, la physique du choc et de la bulle se situe sur des échelles de temps et d'espace très différentes.

Naturellement, ces éléments orientent la stratégie de modélisation et permettent de guider les choix méthodologiques. Le but que l'on s'est assigné est effectivement de disposer d'une méthode de calcul capable, au sein d'un même programme, de résoudre l'ensemble du problème, avec des temps de calcul CPU acceptables à l'échelle industrielle. Dans ce cadre, la méthode Euler-Lagrange Multi-Matériaux avec prise en compte des couplages Euler-Lagrange pour l'interaction fluide-structure permet de traiter simultanément la globalité des phénomènes. On se base sur la méthode de discrétisation par éléments finis pour résoudre les équations de la mécanique des milieux continus, tant pour les fluides que pour les structures.

Pour répondre à nos objectifs, la méthode est adaptée en résolvant le problème par étapes successives, sur des grilles de calcul différentes. Le passage de la solution, d'une grille à une autre, s'opère par une technique de projection des résultats développée pour les besoins de la thèse. Les développements sont implémentés dans le code de calcul LS-DYNA et disponibles sous la dernière version commerciale R5.1.1. La méthodologie ainsi décrite s'apparente à une méthode de maillage adaptatif. Cependant, les instants auxquels s'opère cette adaptation, et les grilles de calcul utilisées, sont fixés par l'utilisateur en fonction de sa connaissance propre du problème.

Dans le cadre des explosions sous-marines, les phases initiales de détonation et de choc sont bien souvent assimilables à des problèmes sphériques ou axisymétriques. Elles peuvent donc être résolues sur des grilles de calcul bidimensionnelles dont l'enrichissement, en ordre-h, est cohérent avec la physique à représenter. Après projection de ces premiers résultats, les phases suivantes correspondant à l'interaction fluide-structure et à la dynamique de bulle aux temps longs peuvent ensuite être traitées sur des grilles 2D ou 3D en fonction de la géométrie du problème. Le temps de résolution associé à ces étapes successives s'en trouve fortement réduit par rapport aux simulations tridimensionnelles complètes. Celles-ci nécessitent en effet de réaliser un fort compromis entre la précision souhaitée et la rapidité des calculs. Ainsi se trouve illustrée la méthodologie générale que l'on met finalement en œuvre dans un cas d'application pour lequel on dispose de mesures expérimentales. Les résultats obtenus sont comparables à ceux de l'expérience, ce qui constitue une voie de validation de la méthode.

Dans le champ d'application en objet, des contraintes de modélisation subsistent cependant. Contre toute évidence, on montre en effet que la simulation des explosions, même en champ proche, est fortement influencée par les limites du modèle. Des difficultés apparaissent notamment aux temps longs, pour le calcul de la dynamique de bulle et de son effondrement contre les structures. Le caractère incompressible de l'écoulement se traduit par des termes de masse d'eau ajoutée associés à la pulsation et à la migration de la bulle. Dès lors, la prise en compte correcte de ce phénomène nécessite d'éloigner de façon conséquente les frontières du domaine liquide autour de la bulle. En outre, les ondes de surpression émanant de la bulle doivent être absorbées au niveau des frontières du modèle. Ce second point est pris en compte aujourd'hui en imposant des conditions de non-réflexion formulés suivant la théorie acoustique en onde plane. Une voie d'amélioration de la méthode consisterait donc à formuler des conditions aux limites cohérentes avec ce double caractère compressible/incompressible de l'écoulement, respectivement aux temps courts et aux temps longs.

Annexe A

Éléments d'analyse dimensionnelle

A.1 Unités physiques indépendantes

Historiquement, la dimension de toute grandeur physique peut s'exprimer à l'aide de 7 unités physiques indépendantes, qui représentent les unités de base du système fondamental :

- * la longueur : L
- * la masse : M
- * le temps (ou durée) : T
- * la température : Θ
- * l'intensité électrique : I
- * l'intensité lumineuse : J
- * la quantité de matière : N

A.2 Théorème de Vaschy-Buckingham

Le théorème de Vaschy-Buckingham, ou théorème π , permet d'exprimer un problème physique quelconque fonction de n variables physiques, notées q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), toutes dépendantes de k unités physiques indépendantes (par ex. masse, longueur, temps pour un problème de mécanique classique), en un problème équivalent dépendant de p nombres sans dimensions, notés π_j ($j = 1, 2, \dots, p$).

Le problème physique s'écrit sous la forme générale suivante :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0 \tag{A.2.1}$$

où f est une fonction scalaire ou vectorielle.

Il est ramené au problème sans dimensions suivant :

$$F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p) = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

où les p nombres sans dimensions π_j ($j = 1, 2, \dots, p$) sont construits à partir des variables physiques q_i par $p = n - k$ équations de la forme :

$$\pi_j = q_1^{m_{j1}} q_2^{m_{j2}} \dots q_i^{m_{ji}} \dots q_n^{m_{jn}} \quad (\text{A.2.3})$$

où les exposants m_{ji} sont des constantes.

A.3 Exemple appliqué à l'expansion d'une cavité gazeuse suite à une explosion

Prenons par exemple l'expansion d'une bulle de gaz initialement comprimée dans un domaine infini supposé homogène. Ce problème de mécanique classique dépend de $k = 3$ unités de base que sont le temps T , la masse M et la longueur L . Les grandeurs physiques qui caractérisent ce problème sont le rayon de la cavité gazeuse (qui représente une mesure de l'expansion) r , l'énergie initiale contenue dans la cavité e , la masse volumique du domaine infini ρ et le temps t . On caractérise donc le problème par $n = 4$ variables physiques, et le système physique à résoudre s'écrit sous la forme générale :

$$f(r, e, \rho, t) = 0 \quad (\text{A.3.1})$$

Les dimensions de ces grandeur physiques s'écrivent :

- * rayon de la cavité : $[r] = L$
- * énergie initiale : $[e] = ML^2T^{-2}$
- * masse volumique : $[\rho] = ML^{-3}$
- * temps : $[t] = T$

Le théorème de Vaschy-Buckingham permet de réduire cette relation à une relation entre un nombre réduit de combinaisons de ces variables. La relation Eq. (A.3.1) est donc réductible à une relation à $p = n - k = 1$ paramètre sans dimension, noté C , construit à partir des variables physiques :

$$C = e^\alpha r^\beta t^\gamma \rho^\delta \quad (\text{A.3.2})$$

L'équation aux dimensions s'écrit :

$$M^{\alpha+\delta} L^{2\alpha+\beta-3\delta} T^{-2\alpha+\gamma} = 1 \quad (\text{A.3.3})$$

Comme les trois unités de base sont indépendantes, on aboutit à un simple système de 3 équations à 4 inconnues

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 0 \\ 2\alpha + \beta - 3\delta = 0 \\ -2\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \beta = 5\delta \\ \gamma = -2\delta \end{cases} \quad (\text{A.3.4})$$

Le nombre sans dimension peut donc s'exprimer :

$$C = e^{-\delta} r^{5\delta} t^{-2\delta} \rho^{\delta} = (e^{-1} r^5 t^{-2} \rho)^{\delta} \quad (\text{A.3.5})$$

En posant $C = k^{\delta}$, on obtient finalement la relation :

$$r(t) = k^{1/5} \left(\frac{e}{\rho} \right)^{1/5} t^{2/5} \quad (\text{A.3.6})$$

Si les paramètres physiques choisis sont pertinents, le paramètre sans dimension k devrait être proche de 1. L'expérience permet de connaître l'évolution de r en fonction de t . Connaissant ρ on peut en déduire l'énergie initiale e .

A.4 Similitude

La similitude est vérifiée lorsque tous les nombres sans dimension qui caractérisent le problème physique étudié ont les mêmes valeurs pour le modèle (à échelle réduite) et le cas réel (par ex. prototype). En mécanique des fluides on distingue :

- * La **similitude géométrique** : les rapports de toutes les dimensions linéaires sont égaux (les angles sont conservés)

$$\hat{L} = \text{Constante} \quad (\text{A.4.1})$$

- * La **similitude cinématique** : les lignes de courant et les trajectoires des particules sont géométriquement semblables, les rapports des vitesses (et accélérations) en des points homologues sont égaux.

$$\hat{U} = \frac{\hat{L}}{\hat{T}} = \text{Constante (en tous points homologues)} \quad (\text{A.4.2})$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{\hat{U}}{\hat{T}} = \frac{\hat{L}}{\hat{T}^2} = \text{Constante (en tous points homologues)}$$

- * La **similitude dynamique** : les rapports des efforts en des points homologues sont égaux. Cette similitude permet de relier l'échelle des temps à l'échelle des longueurs et d'en déduire ainsi l'échelle sur les vitesses et accélérations (par similitude cinématique). Pour ce faire, deux types de forces (au moins) doivent être privilégiés. Si l'on considère par exemple la similitude de Froude qui fait intervenir les forces prépondérantes d'inertie et de gravité, la similitude s'écrit :

$$\hat{M}\hat{a} = \hat{M}\hat{g} \quad \Rightarrow \quad \hat{a} = \hat{g}$$

$$\text{la similitude cinématique impose : } \hat{a} = \frac{\hat{U}^2}{\hat{L}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\hat{U}}{\sqrt{\hat{g}\hat{L}}} = 1 \quad (\text{A.4.3})$$

$$\text{et le nombre de Froude s'écrit : } F_r = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

La similitude de Reynolds fait quant à elle intervenir les forces d'inertie et de viscosité (viscosité cinématique ν) et s'écrit :

$$\hat{M}\hat{a} = \hat{\rho}\hat{\nu}\hat{L}\hat{U} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{a} = \hat{\nu}\hat{U}\hat{L}^{-2}$$

$$\text{la similitude cinématique impose : } \hat{a} = \frac{\hat{U}^2}{\hat{L}} \quad \text{d'où} \quad \frac{\hat{U}\hat{L}}{\hat{\nu}} = 1 \quad (\text{A.4.4})$$

$$\text{et le nombre de Reynolds s'écrit : } R_e = \frac{UL}{\nu}$$

On notera que le respect simultané de plusieurs similitudes dynamiques est un cas qui peut-être difficile (voire impossible) à mettre en œuvre à l'échelle du modèle réduit dans la mesure où il imposerait d'utiliser un fluide aux caractéristiques matérielles utopiques. En imaginant par exemple un modèle qui vérifie à la fois les similitudes de Froude et de Reynolds, on aurait alors $\hat{F}_r = \hat{R}_e = 1$. En vertu du facteur d'échelle sur la gravité qui est toujours (ou presque) égal à 1, c.-à-d. $\hat{g} = 1$, cela entraîne la condition $\hat{L}^{3/2} = \hat{\nu}$ qui implique d'utiliser un fluide à échelle réduite qui n'a pas les mêmes caractéristiques en terme de viscosité.

Annexe B

Potentiel Retardé de Kirchhoff

B.1 Fluide acoustique et équation d'ondes

Les développements introduits par la suite sont effectués en faisant l'hypothèse d'un écoulement fluide non-visqueux, irrotationnel, qui admet un potentiel des vitesses $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ défini à chaque instant et en tout point tel que :

$$\mathbf{v} = -\nabla \varphi \quad (\text{B.1.1})$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ est la vitesse des particules fluide, et ∇ est l'opérateur gradient. Le champ de pression en tout point du fluide vérifie en outre l'équation de Bernoulli :

$$p(\mathbf{r}, t) = -\rho_f \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \right] + p_{atm} + \rho_f g d(\mathbf{r}) \quad (\text{B.1.2})$$

où $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2 + x_3 \mathbf{x}_3$ dans le repère cartésien, ρ_f est la masse volumique du fluide, p_{atm} la pression atmosphérique, g l'accélération de pesanteur et $d(\mathbf{r})$ la profondeur sous la surface libre au point considéré.

Aux équations précédentes, on adjoint les restrictions suivantes :

- * Pour satisfaire aux considérations physiques liées aux phénomènes de détonique sous-marine, on définit le **champ proche** lorsque $a(t) < r < R$ où $a(t)$ est le rayon actuel de la bulle des gaz et R est la distance mesurée à partir du point source, telle que R soit supérieure ou égale à deux fois le rayon maximal de la bulle atteint lors de la première oscillation ($R = 2R_{max}$), ou quinze fois le rayon initial de la charge explosive ($R = 15r_c$). Le **champ lointain** est défini alors pour $r > R$.
- * En champ proche, la propagation d'onde est hyper-acoustique et radiale, le front d'onde de choc généré aux temps très courts se déplace à des vitesses supérieures à la vitesse du son ($c > c_f$)

- * En champ lointain, la propagation est quasi-acoustique et radiale, le profil de pression est hyper-acoustique et le front d'onde se déplace à une vitesse proche de la vitesse du son ($c \approx c_f$)
- * La propagation d'onde en champ lointain produite par les oscillations de bulle est modélisée en acoustique linéaire, mais le champ n'est pas purement radial à cause de la migration de la bulle (en direction de la surface libre et/ou de parois)

En champ lointain $r > R$, on néglige le terme quadratique dans l'équation de Bernoulli Eq. (B.1.2), ce qui permet d'exprimer la pression acoustique sous la forme linéarisée suivante :

$$p(\mathbf{r}, t) = \rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B.1.3})$$

L'onde de surpression incidente venant impacter une structure immergée, l'interaction fluide-structure donne naissance à un champ complexe dans le fluide qui dépend de la présence et de la réaction de la paroi. La pression totale caractérisant ce champ complexe en un point $P \in \Omega_f$ se décompose comme suit :

$$p(\mathbf{r}, t) = p_I(\mathbf{r}, t) + p_D(r, t) + p_R(\mathbf{r}, t) \quad (\text{B.1.4})$$

où $p_I(\mathbf{r}, t)$ est l'onde incidente (*incident pressure wave*), il s'agit de la donnée de chargement du problème considéré ; $p_D(\mathbf{r}, t)$ est l'onde diffractée (*reflected wave*), elle est créée par la réflexion de l'onde incidente sur la paroi supposée rigide et fixe ; $p_R(\mathbf{r}, t)$ est l'onde rayonnée (*radiated wave*), c'est le champ créé par les mouvements (de corps rigide ou de déformation) de la structure. On appelle pression diffusée $p_S(\mathbf{r}, t)$ (*scattered wave*), la somme des pressions diffractée et rayonnée, $p_S = p_D + p_R$, et constitue l'inconnue du problème.

Pour une structure Ω_s immergée dans un domaine fluide supposé infini Ω_f , le champ de pression et toutes ses composantes satisfont en outre l'équation d'onde scalaire tridimensionnelle de Helmholtz (équation d'onde acoustique isotrope) qui est une équation hyperbolique. Celle-ci s'exprime à l'aide du potentiel des vitesses φ sous la forme :

$$c_f^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (\text{B.1.5})$$

où c_f est la vitesse du son dans le milieu fluide. La solution générale s'écrit sous la forme de la combinaison d'une onde divergente f et d'une onde convergente g :

$$\varphi(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) \quad (\text{B.1.6})$$

Au niveau de l'interface fluide-structure Γ_{fs} , la condition de continuité des vitesses impose d'écrire l'égalité des composantes normales de la vitesse particulière du fluide et de la vitesse de la structure (non pénétration des particules de fluide dans la structure) :

$$\mathbf{v}_f \mathbf{n}_f = \mathbf{v}_s \mathbf{n}_f \quad (\text{B.1.7})$$

où \mathbf{n}_f est la normale unitaire au niveau de l'interface fluide-structure Γ_{fs} . Dans le cas où la vitesse de la plaque est normale à l'interface, en notant w le déplacement transversal de la paroi, la relation de continuité à l'interface fluide-structure s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial n_f} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{B.1.8})$$

B.2 Potentiel retardé de Kirchhoff

On peut exprimer de façon exacte l'interaction fluide-structure à l'aide de la formule du potentiel retardé de Kirchhoff (*Retarded Potential Formula* RPF). Pour des géométries tridimensionnelles de structure complexes et arbitraires, l'application directe du RPF pour un calcul de réponse à une excitation transitoire comme une onde de choc est numériquement très coûteuse, car elle nécessite de stocker un grand nombre d'informations liées à l'historique du chargement. Ces difficultés ont mené les scientifiques à effectuer des approximations de la formulation RPF que Geers catégorise en trois classes dans [Geers, 1975] :

- * Approximations au temps court (*Early-Time Approximations* ETA ou *High-Frequency Approximations* HFA), valides pour de faibles longueurs d'ondes acoustiques (phénomènes haute fréquence), et utiles pour modéliser les premiers instant de l'interaction fluide-structure,
- * Approximations au temps long (*Late-Time Approximations* LTA ou *Low-Frequency Approximations* LFA), valides pour de grandes longueurs d'ondes acoustiques (phénomènes basse fréquence), et utiles pour modéliser les phénomènes secondaires de la réponse,
- * Approximations doublement asymptotiques (*Doubly Asymptotic Approximations* DAA) valides pour les deux cas limites précédents.

Aux équations précédentes Eq. (B.1.1), (B.1.3) et (B.1.5) on adjoint les hypothèses suivantes :

- * le potentiel des vitesses $\varphi(r, t)$ pour $t \in]-\infty; t]$ n'est pas une fonction singulière dans le domaine Ω_f situé entre la surface fermée Γ_{fs} , qui représente la surface mouillée de la structure immergée,
- * le potentiel des vitesses décroît en R^{-1} à une distance R suffisamment éloignée de Γ_{fs}

On peut alors exprimer la formule du potentiel retardé de Kirchhoff (références [Felippa, 1980a] et [Geers et Zhang, 1994b]), qui est une forme intégrale de l'équation d'onde Eq. (B.1.5) obtenue à l'aide de l'identité de Green :

$$4\pi \epsilon \varphi(P, t) = - \int_{\Gamma_{fs}} \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{Q}, t_r) + \frac{\cos \beta}{R^2} \left[\varphi(\mathbf{Q}, t_r) + \frac{R}{c_f} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{Q}, t_r) \right] \right\} dS_{\mathbf{Q}} + 4\pi \epsilon \varphi_I(P, t) \quad (\text{B.2.1})$$

où $\varphi(P, t)$ est potentiel des vitesses relatif à la pression totale au point P, $\varphi_1(P, t)$ le potentiel des vitesses relatif à l'onde incidente, Γ_{fs} la surface d'interaction fluide-structure, $P(x_1, x_2, x_3)$ la position du point où le potentiel doit être dérivé, $Q(x'_1, x'_2, x'_3)$ la position du point source, R la distance du point P au point source Q (norme du vecteur \mathbf{R}_{PQ}), \mathbf{n} la normale unitaire dirigée vers l'intérieur du domaine Ω_f calculée en Q $\in \Gamma_{fs}$, $\cos \beta = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{n}$ le cosinus de l'angle β formé par les vecteurs \mathbf{R} et \mathbf{n} , $t_r = t - R/c_f$ le temps retardé, et la valeur du paramètre ϵ dépend de la position du point P, à savoir $\epsilon = 1$ si $P \in \Omega_f$, $\epsilon = 1/2$ si $P \in \Gamma_{fs}$ et $\epsilon = 0$ si $P \in \Omega_s$.

Il faut bien noter que l'intégration ci-dessus est singulière lorsque R tend vers 0 en raison des termes R^{-1} et R^{-2} à intégrer. C'est pour cela que l'on calcule la valeur principale de Cauchy qui revient à chercher la limite de l'intégrale sur l'ensemble $\Gamma_{fs} \cap \Gamma_\epsilon$, où Γ_ϵ représente un petit élément de surface autour du point P, lorsque l'on fait tendre Γ_ϵ vers zéro.

Le champ de pression $p(P, t)$ s'obtient en dérivant la formule précédente par rapport au temps et en utilisant la relation Eq. (B.1.3) :

$$4\pi\epsilon p(P, t) = \int_{\Gamma_{fs}} \left\{ \frac{\rho_f}{R} \frac{\partial v_n}{\partial t}(Q, t_r) - \frac{\cos \beta}{R^2} \left[p(Q, t_r) + \frac{R}{c_f} \frac{\partial p}{\partial t}(Q, t_r) \right] \right\} dS_Q + 4\pi\epsilon p_1(P, t) \quad (\text{B.2.2})$$

où $v_n = -\partial\varphi/\partial\mathbf{n}$ est la vitesse particulière normale à l'interface Γ_{fs} . Pour introduire les approximations de l'interaction fluide-structure sur le contour Γ_{fs} , on considère le point P appartenant à Γ_{fs} , soit $\epsilon = 1/2$, ce qui donne :

$$2\pi p(P, t) = \int_{\Gamma_{fs}} \left\{ \frac{\rho_f}{R} \frac{\partial v_n}{\partial t}(Q, t_r) - \frac{\cos \beta}{R^2} \left[p(Q, t_r) + \frac{R}{c_f} \frac{\partial p}{\partial t}(Q, t_r) \right] \right\} dS_Q + 2\pi p_1(P, t) \quad (\text{B.2.3})$$

L'expression générale Eq. (B.2.3) peut être implémentée directement dans un schéma numérique pour tenir compte des interactions fluide-structure dans le cas d'excitations transitoires telles que les explosions sous-marines. Cependant, cette méthode est encore aujourd'hui trop coûteuse en raison de la nécessité de stocker à chaque pas de temps, l'ensemble des informations aux différents points de calcul pour alimenter les pas de temps suivants. C'est cette limitation qui est à l'origine du développement de méthodes d'approximations comme la DAA qui permet de simuler correctement l'interaction fluide-structure aux temps court et temps long. Elle est à la base de la méthode de calcul numérique développée dans USA (*Underwater Shock Analysis*), qui est une méthode d'éléments de frontière ne nécessitant pas de modéliser l'étendue du domaine fluide pour intégrer les équations de la mécanique des fluides.

B.3 Application du RPF à une structure plane déformable

La formule du potentiel retardé précédente Eq. (B.2.3) se simplifie lorsque l'on considère l'interaction de l'onde de choc incidente avec une paroi plane infinie. Dans ce cas, l'angle β formé par les

vecteurs \mathbf{R}_{PQ} et \mathbf{n} est égal à $\pi/2 \forall Q \in \Gamma_{fs}$, donc le cosinus est nul ($\cos\beta = 0$). Une façon de calculer la pression en tout point de l'interface Γ_{fs} est d'exprimer le potentiel des vitesses φ en fonction du potentiel non-perturbé φ_I , comme si la frontière Γ_{fs} n'avait aucun effet sur le champ de pression. On note v_{In} la composante normale de la vitesse particulière dans le champ de pression incidente $p_I(t)$ non-perturbé. La pression s'exprime alors :

$$p(P, t) = p_I(P, t) + \frac{\rho_f}{2\pi} \int_{\Gamma_{fs}} \frac{1}{R} \left\{ \frac{\partial v_n}{\partial t}(Q, t_r) - \frac{\partial v_{In}}{\partial t}(Q, t_r) \right\} dS_Q \quad (\text{B.3.1})$$

Pour le cas simple d'une structure plane de surface S , fixée sur une paroi plane réputée indéformable et de dimension infinie représentée par le domaine $\Gamma_{fs} \cap (S)$, la relation de continuité des composantes normales de la vitesse particulière à l'interface fluide-structure impose une vitesse normale nulle au niveau de la paroi rigide. L'expression du champ de pression au point P appartenant à la surface S s'écrit alors :

$$p(P, t) = 2p_I(P, t) + \frac{\rho_f}{2\pi} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial v_n}{\partial t}(Q, t - R/c_f) dS_Q \quad (\text{B.3.2})$$

où le terme $2p_I(P, t)$ correspond au doublement de la pression dans le cas où la surface est parfaitement rigide. Les effets du rayonnement acoustique liés à la mise en mouvement de la structure sont contenus dans le second terme du membre de droite. La distance R est la distance entre les points P et Q , R/c_f est le temps mis par l'onde acoustique rayonnée pour voyager du point Q au point P à la vitesse du son dans le fluide, et $t_r = t - R/c_f$ représente l'instant d'apparition de l'onde rayonnée au point Q . La grandeur v_n est la composante normale de la vitesse particulière à la plaque. A l'interface entre le fluide et la structure déformable animée d'une vitesse transversale $\dot{w}(t)$ dans le repère structure $(O, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_\theta; \mathbf{x}_z)$, la condition d'égalité de la composante normale des vitesses impose la relation de continuité $\dot{w} = -v_n$ dans la mesure où le vecteur normal unitaire \mathbf{n} utilisé dans la formulation est directement opposé au vecteur \mathbf{x}_z . On a finalement :

$$p(P, t) = 2p_I(P, t) - \frac{\rho_f}{2\pi} \int_S \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{w}}{\partial t}(Q, t - R/c_f) dS_Q \quad (\text{B.3.3})$$

Cette équation intégral-différentielle transcrit donc, sous forme intégrée à l'interface, les contributions élémentaires à la pression rayonnée de chaque élément de la structure plane déformable dont la vitesse transversale est \dot{w} .

