Numéro d'ordre : 41121

Université Lille1 - Laboratoire Paul Painlevé

École Doctorale des Sciences pour l'ingénieur (Lille)

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Daniel Barrera Salazar

Cohomologie surconvergente des variétés modulaires de Hilbert et fonctions L p-adiques

---

dirigée par Mladen Dimitrov

Rapporteurs

M. Adrian IOVITA	Concordia University et Università di Padova
M. Denis BENOIS	Université Bordeaux 1

Soutenue le 13 juin 2013 devant le jury composé de :

M. Denis BENOIS	Université Bordeaux 1
M. Mladen DIMITROV	Université Lille 1
M. Michel EMSALEM	Université Lille 1
M. Olivier FOUQUET	Université Paris-Sud
M. Andrei JORZA	Caltech
M. Jacques TILOUINE	Université Paris 13

Laboratoire Paul Painlevé
59655 Villeneuve d'Ascq Cédex

École doctorale Sciences pour l'Ingénieur numéro 72
Cite Scientifique, Batiment P3
59655 Villeneuve d'Ascq

Con amor para Francisco, Patricia y Angelo.

Remerciements [1]

Je commence par remercier Mladen Dimitrov pour m'avoir soutenu, motivé et pour sa présence et disponibilité à discuter avec moi pendant toute l'élaboration de ce travail. Je le remercie également pour m'avoir encouragé dans les moments difficiles. Merci Beaucoup.

Je voudrais remercier Michael Harris ; les discussions avec lui, sa patience et son soutien sont inestimables pour moi, et même sans être strictement liés à ce travail cela a été un soutien psycologique très important. Je remercie Eric Urban pour sa disponibilité et ses conseils clefs pendant l'élaboration de ce travail, je lui suis très reconnaissant. Je dois beaucoup à Lucio Guerberoff, il m'a motivé pendant tout le parcours de ma thèse, les innombrables discussions sur les mathématiques et sur la vie m'ont beaucoup aidé, je le remercie pour tout cela et pour son amitié. Je remercie Vincent Pilloni pour ses mots dans une conversation très motivante.

Je voudrais remercier Adrian Iovita d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse et pour m'avoir donné des idées et des perspectives pour de futurs travaux. Je remercie Denis Benois d'avoir accepté d'être rapporteur et de faire partie du jury. Les conférences et groupes de travaux organisés par Jacques Tilouine ont été très motivants pour moi et je suis content qu'il ait accepté de faire partie du jury. Merci enfin à Michel Emsalem, Olivier Fouquet et Andrei Jorza pour sa gentillesse de faire partie du jury.

Depuis mes premiers pas dans les mathématiques j'ai connu des gens qui m'ont fortement aidé et dans ce moment je voudrais les remercier. Merci à Rafael Labarca de m'avoir initié aux mathematiques et pour tout son soutien au cours des années, je pense aussi au Profe Macaya, Sebastian Puelma, Andres Navas et Elon Lima.

Pendant les 3 années où j'étais thésard à l'université de Paris 7 j'ai travaillé dans de très bonnes conditions et je voudrais remercier l'UFR, en particulier Pascal Chietinni et Georges Skandalis. Au sein de l'université, j'ai connu des gens très sympas qui ont mis une ambiance très agréable, je pense à : Pierre, Arnaud, Thai, Alex, Louis-Hadrien, Mathieu, Alfredo, Matias et Julie. Je voudrais remercier plus spécialement Lukas pour les aventures vécues à Paris, Paloma pour être une très jolie personne et Maria pour sa préocupation dans des moments difficiles et les jolis moments vécus.

Je remercie le laboratoire Paul Painlevé pour l'accueil recu pendant mon séjour à Lille qui m'a permis de finir mon travail. Je remercie Adel pour toutes les discussions qu'on a eu pendant ce séjour.

Je voudrais remercier mes amis qui m'ont accompagné pendant cette période en France. Jaime y Pamela han sido mis amigos-familia durante todo este tiempo, les estoy muy agradecido por todo. Merci Narimane pour toutes ses belles expériences vécues ensemble, pour ta compagnie et aide donnée dans beaucoup de moments ; c'est vraiment compliqué te remercier dans peu des mots. Je remercie Vincent(mieux connu sous le pseudonyme d'Abdule) pour tous ces beaux moments partagés dans ce très sympa quartier appelé

1. La préparation de ce travail a été possible grâce à une bourse de CONICYT (agence de recherche chilienne) et d'un financement du Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01)

Menilmontant. Aussi je voudrais dire merci à Nico, Ouahib, Chupita, Esteliiiiiita, Stevens, Octavio, Nasser, Noel et Fabien. Finalement je remercie Fabien pour sa disposition à corriger le Francais de cette thèse.

Quiero agradecer a Jacqueline por todo el apoyo y cariño que me dio en aquellos años en Brasil y algunos años acá en Francia, fue un soporte enorme y una hermosa compañía. Brasil fue un paso importante que di antes de Francia, aquí quisiera agradecer a Miguel, Maycol, veato, Juan y Criancela.

Hay 3 estrellas que me han guiado y acompañado a lo largo de mi vida : Francisco Barrera, Patricia Salazar y Angelo Barrera Salazar. Quiero agradecerles por todo el amor y el apoyo incondicional que me han entregado, todo lo que he podido lograr es gracias a ustedes. Mi padre, Francisco, me enseñó de la vida a base de ternura y amor, y a pesar que él se ha ido, su luz seguirá brillando siempre en mi corazón.

Résumé

Résumé

Pour une forme de Hilbert qui satisfait la condition de *pente non critique*, l'on construit une distribution p-adique sur le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale du corps totalement réel, non ramifiée en dehors de p et ∞. On démontre que la distribution obtenue est admissible et interpole les valeurs critiques de la fonction L complexe de la forme de Hilbert. Cette construction est basée sur l'étude de la cohomologie surconvergente des variétés modulaires de Hilbert et de certains cycles sur ces variétés .

Mots-clefs

Variétés modulaires de Hilbert, compactification de Borel-Serre, Distributions p-adiques, formes de Hilbert, représentations automorphes, fonction L.

Overconvergent cohomology of Hilbert modular varieties and p-adic L-functions

Abstract

For each Hilbert modular form that satisfies the condition of *non critical slope* we construct a p-adic distribution on the Galois group of the maximal abelian extension of the totally real field, unramified outside p and ∞. We prove that the distribution is admissible and interpolates the critical values of the L-function of the form. This construction is based on the study of the overconvergent cohomology of Hilbert modular varieties and certain cycles on these varieties.

Keywords

Hilbert varieties, Borel-Serre compactification, p-adic distributions, Hilbert modular forms, automorphic representations, L-function.

Table des matières

Introduction

Depuis les années 1970 on sait construire la fonction L p-adique d'une forme modulaire normalisée de pente non-critique (voir [AV75], [Vis76] et [MTT86]). Dans les années 1990 Glenn Stevens a construit cette fonction L p-adique avec une nouvelle méthode basée sur la théorie des symboles modulaires surconvergents (voir [Ste94],[PS11]). La construction de Stevens s'est montré très fructueuse, car elle lui a par exemple permis de construire la fonction L p-adique sur la variété de Hecke et de démontrer la conjecture du zero exceptionnel en poids quelconque(la construction se trouve dans [Ste], mais voir [Bel12], et pour la preuve de la conjecture voir [Ste10]) ainsi que de traiter le cas où la forme est de pente critique (voir [PS] et [Bel12]).

Pour les formes de Hilbert la construction de fonctions L p-adiques a commencé avec Manin (voir [Man76]) qui a traité le cas ordinaire en géneralisant la théorie des symboles modulaires. Puis, Dabrowski (voir [Dab94]) a traité le cas de pente finie non-critique en utilisant la convolution de Rankin-Selberg. Pour des familles p-adiques de formes de Hilbert on trouve les travaux de Hida (voir [Hid91]) et Dimitrov (voir [Dim]) dans le cas quasi-ordinaire. Mok a également construit des fonctions L p-adiques pour familles dans le cas ordinaire (voir [Mok09]) ce qui lui a permis de démontrer certains cas de la conjecture du zéro exceptionnel.

Le but de ce texte est de généraliser la construction de Stevens dans le contexte des formes de Hilbert. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d et on note $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers. On fixe p une nombre premier non ramifié dans F, un plongement $\mathbf{inc}_p$ de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie contenant la clôture normale de F. Soient $G = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}} GL_2$, T le tore standard dans G et B le Borel standard (matrices triangulaires supérieures).

Soit $(\mathbf{k}, r) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}$ avec $\Sigma_F := \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$, on suppose que $k_\sigma \geq 2$, $k_\sigma \equiv r \pmod 2$ et $\mid r \mid \leq k_\sigma - 2$ pour chaque $\sigma \in \Sigma_F$, ici $\mathbf{k} = (k_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_F}$. On associe un caractère algébrique du tore T sur L à ses données, λ, défini par $\lambda(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}) = \prod_{\sigma \in \Sigma_F} a_\sigma^{\frac{k_\sigma - 2 - r}{2}} d_\sigma^{-\frac{k_\sigma - 2 + r}{2}}$. Du côté classique on considère la représentation algébrique irréductible de G sur L associée au caractère dominant λ *l'induction algébrique* noté $\mathbb{V}_\lambda(L)$. Soit $I \subset G(\mathbb{Z}_p)$ le sous groupe d'Iwahori et on fixe une identification de I comme un sous espace de $\mathbb{Q}_p^{4d}$. Alors du côté surconvergent on considère *l'induction localement analytique*, noté $\mathcal{A}_\lambda(L)$, des fonctions localement L-analytiques $f : I \to L$ telles que $f(bg) = \lambda(b) f(g)$ pour tout $b = (\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}) \in I$. Son dual topologique noté $\mathcal{D}_\lambda(L)$ est un espace de Fréchet compact et possède une action continue d'un semi groupe $\Lambda_p^{-1} \subset G(\mathbb{Q}_p)$ (voir section 3). On a un morphisme canonique $\mathcal{D}_\lambda(L) \to \mathbb{V}_\lambda(L)^\vee$ équivariant par rapport à l'action de I, mais non par rapport à l'action du semi-groupe Λ_p^{-1}.

0.1 Classicité

Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous groupe ouvert compact dont l'image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans I, si $a\mathrm{Id} \in K \cap G(\mathbb{Q})$ alors $a \in \mathcal{O}_F^*$ et $\{(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) | u \in \hat{\mathcal{O}}_F^*, v \in \hat{\mathcal{O}}_F\} \subset K$. Soit Y_K la variété de Hilbert de niveau K et $\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)), \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee)$ les faisceaux sur Y_K obtenus. Alors on a un morphisme de *spécialisation* :

$$H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee)).$$

On considère l'opérateur U_p sur $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ qu'on note U_p^{sur}. D'autre part comme $\mathcal{D}_\lambda(L) \to \mathbb{V}_\lambda(L)^\vee$ n'est pas équivariant par rapport à toute l'action du semi-groupe Λ_p alors on doit considérer l'opérateur de Hecke modifié U_p^0 ("à la Hida") sur $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee))$:

Théorème 0.1. *Soit $k^0 = \min\{k_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_F\}$. Si $h < k^0 - 1$ alors le dernier morphisme induit un isomorphisme pour les espaces*

$$H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))^{\leq h} \xrightarrow{\sim} H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee))^{\leq h},$$

ici les décompositions en pente $\leq h$ sont par rapport à U_p^{sur} et U_p^0 respectivement.

Pour la cohomologie sans support ce théorème est dû à Urban, voir [Urb11]. En suivant l'argument dans [Urb11] et en travaillant sur le bord de la compactification de Borel-Serre de la variété de Hilbert on obtient le résultat (voir 2 et chapitre 4).

0.2 Construction

Soit Gal_p le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de F non ramifiée en dehors de p et ∞. Soit $\mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L)$ l'espace de Fréchet compacte des *distributions* sur Gal_p (voir section 3). Pour la construction de la distribution à partir d'une représentation automorphe et la vérification des propriétés on utilise les *cycles automorphes* définis dans [Dim]. À l'aide du cycle $C_{K,1} : X_n \to Y_K$ défini par $[x] \to [(\begin{smallmatrix} x & x_p p^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})]$ on construit une transformation L-linéaire :

$$H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to \mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L) \quad \Phi \to \mu_\Phi.$$

Alors on démontre qu'avec une adéquate définition d'admissibilité on a :

Proposition 0.2. *On suppose que $\mathrm{Cl}_F^+ = 1$. Soit $\Phi \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ tel que $U_p^{\mathrm{sur}}(\Phi) = \alpha\Phi$ avec $\alpha \in L^*$ et soit $h = \mathrm{v}_p(a)$ alors μ_Φ est une distribution h-admissible. En particulier si α est une unité dans $\mathcal{O}_L$ alors μ_Φ est bornée.*

La preuve d'une proposition analogue dans le cas classique (voir lemme 6.2 dans [PS11]) à motivé notre preuve. Cependant dans notre cas les choses sont plus subtiles étant donné la présence des unités totalement positives de $\mathcal{O}_F$.

0.3 Distributions et représentations automorphes

Finalement on applique nos résultats déjà mentionnés à la construction de distributions p-adiques pour certaines représentations automorphes. Soit π une représentation automorphe cohomologique de type $(\mathbf{k}, r)$ et soit $\mathbf{f}$ la forme nouvelle associée à π. Pour appliquer notre méthode on a besoin de la condition suivante sur la représentation automorphe :

Pente non critique : Il existe une p-stabilisation de $\mathbf{f}$, qu'on note $\mathbf{f}_\pi$, tel que si pour chaque $\mathfrak{p} \mid p$ on note $a_\mathfrak{p} \in \overline{\mathbb{Q}}$ la valeur propre de $\mathbf{f}_\pi$ par rapport à l'opérateur $U_\mathfrak{p}$ alors on a :

$$v_p(\mathbf{inc}_p(p^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} \prod_{\mathfrak{p}|p} a_\mathfrak{p})) < k^0 - 1,$$

ici $k^0 = \min\{k_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_F\}$.

Alors on suppose que π satisfait cette condition et on fixe une des p-stabilisation dans la condition. On note $\alpha = \mathbf{inc}_p(p^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} \prod_{\mathfrak{p}|p} a_\mathfrak{p})$. Alors pour une extension $L/\mathbb{Q}_p$ assez grande on trouve à travers l'isomorphisme de Harder-Matsushima-Shimura une classe $\phi_{\pi,\mathbf{1}} \in H_c^\bullet(Y_{K_1(\mathfrak{c}p)}, \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee))[\mathbf{f}_\pi, \mathbf{1}]$ où $\mathfrak{c}$ est le conducteur de π. D'après l'hypothèse et le théorème de classicité il existe une unique classe $\Phi_{\pi,\mathbf{1}} \in H_c^\bullet(Y_{K_1(\mathfrak{c}p)}, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ tel que son image à travers le morphisme spécialisation est $\phi_{\pi,\mathbf{1}}$ et $U_p^{\mathrm{sur}}\Phi_{\pi,\mathbf{1}} = \alpha\Phi_{\pi,\mathbf{1}}$. Finalement on définit :

$$\mu_{\pi,\mathbf{1}} = \mu_{\Phi_{\pi,\mathbf{1}}}.$$

Alors on démontre :

Théorème 0.3. *On suppose que* $\mathrm{Cl}_F^+ = 1$. *Soit* π *une représentation automorphe cuspidale de type* $(\mathbf{k}, r)$ *telle que :*

i) π *satisfait la condition* pente non critique *(voir 7.1.1) ;*

ii) si $\mathfrak{c}$ *est le conducteur de* π *alors* $K_1(\mathfrak{c}p)$ *est net.*

Alors on a :

1) *La distribution* $\mu_{\pi,\mathbf{1}} : \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L) \to L$ *est* h*-admissible avec* $h = v_p(\alpha)$ *(voir 3.4.2 pour la définition d'admissibilité).*

2) *Soit* $\chi : \mathrm{Gal}_p \to L^*$ *un caractère d'ordre fini, alors on peut voir* χ *comme un caractère de Hecke d'ordre fini comme dans 3.4.3, et on suppose que* $\mathbf{1} = (\chi_\sigma(-1))_{\sigma\in\Sigma_F}$. *Alors on a :*

$$\mu_{\pi,\mathbf{1}}(\chi) = \mathbf{inc}_p\left(\frac{L^p(\pi \otimes \chi, 1)\tau(\chi)}{\Omega_\pi}\right) \prod_{\mathfrak{p}|p} Z_\mathfrak{p},$$

ici L^p *est la fonction* L *sans le facteur en* p *et avec le facteur en* ∞ *et on a :*

$$Z_\mathfrak{p} = \begin{cases} \alpha_\mathfrak{p}^{-\mathrm{cond}(\chi_\mathfrak{p})} & \text{si } \chi_\mathfrak{p} \text{ est ramifié} \\ \chi_\mathfrak{p}(p)^{-d_\mathfrak{p}}(1 - \alpha_\mathfrak{p}^{-1}\chi_\mathfrak{p}(p)^{-1}N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-1})(1 - \alpha_\mathfrak{p}\chi_\mathfrak{p}(p))^{-1} & \text{si non.} \end{cases}$$

$\alpha_\mathfrak{p} = \mathbf{inc}_p(a_\mathfrak{p})$, $d_\mathfrak{p}$ *la puissance de* $\mathfrak{p}$ *dans la différente de* F *et* $\tau(\chi)$ *est la somme de Gauss.*

Notations

Dans ce texte on considère le corps des nombres algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$ comme un sous corps de $\mathbb{C}$. Pour chaque corps de nombres K on note par Σ_F l'ensemble des plongements dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Soit p un nombre premier et soient $\mathbb{Q}_p$ les nombres p-adiques, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ sa clôture algébrique et $\mathbb{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (le corps de Tate). On fixe dans tout le texte un plongement :

$$\mathbf{inc}_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}_p.$$

Soit $|\ |_p: \mathbb{C}_p \to \mathbb{R}^+$ la norme non archimédienne tel que $| p |_p = p^{-1}$ et $v_p : \mathbb{C}_p \to \mathbb{R}$ définie par $v_p(x) = -\frac{\log(|x|_p)}{\log(p)}$ la valuation associée.

Dans cet texte F est un corps de nombres totalement réel tel que p est non ramifié en F. On note par d le degré de F sur $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{d}$ la différente de F et D_F le discriminant de F (égal à $N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{d})$). On note $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{A}_f$) l'anneau des adèles (resp. adèles finis) de $\mathbb{Q}$ et $\hat{\mathbb{Z}}$ le produit des $\mathbb{Z}_l$ pour tous les nombres premiers l. Soit $\mathbb{A}_F := \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{Q}} F$ l'anneau des adèles de F, $\mathbb{A}_{F,f} := \mathbb{A}_f \otimes_{\mathbb{Q}} F$ les adèles finis et $F_\infty := F \otimes \mathbb{R} \subset \mathbb{A}_F$. Pour $\mathfrak{c}$ un idéal entier de F on définit $\hat{\mathfrak{c}}$ par $\mathfrak{c} \otimes \hat{\mathbb{Z}}$. On a les inclusions canoniques $\hat{\mathcal{O}}_F, \mathbb{A}_{F,f}, F_\infty \subset \mathbb{A}_F$ et $\hat{\mathcal{O}}_F^*, \mathbb{A}_{F,f}^*, F_\infty^* \subset \mathbb{A}_F^*$.
Comme p est non ramifié en F on considère p comme uniformisante des corps $F_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \mid p$, ici $F_\mathfrak{p}$ est la complétion de F dans la place $\mathfrak{p}$. On définit $\xi : (\mathbb{Q}_p \otimes F)^* \to (\mathbb{Q}_p \otimes F)^*$ comme suit : soit $a = (a_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|p} \in (\mathbb{Q}_p \otimes F)^* = \prod_{\mathfrak{p}|p} F_\mathfrak{p}^*$. On peut écrire $a_\mathfrak{p} = p^{n_\mathfrak{p}} \mu_\mathfrak{p}$ avec $n_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$ et $\mu_\mathfrak{p}$ une unité de l'anneau d'entiers de $F_\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$. Alors on pose $\xi(a) = (p^{n_\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}|p}$. En plus on définit $u : (\mathbb{Q}_p \otimes F)^* \to (\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{O}_F)^*$ par $u(a) = a/\xi(a)$.

Quelques notations sur groupes algébriques. $\mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif, $\mathbb{T}_2$ le tore de GL_2 et $\mathbb{B}_2$ le Borel standard (matrices triangulaires supérieures) de GL_2, et $\mathbb{N}_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\}$. Si H est un groupe algébrique défini sur un anneau k et A est un k-algèbre alors $H(A)$ est le groupe de A-points de H. Soit k' une k-algèbre, alors on note $H_{k'}$ le groupe obtenu par extensions des scalaires et si H' est un groupe algébrique défini sur k' on note $\mathrm{Res}_{k'/k} H'$ le groupe algébrique défini sur k obtenu par restriction des scalaires.

Chapitre 1

$\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}GL_2$

1.1 Racines

Soit $G = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}GL_2$, alors G est un groupe algébrique linéaire réductif connexe défini sur $\mathbb{Z}$. On note Z le centre de G, qu'on peut identifier avec $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\mathbb{G}_m$ et on définit $G^{\mathrm{ad}} := G/Z$. En plus soit $T = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\mathbb{T}_2$ le tore standard dans G, $B = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\mathbb{B}_2$ le Borel standard dans G et $N = \mathrm{Res}_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}}\mathbb{N}_2$ son radical unipotent. Finalement on note B^- le Borel opposé à B et N^- son radical unipotent.

Soit L un corps qui est aussi une $\widetilde{F}$-algèbre, ici $\widetilde{F}\subset \overline{\mathbb{Q}}$ est la clôture normale de F. Alors G_L est déployé avec T_L le tore maximal standard déployé et B_L son sous groupe de Borel standard contenant T_L. En fait comme L est une $\widetilde{F}$-algèbre alors on a un isomorphisme canonique $L \otimes_{\mathbb{Q}} F \cong L^{\Sigma_F}$, ce qu'induit les identifications suivantes : $G_L \cong \mathrm{GL}_2^{\Sigma_F}$, $B_L \cong \mathbb{B}_2^{\Sigma_F}$ et $T_L \cong \mathbb{T}_2^{\Sigma_F}$.
On notera $X^*(T_L)$ l'ensemble des caractères de T_L. On a un isomorphisme de groupes :

$$\mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \xrightarrow{\sim} X^*(T_L), \tag{1.1}$$

où $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ((a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}, (b_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ corresponde au caractère algébrique de T_L, $\lambda : T_L \to \mathbb{G}_m$, défini comme suit : pour chaque L-algèbre A le morphisme $\lambda_A : T_L(A) \to A^*$ est défini par

$$\lambda_A\left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) = \prod_{\sigma\in\Sigma_F} v_\sigma^{a_\sigma} w_\sigma^{b_\sigma},$$

pour $\left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{smallmatrix}\right) = (\left(\begin{smallmatrix} v_\sigma & 0 \\ 0 & w_\sigma \end{smallmatrix}\right))_{\sigma\in\Sigma_F} \in T_L(A) \cong \mathbb{T}_2(A)^{\Sigma_F}$. Le système de racines associé à la paire (G_L, T_L) est l'ensemble $\{\alpha_\sigma, -\alpha_\sigma | \sigma \in \Sigma_F\}$ où α_{σ_0} correspond à $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ à travers l'isomorphisme (1.1) où $a_\sigma = b_\sigma = 0$ si $\sigma \neq \sigma_0$ et $a_{\sigma_0} = 1, b_{\sigma_0} = -1$. Les racines simples associées au Borel B_L sont $\{\alpha_\sigma | \sigma \in \Sigma\}$. Finalement les poids dominants pour (G_L, B_L, T_L) sont les caractères de T_L qui correspondent à $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ avec $a_\sigma \geq b_\sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma$.
Le groupe de co-caractères de T_L est noté par $X_*(T_L)$, comme dans le cas des caractères on a aussi un isomorphisme $\mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \xrightarrow{\sim} X_*(T_L)$, ici à chaque $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = ((a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}, (b_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ correspond le co-caractère $\chi : \mathbb{G}_m \to T_L$ tel que pour chaque L-algèbre A $\chi_A : A^* \to T_L(A)$ est défini par :

$$\chi_A(v) = \left(\left(\begin{smallmatrix} v_\sigma^{a_\sigma} & 0 \\ 0 & v_\sigma^{b_\sigma} \end{smallmatrix}\right)\right)_{\sigma\in\Sigma_F}.$$

L'ensemble de co-racines est $\{\alpha_\sigma^\vee, -\alpha_\sigma^\vee | \sigma \in \Sigma\}$, avec $\alpha_{\sigma_0}^\vee$ correspondant à $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ où $a_\sigma = b_\sigma = 0$ si $\sigma \neq \sigma_0$ et $a_{\sigma_0} = 1, b_{\sigma_0} = -1$

1.2 Représentations algébriques irréductibles

Les représentations algébriques irréductibles d'un groupe algébrique réductif déployé sont paramétrées par les poids dominants (par rapport à un tore maximal déployé et un sous-groupe de Borel contenant ce tore, fixés). Dans cette section on va expliciter ces représentations dans notre contexte.
Soit L un corps qui est aussi une $\widetilde{F}$-algèbre, alors G_L est un groupe algébrique déployé. Soit $\lambda \in X^*(T_L)$ un caractère dominant pour (G_L, B_L, T_L), donc d'après des résultats généraux (voir chapitre 2 dans Partie II de [Jan]) la représentation irréductible associée à λ est la représentation induite

$$\mathbb{V}_\lambda(L) = ind_{B^-}^G(\lambda),$$

définie comme l'ensemble des morphismes des foncteurs $f : G_L \to \mathbb{G}_a$ tel que la fonction $f_A : G(A) \to A$ satisfait $f(bg) = \lambda(b)f(g)$ avec $b \in B^-(A), g \in G(A)$ pour toute L-algèbre A (ici $\mathbb{G}_a$ est le groupe additif sur L et on voit λ comme un caractère de B_L à travers $B_L \to T_L$). Le groupe G_L agit à gauche sur $\mathbb{V}_\lambda(L)$ par translations à droite. On appelle λ *le plus haut poids* de $\mathbb{V}_\lambda(L)$ et $\mathbb{V}_\lambda(L)$ la représentation irréductible de plus haut poids λ.

Remarque : La représentation algébrique duale de $\mathbb{V}_\lambda(L)$ est isomorphe à $\mathbb{V}_\kappa(L)$ où κ est le caractère algébrique qui correspond à $(-b_\sigma, -a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}$ à travers la bijection dans (1.1) (voir chapitre 2 dans Partie II de [Jan]).

La description qu'on vient de donner est très générale mais dans notre cas on peut décrire encore plus explicitement ces représentations. D'abord pour $\mathbf{n} = (n_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F} \in \mathbb{N}^{\Sigma_F}$ on note par $\mathbf{Sym^n}$ la représentation algébrique de G_L définie comme suit. Le L-espace vectoriel que l'on considère est $\mathrm{Sym}^{\mathbf{n}}(L)$ l'espace des polynômes en les variables $\{X_\sigma, Y_\sigma | \sigma \in \Sigma_F\}$ qui sont homogènes de degré n_σ dans X_σ, Y_σ pour chaque $\sigma \in \Sigma_F$. Pour chaque L-algèbre A on définit :

$$P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot g = P((\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \cdot^t g) = P(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, c\mathbf{X} + d\mathbf{Y}), \tag{1.2}$$

où $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G(A)$, $P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbf{Sym^n}(A) := \mathbf{Sym^n}(L) \otimes_L A$ avec $\mathbf{X} = (X_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}$ et $\mathbf{Y} = (Y_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}$. Ici par exemple $a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} = (a_\sigma X_\sigma + b_\sigma Y_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}$ où $a = (a_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}, b = (b_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F} \in A \otimes F \cong A^{\Sigma_F}$.
On a considéré l'action à gauche de G_L sur $\mathbb{V}_\lambda(L)$, maintenant on considére l'action à droite obtenue : $f \cdot g(x) = f(xg^{-1})$. Alors on a un isomorphisme de représentations de G_L à droite :

$$I : \mathbb{V}_\lambda(L) \to \mathbf{Sym^{a-b}} \otimes \mathbf{det^{-a}}, \tag{1.3}$$

où $\mathbf{det}$ est la représentation algébrique de G_L de dimension 1 donnée par le determinant. Pour la preuve, d'abord on remarque que si V est une représentation algébrique irréductible de G_L tel que vue comme une représentation de T_L (par restriction) son plus grand poids (pour l'ordre induit par B_L sur les caractères de T_L) qu'elle possède est λ, alors V est isomorphe à $\mathbb{V}_\lambda(L)$. Alors il suffit remarquer que la représentation de G_L à droite dans (1.3) est irréductible et que son plus haut poids est λ.

On va expliciter l'isomorphisme I sur les L-points. L'espace $\mathbf{Sym^{a-b}}(L)$ possède une base canonique : pour chaque $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ tel que $0 \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{a} - \mathbf{b}$ on note $\mathbf{X^j Y^{a-b-j}} := \prod_{\sigma\in\Sigma_F} X_\sigma^{j_\sigma} Y_\sigma^{a_\sigma - b_\sigma - j_\sigma} \in \mathbf{Sym^{a-b}}(L)$ alors l'ensemble des $\mathbf{X^j Y^{a-b-j}}$ forme une base de $\mathbf{Sym^{a-b}}(L)$. Pour chaque $\mathbf{j}$ soit $f_{\mathbf{j}} \in \mathbb{V}_\lambda(L)$ l'unique fonction telle que $I(f_{\mathbf{j}}) = \mathbf{X^j Y^{a-b-j}}$.

