

Université Lille I – Sciences et Technologies
Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)
Ecole Doctorale SPI Lille Nord-de-France

Année 2012 –N° d'ordre: 41057

THESE

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Lille I – Sciences et Technologies

Discipline : Génie Civil

Présentée par

Emma LANOYE

UNE MODELISATION DE L'ENDOMMAGEMENT ET DU GLISSEMENT AVEC FROTTEMENT DANS LES MATERIAUX QUASI-FRAGILES

Soutenue le 12 décembre 2012
devant le jury composé de Messieurs

T.DESOYER	Professeur, Ecole Centrale Marseille	Rapporteur
D.KONDO	Professeur, Université Paris VI	Rapporteur
A.GIRAUD	Professeur, INPL- Ecole de Géologie	Examineur
D.LYDZBA	Professeur, Université Polytechnique Wroclaw Pologne	Examineur
Q.ZHU,	Maître de Conférences, Université Paris Est	Examineur
F.CORMERY	Maître de Conférences, Université Lille I	Co-encadrant
J.F.SHAO	Professeur, Université Lille I	Directeur de thèse

*In memoria di mia madre,
En souvenir de mon père ...*

Remerciements

Parce que bien évidemment je n'aurais pas pu réaliser ce travail de recherche toute seule, ...

Je remercie très chaleureusement Fabrice CORMERY, mon co-encadrant de thèse, qui m'a accompagnée tout au long de ces années de recherche depuis le Master 2. Son investissement personnel, son goût pour la recherche et la justesse de ses conseils m'ont grandement aidée à franchir chacune des étapes de ce travail. Sans oublier son enthousiasme et ses profusions d'idées, qui après toutes ces années m'impressionnent encore !

Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Jian-Fu SHAO, qui m'a accueillie au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille et qui m'a fait partager ses connaissances et son expérience.

J'adresse mes remerciements à l'ensemble des membres du jury de thèse. Je suis extrêmement reconnaissante envers Thierry DESOYER et Djimedo KONDO d'avoir accepté de juger ce manuscrit et d'avoir suggéré des remarques pertinentes lors de la relecture de ce mémoire. Un grand merci à Djimedo qui n'a cessé d'encourager mon travail et m'a témoigné son soutien à de nombreuses reprises et encore aujourd'hui... Je remercie également Albert GIRAUD qui m'a fait l'honneur de présider ce jury ainsi que Darius LYDZBA et Qizhi ZHU en tant qu'examineurs.

Le quotidien de ces années de recherche a été rythmé par de nombreuses rencontres et échanges avec les différents membres de l'équipe THMC du laboratoire et de l'équipe enseignante ainsi que du personnel de Polytech'Lille. Je souhaite les remercier pour leurs conseils, leur bonne humeur et leur sympathie.*

Je tiens à remercier également mes collègues (ex)doctorants du laboratoire (en particulier ceux du bureau E103) et d'autres laboratoires du campus pour leur écoute, leurs encouragements, les moments de rigolade...*

Je voudrais également remercier Jian LIN pour son aide et ses précieux conseils à propos d'Abaqus.

Je souhaite remercier Lydie et 'J.J.' d'avoir été présents depuis le début jusqu'à la fin de cette expérience (merci encore pour l'organisation du pot de thèse !) et notamment pendant les moments les moins joyeux..., la petite famille de Véro pour leur joyeuse humeur (un merci particulier à Ben l'informaticien !), et tous mes amis pour leurs encouragements, pour les sorties et les discussions qui libèrent l'esprit !*

Enfin, the last but not least, je remercie William : pour son soutien inconditionnel, pour sa présence – physique ou virtuelle (vive Facetime !) –, pour sa patience, pour avoir cru en moi quand je ne m'en sentais pas capable, pour avoir su écouter mes doutes et mes inquiétudes à propos de mes travaux et pour tout le reste...

** de peur d'oublier certains, je n'ai pas cité de noms mais j'espère que les personnes qui m'ont aidée et/ou accompagnée pendant mes années de thèse se reconnaîtront...*

Table des matières

Notations	9
Introduction générale	11
CHAPITRE 1 Bétons et roches : comportement mécanique et modélisations	15
1.1 Microfissuration et comportement mécanique	16
1.1.1 Compression uniaxiale.....	16
1.1.2 Traction uniaxiale	20
1.1.3 Influence de la pression de confinement.....	23
1.2 Modélisations	26
1.2.1 Quelques résultats de la micromécanique des milieux microfissurés.....	26
1.2.2 Modèle d'endommagement de Halm et Dragon [1998].....	30
1.2.3 Modèle de Bargellini et al. [2008].....	32
1.2.4 Modèle de Ragueneau [1999].....	35
CHAPITRE 2 Modélisation de l'endommagement avec effet unilatéral	39
2.1 Construction du modèle de base	39
2.1.1 Hypothèses.....	39
2.1.2 Variable interne d'endommagement.....	40
2.1.3 Potentiel thermodynamique et lois d'état.....	40
2.1.4 Loi d'évolution de l'endommagement.....	42
2.2 Identification des fonctions	43
2.2.1 Fonctions K et μ	43
2.2.2 Fonction h	46
2.3 Etude des capacités prédictives du modèle de base	46
2.3.1 Etude du comportement à microfissuration constante.....	46
2.3.2 Etude du comportement dissipatif.....	48
2.4 Commentaires	57
CHAPITRE 3 Modélisation de l'endommagement et du glissement avec frottement	59
3.1 Construction du modèle d'endommagement avec frottement	59
3.1.1 Variable interne de glissement	59
3.1.2 Potentiel thermodynamique et lois d'état.....	60
3.1.3 Critère de glissement et loi d'évolution.....	62
3.1.4 Critère d'endommagement et loi d'évolution.....	64
3.2 Etude des capacités prédictives du modèle	70
3.2.1 Comportement en traction uniaxiale.....	70
3.2.2 Comportement en compression uniaxiale	72
3.2.3 Comportement en traction - compression uniaxiales.....	76
3.2.4 Comportement en compression triaxiale	78
3.2.5 Réponse prédite pour une sollicitation de torsion.....	80

3.3 Etude comparative du modèle avec des essais expérimentaux : identification et validation	82
3.3.1 Identification des paramètres	83
3.3.2 Confrontation du modèle avec des essais expérimentaux.....	89
 CHAPITRE 4 Analyse et applications numériques	97
4.1 La méthode des éléments finis appliquée à la mécanique non linéaire.....	97
4.1.1 Equations d'équilibre globales	97
4.1.2 Intégration numérique locale de la loi de comportement.....	98
4.1.3 Opérateurs tangent continu et tangent cohérent.....	106
4.1.3.1 Opérateur tangent continu	106
4.1.3.2 Opérateur tangent cohérent.....	107
4.2 Vérification et validation de l'implémentation dans Abaqus	108
4.2.1 Traction uniaxiale suivie d'une compression uniaxiale	109
4.2.2 Compression uniaxiale.....	110
4.3 Problème de structure : une poutre en flexion 3 points.....	111
4.3.1 Caractéristiques de la structure.....	111
4.3.2 Modélisation.....	112
4.3.3 Données des matériaux	113
4.3.4 Résultats numériques.....	113
4.4 Intégration non locale du modèle	118
4.4.1 Techniques de régularisation	118
4.4.2 Approche non locale par intégrale – Extension du modèle d'endommagement avec frottement.....	118
4.4.3 Implémentation numérique de la variable non locale	120
4.5 Application de l'approche non locale à la poutre en flexion 3 points.....	122
 Conclusion	127
Annexe	129
Références bibliographiques	133

Notations

L'ensemble des tenseurs utilisés au cours de cette étude sont définis sur l'espace vectoriel euclidien \mathbb{R}^3 dont le triplet de vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ constitue une base orthonormée.

Notations tensorielles

a Scalaire

\mathbf{a} Vecteur

\mathbf{a} Tenseur d'ordre 2

\mathbb{A} Tenseur d'ordre 4

$\text{Tr } \mathbf{a}$ Trace du tenseur \mathbf{a}

\mathbf{a}_d Déviateur du tenseur \mathbf{a}

$\mathbf{1}$ Tenseur unité d'ordre 2

\mathbb{I} Tenseur unité d'ordre 4

$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ \otimes Produit tensoriel

$\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$

Paramètres matériau

E_0 Module d'Young du matériau sain

ν_0 Coefficient de Poisson du matériau sain

K_0 Module de compressibilité du matériau sain

μ_0 Module de cisaillement du matériau sain

λ_0 et μ_0 Paramètres de Lamé du matériau sain

Introduction générale

Sous chargement, les matériaux dits « quasi-fragiles » tels que les bétons et de nombreuses roches présentent souvent une perte de rigidité progressive, ainsi qu'un comportement anisotrope, asymétrique et hystérétique. Il est maintenant largement admis que ce comportement, fortement non linéaire et complexe, est lié principalement à la création, au développement et au jeu d'ouverture et fermeture de réseaux de microfissures accompagnés de glissement et frottement entre lèvres en contact.

La prise en compte de la microfissuration sur le plan des modèles de comportement est un problème difficile et encore ouvert à l'heure actuelle. On distingue généralement deux types d'approches pour caractériser ce comportement. La première, qualifiée de micromécanique, (cf. par exemple Kachanov [1982], Andrieux et al. [1986], Gambarotta et Lagomarsino [1993], Pensée et Kondo [2001], Zhu et al. [2008]) présente l'avantage d'établir avec rigueur et précision le lien entre l'état macroscopique du matériau et sa microstructure. Cependant, la formulation d'un modèle nécessite de s'appuyer sur une description simplifiée de la microstructure du matériau étudié et aboutit le plus souvent à une écriture relativement complexe. La seconde approche trouve ses racines dans les travaux fondateurs de Kachanov [1958] et reste celle souvent adoptée par l'ingénieur notamment pour recourir au calcul numérique des structures. Cette approche consiste à choisir une ou plusieurs variables internes d'endommagement, puis à construire à l'échelle macroscopique les équations constitutives du modèle et repose sur la compatibilité de celles-ci avec les principes de la thermodynamique. Un des avantages majeurs de cette seconde approche, inductive et de nature phénoménologique, est de fournir un cadre approprié pour construire une formulation simple de la loi de comportement du matériau étudié.

Concernant cette seconde approche, l'endommagement était considéré à ses débuts d'un point de vue purement phénoménologique et décrit par une variable d'endommagement scalaire ; on peut citer par exemple les travaux fondateurs de Lemaître et Chaboche [1978], Marigo [1981]. Ensuite, un des axes de recherche a été d'améliorer la description de l'état de dégradation du matériau en prenant des tenseurs d'ordre supérieurs pour la variable interne (cf. par exemple Ortiz [1985], Ju [1989], Chaboche [1993], Halm et Dragon [1996], [1998]). Le but était de rendre compte plus finement de l'anisotropie induite par l'orientation des microfissures et également des effets liés à l'ouverture et fermeture de ces dernières à l'échelle inférieure. Toutefois, la prise en compte simultanée de la présence ainsi que la croissance de microfissures et des effets d'ouverture et fermeture (avec ou sans frottement) ont conduit souvent à de sérieuses difficultés. Même dans le contexte d'un endommagement constant et dans des conditions de glissement sans frottement, des incohérences mathématiques ou thermodynamiques ont été signalées dans la plupart des formulations

actuelles, comme les discontinuités de la réponse contrainte-déformation ou la non-unicité du potentiel thermodynamique (Chaboche [1992], Carol et Willam [1996], Cormery et Welemane [2002], Challamel et al. [2006]). Notons que la formulation proposée dans le cadre de la thèse de Welemane [2002] (cf. également Cormery et Welemane [2010]), où l'endommagement est caractérisé à partir de la fonction de la distribution en orientation des densités de microfissures, apporte une réponse intéressante à cette problématique. Malheureusement, la formulation proposée est complexe à utiliser et ne prend pas en compte le phénomène de frottement des lèvres de microfissures en contact.

Dans l'optique d'une utilisation industrielle sérieuse, la construction d'un modèle d'endommagement simple, fiable sur le plan mathématique et thermodynamique, et offrant une réponse pertinente pour les matériaux quasi-fragiles jusqu'à l'apparition d'une localisation de l'endommagement, constitue à l'heure actuelle un enjeu important. Il représente en effet une étape indispensable avant de pouvoir espérer modéliser de manière satisfaisante le comportement jusqu'à la ruine de nombreux ouvrages du génie civil.

Une tentative pour construire un modèle simple d'endommagement par microfissuration en mesure de décrire quelques-unes des caractéristiques mécaniques des matériaux quasi-fragiles a été effectuée par Kondo et al. [2007], Abou-Chakra Guéry et al. [2008]. Cette modélisation macroscopique est basée sur l'introduction d'une unique variable interne d'endommagement scalaire régie par une loi à seuil et suppose implicitement que le contact entre les lèvres des microfissures est de type unilatéral et s'effectue sans frottement. Malheureusement, si cette modélisation présente de nombreux avantages, elle ne permet pas notamment de rendre compte du comportement hystérétique et de l'influence de la pression de confinement sur la réponse du matériau observés expérimentalement. Ceci s'explique par l'absence de prise en compte dans ce modèle du glissement avec frottement des lèvres des microfissures fermées à l'échelle microscopique.

On se propose dans cette thèse d'améliorer les capacités prédictives du modèle précité en introduisant ce second phénomène dissipatif susceptible d'être induit lors de la fermeture des microdéfauts. On suppose en effet que le glissement entre les lèvres des microdéfauts se fait avec frottement, i.e. que les microfissures fermées ont un comportement « plastique ». La modélisation de ce nouveau mécanisme dissipatif s'effectue à l'échelle macroscopique en ne faisant référence à l'échelle inférieure ou aux résultats de la micromécanique des milieux microfissurés que pour interpréter ou justifier certaines hypothèses.

La rédaction de ce mémoire s'organise autour de quatre parties.

Le premier chapitre est consacré dans un premier temps à la présentation, l'analyse et l'interprétation des principaux résultats expérimentaux sur le comportement mécanique des bétons et de certaines roches. On présente ensuite brièvement les modélisations prenant en compte les deux mécanismes dissipatifs associés à la microfissuration, en essayant d'une part

de souligner les résultats importants de la micromécanique et d'autre part de montrer les faiblesses des modèles macroscopiques existants.

Dans le second chapitre, on présente en premier lieu le modèle d'endommagement par microfissuration proposé par Kondo et al. [2007], Abou-Chakra Guéry et al. [2008], en rappelant les principales étapes de sa construction. Dans un deuxième temps, on propose une analyse de ce modèle afin de mettre en évidence ses avantages mais également ses limites.

Le troisième chapitre est consacré à la modélisation du glissement avec frottement des lèvres des microfissures. Après avoir expliqué la nécessité d'introduire dans le modèle précédent une variable de déformation anélastique pour décrire le glissement avec frottement, on présente la construction du modèle d'endommagement avec frottement. Notamment, une attention particulière est accordée à la continue différentiabilité du nouveau potentiel thermodynamique proposé. L'étude et la simulation de différents essais permettent d'illustrer la pertinence des choix retenus.

Le dernier chapitre, à tonalité numérique, présente l'algorithme d'intégration locale du modèle d'endommagement avec frottement dans un code de calcul aux éléments finis. Une étude d'une poutre en béton armé sous flexion 3 points permet d'exploiter la formulation proposée lors d'un calcul de structure. Cette partie s'achève sur le développement d'une extension non locale du modèle d'endommagement avec frottement proposé et son intégration numérique.

CHAPITRE 1

Bétons et roches : comportement mécanique et modélisations

Objectifs du chapitre

De nombreuses études expérimentales ont été consacrées à la mise en évidence de la microfissuration des bétons et de nombreuses roches (on peut citer par exemple les grès et les granites) au moyen de diverses approches expérimentales (ondes ultrasonores, émission acoustique, microtomographie). Elles montrent d'une part, qu'avant tout chargement ces matériaux sont déjà le siège d'une microfissuration et d'autre part, que la propagation de ces microfissures ainsi que la création de nouveaux défauts semblent être un des mécanismes dominants de ces matériaux. Il apparaît également qu'un second mécanisme dissipatif étroitement lié à la microfissuration joue un rôle important dans la réponse de ces matériaux : le glissement avec frottement des lèvres des microfissures (Walsh [1965], Bieniawski [1967]).

On se propose dans la première partie de ce chapitre de présenter succinctement la réponse mécanique des bétons et de roches au travers de quelques essais couramment utilisés en génie civil. Les quelques données expérimentales présentées ont pour unique but de mettre en évidence les principaux effets suscités par la microfissuration, tant ceux liés à la présence de microfissures que ceux induits par la propagation ou la création de nouveaux microdéfauts.

Dans une seconde partie, on présente une brève synthèse des modélisations du comportement mécanique de ces matériaux et plus particulièrement celles visant à rendre compte des deux principaux mécanismes dissipatifs liés à la microfissuration, à savoir la création et la croissance de microfissures et le frottement des lèvres de ces microdéfauts.

1.1 Microfissuration et comportement mécanique

Malgré une composition structurale très différente, les bétons et certaines roches ont un comportement mécanique assez similaire. On analyse ici la réponse d'une éprouvette constituée d'un de ces matériaux soumise à diverses sollicitations uniaxiales et multiaxiales. Les résultats de ces essais sont issus pour la plupart de la littérature. Soulignons qu'ils sont également complétés par quelques essais expérimentaux que nous avons réalisés sur des mortiers afin de mieux comprendre et de mettre en évidence certaines manifestations essentielles de la microfissuration.

On pourra se référer par exemple aux synthèses de Ringot et Bascou [2001] et Kranz [1983] pour une description plus détaillée du comportement des bétons et des roches.

1.1.1 Compression uniaxiale

C'est l'essai le plus couramment réalisé en laboratoire pour caractériser le comportement des bétons et des roches. On se propose d'analyser ici la réponse contrainte-déformation d'un mortier (Elaqra et al. [2007] et Landis et al. [2003]) sous un chargement de compression uniaxiale d'axe e_1 ($\sigma = \sigma_1 e_1 \otimes e_1, \sigma_1 < 0$).

Sur la figure 1.1, on distingue quatre phases jusqu'à la rupture (notons que ce résultat a été mis en évidence initialement par Bieniawski [1967]):

Phase 1 : Serrage des fissures

Cette phase correspond à la fermeture progressive des microfissures préexistantes et entraîne le raidissement du matériau. Ce phénomène est marqué par une non-linéarité de la réponse contrainte-déformation du matériau et s'accompagne d'une activité acoustique importante (cf. figure 1.1b). Notons que cette phase est plus apparente pour les roches car elles sont caractérisées par une microfissuration initiale plus importante (cf. par exemple Andrieux [1983]).

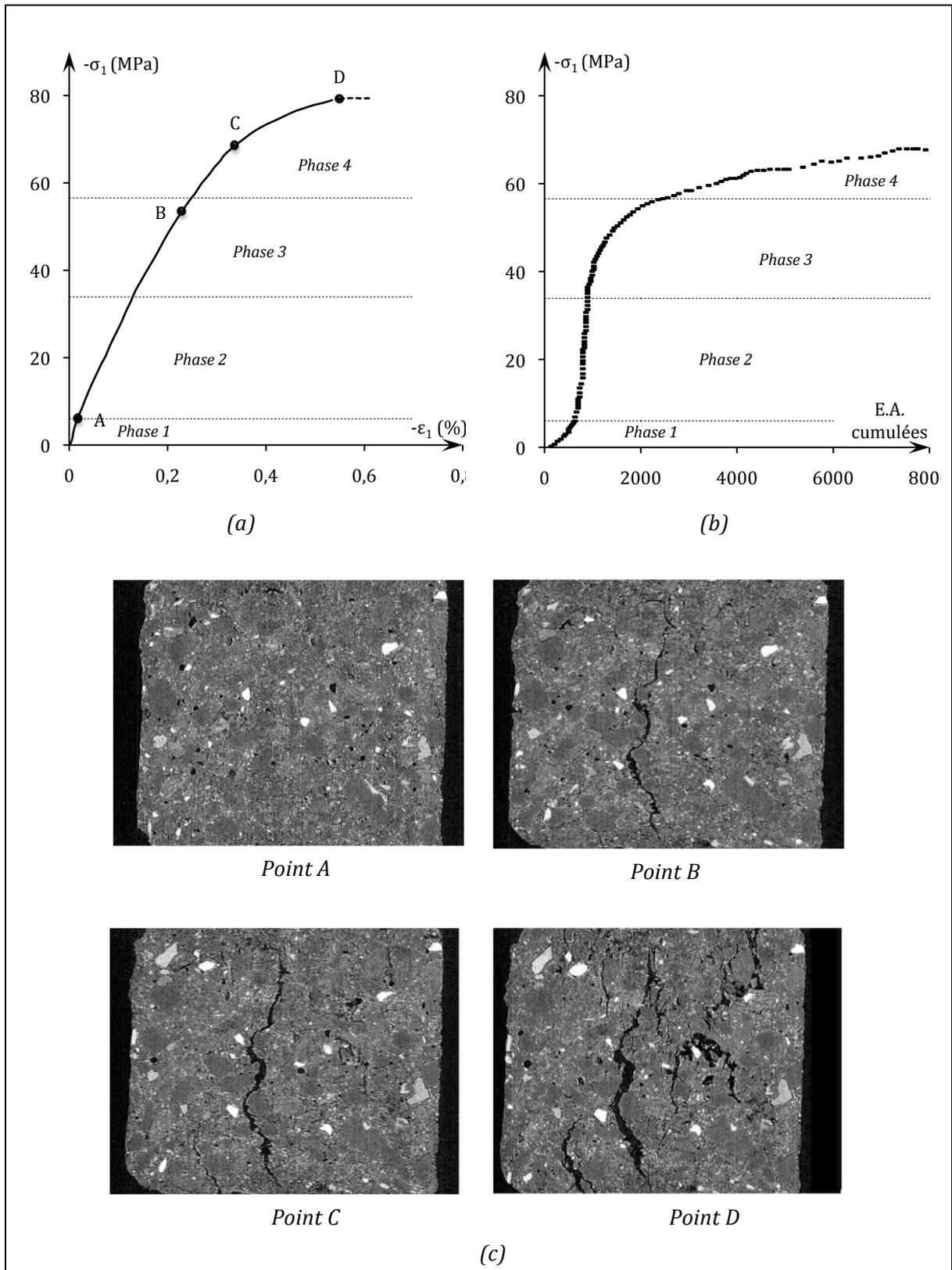


Figure 1.1 – Réponse d'un mortier à une compression uniaxiale d'axe e_1 : (a) courbe contrainte σ_1 – déformation ε_1 , (b) courbe contrainte σ_1 – émissions acoustiques E.A. cumulées, cf. Elaqla et al. [2007] et (c) clichés d'analyse tomographique, cf. Landis et al. [2003] (Ech. 12 :1)

Phase 2 : Domaine linéaire

La déformation évolue linéairement avec la contrainte. Durant cette phase qui est appelée également « zone silencieuse », aucun signal d'émission acoustique n'est détecté (cf. figure 1.1b) : le matériau ne s'endommage pas, il ne subit donc aucune nouvelle altération.

Cependant, le comportement n'est pas élastique comme le montre un cycle de décharge-recharge que nous avons réalisé sur un mortier qui met en évidence une boucle d'hystérésis (cf. figure 1.2). En effet, les deux lèvres de chacune des microfissures les plus inclinées par rapport à l'axe de chargement glissent l'une sur l'autre avec frottement. Une dissipation apparaît ainsi sur ces microfissures. Lors de la phase initiale de décharge, le glissement est bloqué par le frottement c'est pourquoi la pente de décharge (E_d) est plus forte que la pente de charge initiale. Si l'on poursuit la décharge, le glissement s'effectue dans le sens opposé à celui de la charge et la pente de la courbe $\sigma_1 - \varepsilon_1$ diminue. Enfin, la recharge suit un chemin différent qui induit une boucle d'hystérésis mettant en évidence une dissipation d'énergie.

Soulignons que E_d constitue une bonne approximation du module d'Young du matériau sain car cette partie de la courbe correspond à un état de l'éprouvette où toutes les microfissures sont fermées et bloquées par le frottement.

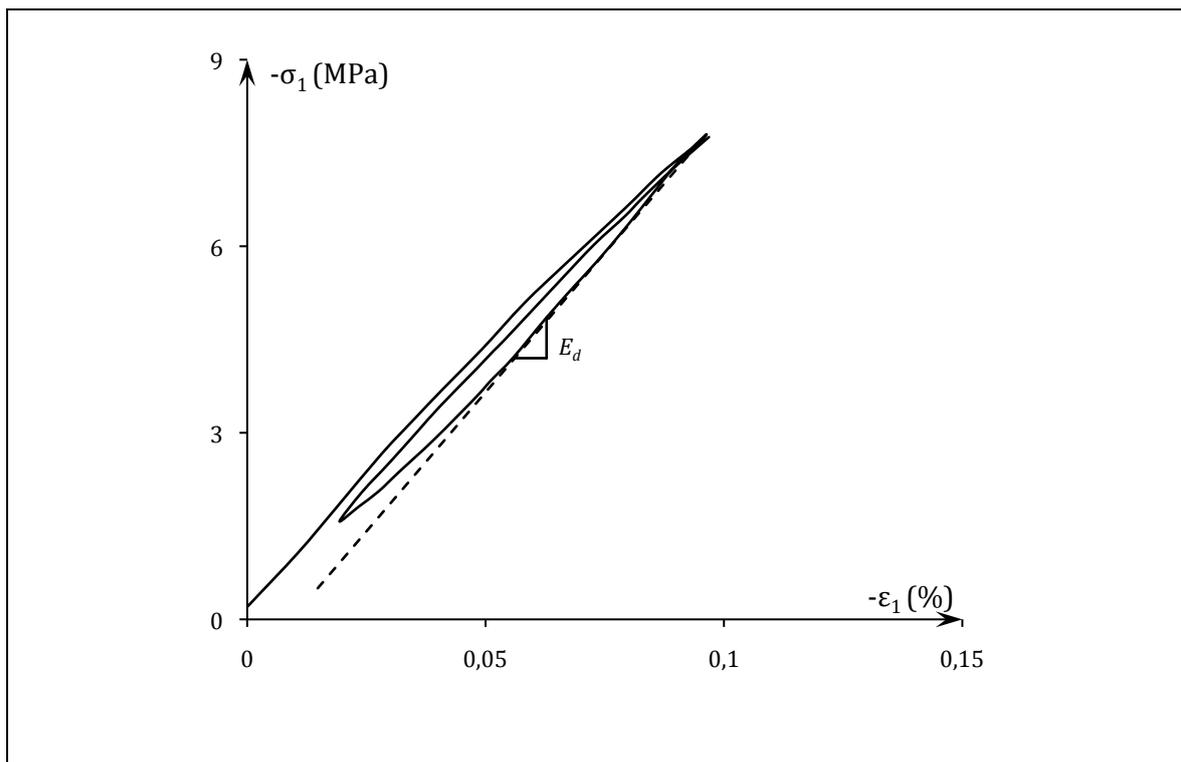


Figure 1.2 – Réponse d'un mortier à un essai de compression uniaxiale d'axe ε_1 avec cycle de charge-décharge-recharge pendant la phase 2 : courbe contrainte σ_1 – déformation ε_1

Phase 3 : Propagation stable de la microfissuration

La courbe $\sigma_1 - \varepsilon_1$ cesse d'être linéaire. Cette phase est marquée par une activité croissante des émissions acoustiques (cf. figure 1.1b) ce qui révèle une propagation progressive des microfissures. Par ailleurs, cette propagation est stable car l'arrêt de la montée en charge s'accompagne de l'arrêt de l'émission acoustique (cf. par exemple Berthaud [1988] pour les bétons). Soulignons que des études récentes issues de la microtomographie (cf. figure 1.1c) semble indiquer que les microfissures observables s'orientent de préférence dans une direction parallèle à l'axe de chargement, induisant ainsi une anisotropie marquée du matériau. Cependant, il est intéressant de noter que des résultats sur les roches montrent que de nombreuses microfissures, inclinées par rapport à la direction de chargement, évoluent ou apparaissent également (cf. Zhao [1998]).

Si l'on réalise des cycles de charge-décharge durant cette phase, on observe (cf. figure 1.3) également la présence de boucles d'hystérésis, indiquant que le matériau est le siège d'un processus dissipatif même à l'état d'endommagement figé, identique à celui de la phase 2. Notons que lors d'un essai de compression, l'existence de ces boucles ne permet pas de déterminer directement les valeurs des modules élastiques du matériau dégradé.

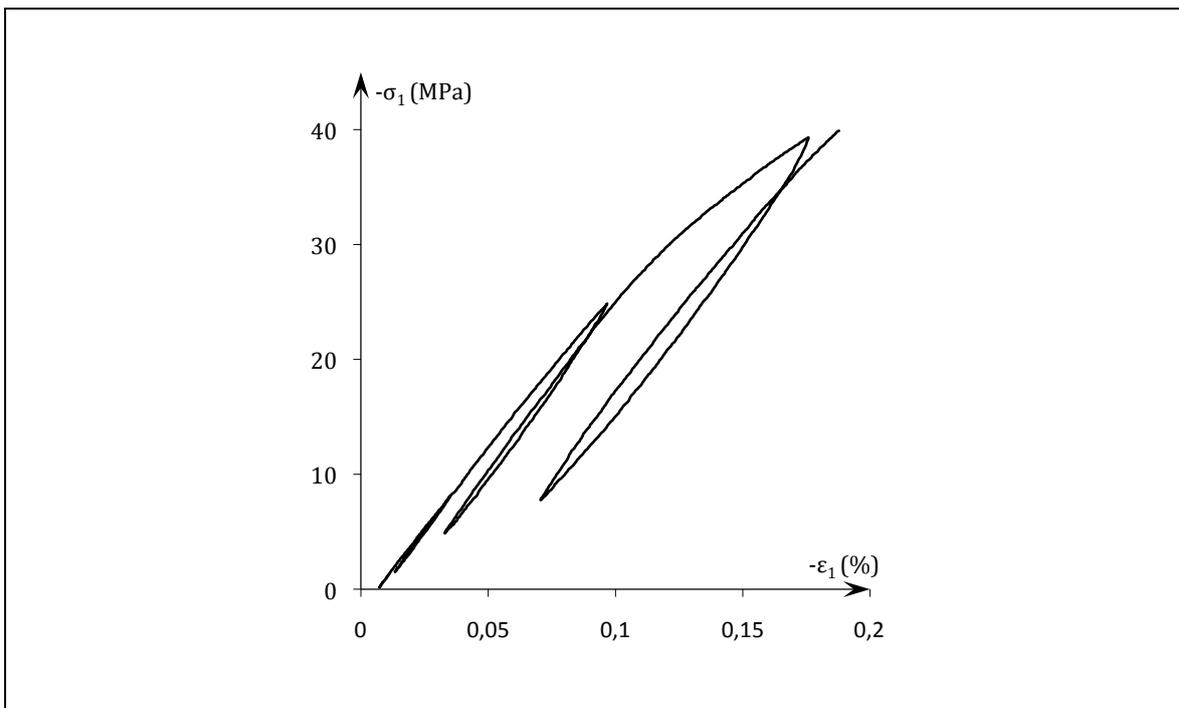


Figure 1.3 - Réponse d'un mortier à un essai de compression uniaxiale d'axe e_1 avec cycles de charge-décharge : courbe contrainte σ_1 – déformation ε_1

Phase 4 : Propagation instable de la microfissuration

A partir d'une valeur seuil, le champ de déformation cesse d'être homogène et on enregistre une forte augmentation des événements acoustiques (cf. figure 1.1b). Les microfissures se propagent rapidement et commencent à se rejoindre comme le montrent les clichés de microtomographie (cf. figure 1.1c). On observe alors une localisation des microfissures comme le confirment les images issues de l'analyse microtomographique obtenues par Asahina et al. [2011]. La réponse de l'éprouvette n'est donc plus représentative du comportement local du matériau mais celui d'une structure.

Soulignons pour finir que l'on constate dans l'ensemble des matériaux quasi-fragiles une valeur nettement plus élevée de la « contrainte au pic » en compression uniaxiale par rapport à celle obtenue en traction uniaxiale (10 à 20 fois plus importante).

1.1.2 Traction uniaxiale

Les données expérimentales de traction uniaxiale restent rares dans la littérature. Cet essai est en effet difficile à mettre en œuvre car il nécessite des équipements ainsi qu'une procédure expérimentale complexes.

On présente sur la figure 1.4 la réponse contrainte-déformation obtenue pour un grès de Fontainebleau (Sayehi [1992]) et un béton (Terrien [1980]) lors d'une traction uniaxiale d'axe e_1 ($\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 e_1 \otimes e_1$, $\sigma_1 > 0$).

On observe sur la figure 1.4 une première phase linéaire mais également élastique. On peut montrer en effet que le comportement du matériau est quasi-réversible lors de cette phase. Par exemple, nous avons pu mettre en évidence ce comportement lors de l'étude d'un mortier en traction uniaxiale avec un cycle de charge-décharge (cf. figure 1.5) où l'on constate que les courbes de charge et de décharge sont pratiquement confondues.

La seconde phase est marquée par une légère perte de la linéarité liée à la propagation des microfissures, comme le confirme l'émission acoustique obtenue par Terrien [1980] sur le béton. Cette propagation des microfissures est anisotrope, la majorité des défauts se développant dans la direction perpendiculaire à l'axe de chargement, et se révèle rapidement instable. Notons que pour les deux matériaux, le seuil de non-linéarité apparaît à environ 60% de la « contrainte de pic ».

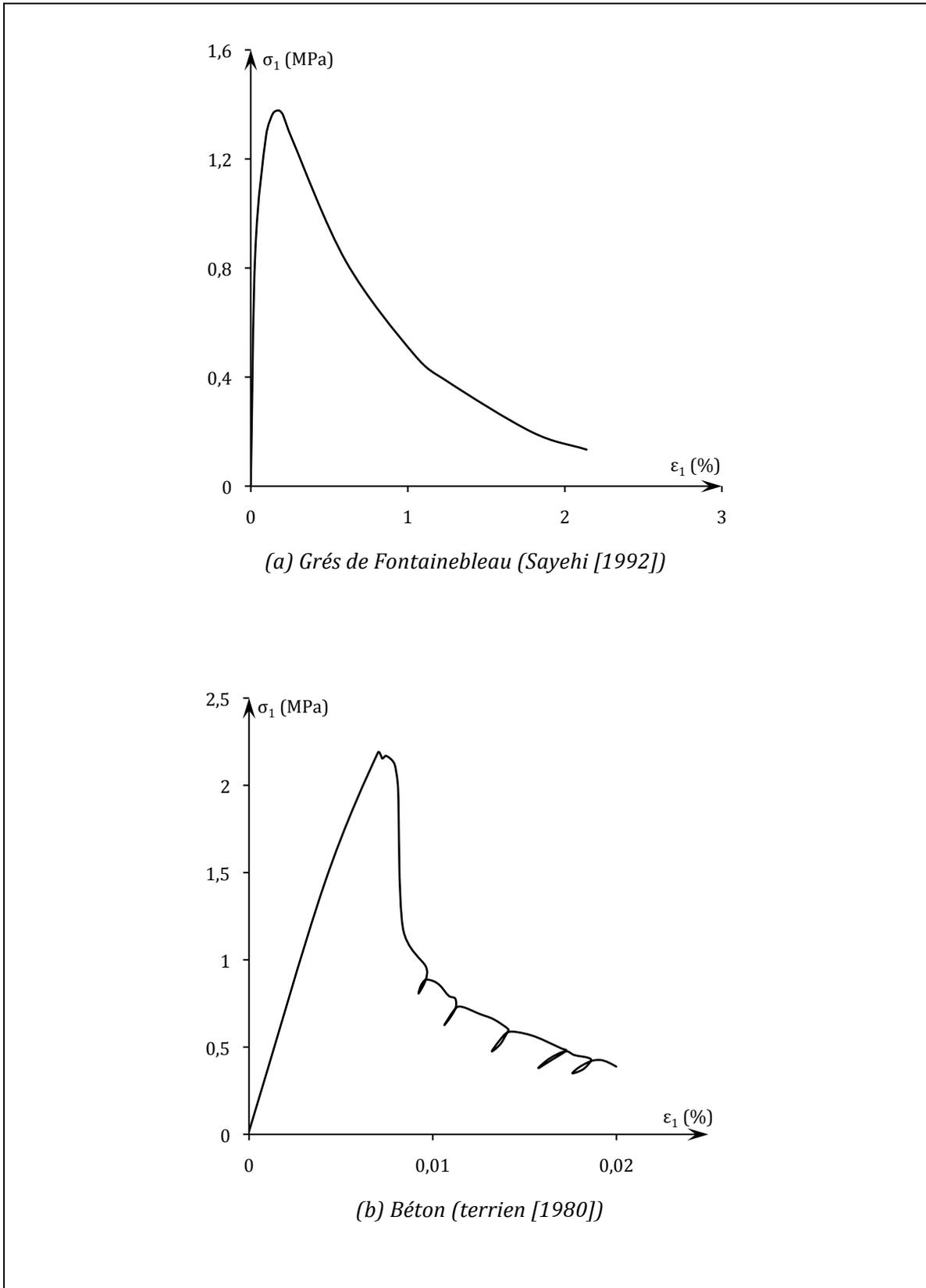


Figure 1.4 – Réponses à une traction uniaxiale d'axe e_1 : courbes contrainte σ_1 – déformation ε_1

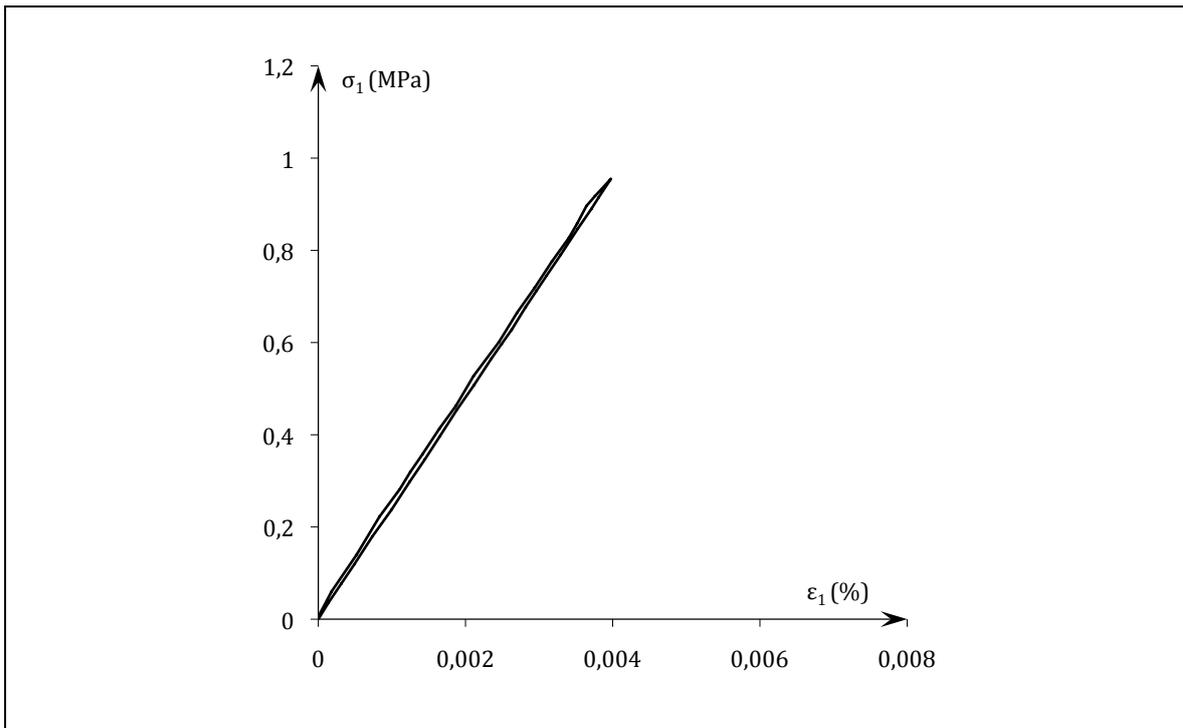


Figure 1.5 – Réponse d'un mortier à une traction uniaxiale d'axe e_1 : charge et décharge dans la phase élastique

Sur les essais présentés (cf. figure 1.4), le champ de déformations dans l'échantillon cesse d'être homogène à partir du pic de la courbe contrainte-déformation axiales. La réponse obtenue n'est alors plus représentative du comportement mais du matériau.

Afin d'accéder à cette dernière phase du comportement du matériau, l'essai PIED (Pour l'Identification de l'Endommagement Diffus) a été proposée par Bazant et Pijaudier-Cabot [1989] puis repris par Ramtani [1990] afin de mettre en évidence l'effet unilatéral dans les bétons. Celui-ci est une modification de l'essai sous traction uniaxiale visant à assurer une homogénéité du champ de déformation dans le béton. L'idée est de coller des barrettes d'aluminium à l'éprouvette en béton. Grâce à la rigidité suffisamment élevée de l'aluminium, on peut empêcher ainsi la formation de localisations au profit d'une microfissuration homogène dans l'éprouvette.

On peut observer sur la figure 1.6 la réponse d'un béton à l'essai PIED réalisé par Ramtani [1990]. On constate d'une part un comportement adoucissant après le pic de la courbe contrainte-déformation axiales et d'autre part que les décharges sont quasi-linéaires et élastiques, puisque les courbes de charge et de décharge sont pratiquement confondues.

En revanche la pente de décharge (i.e. le module d'Young axial $E(e_1)$ du matériau) décroît au fur et à mesure que l'on progresse dans l'essai, mettant ainsi en évidence une dégradation importante et progressive des propriétés mécaniques du matériau par la microfissuration, comme l'explique Ramtani [1990].

Enfin la décharge complète de l'éprouvette suivie d'une compression uniaxiale suivant le même axe de chargement permet de mettre en évidence l'effet unilatéral (changement de pente sur la courbe) dans le béton induit par la refermeture des microfissures quand celles-ci sont mises en compression.

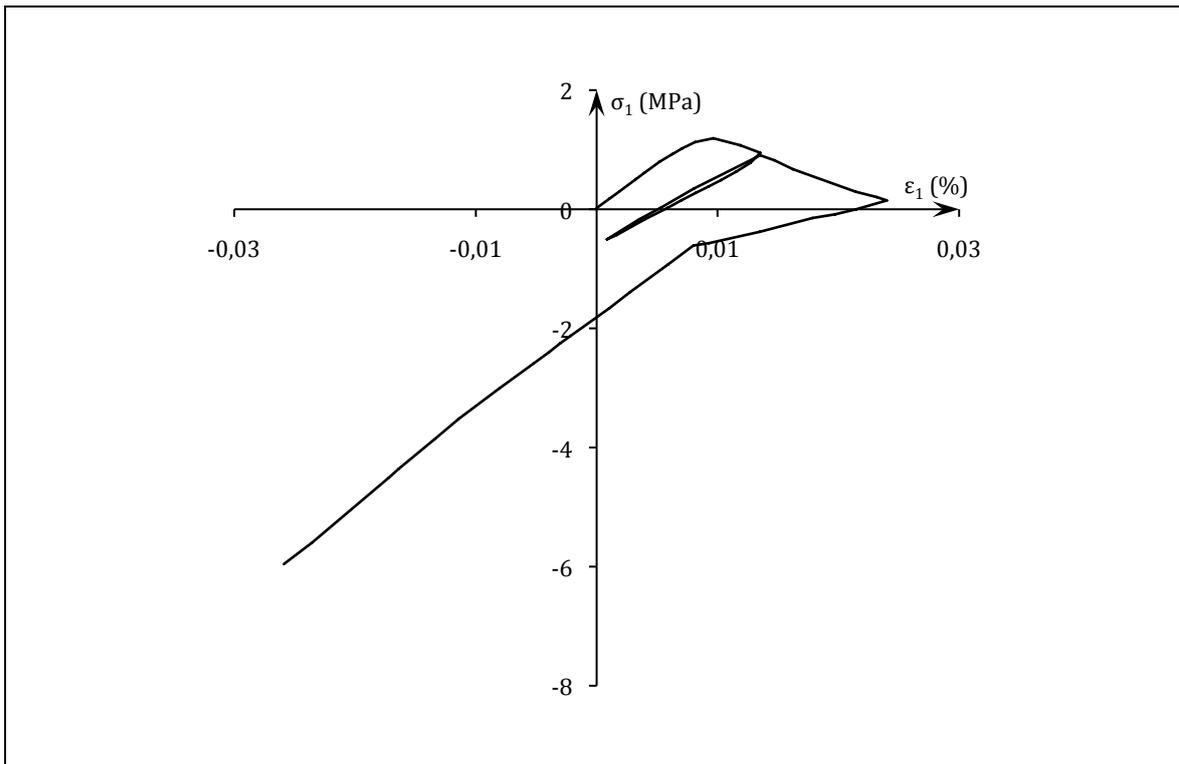


Figure 1.6 – Réponse d'un béton à un essai uniaxial PIÉD de traction avec cycles de charge-décharge suivie de compression : courbe contrainte σ_1 – déformation ϵ_1 (Ramtani [1990])

1.1.3 Influence de la pression de confinement

Intéressons-nous maintenant à l'influence d'une pression de confinement sur une éprouvette constituée d'un matériau quasi-fragile (bétons, roches).

