



N° d'ordre : 40808

THÈSE

présentée à

l'Université des Sciences et Technologies de Lille

par M. Emmanuel VERHILLE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : Mathématiques Appliquées

Méthodes d'éléments finis *a posteriori* pour
les équations de Reissner-Mindlin

Directeur de thèse : M. Emmanuel CREUSÉ

Co-direction : M. Serge NICAISE

Soutenue le : 04 Juillet 2012

JURY :

Christine BERNARDI	Rapportrice
Christophe BESSE	Examineur
Daniela CAPATINA	Rapportrice
Emmanuel CREUSÉ	Directeur de thèse
Patrick JOLY	Examineur
Serge NICAISE	Co-directeur de thèse

Remerciements

Je voudrais avant tout exprimer ma profonde reconnaissance à MM. Emmanuel Creusé et Serge Nicaise pour m'avoir proposé ce sujet de recherche et pour l'avoir si bien encadré. Leur expérience, leur disponibilité, leurs conseils ainsi que leur confiance et leur soutien ont été un atout majeur pour la réussite de ce travail.

Je remercie très chaleureusement Mmes Christine Bernardi et Daniela Capatina qui ont pris le temps d'examiner mon travail avec attention et intérêt et d'apporter des remarques constructives, ainsi que MM. Christophe Besse et Patrick Joly pour avoir accepté de faire partie du jury : je leur exprime ma plus sincère gratitude.

J'aimerais accorder une attention particulière aux personnes sans qui je n'aurais pas découvert le monde singulier de la recherche : mes enseignants de Master 2 (à savoir MM. Antoine Ayache, Christophe Besse, Emmanuel Creusé, Stephan De Bièvre, Christian Gout, Serge Nicaise, Hassane Sadok, Nikolay Tzvetkov) ainsi que MM. Patrick Joly et Jerónimo Rodriguez qui m'ont donné mon premier thème de recherche.

Je remercie l'Université de Lille 1, l'Université de Valenciennes et plus particulièrement le laboratoire Paul Painlevé et le LAMAV pour m'avoir permis d'accomplir ce travail dans les meilleures conditions. J'en profite par ailleurs pour remercier tous ceux que j'ai pu croiser, doctorants et docteurs, lors des séminaires, conférences et autres ; et tout particulièrement mes collègues de bureau qui ont dû supporter mes possessions de tableau : Karl, Michaël, Oguzan, Serap, Sumaia, Vincent.

Enfin, je tiens vraiment à remercier Hélène Vermeulen qui a supporté durant tout ce temps mes absences tant physiques que cérébrales : il est vrai que vivre avec un thésard ne doit pas être de tout repos. Elle a su me soutenir, rester à mes côtés durant ces moments intenses, comprendre que la recherche n'a pas d'horaire et s'est même proposée pour relire ma thèse.

*À mon amour,
Hélène Vermeulen.*

Résumé :

Ce travail est consacré à l'étude d'estimateurs d'erreur a posteriori de type flux équilibrés et résiduels pour la résolution des équations de Reissner-Mindlin par la méthode des éléments finis. Le mémoire débute par l'introduction du problème aux limites et de son analyse de convergence a priori par la méthode des éléments finis. Nous construisons alors pour une discrétisation conforme un estimateur a posteriori de type flux équilibrés fiable, efficace et robuste en l'épaisseur de la plaque t . Nous obtenons finalement une constante multiplicative égale à 1 pour la fiabilité. Des tests numériques illustrent nos résultats pour différents maillages. Puis nous abordons le cas d'une discrétisation non-conforme, où nous proposons un estimateur a posteriori de type résiduel, utilisant une régularisation de la solution discrète. Des tests numériques illustrent également nos résultats. La suite du travail reprend la discrétisation conforme en construisant un estimateur a posteriori défini à partir de la résolution de problèmes localisés sur les patches de la triangulation, menant à un choix plus consistant avec le problème aux limites. Le dernier chapitre est consacré à l'estimation a posteriori pour le problème aux valeurs propres de Reissner-Mindlin. L'estimateur obtenu est fiable et efficace pour la norme de l'erreur entre les vecteurs propres, permettant également de majorer l'erreur commise entre les valeurs propres. Des tests numériques illustrent nos résultats.

Mots-clés : méthode des éléments finis, Reissner-Mindlin, estimateur a posteriori, flux équilibrés, résiduel, conforme, non-conforme, problèmes localisés, valeurs propres.

Title : Finite element method for the Reissner-Mindlin problem.

Resume :

This work is devoted to the study of equilibrated fluxes and residual a posteriori error estimators for the finite element resolution of the Reissner-Mindlin system. This report begins by the introduction of the boundary value problem and of its a priori convergence analysis in the finite element method context. Then, an equilibrated fluxes a posteriori estimator is built for a conform discretization, which is proven to be reliable, efficient and robust on the plate thickness t . We finally obtain a multiplicative constant equal to 1 for the reliability. Numerical tests illustrate our results on different meshes. Then, we address the non-conforming discretization case, where a residual a posteriori estimator is proposed using a regularisation of the discrete solution. Numerical tests also illustrate our results. Next we come back to the conform discretization by building an a posteriori estimator defined from localised problems resolution on stars, leading to a consistent choice with the boundary value problem. The last chapter is devoted to an a posteriori estimation for the Reissner-Mindlin eigenvalues problem. The obtained estimator is reliable and efficient for the error norm between the eigenvectors, also allowing to evaluate the error between the eigenvalues. Numerical tests illustrate our results.

Keywords : finite element method, Reissner-Mindlin, a posteriori estimator, equilibrated fluxes , residual, conform, non-conform, localised problems, eigenvalues.

Notations

t	épaisseur de la plaque
ω	fonction scalaire correspondant au déplacement transversal
ϕ	fonction vectorielle correspondant à la rotation de la normale
Ω	ouvert connexe de \mathbb{R}^2 à frontière lipschitzienne
γ	force de cisaillement
$\varepsilon(\phi)$	gradient symétrisé de $\phi = \begin{pmatrix} \partial_1 \phi_1 & \frac{\partial_2 \phi_1 + \partial_1 \phi_2}{2} \\ \frac{\partial_2 \phi_1 + \partial_1 \phi_2}{2} & \partial_2 \phi_2 \end{pmatrix}$
∇v	$\begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \end{pmatrix}$ si v est scalaire ; $\begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 \end{pmatrix}$ si v est vectoriel
$\partial_i v$	dérivée de v par rapport à la i -ème variable
gt^3	force active sur la plaque
\mathcal{C}	tenseur d'élasticité défini par $\mathcal{C}\varepsilon(\phi) = 2\tilde{\mu}\varepsilon(\phi) + \tilde{\lambda} Tr(\varepsilon(\phi))\mathbf{I}$
\mathbf{I}	opérateur identité
Tr	opérateur de trace
$\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \lambda$	coefficients de Lamé : $\tilde{\lambda} = \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)}$, $\tilde{\mu} = \frac{E}{24(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{Ek}{2(1+\nu)}$
E	module de Young
ν	coefficient de Poisson
k	coefficient de réduction
\mathcal{M}_S^2	espace des tenseurs symétriques de rang 2
$A : B$	produit tensoriel défini par $A : B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$
W, Θ, Γ	espaces d'existence des solutions : $W = H_0^1(\Omega)$, $\Theta = H_0^1(\Omega)^2$, $\Gamma = L^2(\Omega)^2$
$(u, v)_A$	produit scalaire $L^2(A)$
$\ \cdot\ _{L^2(A)}$	norme associée au produit scalaire $L^2(A)$
$a(\phi, \psi)$	terme d'élasticité défini par $a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\psi) dx$
c_a	constante d'élasticité
F_t	fonctionnelle liée au problème de Reissner-Mindlin pour prouver la coercivité
$FE(v, \psi)$	fonctionnelle d'énergie liée au problème de Reissner-Mindlin
\mathcal{T}_h	triangulation (ou maillage) régulière
h	taille du maillage
W_h, Θ_h, Γ_h	espaces de discrétisation de dimension finie liés à une triangulation \mathcal{T}_h
\mathbf{R}_h	opérateur de réduction
γ_h	force de cisaillement discrète

$a \lesssim b$	il existe une constante $C > 0$ indépendante de h et t telle que $a \leq Cb$
$a \approx b$	$a \lesssim b$ et $b \lesssim a$
$H_0(\text{rot}, \Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega)^2 \mid \text{rot } v \in L^2(\Omega) \text{ et } v \cdot \tau = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$
$\text{rot } v$	$\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$
$\nabla z - \beta$	décomposition de Helmholtz de $\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h$
$\ v\ _{H^1(\Omega)}^2$	$\ v\ _{L^2(\Omega)}^2 + \ \nabla v\ _{L^2(\Omega)}^2$
$\ \tau\ _{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2$	$\ \tau\ _{L^2(\Omega)}^2 + \ \text{div } \tau\ _{L^2(\Omega)}^2$
$\ \cdot\ _c$	norme de l'élasticité : $\ \cdot\ _c^2 = a(\cdot, \cdot)$
c_F	constante de Friedrichs $\ v\ _{L^2(\Omega)} \leq c_F \ \nabla v\ _{L^2(\Omega)} \forall v \in H_0^1(\Omega)$ ou $\forall v \in H_0^1(\Omega)^2$
c_K	constante de Korn vérifiant $\ \nabla \psi\ _{L^2(\Omega)} \leq c_K \ \psi\ _c \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2$ ($c_K = 1/\sqrt{\mu}$)
\widehat{c}_K	constante vérifiant $\ \psi\ _c \leq \widehat{c}_K \ \nabla \psi\ _{L^2(\Omega)} \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2$ ($\widehat{c}_K = \sqrt{2(\mu + \tilde{\lambda})}$)
c_{rot}	constante vérifiant $\ \text{rot } \psi\ _{L^2(\Omega)} \leq c_{\text{rot}} \ \psi\ _c \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2$
$c_{\mathbf{R}}$	constante vérifiant $\ \nabla \beta\ _{L^2(\Omega)} \leq c_{\mathbf{R}} \ \text{rot}((\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h)\ _{L^2(\Omega)}$
$L_0^2(\Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v \, dx = 0\}$
$\text{Res}_1, \text{Res}_2$	résidus utilisés pour la partie conforme
$\ (\psi, v)\ _{1,h}^2$	$\ \nabla \psi\ _{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{t^2 + h_T^2} \ \nabla v - \psi\ _{L^2(T)}^2$
$\ F\ _{-1,h}$	$\sup_{(\psi, v) \in \Theta \times W \setminus \{(0,0)\}} \frac{ F(\psi, v) }{\ (\psi, v)\ _{1,h}}$
h_T	diamètre de la maille T , longueur de l'arête la plus longue si T est un triangle
$ \cdot $	volume ou longueur ou valeur absolue selon l'élément considéré
$\mathcal{E}(A)$	ensemble des arêtes incluses dans A
$\mathcal{N}(A)$	ensemble des nœuds inclus dans A
ρ_T	diamètre du cercle inscrit dans T
ω_T	patch lié à T (ensemble des éléments ayant un sommet commun avec T)
ω_E	patch lié à l'arête E (ensemble des mailles ayant E pour arête)
h_E	longueur de l'arête E
n_E	vecteur normal unitaire de l'arête E
n_T	vecteur normal unitaire sortant pour chaque arête E de T ($n_T = \pm n_E$)
τ_E	vecteur tangent unitaire de l'arête E
$[v]_E$	saut de v à travers l'arête E ; $[v]_E = v _{T_+} _E - v _{T_-} _E$ si $E = T_+ \cap T_-$
\widehat{T}	triangle de référence : $\{(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \widehat{x} \leq 1, 0 \leq \widehat{y} \leq 1 - \widehat{x}\}$
$S_0^1(\mathcal{T}_h)$	$\{v \in H_0^1(\Omega) \mid v _T \in \mathbb{P}_1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$
$\mathbb{P}_k(T)$	ensemble des polynômes de degré au plus k défini sur T
$\Pi_{h,k}$	projection sur l'espace des polynômes de degré k élément par élément
$\text{osc}(g)^2$	terme d'oscillation lié à g : $\text{osc}(g)^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \ g - \Pi_{h,k} g\ _{L^2(T)}^2$
$\ f\ _{H^{-1}(\Omega)}$	$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^2 \setminus \{0\}} \frac{ (f, v) }{\ \nabla v\ _{L^2(\Omega)}}$
$H_{\text{div}}(\Omega)$	$\{v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \text{div } v \in L^2(\Omega)\}$
$N_{\text{div}}(\Omega)$	$\{\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{M}_S^2) \mid \text{div } v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)\}$
x^*, y^*	éléments créés pour l'estimateur de type flux équilibrés

$ND_0(T)$	espace de Nédélec $\left\{ \begin{pmatrix} a_1 - by \\ a_2 + bx \end{pmatrix}, a_1, a_2, b \in \mathbb{R} \right\}$
$RT_0(T)$	espace de Raviart-Thomas $\left\{ \begin{pmatrix} a_1 + bx \\ a_2 + by \end{pmatrix}, a_1, a_2, b \in \mathbb{R} \right\}$
$\ \phi\ _{\mathcal{C}, \omega_T}$	$\int_{\omega_T} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi) dx$
$Y(T)$	$\#\{T' \in \mathcal{T}_h \mid T' \subset \omega_T\}$
Cte	$\max_{T \in \mathcal{T}_h} Y(T)$
b_T, b_E	fonction bulle à support dans T et ω_E respectivement
$J(v)$	opérateur de type Clément
λ_z	fonction de base \mathbb{P}_1 par maille associée au point z
V_h^0, Ψ_h^0	espaces de discrétisation dans le cas non-conforme
κ_e	constante de pénalisation
$a_h(\phi_h, \psi_h)$	$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\psi_h) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \frac{\kappa_e}{ e } \int_t [\phi_h]_e : [\psi_h]_e ds$
∇_h	gradient pris élément par élément
$\phi \otimes n_e$	$\begin{pmatrix} \phi_1 n_1 & \phi_1 n_2 \\ \phi_2 n_1 & \phi_2 n_2 \end{pmatrix}$
$([\phi]_e \otimes n_e)^S$	saut symétrisé de ϕ à travers l'arête $e : \frac{1}{2} ([\phi]_e \otimes n_e + ([\phi]_e \otimes n_e)^T)$
X	$H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^2$
\mathcal{A}	fonctionnelle liée au problème de Reissner-Mindlin
\mathcal{A}_h	fonctionnelle discrète liée au problème de Reissner-Mindlin
$\widetilde{Res}_1, \widetilde{Res}_2$	résidus utilisés pour la partie non-conforme
$\mu_h(\gamma_h)$	$\sup_{\psi \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{ (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi) }{\ \nabla \psi\ _{L^2(\Omega)}}$
\mathcal{M}	fonction moyenne
$curl w$	$\begin{pmatrix} \partial_2 w \\ -\partial_1 w \end{pmatrix}$
$\ v\ _{H^{-1}(div, \Omega)}^2$	$\ v\ _{H^{-1}(\Omega)}^2 + \ div v\ _{H^{-1}(\Omega)}^2$
Γ_i	ensemble des arêtes incluses dans Ω ayant i pour sommet
div_h	divergence élément par élément
$\Pi_i, \widetilde{\Pi}_i$	projections utilisées pour la résolution des problèmes locaux
ω_i	patch lié au sommet i (ensemble des mailles ayant i pour sommet)
$W(\omega_i)$	$\{v \in H^1(\omega_i) : \int_{\omega_i} v \lambda_i = 0 \text{ et } \int_{\omega_i} \nabla v ^2 \lambda_i < \infty\}$ si i est un nœud intérieur ; $\{v \in H^1(\omega_i) : v = 0 \text{ sur } \partial\omega_i \cap \partial\Omega \text{ et } \int_{\omega_i} \nabla v ^2 \lambda_i < \infty\}$ si i est un nœud du bord
$\mathcal{P}^k(\omega_i)$	$\{u \in \mathbb{P}_k(\omega_i) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\omega_i\}$
$\mathcal{P}_0^k(\omega_i)$	$\mathcal{P}^k(\omega_i) \cap W(\omega_i)$
$\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)$	ensemble des polynômes de degré au plus k sur chaque maille
(ϕ_i, z_i)	solution du problème localisé
$\ \psi\ _{\mathcal{C}, \lambda_i}^2$	$\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi) \lambda_i dx$
$\ v\ _{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2$	$\int_{\omega_i} v ^2 \lambda_i dx$

$\mu_1(\gamma_i)$	$\sup_{\substack{f = (f_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ f_i \in \mathcal{P}_0^3(W_i)}} \frac{\left \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \nabla f_i) \right }{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \ \nabla f_i\ _{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2}}$
$\mu_2(\gamma_i)$	$\sup_{\substack{\chi = (\chi_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ f_i \in \mathcal{P}_0^a(W_i)}} \frac{\left \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \chi_i) \right }{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \ \nabla \chi_i\ _{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2}}, \quad a = 2, 3$
$osc_i^2(g)$	$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} \left(g + \operatorname{div}_h \gamma_h - \frac{1}{ \omega_i } \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h) \right)^2 \lambda_i$
$osc_i^2(\gamma_h)$	$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} \left \gamma_h + \operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) - \frac{1}{ \omega_i } \int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)) \right ^2 \lambda_i$
ν_t	fréquence de vibration angulaire
ρ	densité de la plaque
$\alpha_t, \alpha_{t,h}$	valeurs propres des systèmes continu et discrétisé $\left(\alpha_t = \frac{\rho \nu_t^2}{t^2} \right)$
$\widehat{Res}_1, \widehat{Res}_2$	résidus utilisés pour la partie valeur propre

Introduction

Les équations de Reissner-Mindlin proviennent de la théorie des plaques. Cette dernière est fondamentale pour la construction des bâtiments, des navires et autres véhicules, ainsi que des machines au sens large. En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

Plus formellement, une plaque est un solide délimité par deux plans parallèles, les faces, et un "cylindre" au sens large (de section quelconque et non nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces. Nous définissons :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian.

Nous appelons t l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -t/2$ et le plan supérieur est le plan $z = t/2$ (cf FIG. 1).

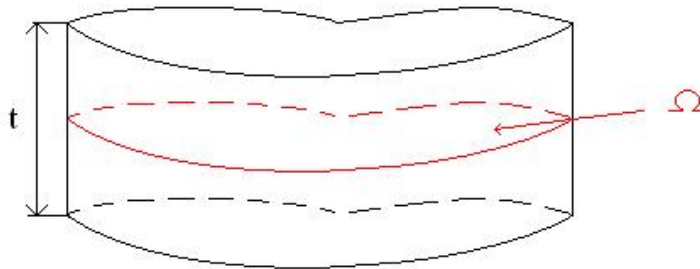


FIG. 1: Exemple de plaque.

Toute plaque sur laquelle on exerce une charge subit une déformation. Cette déformation, si elle est raisonnable, n'est pas irréversible : si la charge est supprimée, la plaque pourra retrouver sa forme d'origine. On dit alors que le matériau est élastique et nous pouvons modéliser cette déformation par le système de l'élasticité en trois dimensions, donné par la loi de Hooke :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{C} \dot{\varepsilon} = 2\tilde{\mu} \dot{\varepsilon} + \tilde{\lambda} \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) I,$$

où $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont les coefficients de Lamé qui sont constants pour un matériau homogène :

$$\tilde{\lambda} = \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} ; \tilde{\mu} = \frac{E}{24(1+\nu)}.$$

Tr est l'opérateur Trace, E est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson, $\dot{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation élastique et $\dot{\sigma}$ est la dérivée particulaire du tenseur des contraintes. Nous nous plaçons dans le cas d'un matériau continu, élastique, homogène et isotrope.

Afin de pouvoir entrer dans le cadre de la théorie des plaques minces, nous allons considérer une plaque de faible épaisseur. Ainsi, nous pourrions effectuer notre étude en deux dimensions, dans le plan médian.

A ce niveau, plusieurs approches sont possibles. Notamment celle de Kirchoff-Love, qui considère que la normale au plan médian lui reste toujours orthogonale : cela nous ramène à un problème de type biharmonique. Malheureusement, cette vision est un peu trop restrictive : plusieurs mouvements possibles de la plaque (comme le cisaillement transversal) ne peuvent pas être pris en compte.

L'idée est de considérer un problème intermédiaire moins général que le système d'élasticité, mais plus général que le système de Kirchoff-Love. Cela nous amène au problème de Reissner-Mindlin qui fait l'objet de cette thèse.

Le problème de Reissner-Mindlin est modélisé par un système d'équations aux dérivées partielles (voir le Chapitre I) défini sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ dont on cherche à obtenir une solution approchée. Pour ce faire, on peut utiliser des espaces d'éléments finis construits à partir de fonctions polynomiales par morceaux définis sur une partition de Ω qu'on appelle maillage. L'idée est alors d'effectuer une estimation de l'erreur commise par l'approximation afin de s'assurer que la solution approchée est suffisamment proche de la solution exacte. Pour y parvenir, il existe deux types d'estimation : l'estimation *a priori* et l'estimation *a posteriori*.

Comme son nom l'indique, l'estimation *a priori* s'effectue avant le calcul à proprement parler, en ce sens qu'elle n'utilise pas la solution approchée, et s'appuie sur des hypothèses de régularité suffisante de la solution exacte. Si u (resp. u_h) est la solution exacte du problème (resp. solution approchée du problème discrétisé), h caractérise la taille du maillage et d représente les données, alors une estimation *a priori* s'écrit sous la forme

$$\|u - u_h\| \leq C(u, d)h^p,$$

où $\|\cdot\|$ est une norme à préciser, $C(u, d)$ est une constante dépendant de la solution exacte, de la régularité du maillage et des données et p est un nombre réel. Si ce dernier est strictement positif, alors il y a convergence et p est appelé ordre de convergence.

Concernant l'étude des équations de Reissner-Mindlin, de nombreuses analyses ont été menées suivant différentes discrétisations ou approches du problème, notamment :

- l'utilisation des espaces de discrétisation conforme constitués de fonctions polynômiales ([AB93], [PS95], [Ly100], [MS02], [LNS07], [CXYZ11], [DRS11]);
- l'utilisation des B-splines ([BBLMS11]);
- l'utilisation d'éléments non-conformes ([BM03], [CLM06], [HS07], [HHL11]);
- l'utilisation des méthodes de Galerkin discontinues ([ABFM07], [Mar08], [BMM10]);
- l'étude globale valable pour plusieurs discrétisations ([FT99], [Fal07]).

Ces différentes études prouvent que les choix des formulations, des espaces de discrétisation et de la triangulation sont primordiaux pour obtenir la convergence des schémas numériques, à un ordre donné.

L'analyse *a priori* pour Reissner-Mindlin peut également être menée dans le cadre d'un problème aux valeurs propres. Plusieurs travaux existent sur ce sujet ([DHLRS99], [DHLRS00], [DHHLR03], [GLP03], [Her04], [LMR10]).

Concernant l'analyse *a posteriori*, la position du problème est différente : à partir de la triangulation, de la solution approchée calculée numériquement et des éventuelles données du problème, il faut trouver une quantité appelée estimateur permettant d'évaluer la distance entre la solution exacte et la solution numérique dans une norme globale à préciser, généralement suggérée par la forme bilinéaire du problème.

Lorsqu'un estimateur *a posteriori* est défini, il faut s'interroger sur les critères et les moyens permettant de juger des performances de cet estimateur. De manière générale, il faut chercher à construire un estimateur dont le comportement asymptotique (quand la taille des éléments h tend vers 0) suit celui de l'erreur. Si on note $\eta(u_h, d, h)$ l'estimateur *a posteriori*, ce comportement se traduit par deux propriétés fondamentales, à savoir :

- la fiabilité de l'estimateur. Cela signifie que l'erreur est majorée par l'estimateur à une constante multiplicative près ($\|u - u_h\| \leq C \eta(u_h, d, h)$). Le contrôle de l'erreur est assuré par celui de l'estimateur ;
- l'efficacité de l'estimateur. Cela signifie que l'estimateur est majoré par l'erreur à une constante multiplicative près ($\eta(u_h, d, h) \leq C' \|u - u_h\|$). L'estimateur ne peut donc pas être démesurément grand sans que l'erreur ne le soit.

Les constantes multiplicatives intervenant dans ces majorations peuvent dépendre des données du problème mais surtout pas de la taille des éléments ni de la solution exacte (contrairement à l'estimation *a priori*). Cependant, il est important de noter que, dans plusieurs cas et comme pour l'estimation *a priori*, la constante multiplicative fait intervenir l'angle minimal de la triangulation. C'est la raison pour laquelle il est difficile de considérer des maillages anisotropes qui n'imposent aucune condition sur la triangulation, notamment l'angle minimal. Dans cette thèse, les maillages considérés seront isotropes. Notons néanmoins que les estimateurs *a posteriori* développés dans les chapitres II et III peuvent être utilisés avec des maillages anisotropes, mais cela implique que les constantes multiplicatives intervenant dans

la fiabilité et l'efficacité peuvent devenir très grandes et la robustesse n'est alors plus assurée si la régularité du maillage se dégrade.

Remarque .0.1 *En général, on définit un estimateur a posteriori comme une somme d'estimateurs a posteriori locaux. Si on note \mathcal{T}_h le maillage et $\eta_T(u_h, d, h)$ l'estimateur local défini sur la maille $T \in \mathcal{T}_h$, alors on veut prouver que*

$$\|u - u_h\| \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h, d, h),$$

et

$$\eta_T(u_h, d, h) \leq C' \|u - u_h\|_{\omega_T},$$

où ω_T est le patch lié à T constitué des mailles reliées à T . Ainsi, on obtient une efficacité locale, ce qui permet de justifier les raffinements adaptatifs de maillage. Cela consiste à raffiner le maillage à l'endroit où l'estimateur local (donc l'erreur locale) est relativement grand et laisser telles quelles les mailles où l'estimateur est suffisamment petit.

Il existe un très large choix pour la création d'estimateurs *a posteriori*, nous nous concentrons ici sur deux d'entre eux.

Tout d'abord, les estimateurs de type résiduel. L'idée consiste à utiliser la forme bilinéaire du problème en l'appliquant à la solution approchée, ce qui définit notre résidu. On utilise ensuite l'équivalence entre la norme de l'erreur et la norme du résidu dans l'espace dual. Le but devient alors d'estimer cette norme du résidu par des quantités dépendant des données du problème, de la solution approchée et des sauts de flux discrets à travers les arêtes de la triangulation.

Bien que ces estimateurs soient les plus utilisés car souvent intuitifs, cette technique peut s'avérer problématique pour le calcul des constantes multiplicatives car elle utilise des majorations avec des constantes souvent non explicites. Pour y remédier, on peut utiliser des estimateurs de type flux équilibrés. L'avantage de cette méthode réside dans la création d'un nouvel élément dans un espace *ad hoc* suffisamment régulier afin d'éviter les termes de saut sur chaque interface de la triangulation. Pour ce faire, il est nécessaire de résoudre des problèmes de type Neumann sur chaque patch d'éléments de la triangulation. Ainsi, seules des inégalités de Cauchy-Schwarz sur les mailles (et non plus sur les arêtes) interviennent, ce qui simplifie le calcul des constantes multiplicatives.

Ce sont ces deux types d'estimateurs que nous développerons dans cette thèse.

Comme nous avons décidé de construire des estimateurs *a posteriori* de type résiduel ou de type flux équilibré, il est fondamental de lister les différents travaux déjà existants sur le problème de Reissner-Mindlin afin de pouvoir rendre compte de nos différentes contributions sur ce domaine. Afin de mieux appréhender les différents apports des nombreux articles sur le problème de Reissner-Mindlin, nous allons regrouper les contributions selon deux domaines :

Les Estimateurs de type Résiduel

– APPROXIMATION CONFORME

Dans [LS05], Lovadina et Stenberg construisent un estimateur *a posteriori* en utilisant la technique d'interpolation liftée pour des éléments finis linéaires ou quadratiques, mais ce procédé nécessite une hypothèse de saturation qui n'est pas réellement prouvée. Cependant, l'utilisation d'une norme $|||(\cdot, \cdot)|||_h$ dépendante du maillage pour la définition de l'erreur permet d'obtenir un estimateur robuste en t .

L'idée principale de Carstensen et Hu [CH07] est d'établir un estimateur d'erreur *a posteriori* pour une large classe de méthodes d'éléments finis conformes pour le problème de Reissner-Mindlin (e.g. MITC [BBF, HT82, BD85, BBF89, SS97], DL [DL92], DHHLR [DHHLR03], Hu [Hu04]) avec l'introduction d'un opérateur de réduction \mathbf{R}_h propre à chaque cas et nécessaire pour éviter le phénomène de verrouillage numérique ("locking free") présenté lors d'un test numérique dans l'annexe E. De plus, comme précédemment, l'utilisation d'une norme dépendante du maillage permet d'assurer la robustesse de l'estimateur.

Dans [Lib00], Liberman utilise une norme faible $\|(\cdot, \cdot)\|_{*,\Omega}$ pour l'erreur qui correspond à la norme duale de l'espace $H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$. Cependant, cette technique nécessite la vérification d'une condition inf-sup. L'estimateur ainsi construit est défini localement, ce qui permet de vérifier les fiabilité et efficacité locales.

Une technique différente est proposée par Carstensen et Weinberg [CW01]. Elle consiste à modifier la forme bilinéaire initiale en décomposant le facteur t^{-2} avec deux paramètres de stabilisation α et β , ce qui rend cette méthode mixte (on ajoute une inconnue au problème) et évite le verrouillage numérique sans l'introduction de l'opérateur de réduction \mathbf{R}_h (la force de cisaillement discrète γ_h est alors une inconnue du problème). Ensuite, en décomposant $t^2\gamma_h - (1 - \alpha t^2)(\theta_h - \nabla\omega_h)$ en somme d'un élément de $H_0(\text{rot}, \Omega)$ et d'un élément de $L^2(\Omega)$, il est possible d'exprimer les différents termes dans les différentes normes qui interviennent (comme la norme $H^{-1}(\text{div})$ par exemple). Cette méthode est adaptative et des tests numériques valident les résultats.

Carstensen et Schöberl [CS06] reprennent le principe de stabilisation de la forme bilinéaire. Les paramètres de stabilisation interviennent dans l'erreur et l'estimateur, mais ils doivent être choisis avec le plus grand soin afin de ne pas obtenir un estimateur qui explose. Les auteurs nous fournissent un algorithme de raffinement de maillage adaptatif et le valident par des résultats numériques.

– APPROXIMATION NON-CONFORME

Dans [Car02], Carstensen utilise la décomposition de Helmholtz pour les forces de cisaillement exacte et discrète afin d'obtenir un système de quatre équations à quatre inconnues équivalent au problème de Reissner-Mindlin initial. Cela permet de n'utiliser qu'un élément de cette décomposition dans la définition de l'erreur. On peut notamment remarquer que seul le déplacement transversal est approché de manière non-conforme. L'estimateur *a posteriori* fiable et efficace qu'il présente possède les

coefficients $\min\{1; (\frac{h_T}{t})^2\}$ et $\min\{t^3, t^2 h_E\}$ qui convergent pour h suffisamment petit ($h \ll t$) (où h_T est le diamètre de T et h_E est la longueur de l'arête E). De plus, on peut remarquer la présence du laplacien de ϕ_h dans l'estimateur, ce qui implique un certain degré de discrétisation pour que cela soit vraiment pertinent (au moins de degré 2).

Carstensen et Weinberg [CW03] reprennent le principe de [Car02] en modifiant l'expression de l'estimateur afin d'éviter d'implémenter la projection et le laplacien. Des tests numériques valident les résultats énoncés.

– APPROXIMATIONS CONFORMES ET NON-CONFORMES

Hu et Huang [HH10] étendent l'idée de Carstensen et Schöberl en ajoutant aux paramètres de stabilisation un opérateur linéaire approprié L appelé opérateur de liaison. L'avantage de ce principe est qu'il est applicable pour de très nombreux espaces de discrétisation conformes et/ou non-conformes (e.g. MITC, DL, MOZF et $\mathbb{P}_1 + B_K - \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0$). L'estimateur fait intervenir de nombreux supremums ainsi que des ratios h/t qui nécessitent une taille de maillage suffisamment petite pour être efficace.

Les Estimateurs de type Flux Équilibrés

– APPROXIMATION CONFORME

Le problème majeur des estimateurs de type résiduel est la méconnaissance des constantes multiplicatives intervenant lors des différentes majorations. L'idée est alors d'utiliser les flux équilibrés comme dans le travail de Frolov et al. ([FNR06], [RF06]) afin d'obtenir une constante multiplicative égale à 1. Le principe consiste à introduire la fonctionnelle d'énergie pour la définition de l'erreur et de construire de nouveaux éléments notés x^* et y^* dans des espaces *ad hoc* (qui ne sont pas donnés explicitement) pour pouvoir éliminer les différents sauts qui apparaissent naturellement avec l'étude de type résiduel. Enfin, quelques tests numériques leur permettent, par le biais des ratios de chaque contribution de l'estimateur par l'erreur, de visualiser le fait que la constante multiplicative intervenant lors de la fiabilité de l'estimateur est bien égale à 1.

Plan de la thèse

Afin de simplifier la lecture, nous présentons ici les points essentiels des différents chapitres de cette thèse. Cependant, afin de pouvoir situer notre travail dans la bibliographie existante, il est nécessaire de le comparer avec les autres références concernant ce sujet, ce qui sera fait lors de l'introduction de chaque chapitre.

Le but du premier chapitre est de mieux appréhender le problème de Reissner-Mindlin et de présenter les différentes notations et définitions indispensables pour la suite de l'étude. De plus, les résultats de l'analyse *a priori* sont rappelés.

Le deuxième chapitre est consacré à la création d'un estimateur *a posteriori* de type flux équilibré, fiable et efficace, pour le cas de la discrétisation conforme. Une grande attention est portée sur les diverses relations et inégalités développées afin de pouvoir contrôler la constante multiplicative finale, ce qui constitue le principal intérêt de ce chapitre. Une sous-section sera entièrement dédiée au calcul de la constante multiplicative afin de la rendre la plus petite possible.

Le troisième chapitre prolonge le précédent afin de rendre l'estimateur développé robuste en t , ce qui est possible en ajoutant un terme supplémentaire dans l'erreur. De nombreux résultats démontrés au chapitre précédent seront réutilisés et nous démontrerons plusieurs inégalités supplémentaires pour parvenir au résultat désiré. Des résultats numériques viendront justifier la performance de ce nouvel estimateur en utilisant des maillages structurés et non structurés.

Le quatrième chapitre est dévolu à l'analyse non-conforme du problème de Reissner-Mindlin. Cette étude est menée indépendamment du choix des espaces de discrétisation. L'idée principale est de construire une solution numérique régularisée (interpolation d'Oswald) à partir de laquelle nous estimons la distance à la solution exacte. Le problème principal de la discrétisation non conforme réside dans la nécessité d'ajouter un terme de pénalisation pour que le problème discret soit bien posé. Des tests numériques appuieront nos résultats.

Le cinquième chapitre est une adaptation de l'article de Morin et al. [MNS02] pour le problème de Reissner-Mindlin, ce qui constitue une vision différente de celles présentées précédemment. L'idée est de construire l'estimateur à partir des solutions de problèmes locaux définis sur les différents patches de la triangulation pour deux éléments finis différents (à savoir MITC3 et DL). Comme pour les précédentes études, l'estimateur ainsi construit sera fiable, efficace et robuste en t .

Le dernier chapitre concerne le problème aux valeurs propres associé à Reissner-Mindlin. Nous rappellerons tout d'abord l'analyse *a priori* afin de déterminer l'ordre de convergence attendu ainsi que les éventuels termes superconvergents. Nous construirons ensuite un estimateur *a posteriori* fiable et efficace permettant d'évaluer la distance entre les vecteurs propres des problèmes continu et discret, ainsi que la distance entre les valeurs propres des problèmes continu et discret. Ici, les solutions exactes apparaissent dans l'estimateur, mais elles constituent des termes superconvergents (lorsque la valeur propre associée est simple), ce qui sera démontré et permet de justifier la pertinence de l'estimateur. Des résultats numériques montreront que nos résultats coïncident avec les éléments bibliographiques existants sur le sujet pour l'analyse *a priori* et que notre estimateur converge au bon ordre.

Tous les résultats numériques qui seront présentés ont été effectués en utilisant la librairie GetFEM++ (<http://download.gna.org/getfem/html/homepage/>).

Table des matières

Remerciements	3
Résumés	7
Notations	9
Introduction	13
I Problème de Reissner-Mindlin	25
I.1 Mise en place du problème	25
I.1.1 Discrétisation	29
I.2 Analyse <i>a priori</i>	31
I.3 Notations et définitions	34
II Estimateur équilibré	37
II.1 Introduction	37
II.2 Obtention de l'estimateur - Fiabilité	38
II.2.1 Relation nécessaire	38
II.2.2 Fiabilité de l'estimateur	40
II.2.3 Détermination des constantes ε et α	45
II.3 Efficacité de l'estimateur	50
III Estimateur équilibré robuste en t	61
III.1 Introduction	61
III.2 Relations nécessaires	62
III.3 Fiabilité de l'estimateur	64
III.3.1 Calculs des résidus	69
III.3.2 Conclusion	73
III.4 Efficacité de l'estimateur	74
III.5 Résultats numériques	75
III.5.1 Maillages structurés pour le cas conforme	76
III.5.2 Maillages non-structurés	78
III.5.3 Évaluation de $\kappa_2(T)$	80

IV	Approximation non-conforme	89
IV.1	Introduction	89
IV.1.1	Notations et définitions	92
IV.2	Fiabilité de l'estimateur non-conforme	92
IV.2.1	Conclusion	99
IV.3	Efficacité de l'estimateur non-conforme	100
IV.3.1	Conclusion	112
IV.4	Résultats numériques	112
V	Problèmes locaux sur les patches	115
V.1	Introduction	115
V.2	Fiabilité de l'estimateur	119
V.3	Efficacité de l'estimateur	132
V.3.1	Conclusion	141
VI	Calcul de valeurs propres	143
VI.1	Introduction	143
VI.2	Estimation <i>a priori</i>	147
VI.3	Fiabilité de l'estimateur	149
VI.3.1	Évaluation des résidus	152
VI.3.2	Conclusion - Fiabilité de l'estimateur	154
VI.4	Estimateur pour la différence des valeurs propres	159
VI.5	Efficacité de l'estimateur	162
VI.6	Résultats numériques	167
	Conclusion	171
A	Construction de x^*	175
B	Construction de y^*	181
B.1	Vecteurs de base de Raviart-Thomas dans le triangle de référence	182
C	Solution exacte du problème de Reissner-Mindlin	183
D	Programmation du système de Reissner-Mindlin	187
D.1	Produit scalaire entre $\mathbf{R}_h\phi_h$ et λ_i - Construction de la matrice $RM2$	188
D.2	Vecteurs de base de Nédélec dans le triangle de référence	190
D.3	Produit scalaire entre $\mathbf{R}_h\phi_h$ et $\mathbf{R}_h(\lambda_j, 0)$ (resp. $\mathbf{R}_h(0, \lambda_j)$) - Construction de la matrice $RM4$	190
E	Nécessité de l'opérateur \mathbf{R}_h - Verrouillage numérique	191

F	Valeurs des constantes et relations	193
F.1	Détermination des constantes indépendantes de Ω et de la triangulation . . .	193
F.1.1	Valeur de c_K	193
F.1.2	Valeur de \widehat{c}_K	194
F.2	Détermination des constantes liées à Ω et/ou à la triangulation - Valeurs des constantes choisies pour la partie numérique	195
F.2.1	Valeur de c_F	195
F.2.2	Relation pour $c_{\mathbf{R}}$	195
G	Projections locales $\widetilde{\Pi}_i$ et Π_i	197
G.1	Calcul de $\widetilde{\Pi}_i \psi$	197
G.1.1	Calcul des coefficients	197
G.1.2	Fonctions de base	199
G.1.3	Démonstration de $\ \nabla \widetilde{\Pi}_i \psi\ _{L^2(\Omega), \lambda_i} \lesssim \ \nabla \psi\ _{L^2(\Omega), \lambda_i}$	199
G.2	Calcul de $\Pi_i v$	201
G.2.1	Calcul des coefficients	201
G.2.2	Fonctions de base	203
G.2.3	Démonstration de $\ \nabla \Pi_i v\ _{L^2(\Omega), \lambda_i} \lesssim \ \nabla v\ _{L^2(\Omega), \lambda_i}$	203
	Bibliographie	205

Chapitre I

Problème de Reissner-Mindlin

Sommaire

I.1	Mise en place du problème	25
I.2	Analyse <i>a priori</i>	31
I.3	Notations et définitions	34

I.1 Mise en place du problème

Le modèle de Reissner-Mindlin décrit une déformation linéaire élastique d'une plaque d'épaisseur t en fonction de deux variables :

- une fonction scalaire w qui correspond au déplacement transversal du plan médian ;
- une fonction vectorielle ϕ qui correspond à la rotation de la normale du plan médian sous la déformation.

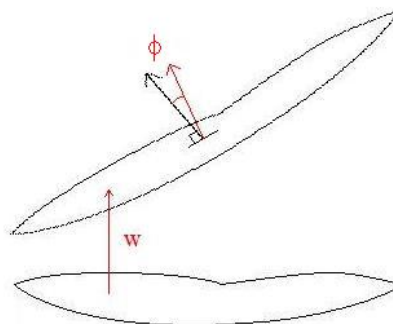


FIG. I.1: Illustration des variables sous la déformation de la plaque.

Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le domaine connexe occupé par le plan médian à l'origine et $\partial\Omega$ sa frontière supposée lipschitzienne.

Le problème de Reissner-Mindlin nous conduit au système d'équations suivant d'inconnues ω et ϕ :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) = \gamma & \text{dans } \Omega, \quad (i) \\ -\operatorname{div} \gamma = g & \text{dans } \Omega, \quad (ii) \\ \gamma = \lambda t^{-2}(\nabla\omega - \phi) & \text{dans } \Omega, \quad (iii) \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

où

- γ est la force de cisaillement ;
- $\varepsilon(\phi) = \frac{1}{2}(\nabla\phi + (\nabla\phi)^T)$; $\nabla\phi := \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1 & \partial_2\phi_1 \\ \partial_1\phi_2 & \partial_2\phi_2 \end{pmatrix}$;
- ∂_i représente la dérivée de la fonction par rapport à la i -ième variable, $i = 1, 2$;
- gt^3 représente la charge active sur la plaque ;
- \mathcal{C} est le tenseur d'élasticité linéaire défini par

$$\mathcal{C}\varepsilon(\phi) := 2\tilde{\mu}\varepsilon(\phi) + \tilde{\lambda}\operatorname{Tr}(\varepsilon(\phi))\mathbf{I};$$

où \mathbf{I} est la matrice identité, Tr est l'opérateur trace et $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ et λ sont les coefficients de Lamé définis par

$$\tilde{\lambda} = \frac{E\nu}{12(1-\nu^2)} ; \quad \tilde{\mu} = \frac{E}{24(1+\nu)} ; \quad \lambda = \frac{Ek}{2(1+\nu)};$$

où E est le module de Young, ν est le coefficient de Poisson et k est le coefficient de réduction.

Remarque I.1.1 \mathcal{C} est un opérateur symétrique défini positif : nous pouvons alors définir $\mathcal{C}^{1/2}$ tel que $\mathcal{C}^{1/2} \circ \mathcal{C}^{1/2} = \mathcal{C}$, ainsi que $\mathcal{C}^{-1/2}$ tel que $\mathcal{C}^{1/2} \circ \mathcal{C}^{-1/2}$ est l'application identité. De plus, pour tout $\phi \in (H_0^1(\Omega))^2$, $\mathcal{C}\varepsilon(\phi)$ est une matrice symétrique.

Nous supposons que $g \in L^2(\Omega)$ et qu'il existe deux constantes strictement positives ζ_1 , ζ_2 telles que

$$\zeta_1|\chi|^2 \leq \mathcal{C}\chi : \chi \leq \zeta_2|\chi|^2, \quad \text{pour tout } \chi \in \mathcal{M}_S^2 \text{ avec } |\chi|^2 = \chi : \chi; \quad (\text{I.2})$$

où \mathcal{M}_S^2 désigne l'espace des tenseurs symétriques de rang 2, et

$$A : B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4.$$

Cette condition est vraie si $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ vérifient $\tilde{\mu} > 0$ et $\tilde{\lambda} + \tilde{\mu} > 0$.

Afin de résoudre le système (I.1), nous imposons des conditions de Dirichlet aux bords homogènes :

$$\begin{cases} \omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{(la plaque est fixée sur les bords et ne se déplace donc pas);} \\ \phi = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{(la plaque ne risque pas de se détacher sous l'effet de la charge).} \end{cases}$$

Nous allons maintenant prouver l'existence et l'unicité de la solution du problème (I.1). Pour ce faire, écrivons ce système sous sa forme faible : Trouver $(\omega, \phi) \in W \times \Theta := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$ tels que

$$a(\phi, \psi) + (\gamma, \nabla v - \psi) = (g, v) \text{ pour tout } (v, \psi) \in W \times \Theta. \quad (\text{I.3})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in L^2(\Omega), \nabla v = \begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \partial_2 v \end{pmatrix}, \\ \forall u, v \in L^2(\Omega), (u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx, \\ \forall \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega)^2, (\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \cdot \psi \, dx = \int_{\Omega} (\phi_1 \psi_1 + \phi_2 \psi_2) \, dx, \\ a(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\psi) \, dx \text{ est le terme d'élasticité,} \\ \gamma = \lambda t^{-2}(\nabla \omega - \phi). \end{array} \right.$$

Remarque I.1.2 Nous munissons $H_0^1(\Omega)$ (respectivement $H_0^1(\Omega)^2$) de la norme $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ (respectivement $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)^2} = \|\cdot\|_{H^1(\Omega)^2} = \|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)^2}$). Cependant, par souci de lisibilité, nous écrirons $\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}$ au lieu de $\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)^2}$ pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$ (de même pour la norme L^2).

Notons que a est clairement coercive sur $H_0^1(\Omega)^2$ grâce à (I.2) par l'inégalité de Korn (cf. [GR86, Lemma 4.1] par exemple). Nous posons c_a sa constante d'ellipticité.

Théorème I.1.1 *Le problème (I.3) admet une unique solution $(\omega, \phi) \in W \times \Theta$.*

Preuve: Posons $F_t([\omega, \phi], [v, \psi]) := a(\phi, \psi) + \lambda t^{-2}(\nabla \omega - \phi, \nabla v - \psi)$. F_t est clairement linéaire en chacune de ses variables et (g, v) est linéaire en v . Montrons que F_t est coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$, c'est-à-dire montrons l'existence d'une constante C_t strictement positive, indépendante de (ω, ϕ) telle que :

$$F_t([\omega, \phi], [\omega, \phi]) \geq C_t(\|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2). \quad (\text{I.4})$$

$$\begin{aligned} F_t([\omega, \phi], [\omega, \phi]) &= a(\phi, \phi) + \lambda t^{-2}\|\nabla \omega - \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= a(\phi, \phi) + \lambda t^{-2}\{\|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(\nabla \omega, \phi)_{L^2(\Omega)}\}. \end{aligned}$$

Par la coercivité de a et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$F_t([\omega, \phi], [\omega, \phi]) \geq c_a\|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2}\{\|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}\}.$$

Grâce à l'inégalité arithmético-géométrique, nous avons pour tout $\eta > 0$:

$$\begin{aligned} F_t([\omega, \phi], [\omega, \phi]) &\geq c_a \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2} \left\{ \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 - \eta \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{\eta} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ &= c_a \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2} \left\{ (1 - \eta) \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ &\geq \frac{c_a}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2} (1 - \eta) \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\{ \frac{c_a}{2c_F^2} + \lambda t^{-2} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) \right\} \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

où c_F est la constante de Friedrichs vérifiant $\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)^2$.

Prenons $0 < \eta := \frac{2c_F^2 \lambda t^{-2}}{c_a + 2c_F^2 \lambda t^{-2}} < 1$. Avec ce choix de η , nous avons $1 - \eta > 0$ et $\frac{c_a}{2c_F^2} + \lambda t^{-2} \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) = 0$.

D'où :

$$F_t([\omega, \phi], [\omega, \phi]) \geq \frac{c_a}{2} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2} \frac{c_a}{c_a + 2c_F^2 \lambda t^{-2}} \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui prouve (I.4). Nous concluons par le lemme de Lax-Milgram, avec comme constante de coercivité $C_t := \min \left\{ \frac{c_a}{2}, \lambda t^{-2} \frac{c_a}{c_a + 2c_F^2 \lambda t^{-2}} \right\}$. \square

Remarque I.1.3 *La constante de coercivité C_t donnée précédemment dépend de l'épaisseur de plaque t . Cependant, nous pouvons remarquer que, lorsque $t \rightarrow 0$, $C_t \rightarrow C_0 := \min(\frac{c_a}{2}, \frac{c_a}{2c_F^2})$ qui est strictement positive.*

Introduisons maintenant la fonctionnelle d'énergie liée au problème : Pour $(v, \psi) \in W \times \Theta$, nous introduisons :

$$FE(v, \psi) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{C}\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi) + \frac{1}{2} \lambda t^{-2} |\nabla v - \psi|^2 - gv \right\} dx. \quad (I.5)$$

Remarque I.1.4 *L'unique solution de (I.3) rend la fonctionnelle d'énergie minimale.*

Nous pouvons du reste noter qu'il est possible de réécrire (I.3) en une formulation équivalente faisant intervenir trois équations : Trouver $(\omega, \phi, \gamma) \in W \times \Theta \times L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\psi) dx - \int_{\Omega} \gamma \cdot \psi dx = 0 & \forall \psi \in \Theta, \\ \int_{\Omega} \gamma \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} gv dx & \forall v \in W, \\ \int_{\Omega} \{\lambda^{-1} t^2 \gamma - (\nabla \omega - \phi)\} \cdot \tau dx = 0 & \forall \tau \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (I.6)$$

I.1.1 Discrétisation

Nous supposons que le problème (I.3) est résolu de manière conforme (sous forme discrète), c'est-à-dire que $(\omega_h, \phi_h) \in W_h \times \Theta_h \subset W \times \Theta$ est une approximation de (ω, ϕ) , où W_h et Θ_h sont des espaces de dimension finie liés à une triangulation régulière \mathcal{T}_h de $\bar{\Omega}$. Le problème qui se pose alors est de trouver un schéma dont la robustesse n'est pas perturbée lorsque l'épaisseur de plaque devient très petite. Par exemple, si nous utilisons l'espace des éléments finis de faible degré, l'approximation résultante souffre du problème dit de "verrouillage numérique", ce que nous allons montrer. Ce problème se décrit facilement en notant que lorsque $t \rightarrow 0$, la solution de (I.3) approche (ω^0, ϕ^0) avec $\phi^0 = \nabla\omega^0$.

Afin de pouvoir mieux visualiser la dépendance en t , nous poserons juste ici $(\omega_h^t, \phi_h^t) \in W_h \times \Theta_h$ la solution du problème

$$F_t[(\omega_h^t, \phi_h^t), (v_h, \psi_h)] = a(\phi_h^t, \psi_h) + \lambda t^{-2}(\nabla\omega_h^t - \phi_h^t, \nabla v_h - \psi_h) = (g, v_h) \quad \forall (v_h, \psi_h) \in W_h \times \Theta_h. \quad (\text{I.7})$$

Afin de faciliter l'écriture, une inégalité $a \lesssim b$ remplace $a \leq Cb$ où C désigne une constante positive indépendante de h, t , mais qui peut dépendre des coefficients de Lamé; et $a \approx b$ signifie $a \lesssim b \lesssim a$.

En utilisant la coercivité uniforme de la fonctionnelle F_t ainsi qu'une inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons pour $v_h = \omega_h^t$ et $\psi_h = \phi_h^t$:

$$\|\nabla\omega_h^t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi_h^t\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \|g\|_{L^2(\Omega)}\|\omega_h^t\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par une inégalité de Poincaré, nous en déduisons :

$$\|\nabla\omega_h^t\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\phi_h^t\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui implique que la suite $((\omega_h^t, \phi_h^t))_{t>0}$ est bornée dans $W_h \times \Theta_h$. Ainsi, il existe une sous-suite notée également $((\omega_h^t, \phi_h^t))_{t>0}$ qui converge fortement vers (ω_h^0, ϕ_h^0) dans $W_h \times \Theta_h$. Maintenant, si nous multiplions (I.7) par t^2 et en passant à la limite lorsque $t \rightarrow 0$ en utilisant la convergence forte, nous avons :

$$(\nabla\omega_h^0 - \phi_h^0, \nabla v_h - \psi_h) = 0, \quad \forall (v_h, \psi_h) \in W_h \times \Theta_h.$$

Or, comme $(\omega_h^0, \phi_h^0) \in W_h \times \Theta_h$, nous pouvons prendre $v_h = \omega_h^0$ et $\psi_h = \phi_h^0$, ce qui implique que :

$$\nabla\omega_h^0 = \phi_h^0.$$

C'est à ce niveau qu'apparaît le problème de verrouillage numérique car, pour des espaces d'éléments finis de faible degré, cette dernière condition est trop restrictive pour obtenir une bonne approximation des fonctions lisses. En particulier, si nous choisissons des fonctions linéaires continues par morceaux pour approcher les deux variables, alors $\phi_h^0 = \nabla\omega_h^0$ devrait

être continue et constante par morceaux, avec 0 comme condition aux bords : seul le choix $\phi_h^0 = 0$ peut satisfaire toutes ces conditions. D'où le fait que, à moins que la combinaison des espaces d'éléments finis ne soit choisie judicieusement, $\phi_h^t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$. Dès lors, pour t suffisamment petit, ϕ_h^t est proche de 0 et donc éloigné de ϕ^0 lorsque $\phi^0 \neq 0$. Ce phénomène est illustré en Annexe E.

C'est pourquoi la plupart des schémas d'éléments finis utilisent un opérateur dit de réduction (noté ici \mathbf{R}_h) en donnant une condition moins restrictive ($\mathbf{R}_h \phi_h^0 = \nabla \omega_h^0$ au lieu de $\phi_h^0 = \nabla \omega_h^0$). Le problème discret s'écrit alors : Trouver $(\omega_h, \phi_h) \in W_h \times \Theta_h$ tels que

$$a(\phi_h, \psi_h) + (\gamma_h, \nabla v_h - \mathbf{R}_h \psi_h) = (g, v_h) \text{ pour tout } (v_h, \psi_h) \in W_h \times \Theta_h, \quad (\text{I.8})$$

avec la force discrète de cisaillement

$$\gamma_h = \lambda t^{-2} (\nabla \omega_h - \mathbf{R}_h \phi_h), \quad (\text{I.9})$$

où $\mathbf{R}_h : \Theta_h \rightarrow \Gamma_h$ est l'opérateur de réduction au sens du verrouillage numérique à valeurs dans un espace discret Γ_h à préciser¹ (il dépend du choix des espaces W_h et Θ_h).

Nous ferons également l'hypothèse suivante sur \mathbf{R}_h :

$$(\text{H}) \text{ Pour tout } \psi_h \in \Theta_h, \mathbf{R}_h \psi_h \in H_0(\text{rot}, \Omega);$$

où $H_0(\text{rot}, \Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega)^2 \mid \text{rot } v \in L^2(\Omega) \text{ et } v \times n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$ où n est le vecteur unitaire normal sur $\partial\Omega$ sortant de Ω , et si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in L^2(\Omega)^2$ et $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$, alors $v \times n = v_1 n_2 - v_2 n_1$ et $\text{rot } v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$.

Sous l'hypothèse (H), nous avons que $(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h \in H_0(\text{rot}, \Omega)$. En conséquence, d'après [BF91, page 299], il existe $z \in H_0^1(\Omega)$ et $\beta \in H_0^1(\Omega)^2$ tels que :

$$(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h = \nabla z - \beta \text{ (appelée décomposition de Helmholtz)}, \quad (\text{I.10})$$

ainsi qu'une constante C telle que $\|z\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\beta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2$,
où

$$\left| \begin{array}{ll} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 & \forall u \in H_0^1(\Omega) \text{ ou } H_0^1(\Omega)^2, \\ \|u\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{rot } u\|_{L^2(\Omega)}^2 & \forall u \in H_0(\text{rot}, \Omega). \end{array} \right.$$

¹Un exemple de construction de l'opérateur \mathbf{R}_h est donné dans l'annexe D dans le cas d'une discrétisation de type MITC3.

I.2 Analyse a priori

Avant de commencer à proprement parler de l'analyse *a posteriori* de l'approximation numérique de l'équation de Reissner-Mindlin, nous allons rappeler les clés de l'étude *a priori* provenant de [Fal07, partie 7]. Les résultats que nous obtiendrons utiliseront les hypothèses suivantes concernant les propriétés d'approximation des sous-espaces de dimension finie et de l'opérateur \mathbf{R}_h , à savoir :

$$\nabla W_h \subset \Gamma_h, \quad (\text{I.11})$$

et l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante du maillage et de t , telle que

$$\|\psi - \mathbf{R}_h\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|\psi\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \psi \in \Theta_h, \quad (\text{I.12})$$

où h représente la taille du maillage définie par $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$, avec $\text{diam}(T)$ représentant le diamètre de la maille T (si T est un triangle, le diamètre de T est la longueur de la plus grande arête du triangle).