Alors on peut vérifier que pour chaque $\mathbf{x} \in L^{\Sigma_F}$ on a $f_{\mathbf{j}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (-\mathbf{x})^{\mathbf{j}} f_{\mathbf{0}}(1)$. On fixe desormais un isomorphisme I tel que $f_{\mathbf{0}}(1) = 1$, alors on a :

$$f_{\mathbf{j}}\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (-\mathbf{x})^{\mathbf{j}}.$$

D'autre part on peut expliciter aussi l'isomorphisme entre le dual de $\mathbb{V}_\lambda(L)$ et une représentation de la forme $\mathbb{V}_\kappa(L)$. Soient $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{\Sigma_F}$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$, alors on a un isomorphisme $P : (\mathrm{Sym}^{\mathbf{n}}(L) \otimes \mathbf{det}^{\mathbf{m}})^\vee \to \mathrm{Sym}^{\mathbf{n}}(L) \otimes \mathbf{det}^{-\mathbf{n}-\mathbf{m}}$ défini par :

$$P(\rho)(\mathbf{W}, \mathbf{Z}) := \rho((\mathbf{ZX} - \mathbf{WY})^{\mathbf{n}}),$$

ici $(\mathbf{ZX} - \mathbf{WY})^{\mathbf{n}}$ est le polynôme dans les variables $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ définit par $\prod_{\sigma \in \Sigma_F}(Z_\sigma X_\sigma - W_\sigma Y_\sigma)^{n_\sigma}$.

Dans le reste de cette section on décrit en termes de $\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee$ une évaluation sur $(\mathbf{Sym}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \otimes \mathbf{det}^{-\mathbf{a}})^\vee \simeq \mathbf{Sym}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \otimes \mathbf{det}^{\mathbf{b}}$. Soit λ un caractère dominant qui correspond à $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$. Soit $\mathbf{j}$ tel que $\mathbf{0} \leq \mathbf{j} \leq \mathbf{a} - \mathbf{b}$, en associant à chaque $P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \mathbf{Sym}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(L)$ le coefficient devant $\mathbf{X}^{\mathbf{j}}\mathbf{Y}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{j}}$ on obtient un morphisme $a_{\mathbf{j}} : \mathbf{Sym}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(L) \otimes \mathbf{det}^{\mathbf{b}} \to L$. D'autre part soit $f_{\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{j}} \in \mathbb{V}_\lambda(L)$ tel que $I(f_{\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{j}}) = \mathbf{X}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{j}}\mathbf{Y}^{\mathbf{j}}$ et on définit la fonction $A_{\mathbf{j}} : \mathbb{V}_\lambda(L)^\vee \to L$ par $A_{\mathbf{j}}(\mu) = \binom{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{\mathbf{j}}(-1)^{\mathbf{j}}\mu(f_{\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{j}})$. Alors on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee \arrow[rr, "A_{\mathbf{j}}"] & & L \\
(\mathbf{Sym}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}} \otimes \mathbf{det}^{-\mathbf{a}})^\vee \arrow[u, "I^\vee"] \arrow[rr, "P"] & & \mathbf{Sym}^{\mathbf{a}-\mathbf{b}}(L) \otimes \mathbf{det}^{\mathbf{b}} \arrow[u, "a_{\mathbf{j}}"']
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

1.3 Variétés

1.3.1 Variétés modulaires de Hilbert

Soit G_∞^+ la composante connexe de l'identité dans $G(\mathbb{R})$, $Z_\infty = Z(\mathbb{R})$ son centre (qu'on peut identifier avec F_∞^*), $K_\infty = O_2(F_\infty)$, $C_\infty = K_\infty Z_\infty$, $K_\infty^+ = SO_2(F_\infty)$ et $C_\infty^+ = K_\infty^+ Z_\infty$. On note aussi $G(\mathbb{Q})^+ := G(\mathbb{Q}) \cap G_\infty^+$ et $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ l'image de $G(\mathbb{Q})^+$ dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$. Si K est un sous-groupe compact et ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ alors on définit la *variété modulaire de Hilbert* de niveau K par :

$$Y_K = G(\mathbb{Q}) \setminus G(\mathbb{A})/KC_\infty^+.$$

On peut décrire les composantes connexes de Y_K en termes classiques. Soit $\mathcal{C}_K^+ := F^* \setminus \mathbb{A}_F^*/\det(K)F_\infty^+$ où $F_\infty^+ \subset F_\infty$ est la composante connexe de 1 dans F_∞^*. Pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ soit $g_{\mathbf{y}} \in G(\mathbb{A}_f)$ tel que $\{det(g_{\mathbf{y}})|\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+\}$ est un ensemble de représentants de $\mathcal{C}_K^+$. Pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ on note $\Gamma_{\mathbf{y}} = G(\mathbb{Q}) \cap g_{\mathbf{y}} K g_{\mathbf{y}}^{-1} G_\infty^+$. Le morphisme $G_\infty^+ \to G(\mathbb{A})$ défini par $\gamma \to \gamma g_{\mathbf{y}}$ induit une identification :

$$\Gamma_{\mathbf{y}} \setminus G_\infty^+/C_\infty^+ \simeq G(\mathbb{Q}) \setminus G(\mathbb{Q})g_{\mathbf{y}}KG_\infty^+/KC_\infty^+.$$

Soit $\mathbb{H}$ le demi plan de Poincaré et $\mathbb{H}_F := \mathbb{H}^{\Sigma_F}$ alors on a une identification canonique : $G_\infty^+/C_\infty^+ \simeq \mathbb{H}_F$ définie par $[\gamma] \to (\gamma_\sigma(i))_{\sigma \in \Sigma_F}$ pour $\gamma = (\gamma_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_F} \in G_\infty^+$. Si on note $Y_{\mathbf{y}} := \Gamma_{\mathbf{y}} \setminus \mathbb{H}_F$ alors on a :

$$Y_K \cong \sqcup_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+} Y_{\mathbf{y}}.$$

Supposer en plus que pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ le groupe $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}} := \Gamma_{\mathbf{y}}/\Gamma_{\mathbf{y}} \cap Z(\mathbb{Q})$ est sans torsion. Alors l'action de $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}$ sur $\mathbb{H}_F$ est libre, $Y_{\mathbf{y}}$ (et donc Y_K) est une variété analytique complexe lisse et le groupe fondamental de $Y_{\mathbf{y}}$ est $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}$.

1.3.2 Compactification de Borel-Serre

La variété de Hilbert Y_K n'est pas compacte. Parmi les différentes compactifications on s'est intéressé à la compactification de Borel-Serre à cause de ses bonnes propriétés topologiques qui permettent d'obtenir des informations sur les groupes de cohomologie de la variété de Hilbert. On décrit sa construction en suivant [Gha02] et [BS74].

D'abord on doit agrandir l'espace $\mathbb{H}_F$. Soit $S = \mathbb{R}^{\Sigma_F} \times \mathbb{R}_+^{\Sigma_F}$, et pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$ soit $S_t = \{(x,y) \in S \mid \prod_{\sigma\in\Sigma_F} y_\sigma = t\}$ alors on a $S = \bigsqcup_{t>0} S_t \simeq \mathbb{R}_+ \times S_1$ où on a utilisé l'isomorphisme $S_t \to S_1$ défini par $(x,y) \to (x, y/t^{\frac{1}{d}})$. Alors $\overline{S} := (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times S_1$ est une variété à coins C^∞ qui contient de façon naturelle S comme son intérieur et son bord est une copie de S_1.
On sait que les sous-groupes de Borel de G^{ad} sont en bijection avec les sous-groupes de Borel de G. Pour un Borel P de G on note encore P son image dans G^{ad}. Soit B le sous-groupe de Borel standard de G^{ad}, c'est à dire l'image dans G^{ad} des matrices triangulaires supérieures, alors chaque Borel de G^{ad} est conjugué à B par un élément de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$. Soient P un Borel quelconque et $\alpha \in G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ tels que $P = \alpha B \alpha^{-1}$ et considérer l'isomorphisme de variétés C^∞ :

$$S \longrightarrow \mathbb{H}_F, \ (x,y) \to \alpha(x+iy),$$

où $x + iy = (x_\sigma + iy_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}$. À travers cet isomorphisme on peut ajouter un bord à $\mathbb{H}_F$, qui est une copie de S_1 et que l'on note $e(P)$. Finalement on définit :

$$\overline{\mathbb{H}}_F := \mathbb{H}_F \sqcup \bigsqcup_P e(P).$$

On peut étendre l'action continue à gauche de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ sur $\mathbb{H}_F$ à une action continue sur $\overline{\mathbb{H}}_F$ et si P est un groupe de Borel quelconque et $\gamma \in G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ alors $\gamma e(P) = e(\gamma P \gamma^{-1})$. En plus pour chaque Borel P le groupe $P(\mathbb{Q}) \cap G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ laisse invariant la composante du bord $e(P)$.
Dans [BS74] est démontré que $\overline{\mathbb{H}}_F$ est une variété à coins C^∞ contractile à bord lisse et son bord est $\bigsqcup_P e(P)$, en plus si Γ est un sous-groupe arithmétique de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ alors il agit proprement sur $\overline{\mathbb{H}}_F$ et $\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ est compacte. Donc si Γ n'a pas de torsion alors son action sur $\overline{\mathbb{H}}_F$ est libre, le morphisme $\overline{\mathbb{H}}_F \to \Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ est un homéomorphisme local et $\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ hérite une structure de variété à coins C^∞ contractile à bord lisse.
Maintenant soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe compact-ouvert alors la compactification de Borel-Serre de la variété de Hilbert Y_K est définie par (voir les notations de 1.3.1) :

$$X_K := \bigsqcup_{\mathbf{y}\in\mathcal{C}_K^+} \overline{\Gamma}_{\mathbf{y}} \setminus \overline{\mathbb{H}}_F.$$

1.4 Faisceaux

1.4.1 Construction

On décrit quelques constructions de faisceaux sur les variétés de Hilbert à partir de différentes données :

Cas 1 : Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un groupe ouvert-compact et M un K-module à gauche. On note par $\mathcal{L}_K(M)$ le faisceau sur Y_K des sections localement constantes du fibré :

$$G(\mathbb{Q})\backslash(G(\mathbb{A}) \times M)/KC_\infty^+ \to Y_K,$$

où l'action considèrée sur $G(\mathbb{A}) \times M$ est donné par $\gamma(g, m)kc = (\gamma gkc, k^{-1}m)$ pour chaque $\gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A}), m \in M, k \in K$ et $c \in C_\infty^+$.

Cas 2 : Soit M un module avec une action de $G(\mathbb{Q})$. Pour chaque groupe ouvert-compact $K \subset G(\mathbb{A})$ on définit le faisceau $\mathcal{L}_K(M)$ sur Y_K comme le faisceau des sections localement constantes du fibré :

$$G(\mathbb{Q})\backslash(G(\mathbb{A}) \times M)/KC_\infty^+ \to Y_K,$$

où l'action considérée sur $G(\mathbb{A}) \times M$ est donné par $\gamma(g, m)kc = (\gamma gkc, \gamma m)$ pour chaque $\gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A}), m \in M, k \in K$ et $c \in C_\infty^+$.

Remarque 1) : Observer que si M est un $G(\mathbb{Q}_p)$-module alors en considérant l'action de K sur M à travers son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ on obtient d'après le premier cas un faisceau sur Y_K que l'on notera $\mathcal{L}_1(M)$. D'autre part l'inclusion $G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{Q}_p)$ et le cas 1) nous fournissent un autre faisceau sur Y_K qu'on notera $\mathcal{L}_2(M)$. Ces deux faisceaux sont isomorphes : en fait l'isomorphisme provient de l'isomorphisme de systemes locaux obtenu du morphisme $G(\mathbb{A}) \times M \to G(\mathbb{A}) \times M$ défini par $(g, m) \to (g, g_p \cdot m)$.

Remarque 2) : On peut affiner la construction du cas 2. Soit M un espace vectoriel sur un corps k, avec une action de $G(\mathbb{Q})$ et $\Theta : \hat{\mathcal{O}}_F^* \to k^*$ un homomorphisme de groupes d'ordre fini et soit $\mathfrak{c}$ son conducteur (défini de la façon habituelle). Soit $K \subset G(\mathbb{A})$ un sous groupe ouvert-compact tel que son image dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} \mathrm{GL}_2(F_\mathfrak{p})$ est contenue dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} I_{\mathfrak{p},n_\mathfrak{p}}$, où $n_\mathfrak{p} = \mathrm{val}_\mathfrak{p}(\mathfrak{c})$ et $I_{\mathfrak{p},n_\mathfrak{p}}$ le groupe d'Iwahori associé. On choisit les $g_\mathbf{y}$ de 1.3.1 de la forme $g_\mathbf{y} = \left(\begin{smallmatrix} a_\mathbf{y} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ on définit l'homomorphisme de groupes $\Theta_\mathbf{y} : \Gamma_\mathbf{y} \to k^*$ par $\Theta_\mathbf{y} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \Theta(d_\mathfrak{c})$, ici $d_\mathfrak{c}$ est l'image dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} F_\mathfrak{p}$ qui est en fait est contenue dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}^* \subset \hat{\mathcal{O}}_F^*$. On note $M(\Theta_\mathbf{y})$ le $\Gamma_\mathbf{y}$-module M tordu par $\Theta_\mathbf{y}$. Finalement soit $\mathcal{L}_K(M, \Theta)$ le faisceau sur $Y(K)$ tel que sa restriction sur $Y_\mathbf{y}$ est $\mathcal{L}(M(\Theta_\mathbf{y}))$ le faisceau des sections localement constantes du fibré :

$$\Gamma_\mathbf{y} \setminus (\mathbb{H}_F \times M(\Theta_\mathbf{y})) \to Y_\mathbf{y}.$$

1.4.2

Soit M comme dans **Cas 1** et en plus soit p un nombre premier tel que l'action de K sur M est factorisée à travers l'image de K dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ on choisit $g_\mathbf{y}$ comme dans 1.3.1 et on suppose que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est 1. Cette dernière condition permet au groupe $\Gamma_\mathbf{y}$ d'agir sur M à travers son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Alors le faisceau $\mathcal{L}_K(M)\mid_{Y_\mathbf{y}}$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{L}_\mathbf{y}(M)$ des sections localement constantes du fibré :

$$\Gamma_\mathbf{y} \setminus (\mathbb{H}_F \times M) \to Y_\mathbf{y},$$

ici $\Gamma_\mathbf{y}$ agit à gauche sur $\mathbb{H}_F \times M$ par $\gamma(z, m) = (\gamma(z), \gamma m)$.

Remarque : Soit M un k-espace vectoriel avec une action de $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\Theta : \hat{\mathcal{O}}_F^* \to k^*$ un homomorphisme de groupes d'ordre fini et de conducteur $\mathfrak{c}$ tel que si $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}$ alors $\mathfrak{p}$ est un idéal sur p. On prend $K \subset G(\mathbb{A})$ un sous groupe ouvert-compact tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} I_{\mathfrak{p},n_\mathfrak{p}}$. D'une part on peut construire le faisceau sur Y_K de la remarque 2) : $\mathcal{L}_K(M,\Theta)$. D'autre part on peut définir $\Theta_K : K \to k^*$ à travers $\Theta_K \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \Theta(d_\mathfrak{c})$, alors considérer le K-module $M(\Theta_K)$ et construire le faisceau $\mathcal{L}_K(M(\Theta_K))$ comme dans le cas 1. Observer que l'action de K sur $M(\Theta_K)$ est factorisée à travers de l'image de K dans $G(\mathbb{Q}_p)$ et alors on déduit qu'en fait on a $\mathcal{L}_K(M(\Theta_K)) = \mathcal{L}_K(M,\Theta)$.

1.5 Cohomologie

1.5.1

Si X est un espace topologique et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X alors on note ses groupes de cohomologie (resp. à support compacte) par $H^\bullet(X,\mathcal{F})$ (resp. $H^\bullet_c(X,\mathcal{F})$) ; et l'image du morphisme canonique $H^\bullet_c(X,\mathcal{F}) \to H^\bullet(X,\mathcal{F})$ est noté par $H^\bullet_!(X,\mathcal{F})$.

Dans les conditions de 1.4.2 on obtient une décomposition :

$$H^\bullet_?(Y_K,\mathcal{L}_K(M)) \cong \bigoplus_{\mathbf{y}} H^\bullet_?(Y_\mathbf{y},\mathcal{L}_\mathbf{y}(M)), \tag{1.5}$$

pour $? = \emptyset, c$. Supposer en plus que pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ le groupe $\overline{\Gamma}_\mathbf{y} := \Gamma_\mathbf{y}/\Gamma_\mathbf{y} \cap Z(\mathbb{Q})$ est sans torsion et $K \cap Z(\mathbb{Q}) \subset K$ agit trivialement sur M. Alors $\overline{\Gamma}_\mathbf{y}$ est le groupe fondamental de $Y_\mathbf{y}$ et agit sur M. Donc on a $H^\bullet(Y_\mathbf{y},\mathcal{L}_\mathbf{y}(M)) = H^\bullet(\overline{\Gamma}_\mathbf{y}, M)$ et alors la décomposition dans (1.5) nous donne :

$$H^\bullet(Y_K,\mathcal{L}_K(M)) \cong \bigoplus_{\mathbf{y}} H^\bullet(\overline{\Gamma}_\mathbf{y}, M). \tag{1.6}$$

1.5.2 Opérateurs sur la cohomologie

Dû à l'importance des opérateurs de Hecke sur la cohomologie dans ce texte on va ici rappeler leur définition plus en détail.

a) *Point de vue adélique* Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un groupe ouvert-compact, M comme dans 1.4.1 et $x \in G(\mathbb{A}_f)$, alors on définit l'opérateur de Hecke sur $H^\bullet(Y_K,\mathcal{L}_K(M))$ par :

$$[KxK] := \mathrm{tr}_{K\cap xKx^{-1},K} \circ [x] \circ \mathrm{res}_{K,K\cap x^{-1}Kx}, \tag{1.7}$$

$\mathrm{tr}_{K\cap xKx^{-1},K}$ est le morphisme de transfert et $\mathrm{res}_{K,K\cap x^{-1}Kx}$ est le morphisme de restriction. Maintenant on décrit le morphisme

$$[x] : H^\bullet(Y_{K\cap x^{-1}Kx}, \mathcal{L}_{K\cap x^{-1}Kx}(M)) \to H^\bullet(Y_{K\cap xKx^{-1}}, \mathcal{L}_{K\cap xKx^{-1}}(M))$$

dans les deux cas considérées en 1.4.1 :
Cas 1 : Dans ce cas on doit supposer en plus qu'il existe un semi-groupe $R \subset G(\mathbb{A}_f)$ contenant K et x, et M est un R-module à gauche. Soit $U = K \cap x^{-1}Kx$ alors $xUx^{-1} = K \cap xKx^{-1}$. L'association $g \in G(\mathbb{A}) \to gx \in G(\mathbb{A})$ induit un homéomorphisme $Y_{xUx^{-1}} \to Y_U$ qu'on note χ. Maintenant l'application $G(\mathbb{A}) \times M \to G(\mathbb{A}) \times M$ définie par $(g,m) \to (gx^{-1}, xm)$ induit un χ-cohomomorphisme (dans la notation de [Bre97]) $\mathcal{L}_U(M) \rightsquigarrow \mathcal{L}_{xUx^{-1}}(M)$, alors on obtient les morphismes (voir II, 8 dans [Bre97]) :

$$[x] : H^\bullet(Y_U,\mathcal{L}_U(M)) \to H^\bullet(Y_{xUx^{-1}}, \mathcal{L}_{xUx^{-1}}(M)).$$

Cas 2 : Avec les mêmes notations on obtient un χ-cohomomorphisme $\mathcal{L}_U(M) \rightsquigarrow \mathcal{L}_{xUx^{-1}}(M)$ dans ce cas à travers l'application $G(\mathbb{A}) \times M \to G(\mathbb{A}) \times M$ défini par $(g,m) \to (gx^{-1}, m)$.

b) ***Point de vue classique*** Soit $\Lambda \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ un semi-groupe, $\Gamma \subset \Lambda$ un groupe arithmétique sans torsion et $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda\Gamma\lambda^{-1} \subset \Lambda$. On note $\kappa : \lambda\Gamma\lambda^{-1} \setminus \mathbb{H}_F \to \Gamma \setminus \mathbb{H}_F$ le morphisme défini par $z \to \lambda^{-1}z$. Pour M un Λ-module à gauche on note $\mathcal{L}_\Gamma(M) \rightsquigarrow \mathcal{L}_{\lambda\Gamma\lambda^{-1}}(M)$ le κ-cohomomorphisme (dans la notation de [Bre97]) obtenu du morphisme $(z,m) \to (\lambda z, \lambda m)$. On note $[\lambda] : H^\bullet(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}_\Gamma(M)) \to H^\bullet(\lambda\Gamma\lambda^{-1} \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}_{\lambda\Gamma\lambda^{-1}}(M))$ le correspondant morphisme au niveau de la cohomologie.
Maintenant soient $\Gamma, \Gamma' \subset \Lambda$ comme avant et $\lambda \in \Lambda$ tel que $\Gamma' \cap \lambda\Gamma\lambda^{-1}$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ'. Alors on définit l'opérateur $[\Gamma\lambda\Gamma'] : H^\bullet(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}_\Gamma(M)) \to H^\bullet(\Gamma' \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}_{\Gamma'}(M))$ associé à la double classe $\Gamma\lambda\Gamma'$ par :

$$[\Gamma\lambda\Gamma'] := \mathrm{tr}_{\Gamma'\cap\lambda\Gamma\lambda^{-1},\Gamma'} \circ [\lambda] \circ \mathrm{res}_{\Gamma,\Gamma\cap\lambda^{-1}\Gamma'\lambda}.$$

c) ***Point de vue adélique versus classique*** **:** Soit $R \subset G(\mathbb{A}_f)$ un semi-groupe contenant K qui est un sous-groupe compact et ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. On prend M un R-module à gauche tel que R agit à travers son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ et $R \cap Z(\mathbb{Q})$ agit trivialement sur M. On définit le semi-groupe $\Lambda \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ comme l'image dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ du semi-groupe des éléments de $G(\mathbb{Q})^+$ tel que leur image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est dans l'image de R, alors Λ agit sur M. Observer que $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}} \subset \Lambda$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$. Dans la décomposition en composantes connexes de la variété de Hilbert dans 1.3.1 on choisit les $g_{\mathbf{y}}$ avec image triviale dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $x \in R$ tel que $\det(K) = \det(K \cap x^{-1}Kx)$ et on note $\sigma : \mathcal{C}_K^+ \to \mathcal{C}_K^+$ la bijection telle que pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ on peut écrire $g_{\mathbf{y}}x = \lambda_{\mathbf{y}} g_{\sigma(\mathbf{y})} kc$ avec $\lambda_{\mathbf{y}} \in G(\mathbb{Q})$, $k \in K$ et $c \in G_\infty^+$. Alors l'image de $\lambda_{\mathbf{y}}$ dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ (qu'on note par $\lambda_{\mathbf{y}}$ aussi) appartient à Λ et on a :

$$[KxK] = \bigoplus_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+} [\overline{\Gamma}_{\sigma(\mathbf{y})} \lambda_{\mathbf{y}} \overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}].$$

d) Soit M un espace vectoriel sur un corps k avec un action à gauche de $G(\mathbb{Q})$ et tel que $Z(\mathbb{Q})$ agit trivialement. En plus soit $\Theta : \hat{\mathcal{O}}_F^* \to k^*$ un homomorphisme de groupes d'ordre fini, conducteur $\mathfrak{c}$ et tel que $\Theta\mid_{\mathcal{O}_F^*}$ est trivial. Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert et compact tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} I_{\mathfrak{p},n_\mathfrak{p}}$. Alors on vérifie que pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$, $M(\Theta_{\mathbf{y}})$ est en fait un $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}$-module. Soit $x \in G(\mathbb{A}_f)$ tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} I_{\mathfrak{p},n_\mathfrak{p}}$ et en plus on suppose que $\det(K) = \det(K \cap x^{-1}Kx)$. On choisit les $g_{\mathbf{y}}$ de 1.3.1 tels que $(g_{\mathbf{y}})_\mathfrak{c} = 1$ et on écrit $g_{\mathbf{y}}x = \lambda_{\mathbf{y}} g_{\sigma(\mathbf{y})} kc$ comme avant on note aussi par $\gamma_{\mathbf{y}}$ son image dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$. Alors de la même façon que dans la partie **b)** on peut définir pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ l'opérateur :

$$[\overline{\Gamma}_{\sigma(\mathbf{y})} \lambda_{\mathbf{y}} \overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}] : H^\bullet(Y_{\sigma(\mathbf{y})}, \mathcal{L}(M(\Theta_{\sigma(\mathbf{y})}))) \to H^\bullet(Y_{\mathbf{y}}, \mathcal{L}(M(\Theta_{\mathbf{y}}))).$$

En sommant sur toutes les composantes on obtient l'opérateur :

$$[KxK] : H^\bullet(Y_K, \mathcal{L}_K(M, \Theta)) \to H^\bullet(Y_K, \mathcal{L}_K(M, \Theta)).$$

Remarque 1 : Soit M un espace vectoriel sur un corps k et avec une action à gauche de $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $\Theta : \hat{\mathcal{O}}_F \to k^*$ d'ordre fini, trivial sur $\mathcal{O}_F^*$ et conducteur $\mathfrak{c}$ tel que si $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}$ alors $\mathfrak{p}|p$. Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert et compact tel que si $h \in K$ et si $h_p = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$

est son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ alors $d \in (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*$. On sait d'après la remarque de 1.4.2 que $\mathcal{L}_K(M(\Theta_K)) = \mathcal{L}_K(M, \Theta)$. Maintenant soit $x \in G(\mathbb{A}_f)$ tel que si $x_p = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ alors $d \in (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*$, et on suppose que $K \cap Z(\mathbb{Q})$ agit trivialement sur M. Alors on peut vérifier que les opérateurs $[KxK]$ sur la cohomologie définis dans **a)** et **d)** sont égaux.

Remarque 2 : On peut procéder de la même manière que dans **a)**,..,**d)** et que dans la remarque 1 en changeant la cohomologie sans support à celle avec support compact, alors on obtient les opérateurs de Hecke sur les groupes de cohomologie à support compact, $H_c^\bullet$. Les opérateurs obtenus sont compatibles avec le morphisme naturel $H_c^\bullet \to H^\bullet$ et alors on obtient une action des opérateurs de Hecke sur son image, ç'est à dire sur les groupes de cohomologie $H_!^\bullet$.

1.5.3 Cohomologie du bord

Soit $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ un sous-groupe arithmétique sans torsion. On fixe $\mathcal{B}_\Gamma$ un ensemble (fini) de représentants de l'ensemble des classes de conjugaison de l'action de Γ sur l'ensemble des groupes Borel de G^{ad}, alors le bord de la compactification de Borel-Serre de $\Gamma \setminus \mathbb{H}_F$ est donné par :

$$\partial(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F) = \Gamma \setminus \partial\overline{\mathbb{H}}_F = \bigsqcup_{P \in \mathcal{B}_\Gamma} \Gamma_P \setminus e(P), \tag{1.8}$$

où $\Gamma_P := \Gamma \cap P(\mathbb{Q})$, voir 1.3.2 pour les notations.
Soit M un Γ-module. On note $\mathcal{L}_\Gamma(M)$ le faisceau sur $\partial(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F)$ des sections localement constantes du fibré :

$$\Gamma \setminus (\partial\overline{\mathbb{H}}_F \times M) \to \partial(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F),$$

où l'action de Γ sur $\Gamma \setminus \partial\overline{\mathbb{H}}_F$ est $\gamma(z, m) = (\gamma z, \gamma m)$, et si P est un sous-groupe de Borel de G^{ad} alors on note $\mathcal{L}_{\Gamma_P}(M)$ le faisceau sur $\Gamma_P \setminus e(P)$ défini de la façon analogue. Alors on a les suivants isomorphismes canoniques :

$$H^\bullet(\partial(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F), \mathcal{L}_\Gamma(M)) \simeq \bigoplus_{P \in \mathcal{B}_\Gamma} H^\bullet(\Gamma_P \setminus e(P), \mathcal{L}_{\Gamma_P}(M)) \simeq \bigoplus_{P \in \mathcal{B}_\Gamma} H^\bullet(\Gamma_P, M). \tag{1.9}$$

D'autre part il est important d'observer que $\Gamma \setminus \mathbb{H}_F$ et sa compactification de Borel-Serre possèdent les mêmes groupes de cohomologie sans support et alors la suite exacte longue de cohomologie associé à la paire $(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F, \partial(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F))$ nous fournit :

$$\to H_c^\bullet(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F), \mathcal{L}(M)) \to H^\bullet(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F), \mathcal{L}(M)) \to H^\bullet(\partial(\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F), \mathcal{L}_\Gamma(M)) \to$$

on a la même suite exacte longue en termes adéliques.

Chapitre 2

Décomposition en pente $\leq h$

Dans ce chapitre, nous démontrons un résultat qui aidera à démontrer la classicité pour la cohomologie à support compact dans 4. Soit $R \subset G(\mathbb{A}_f)$ un semi-groupe et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous-groupe ouvert et compact contenu dans R tel que $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}$ est sans torsion pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ (pour les notations voir 1.3.1). Soit M un L-espace de Fréchet compact avec une action continue à gauche de R, où L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On suppose que R agit sur M à travers son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ et en plus $K \cap Z(\mathbb{Q})$ agit trivialement.