Lorsque l'on sollicite une éprouvette de volume V placée dans une cellule triaxiale à une pression P_c contrôlée, on met une nouvelle fois en évidence l'effet unilatéral associé à la refermeture des microfissures. Ainsi, si l'on s'intéresse à la figure 1.7 présentant la variation relative de volume d'un échantillon de grès des Vosges (Pecqueur [1995]) durant cet essai, on constate une non linéarité de la courbe pression-déformation volumique, i.e. une

augmentation du module de compressibilité K du matériau. Cette rigidification du matériau est due à la refermeture progressive des microfissures présentes initialement dans le matériau.

Pour une pression P_f , appelée pression de fermeture des microfissures, la quasi-totalité des microfissures sont fermées. Le comportement devient alors linéaire et réversible. Le module de compressibilité atteint alors une valeur asymptotique K_0 qui peut être considérée comme celle du matériau sain, i.e. sans microfissures.

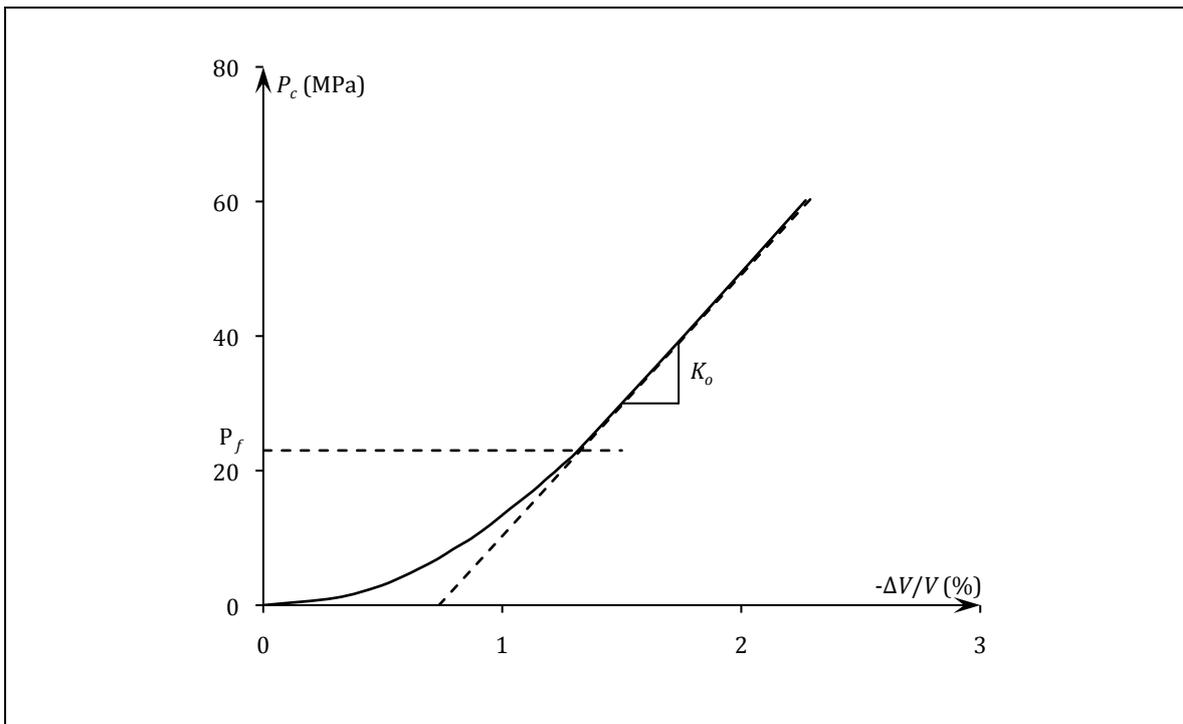


Figure 1.7 – Réponse d'un grès des Vosges à un essai de compression hydrostatique (Pecqueur [1995]) : courbe pression de confinement P_c – variation relative de volume $\Delta V / V$

Si l'on poursuit le chargement compressif suivant un axe e_1 tout en maintenant constante la pression latérale P_c sur l'échantillon (i.e. que l'on fait subir maintenant à l'éprouvette une compression triaxiale de révolution), on peut montrer que le comportement du matériau présente quelques différences notables avec celui décrit en compression uniaxiale. En effet, l'étreinte latérale a pour effet d'augmenter considérablement la phase élastique et par conséquent la valeur de la contrainte σ_1 au pic de la courbe contrainte-déformation axiales. L'augmentation du seuil de fissuration s'explique par le frottement des lèvres des microfissures comprimées qui bloque le glissement d'autant plus que le matériau est confiné. L'évolution de la microfissuration est ainsi retardée.

La figure 1.8 montrant les résultats obtenus par Tran et al. [2011] sur un béton lors de différents essais de compression triaxiale (P_c compris 50 MPa et 650 MPa) permet d'illustrer notre propos.

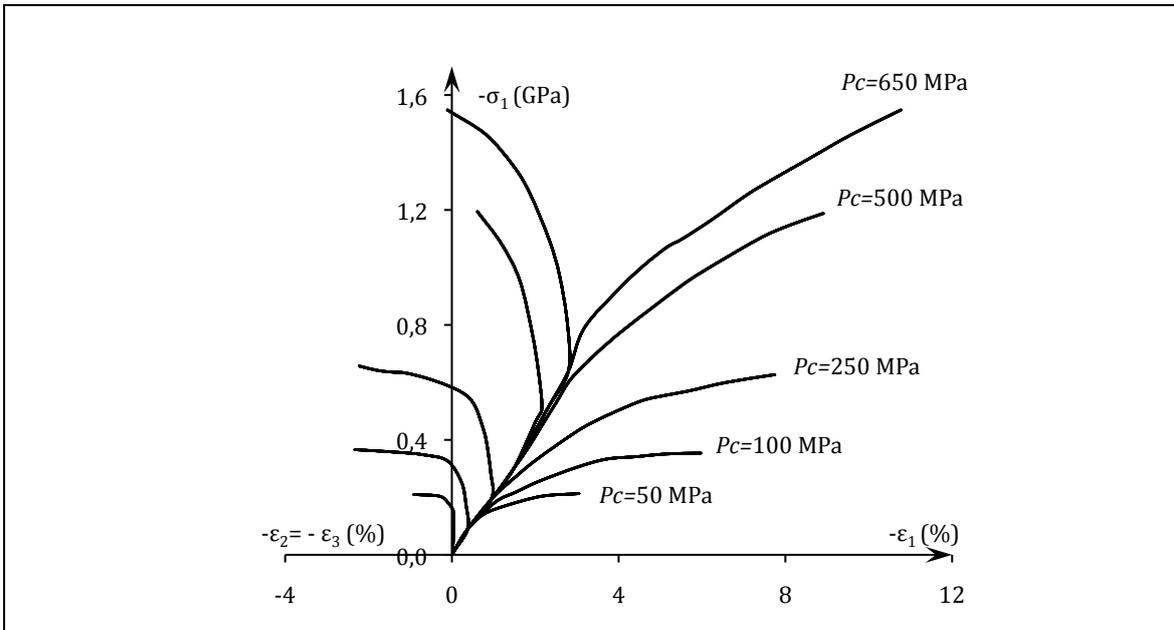


Figure 1.8 – Réponse d'un béton à une compression triaxiale pour différentes pressions de confinement (Tran et al. [2011]) : courbes contrainte σ_1 – déformation axiale ε_1 et latérale $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$

1.2 Modélisations

Les essais expérimentaux présentés ont permis de souligner le rôle essentiel joué par la microfissuration sur le comportement mécanique des matériaux quasi-fragiles tels que les bétons et certaines roches. Au travers des quelques essais présentés, on a pu montrer quelques-unes des caractéristiques principales du comportement des bétons et de nombreuses roches, notamment :

- une dégradation progressive de la rigidité du matériau,
- une anisotropie induite,
- l'effet unilatéral,
- une réponse hystérétique lors de cycles de charge-décharge sous chargement compressif,
- un comportement différent en traction et compression uniaxiales,
- une forte dépendance du comportement vis-à-vis de la pression de confinement.

L'étude de ces matériaux a fait l'objet d'une modélisation intensive depuis de nombreuses années et ne peut donc être présentée brièvement et de manière exhaustive. On fait donc ici le choix de rappeler les principaux résultats de la micromécanique au travers des travaux de Zhu et al. [2008] qui constitue à l'heure actuelle l'étude la plus aboutie. Puis on examine les modèles d'endommagement qui se sont attachés à décrire conjointement les deux mécanismes dissipatifs associés à la microfissuration, i.e. l'apparition et le développement des microfissures et le glissement avec frottement des lèvres des microdéfauts fermés (Halm et Dragon [1998], Bargellini et al. [2008], Ragueneau [1999]).

1.2.1 Quelques résultats de la micromécanique des milieux microfissurés

On se propose ici de rappeler très brièvement les principaux résultats obtenus par Zhu et al. [2008]. Notons que ces derniers font suite aux travaux initiés sur les milieux microfissurés par d'Andrieux [1983] (cf. également Andrieux et al. [1986]) dans un cadre bidimensionnel, puis étendus par Pensée [2001] au cas tridimensionnel.

Le volume élémentaire représentatif (v.e.r.) considéré par les auteurs est composé d'une matrice solide élastique linéaire et isotrope de tenseur d'élasticité \mathbb{C}_0 . Elle est supposée affaiblie par une famille de microfissures parallèles, planes et circulaires (penny-shaped), de surface S et de même normale \mathbf{n} (cf. figure 1.9). On désigne par S^+ la face supérieure et par S^- la face inférieure des microdéfauts telles que \mathbf{n} est dirigée de S^- vers S^+ . La discontinuité de déplacement entre les points d'une microfissure est désignée par $[\mathbf{u}] = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ où \mathbf{u}^+ (respectivement \mathbf{u}^-) représente le champ de déplacement sur la face

supérieure (respectivement inférieure). On note pour finir N le nombre de microfissures par unité de volume.

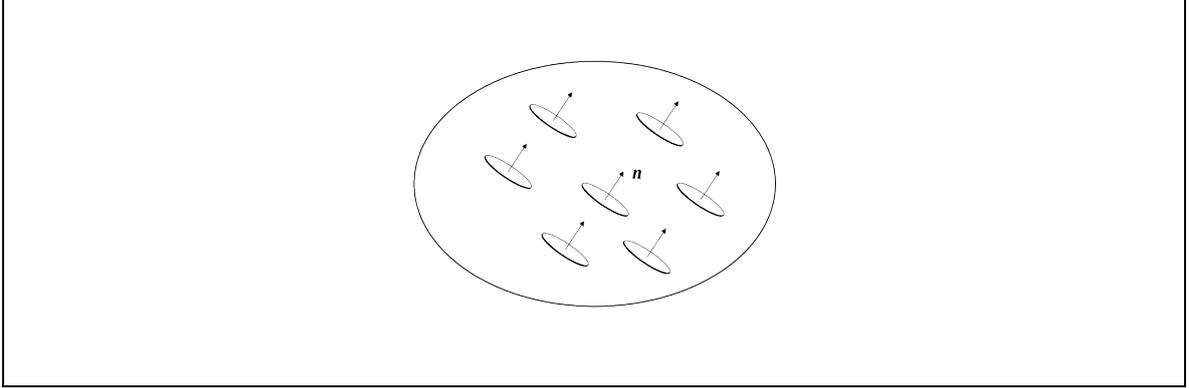


Figure 1.9 - Volume élémentaire représentatif proposé par Zhu et al. [2008]

Après application des schémas d'homogénéisation des milieux aléatoires, Zhu et al. [2008] montrent que l'expression de l'énergie libre macroscopique du milieu microfissuré peut se mettre sous la forme :

$$\psi = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) : \mathbb{C}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) + \frac{1}{2d} [H_0(1 - \chi_n d)\beta^2 + H_1(1 - \chi_t d)\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}] \quad (1.1)$$

où H_0 et H_1 sont des paramètres dépendants des modules élastiques de la matrice, χ_n et χ_t des coefficients dépendants du schéma d'homogénéisation retenu (cf. Zhu [2008] pour les expressions détaillées) ; $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la déformation totale macroscopique, d le paramètre de densité de microfissures, β et $\boldsymbol{\gamma}$ les variables caractérisant respectivement l'état d'ouverture-fermeture et le glissement des microfissures telles que :

$$\beta = N \int_{S^+} [u_n] dS \quad (1.2)$$

et

$$\boldsymbol{\gamma} = N \int_{S^+} ([\mathbf{u}] - [u_n]\mathbf{n}) dS \quad (1.3)$$

avec $[u_n]$ la composante normale du saut de déplacement. $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ apparaît alors comme la déformation anélastique macroscopique associée au saut de déplacement le long des microfissures :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \beta(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n} \quad (1.4)$$

L'écriture (1.1) de l'énergie libre macroscopique montre que, hormis la déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$, les variables internes pertinentes à l'échelle macroscopique sont le paramètre de densité d et les deux variables cinématiques β et $\boldsymbol{\gamma}$ qui caractérisent la déformation anélastique.

D'autre part, il est intéressant de souligner que l'énergie (1.1) apparaît comme la somme d'une énergie restituable correspondant au premier terme de (1.1) indépendante du paramètre de densité d et d'une énergie bloquée caractérisée par le second terme de (1.1), dépendante du triplet $(d, \beta, \boldsymbol{\gamma})$.

On peut déduire de l'énergie libre (1.1) les expressions des forces thermodynamiques associées aux variables internes β , $\boldsymbol{\gamma}$ et d :

$$F^\beta = -\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_0 : (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - (\lambda_0 + 2\mu_0)\beta - \frac{H_0}{d}(1 - \chi_n d)\beta \quad (1.5)$$

$$F^\boldsymbol{\gamma} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) - \mu_0 \boldsymbol{\gamma} - \frac{H_1}{d}(1 - \chi_1 d)\boldsymbol{\gamma} \quad (1.6)$$

$$F^d = -\frac{\partial \psi}{\partial d} = \frac{1}{2d^2}(H_0\beta^2 + H_1\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}) \quad (1.7)$$

Soulignons que les auteurs indiquent que le critère d'ouverture-fermeture des microfissures de normale \mathbf{n} correspond à la nullité de la force thermodynamique : $F^\beta = 0$.

En considérant que les microfissures obéissent au critère d'interface de Coulomb, Zhu et al. [2008] montrent que le critère de frottement s'écrit en fonction des forces thermodynamiques associées F^β et $F^\boldsymbol{\gamma}$ sous la forme :

$$g(\mathbf{F}^\boldsymbol{\gamma}, F^\beta) = |\mathbf{F}^\boldsymbol{\gamma}| + c_f F^\beta \quad (1.8)$$

où c_f représente le coefficient de frottement sur les lèvres des microfissures. Les auteurs envisagent en premier lieu des microfissures non dilatantes $\dot{\beta} = 0$ (i.e. une règle d'écoulement non associée) puis des microfissures frottantes avec une règle d'écoulement associée pour rendre compte d'un effet de dilatanance dans les milieux microfissurés.

Sous l'hypothèse que les microfissures se propagent dans leur plan de manière isotrope, Zhu et al. [2008] proposent d'adopter une loi d'évolution de la densité d régie par une loi à seuil standard. Le critère de propagation est alors défini par :

$$f(F^d, d) = F^d - h(d) \quad (1.9)$$

où h est une fonction de d strictement positive. Il est important de souligner que la propagation des microfissures ne peut être initiée que lorsque le v.e.r. a déjà subi un glissement avec frottement. De plus, cette propagation s'accompagne nécessairement d'un glissement dissipatif.

Précisons que la généralisation des résultats précédents à plusieurs familles de microfissures orientées de manière aléatoire peut être trouvée dans la thèse de Zhu [2006].

Notons pour finir que Zhu et al. [2011] ont proposé récemment une version simplifiée du modèle présenté ci-dessus en considérant une distribution isotrope de densité de microfissures. Malheureusement, cette dernière formulation semble présenter certaines incohérences mathématique et thermodynamique. Afin d'illustrer notre propos, considérons simplement le potentiel thermodynamique proposé dans le cadre d'un glissement non dissipatif :

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = \frac{1}{2} k^{\text{hom}}(d) (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu^{\text{hom}}(d) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d) \quad (1.10)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ est la déformation macroscopique déviatorique, d représente ici la densité totale de microfissures dans le v.e.r.; $k^{\text{hom}}(d)$ et $\mu^{\text{hom}}(d)$ désignent les modules élastiques homogénéisés définis lorsque les microfissures sont ouvertes par :

$$k^{\text{hom}}(d) = k_0 \left(1 - \frac{\eta_1 d}{1 + \eta_1 \alpha_1 d} \right), \quad \mu^{\text{hom}}(d) = \mu_0 \left(1 - \frac{\eta_2 d}{1 + \eta_2 \alpha_2 d} \right) \quad (1.11)$$

et lorsque les microfissures sont fermées par :

$$k^{\text{hom}}(d) = k_0, \quad \mu^{\text{hom}}(d) = \mu_0 \left(1 - \frac{\eta_2 d}{\chi + \eta_2 \alpha_2 d} \right) \quad (1.12)$$

avec η_1 , η_2 et χ sont des paramètres non nuls dépendants du coefficient de Poisson de la matrice. Les valeurs des paramètres α_1 et α_2 dépendent quant à elles du schéma d'homogénéisation retenu (cf. Zhu et al. [2011] pour les expressions détaillées).

Si l'on considère le critère d'ouverture-fermeture adopté par les auteurs, on peut observer que le module de cisaillement $\mu^{\text{hom}}(d)$ prend deux valeurs différentes suivant que les microfissures sont toutes fermées ($\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0$) ou ouvertes ($\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} > 0$). Ceci implique que le potentiel thermodynamique proposé n'est pas continu. Notons que la démonstration de ce résultat est donnée au chapitre suivant.

1.2.2 Modèle d'endommagement de Halm et Dragon [1998]

L'objectif de l'auteur est de proposer un modèle macroscopique, construit à partir de considérations micromécaniques et physiques, qui prend en compte l'effet unilatéral et le frottement des lèvres des microfissures.

Cette modélisation, proposée initialement par Dragon et al. [1994], s'articule autour des points suivants :

(a) la création et la croissance de surfaces de décohésion est décrit par une unique variable interne tensorielle d'ordre 2, notée \mathbf{D} et définie par :

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1}^3 D_k \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \quad (1.13)$$

où D_k désigne une valeur propre du tenseur \mathbf{D} et \mathbf{v}^k un vecteur propre associé. Le vecteur unitaire \mathbf{v}^k définit, selon l'auteur, la direction de la normale d'un système de microfissures parallèles équivalent.

(b) afin de prendre en compte l'effet unilatéral des dommages, un tenseur d'ordre quatre \mathbb{D} est introduit. Ce dernier est construit à partir de trois directions orthogonales définies par les vecteurs \mathbf{v}^k du tenseur d'endommagement \mathbf{D} et défini par :

$$\mathbb{D} = \sum_{k=1}^3 D^k \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \quad (1.14)$$

(c) une famille de microfissures de normale \mathbf{v}^k est considérée ouverte si la déformation normale correspondante est positive ($\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k > 0$) et fermée sinon ($\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k \leq 0$).

Dans le contexte du glissement sans frottement et en considérant le matériau sain élastique linéaire et isotrope, l'énergie libre proposée par les auteurs s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = & \frac{\lambda_0}{2} (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + g \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) + \alpha \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) + 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) \\ & - (\alpha + 2\beta) \boldsymbol{\varepsilon} : \left[\sum_{k=1}^3 H(-\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k) D^k \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \right] : \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.15)$$

où g est une constante caractérisant des effets résiduels dus aux microdéfauts, α et β deux coefficients constitutifs et $H(\cdot)$ la fonction d'Heaviside.

L'intégration du frottement des lèvres des microfissures s'appuie sur l'introduction d'une variable interne de glissement associée à chacun des trois systèmes de microfissures équivalents. S'appuyant sur la micromécanique, la variable de glissement $\boldsymbol{\gamma}^k$ associé k-ème système de microfissures équivalent est définie par :

$$\boldsymbol{\gamma}^k = \xi^k \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{n}^k \quad (1.16)$$

où \mathbf{g}^k le vecteur unitaire représentant la direction de glissement du k-ème système de microfissures et ξ^k caractérise la quantité de glissement associée.

L'expression de l'énergie libre prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}) = & \frac{\lambda_0}{2} (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + g \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) + \alpha \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) + 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) \\ & + \sum_{k=1}^3 H(-\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k) \left[-\alpha \boldsymbol{\varepsilon} : (\mathbf{D}^k \mathbf{L}^k) : \boldsymbol{\varepsilon} - 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) \right. \\ & \left. + 4\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{D}^k) - 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{D}^k) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec $\mathbf{L}^k = \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k$ et $\mathbf{D}^k = D_k \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k = \mathbf{L}^k : \mathbf{D}$. Notons qu'à la fermeture du k-ème système de microfissure équivalent, la condition d'initialisation de la variable de glissement $\boldsymbol{\gamma}^k$ suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}^k + \mathbf{D}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{D}^k + \mathbf{D}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \quad (1.18)$$

est adoptée afin d'assurer la continuité de la relation contrainte-déformation. En dérivant l'expression de l'énergie libre (1.17), on obtient la contrainte :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = & \lambda_0 \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{1} + 2\mu_0 + g \mathbf{D} + \alpha \left[\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}) \mathbf{1} + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{D} \right] + 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \\ & + \sum_{k=1}^3 H(-\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k) \left[-2\alpha \mathbf{D}^k (-\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k) \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k \right. \\ & \left. - 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}^k + \mathbf{D}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + 2\beta (\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{D}^k + \mathbf{D}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k) \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

et les forces thermodynamiques associées aux variables internes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^D = -\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} = & -(\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\varepsilon} - 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - g \boldsymbol{\varepsilon} \\ & + \sum_{k=1}^3 H(-\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k) \left[\alpha (-\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k) \mathbf{v}^k \otimes \mathbf{v}^k + 2\beta \mathbf{L}^k : (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \right. \\ & \left. - 4\beta \mathbf{L}^k : (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma}^k) + 2\beta \mathbf{L}^k : (\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k) \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

et

$$\mathbf{F}^\gamma = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = H(-\mathbf{v}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{v}^k) \left[-2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{D}^k + \mathbf{D}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + 2\beta (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D}^k + \mathbf{D}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}) \right] \quad (1.21)$$

Pour conclure, notons que les lois d'évolution de la variable d'endommagement \mathbf{D} et des trois variables de glissement $\boldsymbol{\gamma}^k$ sont construites à partir d'une partition des forces thermodynamiques qui leur sont associées (cf. Halm [1997] pour les détails).

Ce modèle proposé par Halm peut être considéré comme la première formulation construite à l'échelle macroscopique, prenant en compte simultanément l'effet unilatéral et le mécanisme de frottement. Malheureusement, l'utilisation de la décomposition spectrale du tenseur d'endommagement débouche sur certaines inconsistances mises en évidence par Cormery et Weleman [2002]. En effet, pour des configurations particulières de la variable d'endommagement, par exemple lorsque \mathbf{D} est sphérique, les trois vecteurs \mathbf{v}^k peuvent être identifiés à une infinité de bases principales de \mathbf{D} . Dans ce cadre, un simple changement de base principale de \mathbf{D} montre que l'unicité de l'énergie (1.15) n'est pas assurée et donc ψ ne peut prétendre être un potentiel thermodynamique.

1.2.3 Modèle de Bargellini et al. [2008]

Afin de remédier au problème soulevé précédemment, Bargellini et al. [2008] propose une formulation originale basée sur une approche discrète pour décrire l'endommagement des matériaux quasi-fragiles.

Le principe cette approche discrète (cf. également Bargellini [2006]) consiste à considérer k systèmes de microfissures parallèles de norme \mathbf{n}^k , de densité de microfissuration ρ^k et d'orientation fixée. La description de l'endommagement est ainsi définie par les k couples indépendants $(\rho^k, \mathbf{N}^k = \mathbf{n}^k \otimes \mathbf{n}^k)$.

A l'instar de Halm et al. [1998], le comportement est défini en deux étapes. La première consiste à construire le modèle d'endommagement en prenant en compte l'effet unilatéral de

l'endommagement sans dissipation par frottement. En considérant le matériau sain initialement élastique et isotrope, les auteurs proposent le potentiel thermodynamique suivant :

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \rho^k, \mathbf{N}^k) &= \frac{\lambda_0}{2} (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &+ \sum_{k=1}^9 \rho^k \left\{ \alpha \left[\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{2} (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \right] \right. \\ &\left. + 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) - \left(\frac{3}{2} \alpha + 2\beta \right) (\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k))^2 H(-\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k)) \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

où α et β sont des paramètres du modèle à identifier. Le critère d'ouverture-fermeture associé au k-ème système de microfissures est donné par :

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) = 0 \quad (1.23)$$

Il est important de souligner que ce potentiel thermodynamique est continument différentiable. Néanmoins on peut noter que l'expression du critère d'ouverture-fermeture n'est pas conforme aux résultats de la micromécanique (cf. par exemple Pensée et al. [2001]).

L'énergie libre a été ensuite enrichie afin de rendre compte de la dissipation liée au frottement des microfissures fermées. Pour cela, une nouvelle variable interne tensorielle d'ordre 2 $\boldsymbol{\gamma}^k$, issue de l'analyse micromécanique et vérifiant :

$$\forall k \in [1, 9], \quad \begin{cases} \text{Tr} \boldsymbol{\gamma}^k = 0 \\ \text{Tr}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{N}^k) = 0 \\ \text{Sym}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{N}^k) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^k \end{cases} \quad (1.24)$$

est ajoutée au couple de chaque système de microfissure formant ainsi le triplet $(\rho^k, \boldsymbol{\gamma}^k, \mathbf{N}^k)$ afin de rendre compte du glissement des lèvres des microfissures. L'énergie libre prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \rho^k, \boldsymbol{\gamma}^k, \mathbf{N}^k) &= \frac{\lambda_0}{2} (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0 \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) + \sum_{k=1}^9 \rho^k \left\{ \alpha \left[\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{2} (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \right] + 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^9 \rho^k H(-\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k)) \left\{ \alpha (\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k))^2 - 2(\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k) \right. \\ &\left. + 4(\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{N}^k) - (\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{N}^k) \right\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

On peut remarquer que cette nouvelle expression du potentiel thermodynamique ne nécessite pas de nouveaux paramètres à identifier. Notons qu'à la fermeture des microfissures, chaque variable de glissement est $\boldsymbol{\gamma}^k$ est initialisée à la valeur suivante :

$$\text{Sym}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) = \text{Sym}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{N}^k) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}^k \quad (1.26)$$

afin d'assurer la continuité du potentiel thermodynamique (1.25).

En dérivant l'expression de l'énergie (1.25), on obtient les lois d'état définissant la relation contrainte-déformation et les forces thermodynamiques associées aux variables internes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \lambda_0 \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{1} + 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon} \\ &+ \sum_{k=1}^9 \rho^k \left\{ \alpha \left[2\boldsymbol{\varepsilon} - \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{1} + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{N}^k + \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \mathbf{1} \right] + 2\beta (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k + \mathbf{N}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^9 \rho^k H(-\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k)) \left[\alpha \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \mathbf{N}^k - 2(\alpha + \beta) (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k + \mathbf{N}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}^k) \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

et

$$\begin{aligned} F^{\rho^k} = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho^k} &= -\alpha \left[\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{1}{2} (\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \right] - 2\beta \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \\ &- H(-\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k)) \left\{ \alpha \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k)^2 - 2(\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k) \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k) + 4(\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{N}^k) - (\alpha + \beta) \text{Tr}(\boldsymbol{\gamma}^k \cdot \boldsymbol{\gamma}^k \cdot \mathbf{N}^k) \right\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

et

$$\mathbf{F}^{\boldsymbol{\gamma}^k} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}^k} = -H(-\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k)) 2\rho^k (\alpha + \beta) (\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{N}^k + \mathbf{N}^k \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\gamma}^k) \quad (1.29)$$

Soulignons que la loi d'évolution de chacune des variables d'endommagement ρ^k porte sur une partition de sa force thermodynamique associée. Enfin, le critère de glissement associé à chacune des variables $\boldsymbol{\gamma}^k$ est assimilé à un critère de type Coulomb et s'exprime à partir des composantes normale et tangentielle de la force thermodynamique associée ; une règle associée est alors adoptée. (cf. Bargellini [2006] pour les détails).

Le modèle de Bargellini présente une approche originale basée sur la discrétisation de l'endommagement pour remédier au problème soulevé par l'utilisation de la décomposition spectrale des variables d'endommagement. Cependant, on peut se demander comment s'opère le choix du nombre de systèmes de microfissures et quelles sont ses conséquences sur la description du comportement du matériau.

Il est intéressant de souligner également qu'une des hypothèses de la construction du modèle porte sur la condition d'une faible densité de microfissuration, ce qui limite fortement l'emploi de celui-ci.

Enfin, évoquons une dernière remarque qui porte sur la loi d'évolution des variables d'endommagement. Bargellini [2006] précise que l'évolution de la densité d'un système de microfissures n'est permise que lorsque celles-ci sont ouvertes. Les deux mécanismes dissipatifs liés à la microfissuration ne sont donc pas couplés.

1.2.4 Modèle de Ragueneau [1999]

Ragueneau [1999] a proposé une modélisation purement phénoménologique associant l'endommagement au phénomène de glissement avec frottement des lèvres de microfissures.

Le mécanisme d'endommagement considéré est la création de surfaces de décohé- sion au sein de la matrice du matériau. Ce mode de propagation des microfissures a motivé le choix d'une variable interne d'endommagement représentée par un tenseur d'ordre 2, noté \mathbf{D} dont la forme rappelle celle proposée par Halm et Dragon [1998].

Les surfaces créées par la décohé- sion peuvent être le siège de phénomènes de frottement et générer ainsi des déformations irréversibles. Celles-ci sont décrites à l'aide d'une seconde variable interne $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, appelée déformation de frottement. Enfin, le tenseur associé au mécanisme d'é- crouissage cinématique $\boldsymbol{\alpha}$ vient compléter le jeu de variables internes du modèle.

Le comportement du matériau est caractérisé par l'énergie libre ψ s'écrivant comme la somme d'une énergie élastique endommageable ψ_d et d'une énergie associée au couplage endommagement et frottement ψ_s :

$$\psi = \psi_d + \psi_s \quad (1.30)$$

avec
$$\psi_d = \frac{1}{2} \left\{ 2\mu_0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda_0 (\text{Tr} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 \right\} \quad (1.31)$$

où $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est, à l'instar de Cordebois [1983], la déformation effective fonction de la déformation totale réelle $\boldsymbol{\varepsilon}$:
$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1/4} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1/4}$$

et
$$\psi_s = \frac{1}{2} \left\{ 2\mu_0 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda_0 (\text{Tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 \right\} + \frac{1}{2} b \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha} \quad (1.32)$$

où b est un paramètre et $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ représente la déformation de frottement effective définie par :
 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^{1/4} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s) \cdot \mathbf{D}^{1/4}$.

Le relation contrainte-déformation est déduite de l'énergie libre (1.30) avec (1.31) et (1.32):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 2\mu_0 (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1/2} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1/2} + \lambda_0 (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1/2} \cdot \text{Tr} \left[\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{D})^{1/2} \right] + 2\mu_0 \mathbf{D}^{1/2} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s) \cdot \mathbf{D}^{1/2} + \lambda_0 \mathbf{D}^{1/2} \cdot \text{Tr} \left[(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s) \cdot \mathbf{D}^{1/2} \right] \quad (1.33)$$

Les forces thermodynamiques associées aux variables internes s'écrivent :

$$\boldsymbol{\sigma}_s = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} = 2\mu_0 \mathbf{D}^{1/2} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s) \cdot \mathbf{D}^{1/2} + \lambda_0 \mathbf{D}^{1/2} \cdot \text{Tr} \left[(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_s) \cdot \mathbf{D}^{1/2} \right] \quad (1.34)$$

et

$$\mathbf{X} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -b\boldsymbol{\alpha} \quad \mathbf{X} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = -b\boldsymbol{\alpha} \quad (1.35)$$

Enfin, la description du comportement est complétée par les lois d'évolution des variables internes. Suivant l'hypothèse que seules les déformations positives font évoluer l'endommagement, le critère d'endommagement est exprimé, dans chaque direction principale i , à partir de la base principale du tenseur de déformation totale :

$$f_i = \boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_{d0} - k(\boldsymbol{\varepsilon}_i) \quad (1.36)$$

où $k(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$ est la variable d'écroûissage et $\boldsymbol{\varepsilon}_{d0}$ est la déformation du seuil initial.

Le critère de frottement est choisi de type Von Mises avec écroûissage cinématique :

$$g = \sqrt{\frac{3}{2} \left((\boldsymbol{\sigma}_s)_d - \mathbf{X} \right) : \left((\boldsymbol{\sigma}_s)_d - \mathbf{X} \right)} \quad (1.37)$$

avec $(\boldsymbol{\sigma}_s)_d$ le déviateur du tenseur des contraintes de frottement, représentant la force thermodynamique associée à $\boldsymbol{\varepsilon}_s$. Une loi découlement non associée est ensuite adoptée pour l'évolution des variables $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ et $\boldsymbol{\alpha}$.

Ce modèle couplant endommagement et frottement permet ainsi de décrire certains phénomènes constatés expérimentalement tels que le comportement hystérétique provoqué par la présence de déformations irréversibles ainsi que l'allure dissymétrique en traction et en compression des matériaux fragiles. Ce dernier aspect est rendu possible grâce à la décomposition du tenseur d'endommagement en fonction du signe du tenseur de déformation de frottement :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^+ H^+(\boldsymbol{\varepsilon}_s) + \mathbf{D}^- H^-(\boldsymbol{\varepsilon}_s) \quad (1.38)$$

où $H^+(\boldsymbol{\epsilon}_s) = \mathbf{P}^{-1}H(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{P}$ et $H^-(\boldsymbol{\epsilon}_s) = 1 - H^+(\boldsymbol{\epsilon}_s)$

avec $\boldsymbol{\lambda}$ le tenseur des valeurs propres de la déformation de frottement, \mathbf{P} la matrice de transformation et $H(\cdot)$ la fonction d'Heaviside.

On constate à travers cette décomposition que le mécanisme de frottement conditionne celui d'endommagement. Si cela est tout à fait recevable pour un chargement compressif, cela apparaît moins physique pour une sollicitation en traction. En effet, cela signifie qu'en traction le frottement des microfissures est le principal mécanisme responsable de la microfissuration du matériau, cela n'a pas été vérifié expérimentalement. Enfin, on peut émettre la même remarque que celle faite pour le modèle de Halm et Dragon [1998] concernant la décomposition spectrale du tenseur d'endommagement qui entraîne des inconsistances mathématique et thermodynamique dans la formulation du modèle.

CHAPITRE 2

Modélisation de l'endommagement avec effet unilatéral

Objectifs du chapitre

On présente dans ce chapitre le modèle d'endommagement avec effet unilatéral de Kondo et al. [2007], Abou-Chakra Guéry et al. [2008] que l'on nommera par la suite « modèle de base ». On donne une description détaillée de sa construction ainsi que des hypothèses de base.

On identifie dans un second temps les différentes fonctions introduites dans le modèle. Afin d'analyser ses capacités prédictives, on étudie la réponse du modèle dans un premier temps lorsque l'état de microfissuration est constant puis lorsque l'endommagement évolue. Au travers de cette analyse, on discute des avantages et des inconvénients du modèle.

2.1 Construction du modèle de base

2.1.1 Hypothèses

Le modèle s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- les dégradations que subit le matériau proviennent uniquement de la microfissuration,
- il n'est pas tenu compte des mécanismes dissipatifs auxiliaires (plasticité, glissement avec frottement des lèvres de microfissures, ...),
- les transformations sont infinitésimales et on adopte l'hypothèse des petites perturbations,
- les chargements et les réponses sont suffisamment lents pour que l'on puisse négliger tous les effets d'inertie et se placer en quasi-statique,
- on suppose que toutes les évolutions sont isothermes.

La formulation du modèle se résume :

- au choix d'une variable interne qui représente l'endommagement du matériau,
- à la construction d'un potentiel thermodynamique d'où résultent les lois d'état et,
- à la définition d'une loi d'évolution du paramètre d'endommagement.

2.1.2 Variable interne d'endommagement

Il est supposé que l'endommagement est paramétré par une variable scalaire positive, notée d , caractérisant l'état de dégradation au sein de la microstructure, par exemple la densité moyenne de microfissures sur l'ensemble des orientations (cf. par exemple Budiansky et O'Connell [1976], Welemane et al. [2002]).

Cette variable d'endommagement ne peut que croître, i.e. l'évolution de l'endommagement est irréversible :

$$\dot{d} \geq 0 \quad (2.1)$$

Notons que dans la littérature (cf. chapitre 1) les auteurs de modèles d'endommagement complexifient le choix de la variable d'endommagement en la prenant de nature tensorielle afin de rendre compte d'une certaine anisotropie des mécanismes de microfissuration. Ainsi, le choix pris ici d'une variable scalaire semble tout à fait cohérent avec notre intention de construire un modèle d'endommagement simple. Par ailleurs, comme le souligne Pham [2011], n'importe quelle orientation d'une fissure à l'échelle macroscopique vue comme une localisation de l'endommagement peut être décrite par le seul biais de variations de la variable scalaire d'endommagement dans la direction normale à la fissure.

2.1.3 Potentiel thermodynamique et lois d'état

On considère qu'à d fixé, le matériau a un comportement élastique. Son élasticité, dépendante de d , est alors caractérisée par le potentiel thermodynamique (en l'occurrence ici l'énergie libre volumique) $\psi(\boldsymbol{\epsilon}, d)$. Afin de prendre en compte les effets unilatéraux liés à l'ouverture-fermeture des microfissures, le potentiel ψ prend la forme suivante :

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \begin{cases} \frac{1}{2} K^o(d) (\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon})^2 + \mu^o(d) \boldsymbol{\epsilon}_d : \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } g(\boldsymbol{\epsilon}) > 0 \\ \frac{1}{2} K^f(d) (\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon})^2 + \mu^f(d) \boldsymbol{\epsilon}_d : \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } g(\boldsymbol{\epsilon}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où g est une forme linéaire dépendant de $\boldsymbol{\epsilon}$ et définissant l'hyperplan qui divise l'espace des déformations en deux sous-domaines correspondant aux deux états possibles d'ouverture-fermeture de l'ensemble des microfissures. Ainsi, les microfissures sont considérées ouvertes si $g(\boldsymbol{\epsilon}) > 0$ et fermées si $g(\boldsymbol{\epsilon}) \leq 0$. Il est ainsi supposé que l'état d'ouverture-fermeture ne dépend pas de l'endommagement mais seulement de l'état de déformation.

Les modules (K^o, μ^o) et (K^f, μ^f) représentent les modules de compressibilité et de cisaillement respectivement pour les états de microfissures ouvertes et fermées. Ces modules ne peuvent être quelconques puisqu'ils doivent permettre d'assurer la continue différentiabilité du potentiel thermodynamique.

Curnier et al. [1995] (cf. également Welemane [2002] pour une démonstration complète) ont démontré que le potentiel ψ est de classe C^1 si et seulement si :

$$\forall d, \mu^o(d) = \mu^f(d) \quad (2.3)$$

Aucune condition n'est imposée sur le module de compressibilité.

La continuité du potentiel est donc assurée si le module de cisaillement ne dépend pas de l'état d'ouverture-fermeture des microfissures. Le module de cisaillement du milieu endommagé est désormais noté $\mu(d)$.

Afin de rendre compte des observations expérimentales concernant les effets de fermeture progressive des microfissures sous sollicitation hydrostatique de compression (cf. figure 1.7 du chapitre 1 et également les travaux de Sibai et al. [2003]), le module de compressibilité, lorsque les microfissures sont fermées, prend la valeur K_0 correspondant à un milieu non endommagé :

$$K^f(d) = K_0 \quad (2.4)$$

Quant au module de compressibilité, lorsque les microfissures sont ouvertes, on le note désormais :

$$K^o(d) = K(d) \quad (2.5)$$

Poursuivant la démarche de Curnier et al. [1995], l'expression de la fonction g définissant le critère de désactivation de l'endommagement, i.e. la transition ouverture-fermeture des microfissures, est définie par :

$$g(\boldsymbol{\epsilon}) = \text{Tr } \boldsymbol{\epsilon} = 0 \quad (2.6)$$

Ainsi, la variation relative de volume ($\text{Tr } \boldsymbol{\epsilon}$) permet de caractériser le domaine où l'ensemble des microfissures sont ouvertes ($\text{Tr } \boldsymbol{\epsilon} > 0$), respectivement fermées ($\text{Tr } \boldsymbol{\epsilon} \leq 0$).

Finalement, on obtient l'expression définitive du potentiel thermodynamique :

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \begin{cases} \frac{1}{2}K(d)(\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon})^2 + \mu(d)\boldsymbol{\epsilon}_d : \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} > 0 \\ \frac{1}{2}K_0(\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon})^2 + \mu(d)\boldsymbol{\epsilon}_d : \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Le tenseur des contraintes et la force thermodynamique associée à d sont obtenus en dérivant (2.7) respectivement par rapport à $\boldsymbol{\epsilon}$ et d :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \begin{cases} K(d)\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{1} + 2\mu(d)\boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} > 0 \\ K_0\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{1} + 2\mu(d)\boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

et

$$F^d = -\frac{\partial \psi}{\partial d}(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \begin{cases} -\frac{1}{2}K'(d)(\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon})^2 - \mu'(d)\boldsymbol{\epsilon}_d : \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} > 0 \\ -\mu'(d)\boldsymbol{\epsilon}_d : \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

où K' et μ' représentent respectivement les dérivées par rapport à d des fonctions K et μ .

Remarque : La détermination complète du potentiel thermodynamique ainsi que des lois d'état nécessite de par (2.7) l'identification des modules $K(d)$ et $\mu(d)$ en remarquant que l'état fermé est entièrement donné une fois ces modules connus.

2.1.4 Loi d'évolution de l'endommagement

La dernière étape pour la formulation de la loi d'endommagement concerne le critère d'endommagement ainsi que la loi d'évolution de la variable d .

La loi d'évolution de l'endommagement d est régie par une loi à seuil standard. La fonction seuil d'endommagement est définie par :

$$f(F^d, d) = F^d - h(d) \quad (2.10)$$

où h est une fonction de d strictement positive (son identification sera détaillée plus tard).

On a alors :

$$\dot{d} \geq 0, \quad f(F^d, d) \leq 0, \quad \dot{f}(F^d, d) = 0 \quad (2.11)$$

Soulignons qu'une justification de ce type de loi peut-être obtenue à partir du postulat de Drucker-Ilyushin (cf. par exemple Marigo [1989]) basé sur la positivité du travail de déformation,

2.2 Identification des fonctions

La construction définitive du modèle se résume au choix de trois fonctions :

- $d \mapsto K(d)$ et $d \mapsto \mu(d)$ caractérisant la dégradation des modules élastiques du matériau lorsque les microdéfauts sont ouverts, et incluant le cas du matériau sain (i.e. lorsque $d = 0$)
- $d \mapsto h(d)$ apparaissant dans le seuil d'endommagement.

Nous proposons d'expliciter leur choix dans les deux sections suivantes.

2.2.1 Fonctions K et μ

Propriétés physiques

Afin de construire correctement le modèle, le choix de ces fonctions n'est pas quelconque car elles doivent satisfaire certaines conditions mathématiques.

