N° d'ordre: 41295

Université Lille1 Sciences et Technologies

Université Lille Nord de France
Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur

Thèse

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LILLE 1
Mention MÉCANIQUE

présentée par

Kévin BONNAY

Équipe d'accueil : LABORATOIRE DE MÉCANIQUE DE LILLE (UMR CNRS 8107)
École Doctorale : ECOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR (SPI) n° 72
Composante universitaire : UNIVERSITÉ LILLE 1

Titre de la thèse :

Instabilités vibratoires dans un contact frottant en présence d'hétérogénéités de matériau et de surface

Soutenue le 10 Décembre 2013 devant la commission d'examen.

Composition du jury :

Jury		
Jérôme FORTIN	PROF., UPJV (FRANCE)	*Rapporteur*
Daniel NELIAS	PROF., INSA-LYON (FRANCE)	*Rapporteur*
Jean-Jacques SINOU	PROF., ÉCOLE CENTRALE DE LYON (FRANCE)	*Examinateur*
Mickaël ABBAS	I.G.R., EDF R&D (FRANCE)	*Examinateur*
Encadrement		
Philippe DUFRÉNOY	PROF., UNIVERSITÉ LILLE 1 (FRANCE)	*Directeur de thèse*
Géry DESAXCÉ	PROF., UNIVERSITÉ LILLE 1 (FRANCE)	*Co-directeur de thèse*
Vincent MAGNIER	M.D.C., UNIVERSITÉ LILLE 1 (FRANCE)	*Encadrant*
Jean-François BRUNEL	M.D.C., UNIVERSITÉ LILLE 1 (FRANCE)	*Encadrant*

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire de mécanique de Lille sous le financement du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche.

En premier lieu, je souhaite remercier les personnes qui m'ont fait confiance et qui ont rendu possible ce travail : Philippe Dufrénoy et Géry DeSaxcé, directeur et codirecteur de thèse. Au sein de mon encadrement, je ne peux oublier de remercier aussi Vincent Magnier et Jean-François Brunel (mes encadrants) pour leur soutien, l'attention qu'ils m'ont accordée et leur patience à mon égard.

Je tiens à remercier aussi Jérôme Fortin et Daniel Nelias d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Je remercie aussi Jean-Jacques Sinou d'avoir accepté la tâche de président du jury d'examen ainsi que Mickaël Abbas qui a été examinateur de ce travail.

Je remercie aussi l'ensemble de l'équipe de recherche 5 (Freinage, contact et surface) du laboratoire et plus particulièrement les collègues qui m'ont côtoyé au quotidien : Antoine, Martin, Loïc M., Davis, Amavi, Florent (pour ses apnées cérébrales lors des cafés), Mathilde, Alexandre Mer., Pierre, Rémy, Xavier, Loïc S.A., Sofiane, Anne-lise... ainsi que tous ceux que j'ai pu oublier mais qui se reconnaîtront.

Enfin, je termine en remerciant l'ensemble de ma famille qui me soutient et m'encourage depuis toujours. Ce mémoire leur est dédié : à mon père, à ma mère (qui à subit et corrigé mon orthographe), à mon frère, à Jennifer qui m'a supportée dans cette étape, à ma famille proche (oncles, tantes, cousins et cousine) qui ont toujours cru en moi. Je dédis spécialement ce travail à mes grands-parents, partis avant de pouvoir leur rendre cet honneur..

J'ai une dernière pensée pour ces gens qui font que l'on devient ce que l'on est.

J'aimerais avoir un mot pour tous, mais il y en aura toujours que j'oublierais de citer....

> La pierre n'a point d'espoir d'être autre chose qu'une pierre. Mais, de collaborer, elle s'assemble et devient temple.
>
> **Alexandre de Saint-Exupéry**

Table des matières

Introduction

Cadre du problème

De nombreux problèmes mécaniques font intervenir deux corps en contact. Le contact frottant intervient aussi bien dans le domaine du freinage qu'en médecine ainsi que dans de nombreuses industries. Dans l'industrie éolienne, ferroviaire et automobile, le crissement de frein est une problématique récurrente. Le bruit caractéristique d'un train entrant en gare relate bien le problème. Les nuisances causées par le crissement de freins est un réel problème dans lequel l'industrie s'investie afin de mieux comprendre le phénomène, dans un premier temps, et de trouver des solutions limitant ou annihilant le bruit, dans un second temps.

Afin de mieux comprendre le crissement, il est possible de réaliser diverses études expérimentales ou numériques. Coté expérimentale, l'analyse de la dynamique du système apporte beaucoup d'information. Il est aussi possible d'étudier l'influence de propriétés physiques des matériaux utilisés dans ce domaine. Ce type d'étude permet de mieux comprendre le rôle des matériaux intervenant de la mécanique du contact. Coté numérique, il est courant de modéliser des systèmes de freinages. Ces modèles permettent la encore de simuler divers phénomènes liés au contact frottant. Il est ainsi possible d'étudier les comportements vibratoires à l'aide d'analyse modale complexe et les comportements dynamique à travers des études sur des modèles Éléments Finis.

A travers diverses études, il apparaît que les discontinuités matériau ou surface entrent en jeu, les hétérogénéités en question étant la composition de matériaux de friction, leur rugosité ainsi que le profil macroscopique des surfaces. Ces facteurs ont une influence sur les mécanismes menant au crissement ainsi que sur les phénomènes thermiques. Dès lors, il parait intéressant de les prendre en compte dans les études numériques afin d'essayer de déterminer l'importance de l'influence d'un facteur d'hétérogénéité.

Le contact frottant est déjà un problème complexe à lui seul aussi bien du point de vue expérimentale que numérique. Numériquement, le contact frottant introduit des non-linéarités qu'il est nécessaire de savoir résoudre au mieux.

Les problèmes de contact frottant étant déjà assez complexe à résoudre, l'introduction d'hétérogénéités matérielles complexifie encore d'avantage la recherche de solutions. De plus, ces différentes hétérogénéités n'interviennent pas nécessairement à la même échelle. Pour un problème modélisé à échelle réelle, il est compliqué et coûteux de modéliser les imperfections microscopiques. Par exemple, une garniture de frein est un matériau multi-constitué contenant plusieurs composants qu'il est impossible de modéliser de manière exacte dans une simulation éléments finis à l'échelle 1. Il serait donc intéressant de voir comment il est possible de prendre en compte ces hétérogénéités. Par la suite, il serait utile de les intégrer dans un calcul et ainsi de tenter d'analyser leur influence sur le comportement macroscopique du système et plus particulièrement sur les mécanismes menant au crissement.

Objectifs de l'étude

Ce travail s'inscrit dans une volonté d'améliorer les modèles numériques à travers l'intégration de l'aspect multi-échelles du problème. L'objectif de ce travail est de développer un modèle numérique permettant d'intégrer les différentes échelles intervenant ainsi que les différents aspects hétérogènes des corps en contact puis d'étudier l'influence des différentes hétérogénéités et de leur échelle respective sur la dynamique d'un système potentiellement instable.

Plan du mémoire

Ce mémoire se divise en 4 chapitre :

- Le **chapitre 1** rappelle le contexte du travail réalisé et présente un état de l'art assez large mais non-exhaustif. Le chapitre commence par un rappel concernant les lois de contact-frottant et les méthodes de résolution de contact les plus communes. Puis, le contact frottant dans le cadre du freinage est présenté. Suite à cela, on présente l'aspect multi-échelles du freinage en passant en revue toutes les échelles du système, puis on traite son aspect multi-physiques en présentant brièvement les phénomènes vibratoires et thermiques observables dans le freinage. Par la suite, les méthodes permettant de modéliser les différentes échelles présentes dans le freinage sont présentées. Partant du constat que le problème nécessite des méthodes adaptées pour la prise des différentes échelles présentes, les méthodes numériques permettant une modélisation multi-échelles sont présentées.
- Le **chapitre 2** présente la stratégie utilisée. Celle-ci est composée d'un modèle élément fini pour l'étude cinématique du contact et d'un modèle semi-analytique pour l'analyse vibratoire du système. Un premier type d'hétérogénéité est considéré. Il concerne le défaut de planéité, de type ondulation de surface, présent sur tout disque de frein. Cette non-planéité est modélisée et fait l'objet de différentes études paramétriques afin de déterminer les paramètres, géométriques ou système, les plus influant sur les propriétés vibratoires du système sous condition de glissement, mais aussi, sur la localisation du flux de chaleur dissipé par frottement.
- Le **chapitre 3** considère un type plus ciblé d'hétérogénéité lié à la non-planéité du matériau de friction. Afin d'intégrer des hétérogénéités en proche surface du matériau de friction, une amélioration du modèle élément fini est présentée. Elle consiste en l'introduction d'une couche de matériau de friction finement maillée près du contact. La non-planéité qui est considérée porte sur la présence de plateau de contact sur la surface de la garniture. Dans un premier temps, on s'intéresse à des répartitions équidistantes de plateaux de contact ayant des tailles homogènes puis des tailles hétérogènes. Enfin, la modélisation de plateau de contact est exploitée à nouveau afin d'étudier différents paramètres en exploitant des conditions de contact observées en présence d'une ondulation de disque. Cette dernière étude permet de démontrer l'importance de certains paramètres et de tirer une classification en fonction de leur influence.
- Le **chapitre 4** porte sur la prise en compte des propriétés hétérogènes du matériau de friction au contact. Afin d'intégrer celles-ci, le modèle avec couche finement maillée au contact est réutilisé. Il permet d'intégrer une raideur locale de contact hétérogène ou un module de Young hétérogène en proche surface de la garniture. Dans un premier temps, des répartitions de propriétés aléatoires sont traitées. Dans un second temps, des répartitions de propriétés organisées sont traitées. Différents paramètres liés aux hétérogénéités (dimension et répartition) sont étudiés afin de déterminer leur impact sur les propriétés vibratoires du système.

Chapitre 1

État de l'art

Ce chapitre a pour but de préciser le contexte dans lequel se situe ce travail et d'établir un état de l'art.
Afin de partir du socle commun des connaissances dans le domaine, le chapitre commence par des généralités sur la manière dont est formalisé le contact frottant (lois de contact et lois de frottement).
Le contact frottant étant un problème non-linéaire et non-trivial, il nécessite des algorithmes particuliers afin de résoudre numériquement ce problème. Dans la partie suivante, les principales méthodes de résolution du contact frottant seront donc présentées.
Les méthodes classiques de résolution de contact n'intègrent qu'une résolution macroscopique du problème, c'est à dire à l'échelle du système. Or, une résolution macroscopique du problème ne suffit pas toujours. La partie suivante montrera que, dans le domaine du freinage, le contact frottant est un problème impliquant différentes échelles (aspect multi-échelles) et divers phénomènes physiques (aspect multi-physiques) liés les uns aux autres. Il sera aussi vu en quoi ces différents aspects peuvent influencer le crissement.
Par la suite, les méthodes classiques permettant d'étudier le problème du freinage seront présentées. Tout d'abord, les modèles permettant d'étudier les instabilités vibratoires à une échelle macroscopique seront présentés. Puis, comme la problématique du travail fait intervenir des hétérogénéités de surface, les modèles montrant comment elles peuvent être prises en compte seront présentés. Ensuite, nous descendrons d'une échelle afin de montrer comment peut être modélisé l'interface de contact.
Un des objectifs de ce travail est de considérer plusieurs échelles dans un unique modèle, il est donc nécessaire d'utiliser une méthode performante permettant d'intégrer les différentes échelles liées au problème. Dans la dernière partie, il sera exposé des méthodes multi-échelles. Nous choisirons parmi celles-ci la méthode qui sera utilisée pour prendre en compte les différentes échelles dans une seule résolution.

1.1 Contact frottant

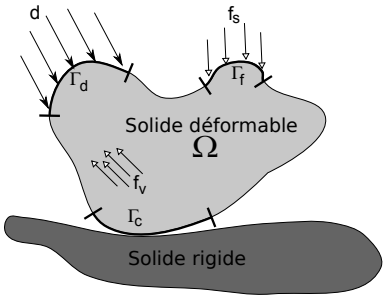
La mécanique du contact est un problème classique de la mécanique. Afin, d'introduire le travail qui a été réalisé. Il est utile de reposer les fondations de la théorie du contact dans son aspect le plus général possible.

1.1.1 Généralités

Soit un solide déformable Ω.
On définit sa frontière $\partial\Omega$ que l'on décompose de la manière suivante :

$$\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_f \cup \Gamma_c \cup \Gamma_r$$

où Γ_d est une partie où le déplacement est imposé, Γ_f une partie où une force est imposée, Γ_c une zone de contact potentielle et Γ_r où aucune condition mécanique n'est imposée.



Γ_c peut potentiellement entrer en contact avec une autre surface. Pour un solide supposé élastique soumis à la loi de Hooke et sous conditions de petites déformations et sans contact, l'équilibre statique est régit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} div(\sigma) + f_v = 0 & \text{sur } \Omega \\ \sigma = \mathcal{R} : \varepsilon & \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t) & \\ \sigma \cdot n = f_s & \text{sur } \Gamma_f \\ u = d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \tag{1.1}$$

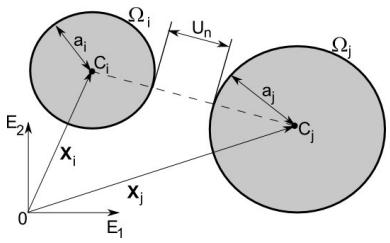
où σ est le tenseur des contraintes, f_v est la densité d'efforts volumiques subit par Ω, $\mathcal{R}$ est le tenseur des raideurs élastiques, ε est le tenseur des déformations linéarisées, u est le champs des déplacements, f_s est la densité d'efforts surfaciques imposée sur Γ_f et d est le déplacement imposé sur Γ_d.

Afin de prendre en compte le phénomène de contact sur Γ_c, il est nécessaire d'utiliser un ensemble de lois définissant le contact. Les lois de contact sont l'objet de la partie suivante. Dans un premier temps, la manière la plus simple de prendre en compte est de le supposer sans frottement. Dans cette situation, les forces le régissant ne dépendent que de la direction normale au contact. Ainsi, les lois du contact unilatéral sont les bases les plus simples du contact et sont donc présentées en premier en tant que telles. La seconde loi nécessaire à la définition d'un contact frottant est la loi de frottement. Celle-ci amène les premières difficultés liées au contact frottant.

1.1.2 Contact unilatéral

Lors d'un contact unilatéral entre deux corps, les corps ne peuvent qu'entrer un contact mutuel. Ils ne peuvent avoir de mouvement, ni d'effort tangent au contact. En 1933 dans [Signorini, 1933], Signorini a écrit les lois permettant de définir un contact unilatéral. Ces lois sont appelées conditions de Signorini. Elles reposent sur différents principes simples tels que la non-pénétrabilité, la non-adhésion et l'état d'admissibilité du contact (contact ou non-contact).

Non-pénétrabilité : Cette condition traduit le fait que deux corps peuvent entrer en contact mais ne peuvent s'interpénétrer.
On considère deux corps Ω_i et Ω_j de centre respectif C_i, C_j de coordonnées $\mathbf{X_i}$, $\mathbf{X_j}$ et de rayon respectif a_i, a_j.



Les corps ne peuvent s'interpénétrer. Ceci peut être traduit simplement, la distance entre les centres des corps doit être supérieure ou égale à la somme des distances entre centre et surface :

$$C_iC_j \geq a_i + a_j.$$

L'interstice, ou le déplacement relatif, entre deux corps est définit mathématiquement de la manière suivante :

$$U_n = \|\mathbf{X_i} - \mathbf{X_j}\| - (a_i + a_j).$$

La condition de non-pénétrabilité se traduit donc par :

$$U_n \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} U_n = 0 & \text{si contact,} \\ U_n > 0 & \text{si non-contact.} \end{cases}$$

Non-adhésion : Cette condition, dite statique, exprime le fait que le point de contact du corps Ω_i ne doit pas coller au corps Ω_j. S'ils sont en contact, la réaction de contact doit toujours être supérieure ou égale à zéro, c'est dire que les efforts de contact, notés r_n, ne seront que des efforts de compression et non des efforts de traction.

Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$U_n = 0 \text{ et } r_n \geq 0.$$

État d'admissibilité du contact : Cette condition traduit le fait que soit les corps sont en contact, soit ils ne le sont pas.
Si les deux corps ne sont pas en contact alors $U_n > 0$ mais la réaction normale de contact r_n est nulle. Par contre, si les deux corps sont en contact, c'est à dire $U_n = 0$, la réaction normale de contact r_n doit alors être positive ou nulle.

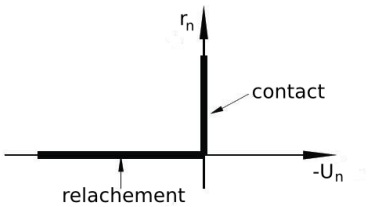
On peut écrire cette condition sous la forme :

$$U_n \cdot r_n = 0.$$

En résumé, les conditions de Signorini s'écrivent :

$$U_n \geq 0,\ r_n \geq 0 \text{ et } U_n \cdot r_n = 0. \tag{1.2}$$

Elle peut être représentée graphiquement de la manière suivante :



1.1.3 Loi de frottement

Les premiers travaux sur le frottement ont été réalisés par Léonard de Vinci au début du XVIe siècle. Il donne ainsi la première valeur du coefficient de proportionnalité entre la force de frottement et le poids du corps. Il faut attendre deux siècles (fin du XVIIe siècle) pour qu'Amonton puis Coulomb reprennent les travaux de Léonard de Vinci et les développent.

Amonton a énoncé une loi de proportionnalité :

Définition 1 *La force tangentielle r_t à exercer pour mettre les deux solides en mouvement ne dépends pas de l'aire du contact. La force tangentielle r_t est proportionnelle à la force normale r_n.*

Par la suite, Coulomb a énoncé une loi prenant en compte le fait que chaque couple de matériaux a son propre coefficient de friction. Au XVIIe siècle, Euler fit une distinction entre l'amorçage du glissement et le mouvement de glissement en introduisant un coefficient de frottement statique dans le cas de l'amorçage et un coefficient de frottement dynamique dans le cas d'un mouvement de glissement établi.

Sous conditions de contact, $U_n = 0$:

Si $\dot{U}_t = 0$: Dans ce cas, la vitesse de glissement est nulle, donc on est dans le cas de non-glissement.
On définit une constante de réaction tangentielle critique $r_{t,max} > 0$:

$$r_{t,max} = \mu_s |r_n|,$$

où μ_s est le coefficient de frottement statique.
Dans le cas de non-glissement, on a donc :

$$|r_t| \leq r_{t,max} = \mu_s |r_n|.$$

Si $\dot{U}_t \neq 0$ **:** Dans ce cas, on est en glissement.

On remarque quelques propriétés utiles :

- La réaction tangentielle $\mathbf{r_t}$ a le même support que la vitesse de glissement $\dot{\mathbf{U}}_\mathbf{t}$:

$$\mathbf{r_t} \wedge \dot{\mathbf{U}}_\mathbf{t} = \mathbf{0},$$

- La réaction tangentielle $\mathbf{r_t}$ a un sens opposé la vitesse de glissement $\dot{\mathbf{U}}_\mathbf{t}$:

$$\mathbf{r_t} \cdot \dot{\mathbf{U}}_\mathbf{t} < 0.$$

Dans le cas de glissement, d'après la loi de glissement, on a :

$$|r_t| = \mu_d |r_n|,$$

où μ_d est le coefficient de frottement dynamique.

Remarque : En toute rigueur, on a $\mu_d < \mu_s$ mais, dans la pratique, on suppose souvent qu'ils sont égaux.

Avec les résultats établis précédemment, on obtient la loi de Coulomb :

$$\text{si } \dot{U}_t = 0 \text{ alors } |r_t| \leq \mu_d r_n \qquad \text{donc adhérence,}$$
$$\text{si } -\dot{U}_t > 0 \text{ alors } r_t = \mu_d r_n \qquad \text{donc glissement,}$$
$$\text{si } -\dot{U}_t < 0 \text{ alors } r_t = -\mu_d r_n \qquad \text{donc glissement,}$$

Cette loi est représentée graphiquement de la manière suivante :

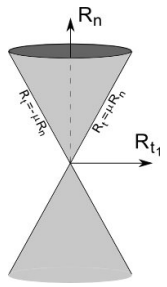


FIGURE 1.1 – Cône de Coulomb

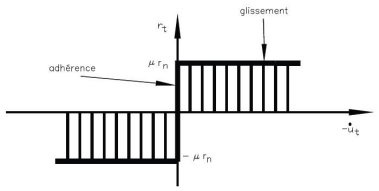
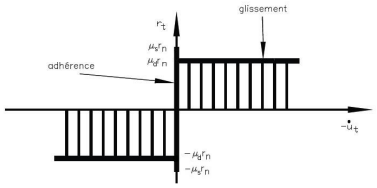


FIGURE 1.2 – Loi de frottement

Il est aussi possible de représenter la loi à coefficient de frottement variable. La plus simple des lois avec coefficient variable est la loi prenant en compte un coefficient de frottement statique et un coefficient de frottement dynamique :



Il existe d'autres lois prenant en compte une évolution du coefficient de frottement entre l'état statique et le frottement dynamique. Ces lois, expérimentales ou numériques, peuvent avoir les allures suivantes :

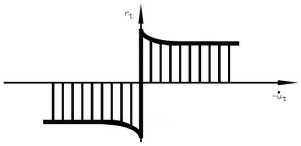


FIGURE 1.3 – Loi expérimentale

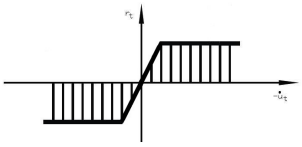


FIGURE 1.4 – Loi de Coulomb régularisé

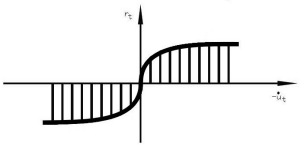


FIGURE 1.5 – Loi de Norton-Hoff pour $\rho = 0.5$

Notre objectif étant d'introduire des hétérogénéités, nous ne souhaitons pas introduire de loi de frottement élaborée. Dans ce travail, on se contentera d'utiliser une loi de frottement de Coulomb classique. Maintenant que les lois de contact frottant ont été rappelées, nous allons désormais nous intéresser à la modélisation et aux méthodes permettant de résoudre numériquement un problème de contact frottant.

1.2 Modélisation du contact frottant

Le contact demeure, encore aujourd'hui, un des problèmes mécaniques présentant des non-linéarités les plus difficiles à appréhender. Celles-ci proviennent des changements brutaux de comportement et de la non-différentiabilité de la loi de contact.
La résolution numérique du contact sera présentée en deux parties. La phase précédent la résolution du contact est l'étape d'appariement qui permet de détecter les éléments potentiellement en contact. Nous commencerons par la présenter brièvement. Puis, les principales méthodes de résolution de contact seront présentées.

1.2.1 Appariement

L'appariement est une étape importante précédent la résolution du contact. Cette méthode nous intéresse car elle est réutilisée dans certaines méthodes numériques dites multi-échelles. Il existe plusieurs types d'appariement : noeud-noeud, noeud-surface ou surface-surface. Nous présenterons l'appariement dans le cas d'une résolution de contact de type surface-noeud, aussi appelé maître-esclave. La surface maître est utilisé comme surface de référence et la surface esclave (contenant les noeuds de la surface opposée) est mise en relation avec la surface maître. En général, on choisit comme surface maître la surface contenant le plus de noeud. Ce qui permet de maximiser les chances de trouver le noeud voisin sur la surface esclave. Il existe aussi des méthodes d'appariement surface-surface. Celles-ci sont nées d'une volonté de parallélisation des codes mais nous n'en parlerons pas ici.

La normale aux mailles appartenant aux zones de contact potentielΓ_c est calculée au préalable. L'appariement se déroule en deux étapes :
- Pour chaque noeud esclave, on recherche le noeud surface maître le plus proche.
- On recherche la maille maître liée au noeud maître qui est la plus proche du noeud esclave.

Dans le cas d'un contact noeud-noeud, seule la première étape est effectuée.

Le voisin le plus proche : Pour cette étape, pour chaque noeud de la surface esclave, il suffit de calculer la distance avec chaque noeud de surface maître et de conserver le noeud réalisant le minimum.

La maille la plus proche : Cette étape se déroule en trois sous-étapes :
- Tout d'abord, pour chaque noeud de la surface maître proche d'un noeud de la surface esclave, il est nécessaire de rechercher les mailles contenant ce noeud maître.
- Puis, on détermine la projection P du noeud de la surface esclave sur chaque maille liée au noeud de la surface maître.
- Puis, il faut déterminer la maille où le produit scalaire entre le vecteur **PM** (avec M le noeud esclave) et la normale à la maille est le plus petit. Le noeud de la maille réalisant le plus petit produit scalaire est alors apparié au noeud de la surface esclave.

Maintenant que l'étape d'appariement permettant de détecter les éventuels contact a été présentée, il est nécessaire de voir comment le contact est résolu numériquement.

1.2.2 Méthodes de résolution de contact

Afin de résoudre numériquement les problèmes de contact, divers algorithmes ont été mis au point. Chacun d'entre eux présente des avantages et des inconvénients. Dans cette partie, nous ne présenterons que les algorithmes les plus utilisés bien qu'il en existe beaucoup d'autres.

Le problème de contact peut s'écrire sous la forme d'un problème de minimisation sous contraintes. Pour la résolution de ce problème de minimisation, il existe différents types de méthodes dont les méthodes de point fixe, les méthodes de gradient conjugué projeté ([Heinstein and Laursen, 1999], [Tardieu et al., 2008], [Renouf and Alart, 2005]), les méthodes de type Gauss-Seidel ([Gunawardena et al., 1991], [Chabrand et al., 1998], [Li, 2003]) et les méthodes de régularisation (pénalisation, multiplicateurs de Lagrange, Lagrangien augmentés...). Les méthodes de régularisation sont les méthodes les plus couramment utilisées dans les codes éléments finis. La loi de contact est alors régularisée. Les forces de contact sont supposées dépendantes des déplacements.

Dans cette partie, les méthodes de régularisation les plus répandues seront présentées (Multiplicateurs de Lagrange, pénalisation et Lagrangien augmenté). Il existe de nombreuses autres méthodes de résolution de contact qui mériteraient d'être présentées telles que la méthode Lemke [Broyden, 1990], le lagrangien augmenté adapté [Busseta et al., 2009], le lagrangien stabilisé [Ben Dhia and Zarroug, 2001] ou encore la méthode du bipotentiel [De Saxce and Feng, 1998].

1.2.2.1 Méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation [Papadopoulos and Taylor, 1993] est une des méthodes les plus simples et l'une des premières à avoir été utilisée de part sa simplicité. Néanmoins, elle présente le désavantage d'autoriser une interpénétration, ce qui viole la 1e loi de Signorini. En cas de contact entre deux points, on a ainsi :

$$U_n \leq 0$$

La pénétration est limitée par un coefficient de pénalisation fixé.
Cette méthode donne une solution approchée car la méthode consiste à établir une relation de proportionnalité entre la contrainte au contact et la pénétration entre les corps. Le contact normal est régularisé de la manière suivante :

$$r_n = \varepsilon_n < U_n >$$

où ε_n est le coefficient de pénalisation normale, r_n la force de contact et $< . >$ est la partie positive de son opérande.

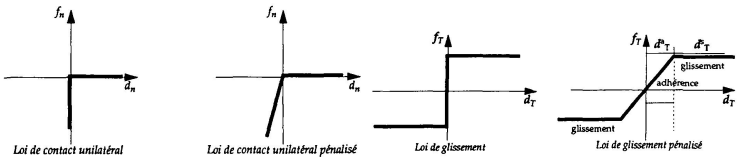
$$r_n = \begin{cases} \varepsilon_n U_n & \text{si } U_n \leq 0 \quad \text{(contact)} \\ 0 & \text{si } U_n > 0 \quad \text{(non contact)} \end{cases}$$

Le frottement est régularisé en utilisant la loi de Coulomb. Si on pose $\Phi = \|\mathbf{r_t}\| - \mu r_n$. Pour un taux de glissement positif ou nul, $\zeta \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{v_t} = \frac{1}{\varepsilon_t}\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{r_t} & \text{si } \Phi < 0 \quad \text{(adhérence)} \\ \mathbf{v_t} - \zeta\frac{\mathbf{r_t}}{\|\mathbf{r_t}\|} = \frac{1}{\varepsilon_t}\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{r_t} & \text{si } \Phi = 0 \quad \text{(glissement)} \end{cases}$$

où ε_t est le coefficient de pénalisation tangentiel et $\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{r_t}$ est la dérivée de Lie : $\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{r_t} = \dot{r}_t\mathbf{T}$ avec $\mathbf{r_t} = r_t\mathbf{T}$.

Les lois de contact et de frottement sont alors modifiées. Ces lois pénalisées sont présentées sur les figures 1.6.



(a) Contact normal (b) Glissement

FIGURE 1.6 – Lois pénalisés

La fonctionnelle de l'énergie totale est augmentée par une fonction de pénalisation. Cela permet de se retrouver finalement avec un problème de minimisation sans contrainte. Le problème linéarisé est ensuite résolu par une méthode de type Newton-Raphson.
L'un des inconvénients est qu'une fois traduit sans contrainte, le problème pénalisé doit être plus simple à résoudre que le précédent, ce qui n'est pas toujours le cas. L'autre inconvénient de cette approche, comme il a déjà été précisé, est la non vérification des conditions de contact et de frottement au sens strict. Outre le fait d'ajouter des degrés de liberté supplémentaires au système, le paramètre de pénalité requiert d'être bien choisi. Une faible pénalisation permet une convergence plus rapide mais implique de forte pénétration. Une pénalisation trop élevée tend vers une solution plus réelle, car sans pénétration, mais pose de gros problèmes de convergence.

Il existe aussi des méthodes de pénalisation avec coefficients variables. La méthode de pénalisation adaptative ([Busseta, 2009]) en est un exemple. Le coefficient de pénalisation est automatiquement recalculé afin d'assurer une meilleure convergence. Elle réduit au minimum les oscillations de statut de contact dues aux augmentations brutales de la pénalisation normale et tangentielle. Elle permet aussi d'avoir un contrôle de l'interpénétration résiduelle via la régulation du coefficient de pénalisation.
Cette méthode nécessite toujours de définir un coefficient initial.

1.2.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Cette méthode est présentée dans [Chaudhary and Bathe, 1986]. Elle introduit des paramètres supplémentaires appelés multiplicateurs de Lagrange et sont notés λ. Ces paramètres représentent les forces empêchant l'interpénétration sur l'interface de contact, c'est à dire qu'ils substituent les forces de contact :

$$\lambda = \mathbf{r_c} = -\lambda_n \mathbf{N} + \lambda_\mathbf{t}$$

La condition d'admissibilité de contact peut alors être remplacée :

$$\begin{cases} \lambda_n > 0 & \text{si } U_n = 0 \quad \text{(contact)} \\ \lambda_n = 0 & \text{si } U_n > 0 \quad \text{(non contact)} \end{cases}$$

Il est de même pour la condition d'admissibilité de frottement :

$$\begin{cases} \mathbf{v_t} = 0 & \text{si } \Phi < 0 \quad \text{(adhérence)} \\ \mathbf{v_t} - \zeta \frac{\lambda_\mathbf{t}}{\|\lambda_\mathbf{t}\|} = 0 & \text{si } \Phi = 0 \quad \text{(glissement)} \end{cases}$$

où $\Phi = \|\lambda_\mathbf{t}\| - \mu\lambda_n$.

Le système d'équation est alors traduit en un problème de minimisation sans contrainte mais avec un nombre d'équations accru. Le problème est ensuite linéarisé et résolu via un algorithme de type Newton-Raphson, comme précédemment.

Un avantage de cette méthode est qu'elle permet de respecter les conditions de Signorini. De plus, il n'est pas nécessaire de choisir un coefficient de correction qui sera imposé pour tout le calcul.
Le désavantage est bien évidemment l'introduction de nouvelles inconnues que sont les multiplicateurs de Lagrange. La résolution du système d'équations devient alors plus complexe et donc moins rapide. D'autre part elle nécessite généralement la définition d'une surface maître et d'une surface esclave.

1.2.2.3 Méthode du lagrangien augmenté

L'idée de cette méthode est de combiner les avantages de la méthode de pénalisation et celle du multiplicateur de Lagrange en utilisant les fonctions régularisées de Moreau-Yosida. D'autres méthodes hybrides utilisant la même idée ont été développées mais cette dernière a déjà fait ses preuves. Elle n'introduit pas de degré de liberté supplémentaire comme la méthode précédente.

Le coefficient de Lagrange est à présent considéré comme un paramètre pénalisé. La composante normale de la force de contact s'écrit alors :

$$r_n =< \lambda_n + \varepsilon_n U_n >$$

La condition d'admissibilité du contact est un mélange des conditions utilisées dans la méthode de pénalisation et de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et elle s'écrit :

$$\begin{cases} r_n = \lambda_n + \varepsilon_n U_n & \text{si } \lambda_n + \varepsilon_n U_n \geq 0 \quad \text{(contact)} \\ r_n = 0 & \text{si } \lambda_n + \varepsilon_n U_n < 0 \quad \text{(non contact)} \end{cases}$$

La condition d'admissibilité de frottement est aussi remplacée par un mélange entre la méthode de pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Elle s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{v_t} = \frac{1}{\varepsilon_t}(\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{r_t} - \mathcal{L}_\mathbf{v}\lambda_\mathbf{t}) & \text{si } \Phi < 0 \quad \text{(adhérence)} \\ \mathbf{v_t} - \zeta \frac{\mathbf{r_t}}{\|\mathbf{r_t}\|} = \frac{1}{\varepsilon_t}(\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{r_t} - \mathcal{L}_\mathbf{v}\lambda_\mathbf{t}) & \text{si } \Phi = 0 \quad \text{(glissement)} \end{cases}$$

Pour la résolution du problème de minimisation linéarisé, plusieurs approches ont été développées. Dans [Alart and Curnier, 1991], Alart et Curnier ont proposé une approche permettant de déterminer toutes les inconnues en même temps. Dans [Feng, 1995], Z.Q. Feng utilise un algorithme de type Uzawa. Ce type d'algorithme est couramment utilisé. Même s'il se révèle efficace, il est aussi lent. P. Alart [Alart, 1997] propose un algorithme de Newton généralisé utilisant un jacobien généralisé pour pallier au fait que le système à résoudre est non-différentiable.

Suite à une approche développée par J.C. Simo et T.A. Laursen [Simo and Laursen, 1992], la partie résolution de l'équilibre et la vérifications des contraintes sont découplées. Le multiplicateur, étant inconnu, peut alors être déterminé à chaque itération du calcul :

$$\begin{cases} \lambda_n^{k+1} = r_n^{k+1} =< \lambda_n^k + \varepsilon_n U_n > \\ \lambda_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k+1}} = \mathbf{r}_{\mathbf{t}}^{\mathbf{k+1}} \end{cases}$$

Cette méthode conserve les avantages de la pénalisation et du multiplicateur de Lagrange. Elle respecte presque exactement les conditions d'admissibilités. De plus, le choix du paramètre de pénalisation n'influence pas les résultats. Un coefficient de pénalisation faible permet d'avoir une solution se rapprochant de la solution exacte mais augmente fatalement les temps de calcul alors qu'un coefficient de pénalisation trop élevé augmente les oscillations des statuts de contact (état de contact ou non-contact) ce qui peut aussi ralentir fortement la résolution du problème, voire l'empêcher de converger.

La méthode de Lagrangien Augmenté a aussi connu des évolutions permettant d'améliorer son efficacité et sa rapidité.
La méthode du lagrangien augmenté adapté, présentée dans [Busseta et al., 2009], est obtenue en repartant du lagrangien augmenté et en utilisant l'idée principale de la méthode de pénalisation adaptative qui est de réguler le coefficient. Les valeurs de pénalisation et les contraintes y sont calculées différemment. Cette méthode a l'avantage de combiner la rapidité de la pénalisation et la robustesse du lagrangien augmenté.
Le lagrangien augmenté stabilisé est une autre méthode qui a été développé par Ben Dhia [Ben Dhia and Zarroug, 2001] et qui est détaillé dans [Abbas, 2013]. Il s'agit d'une formulation hybride continue du contact frottant. Elle fait intervenir les déplacements comme inconnue primale et les pressions de contact comme multiplicateurs de Lagrange. Par un choix judicieux de paramètres, cette méthode permet de récupérer les méthodes classiques de pénalisation, lagrangien et lagrangien augmenté.

Deux des méthodes présentées seront utilisées par la suite. La méthode de résolution de contact qui sera principalement utilisée est la méthode du Lagrangien augmentée. Celle-ci est fiable et robuste, elle permet d'optimiser la résolution et sera privilégiée. L'autre méthode qui sera utilisée est la méthode de pénalisation. Elle présente l'avantage d'introduire un coefficient de pénalisation qui peut être interprétée comme une raideur de contact. Elle sera donc utilisée dans le chapitre 3 afin d'introduire une raideur de contact.

Maintenant que les méthodes classiques de résolution de contact ont été présentées, nous allons nous rapprocher de la problématique du freinage. Nous allons voir en quoi le contact en situation de freinage est un problème plus complexe. Dans la partie qui suit, le contact est vu comme un problème faisant intervenir différentes échelles ainsi que des détails qui ne sont, en général, pas pris en compte dans la résolution numérique.

1.3 Problème du contact : un problème multi-échelles..

Le contact dans le domaine du freinage englobe beaucoup de problématiques différentes qui sont liées les unes aux autres. Ainsi, différentes échelles et différents aspects physiques interviennent dans le problème. De plus, tout ces éléments sont liés en interagissant entre eux. La figure 1.7 montre les principaux éléments liés à la compréhension du problème globale.

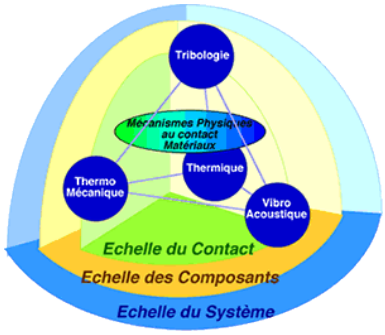


FIGURE 1.7 – Le contact frottant : un problème multi-échelles et multi-physiques

Cette partie est consacrée à la présentation des différentes échelles influant sur la physique du problème du freinage dans les transports. L'objectif de cette partie est de montrer en quoi la modélisation d'un contact se basant sur une seule échelle avec des matériaux aux propriétés macroscopique est insuffisante dans ce domaine.

Nous commencerons par l'échelle du système avant de descendre à l'échelle des premiers corps intervenant au contact. Nous présenterons les matériaux avant de descendre à l'échelle du contact avec le troisième corps.

1.3.1 Système

L'échelle du système est la plus grande intervenant dans le freinage. Dans la modélisation, il est rare que la structure complète soit entièrement modélisée. En effet, les modèles se limitent souvent à une sous-structure d'un ensemble. Dans le domaine des transports, les freins sont étudiés séparément de l'ensemble de la structure. Dans la réalité, les premiers corps sont reliés à l'ensemble de la structure. Des vibrations et des phénomènes thermiques s'échangent entre la structure et les premiers corps. Or, dans les modèles, l'action de l'ensemble de la structure se résume aux conditions aux limites. Or, les déplacements, les contraintes, les masses, les rigidités, les amortissements structurelles ainsi que les sollicitations de contact (force et déplacement) sont des quantités qui proviennent de l'ensemble de la structure. A cause des incertitudes sur les conditions aux limites, des phénomènes sont négligés. Une erreur est donc commise.

Un exemple probant est celui de l'étrier de frein. Les premiers modèles de frein ne prenaient en compte que le système garniture-disque. Or, les phénomènes vibratoires d'un système de frein font uniquement intervenir ces deux éléments. L'étrier joue un rôle important et influent sur les phénomènes vibratoires et thermique. Sa géométrie et sa composition influence les propriétés modales, dynamiques et thermiques de l'ensemble du système. Ainsi, les modèles ont évolués en intégrant l'étrier afin de faire intervenir son comportement dynamique dans l'étude des phénomènes vibratoires.

1.3.2 Les premiers corps : garniture et disque

Les premiers corps sont les éléments en contact et sont donc à une échelle inférieure de celle de la structure. Dans la modélisation, il sont souvent considéré de manière homogène et avec des surfaces parfaitement planes.
A cette échelle, on considère généralement l'ensemble de l'interface de contact de manière macroscopique, les propriétés macroscopiques des premiers corps (module de Young, densité ...).
Dans la réalité, les premiers corps ne sont ni homogène, ni plan. Cette partie se consacre d'abord à traiter les hétérogénéités des matériaux puis les surfaces des matériaux.

1.3.2.1 Les matériaux

Le disque et la garniture ne sont pas hétérogènes dans leur composition. A l'échelle microscopique, les matériaux ont donc des propriétés hétérogènes.

1.3.2.1.a Composition des disques de frein

Les disques sont fondus dans différents alliages aux propriétés diverses et variées. On trouve souvent des disques dans différent types de fontes ou aciers.
On présente dans le tableau 1.1 un exemple de composition de fonte à graphite lamellaire (GL) et dans le tableau 1.2, on présente ses propriétés à différentes températures. Ces données sont extraites de la thèse de A.L. Bulthé [Bulthé, 2006].

Bien qu'assez homogène macroscopiquement, il se révèle que certaines hétérogénéités subsistent dans la composition. A.L. Bulthé présente, aussi, dans sa thèse, des observations micrographiques de la fonte GL à différentes échelles (figure 1.8 et 1.9).

Sur la figure 1.8, on observe les lamelles de graphites dans la masse. Avec un grossissement suffisant (figure 1.9), il est possible de faire apparaître d'autres hétérogénéités dans le matériau telles que la perlite, des inclusions ou encore dans d'autres cas des amas de ferrite au voisinage des lamelles de graphite. Le disque présente donc une composition hétérogène à l'échelle microscope.

Lorsqu'ils sont soumis à des conditions sévères de pressions et de température, des transformations chimiques s'opèrent dans la masse du disque. Ces transformations sont parfois associées à des mécanismes de fissuration et de rupture des matériaux.

Matériau	Composition (%)
Fe	92,41
C	3,41
Si	2,23
Mn	0,68
Cu	0,62
Cr	0,37
S	0,13
Ni	0,06
P	0,04
Ti	0,02
Mo	0,02

TABLE 1.1 – Composition de fonte GL à matrice perlito-ferritique

	à 20°C	à 250°C
Masse volumique ($kg.m^{-3}$)	7340	7200
Capacité thermique massique ($J.kg^{1}.K^{-1}$)	438,7	471,8
Conductivité thermique ($W.m^{-1}.k^{-1}$)	46,5	44,2
Effusivité ($kg.K^{-1}.s^{-1/2}$)	12236	12253
Module de Young (GPa)	118	103

TABLE 1.2 – Propriétés de la fonte GL à matrice perlito-ferritique à 20 et à 250°C

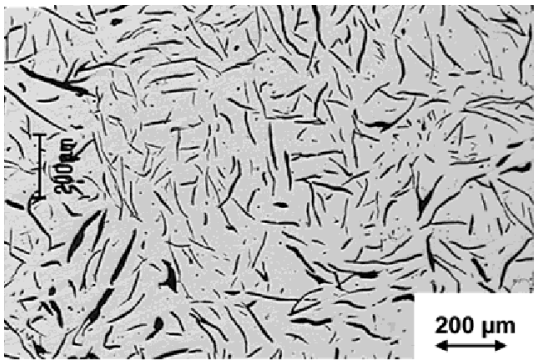


FIGURE 1.8 – Zoom sur la fonte GL

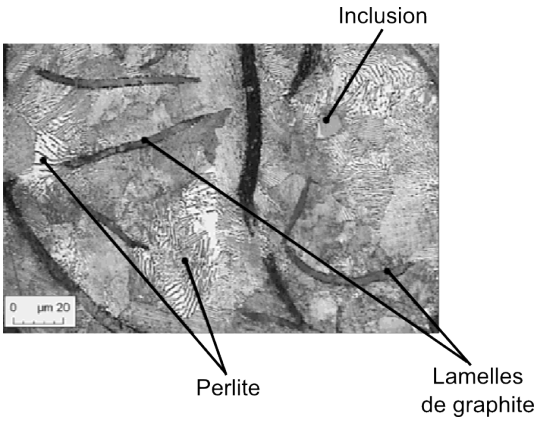


FIGURE 1.9 – Zoom sur la fonte GL

1.3.2.1.b Composition des garnitures de frein

Les garnitures de frein sont des matériaux multi-composants. Il existe à peu près 200 composants qui peuvent être utilisés dans la fabrication de garniture. En 1900, Herbert Frood invente le premier revêtement de matériau de friction à base de coton et d'une solution goudronnée. Dans les années 1920, le procédé de fabrication changea, les matériaux de friction était alors moulés avec une base de fibre d'amiante chrysotile. Vers les années 1950, on commence à introduire des résines dans la composition. Aujourd'hui, il existe grossièrement 3 types de matériaux de friction classés en fonction de leur composition : les matériaux à matrice métallique, semi-métallique et organique. Ils se composent au grand minimum de 4 à 5 composants, le plus souvent 20 à 30, ayant chacun leur rôle dans la composition finale.