Posons $M_r = \{p \in C^0(\overline{\Omega}); p|_T \in \mathbb{P}_r, \forall T \in \mathcal{T}_h\}$ l'espace des polynômes continus par morceaux de degré $\leq r$, ainsi que $r_0 \geq -1$ qui représente le plus grand entier pour lequel

$$(\zeta - \mathbf{R}_h\zeta, v) = 0, \quad \forall \zeta \in \Theta_h \text{ et } \forall v \in M_r. \quad (\text{I.13})$$

De manière évidente, la relation (I.13) est vérifiée lorsque $r = -1$ pour lequel $M_{-1} = \{0\}$. Enfin, nous désignons par Π^0 la projection $L^2(\Omega)^2$ sur M_{r_0} définie par :

$$(\zeta - \Pi^0\zeta, v) = 0, \quad \forall \zeta \in L^2(\Omega)^2 \text{ et } \forall v \in M_{r_0}. \quad (\text{I.14})$$

Nous avons, d'après [DL92, Lemma 3.1], le théorème suivant :

Théorème I.2.1 *Soient (ϕ, ω) solutions de (I.3) et (ϕ_h, ω_h) solutions de (I.8). Soient $\phi^I \in \Theta_h$, $\omega^I \in W_h$ quelconques. Définissons $\gamma^I = \lambda t^{-2}(\nabla \omega^I - \mathbf{R}_h\phi^I) \in \Gamma_h$ et rappelons que $\gamma = \lambda t^{-2}(\nabla \omega - \phi)$ et $\gamma_h = \lambda t^{-2}(\nabla \omega_h - \mathbf{R}_h\phi_h)$. Alors :*

$$\|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} + \lambda^{-1/2}t\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\phi - \phi^I\|_{H^1(\Omega)} + \lambda^{-1/2}t\|\gamma - \gamma^I\|_{L^2(\Omega)} + h\|\gamma - \Pi^0\gamma\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve: De manière évidente, nous avons pour tout $(v_h, \psi_h) \in W_h \times \Theta_h$

$$a(\phi - \phi_h, \psi_h) + (\gamma - \gamma_h, \nabla v_h - \mathbf{R}_h\psi_h) = (\gamma, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi_h), \quad (\text{I.15})$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} & a(\phi^I - \phi_h, \psi_h) + (\gamma^I - \gamma_h, \nabla v_h - \mathbf{R}_h\psi_h) \\ &= a(\phi^I - \phi, \psi_h) + (\gamma^I - \gamma, \nabla v_h - \mathbf{R}_h\psi_h) + (\gamma, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi_h). \end{aligned}$$

En choisissant $\psi_h = \phi^I - \phi_h$, $v_h = \omega^I - \omega_h$, en notant que $\nabla\omega^I - \mathbf{R}_h\phi^I = \lambda^{-1}t^2\gamma^I$ et $\nabla\omega_h - \mathbf{R}_h\phi_h = \lambda^{-1}t^2\gamma_h$, nous avons l'identité

$$\begin{aligned} & a(\phi^I - \phi_h, \phi^I - \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma^I - \gamma_h, \gamma^I - \gamma_h) \\ &= a(\phi^I - \phi, \phi^I - \phi) + \lambda^{-1}t^2(\gamma^I - \gamma, \gamma^I - \gamma_h) + (\gamma, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(\phi^I - \phi_h)). \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Nous allons maintenant majorer les trois termes de la partie droite de cette dernière égalité. Tout d'abord, En utilisant deux inégalités de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} & a(\phi^I - \phi, \phi^I - \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma^I - \gamma, \gamma^I - \gamma_h) \\ & \leq a(\phi^I - \phi, \phi^I - \phi)^{1/2} a(\phi^I - \phi_h, \phi^I - \phi_h)^{1/2} + \lambda^{-1/2}t \|\gamma^I - \gamma\|_{L^2(\Omega)} \lambda^{-1/2}t \|\gamma^I - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Ensuite, en se rappelant la définition de Π^0 donnée par la relation (I.14), nous avons par la relation (I.13) :

$$(\Pi^0\gamma, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(\phi^I - \phi_h)) = 0.$$

Ainsi, par la relation (I.12) et une inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante du maillage et de t pour la majoration du dernier terme :

$$\begin{aligned} |(\gamma, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(\phi^I - \phi_h))| &= |(\gamma - \Pi^0\gamma, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(\phi^I - \phi_h))| \\ &\leq \|\gamma - \Pi^0\gamma\|_{L^2(\Omega)} \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(\phi^I - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch \|\gamma - \Pi^0\gamma\|_{L^2(\Omega)} \|\phi^I - \phi_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Nous déduisons alors de (I.17) et (I.18) que :

$$\begin{aligned} & a(\phi^I - \phi_h, \phi^I - \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma^I - \gamma_h, \gamma^I - \gamma_h) \\ & \lesssim a(\phi^I - \phi, \phi^I - \phi)^{1/2} a(\phi^I - \phi_h, \phi^I - \phi_h)^{1/2} + \lambda^{-1/2}t \|\gamma^I - \gamma\|_{L^2(\Omega)} \lambda^{-1/2}t \|\gamma^I - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + h \|\gamma - \Pi^0\gamma\|_{L^2(\Omega)} \|\phi^I - \phi_h\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{I.19})$$

D'après l'inégalité de Korn, nous avons l'existence de deux constantes C et C' strictement positives et indépendantes de h et de t telle que pour tout $\psi \in \Theta$:

$$\|\psi\|_{H^1(\Omega)} \leq C a(\psi, \psi)^{1/2} \text{ et } a(\psi, \psi)^{1/2} \leq C' \|\psi\|_{H^1(\Omega)}. \quad (\text{I.20})$$

Ainsi, en utilisant la première majoration de (I.20) et une inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, nous avons par (I.19) :

$$\begin{aligned} & a(\phi^I - \phi_h, \phi^I - \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma^I - \gamma_h, \gamma^I - \gamma_h) \\ & \lesssim a(\phi^I - \phi, \phi^I - \phi) + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma^I - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^2 \|\gamma - \Pi^0\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

Le théorème découle alors facilement des inégalités triangulaires, de (I.20) et de (I.21). \square

Ce théorème permettra de prendre ω^I et ϕ^I comme interpolés *ad hoc* dans W_h et Θ_h . Notons néanmoins que si nous appliquons ce théorème de manière simpliste, alors l'estimation

d'erreur *a priori* que nous obtiendrons explosera lorsque $t \rightarrow 0$. Plus précisément, si nous utilisons la simple estimation

$$\begin{aligned} t\|\gamma - \gamma^I\|_{L^2(\Omega)} &= \lambda t^{-1}\|\nabla(\omega - \omega^I) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi^I)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \lambda t^{-1}(\|\nabla(\omega - \omega^I)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \mathbf{R}_h\phi^I\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

et que nous utilisons la théorie de l'approximation pour majorer séparément chaque terme, alors la majoration contiendra le terme t^{-1} .

L'idée-clé pour utiliser ce théorème afin d'obtenir un estimateur indépendant de l'épaisseur de plaque t est de trouver des fonctions $\phi^I \in \Theta_h$ et $\omega^I \in W_h$ qui satisfont

$$\gamma^I = \lambda t^{-2}(\nabla\omega^I - \mathbf{R}_h\phi^I) = \mathbf{R}_h\gamma. \quad (\text{I.22})$$

Dans ce cas, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire I.2.1 *Si $\phi^I \in \Theta_h$ et $\omega^I \in W_h$ satisfont (I.22), alors*

$$\|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} + \lambda^{1/2}t\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\phi - \phi^I\|_{H^1(\Omega)} + \lambda^{1/2}t\|\gamma - \mathbf{R}_h\gamma\|_{L^2(\Omega)} + h\|\gamma - \Pi^0\gamma\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si nous faisons aussi des hypothèses sur les propriétés d'approximation des fonctions ϕ , ω par ϕ^I , ω^I et sur les régularités des fonctions ϕ et ω , nous obtenons immédiatement l'ordre de convergence *a priori* donné par le résultat suivant :

Théorème I.2.2 *Soit $n \geq 1$ et supposons que pour tout $\phi \in H^{n+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $\omega \in H^{n+2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, il existe $\phi^I \in \Theta_h$ et $\omega^I \in W_h$ satisfaisant (I.22). Nous rappelons que r_0 est donné par (I.13). Si pour $1 \leq r \leq n$,*

$$\|\phi - \phi^I\|_{H^1(\Omega)} \lesssim h^r \|\phi\|_{H^{r+1}(\Omega)}, \quad (\text{I.23})$$

$$\|\gamma - \mathbf{R}_h\gamma\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^r \|\gamma\|_{H^r(\Omega)}, \quad (\text{I.24})$$

alors

$$\|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} + t\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^r \|\phi\|_{H^{r+1}(\Omega)} + h^r t \|\gamma\|_{H^r(\Omega)} + h^{r_0+2} \|\gamma\|_{H^{r_0+1}(\Omega)}.$$

Preuve: La preuve provient immédiatement des hypothèses du théorème et des propriétés standards d'approximation de Π^0 . \square

Remarque I.2.1 *Dans le cas que nous traitons dans la partie numérique (cf chapitre 3, sous-sections III.5.1 et III.5.2), à savoir les éléments finis de type MITC3, nous avons $r_0 = 0$. Par conséquent, Π^0 est la projection L^2 sur l'espace des fonctions constantes par morceaux.*

I.3 Notations et définitions

Dans cette partie, nous allons lister toutes les notations et définitions qui nous seront utiles par la suite.

- Tout d’abord, définissons la norme de l’élasticité :

$$\|\psi\|_C^2 := a(\psi, \psi) \text{ pour tout } \psi \in \Theta. \quad (\text{I.25})$$

- Dans la suite de cette thèse, nous ferons intervenir différentes constantes (qui ne dépendent que de Ω et du matériau)² :
 - c_F est la constante de Friedrichs vérifiant $\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_F \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \forall \psi \in \Theta$ ou $\forall \psi \in W$;
 - c_K est la constante de Korn vérifiant $\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_K \|\psi\|_C \forall \psi \in \Theta$ ($c_K = 1/\sqrt{\tilde{\mu}}$) ;
 - \widehat{c}_K est la constante vérifiant $\|\psi\|_C \leq \widehat{c}_K \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \forall \psi \in \Theta$ ($\widehat{c}_K = \sqrt{2(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}$) ;
 - c_{rot} est la constante vérifiant $\|rot \psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{rot} \|\psi\|_C \forall \psi \in \Theta$ (nous avons alors $c_{rot} = c_K$) ;
 - $c_{\mathbf{R}}$ est la constante vérifiant $\|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\mathbf{R}} \|rot((\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}$, où β est défini par (I.10).

Remarque I.3.1 Les constantes c_F et $c_{\mathbf{R}}$ dépendent du domaine Ω alors que les constantes c_K et \widehat{c}_K ne dépendent que du matériau de la plaque (et donc pas de Ω). Nous expliciterons les valeurs c_F et $c_{\mathbf{R}}$ dans un cas particulier dans la partie numérique.

Remarque I.3.2 Il est évident que la constante $c_{\mathbf{R}}$ est inférieure à celle introduite lors de la majoration liée à la décomposition de Helmholtz (I.10) qui vaut

$$C = (1 + c_F^2)(1 + c_{\mathbf{R}}^2 + c_{\mathbf{R}}^2 c_F^2).$$

Cependant, nous avons un moyen de donner une expression de la constante $c_{\mathbf{R}}$ grâce au lemme 4.1 de [GR86, page 58]. En effet, $c_{\mathbf{R}}^2 \geq \frac{1}{C_{is}^2}$ où C_{is} vérifie

$$C_{is} = \inf_{q \in L_0^2(\Omega)} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^2} \frac{(div v, q)}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}},$$

avec $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q dx = 0\}$. Cela ne constitue qu’une borne inférieure pour la constante $c_{\mathbf{R}}$ et nous n’avons pas de borne supérieure. Cependant, en pratique, nous allons prendre $c_{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{C_{is}^2}$ (cf Annexe F).

- Nous utiliserons également les résidus

$$\left| \begin{array}{ll} Res_1(v) = (g, v) - (\gamma_h, \nabla v) & \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega), \quad (i) \\ Res_2(\psi) = -a(\phi_h, \psi) + (\gamma_h, \psi) & \text{pour tout } \psi \in H_0^1(\Omega)^2. \quad (ii) \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

²Les valeurs de ces différentes constantes sont détaillées dans l’Annexe F.

- Afin d’assurer la robustesse des estimateurs, nous utiliserons une norme dépendant du maillage : Pour tout $(\psi, v) \in \Theta \times W$,

$$\|(\psi, v)\|_{1,h}^2 = \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{t^2 + h_T^2} \|\nabla v - \psi\|_{L^2(T)}^2, \quad (\text{I.27})$$

où $h_T = \text{diam}(T)$.

- Pour toute fonctionnelle F définie sur $\Theta \times W$, nous définissons la norme duale associée à (I.27) par

$$\|F\|_{-1,h} = \sup_{(\psi,v) \in \Theta \times W \setminus \{(0,0)\}} \frac{F(\psi, v)}{\|(\psi, v)\|_{1,h}}. \quad (\text{I.28})$$

- $|\cdot|$ désigne le volume (mais également la longueur d’une arête ou la valeur absolue d’un scalaire lorsqu’il n’y a pas de risque de confusion).

Notations et définitions concernant la triangulation

Nous supposons que le fermé $\bar{\Omega}$ est couvert entièrement par une triangulation régulière notée \mathcal{T}_h , formée de triangles, c’est-à-dire

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T} \text{ et } \overset{\circ}{T}_1 \cap \overset{\circ}{T}_2 = \emptyset \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{T}_h \text{ avec } T_1 \neq T_2,$$

L’intersection de la fermeture de deux éléments différents de \mathcal{T}_h est donc :

- soit vide ;
- soit un sommet commun ;
- soit une arête commune.

Pour tout ensemble $A \subset \bar{\Omega}$, nous notons $\mathcal{E}(A)$ l’ensemble des arêtes incluses dans A et $\mathcal{N}(A)$ l’ensemble des noeuds inclus dans A .

Nous supposons que la triangulation est régulière, c’est-à-dire qu’il existe une constante $\sigma > 0$ telle que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma$, où h_T est la longueur de l’arête la plus longue de T et ρ_T désigne le diamètre du cercle inscrit dans le triangle T . Cela implique que $|E| \approx h_T \forall T \in \mathcal{T}_h$ et $\forall E \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$.

Ensuite, nous notons $\overline{\omega_T}$ l’ensemble de la fermeture des éléments $T' \in \mathcal{T}_h$ tel que l’intersection de leur fermeture avec \bar{T} est non vide, et $\overline{\omega_E}$ l’ensemble de la fermeture des triangles ayant E comme arête.

Etant donnée une arête $E \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$ de longueur $h_E = |E|$, nous lui assignons un vecteur normal unitaire $n_E := (n_1, n_2)$ et un vecteur tangentiel unitaire $\tau_E := (\tau_1, \tau_2) = (-n_2, n_1)$. Une fois que ces vecteurs sont fixés pour chaque arête E , nous pouvons définir les éléments

T_+ et T_- de \mathcal{T}_h tels que $E = \overline{T_+} \cap \overline{T_-}$ et n_E est dirigée de T_+ vers T_- (et $\overline{\omega_E} = \overline{T_+} \cup \overline{T_-}$). Ainsi, pour toute fonction v définie sur Ω (scalaire ou vectorielle), nous pouvons définir le saut de v à travers E par $[v]_E := (v|_{T_+})|_E - (v|_{T_-})|_E$. Si E est une arête du bord, alors nous prenons par convention $v|_{T_-} = 0$.

Remarque I.3.3 *Nous désignerons par n_T la normale unitaire prise pour chaque arête de T . Cela implique que si E est une arête de T , alors $n_T = \pm n_E$.*

Nous appelons \hat{T} le triangle de référence défini par $\hat{T} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Nous notons par F_T la transformation affine inversible qui permet de passer de \hat{T} à un élément $T \in \mathcal{T}_h$.

Nous définissons l'espace

$$S_0^1(\mathcal{T}_h) := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, v|_T \in \mathbb{P}_1(T)\},$$

qui correspond à l'espace des fonctions continues globalement et polynomiales de degré un par morceaux.

Enfin, étant donné $g \in L^2(\Omega)$, posons $\Pi_{h,k}g \in \mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h)$ sa projection sur l'espace des polynômes élément par élément (éventuellement discontinus) de degré k suivant la triangulation. Nous définissons alors l'oscillation de g par

$$\text{osc}^2(g) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) h_T^2 \|g - \Pi_{h,k}g\|_{L^2(T)}^2. \quad (\text{I.29})$$

Remarque I.3.4 *Pratiquement, la valeur de k doit être choisie suffisamment grande en fonction de l'ordre de convergence désiré et dépend donc des espaces de discrétisation.*

Chapitre II

Estimateur équilibré

L'objectif de cette partie est de construire un estimateur *a posteriori* fiable avec une constante multiplicative égale à 1 et efficace (la constante multiplicative ne sera pas calculée dans ce cas) : c'est la raison pour laquelle nous avons opté pour un estimateur de type flux équilibré. La constante multiplicative joue un rôle essentiel dans le monde industriel car ce dernier a besoin de majoration réelle et pas seulement d'une équivalence entre erreur et estimateur. Or, si la constante multiplicative est grande, alors l'estimateur *a posteriori* peut être très petit sans que l'erreur ne le soit, ce qui peut impliquer une grande différence entre la solution exacte et la solution approchée. *A contrario*, si la constante multiplicative est petite, l'erreur peut être petite sans que l'estimateur ne le soit, ce qui peut impliquer un raffinement excessif du maillage entraînant un temps de calcul plus long.

Afin de construire cet estimateur, nous nous sommes inspirés des travaux de Frolov et al. ([FNR06], [RF06]) auxquels nous avons rajouté des termes dans l'erreur afin d'assurer l'efficacité et la robustesse de notre estimateur. Nous introduirons de nouveaux éléments dans des espaces *ad hoc* afin d'obtenir un estimateur de type flux équilibrés. De plus, nous démontrerons l'efficacité de l'estimateur dans l'esprit des travaux de Nicaise et al. ([CN10] et [NWW07]).

Sommaire

II.1	Introduction	37
II.2	Obtention de l'estimateur - Fiabilité	38
II.3	Efficacité de l'estimateur	50

II.1 Introduction

Nous définissons l'erreur $E1$ par

$$E1^2 := \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (\text{II.1})$$

où la norme $\|\cdot\|_{H^{-1}(\Omega)}$ est définie par

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(f, \psi)|}{\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Remarque II.1.1 Cette erreur contient le terme $\|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$ qui sera indispensable pour établir l'efficacité de l'estimateur (partie II.3).

II.2 Obtention de l'estimateur - Fiabilité

Pour exhiber l'estimateur, nous allons procéder en deux étapes. Tout d'abord, nous allons démontrer une relation fondamentale; ensuite nous pourrions justifier la fiabilité de l'estimateur. L'objectif de cette partie sera alors de parvenir au Théorème II.2.1.

II.2.1 Relation nécessaire

Nous désirons tout d'abord majorer $\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$ en fonction de $\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ et de $\lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2$. Pour ce faire, nous allons démontrer la proposition suivante :

Proposition II.2.1 Soient $0 < \alpha \leq t^{-1}$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. Alors :

$$\begin{aligned} & \lambda(t^{-2} - \alpha^2)\|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda\alpha^2(1 - 2\varepsilon)\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2\left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right)\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Preuve: Remarquons que par la définition de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h) - (\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad - 2(\nabla(\omega - \omega_h), \phi - \phi_h) - 2(\nabla(\omega - \omega_h), \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) + 2(\phi - \phi_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h). \end{aligned}$$

Par conséquent, étant donné $0 < \alpha \leq t^{-1}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 & = \lambda(t^{-2} - \alpha^2)\|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \lambda\alpha^2\left(\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2\right) \\ & \quad + 2\lambda\alpha^2(\phi - \phi_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) - 2\lambda\alpha^2(\nabla(\omega - \omega_h), \phi - \phi_h) \\ & \quad - 2\lambda\alpha^2(\nabla(\omega - \omega_h), \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h), \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à :

$$\begin{aligned} & \lambda(t^{-2} - \alpha^2) \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2 (\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ & \quad - 2\lambda\alpha^2 (\phi - \phi_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) + 2\lambda\alpha^2 (\nabla(\omega - \omega_h), \phi - \phi_h) + 2\lambda\alpha^2 (\nabla(\omega - \omega_h), \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h). \end{aligned}$$

En utilisant trois inégalités de Young de même paramètre ε avec $0 < \varepsilon < 1/2$, nous avons :

$$\left| \begin{aligned} -2(\phi - \phi_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) &\leq \varepsilon \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2; \\ 2(\nabla(\omega - \omega_h), \phi - \phi_h) &\leq \varepsilon \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2; \\ 2(\nabla(\omega - \omega_h), \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) &\leq \varepsilon \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2; \end{aligned} \right.$$

ce qui nous amène à :

$$\begin{aligned} & \lambda(t^{-2} - \alpha^2) \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2 \left(\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \quad + \lambda\alpha^2 \left(\varepsilon \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad - \lambda\alpha^2 (1 - 2\varepsilon) \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \lambda(t^{-2} - \alpha^2) \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda\alpha^2 (1 - 2\varepsilon) \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda\alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon \right) \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Remarque II.2.1 Ce résultat nous permettra de contrôler la norme $\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$ par les termes $\lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2$, $\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ (dont nous aurons une majoration plus tard) et $\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ (que nous pourrions mettre dans l'estimateur). De plus, les choix de α et ε sont encore libres (sous les contraintes $0 < \alpha \leq t^{-1}$ et $0 < \varepsilon < 1/2$). Nous les déterminerons une fois que l'estimateur sera obtenu afin de parvenir aux constantes multiplicatives les plus petites possibles.

II.2.2 Fiabilité de l'estimateur

Tout d'abord, nous avons pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$ (par (I.3) et (I.26)(ii)) :

$$\begin{aligned} (\gamma - \gamma_h, \psi) &= a(\phi - \phi_h, \psi) + a(\phi_h, \psi) - (\gamma_h, \psi) \\ &= a(\phi - \phi_h, \psi) - Res_2(\psi) \\ &\leq \|\phi - \phi_h\|_C \|\psi\|_C + \|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\widehat{c}_K \|\phi - \phi_h\|_C + \|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}) \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leq (\widehat{c}_K \|\phi - \phi_h\|_C + \|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)})^2 \\ &\leq 2\widehat{c}_K^2 \|\phi - \phi_h\|_C^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Nous allons maintenant utiliser les différents résultats précédents afin de trouver l'estimateur (ainsi que les constantes multiplicatives qui apparaissent).

Tout d'abord, nous définissons une nouvelle erreur, qui nous permettra de diminuer la valeur des constantes intervenant dans l'estimateur : soient $\eta > 0$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. Nous notons :

$$E_{\eta, \varepsilon, \alpha}^2 := \|\phi - \phi_h\|_C^2 + \eta \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon) \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Nous faisons apparaître cette nouvelle erreur dans l'ancienne en utilisant (II.2) :

$$\begin{aligned} E1^2 &:= \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\leq c_K^2 \|\phi - \phi_h\|_C^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2\widehat{c}_K^2 \|\phi - \phi_h\|_C^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ E1^2 &\leq \max \left\{ 2\widehat{c}_K^2 + c_K^2; \frac{1}{\eta \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)}; 1 \right\} E_{\eta, \varepsilon, \alpha}^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Utilisons maintenant la majoration donnée par la proposition II.2.1 (nous rappelons que $t^{-2} - \alpha^2 \geq 0$ et $1 - 2\varepsilon > 0$) afin de majorer $E_{\eta, \varepsilon, \alpha}^2$.

$$\begin{aligned} E_{\eta, \varepsilon, \alpha}^2 &\leq \|\phi - \phi_h\|_C^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \eta \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \eta \lambda \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \eta \lambda \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right) \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left[1 - \eta \lambda \alpha^2 c_K^2 c_F^2 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)\right] \|\phi - \phi_h\|_C^2 + (1 + \eta) \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \eta \lambda \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\varepsilon}\right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous choisissons alors :

$$\bar{\eta} := \min \left\{ 1; \frac{1}{\lambda \alpha^2 c_K^2 c_F^2 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1\right)} \right\}; \quad (\text{II.4})$$

et nous posons, pour ce $\bar{\eta}$, $E_{\bar{\eta},\varepsilon,\alpha}^2 =: E_{\varepsilon,\alpha}^2$, d'où :

$$E_{\varepsilon,\alpha}^2 \leq 2 \left(\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \bar{\eta} \lambda \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{II.5})$$

Ensuite, nous remarquons que :

$$\begin{aligned} & \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h) + (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) \\ &= \underbrace{-a(\phi_h, \phi - \phi_h) + (\gamma_h, \phi - \phi_h)}_{Res_2(\phi - \phi_h)} - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h)) \\ & \quad + \underbrace{a(\phi, \phi - \phi_h) + (\gamma, \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h))}_{(g, \omega - \omega_h)} + (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) \\ &= Res_2(\phi - \phi_h) \underbrace{- (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h))}_{Res_1(\omega - \omega_h)} + (g, \omega - \omega_h) + (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) \\ &= Res_1(\omega - \omega_h) + Res_2(\phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h). \end{aligned}$$

$$\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = Res_1(\omega - \omega_h) + Res_2(\phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h). \quad (\text{II.6})$$

Nous obtenons alors, en combinant (II.5) et (II.6) :

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon,\alpha}^2 &\leq 2 \{ Res_1(\omega - \omega_h) + Res_2(\phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) \} \\ &\quad - \bar{\eta} \lambda \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\varepsilon} \right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Majorons maintenant les deux résidus $Res_1(\omega - \omega_h)$ et $Res_2(\phi - \phi_h)$. Pour cela, nous considérons deux éléments x^* et y^* appartenant aux espaces fonctionnels suivants :

$$\begin{aligned} x^* &\in N_{div}(\Omega) := \{x^* \in L^2(\Omega, \mathcal{M}_S^2) \mid div x^* \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)\}, \\ y^* &\in H_{div}(\Omega) := \{y^* \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid div y^* \in L^2(\Omega)\}. \end{aligned}$$

où \mathcal{M}_S^2 désigne l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2.

Nous intégrons ces paramètres dans les résidus de la façon suivante :

– Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} Res_1(v) &= (g, v) - (y^*, \nabla v) - (\gamma_h - y^*, \nabla v) \\ &= \int_{\Omega} g v \, dx - \int_{\Omega} y^* \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Omega} (\gamma_h - y^*) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} g v \, dx + \int_{\Omega} div y^* v \, dx - \int_{\Omega} (\gamma_h - y^*) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} (g + div y^*) v \, dx - \int_{\Omega} (\gamma_h - y^*) \cdot \nabla v \, dx. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Nous choisissons alors $y^* \in H_{div}(\Omega)$ tel que¹ $div y^* = -\Pi_{h,k}g$ où $\Pi_{h,k}$ est la projection sur l'espace des fonctions $\mathbb{P}_k, k \in \mathbb{N}$, par morceaux. Nous avons alors trivialement (cf [AO00, Théorème 1.5]) l'existence d'une constante C_1 positive, dépendant uniquement de la régularité du maillage, telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\|v - \Pi_{h,k}v\|_{L^2(T)} \leq C_1 h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}, \quad (\text{II.9})$$

ce qui nous donne l'existence d'une constante $C_1 > 0$ indépendante de la taille du maillage et de v telle que

$$\begin{aligned} Res_1(v) &= \int_{\Omega} (g - \Pi_{h,k}g) v \, dx - \int_{\Omega} (\gamma_h - y^*) \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} (g - \Pi_{h,k}g)(v - \Pi_{h,k}v) \, dx - \int_{\Omega} (\gamma_h - y^*) \cdot \nabla v \, dx \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|g - \Pi_{h,k}g\|_{L^2(T)} \|v - \Pi_{h,k}v\|_{L^2(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \|\nabla v\|_{L^2(T)} \\ &\stackrel{(\text{II.9})}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} C_1 \|g - \Pi_{h,k}g\|_{L^2(T)} h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \|\nabla v\|_{L^2(T)} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sqrt{h_T^2 + t^2} \{C_1 h_T \|g - \Pi_{h,k}g\|_{L^2(T)} + \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}\} \frac{1}{\sqrt{h_T^2 + t^2}} \|\nabla v\|_{L^2(T)} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ C_1 h_T \sqrt{h_T^2 + t^2} \|g - \Pi_{h,k}g\|_{L^2(T)} + \sqrt{h_T^2 + t^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \right\} t^{-1} \|\nabla v\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, nous obtenons alors :

$$Res_1(v) \leq t^{-1} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(C_1 h_T \sqrt{h_T^2 + t^2} \|g - \Pi_{h,k}g\|_{L^2(T)} + \sqrt{h_T^2 + t^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \right)^2 \right\}^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{II.10})$$

– De même, soit $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$. Par intégration par parties,

$$\begin{aligned} Res_2(\psi) &= -a(\phi_h, \psi) + (\gamma_h, \psi) \\ &= - \int_{\Omega} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\psi) \, dx + \int_{\Omega} \gamma_h \cdot \psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} (x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) : \varepsilon(\psi) \, dx - \int_{\Omega} x^* : \varepsilon(\psi) \, dx + \int_{\Omega} \gamma_h \cdot \psi \, dx \\ &= \int_{\Omega} (x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) : \varepsilon(\psi) \, dx + \int_{\Omega} (\gamma_h + div x^*) \cdot \psi \, dx. \end{aligned}$$

¹À ce stade, n'importe quel élément y^* vérifiant cette condition fonctionne. Nous donnerons un exemple dans la section II.3.

Nous choisissons alors $x^* \in N_{div}(\Omega)$ telle que² $div x^* = -\gamma_h$, ce qui nous donne, grâce à la remarque I.1.1 :

$$\begin{aligned} Res_2(\psi) &= \int_{\Omega} (x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) : \varepsilon(\psi) dx \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{C}^{-1/2} (x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) : \mathcal{C}^{1/2}\varepsilon(\psi) dx. \end{aligned}$$

D'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$Res_2(\psi) \leq \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{\mathcal{C}}; \quad (\text{II.11})$$

et

$$\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \widehat{c}_K \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{II.12})$$

Nous utilisons alors (II.10) avec $v = \omega - \omega_h$ et (II.11) avec $\psi = \phi - \phi_h$, ce qui nous permet de déduire de (II.7) que :

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon, \alpha}^2 &\leq 2t^{-1} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(C_1 h_T \sqrt{h_T^2 + t^2} \|g - \Pi_{h,k} g\|_{L^2(T)} + \sqrt{h_T^2 + t^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \\ &\quad + 2(\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) + \bar{\eta} \lambda \alpha^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant trois inégalités de Young (de paramètres μ_1 , μ_2 et μ_3 strictement positifs) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} &2t^{-1} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(C_1 h_T \sqrt{h_T^2 + t^2} \|g - \Pi_{h,k} g\|_{L^2(T)} + \sqrt{h_T^2 + t^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \right)^2 \right\}^{1/2} \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \mu_1 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(C_1 h_T \sqrt{h_T^2 + t^2} \|g - \Pi_{h,k} g\|_{L^2(T)} + \sqrt{h_T^2 + t^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\mu_1} \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2; \\ &2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \leq \mu_2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu_2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2; \\ &2(\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) \leq \mu_3 \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu_3} \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

²À ce stade, n'importe quel élément x^* vérifiant cette condition fonctionnelle. Nous donnerons un exemple dans la section II.3.

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
E_{\varepsilon,\alpha}^2 &\leq \mu_1 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \left(C_1 h_T \sqrt{h_T^2 + t^2} \|g - \Pi_{h,k} g\|_{L^2(T)} + \sqrt{h_T^2 + t^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \right)^2 \right\} \\
&\quad + \mu_2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\{ \mu_3 + \bar{\eta} \lambda \alpha^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) \right\} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{\mu_1} \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu_2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{\lambda^{-1} t^2 \mu_3} \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Nous choisissons :

$$\begin{cases} \mu_1 = \frac{2}{\bar{\eta} \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)}; \\ \mu_2 = 2; \\ \mu_3 = 2\lambda t^{-2}; \end{cases}$$

afin de faire apparaître $E_{\varepsilon,\alpha}^2/2$ dans le membre de droite. Nous rappelons que $E_{\varepsilon,\alpha}^2 = E_{\bar{\eta},\varepsilon,\alpha}^2$ où $\bar{\eta}$ est défini par la relation (II.4). Nous remarquons également, en utilisant la relation (I.29), que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \left(C_1 h_T \sqrt{h_T^2 + t^2} \|g - \Pi_{h,k} g\|_{L^2(T)} + \sqrt{h_T^2 + t^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \right)^2 \right\} \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} 2C_1^2 h_T^2 (h_T^2 + t^2) \|g - \Pi_{h,k} g\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} 2(h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \\
&= 2C_1^2 \text{osc}^2(g) + 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2;
\end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
E_{\varepsilon,\alpha}^2 &\leq \frac{4t^{-2}}{\bar{\eta} \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 + 2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \left\{ 2\lambda t^{-2} + \bar{\eta} \lambda \alpha^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) \right\} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{E'_{\varepsilon,\alpha}}{2} + h.o.t.1,
\end{aligned}$$

avec $h.o.t.1 = \frac{4C_1^2 t^{-2}}{\bar{\eta} \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \text{osc}^2(g)$;

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
E_{\varepsilon,\alpha}^2 &\leq \frac{8t^{-2}}{\bar{\eta} \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 + 4 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \left\{ 4\lambda t^{-2} + 2\bar{\eta} \lambda \alpha^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - 1 \right) \right\} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + h.o.t.2,
\end{aligned}$$

avec $h.o.t.2 = \frac{8C_1^2 t^{-2}}{\bar{\eta} \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \text{osc}^2(g)$;

II.2.3 Détermination des constantes ε et α

Il nous faut encore choisir les paramètres ε et α . Nous allons les choisir de sorte que la constante devant $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2$ soit la plus petite possible (car la constante devant $\|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ contient le terme $4\lambda t^{-2}$ qui devient prédominant lorsque t est très petit et ce terme est indépendant de $\bar{\eta}$), c'est-à-dire que nous cherchons

$$M := \min_{\substack{0 < \varepsilon < 1/2 \\ 0 < \alpha \leq t^{-1}}} \left\{ (\bar{\eta} \lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon))^{-1} \right\},$$

avec, comme nous l'avons défini dans (II.4), $\bar{\eta} = \min \left\{ 1; \frac{1}{\lambda \alpha^2 c_K^2 c_F^2 (\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1)} \right\}$.

$$M = \min_{\substack{0 < \varepsilon < 1/2 \\ 0 < \alpha \leq t^{-1}}} \frac{1}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \max \left\{ 1; \lambda \alpha^2 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow M = \min_{\substack{0 < \varepsilon < 1/2 \\ 0 < \alpha \leq t^{-1}}} \frac{1}{1 - 2\varepsilon} \max \left\{ \frac{1}{\lambda \alpha^2}; \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\}. \quad (\text{II.13})$$

Pour simplifier l'écriture, nous posons $\mathcal{E} \times \mathcal{A} :=]0; \frac{1}{2}[\times]0; t^{-1}[$. Nous séparons ensuite cet ensemble en deux sous-ensembles $\mathcal{E} \times \mathcal{A} = A \cup B$ avec :

$$A := \left\{ (\varepsilon, \alpha) \in \mathcal{E} \times \mathcal{A} \mid \frac{1}{\lambda \alpha^2} \leq \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\},$$

$$B := \left\{ (\varepsilon, \alpha) \in \mathcal{E} \times \mathcal{A} \mid \frac{1}{\lambda \alpha^2} \geq \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\}.$$

Nous posons $f(\varepsilon) := \left[\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \lambda c_K^2 c_F^2 \right]^{-1/2}$. Enfin, il faut envisager trois cas selon les valeurs des constantes λ , c_K et t afin de pouvoir se représenter ces différents sous-ensembles :

$$\text{Cas 1 : } \sqrt{\frac{2}{3\lambda c_K^2 c_F^2}} < t^{-1}; \quad \text{Cas 2 : } \sqrt{\frac{2}{3\lambda c_K^2 c_F^2}} = t^{-1}; \quad \text{Cas 3 : } \sqrt{\frac{2}{3\lambda c_K^2 c_F^2}} > t^{-1}.$$

avec $\sqrt{\frac{2}{3\lambda c_K^2 c_F^2}} = f(1/2) = \max_{\varepsilon \in \mathcal{E}} f(\varepsilon)$ (f étant une fonction strictement croissante).

$$1) \text{ Cas 1 } M = \min\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\} \text{ où } \begin{cases} \mathbf{A} := \min_{(\varepsilon, \alpha) \in A} \frac{1}{1-2\varepsilon} \max \left\{ \frac{1}{\lambda\alpha^2}; \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\} \\ \text{et} \\ \mathbf{B} := \min_{(\varepsilon, \alpha) \in B} \frac{1}{1-2\varepsilon} \max \left\{ \frac{1}{\lambda\alpha^2}; \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \min_{(\varepsilon, \alpha) \in A} \frac{1}{1-2\varepsilon} \max \left\{ \frac{1}{\lambda\alpha^2}; \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\} \\ &= \min_{0 < \varepsilon < \frac{1}{2}} \frac{(\varepsilon + 1/\varepsilon - 1) c_K^2 c_F^2}{1-2\varepsilon} \text{ par définition de } A. \end{aligned}$$

Nous posons $g(\varepsilon) := \frac{\varepsilon + 1/\varepsilon - 1}{1-2\varepsilon}$. Son minimum est atteint en $2 - \sqrt{3}$ et vaut $3 + 2\sqrt{3}$.

Donc $\mathbf{A} = (3 + 2\sqrt{3}) c_K^2 c_F^2$.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \min_{(\varepsilon, \alpha) \in B} \frac{1}{1-2\varepsilon} \max \left\{ \frac{1}{\lambda\alpha^2}; \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) c_K^2 c_F^2 \right\} \\ &= \min_{(\varepsilon, \alpha) \in B} \frac{1}{\lambda\alpha^2(1-2\varepsilon)} \text{ par définition de } B \\ &= \min_{0 < \varepsilon < \frac{1}{2}} \min_{0 < \alpha \leq f(\varepsilon)} \frac{1}{\lambda\alpha^2(1-2\varepsilon)} \\ &= \min_{0 < \varepsilon < \frac{1}{2}} \frac{1}{1-2\varepsilon} \min_{0 < \alpha \leq f(\varepsilon)} \frac{1}{\lambda\alpha^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \min_{(\varepsilon, \alpha) \in B} \frac{1}{\lambda\alpha^2(1-2\varepsilon)} &= \min_{0 < \varepsilon < 1/2} \frac{(\varepsilon + 1/\varepsilon - 1) c_K^2 c_F^2}{1-2\varepsilon} \\ &= (3 + 2\sqrt{3}) c_K^2 c_F^2 \text{ obtenu pour } \varepsilon = 2 - \sqrt{3} \text{ et } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda c_K c_F}. \end{aligned}$$

D'où $M = (3 + 2\sqrt{3}) c_K^2 c_F^2$.

2) Cas 2 Nous pouvons appliquer le même raisonnement que précédemment. Nous avons donc $M = (3 + 2\sqrt{3}) c_K^2 c_F^2$ obtenu pour $\varepsilon = 2 - \sqrt{3}$ et $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda c_K c_F}$.

3) Cas 3 Il faut tout d'abord déterminer $\varepsilon \in \mathcal{E}$ tel que $f(\varepsilon) = t^{-1}$

$$\Leftrightarrow \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \lambda c_K^2 c_F^2 = t^2$$

$$\Leftrightarrow \epsilon^2 + 1 - \epsilon = \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{\pm} = \frac{1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4}}{2}.$$

Parmi ces deux possibilités, il n'y a que $\epsilon_- := \epsilon$ qui appartienne à \mathcal{E} .

Maintenant, deux cas s'offrent à nous : $\epsilon \geq 2 - \sqrt{3}$ et $\epsilon < 2 - \sqrt{3}$. Essayons d'obtenir un critère sur t qui permettrait d'établir ces deux cas.

$$\epsilon \geq 2 - \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4} \geq 2(2 - \sqrt{3})$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} - 2(2 - \sqrt{3})\right)^2 \geq \left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4(2 - \sqrt{3}) \left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right) + 4(2 - \sqrt{3})^2 \geq \left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow 4(2 - \sqrt{3}) \left[(2 - \sqrt{3}) - \left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right) \right] \geq -4$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} - \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} \geq \frac{-1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} \leq 1 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 3$$

$$\Leftrightarrow t \leq \sqrt{3} \lambda c_K c_F.$$

Ce qui nous donne

Cas 3.1 : $\epsilon \geq 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow t \leq \sqrt{3} \lambda c_K c_F$: Alors, par le même raisonnement que précédemment, nous avons $M = (3 + 2\sqrt{3}) c_K^2 c_F^2$ obtenu pour $\epsilon = 2 - \sqrt{3}$ et $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3} \lambda c_K c_F}$.

Cas 3.2 : $\epsilon < 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow t > \sqrt{3\lambda c_K c_F}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \min_{0 < \epsilon < \epsilon} \frac{(\epsilon + 1/\epsilon - 1) c_K^2 c_F^2}{1 - 2\epsilon} \\
&= \min_{0 < \epsilon < \epsilon} g(\epsilon) c_K^2 c_F^2 = g(\epsilon) c_K^2 c_F^2 \\
&= \frac{t^2}{\lambda(1 - 2\epsilon)} \text{ par définition de } \epsilon \\
\mathbf{A} &= \left\{ \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} + \frac{3\lambda}{t^2} \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} - \frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{c_K^2 c_F^2}}} \right\}^{-1} \\
&\quad \text{avec } \epsilon = \frac{1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4}}{2} \text{ et } \alpha = t^{-1}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \min_{(\epsilon, \alpha) \in B} \frac{1}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\epsilon)} \\
&= \min \left\{ \min_{0 < \epsilon < \epsilon} \frac{1}{1 - 2\epsilon}, \min_{0 < \alpha \leq f(\epsilon)} \frac{1}{\lambda \alpha^2}; \min_{\epsilon \leq \epsilon < 1/2} \frac{t^2}{\lambda(1 - 2\epsilon)} \right\} \\
&= \min \left\{ \min_{0 < \epsilon \leq \epsilon} \frac{(\epsilon + 1/\epsilon - 1) c_K^2 c_F^2}{1 - 2\epsilon}, \frac{t^2}{\lambda(1 - 2\epsilon)} \right\} \\
\mathbf{B} &= \left\{ \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} + \frac{3\lambda}{t^2} \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} - \frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{c_K^2 c_F^2}}} \right\}^{-1} \\
&\quad \text{avec } \epsilon = \frac{1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4}}{2} \text{ et } \alpha = t^{-1}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
M &= \left\{ \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} + \frac{3\lambda}{t^2} \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} - \frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{c_K^2 c_F^2}}} \right\}^{-1} \\
&\quad \text{avec } \epsilon = \frac{1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4}}{2} \text{ et } \alpha = t^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons la proposition suivante :

Proposition II.2.2 Soit M défini par (II.13). Deux cas se présentent selon les valeurs des constantes λ , c_K et t^{-1} :

$$\text{Si } t^{-1} \geq \frac{1}{\sqrt{3\lambda c_K c_F}}, \text{ alors } M = (3+2\sqrt{3}) c_K^2 c_F^2 \text{ est obtenu pour } \varepsilon = 2-\sqrt{3} \text{ et } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3\lambda c_K c_F}};$$

$$\text{Si } t^{-1} < \frac{1}{\sqrt{3\lambda c_K c_F}}, \text{ alors } M = \left\{ \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} + \frac{3\lambda}{t^2}} \sqrt{\frac{1}{c_K^2 c_F^2} - \frac{\lambda}{t^2} - \frac{1}{c_K^2 c_F^2}} \right\}^{-1}$$

$$\text{est obtenu pour } \varepsilon = \frac{1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{t^2}{\lambda c_K^2 c_F^2}\right)^2 - 4}}{2} \text{ et } \alpha = t^{-1}.$$

Nous nous plaçons dans le premier cas (car t est supposé être petit, voire tendre vers 0). Pour ces choix de ε et de α , nous posons $E_{\varepsilon, \alpha} =: E$. Alors nous avons :

$$E^2 \leq 8(3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 + 4\|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ \left[4\lambda t^{-2} + \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3c_K^2 c_F^2} \right] \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + h.o.t.$$

avec $h.o.t. = 8 C_1^2 t^{-2} (3 + 2\sqrt{3}) c_K^2 c_F^2 \text{osc}^2(g)$.

Il reste enfin à utiliser la relation (II.3) afin de pouvoir donner une majoration de $E1$. Nous définissons pour cela, avec les valeurs de α et ε présentées dans la proposition II.2.2, $Z = \max \left\{ 2\widehat{c}_K^2 + c_K^2; \frac{1}{\bar{\eta}\lambda\alpha^2(1-2\varepsilon)}; 1 \right\} = \max \left\{ 2\widehat{c}_K^2 + c_K^2; (3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2; 1 \right\}$, et nous avons :

$$E1^2 \leq Z \left\{ 8(3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \right.$$

$$+ 4\|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left[4\lambda t^{-2} + \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3c_K} \right] \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + h.o.t. \left. \right\}$$

$$+ 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$$

et par (II.12) :

$$\begin{aligned}
E1^2 &\leq Z \left\{ 8(3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 + 4\|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left[4\lambda t^{-2} + \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3c_K^2 c_F^2} \right] \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + h.o.t. \right\} + 2\widehat{c}_K^2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq 8Z(3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \\
&\quad + (4Z + 2\widehat{c}_K^2) \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 + Z \left[4\lambda t^{-2} + \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3c_K^2 c_F^2} \right] \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + Z h.o.t.
\end{aligned}$$

Remarque II.2.2 La valeur de Z dépend donc de $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ et c_F (puisque c_K et \widehat{c}_K peuvent être exprimées en fonction de $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\lambda}$) (cf section I.3), autrement dit des caractéristiques du domaine et du matériau exclusivement.

Nous obtenons finalement la fiabilité de l'estimateur suivant pour E1 par le théorème suivant :

Théorème II.2.1 Soit $E1$ l'erreur définie par (II.1). En supposant que $t \leq \sqrt{3\lambda}c_K c_F$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\
&\leq 8Z(3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 + (4Z + 2\widehat{c}_K^2) \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + Z \left[4\lambda t^{-2} + \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3c_K^2 c_F^2} \right] \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + h.o.t.,
\end{aligned}$$

avec $h.o.t. = 8(3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2 Z C_1^2 \text{osc}^2(g) t^{-2}$ et $Z = \max \left\{ 2\widehat{c}_K^2 + c_K^2; (3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2; 1 \right\}$.

Remarque II.2.3 Nous pouvons remarquer la présence d'un facteur t^{-2} dans l'estimateur. Cela peut poser problème : lorsque $t \rightarrow 0$, l'estimateur peut exploser. On dit alors que l'estimateur est non-robuste en t . Ce théorème peut donc être vu comme une étape intermédiaire pour parvenir à l'estimateur robuste en t qui sera développé dans le chapitre 3.

II.3 Efficacité de l'estimateur

Il est difficile d'obtenir l'efficacité de notre estimateur dans le cas général. C'est la raison pour laquelle nous nous plaçons ici dans le cas particulier d'une discrétisation composée

d'éléments finis de type MITC3, à savoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Theta_h = \{\psi \in H_0^1(\Omega)^2 \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Gamma_h = ND_0 = \left\{ \rho \in H_0(\text{rot}, \Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, \exists a_1, a_2, b \in \mathbb{R} \ v|_T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\}. \end{array} \right.$$

Nous choisissons aussi $k = 0$, ce qui implique que

$$\text{osc}^2(g) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g - \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2,$$

où $\Pi_h = \Pi_{h,0}$ désigne la projection sur l'espace des fonctions constantes par morceaux.

Dans cette partie, nous ne cherchons pas à obtenir une constante multiplicative explicite dans la majoration, mais à faire en sorte que celle-ci, cachée dans la notation \lesssim , ne dépende ni de t , h , ni des coefficients de Lamé.

Dans l'estimateur que nous venons d'obtenir, il y a trois parties distinctes. Dans cette section, nous étudierons séparément ces trois parties que nous majorerons par un multiple de l'erreur E1. L'objectif de cette partie sera de parvenir au Théorème II.3.1.

II.3.1 Majoration de $\|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$

Par les définitions de γ et γ_h , nous avons que

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h &= \lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_h) - \nabla(\omega - \omega_h) + (\phi - \phi_h) \\ \Rightarrow \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim \lambda^{-2}t^4\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc que

$$\|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \lambda^{-2}t^4\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{II.14})$$

II.3.2 Majoration de $\|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2$

Le but de cette partie est de majorer le terme $\|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2$ par l'erreur (à une constante multiplicative près). Tout d'abord, il est nécessaire de préciser qu'il peut être difficile d'obtenir cette majoration pour un x^* quelconque. C'est pourquoi nous choisissons le x^* construit à la section 3 de [NWW07]³. Avec ce choix nous pouvons prouver l'efficacité. C'est l'objet du lemme suivant :

³Le détail de la construction de x^* est présenté dans l'Annexe A.

Lemme II.3.1 *Dans le cas de l'utilisation des éléments finis de type MITC3 et en construisant x^* comme précisé dans l'Annexe A, nous avons :*

$$\|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Preuve: Soit $f = -\gamma_h = \operatorname{div}x^*$ que nous considérons comme une donnée. Alors, il existe un unique couple $(\phi^*, \phi_h^{**}) \in \Theta \times \Theta_h$ solution de :

$$\begin{aligned} a(\phi^*, \psi) &= (f, \psi) \quad \forall \psi \in \Theta; \\ a(\phi_h^{**}, \psi_h) &= (f, \psi_h) \quad \forall \psi_h \in \Theta_h; \end{aligned}$$

où a est la forme bilinéaire liée à l'élasticité.

Nous utilisons alors le Théorème 3.9 de [NWW07, page 14] pour avoir l'existence d'une constante positive C , indépendante de t et du maillage, telle que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$

$$\|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h^{**}))\|_{L^2(T)} \leq C\|\phi_h^* - \phi_h^{**}\|_{\mathcal{C}, \omega_T},$$

où $\|\psi\|_{\mathcal{C}, \omega_T}^2 = \int_{\omega_T} \mathcal{C}\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi) dx$ pour tout $\psi \in \Theta$. Soit $Y(T) := \#\{K \in \mathcal{T}_h \mid K \subset \omega_T\}$.

Comme la triangularisation est régulière, il existe un entier naturel $Cte > 0$ telle que $Cte = \max_{T \in \mathcal{T}_h} Y(T)$, ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h^{**}))\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h^{**}))\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} C^2 \|\phi_h^* - \phi_h^{**}\|_{\mathcal{C}, \omega_T}^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} C^2 Cte \|\phi_h^* - \phi_h^{**}\|_{\mathcal{C}, T}^2 \\ &\leq C^2 Cte \|\phi_h^* - \phi_h^{**}\|_{\mathcal{C}}^2. \end{aligned} \tag{II.15}$$

Or,

$$\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) = \mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h^{**})) + \mathcal{C}^{1/2}\varepsilon(\phi_h^{**} - \phi_h).$$

D'où, par l'inégalité triangulaire et (II.15)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h^{**}))\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \\ &\lesssim \|\phi_h^* - \phi_h^{**}\|_{\mathcal{C}} + \|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\|\phi_h^* - \phi_h^{**}\|_{\mathcal{C}} \leq \|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}} + \|\phi_h - \phi_h^{**}\|_{\mathcal{C}}$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}} + \|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \\ \Rightarrow \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim \|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2. \end{aligned} \tag{II.16}$$

Montrons maintenant que $\|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2$ et $\|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2$ sont majorés par l'erreur.

$$- \|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2$$

Soit $\psi_h \in \Theta_h$. Par définition de ϕ_h^{**} , nous avons :

$$\begin{aligned} a(\phi_h - \phi_h^{**}, \psi_h) &= (\gamma_h, \psi_h - \mathbf{R}_h \psi_h) \\ &= (\gamma_h, \psi_h) - (\gamma_h, \mathbf{R}_h \psi_h) \\ &= (\gamma_h - \gamma, \psi_h) + a(\phi_h - \phi, \psi_h) \\ &\lesssim (\|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\Omega)}) \|\nabla \psi_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où, en prenant $\psi_h = \phi_h - \phi_h^{**}$,

$$\|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \lesssim \|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui signifie que

$$\|\phi_h^{**} - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 \lesssim \|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{II.17})$$

$$- \|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons :

$$\|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \leq \|\phi_h^* - \phi\|_{\mathcal{C}} + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}.$$

Or, par définition de ϕ_h^* , nous avons pour tout $\psi \in \Theta$:

$$\begin{aligned} a(\phi_h^* - \phi, \psi) &= (\gamma - \gamma_h, \psi) \\ \Rightarrow \|\phi_h^* - \phi\|_{\mathcal{C}} &\lesssim \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \lesssim \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \lesssim \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui signifie que :

$$\|\phi_h^* - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 \lesssim \|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{II.18})$$

Le lemme se déduit alors facilement de (II.16), (II.17) et (II.18). \square

II.3.3 Majoration de $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2$

Enfin, nous voulons majorer $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2$ par l'erreur (et pour la même raison que dans la sous-section précédente, nous choisissons y^* construit cette fois comme dans [CN10]⁴) pour obtenir le lemme suivant :

⁴Voir l'Annexe B.

Lemme II.3.2 Dans le cas de l'utilisation des éléments finis de type MITC3 et en construisant y^* comme précisé dans l'Annexe B, nous avons :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \lesssim t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \text{osc}^2(g).$$

Preuve: Tout d'abord, nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme II.3.3

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\text{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 + \text{osc}^2(g). \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

où nous rappelons que $\mathcal{E}(\Omega)$ représente l'ensemble des arêtes de \mathcal{T}_h incluses dans Ω .

Preuve: Nous rappelons le lemme dont nous nous sommes inspirés :

Lemme II.3.4 (Lemme 3.5 de [CN10]) Soit $v_h \in \mathbb{P}_1(T)^2$, $T \in \mathcal{T}_h$, alors

$$\|v_h\|_{L^2(T)} \approx h_T^{1/2} \|v_h \cdot n_T\|_{L^2(\partial T)}.$$

Nous utilisons le lemme 3.5 de [CN10, page 7] avec $v_h = \gamma_h - y^*$. Nous obtenons pour tout $T \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{aligned} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 &\approx h_T \|(\gamma_h - y^*) \cdot n_T\|_{L^2(\partial T)}^2 \\ &\approx h_T \sum_{E \subset \partial T} \|(\gamma_h - y^*) \cdot n_T\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

Notons que si $E = \bar{T} \cap \bar{K}$ avec $T, K \in \mathcal{T}_h$, nous avons :

$$\begin{aligned} \gamma_h|_T \cdot n_T &= \frac{1}{2} (\gamma_h|_T \cdot n_T + \gamma_h|_K \cdot n_T) + \frac{1}{2} (\gamma_h|_T \cdot n_T - \gamma_h|_K \cdot n_T) \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_h|_T \cdot n_T + \gamma_h|_K \cdot n_T) + \frac{1}{2} [\gamma_h]_E \cdot n_T. \end{aligned}$$

D'où, par une inégalité triangulaire suivie d'une inégalité de Young :

$$\sum_{E \subset \partial T} \|(\gamma_h - y^*) \cdot n_T\|_{L^2(E)}^2 \leq 2 \sum_{E \subset \partial T} \left\| \frac{1}{2} [\gamma_h]_E \cdot n_T \right\|_{L^2(E)}^2 + 2 \sum_{E \subset \partial T} \left\| \frac{1}{2} (\gamma_h|_T \cdot n_T + \gamma_h|_K \cdot n_T) - y^* \cdot n_T \right\|_{L^2(E)}^2. \quad (\text{II.20})$$

Par la construction de y^* présentée dans l'Annexe B, nous avons l'existence d'éléments $g_e \in \mathbb{P}_0(e)$ tels que

$$\int_T \gamma_h \cdot \nabla v \, dx = \int_T g v \, dx + \int_{\partial T} g_T v \, ds \quad \forall v \in P_1(T) \text{ avec } g_T = n_e n_T g_e,$$

et

$$\int_e y^* \cdot n_e = \int_e g_e.$$

Nous utilisons ensuite le principe de la démonstration du théorème 6.2 de [AO00, page 129] en prenant $g_T = y^* \cdot n_T$, ce qui nous donne, grâce à la régularité du maillage ($h_E \approx h_T \forall T \in \mathcal{T}_h$ et $\forall E \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})$), pour toute arête $E \subset \partial T$, $E = \bar{T} \cap \bar{K}$,

$$\begin{aligned} & h_E \left\| g_T - \frac{1}{2}(\gamma_h|_T \cdot n_E + \gamma_h|_K \cdot n_E) \right\|_{L^2(E)}^2 \\ & \lesssim \left(\sum_{n \in \mathcal{N}(\bar{E})} \left(\int_E \left[g_T - \frac{1}{2}(\gamma_h|_T \cdot n_E + \gamma_h|_K \cdot n_E) \right] \lambda_n \right) \right)^2 \\ & \lesssim \sum_{n \in \mathcal{N}(\bar{E})} \left(h_E^2 \sum_{T' \in \mathcal{T}_h, n \in \mathcal{N}(\bar{T}')} \|div \gamma_h + g\|_{L^2(\Omega)}^2 + h_E \sum_{E' \in \mathcal{E}(\Omega), n \in \mathcal{N}(\bar{E}')} \|[\gamma_h]_{E'} \cdot n_{E'}\|_{L^2(E')}^2 \right). \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}(\bar{E})$ désigne l'ensemble des nœuds inclus dans \bar{E} (ce qui correspond aux sommets de l'arête E) et λ_n est la fonction de base associée au nœud $n \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})$.