Les fonctions K et μ sont des fonctions strictement positives et continument différentiables avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} K(0) = K_0 \\ \mu(0) = \mu_0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} K'(d) < 0 \\ \mu'(d) < 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Expressions de K et μ

On trouve dans la littérature des propositions de formulation de K et μ purement phénoménologique. Lemaitre et Chaboche [1978] ont proposé initialement d'affaiblir la rigidité du matériau en la pondérant d'un facteur dépendant de d , à savoir :

$$K(d) = (1-d)K_0, \quad \mu(d) = (1-d)\mu_0 \quad (2.13)$$

Afin d'améliorer la réponse prédite par leurs modèles, d'autres auteurs ont modifié ce facteur. Par exemple, Ambrosio et Tortorelli [1990] suggèrent de l'élever au carré de telle sorte que les dérivées premières et secondes des modules par rapport à d dépendent de l'endommagement:

$$K(d) = (1-d)^2 K_0, \quad \mu(d) = (1-d)^2 \mu_0 \quad (2.14)$$

Benallal et al. proposent dans [2007] :

$$K(d) = \frac{K_0}{(1+d)^2}, \quad \mu(d) = \frac{\mu_0}{(1+d)^2} \quad (2.15)$$

Amor [2008] enrichit la proposition de Lemaitre et Chaboche :

$$K(d) = (1-d)^p K_0, \quad \mu(d) = (1-d)^p \mu_0, \quad p > 0 \quad (2.16)$$

Enfin, Pham [2010] étudie les fonctions suivantes :

$$K(d) = e^{-d} K_0, \quad \mu(d) = e^{-d} \mu_0 \quad (2.17)$$

Dans le cas de cette approche purement phénoménologique, on peut remarquer que pour respecter la propriété de non négativité des modules K et μ , la valeur de la variable d'endommagement doit être bornée à 1.

Il existe dans la littérature d'autres formulations de K et μ issues de résultats de l'application des schémas d'homogénéisation linéaire aux milieux fissurés. Cette approche présente l'intérêt de fournir des bases physiques au modèle à partir de la simple connaissance des caractéristiques mécaniques du matériau non fissuré. On cite par exemple

les formulations suivantes, déterminées pour un milieu élastique contenant des microfissures de même taille et aléatoirement orientées:

- Schéma dilué

$$\begin{aligned}
 K(d) &= K_0 \left(1 - \frac{16(1-\nu_0^2)d}{9(1-2\nu_0)} \right) \\
 \mu(d) &= \mu_0 \left(1 - \frac{32(1-\nu_0)(5-\nu_0)d}{45(2-\nu_0)} \right)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

- Schéma de Mori-Tanaka [1973]

$$\begin{aligned}
 K(d) &= K_0 \left(1 + \frac{16(1-\nu_0^2)d}{9(1-2\nu_0)} \right)^{-1} \\
 \mu(d) &= \mu_0 \left(1 + \frac{32(1-\nu_0)(5-\nu_0)d}{45(2-\nu_0)} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

- Borne supérieure de Ponte-Castañeda et Willis [1995]

$$\begin{aligned}
 K(d) &= K_0 \left(1 - \frac{48(1-\nu_0^2)d}{27(1-2\nu_0) + 16d(1+\nu_0)^2} \right) \\
 \mu(d) &= \mu_0 \left(1 - \frac{480(1-\nu_0)(5-\nu_0)d}{675(2-\nu_0) + 64d(4-5\nu_0)(5-\nu_0)} \right)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

On peut observer qu'à faible densité, ces formulations coïncident. Toutefois comme on le verra plus tard (notamment dans l'expression de la force thermodynamique associée à d), elles conduisent à des résultats différents puisque leurs dérivées premières par rapport à d ne dépendent pas toutes de la variable d'endommagement.

Soulignons pour finir que lors de l'étude des capacités prédictives du modèle, il sera intéressant de confronter les résultats que l'on peut obtenir à partir de ces différentes expressions et observer l'influence de celles-ci sur la réponse du modèle.

2.2.2 Fonction h

Cette fonction, dépendant a priori de la variable d'endommagement d , renvoie le scalaire positif $h(d)$. Elle caractérise pour un état d'endommagement donné la taille du domaine d'élasticité dans l'espace des déformations, d jouant le rôle d'une variable d'écroutissage.

Différentes formes ont été proposées dans la littérature (cf. par exemple Pham [2011]). Pour la suite de l'étude, on décide d'adopter, par soucis de simplicité, la forme proposée par Marigo [1982] :

$$h(d) = h_0(1 + c_0 d) \quad (2.21)$$

où $h_0 > 0$ et $c_0 \geq 0$.

2.3 Etude des capacités prédictives du modèle de base

On propose à présent d'évaluer les capacités prédictives du modèle de base qui vient d'être présenté.

2.3.1 Etude du comportement à microfissuration constante

Dans un premier temps, l'état de microfissuration est supposé figé (i.e. pas d'évolution de l'endommagement). On se propose d'étudier la réponse élastique prédite par le modèle de base pour différentes expressions des fonctions K et μ présentées précédemment.

On étudie selon l'état d'ouverture-fermeture les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson, utiles pour les essais uniaxiaux. Les expressions de ces modules sont données par :

$$E(d) = \frac{9K(d)\mu(d)}{3K(d) + \mu(d)} \quad (2.22)$$

et

$$\nu(d) = \frac{3K(d) - 2\mu(d)}{2(3K(d) + \mu(d))} \quad (2.23)$$

Ce qui donne à partir des expressions des modules (2.14) :

$$E(d) = \begin{cases} (1-d)^2 E_0 & (\text{microfissures ouvertes}) \\ \frac{3(1-d)^2 E_0}{2(1+\nu_0) + (1-d)^2 (1-2\nu_0)} & (\text{microfissures fermées}) \end{cases} \quad (2.24)$$

Pour un endommagement $d < 1$, les fonctions $E(d)$ sont décroissantes pour les deux états de microfissuration ce qui signifie en d'autres termes que le module d'Young se dégrade par rapport à sa valeur initiale E_0 quel que soit l'état de microfissures.

A titre illustratif, on obtient pour le mortier testé ($E_0 = 31000$ MPa, $\nu_0 = 0,24$) et pour une valeur du paramètre d'endommagement $d = 0,1$:

$$\frac{E(d)}{E_0} = \begin{cases} 0,81 & (\text{microfissures ouvertes}) \\ 0,84 & (\text{microfissures fermées}) \end{cases} \quad (2.25)$$

On constate que la valeur du module d'Young à microfissures fermées reste légèrement moins affectée, le matériau étant plus sensible à l'endommagement à microfissures ouvertes.

Sur le même exemple, le coefficient de Poisson s'exprime quant à lui :

$$\nu(d) = \begin{cases} \nu_0 & (\text{microfissures ouvertes}) \\ \frac{(1+\nu_0) - (1-d)^2 (1-2\nu_0)}{2(1+\nu_0) + (1-d)^2 (1-2\nu_0)} & (\text{microfissures fermées}) \end{cases} \quad (2.26)$$

Dans le cas des microfissures ouvertes, le coefficient de Poisson reste insensible au degré d'endommagement, ce qui diffère des observations expérimentales (cf. par exemple Kupfer [1969], Mazars [1984]). Il est à noter que cette invariance du coefficient de Poisson concerne l'ensemble des expressions reposant sur une approche phénoménologique et proposant le même coefficient pondérateur pour les deux fonctions K et μ .

Lorsque les microfissures sont fermées, la fonction $\nu(d)$ est positive et croissante. Le coefficient de Poisson prend donc une valeur supérieure à sa valeur initiale ν_0 .

Reprenant l'exemple précédent du mortier de référence, on obtient les valeurs suivantes :

$$\frac{\nu(d)}{\nu_0} = \begin{cases} 1 & (\text{microfissures ouvertes}) \\ 1,18 & (\text{microfissures fermées}) \end{cases} \quad (2.27)$$

Si l'on réalise à présent la même étude avec les expressions des fonctions K et μ issues du modèle micromécanique de Ponte-Castañeda et Willis (2.20), on obtient pour le mortier testé les valeurs suivantes :

$$\frac{E(d)}{E_0} = \begin{cases} 0,84 & (\text{microfissures ouvertes}) \\ 0,88 & (\text{microfissures fermées}) \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\frac{\nu(d)}{\nu_0} = \begin{cases} 0,84 & (\text{microfissures ouvertes}) \\ 1,13 & (\text{microfissures fermées}) \end{cases} \quad (2.29)$$

On constate que de manière semblable aux résultats précédents, le module d'Young se dégrade pour les deux états de microfissuration. Quant au coefficient de Poisson, il s'altère lorsque les microfissures sont ouvertes et prend également une valeur supérieure à sa valeur initiale lorsque les microfissures sont fermées.

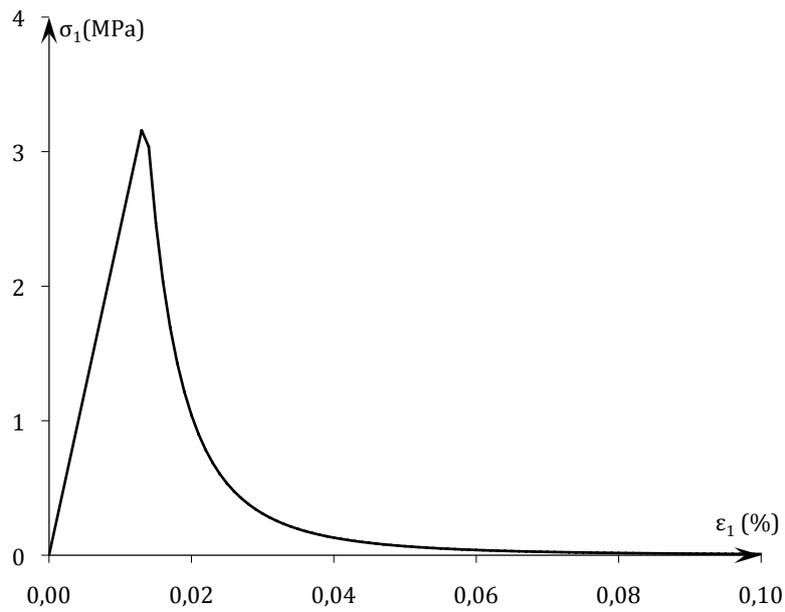
2.3.2 Etude du comportement dissipatif

On se propose à présent d'examiner la réponse fournie par le modèle de base lorsque l'endommagement évolue.

Traction uniaxiale

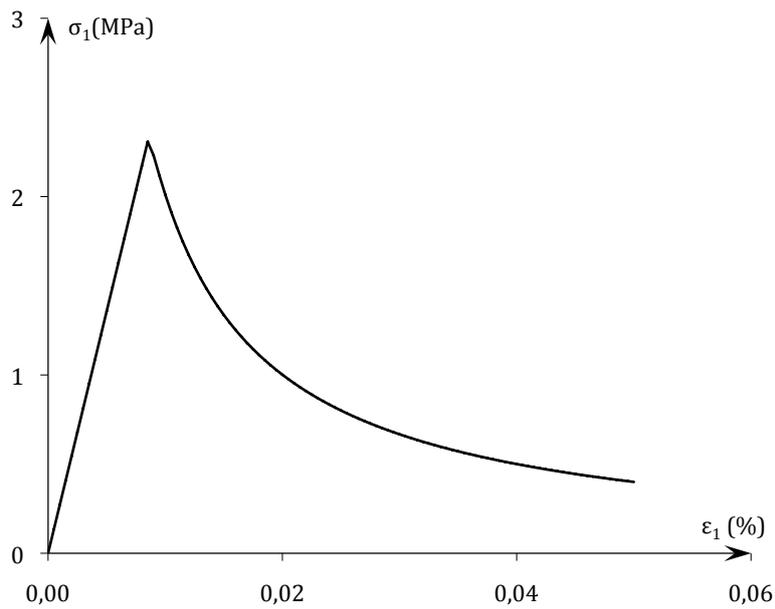
Examinons la réponse prédite par le modèle pour un test en traction uniaxiale d'axe e_1 ($\sigma = \sigma_1 e_1 \otimes e_1$, $\sigma_1 > 0$) pour différentes expressions des fonctions K et μ (cf. figures 2.1 et 2.2). Ceci permettra d'évaluer les conséquences des divers choix de ces fonctions.

Soulignons que pour l'illustration de la réponse du modèle avec les fonctions du schéma dilué (2.18), la valeur du paramètre c_0 est prise différente de zéro afin d'observer une progression de l'endommagement. Si $c_0 = 0$, après avoir atteint le pic des contraintes, on aurait observé une chute brutale de la valeur de la contrainte.



(a) Fonctions d'Ambrosio et Torterelli (2.14)

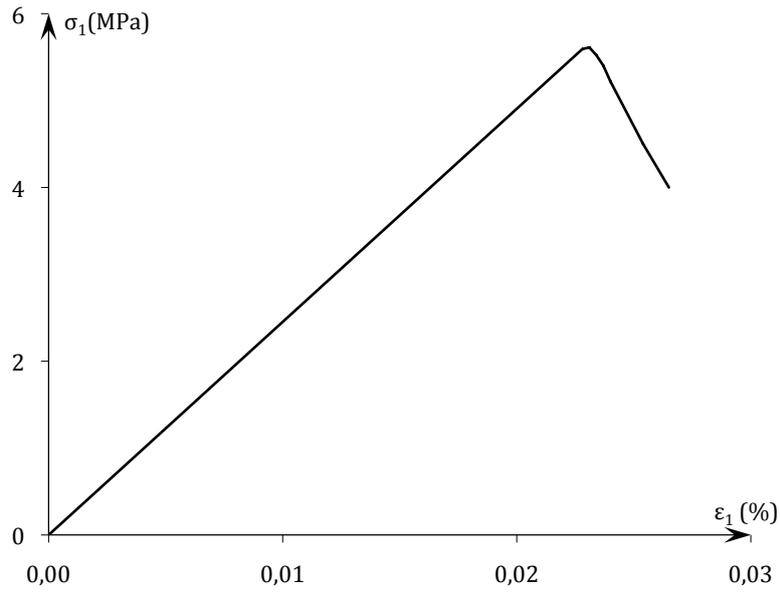
(Valeurs des paramètres : $E_0 = 31000$ MPa, $\nu_0 = 0,24$, $h_0 = 0,0005$, $c_0 = 0$, $d_0 = 0,1$)



(b) Fonctions de Pham (2.17)

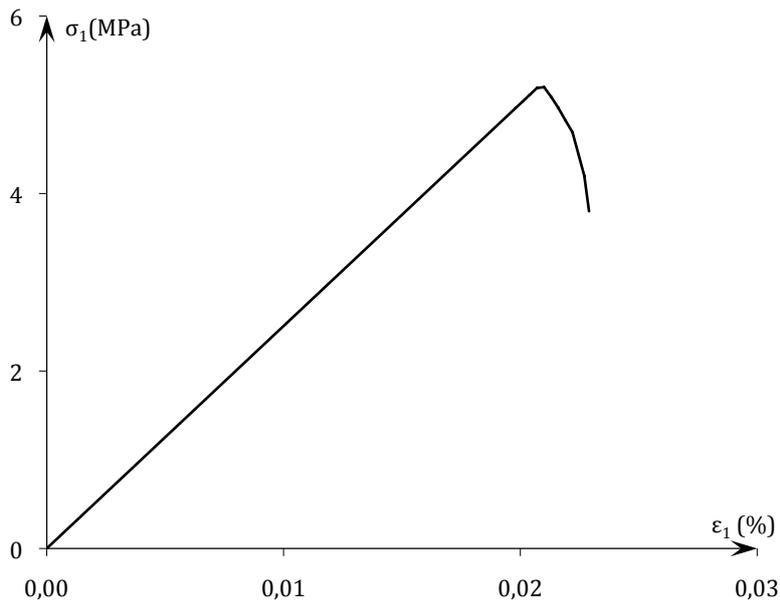
(Valeurs des paramètres : $E_0 = 31000$ MPa, $\nu_0 = 0,24$, $h_0 = 0,0001$, $c_0 = 0$, $d_0 = 0,1$)

Figure 2.1 – Traction uniaxiale : courbe contrainte σ_1 – déformation ϵ_1 pour deux types de fonctions K et μ issues d'une approche phénoménologique



(a) Fonctions du schéma dilué (2.18)

(Valeurs des paramètres : $E_0 = 31000$ MPa, $\nu_0 = 0,24$, $h_0 = 0,001$, $c_0 = 5$, $d_0 = 0,1$)



(b) Fonctions du schéma de Ponte-Castañeda et Willis (2.20)

(Valeurs des paramètres : $E_0 = 31000$ MPa, $\nu_0 = 0,24$, $h_0 = 0,001$, $c_0 = 0$, $d_0 = 0,1$)

Figure 2.2 – Traction uniaxiale : courbe contrainte σ_1 – déformation ϵ_1 pour deux types de fonctions K et μ issues d’une approche micromécanique

Les courbes obtenues montrent qu'une phase adoucissante apparaît immédiatement après la phase élastique, contrairement à ce que l'on peut observer expérimentalement à partir d'un essai PIED (cf. figure 1.6 du chapitre 1) limitant les effets de localisation après le pic de contrainte. En effet, une phase durcissante intermédiaire est clairement mise en évidence.

On montre ci-après qu'il est cependant possible de créer cette phase transitoire avec le modèle en définissant correctement les valeurs des coefficients h_0 et c_0 (2.21).

Afin de faciliter l'analyse mathématique, on choisit à nouveau les fonctions (2.14) telles que :

$$E(d) = (1-d)^2 E_0 \quad (2.30)$$

La réponse que l'on souhaite obtenir se décompose en deux phases successives:

- Une phase élastique : l'endommagement initial est nul. A la fin de cette phase, la déformation ε_e pour laquelle le critère d'endommagement (2.10) est atteint pour la première fois est donc donnée par :

$$-\frac{1}{2} E'(0) \varepsilon_e^2 - h_0 = E_0 \varepsilon_e^2 - h_0 = 0 \quad (2.31)$$

On en déduit la valeur du paramètre h_0 :

$$h_0 = E_0 \varepsilon_e^2 \quad (2.32)$$

- Une phase durcissante : pour une déformation $\varepsilon > \varepsilon_e$, l'endommagement commence à croître. On cherche sa valeur d_t donnée par l'égalité du critère d'endommagement (2.10) à 0 :

$$-\frac{1}{2} E'(d_t) \varepsilon^2 - h_0 - h_0 c_0 d_t = 0 \quad (2.33)$$

On aboutit à la valeur de l'endommagement :

$$d_t = \frac{E_0 \varepsilon^2 - h_0}{h_0 c_0 + E_0 \varepsilon^2} \quad (2.34)$$

puis à la relation contrainte-déformation :

$$\sigma_t = E_0 (1 - d_t)^2 \varepsilon = E_0 \left(\frac{h_0 (c_0 - 1)}{h_0 c_0 + E_0 \varepsilon^2} \right)^2 \varepsilon \quad (2.35)$$

La phase durcissante s'achève lorsque la déformation atteint la valeur maximale ε_M que l'on obtient en posant que :

$$\left. \frac{d\sigma_t}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_M} = 0 \quad (2.36)$$

On aboutit alors à :

$$h_0 c_0 - 3E_0 \varepsilon_M^2 = 0 \quad (2.37)$$

c'est-à-dire

$$c_0 = \frac{3E_0 \varepsilon_M^2}{h_0}, h_0 > 0 \quad (2.38)$$

En considérant (2.32) et (2.35), la réponse contrainte-déformation est donnée finalement par :

$$\sigma_t = E_0 \left(\frac{3\varepsilon_M^2 - \varepsilon_e^2}{3\varepsilon_M^2 - \varepsilon^2} \right) \varepsilon \quad (2.39)$$

Si l'on considère différentes valeurs du rapport $\varepsilon_M / \varepsilon_e$, on aboutit à l'identification du paramètre c_0 . En effet, prenons les exemples suivants :

- $\varepsilon_M = \varepsilon_e$, on obtient à partir de (2.32) et (2.38) : $c_0 = 3 \left(\frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_e} \right)^2 = 3$
- $\varepsilon_M = 2\varepsilon_e$: $c_0 = 12$
- $\varepsilon_M = 3\varepsilon_e$: $c_0 = 27$

La figure 2.3 illustre le diagramme obtenu pour ces exemples de valeurs.

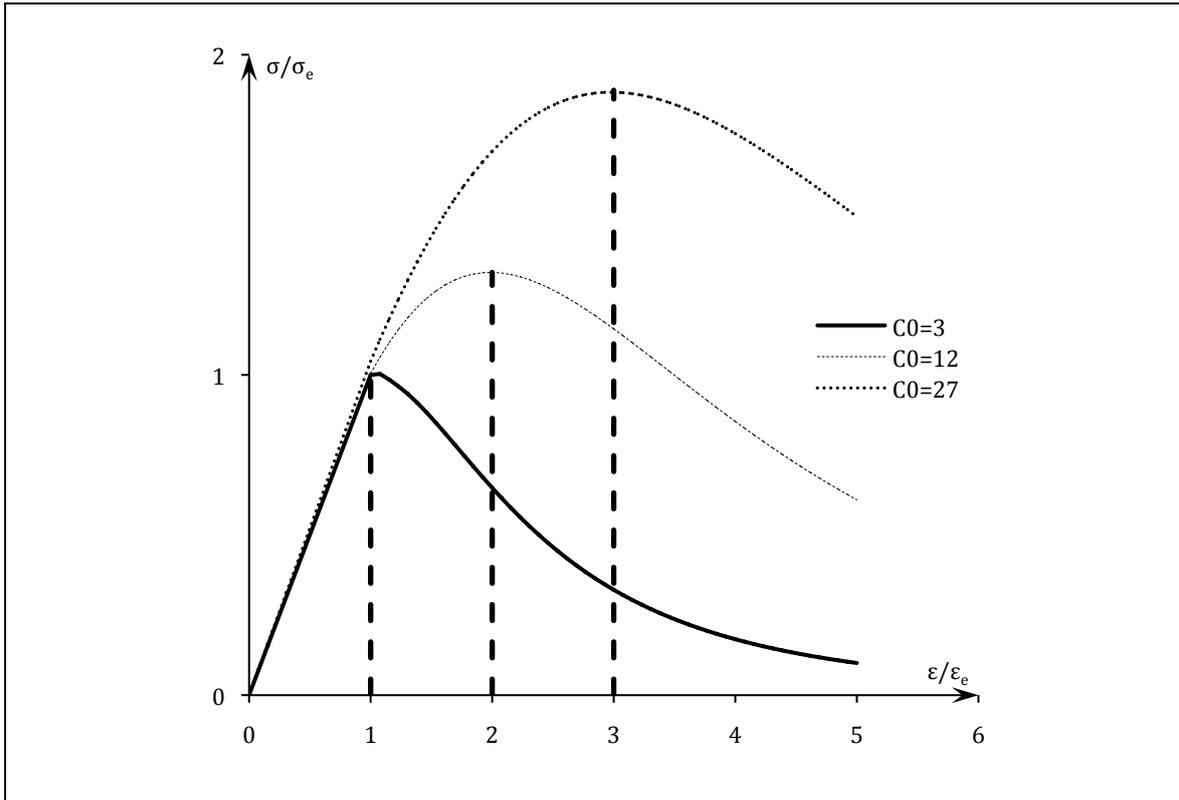


Figure 2.3 – Courbe contrainte σ / σ_e – déformation $\varepsilon / \varepsilon_e$ pour $\varepsilon / \varepsilon_e = 1, 2$ et 3

Si l'on pose c_0^c la valeur obtenue pour $\varepsilon_M = \varepsilon_e$:

$$c_0^c = 3 \quad (2.40)$$

on observe que pour des valeurs $c_0 < c_0^c$, la contrainte axiale diminue dès que le matériau commence à s'endommager. En revanche, lorsque $c_0 > c_0^c$, on observe une phase durcissante avant la phase adoucissante.

L'influence du paramètre c_0 est illustrée de façon qualitative sur la figure 2.4

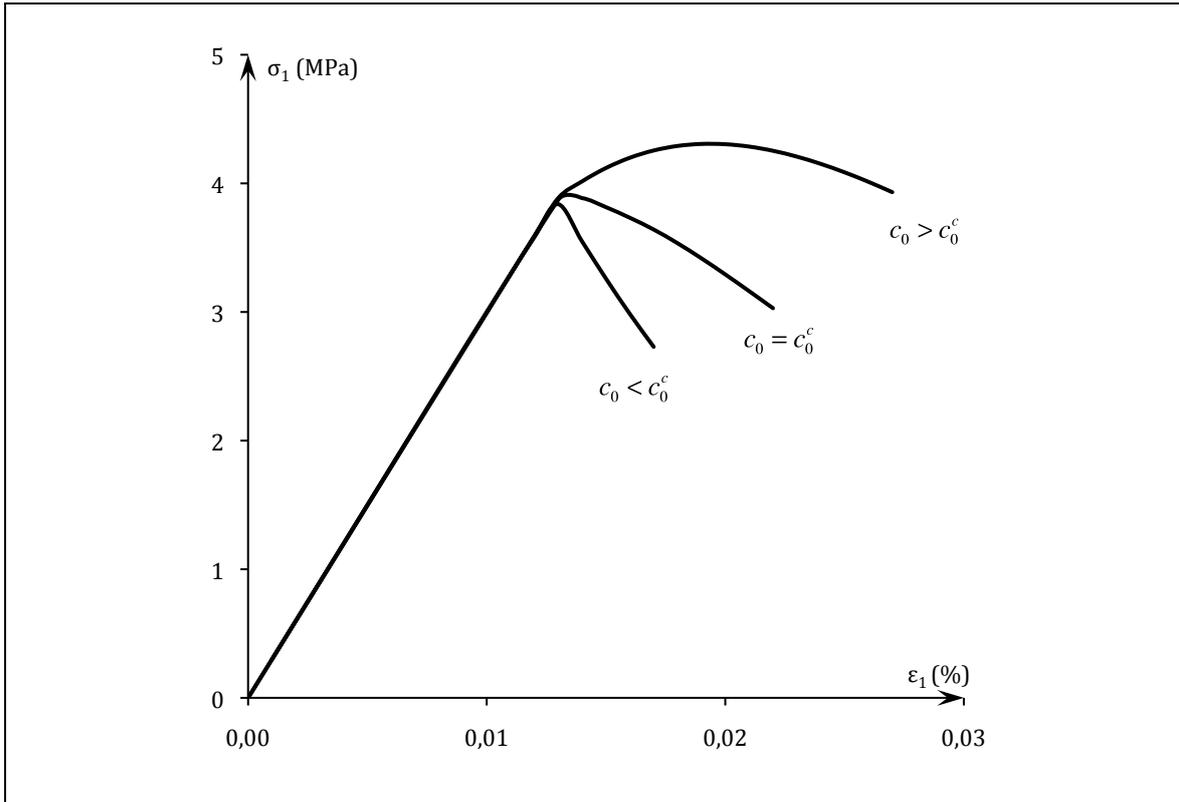


Figure 2.4 – Courbe contrainte σ_1 – déformation ϵ_1 : illustration de l'influence du paramètre c_0

Traction uniaxiale suivie d'une compression uniaxiale

On se propose d'étudier le trajet de chargement constitué d'une traction uniaxiale suivie d'une compression uniaxiale de même axe. L'essai consiste à faire évoluer l'endommagement durant la traction uniaxiale puis après décharge complète, le chargement se poursuit par une compression uniaxiale.

La figure 2.5 illustre cet essai en présentant la réponse contrainte-déformation avec les fonctions (2.14). Pour cet exemple, le rapport des valeurs de la contrainte maximale obtenues en compression et en traction vaut environ 1,1.

Cette figure permet également de mettre en évidence la restauration partielle de la rigidité initiale lorsque les microfissures se referment durant le chargement compressif.

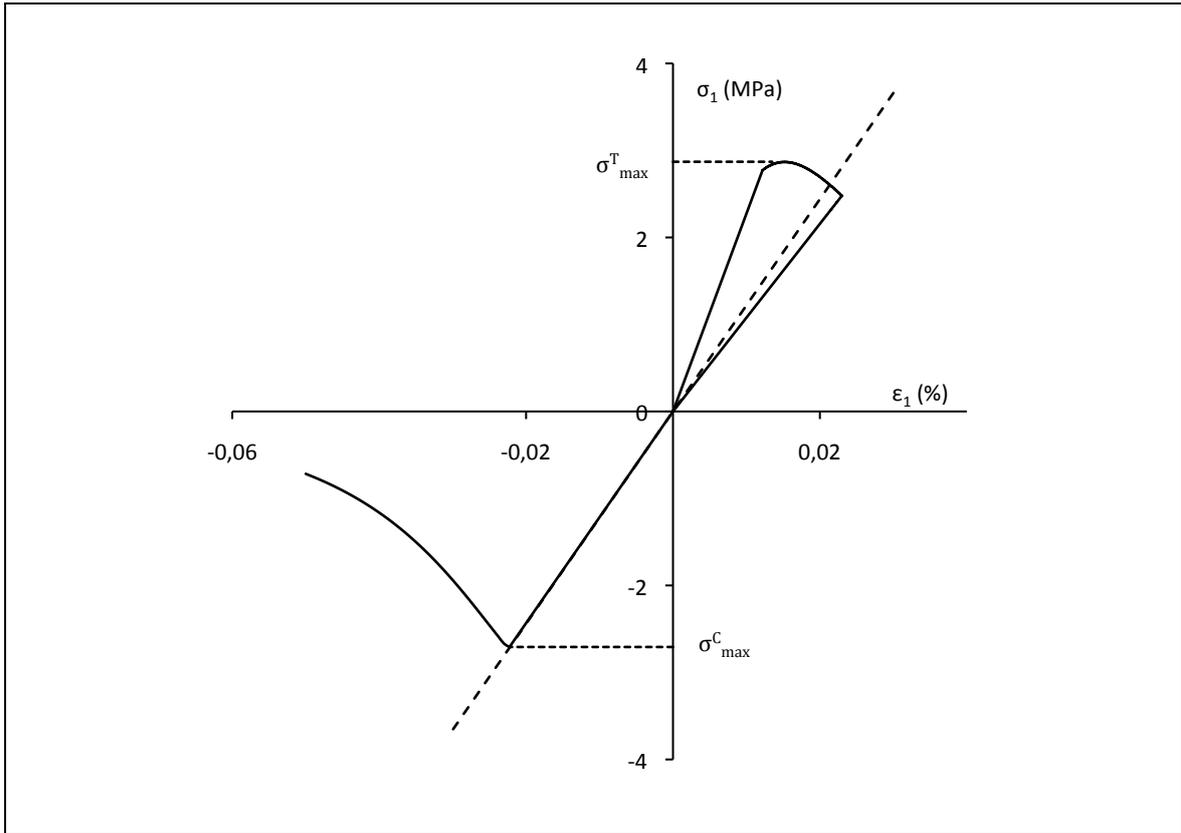


Figure 2.5 – Courbe contrainte σ_1 – déformation ϵ_1 : traction - compression uniaxiales
(Valeurs des paramètres : $E_0 = 31000$ MPa, $\nu_0 = 0,24$, $h_0 = 0,00008$, $c_0 = 27$, $d_0 = 0,13$)

Compression uniaxiale avec cycle de charge-décharge

On propose ici d'examiner la réponse prédite par le modèle lors d'un cycle de charge et décharge en compression uniaxiale d'axe e_1 ($\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 e_1 \otimes e_1$, $\sigma_1 < 0$).

La figure 2.6 présente la courbe contrainte-déformation correspondante (en choisissant les fonctions (2.14)).

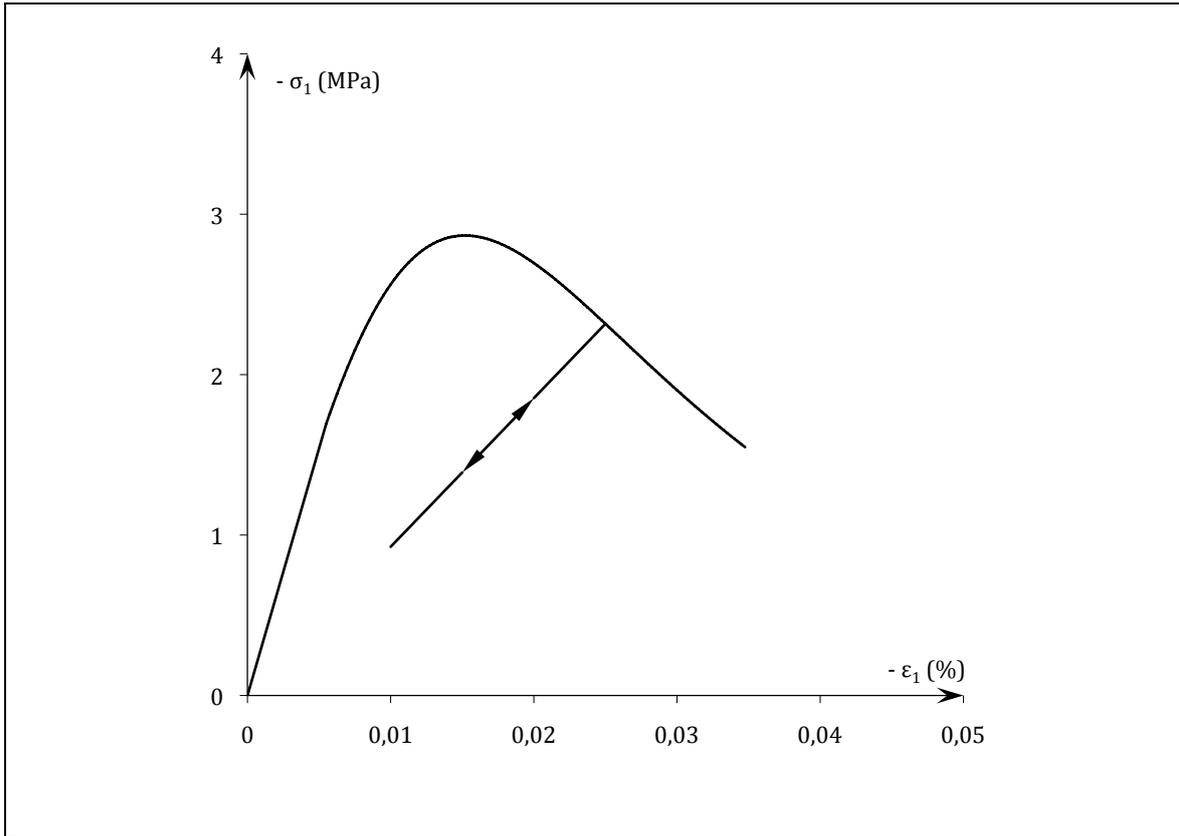


Figure 2.6 - Courbe contrainte σ_1 – déformation ε_1 : Compression uniaxiale avec cycle de décharge-recharge

(Valeurs des paramètres : $E_0 = 31000$ MPa, $\nu_0 = 0,24$, $h_0 = 0,00008$, $c_0 = 27$, $d_0 = 0,13$)

Cette courbe montre clairement que lors de la décharge puis de la recharge, la réponse est purement élastique. L'endommagement n'évolue plus et sa valeur est fixée au point où la décharge a été initiée ($d = d^D$). Durant ce cycle, la relation contrainte-déformation est donnée sous la forme unique suivante :

$$\sigma_1 = E(d^D)\varepsilon_1 \quad (2.41)$$

Compression triaxiale avec pression de confinement

On s'intéresse dans cette dernière partie à l'influence de la pression de confinement sur la réponse prédite par le modèle lorsque le matériau est soumis à une compression triaxiale.

La réponse du matériau ne diffère que très peu de celle qui vient d'être présentée pour une compression uniaxiale. En effet, si l'on exprime le seuil d'endommagement initial (2.10) dans l'espace des contraintes, on constate qu'il ne dépend pas de la contrainte moyenne appliquée :

$$\tilde{f}(\boldsymbol{\sigma}, d) = -\frac{\mu'(d)}{4\mu^2(d)} \boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d - h(d) \quad (2.42)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_d$ représente le déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$. Il est invariant par translation dans la direction des tenseurs sphériques, i.e. quelle que que soit la valeur de la pression de confinement appliquée $p, p \in \mathbb{R}$, telle que la contrainte vaut $\boldsymbol{\sigma} + p\mathbf{1}$.

Si l'on examine ce seuil d'endommagement dans l'espace des contraintes axisymétriques, on observe que celui-ci tend dans le domaine des microfissures fermées vers un cylindre de révolution centré sur l'axe hydrostatique (cf. figure 2.7).

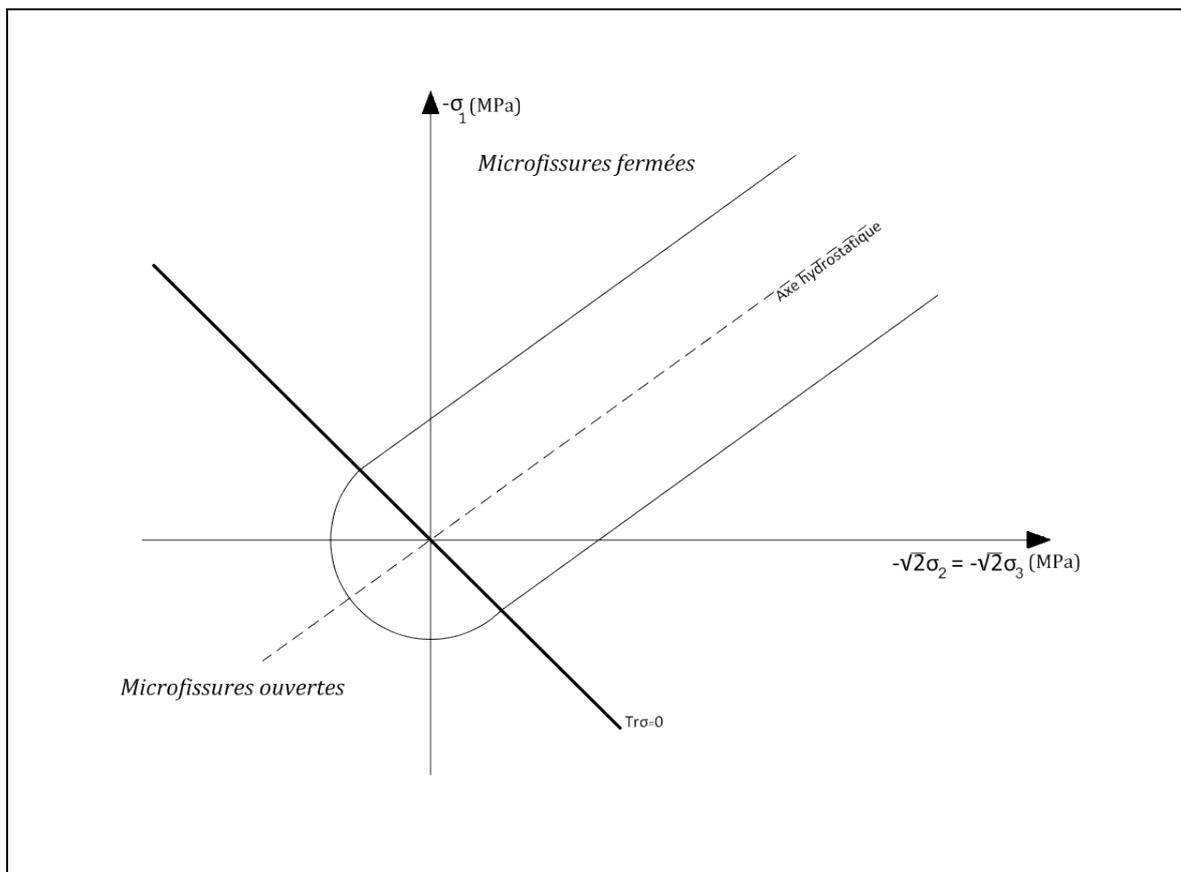


Figure 2.7 – Seuil d'endommagement initial dans l'espace des contraintes axisymétriques

On observe en effet que celui-ci tend dans le domaine des microfissures fermées vers un cylindre de révolution centré sur l'axe hydrostatique.

2.4 Commentaires

A l'issue de cette analyse des capacités prédictives du modèle de base, on peut résumer les principaux aspects du comportement avec ce modèle :

- La gamme de choix des modules de compressibilité et de cisaillement, fonctions de l'endommagement, selon une approche purement phénoménologique ou issue de considérations micromécaniques permet une certaine flexibilité d'utilisation du modèle.
- Les modules $E(d)$ et $\nu(d)$ sont différents en traction et en compression. On peut noter que le matériau est plus susceptible à l'endommagement en traction.
- La rigidité initiale du matériau est partiellement restituée lors de la refermeture des microfissures.
- Il existe une dissymétrie entre les valeurs de la contrainte maximale atteintes en traction et en compression. Cependant, le rapport des contraintes obtenu dans l'exemple reste relativement faible par rapport aux données courantes pour la plupart des matériaux quasi-fragiles (pour un béton courant, ce rapport varie entre 5 et 7 ; pour un grés, le rapport s'élève à environ 10).
- L'ajout d'une pression de confinement n'a pas d'effet sur le comportement du matériau.
- Lors d'un cycle de déchargement-rechargement, il n'existe pas de boucle d'hystérésis contrairement aux observations expérimentales (cf. figure 1.3 du chapitre 1).

Malgré de nombreux atouts, il apparaît que le modèle de base avec la seule description de la microfissuration ne permet pas de décrire les principaux phénomènes rencontrés dans les matériaux quasi-fragiles. On se propose ainsi dans le prochain chapitre d'y apporter des améliorations.

CHAPITRE 3

Modélisation de l'endommagement et du glissement avec frottement

Objectifs du chapitre

On se propose ici d'introduire au modèle de base présenté au chapitre précédent un nouvel effet irréversible susceptible d'être induit par les microdéfauts. On suppose en effet à partir de maintenant que le contact entre lèvres des microfissures fermées se fait avec frottement, i.e. que les microfissures ont un comportement plastique. Notons que lors de la construction du nouveau potentiel thermodynamique, une attention particulière sera accordée aux problèmes de continuité.

On présente ensuite une méthode d'identification des paramètres du modèle basée sur les essais de traction uniaxiale, de compression hydrostatique et de compression triaxiale. Une confrontation simulation-expérience sur des bétons est proposée à la fin de ce chapitre afin de montrer la pertinence de l'écriture proposée.

3.1 Construction du modèle d'endommagement avec frottement

3.1.1 Variable interne de glissement

Dans le contexte d'un endommagement progressif accompagné du glissement avec frottement des lèvres des microdéfauts, le tenseur de déformation et l'endommagement ne sont plus suffisants pour décrire complètement le comportement du matériau. Il est donc nécessaire d'ajouter à $\boldsymbol{\epsilon}$ et à d une nouvelle variable interne.

On suppose pour cela que le tenseur de déformation se décompose additivement en une déformation élastique (liée au tenseur de contrainte par le tenseur d'élasticité) et une déformation anélastique, que l'on appellera par la suite déformation plastique et que l'on notera $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$, traduisant les déformations résiduelles induites par le frottement. La variable interne $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$ apparaît alors comme la manifestation macroscopique du glissement et frottement des lèvres des microfissures en contact à une échelle plus fine.

3.1.2 Potentiel thermodynamique et lois d'état

L'énergie libre du matériau dépend désormais des variables d'état $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ et d . Lorsque les microfissures sont ouvertes, le matériau a un comportement élastique à d fixé : les seules variables d'état indépendantes sont le couple $(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$. On peut ainsi conserver l'expression du potentiel thermodynamique proposée en (2.7) lorsque $\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$.

En revanche, il faut modifier la forme de l'expression du potentiel lorsque les microfissures sont fermées ($\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \leq \mathbf{0}$), en introduisant des termes dépendant de $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$. En s'appuyant sur les résultats de la micromécanique (cf. chapitre 1) on suppose dans ce cas que le potentiel thermodynamique s'écrit comme la somme d'une énergie élastique restituable $\psi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl})$ et d'une énergie bloquée $\psi^b(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d)$.

Dans le régime purement élastique, on fait l'hypothèse que les microfissures fermées se comportent comme des microdéfauts parfaitement adhérents. Le tenseur d'élasticité est donc celui du matériau sain. Soulignons que c'est une hypothèse pertinente d'un point de vue physique car elle est en accord avec les résultats de la micromécanique sur un système fermé (cf. par exemple Barthélémy [2003]) et également d'un point de vue mathématique car elle apporte une simplicité dans la construction de le modèle. En présence d'une déformation plastique, le potentiel $\psi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl})$ s'écrit alors :

$$\psi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) = \frac{1}{2} K_0 (\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}^{pl})^2 + \mu_0 (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl}) \quad (3.1)$$

Pour l'énergie bloquée $\psi^b(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d)$, on opte pour la forme quadratique par rapport à la variable $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ suivante :

$$\psi^b(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d) = \beta(d) \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \beta(d) \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl} : \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl} \quad (3.2)$$

où β est une fonction scalaire de d , continument différentiable et positive.