Les composants sont classés dans plusieurs familles : les liants, les abrasifs, les lubrifiants solides, les fibres de renforcement (reinforcement) et les remplisseurs. Elles permettent de classer les composants par rôle. Certains peuvent être classés dans plusieurs familles.

Les liants : Ils sont aussi appelés matrice. Comme le nom l'indique, les liants servent à lier les autres composants du matériau de friction. Ce sont souvent des résines. La résine phénolique est la plus répandue. Pour la haute énergie, on utilise aussi des alliages métalliques (frités) ou d'autres constituants moins communs comme liants (métaux fritté, carbone-carbone, carbone-céramique).

Les abrasifs : Les abrasifs sont des constituants durs souvent proches du diamant sur l'échelle de dureté de Moh. Leur principal rôle est d'augmenter le coefficient de frottement du matériau final. Dans cette famille, on retrouve différents oxydes (alumine Al_2O_3, oxyde magnétique Fe_3O_4, oxyde ferrique Fe_2O_3, quartz SiO_2, silice SiO_2, zircon $ZrSiO_4$, ...).

Matériau	% du volume total
résine phénolique	10 à 45
baryte	5 à 30
graphite	0 à 15
abrasif	0 à 10
poudre de friction	0 à 20

TABLE 1.3 – Composition d'un matériau de friction

Les fibres de renforcement : Ce constituant permet de renforcer la composition finale en évitant que le matériau ne se désagrège trop vite lors de sollicitation de contact trop importante. Bien que ce ne soit pas leur rôle principal, les fibres ont aussi un impact sur le comportement du matériau et sur l'évolution des surfaces de contact. Cet impact sera présenté dans la partie suivante concernant le troisième corps. Ils existent trois types de fibres. Elles peuvent être minérales, métalliques ou organiques. Dans les fibres minérales, on retrouve la fibre de verre, la fibre de roche, etc. Comme fibre organique parfois utilisée, on peut citer la fibre d'aramide. La fibre d'acier est un exemple de fibre métallique couramment utilisée.

Les lubrifiants : Les lubrifiants modifient légèrement la friction et réagissent avec l'oxygène pour aider à contrôler les réactions à l'interface de contact. Cette vaste famille regroupe différents composants : trisulfure d'antimoine Sb_2S_3 (potentiellement toxique), cuivre, graphite, des céramiques sous forme de micro-sphère, la lime $Ca(OH)_2$. Mais on retrouve aussi des constituants appartenant à plusieurs familles : oxyde de métaux (Fe_3O_4, ZnO, PbO), des métaux sulfurés (Cu_2S, Sb_2S_3, PbS), des fibres minérales (mullite, kyanite, sillimanite, alumine, quartz).

Les remplisseurs : Un bon remplisseur est un composant bon-marché et assez neutre dans ses interactions avec les autres constituants. Ils servent à faire de la masse, c'est à dire à produire plus de matériaux de friction pour une même base d'autres composants (qui sont eux plus onéreux). En réalité, ces composants ne sont pas totalement inertes et ils ont tout de même une certaine influence sur le comportement du matériau final. Par le passé, l'amiante a été largement exploitée dans ce domaine. Il n'est quasiment plus utilisé et a été remplacé par de la baryte, du carbonate de calcium, l'huile de noix de cajou, le coton, la lime, le titanate de potassium $K_2Ti_6O_{13}$, le nitrile, le charbon, l'oxyde de zinc, etc.

La quantité de chaque composant varie d'une formulation à une autre. Du fait des procédés de fabrication, l'organisation des composants dans le produit final se fait de manière aléatoire. Il n'y a pas de direction privilégiée, sauf pour les fibres qui ont tendance à s'organiser parallèlement à la surface de contact. Cette organisation des fibres peut doubler, voire tripler, le module de Young dans les directions parallèles au plan de contact. Pour définir une formulation, on quantifie souvent en s'exprimant en pourcentage de volume. Un ordre de grandeur des proportions des composants courant est présenté dans la table 1.3 :

La poudre de friction citée dans le tableau regroupe en faite de nombreux éléments qui sont aussi classés dans les remplisseurs et lubrifiants.

La formulation n'est pas le seul point important pour sa constitution finale, le procédé de fabrication est une étape importante de la fabrication. Après mélange, le matériau peut être moulé à froid, pressé à chaud, etc. Il peut faire aussi l'objet de post-traitement thermique tel que une ou plusieurs recuissons. Le procédé de formulation impacte fortement sur le matériau final. Typiquement, un moulage a froid peut donner des matériaux beaucoup plus friable car les constituants (dont le liant) ne s'agglomère pas bien.

Dans le cas de matériaux à matrice organique, bien souvent, les composants sont mélangés dans un mixeur industriel puis sont cuit sous-pression. Cette deuxième action, appelé moulage, enrichit les garnitures d'un nouvel élément : du vide. Avec 5 à 10% de porosité dans chaque garniture, le vide est aussi un paramètre qui caractérise les garnitures et les différencies entre elles.

La photo 1.10 est tirée d'une observation de surface. Il s'agit d'une observation de garniture de frein à matrice organique fabriquée avec une formulation réduite [Duboc, 2013].
Comme on peut l'observer, la composition finale du matériau est hautement hétérogène. Les constituants ont des rôles et des comportements microscopiques différents lors de sollicitations de freinage. Certaines études tentent de caractériser l'influence des composants sur le comportement thermique, dynamique ou

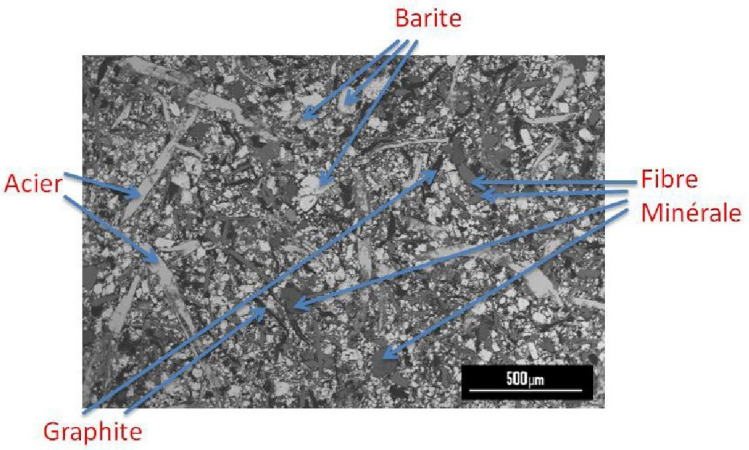


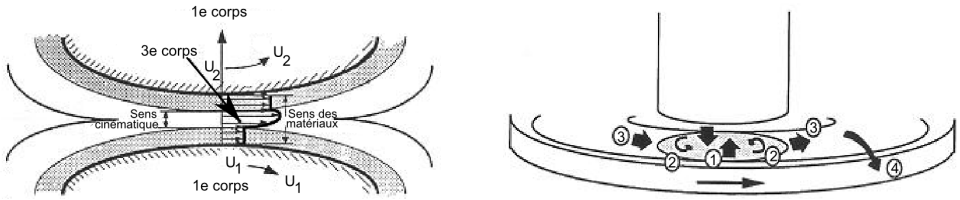
FIGURE 1.10 – Image de la surface d'une garniture de frein (formulation réduite)

chimique des matériaux.
D'autres études tentent d'introduire de nouveau composant en analysant l'influence de ces derniers sur les performances de frottement. On peut citer J. Bijwe et P. Gurunath [Gurunath and Bijwe, 2007].

L'échelle du matériau est donc hautement hétérogène. A une échelle inférieure se trouve l'interface de contact et sa tribologie. La partie suivante traite de la composition et de l'évolution de l'interface de contact à travers la présentation du troisième corps.

1.3.2.2 Le 3ème corps

Le 3ème corps est composé de l'ensemble des particules produit par l'usure des premiers corps lors de contact frottant. Cette notion a été introduite par Godet dans les années 1970 [Godet, 1984]. Puis, une autre notion a été introduite par Y. Berthier ([Berthier, 1996] et [Berthier, 2001]) : il s'agit de la notion de circuit tribologique. Celui-ci est présenté sur la figure 1.11.



(a) Contact à 3 corps

(b) Circuit tribologique et débits de troisième corps

FIGURE 1.11 – Interface de contact [Berthier, 1988]

La figure 1.11a illustre le contact à 3 corps et les différents rôles du 3ème. Le premier rôle est de faire le lien entre les premiers corps en remplissant le contact. Le second rôle du troisième corps est d'assurer une pseudo-continuité entre les vitesses des premiers corps. On parle ici d'accommodation des vitesses. Le 3ème corps est parfois considéré comme un quasi-fluide. Via l'écriture d'équations de débits en utilisant la mécanique des lubrifiants fluides, il est possible de déterminer l'évolution des vitesses entre les premiers corps dans le contact. On parle de rhéologie du troisième corps.

Sur la figure 1.11b est représenté le circuit tribologique du 3ème corps. (1) représente le débit source de 3ème corps, c'est à dire la production de 3ème corps générée par usure des premiers corps. (2) est le débit interne, c'est à dire la circulation interne de 3ème corps dans le contact. (3) est le débit de recirculation, c'est à dire le 3ème corps circulant avec le disque. (4) est le débit d'usure, c'est à dire le 3ème corps qui est éjecté du circuit tribologique.
Des études ([Fillot et al., 2004] et [Fillot et al., 2005]) ont montrées que le débit d'usure et le débit source sont liés. Une quantité régulée de matière circule dans le contact. Lorsque du 3ème corps est éjecté, il est, en général, remplacé par la production de nouveaux débris.

Le circuit tribologique du 3ème corps s'applique dans de nombreux domaines impliquant un contact frottant. Il a notamment été introduit par Eriksson et al. ([Eriksson et al., 1999], [Eriksson and Jacobson, 2000] et [Eriksson and Jacobson, 2002]) dans le domaine du freinage automobile et par d'autres dans le freinage ferroviaire ([Roussette et al., 2001], [Roussette et al., 2003], [Roussette, 2005] et [Desplanques et al., 2005]). Durant le freinage, la présence de 3ème corps influe donc sur la surface de contact à travers ses mécanismes de circulations et ses mécanismes physiques. Ces mécanismes sont présentés sur la figure 1.12 dans le cas d'un matériau de friction à matrice organique.

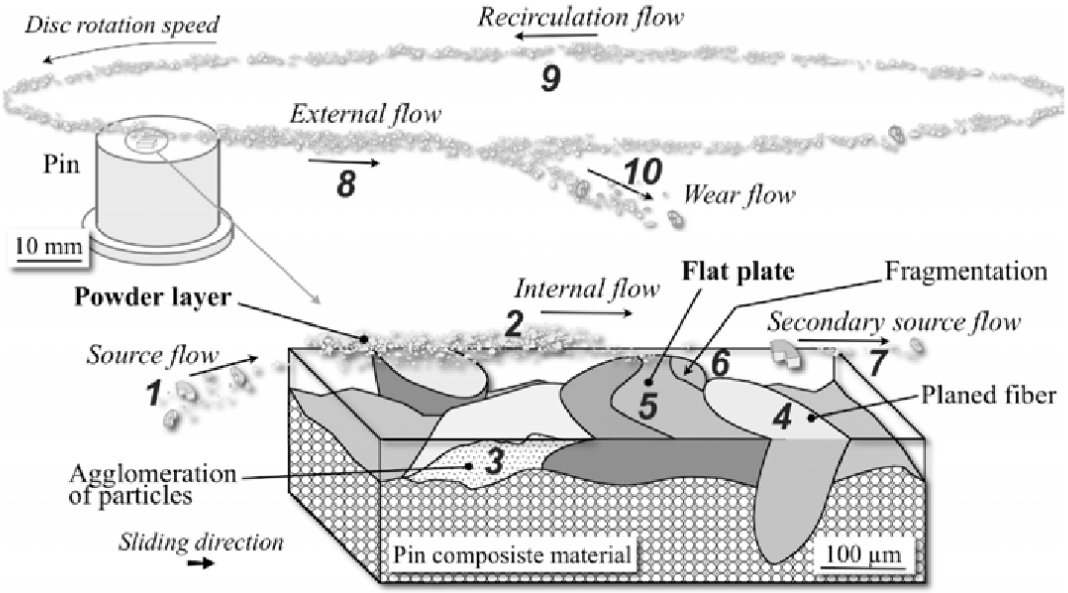


FIGURE 1.12 – Le circuit tribologique et ses mécanismes [François et al., 2006]

Les particules, qui sont détachées (1) des premiers corps, circulent dans le contact (2). Elles s'organisent et s'accumulent(3) en amont de fibre(4). Puis elles se compactent pour former des plaques (5) de 3ème corps. Ces plaques, aussi appelées plateau de contact, sont fortement sollicitées dans le contact (transmission des efforts de contact et accommodation des vitesses). Ces plaques peuvent se fragmenter (6) et les débris issus de cette fragmentation sont remis en circulation dans le contact interne (7) ou sont entraînés par le disque dans le débit externe (8). Une fois entraînées par le disque, les particules peuvent soit faire partie du débit de recirculation (9), soit être éjectées du contact (10).

Les figures 1.13 présentent des observations de plaques de troisième corps sur une garniture frottée. La figure 1.13a présente une surface frottée comportant une plaque de troisième corps vue du dessus. On peut voir les débris de troisième corps agglomérés en amont de fibres d'acier. La figure 1.13b présente une vue oblique d'une même plaque de troisième corps sur le point d'être arrachée à la surface de la garniture.

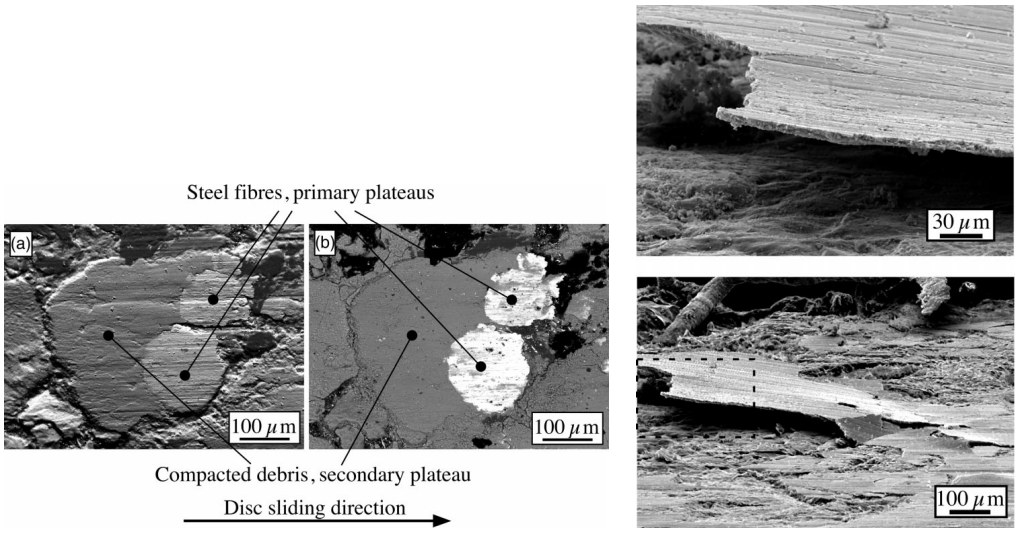
Bien que dans ce travail on ne s'intéresse pas par la suite au circuit tribologique, nous nous attacherons à considérer cette échelle et nous présenterons plus loin quelques modèles permettant de l'étudier.

Maintenant que nous avons présenté la composition des disques et garnitures de frein, nous allons nous intéresser à leur surface.

1.3.2.3 Surface des premiers corps

On se concentre ici sur la géométrie du contact. Dans [Akay, 2002], Akay présente un schéma des divers échelles intervenant dans le contact frottant (figure 1.14).

Ainsi à l'échelle des modèles numériques, les premiers corps sont très souvent considérés comme plan. On parle ici de surface apparente de contact.
A une échelle inférieure, les surfaces en contact ne sont plus parallèles car l'épaisseur des surfaces de contact n'est pas constante et l'usure des matériaux entraîne des irrégularités. Le contact est localisé sur différentes zones. Il s'agit de l'échelle mésoscopique. A cette échelle, on parle plutôt de surface effective de contact.
En descendant encore d'une échelle, il vient l'échelle de la rugosité. Sur une surface effective de contact,



(a) Plaque présente sur la surface (b) Arrachage d'une plaque

FIGURE 1.13 – Observation de plaque de troisième corps, ou plateau de contact [Eriksson and Jacobson, 2000]

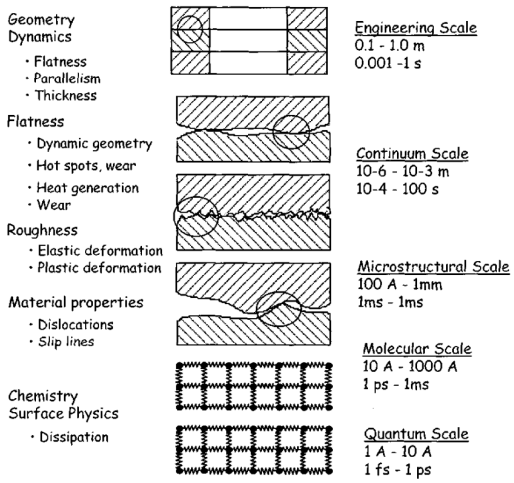


FIGURE 1.14 – Les différentes échelles intervenant dans le contact [Akay, 2002]

le contact n'est pas régulier. Le contact observé à une échelle supérieure est en fait une somme de micro-contacts discontinus. C'est à cette échelle que l'on considère que le frottement naît. La somme des réactions de contact entre toutes les rugosités entraîne une réaction totale normale et une réaction totale tangentielle au contact qui sont mesurées à l'échelle de la structure.
Akay défini séparément l'échelle des propriétés des matériaux. Cette échelle correspond à celle des composants des matériaux. Bien que cette échelle puisse être confondue avec la précédente, il peut être appréciable de les distinguer afin de faire la distinction entre un amas de composants et un composant seul.
L'échelle la plus fine est l'échelle moléculaire. A cette échelle, on considère généralement les réactions physico-chimique induit par le contact mécanique et les phénomènes thermiques. Mais, dans ce travail, on ne s'intéressera pas à celles-ci.

La surface des premiers corps a un impact à toutes les échelles mais certaines sont plus importantes. Pour chacun des premiers corps, on s'intéressera à une échelle bien précise pour certaines raisons.

1.3.2.3.a Surface d'un disque de freins

La surface d'un disque n'est jamais totalement lisse. Elle présente des hétérogénéités que l'on peut attribuer à deux échelles différentes. A l'échelle macroscopique, elle présente toujours une ondulation

non-maîtrisable. A l'échelle microscopique, elle présente aussi des variations infimes de la hauteur dus à l'usure et au dépôt de troisième corps sur la surface du disque. Ces imperfections peuvent servir à expliquer le processus d'arrachage de particule sur le matériau de friction. Dans notre contexte, l'hétérogénéité de surface qui nous intéresse se situe à l'échelle macroscopique, c'est à dire l'ondulation du disque.

Que ce soit dû aux conditions de fabrication ou aux conditions de montage du disque. Le disque présente toujours une surface ondulée. Allant d'une amplitude rarement inférieure à 10 microns, cette ondulation, en général de l'ordre de quelques centaines de microns. On parle ici de défaut de forme macroscopique. Bien sûr, dans certains cas, on retrouve deux ou plusieurs imperfections de ce type.
D'autre part, lors de sévères sollicitations de freinage, le disque est soumis à de hautes températures ainsi qu'à des phénomènes de localisation thermique. Des points chauds ou des bandes chaudes peuvent apparaître sur le disque. Ces localisations thermiques impliquent des déformations du disque. Elle font donc évoluer le profil du disque. En conséquence, même un disque qui serait initialement parfaitement plan ne le resterait pas durant un freinage.

Le disque présente de nombreuses irrégularités sur sa surface. Elles sont en partie liées à la rugosité de la surface. Elles sont aussi liées au profil d'usure et aux troisième corps qui se déposent et s'accumulent sur la surface. Le disque n'est pas la surface qui accumule la plus grande partie de débris d'usure mais elle en contient tout de même une partie non-négligeable.
Même si cette état de surface est un fait, nous ne nous y intéresseront pas plus. En face, l'état de surface de garniture est plus intéressante pour nos études à venir.

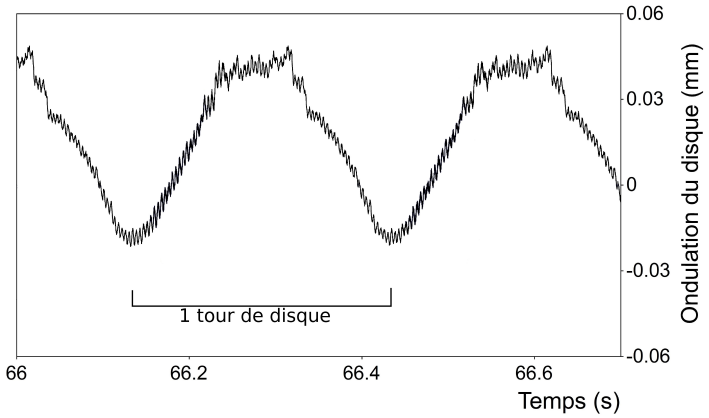


FIGURE 1.15 – Ondulation d'un disque monté sur tribomètre de freinage

La figure 1.15 illustre les deux échelles d'hétérogénéités surfaciques présentes sur le disque. Un disque à été monté sur un tribomètre d'observation situé au laboratoire de mécanique de Lille. Le montage a été effectué avec les mêmes précautions de montage que lors d'une campagne d'essai. Puis la hauteur de la surface du disque à été mesurée à l'aide d'un capteur de déplacement. On peut voir sur ce profil l'ondulation de la surface du disque. Ici, nous avons une ondulation par tour. On observe également, à une échelle plus fine, les variations de hauteurs dues à la rugosité, l'usure et aux débris d'usure.

1.3.2.3.b Surface d'une garniture de frein

Bien que la garniture est un matériau suffisamment élastique pour que la surface de contact se déforme afin d'épouser au mieux le profil du disque, la surface d'une garniture de frein est loin d'être lisse. L'échelle d'étude de la surface de la garniture est celle de la rugosité. C'est à cette échelle que l'on associe les propriétés les plus importantes, telles que le frottement, ainsi que les mécanismes d'usures et de formations de troisième corps.
La figure 1.16 présente la profilométrie d'une surface de garniture frottée en présence de troisième corps. Comme on peut le voir sur cette figure, la surface d'une garniture de frein a un relief très accidenté. Sur la surface de la garniture, la variation de niveaux entre creux et hauteur max peut aller de 10 à 200 microns. Le cas 10 microns est très peu commun puisqu'elle correspond à une surface relativement lisse.

Tout d'abord, cela est due à sa composition matérielle très hétérogène (voir figure 1.10). Chaque composant de la garniture a une texture, une dureté et une forme propre. Par la suite, avec l'usure du

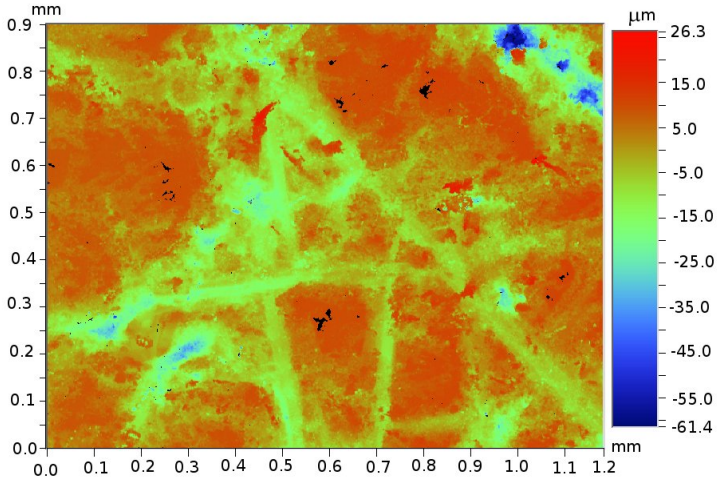


FIGURE 1.16 – Profilométrie 2D d'une surface de garniture frottée

matériau, la topologie de la surface de contact de la garniture évolue au cours du temps. Mais ces aspects seront abordés plus loin.
La surface d'un matériau de friction est donc un relief accidenté. Elle est en partie constituée de zones de portance, aussi appelées plateaux de contact, dues à l'agglomération de troisième corps. Ces plateaux de contact, étant porteur de contact, sont un point important de l'état mésoscopique de la surface de contact. Il peuvent recouvrir entre 10% et 30% de la surface de contact avec une épaisseur de l'ordre de $10\mu m$ et un diamètre compris entre 50 et $500\mu m$ (cf. [Eriksson, 2000] et [Eriksson et al., 2001]).

D'un autre coté, à l'échelle microscopique, la surface a des propriétés mécaniques non-constantes qui évoluent au cours du temps. Dans les modélisations éléments finis, on ne modélise jamais parfaitement la garniture et on se résout à travailler sur des surfaces lisses qui ne prennent pas en compte les hétérogénéités de surface.

Plus loin, on présentera les différents modèles qui sont ou qui ont été utilisés pour modéliser les hétérogénéités de surface à l'échelle mésoscopique ou à l'échelle microscopique.

1.3.3 Conclusion

Différentes échelles interviennent dans un système complexe tel qu'un frein. Le contact lui-même peut être étudié à de nombreuses échelles. L'échelle de la structure globale est celle qui domine et englobe toutes les autres. La structure globale n'est, bien souvent, pas prise en compte car les études se concentrent sur la sous-structure étudiée. A une échelle inférieure, l'échelle des composants de la structure est la plus traitée. Dans le domaine du freinage, elle se compose généralement de l'ensemble disque-étrier-frein. Les composants sont considérés comme ayant des profils lisses et des propriétés macroscopiques. En descendant à l'échelle des matériaux, ceux-ci n'apparaissent plus comme des matériaux lisses et homogènes avec des propriétés macroscopiques mais comme des matériaux hétérogènes aux surfaces imparfaites. Cette échelle est de dimension variable. Ainsi, pour un disque de frein, un voile de disque d'une amplitude de l'ordre de la centaine de microns est observable et des rugosités de quelques microns, dues aux éléments le composant, sont mesurables. La garniture présente une hétérogénéité plus forte dans ses propriétés physique ainsi que sur sa surface. Celle-ci est due au fait que le matériau contient des particules de quelques microns à plusieurs millimètres (comme pour les fibres) et à des aspects tribologiques. L'échelle la plus fine présentée est celle de l'interface de contact. Elle est à l'échelle du troisième corps (accumulation de débris d'usure piégés dans le contact). A cette échelle, chaque fibre peut donner naissance à un plateau de contact.

Dans ce travail, on s'attachera à considérer ces différentes échelles(profil de disque, composant et présence de troisième corps). Ainsi dans le chapitre 2, on s'intéressera au profil du disque. Dans le chapitre 3, on considérera la présence de zones de portance, et en particulier la présence de plaque de troisième corps.

Dans le chapitre 4, on considérera l'hétérogénéité des propriétés mécaniques induite par la composition du matériau de friction.

Maintenant que les échelles importantes ont été présentées, nous allons montrer que le problème du freinage, et particulièrement celui du crissement, ne fait pas uniquement intervenir différentes échelles. Il fait aussi intervenir différents aspects physiques qui sont liés les uns aux autres.

1.4 ..mais aussi multi-physiques

Le freinage n'est pas uniquement un problème mulit-échelles, c'est aussi un problème multi-physiques. Dans cette partie, on s'intéressera particulièrement aux aspects vibratoires et quelque peu aux aspects thermiques du freinage. Il existe d'autres aspects physiques tels que la tribologie, des transformations physico-chimique ainsi que des interactions thermo-mécanique qui ne seront pas présentées dans le détail.

1.4.1 Aspects vibratoires

Les aspects vibratoires sont importants pour les études qui suivront. Tout d'abord, les différents types de vibrations qu'il est possible de rencontrer seront présentés brièvement. Ensuite, les instabilités vibratoires qui peuvent expliquer ces vibrations seront présentées. La partie suivante présentera quelles sont les origines possibles de ces instabilités. Et enfin, nous présenteront des critères mathématiques permettant de montrer qu'un système est instable.

1.4.1.1 Principaux types de vibrations

Il y a plusieurs phénomènes vibratoires observables ou audibles dans le freinage. On distingue deux familles de vibrations [Rhee et al., 1989] : Les vibrations de corps rigide et les vibrations auto-entretenues.

1.4.1.1.a Vibrations de corps-rigide

Les vibrations de corps rigide sont des vibrations basse-fréquences (de 100 à 1000Hz). Elles appartiennent à la catégorie des vibrations forcées :

- **La trépidation (judder) :** Il s'agit d'un type de vibration basse-fréquences ($< 500Hz$). Ces vibrations ne sont pas audibles mais sont ressenties. Elles sont dues à des défauts géométriques tels qu'une variation d'épaisseur ou un défaut de parallélisme. La variation d'épaisseur peut être due à des dilatations thermiques naissant d'une apparition de phénomènes de points chauds lors d'une montée en température.
- **Le broutement (groan) :** Ce sont des vibrations ressenties et audibles qui se situent à basse-fréquences (entre 100 et $400Hz$). Elles sont dues à un phénomène de stick-slip (adhérence-glissement) dans le contact. Ces vibrations sont alors transmises à la structure.
- **Le ronflement (moan) :** Ces vibrations basse-fréquences se situent entre $100Hz$ et $500Hz$. Elles sont de fortes amplitudes et elles sont parfois audibles. Elles apparaissent lorsque le contact n'est pas complètement établi entre plaquette et disque. On dit que la plaquette vient "lécher" le disque. L'étrier est alors excité et cette excitation peut alors se transmettre à l'ensemble de la structure.

1.4.1.1.b Vibrations auto-entretenues

Ces vibrations se situent à de plus hautes fréquences. Elles se situent en générale entre $1000Hz$ et $20000Hz$

- **Le crissement (squeal) :** Ces vibrations produisent un son strident. Elles apparaissent en générale à faibles vitesses et à faibles pressions.
- **Le sifflement (squeak) :** Il s'agit d'un crissement de courte durée.
- **Le raclement (wire brush) :** Ces vibrations sont aussi de courtes durées et dans la même gamme de fréquences que le crissement. Ici, la différence est que plusieurs fréquences vibratoires, avec des amplitudes aléatoires, sont excitées en même temps. Les sources d'excitations au contact sont multiples. Elles apparaissent en général lors de la présence d'irrégularités sur l'une des parties frottantes.

Les différentes vibrations ont été présentées. Il est nécessaire d'en dire plus sur les mécanismes donnant naissance à ces vibrations.

1.4.1.2 Phénomène vibratoire au contact

Les phénomènes vibratoires sont associés à l'apparition d'instabilités dans le système. Il y a principalement trois types d'instabilités menant à des vibrations induites par le contact frottant : Le stick-slip, les vibrations quasi-harmoniques et les vibrations dues à la propagation d'ondes normales au contact.

- **Stick-slip :** Le stick-slip est un enchaînement d'états macroscopiques au contact. Il s'agit d'une succession de glissements (stick) et d'adhérences (slip). Il peut être dû à la présence de deux coefficients de frottement : le coefficient de frottement statique μ_s et le coefficient de frottement dynamique μ_d ($< \mu_s$). Une autre cause possible de la présence de stick-slip peut être la dépendance du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement. Cette dépendance est aussi appelée amortissement négatif et implique une décroissance du coefficient de frottement lors de l'augmentation de la vitesse de glissement. Dynamiquement, le stick-slip se traduit donc par une oscillation du coefficient de frottement. Il s'agit d'un type de vibration dite auto-entretenue.
- **Vibrations quasi-harmoniques :** Il s'agit d'un glissement non-stabilisé. La vitesse de glissement varie périodiquement sans jamais s'annuler. Généralement , la courbe de vitesse est proche d'une sinusoïde. Les variations quasi-harmoniques n'impliquent donc pas de variations brutales de l'état de contact.
- **Propagation d'onde au contact :** Ce type d'instabilités correspond à une propagation d'ondes normales au contact. En 1924, Stoneley [Stoneley, 1924] a montré que, théoriquement, deux solides en contact ayant des propriétés mécaniques très différentes peuvent entraîner la propagation d'ondes normales au contact. Ces ondes sont appelées ondes de Stoneley. Comnimou et Dundurs [Comninou and Dundurs, 1978] ont étendus ce résultat en montrant que des ondes normales peuvent se propager dans l'interface de contact même si les matériaux ont des propriétés différentes.

1.4.1.3 Instabilités dans les systèmes frottant

Ces instabilités peuvent avoir diverses origines. De nombreuses explications ont été avancées. Akay passe en revue les différentes interprétations dans [Akay, 2002].

1.4.1.3.a Variation du coefficient de frottement

Dans certaines études, la variation du coefficient de frottement est due à la nature des matériaux. Le phénomène de stick-slip a d'abord été observé par Wells en mesurant le coefficient de frottement. En 1955, Sinclar et Mainville [Sinclair and Mainville, 1955] ont établi une relation entre le crissement de frein et un modèle mathématique présentant un phénomène de stick-slip. Ils montrent qu'un traitement de la surface de frottement, augmentant la vitesse de glissement, diminue les vibrations.
Basford et Twiss [Basford and Twiss, 1958] ont développé un modèle présentant un phénomène de stick slip. A l'aide de ce modèle, ils ont identifié le facteur $\partial\mu_d/\partial v_r$ comme étant le facteur principal dans la génération de vibration.

D'autres études supposent que la variation du coefficient de frottement est due à des vibrations de l'interface de contact. Ainsi, Tolstoi et al. ([Tolstoi, 1967], [Tolstoi et al., 1971]) montrent que le stick-slip n'est pas dû à la variation du coefficient de frottement mais plutôt au degré de liberté associé à l'interface de contact dans la direction normale. Il montre que l'un des corps peut faire des sauts. Lors de ces sauts, les solides n'étant plus en contact, il n'y a plus de coefficient de frottement qui intervient.
D'autres études ([Godfrey, 1967], [Aronov et al., 1984]) précisent en montrant que des micro-vibrations naissant au contact peuvent entraîner une variation du coefficient de frottement.

1.4.1.3.b Sprag-slip

Ce phénomène a été mis en avant pour la première fois dans des travaux de Spurr [Spurr, 1961]. Il est dû à des aspects structuraux. La partie de la structure ayant la rigidité la plus faible se déforme élastiquement à cause des efforts de contact. Cette déformation entraîne un blocage du contact. Puis l'accumulation d'énergie ramène le système dans sa position d'équilibre. Puis le cycle se répète. Ce phénomène génère alors des vibrations auto-entretenues au contact.
Les travaux de Spurr ont ensuite été poursuivis par Jarvis et Mills [Jarvis and Mills, 1964], Earles et Lee [Earles and Lee, 1976] ou Oden et Martins [Oden and Martins, 1985]. Ces travaux ont montré un couplage entre les degrés de liberté normaux, tangentiel et de torsion. Ce couplage donnant lieu à des instabilités vibratoires.

1.4.1.3.c Confusion de modes (mode lock-in)

Une autre explication de l'apparition d'instabilités vibratoires au contact est la confusion de mode des composants en contact. Des études expérimentales ont montré des correspondances entre le spectre acoustique lors d'un crissement et des fonctions en fréquence du système. Avec l'évolution des techniques expérimentales, Fieldhouse et Newcomb [Fieldhouse and Newcomb, 1996] ont pu visualiser les vibrations d'un disque lors du crissement.

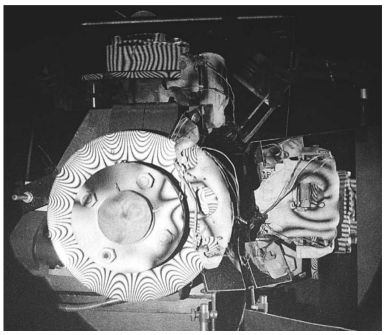


FIGURE 1.17 – Vibration d'un disque de frein par holographie [Fieldhouse, 1991]

Sur la figure 1.17, le disque présente une excitation à 8 diamètres nodaux. Ces noeuds diamétraux correspondent à l'excitation d'un mode propre particulier de la structure.

Jarvis et Mills [Jarvis and Mills, 1964] ont développés un modèle pion-disque grâce auquel ils ont pu montrer que deux modes propres de disque peuvent générer des ondes stationnaires et de propagation. Plus tard, Earles et al. ([Earles and Lee, 1976], [Earles and Badi, 1984]) ont développés un modèle pion-disque à plusieurs DDL avec un coefficient de frottement. Ce modèle montre une interaction entre DDL normal et tangentiel à la génération d'instabilité. Cette étude mène à considérer l'interaction comme un couplage des DDL normaux et tangentiels. En 1972, North [North, 1972] exploite un critère mathématique lié aux valeurs propres complexes afin de déterminer s'il y a ou non couplage de modes. A travers un modèle minimal à 8 DDL (dont 2 pour le disque qui est représenter comme une poutre rigide), il décrit le mécanisme responsable d'oscillations comme une instabilité flottante (binary flutter) de deux modes.

1.4.1.4 Critères mathématiques pour la caractérisation d'instabilités

Afin de déterminer s'il y a une instabilité présente dans un système, il est nécessaire d'utiliser des critères mathématiques.

1.4.1.4.a Critère de Lyapunov

Lyapunov[Lyapunov, 1992] a défini un critère général permettant de déterminer si une équation différentielle engendre une solution stable ou instable. Celui-ci est utilisé dans de nombreux domaines. Il est aussi utilisé dans le domaine du freinage. Lorsqu'un système dynamique admet une position d'équilibre, ce critère permet de déterminer si, lorsque la solution est perturbée, la solution va de nouveau converger ou diverger de sa position d'équilibre.

La détermination des valeurs propres d'un problème linéarisé passe par la résolution du problème :

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{V} = \mathbf{0}$$

avec $\mathbf{M}$ la matrice de masse , $\mathbf{K}$ la matrice de raideur, $\mathbf{V}$ vecteur propre et λ valeur propre.

- **Si** $\forall i$, $\Re(\lambda_i) < 0$ **:** la position d'équilibre est asymptotiquement stable.
- **Si** $\exists i_0$ **tel que** $\Re(\lambda_{i_0}) > 0$ **:** la position d'équilibre est instable.
- **Si** $\forall i$, $\Re(\lambda_i) \leq 0$ **et que** $\exists i_0$ **tel que** $\Re(\lambda_{i_0}) = 0$ **:** En l'état, il n'est pas possible de conclure. (Il faut tenter de déterminer une fonction de Lyapunov afin de conclure que la solution est asymptotiquement stable).

Dans le cas où l'équilibre est instable ($\exists i_0$ tel que $\Re(\lambda_{i_0}) > 0$), il est possible de définir deux types d'instabilités :

- **Instabilité par divergence :** C'est le cas lorsque $\Im(\lambda_{i_0}) = 0$. La solution diverge sans oscillation. C'est à dire que le mouvement perturbé s'éloignera de sa position d'équilibre sans oscillation.
- **Instabilité par flottement (flutter) :** C'est le cas lorsque $\Im(\lambda_{i_0}) \neq 0$. La solution divergera avec oscillations. Le mouvement perturbé oscillera autour de sa positon d'équilibre avec une amplitude d'oscillation croissante.

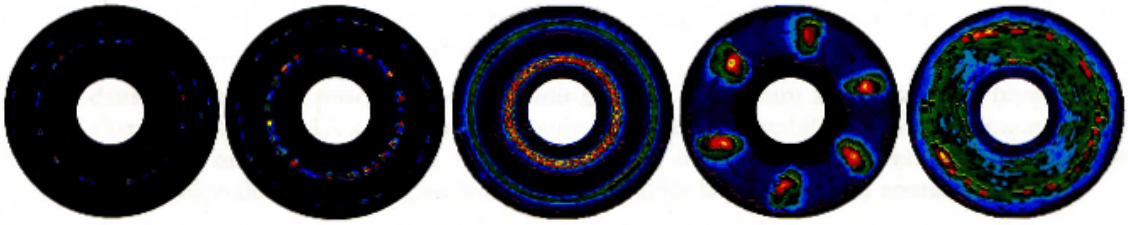
Dans la plupart des études, on recherche les instabilités par flottement. L'instabilité par divergence est peu problématique puisqu'elle ne se produit que ponctuellement.

1.4.1.4.b Bifurcation de Hopf

La bifurcation de Hopf, aussi appelé bifurcation de Poincaré–Andronov–Hopf. Dans le critère de Lyapunov, on s'intéresse à un point d'équilibre. C'est donc une étude ponctuelle. Dans le critère de bifurcation de Hopf, on s'intéresse à une courbe d'équilibre en fonction d'un paramètre réel. En exemple, dans le freinage, le coefficient de frottement est souvent utilisé comme paramètre.
Le point de bifurcation est défini par une valeur propre qui traverse l'axe des imaginaires, c'est à dire que sa partie réelle devient positive alors que toutes les autres ont une partie réelle strictement négative. Ce point est le point de bifurcation de Hopf. Il marque la fin de l'équilibre asymptotiquement stable et le début d'une solution oscillante.
Afin de savoir si la solution oscillante est stable ou pas, il est nécessaire d'effectuer un développement des équations à un ordre supérieur.

1.4.2 Aspects thermiques

Il existe plusieurs phénomènes thermiques mesurables lors d'un freinage. Ceux-ci induisent des phénomènes de dilations qui modifient la géométrie des surfaces. Elles induisent de plus des non-uniformités des pressions de contact. Cette non-uniformité est difficilement mesurable expérimentalement. Mais il est évident qu'elle existe. La non-uniformité du contact mène par des mécanismes complexes à des localisations thermiques de différentes formes. Dufrenoy P. a émit une classification de différents types de phénomènes thermiques 1.18 dans [Dufrénoy, 1995].



(a) (b) (c) (d) (e)

FIGURE 1.18 – Classification des gradients thermiques en freinage ferroviaire [Dufrénoy, 1995]

Cinq types de gradient thermique sont ici recensés :
- Le type (a) représente un gradient thermique dû aux aspérités en contact. Il s'agit d'un gradient thermique correspondant à des élévations brutales et brèves de la température.
- Le type (b) montre des gradients sur cercles chauds. Ce type de gradient accompagne en général les bandes chaudes. Il est dû à des petites zones de contact sur la piste de frottement. Ce phénomène peut par la suite entraîner des transformations microstructurales du matériau pouvant être à l'origine d'un endommagement du disque.
- Le type (c) représente des cercles chauds (ou bandes chaudes). Ce type de gradient thermique circulaire sur le disque migre généralement vers l'extérieur du disque lorsque la sollicitation de freinage augmente.
- Le type (d) représente des points chauds. Ce sont des zones d'échauffement espacées angulairement de manière régulière sur le disque.
- Le type (e) correspond à une situation de gradient faible et diffus accompagné de forte température. Le gradient thermique n'est jamais nul du fait de la non-uniformité de la sollicitation thermique et du fait d'un refroidissement inégal sur la surface du disque (diffusion,convection).