B.4 Approximations de l'interaction fluide-structure

À partir de l'équation intégral-différentielle Eq. (B.3.3) écrite précédemment on peut introduire les approximations fluide-structure utilisées par la suite pour déterminer la réponse dynamique d'une

plaque circulaire déformable soumise à l'explosion sous-marine. Dans le repère en coordonnées cylindro-polaires $(O, \vec{x}_r; \vec{x}_\theta; \vec{x}_z)$ de la plaque, les positions des points P et Q sont données respectivement par les variables radiales r et r' en raison de l'axisymétrie du problème. La distance R s'écrit alors $R = |r - r'|$. L'expression de la pression calculée au centre de la plaque ($r = 0$) à chaque instant t devient :

$$p(0, t) = 2p_1(0, t) - \frac{\rho}{2\pi} \int_S \frac{1}{|r - r'|} \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \left(r', t - \frac{|r - r'|}{c} \right) dS \quad (\text{B.4.1})$$

Afin de simplifier l'écriture, on note par la suite la pression au centre $p(0, t) = p(t)$ et la pression incidente $p_1(0, t) = p_1(t)$. On écrit également la masse volumique du fluide au repos $\rho_f = \rho$. On change l'écriture de la variable r' en r , puis on décompose l'intégrale de surface en une intégrale simple sur r et une intégrale simple sur θ , l'élément d'aire s'écrit $dS = r dr d\theta$. Tous calculs faits on obtient :

$$p(t) = 2p_1(t) - \rho \int_0^a \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \left(r, t - \frac{r}{c} \right) dr$$

En faisant l'approximation d'une déformée parabolique de la plaque, on introduit l'expression du déplacement vertical en tout point r et à chaque instant t sous la forme :

$$\begin{cases} w(r, t) = 0 & t < 0 \\ w(r, t) = W(t) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) & t > 0 \end{cases} \quad (\text{B.4.2})$$

où $W(t)$ est la déflexion au centre de la plaque en chaque instant. Cette approximation respecte en outre la condition d'appui simple $w(a, t) = 0$ sur le contour extérieur de la plaque pour $r = a$. Cette approximation quadratique du déplacement transversal permet d'approcher les observations effectuées lors d'expérimentations sur des structures analogues [Auroire, 1998]. En substituant cette approximation du déplacement dans la relation précédente, on écrit la pression au centre de la plaque :

$$p(t) = 2p_1(t) - \rho \int_0^a \frac{d^2 W}{dt^2} \left(t - \frac{r}{c} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) dr \quad (\text{B.4.3})$$

Pour pouvoir intégrer, on effectue le changement de variable, $r = \phi(\tau) = c(t - \tau)$, et suivant la formule d'intégration par changement de variable :

$$\int_{\phi(\tau_1)}^{\phi(\tau_2)} f(r) dr = \int_{\tau_1}^{\tau_2} f[\phi(\tau)] \phi'(\tau) d\tau \quad \rightarrow \quad \int_0^a (\cdot) dr = - \int_t^{t-a/c} (\cdot) c d\tau$$

on obtient

$$p(t) = 2p_1(t) + \rho c \int_t^{t-\theta_d} \frac{d^2W}{d\tau^2}(\tau) \left(1 - \frac{1}{\theta_d^2}(t-\tau)^2\right) d\tau$$

où l'on a introduit le paramètre $\theta_d = a/c$ qui est appelé temps de diffraction et correspond au temps mis par une onde pour se propager du contour de la plaque au centre. On transforme alors cette expression en effectuant deux intégrations par parties successives pour l'intégrale du second membre. Tous calculs faits, l'expression de la pression au centre de la plaque à chaque instant s'écrit :

$$p(t) = 2p_1(t) - \rho c \left[\frac{dW}{dt}(t) + \frac{2}{\theta_d} W(t - \theta_d) - \frac{2}{\theta_d^2} \int_{t-\theta_d}^t W(\tau) d\tau \right] \quad (\text{B.4.4})$$

L'interprétation physique de l'équation Eq. (B.4.4) exprimant la pression au centre de la plaque, est facilitée lorsque que l'on examine les deux cas limites correspondants respectivement aux approximations temps court et temps long.

B.4.1 Phase initiale ou approximation « temps court »

Pendant la phase initiale du mouvement pour laquelle $t < \theta_d$, les derniers termes de l'équation Eq. (B.4.4) sont négligeables, en effet

$$W(t - \theta_d) = 0 \quad \text{car} \quad t - \theta_d < 0$$

$$\int_{t-\theta_d}^t W(\tau) d\tau = \int_{t-\theta_d}^0 W(\tau) d\tau + \int_0^t W(\tau) d\tau = \int_0^t W(\tau) d\tau \approx 0$$

Ces termes correspondent à la diminution de pression liée à l'arrivée des ondes réfléchies provenant des points adjacents sur la plaque et le contour. La pression calculée au centre de la plaque est donc :

$$p(t) \approx 2p_1(t) - \rho c \frac{dW}{dt}(t) \quad (\text{B.4.5})$$

Ce résultat est exactement celui que l'on aurait obtenu en considérant une plaque plane de dimension infinie soumise à une onde de pression incidente plane, et mise en mouvement avec une vitesse dW/dt . Le terme $2p_1(t)$ correspond au doublement de la pression liée à la réflexion de l'onde sur la surface supposée fixe, et le terme $\rho c dW/dt$ correspond à la baisse de pression liée à la mise en mouvement de la plaque.

Cette approximation est appelée *Plane Wave Approximation* PWA, ce qui s'explique en fonction des considérations précédentes. Elle s'applique d'autant mieux que les longueurs d'ondes acoustiques du

fluide sont petites devant les longueurs d'ondes mécaniques de la structure, schématiquement pour des sollicitations en haute fréquence. Dans le cas de l'interaction d'une onde de surpression à front raide pour les explosions sous-marines, les temps et fréquences mis en jeu montrent que l'approximation PWA s'applique particulièrement bien dans la phase initiale transitoire du chargement, et ce d'autant mieux que l'onde de choc est de courte durée.

B.4.2 Basse fréquence ou approximation « temps long »

Le second cas limite d'étude s'effectue en supposant que les variations d'accélération de la plaque sont suffisamment lentes pour que les temps de propagation puissent être négligés. Cela correspond à évaluer dans l'équation Eq. (B.4.3) l'accélération d^2W/dt^2 au même instant τ en tout point de la plaque, exactement comme si le mouvement et la pression étaient identiques en tout point comme en écoulement incompressible. Dans ce cas, Eq. (B.4.4) devient :

$$p(t) = 2p_I(t) - \frac{2\rho a}{3} \frac{d^2W}{dt^2}(t) \quad (\text{B.4.6})$$

Le second terme du membre de droite s'identifie aux effets inertiels dus à la masse d'eau ajoutée au centre de la plaque, et égale par unité de surface à $2\rho a/3$. Le chargement de la plaque s'approche ainsi d'un doublement de pression incidente moins les effets inertiels de l'écoulement incompressible.

Cette approximation est appelée *Virtual Mass Approximation* VMA, ce qui se comprend bien en fonction des considérations précédentes. Elle s'applique d'autant mieux que les longueurs d'ondes acoustiques du fluide sont grandes, schématiquement pour des sollicitations en basse fréquence où les effets inertiels liés à la masse d'eau ajoutée sont prépondérants. Cette approximation basse fréquence est recevable pour les effets résiduels, comme par exemple les vibrations en basse fréquence de la structure de poutre navire après passage de l'onde de choc transitoire.

Annexe C

Modèle de Taylor

C.1 Approximation onde plane PWA

On peut expliciter la réponse dynamique de la structure suivant l'approximation onde plane PWA dans le cas de l'interaction d'une onde de choc avec une plaque circulaire de rayon a , dont la face non chargée est en contact avec un fluide léger comme l'air, et encastrée sur son contour sur une structure plane supposée infinie et rigide comme présenté sur la figure C.1. L'approximation PWA est cohérente avec le modèle développé par [Taylor, 1941b] pour décrire l'interaction d'un choc plan avec une structure plane de dimension infinie.

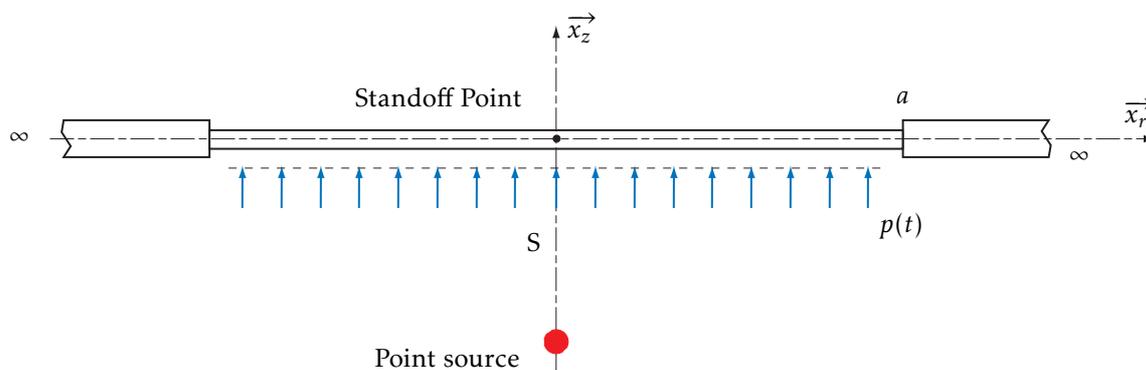


FIGURE C.1 – Approximation onde plane

L'hypothèse de déflexion parabolique de la surface moyenne S de la plaque est conservée, dans la mesure où elle est vérifiée par des relevés expérimentaux [Auroire, 1998]. Suivant l'approximation au temps court, le comportement de la structure est purement massique (pas d'effets de raideur), et on peut alors appliquer l'équation de conservation de la quantité de mouvement à un petit élément unitaire au

centre de la plaque :

$$m \frac{dv}{dt} = 2p_I(t) - \rho c v(t) \quad (\text{C.1.1})$$

où m est la masse de la plaque par unité de surface.

C.2 Simple exponentielle décroissante

En première approximation, la pression incidente dans le cas de l'onde de choc primaire prend la forme d'une simple exponentielle décroissante :

$$p_I(t) = p_m e^{-t/\theta} \quad (\text{C.2.1})$$

Il s'agit alors de résoudre l'équation différentielle du premier ordre avec second membre suivante :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\rho c}{m} v(t) = \frac{2p_m}{m} e^{-t/\theta} \quad (\text{C.2.2})$$

Après calculs, la solution générale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$v(t) = \frac{2\theta p_m}{m(1-\beta)} \left(e^{-\beta t/\theta} - e^{-t/\theta} \right) \quad \text{ou} \quad v(t) = 2V_p \frac{\beta}{1-\beta} \left(e^{-\beta t/\theta} - e^{-t/\theta} \right) \quad (\text{C.2.3})$$

où $\beta = \rho c \theta / m$ est un coefficient adimensionnel qui correspond au rapport de la masse d'eau « déplacée » par l'onde de choc sur la masse de la plaque, par unité de surface, et V_p désigne la vitesse particulaire maximale de l'onde égale à $p_m / \rho c$. De la vitesse, on déduit par intégration le déplacement $d(t)$ en imposant un déplacement nul au temps $t = 0$ pour déterminer la constante d'intégration K :

$$d(t) = \frac{2\theta^2 p_m}{m(1-\beta)} \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta t/\theta} + e^{-t/\theta} \right) + K \quad \text{avec} \quad K = \frac{2\theta p_m}{\rho c} \quad (\text{C.2.4})$$

On notera que la constante K représente le déplacement maximal de la plaque après interaction avec l'onde de choc, que l'on note d_m . La surpression totale appliquée au centre de la plaque s'écrit en fonction de la vitesse $p = 2p_I(t) - \rho c v(t)$, soit :

$$p(t) = \frac{2p_m}{(1-\beta)} \left(-\beta e^{-\beta t/\theta} + e^{-t/\theta} \right) \quad (\text{C.2.5})$$

On peut effectuer l'analyse des deux cas limites correspondants à l'interaction de l'onde de choc avec (1) une plaque de masse négligeable (équivalent à une interface libre), (2) une plaque de masse infinie (équivalent à une interface fixe).

1. Lorsque $\beta \rightarrow \infty$ (masse négligeable), la courbe de vitesse à chaque instant tend vers deux fois la vitesse particulaire incidente et la surpression totale tend vers zéro.
2. Lorsque β est nul (masse infinie), la vitesse de la plaque reste nulle à chaque instant et la surpression totale est égale à deux fois la pression incidente.

À partir de l'expression de la vitesse $v(t)$ Eq. (C.2.3), on peut déterminer la vitesse maximale atteinte par la plaque en son centre sous l'effet de l'onde de choc, en cherchant à annuler sa dérivée première $dv(t)/dt = 0$. On détermine ainsi le temps de coupure t_c pour lequel la vitesse atteinte par la plaque est maximale :

$$t_c = \theta \left(\frac{\ln \beta}{\beta - 1} \right) \quad (\text{C.2.6})$$

À cet instant, la vitesse maximale imprimée à la plaque est alors :

$$V_m = v(t_c) = \frac{2p_m}{\rho c} \beta^{1/(1-\beta)} \quad \text{ou} \quad V_m = 2V_p \beta^{1/(1-\beta)} \quad (\text{C.2.7})$$

Pour une illustration graphique, l'évolution du temps de coupure relatif t_c/θ en fonction du coefficient adimensionnel β est présentée sur la figure C.2 et la figure C.3(a) présente le tracé de la vitesse maximale relative en fonction de β .

L'accélération maximale γ_m de la plaque est obtenue au temps $t = 0$ et vaut :

$$\gamma_m = \frac{2p_m}{m} \quad (\text{C.2.8})$$

L'accélération moyenne $\bar{\gamma}$ est définie par :

$$\bar{\gamma} = \frac{V_m}{t_c} = \frac{2p_m}{m} \frac{\beta - 1}{\ln \beta} \beta^{\beta/(1-\beta)} \quad (\text{C.2.9})$$

On note que l'accélération moyenne correspond à une pondération de l'accélération maximale. Le coefficient de pondération dépend uniquement du paramètre β et correspond approximativement à une réduction d'un tiers de l'accélération maximale pour des valeurs de β comprises entre 1 et 10. On peut également noter que la vitesse maximale et l'accélération dépendent de la masse de la plaque alors que le déplacement maximal (obtenu par intégration temporelle du signal de vitesse) ne dépend que des

caractéristiques de l'onde incidente, c.-à-d. de d'explosion. On exprime le déplacement maximal d_m en intégrant la vitesse de la plaque Eq. (C.2.3) de $t = 0$ à l'infini :

$$d_m = \int_0^{\infty} v(t) dt = \frac{2\theta p_m}{\rho c} \quad (\text{C.2.10})$$

Il est intéressant de remplacer le temps t par l'expression du temps de coupure t_c Eq. (C.2.6) dans l'écriture de la surpression totale Eq. (C.2.5). On met ainsi en évidence que le temps t_c correspond à l'instant où le chargement s'annule, ce qui, suivant ces hypothèses, permet de considérer l'interaction fluide-structure comme terminée. C'est également le temps où le phénomène de cavitation apparaît dans le cas où la pression de cavitation est nulle (ce qui est approximativement vrai pour toute situation au voisinage de la surface libre). Par ailleurs, à cet instant, l'énergie cinétique transmise à la plaque est maximale et son expression par unité de surface devient :

$$E_c(t_c) = \frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{2\theta p_m^2}{\rho c} \beta^{(1+\beta)/(1-\beta)} \quad \text{ou} \quad E_c(t_c) = 4E_0 \beta^{(1+\beta)/(1-\beta)} \quad (\text{C.2.11})$$

où $E_0 = \theta p_m^2 / 2\rho c$ est l'énergie par unité de surface portée par l'onde de choc. L'évolution de l'énergie relative en fonction de β est présentée sur la figure C.3(b). On constate que l'énergie cinétique maximale transmise au temps de coupure t_c présente un maximum autour de $\beta = 1$. Ce maximum est environ égal à $0.5E_0$. On montre ainsi que l'énergie cinétique transférée à la plaque dans les premiers instants de l'interaction fluide-structure n'excède jamais 50% de l'énergie initiale portée par l'onde de choc, la part d'énergie restante étant présente dans l'onde de pression diffusée.

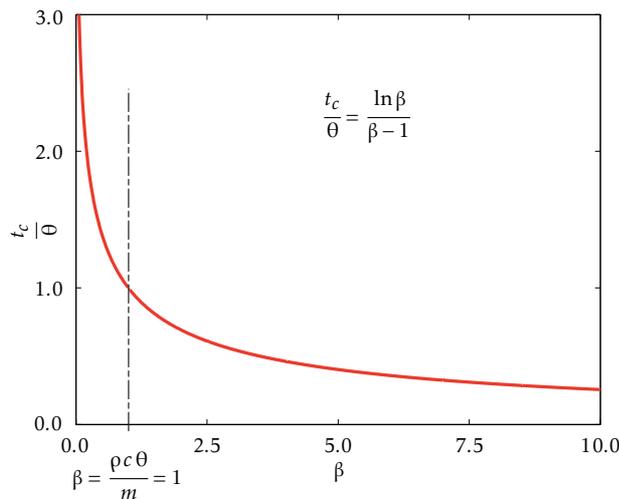


FIGURE C.2 – Tracé du temps de coupure relatif en fonction de β

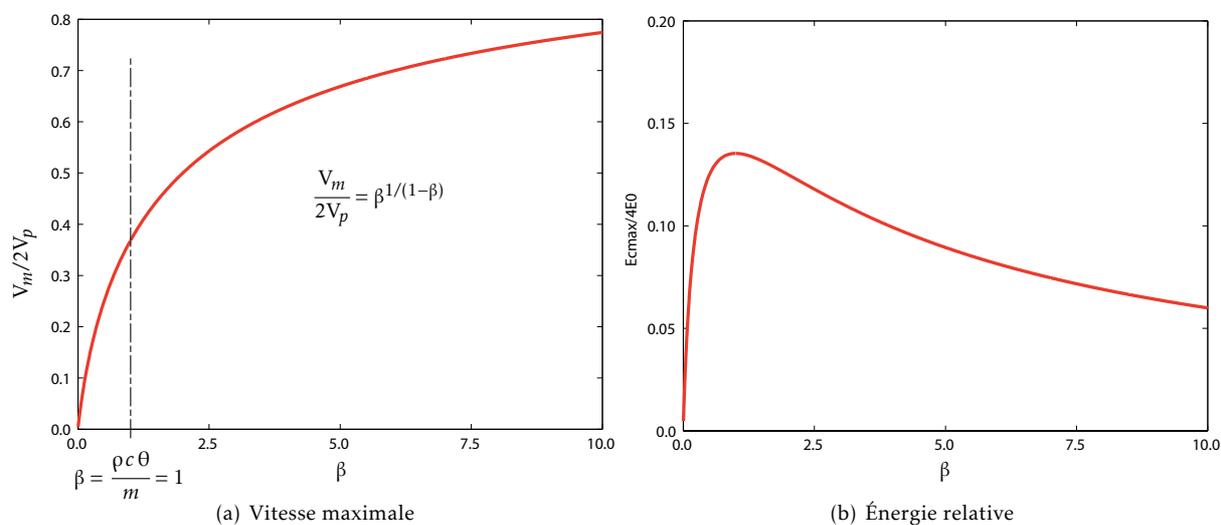


FIGURE C.3 – Tracés de la vitesse maximale relative et de l'énergie relative en fonction de β

C.3 Double exponentielle décroissante

La forme simplifiée utilisée dans le paragraphe C.3 pour représenter l'onde de pression incidente n'est valable que dans les premiers instants du choc, c.-à-d. pour $t \leq \theta$. Une approximation plus précise peut-être effectuée en considérant la forme suivante :

$$p_I(t) = p_m \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\beta_i t/\theta} \quad (\text{C.3.1})$$

où les paramètres α_i et β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont déterminés en fonction du profil de pression réellement mesuré en eau libre.

Généralement, deux termes suffisent pour décrire convenablement la décroissance derrière le pic de pression, soit, pour $n = 2$:

$$p_I(t) = p_m \left[\alpha_1 e^{-\beta_1 t/\theta} + \alpha_2 e^{-\beta_2 t/\theta} \right] \quad (\text{C.3.2})$$

L'objet de ce paragraphe est de quantifier les écarts obtenus par l'emploi des formes simple ($n = 1$) et double ($n = 2$) exponentielle décroissante, en comparant notamment les niveaux de vitesse maximale transmis à la plaque, et par suite, l'énergie cinétique transmise.

Pour une double décroissance exponentielle, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\rho c}{m} v(t) = \frac{2p_m}{m} \left[\alpha_1 e^{-\beta_1 t/\theta} + \alpha_2 e^{-\beta_2 t/\theta} \right] \quad (\text{C.3.3})$$

En suivant un cheminement identique à celui du paragraphe C.3, la résolution de cette équation différentielle aboutit à la solution en terme de vitesse :

$$v(t) = \frac{2\theta p_m}{m} \left[\frac{\alpha_1}{\beta - \beta_1} \left(e^{-\beta_1 t/\theta} - e^{-\beta t/\theta} \right) + \frac{\alpha_2}{\beta - \beta_2} \left(e^{-\beta_2 t/\theta} - e^{-\beta t/\theta} \right) \right] \quad (\text{C.3.4})$$

On en déduit l'évolution de la pression totale $p(t) = 2p_1(t) - \rho c v(t)$ appliquée sur la plaque au cours du temps :

$$p(t) = 2p_m \left[\alpha_1 \left(1 - \frac{\beta}{\beta - \beta_1} \right) e^{-\beta_1 t/\theta} + \alpha_2 \left(1 - \frac{\beta}{\beta - \beta_2} \right) e^{-\beta_2 t/\theta} + \beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta - \beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta - \beta_2} \right) e^{-\beta t/\theta} \right] \quad (\text{C.3.5})$$

Sous la forme générale étendue à n exponentielles décroissantes, les solutions en vitesse et pression s'écrivent alors :

$$v(t) = \frac{2\theta p_m}{m} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\beta - \beta_i} \left(e^{-\beta_i t/\theta} - e^{-\beta t/\theta} \right) \quad (\text{C.3.6})$$

$$p(t) = 2p_m \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i \left(1 - \frac{\beta}{\beta - \beta_i} \right) e^{-\beta_i t/\theta} + \beta \frac{\alpha_i}{\beta - \beta_i} e^{-\beta t/\theta} \right] \quad (\text{C.3.7})$$

En fixant $n = 1$, les paramètres α_1 et β_1 valent 1, et on vérifie que les expressions Eq. (C.3.6) et (C.3.7) sont identiques aux relations Eq. (C.2.3) et (C.2.5) obtenues dans le paragraphe C.3 pour la forme simple exponentielle décroissante.

La grandeur β qui gouverne l'interaction fluide-structure au temps court, dépend des trois paramètres suivants :

- * Masse d'explosif m_c (intervenant dans le calcul de la constante de temps)
- * Distance de tir r (intervenant dans le calcul de la constante de temps)
- * Epaisseur de plaque h (intervenant dans le calcul de la masse surfacique)

En faisant varier ces paramètres entre des bornes minimum et maximum représentatives des configurations rencontrées, on trace sur la figure figure C.4 les valeurs de β en fonction de la masse d'explosif

et de la distance de tir, pour deux épaisseurs de plaques (10 et 50 mm) que l'on peut considérer comme enveloppant la majorité des cas rencontrés. De manière arbitraire, on fait varier la masse d'explosif (en équivalent TNT) entre 1 et 1000 kg, et la distance de tir entre 1 et 50 m. La constante de temps du choc intervenant dans le calcul de β est calculée ici à l'aide des relations de similitude du TNT.