Théorème 2.1. *Soit $x \in R$ tel que le morphisme induit par x sur M est complètement continu. Pour tout rationnel h et pour chaque $i \in \{0, ..., 2d\}$ le L-espace vectoriel $H_c^i(Y_K, \mathcal{L}(M))$ possède une décomposition en pente $\leq h$ par rapport à l'endomorphisme $[KxK]$.*

Ce théorème a été démontré pour la cohomologie sans support dans [Urb11], dont l'approche repose sur la définition des opérateurs de Hecke comme agissant sur un complexe calculant la cohomologie sans support. Nous adaptons les arguments de [Urb11] pour la cohomologie du bord de la compactification de Borel-Serre de la variété de Hilbert. Ensuite, on utilise ces deux complexes pour obtenir un troisième complexe calculant la cohomologie à support compact et sur lequel les opérateurs de Hecke agissent.
Avant de démontrer ce théorème, on rappelle la notion de décomposition en pente et quelques résultats.

2.1 Théorie spectrale p-adique

On rappelle la définition d'une décomposition en pente $\leq h$ pour un espace vectoriel sur un corps p-adique muni d'un endomorphisme et on énonce quelques propriétés. D'après le bel article de Serre,[Ser62], on déduit l'existence d'une telle décomposition pour un espace de Banach avec un endomorphisme complètement continu, ou plus généralement pour un espace de Fréchet compact.
Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie de corps. Un polynôme $q(x) \in L[x]$ de degré r est dit *de pente* $\leq h$ si $q(0)$ est une unité de l'anneau des entiers de L et si $a \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ est une racine de $q^*(x) := x^r q(\frac{1}{x})$ alors $v_p(a) \leq h$.

Définition 2.2. Soit M un L-espace vectoriel et α un endomorphisme L-linéaire de M. Une *décomposition en pente* $\leq h$ *de* (M, α) est une décomposition de L-espaces vectoriels invariants par α, $M = M_1 \oplus M_2$, tel que M_1 est de dimension finie sur L, $\det(1 - x\alpha \mid M_1) \in L[x]$ est de pente $\leq h$ et pour chaque polynôme $q(x) \in L[x]$ de pente $\leq h$ le morphisme $q^*(\alpha)\mid_{M_2}: M_2 \to M_2$ est inversible.

Remarques : i) Pour un h fixé, la décomposition de pente de (M,α) (si elle existe !) est unique et on note $(M,\alpha)^{\leq h} := M_1$ et $(M,\alpha)^{>h} := M_2$. On écrit $M^{\leq h} := M_1$ et $M^{>h}$ s'il n'y a pas de confusion.
ii) Soit (M,α) une paire pour laquelle il existe la décomposition en pente pour h et soit $a \in L$ alors $(M, a\alpha)$ possède décomposition en pente $\leq h+v_p(a)$ et on a $(M,a\alpha)^{\leq h+v_p(a)} = (M,\alpha)^{\leq h}$.
iii) Soient (M,α) et (N,β) comme dans la définition avec décomposition en pente $\leq h$. Soit $\gamma : M \to N$ linéaire tel que $\gamma \circ \alpha = \beta \circ \gamma$ alors $\gamma(M^{\leq h}) \subset N^{\leq h}$ et $\gamma(M^{>h}) \subset N^{>h}$. (voir [Urb11], lemme 2.3.2).
iv) Soit $h \in \mathbb{Q}$, (M,α) comme dans la définition avec décomposition en pente $\leq h$ et $N \subset M$ un sous espace vectoriel tel que $\alpha(N) \subset N$. Alors $(N, \alpha\mid_N)$ possède une décomposition en pente $\leq h$ si et seulement si $(M/N, \overline{\alpha})$ possède, et dans le cas affirmatif on a : $N^{\leq h} = M^{\leq h} \bigcap N$ et $(M/N)^{\leq h} = M^{\leq h}/N^{\leq h}$ (de façon analogue pour $> h$).
v) Soit M un L-espace vectoriel et $\mathfrak{M} \subset M$ un $\mathcal{O}_L$-sous-module tel que $L\mathfrak{M} = M$ et pour tout $m \in M - \{0\}$ il existe $a \in L$ tel que $am \notin \mathfrak{M}$. Soit $\alpha : M \to M$ linéaire tel que $\alpha(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$. Alors si $h < 0$ et (M,α) possède une décomposition en pente $\leq h$ alors $M^{\leq h} = \{0\}$.

Théorème 2.3. *Soit M un L-espace de Banach et $\alpha : M \to M$ un endomorphisme complètement continu. Alors (M,α) possède une décomposition en pente $\leq h$ pour tout $h \in \mathbb{Q}$.*

Preuve : Ce théorème est essentiellement la prop 12 de [Ser62] plus la remarque 3). Soit $q(x) \in L[x]$ de pente $\leq h$ et $q^*(0) = 1$. On écrit $q^*(\alpha) = 1 - \alpha'$ et on applique prop 12 de [Ser62] pour M, α' et $a = 1$ pour obtenir une décomposition $M = N(q) \oplus F(q)$ en sous-espaces fermés stables par $q^*(\alpha)$ tel que $N(q)$ est un L-espace vectoriel de dimension finie, $q^*(\alpha)$ est nilpotent sur $N(q)$ et inversible sur $F(q)$. Il n'est pas compliqué de voir que la décomposition $N(q) \oplus F(q)$ est en fait stable par α. Finalement soit $M_1 = \sum_q N(q)$ et $M_2 = \bigcap_q F(q)$ où la somme et l'intersection sont sur tous les $q(x) \in L[x]$ de pente $\leq h$ et $q^*(0) = 1$. On peut vérifier que ces espaces forment une décomposition en pente $\leq h$ de (M,α). ■

L'existence de la décomposition en pente $\leq h$ dans le contexte de L-espaces de Banach implique l'existence dans le cas de L-espaces de Fréchet compacts.

Définition 2.4. i) Un L-espace vectoriel topologique M est appelé un *L-espace de Fréchet compact* s'il est isomorphe à une limite projective $\varprojlim M_n$ où M_n est un L-espace de Banach et les morphismes $\beta_n : M_n \to M_{n-1}$ en définissant cette limite sont complètement continus.
ii) Un endomorphisme continu $\alpha : M \to M$ sur un L-espace de Fréchet compact est dit *complètement continu* si pour chaque $n \geq 1$ il existe un morphisme continu $\gamma_n : M_{n-1} \to M_n$ tel que $\gamma_n \circ \mathrm{pr}_{n-1} = \mathrm{pr}_n \circ \alpha$ où $\mathrm{pr}_n : M \to M_n$ est la projection.

Noter qu'un endomorphisme continu $\alpha : M \to M$ sur un L-espace de Fréchet compact défini pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un endomorphisme complètement continu $\alpha_n : M_n \to M_n$ sur l'espace de Banach M_n, donné par $\alpha_n := \gamma_n \circ \beta_n$.

Corollaire 2.5. *Soit M un L-espace de Fréchet compact et $\alpha : M \to M$ un endomorphisme complètement continu. Alors pour tout rationnel h il existe une décomposition en pente $\leq h$ pour (M,α) et en plus on a $M^{\leq h} \cong M_n^{\leq h}$ où à droite on considère la décomposition en pente $\leq h$ pour (M_n,α_n).*

Preuve : voir [Urb11], 2.3.13. ∎

On énonce un lemme qui sera ultérieurement utilisé :

Lemme 2.6. *1) Soit $M^\bullet$ un complexe de L-espaces de Fréchet compact et $\alpha^\bullet : M^\bullet \to M^\bullet$ un morphisme de complexes tel que l'opérateur $\alpha^i : M^i \to M^i$ est complètement continu alors pour tout $h \in \mathbb{Q}$ le L-espace vectoriel $H^i(M^\bullet)$ possède une décomposition en pente $\leq h$ par rapport au morphisme $\alpha^i : H^i(M^\bullet) \to H^i(M^\bullet)$ obtenu de $\alpha^\bullet$.*
*2) Soient $M^\bullet$ et $N^\bullet$ deux complexes et $\alpha^\bullet : M^\bullet \to M^\bullet$, $\beta^\bullet : N^\bullet \to N^\bullet$ deux morphismes comme dans **1)**. Soit $\gamma^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ un morphisme de complexes tel que $\beta^\bullet \circ \gamma^\bullet = \gamma^\bullet \circ \alpha^\bullet$ et induit des isomorphismes $(M^i)^{\leq h} \to (N^i)^{\leq h}$. Alors on a des isomorphismes au niveau de la cohomologie : $(H^i(M^\bullet))^{\leq h} \to (H^i(N^\bullet))^{\leq h}$.*

Preuve : Pour la partie **1)** voir les discussions aux paragraphes 2.3.10 et 2.3.12 de [Urb11].
Soient $d_M^\bullet$ et $d_N^\bullet$ les différentiels de $M^\bullet$ et $N^\bullet$. Remarquer que pour chaque i $\ker(d_M^i)$ et $\ker(d_M^i)$ sont des espaces de Fréchet compacts, et donc d'après la preuve de la partie **1)** pour démontrer la partie **2)** il suffit de démontrer que γ^i induit un isomorphisme entre $(\ker(d_M^i))^{\leq h}$ et $(\ker(d_N^i))^{\leq h}$. Mais d'après la remarque **iv)** on a $(\ker(d_M^i))^{\leq h} = \ker(d_M^i) \cap M^{\leq h}$ et $(\ker(d_N^i))^{\leq h} = \ker(d_N^i) \cap N^{\leq h}$ et alors $\gamma^i \mid_{(\ker(d_M^i))^{\leq h}} : (\ker(d_M^i))^{\leq h} \to (\ker(d_N^i))^{\leq h}$ est un isomorphisme. ∎

2.2 Décomposition en pente pour la cohomologie à support compact

2.2.1 Complexes

Cohomologie sans support.

Soit Γ un sous-groupe arithmétique de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ qui n'a pas de torsion. On décrit la construction de complexes avec de bonnes propriétés dont la cohomologie est celle de Γ (voir 4.2 dans [Urb11] ou §11 dans [BS74]).
Étant donné que la variété $\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ est compacte et possède une structure de variété à coins C^∞ à bord lisse, alors d'après théorème 10.6 dans [Mun] on sait que $\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ possède une triangulation finie qui induit une triangulation sur son bord. L'image réciproque de cette triangulation par l'homéomorphisme local $\overline{\mathbb{H}}_F \to \Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ nous fournit une triangulation sur $\overline{\mathbb{H}}_F$ qui définit bien une triangulation sur son bord. On fixe une telle triangulation. Pour chaque $i \in \{0, ..., 2d\}$ on note $\triangle_i$ l'ensemble des simplexes de dimension i. Comme la triangulation est finie alors l'action de Γ sur $\triangle_i$ possède un nombre fini d'orbites. De plus puisque l'action de Γ sur $\overline{\mathbb{H}}_F$ est libre alors chacune de ces orbites est en bijection avec Γ. Soit $C_i(\Gamma)$ le $\mathbb{Z}$-module libre sur $\triangle_i$ alors $C_i(\Gamma)$ est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module à gauche libre de rang fini et en considérant les opérateurs de bord standard $C_i(\Gamma) \to C_{i-1}(\Gamma)$ on a la suite exacte suivante :

$$0 \to C_{2d}(\Gamma) \to ... \to C_1(\Gamma) \to C_0(\Gamma) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

Cela veut dire que $C_\bullet(\Gamma)$ est une résolution du $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module trivial $\mathbb{Z}$ et donc on peut calculer la cohomologie de Γ avec ce complexe. Pour M un Γ-module à gauche on définit le complexe : $C^\bullet(\Gamma, M) := \mathrm{Hom}_\Gamma(C_\bullet(\Gamma), M)$, alors :

- la cohomologie de $C^\bullet(\Gamma, M)$ est la cohomologie de Γ à coefficients dans M, $H^\bullet(\Gamma, M)$;
- $C^i(\Gamma, M)$ est isomorphe à M^{r_i} avec r_i le nombre d'orbites de l'action de Γ sur $\triangle_i$.

Cohomologie du bord.

Après avoir fixé une triangulation de $\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ on a obtenu une triangulation de $\overline{\mathbb{H}}_F$. On considère la triangulation du bord $\partial\overline{\mathbb{H}}_F$ obtenue de cette triangulation. Comme précédement, en considérant les $\mathbb{Z}$-modules libres sur les simplexes de cette triangulation du bord on obtient un complexe :

$$C^{\partial}_{\bullet}(\Gamma)$$

qui calcule l'homologie de $\partial\overline{\mathbb{H}}_F$.
Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des groupes de Borel de G^{ad} et on note $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ le $\mathbb{Z}$-module libre sur $\mathcal{B}$. Alors on a :

Proposition 2.7. *$C^{\partial}_{\bullet}(\Gamma)$ est un complexe de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules à gauche libres et de rang fini. De plus c'est une résolution du $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module trivial $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$; cela veut dire qu'on a une suite exacte de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules :*

$$0 \to C^{\partial}_{2d-1}(\Gamma) \to ... \to C^{\partial}_{1}(\Gamma) \to C^{\partial}_{0}(\Gamma) \to \mathbb{Z}[\mathcal{B}] \to 0. \tag{2.1}$$

Preuve : La première affirmation est une conséquence du fait que l'action de Γ sur $\partial\overline{\mathbb{H}}_F$ est libre et la triangulation de $\Gamma \setminus \overline{\mathbb{H}}_F$ fixée dans 2.2.1 est finie.
Par construction le complexe $C^{\partial}_{\bullet}(\Gamma)$ calcule l'homologie de $\partial\overline{\mathbb{H}}_F$. D'autre part, on sait que $\partial\overline{\mathbb{H}}_F = \bigsqcup_{P\in\mathcal{B}} e(P)$ et chaque $e(P)$ est contractile alors on a $H_i(\partial\overline{\mathbb{H}}_F) = 0$ si $i > 0$ et $H_0(\partial\overline{\mathbb{H}}_F) = \mathbb{Z}[\mathcal{B}]$. Donc on obtient la suite exacte dans (2.1). ■

Soit M un Γ-module à gauche. Pour chaque $i \in \{0, .., 2d-1\}$ on définit

$$C^{i}_{\partial}(\Gamma, M) := \mathrm{Hom}_{\Gamma}(C^{\partial}_{i}(\Gamma), M)$$

Une composante du bord

Soit P un Borel de G^{ad} fixé, en considérant l'espace contractile $e(P)$ on est dans une situation analogue au paragraphe 2.2.1 mais par rapport au groupe $\Gamma_P = \Gamma \cap P(\mathbb{Q})$. La triangulation de $\overline{\mathbb{H}}_F$ obtenue dans 2.2.1 nous fournit une triangulation finie de $e(P)$ et pour chaque $i \in \{0, ..., 2d-1\}$ on note $\triangle^P_i$ l'ensemble de ces simplexes de dimension i, en fait on a $\triangle^P_i = \{s \in \triangle_i | s \subset e(P)\}$. On définit $C_i(\Gamma_P)$ comme le $\mathbb{Z}$-module libre sur $\triangle^P_i$ alors on a :

Lemme 2.8. *Le $\mathbb{Z}$-module $C_i(\Gamma_P)$ est en réalité un $\mathbb{Z}[\Gamma_P]$-module à gauche et est libre de rang fini. De plus la suite suivante est exacte :*

$$0 \to C_{2d-1}(\Gamma_P) \to ... \to C_1(\Gamma_P) \to C_0(\Gamma_P) \to \mathbb{Z} \to 0. \tag{2.2}$$

Preuve : Comme $P(\mathbb{Q}) \cap G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ agit sur $e(P)$ et Γ agit sur $\overline{\mathbb{H}}_F$ alors Γ_P agit à gauche sur $e(P)$ et laisse invariant la triangulation, donc $C_i(\Gamma_P)$ est un $\mathbb{Z}[\Gamma_P]$-module. L'action de Γ_P sur $e(P)$ est libre alors $C_i(\Gamma_P)$ est en fait un $\mathbb{Z}[\Gamma_P]$-module libre. De plus il est de rang fini parce que l'image dans $\Gamma_P \setminus e(P)$ de la triangulation de $e(P)$ est finie. En considérant les opérateurs de bord standards $d_i : C_i(\Gamma_P) \to C_{i-1}(\Gamma_P)$ on obtient un complexe $(C_{\bullet}(\Gamma_P), d_{\bullet})$ calculant l'homologie de $e(P)$. Finalement comme $e(P)$ est contractile alors on obtient la suite exacte dans (2.2). ■

Proposition 2.9. *1) On a un isomorphisme de complexes qui est fonctoriel par rapport à M :*

$$C^{\bullet}_{\partial}(\Gamma, M) \xrightarrow{\sim} \oplus_{P\in\mathcal{B}_{\Gamma}} C^{\bullet}(\Gamma_P, M),$$

où $\mathcal{B}_\Gamma$ *est un ensemble de représentants des* Γ*-classes de conjugaison des groupes Borel de* G^{ad} *et* $C^\bullet(\Gamma_P, M) := \mathrm{Hom}_{\Gamma_P}(C_\bullet(\Gamma_P), M)$.
2) $C^q_\partial(\Gamma, M)$ *est isomorphe à un nombre fini de copies de* M*. De plus la cohomologie du bord* $H^\bullet(\Gamma \setminus \partial\overline{\mathbb{H}}_F, \mathcal{L}(M))$ *est calculée en prenant la cohomologie du complexe* $C^\bullet_\partial(\Gamma, M)$ *(ici* $\mathcal{L}(M)$ *est le faisceau défini dans 1.5.3).*

Preuve : Soit $\mathcal{B}_\Gamma$ est un ensemble de représentants des Γ-classes de conjugaison des groupes de Borel de G^{ad}. On a la suivante décomposition de $C^\partial_\bullet(\Gamma)$ par des $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules :

$$C^\partial_\bullet(\Gamma) = \bigoplus_{P \in \mathcal{B}_\Gamma} \bigoplus_{Q \sim P} C_\bullet(\Gamma_Q),$$

alors il suffit de définir pour chaque $P \in \mathcal{B}_\Gamma$ un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(\textstyle\bigoplus_{Q\sim P} C_\bullet(\Gamma_Q), M) \xrightarrow{\sim} C^\bullet(\Gamma_P, M).$$

Soit $P \in \mathcal{B}_\Gamma$ fixé. On définit $\mathrm{Hom}_\Gamma(\bigoplus_{Q\sim P} C_\bullet(\Gamma_Q), M) \longrightarrow C^\bullet(\Gamma_P, M)$ par $\varphi \to \varphi\,|_{C_\bullet(\Gamma_P)}$. On vérifie que cette fonction est un isomorphisme. Soit φ tel que $\varphi\,|_{C_\bullet(\Gamma_P)} = 0$. Pour $s \in C_\bullet(\Gamma_Q)$ avec $Q \sim P$ soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma s \in C_\bullet(\Gamma_P)$ alors $\varphi(s) = \gamma^{-1}\varphi(\gamma s) = 0$, alors $\varphi = 0$ et donc le morphisme est injectif. Concernant la surjectivité, soit $\varphi \in C^\bullet(\Gamma_P, M)$ et on définit $\overline{\varphi} : \bigoplus_{Q\sim P} C_\bullet(\Gamma_Q) \to M$ comme suit : soit $s \in C_\bullet(\Gamma_Q)$ avec $Q \sim P$ et on choisit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma s \in C_\bullet(\Gamma_P)$, alors on pose $\overline{\varphi}(s) := \gamma^{-1}\varphi(\gamma s)$. $\overline{\varphi}$ est bien défini : soit $\gamma' \in \Gamma$ tel que $\gamma' s \in C_\bullet(\Gamma_P)$ alors si $\delta := \gamma'\gamma^{-1}$ on a $\delta e(P) \cap e(P) \neq \emptyset$, d'où on obtient que $e(\delta P \delta^{-1}) = \delta e(P) = e(P)$ et donc $\delta P \delta^{-1} = P$. Il n'est pas compliqué de vérifier qu'on a forcément $\delta \in P$, et alors $\delta \in \Gamma_P$, et finalement $\gamma'^{-1}\varphi(\gamma' s) = \gamma'^{-1}\varphi(\delta\gamma s) = \gamma^{-1}\varphi(\gamma s) = \overline{\varphi}(x)$. Le fait que $\overline{\varphi}$ est Γ-équivariante est démontré de la même façon.
La première affirmation de **2)** est une conséquence du fait que $C^\partial_\bullet(\Gamma)$ est un $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module libre de rang fini. Finalement d'après la partie **1)** et la décomposition (1.9) on déduit que la cohomologie du complexe $C^\bullet_\partial(\Gamma, M)$ est la cohomologie du bord $H^\bullet(\Gamma \setminus \partial\overline{\mathbb{H}}_F, \mathcal{L}(M))$.■

Cohomologie à support compact

D'abord on va rappeler la notion de cône d'un morphisme de complexes dans une catégorie abélienne. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. Si $C = (C^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un complexe d'objets de $\mathcal{A}$ alors on note par $C[1]$ *la suspension* de C définie par $C[1]^i = C^{i+1}$ et le différentiel évident. De façon analogue, on définit $C[-1]$. Soient $C = (C^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $D = (D^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ deux complexes d'objets de $\mathcal{A}$ et $\pi : C \to D$ un morphisme de complexes alors *le cône de* π est un complexe d'objets de $\mathcal{A}$, $C(\pi)$ défini par : $C(\pi) := C \oplus D[-1]$ avec le différentiel donné par $d_{C(\pi)} = \begin{pmatrix} -d_C & 0 \\ -\pi & d_{D[-1]} \end{pmatrix}$. Observer que le cône est bien défini dans la catégorie homotopie sur $\mathcal{A}$ et fournit cette catégorie d'une structure de catégorie triangulée.
Pour un groupe arithmétique sans torsion $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ et M un Γ-module à gauche soit $\pi : C^\bullet(\Gamma, M) \to C^\bullet_\partial(\Gamma, M)$ le morphisme induit de l'inclusion $C^\partial_\bullet(\Gamma) \subset C_\bullet(\Gamma)$. Alors on définit le complexe :

$$C^\bullet_c(\Gamma, M) := C(\pi)$$

Alors les groupes de cohomologie $H^\bullet_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(M))$ peuvent être calculés en prenant la cohomologie du complexe $C^\bullet_c(\Gamma, M)$.

2.2.2 Opérateurs

Dans [Urb11] on définit l'action des opérateurs de Hecke sur les complexes définis dans 2.2.1 en utilisant le fait que pour chaque sous-groupe arithmétique $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ qui n'a pas de torsion, le complexe $C_\bullet(\Gamma)$ est une résolution par des $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules libres de rang fini (en particulier projectifs) du $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module trivial $\mathbb{Z}$. De la même manière, en utilisant le fait que le complexe $C_\bullet^\partial(\Gamma)$ est une résolution par des $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules libres de rang fini du $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module trivial $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ (voir proposition 2.7) on fait agir les opérateurs de Hecke sur les complexes dont la cohomologie est la cohomologie du bord. Remarquer qu'on a choisi d'utiliser les Γ-modules à gauche M et non à droite comme dans [Urb11].

Paires compatibles

Tout d'abord on expose une situation générale. Soient Γ et Γ' deux sous-groupes arithmétiques sans torsion de $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$, de plus on prend N un Γ-module à gauche et M un Γ'-module. Une paire (ϕ, α) est dite *compatible* si $\phi : \Gamma \to \Gamma'$ est un morphisme de groupes et $\alpha : M \to N$ est un morphisme de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules où M est vu comme Γ-module à travers ϕ. Pour une paire compatible (ϕ, α) on peut associer (voir 4.2.5 dans [Urb11]) un morphisme $\alpha^\bullet : C^\bullet(\Gamma', M) \to C^\bullet(\Gamma, N)$ dans la catégorie homotopie sur$\mathbb{Z}$. On peut obtenir un morphisme analogue pour le bord.
À travers ϕ le complexe $C_\bullet^\partial(\Gamma')$ est une résolution du $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module trivial $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$, comme $C_\bullet^\partial(\Gamma)$ est une résolution projective alors il existe un morphisme $\phi_\bullet : C_\bullet^\partial(\Gamma) \to C_\bullet^\partial(\Gamma')$ de complexes de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules à gauche et est unique à homotopie près (c'est à dire un morphisme unique dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}[\Gamma]$). Alors on peut définir un morphisme de complexes de $\mathbb{Z}$-modules $\alpha^\bullet : C_\partial^\bullet(\Gamma', M) \to C_\partial^\bullet(\Gamma, N)$ par $\varphi \to \alpha \circ \varphi \circ \phi_\bullet$. Observer que ce morphisme est bien défini dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}$. On a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} C_\bullet(\Gamma) & \longrightarrow & C_\bullet(\Gamma') \\ \uparrow & & \uparrow \\ C_\bullet^\partial(\Gamma) & \longrightarrow & C_\bullet^\partial(\Gamma') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C^\bullet(\Gamma, N) & \longleftarrow & C^\bullet(\Gamma', M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_\partial^\bullet(\Gamma, N) & \longleftarrow & C_\partial^\bullet(\Gamma', M) \end{array}$$

Le premier diagramme est dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}[\Gamma]$ où les flèches verticales sont les inclusions naturelles. Le deuxième diagramme est dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}$.

Cela nous permet d'associer à chaque paire compatible (ϕ, α) un morphisme dans la catégorie homotopique sur $\mathbb{Z}$ noté

$$\alpha^\bullet : C_c^\bullet(\Gamma', N) \to C_c^\bullet(\Gamma, M)$$

Maintenant on considère deux cas particulièrs :

- On prend $\Gamma \subset \Gamma'$ et $M = N$, ϕ l'inclusion et α l'identité sur M. Alors on obtient le *morphisme de restriction* : $\mathrm{res}_{\Gamma',\Gamma} : C_\partial^\bullet(\Gamma', M) \to C_\partial^\bullet(\Gamma, M)$.
- Soit $\Lambda \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ un semi-groupe contenant un sous-groupe arithmétique Γ qui n'a pas de torsion et on fixe $\lambda \in \Lambda$ tel que $\lambda\Gamma\lambda^{-1} \subset \Lambda$. Soit M un $\mathbb{Z}$-module avec une action à gauche de Λ . On considère la paire compatible donnée par $\phi : \lambda\Gamma\lambda^{-1} \to \Gamma$ $\gamma \to \lambda^{-1}\gamma\lambda$ et $M \to M$ défini par $m \to \lambda m$. Le morphisme obtenu est noté par $[\lambda] : C_\partial^\bullet(\Gamma, M) \to C_\partial^\bullet(\lambda\Gamma\lambda^{-1}, M)$.
- Les morphismes correspondants aux complexes calculant la cohomologie à support compact sont notés de la même façon :

$$\mathrm{res}_{\Gamma',\Gamma} : C_c^\bullet(\Gamma', M) \to C_c^\bullet(\Gamma, M)$$

$$[\lambda] : C_c^\bullet(\Gamma, M) \to C_c^\bullet(\lambda\Gamma\lambda^{-1}, M).$$

Opérateurs de Hecke

D'abord on définit le morphisme de transfert sur les complexes. Si Γ est un sous-groupe d'indice fini de Γ' alors $C_\bullet^\partial(\Gamma')$ est aussi une résolution projective du $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module trivial $\mathbb{Z}[\mathcal{B}]$ et alors il existe un unique morphisme $\tau : C_\bullet^\partial(\Gamma') \to C_\bullet^\partial(\Gamma)$ dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}[\Gamma]$. Si M est un Γ'-module à gauche on définit le morphisme de transfert $\mathrm{tr}_{\Gamma,\Gamma'} : C_\partial^\bullet(\Gamma, M) \to C_\partial^\bullet(\Gamma', M)$ comme suit : On décompose Γ' en classes $\Gamma' = \sqcup_q \gamma_q \Gamma$ et pour $\varphi \in C_\partial^\bullet(\Gamma, M)$ on définit

$$\mathrm{tr}_{\Gamma,\Gamma'}(\varphi)(s) = \sum_q \gamma_q \varphi(\tau(\gamma_q^{-1} s)).$$

On constat que ce morphisme ne dépend pas du choix des γ_q et qu'il est bien défini dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}$. On a aussi des diagrammes commutatifs comme précédement.

Maintenant soit $\Lambda \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ un semi-groupe contenant Γ et Γ' deux groupes arithmétiques sans torsion, et soit $\lambda \in \Lambda$ tel que le groupe $\Gamma' \cap \lambda\Gamma\lambda^{-1}$ est d'indice fini dans Γ'. Alors pour chaque Λ-module à droite M on définit l'opérateur double classe :

$$[\Gamma\lambda\Gamma'] : C_\partial^\bullet(\Gamma, M) \to C_\partial^\bullet(\Gamma', M) \quad \text{par} \quad [\Gamma\lambda\Gamma'] = \mathrm{tr}_{\Gamma'\cap\lambda\Gamma\lambda^{-1},\Gamma'} \circ [\lambda] \circ \mathrm{res}_{\Gamma,\Gamma\cap\lambda^{-1}\Gamma'\lambda}.$$

L'opérateur $[\Gamma\lambda\Gamma']$ est bien défini dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}$ et dans cette catégorie on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
C^\bullet(\Gamma, M) \arrow[r, "{[\Gamma\lambda\Gamma']}"] \arrow[d] & C^\bullet(\Gamma', M) \arrow[d] \\
C_\partial^\bullet(\Gamma, M) \arrow[r, "{[\Gamma\lambda\Gamma']}"] & C_\partial^\bullet(\Gamma', M)
\end{tikzcd}$$

ici, le morphisme $[\Gamma\lambda\Gamma'] : C^\bullet(\Gamma, M) \to C^\bullet(\Gamma', M)$ est défini dans 4.2.6 de [Urb11] et les flèches verticales sont les morphismes canoniques.
Le cône d'un morphisme de complexes est bien défini dans la catégorie homotopie, alors le dernier diagramme commutatif nous fournit le morphisme suivant dans la catégorie homotopie sur $\mathbb{Z}$:

$$[\Gamma\lambda\Gamma'] : C_c^\bullet(\Gamma, M) \to C_c^\bullet(\Gamma', M). \tag{2.3}$$

2.2.3 Remarques

Soit $\Gamma \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ un groupe arithmétique sans torsion et M un Γ-module à gauche. Au § 2.2.1 on a défini les complexes de $\mathbb{Z}$-modules $C^\bullet(\Gamma, M)$, $C_\partial^\bullet(\Gamma, M)$ et $C_c^\bullet(\Gamma, M)$, et par construction chaque terme de ces complexes est isomorphe comme un $\mathbb{Z}$-module à une somme finie de copies de M. Soit A un anneau et M est un A-module à gauche alors ces complexes sont en fait complexes de A-modules et les isomorphismes entre les termes des complexes et les copies de M sont compatibles avec la structure de A-module. Si $A = L$ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et en plus M est un L-espace de Banach alors les termes des complexes sont L-espaces de Banach. On arrive à la même conclusion si M est un Fréchet compact.