En résumé, le potentiel thermodynamique du matériau prend la forme suivante :

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} \frac{1}{2} K(d) (\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon})^2 + \mu(d) \boldsymbol{\epsilon}_d : \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} > 0 \\ \frac{1}{2} K_0 (\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} - \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon}^{pl})^2 + \mu_0 (\boldsymbol{\epsilon}_d - \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl}) : (\boldsymbol{\epsilon}_d - \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl}) + \beta(d) \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} : \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} & \text{si } \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

On en déduit, dans un premier temps, la relation contrainte-déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} K(d) \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{1} + 2\mu(d) \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} > 0 \\ K_0 (\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} - \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon}^{pl}) \mathbf{1} + 2\mu_0 (\boldsymbol{\epsilon}_d - \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl}) & \text{si } \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

A partir de laquelle on exprime le déviateur :

$$\boldsymbol{\sigma}_d = \begin{cases} 2\mu(d) \boldsymbol{\epsilon}_d & \text{si } \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} > 0 \\ 2\mu_0 (\boldsymbol{\epsilon}_d - \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl}) & \text{si } \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

A partir de (3.3), on constate aisément que la nature polynomiale de la fonction $\partial \psi / \partial \boldsymbol{\epsilon}$ lui assure d'être continue pour tout état $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d)$ tel que $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \neq 0$.

En revanche, la continuité de cette fonction est assurée pour tout état $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d)$ tel que $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} = 0$, si et seulement si :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{pl} = \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} = \left(1 - \frac{\mu(d)}{\mu_0} \right) \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.6)$$

lorsque $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} = 0$. La relation (3.6) apparaît comme une condition d'initialisation de la variable $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$ lors du passage d'un état vérifiant $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} > 0$ à un état tel que $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} < 0$. Le cas du passage inverse, i.e. d'un état vérifiant $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} < 0$ à un état tel que $\text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} > 0$ est plus délicat. En effet, on vérifiera plus loin que le critère et la loi d'écoulement adoptés pour la déformation plastique ne conduisent pas à la violation de la condition (3.6).

Puis en utilisant (3.3), les forces thermodynamiques associées aux variables internes $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$ et d s'écrivent respectivement :

$$\mathbf{F}^{pl} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ K_0 (\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} - \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) \mathbf{1} + 2\mu_0 (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl}) - 2\beta(d) \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl} & \text{si } \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

et

$$F^d = -\frac{\partial \psi}{\partial d}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} -\frac{1}{2} K'(d) (\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 - \mu'(d) \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d & \text{si } \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ -\beta'(d) \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl} : \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl} & \text{si } \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

où β' représente la dérivée de β par rapport à d et $\beta'(d) < 0$.

A partir de (3.7), on déduit à microfissures fermées :

$$\text{Tr } \mathbf{F}^{pl} = 3K_0 (\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} - \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) = \text{Tr } \boldsymbol{\sigma} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{F}_d^{pl} = 2\mu_0 (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl}) - 2\beta(d) \boldsymbol{\varepsilon}_d^{pl} \quad (3.10)$$

D'après (3.7), il est clair que la nullité de la force thermodynamique associée à $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ pour un état vérifiant $\text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ assure la continuité de la fonction $\partial \psi / \partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$. En exploitant (3.6) pour une valeur de la variable d'endommagement $d \neq 0$, on montre que cette condition implique que la fonction β est définie par :

$$\beta(d) = \frac{\mu_0 \mu(d)}{\mu_0 - \mu(d)} \quad (3.11)$$

On peut vérifier aisément que (3.11) entraîne également la continuité de la fonction $\partial \psi / \partial d$.

3.1.3 Critère de glissement et loi d'évolution

Afin de compléter la formulation de la loi de comportement, on se propose de définir le critère de glissement et la loi d'écoulement de la variable $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$.

On choisit ici un critère de glissement tenant compte de la partie déviatorique (\mathbf{F}_d^{pl}) et sphérique de la force thermodynamique \mathbf{F}^{pl} . Ainsi, on suppose que le critère est régi par la norme $\|\mathbf{F}_d^{pl}\| = \sqrt{\mathbf{F}_d^{pl} : \mathbf{F}_d^{pl}}$ du déviateur de \mathbf{F}^{pl} et par sa trace tel que :

$$g(\mathbf{F}^{pl}) = \|\mathbf{F}_d^{pl}\| + \eta \text{Tr} \mathbf{F}^{pl} \quad (3.12)$$

où η est un paramètre positif. Notons que le critère (3.12) peut être considéré comme la manifestation à l'échelle macroscopique du critère d'interface de Coulomb.

En utilisant (3.5) et (3.9), le critère peut également s'exprimer en fonction de l'état de contrainte :

$$\hat{g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = \|\boldsymbol{\sigma}_d - 2\beta(d)\boldsymbol{\epsilon}_d^{pl}\| + \eta \text{Tr} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.13)$$

Cette expression montre que le critère de glissement est analogue à celui de Drucker et Prager [1952] où η correspond à un pseudo-coefficient de frottement (on considère ici la cohésion nulle). Le terme $2\beta(d)\boldsymbol{\epsilon}_d^{pl}$ joue le rôle d'une variable d'écroissage cinématique. On note également que le critère dépend de la contrainte moyenne. Par conséquent, il permet de rendre compte de l'influence de la pression de confinement qui faisait défaut dans le modèle de base.

Pour achever la détermination du comportement plastique, on introduit désormais une loi d'écoulement décrivant l'évolution de $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$. A une échelle plus fine, les mécanismes élémentaires sous jacents à la déformation plastique sont supposés être des glissements purs. Ces glissements se font à volume constant, ce qui suggère d'adopter pour le modèle l'hypothèse d'incompressibilité plastique. A ce titre, nous choisissons une loi d'écoulement plastique vérifiant à tout instant la condition suivante :

$$\text{Tr} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = 0 \quad (3.14)$$

Une expression dépendant uniquement du déviateur de la force thermodynamique \mathbf{F}^{pl} est retenue pour la direction de l'écoulement :

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \mathbf{F}_d^{pl} \quad (3.15)$$

avec $\dot{\lambda} \geq 0$, $g(\mathbf{F}^{pl}) \leq 0$, $\dot{\lambda} g(\mathbf{F}^{pl}) = 0$.

On note que la loi d'écoulement plastique proposée ne respecte pas la règle de normalité au critère : ce modèle n'est donc pas standard.

On peut désormais vérifier que la condition d'initialisation de la variable $\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$ (3.6) n'est pas violée. Pour tout état $(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d)$ tel que $\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} = 0$, puisque $\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon}^{pl} = 0$, on obtient d'après (3.7) :

$$\text{Tr}(\mathbf{F}^{pl}) = K_0 \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) = 0 \quad (3.16)$$

Etant données $\|\mathbf{F}_d^{pl}\| \geq 0$ et $g(\mathbf{F}^{pl}) \leq 0$, le critère de plasticité est saturé, i.e. $g(\mathbf{F}^{pl}) = \|\mathbf{F}_d^{pl}\| = 0$. La force thermodynamique \mathbf{F}^{pl} est donc nulle ce qui entraîne suivant (3.7) avec (3.11) la vérification de la condition (3.6).

3.1.4 Critère d'endommagement et loi d'évolution

On suppose que la loi d'évolution de l'endommagement d est toujours régie par la loi à seuil standard proposée pour le modèle de base au chapitre 2. La fonction seuil d'endommagement est donc définie par :

$$f(F^d, d) = F^d - h(d) \quad (3.17)$$

où h est une fonction de d strictement positive. On a alors :

$$\dot{d} \geq 0, \quad f(F^d, d) \leq 0, \quad \dot{f}(F^d, d) = 0 \quad (3.18)$$

Intéressons-nous au cas particulier où les microfissures sont fermées ($\text{Tr}\boldsymbol{\epsilon} \leq 0$). En utilisant (3.8), le critère (3.17) peut s'exprimer en fonction des variables internes :

$$f(F^d, d) = \tilde{f}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = -\beta'(d) \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} : \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} - h_0(1 + c_0 d) \quad (3.19)$$

On a alors pour l'évolution de la variable d'endommagement :

$$\begin{cases} \dot{d} = 0 & \text{si } \tilde{f}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) < 0 \text{ ou } (\tilde{f}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0 \text{ et } \dot{\tilde{f}}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) < 0) \\ \dot{d} > 0 & \text{si } \tilde{f}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0 \text{ et } \dot{\tilde{f}}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Soit un état $(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d)$ tel que $\tilde{f}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0$. Etudions les conditions d'évolution de l'endommagement d . Le calcul de $\dot{\tilde{f}}$ donne :

$$\dot{\tilde{f}}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial d}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) \dot{d} \quad (3.21)$$

Posons :

$$p = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial d}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = \beta''(d) \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} : \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} + h'(d) \quad (3.22)$$

où β'' la dérivée seconde de β par rapport à d . On vérifie aisément que p est strictement positif puisque $\beta''(d) > 0$ (d'après (3.11)) et $h'(d)$ strictement positive (c_0 non nul). Ainsi, on en déduit que :

$$\dot{d} = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^{pl}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \right) \text{ si } \tilde{f}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0 \text{ et } \dot{\tilde{f}}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0 \quad (3.23)$$

Soit en explicitant à l'aide de (3.8) :

$$\dot{d} = -\frac{2\beta'(d)}{p} \boldsymbol{\epsilon}_d^{pl} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \text{ si } \tilde{f}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0 \text{ et } \dot{\tilde{f}}(\boldsymbol{\epsilon}^{pl}, d) = 0 \quad (3.24)$$

Ce résultat montre que, lorsque les microfissures sont fermées, l'évolution de l'endommagement n'est possible que si le glissement évolue, i.e. $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} \neq 0$. Les deux mécanismes dissipatifs en jeu ne sont pas indépendants.

Pour conclure, nous proposons de résumer les évolutions possibles des phénomènes dissipatifs selon l'état d'ouverture/fermeture des microfissures. Ce résumé s'appuie sur les illustrations des seuils d'endommagement et de glissement construits dans l'espace des contraintes principales axisymétriques (cf. figures 3.1 à 3.4).

Pour des microfissures toutes ouvertes ($\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} > 0$)

Deux cas de figure se présentent.

- Cas 1. Le seuil d'endommagement n'est pas atteint : $f(F^d, d) < 0$. Il n'y a pas d'évolution de la microfissuration, on se trouve dans le domaine de réversibilité (cf. figure 3.1).
- Cas 2. Le critère d'endommagement est saturé : $f(F^d, d) = 0$. L'endommagement évolue. La variable d joue alors le rôle d'un paramètre d'écroutissage : la surface seuil s'élargit sans changer de forme ni de centre 0 (cf. figure 3.2)

Pour des microfissures toutes fermées ($\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0$)

Il existe trois cas de figure.

- Cas 1. Le seuil de glissement n'est pas atteint : $g(\mathbf{F}^{pl}) < 0$. Il n'y a ni glissement ni endommagement. On se trouve alors dans le domaine de réversibilité (cf. figure 3.3).
- Cas 2. Le critère de glissement est saturé mais pas celui d'endommagement : $f(F^d, d) < 0$ et $g(\mathbf{F}^{pl}) = 0$. L'endommagement reste constant et le glissement avec frottement évolue. La surface-seuil de glissement, représentée par un cône, se déplace le long de l'hypersurface ($\text{Tr}\boldsymbol{\sigma} = 0$) sans atteindre le seuil d'endommagement (cf. figure 3.3).
- Cas 3. Les deux seuils sont atteints : $f(F^d, d) = 0$ et $g(\mathbf{F}^{pl}) = 0$. Le frottement s'opère avec évolution de l'endommagement. La figure 3.4 permet de rendre compte que le seuil de glissement entraîne le seuil d'endommagement.

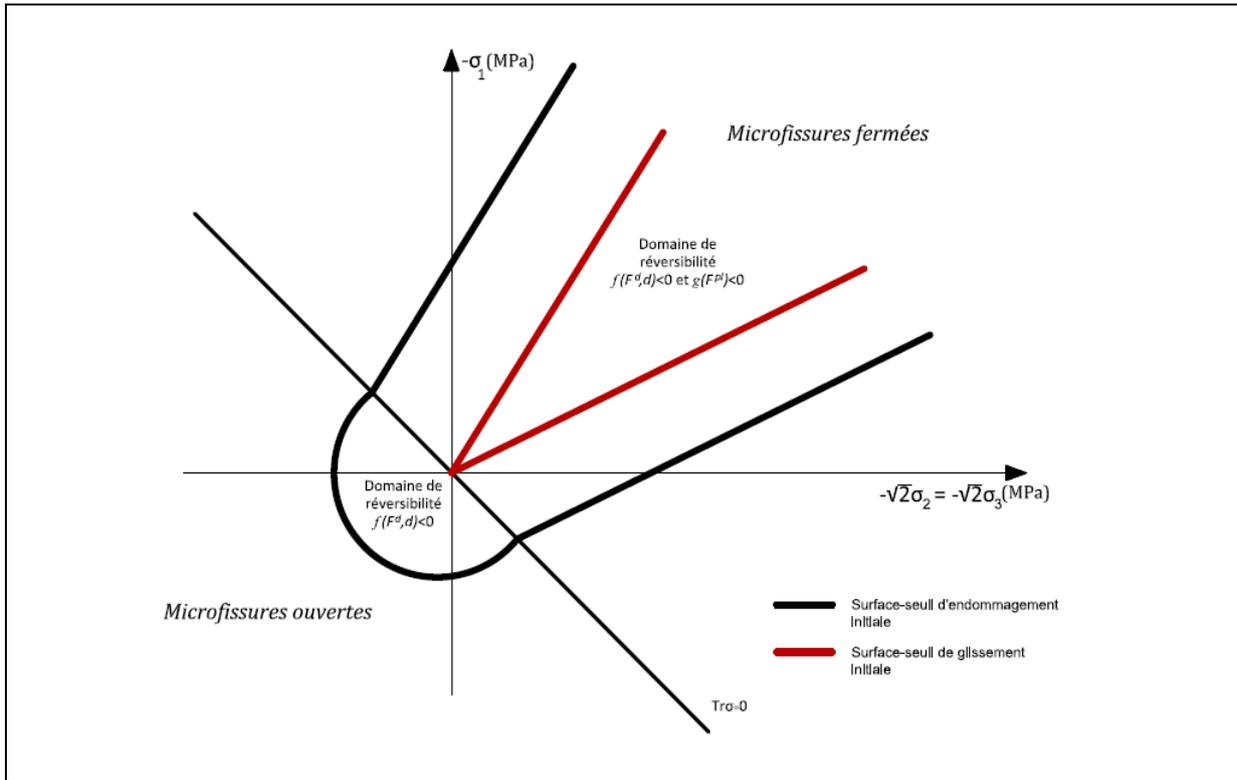


Figure 3.1 – Seuils d'endommagement et de glissement initiaux dans l'espace des contraintes axisymétriques

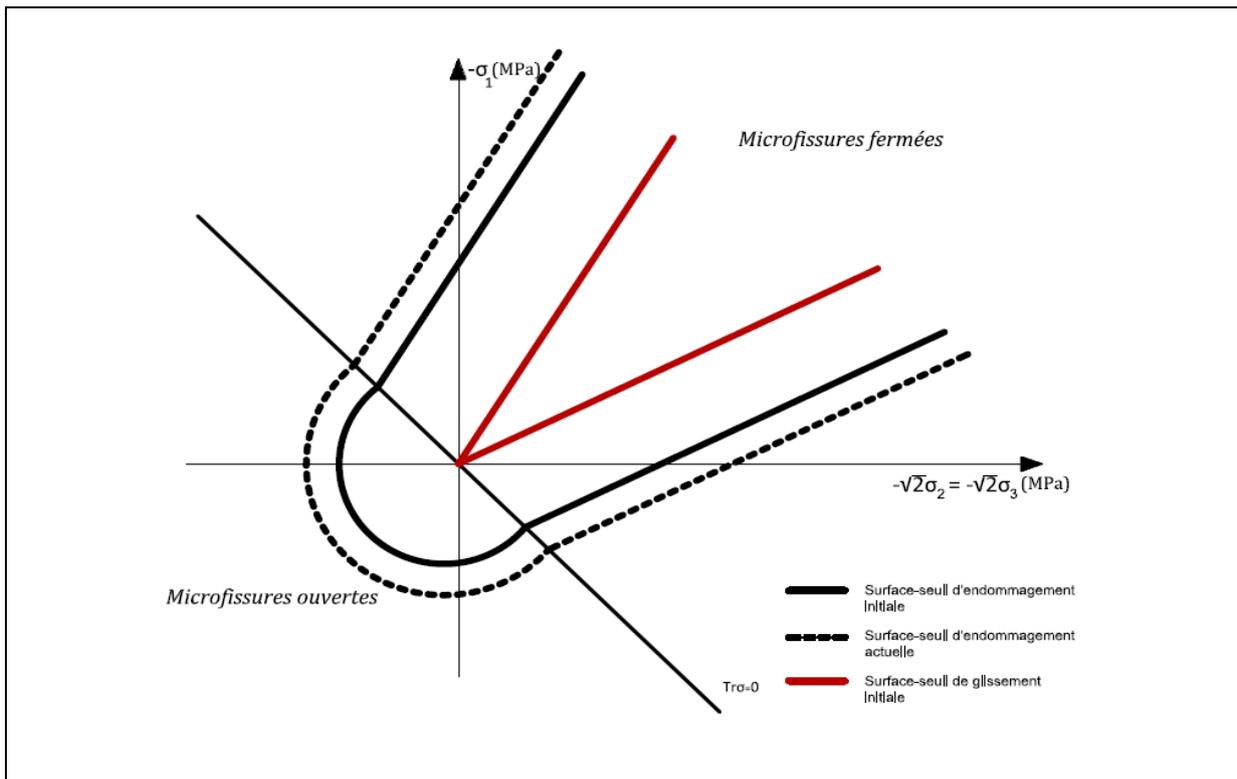


Figure 3.2 – Seuils d'endommagement actuel et de glissement initial dans l'espace des contraintes axisymétriques

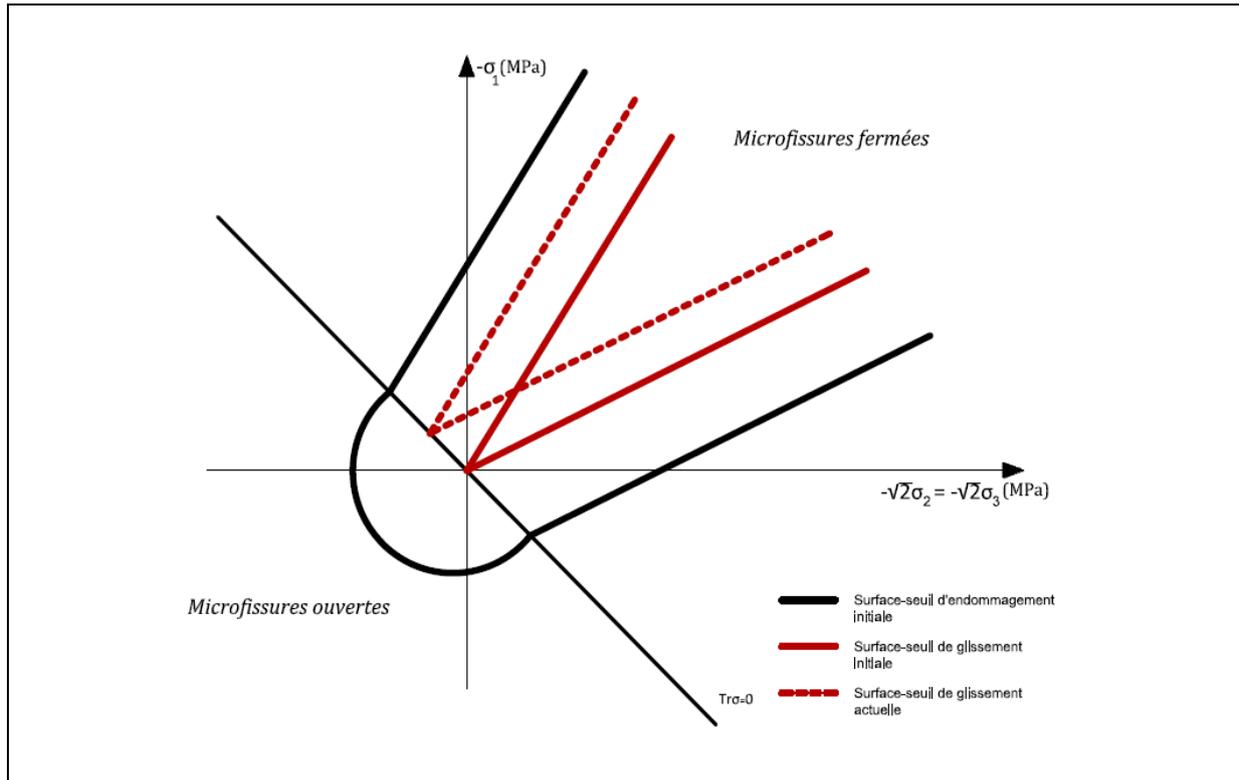


Figure 3.3 – Seuils d’endommagement initial et de glissement actuel dans l’espace des contraintes axisymétriques

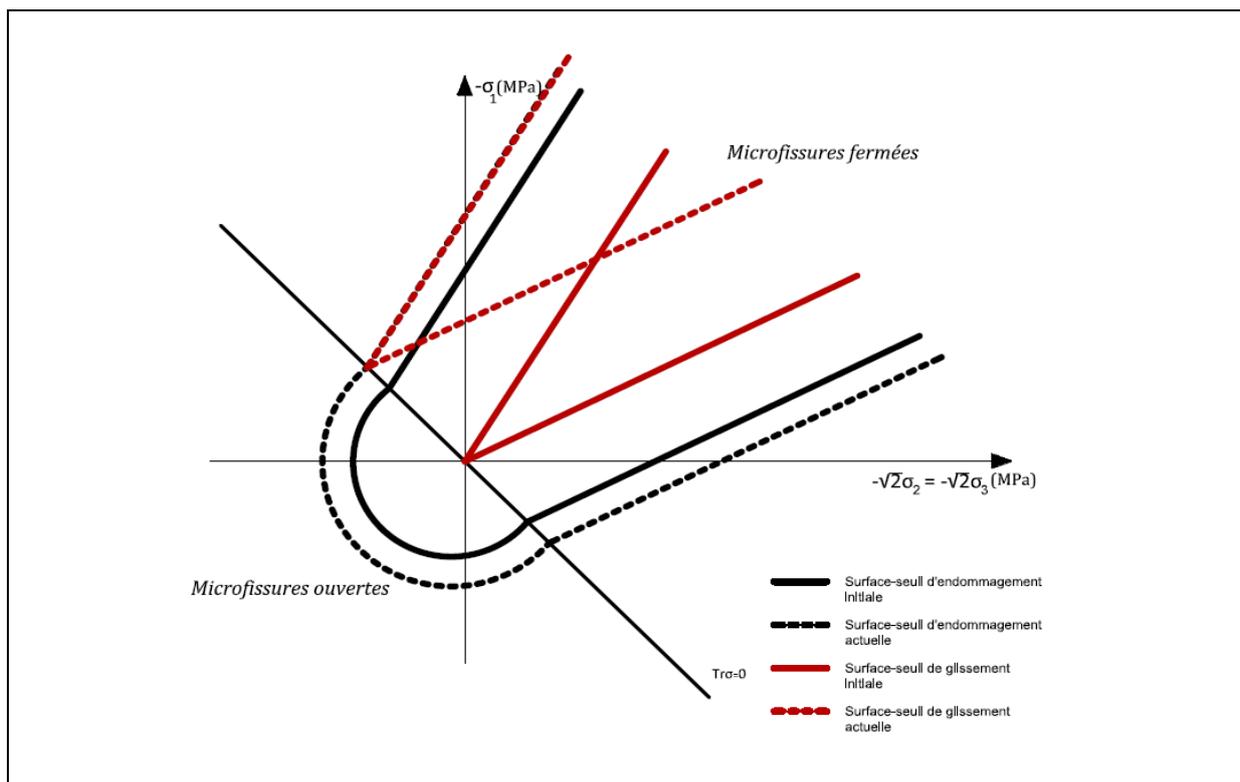


Figure 3.4 – Seuils d’endommagement et de glissement actuels dans l’espace des contraintes axisymétriques

Récapitulatif

▪ **Potentiel thermodynamique**

$$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} \frac{1}{2}K(d)(\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu(d)\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ \frac{1}{2}K_0(\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu_0(\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) + \beta(d)\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \end{cases}$$

avec $\beta(d) = \frac{\mu_0 \mu(d)}{\mu_0 - \mu(d)}$

▪ **Lois d'état**

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} K(d)\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1} + 2\mu(d)\boldsymbol{\varepsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ K_0\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1} + 2\mu_0(\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{F}^{pl} = -\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ K_0\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{1} + 2\mu_0(\boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) - 2\beta(d)\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \end{cases}$$

$$F^d = -\frac{\partial \psi}{\partial d}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, d) = \begin{cases} -\frac{1}{2}K'(d)(\text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon})^2 - \mu'(d)\boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} > 0 \\ -\beta'(d)\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} & \text{si } \text{Tr}\boldsymbol{\varepsilon} \leq 0 \end{cases}$$

▪ **Loi d'évolution de la déformation plastique**

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda} \mathbf{F}^{pl} \text{ avec } \dot{\lambda} \geq 0, \quad g(\mathbf{F}^{pl}) \leq 0, \quad \dot{\lambda} g(\mathbf{F}^{pl}) = 0$$

avec le critère de glissement : $g(\mathbf{F}^{pl}) = \|\mathbf{F}_d^{pl}\| + \eta \text{Tr}\mathbf{F}^{pl}$

▪ **Loi d'évolution de l'endommagement**

$$\dot{d} \geq 0, \quad f(F^d, d) \leq 0, \quad \dot{d} f(F^d, d) = 0$$

avec le critère d'endommagement : $f(F^d, d) = F^d - h_0(1 + c_0 d)$

Tableau 3.1 – Récapitulatif des équations constitutives du modèle d'endommagement avec frottement

3.2 Etude des capacités prédictives du modèle

L'objectif de cette partie est double : on propose d'une part de présenter et commenter les réponses du nouveau modèle à quelques essais mécaniques classiques et d'autre part de comparer le cas échéant ses réponses à celles que l'on a obtenues avec le modèle de base à la section 2.2.3.2.

Afin de rendre possible la comparaison, pour l'ensemble des essais simulés, on utilise à nouveau les fonctions K et μ proposées par Ambrosio et Tortorelli [1990] en (2.14) ainsi que les paramètres suivants :

E_0 (MPa)	ν_0	h_0	c_0	d_0	η
31000	0,24	0,00008	27	0,13	0,6

Tableau 3.2 – Valeurs des paramètres constitutifs

3.2.1 Comportement en traction uniaxiale

On simule la réponse du matériau à un essai de traction uniaxiale d'axe e_1 ($\sigma_1 > 0$) suivie d'une décharge (cf. figure 3.5).

Aucune modification n'ayant été apportée au modèle de base concernant la partie où les microfissures sont ouvertes, la courbe contrainte-déformation en traction uniaxiale est alors identique pour les deux modèles.

La réponse du matériau est dans un premier temps élastique linéaire (cf. figure 3.5a). On constate que la pente de la courbe est plus faible que la valeur E_0 , elle correspond donc à la valeur du module d'Young dégradé $E(d)$.

A partir d'un certain seuil (point A), on observe une perte de linéarité liée à l'évolution de l'endommagement (cf. figure 3.5b). Ceci se traduit également par une dégradation progressive du module d'Young (cf. figure 3.5c). Enfin, la décharge est élastique. A la fin du cycle de chargement, aucune déformation inélastique n'est présente : le comportement est purement élastique fragile.

Notons pour finir que le choix des fonctions K et μ n'affecte que l'allure de l'enveloppe de la courbe contrainte-déformation, le comportement quant à lui reste identique quelle que soit la forme des ces fonctions.

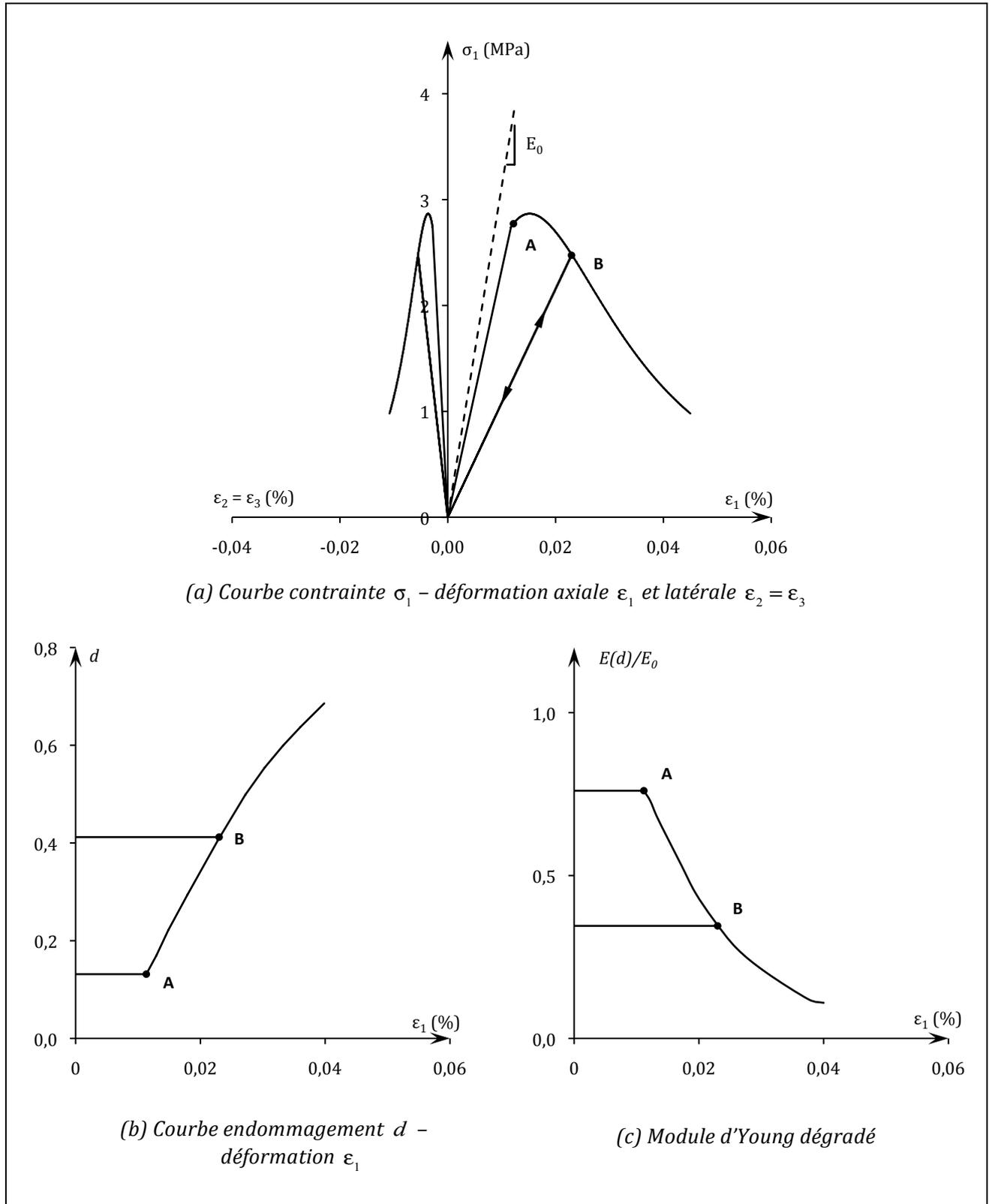


Figure 3.5 - Réponse d'un matériau quasi-fragile à un essai de traction uniaxiale

3.2.2 Comportement en compression uniaxiale

Étudions à présent le cas d'une compression uniaxiale d'axe e_1 ($\sigma_1 < 0$).

Dans un premier temps, on propose d'étudier la réponse du matériau à un cycle de compression uniaxiale avec une décharge complète amorcée avant que le seuil d'endommagement ne soit atteint (cf. figure 3.6).

La première phase de chargement (jusqu'au point A) est linéaire, cependant le domaine n'est pas réversible. En effet, le critère de plasticité est atteint dès le point O et comme le montre la figure 3.6b dès le début du chargement, il y a évolution de la déformation plastique : les microfissures se mettent à glisser en frottant.

En début de décharge (jusqu'au point B), le comportement du matériau est élastique : tout glissement est empêché par le frottement. Ceci se traduit par une valeur de la pente identique à celle du module d'Young du matériau sain et par un arrêt de l'évolution de la déformation plastique.

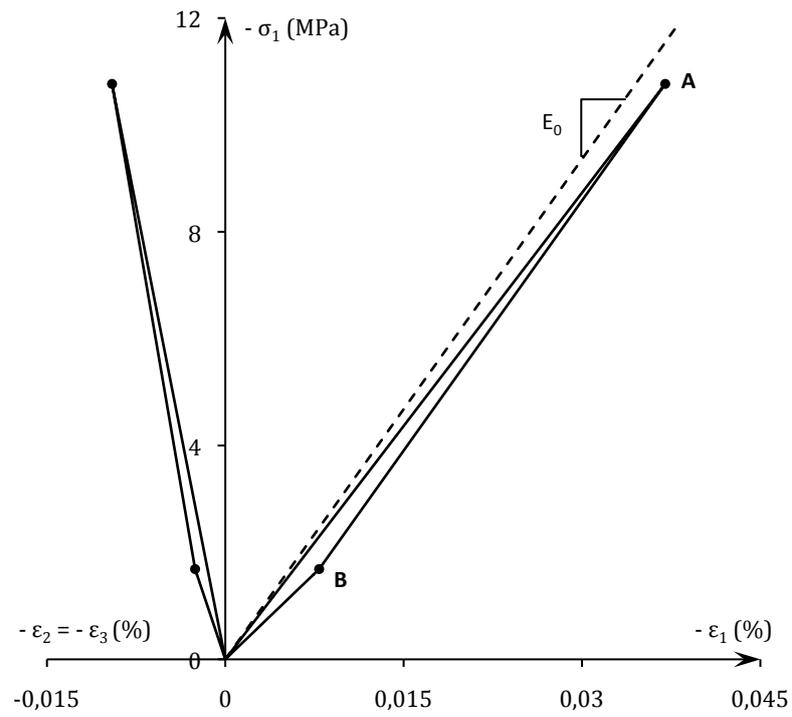
Enfin, à partir d'une certaine valeur de contrainte (point C), le glissement est à nouveau dissipatif jusqu'à la décharge complète du matériau où aucune déformation résiduelle ne subsiste.

Dans un second temps, on poursuit le chargement en compression uniaxiale afin d'obtenir une évolution de l'endommagement puis on réalise à nouveau une décharge complète (cf. figure 3.7).

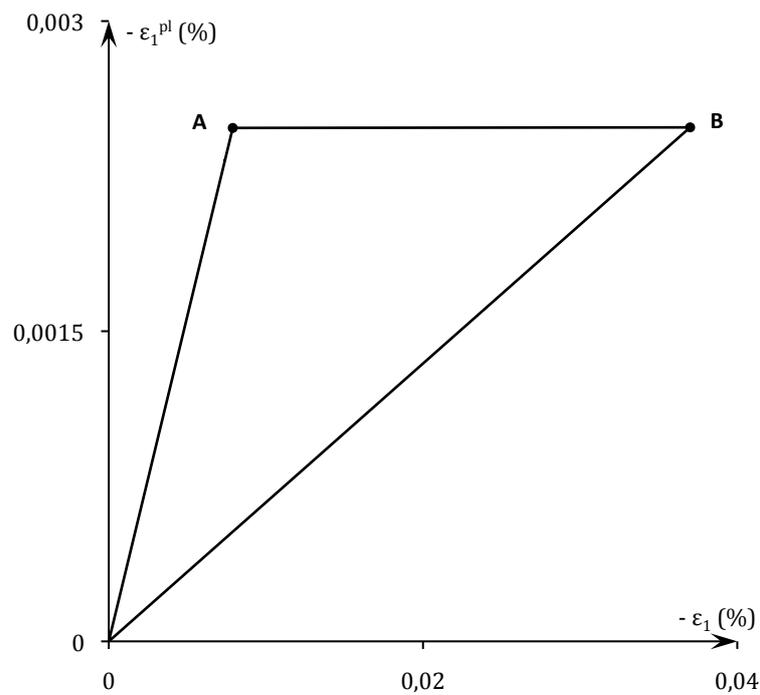
On observe que le seuil d'endommagement (point A) est atteint pour une valeur de contrainte plus élevée qu'en traction uniaxiale.

Au delà de ce seuil, la courbe contrainte-déformation cesse d'être linéaire du fait de la propagation des microfissures.

La décharge est analogue à celle observée précédemment et se réalise en deux temps : une décharge élastique suivie de la décharge complète avec frottement des microfissures.



(a) Courbe contrainte σ_1 - déformation axiale ε_1 et latérale $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$



(b) Courbe déformation plastique ε_1^{pl} - déformation ε_1

Figure 3.6 – Réponse d'un matériau quasi-fragile à un essai de compression uniaxiale (sans évolution de l'endommagement)

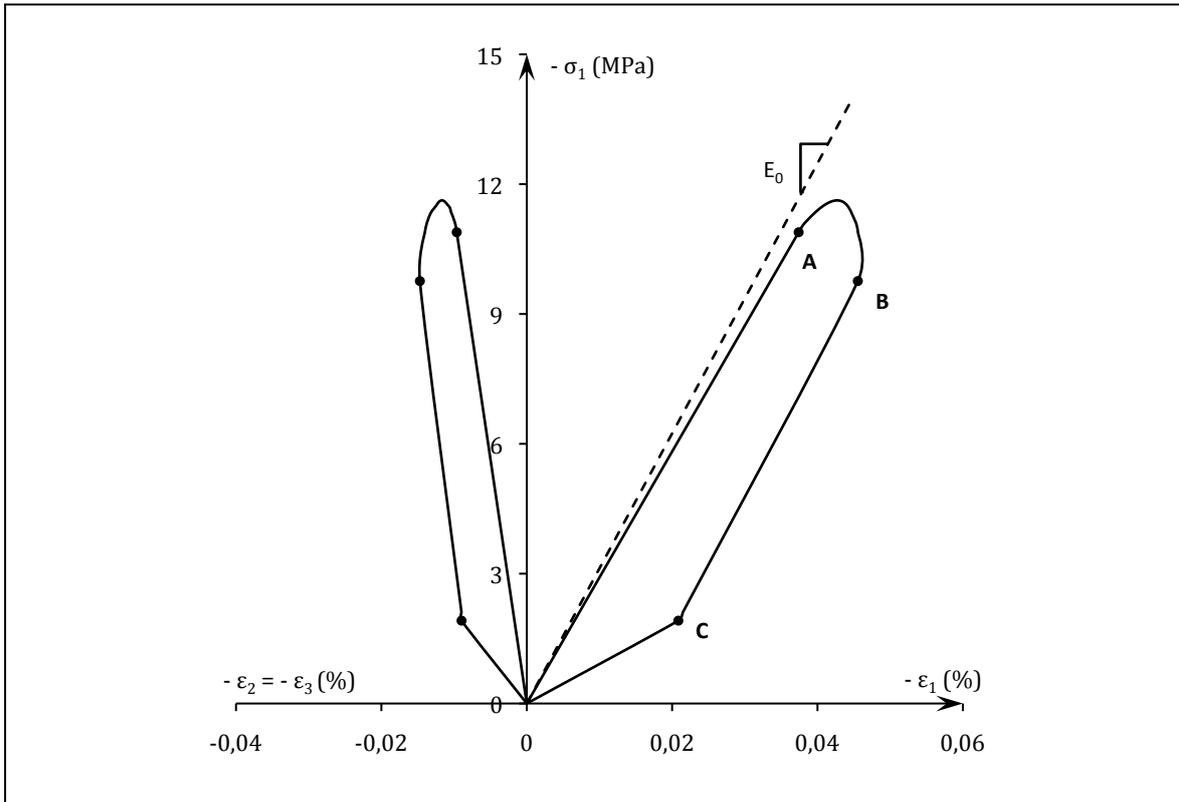


Figure 3.7 – Réponse d'un matériau quasi-fragile à un essai de compression uniaxiale avec décharge complète : courbe contrainte σ_1 – déformation axiale ε_1 et latérale $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$

Notons que l'allure de la courbe est influencée par la valeur du paramètre η comme l'illustre la figure 3.8. On constate que le seuil d'endommagement ainsi que la contrainte maximale augmentent avec η . De plus, ce paramètre a un effet sur la valeur de l'endommagement au pic. La figure 3.9 montre que lorsque η augmente, la valeur de l'endommagement à la contrainte maximale est moins importante (on note une différence de 5% de la valeur de l'endommagement entre les valeurs $\eta = 0,5$ et $\eta = 0,6$).

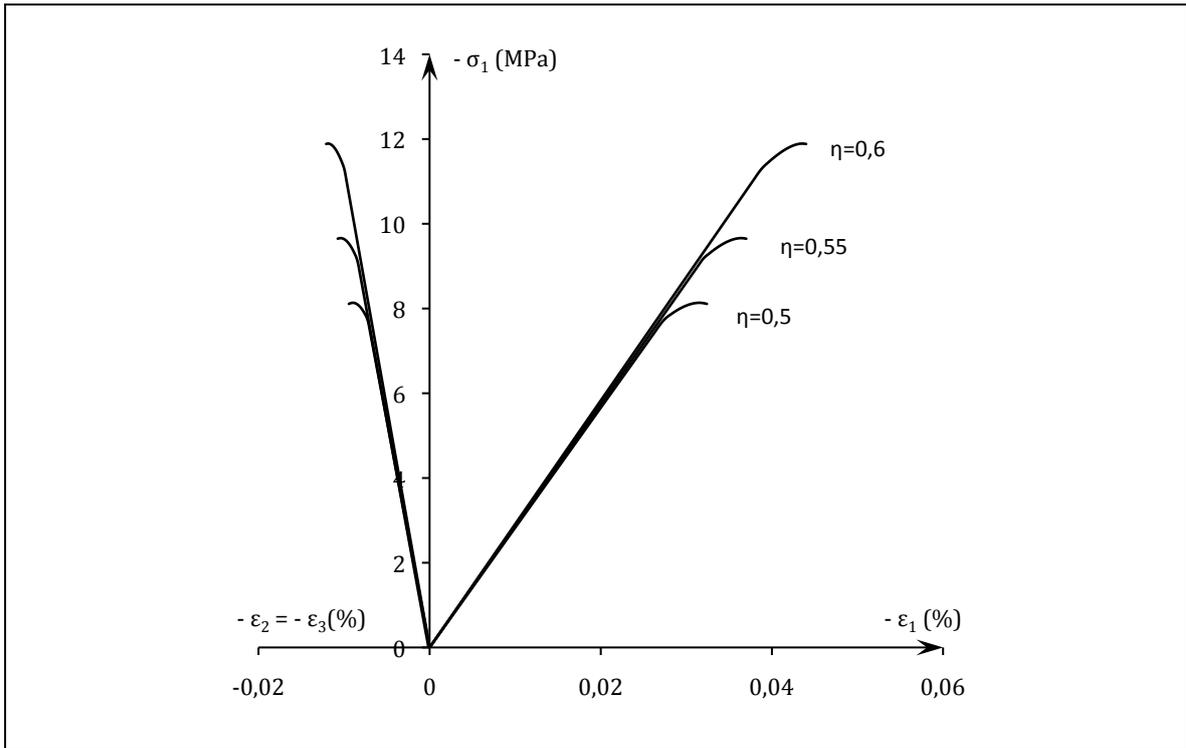


Figure 3.8 – Influence du paramètre η lors d'un essai de compression uniaxiale avec décharge complète : courbe contrainte σ_1 – déformation axiale ε_1 et latérale $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$

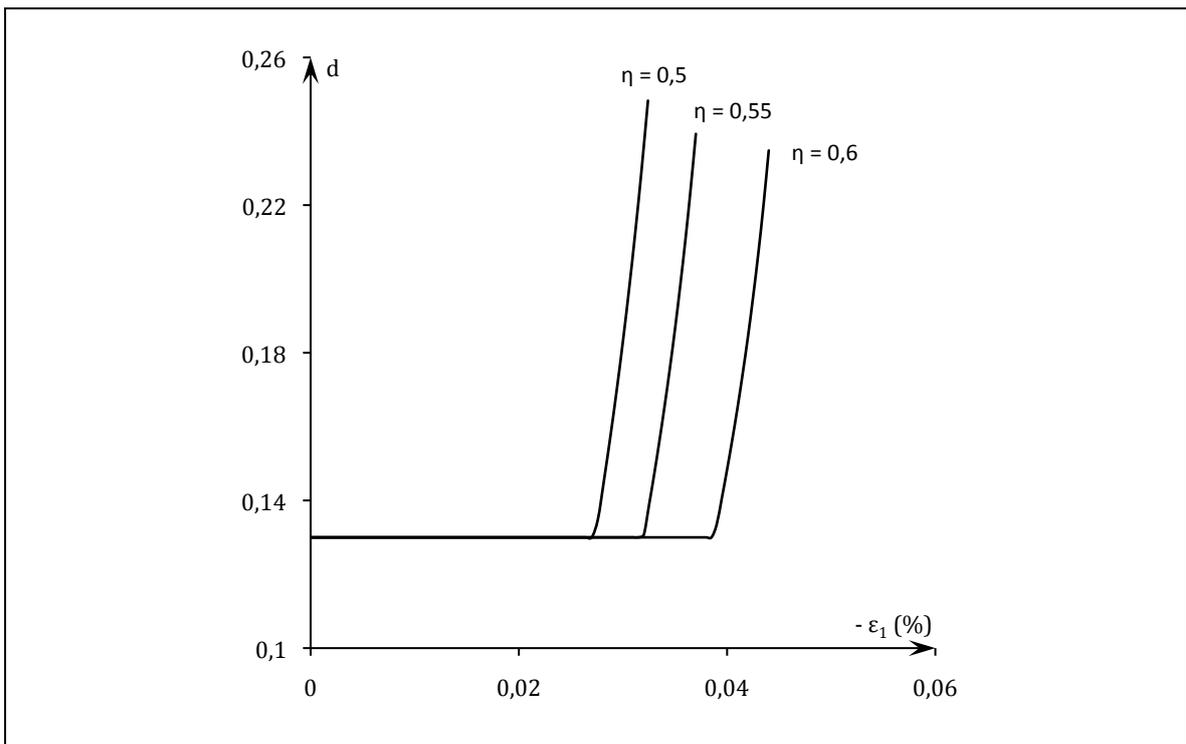


Figure 3.9 – Influence du paramètre η sur l'endommagement lors d'un essai de compression uniaxiale avec décharge complète : courbe endommagement d – déformation axiale ε_1

Soulignons pour finir que si l'on ne décharge pas complètement le matériau et qu'on le recharge à nouveau, on obtient, contrairement au modèle de base, une boucle d'hystérésis (cf. figure 3.10 que l'on peut comparer avec la figure 2.6 du chapitre 2)

Le rechargement suit le trajet inverse de la décharge : la recharge est d'abord élastique, aucun glissement n'a lieu puis les microfissures commencent à glisser en frottant (jusqu'au point B).