De nombreux travaux sont menés afin de comprendre et d'expliquer l'origine des phénomènes thermiques.

1.4.3 Aspects tribologiques

Le circuit tribologique a déjà été présenté dans la partie 1.3.2.2. L'interface de contact est l'objet de circulation de résidu de poudre de friction. Sous l'effet de la température et de la pression exercée lors d'un freinage, ces poudres se compactent pour former des plateaux de contact mais pas uniquement. Elles subissent des réactions physico-chimique et modifient les propriétés physiques et mécaniques de l'interface de contact (augmentation du module de Young, variation du coefficient de Poisson, etc).
Ce phénomène est un facteur important dans le crissement. Dans nos études à venir, nous ne tiendront pas compte ni des modifications physico-chimiques intervenant au contact, ni de l'évolution de l'interface. Nous tiendrons compte uniquement des propriétés des surfaces induites et de la présence des plateaux de contact.

1.4.4 Conclusion

Dans ce travail, l'aspect que l'on choisit de retenir, et d'analyser, est l'aspect vibratoire. Dans la suite, on souhaiterait étudier l'influence que des surfaces non-uniformes peuvent avoir sur les vibrations. On attachera une attention particulière au voile de disque et au troisième corps.

Les phénomènes comportent des localisations de flux de chaleur dissipés au contact. Même s'ils ne sont pas étudiés en détail dans ce travail, les localisations des champs de pressions de contact seront interprétées en terme de flux et de génération de gradients thermiques.

Le problème général ayant été présenté, la partie se consacre à montrer les principaux types de modélisation permettant de traiter le problème du crissement.

1.5 Stratégies de modélisation aux différentes échelles

Cette partie traitera d'abord des modèles classiques à l'échelle des premiers corps qui ont pu être utilisés dans le domaine du freinage afin d'étudier les phénomènes vibratoires ou afin d'intégrer des hétérogénéités dans les études. Dans la suite de cette partie, les principales méthodes numériques permettant d'étudier une interface de contact seront présentées.

1.5.1 Modélisation des premiers corps

Différentes études expérimentales et/ou numériques ont été réalisées sur les instabilités au freinage. Certaines études se concentrent sur les instabilités au travers de la caractérisation, des observations expérimentales ou des modèles hétérogènes. D'autres tentent d'établir le lien entre instabilités et hétérogénéités.
D'une part, des études expérimentales s'attachent à tester différents matériaux de friction en situation réelle et à observer l'influence sur le crissement ou les localisations thermiques que l'on considère comme étant les conséquences des instabilités. D'autre part, des études numériques prennent en compte ces hétérogénéités et analysent directement ou indirectement les conséquences sur les instabilités.
Dans cette partie, on s'intéresse aux études numériques modélisant les premiers corps et permettant d'étudier les instabilités vibratoires.

1.5.1.1 Etudes numériques des instabilités vibratoires

Ouyang et al. [Ouyang et al., 2005] proposent une revue sur les différents modèles numériques permettant d'étudier le crissement. On peut distinguer deux types de modèles numériques (les modèles minimaux ne comportant que quelques degrés de libertés [von Wagner et al., 2007] et les modèles complexes comme les modèles éléments finis) ainsi que deux types d'analyses (l'analyse modale complexe et l'analyse transitoire).

1.5.1.1.a Analyse modale complexe

Les modèles minimaux (le plus souvent des modèles analytiques) se rapportent souvent à des systèmes masse-ressort. Ces systèmes masse-ressort approchent les structures réelles de manière simplifiée en ne conservant que quelques degrés de libertés. Ces modèles ont permis, à travers des analyses modales complexes, de montrer que même avec un coefficient de frottement constant un système pouvait être instable. Deux modes entrant en confusion sous l'influence du contact suffisent à rendre le système instable. On peut citer en exemple Shin et al. [Shin et al., 2002], Hoffmann et al.[Hoffmann et al., 2002], Popp et al. [Popp et al., 2002], Brommundt [Brommundt, 1995] ou encore Schmieg et Vielsack[Schmieg and Vielsack, 1998].

Des modèles éléments finis ont aussi été exploités dans des analyses modales complexes. Les modèles étant plus ou moins simplifiés. Certains ne prennent en compte que le disque et un interface de contact, d'autres modélisent aussi le pion. Récemment de nombreux modèles prennent aussi en compte la plaquette où est fixé le pion ainsi que l'étrier du frein. Une des premières études de ce genre à avoir été présentée est celle de Liles [Liles, 1989]. Les différents composants du frein (frein, disque et étrier) sont modélisés avec des éléments solides grossiers. Par contre, l'interface de contact est modélisé par un couplage géométrique. D'autres études modélisent les freins et leurs composants de façon plus précise comme par exemple pour Wagner et al. dans [von Wagner et al., 2003]. Ces études prennent en compte une résolution plus précise au niveau de l'interface de contact. On peut aussi citer [Fritz et al., 2007] (figure 1.19) et Gaul[Hoffmann et al., 2002].

Dans les analyses modales éléments finis, on peut aussi citer Nagy [Nagy et al., 1994], Guan [Guan and Jiang, 1998], Shi[Shi et al., 2001], Baba[Baba et al., 2001], Bae[Bae and Wickert, 2000], ou Yang[Yang and Afeneh, 2004]. De nombreuses études de ce type ayant été réalisées, la liste présentée ici est non-exhaustive.

FIGURE 1.19 – Modèle élément fini d'un système de frein complet pour l'analyse modale [Fritz et al., 2007]

1.5.1.1.b Analyse transitoire

Outre les analyses modales complexes, des études transitoires sont menées, permettant d'analyser la dépendance temporelle des vibrations des systèmes modélisés ainsi que l'amplitude de ces vibrations.

Quelques analyses transitoires ont pu être réalisées sur des modèles minimaux. Ils constituent une première famille de ce type d'analyse. On peut citer les travaux de Adams ([Adams, 1995], [Adams, 1998], [Adams, 1999]), D'Souza[D'Souza and Dweib, 1990], Sinou ([Sinou et al., 2006], [Sinou and Lees, 2007], [Sinou and Jézéquel, 2007]), Moirot [Moirot et al., 2003] et von Wagner [von Wagner et al., 2003].

Des analyses transitoires ont aussi pu être réalisées sur des modèles éléments finis. Ces études sont plus coûteuses en temps et en moyens de calculs car elles posent quelques difficultés numériques telles que des problèmes de convergence, des problèmes d'impacts ou la résolution temporelle du contact.
Une des premières que l'on peut présenter est celle de Nagy [Nagy et al., 1994] où ils étudient l'impact du coefficient de frottement sur la stabilité du système. Dans [Hu and Nagy, 1997], Hu et Nagy réalisent

un calcul avec coefficient de frottement variable recalé avec des mesures réalisées expérimentalement.
De la même manière que Nagy, Abubakar et Ouyang[Abubakar and Ouyang, 2006] réalisent une analyse transitoire consécutivement à une analyse modale complexe (1.20). Alors que l'analyse modale complexe fournit l'ensemble des modes propres potentiellement instable sous conditions de contact, le calcul transitoire fait apparaître généralement un seul de ces couplages.
Baillet [Baillet and Sassi, 2002] exploite une stratégie de modélisation simplifiée. Il modélise simplement le glissement d'un parallélépipède rectangle sur une poutre. Dans la même idée de simplification de modèle éléments finis en vue d'une analyse transitoire, Meziane et al. [Meziane et al., 2007] étudient un phénomène d'adhérence-glissement sur un parallélépipède en contact frottant avec un disque. A l'opposé, on peut trouver aussi des études où sont modélisés disque, plaquette et étrier comme dans [Vermot des Roches et al., 2008]. On peut également citer Massi et al. [Massi et al., 2007] qui modélisent son banc d'essai composé d'une colonne sur laquelle est fixée une garniture et le disque sur lequel la garniture vient frotter.

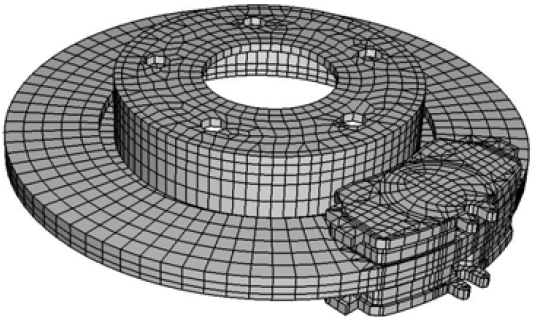


FIGURE 1.20 – Modèle élément fini d'un système de frein pour l'analyse transitoire [Abubakar and Ouyang, 2006]

Ces méthodes nécessitent souvent des modèles réduits et des temps de calcul imposants, de par les pas de temps très petit ($\Delta t \approx 10^{-8}s$).

1.5.1.1.c Bilan

L'analyse vibratoire permet d'étudier l'ensemble des modes vibratoires d'un système alors que l'analyse transitoire permet d'en étudier une configuration instable précise.

Notre objectif étant de prendre différents types d'hétérogénéités et d'étudier l'impact sur les propriétés vibratoires du système et sur les instabilités au contact, il est nécessaire de pouvoir analyser l'ensemble des modes du système. Nous travaillerons donc sur des modèles permettant de réaliser de l'analyse modale complexe en présence d'hétérogénéités. Le défi à relever est de trouver une stratégie de modélisation permettant d'intégrer des hétérogénéités dans un modèle.

1.5.2 Modèles d'interfaces

Dans les modèles éléments finis, le contact frottant est traditionnellement résolu à l'échelle de la structure. Pourtant le frottement est produit par les rugosités présentes sur toutes surfaces. La rugosité donnent lieu a des micro-contacts à une échelle microscopique, voire même nanoscopique.

L'un des premiers modèles réalisé qui prend en compte ces aspérités est celui de Greenwood et Williamson en 1966 dans [Greenwood and Williamson, 1966]. Ce modèle est un modèle analytique qui modélise la rugosité par un contact sans frottement sans adhésion entre un plan et des aspérités sphériques élastiques. Depuis de nombreuses études ont été réalisées. Par la suite, des modèles stochastiques ont permis d'étudier l'impact des aspérités sur le contact ([Whitehouse and Archard, 1970], [Bush et al., 1979], [Bush and Gibson, 1987], [Bush et al., 1992]). D'autres modèles ont des approches dites déterministes. Ils prennent mieux en compte la topologie des surfaces en contact. Ce type d'analyse a été réalisé avec des lois de comportement matériaux élastiques, plastiques[Chang et al., 1987] ou élasto-plastiques [Zhao et al., 2000].

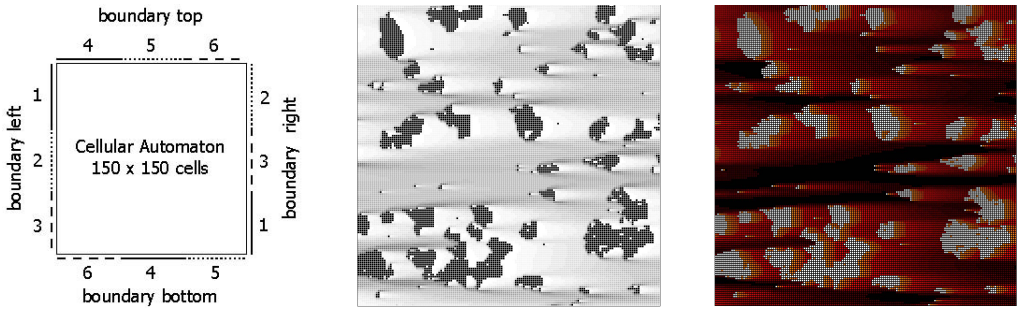
Dans cette partie, nous présenterons plus précisément trois types de modèles permettant d'étudier l'interface de contact seule : Les automates cellulaires, la méthode des éléments discrets et une méthode stochastique de modélisation de l'interface de contact.

1.5.2.1 Les automates cellulaires

Les automates ont été adaptés dans le cas du contact afin de pouvoir étudier les phénomènes microscopiques. Ils peuvent être utilisés seuls ou couplés avec d'autres méthodes de résolutions.

L'automate cellulaire Un automate cellulaire est une structure composée principalement de quatre éléments la définissant complètement : un ensemble d'éléments appelé cellules, un ensemble de voisinages correspondant à ceux des cellules, un ensemble d'états admissibles que peuvent prendre les cellules (contact frottant, contact sec, non-contact...) et enfin un ensemble de règles d'évolution.
L'ensemble des cellules est balayé et chacune d'elle évolue en fonction de la situation de son voisinage.

Ce nouvel outil est largement développé pour l'étude de problèmes tribologies par V.L. Popov et al. ([Dmitriev et al., 2006], [Schargott et al., 2008] et [Dmitriev et al., 2010]) et par G.P. Ostermeyer et M. Muller ([Ostermeyer and Müller, 2006], [Mueller and Ostermeyer, 2008]). Il est aussi présenté simplement dans [Abdellaoui et al., 2002]. Les études se concentrent sur l'usure des matériaux de friction et sur les circulations de matière dans l'interface de contact.



(a) Conditions aux limites (b) Densité de particule (c) Température au contact

FIGURE 1.21 – Automate cellulaire de l'interface de contact [Mueller and Ostermeyer, 2008]

L'avantage est que les automates cellulaires sont complètement adaptables à toutes situations étudiées puisqu'il est possible de définir n'importe quel état voulu et donner toutes les lois de transitions que l'on souhaite.
Un des inconvénients, les automates cellulaires font parties des méthodes discrètes qu'il est difficile de mettre en lien avec un modèle élément fini et donc se prêtent mal à l'étude du couplage de modes en éléments finis. Il sont pour l'instant développés en 2D principalement car il est complexe et coûteux de les mettre en œuvre dans un modèle 3D. De plus, le développement d'un automate cellulaire nécessite l'établissement de lois de transition pour les éléments de l'automate. L'élaboration de ces lois de transition est complexe car ils reposent sur des phénomènes physique mal connus.

Couplage multi-échelles d'automate cellulaire Des couplages de modèles ont été réalisés avec les automates cellulaires. En exemple, J.R. Weimar réalise dans [Weimar, 2001] des couplages entre plusieurs automates cellulaires. Cette étude est réalisée dans un autre contexte physique que le contact mais l'idée reste viable. L'idée est de recouvrir le domaine étudié par plusieurs automates cellulaires. Le recollement aux frontières se fait en imposant un chevauchement des sous-domaines. Chaque automate cellulaire modélise une partie de l'espace qui peut être plus ou moins raffinée.

Des couplages entre automates cellulaires et modèles éléments finis (C.A.F.E. model) ont aussi été réalisés. Dans [Guillemot et al., 2007], un modèle en 2 dimensions couplant éléments finis et automates cellulaires est utilisé pour étudier le compactage de grain et la désagrégation pour l'étude des structures formées de grains. Dans le même domaine, Gandin & al. [Gandin et al., 1999] ont proposé un modèle couplé en 3 dimensions. Mais ce type de modèle reste coûteux en temps de calcul.

1.5.2.2 La méthode des éléments discrets

La méthode des éléments discrets est de plus en plus utilisée pour modéliser les interfaces de contact. Dans [Richard, 2008], D. Richard les utilise pour présenter un modèle thermo-dynamique d'interface de contact lui permettant d'étudier l'accommodation des vitesses (figure 1.22).
De la même manière, V.D. Nguyen, dans [Nguyen, 2009], présente lui aussi un modèle thermo-mécanique mais qui permet cette fois d'étudier les profils thermiques dans un contact frottant. Nguyen utilise un soft Element Discret, nommé Multi-Corps, proposé dans [Fortin, 2000] et qui a été développé en utilisant le bi-potentiel de G. DeSaxce et Z.Q. Feng présenté dans [De Saxce and Feng, 1998].

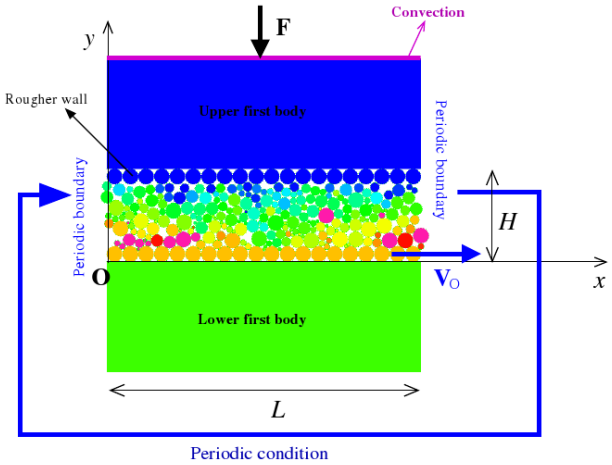


FIGURE 1.22 – Modèle de l'interface de contact disque/garniture [Nguyen, 2009]

Une méthode permettant le couplage de modèle éléments finis-éléments discrets est présentée dans [Stránský and Jirásek, 2012]. Avec celle-ci, il est ainsi possible de faire la jonction entre un modèle éléments finis et un modèle éléments discrets ou de travailler sur des aspects multi-échelles en les superposant.

Ces méthodes sont inadaptées à la modélisation de solides mais elles sont utiles pour la modélisation de milieux granulaires. Tous les grains peuvent ainsi être modélisés. L'inconvénient est que ces modèles se couplent mal avec des modélisations éléments finis. Aussi, les modèles éléments discrets ne permettent pas de réaliser des études en 3 dimensions à cause des temps des calculs trop importants qu'ils impliquent. De plus, ils permettent difficilement de capter les phénomènes physiques car ils nécessitent des lois de cohésions performantes afin de modéliser l'agglomération de débris et la fragmentation d'amas.

1.5.2.3 Traitement stochastique de l'interface de contact

C'est une notion qui apparaît dans les travaux de M. Schargott dans [Schargott and Popov, 2006], puis, qui est reprise dans de nombreux articles en collaboration avec V.L. Popov. Cette notion présuppose l'existence d'une couche extrêmement mince (2-10 nm) de type quasi-fluide. L'idée est de gérer cette couche non pas par une approche numérique mais par une approche stochastique.
En déterminant des probabilités de détachement et de rattachement de particules et en utilisant l'équation de Fokker-Planck, une équation aux dérivées partielles stochastiques est déterminée. Cette équation, une fois résolue, permet de gérer l'interface de contact plus rapidement que par une méthode de calcul numérique.
Les phénomènes pris en compte à l'interface sont le détachement de particules, genèse, évolution et mort d'un cluster, détérioration de matériaux, en bref tout ce qui découle du détachement et recollement de particules.

Cette méthode est efficace mais elle est régie par des équations aux dérivées partielles qui ne permettent pas de connaître les paramètres locaux de l'interface de contact.

1.5.2.4 Bilan

Des méthodes permettant d'étudier seule l'interface de contact ont été présentées. Celles-ci présentent toutes l'inconvénient de nécessiter l'établissement de lois, pour l'évolution des éléments locaux, qui sont encore mal maîtrisées. De plus, les automates cellulaires et la méthode des éléments discrets se couplent

mal à des modèles macroscopiques permettant l'étude de la structure complète.
L'objectif de ce travail étant d'introduire l'échelle du contact dans un modèle de structure et étant donné que ces modèles s'intéresse uniquement à l'interface de contact, on ne s'intéressera pas plus à ces méthodes.

1.5.3 Prise en compte des hétérogénéités dans les modèles numériques

La prise en compte d'hétérogénéités au contact n'est pas une chose aisée. Elle rajoute des difficultés à la résolution du contact qui est déjà un problème fortement non-linéaire. Pour y parvenir, différentes approches sont utilisées. Certaines personnes prennent le partie d'une approche stochastique de l'interface de contact comme Whitehouse et Archard dans [Whitehouse and Archard, 1970] ou comme Bush dans [Bush and Gibson, 1987], [Bush et al., 1992].
Une autre approche consiste à prendre en compte d'une interface de contact de manière analytique avec la prise en compte du caractère fractal d'une surface rugueuse. Ce type de travaux a été initialisé par Pei et al. dans [Pei et al., 2005] (figure 1.23). Dans cette approche, Durand [Durand et al., 2011] développe une méthode permettant de considérer les interactions entre aspérités au contact à l'aide d'une fonction d'enrichissement au contact. Son modèle analytique est comparé à une simulation éléments finis où la surface de contact est extrêmement raffinée. Avec cette approche, il est capable de prendre en compte des aspérités aux contact sans devoir les modéliser à l'échelle microscopique.
D'autres méthodes consistent en un enrichissement des éléments finis sur la surface de contact afin de pouvoir considérer des hétérogénéités aux contact. Les approches par enrichissement exploitent les méthodes XFEM (extended finite element method) [Moës et al., 1999], GFEM (generalized finite element method) ou PUM (partition of unity method) [Melenk and Babuška, 1996].

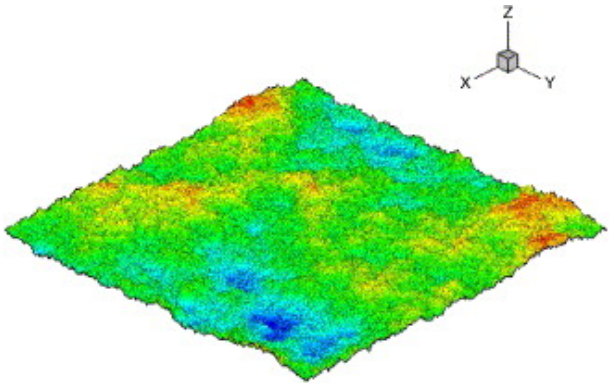


FIGURE 1.23 – Surface rugueuse générée par un algorithme aléatoire [Pei et al., 2005]

Les travaux présentés ici permettent d'intégrer des hétérogénéités dans le contact mais ne sont pas adaptés pour l'analyse vibratoire des sous-condition de contact frottant. Or, on souhaite réaliser de l'analyse modale afin de pouvoir étudier les instabilités liées au crissement.
Ainsi, il existe des méthodes permettant d'intégrer des hétérogénéités dans un modèle. Certains modèles avec hétérogénéités permettent aussi d'étudier le crissement.

1.5.4 Hétérogénéité au contact dans l'étude du crissement

Dans l'étude du crissement, la plupart des modèles numériques modélisent les interfaces de contact comme une surface homogène. Pourtant un certain nombre d'études s'attachent à montrer que la prise en compte d'une interface de contact, à des échelles inférieures à celle de la structure, a une influence sur le comportement dynamique macroscopique ([Ostermeyer, 2010], [Behrendt et al., 2011], [Baillet et al., 2005], [Meziane et al., 2007]). Ainsi, différentes échelles d'hétérogénéités sont prises en compte. Des études se placent à l'échelle moléculaire [Nishiwaki et al., 2009], nanoscopique [Osterle et al., 2007], mésoscopique [Ostermeyer et al., 2008] ou même macroscopique [Söderberg and Andersson, 2009].

1.5.4.1 Modélisation d'hétérogénéités de matériau

La composition hétérogène d'un matériau de friction a des conséquences sur les propriétés macroscopiques du contact (exemple, la variation du coefficient de frottement). Ces conséquences sont complexes à étudier expérimentalement. La modification de la formulation d'une garniture influe sur de nombreux

paramètres en même temps. Les études numériques ont l'avantage de permettre des études portant sur un unique paramètre et de laisser les autres paramètres constants. De nombreuses études numériques ont été réalisées dans le cadre de l'étude des propriétés du contact et de son influence sur les instabilités vibratoires au contact.
Dans [Hetzler and Willner, 2012], Hetzler et Wilner montrent que la raideur et les aspérités au contact peuvent avoir une influence importante sur le comportement vibratoire d'un système de frein à disque. Leur modèle se base sur une loi de contact hybride (figure 1.24). Via un modèle de contact statistique au sens de Williamson et Greenwood ([Greenwood and Williamson, 1966]), une relation permettant d'écrire la raideur de contact comme une fonction de la pression locale de contact nominale est déterminée. Cette relation est intégrée à un modèle minimal ayant pour but d'étudier le crissement. Ce modèle a permis de montrer que la raideur de contact est un paramètre important. A faible et moyenne pression, de faibles variations dans la relation liant la raideur (ayant pour origine les propriétés microscopiques du matériau) et les pressions de contact peuvent entraîner d'important changement dans la stabilité du comportement du système.

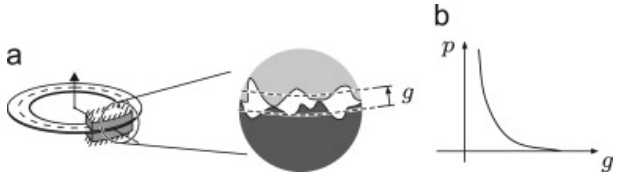


FIGURE 1.24 – Loi de contact hybride : (a) Modèle macroscopique et surface rugueuse au contact, (b) Relation entre distance de contact et pression [Hetzler and Willner, 2012]

Dans sa thèse, [Linck, 2005], Linck a étudié la naissance des phénomènes en lien avec des vibrations à l'interface de contact. Pour ce faire, un modèle d'interface de contact a été intégré à un modèle E.F. pour la prise en compte d'une couche fine de 3e corps au contact. Ce modèle montre que des phénomènes périodiques apparaissent au contact en présence de conditions appliquées (vitesse, pression...) constantes. Ainsi, la répétition périodique de sollicitation peut faire naître des instabilités oscillatoires au contact durant le frottement.
Dans [Magnier et al., 2011] , Magnier & al. se sont intéressés à l'influence de l'hétérogénéité du contact entre le matériau de friction et le disque. Un modèle analytique simple, permettant de réaliser une analyse modale complexe à partir d'une pression linéaire, est utilisé. Sur celui-ci, une étude stochastique portant sur la dispersion des raideurs locales de contact a permis de montrer que la localisation des pressions de contact et les raideurs locales de contact peuvent influencer un système pion-disque stable jusqu'à l'amener à l'instabilité. Cette étude a montrée qu'il existe une échelle d'hétérogénéité sous laquelle les hétérogénéités n'ont pas, ou peu, d'influence.

1.5.4.2 Modélisation d'hétérogénéités de surface

Certain modèle s'intéresse aux aspérités présentes dans le contact. Dans [Rusli and Okuma, 2007], Rusli et Okuma intègrent des aspérités au contact de manière analytique et complètement aléatoire. Ainsi, des raideurs de contact normales et tangentielles sont déterminées. Ce modèle montre l'influence des raideurs normales et tangentielles et du coefficient de frottement sur les instabilités du système.

Les plateaux de contact peuvent impacter sur les conditions de contact et donc sur le propriétés modales du système sous condition de contact. Dans [Eriksson et al., 1999], des observations de surfaces ont montrées que les plateaux de contact peuvent aussi être impliqués dans la génération de crissement.

Généralement, les modèles étudiant l'instabilité dans le freinage ne prennent pas en compte ces non-planéités.
Par exemple, Graf et Oestermeyer [Graf and Ostermeyer, 2011] ont développé un modèle continu d'interface de contact prenant en compte les plateaux. Dans ce modèle d'interface analytique, les plateaux sont considérés comme des masses modifiant l'inertie du pion puis les propriétés de l'interface sont homogénéisées (figure 1.25).

Dans [Mueller and Ostermeyer, 2007] et [Mueller and Ostermeyer, 2008], Mueller et Ostermeyer utilisent les automates cellulaires afin de modéliser la formation et l'évolution des plateaux de contact dans

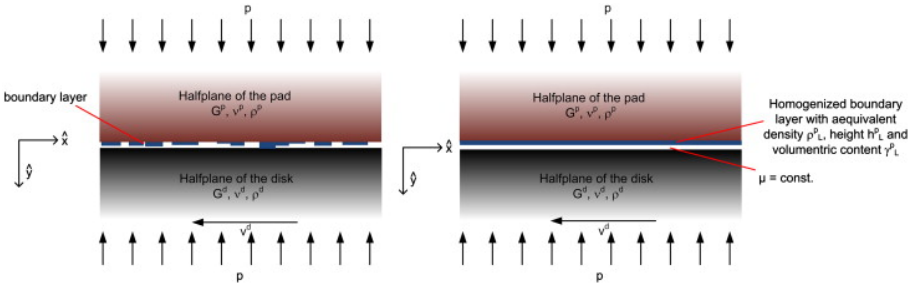


FIGURE 1.25 – Ajout de masse d'inertie sur la surface d'une garniture de frein et homogénéisation de l'interface [Graf and Ostermeyer, 2011]

le plan de l'interface de contact.
Dans [Ostermeyer and Bode, 2010], Ostermeyer et Bode poursuivent et montrent que les plateaux de contact peuvent jouer un rôle clé sur les vibrations haute-fréquences dans l'interface de contact.
Dans, [Wahlström et al., 2011], Wahlstrom & al. reprennent les automates cellulaires afin de modéliser l'évolution des conditions de contact sur une plus large zone de garniture. Ils obtiennent ainsi un contact sur une surface comprise entre 30 et 40 % de la surface totale modélisée. Ce modèle lui permet d'obtenir des distributions de pressions de contact et des températures en surface hétérogènes.
Dans [Heussaff et al., 2012], Heussaff & al. modélisent un contact partiel sur la surface de la garniture et des pressions hétérogènes en se basant sur une loi de contact local déterminée introduisant un processus stochastique (figure 1.26).

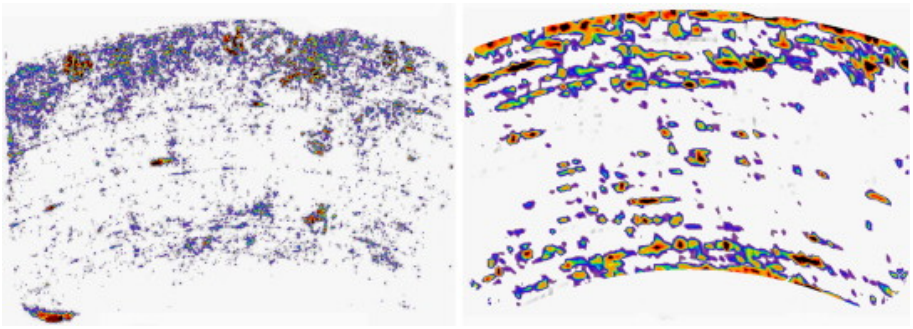


FIGURE 1.26 – Mesure(à gauche) et calcul aléatoire (à droite) de pressions de contact [Heussaff et al., 2012]

1.5.4.3 Bilan

Tous les modèles qui viennent d'être présentés introduisent une meilleure prise en compte de l'interface de contact dans un modèle plus global. Certaines études ne se préoccupent que de modéliser l'interface de contact afin de mieux comprendre ses mécanismes, d'autres intègrent les propriétés hétérogènes dans le système.

1.5.5 Conclusion

Les méthodes classiquement utilisées dans l'études du crissement ont été présentées. Ils s'agit soit de modèles simplifiés (type analytique), soit de modèle complet (type éléments finis) qui sont utilisés pour réaliser soit de l'analyse modale, soit de l'analyse transitoire.
Nous avons aussi présenté les modèles spécifiques à l'interface de contact.
Par la suite, des modèles fins prenant en compte des hétérogénéités de surfaces et de matériau ont été exhibés avant de montrer comment certains modèles avec hétérogénéités sont exploités dans l'étude du crissement.

L'objectif de ce travail est d'étudier les influences globales d'hétérogénéités de matériaux et d'imperfections de surface sur la dynamique du système. Ces influences ont été peu étudiées. On propose

donc de faire de l'analyse modale complexe en prenant en compte différents états de contact. Pour cela, on déterminera l'état de contact à l'aide d'un modèle élément fini puis on réalisera de l'analyse modale complexe à l'aide d'un modèle discret pour déterminer les propriétés dynamiques du système.
Il ne sera pas réalisé d'études thermiques mais on s'intéressera à l'influence de la localisation du contact sur les localisations des flux de chaleur qui peuvent être à l'origine des localisations thermiques.

Afin de faire un lien entre interface de contact et macro-structure dans un modèle, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques adaptées. Ces méthodes sont appelées les méthodes multi-échelles. Nous allons donc passer en revue les méthodes multi-échelles les plus courantes afin de sélectionner celle qui nous permettra de lier un modèle à l'interface et le modèle du système.

1.6 Méthodes multi-échelles

La prise en compte de phénomènes plus localisés réclame des méthodes de calcul capables de les intégrer mais aussi assez efficaces et robustes afin de garder des temps de calcul et des solutions qui restent acceptables. Pour ce faire, des méthodes dites 'multi-échelles' ont déjà été développées et utilisées.
L'objectif dans cette partie est d'avoir un aperçu des méthodes multi-échelles les plus répandues, d'en présenter les grands principes et de mettre en avant les avantages et les inconvénients de chacune d'entre elles.
Trois grandes familles seront abordées : les méthodes d'homogénéisation, les méthodes d'enrichissement et les méthodes directes.

1.6.1 Les méthodes d'homogénéisation

La plupart des méthodes multi-échelles sont basées sur la théorie de l'homogénéisation. Il existe de nombreux schémas d'homogénéisation. Ils mettent en jeu un problème macroscopique avec des quantités homogénéisées et un problème microscopique permettant de déterminer les propriétés locales.
Les méthodes d'homogénéisation se basent principalement sur deux familles de méthodes en fonction des propriétés du milieu modélisé :

- *Homogénéisation des milieux non-périodiques (ou à structure aléatoire) :*
  Ces méthodes d'homogénéisation requièrent la définition de trois séries de champs : la représentation, la localisation et l'homogénéisation (cf. [Bornert et al., 2001b] et [Bornert et al., 2001a]). Dans ces méthodes, l'étape la plus importante est celle de la localisation. Elle permet de relier les grandeurs mécaniques macroscopiques et locales.

  Dans la théorie de l'homogénéisation classique, les quantités microscopiques et les quantités macroscopiques sont distinctes. En notant avec une majuscule une quantité macro et avec une minuscule une quantité micro, on peut définir les champs macro-micro de déplacement U-u les tenseurs de déformations E-ε et les contraintes Σ-σ. Le passage à l' échelle macroscopique se fait en utilisant les relations :
  $$\mathbf{E} = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon$$
  $$\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{V}\int_V \sigma$$
  Et les relations réciproques :
  $$\mathbf{u} = \mathbf{E}.\mathbf{x} \quad \text{sur } \partial V$$
  $$\sigma.\mathbf{n} = \mathbf{\Sigma}.\mathbf{n} \quad \text{sur } \partial V$$
  $$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{E}.\mathbf{x} \quad \text{sur } V$$
  où V est le volume élémentaire, $\mathbf{n}$ est la normale à la frontière ∂V et v est le champ de déplacement inconnu à l'échelle locale soumis à des conditions de périodicité sur ∂V.

- *Homogénéisation des milieux périodiques :*
  La théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques se base sur l'hypothèse que l'on peut définir un motif périodique qui se répète régulièrement dans le matériau. Ce motif est appelé Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.).

Ces modèles se basent généralement sur un développement asymptotique des solutions. on peut par exemple citer les travaux de Benssousan et al. [Bensoussan et al., 1978] ainsi que les travaux de Sanchez-Palencia et Sanchez-Hubert ([Sanchez−Hubert and Sanchez−Palencia, 1978] et [Sanchez−Hubert and Sanchez−Palencia, 1992]).

Dans l'homogénéisation des milieux périodiques, il est possible de définir un rapport d'homothétie ϵ. On note généralement $\mathbf{x}$ la variable macroscopique et $\mathbf{y}$ la variable microscopique. On a alors le rapport : $\mathbf{y} = \mathbf{x}\epsilon$. Le champ de déplacement fait l'objet d'un développement d'ordre 1 et dans [Sanchez−Palencia, 1980], on montre que celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{1.3}$$

où $\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{c}(\mathbf{y}) : \epsilon(\mathbf{u}^0)(\mathbf{x})$ et $\mathbf{c}$ une fonction périodique.

Les méthodes d'homogénéisation sont efficaces, mais elles fournissent au modèle macroscopique des propriétés homogénéisées sur un volume élémentaire représentatif. Or, ici, nous ne souhaitons pas intégrer de propriétés homogénéisées. Nous voulons conserver les propriétés hétérogènes à l'échelle macroscopique. Les méthodes d'homogénéisation ne sont donc pas retenues.

1.6.2 Les méthodes d'enrichissement

Le principe est d'étudier un système à l'échelle macroscopique tout en recherchant des paramètres à l'échelle microscopique afin d'enrichir le modèle. Les paramètres d'enrichissement peuvent provenir de différentes études (analytiques, numériques, expérimentales).

Le champ de déplacement global $\mathbf{u_H}$ est enrichi par une correction $\delta\mathbf{u_h}$:

$$\mathbf{u_h} = \mathbf{u_H} + \delta\mathbf{u_h}$$

Il en est de même pour l'espace du champ de déplacement cinématiquement admissible :

$$\mathbf{W_h} = \mathbf{W_H} + \delta\mathbf{W_h}$$

Cet enrichissement pose trois principales difficultés :

1. Il est nécessaire d'assurer la continuité du champ de déplacement $\mathbf{u_h}$.
2. L'intégration numérique des travaux virtuels doit être précise dans le cas où $\delta\mathbf{u_h}$ est fortement oscillant (ce qui est une possibilité).
3. Il faut être vigilant sur le conditionnement des matrices de rigidité car rien ne garantit l'indépendance des espaces $\mathbf{W_H}$ et $\delta\mathbf{W_h}$.

1.6.2.1 Méthode à échelles fortement couplées

Cette stratégie a été introduite par Ibrahimbegovic et Markovic dans [Ibrahimbegović and Markovič, 2003] et [Markovic and Ibrahimbegovic, 2004] afin de résoudre des problèmes en élasticité non-linéaire fortement hétérogènes.

Elle met en place un maillage à l'échelle macroscopique où chaque maille contient un maillage microscopique (une maille macro = une fenêtre micro).
Le couplage s'effectue grâce à des multiplicateurs de Lagrange localisés. Ces multiplicateurs assurent la continuité de la solution entre les maillages microscopiques et les mailles macroscopiques (figure 1.27).

Cette méthode est efficace en général car elle est facilement parallélisable et elle ne met en jeu que des problèmes éléments finis classiques. Mais elle peut aussi se révéler contraignante en cas de fortes discontinuités à l'échelle micro.

1.6.2.2 Méthode Arlequin

Cette méthode a été développée par Ben Dhia ([Ben Dhia, 1998], [Dhia and Rateau, 2005]) et largement présentée dans [Rateau, 2003] par G. Rateau. Elle a aussi été appliquée par Torkhani et Ben Dhia

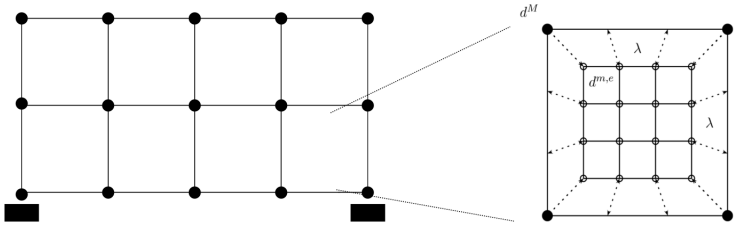


FIGURE 1.27 – Maillage macro, Maillage micro et Multiplicateurs de Lagrange λ [Markovic and Ibrahimbegovic, 2004]

à des problèmes d'usure au contact (rayure) de structures minces dans [Torkhani and Ben Dhia, 2007].

Elle calcule simultanément la solution sur différentes échelles. C'est une méthode de décomposition de modèle avec recouvrement. Elle permet de superposer un modèle grossier à un modèle plus fin. Le raccordement des solutions ne se fait pas aux frontières du modèle mais se fait ici en volume et il est effectué à l'aide de coefficients de répartitions de modèles.

Comme le montre la figure 1.28, il est possible d'avoir accès à différent type de recouvrement :

- Le *Zoom* permet de superposer un modèle fin au modèle grossier afin de gagner de l'information et de la précision sur une zone définie (exemple : pression localement forte) ;
- La *Jonction* permet de raccorder deux modèles qui se chevauchent (exemple : simplification du modèle de flexion de la poutre encastrée 3D) ;
- La *Substitution* permet purement et simplement de remplacer le modèle grossier par un autre plus fin sur une partie du maillage (exemple : contrainte localement forte entraînant une détérioration du système étudié).

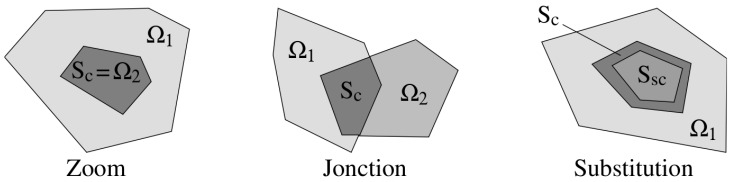


FIGURE 1.28 – Opérations possibles avec Arlequin [Rateau, 2003]

La méthode utilise des couples de fonctions de pondération (α_1, α_2) pour le travail des forces internes et (β_1, β_2) pour le travail des forces externes. Les coefficients sont définis de manière identique. Sur un domaine $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, il respecte la relation suivante :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 & \text{sur } \Omega_1/\Omega_2 \\ \alpha_2 = 1 & \text{sur } \Omega_2/\Omega_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 & \text{sur } \Omega_1 \cap \Omega_2 \end{cases}$$

Le problème Arlequin s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \lambda) \in \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_1 \times \mathbf{M} \text{ tels que :} \\ \forall \mathbf{v}_1 \in \mathbf{W}_1,\ k_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) + c(\lambda, \mathbf{v}_1) = f_1(\mathbf{v}_1) \\ \forall \mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2,\ k_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + c(\lambda, \mathbf{v}_2) = f_2(\mathbf{v}_2) \\ \forall \lambda \in \mathbf{M},\ c(\lambda, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0 \end{array}$$

avec

$$\begin{cases} k_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \sigma_i(\mathbf{u}_i) : \varepsilon(\mathbf{v}_i) \\ f_i(\mathbf{v}_i) = \int_{\Omega_i} \beta_i \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_i \\ c(\lambda, \mu) = \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \lambda \cdot \mu + l^2 \varepsilon(\lambda) : \varepsilon(\lambda) \end{cases}$$

c est le terme de couplage.

Alors la solution est donnée par :

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{sur } \Omega_1/\Omega_2 \\ u_2 & \text{sur } \Omega_2/\Omega_1 \\ \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 & \text{sur } \Omega_1 \cap \Omega_2 \end{cases}$$

La méthode Arlequin est une méthode générale et simple qui permet de décomposer le modèle, de raffiner une partie de celui-ci, ou de modifier une partie du maillage sans remailler la totalité du modèle. Néanmoins, cette méthode peut poser des problèmes sur les zones de recouvrement. Il est nécessaire d'adapter le maillage pour que le recollement puisse se faire de manière exacte.

1.6.2.3 Méthodes basées sur la partition de l'unité

Babuska et Melenk [Babuska and Melenk, 1996], en 1996, ont été à l'origine de ce type de méthode avec la PUM. Alors que les fonctions formes polynomiales classiques en éléments fins peuvent s'avérer incapables de prendre en compte des phénomènes non réguliers (fissures, discontinuités de variables..), ils ont introduit des fonctions capables de prendre en compte des singularités et de les régulariser sur les bords des domaines. Elle permet d'enrichir les espaces d'approximation construits par éléments finis en ajoutant des fonctions spéciales qui sont pondérées par les fonctions de formes des éléments finis. Cette méthode peut être vue comme une généralisation de la méthode des éléments finis. La somme de ces fonctions formes sur un point de maillage, égale à l'unité, a permis de donner un nom à la méthode :

$$\sum_i \varphi_i(\mathbf{x}) = 1$$

La correction du champs de déplacement s'écrit alors :

$$\delta \mathbf{u_h}(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j b_{i,j} f_j(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x})$$

où f_j sont les fonctions spéciales.