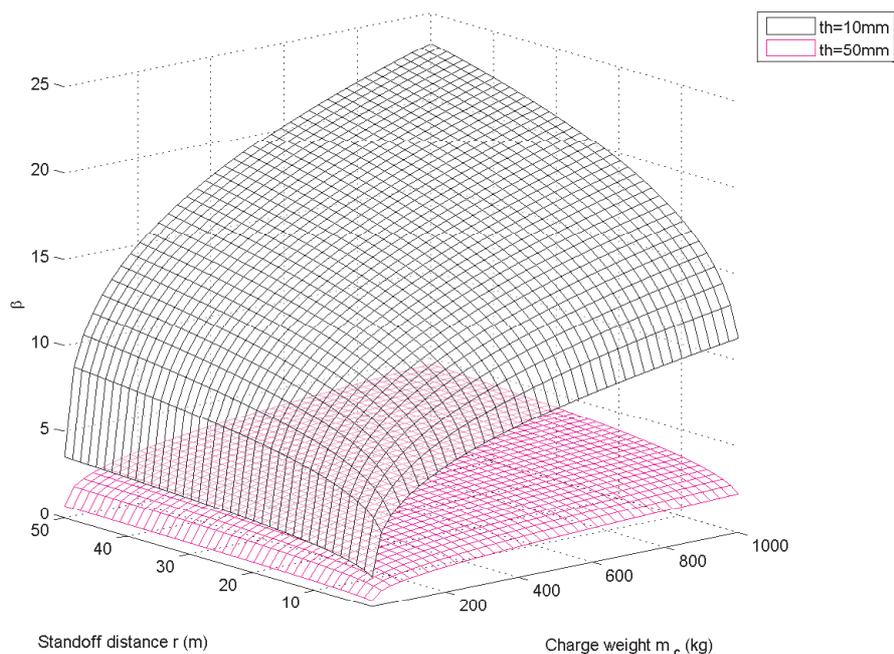


FIGURE C.4 – Tracé de β en fonction de la masse d'explosif TNT et de la distance de tir, pour deux épaisseurs de plaques (10 et 50 mm)

Pour plus de lisibilité, on présente également sur les figures C.5 et C.6 les tracés d'iso-contours du paramètre β , respectivement pour les épaisseurs de plaque de 10 et 50 mm. On montre ainsi que la plage de variation de β est grossièrement comprise entre 0.5 et 25. L'analyse de sensibilité aux trois paramètres précédents fait ressortir les tendances suivantes :

- * Les grandes valeurs de β correspondent à de fortes charges situées à de grandes distances pour des structures légères
- * Les faibles valeurs de β correspondent à des charges plus faibles situées à de petites distances pour des structure épaisses

La comparaison des expressions précédentes Eq. (C.3.4) et (C.3.5) avec les relations obtenues pour une simple exponentielle décroissante Eq. (C.2.3) et (C.2.5), ne met en évidence que de très faibles écarts en terme de vitesse maximale transmise et de temps de coupure (à partir duquel la pression s'annule),

et ce quelque soit la valeur du paramètre β dont la plage des variations est présenté sur la figure C.4.

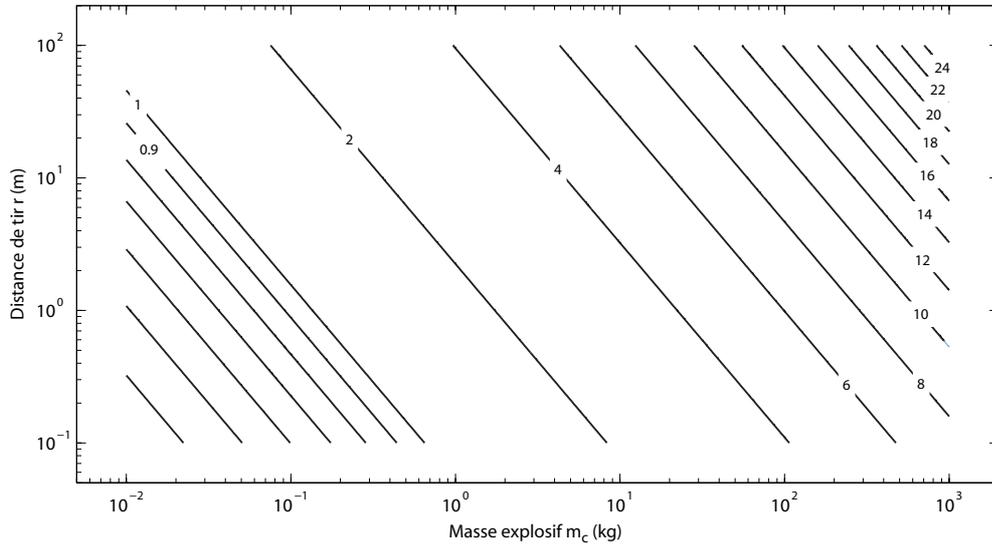


FIGURE C.5 – Iso-contours de β en fonction de la masse d'explosif et de la distance de tir pour des plaques de 10 mm d'épaisseur

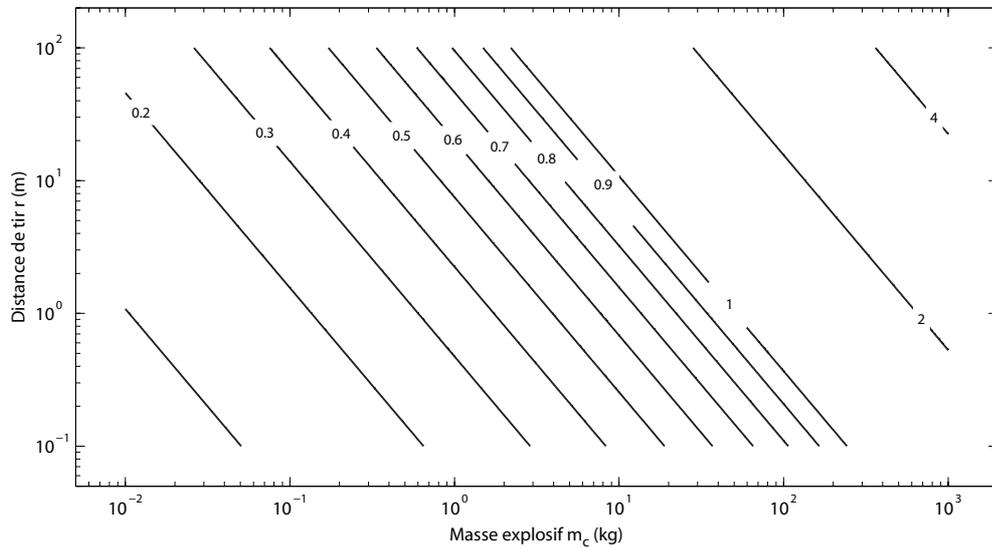


FIGURE C.6 – Iso-contours de β en fonction de la masse d'explosif et de la distance de tir pour des plaques de 50 mm d'épaisseur

A titre d'exemple, on trace sur les figures C.7(a) et C.7(b) les évolutions de vitesse et de pressions

(incidente et totale) en fonction du temps pour $\beta = 2$, en considérant une simple et une double exponentielle décroissante pour l'onde de pression incidente. Quelque soit $\beta > 1$, l'instant à partir duquel la pression totale s'annule est en effet toujours inférieur à la constante de temps du choc $t/\theta < 1$ (voir figure C.2). Or, les profils théoriques utilisés pour décrire la pression incidente sont quasiment identiques dans les premiers instants du choc (au moins pour $t \leq \theta$), ce qui signifie qu'à l'instant où la cavitation est susceptible d'intervenir, l'impulsion transmise à la plaque ne dépend pas, ou très peu, de la forme de l'onde de pression incidente en des temps plus longs. Dans la mesure où la réponse de plaque est principalement gouvernée par l'énergie cinétique maximale transmise au moment du choc, le fait d'assimiler l'onde incidente à une simple exponentielle décroissante est donc justifiée.

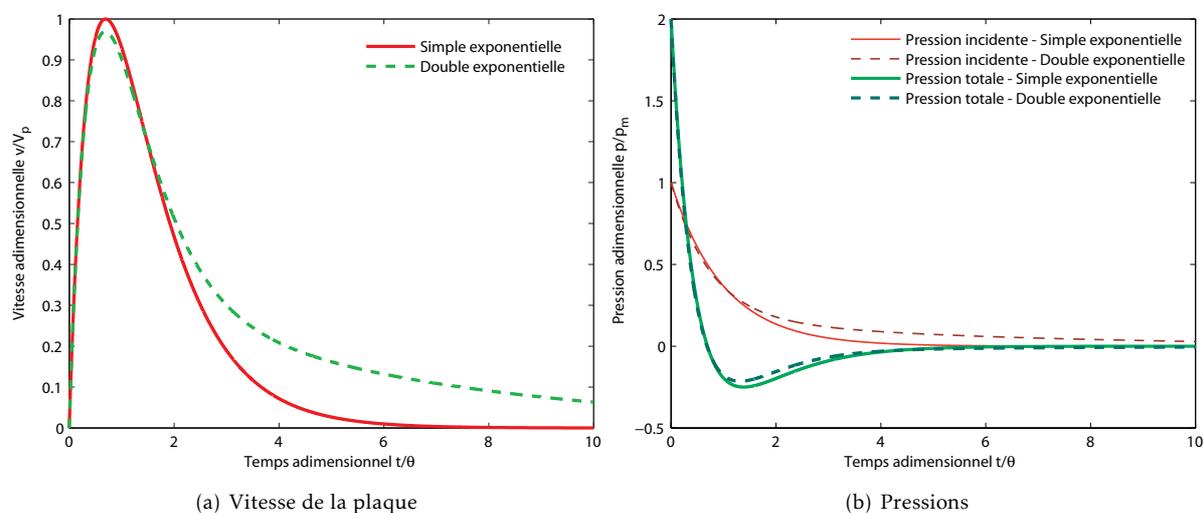


FIGURE C.7 – Tracés de la vitesse de la plaque et des pressions en fonction de la forme de l'onde de pression incidente pour $\beta = 2$

Annexe D

Méthode DAA

D.1 Formulation théorique

D.1.1 Forme discrétisée de la formulation variationnelle structure

La forme discrétisée de l'équation différentielle pour la réponse dynamique de la structure s'exprime classiquement par :

$$\mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_S \mathbf{X} = \mathbf{f} \quad (\text{D.1.1})$$

avec \mathbf{M}_S la matrice de masse de dimension $[\mathbf{N}_S \times \mathbf{N}_S]$ (où \mathbf{N}_S est le nombre de d.d.l. relatifs au problème structure), \mathbf{C}_S la matrice d'amortissement de dimension $[\mathbf{N}_S \times \mathbf{N}_S]$, \mathbf{K}_S la matrice de raideur, de dimension $[\mathbf{N}_S \times \mathbf{N}_S]$, $\ddot{\mathbf{X}}$ la matrice colonne des accélérations nodales de dimension $[\mathbf{N}_S \times 1]$, $\dot{\mathbf{X}}$ la matrice colonne des vitesses nodales de dimension $[\mathbf{N}_S \times 1]$, \mathbf{X} la matrice colonne des déplacements nodaux de dimension $[\mathbf{N}_S \times 1]$ et \mathbf{f} la matrice colonne des efforts généralisés de dimension $[\mathbf{N}_S \times 1]$. Dans le cas de l'excitation de la structure immergée par une onde acoustique, \mathbf{f} s'écrit :

$$\mathbf{f} = -\mathbf{G} \mathbf{A}_f (\mathbf{P}_I + \mathbf{P}_S) + \mathbf{f}_D \quad (\text{D.1.2})$$

avec \mathbf{G} la matrice de transformation permettant de restituer les normales à la surface mouillée de la structure de dimension $[\mathbf{N}_S \times \mathbf{N}_F]$ (où \mathbf{N}_F est le nombre de d.d.l. relatifs au problème fluide), \mathbf{A}_f la matrice diagonale des aires des éléments immergés à l'interface fluide-structure de dimension $[\mathbf{N}_F \times \mathbf{N}_F]$, \mathbf{P}_I la matrice colonne des pressions nodales incidentes (connues) à l'interface fluide-structure de dimension $[\mathbf{N}_F \times 1]$, \mathbf{P}_S la matrice colonne de la pression diffusée (somme des pressions diffractée et rayonnée inconnues) à l'interface fluide-structure de dimension $[\mathbf{N}_F \times 1]$ et \mathbf{f}_D la matrice colonne des efforts généralisés appliqués à la structure, de dimension $[\mathbf{N}_S \times 1]$.

D.1.2 Approximation Doublement Asymptotique au premier ordre DAA1

L'approximation doublement asymptotique au premier ordre DAA1, du champ de pression diffusée s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{M}_f \dot{\mathbf{P}}_S + \rho c \mathbf{A}_f \mathbf{P}_S = \rho c \mathbf{M}_f \dot{\mathbf{U}}_S \quad (\text{D.1.3})$$

où \mathbf{M}_f est la matrice symétrique de masse fluide au niveau de l'interface. Elle est déterminée en appliquant la méthode des éléments de frontière à l'équation de Laplace $\nabla^2 \Phi = 0$ pour un écoulement irrotationnel généré dans le fluide supposé infini, non-visqueux et incompressible, par les mouvements de la surface immergée de la structure (équivalente à la matrice de masse d'eau ajoutée lorsqu'elle est transformée dans le système de coordonnées de la structure). \mathbf{U}_S est la matrice colonne des vitesses de particules fluide relatives à l'onde de pression diffusée, normales à l'interface fluide-structure, ρ et c sont respectivement la masse volumique et la célérité du son pour le fluide considéré.

Le caractère doublement asymptotique de l'approximation se justifie par le fait que l'approximation DAA1 permet de représenter, de façon exacte, l'interaction fluide-structure aux deux limites asymptotiques suivantes :

- * en haute fréquence (ou temps court), l'interaction est décrite par les seuls effets acoustiques. Dans ce cas $\dot{\mathbf{P}}_S \gg \mathbf{P}_S \rightarrow \mathbf{P}_S = \rho c \mathbf{U}_S$ ce qui représente une limite correcte pour des ondes acoustiques courtes. Il s'agit de l'approximation PWA (Plane Wave Approximation)
- * en basse fréquence (ou temps long), l'interaction est décrite par les seuls effets inertiels. On a alors $\dot{\mathbf{P}}_S \ll \mathbf{P}_S \rightarrow \mathbf{A}_f \mathbf{P}_S = \mathbf{M}_f \dot{\mathbf{U}}_S$ (relation d'écoulement incompressible) ce qui représente une limite correcte pour des ondes acoustiques longues. Il s'agit de l'approximation VMA (Virtual Mass Approximation).

À l'interface fluide-structure, la projection suivant la normale¹ à la surface de la vitesse particulière qui se décompose en une vitesse incidente et une vitesse diffusée ($\mathbf{U} = \mathbf{U}_I + \mathbf{U}_S$), doit être égale à la vitesse de la structure, projetée suivant cette même normale, au niveau de la surface immergée. On exprime cette contrainte de continuité de l'écoulement sous la forme de la relation de compatibilité cinématique suivante :

$$\mathbf{G}^T \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{U}_I + \mathbf{U}_S \quad (\text{D.1.4})$$

1. Par convention la normale à l'interface fluide-structure est orientée de la structure en direction du fluide, c.-à-d. normale sortante à la structure. Cette remarque implique que la vitesse particulière incidente \mathbf{U}_I dans l'équation de compatibilité cinématique à l'interface fluide-structure doit également être projetée suivant la même normale, ce qui explique le cosinus directeur γ_i dans l'expression de la vitesse particulière incidente Eq. (D.1.5b).

L'onde de pression sphérique incidente et la vitesse particulière incidente projetée suivant la normale à l'interface fluide-structure pour la $i^{\text{ème}}$ facette fluide sont données par :

$$p_{Ii}(t) = \frac{S}{R_i} \bar{p}_I \left(t - \frac{R_i - S}{c} \right) \quad (\text{D.1.5a})$$

$$u_{Ii}(t) = \left[\frac{1}{\rho c} \dot{p}_{Ii}(t) + \frac{1}{\rho R_i} p_{Ii}(t) \right] \gamma_i \quad (\text{D.1.5b})$$

où S est la distance de la source explosive au point le plus proche sur la structure « mouillée » (*standoff point*), \bar{p}_I est le profil de pression appliqué au *standoff point*, R_i est la distance entre le point source et la $i^{\text{ème}}$ facette immergée où s'applique la pression incidente $p_{Ii}(t)$, et γ_i est le cosinus directeur de l'angle formé par les vecteurs \mathbf{R}_i (orienté du point source à la $i^{\text{ème}}$ facette immergée) et \mathbf{n}_i (normale à la facette dirigée vers le fluide), c.-à-d. $\gamma_i = \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{n}_i$.

D.1.3 Équation d'interaction fluide-structure

En utilisant les relations précédentes, et en ne considérant pas d'efforts imposés sur la structure autres que les effets de l'interaction, le système complet à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_S \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_S \mathbf{X} &= -\mathbf{G} \mathbf{A}_f (\mathbf{P}_I + \mathbf{P}_S) \\ \mathbf{M}_f \dot{\mathbf{P}}_S + \rho c \mathbf{A}_f \mathbf{P}_S &= \rho c \mathbf{M}_f (\mathbf{G}^T \ddot{\mathbf{X}} - \dot{\mathbf{U}}_I) \end{aligned} \quad (\text{D.1.6})$$

Ce système d'équations est résolu à chaque pas de temps de calcul, en reportant dans les membres de gauche les termes inconnus $-\mathbf{G} \mathbf{A}_f \mathbf{P}_S$ et $\rho c \mathbf{M}_f \mathbf{G}^T \ddot{\mathbf{X}}$. Cependant, cette méthode est très coûteuse en temps calcul, principalement à cause de la forme de la matrice de transformation \mathbf{G} qui relie généralement un très grand nombre de degrés de liberté structure N_S , à un très petit nombre de degrés de liberté fluide N_F . Une solution pour remédier à ce problème en améliorant l'efficacité de la résolution, tout en présentant un schéma numérique inconditionnellement stable pour la structure, est d'appliquer la procédure d'augmentation présentée en référence [Park et al., 1977]. Par cette méthode, la seconde des équations précédentes s'écrit :

$$\mathbf{A}_f \dot{\mathbf{P}}_S + (\mathbf{D}_{f1} + \mathbf{D}_S) \mathbf{P}_S = -\rho c \mathbf{A}_f \mathbf{G}^T \mathbf{M}_S^{-1} (\mathbf{C}_S \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_S \mathbf{X}) - \mathbf{D}_S \mathbf{P}_I - \rho c \mathbf{A}_f \dot{\mathbf{U}}_I \quad (\text{D.1.7})$$

où les matrices $\mathbf{D}_{f1} = \rho c \mathbf{A}_f \mathbf{M}_f^{-1} \mathbf{A}_f$ et $\mathbf{D}_S = \rho c \mathbf{A}_f \mathbf{G}^T \mathbf{M}_S^{-1} \mathbf{G} \mathbf{A}_f$ sont symétriques. Cette méthode d'augmentation revient à injecter une des équations du système dans la seconde pour former ainsi un nouveau système appelé équations d'interaction augmentées.

On note qu'une Approximation Doublement Asymptotique au second ordre DAA2 est également implémentée dans le code USA pour enrichir l'approximation Eq. (D.1.3) avec des termes de pression diffusée du second ordre. Cette formulation permet en outre de tenir compte des rayons de courbure de la structure dans les équations d'interaction fluide-structure. Ceux-ci peuvent jouer un rôle important pour des structures cylindriques du type sous-marins, ou pour les parties en forme d'un bâtiment de surface.

D.2 Application scalaire au cas 1D plan

L'application de la formulation DAA du premier ordre au cas mono-dimensionnel onde plane sous forme scalaire permet de prolonger les développements théoriques décrits précédemment (voir Annexe C) pour l'interaction d'une onde de choc plane avec une structure caractérisée par le seul opérateur d'inertie m_s (théorie de plaque de Taylor). On écrit sous forme scalaire le système à résoudre formé des équations Eq. (D.1.1), (D.1.2) et (D.1.3) complété par la relation de continuité Eq. (D.1.4), en projection suivant la direction normale à l'interface que l'on oriente ici du fluide vers la structure :

$$M_s \ddot{x} = A_f (p_I + p_S) \quad (\text{D.2.1a})$$

$$M_f \dot{p}_S + \rho c A_f p_S = \rho c M_f \dot{u}_S \quad (\text{D.2.1b})$$

$$\dot{x} = u_I - u_S \quad (\text{D.2.1c})$$

où x représente le déplacement de la structure à l'interface fluide-structure (\dot{x} et \ddot{x} respectivement la vitesse et l'accélération), M_s la masse structurelle, A_f la surface de contact entre le fluide et la structure, p_I et p_S respectivement les pressions incidente et diffusée au niveau de l'interface (u_I et u_S les vitesses particulières attachées à ces ondes²), M_f la masse de fluide ajoutée, ρ et c respectivement la masse volumique et la célérité acoustique du fluide.

L'expression des masses structure et « fluide » par unité de surface en introduisant $m_s = M_s/A_f$ et $m_f = M_f/A_f$, et la dérivation temporelle de l'équation de continuité des vitesses Eq. (D.2.1c), permettent d'écrire le système Eq. (D.2.1) sous la forme :

$$m_s \ddot{x} = p_I + p_S \quad (\text{D.2.2a})$$

$$m_f \dot{p}_S + \rho c p_S = \rho c m_f \dot{u}_S \quad (\text{D.2.2b})$$

$$\ddot{x} = \dot{u}_I - \dot{u}_S \quad (\text{D.2.2c})$$

2. Dans la relation Eq. (D.2.1c), le signe négatif devant le terme de vitesse diffusée u_S provient du fait que l'onde de pression diffusée se propage dans la direction opposée à l'onde incidente que l'on suppose décrite suivant les x croissants.

Comme précédemment, on décrit la pression incidente p_I au niveau de l'interface fluide-structure sous la forme d'une simple exponentielle décroissante caractérisée par un pic de pression p_m et une constante de temps θ :

$$p_I = p_m e^{-t/\theta} \quad (\text{D.2.3})$$

L'accélération particulière incidente est donnée par Eq. (D.1.5b), que l'on réécrit ici en négligeant le second terme relatif à l'*afterflow*, ce qui revient à considérer une explosion relativement lointaine pour laquelle le terme en $1/R$ est quasiment nul :

$$\dot{u}_I = \frac{1}{\rho c} \dot{p}_I = -\frac{p_m}{\rho c \theta} e^{-t/\theta} \quad (\text{D.2.4})$$

Par report de l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq. (D.2.2a) dans la relation de continuité Eq. (D.2.2c), et en se servant de Eq. (D.2.3) et (D.2.4), on exprime l'accélération particulière diffusée \dot{u}_S :

$$\dot{u}_S = -\frac{p_m}{m_s} \left(\frac{1+\beta}{\beta} \right) e^{-t/\theta} - \frac{p_s}{m_s} \quad (\text{D.2.5})$$

où l'on a introduit le paramètre $\beta = \rho c \theta / m_s$, déjà employé en Annexe C, et identifié comme paramètre essentiel de l'IFS. L'introduction de Eq. (D.2.5) dans l'équation DAA Eq. (D.2.2b) permet d'aboutir à une équation différentielle du premier ordre relative à la pression diffusée p_s que l'on peut écrire sous la forme :

$$\dot{p}_S + \frac{\rho c}{m^*} p_S = -\frac{p_m}{\theta} (1+\beta) e^{-t/\theta} \quad (\text{D.2.6})$$

où l'on a introduit une masse équivalente, notée m^* , telle que $m^* = m_f m_s / (m_f + m_s)$. Tous calculs faits, la solution générale de l'équation différentielle Eq. (D.2.6) s'écrit :

$$p_S(t) = K e^{-\rho c t / m^*} + p_m \left(\frac{1+\beta}{1-\beta^*} \right) e^{-t/\theta} \quad \text{avec} \quad K = p_m \left(\frac{\beta + \beta^*}{\beta^* - 1} \right) \quad (\text{D.2.7})$$

où l'on a introduit un nouveau paramètre sans dimension $\beta^* = \rho c \theta / m^*$ que l'on peut assimiler, par analogie avec β , au rapport de la masse d'eau « déplacée » par l'onde de choc $\rho c \theta$ sur la masse équivalente m^* , par unité de surface. La constante d'intégration K a été déterminée à l'aide des conditions initiales pour lesquelles la pression diffusée est égale à la pression incidente $p_S(0) = p_m$. La solution générale de l'équation en terme de pression diffusée s'écrit donc :

$$p_S(t) = \frac{p_m}{1-\beta^*} \left[(1+\beta)e^{-t/\theta} - (\beta+\beta^*)e^{-\beta^*t/\theta} \right] \quad (\text{D.2.8})$$

L'accélération de la structure s'en déduit à l'aide de l'équation de conservation de la quantité de mouvement Eq. (D.2.2a) :

$$\ddot{x}(t) = \frac{p_m}{m_s(1-\beta^*)} \left[(2+\beta-\beta^*)e^{-t/\theta} - (\beta+\beta^*)e^{-\beta^*t/\theta} \right] \quad (\text{D.2.9})$$

Par intégrations successives de Eq. (D.2.9), on exprime la vitesse $\dot{x}(t)$ et le déplacement $x(t)$ de la structure, en tenant compte par ailleurs des conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$ pour la détermination des constantes d'intégration :

$$\dot{x}(t) = \frac{\theta p_m}{m_s} \left[-\frac{2+\beta-\beta^*}{1-\beta^*} e^{-t/\theta} + \frac{\beta+\beta^*}{\beta^*(1-\beta^*)} e^{-\beta^*t/\theta} + 1 - \frac{\beta}{\beta^*} \right] \quad (\text{D.2.10a})$$

$$x(t) = \frac{\theta^2 p_m}{m_s} \left[\frac{2+\beta-\beta^*}{1-\beta^*} (e^{-t/\theta} - 1) - \frac{\beta+\beta^*}{\beta^{*2}(1-\beta^*)} (e^{-\beta^*t/\theta} - 1) + \left(1 - \frac{\beta}{\beta^*}\right) \frac{t}{\theta} \right] \quad (\text{D.2.10b})$$

En utilisant les relations Eq. (D.2.4) et (D.2.10a), la vitesse particulière u_S relative à l'onde de pression diffusée se déduit de l'équation de compatibilité cinématique Eq. (D.2.1c). Elle s'écrit :

$$u_S = \frac{\theta p_m}{m_s} \left[\left(\frac{1}{\beta} + \frac{2+\beta-\beta^*}{1-\beta^*} \right) e^{-t/\theta} - \frac{\beta+\beta^*}{\beta^*(1-\beta^*)} e^{-\beta^*t/\theta} - 1 + \frac{\beta}{\beta^*} \right] \quad (\text{D.2.11})$$

Lorsque l'on se place dans le cas limite où la masse d'eau ajoutée est supposée infinie (autrement dit lorsque $m_f \gg m_s$), ce qui est théoriquement le cas lorsque l'on étudie un piston 1D plan qui se meut à l'extrémité d'une colonne d'eau de très grande longueur, on notera que l'approximation doublement asymptotique Eq. (D.1.3) se ramène alors à une équation du type $p_S = \rho c u_S$ qui est cohérente avec l'hypothèse onde plane PWA. On peut montrer que les résultats obtenus, Eq. (D.2.8) à (D.2.11), se réduisent alors aux expressions calculées précédemment pour la plaque de Taylor (voir en Annexe C). On rappelle notamment ici l'expression de la vitesse maximale V_m (rapportée à V_p qui désigne la vitesse particulière maximale de l'onde égale à $p_m/\rho c$) atteinte par la plaque dans les premiers instants de l'IFS :

$$\frac{V_m}{V_p} = 2\beta^{1/(1-\beta)} \quad (\text{D.2.12})$$

Par contre, lorsque la masse d'eau ajoutée est du même ordre de grandeur que la masse de la structure, on montre que la vitesse finale V_f à laquelle la structure se déplace, lorsque l'on fait tendre le

temps vers l'infini, est constante et s'écrit :

$$\frac{V_f}{V_p} = \beta \frac{1}{1 + m_f/m_s} \quad (\text{D.2.13})$$

La vitesse finale de la structure tend donc vers 0 en hypothèse onde plane PWA lorsque $m_f \gg m_s$ après avoir atteint un maximum V_m donné par Eq. (D.2.12) qui ne dépend que du paramètre β . En revanche, en approximation DAA, la vitesse finale de la structure est donnée par Eq. (D.2.13) et dépend donc du paramètre β mais aussi du rapport de la masse d'eau ajoutée sur la masse structure m_f/m_s . Dans ce cas, si la masse d'eau ajoutée est très faible devant la masse de la structure, $m_f \ll m_s$, la vitesse finale de la plaque tend vers βV_p .

