

Université Lille 1
École Doctorale de Lille Sciences Pour l'Ingénieur

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

présentée par

Oscar DEVYS

Localisation spectrale à l'aide des polynômes de Faber et équation de cobord

dirigée par Catalin BADÉA

Soutenance prévue le 21 juin 2012 devant le jury composé de :

Catalin BADÉA	Université Lille 1	directeur
Sophie GRIVAUX	Université Lille 1	examinatrice
Andreas HARTMANN	Université Bordeaux 1	rapporteur
Hervé QUEFFÉLEC	Université Lille 1	président
Maria ROGINSKAYA	Chalmers University of Technology	examinatrice
Jan VAN NEERVEN	Technical University Delft	rapporteur

Laboratoire Paul Painlevé
UMR CNRS 8524, Bât. M2, Université
Lille 1,
59655 Villeneuve d'Ascq

Ecole doctorale SPI
Université Lille Nord-de-France
59655 Villeneuve d'Ascq

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Catalin Badéa qui a dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de Master. J'ai toujours pu compter sur sa disponibilité, son soutien et ses conseils.

Je remercie Andreas Hartmann et Jan van Neerven d'avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail et pour la rapidité et l'attention avec laquelle ils ont relu ce manuscrit. Je suis également très honoré par la présence de Sophie Grivaux, Hervé Queffélec et Maria Roginskaya parmi les membres du jury.

J'adresse mes sincères remerciements à l'ensemble des membres du laboratoire Painlevé de Lille et en particulier à l'équipe d'Analyse Fonctionnelle pour son accueil chaleureux. Je souhaite également remercier l'équipe du laboratoire de mathématiques de Besançon pour son hospitalité.

Table des matières

Introduction	6
I Localisation du spectre d'un opérateur à l'aide des polynômes de Faber	10
1 Polynômes de Faber	11
1.1 Introduction	11
1.2 Définition	12
1.3 Premières propriétés et exemples	12
1.4 Comportement asymptotique	15
1.5 Séries de Faber	17
1.6 Polynômes de Faber et Opérateurs	18
1.7 Comportement asymptotique sur la frontière	22
2 Condition sur les orbites de Faber faibles d'un opérateur	26
2.1 Introduction	26
2.2 Théorème général	27
2.3 Applications	30
3 Espaces admissibles de suites	34
3.1 Théorème général	34
3.2 Applications	36
3.3 Estimations explicites	41
3.3.1 Formule générale	41
3.3.2 Exemples concrets	43
II Critères de cobord	45
4 Equation de cobord et Limites de Banach	46
4.1 Introduction	46
4.2 Limites de Banach à poids	48
5 Cas d'une isométrie	51
6 Polynômes vérifiant une relation de récurrence	59
6.1 Introduction	59
6.2 Cas général	61
6.3 Application aux polynômes de Faber	66

7	Opérateur normal à spectre dans une courbe de Jordan	67
----------	---	-----------

Introduction

Le but de cette thèse est de présenter des résultats sur la localisation du spectre d'un opérateur borné et sur l'existence d'une solution à l'équation de cobord. Elle est composée de sept chapitres rassemblés en deux parties. La première partie est constituée des chapitres 1 à 3 et porte sur la localisation du spectre d'un opérateur borné à l'aide des polynômes de Faber, ce sujet a fait l'objet d'une publication [11]. Dans la seconde partie, qui regroupe les chapitres 4 à 7, on s'intéresse à l'équation de cobord d'un opérateur linéaire borné.

Dans la première partie de la thèse on s'inspire des travaux de N. Nikolski [28] et J. van Neerven [37]. Ces travaux généralisent des résultats pré-existants de W. Mlak [25] et G. Weiss [38]. Le but de ces travaux est de trouver des critères de stabilité d'un opérateur linéaire et borné sur un espace de Banach, c'est à dire pour que le rayon spectral de cet opérateur soit strictement inférieur à 1 (ce qui équivaut à la convergence exponentielle vers zéro de toutes les orbites : $\|T^n x\| \leq Cr^n \|x\|$). On s'inspire également des travaux de C. Badea et S. Grivaux [3], [2] qui utilisent les polynômes de Faber en analyse fonctionnelle ainsi que ceux de A. Atzmon, A. Eremenko et M. Sodin [1] que l'on adapte au cadre des polynômes de Faber. Ce dernier résultat montre que pour un compact simplement connexe K il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout opérateur linéaire et borné sur un espace de Banach, le spectre de cet opérateur est inclus dans K si et seulement si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(T)\|^{1/n} \leq 1.$$

Ce résultat peut être interprété comme une généralisation de la formule du rayon spectral où le disque unité est remplacé par un compact simplement connexe K et les polynômes de Taylor, $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$, associés au disque unité centré en zéro sont remplacés par les polynômes de Faber associés au compact K . Le problème auquel on s'intéresse est de chercher des critères assurant que le spectre d'un opérateur linéaire et borné soit inclus dans l'intérieur d'un compact simplement connexe.

Le premier chapitre est consacré aux préliminaires sur les polynômes de Faber dont on aura besoin dans la suite. On définit la suite des polynômes de Faber associée à un compact simplement connexe et on donne des exemples de compacts pour lesquels on connaît la suite des polynômes de Faber. On donne les propriétés principales de telles suites de polynômes ainsi que leur utilisation en analyse complexe, et on mentionne les séries de Faber qui sont une généralisation à un compact simplement connexe quelconque des séries de Taylor sur le disque. Cet outil d'analyse complexe a également été utilisé en théorie des opérateurs et on présente certains résultats connus. On donne enfin des résultats sur le comportement asymptotique des suites de polynômes de Faber sur la frontière du compact associé sous certaines conditions de régularité de cette frontière. Ces conditions de régularité, et en particulier les *courbes Alper-lisses avec des angles* qui sont alors définies, fournissent le cadre dans lequel se placent les résultats des chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre on traduit au cadre Faber les notions d'orbite et d'orbite faible et on introduit, en s'inspirant des résultats obtenus dans le cas du disque par N.

Nikolski [28], des conditions sur un espace de Banach de suites \mathcal{R} pour obtenir la forme général du résultat obtenu dans ce chapitre.

Théorème (Théorème 2.7). *Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ un espace de Banach vérifiant certaines conditions. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ un opérateur dont le spectre est inclus dans K et dont toutes les orbites de Faber faibles sont des éléments de \mathcal{R} . Alors en fait*

$$\sigma(T) \subset \text{int}(K).$$

On donne plusieurs exemples d'espaces de suites qui vérifient ces conditions comme les espaces l^p à poids et des espaces construits à partir des espaces de Hardy du disque. On en déduit les résultats suivants.

Corollaire (Théorème 2.10). *Soit K un compact délimité par une courbe Alper-lisse avec des angles et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Faber associée à ce compact. Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $|\omega_n|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \infty.$$

Soit \mathcal{X} un espace de Banach et $T \in B(\mathcal{X})$ tel que pour tout couple $(x, x^) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on ait*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |\langle F_n(T)x; x^* \rangle|^p < \infty.$$

Alors $\sigma(T) \subset \text{int}(K)$.

On rappelle la définition des espaces de Hardy pour un domaine simplement connexe, notés E^p , et on déduit du Théorème le corollaire suivant qui donne une condition sur la résolvente plutôt que sur les orbites.

Corollaire (Théorème 2.16). *Soit K un compact délimité par une courbe Alper-lisse avec des angles et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Faber associée à ce compact. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ tel que $\sigma(T) \subset K$. Si pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $x^* \in \mathcal{X}^*$ on a*

$$z \mapsto \langle (zI - T)^{-1}x; x^* \rangle \in E^1(\mathbb{C} \setminus K),$$

alors $\sigma(T) \subset \text{int}(K)$.

Le troisième chapitre poursuit le même objectif que dans le chapitre précédent, mais en s'appuyant sur un raisonnement différent, qui s'inspire des résultats obtenus par J. van Neerven dans [37]. Une différence avec le deuxième chapitre est que l'on ne suppose pas ici l'inclusion du spectre de l'opérateur considéré dans le compact K a priori. Cela permet entre autre d'améliorer le Théorème 2.10. On obtient également à l'aide d'espaces d'Orlicz le théorème suivant.

Théorème (Théorème 3.11). *Soit K un compact délimité par une courbe Alper-lisse avec des angles et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Faber associée à ce compact. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ et soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Si pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $x^* \in \mathcal{X}^*$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|\langle F_n(T)x; x^* \rangle|) < \infty,$$

alors

$$\sigma(T) \subset \text{int}(K).$$

La seconde partie de la thèse est consacrée à l'étude de l'équation de cobord pour un opérateur linéaire et borné sur un espace de Banach \mathcal{X} . C'est à dire qu'on se donne un opérateur $T \in B(\mathcal{X})$ et un élément x dans \mathcal{X} et on cherche à savoir s'il existe une solution y à l'équation

$$(I - T)y = x.$$

Ce problème est fortement lié à la théorie des systèmes dynamiques et est apparu dans un résultat de M. Kac [20]. Il s'agissait pour lui de résoudre dans $L^2(\mathbb{T})$, où \mathbb{T} désigne le cercle unité, l'équation d'inconnue g

$$f(t) = g(t) - g(2t), \quad t \in \mathbb{T},$$

avec f une fonction höldérienne d'ordre $\alpha > 1/2$. Dans le cadre général, F. Browder [7] propose une première caractérisation des cobords de T si l'espace de Banach \mathcal{X} est réflexif et si T est à puissances bornées. Sous ces conditions, il existe une solution y à l'équation $(I - T)y = x$ si et seulement si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n T^k \right\| < \infty.$$

L'objectif de cette partie est de généraliser ce Théorème. Dans le chapitre 4 on introduit l'équation de cobord et on s'intéresse en particulier à l'utilisation des limites de Banach dans la résolution de ce problème. On obtient en particulier la généralisation suivante du Théorème de Browder [7] à l'aide de prolongements de limites de Banach.

Théorème (Théorème 4.3). *Soit \mathcal{X} le dual d'un espace de Banach, soit T un opérateur continu sur \mathcal{X} pour la topologie faible étoile et tel que $\sup_{n \geq 0} \|T^n\| < \infty$ et soit $x \in \mathcal{X}$. Alors l'équation $(I - T)y = x$ a une solution y si et seulement s'il existe une suite strictement positive et croissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$ et*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \left\| \sum_{k=0}^n a_{n-k} T^k x \right\| < \infty.$$

Dans le chapitre 5, on s'intéresse à l'équation de cobord dans le cas particulier d'une isométrie sur un espace de Hilbert. Comme l'a remarqué R. Rochberg dans [33], on peut se servir de la structure des translations unilatérales pour résoudre cette équation. A l'aide du Théorème de décomposition de Wold [31] et de cette remarque, on peut alléger l'hypothèse sur les sommes ergodiques à l'aide d'une hypothèse sur le comportement de la suite $(T^{*n}x)_{n \in \mathbb{N}}$. On obtient alors le Théorème suivant.

Théorème (Théorème 5.4). *Soit T une isométrie sur un espace de Hilbert \mathcal{H} et $x \in \mathcal{H}$. On suppose que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \|T^{*k}x\| < \infty.$$

Alors il existe $y \in \mathcal{H}$ tel que $x = (I - T)y$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\|^2 = 0.$$

Dans le chapitre 6, on introduit dans les sommes ergodiques des polynômes en T à la place des termes en T^n . On s'inspire pour cela des relations de récurrence vérifiées par les polynômes de Faber et des méthodes employés dans le cas classique par V. Fonf, M. Lin et A. Rubinov [16]. On obtient en particulier le Théorème suivant dans le cas d'une suite de polynômes de Faber associée à un compact K .

Théorème (Corollaire 6.11). *Soit K un compact simplement connexe tel que ∂K soit une courbe de Jordan dans la classe de Hölder $C^{1,\gamma}$ avec $\gamma > 1/2$ et soit $z_0 \in \partial K$. Alors il existe $w_0 \in \mathbb{T}$ tel que pour \mathcal{X} un espace de Banach réflexif, $T \in B(\mathcal{X})$ et $x \in \mathcal{X}$, si*

$$\sup_n \left\| \sum_{k=0}^n w_0^{-k} F_k(T)x \right\| < \infty,$$

alors il existe y tel que

$$x = (z_0 I - T)y.$$

Le chapitre 7 est consacré à affaiblir le critère du Théorème précédent dans le cas d'un opérateur normal sur un espace de Hilbert et dont le spectre est inclus dans la courbe de Jordan délimitant le compact K . L'outil principal est ici la mesure spectrale de l'opérateur. On démontre ainsi le Théorème suivant.

Théorème (Théorème 7.6). *Soit T un opérateur normal sur un espace de Hilbert et dont le spectre est inclus dans la courbe de Jordan de la classe $C^{1,\gamma}$ avec $\gamma > 1/2$ et contenant z_0 . On note $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Faber associé au compact délimité par la courbe de Jordan. Alors il existe $w_0 \in \mathbb{T}$ tel que pour*

$$S_n = x + w_0^{-1} F_1(T)x + \cdots + w_0^{-(n-1)} F_{n-1}(T)x$$

si

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|S_n\|^2 - \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n \right\|^2 \right) < \infty,$$

alors il existe une solution y à l'équation $(z_0 I - T)y = x$.

Première partie

Localisation du spectre d'un
opérateur à l'aide des polynômes
de Faber

Chapitre 1

Polynômes de Faber

1.1 Introduction

Les polynômes de Faber ont été introduits en 1903 par Georg Faber dans le but de développer en série de polynômes les fonctions holomorphes sur un domaine G , et d'utiliser ceci pour des problèmes d'analyse complexe, de théorie des fonctions et de théorie de l'approximation.

Il s'agit de trouver un équivalent du développement en série de Taylor sur le disque. Toute fonction holomorphe dans $D(z_0, r)$, le disque de centre z_0 et de rayon r , peut être développée en série de Taylor, c'est à dire sous la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r),$$

avec une convergence uniforme sur tout compact de $D(z_0, r)$.

Le Théorème de Runge (1885) répond partiellement au problème en donnant un résultat d'approximation polynomiale. Ce théorème assure, pour une fonction holomorphe f dans un domaine simplement connexe G , l'existence d'une suite de polynômes $(Q_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge vers f uniformément sur tout compact de G . Ce résultat peut être reformulé sous la forme d'un développement en série de polynômes

$$f(z) = Q_0(z) + \sum_{n=0}^{\infty} (Q_{n+1}(z) - Q_n(z)), \quad z \in G,$$

avec une convergence uniforme sur tout compact de G .

L'objectif des séries de Faber est de fixer, pour un domaine simplement connexe G , une suite de polynômes $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de laquelle peuvent se développer toutes les fonctions holomorphes dans G . En effet, pour le disque $D(z_0, r)$, les fonctions holomorphes se développent à partir de la suite de polynômes $((z - z_0)^n)_{n \geq 0}$. Il s'agit alors, pour une fonction holomorphe f sur un domaine G , d'obtenir un développement de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z),$$

où la suite de polynômes $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend que de G et la suite de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dépend de f .

1.2 Définition

Soit K un compact non réduit à un point et simplement connexe du plan complexe \mathbb{C} , on notera Γ sa frontière. D'après le Théorème de représentation conforme de Riemann, il existe une unique représentation conforme ψ du domaine $\Delta = \{w; |w| > 1\}$ sur le complémentaire du compact K et qui satisfait les relations suivantes dans la sphère de Riemann

$$\psi(\infty) = \infty \quad \text{et} \quad \psi'(\infty) > 0. \quad (1.1)$$

La fonction ψ est analytique sur la couronne $\{w; |w| > 1\}$ et telle que

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \frac{\psi(w)}{w} = \beta > 0.$$

On en déduit que la fonction ψ admet un développement de Laurent pour $|w| > 1$, de la forme

$$\psi(w) = \beta w + \beta_0 + \beta_1 w^{-1} + \dots + \beta_k w^{-k} + \dots,$$

où $\beta > 0$ est le diamètre transfini, ou capacité logarithmique, de K .

Soit ϕ la fonction inverse de ψ . L'application $\phi : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \{w; |w| > 1\}$ a un développement en série de Laurent au voisinage de $z = \infty$ de la forme

$$\phi(z) = \frac{1}{\beta} z + b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k} + \dots$$

Les polynômes de Faber sont définis à partir du développement en série de Laurent des puissances de ϕ . Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \phi(z)^n &= (z/\beta + b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_k z^{-k} + \dots)^n \\ &= z^n/\beta^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)} + b_1^{(n)} z^{-1} + \dots + b_k^{(n)} z^{-k} + \dots \end{aligned}$$

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on appelle *polynôme de Faber d'ordre n* , noté F_n , la partie polynomiale du développement en série de Laurent de $\phi(z)^n$. Suivant les notations ci-dessus,

$$F_n(z) = z^n/\beta^n + a_{n-1}^{(n)} z^{n-1} + \dots + a_1^{(n)} z + a_0^{(n)}.$$

Le polynôme de Faber d'ordre n est un polynôme de degré n et de coefficient directeur β^{-n} .

1.3 Premières propriétés et exemples

On considère la fonction ω_n définie par l'équation

$$\phi(z)^n = F_n(z) + \omega_n(z), \quad z \notin K.$$

La fonction $z \mapsto \omega_n(z)$ est holomorphe sur le complémentaire de K et vérifie

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \omega_n(z) = 0.$$

Pour tout réel $R > 1$, on notera Γ_R la courbe de Jordan analytique $\{\psi(w) : |w| = R\}$ et G_R l'intérieur de cette courbe de Jordan. Pour tout $n \geq 1$, l'application ω_n est analytique sur $\mathbb{C} \setminus K \supset \Gamma_R$ et vérifie dans la sphère de Riemann $\omega_n(\infty) = 0$. Ce qui implique que

ω_n est holomorphe sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus K \supset \Gamma_R$. Ainsi, d'après la formule de Cauchy appliquée sur la sphère de Riemann, si z est à l'intérieur de Γ_R , c'est à dire si $z \in G_R$, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

De plus, si $z \in G_R$, d'après la formule de Cauchy dans \mathbb{C} , on a

$$F_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

En utilisant le fait que $\phi(\zeta)^n = F_n(\zeta) + \omega_n(\zeta)$, cela nous donne la formule suivante pour $F_n(z)$ si $z \in G_R$:

$$F_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\phi(\zeta)^n}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.2)$$

On cherche à présent à déterminer la fonction génératrice des polynômes de Faber. Pour cela on effectue un changement de variable $\zeta = \psi(w)$ dans l'intégrale ci-dessus. On obtient alors pour $z \in G_R$

$$F_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\phi(\zeta)^n}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=R} \frac{w^n \psi'(w)}{\psi(w) - z} dw.$$

L'égalité ci-dessus signifie que pour $z \in G_R$, $F_n(z)$ est le n -ième coefficient de Laurent de l'application holomorphe sur $\{w; |w| > R\}$

$$w \mapsto \frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z}.$$

On en déduit la fonction génératrice des polynômes de Faber

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}, \quad |w| > R, z \in G_R. \quad (1.3)$$

Cette formule peut être considérée comme une définition des polynômes de Faber. Elle permet également d'obtenir récursivement la suite des polynômes de Faber à partir des coefficients du développement de Laurent de la fonction ψ . En effet si on utilise le développement

$$\psi(w) = \beta w + \beta_0 + \beta_1 w^{-1} + \dots + \beta_k w^{-k} + \dots,$$

l'équation 1.3 donne

$$\begin{aligned} \beta - \beta_1 w^{-2} - \dots - k\beta_k w^{-k-1} \dots &= (\beta w + (\beta_0 - z) + \beta_1 w^{-1} + \dots + \beta_k w^{-k} + \dots) \\ &\quad (F_0(z)w^{-1} + F_1(z)w^{-2} + \dots + F_k(z)w^{-k+1} + \dots). \end{aligned}$$

En identifiant les termes de même degré en w , on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$-k\beta_k = \beta_k F_0(z) + \beta_{k-1} F_1(z) + \dots + (\beta_0 - z)F_k(z) + \beta F_{k+1}(z).$$

En notant $\beta_{-1} := \beta$, on obtient les deux formules suivantes

$$zF_k(z) = \sum_{s=-1}^k \beta_s F_{k-s}(z) + k\beta_k \quad (1.4)$$

et

$$\beta F_{k+1}(z) = zF_k(z) - k\beta_k - \sum_{s=0}^k \beta_s F_{k-s}(z). \quad (1.5)$$

On peut ainsi construire par récurrence des polynômes de Faber à partir de la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des coefficients de Laurent de ψ .