La méthode basée sur la partition de l'unité est à l'origine de la méthode des éléments finis généralisés G-FEM ([Strouboulis et al., 2000]) et de la méthode des éléments finis étendus X-FEM de T. Belytschko 1999 ([Dolbow et al., 2000],[Sukumar et al., 2000], [Sukumar et al., 2001], [Belytschko et al., 2001]).

1.6.2.4 La méthode variationnelle multi-échelles

Cette méthode a été proposée par T. Hughes en 1995 dans[Hughes, 1995]. Elle applique une stratégie de résolution de problèmes linéaires sur plusieurs échelles. Un premier niveau d'analyse est effectué par élément fini et la solution est complétée par des formules analytiques. On commence par trouver les solutions à l'échelle fine associées au résidu de l'échelle grossière $\mathbf{r}(\mathbf{u}_H)$. La correction appliquée dépend alors de la solution grossière et s'écrit :

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\int_\Omega \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).\mathbf{r}(\mathbf{u}_H)(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

où $\mathbf{g}$ est la fonction de Green pour l'opérateur de Laplace.

L'influence de l'échelle microscopique, provenant d'une résolution analytique de problèmes microscopiques, est condensée et permet alors de définir un problème grossier dit "quasi-exact".

La résolution à l'aide d'éléments finis standards non-quadratiques, pour lesquels les gradients sont discontinus d'un élément à l'autre, nécessite un traitement particulier à l'aide de fonctions spéciales [Hughes et al., 1998] : fonctions bulles, p-raffinement hiérarchique, h-raffinement hiérarchique ([Larson and Målqvist, 2007]). Ces fonctions sont illustrées sur la figure 1.29.

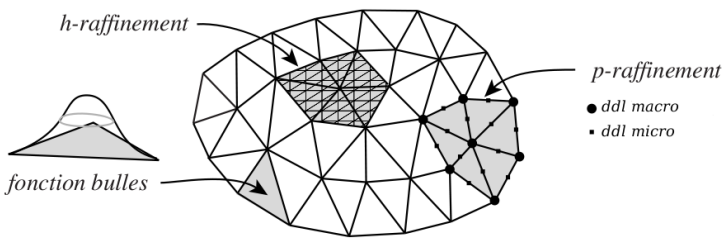


FIGURE 1.29 – Illustration des fonctions spéciales pour la méthode variationnelle multi-échelles [Passieux, 2008]

Cette méthode permet d'enrichir la solution sur chaque maille macro par une méthode de régularisation. Mais elle présente un certain inconvénient : le sous-problème micro sur une maille macro n'influence pas les sous-problèmes micro voisin.

1.6.2.5 Recollement de maillages incompatible

Cette méthode est présentée et utilisée dans [Hauret, 2004].Comme son nom l'indique, il s'agit d'une méthode permettant de recoller des maillages de natures et de densités différentes sur les bords de leur domaine respectif. Dans une perspective multi-échelles, elle peut permettre de recoller un maillage grossier et un maillage fin sans avoir à prévoir de raccord entre les deux maillages (figure 1.30).

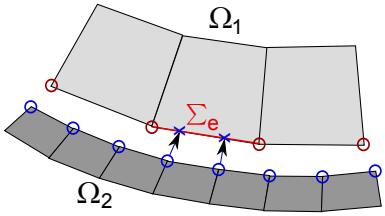


FIGURE 1.30 – Recollement de maillages incompatibles

Il existe différentes méthodes de recollement de maillage plus ou moins élaborées. La méthode qui va être présentée ici est une méthode simple qui est dérivée de celle du PPCM (Plus Petit Maillage Commum). Elle nécessite la définition d'une interface maître sur laquelle seront projetés les noeuds de l'interface esclave. Cette approche maître-esclave est du même type que celle utilisée dans la résolution de contact (cf. partie 1.2.1). L'interface esclave doit être celle qui contient la plus grande densité de noeud. Une première phase d'appariement est réalisée afin de déterminer les noeuds esclaves voisins pour chaque élément de l'interface esclave. Puis une relation relie les noeuds de l'interface esclave à leur projection sur l'interface maître.

Ainsi, pour chaque élément Σ_e de l'interface maître appartenant à Ω_1 :

$$u^1(M_i) - \sum_{j=1}^{n_e} \Big(\int_{\Sigma_e} E_j^2(M_i)\xi(M_i)dM \Big) q_j^2 = 0$$

où M_i sont les noeuds de l'interface esclave voisin de Σ_e, n_e et $\xi(M_i)$ sont le nombre de DDL et les fonctions formes associées à l'élément Σ_e et E_j^2 sont les restrictions des fonctions formes de l'élément j de Ω_2.

Cette méthode présente l'avantage d'être relativement simple et de permettre de recoller une surface fine à une surface grossière sans avoir de souci de compatibilité entre les maillages. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas la superposition de deux échelles. La seule manoeuvre possible et de joindre deux maillages à des échelles différentes.

1.6.3 Les méthodes microscopiques multi-niveaux

Ces méthodes ont comme point commun de commencer par la résolution du problème à une échelle fine.

1.6.3.1 Méthode multi-grilles

Cette méthode est apparue à l'origine dans les travaux de A. Brandt en 1977 dans [Brandt, 1977]. Cette méthode se base sur une résolution incomplète sur différentes grilles simultanément. La résolution se déplace d'une grille à l'autre à l'aide d'opérateur de restriction $\mathbf{R}$ et de prolongement $\mathbf{P}$ correspondant en général à des interpolations linéaires de solutions.
La résolution s'organise sous forme de cycles (V-cycle et W-cycle : figure 1.31) qui alternent entre maillages fins et maillages plus grossiers .

Sur un V-cycle à 2 grilles, un incrément de calcul se déroule en 3 étapes :
(On notera $\mathbf{L}(U) = F$ le problème non-linéaire discrétisé à résoudre.)

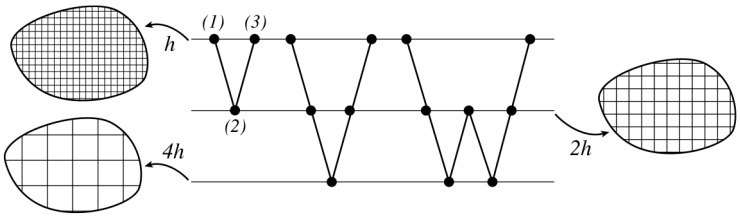


FIGURE 1.31 – Méthode multigrille : V-cycle et W-cycle sur 2 et 3 grilles [Passieux, 2008]

1. **Lissage :** On calcul le résidu du problème non-linéaire sur la grille fine en fixant un certain nombre d'itérations α^k et en partant de la solution initiale $U^k_{f,0}$:

$$R^k_f = F - L_f(U^k_f)$$

Puis on projette le résidu et la solution sur la grille grossière :

$$R^k_g = \mathbf{R}^F R^k_f \quad \text{et} \quad U^k_g = \mathbf{R}^U U^k_f$$

Cette étape permet de capter les phénomènes hautes-fréquences de la solution.

2. **Correction :** On calcul la correction à apporter pour capter les phénomènes basses-fréquences de la solution. On commence par résoudre le problème non-linéaire suivant :

$$\mathbf{L}_g(U^k_g + E^k_g) = R^k_g + \mathbf{L}_g(U^k_g)$$

Puis on projette la correction sur la grille fine :

$$E^k_f = \mathbf{P}^U E^k_g$$

3. **Solution et initialisation de l'itération suivante :** On met à jour la solution en prenant en compte la correction déterminée précédemment et on admet la solution comme étant la solution initiale de l'itération suivante :

$$U^{k+1}_{f,0} = U^k_f + E^k_f$$

Dans [Fish and Belsky, 1995b] et [Fish and Belsky, 1995a], Fish et Belsky montrent que, sur des matériaux composites périodiques, les composantes basses-fréquences sont mal captées et mettent en cause les opérateurs de prolongation et restriction. Il propose une nouvelle solution en s'appuyant sur la théorie de l'homogénéisation périodique. Ils imposent l'hypothèse que la grille grossière soit associée au problème homogénéisé. La solution sur la grille fine s'écrit alors :

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_H + \epsilon \mathbf{c}_h : \mathbf{\Pi}_H(\mathbf{L}_H : \epsilon(\mathbf{u}_H))$$

où $\mathbf{c}_h$ est la fonction périodique de c sur la grille fine (cf. équation 1.3), $\epsilon(\mathbf{u}_H)$ est le champs de déformation , $\mathbf{\Pi}_H$ l'opérateur d'interpolation vers la grille grossière et $\mathbf{L}_H$ est l'opérateur de lissage de Zhu-Zienkiewicz.

Cette méthode a aussi été exploitée dans le cas de contact frottant dans [Lebon et al., 2007] et dans [Fackeldey and Krause, 2007].

1.6.3.2 Méthode de projection de Dirichlet hiérarchique

Cette méthode a été initiée par Oden et Zohdi dans [Zohdi et al., 1996], [Oden and Zohdi, 1997] et[Oden and Vemaganti, 1999]. Elle a été initialement développée pour résoudre des problème en élasticité linéaire dans des matériaux fortement hétérogènes. Cette méthode met en place un maillage macro discrétisé par éléments finis et un maillage micro à structure régulière qui peuvent être de plusieurs types (Éléments finis, Automates cellulaires..). Le deuxième maillage est obtenu en décomposant le domaine Ω étudié à l'aide d'une grille régulière définissant les sous-domaines Ω_i.

La stratégie globale de cette méthode est de compléter le champ de déplacement macroscopique $\mathbf{u^0}$ en ajoutant une correction $\mathbf{u^1_i}$ obtenue à l'échelle fine à partir de calculs de localisations indépendants pour chaque cellule. Ainsi, on détermine un champ de déplacement $\tilde{\mathbf{u}}$ valable sur l'ensemble de la structure :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u^0} + \sum_{\Omega_i} \Pi_{\Omega_i \to \Omega}(\mathbf{u^1_i} - \mathbf{u^0})$$

Où $\Pi_{\Omega_i \to \Omega}$ est un opérateur de prolongement des champs de Ω_i à Ω.

La méthode de Dirichlet hiérarchique a l'avantage de pouvoir mieux raffiner le domaine en zone erronée. Mais elle se limite uniquement au cas linéaire.

1.6.4 Conclusion

Toutes les méthodes existantes n'ont pas été abordées. Certaines ne nous intéressent pas, d'autres nécessiteraient des développements dans lesquels on ne souhaite pas s'investir. Par exemple, il existe d'autres méthodes directes comme la méthode par décomposition de domaine, la méthode par une approche primale, la méthode par une approche duale, l'approche mixte non-linéaire (basée sur la méthode Latin).

Il existe de nombreuses méthodes multi-échelles. Les méthodes d'homogénéisation permettent d'intégrer à l'échelle macroscopique un comportement homogénéisé de matériau hétérogène avec retour possible à une échelle locale. Les méthodes multi-niveaux permettent d'affiner la résolution entre différentes échelles selon l'erreur commise. Les méthodes d'enrichissement permettent d'ajouter de l'information à échelle plus fine dans le modèle.

Notre objectif est de faire la jonction entre l'échelle du système et des hétérogénéités à une échelle inférieure.

Dans notre cas, on ne souhaite pas seulement introduire un comportement homogénéisé mais d'implanter les propriétés microscopiques des matériaux à l'échelle macroscopique. Le choix a été fait de travailler avec la méthode de recollement de maillage qui permettra d'apporter une couche raffinée sur le matériau de friction.

1.7 Conclusion du chapitre

Le contact frottant est un problème fortement non-linéaire dont la résolution dans le cas de matériaux homogènes, et de surfaces planes, est complexe. Il nécessite d'utiliser des méthodes numériques adaptées afin de linéariser le problème et approximer au mieux la solution réelle en réduisant les temps de calcul. Ces méthodes s'appliquent souvent dans le cas de matériaux idéaux et de géométries parfaites (homogènes et plans). Or, dans le domaine du freinage, le contact frottant présente de fortes hétérogénéités à différentes échelles. Ainsi, le disque présente des défauts de forme, de type ondulation de surface (en général, une à deux ondulations par tour), à une échelle macroscopique. Le matériau de friction est lui plus hétérogène (du fait de sa composition) dans son comportement et présente de nombreux défauts de surface qui évoluent fortement au cours du temps. Ces hétérogénéités se situent toutes à des échelles différentes qui sont inférieures à l'échelle de la structure.
Le contact frottant fait aussi intervenir différents aspects physiques. Ainsi, des phénomènes thermiques, mécaniques et vibratoires, qui sont liés, sont influencés par la tribologie du contact et inversement.
Classiquement, des méthodes dynamiques ou d'analyses modales sont exploitées sur des modèles macroscopiques de frein. Ces modèles peuvent être complets (exemple : modèles éléments finis) ou comporter seulement quelques degrés de liberté (exemple : modèles simplifiés). D'autres modèles s'intéressent uniquement à l'interface de contact. Peu d'études s'attachent à faire le lien entre les échelles. Dans l'objectif d'étudier l'influence de ces hétérogénéités sur le comportement macroscopique, il est nécessaire de faire un lien entre l'interface de contact et le modèle macroscopique en utilisant une approche multi-échelles.
Les méthodes multi-échelles ne sont pas toutes adaptées pour l'étude du contact. Il est nécessaire d'exploiter une stratégie de calcul permettant de mettre à profit une méthode multi-échelles simple qui permettra de faire de l'analyse modale et de l'analyse transitoire en intégrant l'hétérogénéité des matériaux au contact ainsi que leur non-planéité.

L'objectif de ce travail est d'avoir une modélisation robuste et efficace permettant de lier les différentes échelles de manière simple pour étudier les instabilités au contact liées au crissement.
Nous allons réaliser une analyse modale complexe pour déterminer les couplages de modes impliquant des instabilités au contact qui peuvent entraîner le crissement.
La stratégie qui a été choisie consistera à coupler un modèle élément fini, pour la résolution du problème de contact, dans lequel seront intégrées les hétérogénéités, et un modèle réduit, de type discret, qui per-

mettra de réaliser l'analyse modale rapidement tout en tenant compte des hétérogénéités.
Afin d'intégrer les hétérogénéités, la méthode multi-échelle qui a été retenu est la méthode de recollement de maillages incompatibles.
Pour la résolution du contact, nous avons choisi de travailler avec la méthode du Lagrangien augmentée afin d'obtenir les résultats les plus fiables possible avec des temps de calculs réduits (Ce choix est justifié dans le chapitre suivant). Lorsque nous souhaiteront intégrer une raideur de contact, la méthode par pénalisation pourra être utilisée.
On s'intéresse dans ce travail à trois types d'hétérogénéités, situées à 3 échelles différentes : le voile de disque, les propriétés matériaux hétérogènes de la garniture et les zones de portance, appelées plateaux de contact, présent sur la surface de la garniture. Ces hétérogénéités feront, respectivement, l'objet d'un chapitre afin d'être étudiées. Ainsi, nous considérerons progressivement des échelles de plus en plus petites.

Chapitre 2

Prise en compte d'un défaut de forme du disque

Ce chapitre est consacré à la présentation d'un modèle éléments finis prenant en compte une ondulation de disque pour constater son influence sur le comportement thermique et vibratoire. Pour cela, une stratégie a été élaborée afin d'identifier les paramètres influents sur le système.

2.1 Contexte

Lors de l'utilisation de systèmes de frein à disque sur des automobiles, des trains ou des éoliennes, différents phénomènes apparaissent tels que des localisations thermiques et des émissions acoustiques (par exemple, du crissement). Les bruits peuvent apparaître de manière cyclique ou continue. Les mécanismes liés à l'apparition de ces émissions acoustiques n'étant pas encore totalement maîtrisés, il est nécessaire de les investiguer plus en détail pour mieux les appréhender. Le premier moyen d'investigation est la qualification et l'analyse du bruit sur des bancs d'essais à échelles réelles ou réduites, appelés tribomètres. Un banc expérimental (tribomètre) a été développé par Duboc M. [Duboc et al., 2010a] au Laboratoire de Mécanique de Lille. Ce banc a été utilisé pour étudier le crissement sur un système pion-disque (figures 2.1 et 2.2). Un disque est monté sur un axe de rotation puis est mis en rotation à vitesse constante. Au dessus du disque, un pion est mis en contact afin de simuler un contact frottant entre disque et garniture de frein. Ce pion est composé d'un matériau de garniture de frein collé sur un support. Le support vient pincer une lame flexible d'épaisseur variable. Cette lame est pincée à ses extrémités dans un bloc rigide. Ce bloc permet d'appliquer un chargement en déplacement en limitant au mieux les vibrations transmises à la structure globale. Ce banc est volontairement composé d'un nombre réduit de pièces afin de contrôler au mieux son comportement vibratoire.

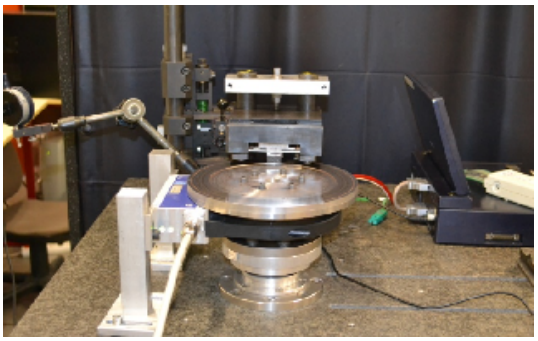


FIGURE 2.1 – Dispositif expérimentale de Duboc

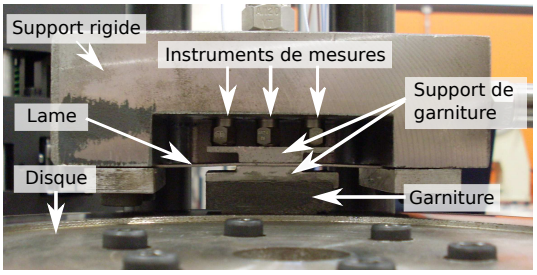


FIGURE 2.2 – Zoom sur le dispositif

De nombreux essais ont été réalisés sur ce banc. Muni de capteur de force, de capteur de déplacement ou accéléromètre et microphone, les essais ont permis de mesurer différentes grandeurs évoluant lors du frottement : la vitesse de rotation du disque, la hauteur du disque, les efforts normaux et tangentiels de contact (pour le calcul du coefficient de frottement), les vibrations du pion et le bruit émis.

Lors d'essais expérimentaux sur son dispositif pion-disque, Duboc M. a vu apparaître une occurrence de bruit rythmé par la rotation du disque. Tout disque présente un défaut de surface. Lors de l'usinage du disque ou lors du montage de celui-ci sur axe, il apparaît une ondulation de la surface à une échelle microscopique. A travers la mesure de la hauteur du disque une fois monté sur banc, il est possible de relier l'ondulation des disques de frein et les occurrences de crissement. La figure 2.3 illustre ce lien. A gauche sont représentées les pressions acoustiques et à droite la hauteur de la surface en contact du disque monté sur un tribomètre d'observation. On peut observer ici un bruit, correspondant à du crissement, dont les occurrences surviennent de façon cyclique avec une occurrence par tour. Dans notre exemple, le bruit semble se corréler avec la phase de montée de l'ondulation.

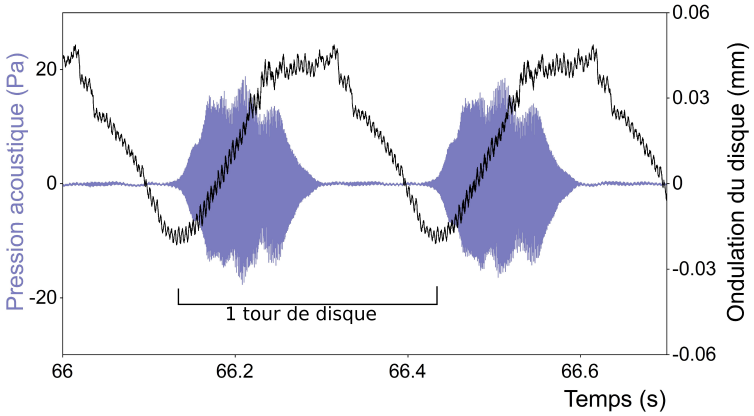


FIGURE 2.3 – Corrélation ondulation de disque/occurrence de crissement

Les propriétés structurelles intrinsèques au montage expérimental sont souvent considérées comme le premier facteur impactant les instabilités vibratoires liées au crissement. Néanmoins, l'ondulation du disque n'est que peu prise en compte dans les modèles, d'où la proposition d'étudier son impact sur les propriétés modales du système.

2.2 Stratégie de résolution

2.2.1 Schéma global de résolution

La stratégie exploitée se scinde en deux étapes de calculs (figure 2.4).
Tout d'abord, on réalise une analyse de l'équilibre mécanique sous condition de contact frottant au passage d'une ondulation de disque. Pour cela, on mène une analyse transitoire élément fini sur la plate-forme Salomé à l'aide du solver Code-Aster développé par EDF R& D [EDF R&D, 2013].
Un modèle semi-analytique permet de réaliser une analyse modale complexe sous condition de contact afin de déterminer les fréquences propres et les confusions de fréquences (ou mode lock-in).

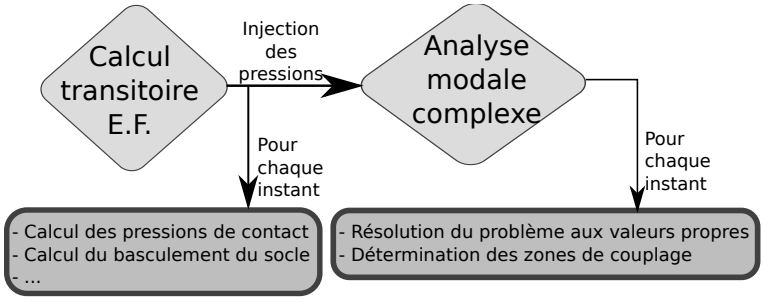


FIGURE 2.4 – Stratégie de résolution

Dans un premier temps, on présente le modèle éléments finis (géométrie et paramètres de calculs), puis, le modèle semi-analytique. La présentation des modèles est accompagnée d'un cas de référence qui

servira de point de comparaison aux études paramétriques. Les résultats et interprétations des différentes études paramétriques réalisées sont exposés. Enfin, on présente une conclusion reprenant les résultats importants de ce chapitre.

2.2.2 Modèle éléments finis

2.2.2.1 Géométrie, système et maillage associé

Le système pion-disque (figure 2.5), dédié à l'étude du crissement et à l'analyse de l'influence des propriétés matériaux et de la géométrie de surface, est la reproduction du dispositif expérimental exploité par Duboc (figures 2.1 et 2.2). Ce dispositif est exploité dans [Duboc et al., 2010b] et [Magnier et al., 2011]. Le pion est monté sur un support rigide piloté en déplacement. Ce pion se compose de trois pièces : une lame en acier, un support de garniture qui vient pincer la lame, et un matériau de friction collé sur la partie inférieure du support de garniture.

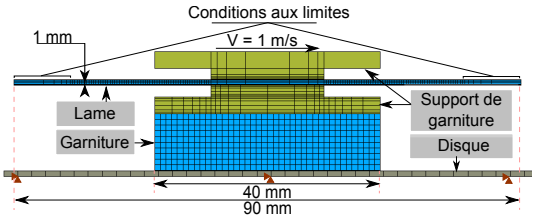


FIGURE 2.5 – Modèle éléments finis

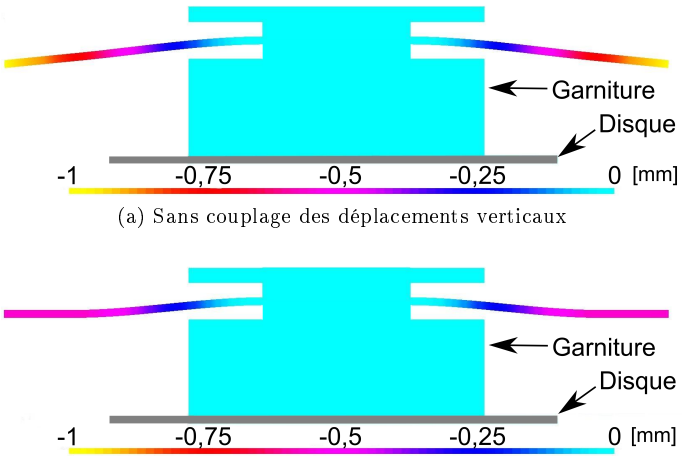
On fait le choix de travailler sur un modèle éléments finis 2D en déformation plane. Toujours dans un souci de simplification et de compréhension, les effets de certains paramètres, dont l'effet circonférentiel, seront limités. Ce dernier peut être négligé car les modes principaux mis en jeu lors de l'apparition de crissement se trouvent dans la direction du glissement. Effectivement, dans [Duboc, 2013], Duboc montre que les modes de disque à N diamètres nodaux et 0 cercles nodaux, le mode de pion en flexion dans la direction du frottement et translation hors-plan sont les plus impliqués dans l'apparition d'instabilité vibratoire.
Concernant la géométrie du modèle éléments finis, on respecte les dimensions du dispositif expérimental. La garniture a une longueur de $40mm$ et une hauteur $10mm$. La lame a une longueur de $90mm$ et une épaisseur de $1mm$. L'épaisseur de la lame est un paramètre permettant de maîtriser la rigidité du système pion-disque en influant directement sur la rigidité du système. D'autres épaisseurs (2 et $3mm$) seront exploitées lors d'une des études paramétriques à venir. Le support de garniture est composé de deux parties enserrant la lame. La géométrie du disque sera présentée dans une sous-partie qui introduira l'ondulation de disque.
Les propriétés des matériaux du modèle éléments finis sont répertoriées dans le tableau 2.1. La lame et le support de garniture ont les propriétés d'un acier classique. Dans le dispositif expérimental, la garniture est composée d'un matériau de friction hautement hétérogène. Dans le cas du modèle de référence, le choix est fait d'utiliser un modèle élastique isotrope simple. Le disque est en acier et ses propriétés sont les mêmes que pour la lame et le support de garniture.

Élément	Module de Young	Coefficient de Poisson	Densité
Lame	$E = 210GPa$	$\nu = 0.3$	$\rho = 7800kg/m^3$
Support de garniture	$E = 210GPa$	$\nu = 0.3$	$\rho = 7800kg/m^3$
Garniture	$E = 3GPa$	$\nu = 0.3$	$\rho = 2700kg/m^3$
Disque	$E = 210GPa$	$\nu = 0.3$	$\rho = 7800kg/m^3$

TABLE 2.1 – Propriétés matériaux du modèle E.F.

Les conditions aux limites du pion tendent à reproduire celles imposées sur le dispositif expérimental. Dans le dispositif expérimental, les deux extrémités de la lame sont pincées sur $10mm$ par le support rigide et un effort constant est imposé par le support rigide. On impose donc un chargement constant de $300N$ dans la direction normale et un couplage des déplacements verticaux des noeuds sur les extrémités de la lame est imposé. Ce dernier point est important car il permet d'obtenir des déplacements verticaux

des noeuds égaux sur les zones soumises aux conditions aux limites (figure 2.6b), ce qui correspond à la déformation de la lame lors des essais expérimentaux réalisés par Duboc. En appliquant uniquement l'effort vertical, les extrémités de la lame se déforment comme une poutre en flexion (figure 2.6a). La condition de couplage des déplacements verticaux peut s'écrire $\forall A_i, A_j \in \Gamma_{CL}$, tel que $i \neq j, DY_{A_i} = DY_{A_j}$, où Γ_{Cl} est l'ensemble des noeuds appartenant à la lame et soumis aux conditions aux limites. Cette condition est toujours prise en compte lors de simulations en effort imposé. Suite au chargement normal, une vitesse tangentielle constante de $1m/s$ correspondant à une vitesse de rotation de $200tours/min$ pour un disque de diamètre $250mm$. Le modèle étant en 2 dimensions, il n'est pas possible de reproduire les conditions aux limites des essais expérimentaux sur le disque. En conséquence, la face inférieure du disque est encastrée dans toutes les directions.



(a) Sans couplage des déplacements verticaux

(b) Avec couplage des déplacements verticaux

FIGURE 2.6 – Déformation verticale (DY) de la lame lors d'un chargement vertical en effort imposé (300N)

Le maillage a fait l'objet d'une étude dont le but est de minimiser l'erreur et notamment le temps de calcul. Différentes méthodes multi-échelles ont été testées : Arlequin et recollement de maillages incompatibles. La méthode des maillages incompatibles [Hauret, 2004] a été retenue afin de lier les différents maillages composant le pion. La méthode consiste à ajouter des équations liant les déplacements des maillages impliqués sur les frontières. Dans ce modèle, la relation est tout simplement l'égalité des déplacements. Cette méthode est simple. Elle n'alourdit pas les calculs et elle permet un changement de taille de maille entre différentes parties. Les jonctions lame-support de garniture (jonctions supérieure et inférieure) et support de garniture inférieure-garniture (voir figure 2.5) sont réalisées en utilisant cette méthode.
Un maillage triangulaire avec une taille moyenne de maille de $0.2mm$ est utilisé afin de définir un maillage raffiné. Ce maillage permet de réaliser une étude de maillage, afin d'en déterminer un fournissant des résultats justes et rapides. L'étude est d'abord réalisée sur un chargement statique. Un effort normal de $300N$ et une vitesse tangentielle nulle sont imposés.

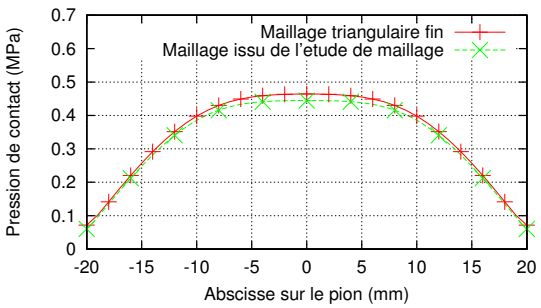


FIGURE 2.7 – Distribution de pression de contact des maillages du maillage triangulaire fin et du maillage issu de l'étude de maillage

Le modèle issu de cette étude de maillage est formé de 1696 noeuds et 1458 éléments quadrangles avec des tailles de maille non constantes afin de raffiner sur les zones de localisations de contraintes. Le

maillage de la lame contient 966 noeuds et 822 quadrangle. Le maillage de la lame est la partie la plus sensible car la lame régit en grande partie la cinématique du système et les déplacements du pion. Ce maillage est plus grossier sur les zones subissant de faibles contraintes et il est raffiné sur les zones de concentration de contraintes. Un maillage régulier avec une taille de maille de $1mm$ a pu être conservé sur la garniture. Au final, une erreur relative inférieure à 5% , localisée sur le centre de la garniture (voir figure 2.7), est commise sur la distribution de pression. On considère ce résultat comme suffisant du point de vue qualité de résultats et temps de calcul.

Maintenant que la géométrie et le maillage du pion ont été exposés, il est nécessaire de présenter les méthodes de résolution choisies ainsi que les paramètres associés.

2.2.2.2 Paramètres numériques de l'étude EF

Dans cette partie, on justifie les choix des méthodes de résolution, notamment dans le choix du schéma temporel et du pas de temps associé ainsi que dans le choix d'une méthode de résolution de contact. Puis en dernier lieu, on exploitera le modèle E.F. sur un contact de référence, correspondant au pion frottant sur un disque plan.

Mise en charge du système : L'amorçage d'un calcul transitoire n'est pas une étape aisée. Le potentiel vibratoire du système fait que la mise en charge et la mise en mouvement du système en une seule étape introduisent des oscillations du système en début de simulation. Afin de ne pas avoir à effectuer de longue simulation avant de récupérer un état stable du système sur disque plan, il est nécessaire d'effectuer une pré-charge du système.
La mise en position s'effectue donc en 2 étapes. La première étape consiste en une mise en charge du système. Une résolution statique est effectuée en appliquant toutes les conditions aux limites et une vitesse de glissement nulle. La seconde étape consiste à imposer le déplacement du pion. Une vitesse de $1m/s$ est imposée sur la lame.

Choix d'une méthode de résolution de contact frottant : La résolution du contact frottant est aussi un des points clés de cette étude. Le frottement utilisé est un frottement de type Coulomb avec un coefficient de frottement $\mu = 0.3$. Celui-ci correspond à une valeur moyenne relevée expérimentalement sur certains matériaux de friction. Le contact frottant nécessite une résolution la plus fiable possible dans les directions normales et tangentielles du contact.

Afin de déterminer la méthode de résolution de contact. Un cas-test de Code Aster a servi de référence. Ce dernier est disponible en annexe (voir A). Afin d'optimiser la résolution, un algorithme discret utilisant une méthode Lagrangienne pure dans la direction normale du contact et une pénalisation dans la direction tangentielle a été utilisée. Cet algorithme permet d'obtenir de bons résultats sans pénétration des structures en contact et avec des temps de calcul réduits.

Choix du schéma temporel : Le patin munit d'une lame d'une épaisseur de $1mm$ frottant sur une surface offre un haut potentiel vibratoire au système. L'objectif est ici de choisir une méthode permettant d'obtenir une solution proche d'une succession d'équilibre quasi-statique. On ne souhaite pas réaliser une réelle étude transitoire au sens classique, mais uniquement choisir une méthode qui permettra de supprimer les oscillations du système sans modifier la solution obtenue. Il est nécessaire de tester différents schémas temporels pour déterminer celui qui conviendra le mieux au système pion-disque. L'utilisation d'un schéma temporel explicite est exclu du fait du code de calcul utilisé. Code-Aster n'est pas encore doté de méthode de résolution explicite exploitable en présence de contact frottant. Un schéma implicite doit donc être utilisé par défaut. L'utilisation d'un schéma implicite simple implique une solution oscillante. Le système est excité par le contact frottant et induit des oscillations dans le système. Ces oscillations, situées entre $1000Hz$ et $2000Hz$, peuvent rendre les résultats inexploitables.

Afin d'obtenir un glissement uniforme sans oscillation de la structure, il est indispensable d'utiliser un schéma introduisant un amortissement numérique. On ne souhaite pas introduire un amortissement physique mais uniquement limiter les excitations numériques potentiellement naissantes lors du contact frottant. Il est donc essentiel de choisir un schéma avec un amortissement numérique contrôlé afin de ne pas avoir un comportement dynamique modifié par le schéma temporel. Les schémas de l'accélération

moyenne modifiée (AMM) et HHT-complet sont disponibles dans le code choisi. Ils dérivent du schéma de Newmark dont la solution u est donnée par les équations 2.1.

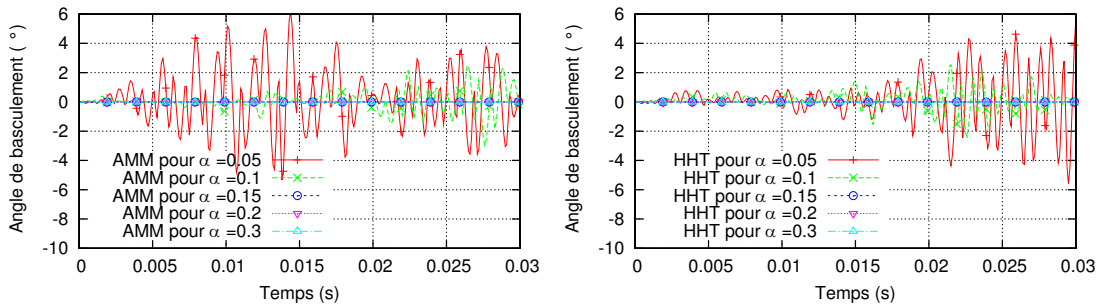
$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}_t = [\mathbf{M}]^{-1}\big(\mathbf{F}_{t-\delta t} - [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}}_{t-\delta t} - [\mathbf{K}]\mathbf{u}_{t-\delta t}\big) \\ \dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\mathbf{u}}_{t-\delta t} + \delta t\big((1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_{t-\delta t} + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_t\big) \\ \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{t-\delta t} + \delta t\dot{\mathbf{u}}_{t-\delta t} + \frac{\delta t^2}{2}\big((1-2\beta)\ddot{\mathbf{u}}_{t-\delta t} + 2\beta\ddot{\mathbf{u}}_t\big) \end{cases} \tag{2.1}$$

Le schéma HHT a été développé par Hilber, Hughes et Taylor afin de réduire les oscillations hautes fréquences (voire [Hilber et al., 1977]). Pour ce faire, les paramètres β et γ sont définis en fonction d'un troisième paramètre α négatif qui offre un compromis entre stabilité et amortissement hautes fréquences. β et γ sont alors donnés par $\beta = \left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$ et $\gamma = \frac{1-2\alpha}{2}$. La prise en compte seule de ces paramètres optimisés fournit le schéma AMM (ou α-méthode). Le schéma HHT-complet implique aussi un décalage contrôlé par α sur les forces intérieures dans l'équilibre dynamique discrétisé (équation 2.2).

$$[\mathbf{M}](\mathbf{u}_t)\ddot{\mathbf{u}}_t + (1+\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{u}_t, \dot{\mathbf{u}}_t, t) + {}^t[\mathbf{B}]\lambda_t + {}^t[\mathbf{A}]\mu_t = \mathbf{L}_{t+\alpha\delta t} + \alpha\mathbf{R}(\mathbf{u}_{t-\delta t}, \dot{\mathbf{u}}_{t-\delta t}, t_{t-\delta t}) + \alpha[\mathbf{C}]\dot{\mathbf{U}}_{t-\delta t} - \mathbf{L}_{GR}^{iner}(\mathbf{u}_t, \dot{\mathbf{u}}_t, \ddot{\mathbf{u}}_t) \tag{2.2}$$

où ${}^t[\mathbf{B}]\lambda$ est l'opposé des réactions d'appui aux noeuds correspondant, ${}^t[\mathbf{A}]\mu_t$ les forces nodales dues au contact, $\mathbf{R}$ les forces internes, $\mathbf{L}$ les forces "suiveuses", $\mathbf{L}_{GR}^{iner}$ les forces d'inertie en grandes rotations. On note aussi que $\mathbf{L}_{t+\alpha\delta t} = (1+\alpha)\mathbf{L}_t - \alpha\mathbf{L}_{t-\delta t}$.

Ces schémas fournissent tous deux un amortissement numérique. HHT-complet apporte un amortissement moins conséquent dans les basses fréquences mais il accroît énormément l'amortissement numérique dans les moyennes et hautes fréquences. AMM introduit un amortissement numérique moyennement plus élevé mais qui se reporte beaucoup moins sur les moyennes et hautes fréquences. Que ce soit pour le schéma AMM ou HHT, le paramètre du schéma permet d'introduire plus ou moins d'amortissement. Un paramètre proche de zéro tendra vers un schéma non-amorti alors qu'un paramètre plus élevé en valeur absolu introduira un fort amortissement. Une étude a été menée sur ce point afin de choisir le bon schéma et le bon paramètre a utiliser lors des prochaines études à mener. Le disque est considéré plan. Le contact est résolu en utilisant la méthode précédemment choisie. Un pas de temps de $10^{-4}s$ est exploité. Sur disque plan, un état quasi-statique sous condition du glissement est déterminé et pris pour référence. Plusieurs calculs transitoires sont effectués en exploitant les deux schémas proposés (AMM et HHT) et divers paramètres α.
Les résultats de ces tests sont présentés sur les figures 2.8a, 2.8b et 2.9. Les figures 2.8a et 2.8b représentent l'angle de basculement du socle de garniture, c'est à dire l'angle formé avec l'axe horizontal (Ox). Le basculement du socle donne un bon indicateur sur la stabilité macroscopique du système. La figure 2.9 représente les pressions de contact pour les schémas donnant des résultats stables. La distribution de pression nous renseigne afin de savoir si le comportement du système est modifié par rapport à un équilibre quasi-statique.



(a) Schémas AMM (b) Schémas HHT

FIGURE 2.8 – Basculement de socle avec des schémas temporels dissipatifs AMM et HHT

En analysant les courbes 2.8a et 2.8b, il est facile de remarquer que quelque soit le schéma choisit, si ce dernier n'introduit pas suffisamment d'amortissement, le système n'est pas stable et oscille sans jamais converger vers un équilibre quasi-statique. On rappelle que les schémas ayant pour paramètre $\alpha = 0$ reviennent en réalité à un schéma classique de Newmark avec des paramètres $\beta = \frac{1}{4}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. Ce schéma étant non-amorti, il est inutile de le représenter. D'après les résultats obtenus, en dessus d'un paramètre $\alpha = -0.15$, les schémas ne convergent pas. Pour $\alpha \leq -0.15$, les résultats convergent plus ou moins rapidement. Plus α est proche de -0.3 et plus le système se stabilise vite. La vitesse de convergence

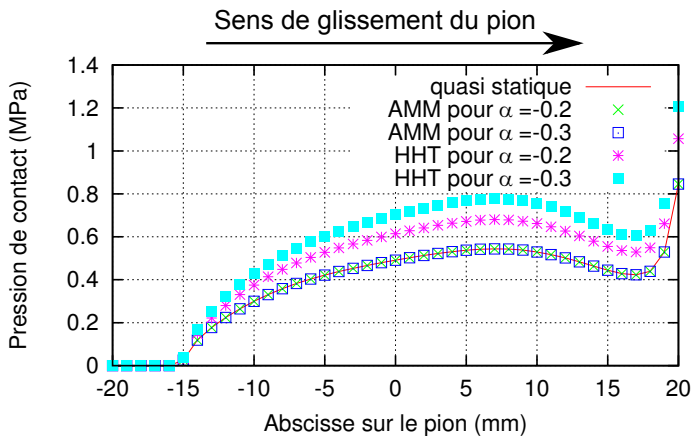


FIGURE 2.9 – Pressions de contact issues des schémas temporels AMM et HHT convergents

n'est pas le seul critère qui nous intéresse pour choisir le bon schéma et le bon paramètre. Il est aussi intéressant de savoir si les schémas convergeant modifient le comportement cinématique du système et, si oui, si cela est fonction du paramètre. La figure 2.9 répond à cette question. Seul le schéma HHT modifie le comportement du système. Plus α est proche de -0.3 et plus le comportement s'éloigne de celui issu du calcul quasi-statique. En conclusion, le schéma HHT n'est pas le schéma adéquate pour notre étude. De l'autre coté, le schéma AMM ne modifie pas la réponse du système quel que soit la valeur du paramètre. Il permet donc de stabiliser le système sans en modifier le comportement. De plus, il est possible de choisir la valeur du paramètre afin de stabiliser le système plus ou moins vite.
Suite à cette étude, le choix est fait de travailler avec le schéma de AMM avec un paramètre $\alpha = -0.2$.

Choix du pas de temps : Afin de définir le pas de temps, des simulations-tests sont effectuées sur disque plan avec le schéma AMM en utilisant différents pas de temps. La figure 2.10 représente le basculement de socle résultant de calculs avec des pas de temps de $\Delta t = 10^{-4}$, $\Delta t = 10^{-5}$ et $\Delta t = 10^{-6}s$. Pour des pas de temps inférieurs à $10^{-4}s$, des oscillations apparaissent dans le système. L'objectif du modèle éléments finis est de déterminer des pressions de contact qui serviront à déterminer les propriétés vibratoires à différents instants du passage d'une imperfection de surface de disque. Une pression de contact oscillante ne permet pas de définir les fréquences propres à un état de contact donné. Il est donc nécessaire d'avoir une pression de contact non perturbé par des oscillations (qu'elles soient physique ou numérique). Pour cette raison, on choisit de travailler avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-4}s$.