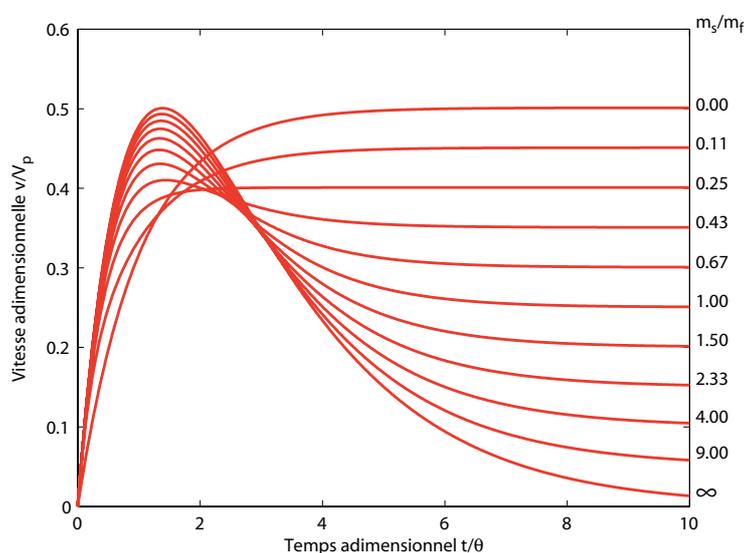


FIGURE D.1 – Résultats théoriques relatifs à l'approximation DAA pour $\beta = 0.5$. Mise en évidence de l'influence du rapport de la masse d'eau ajoutée sur la masse structure m_f/m_s en le faisant varier entre 0 et ∞

On présente sur la figure D.1 un aperçu des résultats théoriques en approximation DAA, correspondants à la relation Eq. (D.2.10a) si l'on s'intéresse à la mise en vitesse de la structure. La vitesse est présentée en ordonnée et adimensionnée par rapport à la vitesse particulaire maximale V_p . Plusieurs résultats sont tracés en fonction du rapport m_f/m_s dont les valeurs sont reportées, pour chaque courbe, à droite du graphique. Ces résultats sont obtenus pour la valeur $\beta = 0.5$. On met ainsi en évidence que le profil de mise en vitesse de la structure dépend fortement du rapport des masses d'eau ajoutée et de la structure. Les deux cas limites ∞ et 0 du rapport m_f/m_s explicités précédemment se caractérisent en effet par des profils temporels très différents :

- * dans le premier cas, $m_f/m_s \rightarrow 0$, la vitesse croît jusqu'à tendre vers une valeur limite constante

V_f égale à $V_p/2$ donnée par la relation Eq. (D.2.13), ce qui correspond à un profil de décélération monotone,

- * dans le second cas, $m_f/m_s \rightarrow \infty$, la vitesse croît jusqu'à une valeur maximale V_m égale à $V_p/2$ donnée par la relation Eq. (D.2.12), puis décroît jusqu'à tendre vers une valeur limite nulle, on rappelle que ce cas est représentatif de la théorie de Taylor détaillé en Annexe C.

On notera le fait que la vitesse limite finale V_f lorsque $m_f/m_s \rightarrow 0$ est égale à la vitesse maximale V_m lorsque $m_f/m_s \rightarrow \infty$, ce qui est tout à fait fortuit. Ceci s'explique par la valeur de β qui est égale à 0.5, ce que l'on vérifie immédiatement à l'aide des relations Eq. (D.2.12) et (D.2.13).

En complément de la figure D.1, on présente en figure D.2 les résultats obtenus avec le paramètre $\beta = 2$, avec différents rapports de la masse d'eau ajoutée sur la masse structure. Lorsque le rapport $m_f/m_s \rightarrow \infty$, la vitesse maximale V_m est égale à la vitesse particulaire maximale V_p . Inversement, lorsque $m_f/m_s \rightarrow 0$, la vitesse limite V_f tend vers 2 fois la vitesse particulaire V_p .

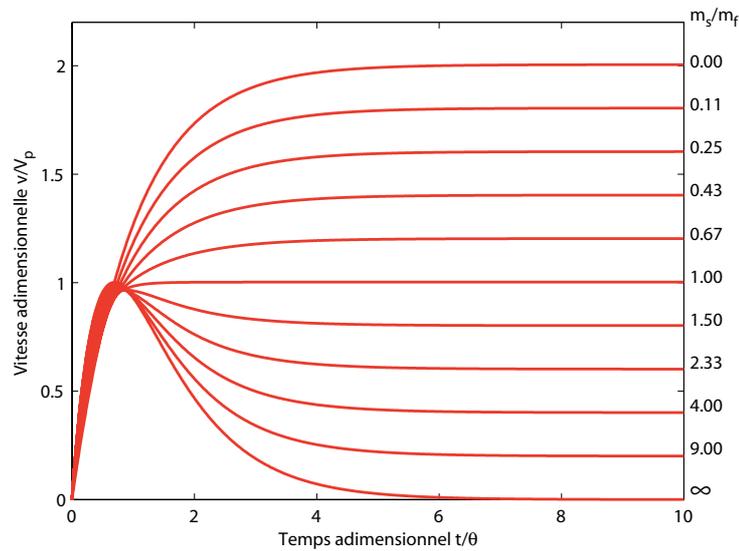


FIGURE D.2 – Résultats théoriques relatifs à l'approximation DAA pour $\beta = 2.0$. Mise en évidence de l'influence du rapport de la masse d'eau ajoutée sur la masse structure m_f/m_s en le faisant varier entre 0 et ∞

Références classées par thèmes

Ouvrages généraux

- [Axisa, 2001] AXISA, F. (2001). *Interactions fluide-structure*. Hermès.
- [Bruneau, 1998] BRUNEAU, M. (1998). *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, 8, quai du Marché Neuf - 75004 Paris, 1 édition.
- [Clift *et al.*, 1978] CLIFT, R., GRACE, J. R. et WEBER, M. E. (1978). *Bubbles, drops, and particles*. Academic Press, New York.
- [Doumenc, 2008] DOUMENC, F. (2008). *Éléments de thermodynamique et thermique*. Cours de Licence de Mécanique - Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- [Guyon *et al.*, 2001] GUYON, E., HULIN, J. P., PETIT, L. et GENNES, P. G. D. (2001). *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, CNRS Editions.
- [Jones, 1989] JONES, N. (1989). *Structural Impact*. Cambridge University Press.
- [Lamb, 1923] LAMB, H. (1923). *Hydrodynamics*. Cambridge : University Press.
- [Pierce, 1989] PIERCE, A. D. (1989). *Acoustics. An introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America.

Explosions sous-marines

Ouvrages généraux

- [Bangash, 2009] BANGASH, M. Y. H. (2009). *Shock, impact and explosion*. Springer.
- [Cole, 1948] COLE, R. H. (1948). *Underwater explosions*. Dover books on engineering and engineering physics. Princeton Univ. Press.
- [Cole, 1965] COLE, R. H. (1965). *Underwater Explosions*. Dover Pubns.
- [Fox, 1947] FOX, E. N. (1947). A review of underwater explosion phenomena. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1 – 84.
- [Hartmann et Hill, 1950a] HARTMANN, G. K. et HILL, E. G., éditeurs (1950a). *Underwater explosion research. A compendium of British and American reports. Vol.1 - The Shock Wave*. Office of Naval Research, Washington D.C., 1950.

- [Hartmann et Hill, 1950b] HARTMANN, G. K. et HILL, E. G., éditeurs (1950b). *Underwater explosion research. A compendium of British and American reports. Vol.2 - The Gas Globe*. Office of Naval Research, Washington D.C., 1950.
- [Hartmann et Hill, 1950c] HARTMANN, G. K. et HILL, E. G., éditeurs (1950c). *Underwater explosion research. A compendium of British and American reports. Vol.3 - The Damage Process*. Office of Naval Research, Washington D.C., 1950.
- [Hollyer, 1959] HOLLYER, R. S. (1959). *Direct Shock-Wave Damage to Merchant Ships From Noncontact Underwater Explosions*, volume 67. Transactions of Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- [Holt, 1977] HOLT, M. (1977). Underwater Explosions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9(1):187–214.
- [Kedrinskii, 2005] KEDRINSKII, V. K. (2005). *Hydrodynamics of Explosion : Experiments and Models*. Springer.
- [Keil, 1961] KEIL, A. H. (1961). *The Response of Ships to Underwater Explosions*, volume 69. Transactions of Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- [Kennard, 1941] KENNARD, E. H. (1941). Report on underwater explosions. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:159 – 208.
- [Sachev, 2004] SACHEV, P. L. (2004). *Shock Waves and Explosions*, volume 132. Chapman & Hall/CRC.
- [Schneider et al., 1946] SCHNEIDER, W. G., WILSON, E. B. et CROSS, P. E. (1946). *Summary Technical Report of Division 2 - Effects of Impact and Explosion*, volume 1, chapitre 1 - Underwater Explosives and Explosions, pages 19 – 63. National Defense Research Committee, Washington, D.C.
- [Snay, 1957] SNAY, H. G. (1957). Hydrodynamics of underwater explosions. *In Symposium on naval hydrodynamics*, volume 9, pages 325–352, Washington. National Academy of Sciences, National Research Council.
- [Swisdak, 1978] SWISDAK, M. M. (1978). Explosion effects and properties : PART II - Explosion effects in water. *Naval Surface Weapons Center, Silver Spring, Maryland*, Report NSWC/WOL TR76-116.

Détonations et explosifs

Expérimental et équations d'état

- [Davis, 2000] DAVIS, W. C. (2000). Complete equation of state for unreacted solid explosive. *Combustion and Flame*, 120(3):399 – 403.
- [Dobratz et Crawford, 1985] DOBRATZ, B. M. et CRAWFORD, P. C. (1985). *LLNL Explosives Handbook - Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants*. Lawrence Livermore National Laboratory.
- [Heathcote et Niffenegger, 1967] HEATHCOTE, T. B. et NIFFENEGGER, C. R. (1967). Comparison of the underwater power of explosives in small charges. XI. Further development of test procedures. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, NOLTR Report 67-17.
- [Hornberg, 1986] HORNBERG, H. (1986). Determination of fume state parameters from expansion measurements of metal tubes. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 11(1):23 – 31.
- [Jones et Miller, 1948] JONES, H. et MILLER, A. R. (1948). The detonation of solid explosives. *Proc. Roy. Soc. London A*, 194:480.

- [Kury *et al.*, 1965] KURY, W., HORNIG, H. C., LEE, E. L., McDONNELL, J. L., ORNELLAS, D. L., FINGER, M., STRANGE, F. M. et WILKINS, M. L. (1965). Metal acceleration by chemical explosives. In *Fourth Symposium on Detonation*, page 3. Office of Naval Research.
- [Lan *et al.*, 1993] LAN, I.-F., HUNG, S.-C., CHEN, C.-Y., NIU, Y.-M. et SHIUAN, J.-H. (1993). An improved simple method of deducing JWL parameters from cylinder expansion test. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 18(1):18 – 24.
- [Lee *et al.*, 1973] LEE, E. L., FINGER, M. et COLLINS, W. (1973). JWL equation of state coefficients for high explosives. *Lawrence Livermore Laboratories, Livermore, California*, Report UCID-16189.
- [Lee et Hornig, 1969] LEE, E. L. et HORNIG, H. C. (1969). Equation of state of detonation product gases. In *Twelfth Symposium (Int.) on Combustion*, page 493. Combustion Institute.
- [Lee *et al.*, 1968] LEE, E. L., HORNIG, H. C. et KURY, J. W. (1968). Adiabatic expansion of high explosive detonation products. *Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California*, Report UCRL-50422.
- [Wilkins, 1964] WILKINS, M. L. (1964). The equation of state of PBX 9404 and LXO4-01. *Radiation Laboratory, Livermore, California*, Report UCRL-779.

Modèles théoriques

- [Chapman, 1899] CHAPMAN, D. L. (1899). On the rate of explosion in gases. *Philosophical Magazine Series 5*, 47(284):90–104.
- [Jouguet, 1905] JOUGUET, J. C. E. (1905). Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Séries 6*, pages 347 – 425.
- [Jouguet, 1906] JOUGUET, J. C. E. (1906). Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Séries 6*, 2:5 – 85.
- [Taylor, 1941] TAYLOR, G. I. (1941). Analysis of the explosion of a long cylindrical bomb detonated at one end. In BATCHELOR, G. K., éditeur : *The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, Vol. III - Aerodynamics and the mechanics of projectiles and explosions*, pages 277 – 286. Cambridge University Press (2010).
- [Taylor, 1950] TAYLOR, G. I. (1950). The dynamics of the combustion products behind plane and spherical detonation fronts in explosives. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 200(1061):235–247.
- [Tosello, 2006] TOSELLO, R. (2006). Ondes de choc - Ondes de détonation. Cours de détonique ISITV.

Modélisation numérique des détonations

- [Alia et Souli, 2006] ALIA, A. et SOULI, M. (2006). High explosive simulation using multi-material formulations. *Applied Thermal Engineering*, 26(10):1032 – 1042.
- [Chou *et al.*, 1991] CHOU, P. C., LIANG, D. et FLIS, W. J. (1991). Shock and shear initiation of explosive. *Shock Waves*, 1:285 – 292.
- [Larini *et al.*, 1992] LARINI, M., SAUREL, R. et LORAUD, J. C. (1992). An exact Riemann solver for detonation products. *Shock Waves*, 2(4):225 – 236.

- [Piacesi, 1967] PIACESI, D. (1967). Numerical hydrodynamic calculations of the flow of the detonation products from a point-initiated explosive cylinder. *Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, Report NOLTR 7265.
- [Saurel *et al.*, 1994] SAUREL, R., LARINI, M. et LORAUD, J. C. (1994). Exact and Approximate Riemann Solvers for Real Gases. *Journal of Computational Physics*, 112(1):126 – 137.

Ondes de chocs sous-marines

Expérimental et équations d'état

- [Arons et Yennie, 1948] ARONS, A. B. et YENNIE, D. R. (1948). Energy partition in underwater explosion phenomena. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1137 – 1154.
- [Coles *et al.*, 1946] COLES, J. S., CHRISTIAN, E. A., SLIFKO, J. F., NIFFENEGGER, C. R. et ROGERS, M. A. (1946). Shock-wave parameters from spherical TNT charges detonated under water. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1085 – 1106.
- [Richardson *et al.*, 1947] RICHARDSON, J. M., ARONS, A. B. et HALVERSON, R. R. (1947). Hydrodynamic properties of sea water at the front of a shock wave. *The Journal of Chemical Physics*, 15(2):785 – 794.
- [Steinberg, 1987] STEINBERG, D. J. (1987). Spherical explosions and the equation of state of water. *Lawrence Livermore Laboratories, Livermore*, Report UCID-20974.
- [Steinberg, 1991] STEINBERG, D. J. (1991). Equation of state and strength properties of selected materials. *Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore*, LLNL report UCRL-MA-106439.
- [Thiel et Niffenegger, 1961] THIEL, M. A. et NIFFENEGGER, C. R. (1961). Revised similitude equations for the underwater shockwave performance of Pentolite and HBX-1 (U). *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, Report NAVWEPS 7380.

Modèles théoriques

- [Brinkley et Kirkwood, 1950] BRINKLEY, S. et KIRKWOOD, J. G. (1950). Theory of the shock wave produced by an underwater explosion. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:383 – 496.
- [Brinkley et Kirkwood, 1945] BRINKLEY, S. R. et KIRKWOOD, J. G. (1945). Tables and graphs of the theoretical peak pressures energies and impulses of shock waves from explosive sources in sea water. *Office of Scientific Research and Development, OSRD Report 5649*.
- [Hugoniot, 1887] HUGONIOT, P. H. (1887). Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et plus spécialement dans les gaz parfaits - 1ère Partie. *Journal de l'École Polytechnique, Paris*, 57:3 – 97.
- [Hugoniot, 1889] HUGONIOT, P. H. (1889). Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et plus spécialement dans les gaz parfaits - 2ème Partie. *Journal de l'École Polytechnique, Paris*, 58:1 – 125.
- [Kedrinskii, 1972] KEDRINSKII, V. K. (1972). Kirkwood-Bethe approximation for an underwater explosion with cylindrical symmetry. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 8(1):94 – 100.

- [Kirkwood et Bethe, 1942] KIRKWOOD, J. G. et BETHE, H. (1942). The pressure wave produced by an underwater explosion I. (OSRD no. 588). *Shock and Detonation Waves*, pages 1 – 34.
- [Rankine, 1870] RANKINE, W. J. M. (1870). On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 160:277 – 288.
- [Snay, 1957] SNAY, H. G. (1957). A theory of the shockwave produced by a point explosion. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, NAVORD Report 4182.
- [Whitham, 1953a] WHITHAM, G. B. (1953a). Spherical waves and shocks. Part1 - A general theory of the propagation of weak shocks. *New-York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 190.
- [Whitham, 1953b] WHITHAM, G. B. (1953b). Spherical waves and shocks. Part2 - The Kirkwood-Bethe theory for the propagation of shocks in water. *New-York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 190.

Modélisation numérique des chocs sous-marins

- [Brett, 1998] BRETT, J. M. (1998). Numerical modelling of shock wave and pressure pulse generation by underwater explosion. *Defence Science and Technology Organisation*, DSTO-TR-0677.
- [Landshoff, 1955] LANDSHOFF, R. (1955). A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks. *Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California*, Report LA-1930.
- [Liu *et al.*, 2003] LIU, M. B., LIU, G. R., LAM, K. Y. et ZONG, Z. (2003). Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosion. *Computational Mechanics*, 30(2):106 – 118.
- [Liu *et al.*, 2002] LIU, M. B., LIU, G. R., ZONG, Z. et LAM, K. Y. (2002). Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Computers and Fluids*, 32(3):305 – 322.
- [VonNeumann et Richtmyer, 1950] VONNEUMANN, J. et RICHTMYER, R. D. (1950). Method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21(3):232 – 237.

Bulles d'explosions

Expérimental

- [Arons *et al.*, 1948] ARONS, A. B., SLIFKO, J. P. et CARTER, A. (1948). Secondary pressure pulses due to gas globe oscillation in underwater explosions. I. Experimental data. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:475 – 480.
- [Goertner *et al.*, 1969] GOERTNER, J. F., HENDRICKSON, J. R. et LEAMON, R. G. (1969). Model Studies of the Behavior of Underwater Explosion Bubbles in Contact with a Rigid Bottom. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Silver Spring, Maryland*.
- [Kennard, 1943] KENNARD, E. H. (1943). Migration of underwater gas globes due to gravity and neighboring surfaces. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:377 – 414.

- [Lawson *et al.*, 1999] LAWSON, N. J., RUDMAN, M., GUERRA, A. et LIOW, J.-L. (1999). Experimental and numerical comparisons of the break-up of a large bubble. *Experiments in Fluids*, 26(6):524 – 534.
- [Menon et Lal, 1998] MENON, S. et LAL, M. (1998). On the dynamics and instability of bubbles formed during underwater explosions. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 16(4):305 – 321.
- [Snay, 1962a] SNAY, H. G. (1962a). Migration of explosion bubbles in a rotating test tank. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, Report NOLTR 61-145.
- [Snay, 1962b] SNAY, H. G. (1962b). Underwater explosion phenomena : The parameters of migrating bubbles. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, NAVORD Report 4185.
- [Snay et Tipton, 1962] SNAY, H. G. et TIPTON, R. V. (1962). Charts for the parameters of migrating explosion bubbles. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, Report NOLTR 62-184.
- [Swift et Decius, 1948] SWIFT, E. et DECIUS, J. C. (1948). Measurements of bubble pulse phenomena. III. Radius and period studies. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:553 – 599.
- [Willis, 1941] WILLIS, H. F. (1941). Underwater explosions. Time interval between successive explosions. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:13 – 33.
- [Zuke, 1963] ZUKE, W. G. (1963). Boundary disturbances near an underwater explosion bubble. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, NAVORD Report 6877.

Modèles théoriques

- [Agafonov et Popov, 1989] AGAFONOV, G. L. et POPOV, O. E. (1989). Simple model of the nonadiabatic pulsating motion of the products of underwater explosion of gas mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves (English Translation of Fizika Goreniya i Vzryva)*, 25(1):117 – 120.
- [Best, 1996] BEST, J. P. (1996). On the Dynamics of the Bubble Created Upon Detonation of a Limpet Mine. *Defence Science and Technology Organisation, DSTO-TR-0439*.
- [Best et Blake, 1994] BEST, J. P. et BLAKE, J. R. (1994). Estimate of the Kelvin impulse of a transient cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 261:75 – 93.
- [Doinikov, 2005] DOINIKOV, A. A. (2005). Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid. *Physics of Fluids*, 17(12):1 – 4.
- [Friedman, 1947] FRIEDMAN, B. (1947). Theory of underwater explosion bubbles. *New-York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 166.
- [Frost et Harper, 1975] FROST, P. A. et HARPER, E. Y. (1975). Acoustic radiation from surfaces oscillating at large amplitude and small mach number. *Journal of the Acoustical Society of America*, 58(2):318 – 325.
- [Geers et Hunter, 1996] GEERS, T. L. et HUNTER, K. S. (1996). Dilatational dynamics of an underwater explosion bubble. In *67th Shock & Vibration Symposium*, pages 315 – 324, Monterey, CA, USA.
- [Geers et Hunter, 2002] GEERS, T. L. et HUNTER, K. S. (2002). An integrated wave-effects model for an underwater explosion bubble. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111(4):1584 – 1601.