Remarque 1.1. Si on connaît la suite des polynômes de Faber pour un compact simplement connexe K , il est facile d'obtenir la suite des polynômes de Faber pour le compact $\overline{G_R}$, $R > 1$, délimité par la courbe de niveau $\Gamma_R = \{z; |\phi(z)| = R\}$ de la représentation conforme extérieure ϕ associée à K . En effet, l'application (ϕ/R) est l'unique représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus \overline{G_R}$ sur $\{w; |w| > 1\}$ telle que

$$(\phi/R)(\infty) = \infty \quad \text{et} \quad (\phi/R)'(\infty) > 0.$$

Ainsi, la suite des polynômes de Faber (F_n^R) , associée au compact $\overline{G_R}$, est donnée par la formule

$$F_n^R(z) = E(\phi(z)^n/R^n) = \frac{1}{R^n} F_n(z).$$

Les propriétés des polynômes de Faber énoncées ci-dessus permettent de donner quelques exemples de compacts pour lesquels il est facile de construire la suite des polynômes de Faber associée.

Exemples 1.2. (1) Si le compact K est le disque fermé de centre z_0 et de rayon R_0 , la représentation conforme extérieure ϕ associée à K est donnée par

$$\phi(z) = \frac{z - z_0}{R_0}.$$

Les polynômes de Faber associés à ce disque sont donnés par la formule

$$F_n(z) = \frac{1}{R_0^n} (z - z_0)^n.$$

(2) Si $K = [-1; 1]$, on vérifie facilement que l'application ψ donnée par

$$\psi(w) = \frac{1}{2}(w + 1/w)$$

est bien une représentation conforme et satisfait les conditions (1.1). On peut alors déduire de (1.4) les premiers polynômes de Faber ainsi que la relation de récurrence que vérifie la suite des polynômes de Faber associée au compact $[-1; 1]$. On obtient pour les premiers termes $F_0(z) = 1$, $F_1(z) = 2z$ et $F_2(z) = 2(2z^2 - 1)$ et comme pour tout $k \geq 2$, on a $\beta_k = 0$, les polynômes de Faber vérifient pour tout $n \geq 1$,

$$2zF_{n+1}(z) = F_{n+2}(z) + F_n(z).$$

On remarque alors que ces polynômes vérifient la même relation de récurrence que les polynômes de Chebychev donnés par la formule

$$C_n(t) = \cos(n \arccos(t)), \quad t \in [-1; 1],$$

et que $n = 1, 2$, on a $F_n = 2C_n$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, $F_n = 2C_n$.

(3) On considère l'ellipse du plan de foyers 1 et -1 et de demi axes

$$a = \frac{1}{2}(R + 1/R) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2}(R - 1/R),$$

avec $R > 1$. L'équation de l'ellipse peut être donnée sous la forme

$$z = \frac{1}{2} \left(R e^{i\theta} + \frac{1}{R e^{i\theta}} \right), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

C'est donc une ligne de niveau pour l'application conforme extérieure ϕ associée au compact $K = [-1; 1]$. On en déduit par la Remarque 1.1 et l'exemple précédent que la suite des polynômes de Faber associée au compact délimité par cette ellipse sont donnés par

$$F_n(z) = \frac{2}{R^n} C_n(z), \quad n \geq 1,$$

où C_n est le n -ième polynôme de Chebychev.

(4) Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 3$. On considère la courbe paramétrée par l'équation

$$z = \frac{m-1}{m} \exp(i\theta) + \frac{1}{m} \exp(-i(m-1)\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Une telle courbe est appelée m -hypocycloïde, on notera H_m le compact délimité par cette courbe. L'application conforme extérieure ψ associée à H_m est la fonction suivante

$$\psi(w) = \frac{m-1}{m} w + \frac{1}{m} w^{-m+1}.$$

On déduit de (1.4) que les premiers termes de la suite des polynômes de Faber associés à H_m sont donnés par

$$F_k(z) = \left(\frac{m}{m-1} z \right)^k, \quad k = 1, \dots, m-1 \text{ et } F_m = \left(\frac{m}{m-1} z \right)^m - \frac{m}{m-1},$$

et que la suite de polynômes de Faber associée à H_m est donnée par la formule de récurrence

$$F_{n+m}(z) = \frac{m}{m-1} z F_{n+m-1}(z) - \frac{1}{m-1} F_n(z), \quad (n \geq 1).$$

Les articles [19] et [14] traitent des polynômes de Faber pour les hypocycloïdes et s'intéressent en particulier à la répartition des zéros de ces polynômes.

Les hypocycloïdes fournissent une famille d'exemples de compacts d'intérieur non vide et délimités par des courbes de Jordan avec des angles. C'est le cadre qui nous intéressera dans les chapitres suivants.

1.4 Comportement asymptotique

Pour estimer le comportement asymptotique des polynômes de Faber dans le compact simplement connexe K , on utilise la formule (1.2) : si $R > 1$ et $z \in G_R$, alors

$$F_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\phi(\zeta)^n}{\zeta - z} d\zeta.$$

Si on considère $z \in K$, on peut appliquer cette formule pour tout $R = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. On obtient alors l'inégalité suivante

$$|F_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{|\phi(\zeta)^n|}{|\zeta - z|} |d\zeta|.$$

Or $|\phi(z)| = R$ pour tout $z \in \Gamma_R$, d'où

$$|F_n(z)| \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{(1+\varepsilon)^n l(\Gamma_{1+\varepsilon})}{2\pi \text{dist}(K, \Gamma_{1+\varepsilon})},$$

où $l(\Gamma_{1+\varepsilon})$ est la longueur de la courbe $\Gamma_{1+\varepsilon}$ et $\text{dist}(K, \Gamma_{1+\varepsilon})$ est la distance entre K et la courbe $\Gamma_{1+\varepsilon}$. On peut écrire cette inégalité sous la forme

$$|F_n(z)| \leq c_1(\varepsilon)(1 + \varepsilon)^n, \quad z \in K,$$

où $c_1(\varepsilon)$ ne dépend pas de n . Ainsi en prenant la racine n -ième on peut passer à la limite supérieure en n

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \leq 1 + \varepsilon, \quad z \in K.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient l'estimation suivante du comportement asymptotique des polynômes de Faber dans le compact K

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \leq 1, \quad z \in K. \quad (1.6)$$

Pour évaluer le comportement asymptotique des polynômes de Faber dans le complémentaire de K , on utilise une formule analogue à (1.2). Pour tout $n \geq 1$, l'application ω_n est analytique sur $\mathbb{C} \setminus K \supset \Gamma_R$ et vérifie dans la sphère de Riemann $\omega_n(\infty) = 0$. Ce qui implique que ω_n est holomorphe sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus K \supset \Gamma_R$. Ainsi, d'après la formule de Cauchy appliquée sur la sphère de Riemann, si z est à l'extérieur de Γ_R , c'est à dire si $z \notin \overline{G_R}$, alors

$$\omega_n(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\omega_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

où le sens d'intégration est positif par rapport à $\overline{G_R}$. De plus, $\phi(z)^n = F_n(z) + \omega_n(z)$ et si $z \notin \overline{G_R}$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{F_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

Ce qui nous donne la formule suivante pour $\omega_n(z)$ si $z \notin \overline{G_R}$

$$\omega_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\phi(\zeta)^n}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \overline{G_R}. \quad (1.7)$$

Soit deux réels r et R tels que $1 < r < R$. On suppose que $z \notin G_R$, alors $z \notin G_r$. On note δ la distance entre les courbes Γ_r et Γ_R . La formule (1.7) appliquée en $z \notin G_r$ donne l'estimation suivante

$$|\omega_n(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_r} \frac{|\phi(\zeta)^n|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \frac{r^n}{2\pi\delta} l(\Gamma_r).$$

En décomposant $F_n(z)$ sous la forme

$$F_n(z) = \phi(z)^n - \omega_n(z),$$

et en supposant que $z \in \Gamma_R$, on obtient que le terme en $\phi(z)^n$ croit en module comme R^n et d'après l'inégalité ci-dessus, le terme en $\omega_n(z)$ est dominé par r^n . Ceci implique que pour tout $1 < r < R$, si $z \notin G_R$, on a

$$F_n(z) = \phi(z)^n (1 + O(r^n/R^n)).$$

Cette estimation nous permet d'obtenir les estimations suivantes du comportement asymptotique de la suite des polynômes de Faber évalués hors de K :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} = |\phi(z)|, \quad z \notin K, \quad (1.8)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} = \phi(z), \quad z \notin K. \quad (1.9)$$

1.5 Séries de Faber

On a vu dans la section précédente des estimations du comportement asymptotique de la suite des polynômes de Faber selon que ceux-ci sont évalués dans K ou hors de K . Pour un réel $R > 1$, on a d'après (1.8) et (1.6) l'équivalence suivante

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \leq R \Leftrightarrow z \in \overline{G_R}.$$

Si on se donne une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ de coefficients telle que

$$l = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

alors la série

$$\sum_{n \geq 0} c_n F_n(z)$$

converge uniformément sur tout compact de G_R pour $R = 1/l$ et diverge si $z \notin \overline{G_R}$. La fonction obtenue est donc holomorphe sur G_R . On a ainsi obtenu un équivalent des séries entières en remplaçant un disque par un compact simplement connexe quelconque du plan.

On cherche maintenant à faire l'inverse, c'est à dire qu'on se donne une fonction holomorphe sur un voisinage de K et on veut la développer en une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z),$$

généralisant ainsi le développement de Taylor d'une fonction holomorphe sur un disque. Le développement en une telle série est appelé développement en série de Faber. Il est donné par le Théorème suivant.

Théorème 1.3. *Toute fonction holomorphe f sur un voisinage du compact K peut se développer de manière unique en série de Faber. C'est à dire qu'il existe $R > 1$ et une unique suite de coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tels que pour tout z dans $\overline{G_R}$ on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z).$$

De plus cette convergence est uniforme dans $\overline{G_R}$.

Démonstration. Comme f est holomorphe sur un voisinage de K , il existe un réel $R_1 > 1$ tel que $G_{R_1} \subset V$. Soit R_2 et ρ tels que $1 < R_2 < \rho < R_1$, ainsi on a $K \subset G_{R_2} \subset G_\rho \subset V$ et Γ_ρ est inclus dans V . D'après la formule de Cauchy et en effectuant un changement de variable $\zeta = \psi(w)$, on obtient pour tout $z \in G_{R_2}$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} f(\psi(w)) \frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} dw.$$

Or d'après (1.3) on a

$$\frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}}, \quad |w| = \rho.$$

Ce qui nous donne en substituant dans l'égalité précédente

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} f(\psi(w)) \frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} f(\psi(w)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(z)}{w^{n+1}} dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} \frac{f(\psi(w))}{w^{n+1}} dw. \end{aligned}$$

La dernière étape étant justifiée par le fait que, comme $z \in G_{R_2}$, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|F_n(z)|} \leq R_2 < \rho,$$

donc la série converge uniformément en w sur le cercle $|w| = \rho$.

En posant

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} \frac{f(\psi(w))}{w^{n+1}} dw,$$

qui est indépendant du choix de $z \in G_{R_2}$, on obtient bien le développement de f en série de Faber

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n F_n(z), \quad z \in G_{R_2}.$$

Et d'après la discussion du début de section, si on choisit R tel que $1 < R < R_2$, on a bien convergence uniforme du développement de Faber sur $\overline{G_R}$. \square

1.6 Polynômes de Faber et Opérateurs

Les polynômes de Faber sont aujourd'hui un outil classique en analyse complexe, ils peuvent également être utilisés en théorie des opérateurs, notamment en théorie spectrale. Pour cela on a besoin de généraliser la formule (1.3) en évaluant les polynômes de Faber, non plus en un scalaire, mais en un opérateur. C'est l'objet du lemme suivant concernant le calcul fonctionnel holomorphe.

Notation 1.4. Soit \mathcal{X} un espace de Banach et T un opérateur borné sur l'espace \mathcal{X} . Le spectre de T sera noté

$$\sigma(T) = \{\lambda; (\lambda I - T) \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Lemme 1.5. Soit \mathcal{X} un espace de Banach et T un opérateur borné sur \mathcal{X} tel que $\sigma(T) \subset K$. Alors pour tout $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 1$, on a

$$\psi'(w)(\psi(w)I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} F_n(T).$$

Démonstration. Soit $w \in \mathbb{C}$, $|w| > 1$. Soit $R = |w|$. On pose

$$f(z) = \frac{\psi'(w)}{\psi(w) - z}, \quad z \in G_R.$$

On sait d'après l'équation (1.3) que pour tout $z \in G_R$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} F_n(z).$$

De plus, comme f est une fonction holomorphe sur G_R , la convergence de cette série est uniforme sur un voisinage de K d'après le Théorème 1.3. En utilisant le calcul fonctionnel holomorphe, comme $\sigma(T) \subset K$, on obtient

$$\psi'(w)(\psi(w)I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} w^{-n-1} F_n(T).$$

□

Une application importante des polynômes de Faber à la théorie des opérateurs concerne la propriété de localisation du spectre d'un opérateur borné. En effet, A. Atzmon, A. Eremenko et M. Sodin ont montré dans leur article [1], que pour tout ensemble compact du plan K de complémentaire connexe, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et un réel positif r tel que pour tout opérateur borné sur un espace de Banach, le spectre de T est inclus dans K si et seulement si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|P_n(T)\|^{1/n} \leq r.$$

Si on suppose de plus que le compact K est connexe, il est alors simplement connexe et il existe une suite de polynômes de Faber associée à K . Le résultat de A. Atzmon, A. Eremenko et M. Sodin est dans ce cas équivalent au Théorème suivant dont on donne une nouvelle preuve adaptée aux polynômes de Faber.

Théorème 1.6 ([1]). *Soit \mathcal{X} un espace de Banach et T un opérateur borné sur l'espace \mathcal{X} . Alors $\sigma(T) \subset K$ si et seulement si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(T)\|^{1/n} \leq 1.$$

Démonstration. Soit T un opérateur borné sur l'espace \mathcal{X} tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(T)\|^{1/n} \leq 1.$$

L'application extérieure ϕ associée au compact K vérifie

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\phi(z)| = +\infty,$$

d'où

$$\mathbb{C} = \bigcup_{R>1} G_R.$$

Comme le spectre de T est compact, il existe $R > 1$ tel que

$$\sigma(T) \subset \overline{G_R}.$$

Alors d'après la remarque 1.1, la suite des polynômes de Faber associée au compact $\overline{G_R}$ est $(F_n/R^n)_{n \geq 0}$ et la représentation conforme de $\{w; |w| > 1\}$ sur le complémentaire de $\overline{G_R}$ qui vérifie les conditions (1.1) est

$$w \mapsto \psi(Rw).$$

On peut alors appliquer le Lemme 1.5 à l'opérateur T et au compact $\overline{G_R}$, ce qui nous donne

$$R\psi'(Rw) (\psi(Rw)I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(T)}{R^n w^{n+1}}.$$

Ainsi en changeant de variable, on obtient que pour tout $|w| > R$,

$$\psi'(w) (\psi(w)I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(T)}{w^{n+1}}.$$

Comme on a supposé $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(T)\|^{1/n} \leq 1$, l'application g définie par

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(T)}{w^{n+1}}$$

est bien définie et holomorphe sur $\{w; |w| > 1\}$. Les applications

$$w \mapsto (\psi(w)I - T) \frac{g(w)}{\psi'(w)}$$

et

$$w \mapsto \frac{g(w)}{\psi'(w)} (\psi(w)I - T)$$

sont donc holomorphes sur $\{w; |w| > 1\}$ et valent I sur $\{w; |w| > R\}$. Donc par le principe des zéros isolés, ces applications sont constantes et égales à I sur $\{w; |w| > 1\}$.

On a donc pour tout w tel que $|w| > 1$

$$(\psi(w)I - T) \frac{g(w)}{\psi'(w)} = \frac{g(w)}{\psi'(w)} (\psi(w)I - T) = I.$$

Donc $\psi(w) \notin \sigma(T)$ si $|w| > 1$, ce qui signifie que

$$\sigma(T) \subset K.$$

Réciproquement, si $\sigma(T) \subset K$, alors d'après le Lemme 1.5, la fonction g définie par

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n(T)}{w^{n+1}}$$

est bien définie sur $\{w; |w| > 1\}$, donc par un argument de rayon spectral, on obtient que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(T)\|^{1/n} \leq 1$. \square

Dans le cas du compact $K = [-1; 1]$, on peut prolonger le théorème précédent. On sait en effet que les polynômes de Faber sont dans ce cas proportionnels aux polynômes de Chebychev. Si on suppose que l'opérateur T agit sur un opérateur de Hilbert et qu'il vérifie non seulement que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(T)\|^{1/n} \leq 1,$$

mais l'hypothèse plus forte que la suite $(\|F_n(T)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, le résultat suivant, dû à H.O. Fattorini affirme que l'opérateur T est semblable à un opérateur auto-adjoint dont le spectre est inclus dans $[-1; 1]$.

Théorème 1.7. [15] Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et $T \in B(\mathcal{H})$. On suppose que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|C_n(T)\| < \infty,$$

où C_n désigne le n -ième polynôme de Chebychev. Alors T est semblable à un opérateur auto-adjoint de spectre inclus dans $[-1; 1]$.

L'outil principal de la démonstration de ce Théorème sont les limites de Banach.

Théorème 1.8. [9] Il existe une forme linéaire $\mathcal{L} : l^\infty \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

1. $\|\mathcal{L}\| = 1$.
2. Si la suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $\mathcal{L}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
3. Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ et $x_n \geq 0$ pour tout n , alors $\mathcal{L}(x) \geq 0$.
4. Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ et $x' = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, alors $\mathcal{L}(x') = \mathcal{L}(x)$.

Une forme linéaire qui satisfait la conclusion du Théorème ci dessus est appelée une *limite de Banach*.