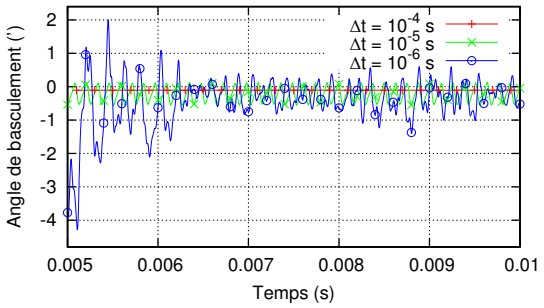


FIGURE 2.10 – Basculement du socle pour différents pas de temps

2.2.2.3 Exploitation du modèle E.F.

Le modèle est appliqué sur un contact de référence. Il s'agit d'un contact pion-disque plan-plan (où les plans sont parallèles) avec des propriétés de matériaux homogènes.

2.2.2.3.a Calculs des pressions de contact

Suite au calcul élément fini, il est nécessaire d'effectuer quelques compléments de calculs avant de déterminer les fréquences propres du système. Tout d'abord, il faut déterminer les pressions de contact.

Les pressions de contact sont calculées à partir des réactions de contact. Les pressions normales de contact locales s'obtiennent de la manière suivante :

$$P_N^i = \frac{2R_N^i}{\Delta X_N^{i-1\to i+1}}$$

où R_N^i est la réaction normale de contact sur l'élément i et $\Delta X_N^{i-1\to i+1}$ est la variation d'abscisse entre les nœuds $i-1$ et $i+1$ prit dans le repère normal à la surface de contact.

2.2.2.3.b Analyse cinématique du contact de référence

Les pressions de contact sont les données d'entrée de l'analyse vibratoire. Il est donc important de les caractériser le plus précisément possible. Outre le niveau de pression, les statuts de contact à l'échelle locale sont un premier niveau d'analyse. Ils nous permettent de différencier la longueur de contact apparente (L.A.C.) et la longueur de contact effective(L.E.C.).
La **Longueur Apparente de Contact**, ou **L.A.C.**, représente la distance entre les deux noeuds les plus éloignés de la surface mise en contact. Dans le cas de référence, les noeuds les plus éloignés sont distants de 40 mm, soit la longueur du pion.
La **Longueur Effective de Contact**, ou **L.E.C.**, représente la longueur qui est réellement en contact avec le disque. Cette longueur est représentative de l'état réel de contact sur la surface de la garniture.
Ces deux notions sont très importantes puisqu'elles seront plus que largement exploitées dans les prochaines études.
Le tableau 2.2 donne l'angle de basculement, la position de la résultante et la longueur effective de contact dans le cas de référence. Le profil des pressions de contact est présenté sur la figure 2.11.

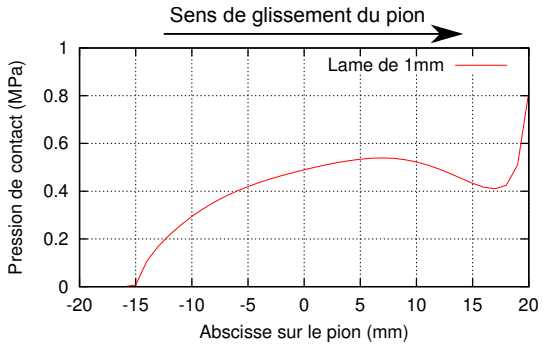


FIGURE 2.11 – Pressions de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène

Basculement de pion	$-6.3''$
Position de la résultante	$4.6mm$
L.E.C.	$35mm$

TABLE 2.2 – Basculement de pion et longueur effective de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène

A l'échelle macroscopique, le pion présente un basculement vers l'avant délivrant alors une surpression de contact. Ces observations sont dues au contact frottant sur le disque. Le basculement est très faible puisqu'il est de l'ordre de la seconde d'arc.
Le profil de pression est composé d'une surpression en entrée de contact (entre $x = 16mm$ et $x = 20mm$), suivi d'un profil concave dû à la géométrie du socle de garniture. La lame est fixée au socle de garniture entre $x = -10mm$ et $x = 10mm$ ce qui permet de transmettre une plus forte contrainte suivant la direction normale dans cette intervalle. Sur l'arrière du pion, un décollement de la garniture se produit. Dans ce cas de référence, ce décollement est de $5mm$. Ici, il caractérise la différence entre la LAC et la LEC.

2.2.2.3.c Flux de chaleur dissipée par frottement

Les pressions locales de contact permettent de calculer la puissance localement dissipée par frottement à chaque instant t. Cette puissance locale instantanée donne accès à une énergie locale totale.

La puissance locale dissipée par contact frottant est exprimée en W/m en supposant une largeur de garniture d'un mètre. Il s'agit donc ici d'une puissance linéique. Elle est calculée à l'aide de la formule suivante :

$$\mathcal{P}^i = \mu P_N^i V_T^i$$

où P_N^i est la pression normale locale au contact sur l'élément i et V_T^i est la vitesse tangentielle locale au contact.

L'énergie locale dissipée par frottement est obtenue en intégrant la puissance locale au cours du temps sur l'ensemble de la simulation. Elle est exprimée en J/m, et est calculée de la façon suivante :

$$\mathcal{E}^i = \int_0^T \mathcal{P}^i(t)dt = \delta t \times \sum_{j=0}^{N_T} \left[\frac{\mathcal{P}^i(t_j) + \mathcal{P}^i(t_{j+1})}{2} \right]$$

En considérant que la puissance dissipée $\mathcal{P}$ est entièrement convertie en flux thermique Q produit par frottement, on peut considérer que l'énergie sera entièrement convertie en énergie thermique. Puisque l'on calcule une puissance linéique locale, on ne calcule qu'un flux thermique linéique locale q_i qui s'exprime en W/m. Ainsi, $q^i(t) = \mathcal{P}^i(t)$ pour tout élément i et pour tout instant t. Ce flux instantané peut aussi être vu comme une densité linéique instantanée de flux thermique, mais dans la suite du manuscrit, nous parlerons simplement de flux thermique instantanée afin de simplifier la nomenclature.

2.2.2.3.d Analyse thermique du contact de référence

Comme tous les noeuds à la surface de la garniture glissent à une vitesse constante de 1m/s. La puissance locale instantanée est directement proportionnelle à la pression de contact. Elle a donc le même profil. Le contact dissipe une puissance instantanée de $4,5kJ/m$.

La seconde étape de calcul est l'analyse modale complexe qui est réalisée en injectant la pression de contact dans le modèle semi-analytique.

2.2.3 Modèle semi analytique pour le calcul vibratoire

2.2.3.1 Présentation du modèle

On utilise un modèle permettant de déterminer le comportement vibratoire du modèle selon différents états de contact. Dans un souci de gain de temps, le choix est fait de ne pas développer de méthode d'analyse modale en éléments finis pour Code-Aster. L'analyse modale est réalisée à l'aide d'un modèle semi-analytique simplifié. Il permet une résolution plus rapide et simplifiée du problème. Il permet aussi de prendre en compte de nombreux états de contact avec un gain de temps important. Ce modèle présente aussi un certain désavantage, il ne permet pas d'étudier l'ensemble des modes de disque sur une seule analyse. Il sera donc nécessaire d'étudier différents modes de disque de manière séparée.

Le modèle semi-analytique exploité pour effectuer l'analyse modale du système reprend celui présenté par Oura dans [Oura et al., 2009b]. Le modèle prend en compte 3 degrés de liberté. Deux degrés de liberté sont pris en compte pour le pion (basculement et translation) et un pour le disque (en translation). Ces degrés de libertés ont directement été impliqués dans des analyses modales complexes comme étant à l'origine d'instabilité vibratoire pouvant mener à du crissement (cf. [Duboc, 2013]), ce sont donc des degrés de liberté primordiaux pour notre étude. La raideur du matériau de friction et du contact sont confondues et elles sont modélisées par une succession de ressort. Le modèle est représenté sur la figure 2.13. Il est à mettre en lien avec la figure 2.12 qui représente un schéma complet du système pion-disque.

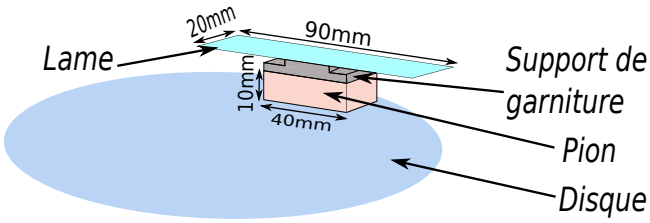


FIGURE 2.12 – Schéma du dispositif pion-disque

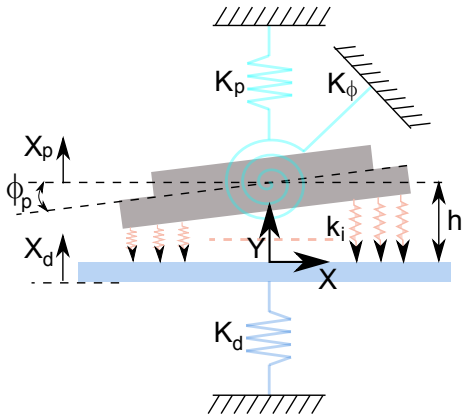


FIGURE 2.13 – Modèle semi-analytique à 3 degrés de liberté

L'équation dynamique du système est :

$$\begin{cases} M\ddot{x_d} = -K_d x_d - \int f dA \\ m\ddot{x_p} = -K_p x_p + \int f dA \\ J\ddot{\phi_p} = -K_\phi \varphi_p + \int \mu f l_G dA + \int f l dA \end{cases} \tag{2.3}$$

où M est la masse modale généralisée du disque, K_d la raideur équivalente en translation du disque, m la masse totale du pion, K_p la raideur en translation du pion, J le moment d'inertie du pion et K_ϕ la raideur en basculement du pion. l_G est la hauteur entre le centre de masse du pion et le contact. Les raideurs K_d, K_p et K_ϕ sont calculées à partir de M, m et J_ϕ ainsi que des fréquences propres correspondantes f_d, f_t et f_ϕ (resp. les fréquences en translation du disque, en translation du pion et en basculement du pion). Ces paramètres seront déterminés numériquement. f est le chargement appliqué entre le pion et le disque. Il est assimilé à un ressort continu. Elle est donc définit par :

$$f(l) = kx = k(x_d - x_p - l\varphi) \tag{2.4}$$

k est la raideur de contact et l l'abscisse au contact.
Les autres raideurs sont obtenues à partir de la formule donnant la période propre d'un système masse-ressort :

$$\begin{aligned} K_d &= 4\pi^2 f_d^2 M \\ K_p &= 4\pi^2 f_t^2 m \\ K_\phi &= 4\pi^2 f_\phi^2 J_\phi \end{aligned}$$

Après substitution de 2.4 dans 2.3, on utilise la transformée de Laplace pour obtenir l'équation caractéristique du système :

$$\begin{pmatrix} Ms^2 + K_d + \int kdA & -\int kdA & -\int kldA \\ -\int kdA & ms^2 + K_p + \int kdA & \int kldA \\ -\mu l_G \int kdA - \int kldA & \mu l_G \int kdA + \int kldA & J_\phi s^2 + K_\phi + \mu l_G \int kldA + \int kl^2 dA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_d \\ X_p \\ \phi \end{pmatrix} = 0 \tag{2.5}$$

Dans ce modèle, il est souhaitable d'intégrer une raideur de contact prenant en compte une dépendance des pressions de contact afin de déterminer au mieux les raideurs de contact. Dans [Oura et al., 2009a], les raideurs de contact sont fonction des pressions via une dépendance non linéaire :

$$k = nk_n{}^{\frac{1}{n}} p^{\frac{n-1}{n}} \tag{2.6}$$

où p est la pression locale au contact et n est un indice de non-linéarité et k_n est un coefficient de rigidité. Les intégrales sont discrétisées en utilisant une méthode classique de type rectangle :

$$\begin{aligned} \int kdA &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} nk_n{}^{\frac{1}{n}} p_i{}^{\frac{n-1}{n}} dx_i \\ \int kldA &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} nk_n{}^{\frac{1}{n}} p_i{}^{\frac{n-1}{n}} x_i dx_i \\ \int kl^2 dA &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} nk_n{}^{\frac{1}{n}} p_i{}^{\frac{n-1}{n}} (x_i)^2 dx_i \end{aligned} \tag{2.7}$$

L'utilisation de la relation 2.6 permet de choisir les paramètres de non-linéarités n et k_n. Ils déterminent la relation, en terme de linéarité, entre les pressions locales de contact et les raideurs de contact et dépendent du matériau étudié. Deux jeux de paramètres (tableau 2.3) ont été choisis afin de pouvoir prendre en compte les statuts de contact (avec des raideurs de contact constantes) ou les pressions de contact (avec des raideurs de contact non-linéaires).

n	k_n
1	$5.75e10$
2.14	$1,45e16$

Table 2.3 – Propriétés du contact (cf. [Oura et al., 2009a])

Le premier jeu de paramètre permet d'avoir une raideur indépendante de la distribution de pression. Les raideurs de contact sont alors calculées de la manière suivante : $k_i = k_n\{StatutContact\}_i$. Ce cas simplifie l'analyse des résultats et permet dans un premier temps de faciliter la compréhension des mécanismes menant à la confusion de mode. Nous parlerons dans ce cas de modèle à raideurs uniformes, c'est à dire indépendante de la charge.
Le second jeu de paramètre prend en compte l'aspect non-linéaire de la relation entre raideurs de contact et pressions locales. Ce modèle, dit modèle à raideurs non-linéaires, permet de prendre en compte l'influence de la pression lors des simulations.

Extractions de fréquences propres du système en fonction des valeurs propres obtenues Le calcul des valeurs des propres de la matrice caractéristique donne accès aux fréquences propres du système. Le calcul des valeurs propres est effectué sur le code de calcul libre Octave. Le système à résoudre est de la forme :

$$\{s^2[M] + [K]\}\{X\} = \{0\}$$

où s^2 la valeur propre.

On a :

$$s = \alpha + i\omega \Rightarrow s^2 = \alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega$$

La fréquence propre du système est donné par $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

On distingue deux cas : le cas où la valeur propre obtenue est réelle et le cas où elle est complexe. Dans le cas où la valeur propre est réelle, on a $s^2 = a$:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \omega^2 = a \\ 2\alpha\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \omega = -\sqrt{a} \end{cases}$$

Dans le cas où la valeur propre est complexe , $s^2 = a + ib$:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \omega^2 = a \\ 2\alpha\omega = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{b}{2\omega} \\ \frac{b^2}{4\omega^2} - \omega^2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{b}{2\omega} \\ \omega = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}} \end{cases}$$

La résolution de ce problème fournit les trois fréquences propres du système. Ainsi, il est possible de déterminer l'évolution des fréquences en fonction des conditions de contact et de savoir si il y a confusion de mode.

Choix des paramètres du modèle semi-analytique : Ce modèle permet de réaliser différentes études suivant les paramètres choisis pour la résolution du problème. Les fréquences propres f_d, f_t et f_φ ainsi que les masses et inerties M, m et J_φ sont des paramètres liés aux systèmes étudiés. Elles dépendent directement de l'architecture du système pion-disque étudié.

Une géométrie de disque ayant servi avec le dispositif expérimental de Duboc est exploitée afin de déterminer les propriétés liées au disque dans le modèle semi-analytique. Les fréquences propres du disque et les masses modales généralisées associées à chaque mode sont déterminées à partir d'un modèle éléments finis 3D du disque. La masse modale est déterminée numériquement : $M_\phi = \mathbf{\Phi}^t[\mathbf{M}]\mathbf{\Phi}$ où $\mathbf{\Phi}$ est la solution du problème $(-\lambda^2[\mathbf{M}] + [\mathbf{K}])\mathbf{\Phi} = 0$. Les données correspondantes à chaque mode de disque sont présentées dans les tableaux 2.4.
Les fréquences et masses du pion sont aussi issues de mesures expérimentales. Les moments d'inerties sont calculés à partir de la géométrie 3D du pion. Les propriétés du patin sont données dans le tableau 2.5. Dans le cas de référence, on exploite tout d'abord une géométrie de garniture avec une lame d'une épaisseur de $1mm$. Les configurations pour les épaisseurs de lame de 2 et $3mm$ seront exploitées dans une étude paramétrique.

mode propre	fréquence propre (Hz)	masse modale généralisée associée (g)
mode 2-0	1935	444
mode 3-0	2970	432
mode 4-0	4750	416

TABLE 2.4 – Propriétés du disque

2.2.3.2 Exploitation du modèle sur le contact de référence

Le contact de référence correspond au contact plan-plan. Comme précisé précédemment, trois modes propres de disque peuvent être pris en compte dans l'analyse modale. Afin d'analyser complètement ce contact de référence, les résultats de l'analyse modale seront présentés pour chaque mode de disque. Afin de simplifier l'écriture et d'éviter les redondances, nous parlerons de configuration 2d (resp. 3d et 4d) dans le cas où l'on prend en compte le mode de disque à 2 diamètres nodaux (resp. 3 diamètres nodaux et 4 diamètres nodaux).

épaisseur de lame	basculement (Hz)	inertie en basculement ($kg.m^2$)	translation (Hz)	masse (g)
1 mm	840	$1.9e-5$	444	79
2 mm	2107	$2.9e-5$	1122	93
3 mm	3460	$3.9e-5$	1877	110

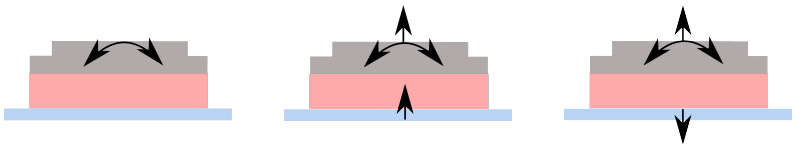
TABLE 2.5 – Propriétés du patin

2.2.3.2.a Identifications des déformées modales

Avant d'identifier les déformées modales, on rappelle qu'un vecteur propre possède trois composantes (equation 2.8) : la translation de disque X_d, la translation de pion X_p et le basculement de pion ϕ.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_d \\ X_p \\ \phi \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

De manière générale, trois types de modes propres sous condition de contact sont identifiables quelle que soit la configuration (mode de disque, raideur de contact ou propriétés du modèle éléments finis) avec laquelle on travaille. Les figures 2.14 représentent des schémas simplifiés des déformées modales identifiées.



(a) Type de mode t1 (b) Type de mode t2 (c) Type de mode t3

FIGURE 2.14 – Classification des principaux modes propres du système sous condition de contact

Afin de mieux les identifier, voici une courte description de chaque mode :
- Le type de mode t1 est caractérisé par un basculement pur du pion. Les composantes liées aux translations de disque et pion sont quasi-nulles (figure 2.14a).
- Le type de mode t2 est composé de basculement de pion, de translation de pion et de translation de disque où les deux translations sont en phase. C'est à dire que les composantes du vecteur propre associées aux translations sont de même signe (figure 2.14b).
- Le type de mode t3 est aussi composé de basculement de pion, de translations de disque et de pion mais, contrairement au mode précédent, avec translation déphasée. Les composantes du vecteur propre associées aux translations sont de signes opposés (figure 2.14c).

Dans chaque simulation effectuée, les déformées modales sont associées aux fréquences propres par analyse directe des composantes des vecteurs propres issus de la résolution du problème aux valeurs propres.

2.2.3.2.b Analyse modale avec raideurs de contact uniformes

Dans chaque configuration de disque exploitée, on obtient des fréquences propres sous condition de contact-frottant différentes. La figure 2.15 récapitule les fréquences propres obtenues et le type de mode associé en fonction de la configuration exploitée (2d,3d ou 4d).

Dans l'étude avec raideurs de contact constantes, on note que les fréquences propres des modes 2 et 3 varient très fortement par rapport au mode 1. Ces modes se distinguent du mode 1 par leurs composantes de translation (de pion et de disque) non-nulles. La modification de la fréquence de translation de disque hors contact n'impacte que sur les modes prenant en compte cette composante.
Trois situations modales différentes sont obtenues à travers les trois configurations de disque exploitées. Avec la configuration 2d, le mode 2 (de type t2) a une fréquence propre inférieure au mode 1 (de type t1) elle-même inférieure à la fréquence propre du mode 3 (de type t3). Avec la configuration 3d, les modes 1 et 2 présentent une confusion de fréquence, ou mode lock-in, et le mode 3 a une fréquence supérieure aux autres. Dans la configuration 4d, le mode 1 à la fréquence propre la plus faible et le mode 3 a la fréquence propre la plus élevée. Le tableau 2.6 synthétise cette observation.

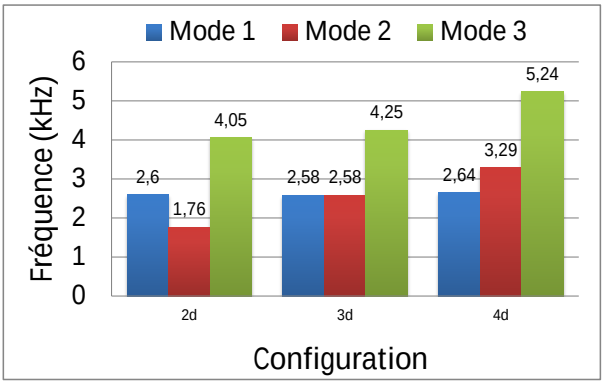


FIGURE 2.15 – Fréquences propres sur disque plan en prenant en compte des raideurs de contact uniformes

configuration	Organisation
2d	freq 2 < freq 1 < freq 3
3d	freq 1 = freq 2 < freq 3
4d	freq 1 < freq 2 < freq 3

TABLE 2.6 – Organisation des fréquences propres sur disque plan dans l'analyse modale avec raideurs de contact uniformes.

Il est aussi nécessaire de remarquer un détail obtenu sur la configuration 3d. Sur cette configuration, une confusion entre les modes 1 et 2 est obtenue. Les déformées modales correspondant aux fréquences confondues deviennent identiques et correspondent au type de mode t1, équivalent à un basculement de pion pur.

2.2.3.2.c Analyse modale avec raideurs de contact non-linéaires

Les différentes fréquences propres et types sont synthétisés sur la figure 2.16. La pression au contact correspond alors à la courbe 1 de la figure 2.25.

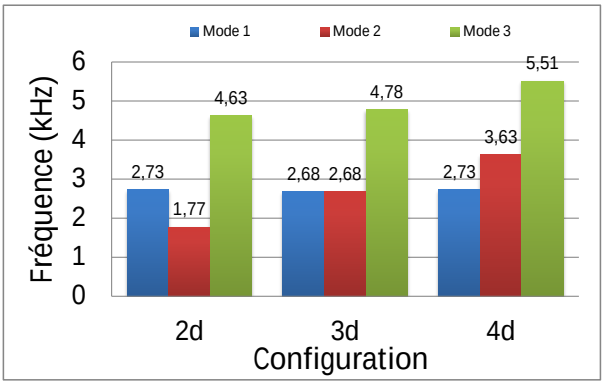


FIGURE 2.16 – Fréquences propres sur disque plan en prenant en compte des raideurs de contact non-linéaires

En prenant en comptes des raideurs de contact non-linéaires dans l'analyse modale complexe, on retrouve des résultats, dans l'ensemble, très similaires aux résultats avec raideurs de contact uniformes. Seules les fréquences propres 2 et 3 sont sensiblement impactées par le mode de translation de disque pris

en compte. La configuration 3d présente aussi une confusion de fréquence entre les modes 1 et 2 avec des déformées associées de types t1. L'ordre des fréquences est le même que celui présenté sur le tableau 2.6.

Maintenant que la démarche de calcul a été appliquée une première fois et que la situation de référence (un contact plan-plan avec des propriétés de matériaux homogènes) a été présentée, une première simulation en présence d'une ondulation de disque peut être étudiée. Afin de servir de point de comparaison aux prochaines études à venir, on commence par se placer dans le cas d'une ondulation de référence.

2.3 Ondulation de disque de référence

Dans cette section, l'étude d'une ondulation de disque sera menée. Elle servira de point de référence pour toutes les études prenant en compte un défaut de forme de disque. Les paramètres de cette ondulation de référence seront présentés. On exposera les résultats en commençant par une analyse globale du comportement du système, suivie par une analyse de l'évolution du contact. Ensuite, les impacts de l'ondulation sur la dissipation d'énergie au contact et sur les instabilités dynamiques de type vibratoire seront présentés.
Il est rappelé que, dans le cas de référence, une lame d'une épaisseur de $1mm$ est utilisée. De plus, le franchissement de l'ondulation se fait avec un effort normal imposé constant de $300N$.

2.3.1 Introduction d'un ondulation de disque

2.3.1.1 Modélisation de l'ondulation

Avant de s'intéresser à un profil réel de disque, on s'intéresse à une ondulation théorique décrite à partir d'une courbe de Bézier. Ce type de courbe présente l'avantage d'être une surface de classe C^∞. On choisit de l'utiliser une courbe de Bézier de degré 5 car ce degré permet d'obtenir une tangente horizontale à chaque extrémité de l'ondulation et d'imposer l'amplitude de l'ondulation à partir des ses points de construction et de son équation. De la même manière,en posant quelques hypothèses, il est facile de déterminer les points nécessaires pour la construction d'une ondulation d'amplitude choisie.

Soit une courbe de Bézier de degré $n = 5$. L'équation paramétrique de cette courbe s'écrit :

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (1-t)^{n-i-1} t^i A_i, \qquad t \in [0;1]$$

où les A_i sont les points de construction.
En supposant que $Y_{A_i} = 0$ pour $i \in \{0;1;3;4\}$, on obtient aisément l'amplitude maximale de l'ondulation H :

$$H = \max_t (Y_{B(t)}) = \frac{3}{8} Y_{A_3}.$$

Le disque est décomposé en 3 parties (figure 2.17). Une première zone plane de $100mm$ est modélisée, suivie d'une zone présentant une ondulation d'une longueur L et d'une hauteur H et achevée par une dernière zone plane de $100mm$. L'ajout de zone plane permet d'établir un régime transitoire (dynamique et thermique) avant le passage de l'ondulation et d'y revenir afin de servir de point de comparaison.

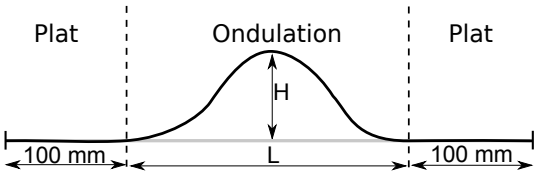


FIGURE 2.17 – Ondulation du disque modélisée par une courbe de Bézier

Dans un cas de référence, une longueur de $L = 200mm$ et une hauteur $H = 50\mu m$ sont prises en compte. Cette longueur est équivalente à la demi-circonférence moyenne de la bande de frottement pour un disque de $200mm$ de diamètre. Le maillage est optimisé pour obtenir le maillage le plus grossier possible avec des résultats fiables. Un maillage de disque trop fin donne une bonne résolution du contact mais des temps de calculs allongés alors qu'un maillage trop grossier donne de meilleur temps de calcul mais ne permet pas une bonne projection des noeuds de la surface de la garniture dégradant ainsi la

résolution du contact. Un maillage quadrangle avec une taille de maille de $2mm$ suffit à réaliser les études.

Différents paramètres peuvent être étudiés. Ainsi, la longueur de l'ondulation et la hauteur sont des paramètres qui seront pris en compte par la suite. Ils feront l'objet d'études paramétriques.

2.3.1.2 Paramètres de l'étude d'une ondulation de référence

Lors du passage de l'ondulation de référence, le patin est composé d'un pion d'une longueur de $40mm$ et d'une lame de $1mm$ d'épaisseur (figure 2.5). L'ondulation a une longueur $L = 200mm$ et une hauteur $H = 50\mu m$. La longueur du disque correspond au demi-périmètre de la bande de frottement sur un disque de $200mm$. La hauteur de disque $H = 50\mu m$ correspond à l'amplitude moyenne d'ondulation d'un disque poli. Le contact est pris en compte avec un coefficient de frottement de 0.3. Le patin franchit l'ondulation avec une vitesse de $1m/s$. On rappelle que cette vitesse approxime une vitesse de rotation de $200tours/min$ sur la bande de frottement pour un disque de diamètre $250mm$.

N.B. : Relation entre temps et position de pion

Quelques précisions sont nécessaires afin de pouvoir lire clairement les résultats qui suivront. A l'instant initial $t = 0s$, la garniture se place entre l'abscisse $x = 0m$ et $x = 0.04m$ du disque. A un instant t quelconque, la garniture se situe sur le disque entre $x = (t)$ m et $x = (t{+}0.04)$ m (Attention : la valeur t apparaissant dans les abscisses correspond à la valeur adimensionnée). Le schéma 2.18 illustre cette relation.

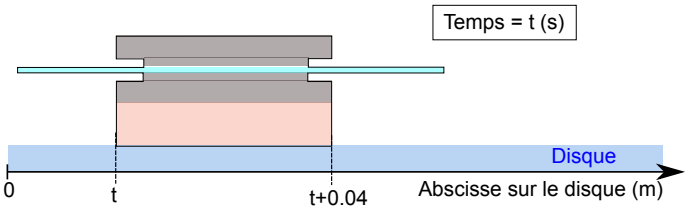


FIGURE 2.18 – Relation entre temps et position du patin sur le disque

La piste étant composée de $0.1m$ de plat, $0.2m$ d'ondulation et $0.1m$ de plat, la garniture s'engage donc sur l'ondulation à $t = 0.06s$. La fin de l'engagement se situe à $t = 0.1s$. L'avant de la garniture atteint le sommet de l'ondulation à $t = 0.16s$ et a complètement franchi le sommet d'ondulation à $t = 0.2s$. De la même manière, la garniture commence à sortir de l'ondulation à $t = 0.26s$ et elle en est complètement sortie à $t = 0.3s$.

2.3.1.3 Cinématique du patin

Tout d'abord, on commence par présenter la cinématique du patin.

Comportement macroscopique du pion

Pour décrire le comportement macroscopique du pion on s'appuie sur le basculement de la partie supérieure du socle de garniture. La figure 2.20 représente l'angle de basculement du pion en fonction de la position du centre du pion et l'angle du disque moyenné sur $40mm$. L'angle du disque représenté correspond à l'angle moyen directement sous la surface de contact du pion. La figure 2.19 permet de donner le sens du signe des angles (i.e. le sens trigonométrique).

L'angle du pion est très proche de l'angle marqué par le disque sous la surface de contact du pion. Le basculement est toujours inférieur à l'angle du disque à cause de l'effet d'engagement du pion dû au frottement. L'écart entre les deux angles varie légèrement. Cette variation peut être due aux conditions de contact sous le pion.
Sur disque plan, le socle bascule légèrement en avant ($-6.3''$). Lors de la phase de montée d'ondulation, ce basculement s'inverse. Il bascule progressivement en arrière jusque $2'14''$. Dans la descente, le socle bascule de nouveau vers l'avant jusque $-2'38''$. Puis le pion sort de la garniture et son basculement revient à sa valeur sur disque plan. Le basculement du socle n'est pas symétrique sur la montée et la descente d'ondulation du fait du frottement.

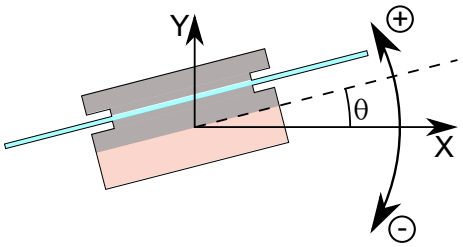


FIGURE 2.19 – Sens positif du basculement de pion

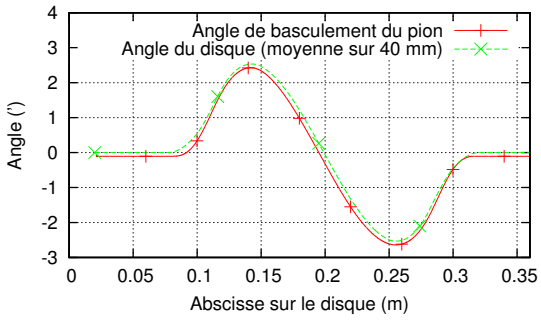


FIGURE 2.20 – Basculement du pion et angle du disque moyenné sur $40mm$ au cours du temps

Schématisation des principaux états de contact

La figure 2.21 contient des schémas illustrant les différentes situations de contact lors du passage de l'ondulation. Il ne s'agit que d'illustrations. Les dimensions et les cas représentés n'y sont pas tout à fait exacts et ils ne doivent servir qu'a visualiser les différentes situations rencontrées.

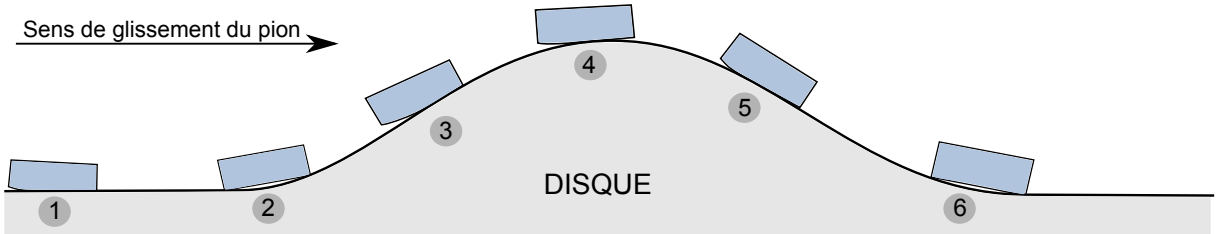


FIGURE 2.21 – Illustration amplifiée des différentes situations de contact rencontrées lors du passage d'ondulation

Sur le schéma 6 situations sont représentées.

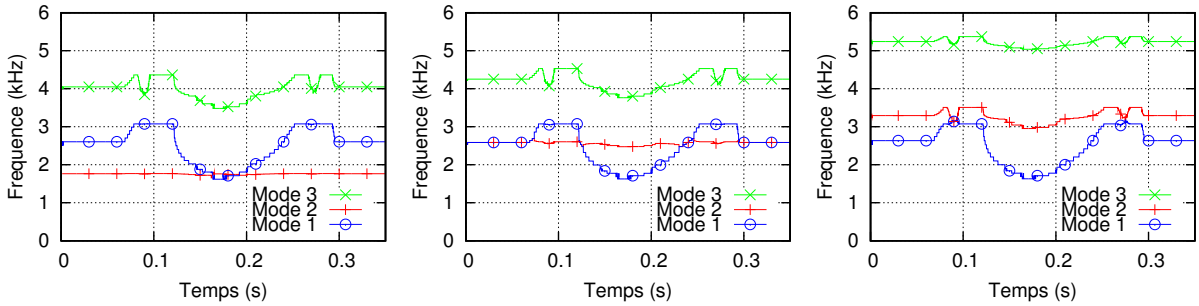
- La première situation (figure 2.21-1) correspond au disque plan qui a été présenté dans la précédente section.
- Le seconde situation (figure 2.21-2) apparaît lorsque le pion s'engage dans l'ondulation. Le pion est alors en appui sur l'avant et l'arrière simultanément. Il s'agit d'une situation de double contact.
- Dans la troisième situation (figure 2.21-3), le pion est dans la montée d'ondulation. Dans cette situation, on retrouve un décollement de la garniture uniquement en sortie de contact.
- Lorsque le pion atteint le sommet de l'ondulation (figure 2.21-4), l'ouverture de contact en sortie de garniture subsiste et un autre décollement apparaît à l'avant de la garniture. Dans cette situation, le contact est donc fermé uniquement au centre de la garniture.
- Lors de la descente de l'ondulation (figure 2.21-5), il n'y de décollement de la garniture qu'en sortie de contact.
- La dernière situation (figure 2.21-6) se produit sur la fin de l'ondulation. On retrouve une situation analogue à l'entrée d'ondulation. Le décollement se situe au centre de la garniture et laisse place à un contact fermé en avant et en arrière de la garniture.

2.3.1.4 Étude des instabilités dynamiques : Cas du crissement

Cette partie expose les résultats de l'analyse modale complexe issue du modèle semi-analytique simplifié.

2.3.1.4.a A.M.C. avec raideurs uniformes

Dans cette partie, on exploite les statuts de contact issus du calcul E.F. Ce cas est le plus simple, car il ne tient pas compte de la pression de contact locale. L'évolution des fréquences propres du système au passage de l'ondulation est présentée pour chaque mode de disque pris en compte (2d, 3d et 4d) (figures 2.22).



(a) configuration 2d (b) configuration 3d (c) configuration 4d

FIGURE 2.22 – Fréquences propres dans le cas de raideurs de contact constantes

Quelle que soit la configuration étudiée, l'évolution du mode 1 (correspondant à un mode de basculement de pion pur) est toujours la même. Les modes 2 et 3 conservent des variations comparables mais avec des valeurs moyennes et des amplitudes de variations différentes. L'augmentation de la fréquence de disque sans contact implique uniquement une augmentation significative des fréquences 2 et 3.
Dans toutes les configurations, la fréquence 1 a un maximum de $3000Hz$ en entrée et sortie d'ondulation et un minimum de $1700Hz$ en sommet d'ondulation. Au total, la fréquence 1 varie de $1300Hz$.
Dans la configuration 2d, le mode 2 a une amplitude de variation quasi-nulle alors que le mode 3 a une variation d'une amplitude de $500Hz$. La fréquence 2 se situe aux alentours des $1750Hz$, ce qui lui permet de se confondre avec la fréquence 1 en sommet d'ondulation.
Dans la configuration 3d, le mode 2 a une amplitude de variation légèrement supérieure à celle de la configuration 2d ($50Hz$). Le mode 3 a une amplitude de variation légèrement inférieure ($400Hz$). La fréquence 2, ayant un niveau moyen plus élevé ($2600Hz$), se confond avec la fréquence 1 sur disque plan et brièvement durant la montée et la descente de l'ondulation.
Dans la configuration 4d, les modes 2 et 3 ont des amplitudes de variation équivalentes (entre 300 et $400Hz$). Le niveau moyen de la fréquence 2 étant encore plus élevé ($3300Hz$), elle peut venir se confondre à la fréquence 1 en entrée et en sortie d'ondulation.

Comme précisé précédemment, le mode 1 est de type t1, le mode 3 est de type t3 et le mode 2 est de type t2 sauf lors des confusions dans lesquelles le mode 2 devient un mode complexe avec une déformée identique au mode 1 de type t1.

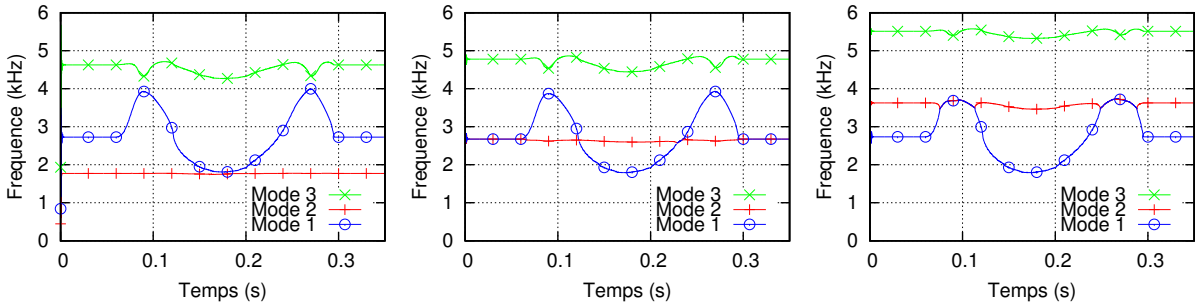
En conclusion, on peut donc dire que le mode le plus impacté par les conditions de contact est le mode de basculement de pion. Dans la configuration 3d, le système n'admet aucune confusion lors de l'ondulation alors qu'il y a confusion sur disque plan. Dans la configuration 4d, pas de confusion sur disque plan mais des confusions apparaissent en entrée et en sortie d'ondulation.

2.3.1.4.b A.M.C. avec raideurs non-linéaires

Dans cette partie, on exploite le modèle d'analyse semi-analytique avec raideurs de contact non-linéaires. Ce modèle va permettre d'intégrer l'influence de la pression de contact. Ce qui apporte un paramètre local supplémentaire (en complément des statuts de contact) dans l'étude des évolutions des modes.
Les figures 2.23 présentent l'évolution des fréquences propres au cours du passage de l'ondulation pour le modèle avec raideurs de contact non-linéaires.

L'évolution des pressions de contact étant très progressive, les fréquences propres ont une évolution qui se fait de manière plus continue. L'évolution des fréquences est une fois de plus très comparable entre les différentes configurations.
Avec des raideurs non-linéaires, les variations des fréquences sont très semblables à celles observées avec des raideurs uniformes. Toutefois, il y a quelques différences à relever. Avec raideurs non-linéaires, la fréquence 3 dans toutes les configurations, ainsi que la fréquence 2 dans la configuration 4d, sont plus hautes en fréquence. Aussi, la fréquence 1 admet de plus grandes variations avec ce type de raideurs. Ici, la fréquence 1 a des variations supérieures à $2200Hz$.

Lors des confusions, la déformée modale associée au mode 2 devient une fois de plus identique à la déformé du mode 1, c'est à dire un mode de basculement de pion pure (type t1).



(a) Mode disque 2d (b) Mode disque 3d (c) Mode disque 4d

FIGURE 2.23 – Fréquences propres dans le cas de raideurs de contact non-linéaires

2.3.1.4.c Bilan et conclusions de l'analyse modale sur le cas de référence

L'analyse modale avec raideurs au contact constantes et l'analyse modale avec raideurs de contact non-linéaires donnent des résultats assez proches.

A chaque fois, le mode de basculement de pion (c'est à dire le mode 1) est le plus influencé par le passage de l'ondulation. Les modes 2 et 3 possèdent des composantes non nulles en translation de disque et sont donc liés à la fréquence de translation de disque sans contact. L'augmentation de cette dernière implique une augmentation des fréquences 2 et 3. Par ce mécanisme, la fréquence 2 peut venir se confondre avec la fréquence 1 en différents instants. Elles se confondent en sommet d'ondulation dans la configuration 2d, sur disque plan et durant la montée et/ou la descente d'ondulation dans la configuration 3d et en entrée et sortie d'ondulation dans la configuration 4d.
La prise en compte d'une ondulation change les fréquences propres et fournit des propriétés vibratoires totalement différentes de celles sur disque plan.

2.3.1.5 Lien avec l'évolution du contact local

Les fréquences propres sont en lien direct avec les pressions de contact. L'évolution des statuts de contact et des pressions peuvent permettre de mieux comprendre les évolutions des fréquences propres. On commence tout d'abord par analyser en détail l'évolution des pressions de contact avant de la mettre en lien avec l'évolution des fréquences propres.
Les figures 2.25 et 2.24 représentent les distributions de pression aux différents instants et pour effort normal imposé constant de $300N$. La figure 2.24 donne l'évolution au cours du temps lors du passage de l'ondulation. Sur la figure 2.25, des répartitions de pressions à des instants choisis sont représentées. Ces répartitions de pressions ont été choisies afin de mieux observer les différents profils rencontrés lors de la simulation.