D'autre part si (ϕ,α) est une paire compatible et $\alpha : M \to N$ est un morphisme de A-modules alors le morphisme $C^\bullet_?(\Gamma', M) \to C^\bullet_?(\Gamma, N)$ pour $? = \emptyset, \partial, c$ défini dans [Urb11] et au § 2.2.2 est bien défini dans la catégorie homotopie sur A. Si M et N sont des L-espaces de Banach, α est continu et les actions de Γ et Γ' sont continues, alors il n'est pas compliqué de voir que ce morphisme de complexes est bien défini dans la catégorie homotopie de la catégorie des L-espaces de Banach. On peut aussi vérifier que si en autre on suppose que α est un morphisme complètement continu alors le morphisme dans chaque terme $C^i_?(\Gamma', M) \to C^i_?(\Gamma, N)$ est complètement continu. Tout comme précédement on a la même conclusion si M et N sont des espaces de Fréchet compacts.
Soit maintenant $\Lambda \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ un semi-groupe et Γ, Γ' deux groupes arithmétiques sans torsion dans Λ. Soit $\lambda \in \Lambda$ tel que $\Gamma' \cap \lambda\Gamma\lambda^{-1}$ est d'indice fini dans Γ'. Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et M un L-espace de Banach (ou L-espace de Fréchet compact) avec une action continue à gauche de Λ et tel que le morphisme induit par λ est complètement continu. Soit $? \in \{\emptyset, \partial, c\}$ alors la discussion ci-dessus implique que $[\Gamma\lambda\Gamma'] : C^i_?(\Gamma, M) \to C^i_?(\Gamma', M)$ est complètement continu pour chaque i.

2.2.4 Preuve du théorème 2.1

On utilise les notations données au début de cette section.

Preuve du théorème 2.1 On choisit l'ensemble $\{g_{\mathbf{y}} | \mathbf{y} \in \mathcal{C}^+_K\}$ comme dans 1.3.1 tel que l'image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ de chaque $g_{\mathbf{y}}$ est 1. Alors l'image de $\Gamma_{\mathbf{y}}$ dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans l'image de K et alors $\Gamma_{\mathbf{y}}$ agit aussi sur M. De plus comme par hypothèse $K \cap Z(\mathbb{Q})$ agit trivialement sur M on en déduit que $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}$ agit sur M à gauche. Par hypothèse, chaque $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}$ est sans torsion, on peut donc considérer les complexes de L-espaces de Fréchet compacts $C^\bullet_c(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M)$ et on définit :

$$C^\bullet_c(K, M) := \bigoplus_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}^+_K} C^\bullet_c(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M).$$

$C^\bullet_c(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M)$ est un complexe de L-espaces de Fréchet compact. D'autre part d'après la décomposition (1.5) et le fait que $C^\bullet_c(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M)$ calcule la cohomologie à support compact pour $Y_{\mathbf{y}}$ alors la cohomologie de $C^\bullet_c(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M)$ nous donne la cohomologie à support compact de la variété de Hilbert Y_k par rapport au faisceau $\mathcal{L}_K(M)$.
Soit $\Lambda \subset G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})^+$ l'image dans $G^{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})$ du semi-groupe des éléments de $G(\mathbb{Q})^+$ tels que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est dans l'image de R. Soit σ la permutation de $\mathcal{C}^+_K$ tel que pour chaque $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^+_K$ on a $g_{\mathbf{y}} x = \lambda_{\mathbf{y}} g_{\sigma(\mathbf{y})} kc$ avec $\lambda_{\mathbf{y}} \in G(\mathbb{Q})$, $k \in K$ et $c \in G^+_\infty$. Alors pour chaque $\mathbf{y}$ on a $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}} \subset \Lambda$, $\lambda_{\mathbf{y}} \in \Lambda$ et l'opérateur sur M obtenu de l'action de $\lambda_{\mathbf{y}}$ est complètement continu. Alors le morphisme $[\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}} \lambda_{\mathbf{y}} \overline{\Gamma}_{\sigma(\mathbf{y})}]$ est complètement continu. On définit :

$$[KxK] := \bigoplus_{\mathbf{y} \in \mathcal{C}^+_K} [\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}} \lambda_{\mathbf{y}} \overline{\Gamma}_{\sigma(\mathbf{y})}] : C^\bullet_c(K, M) \to C^\bullet_c(K, M).$$

Alors ce morphisme est bien défini dans la catégorie homotopie des L-espaces de Fréchet compacts, sur chaque terme l'opérateur est complètement continu et induit l'opérateur de Hecke correspondant au niveau de la cohomologie : $[KxK] : H^\bullet_c(Y_K, \mathcal{L}_K(M)) \to H^\bullet_c(Y_K, \mathcal{L}_K(M))$. Finalement, le théorème est une conséquence du lemme 2.6. ∎

Corollaire 2.10. *Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathcal{O}_L$-sous-module de M tel que $L\mathfrak{M} = M$ et si $m \in M - 0$ alors il existe $a \in L$ tel que $am \notin \mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{M}$ est invariant par l'action de R sur M alors $H^i_c(Y_K, \mathcal{L}(M))^{\leq h} = 0$ pour tout $h < 0$.*

Preuve : Soit $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$. $C_c^i(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M)$ est isomorphe à M^r avec $r \in \mathbb{N}$, on note $\mathfrak{M}_{\mathbf{y}} \subset C_c^i(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M)$ le $\mathcal{O}_L$-sous-module qui correspond à $\mathfrak{M}^r$ à travers ce isomorphisme. $\mathfrak{M}_K := \oplus_{\mathbf{y}} \mathfrak{M}_{\mathbf{y}}$ est un $\mathcal{O}_L$-sous-module de $C_c^i(K, M)$ et $L\mathfrak{M}_K = C_c^i(K, M)$ et pour chaque $\varphi \in C_c^i(K, M) - \{0\}$ il existe $a \in L$ tel que $a\varphi \notin \mathfrak{M}_K$. Pour chaque $\mathbf{y}$ le morphisme $[\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}} \lambda_{\mathbf{y}} \overline{\Gamma}_{\sigma(\mathbf{y})}] : C_c^i(\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}, M) \to C_c^i(\overline{\Gamma}_{\sigma(\mathbf{y})}, M)$ défini dans la preuve du théorème 2.1 envoie $\mathfrak{M}_{\mathbf{y}}$ dans $\mathfrak{M}_{\sigma(\mathbf{y})}$ et donc $\mathfrak{M}_K$ est stable par rapport à l'opérateur $[KxK]$ de $C_c^i(K, M)$. Alors d'après la remarque **v)** dans 2.1 si $h < 0$ alors $C_c^i(K, M)^{\leq h} = \{0\}$. Finalement le lemme 2.6 implique $H_c^i(Y_K, \mathcal{L}(M))^{\leq h} = 0$. ■

Chapitre 3

Distributions

On introduit les distributions sur $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$, qui donnent lieu aux coefficients dans la cohomologie qu'on utilise : les *coefficients surconvergentes*. D'autre part on discute sur les distributions sur groupes de Galois.

3.1 Généralités

3.1.1 Définitions

On renvoie vers [Urb11] pour les détails. Soit $X \subset \mathbb{Q}_p^r$ un ouvert et compact. Pour une extension finie $L/\mathbb{Q}_p$ on note $\mathcal{A}(X, L)$ le L-espace vectoriel des fonctions $f : X \to L$ qui sont localement L-analytiques. En plus soit $\mathcal{A}_n(X, L)$ le L-espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{A}(X, L)$ qui sont analytiques sur les boules de rayon p^{-n} d'une couverture de X. On considère la norme sur $\mathcal{A}_n(X, L)$ définie comme suit : soit $f \in \mathcal{A}_n(X, L)$ et $\mathbf{a} = (a_1, .., a_r) \in X$ un centre d'une boule de rayon p^{-n} où on a :

$$f(x_1, .., x_r) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^r} c_{\mathbf{m}}(\mathbf{a})(x_1 - a_1)^{m_1} .. (x_r - a_r)^{m_r},$$

alors on définit $\| f \|_n = \sup\{|c_{\mathbf{m}}(\mathbf{a})|_p p^{-n \sum_i m_i} \mid \mathbf{m} \in \mathbb{N}_r \ , \ \mathbf{a}\}$. Avec cette norme $\mathcal{A}_n(X, L)$ est un L-espace vectoriel de Banach et l'inclusion $\mathcal{A}_n(X, L) \hookrightarrow \mathcal{A}_{n+1}(X, L)$ est complètement continue. Son dual $\mathcal{D}_n(X, L)$ est un espace de Banach par rapport à la norme $\|\mu\|_n = \sup\{\frac{|\mu(f)|_p}{\|f\|_n} \mid f \in \mathcal{A}_n(X, L)\}$. On considère sur $\mathcal{A}(X, L)$ la topologie limite inductive et soit $\mathcal{D}(X, L)$ son dual topologique, alors $\mathcal{D}(X, L)$ est la limite projective des $\mathcal{D}_n(X, L)$, et les morphismes $\mathcal{D}_{n+1}(X, L) \to \mathcal{D}_n(X, L)$ sont complètement continus. Alors $\mathcal{D}(X, L)$ est un espace de Fréchet compact. Si $\mu \in \mathcal{D}(X, L)$ et $n \in \mathbb{N}$ on note par abus de notation $\|\mu\|_n$ à la place de $\|\mu |_{\mathcal{A}_n(X,L)} \|_n$.

3.1.2 Admissibilité

On commence avec une définition générale. Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie. On prend M un L-espace vectoriel tel que on a une décomposition $M = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ avec M_n un espace vectoriel de Banach, si $n \leq m$ alors $M_n \subseteq M_m$ et cette inclusion est un morphisme complètement continu. Alors son dual topologique $M^\vee$ est un espace de Fréchet compact, la limite projective des espaces de Banach $M_n^\vee$ où on considère la norme sup. Soit $T \in M^\vee$ alors $T |_{M_n} \in M_n^\vee$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et on note $|T|_n$ sa norme. Soit $h \geq 0$ rationnel alors on dit qu'une transformation linéaire $T \in M^\vee$ est *h-admissible* s'il existe une constante

$C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|T\|_n \leq Cp^{nh}$.

Si par exemple on prend $M = \mathcal{A}_n(X, L)$ avec X compact alors $\mu \in \mathcal{D}_n(X, L)$ est h-admissible s'il existe $C > 0$ tel que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour toute $f \in \mathcal{A}_n(X, L)$ on a $|\mu(f)|_p \leq Cp^{nh}\|f\|_n$.
Dans cet exemple considèrer le cas de $X = \mathbb{Z}_p$. D'abord observer que si $a \in \mathbb{Z}_p$, $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $f(z) = 1_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j \in \mathcal{A}_n(\mathbb{Z}_p, L)$ et $\|f\|_n = p^{-nj}$. Donc si $\mu : \mathcal{A}(\mathbb{Z}_p, L) \to L$ est une transformation linéaire continue h-admissible alors il existe $C > 0$ tel que quels que soient $a \in \mathbb{Z}_p$, $j \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$|\mu(1_{a+p^n\mathbb{Z}_p}(z-a)^j)|_p \leq Cp^{n(h-j)}.$$

Comparer avec les définitions dans [AV75] et [Vis76].

3.2 Notations

3.2.1

On définit quelques groupes et semi groupes dans $G(\mathbb{Q}_p)$.
- $T^- = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \in T(\mathbb{Q}_p) |\ ab^{-1} \in \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p\}$
- $T^= = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \in T(\mathbb{Q}_p) |\ ab^{-1} \in p\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p\}$.
- $I_m = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G(\mathbb{Z}_p) | c \in p^m\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p\}$
- $\Lambda_{p,m} = I_m T^- I_m$. On a $\Lambda_p := \Lambda_{p,1} =$

$$G(\mathbb{Q}_p) \cap \{x\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ pc & d \end{smallmatrix}\right) \mid d \in (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, b, c, a \in \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, x \in (F \otimes \mathbb{Q}_p)^*\}$$

3.2.2 Poids

On considère sur $T(\mathbb{Z}_p) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \mid a, b \in (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*\} \simeq (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^* \times (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*$, la topologie p-adique. *Un Poids* est un homomorphisme continu de groupes $\lambda : T(\mathbb{Z}_p) \to \overline{\mathbb{Q}_p}^*$. Soit λ un poids alors il existent des homomorphismes continues $\lambda_1, \lambda_2 : (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^* \to \overline{\mathbb{Q}_p}^*$ tels que : $\lambda(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)) = \lambda_1(a)\lambda_2(b)$. Un poids λ est dit *localement algébrique* si il existe une extension $L/\mathbb{Q}_p$ contenant l'image à travers $\mathbf{inc}_p$ de la clôture normale de F et il existe $\lambda^{alg} \in X^*(T_L)$ et ϵ un caractère de $T(\mathbb{Z}_p)$ avec image finie tel que $\lambda = \lambda^{alg}\epsilon$ (par abus de notation λ^{alg} note la composition $T(\mathbb{Z}_p) \hookrightarrow T(L) \to L^\times \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}^\times$). En plus λ est dit *arithmetique* s'il est localement algébrique et λ^{alg} est dominant. Finalemen soit $\lambda = \lambda^{\mathrm{alg}}\epsilon$ un poids arithmétique avec $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}_F^\Sigma \times \mathbb{Z}_F^\Sigma$ correspondant à λ^{alg}. On dit que λ est *critique* si :
- il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = c\mathbf{t}$ où $\mathbf{t} = (1)_{\sigma \in \Sigma_F}$;
- $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ et $\mathbf{b} \leq \mathbf{0}$.
- $\epsilon\left(\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1$ pour chaque unité e totalement positive de $\mathcal{O}_F^*$.

3.3 Distributions sur $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$

3.3.1 L'induction localement analytique

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et $\lambda : T(\mathbb{Z}_p) \to L^*$ un homomorphisme continu de groupes. On étend λ à $B^-(\mathbb{Q}_p) \cap I$ à travers le morphisme canonique $B^-(\mathbb{Q}_p) \cap I \to T(\mathbb{Z}_p)$. On identifie I avec un ouvert de $\mathbb{Q}_p^{4d}$ et on définit *l'induction localement analytique* $\mathcal{A}_\lambda(L)$ comme l'ensemble des fonctions localement L-analytiques $f : I \to L$ tels que

$f(bg) = \lambda(b)f(g)$ pour tout $b \in B^-(\mathbb{Q}_p) \cap I$ et $g \in I$. $\mathcal{A}_\lambda(L)$ est une union dénombrable de L-espaces de Banach $\mathcal{A}_\lambda(L) = \cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{\lambda,n}(L)$ où $\mathcal{A}_{\lambda,n}(L)$ est le L-espace de Banach des $f \in \mathcal{A}_\lambda(L)$ pour lesquelles il existe une couverture de I par des boules de rayon p^{-n} tel que f est analytique sur chacune d'elles. L'inclusion $\mathcal{A}_{\lambda,n}(L) \hookrightarrow \mathcal{A}_{\lambda,n+1}(L)$ est un morphisme completèment continu. Alors l'induction localement analytique est équipée de la topologie limite inductive et donc son L-dual topologique noté par $\mathcal{D}_\lambda(L)$ est un L-espace de Fréchet compact.
On donne une autre description de $\mathcal{A}_\lambda(L)$. D'abord on identifie $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$ avec un ouvert et compact de $\mathbb{Q}_p^d$ compatible avec l'identification de I avec un ouvert et compact de $\mathbb{Q}_p^{4d}$. D'après la discussion 3.1 l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$ est une union dénombrable de L-espaces de Banach et donc munie de la topologie limite inductive par rapport à la laquelle son dual $\mathcal{D}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$, est un L-espace de Fréchet compact. On a un isomorphisme de L-espaces topologiques :

$$\mathcal{A}_\lambda(L) \to \mathcal{A}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L) \quad f \to f_0 \tag{3.1}$$

où $f_0(z) = f\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3.2 La $*$-action sur les distributions

D'après [Urb11] on peut définir une action continue à gauche de Λ_p sur $\mathcal{D}_\lambda(L)$ et alors on déduit une action sur $\mathcal{D}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$. On explicite l'action à droite obtenue sur $\mathcal{A}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$, $\gamma \in \Lambda_p$ et $z \in \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$ alors :

– Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in I$ on pose :

$$(f * \gamma)(z) = \lambda(\left(\begin{smallmatrix} \det(\gamma)^{-1}(d-cz) & 0 \\ 0 & (d-cz)^{-1} \end{smallmatrix}\right))f\left(\frac{-b+az}{d-cz}\right).$$

– Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in T^-$ on pose :

$$(f * \gamma)(z) = \lambda(\left(\begin{smallmatrix} u(a)^{-1} & 0 \\ 0 & u(d)^{-1} \end{smallmatrix}\right))f(ad^{-1}z), \tag{3.2}$$

voir dans notations pour la définition de la fonction u.

Remarquer que la $*$-action à droite de I sur $\mathcal{A}_\lambda(L)$ est bien connue, en effet on a : $(f * \gamma)(x) = f(x\gamma^{-1})$ pour $x, \gamma \in I$. Le résultat suivant est très important :

Lemme 3.1. *Soit $\gamma \in IT^{=}I \subset \Lambda_p$ alors le L-endomorphisme de $\mathcal{D}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$ défini par l'action de γ est un opérateur compact.*

Preuve : Voir [Urb11], Lemme 3.2.8. ■

Remarque : 1) Observer que d'après 2.5 ce lemme nous permet de déduire l'existence de décomposition en pente pour $(\mathcal{D}_\lambda(L), \gamma)$ si $\gamma \in IT^{=}I \subset \Lambda_p$.
2) Selon le contexte on utilisera la description de $\mathcal{A}_\lambda(L)$ comme l'induite localement analytique ou comme l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$, et on utilisera la même notation pour ces deux descriptions. Remarquer que la description en termes de fonctions sur $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$ ne dépend pas de λ au contraire de sa $*$-action.
3) Selon le cas on utilisera l'action a droite de Λ_p^{-1} sur $\mathcal{D}_\lambda$ qu'on obtient de l'action a gauche de Λ_p.

3.3.3 $\mathcal{O}_L$-sous-modules

Soit $\mathcal{A}_\lambda(\mathcal{O}_L)$ le $\mathcal{O}_L$-module des $f \in \mathcal{A}_\lambda(L)$ à valeurs dans $\mathcal{O}_L$. On fournit à $\mathcal{A}_\lambda(\mathcal{O}_L)$ de la topologie induite de celle de $\mathcal{A}_\lambda(L)$ et on note $\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{O}_L)$ son dual continu. Alors il n'est pas compliqué voir que $\mathcal{A}_\lambda(L) = L\mathcal{A}_\lambda(\mathcal{O}_L)$, on considère $\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{O}_L)$ comme un sous module de $\mathcal{D}_\lambda(L)$ de la façon naturelle. Le $\mathcal{O}_L$-sous-module de $\mathcal{A}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$ correspondant à $\mathcal{A}_\lambda(\mathcal{O}_L)$ est défini de la même manière et noté $\mathcal{A}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, \mathcal{O}_L)$, et on note $\mathcal{D}(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, \mathcal{O}_L)$ son dual topologique qui correspond à $\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{O}_L)$.
Dans le cas où λ a ses valeurs dans $\mathcal{O}_L^*$ il est important de remarquer que la $*$-action sur $\mathcal{D}_\lambda(L)$ laisse invariant le module $\mathcal{D}_\lambda(\mathcal{O}_L)$. En fait on peut vérifier cette affirmation en regardant les formules explicites données ci-dessus.

3.4 Distributions sur des groupes de Galois

Conjecturalement les fonctions L p-adiques associées aux motives définies sur F devraient être la transformée de Mellin de distributions admissibles sur certain groupes de Galois. Ici on décrit ces objets.

3.4.1 Le groupe Gal_p.

Soit $F^{p,ab}$ l'extension abélienne maximale non ramifiée en tout idéal premier, $\mathfrak{q}$, de F tel que $\mathfrak{q} \nmid p$. On note

$$\mathrm{Gal}_p = Gal(F^{p,ab}/F).$$

Pour $\mathfrak{m}$ un idéal entier de F on note $F^{\mathfrak{m}}$ le corps de classes de rayon $\mathfrak{m}$ de F. Alors $F^{p,ab} = \bigcup_{\mathfrak{m}} F^{\mathfrak{m}}$ où l'union est sur tous les idéaux entiers $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{q}} \mathfrak{q}^{n_{\mathfrak{q}}}$ avec $n_{\mathfrak{q}} = 0$ si $\mathfrak{q} \nmid p$. Donc on a :

$$\mathrm{Gal}_p = \varprojlim_{\mathfrak{m}} \mathrm{Gal}(F^{\mathfrak{m}}/F),$$

avec $\mathfrak{m}$ comme avant. Donc Gal_p est un groupe pro-fini et la famille $\{\mathrm{Gal}^{\mathfrak{m}}\}_{\mathfrak{m}}$, où $\mathrm{Gal}^{\mathfrak{m}} = \mathrm{Gal}(F^{p,ab}/F^{\mathfrak{m}})$, est une base de voisinages de l' identité.
Soit $E(1)$ le groupe des unités positives de F (voir 5.2.1 pour la justification de la notation) considéré comme un sous-groupe de $(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*$ à travers le morphisme : $\mathcal{O}_F^* \to (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^* = \prod_{\mathfrak{p}|p} F_{\mathfrak{p}}^*,\ e \to (e, .., e)$. On note $\overline{E(1)}$ la clôture de $E(1)$ dans $(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*$. La théorie des corps des classes nous fournit un isomorphisme :

$$r : (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*/\overline{E(1)} \to \mathrm{Gal}(F^{p,alg}/F^1), \tag{3.3}$$

ici F^1 est le corps de classes de rayon $\mathcal{O}_F$.
D'après la théorie des corps des classes on a un isomorphisme de groupes : $\mathrm{Cl}_F^+ \simeq \mathrm{Gal}(F^1/F)$, où Cl_F^+ est le groupe de classes de rayon $\mathbb{A}_F^*/F_\infty^+\hat{\mathcal{O}}_F F^*$. Donc on obtient la décomposition canonique suivante :

$$\mathrm{Gal}_p = \coprod_{\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+} \mathrm{Gal}_{p,\mathbf{x}}, \tag{3.4}$$

où $\mathrm{Gal}_{p,\mathbf{x}}$ est le groupe des $\rho \in \mathrm{Gal}_p$ tel que $\rho\mid_{F^1}$ correspond à $\mathbf{x}$ à travers l'isomorphisme $\mathrm{Cl}_F^+ \simeq \mathrm{Gal}(F^1/F)$ (remarquer que $\mathrm{Gal}_{p,1} = \mathrm{Gal}(F^{p,alg}/F^1)$). Pour chaque $\mathbf{x}$ on fixe $a_{\mathbf{x}} \in \mathrm{Gal}_{p,\mathbf{x}}$, alors (3.3) nous fournit un homéomorphisme (dépendant du choix des $a_{\mathbf{x}}$) :

$$r_{\mathbf{x}} : (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*/\overline{E(1)} \to \mathrm{Gal}_{p,\mathbf{x}} \tag{3.5}$$

3.4.2 Distributions sur Gal_p

Ici on va définir certains espaces de fonctions sur Gal_p qui nous seront utiles.
Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On considère l'identification de $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$ comme un ouvert et compact de $\mathbb{Q}_p^d$ et on note :

$$\mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$$

le sous espace vectoriel fermé des fonctions $f \in \mathcal{A}((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ tels que $f(ez) = f(z)$ pour tout $z \in (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*$ et $e \in E(1)$. Alors $\mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ où $\mathcal{A}_n^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L) := \mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L) \cap \mathcal{A}_n((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ est un L-espace de Banach. On note :

$$\mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$$

le dual topologique de $\mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$, un espace de Fréchet compact. Comme avant pour $\mu \in \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ et $n \in \mathbb{N}$ on note $\|\mu\|_n$ à la place de $\|\mu \mid_{\mathcal{A}_n^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)} \|_n$. Comme dans 3.1 on peut définir la notion de distribution *h-admissible* dans $\mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$.

Soit $\pi : (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^* \to (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*/\overline{E(1)}$ la projection canonique, on définit :

$$\mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L) = \left\{ f : \mathrm{Gal}_p \to L \mid f_{\mathbf{y}} \in \mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L) \ \forall \mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+ \right\} \tag{3.6}$$

où $f_{\mathbf{y}} = f \circ r_{\mathbf{y}} \circ \pi$. Remarquer que cette définition ne dépend pas du choix des $a_{\mathbf{y}}$, qui sont utilisées pour la définition des $r_{\mathbf{y}}$. A partir de la définition on a un isomorphisme $\mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L) \cong \mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{Cl}_F^+}$ défini par $f \to (f_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+}$ avec inverse noté E, définie comme suit. Pour $\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+$ soit $E_{\mathbf{y}} : \mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{Cl}_F^+} \to \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L)$ tel que $E_{\mathbf{y}}(f)(a) = 0$ si $a \notin \mathrm{Gal}_{p,\mathbf{y}}$ et $E_{\mathbf{y}}(f)(a) = f(z)$ si $a = r_{\mathbf{y}}([z]) \in \mathrm{Gal}_{p,\mathbf{y}}$. Alors on pose $E := \sum_{\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+} E_{\mathbf{y}}$. On obtient une structure d'espace de Fréchet sur $\mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L)$ en fait est la limite inductive des espaces de Banach $\mathcal{A}_n(\mathrm{Gal}_p, L)$ (l'image de $\mathcal{A}_n^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{Cl}_F^+}$). Le dual topologique de $\mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L)$, noté $\mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L)$, est un espace de Fréchet compact et on a un isomorphisme :

$$\mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L) \cong \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{Cl}_F^+} \quad \mu \to (\mu_{\mathbf{y}}).$$

Remarque : Comme $\mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L)$ et $\mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ sont L espaces de Fréchet on peut parler de distributions h-admissibles comme dans 3.1. Alors on peut voir que $\mu \in \mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L)$ est h-admissible si et seulement si $\mu_{\mathbf{y}}$ est h-admissible pour chaque $\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+$.

3.4.3

Maintenant on va expliquer que $\mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L)$ contient assez des fonctions pour nos propos.
D'abord remarquer que les fonctions L p-adiques sont définies sur le groupe de Lie sur $\mathbb{C}_p$ défini par :

$$\mathcal{X}_p = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}_p, \mathbb{C}_p^*).$$

(voir 4 dans [Pan94] pour sa structure). Il n'est pas compliqué de voir que :

Proposition 3.2. *Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Alors on a :*
i) *$\mathcal{X}_p(L) \subset \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L)$.*
ii) *Soit $U \subset \mathrm{Gal}_p$ un sous-ensemble ouvert et compact et soit 1_U sa fonction caractéristique. On a $1_U \in \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L)$.*

Remarque : Soit $\mathcal{X}_p^{\mathrm{tors}} \subset \mathcal{X}_p$ le sous-groupe discret des éléments d'ordre fini. Pour un corps $L \subset \mathbb{C}_p$ soit $\mathcal{X}_p(L)$ le sous groupe de $\mathcal{X}_p$ des homomorphismes avec image dans L^*. Analoguement on définit $\mathcal{X}_p^{\mathrm{tors}}(L)$. Observer que chaque $\chi \in \mathcal{X}_p^{\mathrm{tors}}(L)$ peut être vu comme un caractère de Hecke d'ordre fini et conducteur divisant une puissance de $p\mathcal{O}_F$ à travers :

$$\mathbb{A}_F^*/F^* \xrightarrow{TCC} \mathrm{Gal}_p \xrightarrow{\chi} L^* \xrightarrow{\mathbf{inc}_p^{-1}} \overline{\mathbb{Q}}^*.$$

Chapitre 4

Classicité pour GL_2/F

Pour obtenir la classicité dans le contexte de la cohomologie à support compact (voir théorème 4.1) on suit [Urb11]. La difficulté principale pour étendre au cas de support compact l'argument de [Urb11] est l'existence de la décomposition en pente obtenue dans la section 2. Pour conclure, comme dans le cas sans support, on utilise une version localement analytique de la résolution BGG obtenue dans [Urb11].