Démonstration du Théorème 1.7. [15] Soit \mathcal{L} une limite de Banach fixée. On définit pour tout u, v dans l'espace \mathcal{H}

$$[u; v] = \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \langle C_k(T)u; C_k(T)v \rangle \right),$$

où $\langle x; y \rangle$ est le produit scalaire de x et y dans \mathcal{H} . L'application $(x, y) \mapsto [x; y]$ bien définie et bornée d'après l'hypothèse

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|C_n(T)\| < \infty,$$

elle est de plus sesquilinéaire. Il existe donc un opérateur P sur \mathcal{H} tel que pour tout u et v dans \mathcal{H} on ait

$$\langle Pu; v \rangle = \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \langle C_k(T)u; C_k(T)v \rangle \right).$$

L'opérateur P est de plus positif. Montrons à présent que pour tout u on a

$$\langle Pu; u \rangle \geq \frac{1}{4(2M+1)^2} \|u\|^2,$$

où M désigne la constante

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|C_n(T)\|.$$

Pour cela on considère $u \in \mathcal{H}$ quelconque et on remarque que les polynômes de Chebychev vérifient pour tout $k \in \mathbb{N}$ la relation

$$2(C_k)^2 = C_{2k} + I.$$

Ainsi, si on suppose que $\|C_k(T)u\| < \frac{1}{2M+1} \|u\|$, alors

$$\|C_{2k}(T)u\| \geq \|u - 2C_k^2(T)u\| > (1 - 2M \frac{1}{2M+1}) \|u\| = \frac{1}{2M+1} \|u\|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ k \in [0; E(n/2)]; \|C_k(T)u\| \geq \frac{1}{2M+1} \|u\| \right\}$$

soit inférieur à $E(n/4)$; alors d'après l'inégalité ci dessus, le cardinal de l'ensemble

$$\left\{ k \in [0; 2E(n/2)]; \|C_k(T)u\| \geq \frac{1}{2M+1} \|u\| \right\}$$

est supérieur à $E(n/4)$. Ceci implique que l'un au moins de ces ensembles est de cardinal supérieur à $E(n/2)$. Donc

$$\sum_{k=0}^n \langle C_k(T)u; C_k(T)v \rangle \geq E(n/4) \left(\frac{1}{2M+1} \|u\| \right)^2.$$

On obtient

$$\langle Pu; u \rangle = \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \langle C_k(T)u; C_k(T)v \rangle \right) \geq \frac{1}{4(2M+1)^2} \|u\|^2.$$

En particulier l'opérateur P est inversible et positif. Alors pour tout $(u, v) \in \mathcal{H}^2$, on a

$$\begin{aligned} 2\langle PTu; v \rangle &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \langle 2TC_k(T)u; C_k(T)v \rangle \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \langle 2TC_k(T)u; C_k(T)v \rangle \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \langle C_{k+1}(T)u; C_k(T)v \rangle \right) + \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \langle C_{k-1}(T)u; C_k(T)v \rangle \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} \langle C_k(T)u; C_{k-1}(T)v \rangle \right) + \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \langle C_{k-1}(T)u; C_k(T)v \rangle \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \langle C_k(T)u; (C_{k+1} + C_{k-1})(T)v \rangle \right) \\ &= 2\langle Pu; Tv \rangle. \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$PT = T^*P.$$

Soit Q la racine carrée positive de P , alors Q est positif et inversible. En multipliant à gauche et à droite l'égalité ci dessus par Q^{-1} on obtient

$$QTQ^{-1} = Q^{-1}T^*Q = (QTQ^{-1})^*,$$

donc QTQ^{-1} est auto-adjoint. De plus d'après le Théorème 1.6, le spectre de T est inclus dans $[-1; 1]$; il en est donc de même pour QTQ^{-1} . \square

1.7 Comportement asymptotique sur la frontière

Le but de cette section est de donner des résultats qui montrent comment intervient la régularité de Γ , la frontière de K , sur l'existence et la régularité du prolongement de l'application conforme ψ sur l'ensemble $\{z; |z| \geq 1\}$. On verra également que la régularité de la frontière Γ donne des informations sur le comportement asymptotique de la suite des polynômes de Faber sur cette frontière.

Le premier résultat dans cette direction est un théorème de Carathéodory. Ce résultat est fondamental car il permet de prolonger ψ sur le cercle unité et ϕ sur la frontière Γ .

Théorème 1.9. [29] *Soit f une application conforme de \mathbb{D} sur un domaine borné G . Si la frontière de G est une courbe de Jordan, alors f a un prolongement continu et injectif sur \mathbb{D} .*

Remarque 1.10. Quitte à utiliser la transformation

$$f(w) = \frac{1}{\psi(1/w) - z_0}, \quad |z| > 1,$$

où $z_0 \in \text{int}(K)$, on peut appliquer le théorème de Carathéodory à l'application ψ si Γ est une courbe de Jordan. On obtient dans ce cas que ψ se prolonge en une application continue et injective sur l'ensemble $\{z; |z| \geq 1\}$; ce qui donne également un prolongement de ϕ jusqu'à la frontière Γ .

Le cas le plus classique de régularité de la frontière est le cas où cette frontière est analytique, c'est à dire s'il existe un paramétrage de Γ de la forme $u(t), t \in \mathbb{T}$, où u est holomorphe et injective sur un ouvert de la forme $\{z; r_1 < |z| < r_2\}$, avec $r_1 < 1 < r_2$.

Théorème 1.11. [29] *Si la frontière Γ est une courbe de Jordan analytique, alors ψ admet un prolongement analytique et injectif sur un ensemble de la forme $\{z; |z| > r_0\}$, avec $r_0 < 1$.*

En prolongeant ψ sur $\{z; |z| > r_0\}$, on peut également prolonger ϕ sur $\psi(\{z; |z| > r_0\})$. On peut alors considérer les lignes de niveau $\Gamma_r = \{z; |\phi(z)| = r\}$ de l'application ϕ pour tout $r > r_0$. De même que dans la Remarque 1.1, on peut alors considérer la suite des polynômes de Faber $(F_n^r)_{n \in \mathbb{N}}$ associée au compact délimité par Γ_r . En utilisant la formule

$$F_n^r(z) = \frac{1}{r^n} F_n(z)$$

et les estimations du comportement asymptotique de la Section 1.4, on obtient pour tout z tel que $|\phi(z)| > r_0$

$$F_n(z) = \phi(z)^n (1 + O(t^n)),$$

avec t quelconque tel que $\frac{r_0}{|\phi(z)|} < t < 1$.

On peut cependant affaiblir sensiblement les hypothèses de régularité sur la frontière Γ et obtenir des estimations du comportement asymptotique de la suite des polynômes de Faber sur Γ . Par exemple en s'intéressant aux frontières qui sont des courbes de Jordan de régularité höldérienne $C^{n,\alpha}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; 1[$. En d'autres mots, il s'agit des courbes qui ont un paramétrage de la forme $u(t), t \in \mathbb{T}$, où u est n fois dérivable, $u'(t) \neq 0$ pour tout t et $u^{(n)}$ est α -höldérienne.

Théorème 1.12. [29] *Si la frontière Γ est une courbe de Jordan de classe $C^{n,\alpha}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; 1[$, alors $\psi^{(n)}$ admet un prolongement α -höldérien sur $\{z; |z| \geq 1\}$. Si $n \geq 1$, alors le prolongement de ψ' ne s'annule pas sur $\{z; |z| \geq 1\}$.*

On peut alors en déduire des estimations simples sur le comportement de la suite $(\beta)_{n \in \mathbb{N}}$ des coefficients de ψ .

Proposition 1.13. *Si la frontière Γ est une courbe de Jordan de classe $C^{1,\alpha}$ avec $\alpha > 1/2$, alors $(k\beta_k)_{k \geq 0}$ est sommable.*

Démonstration. D'après le Théorème précédent on sait que ψ' se prolonge par continuité sur \mathbb{T} en une application α -höldérienne avec $\alpha > 1/2$. Les coefficients de Fourier de ψ' étant donné par $c_k = k\beta_k$ si $k \geq -1$, on en déduit que (voir par exemple [39, p.45]) que $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$. \square

Ce théorème permet d'obtenir une estimation du comportement asymptotique des polynômes de Faber si la frontière est de classe $C^{p,\alpha}$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0; 1[$.

Théorème 1.14. [34] *Si la frontière Γ est de classe $C^{p+1,\alpha}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in]0; 1[$, alors pour tout $z \notin \text{int}(K)$, on a*

$$F_n(z) = \phi(z)^n + O\left(\frac{\ln(n)}{n^{p+\alpha}}\right).$$

Cependant on a vu dans les exemples avec les hypocycloïdes (cf exemple 1.2) qu'on pouvait être amené à s'intéresser à des compacts K dont la frontière est une courbe de Jordan non régulière. Le Théorème de I. E. Pritsker ci après répond à ce cas. Pour cela on introduit également les conditions de Dini et d'Alper pour les modules de continuité, qui généralisent la condition de Hölder.

On dit qu'une fonction $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est un *module de continuité* si elle vérifie :

1. ρ est strictement croissante ;
2. $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) = 0$;
3. ρ est sous-additive, c'est à dire,

$$\rho(t+s) \leq \rho(t) + \rho(s).$$

On dit qu'un module de continuité vérifie la *condition de Dini* si

$$\int_0^\varepsilon \frac{\rho(x)}{x} dx < \infty,$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Un module de continuité vérifie la *condition d'Alper* si

$$\int_0^\varepsilon \frac{\rho(x)}{x} \log\left(\frac{1}{x}\right) dx < \infty,$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. On remarque que la condition d'Alper est plus restrictive que celle de Dini.

Une courbe de Jordan Γ est *Dini-lisse* (respectivement *Alper-lisse*) si elle a un paramétrage $\tau : [0; 1] \rightarrow \Gamma$ qui est différentiable, avec $\tau'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0; 1]$ et τ' vérifie la condition

$$|\tau'(x_1) - \tau'(x_2)| \leq \rho(|x_1 - x_2|), \quad x_1, x_2 \in [0; 1],$$

où ρ est un module de continuité qui vérifie la condition de Dini (respectivement d'Alper). En particulier une courbe de Jordan de classe $C^{1,\gamma}$ avec $\gamma > 0$ est une courbe Dini-lisse et Alper-lisse. Un arc de Jordan est Dini-lisse (respectivement Alper-lisse) si c'est un sous arc d'une courbe de Jordan Dini-lisse (respectivement Alper-lisse).

Théorème 1.15. [29, Théorème 3.9] *Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable. Pour $z_0 \in \Gamma$, on suppose que Γ a un angle de mesure extérieure $\alpha\pi$ en z_0 , avec $0 < \alpha \leq 2$, formé par des arcs Dini-lisses. Alors les fonctions*

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{f'(z)}{(z - z_0)^{\alpha-1}}$$

sont continues et ne s'annulent pas sur $\{z; |z| \geq 1\} \cap D(z_0, \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$.

Le Théorème suivant est une version simplifiée du [30, Théorème 1.1].

Théorème 1.16 ([30]). *Soit Γ une courbe de Jordan rectifiable. Pour $z_0 \in \Gamma$, on suppose que Γ a un angle d'ouverture extérieur $\alpha\pi$ en z_0 , avec $0 < \alpha \leq 2$, formé par des arcs Alper-lisses. Alors,*

$$F_n(z_0) = \alpha\phi(z_0)^n + o(1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Remarque 1.17. Le cas $\alpha = 1$ correspond à un point où la frontière forme un arc lisse, le cas $\alpha = 0$ correspond à un coin rentrant et le cas $\alpha = 2$ correspond à un coin sortant.

La définition suivante sera utilisée dans la suite comme condition géométrique générale sur la régularité de la frontière.

Définition 1.18. Un sous ensemble T du plan \mathbb{C} est une *courbe Alper-lisse avec des angles* si c'est une courbe de Jordan rectifiable telle que pour tout $\zeta \in T$ on est dans l'un des deux cas suivants :

- T est un arc Alper-lisse en ζ ,
- T a un angle d'ouverture $\alpha\pi$ en ζ , $0 < \alpha \leq 2$, formé par des arcs Alper-lisses.

Remarque 1.19. Les courbe Alper-lisses avec des angles ne peuvent donc pas avoir de coins rentrants.

Chapitre 2

Condition sur les orbites de Faber faibles d'un opérateur

2.1 Introduction

Le théorème de A. Atzmon, A. Eremenko et M. Sodin (Théorème 1.6) donne un critère pour que le spectre d'un opérateur soit inclus dans un compact K simplement connexe du plan. Dans ce chapitre on supposera acquis cette inclusion et on cherche des conditions permettant de conclure que le spectre de l'opérateur est en fait inclus dans l'intérieur du compact K . De telles conditions sont appelées conditions taubériennes dans le sens où elles viennent renforcer l'hypothèse d'inclusion pour obtenir une inclusion plus restrictive. Dans ce cas elles peuvent porter sur les orbites de Faber faibles de l'opérateur ou bien sur sa résolvante faible. Dans le cas du disque, de tels résultats se traduisent en terme de rayon spectral et ont été proposés par W. Mlak [25], G. Weiss [38], J. van Neerven [37] et N. Nikolski [27, 28].

Le résultat de W. Mlak ([25]) porte sur la résolvante faible.

Théorème 2.1 ([25]). *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert et T un opérateur borné sur \mathcal{H} . On suppose que $r(T) \leq 1$ et que pour tout $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, l'application*

$$z \mapsto \langle (I - zT)^{-1}x; y \rangle$$

est dans l'espace de Hardy $H^1(\mathbb{D})$. Alors $r(T) < 1$.

Le résultat de G. Weiss ([38]) porte sur les orbites faibles.

Théorème 2.2 ([38]). *Soit \mathcal{X} un espace de Banach et T un opérateur borné sur \mathcal{X} . On suppose qu'il existe $p \in [1; \infty[$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $x^* \in \mathcal{X}^*$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle T^n x; x^* \rangle|^p < \infty.$$

Alors $r(T) < 1$.

Ces deux résultats ont été généralisés par J. van Neerven [37] et N. Nikolski [27, 28], permettant en particulier la généralisation suivante du Théorème de G. Weiss [38].

Théorème 2.3 ([28]). *Soit \mathcal{X} un espace de Banach et T un opérateur borné sur \mathcal{X} . Soit $p \in [1; \infty[$ et une suite strictement positive $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\omega_n|^{1/n} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \infty.$$

Si pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $x^ \in \mathcal{X}^*$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |\langle T^n x; x^* \rangle|^p < \infty,$$

alors $r(T) < 1$.

2.2 Théorème général

Dans cette partie nous proposons une généralisation du résultat de N. Nikolski [28] en passant du disque à un compact simplement connexe K . Nous verrons que des hypothèses supplémentaires sur K sont nécessaires pour obtenir un résultat.

On considère K un compact simplement connexe du plan \mathbb{C} d'intérieur non vide $G = \text{int}(K)$ et de frontière Γ . La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignera la suite des polynômes de Faber associée à K . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, e_n désignera la fonction caractéristique de n sur \mathbb{N} .

Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ un espace de Banach tel que

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto a_k$ est bornée.
2. L'ensemble des suites à support fini, noté $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, est un sous ensemble dense de \mathcal{R} .

Comme $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ est dense dans \mathcal{R} , chaque élément φ de \mathcal{R}^* est entièrement caractérisé par la suite $(\varphi_n)_{n \geq 0}$, où

$$\varphi_n = \langle e_n; \varphi \rangle_{\mathcal{R}}.$$

Ceci nous permet d'identifier \mathcal{R}^* à un sous espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. De plus pour toute suite à support fini $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la condition 1 implique qu'il existe φ dans \mathcal{R}^* tel que $\hat{\varphi}(n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considérera donc que $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ est inclus dans \mathcal{R}^* via l'identification de \mathcal{R}^* à un sous espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

L'axiome crucial pour notre condition taubérienne est le suivant.

3. Pour tout $\zeta \in \partial K$, l'application V_{ζ} , définie dans $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{R}^*$ par

$$V_{\zeta} : \varphi \mapsto \sum_{n \geq 0} \varphi_n F_n(\zeta)$$

n'est pas bornée.

Si $f \in \mathcal{R}$ est à support fini, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$f = \sum_{n=0}^N f_n e_n.$$

L'identification de \mathcal{R}^* à un sous espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ permet donc de donner la formule de dualité suivante pour $\varphi \in \mathcal{R}^*$

$$\langle f; \varphi \rangle_{\mathcal{R}} = \left\langle \sum_{n=0}^N f_n e_n; \varphi \right\rangle_{\mathcal{R}} = \sum_{n=0}^N f_n \langle f; \varphi \rangle_{\mathcal{R}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \varphi_n,$$

où le nombre de termes non nuls dans la somme est fini. Cette formule n'est cependant pas valable pour $f \in \mathcal{R}$ en général. Rien ne permet en particulier d'affirmer dans le cas général que la série converge. Cependant, on peut énoncer le résultat suivant.

Proposition 2.4. Si $\varphi \in \mathcal{R}^*$ et $f \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, l'application de dualité est donnée par

$$\langle f; \varphi \rangle_{\mathcal{R}} = \sum_n f_n \varphi_n.$$

Si $f \in \mathcal{R}$ et $\varphi \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{R}^*$, cette formule reste vraie.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{R}^*$ à support fini et n_0 tel que $\langle e_n; \varphi \rangle = 0$ pour tout $n \geq n_0$. D'après l'axiome 2 sur \mathcal{R} , il existe une suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ telle que

$$f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f \quad \text{dans } \mathcal{R}.$$

Par continuité de φ , on a

$$\langle f; \varphi \rangle_{\mathcal{R}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k; \varphi \rangle_{\mathcal{R}}.$$

Et comme les f_k sont à support fini, on a pour tout k ,

$$\langle f_k; \varphi \rangle_{\mathcal{R}} = \sum_{n=0}^{n_0} f_k(n) \varphi_n.$$

Or, d'après l'axiome 1, on a $f_k(n) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(n)$, pour tout n .

On obtient alors

$$\langle f; \varphi \rangle_{\mathcal{R}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k; \varphi \rangle_{\mathcal{R}} = \sum_n f(n) \varphi_n.$$

□

Définition 2.5. Soit $x \in \mathcal{X}$ et $T \in B(\mathcal{X})$. L'orbite de Faber de x par rapport à T est l'ensemble

$$\{F_n(T)x; n \in \mathbb{N}\}.$$

Une orbite faible d'un couple $(x, x^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ est

$$\{\langle F_n(T)x; x^* \rangle; n \in \mathbb{N}\}.$$

La définition suivante étend celle proposée dans [28] dans le cas du disque.

Définition 2.6. Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ un espace de Banach et $T \in B(\mathcal{X})$. L'opérateur T est dit de *type \mathcal{R} faible* si les orbites faibles sont des éléments de \mathcal{R} , c'est à dire si pour tout couple $(x; x^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on a

$$(\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}.$$

Théorème 2.7. Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ un espace de Banach vérifiant les conditions 1 à 3 pour le compact K . Soit $T \in B(\mathcal{X})$ un opérateur de type \mathcal{R} faible avec $\sigma(T) \subset K$. Alors en fait

$$\sigma(T) \subset G.$$

Lemme 2.8. Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ un espace de Banach vérifiant la condition 1. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ un opérateur de type \mathcal{R} faible. Alors

$$\sup \left\{ \left\| (\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{R}} ; \|x^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Démonstration. On commence par montrer que pour tout $x \in \mathcal{X}$, l'application f_x définie par

$$\begin{aligned} f_x : \mathcal{X}^* &\rightarrow \mathcal{R} \\ x^* &\mapsto (\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

est bornée.

En effet, f_x est bien définie car T est un opérateur de type \mathcal{R} faible. On va vérifier qu'elle est bornée à l'aide du Théorème du graphe fermé. Soit $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}^*$, $x^* \in \mathcal{X}^*$ et $r \in \mathcal{R}$ tels que

$$x_n^* \rightarrow x^* \quad \text{et} \quad f_x(x_n^*) \xrightarrow{\mathcal{R}} r.$$

On déduit de la condition 1 sur \mathcal{R} que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f_x(x_n^*)(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r(k).$$

D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$f_x(x_n^*)(k) = \langle F_k(T)x; x_n^* \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle F_k(T)x; x^* \rangle = f_x(x^*)(k).$$

Donc $f_x(x^*) = r$ et, d'après le Théorème du graphe fermé, f_x est bornée. En particulier, pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a

$$\sup \left\{ \left\| (\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{R}} ; \|x^*\| \leq 1 \right\} < \infty. \quad (2.1)$$

On définit de manière symétrique pour tout $x^* \in \mathcal{X}^*$ l'application g_{x^*} par

$$\begin{aligned} g_{x^*} : \mathcal{X} &\rightarrow \mathcal{R} \\ x &\mapsto f_x(x^*). \end{aligned}$$

Alors, de même que pour f_x , on peut montrer que pour tout x^* , l'application g_{x^*} est bornée. De plus, d'après la formule (2.1), on a

$$\sup_{\|x^*\| \leq 1} \|g_{x^*}(x)\| < \infty,$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, on obtient donc que l'ensemble $\{g_{x^*}\}_{\|x^*\| \leq 1}$ est borné dans \mathcal{R}^* . Donc

$$\sup \left\{ \left\| (\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{R}} ; \|x^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \right\} < \infty,$$

ce qui achève la démonstration. \square

Démonstration du Théorème 2.7. Le lemme 2.8 implique que

$$C := \sup \left\{ \left\| (\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{R}} ; \|x^*\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Donc pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{R}^*$, on obtient en utilisant la proposition 2.4

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \geq 0} \varphi_n F_n(T) \right\| &= \sup \left\{ \left| \sum_{n \geq 0} \varphi_n \langle F_n(T)x; x^* \rangle \right| ; \|x\| \leq 1, \|x^*\| \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left\| (\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_{\mathcal{R}} ; \|x\| \leq 1, \|x^*\| \leq 1 \right\} \|\varphi\|_{\mathcal{R}^*} \\ &\leq C \|\varphi\|_{\mathcal{R}^*}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\zeta \in \sigma(T)$,

$$\left| \sum_{n \geq 0} \varphi_n F_n(\zeta) \right| \leq r \left(\sum_{n \geq 0} \varphi_n F_n(T) \right) \leq \left\| \sum_{n \geq 0} \varphi_n F_n(T) \right\| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{R}^*}.$$

Ce qui prouve que pour tout $\zeta \in \sigma(T)$, l'application V_ζ est bornée sur $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \subset \mathcal{R}^*$.