En combinant cette dernière relation avec (II.20), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} & \lesssim h_T^{1/2} \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial \Omega} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)} + \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'} \|div \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T')} \\ & \quad + \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'} \|g - \Pi_h g\|_{L^2(T')} \\ \Rightarrow (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 & \lesssim h_T (t^2 + h_T^2) \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial \Omega} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad + \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'}^2 (t^2 + h_T^2) \|div \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T')}^2 + \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'}^2 (t^2 + h_T^2) \|g - \Pi_h g\|_{L^2(T')}^2 \\ \Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T (t^2 + h_T^2) \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial \Omega} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'}^2 (t^2 + h_T^2) \|div \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T')}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{T' \subset \omega_T} h_{T'}^2 (t^2 + h_T^2) \|g - \Pi_h g\|_{L^2(T')}^2 \end{aligned}$$

□

Pour tout $E \in \mathcal{E}(\Omega)$, nous introduisons :

$$w_E := b_E^2([\gamma_h]_E \cdot n_E) \in H_0^2(\omega_E)$$

où $\overline{\omega_E} := \{\overline{T} \in \mathcal{T}_h | E \subset \partial T\}$ et $b_E \in H_0^1(\omega_E)$ est la fonction bulle associée au patch $\overline{\omega_E}$ ($b_E = \lambda_{x_1} \lambda_{x_2} \in H_0^1(\omega_E)$) telle que

$$\left| \begin{array}{l} \text{supp } b_E = \omega_E, \quad 0 \leq b_E \leq 1 = \max_{x \in E} b_E, \\ \int_{\omega_E} b_E \, dx \approx h_E^2 \text{ et } \int_E b_E \, ds \approx h_E, \\ \|\nabla b_E\|_{L^2(T)} \lesssim h_E^{-1} \|b_E\|_{L^2(T)} \quad \forall T \subset \omega_E, \\ |\nabla b_E|_{H^1(\omega_E)} \lesssim h_E^{-2} \|b_E\|_{L^2(\omega_E)}. \end{array} \right.$$

Avec ce choix de w_E , nous avons l'inégalité inverse suivante (cf [Ver96] par exemple pour toutes les inégalités inverses qui apparaîtront dans le reste de cette thèse) :

$$\|\nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)} + h_E |\nabla w_E|_{H^1(\omega_E)} \lesssim h_E^{-1/2} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}. \quad (\text{II.21})$$

Ainsi, nous avons par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 &\lesssim ([\gamma_h]_E \cdot n_E, w_E)_{L^2(E)} \\ &= (\text{div } \gamma_h, w_E)_{L^2(\omega_E)} + (\gamma_h, \nabla w_E)_{L^2(\omega_E)} \\ &= (\text{div } \gamma_h + g, w_E)_{L^2(\omega_E)} + (\gamma_h - \gamma, \nabla w_E)_{L^2(\omega_E)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en sommant sur toutes les arêtes intérieures, nous avons (grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la régularité du maillage) :

$$\begin{aligned} &\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \{ (\text{div } \gamma_h + g, h_E (t^2 + h_E^2) w_E)_{L^2(\omega_E)} + (\gamma - \gamma_h, h_E (t^2 + h_E^2) \nabla w_E)_{L^2(\omega_E)} \} \\ &\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\text{div } \gamma_h + g\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} (t^2 + h_E^2) \|w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \nabla w_E \right) \right\|_{L^2(\Omega)} + t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \left\| \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t h_E \nabla w_E \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Nous allons maintenant étudier séparément chacun des termes.

- Grâce à l'inégalité de Poincaré et (II.21), nous avons

$$\begin{aligned}
 \left\| \nabla \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \nabla w_E \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left(\nabla \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \nabla w_E \right) \right) : \left(\nabla \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \nabla w_E \right) \right) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_i \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \partial_j w_E \right|^2 \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \sum_{i,j=1}^2 \left| \partial_i \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial \Omega} h_E^3 \partial_j w_E \right|^2 \\
 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \sum_{E \subset \partial T \setminus \partial \Omega} h_E^6 \left| \sum_{i,j=1}^2 \partial_i \partial_j w_E \right|^2 \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^6 \left| \sum_{i,j=1}^2 \partial_i \partial_j w_E \right|^2 \\
 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^6 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \left| \sum_{i,j=1}^2 \partial_i \partial_j w_E \right|^2 \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^6 |\nabla w_E|_{H^1(\omega_E)}^2 \\
 &= \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^4 |h_E \nabla w_E|_{H^1(\omega_E)}^2 \\
 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \underbrace{h_E^4 h_E^{-1}} \|\llbracket \gamma_h \rrbracket_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\
 &= h_E^3 \leq h_E(t^2 + h_E^2)
 \end{aligned}$$

$$\left\| \nabla \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \nabla w_E \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E(t^2 + h_E^2) \|\llbracket \gamma_h \rrbracket_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2.$$

- Avec le même type de raisonnement, nous avons

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t h_E \nabla w_E \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \|t h_E \nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \\
 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t^2 h_E^2 \|\nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \\
 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \underbrace{t^2 h_E^2 h_E^{-1}} \|\llbracket \gamma_h \rrbracket_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\
 &= t^2 h_E \leq h_E(t^2 + h_E^2)
 \end{aligned}$$

$$\left\| \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t h_E \nabla w_E \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E(t^2 + h_E^2) \|\llbracket \gamma_h \rrbracket_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2.$$

- Une inégalité de Poincaré utilisée sur les patches ω_E (possible car w_E est nul sur $\partial\omega_E$) et (II.21) nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} (t^2 + h_E^2) \|w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} (t^2 + h_E^2) h_E^2 \|\nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

En combinant toutes ces relations avec (II.22), nous avons

$$\begin{aligned} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} &\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + g\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + g\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous avons alors par (II.19) ainsi qu'une inégalité triangulaire et une inégalité de Young :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \operatorname{osc}(g)^2. \end{aligned} \tag{II.23}$$

Il nous reste encore à majorer le terme $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2$. Pour cela, nous allons introduire

$$w_T := b_T^2 (\Pi_h g + \operatorname{div} \gamma_h) \in H_0^2(T),$$

où b_T est la fonction bulle standard avec les propriétés

$$\begin{aligned} &\left| \begin{array}{l} \operatorname{supp} b_T \subset T, \quad 0 \leq b_T \leq 1 = \max_{x \in T} b_T, \\ \int_T b_T \, dx \approx h_T^2 \text{ et } \|\nabla b_T\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-1} \|b_T\|_{L^2(T)}. \end{array} \right. \\ &\|\nabla w_T\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla w_T\|_{H^1(T)} \lesssim h_T^{-1} \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}. \end{aligned} \tag{II.24}$$

Une intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim (\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g, w_T)_{L^2(T)} \\ &= (\Pi_h g, w_T)_{L^2(T)} - (\gamma_h, \nabla w_T)_{L^2(T)} \\ &= (\gamma - \gamma_h, \nabla w_T)_{L^2(T)} + (\Pi_h g - g, w_T)_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, en sommant sur tous les éléments, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 \\
 & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)} t h_T^2 \|\nabla w_T\|_{L^2(T)} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \nabla w_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2)^{1/2} h_T \|g - \Pi_h g\|_{L^2(T)} h_T (h_T^2 + t^2)^{1/2} \|w_T\|_{L^2(T)},
 \end{aligned}$$

ce qui donne par deux inégalités de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 \\
 & \lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} t^2 h_T^4 \|\nabla w_T\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\
 & + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \nabla w_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
 & + \underbrace{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) h_T^2 \|g - \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}}_{= \operatorname{osc}(g)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (h_T^2 + t^2) \|w_T\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}. \tag{II.25}
 \end{aligned}$$

- Maintenant, en utilisant (II.24), nous avons

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} t^2 h_T^4 \|\nabla w_T\|_{L^2(T)}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{t^2 h_T^4 h_T^{-2}}_{= t^2 h_T^2 \leq h_T^2 (t^2 + h_T^2)} \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2. \tag{II.26}$$

- Avec l'inégalité triangulaire et (II.24), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \nabla w_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^6 |h_T \nabla w_T|_{H^1(T)}^2 \text{ car les } w_T \text{ ont des supports disjoints} \\
 & \left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \nabla w_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{h_T^6 h_T^{-2}}_{= h_T^4 \leq h_T^2 (t^2 + h_T^2)} \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2. \tag{II.27}
 \end{aligned}$$

- Enfin, par les propriétés de b_T , nous avons $\|w_T\|_{L^2(T)} \lesssim \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}$, ce qui implique que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (h_T^2 + t^2) \|w_T\|_{L^2(T)}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (h_T^2 + t^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2. \tag{II.28}$$

En intégrant les relations (II.26), (II.27) et (II.28) dans (II.25), nous obtenons aisément que

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \left[\left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + \operatorname{osc}(g) \right] \\
&\quad \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\
\Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \operatorname{osc}^2(g) \\
\Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + \Pi_h g\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \operatorname{osc}^2(g).
\end{aligned} \tag{II.29}$$

En regroupant alors (II.23) et (II.29), nous obtenons

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \lesssim t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \operatorname{osc}^2(g).$$

□

Par conséquent, en regroupant la relation (II.14), les lemmes II.3.1 et II.3.2, nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème II.3.1 *Si x^* (resp. y^*) est construit de la même manière que [NWW07] (resp. [CN10]), nous obtenons*

$$\begin{aligned}
&8Z(3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2 t^{-2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 + (4Z + 2\widehat{c}_K^2) \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ Z \left[4\lambda t^{-2} + \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3c_K^2 c_F^2} \right] \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\lesssim (1 + t^{-2}) \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + t^{-2}) \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (t^2 + 1 + t^{-2}) \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + (1 + t^{-2}) \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + t^{-2} \operatorname{osc}^2(g).
\end{aligned}$$

avec $Z = \max\{2\widehat{c}_K^2 + c_K^2; (3 + 2\sqrt{3})c_K^2 c_F^2; 1\}$.

Remarque II.3.1 *Notons que la constante multiplicative cachée dans \lesssim ne dépend ni de h , ni de t mais dépend des coefficients de Lamé λ , $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$. Cet abus de notation a été fait dans le but de mieux visualiser la dépendance en t .*

En conclusion, nous avons démontré que l'estimateur est bien efficace. Néanmoins, le fait qu'il ne soit pas robuste en t pose problème car lorsque $t \rightarrow 0$, l'estimateur peut exploser. C'est pourquoi nous allons créer un estimateur robuste en t dans le chapitre suivant.

Chapitre III

Estimateur équilibré robuste en t

L'objectif de cette partie est d'améliorer l'estimateur *a posteriori* précédent afin de le rendre robuste en t . Pour ce faire, nous utiliserons la norme introduite par Carstensen et Hu ([CH07]) et nous ajouterons un terme dans l'erreur afin de conserver l'efficacité de notre estimateur. De plus, nous modifierons la définition de l'estimateur avec l'introduction du facteur $\kappa_2(T)$ qui ne dépend que du diamètre du patch associé à la maille $T \in \mathcal{T}_h$. L'intérêt principal de cette modification réside dans la possibilité de considérer des maillages non réguliers. Nous démontrerons la fiabilité et l'efficacité de ce nouvel estimateur et des résultats numériques viendront confirmer nos résultats.

Sommaire

III.1 Introduction	61
III.2 Relations nécessaires	62
III.3 Fiabilité de l'estimateur	64
III.4 Efficacité de l'estimateur	74
III.5 Résultats numériques	75

III.1 Introduction

Afin d'obtenir un estimateur robuste en t (c'est-à-dire que la constante multiplicative intervenant dans l'efficacité de l'estimateur est indépendante de t), nous devons modifier la norme de $\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h$: nous allons passer de la norme $L^2(\Omega)$ à la norme $H_0(\text{rot}, \Omega)$. Ce procédé implique deux changements vis à vis de l'étude précédente :

- il fait apparaître la constante $c_{\mathbf{R}}$ que nous ne connaissons pas exactement, mais que nous pouvons estimer (cf partie I.3) ;
- il faut rajouter $\lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$ dans l'erreur afin d'assurer l'efficacité de l'estimateur.

L'erreur que nous cherchons à contrôler s'écrit ici :

$$\begin{aligned} E2^2 &:= \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \lambda^{-2}t^4\|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

III.2 Relations nécessaires

Les relations (I.3) et (I.10) impliquent

$$\begin{aligned} (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) &= (\gamma - \gamma_h, \nabla z - \beta) \\ &= (\gamma, \nabla z) - (\gamma, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta) \\ &= (g, z) - a(\phi, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta) \\ &= -a(\phi - \phi_h, \beta) + (g, z) - a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta). \end{aligned}$$

En conséquence, (I.1)(iii), (I.8), (I.9), ainsi que la bilinéarité du produit scalaire, de a et de ∇ , nous permettent de démontrer le lemme suivant (ce lemme provient de [CH07] dont nous rappelons la démonstration) :

Lemme III.2.1

$$\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \text{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + \text{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta).$$

Preuve:

$$\begin{aligned} &\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, (\nabla\omega - \nabla\omega_h) - (\phi - \phi_h) + (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) \\ &= a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, (\nabla\omega - \nabla\omega_h) - (\phi - \phi_h)) + (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) \\ &= \underbrace{a(\phi, \phi - \phi_h) + (\gamma, \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h))}_{= (g, \omega - \omega_h)} - a(\phi_h, \phi - \phi_h) - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h)) \\ &\quad + (\gamma_h, \phi - \phi_h) - a(\phi - \phi_h, \beta) + (g, z) - a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne, en réordonnant les termes :

$$\begin{aligned} &\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= (g, \omega - \omega_h) - a(\phi_h, \phi - \phi_h) - a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h)) - (\gamma_h, \nabla z) + (\gamma_h, \phi - \phi_h) \\ &\quad + (\gamma_h, \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta) + (g, z) \\ &= (g, \omega - \omega_h) - \underbrace{a(\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) + (\gamma_h, \phi - \phi_h + \beta)}_{= \text{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) \text{ (cf (I.26))}} - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h + z)) \\ &\quad - a(\phi - \phi_h, \beta) + (g, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &= Res_2(\phi - \phi_h + \beta) + (g, \omega - \omega_h) + (g, z) - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h + z)) - a(\phi - \phi_h, \beta) \\
 &= Res_2(\phi - \phi_h + \beta) + \underbrace{(g, \omega - \omega_h + z) - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h + z))}_{= Res_1(\omega - \omega_h + z) \text{ (cf (I.26))}} - a(\phi - \phi_h, \beta).
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = Res_1(\omega - \omega_h + z) + Res_2(\phi - \phi_h + \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta).$$

□

En remarquant que $\gamma - \gamma_h = \lambda t^{-2}(\nabla\omega - \nabla\omega_h - \phi + \phi_h + \nabla z - \beta)$, nous avons que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 = \lambda^{-2}t^4 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)}^2.$$

Nous pouvons alors déduire le lemme suivant (ce lemme provient de [CH07] dont nous rappelons la démonstration) :

Lemme III.2.2

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 \\
 & \leq Res_1(\omega - \omega_h + z) + Res_2(\phi - \phi_h + \beta) + \frac{1}{2} \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2.
 \end{aligned}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 \\
 & \leq \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\frac{\lambda \lambda^{-2}t^4}{t^2 + h_T^2}}_{\leq \lambda^{-1}t^2} \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \\
 & \leq \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \lambda^{-1}t^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \\
 & \leq \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} a(\phi - \phi_h + \beta, \phi - \phi_h + \beta) + \frac{1}{2} a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h).
 \end{aligned}$$

Par la bilinéarité, la symétrie de a et le lemme III.2.1, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2} \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 \\
& \leq \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left[a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) + \underbrace{a(\phi - \phi_h, \beta) + a(\beta, \phi - \phi_h)}_{= 2a(\phi - \phi_h, \beta)} + a(\beta, \beta) \right] \\
& \quad + \frac{1}{2} a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) \\
& = \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} [\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + 2a(\phi - \phi_h, \beta) + \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2] + \frac{1}{2} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 \\
& = \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2 + a(\phi - \phi_h, \beta) \\
& = Res_1(\omega - \omega_h + z) + Res_2(\phi - \phi_h + \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta) + \frac{1}{2} \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2 + a(\phi - \phi_h, \beta) \\
& = Res_1(\omega - \omega_h + z) + Res_2(\phi - \phi_h + \beta) + \frac{1}{2} \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2.
\end{aligned}$$

□

III.3 Fiabilité de l'estimateur

En utilisant la proposition II.2.1 avec $0 < \varepsilon < 1/2$ et $0 \leq \alpha \leq t^{-1}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
E_2^2 & \leq \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_K^2 \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\
& \leq \frac{1}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda \alpha^2 (\frac{2}{\varepsilon} - 1)}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{\lambda \alpha^2 (\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1)}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\lambda(t^{-2} - \alpha^2)}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + c_K^2 \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \\
E_2^2 & \leq \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} \right\} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \right\} \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{III.2}$$

En se rappelant que (cf (II.2))

$$\|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq 2\widehat{c}_K^2 \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

et en notant que

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}t^2 \operatorname{rot}(\gamma - \gamma_h) &= -\operatorname{rot}(\phi - \phi_h) - \operatorname{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\ \Rightarrow \lambda^{-1}t^2 \|\operatorname{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\operatorname{rot}(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \lambda^{-2}t^4 \|\operatorname{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2c_{rot}^2 \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + 2\|\operatorname{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} E2^2 &\leq \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} \right\} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \right\} \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2c_{rot}^2 \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + 2\|\operatorname{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\widehat{c}_K^2 \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2, \\ E2^2 &\leq \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2 \right\} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + 2\|\operatorname{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \right\} \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous posons alors :

$$A(\varepsilon, \alpha) := \max \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2; 1 + \frac{1}{\lambda\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \right\}.$$

et nous utilisons le lemme III.2.2 afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} E2^2 &\leq A(\varepsilon, \alpha) \left\{ 2Res_1(\omega - \omega_h + z) + 2Res_2(\phi - \phi_h + \beta) + \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2 \right. \\ &\quad \left. - \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 \right\} \\ &\quad + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\operatorname{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{III.3}$$

Or, par définition des normes, nous avons :

$$\begin{aligned} Res_1(\omega - \omega_h + z) &\leq \|Res_1\|_{-1,h} \|(\psi, \omega - \omega_h + z)\|_{1,h} \quad \forall \psi \in \Theta; \\ Res_2(\phi - \phi_h + \beta) &\leq \|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla(\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

où, par un abus de notation, nous utilisons (ici et après) l'extension par zéro de l'opérateur linéaire Res_1 sur l'espace $H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} Res_1 : H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\psi, v) &\mapsto Res_1(v). \end{aligned}$$

Nous utilisons ces relations avec deux inégalités de Young (de paramètres $\sigma > 0$ et $\nu > 0$) dans (III.3) :

$$\begin{aligned} E2^2 &\leq \sigma A^2(\varepsilon, \alpha) \|Res_1\|_{-1,h}^2 + \frac{1}{\sigma} \|(\psi, \omega - \omega_h + z)\|_{1,h}^2 \\ &\quad + \nu A^2(\varepsilon, \alpha) \|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu} \|\nabla(\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - A(\varepsilon, \alpha) \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + A(\varepsilon, \alpha) \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2 + 2\|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\lambda A(\varepsilon, \alpha)}{t^2 + h_T^2} + \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \right) \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

Nous choisissons de prendre $\psi = \phi - \phi_h + \beta$, ce qui implique que

$$\|(\psi, \omega - \omega_h + z)\|_{1,h}^2 = \|\nabla(\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} E2^2 &\leq \sigma A^2(\varepsilon, \alpha) \|Res_1\|_{-1,h}^2 + \frac{1}{\sigma} \|\nabla(\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\nu A^2(\varepsilon, \alpha) + 2) \|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \|\nabla(\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(\Omega)}^2 - A(\varepsilon, \alpha) \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + A(\varepsilon, \alpha) \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2 \\ &\quad + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\lambda A(\varepsilon, \alpha)}{t^2 + h_T^2} + \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} - \frac{1}{\sigma(t^2 + h_T^2)} \right) \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2; \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E2 &\leq A_1 \|Res_1\|_{-1,h}^2 + A_2 \|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + A_3 \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + A_4 \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + A_5 \|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} A_6^T \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2; \end{aligned} \tag{III.4}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 := \sigma A^2(\varepsilon, \alpha); \\ A_2 := \nu A^2(\varepsilon, \alpha) + 2; \\ A_3 := c_K^2 \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\nu} \right) - A(\varepsilon, \alpha); \\ A_4 := \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \\ A_5 := 2 + A(\varepsilon, \alpha) \widehat{c}_K^2 c_{\mathbf{R}}^2; \\ A_6^T := \frac{\lambda A(\varepsilon, \alpha)}{t^2 + h_T^2} + \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} - \frac{1}{\sigma(t^2 + h_T^2)}, \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right.$$

Il nous faut choisir les paramètres σ et ν . Nous allons faire en sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 \leq 0; \\ A_6^T \geq 0 \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right.$$

Sous la condition $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$, un choix admissible est $\sigma = \nu = \frac{2c_K^2}{A(\varepsilon, \alpha)}$, ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_3 = 0; \\ A_6^T = \frac{2\lambda c_K^2 - 1}{t^2 + h_T^2} \frac{A(\varepsilon, \alpha)}{2c_K} + \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \geq 0 \forall T \in \mathcal{T}_h. \end{array} \right.$$

Remarque III.3.1 *En fait, nous avons la condition suivante sur σ :*

$$\sigma \geq \max \left\{ \left(\lambda A(\varepsilon, \alpha) + \frac{(t^{-2} - \alpha^2)(t^2 + h^2)}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \right)^{-1}; \frac{c_K^2}{A(\varepsilon, \alpha)} \right\} \text{ avec } h := \min_{T \in \mathcal{T}_h} h_T. \quad (\text{III.5})$$

En effet, la relation $A_6^T \geq 0$ impose que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$:

$$\sigma \geq \frac{1}{t^2 + h_T^2} \left(\frac{\lambda A(\varepsilon, \alpha)}{t^2 + h_T^2} + \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \right)^{-1} = \left(\lambda A(\varepsilon, \alpha) + \frac{(t^{-2} - \alpha^2)(t^2 + h_T^2)}{\alpha^2(1 - 2\varepsilon)} \right)^{-1}.$$

Par contre, la relation $A_3 \leq 0$ impose que

$$\nu \geq \left(\frac{A(\varepsilon, \alpha)}{c_K^2} - \frac{1}{\sigma} \right)^{-1},$$

d'où la nécessité d'imposer que $\sigma \geq \frac{c_K^2}{A(\varepsilon, \alpha)}$ afin d'assurer la positivité de ν ; ce qui nous amène à la condition (III.5).

Mais cette relation pose également un autre problème pour les choix de σ et ν :

- Si σ est trop petit, alors ν devient très grand;
- Si ν est trop petit, alors σ devient très grand.

D'où le choix de $\sigma = \nu = \frac{2c_K^2}{A(\varepsilon, \alpha)}$ (quitte à augmenter la valeur de c_K afin de vérifier la condition $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$).

Un autre choix possible serait :

$$\sigma = \nu = \max \left\{ \frac{2c_K^2}{A(\varepsilon, \alpha)}, \frac{1}{\lambda A(\varepsilon, \alpha)} \right\},$$

ce qui supprimerait la condition $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$.

Nous avons alors :

Proposition III.3.1 Si $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$, alors pour $0 \leq \varepsilon < 1/2$ et $0 < \alpha \leq t^{-1}$

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \lambda^{-2}t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \leq 2c_K^2 A(\varepsilon, \alpha) \|\text{Res}_1\|_{-1,h}^2 + (2c_K^2 A(\varepsilon, \alpha) + 2) \|\text{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \quad + \max \left\{ \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon}; 2 + A(\varepsilon, \alpha) \widehat{c}_K^2 c_R^2 \right\} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2. \end{aligned}$$

avec

$$A(\varepsilon, \alpha) := \max \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{\text{rot}}^2; 1 + \frac{1}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \right\}.$$

Remarque III.3.2 Il est néanmoins possible de supprimer la condition $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$ en prenant directement $\sigma = \nu = \max \left\{ \frac{c_K^2}{A(\varepsilon, \alpha)}; \frac{1}{\lambda A(\varepsilon, \alpha)} \right\}$, ce qui nous donne la proposition suivante :

Proposition III.3.2 Pour $0 \leq \varepsilon < 1/2$ et $0 < \alpha \leq t^{-1}$

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \lambda^{-2}t^4\|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \leq \max\{2c_K^2; \lambda^{-1}\}A(\varepsilon, \alpha)\|\text{Res}_1\|_{-1,h}^2 + (\max\{2c_K^2; \lambda^{-1}\}A(\varepsilon, \alpha) + 2)\|\text{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \quad + \max\left\{\frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon}; 2 + A(\varepsilon, \alpha)\widehat{c}_K^2 c_R^2\right\}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2. \end{aligned}$$

avec

$$A(\varepsilon, \alpha) := \max\left\{c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{\text{rot}}^2; 1 + \frac{1}{\lambda\alpha^2(1 - 2\varepsilon)}\right\}.$$

Il reste maintenant à déterminer les constantes ε et α . Le principe est le même que dans la cas non-robuste en t ; les fonctions de ε et α intervenant étant pratiquement identiques. En appliquant alors le même raisonnement, le choix optimal est $\varepsilon = 2 - \sqrt{3}$ et $\alpha = (3\lambda c_K^2 c_F^2)^{-1/2}$ et donc

$$\begin{aligned} A(\varepsilon, \alpha) &= \max\{c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{\text{rot}}^2; 1 + c_K^2 c_F^2 (3 + 2\sqrt{3})\} \\ &= c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{\text{rot}}^2, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le corollaire suivant :

Corollaire III.3.1 Si $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$, alors

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \lambda^{-2}t^4\|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \leq 2c_K^2 \left(c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{\text{rot}}^2 \right) \|\text{Res}_1\|_{-1,h}^2 \\ & \quad + \left(2c_K^2 (c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{\text{rot}}^2) + 2 \right) \|\text{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \quad + \max\left\{7 + 4\sqrt{3}; 2 + (c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{\text{rot}}^2)\widehat{c}_K^2 c_R^2\right\}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2. \end{aligned}$$

III.3.1 Calculs des résidus

Il nous faut maintenant majorer les deux résidus qui interviennent afin de parvenir à l'estimateur.

- Tout d'abord, nous avons, par la relation (II.12)

$$\|Res_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq \widehat{c}_K^2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- Maintenant, trouvons un majorant de $\|Res_1\|_{-1,h}^2$.
Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Nous définissons $v_h = Jv$, avec $J : H_0^1(\Omega) \rightarrow S_0^1(\mathcal{T}_h)$ tel que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et $v \in H_0^1(\Omega)$, il existe deux constantes $\kappa_1(T) > 0$ et $\kappa_{1,b}(T) > 0$ telles que

$$\begin{cases} \|\nabla Jv\|_{L^2(T)} \leq \kappa_1(T) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}, \\ h_T^{-1} \|v - Jv\|_{L^2(T)} \leq \kappa_{1,b}(T) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}. \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

En fait, cela correspond à une propriété de l'interpolé de Clément : nous prendrons ici un interpolé de type Clément (cf [Clé75] pour la définition originelle de l'opérateur de Clément sur $H^1(\Omega)$ ainsi que pour l'obtention des majorations et cf [K99] pour une adaptation possible sur $H_0^1(\Omega)$).

Or, comme $S_0^1(\mathcal{T}_h) \subset W_h$, nous avons par (II.8) pour le choix de y^* , pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} Res_1(v) &= (g, v) - (\gamma_h, \nabla v) \\ &= (g, v - v_h) - (\gamma_h, \nabla(v - v_h)) \\ &= Res_1(v - v_h) \\ &= (g + \text{div}y^*, v - v_h) - (\gamma_h - y^*, \nabla(v - v_h)) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(g + \text{div}y^*, v - v_h)_{L^2(T)} - (\gamma_h - y^*, \nabla(v - v_h))_{L^2(T)}] \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \sqrt{t^2 + h_T^2} \|g + \text{div}y^*\|_{L^2(T)} \times \frac{h_T^{-1}}{\sqrt{t^2 + h_T^2}} \|v - v_h\|_{L^2(T)} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sqrt{t^2 + h_T^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \times \frac{1}{\sqrt{t^2 + h_T^2}} \|\nabla(v - v_h)\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Nous aurons besoin d'une autre inégalité donnée par la proposition suivante :

Proposition III.3.3 *Avec les définitions précédentes nous avons, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$ et $v_h = Jv$, l'existence d'une constante $\kappa_2(T) > 0$ telle que*

$$\|\nabla(v - v_h)\|_{L^2(T)} \leq \kappa_2(T) \{ \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \}. \quad (\text{III.7})$$

Preuve: La démonstration présentée ci-dessous provient de [CH07]. Soit u une fonction

affine sur ω_T , ce qui implique que $Ju = u$. Alors :

$$\begin{aligned}
\nabla(v - v_h) &= \nabla(v - u + u - v_h) \\
&= \nabla(v - u) - \nabla(v_h - u) \\
\Rightarrow \|\nabla(v - v_h)\|_{L^2(T)} &\leq \|\nabla(v - u)\|_{L^2(T)} + \|\nabla(v_h - u)\|_{L^2(T)} \\
&\leq \|\nabla(v - u)\|_{L^2(T)} + \|\nabla(Jv - Ju)\|_{L^2(T)} \\
&\leq \|\nabla(v - u)\|_{L^2(T)} + \|\nabla J(v - u)\|_{L^2(T)} \\
&\leq \|\nabla(v - u)\|_{L^2(T)} + \kappa_1(T) \|\nabla(v - u)\|_{L^2(\omega_T)} \text{ d'après (III.6)} \\
&\leq (1 + \kappa_1(T)) \|\nabla(v - u)\|_{L^2(\omega_T)}.
\end{aligned}$$

Nous posons $A := \nabla u$. Soit $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$. Alors :

$$\|\nabla(v - v_h)\|_{L^2(T)} \leq (1 + \kappa_1(T)) \|\nabla v - A\|_{L^2(\omega_T)} \leq (1 + \kappa_1(T)) [\|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + \|\psi - A\|_{L^2(\omega_T)}].$$

Nous choisissons alors la fonction u telle que A soit la moyenne de ψ , c'est-à-dire que

$$A = \frac{1}{|\omega_T|} \int_{\omega_T} \psi \, dx.$$

Or, par une inégalité de Poincaré, nous avons l'existence d'une constante $\kappa_3(T) > 0$ (qui dépend de ω_T , donc du triangle T ; sa valeur est donnée dans [CF00] et est rappelée dans la sous-section III.5.3) telle que

$$\|\psi - A\|_{L^2(\omega_T)} \leq \kappa_3(T) h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2. \quad (\text{III.8})$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|\nabla(v - v_h)\|_{L^2(T)} &\leq (1 + \kappa_1(T)) \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + (1 + \kappa_1(T)) \kappa_3(T) h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \\
&\leq \underbrace{(1 + \kappa_1(T)) \max\{1; \kappa_3(T)\}}_{=: \kappa_2(T)} \{\|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}\}.
\end{aligned}$$

□

De même, en se rappelant la définition de $\kappa_{1,b}(T)$ donnée à la relation (III.6), nous obtenons,

$$h_T^{-1} \|v - v_h\|_{L^2(T)} \leq \kappa_{1,b}(T) \max\{1; \kappa_3(T)\} \{\|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}\}. \quad (\text{III.9})$$

En combinant (III.9), la proposition III.3.3 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète,

nous avons que pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$\begin{aligned}
Res_1(v) &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \sqrt{t^2 + h_T^2} \|g + \operatorname{div} y^*\|_{L^2(T)} \\
&\quad \times \frac{\kappa_{1,b}(T) \max\{1; \kappa_3(T)\}}{\sqrt{t^2 + h_T^2}} \{ \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \} \\
&+ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sqrt{t^2 + h_T^2} \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)} \\
&\quad \times \frac{\kappa_2(T)}{\sqrt{t^2 + h_T^2}} \{ \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \} \\
&\leq \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_{1,b}(T)^2 \max\{1; \kappa_3(T)\}^2 h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \operatorname{div} y^*\|_{L^2(T)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_2(T)^2 (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \\
&\quad \left\{ 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\left[\frac{1}{t^2 + h_T^2} \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)}^2 + \frac{h_T^2}{t^2 + h_T^2} \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}^2 \right]}_{=:S} \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or, en se rappelant de l'existence de l'entier Cte lié à la régularité de la triangularisation ($Cte = \max_{T \in \mathcal{T}_h} Y(T)$, avec $Y(T) = \#\{T' \in \mathcal{T}_h \mid T' \subset \omega_T\}$), nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
S &\leq Cte \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{1}{t^2 + h_T^2} \|\nabla v - \psi\|_{L^2(T)}^2 + \underbrace{\frac{h_T^2}{t^2 + h_T^2}}_{\leq 1} \|\nabla \psi\|_{L^2(T)}^2 \right] \\
&\leq Cte \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{1}{t^2 + h_T^2} \|\nabla v - \psi\|_{L^2(T)}^2 + \|\nabla \psi\|_{L^2(T)}^2 \right] \\
&\leq Cte \left\{ \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{t^2 + h_T^2} \|\nabla v - \psi\|_{L^2(T)}^2 \right\} \\
S &\leq Cte \|(\psi, v)\|_{1,h}^2.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
Res_1(v) &\leq \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_{1,b}(T)^2 \max\{1; \kappa_3(T)\}^2 h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \operatorname{div} y^*\|_{L^2(T)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_2(T)^2 (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2} \times \sqrt{2Cte} \|(\psi, v)\|_{1,h},
\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \|\|Res_1\|\|_{-1,h}^2 &\leq 2Cte \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_{1,b}(T)^2 \max\{1; \kappa_3(T)\}^2 h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \text{div}y^*\|_{L^2(T)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_2(T)^2 (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \right) \end{aligned}$$

et qui nous donne la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \|\|Res_1\|\|_{-1,h}^2 &\leq 2Cte \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_2(T)^2 (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + 2Cte \max_{T \in \mathcal{T}_h} \{\kappa_{1,b}(T)^2 \max\{1; \kappa_3(T)\}^2\} \text{osc}^2(g). \end{aligned}$$

III.3.2 Conclusion

En regroupant toutes les données récoltées précédemment, nous avons le théorème suivant :

Théorème III.3.1 *En supposant que $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$ et $t \leq \sqrt{3} \lambda c_K c_F$, nous obtenons*

$$\begin{aligned} &\|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\leq 4c_K^2 Cte \left\{ c_K^2 + c_F^2 c_K^2 [3 + 2\sqrt{3}] + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2 \right\} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_2(T)^2 (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + \left\{ 2c_K^2 [c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2] + 2 \right\} \widehat{c}_K^2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \max \left\{ 7 + 4\sqrt{3}; 2 + (c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2) \widehat{c}_K^2 c_R^2 \right\} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2 \\ &\quad + h.o.t. \end{aligned}$$

avec $h.o.t. := 4c_K^2 Cte \max_{T \in \mathcal{T}_h} \{\kappa_{1,b}(T)^2 \max\{1; \kappa_3(T)\}^2\} \left\{ c_K^2 + c_F^2 c_K^2 [3 + 2\sqrt{3}] + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2 \right\} \text{osc}^2(g)$,
 $Cte = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \#\{T' \in \mathcal{T}_h \mid T' \subset \omega_T\}$; $\kappa_1(T)$ et $\kappa_{1,b}(T)$ sont définis par la relation (III.6); $\kappa_2(T)$ et $\kappa_3(T)$ sont définis dans la preuve de la proposition III.3.3.

Remarque III.3.3 *Nous avons finalement trouvé un estimateur robuste en t (disparition du t^{-2} de l'estimateur). Mais cela a un prix :*

- nous avons dû changer la norme $\|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}$ en $\|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}$;
- nous avons récupéré une constante que nous ne connaissons pas explicitement ($\kappa_2(T)$), liée aux inégalités inverses, car cette valeur dépend fortement du maillage considéré. Cependant, une évaluation de cette constante est donnée dans la sous-section III.5.3.

III.4 Efficacité de l'estimateur

Les deux estimateurs présentés précédemment (cas non-robuste et robuste) font intervenir exactement les mêmes termes, hormis le changement de norme pour $\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h$, et l'erreur dans le cas robuste est égale à celle du cas non-robuste à laquelle nous avons ajouté un terme. Cela signifie que le travail effectué dans la section précédente reste valable, à ceci près qu'il convient de majorer un terme supplémentaire apparaissant dans l'estimateur par la nouvelle erreur.

Par la définition de la norme $H_0(rot, \Omega)$, nous avons

$$\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(rot, \Omega)}^2 = \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Or,

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h &= \lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_h) - \nabla(\omega - \omega_h) + (\phi - \phi_h) \\ \Rightarrow rot((\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) &= \lambda^{-1}t^2 rot(\gamma - \gamma_h) + rot(\phi - \phi_h) \\ \Rightarrow \|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim \lambda^{-2}t^4 \|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|rot(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim \lambda^{-2}t^4 \|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En combinant cette relation avec (II.14), nous obtenons bien que

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h\|_{H_0(rot, \Omega)}^2 &\lesssim \lambda^{-2}t^4 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-2}t^4 \|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{III.10}$$

D'où le théorème suivant :

Théorème III.4.1 *Si x^* (resp. y^*) est construit de la même manière que [NWW07] (resp. [CN10]), nous obtenons*

$$\begin{aligned} &4c_K^2 Cte \left\{ c_K^2 + c_F^2 c_K^2 [3 + 2\sqrt{3}] + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2 \right\} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_2(T)^2 (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2 \\ &+ \left\{ 2c_K^2 [c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2] + 2 \right\} \widehat{c}_K^2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \max \left\{ 7 + 4\sqrt{3}; 2 + (c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2) \widehat{c}_K^2 c_{\mathbf{R}}^2 \right\} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(rot, \Omega)}^2 \\ &\lesssim \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \lambda^{-2}t^4 \|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + osc^2(g). \end{aligned}$$

où $Cte = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \#\{T' \in \mathcal{T}_h \mid T' \subset \omega_T\}$.

III.5 Résultats numériques

Nous considérons dans cette partie l'erreur discrète $e_{h,dis}^{rot}$ donnée par

$$(e_{h,dis}^{rot})^2 = \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ + \lambda^{-2}t^4\|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P_h\gamma - \gamma_h\|_{-1,dis}^2,$$

où $P_h\gamma$ correspond à l'interpolation \mathbb{P}_1 -discontinue par morceaux de γ sur le maillage \mathcal{T}_h . Cette erreur discrète est définie en approchant la norme $H^{-1}(\Omega)$ de $\gamma - \gamma_h$ intervenant dans l'erreur par sa version discrète localement calculable définie par

$$\|P_h\gamma - \gamma_h\|_{-1,dis}^2 = \sup_{v_h \in W_h} \frac{|(P_h\gamma - \gamma_h, v_h)|^2}{\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2}. \quad (\text{III.11})$$

Le calcul de $\|P_h\gamma - \gamma_h\|_{-1,dis}^2$ est maintenant une tâche facile et correspond simplement à la détermination de la plus grande valeur propre d'un problème classique de valeurs propres généralisé de dimension finie. En effet, notons :

$$v_h = \sum_{x \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \alpha_x \lambda_x \text{ et } P_h\gamma - \gamma_h = \sum_{x \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \beta_x \lambda_x,$$

où $\alpha_x = v_h(x)$, $\beta_x = (P_h\gamma - \gamma_h)(x)$ et $(\lambda_x)_{x \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}$ désigne les fonctions de base de Lagrange. Si nous posons :

$$\alpha = (\alpha_x)_{x \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{N}(\bar{\Omega})} \text{ et } \beta = (\beta_x)_{x \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \in \mathbb{R}^{2\#\mathcal{N}(\bar{\Omega})},$$

alors, nous avons :

$$|(P_h\gamma - \gamma_h, v_h)| = \sum_{x \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \sum_{y \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \alpha_x \beta_y (\lambda_x, \lambda_y) = \alpha^T M \beta,$$

et

$$\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left(\sum_{x \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \alpha_x \nabla \lambda_x, \sum_{y \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \alpha_y \nabla \lambda_y \right) = \alpha^T R \alpha,$$

où la matrice de masse (resp. de rigidité) M (resp. R) est définie par $M_{ij} = (\lambda_i, \lambda_j)$ (resp. $R_{ij} = (\nabla \lambda_i, \nabla \lambda_j)$). Ainsi :

$$\begin{aligned} \|P_h\gamma - \gamma_h\|_{-1,dis}^2 &= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^{\#\mathcal{N}(\bar{\Omega})}} \frac{(\alpha^T M \beta)^2}{\alpha^T R \alpha} \\ &= \sup_{w \in \mathbb{R}^{2\#\mathcal{N}(\bar{\Omega})}} \frac{(w^T R^{-T/2} M \beta)^2}{\|w\|_2^2} \\ &= \sup_{w \in \mathbb{R}^{2\#\mathcal{N}(\bar{\Omega})}} \frac{\|\beta^T M^T R^{-1/2} w\|_2^2}{\|w\|_2^2} \\ &= \|\beta^T M^T R^{-1/2}\|_2^2. \end{aligned}$$

Ainsi, si nous posons $N := R^{-T/2} M \beta \beta^T M^T R^{-1/2}$, la valeur de $\|P_h \gamma - \gamma_h\|_{-1,dis}^2$ est donnée par la plus grande valeur propre de N notée $\lambda_{max}(N)$. Pour ce faire, soit X un vecteur propre associé à $\lambda_{max}(N)$. Alors, si nous posons $Y = R^{T/2} X$ et $Z = R^{-1} Y$, nous avons :

$$\begin{aligned} N X = \lambda_{max}(N) X &\Leftrightarrow R^{-T/2} M \beta \beta^T M^T R^{-1/2} X = \lambda_{max}(N) X \\ &\Leftrightarrow M \beta \beta^T M^T R^{-1/2} X = \lambda_{max}(N) R^{T/2} X = \lambda_{max}(N) Y \\ &\Leftrightarrow M \beta \beta^T M^T R^{-1/2} R^{-T/2} Y = \lambda_{max}(N) Y \\ &\Leftrightarrow M \beta \beta^T M^T R^{-1} Y = \lambda_{max}(N) Y \text{ car } R \text{ est symétrique} \\ &\Leftrightarrow M \beta \beta^T M^T Z = \lambda_{max}(N) R Z. \end{aligned}$$

Pour valider la fiabilité de l'estimateur dans le cas conforme présenté dans le Théorème III.3.1, l'estimateur d'erreur η_h est défini par :

$$\eta_h^2 = \eta_{h,1}^2 + \eta_{h,2}^2 + \eta_{h,3}^2,$$

où les contributions $\eta_{h,1}$, $\eta_{h,2}$ et $\eta_{h,3}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \eta_{h,1}^2 &= 4c_K^2 Cte \left(c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2 \right) \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_2(T)^2 (t^2 + h_T^2) \|\gamma_h - y^*\|_{L^2(T)}^2, \\ \eta_{h,2}^2 &= \left(2c_K^2 \left(c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2 \right) + 2 \right) \widehat{c}_K^2 \|\mathcal{C}^{-1/2}(x^* - \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \eta_{h,3}^2 &= \max \left((7 + 4\sqrt{3}); 2 + \left(c_K^2 + c_F^2 c_K^2 (3 + 2\sqrt{3}) + 2\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2 \right) \widehat{c}_K^2 c_{\mathbf{R}}^2 \right) \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(rot,\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Nous allons vérifier nos résultats (taux de convergence de l'erreur et de l'estimateur, ainsi que les différents ratios) en utilisant un maillage structuré et un autre non-structuré. Dans ce deux cas, nous utiliserons les solutions exactes présentées dans l'annexe C étendues par 0 sur $\partial\Omega$ et nous prendrons arbitrairement $t = 1/128$, $\lambda = 1$, $\tilde{\mu} = 1$ et $\tilde{\lambda} = 1$.

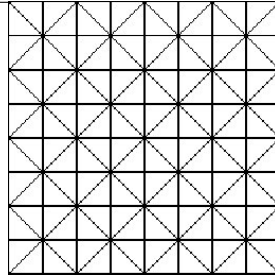
Tous les résultats numériques qui seront présentés ont été effectués en utilisant la librairie GetFEM++ (<http://download.gna.org/getfem/html/homepage/>).

III.5.1 Maillages structurés pour le cas conforme

Dans cette partie, les maillages que nous avons utilisés sont uniformes et composés de n^2 carrés, chacun d'entre eux étant subdivisés en 8 triangles comme le montre la Figure III.1 pour $n = 4$. Cela implique que la valeur du diamètre d'une maille est $h = 1/(\sqrt{2}n)$, et cette valeur est diminuée de moitié entre deux maillages consécutifs.

De plus, avec le type de maillages structurés employé, nous avons $Cte = 15$. Le calcul de $\kappa_2(T)$ est expliqué dans la partie III.5.3.

Nous représentons sur la Figure III.2 l'évolution de l'erreur $e_{h,dis}^{rot}$ et de $\eta_{h,1}$, $\eta_{h,2}$, $\eta_{h,3}$ en fonction de h . Ensuite, nous représentons sur la Figure III.3 les quatre ratios $\eta_h/e_{h,dis}^{rot}$, $\eta_{h,1}/e_{h,dis}^{rot}$, $\eta_{h,2}/e_{h,dis}^{rot}$ et $\eta_{h,3}/e_{h,dis}^{rot}$ en fonction de h . Tout d'abord, on peut remarquer sur la Figure III.2

FIG. III.1: Maillage structuré correspondant à $n = 4$.

que l'erreur converge à l'ordre attendu (à savoir 1), et que le même comportement se produit pour $\eta_{h,2}$ comme pour $\eta_{h,3}$. En conséquence, les ratios $\eta_{h,2}/e_{h,dis}^{rot}$ et $\eta_{h,3}/e_{h,dis}^{rot}$ sont constants comme on peut le remarquer sur la Figure III.3. De plus, il est clair que la partie principale de l'estimateur η_h est $\eta_{h,1}$. Néanmoins, on peut également remarquer que le taux de convergence de $\eta_{h,1}$ commence aux environs de 2 pour les maillages les plus grossiers, ce qui peut facilement s'expliquer par la définition de $\eta_{h,1}$ lorsque h reste plus grand que t . Dès que h devient plus petit que t , alors le taux de convergence de 1 pour $\eta_{h,1}$ est retrouvé comme le suggère les Figures III.2 et III.3 pour les maillages les plus fins utilisés. Par conséquent, le ratio $\eta_h/e_{h,dis}^{rot}$ devient asymptotiquement constant.

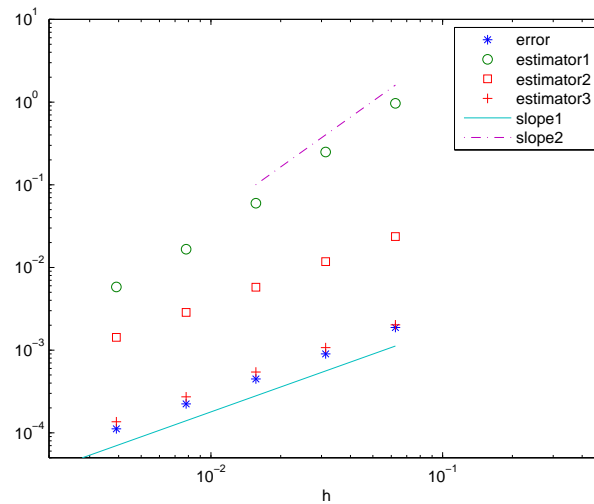


FIG. III.2: Taux de convergence pour l'erreur et les estimateurs, maillages structurés.

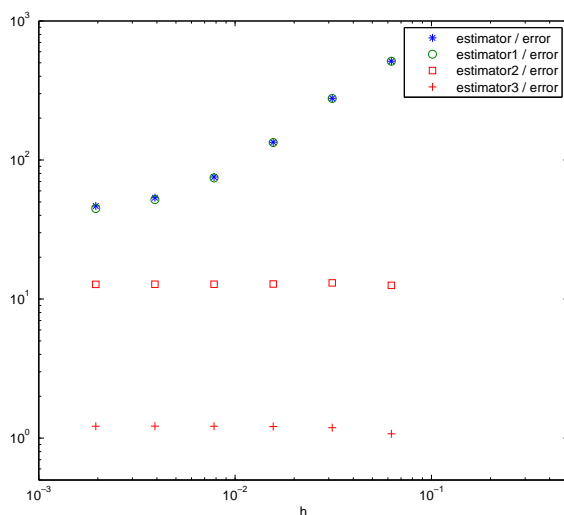


FIG. III.3: Ratios d'efficacité, maillages structurés.

III.5.2 Maillages non-structurés

Dans cette partie, nous présentons le comportement de l'estimateur pour le même test que dans la sous-section III.5.1, mais cette fois-ci, pour des maillages réguliers non-structurés comme présentés sur la Figure III.4. Ainsi, les ordres de convergence sont une fonction de $1/\sqrt{nddl}$, où $nddl$ correspond au nombre de noeuds de la triangulation. Le paramètre Cte dépend du maillage considéré, tandis que $\kappa_2(T)$ est implémenté comme expliqué dans la sous-section III.5.3.

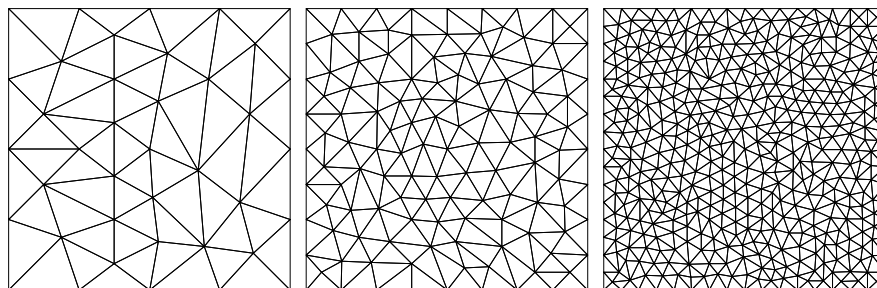


FIG. III.4: Maillages réguliers non-structurés.

Les résultats sont présentés sur les Figures III.5 et III.6 (à comparer respectivement aux Figures III.2 et III.3). Nous pouvons remarquer que les conclusions obtenues pour les maillages non-structurés sont exactement les mêmes que pour les maillages structurés.

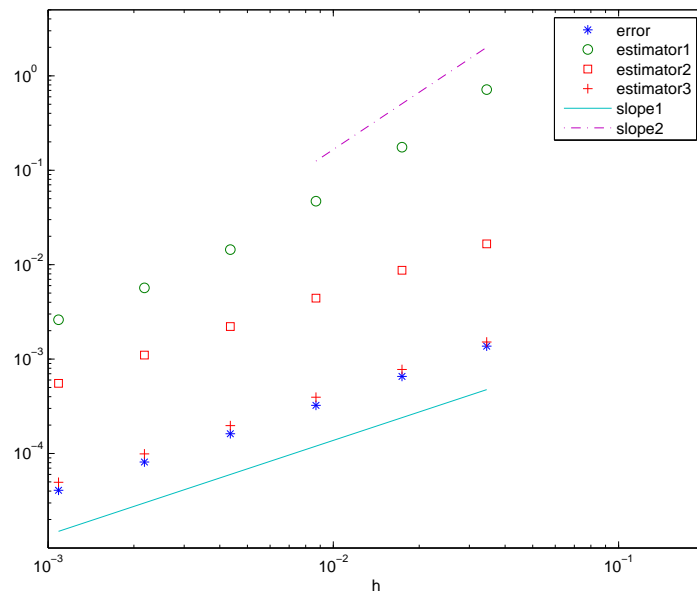


FIG. III.5: Taux de convergence pour l'erreur et les estimateurs, maillages non-structurés.

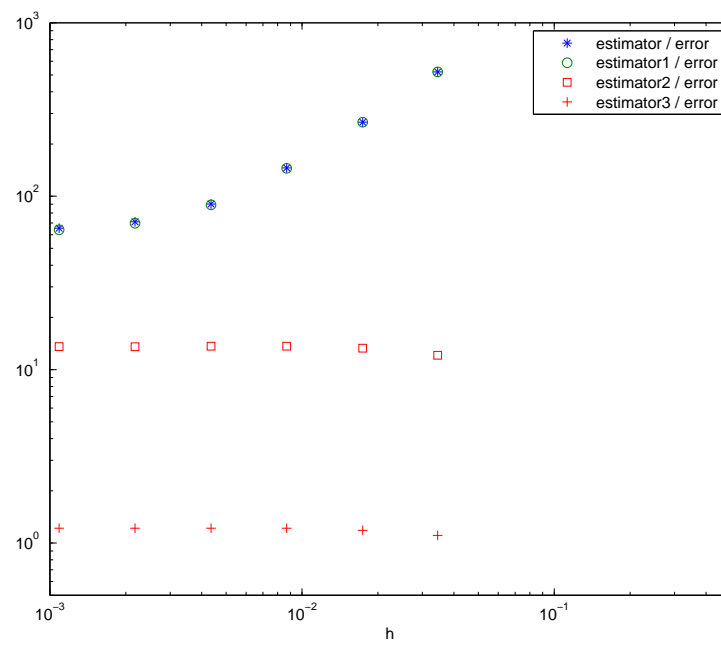


FIG. III.6: Ratios d'efficacité, maillages non-structurés.

III.5.3 Évaluation de $\kappa_2(T)$

Pour calculer $\kappa_2(T)$, nous devons évaluer $\kappa_1(T)$ (définie dans (III.6)) et $\kappa_3(T)$ (définie dans (III.8)).

Nous posons $Jv = \sum_{z \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} v_z \lambda_z$ où $\lambda_z \in W_h$ est la fonction de base associée au sommet z ,

$$v_z = \frac{1}{|\omega_z|} \int_{\omega_z} v(x) dx \in \mathbb{R} \text{ si } z \text{ est un nœud intérieur et } v_z = 0 \text{ sinon.}$$

Par la définition de J (cf sous-section III.3.1) et le fait que $\sum_{z \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \lambda_z = 1$, nous déduisons que

$$\nabla Jv = \sum_{z \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (v_z - v) \nabla \lambda_z, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Afin de simplifier l'écriture, nous posons $\mathcal{N}_T = \mathcal{N}(\bar{T}) = \mathcal{N}(\bar{\Omega}) \cap \bar{T}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \|\nabla Jv\|_{L^2(T)} &= \left\| \sum_{z \in \mathcal{N}_T} (v_z - v) \nabla \lambda_z \right\|_{L^2(T)} \\ &\leq \sum_{z \in \mathcal{N}_T} \|v_z - v\|_{L^2(T)} |\nabla \lambda_z|_T \\ &\leq \sum_{z \in \mathcal{N}_T} \|v_z - v\|_{L^2(\omega_z)} |\nabla \lambda_z|_T \end{aligned}$$

Nous devons majorer $|\nabla \lambda_z|_T$ et $\|v_z - v\|_{L^2(\omega_z)}$. Le premier terme est l'objet du théorème suivant :

Théorème III.5.1 *Si $\lambda_{z|_T}$ est la fonction de base affine associée au sommet z et si ρ_T désigne le diamètre du cercle inscrit au triangle T , alors :*

$$|\nabla \lambda_{z|_T}| \leq \rho_T^{-1}.$$

Preuve: Soient P et Q deux points quelconques du triangle T . Alors, comme $\lambda_{z|_T}$ est une fonction affine comprise entre 0 et 1,

$$\begin{aligned} \lambda_{z|_T}(P) &= \lambda_{z|_T}(Q) + \nabla \lambda_{z|_T} \cdot (P - Q) \\ \Rightarrow |\nabla \lambda_{z|_T} \cdot (P - Q)| &\leq |\lambda_{z|_T}(P) - \lambda_{z|_T}(Q)| \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Comme $\lambda_{z|_T}$ est une fonction affine, $\nabla \lambda_{z|_T} \in \mathbb{P}_0(T)^2$, ce qui implique que

$$|\nabla \lambda_{z|_T}| \leq \|\nabla \lambda_{z|_T}\|_2, \quad (\text{III.13})$$

où $\|\cdot\|_2$ représente la norme euclidienne d'un vecteur.