Notons que ce constat est corroboré d'une part par les observations expérimentales faites sur les mortiers (cf. figure 1.3 du chapitre 1) et d'autre part par la prédiction de modèles micromécaniques (cf. Zhu [2006]).

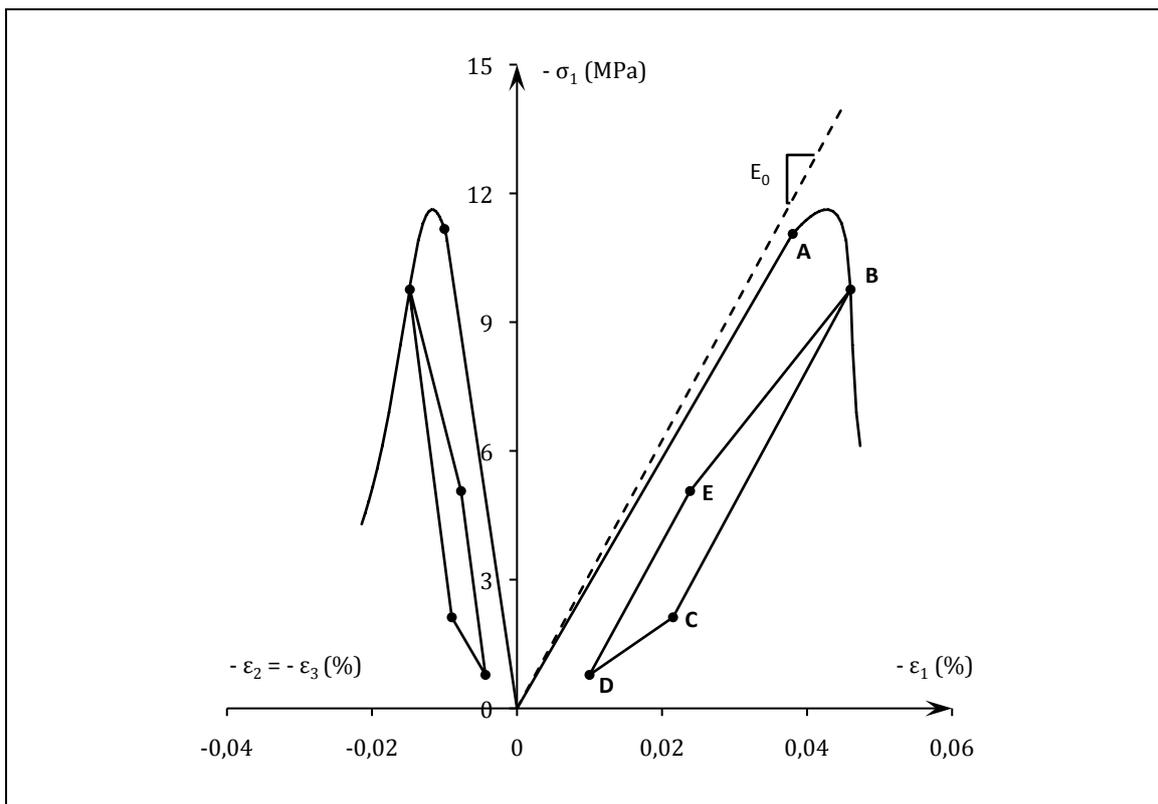


Figure 3.10 – Réponse d'un matériau quasi-fragile à un essai de compression uniaxiale avec cycle de décharge-recharge : courbe contrainte σ_1 – déformation ε_1

3.2.3 Comportement en traction - compression uniaxiales.

Afin de compléter les essais uniaxiaux, on propose de simuler une traction uniaxiale d'axe e_1 suivie d'une compression uniaxiale de même axe (cf. figure 3.11).

Cette simulation a pour intérêt de mettre en évidence l'effet unilatéral pris en compte par le modèle. On constate que suite à une décharge complète de l'essai de traction, le chargement en compression permet au matériau de recouvrer complètement sa rigidité initiale, contrairement au modèle de base qui ne permettait de restituer que le module de compressibilité.

Enfin, à titre d'illustration, on peut calculer le rapport de dissymétrie entre les valeurs maximales des contraintes obtenues en traction et en compression :

$$r = -\frac{\sigma_{\max}^C}{\sigma_{\max}^T} = 3,9 \quad (3.25)$$

Notons que la dissymétrie est beaucoup plus forte avec le modèle d'endommagement avec frottement qu'avec le modèle de base mais reste toutefois inférieure aux données expérimentales.

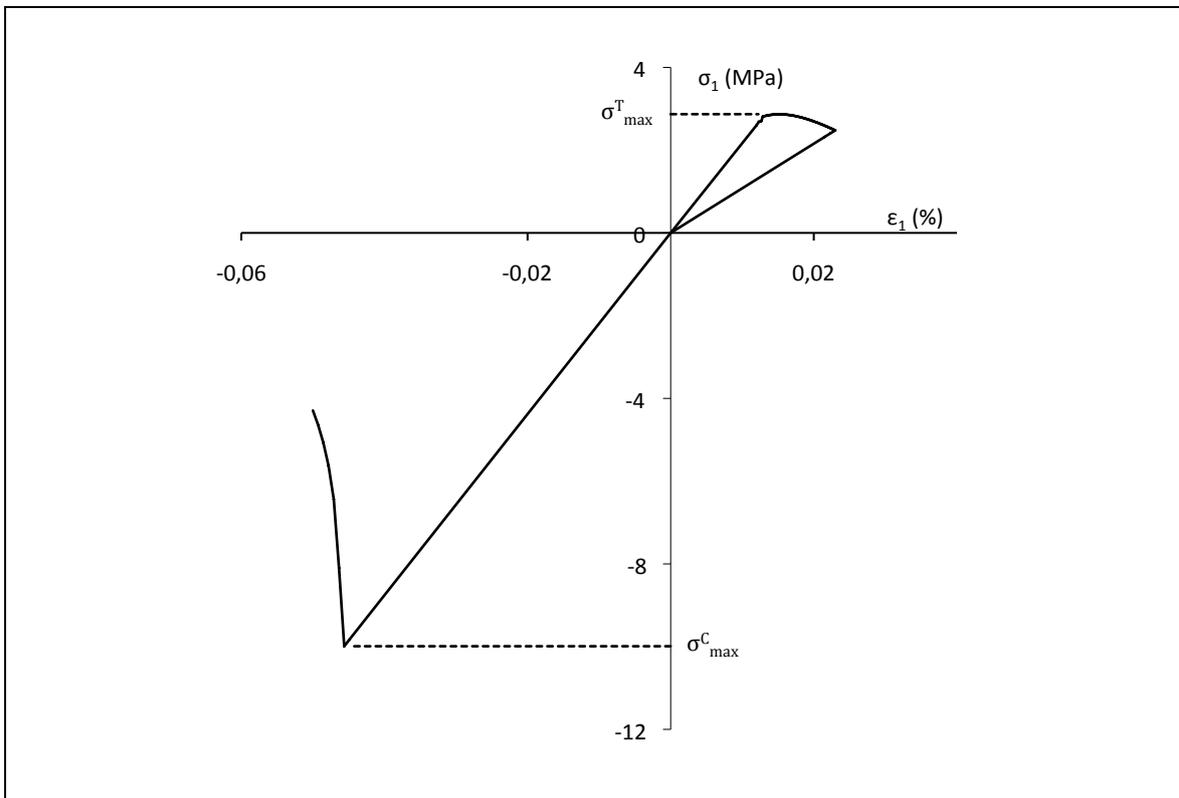


Figure 3.11 – Réponse d'un matériau quasi-fragile à un essai de traction et compression uniaxiales : courbe contrainte σ_1 – déformation ϵ_1

3.2.4 Comportement en compression triaxiale

On simule dans un premier temps une montée en charge hydrostatique (jusque $\sigma_1 = Pc$, où Pc représente la pression de confinement imposée) puis un cycle sur la contrainte axiale σ_1 en maintenant $\sigma_2 = \sigma_3 = Pc$ sans atteindre le seuil d'endommagement.

La figure 3.12a illustre la courbe contrainte-déformation à l'issue de la montée en charge hydrostatique (ε' représente la déformation totale à la fin de cette phase).

Il est intéressant de noter la différence principale entre cette courbe et celle obtenue en compression uniaxiale (cf. figure 3.6a) : la première phase de chargement est élastique : ceci peut s'expliquer physiquement par le fait que le glissement soit bloqué par la contrainte latérale (cf. chapitre 1). La valeur de la pente de la courbe est égale au module d'Young initial. Puis à partir d'un certain seuil (point A), le glissement dissipatif apparaît. Enfin, la décharge est identique à celle de la compression uniaxiale. Notons que la fin de la décharge est marquée par la présence de déformation résiduelle comme le confirme la figure 3.12b. On constate par ailleurs que la valeur de la déformation plastique en fin de chargement n'est pas égale à la valeur de la déformation totale résiduelle, cela signifie que des déformations élastiques ont été stockées.

Enfin, pour compléter cette étude sur le comportement en compression triaxiale, on simule le chargement avec évolution de la microfissuration. On constate sur la figure 3.13 une nette augmentation à la fois du seuil d'endommagement ainsi que de la contrainte maximale lorsque la pression de confinement augmente.

Ainsi, contrairement au modèle de base, le modèle d'endommagement avec frottement permet de prendre en compte l'influence du confinement sur le matériau.

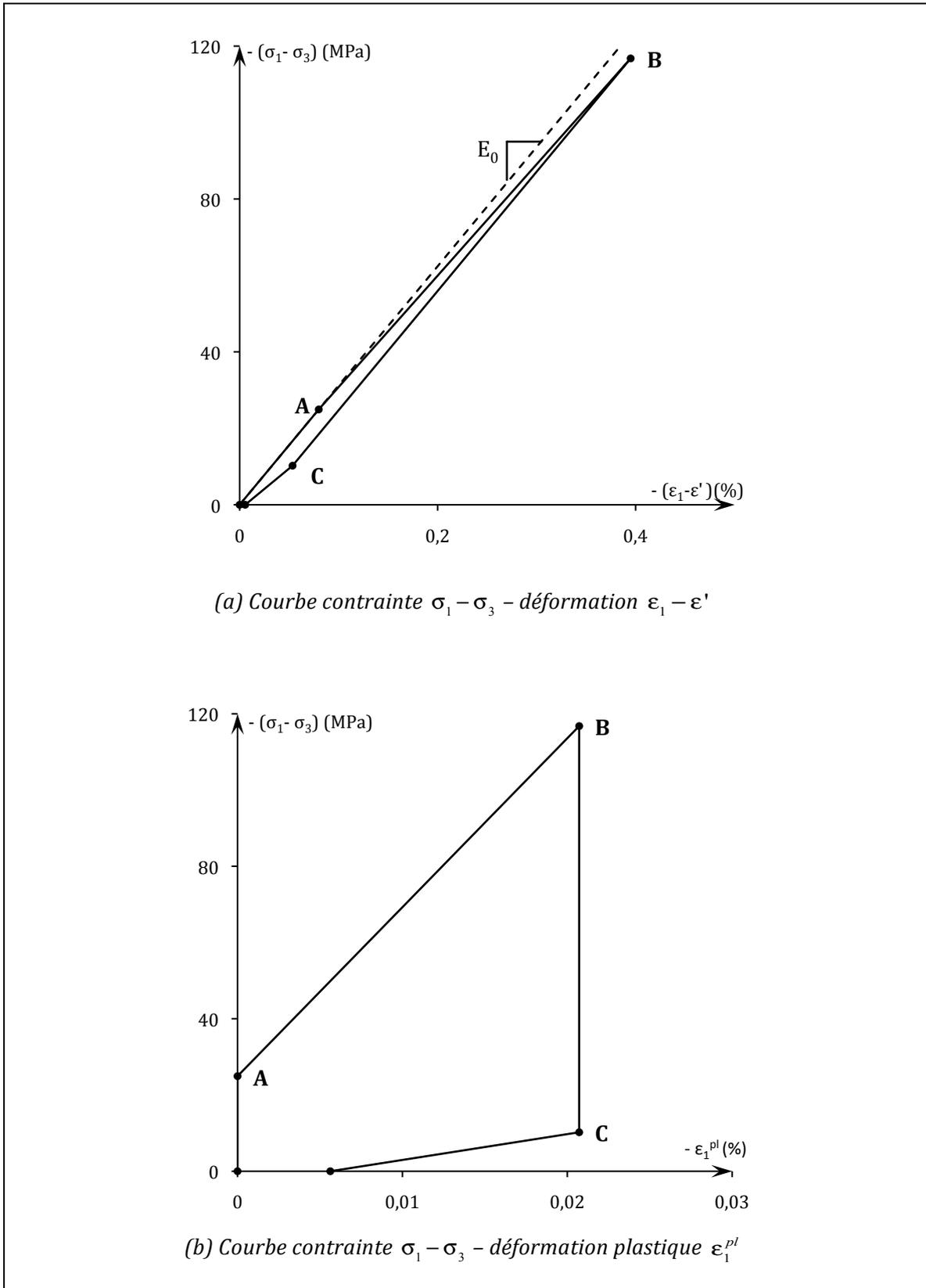


Figure 3.12 - Réponse d'un matériau quasi-fragile à un essai de compression triaxiale à la fin de la montée hydrostatique ($\sigma_3 = Pc$)

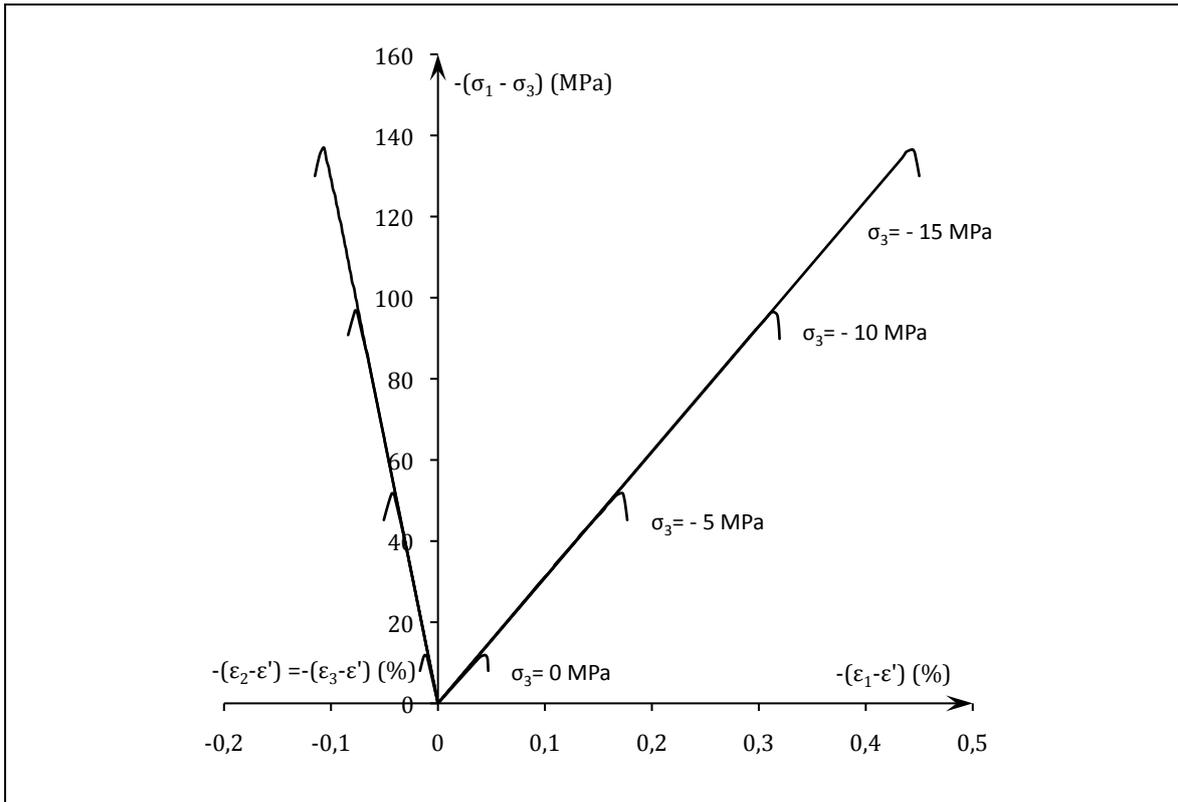


Figure 3.13 – Influence de la pression de la pression de confinement lors d'un essai de compression triaxiale : courbe contrainte $\sigma_1 - \sigma_3$ – déformation axiale $\varepsilon_1 - \varepsilon'$ et latérale $\varepsilon_2 - \varepsilon' = \varepsilon_3 - \varepsilon'$

3.2.5 Réponse prédite pour une sollicitation de torsion

On complète cette étude des capacités prédictives du modèle d'endommagement avec frottement en analysant ses prédictions pour un essai de torsion (cf. figure 3.14).

L'essai consiste à simuler un chargement en traction uniaxiale afin de générer un endommagement. Suite à une décharge complète, le chargement se poursuit par une compression uniaxiale (les microdéfauts se referment et le glissement est alors dissipatif). Enfin la contrainte de compression est maintenue et on applique une torsion avec décharge (cf. figure 3.14a).

La figure 3.14b représente la réponse contrainte de cisaillement – déformation de cisaillement au cours de la phase de torsion (cf. phases 3 et 4 sur la figure 3.14a).

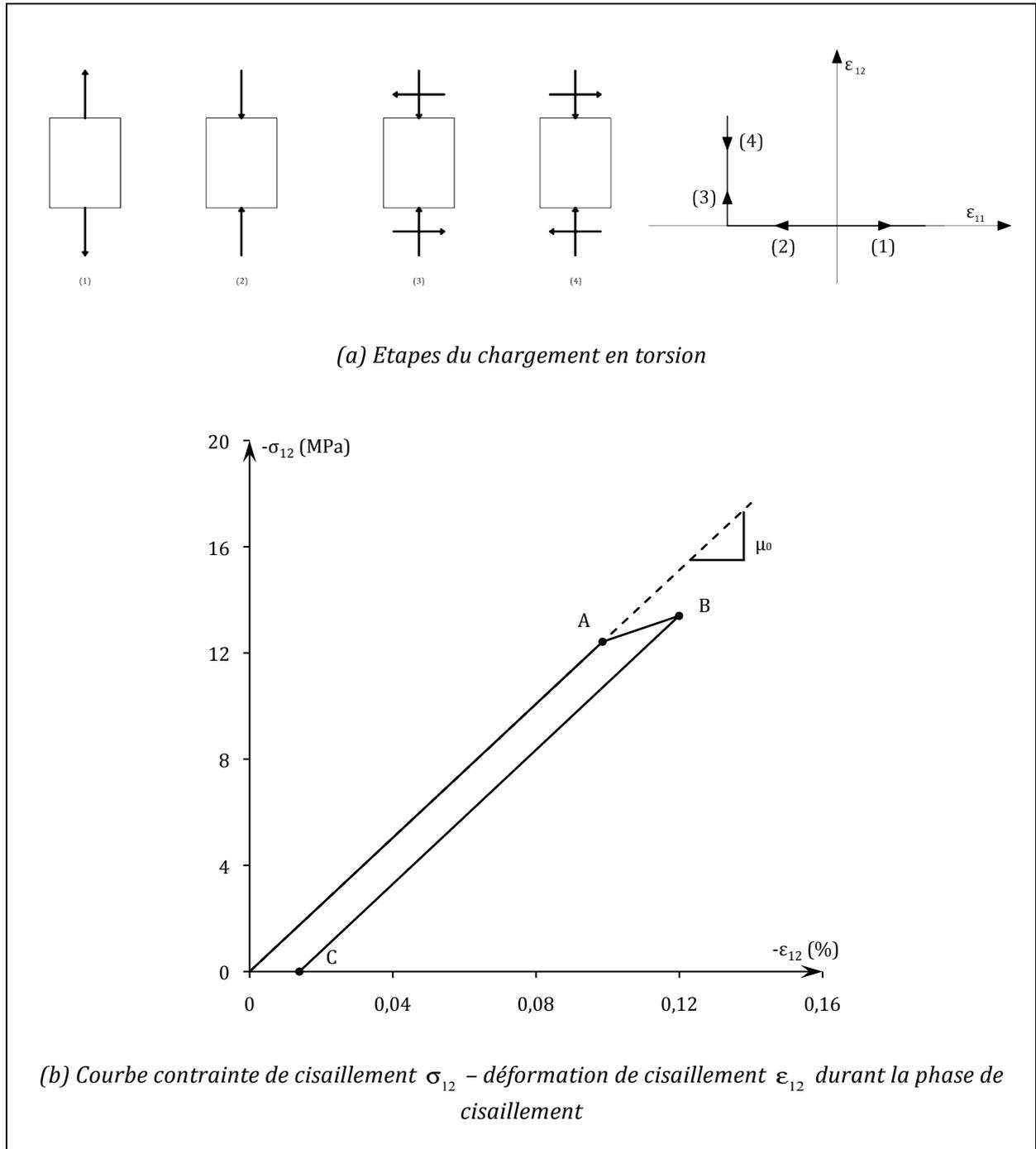


Figure 3.14 - Réponse d'un matériau quasi-fragile à un essai de torsion

Lors de la première étape de chargement (jusqu'au point A), la réponse est élastique : le frottement bloque tout glissement. La pente de la courbe correspond au module de cisaillement du matériau sain ($\mu_0 = 12500$). A partir d'une certaine valeur de la contrainte latérale (point B), le glissement devient dissipatif. Enfin lors de la décharge, les microfissures sont à nouveau bloquées par le frottement et les pentes OA et BC sont identiques.

Notons pour finir que si au lieu de décharger en torsion (cf. phase 4), on maintient l'état de cisaillement et on décharge complètement la compression uniaxiale puis on poursuit en traction uniaxiale (cf. figure 3.15a), on vérifie bien la continuité de la contrainte (cf. figure 3.15b).

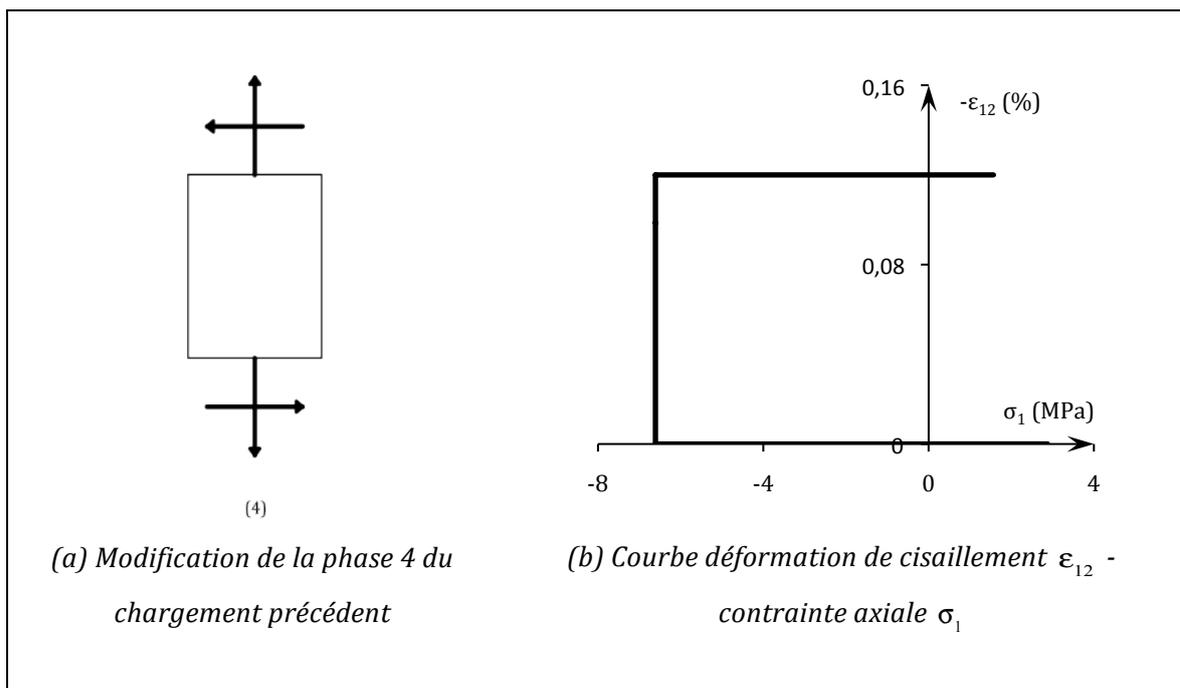


Figure 3.15 - Vérification de la continuité lors du déchargement en compression uniaxiale

3.3 Etude comparative du modèle avec des essais expérimentaux : identification et validation

On se propose dans cette partie de confronter les prédictions du modèle d'endommagement avec frottement à celle obtenue expérimentalement sur des essais mécaniques courants. Afin de mener à bien cette étude, on présente dans un premier temps une méthode d'identification des différents paramètres matériau du modèle.

3.3.1 Identification des paramètres

On constate que le modèle d'endommagement avec frottement ne nécessite l'identification que d'un seul paramètre supplémentaire, à savoir η , par rapport à la version de base. Ainsi, la construction définitive du modèle se résume à l'identification des paramètres constitutifs des fonctions K , μ et h ainsi que du paramètre η .

On présente dans ce paragraphe une méthode d'identification pour chacun des paramètres à travers d'essais mécaniques classiques.

Remarque : Lorsque cela sera nécessaire pour illustrer nos propos, nous utiliserons les fonctions K et μ proposées en (2.14) afin d'obtenir des expressions analytiques moins complexes. Cependant, les résultats obtenus avec d'autres fonctions, notamment celles issues de la micromécanique des milieux microfissurés, sont tout à fait analogues.

Détermination des caractéristiques élastiques du matériau sain et de la valeur de l'endommagement initial.

Après avoir fixé la forme des fonctions K et μ (en optant pour une expression purement phénoménologique ou issue de la micromécanique), il s'agit de déterminer les valeurs des modules d'élasticité K_0 et μ_0 et de la variable d'endommagement initial d_0 dont elles dépendent.

En observant que chacun des deux modules d'élasticité peut s'exprimer en fonction du couple (E_0, ν_0) , on peut aisément identifier E_0 , ν_0 et d_0 à partir d'essais mécaniques simples : une compression hydrostatique et une traction uniaxiale.

On considère dans un premier temps une compression hydrostatique sur un matériau supposé avec un endommagement initial et isotrope. Comme nous l'avons constaté dans le premier chapitre, cet essai se caractérise par la restitution progressive du module de compressibilité du matériau sain. Cet aspect se traduit par une linéarité de la courbe exprimant la pression de confinement (P_c) en fonction de la variation relative de volume $(\Delta V/V)$ dont la valeur de la pente est K_0 (cf. figure 3.16).

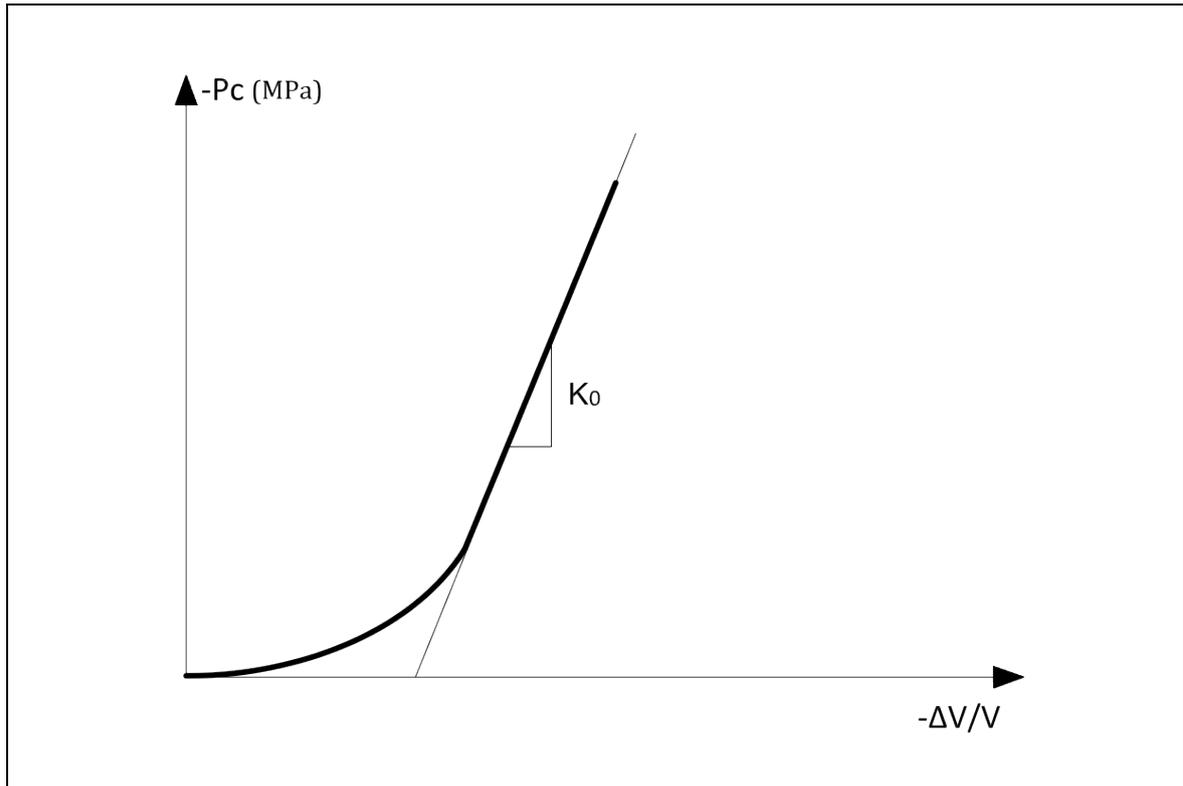


Figure 3.16 – Détermination du module de compressibilité du matériau sain K_0 à partir d'un essai de compression hydrostatique

On considère ensuite un essai de traction uniaxiale d'axe e_1 ($\sigma_1 > 0$) sur le même matériau. Les pentes initiales des courbes déformation axiale-contrainte axiale et déformation latérale-contrainte axiale représentent respectivement $E(d_0)$ et $-E(d_0)/\nu(d_0)$ (cf. figure 3.17).

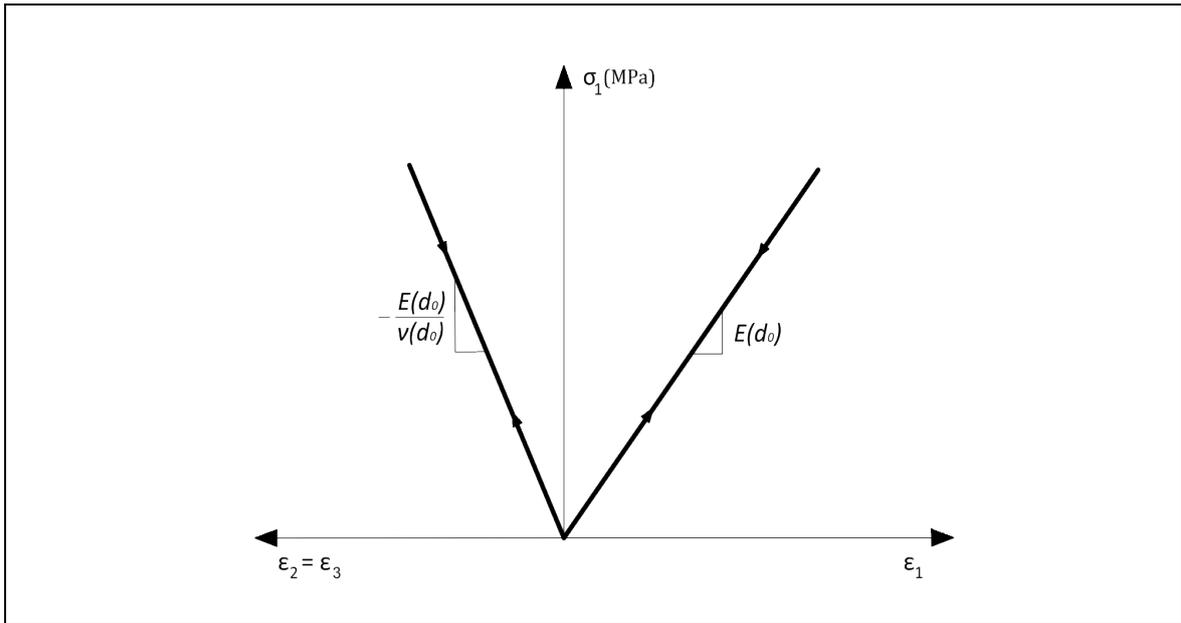


Figure 3.17 – Détermination des pentes $E(d_0)$ et $-E(d_0)/\nu(d_0)$ à partir d'un essai de traction uniaxiale

Illustration avec les fonctions K et μ de (2.14) : à l'issue de ces deux essais, on résout le système à trois équations suivant (cf. équations (2.24a) et (2.26a) du chapitre 2) :

$$\begin{cases} K_0 = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)} \\ E(d_0) = (1-d_0)^2 E_0 \\ -\frac{E(d_0)}{\nu(d_0)} = -\frac{(1-d_0)^2 E_0}{\nu_0} \end{cases} \quad (3.26)$$

Ce qui permet d'obtenir les valeurs recherchées de E_0 , ν_0 et d_0 puis finalement celles des modules :

$$\begin{cases} K(d_0) = (1-d_0)^2 \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)} \\ \mu(d_0) = (1-d_0)^2 \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \end{cases} \quad (3.27)$$

Détermination des paramètres h_0 et c_0

Rappelons que ces paramètres interviennent dans la fonction h (2.21) qui apparaît dans le seuil d'endommagement (2.10)

On considère à nouveau un essai de traction uniaxiale d'axe e_1 ($\sigma_1 > 0$).

Le paramètre h_0 est identifié à partir de la contrainte $\bar{\sigma}_1$ obtenue au premier point d'endommagement, i.e. lorsque la courbe déformation axiale-contrainte axiale commence à perdre sa linéarité (cf. figure 3.18).

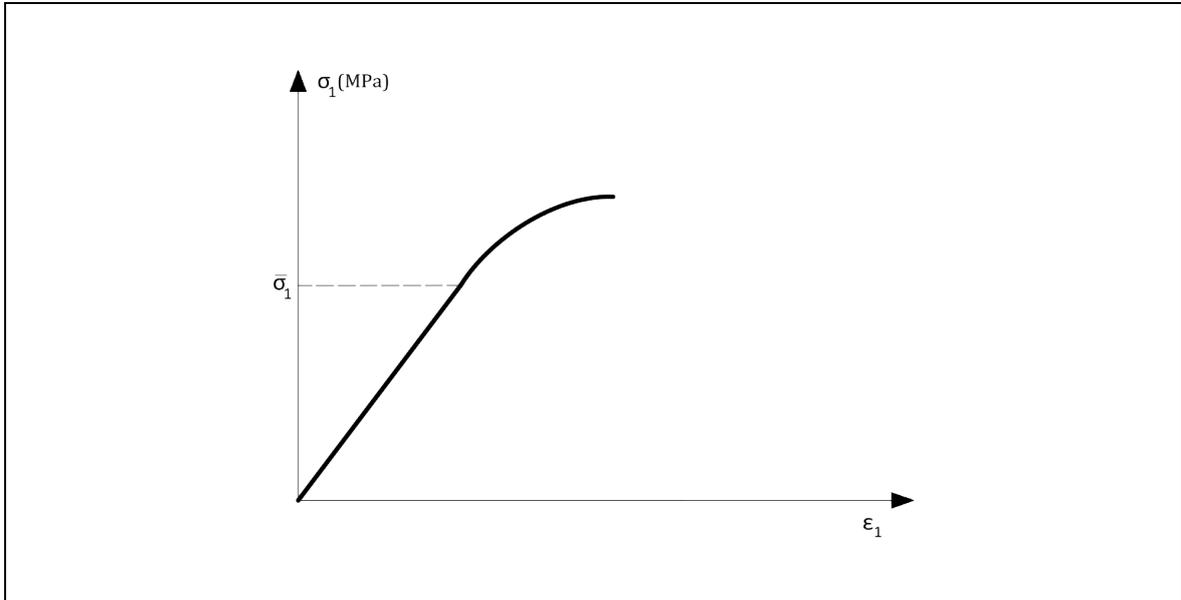


Figure 3.18 – Détermination de la contrainte au premier point d'endommagement $\bar{\sigma}_1$ à partir d'un essai de traction uniaxiale

Un calcul analogue à celui réalisé à la section 2.3.2 du chapitre 2 permet alors de déduire l'expression du paramètre h_0 :

$$h_0 = \left(\frac{\bar{\sigma}_1}{E_0} \right)^2 \quad (3.28)$$

Le paramètre c_0 est quant à lui déterminé à travers la courbe enveloppe et la contrainte maximale (σ_{\max}^T) obtenues pour un essai de traction uniaxiale.

Ainsi, à titre d'exemple, si l'on reprend les calculs réalisés à la section 2.3.2 du chapitre 2, on obtient l'expression du paramètre c_0 :

$$c_0 = 3 \frac{(\sigma_{\max}^T)}{h_0 E_0} \quad (3.29)$$

Détermination du paramètre η

Pour ce dernier paramètre à identifier, on considère un essai de compression triaxiale réalisée en deux étapes : une compression hydrostatique puis chargement compressif suivant un axe e_1 tout en maintenant constante la pression latérale P_c sur l'échantillon.

On constate sur la figure 3.19a que la phase de chargement déviatorique est initialement élastique puisque l'on se trouve à l'intérieur du seuil de plasticité. La déformation plastique est donc nulle jusqu'au moment où ce seuil est atteint.

On déduit l'expression du paramètre η lorsque le critère de plasticité, écrit dans l'espace des contraintes (3.13), est atteint pour la première fois :

$$\hat{g}(\boldsymbol{\sigma}, 0, d) = \|\boldsymbol{\sigma}_d\| + \eta \text{Tr } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.30)$$

avec

$$\|\boldsymbol{\sigma}_d\| = \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_1^{frott})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} |\sigma_1^{frott}| \quad (3.31)$$

et

$$\text{Tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_1^{frott} + 3P_c \quad (3.32)$$

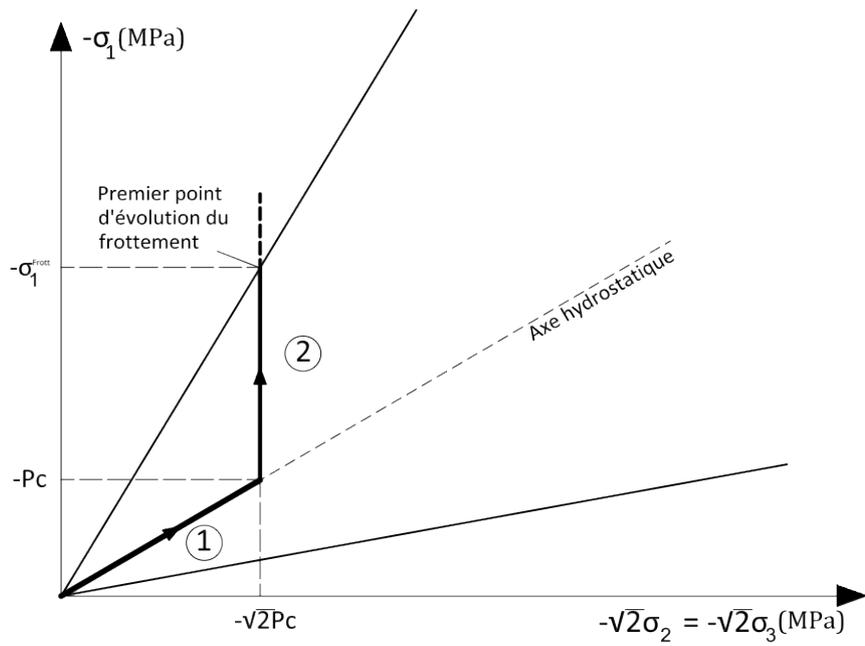
où σ_1^{frott} est la contrainte obtenue au premier point d'évolution de la déformation plastique et P_c la pression de confinement appliquée (cf. figure 3.19b).

Finalement, on obtient :

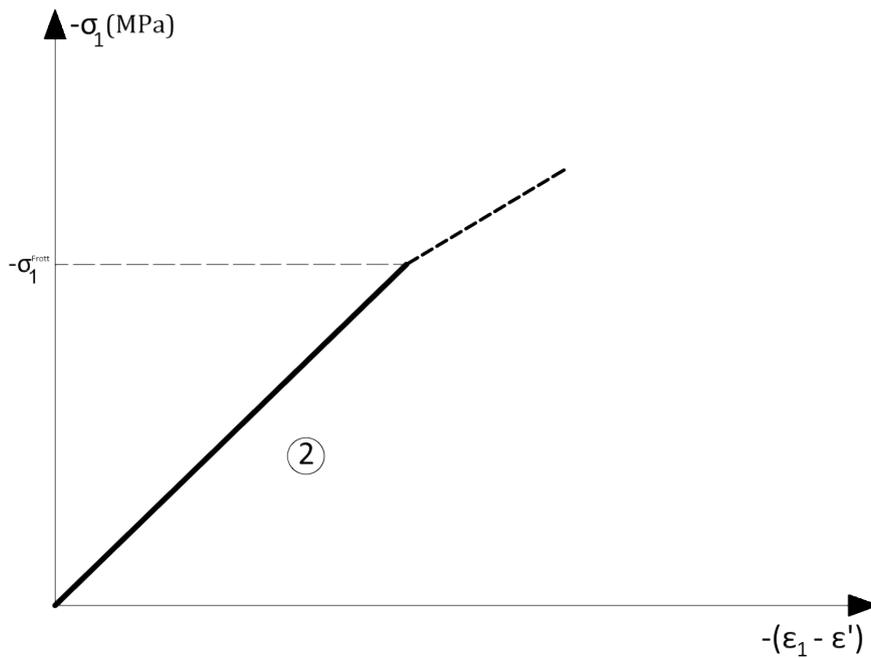
$$\eta = \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{\sigma_1^{frott}}{\sigma_1^{frott} + 3P_c} \quad (3.33)$$

Puisque l'on a $\frac{\sigma_1^{frott}}{\sigma_1^{frott} + 3P_c} \leq 1$, la borne supérieure du domaine de validité physique du paramètre η vaut $\frac{\sqrt{6}}{3} \sim 0,8$.