- [Geers et Park, 2005] GEERS, T. L. et PARK, C. K. (2005). Optimization of the G and H bubble model. *Shock and Vibration*, 12(1 SPEC ISS):3 – 8.
- [Gilmore, 1952] GILMORE, F. R. (1952). The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid. *Office of Naval Research, California Institute of Technology, Pasadena, California*, Report 26-4.
- [Heaton, 1986a] HEATON, K. C. (1986a). Migration of the Gas Globe from Underwater Explosions : The Effect of Drag and Radiative Energy Loss. *Defence Research Establishment Valcartier*, Report R-4373/86.
- [Heaton, 1986b] HEATON, K. C. (1986b). Pressure Waves from a Spherical Bubble. *Defence Research Establishment Valcartier*, Report M-2792/86.
- [Herring, 1941] HERRING, C. (1941). Theory of the pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:35 – 131.
- [Hickling et Plesset, 1963] HICKLING, R. et PLESSET, M. S. (1963). The collapse of a spherical cavity in a compressible liquid. *Office of Naval Research, California Institute of Technology, Pasadena, California*, Report 85-24.
- [Hunter et Geers, 2004] HUNTER, K. S. et GEERS, T. L. (2004). Pressure and velocity fields produced by an underwater explosion. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4):1483 – 1496.
- [Keller et Kolodner, 1953a] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1953a). Underwater explosion bubbles. I. The effect of compressibility of the water. *New York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 191.
- [Keller et Kolodner, 1953b] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1953b). Underwater explosion bubbles. II. The effect of gravity and the change of shape. *New York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 197.
- [Keller et Kolodner, 1956a] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1956a). Damping of underwater explosion bubble oscillations. *Journal of Applied Physics*, 27:1152 – 1161.
- [Keller et Kolodner, 1956b] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1956b). Underwater explosion bubbles. III. The effects of the surface and the bottom on the shape and motion of the bubble. *New York University (Institute of Mathematical Sciences)*, Report IMM-NYU 232.
- [Keller et Kolodner, 1956c] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1956c). Underwater explosion bubbles. IV. Summary of results and numerical computations. *New York University (Institute of Mathematical Sciences)*, Report IMM-NYU 233.
- [Le Mehaute et Wang, 1996] LE MEHAUTE, B. et WANG, S. (1996). Water Waves Generated by Underwater Explosions. *Defense Nuclear Agency*, Technical Report DNA-TR-94-128.
- [Naji Meidani et Hasan, 1997] NAJI MEIDANI, A. R. et HASAN, M. (1997). Numerical study of the complex dynamic behavior of a reactive gas bubble in water. *Applied Mathematical Modelling*, 21(3):127 – 138.
- [Pedley, 1968] PEDLEY, T. J. (1968). The toroidal bubble. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 32(01):97–112.

- [Plesset et Prosperetti, 1977] PLESSET, M. S. et PROSPERETTI, A. (1977). Bubble Dynamics and Cavitation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9(1):145 – 185.
- [Shiffman et Friedman, 1944] SHIFFMAN, M. et FRIEDMAN, B. (1944). Studies on the gas bubble resulting from underwater explosions : On the best location of a mine near the sea bed. *New-York University (Applied Mathematics Group)*, Report AMG-NYU 49.
- [Strasberg, 1956] STRASBERG, M. (1956). Gas bubbles as sources of sound in liquids. *Acoustical Society of America – Journal*, 28(1):20 – 26.
- [Walters et Davidson, 1962] WALTERS, J. K. et DAVIDSON, J. F. (1962). Initial motion of gas bubble formed in inviscid liquid – 1 – Two-dimensional bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 12(Part 3):408 – 416.
- [Walters et Davidson, 1963] WALTERS, J. K. et DAVIDSON, J. F. (1963). The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 17(03):321–336.

Modélisation numérique de la dynamique de bulles

Généralités

- [Pelekasis, 2006] PELEKASIS, N. A. (2006). Numerical simulations of bubble dynamics : A Review.

Lagrange, Euler et ALE

- [Abe *et al.*, 2007] ABE, A., KATAYAMA, M., MURATA, K., KATO, Y. et TANAKA, K. (2007). Numerical study of underwater explosions and following bubble pulses. *In 15th APS Topical Conference on Shock Compression of Condensed Matter*, Kohala Coast, Hawaii, USA.
- [Chisum et Shin, 1997] CHISUM, J. E. et SHIN, Y. S. (1997). Explosion gas bubbles near simple boundaries. *Shock and Vibration*, 4(1):11 – 25.
- [Menon, 1996] MENON, S. (1996). Experimental and Numerical Studies of Underwater Explosions. *Office of naval research*, N00014-91-J-1993.
- [Xi, 2004] XI, W. Q. (2004). Numerical simulation of violent bubble motion. *Physics of Fluids*, 16(5):1610 – 1619.

Éléments de frontière

- [Afanasyev et Grigorieva, 2006] AFANASIEV, K. E. et GRIGORIEVA, I. V. (2006). Numerical investigation of three-dimensional bubble dynamics. *Journal of Engineering Mathematics*, 55(1-4):65 – 80.
- [Best, 1991] BEST, J. P. (1991). *The dynamics of underwater explosions*. Thèse de Doctorat, University of Wollongong, Australia.
- [Best, 2002] BEST, J. P. (2002). The effect of non-spherical collapse on determination of explosion bubble parameters. *Defence Science and Technology Organisation*, DSTO-RR-0238.
- [Brujan *et al.*, 2005] BRUJAN, E. A., PEARSON, A. et BLAKE, J. R. (2005). Pulsating, buoyant bubbles close to a rigid boundary and near the null final Kelvin impulse state. *International Journal of Multiphase Flow*, 31(3):302 – 317.

- [Chahine *et al.*, 2003] CHAHINE, G. L., KALUMUCK, K. M. et HSIAO, C.-T. (2003). Simulation of surface piercing body coupled response to underwater bubble dynamics utilizing 3DYNAPS, a three-dimensional BEM code. *Computational Mechanics*, 32(4-6):319 – 326.
- [Harris, 2004] HARRIS, P. J. (2004). An investigation into the use of the boundary integral method to model the motion of a single gas or vapour bubble in a liquid. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(4):325 – 332.
- [Harris *et al.*, 1999] HARRIS, P. J., VERMA, A. et CHAKRABARTI, R. (1999). Interaction of an explosion bubble with a fixed rigid structure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(4):389 – 396.
- [Klaseboer et Khoo, 2004] KLASEBOER, E. et KHOO, B. C. (2004). Boundary integral equations as applied to an oscillating bubble near a fluid-fluid interface. *Computational Mechanics*, 33(2):129 – 138.
- [Klaseboer et Khoo, 2006] KLASEBOER, E. et KHOO, B. C. (2006). A modified Rayleigh-Plesset model for a non-spherically symmetric oscillating bubble with applications to boundary integral methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(1):59 – 71.
- [Klaseboer *et al.*, 2005] KLASEBOER, E., KHOO, B. C. et HUNG, K. C. (2005). Dynamics of an oscillating bubble near a floating structure. *Journal of Fluids and Structures*, 21(4):395 – 412.
- [Klaseboer *et al.*, 2006] KLASEBOER, E., TURANGAN, C. K. et KHOO, B. C. (2006). Dynamic behaviour of a bubble near an elastic infinite interface. *International Journal of Multiphase Flow*, 32(9):1110 – 1122.
- [Oguz et Zeng, 1997] OGUZ, H. et ZENG, J. (1997). Axisymmetric and three-dimensional boundary integral simulations of bubble growth from an underwater orifice. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 19(4):319 – 330.
- [Pearson *et al.*, 2004a] PEARSON, A., BLAKE, J. R. et OTTO, S. R. (2004a). Jets in bubbles. *Journal of Engineering Mathematics*, 48(3-4):391 – 412.
- [Pearson *et al.*, 2004b] PEARSON, A., COX, E., BLAKE, J. R. et OTTO, S. R. (2004b). Bubble interactions near a free surface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(4):295 – 313.
- [Wang et Khoo, 2004] WANG, C. et KHOO, B. C. (2004). An indirect boundary element method for three-dimensional explosion bubbles. *Journal of Computational Physics*, 194(2):451 – 480.
- [Wang *et al.*, 2003] WANG, C., KHOO, B. C. et YEO, K. S. (2003). Elastic mesh technique for 3D BIM simulation with an application to underwater explosion bubble dynamics. *Computers and Fluids*, 32(9):1195 – 1212.
- [Wang *et al.*, 1996] WANG, Q. X., YEO, K. S., KHOO, B. C. et LAM, K. Y. (1996). Nonlinear interaction between gas bubble and free surface. *Computers & Fluids*, 25(7):607 – 628.
- [Wilkerson, 1992] WILKERSON, S. A. (1992). A boundary integral approach for three-dimensional underwater explosion bubble dynamics. *Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen*, Technical Report BRL-TR-3365.
- [Wilkerson, 1993] WILKERSON, S. A. (1993). Boundary integral technique for explosion bubble collapse analysis. *Army Research Laboratory, Aberdeen*, Report ARL-TR-184.
- [Zhang *et al.*, 2008] ZHANG, A. M., YAO, X. L. et YU, X. B. (2008). The dynamics of three-dimensional underwater explosion bubble. *Journal of Sound and Vibration*, 311(3-5):1196 – 1212.

[Zhang *et al.*, 2001] ZHANG, Y. L., YEO, K. S., KHOO, B. C. et WANG, C. (2001). 3D jet impact and toroidal bubbles. *Journal of Computational Physics*, 166(2):336 – 360.

Volumes finis

[Bonometti et Magnaudet, 2006] BONOMETTI, T. et MAGNAUDET, J. (2006). Transition from spherical cap to toroidal bubbles. *Physics of Fluids*, 18(5):052102.

[Bonometti et Magnaudet, 2007] BONOMETTI, T. et MAGNAUDET, J. (2007). An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(2):109 – 133.

[Link *et al.*, 2002] LINK, R., LIN, F., WHITEHOUSE, D. et SLATER, J. (2002). CFD Modeling of Close Proximity Underwater Explosions. In *73rd Shock & Vibration Symposium*, Newport, USA.

[Marchandise *et al.*, 2007] MARCHANDISE, E., GEUZAIN, P., CHEVAUGEON, N. et REMACLE, J.-F. (2007). A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics. *Journal of Computational Physics*, 225(1):949 – 974.

[Sussman *et al.*, 1998] SUSSMAN, M., FATEMI, E., SMERKA, P. et OSHER, S. (1998). Improved level set method for incompressible two-phase flows. *Computers and Fluids*, 27(5-6):663 – 680.

Différences finies

[Bugg et Rowe, 1991] BUGG, J. D. et ROWE, R. D. (1991). Modelling the initial motion of large cylindrical and spherical bubbles. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 13(1):109–129.

Interactions fluide-structure

Expérimental

[Brett et Yiannakopoulos, 2008] BRETT, J. M. et YIANNAKOPOULOS, G. (2008). A study of explosive effects in close proximity to a submerged cylinder. *International Journal of Impact Engineering*, 35(4):206 – 225.

[Brett *et al.*, 2000] BRETT, J. M., YIANNAKOPOULOS, G. et VAN DER SCHAAF, P. J. (2000). Time-resolved measurement of the deformation of submerged cylinders subjected to loading from a nearby explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 24(9):875 – 890.

[Hudson et Johnson, 1944] HUDSON, G. E. et JOHNSON, C. T. (1944). Time-displacement studies of diaphragms deformed by explosive loading. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:445 – 460.

[Hung *et al.*, 2009] HUNG, C. F., LIN, B. J., HWANG-FUU, J. J. et HSU, P. Y. (2009). Dynamic response of cylindrical shell structures subjected to underwater explosion. *Ocean Engineering*, 36(8):564 – 577.

[Rajendran, 2008] RAJENDRAN, R. (2008). Reloading effects on plane plates subjected to non-contact underwater explosion. *Journal of Materials Processing Technology*, 206(1-3):275 – 281.

[Rajendran et Narasimhan, 2001a] RAJENDRAN, R. et NARASIMHAN, K. (2001a). Damage prediction of clamped circular plates subjected to contact underwater explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 25(4):373 – 386.

[Rajendran et Narasimhan, 2001b] RAJENDRAN, R. et NARASIMHAN, K. (2001b). Linear elastic shock response of plane plates subjected to underwater explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 25(5):493 – 506.

Modèles théoriques

[Bannister, 1980] BANNISTER, K. A. (1980). Whipping techniques for ships and submarines. In *Shock and Vibration Bulletin, Part 3*, volume 50. NRL Washington.

[Barras, 2007] BARRAS, G. (2007). Réponse dynamique des structures navale et offshore aux explosions aériennes et sous-marines. *Conservatoire National des Arts et Métiers, Orléans, France, Mémoire d'ingénieur*.

[Bleich et Sandler, 1970] BLEICH, H. H. et SANDLER, I. S. (1970). Interaction between structures and bilinear fluids. *International Journal of Solids and Structures*, 6(5):617 – 639.

[Butterworth, 1924] BUTTERWORTH, S. (1924). Damage to ship's plates by underwater explosions. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:1–10.

[Butterworth, 1942] BUTTERWORTH, S. (1942). Note on the motion of a finite plate due to an underwater explosion. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:201–206.

[Chertock, 1952] CHERTOCK, G. (1952). The flexural response of a submerged or floating body to an underwater explosion - Part 1 - Theory. *David Taylor Model Basin, Washington, D.C., Report C-517*.

[Chertock, 1953] CHERTOCK, G. (1953). The Flexural Response of a Submerged Solid to a Pulsating Gas Bubble. *Journal of Applied Physics*, 24(2):192–197.

[Chertock, 1964] CHERTOCK, G. (1964). Effects of underwater explosions on elastic structures. *David Taylor Model Basin, Washington, D.C.*

[Chertock, 1970] CHERTOCK, G. (1970). Transient Flexural Vibrations of Ship-Like Structures Exposed to Underwater Explosions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 48(1):170 – 180.

[DiMaggio et al., 1981] DIMAGGIO, F. L., SANDLER, I. S. et RUBIN, D. (1981). Uncoupling approximations in fluid-structure interaction problems with cavitation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 48(4):753 – 756.

[Hicks, 1972] HICKS, A. N. (1972). The theory of explosion induced whipping ship motions. *Naval Construction Research Establishment, St. Leonard's Hill, Dunfermline, Scotland, Report NCRE/R579*.

[Hicks, 1986] HICKS, A. N. (1986). Explosion induced hull whipping. In SMITH, C. S. et CLARKE, J. D., éditeurs : *Advances in Marine Structures*, pages 390 – 410, London. Elsevier Applied Science Publishers.

[Huang, 1969] HUANG, H. (1969). Transient interaction of plane acoustic waves with a spherical elastic shell. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 45(3):661 – 670.

[Huang, 1970] HUANG, H. (1970). An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylindrical elastic shell. *Journal of Applied Mechanics*, 37(4):1091–1099.

- [Kennard, 1943] KENNARD, E. H. (1943). Explosive load on underwater structures as modified by bulk cavitation. *David W. Taylor Model Basin, US Navy, Report 511*.
- [Kennard, 1944] KENNARD, E. H. (1944). The effect of a pressure wave on a plate or diaphragm. *David W. Taylor Model Basin, US Navy, Report 527*.
- [Mindlin et Bleich, 1953] MINDLIN, R. D. et BLEICH, H. H. (1953). Response of an elastic cylindrical shell to a transverse, step shock wave. *Journal of Applied Mechanics*, 20:189 – 195.
- [Rajendran et Lee, 2009] RAJENDRAN, R. et LEE, J. M. (2009). Blast loaded plates. *Marine Structures*, 22(2):99 – 127.
- [Rajendran et Narasimhan, 2006] RAJENDRAN, R. et NARASIMHAN, K. (2006). Deformation and fracture behaviour of plate specimens subjected to underwater explosion - a review. *International Journal of Impact Engineering*, 32(12):1945 – 1963.
- [Ranlet et al., 1977] RANLET, D., DiMAGGIO, F. L., BLEICH, H. H. et BARON, M. L. (1977). Elastic response of submerged shells with internally attached structures to shock loading. *Computers & Structures*, 7(3):355 – 364.
- [Reid, 1996] REID, W. D. (1996). The response of surface ships to underwater explosions. *Defence Science and Technology Organisation, DSTO-GD-0109*.
- [Taylor, 1941] TAYLOR, G. I. (1941). The pressure and impulse of submarine explosion waves on plates. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1155 – 1174.
- [Taylor, 1942] TAYLOR, G. I. (1942). The distortion under pressure of a diaphragm which is clamped along its edge and stressed beyond the elastic limit. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:107–122.
- [Temperley, 1944] TEMPERLEY, H. N. V. (1944). Theoretical investigation of cavitation phenomena occurring when an underwater pressure pulse is incident on a yielding surface - I. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:255–268.
- [Temperley, 1945] TEMPERLEY, H. N. V. (1945). Theoretical investigation of cavitation phenomena occurring when an underwater pressure pulse is incident on a yielding surface - III. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:283–294.
- [Temperley et Chambers, 1944] TEMPERLEY, H. N. V. et CHAMBERS, L. G. (1944). Theoretical investigation of cavitation phenomena occurring when an underwater pressure pulse is incident on a yielding surface - II. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:269–282.
- [Vernon, 1986] VERNON, T. A. (1986). Whipping response of ship hulls from underwater explosion bubble loading. *Defence Research Establishment Atlantic, Dartmouth, Canada, Technical memorandum 86/225*.
- [Zhang et Zong, 2011] ZHANG, N. et ZONG, Z. (2011). The effect of rigid-body motions on the whipping response of a ship hull subjected to an underwater bubble. *Journal of Fluids and Structures*, In Press, Corrected Proof:–.
- [Zong, 2003] ZONG, Z. (2003). Dynamic plastic response of a submerged free-free beam to an underwater gas bubble. *Acta Mechanica*, 161:179–194.

[Zong, 2005] ZONG, Z. (2005). A hydroplastic analysis of a free-free beam floating on water subjected to an underwater bubble. *Journal of Fluids and Structures*, 20(3):359 – 372.

Modélisation numérique des interactions fluide-structure

[Auroire, 1998] AUROIRE, B. (1998). Exemples de problèmes traités ou pouvant être traités avec USA et LS-DYNA. Présentation à l'IPSI PHI2AS.

Vitesse impulsionnelle

[Rajendran, 2009] RAJENDRAN, R. (2009). Numerical simulation of response of plane plates subjected to uniform primary shock loading of non-contact underwater explosion. *Materials & Design*, 30(4):1000 – 1007.

Éléments Finis couplés

[Didoszak, 2004] DIDOSZAK, J. M. (2004). Parametric studies of DDG-81 ship shock trial simulations. Thèse de Master, Naval Postgraduate School, Monterey, California.

[Everstine, 1981] EVERSTINE, G. (1981). A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 79(1):157 – 160.

[Everstine, 1997] EVERSTINE, G. C. (1997). Finite element formulations of structural acoustics problems. *Computers & Structures*, 65(3):307 – 321.

[Felippa et Deruntz, 1982] FELIPPA, C. A. et DERUNTZ, J. A. (1982). Finite element analysis of shock-induced hull cavitation. *Defense Nuclear Agency, Washington, D.C.*, Contract DNA 001-81-C-0135.

[Felippa et Deruntz, 1984] FELIPPA, C. A. et DERUNTZ, J. A. (1984). Finite element analysis of shock-induced hull cavitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44(3):297 – 337.

[Newton, 1978] NEWTON, R. E. (1978). Effects of cavitation on underwater shock loading - Part 1. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA*, Report NPS69-78-013.

[Newton, 1979] NEWTON, R. E. (1979). Effects of cavitation on underwater shock loading - Plane problem, Part 1. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA*, Report NPS69-79-007PR.

[Newton, 1980a] NEWTON, R. E. (1980a). Effects of cavitation on underwater shock loading - Plane problem, Part 2. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA*, Report NPS69-80-001.

[Newton, 1980b] NEWTON, R. E. (1980b). Finite element study of shock-induced cavitation. *In ASCE Spring Convention*.

[Newton, 1981] NEWTON, R. E. (1981). Effects of cavitation on underwater shock loading - Plane problem, Final Report. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA*, Report NPS69-81-001.

[Qiankun et Gangyi, 2011] QIANKUN, J. et GANGYI, D. (2011). A finite element analysis of ship sections subjected to underwater explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 38(7):558 – 566.

[Schneider, 2003] SCHNEIDER, N. A. (2003). Prediction of surface ship response to severe underwater explosions using a virtual underwater shock environment. Thèse de Master, Naval Postgraduate School, Monterey, California.

- [Shin, 2004] SHIN, Y. S. (2004). Ship shock modeling and simulation for far-field underwater explosion. *Computers & Structures*, 82(23-26):2211 – 2219. Computational Structures Technology.
- [Sprague et Geers, 2004] SPRAGUE, M. A. et GEERS, T. L. (2004). A spectral-element method for modeling cavitation in transient fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(15):2467 – 2499.
- [Sprague et Geers, 2006] SPRAGUE, M. A. et GEERS, T. L. (2006). A spectral-element/finite-element analysis of a ship-like structure subjected to an underwater explosion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):2149 – 2167.
- [Zhang et al., 2011a] ZHANG, A. M., ZENG, L. Y., CHENG, X. D., WANG, S. P. et CHEN, Y. (2011a). The evaluation method of total damage to ship in underwater explosion. *Applied Ocean Research*, In Press, Corrected Proof:–.
- [Zhang et al., 2011b] ZHANG, A. M., ZHOU, W. X., WANG, S. P. et FENG, L. H. (2011b). Dynamic response of the non-contact underwater explosions on naval equipment. *Marine Structures*, In Press, Corrected Proof:–.

Méthode du Potentiel Retardé

- [Dyka et Ingel, 1998] DYKA, C. T. et INGEL, R. P. (1998). Transient fluid-structure interaction in naval applications using the retarded potential method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21(3): 245 – 251.
- [Dyka et al., 1997] DYKA, C. T., INGEL, R. P. et KIRBY, G. C. (1997). Stabilizing the retarded potential method for transient fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(20):3767–3783.
- [Dyka et Tamm, 1992] DYKA, C. T. et TAMM, M. A. (1992). Fluid-Structure Interaction Using Retarded Potential and ABAQUS. *Naval Research Laboratory, Washington, D.C.*, Report NRL/MR/6386-92-7104.
- [Huang et al., 1977] HUANG, H., EVERSTINE, G. C. et WANG, Y. F. (1977). Retarded Potential Techniques for the Analysis of Submerged Structures Impinged by Weak Shock Waves. In BELYTSCHKO, T. et GEERS, T. L., éditeurs : *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction Problems*, pages 83 – 93.

Approximation Doublement Asymptotique

- [DeRuntz, 1989] DERUNTZ, J. A. (1989). The Underwater Shock Analysis Code and Its Applications. *60th Shock and Vibration Symposium Proceedings*, 1:89–107.
- [DeRuntz, 2005] DERUNTZ, J. A. (2005). Augmentation of DAA staggered - Solution equations in underwater shock problems for singular structural mass matrices. *Shock and Vibration*, 12(1 SPEC. ISS.):25 – 35.
- [DeRuntz et Geers, 1978] DERUNTZ, J. A. et GEERS, T. L. (1978). Added Mass Computation by the Boundary Integral Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(3):531 – 549.
- [Everstine, 1976] EVERSTINE, G. C. (1976). A NASTRAN implementation of the doubly asymptotic approximation for underwater shock response. In *Fifth NASTRAN Users' Colloquium*, pages 207 – 228, California. NASA-Ames Research Center.