Or, si nous notons $\mathbb{S}^1 = \{u \in \mathbb{R}^2 / \|u\|_2 = 1\}$ le cercle unité, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|\nabla \lambda_{z|T}\|_2^2 &= |\nabla \lambda_{z|T} \cdot \nabla \lambda_{z|T}| & (III.14) \\
 &= \left| \nabla \lambda_{z|T} \cdot \frac{\nabla \lambda_{z|T}}{\|\nabla \lambda_{z|T}\|_2} \right| \|\nabla \lambda_{z|T}\|_2 \\
 \Rightarrow \|\nabla \lambda_{z|T}\|_2 &= \left| \nabla \lambda_{z|T} \cdot \frac{\nabla \lambda_{z|T}}{\|\nabla \lambda_{z|T}\|_2} \right| \\
 &\leq \sup_{u \in \mathbb{S}^1} |\nabla \lambda_{z|T} \cdot u|.
 \end{aligned}$$

De plus, par définition du cercle inscrit, nous avons :

$$\forall u \in \mathbb{S}^1, \exists P, Q \in T \text{ tels que } P - Q = \rho_T u. \quad (III.15)$$

D'où, en regroupant les relations (III.13), (III.12), (III.14) et (III.15) :

$$\begin{aligned}
 |\nabla \lambda_{z|T}| &\leq \sup_{P, Q \in T} \left| \nabla \lambda_{z|T} \cdot \frac{P - Q}{\rho_T} \right| \\
 &= \frac{1}{\rho_T} \sup_{P, Q \in T} |\nabla \lambda_{z|T} \cdot (P - Q)| \\
 &\leq \frac{1}{\rho_T}
 \end{aligned}$$

□

Pour le second terme, nous avons, d'après [CF00, (5.12)] :

$$\|v_z - v\|_{L^2(\omega_z)} \leq c(\omega_z, 2) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_z)},$$

pour une certaine constante $c(\omega_z, 2)$ (que nous préciserons plus tard dans quelques cas particuliers). Ainsi, en regroupant ces deux parties nous obtenons :

$$\|\nabla J v\|_{L^2(T)} \leq \frac{1}{\rho_T} \sum_{z \in \mathcal{N}_T} c(\omega_z, 2) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)},$$

ce qui implique que

$$\kappa_1(T) \leq \frac{1}{\rho_T} \sum_{z \in \mathcal{N}_T} c(\omega_z, 2).$$

Comme mentionné précédemment, la constante $c(\omega_z, 2)$ peut être estimée dans quelques cas particuliers. Par exemple si z est un noeud intérieur et si ω_z est convexe, alors (cf les relations (5.12), (5.6) et le Théorème 2.1 de [CF00]) :

$$c(\omega_z, 2) \leq \pi^{-1} \text{diam}(\omega_z).$$

Au contraire, si z est un noeud frontalier du domaine, nous rappelons que $v_z = 0$, mais comme $v = 0$ dans $\partial\Omega \cap \partial\omega_z$, $c(\omega_z, 2)$ est la constante de Friedrichs (cf [CF00, (3.1)]). Une

estimation de cette constante ne découle pas simplement des résultats présentés dans [CF00], mais des considérations similaires permettent d'obtenir les estimations suivantes : définissons par φ_z l'angle entre deux côtés de la triangulation ayant z comme sommet. En utilisant les coordonnées polaires centrées en z , le patch ω_z est donné par

$$\omega_z = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : 0 < r < r(\theta), 0 < \theta < \varphi_z\}.$$

Nous distinguons trois cas.

- Cas 1 : Si $\varphi_z < \pi$, nous définissons une extension Ev de v par :

$$Ev = v \quad \text{sur } \omega_z, \quad (\text{III.16})$$

$$Ev(r, \theta) = \alpha_z v(r, \alpha_z \theta) \quad \forall 0 < r < r(\alpha_z \theta), \varphi_z - \pi < \theta < 0, \quad (\text{III.17})$$

où $\alpha_z = \frac{\varphi_z}{\varphi_z - \pi}$. Cela transforme le patch ω_z en un domaine $\tilde{\omega}_z$ comme nous pouvons le voir sur la Figure III.7.

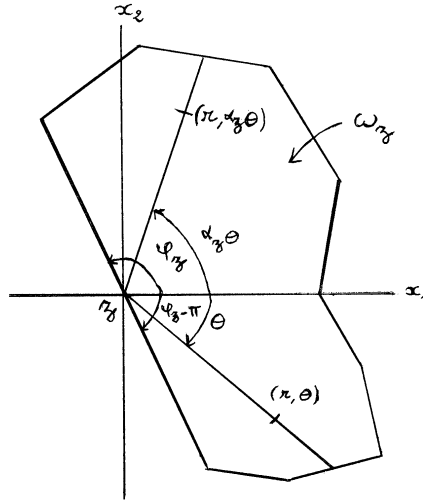


FIG. III.7: Exemple de création du domaine $\tilde{\omega}_z$ lorsque $\varphi_z < \pi$.

De plus le choix du facteur α_z dans la partie droite de (III.16) est effectué dans le but de garantir le fait que

$$\int_{\tilde{\omega}_z} Ev(x) dx = 0.$$

Des calculs directs donnent :

$$\|Ev\|_{L^2(\tilde{\omega}_z)} = \sqrt{1 - \alpha_z} \|v\|_{L^2(\omega_z)},$$

ainsi que :

$$\|\nabla(Ev)\|_{L^2(\tilde{\omega}_z)} \leq \sqrt{1 - \alpha_z} \max\{1, |\alpha_z|\} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_z)}.$$

Donc si $\tilde{\omega}_z$ est convexe (sinon, il suffit de prendre l'enveloppe convexe de $\tilde{\omega}_z$), par [CF00, (5.12)] nous avons :

$$\|Ev\|_{L^2(\tilde{\omega}_z)} \leq \pi^{-1} \text{diam}(\tilde{\omega}_z) \|\nabla(Ev)\|_{L^2(\tilde{\omega}_z)}$$

et par conséquent,

$$\|v\|_{L^2(\omega_z)} \leq \pi^{-1} \text{diam}(\tilde{\omega}_z) \max\{1, |\alpha_z|\} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_z)}.$$

– Cas 2 : Si $\varphi_z = \pi$, nous définissons une autre extension Ev de v par :

$$Ev(r, \theta) = -v(r, -\theta) \quad \forall 0 < r < r(-\theta), \quad -\pi < \theta < 0. \quad (\text{III.18})$$

Dans ce cas-là la transformation est simplement une symétrie axiale par rapport à l'axe x_1 , ce qui transforme le patch ω_z en un domaine $\tilde{\omega}_z$ comme nous pouvons le voir sur la Figure III.8.

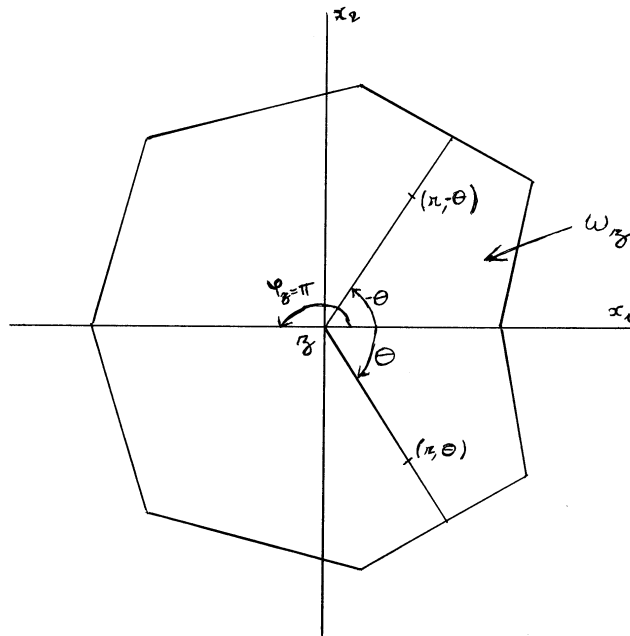


FIG. III.8: Exemple de création du domaine $\tilde{\omega}_z$ lorsque $\varphi_z = \pi$.

Les mêmes considérations que précédemment nous amènent à

$$\|v\|_{L^2(\omega_z)} \leq \pi^{-1} \text{diam}(\tilde{\omega}_z) \|\nabla v\|_{L^2(\tilde{\omega}_z)},$$

si $\tilde{\omega}_z$ est convexe.

- Cas 3 : Si $\varphi_z > \pi$, nous coupons le patch ω_z en deux sous-patches par la ligne $x_2 = \tan(\varphi_z/2)x_1$ et nous exécutons la première transformation pour chaque sous-patch. De nouveau, si le domaine obtenu $\tilde{\omega}_z$ est convexe, nous obtenons une estimation similaire aux précédentes.

Rappelons finalement que par [CF00, (2.3)] si ω_T est convexe, nous avons

$$\kappa_3(T) = \frac{\text{diam}(\omega_T)}{\pi h_T}.$$

Pour les triangulations structurées présentées à la sous-sous-section III.5.1, des calculs directs nous amènent à implémenter les quantités $\kappa_1(T)$ et $\kappa_3(T)$ (en utilisant des arguments d'échelles et en calculant la première valeur propre de Dirichlet ou de Neumann selon les cas). Ces calculs procurent de meilleurs résultats que les estimations précédentes. Plus précisément, nous voulons déterminer la constante $c(\omega_z, 2)$ intervenant dans la majoration :

$$\|v - v_z\|_{L^2(\omega_z)} \leq c(\omega_z, 2) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_z)},$$

selon la position du sommet z ainsi que l'allure du patch correspondant ω_z . Notons que la valeur de h_T est la même pour tout $T \in \mathcal{T}_h$. Nous pouvons alors distinguer cinq cas : trois possibilités lorsque z est un sommet du bord (cf Figure III.9) et deux autres lorsque z est un nœud intérieur (cf Figure III.11).

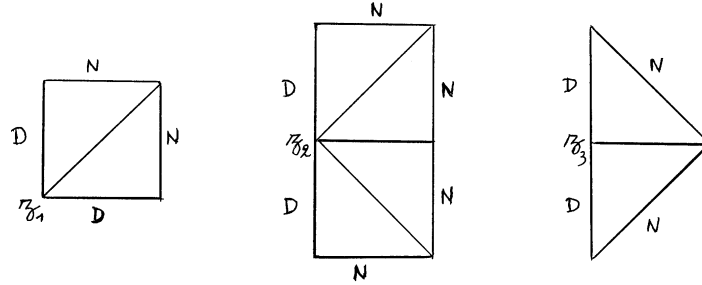


FIG. III.9: Ensemble des patches du bord possibles selon la position du sommet z (D : condition de Dirichlet homogène - N : condition de Neumann homogène).

- Cas 1 - z_1 au coin : Dans ce cas, nous avons $v_{z_1} = 0$, le patch ω_{z_1} étant un carré de côté $h_T/\sqrt{2}$. En se ramenant au patch de référence, nous avons :

$$\|v\|_{L^2(\omega_{z_1})} = \frac{h_T}{\sqrt{2}} \|\hat{v}\|_{L^2(\hat{\omega}_z)},$$

et, avec les conditions aux bords imposées, la première valeur propre du problème du laplacien vaut $\Pi^2/2$ (le vecteur propre associé étant $\sin\left(\frac{\Pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\Pi}{2}y\right)$). D'où :

$$\|\hat{v}\|_{L^2(\hat{\omega}_z)} \leq \frac{\sqrt{2}}{\Pi} \|\hat{\nabla} \hat{v}\|_{L^2(\hat{\omega}_z)},$$

ce qui nous donne :

$$\|v\|_{L^2(\omega_{z_1})} \leq \frac{h_T}{\Pi} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_{z_1})}.$$

- Cas 2 - z_2 au bord : Dans ce cas, nous avons $v_{z_2} = 0$, le patch ω_{z_2} étant un rectangle de longueur $2h_T/\sqrt{2}$ et de largeur $h_T/\sqrt{2}$. En se ramenant au patch de référence, nous avons :

$$\|v\|_{L^2(\omega_{z_2})} = \frac{h_T}{\sqrt{2}} \|\widehat{v}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)},$$

et, avec les conditions aux bords imposées, la première valeur propre du problème du laplacien vaut $\Pi^2/4$ (le vecteur propre associé étant $\sin\left(\frac{\Pi}{2}x\right)$). D'où :

$$\|\widehat{v}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)} \leq \frac{2}{\Pi} \|\widehat{\nabla v}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)},$$

ce qui nous donne :

$$\|v\|_{L^2(\omega_{z_2})} \leq \frac{\sqrt{2}h_T}{\Pi} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_{z_2})}.$$

- Cas 3 - z_3 au bord : Dans ce cas, nous avons $v_{z_3} = 0$, le patch ω_{z_3} étant un triangle de longueurs d'arêtes $2h_T/\sqrt{2}$, h_T et h_T . En se ramenant au patch de référence, nous avons :

$$\|v\|_{L^2(\omega_{z_2})} = \frac{h_T}{\sqrt{2}} \|\widehat{v}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)}.$$

Nous définissons une extension $E\widehat{v}$ de \widehat{v} par :

$$E\widehat{v} = v \quad \text{sur } \widehat{\omega}_z, \quad (\text{III.19})$$

$$E\widehat{v}(\widehat{x}, \widehat{y}) = v(1 - \widehat{x}, 3 - \widehat{y}) \quad \forall 0 \leq \widehat{x} \leq 1, 2 - \widehat{x} \leq \widehat{y} \leq 2, \quad (\text{III.20})$$

$$E\widehat{v}(\widehat{x}, \widehat{y}) = v(1 - \widehat{x}, 1 - \widehat{y}) \quad \forall 0 \leq \widehat{x} \leq 1, 1 - \widehat{x} \leq \widehat{y} \leq 1. \quad (\text{III.21})$$

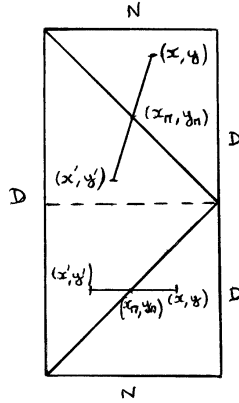


FIG. III.10: Extension du patch pour le sommet z_3 .

Cela transforme le patch $\widehat{\omega}_z$ en un patch $\widetilde{\omega}_z$. En fait, cela correspond à une symétrie centrale de centre $(1/2, 3/2)$ pour la partie supérieure et de centre $(1/2, 1/2)$ pour la partie inférieure (cf la Figure III.10). Ainsi, avec les conditions aux bords imposées, la première valeur propre du problème du laplacien vaut Π^2 (le vecteur propre associé étant $\sin(\Pi x)$). D'où :

$$\frac{\|\nabla \widehat{v}\|_{L^2(\omega_z)}}{\|\widehat{v}\|_{L^2(\widetilde{\omega}_z)}} = \frac{\|\nabla E\widehat{v}\|_{L^2(\widetilde{\omega}_z)}}{\|E\widehat{v}\|_{L^2(\widetilde{\omega}_z)}} \geq \Pi,$$

ce qui nous donne :

$$\|v\|_{L^2(\omega_{z_3})} \leq \frac{h_T}{\Pi} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_{z_3})}.$$

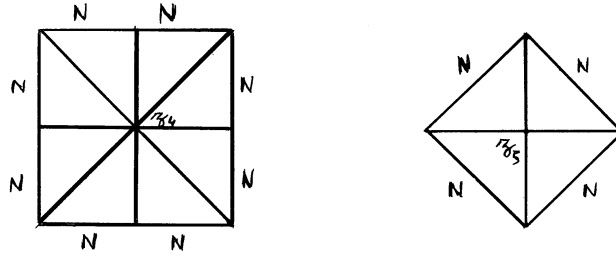


FIG. III.11: Ensemble des patches intérieurs possibles selon la position du sommet z (D : condition de Dirichlet homogène - N : condition de Neumann homogène).

- Cas 4 - z_4 à l'intérieur : Dans ce cas, le patch ω_{z_4} est un carré de côté $2h_T/\sqrt{2}$. En se ramenant au patch de référence, nous avons :

$$\|v - v_{z_4}\|_{L^2(\omega_{z_4})} = \frac{h_T}{\sqrt{2}} \|\widehat{v} - v_{z_4}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)},$$

et, avec les conditions aux bords imposées, la première valeur propre du problème du laplacien vaut $\Pi^2/4$ (le vecteur propre associé étant $\cos\left(\frac{\Pi}{2}x\right)$ ou $\cos\left(\frac{\Pi}{2}y\right)$). D'où :

$$\|\widehat{v} - v_{z_4}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)} \leq \frac{2}{\Pi} \|\widehat{\nabla} \widehat{v}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)},$$

ce qui nous donne :

$$\|v - v_{z_4}\|_{L^2(\omega_{z_4})} \leq \frac{\sqrt{2}h_T}{\Pi} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_{z_4})}.$$

- Cas 5 - z_5 à l'intérieur : Dans ce cas, le patch ω_{z_5} est un carré de côté h_T . En se ramenant au patch de référence, nous avons :

$$\|v - v_{z_5}\|_{L^2(\omega_{z_5})} = h_T \|\widehat{v} - v_{z_5}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)},$$

et, avec les conditions aux bords imposées, la première valeur propre du problème du laplacien vaut Π^2 (le vecteur propre associé étant $\cos(\Pi x)$ ou $\cos(\Pi y)$). D'où :

$$\|\widehat{v} - v_{z_5}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)} \leq \frac{1}{\Pi} \|\widehat{\nabla} \widehat{v}\|_{L^2(\widehat{\omega}_z)},$$

ce qui nous donne :

$$\|v - v_{z_5}\|_{L^2(\omega_{z_5})} \leq \frac{h_T}{\Pi} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_{z_5})}.$$

Pour les triangulations non-structurées de la sous-sous-section III.5.2, les quantités $\kappa_1(T)$ et $\kappa_3(T)$ sont implémentées pour chaque triangle T en utilisant les formules précédemment données.

Dans les deux cas, les valeurs de $\kappa_1(T)$ et de $\kappa_3(T)$ sont directement incorporées dans l'estimateur.

Chapitre IV

Approximation non-conforme

Cette partie est destinée à l'analyse non-conforme du problème de Reissner-Mindlin. L'idée est de considérer une discrétisation non-conforme pour les deux variables ω et ϕ , contrairement à Carstensen ([Car02]) qui n'utilise qu'une décomposition non-conforme pour ω . Cela a pour conséquence de devoir pénaliser le terme d'élasticité afin d'assurer la coercivité de la fonctionnelle. De plus, les coefficients créés pour chaque partie de notre estimateur permettent d'assurer une plus grande convergence de l'estimateur lorsque l'épaisseur de la plaque t est négligeable devant la taille du maillage h en améliorant le comportement de Carstensen ([Car02]), Carstensen et Weinberg ([CW03]), Hu et Huang ([HH10]). Pour ce faire, nous allons créer un élément intermédiaire qui appartient à l'intersection des espaces d'existence des solutions exactes et approchées, autrement dit qui correspondra à la régularisation de la solution numérique. Ainsi, nous pourrons nous ramener à une analyse sur le même espace, alors que la différence entre la solution approchée et sa régularisation peut être incorporée dans l'estimateur (car ne dépendant pas de la solution exacte) et peut être facilement évaluée selon le choix de la régularisation (interpolé d'Oswald par exemple).

Nous démontrerons la fiabilité et l'efficacité de l'estimateur et cette partie se terminera par la présentation de résultats numériques.

Sommaire

IV.1 Introduction	89
IV.2 Fiabilité de l'estimateur non-conforme	92
IV.3 Efficacité de l'estimateur non-conforme	100
IV.4 Résultats numériques	112

IV.1 Introduction

Nous envisageons maintenant une approximation non-conforme du problème (I.3) de Reissner-Mindlin. Cela revient à considérer $W_h \not\subset W$ et/ou $\Theta_h \not\subset \Theta$. Par conséquent, toutes les relations démontrées précédemment ne sont plus valables.

Reprenons la formulation variationnelle du problème de Reissner-Mindlin : Trouver $(\omega, \phi) \in W \times \Theta$ tels que :

$$a(\phi, \psi) + (\gamma, \nabla v - \psi) = (g, v) \quad \forall (v, \psi) \in W \times \Theta, \quad (\text{IV.1})$$

avec $\gamma = \lambda t^{-2}(\nabla \omega - \phi)$.

Définissons maintenant les espaces de discrétisation notés V_h^0 et Ψ_h^0 pour marquer la non-conformité. Par le biais de [CLM06], en désignant par $\mathcal{E}(\Omega)$ l'ensemble des arêtes qui ne sont pas incluses dans le bord, nous disposons de plusieurs espaces de discrétisation et opérateurs de projection (noté \mathbf{R}_h), notamment :

1. *L'élément "bulle non-conforme"*

Pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, nous définissons $B_2^{NC}(T)$ l'espace engendré par χ_2 la fonction-bulle non-conforme de \mathbb{P}_2 , *i.e.* le polynôme de degré 2 s'annulant sur les deux points de Gauss de chaque arête. Avec les coordonnées barycentriques, nous avons

$$\chi_2 = 3(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 2.$$

Les espaces d'éléments finis sont définis par :

$$\Psi_h^0 = \{\psi_h \in (L^2(\Omega))^2 \mid \psi_h|_T \in (\mathbb{P}^1(T) \oplus B_2^{NC}(T))^2 \forall T \in \mathcal{T}_h; \int_e [\psi_h] ds = 0 \forall e \in \mathcal{E}(\Omega)\};$$

$$V_h^0 = \{v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}^1(T) \oplus B_2^{NC}(T) \forall T \in \mathcal{T}_h; \int_e [v_h] ds = 0 \forall e \in \mathcal{E}(\Omega)\};$$

$$\Gamma_h = \{\tau_h \in (L^2(\Omega))^2 \mid \tau_h|_T \in \mathbb{P}^0(T)^2 \oplus \nabla B_2^{NC}(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

L'opérateur de réduction $\mathbf{R}_h : \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow \Gamma_h$ est défini localement par

$$\int_T (\tau - \mathbf{R}_h \tau) dx = 0 \forall T \in \mathcal{T}_h, \tau \in H^1(\mathcal{T}_h),$$

$$\int_T \operatorname{div}(\tau - \mathbf{R}_h \tau) dx = 0 \forall T \in \mathcal{T}_h, \tau \in H^1(\mathcal{T}_h).$$

2. *L'élément "bulle conforme"*

Pour chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$, nous définissons $B_3(T)$ l'espace engendré par b_3 la fonction-bulle cubique standard. Avec les coordonnées barycentriques, nous avons :

$$b_3 = 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Les espaces d'éléments finis sont définis par :

$$\Psi_h^0 = \{\psi_h \in (L^2(\Omega))^2 \mid \psi_h|_T \in (\mathbb{P}^1(T) \oplus B_3(T))^2 \forall T \in \mathcal{T}_h; \int_e [\psi_h] ds = 0 \forall e \in \mathcal{E}(\Omega)\};$$

$$V_h^0 = \{v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}^1(T) \oplus B_3(T) \forall T \in \mathcal{T}_h; \int_e [v_h] ds = 0 \forall e \in \mathcal{E}(\Omega)\};$$

$$\Gamma_h = \{\tau_h \in (L^2(\Omega))^2 \mid \tau_h|_T \in \mathbb{P}^0(T)^2 \oplus \nabla B_3(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\};$$

L'opérateur de réduction $\mathbf{R}_h : \mathbf{H}^1(\mathcal{T}_h) \rightarrow \Gamma_h$ est le même que celui présenté précédemment.

3. *L'élément " $\mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_0$ "*

Les espaces d'éléments finis sont définis par :

$$\Psi_h^0 = \{\psi_h \in (L^2(\Omega))^2 \mid v_h|_T \in (\mathbb{P}^1(T))^2 \forall T \in \mathcal{T}_h; \int_e [\psi_h] ds = 0 \forall e \in \mathcal{E}(\Omega)\};$$

$$V_h^0 = \{v_h \in L^2(\Omega) \mid v_h|_T \in \mathbb{P}^1(T) \forall T \in \mathcal{T}_h; \int_e [v_h] ds = 0 \forall e \in \mathcal{E}(\Omega)\};$$

$$\Gamma_h = \{\psi_h \in (L^2(\Omega))^2 \mid v_h|_T \in (\mathbb{P}^0(T))^2 \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

L'opérateur \mathbf{R}_h est l'opérateur de projection L^2 sur l'espace des fonctions constantes par morceaux.

Cette étude peut être menée avec n'importe lequel de ces cas : c'est la raison pour laquelle nous utiliserons indifféremment les espaces Ψ_h^0 , V_h^0 , Γ_h et l'opérateur \mathbf{R}_h .

Nous devons alors trouver un couple $(\phi_h, \omega_h) \in \Psi_h^0 \times V_h^0$ tel que

$$a_h(\phi_h, \psi_h) + (\gamma_h, \nabla_h v_h - \mathbf{R}_h \psi_h) = (g, v_h) \quad \forall (v_h, \psi_h) \in V_h^0 \times \Psi_h^0, \quad (\text{IV.2})$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_h = \lambda t^{-2} (\nabla_h \omega_h - \mathbf{R}_h \phi_h); \\ (\nabla_h v_h)|_T = \nabla(v_h|_T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h; \\ \mathbf{R}_h \psi_h \text{ est la projection de } \psi_h \text{ sur l'espace } \Gamma_h; \\ a_h(\phi_h, \psi_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\psi_h) dx + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} \frac{\kappa_e}{|e|} \int_e ([\phi_h]_e \otimes n_e)^S : ([\psi_h]_e \otimes n_e)^S ds \\ \text{où } |e| \text{ désigne la longueur de l'arête } e; \kappa_e \text{ est une constante positive ayant le même} \\ \text{ordre de grandeur que } \tilde{\mu} + \tilde{\lambda} \text{ et } ([\phi_h]_e \otimes n_e)^S \text{ désigne le saut symétrisé de } \phi_h \text{ à travers} \\ \text{l'arête } e \text{ que nous expliciterons plus tard.} \end{array} \right.$$

Pour toute arête $e \in \mathcal{E}(\Omega)$, il existe deux mailles T^+ et $T^- \in \mathcal{T}_h$ telles que $e = \overline{T^+} \cap \overline{T^-}$. Pour toute fonction vectorielle $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ définie sur $T^+ \cup T^-$, nous notons $\phi|_{T^+} = (\phi_1^+, \phi_2^+)$ et $\phi|_{T^-} = (\phi_1^-, \phi_2^-)$. Enfin, nous posons $n_e = (n_1, n_2)$ un vecteur normal unitaire à l'arête e . Avec ces notations, nous pouvons définir le produit tensoriel par :

$$\phi \otimes n_e = \begin{pmatrix} \phi_1 n_1 & \phi_1 n_2 \\ \phi_2 n_1 & \phi_2 n_2 \end{pmatrix},$$

ainsi que le saut symétrisé de ϕ à travers l'arête e par :

$$([\phi_h]_e \otimes n_e)^S = \begin{pmatrix} (\phi_1^+ - \phi_1^-) n_1 & \frac{1}{2}((\phi_1^+ - \phi_1^-) n_2 + (\phi_2^+ - \phi_2^-) n_1) \\ \frac{1}{2}((\phi_1^+ - \phi_1^-) n_2 + (\phi_2^+ - \phi_2^-) n_1) & (\phi_2^+ - \phi_2^-) n_2 \end{pmatrix}.$$

Remarque IV.1.1 Dans chacun des cas de discrétisation présentés ci-dessus, nous avons

$$\nabla V_h^0 \subset \Gamma_h.$$

Remarque IV.1.2 Si e est une arête du bord, alors T^+ est le triangle de \mathcal{T}_h ayant e comme arête et $\phi_1^- = \phi_2^- = 0$.

Remarque IV.1.3 Pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ nous avons $\nabla_h v = \nabla v$; et pour tout $\phi, \psi \in H_0^1(\Omega)^2$ nous avons $a_h(\phi, \psi) = a(\phi, \psi)$.

Nous munissons V_h^0 et Ψ_h^0 de la norme $\|\nabla_h \cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

Notre objectif est de trouver un estimateur *a posteriori* de type résiduel pour l'erreur suivante :

$$\|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.3})$$

Remarque IV.1.4 De nombreux travaux concernent l'analyse *a priori* du problème de Reissner-Mindlin pour une discrétisation non-conforme (e.g. [BM03], [CLM06], [HHL11], [HS07]). Nous nous concentrons sur l'analyse *a posteriori* de ce problème.

IV.1.1 Notations et définitions

Dans cette partie, nous allons définir quelques notations utilisées par la suite. Nous notons :

- $X := H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^2$ et $X_h = \Psi_h^0 \times V_h^0 \times \Gamma_h$,
- $\mathcal{A}(\phi, \omega, \gamma; \eta, v, \tau) := a(\phi, \eta) + (\nabla v - \eta, \gamma) - (\nabla \omega - \phi, \tau) + \lambda^{-1}t^2(\gamma, \tau), \forall (\phi, \omega, \gamma), (\eta, v, \tau) \in X$,
- $\mathcal{A}_h(\phi_h, \omega_h, \gamma_h; \eta_h, v_h, \tau_h) := a_h(\phi_h, \eta_h) + (\nabla_h v_h - \eta_h, \gamma_h) - (\nabla_h \omega_h - \phi_h, \tau_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma_h, \tau_h), \forall (\phi_h, \omega_h, \gamma_h), (\eta_h, v_h, \tau_h) \in X_h$,
- $\forall p = (\phi, \omega, \gamma) \in X$, nous notons $\|p\|_X := \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma\|_{H^{-1}(\Omega)} + \lambda^{-1/2}t\|\gamma\|_{L^2(\Omega)}$.

IV.2 Fiabilité de l'estimateur non-conforme

Le but de cette section sera de parvenir au Théorème IV.2.1.

Soient $p = (\phi, \omega, \gamma)$ la solution exacte, $p_h = (\phi_h, \omega_h, \gamma_h)$ la solution approchée. p_h est la solution du problème : Trouver $(\phi_h, \omega_h, \gamma_h) \in \Psi_h^0 \times V_h^0 \times \Gamma_h$ tels que :

$$\begin{cases} a_h(\phi_h, \eta_h) + (\gamma_h, \nabla_h v_h - \eta_h) = (g, v_h), & \forall (\eta_h, v_h) \in \Psi_h^0 \times V_h^0, \\ (\nabla_h \omega_h - \mathbf{R}_h \phi_h, \tau_h) - \lambda^{-1}t^2(\gamma_h, \tau_h) = 0, & \forall \tau_h \in \Gamma_h. \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Ce système d'équations est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\phi_h, \omega_h) \in \Psi_h^0 \times V_h^0 : \\ a_h(\phi_h, \eta_h) + \lambda t^{-2}(\nabla_h \omega_h - \mathbf{R}_h \phi_h, \nabla_h v_h - \mathbf{R}_h \eta_h) = (g, v_h), \forall (\eta_h, v_h) \in \Psi_h^0 \times V_h^0. \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Prenons $s := (\phi_s, \omega_s, \gamma_s) \in X$ une fonction discrète quelconque avec $\gamma_s = \lambda t^{-2}(\nabla \omega_s - \phi_s)$.

Nous définissons

$$\begin{cases} \widetilde{Res}_1(v) = (g, v) - \lambda t^{-2}(\nabla \omega_s - \phi_s, \nabla v) & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{Res}_2(\psi) = -a(\phi_s, \psi) + \lambda t^{-2}(\nabla \omega_s - \phi_s, \psi) & \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2. \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Remarque IV.2.1 *La fonctionnelle \mathcal{A} est construite de sorte que, pour tout $p = (\psi, v, \tau) \in X$ avec $\tau = \lambda t^{-2}(\nabla v - \psi)$, nous ayons*

$$\mathcal{A}(p, p) = \|\psi\|_c^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Nous avons la proposition suivante :

Lemme IV.2.1 *Soit $s = (\phi_s, \omega_s, \gamma_s) \in X$ une fonction discrète quelconque. Alors*

$$\|p - s\|_X^2 \lesssim \max\{1; \lambda^{-1} t^2\} \mathcal{A}(p - s, p - s) + \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$$

Preuve:

$$\|p - s\|_X = \|\nabla(\omega - \omega_s)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\phi - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{-1/2} t \|\gamma - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

$$\begin{aligned} \nabla(\omega - \omega_s) &= \lambda^{-1} t^2 (\gamma - \gamma_s) + (\phi - \phi_s) \\ \Rightarrow \|\nabla(\omega - \omega_s)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \phi_s\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \phi_s\|_c. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$\begin{aligned} (\gamma - \gamma_s, \psi) &= (\gamma, \psi) - (\gamma_s, \psi) \\ &= a(\phi, \psi) - (\gamma_s, \psi) \\ &= a(\phi - \phi_s, \psi) + a(\phi_s, \psi) - (\gamma_s, \psi) \\ &= a(\phi - \phi_s, \psi) - \widetilde{Res}_2(\psi) \\ &\leq \|\phi - \phi_s\|_c \|\psi\|_c + \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|\gamma - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)} &\lesssim \|\nabla(\phi - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)} + \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

En regroupant les termes, cela conclut la démonstration. \square

Remarque IV.2.2 *Comme t est censé être très petit, nous pouvons supposer que $\lambda^{-1} t^2 \leq 1$.*

Le lemme précédent nous permet d'obtenir la proposition suivante :

Proposition IV.2.1 *Si $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$, nous avons pour tout $s \in X$,*

$$\|p - s\|_X^2 \lesssim \|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h}^2 + \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Preuve: Nous allons tout d'abord exprimer $\mathcal{A}(p-s, p-s)$ en fonction des différents résidus.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p-s, p-s) &= a(\phi - \phi_s, \phi - \phi_s) + \lambda t^{-2}(\nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s), \nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)) \\ &= \underbrace{a(\phi, \phi - \phi_s) + \lambda t^{-2}(\nabla\omega - \phi, \nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s))}_{=(g, \omega - \omega_s)} \\ &\quad - a(\phi_s, \phi - \phi_s) - \lambda t^{-2}(\nabla\omega_s - \phi_s, \nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)).\end{aligned}$$

D'où :

$$\mathcal{A}(p-s, p-s) = \widetilde{Res}_1(\omega - \omega_s) + \widetilde{Res}_2(\phi - \phi_s), \quad (\text{IV.7})$$

et, d'après le Lemme IV.2.1,

$$\|p-s\|_X^2 \lesssim \widetilde{Res}_1(\omega - \omega_s) + \widetilde{Res}_2(\phi - \phi_s) + \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned}\|\phi - \phi_s\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \underbrace{\|\nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)\|_{L^2(T)}^2}_{=\lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_s)} \\ \leq \|\phi - \phi_s\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)}^2 = \mathcal{A}(p-s, p-s).\end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

Or (par abus de notation concernant l'extension de \widetilde{Res}_1 par 0) :

$$\begin{cases} \widetilde{Res}_1(\omega - \omega_s) \leq \|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h} \|(\psi, \omega - \omega_s)\|_{1,h} \forall \psi \in \Theta, \\ \widetilde{Res}_2(\phi - \phi_s) \leq \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla(\phi - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

D'où, par (IV.7), (IV.8) et deux inégalités de Young de paramètres $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p-s, p-s) &= \|\phi - \phi_s\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2[\widetilde{Res}_1(\omega - \omega_s) + \widetilde{Res}_2(\phi - \phi_s) - \frac{1}{2}\|\phi - \phi_s\|_{\mathcal{C}}^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \underbrace{\|\nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)\|_{L^2(T)}^2}_{=\lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_s)}] \\ &\leq \mu_1 \|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h}^2 + \frac{1}{\mu_1} \|(\psi, \omega - \omega_s)\|_{1,h}^2 + \mu_2 \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\mu_2} \|\nabla(\phi - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\phi - \phi_s\|_{\mathcal{C}}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)\|_{L^2(T)}^2.\end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Nous prenons alors $\psi = \phi - \phi_s$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}(p - s, p - s) \\
& \leq \mu_1 \|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h}^2 + \frac{1}{\mu_1} \left[\|\nabla(\phi - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)\|_{L^2(T)}^2 \right] \\
& \quad + \mu_2 \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu_2} \|\nabla(\phi - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\phi - \phi_s\|_{\mathcal{C}}^2 \\
& \quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)\|_{L^2(T)}^2 \\
& = \mu_1 \|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h}^2 + \mu_2 \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \left(\frac{c_K^2}{\mu_1} + \frac{c_K^2}{\mu_2} - 1 \right) \|\phi - \phi_s\|_{\mathcal{C}}^2 \\
& \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{t^2 + h_T^2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \lambda \right) \|\nabla(\omega - \omega_s) - (\phi - \phi_s)\|_{L^2(T)}^2
\end{aligned} \tag{IV.11}$$

Nous choisissons enfin, sous la condition $\lambda c_K^2 \geq \frac{1}{2}$,

$$\mu_1 = \mu_2 = 2c_K^2.$$

Nous obtenons par conséquent

$$\mathcal{A}(p - s, p - s) \leq 2c_K^2 \|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h}^2 + 2c_K^2 \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Le lemme IV.2.1 permet d'achever la démonstration. \square

a) Majoration de $\|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h}^2$

Nous rappelons que nous avons posé $\widetilde{Res}_1(v) = (g, v) - \lambda t^{-2} (\nabla \omega_s - \phi_s, \nabla v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$. L'objectif de cette partie sera alors de démontrer le lemme suivant, donnant la majoration de la norme de ce résidu :

Lemme IV.2.2 *Avec les définitions de \widetilde{Res}_1 donnée en (IV.6) et de la norme $\|\cdot\|_{-1,h}$ donnée en (I.28), nous avons*

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{Res}_1\|_{-1,h}^2 & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e (t^2 + h_e^2) \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)}^2 \\
& \quad + t^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Preuve: Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. Nous utilisons (IV.5) avec $\eta_h = 0$ et $v_h = \mathcal{I}_{Cl} v = \sum_{z \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} v(z) \lambda_z$ où λ_z est la fonction de base \mathbb{P}_1 par maille associée au nœud z , ce qui correspond à l'interpolé

de Clément défini dans [Clé75]. De plus, avec cette définition, nous avons trivialement (cf [Clé75, Théorème 1] par exemple) :

$$\|\nabla(\mathcal{I}_{Cl}v)\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ ou } v \in H_0^1(\Omega)^2. \quad (\text{IV.12})$$

Alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{Res}_1(v) &\stackrel{(\text{IV.5})}{=} (g, v) - (\gamma_s, \nabla v) + (\gamma_h, \nabla \mathcal{I}_{Cl}v) - (g, \mathcal{I}_{Cl}v) \\ &= (g, v - \mathcal{I}_{Cl}v) - (\gamma_s - \gamma_h, \nabla v) - (\gamma_h, \nabla(v - \mathcal{I}_{Cl}v)) \\ &= (g + \operatorname{div}\gamma_h, v - \mathcal{I}_{Cl}v) - \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} \int_e (v - \mathcal{I}_{Cl}v)([\gamma_h]_e \cdot n_e) + (\gamma_h - \gamma_s, \nabla v) \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|g + \operatorname{div}\gamma_h\|_{L^2(T)} \|v - \mathcal{I}_{Cl}v\|_{L^2(T)} + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} \|v - \mathcal{I}_{Cl}v\|_{L^2(e)} \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)} \\ &\quad + (\gamma_h - \gamma_s, \nabla v). \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

Or, par les propriétés de l'interpolé de Clément, nous avons :

Lemme IV.2.3 *Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, pour tout $e \subset \partial T$, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ et tout $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$:*

$$\begin{cases} \|v - \mathcal{I}_{Cl}v\|_{L^2(T)} &\lesssim h_T (\|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}), \\ \|v - \mathcal{I}_{Cl}v\|_{L^2(e)} &\lesssim h_T^{1/2} (\|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}). \end{cases}$$

Preuve: Soient $v \in H_0^1(\Omega)$, $T \in \mathcal{T}_h$, $e \subset \partial T$. Alors, pour toute fonction affine u sur ω_T :

$$\begin{cases} \|v - \mathcal{I}_{Cl}v\|_{L^2(T)} &= \|(v - u) - \mathcal{I}_{Cl}(v - u)\|_{L^2(T)}, \\ \|v - \mathcal{I}_{Cl}v\|_{L^2(e)} &= \|(v - u) - \mathcal{I}_{Cl}(v - u)\|_{L^2(e)}. \end{cases}$$

Or, par les propriétés de l'interpolé de Clément, nous avons (cf [AO00, Théorème 1.7] par exemple) :

$$\begin{cases} \|(v - u) - \mathcal{I}_{Cl}(v - u)\|_{L^2(T)} &\lesssim h_T \|\nabla(v - u)\|_{L^2(\omega_T)}, \\ \|(v - u) - \mathcal{I}_{Cl}(v - u)\|_{L^2(e)} &\lesssim h_T^{1/2} \|\nabla(v - u)\|_{L^2(\omega_T)}. \end{cases}$$

Soit $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$. Alors, en choisissant u de sorte que $\nabla u = \frac{1}{|\omega_T|} \int_{\omega_T} \psi \, dx$ (cf la démonstration de la proposition III.3.3), cela conclut la démonstration de ce lemme. \square

En utilisant les relations présentées dans le lemme IV.2.3 dans la relation (IV.13) ainsi que la régularité de la triangulation, nous obtenons après deux inégalités de Cauchy-Schwarz

discrète :

$$\begin{aligned}
\widetilde{Res}_1(v) &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \sqrt{t^2 + h_T^2} \|g + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)} \frac{1}{\sqrt{t^2 + h_T^2}} (\|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}) \\
&\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_T^{1/2} \sqrt{t^2 + h_T^2} \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)} \frac{1}{\sqrt{t^2 + h_T^2}} (\|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}) \\
&\quad + (\gamma_h - \gamma_s, \nabla v). \\
\widetilde{Res}_1(v) &\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e (t^2 + h_e^2) \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \|(\psi, v)\|_{1,h} \\
&\quad + (\gamma_h - \gamma_s, \nabla v).
\end{aligned} \tag{IV.14}$$

Il nous faut encore majorer le terme $(\gamma_h - \gamma_s, \nabla v)$.

Pour tout $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
(\gamma_h - \gamma_s, \nabla v) &= (\gamma_h - \gamma_s, \nabla v - \psi) + (\gamma_h - \gamma_s, \psi) \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(T)} \|\nabla v - \psi\|_{L^2(T)} + \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{h_T^2 + t^2} \|\nabla v - \psi\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (h_T^2 + t^2) \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(T)}^2 + \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \|(\psi, v)\|_{1,h} \\
(\gamma_h - \gamma_s, \nabla v) &\leq \left(t \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} + \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)} \right) \\
&\quad \|(\psi, v)\|_{1,h}.
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

Soit $\beta_T = b_T(\gamma_h - \gamma_s)$, où b_T est la fonction-bulle sur le triangle T . Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \left(\gamma_h - \gamma_s, \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \beta_T \right) \\
&\leq \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \beta_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or, par inégalité inverse, nous avons :

$$\|\nabla \beta_T\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-1} \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(\omega_T)}.$$

ce qui nous donne :

$$\left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \beta_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|\nabla \beta_T\|_{L^2(T)} \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(\omega_T)}^2.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(\omega_T)}^2 \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} &\lesssim \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Nous pouvons conclure la démonstration du lemme par les relations (IV.14), (IV.15) et (IV.16). \square

b) Majoration de $\|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$

Comme précédemment, nous rappelons que nous avons posé $\widetilde{Res}_2(\psi) = -a(\phi_s, \psi) - \lambda t^{-2}(\nabla \omega_s - \phi_s, \psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2$. L'objectif de cette partie sera alors de démontrer le lemme suivant, donnant la majoration de la norme de ce résidu :

Lemme IV.2.4 Avec la définition de \widetilde{Res}_2 donnée en (IV.6), nous avons :

$$\begin{aligned} \|\widetilde{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\lesssim \|\mathcal{C}^{1/2} \varepsilon(\phi_h - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\text{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|\llbracket \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) \rrbracket n_e\|_{L^2(e)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \mu_h^2(\gamma_h), \end{aligned}$$

$$\text{où } \mu_h(\gamma_h) = \sup_{\zeta \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\zeta)|}{\|\nabla \zeta\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Preuve: Soit $\eta \in H_0^1(\Omega)^2$.

$$\begin{aligned} \widetilde{Res}_2(\eta) &= -a(\phi_s, \eta) + (\gamma_s, \eta) \\ &\stackrel{(\text{IV.5})}{=} -a(\phi_s, \eta) + (\gamma_s, \eta) + a_h(\phi_h, \mathcal{I}_{Cl}\eta) - (\gamma_h, \mathbf{R}_h \mathcal{I}_{Cl}\eta) \\ &= a_h(\phi_h - \phi_s, \eta) - a_h(\phi_h, \eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta) + (\gamma_s - \gamma_h, \eta) + (\gamma_h, \eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta) \\ &\quad + (\gamma_h, \mathcal{I}_{Cl}\eta - \mathbf{R}_h \mathcal{I}_{Cl}\eta) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h - \phi_s) : \varepsilon(\eta) - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta) \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\gamma_s - \gamma_h) \cdot \eta + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \gamma_h \cdot (\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta) + (\gamma_h, \mathcal{I}_{Cl}\eta - \mathbf{R}_h \mathcal{I}_{Cl}\eta) \end{aligned}$$

Par une inégalité de Cauchy-Schwarz, une identité de Green et la dualité $H^{-1}(\Omega) - H_0^1(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \widetilde{Res}_2(\eta) &\lesssim \|\mathcal{C}^{1/2}\varepsilon(\phi_h - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div}(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) \cdot (\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta) \\ &\quad - \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} \int_e [\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e \cdot (\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta) + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \gamma_h \cdot (\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta) + (\gamma_h, \mathcal{I}_{Cl}\eta - \mathbf{R}_h \mathcal{I}_{Cl}\eta). \end{aligned}$$

En regroupant certains termes et par des inégalités de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} \widetilde{Res}_2(\eta) &\lesssim \|\mathcal{C}^{1/2}\varepsilon(\phi_h - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)} \|\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta\|_{L^2(T)} \\ &\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)} \|\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta\|_{L^2(e)} + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \sup_{\eta \in H_0^1(\Omega)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(\mathcal{I}_{Cl}\eta))|}{\|\nabla(\mathcal{I}_{Cl}\eta)\|_{L^2(\Omega)}} \underbrace{\|\nabla(\mathcal{I}_{Cl}\eta)\|_{L^2(\Omega)}}_{\lesssim \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} \text{ par (IV.12)}} \end{aligned}$$

Par les propriétés de l'interpolé \mathcal{I}_{Cl} , nous avons :

$$\begin{cases} h_e^{-1/2} \|\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta\|_{L^2(e)} &\lesssim \|\nabla\eta\|_{L^2(\omega_T)}; \\ h_T^{-1} \|\eta - \mathcal{I}_{Cl}\eta\|_{L^2(T)} &\lesssim \|\nabla\eta\|_{L^2(\omega_T)}. \end{cases}$$

Le lemme en découle directement par la régularité du maillage et le fait que $\mathcal{I}_{Cl}\eta \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \forall \eta \in H_0^1(\Omega)^2$. \square

IV.2.1 Conclusion

D'après les lemmes IV.2.2 et IV.2.4 et la proposition IV.2.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|p - s\|_X^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \operatorname{div}\gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e (t^2 + h_e^2) \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)}^2 \\ &\quad + t^2 \|\gamma_h - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_h - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\mathcal{C}^{1/2}\varepsilon(\phi_h - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_h^2(\gamma_h) \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)}^2. \end{aligned}$$

D'où, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} & \|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \lesssim \|\nabla(\omega - \omega_s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_s\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_s\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \quad + \|\nabla_h(\omega_s - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi_s - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

et après simplification :

Théorème IV.2.1 (Upper-bound) *En se rappelant que $p = (\phi, \omega, \gamma)$ (resp. $p_h = (\phi_h, \omega_h, \gamma_h)$) où (ϕ, ω) (resp. (ϕ_h, ω_h)) est solution du problème (IV.1) (resp. (IV.2)), nous obtenons pour tout s fonction discrète appartenant à $H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^2$*

$$\begin{aligned} & \|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(t^2 + h_T^2)\|g + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e(t^2 + h_e^2)\|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)}^2 + \mu_h^2(\gamma_h) \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2\|\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e\|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)}^2 \\ & \quad + \|\nabla_h(\omega_s - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi_s - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

$$\text{où } \mu_h(\gamma_h) = \sup_{\psi \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi)|}{\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}}.$$

IV.3 Efficacité de l'estimateur non-conforme

L'objectif de cette partie sera de majorer chacun des termes composant notre estimateur *a posteriori* non-conforme afin de démontrer le théorème IV.3.1 démontrant l'efficacité de l'estimateur.

Pour cela, nous allons être amenés à particulariser s en considérant les interpolés de Oswald des fonctions constituant la solution numérique. Nous prenons $s = (I_{O_s}\phi_h, I_{O_s}\omega_h, \gamma_s) \in X$ où :

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{O_s}\phi_h = \sum_{x \in \mathcal{N}(\Omega)} \mathcal{M}\phi_h(x)\lambda_x \in H_0^1(\Omega)^2; \\ I_{O_s}\omega_h = \sum_{x \in \mathcal{N}(\Omega)} \mathcal{M}\omega_h(x)\lambda_x \in H_0^1(\Omega); \\ \gamma_s = \lambda t^{-2}(\nabla I_{O_s}\omega_h - I_{O_s}\phi_h); \end{array} \right.$$

où :

- $\mathcal{N}(\Omega)$ est l'ensemble des noeuds internes de la triangulation ;
- λ_x est la fonction de base \mathbb{P}_1 par maille associée au sommet x ;

– \mathcal{M} est la fonction moyenne, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}\phi_h(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \sum_{T': x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} |T'| \phi_h|_{T'}(x); \\ \mathcal{M}\omega_h(x) = \frac{1}{|\omega_x|} \sum_{T': x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} |T'| \omega_h|_{T'}(x); \end{array} \right.$$

où $\overline{\omega_x} := \{\overline{T} \in \mathcal{T}_h \mid x \in \overline{T}\}$ et $|A|$ désigne l'aire de A .

IV.3.1 Majoration de $\|\nabla_h(\omega_s - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi_s - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$

Avec cette définition de s , nous avons :

$$\begin{aligned} & \|\nabla_h(\omega_s - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi_s - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &= \|\nabla_h(I_{O_s}\phi_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Afin de pouvoir majorer ce terme par l'erreur, nous allons analyser chacun des termes séparément.

a) Majoration de $\|\nabla_h(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$ et $\|\nabla_h(I_{O_s}\phi_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$

Nous savons que

$$\|\nabla_h(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(T)}^2.$$

Or, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} \nabla I_{O_s}\omega_h|_T - \nabla\omega_h|_T &= \sum_{x \in \mathcal{N}(\overline{T}) \cap \mathcal{N}(\Omega)} (\mathcal{M}\omega_h(x) - \omega_h(x)) \nabla\lambda_x + \sum_{x \in \mathcal{N}(\overline{T}) \cap \partial\Omega} (-\omega_h(x)) \nabla\lambda_x \\ \Rightarrow \|\nabla I_{O_s}\omega_h - \nabla\omega_h\|_{L^2(T)} &\leq \sum_{x \in \mathcal{N}(\overline{T}) \cap \mathcal{N}(\Omega)} |\mathcal{M}\omega_h(x) - \omega_h(x)| \underbrace{\|\nabla\lambda_x\|_T}_{\lesssim 1} + \sum_{x \in \mathcal{N}(\overline{T}) \cap \partial\Omega} |\omega_h(x)| \underbrace{\|\nabla\lambda_x\|_T}_{\lesssim 1}. \end{aligned}$$

Deux cas s'offrent alors à nous suivant la position du nœud x :

- Pour tout $x \in \mathcal{N}(\overline{T} \cap \Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\omega_h(x) - \omega_h|_T(x) &= \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}_h: x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} \frac{|T'|}{|\omega_x|} \omega_h|_{T'}(x) \right) - \omega_h|_T(x) \\
&= \sum_{T' \in \mathcal{T}_h: x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} \frac{|T'|}{|\omega_x|} (\omega_h|_{T'}(x) - \omega_h|_T(x)) \\
\Rightarrow |\mathcal{M}\omega_h(x) - \omega_h|_T(x)| &\leq \sum_{T' \in \mathcal{T}_h: x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} \frac{|T'|}{|\omega_x|} |\omega_h|_{T'}(x) - \omega_h|_T(x)|
\end{aligned}$$

Or, pour tout $T, T' \in \omega_x$, il existe une suite de triangle $(T_i)_{1 \leq i \leq N}$ telle que $T_1 = T'$, $T_N = T$ et l'intersection de $\overline{T_i}$ avec $\overline{T_{i+1}}$ soit un segment noté e_i ayant x pour sommet. Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|\omega_h|_{T'}(x) - \omega_h|_T(x)| &\leq \sum_{i=1}^{N-1} |\omega_h|_{T_i}(x) - \omega_h|_{T_{i+1}}(x)| \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} |q_i(x)|,
\end{aligned}$$

où $q_i = \omega_h|_{T_i} - \omega_h|_{T_{i+1}}$. En passant par le triangle de référence \widehat{T} , nous obtenons :

$$|q_i(x)| = |\widehat{q}_i(\widehat{x})|.$$

Si nous considérons l'élément conforme ou l'élément $\mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_0$, alors la fonction $q_i \in \mathbb{P}_1(e_i)$ avec $\int_{e_i} q_i ds = 0$. Ainsi, si nous posons \widehat{e}_i l'antécédent de l'arête e_i par la transformation affine envoyant \widehat{T} sur T , nous obtenons :

$$|\widehat{q}_i(\widehat{x})| \lesssim \|\widehat{q}_i\|_{L^2(\widehat{e}_i)}.$$

Si nous considérons l'élément non-conforme, alors $q_i \in \mathbb{P}_2(e_i)$. Cependant, si nous posons $\widehat{q}_i = a \widehat{\lambda}_1 + b \widehat{\lambda}_2 + c \widehat{\lambda}_3 + d \left(3 \left[\widehat{\lambda}_1^2 + \widehat{\lambda}_2^2 + \widehat{\lambda}_3^2 \right] - 2 \right)$ et si nous prenons $\widehat{x} = (0, 0)$ et $\widehat{e}_i = e_3$ l'arête reliant les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ (les autres possibilités se traitant de la même façon), alors :

$$\widehat{q}_i(0, 0) = a + d,$$

et

$$\begin{aligned}
\|\widehat{q}_i\|_{L^2(e_3)}^2 &= \int_0^1 [a(1-x_1) + b x_1 + d(3(1-x_1)^2 + 3x_1^2 - 2)]^2 dx_1 \\
&= \int_0^1 [(a+d) + (b-a-6d)x_1 + 6d x_1^2]^2 dx_1 \\
&= (a+d)^2 + \frac{(b-a-6d)^2}{3} + \frac{36d^2}{5} + (a+d)(b-a-6d) \\
&\quad + 4d(a+d) + 3d(b-a-6d). \tag{IV.17}
\end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{e_3} \widehat{q}_i(\widehat{x}) d\widehat{x} = 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 [a(1-x_1) + b x_1 + d(3(1-x_1)^2 + 3x_1^2 - 2)] dx_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + d(1+1-2) \\
&\Leftrightarrow a + b = 0.
\end{aligned}$$

En utilisant cette relation entre a et b dans la relation (IV.17), nous obtenons :

$$\|\widehat{q}_i\|_{L^2(e_3)}^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{d^2}{5}.$$

Ainsi, nous avons également :

$$|\widehat{q}_i(0,0)| \lesssim \|\widehat{q}_i\|_{L^2(e_3)}.$$

En conclusion, nous obtenons :

$$|\widehat{q}_i(\widehat{x})| \lesssim \|\widehat{q}_i\|_{L^2(\widehat{e}_i)} \leq \|\widehat{q}_i\|_{L^2(\widehat{e})} \lesssim |e_i|^{-1/2} \|q_i\|_{L^2(e_i)}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}\omega_h(x) - \omega_h|_T(x)| &\lesssim \sum_{T' \in \mathcal{T}_h: x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} \frac{|T'|}{|\omega_x|} \sum_{i=1}^{N-1} h_e^{-1/2} \|\omega_h|_{T_i} - \omega_h|_{T_{i+1}}\|_{L^2(e_i)} \\
&= \sum_{T' \in \mathcal{T}_h: x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} \frac{|T'|}{|\omega_x|} \sum_{i=1}^{N-1} h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_{e_i}\|_{L^2(e_i)} \\
&\leq \sum_{T' \in \mathcal{T}_h: x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} \frac{|T'|}{|\omega_x|} \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_x} h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)} \\
&= \left(\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_x} h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)} \right) \left(\sum_{T' \in \mathcal{T}_h: x \in \mathcal{N}(\overline{T'})} \frac{|T'|}{|\omega_x|} \right) \\
&= \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_x} h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)}.
\end{aligned}$$

- Si $x \in \mathcal{N}(\overline{T} \cap \partial\Omega)$, il existe une suite de triangle $(T_i)_{1 \leq i \leq M}$ telle que $T_1 = T$, $T_M = T'$ où T' a une arête e_M au bord et l'intersection de $\overline{T_i}$ avec $\overline{T_{i+1}}$ soit un segment noté e_i ayant x pour sommet. Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$|\omega_h|_T(x) \leq \sum_{i=1}^{M-1} |\omega_h|_{T_i}(x) - \omega_h|_{T_{i+1}}(x) + |\omega_h|_{T_M}(x).$$

En suivant le même procédé que précédemment, nous avons :

$$|\omega_h|_{T_i}(x) - \omega_h|_{T_{i+1}}(x) \lesssim |e_i|^{-1/2} \|\omega_h|_{T_i} - \omega_h|_{T_{i+1}}\|_{L^2(e_i)}.$$

et, comme $\int_{e_M} \omega_h ds = 0$,

$$|\omega_h|_{T_M}(x) \lesssim h_{e_M}^{-1/2} \|\omega_h\|_{L^2(e_M)}.$$

D'où :

$$|\omega_h|_T(x) \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_x} h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)} + \sum_{e' \subset \partial\Omega, e' \in \omega_x} h_{e'}^{-1/2} \|\omega_h\|_{L^2(e')}.$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\nabla(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(T)} &\lesssim \sum_{x \in \mathcal{N}(\overline{T})} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_x} h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)} + \sum_{e' \subset \partial\Omega, e' \in \omega_x} h_{e'}^{-1/2} \|\omega_h\|_{L^2(e')} \right) \\ \Rightarrow \|\nabla(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(T)} &\lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_T} h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)} + \sum_{e' \subset \partial\Omega, e' \in \omega_T} h_{e'}^{-1/2} \|\omega_h\|_{L^2(e')} \\ \Rightarrow \|\nabla(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_T} h_e^{-1} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e' \subset \partial\Omega, e' \in \omega_T} h_{e'}^{-1} \|\omega_h\|_{L^2(e')}^2. \end{aligned}$$

D'où, par sommation sur T ,

$$\|\nabla_h(I_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e^{-1} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e' \subset \partial\Omega, e' \in \omega_T} h_{e'}^{-1} \|\omega_h\|_{L^2(e')}^2. \quad (\text{IV.18})$$

En suivant le même principe que précédemment avec

$$|\mathcal{M}\phi_h(x) - \phi_h(x)| \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_x} h_e^{-1/2} \|[\phi_h]_e\|_{L^2(e)},$$

si x est un nœud interne et

$$|-\phi_h(x)| \leq \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega), e \in \omega_x} h_e^{-1/2} \|[\phi_h]_e\|_{L^2(e)} + \sum_{e' \subset \partial\Omega, e' \in \omega_x} h_{e'}^{-1/2} \|\phi_h\|_{L^2(e')},$$

si x est un nœud du bord, nous avons :

$$\|\nabla_h(I_{Os}\phi_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e^{-1} \|\phi_h\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e' \subset \partial\Omega} h_{e'}^{-1} \|\phi_h\|_{L^2(e')}^2. \quad (\text{IV.19})$$

Il nous suffit maintenant de majorer les deux sommes des membres de droite de (IV.18) et (IV.19) par l'erreur.