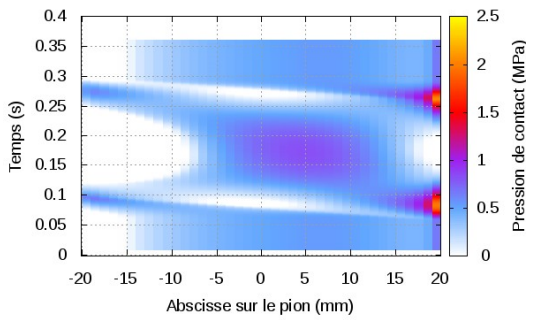


FIGURE 2.24 – Évolution de la distribution de pression de contact au passage d'une ondulation

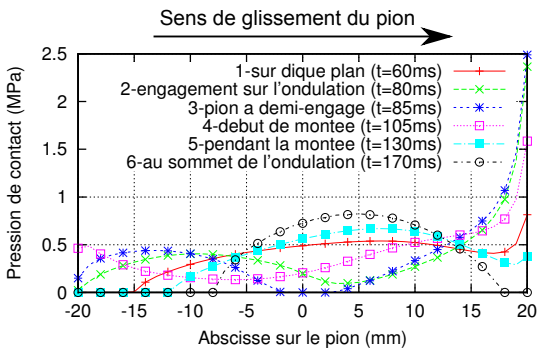


FIGURE 2.25 – Distribution de pression de contact à différents instants

Sur disque plan, le profil-type de distribution de pressions de contact sur disque plan est observé. Il correspond à la courbe 1 de la figure 2.25. Il est composé d'une surpression en entrée de contact, d'un

profil concave.
Lors du passage de l'ondulation, les pressions de contact évoluent fortement. Il est possible de résumer l'évolution des pressions à deux localisations extrêmes de contact (en entrée d'ondulation et au sommet d'ondulation).
En entrée d'ondulation, le décollement a disparu et il y a une ouverture de contact au centre de la garniture. La pression a un profil presque totalement convexe. Le contact repose alors sur les bords de la garniture (courbe 3 de la figure 2.25).
Au sommet de l'ondulation, le contact se localise au centre de la garniture uniquement. Il y a un décollement en entrée et en sortie de contact et le profil des pressions est concave (courbe 6 de la figure 2.25).
En sortie d'ondulation, les pressions sont très similaires à celles obtenues en entrée d'ondulation.

L'évolution des fréquences propres peut être facilement reliée à l'évolution des statuts de contact. La figure 2.27 donne les statuts de contact sur la garniture à chaque instant de la simulation et la figure 2.26 représente la longueur effective de contact.

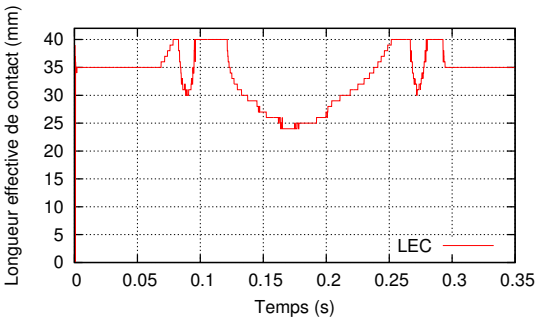


FIGURE 2.26 – Évolution de la longueur effective de contact (LEC) au passage d'une ondulation

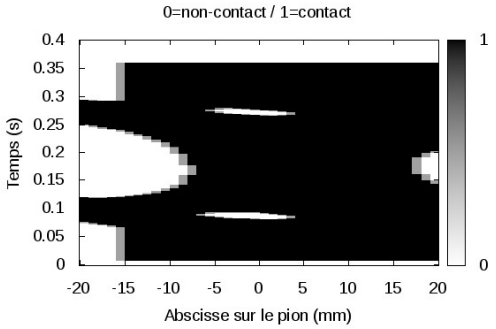


FIGURE 2.27 – Évolution des statuts de contact au passage d'une ondulation

Dans toutes les configurations d'analyse modale avec raideurs uniformes (2d, 3d et 4d), les fréquences 2 et 3 ont le même sens de variation que la longueur effective de contact. La fréquence 1 a un sens de variation très proche à l'exception des variations dues à l'ouverture interne de contact. Les variations de la fréquences 1 semblent ne tenir compte que de la distance entre le premier et le dernier noeud en contact.

Dans l'analyse avec raideurs de contact non-linéaires, les fréquences ont des variations très proches du cas avec raideurs uniformes. La fréquence 1 est liée à la localisation du contact. Lorsque le contact est large (proche des bords de la garniture) avec une surpression en avant et en arrière de la garniture (courbe 3 de la figure 2.25)), la fréquence 1 augmente. Lorsque le contact se localise au centre de la garniture (courbe 6 de la figure 2.25), la fréquence 1 diminue. La fréquence 2 reste constante et la fréquence 3 est toujours guidée par la longueur effective de contact mais dans une moindre mesure. Elle croit légèrement lorsque la LEC augmente et elle décroit légèrement lorsque la LEC diminue.

2.3.1.6 Énergie dissipée sur l'ondulation de référence

La figure 2.28 représente l'énergie totale dissipée par frottement.

Une fois le régime constant, l'énergie dissipée est constante. La partie plane du disque située juste avant le début de l'ondulation ($x = 0.09m$) dissipe beaucoup d'énergie alors que le début de l'ondulation ($x = 0.11m$) dissipe beaucoup moins. Durant la montée, le passage du sommet et la descente de l'ondulation, l'énergie dissipée est quasi-constante et égale à celle dissipée avec un disque plan. La sortie d'ondulation est assez symétrique à l'entrée d'ondulation. Il y a une diminution de l'énergie dissipée juste avant la fin de l'ondulation ($x = 0.29m$) suivie d'une augmentation juste après la fin de l'ondulation ($x = 0.31m$).

Bien que le coefficient de frottement et l'effort normal imposé soient des constantes ($\mu = 0.3$ et $F = 300N$), le passage d'une ondulation modifie complètement l'énergie générée par frottement en entrée et en sortie d'ondulation.

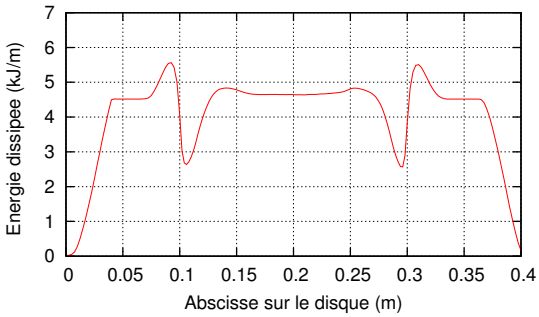


FIGURE 2.28 – Energie locale dissipée sur le disque au passage d'une ondulation

Lien entre pressions de contact et énergie dissipée :
La puissance locale instantanée dissipée par frottement fait le lien entre les pressions de contact et l'énergie totale dissipée. Elle est représentée sur la figure 2.29.

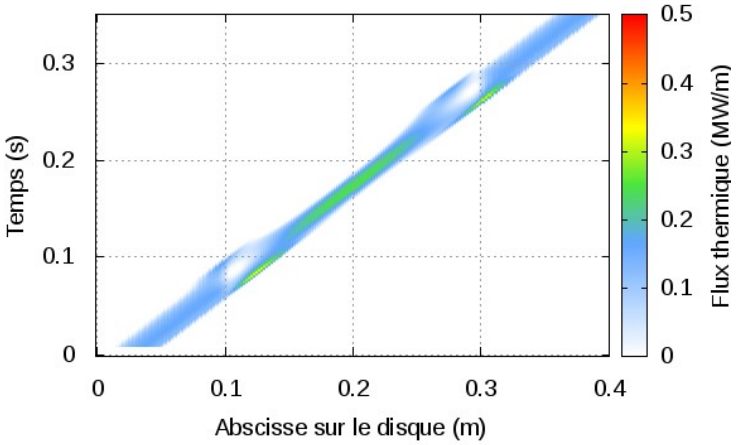


FIGURE 2.29 – Puissance locale dissipée par frottement au passage d'une ondulation

La fluctuation de l'énergie dissipée n'est pas due à une variation de la charge normale totale. Elle est uniquement due à l'évolution de la localisation des pressions de contact locales. Juste avant le début de l'ondulation, la diminution du décollement à l'arrière du pion est à l'origine de l'augmentation d'énergie dissipée sur le disque. Juste après le début de l'ondulation, c'est l'apparition de l'ouverture de contact au centre de la garniture qui entraîne une annulation de la puissance dissipée sur cette zone du disque pendant quelques instants, et donc une diminution de l'énergie totale dissipée sur cette partie du disque.

En sortie d'ondulation, ces phénomènes ont des conséquences assez similaires. Juste avant la fin de l'ondulation, l'ouverture de contact interne entraîne une baisse de l'énergie dissipée. Juste après la fin de l'ondulation, la surpression croissante en entrée de contact du pion augmente l'énergie dissipée.

L'énergie dissipée au passage d'une ondulation n'est donc pas uniforme. Cette non-uniformité est due à l'évolution, et aux localisations, des pression de contact.

2.3.1.7 Conclusion sur l'ondulation de référence

Le passage de l'ondulation fait apparaître une influence non-linéaire du matériau et du contact sur les instabilités vibratoires du système et sur la dissipation thermique. Elle engendre une répartition non-uniforme de l'énergie dissipée sur le disque et entraîne une variation des fréquences propres du système. Sur ce dernier point, l'évolution du contact impact surtout sur le mode de basculement du pion. Ceci implique qu'une configuration instable sur disque plan peut devenir stable lorsque l'on intègre l'ondulation du disque (configuration 3d) et, inversement, une configuration stable sur disque plan peut devenir instable

en intégrant l'ondulation du disque (configuration 4d). Dans la configuration 4d avec raideurs de contact non-linéaires, des instabilités sont apparues en entrée et en sortie d'ondulation, ce qui nous ramène aux observations expérimentales où un disque était crissant lors des montées d'ondulation.

2.4 Paramètres liés à l'ondulation

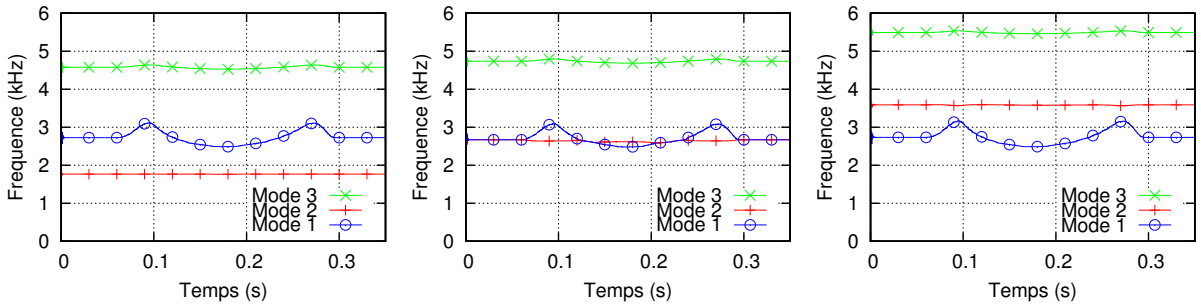
Les premiers paramètres qui seront étudiés sont liés à l'ondulation du disque. L'ondulation est définie par deux paramètres : sa longueur et sa hauteur.

2.4.1 Influence de la hauteur du défaut de forme

Précédemment, il a été montré que la présence d'une ondulation sur le disque modifiait les conditions de contact et de pressions, ce qui impacte directement la dissipation d'énergie par frottement. Comme l'ondulation du disque est due aux conditions de fabrication et de montage du disque, elle varie fortement en amplitude. Le cas de référence choisi correspond à une ondulation de $50\mu m$. Dans de mauvaises conditions de fabrication et de montage, l'ondulation réelle peut être supérieure à $50\mu m$. Il serait intéressant d'étudier l'impact de l'amplitude de l'ondulation sur les phénomènes thermique et vibratoire.
Sans aller jusqu'à des amplitudes extrêmes, il est courant de rencontrer une ondulation de l'ordre de la centaine de microns. En conséquence, une étude a été consacrée à l'étude de l'influence de la hauteur de l'ondulation allant de 10 à 90 μm.
Dans un premier temps, les énergies dissipées par frottement et les fréquences propres seront comparées suivies de retour sur l'impact des pressions de contact.

2.4.1.1 Influence sur les instabilités dynamiques

On commence par analyser l'influence d'une hauteur d'ondulation réduite $H = 10\mu m$ (figues 2.30). Celle-ci limite l'évolution des fréquences propres et réduit donc l'impact sur les instabilités.



(a) config. 2d et $H = 10\mu m$ (b) config. 3d et $H = 10\mu m$ (c) config. 4d et $H = 10\mu m$

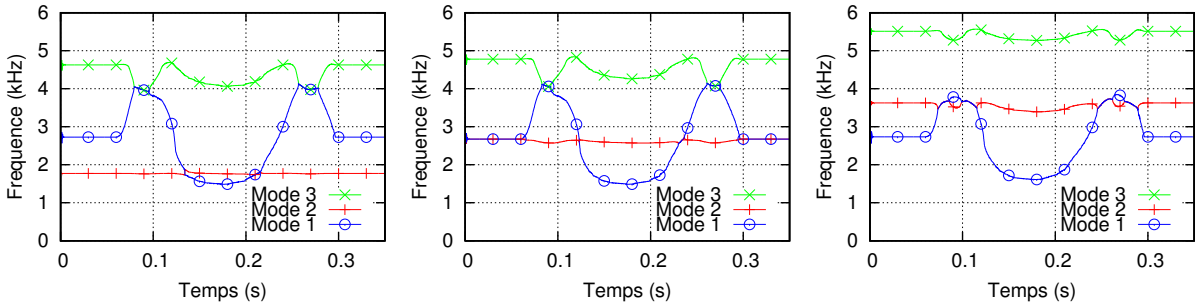
FIGURE 2.30 – Fréquences propres dans le cas non-linéaire avec des ondulations d'amplitudes $H = 10\mu m$

Ensuite, on s'intéresse à des ondulations de hauteurs supérieures à $50\mu m$. Les résultats sur des amplitudes de $70\mu m$ ou $90\mu m$ sont présentés sur les figures 2.31.
Une ondulation plus grande entraîne des variations de fréquences accrues, que ce soit dans l'analyse avec raideurs constantes ou avec raideurs non-linéaires. Dans les configurations 2d et 3d, l'augmentation de l'amplitude de l'ondulation entraîne une confusion entre les modes 1 et 3 en entrée et en sortie d'ondulation. Dans la configuration 4d, à partir de $H = 70\mu m$, les fréquences 1 et 2 sortent de la confusion et la fréquence 1 devient supérieure à la fréquence 2 pendant environ $0.01s$ en entrée et en sortie d'ondulation.

2.4.1.2 Impact sur la dissipation thermique

Comme l'amplitude d'une ondulation a une influence directe sur les pressions de contact, il est normal qu'elle influe sur l'énergie locale dissipée par frottement (figure 2.32).

L'allure des variations est proche dans les 3 cas présentés. Il a déjà était montré comment une amplitude moyenne amenait des disparités dans la dissipation d'énergie sur le disque (page 66). Une amplitude de battement plus élevée amène des disparités accrues ainsi qu'une augmentation de l'énergie dissipée



(a) config. 2d et $H = 90\mu m$ (b) config. 3d et $H = 90\mu m$ (c) config. 4d et $H = 70\mu m$

FIGURE 2.31 – Fréquences propres dans le cas non-linéaire avec des ondulations d'amplitudes supérieures à $H = 50\mu m$

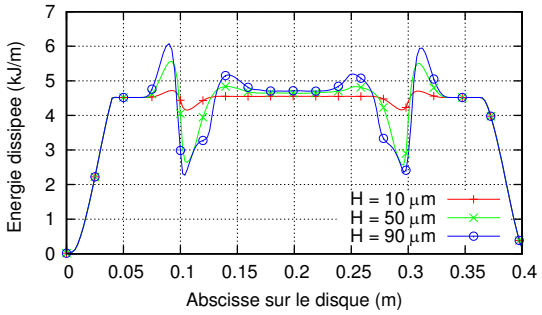


FIGURE 2.32 – Énergie locale dissipée par frottement pour différentes hauteurs de battement

durant la montée et la descente de l'ondulation.

2.4.1.3 Mise en lien avec le contact

Sur les figures 2.33, on expose les pressions de contact associées à des ondulations de 10, 50 et $90\mu m$.

L'accroissement du phénomène de dissipation thermique est dû à une augmentation des ouvertures internes de contact ainsi qu'à un accroissement des localisations de pression en avant et en arrière lors de l'entrée et de la sortie d'ondulation.

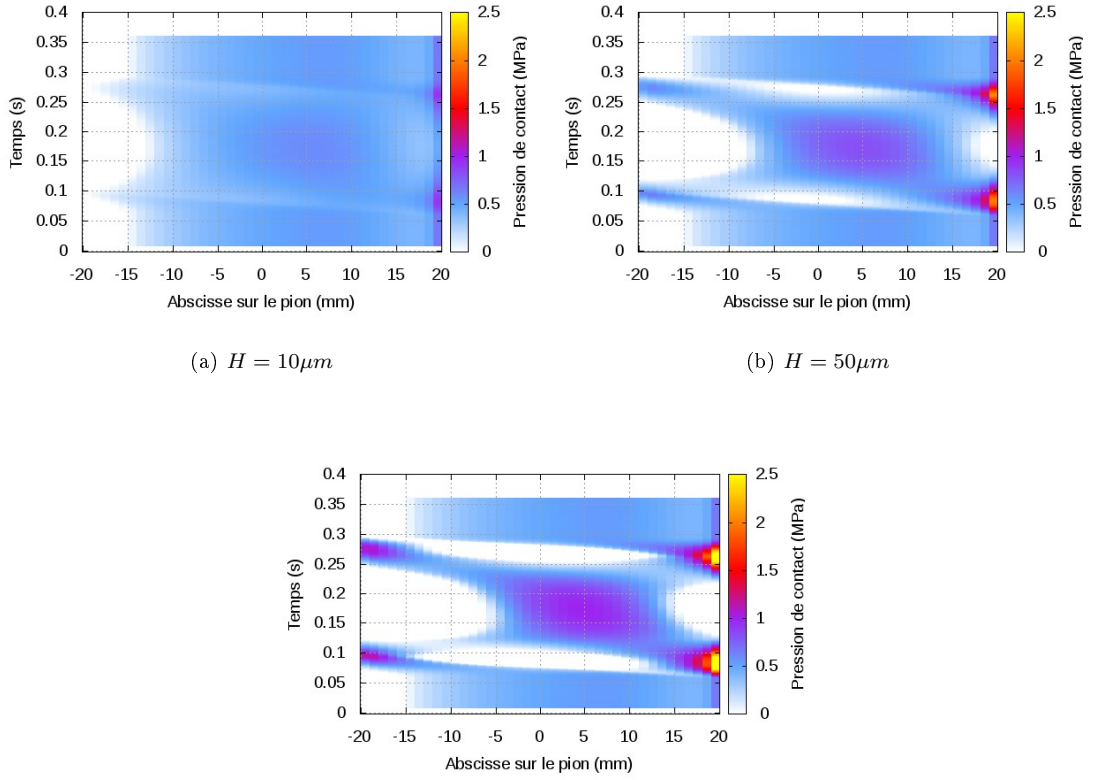
Ces localisations de contact et de pressions impactent aussi les fréquences propres. L'augmentation de l'ouverture interne de contact entraîne une plus forte décroissance de la fréquence 3 en entrée et en sortie d'ondulation alors que l'augmentation des surpressions en avant et en arrière de la garniture aux mêmes instants implique une augmentation de la fréquence 1. Ces deux mécanismes joints entraînent la confusion des modes 1 et 3.

2.4.2 Influence de la longueur du défaut de forme

Les disques de freinages n'ont pas tous les mêmes dimensions. De plus, certain profils de disque présentent plusieurs ondulations sur un tour de disque. La longueur d'une ondulation est donc aussi variable. Cette partie a pour but d'étudier l'influence de la longueur du défaut de forme. Des ondulations de $100mm$ et $300mm$ de longueur ont été prises en compte.

2.4.2.1 Influence sur les instabilités dynamiques

En premier lieu, les résultats pour une hauteur d'ondulation $L = 300mm$ sont présentés. La figure 2.34 présente les évolutions des fréquences propres dans les configurations 2d, 3d et 4d pour une ondulation d'une longueur $L = 300mm$. Une ondulation avec ces longueur et hauteur, $L = 300mm$ et $H = 50\mu m$, donne des variations de fréquences semblables à une ondulation de longueur $L = 200mm$ et de hauteur $H = 30\mu m$.

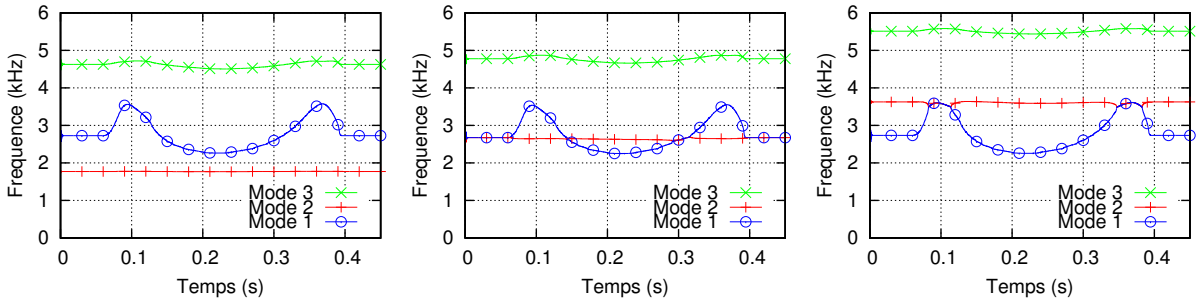


(a) $H = 10\mu m$

(b) $H = 50\mu m$

(c) $H = 90\mu m$

FIGURE 2.33 – Évolution de la pression locale de contact sur la garniture pour différentes hauteurs de battement

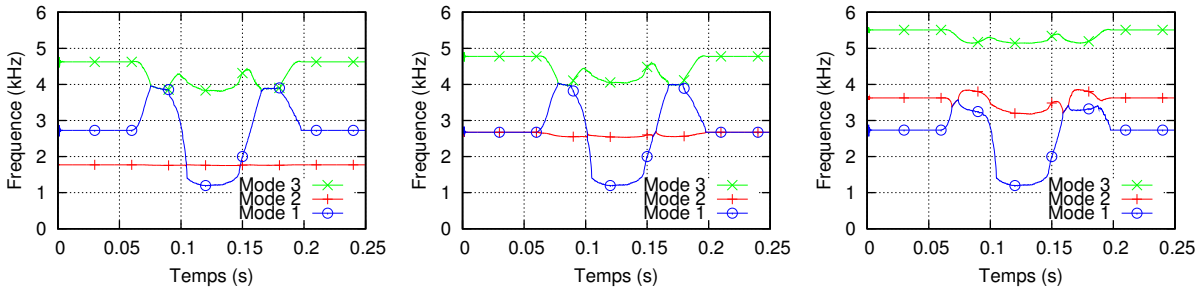


(a) config. 2d (b) config. 3d (c) config. 4d

FIGURE 2.34 – Fréquences propres dans le cas non-linéaire avec des ondulations d'une longueur de $L = 300mm$

L'analyse avec raideurs constantes donne des résultats de même tendance que dans l'analyse avec raideurs non-linéaires.
Pour une longueur réduite ($L = 200mm$), les fréquences propres dans les trois configurations sont présentées sur les figures 2.35.

Les fréquences obtenues avec une ondulation de $100mm$ de longueur et de hauteur $H = 50\mu m$ sont très semblables aux fréquences obtenues avec une ondulation de $200mm$ de longueur et $90\mu m$ d'amplitude, soit une confusion entre les modes 1 et 3 en entrée et sortie d'ondulation dans les configurations 2d et 3d. Dans la configuration 4d, les fréquences 1 et 2 se confondent pendant un court laps de temps.



(a) config. 2d (b) config. 3d (c) config. 4d

FIGURE 2.35 – Fréquences propres dans le cas non-linéaire avec des ondulations d'une longueur de $L = 100mm$

2.4.2.2 Impact sur la dissipation thermique

La figure 2.36 représente l'énergie locale dissipée sur des disques présentant des ondulations de différentes longueurs (100, 200 et $300mm$) et de hauteur $H = 50\mu m$.

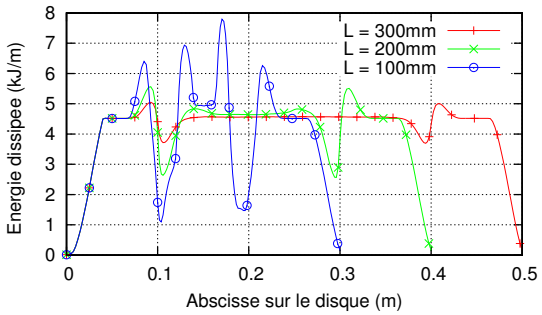


FIGURE 2.36 – Énergie locale dissipée par frottement pour différentes longueurs de défaut de forme ($H = 50\mu m$)

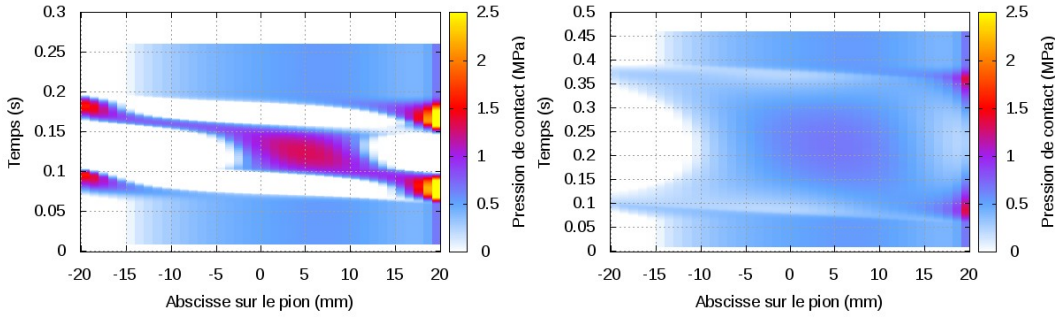
L'allongement de la longueur de l'ondulation implique une réduction des phénomènes de dissipation. La réduction de la longueur de l'ondulation a l'effet inverse, elle accroît fortement les localisations thermiques. Juste avant le début et juste après l'ondulation, l'énergie dissipée monte jusque $6kJ/m$. Au début et à la fin de l'ondulation (soit quelques instants après et quelques instants avant, respectivement), elle atteint des niveaux entre 1 et $1.5kJ/m$. Un nouveau phénomène apparaît aussi. Durant la montée et la descente de l'ondulation, l'énergie dissipée augmente très fortement, dépassant les niveaux précédents et suivants l'ondulation. Dans la montée, l'énergie dissipée monte jusque $7kJ/m$ et, dans la descente, elle a atteint presque les $8kJ/m$. De plus, la dissipation d'énergie n'est plus du tout symétrique entre la phase d'entrée-montée d'ondulation et la phase de descente-sortie d'ondulation. Cette dissymétrie sera expliquée plus loin.

2.4.2.3 Mise en lien avec le contact

Afin de comprendre les variations d'énergie dissipée et l'évolution des fréquences propres, on présente ici l'évolution des pressions de contact pour des ondulations de longueurs $L = 100mm$ et $L = 300mm$ (figures 2.37).

Une ondulation d'une longueur réduite implique une augmentation de l'ouverture de contact au centre de la garniture et des surpressions en avant et en arrière de la garniture lors de l'entrée et de la sortie de l'ondulation de disque. Pour une longueur $L = 100mm$, ces phénomènes sont plus prononcés que pour une amplitude $H = 90\mu m$.

La distance entre l'entrée et le sommet de l'ondulation étant plus courte, les ouvertures de contact interne se localisent sur les mêmes zones de disque, c'est à dire juste après le début ($x = 0.11m$) et juste avant la fin ($x = 0.19m$). Sur la montée de l'ondulation, l'énergie due à la surpression en avant de garniture durant son entrée sur l'ondulation et la localisation de pression au centre de la garniture se



(a) $L = 100mm$ (b) $L = 300mm$

FIGURE 2.37 – Évolution de la pression locale de contact sur la garniture pour différentes longueurs d'ondulations

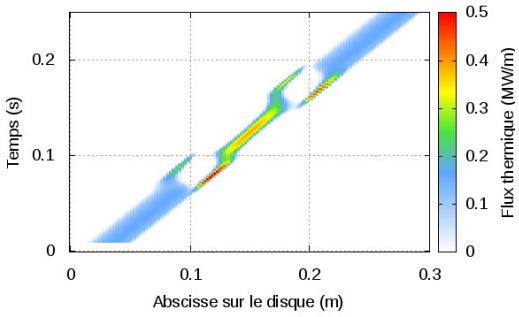


FIGURE 2.38 – Puissance instantanée dissipée par frottement sur le disque pour $L = 100mm$

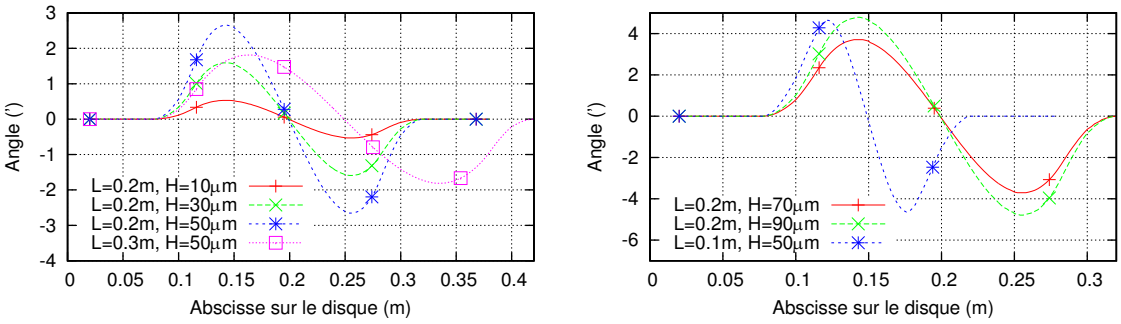
cumule pour donner naissance à l'élévation d'énergie dissipée en $x = 0.13mm$. Sur la descente, c'est la localisation au centre en début de descente et le recollement en arrière de la garniture durant sa sortie d'ondulation qui se cumule sur le disque en $x = 0.16mm$.

L'évolution des fréquences est régie par les mêmes mécanismes que pour une ondulation d'une amplitude $H = 90\mu m$.

2.4.3 Synthèse sur l'influence des paramètres liés à l'ondulation

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés aux paramètres de l'ondulation, soit sa longueur et sa hauteur. Des résultats très similaires sont obtenus entre courte et haute ondulation et entre longue et faible hauteur d'ondulation. Les figures 2.39 donnent des comparaisons des angles de de la courbe moyennés sur $40mm$ pour différents disques, soit la longueur d'un pion. Ces figures montrent qu'une ondulation de longueur $L = 200mm$ et de hauteur $H = 30\mu m$ et une ondulation de longueur $L = 300mm$ et de hauteur $H = 50\mu m$ présentent des angles d'amplitudes comparable. De même pour une ondulation de longueur $L = 200mm$ et de hauteur $H = 90\mu m$ et une ondulation de longueur $L = 100mm$ et de hauteur $H = 50\mu m$. Ces courbes donnent aussi des variations de fréquences propres et des apparitions de confusions comparables. Ainsi, il semble que les résultats dépendent essentiellement du rayon de courbure du disque sous la garniture et de l'orientation (angle de la normale par rapport à la normale du disque plan). De la, tous les résultats peuvent être reliés à deux types d'ondulation : une forte ondulation (avec une très haute amplitude et/ou une longueur réduite) et une faible ondulation (avec une faible amplitude et/ou une longueur accrue).

Une faible ondulation ne permet pas l'ouverture d'un contact au centre de la garniture en entrée et en sortie d'ondulation et ne permet pas de décollement sur l'avant de la garniture en sommet d'ondulation.



(a) Comparaison entre courte ondulation et faible hauteur

(b) Comparaison entre longue ondulation et haute ondulation

FIGURE 2.39 – Angle d'inclinaison de la tangente à la surface du disque moyenné sur $40mm$

De plus, une faible ondulation n'implique pas de forte surpression de contact.
Les conséquences sur les aspects thermiques et vibratoires sont directes. Une faible ondulation ne favorise pas les localisations thermiques et ne modifie pas profondément les propriétés vibratoires du modèle sous condition de contact (exemple : dans la configuration 3d, la confusion peut persister).

Une forte ondulation impliquent une forte variation des statuts et des pressions de contact, et notamment, une forte localisation sur les bords de la garniture en entrée et en sortie d'ondulation et une forte localisation au centre de la garniture au sommet de l'ondulation. En augmentant ces localisations, on augmente la localisation de l'énergie dissipée par frottement et on augmente aussi les variations des fréquences propres 1 et 3, ce qui fait apparaître des confusions entre fréquences 1 et 3 dans les configurations 2d et 3d, et entre fréquences 1 et 2 dans la configuration 4d.

2.5 Influence paramétrique du système étudié

On étudiera l'impact de la rigidité structurelle du pion (en rigidifiant la lame flexible), puis, du coefficient de frottement. Et enfin, la dernière étude portera sur l'influence de la longueur apparente de contact.

Comme les paramètres étudiés dans cette partie ne sont pas liés à l'ondulation mais au propriétés du modèle, ils modifient aussi les résultats lors d'un contact sur disque plan. Pour cette raison, on commencera toujours par analyser l'impact des paramètres lors d'un contact sur disque plan avant d'analyser l'impact lors du passage de l'ondulation de disque.

Les propriétés non mentionnés des modèles éléments finis dans la suite restent les mêmes que sur l'ondulation de référence : un coefficient de frottement $\mu = 0.3$, une vitesse de glissement constante $V = 1m/s$, un effort normal sur la lame de $300N$, une ondulation de référence ($L = 200mm$, $H = 50\mu m$), un patin muni d'un pion de $40mm$ de longueur et une lame de $1mm$ d'épaisseur.

2.5.1 Influence de la rigidité structurelle

La rigidité du système est l'une des (sinon, la) composantes majoritaires influençant les propriétés modales du système hors contact. Cette influence se répercute sur la stabilité vibratoire du système sous condition de contact.
La rigidité de la lame influe directement sur la rigidité du pion (en particulier sur son basculement) et donc sur la rigidité du système. Elle perturbe donc la cinématique du système ainsi que l'énergie dissipée et les propriétés vibratoires.
Dans cette étude, on exploitera différentes épaisseurs de lame (2 et $3mm$) afin de tester différentes rigidités de système. Le système pion-disque, choisi pour la modélisation E.F., est un système à fort potentiel vibratoire. La démarche choisie dans cette étude est de rigidifier le système. L'ondulation exploitée est celle de référence ($L = 200mm$ et $H = 50\mu m$).

2.5.1.1 Contact de référence : plan-plan

2.5.1.1.a Analyse des résultats du modèle EF

Le tableau 2.7 donne l'angle de basculement et la longueur effective de contact pour les trois épaisseurs de lame. Les profils des pressions de contact pour les différentes épaisseurs de lames sont présentés sur la figure 2.40.

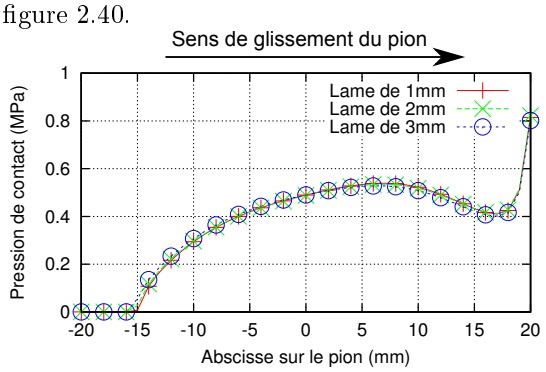


FIGURE 2.40 – Pressions de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène pour des lames d'épaisseur 1,2 et $3mm$

Épaisseur de lame	Basculement de pion	L.E.C
$1mm$	$-6.3''$	$36mm$
$2mm$	$-6.1''$	$36mm$
$3mm$	$-5.4''$	$36mm$

TABLE 2.7 – Basculement de pion et longueur effective de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène pour des lames d'épaisseur 1, 2 et $3mm$

La rigidité de la lame modifie légèrement le basculement mais elle ne modifie quasiment pas les pressions de contact sur disque plan. Plus la lame est rigide et moins le pion bascule.

2.5.1.1.b Résultats de l'analyse modale

Même si la lame ne modifie pas sensiblement les pressions de contact, les propriétés vibratoires évoluent (voir tableau 2.5) et les résultats de l'analyse vibratoire sont sensiblement différents.

Les raideurs constantes donnent des résultats très proches de l'analyse avec raideurs non-linéaires. Ils ne seront donc pas présentés.
Les figures 2.41 représentent les fréquences propres obtenues sur disque plan pour les différentes épaisseurs de lame ($1mm$, $2mm$ et $3mm$) dans chaque configuration (2d,3d et 4d) avec raideurs non-linéaires.

Le mode 1 est le plus impacté (augmentation de $1.2kHz$) alors que les autres modes le sont faiblement (0.2 à $0.3kHz$). En augmentant l'épaisseur de la lame, on la rigidifie le système et, donc, le basculement du pion, ce qui a pour conséquence l'augmentation de la fréquence 1.
Dans la configuration 3d, il n'y a plus de confusion sur disque plan avec des lames de 2 et 3 mm d'épaisseur. Par contre,dans la configuration 4d, une lame de 3 mm fait apparaître une confusion entre les modes 1 et 2.

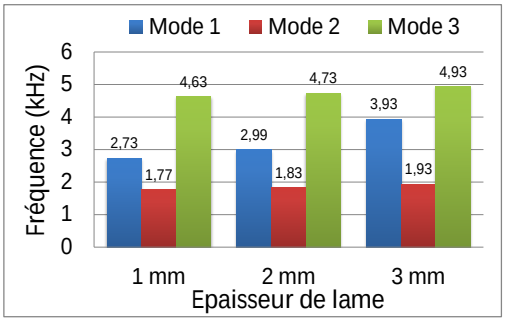
2.5.1.2 Impact lors du passage de l'ondulation de disque

On intègre à présent une ondulation avec les paramètres de référence ($L = 200mm$ et $H = 50\mu m$).

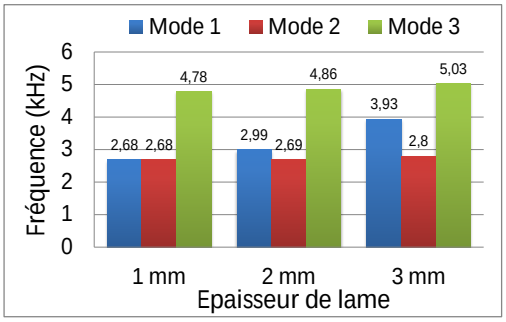
2.5.1.2.a Influence sur les instabilités dynamiques

Les figures 2.42 et 2.43 représentent l'évolution des fréquences propres pour des pions munis de lames d'épaisseurs $1mm$ et $3mm$ dans les configurations 3d et 4d respectivement.

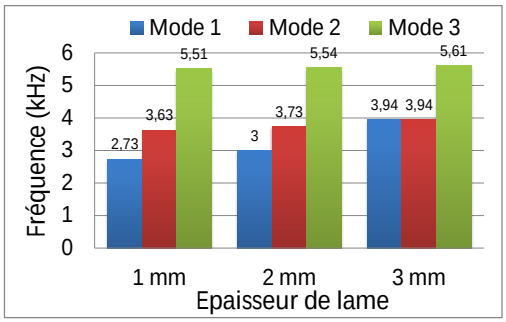
L'augmentation de l'épaisseur de la lame limite sensiblement l'évolution des fréquences propres (figures 2.42 et 2.43), en particulier l'évolution de la fréquence 1 qui est fortement impliquée dans l'apparition de confusion de fréquences. En entrée et en sortie d'ondulation, la fréquence 1 a une croissance plus limitée avec une lame de 3 mm. Elle décroit de 1kHz lors de l'amorce de la montée d'ondulation puis cette décroissance est stoppée et remplacée par une lente croissance lors de la montée d'ondulation. Durant la descente d'ondulation, la fréquence 1 décroit légèrement jusque l'amorce de la sortie d'ondulation dans laquelle elle croit de nouveau pour atteindre le niveau de fréquence correspondant au disque plan.
Il n'y plus de confusion dans les configurations 2d et 3d. Dans la configuration 4d, outre la confusion sur disque plan, les fréquences 1 et 2 se confondent à présent au sommet de l'ondulation.



(a) Config 2d



(b) Config 3d



(c) Config 4d

FIGURE 2.41 – Fréquences propres sur disque plan avec raideurs non-linéaires

2.5.1.2.b Impact sur la dissipation thermique

La figure 2.44 représente l'énergie locale dissipée sur le disque en fin de simulation pour différentes épaisseurs de lame.

Lorsque la rigidité de la lame augmente, le pion localise légèrement moins l'énergie dissipée en entrée et en sortie d'ondulation mais accroit la dissipation d'énergie au centre de l'ondulation.

2.5.1.2.c Mise en lien avec le contact

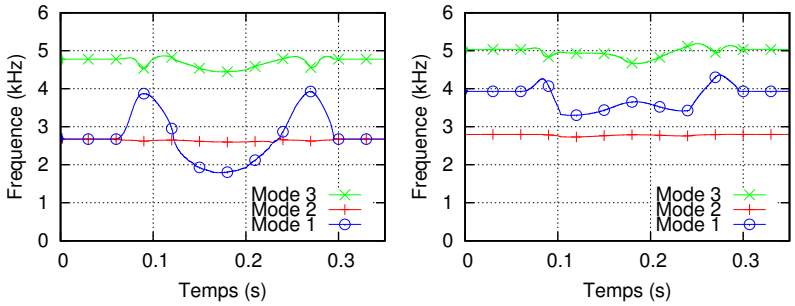
Afin de comprendre l'impact sur les comportements thermique et vibratoire, on analyse l'impact sur les pressions de contact. Les figures 2.45 représentent l'évolution des pressions locales de contact pour des modèles comportant des lames de 2 et $3mm$ d'épaisseur. La figure 2.46 représente la puissance instantanée dissipée sur le disque avec une lame de $3mm$ d'épaisseur.

Plus la lame est épaisse et moins le pion peut basculer. Avec une lame rigide, le contact porte sur l'avant du pion lors de la montée et sur l'arrière lors de la descente. Ce phénomène entraîne une dissipation accrue d'énergie au centre de la garniture.

La rigidité en basculement du pion est accrue par l'augmentation de l'épaisseur de la lame. La fréquence 1 est alors reportée sur de plus haute fréquence et son évolution. Lorsque le contact porte sur une extrémité du pion, la rigidité en basculement décroit et la fréquence 1 aussi. A l'inverse, lorsque le contact porte sur le centre de la garniture, la rigidité en basculement, et donc la fréquence 1, décroit.

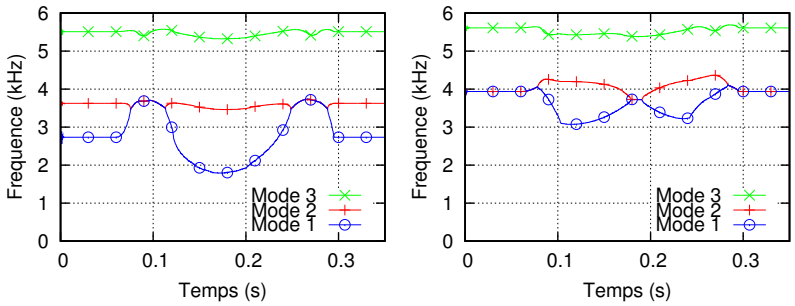
2.5.2 Influence du coefficient de frottement

Un des autres paramètres qui peut être pris en compte est le coefficient de frottement. Dans les tests expérimentaux et dans certains modèles, ce paramètre est variable. De nombreuses études ont montrées son importance dans l'apparition de crissement. Dans l'analyse E.F. réalisée ici, on utilise un frottement



(a) lame de $1mm$ (b) lame de $3mm$

FIGURE 2.42 – Fréquences propres dans le cas non-linéaire dans la configuration 3d



(a) lame de $1mm$ (b) lame de $3mm$

FIGURE 2.43 – Fréquences propres dans le cas non-linéaire dans la configuration 4d

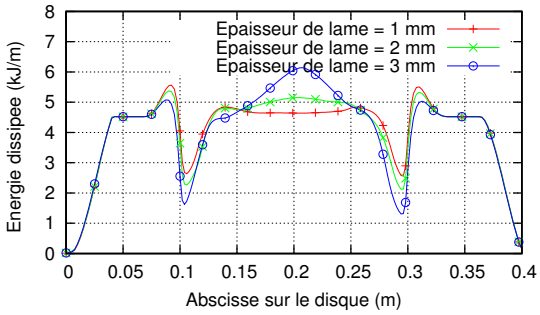


FIGURE 2.44 – Énergie locale dissipée par frottement sur le disque pour pour différentes épaisseurs de lame

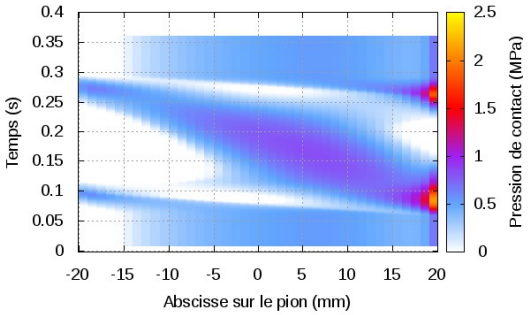
de type Coulomb. Son coefficient est constant et égal à 0.3. Nous n'utiliserons pas d'autre loi de frottement que celle de Coulomb mais nous allons étudier l'impact du frottement en prenant en compte des coefficients de 0.6 et 0.9.