- [Felippa, 1980a] FELIPPA, C. A. (1980a). A family of early-time approximations for fluid structure interaction. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 47(4):703 – 708.
- [Felippa, 1980b] FELIPPA, C. A. (1980b). Top-down derivation of doubly asymptotic approximations for structure-fluid interaction analysis. In SHAW, R. P., éditeur : *Second International Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Sciences*, pages 79 – 88. University Press of Virginia, Charlottesville.
- [Geers et Zhang, 1994a] GEERS, T. G. et ZHANG, P. (1994a). Doubly asymptotic approximations for submerged structures with internal fluid volumes : Evaluation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 61(4):900 – 906.
- [Geers, 1971] GEERS, T. L. (1971). Residual potential and approximate methods for three-dimensional fluid-structure interaction problems. *Journal of Acoustical Society of America*, 49(5B):1505 – 1510.
- [Geers, 1975] GEERS, T. L. (1975). Transient response analysis of submerged structures. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD*, 14:59 – 58.
- [Geers, 1978] GEERS, T. L. (1978). Doubly asymptotic approximations for transient motions of submerged structures. *Journal of Acoustical Society of America*, 64(5):1500 – 1508.
- [Geers et Felippa, 1983] GEERS, T. L. et FELIPPA, C. A. (1983). Doubly asymptotic approximations for vibration analysis of submerged structures. *Journal of Acoustical Society of America*, 73(4):1152 – 1159.
- [Geers et Lewis, 1997] GEERS, T. L. et LEWIS, B. A. (1997). Doubly asymptotic approximations for transient elastodynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 34(11):1293 – 1305.
- [Geers et Zhang, 1994b] GEERS, T. L. et ZHANG, P. (1994b). Doubly asymptotic approximations for submerged structures with internal fluid volumes : Formulation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 61(4):893 – 899.
- [Liang et al., 2001] LIANG, C.-C., HSU, C.-Y. et LAI, W.-H. (2001). A study of transient responses of a submerged spherical shell under shock waves. *Ocean Engineering*, 28(1):71 – 94.
- [Liang et Tai, 2006] LIANG, C.-C. et TAI, Y.-S. (2006). Shock responses of a surface ship subjected to noncontact underwater explosions. *Ocean Engineering*, 33(5-6):748 – 772. Noncontact underwater explosions ; Shock responses ; Surface ship ; Underwater shock damage ;.
- [Nicolas-Vullierme, 1991] NICOLAS-VULLIERME, B. (1991). Contribution to doubly asymptotic approximations. An operator top-down derivation. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 113(3):409 – 415.
- [Park et al., 1977] PARK, K. C., FELIPPA, C. A. et DERUNTZ, J. A. (1977). Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD*, 26:95 – 124.

Lagrange, Euler, ALE

- [Chisum, 1995] CHISUM, J. E. (1995). Multimaterial eulerian and coupled lagrangian-eulerian finite element analysis of underwater shock problems. Thèse de Master, Naval Postgraduate School, Monterey, California.

- [Kim et Shin, 2008] KIM, J.-H. et SHIN, H.-C. (2008). Application of the ALE technique for underwater explosion analysis of a submarine liquefied oxygen tank. *Ocean Engineering*, 35(8-9):812 – 822.
- [Riley et al., 2010] RILEY, M. J., PAULGAARD, G. T., LEE, J. J. et SMITH, M. J. (2010). Failure mode transition in air-backed plates from near contact underwater explosions. *Shock and Vibration*, 17(6):723 – 739.
- [Webster, 2007] WEBSTER, K. G. (2007). Investigation of close proximity underwater explosion effects on a ship-like structure using the Multi-Material Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method. Thèse de Master, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- [Xie et al., 2007] XIE, W. F., YOUNG, Y. L., LIU, T. G. et KHOO, B. C. (2007). Dynamic response of deformable structures subjected to shock load and cavitation reload. *Computational Mechanics*, 40(4):667 – 681.
- [Yiannakopoulos et al., 2008] YIANNAKOPOULOS, G., BRETT, J. M. et KRELLE, A. (2008). A preliminary investigation of plate penetration by an underwater explosion. *In 79th Shock & Vibration Symposium*, Orlando, FL, USA.

Éléments de frontières couplés aux éléments finis

- [Chahine et Kalumuck, 1998] CHAHINE, G. L. et KALUMUCK, K. M. (1998). The influence of structural deformation on water jet impact loading. *Journal of Fluids and Structures*, 12(1):103 – 121.
- [Duncan et al., 1996] DUNCAN, J. H., MILLIGAN, C. D. et ZHANG, S. (1996). On the interaction between a bubble and a submerged compliant structure. *Journal of Sound and Vibration*, 197(1):17 – 44.
- [Kalumuck et al., 1995] KALUMUCK, K. M., DURAISWAMI, R. et CHAHINE, G. L. (1995). Bubble Dynamics Fluid-Structure Interaction Simulation by Coupling Fluid Bem and Structural Fem Codes. *Journal of Fluids and Structures*, 9(8):861 – 883.
- [Klaseboer et al., 2005] KLASEBOER, E., HUNG, K. C., WANG, C., WANG, C. W., KHOO, B. C., BOYCE, P., DEBONO, S. et CHARLIER, H. (2005). Experimental and numerical investigation of the dynamics of an underwater explosion bubble near a resilient/rigid structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 537:387 – 413.
- [Milligan et Zilliagus, 1992] MILLIGAN, C. D. et ZILLIACUS, S. (1992). A coupled finite element - boundary element method for calculations of the interaction between an explosion bubble and a submerged compliant target. *Naval Surface Warfare Center, Carderock Division*, Report 92/002.
- [Zhang et Yao, 2008] ZHANG, A. M. et YAO, X. L. (2008). Interaction of underwater explosion bubble with complex elastic-plastic structure. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 29(1):89 – 100.
- [Zhang et al., 2008] ZHANG, A. M., YAO, X. L. et LI, J. (2008). The interaction of an underwater explosion bubble and an elastic-plastic structure. *Applied Ocean Research*, 30(3):159 – 171.

Volumes finis couplés aux éléments finis

- [Link et al., 2003] LINK, R., RIPLEY, R., NORWOOD, M., JOSEY, T., DONAHUE, L. et SLATER, J. E. (2003). Analysis of the Loading and Response of Flate Plate Targets Subjected to Close-Proximity Underwater Explosions. *In 74rd Shock & Vibration Symposium*, San Diego, CA, USA.

SPH

- [Swegle et Attaway, 1995] SWEGLE, J. W. et ATTAWAY, S. W. (1995). On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations. *Computational Mechanics*, 17(3):151 – 168.

Méthodes numériques**Ouvrages généraux**

- [Amdahl, 1967] AMDAHL, G. M. (1967). Validity of the single processor approach to achieving large-scale computing capabilities. In *AFIPS Spring Joint Computer Conference*, pages 483 – 485, California. IBM Sunnyvale.
- [Guinot, 2006] GUINOT, V. (2006). *Ondes en mécanique des fluides - Modélisation et simulation numérique*. Lavoisier, Editions Hermès Sciences.
- [Mair, 1999] MAIR, H. U. (1999). Benchmarks for submerged structure response to underwater explosions. *Shock and Vibration*, 6(4):169 – 181.
- [Richtmyer et Morton, 1967] RICHTMYER, R. et MORTON, K. (1967). *Difference methods for initial-value problems*. Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience Publishers.
- [Toro, 2009] TORO, E. F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Wardlaw, 1998] WARDLAW, A. B. (1998). Underwater explosion test cases. *U.S. Navy - Naval Surface Warfare Center*, Report IHTR 2069.

Méthodes Lagrange, Euler et ALE

- [Addessio et al., 1992] ADDESSIO, F. L., BAUMGARDNER, J. R., DUKOWICZ, J. K., JOHNSON, N. L., KASHIWA, B. A., RAUENZAHN, R. M. et ZEMACH, C. (1992). CAVEAT : A Computer Code for Fluid Dynamics Problems with Large Distortion and Internal Slip. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, LA-10613-MS (Rev. 1).
- [Amsden et Hirt, 1973] AMSDEN, A. A. et HIRT, C. W. (1973). YAQUI, an Arbitrary Lagrangian-Eulerian computer program for fluid flow at all speeds, volume LA-5100. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California.
- [Amsden et Ruppel, 1981] AMSDEN, A. A. et RUPPEL, H. M. (1981). SALE-3D : A simplified ALE computer program for calculating three-dimensional fluid flow. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, Report LA-8905.
- [Amsden et al., 1980] AMSDEN, A. A., RUPPEL, H. M. et HIRT, C. W. (1980). SALE : A simplified ALE computer program for fluid flow at all speeds. *Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, Report LA-8095.
- [Aquelet et al., 2005] AQUELET, N., SEDDON, C., SOULI, M. et MOATAMEDI, M. (2005). Initialisation of volume fraction in fluid/structure interaction problem. *International Journal of Crashworthiness*, 10(3): 237–247.

- [Aquelet et Souli, 2008] AQUELET, N. et SOULI, M. (2008). 2D to 3D ALE mapping. *In 10th International LS-DYNA Users Conference*, Dearborn, Michigan USA. Livermore Software Technology Corporation (LSTC).
- [Aquelet et al., 2003] AQUELET, N., SOULI, M., GABRYS, J. et OLOVSSON, L. (2003). A new ALE formulation for sloshing analysis. *Structural Engineering and Mechanics*, 16(4):423 – 440.
- [Aquelet et al., 2006] AQUELET, N., SOULI, M. et OLOVSSON, L. (2006). Euler-Lagrange coupling with damping effects : Application to slamming problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:110 – 132.
- [Belytschko et al., 1984] BELYTSCHKO, T., LIN, J. I. et TSAY, C.-S. (1984). Explicit algorithms for the non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42(2):225 – 251.
- [Belytschko et al., 2000] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. et MORAN, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, New York.
- [Benson, 1992a] BENSON, D. J. (1992a). Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2-3):235 – 394.
- [Benson, 1992b] BENSON, D. J. (1992b). Momentum advection on a staggered mesh. *Journal of Computational Physics*, 100(1):143 – 162.
- [Benson, 1997] BENSON, D. J. (1997). A mixture theory for contact in multi-material Eulerian formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(1-2):59 – 86.
- [Benson, 1998] BENSON, D. J. (1998). Stable time step estimation for multi-material Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167(1-2):191 – 205.
- [Brooks et Hughes, 1981] BROOKS, A. N. et HUGHES, T. J. R. (1981). Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3):199 – 259.
- [Chorin et al., 1978] CHORIN, A. J., HUGHES, T. J. R., MCCracken, M. F. et MARSDEN, J. E. (1978). Product formulas and numerical algorithms. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 31(2):205–256.
- [Colella et Woodward, 1984] COLELLA, P. et WOODWARD, P. R. (1984). The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations. *Journal of Computational Physics*, 54(1):174 – 201.
- [Courant et al., 1967] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. et LEWY, H. (1967). On Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2):215 – 234.
- [DeBar, 1974] DEBAR, R. B. (1974). Fundamentals of the KRAKEN code. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore*, Technical Report UCID-17366.
- [Demuth et al., 1985] DEMUTH, R. B., MARGOLIN, L. G., NICHOLS, B. D., ADAMS, T. F. et SMITH, B. W. (1985). SHALE : A computer program for solid dynamics. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, Report LA-10236.
- [Flanagan et Belytschko, 1981] FLANAGAN, D. P. et BELYTSCHKO, T. (1981). Uniform strain hexaedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(5):679 – 706.

- [Giroux, 1973] GIROUX, E. D. (1973). HEMP user's manual. *Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, Livermore*, Report UCRL-51079 (Rev.1).
- [Godunov, 1959] GODUNOV, S. K. (1959). A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations. *Math. Sbornik*, 47(3):271 – 306.
- [Goudreau et Hallquist, 1979] GOUDREAU, G. L. et HALLQUIST, J. O. (1979). Synthesis of hydrocode and finite element technology for large deformation lagrangian computation. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California*, UCRL-82858.
- [Hallquist, 1984] HALLQUIST, J. O. (1984). User's manual for DYNA2D - An explicit two-dimensional hydrodynamic finite element code with interactive rezoning. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California*, UCID-18756 (Rev.2).
- [Hallquist, 2006] HALLQUIST, J. O. (2006). *LS-DYNA Theory Manual*. Livermore Software Technology Corporation.
- [Harlow et Amsden, 1975] HARLOW, F. H. et AMSDEN, A. A. (1975). Flow of interpenetrating material phases. *Journal of Computational Physics*, 18(4):440 – 464.
- [Hirt et al., 1974] HIRT, C. W., AMSDEN, A. A. et COOK, J. L. (1974). An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 14(3):227 – 253.
- [Hughes et al., 1989] HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P. et HULBERT, G. M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(2):173 – 189.
- [Hughes et al., 1981] HUGHES, T. J. R., LIU, W. K. et ZIMMERMANN, T. K. (1981). Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29(3):329 – 349.
- [Hughes et Mallet, 1986] HUGHES, T. J. R. et MALLETT, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(3):305 – 328.
- [Hughes et Tezduyar, 1984] HUGHES, T. J. R. et TEZDUYAR, T. E. (1984). Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45(1-3):217 – 284.
- [Lapoujade et al., 2010] LAPOUJADE, V., VANDORSSELAER, N., KEVORKIAN, S. et CHEVAL, K. (2010). A study of mapping technique for air blast modeling. *In 11th International LS-DYNA Users Conference*, Detroit, Michigan USA. Livermore Software Technology Corporation (LSTC).
- [Legay et al., 2006] LEGAY, A., CHessa, J. et BELYTSCHKO, T. (2006). An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):2070 – 2087.
- [LSTC, 2007] LSTC (2007). *LS-DYNA Keyword User's Manual - Version 971*. Livermore Software Technology Corporation.

- [MacCormack, 1971] MACCORMACK, R. (1971). Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. In HOLT, M., éditeur : *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, volume 8 de *Lecture Notes in Physics*, pages 151–163. Springer Berlin / Heidelberg.
- [Maenchen et Sack, 1963] MAENCHEN, G. et SACK, S. (1963). The TENSOR Code. *Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, California*, Report UCRL-7316.
- [Margolin et Beason, 1988] MARGOLIN, L. G. et BEASON, C. W. (1988). Remapping on the staggered mesh. *Lawrence Livermore National Laboratory, California*, Report UCRL-99682.
- [Masud et Hughes, 1997] MASUD, A. et HUGHES, T. J. R. (1997). A space-time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domain problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 146(1-2):91 – 126. Euler formulation ;Galerkin formulation ;Lagrangian formulation ;Mesh rezoning strategy ;
- [Noh et Woodward, 1976] NOH, W. F. et WOODWARD, P. (1976). SLIC (Simple Line Interface Calculation). *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California*, UCRL-77651.
- [Souli *et al.*, 2000] SOULI, M., OUAHSINE, A. et LEWIN, L. (2000). ALE formulation for fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(5-7):659 – 675.
- [Souli et Zolesio, 1996] SOULI, M. et ZOLELIO, J. P. (1996). Finite element method for free surface flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129(1-2):43 – 51.
- [Souli et Zolesio, 2001] SOULI, M. et ZOLELIO, J. P. (2001). Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(3-5):451 – 466.
- [Sutcliffe, 1974] SUTCLIFFE, W. G. (1974). BBC hydrodynamics. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore*, Technical Report UCID-17013.
- [Taylor et Flanagan, 1987] TAYLOR, L. M. et FLANANGAN, D. P. (1987). PRONTO 2D : A two-dimensional transient solid dynamics program. *Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico*, SANDIA Report SAND-86-0594.
- [van Leer, 1974] van LEER, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14(4):361 – 370.
- [van Leer, 1977a] van LEER, B. (1977a). Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 23(3):263 – 275.
- [van Leer, 1977b] van LEER, B. (1977b). Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, 23(3):276 – 299.
- [van Leer, 1979] van LEER, B. (1979). Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32(1):101 – 136.
- [van Leer, 1997] van LEER, B. (1997). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. *Journal of Computational Physics*, 135(2):229 – 248.

- [Wilkins, 1969] WILKINS, M. L. (1969). Calculation of elastic-plastic flow. *Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, Livermore*, Report UCRL-7322 (Rev.1).
- [Wilkins, 1980] WILKINS, M. L. (1980). Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations. *Journal of Computational Physics*, 36(3):281 – 303.
- [Woodward et Colella, 1980] WOODWARD, P. et COLELLA, P. (1980). High resolution difference scheme for compressible gas dynamics. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California*, Report UCRL-83673.
- [Woodward et Colella, 1984] WOODWARD, P. et COLELLA, P. (1984). The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 54(1):115 – 173.
- [Youngs, 1982] YOUNGS, D. L. (1982). Time dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pages 273 – 285.
- [Youngs, 1987] YOUNGS, D. L. (1987). An interface tracking method for a 3D Eulerian hydrodynamics code. Rapport technique AWRE/44/92/3, Atomic Weapon Research Establishment, Aldermaston, Berkshire, UK.
- [Zhong, 1993] ZHONG, Z. H. (1993). *Finite element procedures for contact-impact problems*. Oxford science publications. Oxford University Press.

Références non-classées

- [Abe *et al.*, 2007] ABE, A., KATAYAMA, M., MURATA, K., KATO, Y. et TANAKA, K. (2007). Numerical study of underwater explosions and following bubble pulses. *In 15th APS Topical Conference on Shock Compression of Condensed Matter*, Kohala Coast, Hawaii, USA.
- [Addessio *et al.*, 1992] ADDESSIO, F. L., BAUMGARDNER, J. R., DUKOWICZ, J. K., JOHNSON, N. L., KASHIWA, B. A., RAUENZAHN, R. M. et ZEMACH, C. (1992). CAVEAT : A Computer Code for Fluid Dynamics Problems with Large Distortion and Internal Slip. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, LA-106I3-MS (Rev. 1).
- [Afanasiev et Grigorieva, 2006] AFANASIEV, K. E. et GRIGORIEVA, I. V. (2006). Numerical investigation of three-dimensional bubble dynamics. *Journal of Engineering Mathematics*, 55(1-4):65 – 80.
- [Agafonov et Popov, 1989] AGAFONOV, G. L. et POPOV, O. E. (1989). Simple model of the nonadiabatic pulsating motion of the products of underwater explosion of gas mixtures. *Combustion, Explosion, and Shock Waves (English Translation of Fizika Goreniya i Vzryva)*, 25(1):117 – 120.
- [Alia et Souli, 2006] ALIA, A. et SOULI, M. (2006). High explosive simulation using multi-material formulations. *Applied Thermal Engineering*, 26(10):1032 – 1042.
- [Amdahl, 1967] AMDAHL, G. M. (1967). Validity of the single processor approach to achieving large-scale computing capabilities. *In AFIPS Spring Joint Computer Conference*, pages 483 – 485, California. IBM Sunnyvale.
- [Amsden et Hirt, 1973] AMSDEN, A. A. et HIRT, C. W. (1973). YAQUI, *an Arbitrary Lagrangian-Eulerian computer program for fluid flow at all speeds*, volume LA-5100. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California.
- [Amsden et Ruppel, 1981] AMSDEN, A. A. et RUPPEL, H. M. (1981). SALE-3D : A simplified ALE computer program for calculating three-dimensional fluid flow. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, Report LA-8905.
- [Amsden *et al.*, 1980] AMSDEN, A. A., RUPPEL, H. M. et HIRT, C. W. (1980). SALE : A simplified ALE computer program for fluid flow at all speeds. *Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, Report LA-8095.
- [Aquelet *et al.*, 2005] AQUELET, N., SEDDON, C., SOULI, M. et MOATAMEDI, M. (2005). Initialisation of volume fraction in fluid/structure interaction problem. *International Journal of Crashworthiness*, 10(3): 237–247.

- [Aquelet et Souli, 2008] AQUELET, N. et SOULI, M. (2008). 2D to 3D ALE mapping. *In 10th International LS-DYNA Users Conference*, Dearborn, Michigan USA. Livermore Software Technology Corporation (LSTC).
- [Aquelet et al., 2003] AQUELET, N., SOULI, M., GABRYS, J. et OLOVSSON, L. (2003). A new ALE formulation for sloshing analysis. *Structural Engineering and Mechanics*, 16(4):423 – 440.
- [Aquelet et al., 2006] AQUELET, N., SOULI, M. et OLOVSSON, L. (2006). Euler-Lagrange coupling with damping effects : Application to slamming problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:110 – 132.
- [Arons et al., 1948] ARONS, A. B., SLIFKO, J. P. et CARTER, A. (1948). Secondary pressure pulses due to gas globe oscillation in underwater explosions. I. Experimental data. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:475 – 480.
- [Arons et Yennie, 1948] ARONS, A. B. et YENNIE, D. R. (1948). Energy partition in underwater explosion phenomena. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1137 – 1154.
- [Auroire, 1998] AUROIRE, B. (1998). Exemples de problèmes traités ou pouvant être traités avec USA et LS-DYNA. Présentation à l'IPSI PHI2AS.
- [Axisa, 2001] AXISA, F. (2001). *Interactions fluide-structure*. Hermès.
- [Bangash, 2009] BANGASH, M. Y. H. (2009). *Shock, impact and explosion*. Springer.
- [Bannister, 1980] BANNISTER, K. A. (1980). Whipping techniques for ships and submarines. *In Shock and Vibration Bulletin, Part 3*, volume 50. NRL Washington.
- [Barras, 2007] BARRAS, G. (2007). Réponse dynamique des structures navale et offshore aux explosions aériennes et sous-marines. *Conservatoire National des Arts et Métiers, Orléans, France, Mémoire d'ingénieur*.
- [Belytschko et al., 1984] BELYTSCHKO, T., LIN, J. I. et TSAY, C.-S. (1984). Explicit algorithms for the non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42(2):225 – 251.
- [Belytschko et al., 2000] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K. et MORAN, B. (2000). *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, New York.
- [Benson, 1992a] BENSON, D. J. (1992a). Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2-3):235 – 394.
- [Benson, 1992b] BENSON, D. J. (1992b). Momentum advection on a staggered mesh. *Journal of Computational Physics*, 100(1):143 – 162.
- [Benson, 1997] BENSON, D. J. (1997). A mixture theory for contact in multi-material Eulerian formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 140(1-2):59 – 86.
- [Benson, 1998] BENSON, D. J. (1998). Stable time step estimation for multi-material Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167(1-2):191 – 205.
- [Best, 1991] BEST, J. P. (1991). *The dynamics of underwater explosions*. Thèse de Doctorat, University of Wollongong, Australia.

- [Best, 1996] BEST, J. P. (1996). On the Dynamics of the Bubble Created Upon Detonation of a Limpet Mine. *Defence Science and Technology Organisation*, DSTO-TR-0439.
- [Best, 2002] BEST, J. P. (2002). The effect of non-spherical collapse on determination of explosion bubble parameters. *Defence Science and Technology Organisation*, DSTO-RR-0238.
- [Best et Blake, 1994] BEST, J. P. et BLAKE, J. R. (1994). Estimate of the Kelvin impulse of a transient cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, 261:75 – 93.
- [Bleich et Sandler, 1970] BLEICH, H. H. et SANDLER, I. S. (1970). Interaction between structures and bilinear fluids. *International Journal of Solids and Structures*, 6(5):617 – 639.
- [Bonometti et Magnaudet, 2006] BONOMETTI, T. et MAGNAUDET, J. (2006). Transition from spherical cap to toroidal bubbles. *Physics of Fluids*, 18(5):052102.
- [Bonometti et Magnaudet, 2007] BONOMETTI, T. et MAGNAUDET, J. (2007). An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. Validation and application to bubble dynamics. *International Journal of Multiphase Flow*, 33(2):109 – 133.
- [Brett, 1998] BRETT, J. M. (1998). Numerical modelling of shock wave and pressure pulse generation by underwater explosion. *Defence Science and Technology Organisation*, DSTO-TR-0677.
- [Brett et Yiannakopoulos, 2008] BRETT, J. M. et YIANNAKOPOULOS, G. (2008). A study of explosive effects in close proximity to a submerged cylinder. *International Journal of Impact Engineering*, 35(4):206 – 225.
- [Brett et al., 2000] BRETT, J. M., YIANNAKOPOULOS, G. et VAN DER SCHAAF, P. J. (2000). Time-resolved measurement of the deformation of submerged cylinders subjected to loading from a nearby explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 24(9):875 – 890.
- [Brinkley et Kirkwood, 1950] BRINKLEY, S. et KIRKWOOD, J. G. (1950). Theory of the shock wave produced by an underwater explosion. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:383 – 496.
- [Brinkley et Kirkwood, 1945] BRINKLEY, S. R. et KIRKWOOD, J. G. (1945). Tables and graphs of the theoretical peak pressures energies and impulses of shock waves from explosive sources in sea water. *Office of Scientific Research and Development*, OSRD Report 5649.
- [Brooks et Hughes, 1981] BROOKS, A. N. et HUGHES, T. J. R. (1981). Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32(1-3):199 – 259.
- [Brujan et al., 2005] BRUJAN, E. A., PEARSON, A. et BLAKE, J. R. (2005). Pulsating, buoyant bubbles close to a rigid boundary and near the null final Kelvin impulse state. *International Journal of Multiphase Flow*, 31(3):302 – 317.
- [Bruneau, 1998] BRUNEAU, M. (1998). *Manuel d'acoustique fondamentale*. Hermès, 8, quai du Marché Neuf - 75004 Paris, 1 édition.
- [Bugg et Rowe, 1991] BUGG, J. D. et ROWE, R. D. (1991). Modelling the initial motion of large cylindrical and spherical bubbles. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 13(1):109–129.
- [Butterworth, 1924] BUTTERWORTH, S. (1924). Damage to ship's plates by underwater explosions. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:1–10.