Soit $q \in \mathbb{P}_1(e)$ (resp. $q \in \mathbb{P}_2(e)$) si l'on considère l'élément bulle-conforme ou $\mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_0$ (resp. élément bulle non-conforme) tel que $q(m_e) = 0$ où m_e désigne le milieu de l'arête e . Alors, en passant par le triangle de référence \hat{T}

$$\|q\|_{L^2(e)} = h_e^{1/2} \|\hat{q}\|_{L^2(\hat{e})} \lesssim h_e^{1/2} \|\partial_{\hat{x}} \hat{q}\|_{L^2(\hat{e})} = h_e^{1/2} h_e^{1/2} \|\partial_t q\|_{L^2(e)}.$$

où $\partial_t q$ désigne la dérivée tangentielle de q , autrement dit $\partial_t q = \nabla q \cdot t_e$ où t_e est un vecteur unitaire tangentiel associé à l'arête e .

D'où :

$$\begin{aligned} h_e^{-1/2} \|\omega_h\|_{L^2(e)} &\lesssim h_e^{1/2} \|\partial_t \omega_h\|_{L^2(e)} && \text{si } e \in \mathcal{E}(\Omega); \\ h_e^{-1/2} \|\omega_h\|_{L^2(e)} &\lesssim h_e^{1/2} \|\partial_t \omega_h\|_{L^2(e)} && \text{si } e \subset \Omega. \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

Soient l'arête interne $e = T^+ \cap T^-$ et $w_e = b_e^2 [\partial_t \omega_h]_e \in H_0^2(\omega_e)$ où b_e est la fonction-bulle d'arête e vérifiant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{supp } b_e = \omega_e, \quad 0 \leq b_e \leq 1 = \max_{x \in e} b_e, \\ \int_{\omega_e} b_e \, dx \approx h_e^2 \quad ; \quad \int_e b_e \, ds \approx h_e, \\ \|\nabla b_e\|_{L^2(T^\pm)} \lesssim h_e^{-1} \|b_e\|_{L^2(T^\pm)} \quad ; \quad |\nabla b_e|_{H^1(\omega_e)} \lesssim h_e^{-2} \|b_e\|_{L^2(\omega_e)}. \end{array} \right.$$

Alors,

$$\|[\partial_t \omega_h]_e\|_{L^2(e)}^2 \approx \left| \int_e [\partial_t \omega_h]_e w_e \right| = \left| \int_e [\partial_t (\omega_h - \omega)]_e w_e \right| \text{ car } \omega \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow [\partial_t \omega]_e = (0, 0).$$

Or, si nous posons $\text{curl } w = \begin{pmatrix} \partial_2 w \\ -\partial_1 w \end{pmatrix}$, nous avons (si t représente un vecteur unitaire tangent sur $\partial\Omega$) :

$$\begin{aligned} \int_{\omega_e} \nabla \omega \cdot \text{curl } w_e &= \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \text{curl } w_e \\ &= \int_{\Omega} \text{curl } \nabla \omega w_e + \langle \nabla \omega \cdot t, \omega_e \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $\operatorname{curl} \nabla \omega = 0$ et $\nabla \omega \cdot t = 0$. De plus, pour tout $T \subset \omega_e$, comme ω_h et w_e sont des polynômes donc des fonctions C^∞ , nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_T \nabla \omega_h \cdot \operatorname{curl} w_e &= \int_T \begin{pmatrix} \partial_1 \omega_h \\ \partial_2 \omega_h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 w_e \\ -\partial_1 w_e \end{pmatrix} \\
&= \int_T \partial_1 \omega_h \partial_2 w_e - \int_T \partial_2 \omega_h \partial_1 w_e \\
&\stackrel{\text{Green}}{=} - \int_T \partial_2 \partial_1 \omega_h w_e + \int_{\partial T} \partial_1 \omega_h w_e n_2 + \int_T \partial_1 \partial_2 \omega_h w_e - \int_{\partial T} \partial_2 \omega_h w_e n_1 \\
&= \int_{\partial T} \begin{pmatrix} \partial_1 \omega_h \\ \partial_2 \omega_h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} w_e \\
&= - \int_{\partial T} \nabla \omega_h \cdot t w_e.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{T^\pm} \nabla(\omega_h - \omega) \cdot \operatorname{curl} w_e = - \int_{\partial T^\pm} \nabla \omega_h \cdot t w_e = - \int_e \nabla \omega_h \cdot t w_e = - \int_e \partial_t(\omega_h - \omega) w_e,$$

car $\partial_t \omega = 0$ puisque $\omega \in H_0^1(\Omega)$. Ainsi, nous obtenons :

$$\|[\partial_t \omega_h]_e\|_{L^2(e)}^2 \approx \left| \sum_{T \subset \omega_e} \int_T \nabla(\omega_h - \omega) \cdot \operatorname{curl} w_e \right| \lesssim \sum_{T \subset \omega_e} \|\nabla(\omega_h - \omega)\|_{L^2(T)} \|\operatorname{curl} w_e\|_{L^2(T)}.$$

Or, par inégalité inverse, nous avons :

$$\|\nabla w_e\|_{L^2(\omega_e)} + h_e |\nabla w_e|_{H^1(\omega_e)} \lesssim h_e^{-1/2} \|[\partial_t \omega_h]_e\|_{L^2(e)},$$

ce qui implique :

$$\|\operatorname{curl} w_e\|_{L^2(T)} = \|\nabla w_e\|_{L^2(T)} \lesssim h_e^{-1/2} \|[\partial_t \omega_h]_e\|_{L^2(e)}.$$

D'où :

$$\|[\partial_t \omega_h]_e\|_{L^2(e)} \lesssim \sum_{T \subset \omega_e} h_e^{-1/2} \|\nabla(\omega_h - \omega)\|_{L^2(T)}.$$

En utilisant (IV.20), nous avons :

$$h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)} \lesssim h_e^{1/2} \sum_{T \subset \omega_e} h_e^{-1/2} \|\nabla(\omega_h - \omega)\|_{L^2(T)} \lesssim \sum_{T \subset \omega_e} \|\nabla(\omega_h - \omega)\|_{L^2(T)}.$$

Si e est une arête du bord, soit $w_e = b_e^2(\partial_t \omega_h) \in H_0^2(\bar{T})$ où b_e est la fonction-bulle d'arête e , alors comme w_e est un polynôme nul sur $\partial\Omega \setminus e$; ω est nul sur e et ω_h est un polynôme, nous

avons :

$$\begin{aligned} \int_e \partial_t(\omega_h - \omega) w_e &= \langle \nabla(\omega_h - \omega) \cdot t_e, w_e \rangle \\ &= \int_T \nabla(\omega_h - \omega) \operatorname{curl} w_e. \end{aligned}$$

Ainsi, par inégalités inverses et la relation (IV.20), nous avons :

$$h_e^{-1/2} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)} \lesssim \|\nabla(\omega_h - \omega)\|_{L^2(T)}.$$

Nous obtenons alors :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e^{-1} \|[\omega_h]_e\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \subset \partial\Omega} h_e^{-1} \|\omega_h\|_{L^2(e)}^2 \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\bar{\Omega})} \sum_{T \subset \omega_e} \|\nabla(\omega_h - \omega)\|_{L^2(T)}^2 \lesssim \|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.21})$$

Remarque IV.3.1 La majoration de $\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e^{-1} \|[\phi_h]_e\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \subset \Omega} h_e^{-1} \|\phi_h\|_{L^2(e)}^2$ suit le même genre de démonstration pour aboutir à :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e^{-1} \|[\phi_h]_e\|_{L^2(e)}^2 + \sum_{e \subset \Omega} h_e^{-1} \|\phi_h\|_{L^2(e)}^2 \lesssim \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.22})$$

En regroupant les inégalités (IV.18), (IV.21) et (IV.19), (IV.22), nous obtenons :

$$\begin{cases} \|\nabla_h(\mathcal{I}_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \|\nabla_h(\mathcal{I}_{O_s}\phi_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

b) Majoration de $\lambda^{-1/2} t^2 \|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2$

Par inégalité triangulaire, nous avons :

$$\lambda^{-1/2} t \|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda^{-1/2} t \|\gamma_s - \gamma\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{-1/2} t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Or, par définition de γ et de γ_s , en utilisant (IV.23) et des inégalités de Friedrichs, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda^{-1/2} t \|\gamma_s - \gamma\|_{L^2(\Omega)} &= \lambda^{1/2} t^{-1} \|\nabla(\mathcal{I}_{O_s}\omega_h - \omega) - (\mathcal{I}_{O_s}\phi_h - \phi)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \lambda^{1/2} t^{-1} \|\nabla(\mathcal{I}_{O_s}\omega_h - \omega)\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{1/2} t^{-1} \|\mathcal{I}_{O_s}\phi_h - \phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \lambda^{1/2} t^{-1} \|\nabla_h(\mathcal{I}_{O_s}\omega_h - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{1/2} t^{-1} \|\nabla_h(\omega_h - \omega)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \lambda^{1/2} t^{-1} \|\mathcal{I}_{O_s}\phi_h - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{1/2} t^{-1} \|\phi_h - \phi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \lambda^{1/2} t^{-1} \|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{1/2} t^{-1} \|\nabla_h(\mathcal{I}_{O_s}\phi_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \lambda^{1/2} t^{-1} \|\nabla_h(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\lambda^{-1}t^2\|\gamma_s - \gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \lambda t^{-2}\|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2}\|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui implique :

$$\lambda^{-1}t^2\|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \lambda t^{-2}\|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2}\|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.24})$$

c) Majoration de $\|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$

Par définition de la norme $H^{-1}(\Omega)$, nous avons :

$$\|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\psi \in H_0^1(\Omega)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|\int_{\Omega} (\gamma_s - \gamma_h) \cdot \psi|}{\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Or, par définition de γ et γ_s , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\gamma_s - \gamma_h) \cdot \psi &= \int_{\Omega} (\gamma_s - \gamma) \cdot \psi + \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h) \cdot \psi \\ &= \lambda t^{-2} \int_{\Omega} (\nabla(\omega_s - \omega) - (\phi_s - \phi)) \cdot \psi + \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h) \cdot \psi \\ &= -\lambda t^{-2} \int_{\Omega} (\omega_s - \omega) \operatorname{div} \psi - \lambda t^{-2} \int_{\Omega} (\phi_s - \phi) \cdot \psi + \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h) \cdot \psi \\ &\lesssim (\lambda t^{-2} \|\omega - \omega_s\|_{L^2(\Omega)} + \lambda t^{-2} \|\phi - \phi_s\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}) \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} &\lesssim \lambda t^{-2} (\|\omega - \omega_s\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \phi_s\|_{L^2(\Omega)}) + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant deux inégalités triangulaires et deux inégalités de Friedrichs, nous obtenons :

$$\|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \lesssim \lambda^2 t^{-4} (\|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2) + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.25})$$

d) Conclusion

En combinant (IV.23), (IV.24) et (IV.25), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\|\nabla_h(\omega_s - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi_s - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\lesssim (\lambda^2 t^{-4} + \lambda t^{-2} + 1) \left(\|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{IV.26})$$

IV.3.2 Majoration de $\mu_h(\gamma_h)^2$

Nous rappelons que $\mu_h(\gamma_h) = \sup_{\zeta \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\zeta)|}{\|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)}}$.

Soit $\zeta \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\} \subset (H_0^1(\Omega))^2 \cap \Theta_h$.

$$\begin{aligned} (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\zeta) &= (\gamma_h, \zeta) - \underbrace{(\gamma_h, \mathbf{R}_h\zeta)}_{=a_h(\phi_h, \zeta) \text{ par (IV.5)}} \\ &= (\gamma_h, \zeta) - (\gamma, \zeta) + a(\phi, \zeta) - a_h(\phi_h, \zeta) \text{ car } \zeta \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\} \subset H_0^1(\Omega)^2 \\ &= (\gamma_h - \gamma, \zeta) + a(\phi - \phi_h, \zeta) \\ &\lesssim \left(\|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\nabla\zeta\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mu_h(\gamma_h)^2 \lesssim \|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.27})$$

IV.3.3 Majoration de $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h + \text{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)\|_{L^2(T)}^2$

Soit $\beta_T = b_T(\text{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h) \in H_0^1(T)^2$ où b_T est la fonction-bulle de triangle T vérifiant :

$$\left| \begin{array}{l} \text{supp } b_T \subset T, \quad 0 \leq b_T \leq 1 = \max_{x \in T} b_T, \\ \int_T b_T \, dx \approx h_T^2 \quad ; \quad \|\nabla b_T\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-1} \|b_T\|_{L^2(T)}. \end{array} \right.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \|\text{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim (\text{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h, \beta_T)_{L^2(T)} \\ &= -(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \varepsilon(\beta_T))_{L^2(T)} + (\gamma_h, \beta_T)_{L^2(T)} \\ &= -(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \varepsilon(\beta_T))_{L^2(T)} + (\gamma_h, \beta_T)_{L^2(T)} \\ &\quad + (\mathcal{C}\varepsilon(\phi), \varepsilon(\beta_T))_{L^2(T)} - (\gamma, \beta_T)_{L^2(T)} \\ &= (\mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h), \varepsilon(\beta_T))_{L^2(T)} + (\gamma_h - \gamma, \beta_T)_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

D'où, par une inégalité de Cauchy-Schwarz et la dualité $H^{-1}(\Omega) - H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h + \text{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h)\|_{L^2(T)} h_T^2 \|\varepsilon(\beta_T)\|_{L^2(T)} \\ &\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \beta_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Or, par inégalité inverse, nous avons :

$$\|\nabla\beta_T\|_{L^2(T)} + h_T|\nabla\beta_T|_{H^1(T)} \lesssim h_T^{-1}\|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)},$$

ce qui implique que

$$h_T\|\varepsilon(\beta_T)\|_{L^2(T)} \lesssim h_T\|\nabla\beta_T\|_{L^2(T)} \lesssim \|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)},$$

et

$$\left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \beta_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)}^2.$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h + \operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\|\mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h)\|_{L^2(T)}}_{\lesssim \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(T)}} h_T \|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)} \\ &\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où, par une inégalité de Cauchy-Schwarz discrète,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h + \operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)\|_{L^2(T)}^2 \lesssim \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.28})$$

IV.3.4 Majoration de $\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)}^2$

Soit $\beta_e = b_e([\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e) \in H_0^1(\omega_e)^2$ où b_e est la fonction-bulle d'arête e . Alors :

$$\begin{aligned} \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)}^2 &\lesssim ([\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e, \beta_e)_{L^2(e)} \\ &= (\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \beta_e)_{L^2(\omega_e)} + (\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \varepsilon(\beta_e))_{L^2(\omega_e)} \\ &= (\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \beta_e)_{L^2(\omega_e)} + (\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \varepsilon(\beta_e))_{L^2(\omega_e)} - (\mathcal{C}\varepsilon(\phi), \varepsilon(\beta_e))_{L^2(\omega_e)} \\ &\quad + (\gamma, \beta_e)_{L^2(\omega_e)} \\ &= (\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h, \beta_e)_{L^2(\omega_e)} + (\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h - \phi), \varepsilon(\beta_e))_{L^2(\omega_e)} + (\gamma - \gamma_h, \beta_e)_{L^2(\omega_e)} \\ &\lesssim \|\operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(\omega_e)} \|\beta_e\|_{L^2(\omega_e)} \\ &\quad + \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\omega_e)} \|\nabla\beta_e\|_{L^2(\omega_e)} + (\gamma - \gamma_h, \beta_e)_{L^2(\omega_e)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)}^2 &\lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(\omega_e)} \|\beta_e\|_{L^2(\omega_e)} \\
&\quad + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\omega_e)} h_e \|\nabla \beta_e\|_{L^2(\omega_e)} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \beta_e \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} (h_e \|\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(\omega_e)} \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h - \phi)\|_{L^2(\omega_e)}) h_e^{1/2} \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) n_e\|_{L^2(e)} \\
&\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2} \\
&\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\gamma_h + \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)\|_{L^2(T)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \left(\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e\|_{L^2(e)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant (IV.28) et après simplification, nous obtenons :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) n_e\|_{L^2(e)}^2 \lesssim \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \quad (\text{IV.29})$$

IV.3.5 Majoration de $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2$

Pour prouver la majoration de cette partie de l'estimateur par l'erreur, il suffit de reprendre la démonstration faite dans le lemme II.3.2. Nous avons :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\operatorname{div} \gamma_h + g\|_{L^2(T)}^2 \lesssim t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \operatorname{osc}^2(g). \quad (\text{IV.30})$$

IV.3.6 Majoration de $\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e (t^2 + h_e^2) \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)}^2$

Pour prouver la majoration de cette partie de l'estimateur par l'erreur, il suffit de reprendre la démonstration faite dans le lemme II.3.2. Nous avons :

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e (t^2 + h_e^2) \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(\omega_e)}^2 \lesssim t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \operatorname{osc}^2(g). \quad (\text{IV.31})$$

IV.3.1 Conclusion

En combinant les différentes inégalités présentées dans les relations (IV.26), (IV.27), (IV.28), (IV.29), (IV.30) et (IV.31), nous obtenons le théorème suivant :

Théorème IV.3.1 *En prenant $s = (\phi_s, \omega_s, \gamma_s) = (\mathcal{I}_{O_s}\phi_h, \mathcal{I}_{O_s}\omega_h, \lambda t^{-2}(\nabla(\mathcal{I}_{O_s}\omega_h) - \mathcal{I}_{O_s}\phi_h))$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|g + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e (t^2 + h_e^2) \|[\gamma_h]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)}^2 + \mu_h^2(\gamma_h) \\ & + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e \cdot n_e\|_{L^2(e)}^2 \\ & + \|\nabla_h(\omega_s - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi_s - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \lesssim (\lambda^2 t^{-4} + \lambda t^{-2} + 1) (\|\nabla_h(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ & + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \operatorname{osc}(g)^2. \end{aligned}$$

Remarque IV.3.2 *Nous pouvons remarquer que l'efficacité de l'estimateur n'est pas robuste en t , mais la fiabilité de l'estimateur l'est. Ce caractère non-robuste provient des majorations (IV.24) et (IV.25).*

IV.4 Résultats numériques

Dans cette partie, les maillages que nous avons utilisés sont les maillages structurés présentés dans la sous-sous-section III.5.1. Nous prendrons arbitrairement $\kappa_e = 5$, $t = 1/64$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ et $\tilde{\lambda} = 1$.

Nous considérons l'erreur discrète $e_{h,dis}^{nc}$ donnée par

$$e_{h,dis}^{nc} = \sqrt{\|\nabla\omega - \nabla_h\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla\phi - \nabla_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|P_h\gamma - \gamma_h\|_{-1,h}^2},$$

où $P_h\gamma$ correspond à l'interpolation \mathbb{P}_1 -discontinue par morceaux de γ sur le maillage \mathcal{T}_h . Cette erreur discrète est définie par l'approche de la norme $H^{-1}(\Omega)$ de $\gamma - \gamma_h$ intervenant dans η_h par sa version discrète localement calculable définie par

$$\|P_h\gamma - \gamma_h\|_{-1,dis}^2 = \sup_{\eta_h \in S_0^1(\mathcal{T}_h) \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(P_h\gamma - \gamma_h, \eta_h)|^2}{\|\nabla\eta_h\|_{L^2(\Omega)}^2}. \quad (\text{IV.32})$$

Le calcul de $\|P_h\gamma - \gamma_h\|_{-1,dis}^2$ est maintenant une tâche facile et correspond simplement à la détermination de la plus grande valeur propre d'un problème classique de valeurs propres généralisé de dimension finie (cf la section III.5).

Pour valider la fiabilité de l'estimateur dans le cas non-conforme présenté dans le Théorème IV.2.1, l'estimateur d'erreur η_h est défini par :

$$\eta_h^2 = \eta_{h,1}^2 + \eta_{h,2}^2 + \eta_{h,3}^2 + \eta_{h,4}^2 + \eta_{h,5}^2 + \eta_{h,6}^2,$$

où les contributions $\eta_{h,1}$, $\eta_{h,2}$, $\eta_{h,3}$, $\eta_{h,4}$, $\eta_{h,5}$ et $\eta_{h,6}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \eta_{h,1}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \int_T |g + \operatorname{div} \gamma_h|^2 dx, & (IV.33) \\ \eta_{h,2}^2 &= \|\nabla_h(\omega_s - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi_s - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma_s - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_s - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2, \\ \eta_{h,3}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T |\gamma_h + \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)|^2 dx, \\ \eta_{h,4}^2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e (h_e^2 + t^2) \int_e |[\gamma_h]_e \cdot n_e|^2 ds, \\ \eta_{h,5}^2 &= \sum_{e \in \mathcal{E}(\Omega)} h_e \int_e |[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e|^2 ds, \\ \eta_{h,6}^2 &= \mu_h^2(\gamma_h). \end{aligned}$$

Pour le test que nous avons effectué, nous avons considéré l'élément " $\mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_1^{NC} - \mathbb{P}_0$ " pour la discrétisation. Cela implique que $\mathbf{R}_h = \mathbf{P}_0$ et $\mu_h(\gamma_h) = \eta_{h,6} = 0$.

Nous représentons sur la Figure IV.1 l'évolution de l'erreur $e_{h,dis}^{nc}$ et de $\eta_{h,1}$, $\eta_{h,2}$, $\eta_{h,3}$, $\eta_{h,4}$, $\eta_{h,5}$ en fonction de h . Ensuite, nous représentons sur la Figure IV.2 les six ratios $\eta_h/e_{h,dis}^{nc}$ et $\eta_{h,i}/e_{h,dis}^{nc}$ pour $i = 1..5$ en fonction de h .

Tout d'abord, on peut remarquer sur la Figure IV.1 que l'erreur converge à l'ordre attendu (à savoir 1), et que le même comportement se produit pour $\eta_{h,2}$, $\eta_{h,3}$ et $\eta_{h,5}$. En conséquence, les ratios $\eta_{h,2}/e_{h,dis}^{nc}$, $\eta_{h,3}/e_{h,dis}^{nc}$ et $\eta_{h,5}/e_{h,dis}^{nc}$ sont constants comme on peut le remarquer sur la Figure IV.2. De plus, on peut également remarquer que le taux de convergence de $\eta_{h,1}$ (resp. $\eta_{h,4}$) commence aux environs de 2 (resp. 1.5) pour les maillages les plus grossiers, ce qui peut facilement s'expliquer par la définition de $\eta_{h,1}$ (resp. $\eta_{h,4}$) lorsque h reste plus grand que t . Dès que h devient plus petit que t , alors le taux de convergence de 1 pour $\eta_{h,1}$ et $\eta_{h,4}$ est retrouvé comme le suggère les Figures IV.1 et IV.2 pour les maillages les plus fins utilisés. Par conséquent, le ratio $\eta_h/e_{h,dis}^{nc}$ devient asymptotiquement constant.

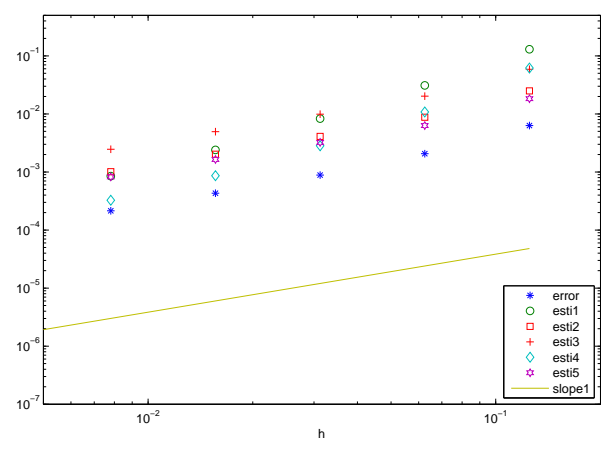


FIG. IV.1: Taux de convergence pour l'erreur et les estimateurs, analyse non-conforme.

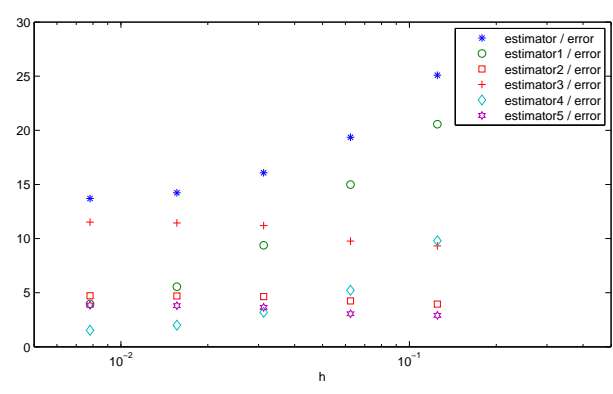


FIG. IV.2: Ratios d'efficacité, analyse non-conforme.

Chapitre V

Problèmes locaux sur les patches

Cette partie est consacrée à une nouvelle étude reprenant le principe de Morin et al. ([MNS02]) adapté au problème de Reissner-Mindlin ; le but étant de construire un estimateur *a posteriori* dépendant des solutions de problèmes locaux sur chaque patch de maille. L'avantage de cette technique est que nous nous servons du problème global que nous localisons afin de créer nos éléments locaux, ce qui permet de conserver les éventuelles caractéristiques du problème, contrairement aux estimateurs présentés dans les chapitres II et III qui utilisent des flux que nous devons imposer. De plus, il est possible d'appliquer ce procédé selon les différents espaces de discrétisation considérés.

Nous démontrerons la fiabilité, l'efficacité et la robustesse de l'estimateur.

Sommaire

V.1 Introduction	115
V.2 Fiabilité de l'estimateur	119
V.3 Efficacité de l'estimateur	132

V.1 Introduction

Nous nous plaçons dans le cas conforme, et plus précisément, nous allons nous concentrer sur deux discrétisations afin de se familiariser avec le procédé :

- Discrétisation de type MITC3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Theta_h = \{\psi \in H_0^1(\Omega)^2 \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Gamma_h = ND_0 = \left\{ \rho \in H_0(\text{rot}, \Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, \exists a_1, a_2, b \in \mathbb{R} \, v|_T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\}. \end{array} \right.$$

- Discrétisation de type Durán-Liberman :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Theta_h = \{\psi \in H_0^1(\Omega)^2 \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T)^2 \oplus \text{span}\{\lambda_2\lambda_3\tau_1, \lambda_3\lambda_1\tau_2, \lambda_1\lambda_2\tau_3\} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Gamma_h = ND_0 = \left\{ \rho \in H_0(\text{rot}, \Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, \exists a_1, a_2, b \in \mathbb{R} v|_T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\}, \end{array} \right.$$

où les λ_i sont les fonctions-bulles associées aux coordonnées barycentriques et les τ_i sont les vecteurs unitaires tangents aux arêtes du triangle.

Nous rappelons que nous avons posé $(\omega, \phi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$ la solution de

$$a(\phi, \psi) + (\gamma, \nabla v - \psi) = (g, v) \quad \forall (v, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2, \quad (\text{V.1})$$

et $(\omega_h, \phi_h) \in W_h \times \Theta_h \subset H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$ la solution de

$$a(\phi_h, \psi_h) + (\gamma_h, \nabla v_h - \mathbf{R}_h \psi_h) = (g, v_h) \quad \forall (v_h, \psi_h) \in W_h \times \Theta_h, \quad (\text{V.2})$$

où $\gamma = \lambda t^{-2}(\nabla \omega - \phi)$ et $\gamma_h = \lambda t^{-2}(\nabla \omega_h - \mathbf{R}_h \phi_h)$.

L'objectif de ce chapitre est de construire un estimateur *a posteriori* fiable et efficace de type flux équilibrés utilisant les solutions d'un problème discret avec poids, localisé sur des patches d'éléments pour le contrôle de l'erreur suivante :

$$\begin{aligned} \eta_{MNS}^2 &= \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 \\ &\quad + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Pour y parvenir, nous allons tout d'abord considérer la fonctionnelle \mathcal{A} introduite dans la sous-section IV.1.1 et définie pour tout (β, z, ρ) et (η, v, τ) dans $X := \Theta \times W \times \Gamma := H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)^2$ par :

$$\mathcal{A}(\beta, z, \rho; \eta, v, \tau) = a(\beta, \eta) + (\nabla v - \eta, \rho) - (\nabla z - \beta, \tau) + \lambda^{-1} t^2 (\rho, \tau).$$

Nous définissons la norme $\|\cdot\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}$ par

$$\forall \rho \in H^{-1}(\text{div}, \Omega), \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 = \|\rho\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\text{div} \rho\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Afin de construire notre estimateur, nous allons démontrer la proposition 4.3 de [Lov05] dans le cas continu :

Proposition V.1.1 *Étant donnés $(\beta, z, \rho) \in \Theta \times W \times \Gamma$ et $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $(\eta, v, \tau) \in \Theta \times W \times \Gamma$ tel que pour tout $t < t_0$,*

$$\begin{aligned} &\|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} + \lambda^{-1/2} t \|\tau\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} + \lambda^{-1/2} t \|\rho\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

et

$$\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \mathcal{A}(\beta, z, \rho; \eta, v, \tau), \quad (\text{V.4})$$

(les constantes multiplicatives intervenant dans ces inégalités pouvant dépendre de t et des coefficients de Lamé, mais les contributions en t peuvent devenir indépendante de t pour t suffisamment petit.)

Preuve: La démonstration se fait en quatre étapes :

– Soient $\eta_1 = \beta$; $v_1 = z$ et $\tau_1 = \rho$. Alors

$$\left| \begin{array}{l} (\text{V.3}) \text{ est vraie avec égalité;} \\ \text{par l'inégalité de Korn, nous avons } \frac{1}{c_K^2} \|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{A}(\beta, z, \rho; \eta_1, v_1, \tau_1). \end{array} \right.$$

– Nous avons l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $\tau \in \Gamma$ (cf [BF91] par exemple) :

$$\sup_{(\eta,v) \in \Theta \setminus \{(0,0)\} \times W \setminus \{0\}} \frac{|(\nabla v - \eta, \tau)|}{(\|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}} \geq C\|\tau\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}.$$

Ainsi, il existe $(\eta_2, v_2) \in \Theta \times W$ tels que

$$\left| \begin{array}{l} \|\nabla\eta_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1\|\rho\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}; \\ (\nabla v_2 - \eta_2, \rho) = \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}^2. \end{array} \right.$$

En prenant $\tau_2 = 0$, (V.3) est alors trivialement vérifiée. De plus, pour prouver (V.4), nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\beta, z, \rho; \eta_2, v_2, \tau_2) &= a(\beta, \eta_2) + (\nabla v_2 - \eta_2, \rho) \\ &= a(\beta, \eta_2) + \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Or, par linéarité de la fonctionnelle a et une inégalité de Young de paramètre $\delta > 0$, nous avons :

$$a(\beta, \eta_2) \geq -C_2\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\eta_2\|_{L^2(\Omega)} \geq -\frac{C_2\delta}{2\delta}\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{C_2\delta}{2}\|\nabla\eta_2\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Or, nous avons $-\|\nabla\eta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq -C_1^2\|\rho\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}^2$, ce qui implique que

$$\mathcal{A}(\beta, z, \rho; \eta_2, v_2, \tau_2) \geq \left(1 - \frac{C_2\delta}{2}C_1^2\right)\|\rho\|_{H^{-1}(\text{div},\Omega)}^2 - \frac{C_2\delta}{2\delta}\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

– Nous prenons $\eta_3 = 0$, $v_3 = 0$ et $\tau_3 = -\nabla z$. Alors, par l'inégalité de Friedrichs

$$\begin{aligned} \|\tau_3\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} &= \|\tau_3\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\text{div } \tau_3\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &= \|\nabla z\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Delta z\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \|z\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + c_F)\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\lambda^{-1/2}t\|\tau_3\|_{L^2(\Omega)} = \lambda^{-1/2}t\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, avec deux inégalités de Cauchy-Schwarz et deux inégalités de Young de paramètres $\delta_1 > 0$ et $\delta_2 > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\beta, z, \tau; 0, 0, \tau_3) &= (\nabla z - \beta, \nabla z) - \lambda^{-1}t^2(\rho, \nabla z) \\ &= \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\beta, \nabla z) - \lambda^{-1}t^2(\rho, \nabla z) \\ &\geq \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(\frac{\delta_1}{2}\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\delta_1}\|\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \lambda^{-1}t^2 \left(\frac{\delta_2}{2}\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\delta_2}\|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \left(1 - \frac{\delta_1}{2} - \lambda^{-1}t^2\frac{\delta_2}{2} \right) \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2\delta_1} \underbrace{\|\beta\|_{L^2(\Omega)}^2}_{\leq c_F^2\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)}^2} - \frac{1}{2\delta_2}\lambda^{-1}t^2\|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

– Nous considérons enfin une combinaison linéaire des $\{\eta_i, v_i, \tau_i\}_{i=1,2,3}$, autrement dit soient $\alpha_i > 0$ pour $i = 1, 2, 3$ et nous définissons :

$$(\eta, v, \tau) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (\eta_i, v_i, \tau_i).$$

Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} &\|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} + \lambda^{-1/2}t\|\tau\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{i=1}^3 |\alpha_i| \left(\|\nabla\eta_i\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_i\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau_i\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} + \lambda^{-1/2}t\|\tau_i\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \alpha_1 \left(\|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} + \lambda^{-1/2}t\|\rho\|_{L^2(\Omega)} \right) + \alpha_2 C_1 \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} \\ &\quad + \alpha_3 (c_F + 1 + \lambda^{-1/2}t)\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \alpha_1 \|\nabla\beta\|_{L^2(\Omega)} + [\alpha_1 + \alpha_3(c_F + 1 + \lambda^{-1/2}t)]\|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \alpha_1 \lambda^{-1/2}t\|\rho\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + [\alpha_1 + \alpha_2 C_1]\|\rho\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A} \left(\beta, z, \rho; \sum_{i=1}^3 \alpha_i \eta_i, \sum_{i=1}^3 \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^3 \alpha_i \tau_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathcal{A}(\beta, z, \rho; \eta_i, v_i, \tau_i) \\
&\geq \alpha_1 \left(\frac{1}{c_K^2} \|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \alpha_2 \left[\left(1 - \frac{C_2 \delta}{2} C_1^2 \right) \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 - \frac{C_2}{2\delta} \|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
&\quad + \alpha_3 \left[\left(1 - \frac{\delta_1}{2} - \lambda^{-1} t^2 \frac{\delta_2}{2} \right) \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{c_F^2}{2\delta_1} \|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2\delta_2} \lambda^{-1} t^2 \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
&= \left(\frac{\alpha_1}{c_K^2} - \frac{C_2 \alpha_2}{2\delta} - \frac{\alpha_3 c_F^2}{2\delta_1} \right) \|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_3 \left(1 - \frac{\delta_1}{2} - \lambda^{-1} t^2 \frac{\delta_2}{2} \right) \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \alpha_2 \left(1 - \frac{C_2 \delta}{2} C_1^2 \right) \|\rho\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 + \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3}{2\delta_2} \right) \lambda^{-1} t^2 \|\rho\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant judicieusement les paramètres de Young δ , δ_1 et δ_2 ainsi que les coefficients $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$, nous pouvons vérifier (V.4).

A priori, les constantes multiplicatives intervenant dans les deux majorations dépendent de t . Cependant, si nous fixons un t_0 , alors pour tout $t < t_0$, nous avons :

$$1 - \frac{\delta_1}{2} - \lambda^{-1} t^2 \frac{\delta_2}{2} \geq 1 - \frac{\delta_1}{2} - \lambda^{-1} t_0^2 \frac{\delta_2}{2},$$

et

$$\alpha_1 + \alpha_3 (c_F + 1 + \lambda^{-1/2} t) \leq \alpha_1 + \alpha_3 (c_F + 1 + \lambda^{-1/2} t_0),$$

ce qui annule la dépendance en t . □

V.2 Fiabilité de l'estimateur

Le but de cette section est de parvenir au théorème V.2.3 qui propose un estimateur d'erreur fiable.

D'après la proposition V.1.1, étant donné $(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h) \in \Theta \times W \times \Gamma$, il existe $(\eta, v, \tau) \in \Theta \times W \times \Gamma$ tels que

$$\begin{aligned}
& \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{-1/2} t \|\tau\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} \\
& \lesssim \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^{-1/2} t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)},
\end{aligned} \tag{V.5}$$

et

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 \\ & \lesssim \mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau). \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

Par la bilinéarité de la fonctionnelle \mathcal{A} , le fait que (ω, ϕ) soit solution du problème (V.1) et par la définition de γ , nous avons :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\ & = a(\phi - \phi_h, \eta) + (\nabla v - \eta, \gamma - \gamma_h) - (\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h), \tau) + \lambda^{-1} t^2 (\gamma - \gamma_h, \tau) \\ & = \underbrace{a(\phi, \eta) + (\gamma, \nabla v - \eta)}_{=(g,v)} - a(\phi_h, \eta) - (\gamma_h, \nabla v - \eta) - (\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h), \tau) + \lambda^{-1} t^2 (\gamma - \gamma_h, \tau) \\ & = (g, v) - a(\phi_h, \eta) - (\nabla v - \eta, \gamma_h) - \underbrace{(\nabla\omega - \phi, \tau) + \lambda^{-1} t^2 (\gamma, \tau)}_{=0} + (\nabla\omega_h - \phi_h, \tau) - \lambda^{-1} t^2 (\gamma_h, \tau) \\ & = (g, v) - [a(\phi_h, \eta) + (\nabla v - \eta, \gamma_h) + (\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h, \tau)]. \end{aligned}$$

Nous allons pouvoir maintenant localiser le problème. Pour ce faire, nous posons λ_i la fonction de base \mathbb{P}_1 par maille associée au sommet $i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})$ $\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \lambda_i = 1 \right)$, que nous introduisons dans l'égalité précédente afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\ & = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \{ (g, v \lambda_i) - a(\phi_h, \eta \lambda_i) - (\gamma_h, \nabla(v \lambda_i) - \eta \lambda_i) - (\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h, \tau \lambda_i) \}. \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

Nous introduisons également pour tout $i \in \mathcal{N}(\Omega)$, $c_i = \frac{\int_{\Omega} v \lambda_i}{\int_{\Omega} \lambda_i} \in \mathbb{R}$ et $d_i = \frac{\int_{\Omega} \eta \lambda_i}{\int_{\Omega} \lambda_i} \in \mathbb{R}^2$. Si i est un nœud du bord, nous prenons $c_i = 0$ et $d_i = (0, 0)$.

Nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme V.2.1 *Si $(\eta, v, \tau) \in \Theta \times W \times \Gamma$ vérifie les relations (V.5) et (V.6), alors*

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\ & = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left\{ (g + \text{div}_h \gamma_h, (v - c_i) \lambda_i) + (\gamma_h + \text{div}_h(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)), (\eta - d_i) \lambda_i) \right. \\ & \quad \left. - \int_{\Gamma_i} J_1 \cdot ((\eta - d_i) \lambda_i) - \int_{\Gamma_i} J_2 (v - c_i) \lambda_i + (\mathbf{R}_h \phi_h - \phi_h, \tau \lambda_i) + (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(d_i \lambda_i)) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{V.8})$$

où Γ_i désigne l'ensemble des arêtes $e \in \mathcal{E}(\Omega)$ ayant i pour sommet; $J_1 = [\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e$ et $J_2 = [\gamma_h]_e \cdot n_e$ sont définis pour tout $e \in \Gamma_i$ et div_h désigne la divergence élément par élément.

Preuve: Comme $c_i \in \mathbb{R}$, $d_i \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_i \in \mathbb{P}_1$ par maille, nous avons que $c_i \lambda_i \in W_h$ et $d_i \lambda_i \in \Theta_h$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
(g, c_i \lambda_i) - a(\phi_h, d_i \lambda_i) - (\nabla(c_i \lambda_i) - d_i \lambda_i, \gamma_h) &= c_i(g, \lambda_i) - a(\phi_h, d_i \lambda_i) - c_i(\nabla \lambda_i, \gamma_h) + (d_i \lambda_i, \gamma_h) \\
&\stackrel{(V.2)}{=} -(\gamma_h, \mathbf{R}_h(d_i \lambda_i)) + (\gamma_h, d_i \lambda_i) \\
&= (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(d_i \lambda_i)). \tag{V.9}
\end{aligned}$$

Ainsi, en retranchant la relation (V.9) sommée sur tous les nœuds à (V.7), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \{(g, v \lambda_i) - a(\phi_h, \eta \lambda_i) - (\gamma_h, \nabla(v \lambda_i) - \eta \lambda_i) - (\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h, \tau \lambda_i)\} \\
&\quad - \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \{(g, c_i \lambda_i) - a(\phi_h, d_i \lambda_i) - (\nabla(c_i \lambda_i) - d_i \lambda_i, \gamma_h) - (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(d_i \lambda_i))\} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \{(g, (v - c_i) \lambda_i) - a(\phi_h, (\eta - d_i) \lambda_i) - (\gamma_h, \nabla((v - c_i) \lambda_i) - (\eta - d_i) \lambda_i)\} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \{(\mathbf{R}_h \phi_h - \phi_h, \tau \lambda_i) + (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(d_i \lambda_i))\}}_{=: r_i}.
\end{aligned}$$

En utilisant deux identités de Green, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left\{ (g, (v - c_i) \lambda_i) - \sum_{T \subset \omega_i} \left[- \int_T \operatorname{div}(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) \cdot ((\eta - d_i) \lambda_i) + \int_{\partial T} (\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) n_T) \cdot ((\eta - d_i) \lambda_i) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{T \subset \omega_i} \left[- \int_T \operatorname{div} \gamma_h((v - c_i) \lambda_i) + \int_{\partial T} (\gamma_h \cdot n_T)((v - c_i) \lambda_i) \right] + (\gamma_h, (\eta - d_i) \lambda_i) + r_i \right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left\{ (g, (v - c_i) \lambda_i) + (\operatorname{div}_h(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)), (\eta - d_i) \lambda_i) - \sum_{e \subset \omega_i} \int_e ([\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e) \cdot ((\eta - d_i) \lambda_i) \right. \\
&\quad \left. + (\operatorname{div}_h \gamma_h, (v - c_i) \lambda_i) - \sum_{e \subset \omega_i} \int_e ([\gamma_h]_e \cdot n_e)(v - c_i) \lambda_i + (\gamma_h, (\eta - d_i) \lambda_i) + r_i \right\} \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \{(g + \operatorname{div}_h \gamma_h, (v - c_i) \lambda_i) + (\gamma_h + \operatorname{div}_h(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)), (\eta - d_i) \lambda_i) \\
&\quad - \sum_{e \subset \omega_i} \int_e J_1 \cdot ((\eta - d_i) \lambda_i) - \sum_{e \subset \omega_i} \int_e J_2 (v - c_i) \lambda_i + r_i\}.
\end{aligned}$$

Comme $\lambda_i = 0$ sur $\partial\omega_i$, l'identité précédente est équivalente à (V.8), ce qui achève la démonstration. \square

Nous définissons maintenant :

$$s_i = (g + \text{div}_h \gamma_h, (v - c_i)\lambda_i) + (\gamma_h + \text{div}_h(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)), (\eta - d_i)\lambda_i) - \int_{\Gamma_i} J_1 \cdot ((\eta - d_i)\lambda_i) - \int_{\Gamma_i} J_2(v - c_i)\lambda_i, \quad (\text{V.10})$$

ce qui implique que $\mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (s_i + r_i)$. Or, pour tout $i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})$,

les supports de s_i et r_i sont inclus dans ω_i , ce qui confèrera à une partie de notre estimateur son caractère local.

Notre objectif maintenant est de majorer la contribution s_i , $i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})$ en utilisant un problème localisé similaire au problème de Reissner-Mindlin, ce qui fera l'objet du lemme V.2.2.

Nous posons :

$$W(\omega_i) = \begin{cases} \left\{ v \in H^1(\omega_i) : \int_{\omega_i} v \lambda_i = 0 \text{ et } \int_{\omega_i} |\nabla v|^2 \lambda_i < \infty \right\} & \text{si } i \text{ est un nœud intérieur;} \\ \left\{ v \in H^1(\omega_i) : v = 0 \text{ sur } \partial\omega_i \cap \partial\Omega \text{ et } \int_{\omega_i} |\nabla v|^2 \lambda_i < \infty \right\} & \text{si } i \text{ est un nœud du bord,} \end{cases}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}^k(\omega_i) = \{u \in \mathbb{P}_k(\omega_i) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\omega_i\},$$

$$\mathcal{P}_0^k(\omega_i) = \mathcal{P}^k(\omega_i) \cap W(\omega_i).$$

Remarque V.2.1 Si $i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})$ est un nœud du bord, alors $\mathcal{P}_0^k(\omega_i)$ coïncide avec $\mathcal{P}^k(\omega_i)$. Si i est un nœud intérieur, $\mathcal{P}_0^k(\omega_i)$ est le sous-espace des fonctions $u \in \mathcal{P}^k(\omega_i)$ vérifiant $\int_{\omega_i} u \lambda_i = 0$.

Nous souhaitons écrire un problème localisé défini sur $\mathcal{P}_0^k(\omega_i) \times \mathcal{P}_0^l(\omega_i)^2$ pour un certain couple $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ que nous choisirons en fonction des espaces de discrétisation que nous prendrons. Ainsi, nous écrivons la contribution s_i sous la forme :

$$\begin{aligned} s_i = & (g + \text{div}_h \gamma_h, \Pi_i(v - c_i)\lambda_i) + (\gamma_h + \text{div}_h(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)), \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\lambda_i) - \int_{\Gamma_i} J_1 \cdot \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\lambda_i \\ & - \int_{\Gamma_i} J_2 \Pi_i(v - c_i)\lambda_i - \int_{\Gamma_i} J_1 \cdot (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i)\lambda_i - \int_{\Gamma_i} J_2(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i \\ & + (g + \text{div}_h \gamma_h, (\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i) + (\gamma_h + \text{div}_h(\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)), (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i)\lambda_i), \quad (\text{V.11}) \end{aligned}$$

où les projections $\Pi_i : W(\omega_i) \mapsto \mathcal{P}_0^3(\omega_i)$ et $\widetilde{\Pi}_i : W(\omega_i)^2 \mapsto (\mathcal{P}_0^2(\omega_i))^2$ sont construites¹ dans le cas MITC3 de telle sorte que : pour tout $S \subset \Gamma_i$

¹Voir l'annexe G pour le détail des fonctions de base considérées, de la construction des coefficients et de la vérification des différentes relations.

$$\left| \begin{aligned}
\int_S (u - \Pi_i u)(s) \lambda_i(s) ds &= \int_S (u - \Pi_i u)(s) s \lambda_i(s) ds = 0, & \forall u \in W(\omega_i); \\
\int_{\omega_i} (u - \Pi_i u) \lambda_i &= 0, & \forall u \in W(\omega_i); \\
\int_S (\psi - \widetilde{\Pi}_i \psi)(s) \lambda_i(s) ds &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \psi \in W(\omega_i)^2; \\
\int_{\omega_i} (\psi - \widetilde{\Pi}_i \psi) \lambda_i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \psi \in W(\omega_i)^2; \\
\int_{\omega_i} |\nabla \Pi_i u|^2 \lambda_i &\lesssim \int_{\omega_i} |\nabla u|^2 \lambda_i, & \forall u \in W(\omega_i); \\
\int_{\omega_i} |\nabla \widetilde{\Pi}_i \psi|^2 \lambda_i &\lesssim \int_{\omega_i} |\nabla \psi|^2 \lambda_i, & \forall \psi \in W(\omega_i)^2;
\end{aligned} \right. \tag{V.12}$$

et les projections $\Pi_i : W(\omega_i) \mapsto \mathcal{P}_0^3(\omega_i)$ et $\widetilde{\Pi}_i : W(\omega_i)^2 \mapsto (\mathcal{P}_0^3(\omega_i))^2$ sont construites dans le cas Durán-Liberman de telle sorte que : pour tout $S \subset \Gamma_i$

$$\left| \begin{aligned}
\int_S (u - \Pi_i u)(s) \lambda_i(s) ds &= \int_S (u - \Pi_i u)(s) s \lambda_i(s) ds = 0, & \forall u \in W(\omega_i); \\
\int_{\omega_i} (u - \Pi_i u) \lambda_i &= 0, & \forall u \in W(\omega_i); \\
\int_S (\psi - \widetilde{\Pi}_i \psi)(s) \lambda_i(s) ds &= \int_S (\psi - \widetilde{\Pi}_i \psi)(s) s \lambda_i(s) ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \psi \in W(\omega_i)^2; \\
\int_{\omega_i} (\psi - \widetilde{\Pi}_i \psi) \lambda_i &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \forall \psi \in W(\omega_i)^2; \\
\int_{\omega_i} |\nabla \Pi_i u|^2 \lambda_i &\lesssim \int_{\omega_i} |\nabla u|^2 \lambda_i, & \forall u \in W(\omega_i); \\
\int_{\omega_i} |\nabla \widetilde{\Pi}_i \psi|^2 \lambda_i &\lesssim \int_{\omega_i} |\nabla \psi|^2 \lambda_i, & \forall \psi \in W(\omega_i)^2;
\end{aligned} \right. \tag{V.13}$$

Remarque V.2.2 Dans le cas MITC3 ou Durán-Liberman, nous avons les propriétés suivantes concernant les projections (cf l'Annexe G ou [MNS02]) :

$$\int_{\omega_i} |\nabla \Pi_i u|^2 \lambda_i \lesssim \int_{\omega_i} |\nabla u|^2 \lambda_i, \quad \forall u \in W(\omega_i); \tag{V.14}$$

$$\int_{\omega_i} |\mathcal{C}^{1/2} \varepsilon(\widetilde{\Pi}_i \psi)|^2 \lambda_i \lesssim \int_{\omega_i} |\mathcal{C}^{1/2} \varepsilon(\psi)|^2 \lambda_i, \quad \forall \psi \in W(\omega_i)^2. \tag{V.15}$$

Comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} v - c_i \in W(\omega_i) \text{ par construction de } c_i, \\ \eta - d_i \in W(\omega_i)^2 \text{ par construction de } d_i, \\ J_2 = [\gamma_h]_e \cdot n_e \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h), \\ J_1 = [\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e \in \mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h) \text{ dans le cas MITC3}, \\ J_1 = [\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_e n_e \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h) \text{ dans le cas Durán-Liberman}, \end{array} \right.$$

où $\mathbb{P}_k(\mathcal{T}_h) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u|_T \in \mathbb{P}_k(T) \forall T \in \mathcal{T}_h\}$,

alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_i} J_1 \cdot (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i)\lambda_i = 0, \\ \int_{\Gamma_i} J_2(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i = 0. \end{array} \right.$$

Nous introduisons maintenant les solutions du problème local : Soit $(\phi_i, z_i) \in \mathcal{P}_0^2(\omega_i)^2 \times \mathcal{P}_0^3(\omega_i)$ dans le cas MITC3 ($(\phi_i, z_i) \in \mathcal{P}_0^3(\omega_i)^2 \times \mathcal{P}_0^3(\omega_i)$ dans le cas Durán-Liberman) solution du problème local : $\forall(\psi, v) \in \mathcal{P}_0^2(\omega_i)^2 \times \mathcal{P}_0^3(\omega_i)$ dans le cas MITC3 ($\forall(\psi, v) \in \mathcal{P}_0^2(\omega_i)^3 \times \mathcal{P}_0^3(\omega_i)$ dans le cas Durán-Liberman),

$$\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\psi)\lambda_i + (\gamma_i, (\nabla v - \psi)\lambda_i) = (g + \text{div}_h \gamma_h, v\lambda_i) + (\gamma_h + \text{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \psi\lambda_i) - \int_{\Gamma_i} (J_1 \cdot \psi + J_2 v)\lambda_i, \quad (\text{V.16})$$

où $\gamma_i := \lambda t^{-2}(\nabla z_i - \phi_i)$.

Alors, d'après la relation (V.11), nous avons le lemme :

Lemme V.2.2

$$s_i = \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i))\lambda_i + (\gamma_i, \nabla(\Pi_i(v - c_i))\lambda_i - \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\lambda_i) \\ + (g + \text{div}_h \gamma_h, (\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i) + (\gamma_h + \text{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i)\lambda_i).$$

En se rappelant que $\mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) = \sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} (s_i + r_i)$ avec $r_i = (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)d_i\lambda_i) - ((\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h, \tau\lambda_i)$, nous avons alors démontré le théorème suivant :

Théorème V.2.1 (Upper-bound - Première étape) Avec les notations du lemme V.2.1, les définitions des projections données par (V.12) ou (V.13) et le fait que (ϕ_i, z_i) soit solution du problème local (V.16), nous avons

$$\begin{aligned}
& \mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left\{ \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i))\lambda_i + (\gamma_i, \nabla(\Pi_i(v - c_i))\lambda_i - \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\lambda_i) \right. \\
&+ (g + \operatorname{div}\gamma_h, (\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i) + (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i)\lambda_i) \\
&\left. + (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)d_i\lambda_i) - ((\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h, \tau\lambda_i) \right\}. \tag{V.17}
\end{aligned}$$

En utilisant (V.4), il nous suffit alors de majorer chacun des termes du second membre de (V.17) afin de pouvoir trouver l'estimateur.

V.2.1 Gestion de $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i))\lambda_i$:

Afin de simplifier l'écriture, nous posons $\|\psi\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 = \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\psi) : \varepsilon(\psi)\lambda_i$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i))\lambda_i \\
&\leq \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\phi_i)\lambda_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)) : \varepsilon(\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i))\lambda_i \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \\
&\lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\eta - d_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \quad \text{par (V.15)} \\
&= \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\eta\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \quad \text{car } d_i \text{ est une constante} \\
&\leq \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\eta) : \varepsilon(\eta) \right)^{1/2} \quad \text{car } 0 \leq \lambda_i \leq 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, par la régularité du maillage et le fait que $\|\eta\|_C \lesssim \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)}$, nous obtenons

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}_\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i))\lambda_i \lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{V.18})$$

V.2.2 Majoration de $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i, \nabla(\Pi_i(v - c_i))\lambda_i - \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\lambda_i)$:

Afin de simplifier l'écriture, nous posons : $\|v\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 = \int_{\omega_i} |v|^2 \lambda_i$. Ainsi, en posant :

$$\mu_1(\gamma_i) := \sup_{\substack{f = (f_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ f_i \in \mathcal{P}_0^3(W_i) \setminus \{0\}}} \frac{\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \nabla f_i) \right|}{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla f_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right)^{1/2}}, \quad (\text{V.19})$$

nous avons par la propriété de Π_i , le fait que $c_i \in \mathbb{R}$, le fait que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ et la régularité du maillage,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i, \nabla(\Pi_i(v - c_i))\lambda_i) &= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \nabla(\Pi_i(v - c_i))) \\ &\leq \mu_1(\gamma_i) \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla(\Pi_i(v - c_i))\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \mu_1(\gamma_i) \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla(v - c_i)\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \mu_1(\gamma_i) \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_i)}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \mu_1(\gamma_i) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

De même,

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i, \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\lambda_i) \lesssim \mu_2(\gamma_i) \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)},$$

où :

$$\mu_2(\gamma_i) := \sup_{\substack{\chi = (\chi_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ \chi_i \in \mathcal{P}_0^a(W_i)^2 \setminus \{(0,0)\}}} \frac{\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \chi_i) \right|}{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla \chi_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2}}, \quad (\text{V.20})$$

où $a = 2$ dans le cas MITC3, $a = 3$ dans le cas Durán-Liberman.

D'où :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i, \nabla(\Pi_i(v - c_i))\lambda_i - \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i)\lambda_i) \lesssim (\mu_1(\gamma_i) + \mu_2(\gamma_i)) (\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)}). \quad (\text{V.21})$$

V.2.3 Majoration de $\int_{\omega_i} (g + \text{div} \gamma_h)(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i$:

Remarquons que

$$\int_{\omega_i} (g + \text{div} \gamma_h)(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i = \int_{\omega_i} (g + \text{div} \gamma_h - g_i)(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i,$$

pour tout $g_i \in \mathbb{R}$ si $i \in \mathcal{N}(\Omega)$ et $g_i = 0$ si i est un noeud du bord.