Ceci nous donne la conclusion

$$\partial K \cap \sigma(T) = \emptyset.$$

□

2.3 Applications

On propose à présent des exemples d'espaces satisfaisant les conditions 1 à 3, ce qui permet de donner les généralisations annoncés des théorèmes de W. Mlak [25], de G. Weiss [38] et de N. Nikolski [28].

Exemple 2.9. Soit $1 \leq p < \infty$ et $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que pour tout $\zeta \in \partial K$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |F_n(\zeta)|^p = \infty.$$

Alors, l'espace

$$l^p(\omega) := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}}; \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |a_n|^p < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|(a_n)\|_{l^p(\omega)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |a_n|^p \right)^{1/p}$$

est un espace de Banach qui vérifie les conditions 1 à 3.

Démonstration. Il est facile de vérifier les conditions 1 et 2 pour l'espace $l^p(\omega)$. Montrons que la condition 3 est également vérifiée.

Soit $\zeta \in \partial K$; supposons par l'absurde que l'application V_ζ soit bornée.

Dans le cas où $p \in]1; +\infty[$, l'application V_ζ se prolonge par continuité à l'espace $(l^p(\omega))^*$, en une application toujours notée V_ζ . C'est à dire qu'on a $V_\zeta \in l^p(\omega)^{**}$. Comme l'espace $l^p(\omega)$ est réflexif, on obtient $V_\zeta \in l^p(\omega)$, c'est à dire que $(F_n(\zeta))_n \in l^p(\omega)$. D'où la contradiction.

Dans le cas $p = 1$, $(l^1(\omega))^* = l^\infty(1/\omega)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit $x_N^* \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ défini par

$$x_N^*(k) = \begin{cases} \omega_k \frac{\overline{F_k(\zeta)}}{|F_k(\zeta)|} & \text{si } k \leq N; \\ 0 & \text{si } k > N. \end{cases}$$

Alors pour tout N , $\|x_N^*\|_{l^\infty(1/\omega)} = 1$ et

$$V_\zeta(x_N^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |F_n(\zeta)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

On obtient une contradiction. Dans tous les cas on obtient donc que V_ζ n'est pas bornée.

□

On déduit alors des Théorèmes 2.7 et 1.16 la généralisation des théorèmes de G. Weiss (Théorème 2.2) et de N. Nikolski (Théorème 2.3).

Théorème 2.10. *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $|\omega_n|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. On suppose, soit que ∂K est une courbe Alper-lisse avec des angles et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \infty,$$

soit que pour tout $\zeta \in \partial K$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |F_n(\zeta)|^p = \infty.$$

Soit \mathcal{X} un espace de Banach. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ tel que pour tout couple $(x, x^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |\langle F_n(T)x; x^* \rangle|^p < \infty.$$

Alors $\sigma(T) \subset G$.

Remarque 2.11. L'hypothèse $|\omega_n|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ permet d'obtenir l'inclusion $\sigma(T) \subset K$. En effet, d'après le Lemme 2.8, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $x^* \in \mathcal{X}^*$ on ait

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |\langle F_n(T)x; x^* \rangle|^p \leq C \|x\| \|x^*\|.$$

En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $x^* \in \mathcal{X}^*$

$$\omega_n |\langle F_n(T)x; x^* \rangle|^p \leq C \|x\| \|x^*\|.$$

Ceci prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|F_n(T)\| \leq \left(\frac{C}{\omega_n} \right)^{1/p}.$$

On en conclut que $\sigma(T) \subset K$ à l'aide du Théorème de A. Atzmon, A. Eremenko et M. Sodin (Théorème 1.6).

Exemple 2.12. Pour tout $p \in [1; +\infty]$, on note $H^p(\mathbb{D})$ l'espace de Hardy du disque. On suppose que K est tel qu'il n'existe aucun ζ dans ∂K , tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(\zeta)| = 0$. Alors l'espace

$$h^p := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \in H^p(\mathbb{D}) \right\},$$

muni de la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n \right\|_{H^p(\mathbb{D})}$$

satisfait les conditions conditions 1 à 3.

Démonstration. Il est facile de vérifier les conditions 1 et 2 pour l'espace h^p . Montrons à présent que la condition 3 est également vérifiée.

Soit $\zeta \in \partial K$; supposons par l'absurde que l'application V_ζ est bornée. Soit $a_n = F_n(\zeta)$ pour tout n .

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un prolongement de V_ζ à $(h^p)^*$ que l'on notera toujours V_ζ . Il existe donc $M \geq 0$ tel que pour tout $(x_n^*) \in (h^p)^*$,

$$|V_\zeta(x_n^*)| \leq M\|(x_n^*)\|.$$

De plus, pour tout $r \in (0; 1)$ et tout $f \in H^p$ on a

$$\|f(r \cdot)\|_{H^p} \leq \|f\|_{H^p}.$$

On obtient ainsi pour tout $(x_n^*) \in (h^p)^*$,

$$\begin{aligned} \|(r^n x_n^*)\| &= \sup\{|\langle r^n x_n^*, x_n \rangle|; \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{h^p} \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle x_n^*, r^n x_n \rangle|; \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{h^p} \leq 1\} \\ &\leq \|(x_n^*)\|. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $r \in (0; 1)$ et tout $(x_n^*) \in (h^p)^*$,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} x_n^* r^n a_n \right| \leq M\|(x_n^*)\|.$$

Cette inégalité prouve que $\|(r^n a_n)_{n \in \mathbb{N}}\| \leq M$ pour tout $r \in (0; 1)$, et donc que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans h^p . On a $f(e^{i\theta}) = \sum a_n e^{in\theta} \in H^p(\mathbb{T})$ donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ceci nous donne une contradiction et achève la démonstration. \square

Pour donner la généralisation du théorème de W. Mlak [25], on introduit les espaces de Hardy pour un domaine simplement connexe du plan complexe. Il existe deux manières de généraliser les espaces de Hardy à un domaine simplement connexe. Suivant les notations de [12], on s'intéresse ici aux espaces notés $E^p(D)$.

Définition 2.13 ([12]). Pour $p \in [1; \infty[$, une fonction f analytique dans $\mathbb{C} \setminus K$ est dite de classe $E^p(\mathbb{C} \setminus K)$ si il existe une suite de courbes rectifiables C_1, C_2, \dots dans $\mathbb{C} \setminus K$ telle que C_n délimite asymptotiquement tout compact inclus dans $\mathbb{C} \setminus K$, et telle que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{C_n} |f(z)|^p |dz| < \infty.$$

La caractérisation suivante des fonctions de classe E^p est bien adaptée au cadre des polynômes de Faber, car elle utilise la représentation conforme extérieure associée à K .

Théorème 2.14 ([12] Théorème 10.1). *Une fonction f est de classe $E^p(\mathbb{C} \setminus K)$ si et seulement si,*

$$\sup_{r \in (1; 2)} \int_{|\phi(z)|=r} |f(z)|^p |dz| < \infty.$$

La preuve de ce Théorème s'appuie sur le Théorème de convergence de Carathéodory dont on donne une forme partielle.

Théorème 2.15 (Théorème de convergence de Carathéodory, [13]). *Soit D un domaine simplement connexe et $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de domaines simplement connexes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \in D_n \subset D$ et tels que tout compact de D soit inclus dans tous les D_n sauf au plus un nombre fini. Soit φ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n les représentation conformes de \mathbb{D} sur D et D_n respectivement telles que $\varphi_n(0) = 0$ et $\varphi_n'(0) > 0$. Alors $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur tout compact de \mathbb{D} .*

Démonstration du Théorème 2.14. Soit $f \in E^p(\mathbb{C} \setminus K)$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de courbes rectifiables pour laquelle f vérifie la définition de $E^p(\mathbb{C} \setminus K)$. On appelle D_n l'extérieur de ces courbes et ψ_n la représentation conforme de $\{z; |z| > 1\}$ sur D_n . Alors dans la carte $z \rightarrow z^{-1}$ de la sphère de Riemann, les fonctions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et ψ vérifient les hypothèses du Théorème de convergence de Carathéodory. C'est à dire que si l'on note

$$\varphi(z) = \frac{1}{\psi(1/z)} \quad \text{et} \quad \varphi_n(z) = \frac{1}{\psi_n(1/z)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

alors d'après le Théorème de convergence de Carathéodory, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur tout compact de $\{z; 1/z \in \mathbb{C} \setminus K\}$. On en déduit que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ψ uniformément sur tout compact de $\mathbb{C} \setminus K$ ainsi que leurs dérivées. Ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \int_{|\phi(z)|=r} |f(z)|^p |dz| &= \int_{w=r} |f(\psi(w))|^p |\psi'(z)| |dw| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{w=r} |f(\psi_n(w))|^p |\psi'_n(z)| |dw| \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{w=1} |f(\psi_n(w))|^p |\psi'_n(z)| |dw| \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} |f(z)|^p |dz| \leq M < \infty. \end{aligned}$$

□

On peut maintenant énoncer la généralisation du résultat de W. Mlak ([25]).

Théorème 2.16. *On suppose, soit que ∂K est une courbe Alper-lisse avec des angles, soit que pour aucun $\zeta \in \partial K$ on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} |F_n(\zeta)| = 0$. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ tel que $\sigma(T) \subset K$.*

Si pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $x^ \in \mathcal{X}^*$ on a*

$$z \mapsto \langle (zI - T)^{-1}x; x^* \rangle \in E^1(\mathbb{C} \setminus K),$$

alors $\sigma(T) \subset G$.

Démonstration. On déduit de l'Exemple (2) et du Théorème 2.7 qu'il est suffisant de vérifier que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $x^* \in \mathcal{X}^*$ on a

$$\langle F_n(T)x; x^* \rangle_n \in h^1.$$

D'après le Lemme 1.5, on a pour tout $r > 1$,

$$\begin{aligned} \int_{|\phi(z)|=r} |\langle (zI - T)^{-1}x; x^* \rangle| |dz| &= \int_{z \in r\mathbb{T}} |\langle (\psi(z)I - T)^{-1}x; x^* \rangle| |\psi'(z)| |dz| \\ &= \int_{z \in r\mathbb{T}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} \langle F_n(T)x; x^* \rangle \right| |dz| \\ &= \int_{z \in r^{-1}\mathbb{T}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} z^n \langle F_n(T)x; x^* \rangle \right| r |dz|. \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$z \mapsto \left| \sum_{n=0}^{\infty} z^n \langle F_n(T)x; x^* \rangle \right| \in H^1(\mathbb{D}),$$

c'est à dire que $\langle F_n(T)x; x^* \rangle_n \in h^1$.

□

Chapitre 3

Espaces admissibles de suites

Dans ce chapitre, on considère un compact simplement connexe K d'intérieur non vide G et auquel est associée la suite des polynômes de Faber $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'objet de ce chapitre est de présenter des critères pour que le spectre d'un opérateur T soit inclus dans l'intérieur du compact K . Une différence avec le chapitre précédent est que l'on ne supposera pas a priori l'inclusion de ce spectre dans K . Ces critères reposent sur la notion d'espace admissible de suites présenté ci dessous.

3.1 Théorème général

Définition 3.1. Un espace de Banach $E \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est appelé un *espace admissible de suites* s'il satisfait les propriétés suivantes :

- si $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ et $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_E \leq \|(b_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_E$;
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ telle que $a_k \neq 0$.

Proposition 3.2. Soit E un espace admissible de suites. Alors pour tout ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$, la fonction caractéristique de F , notée χ_F , est dans E .

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après le second axiome d'admissibilité, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ telle que $a_k \neq 0$. Alors $|\chi_{\{k\}}(n)| \leq |a_k|^{-1}|a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le premier axiome d'admissibilité implique alors que E contient $\chi_{\{k\}}$. En considérant des sommes finies, on obtient que E contient la fonction caractéristique de tout ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$. \square

Le résultat principal de ce chapitre est la généralisation suivante d'un théorème de J. van Neerven [37].

Théorème 3.3. Soit \mathcal{X} un espace de Banach, $T \in B(\mathcal{X})$ et E un espace admissible de suites tels que pour tout $\zeta \in \partial K$

$$\|(F_n(\zeta)\chi_{\{0, \dots, N\}}(n))_n\|_E \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Si pour tout couple $(x; y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on a

$$(\langle F_n(T)x; y \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in E,$$

alors

$$\sigma(T) \subset G.$$

Lemme 3.4. *Soit $T \in B(\mathcal{X})$ un opérateur agissant sur un espace de Banach \mathcal{X} . On suppose que $\sigma(T) \not\subseteq G$. Alors, il existe $\lambda \notin G$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $x_N \in \mathcal{X}$ et $x_N^* \in \mathcal{X}^*$ qui vérifient $\|x_N\| = 1$, $\|x_N^*\| = 1$ et*

$$|\langle F_n(T)x_N; x_N^* \rangle| > |F_n(\lambda)| - \varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \partial\sigma(T) \setminus G$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Comme $\lambda \in \partial\sigma(T)$, on a que λ est dans le spectre ponctuel approché de T , $\sigma_{app}(T)$ (voir par exemple [10]). Il existe donc une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{X} telle que $\|y_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\|Ty_n - \lambda y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F_k(T)y_n - F_k(\lambda)y_n\| = 0.$$

Soit n_1 tel que

$$\|F_k(T)y_{n_1} - F_k(\lambda)y_{n_1}\| < \varepsilon, \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Soit $x_N = y_{n_1}$ et $x_N^* \in \mathcal{X}^*$ tel que $\|x_N^*\| = 1$ et $\langle x_N^*; x_N \rangle = 1$. Alors, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, on a

$$\begin{aligned} |\langle F_k(T)x_N; x_N^* \rangle| &\geq |\langle F_k(\lambda)x_N; x_N^* \rangle| - |\langle F_k(T)x_N - F_k(\lambda)x_N; x_N^* \rangle| \\ &> |F_k(\lambda)| - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Démonstration du Théorème 3.3. D'après le Lemme 2.8 on sait qu'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$, $x^* \in \mathcal{X}^*$, avec $\|x\| = 1$ et $\|x^*\| = 1$, on ait

$$\left\| (\langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_E \leq M.$$

Supposons par l'absurde que $\sigma(T) \not\subseteq G$. Alors, d'après le Lemme 3.4, il existe $\lambda \notin G$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $x_N \in \mathcal{X}$ et $x_N^* \in \mathcal{X}^*$ vérifiant $\|x_N\| \leq 1$, $\|x_N^*\| \leq 1$ et

$$|\langle F_n(T)x_N; x_N^* \rangle| > |F_n(\lambda)| - \varepsilon, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|\langle F_n(T)x_N; x_N^* \rangle| \geq |F_n(\lambda)|\chi_{\{0, \dots, N-1\}}(n) - \varepsilon\chi_{\{0, \dots, N-1\}}(n).$$

D'après le premier axiome d'admissibilité, on a alors

$$\left\| (\langle F_n(T)x_N; x_N^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_E \geq \|(F_n(\lambda)\chi_{\{0, \dots, N\}}(n))_n\|_E - \varepsilon\|\chi_{\{0, \dots, N-1\}}\|_E.$$

On obtient que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}$

$$\|(F_n(\lambda)\chi_{\{0, \dots, N\}}(n))_n\|_E \leq M + \varepsilon\|\chi_{\{0, \dots, N-1\}}\|_E.$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\|(F_n(\lambda)\chi_{\{0, \dots, N\}}(n))_n\|_E \leq M,$$

ce qui donne la contradiction si $\lambda \in \partial K$, soit par hypothèse, soit d'après le Théorème 1.16. Si $\lambda \notin K$, alors

$$|F_n(\lambda)|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R > 1.$$

Mais on sait que pour tout $\zeta \in \partial K$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} |F_n(\zeta)|^{1/n} \leq 1$, et

$$\|(F_n(\zeta)\chi_{\{0, \dots, N\}}(n))_n\|_E \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Donc, si $\lambda \notin K$ on obtient par le premier axiome d'admissibilité

$$\|(F_n(\lambda)\chi_{\{0, \dots, N\}}(n))_n\|_E \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty,$$

ce qui donne à nouveau une contradiction. \square

3.2 Applications

Remarque 3.5. Il est facile de vérifier que $l^p(\omega)$ (cf. Exemple 1 du chapitre 2) est un espace admissible de suites et la condition

$$\|(F_n(\zeta)\chi_{\{0, \dots, N-1\}}(n))\|_{l^p(\omega)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$$

est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |F_n(\zeta)|^p = \infty.$$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 3.6. *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose, soit que ∂K est une courbe Alper-lisse avec des angles et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \infty,$$

soit que pour tout $\zeta \in \partial K$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |F_n(\zeta)|^p = \infty.$$

Soit \mathcal{X} un espace de Banach et $T \in B(\mathcal{X})$ tel que pour tout $(x, x^) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n |\langle F_n(T)x; x^* \rangle|^p < \infty.$$

Alors $\sigma(T) \subset G$.

Remarque 3.7. Contrairement au théorème 2.10 on ne suppose pas

$$|\omega_n|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

cela vient du fait qu'on ne suppose pas dans le Théorème 3.3 que le spectre de T est inclus dans K a priori.

Démonstration du Théorème 3.6. L'application conforme extérieure

$$\phi : \mathbb{C} \setminus K \longrightarrow \{w; |w| > 1\}$$

vérifie

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |\phi(z)| = \infty.$$

Il existe donc un réel $R > 0$ tel que

$$\sigma(T) \cap \{z : \phi(z) \geq R\} = \emptyset.$$

On déduit alors du Théorème 1.6 que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|F_n(T)\|^{1/n} < R.$$

Soit $(\tilde{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\tilde{\omega}_n = \begin{cases} \omega_n & \text{si } \omega_n \neq 0, \\ R^{-np} & \text{si } \omega_n = 0. \end{cases}$$

La suite $(\tilde{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs et pour tout $(x, x^*) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\omega}_n |\langle F_n(T)x; x^* \rangle|^p < \infty.$$

Le Théorème 3.3 s'applique donc à l'espace $E = l^p(\tilde{\omega})$, ce qui permet de conclure. \square

On donne à présent d'autres applications du Théorème 3.3. La première application est basée sur les espaces d'Orlicz discrets.

Définition 3.8. Une fonction $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est appelée une *fonction de Young* si elle est convexe et elle vérifie

$$\frac{\Phi(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \text{ et } \frac{\Phi(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Pour toute suite complexe $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on considère $M_\Phi(x)$ défini par

$$M_\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(x_n).$$

L'espace de Orlicz L^Φ est l'espace des suites complexes $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $M_\Phi(kx) < \infty$.

Théorème 3.9. Soit Φ une fonction de Young. L'espace L^Φ muni de la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \inf \{k; M_\Phi(x/k) \leq 1\}$$

est un espace de Banach, et si $\Phi(t) > 0$ pour tout $t > 0$, alors

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_{L^\Phi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Lemme 3.10 ([37]). *Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Alors il existe une fonction de Young Φ telle que l'espace de Orlicz L^Φ contient toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(|a_n|) < \infty,$$

et satisfait

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_{L^\Phi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Démonstration. Quitte à multiplier φ par un réel strictement positif, on peut supposer sans perte de généralité que $\varphi(1) = 1$. Soit Φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Alors Φ est une fonction de Young et si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \varphi(|a_n|) < \infty,$$

alors l'ensemble des indices n tels que $|a_n| > 1$ est fini et si $|a_n| \leq 1$, alors $\Phi(|a_n|) \leq \varphi(|a_n|)$. On obtient alors

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \Phi(|a_n|) < \infty,$$

donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\Phi$.