- [Butterworth, 1942] BUTTERWORTH, S. (1942). Note on the motion of a finite plate due to an underwater explosion. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:201–206.
- [Chahine et Kalumuck, 1998] CHAHINE, G. L. et KALUMUCK, K. M. (1998). The influence of structural deformation on water jet impact loading. *Journal of Fluids and Structures*, 12(1):103 – 121.
- [Chahine et al., 2003] CHAHINE, G. L., KALUMUCK, K. M. et HSIAO, C.-T. (2003). Simulation of surface piercing body coupled response to underwater bubble dynamics utilizing 3DYNAPS, a three-dimensional BEM code. *Computational Mechanics*, 32(4-6):319 – 326.
- [Chapman, 1899] CHAPMAN, D. L. (1899). On the rate of explosion in gases. *Philosophical Magazine Series 5*, 47(284):90–104.
- [Chertock, 1952] CHERTOCK, G. (1952). The flexural response of a submerged or floating body to an underwater explosion - Part 1 - Theory. *David Taylor Model Basin, Washington, D.C.*, Report C-517.
- [Chertock, 1953] CHERTOCK, G. (1953). The Flexural Response of a Submerged Solid to a Pulsating Gas Bubble. *Journal of Applied Physics*, 24(2):192–197.
- [Chertock, 1964] CHERTOCK, G. (1964). Effects of underwater explosions on elastic structures. *David Taylor Model Basin, Washington, D.C.*
- [Chertock, 1970] CHERTOCK, G. (1970). Transient Flexural Vibrations of Ship-Like Structures Exposed to Underwater Explosions. *Journal of the Acoustical Society of America*, 48(1):170 – 180.
- [Chisum, 1995] CHISUM, J. E. (1995). Multimaterial eulerian and coupled lagrangian-eulerian finite element analysis of underwater shock problems. Thèse de Master, Naval Postgraduate School, Monterey, California.
- [Chisum et Shin, 1997] CHISUM, J. E. et SHIN, Y. S. (1997). Explosion gas bubbles near simple boundaries. *Shock and Vibration*, 4(1):11 – 25.
- [Chorin et al., 1978] CHORIN, A. J., HUGHES, T. J. R., MCCracken, M. F. et MARSDEN, J. E. (1978). Product formulas and numerical algorithms. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 31(2):205–256.
- [Chou et al., 1991] CHOU, P. C., LIANG, D. et FLIS, W. J. (1991). Shock and shear initiation of explosive. *Shock Waves*, 1:285 – 292.
- [Clift et al., 1978] CLIFT, R., GRACE, J. R. et WEBER, M. E. (1978). *Bubbles, drops, and particles*. Academic Press, New York.
- [Cole, 1948] COLE, R. H. (1948). *Underwater explosions*. Dover books on engineering and engineering physics. Princeton Univ. Press.
- [Cole, 1965] COLE, R. H. (1965). *Underwater Explosions*. Dover Pubns.
- [Colella et Woodward, 1984] COLELLA, P. et WOODWARD, P. R. (1984). The Piecewise Parabolic Method (PPM) for gas-dynamical simulations. *Journal of Computational Physics*, 54(1):174 – 201.
- [Coles et al., 1946] COLES, J. S., CHRISTIAN, E. A., SLIFKO, J. F., NIFFENEGGER, C. R. et ROGERS, M. A. (1946). Shock-wave parameters from spherical TNT charges detonated under water. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1085 – 1106.

- [Courant *et al.*, 1967] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. et LEWY, H. (1967). On Partial Difference Equations of Mathematical Physics. *IBM Journal of Research and Development*, 11(2):215 – 234.
- [Davis, 2000] DAVIS, W. C. (2000). Complete equation of state for unreacted solid explosive. *Combustion and Flame*, 120(3):399 – 403.
- [DeBar, 1974] DEBAR, R. B. (1974). Fundamentals of the KRAKEN code. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore*, Technical Report UCID-17366.
- [Demuth *et al.*, 1985] DEMUTH, R. B., MARGOLIN, L. G., NICHOLS, B. D., ADAMS, T. F. et SMITH, B. W. (1985). SHALE : A computer program for solid dynamics. *Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico*, Report LA-10236.
- [DeRuntz, 1989] DERUNTZ, J. A. (1989). The Underwater Shock Analysis Code and Its Applications. *60th Shock and Vibration Symposium Proceedings*, 1:89–107.
- [DeRuntz, 2005] DERUNTZ, J. A. (2005). Augmentation of DAA staggered - Solution equations in underwater shock problems for singular structural mass matrices. *Shock and Vibration*, 12(1 SPEC. ISS.):25 – 35.
- [DeRuntz et Geers, 1978] DERUNTZ, J. A. et GEERS, T. L. (1978). Added Mass Computation by the Boundary Integral Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(3):531 – 549.
- [Didoszak, 2004] DIDOSZAK, J. M. (2004). Parametric studies of DDG-81 ship shock trial simulations. Thèse de Master, Naval Postgraduate School, Monterey, California.
- [DiMaggio *et al.*, 1981] DIMAGGIO, F. L., SANDLER, I. S. et RUBIN, D. (1981). Uncoupling approximations in fluid-structure interaction problems with cavitation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 48(4):753 – 756.
- [Dobratz et Crawford, 1985] DOBRATZ, B. M. et CRAWFORD, P. C. (1985). *LLNL Explosives Handbook - Properties of Chemical Explosives and Explosive Simulants*. Lawrence Livermore National Laboratory.
- [Doinikov, 2005] DOINIKOV, A. A. (2005). Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid. *Physics of Fluids*, 17(12):1 – 4.
- [Doumenc, 2008] DOUMENC, F. (2008). Éléments de thermodynamique et thermique. Cours de Licence de Mécanique - Université Pierre et Marie Curie Paris VI.
- [Duncan *et al.*, 1996] DUNCAN, J. H., MILLIGAN, C. D. et ZHANG, S. (1996). On the interaction between a bubble and a submerged compliant structure. *Journal of Sound and Vibration*, 197(1):17 – 44.
- [Dyka et Ingel, 1998] DYKA, C. T. et INGEL, R. P. (1998). Transient fluid-structure interaction in naval applications using the retarded potential method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 21(3): 245 – 251.
- [Dyka *et al.*, 1997] DYKA, C. T., INGEL, R. P. et KIRBY, G. C. (1997). Stabilizing the retarded potential method for transient fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(20):3767–3783.
- [Dyka et Tamm, 1992] DYKA, C. T. et TAMM, M. A. (1992). Fluid-Structure Interaction Using Retarded Potential and ABAQUS. *Naval Research Laboratory, Washington, D.C.*, Report NRL/MR/6386-92-7104.

- [Everstine, 1981] EVERSTINE, G. (1981). A symmetric potential formulation for fluid-structure interaction. *Journal of Sound and Vibration*, 79(1):157 – 160.
- [Everstine, 1976] EVERSTINE, G. C. (1976). A NASTRAN implementation of the doubly asymptotic approximation for underwater shock response. In *Fifth NASTRAN Users' Colloquium*, pages 207 – 228, California. NASA-Ames Research Center.
- [Everstine, 1997] EVERSTINE, G. C. (1997). Finite element formulations of structural acoustics problems. *Computers & Structures*, 65(3):307 – 321.
- [Felippa, 1980a] FELIPPA, C. A. (1980a). A family of early-time approximations for fluid structure interaction. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 47(4):703 – 708.
- [Felippa, 1980b] FELIPPA, C. A. (1980b). Top-down derivation of doubly asymptotic approximations for structure-fluid interaction analysis. In SHAW, R. P., éditeur : *Second International Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Sciences*, pages 79 – 88. University Press of Virginia, Charlottesville.
- [Felippa et Deruntz, 1982] FELIPPA, C. A. et DERUNTZ, J. A. (1982). Finite element analysis of shock-induced hull cavitation. *Defense Nuclear Agency, Washington, D.C.*, Contract DNA 001-81-C-0135.
- [Felippa et Deruntz, 1984] FELIPPA, C. A. et DERUNTZ, J. A. (1984). Finite element analysis of shock-induced hull cavitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44(3):297 – 337.
- [Flanagan et Belytschko, 1981] FLANAGAN, D. P. et BELYTSCHKO, T. (1981). Uniform strain hexaedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(5):679 – 706.
- [Fox, 1947] FOX, E. N. (1947). A review of underwater explosion phenomena. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1 – 84.
- [Friedman, 1947] FRIEDMAN, B. (1947). Theory of underwater explosion bubbles. *New-York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 166.
- [Frost et Harper, 1975] FROST, P. A. et HARPER, E. Y. (1975). Acoustic radiation from surfaces oscillating at large amplitude and small mach number. *Journal of the Acoustical Society of America*, 58(2):318 – 325.
- [Geers et Zhang, 1994a] GEERS, T. G. et ZHANG, P. (1994a). Doubly asymptotic approximations for submerged structures with internal fluid volumes : Evaluation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 61(4):900 – 906.
- [Geers, 1971] GEERS, T. L. (1971). Residual potential and approximate methods for three-dimensional fluid-structure interaction problems. *Journal of Acoustical Society of America*, 49(5B):1505 – 1510.
- [Geers, 1975] GEERS, T. L. (1975). Transient response analysis of submerged structures. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD*, 14:59 – 58.
- [Geers, 1978] GEERS, T. L. (1978). Doubly asymptotic approximations for transient motions of submerged structures. *Journal of Acoustical Society of America*, 64(5):1500 – 1508.
- [Geers et Felippa, 1983] GEERS, T. L. et FELIPPA, C. A. (1983). Doubly asymptotic approximations for vibration analysis of submerged structures. *Journal of Acoustical Society of America*, 73(4):1152 – 1159.

- [Geers et Hunter, 1996] GEERS, T. L. et HUNTER, K. S. (1996). Dilatational dynamics of an underwater explosion bubble. *In 67th Shock & Vibration Symposium*, pages 315 – 324, Monterey, CA, USA.
- [Geers et Hunter, 2002] GEERS, T. L. et HUNTER, K. S. (2002). An integrated wave-effects model for an underwater explosion bubble. *Journal of the Acoustical Society of America*, 111(4):1584 – 1601.
- [Geers et Lewis, 1997] GEERS, T. L. et LEWIS, B. A. (1997). Doubly asymptotic approximations for transient elastodynamics. *International Journal of Solids and Structures*, 34(11):1293 – 1305.
- [Geers et Park, 2005] GEERS, T. L. et PARK, C. K. (2005). Optimization of the G and H bubble model. *Shock and Vibration*, 12(1 SPEC ISS):3 – 8.
- [Geers et Zhang, 1994b] GEERS, T. L. et ZHANG, P. (1994b). Doubly asymptotic approximations for submerged structures with internal fluid volumes : Formulation. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 61(4):893 – 899.
- [Gilmore, 1952] GILMORE, F. R. (1952). The growth or collapse of a spherical bubble in a viscous compressible liquid. *Office of Naval Research, California Institute of Technology, Pasadena, California*, Report 26-4.
- [Giroux, 1973] GIROUX, E. D. (1973). HEMP user's manual. *Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, Livermore*, Report UCRL-51079 (Rev.1).
- [Godunov, 1959] GODUNOV, S. K. (1959). A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations. *Math. Sbornik*, 47(3):271 – 306.
- [Goertner et al., 1969] GOERTNER, J. F., HENDRICKSON, J. R. et LEAMON, R. G. (1969). Model Studies of the Behavior of Underwater Explosion Bubbles in Contact with a Rigid Bottom. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Silver Spring, Maryland*.
- [Goudreau et Hallquist, 1979] GOUDREAU, G. L. et HALLQUIST, J. O. (1979). Synthesis of hydrocode and finite element technology for large deformation lagrangian computation. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California*, UCRL-82858.
- [Guinot, 2006] GUINOT, V. (2006). *Ondes en mécanique des fluides - Modélisation et simulation numérique*. Lavoisier, Editions Hermès Sciences.
- [Guyon et al., 2001] GUYON, E., HULIN, J. P., PETIT, L. et GENNES, P. G. D. (2001). *Hydrodynamique Physique*. EDP Sciences, CNRS Editions.
- [Hallquist, 1984] HALLQUIST, J. O. (1984). User's manual for DYNA2D - An explicit two-dimensional hydrodynamic finite element code with interactive rezoning. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California*, UCID-18756 (Rev.2).
- [Hallquist, 2006] HALLQUIST, J. O. (2006). *LS-DYNA Theory Manual*. Livermore Software Technology Corporation.
- [Harlow et Amsden, 1975] HARLOW, F. H. et AMSDEN, A. A. (1975). Flow of interpenetrating material phases. *Journal of Computational Physics*, 18(4):440 – 464.
- [Harris, 2004] HARRIS, P. J. (2004). An investigation into the use of the boundary integral method to model the motion of a single gas or vapour bubble in a liquid. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(4):325 – 332.

- [Harris *et al.*, 1999] HARRIS, P. J., VERMA, A. et CHAKRABARTI, R. (1999). Interaction of an explosion bubble with a fixed rigid structure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(4):389 – 396.
- [Hartmann et Hill, 1950a] HARTMANN, G. K. et HILL, E. G., éditeurs (1950a). *Underwater explosion research. A compendium of British and American reports. Vol.1 - The Shock Wave*. Office of Naval Research, Washington D.C., 1950.
- [Hartmann et Hill, 1950b] HARTMANN, G. K. et HILL, E. G., éditeurs (1950b). *Underwater explosion research. A compendium of British and American reports. Vol.2 - The Gas Globe*. Office of Naval Research, Washington D.C., 1950.
- [Hartmann et Hill, 1950c] HARTMANN, G. K. et HILL, E. G., éditeurs (1950c). *Underwater explosion research. A compendium of British and American reports. Vol.3 - The Damage Process*. Office of Naval Research, Washington D.C., 1950.
- [Heathcote et Niffenegger, 1967] HEATHCOTE, T. B. et NIFFENEGGER, C. R. (1967). Comparison of the underwater power of explosives in small charges. XI. Further development of test procedures. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland, NOLTR Report 67-17*.
- [Heaton, 1986a] HEATON, K. C. (1986a). Migration of the Gas Globe from Underwater Explosions : The Effect of Drag and Radiative Energy Loss. *Defence Research Establishment Valcartier, Report R-4373/86*.
- [Heaton, 1986b] HEATON, K. C. (1986b). Pressure Waves from a Spherical Bubble. *Defence Research Establishment Valcartier, Report M-2792/86*.
- [Herring, 1941] HERRING, C. (1941). Theory of the pulsations of the gas bubble produced by an underwater explosion. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:35 – 131.
- [Hickling et Plesset, 1963] HICKLING, R. et PLESSET, M. S. (1963). The collapse of a spherical cavity in a compressible liquid. *Office of Naval Research, California Institute of Technology, Pasadena, California, Report 85-24*.
- [Hicks, 1972] HICKS, A. N. (1972). The theory of explosion induced whipping ship motions. *Naval Construction Research Establishment, St. Leonard's Hill, Dunfermline, Scotland, Report NCRE/R579*.
- [Hicks, 1986] HICKS, A. N. (1986). Explosion induced hull whipping. In SMITH, C. S. et CLARKE, J. D., éditeurs : *Advances in Marine Structures*, pages 390 – 410, London. Elsevier Applied Science Publishers.
- [Hirt *et al.*, 1974] HIRT, C. W., AMSDEN, A. A. et COOK, J. L. (1974). An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 14(3):227 – 253.
- [Hollyer, 1959] HOLLYER, R. S. (1959). *Direct Shock-Wave Damage to Merchant Ships From Noncontact Underwater Explosions*, volume 67. Transactions of Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- [Holt, 1977] HOLT, M. (1977). Underwater Explosions. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9(1):187–214.
- [Hornberg, 1986] HORNBERG, H. (1986). Determination of fume state parameters from expansion measurements of metal tubes. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 11(1):23 – 31.

- [Huang, 1969] HUANG, H. (1969). Transient interaction of plane acoustic waves with a spherical elastic shell. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 45(3):661 – 670.
- [Huang, 1970] HUANG, H. (1970). An exact analysis of the transient interaction of acoustic plane waves with a cylindrical elastic shell. *Journal of Applied Mechanics*, 37(4):1091–1099.
- [Huang *et al.*, 1977] HUANG, H., EVERSTINE, G. C. et WANG, Y. F. (1977). Retarded Potential Techniques for the Analysis of Submerged Structures Impinged by Weak Shock Waves. In BELYTSCHKO, T. et GEERS, T. L., éditeurs : *Computational Methods for Fluid-Structure Interaction Problems*, pages 83 – 93.
- [Hudson et Johnson, 1944] HUDSON, G. E. et JOHNSON, C. T. (1944). Time-displacement studies of diaphragms deformed by explosive loading. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:445 – 460.
- [Hughes *et al.*, 1989] HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P. et HULBERT, G. M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(2):173 – 189.
- [Hughes *et al.*, 1981] HUGHES, T. J. R., LIU, W. K. et ZIMMERMANN, T. K. (1981). Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29(3):329 – 349.
- [Hughes et Mallet, 1986] HUGHES, T. J. R. et MALLET, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics : III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58(3):305 – 328.
- [Hughes et Tezduyar, 1984] HUGHES, T. J. R. et TEZDUYAR, T. E. (1984). Finite element methods for first-order hyperbolic systems with particular emphasis on the compressible euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45(1-3):217 – 284.
- [Hugoniot, 1887] HUGONIOT, P. H. (1887). Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et plus spécialement dans les gaz parfaits - 1ère Partie. *Journal de l'École Polytechnique, Paris*, 57:3 – 97.
- [Hugoniot, 1889] HUGONIOT, P. H. (1889). Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et plus spécialement dans les gaz parfaits - 2ème Partie. *Journal de l'École Polytechnique, Paris*, 58:1 – 125.
- [Hung *et al.*, 2009] HUNG, C. F., LIN, B. J., HWANG-FUU, J. J. et HSU, P. Y. (2009). Dynamic response of cylindrical shell structures subjected to underwater explosion. *Ocean Engineering*, 36(8):564 – 577.
- [Hunter et Geers, 2004] HUNTER, K. S. et GEERS, T. L. (2004). Pressure and velocity fields produced by an underwater explosion. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4):1483 – 1496.
- [Jones et Miller, 1948] JONES, H. et MILLER, A. R. (1948). The detonation of solid explosives. *Proc. Roy. Soc. London A*, 194:480.
- [Jones, 1989] JONES, N. (1989). *Structural Impact*. Cambridge University Press.
- [Jouguet, 1905] JOUGUET, J. C. E. (1905). Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Séries 6*, pages 347 – 425.
- [Jouguet, 1906] JOUGUET, J. C. E. (1906). Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Séries 6*, 2:5 – 85.

- [Kalumuck *et al.*, 1995] KALUMUCK, K. M., DURAISWAMI, R. et CHAHINE, G. L. (1995). Bubble Dynamics Fluid-Structure Interaction Simulation by Coupling Fluid Bem and Structural Fem Codes. *Journal of Fluids and Structures*, 9(8):861 – 883.
- [Kedrinskii, 1972] KEDRINSKII, V. K. (1972). Kirkwood-Bethe approximation for an underwater explosion with cylindrical symmetry. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 8(1):94 – 100.
- [Kedrinskii, 2005] KEDRINSKII, V. K. (2005). *Hydrodynamics of Explosion : Experiments and Models*. Springer.
- [Keil, 1961] KEIL, A. H. (1961). *The Response of Ships to Underwater Explosions*, volume 69. Transactions of Society of Naval Architects and Marine Engineers.
- [Keller et Kolodner, 1953a] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1953a). Underwater explosion bubbles. I. The effect of compressibility of the water. *New York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 191.
- [Keller et Kolodner, 1953b] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1953b). Underwater explosion bubbles. II. The effect of gravity and the change of shape. *New York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 197.
- [Keller et Kolodner, 1956a] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1956a). Damping of underwater explosion bubble oscillations. *Journal of Applied Physics*, 27:1152 – 1161.
- [Keller et Kolodner, 1956b] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1956b). Underwater explosion bubbles. III. The effects of the surface and the bottom on the shape and motion of the bubble. *New York University (Institute of Mathematical Sciences)*, Report IMM-NYU 232.
- [Keller et Kolodner, 1956c] KELLER, J. B. et KOLODNER, I. I. (1956c). Underwater explosion bubbles. IV. Summary of results and numerical computations. *New York University (Institute of Mathematical Sciences)*, Report IMM-NYU 233.
- [Kennard, 1941] KENNARD, E. H. (1941). Report on underwater explosions. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:159 – 208.
- [Kennard, 1943a] KENNARD, E. H. (1943a). Explosive load on underwater structures as modified by bulk cavitation. *David W. Taylor Model Basin, US Navy*, Report 511.
- [Kennard, 1943b] KENNARD, E. H. (1943b). Migration of underwater gas globes due to gravity and neighboring surfaces. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:377 – 414.
- [Kennard, 1944] KENNARD, E. H. (1944). The effect of a pressure wave on a plate or diaphragm. *David W. Taylor Model Basin, US Navy*, Report 527.
- [Kim et Shin, 2008] KIM, J.-H. et SHIN, H.-C. (2008). Application of the ALE technique for underwater explosion analysis of a submarine liquefied oxygen tank. *Ocean Engineering*, 35(8-9):812 – 822.
- [Kirkwood et Bethe, 1942] KIRKWOOD, J. G. et BETHE, H. (1942). The pressure wave produced by an underwater explosion I. (OSRD no. 588). *Shock and Detonation Waves*, pages 1 – 34.
- [Klaseboer *et al.*, 2005a] KLASEBOER, E., HUNG, K. C., WANG, C., WANG, C. W., KHOO, B. C., BOYCE, P., DEBONO, S. et CHARLIER, H. (2005a). Experimental and numerical investigation of the dynamics of an

- underwater explosion bubble near a resilient/rigid structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 537:387 – 413.
- [Klaseboer et Khoo, 2004] KLASEBOER, E. et KHOO, B. C. (2004). Boundary integral equations as applied to an oscillating bubble near a fluid-fluid interface. *Computational Mechanics*, 33(2):129 – 138.
- [Klaseboer et Khoo, 2006] KLASEBOER, E. et KHOO, B. C. (2006). A modified Rayleigh-Plesset model for a non-spherically symmetric oscillating bubble with applications to boundary integral methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(1):59 – 71.
- [Klaseboer et al., 2005b] KLASEBOER, E., KHOO, B. C. et HUNG, K. C. (2005b). Dynamics of an oscillating bubble near a floating structure. *Journal of Fluids and Structures*, 21(4):395 – 412.
- [Klaseboer et al., 2006] KLASEBOER, E., TURANGAN, C. K. et KHOO, B. C. (2006). Dynamic behaviour of a bubble near an elastic infinite interface. *International Journal of Multiphase Flow*, 32(9):1110 – 1122.
- [Kury et al., 1965] KURY, W., HORNIG, H. C., LEE, E. L., MCDONNELL, J. L., ORNELLAS, D. L., FINGER, M., STRANGE, F. M. et WILKINS, M. L. (1965). Metal acceleration by chemical explosives. In *Fourth Symposium on Detonation*, page 3. Office of Naval Research.
- [Lamb, 1923] LAMB, H. (1923). *Hydrodynamics*. Cambridge : University Press.
- [Lan et al., 1993] LAN, I.-F., HUNG, S.-C., CHEN, C.-Y., NIU, Y.-M. et SHIUAN, J.-H. (1993). An improved simple method of deducing JWL parameters from cylinder expansion test. *Propellants, Explosives, Pyrotechnics*, 18(1):18 – 24.
- [Landshoff, 1955] LANDSHOFF, R. (1955). A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks. *Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California*, Report LA-1930.
- [Lapoujade et al., 2010] LAPOUJADE, V., VANDORSSELAER, N., KEVORKIAN, S. et CHEVAL, K. (2010). A study of mapping technique for air blast modeling. In *11th International LS-DYNA Users Conference*, Detroit, Michigan USA. Livermore Software Technology Corporation (LSTC).
- [Larini et al., 1992] LARINI, M., SAUREL, R. et LORAUD, J. C. (1992). An exact Riemann solver for detonation products. *Shock Waves*, 2(4):225 – 236.
- [Lawson et al., 1999] LAWSON, N. J., RUDMAN, M., GUERRA, A. et LIOW, J.-L. (1999). Experimental and numerical comparisons of the break-up of a large bubble. *Experiments in Fluids*, 26(6):524 – 534.
- [Le Mehaute et Wang, 1996] LE MEHAUTE, B. et WANG, S. (1996). Water Waves Generated by Underwater Explosions. *Defense Nuclear Agency*, Technical Report DNA-TR-94-128.
- [Lee et al., 1973] LEE, E. L., FINGER, M. et COLLINS, W. (1973). JWL equation of state coefficients for high explosives. *Lawrence Livermore Laboratories, Livermore, California*, Report UCID-16189.
- [Lee et Hornig, 1969] LEE, E. L. et HORNIG, H. C. (1969). Equation of state of detonation product gases. In *Twelfth Symposium (Int.) on Combustion*, page 493. Combustion Institute.
- [Lee et al., 1968] LEE, E. L., HORNIG, H. C. et KURY, J. W. (1968). Adiabatic expansion of high explosive detonation products. *Lawrence Radiation Laboratory, Livermore, California*, Report UCRL-50422.
- [Legay et al., 2006] LEGAY, A., CHESSA, J. et BELYTSCHKO, T. (2006). An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):2070 – 2087.