Les méthodes d'identification des paramètres désormais exposées, on se propose à présent de comparer les prédictions du modèle avec différents résultats expérimentaux.



(a) Illustration montrant le premier point d'évolution du frottement dans l'espace des contraintes axisymétriques



(b) Détermination de la contrainte de premier d'évolution de frottement (σ_1^{frott})

Figure 3.19 – Détermination du paramètre η à partir d'un essai de compression triaxiale

3.3.2 Confrontation du modèle avec des essais expérimentaux.

Nous souhaitons confronter la réponse du modèle proposé à des essais réalisés sur un béton classique. Nous avons précédemment vu que l'identification des paramètres du modèle ne nécessite les résultats que de trois essais mécaniques complets différents : la traction uniaxiale, la compression hydrostatique et la compression triaxiale. Cependant, malgré la multitude de résultats expérimentaux proposés dans la littérature, il est difficile de trouver simultanément les résultats de ces deux essais pour le même matériau testé.

C'est pourquoi nous proposons pour chaque essai des paramètres identifiés à partir des valeurs expérimentales disponibles et complétées par des hypothèses. Enfin, nous proposons pour le choix des fonctions K et μ de mettre en parallèle les deux approches disponibles : les fonctions à caractère plutôt phénoménologique proposées par Ambrosio et Tortorelli (2.14) que l'on nomme pour la suite « fonctions phénoménologiques » et les fonctions issues de considérations micromécaniques proposées par Ponte-Castañeda et Willis (2.20), nommées « fonctions micromécaniques ».

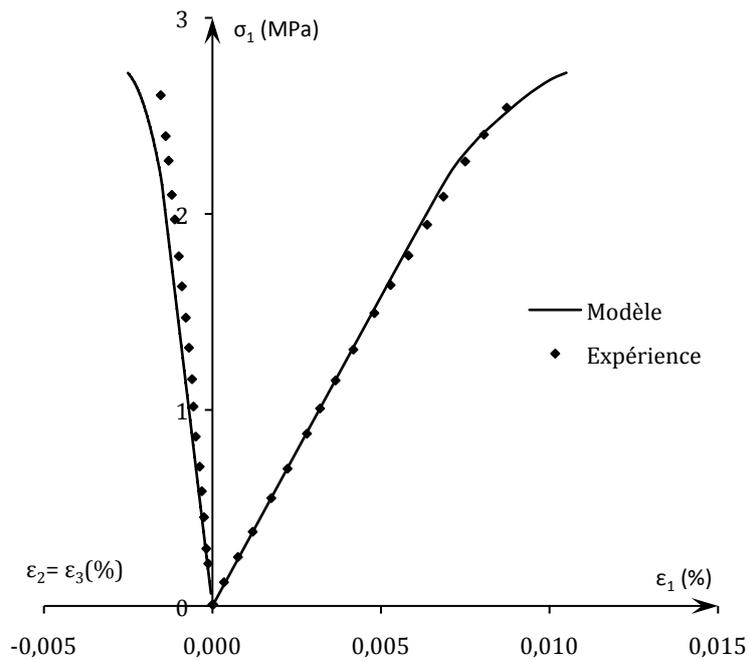
Traction uniaxiale

On propose de confronter la réponse du modèle à l'essai expérimental de traction uniaxiale réalisé par Kupfer et al. [1969] (cf. figure 3.20). Notons que les calculs ont été effectués jusqu'à la valeur maximale atteinte par la contrainte axiale, l'unicité de la réponse post-pic étant sujette aux problèmes de localisation. Les paramètres choisis sont les suivants :

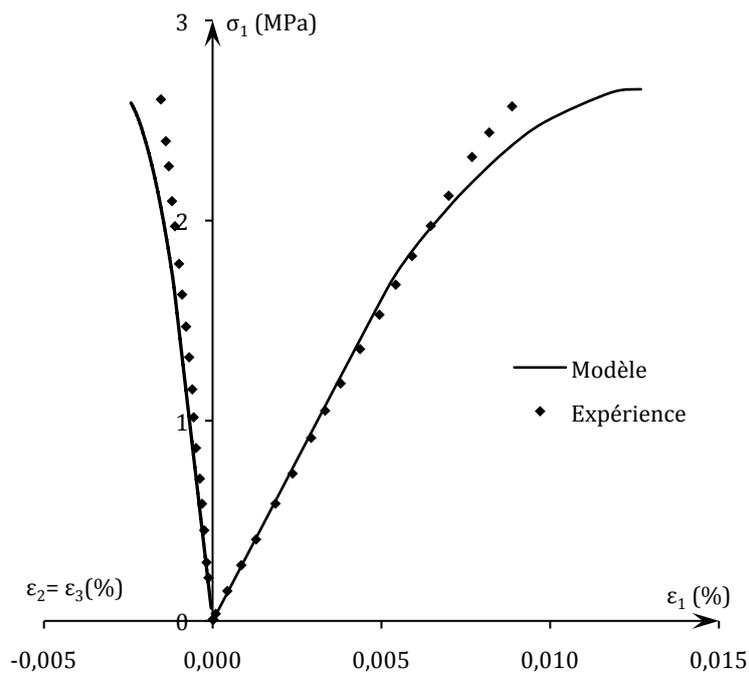
E_0 (MPa)	ν_0	d_0
35000	0,22	0,05

Tableau 3.3 – Valeurs des paramètres élastiques et de l'endommagement initial identifiés pour le béton de Kupfer et al. [1969]

On note que le modèle permet, grâce à un calage correct des paramètres concernés, de prendre en compte l'apparition de l'endommagement (et par conséquent la perte de linéarité) à environ 60% de la contrainte axiale maximale, valeur constatée expérimentalement. Enfin, pour les deux modèles, la valeur de la contrainte axiale maximale atteinte est proche de celle obtenue dans l'expérience ($\sigma_{\max}^T = 2,60$ MPa) : avec les fonctions phénoménologiques, on obtient $\sigma_{\max}^T = 2,70$ MPa et avec les fonctions micromécaniques $\sigma_{\max}^T = 2,65$ MPa.



(a) Réponse du modèle obtenue avec les fonctions phénoménologiques
(Valeurs des paramètres : $h_0 = 0,00007$, $c_0 = 23$)



(b) Réponse du modèle obtenue avec les fonctions micromécaniques
(Valeurs des paramètres : $h_0 = 0,00002$, $c_0 = 60$)

Figure 3.20 – Courbe contrainte σ_1 – déformation axiale ϵ_1 et latérale $\epsilon_2 = \epsilon_3$ en traction uniaxiale : confrontation du modèle avec les données expérimentales de Kupfer et al. [1969]

Compression uniaxiale avec cycles de charge-décharge

La figure 3.21 montre la comparaison des réponses prédites aux données expérimentales de Van Mier [1984] pour un essai de compression uniaxiale avec cycles de charge-décharge. Les paramètres considérés pour cet essai sont les suivants :

E_0 (MPa)	ν_0	d_0
32000	0,22	0,1

Tableau 3.4 – Valeurs des paramètres élastiques et de l'endommagement initial identifiés pour le béton de Van Mier [1984]

On remarque que la partie linéaire ainsi que la valeur de la contrainte axiale maximale obtenues par le modèle pour les deux choix de fonction sont entièrement satisfaisantes ($-\sigma_{\max}^C = 42$ MPa, obtenue expérimentalement et avec le modèle).

L'allure adoucissante après le pic se rapproche des résultats obtenus par Van Mier pour le modèle avec les fonctions phénoménologiques alors que le modèle avec les fonctions de micromécaniques se met à diverger. Cependant, encore une fois, la phase post-pic doit être considérée avec précaution compte tenu des phénomènes de localisation.

Soulignons qu'avec les valeurs de paramètres choisies, le rapport de dissymétrie entre les valeurs de la contrainte maximale obtenues en traction et en compression reste correct :

- avec les fonctions phénoménologiques : $r = -\frac{\sigma_{\max}^C}{\sigma_{\max}^T} = 4,2$
- avec les fonctions micromécaniques : $r = 5,3$

Enfin, notons que le modèle permet de reproduire correctement un cycle de décharge et recharge en respectant les pentes correspondant au déchargement et rechargement du matériau.

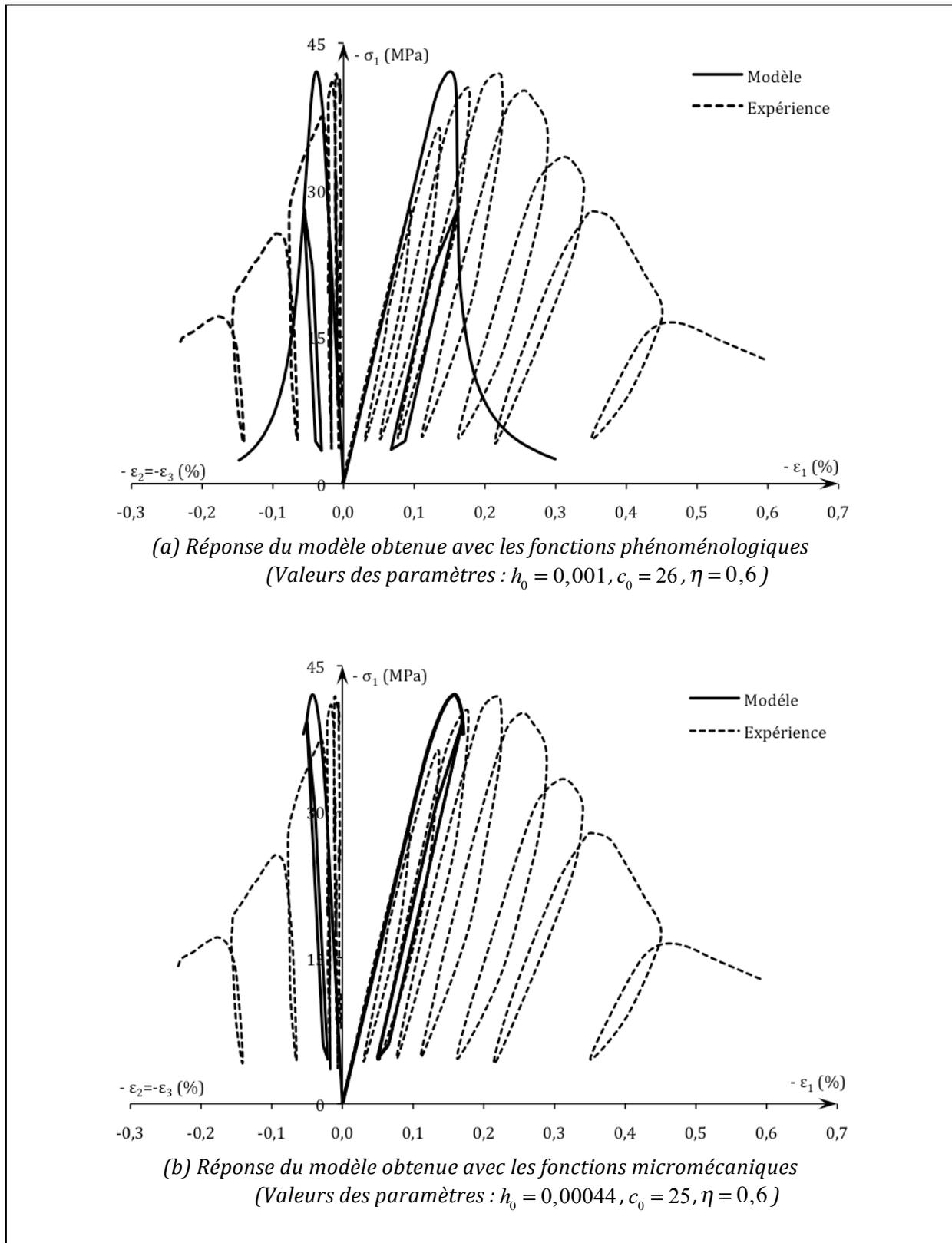


Figure 3.21 – Courbe contrainte σ_1 – déformation axiale ε_1 et latérale $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ en compression uniaxiale avec cycles de décharge-recharge : confrontation du modèle avec les données expérimentales de Van Mier [1984]

Compression triaxiale

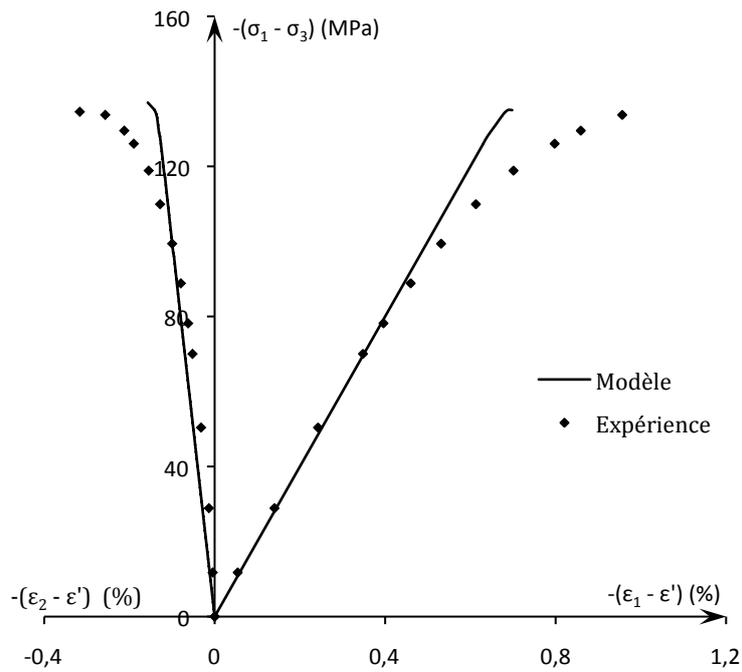
Nous proposons une étude comparative sur des essais de compression triaxiale réalisés au Laboratoire de Mécanique de Lille (Liang [2012]) à différentes valeurs de pressions de confinement. Les paramètres retenus sont les suivants :

E_0 (MPa)	ν_0	d_0
20000	0,2	0,2

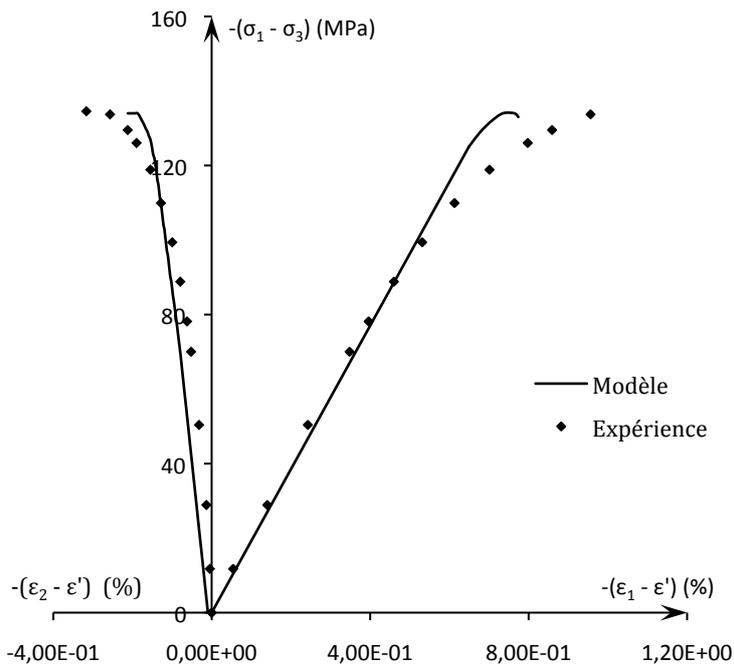
Tableau 3.5 – Valeurs des paramètres élastiques et de l'endommagement initial identifiés pour le béton de Liang [2012]

La figure 3.22 illustre la comparaison entre le modèle et les résultats obtenus pour une pression de confinement de 15 MPa (Les résultats sont présentés à partir de la fin de la montée en charge hydrostatique).

En terme d'allure générale, on constate que le modèle décrit correctement la pente de la première phase de chargement et respecte la valeur de la contrainte axiale maximale atteinte ($-(\sigma_1 - \sigma_3)_{\max} = 135$ MPa). Notons que le modèle avec les fonctions de micromécaniques permet d'atteindre le pic de contrainte de manière plus progressive.



(a) Réponse du modèle obtenue avec les fonctions phénoménologiques
(Valeurs des paramètres : $h_0 = 0,0001$, $c_0 = 27$, $\eta = 0,6$)



(b) Réponse du modèle obtenue avec les fonctions micromécaniques
(Valeurs des paramètres : $h_0 = 0,0012$, $c_0 = 50$, $\eta = 0,52$)

Figure 3.22 – Courbe contrainte σ_1 – déformation axiale $\epsilon_1 - \epsilon'$ et latérale $\epsilon_2 - \epsilon' = \epsilon_3 - \epsilon'$ en compression triaxiale : confrontation du modèle avec les données expérimentales de Liang [2012]

Enfin, concernant les autres valeurs de pression de confinement, l'allure des courbes étant analogue à celle présentée précédemment, on propose de synthétiser dans les tableaux suivants les valeurs des contraintes axiales maximales atteintes par le modèle et les essais expérimentaux.

Remarque : Les valeurs des contraintes axiales maximales reportées dans les tableaux 3.6 et 3.7 ci-dessous sont les valeurs des contraintes axiales maximales auxquelles ont été soustraites les valeurs des pressions de confinement. De plus, ces valeurs sont données positivement.

Pression de confinement	0 MPa	15 MPa	20 MPa	30 MPa
Contrainte maximale obtenue expérimentalement	55 MPa	135 MPa	155 MPa	174 MPa
Contrainte maximale obtenue avec le modèle	10 MPa	135 MPa	175 MPa	255 MPa
Différence constatée	81 %	0 %	13 %	47 %

Tableau 3.6 – Valeurs des contraintes axiales maximales obtenues expérimentalement et avec le modèle utilisant les fonctions phénoménologiques et calcul de la différence constatée

Pression de confinement	0 MPa	15 MPa	20 MPa	30 MPa
Contrainte maximale obtenue expérimentalement	55 MPa	135 MPa	155 MPa	174 MPa
Contrainte maximale obtenue avec le modèle	55 MPa	135 MPa	161 MPa	213 MPa
Différence constatée	0 %	0 %	4 %	22 %

Tableau 3.7– Valeurs des contraintes axiales maximales obtenues expérimentalement et avec le modèle utilisant les fonctions micromécaniques et calcul de la différence constatée

De manière générale, on constate que le modèle prend effectivement en compte l'influence du confinement sur la réponse du matériau. Cependant, lorsque la pression de confinement devient très élevée (par exemple, ici, 30 MPa), on observe une surestimation de la valeur de la contrainte maximale par le modèle (de 22 à 47% de différence selon le type de fonction choisi).

Par ailleurs, on note également que le choix des fonctions K et μ influence fortement l'écart entre les valeurs maximales des contraintes obtenues à partir du modèle et dans les expériences. En effet, au vu des résultats, si l'on trace de manière schématique (cf. figure

3.23) le seuil de glissement obtenu avec chacun des deux types de fonction, on constate qu'avec le modèle utilisant les fonctions phénoménologiques, l'ouverture du cône est trop forte d'où une valeur de la contrainte maximale très faible pour une compression simple et une valeur très élevée pour une pression de confinement importante. Avec le modèle utilisant les fonctions micromécaniques, l'ouverture du cône est plus douce.

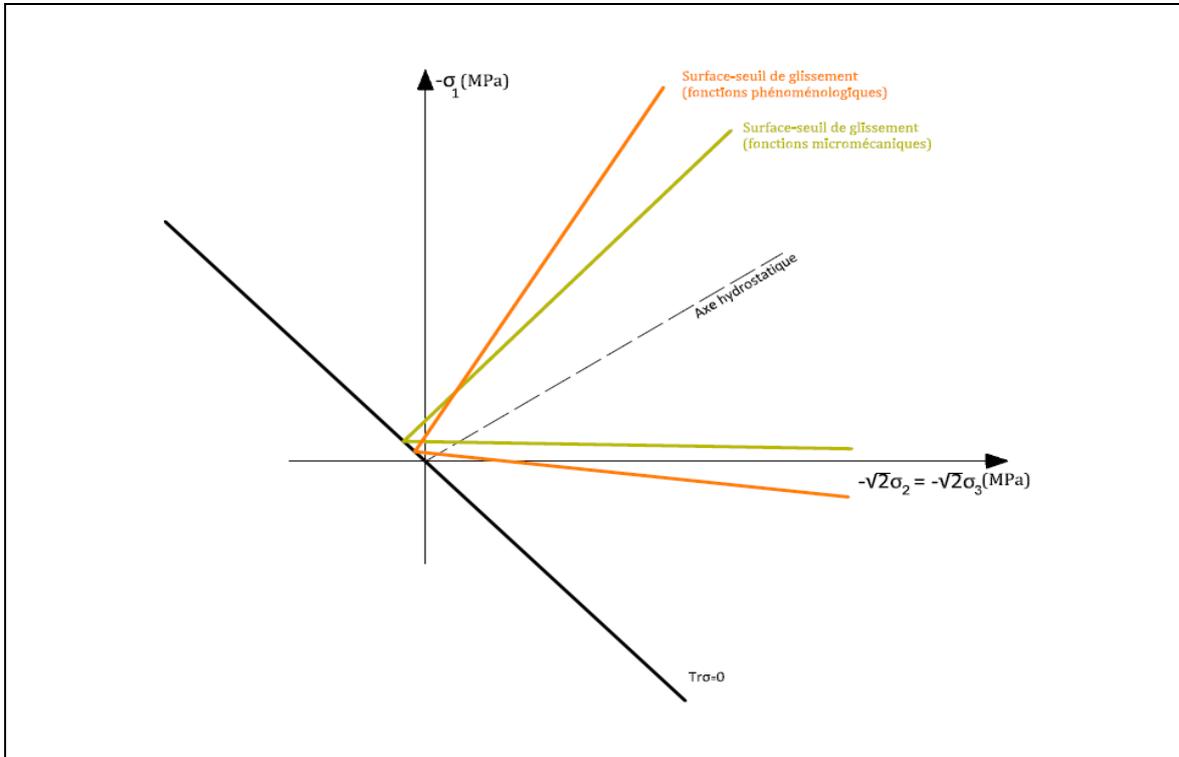


Figure 3.23 - Illustration des seuils de glissement selon le type de fonctions K et μ

Si les quelques essais qui viennent d'être présentés ont permis de confronter de manière globale les aptitudes du modèle aux essais expérimentaux, on notera que ce travail de validation devra être complété et approfondi pour différents matériaux et pour des trajets de chargement plus complexes.

CHAPITRE 4

Analyse et applications numériques

Objectifs du chapitre

Ce dernier chapitre est consacré à l'implémentation numérique du modèle d'endommagement avec frottement dans le code d'éléments finis Abaqus.

Après une description succincte du principe de résolution des équations globales dans un code d'éléments finis, on présente l'algorithme d'intégration locale du modèle d'endommagement avec frottement par l'intermédiaire d'une routine utilisateur UMAT dans le code Abaqus. On propose ensuite d'analyser les premiers résultats de la simulation d'un chargement d'une poutre en béton armé à de la flexion trois points. Dans un second temps, on propose de régulariser le modèle par une approche non locale intégrale.

4.1 La méthode des éléments finis appliquée à la mécanique non linéaire

Pour aborder les problèmes de structures 'complexes' de par leur géométrie et/ou de par les conditions aux limites imposées, il est indispensable d'associer au modèle d'endommagement avec frottement développé un outil numérique robuste. Pour cela, nous avons exploité la possibilité qu'offre le logiciel Abaqus à tout utilisateur de définir sa propre loi de comportement par la programmation d'une routine appelée UMAT. Avant de décrire l'intégration locale de la loi de comportement, on rappelle brièvement le principe de résolution globale adopté par Abaqus.

4.1.1 Equations d'équilibre globales

On se place dans le cadre des petites déformations et on considère une échelle de temps croissante commençant à t_0 et discrétisée en un certain nombre de pas de temps constants, notés Δt .

La formulation en déplacement (\mathbf{U}) de la méthode des éléments finis donne les équations d'équilibre à satisfaire à chaque fin d'incrément t_{n+1} , qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$F(\mathbf{U}_{n+1}) = 0 \quad (4.1)$$

En raison du comportement non linéaire du matériau, le problème est résolu de manière itérative par une méthode de Newton à chaque itération (dite globale) r :

$$F(\mathbf{U}_{n+1}^r) + \mathbb{K}_{n+1}^r (\mathbf{U}_{n+1}^{r+1} - \mathbf{U}_{n+1}^r) = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{avec } \mathbb{K}_{n+1}^r = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \right)_{n+1}^r = \int_{\Omega} \mathbb{B}^T \mathbb{L}_{n+1}^r \mathbb{B} \, d\Omega$$

où Ω est le domaine occupé par la structure étudiée à un instant donné et discrétisé en un nombre fini d'éléments

- \mathbb{L}_{n+1}^r est l'opérateur tangent défini par $(\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{\varepsilon})_{n+1}^r$
- \mathbb{B} est la matrice déformation/déplacement.

Sur chaque incrément $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, pour l'itération initiale ($r = 0$), on choisit :

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n \quad (4.3)$$

La résolution du système linéaire (4.2) permet de connaître \mathbf{U}_{n+1}^{r+1} et finalement l'accroissement de déformation pendant l'incrément de chargement en cours est donné par :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{r+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbb{B} (\mathbf{U}_{n+1}^{r+1} - \mathbf{U}_n) \quad (4.4)$$

La résolution de l'algorithme est complète dès lors que l'on a calculé la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{r+1}$ et l'opérateur tangent \mathbb{L}_{n+1}^{r+1} . C'est l'objet des deux prochaines sections.

4.1.2 Intégration numérique locale de la loi de comportement

On adopte un schéma d'intégration purement implicite afin d'assurer une bonne stabilité à l'algorithme de résolution, permettant ainsi d'obtenir un résultat indépendant de la taille de l'incrément de chargement.

Le schéma est associé à une méthode de type prédiction-correction qui dépend de l'état d'ouverture-fermeture des microfissures. En effet, lorsque les microfissures sont ouvertes, seul l'endommagement peut croître. En revanche, lorsque celles-ci sont fermées, les deux mécanismes dissipatifs peuvent être activés. Cependant concernant le second cas, seules deux options sont possibles : soit le frottement évolue seul, soit le frottement évolue et entraîne l'accroissement de l'endommagement.

Selon l'état d'ouverture-fermeture des microfissures, les différentes étapes du schéma d'intégration sont les suivantes.

Remarque : Afin d'alléger les équations, les indices des itérations globales ne sont pas représentés.

(1) Les microfissures sont ouvertes

On note $q_n^d = \{d_n, F_n^d\}$.

L'état mécanique $(\boldsymbol{\varepsilon}_n, q_n^d)$ est supposé totalement connu au pas n , on détermine ce même état mécanique au pas $n+1$ à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = G_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, d_{n+1}) \\ F_{n+1}^d = G_{F^d}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, d_{n+1}) \\ \Delta d = \Delta\lambda^d G_d(F_{n+1}^d, d_{n+1}) \\ f(F_{n+1}^d, d_{n+1}) \leq 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Où G_{\bullet} résume les relations (3.4), (3.8) et (3.17) du chapitre 3.

(i) Prédiction élastique

On suppose a priori que l'évolution de l'état mécanique entre les pas n et $n+1$ est purement élastique, i.e. $\Delta d = 0$.

Cet état mécanique est alors totalement déterminé au pas $n+1$ par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ d_{n+1} = d_n \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = G_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, d_n) \\ F_{n+1}^d = G_{F^d}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, d_n) \end{cases} \quad (4.6)$$

On vérifie a posteriori si cet état satisfait la condition de réversibilité :

$$f(F_{n+1}^d, d_n) \leq 0 \quad (4.7)$$

Si tel est le cas, l'hypothèse est validée et la procédure locale est achevée : $q_{n+1}^d = \{d_n, F_{n+1}^d\}$.

Sinon, cet état doit être corrigé.

(ii) Phase de corrections

ϵ_{n+1} étant une donnée du schéma, la correction porte sur chacune des variables q_{n+1}^d . La résolution se fait de manière itérative par la méthode de Newton et l'on note $R(\bullet)^i$ les résidus à l'itération i :

$$\begin{cases} R^i(d_{n+1}) = \Delta d^i - \Delta \lambda^d G_d^i(F_{n+1}^d, d_{n+1}) \\ R^i(F_{n+1}^d) = (F_{n+1}^d)^i - G_{F^d}^i(\epsilon_{n+1}, d_{n+1}) \\ R^i(f_{n+1}) = (f(F_{n+1}^d, d_{n+1}))^i \end{cases} \quad (4.8)$$

Si à l'itération i , la norme d'un des résidus est supérieure à une tolérance fixée au préalable, il faut alors procéder à une nouvelle itération telle que les résidus tendent vers une valeur nulle à l'itération $i+1$. On note $Q_{n+1} = \{q_{n+1}^d, f_{n+1}\}$; le système d'équations (4.8) est alors linéarisé autour de la solution de l'itération i :

$$R^{i+1}(Q_{n+1}) = R^i(Q_{n+1}) + \left(\frac{\partial R}{\partial q_{n+1}^d} \right)^i \cdot \Delta q^d = 0 \quad (4.9)$$

Où Δq^d est la correction apportée à q_{n+1}^d telle que :

$$\Delta q^d = (q_{n+1}^d)^{i+1} - (q_{n+1}^d)^i \quad (4.10)$$

Les valeurs des variables $(q_{n+1}^d)^{i+1}$ sont déduites en résolvant le système (4.9) par la méthode de Cholesky.

(iii) Test de convergence

La norme de chaque résidu $R^{i+1}(Q_{n+1})$ est testée. Si l'une d'entre elles est supérieure à la tolérance, on procède à une nouvelle itération (4.9).

Sinon les variables q_{n+1}^d sont déterminées. La contrainte σ_{n+1} s'en déduit immédiatement avec (4.5) et l'intégration locale au pas $n+1$ est achevée.

(2) Les microfissures sont fermées

Pour alléger les écritures, on note $q = \{\alpha, A\}$ avec $\alpha = \{d, \mathbf{\epsilon}^{pl}\}$, $A = \{F^d, \mathbf{F}^{pl}\}$. Concernant les critères, on adopte $f^\alpha = \{f^d = f, f^{pl} = g\}$.

L'état mécanique $(\mathbf{\epsilon}_n, q_n)$ est supposé totalement connu au pas n , on détermine ce même état mécanique au pas $n+1$ à l'aide des équations (3.4), (3.7), (3.8), (3.12) et (3.17) du chapitre 3:

$$\begin{cases} \mathbf{\epsilon}_{n+1} = \mathbf{\epsilon}_n + \Delta\mathbf{\epsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = G_\sigma(\mathbf{\epsilon}_{n+1}, \alpha_{n+1}) \\ A_{n+1} = G_A(\mathbf{\epsilon}_{n+1}, \alpha_{n+1}) \\ \Delta\alpha = \Delta\lambda^\alpha G_\alpha(A_{n+1}, \alpha_{n+1}) \\ f^\alpha(A_{n+1}, \alpha_{n+1}) \leq 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

(i) Prédiction élastique

On suppose dans un premier temps $\Delta\alpha = 0$.

On détermine au pas $n+1$ le nouvel état mécanique :

$$\begin{cases} \mathbf{\epsilon}_{n+1} = \mathbf{\epsilon}_n + \Delta\mathbf{\epsilon} \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = G_\sigma(\mathbf{\epsilon}_{n+1}, \alpha_n) \\ A_{n+1} = G_A(\mathbf{\epsilon}_{n+1}, \alpha_n) \end{cases} \quad (4.12)$$

On a montré au chapitre 3 que le mécanisme de frottement conditionne l'évolution de l'endommagement, il ne peut donc y avoir d'accroissement des microfissures sans une évolution du frottement. On vérifie alors si la condition de réversibilité associée au frottement est respectée :

$$g(\mathbf{F}_{n+1}^{pl}) = f^{pl}(\mathbf{F}_{n+1}^{pl}) \leq 0 \quad (4.13)$$

Si tel est le cas, l'hypothèse est validée et la procédure locale est achevée : $q_{n+1} = \{\alpha_n, A_{n+1}\}$.

Sinon, cet état est corrigé à l'étape suivante.

(ii) Phase de corrections

Soit la prédiction (P) suivante : le frottement a lieu sans évolution de l'endommagement. Les corrections vont alors porter sur $q_{n+1}^{pl} = \{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}, \mathbf{F}_{n+1}^{pl}\}$.

La résolution est similaire au cas (1) et se fait de manière itérative par la méthode de Newton et l'on note $R(\bullet)^i$ les résidus à l'itération i :

$$\begin{cases} R^i(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}) = (\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{pl})^i - \Delta\lambda^{pl} G_{\boldsymbol{\epsilon}^{pl}}^i(\mathbf{F}_{n+1}^{pl}, \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}) \\ R^i(\mathbf{F}_{n+1}^{pl}) = (\mathbf{F}_{n+1}^{pl})^i - G_{\mathbf{F}^{pl}}^i(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^{pl}, \mathbf{F}_{n+1}^{pl}, d_{n+1}) \\ R^i(f_{n+1}) = (f^{pl}(\mathbf{F}_{n+1}^{pl}))^i \end{cases} \quad (4.14)$$

Si à l'itération i , la norme d'un des résidus est supérieure à la tolérance, il faut alors procéder à une nouvelle itération. En notant $Q_{n+1}^{pl} = \{q_{n+1}^{pl}, f_{n+1}^{pl}\}$, le système d'équations (4.14) est alors linéarisé autour de la solution de l'itération i :

$$R^{i+1}(Q_{n+1}^{pl}) = R^i(Q_{n+1}^{pl}) + \left(\frac{\partial R}{\partial q_{n+1}^{pl}} \right)^i \cdot \Delta q^{pl} = 0 \quad (4.15)$$

Où Δq^{pl} est la correction apportée à q_{n+1}^{pl} telle que :

$$\Delta q^{pl} = (q_{n+1}^{pl})^{i+1} - (q_{n+1}^{pl})^i \quad (4.16)$$

Les valeurs de $(q_{n+1}^{pl})^{i+1}$ sont déduites en résolvant le système (4.15) par la méthode de Cholesky.

Notons que dans (4.15), le produit est représenté par un point, il convient d'adopter le produit adéquat à l'ordre du tenseur considéré ;

(iii) Test de convergence

La norme de chaque résidu $R^{i+1}(Q_{n+1}^{pl})$ est testée. Si l'une d'entre elles est supérieure à la tolérance, on procède à une nouvelle itération (4.15). Sinon, on détermine q_{n+1}^{pl} et on vérifie que la prédiction (P) faite au début de l'étape (ii) est correcte.

(iv) *Vérification de la prédiction (P)*

Il s'agit de savoir si l'état $\{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, q_{n+1}^{pl}\}$, déterminé en (iii), se trouve à l'intérieur du domaine de réversibilité associé à l'endommagement. Pour cela, on vérifie la condition suivante :

$$f^d(F_{n+1}^d, d_n) \leq 0 \quad (4.17)$$

Si tel est le cas, la prédiction (P) est confirmée : seul le frottement a évolué. La procédure locale est alors achevée : $q_{n+1}^{pl} = \{\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, \mathbf{F}_{n+1}^{pl}\}$.

Sinon, la prédiction (P) est infirmée, signifiant que les deux mécanismes dissipatifs ont évolué. Les valeurs des q_{n+1}^{pl} trouvées à l'étape (ii) deviennent caduques, il faut désormais apporter une correction sur l'ensemble des variables $q_{n+1} = \{\alpha_{n+1}, A_{n+1}\}$.

(v) *2ème phase de correction*

Le système de résidus à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} R^i(\alpha_{n+1}) = \Delta\alpha^i - \Delta\lambda^\alpha G_\alpha^i(A_{n+1}, \alpha_{n+1}) \\ R^i(A_{n+1}) = A_{n+1}^i - G_A^i(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, \alpha_{n+1}) \\ R^i(f_{n+1}) = (f^\alpha(A_{n+1}, \alpha_{n+1}))^i \end{cases} \quad (4.18)$$

Si à l'itération $i = 0$, la norme d'un des résidus est supérieure à la tolérance, il faut alors procéder à une nouvelle itération. On note $\mathcal{Q}_{n+1} = \{q_{n+1}, f_{n+1}^\alpha\}$ et on résout le système d'équations :

$$R^{i+1}(\mathcal{Q}_{n+1}) = R^i(\mathcal{Q}_{n+1}) + \left(\frac{\partial R}{\partial q_{n+1}} \right)^i \cdot \Delta q = 0 \quad (4.19)$$

La norme de chaque résidu est à nouveau testée. Si l'une d'entre elles est supérieure à la tolérance, on procède à une nouvelle itération, sinon les variables q_{n+1} sont déterminées.

La contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ s'en déduit directement avec (4.11) et l'intégration locale au pas $n+1$ est achevée.

L'ensemble de l'intégration locale du modèle d'endommagement avec frottement est résumée dans le tableau 4.1.

$$q = \{q^d, q^{pl}\} \text{ avec } q^d = \{d, F^d\} \text{ et } q^{pl} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, \mathbf{F}^{pl}\}$$

$$f^\alpha = \{f^d = f, f^{pl} = g\}$$

Test du critère d'ouverture-fermeture

SI $\text{Tr} \boldsymbol{\varepsilon}_n > 0$ aller en A

SINON aller en B

A. Microfissures ouvertes : élasticité endommageable

1. Prédiction élastique

- $q = q^d$
- $\Delta d = 0$, calcul de F_{n+1}^d
- $q_{n+1}^0 = \{d_n, F_{n+1}^d\}$

SI $f^d(F_{n+1}^d, d_n) \leq 0$

ALORS $q_{n+1} = q_{n+1}^0$ et FIN : intégration locale terminée

SINON $i = 0$: calcul des résidus $R^i(Q_{n+1}^d)$ avec $Q_{n+1} = \{q_{n+1}^d, f_{n+1}^d\}$ et aller en 2

2. Phase de correction

Résolution du système (4.9)

Calcul des résidus $R^{i+1}(Q_{n+1}^d)$ et aller en 3

3. Test de convergence

SI $\|R^{i+1}(Q_{n+1}^d)\| < TOL$

ALORS $q_{n+1} = q_{n+1}^{i+1}$ et FIN : intégration locale terminée

SINON $i = i + 1$ et aller en 2

B. Microfissures fermées : frottement avec ou sans évolution de l'endommagement**1. Prédiction élastique**

$$q = \{\alpha, A\} = \{q^d, q^{pl}\}$$

$\Delta\alpha = 0$, calcul de \mathbf{F}_{n+1}^{pl}

$$q_{n+1}^0 = \{\alpha_n, A_{n+1}\}$$

$$\text{SI } f^{pl}(\mathbf{F}_{n+1}^{pl}) \leq 0$$

ALORS $q_{n+1} = q_{n+1}^0$ et FIN : intégration locale terminée

SINON $i = 0$: calcul des résidus $R^i(Q_{n+1}^{pl})$ avec $Q_{n+1}^{pl} = \{q_{n+1}^{pl}, f_{n+1}^{pl}\}$ et aller en 2

2. Phase de correction

Prédiction (P) : frottement sans évolution de l'endommagement

Résolution du système (4.15)

Calcul des résidus $R^{i+1}(Q_{n+1}^{pl})$ et aller en 3

3. Convergence

$$\text{SI } \|R^{i+1}(Q_{n+1}^{pl})\| < TOL$$

ALORS aller en 4

SINON $i = i + 1$ et aller en 2

4. Vérification de la prédiction

$$\text{SI } f^d(F_{n+1}^d, d_{n+1}) \leq 0$$

ALORS Prédiction (P) confirmée et FIN : intégration locale terminée

SINON Prédiction (P) infirmée et aller en 5 : frottement avec évolution de l'endommagement

5. Deuxième phase de correction

Calcul des résidus $R^i(Q_{n+1})$

Résolution du système (4.19)

Calcul des résidus $R^{i+1}(Q_{n+1})$

$$\text{SI } \|R^{i+1}(Q_{n+1})\| < TOL$$

ALORS $q_{n+1}^\alpha = (q_{n+1}^\alpha)^{i+1}$ et FIN : intégration locale terminée

SINON $i = i + 1$ et aller en 5

Tableau 4.1 – Récapitulatif de l'intégration locale du modèle d'endommagement avec frottement

4.1.3 Opérateurs tangent continu et tangent cohérent

Une fois que l'algorithme d'intégration locale a convergé à la fin du pas $n+1$, l'opérateur tangent correspondant \mathbb{L} peut être déterminé soit par la loi en vitesse et l'opérateur est qualifié de « continu », soit par une petite variation des variables trouvées lorsque la solution a convergé et l'opérateur est dit « consistant ».

4.1.3.1 Opérateur tangent continu

L'opérateur tangent continu \mathbb{L} est déterminé par la loi en vitesse suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{L} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.20)$$

Si la prédiction élastique est solution, l'opérateur tangent équivaut au module élastique. Sinon la relation (4.20) est calculée en dérivant par rapport au temps les lois d'état (3.4), (3.7) et (3.8) et en écrivant que la variation du critère (3.12) ou (3.17) est nulle à la fin du pas. On obtient ainsi la valeur de l'opérateur tangent continu :

- si les microfissures sont ouvertes :

$$\mathbb{L} = \mathbb{C}(d) - \frac{\left[\frac{\partial \mathbb{C}(d)}{\partial d} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] \otimes \left[\frac{\partial \mathbb{C}(d)}{\partial d} : \boldsymbol{\varepsilon} \right]}{\frac{\partial h(d)}{\partial d} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}(d)}{\partial d^2} : \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.21)$$

où $\mathbb{C}(d) = 3K(d)\mathbb{J} + 2\mu(d)\mathbb{K}$

- si les microfissures sont fermées :

$$\mathbb{L} = \mathbb{C}_0 - \frac{\left[\mathbb{C}_0 : \mathbf{F}_d^{pl} \right] \otimes \left[\frac{\partial g(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} : \mathbb{C}_0 \right]}{\frac{\partial g(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} : (\mathbb{C}_0 + \mathbb{C}^{pl}(d)) : \mathbf{F}_d^{pl} + \Gamma} \quad (4.22)$$

$$\text{avec } \Gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } \dot{d} = 0 \\ -\frac{\frac{\partial g(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} : \left(\frac{\partial \mathbb{C}^{pl}(d)}{\partial d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{C}^{pl}(d)}{\partial d} : \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \right) : \mathbf{F}_d^{pl}}{\frac{\partial h(d)}{\partial d} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}^{pl}(d)}{\partial d^2} : \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}} & \text{si } \dot{d} > 0 \end{cases}$$

où $\mathbb{C}_0 = 3K_0\mathbb{J} + 2\mu_0\mathbb{K}$ et $\mathbb{C}^{pl}(d) = 2\beta(d)\mathbb{K}$.

4.1.3.2 Opérateur tangent cohérent

L'utilisation de l'opérateur tangent cohérent permet de converger plus rapidement vers la solution que les matrices élastique ou continue. La méthode de Newton, utilisée pour la résolution globale, montre que « suffisamment près » de la solution, la convergence est quadratique.