Et comme Φ est strictement croissante et strictement positive sur $]0; \infty[$, on obtient

$$\|\chi_{\{0, \dots, N-1\}}\|_{L^\Phi} = \inf \left\{ k; \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(1/k) \leq 1 \right\} = \inf \{k; N\Phi(1/k) \leq 1\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

□

Comme les espaces d'Orlicz sont des espaces de suites admissibles, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.11. *On suppose, soit que ∂K est une courbe Alper-lisse avec des angles, soit que pour tout $\zeta \in \partial K$, la suite $(|F_n(\zeta)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ et soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Si pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $x^* \in \mathcal{X}^*$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(|\langle F_n(T)x; x^* \rangle|) < \infty,$$

alors

$$\sigma(T) \subset G.$$

Pour obtenir un critère se basant sur un espace d'Orlicz et faisant intervenir une suite de poids, on a besoin d'une hypothèse classique dans la théorie des espaces d'Orlicz, la condition Δ_2 .

Définition 3.12. On dit qu'une fonction φ satisfait la condition Δ_2 en 0 s'il existe $\varepsilon > 0$ et $K > 0$ tels que pour tout $x \in [0; \varepsilon]$, on a $\varphi(t/2) \geq K\varphi(t)$.

Théorème 3.13. *On suppose, soit que ∂K est une courbe Alper-lisse avec des angles, soit que pour tout $\zeta \in \partial K$, la suite $(|F_n(\zeta)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ et soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante qui satisfait la condition Δ_2 et telle que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t > 0$. Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \varphi(\omega_n) = \infty.$$

Si pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $x^* \in \mathcal{X}^*$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\omega_n |\langle F_n(T)x; x^* \rangle|) < \infty,$$

alors

$$\sigma(T) \subset G.$$

Démonstration. De la même manière que dans la preuve du Théorème 3.6, on peut supposer dans perte de généralité que w_n est strictement positif pour tout n . Quitte à remplacer ω_n par $\min(\omega_n, \varepsilon)$, on peut également supposer que $\omega_n \in]0; \varepsilon]$ pour tout n . Soit Φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Et soit E l'espace défini par

$$E = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; (\omega_n x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^\Phi \right\},$$

muni de la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_E = \|(\omega_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{L^\Phi}.$$

Comme φ est positive et croissante, on a pour tout $t \in]0; \varepsilon]$,

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s) ds \geq \int_{t/2}^t \varphi(s) ds \geq \frac{t}{2} \varphi(t/2).$$

La condition Δ_2 permet ainsi d'obtenir

$$\Phi(t) \geq \frac{t}{2} \varphi(t/2) \geq \frac{Kt}{2} \varphi(t).$$

Soit $k > 1$, et $m = E(\ln(k)/\ln(2)) + 1$. Alors

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Phi(\omega_j/k) \geq \frac{K^m}{2^m} \sum_{j=0}^{n-1} \omega_j \varphi(\omega_j).$$

Ce qui prouve que

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

On peut alors appliquer le Théorème 3.3. □

On propose une dernière application du Théorème 3.3.

Théorème 3.14. *On suppose, soit que ∂K est une courbe Alper-lisse avec des angles, soit que pour tout $\zeta \in \partial K$, la suite $(|F_n(\zeta)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif. Soit $T \in B(\mathcal{X})$. On suppose qu'il existe une fonction strictement positive φ sur $[0; 1)$ telle que*

$$\sqrt{1-r}\varphi(r) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} 0$$

et telle que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $x^* \in \mathcal{X}^*$

$$\frac{1}{\varphi(r)} \|(r^n \langle F_n(T)x; x^* \rangle)_{n \in \mathbb{N}}\|_2 \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} 0.$$

Alors

$$\sigma(T) \subset G.$$

Ce théorème repose sur les espaces admissibles définis dans le Lemme suivant.

Lemme 3.15. *Soit φ une application strictement positive sur $[0; 1)$ telle que $\varphi(r)$ tend vers l'infini et $\sqrt{1-r}\varphi(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 1. Alors l'espace E défini par*

$$E = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}; \frac{1}{\varphi(r)} \|(r^n x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2 \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_E = \sup_{r \in (0; 1)} \frac{1}{\varphi(r)} \|(r^n x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2,$$

est un espace admissible de suites tel que

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_E \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que E est un espace admissible de suites. De plus on a

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_E = \sup_{r \in (0; 1)} \frac{1}{\varphi(r)} \|(r^k \chi_{\{0, \dots, n-1\}}(k))_{k \in \mathbb{N}}\|_2,$$

et

$$\|(r^k \chi_{\{0, \dots, n-1\}}(k))\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n-1} r^{2k} = \frac{1-r^{2n}}{1-r^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(r)} \|(r^k \chi_{\{0, \dots, n-1\}}(k))_{k \in \mathbb{N}}\|_2 &= \frac{1}{\varphi(r)} \frac{\sqrt{1-r^n}}{\sqrt{1-r}} \frac{\sqrt{1+r^n}}{\sqrt{1+r}} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-r^n}}{\varphi(r)\sqrt{1-r}}. \end{aligned}$$

Soit $M > 0$. Comme $\sqrt{1-r}\varphi(r)$ tend vers 0 quand r tend vers 1, il existe $r_0 < 1$ tel que

$$\frac{1}{\varphi(r_0)\sqrt{1-r_0}} > 4M.$$

Soit N tel que $\sqrt{1-r_0^N} > 1/2$. On obtient que pour tout $n \geq N$ on a

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_E \geq M.$$

Ce qui achève la démonstration. □

Remarque 3.16. La démonstration du lemme montre que la condition

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sqrt{1-r} \varphi(r) = 1$$

est en fait équivalente à la condition sur la norme de E

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Démonstration du Théorème 3.14. Quitte à remplacer, si nécessaire, la fonction φ par la fonction φ_1 définie par

$$\varphi_1(r) = \max(\varphi(r); (1-r)^{-1/4}), \quad 0 \leq r < 1,$$

on peut supposer $\varphi(r) \xrightarrow[r \rightarrow 1]{} \infty$. On peut alors appliquer le Lemme 3.15 et le Théorème 3.3 pour obtenir $\sigma(T) \subset G$. \square

3.3 Estimations explicites

3.3.1 Formule générale

On suppose dans cette partie que Γ est une courbe de Jordan analytique. Soit E un espace admissible de suites qui contient toutes les suites de la forme $(r^n)_n$ pour $r \in]0; 1[$ et tel que

$$\|\chi_{\{0, \dots, n-1\}}\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Soit $T \in B(\mathcal{X})$ un opérateur de type E faible, c'est à dire tel que pour tout couple $(x; y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on ait

$$(\langle F_n(T)x; y \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in E.$$

Comme on a supposé que Γ est une courbe de Jordan analytique, on obtient par le Théorème 1.11 que l'application ψ se prolonge sur $\overline{r_0 \mathbb{D}^c}$ avec $r_0 < 1$ en une application analytique et injective.

Notation 3.17. Pour tout $r \in (r_0; 1)$, soit Γ_r la courbe de Jordan analytique donnée par

$$\Gamma_r = \{\psi(z); |z| = r\}$$

et soit G_r l'intérieur de la courbe de Jordan Γ_r .

On sait d'après le Théorème 3.3 que le spectre de T est inclus dans G . Le but de cette section est de donner une estimation du "rayon" $r \in (r_0; 1)$ tel que $\sigma(T) \subset \overline{G_r}$. On généralise ainsi les estimations faites par N. Nikolski dans [28] dans le cas du disque. Notre estimation de ce "rayon" est donnée en fonction de la constante $C(T, E)$ définie par

$$C(T, E) = \sup \left\{ \left\| \left(\langle F_n(T)x; y \rangle \right)_{n \in \mathbb{N}} \right\|_E ; \|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1 \right\}.$$

Notation 3.18. Pour $r \in (r_0; 1)$ on note

$$p(r) = \inf_{r \leq |\phi(\zeta)| < 1} \|(F_n(\zeta))_{n \in \mathbb{N}}\|_E$$

et pour $t > 0$

$$p^{-1}(t) = \begin{cases} r_0 & \text{si } \{r \in (r_0; 1); p(r) \leq t\} = \emptyset, \\ \sup\{r \in (r_0; 1); p(r) \leq t\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 3.19. *Soit $r \in (r_0; 1)$. Si $\sigma(T) \not\subseteq G_r$, alors il existe $\lambda \in (G_r)^c$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_N \in \mathcal{X}$ et $x_N^* \in \mathcal{X}^*$ qui vérifient $\|x_N\| = 1$, $\|x_N^*\| = 1$ et*

$$|\langle x_N^*; F_k(T)x_N \rangle| > |F_k(\lambda)| - \varepsilon, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Démonstration. Comme $\sigma(T) \not\subseteq G_r$, il existe $\lambda \in \partial\sigma(T) \setminus G_r$. En particulier λ appartient au spectre ponctuel approché $\sigma_{app}(T)$ de T . Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_N \in \mathcal{X}$ tel que $\|x_N\| = 1$ et

$$\|F_k(T)x_N - F_k(\lambda)x_N\| < \varepsilon, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Soit $x_N^* \in \mathcal{X}^*$ tel que $\|x_N^*\| = 1$ et $\langle x_N^*; x_N \rangle = 1$. Alors pour tout $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, on a

$$\begin{aligned} |\langle x_N^*; F_k(T)x_N \rangle| &\geq |\langle x_N^*; F_k(\lambda)x_N \rangle| - |\langle x_N^*; F_k(T)x_N - F_k(\lambda)x_N \rangle| \\ &\geq |F_k(\lambda)| - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

On en déduit le résultat suivant.

Théorème 3.20. *Soit T un opérateur tel que pour tout couple $(x; y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}^*$ on ait*

$$(\langle F_n(T)x; y \rangle)_{n \in \mathbb{N}} \in E.$$

Et soit r le réel donné par

$$r = p^{-1}(C(T, E)).$$

Alors

$$\sigma(T) \subset \overline{G_r}.$$

Démonstration. On suppose par l'absurde que $\sigma(T) \not\subseteq \overline{G_r}$. Soit λ le nombre complexe donné par le Lemme 3.19. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_N \in \mathcal{X}$ et $x_N^* \in \mathcal{X}^*$ qui vérifient $\|x_N\| = 1$, $\|x_N^*\| = 1$ et

$$|\langle x_N^*; F_k(T)x_N \rangle| > |F_k(\lambda)| - \varepsilon, \quad (k \in \{0, 1, \dots, N-1\}).$$

Par définition de $C(T, E)$, on a

$$C(T, E) \geq \left\| (\langle F_n(T)x_N; x_N^* \rangle)_n \right\|_E \geq \left\| ((F_n(\lambda) - \varepsilon)\chi_{\{0,1,\dots,N-1\}}(n))_n \right\|_E.$$

Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| (F_0(\lambda), F_1(\lambda), \dots, F_{N-1}(\lambda), 0, \dots)_n \right\|_E \leq C(T, E).$$

Mais $F_n(\lambda) \sim \phi(\lambda)^n$, $n \rightarrow \infty$, et $|\phi(\lambda)| < 1$. Donc $(F_n(\lambda))_n \in E$ et

$$\left\| (F_n(\lambda))_n \right\|_E \leq C(T, E).$$

En utilisant le fait que $\lambda \notin \overline{G_r}$, et d'après la définition de r comme $r = p^{-1}(C(T, E))$, on obtient

$$\left\| (F_n(\lambda))_n \right\|_E > C(T, E).$$

Ce qui donne une contradiction et achève la démonstration. □

3.3.2 Exemples concrets

Pour certains domaines concrets, les quantités décrites ci-dessus peuvent être données explicitement. On présente ici deux cas, dans le premier on suppose que K_{r_0} est convexe et le second concerne une ellipse.

Pour le premier cas on utilise une inégalité de Kövari et Pommerenke [21].

Théorème 3.21. [21] *Si K est convexe, alors pour tout $z \in \partial K$ et tout $n \geq 0$,*

$$|F_n(z) - \phi(z)^n| \leq 1.$$

Corollaire 3.22. *Soit $r < 1$ et $1 \leq p < \infty$. Soit T un opérateur de type l^p faible pour un compact K délimité par une courbe de Jordan analytique. On suppose que K_{r_0} est convexe et que*

$$C(T, l^p) \leq \left(\frac{1}{1 - r^p} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{1 - r_0^p} \right)^{1/p}.$$

Alors

$$\sigma(T) \subset K_r.$$

Démonstration. On a d'après l'inégalité de Kövari et Pommerenke [21] et un changement de variable que pour tout $z \in \Gamma_{r_0}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|F_n(z) - \phi(z)^n| \leq r_0^n.$$

Comme $F_n - \phi^n$ est une fonction analytique sur $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_0$ qui s'annule à l'infini, on a d'après le principe du maximum que pour tout $z \notin K_{r_0}$

$$|F_n(z) - \phi(z)^n| \leq r_0^n.$$

Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| > r_0$, alors

$$\begin{aligned} \left\| (F_n(\psi(w)))_{n \geq 0} \right\|_{l^p} &= \left\| (w^n + (F_n(\psi(w)) - w^n))_{n \geq 0} \right\|_{l^p} \\ &\geq \left\| (w^n)_{n \geq 0} \right\|_{l^p} - \left\| (r_0^n)_{n \geq 0} \right\|_{l^p}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in (r_0; 1)$

$$\begin{aligned} p(t) &\geq \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{np} \right)^{1/p} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (r_0)^{np} \right)^{1/p} \\ &\geq \left(\frac{1}{1 - t^p} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{1 - (r_0)^p} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On peut alors conclure grâce au le Théorème 3.20. □

On s'intéresse à présent au cas plus spécifique d'une ellipse. Soit $R > 1$ et soit K le compact délimité par l'ellipse dont les foyers sont -1 and 1, et les demi-axes

$$a = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right) \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2} \left(R - \frac{1}{R} \right).$$

Alors (voir Exemple 1.2) la représentation conforme ψ est donnée par la formule

$$\psi(w) = \frac{1}{2} \left(R w + \frac{1}{R w} \right)$$

et la suite des polynômes de Faber associée à K est donnée par

$$F_n(z) = \frac{2}{R^n} C_n(z), \quad n \geq 1,$$

où $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des polynômes de Chebychev. De plus, on vérifie facilement que pour tout $n \geq 1$ on a

$$F_n(\psi(w)) = w^n + \frac{1}{R^{2n}w^n}.$$

Corollaire 3.23. *Soit $r < 1$ et $1 \leq p < \infty$. Soit T un opérateur de type l^p faible pour K . Si*

$$C(T, l^p) \leq \left(\frac{1}{1 - r^p} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{rR^2} \right)^p} \right)^{1/p},$$

alors

$$\sigma(T) \subset K_r.$$

Remarque 3.24. Cette estimation est meilleure de celle donnée dans le Corollaire 3.22 car $r_0 = 1/R > 1/rR^2$ pour tout $r > r_0$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que $r_0 = 1/R$. Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| > 1/R$, alors

$$\begin{aligned} \left\| (F_n(\psi(w)))_{n \geq 0} \right\|_{l^p} &= \left\| \left(w^n + \frac{1}{R^{2n}w^n} \right)_{n \geq 0} \right\|_{l^p} \\ &\geq \left\| (w^n)_{n \geq 0} \right\|_{l^p} - \left\| \left(\frac{1}{R^{2n}w^n} \right)_{n \geq 0} \right\|_{l^p}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in (1/R; 1)$

$$\begin{aligned} p(t) &\geq \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{np} \right)^{1/p} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{tR^2} \right)^{np} \right)^{1/p} \\ &\geq \left(\frac{1}{1 - t^p} \right)^{1/p} - \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{tR^2} \right)^p} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

On peut alors conclure par le Théorème 3.20. □

Deuxième partie

Critères de cobord

Chapitre 4

Equation de cobord et Limites de Banach

4.1 Introduction

On considère dans ce chapitre un opérateur borné T sur un espace de Banach \mathcal{X} . Soit x un élément de \mathcal{X} , on considère l'équation de cobord

$$(I - T)y = x.$$

S'il existe une solution y à cette équation, on dit que x est un *cobord* de T . Cette terminologie provient de la notion de cohomologie en topologie algébrique. On recommande au lecteur le texte [35] de T. Tao pour une jolie introduction concernant la cohomologie des systèmes dynamiques. Considérant l'équation $(I - T)y = x$ en théorie des opérateurs, il est naturel de considérer les *sommes ergodiques*, c'est-à-dire pour un opérateur T et un élément x de \mathcal{X} on s'intéresse au comportement de

$$S_n x := S_n(T)x := x + Tx + \dots + T^{n-1}x, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En effet le Théorème ergodique de von Neumann dans le cadre d'un espace de Hilbert, puis le Théorème des moyennes ergodiques de Lorch (voir par exemple [23] pour ces deux résultats) dans le cadre d'un espace de Banach réflexif, ont montré que pour un opérateur à *puissances bornées*, c'est-à-dire tel que la famille $\{\|T^n\|; n \in \mathbb{N}\}$ est bornée, on a

$$\mathcal{X} = \left\{ x \in \mathcal{X}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(T)x \text{ existe} \right\} = \{y \in \mathcal{X}; Ty = y\} \oplus \overline{(I - T)\mathcal{X}}.$$

On a en particulier que x appartient à l'ensemble $\overline{(I - T)\mathcal{X}}$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n(T)x = 0.$$

De plus si $(I - T)\mathcal{X}$ n'est pas fermé, alors (voir par exemple [18] et [5]) pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement positive et qui tend vers 0, il existe $x \in \overline{(I - T)\mathcal{X}} \setminus (I - T)\mathcal{X}$ tel que

$$\left\| \frac{1}{n} S_n(T)x \right\| \geq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cependant si $x \in (I - T)\mathcal{X}$, c'est-à-dire s'il existe une solution y à l'équation $(I - T)y = x$, alors $S_n x = y - T^n y$. En particulier la suite $(S_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et

$$\left\| \frac{1}{n} S_n(T)x \right\| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le Théorème suivant de F. Browder [7] (redécouvert par P. L. Butzer et U. Westphal dans [8]), établit la réciproque de cette observation.

Théorème 4.1. [7] *Soit \mathcal{X} un espace de Banach réflexif et T un opérateur à puissances bornées. Alors l'équation $(I - T)y = x$ a une solution y si et seulement si*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\| < \infty.$$

Ce résultat a été généralisé par M. Lin [24] au cas d'un opérateur continu pour la topologie faible étoile sur le dual d'un espace de Banach. Si l'espace est réflexif, tout opérateur linéaire borné est faible étoile continu, il s'agit donc bien d'une généralisation du résultat de F. Browder. La démonstration proposée de ce Théorème m'a été présentée par C. Badea, c'est sur cette démonstration que se basent certaines généralisations présentées dans la suite.