- [Liang *et al.*, 2001] LIANG, C.-C., HSU, C.-Y. et LAI, W.-H. (2001). A study of transient responses of a submerged spherical shell under shock waves. *Ocean Engineering*, 28(1):71 – 94.
- [Liang et Tai, 2006] LIANG, C.-C. et TAI, Y.-S. (2006). Shock responses of a surface ship subjected to noncontact underwater explosions. *Ocean Engineering*, 33(5-6):748 – 772. Noncontact underwater explosions ;Shock responses ;Surface ship ;Underwater shock damage ;.
- [Link *et al.*, 2002] LINK, R., LIN, F., WHITEHOUSE, D. et SLATER, J. (2002). CFD Modeling of Close Proximity Underwater Explosions. In *73rd Shock & Vibration Symposium*, Newport, USA.
- [Link *et al.*, 2003] LINK, R., RIPLEY, R., NORWOOD, M., JOSEY, T., DONAHUE, L. et SLATER, J. E. (2003). Analysis of the Loading and Response of Flate Plate Targets Subjected to Close-Proximity Underwater Explosions. In *74rd Shock & Vibration Symposium*, San Diego, CA, USA.
- [Liu *et al.*, 2003] LIU, M. B., LIU, G. R., LAM, K. Y. et ZONG, Z. (2003). Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosion. *Computational Mechanics*, 30(2):106 – 118.
- [Liu *et al.*, 2002] LIU, M. B., LIU, G. R., ZONG, Z. et LAM, K. Y. (2002). Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology. *Computers and Fluids*, 32(3):305 – 322.
- [LSTC, 2007] LSTC (2007). *LS-DYNA Keyword User's Manual - Version 971*. Livermore Software Technology Corporation.
- [MacCormack, 1971] MACCORMACK, R. (1971). Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer. In HOLT, M., éditeur : *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, volume 8 de *Lecture Notes in Physics*, pages 151–163. Springer Berlin / Heidelberg.
- [Maenchen et Sack, 1963] MAENCHEN, G. et SACK, S. (1963). The TENSOR Code. *Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Livermore, California*, Report UCRL-7316.
- [Mair, 1999] MAIR, H. U. (1999). Benchmarks for submerged structure response to underwater explosions. *Shock and Vibration*, 6(4):169 – 181.
- [Marchandise *et al.*, 2007] MARCHANDISE, E., GEUZAIN, P., CHEVAUGEON, N. et REMACLE, J.-F. (2007). A stabilized finite element method using a discontinuous level set approach for the computation of bubble dynamics. *Journal of Computational Physics*, 225(1):949 – 974.
- [Margolin et Beason, 1988] MARGOLIN, L. G. et BEASON, C. W. (1988). Remapping on the staggered mesh. *Lawrence Livermore National Laboratory, California*, Report UCRL-99682.
- [Masud et Hughes, 1997] MASUD, A. et HUGHES, T. J. R. (1997). A space-time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domain problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 146(1-2):91 – 126. Euler formulation ;Galerkin formulation ;Lagrangian formulation ;Mesh rezoning strategy ;.
- [Menon, 1996] MENON, S. (1996). *Experimental and Numerical Studies of Underwater Explosions*. Office of naval research, N00014-91-J-1993.
- [Menon et Lal, 1998] MENON, S. et LAL, M. (1998). On the dynamics and instability of bubbles formed during underwater explosions. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 16(4):305 – 321.

- [Milligan et Ziliacus, 1992] MILLIGAN, C. D. et ZILLIACUS, S. (1992). A coupled finite element - boundary element method for calculations of the interaction between an explosion bubble and a submerged compliant target. *Naval Surface Warfare Center, Carderock Division, Report 92/002*.
- [Mindlin et Bleich, 1953] MINDLIN, R. D. et BLEICH, H. H. (1953). Response of an elastic cylindrical shell to a transverse, step shock wave. *Journal of Applied Mechanics*, 20:189 – 195.
- [Naji Meidani et Hasan, 1997] NAJI MEIDANI, A. R. et HASAN, M. (1997). Numerical study of the complex dynamic behavior of a reactive gas bubble in water. *Applied Mathematical Modelling*, 21(3):127 – 138.
- [Newton, 1978] NEWTON, R. E. (1978). Effects of cavitation on underwater shock loading - Part 1. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA, Report NPS69-78-013*.
- [Newton, 1979] NEWTON, R. E. (1979). Effects of cavitation on underwater shock loading - Plane problem, Part 1. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA, Report NPS69-79-007PR*.
- [Newton, 1980a] NEWTON, R. E. (1980a). Effects of cavitation on underwater shock loading - Plane problem, Part 2. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA, Report NPS69-80-001*.
- [Newton, 1980b] NEWTON, R. E. (1980b). Finite element study of shock-induced cavitation. *In ASCE Spring Convention*.
- [Newton, 1981] NEWTON, R. E. (1981). Effects of cavitation on underwater shock loading - Plane problem, Final Report. *Naval Postgraduate School, Monterey, CA, Report NPS69-81-001*.
- [Nicolas-Vullierme, 1991] NICOLAS-VULLIERME, B. (1991). Contribution to doubly asymptotic approximations. An operator top-down derivation. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 113(3):409 – 415.
- [Noh et Woodward, 1976] NOH, W. F. et WOODWARD, P. (1976). SLIC (Simple Line Interface Calculation). *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California, UCRL-77651*.
- [Oguz et Zeng, 1997] OGUZ, H. et ZENG, J. (1997). Axisymmetric and three-dimensional boundary integral simulations of bubble growth from an underwater orifice. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 19(4):319 – 330.
- [Park et al., 1977] PARK, K. C., FELIPPA, C. A. et DERUNTZ, J. A. (1977). Stabilization of staggered solution procedures for fluid-structure interaction analysis. *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Division, AMD*, 26:95 – 124.
- [Pearson et al., 2004a] PEARSON, A., BLAKE, J. R. et OTTO, S. R. (2004a). Jets in bubbles. *Journal of Engineering Mathematics*, 48(3-4):391 – 412.
- [Pearson et al., 2004b] PEARSON, A., COX, E., BLAKE, J. R. et OTTO, S. R. (2004b). Bubble interactions near a free surface. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(4):295 – 313.
- [Pedley, 1968] PEDLEY, T. J. (1968). The toroidal bubble. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 32(01):97–112.
- [Pelekasis, 2006] PELEKASIS, N. A. (2006). Numerical simulations of bubble dynamics : A Review.
- [Piacesi, 1967] PIACESI, D. (1967). Numerical hydrodynamic calculations of the flow of the detonation products from a point-initiated explosive cylinder. *Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland, Report NOLTR 7265*.

- [Pierce, 1989] PIERCE, A. D. (1989). *Acoustics. An introduction to its physical principles and applications*. Acoustical Society of America.
- [Plesset et Prosperetti, 1977] PLESSET, M. S. et PROSPERETTI, A. (1977). Bubble Dynamics and Cavitation. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 9(1):145 – 185.
- [Qiankun et Gangyi, 2011] QIANKUN, J. et GANGYI, D. (2011). A finite element analysis of ship sections subjected to underwater explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 38(7):558 – 566.
- [Rajendran, 2008] RAJENDRAN, R. (2008). Reloading effects on plane plates subjected to non-contact underwater explosion. *Journal of Materials Processing Technology*, 206(1-3):275 – 281.
- [Rajendran, 2009] RAJENDRAN, R. (2009). Numerical simulation of response of plane plates subjected to uniform primary shock loading of non-contact underwater explosion. *Materials & Design*, 30(4):1000 – 1007.
- [Rajendran et Lee, 2009] RAJENDRAN, R. et LEE, J. M. (2009). Blast loaded plates. *Marine Structures*, 22(2):99 – 127.
- [Rajendran et Narasimhan, 2001a] RAJENDRAN, R. et NARASIMHAN, K. (2001a). Damage prediction of clamped circular plates subjected to contact underwater explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 25(4):373 – 386.
- [Rajendran et Narasimhan, 2001b] RAJENDRAN, R. et NARASIMHAN, K. (2001b). Linear elastic shock response of plane plates subjected to underwater explosion. *International Journal of Impact Engineering*, 25(5):493 – 506.
- [Rajendran et Narasimhan, 2006] RAJENDRAN, R. et NARASIMHAN, K. (2006). Deformation and fracture behaviour of plate specimens subjected to underwater explosion - a review. *International Journal of Impact Engineering*, 32(12):1945 – 1963.
- [Rankine, 1870] RANKINE, W. J. M. (1870). On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 160:277 – 288.
- [Ranlet et al., 1977] RANLET, D., DiMAGGIO, F. L., BLEICH, H. H. et BARON, M. L. (1977). Elastic response of submerged shells with internally attached structures to shock loading. *Computers & Structures*, 7(3):355 – 364.
- [Reid, 1996] REID, W. D. (1996). The response of surface ships to underwater explosions. *Defence Science and Technology Organisation*, DSTO-GD-0109.
- [Richardson et al., 1947] RICHARDSON, J. M., ARONS, A. B. et HALVERSON, R. R. (1947). Hydrodynamic properties of sea water at the front of a shock wave. *The Journal of Chemical Physics*, 15(2):785 – 794.
- [Richtmyer et Morton, 1967] RICHTMYER, R. et MORTON, K. (1967). *Difference methods for initial-value problems*. Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience Publishers.
- [Riley et al., 2010] RILEY, M. J., PAULGAARD, G. T., LEE, J. J. et SMITH, M. J. (2010). Failure mode transition in air-backed plates from near contact underwater explosions. *Shock and Vibration*, 17(6):723 – 739.
- [Sachev, 2004] SACHEV, P. L. (2004). *Shock Waves and Explosions*, volume 132. Chapman & Hall/CRC.
- [Saurel et al., 1994] SAUREL, R., LARINI, M. et LORAUD, J. C. (1994). Exact and Approximate Riemann Solvers for Real Gases. *Journal of Computational Physics*, 112(1):126 – 137.

- [Schneider, 2003] SCHNEIDER, N. A. (2003). Prediction of surface ship response to severe underwater explosions using a virtual underwater shock environment. Thèse de Master, Naval Postgraduate School, Monterey, California.
- [Schneider *et al.*, 1946] SCHNEIDER, W. G., WILSON, E. B. et CROSS, P. E. (1946). *Summary Technical Report of Division 2 - Effects of Impact and Explosion*, volume 1, chapitre 1 - Underwater Explosives and Explosions, pages 19 – 63. National Defense Research Committee, Washington, D.C.
- [Shiffman et Friedman, 1944] SHIFFMAN, M. et FRIEDMAN, B. (1944). Studies on the gas bubble resulting from underwater explosions : On the best location of a mine near the sea bed. *New-York University (Applied Mathematics Group)*, Report AMG-NYU 49.
- [Shin, 2004] SHIN, Y. S. (2004). Ship shock modeling and simulation for far-field underwater explosion. *Computers & Structures*, 82(23-26):2211 – 2219. Computational Structures Technology.
- [Snay, 1957a] SNAY, H. G. (1957a). Hydrodynamics of underwater explosions. In *Symposium on naval hydrodynamics*, volume 9, pages 325–352, Washington. National Academy of Sciences, National Research Council.
- [Snay, 1957b] SNAY, H. G. (1957b). A theory of the shockwave produced by a point explosion. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, NAVORD Report 4182.
- [Snay, 1962a] SNAY, H. G. (1962a). Migration of explosion bubbles in a rotating test tank. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, Report NOLTR 61-145.
- [Snay, 1962b] SNAY, H. G. (1962b). Underwater explosion phenomena : The parameters of migrating bubbles. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, NAVORD Report 4185.
- [Snay et Tipton, 1962] SNAY, H. G. et TIPTON, R. V. (1962). Charts for the parameters of migrating explosion bubbles. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, Report NOLTR 62-184.
- [Souli *et al.*, 2000] SOULI, M., OUAHSINE, A. et LEWIN, L. (2000). ALE formulation for fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(5-7):659 – 675.
- [Souli et Zolesio, 1996] SOULI, M. et ZOLESIO, J. P. (1996). Finite element method for free surface flow problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129(1-2):43 – 51.
- [Souli et Zolesio, 2001] SOULI, M. et ZOLESIO, J. P. (2001). Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free surface methods in fluid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(3-5):451 – 466.
- [Sprague et Geers, 2004] SPRAGUE, M. A. et GEERS, T. L. (2004). A spectral-element method for modeling cavitation in transient fluid-structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(15):2467 – 2499.
- [Sprague et Geers, 2006] SPRAGUE, M. A. et GEERS, T. L. (2006). A spectral-element/finite-element analysis of a ship-like structure subjected to an underwater explosion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):2149 – 2167.
- [Steinberg, 1987] STEINBERG, D. J. (1987). Spherical explosions and the equation of state of water. *Lawrence Livermore Laboratories, Livermore*, Report UCID-20974.
- [Steinberg, 1991] STEINBERG, D. J. (1991). Equation of state and strength properties of selected materials. *Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore*, LLNL report UCRL-MA-106439.

- [Strasberg, 1956] STRASBERG, M. (1956). Gas bubbles as sources of sound in liquids. *Acoustical Society of America – Journal*, 28(1):20 – 26.
- [Sussman *et al.*, 1998] SUSSMAN, M., FATEMI, E., SMEREKA, P. et OSHER, S. (1998). Improved level set method for incompressible two-phase flows. *Computers and Fluids*, 27(5-6):663 – 680.
- [Sutcliffe, 1974] SUTCLIFFE, W. G. (1974). BBC hydrodynamics. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore*, Technical Report UCID-17013.
- [Swegle *et Attaway*, 1995] SWEGLE, J. W. et ATTAWAY, S. W. (1995). On the feasibility of using smoothed particle hydrodynamics for underwater explosion calculations. *Computational Mechanics*, 17(3):151 – 168.
- [Swift *et Decius*, 1948] SWIFT, E. et DECIUS, J. C. (1948). Measurements of bubble pulse phenomena. III. Radius and period studies. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:553 – 599.
- [Swisdak, 1978] SWISDAK, M. M. (1978). Explosion effects and properties : PART II - Explosion effects in water. *Naval Surface Weapons Center, Silver Spring, Maryland*, Report NSWC/WOL TR76-116.
- [Taylor, 1941a] TAYLOR, G. I. (1941a). Analysis of the explosion of a long cylindrical bomb detonated at one end. In BATCHELOR, G. K., éditeur : *The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, Vol. III - Aerodynamics and the mechanics of projectiles and explosions*, pages 277 – 286. Cambridge University Press (2010).
- [Taylor, 1941b] TAYLOR, G. I. (1941b). The pressure and impulse of submarine explosion waves on plates. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 1:1155 – 1174.
- [Taylor, 1942] TAYLOR, G. I. (1942). The distortion under pressure of a diaphragm which is clamped along its edge and stressed beyond the elastic limit. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:107–122.
- [Taylor, 1950] TAYLOR, G. I. (1950). The dynamics of the combustion products behind plane and spherical detonation fronts in explosives. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 200(1061):235–247.
- [Taylor *et Flanagan*, 1987] TAYLOR, L. M. et FLANANGAN, D. P. (1987). PRONTO 2D : A two-dimensional transient solid dynamics program. *Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico*, SANDIA Report SAND-86-0594.
- [Temperley, 1944] TEMPERLEY, H. N. V. (1944). Theoretical investigation of cavitation phenomena occurring when an underwater pressure pulse is incident on a yielding surface - I. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:255–268.
- [Temperley, 1945] TEMPERLEY, H. N. V. (1945). Theoretical investigation of cavitation phenomena occurring when an underwater pressure pulse is incident on a yielding surface - III. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:283–294.
- [Temperley *et Chambers*, 1944] TEMPERLEY, H. N. V. et CHAMBERS, L. G. (1944). Theoretical investigation of cavitation phenomena occurring when an underwater pressure pulse is incident on a yielding

- surface - II. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 3:269–282.
- [Thiel et Niffenegger, 1961] THIEL, M. A. et NIFFENEGGER, C. R. (1961). Revised similitude equations for the underwater shockwave performance of Pentolite and HBX-1 (U). *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland, Report NAVWEPS 7380*.
- [Toro, 2009] TORO, E. F. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer Berlin Heidelberg.
- [Tosello, 2006] TOSELLO, R. (2006). Ondes de choc - Ondes de détonation. Cours de détonique ISITV.
- [van Leer, 1974] van LEER, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14(4):361 – 370.
- [van Leer, 1977a] van LEER, B. (1977a). Towards the ultimate conservative difference scheme. III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 23(3):263 – 275.
- [van Leer, 1977b] van LEER, B. (1977b). Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, 23(3):276 – 299.
- [van Leer, 1979] van LEER, B. (1979). Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. *Journal of Computational Physics*, 32(1):101 – 136.
- [van Leer, 1997] van LEER, B. (1997). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. *Journal of Computational Physics*, 135(2):229 – 248.
- [Vernon, 1986] VERNON, T. A. (1986). Whipping response of ship hulls from underwater explosion bubble loading. *Defence Research Establishment Atlantic, Dartmouth, Canada, Technical memorandum 86/225*.
- [VonNeumann et Richtmyer, 1950] VONNEUMANN, J. et RICHTMYER, R. D. (1950). Method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21(3):232 – 237.
- [Walters et Davidson, 1962] WALTERS, J. K. et DAVIDSON, J. F. (1962). Initial motion of gas bubble formed in inviscid liquid - 1 - Two-dimensional bubble. *Journal of Fluid Mechanics*, 12(Part 3):408 – 416.
- [Walters et Davidson, 1963] WALTERS, J. K. et DAVIDSON, J. F. (1963). The initial motion of a gas bubble formed in an inviscid liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 17(03):321–336.
- [Wang et Khoo, 2004] WANG, C. et KHOO, B. C. (2004). An indirect boundary element method for three-dimensional explosion bubbles. *Journal of Computational Physics*, 194(2):451 – 480.
- [Wang et al., 2003] WANG, C., KHOO, B. C. et YEO, K. S. (2003). Elastic mesh technique for 3D BIM simulation with an application to underwater explosion bubble dynamics. *Computers and Fluids*, 32(9):1195 – 1212.
- [Wang et al., 1996] WANG, Q. X., YEO, K. S., KHOO, B. C. et LAM, K. Y. (1996). Nonlinear interaction between gas bubble and free surface. *Computers & Fluids*, 25(7):607 – 628.
- [Wardlaw, 1998] WARDLAW, A. B. (1998). Underwater explosion test cases. *U.S. Navy - Naval Surface Warfare Center, Report IHTR 2069*.

- [Webster, 2007] WEBSTER, K. G. (2007). Investigation of close proximity underwater explosion effects on a ship-like structure using the Multi-Material Arbitrary Lagrangian Eulerian Finite Element Method. Thèse de Master, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.
- [Whitham, 1953a] WHITHAM, G. B. (1953a). Spherical waves and shocks. Part1 - A general theory of the propagation of weak shocks. *New-York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 190.
- [Whitham, 1953b] WHITHAM, G. B. (1953b). Spherical waves and shocks. Part2 - The Kirkwood-Bethe theory for the propagation of shocks in water. *New-York University (Institute for Mathematics and Mechanics)*, Report IMM-NYU 190.
- [Wilkerson, 1992] WILKERSON, S. A. (1992). A boundary integral approach for three-dimensional underwater explosion bubble dynamics. *Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen*, Technical Report BRL-TR-3365.
- [Wilkerson, 1993] WILKERSON, S. A. (1993). Boundary integral technique for explosion bubble collapse analysis. *Army Research Laboratory, Aberdeen*, Report ARL-TR-184.
- [Wilkins, 1964] WILKINS, M. L. (1964). The equation of state of PBX 9404 and LXO4-01. *Radiation Laboratory, Livermore, California*, Report UCRL-779.
- [Wilkins, 1969] WILKINS, M. L. (1969). Calculation of elastic-plastic flow. *Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, Livermore*, Report UCRL-7322 (Rev.1).
- [Wilkins, 1980] WILKINS, M. L. (1980). Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations. *Journal of Computational Physics*, 36(3):281 – 303.
- [Willis, 1941] WILLIS, H. F. (1941). Underwater explosions. Time interval between successive explosions. *Underwater Explosion Research (Office of Naval Research, Washington D.C., 1950)*, 2:13 – 33.
- [Woodward et Colella, 1980] WOODWARD, P. et COLELLA, P. (1980). High resolution difference scheme for compressible gas dynamics. *Lawrence Livermore Laboratory, University of California, Livermore, California*, Report UCRL-83673.
- [Woodward et Colella, 1984] WOODWARD, P. et COLELLA, P. (1984). The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *Journal of Computational Physics*, 54(1):115 – 173.
- [Xi, 2004] XI, W. Q. (2004). Numerical simulation of violent bubble motion. *Physics of Fluids*, 16(5):1610 – 1619.
- [Xie et al., 2007] XIE, W. F., YOUNG, Y. L., LIU, T. G. et KHOO, B. C. (2007). Dynamic response of deformable structures subjected to shock load and cavitation reload. *Computational Mechanics*, 40(4):667 – 681.
- [Yiannakopoulos et al., 2008] YIANNAKOPOULOS, G., BRETT, J. M. et KRELLE, A. (2008). A preliminary investigation of plate penetration by an underwater explosion. *In 79th Shock & Vibration Symposium*, Orlando, FL, USA.
- [Youngs, 1982] YOUNGS, D. L. (1982). Time dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pages 273 – 285.

- [Youngs, 1987] YOUNGS, D. L. (1987). An interface tracking method for a 3D Eulerian hydrodynamics code. Rapport technique AWRE/44/92/3, Atomic Weapon Research Establishment, Aldermaston, Berkshire, UK.
- [Zhang et Yao, 2008] ZHANG, A. M. et YAO, X. L. (2008). Interaction of underwater explosion bubble with complex elastic-plastic structure. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 29(1):89 – 100.
- [Zhang et al., 2008a] ZHANG, A. M., YAO, X. L. et LI, J. (2008a). The interaction of an underwater explosion bubble and an elastic-plastic structure. *Applied Ocean Research*, 30(3):159 – 171.
- [Zhang et al., 2008b] ZHANG, A. M., YAO, X. L. et YU, X. B. (2008b). The dynamics of three-dimensional underwater explosion bubble. *Journal of Sound and Vibration*, 311(3-5):1196 – 1212.
- [Zhang et al., 2011a] ZHANG, A. M., ZENG, L. Y., CHENG, X. D., WANG, S. P. et CHEN, Y. (2011a). The evaluation method of total damage to ship in underwater explosion. *Applied Ocean Research*, In Press, Corrected Proof:–.
- [Zhang et al., 2011b] ZHANG, A. M., ZHOU, W. X., WANG, S. P. et FENG, L. H. (2011b). Dynamic response of the non-contact underwater explosions on naval equipment. *Marine Structures*, In Press, Corrected Proof:–.
- [Zhang et Zong, 2011] ZHANG, N. et ZONG, Z. (2011). The effect of rigid-body motions on the whipping response of a ship hull subjected to an underwater bubble. *Journal of Fluids and Structures*, In Press, Corrected Proof:–.
- [Zhang et al., 2001] ZHANG, Y. L., YEO, K. S., KHOO, B. C. et WANG, C. (2001). 3D jet impact and toroidal bubbles. *Journal of Computational Physics*, 166(2):336 – 360.
- [Zhong, 1993] ZHONG, Z. H. (1993). *Finite element procedures for contact-impact problems*. Oxford science publications. Oxford University Press.
- [Zong, 2003] ZONG, Z. (2003). Dynamic plastic response of a submerged free-free beam to an underwater gas bubble. *Acta Mechanica*, 161:179–194.
- [Zong, 2005] ZONG, Z. (2005). A hydroplastic analysis of a free-free beam floating on water subjected to an underwater bubble. *Journal of Fluids and Structures*, 20(3):359 – 372.
- [Zuke, 1963] ZUKE, W. G. (1963). Boundary disturbances near an underwater explosion bubble. *U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Maryland*, NAVORD Report 6877.