L'opérateur tangent cohérent $\tilde{\mathbb{L}}$ est défini par :

$$\delta \boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbb{L}} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.23)$$

Si la solution est élastique, l'opérateur tangent équivaut au module élastique. Sinon, les fonctions Q^α (cf. section 4.1.2) sont différenciées autour des valeurs convergées de q et $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial q} \right) \cdot \delta q + \left(\frac{\partial Q^\alpha}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad (4.24)$$

On trouve, tous calculs faits, les expressions du module tangent cohérent suivantes :

- si les microfissures sont ouvertes :

$$\tilde{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \quad (4.25)$$

Les deux opérateurs sont équivalents car l'incrément du multiplicateur $\delta \lambda^d$ est égal à l'incrément de la variable d'endommagement : $\delta d = \delta \lambda^d$

- si les microfissures sont fermées :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{L}} = & \mathbb{C}_0 - \delta \lambda^{pl} \mathbb{C}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{F}_d^{pl}}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \cdot \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{C}_0 \\ & - \mathbb{C}_0 \cdot \left(\mathbf{F}_d^{pl} - \delta \lambda^{pl} \frac{\partial \mathbf{F}_d^{pl}}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \cdot \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbf{F}_d^{pl} \right) \otimes \left(\frac{\frac{\partial g(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \cdot \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{C}_0}{\frac{\partial g(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \cdot \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbf{F}_d^{pl}} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\text{avec } \mathbb{A} = \begin{cases} \mathbb{C}_0 + \mathbb{C}^{pl}(d) & \text{si } \dot{d} = 0 \\ \mathbb{C}_0 + \mathbb{C}^{pl}(d) + \frac{\frac{\partial \mathbf{F}^{pl}}{\partial d} \otimes \frac{\partial F^d}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}}}{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} : \frac{\partial^2 \mathbb{C}^{pl}(d)}{\partial d^2} : \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} - \frac{\partial h(d)}{\partial d}} & \text{si } \dot{d} > 0 \end{cases}$$

$$\text{et } \mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1} + \delta\lambda^{pl} \frac{\partial \mathbf{F}^{pl}}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1} + \delta\lambda^{pl} \frac{\partial^2 G(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl2}}$$

On constate que lorsque l'incrément du multiplicateur plastique tend vers une valeur nulle ($\delta\lambda^{pl} \rightarrow 0$), on a $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}^{-1}$ et par conséquent la valeur de l'opérateur tangent cohérent tend vers la valeur de l'opérateur tangent consistant :

$$\tilde{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{C}_0 - \mathbb{C}_0 \cdot \frac{\partial G(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \otimes \left(\frac{\frac{\partial g(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \cdot \mathbb{C}_0}{\frac{\partial g(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}} \cdot \mathbb{A} \cdot \frac{\partial G(\mathbf{F}^{pl})}{\partial \mathbf{F}^{pl}}} \right) = \mathbb{L} \quad (4.27)$$

4.2 Vérification et validation de l'implémentation dans Abaqus

On présente dans cette partie une série de tests homogènes permettant de vérifier l'implémentation numérique de la loi de comportement proposée dans le code Abaqus. Les tests choisis permettent avant tout de vérifier l'exactitude de la programmation en fonction de l'état d'ouverture-fermeture des microfissures et du ou des mécanisme(s) dissipatif(s) impliqué(s).

Pour cela, on se ramène à l'étude d'un échantillon homogène structure sous forme d'un cube d'arête 10 mm, et le matériau étant de plus homogène.

La réponse du modèle est mesurée sur un seul point de Gauss. On choisit un élément fini 3D linéaire à 8 nœuds avec des conditions aux limites générant un champ de déformation homogène.

Remarque : Concernant les simulations numériques, nous adoptons pour l'ensemble du chapitre les fonctions K et μ issues de l'approche micromécanique proposées par Ponte-Castañeda et Willis [1995] (2.20). Le choix est principalement motivé par leur fondement physique.

Le modèle a été testé sur les essais suivants :

- traction uniaxiale,
- traction uniaxiale suivie d'une compression uniaxiale,
- compression uniaxiale sans évolution de l'endommagement,
- compression uniaxiale avec évolution de l'endommagement,
- cisaillement pur.

Seuls les résultats des tests de traction uniaxiale suivie d'une compression uniaxiale et de compression uniaxiale avec évolution de l'endommagement sont présentés dans ce chapitre, les autres étant reportés en annexe A.

Les conditions aux limites et les nœuds sur lesquels est imposé le chargement sont explicités sur la figure 4.1.

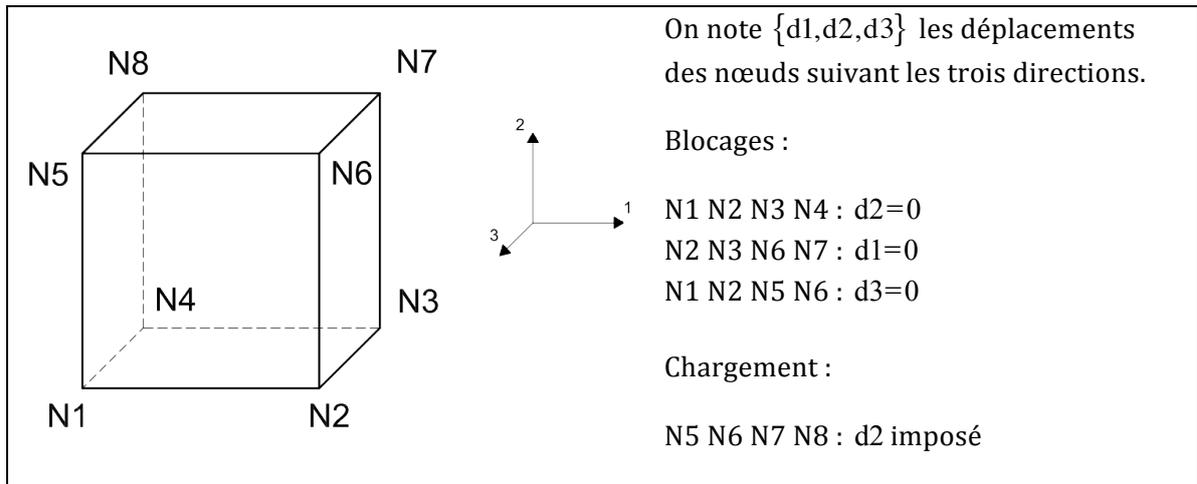


Figure 4.1 – Géométrie et conditions aux limites

Le matériau considéré pour ces deux tests a les caractéristiques suivantes :

E_0 (MPa)	ν_0	h_0	c_0	d_0	η
32000	0,2	0,0001	20	0,001	0,6

Tableau 4.2 : Paramètres du matériau testé

4.2.1 Traction uniaxiale suivie d'une compression uniaxiale

La figure 4.2 représentant la courbe de contrainte axiale en fonction de la déformation axiale montre une bonne concordance entre les deux prédictions et confirme l'exactitude de l'algorithme dans la prise en compte de l'effet unilatéral. Un cycle de charge et de décharge a été également réalisé afin de confirmer la bonne tenue de l'implémentation.

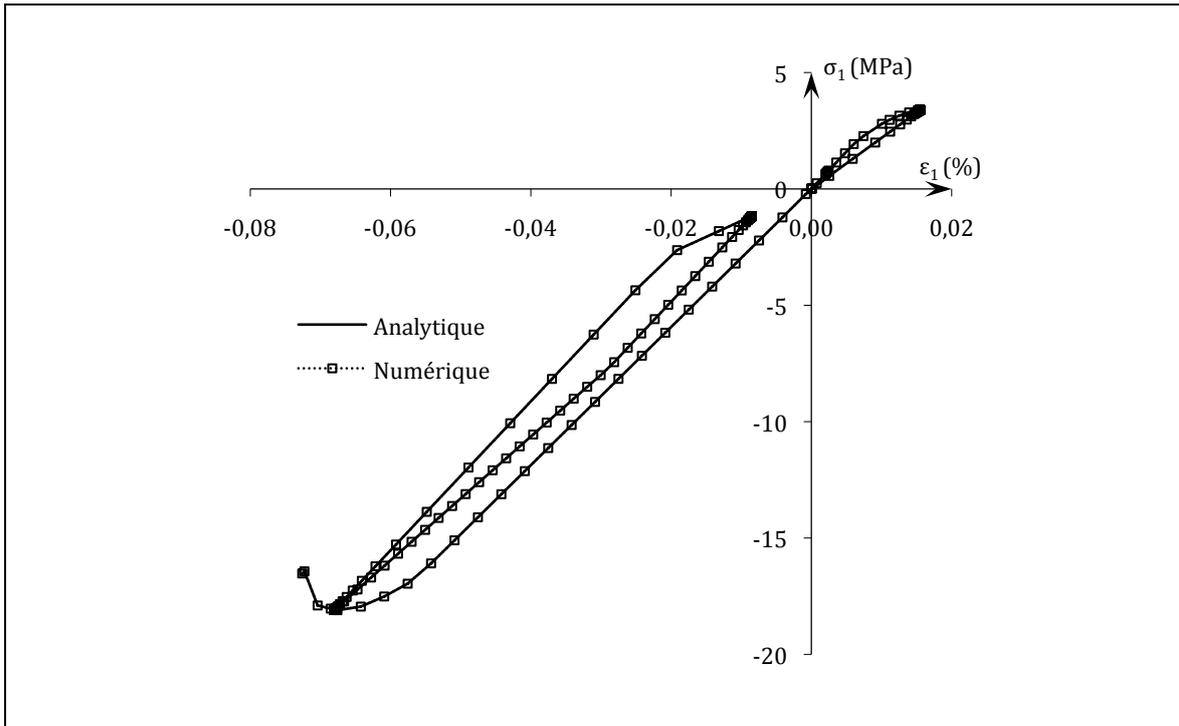


Figure 4.2 – Traction uniaxiale suivie d’une compression uniaxiale : courbe contrainte σ_1 – déformation axiale ϵ_1

4.2.2 Compression uniaxiale

La figure 4.3 présente les courbes de la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale pour différentes tailles de pas de chargement (le rapport entre les deux tailles de pas testées est de 10). Outre l’analyse de l’évolution conjointe des deux mécanismes dissipatifs, l’objectif est de valider la stabilité du schéma implicite. L’observation des courbes permet de confirmer cette validation. Les pourcentages d’erreur entre les deux prédictions sont nuls pour l’ensemble des variables.

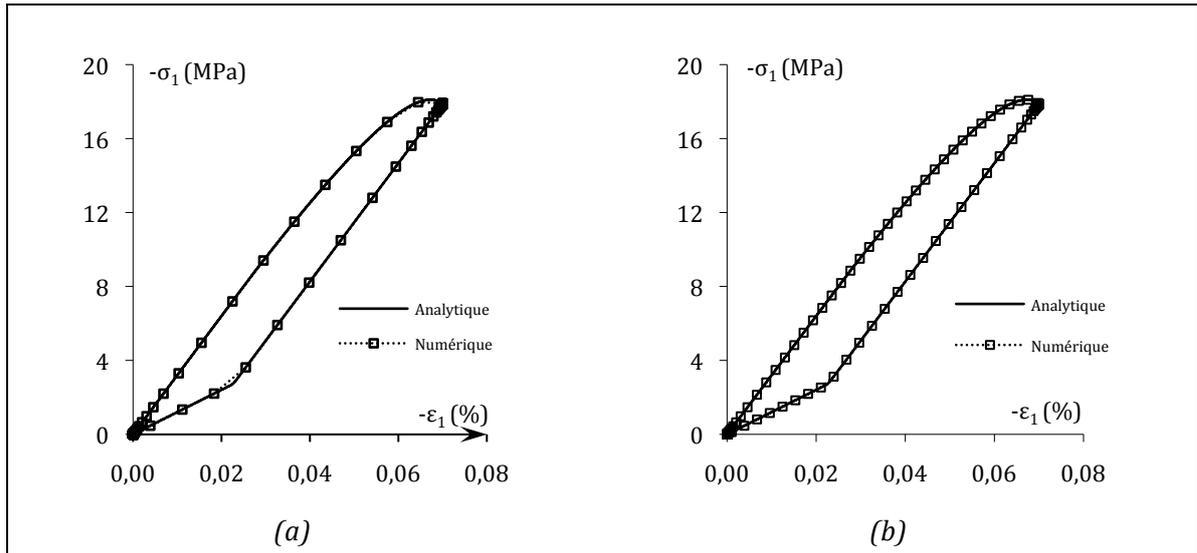


Figure 4.3 – Compression uniaxiale : courbes contrainte axiale (σ_1)-déformation axiale (ε_1): pas de chargement simple (a) et pas de chargement dix fois plus grand (b)

En définitive, à l'aide de l'ensemble des tests classiques sur un échantillon, on peut conclure à la validité de l'implémentation numérique de notre loi de comportement dans le logiciel Abaqus. Cette validation nous permet désormais d'appliquer le modèle à une structure. C'est l'objet du prochain paragraphe.

4.3 Problème de structure : une poutre en flexion 3 points

On se propose de simuler dans le logiciel Abaqus une poutre en béton armé soumise à de la flexion 3 points. Afin de confronter les résultats de notre simulation à d'autres modèles, on choisit de reprendre les spécifications du projet MECA (Ghavamian et al. [2003]) concernant les caractéristiques et la modélisation de la poutre ainsi que les propriétés des matériaux.

4.3.1 Caractéristiques de la structure

Les propriétés de la poutre sont schématisées sur la figure 4.4. Ses dimensions sont 5m x 2m x 0,2m. Elle est traversée dans le sens de la longueur par deux barres d'acier de diamètre 8mm dans sa partie supérieure et de deux autres barres d'acier de diamètre 32mm dans sa partie inférieure.

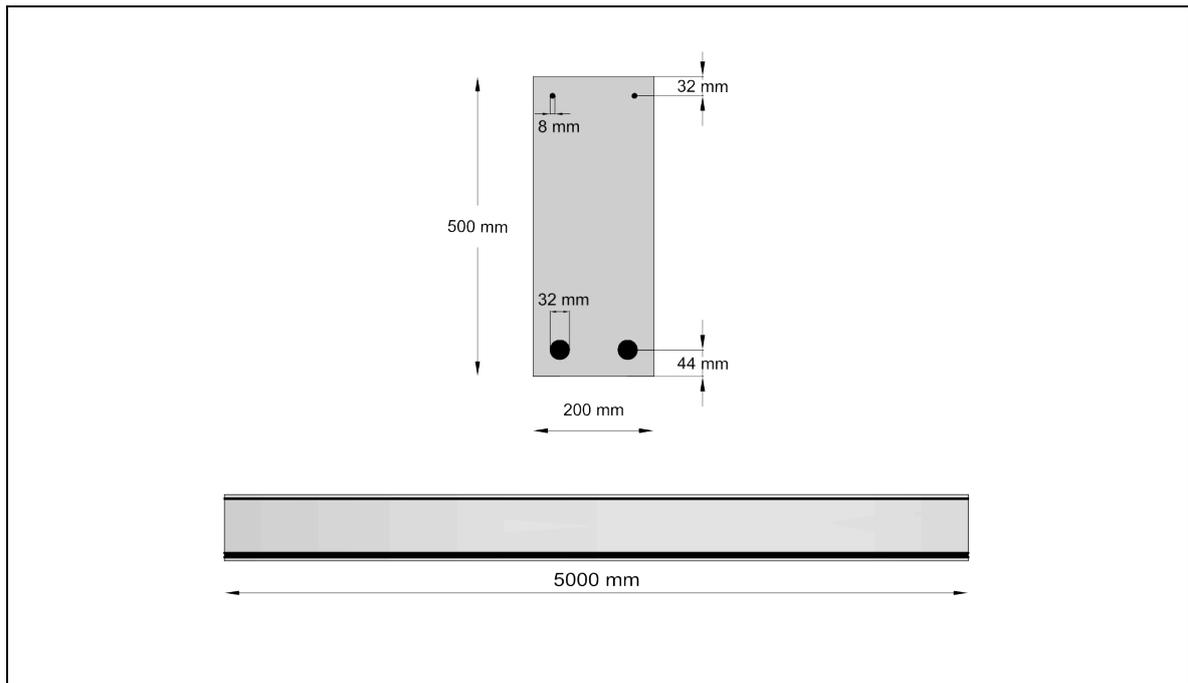


Figure 4.4 – Coupes longitudinale et transversale de la poutre avec la distribution des aciers dans le béton

4.3.2 Modélisation

Afin de diminuer le temps de calcul et étant donnée la symétrie du problème, on propose de ne modéliser que la moitié de la poutre.

La demi-poutre est maillée en 3D avec des éléments hexaédriques. Le maillage est composé de 25 éléments longitudinalement, 10 éléments verticalement et 2 éléments transversalement. Les barres sont modélisées par des éléments de type barre en 1D. Enfin, on considère que l'adhésion béton-acier est parfaite, ce qui signifie que le comportement de l'ensemble béton-acier n'est qu'une superposition du comportement des deux matériaux.

La figure 4.5 décrit les conditions aux limites ainsi que le chargement imposés à la demi-structure.

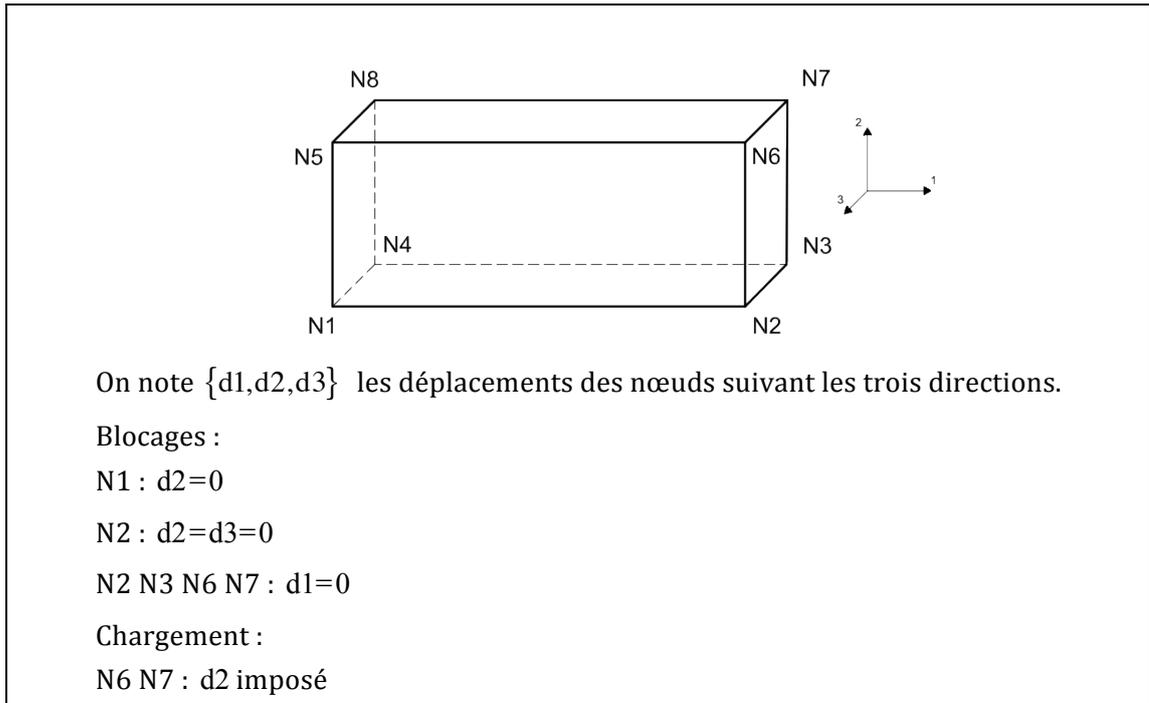


Figure 4.5 – Géométrie et conditions aux limites de la poutre

4.3.3 Données des matériaux

Les propriétés des matériaux extraites du projet MECA sont les suivantes pour l'acier :

E_0 (MPa)	ν_0	σ_e
200000	0	400

Tableau 4.3 – Propriétés de l'acier

Les propriétés du béton sont complétées quant à elles par les paramètres du modèle proposé :

E_0 (MPa)	ν_0	h_0	c_0	d_0	η
37272	0,2	0,0011	60	0,001	0,1

Tableau 4.4 – Propriétés et paramètres du modèle pour le béton

4.3.4 Résultats numériques

On se propose de comparer la réponse du modèle à celles obtenues avec d'autres modèles dont les détails sont donnés dans Ghavamian et al. (2003). Pour plus de clarté, les résultats sont séparés sur 2 figures distinctes (cf. figures 4.6). Les données expérimentales de Péra [1973] sont également reportées sur ces figures.

On constate une bonne correspondance entre notre modèle et la réponse expérimentale pour la phase élastique puis lorsque les fissures apparaissent, se traduisant par une perte de rigidité de la structure, le modèle d'endommagement avec frottement surestime légèrement la force reprise par la poutre. Soulignons par ailleurs que le modèle diverge à une valeur de charge d'environ 150 kN. D'une manière générale, le modèle s'approche qualitativement bien des autres résultats.

La figure 4.7 présente l'évolution de l'endommagement pour différentes valeurs de flèche. Il est intéressant de remarquer que l'endommagement apparaît en premier lieu dans la zone tendue. Dans la partie comprimée, le matériau est endommagé plus tard. Ceci est la conséquence de la dissymétrie de comportement entre la traction et la compression : le seuil d'endommagement en compression est supérieur au seuil d'endommagement en traction. Ce phénomène est confirmé par les observations de Mazars [1984]. Grâce à l'analyse de l'émission acoustique d'un essai de flexion 3 points sur une poutre, il a détecté la zone endommagée dans la région tendue voisine de la ligne d'application de la charge.

Enfin, pour conclure cette étude numérique, examinons l'influence du maillage sur la réponse de la structure. La figure 4.8 illustre la distribution de l'endommagement pour trois raffinements de maillage. Concernant la distribution de l'endommagement, on observe peu de différence qualitative entre les différentes finesses de maillage. Toutefois, sur le plan quantitatif, on note une augmentation de la valeur de l'endommagement d'environ 35% pour un maillage 4 fois plus fin. Il semble que le caractère localisé de l'endommagement affecte les résultats numériques.

Pour l'étude de futures structures, afin d'assurer l'indépendance de la réponse vis-à-vis du maillage choisi, il apparaît nécessaire d'étendre le modèle d'endommagement avec frottement à une formulation non locale. La présentation de cette nouvelle formulation est l'objet de la section suivante.

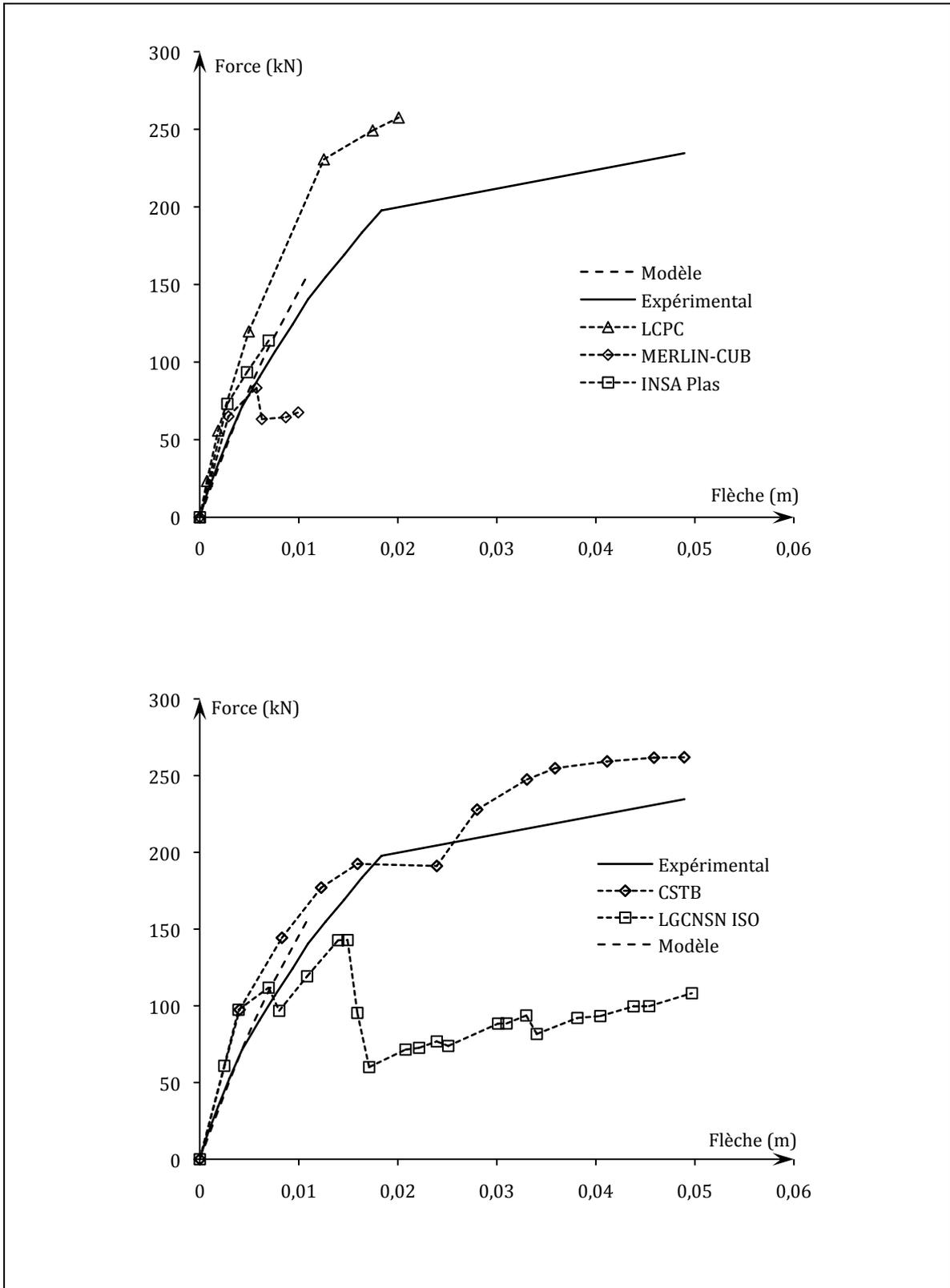


Figure 4.6 – Courbes force-flèche : comparaison du modèle d'endommagement avec frottement avec différents modèles

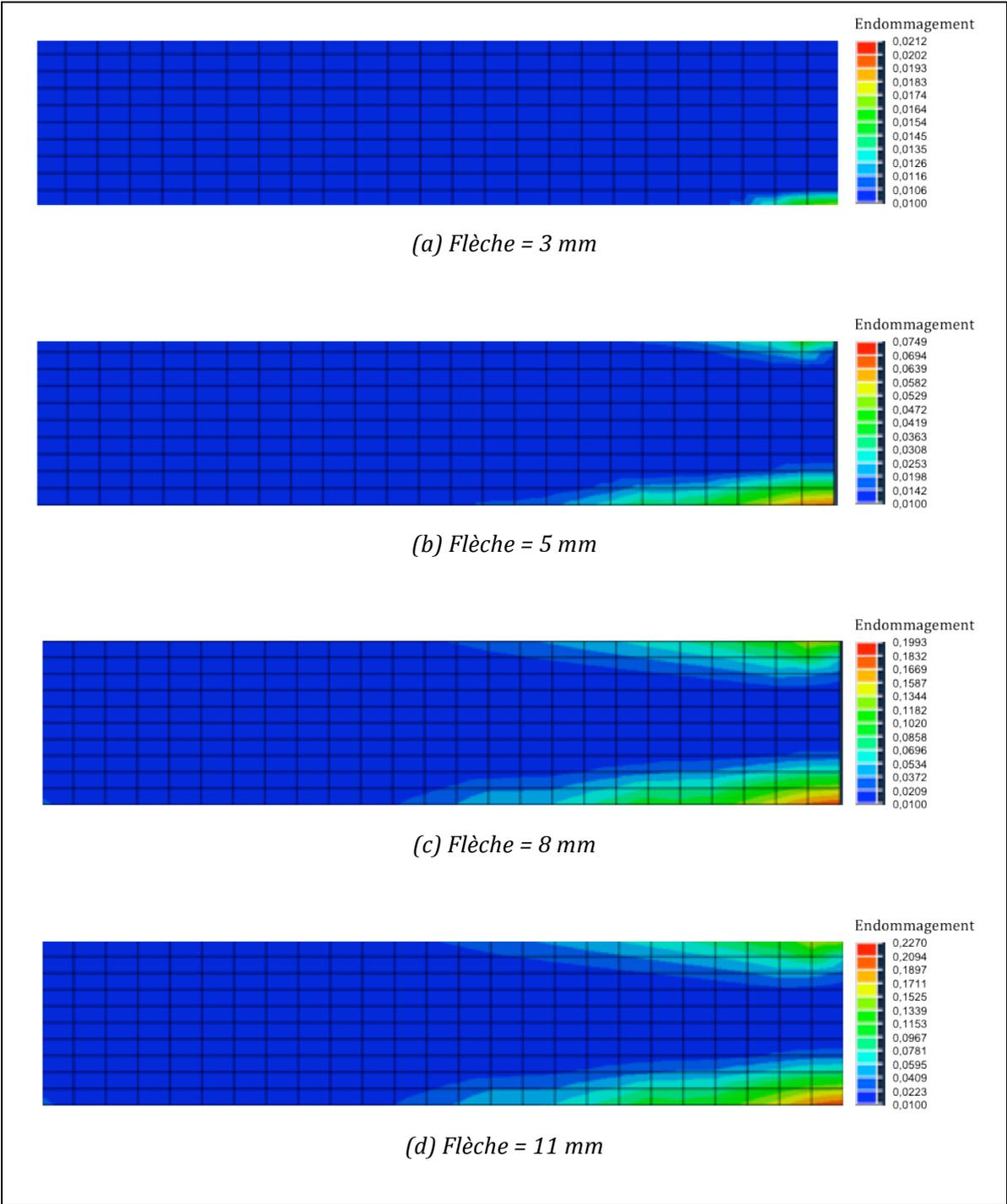


Figure 4.7 – Evolution de l'endommagement pour différentes valeurs de flèche.

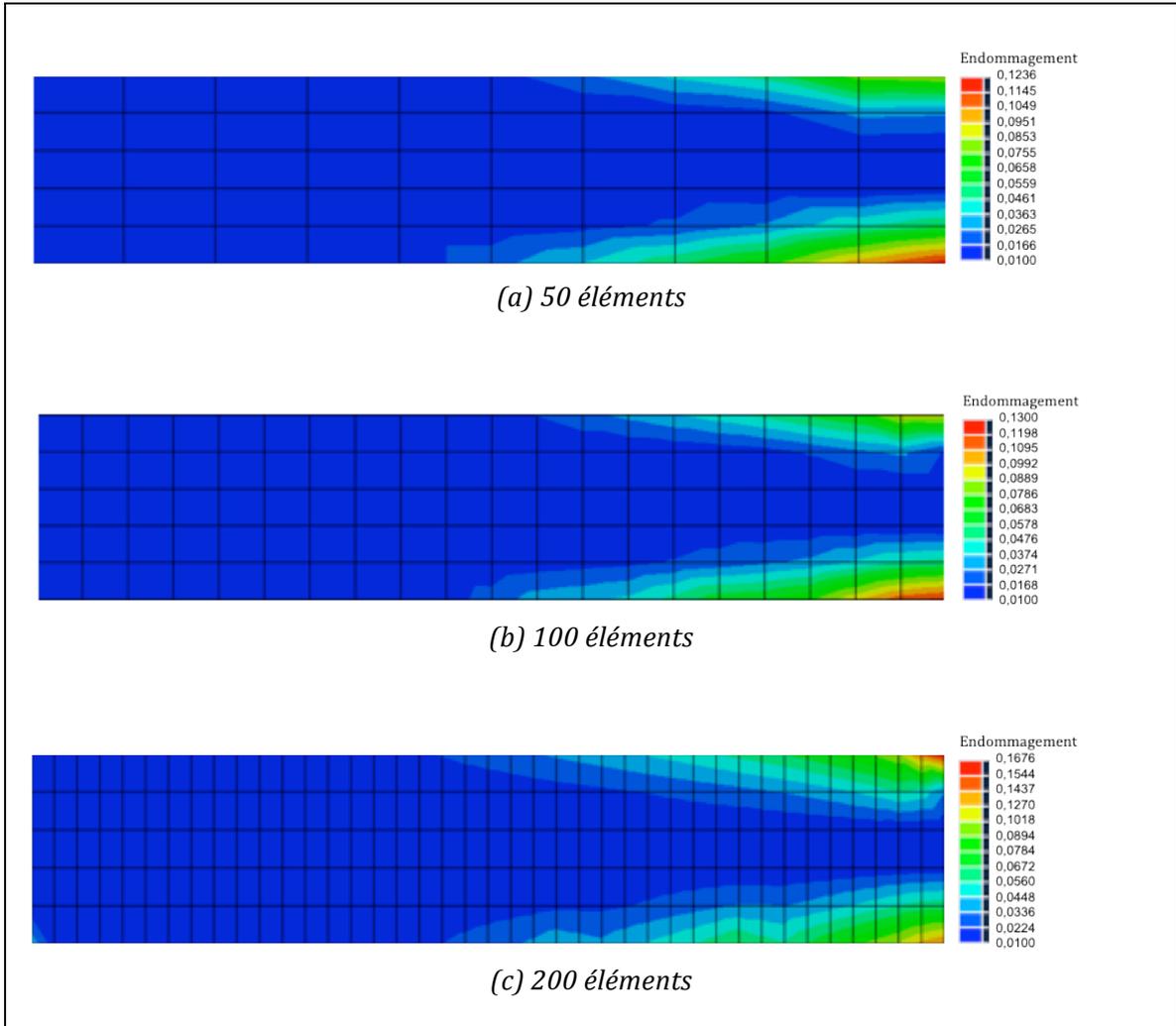


Figure 4.8 – Distribution de l'endommagement pour différents raffinements de maillage (Flèche = 7 mm)

4.4 Intégration non locale du modèle

4.4.1 Techniques de régularisation

Afin de décrire des états non homogènes de déformation et éviter la sensibilité de la solution au maillage durant la phase de radoucissement, il convient de recourir aux techniques de régularisation. Plusieurs méthodes ont été proposées :

- La théorie des milieux continus de Cosserat (Cosserat et Cosserat [1909], Mulhaus [1986]), qui consiste à ajouter un degré de liberté supplémentaire à chaque point matériel sous la forme d'un vecteur rotation,
- Les méthodes fondées sur la théorie du second gradient (Aifentis [1984], Chambon et al. [1998] et [2001]) où le gradient des déformations est déterminé en tous points matériels,
- La régularisation visqueuse (ou par effet de retard) (Needleman [1998], Burlion [1997]) qui introduit une limitation au taux d'endommagement dans les lois d'évolution,
- Les approches non locales (Pijaudier-Cabot et Bazant [1987], Bazant et Pijaudier-Cabot [1988]) basées sur l'intégration des variables sur un volume représentatif. Elles prennent en compte les interactions entre des points matériels voisins au cours de la dissipation irréversible.

Ces méthodes ont ceci en commun qu'elles supposent toutes l'existence d'une longueur caractéristique intrinsèque au matériau. L'idée générale commune à l'ensemble de ces différentes approches est d'introduire une information microstructurale, généralement une longueur caractéristique, liée aux interactions entre les microdéfauts du matériau.

Pour notre étude, nous avons opté pour la méthode non locale sous forme intégrale. Ce choix est essentiellement motivé par le souci constant de simplicité, notamment dans la mise en œuvre dans un code de calcul classique. En effet, ce type d'approche permet de conserver la structure originale du modèle de comportement continu local en introduisant une variable non locale sous forme intégrale.

4.4.2 Approche non locale par intégrale – Extension du modèle d'endommagement avec frottement

Initialement développée par Bazant et al. [1984] pour la plasticité, la méthode de régularisation non locale par intégrale a été par la suite proposée pour l'endommagement par Pijaudier-Cabot et Bazant [1987]. Elle consiste à remplacer une des variables gouvernant le comportement du matériau par sa valeur non locale obtenue par une moyenne pondérée des valeurs de cette variable sur un domaine entourant le point considéré.

La question se pose désormais sur le choix de la variable non locale pour notre étude. On considère que le problème de localisation, notamment la sensibilité au maillage, est lié à l'endommagement. C'est pourquoi on choisit la variable d'endommagement comme variable non locale.

La variable d'endommagement non locale s'écrit en tout point x de la structure :

$$\bar{d} = \frac{1}{V_r(x)} \int_{\Omega} \psi(x,s) d(s) d\Omega \quad (4.28)$$

où Ω est le volume de la structure, s un point au voisinage du point considéré x et $V_r(x)$ est le volume représentatif au point x défini par :

$$V_r(x) = \int_{\Omega} \psi(x,s) d\Omega \quad (4.29)$$

$\psi(x,s)$ est une fonction de pondération non-locale. On la choisit arbitrairement sous la forme d'une Gaussienne :

$$\psi(x,s) = \exp\left(\frac{-4\|x-s\|^2}{l_c}\right) \quad (4.30)$$

l_c est la longueur caractéristique du matériau, étroitement liée à la dimension de la zone d'influence de la fonction de Gauss ψ . La figure 4.9 montre la distribution de ψ autour du point considéré. On constate que la fonction de Gauss s'atténue rapidement au-delà d'une distance équivalant à 3 fois la longueur caractéristique. Lors des simulations, on veillera donc à prendre une valeur de l_c telle que la distance $|x-s| \leq 3l_c$.

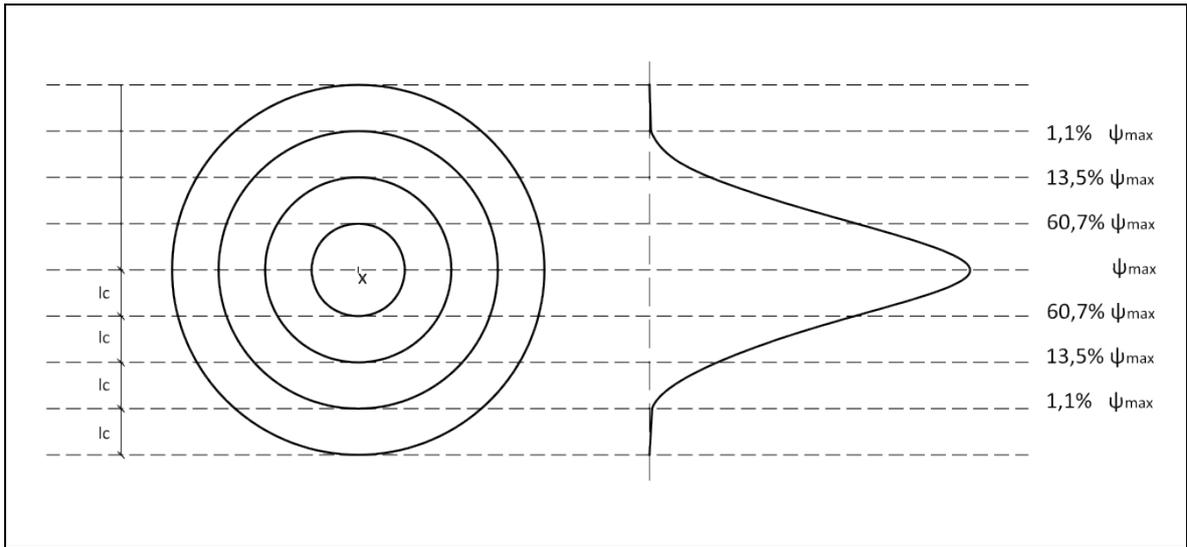


Figure 4.9 – Schématisation de la distribution de la fonction de Gauss

4.4.3 Implémentation numérique de la variable non locale

L'objectif est de conserver le même code de calcul par éléments finis (Abaqus) pour l'analyse numérique du modèle non local. Nous présentons donc ici les modifications apportées à la routine UMAT présentée en 4.1.1 pour le modèle d'endommagement avec frottement local.

Le calcul de la variable non locale à la fin de l'incrément $n+1$ repose sur l'hypothèse que l'incrément de la variable non locale équivaut à l'incrément de la variable locale, à savoir :

$$\bar{d}_{n+1} = \bar{d}_n + d_{n+1} - d_n \quad (4.31)$$

Pour ce faire, au début de l'incrément $n+1$, la variable locale de l'incrément précédent d_n est stockée grâce à la routine UEXTERNALDB puis sera rappelée pour le calcul de la variable non locale \bar{d}_n . Cette variable définie par (4.28) est calculée par une méthode d'intégration numérique telle que la méthode de Gauss dans le cadre de la méthode des éléments finis. Dans ce cadre, la valeur \bar{d}_n en un point d'intégration x_e d'un élément de la structure considérée est donnée par :

$$\bar{d}_n(x_e) = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g \psi(x_e, s_g) d_n(s_g) \det(J)_g}{\sum_{e=1}^{N_e} \sum_{g=1}^{N_g} \omega_g \psi(x_e, s_g) \det(J)_g} \quad (4.32)$$

Où :

- N_e le nombre total d'éléments discrétisant une structure,
- N_g est le nombre de points d'intégration dans un élément,
- s_g est le point d'intégration voisin de x_e inclus dans la zone d'influence de la fonction de Gauss,
- ω_g est le coefficient de poids associé à s_g ,
- $\det(J)_g$ est la matrice Jacobienne permettant le passage d'un élément « réel » de la structure à un élément « fictif » de référence.

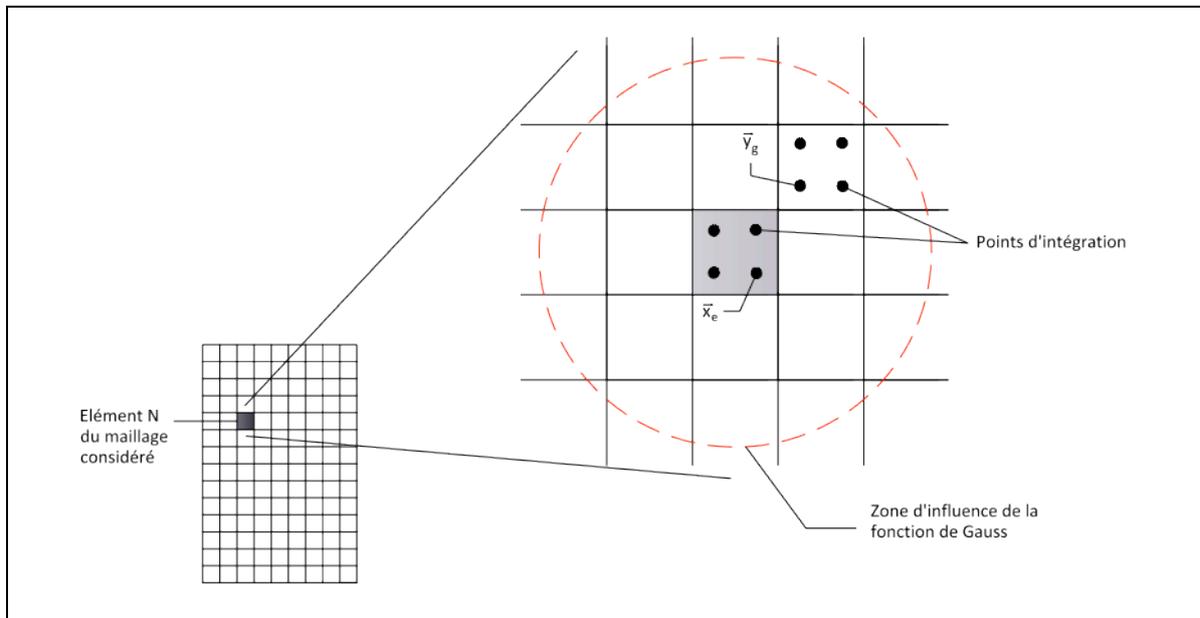


Figure 4.10 - Illustration géométrique du calcul de la variable non locale

Finalement, les modifications apportées à la routine UMAT concernant le traitement de la variable locale pendant l'incrément $n + 1$ sont résumées sur la figure 4.11.