2.5.2.1 Contact de référence : plan-plan

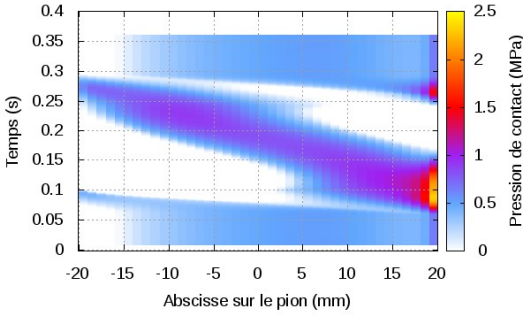
Dans un premier temps, il est nécessaire de connaître l'impact qu'a le coefficient de frottement lors d'un contact sur disque plan.

2.5.2.1.a Analyse des résultats du modèle EF

Le tableau 2.8 donne l'angle de basculement et la longueur effective de contact pour les différents coefficients de frottement testés. Les profils des pressions de contact pour différents coefficients de frottement sont présentés sur la figure 2.47.



(a) Lame de $2mm$ d'épaisseur



(b) Lame de $3mm$ d'épaisseur

FIGURE 2.45 – Pression de contact sur la garniture pour différentes épaisseurs de lame

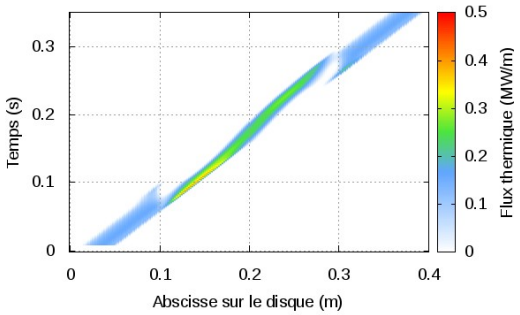


FIGURE 2.46 – Puissance instantanée dissipée par frottement sur le disque avec une lame de $3mm$ d'épaisseur

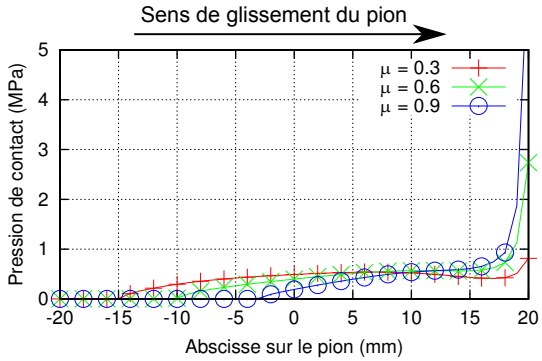


FIGURE 2.47 – Pressions de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène pour des coefficients de frottement de 0.3, 0.6 et 0.9

Coefficient de frottement	Basculement de pion	L.E.C
0.3	$-6.3''$	$36mm$
0.6	$-13.2''$	$30mm$
0.9	$-21.8''$	$23mm$

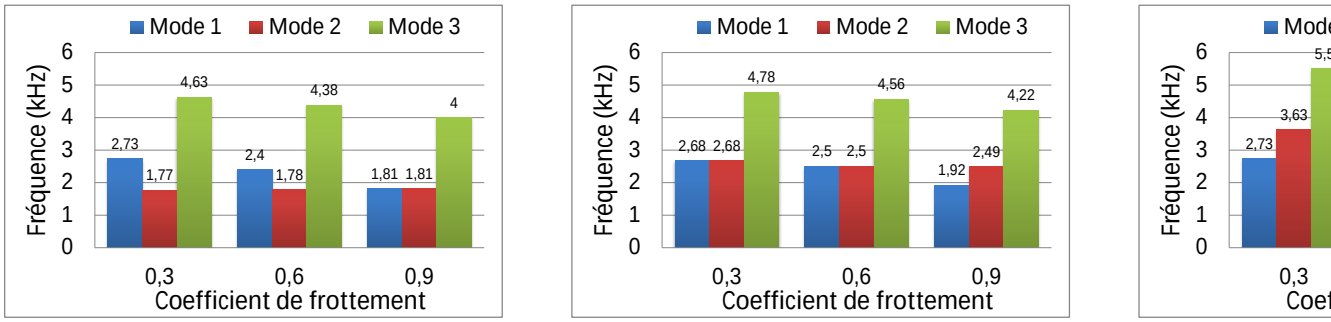
TABLE 2.8 – Basculement de pion et longueur effective de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène pour des coefficients de frottement de 0.3, 0.6 et 0.9

L'augmentation du coefficient de frottement accroît la friction entre garniture et disque. Le pion a donc un plus grand basculement, une longueur effective de contact réduite et une surpression en entrée de contact accrue.

2.5.2.1.b Résultats de l'analyse modale

Les résultats issus de l'analyse modale complexe avec raideurs de contact constantes ne sont pas présentés car ils sont similaires aux résultats de l'analyse modale complexe avec raideurs de contact non-linéaires.

Les figures 2.48 représentent les fréquences propres obtenues sur disque plan avec des raideurs de contact non-linéaires pour les différents coefficients de frottement exploités (0.3, 0.6 et 0.9) dans chaque configuration (2d,3d et 4d).



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) C

FIGURE 2.48 – Fréquences propres sur disque plan avec raideurs de contact non-linéaires

Globalement, l'augmentation du coefficient de frottement fait décroître largement les fréquences propres. Ceci peut s'expliquer par la réduction de la LEC via un coefficient de frottement.
Les modes 1 et 3 sont les plus impactés. Ceci entraîne l'apparition d'une confusion sur disque plan entre les fréquences 1 et 2 dans la configuration 2d et la disparition de la confusion dans la configuration 3d.

2.5.2.2 Impact lors du passage de l'ondulation de disque

A présent, les résultats lors du franchissement d'une ondulation de référence ($L = 200mm$ et $H = 50\mu m$) sont analysés.

2.5.2.2.a Influence sur les instabilités dynamiques

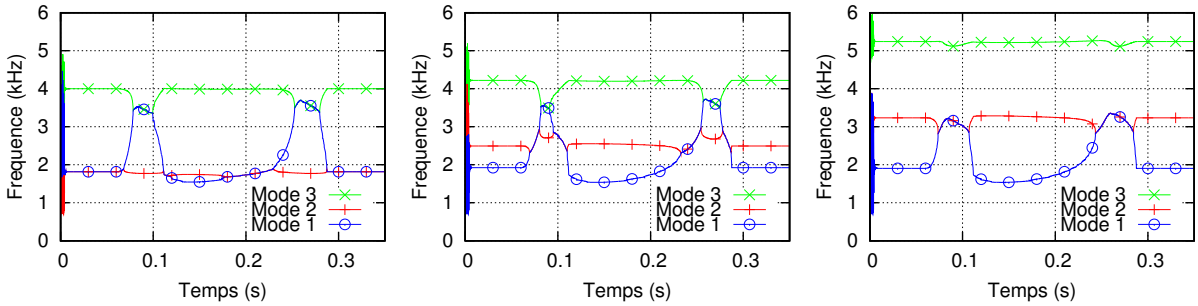
Les résultats de l'analyse avec raideurs de contact constantes ne sont pas exposés car il sont très semblables à ceux obtenus lors de l'analyse avec raideurs non-linéaires.

La fréquence la plus impactée est la fréquence 1, suivie de la fréquence 3. Les fréquences n'évoluent presque plus sauf durant l'entrée et la sortie d'ondulation, où elles évoluent très brutalement. A ces moments, la fréquence 1 augmente de plus de $1,5kHz$. Par exemple, dans la configuration 3d, en entrée et sortie d'ondulation, la fréquence 1 se confond avec la fréquences 2 puis avec la fréquence 3 alors qu'elle est bien inférieure à la fréquence 2 sur disque plan.

L'augmentation du coefficient annihile toute évolution des fréquences sauf en entrée et sortie d'ondulation.

2.5.2.2.b Impact sur la dissipation thermique

La figure 2.50 représente l'énergie locale dissipée sur le disque en fin de simulation pour les différents coefficients de frottement.



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

FIGURE 2.49 – Fréquences propres dans le cas non-linéaire en utilisant un coefficient de frottement de 0.9

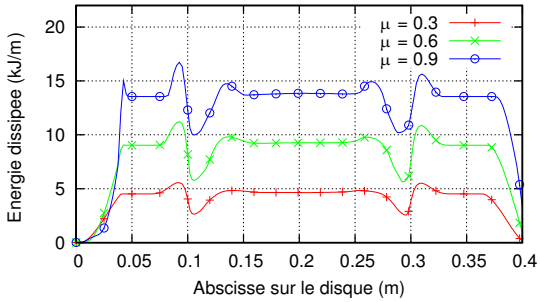
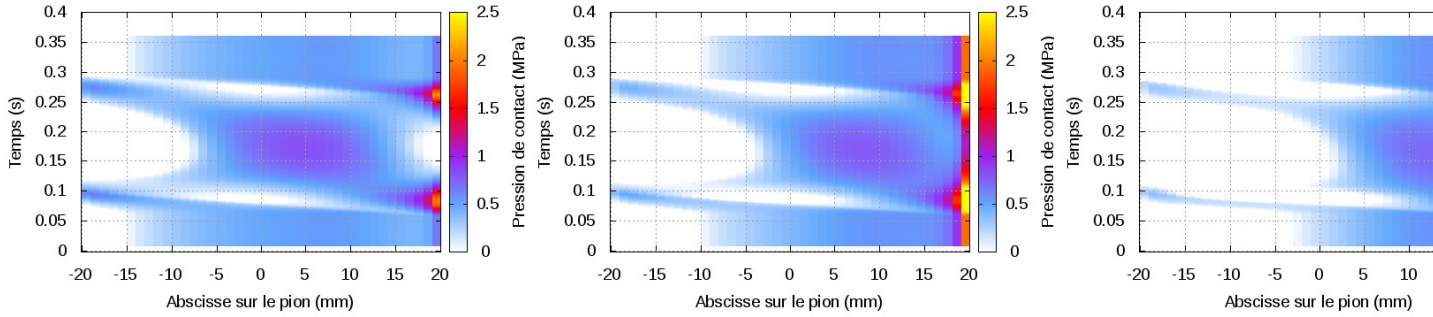


FIGURE 2.50 – Énergie locale dissipée par frottement sur le disque pour différents coefficients de frottement

L'énergie dissipée par frottement est directement proportionnelle au coefficient de frottement. En multipliant par 3 le coefficient de frottement, on multiplie donc par 3 la puissance instantanée et l'énergie totale dissipée par frottement.

2.5.2.2.c Mise en lien avec le contact

Les figures 2.51 représentent l'évolution de la pression locale de contact sur la garniture pour différents coefficients de frottement.



(a) $\mu = 0.3$ (b) $\mu = 0.6$ (c) $\mu = 0.9$

FIGURE 2.51 – Évolution de la pression locale de contact sur la garniture pour différents coefficients de frottement

L'augmentation du coefficient de frottement accroît le basculement du pion. Sauf en entrée et en sortie d'ondulation, les pressions se reportent donc vers l'avant de la garniture avec une très forte surpression

en entrée de contact. Ce type de contact permet d'avoir un pion avec une rigidité en basculement faible et donc une fréquence 1 basse. L'entrée et la sortie d'ondulation, sont les seuls endroits où le profil des pressions de contact est modifié. Le pion se retrouve brutalement en contact sur ses deux extrémités, ce qui accroît fortement la rigidité en basculement et donc la fréquence 1. Durant la montée, le sommet et la descente de l'ondulation, il y a très peu d'évolution de la localisation de contact ce qui implique que les fréquences n'évoluent pas.

2.5.3 Longueur apparente de contact réduite

Il a été vu dans les précédentes études que la longueur effective du contact à une part importante dans l'influence du battement. Dans une étude supplémentaire, des géométries tronquées de pion ont été prises en compte. Elles permettent de réduire la longueur apparente de contact et donc d'impacter directement sur la longueur effective de contact.

2.5.3.1 Géométrie et propriétés

Afin de ne pas modifier profondément les propriétés dynamiques et modales du pion, nous avons opté pour la prise en compte d'une géométrie tronqué au niveau de la surface de contact. La figure 2.52 représente la géométrie de la garniture exploitée dans cette étude.
L'ondulation correspond à celle de référence ($H = 50\mu m$ et $L = 200mm$). On utilise une lame d'une épaisseur de $1mm$ et un coefficient de frottement de 0.3. En tronquant la garniture sur chaque extrémité et sur $1mm$ d'épaisseur, il a été possible d'obtenir des longueurs apparentes de contact de 20 et $30mm$.

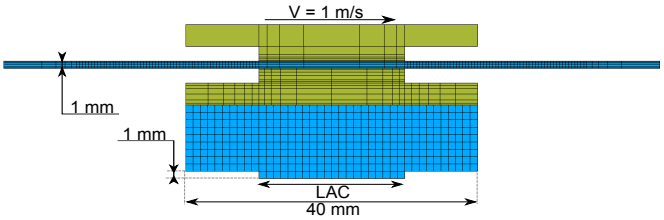


FIGURE 2.52 – Profil de la garniture avec troncature de la surface de contact

2.5.3.2 Résultats sur disque plan

Dans un premier temps, la situation sur disque plan est étudiée.
On commencera par analyser les résultats dynamiques issus du modèle EF avant de s'intéresser à l'analyse vibratoire.

2.5.3.2.a Analyse des résultats du modèle EF

Le tableau 2.9 donne l'angle de basculement et la longueur effective de contact pour les différents LAC testés. Le profil des pressions de contact pour différents LAC sont présentés sur la figure 2.53.

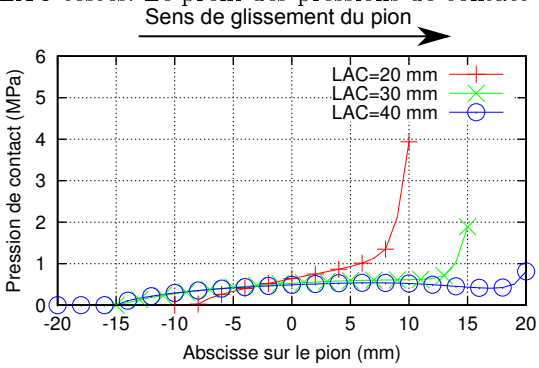


FIGURE 2.53 – Pressions de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène pour des longueurs apparentes de contact de 20, 30 et $40mm$

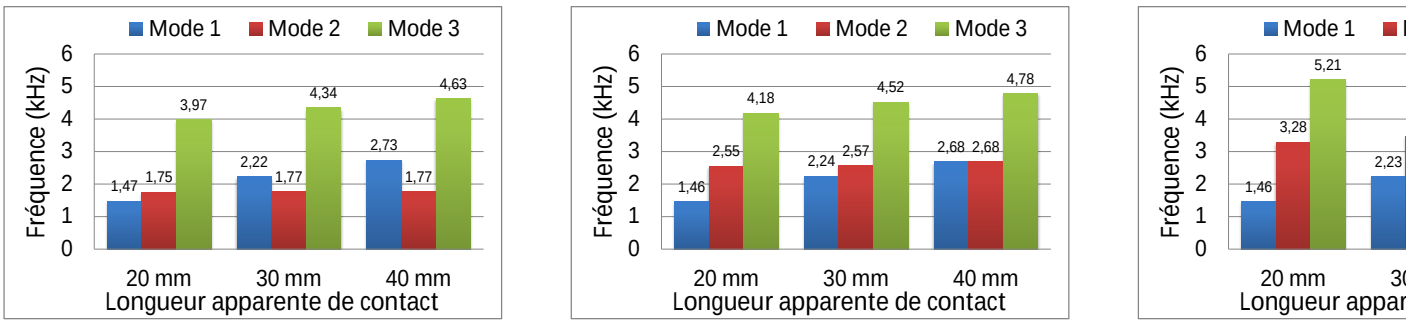
LAC	Basculement de pion	L.E.C
$20mm$	$-35.1''$	$18mm$
$30mm$	$-10.8''$	$28mm$
$40mm$	$-6.3''$	$36mm$

TABLE 2.9 – Basculement de pion et longueur effective de contact dans le cas d'un contact plan-plan homogène pour des longueurs apparentes de contact de 20, 30 et $40mm$

La réduction de la longueur apparente de contact permet au pion d'avoir une longueur effective de contact réduite et de basculer davantage ce qui entraîne des surpressions accrues en entrée de contact et la disparition progressive du profil concave des pressions.

2.5.3.2.b Résultats de l'analyse modale

Les résultats avec raideurs de contact constantes sont semblables aux résultats avec raideurs de contact non-linéaires, ils ne seront donc pas présentés. Les figures 2.54 représentent les fréquences propres obtenues sur disque plan avec des raideurs de contact non-linéaires pour les différentes longueurs apparentes de contact exploitées (20, 30 et 40mm) dans chaque configuration (2d, 3d et 4d).



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configur

FIGURE 2.54 – Modes propres sur disque plan avec des raideurs de contact non-linéaires

Toutes les fréquences sont affectées. Elles diminuent lorsque l'on réduit la LAC. Mais la fréquence 1 est encore ici la plus impactée avec une décroissance supérieure à 1200 Hz dans chaque configuration.
La confusion sur disque plan dans la configuration 3d disparaît et aucune autre n'apparaît. Pourtant dans la configuration 2d, la réduction de la LAC rend la fréquence 1 inférieure à la fréquence 2. On peut donc imaginer qu'une configuration avec une LAC de 25 mm pourrait laisser apparaître une confusion entre ces deux modes.

2.5.3.3 Impact lors du passage de l'ondulation de disque

Les paramètres de l'ondulation correspondent toujours à celle de référence ($L = 200mm$ et $H = 50\mu m$).

2.5.3.3.a Influence sur les instabilités dynamiques

La figure 2.55 ne présente que quelques résultats avec des raideurs de contact non-linéaires pour des longueurs apparentes de contact réduites.

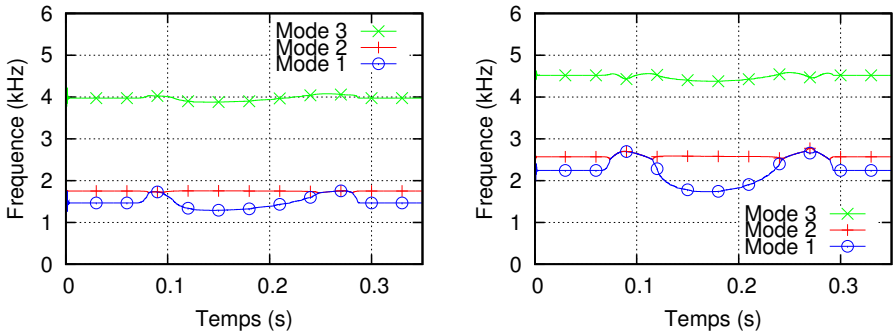
La réduction de la longueur apparente de contact réduit les variations de fréquences. De ce fait, il y moins de confusions de fréquence qui apparaissent. Des confusions entre les fréquences 1 et 2 en entrée et en sortie d'ondulation apparaissent pour une LAC de 30mm dans la configuration 3d et avec une LAC de 20mm dans la configuration 2d.

2.5.3.3.b Impact sur la dissipation thermique

Sur la figure 2.56 est représenté l'énergie locale dissipée sur le disque par frottement pour des pions ayant différentes LAC. Plus la longueur apparente de contact est réduite est plus l'énergie est dissipée de manière homogène sur le disque.

2.5.3.3.c Mise en lien avec le contact

Les figures 2.57 représentent l'évolution de la pression locale de contact au passage d'une ondulation de référence pour un pion ayant une longueur apparente de contact de 20mm, 30mm et 40mm



(a) Configuration 2d / LAC = $20mm$ (b) Configuration 3d / LAC = $30mm$

FIGURE 2.55 – Fréquences propres avec raideurs de contact non-linéaires pour des longueurs apparentes de contact réduites

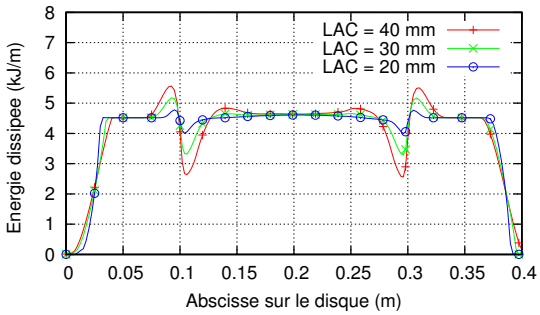


FIGURE 2.56 – Énergie locale dissipée avec des LAC de 20, 30 et $40mm$

respectivement.

Une longueur de contact réduite implique une localisation du contact accrue et donc une surpression plus élevée en entrée de contact. D'autre part, la pression de contact évolue moins au passage de l'ondulation.

2.5.4 Synthèse sur l'influence des paramètres liés au système

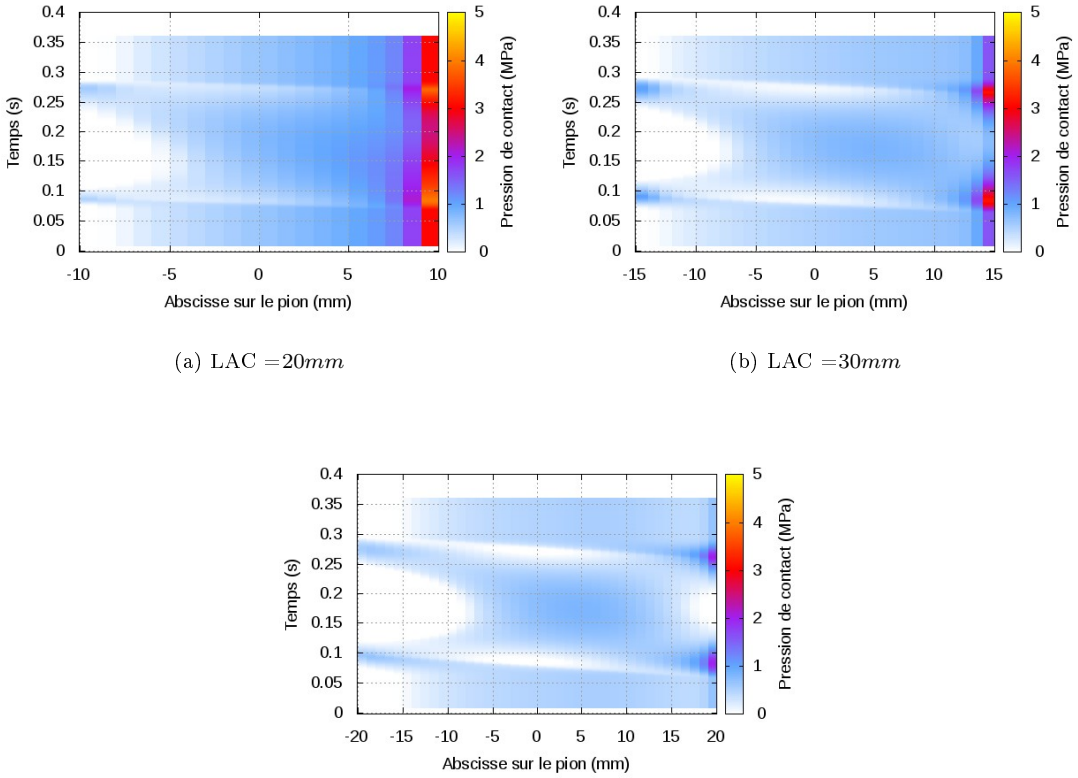
Différents paramètres liés ont été pris en compte dans cette partie. L'influence de la rigidité de la lame (via différentes épaisseurs de lame), du coefficient de frottement et de la longueur de contact du pion ont été étudiés.
Les divers paramètres liés au système exploités peuvent avoir des impacts très variés sur le basculement du pion, sur les conditions de contact et sur les pressions locales, et par conséquent, sur l'énergie dissipée par frottement et sur les fréquences propres du système.

Ces paramètres ont tous une influences sur la rigidité en basculement (mode 1) et sur la localisation du contact. Lorsque le contact est plus localisé, la rigidité apparente en basculement diminue et donc les fréquences aussi. Leurs variations sont limitées au passage de l'ondulation car une faible longueur de contact est moins sensible à l'ondulation.

Si les paramètres liés au système modifient les résultats obtenus sur disque plan, ils modifient aussi les résultats lors du passage de l'ondulation permettant, ainsi, de changer les localisations de l'énergie dissipée et de modifier l'évolution des fréquences propres impliquant de nouvelles confusions ou faisant disparaître celles existant dans le cas de référence.

2.6 Exploitation d'un profil réel de disque

Dans toutes les études réalisées, l'ondulation du disque était créée à l'aide d'une courbe de Bezier à 5 points. D'autres courbes auraient pu être utilisées (par exemple un sinus) mais il est possible d'obtenir des courbes plus intéressantes à exploiter : des profils de disques mesurés expérimentalement. Cette partie



(a) LAC =20mm

(b) LAC =30mm

(c) LAC =40mm

FIGURE 2.57 – Pression de contact sur la garniture pour différentes longueurs apparentes de contact

portera sur l'exploitation de tels profils.

2.6.1 Mesure d'un profil réel de disque

Le profil de disque monté sur banc d'essai est mesuré pendant la rotation. Cette mesure a été réalisée sur deux disques différents afin de ne pas rester sur un cas unique et de pouvoir comparer les deux simulations qui seront réalisées avec les mesures.

A l'aide de capteur à courant de Foucault, une mesure du profil de surface a été réalisée sur les disques et sur plusieurs tours de disque. La hauteur du disque est mesurée sur un rayon de disque fixé correspondant au rayon moyen de la zone de frottement lors des essais de Duboc [Duboc, 2013].

Les profils mesurés présentent de nombreuses hétérogénéités de surface. Sur la figure 2.58 est présentée une des deux mesures de surface exploitée. Le profil mesuré présente de nombreuses variations qui compliquent la résolution d'un contact, les profils mesurés sont donc lissés en faisant une moyenne glissante sur 5 points sur l'ensemble de la mesure. 5 points suffisent afin de supprimer au mieux les variations brutales de la hauteur de disque et de ne pas modifier profondément le profil du disque. L'opération de lissage est répétée plusieurs fois jusqu'à obtenir un profil suffisamment lissé.
Suite à cette opération de lissage, un tour de disque est extrait du profil lissé. Afin de pouvoir ajouter des zones de disque planes avant et après l'ondulation, le tour de disque extrait démarre par un point avec une tangente horizontale et finit par un autre point avec une tangente horizontale. Puis, des zones planes sont ajoutées avant et après l'ondulation de disque. La figure 2.59 montre un profil de disque avant l'opération de lissage et après lissage et extraction d'un tour de disque.

Le disque est donc constitué d'une zone plane de 100mm de longueur, de l'ondulation de disque et il finit par une zone plane de 100mm. La garniture est la même que dans la configuration de référence,

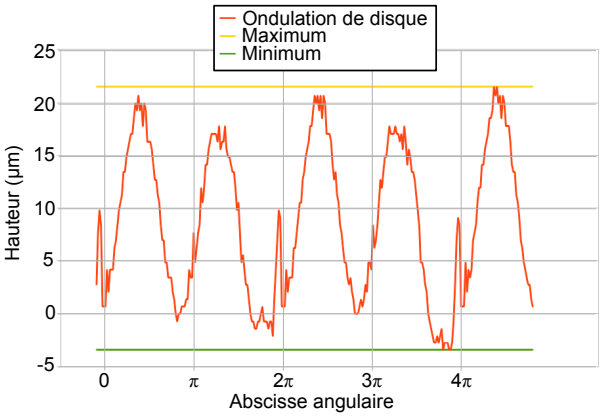


FIGURE 2.58 – Profil de disque mesuré expérimentalement

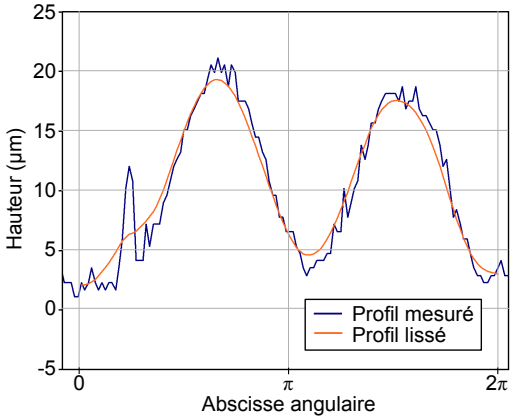
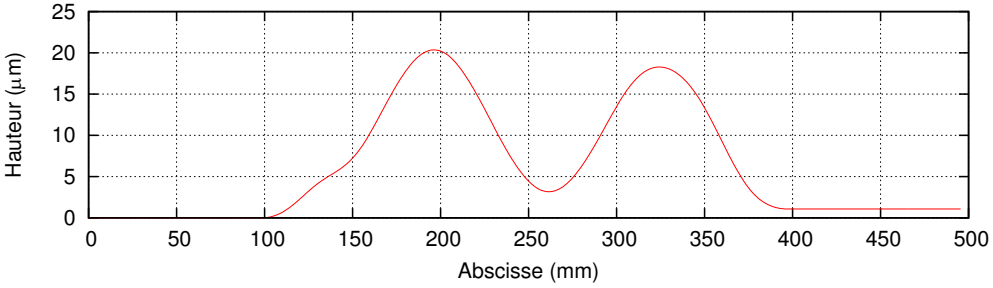
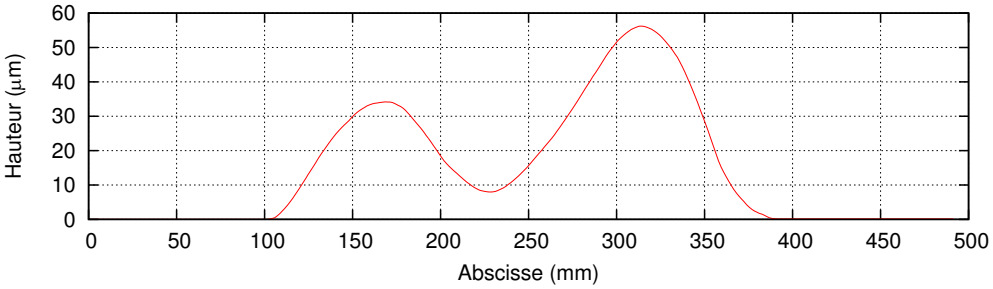


FIGURE 2.59 – Profil lissé pour l'intégration dans un modèle numérique

c'est à dire qu'elle est munie d'une lame de $1mm$ d'épaisseur, d'une surface de contact d'une longueur de $40mm$ et d'un coefficient de frottement pion disque de 0.3.
Deux profils de disque sont présentés sur les figures 2.60.



(a) Profil A



(b) Profil B

FIGURE 2.60 – Disque déplié avec profils de disque mesurés expérimentalement

Chaque profil de disque présente deux ondulations d'amplitudes différentes sur un tour de disque. Le profil A présente une ondulation d'une amplitude maximale de $20\mu m$ et une seconde ondulation d'une amplitude de $18\mu m$. Ce disque présente une légère irrégularité au alentour de $x = 130mm$. Cette irrégularité se modélise sous forme de concavité dans la montée de la première ondulation.
Le profil B présente une ondulation d'une amplitude de $34\mu m$ et une seconde ondulation d'une amplitude maximale de $56\mu m$. Ce profil ne présente pas de fortes irrégularités (i.e. variations brutales de la hauteur).

Les maillages sont réalisés en fonction du niveau d'échantillonnage des mesures expérimentales et sont déterminés automatiquement afin d'obtenir une taille de maille comprise entre 1 et $2mm$ de longueur. De cette manière, on assure une taille de maille inférieure au modèle d'ondulation développé à partir d'une courbe de Bézier.

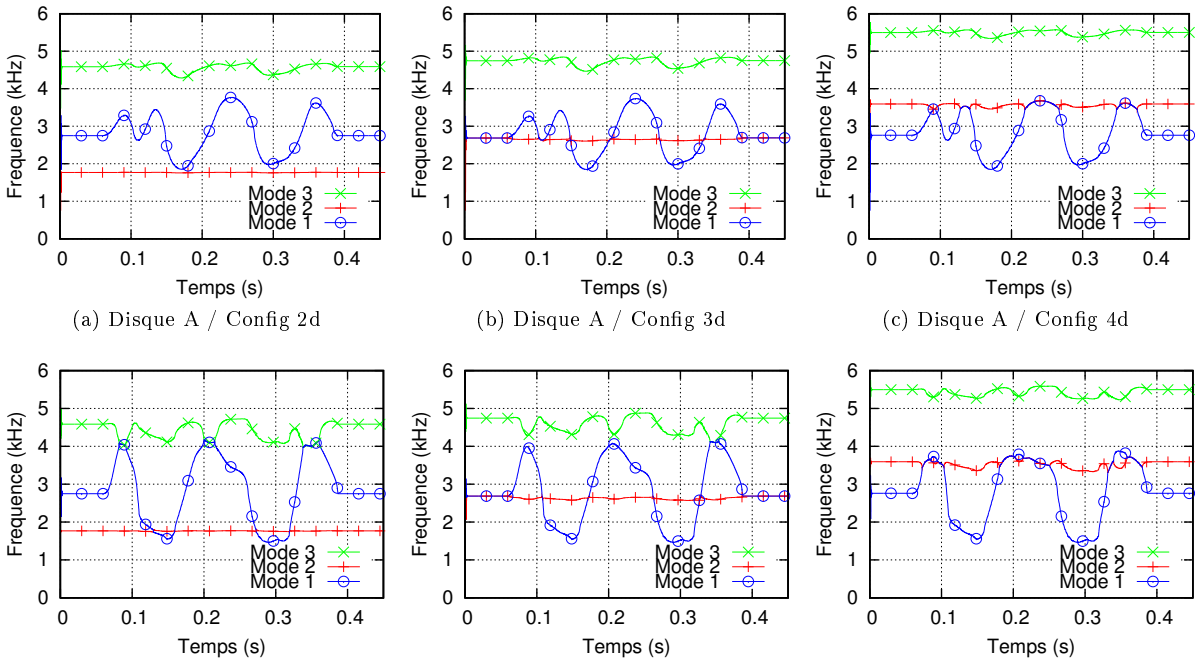
Les mêmes méthodes de résolutions et les mêmes paramètres numériques que ceux exploités dans l'ondulation de référence sont utilisés à l'exception du chargement normal de la lame. Dans les précédentes

études numériques, un effort était imposé sur les extrémités de la lame. Dans cette étude, le travail en effort imposé introduit des oscillations du patin rendant les résultats inexploitables. Ces oscillations sont dues au profil de disque réel qui n'est pas aussi lisse qu'une courbe de Bézier. Dans ce cas, le pion subit de fortes oscillations du basculement, ce qui se répercute sur les statuts de contact, les pressions locales, l'énergie dissipée sur le disque par frottement et sur toute l'analyse modale complexe. Dans cette partie, et uniquement dans cette étude, il est donc nécessaire de travailler avec des déplacements imposés sur les extrémités de la lame. Afin d'avoir des résultats au plus proche des études précédentes, pour obtenir un effort équivalent à $300N$, le déplacement à imposer a été déterminé sur disque plan dans une étude quasi-statique. Toutefois, ce chargement n'est pas un problème car il correspond aux conditions d'essais expérimentaux réalisés par Duboc. On impose donc un déplacement vertical de $0.55mm$ sur chaque extrémité de la lame.

La géométrie du pion correspond à la géométrie de référence (lame de $1mm$, LAC de $40mm$ et coefficient de frottement de 0.3)

2.6.2 Influence sur les instabilités dynamiques

Les figures 2.61 représentent l'évolution des fréquences propres au passage des disques A et B dans toutes les configurations et avec prise en compte de raideurs de contact non-linéaires.



(a) Disque A / Config 2d (b) Disque A / Config 3d (c) Disque A / Config 4d

(d) Disque B / Config 2d (e) Disque B / Config 3d (f) Disque B / Config 4d

FIGURE 2.61 – Fréquences propres issue de l'A.M.C. avec raideurs de contact non-linéaires

Comme dans les précédentes études, la fréquence 2 reste constante, la fréquence 3 varie faiblement et la fréquence 1 (correspondant au mode de basculement de pion) est la plus impactée par les conditions de contact. Les mêmes mécanismes menant aux variations de fréquences sont présents.

L'exploitation des profils réels fait apparaître de nombreuses instabilités vibratoires. Dans la configuration 2d, le disque A ne montre aucune confusion de fréquence, et le disque B montre des confusions entre les fréquences 1 et 3 en entrée de la première ondulation, entre les deux ondulations et à la sortie de la deuxième ondulation. Ces zones correspondent aux zones convexes du disque. Dans la configuration 3d, pour les deux disques, les confusions sur disque plan n'apparaissent plus lors du passage de l'ondulation. Dans la configuration 4d, les deux disques montrent des confusions entre les fréquences 1 et 2 dans les zones convexes.

2.6.3 Dissipation thermique

La figure 2.62 représente l'énergie locale dissipée pour les deux profils de disque.

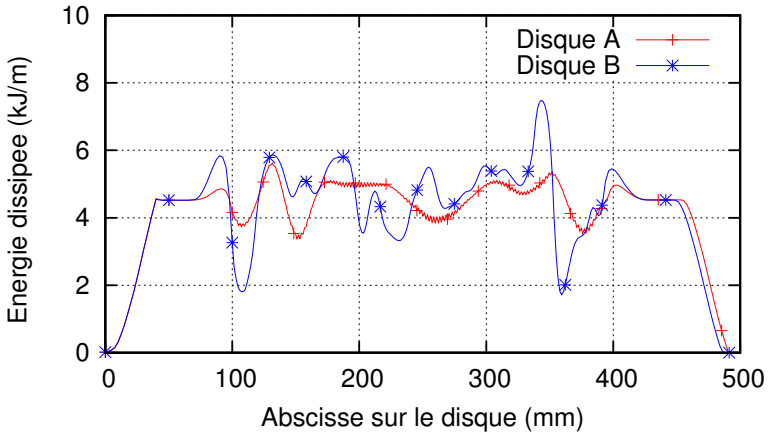


FIGURE 2.62 – Énergie totale dissipée par frottement au passage des deux profils réels de disque

L'introduction d'un profil réel complexifie la dissipation d'énergie par frottement. Si les mécanismes précédemment observés sont toujours présents, l'accumulation d'infimes variations de courbure sur le disque B rend imprévisible l'apparition des disparités dans la dissipation thermique sur le disque. Globalement, l'énergie dissipée sur un disque réel est beaucoup plus variable que lors d'exploitation de profil d'ondulation de type courbe de Bézier. Ces variations sont difficilement analysables et nous nous contenterons d'une appréciation globale.

2.6.4 Synthèse

Après la modélisation d'ondulation par des courbes de Bézier, l'exploitation de profils réels de disque nous a permis d'étudier l'influence d'ondulations réelles lissées au préalable.

Ces ondulations présentaient des hauteurs et des longueurs comparables aux études paramétriques réalisées. Même en imposant un chargement en déplacement sur la lame, l'évolution des statuts de contact et des pressions reste assez comparable aux résultats précédents.
La présence d'irrégularités rend très compliqué l'interprétation dans le domaine thermique. Ces irrégularités sont liées aux infimes variations de courbures des ondulations de disque. Ces variations du rayon de courbures ont des impacts minimes sur les distributions de pressions. Ces variations se répercutent sur la puissance instantanée dissipée par frottement qui est intégrée sur l'ensemble de la simulation afin d'obtenir l'énergie totale dissipée par frottement sur le disque. Tout cela aboutit à une sommation de ces variations. Une fois sommées, les faibles variations ont d'énormes impacts sur l'énergie dissipée sur le disque, en créant de nombreuses variations de celle-ci qui la rende quasiment imprévisible.

Sur l'analyse modale complexe, les situations rencontrées dans les études paramétriques, précédemment réalisées, peuvent être généralisées et permettent de prédire (de manière faible) l'évolution des fréquences propres au passage d'une ondulation. Selon la configuration choisie pour l'analyse modale, on retrouve des confusions de modes prévisibles selon les configurations de contact rencontrées. Dans les configuration 2d et 3d, une confusion entre les fréquences 1 et 3 est possible dans les creux entre les ondulations. Dans la configuration 4d, sur les mêmes creux, des confusions entre les fréquences 1 et 2 sont possibles. L'apparition de ces confusions dépend fortement de la pente du disque.

2.7 Conclusion sur la prise en compte d'un défaut de forme du disque

Dans ce chapitre, un modèle permettant de prendre en compte un défaut de forme du disque a été présenté. La première étape du modèle est une résolution élément fini permettant le calcul de l'évolution du champ de pression de contact au cours du passage du défaut. La deuxième étape est une analyse

modale complexe réalisée à partir des distributions de pressions déterminées avec le modèle EF. Pour cette analyse, un modèle simplifié à 3 DDL a été exploité. A travers cette analyse, il a été possible d'étudier l'évolution des propriétés modales au passage d'une ondulation de disque. A chaque fois, deux types d'analyse modale ont été réalisés : une première prenant en compte des raideurs de contact uniformes et une seconde des raideurs de contact non-linéaires.

Différentes hauteurs et longueurs d'ondulations ont été prises en compte. Des études ont aussi été menées avec différents coefficients de frottement, avec différentes rigidités structurelles et des longueurs apparentes de contact réduites. Par la suite, des profils de disque mesurés expérimentalement ont été injectés dans le modèle élément fini.

L'étude des champs de pression a permis dans un premier temps de déterminer l'énergie dissipée par frottement, puis dans un second temps les fréquences propres du système au travers d'un modèle simplifié. L'analyse de l'énergie totale dissipée au contact par frottement montre qu'une ondulation de disque crée des localisations thermiques en entrée et sortie d'ondulation. Ces localisations sont difficilement analysables et sont très variables selon la configuration du système. Toutefois, elle se centre principalement dans les creux de l'ondulation où les localisations de pressions évoluent rapidement. Dans le cas d'une ondulation réelle de forte amplitude, ces phénomènes deviennent quasiment imprévisibles. Mais dans cette étude, l'analyse thermique n'est effectuée que sur un tour de disque. Le cumul des localisations et la prise en compte des différents mode de transfert thermique (convection, conduction ou rayonnement) peuvent très bien mener à des localisations thermiques de type point chaud.

Le long du passage de défaut, les fréquences propres du système évoluent fortement. Cette évolution impacte sur les couplages potentiels. Différents modes de disque ont aussi été pris en compte dans l'analyse modale. Ainsi ces modes ont permis de prendre en compte différentes fréquences de vibration du disque. Selon les fréquences de vibrations de disque, les confusions intervenant ne sont pas les mêmes. Dans la configuration 2d, la plupart des confusions de modes mettent en jeux un mode de basculement de pion et un mode de basculement-translation où les translations de pion et de disque sont opposées. Dans la configuration 4d, les confusions intervenant mettent en jeu le mode de basculement de pion et un mode de basculement-translation où les translations de pion et de disque sont en phase. Dans la configuration 3d, on retrouve les deux types de couplages. Dans toutes les confusions, le mode de basculement pur intervient et transforme en basculement pur l'autre mode mis en jeu.