Théorème 4.2. [24] *Soit \mathcal{X} le dual d'un espace de Banach, soit T un opérateur à puissances bornées sur \mathcal{X} et continu pour la topologie faible étoile et soit $x \in \mathcal{X}$. Alors l'équation $(I - T)y = x$ a une solution y si et seulement si*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\| < \infty.$$

Démonstration. Soit \mathcal{Y} un espace de Banach pré-dual de \mathcal{X} , comme T est continu pour la topologie faible étoile, il existe $A \in B(\mathcal{Y})$ tel que $A^* = T$. On suppose

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\| < \infty.$$

Soit \mathcal{L} une limite de Banach sur l^∞ . On considère $y : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$, l'application définie par

$$y(t) = \mathcal{L} \left(\left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right)_n \right), \quad t \in \mathcal{Y}.$$

Comme

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\| < \infty,$$

l'application $y : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ est bien définie, linéaire et bornée, c'est-à-dire que $y \in \mathcal{Y}^* = \mathcal{X}$. Et on a pour tout $t \in \mathcal{Y}$

$$\begin{aligned} \langle (I - T)y; t \rangle &= \langle y; (I - A)t \rangle \\ &= \mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; (I - A)t \right\rangle \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\left\langle (I - T) \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right) - \mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=1}^{n+1} T^k x; t \right\rangle \right) \\ &= \langle x; t \rangle + \mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right) - \mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=0}^{n+1} T^k x; t \right\rangle \right) \\ &= \langle x; t \rangle, \end{aligned}$$

la dernière étape est due à l'invariance par translation de la limite de Banach \mathcal{L} . On en déduit donc que y est bien solution de $(I - T)y = x$. \square

Le but de cette partie est de donner des critères portant sur x et T assurant que x est un cobord de T en généralisant le Théorème de F. Browder [7] ou en affaiblissant ses hypothèses.

4.2 Limites de Banach à poids

Dans cette section on cherche à généraliser le Théorème de M. Lin (Théorème 4.2) en introduisant des poids dans la somme $\sum_{k=0}^n T^k x$. Plus précisément on va démontrer le Théorème suivant.

Théorème 4.3. *Soit \mathcal{X} le dual d'un espace de Banach, soit T un opérateur à puissances bornées sur \mathcal{X} et continu pour la topologie faible étoile et soit $x \in \mathcal{X}$. Alors l'équation $(I - T)y = x$ a une solution y si et seulement s'il existe une suite strictement positive et croissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) = 1$ et*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{a_n} \left\| \sum_{k=0}^n a_{n-k} T^k x \right\| < \infty.$$

Remarque 4.4. Le Théorème de M. Lin (Théorème 4.2) correspond au cas particulier de la suite définie par $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer ce Théorème on va introduire des prolongements de limites de Banach à des ensembles de suites dont les moyennes pondérées sont bornées. On introduit maintenant ces moyennes pondérées par des suites de poids $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $\gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\gamma_0 \neq 0$, on note

$$a_n = \sum_{j=0}^n \gamma_j$$

et pour toute suite complexe $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$M_n^\gamma(x) = \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^n \gamma_{n-j} x_j.$$

Ainsi défini, $M_n^\gamma(x)$ est la moyenne des n premiers termes de la suite x pondérée par la famille de poids γ . On définit E_γ l'espace

$$E_\gamma = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}; \sup_{n \geq 0} |M_n^\gamma(x)| < \infty \right\}.$$

On se donne une limite de Banach \mathcal{L} et on définit \mathcal{L}_γ sur E_γ par

$$\mathcal{L}_\gamma(x) = \mathcal{L}\left((M_n^\gamma(x))_n\right), \quad x \in E_\gamma.$$

Proposition 4.5. *On suppose que la suite (γ_n) vérifie*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{a_n} = 0.$$

Alors la restriction de \mathcal{L}_γ à l^∞ est une limite de Banach et \mathcal{L}_γ est invariante par translation sur E_γ .

Démonstration. On va vérifier que \mathcal{L}_γ est invariante par translation, les autres propriétés sont des conséquences directes de la définition de \mathcal{L}_γ . Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_\gamma$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\gamma((x_{n+1})_n) &= \mathcal{L} \left(\left(\frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^n \gamma_{n-j} x_{j+1} \right)_n \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\left(\frac{1}{a_n} \sum_{j=1}^{n+1} \gamma_{n+1-j} x_j \right)_n \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} M_{n+1}^\gamma(x) - \frac{\gamma_{n+1} x_0}{a_n} \right)_n \right). \end{aligned}$$

Par hypothèse on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_n}{a_n} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Donc par invariance par translation de la limite de Banach \mathcal{L} , on obtient

$$\mathcal{L} \left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} M_{n+1}^\gamma(x) - \frac{\gamma_{n+1} x_0}{a_n} \right)_n \right) = \mathcal{L} \left((M_n^\gamma(x))_n \right) + 0.$$

Ce qui nous donne

$$\mathcal{L}_\gamma((x_{n+1})_n) = \mathcal{L}_\gamma((x_n)_n).$$

□

Démonstration du Théorème 4.3. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant donnée, on pose $\gamma_0 = a_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = a_n - a_{n-1}$. La suite $\gamma = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite positive telle que $\gamma_0 \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n/a_n = 0$ avec $a_n = \sum_{j=0}^n \gamma_j$. Soit \mathcal{L} une limite de Banach, l'application \mathcal{L}_γ définie comme précédemment sur E_γ est donc invariante par translation et prolonge une limite de Banach.

Soit \mathcal{Y} un espace de Banach pré-dual de \mathcal{X} , comme T est continu pour la topologie faible étoile, il existe $A \in B(\mathcal{Y})$ tel que $A^* = T$. Soit \mathcal{L} une limite de Banach sur $l^\infty(\mathbb{C})$ et \mathcal{L}_γ définie sur E_γ . On considère $y : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$y(t) = \mathcal{L}_\gamma \left(\left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right)_n \right), \quad t \in \mathcal{Y}.$$

Pour vérifier que $y(t)$ est bien défini pour tout $t \in \mathcal{Y}$, il suffit de vérifier que

$$\left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right)_n \in E_\gamma.$$

On a

$$\begin{aligned} M_n^\gamma \left(\left(\left\langle \sum_{k=0}^j T^k x; t \right\rangle \right)_j \right) &= \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^n \gamma_{n-j} \sum_{k=0}^j \langle T^k x; t \rangle \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n \langle T^k x; t \rangle \sum_{j=k}^n \gamma_{n-j} \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n \langle T^k x; t \rangle \sum_{j=0}^{n-k} \gamma_j \\ &= \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n a_{n-k} \langle T^k x; t \rangle. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left| M_n^\gamma \left(\left(\left\langle \sum_{k=0}^j T^k x; t \right\rangle \right)_j \right) \right| \leq \|t\| \left\| \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^n a_{n-k} T^k x \right\|.$$

Ce qui montre que $y(t)$ est bien défini et par linéarité et continuité de \mathcal{L} , y est linéaire et continue sur \mathcal{Y} , c'est-à-dire que $y \in \mathcal{Y}^* = \mathcal{X}$. Et de plus pour tout $t \in \mathcal{Y}$ on a

$$\begin{aligned} \langle (I - T)y; t \rangle &= \langle y; (I - A)t \rangle \\ &= \mathcal{L}_\gamma \left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; (I - A)t \right\rangle \right) \\ &= \mathcal{L}_\gamma \left(\left\langle (I - T) \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right) \\ &= \mathcal{L}_\gamma \left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right) - \mathcal{L}_\gamma \left(\left\langle \sum_{k=1}^{n+1} T^k x; (I - A)t \right\rangle \right) \\ &= \langle x; t \rangle + \mathcal{L}_\gamma \left(\left\langle \sum_{k=0}^n T^k x; t \right\rangle \right) - \mathcal{L}_\gamma \left(\left\langle \sum_{k=0}^{n+1} T^k x; t \right\rangle \right) \\ &= \langle x; t \rangle, \end{aligned}$$

la dernière étape est due à l'invariance par translation de \mathcal{L}_γ sur l'espace E_γ . On en déduit que y est bien solution de $(I - T)y = x$. \square

Chapitre 5

Cas d'une isométrie

Dans ce chapitre on s'intéresse au cas d'un opérateur isométrique T sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Le but de ce chapitre est d'affaiblir l'hypothèse sur les sommes ergodiques, en s'appuyant sur une hypothèse sur le comportement de $\|T^{*n}x\|$, pour $x \in \mathcal{H}$. On s'est pour cela inspiré d'un résultat de R. Rochberg [33] qui s'intéresse au cas d'une translation unilatérale et utilise une hypothèse sur les coefficients de x dans la décomposition en somme orthogonale de \mathcal{H} associée à cette translation.

Définition 5.1. Soit une isométrie T sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Un sous-espace \mathcal{K} de \mathcal{H} est appelé *ambulant* pour T lorsque

$$T^p\mathcal{K} \perp T^q\mathcal{K} \quad \text{pour } p, q \in \mathbb{N}, p \neq q.$$

L'isométrie T s'appelle *translation unilatérale* lorsqu'il existe dans \mathcal{H} un sous-espace \mathcal{K} , ambulant pour T et tel que

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n\mathcal{K} = \mathcal{H}.$$

Le Théorème de R. Rochberg est le suivant.

Théorème 5.2. [33] Soit S une translation unilatérale, f un élément de \mathcal{H} . Avec les notations introduites dans la définition, on pose f_j la projection de f sur $T^j\mathcal{K}$. S'il existe $\beta > 0$ tel que

$$\|f_j\| = O(2^{-\beta j}),$$

alors une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un g dans \mathcal{H} tel que $(I-S)g = f$ est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k f \right\|^2 = 0.$$

Remarque 5.3. La condition

$$\|f_j\| = O(2^{-\beta j})$$

implique que $\|S^{*j}f\| = O(2^{-\beta j})$, mais elle nécessite de plus de connaître la décomposition de \mathcal{H} associée à la translation unilatérale S . Le Théorème que l'on se propose de démontrer généralise la condition à une isométrie quelconque et s'affranchit de la connaissance d'une telle décomposition.

Théorème 5.4. Soit T une isométrie sur un espace de Hilbert \mathcal{H} et $x \in \mathcal{H}$. On suppose que

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \|T^{*k}x\| < \infty.$$

Alors il existe $y \in \mathcal{H}$ tel que $x = (I - T)y$ si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\|^2 = 0.$$

Le point de départ pour démontrer ce Théorème est le Théorème de décomposition de Wold [31].

Théorème 5.5 (Décomposition de Wold). [31] Soit T une isométrie sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . Alors \mathcal{H} se décompose en somme orthogonale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ de façon que \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 réduisent T , la restriction de T à \mathcal{H}_0 étant unitaire et la restriction de T à \mathcal{H}_1 une translation unilatérale, l'un des sous espace pouvant être réduit à $\{0\}$. Cette décomposition est déterminée de manière unique : on a notamment

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n \mathcal{K} \quad \text{où} \quad \mathcal{K} = \mathcal{H} \ominus T\mathcal{H}.$$

Démonstration du Théorème 5.4. Si $x = (I - T)y$, il est évident que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\|^2 = 0,$$

car T est une isométrie donc à puissances bornées. On suppose donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\|^2 = 0,$$

et on va montrer qu'il existe une solution y à l'équation $(I - T)y = x$.

On considère la décomposition de Wold de \mathcal{H} en $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ associée à l'isométrie T . On remarque que $x \in \mathcal{H}_1$. En effet si on décompose $x = x_0 + x_1$ suivant la décomposition de Wold de \mathcal{H} , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n}x_1\| = 0 \quad \text{et} \quad \|T^{*n}x_0\| = \|x_0\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n}x\| = \|x_0\|,$$

or par hypothèse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n}x\| = 0.$$

Ce qui prouve que $x \in \mathcal{H}_0$ (en particulier, si la partie \mathcal{H}_1 est réduite à $\{0\}$, alors $x = 0 = (I - T)0$). Quitte à considérer la restriction de T à \mathcal{H}_0 , on peut donc supposer que T est une translation unilatérale.

Dans la suite de cette démonstration, on notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n la projection sur le sous-espace $T^n \mathcal{K}$ et pour tout $u \in \mathcal{H}$, on notera $u_n := P_n(u)$, $u^n := \sum_{j=0}^n u_j$ et $R_n := u - u^n$.

Si y est solution de l'équation $(I - T)y = x$, on obtient, en projetant sur $T^k \mathcal{K}$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$, le système d'équations suivant

$$\begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_1 = y_1 - Ty_0 \\ \vdots \\ x_k = y_k - Ty_{k-1} \\ \vdots \end{cases}$$

On a alors nécessairement

$$\begin{cases} y_0 = x_0 \\ y_1 = x_1 + Ty_0 = x_1 + Tx_0 \\ \vdots \\ y_k = x_k + Ty_{k-1} = x_k + Tx_{k-1} + \cdots + T^{k-1}x_1 + T^k x_0 \\ \vdots \end{cases}$$

On pose alors pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$y_r = \sum_{k=0}^r T^k x_{r-k} \in T^r \mathcal{K}.$$

On va montrer que la somme $\sum_{r=0}^{\infty} \|y_r\|^2$ est finie et ainsi que $y = \sum_{r=0}^{\infty} y_r$ est bien défini dans \mathcal{H} . On aura alors pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P_r((I - T)y) &= y_r - Ty_{r-1} \\ &= \sum_{j=0}^r T^j x_{r-j} - \sum_{j=0}^{r-1} T^{j+1} x_{r-1-j} \\ &= x_r. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $(I - T)y = x$. Pour montrer que la somme $\sum_{r=0}^{\infty} \|y_r\|^2$ est finie, on va reformuler y_r à l'aide des deux Lemmes suivants.

Lemme 5.6. *Soit $u \in \mathcal{H}$ tel que $(j\|T^{*j}u\|)_{j \geq 0} \in l^1$. On a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k u \right\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, T^k u \rangle.$$

Démonstration. On remarque déjà que la somme $\sum_{k=1}^{\infty} \langle u, T^k u \rangle$ est absolument convergente car $(\|T^{*j}u\|)_{j \geq 0}$ est sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k u \right\|^2 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^n \|T^i u\|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n} \langle T^i u, T^j u \rangle \right) \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^n \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n} \langle u, T^{j-i} u \rangle \right) \right) \\ &= \frac{n+1}{n} \|u\|^2 + \frac{2}{n} \operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^n (n-r+1) \langle u, T^r u \rangle \right) \\ &= \frac{n+1}{n} \|u\|^2 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^n \langle u, T^r u \rangle - \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (r-1) \langle u, T^r u \rangle \right). \end{aligned}$$

On observe que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (r-1) \langle u; T^r u \rangle \right| \leq \frac{1}{n} \|u\| \sum_{r=1}^n (r-1) \|T^{*r} u\|.$$

La suite $(j \|T^{*j} u\|)_{j \geq 0}$ étant sommable, on en déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^n (r-1) \langle u; T^r u \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Comme la série $\sum_{k \geq 1} \langle u; T^k u \rangle$ converge, on peut passer à la limite quand n tend vers l'infini. Ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k u \right\|^2 = \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \langle u; T^k u \rangle.$$

□

Lemme 5.7. Soit $u \in \mathcal{H}$. On a pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{j=0}^r T^j u_{r-j} \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^n T^j u^r \right\|^2.$$

Démonstration. Soit $n \geq r$, on a pour $k \in \mathbb{N}$

$$P_k \left(\sum_{j=0}^n T^j u^r \right) = \begin{cases} \sum_{j=0}^k T^j u_{k-j} & \text{si } 0 \leq k < r, \\ \sum_{j=0}^r T^j u_{k-j} & \text{si } r \leq k \leq n, \\ \sum_{j=k-n}^r T^j u_{k-j} & \text{si } n < k \leq n+r, \\ 0 & \text{si } k > n+r. \end{cases}$$

La décomposition de \mathcal{H} en $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^n \mathcal{K}$ permet donc d'obtenir

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^n T^j u^r \right\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{r-1} \left\| \sum_{j=0}^k T^j u_{k-j} \right\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=r}^n \left\| \sum_{j=0}^r T^j u_{k-j} \right\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n+r} \left\| \sum_{j=k-n}^r T^j u_{k-n-j} \right\|^2.$$

Or

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{r-1} \left\| \sum_{j=0}^k T^j u_{k-j} \right\|^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n+r} \left\| \sum_{j=k-r}^r T^j u_{k-j} \right\|^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^r \left\| \sum_{j=k}^r T^j u_{k-j} \right\|^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{k=r}^n \left\| \sum_{j=0}^r T^j u_{k-j} \right\|^2 = \frac{n-r+1}{n} \left\| \sum_{j=0}^r T^j u_{k-j} \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=0}^r T^j u_{k-j} \right\|^2.$$

On peut ainsi conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^n T^j u^r \right\|^2 = \left\| \sum_{j=0}^r T^j u_{r-j} \right\|^2.$$

□

Montrons enfin que $\sum_{k \geq 0} \|y_r\|^2 < \infty$. Par le Lemme 5.7, on a pour tout $r \in \mathbb{N}$

$$\|y_r\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^r T^i x_{r-i} \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i x^r \right\|^2.$$

Or d'après l'identité du parallélogramme appliquée à $x^r + R_r = x$ on a

$$\frac{2}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i x^r \right\|^2 = \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i x \right\|^2 + \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i (x^r - R_r) \right\|^2 - \frac{2}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i R_r \right\|^2.$$

On fait tendre n vers l'infini dans l'égalité ci dessus. Alors d'après le Lemme 5.6 appliqué à R_r et à $x^r - R_r$ et l'hypothèse $\frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\|y_r\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i x^r \right\|^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i (x^r - R_r) \right\|^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{i=0}^n T^i R_r \right\|^2 \\ &= \|x^r - R_r\|^2 - 2\|R_r\|^2 \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle x^r - R_r; T^k (x^r - R_r) \rangle - 2\langle R_r; T^k R_r \rangle \right) \\ &= \|x^r\|^2 - \|R_r\|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\langle x^r; T^k x^r \rangle - \langle x^r; T^k R_r \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle R_r; T^k x^r \rangle - \langle R_r; T^k R_r \rangle \right) \\ &= \|x^r\|^2 - \|R_r\|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \langle x^r; T^k x^r \rangle - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \langle R_r; T^k x \rangle. \end{aligned}$$

Le Lemme 5.6 appliqué à x^r et le Lemme 5.7 nous donnent la relation suivante

$$\begin{aligned} \|x^r\|^2 + 2\operatorname{Re} \sum_{k \geq 1} \langle x^r; T^k x^r \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{i \geq 0} T^i x^r \right\|^2 \\ &= \|y_r\|^2. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$2\|y_r\|^2 = \|y_r\|^2 - \|R_r\|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{k \geq 1} \langle R_r; T^k x \rangle,$$

d'où

$$\|y_r\|^2 = -\|R_r\|^2 - 2\operatorname{Re} \sum_{k \geq 1} \langle R_r; T^k x \rangle.$$

On a supposé que $(j\|T^{*j}x\|)_j \in l^1$ de plus on remarque que $R_r = T^{r+1}T^{*(r+1)}x$, en particulier on a $\|R_r\| = \|T^{*(r+1)}x\|$ pour tout r , donc $(\|R_r\|^2)_r$ est sommable. Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{r \geq 0} \left| \sum_{k \geq 1} \langle R_r; T^k x \rangle \right| < \infty.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \geq 1} \langle R_r; T^k x \rangle \right| &= \left| \sum_{k=1}^r \langle R_r; T^k x \rangle + \sum_{k=r+1}^{\infty} \langle R_r; T^k x \rangle \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^r \langle R_r; T^k x \rangle + \sum_{k=r+1}^{\infty} \langle R_k; T^k x \rangle \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^r \|R_r\| \|T^k x\| + \sum_{k=r+1}^{\infty} \|R_k\| \|T^k x\| \\
&\leq \|x\| \left(r \|R_r\| + \sum_{k>r} \|R_k\| \right) \\
&\leq \|x\| \left(r \|T^{*(r+1)} x\| + \sum_{k>r} \|T^{*(k+1)} x\| \right).
\end{aligned}$$

Comme on a supposé que la suite $(r \|T^{*r} x\|)_r$ est sommable, on obtient

$$\sum_{r \geq 0} \sum_{k > r} \|T^{*k} x\| = \sum_{k \geq 0} k \|T^{*k} x\| < \infty.$$

D'où $\sum_{r \geq 0} \|y_r\|^2 < \infty$. □

On peut déduire du Théorème 5.4 l'application à l'équation fonctionnelle suivante déjà présentée dans [33].