4.1 Enoncé

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ contenant l'image à travers $\mathbf{inc}_p$ de la clôture galoisienne de F. Soit $\lambda = \lambda^{\mathrm{alg}}\epsilon : T(\mathbb{Z}_p) \to L^*$ un poids arithmétique, alors λ^{alg} est un caractère algébrique dominant et ϵ est d'ordre fini.
Soit $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ la liste associée à λ^{alg} à travers la correspondance (1.1) , et on suppose qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -r\mathbf{t}$. On note $\mathbf{k} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{t} \geq 2\mathbf{t}$.
D'autre part soit $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que ϵ peut être factorisé à travers $T(\mathbb{Z}_p) \to T(\mathbb{Z}_p/p^{m_0}\mathbb{Z}_p)$, alors on peut étendre ϵ à un homomorphisme de I_{m_0} en considérant $I_{m_0} \to B(\mathbb{Z}_p/p^{m_0}\mathbb{Z}_p) \to T(\mathbb{Z}_p/p^{m_0}\mathbb{Z}_p)$. L'espace $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(L)$ défini dans 1.2 possède une action à gauche par $G(L)$ donnée par $(g \cdot f)(h) = f(hg)$; et $\mathcal{A}_\lambda(L)$ défini dans 3.3 est un Λ_p^{-1}-module à gauche. Le I_{m_0}-module à gauche $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)$ consiste en l'espace vectoriel $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(L)$ avec l'action de I_{m_0} tordue par ϵ.
Pour chaque $f \in \mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)$ on définit une fonction $\widetilde{f}$: $\mathbb{Z}_p \otimes \mathcal{O}_F \to L$ par $\widetilde{f}\,(z) = f(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})$, alors on obtient un morphisme de L-espaces vectoriels $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L) \to \mathcal{A}_\lambda(L)$. On peut vérifier que ce morphisme est I_{m_0}-équivariant. Alors on a un morphisme de L-espaces vectoriels qui est I_{m_0}-équivariant :
$$\mathcal{D}_\lambda(L) \to \mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee \tag{4.1}$$
L'image de $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)$ dans $\mathcal{A}_\lambda(L)$ est Λ_{p,m_0}^{-1}-invariant et l'action obtenue sur $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)$ est appelé la $*$-action. Alors on obtient la $*$-action à droite sur $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee$. Comme on a vu la $*$-action coïncide avec l'action standard (obtenue à travers $\Lambda_p^{-1} \subset G(\mathbb{Q}_p) \subset G(L)$) pour les éléments appartenant à l'Iwahori $I_{m_0} \subset \Lambda_{p,m_0}^{-1}$ mais sont différentes en général, par exemple pour tout $\mu \in \mathbb{V}_\lambda(L)^\vee$ on a :
$$\mu * (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}) = p^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} \mu \cdot (\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}). \tag{4.2}$$

Soit $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous groupe ouvert compact tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans I_{m_0}. On suppose que $K \cap Z(\mathbb{Q}) \subset \{e\mathrm{Id} |\ e \in \mathcal{O}_F^*\}$ et en plus si $e\mathrm{Id} \in K \cap Z(\mathbb{Q})$ alors $\epsilon(e\mathrm{Id}) = 1$. D'autre part on suppose que pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{C}_K^+$ le groupe $\overline{\Gamma}_{\mathbf{y}}$ est sans torsion (voir 1.3.1 pour les notations). On peut considérer $\mathcal{D}_\lambda(L)$ et $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee$ comme K-modules à droite, et d'après les hypothèses on vérifie que $K \cap Z(\mathbb{Q})$ agit trivialement. On peut construire les faisceaux $\mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))$ sur la variété de Hilbert Y_K (voir 1.4.1) et on voit que le morphisme $\mathcal{D}_\lambda(L) \to \mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee$ est K-équivariant et induit :

$$H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee)). \tag{4.3}$$

Soit $x = (x_\ell) \in G(\mathbb{A}_f)$ défini par $x_\ell = 1 \in G(\mathbb{Q}_\ell)$ si $\ell \neq p$ et $x_p = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \in G(\mathbb{Q}_p)$. On considère n'importe quel semi-groupe de $G(\mathbb{A}_f)$ contenant K et avec image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ contenue dans Λ_{p,m_0}^{-1}, et on définit U_p^{sur} comme l'opérateur $[KxK]$ sur $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ comme dans cas 1 de 1.5.2. En considérant la $*$-action maintenant sur $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee$ on obtient un opérateur sur $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee))$ noté U_p^0. Si à la place de la $*$-action on considère l'action standard sur $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee$ alors on obtient un autre opérateur, noté U_p. D'après 4.2 on a $U_p^0 = p^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} U_p$.
Clairement $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee))$ possède une décomposition en pente $\leq h$ par rapport à U_p^0. D'autre part d'après le lemme 3.1 et le théorème 2.1, $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ possède une décomposition en pente $\leq h$ pour tout rationnel h.
En plus on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) & \longrightarrow & H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee)) \\ \Big\downarrow U_p^{\mathrm{sur}} & & \Big\downarrow U_p^0 \\ H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) & \longrightarrow & H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee)) \end{array}$$

alors le morphisme (4.3) induit (voir remarque ii) dans 2.1) :

$$H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))^{\leq h} \to H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee))^{\leq h}, \tag{4.4}$$

pour tout rationnel h.

Théorème 4.1. *Soit $k^0 = \min\{k_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_F\}$. Si $h < k^0 - 1$ alors le morphisme dans (4.4) est un isomorphisme.*

4.2 Outils

On introduit un sous espace de $\mathcal{A}_\lambda(L)$ contenant $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)$, *l'induction localement algébrique*. Le dual de cet espace possède une résolution analogue au complexe BGG, les dernières trois termes de cette résolution sont dans la base de la preuve du théorème 4.1.

4.2.1 L'induction localement algébrique

On définit *l'induction localement algébrique de λ* comme le sous espace vectoriel de $\mathcal{A}_\lambda(L)$ des fonctions localement L-algébriques, on note cet espace par $V_\lambda(L)$. On a $V_\lambda(L) = \cup_{n\in\mathbb{N}} V_{\lambda,n}(L)$ avec $V_{\lambda,n}(L) = V_\lambda(L) \cap \mathcal{A}_{\lambda,n}(L)$. Pour chaque n l'espace $V_{\lambda,n}(L)$ est un L-espace vectoriel de dimension finie, sur cet espace on considère la norme obtenue de celle de $\mathcal{A}_{\lambda,n}(L)$. On considère la topologie limite inductive sur $V_\lambda(L)$ qui correspond à la topologie obtenue de l'inclusion $V_\lambda(L) \subset \mathcal{A}_\lambda(L)$. Son dual par rapport à cette topologie,$V_\lambda(L)^\vee$, est un L-espace de Fréchet compact, en fait est la limite projective des $V_{\lambda,n}(L)^\vee$.
Soit $U : V_\lambda(L)^\vee \to V_\lambda(L)^\vee$ un opérateur complétement continu alors d'après le lemme 2.6 et le fait que $V_{\lambda,0}(L) = \mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)$ on déduit que $V_\lambda(L)^\vee$ possède une décomposition

en pente $\leq h$ pour tout rationnel h et on a un isomorphisme de L-espaces vectoriels $(V_\lambda(L)^\vee)^{\leq h} \simeq (\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee)^{\leq h}$.
En plus on voit que la $*$-action de Λ_p^{-1} laisse invariant $V_\lambda(L)$, donc on obtient une action à gauche de Λ_p^{-1} sur $V_\lambda(L)$. Le morphisme $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L) \to \mathcal{A}_\lambda(L)$ défini dans 4.1 nous fournit une suite de Λ_{p,m_0}^{-1}-modules à gauche $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L) \to V_\lambda(L) \to \mathcal{A}_\lambda(L)$ où la dernière flèche est l'inclusion, et alors on obtient la suivante suite de Λ_{p,m_0}^{-1}-modules à gauche :

$$\mathcal{D}_\lambda(L) \to V_\lambda(L)^\vee \to \mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee, \tag{4.5}$$

ici on considère la $*$-action sur $\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee$. Soit $\mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee)$ le système local sur Y_K associé à $V_\lambda(L)^\vee$, ce dernier vu comme un K-module à travers $K \to I_{m_0}$, alors la dernière flèche dans (4.5) nous fournit un morphisme :

$$H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee)) \to H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee)). \tag{4.6}$$

On peut définir un opérateur sur $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee))$ qu'on note par $U_p^{\mathrm{l.c}}$, de la même manière que l'opérateur U_p^{sur} sur $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ a était défini (voir 4.1). On a :

Proposition 4.2. *$H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee))$ possède une décomposition en pente $\leq h$ par rapport à $U_p^{\mathrm{l.c}}$, pour tout rationnel h. Le morphisme $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee))^{\leq h} \to H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathbb{V}_{\lambda^{alg}}(\epsilon, L)^\vee))^{\leq h}$ obtenu du morphisme (4.6) est un isomorphisme. Ici $H_c^\bullet(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(L)^\vee))^{\leq h}$ est la décomposition en pente par rapport à U_p^0.*

Preuve : D'abord remarquer que l'opérateur sur $V_\lambda(L)^\vee$ obtenu de la $*$-action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ est complétement continu alors on déduit l'existence de la décomposition en pente $\leq h$ pour $(H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee)), U_p^{\mathrm{l.c}})$ du théorème 2.1.
Considérer les complexes $C_c^\bullet(K, V_\lambda(L)^\vee))$ et $C_c^\bullet(K, \mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee))$, et les morphismes $U_p^{\mathrm{l.c}}$ et U_p^0 définis dans 2.2.4. Comme $(V_\lambda(L)^\vee)^{\leq h} \simeq (\mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L))^{\leq h}$ par rapport aux opérateurs induits de la $*$-action de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ alors pour chaque i on a $C_c^i(K, V_\lambda(L)^\vee))^{\leq h} \simeq C_c^i(K, \mathbb{V}_{\lambda^{\mathrm{alg}}}(\epsilon, L)^\vee))^{\leq h}$. Donc la deuxième affirmation est une conséquence du lemme 2.6. ∎

4.2.2 BGG

Ici on décrit les dernièrs termes d'une suite exacte, une suite analogue du complexe BGG, mais pour $V_\lambda(L)^\vee$. Ces termes joueront un rôle important dans la preuve du théorème 4.1.

Pour $\sigma \in \Sigma_F$ on définit le poids $\lambda_\sigma : T(\mathbb{Z}_p) \to L^*$ par $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma^{\mathrm{alg}} \epsilon$ où $\lambda_\sigma^{\mathrm{alg}}$ est le caractère algébrique de T_L correspondant à $(a_{\sigma'}, b_{\sigma'})_{\sigma' \in \Sigma_F}$ où $(a_{\sigma'}, b_{\sigma'}) = (a_{\sigma'}, b_{\sigma'})$ si $\sigma' \neq \sigma$ et $(a_\sigma, b_\sigma) = (b_\sigma - 1, a_\sigma + 1)$. On peut définir un morphisme $\Theta_\sigma : \mathcal{A}_\lambda(L) \to \mathcal{A}_{\lambda_\sigma}(L)$ et alors un morphisme

$$\Theta_\sigma^\vee : \mathcal{D}_{\lambda_\sigma}(L) \to \mathcal{D}_\lambda(L), \tag{4.7}$$

ce morphisme est équivariant par rapport à l'action de I mais non pour l'action de tout le semi-groupe Λ_p^{-1}, par exemple pour tout $\mu \in \mathcal{D}_{\lambda_\sigma}(L)$ on a :

$$\Theta_\sigma^\vee(\mu * \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)) = p^{-(k_\sigma - 1)} \Theta_\sigma^\vee(\mu) * \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right). \tag{4.8}$$

Si on note par $\Sigma : \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_F} \mathcal{D}_{\lambda_\sigma}(L) \to \mathcal{D}_\lambda(L)$ la somme des $\Theta_\sigma^\vee$ alors la suite de I-modules à droite est exacte :

$$\bigoplus_{\sigma\in\Sigma_F} \mathcal{D}_{\lambda_\sigma}(L) \xrightarrow{\Sigma} \mathcal{D}_\lambda(L) \longrightarrow V_\lambda(L)^\vee \longrightarrow 0,$$

voir proposition 3.2.12 dans [Urb11] pour une démonstration.

4.3 Preuve du théorème 4.1

Le morphisme canonique $\mathcal{D}_\lambda(L)) \to V_\lambda(L)^\vee$ est Λ_p^{-1}-équivariant et donc nous fournit un homomorphisme $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee))$. D'après la proposition 4.2 il suffit de démontrer que le morphisme obtenu $H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))^{\leq h} \to H_c^\bullet(Y_K, \mathcal{L}(V_\lambda(L)^\vee))^{\leq h}$ est un isomorphisme, ici les espaces de pente $\leq h$ sont par rapport aux morphismes U_p^{sur} et $U_p^{\mathrm{l.c}}$ respectivement.

On pose $\Sigma_F = \{\sigma_1, ..., \sigma_d\}$. Soit $\Theta_0^\vee = 0$ et pour chaque $s \in \{1, .., d\}$:

$$\Theta_s^\vee := \sum_{j=1}^{s} \Theta_{\sigma_j}^\vee : \bigoplus_{j=1}^{s} \mathcal{D}_{\lambda_{\sigma_j}}(L)) \to \mathcal{D}_\lambda(L).$$

Pour chaque $s \in \{1, .., d\}$ $\mathrm{coker}(\Theta_s^\vee)$ possède une action à droite de Λ_p^{-1} et soit Q_s le sous quotient de $\mathcal{D}_\lambda(L)$ tel que la suivante suite est exacte :

$$0 \to Q_s \to \mathrm{coker}(\Theta_{s-1}^\vee) \to \mathrm{coker}(\Theta_s^\vee) \to 0,$$

Λ_p^{-1} agit sur Q_s et cette suite est I-équivariant.

Pour toute s le diagramme de L-espaces de Fréchet compact suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_s \arrow[r] \arrow[d, "*\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)p^{k_{\sigma_s}-1}"] & \mathrm{coker}(\Theta_{s-1}^\vee) \arrow[r] \arrow[d, "*\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)"] & \mathrm{coker}(\Theta_s^\vee) \arrow[r] \arrow[d, "*\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&p\end{smallmatrix}\right)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_s \arrow[r] & \mathrm{coker}(\Theta_{s-1}^\vee) \arrow[r] & \mathrm{coker}(\Theta_s^\vee) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $M \in \{Q_s, \mathrm{coker}(\Theta_s^\vee)\}$ alors le théorème 2.1 implique que le groupe de cohomologie $H_c^i(Y_K, \mathcal{L}(M))$ possède une décomposition en pente $\leq h$ par rapport à $[KxK]$ pour tout rationnel h, avec x défini dans 4.1. Alors la suite exacte longue du dernier diagramme commutatif et la remarque **ii)** dans 2.1 impliquent que la suite suivante est exacte :

$$H_c^i(Y_K, \mathcal{L}(Q_s))^{\leq h-(k_{\sigma_s}-1)} \to H_c^i(Y_K, \mathcal{L}(\mathrm{coker}(\Theta_{s-1}^\vee)))^{\leq h} \to$$

$$H_c^i(Y_K, \mathcal{L}(\mathrm{coker}(\Theta_s^\vee)))^{\leq h} \to H_c^{i+1}(Y_K, \mathcal{L}(Q_s))^{\leq h-(k_{\sigma_s}-1)}.$$

Maintenant on va voir que pour chaque s on a $H_c^i(Y_K, \mathcal{L}(Q_s))^{\leq h-(k_{\sigma_s}-1)} = 0$. D'après 3.3.3 on peut trouver un espace de Banach M et un réseau $\mathfrak{M}$ dans M, tel que Λ_p^{-1} agit sur M en laissant invariante $\mathfrak{M}$, en plus les morphismes sur M associées aux $t \in T^=$ sont complétement continus, de plus on peut obtenir un morphisme Λ_p^{-1}-équivariant $Q_s \to M$

qu'induit un isomorphisme : $H^i_c(Y_K, \mathcal{L}(Q_s))^{\leq h-(k_{\sigma_s}-1)} \to H^i_c(Y_K, \mathcal{L}(M))^{\leq h-(k_{\sigma_s}-1)}$. L'affirmation est alors une conséquence de 2.10 car $h-(k_{\sigma_s}-1)<0$.

Donc on a :

$$H^i_c(Y_K, \mathcal{L}(\mathrm{coker}(\Theta^\vee_{s-1})))^{\leq h} \simeq H^i_c(Y_K, \mathcal{L}(\mathrm{coker}(\Theta^\vee_s)))^{\leq h}$$

pour chaque $s \in \{1,..,d\}$. Finalement il suffit de remarquer que l'on a $\mathrm{coker}(\Theta^\vee_0) = \mathcal{D}_\lambda(L)$ et $\mathrm{coker}(\Theta^\vee_d) = V_\lambda(L)^\vee$.

Chapitre 5

Construction de la distribution et admissibilité

Une difficulté qu'on a rencontré pour construire la fonction L p-adique "à la Stevens" dans le contexte de $G = Res_{\mathcal{O}_F/\mathbb{Z}} GL_2$, est le manque d'une description simple de la cohomologie à support compact de la variété de Hilbert comme dans le cas de $GL_2/\mathbb{Q}$ (en termes des symboles modulaires). Une autre difficulté est posée par les unités globales. Dans ce chapitre, pour une classe Φ dans la cohomologie à coefficients surconvergents, à l'aide des *cycles automorphes* introduits dans [Dim] on définit une distribution et on démontre l'admissibilité de cette distribution quand Φ est un vecteur propre de l'opérateur U_p^{sur} avec une valeur propre non nulle.

5.1 L'espace de distributions $\mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$

D'abord on définit un nouveaux type de distributions. Soient $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie et $\lambda : T(\mathbb{Z}_p) \to L^\times$ un poids. On note $\mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$ l'espace vectoriel des $f \in \mathcal{A}_\lambda(L)$ tels que $f(ez) = \lambda(\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix})f(z)$ pour $e \in E(1)$ et $z \in \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$, de façon équivalente $f * (\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) = f$ pour tout $e \in E(1)$. $\mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$ est fermé dans $\mathcal{A}_\lambda(L)$ et alors est une union d'espaces de Banach, à savoir :

$$\mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L) = \bigcup_{\in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\lambda,n}^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L),$$

avec $\mathcal{A}_{\lambda,n}^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L) := \mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L) \cap \mathcal{A}_{\lambda,n}(L)$. On note :

$$\mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L) = \mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)^*$$

le dual topologique, et on voit qu'il s'agit d'un L-espace de Fréchet compact. $\mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$ n'est pas I-stable par rapport à la $*$-action sur $\mathcal{A}_\lambda(L)$, par contre est stable par T^- comme on peut le vérifier directement. Alors on obtient une action à gauche du semi-groupe T^- sur $\mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$. Observer que par définition l'image dans T^- du groupe $\{(\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \mid e \in E(1)\}$ agit trivialement.

Maintenant on suppose que λ est arithmétique et critique. Rappeler que dans 3.4.2 on a défini l'espace $\mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$, cet espace est un L-espace de Fréchet et on note $\mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ son dual topologique, un Fréchet compact. On a la décomposition $\mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ où $\mathcal{A}_n^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ est l'espace des

fonctions que sont L-analytiques sur boules de rayon p^{-n}.
Soit $\mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p)^*,L)\to\mathcal{A}^+_\lambda(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p,L)$, $f\to\overline{f}$ défini par :

$$\overline{f}(z)=\begin{cases}0 & \text{si } z\notin(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p)^*\\ \\ A\lambda^{\mathrm{alg}}\left(\begin{smallmatrix} z & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)f(z) & \text{si } z\in(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p)^*,\end{cases}\tag{5.1}$$

ici $A=\binom{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{-\mathbf{b}}\in\mathbb{Z}$ et observer que $\lambda^{alg}\left(\begin{smallmatrix} z & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=z^{\mathbf{a}}$ est bien défini pour tout $z\in\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p$ parce que $\mathbf{a}\geq 0$. D'autre part d'après les hypothèses sur λ on a $\lambda\left(\begin{smallmatrix} e & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)=\lambda^{\mathrm{alg}}\left(\begin{smallmatrix} e & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ pour tout $e\in E(1)$ et alors on déduit que $\overline{f}\in\mathcal{A}^+_\lambda(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p,L)$.
Cette transformation linéaire est en fait continue et nous fournit un morphisme :

$$\mathcal{D}^+_\lambda(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p,L)\to\mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p)^*,L),\quad \mu\to\mu^*.$$

Lemme 5.1. *On a :*

1. *Il existe $C>0$ dépendant seulement de λ tel que pour tout $n\geq 1$ et pour chaque $f\in\mathcal{A}^+_n((\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p)^*,L)$ on a $\overline{f}\in\mathcal{A}^+_{\lambda,n}(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p,L)$ et en plus on a $\|\overline{f}\|_n\leq C\|f\|_n$.*
2. *Soit $h\in\mathbb{Q}$. Si $\mu\in\mathcal{D}^+_\lambda(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p,L)$ est une distribution h-admissible alors $\mu^*\in\mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p)^*,L)$ est h-admissible aussi.*

Preuve : D'abord si $f\in\mathcal{A}^+_n((\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p)^*,L)$ alors évidemment $\overline{f}\in\mathcal{A}^+_{\lambda,n}(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p,L)$ pour $n\geq 1$. Maintenant soit $g_\lambda:\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p\to L$ défini par $g_\lambda(z)=A\lambda^{\mathrm{alg}}\left(\begin{smallmatrix} z & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Alors $g_\lambda\in\mathcal{A}^+_{\lambda,0}(\mathcal{O}_F\otimes\mathbb{Z}_p,L)$. Si on appelle $C=\|g_\lambda\|_0$ alors on a $\|\overline{f}\|_n\leq C\|f\|_n$.
La partie (2) est un conséquence directe de (1). ■

5.2 Cycles et évaluations

On considère les cycles automorphes introduits dans [Dim] et les versions classiques de ces cycles pour construire un morphisme évaluation :

$$H^d_c(Y_K,\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))\to\mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p,L),$$

et obtenir des propriétés intéressantes de ce morphisme.

5.2.1 Cycles automorphes

Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. On fixe $n\in\mathbb{N}$. On note $U(p^n)$ le groupe des unités u dans $\hat{\mathcal{O}}_F$ tels que $u-1\in p^n\hat{\mathcal{O}}_F$, alors $U(p^n)$ est un sous groupe ouvert et compact de $\mathbb{A}^*_{F,f}$. Soit $E(p^n)$ le groupe des unités totalement positives $e\in\mathcal{O}^*_F$ tels que $e-1\in p^n\mathcal{O}_F$. Observer que pour $n=0$ on obtient les unités totalement positives. Aussi soit $\mathrm{CL}^+_F(p^n):=F^*\setminus\mathbb{A}^*_F/U(p^n)F^+_\infty$ alors si on note (p^n) l'idéal $p^n\mathcal{O}_F$ on a un isomorphisme canonique de groupes $\mathrm{CL}^+_F(p^n)\simeq\mathrm{Gal}(F^{(p^n)}/F)$, ici $F^{(p^n)}$ est le corps considéré dans 3.4.1. $X_n:=F^*\setminus\mathbb{A}^*_F/U(p^n)$ est une variété réel analytique de dimension d et si pour chaque $\mathbf{y}\in\mathrm{CL}^+_F(p^n)$ on prend $a_{\mathbf{y}}\in\mathbb{A}^*_{F,f}$ tel que $\{a_{\mathbf{y}}\mid\mathbf{y}\}$ est un ensemble de représentants de $\mathrm{CL}^+_F(p^n)$ alors on a une décomposition de X_n en composantes connexes :

$$X_n=\bigsqcup_{\mathbf{y}\in\mathrm{CL}^+_F(p^n)}X_{n,\mathbf{y}},\tag{5.2}$$

où $X_{n,\mathbf{y}} := F^* \setminus F^* a_{\mathbf{y}} U(p^n) F_\infty^+ / U(p^n)$. Observer que le morphisme $E(p^n) \setminus F_\infty^+ \to X_{n,\mathbf{y}}$ défini par $[z] \to [a_{\mathbf{y}} z]$ est un isomorphisme analytique. D'autre part d'après le théorème des unités de Dirichlet $E(p^n) \setminus F_\infty^+$ est isomorphe à $(\mathbb{S}^1)^{d-1} \times \mathbb{R}$.

Soit K un sous-groupe ouvert et compact de $G(\mathbb{A}_f)$ qui contient le groupe $\{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | u \in \hat{\mathcal{O}}_F^*, v \in \hat{\mathcal{O}}_F\}$. Pour $x \in \mathbb{A}_F$ on note x_p son image dans $F \otimes \mathbb{Q}_p$. Le morphisme $\mathbb{A}_F^* \to G(\mathbb{A})$ défini par $x \to \left(\begin{smallmatrix} x & x_p p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ induit un morphisme de variétés analytiques que dans [Dim] est appelé un *cycle automorphe* :

$$C_{K,n} : X_n \to Y_K.$$

5.2.2 Évaluations

Ici L est un corps p-adique et λ est un poids quelconque. Pour avoir une notation plus légère on écrit : $\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda^+, \mathcal{D}_\lambda$ et $\mathcal{D}_\lambda^+$ à la place de $\mathcal{A}_\lambda(L), \mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L), \mathcal{D}_\lambda(L)$ et $\mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$.

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et soit K un sous-groupe compact et ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ qui est net, tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans Λ_p et on suppose en plus que $\{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | u \in \hat{\mathcal{O}}_F^*, v \in \hat{\mathcal{O}}_F\} \subset K$. Maintenant on définit des morphismes d'évaluation des groupes de cohomologie de $H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda))$, ces évaluations nous seront très utiles pour la construction d'une distribution sur le groupe de Galois pour chaque classe dans la cohomologie surconvergente et pour obtenir quelques propriétés. On décrit cet évaluation en 4 étapes :

ÉTAPE 1. Soit $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n,L} := C_{K,n}^*(\mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda))$ le faisceau sur X_n obtenu par pull-back du faisceau sur Y_K obtenu des distributions. Alors on a un morphisme au niveau de la cohomologie :

$$H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \to H_c^d(X_n, \mathcal{F}_n). \tag{5.3}$$

On peut vérifier que $\mathcal{F}_n$ est le faisceau sur X_n des sections localement constantes du fibré :

$$F_n := F^* \setminus (\mathbb{A}_F^* \times \mathcal{D}_\lambda)/U(p^n) \to X_n,$$

où l'action sur $\mathbb{A}_F^* \times \mathcal{D}_\lambda$ est $f(x,\mu)v = (fxv, \mu * \left(\begin{smallmatrix} v & (v_p - 1)p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$, $f \in F^*, x \in \mathbb{A}_F^*, \mu \in \mathcal{D}_\lambda$ et $v \in U(p^n)$.

ÉTAPE 2. Dans cette étape notre but est de tordre le faisceaux $\mathcal{F}_n$ pour obtenir un faisceau défini de façon plus simple afin d'obtenir un faisceau constant sur X_n.
Soit $\mathcal{L}_n(\mathcal{D}(F \otimes \mathbb{Q}_p, L))$ le faisceau sur X_n des sections localement constantes du fibré :

$$L_n(\mathcal{D}(F \otimes \mathbb{Q}_p, L)) := F^* \setminus (\mathbb{A}_F^* \times \mathcal{D}(F \otimes \mathbb{Q}_p, L))/U(p^n) \to X_n,$$

où l'action considérée à gauche est $f(x,\mu)v = (fxv, \mu * \left(\begin{smallmatrix} v_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$, $f \in F^*, x \in \mathbb{A}_F^*, \mu \in \mathcal{D}(F \otimes \mathbb{Q}_p, L)$ et $v \in U(p^n)$. Remarquer que la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right) \in \Lambda_p^{-1}$ et alors agit à droite sur $\mathcal{D}_\lambda$. Alors on peut considérer le morphisme $\mathbb{A}_F^* \times \mathcal{D}_\lambda \to \mathbb{A}_F^* \times \mathcal{D}_\lambda$ défini par $(x,\mu) \to (x, \mu * \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right))$. L'identité $\left(\begin{smallmatrix} v & (v_p-1)p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ implique que le dernier morphisme induit un morphisme de systèmes locaux $F_n \to L_n(\mathcal{D}_\lambda)$ et donc un morphisme de faisceaux sur X_n : $\mathcal{F}_n \to \mathcal{L}_n(\mathcal{D}(F \otimes \mathbb{Q}_p, L))$. On obtient de cette manière un morphisme au niveau de la cohomologie :

$$H_c^d(X_n, \mathcal{F}_n) \to H_c^d(X_n, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda)). \tag{5.4}$$

ÉTAPE 3. On choisit l'ensemble des $a_{\mathbf{y}} \in \mathbb{A}^*_{F,f}$ comme dans la décomposition de (5.2). Soit $h : E(p^n) \setminus F^+_\infty \to X_{n,\mathbf{y}}$ l'homéomorphisme induit par $a_{\mathbf{y}}$. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)$ le faisceau sur $E(p^n) \setminus F^+_\infty$ des sections localement constantes du fibré :

$$E(p^n) \setminus (F^+_\infty \times \mathcal{D}_\lambda) \to E(p^n) \setminus F^+_\infty,$$

où l'action sur $F^+_\infty \times \mathcal{D}_\lambda$ est donnée par $e(c,\mu) = (ce, \mu * (\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}))$. Alors on a $h^*(\mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda)|_{X_{n,\mathbf{y}}}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)$ et donc un isomorphisme :

$$H^d_c(X_{n,\mathbf{y}}, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda)|_{X_{n,\mathbf{y}}}) \simeq H^d_c(E(p^n) \setminus F^+_\infty, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)). \tag{5.5}$$

Le morphisme $\mathcal{D}_\lambda \to \mathcal{D}^+_\lambda$ défini par $\mu \to \mu \mid_{\mathcal{A}^+_\lambda}$ induit un morphisme de faisceaux sur la variété $E(p^n) \setminus F^+_\infty : \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \to \mathcal{D}^+_\lambda$, le faisceau à droite est le faisceau constant avec fibre $\mathcal{D}^+_\lambda$. Cela donne lieu à un morphisme :

$$H^d_c(E(p^n) \setminus F^+_\infty, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \to H^d_c(E(p^n) \setminus F^+_\infty, \mathcal{D}^+_\lambda). \tag{5.6}$$

De plus comme $E(p^n) \setminus F^+_\infty$ est connexe, orientable et de dimension d alors il existe un isomorphisme $H^d_c(E(p^n) \setminus F^+_\infty, \mathcal{D}^+_\lambda) \simeq \mathcal{D}^+_\lambda$. Alors d'après (5.5) et (5.6) on a un morphisme :

$$H^d_c(X_n, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda)) \to \mathcal{D}^{+\mathrm{Cl}^+_F(p^n)}_\lambda. \tag{5.7}$$

ÉTAPE 4 : Tout ensemble. On appelle

$$\mathbf{ev}_{K,n} : H^d_c(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \to (\mathcal{D}^+_\lambda)^{\mathrm{CL}^+_F(p^n)}$$

le morphisme obtenu de la composition des morphismes (5.3), (5.4) et (5.7).