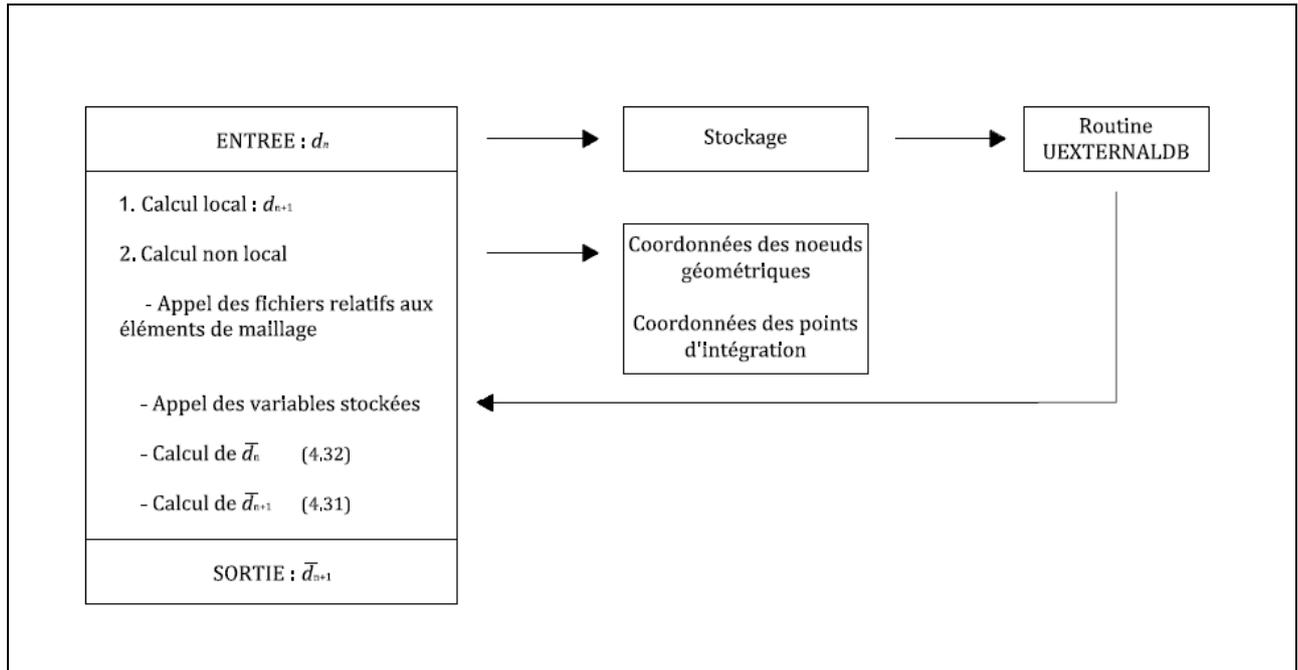


Figure 4.11 – Modifications propres à la variable non locale apportées à la UMAT du modèle local

4.5 Application de l'approche non locale à la poutre en flexion 3 points

Afin de vérifier l'aptitude de la formulation non locale, on propose de reprendre la structure étudiée en 4.3 sans les armatures et en conservant les mêmes valeurs des paramètres.

Les résultats sont proposés sur la figure 4.12. Il s'agit des profils d'endommagement obtenus le long de la fibre inférieure de la poutre ($h=0m$) pour trois niveaux de raffinement de maillage. A titre de comparaison, on présente les profils d'endommagement obtenus à partir des formulations locale et non locale.

Les résultats confirment l'influence du maillage dans le cas du modèle local (cf. figure 4.12a) alors que la formulation non locale montre des profils quasi-identiques (cf. figure 4.12b). Notons que pour un rapport de finesse de maillage 4 fois plus élevé, l'écart des valeurs maximales de l'endommagement obtenu avec le modèle local vaut 17,5 % alors qu'avec le modèle non local il ne dépasse pas 3,3 %. Ces résultats sont complétés par les cartes de distribution de l'endommagement en fonction du raffinement du maillage pour les deux approches (cf. figures 4.13 et 4.14).

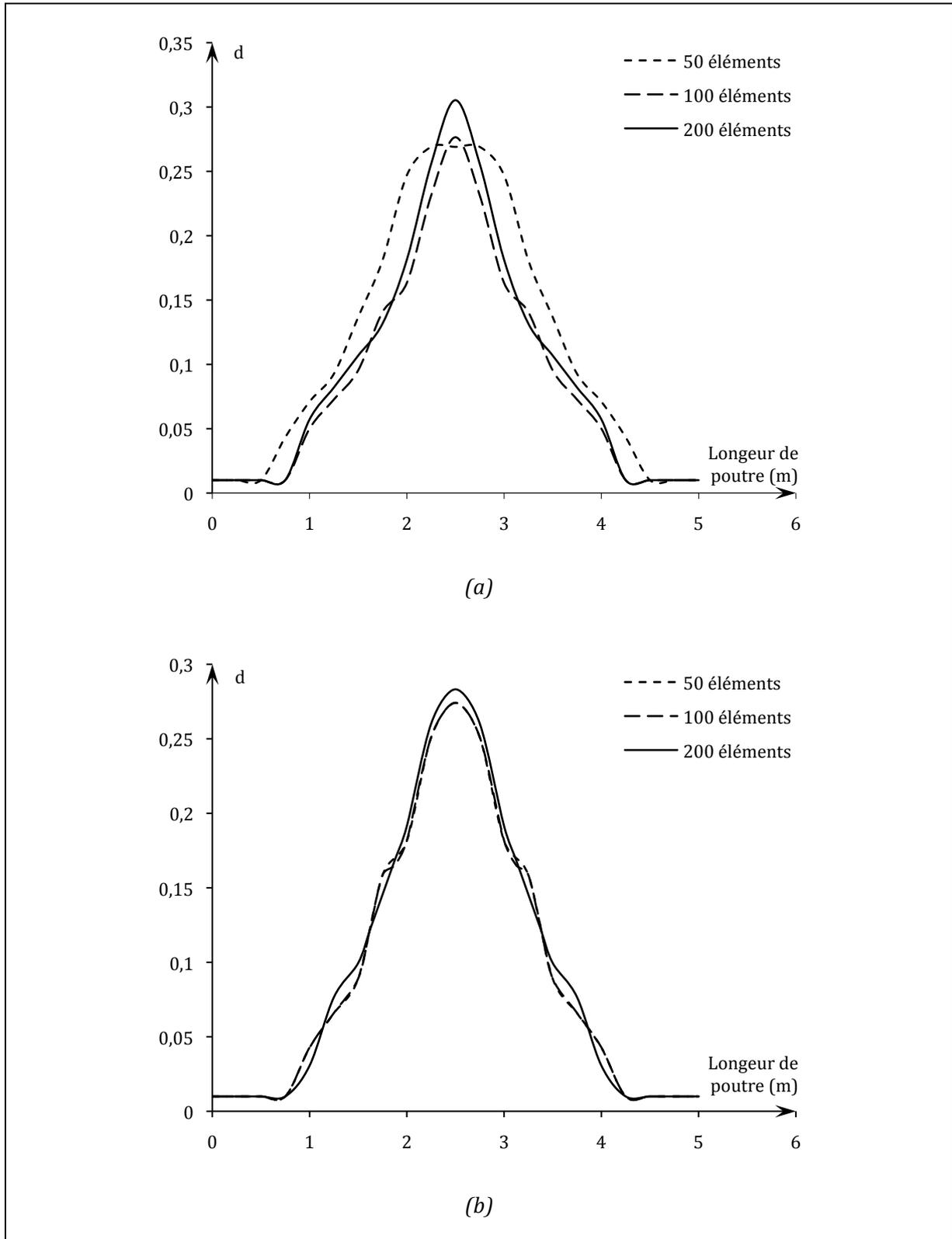


Figure 4.12 – Profils de l'endommagement dans la poutre pour trois raffinements de maillage :
(a) modèle local et (b) modèle non local

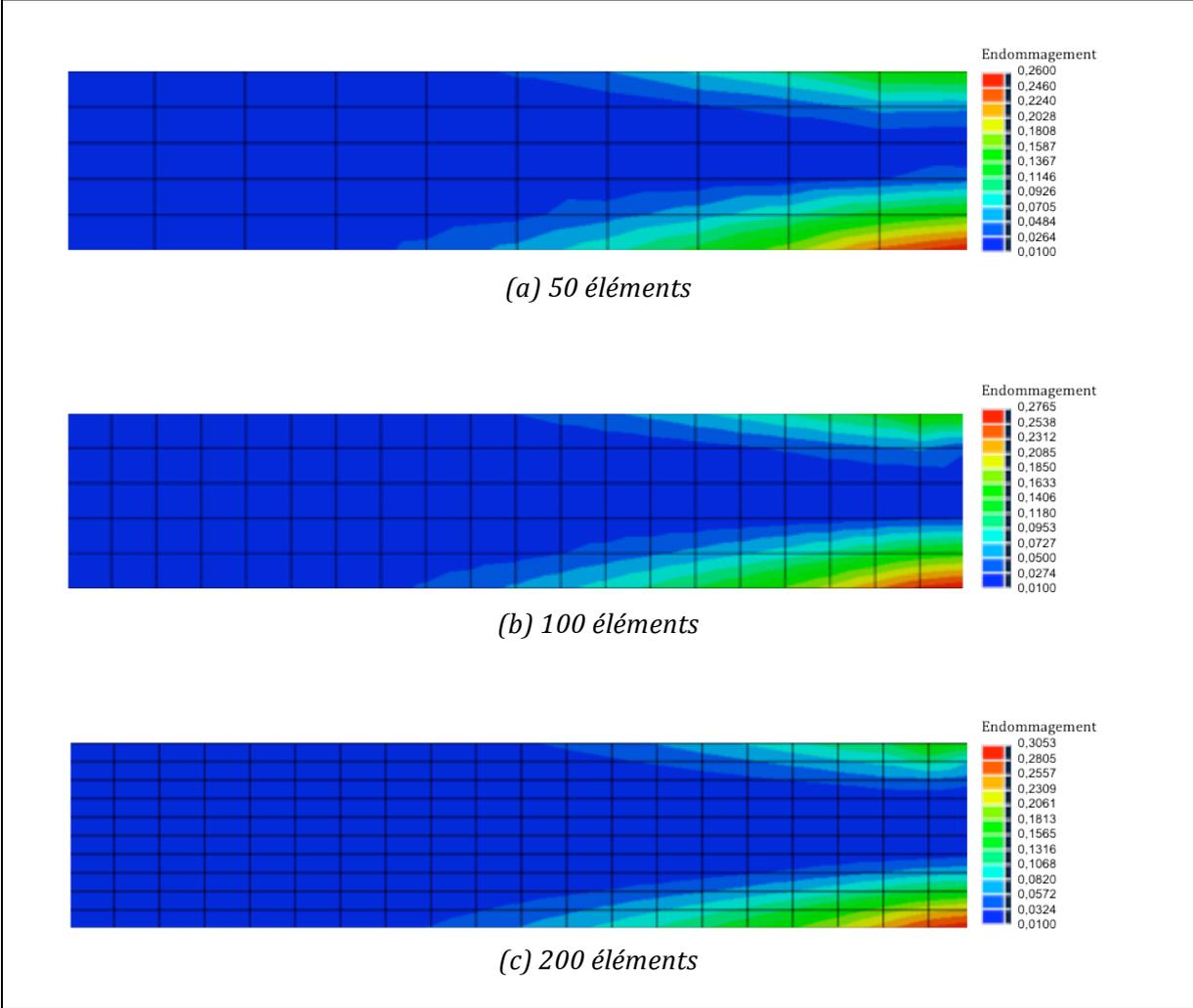


Figure 4.13 – Distribution de l’endommagement pour différents raffinements de maillage : modèle local (Flèche = 10 mm)

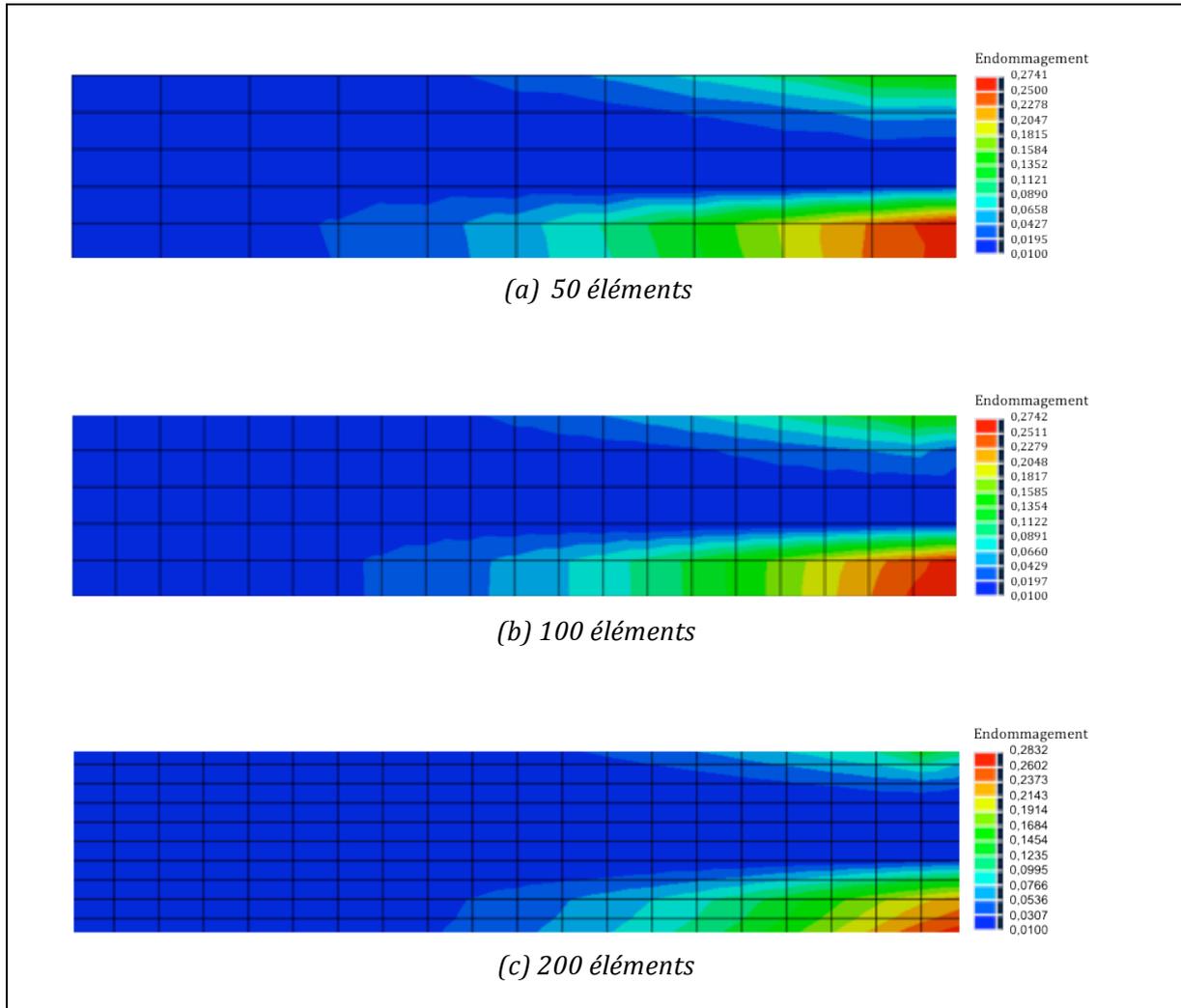


Figure 4.14 - Distribution de l'endommagement pour différents raffinements de maillage : modèle non local (Flèche = 10 mm)

Si les quelques résultats d'analyse numérique qui viennent d'être présentés ont permis de juger les aptitudes des approches locale et non locale du modèle d'endommagement avec forttement, on notera toutefois que l'étude devra dans l'avenir être approfondie, en testant par exemple l'orientation du maillage, et les simulations complétées par l'analyse de structures industrielles plus complexes.

Conclusion

Le travail de cette thèse a consisté à étendre un modèle d'endommagement avec effet unilatéral déjà existant (présenté au chapitre 2) afin de prendre en compte à la fois l'endommagement lié à la création et la propagation des microfissures et la dissipation liée au frottement des lèvres de ces microdéfauts.

Le modèle macroscopique d'endommagement avec frottement ainsi obtenu semble répondre aux principaux objectifs fixés (chapitre 3), à savoir : être simple (le modèle est caractérisé par un faible nombre de paramètres matériau, aisément quantifiables à partir d'essais mécaniques courants), fiable sur le plan mathématique et thermodynamique (notamment, une attention particulière a été portée sur la continue différentiabilité du potentiel thermodynamique), et apte à décrire quelques-uns des phénomènes essentiels liés au comportement non linéaire des matériaux quasi-fragiles :

- évolution de l'endommagement,
- asymétrie de comportement en traction et en compression uniaxiales,
- boucles d'hystérésis,
- effet d'une compression de confinement,
- restitution de la rigidité initiale du matériau lors de la fermeture des microfissures.

Le modèle a été formulé pour une utilisation dans un code aux éléments finis Abaqus et son implémentation a été menée et détaillée au chapitre 4 : l'algorithme proposé est piloté en déformations et basé sur une formulation de type implicite. Un premier exemple appliqué porte sur l'analyse d'une poutre soumise à de la flexion 3 points. Les résultats numériques sont discutés en les comparant avec ceux issus de publications. Enfin, afin d'éviter les sensibilités au maillage, la question liée à la localisation de l'endommagement a été examinée. La méthode de la régularisation par intégrale a été adoptée et la version non locale du modèle d'endommagement avec frottement a été également implémentée dans le code Abaqus.

Perspectives

Il apparaît toutefois au vu des simulations et des confrontations avec des données expérimentales présentées au troisième chapitre que des améliorations devront être apportées au modèle. En effet, une première piste d'étude porterait sur l'approfondissement du choix des fonctions des modules de compressibilité et de cisaillement (K et μ). A l'image des fonctions issues de l'approche micromécanique, on proposerait des fonctions à caractère phénoménologique dont le coefficient pondérateur serait différent pour K et μ , ce qui permettrait d'influencer de manière indépendante la réponse selon l'état d'ouverture-fermeture des microfissures. Une seconde voie d'amélioration pourrait consister en une

modification du critère de plasticité. Actuellement, il a pour effet d'augmenter considérablement la contrainte maximale lorsque le confinement est élevé. Une solution envisagée est de considérer un critère dont la forme ne serait plus un cône à génératrices linéaires mais à génératrices convexes.

Par ailleurs, il est sans doute intéressant d'envisager le couplage avec d'autres phénomènes physiques. Grâce à la simplicité d'écriture du modèle, on pourra notamment étendre celui-ci au cas des milieux poreux. Il s'agit alors d'introduire un nouveau paramètre de chargement représentant la pression de fluide saturant le matériau. Cette pression a une influence dans la propagation des microfissures lorsque celles-ci sont ouvertes. La question concernera la forme du potentiel thermodynamique et de la nouvelle hypersurface. De plus, l'étude de la mécanique des milieux poreux fait appel à la porosité interne du matériau : il faudra alors considérer le lien existant entre les microfissures et les pores.

ANNEXE A

Vérification et validation de l'implémentation du modèle d'endommagement avec frottement dans Abaqus

A.1 Traction uniaxiale

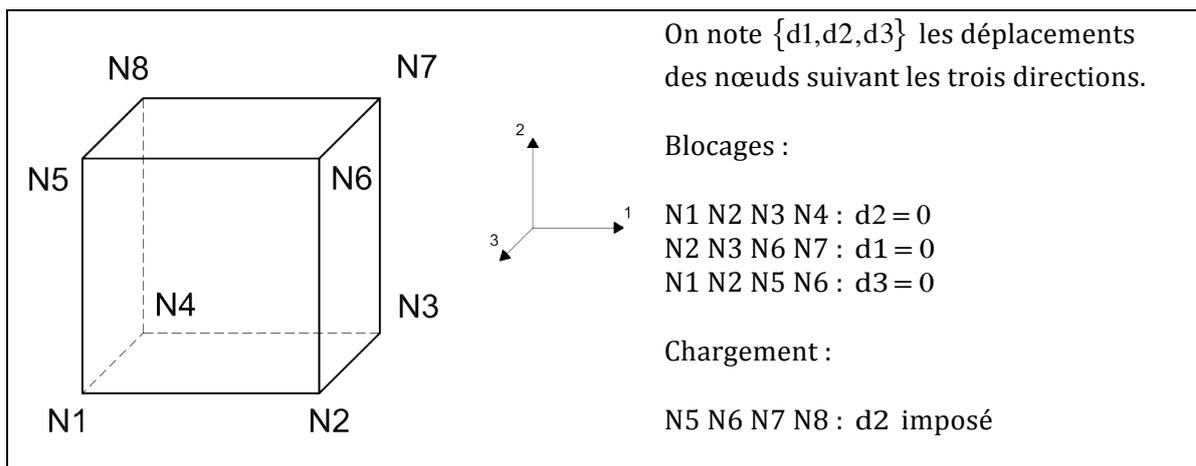


Figure A.1 – Géométrie et conditions aux limites

L'objectif de ce test est d'analyser l'endommagement à microfissures ouvertes

Le matériau considéré pour le test de traction uniaxiale a les caractéristiques suivantes :

E_0 (MPa)	ν_0	h_0	c_0	d_0	η
32000	0,2	0,0001	20	0,001	0,6

Tableau A.1 : Paramètres du matériau testé en traction uniaxiale

La réponse du modèle en traction uniaxiale est représentée sur la figure A.1. Les premières courbes présentent la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale (cf. figure A.2a), les secondes courbes représentent l'évolution de l'endommagement en fonction de la déformation axiale (cf. figure A.2b).

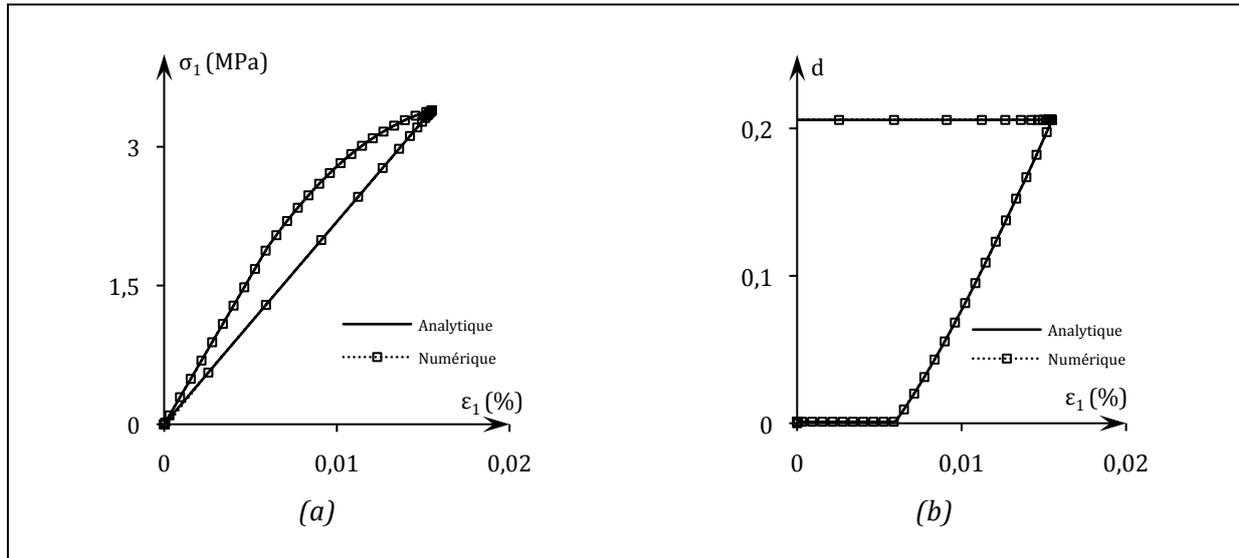


Figure A.2 – Traction uniaxiale : (a) courbe contrainte σ_1 -déformation ϵ_1 et (b) courbe endommagement d -déformation axiale ϵ_1

On constate un bon accord entre les deux prédictions. Pour la variable d'endommagement ainsi que la déformation axiale, l'erreur évaluée entre les deux prédictions est nulle.

A.2 Compression uniaxiale sans évolution de l'endommagement

L'objectif de ce test est d'examiner le frottement à endommagement fixe lorsque les microfissures sont fermées.

Afin de ne considérer que le phénomène de frottement lors de la compression uniaxiale, la valeur du paramètre h_0 est choisie de telle sorte que le critère d'endommagement ne soit jamais atteint durant le chargement. Les caractéristiques du matériau sont les suivantes :

E_0 (MPa)	ν_0	h_0	c_0	d_0	η
32000	0,2	10000	20	0,2	0,6

Tableau A.2 : Paramètres du matériau testé en compression uniaxiale sans évolution de l'endommagement

Sur la figure A.3, les courbes représentent la contrainte axiale en fonction de la déformation axiale (cf. figure A.3a) et l'évolution de la déformation plastique axiale en fonction de la déformation axiale (cf. figure A.3b). L'évolution des deux courbes apparaît tout à fait similaire.

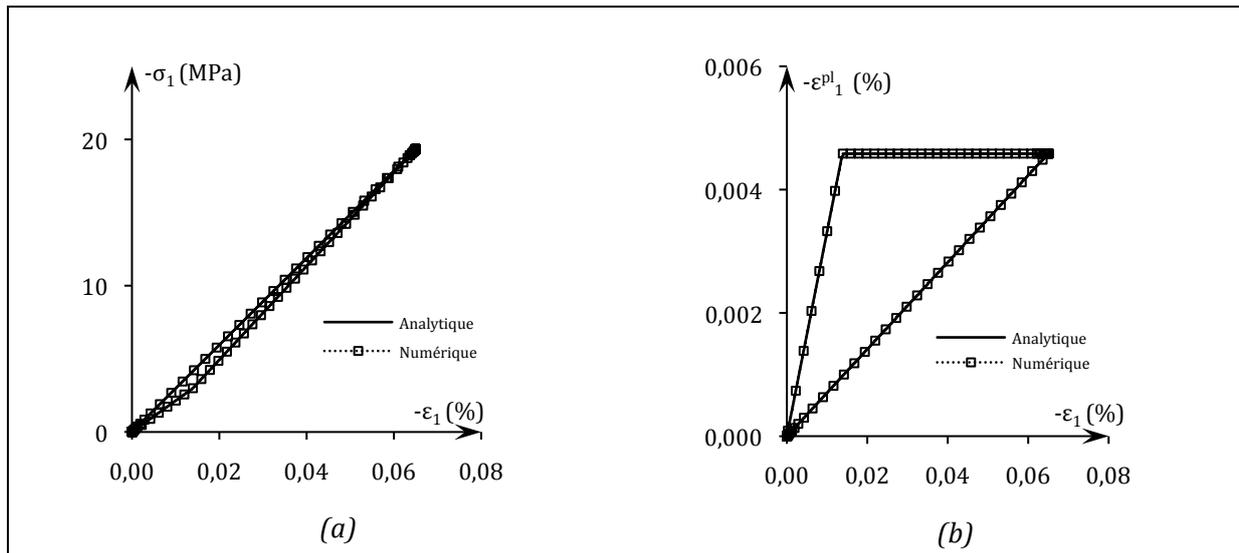


Figure A.3 – Compression uniaxiale : (a) courbe contrainte σ_1 -déformation ε_1 et (b) courbe déformation plastique ε_1^{pl} -déformation ε_1

A.3 Cisaillement simple

Un test de cisaillement simple avec déchargement est mené afin de valider la prise en compte correcte par l'algorithme des composantes 'hors diagonale' des matrices de contraintes et de déformations.

Les conditions aux limites et les nœuds sur lesquels est imposé le chargement sont explicités sur la figure A.4

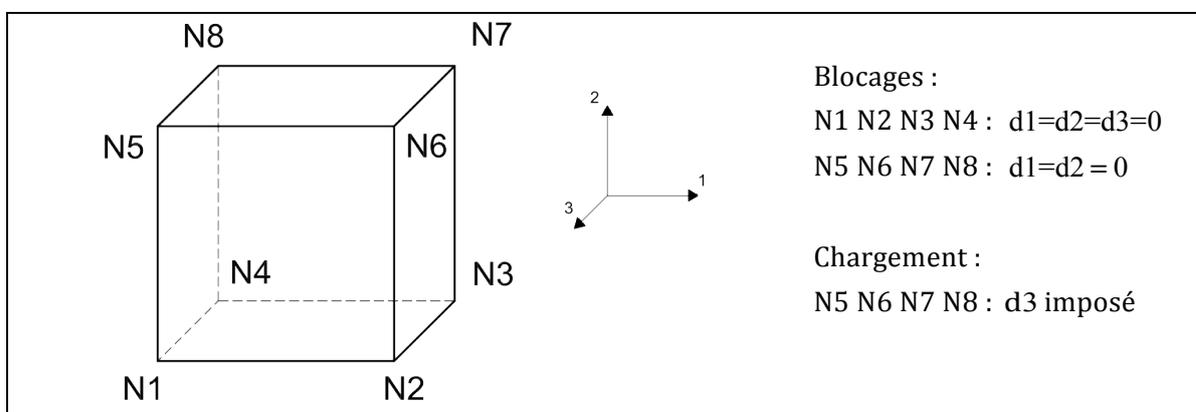


Figure A.4 – Géométrie et conditions aux limites

Les caractéristiques du matériau testé sont identiques à celles considérées pour le test en traction uniaxiale. (Tableau A.1).

La figure A.5 représente les courbes de la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation de cisaillement. L'allure des courbes est en bon accord. La valeur de la déformation permanente en fin de déchargement est identique pour les deux prédictions.

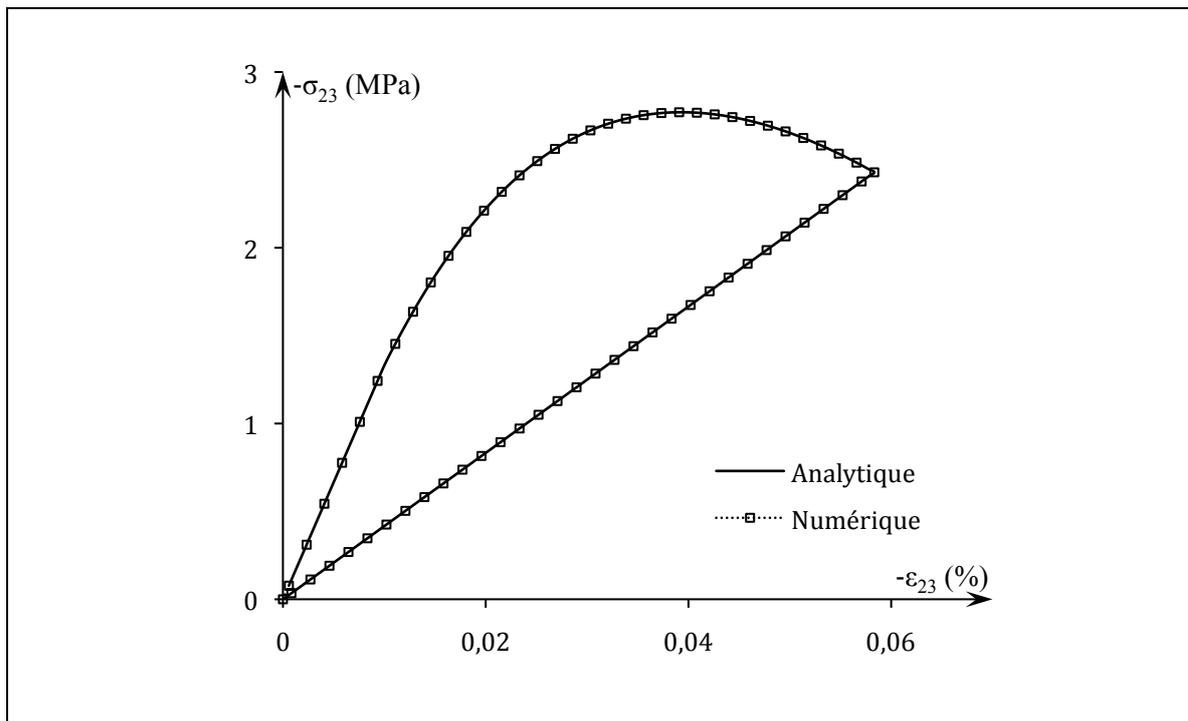


Figure A.5 – Cisaillement pur : courbe contrainte de cisaillement σ_{23} -déformation de cisaillement ε_{23}

Références bibliographiques

A

ABOU-CHAKRA GUERY A., CORMERY F., SHAO J.F., 2008.

A micromechanical model of elastoplastic and damage behavior of a cohesive material. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pages 1406-1429.

AIFENTIS E., 1984.

On the microstructural origin of certain inelastic models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 106, pages 326-330.

AMBROSIO L., TORTERELLI V., 1990.

Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via gamma-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 43, issue 8, pages 999-1036.

AMOR H., 2008.

Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modèles non-locaux d'endommagement : Etude théorique et mise en oeuvre numérique. Thèse de doctorat. Université Paris XIII.

ANDRIEUX S., 1983.

Un modèle de matériau microfissuré : applications aux roches et aux bétons. Thèse de doctorat. École Nationale des Ponts et Chaussées.

ANDRIEUX S., BAMBERGER Y., MARIGO J.J., 1986.

Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *Journal de Mécanique Théorique Appliquée*, vol. 5, issue 3, pages 471-513.

ASAHINA D., LANDIS E.N., BOLANDER J.E., 2011.

Modeling of phase interfaces during pre-critical crack growth in concrete. *Cement and Concrete Composites*, vol. 33, issue 9, pages 966-977.

B

BARGELLINI R., 2006.

Contribution d'une approche discrète à la modélisation de l'endommagement de matériaux microfissurés. Thèse de doctorat d'état. Université de Poitiers.

BARGELLINI R., HALM D., DRAGON A., 2008.

Modelling of quasi-brittle behaviour : a discrete approach coupling anisotropic damage growth and frictional sliding. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 27, pages 564-581.

BARTHELEMY J., DORMIEUX L., KONDO D., 2003.

Détermination du comportement macroscopique d'un milieu à fissures frottantes. *Compte Rendus de Mécanique*, vol. 331, pages 7-84.

BAZANT Z.P., BELYTSCHKO T.B., CHANG T.P., 1984.

Continuum theory for strain-softening. *Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 112, issue 12, pages 1666-1692.

BAZANT Z.P., PIJAUDIER-CABOT G., 1988.

Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55, pages 287-293.

BAZANT Z.P., PIJAUDIER-CABOT G., 1989.

Measurement of the characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115, issue 4, pages 755-767.

BENALLAL A., MARIGO J.J., 2007.

Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, issue 1, pages 283-295.

BERTHAUD Y., 1988.

Mesure de l'endommagement du béton par une méthode ultrasonore. Thèse de doctorat. Université de Paris VI.

BIENIAWSKI Z.T., 1967.

Mechanism of brittle fracture of rock. Part I : Theory of the fracture process. Part II : Experimental study. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 4, pages 395-430.

BUDIANSKY B., O'CONNEL J.R., 1976.

Elastic moduli of a cracked solid. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 12, pages 81-97.

BURLION N., 1997.

Compaction des bétons : éléments de modélisation et caractérisation expérimentale. Thèse de doctorat. Université de Paris VI.

C

CHABOCHE J.L., 1992.

Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 1, pages 148-171.

CHABOCHE J.L., 1993.

Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 2, pages 311-329.

CAROL I., WILLAM K., 1996.

Spurious energy dissipation/generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, issues 20-22, pages 2939-2957.

CHALLAMEL N., HALM D., DRAGON A., 2006.

On the non-conservativeness of a class of anisotropic damage models with unilateral effects. *Compte-Rendus de Mécanique*, vol. 334, pages 414-418.

CHAMBON R., CAILLERIE D., EL HASSAN N., 1998.

One-dimensional localization studied with a second grade model. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 17, issue 4, pages 637-656.

CHAMBON R., CAILLERIE D., MATSUCHIMA T., 2001.

Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, issues 46-47, pages 8503-8527.

CORMERY F., 1994.

Contribution à la modélisation de l'endommagement par mésosissuration et du phénomène de localisation associé. Thèse de doctorat d'état. Université de Poitiers.

CORMERY F., WELEMANE H., 2002.

A critical review of some damage models with unilateral effects. *Mechanics Research Communications*, vol. 19, pages 391-395.

CORMERY F., WELEMANE H., 2010.

A stress-based macroscopic approach for microcracks unilateral effect. *Computational Material Sciences*, vol. 47, pages 727-738.

COSSERAT E., COSSERAT F., 1909.

Théorie des corps déformables. Hermann et fils. Paris.

CURNIER A., HE Q., ZYSSET P., 1995.

Conewise linear elastic materials. *Journal of Elasticity*, vol. 37, pages 1-38.

D

DRUCKER D.C., PRAGER W., 1952.

Soil mechanics and plastic analysis for limit design. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 10, issue 2, pages 157-165.

E

ELAQRA H., GODIN N., PEIX G., R'MILI M., FANTOZZI G., 2007.

Damage evolution analysis in mortar, during compressive loading using acoustic emission and X-ray tomography : effects of the sand/cement ratio. *Cement and Concrete Research* vol. 7, issue 5, pages 703-713.

G

GAMBAROTTA L., LAGOMARSINO S., 1993.

A microcrack damage model for brittle materials. International Journal of Solids and Structures, vol. 30, issue 2, pages 177-198.

GHAVAMIAN S., DELAPLACE A., 2003.

Modèles de fissuration du béton, projet MECA. Revue française de génie civil

H

HALM D., DRAGON A., 1996.

A model of anisotropic damage by microcrack growth; unilateral effect. International Journal of Damage Mechanics, vol. 5, pages 384-402.

HALM D., 1997.

Contribution à la modélisation du comportement unilatéral et du frottement dans les matériaux mésos fissurés. Thèse de doctorat d'état. Université de Poitiers.

HALM D., DRAGON A., 1998.

An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. European Journal of Mechanics, A/Solids, vol. 17, issue 3, pages 439-460.

J

JU J.W., 1989.

On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Damage Mechanics, vol. 25, pages 803-833.

K

KACHANOV L.M., 1958.

On the time to failure under creep conditions. Izv. AN SSSR, Otd. Tekhn. Nauk., vol.8, pages 26-31.

KACHANOV L.M., 1982.

A microcrack model of rock inelasticity – Part I: Frictional sliding on microcracks. Part II: Propagation of microcracks. Mechanics of Materials, vol.1, pages 19-41.

KERYVIN V., DESOYER T., HANUS J.L., 2000.

Localisation de la déformation sous sollicitations lentes : une approche dynamique. Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, Séries IIB, vol. 328, issue 10, pages 727-732.

KRANZ R.L., 1983.

Microcracks in rocks: a review. *Technophysics*, vol. 100, pages 449-480.

KONDO D., WELEMANE H., CORMERY F., 2007.

Basic concepts and models in continuum damage mechanics. *Damage and fracture in geomaterials*, pages 927-943.

KUPFER H., HILSDORF H.K., RUSCH H., 1969.

Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 99, issue 4, pages 656-666.

L

LANDIS E.N., NAGY E.N., KEANE D.T., 2003.

Microstructure and fracture in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, issues 7-8, pages 911-925.

LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., 1978.

Aspect phénoménologique de la rupture par endommagement. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 2, pages 317-365.

LIANG Y., 2012.

Comportement du béton sous sollicitations multiaxiales en fonction de la saturation et de la température. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille.

M

MARIGO J.J., 1980.

Propagation des ondes ultrasonores et microfissuration du béton. Thèse de doctorat d'état. Université de Paris VI.

MARIGO J.J., 1982.

Etude numérique de l'endommagement. *EDF Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches*, no. 2, pages 27-48.

MARIGO J.J., 1985.

Modelling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoids. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 21, issue 4, pages 861-874.

MARIGO J.J., 1989.

Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on work property. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 114, pages 249-272.

MAZARS J., 1984.

Application de la Mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de doctorat d'état. Université de Paris VI.

MORI T., TANAKA K., 1973.

Averages stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metallurgica, vol. 21, pages 571-574.

MUHLHAUS. H.B., 1986.

Shear band analysis in granular materials by Cosserat theory. Ing. Arch., vol. 56, pages 389-399.

N

NEEDLEMAN A., 1988.

Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 67, pages 69-85.

O

ORTIZ M., 1985.

A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. Mechanics of Materials, vol. 4, pages 67-93.

P

PECQUEUR G., 1995.

Étude expérimentale et modélisation du comportement d'une craie et d'un grès en torsion. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille.

PENSEE V., KONDO D., 2001.

Une analyse micromécanique 3-D de l'endommagement par mésosfissuration. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Séries II b Mécanique, vol. 329, pages 271-276.

PERA J., 1973.

Reinforced concrete redundant beams. Theoretical and experimental analysis. Thèse de doctorat. INSA de Lyon.

PHAM K., 2010.

Construction et analyse de modèles d'endommagement à gradient. Thèse de doctorat. Université de Pierre et Marie Curie.

PIJAUDIER-CABOT G., BAZANT Z.P., 1987.

Nonlocal damage theory. Journal of Engineering Mechanics, vol. 113, issue 10, pages 1512-1533.

PONTE-CASTANEDA P., WILLIS J.R., 1995.

The effect of spatial distribution on the behaviour of composite materials and cracked media. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 43, pages 1919-1951.

R

RAGUENEAU F., 1999.

Fonctionnement dynamique des structures en béton – Influence des comportements hystérétiques locaux. Thèse de doctorat d'état. Ecole Normale Supérieure de Cachan.

RAMTANI S., 1990.

Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral. Thèse de doctorat. Université de Paris VI.

RINGOT E., BASCOUL A., 2001.

About the analysis of microcracking in concrete. Cement and Concrete Composites, vol. 23, pages 261-266.

S

SAYEHI M., 1992.

Étude expérimentale de l'endommagement du grès de Fontainebleau. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille.

SIBAI M., DORMIEUX L., PENSEE V., KONDO D., 2003.

Effet de la microfissuration en poroélasticité des roches : étude expérimentale et analyse théorique. 16ème Conférence Française de Mécanique.

T

TERRIEN M., 1980.

Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d'un béton sollicité en traction. Bulletin de Liaison Laboratoire des Ponts et Chaussées, vol. 105, réf. 2398.

TORRENTI J.M., 1987.

Comportement multiaxial du béton : aspects expérimentaux et modélisation. Thèse de doctorat. École Nationale des Ponts et Chaussées.

TRAN V.T., DONZE F.V., MARIN P., 2011.

A discrete element model of concrete under high triaxial loading. Cement and Concrete Composites, vol. 33, issue 9, pages 936-948.

V

VAN MIER J.G.M., 1984.

Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions. Thèse de docteur ingénieur. Technische Hogeschool Eindhoven.

W

WALSH J.B., 1965.

The effect of cracks on the uniaxial compression of rocks. *Journal of Geophysical Research*, vol. 70, issue 2, pages 399-411.

WELEMANE H., 2002.

Une modélisation des matériaux microfissurés. Application aux roches et aux bétons. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille.

Z

ZHAO Y., 1998.

Crack pattern evolution and a fractal damage constitutive model for rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 35, pages 349-366.

ZHU Q.Z., 2006.

Applications des approches d'homogénéisation à la modélisation tridimensionnelle de l'endommagement des matériaux quasi-fragiles : formulations, validations et implémentations numériques. Thèse de doctorat. Université des Sciences et Technologies de Lille.

ZHU Q.Z., KONDO D., SHAO J.F., 2008.

Micromechanical analysis of coupling between anisotropic damage and friction in quasi brittle materials : Role of the homogeneization scheme. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, pages 1385-1405.

ZHU Q.Z., SHAO J.F., KONDO D., 2011.

A micromechanics-based thermodynamic formulation of isotropic damage with unilateral and friction effects. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 30, pages 316-325.

Une modélisation de l'endommagement et du glissement avec frottement dans les matériaux quasi-fragiles.

L'objectif de ce travail de thèse consiste en l'amélioration des capacités prédictives d'un modèle d'endommagement isotrope pour les matériaux quasi-fragiles prenant en compte le comportement unilatéral relatif à l'ouverture-fermeture des microfissures. La nouvelle approche macroscopique est basée sur l'introduction d'une variable de déformation anélastique traduisant le glissement et frottement des lèvres de microfissures en contact à une échelle plus fine. La formulation ainsi obtenue permet de rendre compte de certaines spécificités essentielles du comportement mécanique non linéaire des matériaux dits quasi-fragiles (les bétons et certaines roches) telles que le comportement asymétrique et hystérétique.

La réponse du modèle caractérisé par un faible nombre de paramètres matériau aisément identifiables à partir d'essais mécaniques classiques est évaluée à travers l'étude de différentes simulations numériques. Un premier exemple d'application sur une structure est réalisé. Enfin une version non locale du modèle est proposée afin de résoudre les problèmes de localisation de l'endommagement.

Mots clés : modèle de comportement, matériaux quasi-fragiles, endommagement isotrope, effet unilatéral, frottement des microfissures.

A model of damage and sliding with friction in quasi-brittle materials.

The objective of this thesis is to improve the predictive capabilities of an isotropic damage model quasi-brittle materials accounting for the unilateral behavior related to the opening and closure of microcracks. The new macroscopic model is based on the introduction of a variable of inelastic strains reflecting the friction sliding along closed microcracks at a finer scale. The formulation thus obtained is able to predict some essential characteristics of the nonlinear mechanical behavior of quasi-brittle materials (concrete and some rocks) including asymmetric and hysteretic behavior.

The response of the model, characterized by a small number of material parameters easily identifiable from standard mechanical tests, is evaluated through the study of different numerical simulations. A first example of application of a structure is achieved. Finally a non-local version of the model is proposed to solve the problems of localization of the damage.

Keywords: constitutive model, quasi-brittle materials, isotropic damage, unilateral effect, friction.