Corollaire 5.8. [33] *Soit f une fonction périodique de période 1 telle que $f \in L^2(0, 1)$,*

$$\int_0^1 f(t) dt = 0$$

et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{0 \leq h \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_2 = O(\delta^\alpha). \tag{5.1}$$

Alors la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{i=0}^n f(2^i t) \right|^2 dt = 0$$

est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction g dans $L^2(0, 1)$ telle que

$$f(t) = g(t) - g(2t).$$

Remarque 5.9. M. Kac avait déjà obtenu un résultat dans cette direction dans [20] en faisant l'hypothèse que f est dans la classe de Hölder $C^{0,\alpha}$ pour un $\alpha > 1/2$ à la place de l'hypothèse 5.1.

Le Théorème 5.4 nous permet de remplacer cette hypothèse par l'hypothèse plus faible suivante. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite des coefficients de Fourier de f , vérifie $(val_2(n)^{2+\varepsilon} a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$ pour un $\varepsilon > 0$ et où $val_2(n)$ est la 2 valuation de n , c'est-à-dire

$$val_2(n) = k \quad \text{si} \quad n = m2^k \quad \text{avec} \quad m \notin 2\mathbb{N}.$$

Démonstration. On va appliquer le Théorème 5.4 à l'application linéaire et isométrique $T : L^2(0, 1) \longrightarrow L^2(0, 1)$ définie par

$$Tf(t) = f(2t), \quad t \in (0, 1) \text{ mod } 1.$$

La condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \left| \sum_{i=0}^n f(2^i t) \right|^2 dt = 0$$

est la traduction de la condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=0}^n T^k x \right\|^2 = 0,$$

du Théorème 5.4. Il s'agit de vérifier qu'on a bien

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \|T^{*k} x\| < \infty.$$

Soit (a_n) la suite des coefficients de Fourier de f . On remarque que $a_0 = 0$ par hypothèse et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$T^{*k} f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{j2^k} e^{2i\pi jt}.$$

De plus d'après [39, p. 42 et p. 296], s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{0 \leq h \leq \delta} \|f(x+h) - f(x)\|_2 = O(\delta^\alpha),$$

alors $a_n = O(|n|^{-\alpha})$ et $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_n|^\beta < \infty$ pour un $\beta < 2$. On en déduit que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^\gamma |a_n|^2 < \infty$$

pour un certain $\gamma > 0$.

Pour $\varepsilon > 0$, en faisant le changement de variable $n = j2^k$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} k \|T^{*k} x\| &= \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{j2^k}|^2 \right)^{1/2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)/2} \left(k^{3+\varepsilon} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{j2^k}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^{3+\varepsilon} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{j2^k}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \sum_{l=0}^{\text{val}_2(n)} k^{3+\varepsilon} \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} k^{-(1+\varepsilon)} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{val}_2(n)^{4+\varepsilon} |a_n|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne bien

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \|T^{*k}x\| < \infty.$$

□

Chapitre 6

Polynômes vérifiant une relation de récurrence

6.1 Introduction

On continue l'étude des cobords. Le but de cette section est de remplacer, dans la condition concernant les sommes ergodiques, les termes en $T^k x$ par $P_k(T)x$, où $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes vérifiant une relation de récurrence. Notons qu'une version du théorème ergodique pour ce type de sommes $\sum P_k(T)x$ a été démontrée récemment par C. Badea et S. Grivaux [4]. Les méthodes employées dans cette section sont inspirées des travaux de V. Fonf, M. Lin et A. Rubinov [14] dans le cas classique ($P_k(z) = z^k$).

Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes telle que $P_0 = 1$, $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et vérifiant une relation de récurrence de la forme

$$zP_k(z) = \sum_{s=0}^{k+1} \gamma_{k-s} P_s(z) + a_k, \quad (6.1)$$

où $(\gamma_n)_{n \geq -1}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites complexes telles que

$$(n\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}); \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \neq \gamma_{-1}. \quad (6.2)$$

On pose

$$z_0 := \sum_{n=-1}^{\infty} \gamma_n.$$

Remarque 6.1. Le modèle d'une telle suite de polynômes est la suite des polynômes de Faber associée à un compact simplement connexe K . On a vu en effet dans le premier chapitre (équation 1.4) que les polynômes de Faber vérifient la relation suivante

$$zF_k(z) = \sum_{s=-1}^k \beta_s F_{k-s}(z) + k\beta_k = \sum_{s=0}^{k+1} \beta_{k-s} F_s(z) + k\beta_k,$$

où la suite $(\beta_k)_{k \geq -1}$ désigne la suite des coefficients du développement de la représentation conforme extérieure ψ sous la forme

$$\psi(w) = \beta w + \beta_0 + \beta_1 w^{-1} + \dots + \beta_k w^{-k} + \dots$$

Si on suppose que $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$ et ∂K est une courbe de Jordan Alper-lisse en 1, alors ψ et $\psi'(z) = \beta - \sum_{k \geq 1} k\beta_k w^{-k-1}$ se prolongent par continuité sur $\{z : |z| \geq 1\} \cap D(\psi(1), \varepsilon)$ pour un $\varepsilon > 0$ et $\psi'(z) \neq 0$ d'après le Théorème 1.15. Donc

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \beta_n = \psi(1)$$

et

$$0 \neq \psi'(1) = \beta - \sum_{k \geq 1} k\beta_k.$$

Ce qui montre que, dans ce cas la suite des polynômes de Faber associée à K vérifie bien une relation du type de l'équation 6.1 et la condition 6.2. La condition sur la suite $(\beta_k)_{k \geq -1}$ est vérifiée par exemple quand la frontière de K est de classe $C^{1,\gamma}$ pour un $\gamma > 1/2$ d'après la Proposition 1.13.

Une conséquence directe de la formule de récurrence vérifiée par la suite de polynômes est le lemme suivant.

Lemme 6.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$(z_0 - z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z) \right) = \gamma_{-1}(1 - P_n(z)) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=n-k}^{\infty} \gamma_s \right) P_k(z).$$

Démonstration.

$$(z_0 - z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z) \right) = \sum_{k=0}^{n-1} z_0 P_k(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z P_k(z).$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} z P_k(z) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{k+1} \gamma_{k-s} P_s(z) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{k=s-1}^{n-1} \gamma_{k-s} \right) P_s(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=-1}^{n-k-1} \gamma_j \right) P_k(z) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \end{aligned}$$

De plus on a que $\sum_{n=-1}^{\infty} \gamma_n = z_0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} (z_0 - z) \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z) \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \gamma_j \right) P_k(z) - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=-1}^{n-k-1} \gamma_j \right) P_k(z) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \\ &= \gamma_{-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=n-k}^{\infty} \gamma_j \right) P_k(z) - \gamma_{-1} P_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k. \end{aligned}$$

□

6.2 Cas général

On considère \mathcal{X} un espace de Banach et T un opérateur borné sur \mathcal{X} tel que

$$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(T)\| < \infty.$$

Notation 6.3. On pose

$$U = \{x \in \mathcal{X}; \|x\| \leq 1\}$$

et

$$V_1 = \left\{ x \in \mathcal{X}; \sup_n \left\| \sum_{k=0}^{n-1} P_k(T)x \right\| \leq 1 \right\}.$$

Proposition 6.4. *Il existe $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que*

$$mV_1 \subset \overline{(z_0I - T)U} \subset MV_1.$$

Lemme 6.5. *La suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z_0)\right)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée.*

Démonstration. On suppose par l'absurde que $\left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z_0)\right)_{n \geq 0}$ est bornée. Soit \mathcal{L} une limite de Banach sur l^∞ . On applique le Lemme 6.2 au point $z = z_0$. Ceci nous donne l'égalité

$$0 = \gamma_{-1}(1 - P_n(z_0)) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=n-k}^{\infty} \gamma_s \right) P_k(z_0). \quad (6.3)$$

Comme $\left(\sum_{k=0}^n P_k(z_0)\right)_{n \geq 0}$ est bornée, on a

$$C := \sup_{n \in \mathbb{N}} |P_n(z_0)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n P_k(z_0) - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(z_0) \right| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n P_k(z_0) \right| < \infty.$$

Et on a supposé $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$, en particulier la série $\sum_{k=0}^{n-1} a_k$ est bornée. On en déduit que la série

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=n-k}^{\infty} \gamma_s \right) P_k(z_0)$$

est bornée. Ce qui nous permet d'appliquer la limite de Banach \mathcal{L} à chacun des termes du membre de droite de l'égalité 6.3.

Comme la série $\left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z_0)\right)_{n \geq 0}$ est bornée, on obtient par invariance par translation de la limite de Banach \mathcal{L}

$$\mathcal{L}(P_n(z_0)) = \mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^n P_k(z_0) \right) - \mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P_k(z_0) \right) = 0.$$

Et comme $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$, on a

$$\mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

On va montrer que

$$\mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=n-k}^{\infty} \gamma_s \right) P_k(z_0) \right) = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k \geq N} k |\gamma_k| < \varepsilon.$$

Par invariance par translation de la limite de Banach \mathcal{L} , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=n-k}^{\infty} \gamma_s \right) P_k(z_0) \right) &= \mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^n \left(\sum_{s \geq k} \gamma_s \right) P_{n-k}(z_0) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{s \geq k} \gamma_s \right) \mathcal{L} (P_{n-k}(z_0)) + \mathcal{L} \left(\sum_{k=N}^n \left(\sum_{s \geq k} \gamma_s \right) P_{n-k}(z_0) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{s \geq k} \gamma_s \right) \mathcal{L} (P_n(z_0)) + \mathcal{L} \left(\sum_{k=N}^n \left(\sum_{s \geq k} \gamma_s \right) P_{n-k}(z_0) \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\sum_{k=N}^n \left(\sum_{s \geq k} \gamma_s \right) P_{n-k}(z_0) \right) \end{aligned}$$

Comme pour tout k , $|P_k(z_0)| \leq C$, on obtient

$$\left| \mathcal{L} \left(\sum_{k=N}^n \left(\sum_{s \geq k} \gamma_s \right) P_{n-k}(z_0) \right) \right| \leq C \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=N}^n \sum_{s \geq k} |\gamma_s| \leq C \sum_{s \geq N} s |\gamma_s| \leq C \varepsilon.$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=n-k}^{\infty} \gamma_s \right) P_k(z_0) \right) \leq C \varepsilon.$$

C'est à dire

$$\mathcal{L} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s=n-k}^{\infty} \gamma_s \right) P_k(z_0) \right) = 0.$$

En appliquant la limite de Banach \mathcal{L} à l'équation 6.3, on obtient donc

$$0 = \gamma_{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

D'où la contradiction avec les conditions 6.2. □

Démonstration de la Proposition 6.4. On commence par montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\overline{(z_0 I - T)U} \subset M V_1.$$

Soit $x \in \overline{(z_0 I - T)U}$. Il existe une suite $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$ on ait $y_j \in U$ et

$$x = \lim_{j \rightarrow \infty} (z_0 I - T)y_j.$$

Soit $x^* \in \mathcal{X}^*$, on a alors

$$|\langle x^*; x \rangle| = \lim_{j \rightarrow \infty} |\langle x^*; (z_0 I - T)y_j \rangle| \leq \|(z_0 I - T)^* x^*\|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient alors d'après le Lemme 6.2

$$\begin{aligned} |\langle x^*; \sum_{k=0}^n P_k(T)x \rangle| &\leq \left\| (\overline{z_0}I - T^*) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(T^*)x^* \right\| \\ &\leq \|x^*\| \left\| \overline{\gamma_{-1}}(I - P_n(T))^* - \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s \geq n-k} \overline{\gamma_s} \right) P_k(T)^* \right\| \\ &\leq \|x^*\| (|\gamma_{-1}|(1+C) + \|(a_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{l^1} + C\|(k\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{l^1}). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat annoncé en posant $M = |\gamma_{-1}|(1+C) + \|(a_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{l^1} + C\|(k\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_{l^1}$.

Montrons à présent que

$$mV_1 \subset \overline{(z_0I - T)U}$$

avec

$$m = \left| \gamma_{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| > 0.$$

Soit $x \in mV_1$. On suppose par l'absurde que $x \notin \overline{(z_0I - T)U}$. D'après le Théorème de Hahn-Banach, il existe $x^* \in \mathcal{X}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\langle y; x^* \rangle) \leq \lambda & \forall y \in \overline{(z_0I - T)U}, \\ \operatorname{Re}(\langle x; x^* \rangle) > \lambda. \end{cases}$$

Si $y \in \overline{(z_0I - T)U}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, alors $\alpha y \in \overline{(z_0I - T)U}$. En particulier l'ensemble $\{\operatorname{Re}(\langle y; x^* \rangle); y \in \overline{(z_0I - T)U}\}$ est symétrique. On a donc nécessairement $\lambda \geq 0$. Cela implique également que si $y \in \overline{(z_0I - T)U}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, alors

$$\operatorname{Re}(\langle y; \alpha x^* \rangle) = \operatorname{Re}(\langle \alpha y; x^* \rangle) \leq \lambda.$$

En particulier si on pose

$$\alpha = \frac{\overline{\langle x; x^* \rangle}}{|\langle x; x^* \rangle|},$$

on obtient alors

$$\operatorname{Re}(\langle x; \alpha x^* \rangle) = |\langle x; x^* \rangle| > \lambda.$$

Quitte à remplacer x^* par αx^* , on peut alors supposer sans perte de généralité que $\langle x; x^* \rangle > 0$ et

$$\begin{cases} |\langle y; x^* \rangle| \leq \lambda & \forall y \in \overline{(z_0I - T)U}, \\ \langle x; x^* \rangle > \lambda. \end{cases} \quad (6.4)$$

Si on suppose $\lambda = 0$, on a pour tout $y \in \overline{(z_0I - T)U}$

$$\langle y; x^* \rangle = 0.$$

Donc pour tout $z \in \mathcal{X}$

$$\langle (z_0I - T)z; x^* \rangle = 0.$$

En particulier si on applique en $z = x$ on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\langle P_k(T)x; x^* \rangle = \langle P_k(z_0)x; x^* \rangle.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=0}^n P_k(T)x \right\| \|x^*\| \geq \left| \sum_{k=0}^n P_k(z_0) \right| \langle x; x^* \rangle.$$

Or $\langle x; x^* \rangle > 0$ et d'après le Lemme 6.5 on sait que que $|\sum_{k=0}^n P_k(z_0)|$ n'est pas borné. L'inégalité ci-dessus donne donc la contradiction.

Si on suppose $\lambda > 0$. Comme $x \in mV_1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(T)x \in U,$$

donc

$$\begin{aligned} m\lambda &\geq \left| \langle (z_0I - T) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(T)x; x^* \rangle \right| \\ &\geq \left| \langle \gamma_{-1}(z_0I - P_n(T))x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s \geq n-k} \gamma_s \right) P_k(T)x; x^* \rangle \right| \\ &\geq \left| \left(\gamma_{-1} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \right) \langle x; x^* \rangle - \langle P_n(T)x; x^* \rangle + \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s \geq n-k} \gamma_s \right) P_k(T)x; x^* \right\rangle \right|. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Soit \mathcal{L} une limite de Banach sur $l^\infty(\mathbb{C})$. Comme $x \in mV_1$ on a

$$\mathcal{L}(\langle P_n(T)x; x^* \rangle) = \mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=0}^n P_k(T)x; x^* \right\rangle \right) - \mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} P_k(T)x; x^* \right\rangle \right) = 0.$$

Et de la même manière que dans la preuve du Lemme 6.5 on peut montrer que le fait que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n P_k(T)x \right\| < \infty$$

implique que

$$\mathcal{L} \left(\left\langle \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{s \geq n-k} \gamma_s \right) P_k(T)x; x^* \right\rangle \right) = 0.$$

Si on applique la limite de Banach \mathcal{L} dans l'inégalité 6.5, on obtient

$$m\lambda \geq \left| \gamma_{-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \langle x; x^* \rangle.$$

C'est à dire

$$\lambda \geq \langle x; x^* \rangle,$$

d'où la contradiction avec l'inégalité 6.4. Cela prouve qu'on a $x \in \overline{(z_0I - T)U}$ et achève la démonstration. \square

Corollaire 6.6.

$$\left\{ x \in \mathcal{X} : \sup_n \left\| \sum_{k=0}^{n-1} P_k(T)x \right\| < \infty \right\} = \bigcup_{n>0} \overline{n(z_0I - T)U}.$$

Notation 6.7. On dira qu'un sous ensemble de \mathcal{X} est un ensemble F_σ , ou plus simplement un F_σ , si c'est une union dénombrable de fermés.

Théorème 6.8. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ tel que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_k(T)\| < \infty$. Sont équivalents :

1.

$$\left\{ x \in \mathcal{X}; \sup_n \left\| \sum_{k=0}^n P_k(T)x \right\| < \infty \right\} = (z_0I - T)\mathcal{X},$$

2. $(z_0I - T)\mathcal{X}$ est un F_σ ,

3.

$$\overline{(z_0I - T)U} \subset (z_0I - T)\mathcal{X}.$$

Démonstration. L'implication (1) \Rightarrow (2) est une conséquence du Corollaire 6.6. Montrons que (2) \Rightarrow (3). On suppose que

$$(z_0I - T)\mathcal{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$$

où pour tout n , F_n est un ensemble fermé. D'après le théorème de Baire, il existe $x_0 \in \mathcal{X}$, $r > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$x_0 + rU \subset (z_0I - T)^{-1}(F_{n_0}).$$

Donc

$$(z_0I - T)x_0 + r(z_0I - T)U \subset F_{n_0}.$$

Et comme F_{n_0} est fermé,

$$\overline{(z_0I - T)U} \subset \frac{1}{r}(F_{n_0} - (z_0I - T)x_0) \subset (z_0I - T)\mathcal{X}.$$

Montrons enfin que (3) \Rightarrow (1). D'après la Proposition 6.4 et (3), on a

$$mV_1 \subset \overline{(z_0I - T)U} \subset (z_0I - T)\mathcal{X}.$$

Donc

$$\left\{ x \in \mathcal{X}; \sup_n \left\| \sum_{k=0}^{n-1} P_k(T)x \right\| < \infty \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV_1 \subset (z_0I - T)\mathcal{X}.$$

L'inclusion réciproque est une conséquence du Lemme 6.2 et de l'hypothèse

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(T)\| < \infty.$$

□

En relisant les démonstration de la proposition 6.4 et du Théorème 6.8, on peut remarquer qu'on n'a pas besoin de l'hypothèse $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_k(T)\| < \infty$ pour obtenir une condition suffisante d'existence qu'une solution y à l'équation $(z_0I - T)y = x$. On obtient

Théorème 6.9. Soit $T \in B(\mathcal{X})$ et $x \in \mathcal{X}$. On suppose que $(z_0I - T)U$ est un F_σ . Si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=0}^n P_k(T)x \right\| < \infty,$$

alors il existe y tel que

$$x = (z_0I - T)y.$$

Remarque 6.10. Si \mathcal{X} est un espace dual et T un opérateur dual, alors $(z_0I - T)U$ est fermé car faible étoile compact d'après le Théorème de Banach-Alaoglu. En particulier si \mathcal{X} est réflexif et $T \in B(\mathcal{X})$, alors $(z_0I - T)U$ est fermé.

6.3 Application aux polynômes de Faber

D'après la remarque 6.1, on obtient le Corollaire suivant du Théorème 6.9.

Corollaire 6.11. *Soit K un compact simplement connexe tel que ∂K soit une courbe de Jordan rectifiable et soit $z_0 \in \partial K$. On considère ψ l'application conforme et $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Faber associées à K et on pose $w_0 = \psi^{-1}(z_0)$. On suppose que ∂K est Alper-lisse en z_0 et que les coefficients du développement de Laurent de l'application ψ vérifient $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$.*

Soit $T \in B(\mathcal{X})$ et $x \in \mathcal{X}$. On suppose que $(z_0I - T)U$ est un F_σ . Si

$$\sup_n \left\| \sum_{k=0}^n w_0^{-k} F_k(T)x \right\| < \infty,$$

alors il existe y tel que

$$x = (z_0I - T)y.$$

Remarque 6.12. Si ∂K est de classe $C^{1,\gamma}$ avec $\gamma > 1/2$, alors les conditions ∂K est Alper-lisse en z_0 et les coefficients du développement de Laurent de l'application conforme extérieure ψ vérifient $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$ sont satisfaites.