5.2.3 Compatibilité

On a une compatibilité entre les différentes évaluations qu'on vient de définir.

Lemme 5.2. *Pour chaque $n \geq 1$ on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
H^d_c(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "U_p^{\mathrm{sur}}"] \arrow[d, "\mathbf{ev}_{K,n+1}"] & H^d_c(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[d, "\mathbf{ev}_{K,n}"] \\
(\mathcal{D}^+_\lambda)^{\mathrm{CL}^+_F(p^{n+1})} \arrow[r, "tr_n"] & (\mathcal{D}^+_\lambda)^{\mathrm{CL}^+_F(p^n)}
\end{tikzcd}$$

ici $tr_n : (\mathcal{D}^+_\lambda)^{\mathrm{CL}^+_F(p^{n+1})} \to (\mathcal{D}^+_\lambda)^{\mathrm{CL}^+_F(p^n)}$ est le morphisme $tr_n((\mu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}^+_F(p^{n+1})}) = (\nu_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}^+_F(p^n)}$ avec $\nu_{\mathbf{y}} = \sum_{\mathbf{x} \to \mathbf{y}} \mu_{\mathbf{x}}$.

Preuve : Pour la preuve de ce diagramme dans chaque étape de la construction des évaluations on obtient des diagrammes commutatifs. On utilise les notations de la dernière partie.
D'abord on va définir un morphisme $H^d_c(X_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) \to H^d_c(X_n, \mathcal{F}_n)$. Soit $pr_n : X_{n+1} \to X_n$ le morphisme canonique, $\mathcal{F} := (pr_n)_*(\mathcal{F}_{n+1})$ et $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(X_{n+1}/X_n) \simeq \mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F$. On

doit définir un morphisme de faisceaux : $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_n$. Pour cela observer que le morphisme $\alpha : F_{n+1} \to F_n$ donné par $(y,\mu) \to (y, \mu * \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right))$ est bien défini dû à la suivante identité :

$$\left(\begin{smallmatrix} v & (v_p-1)p^{-n-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} v & (v_p-1)p^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Soit $U \subset X_n$ un ouvert assez petit tel que $pr_n^{-1}(U) = \sqcup_{g \in \mathfrak{G}} U_g \subset X_{n+1}$ et pr_n induit un homéomorphisme $i_g : U \to U_g$, alors on a $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \Gamma(\mathrm{pr}^{-1}(U), \mathcal{F}_{n+1}) = \oplus_{g \in \mathfrak{G}} \Gamma(U_g, \mathcal{F}_{n+1})$. Donc on peut définir :

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F}_n), \qquad s = (s_g)_{g \in \mathfrak{G}} \to \sum_{g \in \mathfrak{G}} \alpha \circ s_g \circ i_g.$$

Cela s'étend à un morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_n$. Finalement observer que $H_c^d(X_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) = H_c^d(X_n, \mathcal{F})$ et alors le morphisme de faisceaux qu'on vient de construire nous fournit une flèche $H_c^d(X_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) \xrightarrow{*\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)} H_c^d(X_n, \mathcal{F}_n)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "U_p^{\mathrm{sur}}"] \arrow[d] & H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[d] \\
H_c^d(X_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) \arrow[r, "*\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)"] & H_c^d(X_n, \mathcal{F}_n)
\end{tikzcd}$$

Maintenant soit $\mathcal{F}' = \mathrm{pr}_*(\mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{D}_\lambda))$, on peut répéter la construction en utilisant à la place de α le morphisme $\alpha' : L_{n+1}(\mathcal{D}_\lambda) \to L_n(\mathcal{D}_\lambda)$ défini par $(y,\mu) \to (y,\mu)$, et obtenir un morphisme de faisceaux sur X_n : $\mathcal{F}' \to \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda)$ et donc le morphisme *trace* au niveau de la cohomologie $H_c^d(X_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{D}_\lambda)) \to H_c^d(X_n, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda))$. Alors de l'identité $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^{n+1} \end{smallmatrix}\right)$ on déduit qu'on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_c^d(X_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1}) \arrow[r, "*\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)"] \arrow[d] & H_c^d(X_n, \mathcal{F}_n) \arrow[d] \\
H_c^d(X_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "trace"] & H_c^d(X_n, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda))
\end{tikzcd}$$

Finalement en considérant des morphismes *traces* comme avant entre la cohomologie des composantes connexes de X_n et X_{n+1} on obtient un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_c^d(X_{n+1}, \mathcal{L}_{n+1}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "trace"] \arrow[d] & H_c^d(X_n, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[d] \\
(\mathcal{D}_\lambda^+)^{\mathrm{CL}_F^+(p^{n+1})} \arrow[r, "tr_n"] & (\mathcal{D}_\lambda^+)^{\mathrm{CL}_F^+(p^n)}
\end{tikzcd}$$

■

Remarque : On espère avoir une compatibilité dans le cas $n = 0$, mais ne sera pas utilise dans ce texte, donc on ne la démontrera pas. Plus précisément on devrait obtenir le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "\mathbf{ev}_{K,0}"] & (\mathcal{D}_\lambda^+)^{\mathrm{CL}_F^+} \arrow[r, "()^*"] & \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{Cl}_F^+} \\
H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[u, "U_p^{\mathrm{sur}}"] \arrow[r, "\mathbf{ev}_{K,1}"] & (\mathcal{D}_\lambda^+)^{\mathrm{CL}_F^+(p)} \arrow[ur, "\mathrm{pr}_0"] &
\end{tikzcd}$$

ici $\mathrm{pr}_0 : (\mathcal{D}_\lambda^+)^{\mathrm{CL}_F^+(p)} \to \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{Cl}_F^+}$ est défini par $\mathrm{pr}_0((\mu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in \mathrm{Cl}_F^+(p)}) = (\nu_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in \mathrm{Cl}_F^+}$ avec $\nu_{\mathbf{y}} = \sum_{\mathbf{x}\to\mathbf{y}} (\mu_{\mathbf{x}})^*$.

5.3 Construction d'une distribution à partir d'une classe de cohomologie.

Dans cette section pour chaque classe de cohomologie $\Phi \in H_c^d(Y_K, \tilde{\mathcal{D}_\lambda}(L))$ on associe une forme linéaire $\mu_\Phi : \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L) \to L$ et on vérifie quelques propriétés.
Soient $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie et $\lambda : T(\mathbb{Z}_p) \to L^*$ un poids arithmétique et critique. Soit K un sous-groupe compact et ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ net, tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans le groupe Iwahori I et en plus que $\{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) | u \in \hat{\mathcal{O}}_F^*, v \in \hat{\mathcal{O}}_F\} \subset K$.

5.3.1 Construction

Comme avant on écrit : $\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_\lambda^+, \mathcal{D}_\lambda$ et $\mathcal{D}_\lambda^+$ à la place de $\mathcal{A}_\lambda(L), \mathcal{A}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L), \mathcal{D}_\lambda(L)$ et $\mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)$.

Pour une classe de cohomologie $\Phi \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda))$ on considère son image $(\nu_{\Phi,\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in \mathrm{CL}_F^+(p)}$ dans $\mathcal{D}_\lambda^{+\mathrm{CL}_F^+(p)}$ à travers l'évaluation de niveau 1 : $\mathbf{ev}_{K,1} : H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \to \mathcal{D}_\lambda^{+\mathrm{CL}_F^+}$. Pour chaque $\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+$ on définit

$$\mu_{\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{y}\to\mathbf{x}} (\nu_{\mathbf{y}})^* \in \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L),$$

ici $\{\mathbf{y} \to \mathbf{x}\}$ est l'ensemble des $\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+(p)$ tels que leur image dans Cl_F^+ est $\mathbf{x}$, et $(\nu_{\mathbf{y}})^*$ est l'image de $\nu_{\mathbf{y}}$ à travers le morphisme canonique $\mathcal{D}_\lambda^+ \to \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$. Finalement soit $\mu_\Phi \in \mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L)$ la distribution correspondante à $(\mu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in \mathrm{CL}_F^+} \in \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{CL}_F^+}$ à travers l'isomorphisme à la fin de 3.4.2. Alors :

$$\mu_\Phi : \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L) \to L \ , \ f \to \sum_{\mathbf{y}\in \mathrm{Cl}_F^+} \mu_{\Phi,\mathbf{y}}^*(f_{\mathbf{y}}) \tag{5.8}$$

où $f_{\mathbf{y}} \in \mathcal{A}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$ est définie dans (3.6).
On peut résumer notre construction par :

$$H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda)) \xrightarrow{\mathbf{ev}_{K,1}} \mathcal{D}_\lambda^{+\mathrm{CL}_F^+(p)} \xrightarrow{\mathrm{pr}_0} \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)^{\mathrm{CL}_F^+}$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L).$$

5.3.2 Propriétés de μ_Φ

Soient $L/\mathbb{Q}_p$ et L'/L extensions finies. Soient $\lambda : T(\mathbb{Z}_p) \to L^*$ un poids arithmétique et critique et $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous groupe ouvert compact comme dans 5.3.
La restriction naturelle $\mathcal{D}_\lambda(L') \to \mathcal{D}_\lambda(L)$ nous fournit un morphisme au niveau de la cohomologie :

$$H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L'))) \to H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L))).$$

Soit $\Phi \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L')))$ et on note par $\Phi_L \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ son image. Soient μ_Φ et μ_{Φ_L} les distributions construites dans 5.3.1, alors on a :

Proposition 5.3. $\mu_\Phi |_{\mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L)} = \mu_{\Phi_L}$.

Preuve : Il suffit de démontrer que l'image de $\mathbf{ev}_{K,1}(\Phi)$ à travers le morphisme de restriction $\mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L')^{\mathrm{CL}_F^+} \to \mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L)^{\mathrm{CL}_F^+}$ est $\mathbf{ev}_{K,1}(\Phi_L)$. Cela est une conséquence du diagramme commutatif suivant où les colonnes sont par définition $\mathbf{ev}_{K,1}$:

$$\begin{tikzcd}
H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L'))) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L))) \arrow[d] \\
H_c^d(X_1, \mathcal{F}_{n,L'}) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^d(X_1, \mathcal{F}_{n,L}) \arrow[d] \\
H_c^d(X_1, \mathcal{L}_1(\mathcal{D}_\lambda(L'))) \arrow[r] \arrow[d] & H_c^d(X_1, \mathcal{L}_1(\mathcal{D}_\lambda(L))) \arrow[d] \\
H_c^d(F_\infty^+/E(1), \mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L'))^{\mathrm{CL}_F^+(p)} \arrow[r] \arrow[d] & H_c^d(F_\infty^+/E(1), \mathcal{D}_\lambda^+(\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p, L))^{\mathrm{CL}_F^+(p)} \arrow[d] \\
\mathcal{D}_\lambda^+(L')^{\mathrm{CL}_F^+(p)} \arrow[r] & \mathcal{D}_\lambda^+(L)^{\mathrm{CL}_F^+(p)}
\end{tikzcd}$$

■

5.4 Admissibilité

Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie et $\lambda : T(\mathbb{Z}_p) \to \mathcal{O}_L^*$ un morphisme continu. On fixe K un sous-groupe compact et ouvert net de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans I et $\{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | u \in \hat{\mathcal{O}}_F^*, v \in \hat{\mathcal{O}}_F\} \subset K$.

Lemme 5.4. *On suppose que* $\mathrm{Cl}_F^+ = \{1\}$. *Soit* $\Phi \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ *et pour chaque* $n \geq 1$ *on écrit* $\mathbf{ev}_{K,n}(\Phi) = (\nu_\mathbf{y})_{\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)}$. *Alors il existe* $C = C(\Phi) > 0$ *dépendant seulement de* Φ *tel que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)$ *on a* $\|\nu_\mathbf{y}\|_n \leq C$.

Preuve : La preuve de ce lemme est donnée dans 5.5.4 ■

Maintenant on suppose que λ est un poids arithmétique et critique. Sous la condition $\mathrm{Cl}_F^+ = \{1\}$ on démontre que la distribution construite a partir d'une classe qui est un vecteur propre (avec valeur propre non zero) de l'opérateur U_p^{sur}, est admissible. La condition $\mathrm{Cl}_F^+ = \{1\}$ est nécessaire dans le lemme, mais on pense qu'on pourrait enlever cette condition.

Proposition 5.5. *On suppose que* $\mathrm{Cl}_F^+ = \{1\}$. *Soit* $\Phi \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ *tel que* $U_p^{\mathrm{sur}}(\Phi) = \alpha\Phi$ *avec* $\alpha \in L^*$ *et soit* $h = \mathrm{v}_p(\alpha)$ *alors* μ_Φ *est une distribution* h*-admissible (avec la définition d'admissibilité dans 3.1.2).*

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on écrit $\mathbf{ev}_{K,n}(\Phi) = (\nu_{\mathbf{y}})_{\mathbf{y}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)}$ où $\mathbf{ev}_{K,n}$ est l'évaluation définie dans 5.2.2. Alors si on utilise le lemme 5.2 n-fois on obtient la formule :

$$\mu_\Phi = \alpha^{-n} \sum_{\mathbf{y}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)} (\nu_{\mathbf{y}})^*.$$

Soit $C(\lambda) > 0$ la constante dépendant seulement de λ obtenue par le lemme 5.1, alors on a :

$$\| \mu_\Phi \|_n \leq p^{hn} \max\{\|(\nu_{\mathbf{y}})^*\|_n \mid \mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)\} \leq p^{hn} C(\lambda) \max\{\|\nu_{\mathbf{y}}\|_n \mid \mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n).\}$$

Soit $C(\Phi) > 0$ la constante, dépendant seulement de la classe Φ, obtenue d'après le lemme 5.4 alors on déduit que pour chaque $n \geq 1$ on a $\| \mu_\Phi \|_n \leq C(\lambda)C(\Phi)p^{nh}$ et donc μ_Φ est h-admissible. ■

5.5 Cycles et évaluations II

Dans cette section on donne la preuve du lemme 5.4 voir specifiquement la fin de la sous section 5.5.3.

5.5.1 Cycles classiques.

Soient $f \in F$ et E un sous groupe d'indice fini des unités totalement positifs. Soit $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2(F)$ un sous groupe arithmétique tel que $\left(\begin{smallmatrix} e & (1-e)f \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ pour tout $e \in E$. Par hypothèse le morphisme $y \to f + iy$ induit :

$$c_f : E\backslash F_\infty^+ \to \Gamma\backslash \mathbb{H}_F.$$

Remarque 1) c_f est une généralisation de l'image dans la courbe modulaire de la droite qui joint f et ∞. C'est pour cela qu'on les appelle *cycles classiques.*
2) Si $f, f' \in F$ sont tels que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & (f-f') \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ alors $c_f = c_{f'}$.

Lemme 5.6. ***i)*** *On suppose que* $\mathrm{Cl}_F^+ = 1$. *Alors l'association* $\mathcal{O}_F \to \hat{\mathcal{O}}_F$ *donné par* $b \to u_b$ *avec* u_b *égale à* 1 *en tous les nombres premiers différents de* p *et* b *en* p*, induit un isomorphisme :*

$$\frac{\left(\frac{\mathcal{O}_F}{p^n\mathcal{O}_F}\right)^*}{E(1)} \xrightarrow{\quad\sim\quad} \frac{\hat{\mathcal{O}}_F^*}{U(p^n)E(1)} \xrightarrow{\quad\sim\quad} \mathrm{Cl}_F^+(p^n)$$

ii) *On fixe un ensemble, $S_n \subset \mathcal{O}_F$, de représentants de $\frac{\left(\frac{\mathcal{O}_F}{p^n\mathcal{O}_F}\right)^*}{E(1)}$. Soit K un sous-groupe compact et ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ tel que $\{\left(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) | u \in \hat{\mathcal{O}}_F^*, v \in \hat{\mathcal{O}}_F\} \subset K$. On note $\Gamma_K = G(\mathbb{Q}) \cap G_\infty^+ K$. Alors on a le suivant diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{b\in S_n} E(p^n) \setminus F_\infty^+ \arrow[r, "\sqcup_b c_{-b\backslash p^n}"] \arrow[d, "\sim"] & \Gamma_K \setminus \mathbb{H}_F \arrow[d, "\sim"] \\
X_n \arrow[r, "C_{K,n}"] & Y_K
\end{tikzcd}$$

preuve : La partie i) est claire. Pour ii) remarquer que l'image de $[r] \in E(p^n) \setminus F_\infty^+$ dans la composante connexe de X_n associé a b est $[ru_b]$ et on a $C_n([ru_b]) = [\left(\begin{smallmatrix} ru_b & bp^{-n}1_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)] = [\left(\begin{smallmatrix} r & -bp^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)]$, la dernière égalité provient de l'identité :

$$\begin{pmatrix} ru_b & bp^{-n}1_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -bp^{-n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_b & bp^{-n}(1_p-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part $c_{-b\backslash p^n}([r]) = [-\frac{b}{p^n} + ir] = [\left(\begin{smallmatrix} r & -bp^{-n} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) i]$ et finalement son image dans Y_K est donc $C_n([ru_b])$ ■

5.5.2 Évaluations II

On définit les évaluations analogues à celles définies dans 5.2.2 en utilisant les cycles classiques à la place des cycles automorphes.

Comme avant soient $f \in F$, E un sous groupe d'indice fini des unités totalement positifs et $\Gamma \subset \mathrm{GL}_2(F)$ un sous groupe arithmétique tel que $\begin{pmatrix} e & (1-e)f \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ pour tout $e \in E$. On fixe une décomposition $f = ab^{-1}$ avec $a, b \in \mathcal{O}_F - \{0\}$. On suppose de plus que l'image de Γ dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans Λ_p^{-1}, alors on peut considérer l'espace des distributions $\mathcal{D}_\lambda$ comme un Γ-module à droite. En suivant les étapes de 5.2.2 on définit une évaluation sur $H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda))$:

– D'abord on considère le morphisme :

$$H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \xrightarrow{c_f^*} H_c^d(E \setminus F_\infty^+, c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) .$$

On peut vérifier que $c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)$ est le faisceau associé au système local défini par $E \setminus (F_\infty^+ \times \mathcal{D}_\lambda)$ avec action $e(y, \mu) = (ey, \mu * \left(\begin{smallmatrix} e^{-1} & f(1-e^{-1}) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$.

– Observer que :

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} e & f(1-e) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

pour tout $e \in E$. Alors on déduit que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) \in \Lambda_p^{-1}$ et le morphisme $F_\infty^+ \times \mathcal{D}_\lambda(L) \to F_\infty^+ \times \mathcal{D}_\lambda(L)$ donné par $(y, \mu) \to (y, \mu * \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right))$ définit un morphisme de faisceaux $c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda) \to \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)$ et donc sur la cohomologie :

$$H_c^d(E \setminus F_\infty^{\pm}, c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \xrightarrow{*\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)} H_c^d(E \setminus F_\infty^+, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)).$$

Ici naturellement $\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)$ est le faisceau sur $E \setminus F_\infty^+$ défini par l'action de E sur $F_\infty^+ \times \mathcal{D}_\lambda(L)$ à travers $e(y, \mu) = (ey, \mu * \left(\begin{smallmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))$.

– Finalement en composant avec $H_c^d(E \setminus F_\infty^+, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda) \to H_c^d(E \setminus F_\infty^+, \mathcal{D}_\lambda^+) \simeq \mathcal{D}_\lambda^+$ on obtient un morphisme :

$$\mathrm{ev}_{\Gamma,f} : H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \to \mathcal{D}_\lambda^+.$$

On note $\mathcal{A}_\lambda^f(L) = \mathcal{A}_\lambda^f$ le sous espace de $\mathcal{A}_\lambda(L)$ des fonctions g tels que $\left(\begin{smallmatrix} e^{-1} & f(1-e^{-1}) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) * g = g$ pour tout $e \in E$. Cet espace est un Fréchet et on note $\mathcal{D}_\lambda^f(L) = \mathcal{D}_\lambda^f$ son dual topologique de $\mathcal{A}_\lambda^f$. Observer que le morphisme $\mathcal{A}_\lambda^+ \to \mathcal{A}_\lambda^f :\ g \to \left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right) * g$, est bien défini et continu et donc induit un morphisme $\mathcal{D}_\lambda^f \to \mathcal{D}_\lambda^+$.

Remarque : Soient $a', a \in \mathcal{O}_F$ avec la même image dans $\frac{\left(\frac{\mathcal{O}_F}{p^n\mathcal{O}_F}\right)^*}{E(1)}$ alors il n'est pas compliqué de vérifier qu'on a un isomorphisme d'espaces topologiques entre $\mathcal{D}_\lambda^{ap^{-n}}(L)$ et $\mathcal{D}_\lambda^{a'p^{-n}}(L)$ et en plus un triangle commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_\lambda^{ap^{-n}}(L) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathcal{D}_\lambda^+(L) \\
\mathcal{D}_\lambda^{a'p^{-n}}(L) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En particulier l'image de $\mathcal{D}_\lambda^{ap^{-n}}(L) \to \mathcal{D}_\lambda^+(L)$ dépend seulement de la classe de a dans $\frac{\left(\frac{\mathcal{O}_F}{p^n\mathcal{O}_F}\right)^*}{E(1)}$.

Par définition le morphisme de restriction $\mathcal{D}_\lambda \to \mathcal{D}_\lambda^f$ induit un morphisme sur la cohomologie

$$H_c^d(E \setminus F_\infty^+, c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \to H_c^d(E \setminus F_\infty^+, \mathcal{D}_\lambda^f) \simeq \mathcal{D}_\lambda^f.$$

Alors presque par définition on a :

Lemme 5.7. *Le suivant diagramme est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{ev}_{\Gamma,f} : H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "c_f^*"] & H_c^d(E \setminus F_\infty^+, c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_\lambda^+ \\
& \mathcal{D}_\lambda^f \arrow[ur, "*\left(\begin{smallmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)"'] &
\end{tikzcd}$$

5.5.3 $\mathcal{O}_L$-modules

On se concentre dans la première étape de l'évaluation définie dans 5.5.2 et on démontre le suivant résultat qui sera très utile pour démontrer le lemme 5.4 :

Lemme 5.8. *Soit λ un poids avec valeurs dans $\mathcal{O}_L$ et on fixe $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous groupe arithmétique tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans Λ_p^{-1}. On fixe une classe $\Phi \in H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ alors il existe $C(\Phi) > 0$ dépendant seulement de Φ tel que :*

– *si* (f, E) *est une paire qui satisfait les conditions de 5.5.2 et si on note* ν_Φ^f *est l'image de* Φ *par le morphisme* $H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to \mathcal{D}_\lambda^f(L)$ *(défini à la fin de 5.5.2) alors on a :*

$$\| \nu_\Phi^f \|_0 \leq C(\Phi).$$

Pour démontrer ce lemme on considère certains espaces de distributions qui sont en fait des espaces de Banach et ensuite $\mathcal{O}_L$-réseaux dans ces espaces.
Soit $m_0 \in \mathbb{N}$ comme dans le lemme 3.2.5 de [Urb11] et considérer le L-espace de Banach $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L)$, le dual topologique de $\mathcal{A}_{\lambda,m_0}(L)$, ce dernier espace sont les fonctions qui sont analytiques sur les boules de rayon p^{-m_0} de $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p$ (voir 3.1). D'après le choix de m_0 alors le semi-groupe Λ_p^{-1} laisse invariant $\mathcal{A}_{\lambda,m_0}(L)$ et on obtient une action à droite sur $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L)$. Le morphisme canonique $\mathcal{D}_\lambda(L) \to \mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L)$ induit un morphisme pour la cohomologie :

$$H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L))).$$

Soient E et f comme dans 5.5.2 par rapport à Γ. On note :

$$\mathcal{A}_{\lambda,m_0}^f(L) = \mathcal{A}^f(L) \cap \mathcal{A}_{\lambda,m_0}(L) \quad , \quad \mathcal{D}_{\lambda,m_0}^f(L) = \mathcal{A}_{\lambda,m_0}^f(L)^*.$$

Maintenant on introduit $\mathcal{O}_L$-réseaux dans $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L)$ et $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}^f(L)$. D'abord soit $\mathcal{A}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L)$ le $\mathcal{O}_L$-module des fonctions $f \in \mathcal{A}_{\lambda,m_0}(L)$ à valeurs dans $\mathcal{O}_L$, on munit $\mathcal{A}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L)$ de la topologie induite et on note $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L)$ son $\mathcal{O}_L$-dual topologique. Finalement on définit :

$$\mathcal{A}_{\lambda,m_0}^f(\mathcal{O}_L) = \mathcal{A}^f(L) \cap \mathcal{A}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L) \quad , \quad \mathcal{D}_{\lambda,m_0}^f(\mathcal{O}_L) = \mathcal{A}_{\lambda,m_0}^f(\mathcal{O}_L)^*.$$

Observer que comme λ est à valeurs dans $\mathcal{O}_L^*$ alors l'action de Λ_p^{-1} sur $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L)$ laisse invariant le réseau $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L)$ et donc on a une inclusion :

$$H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L))) \xrightarrow{\text{inc}} H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L))).$$

On peut résumer ces constructions dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \arrow[r, "c_f^*"] \arrow[d] & H_c^d(E \setminus F_\infty^+, c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_\lambda^f(L) \arrow[d] \\
H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L))) \arrow[r, "c_f^*"] & H_c^d(E \setminus F_\infty^+, c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L))) \arrow[r] & \mathcal{D}_{\lambda,m_0}^f(L) \\
H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L))) \arrow[r, "c_f^*"] \arrow[u, "\text{inc}"] & H_c^d(E \setminus F_\infty^+, c_f^*\mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L))) \arrow[r] \arrow[u, "\text{inc}"] & \mathcal{D}_{\lambda,m_0}^f(\mathcal{O}_L) \arrow[u, "\text{inc}"]
\end{tikzcd}$$

Preuve du lemme 5.8 : Comme $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L)$ est un espace de Banach alors il existe $\beta \in L^*$ tel que l'image de $\beta\Phi$ à travers le morphisme $H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(L)))$ est contenue en fait dans $H_c(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\lambda,m_0}(\mathcal{O}_L)))$. On appelle $C(\Phi) = | \beta |_p^{-1}$, observer que cette constante dépend seulement de Φ.
Maintenant soient E et f comme dans 5.5.2 par rapport à Γ. Soit ν_Φ^f l'image de Φ par

le morphisme $H_c^d(\Gamma \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to \mathcal{D}_\lambda^f(L)$. Observer que le choix de β et le dernier diagramme commutatif qu'on a énoncé impliquent que l'image de $\nu_{\beta\Phi}^f$ à travers le morphisme $\mathcal{D}_\lambda^f(L) \to \mathcal{D}_{\lambda,m_0}^f(L)$ est en fait contenue dans $\mathcal{D}_{\lambda,m_0}^f(\mathcal{O}_L)$ alors $\| \nu_{\beta\Phi}^f \|_{m_0} \leq 1$. Alors on déduit que :

$$\|\nu_\Phi^f\|_0 \leq \|\nu_\Phi^f\|_{m_0} = C(\Phi)\|\nu_{\beta\Phi}^f\|_{m_0} \leq C(\Phi).$$

■

5.5.4 Comparaison.

On compare les évaluations définies en termes adéliques avec les évaluations définies en termes classiques et on démontre le lemme 5.4. Par simplicité on suppose $\mathrm{Cl}_F^+ = 1$ dans cette comparaison mais on croit que le cas général peut être traité de la même manière. Conséquemment nos résultats sont valables seulement dans le cas $\mathrm{Cl}_F^+ = 1$.
Soit K un sous-groupe compact et ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ qui est net, tel que son image dans $G(\mathbb{Q}_p)$ est contenue dans Λ_p et on suppose en plus que $\{(\begin{smallmatrix} u & v \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) | u \in \hat{\mathcal{O}}_F^*, v \in \hat{\mathcal{O}}_F\} \subset K$. On note $\Gamma_K = G(\mathbb{Q}) \cap G_\infty^+ K$ alors d'après la condition sur le nombre de classes on a un isomorphisme de variétés : $Y_K \approx \Gamma_K \setminus \mathbb{H}_F$. Soit L un corps p-adique et λ un poids arithmétique et critique.