D'où, en utilisant la relation de Poincaré locale avec poids (car $v - c_i$ est de moyenne nulle) et en posant $h_i = \text{diam}(\omega_i)$,

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h)(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i)\lambda_i \\ &= \int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i)(v - c_i)\lambda_i - \int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i)\Pi_i(v - c_i)\lambda_i \\ &\leq \left(\int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_i} (v - c_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \\ &\quad + \left(\int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i) \lambda_i \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_i} \Pi_i(v - c_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} h_i \left\{ \left(\int_{\omega_i} |\nabla(v - c_i)|^2 \lambda_i \right)^{1/2} + \left(\int_{\omega_i} |\nabla(\Pi_i(v - c_i))|^2 \lambda_i \right)^{1/2} \right\} \\ &\lesssim \left(\int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} h_i \left(\int_{\omega_i} |\nabla(v - c_i)|^2 \lambda_i \right)^{1/2} \quad \text{par (V.14)}. \end{aligned}$$

Ainsi, par une inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h)(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i) \lambda_i \\
& \lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left\{ h_i \left(\int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \left(\int_{\omega_i} |\nabla(v - c_i)|^2 \lambda_i \right)^{1/2} \right\} \\
& \leq \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} |\nabla(v - c_i)|^2 \lambda_i \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} |\nabla v|^2 \lambda_i \right)^{1/2} \quad \text{car } c_i \text{ est une constante} \\
& \leq \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} |\nabla v|^2 \right)^{1/2} \quad \text{car } 0 \leq \lambda_i \leq 1
\end{aligned}$$

Par la régularité du maillage, nous en déduisons :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h)(\mathbf{I} - \Pi_i)(v - c_i) \lambda_i \lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{V.22})$$

V.2.4 Majoration de $\int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) \cdot (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i) \lambda_i$:

Comme précédemment, nous avons :

$$\int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) \cdot (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i) \lambda_i = \int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i) \cdot (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i) \lambda_i,$$

pour tout $\tilde{g}_i \in \mathbb{R}^2$ si i est un noeud intérieur et $\tilde{g}_i = (0, 0)^T$ si i est un noeud du bord.

D'où, en suivant le même raisonnement que précédemment :

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)) \cdot (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i) \lambda_i \\
& = \int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i) \cdot (\eta - d_i) \lambda_i - \int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i) \cdot \widetilde{\Pi}_i(\eta - d_i) \lambda_i \\
& \lesssim \left(\int_{\omega_i} |\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i|^2 \lambda_i \right)^{1/2} h_i \left(\int_{\omega_i} |\nabla(\eta - d_i)|^2 \lambda_i \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Toujours en suivant ce raisonnement, nous obtenons :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)) \cdot (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i)(\eta - d_i) \lambda_i \lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} |\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i|^2 \lambda_i \right)^{1/2} \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)}. \quad (\text{V.23})$$

V.2.5 Majoration de $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(d_i \lambda_i))$:

Si $\left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \neq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(d_i \lambda_i)) &= \left(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h) \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) \right) \\ &= \frac{\left(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h) \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) \right)}{\left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En se rappelant que $d_i = \frac{\int_{\omega_i} \eta \lambda_i}{\int_{\omega_i} \lambda_i}$, nous avons :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)(d_i \lambda_i)) \leq \underbrace{\mu_h(\gamma_h) \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}}_{\lesssim \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)} \text{ (cf [CV99])}}, \quad (\text{V.24})$$

où :

$$\mu_h(\gamma_h) = \sup_{\psi \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi)|}{\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}}. \quad (\text{V.25})$$

Si $\left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} = 0$, alors $\nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i \right) = 0$, ce qui implique que $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} d_i \lambda_i$ est une constante. Or, l'opérateur de réduction \mathbf{R}_h préserve les constantes, ce qui prouve que la relation (V.24) est vraie dans tous les cas.

V.2.6 Majoration de $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} ((\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h, \tau \lambda_i)$:

Comme $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \lambda_i = 1$, nous avons par la linéarité du produit scalaire et le fait que $H^{-1}(\text{div}, \Omega)$ est l'espace dual de $H_0(\text{rot}, \Omega)$ (cf [MS02] ou [BF91] par exemple) :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} ((\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h, \tau \lambda_i) &= ((\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h, \tau) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} ((\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h, \tau \lambda_i) &\leq \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)} \|\tau\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

D'après le théorème V.2.1 et les relations (V.18), (V.21), (V.22), (V.23), (V.24) et (V.26), nous avons :

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \\ &\lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\mathcal{C}} + (\mu_1(\gamma_i) + \mu_2(\gamma_i)) (\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad + \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i \right)^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} |\gamma_h + \text{div}_h \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i|^2 \lambda_i \right)^{1/2} \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \mu_h(\gamma_h) \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)} + \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)} \|\tau\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir notre estimateur :

$$\begin{aligned} \eta_{MNS}^2 &= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 + \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2 + \mu_1^2(\gamma_i) + \mu_2^2(\gamma_i) + \mu_h(\gamma_h)^2 \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i + \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} |\gamma_h + \text{div}_h \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i|^2 \lambda_i. \end{aligned}$$

où $\mu_1(\gamma_i)$, $\mu_2(\gamma_i)$ et $\mu_h(\gamma_h)$ sont respectivement définis par les formules (V.19), (V.20) et (V.25).

Remarque V.2.3 *En choisissant judicieusement les valeurs de g_i et \tilde{g}_i , nous pouvons considérer les deux derniers termes comme des termes d'oscillation. Pour ce faire, il suffit de prendre*

la moyenne sur ω_i de $g + \operatorname{div}_h \gamma_h$ (resp. $\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)$) pour g_i (resp. \tilde{g}_i). Pour simplifier l'écriture, nous notons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{osc}_i^2(g) = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h - g_i)^2 \lambda_i; \\ \operatorname{osc}_i^2(\gamma_h) = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} |\gamma_h + \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) - \tilde{g}_i|^2 \lambda_i. \end{array} \right.$$

où (pour les cas que nous considérons) :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i = \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} (g + \operatorname{div}_h \gamma_h) \\ \tilde{g}_i = \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} (\gamma_h + \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)). \end{array} \right.$$

Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau) \lesssim \eta_{MNS} (\|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau\|_{H^{-1}(\operatorname{div}, \Omega)}).$$

Or, par la proposition V.1.1, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\nabla \eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tau\|_{H^{-1}(\operatorname{div}, \Omega)}^2 + t^2 \|\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \lesssim \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\operatorname{div}, \Omega)}^2, \\ \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\operatorname{div}, \Omega)}^2 \\ \lesssim \mathcal{A}(\phi - \phi_h, \omega - \omega_h, \gamma - \gamma_h; \eta, v, \tau). \end{array} \right.$$

D'où :

Théorème V.2.2 (Upper-bound - Deuxième étape) *Sous les mêmes hypothèses que le théorème V.2.1, nous avons*

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\operatorname{div}, \Omega)}^2 + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 + \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(\operatorname{rot}, \Omega)}^2 + \mu_1^2(\gamma_i) + \mu_2^2(\gamma_i) + \mu_h(\gamma_h)^2 + \operatorname{osc}_i^2(g) + \operatorname{osc}_i^2(\gamma_h). \end{aligned}$$

$$\text{où } \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 = \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\phi_i) \lambda_i,$$

$$\mu_1(\gamma_i) := \sup_{\substack{v = (v_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ v_i \in \mathcal{P}_0^3(W_i) \setminus \{0\}}} \frac{\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \nabla v_i) \right|}{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla v_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right)^{1/2}},$$

$$\mu_2(\gamma_i) := \sup_{\substack{\chi = (\chi_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ \chi_i \in \mathcal{P}_0^a(W_i)^2 \setminus \{(0,0)\}}} \frac{\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \chi_i) \right|}{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla \chi_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2}},$$

$$\mu_h(\gamma_h) = \sup_{\psi \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi)|}{\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}},$$

$$\text{osc}_i^2(g) = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h - \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} (g + \text{div}_h \gamma_h))^2 \lambda_i,$$

$$\text{osc}_i^2(\gamma_h) = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} h_i^2 \int_{\omega_i} |\gamma_h + \text{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) - \frac{1}{|\omega_i|} \int_{\omega_i} (\gamma_h + \text{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h))|^2 \lambda_i.$$

Cependant, afin d'assurer la robustesse de l'estimateur, nous nous devons de rajouter un terme dans l'erreur, à savoir $\lambda^{-2}t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2$. Or

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_h) &= \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h) - (\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\ \Rightarrow \lambda^{-1}t^2 \text{rot}(\gamma - \gamma_h) &= -\text{rot}(\phi - \phi_h) - \text{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\ \Rightarrow \lambda^{-2}t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

La partie droite de l'inégalité étant composée d'une partie de l'erreur et d'un terme de l'estimateur, nous avons :

Théorème V.2.3 (Upper-bound) *Sous les hypothèses du théorème V.2.1 et les notations précédemment mentionnées, nous avons*

$$\begin{aligned} &\|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \lambda^{-2}t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 + \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2 + \mu_1^2(\gamma_i) + \mu_2^2(\gamma_i) + \mu_h(\gamma_h)^2 + \text{osc}_i^2(g) + \text{osc}_i^2(\gamma_h). \end{aligned}$$

V.3 Efficacité de l'estimateur

L'objectif de cette section sera de majorer chaque contribution de notre estimateur par un multiple de l'erreur afin de démontrer le théorème V.3.1 relatif à l'efficacité de l'estimateur.

V.3.1 Majoration de $\|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(rot,\Omega)}^2$

Par définition de la norme $H_0(rot, \Omega)$, nous avons :

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(rot,\Omega)}^2 = \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|rot(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Par inégalité triangulaire, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h\phi_h - \phi_h &= \lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_h) - \nabla(\omega - \omega_h) + (\phi - \phi_h) \\ \Rightarrow \|\mathbf{R}_h\phi_h - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h\phi_h - \phi_h &= \lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_h) - \nabla(\omega - \omega_h) + (\phi - \phi_h) \\ \Rightarrow rot(\mathbf{R}_h\phi_h - \phi_h) &= \lambda^{-1}t^2rot(\gamma - \gamma_h) + rot(\phi - \phi_h) \\ \Rightarrow \|rot(\mathbf{R}_h\phi_h - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim \lambda^{-1}t^2\|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en regroupant ces deux données, nous avons :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(rot,\Omega)}^2 &\lesssim \lambda^{-2}t^4\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-2}t^4\|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{V.27})$$

V.3.2 Majoration de $\mu_h(\gamma_h)^2$

Soit $\psi \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \Theta_h$.

$$\begin{aligned} (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi) &= (\gamma_h, \psi) - (\gamma_h, \mathbf{R}_h\psi) \\ &= (\gamma_h, \psi) - a_h(\phi_h, \psi) \\ &= (\gamma_h - \gamma, \psi) + a(\phi - \phi_h, \psi) \\ &\lesssim (\|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\mu_h(\gamma_h)^2 \lesssim \|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla_h(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{V.28})$$

V.3.3 Majoration de $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2$

De manière triviale, nous avons :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \leq \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right).$$

Pour simplifier l'écriture, posons $I = \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right)$. Alors, en utilisant

les problèmes locaux (cf (V.16)), nous avons :

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\phi_i)\lambda_i + \lambda^{-1} t^2 \int_{\omega_i} \gamma_i \cdot \gamma_i \lambda_i \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\phi_i)\lambda_i + \int_{\omega_i} \gamma_i \cdot (\nabla z_i - \phi_i)\lambda_i \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left((g + \operatorname{div}_h \gamma_h, z_i \lambda_i) + (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \phi_i \lambda_i) - \int_{\Gamma_i} (J_1 \cdot \phi_i + J_2 z_i)\lambda_i \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left((g, z_i \lambda_i) - (\gamma_h, \nabla(z_i \lambda_i)) + (\gamma_h, \phi_i \lambda_i) - \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\phi_i \lambda_i) \right).
\end{aligned}$$

Or :

$$a(\phi, \phi_i \lambda_i) + (\gamma, \nabla(z_i \lambda_i) - \phi_i \lambda_i) = (g, z_i \lambda_i).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(a(\phi, \phi_i \lambda_i) - \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\phi_i \lambda_i) + (\gamma - \gamma_h, \nabla(z_i \lambda_i) - \phi_i \lambda_i) \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h) : \varepsilon(\phi_i \lambda_i) + (\gamma - \gamma_h, \nabla(z_i \lambda_i) - \phi_i \lambda_i) \right) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h) : \varepsilon(\phi_i)\lambda_i + \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h) : \frac{1}{2}(\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\omega_i} (\gamma - \gamma_h) \cdot (\nabla(z_i \lambda_i) - \phi_i \lambda_i) \right) \\
&\leq \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} + \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h) \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\nabla(z_i \lambda_i) - \phi_i \lambda_i) \right) \\
&\quad + \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h) : \frac{1}{2}(\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) \right) \\
&\leq \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} + \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h) \cdot \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} z_i \lambda_i \right) \\
&\quad - \int_{\Omega} (\gamma - \gamma_h) \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \phi_i \lambda_i \right) + \sum_{i \in \mathcal{N}} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h) : \frac{1}{2}(\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I \leq & \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{C, \lambda_i} \|\phi_i\|_{C, \lambda_i} + \|\operatorname{div}(\gamma - \gamma_h)\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} z_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \phi_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi - \phi_h) : \frac{1}{2}(\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) \right).
\end{aligned}$$

Nous allons gérer chacun des termes. Tout d'abord, en notant que $\#\{\mathcal{N}(\bar{T})\} = 3$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} z_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} z_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(T)}^2 \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{T})} z_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(T)}^2 \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{T})} \nabla(z_i \lambda_i) \right\|_{L^2(T)}^2 \\
&\leq 3 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{T})} \|\nabla(z_i \lambda_i)\|_{L^2(T)}^2 \\
&= 3 \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \sum_{T \subset \omega_i} \|\nabla(z_i \lambda_i)\|_{L^2(T)}^2 \\
&= 3 \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla(z_i \lambda_i)\|_{L^2(\omega_i)}^2 \\
&\leq 6 \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\|\nabla z_i \lambda_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 + \|z_i \nabla \lambda_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 \right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\|\nabla z_i \lambda_i\|_{L^2(\omega_i)} \leq \|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i} \text{ car } 0 \leq \lambda_i \leq 1,$$

et, par la régularité de la triangulation et le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie (quitte à passer par le triangle de référence),

$$\begin{aligned}
\|z_i \nabla \lambda_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 &= \int_{\omega_i} (z_i \nabla \lambda_i) \cdot (z_i \nabla \lambda_i) \\
&= |\nabla \lambda_i|^2 \int_{\omega_i} |z_i|^2 \\
&\lesssim h_i^{-2} \int_{\omega_i} |z_i|^2 \\
&\lesssim h_i^{-2} |\omega_i| \|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \\
&\lesssim \|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\|z_i \nabla \lambda_i\|_{L^2(\omega_i)} \lesssim \|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i},$$

ce qui implique que

$$\left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} z_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} \|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2. \quad (\text{V.29})$$

Ensuite,

$$\nabla(\phi_i \lambda_i) = \nabla(\phi_i) \lambda_i + \phi_i (\nabla \lambda_i)^T.$$

D'où, en suivant le même raisonnement que précédemment,

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} \phi_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} \|\nabla(\phi_i \lambda_i)\|_{L^2(\omega_i)}^2 \\
&\lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} \left(\|\nabla(\phi_i) \lambda_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 + \|\phi_i (\nabla \lambda_i)^T\|_{L^2(\omega_i)}^2 \right) \\
&\leq \sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} \left(\|\nabla \phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 + |\nabla \lambda_i|^2 \|\phi_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 \right) \\
&\lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})} \|\nabla \phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2.
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
&\int_{\omega_i} \mathcal{C} \varepsilon(\phi - \phi_h) : \frac{1}{2} (\phi_i (\nabla \lambda_i)^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) \\
&\leq \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C} \varepsilon(\phi - \phi_h) : \varepsilon(\phi - \phi_h) \right)^{1/2} \frac{1}{4} \left(\int_{\omega_i} \mathcal{C} (\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) : (\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_i} \mathcal{C}(\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) : (\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T) &\lesssim \|\phi_i \nabla \lambda_i^T + \nabla \lambda_i \phi_i^T\|_{L^2(\omega_i)}^2 \\
&\lesssim |\nabla \lambda_i|^2 \|\phi_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 \\
&\lesssim \|\nabla \phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2.
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons, par des inégalités de Poincaré discrète,

$$\begin{aligned}
I &\lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left[\|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 + \|\nabla \phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right] \right)^{1/2} \\
&\quad + \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}, \omega_i} \|\nabla \phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i} \\
&\leq \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} \\
&\quad \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left[\|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 + \|\nabla \phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right] \right)^{1/2} + \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}, \omega_i}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla \phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\nabla z_i &= \lambda^{-1} t^2 \gamma_i + \phi_i \\
\Rightarrow \|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 &\lesssim \lambda^{-2} t^4 \|\gamma_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 + \|\phi_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 \\
&\lesssim \lambda^{-2} t^4 \|\gamma_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 + \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \\
\Rightarrow \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla z_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}^2 &\leq \max\{\lambda^{-1} t^2; 1\} I,
\end{aligned}$$

et, par la régularité du maillage,

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}, \omega_i}^2 &= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C} \varepsilon(\phi - \phi_h) : \varepsilon(\phi - \phi_h) \\
&= \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \sum_{T \subset \omega_i} \int_T \mathcal{C} \varepsilon(\phi - \phi_h) : \varepsilon(\phi - \phi_h) \\
&\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \mathcal{C} \varepsilon(\phi - \phi_h) : \varepsilon(\phi - \phi_h) \\
&= \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2.
\end{aligned}$$

En conclusion, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I &\lesssim \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} I^{1/2} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)} (\max\{\lambda^{-1}t^2; 1\}I)^{1/2} + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} I^{1/2} \\
&\lesssim (\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} + \max\{\lambda^{-1/2}t; 1\}\|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}) I^{1/2} \\
\Rightarrow I &\lesssim \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \max\{\lambda^{-1}t^2; 1\}\|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2,
\end{aligned}$$

ce qui signifie que

$$\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\phi_i)\lambda_i \lesssim \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \max\{\lambda^{-1}t^2; 1\}\|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2. \quad (\text{V.30})$$

V.3.4 Majoration de $\mu_1^2(\gamma_i)$

Montrons maintenant que $\mu_1^2(\gamma_i)$ est majoré par l'erreur à une constante multiplicative près. Nous rappelons que par définition :

$$\mu_1(\gamma_i) = \sup_{\substack{f = (f_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ f_i \in \mathcal{P}_0^3(W_i) \setminus \{0\}}} \frac{\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \nabla f_i) \right|}{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla f_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2}}.$$

Soit $f_i \in \mathcal{P}_0^3(W_i) \setminus \{0\}$. Alors, en utilisant le problème local (V.16), nous avons :

$$\begin{aligned}
(\gamma_i \lambda_i, \nabla f_i) &= (\gamma_i, \nabla f_i \lambda_i) \\
&= (g + \text{div}_h \gamma_h, f_i \lambda_i) - \int_{\Gamma_i} J_2 f_i \lambda_i \\
&= (g + \text{div}_h \gamma_h, f_i \lambda_i) - \sum_{T \in \omega_i} \left(\int_T \text{div}_h \gamma_h f_i \lambda_i + \int_T \gamma_h \cdot \nabla (f_i \lambda_i) \right) \\
&= (g + \text{div}_h \gamma_h, f_i \lambda_i) - \int_{\omega_i} \text{div}_h \gamma_h f_i \lambda_i - \int_{\omega_i} \gamma_h \cdot \nabla (f_i \lambda_i) \\
&= (g + \text{div}_h \gamma_h, f_i \lambda_i) - \int_{\Omega} \text{div}_h \gamma_h f_i \lambda_i - \int_{\Omega} \gamma_h \cdot \nabla (f_i \lambda_i) \\
&= (g, f_i \lambda_i) - \int_{\Omega} \gamma_h \cdot \nabla (f_i \lambda_i) \\
&= (\gamma - \gamma_h, \nabla (f_i \lambda_i)).
\end{aligned}$$

Ainsi, par sommation,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \nabla f_i) \right| &= \left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma - \gamma_h, \nabla(f_i \lambda_i)) \right| \\
&= \left| \left(\gamma - \gamma_h, \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \nabla(f_i \lambda_i) \right) \right| \\
&= \left| \left(\operatorname{div}(\gamma - \gamma_h), \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} f_i \lambda_i \right) \right| \\
&\leq \| \operatorname{div}(\gamma - \gamma_h) \|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} f_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or, en réutilisant le principe de la démonstration de (V.29) (inégalité de Poincaré avec poids), nous avons :

$$\left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} f_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla f_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2}.$$

D'où :

$$\mu_1^2(\gamma_i) \lesssim \| \operatorname{div}(\gamma - \gamma_h) \|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \tag{V.31}$$

V.3.5 Majoration de $\mu_2^2(\gamma_i)$

Montrons maintenant que $\mu_2^2(\gamma_i)$ est majoré par l'erreur à une constante multiplicative près. Nous rappelons que, par définition,

$$\mu_2(\gamma_i) = \sup_{\substack{\chi = (\chi_i)_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})}, \\ \chi_i \in \mathcal{P}_0^a(W_i)^2 \setminus \{(0,0)\}}} \frac{\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \chi_i) \right|}{\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla \chi_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2}}.$$

où $a = 2$ dans le cas MITC3, $a = 3$ dans le cas Durán-Liberman.

Soit $\chi_i \in \mathcal{P}_0^a(W_i)^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors, en utilisant le problème local (V.16), nous avons :

$$\begin{aligned}
(\gamma_i \lambda_i, \chi_i) &= (\gamma_i, \chi_i \lambda_i) \\
&= \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\chi_i) \lambda_i - (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \chi_i \lambda_i) + \int_{\Gamma_i} J_1 \cdot \chi_i \lambda_i \\
&= \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\chi_i) \lambda_i - (\gamma_h + \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h), \chi_i \lambda_i) \\
&\quad + \sum_{T \subset \omega_i} \left[\int_T \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\chi_i \lambda_i) + \int_T \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) \cdot \chi_i \lambda_i \right] \\
&= \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\chi_i) \lambda_i - (\gamma_h, \chi_i \lambda_i) - \int_{\omega_i} \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) \cdot \chi_i \lambda_i \\
&\quad + \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\chi_i \lambda_i) + \int_{\omega_i} \operatorname{div}_h \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) \cdot \chi_i \lambda_i \\
&= \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\chi_i) \lambda_i - (\gamma_h, \chi_i \lambda_i) + \underbrace{\int_{\Omega} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) : \varepsilon(\chi_i \lambda_i)}_{=a(\phi_h, \chi_i \lambda_i)} \\
&= \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\chi_i) \lambda_i + (\gamma - \gamma_h, \chi_i \lambda_i) - a(\phi - \phi_h, \chi_i \lambda_i).
\end{aligned}$$

D'où, par sommation :

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \chi_i) \right| &= \left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \int_{\omega_i} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_i) : \varepsilon(\chi_i) \lambda_i + \left(\gamma - \gamma_h, \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \chi_i \lambda_i \right) - a \left(\phi - \phi_h, \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\chi_i \lambda_i) \right) \right| \\
&\leq \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} \|\chi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \chi_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \left\| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \chi_i \lambda_i \right\|_{\mathcal{C}} \\
&\lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} \|\chi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \chi_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \chi_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Or, en réutilisant le principe de la démonstration de (V.29) (inégalité de Poincaré avec poids),

nous avons :

$$\left\| \left\| \nabla \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \chi_i \lambda_i \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \right\| \lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla \chi_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2};$$

$$\|\chi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i} \lesssim \|\nabla \chi_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}.$$

D'où :

$$\left| \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} (\gamma_i \lambda_i, \chi_i) \right| \lesssim \left(\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}} \right)$$

$$\left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\nabla \chi_i\|_{L^2(\omega_i, \lambda_i)}^2 \right)^{1/2},$$

ce qui implique :

$$\mu_2(\gamma_i) \lesssim \left(\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \right)^{1/2} + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}.$$

Ainsi, en se rappelant que $\sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 \lesssim \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \max\{\lambda^{-1}t^2; 1\} \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2$, nous avons :

$$\mu_2^2(\gamma_i) \lesssim \sum_{i \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2$$

$$\mu_2^2(\gamma_i) \lesssim \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \max\{\lambda^{-1}t^2; 1\} \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 \quad (\text{V.32})$$

V.3.1 Conclusion

En regroupant les relations (V.27), (V.28), (V.30), (V.31) et (V.32), nous avons démontré le théorème :

Théorème V.3.1 (Lower-bound) *Sous les notations et définitions des théorèmes V.2.1 et V.2.2, nous avons*

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \|\phi_i\|_{\mathcal{C}, \lambda_i}^2 + \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2 + \mu_1^2(\gamma_i) + \mu_2^2(\gamma_i) + \mu_h(\gamma_h)^2$$

$$\lesssim \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-2}t^4 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ \max\{1; \lambda^{-1}t^2\} \|\gamma_h - \gamma\|_{H^{-1}(\text{div}, \Omega)}^2 + \lambda^{-2}t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En analysant l'efficacité de notre estimateur, nous remarquons que notre estimateur est majoré de manière grossière par l'erreur multiplié par le terme $\max\{1; \lambda^{-1}t^2\}$, ainsi que par une constante indépendante de t et de h . Cela nous prouve que l'efficacité est bien robuste en t lorsque ce dernier tend vers 0.

Chapitre VI

Calcul de valeurs propres

L'objectif de ce chapitre est de déterminer les valeurs propres du système de Reissner-Mindlin. Pour être plus précis, nous allons créer un estimateur *a posteriori* fiable et efficace permettant d'évaluer la distance entre les vecteurs propres des problèmes continu et discret, ainsi que la distance entre les valeurs propres des problèmes continu et discret. L'idée est de définir les différents résidus et d'utiliser les principes précédents (notamment la norme introduite par Carstensen et Hu ([CH07])) afin d'évaluer ces résidus. Notons que des termes superconvergents (propriété assurée par le fait que la première valeur propre soit simple), fonction des solutions exactes, apparaissent dans l'estimateur. Nous démontrerons la fiabilité et l'efficacité de l'estimateur et nous visualiserons l'ordre de convergence de l'estimateur par un test numérique.

Sommaire

VI.1 Introduction	143
VI.2 Estimation <i>a priori</i>	147
VI.3 Fiabilité de l'estimateur	149
VI.4 Estimateur pour la différence des valeurs propres	159
VI.5 Efficacité de l'estimateur	162
VI.6 Résultats numériques	167

VI.1 Introduction

Nous reprenons le problème de Reissner-Mindlin introduit précédemment auquel nous rajoutons un terme dans le membre de droite : Étant donné $g \in L^2(\Omega)$ et $\varphi \in L^2(\Omega)^2$, trouver un couple $(\omega, \phi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$ tel que :

$$a(\phi, \psi) + \lambda t^{-2}(\nabla \omega - \phi, \nabla v - \psi) = (g, v) + \frac{t^2}{12}(\varphi, \psi), \quad \forall (v, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2.$$

Le terme supplémentaire $\frac{t^2}{12}(\varphi, \psi)$ apparaît naturellement lorsque nous considérons le problème de plaque à vibrations libres suivant :

Trouver un couple non-trivial $(\omega_t, \phi_t) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$ et $\nu_t > 0$ tels que :

$$t^3 a(\phi_t, \psi) + \lambda t (\nabla \omega_t - \phi_t, \nabla v - \psi) = \nu_t^2 \left[t(\rho \omega_t, v) + \frac{t^3}{12}(\rho \phi_t, \psi) \right], \forall (v, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2, \quad (\text{VI.1})$$

où ν_t est la fréquence de vibration angulaire et ρ est la densité de la plaque considérée constante. Nous considérons alors le problème de valeurs propres suivant, où les vecteurs ont été normalisés :

Trouver un couple non-trivial $(\omega_t, \phi_t) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$ et $\alpha_t > 0$ tels que :

$$\begin{cases} a(\phi_t, \psi) + \frac{\lambda}{t^2}(\nabla \omega_t - \phi_t, \nabla v - \psi) = \alpha_t \left[(\omega_t, v) + \frac{t^2}{12}(\phi_t, \psi) \right], \forall (v, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2, \\ \|\omega_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi_t\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1, \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

avec $\alpha_t = \frac{\rho \nu_t^2}{t^2}$.

Comme précédemment, nous poserons $\gamma_t = \lambda t^{-2}(\nabla \omega_t - \phi_t)$. Nous supposons que le problème (VI.2) est résolu de manière conforme (sous forme discrète), c'est-à-dire que nous prenons les espaces d'approximation $W_h \subset W := H_0^1(\Omega)$ et $\Theta_h \subset \Theta := H_0^1(\Omega)^2$. Nous considérons le problème discrétisé suivant :

Trouver un couple non-trivial $(\omega_{t,h}, \phi_{t,h}) \in W_h \times \Theta_h \subset H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$ et $\alpha_{t,h} > 0$ tels que :

$$\begin{cases} a(\phi_{t,h}, \psi_h) + (\gamma_{t,h}, \nabla v_h - \mathbf{R}_h \psi_h) = \alpha_{t,h} \left[(\omega_{t,h}, v_h) + \frac{t^2}{12}(\phi_{t,h}, \psi_h) \right], \forall (v_h, \psi_h) \in W_h \times \Theta_h, \\ \gamma_{t,h} = \lambda t^{-2}(\nabla \omega_{t,h} - \mathbf{R}_h \phi_{t,h}) \\ \|\omega_{t,h}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi_{t,h}\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1. \end{cases} \quad (\text{VI.3})$$

Remarque VI.1.1 Afin de soulager l'écriture, l'indice t sera omis dans l'écriture des vecteurs propres; autrement dit, nous posons $\omega = \omega_t$, $\phi = \phi_t$, $\omega_h = \omega_{t,h}$, $\phi_h = \phi_{t,h}$, $\gamma = \gamma_t$ et $\gamma_h = \gamma_{t,h}$.

L'objectif de cette partie est de déterminer un estimateur *a posteriori* pour le contrôle de l'erreur suivante :

$$\begin{aligned} Err_{VP}^2 &= \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \lambda^{-2}t^4\|rot(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

Tout d'abord, nous allons démontrer une relation nécessaire, présentée au lemme VI.1.1, qui nous servira à déterminer notre estimateur. Pour ce faire, nous allons introduire les deux résidus suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{Res}_1(v) = (\alpha_{t,h}\omega_h, v) - (\gamma_h, \nabla v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \widehat{Res}_2(\psi) = -a(\phi_h, \psi) + (\gamma_h, \psi) + \frac{t^2}{12}(\alpha_{t,h}\phi_h, \psi) \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2. \end{array} \right. \quad (\text{VI.5})$$

Nous pouvons alors démontrer le lemme suivant :

Lemme VI.1.1 *Soient $(\omega, \phi) \in W \times \Theta$ (resp. $(\omega_h, \phi_h) \in W_h \times \Theta_h$) et $\alpha_t > 0$ (resp. $\alpha_{t,h} > 0$) les solutions du problème (VI.2) (resp. (VI.3)). Soient $z \in H_0^1(\Omega)$ et $\beta \in H_0^1(\Omega)^2$ issus de la décomposition de Helmholtz (I.10) ($(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h = \nabla z - \beta$) et les deux résidus définis dans (VI.5). Alors, nous avons :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2}\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2}\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 \\ & \leq (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h + z) + \frac{t^2}{12}(\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) \\ & \quad + \widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + \widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) + \frac{1}{2}\|\beta\|_{\mathcal{C}}^2. \end{aligned}$$

Preuve: Par définition de γ , γ_h et de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}^2$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, (\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h))) + (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h). \end{aligned}$$

Or, en utilisant la décomposition de Helmholtz ($(\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h = \nabla z - \beta$ avec $z \in H_0^1(\Omega)$ et $\beta \in H_0^1(\Omega)^2$), nous avons :

$$\begin{aligned} (\gamma - \gamma_h, (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h) & = (\gamma - \gamma_h, \nabla z - \beta) \\ & = \alpha_t(\omega, z) + \alpha_t \frac{t^2}{12}(\phi, \beta) - a(\phi, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta) \\ & = \alpha_t(\omega, z) + \alpha_t \frac{t^2}{12}(\phi, \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta) - a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = a(\phi - \phi_h, \phi - \phi_h) + (\gamma - \gamma_h, (\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h))) + \alpha_t(\omega, z) + \alpha_t \frac{t^2}{12}(\phi, \beta) \\ & \quad - a(\phi - \phi_h, \beta) - a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta) \\ & = a(\phi, \phi - \phi_h) - a(\phi_h, \phi - \phi_h) + (\gamma, \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h)) - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h)) \\ & \quad + \alpha_t(\omega, z) + \alpha_t \frac{t^2}{12}(\phi, \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta) - a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta). \end{aligned}$$

Or, en se rappelant que (ω, ϕ) est solution du problème de valeur propre (VI.2) avec $\omega - \omega_h \in H_0^1(\Omega)$ et $\phi - \phi_h \in H_0^1(\Omega)^2$, nous avons :

$$a(\phi, \phi - \phi_h) + (\gamma, \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h)) = \alpha_t \left[(\omega, \omega - \omega_h) + \frac{t^2}{12}(\phi, \phi - \phi_h) \right],$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \alpha_t(\omega, \omega - \omega_h) + \alpha_t \frac{t^2}{12}(\phi, \phi - \phi_h) - a(\phi_h, \phi - \phi_h) - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \phi_h)) \\ & \quad + \alpha_t(\omega, z) + \alpha_t \frac{t^2}{12}(\phi, \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta) - a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \nabla z - \beta) \\ &= \alpha_t(\omega, \omega - \omega_h + z) - (\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)) - a(\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) \\ & \quad + \alpha_t \frac{t^2}{12}(\phi, \phi - \phi_h + \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta). \end{aligned}$$

Or, par définition des résidus (VI.5), nous avons :

$$\begin{cases} -(\gamma_h, \nabla(\omega - \omega_h + z)) = \widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) - (\alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h + z) \\ -a(\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) + (\gamma_h, \phi - \phi_h + \beta) = \widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) - \frac{t^2}{12}(\alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h + \beta). \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h + z) + \frac{t^2}{12}(\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) \\ & \quad + \widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + \widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) - a(\phi - \phi_h, \beta). \end{aligned} \tag{VI.6}$$

Ainsi, comme $\gamma = \lambda t^{-2}(\nabla\omega - \phi)$ (resp. $\gamma_h = \lambda t^{-2}(\nabla\omega_h - \mathbf{R}_h\phi_h)$) et en utilisant la relation (VI.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2}\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 \\ &= \frac{1}{2} (\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + 2a(\phi - \phi_h, \beta) + \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2) + \frac{1}{2}\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \frac{1}{2}\lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda^{-1}t^4}{t^2 + h_T^2} \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \\ & \leq \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\beta\|_{\mathcal{C}}^2 + a(\phi - \phi_h, \beta) \\ & \stackrel{(VI.6)}{=} (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h + z) + \frac{t^2}{12}(\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) \\ & \quad + \widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + \widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) + \frac{1}{2}\|\beta\|_{\mathcal{C}}^2, \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de ce lemme. \square

VI.2 Estimation a priori

Cette section est consacrée à une analyse *a priori* du problème de valeurs propres de Reissner-Mindlin. De nombreux travaux existent sur ce sujet (e.g. [DHHLR03], [DHLRS99], [DHLRS00], [GLP03], [Her04], [LMR10]), qui utilisent une propriété fondamentale :

Théorème VI.2.1 *Soient $(\omega, \phi) \in W \times \Theta$ (resp. $(\omega_h, \phi_h) \in W_h \times \Theta_h$) et $\alpha_t > 0$ (resp. $\alpha_{t,h} > 0$) les solutions du problème (VI.2) (resp. (VI.3)). Si α_t est une valeur propre simple, alors il existe $h_0 > 0$, $C_1, C_2, C_3 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall h < h_0$*

$$\begin{cases} \|\phi - \phi_h\|_{H^1(\Omega)} + \|\omega - \omega_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 h^{1/2+\varepsilon}, & (1) \\ \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 h^{1+2\varepsilon}, & (2) \\ |\alpha_t - \alpha_{t,h}| \leq C_3 h^{1+2\varepsilon}, & (3) \end{cases}$$

où les constantes C_1, C_2, C_3 sont indépendantes de h , mais dépendent de α_t et de t .

Preuve: Il faut avant tout déterminer les espaces d'existence des solutions ω, ϕ, ω_h et ϕ_h . Pour ce faire, nous considérons le problème suivant : Étant donné $g \in L^2(\Omega)$ et $\varphi \in L^2(\Omega)^2$, trouver $(\beta_t, w_t) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$ tels que pour tout $(\eta, v) \in H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega)$

$$\begin{cases} a(\beta_t, \eta) + (\tau_t, \nabla v - \eta) = (g, v) + \frac{t^2}{12}(\varphi, \eta), \\ \tau_t = \lambda t^{-2}(\nabla w_t - \beta_t). \end{cases} \quad (\text{VI.7})$$

Ce système correspond à la formulation forte :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\beta_t) - \lambda t^{-2}(\nabla w_t - \beta_t) = \frac{t^2}{12}\varphi \\ \lambda t^{-2} \operatorname{div}(\nabla w_t - \beta_t) = -g. \end{cases} \quad (\text{VI.8})$$

1) Nous prenons $\eta = \beta_t$ et $v = w_t$ dans (VI.7), ce qui nous donne par des inégalités de Poincaré et de Korn :

$$\begin{aligned} \|\beta_t\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\tau_t\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (g, w_t) + \frac{t^2}{12}(\varphi, \beta_t) \\ &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w_t\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w_t\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w_t - \beta_t + \beta_t\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \lambda^{-1} t^2 \|\tau_t\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|\beta_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \|g\|_{L^2(\Omega)} \lambda^{-1} t^2 \|\tau_t\|_{L^2(\Omega)} + \left(\|g\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\beta_t\|_{\mathcal{C}} \\ &\lesssim \left(\max\{1, \lambda^{-1} t^2\} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^4 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\lambda^{-1} t^2 \|\tau_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\beta_t\|_{\mathcal{C}}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\|\beta_t\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\tau_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \max\{1, \lambda^{-1}t^2\}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + t^4\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

autrement dit :

$$\|\beta_t\|_{H^1(\Omega)} + t\|\tau_t\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \max\{1, t\}\|g\|_{L^2(\Omega)} + t^2\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

2) Nous utilisons maintenant la seconde relation de (VI.8) afin de connaître l'espace d'existence de w_t . Nous avons :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \nabla w_t = -\lambda^{-1}t^2g + \operatorname{div} \beta_t \in L^2(\Omega)^2 & \text{sur } \Omega \\ w_t = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainsi, par [Gri92, Corollary 2.4.4], il existe $\varepsilon > 0$ tel que $w_t \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \|w_t\|_{H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)} &\lesssim t^2\|g\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta_t\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim \max\{1; t; t^2\}\|g\|_{L^2(\Omega)} + t^2\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

3) Nous utilisons la première relation de (VI.8) afin de connaître l'espace d'existence de β_t . Nous avons :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\beta_t) = \frac{t^2}{12}\varphi + \tau_t \in L^2(\Omega)^2 & \text{dans } \Omega \\ \beta_t = (0, 0) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ainsi, par [Gri92, Corollary 2.4.6], il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\beta_t \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)^2$ et

$$\begin{aligned} \|\beta_t\|_{H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)} &\lesssim t^2\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\tau_t\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim t^2\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \max\{t^{-1}; 1\}\|g\|_{L^2(\Omega)} + t\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \max\{t^{-1}; 1\}(\|g\|_{L^2(\Omega)} + t^2\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned}$$

4) Comme $\beta_t \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)^2$ et que $w_t \in H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)$, les relations (1) et (2) se démontrent comme les Théorèmes 2.1 et 2.3 de [DHLRS99] en tenant compte de la régularité plus faible de nos solutions et en notant que (avec les notations introduites dans [DHLRS99]) :

$$(\phi, \omega) = T_t(\alpha_t\phi, \alpha_t\omega) \text{ et } (\phi_h, \omega_h) = T_{th}(\alpha_{t,h}\phi_h, \alpha_{t,h}\omega_h),$$

et

$$\begin{aligned} (\phi - \phi_h, \omega - \omega_h) &= T_t(\alpha_t\phi, \alpha_t\omega) - T_{th}(\alpha_{t,h}\phi_h, \alpha_{t,h}\omega_h) \\ &= T_t(\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h) + (T_t - T_{th})(\alpha_{t,h}\phi_h, \alpha_{t,h}\omega_h). \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

Pour la première partie du membre de droite de (VI.9), il nous suffit d'appliquer les points 2) et 3) présentés précédemment en notant que :

$$\begin{aligned} \|\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\alpha_t\omega - \alpha_t\omega_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\alpha_t\omega_h - \alpha_{t,h}\omega_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \alpha_t\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha_t - \alpha_{t,h}|\|\omega_h\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$\|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \alpha_t \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)} + |\alpha_t - \alpha_{t,h}| \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pour le second membre de droite, il nous suffit de reprendre les démonstrations des lemmes 3.2 et 3.4 et de les adapter à notre cas. Tout d'abord, une estimation *a priori* de $\|\beta_t - \beta_{t,h}\|_{H^1(\Omega)} + t\|\tau_t - \tau_{t,h}\|_{L^2(\Omega)}$ s'obtient de la même façon que dans le Lemme 3.2 de [DHLRS99] avec $\varphi = \alpha_{t,h} \phi_h$ et $g = \alpha_{t,h} \omega_h$. Autrement dit, nous avons l'existence de deux constantes $C(t)$ et $C'(t)$, strictement positives et dépendant de t telles que :

$$\begin{aligned} \|\beta_t - \beta_{t,h}\|_{H^1(\Omega)} + t\|\tau_t - \tau_{t,h}\|_{L^2(\Omega)} &\lesssim h^{1/2+\varepsilon} \|\beta_t\|_{H^{3/2+\varepsilon}(\Omega)} + h^{1/2+\varepsilon} t \|\tau_t\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)} \\ &\quad + h^{5/2+\varepsilon} \|\tau_t\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)} \\ &\leq C(t) h^{1/2+\varepsilon} (\|g\|_{L^2(\Omega)} + t^2 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

et

$$\|w_t - w_{t,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq C'(t) h^{1/2+\varepsilon} (\|g\|_{L^2(\Omega)} + t^2 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}).$$

Pour une estimation *a priori* de $\|\beta_t - \beta_{t,h}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_t - w_{t,h}\|_{L^2(\Omega)}$, nous appliquons le Lemme 3.4 de [DHLRS99] qui est vérifié car nous utilisons le Lemme 3.3 de [DHLRS99] à β_t qui est bien dans $H_0^1(\Omega)^2$. Autrement dit, nous avons l'existence d'une constante $C''(t)$, strictement positive et dépendant de t telles que :

$$\|\beta_t - \beta_{t,h}\|_{L^2(\Omega)} + \|w_t - w_{t,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C''(t) h^{1+2\varepsilon} (\|g\|_{L^2(\Omega)} + t^2 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}).$$

5) Afin de prouver la troisième majoration, nous allons utiliser le théorème 2.2 de [DHLRS99] avec $\alpha_t = \frac{1}{\mu_t}$ et $\alpha_{t,h} = \frac{1}{\mu_{t,h}}$. Ainsi, il existe $C_3 > 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que

$$\left| \frac{1}{\alpha_t} - \frac{1}{\alpha_{t,h}} \right| \leq C_3 h^{1+2\varepsilon} \Leftrightarrow |\alpha_t - \alpha_{t,h}| \leq C_3 h^{1+2\varepsilon} \alpha_t \alpha_{t,h}.$$

□

Remarque VI.2.1 Si Ω est convexe, alors nous avons $\varepsilon = 1/2$, ce qui nous ramène aux résultats présentés dans la plupart des bibliographies existantes (e.g. [DHHLR03], [DHLRS99], [DHLRS00], [GLP03], [Her04], [LMR10]).

VI.3 Fiabilité de l'estimateur

D'après la relation (III.2) (nous pouvons l'utiliser ici car $E_2^2 = Err_{VP}^2$ et les outils justifiant cette relation ne font pas intervenir le problème : nous utilisons seulement la définition des

normes, le lien entre la norme $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et la norme $\|\cdot\|_C$ ainsi que trois inégalités de Young), nous avons pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ et pour tout $0 < \alpha \leq t^{-1}$,

$$\begin{aligned} Err_{VP}^2 &\leq \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} \right\} \|\phi - \phi_h\|_C^2 + \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \right\} \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{VI.10}$$

Cependant, par définition de γ et γ_h , nous avons toujours :

$$\lambda^{-1} t^2 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\text{rot}(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)} + \|\text{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{VI.11}$$

Il nous reste à majorer la norme $H^{-1}(\Omega)$. Pour ce faire, soit $\psi \in H_0^1(\Omega)^2$,

$$\begin{aligned} (\gamma - \gamma_h, \psi) &= (\gamma, \psi) - (\gamma_h, \psi) \\ &= a(\phi, \psi) - \alpha_t \frac{t^2}{12} (\phi, \psi) - (\gamma_h, \psi) \\ &= a(\phi - \phi_h, \psi) + \frac{t^2}{12} (\alpha_{t,h} \phi_h, \psi) - \widehat{Res}_2(\psi) - \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi, \psi) \\ &= a(\phi - \phi_h, \psi) - \widehat{Res}_2(\psi) - \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \psi) \\ &\leq \|\phi - \phi_h\|_C \|\psi\|_C + \|\widehat{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par des inégalités de Korn et de Friedrichs, nous avons :

$$\|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq 3\widehat{c}_K^2 \|\phi - \phi_h\|_C^2 + 3\|\widehat{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + 3c_F^2 \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2. \tag{VI.12}$$

En utilisant (VI.10), (VI.11) et (VI.12) ainsi que le lemme VI.1.1, nous obtenons pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ et pour tout $0 < \alpha \leq t^{-1}$,

$$\begin{aligned} Err_{VP}^2 &\leq \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon - 1}{1 - 2\varepsilon} \right\} \|\phi - \phi_h\|_C^2 + \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda \alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \right\} \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1 - 2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2 (1 - 2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + 2\|\text{rot}(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\text{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 3\widehat{c}_K^2 \|\phi - \phi_h\|_C^2 + 3\|\widehat{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + 3c_F^2 \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \end{aligned}$$

En posant $B(\varepsilon, \alpha) = \max \left\{ c_K^2 + c_K^2 c_F^2 \frac{1}{1-2\varepsilon} + \varepsilon - 1 + 3\widehat{c}_K^2 + 2c_{rot}^2; 1 + \frac{1}{\lambda\alpha^2(1-2\varepsilon)} \right\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
Err_{VP}^2 &\leq B(\varepsilon, \alpha) \left[\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1-2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1-2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + 3\|\widehat{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + 3c_F^2 \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\
&\leq B(\varepsilon, \alpha) \left[2\widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + 2\widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) + \|\beta\|_{\mathcal{C}}^2 - \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 \right. \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{\lambda}{t^2 + h_T^2} \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 + 2(\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h + z) \\
&\quad \left. + 2\frac{t^2}{12} (\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) \right] + \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1-2\varepsilon} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1-2\varepsilon)} \|\nabla(\omega - \omega_h) - (\phi - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|rot(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + 3\|\widehat{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + 3c_F^2 \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant le principe de la section III.3, nous avons par deux inégalités de Young de paramètres $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$:

$$\begin{aligned}
Err_{VP}^2 &\leq \mu_1 B(\varepsilon, \alpha) \|\widehat{Res}_1\|_{-1,h}^2 + (\mu_2 B(\varepsilon, \alpha) + 3) \|\widehat{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{B(\varepsilon, \alpha)}{t^2 + h_T^2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \lambda \right) - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1-2\varepsilon)} \right] \|\nabla(\omega - \omega_h + z) - (\phi - \phi_h + \beta)\|_{L^2(T)}^2 \\
&\quad + \max \left\{ \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 1}{1-2\varepsilon}; 2 + \widehat{c}_K^2 c_{\mathbf{R}}^2 B(\varepsilon, \alpha) \right\} \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(rot,\Omega)}^2 \\
&\quad + B(\varepsilon, \alpha) \left(\frac{c_K^2}{\mu_1} + \frac{c_K^2}{\mu_2} - 1 \right) \|\phi - \phi_h + \beta\|_{\mathcal{C}}^2 + 2B(\varepsilon, \alpha) (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h + z) \\
&\quad + 2B(\varepsilon, \alpha) \frac{t^2}{12} (\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) + 3c_F^2 \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2.
\end{aligned}$$

En choisissant judicieusement les paramètres de Young μ_1 et μ_2 de sorte que $\frac{c_K^2}{\mu_1} + \frac{c_K^2}{\mu_2} - 1 < 0$ et $\frac{B(\varepsilon, \alpha)}{t^2 + h_T^2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \lambda \right) - \frac{t^{-2} - \alpha^2}{\alpha^2(1-2\varepsilon)} < 0$ (par exemple, $\mu_1 = \mu_2 = 2c_K^2$ si $2\lambda c_K^2 \geq 1$; cf section

III.3), nous avons le lemme suivant :

Lemme VI.3.1 *Avec les notations énoncées dans le lemme VI.1.1, nous avons :*

$$\begin{aligned} Err_{VP}^2 &\lesssim \|\widehat{Res_1}\|_{-1,h}^2 + \|\widehat{Res_2}\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(\text{rot},\Omega)}^2 + (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h + z) \\ &\quad + \frac{t^2}{12}(\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h + \beta) + \left(\frac{t^2}{12}\|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)}\right)^2. \end{aligned}$$

VI.3.1 Évaluation des résidus

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant une identité de Green sur chaque triangle du maillage, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{Res_1}(v) &= (\alpha_{t,h}\omega_h, v) - (\gamma_h, \nabla v) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T (\alpha_{t,h}\omega_h + \text{div}\gamma_h)v - \sum_{E \subset \partial T} \int_E \gamma_h \cdot n_E v \right] \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\alpha_{t,h}\omega_h + \text{div}\gamma_h)v - \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \int_E [\gamma_h]_E \cdot n_E v, \end{aligned}$$

où $[\gamma_h]_E$ représente le saut de γ_h au travers de l'arête E dont nous rappelons la définition :

$$[\gamma_h]_E \cdot n_E = \gamma_h|_{T^+} \cdot n_E - \gamma_h|_{T^-} \cdot n_E \text{ avec } E = \overline{T^+} \cap \overline{T^-}.$$

Soit $v^I \in S_0^1(\mathcal{T}_h)$ (cf [AO00, Théorème 1.7]) tel que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{cases} \|v - v^I\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \{ \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \} & \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2; \\ \|v - v^I\|_{L^2(E)} \lesssim h_E^{1/2} \{ \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_E)} + h_E \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_E)} \} & \forall \psi \in H_0^1(\Omega)^2. \end{cases} \quad (\text{VI.13})$$

Remarquons que $\widehat{Res_1}(v^I) = 0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \widehat{Res_1}(v) &= \widehat{Res_1}(v - v^I) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\alpha_{t,h}\omega_h + \text{div}\gamma_h)(v - v^I) - \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \int_E [\gamma_h]_E \cdot n_E (v - v^I) \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\alpha_{t,h}\omega_h + \text{div}\gamma_h\|_{L^2(T)} \|v - v^I\|_{L^2(T)} + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)} \|v - v^I\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

Par (VI.13) et la régularité du maillage, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widehat{Res}_1(v) &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \sqrt{t^2 + h_T^2} \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)} \frac{1}{\sqrt{t^2 + h_T^2}} \{ \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_T)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^{1/2} \sqrt{t^2 + h_E^2} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)} \frac{1}{\sqrt{t^2 + h_E^2}} \{ \|\nabla v - \psi\|_{L^2(\omega_E)} + h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_E)} \} \\
&\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \|(\psi, v)\|_{1,h} \\
&\quad + \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \|(\psi, v)\|_{1,h}.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\|\widehat{Res}_1\|_{-1,h}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2. \quad (\text{VI.14})$$

Soit $\psi \in \Theta$. En utilisant une égalité de Green sur chaque triangle du maillage, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\widehat{Res}_2(\psi) &= -a(\phi_h, \psi) + (\gamma_h, \psi) + \frac{t^2}{12} (\alpha_{t,h} \phi_h, \psi) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T (\operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h) \cdot \psi - \sum_{E \subset \partial T} \int_E \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) n_E \cdot \psi \right] \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h) \cdot \psi - \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \int_E [\mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)]_E n_E \cdot \psi,
\end{aligned}$$

où $[\mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)]_E n_E = \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)|_{T^+} n_E - \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)|_{T^-} n_E$ avec $E = \overline{T^+} \cap \overline{T^-}$.

Soit $\psi^I \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \subset \Theta_h$ (cf [AO00, Théorème 1.7]) tel que $\|\nabla \psi^I\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}$ et tel que pour tout $T \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{cases} \|\psi - \psi^I\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)}; \\ \|\psi - \psi^I\|_{L^2(E)} \lesssim h_E^{1/2} \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_E)}. \end{cases}$$

Remarquons que $\widehat{Res}_2(\psi^I) = (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi^I)$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\widehat{Res}_2(\psi) &= \widehat{Res}_2(\psi - \psi^I) + (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi^I) \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h) \cdot (\psi - \psi^I) \\
&\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \int_E [\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E \cdot (\psi - \psi^I) + (\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi^I) \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)} \|\psi - \psi^I\|_{L^2(T)} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)} \|\psi - \psi^I\|_{L^2(E)} + \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi^I)|}{\|\nabla \psi^I\|_{L^2(\Omega)}} \|\nabla \psi^I\|_{L^2(\Omega)} \\
&\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \left\| \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_T)} \\
&\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^{1/2} \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)} \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_E)} + \mu_h(\gamma_h) \|\nabla \psi^I\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où, par des inégalités de Cauchy-Schwarz discrètes :

$$\begin{aligned}
\widehat{Res}_2(\psi) &\lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)} + \mu_h(\gamma_h) \|\nabla \psi^I\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\text{où } \mu_h(\gamma_h) = \sup_{\psi^I \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi^I)|}{\|\nabla \psi^I\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\|\widehat{Res}_2\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)}^2 + \mu_h^2(\gamma_h). \tag{VI.15}$$

VI.3.2 Conclusion - Fiabilité de l'estimateur

En utilisant le lemme VI.3.1 avec les évaluations des résidus (VI.14) et (VI.15), nous avons :

Théorème VI.3.1 (Upper-Bound - Première étape) Soient $(\omega, \phi) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2$ et $\alpha_t > 0$ (resp. $(\omega_h, \phi_h) \in W_h \times \Theta_h$ et $\alpha_{t,h} > 0$) les solutions du problème de valeurs propres de Reissner-Mindlin (VI.2) (resp. (VI.3)). Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-2}t^4\|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ & \lesssim \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, \omega - \omega_h + z) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \phi - \phi_h + \beta) \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \text{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \text{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|[\mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad + \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2 + \mu_h(\gamma_h)^2, \end{aligned}$$

$$\text{où } \mu_h(\gamma_h) = \sup_{\psi \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\psi)|}{\|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Pour parvenir à l'estimateur d'erreur *a posteriori*, il faut encore majorer un terme, à savoir $(\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, \omega - \omega_h + z) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \phi - \phi_h + \beta)$ car il fait intervenir les éléments d'une décomposition de Helmholtz. Par la linéarité du produit scalaire, nous avons :

$$\begin{aligned} & (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, \omega - \omega_h + z) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \phi - \phi_h + \beta) \\ & = (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, \omega - \omega_h) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \phi - \phi_h) + (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, z) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \beta). \end{aligned} \tag{VI.16}$$

En utilisant deux inégalités de Cauchy-Schwarz et deux inégalités de Friedrichs, nous avons :

$$\begin{aligned} & (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, z) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \beta) \\ & \leq \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)} \|z\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\beta\|_{L^2(\Omega)} \\ & \lesssim \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)} \\ & \lesssim \left(\|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)} + \frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \|(\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}. \end{aligned}$$

Pour l'autre partie, nous avons (par le choix de la normalisation des vecteurs propres intro-

duite dans (VI.2) et (VI.3)) :

$$\begin{aligned}
& (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, \omega - \omega_h) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \phi - \phi_h) \\
&= \alpha_t \|\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\alpha_t + \alpha_{t,h})(\omega, \omega_h) + \alpha_{t,h} \|\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \frac{t^2}{12} \left(\alpha_t \|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 - (\alpha_t + \alpha_{t,h})(\phi, \phi_h) + \alpha_{t,h} \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&= (\alpha_t + \alpha_{t,h}) \left(1 - (\omega, \omega_h) - \frac{t^2}{12} (\phi, \phi_h) \right).
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& \|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \|\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(\omega, \omega_h) + \|\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \left(\|\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(\phi, \phi_h) + \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (\text{VI.17}) \\
&= 2 - 2(\omega, \omega_h) - 2 \frac{t^2}{12} (\phi, \phi_h).
\end{aligned}$$

D'où :

$$(\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, \omega - \omega_h) + \frac{t^2}{12} (\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h, \phi - \phi_h) = \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left(\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (\text{VI.18})$$

Ainsi, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème VI.3.2 (Upper-Bound) *Sous les conditions du Théorème VI.3.1, nous avons :*

$$\begin{aligned}
& \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad + \lambda^{-2} t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
&\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \text{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \text{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|[\mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\
&\quad + \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\text{rot}, \Omega)}^2 + \mu_h (\gamma_h)^2 + \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\
&\quad + \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left(\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)
\end{aligned}$$

Nous n'avons fait aucune hypothèse concernant le caractère simple des valeurs propres pour construire cet estimateur. Cela signifie que l'erreur converge vers 0 si notre estimateur converge vers 0. Cependant, des termes faisant intervenir les solutions exactes apparaissent,

mais ils sont négligeables si α_t est une valeur propre simple, ce qui fait l'objet du corollaire suivant :

Corollaire VI.3.1 *Sous les conditions du Théorème VI.3.1, si α_t est une valeur propre simple, alors nous avons :*

$$\begin{aligned} & \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \lambda^{-2}t^4\|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(t^2 + h_T^2)\|\alpha_{t,h}\omega_h + \text{div}\gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E(t^2 + h_E^2)\|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \text{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12}\alpha_{t,h}\phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E\|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad + \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(\text{rot},\Omega)}^2 + \mu_h(\gamma_h)^2 + h.o.t. \end{aligned}$$

Preuve: Supposons que α_t soit une valeur propre simple. Dans ce cas, montrons que $\left(\frac{t^2}{12}\|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left(\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2\right)$ est superconvergent. Tout d'abord, d'après le Théorème VI.2.1, $\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ et $\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ sont superconvergents.