Démonstration du Corollaire 6.11. On considère $\tilde{T} = w_0^{-1}T$, $\tilde{\Gamma} = w_0^{-1}\Gamma$ et $\tilde{\psi}$ l'application définie sur $\{z; |z| \geq 1\}$ par

$$\tilde{\psi}(w) = w_0^{-1}\psi(w_0w).$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{\psi}$ est l'application conforme extérieure associée au compact délimité par $\tilde{\Gamma}$. On en déduit que la suite des polynômes de Faber associée à ce compact est donnée par

$$\tilde{F}_n(z) = w_0^{-n}F_n(w_0z).$$

On a de plus $\tilde{\psi}(1) = w_0^{-1}z_0$ et $\sigma(\tilde{T}) \subset \tilde{\Gamma}$. Or

$$\begin{aligned} (z_0I - T)y &= x \\ \Leftrightarrow (w_0^{-1}z_0I - w_0^{-1}T)(w_0y) &= x \\ \Leftrightarrow (\tilde{\psi}(1)I - \tilde{T})(w_0y) &= x. \end{aligned}$$

Donc d'après le Théorème 6.9 et la remarque 6.1, on obtient le résultat annoncé. \square

Chapitre 7

Opérateur normal à spectre dans une courbe de Jordan

Dans cette section on s'intéresse au cas d'un opérateur sur un espace de Hilbert \mathcal{H} . L'objectif de cette section est de généraliser le résultat suivant de G. Kozma et N. Lev [22].

Théorème 7.1. [22] *Soit U un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} et $x \in \mathcal{H}$. On considère les sommes ergodiques*

$$S_n x = x + Ux + \cdots + U^{n-1}x.$$

Alors x est un cobord de U si (et seulement si)

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|S_n x\|^2 - \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n x \right\|^2 \right) < \infty.$$

En remarquant qu'un opérateur est unitaire s'il est normal et que son spectre est inclus dans le cercle unité, la généralisation naturelle du résultat précédent est de s'intéresser au cas d'un opérateur normal dont le spectre est inclus dans une courbe de Jordan. En se donnant des conditions de régularités sur cette courbe, on obtient alors un résultat analogue au précédent à l'aide des polynômes de Faber.

Notations 7.2. On se donne Γ une courbe Alper-lisse avec des angles. Soit K le compact délimité par Γ , ψ l'application conforme extérieure et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Faber associées à K . On notera $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients de Laurent de la fonction ψ .

Théorème 7.3. *Soit $T \in B(\mathcal{H})$ un opérateur normal tel que $\sigma(T) \subset \Gamma$ et $x \in \mathcal{H}$. On suppose que $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$ et que Γ est Alper-lisse en $\psi(1)$ ou bien admet un angle en $\psi(1)$ de mesure extérieure inférieure à π . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$S_n x = x + F_1(T)x + \cdots + F_{n-1}(T)x.$$

Alors il existe une solution y à l'équation $(\psi(1)I - T)y = x$ si

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|S_n x\|^2 - \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n x \right\|^2 \right) < \infty. \quad (7.1)$$

Remarque 7.4. Les conditions $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$ et Γ est Alper-lisse en $\psi(1)$ sont remplies si on suppose que Γ est de classe $C^{1,\gamma}$ avec $\gamma > 1/2$, d'après la proposition 1.13.

Démonstration. On pose

$$V_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|S_n x\|^2 - \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n x \right\|^2.$$

On suppose que la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée. On considère la décomposition spectrale de l'opérateur normal T . On a

$$T = \int_{\sigma(T)} t dE(t),$$

où E est la mesure spectrale de T . On pose

$$\mu = \langle Ex; x \rangle,$$

on a alors

$$\langle Tx; x \rangle = \int_{\Gamma} t d\mu(t).$$

Pour montrer l'existence d'une solution y à l'équation $(\psi(1)I - T)y = x$, on va utiliser le calcul fonctionnel. Soit B l'ensemble des applications boréliennes et bornées sur Γ , on considère l'application $\Theta : B \subset L^2(\mu) \rightarrow \mathcal{H}$ définie par

$$\Theta(f) = f(T)x.$$

Alors pour tout $f \in B$, on a

$$\|f(T)x\|^2 = \int_{\Gamma} |f(t)|^2 d\mu(t).$$

Donc Θ se prolonge en une isométrie de $L^2(\mu)$ dans \mathcal{H} . De plus si $f \in B$ et $g \in L^2(\mu)$, alors $\Theta(fg) = f(T)\Theta(g)$. Si on arrive à montrer que l'application

$$\varsigma : z \mapsto \frac{1}{\psi(1) - z}$$

est dans $L^2(\mu)$, alors on obtient en posant $f = (\psi(1) - z)$ et $g = \varsigma$ que

$$(\psi(1)I - T)\Theta(\varsigma) = x,$$

et donc que $y = \Theta(\varsigma)$ est solution. Montrons à présent que $\varsigma \in L^2(\mu)$.

Si P est un polynôme, alors

$$\|P(T)x\|^2 = \langle P(T)^* P(T)x; x \rangle = \int_{t \in \Gamma} |P(t)|^2 d\mu(t).$$

Ceci nous donne pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$V_N = \int_{t \in \Gamma} Q_N(t) d\mu(t),$$

avec

$$Q_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) \right|^2 - \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) \right|^2.$$

On vérifie aisément que pour toute suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |a_n|^2 - \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| a_n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N a_m \right|^2, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Ceci nous donne une formule alternative suivante pour $Q_N(z)$

$$Q_N(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left(\sum_{k=0}^{m-1} F_k(z) \right) \right|^2, \quad N \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème 1.14, on sait que $(F_n(\psi(1)))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers un certain $\alpha > 0$. On peut alors vérifier que $\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(\psi(1)) = \infty$. Or $Q_N(z)$ est positif pour tout $z \in \Gamma$ et tout $N \in \mathbb{N}$, et

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \int_{\Gamma} Q_N(t) dt < \infty.$$

On en déduit que $\mu(\{\psi(1)\}) = 0$. Il reste à vérifier que ς est de carré intégrable sur $(\Gamma \setminus \{\psi(1)\})$ muni de la mesure μ .

En utilisant les notations

$$B_k = \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j \quad \text{et} \quad \alpha_n = \beta - \sum_{k=0}^{n-1} k\beta_k,$$

le Lemme 6.2, nous donne la relation suivante

$$\begin{aligned} (\psi(1) - z) \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) &= \beta(1 - F_n(z)) - \sum_{k=0}^{n-1} k\beta_k + \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) \\ &= \alpha_n - \beta F_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z). \end{aligned} \quad (7.2)$$

De plus comme la famille $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est sommable, la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On obtient donc

$$\begin{aligned} & \left| (1-z)^2 Q_N(z) \right| \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \alpha_n - \beta F_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left(\alpha_m - \beta F_m(z) + \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-k} F_k(z) \right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \left(\alpha_n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \alpha_m \right) - \beta F_n(z) + \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left(-\beta F_m(z) + \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-k} F_k(z) \right) \right|^2. \end{aligned}$$

Comme la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \alpha_n - \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \alpha_m \right| = 0.$$

Et pour $z \in \Gamma$, $z \neq \psi(1)$, d'après le Théorème 1.14,

$$M(z) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|F_n(z)\| < \infty,$$

l'équation 7.2 nous donne alors

$$\begin{aligned} \left| (\psi(1) - z) \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) \right| &= \left| \beta(1 - F_n(z)) - \sum_{k=0}^{n-1} k\beta_k + \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) \right| \\ &\leq |\beta|(1 + M(z)) + \|(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_1 + M(z) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=n-k}^{\infty} |\beta_j| \\ &\leq (1 + M(z))(|\beta| + \|(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_1). \end{aligned}$$

Ce qui montre que pour tout $z \in (\Gamma \setminus \{\psi(1)\})$ fixé,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) \right| < \infty.$$

On en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-\beta F_m(z)) = 0.$$

Et de plus

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left(\sum_{k=0}^{m-1} B_{m-k} F_k(z) \right) &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left(\sum_{j=1}^m B_j F_{m-j}(z) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(B_j \sum_{m=j}^N F_{m-j}(z) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(B_j \sum_{m=0}^{N-j} F_m(z) \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-k} F_k(z) \right| \leq \frac{1}{N} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) \right| \sum_{j=1}^N |B_j| \leq \frac{1}{N} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} F_k(z) \right| \|(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}\|_1.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \left(-\beta F_m(z) + \sum_{k=0}^{m-1} B_{m-k} F_k(z) \right) = 0.$$

Ce qui nous donne

$$\left| (\psi(1) - z)^2 Q_N(z) \right| = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \beta F_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) \right|^2 + o(1).$$

On va montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $z \in (\Gamma \setminus \{\psi(1)\})$ fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \beta F_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) \right| \geq c.$$

On pose $w = \phi(z) \in \mathbb{T}$. D'après le Théorème 1.14, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) - w^n = 0,$$

et comme $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) = \sum_{j=1}^n B_j F_{n-j}(z) = \sum_{j=1}^n B_j w^{n-j} + o(1).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \beta F_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} B_{n-k} F_k(z) \right| &= \left| \beta w^n - \sum_{j=1}^n B_j w^{n-j} \right| + o(1) \\ &= \left| \beta - \sum_{j=1}^n B_j w^{-j} \right| + o(1). \end{aligned}$$

Or comme $(B_j)_{j \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$, on a que la somme $\sum_{j=1}^n B_j w^{-j}$ converge. Il suffit donc de montrer que

$$\left| \beta - \sum_{j=1}^{\infty} B_j w^{-j} \right| \neq 0.$$

En utilisant la décomposition de ψ en série de Laurent on obtient

$$\begin{aligned} \beta - \sum_{j=1}^{\infty} B_j w^{-j} &= \beta - \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \beta_k w^{-j} \right) \\ &= \beta - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\beta_k \sum_{j=1}^k w^{-j} \right) \\ &= \beta - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{1 - w^{-k}}{w - 1} \right) \\ &= \frac{1}{w - 1} \left(\beta(w - 1) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k - \beta_0 + \beta_0 w^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k w^{-k} \right) \\ &= \frac{1}{w - 1} \left(\sum_{k=-1}^{\infty} \beta_k w^{-k} - \sum_{k=-1}^{\infty} \beta_k \right) \\ &= \frac{\psi(w) - \psi(1)}{w - 1}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que pour tout $z \in (\Gamma \setminus \{\psi(1)\})$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |(1 - z)^2 Q_N(z)| = \left| \frac{\psi(w) - \psi(1)}{w - 1} \right|^2,$$

avec $w = \phi(z) \in (\mathbb{T} \setminus \{1\})$. Et d'après le Théorème 1.15, on a que la fonction

$$w \mapsto \left| \frac{\psi(w) - \psi(1)}{w - 1} \right|$$

ne s'annule pas sur $(\mathbb{T} \setminus \{1\})$ et est minorée au voisinage de 1. Donc il existe $c > 0$ tel que pour tout $z \in (\Gamma \setminus \{\psi(1)\})$,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} |(\psi(1) - z)^2 Q_N(z)| \geq c.$$

Donc par le Lemme de Fatou, on a

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{1}{\psi(1) - z} \right|^2 d\mu(z) \leq \frac{1}{c} \liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} Q_N(z) d\mu(z) \leq \frac{1}{c} \sup_{n \in \mathbb{N}} V_N < \infty.$$

Ce qui prouve que ζ est dans $L^2(\mu)$ et achève la démonstration. \square

Remarque 7.5. On peut également se placer en n'importe quel point z_0 de la frontière. Ce qui donne le résultat suivant.

Théorème 7.6. *Soit $T \in B(\mathcal{H})$ un opérateur normal tel que $\sigma(T) \subset \Gamma$ et $x \in \mathcal{H}$. On suppose que $(k\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^1$ et que Γ est Alper-lisse en z_0 ou bien admet un angle en z_0 de mesure extérieure inférieure à π . On pose $w_0 = \phi(z_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$S_n x = x + w_0^{-1} F_1(T)x + \cdots + w_0^{-(n-1)} F_{n-1}(T)x.$$

Alors il existe une solution y à l'équation $(z_0 I - T)y = x$ si

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|S_n x\|^2 - \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n x \right\|^2 \right) < \infty. \quad (7.3)$$

Démonstration. On considère $\tilde{T} = w_0^{-1} T$, $\tilde{\Gamma} = w_0^{-1} \Gamma$ et $\tilde{\psi}$ l'application définie sur $\{z; |z| \geq 1\}$ par

$$\tilde{\psi}(w) = w_0^{-1} \psi(w_0 w).$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{\psi}$ est l'application conforme extérieure associée au compact délimité par $\tilde{\Gamma}$. On en déduit que la suite des polynômes de Faber associée à ce compact est donnée par

$$\tilde{F}_n(z) = w_0^{-n} F_n(w_0 z).$$

On a de plus $\tilde{\psi}(1) = w_0^{-1} z_0$ et $\sigma(\tilde{T}) \subset \tilde{\Gamma}$. Or

$$\begin{aligned} (z_0 I - T)y &= x \\ \Leftrightarrow (w_0^{-1} z_0 I - w_0^{-1} T)(w_0 y) &= x \\ \Leftrightarrow (\tilde{\psi}(1) I - \tilde{T})(w_0 y) &= x. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 7.3 l'équation a une solution si on a 7.3 pour $S_n x$ défini par

$$\begin{aligned} S_n x &= x + \tilde{F}_1(\tilde{T})x + \cdots + \tilde{F}_{n-1}(\tilde{T})x \\ &= x + w_0^{-1} F_1(T)x + \cdots + w_0^{-(n-1)} F_{n-1}(T)x. \end{aligned}$$

\square

Bibliographie

- [1] A. Atzmon ; A. Eremenko ; M. Sodin, *Spectral inclusion and analytic continuation*. Bull. London Math. Soc. 31 (1999), no. 6, 722-728.
- [2] C. Badea, S. Grivaux : Size of the peripheral point spectrum under power or resolvent growth conditions, J. Funct. Anal., 246 (2007), pp 302 – 329.
- [3] C. Badea, S. Grivaux, *Faber-hypercyclic operators*. Israel J. Math. 165 (2008), 43–65.
- [4] C. Badea, S. Grivaux : *Ergodic theorems for Faber polynomials*, en préparation.
- [5] C. Badea, V. Müller, *On weak orbits of operators*. Topology Appl. 156 (2009), 1381–1385 (Jan Pelant memorial volume).
- [6] B. Beckermann, *Image numérique, GMRES et polynômes de Faber*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340 (2005), no. 11, 855–860.
- [7] F. Browder *On the iteration of transformations in noncompact minimal dynamical systems*. Proc. Amer. Math. Soc. 9 1958 773–780.
- [8] P. L. Butzer, U. Westphal, *The mean ergodic theorem and saturation*. Indiana Univ. Math. J. 20 1970/1971 1163–1174.
- [9] J. Conway, *A course in functional analysis*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1990. xvi+399 pp. ISBN : 0-387-97245-5.
- [10] J. Conway, *A course in operator theory*. Graduate Studies in Mathematics, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xvi+372 pp. ISBN : 0-8218-2065-6
- [11] O. Devys, *Faber polynomials and spectrum localisation*, à paraître.
- [12] P. Duren, *Theory of H_p spaces*. Pure and Applied Mathematics, Vol. 38 Academic Press, New York-London 1970 xii+258 pp.
- [13] P. Duren, *Univalent functions*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 259. Springer-Verlag, New York, 1983. xiv+382 pp. ISBN : 0-387-90795-5
- [14] M. Eiermann ; R. Varga, *Zeros and local extreme points of Faber polynomials associated with hypocycloidal domains*. Electron. Trans. Numer. Anal. 1 (1993), Sept., 49–71.
- [15] H. O. Fattorini, *Uniformly bounded cosine functions in Hilbert space*. Indiana Univ. Math. J. 20 1970/1971 411–425.
- [16] V. Fonf, M. Lin, A. Rubinov, *On the uniform ergodic theorem in Banach spaces that do not contain duals*. Studia Math. 121 (1996), no. 1, 67–85.
- [17] D. Gaier, *Lectures on complex approximation*. Translated from the German by Renate McLaughlin. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1987. xvi+196 pp. ISBN : 0-8176-3147-X

- [18] A. Gomilko, M. Haase, Y. Tomilov, *On rates in mean ergodic theorems*. Math. Res. Lett. 18 (2011), no. 2, 201–213.
- [19] M. X. He ; E. B. Saff, *The zeros of Faber polynomials for an m -cusped hypocycloid*. J. Approx. Theory 78 (1994), no. 3, 410–432.
- [20] M. Kac, *On the distribution of values of sums of the type $\sum f(2^kt)$* . Ann. of Math. (2) 47, (1946). 33–49.
- [21] T. Kövari, Pommerenke, *On Faber polynomials and Faber expansions*. Math. Zeitschrift 99 (1967) 193–206.
- [22] G. Kozma, N. Lev, *Exponential Riesz bases, discrepancy of irrational rotations and BMO*. J. Fourier Anal. Appl. 17 (2011), no. 5, 879–898.
- [23] U. Krengel, *Ergodic theorems*. With a supplement by Antoine Brunel. de Gruyter Studies in Mathematics, 6. Walter de Gruyter and Co., Berlin, 1985. viii+357 pp. ISBN : 3-11-008478-3.
- [24] M. Lin, *On quasi-compact Markov operators*. Ann. Probability 2 (1974), 464–475.
- [25] W. Mlak, *On a theorem of Lebow*. Ann. Polon. Math. 35 (1977/78), no. 1, 107–109.
- [26] O. Nevanlinna, *Convergence of iterations for linear equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993. viii+177 pp. ISBN : 3-7643-2865-7
- [27] N. Nikolski, *A Tauberian theorem for the spectral radius*. Sibirsk. Mat. Zh. 18 (1977), no. 6, 1367–1372 ; English transl., Siberian Math. J. 18 (1977), no. 6, 969–972 (1978).
- [28] N. Nikolski, *Estimates of the spectral radius and the semigroup growth bound in terms of the resolvent and weak asymptotics*. Algebra i Analiz 14 (2002), no. 4, 141–157 ; translation in St. Petersburg Math. J. 14 (2003), no. 4, 641–653
- [29] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 299. Springer-Verlag, Berlin, 1992. x+300 pp. ISBN : 3-540-54751-7
- [30] I. E. Pritsker, *On the local asymptotics of Faber polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 10, 2953–2960.
- [31] B. Sz.-Nagy ; C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*. Masson et Cie, Paris ; Akadémiai Kiadó, Budapest 1967 xi+373 pp.
- [32] E. Robinson, *Sums of stationary random variables*. Proc. Amer. Math. Soc. 11 1960 77–79.
- [33] R. Rochberg, *The equation $(I - S)g = f$ for shift operators in Hilbert space*. Proc. Amer. Math. Soc. 19 1968 123–129.
- [34] P. K. Suetin, *Series of Faber polynomials*. Translated from the 1984 Russian original by E. V. Pankratiev [E. V. Pankrat'ev]. Analytical Methods and Special Functions, 1. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1998. xx+301 pp. ISBN : 90-5699-058-6
- [35] T. Tao, *Cohomology for dynamical systems* Article sur le blog *What's new*, 2008.
- [36] K-C. Toh ; L. Trefethen *The Kreiss matrix theorem on a general complex domain*. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 21 (1999), no. 1, 145–165 (electronic).
- [37] J. M. A. M. van Neerven, *Exponential stability of operators and operator semigroups*. J. Funct. Anal. 130 (1995), no. 2, 293–309.
- [38] G. Weiss, *Weakly l^p -stable linear operators are power stable*. Internat. J. Systems Sci. 20 (1989), no. 11, 2323–2328.

-
- [39] A. Zygmund *Trigonometric series. Vol. I, II.* Third edition. With a foreword by Robert A. Fefferman. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. xii ; Vol. I : xiv+383 pp. ; Vol. II : viii+364 pp. ISBN : 0-521-89053-5