Lemme 5.9. *Soit $\Phi \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))$ une classe fixée. Pour $n \geq 1$ on écrit $\mathbf{ev}_{K,n}(\Phi) = (\nu_{\mathbf{y},\Phi})_{\mathbf{y} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)}$. D'autre part on fixe un ensemble $S_n \subset \mathcal{O}_F$ qui représente $\mathrm{Cl}_F^+(p^n) \approx \frac{\left(\frac{\mathcal{O}_F}{p^n \mathcal{O}_F}\right)^*}{E(1)}$ (avec l'isomorphisme de 5.6), et pour chaque $a \in S_n$ soit $\nu_\Phi^{-ap^{-n}}$ l'image de Φ à travers $H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \to \mathcal{D}_\lambda^{-ap^{-n}}(L)$ (morphisme considéré dans 5.5.2). Si $a \in S_n$ correspond à $\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)$ alors on a :*

$$\nu_{\mathbf{y},\Phi} = \nu_\Phi^{-ap^{-n}} * (\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}).$$

Preuve : D'abord observer que d'après le lemme 5.6 on a $C_n = \sqcup_{a \in S_n} c_{-ap^{-n}}$ alors on a le diagramme commutatif suivant où la première colonne est par définition $\mathbf{ev}_{K,n}$ et la deuxième est $\oplus_{a \in S_n} \mathrm{ev}_{\Gamma_K, -ap^{-n}}$:

$$\begin{tikzcd}
H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "C_n^*"] & H_c^d(\Gamma_K \setminus \mathbb{H}_F, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[d, "\oplus_{a \in S_n} c_{-ap^{-n}}^*"] \\
H_c^d(X_n, C_n^* \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "*(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n \end{smallmatrix})"] & \oplus_{a \in S_n} H_c^d(E(p^n) \setminus F_\infty^+, c_{-ap^{-n}}^* \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[d, "*(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & p^n \end{smallmatrix})"] \\
H_c^d(X_n, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H_c^d(E(p^n) \setminus F_\infty^+, \mathcal{L}_n(\mathcal{D}_\lambda))^{\mathrm{Cl}_F^+(p^n)} \arrow[dl] \\
\mathcal{D}_\lambda^{\mathrm{Cl}_F^+(p^n)} &
\end{tikzcd}$$

Finalement le lemme 5.7 nous permet de déduire le résultat. ∎

Maintenant on peut donner la :

Preuve du lemme 5.4 : Est une conséquence des lemmes 5.8 et 5.9. En fait soit $\Phi \in H_c^d(Y_K, \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda))$ et soit $C(\Phi) > 0$ la constante obtenue du lemme 5.8. Soit $n \geq 1$ et on note $\mathbf{ev}_{K,n}(\Phi) = (\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)} \in \mathcal{D}_\lambda^+(L)^{\mathrm{Cl}_F^+(p^n)}$. Soit S_n comme dans le lemme 5.9. Si $\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)$ alors soit $a \in S_n$ le représentant correspondant à $\mathbf{x}$, alors on a :

$$\| \nu_{\mathbf{x}} \|_n = \| \nu_\Phi^{-ap^{-n}} * \left(\begin{smallmatrix} 1 & -a \\ 0 & p^n \end{smallmatrix}\right) \|_n \leq \| \nu_\Phi^{-ap^{-n}} \|_0 \leq C(\Phi),$$

observer que l'égalité est due au lemme 5.8 et la première inégalité au lemme 5.9. ∎

Chapitre 6

Formes modulaires de Hilbert, cohomologie et représentations automorphes

6.1 Formes modulaires de Hilbert

6.1.1 Définitions

D'abord quelques notations : soit $\mathbf{t} = (1)_{\sigma\in\Sigma_F} \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ et si $\mathbf{n} = (n_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F} \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ et $x = (x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F} \in F_\infty$ on note $x^{\mathbf{n}} = \prod_{\sigma\in\Sigma_F} x_\sigma^{n_\sigma}$.
Soit $\mathfrak{c} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ un idéal entier de F et on considère les sous groupes ouverts et compacts de $G(\mathbb{A}_f)$:

$$K_0(\mathfrak{c}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G(\hat{\mathbb{Z}}) | c_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}},\ \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}\},$$

$$K_1(\mathfrak{c}) := \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in K_0(\mathfrak{c}) | d_{\mathfrak{p}} - 1 \in \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}\mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}},\ \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}\}.$$

Pour $\theta = (\theta_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F}$ on note :

$$u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta_\sigma) & \mathrm{sen}(2\pi\theta_\sigma) \\ -\mathrm{sen}(2\pi\theta_\sigma) & \cos(2\pi\theta_\sigma) \end{pmatrix}_{\sigma\in\Sigma_F}$$

alors tous les éléments de $K_\infty^+ = \mathrm{SO}_2(F_\infty)$ peuvent être écrits de cette façon.
On fixe $\mathbf{k} = (k_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F} \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ et $r \in \mathbb{Z}$ tels que $k_\sigma \geqslant 2$ et $k_\sigma \equiv r \bmod 2$ pour tout $\sigma \in \Sigma_F$, et soit $J \subset \Sigma_F$ alors :

Définition 6.1. Une *forme de Hilbert cuspidale de poids* $(\mathbf{k}, r)$, niveau $K_1(\mathfrak{c})$ et type J est une fonction $\mathbf{f} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ tel que :

- $\mathbf{f}(\gamma g k) = \mathbf{f}(g)$ pour $\gamma \in G(\mathbb{Q}), g \in G(\mathbb{A})$ et $k \in K_1(\mathfrak{c})$;
- $\mathbf{f}(g y_\infty u(\theta)) = y_\infty^{-r\mathbf{t}} \exp(2\pi i(\sum_{\sigma\in J} k_\sigma\theta_\sigma - \sum_{\sigma\in\Sigma_F - J} k_\sigma\theta_\sigma))\mathbf{f}(g)$, pour $y_\infty u(\theta) \in F_\infty^* K_\infty^+$ et $g \in G(\mathbb{A})$;
- On fixe $g \in G(\mathbb{A}_f)$. Alors la dernière condition nous permet de définir la fonction $\mathbf{f}_g : \mathbb{H}_F \to \mathbb{C}$ par $\mathbf{f}_g(z) = \det(u_\infty)^{\frac{r\mathbf{t}-\mathbf{k}}{2}} j_J(u_\infty, z_0)^{\mathbf{k}} \mathbf{f}(g u_\infty)$ où $u_\infty \in G_\infty^+$ est tel que $u_\infty(z_0) = z$ avec $z_0 = (i)_{\sigma\in\Sigma_F}$. On demande que $\mathbf{f}_g$ soit holomorphe en la variable z_σ pour $\sigma \in \Sigma_F$ et antiholomorphe si $\sigma \in \Sigma_F - J$;
- Pour $g \in G(\mathbb{A})$ on a $\int_{\mathbb{A}_F/F} \mathbf{f}(\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) g) dx = 0$, pour chaque mesure de Haar additive.

Notation : On note $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c}))$ l'espace des formes de Hilbert comme dans la définition. Dans la notation de [Hid88] correspond à l'espace $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},\mathbf{w}),J}(K_1(\mathfrak{c}), \mathbb{C})$ avec $(\mathbf{k}, \mathbf{w}) =$

$(\mathbf{k}, \frac{\mathbf{k}-r\mathbf{t}}{2})$. Pour $J = \Sigma_F$ on écrit simplement $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r)}(K_1(\mathfrak{c}))$.

On peut décrire l'espace de formes de Hilbert en termes plus classiques. On définit l'analogue des formes modulaires classiques dans notre contexte :

Définition 6.2. Soit $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un sous groupe arithmétique et discret. Une *forme cuspidale* par rapport à Γ de poids $(\mathbf{k}, \mathbf{w})$ et type J est une fonction $f : \mathbb{H}_F \to \mathbb{C}$ tel que :
- $f(\gamma(z)) = \det(\gamma)^{\frac{r\mathbf{t}-\mathbf{k}}{2}} j_J(\gamma, z)^{\mathbf{k}} f(z)$;
- f est holomorphe en la variable z_σ pour $\sigma \in \Sigma_F$ et antiholomorphe si $\sigma \in \Sigma_F - J$;
- f est nulle dans les cuspides.

On note $S_{(\mathbf{k},r),J}(\Gamma)$ l'espace de ces formes. Maintenant on compare ces formes avec les formes adéliques. On choisit un ensemble $\{a_{\mathbf{x}}\}$ de représentantes de Cl_F^+ dans $\mathbb{A}_{F,f}^*$. Pour chaque $\mathbf{x}$ on note $g_{\mathbf{x}} = \left(\begin{smallmatrix} a_{\mathbf{x}} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\Gamma_1^{\mathbf{x}}(\mathfrak{n}) = G(\mathbb{Q}) \cap G_\infty^+ g_{\mathbf{x}} K_1(\mathfrak{n}) g_{\mathbf{x}}^{-1}$. Alors on a un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$$\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{n})) \to \bigoplus_{\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+} S_{(\mathbf{k},r),J}(\Gamma_1^{\mathbf{x}}(\mathfrak{n})), \quad \mathbf{f} \to (\mathbf{f}_{g_{\mathbf{x}}})_{\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+}.$$

Soit ψ un caractère de Hecke de F tel que $\psi_\infty(x) = x^{-r\mathbf{t}}$ pour tout $x \in F_\infty^*$ et de conducteur divisant l'idéal $\mathfrak{c}$. Alors on définit :

$$\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi) = \{\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c})) | \mathbf{f}(gz) = \psi(z)\mathbf{f}(g), g \in G(\mathbb{A}), z \in \mathbb{A}_F^*.\}$$

Remarque : 1)On étend le caractère de Hecke ψ à $K_0(\mathfrak{c})$ par $\psi\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \psi(d_{\mathfrak{c}})$, où $d_{\mathfrak{c}}$ est l'image dans $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}^*$ de d, et $\prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}^*$ est vu dans $\hat{\mathcal{O}}_F^*$ de la façon canonique. On peut voir que si $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi)$ alors $\mathbf{f}(gk) = \psi(k)\mathbf{f}(g)$ pour tout $k \in K_0(\mathfrak{c})$. Alors on voit que dans la notation de [Hid94] $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi)$ est l'espace $\mathbf{S}_{(\mathbf{n},\mathbf{v}),J}(\mathfrak{c}, \psi)$ avec $\mathbf{n} = \mathbf{k} - 2\mathbf{t}$ et $\mathbf{v} = (\frac{r-(k_\sigma-2)}{2})_{\sigma \in \Sigma_F}$.
2) On a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{n})) = \bigoplus_{\psi} \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi),$$

ici ψ parcourt les caractères de Hecke de F tels que $\psi_\infty(x) = x^{-r\mathbf{t}}$ pour tout $x \in F_\infty^*$ et de conducteur divisant l'idéal $\mathfrak{c}$. Observer qu'il existe un nombre fini de tels caractères et donc la somme directe à droite est finie.

6.1.2 Coefficients de Fourier

Maintenant on décrit le développement de Fourier d'une forme de Hilbert, voir section 6 dans [Hid94].
Soit $\mathbf{e}_F := \mathbf{e}_\mathbb{Q} \circ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} : \mathbb{A}_F/F \to \mathbb{C}^*$ où $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$ est la trace et le caractère additif $\mathbf{e}_\mathbb{Q}$ est complètement défini par les conditions $\mathbf{e}_\mathbb{Q}(x) = \exp(2\pi i x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $\ker(\mathbf{e}_\mathbb{Q} |_{\mathbb{Q}_l}) = \mathbb{Z}_l$ pour chaque premier l et $\mathbf{e}_\mathbb{Q}(q) = 1$ pour chaque $q \in \mathbb{Q}$. Si on note $\mathfrak{d}$ la différente de F alors on vérifie que pour chaque place finie $\mathfrak{p}$ de F on a $\ker(\mathbf{e}_F |_{F_\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^{d_\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{F_\mathfrak{p}}$ où $d_\mathfrak{p}$ est la puissance de $\mathfrak{p}$ dans la factorisation de $\mathfrak{d}$.
On définit la fonction de Whittaker $W_{(\mathbf{k},r)} : F_\infty^* \to \mathbb{R}$ par $W_{(\mathbf{k},r)}(x) = | x |^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}-r\mathbf{t}}{2}} \exp(-2\pi \sum_{\sigma \in \Sigma_F} | x_\sigma |)$, où $| x | = (| x_\sigma |)_{\sigma \in \Sigma_F} \in F_\infty^+$. Alors pour chaque $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi)$

il existe une fonction $\mathbf{a}(\bullet, \mathbf{f})$ définie sur le groupe des idéaux fractionnaires de F vers $\mathbb{C}$ tel que s'annule en dehors des idéaux entiers et pour chaque $y \in \mathbb{A}_F^*$ et $x \in \mathbb{A}_F$ on a :

$$\mathbf{f}\left(\begin{smallmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mid y \mid \sum_{b \in F^*, [b]=J} \mathbf{a}(by\mathfrak{d}, \mathbf{f}) W_{(\mathbf{k},r)}(by_\infty) \mathbf{e}_F(bx),$$

ici $[b] = \{\sigma \in \Sigma_F \mid \sigma(b) > 0\}$.

6.1.3 Opérateurs de Hecke

Les symboles $\mathfrak{c}, \mathbf{k}, r$ et ψ sont comme au-dessus. On écrit $\mathfrak{c} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})}$ et on définit un semi groupe dans $G(\mathbb{A}_f)$ par :

$$R_1(\mathfrak{c}) = G(\mathbb{A}_f) \cap \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\hat{\mathcal{O}}_F) \mid d_{\mathfrak{p}} - 1, c_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}^{n(\mathfrak{p})} \mathcal{O}_{F_{\mathfrak{p}}},\ \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}\}$$

On définit les opérateurs de Hecke sur $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c}))$. Soit $x \in R_1(\mathfrak{c})$ et on considère une décomposition $K_1(\mathfrak{c}) x K_1(\mathfrak{c}) = \sqcup_q x_q K_1(\mathfrak{c})$ et on définit $[K_1(\mathfrak{c}) x K_1(\mathfrak{c})] : \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c})) \to \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c}))$ par

$$\mathbf{f} \mid [K_1(\mathfrak{c}) x K_1(\mathfrak{c})](g) = \sum_q \mathbf{f}(g x_q),$$

observer que cette définition ne dépend pas de la décomposition fixée. Alors on obtient une action sur $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c}))$ de l'anneau de Hecke abstrait du couple $(R_1(\mathfrak{c}), K_1(\mathfrak{c}))$, en particulier pour chaque idéal entier de F, $\mathfrak{n}$, on a l'opérateur de Hecke $T_{\mathfrak{n}}$ sur $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c}))$ (voir page 309 dans [Hid88]). Comme d'habitude pour chaque idéal premier $\mathfrak{q}$ qui divise $\mathfrak{c}$ on écrit $U_{\mathfrak{q}}$ à la place de $T_{\mathfrak{q}}$. Pour chaque anneau A *l'algèbre de Hecke* $\mathsf{h}_{(\mathbf{k},r)}(\mathfrak{c}; A)$ est définie comme la sous A-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c})))$ engendrée par les opérateurs de Hecke $T_{\mathfrak{n}}$ et $U_{\mathfrak{q}}$. Observer que d'après le théorème 2.2 dans [Hid88] cette algèbre ne dépend pas de J ce qui justifie la notation.
On peut définir aussi une action des signes $\{\pm 1\}^{\Sigma_F}$ sur les formes de Hilbert. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_F} \in \{\pm 1\}^{\Sigma_F}$ et on note $u_\varepsilon = (\left(\begin{smallmatrix} \varepsilon_\sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right))_{\sigma \in \Sigma_F}$, et pour $J \subset \Sigma_F$ on note $J^\varepsilon = \{\sigma \in \Sigma_F \mid \sigma \in J$ et $\varepsilon_\sigma = 1, \sigma \in \Sigma_F - J$ et $\varepsilon_\sigma = -1\}$. Alors on a un opérateur :

$$\varepsilon : \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c})) \to \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J^\varepsilon}(K_1(\mathfrak{c})), \quad \mathbf{f} \to (g \to \varepsilon^{\frac{\mathbf{k}-r\mathbf{t}}{2}} \mathbf{f}(g u_\varepsilon)).$$

Il est évident que ces opérateurs nous donnent les opérateurs $\varepsilon : \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi) \to \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J^\varepsilon}(\mathfrak{c}, \psi)$.

Soit ψ un caractère de Hecke de F comme avant ; c'est a dire de conducteur divisant $\mathfrak{c}$ et $\psi(z_\infty) = z_\infty^{-r\mathbf{t}}$ pour $z_\infty \in F_\infty^*$. Alors on peut vérifier que l'algèbre de Hecke $\mathsf{h}_{(\mathbf{k},r)}(\mathfrak{c}; \mathbb{C})$ laisse invariant l'espace de formes de Hilbert $\mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi)$.
On remarque la profonde relation entre les opérateurs de Hecke et les coefficients de Fourier : soit $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi)$ un vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke $T_{\mathfrak{n}}, U_{\mathfrak{q}}$ et en plus $\mathbf{a}(\mathcal{O}_F, \mathbf{f}) = 1$ (on dit que $\mathbf{f}$ est une forme propre normalisée) alors les valeurs propres de $\mathbf{f}$ par rapport aux opérateurs de Hecke sont les coefficients de Fourier : cela veut dire qu'on a $\mathbf{f} \mid T_{\mathfrak{n}} = \mathbf{a}(\mathfrak{n}, \mathbf{f})\mathbf{f}$ et $\mathbf{f} \mid U_{\mathfrak{q}} = \mathbf{a}(\mathfrak{q}, \mathbf{f})\mathbf{f}$.(Voir proposition 6.2 dans [Hid94])
Supposons $p \mid \mathfrak{c}$ et on note $U_p^0 := p^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} U_p$ (ici U_p veut dire $U_{p\mathcal{O}_F}$). Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c}))$ une forme propre normalisée alors on sait que ses valeurs propres sont dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Alors :

Définition 6.3. On dit que $\mathbf{f}$ est *ordinaire en* p si l'image dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (à travers $\mathbf{inc}_p$) de la valeur propre de $\mathbf{f}$ par rapport à U_p^0 est une unité p-adique.

6.2 Formes de Hilbert et cohomologie

Dans cette section on décrit le passage entre les formes de Hilbert et la cohomologie des variétés de Hilbert. On suit [Hid94].

6.2.1 Opérateurs de Hecke sur la cohomologie encore une fois

Soient $\mathbf{k}$, $r \in \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{c}$ comme dans la définition des formes de Hilbert (6.1.1). On note $Y_1(\mathfrak{c})$ la variété de Hilbert de Niveau $K_1(\mathfrak{c})$ (voir 1.3.1). Maintenant on décrit les faisceaux qu'on utilise, ces faisceaux proviennent des représentations algébriques de G. Soit $k \subset \mathbb{C}$ un corps contenant la clôture normale de F alors on note $P_{\mathbf{k},r}(k)$ le $G(k) \cong \mathrm{GL}_2(k)^{\Sigma_F}$-module à droite $\mathbf{Sym}^{\mathbf{k}-2\mathbf{t}}(k) \otimes \mathbf{det}^{-\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}$ avec les notations de 1.2. Alors on considère le faisceau $\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k))$ sur $Y_1(\mathfrak{c})$ défini dans 1.4.1.
Remarque : Si on note $\lambda = \lambda_{(\mathbf{k},r)}$ le caractère algébrique correspondant à

$$(\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}-r\mathbf{t}}{2}, -\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2})$$

(voir (1.1)) alors d'après les considérations dans 1.2 on a un isomorphisme de k-espaces vectoriels équivariant par rapport à l'action à droite de $G(k)$: $\mathbb{V}_\lambda(k)^\vee \cong P_{\mathbf{k},r}(k)$.

Soit $x \in R_1(\mathfrak{c})$ alors d'après 1.5.2 on peut définir l'opérateur :

$$[K_1(\mathfrak{c})xK_1(\mathfrak{c})] : H^\bullet_?(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k))) \to H^\bullet_?(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k))),$$

pour $? = \emptyset, c, !$. Alors on obtient une action de l'anneau de Hecke abstrait du couple $(R_1(\mathfrak{c}), K_1(\mathfrak{c}))$, en particulièr on a les opérateurs $T_\mathfrak{n}$ et $U_\mathfrak{q}$ sur la cohomologie. D'autre part on peut aussi définir une action des signes $\{\pm 1\}^{\Sigma_F}$ sur la cohomologie.

Maintenant soit ψ un caractère de Hecke comme dans 6.1.1, on note $\psi_0 := \psi \mid_{\hat{\mathcal{O}}_F^*}$ et $Y_0(\mathfrak{c})$ la variété de Hilbert de Niveau $K_0(\mathfrak{c})$ (voir 1.3.1). Dans ce cas on considère le faisceau $\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k), \psi_0)$ sur $Y_0(\mathfrak{c})$ défini dans le cas 3 de 1.4.1. Encore une fois on obtient une action des opérateurs $T(\mathfrak{n})$ et $U_\mathfrak{q}$ sur les groupes de cohomologie $H^\bullet_?(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k), \psi_0))$ pour $? = \emptyset, c, !$ (voir cas d) dans 1.5.2).

Observer qu'on a une décomposition équivariant par rapport à l'action des opérateurs de Hecke et de $\{\pm 1\}^{\Sigma_F}$:

$$H^\bullet_?(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k))) = \bigoplus_{\psi_0} H^\bullet_?(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k), \psi_0)),$$

ici $\psi_0 : \hat{\mathcal{O}}_F^* \to \mathbb{C}^*$ parcourt les caractères de conducteur divisant $\mathfrak{c}$.

6.2.2 Cohomologie cuspidal

Les groupes de cohomologie $H^\bullet_?(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C})))$ pour $? = \emptyset, c, !$ sont définis en termes topologiques. Il existe un sous groupe de $H^\bullet(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C})))$ défini en termes purement analytiques, cet espace est *la cohomologie cuspidale* $H^\bullet_{\mathrm{cusp}}(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C})))$. Cet espace nous permet d'étudier la cohomologie parabolique parce qu'on a $H^\bullet_{\mathrm{cusp}}(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C}))) \subset H^\bullet_!(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C})))$ et en fait cette inclusion est une égalité si $\mathbf{k} > 2\mathbf{t}$ (voir 3.2 dans [Har87]). D'autre part les opérateurs de Hecke et $\{\pm 1\}^{\Sigma_F}$ laissent stable la cohomologie

cuspidale.
Le théorème suivant est une conséquence des travaux de Harder et Matsushima-Shimura et est explicité par Hida, voir par exemple [Hid94] :

Proposition 6.4. *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels équivariant par rapport aux actions des opérateurs de Hecke et de $\{\pm 1\}^{\Sigma_F}$:*

$$\delta : \bigoplus_J \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(K_1(\mathfrak{c})) \to H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C}))),$$

ici J parcourt les sous ensembles de Σ_F.

Preuve : On va donner un aperçu de la construction en suivant [Hid94]. La construction est décrite en passant à la cohomologie cuspidale des composantes connexes. Pour cela on commence avec une définition :

Définition 6.5. Soit $\Gamma \subset \mathrm{Sl}_2(F_\infty)$ un sous-groupe arithmétique, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F}$ et $J \subset \Sigma_F$. On note $S_{\mathbf{k},J}(\Gamma)$ l'espace des fonctions $f : \mathrm{Sl}_2(F_\infty) \to \mathbb{C}$ tels que :
- $f(\gamma g) = f(g)$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $g \in \mathrm{Sl}_2(F_\infty)$;
- $D_\sigma f = ((\frac{(k_\sigma - 2)^2}{2}) + k_\sigma - 2) f$;
- $f(gu(\theta)) = \exp(2\pi i(\sum_{\sigma\in J} k_\sigma\theta_\sigma - \sum_{\sigma\in\Sigma_F - J} k_\sigma\theta_\sigma)) f(g)$ pour tout θ et g ;
- $\int_{\delta^{-1}\Gamma\delta\cap M\setminus M} f(\delta m g) dm = 0$ pour tout $g \in \mathrm{Sl}_2(F_\infty)$ et $\delta \in \mathrm{Sl}_2(F)$. Ici $M = \{(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{smallmatrix}), x \in F_\infty\}$ et dm la mesure de Lebesgue de F_∞ considéré sur M.

Lemme 6.6. *On a un isomorphisme :*

$$\delta : \bigoplus_{J\subset\Sigma_F} S_{\mathbf{k},J}(\Gamma) \to H^d_{\mathrm{cusp}}(\Gamma, P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C})).$$

Preuve : On se borne a donner la formule. Soit $f \in S_{\mathbf{k},J}(\Gamma)$ alors on définit une d-forme différentielle sur $\mathbb{H}_F$ avec valeurs dans $P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C})$ comme suit. Pour chaque $z \in \mathbb{H}_F$ on choisit $g = (\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}) \in \mathrm{Sl}_2(F_\infty)$ tel que $g(z_0) = z$ avec $z_0 = (i)_{\sigma\in\Sigma_F}$ et on définit :

$$\delta(f)(z) = j_J(g, z_0)^{2\mathbf{t}} f(g) \Psi_{J,\mathbf{k}}(dX - bY, -cX + aY) dz_J$$
$$= j_J(g, z_0)^{\mathbf{k}} f(g) \prod_{\sigma\in\Sigma_F - J} (X_\sigma - \overline{z}_\sigma Y_\sigma)^{k_\sigma - 2} \prod_{\sigma\in J} (-X_\sigma + z_\sigma Y_\sigma)^{k_\sigma - 2},$$

ici $dz_J = \bigwedge_{\sigma\in J} dz_\sigma \wedge \bigwedge_{\sigma\in\Sigma_F - J} d\overline{z}_\sigma$, $\Psi_{J,\mathbf{k}}(X, Y) = \prod_{\sigma\in J}(-X_\sigma + iY_\sigma)^{k_\sigma - 2} \prod_{\sigma\in\Sigma_F - J}(X_\sigma + iY_\sigma)^{k_\sigma - 2}$ et $j_J(g, z_0) = ((c_\sigma + id_\sigma)_{\sigma\in J}, (c_\sigma - id_\sigma)_{\sigma\in\Sigma_F - J})$. On peut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de g et qu'en fait $\delta(f)$ est une d-forme différentielle harmonique et cuspidale sur $\Gamma \setminus \mathbb{H}_F$. Voir détails dans [Hid94] ∎
Maintenant soit $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c}, \psi)$ alors pour chaque $\mathbf{x} \in \mathrm{Cl}_F^+$ soit $\mathbf{f}_\mathbf{x} : \mathrm{Sl}_2(F_\infty) \to \mathbb{C}$ définie par $\mathbf{f}_\mathbf{x}(g) = \mathbf{f}(g_\mathbf{x} g)$. Alors $\mathbf{f}_\mathbf{x} \in S_{\mathbf{k},J}(\Gamma^\mathbf{x})$ où $\Gamma^\mathbf{x}$ est le noyau de ψ sur $\mathrm{Sl}_2(F) \cap g_\mathbf{x} K_0(\mathfrak{c}) g_\mathbf{x}^{-1}$. Alors on considère la classe de cohomologie $\sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Cl}_F^+} \delta(\mathbf{f}_\mathbf{x}) \in H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C}), \psi_0))$. On déduit le résultat d'après la décomposition des espaces de cohomologie et de formes de Hilbert (voir 6.2.1 et 6.1.1).
∎

Soit $k \subset \mathbb{C}$ contenant la clôture normale de F alors on définit :

$$H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k), \psi_0)) := H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C}), \psi_0)) \cap H^d(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k), \psi_0)).$$

Comme les opérateurs de Hecke et $\{\pm 1\}^{\Sigma_F}$ laissent invariant $H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(\mathbb{C})^\vee, \psi_0))$ alors on obtient une action aussi sur $H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(\mathbb{V}_\lambda(k)^\vee, \psi_0))$.

Soit ψ un caractère de Hecke comme dans 6.1.1. Si $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r),J}(\mathfrak{c},\psi)$ est une forme propre normalisée et $\varepsilon \in \{\pm 1\}^{\Sigma_F}$ un signe alors on note pour k assez grand :

$$H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0))[\varepsilon,\mathbf{f}],$$

l'ensemble des classes $\phi \in H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C}),\psi_0))$ qui sont est un vecteur propre pour les opérateurs de Hecke avec les mêmes valeurs propres que $\mathbf{f}$ et $c \mid \phi = \varepsilon(c)\phi$ pour tout $c \in \{\pm 1\}^{\Sigma_F}$. Observer qu'ici on voit naturellement ε comme un caractère de $\{\pm 1\}^{\Sigma_F}$.
Alors on sait que $H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0))[\varepsilon,\mathbf{f}]$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 (voir section 8 de [Hid94]).
Soit $\iota_k : H^d_c(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0)) \to H^d(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0))$ le morphisme canonique alors comme on a déjà remarqué on a $H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0)) \subset \mathrm{image}(\iota_k)$ et d'autre part on peut voir qu'il existe une section pour ι_k ; ça veut dire une fonction

$$\xi_k : \mathrm{image}(\iota_k) \to H^d_c(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0)),$$

tel que $\iota_k \circ \xi_k = \mathrm{id}$ (voir section 5 dans [Hid94]). Alors on peut considérer la cohomologie cuspidale contenue dans la cohomologie à support compact.

6.2.3 Périodes

Le but dans cette partie est de définir les périodes des formes de Hilbert. En plus on associe à une forme de Hilbert et un signe une classe dans la cohomologie de la variété Hilbert à support compact avec des coefficients p-adiques.

Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r)}(\mathfrak{c},\psi)$ une forme propre et normalisée. On fixe un corps de nombres $k \subset \mathbb{C}$ contenant la clôture normale de F, les valeurs de ψ_0 et les coefficients de Fourier de $\mathbf{f}$. Soit $\varepsilon \in \{\pm 1\}^{\Sigma_F}$ alors comme on a remarqué dans la dernière sous section les espaces vectoriels

$$H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0)))[\varepsilon,\mathbf{f}] \quad \text{et} \quad H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C}),\psi_0))[\varepsilon,\mathbf{f}]$$

sont de dimension 1 (sur k et $\mathbb{C}$ respectivement). Soit :

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{f}) = \sum_{c \in \{\pm 1\}^{\Sigma_F}} \varepsilon(c)(c|\delta(\mathbf{f})), \tag{6.1}$$

où δ est l'isomorphisme de la proposition 6.4. Alors $\delta_\varepsilon(\mathbf{f})$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C}),\psi_0))[\varepsilon,\mathbf{f}]$. Pour chaque classe non zéro $\phi^\varepsilon_{\mathbf{f}}$ dans le k-espace vectoriel $H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0))[\varepsilon,\mathbf{f}]$ il existe $\Omega^\varepsilon_{\mathbf{f}} \in \mathbb{C}^*$ tel que :

$$\phi^\varepsilon_{\mathbf{f}} = \frac{\delta_\varepsilon(\mathbf{f})}{\Omega^\varepsilon_{\mathbf{f}}}. \tag{6.2}$$

$\Omega^\varepsilon_{\mathbf{f}}$ est la période associée à $\mathbf{f}$ et ε, et est bien définie à multiplication par un élément de E^* près, çela veut dire bien définie dans $\mathbb{C}^*/k^*$.

Soit $L/\mathbb{Q}_p$ une extension finie contenant $\mathbf{inc}_p(k)$ où $\mathbf{inc}_p : \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}_p$ est le plongement fixé dans "notations". On a les suivantes inclusions :

$$H^d_{\mathbf{cusp}}(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0)) \hookrightarrow H^d_c(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(k),\psi_0)) \subset H^d_c(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L),\psi_0)),$$

où le premier morphisme est ξ_k (voir 6.2.2) et l'autre provient de l'inclusion $P_{\mathbf{k},r}(k) \subset P_{\mathbf{k},r}(L)$ obtenue de $\mathbf{inc}_p$. Observer qu'ici $\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L),\psi_0)$ cela veut dire le faisceau $\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L),\Theta)$ avec $\Theta := \mathbf{inc}_p \circ \psi_0$, voir le cas 3 dans 1.4.1. Donc à travers ces inclusions on peut considérer $\phi^\varepsilon_{\mathbf{f}}$ comme un élément de $H^d_c(Y_0(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L),\psi_0))$.

6.3 Représentations automorphes

Soit (π, V) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec une action de $G(\mathbb{A}_f)$ et une structure de $(\mathfrak{g}_\infty, O_2(F_\infty))$-module qui commutent, ici π note les actions obtenues sur V. On obtient une action de $K = G(\hat{\mathbb{Z}})O_2(F_\infty)$. Alors on dit que que (π, V) une *représentation admissible de* $G(\mathbb{A})$ si :

- Les élément de V sont K-finis ;
- Si ρ est une représentation irréductible et de dimension finie de K alors la composante ρ-isotypique de V est de dimension finie.

Parmi les représentations admissibles de $G(\mathbb{A})$ il y a un type assez spécial qui est appelé les représentations automorphes et que l'on va définir.
D'abord on note $\mathcal{A}_0(G(\mathbb{Q}) \setminus G(\mathbb{A}))$ l'espace des formes automorphes et cuspidales, alors $\mathcal{A}_0(G(\mathbb{Q}) \setminus G(\mathbb{A}))$ est presque par définition une représentation admissible de $G(\mathbb{A})$. Alors une *représentation automorphe cuspidale* est une représentation admissible irréductible de $G(\mathbb{A})$ tel que peut être réalisé comme un sous quotient de $\mathcal{A}_0(G(\mathbb{Q}) \setminus G(\mathbb{A}))$.
On s'est intéressé aux représentations automorphes et cuspidales qui "contribuent à la cohomologie" cuspidale de la variété de Hilbert. D'abord observer qu'une représentation automorphe cuspidale (en fait n'importe quelle représentation admissible irréductible de $G(\mathbb{A})$) peut être écrite de façon unique $\pi = \otimes'_v \pi_v$ où le produit est sur toutes les places de F et si v est une place finie (respe. infinie) alors π_v est une $\mathrm{GL}_v(F_v)$-représentation $((M_2(\mathbb{R}), O_2(\mathbb{R}))$-module) admissible et irréductible.
Soit $(\mathbf{k}, r) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}$ tel que $k_\sigma \geqslant 2$ et $k_\sigma \equiv r \bmod 2$ pour tout $\sigma \in \Sigma_F$.

Définition 6.7. On dit que π est de type $(\mathbf{k}, r)$ à l'infini si elle est engendrée par une forme automorphe $\mathbf{f}$ tel que $\mathbf{f}(gy_\infty u(\theta)) = y_\infty^{-r\mathbf{t}} \exp(2\pi i(\sum_{\sigma\in\Sigma_F} k_\sigma\theta_\sigma))\mathbf{f}(g)$, pour $y_\infty u(\theta) \in F_\infty^* K_\infty^+$ et $g \in G(\mathbb{A})$.

Il existe un dictionaire entre représentations automorphes cuspidales de type $(\mathbf{k}, r)$ et formes de Hilbert qui sont nouvelles de poids $(\mathbf{k}, r)$, voir [RT11] pour une jolie présentation.

Soit $\mathfrak{p}$ une place de F sur p et on note $\Sigma_{F,\mathfrak{p}}$ l'ensemble des $\sigma \in \Sigma_F$ tels que $\mathbf{inc}_p \circ \sigma$ correspond à $\mathfrak{p}$. Soit π une représentation automorphe cuspidale de type $(\mathbf{k}, r)$ alors :

Définition 6.8. On dit que π est *ordinaire en* $\mathfrak{p}$ si :

- soit $\pi_\mathfrak{p}$ est ramifiée et si $a_\mathfrak{p}$ est la valeur propre de son vecteur nouveau par rapport à l'opérateur $U_\mathfrak{p}$ alors $\mathbf{inc}_p(p^{\sum_{\sigma\in\Sigma_{F,\mathfrak{p}}} \frac{k_\sigma - 2 + r}{2}} a_\mathfrak{p})$ est une unité p-adique.
- soit $\pi_\mathfrak{p}$ est non-ramifié et l'un des deux paramètres de Satake, disons $a_\mathfrak{p}$, satisfait la même condition que dans le premier cas.

On définit la fonction L d'une représentation automorphe en suivant [Bum97]. Soit $\pi = \pi_\infty \bigotimes \otimes_\mathfrak{p} \pi_\mathfrak{p}$ une représentation automorphe cuspidale de type $(\mathbf{k}, r)$ à l'infini. D'abord on définit les facteurs locaux pour les places finies.
Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de F. Si $\chi : F_\mathfrak{p}^* \to \mathbb{C}^*$ est un caractère continu alors on note $L(\chi, s) = (1 - \chi(\varpi_\mathfrak{p}) N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$ si χ est non ramifiée, et $L(\chi, s) = 1$ si non. Maintenant on définit le facteur local par :

- Si $\pi_\mathfrak{p}$ est supercuspidale alors on définit : $L_\mathfrak{p}(\pi, s) = 1$;
- Si $\pi_\mathfrak{p}$ est une série principale disons $\pi_\mathfrak{p} \simeq \pi(\chi_1, \chi_2)$. Alors on définit :

$$L_\mathfrak{p}(\pi, s) = L(\chi_1, s)L(\chi_2, s);$$

– Si $\pi_{\mathfrak{p}} = \sigma(\chi_1, \chi_2)$ est la représentation spéciale avec $\chi_1 \cdot \chi_2^{-1}(x) = \mid x \mid$ alors on définit :

$$L_{\mathfrak{p}}(\pi, s) = L(\chi_1, s);$$

Dans l'infini on définit :

$$L_\infty(\pi, s) = \prod_{\sigma \in \Sigma_F} \Gamma_{\mathbb{C}}(s + \frac{r + k_\sigma - 2}{2}),$$

où $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$. Alors on pose :

$$L(\pi, s) = L_\infty(\pi, s) \prod_{\mathfrak{p}} L_{\mathfrak{p}}(\pi, s).$$

Chapitre 7

Fonctions L p-adiques

Finalement dans ce chapitre on met ensemble les différentes parties de notre travail. Pour une représentation automorphe cuspidale cohomologique de $G(\mathbb{A})$ et que satisfait la condition *pente non critique* (voir 7.1.1) on associe une distribution sur le groupe de Galois Gal_p d'un ordre de croissance adéquat, à l'aide du théorème de classicité et la construction dans la section 5. On vérifie la propriété d'interpolation en utilisant les calculs donnés dans [Dim].

7.1 Distributions associées aux représentations automorphes

7.1.1 Construction

Soit $\pi = \pi_\infty \otimes \pi_f$ une représentation automorphe cohomologique de $G(\mathbb{A})$ de type $(\mathbf{k}, r)$ avec $(\mathbf{k}, r) \in \mathbb{Z}^{\Sigma_F} \times \mathbb{Z}$ tels que $k_\sigma \geqslant 2$, $k_\sigma \equiv r \bmod 2$ et $| \ r \ | \leq k_\sigma - 2$ pour tout $\sigma \in \Sigma_F$.
Soit k_π le corps de nombres engendré par la clôture normale de F et le corps de définition de π_f. Soit L un corps p-adique contenant k_π. On note $\lambda : T(\mathbb{Z}_p) \to L$ le poids arithmétique et critique associé au caractère algébrique correspondant à $(\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}-r\mathbf{t}}{2}, -\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2})$. Soient $\mathcal{D}_\lambda(L)$ l'espace de distributions avec l'action associée à λ et $P_{(\mathbf{k},r)}(L)$ comme dans 6.2.1.

Soit $\mathbf{f} \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r)}(K_1(\mathfrak{c}))$ la forme nouvelle propre associée à π. Alors on considère la condition suivante sur la représentation automorphe :

Pente non critique : Il existe une p-stabilisation de $\mathbf{f}$, qu'on note $\mathbf{f}_\pi$, tel que si pour chaque $\mathfrak{p} \mid p$ on note $a_\mathfrak{p} \in \overline{\mathbb{Q}}$ la valeur propre de $\mathbf{f}_\pi$ par rapport à l'opérateur $U_\mathfrak{p}$ alors on a :

$$v_p(\mathbf{inc}_p(p^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} \prod_{\mathfrak{p}|p} a_\mathfrak{p})) < k^0 - 1,$$

ici $k^0 = \min\{k_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_F\}$.

On suppose que π satisfait cette condition et on fixe une de ces p-stabilisations $\mathbf{f}_\pi \in \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r)}(K_1(\mathfrak{c}) \cap K_0(p)) \subset \mathbf{S}_{(\mathbf{k},r)}(K_1(\mathfrak{c}p))$. On note $\alpha = \mathbf{inc}_p(p^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} \prod_{\mathfrak{p}|p} a_\mathfrak{p})$ et $\alpha_\mathfrak{p} = \mathbf{inc}_p(a_\mathfrak{p})$ pour chaque $\mathfrak{p} \mid p$. En plus on suppose que $K_1(\mathfrak{c}p)$ est net.

Avec la notation de (6.1) on considère la classe $\delta_{\mathbf{1}}(f_\pi) \in H^d_{\mathrm{cusp}}(Y_1(\mathfrak{c}p), \mathcal{L}(P_{(\mathbf{k},r)}(\mathbb{C})))[\mathbf{f}_\pi, \mathbf{1}]$. On fixe desormais une période $\Omega_\pi \in \mathbb{C}^*$ (observer que la période est unique à multiplication par un élément de k_π^* près) et soit

$$\phi_{\pi,\mathbf{1}} \in H^d_c(Y_1(\mathfrak{c}p), \mathcal{L}(P_{(\mathbf{k},r)}(L)))$$

la classe associée à $\delta_{\mathbf{1}}(f_\pi)$ et le choix de la période ; dans les notations de 6.2.3 sont $\Omega^{\mathbf{1}}_{\mathbf{f}_\pi}$ et $\phi^{\mathbf{1}}_{\mathbf{f}_\pi}$ respectivement. Observer que d'après théorème 8.1 de [Hid94] on sait que si n est un entier tel que $\frac{-(k_\sigma-2)+r}{2} \leq n \leq \frac{(k_\sigma-2)+r}{2}$ pour tout $\sigma \in \Sigma_F$ et si χ est un caractère de Hecke d'ordre fini de F alors :

$$\frac{L(\pi \otimes |\cdot|^n_{\mathbb{A}_F} \otimes \chi, 1)}{\Omega_\pi} \in \overline{\mathbb{Q}}.$$

Maintenant remarquer que $U^0_p \phi_{\pi,\mathbf{1}} = \alpha \phi_{\pi,\mathbf{1}}$ et par hypothèse on a $v_p(\alpha) < k^0 - 1$ alors d'après le théorème 4.1 il existe une unique

$$\Phi_{\pi,\mathbf{1}} \in H^d_c(Y_1(\mathfrak{c}), \mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))$$

qui relève $\phi_{\pi,\mathbf{1}}$ et $U^{\mathrm{sur}}_p \Phi_{\pi,\mathbf{1}} = \alpha \Phi_{\pi,\mathbf{1}}$. Finalement on utilise la construction de 5.3 pour définir :

$$\mu_{\pi,\mathbf{1}} := \mu_{\Phi_{\pi,\mathbf{1}}} \in \mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L).$$

7.1.2 Propriétés

Sur les propriétés des distributions construites dans la dernière sous section on a le théorème suivant :

Théorème 7.1. *On suppose que* $\mathrm{Cl}^+_F = 1$. *Soit* π *une représentation automorphe cuspidale de type* $(\mathbf{k}, r)$ *tel que :*

i) π *satisfait la condition* pente non critique *(voir 7.1.1) ;*

ii) si $\mathfrak{c}$ *est le conducteur de* π *alors* $K_1(\mathfrak{c}p)$ *est net.*

Alors on a :

1) *La distribution* $\mu_{\pi,\mathbf{1}} : \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L) \to L$ *est* h*-admissible avec* $h = v_p(\alpha)$ *(voir 3.4.2 pour la définition d'admissibilité).*

2) *Soit* $\chi : \mathrm{Gal}_p \to L^*$ *un caractère d'ordre fini, alors on peut voir* χ *comme un caractère de Hecke d'ordre fini comme dans 3.4.3, et on suppose que* $\mathbf{1} = (\chi_\sigma(-1))_{\sigma \in \Sigma_F}$. *Alors on a :*

$$\mu_{\pi,\mathbf{1}}(\chi) = \mathbf{inc}_p \left(\frac{L^p(\pi \otimes \chi, 1)\tau(\chi)}{\Omega_\pi} \right) \prod_{\mathfrak{p}|p} Z_{\mathfrak{p}},$$

ici L^p *est la fonction* L *sans le facteur en* p *et avec le facteur en* ∞ *et on a :*

$$Z_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \alpha_{\mathfrak{p}}^{-\mathrm{cond}(\chi_{\mathfrak{p}})} & \textit{si } \chi_{\mathfrak{p}} \textit{ est ramifié} \\ \chi_{\mathfrak{p}}(p)^{-d_{\mathfrak{p}}}(1 - \alpha_{\mathfrak{p}}^{-1}\chi_{\mathfrak{p}}(p)^{-1}N_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-1})(1 - \alpha_{\mathfrak{p}}\chi_{\mathfrak{p}}(p))^{-1} & \textit{si non.} \end{cases}$$

$d_{\mathfrak{p}}$ *la puissance de* $\mathfrak{p}$ *dans la différente de* F *et* $\tau(\chi)$ *est la somme de Gauss comme définie dans [Dim] par rapport à* $\mathbf{e}_F$ *(le caractère défini dans 6.1.2).*

Preuve : Comme on a $U_p^{\mathrm{sur}}\Phi_{\pi,\mathbf{1}} = \alpha\Phi_{\pi,\mathbf{1}}$ alors d'après la proposition 5.5 on déduit que $\mu_{\pi,\mathbf{1}}$ est h-admissible pour $h = v_p(\alpha)$.
Finalement l'interpolation est essentiellement une conséquence du fait que nos évaluations $\mathbf{ev}_{K,n}$, avec lesquelles on a construit $\mu_{\pi,\mathbf{1}}$, sont une version pour la cohomologie surconvergente des évaluations définies dans [Dim] pour la cohomologie avec coefficients classiques, et ces dernières sont liées aux valeurs spéciales de la fonction L de π. Voir la section suivante pour les détails. ■

Remarque : 1) Comme on a démontré la proposition 5.5 seulement dans le cas $\mathrm{Cl}_F^+ = 1$ alors on voit pourquoi cette condition est nécessaire dans la partie **1)**. D'autre part, comme on le verra, cette condition aussi sera nécessaire pour l'interpolation, en fait nous permet de déduire quelques propriétés sur le support des distributions obtenues avec nos évaluations $\mathbf{ev}_{K,n}$.
2) La condition ii) sur le conducteur de π peut être éliminée en utilisant un niveau auxiliaire comme dans [Dim09].

Corollaire 7.2. *Si de plus la représentation automorphe π est ordinaire en p alors la distribution $\mu_{\pi,\mathbf{1}} : \mathcal{A}(\mathrm{Gal}_p, L) \to L$ est bornée ; cela veut dire que $\mu_{\pi,\mathbf{1}} \in L \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{D}_\lambda(\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{D}_\lambda(L)$.*

7.2 L'interpolation.

7.2.1 Valeurs de fonctions L et cohomologie

Ici on reproduit un calcul donné dans [Dim] qui fait le lien entre les valeurs spéciales de la fonction L de π et $\phi_{\pi,\mathbf{1}} \in H_c(Y_1(\mathfrak{c}p), \mathcal{L}(P_{(\mathbf{k},r)}(L)))$.

On fixe $n \geq 1$ et on utilise les notations de 5.2.2. Soit L un corps p-adique contenant la clôture séparable de F. D'abord on rappelle l'évaluation sur la cohomologie :

- Le cycle C_n nous fournit : $H_c^d(Y_1(\mathfrak{c}p), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L))) \to H_c^d(X_n, C_n^*\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L)))$;
- Soit $\mathcal{L}_n(P_{\mathbf{k},r}(L))$ le faisceau sur X_n quand on considère l'action de $u \in U(p^n)$ à droite sur $P_{\mathbf{k},r}(L)$ par $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Alors on peut vérifier que l'automorphisme de $P_{\mathbf{k},r}(L)$ obtenu de l'action à droite par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^{-n} \end{smallmatrix}\right)$ nous fournit un morphisme au niveau des faisceaux : $C_n^*\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L)) \to \mathcal{L}_n(P_{\mathbf{k},r}(L))$ et alors dans la cohomologie on a un morphisme :
$$H_c^d(X_n, C_n^*\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L))) \to H_c^d(X_n, \mathcal{L}_n(P_{\mathbf{k},r}(L)));$$
- Le morphisme crit : $P_{\mathbf{k},r}(L) \to L$ que à $P(X,Y)$ associe le coefficient devant le monôme $X^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}Y^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}-r\mathbf{t}}{2}}$ satisfait $\mathrm{crit}(P(\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) = \mathrm{crit}(P)$. Alors on obtient un morphisme de groupes de cohomologie :
$$H_c^d(X_n, \mathcal{L}_n(P_{\mathbf{k},r}(L))) \xrightarrow{\quad\mathrm{crit}\quad} H_c^d(X_n, L) \xrightarrow{\quad\sim\quad} L^{\mathrm{Cl}_F^+(p^n)}.$$
- Finalement en mettant ensemble ces trois étapes on obtient un morphisme :
$$\mathbf{ev}^{\mathrm{cl}}_{K_1(\mathfrak{c}p),n} : H_c^d(Y_1(\mathfrak{c}p), \mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L))) \to L^{\mathrm{Cl}_F^+(p^n)}.$$

Maintenant on utilise les notations de 7.1.1. Si on écrit $\mathbf{ev}^{\mathrm{cl}}_{K_1(\mathfrak{c}p),n}(\phi_{\pi,\mathbf{1}}) = (a_{\mathbf{x},\pi})_{\mathbf{x}\in\mathrm{Cl}_F^+(p^n)}$ alors on a :

Lemme 7.3. *Soit $\chi : \mathrm{Gal}_p \to L^*$ un caractère d'ordre fini tel que $\mathbf{1} = (\chi_\sigma(-1))_{\sigma\in\Sigma_F}$ (vu comme un caractère de Hecke comme avant). Si n est assez grand alors on a :*

$$p^{n\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}\alpha^{-n}\sum_{\mathbf{x}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)}\chi(\mathbf{x})a_{\mathbf{x},\pi} = \mathbf{inc}_p\left(\frac{L^p(\pi\otimes\chi,1)\tau(\chi)}{\Omega_\pi}\right)\prod_{\mathfrak{p}|p} Z_{\mathfrak{p}}.$$

Ici n est assez grand tel que le conducteur de χ divise $p^n\mathcal{O}_F$ et donc χ est défini sur $\mathrm{Cl}_F^+(p^n)$.

Preuve : Voir les calculs dans la preuve du théorème 2.5 dans [Dim].■

Remarque : Observer que dans la notation de [Dim] notre module $P_{\mathbf{k},r}(\mathbb{C})$ est $\mathbf{Sym}^{\mathbf{w}}\otimes \mathbf{det}^{\frac{w_0\mathbf{t}-\mathbf{w}}{2}}$ avec $\mathbf{w} = \mathbf{k}-2\mathbf{t}$ et $w_0 = -r$.

7.2.2 Comparaison

On va expliciter la relation entre les évaluations pour la cohomologie avec coefficients en $P_{\mathbf{k},r}(L)$ et $\mathcal{D}_\lambda(L)$.

Lemme 7.4. *Soit $\mathrm{cr} : \mathcal{D}_\lambda^+(L) \to L$ le morphisme défini par $\mathrm{cr}(\mu) = A\mu(z^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}})$ avec $A = \binom{\mathbf{k}-2\mathbf{t}}{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}$. Alors on a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{ev}_{K_1(\mathfrak{c}p),n} : H_c^d(Y_1(\mathfrak{c}p),\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L))) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_\lambda^+(L)^{\mathrm{Cl}_F^+(p^n)} \arrow[d, "\mathrm{cr}"] \\
p^{n\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}\mathbf{ev}^{\mathrm{cl}}_{K_1(\mathfrak{c}p),n} : H_c^d(Y_1(\mathfrak{c}p),\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L))) \arrow[r] & L^{\mathrm{Cl}_F^+(p^n)}
\end{tikzcd}$$

Preuve : Ce diagramme est une conséquence directe des deux observations suivantes. D'abord rappeler que le morphisme qui nous donne la spécialisation $H_c^d(Y_1(\mathfrak{c}p),\mathcal{L}(\mathcal{D}_\lambda(L)))\to H_c^d(Y_1(\mathfrak{c}p),\mathcal{L}(P_{\mathbf{k},r}(L)))$ est le morphisme $\mathcal{D}_\lambda(L)\to P_{\mathbf{k},r}(L)$ donné par $\mu\to P(\mu)(X,Y) = \mu((X+zY)^{\mathbf{k}-2\mathbf{t}})$ (voir 1.2). On voit directement que on a :

$$P(\mu * (\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n\end{smallmatrix})) = p^{n\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}P(\mu)\cdot(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & p^n\end{smallmatrix}).$$

D'autre part si comme avant on note $\mathrm{crit} : P_{\mathbf{k},r}(L)\to L$ tel que à $P(X,Y)$ on associe le coefficient devant le monôme $X^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}Y^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}-r\mathbf{t}}{2}}$ alors on a un carré commutatif (voir 1.2) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_\lambda(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_\lambda^+(L) \arrow[d, "\mathrm{cr}"] \\
P_{\mathbf{k},r}(L) \arrow[r, "\mathrm{crit}"] & L
\end{tikzcd}$$

■

7.2.3 Preuve de partie 2) de proposition 7.1.

Ici on doit supposer que $\mathrm{Cl}_F^+ = 1$. Observer que dans ce cas on a $\mathrm{Gal}_p = (\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*/\overline{E(1)}$ et on a $\mathcal{D}(\mathrm{Gal}_p, L) = \mathcal{D}^+((\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p)^*, L)$.
Soit $\chi : \mathrm{Gal}_p \to L^*$ un caractère d'ordre fini et signe $\mathbf{1} \in \{\pm 1\}^{\Sigma_F}$. Soit $n \geq 1$ tel que le conducteur de χ divise $p^n\mathcal{O}_F$. On écrit $\mathrm{ev}_{K_1(\mathfrak{c}p),n}(\Phi_{\pi,\mathbf{1}}) = (\nu_{\mathbf{x}})_{\mathbf{x}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)}$. Alors d'après la définition dans 5.1 et le lemme 5.9 on a :

$$\nu_{\mathbf{x}}^*(\chi) = \binom{\mathbf{k}-2\mathbf{t}}{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} \chi(\mathbf{x})\nu_{\mathbf{x}}(z^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}).$$

Comme avant on écrit $\mathbf{ev}^{\mathrm{cl}}_{K_1(\mathfrak{c}p),n}(\phi_\pi, \mathbf{1}) = (a_{\mathbf{x},\pi})_{\mathbf{x}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)}$. Alors on a $\mu_{\pi,\mathbf{1}(\chi)=}$

$$\begin{aligned}
&= \mu_{\Phi_{\pi,\mathbf{1}}}(\chi)\\
&= \alpha^{-n}\sum_{\mathbf{x}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)} \nu_{\mathbf{x}}^*(\chi)\\
&= \alpha^{-n}\sum_{\mathbf{x}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)} \binom{\mathbf{k}-2\mathbf{t}}{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}} \chi(\mathbf{x})\nu_{\mathbf{x}}(z^{\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}})\\
&= p^{n\frac{\mathbf{k}-2\mathbf{t}+r\mathbf{t}}{2}}\alpha^{-n}\sum_{\mathbf{x}\in \mathrm{Cl}_F^+(p^n)} \chi(\mathbf{x})a_{\mathbf{x},\pi}\\
&= \mathbf{inc}_p\left(\frac{L^p(\pi\otimes\chi,1)\tau(\chi)}{\Omega_\pi}\right)\prod_{\mathfrak{p}|p} Z_{\mathfrak{p}}
\end{aligned}$$

observer que la deuxième égalité est une conséquence du lemme 5.2 , la quatrième du lemme 7.4 et la dernière de 7.3. ∎

Bibliographie

[AV75] Y. Amice et J. Vélu : Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke. *Astérisque*, 24-25:119–131, 1975.

[Bel12] Joel Bellaiche : Critical p-adic L-functions. *Invent. Math*, 189(1):1–60, 2012.

[Bre97] Glen Bredon : *Sheaf Theory*. Graduate texts in Mathematics, No. 170. Springer, 1997.

[BS74] A. Borel et J.P. Serre : Corners and arithmetic groups. *Comment. Math. Helv.*, 48:436–491, 1974.

[Bum97] Daniel Bump : *Automorphic forms and representations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, No. 55. Cambridge University press, 1997.

[Dab94] A. Dabrowski : p-adic l-functions of hilbert modular forms. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 44:1025–1041, 1994.

[Dim] Mladen Dimitrov : Automorphic symbols, p-adics L-functions and ordinary cohomology of hilbert modular varieties. *Amer. J. Math.*

[Dim09] Mladen Dimitrov : On Ihara's lemma for Hilbert modular varieties. *Compositio Mathematica*, 145(05):1114–1146, 2009.

[Gha02] Eknath Ghate : Adjoint l-values and primes of congruence for Hilbert modular forms. *Compositio Mathematica*, 132:243–281, 2002.

[Har87] Gunter Harder : Eisenstein cohomology of arithmetic groups. the case GL_2. *Invent. Math*, 89:37–118, 1987.

[Hid88] Haruzo Hida : On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields. *Annals of mathematics*, 128:295–384, 1988.

[Hid91] Haruzo Hida : On p-adic L-functions of $GL_2 \times GL_2$ over totally real fields. *Ann. Inst. Fourier*, 41:311–391, 1991.

[Hid94] Haruzo Hida : On the critical values of L-functions of GL_2 and $GL_2 \times GL_2$. *Duke Math. Journal*, 74(2):431–529, 1994.

[Jan] J.C. Jantzen : *Representations of algebraic groups*. Mathematical Surveys and Monographs.

[Man76] J. Manin : Non-archimedean integration and p-adic jacquet-langlands l-functions. *Uspehi Mat. Nauk.*, 31:5–54, 1976.

[Mok09] C.P Mok : The exceptional zero conjecture for hilbert modular forms. *Compos. Math.*, 145:1–55, 2009.

[MTT86] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum : On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. *Invent. Math.*, 84:1–48, 1986.

[Mun] James Munkres : *Elementary differential topology*. Annals of Mathematics Studies N 54. Princeton University Press.

[Pan94] Alexei PANCHISHKIN : Motives over totally real fields and p-adic L-functions. *Annales de l'institut Fourier*, 44:989–1023, 1994.

[PS] R. POLLACK et G. STEVENS : Critical slope p-adic l-functions. *Journal of the London Mathematical Society.*

[PS11] R. POLLACK et G. STEVENS : Overconvergent modular symbols and p-adic l-functions. *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, 44(1):1–42, 2011.

[RT11] RAGHURAM et TANABE : Notes on the arithmetic of Hilbert modular forms. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 26:261–319, 2011.

[Ser62] Jean-Pierre SERRE : Endomorphismes complétement continus des espaces de Banach p-adiques. *Pbl. Math. IHES.*, 12:69–85, 1962.

[Ste] Glenn STEVENS : Families of overconvergent modular symbols. *?*

[Ste94] Glenn STEVENS : Rigid analytic modular symbols. *Preprint*, 1994.

[Ste10] Glenn STEVENS : Coleman's l-invariant and families of modular forms. *Astérisque*, 311:1–12, 2010.

[Urb11] Erick URBAN : Eingenvarieties for reductive groups. *Annals of mathematics*, 174:1685–1784, 2011.

[Vis76] M VISHIK : Non-archimedian measures connected with Dirichlet series. *Math USSR Sbornik*, 28:216–228, 1976.