Pour les deux autres termes, par une inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{t^2}{12}\|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \alpha_t(\omega - \omega_h) + (\alpha_t - \alpha_{t,h})\omega_h) + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 (\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \alpha_t(\phi - \phi_h) + (\alpha_t - \alpha_{t,h})\phi_h) \\ & \leq \alpha_t(\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h) + \alpha_t \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 (\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h) \\ & \quad + |\alpha_t - \alpha_{t,h}| \left\{ \|\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h\|_{L^2(\Omega)}\|\omega_h\|_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)}\|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right\} \end{aligned}$$

Or, par (VI.18), nous avons :

$$\begin{aligned} & (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h) + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 (\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h) \\ & \leq \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\} \left[(\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, \omega - \omega_h) + \frac{t^2}{12}(\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \phi - \phi_h) \right] \\ & \leq \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\} \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Par une inégalité de Cauchy-Schwarz discrète et la condition sur les solutions discrètes donnée

dans la relation (VI.3), nous avons :

$$\begin{aligned}
& \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_h\|_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& \leq \left(\|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\|\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \|\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
& \leq \left(\|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\}^{1/2}.
\end{aligned}$$

D'où, en utilisant une inégalité de Young de paramètre $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \alpha_t \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\} \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
& \quad + |\alpha_t - \alpha_{t,h}| \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\}^{1/2} \left(\|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
& \leq \alpha_t \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\} \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
& \quad + \frac{\delta}{2} |\alpha_t - \alpha_{t,h}|^2 \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\} + \frac{1}{2\delta} \left(\|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned}$$

En choisissant $\delta = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \alpha_t (\alpha_t + \alpha_{t,h}) \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + |\alpha_t - \alpha_{t,h}|^2 \max \left\{ 1; \frac{t^2}{12} \right\}.
\end{aligned} \tag{VI.19}$$

Comme $\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2$, $\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ et $|\alpha_t - \alpha_{t,h}|^2$ sont superconvergentes (cf Th. VI.2.1), alors

$\left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)}\right)^2 + \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left(\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$ est superconvergent. Il suffit de combiner ce résultat avec le Théorème VI.3.2 pour achever la démonstration. \square

VI.4 Estimateur pour la différence des valeurs propres

Comme précédemment, nous notons par (ω, ϕ, α_t) (resp. $(\omega_h, \phi_h, \alpha_{t,h})$) la solution du problème (VI.2) (resp. (VI.3)). Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
& \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \|\phi\|_{\mathcal{C}}^2 + \|\phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 - 2a(\phi, \phi_h) + \lambda^{-1}t^2 \left(\|\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2(\gamma, \gamma_h) \right) \\
&= \|\phi\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \left(a(\phi, \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma, \gamma_h) \right) \\
&= \alpha_t + \alpha_{t,h} - 2 \left(a(\phi, \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma, \gamma_h) \right).
\end{aligned} \tag{VI.20}$$

Or, comme la discrétisation est conforme, nous avons :

$$\begin{aligned}
a(\phi, \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma, \gamma_h) &= a(\phi, \phi_h) + (\gamma, \nabla\omega_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&= a(\phi, \phi_h) + (\gamma, \nabla\omega_h - \phi_h) + (\gamma, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&= \alpha_t \left[(\omega, \omega_h) + \frac{t^2}{12}(\phi, \phi_h) \right] + (\gamma, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h).
\end{aligned} \tag{VI.21}$$

D'où, en combinant les relations (VI.20) et (VI.21), nous avons :

$$\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha_t + \alpha_{t,h} - 2 \left(\alpha_t \left[(\omega, \omega_h) + \frac{t^2}{12}(\phi, \phi_h) \right] + (\gamma, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \right),$$

ce qui nous donne par (VI.17) :

$$\begin{aligned}
& \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \alpha_t + \alpha_{t,h} + \alpha_t \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2 \right] - 2(\gamma, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&= \alpha_{t,h} - \alpha_t + \alpha_t \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] - 2(\gamma, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h),
\end{aligned}$$

autrement dit, en notant que $\alpha_t > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\alpha_{t,h} - \alpha_t &= \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_t \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
&\quad + 2(\gamma, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&= \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_t \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
&\quad + 2(\gamma - \gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) + 2(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&\leq \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_t \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
&\quad + 2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)} + 2(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&\leq \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_t \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
&\quad + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda t^{-2}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&\leq 2[\|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2] - \alpha_t \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\
&\quad + \lambda t^{-2}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
&\leq 2Err_{VP}^2 + \lambda t^{-2}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \\
\alpha_{t,h} - \alpha_t &\lesssim \eta_{VP}^2 + \lambda t^{-2}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + |(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)|, \tag{VI.22}
\end{aligned}$$

où nous avons noté η_{VP} l'estimateur présenté dans le Théorème VI.3.2, soit :

$$\begin{aligned}
\eta_{VP}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2(t^2 + h_T^2)\|\alpha_{t,h}\omega_h + \operatorname{div}\gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E(t^2 + h_E^2)\|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\
&\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div}\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12}\alpha_{t,h}\phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E\|\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)\|_E n_E\|_{L^2(E)}^2 \\
&\quad + \|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(\operatorname{rot},\Omega)}^2 + \mu_h(\gamma_h)^2 + \left(\frac{t^2}{12}\|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\
&\quad + \|\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left(\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \tag{VI.23}
\end{aligned}$$

Pour obtenir une estimation de la différence des valeurs propres, nous nous devons d'évaluer également $\alpha_t - \alpha_{t,h}$ car il n'est pas assuré que $\alpha_{t,h} \geq \alpha_t$ (même si cette relation peut se vérifier numériquement). Il suffit de reprendre la démonstration précédente en remplaçant

(VI.21) par :

$$a(\phi, \phi_h) + \lambda^{-1}t^2(\gamma, \gamma_h) = -\widehat{Res}_1(\omega) - \widehat{Res}_1(\phi) + \alpha_{t,h} \left[(\omega_h, \omega) + \frac{t^2}{12}(\phi_h, \phi) \right].$$

D'où, par la décomposition de Helmholtz :

$$\begin{aligned} \alpha_t - \alpha_{t,h} &= \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_{t,h} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + 2\widehat{Res}_1(\omega) + 2\widehat{Res}_2(\phi) \\ &= \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_{t,h} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + 2 \left(\widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + (\gamma_h, \nabla z) - (\alpha_{t,h}\omega_h, z) \right) \\ &\quad + 2 \left(\widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) + (\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) + a(\phi_h, \beta) - (\gamma_h, \beta) - \frac{t^2}{12}(\alpha_{t,h}\phi_h, \beta) \right) \\ &= \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_{t,h} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + 2 \left(\widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + \widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) + (\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \right. \\ &\quad \left. + a(\phi_h - \phi, \beta) + (\gamma - \gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) + (\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h, z) + \frac{t^2}{12}(\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h, \beta) \right). \end{aligned}$$

Par des inégalités de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha_t - \alpha_{t,h} &\leq \|\phi - \phi_h\|_{\mathcal{C}}^2 + \lambda^{-1}t^2\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha_{t,h} \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12}\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\quad + 2 \left\{ \widehat{Res}_1(\omega - \omega_h + z) + \widehat{Res}_2(\phi - \phi_h + \beta) + (\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h) \right. \\ &\quad \left. + \|\phi_h - \phi\|_{\mathcal{C}}\|\beta\|_{\mathcal{C}} + \lambda^{-1/2}t\|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}\lambda^{1/2}t^{-1}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\|\alpha_t\omega - \alpha_{t,h}\omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12} \right)^2 \|\alpha_t\phi - \alpha_{t,h}\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\|z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\beta\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

En notant que $\alpha_{t,h} > 0$, il nous suffit alors de reprendre la démonstration de la fiabilité de l'estimateur présentée dans la section VI.3 pour obtenir :

$$\alpha_t - \alpha_{t,h} \lesssim \eta_{VP}^2 + \lambda t^{-2}\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + |(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)|. \quad (\text{VI.24})$$

Par (VI.22) et (VI.24), nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème VI.4.1 *Sous les conditions du Théorème VI.3.1 et par la définition de l'estimateur η_{VP} donnée par la relation (VI.23), nous avons :*

$$|\alpha_t - \alpha_{t,h}| \lesssim \eta_{VP}^2 + \lambda t^{-2} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + |(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h)|.$$

Remarque VI.4.1 *Le terme $|(\gamma_h, \phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h)|$ peut être calculé numériquement car il ne fait intervenir que la solution approchée. Cependant, nous pouvons également le majorer par $\|\gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}$. Nous pouvons remarquer numériquement que le terme $\|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{L^2(\Omega)}$ converge plus rapidement que l'estimateur, ce qui nous permet de prétendre que le terme $|\alpha_t - \alpha_{t,h}|^2$ est superconvergent si α_t est une valeur propre simple.*

VI.5 Efficacité de l'estimateur

VI.5.1 Majoration de $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2$ et $\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 +$

$$h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2$$

Soit $v_T = b_T^2 (\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h)$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, b_T étant la fonction-bulle associée à T . Alors :

$$\begin{aligned} \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_T^2 &\lesssim (\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h, v_T)_{L^2(T)} \\ &= (\alpha_{t,h} \omega_h, v_T)_T - (\gamma_h, \nabla v_T)_{L^2(T)} \\ &= (\alpha_{t,h} \omega_h - \alpha_t \omega, v_T)_{L^2(T)} + (\gamma - \gamma_h, \nabla v_T)_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Par sommation et deux inégalités de Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} &\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) (\alpha_{t,h} \omega_h - \alpha_t \omega, v_T)_{L^2(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) (\gamma - \gamma_h, \nabla v_T)_{L^2(T)} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \sqrt{t^2 + h_T^2} \|\alpha_{t,h} \omega_h - \alpha_t \omega\|_{L^2(T)} h_T \sqrt{t^2 + h_T^2} \|v_T\|_{L^2(T)} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(T)} t h_T^2 \|\nabla v_T\|_{L^2(T)} \\ &\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \nabla v_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{VI.25}$$

En utilisant les inégalités inverses suivantes :

$$\begin{aligned} \|\nabla v_T\|_{L^2(T)} &\lesssim h_T^{-1} \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(\omega_T)}; \\ |\nabla v_T|_{H^1(T)} &\lesssim h_T^{-2} \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(\omega_T)}; \end{aligned} \tag{VI.26}$$

et en notant que :

$$\left\| \nabla \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \nabla v_T \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^8 |\nabla v_T|_{H^1(T)}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|\alpha_{t,h}\omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(\omega_T)}^2,$$

nous obtenons alors, en utilisant la régularité du maillage et deux inégalités de Cauchy-Schwarz discrètes dans (VI.25) :

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h}\omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \\ & \lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h}\omega_h - \alpha_t \omega\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h}\omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 t^2 \|\alpha_{t,h}\omega_h - \alpha_t \omega\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^4 \|\alpha_{t,h}\omega_h - \alpha_t \omega\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{VI.27}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h}\omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 & \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h}\omega_h - \alpha_t \omega\|_{L^2(T)}^2 \\ & \quad + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \tag{VI.28}$$

Pour toute arête intérieure $E = \overline{T_+} \cap \overline{T_-}$, nous définissons la fonction bulle $b_E \in H_0^1(\omega_E)$ telle que

$$\left| \begin{array}{ll} \operatorname{supp} b_E = \overline{\omega_E}, & 0 \leq b_E \leq 1 = \max_{x \in E} b_E, \\ \int_{\omega_E} b_E dx \approx h_E^2, & \int_E b_E ds \approx h_E, \\ \|\nabla b_E\|_{L^2(T_\pm)} \lesssim h_E^{-1} \|b_E\|_{L^2(T_\pm)}, & |\nabla b_E|_{H^1(\omega_E)} \lesssim h_E^{-2} \|b_E\|_{L^2(\omega_E)}. \end{array} \right.$$

Pour chaque $E \in \mathcal{E}(\Omega)$, nous définissons $w_E = b_E^2([\gamma_h]_E \cdot n_E) \in H_0^2(\omega_E)$ avec $\|w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \lesssim h_E \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2$. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\gamma_h\|_{L^2(E)}^2 & \lesssim ([\gamma_h]_E \cdot n_E, w_E)_{L^2(E)} \\ & = (\operatorname{div} \gamma_h, w_E)_{L^2(\omega_E)} + (\gamma_h, \nabla w_E)_{L^2(\omega_E)} \\ & = (\alpha_{t,h}\omega_h + \operatorname{div} \gamma_h, w_E)_{L^2(\omega_E)} + (\gamma_h, \nabla w_E)_{L^2(\omega_E)} - (\alpha_{t,h}\omega_h, w_E)_{L^2(\omega_E)} \\ & = (\alpha_{t,h}\omega_h + \operatorname{div} \gamma_h, w_E)_{L^2(\omega_E)} - (\gamma - \gamma_h, \nabla w_E)_{L^2(\omega_E)} + (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h}\omega_h, w_E)_{L^2(\omega_E)}. \end{aligned}$$

En effectuant une sommation sur toutes les arêtes intérieures, nous avons :

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (h_E^2 + t^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} \left\{ (\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h, h_E (h_E^2 + t^2) w_E)_{L^2(\omega_E)} + (\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h, h_E (h_E^2 + t^2) w_E)_{L^2(\omega_E)} \right\} \\ & \quad - \left(\gamma - \gamma_h, \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (h_E^2 + t^2) \nabla w_E \right)_{L^2(\omega_E)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète et la régularité du maillage, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (h_E^2 + t^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \lesssim \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} (h_E^2 + t^2) \|w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} (h_E^2 + t^2) \|w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \right)^{1/2} \\ & \quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \left\| \nabla \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \nabla w_E \right) \right\|_{L^2(\Omega)} + t \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)} \left\| \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t h_E \nabla w_E \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité inverse suivante :

$$\|\nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)} + h_E |\nabla w_E|_{H^1(\omega_E)} \lesssim h_E^{-1/2} \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)},$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \left(\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \nabla w_E \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 & \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^6 |\nabla w_E|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E^3 \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \leq \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

Le même genre d'argument mène à :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t h_E \nabla w_E \right\|_{L^2(\Omega)}^2 & \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t^2 h_E^2 \|\nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)}^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} t^2 h_E \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \\ & \leq \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (h_E^2 + t^2) \|\gamma_h|_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant (VI.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (h_E^2 + t^2) \|\gamma_h|_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(T)}^2 + t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (\text{VI.29})$$

VI.5.2 Majorations de $\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2$ **et**

$$\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|\mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)|_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2$$

En utilisant la même technique que précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(T)}^2, \end{aligned} \quad (\text{VI.30})$$

et

$$\sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|\mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)|_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12}\right)^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(T)}^2. \quad (\text{VI.31})$$

VI.5.3 Majoration de $\mu_h(\gamma_h)^2$

Nous rappelons que nous avons posé :

$$\mu_h(\gamma_h) = \sup_{\eta_h \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{|(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\eta_h)|}{\|\nabla \eta_h\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Soit $\eta_h \in S_0^1(\mathcal{T}_h)^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors,

$$\begin{aligned}
(\gamma_h, (\mathbf{I} - \mathbf{R}_h)\eta_h) &= (\gamma_h, \eta_h) - (\gamma_h, \mathbf{R}_h\eta_h) \\
&= (\gamma_h, \eta_h) + \alpha_{t,h} \frac{t^2}{12} (\phi_h, \eta_h) - a(\phi_h, \eta_h) \\
&= (\gamma_h - \gamma, \eta_h) + \frac{t^2}{12} (\alpha_{t,h}\phi_h - \alpha_t\phi, \eta_h) + a(\phi - \phi_h, \eta_h) \\
&\leq \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla\eta_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi - \phi_h\|_c \|\eta_h\|_c \\
&\quad + \frac{t^2}{12} \|\alpha_{t,h}\phi_h - \alpha_t\phi\|_{L^2(\Omega)} \|\eta_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où, par les inégalités de Korn et de Friedrichs :

$$\mu_h(\gamma_h)^2 \lesssim \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_{t,h}\phi_h - \alpha_t\phi\|_{L^2(\Omega)} \right)^2. \quad (\text{VI.32})$$

VI.5.4 Majoration de $\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{H_0(\text{rot},\Omega)}^2$

Par définition de γ et γ_h , nous avons :

$$\mathbf{R}_h\phi_h - \phi_h = \lambda^{-1}t^2(\gamma - \gamma_h) - \nabla(\omega - \omega_h) + (\phi - \phi_h).$$

D'où :

$$\|\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \lambda^{-2}t^4 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (\text{VI.33})$$

et

$$\|\text{rot}(\phi_h - \mathbf{R}_h\phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \lambda^{-2}t^4 \|\text{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{VI.34})$$

VI.5.6 Conclusion - Efficacité de l'estimateur

En combinant les relations (VI.19), (VI.28), (VI.29), (VI.30), (VI.31), (VI.33), (VI.34), nous obtenons le théorème suivant :

Théorème VI.5.1 (Lower-bound) *Sous les conditions du Théorème VI.3.1 et en posant $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$, alors*

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 + \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\operatorname{rot}, \Omega)}^2 \\
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)}^2 + \mu_h(\gamma_h)^2 \\
& + \left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha_t + \alpha_{t,h}}{2} \left(\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \lesssim \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + \lambda^{-1} t^2) \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
& \quad + \lambda^{-2} t^4 \|\operatorname{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \max \{ t^2 h^2 (t^2 + h^2); h^2 (t^2 + h^2); t^2 h^2; h^2; t^2; 1 \} \\
& \quad \times \left\{ \alpha_t (\alpha_t + \alpha_{t,h}) \left[\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t^2}{12} \|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + |\alpha_t - \alpha_{t,h}|^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Si nous supposons que α_t est une valeur propre simple, nous obtenons alors le corollaire suivant :

Corollaire VI.5.1 (Lower-bound) *Sous les conditions du Théorème VI.5.1 et si α_t est une valeur propre simple, alors*

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2 + \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\operatorname{rot}, \Omega)}^2 \\
& + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|[\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)}^2 + \mu_h(\gamma_h)^2 \\
& \lesssim \|\nabla(\omega - \omega_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (1 + \lambda^{-1} t^2) \lambda^{-1} t^2 \|\gamma - \gamma_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\gamma - \gamma_h\|_{H^{-1}(\Omega)} \\
& \quad + \lambda^{-2} t^4 \|\operatorname{rot}(\gamma - \gamma_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + h.o.t.
\end{aligned}$$

VI.6 Résultats numériques

Dans cette partie, les maillages que nous avons utilisés sont les maillages structurés présentés dans la sous-sous-section III.5.1. Nous prendrons arbitrairement $E = 2.6$, $\nu = 0.3$, $k = 5/6$, $\rho = 1$ et $t = 0.1$.

Avant de commencer l'étude de l'estimateur, il est nécessaire de calculer numériquement la première valeur propre approchée notée $\alpha_{t,h}^1$, qui est donnée par le Tableau VI.1 suivant : Nous notons par NX le nombre de subdivisions :

Cependant, cette valeur propre dépend des valeurs des données considérées pour la plaque, à savoir E , ν , k , ρ et t . L'idée est alors d'adimensionner cette valeur propre, ce qui permet la comparaison avec d'autres articles. Pour ce faire, nous considérons la valeur propre

NX	4	8	16	32	64	128	256
$\alpha_{t,h}^1$	547.145	288.713	260.160	253.884	252.365	251.989	251.895

TAB. VI.1: Tableau de la première valeur propre, $t = 0.1$.

adimensionnée ω_1 définie par :

$$\omega_1 = t \sqrt{\frac{\alpha_{t,h}^1}{\rho} \left(\frac{2(1+\nu)\rho}{E} \right)^{1/2}},$$

ce qui nous permet d'obtenir le tableau comparatif VI.3 pour $t = 0.1$ avec les résultats obtenus par la méthode de Huang et Hinton dans [HH84] (colonne HH), celle de Dawe et Roufaeil dans [DR80] (colonne DR) et celle de Durán, Hervella-Nieto, Liberman, Rodríguez et Solomin dans [DHLRS99] (colonne DHLRS).

NX	10	20	40			
DHLRS	1.5947	1.5921	1.5913			
NX	8	16	32	64	128	256
Verhille	1.699	1.613	1.593	1.589	1.587	1.587

TAB. VI.2: Tableau de la première valeur propre adimensionnée, $t = 0.1$ - Comparaison avec DHLRS.

HH	DR	DHLRS	Verhille
1.591	1.594	1.5913	1.587

TAB. VI.3: Tableau de la première valeur propre adimensionnée, $t = 0.1$ - Valeur obtenue avec le maillage le plus fin pour les différents articles.

Remarque VI.6.1 *Nous pouvons remarquer que notre valeur propre adimensionnée obtenue avec le maillage le plus fin est inférieure à celle des autres articles selon le Tableau VI.3. Cela peut s'expliquer par le fait que la résolution du maillage que nous avons considérée est plus fine que celle des différents articles, mais nous pouvons remarquer dans le tableau VI.2 que nous avons des résultats similaires pour des maillages du même ordre de grandeur.*

Pour vérifier la convergence de l'estimateur présenté dans le Théorème VI.3.2, l'estimateur d'erreur η_{VP} est défini par :

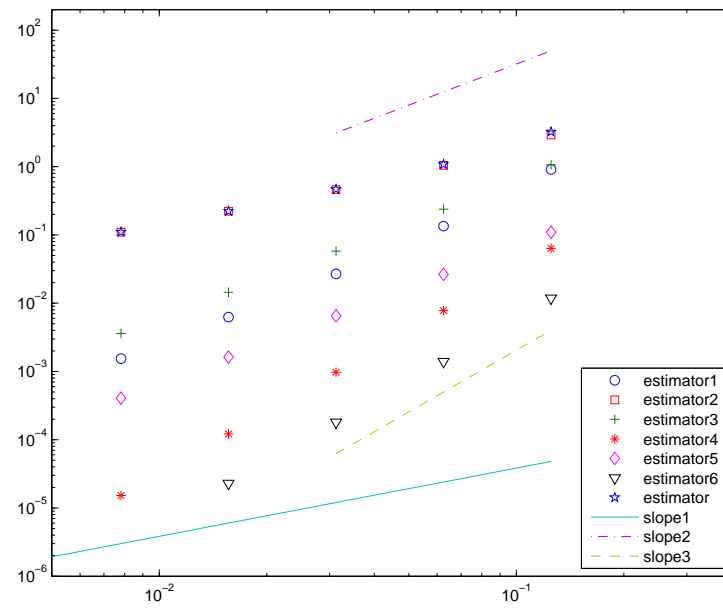
$$\eta_{VP}^2 = \eta_{h,1}^2 + \eta_{h,2}^2 + \eta_{h,3}^2 + \eta_{h,4}^2 + \eta_{h,5}^2 + \eta_{h,6}^2,$$

où les différentes contributions sont données par :

$$\begin{aligned}
\eta_{h,1}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 (t^2 + h_T^2) \|\alpha_{t,h} \omega_h + \operatorname{div} \gamma_h\|_{L^2(T)}^2, \\
\eta_{h,2}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E (t^2 + h_E^2) \|[\gamma_h]_E \cdot n_E\|_{L^2(E)}^2, \\
\eta_{h,3}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \left\| \operatorname{div} \mathcal{C} \varepsilon(\phi_h) + \gamma_h + \frac{t^2}{12} \alpha_{t,h} \phi_h \right\|_{L^2(T)}^2, \\
\eta_{h,4}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}(\Omega)} h_E \|[\mathcal{C} \varepsilon(\phi_h)]_E n_E\|_{L^2(E)}^2, \\
\eta_{h,5}^2 &= \|\phi_h - \mathbf{R}_h \phi_h\|_{H_0(\operatorname{rot}, \Omega)}^2, \\
\eta_{h,6}^2 &= \mu_h^2(\gamma_h).
\end{aligned} \tag{VI.35}$$

Rappelons que les termes $\left(\frac{t^2}{12} \|\alpha_t \phi - \alpha_{t,h} \phi_h\|_{L^2(\Omega)} \right)^2$, $\|\alpha_t \omega - \alpha_{t,h} \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2$, $\|\omega - \omega_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ et $\|\phi - \phi_h\|_{L^2(\Omega)}^2$ ont été montrés comme étant superconvergents car la première propre est simple (cf [DHLS99] par exemple).

Nous représentons dans la Figure VI.1 l'évolution de l'estimateur η_{VP} ainsi que ses différentes contributions $\eta_{h,i}$, $i = 1..6$ en fonction de h . Tout d'abord, nous pouvons remarquer que les contributions $\eta_{h,4}$ et $\eta_{h,6}$ convergent à l'ordre 3 et que les contributions $\eta_{h,3}$ et $\eta_{h,5}$ convergent à l'ordre 2. De plus, il est clair que la partie principale de l'estimateur η_{VP} est $\eta_{h,2}$. Néanmoins, nous pouvons également remarquer que le taux de convergence de $\eta_{h,2}$ (resp. $\eta_{h,1}$) commence aux environs de 2 (resp. 3), ce qui peut facilement s'expliquer par la définition de $\eta_{h,2}$ (resp. $\eta_{h,1}$) lorsque h reste plus grand que t . Dès que h devient plus petit que t , alors le taux de convergence de 1 pour $\eta_{h,2}$ (resp. 2 pour $\eta_{h,1}$) est retrouvé comme le suggère la Figure VI.1 pour les maillages les plus fins utilisés.

FIG. VI.1: Taux de convergence pour les estimateurs, $t = 0.1$.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons eu l'occasion d'appréhender le problème de Reissner-Mindlin de différentes manières et ainsi d'avoir une bonne vision des avantages et inconvénients des estimateurs *a posteriori* les plus couramment utilisés, à savoir de type Flux Équilibrés et de type Résiduel.

Le premier chapitre introductif a permis de se familiariser avec le problème de Reissner-Mindlin et d'établir ou rappeler les relations fondamentales permettant l'obtention des différents estimateurs *a posteriori*. De plus, certaines constantes caractéristiques (telle que la constante de Korn) ont été explicitées dans le but d'obtenir des constantes multiplicatives précises dans les estimateurs et facilement implémentables. Certaines de ces constantes dépendent du domaine considéré : l'Annexe F liste les constantes selon le fait qu'elles dépendent ou non du domaine.

Les chapitres II et III nous ont permis d'obtenir un estimateur *a posteriori* de type Flux Équilibrés fiable, efficace et robuste en t dans le cas conforme avec une constante multiplicative explicite. Des tests numériques ont confirmés les résultats obtenus. L'avantage de cette méthode réside principalement par la certitude que l'erreur est plus petite que l'estimateur et qu'il ne sera pas nécessaire de trop raffiner le maillage afin d'obtenir de bons résultats (ce qui permet une baisse du temps de calcul et de la place mémoire nécessaire). De plus, l'étude menée est adaptable à d'autres discrétisations, sous couvert de devoir déterminer les espaces d'existence des nouveaux éléments x^* et y^* ainsi que leur construction. De nombreux autres estimateurs *a posteriori* fiables, efficaces et robustes en t existent dans la littérature (cf [LS05], [CH07], [Lib00], [CW01] et [CS06]), mais ces travaux ne donnent pas explicitement la constante multiplicative, ce qui limite leur utilisation pratique.

Le chapitre IV est consacré à une discrétisation non-conforme utilisant un terme de pénalisation. Contrairement à certains travaux ([Car02] par exemple), nous avons considéré une discrétisation non-conforme pour les deux variables ω et ϕ , ce qui explique l'origine du terme de pénalisation afin de rendre coercive la fonctionnelle liée au problème. L'idée était de construire de nouveaux éléments appartenant à l'intersection des espaces d'existence des solutions exacte et discrétisée afin d'obtenir un estimateur *a posteriori* fiable et efficace, ce que nous avons vérifié numériquement. Ainsi, nous avons pu utiliser indifféremment le problème continu ou

le problème discrétisé, ce qui simplifiait la manipulation des différents termes qui apparaissent. L'avantage de ce processus consiste à laisser une certaine liberté pour le choix de ces éléments afin d'assurer l'efficacité de l'estimateur *a posteriori*.

Le chapitre V est une reprise de l'estimateur *a posteriori* de type Flux Équilibrés. Le but était de construire les nouveaux éléments grâce à un problème localisé en reprenant le principe initié dans [MNS02] dans le cas du problème de Reissner-Mindlin. L'avantage de cette méthode est que ces éléments conservent les éventuelles propriétés de la fonctionnelle de départ en construisant les nouveaux éléments comme solutions du problème localisé, contrairement aux premiers chapitres. En effet, dans les premiers chapitres, les nouveaux éléments x^* et y^* pouvaient être construits indépendamment du problème originel, ce qui pouvait constituer un inconvénient si nous ne les choisissons pas correctement. Ainsi, il est possible de déterminer des éléments "plus adaptés" au problème considéré. Cependant, cette technique a un coût puisque nous devons résoudre un système linéaire sur chaque patch de la triangulation et le nombre de patches augmente lorsque nous raffinons le maillage. Néanmoins, les matrices et vecteurs intervenant dans ces résolutions locales sont de taille suffisamment petite pour que leur résolution ne prenne que peu de temps, d'autant que les calculs sont parallélisables.

Le dernier chapitre est dévolu à l'analyse du problème de valeurs propres associé au problème de Reissner-Mindlin. L'analyse *a priori* de ce problème a fait l'objet de nombreux travaux ([DHLRS99], [DHLRS00], [DHHLR03], [GLP03], [Her04], [LMR10]); mais, à notre connaissance, aucun ne traite de l'analyse *a posteriori*. Nous sommes parvenus à déterminer un estimateur *a posteriori* fiable, efficace et robuste en t pour la norme de l'erreur sur les vecteurs propres sous couvert du caractère simple des valeurs propres des problèmes continu et discrétisé. Cet estimateur *a posteriori* permet de contrôler, bien évidemment, la différence entre la solution continue et la solution discrétisée, mais également la différence entre la valeur propre du problème continu et son approximation déterminée par le problème discrétisé, ce qui a fait l'objet de la section VI.4. Néanmoins, nous pouvons remarquer la présence de la solution exacte dans l'estimateur. Cependant, si les valeurs propres sont simples, nous avons démontré que ces termes étaient superconvergents (cf les articles précédemment cités ainsi que le Théorème VI.2.1 présenté dans la section VI.2), ce qui implique que les parties prédominantes de notre estimateur ne font intervenir que les solutions approchées.

À l'issue de ce travail, plusieurs axes de recherche peuvent être envisagés :

- Les constantes multiplicatives explicitées dans le cas conforme ne sont clairement pas optimales et dépendent nettement du maillage considéré. En effet, bien qu'il soit aisé d'adapter ce travail dans le cas d'un maillage non-régulier, nous pouvons cependant remarquer que, dans ce cas, la plupart des constantes deviennent excessivement grandes. L'idée serait alors de créer un estimateur *a posteriori* fiable, efficace, robuste en t , avec

une constante multiplicative totalement explicite, mais qui ne se dégrade pas lorsque nous considérons des maillages non-réguliers.

- L'estimateur considéré dans le cas non-conforme et présenté dans le chapitre IV possède une efficacité qui n'est pas robuste en t . Cela provient du choix des éléments appartenant à l'intersection des espaces continus et discrétisés (les interpolés d'Oswald). Il serait judicieux de choisir de nouveaux éléments permettant d'obtenir une efficacité robuste en t tout en se souvenant que la fiabilité ne serait pas affectée.
- Nous avons considéré des estimateurs de type Résiduel pour la discrétisation non-conforme et pour le problème aux valeurs propres associé au système de Reissner-Mindlin. Il faudrait créer des estimateurs de type Flux Équilibrés pour ces deux cas afin de pouvoir comparer les résultats obtenus et déterminer quel est le "meilleur" estimateur à employer pour chacun des cas.
- Enfin, de nombreux autres estimateurs *a posteriori* existent : de type hiérarchique, de reconstruction et de dualité. Il serait intéressant de créer des estimateurs *a posteriori* fiables, efficaces et robustes en t dans chacun de ces cas et de les confronter aux estimateurs présentés dans cette thèse afin de voir les avantages et inconvénients (en terme de construction, de temps de calcul ou d'application à une adaptation de maillage par exemple) des différentes méthodes.

Annexe A

Construction de x^*

Nous rappelons que la discrétisation considérée est formée par les éléments finis de type MITC3 définis dans la section II.3.

Nous avons à vérifier la relation $\operatorname{div} x^* = -\gamma_h$, ainsi que la régularité $x^* \in N_{\operatorname{div}}(\Omega) = \{x^* \in L^2(\Omega, \mathcal{M}_S^2) \mid \operatorname{div} x^* \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^2)\}$. Or $\gamma_h|_T \in \mathbb{P}_1(T)$. Nous choisissons de construire x^* dans T dans l'espace de dimension 24 présenté dans [AW02, (3.1)]. Nous choisissons de prendre les fonctions de base (ainsi que leur coefficient respectif) présentées dans [NWW07]. Le problème réside dans l'utilisation des fonctions d'Argyris pour construire les fonctions de base de l'espace précédent, et plus précisément dans l'implémentation de ces fonctions de base pour un triangle quelconque. Pour ce faire, nous partons des fonctions de base d'Argyris dans le triangle de référence $\widehat{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}$. Nous allons les lister suivant le type de condition (les conditions correspondantes aux fonctions de base pour chaque degré de liberté sont données à la fin) :

– Évaluation en un point :

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= 1 - 10x^3 - 10y^3 + 15x^4 - 30x^2y^2 + 15y^4 - 6x^5 + 30x^3y^2 + 30x^2y^3 - 6y^5, \\ \varphi_2(x, y) &= 10x^3 - 15x^4 + 15x^2y^2 + 6x^5 - 15x^3y^2 - 15x^2y^3, \\ \varphi_3(x, y) &= 10y^3 + 15x^2y^2 - 15y^4 - 15x^3y^2 - 15x^2y^3 + 6y^5,\end{aligned}$$

vérifiant $\varphi_1(0, 0) = 1$, $\varphi_2(1, 0) = 1$ et $\varphi_3(0, 1) = 1$.

– Dérivées premières :

$$\begin{aligned}\varphi_4(x, y) &= x - 6x^3 - 18xy^2 + 8x^4 + 24x^2y^2 + 32xy^3 - 3x^5 - 6x^3y^2 - 24x^2y^3 - 15xy^4, \\ \varphi_5(x, y) &= y - 18x^2y - 6y^3 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8y^4 - 15x^4y - 24x^3y^2 - 6x^2y^3 - 3y^5, \\ \varphi_6(x, y) &= -4x^3 + 7x^4 - 3x^5, \\ \varphi_7(x, y) &= -12x^2y + 28x^3y + 36x^2y^2 - 15x^4y - 36x^3y^2 - 24x^2y^3, \\ \varphi_8(x, y) &= -12xy^2 + 36x^2y^2 + 28xy^3 - 24x^3y^2 - 36x^2y^3 - 15xy^4, \\ \varphi_9(x, y) &= -4y^3 + 7y^4 - 3y^5,\end{aligned}$$

vérifiant $\partial_x \varphi_4(0, 0) = 1$, $\partial_y \varphi_5(0, 0) = 1$, $\partial_x \varphi_6(1, 0) = 1$, $\partial_y \varphi_7(1, 0) = 1$, $\partial_x \varphi_8(0, 1) = 1$ et $\partial_y \varphi_9(0, 1) = 1$.

– Dérivées secondes :

$$\begin{aligned}\varphi_{10}(x, y) &= 0.5x^2 - 1.5x^3 + 1.5x^4 - 1.5x^2y^2 - 0.5x^5 + 1.5x^3y^2 + x^2y^3, \\ \varphi_{11}(x, y) &= xy - 4.5x^2y - 4.5xy^2 + 6x^3y + 12x^2y^2 + 6xy^3 - 2.5x^4y - 7.5x^3y^2 - 7.5x^2y^3 - 2.5xy^4, \\ \varphi_{12}(x, y) &= 0.5y^2 - 1.5y^3 - 1.5x^2y^2 + 1.5y^4 + x^3y^2 + 1.5x^2y^3 - 0.5y^5, \\ \varphi_{13}(x, y) &= 0.5x^3 - x^4 + 0.5x^5, \\ \varphi_{14}(x, y) &= 1.5x^2y - 4x^3y - 4.5x^2y^2 + 2.5x^4y + 4.5x^3y^2 + 3x^2y^3, \\ \varphi_{15}(x, y) &= 1.5x^2y^2 - x^3y^2 - 1.5x^2y^3, \\ \varphi_{16}(x, y) &= 1.5x^2y^2 - 1.5x^3y^2 - 1x^2y^3, \\ \varphi_{17}(x, y) &= 1.5xy^2 - 4.5x^2y^2 - 4xy^3 + 3x^3y^2 + 4.5x^2y^3 + 2.5xy^4, \\ \varphi_{18}(x, y) &= 0.5y^3 - y^4 + 0.5y^5,\end{aligned}$$

vérifiant $\partial_{xx}^2\varphi_{10}(0, 0) = 1$, $\partial_{xy}^2\varphi_{11}(0, 0) = 1$, $\partial_{yy}^2\varphi_{12}(0, 0) = 1$, $\partial_{xx}^2\varphi_{13}(1, 0) = 1$, $\partial_{xy}^2\varphi_{14}(1, 0) = 1$, $\partial_{yy}^2\varphi_{15}(1, 0) = 1$, $\partial_{xx}^2\varphi_{16}(0, 1) = 1$, $\partial_{xy}^2\varphi_{17}(0, 1) = 1$, $\partial_{yy}^2\varphi_{18}(0, 1) = 1$.

– Dérivées normales :

$$\begin{aligned}\varphi_{19}(x, y) &= -30x^2y^2 + 30x^3y^2 + 30x^2y^3, \\ \varphi_{20}(x, y) &= -30xy^2 + 60x^2y^2 + 60xy^3 - 30x^3y^2 - 60x^2y^3 - 30xy^4, \\ \varphi_{21}(x, y) &= -30x^2y + 60x^3y + 60x^2y^2 - 30x^4y - 60x^3y^2 - 30x^2y^3,\end{aligned}$$

vérifiant $\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \nabla\varphi_{19}(x, 1-x) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) dx = 1$, $-\int_0^1 \partial_x\varphi_{20}(0, y) dy = 1$ et $-\int_0^1 \partial_y\varphi_{21}(x, 0) dx = 1$.

Pour déterminer les fonctions d'Argyris dans un triangle quelconque, il suffit de multiplier le vecteur $\varphi = (\varphi_i)_{1 \leq i \leq 21}$ par la transposée d'une certaine matrice C que nous expliciterons ici (l'explication qui suivra est une adaptation de [DS09]).

Notations

Dans le reste de cette annexe, nous utiliserons des notations simplificatrices :

- Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, nous notons I_α la matrice identité $\alpha \times \alpha$. Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, nous notons $0_{\alpha \times \beta}$ la matrice nulle $\alpha \times \beta$.
- Pour un triangle T de sommets $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$ et $X_3 = (x_3, y_3)$, nous notons e_1 (resp. e_2 ; e_3) l'arête ayant pour sommets les points X_2 et X_3 (resp. X_3 et X_1 ; X_1 et X_2). Nous notons $|e_i|$ la longueur de l'arête e_i , $i \in \{1, 2, 3\}$.
- Nous posons $B_T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la transformation affine transformant \hat{T} en T .

- Θ est la matrice 3×3 définie par :

$$\Theta := \begin{pmatrix} b_{11}^2 & 2b_{11}b_{21} & b_{21}^2 \\ b_{11}b_{12} & b_{11}b_{22} + b_{12}b_{21} & b_{21}b_{22} \\ b_{12}^2 & 2b_{12}b_{22} & b_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

- Υ est la matrice 3×3 définie par :

$$\Theta := \begin{pmatrix} \beta_{11}^2 & 2\beta_{11}\beta_{21} & \beta_{21}^2 \\ \beta_{11}\beta_{12} & \beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21} & \beta_{21}\beta_{22} \\ \beta_{12}^2 & 2\beta_{12}\beta_{22} & \beta_{22}^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{où } \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} = B_T^{-T}.$$

- A est la matrice 3×2 définie par :

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} |e_1|^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & |e_2|^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & |e_3|^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} B_T^T.$$

- Nous notons :

$$v_1 = X_3 - X_2 =: (v_1^x, v_1^y)^T; \quad v_2 = X_1 - X_3 =: (v_2^x, v_2^y)^T; \quad v_3 = X_2 - X_1 =: (v_3^x, v_3^y)^T$$

et

$$w_1 = \begin{pmatrix} v_1^x & v_1^x \\ 2v_1^x & v_1^y \\ v_1^y & v_1^y \end{pmatrix}; \quad w_2 = \begin{pmatrix} v_2^x & v_2^x \\ 2v_2^x & v_2^y \\ v_2^y & v_2^y \end{pmatrix}; \quad w_3 = \begin{pmatrix} v_3^x & v_3^x \\ 2v_3^x & v_3^y \\ v_3^y & v_3^y \end{pmatrix}.$$

- Pour tout $i \in \{1; 2; 3\}$, nous définissons : $f_i = a_{i1} v_i^y - a_{i2} v_i^x$ et $g_i = a_{i1} v_i^x + a_{i2} v_i^y$.

La matrice C se construit comme le produit de deux matrices $C = D * E$, où :

- D est une matrice 21×24 définie par :

$$D := \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} I_3 & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \\ \hline 0_{2 \times 3} & B_T^T & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} \\ \hline 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 2} & B_T^T & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} \\ \hline 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & B_T^T & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 3} & 0_{2 \times 6} \\ \hline 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & \Theta & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \\ \hline 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} & \Theta & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 6} \\ \hline 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \Theta & 0_{3 \times 6} \\ \hline 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & Q \end{array} \right),$$

$$\text{où } Q := \left(\begin{array}{c|c|c} f_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & f_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & f_3 \end{array} \middle| \begin{array}{c|c|c} g_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & g_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & g_3 \end{array} \right).$$

- E est une matrice 24×21 définie par : $E := \left(\begin{array}{c|c} I_{18} & 0_{18 \times 3} \\ \hline 0_{3 \times 18} & L \\ \hline T & 0_{3 \times 3} \end{array} \right),$

$$\text{où } L := \left(\begin{array}{ccc} |e_1| & 0 & 0 \\ 0 & |e_2| & 0 \\ 0 & 0 & |e_3| \end{array} \right); T := (T_1 \mid 0_{3 \times 15}),$$

où :

$$T_1 \text{ est une matrice } 3 \times 3 \text{ définie par } T_1 := \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right);$$

Programmation

Les fonctions de base présentées dans [NWW07] sont alors facilement implémentables. En effet, 9 d'entre elles sont des combinaisons des fonctions quadratiques de base de Lagrange avec les vecteurs normaux et/ou tangents pour chaque arête. Les 15 autres sont des combinaisons linéaires des dérivées secondes des fonctions d'Argyris sur chaque triangle, la matrice C étant construite dans le but de conserver les mêmes degrés de liberté. Ainsi, les produits scalaires des différentes fonctions de base peuvent se ramener au triangle de référence \hat{T} . Il nous suffit alors, pour les produits scalaires faisant intervenir les fonctions de base d'Argyris, d'évaluer les différentes dérivées secondes des fonctions d'Argyris concernées aux différents points d'intégration de Gauss, et de les multiplier par les composantes de la matrice C adéquates.

Plus concrètement, si nous explicitons les données de [NWW07], nous avons :

$$x^*|_T = \sum_{i=1}^3 \left(a_i \phi_T^i + b_i \phi_{e_i}^{n;0} + c_i \phi_{e_i}^{t;0} + d_i \phi_{e_i}^{n;1} + \varepsilon_i \phi_{e_i}^{t;1} + \sum_{1 \leq k \leq j \leq 2} f_i^{kj} \phi_{p_i}^{k;j} \right),$$

où, pour $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq k \leq j \leq 2$,

$$\begin{aligned} \phi_T^i &= \lambda_{e_i} t_{e_i} t_{e_i}^T; \\ \phi_{e_i}^{n;0} &= \lambda_{e_i} n_{e_i} n_{e_i}^T; \\ \phi_{e_i}^{t;0} &= \lambda_{e_i} (t_{e_i} n_{e_i}^T + n_{e_i} t_{e_i}^T); \\ \phi_{e_i}^{n;1} &= J(\tilde{\phi}_{p_{i+2}}^{i+1} - \tilde{\phi}_{p_{i+1}}^{i+2}); \\ \phi_{e_i}^{t;1} &= J(\phi_{e_i}); \\ \phi_{p_i}^{k;j} &= J(\phi_{p_i}^{k;j}); \end{aligned}$$

avec $J(v) = \begin{pmatrix} \partial_2^2 v & -\partial_2 \partial_1 v \\ -\partial_2 \partial_1 v & \partial_1^2 v \end{pmatrix}$, $\lambda_{e_0}(x, y) = \hat{\lambda}_0(\hat{x}, \hat{y}) = 4\hat{x}\hat{y}$, $\lambda_{e_1}(x, y) = \hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 4\hat{y} - 4\hat{x}\hat{y} - 4\hat{y}^2$, $\lambda_{e_2}(x, y) = \hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}) = 4\hat{x} - 4\hat{x}\hat{y} - 4\hat{x}^2$.

Posons, pour $1 \leq i \leq 3$, ϕ_i^x (resp. ϕ_i^y) la fonction de base d'Argyris telle que $\partial_x \phi_i^x(p_i) = 1$ (resp. $\partial_y \phi_i^y(p_i) = 1$) et les autres degrés de liberté valent 0. Alors :

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{p_1}^2 &= \frac{1}{\det(B_T)} [(y_3 - y_1)\phi_1^x + (x_1 - x_3)\phi_1^y]; \\ \tilde{\phi}_{p_1}^3 &= \frac{1}{\det(B_T)} [(y_1 - y_2)\phi_1^x + (x_2 - x_1)\phi_1^y]; \\ \tilde{\phi}_{p_2}^3 &= \frac{1}{\det(B_T)} [(y_1 - y_2)\phi_2^x + (x_2 - x_1)\phi_2^y]; \\ \tilde{\phi}_{p_2}^1 &= \frac{1}{\det(B_T)} [(y_2 - y_3)\phi_2^x + (x_3 - x_2)\phi_2^y]; \\ \tilde{\phi}_{p_3}^1 &= \frac{1}{\det(B_T)} [(y_2 - y_3)\phi_3^x + (x_3 - x_2)\phi_3^y]; \\ \tilde{\phi}_{p_3}^2 &= \frac{1}{\det(B_T)} [(y_3 - y_1)\phi_3^x + (x_1 - x_3)\phi_3^y].\end{aligned}$$

Ainsi, il est possible d'implémenter toutes les dérivées secondes des fonctions de base d'Argyris par les relations suivantes (nous posons $\tilde{\phi}_i := \tilde{\phi}_{p_{i+2}}^{i+1} - \tilde{\phi}_{p_{i+1}}^{i+2}$ pour simplifier l'écriture) :

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 \tilde{\phi}_1 & \partial_{xy}^2 \tilde{\phi}_1 & \partial_{yy}^2 \tilde{\phi}_1 \\ \partial_{xx}^2 \tilde{\phi}_2 & \partial_{xy}^2 \tilde{\phi}_2 & \partial_{yy}^2 \tilde{\phi}_2 \\ \partial_{xx}^2 \tilde{\phi}_3 & \partial_{xy}^2 \tilde{\phi}_3 & \partial_{yy}^2 \tilde{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_4(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_4(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_4(\hat{x}, \hat{y}) \\ \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_5(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_5(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_5(\hat{x}, \hat{y}) \\ \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_6(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_6(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_6(\hat{x}, \hat{y}) \\ \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_7(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_7(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_7(\hat{x}, \hat{y}) \\ \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_8(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_8(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_8(\hat{x}, \hat{y}) \\ \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_9(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_9(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_9(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} \Upsilon;$$

pour $1 \leq i \leq 3$,

$$\begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 \phi_{p_i}^{11} & \partial_{xy}^2 \phi_{p_i}^{11} & \partial_{yy}^2 \phi_{p_i}^{11} \\ \partial_{xx}^2 \phi_{p_i}^{12} & \partial_{xy}^2 \phi_{p_i}^{12} & \partial_{yy}^2 \phi_{p_i}^{12} \\ \partial_{xx}^2 \phi_{p_i}^{22} & \partial_{xy}^2 \phi_{p_i}^{22} & \partial_{yy}^2 \phi_{p_i}^{22} \end{pmatrix} = \Theta^T \begin{pmatrix} \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_{7+3i}(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_{7+3i}(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_{7+3i}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_{8+3i}(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_{8+3i}(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_{8+3i}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_{9+3i}(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_{9+3i}(\hat{x}, \hat{y}) & \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_{9+3i}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix} \Upsilon;$$

pour $1 \leq i \leq 3$,

$$\left(\partial_{xx}^2 \phi_{e_i} \quad \partial_{xy}^2 \phi_{e_i} \quad \partial_{yy}^2 \phi_{e_i} \right) = |e_i| f_i \left(\partial_{\hat{x}\hat{x}}^2 \varphi_{18+i}(\hat{x}, \hat{y}) \quad \partial_{\hat{x}\hat{y}}^2 \varphi_{18+i}(\hat{x}, \hat{y}) \quad \partial_{\hat{y}\hat{y}}^2 \varphi_{18+i}(\hat{x}, \hat{y}) \right) \Upsilon.$$

Il reste maintenant à expliciter les coefficients. Pour ce faire, nous définissons $g_e = R(\phi_h) \cdot n_e$ où $R(\phi_h) = \sum_{T \in \mathcal{N}(\bar{\Omega})} R(\phi_h)(x) \lambda_x$ avec $R(\phi_h)(x) = \frac{1}{\#\{T \in \omega_x\}} \sum_{T \in \omega_x} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)|_T(x)$. Ainsi, en

posant $g_T = g_e n_e \cdot n_T$ et s_m le milieu d'arête, nous avons :

$$b_i = \frac{\int_{e_i} g_T \cdot n_T ds}{\int_{e_i} (\phi_{e_i}^{n;0} n_T) \cdot n_T ds};$$

$$d_i = \frac{\int_{e_i} (s - s_m) g_T \cdot n_T ds}{\int_{e_i} (s - s_m) (\phi_{e_i}^{n;1} n_T) \cdot n_T ds}.$$

Soit $q_1 = \sum_{i=1}^3 d_i \phi_{e_i}^{n;1}$. Alors :

$$c_i = \frac{\int_{e_i} (g_T - q_1 n_T) \cdot t_T ds}{\int_{e_i} (\phi_{e_i}^{t;0} n_T) \cdot t_T ds};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\int_{e_i} (s - s_m) (g_T - q_1 n_T) \cdot t_T ds}{\int_{e_i} (s - s_m) (\phi_{e_i}^{t;1} n_T) \cdot t_T ds}.$$

Ensuite, nous avons :

$$f_i^{11} = \left(\frac{1}{\#\{T \in \omega_{p_i}\}} \sum_{T \in \omega_{p_i}} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)|_T(p_i) \right)_{22};$$

$$f_i^{12} = - \left(\frac{1}{\#\{T \in \omega_{p_i}\}} \sum_{T \in \omega_{p_i}} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)|_T(p_i) \right)_{12};$$

$$f_i^{22} = \left(\frac{1}{\#\{T \in \omega_{p_i}\}} \sum_{T \in \omega_{p_i}} \mathcal{C}\varepsilon(\phi_h)|_T(p_i) \right)_{11}.$$

Enfin, soit $q_2 = \sum_{i=1}^3 \left(b_i \phi_{e_i}^{n;0} + c_i \phi_{e_i}^{t;0} + d_i \phi_{e_i}^{n;1} + \varepsilon_i \phi_{e_i}^{t;1} + \sum_{1 \leq k \leq j \leq 2} f_i^{kj} \phi_{p_i}^{k;j} \right)$. Alors :

$$a_i = \frac{\int_T (\mathcal{C}\varepsilon(\phi_h) - q_2) : (n_{e_{i+1}} n_{e_{i+2}}^T + n_{e_{i+2}} n_{e_{i+1}}^T) dx}{\int_T \phi_T^i : (n_{e_{i+1}} n_{e_{i+2}}^T + n_{e_{i+2}} n_{e_{i+1}}^T) dx}.$$

Annexe B

Construction de y^*

Nous rappelons que la discrétisation considérée est formée par les éléments finis de type MITC3 définis dans la section II.3.

Nous avons $(\gamma_h, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (g, v)_{L^2(\Omega)}$, $\forall v \in W_h$.

Il existe alors des éléments (voir [AO00] pour plus de détails) $g_e \in P_0(e)$ ($e \subset \partial T$) tels que

$$\int_T \gamma_h \cdot \nabla v \, dx = \int_T g v \, dx + \int_{\partial T} g_T v \, ds \quad \forall v \in P_1(T) \text{ avec } g_T = n_e \cdot n_T g_e = \pm g_e, \quad (\text{B.1})$$

(nous pouvons par exemple prendre $g_e = \frac{1}{|e|} \int_e \frac{\gamma_h|_T + \gamma_h|_K}{2} \cdot n_e$ si $E = \bar{T} \cap \bar{K}$).

$y^*|_T \in RT_0(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 + b x \\ a_2 + b y \end{pmatrix}, a_1, a_2, b \in \mathbb{R} \right\}$ est alors déterminé par les conditions

$$\int_e y^* \cdot n_e = \int_e g_e \quad \forall e \subset \partial T.$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_T \operatorname{div} y^* &= \int_{\partial T} y^* \cdot n_T \\ &= \int_{\partial T} g_T \\ (\text{B.1}) \quad &= \int_T \gamma_h \cdot \nabla 1 - \int_T g = - \int_T g \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \operatorname{div} y^* = -\frac{1}{|T|} \int_T g = -\Pi_0 g.$$

B.1 Vecteurs de base de Raviart-Thomas dans le triangle de référence

$$\widehat{\Xi}_1 \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} ; \widehat{\Xi}_2 \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \widehat{x} \\ -\widehat{y} \end{pmatrix} ; \widehat{\Xi}_3 \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} - 1 \end{pmatrix} .$$

Annexe C

Solution exacte du problème de Reissner-Mindlin

Pour trouver une solution exacte du problème de Reissner-Mindlin sur le carré unité $]0; 1]^2$, nous utilisons le système suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) = \gamma & \text{sur } \Omega, \\ -\operatorname{div} \gamma = g & \text{sur } \Omega, \\ \gamma = \lambda t^{-2}(\nabla\omega - \phi) & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

où :

$$\mathcal{C}\varepsilon(\phi) = 2\tilde{\mu}\varepsilon(\phi) + \tilde{\lambda}\operatorname{Tr}(\varepsilon(\phi))\mathbf{I},$$

et

$$\varepsilon(\phi) = \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1 & \frac{\partial_1\phi_2 + \partial_2\phi_1}{2} \\ \frac{\partial_1\phi_2 + \partial_2\phi_1}{2} & \partial_2\phi_2 \end{pmatrix}.$$

En remplaçant, dans la première relation de (C.1), γ par la relation donnée dans la troisième relation de (C.1), nous obtenons que

$$\begin{cases} \partial_1\omega = \phi_1 - \lambda^{-1}t^2 \left(2\tilde{\mu}(\partial_1^2\phi_1 + \frac{\partial_2\partial_1\phi_2 + \partial_2^2\phi_1}{2}) + \tilde{\lambda}\partial_1^2\phi_1 + \tilde{\lambda}\partial_1\partial_2\phi_2 \right) \\ \partial_2\omega = \phi_2 - \lambda^{-1}t^2 \left(2\tilde{\mu}(\partial_2^2\phi_2 + \frac{\partial_1\partial_2\phi_1 + \partial_1^2\phi_2}{2}) + \tilde{\lambda}\partial_2^2\phi_2 + \tilde{\lambda}\partial_2\partial_1\phi_1 \right) \end{cases}$$

Nous supposons que ϕ est suffisamment régulière pour que nous ayons :

$$\partial_1\partial_2\phi_i = \partial_2\partial_1\phi_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2\}, \quad (\text{C.2})$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \partial_1 \omega = \phi_1 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1^2 \phi_1 + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2 \partial_1 \phi_2 + \tilde{\mu} \partial_2^2 \phi_1 \right) & (L1) \\ \partial_2 \omega = \phi_2 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2^2 \phi_2 + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1 \partial_2 \phi_1 + \tilde{\mu} \partial_1^2 \phi_2 \right) & (L2) \end{cases} \quad (C.3)$$

En faisant la même hypothèse pour ω (*i.e.* $\partial_2 \partial_1 \omega = \partial_1 \partial_2 \omega$), nous obtenons que

$$\begin{aligned} & \partial_2 \phi_1 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2 \partial_1^2 \phi_1 + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2^2 \partial_1 \phi_2 + \tilde{\mu} \partial_2^3 \phi_1 \right) \\ &= \partial_1 \phi_2 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1 \partial_2^2 \phi_2 + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1^2 \partial_2 \phi_2 + \tilde{\mu} \partial_1^3 \phi_2 \right). \end{aligned}$$

Ensuite, nous posons $\tilde{\phi}_1 = \partial_2 \phi_1$ et $\tilde{\phi}_2 = \partial_1 \phi_2$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}_1 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1^2 \tilde{\phi}_1 + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2^2 \tilde{\phi}_2 + \tilde{\mu} \partial_2^2 \tilde{\phi}_1 \right) \\ &= \tilde{\phi}_2 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2^2 \tilde{\phi}_2 + (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1^2 \tilde{\phi}_1 + \tilde{\mu} \partial_1^2 \tilde{\phi}_2 \right) \\ &\Leftrightarrow \tilde{\phi}_1 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1^2 \tilde{\phi}_1 - (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_1^2 \tilde{\phi}_1 + \tilde{\mu} \partial_2^2 \tilde{\phi}_1 \right) \\ &= \tilde{\phi}_2 - \lambda^{-1} t^2 \left((2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2^2 \tilde{\phi}_2 - (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \partial_2^2 \tilde{\phi}_2 + \tilde{\mu} \partial_1^2 \tilde{\phi}_2 \right) \\ &\Leftrightarrow \tilde{\phi}_1 - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\mu} \Delta \tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2 - \lambda^{-1} t^2 \tilde{\mu} \Delta \tilde{\phi}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{\phi}_1 = \tilde{\phi}_2$ est une solution possible (ie $\partial_1 \phi_2 = \partial_2 \phi_1$).

Afin d'assurer la nullité aux bords de ϕ et de ses dérivées, ainsi que la relation (C.2), nous prenons :

$$\phi = \left(\frac{1-2x}{x^2(1-x)^2} \right) \exp \left(-\frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{y(1-y)} \right).$$

Maintenant que nous avons ϕ , nous obtenons aisément après plusieurs calculs les expressions de γ , ω et g ; à savoir :

- $\omega = \{1 - (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \lambda^{-1} t^2 (a(x) + a(y))\} \exp \left(-\frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{y(1-y)} \right);$
- $\gamma = -(2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \left(\begin{array}{c} a(y) \frac{1-2x}{x^2(1-x)^2} + b(x) \\ a(x) \frac{1-2y}{y^2(1-y)^2} + b(y) \end{array} \right) \exp \left(-\frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{y(1-y)} \right);$

- $g = (2\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \{c(x) + c(y) + 2a(x)a(y)\} \exp\left(-\frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{y(1-y)}\right)$;

avec

- $a(z) = \frac{6z^4 - 12z^3 + 12z^2 - 6z + 1}{z^4(1-z)^4}$;

- $b(z) = \frac{-24z^7 + 84z^6 - 156z^5 + 180z^4 - 128z^3 + 54z^2 - 12z + 1}{z^6(1-z)^6}$;

- $c(z) = \frac{120z^{10} - 600z^9 + 1620z^8 - 2880z^7 + 3504z^6 - 2952z^5}{z^8(1-z)^8} + \frac{1708z^4 - 656z^3 + 156z^2 - 20z + 1}{z^8(1-z)^8}$.

Annexe D

Programmation du système de Reissner-Mindlin

Nous nous plaçons dans le cas d'une discrétisation de type MITC3, autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_h = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Theta_h = \{\psi \in H_0^1(\Omega)^2 \mid v|_T \in \mathbb{P}_1(T)^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}; \\ \Gamma_h = ND_0 = \left\{ \rho \in H_0(\text{rot}, \Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T}_h, \exists a_1, a_2, b \in \mathbb{R} v|_T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\}. \end{array} \right.$$

Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 3}$ les coordonnées barycentriques associées au nœud X_i du triangle.
Le problème linéaire

$$a(\phi_h, \psi_h) + \lambda t^{-2}(\nabla \omega_h - \mathbf{R}_h \phi_h, \nabla v_h - \mathbf{R}_h \psi_h) = (g, v_h), \quad \forall (v_h, \psi_h) \in W_h \times \Theta_h$$

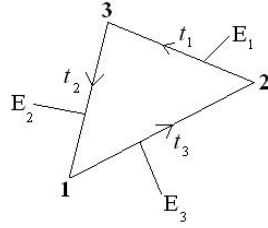
s'écrit sous forme matricielle : $\left(\begin{array}{c|c} \lambda t^{-2} RM1 & \lambda t^{-2} RM2 \\ \hline \lambda t^{-2} RM2^T & RM3 + \lambda t^{-2} RM4 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$,

où :

- $RM1(i, j) = (\nabla \lambda_i, \nabla \lambda_j)$;
- $RM2(i, 2j) = \left(\nabla \lambda_i, \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \right)$;
- $RM2(i, 2j+1) = \left(\nabla \lambda_i, \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} \right)$;
- $RM3(2i, 2j) = a \left(\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \right)$;
- $RM3(2i, 2j+1) = a \left(\begin{pmatrix} \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} \right)$;
- $RM3(2i+1, 2j) = a \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \right)$;

- $RM3(2i+1, 2j+1) = a \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} \right);$
- $RM4(2i, 2j) = \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \right);$
- $RM4(2i, 2j+1) = \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_i \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} \right);$
- $RM4(2i+1, 2j) = \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \right);$
- $RM4(2i+1, 2j+1) = \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \end{pmatrix}, \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} \right);$
- $B(i) = (g, \nabla \lambda_i).$

D.1 Produit scalaire entre $\mathbf{R}_h \phi_h$ et λ_i - Construction de la matrice $RM2$



Nous décomposons ϕ_h dans la base des $\begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}$; ce qui nous donne :

$$\phi_h = \sum_{j=1}^{\#\mathcal{N}(\bar{\Omega})} \phi_j^1 \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} + \phi_j^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

L'opérateur \mathbf{R}_h est défini par le système d'équations :

$$\forall E_j \in \mathcal{E}(\Omega), \int_{E_j} (\mathbf{R}_h \phi_h) \cdot \tau_j d\sigma = \int_{E_j} \phi_h \cdot \tau_j d\sigma \quad (\text{D.2})$$

L'objectif est de construire la matrice $RM2$ faisant intervenir le produit scalaire $(\mathbf{R}_h \phi_h, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ où $v|_T \in \mathbb{P}^1(T)$. Pour ce faire, nous allons utiliser la base des $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 3}$ pour les polynômes de degré 1. Ainsi, nous avons la i -ème ligne de la matrice $RM2$ par (D.1) et la linéarité de \mathbf{R}_h :

$$\sum_{j=1}^{\#\mathcal{N}(\bar{\Omega})} \left(\phi_j^1 \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} + \phi_j^2 \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \nabla \lambda_i \right)_{L^2(\Omega)} \quad (\text{D.3})$$

Ainsi, il nous suffit de calculer sur chaque triangle $T \in \mathcal{T}_h$ les produits scalaires

$\left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla \lambda_i \right)_{L^2(T)}$ et $\left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \nabla \lambda_i \right)_{L^2(T)}$; ce qui nous donne par sommation les lignes de la matrice $RM2$ correspondant aux degrés de liberté associés à ϕ_j^1 et ϕ_j^2 , à savoir :

$$\begin{cases} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla \lambda_i \right)_{L^2(T)} & \text{pour } \phi_j^1; \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \nabla \lambda_i \right)_{L^2(T)} & \text{pour } \phi_j^2. \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Remarque D.1.1 Pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, $\nabla \lambda_i$ est une constante et $\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix}$ (resp. $\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}$) est un polynôme de degré 1.

Grâce à la remarque précédente, nous pouvons exprimer le produit scalaire simplement. Soit G le centre de gravité du triangle T . Alors :

$$\begin{cases} \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla \lambda_i \right)_{L^2(T)} = |T| \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} (G) \cdot \nabla \lambda_i|_T; \\ \left(\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix}, \nabla \lambda_i \right)_{L^2(T)} = |T| \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} (G) \cdot \nabla \lambda_i|_T; \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

En se ramenant au triangle de référence \widehat{T} et en remarquant que $\nabla \lambda_i|_T = B_T^{-T} \widehat{\nabla} \widehat{\lambda}_j$ où $B_T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la transformation affine transformant \widehat{T} en T , il nous suffit de connaître les gradients des fonctions de base dans le triangle de référence pour avoir la valeur de $\nabla \lambda_i|_T$.

Il nous faut maintenant étudier $\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} (G)$ et $\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} (G)$. Or, pour tout sommet j de T , nous avons les relations suivantes par définition de \mathbf{R}_h :

$$\begin{cases} \int_{E_k} \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tau_k d\sigma = \int_{E_k} \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tau_k d\sigma = \int_{E_k} \lambda_j (\tau_k)_1 d\sigma = \frac{|E_k|}{2} (\tau_k)_1 =: \alpha_{j,k}^1 \text{ si } k \neq j; \\ \int_{E_j} \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \tau_j d\sigma = 0 =: \alpha_{j,j}^1. \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

Avec ces relations, nous pouvons exprimer plus facilement $\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ à l'aide des

fonctions de bases Ψ_k de Nédélec (ie $\Psi_k \in ND_0(T)$ et vérifie $\int_{E_j} \Psi_k \cdot \tau_j d\sigma = \delta_{jk}$) :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{j,k}^1 \Psi_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{R}_h \begin{pmatrix} \lambda_j \\ 0 \end{pmatrix} (G) &= \sum_{k=1}^3 \alpha_{j,k}^1 \underbrace{\Psi_k(G)}_{= B_T^{-T} \widehat{\Psi}_k(\widehat{G})} . \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

De la même manière, nous obtenons :

$$\mathbf{R}_h \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_j \end{pmatrix} (G) = \sum_{k=1}^3 \alpha_{j,k}^2 \underbrace{\Psi_k(G)}_{= B_T^{-T} \widehat{\Psi}_k(\widehat{G})} . \quad (\text{D.8})$$

$$\text{où } \alpha_{j,k}^2 := \begin{cases} \frac{|E_k|}{2} (\tau_k)_2 & \text{si } k \neq j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, en calculant les vecteurs de base de Nédélec dans le triangle de référence, nous obtenons les coefficients de la matrice $RM2$ avec les relations (D.7), (D.8), (D.5) et (D.4).

D.2 Vecteurs de base de Nédélec dans le triangle de référence

$$\widehat{\Psi}_1 \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\widehat{y} \\ \widehat{x} \end{pmatrix} ; \widehat{\Psi}_2 \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\widehat{y} \\ \widehat{x} - 1 \end{pmatrix} ; \widehat{\Psi}_3 \begin{pmatrix} \widehat{x} \\ \widehat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \widehat{y} \\ \widehat{x} \end{pmatrix} .$$

D.3 Produit scalaire entre $\mathbf{R}_h \phi_h$ et $\mathbf{R}_h(\lambda_j, 0)$ (resp. $\mathbf{R}_h(0, \lambda_j)$) - Construction de la matrice $RM4$

Pour trouver les différents coefficients qui interviennent, nous suivons le même raisonnement que dans la section D.1. Le seul souci se situe dans l'évaluation de l'intégrale donnée dans la relation (D.5). En effet, cette évaluation est exacte pour tout polynôme de degré au plus 1 : il faut donc modifier cette relation en faisant intervenir les points de Gauss de degré 2.

Annexe E

Nécessité de l'opérateur \mathbf{R}_h - Verrouillage numérique

L'opérateur \mathbf{R}_h est nécessaire car il permet d'éviter le phénomène de verrouillage numérique décrit dans la sous-section I.1.1. En effet, lorsque l'épaisseur t devient trop petite, l'erreur ne diminue plus lorsque l'on raffine le maillage ; ce qui n'est plus le cas avec l'utilisation de cet opérateur. Nous en donnons une illustration numérique (exécutée avec les éléments finis de type MITC3) avec le graphique suivant :

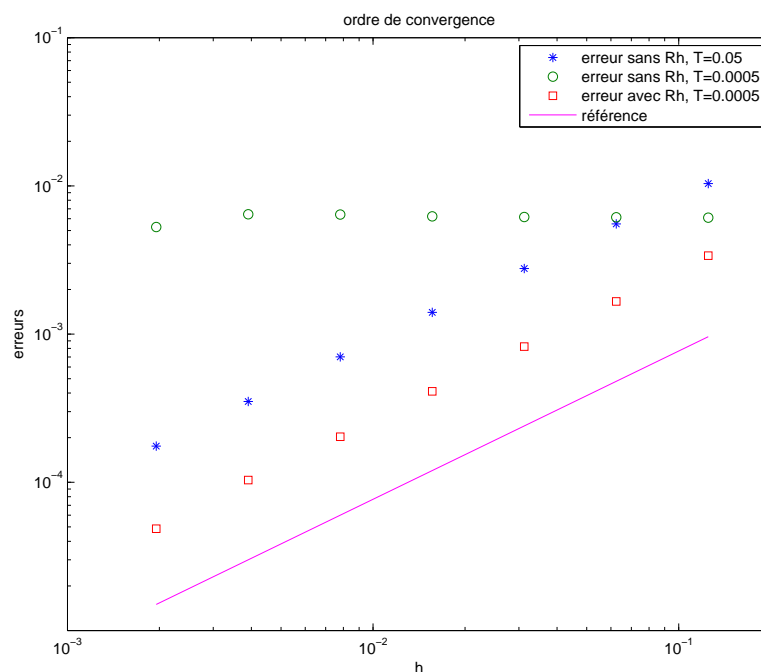


FIG. E.1: Mise en évidence du verrouillage numérique

Annexe F

Valeurs des constantes et relations

F.1 Détermination des constantes indépendantes de Ω et de la triangulation

F.1.1 Valeur de c_K

Tout d'abord, nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme F.1.1 *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Alors, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)^N$, nous avons :*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} \|\varepsilon(v)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve: Soit $v \in C_c^\infty(\Omega)^N$. Par intégration par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2 \int_{\Omega} |\varepsilon(v)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} \nabla v : (\nabla v)^T dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} |\operatorname{div} v|^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx. \end{aligned}$$

La densité de $C_c^\infty(\Omega)^N$ dans $H_0^1(\Omega)^N$ nous conduit au résultat. □

Nous utilisons le lemme précédent afin de déterminer c_K .

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\varepsilon(\phi) &= 2\tilde{\mu}\varepsilon(\phi) + \tilde{\lambda}\text{Tr}\varepsilon(\phi) : \mathbf{I} \\
\Rightarrow \|\phi\|_{\mathcal{C}}^2 &= \int_{\Omega} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi) dx \\
&= 2\tilde{\mu} \int_{\Omega} \varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi) dx + \tilde{\lambda} \int_{\Omega} \text{Tr}\varepsilon(\phi) \mathbf{I} : \varepsilon(\phi) dx \\
&= 2\tilde{\mu} \int_{\Omega} |\varepsilon(\phi)|^2 dx + \tilde{\lambda} \int_{\Omega} |\text{Tr}\varepsilon(\phi)|^2 dx \\
&\geq 2\tilde{\mu} \left(\frac{1}{2} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).
\end{aligned}$$

D'où $\|\phi\|_{\mathcal{C}}^2 \geq \tilde{\mu} \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \Leftrightarrow \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\tilde{\mu}} \|\phi\|_{\mathcal{C}}^2$.

Donc :

$$c_K \leq \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}}.$$

Or, si $\text{div}\phi = 0$, alors $\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{\tilde{\mu}} \|\phi\|_{\mathcal{C}}^2$, ce qui implique que

$$c_K = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}}.$$

F.1.2 Valeur de \widehat{c}_K

Par définition, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{\mathcal{C}}^2 &= \int_{\Omega} \mathcal{C}\varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi) dx \\
&= 2\tilde{\mu} \int_{\Omega} \varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi) dx + \tilde{\lambda} \int_{\Omega} (\text{Tr}\varepsilon(\phi))^2 dx.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \varepsilon(\phi) : \varepsilon(\phi) dx &= \int_{\Omega} (\partial_1\phi_1)^2 + 2 \left(\frac{\partial_1\phi_2 + \partial_2\phi_1}{2} \right)^2 + (\partial_2\phi_2)^2 \\
&\leq \int_{\Omega} (\partial_1\phi_1)^2 + \frac{1}{2} [2(\partial_1\phi_2)^2 + 2(\partial_2\phi_1)^2] + (\partial_2\phi_2)^2 \\
&= \|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (Tr \varepsilon(\phi))^2 dx &= \int_{\Omega} (\partial_1 \phi_1 + \partial_2 \phi_2)^2 dx \\ &\leq 2 \int_{\Omega} [(\partial_1 \phi_1)^2 + (\partial_2 \phi_2)^2] dx \\ &\leq 2 \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

D'où, en combinant les deux relations précédentes :

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{\mathcal{C}}^2 &\leq 2\tilde{\mu} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\tilde{\lambda} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq 2(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}) \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \widehat{c}_K &\leq \sqrt{2(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}. \end{aligned}$$

Or, si $\partial_1 \phi_1 = \partial_2 \phi_2$ et $\partial_2 \phi_1 = \partial_1 \phi_2 = 0$, alors $\|\phi\|_{\mathcal{C}}^2 = \sqrt{2(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})} \|\nabla \phi\|_{L^2(\Omega)}^2$, ce qui implique que

$$\widehat{c}_K = \sqrt{2(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})}.$$

F.2 Détermination des constantes liées à Ω et/ou à la triangulation - Valeurs des constantes choisies pour la partie numérique

F.2.1 Valeur de c_F

Nous avons choisi $\Omega =]0; 1[^2$. Alors nous avons la valeur théorique suivante (cf [Val09]) :

$$c_F = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

F.2.2 Relation pour c_R

Soit $\chi = (\mathbf{R}_h - \mathbf{I})\phi_h \in H_0(\text{rot}, \Omega)$. Montrons qu'il existe (comme dans [BF91]) $(\beta, z) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times H_0^1(\Omega)$ tel que $\chi = \nabla z - \beta$.

Nous choisissons $v \in (H_0^1(\Omega))^2$ tel que $\text{div } v = -\text{rot } \chi$.

Nous prenons $\beta = (\beta_1, \beta_2) = (-v_2, v_1)$.

Alors $\text{rot } \beta = -\text{rot } \chi$ et $\|\nabla \beta\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|\text{rot } \chi\|_{L^2(\Omega)}$.

Ensuite, nous choisissons z comme unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$\Delta z = \operatorname{div} \chi + \operatorname{div} \beta \in H^{-1}(\Omega).$$

$$\begin{aligned} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \nabla z \nabla w \, dx \\ &= \langle \operatorname{div} \chi + \operatorname{div} \beta, z \rangle_{H^{-1}(\Omega) - H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \|\operatorname{div} \chi + \operatorname{div} \beta\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} \\ \Rightarrow \|\nabla z\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\operatorname{div} \chi + \operatorname{div} \beta\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|\chi\|_{L^2(\Omega)} + \|\beta\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\chi\|_{L^2(\Omega)} + C_1 c_F \|\operatorname{rot} \chi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (1 + C_1^2 c_F^2)^{1/2} \|\chi\|_{H_0(\operatorname{rot}, \Omega)}. \end{aligned}$$

D'où :

$$c_{\mathbf{R}} \leq C_1 \text{ et } C \leq (1 + c_F^2)(C_1^2 + 1 + C_1^2 c_F^2),$$

où la constante C vérifiait (cf (I.10)) :

$$\|z\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\beta\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|\chi\|_{H_0(\operatorname{rot}, \Omega)}.$$

Il nous reste à déterminer C_1 . En fait, nous avons la condition inf-sup :

$$C_{is} := \inf_{q \in L_0^2(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{v \in H_0^1(\Omega)^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{(\operatorname{div} v, q)_{L^2(\Omega)}}{\|q\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{1}{C_1}.$$

$$\text{où } L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}.$$

En pratique, nous prenons $C_1 = C_{is}^{-1}$.

D'où :

$$C \leq (1 + c_F^2) \frac{C_{is}^2 + 1 + c_F^2}{C_{is}^2}.$$

Remarque F.2.1 *Nous ne sommes pas parvenus à déterminer une borne supérieure pour C_1 : nous avons simplement une borne inférieure. Nous prenons malgré tout $C_1 = C_{is}^{-1}$, mais cet abus ne porte pas vraiment à conséquence car ce facteur intervient seulement dans une contribution de l'estimateur négligeable (numériquement) vis à vis des autres contributions, et par conséquent de l'estimateur.*

Nous pouvons prouver (cf [HP83]) que dans ce domaine, $C_{is} \leq 2\sqrt{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}$, expression que nous utiliserons à défaut pour $c_{\mathbf{R}}$ (cependant, il est conjecturé que $C_{is} = \sqrt{\frac{2\pi}{\pi-2}}$, voir [Dau08]).

Annexe G

Projections locales $\widetilde{\Pi}_i$ et Π_i

Nous rappelons les différentes notations que nous avons introduites :

- i représente un nœud de la triangulation ;
- ω_i désigne le patch associé au nœud i (c'est l'ensemble des triangles ayant i pour sommet) ;
- λ_i est la fonction de base \mathbb{P}_1 associée au point i ;
- $W(\omega_i) = \begin{cases} \left\{ v \in H^1(\omega_i) : \int_{\omega_i} v \lambda_i = 0 \text{ et } \int_{\omega_i} |\nabla v|^2 \lambda_i < \infty \right\} & \text{si } i \in \mathcal{N}(\Omega); \\ \left\{ v \in H^1(\omega_i) : v = 0 \text{ dans } \partial\omega_i \cap \partial\Omega \text{ et } \int_{\omega_i} |\nabla v|^2 \lambda_i < \infty \right\} & \text{si } i \in \mathcal{N}(\partial\Omega); \end{cases}$
- $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}^k(\omega_i) = \{u \in \mathbb{P}_k(\omega_i) \mid u = 0 \text{ sur } \partial\omega_i\}$;
- $\mathcal{P}_0^k(\omega_i) = \mathcal{P}^k(\omega_i) \cap W(\omega_i)$;
- Γ_i est l'ensemble des arêtes de la triangulation dans $\overline{\Omega}$ ayant le point i pour sommet ;
- si S désigne une arête de Ω , ω_S désigne le patch lié à S (ce sont les deux triangles ayant S pour arête).

G.1 Calcul de $\widetilde{\Pi}_i \psi$

G.1.1 Calcul des coefficients

Soit $\psi \in W(\omega_i)^2$, ce qui implique que $\int_{\omega_i} \psi \lambda_i = 0$. Dans le cas MITC3, $\widetilde{\Pi}_i \psi$ est la projection sur $(\mathcal{P}_0^2(\omega_i))^2$ telle que¹ :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{\omega_i} (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i) \psi \lambda_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \int_S (\mathbf{I} - \widetilde{\Pi}_i) \psi \lambda_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall S \subset \Gamma_i. \end{array} \right. \quad (\text{G.1})$$

Soit :

$$\widetilde{\Pi}_i \psi = \sum_{S \subset \Gamma_i} \alpha_S q_S + \beta q_i$$

¹Pour le cas Durán-Liberman, l'étude est similaire à la section G.2.

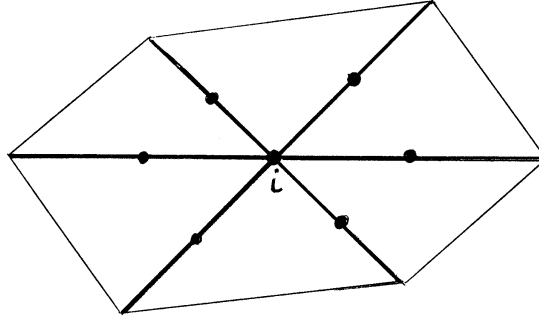


FIG. G.1: Exemple de patch ω_i - les points représentant les degrés de liberté de $\widetilde{\Pi}_i$.

où (cf la section G.1.2 pour l'expression des fonctions de base dans le triangle de référence) :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i \text{ est la fonction de base quadratique associée au centre de } \omega_i; \\ q_S \text{ est la fonction de base quadratique associée au milieu de l'arête } S \subset \Gamma_i; \\ \alpha_S \text{ et } \beta \text{ sont des vecteurs de } \mathbb{R}^2. \end{array} \right.$$

Les fonctions de base q_S vérifient $\int_{S'} q_S \lambda_i = 0$ si $S \neq S'$. Ainsi, la deuxième relation de (G.1) nous donne :

$$\alpha_S = \frac{\int_S \psi \lambda_i - \beta \int_S q_i \lambda_i}{\int_S q_S \lambda_i}.$$

Nous allons nous servir de cette relation ainsi que la première relation de (G.1) afin de pouvoir déterminer β , ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \int_{\omega_i} \left(\sum_S \alpha_S q_S + \beta q_i \right) \lambda_i \\ &= \sum_S \frac{\int_S \psi \lambda_i - \beta \int_S q_i \lambda_i}{\int_S q_S \lambda_i} \int_{\omega_i} q_S \lambda_i + \beta \int_{\omega_i} q_i \lambda_i \\ &= \beta \left[\int_{\omega_i} q_i \lambda_i - \sum_S \frac{\int_S q_i \lambda_i}{\int_S q_S \lambda_i} \int_{\omega_i} q_S \lambda_i \right] + \sum_S \frac{\int_{\omega_i} q_S \lambda_i}{\int_S q_S \lambda_i} \int_S \psi \lambda_i \end{aligned}$$

Or, en se ramenant aux fonctions de base dans le triangle de référence, nous avons :

$$\int_S q_S \lambda_i = \frac{|S|}{3}; \quad \int_{\omega_i} q_i \lambda_i = \frac{|\omega_i|}{30}; \quad \int_{\omega_i} q_S \lambda_i = \frac{2|\omega_S|}{15}; \quad \int_S q_i \lambda_i = \frac{|S|}{6}.$$

Ainsi :

$$\beta = \frac{4}{|\omega_i|} \sum_S \left(\frac{|\omega_S|}{|S|} \int_S \psi \lambda_i \right) \quad (\text{G.2})$$

et :

$$\alpha_S = \frac{3}{|S|} \left(\int_S \psi \lambda_i - \beta \frac{|S|}{6} \right). \quad (\text{G.3})$$

G.1.2 Fonctions de base

Nous listons ici les fonctions de base dans le triangle de référence \widehat{T} utilisées pour la construction de l'opérateur de projection $\widetilde{\Pi}_i$, les degrés de liberté correspondants étant précisés à la fin de chaque ligne :

$\widehat{q}_0(\widehat{x}, \widehat{y}) = 1 - 3\widehat{x} - 3\widehat{y} + 2\widehat{x}^2 + 4\widehat{x}\widehat{y} + 2\widehat{y}^2$	est la fonction de base associée au point	(0, 0)
$\widehat{q}_1(\widehat{x}, \widehat{y}) = -\widehat{x} + 2\widehat{x}^2$	est la fonction de base associée au point	(1, 0)
$\widehat{q}_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = -\widehat{y} + 2\widehat{y}^2$	est la fonction de base associée au point	(0, 1)
$\widehat{q}_3(\widehat{x}, \widehat{y}) = 4\widehat{x}\widehat{y}$	est la fonction de base associée au point	(1/2; 1/2)
$\widehat{q}_4(\widehat{x}, \widehat{y}) = 4\widehat{y} - 4\widehat{x}\widehat{y} - 4\widehat{y}^2$	est la fonction de base associée au point	(0; 1/2)
$\widehat{q}_5(\widehat{x}, \widehat{y}) = 4\widehat{x} - 4\widehat{x}^2 - 4\widehat{x}\widehat{y}$	est la fonction de base associée au point	(1/2; 0)

G.1.3 Démonstration de $\|\nabla \widetilde{\Pi}_i \psi\|_{L^2(\Omega), \lambda_i} \lesssim \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega), \lambda_i}$

Nous posons $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. Or d'après la proposition 2.4 de [MNS02], pour $a \in \{1, 2\}$, nous avons :

$$\|\psi_a\|_{L^2(\omega_i)} \lesssim h_i \|\nabla \psi_a\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}.$$

où $h_i = \text{diam}(\omega_i)$.

Afin de simplifier les notations, nous notons les normes de vecteurs $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\left| \begin{array}{l} \|v\|_1 = |a| + |b|; \\ \|v\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}. \end{array} \right.$$

Or, par le théorème de trace dans L^1 , nous avons :

$$\left| \begin{array}{l} \int_S |\psi_1 \lambda_i| \lesssim \|\psi_1\|_{L^2(\omega_i)}; \\ \int_S |\psi_2 \lambda_i| \lesssim \|\psi_2\|_{L^2(\omega_i)}. \end{array} \right.$$

D'où, en utilisant respectivement l'équivalence des normes en dimension finie, le théorème de trace dans L^1 et l'inégalité de Poincaré avec poids :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_S \psi \lambda_i \right\|_2 &\lesssim \left\| \int_S \psi \lambda_i \right\|_1 \\
&= \left| \int_S \psi_1 \lambda_i \right| + \left| \int_S \psi_2 \lambda_i \right| \\
&\lesssim \|\psi_1\|_{L^2(\omega_i)} + \|\psi_2\|_{L^2(\omega_i)} \\
&\lesssim h_i \sum_{a=1}^2 \|\nabla \psi_a\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i} \\
&\lesssim h_i \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}.
\end{aligned}$$

D'où, en utilisant la relation (G.2) :

$$\begin{aligned}
\|\beta\|_2 &\lesssim \frac{1}{h_i^2} \sum_S h_S \left\| \int_S \psi \lambda_i \right\|_2 \\
&\lesssim \frac{1}{h_i^2} \sum_S h_S h_i \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i} \\
&\lesssim \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|\nabla(\beta q_i)\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i} = \|\beta\|_2 \underbrace{\|\nabla q_i\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}}_{\approx 1} \lesssim \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}.$$

En utilisant la relation (G.3), nous avons trivialement :

$$\|\alpha_S\|_2 \lesssim \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i},$$

ce qui implique :

$$\|\nabla(\alpha_S q_S)\|_{L^2(\omega_i)} \lesssim \|\nabla \psi\|_{L^2(\omega_i), \lambda_i}.$$

Remarque G.1.1 *Nous avons utilisé dans la démonstration précédente le fait que $|\omega_S| \approx |\omega_i|$ et $h_i \approx |S|$, ce qui est vérifié grâce à la régularité du maillage.*

G.2 Calcul de $\Pi_i v$

G.2.1 Calcul des coefficients

Soit $v \in W(\omega_i)$, ce qui implique que $\int_{\omega_i} v \lambda_i = 0$. $\Pi_i v$ est la projection sur $\mathcal{P}_0^3(\omega_i)$ telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \int_{\omega_i} (\mathbf{I} - \Pi_i) v \lambda_i = 0; \\ \int_S (\mathbf{I} - \Pi_i) v \lambda_i d\sigma = 0; \\ \int_S (\mathbf{I} - \Pi_i) v \sigma \lambda_i d\sigma = 0. \end{array} \right. \quad (\text{G.4})$$

Soit :

$$\Pi_i v = \sum_{S \subset \Gamma_i} \alpha_S^1 q_S^1 + \sum_{S \subset \Gamma_i} \alpha_S^2 q_S^2 + \beta q_i$$

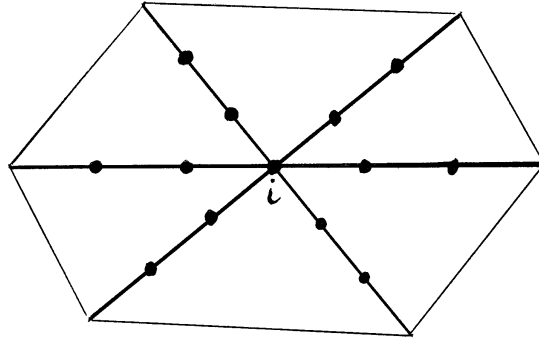


FIG. G.2: Exemple de patch ω_i - les points représentant les degrés de liberté de Π_i .

où (cf la section (G.2.2 pour l'expression des fonctions de base dans le triangle de référence) :

$$\left| \begin{array}{l} q_i \text{ est la fonction de base de degré 3 associée au centre de } \omega_i; \\ q_S^1 \text{ est la fonction de base de degré 3 associée au premier tiers de l'arête } S \subset \Gamma_i; \\ q_S^2 \text{ est la fonction de base de degré 3 associée au deuxième tiers de l'arête } S \subset \Gamma_i; \\ \alpha_S^1, \alpha_S^2 \text{ et } \beta \text{ sont des réels.} \end{array} \right.$$

Les fonctions de base q_S^1 et q_S^2 vérifient $\int_{S'} q_S^1 \lambda_i d\sigma = \int_{S'} q_S^2 \lambda_i d\sigma = \int_{S'} q_S^1 \sigma \lambda_i d\sigma = \int_{S'} q_S^2 \sigma \lambda_i d\sigma = 0$ si $S \neq S'$. Ainsi, les deux dernières relations de (G.4) nous donnent :

$$\left| \begin{array}{l} \int_S v \lambda_i d\sigma = \beta \int_S q_i \lambda_i d\sigma + \alpha_S^1 \int_S q_S^1 \lambda_i d\sigma + \alpha_S^2 \int_S q_S^2 \lambda_i d\sigma, \\ \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma = \beta \int_S q_i \sigma \lambda_i d\sigma + \alpha_S^1 \int_S q_S^1 \sigma \lambda_i d\sigma + \alpha_S^2 \int_S q_S^2 \sigma \lambda_i d\sigma. \end{array} \right.$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \int_S q_S^1 \lambda_i d\sigma & \int_S q_S^2 \lambda_i d\sigma \\ \int_S q_S^1 \sigma \lambda_i d\sigma & \int_S q_S^2 \sigma \lambda_i d\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_S^1 \\ \alpha_S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_S v \lambda_i d\sigma - \beta \int_S q_i \lambda_i d\sigma \\ \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma - \beta \int_S q_i \sigma \lambda_i d\sigma \end{pmatrix}. \quad (\text{G.5})$$

En se ramenant aux fonctions de base dans le triangle de référence, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_S q_S^1 \lambda_i d\sigma &= \frac{3|S|}{10}; & \int_S q_S^2 \lambda_i d\sigma &= \frac{3|S|}{40}; & \int_S q_S^1 \sigma \lambda_i d\sigma &= \frac{3|S|}{40}; \\ \int_S q_S^2 \sigma \lambda_i d\sigma &= \frac{3|S|}{40}; & \int_S q_i \lambda_i d\sigma &= \frac{13|S|}{120}; & \int_S q_i \sigma \lambda_i d\sigma &= \frac{|S|}{120}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \alpha_S^1 \\ \alpha_S^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3|S|}{10} & \frac{3|S|}{40} \\ \frac{3|S|}{40} & \frac{3|S|}{40} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \int_S v \lambda_i d\sigma - \frac{13|S|}{120} \beta \\ \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma - \frac{|S|}{120} \beta \end{pmatrix},$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \alpha_S^1 = \frac{40}{9|S|} \left(\int_S v \lambda_i d\sigma - \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma - \frac{|S|}{10} \beta \right) \\ \alpha_S^2 = \frac{40}{9|S|} \left(4 \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma - \int_S v \lambda_i d\sigma + \frac{3|S|}{40} \beta \right). \end{cases} \quad (\text{G.6})$$

La première relation de (G.4) donne quant à elle :

$$\begin{aligned} -\beta \int_{\omega_i} q_i \lambda_i &= \sum_{S \subset \Gamma_i} \alpha_S^1 \int_{\omega_i} q_S^1 \lambda_i + \sum_{S \subset \Gamma_i} \alpha_S^2 \int_{\omega_i} q_S^2 \lambda_i \\ &= \sum_{S \subset \Gamma_i} \frac{40}{9|S|} \left(\int_S v \lambda_i d\sigma - \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma - \frac{|S|}{10} \beta \right) \int_{\omega_i} q_S^1 \lambda_i \\ &\quad + \sum_{S \subset \Gamma_i} \frac{40}{9|S|} \left(4 \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma - \int_S v \lambda_i d\sigma + \frac{3|S|}{40} \beta \right) \int_{\omega_i} q_S^2 \lambda_i. \end{aligned}$$

Or, en se ramenant au triangle de référence, nous avons :

$$\int_{\omega_i} q_S^1 \lambda_i = \frac{3|\omega_S|}{40}; \quad \int_{\omega_i} q_S^2 \lambda_i = 0; \quad \int_{\omega_i} q_i \lambda_i = \frac{|\omega_i|}{60}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} -\frac{|\omega_i|}{60} \beta &= \sum_{S \subset \Gamma_i} \frac{40}{9|S|} \left(\int_S v \lambda_i d\sigma - \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma - \frac{|S|}{10} \beta \right) \frac{3|\omega_S|}{40} \\ &= \sum_{S \subset \Gamma_i} \frac{|\omega_S|}{3|S|} \left(\int_S v \lambda_i d\sigma - \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma \right) - \beta \sum_{S \subset \Gamma_i} \frac{|\omega_S|}{30}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{S \subset \Gamma_i} |\omega_S| = 2|\omega_i|$, nous avons :

$$\beta \left(\frac{|\omega_i|}{15} - \frac{|\omega_i|}{60} \right) = \sum_{S \subset \Gamma_i} \frac{|\omega_S|}{3|S|} \left(\int_S v \lambda_i d\sigma - \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma \right),$$

ce qui nous donne :

$$\beta = \frac{20}{3|\omega_i|} \sum_{S \subset \Gamma_i} \frac{|\omega_S|}{|S|} \left(\int_S v \lambda_i d\sigma - \int_S v \sigma \lambda_i d\sigma \right). \quad (\text{G.7})$$

G.2.2 Fonctions de base

Nous listons ici les fonctions de base dans le triangle de référence \widehat{T} utilisées pour la construction de l'opérateur de projection Π_i , les degrés de liberté correspondants étant précisés à la fin de chaque ligne :

$\widehat{p}_0(\widehat{x}, \widehat{y}) = 1 - 5.5\widehat{x} - 5.5\widehat{y} + 9\widehat{x}^2 + 18\widehat{x}\widehat{y} + 9\widehat{y}^2 - 4.5\widehat{x}^3 - 13.5\widehat{x}^2\widehat{y} - 13.5\widehat{x}\widehat{y}^2 - 4.5\widehat{y}^3$	point	(0, 0)
$\widehat{p}_1(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{x} - 4.5\widehat{x}^2 + 4.5\widehat{x}^3$	point	(1, 0)
$\widehat{p}_2(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widehat{y} - 4.5\widehat{y}^2 + 4.5\widehat{y}^3$	point	(0, 1)
$\widehat{p}_3(\widehat{x}, \widehat{y}) = 9\widehat{x} - 22.5\widehat{x}^2 - 22.5\widehat{x}\widehat{y} + 13.5\widehat{x}^3 + 27\widehat{x}^2\widehat{y} + 13.5\widehat{x}\widehat{y}^2$	point	(1/3; 0)
$\widehat{p}_4(\widehat{x}, \widehat{y}) = -4.5\widehat{x} + 18\widehat{x}^2 + 4.5\widehat{x}\widehat{y} - 13.5\widehat{x}^3 - 13.5\widehat{x}^2\widehat{y}$	point	(2/3; 0)
$\widehat{p}_5(\widehat{x}, \widehat{y}) = -4.5\widehat{x}\widehat{y} + 13.5\widehat{x}^2\widehat{y}$	point	(2/3; 1/3)
$\widehat{p}_6(\widehat{x}, \widehat{y}) = -4.5\widehat{x}\widehat{y} + 13.5\widehat{x}\widehat{y}^2$	point	(1/3; 2/3)
$\widehat{p}_7(\widehat{x}, \widehat{y}) = -4.5\widehat{y} + 4.5\widehat{x}\widehat{y} + 18\widehat{y}^2 - 13.5\widehat{x}\widehat{y}^2 - 13.5\widehat{y}^3$	point	(0; 2/3)
$\widehat{p}_8(\widehat{x}, \widehat{y}) = 9\widehat{y} - 22.5\widehat{x}\widehat{y} - 22.5\widehat{y}^2 + 13.5\widehat{x}^2\widehat{y} + 27\widehat{x}\widehat{y}^2 + 13.5\widehat{y}^3$	point	(0; 1/3)
$\widehat{p}_9(\widehat{x}, \widehat{y}) = 27\widehat{x}\widehat{y} - 27\widehat{x}^2\widehat{y} - 27\widehat{x}\widehat{y}^2$	point	(1/3; 1/3)

Remarque G.2.1 La fonction de base $\widehat{p}_9(\widehat{x}, \widehat{y})$ n'est pas utilisée pour la construction de l'opérateur de projection Π_i .

G.2.3 Démonstration de $\|\nabla \Pi_i v\|_{L^2(\Omega), \lambda_i} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\Omega), \lambda_i}$

D'après le théorème de trace dans L^1 et le théorème 2.4 de [MNS02], nous avons :

$$\int_S |v \lambda_i| d\sigma \lesssim \|v\|_{L^2(\omega_i)} \lesssim h_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega), \lambda_i},$$

et

$$\int_S |v \sigma \lambda_i| d\sigma \leq |S| \int_S |v \lambda_i| d\sigma \lesssim |S| h_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega), \lambda_i}.$$

D'où :

$$|\beta| \lesssim \frac{1}{|\omega_i|} \sum_{S \subset \Gamma_i} (h_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega, \lambda_i)} + |S| h_i \|\nabla v\|_{L^2(\Omega, \lambda_i)}) \lesssim (1 + h) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega, \lambda_i)}$$

où $h = \max_{i \in \mathcal{N}} h_i$.

Nous concluons aisément en se rappelant que $\|\nabla q_i\|_{L^2(\Omega, \lambda_i)} \approx \|\nabla q_S^1\|_{L^2(\Omega, \lambda_i)} \approx \|\nabla q_S^2\|_{L^2(\Omega, \lambda_i)} \approx 1$.

Bibliographie

- [AO00] M. Ainsworth and J.T. Oden. *The Equilibrated Residual Method* in : Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden, *A posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, Pure and Applied Mathematics - A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts, Pages 111-144, (2000).
- [AB93] D.N. Arnold and F. Brezzi. *Some New Elements for the Reissner-Mindlin Plate Model* in *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications*, J.-L. Lions and C. Baiocchi, eds., Masson, Pages 287-292, (1993).
- [ABFM07] D.N. Arnold, F. Brezzi, R.S. Falk and L. D. Marini. *Locking-free Reissner-Mindlin elements without reduced integration*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Volume 196, Pages 3660-3671, (2007).
- [AW02] D.N. Arnold and R. Winther. *Mixed finite elements methods for elasticity*. *Numer. Math.*, Volume 92, Number 3, Pages 401-419, (2002).
- [BBF] K.J. Bathe, F. Brezzi and M. Fortin. *A simplified analysis of two-plate elements : The MITC4 and MITC9 element*. G.N. Pande and J. Middleton (eds), Volume 1, Numeta 87, *Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design*, Martinus Nijhoff, Amsterdam.
- [BBF89] K.J. Bathe, F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed-interpolated elements for Reissner-Mindlin plates*. *Int. J. Num. Meths. Engrg.*, Volume 28, Number 8, Pages 1787-1801, (1989).
- [BD85] K.J. Bathe and E. Dvorkin. *A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and a mixed interpolation*. *Int. J. Num. Meths. Engrg.*, Volume 21, Pages 367-383, (1985).
- [BBLMS11] L. Beirão da Veiga, A. Buffa, C. Lovadina, M. Martinelli and G. Sangalli. *An isogeometric method for the Reissner-Mindlin plate bending problem*. Technical report 2011.
- [BMM10] P.R. Bösing, A.L. Madureira and I. Mozolevski. *A new interior penalty discontinuous Galerkin method for the Reissner-Mindlin model*. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Volume 20, Number 8, Pages 1343-1361, (2010).
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element methods*. Springer Series in Computational Mathematics, 15, Springer-Verlag, New York, Pages 295-323, (1991).

- [BM03] F. Brezzi and L.D. Marini. *A nonconforming element for the Reissner-Mindlin plate*. Computers and Structures, Volume 81, Pages 515-522, (2003).
- [Car02] C. Carstensen. *Residual-based a posteriori error estimate for a nonconforming Reissner-Mindlin plate finite element*. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 39, Number 6, Pages 2034-2044, (2002).
- [CF00] C. Carstensen and S.A. Funken, Constants in Clément-interpolation error and residual based a posteriori error estimates in Finite Element Methods, East-West J. Numer. Math., Volume 8, Number 3, Pages 153-175, (2000).
- [CH07] C. Carstensen and J. Hu. *A posteriori error analysis for conforming MITC elements for Reissner-Mindlin plates*. Mathematics of computation, Volume 77, Number 262, Pages 611-632, April 2008.
- [CS06] C. Carstensen and J. Schöberl. *Residual-based a posteriori error estimate for a mixed Reissner-Mindlin plate finite element method*. Numer. Math., Volume 103, Pages 225-250, (2006).
- [CV99] C. Carstensen and R. Verfürth. *Edge residuals dominate a posteriori error estimates for low order finite element methods*. SIAM J. Numer. Anal., Volume 36, Number 5, Pages 1571-1587, (1999).
- [CW01] C. Carstensen and K. Weinberg. *Adaptive mixed finite element method for Reissner-Mindlin plate*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Volume 190, Numbers 51-52, Pages 6895-6908, (2001).
- [CW03] C. Carstensen and K. Weinberg. *An adaptive non-conforming finite-element method for Reissner-Mindlin plates*. Internat. J. Numer. Engrg., Volume 56, Number 15, Pages 2313-2330, (2003).
- [CXYZ11] C. Carstensen, X. Xie, G. Yu and T. Zhou. *A priori and a posteriori analysis for a locking-free low order quadrilateral hybrid finite element for Reissner-Mindlin plates*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Volume 200, Pages 1161-1175, (2011).
- [CLM06] C. Chinosi, C. Lovadina and L.D. Marini. *Nonconforming locking-free finite elements for Reissner-Mindlin plates*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 195, Pages 3448-3460, (2006).
- [Clé75] Ph. Clément. *Approximation by finite element functions using local regularization*. Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, Tome 9, Numéro 2, Pages 77-84, (1975).
- [CN10] S. Cochez-Dhondt and S. Nicaise. *A posteriori error estimators based on equilibrated fluxes*. Comput. Methods Appl. Math., Volume 10, Number 1, Pages 49-68, (2010).
- [Dau08] <http://anum-maths.univ-rennes1.fr/JourneesEquipe/04JEAN/Transparents/Dauge.pdf>.
- [DR80] D.J. Dawe and O.L. Roufaeil. *Raileigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates*. J. Sound. Vib., Volume 69, Issue 3, Pages 345-359, (1980).
- [DS09] V. Domínguez and F.J. Sayas. *Algorithm 884 : a simple Matlab implementation of the Argyris element*. ACM Trans. Math. Software, Volume 35, Number 2, Article 16, 11 pages, (2009).

- [DHHLR03] R. Durán, E. Hernández, L. Hervella-Nieto, E. Liberman, and R. Rodríguez. *Error estimates for lower-order isoparametric quadrilateral finite elements for plates*. SIAM J. Numer. Anal., Volume 41, Number 5, Pages 1751-1772, (2003).
- [DHLRS99] R.G. Durán, L. Hervella-Nieto, E. Liberman, R. Rodríguez and J. Solomin. *Approximation of the vibration modes of a plate by Reissner-Mindlin equations*. Math. Comp., Volume 68, Number 228, Pages 1447-1463, (1999).
- [DHLRS00] R.G. Durán, L. Hervella-Nieto, E. Liberman, R. Rodríguez and J. Solomin. *Finite element analysis of the vibration problem of a plate coupled with a fluid*. Numer. Math., Volume 86, Number 4, Pages 591-616, (2000).
- [DL92] R.G. Durán and E. Liberman. *On mixed finite element methods for the Reissner-Mindlin plate model*. Mathematics of computation, Volume 58, Number 198, Pages 561-573, (1992).
- [DRS11] R.G. Durán, R. Rodríguez and F. Sanhueza. *Numerical analysis of a finite element method to compute the vibration modes of a Reissner-Mindlin laminated plate*. Mathematics of Computation, Volume 80, Number 275, Pages 1239-1364, (2011).
- [Fal07] R.S. Falk. *Finite Elements for the Reissner-Mindlin Plate*. in : D.Boffi and al, *Mixed finite elements, compatibility conditions and applications*, Lectures Notes in Mathematics, 1939, Pages 195-232, (2008).
- [FT99] R.S. Falk and T. Tu. *Locking-free finite elements for the Reissner-Mindlin plate*. Mathematics of computation, Volume 69, Number 231, Pages 911-928, (2000).
- [FNR06] M.E. Frolov, P. Neittaanmäki, S.I. Repin. *Guaranteed functional error estimates for the Reissner-Mindlin plate problem*. Journal of Mathematical Sciences, Volume 132, Number 4, Pages 553-561, 2006.
- [GR86] V. Girault, P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics, 5. Springer-Verlag, Berlin, (1986).
- [GLP03] D. Gómez, M. Lobo and E. Pérez. *On the vibrations of a plate with a concentrated mass and very small thickness*. Math. Meth. Appl. Sci., Volume 26, Pages 27-65, (2003).
- [Gri92] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*. Research Notes in Applied Mathematics, Series Editors : P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Ed. Masson, Springer-Verlag, RMA 22, (1992).
- [HHL11] P. Hansbo, D. Heintz and M. Larson. *A finite element method with discontinuous rotation for the Mindlin-Reissner plate model*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Volume 200, Numbers 5-8, Pages 638-648, (2011).
- [Her04] E. Hernández. *Approximation of the vibration modes of a plate coupled with a fluid by low-order isoparametric finite elements*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Volume 38, Number 6, Pages 1055-1070, (2004).
- [HP83] C.O. Horgan and L.E. Payne. *On inequalities of Korn, Friedrichs and Babuška-Aziz*. Arch. Rational Mech. Anal., Volume 82, Number 2, Pages 165-179, (1983).

- [Hu04] J. Hu. *Quadrilateral locking free elements in elasticity*. Doctorate Dissertation (in Chinese), Institute of Computational Mathematics, Chinese Academy of Sciences, (2004).
- [HH10] J. Hu and Y. Huang. *A posteriori error analysis of finite element methods for Reissner-Mindlin plates*. SIAM J. Numer. Anal., Volume 47, Number 6, Pages 4446-4472, (2010).
- [HS07] J. Hu and Z.-C. Shi. *Two lower order nonconforming rectangular elements for the Reissner-Mindlin plate*. Mathematics of Computation, Volume 76, Number 260, Pages 1771-1786, (2007).
- [HH84] H.C.Huang and E. Hinton. *A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation*. Eng. Comput., Volume 1, Issue 4, Pages 369-379, (1984).
- [HT82] T.J.R. Hughes and R.L. Taylor. *The linear Triangular plate bending element*. In J.R. Whiteman, editor, The Mathematics of Finite Elements and Applications IV, MAFE-LAP, Pages 127-142, Academic Press, (1982).
- [K99] G. Kunert. *A posteriori error estimation for anisotropic tetrahedral and triangular finite element meshes*. PhD-Thesis, TU Chemnitz, January 1999.
- [Lib00] E. Liberman. *A posteriori error estimator for a mixed finite element method for the Reissner-Mindlin plate*. Math. Comp., Volume 70, Number 236, Pages 1383-1396, (2001).
- [Lov05] C. Lovadina. *A low-order nonconforming finite element for Reissner-Mindlin plates*. SIAM J. Numer. Anal., Volume 42, Number 6, Pages 2688-2705, (2005).
- [LMR10] C. Lovadina, D. Mora and R. Rodríguez. *Approximation of the buckling problem for Reissner-Mindlin plates*. SIAM J. Numer. Anal., Volume 48, Number 2, Pages 603-632, (2010).
- [LS05] C. Lovadina and R. Stenberg. *A posteriori error analysis of the linked interpolation technique for plate bending problems*. SIAM J. Numer. Anal., Volume 43, Number 5, Pages 2227-2249, (2005).
- [Lyl00] M. Lyly. *On the connection between some linear triangular Reissner-Mindlin plate bending elements*. Numer. Math., Volume 85, Number 1, Pages 77-107, (2000).
- [LNS07] M. Lyly, J. Niiranen and R. Stenberg. *Superconvergence and postprocessing of MITC plate elements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Volume 196, Pages 3110-3126, (2007).
- [Mar08] L.D. Marini. *Discontinuous Galerkin Elements for Reissner-Mindlin plates*, in Numerical Mathematics and Advanced Applications, Proc. ENUMATH, Graz, (K. Kunisch, G. Of, and O. Steinbach, Eds), Springer, Pages 27-36, (2008).
- [MS02] P. Ming, Z.C. Shi. *Optimal \mathcal{L}^2 bounds for MITC3 type element*. Numer. Math., Volume 91, Number 1, Pages 77-91, (2002).
- [MNS02] P. Morin, R.H. Nochetto, and K.G. Siebert. *Local Problems on stars : a posteriori error estimators, convergence, and performance*. Mathematics of computation, Volume 72, Number 243, Pages 1067-1097, (2002).

- [NWW07] S. Nicaise, K. Witowski and B.I. Wohlmuth. *An a posteriori error estimator for the Lamé equation based on equilibrated fluxes*. IMA Journal of Numerical Analysis, 28, Number 2, Pages 331-353 (2008).
- [PS95] I. Perugia and T. Scapolla. *Optimal rectangular MITC finite elements for Reissner-Mindlin plates*. Numer. Methods Partial Differential Equations, Volume 13, Number 5, Pages 575-585, (1997).
- [RF06] S.I. Repin and M.E. Frolov. *Estimation of deviations from the exact solution for the Reissner-Mindlin plate problem*. J. Math. Sci., Volume 132, Number 3, Pages 331-338, (2006).
- [SS97] R. Stenberg and M. Süri. *An hp error analysis of MITC plate elements*. SIAM J. Numer. Anal., Volume 34, Number 2, Pages 544-568, (1997).
- [Val09] J. Valdman. *Minimization of Functional Majorant in a Posteriori Error Analysis Based on $H(\text{div})$ Multigrid-Preconditioned CG Method*. Department of Maths, University of Bergen, Johannes Bruns, Gate 12, 5008 Bergen, Norway, (2009).
- [Ver96] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems*. Wiley-Teubner, Amsterdam, (1996).

Titre : Méthodes d'éléments finis pour les equations de Reissner-Mindlin.

Résumé :

Ce travail est consacré à l'étude d'estimateurs d'erreur *a posteriori* de type flux équilibrés et résiduels pour la résolution des équations de Reissner-Mindlin par la méthode des éléments finis. Le mémoire débute par l'introduction du problème aux limites et de son analyse de convergence *a priori* par la méthode des éléments finis. Nous construisons alors pour une discrétisation conforme un estimateur *a posteriori* de type flux équilibrés fiable, efficace et robuste en l'épaisseur de la plaque t . Nous obtenons finalement une constante multiplicative égale à 1 pour la fiabilité. Des tests numériques illustrent nos résultats pour différents maillages. Puis nous abordons le cas d'une discrétisation non-conforme, où nous proposons un estimateur *a posteriori* de type résiduel, utilisant une régularisation de la solution discrète. Des tests numériques illustrent également nos résultats. La suite du travail reprend la discrétisation conforme en construisant un estimateur *a posteriori* défini à partir de la résolution de problèmes localisés sur les patches de la triangulation, menant à un choix plus consistant avec le problème aux limites. Le dernier chapitre est consacré à l'estimation *a posteriori* pour le problème aux valeurs propres de Reissner-Mindlin. L'estimateur obtenu est fiable et efficace pour la norme de l'erreur entre les vecteurs propres, permettant également de majorer l'erreur commise entre les valeurs propres. Des tests numériques illustrent nos résultats.

Mots-clés : méthode des éléments finis, Reissner-Mindlin, estimateur *a posteriori*, flux équilibrés, résiduel, conforme, non-conforme, problèmes localisés, valeurs propres.

Title : Finite element method for the Reissner-Mindlin problem.

Resume :

This work is devoted to the study of equilibrated fluxes and residual *a posteriori* error estimators for the finite element resolution of the Reissner-Mindlin system. This report begins by the introduction of the boundary value problem and of its *a priori* convergence analysis in the finite element method context. Then, an equilibrated fluxes *a posteriori* estimator is built for a conform discretization, which is proven to be reliable, efficient and robust on the plate thickness t . We finally obtain a multiplicative constant equal to 1 for the reliability. Numerical tests illustrate our results on different meshes. Then, we address the non-conforming discretization case, where a residual *a posteriori* estimator is proposed using a regularisation of the discrete solution. Numerical tests also illustrate our results. Next we come back to the conform discretization by building an *a posteriori* estimator defined from localised problems resolution on stars, leading to a consistent choice with the boundary value problem. The last chapter is devoted to an *a posteriori* estimation for the Reissner-Mindlin eigenvalues problem. The obtained estimator is reliable and efficient for the error norm between the eigenvectors, also allowing to evaluate the error between the eigenvalues. Numerical tests illustrate our results.

Keywords : finite element method, Reissner-Mindlin, *a posteriori* estimator, equilibrated fluxes, residual, conform, non-conform, localised problems, eigenvalues.