Les confusions interviennent le plus souvent en entrée et en sortie d'ondulation, c'est à dire dans les creux. Il arrive que, dans certains cas, les confusions interviennent en phase de montée ou de descente d'ondulation, parfois en sommet. Ces résultats vont dans le même sens que les observations expérimentales de Duboc [Duboc, 2013] dans lesquelles des occurrences de crissement intermittentes par tour sont corrélées à la géométrie du voile.

Entre les deux types de raideurs pris en compte dans l'analyse modale, de légères différences apparaissent. Le modèle linéaire permet de donner une première approximation en déterminant grossièrement les principales variations des fréquences propres. Le modèle non-linéaire apporte un complément d'information en prenant en compte les pressions locales de contact. Il affine la détermination des fréquences propres et permet de mieux prédire l'apparition de confusions de modes qui se produisent au passage de l'ondulation.

Chapitre 3

Influence de la localisation du contact sur les instabilités vibratoires

3.1 Contexte

La prise en compte d'une ondulation de disque a montrée un fort impact sur les propriétés vibratoires du système. Dans ce chapitre, on propose de se concentrer sur les localisations de contact sur la surface de la garniture.

On propose donc d'utiliser un modèle élément fini muni d'une couche finement maillée au contact afin d'intégrer les localisations de contact. On commencera par présenter le modèle avec couche fine avant de prendre en compte différentes localisations de contact.
Dans un premier temps, on se contentera de localiser le contact au centre de la garniture. Dans un second temps, le contact sera scindé en deux zones de contact réparties symétriquement de part et d'autre de la garniture. Ainsi, nous allons pouvoir étudier l'influence de la longueur apparente de contact sur les modes ainsi que l'influence d'un nouveau paramètre, la longueur théorique de contact. Ce dernier sera présenté lors de la présentation de la modélisation.
Après avoir modélisé successivement une, puis deux zones de contact inspirées par les localisations de contact impliquées par la surface du disque, on propose ensuite d'augmenter le nombre de zones de contact afin d'étudier l'influence d'une répartition du contact sur la surface de la garniture. Comme il a déjà été dit dans le chapitre 1, la garniture présente une surface très accidentée évoluant un cours du freinage. Nous allons nous intéresser à la présence de surface plane, appelée plateaux de contact, répartie sur l'ensemble de la garniture. Ainsi, nous étudieront l'impact de la présence de ces plateaux de contact sur les propriétés vibratoires du système.

3.2 Introduction du modèle avec couche finement maillée au contact

Dans cette partie, on commence par introduire un modèle multi-échelles qui permettra d'intégrer dans ce chapitre des non-planéités de la surface de la garniture, et dans le chapitre suivant, des hétérogénéités dans une couche fine, proche du contact, de matériau de garniture. Dans la présentation du modèle, la surface de contact de la garniture reste plane. L'analyse vibratoire sera réalisée avec le modèle semi-analytique avec raideurs de contact non-linéaires.
Dans un premier temps, le "nouveau" modèle est présenté et testé sur un cas de référence. Un s'agit d'un contact plan-plan avec une garniture aux propriétés homogènes. Le cas de référence servira de base aux études dans lesquelles des non-planéités, ou des hétérogénéités (dans le chapitre 4), seront introduites.

3.2.1 Présentation du modèle

Dans ce modèle, on travaille toujours sur un modèle 2D en déformation plane.
Le contact pion-disque se fait sur un disque plan. Il sera modélisé par une piste plane de 100 mm de long. La géométrie de la garniture est la même que dans le modèle précédant. La différence est que le maillage de la garniture est raffiné sur $1mm$ d'épaisseur sur la surface de contact(cf figure 3.1). Ce raffinement a pour but de permettre des comparaisons avec les études qui seront menées plus tard, où l'on souhaitera introduire des hétérogénéités de taille inférieure à $1mm$. La surface de contact est maillée suivant une taille de $0.1mm$, ce qui permet de pouvoir introduire des hétérogénéités d'une taille de $0.1mm$. On fait le choix

d'un maillage régulier (uniquement des quadrangles) afin de ne pas dépendre, dans un cas hétérogène, de la répartition et de l'orientation des éléments finis dans la garniture.
Afin d'assurer le recollement entre la zone raffinée et la zone non-raffinée on exploite la méthode de recollement des maillages incompatibles présentée dans la section 1.6.2.5. Ainsi, il est donc possible de passer d'un maillage régulier d'une taille de $1mm$ à un autre maillage régulier d'une taille de maille de $0.1mm$.
La géométrie présentée sur la figure 3.1 possède une longueur apparente de contact de $40mm$. Au final, le pion complet (avec une garniture comportant une couche fine) est composé de 6074 Noeuds dont 4411 dans la couche fine.

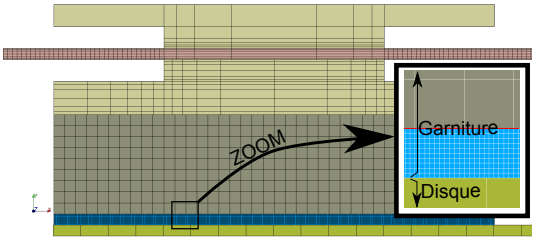


FIGURE 3.1 – Modèle avec raffinement de la garniture au contact

Dans ce modèle, les hétérogénéités qui seront introduites ne seront pas amenées à évoluer. Il n'y aura pas de phénomènes transitoires. Les distributions de pressions seront déterminées sur des équilibres quasi-statiques.
A la suite de chaque calcul éléments finis, une analyse modale sous condition de contact sera réalisée en utilisant le modèle semi-analytique avec raideurs de contact non-linéaires (voire 2.2.3.1).

La partie suivante est consacrée à la validation du modèle avec raffinement au contact.

3.2.2 Validation du modèle

Pour la validation, et les études à venir, les mêmes conditions aux limites et les mêmes propriétés des matériaux que dans le chapitre 2 sont appliquées. A savoir : un encastrement du disque, un effort normal de $300N$ et une vitesse de glissement de $1m/s$ (uniquement lors des simulations quasi-statiques) sur la lame, un coefficient de frottement de $0,3$ et les propriétés matériaux du tableau 2.1.
Cette partie présente une validation du modèle avec couche fine au contact suivant deux critères :

- Les niveaux de contraintes dans la garniture et en particulier au niveau du recollement de maillage.
- La distribution de pression au contact pion-disque.

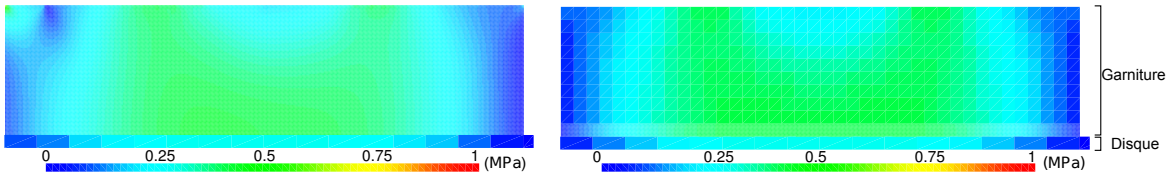
3.2.2.1 Distribution de contraintes

Dans cette partie, on s'intéresse aux contraintes sur les points de Gauss. L'objectif est de s'assurer que la distribution de contrainte n'est pas modifiée par la méthode de recollement de maillage. Les résultats suivants ne sont présentés que dans le cas d'un chargement statique, c'est à dire pour une vitesse de glissement nulle. Cette validation a aussi été réalisée sous condition de glissement en quasi-statique mais elle ne peut être visualisée dans l'ensemble du fait des énormes variations de contraintes d'un coté à l'autre de la garniture.
Les figures 3.2 représentent les cartographies de contraintes au point de Gauss sur la garniture dans deux cas : dans le cas d'une garniture complètement raffinée avec une taille de maille constante de $0.1mm$ (figure 3.2a) et dans le cas d'un modèle avec couche fine, uniquement au contact, avec des tailles de mailles de $1mm$ dans la garniture et de $0.1mm$ dans la couche fine (figure 3.2b).

En observant les cartographies de contraintes, il est évident que les contraintes sur la couche fine ne sont pas modifiées par la technique de recollement des maillages incompatibles. Bien que le recollement de maillages incompatibles soit assuré uniquement sur les déplacements, cela n'implique pas de réelle discontinuité à la jonction entre la couche supérieure et la couche fine de la garniture.

3.2.2.2 Distribution de pressions au contact

Dans cette partie, on regarde l'impact du recollement de maillage directement sur les pressions de contact. La distribution de pression est le résultat exploité permettant de déterminer les fréquences



(a) Modèle classique avec garniture raffinée ($0.1mm$) (b) Modèle avec couche fine au contact

FIGURE 3.2 – Contraintes équivalentes de Von Mises aux points de Gauss sur le système pion-disque

propres du modèle, il est nécessaire de vérifier que la méthode ne la modifie pas.
La figure 3.3 présente les distributions de pressions de contact issues de modèles avec un maillage de garniture grossier ($1mm$), un maillage fin ($0.1mm$) et le modèle avec couche fine au contact présenté ci-dessus. Le modèle avec raffinement au contact exploite la méthode des maillages incompatibles. Cette méthode de recollement de maillage fournit de bons résultats en terme de pressions.

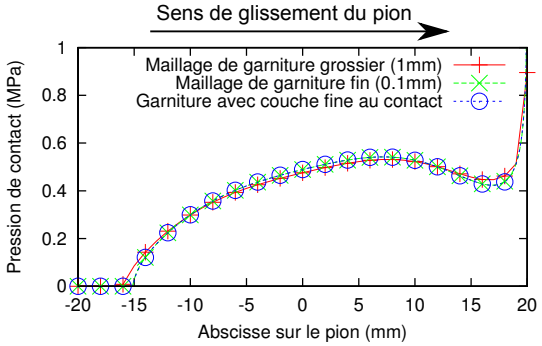


FIGURE 3.3 – Distributions de pressions avec et sans raffinement du contact

En comparant les résultats issus du modèle avec une garniture munie d'un maillage raffiné et une garniture munie d'un maillage grossier, l'erreur relative moyenne est de 9%. Les principales différences se situent aux extrémités du contact. En ne tenant pas compte du premier et du dernier noeud en contact, l'erreur relative moyenne tombe à 4%. En entrée de contact, la surpression et la sous-pression qui la suit sont mieux déterminées. En sortie de contact, la fermeture du contact est aussi affinée.
Le modèle avec raffinement au contact fournit des résultats très proches des résultats obtenus avec le modèle comportant une garniture finement maillée. Entre ces deux maillages, l'erreur relative moyenne est de 0,4% et de 0,18% en ne tenant pas compte du dernier noeud en contact (le dernier noeud avant le décollement de la garniture).

Le modèle avec raffinement de garniture fournit donc des résultats très corrects sur un contact plan-plan avec des propriétés matériaux homogènes.

3.2.2.3 Bilan du modèle avec couche fine

Le modèle avec une couche fine au contact, recollée avec la méthode des maillages incompatibles, est validé et choisi. Il n'y a pas de modification des contraintes et pas de perturbation dans la distribution de pression. Le modèle avec couche fine permet aussi un raffinement de la garniture au contact tout en conservant un maillage quadrangle régulier. De plus, ce modèle permet de conserver des temps de calcul raisonnables : 4 min pour une résolution quasi-statique (contre 45 min avec maillage de garniture fin complet).
Dans ce cas de référence, le modèle est restreint à une seule hauteur de couche et à une taille de maille fixée dans cette couche fine. Il est présenté en annexe une étude portant sur la hauteur et le nombre d'éléments dans la couche fine (voir annexe C).

En considérant les résultats précédemment exposés, le modèle exploité dans les calculs utilisant le modèle avec couche fine seras muni d'une couche d'une épaisseur de $1mm$ et d'une taille de maille dans la couche fine de $0.1mm$.

3.2.3 Analyse modale du cas de référence

A présent que la géométrie et le maillage du cas de référence sont définis, une analyse modale, en utilisant le modèle semi-analytique présenté dans la partie 2.2.3.1, est réalisée.

Dans ce chapitre, les hétérogénéités introduiront des fluctuations de la pression locale de contact qui auront des conséquences sur l'analyse modale. En conséquence, le modèle semi-analytique avec raideurs de contact non-linéaires ($n = 2,14$ et $k_n = 1,45e16$) sera utilisé.

Les calculs sont réalisés sur les configurations de disque prédéfinis dans le tableau 2.4. La figure 3.4 présente les fréquences propres obtenues lors de l'analyse modale du cas homogène de référence avec couche fine au contact.

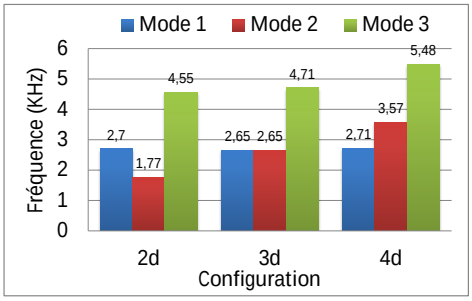


FIGURE 3.4 – Fréquences propres dans le cas homogène de référence avec couche fine au contact

Dans la configuration 2d, il apparaît trois modes propres distincts et aucune confusion de fréquences. Dans la configuration 3d, une confusion de fréquence apparaît et met en jeu les modes 1 et 2. Dans la configuration 4d, le système est à nouveau non-confondu avec trois modes à des fréquences distinctes.
Les résultats sont proche de ceux obtenus pour la configuration de référence avec un maillage grossier (partie 2.2.3.2.c). Les fréquences n'ont variées que de quelques Hertz.

3.3 Influence de la localisation du contact dans l'analyse modale

Dans cette partie, on propose d'étudier deux types de localisation de contact en créant des zones de portance du contact. Le modèle avec une couche finement maillée au contact (cf. partie 3.2.2.3) est utilisé car il permettra de créer des zones de portances beaucoup plus petites que le modèle macroscopique. Ici, les propriétés des matériaux sont homogènes sur l'ensemble de la garniture (garniture macro et couche fine). Afin de créer des zones de portances du contact, des éléments à la surface de la couche fine sont supprimés. L'analyse modale est toujours réalisée avec le modèle semi-analytique avec raideurs non-linéaires.

La figure 3.5 représente un exemple de surface de garniture présentant des zones de portance afin de simuler des localisations de contact. Elle permet aussi de rappeler ce qu'est la longueur apparente de contact (LAC) et d'introduire la longueur théorique de contact.
On rappelle que la Longueur Apparente de Contact (L.A.C.) est la distance qui sépare les deux points les plus éloignés qui peuvent entrer en contact avec le disque.
La Longueur Théorique de Contact (L.T.C.) est définie comme étant la somme des longueurs des zones de portance du contact, c'est à dire : $LTC = \sum_i \lambda_i$. La LTC correspond à la longueur de la surface qui est potentiellement en contact avec le disque.

Dans cette partie, on commence par s'intéresser à un contact unique, en modélisant une unique zone de portance du contact, localisée au centre de la garniture. Le second type est un contact symétriquement réparti sur l'avant et l'arrière de la garniture en modélisant deux zones de portance. L'objectif de cette partie est de vérifier l'influence de la localisation du contact sur la fréquence de basculement de pion dans un premier temps et de dissocier l'influence de la LAC et de la LTC dans un second temps.

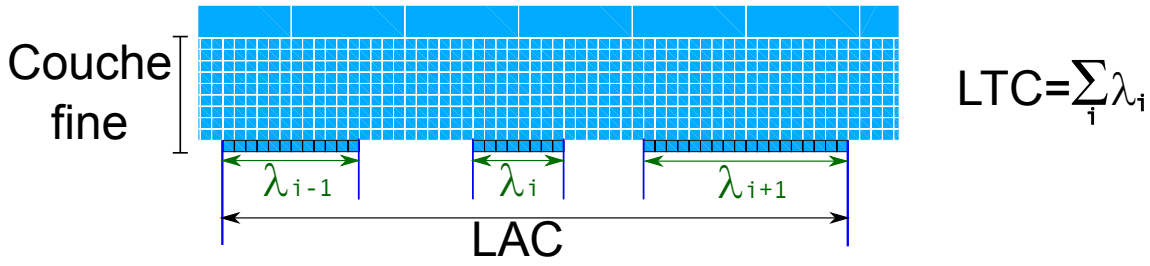


FIGURE 3.5 – Modélisation de plateaux sur la surface de la garniture pour la localisation du contact

3.3.1 Contact centré unique

Dans cette partie, on s'intéresse à un contact unique centré. L'objectif est de faire varier la longueur de contact en modélisant un unique plateau de longueur choisi et centré sur la garniture.

3.3.1.0.a Configurations étudiées

Un seul plateau de contact d'une hauteur de $0.1mm$ est modélisé au centre de la garniture. La longueur apparente de contact (LAC) est égale à la longueur du plateau et à la longueur théorique de contact (LTC). Dans cette partie, elle varie de $40mm$ à $1mm$ par pas de $1mm$. La figure 3.6 représente la partie inférieure du maillage du pion.

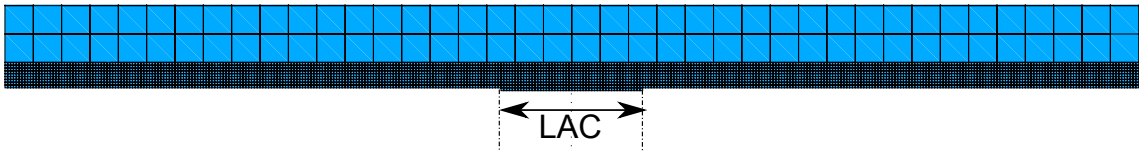
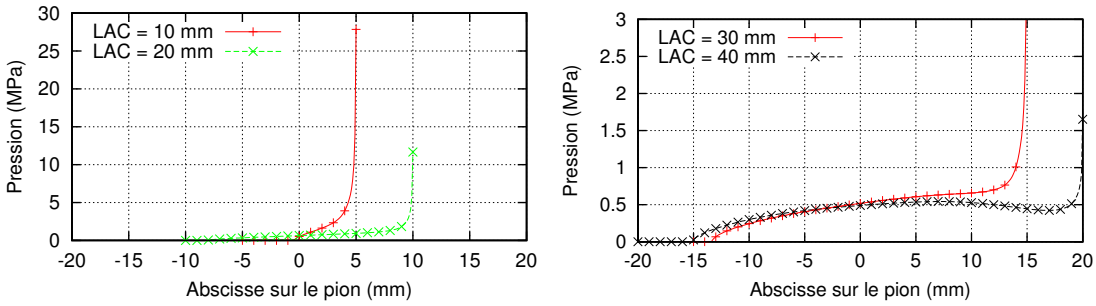


FIGURE 3.6 – Modélisation d'un contact unique centré (LTC=LAC)

3.3.1.0.b Pressions de contact issues du modèle

Les figures 3.7 représentent des pressions de contact en présence d'une unique zone portance lorsque la LAC vaut 10, 20, 30 et $40mm$.



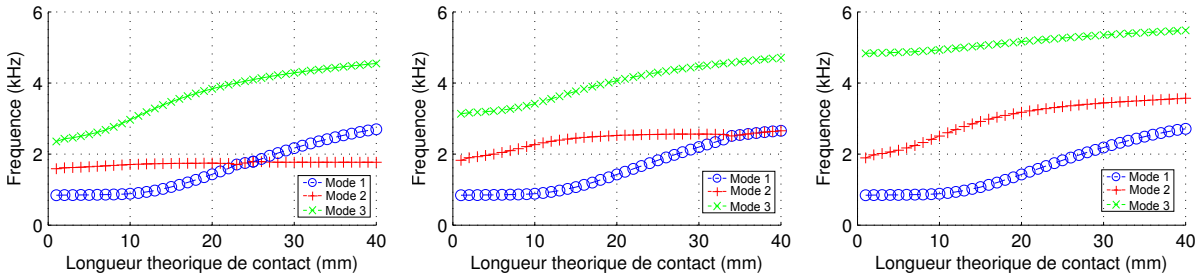
(a) $LAC = 10$ et $20mm$ (b) $LAC = 30$ et $40mm$

FIGURE 3.7 – Pression de contact en présence d'uniques zones portances (LAC de 10, 20, 30 et $40mm$)

On rappelle qu'une LAC de $40mm$ correspond au cas de référence. Avec une LAC réduite, les pressions de contact sont très semblables à celles observées dans un contact plan simple. Elles présentent un décollement en sortie de contact et une surpression en entrée de contact. L'effort appliqué étant constant, de faibles LAC entraînent des surpressions importantes.

3.3.1.0.c Influence sur les propriétés vibratoires

Les figures 3.8 représentent les fréquences propres dans les configurations 2d, 3d et 4d lorsque le contact est localisé sur un plateau situé au centre de la garniture et de longueur variable.



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

FIGURE 3.8 – Fréquences propres en présence d'un unique plateau centré de longueur variable

La localisation du contact au centre de la garniture entraîne une baisse globale des fréquences propres. Dans la configuration 2d, la fréquence 2 n'est presque pas affectée. Elle ne varie que de $200Hz$. La fréquence 1 décroit de $1900Hz$ et la fréquence 3 décroit de $2200Hz$. Les fréquences 1 et 2 se confondent pour une LTC comprise entre 23 et $26mm$.
Dans la configuration 3d, toutes les fréquences sont affectées. La fréquence 1 varie de $1800Hz$, la fréquence 2 de $800Hz$ et la fréquence 3 de $1600Hz$. Les fréquences 1 et 2 sont confondues pour une LTC strictement supérieure à $33mm$.
Dans la configuration 4d, c'est la fréquence 3 qui est la moins affectée. La fréquence 1 varie de $1900Hz$, la fréquence 2 de $1700Hz$ alors que la fréquence 3 ne varie que de $650Hz$. Il n'y a aucune confusion dans cette configuration.

La réduction de la longueur de contact diminue la rigidité du système en translation, et en basculement, ce qui implique une baisse des fréquences propres.

3.3.2 Double contact symétriquement réparti

La figure 3.9 représente une garniture comportant deux plateaux de contact et illustre les LAC et LTC.
Sur cette figure, la longueur des plateaux (L) est représentée ainsi que la distance entre les deux points potentiellement en contact les plus éloignés. La distance entre ces deux points représente la longueur apparente de contact (LAC) alors que la somme des longueurs des deux plateaux (soit $2 * L$) représente la longueur théorique de contact (LTC).

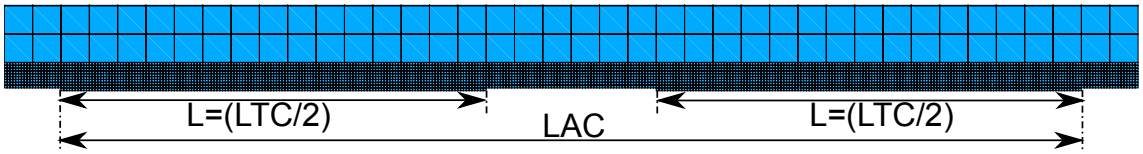


FIGURE 3.9 – Modélisation d'un contact double symétrique

3.3.2.1 Influence de la longueur théorique de contact

Ici, la longueur apparente de contact est fixée et la longueur théorique de contact est variable. En des termes plus simple, la distance entre les deux points extrêmes potentiellement en contact est fixée,par exemple sur les bords de la garniture (en $x = -20mm$ et $x = 20mm$). Une ouverture de contact interne est créée au centre de la garniture, ce qui va réduire progressivement la taille des plateaux. La figure 3.10 présente des exemples de pion ayant une LAC fixée et différentes LTC.

La figure 3.11 représente les pressions de contact lorsque la LAC est fixée à $40mm$ et pour des LTC de 10, 20, 30 et $40mm$.

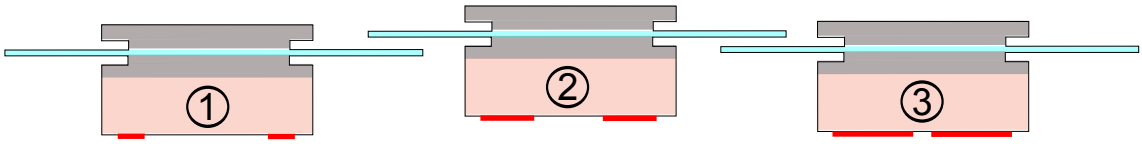


FIGURE 3.10 – Exemple de situation avec une LAC fixée et une LTC variable

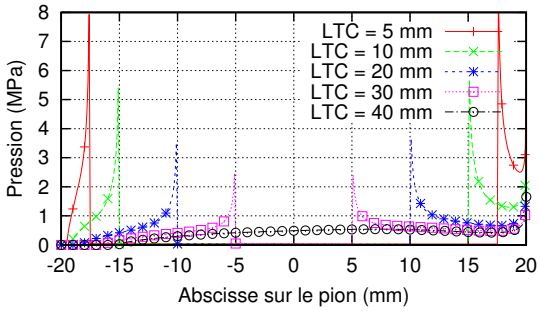
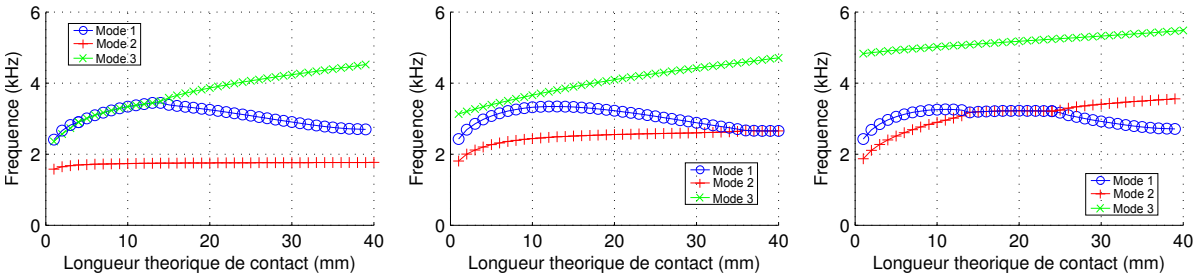


FIGURE 3.11 – Pression de contact en présence de deux zones portances avec une LAC fixée à $40mm$ et une LTC variable

Les deux zones de portances contiennent une surpression sur leur entrée de contact, ainsi qu'une surpression en sortie du plateau le plus proche de l'entrée de contact. Les surpressions orientées vers le centre de la garniture peuvent sembler étrange, mais elles sont dues à la géométrie du patin, et plus particulièrement, à la géométrie du socle de garniture. La jonction socle-lame est centré et longue de $20mm$ (pour une garniture centrée et longue de $40mm$). En présence de deux zones de portance séparé par un espace supérieur ou égal à $20mm$ (soit la longueur de la jonction socle-lame), de fortes contraintes apparaissent sur les bords intérieurs des zones de portance et donc sur les pressions locales de contact. Logiquement, des LTC plus petites impliquent des niveaux maximums de pressions plus élevés.

Les figures 3.12 représentent l'évolution des fréquences propres en fonction de la LTC pour une LAC fixée à $40mm$. Une LAC fixée à $40mm$ signifie que les deux points les plus éloignés et potentiellement en contact sont espacés de $40mm$, donc ils se situent sur les deux bords de la garniture.



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

FIGURE 3.12 – Fréquences propres en présence de deux plateaux et à LAC fixée à $40mm$

La réduction de la longueur théorique de contact, par l'ouverture d'un contact interne au centre de la garniture, entraîne une variation des fréquences propres. En ouvrant le contact au centre de la garniture, la fréquence 1 croit alors que les fréquences 2 et 3 ont tendance à décroître. Dans la configuration 2d, la fréquence 2 reste constante et la fréquence 3 décroit. Dans la configuration 3d, les fréquences 2 et 3 décroissent faiblement. Dans la configuration 4d, c'est la fréquence 3 qui a une faible variation et la fréquence 2 qui varie plus amplement. Dans toutes les configurations, la fréquence 1 croit toujours lorsqu'une ouverture de contact apparaît, tant qu'elle est inférieure à $30mm$. Dès lors que l'ouverture de contact devient supérieure à $30mm$, la fréquence 1 amorce une décroissance brutale.
Ces variations peuvent s'expliquer par des variations de la rigidité du système en basculement et en translation. L'ouverture de contact a un double effet sur la rigidité en basculement. Dans un premier temps, l'ouverture de contact localise les pressions de contact sur les extrémités du pion, ce qui entraîne un accroissement de la rigidité en basculement. Puis, lorsque l'ouverture de contact devient trop grande, la longueur théorique de contact devient trop faible et la rigidité s'effondre.

Quelques confusions de fréquences apparaissent. Dans la configuration 3d, la confusion obtenue avec un contact plan-plan, disparaît lorsqu'une ouverture de contact interne supérieure à $35mm$ est présente. Au contraire, dans la configuration 4d, la présence d'une ouverture de contact fait naître une confusion lorsque l'ouverture est comprise entre $14mm$ et $24mm$.

3.3.2.2 Influence de la longueur apparente de contact

Dans cette partie, la longueur théorique du contact est fixée et la longueur apparente de contact varie. Plus simplement, la taille des deux plateaux sera fixée et les plateaux seront déplacés du centre vers l'extérieure de la garniture. La figure 3.13 présente des exemples de pion ayant une LTC fixée et différentes LAC.

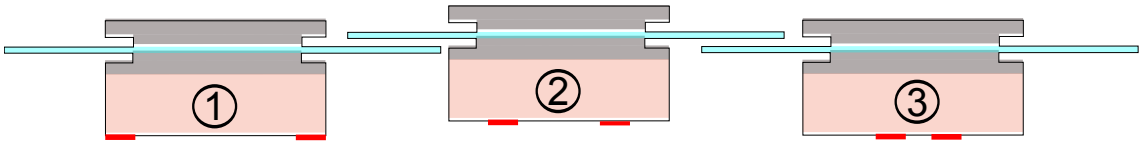


FIGURE 3.13 – Exemple de situation avec une LTC fixée et une LAC variable

La figure 3.14 représente les pressions de contact lorsque la LTC est fixée à $10mm$ et pour des LAC de 10, 20, 30 et $40mm$.

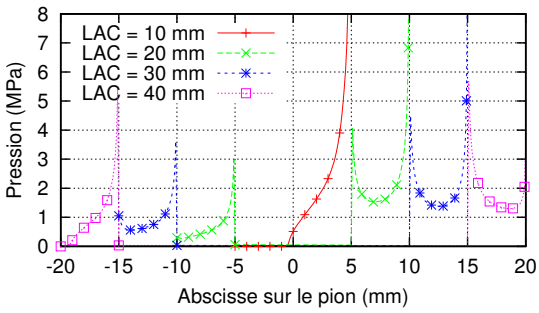


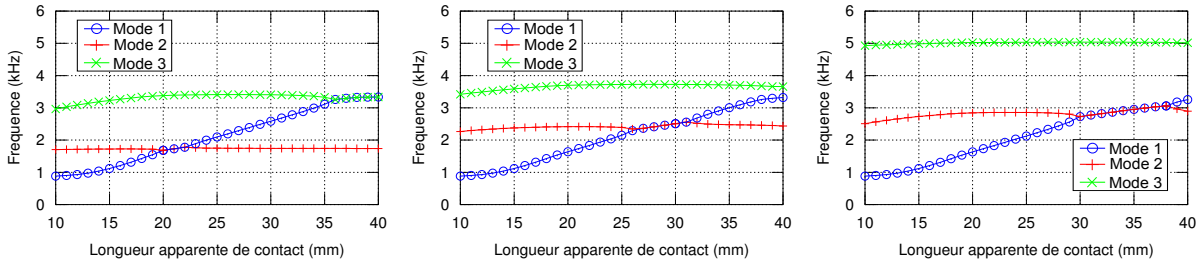
FIGURE 3.14 – Pression de contact en présence de deux zones portances et à LTC fixée à $10mm$

Comme dans l'étude à LAC fixée, les deux zones de portances contiennent une surpression sur leur entrée de contact. Lorsque les zones de portances sont proches, il apparaît un décollement sur la zone de portance la plus proche de la sortie de contact de la garniture. Plus les zones de portance sont éloignées, plus les surpressions orientées vers l'intérieur de la garniture sont élevées, ce qui est une fois de plus dû à la géométrie du socle de garniture.
Lorsque la LTC est fixée, des LAC plus petites entraînent logiquement des niveaux maximums de pressions plus élevés.

Les figures 3.15 représentent l'évolution des fréquences propres en fonction de la LAC pour une LTC fixée à $10mm$. Une LTC fixée à $10mm$ signifie que nous sommes en présence de deux plateaux d'une longueur de $5mm$.

Lorsque la LTC est fixée, la fréquence 1 est la seule à évoluer sensiblement (plus de $2000Hz$ de variation). Les fréquences 2 et 3 sont très peu affectées (environ $200Hz$). La réduction de la LAC n'influe que sur le basculement. Sa réduction entraîne une réduction de la rigidité en basculement et donc une fréquence de basculement de pion réduite.

La réduction de la LAC peut faire apparaître des confusions de fréquences diverses. En présence de deux plateaux de longueur $5mm$ lorsqu'ils sont situés aux extrémités de la garniture, la configuration 2d montre une confusion entre les fréquences 1 et 3. En rapprochant ces deux plateaux, et donc en réduisant la LAC, la fréquence 1 chute et vient se confondre avec la fréquence 2, lorsque la LAC est située entre $20mm$ et $23mm$.
Dans les configurations 3d et 4d, lorsque les plateaux sont situés sur les extrémités de la garniture, il n'y



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

FIGURE 3.15 – Fréquences propres en présence de deux plateaux et à LTC fixée à $10mm$

a pas de confusion, mais la fréquence 1 est tout de même supérieure à la fréquence 2. En réduisant la LAC, la fréquence 1 diminue est peut être amenée à se confondre avec la fréquence 2.

3.3.3 Synthèse sur l'impact de la localisation du contact

En présence d'un unique plateau de contact, la longueur apparente de contact, égale à la longueur théorique de contact, influe sur toutes les fréquences en modifiant la rigidité du système en basculement et en translation. Plus le contact est localisé au centre de la garniture, plus la rigidité du système est diminuée et plus les fréquences sont faibles.
Lorsque deux plateaux de contact sont modélisés, la longueur apparente de contact n'est plus égale à la longueur théorique de contact. De plus, nous avons montré que la longueur apparente de contact et la longueur théorique de contact n'ont pas le même impact sur le comportement vibratoire du système.
Lorsque la LAC est fixée, la réduction de la longueur théorique de contact fait toujours décroître les fréquences des modes associés à de la translation (pion et disque), mais elle fait cette fois croître la fréquence liée au basculement du pion. L'apparition d'une ouverture de contact interne (à LAC fixée) accroît les pressions de contact sur les bords du contact et a tendance à augmenter alors la rigidité du système en basculement. Lorsque l'ouverture de contact interne devient grande, la rigidité en basculement s'effondre et la fréquence 1 aussi. Cette apparition d'ouverture de contact interne a un effet opposé sur les fréquences liées à des modes de basculement.
Lorsque la LTC est fixée et que la LAC varie (i.e. déplacement des plateaux de contact) les fréquences liées à des modes de translation ne sont pas impactées. Seule la fréquence du mode de basculement de pion est impactée. Plus la LAC est grande, i.e. plus les plateaux sont éloignés, plus la rigidité en basculement du pion augmente et donc plus la fréquence 1 augmente.
Ainsi, la LAC et la LTC ont deux impacts opposés sur les fréquences propres du système. Ces impacts se conjuguent en présence d'un unique plateau de contact. Dans ce cas, la LAC domine l'évolution de la fréquence 1 puisque celle-ci décroit.

Dans la prochaine partie, un grand nombre de localisations de contact est intégré au modèle afin de simuler la présence de plateaux de contact sur la surface de la garniture.

3.4 Prise en compte de plateaux de contact

On commence par présenter la méthode utilisée pour modéliser un grand nombre de plateaux de contact. Puis on présente et on analyse deux types de répartition de plateaux. Le premier type consiste en des répartitions de plateaux équidistants et de longueurs uniformes. Le second type prend en compte des répartitions de plateaux équidistants et de longueurs aléatoires.

3.4.1 Modélisation des plateaux

Dans cette partie, la couche fine contient un nombre de plateaux modélisés N_{plat} qui peut varier. Le i-ème plateau est caractérisé par sa longueur λ_i et la position de son centre C_i (figure 3.16).
Dans un premier temps, les plateaux seront équidistants ($abs(C_{i-1} - C_i) = D$ où D est constant).
En fixant le nombre de plateaux N_{plat} et supposant que les centre des plateaux soit équidistants, il est possible de déterminer la position des centres des plateaux notée C_i sur la figure 3.16) où $i \in [\![1; N_{plat}]\!]$.

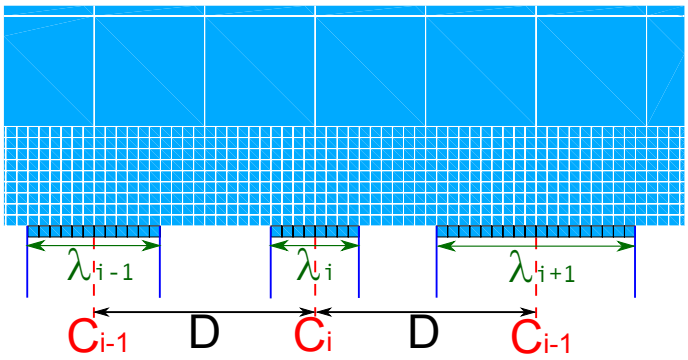


FIGURE 3.16 – Surface partielle d'un pion présentant des plateaux équidistants de longueurs quelconques

La longueur de chaque plateau est notée λ_i. Elle sera soit fixée, soit déterminée aléatoirement. Ainsi la distance entre deux plateaux vaut $D = \frac{l_{patin}}{N_{plat}}$ et la position des centres est donnée par $C_i = \frac{(2*i-1)*l_{patin}}{2*N_{plat}}$ où l_{patin} est longueur du patin fixée à $40mm$. Les coordonnées des centres de plateau sont données pour un pion dont la gauche se situe à l'abscisse 0 et la droite se situe à l'abscisse l_{patin}.

Lors de cette étude sur l'impact des plateaux de contact, deux types de répartition seront étudiés. Le premier exploite des plateaux de longueurs uniformes, c'est à dire $\forall i \in [\![1; N_{plat}]\!]$, avec $\lambda_i = constante$. Le second exploitera des plateaux de longueurs aléatoires (distribution non-gaussienne).

3.4.2 Répartitions uniformes équidistantes de plateaux

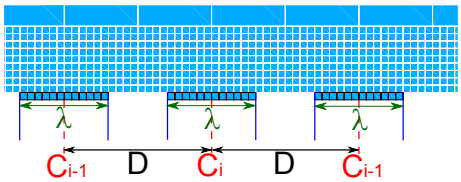


FIGURE 3.17 – Plateaux de contact équidistants et de longueurs uniformes

N_{plat}	λ_{min}	LTC$_{min}$	λ_{max}	LTC$_{max}$
5	0,2	1	7,8	39
10	0,2	2	3,8	38
20	0,2	4	1,8	36
40	0,2	8	0,8	32

TABLE 3.1 – Bornes minimum et maximum, et LTC correspondantes, pour des plateaux équidistants de longueurs uniformes (Longueurs et LTC en mm)

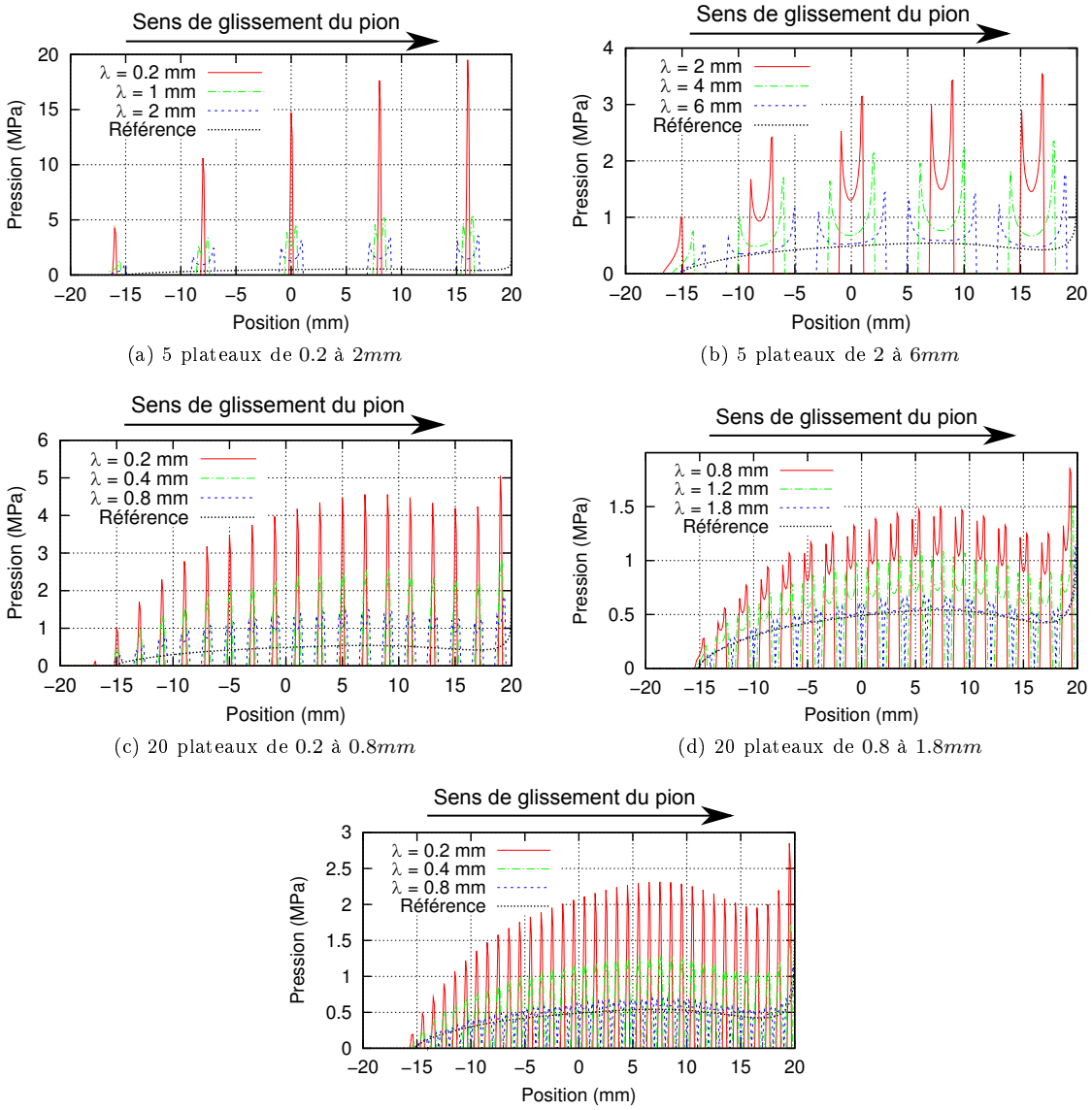
Pour tester plusieurs configurations, différents nombres de plateaux et différentes longueurs sont modélisés. $\forall i \in [\![1; N_{plat}]\!]$, $\lambda_i = \lambda$ (figure 3.17 et tableau 3.1). Des configurations avec 5, 10, 20 et 40 plateaux sont testées. Dans chaque cas, plusieurs longueurs de plateaux sont testées de λ_{min} à λ_{max} avec des valeurs fonction du nombre de plateau. Il correspond au plus grand λ possible pour lequel des plateaux consécutifs ne fusionnent pas, ce qui reviendrait aux cas de référence avec un contact continu sur l'ensemble de la surface de pion.
Les λ testés sont pris avec $0.2mm$ d'intervalle entre chaque λ. Par exemple, pour 40 plateaux, les λ testés sont 0.2, 0.4, 0.6 et $0.8mm$.

Les pressions de contact sont d'abord présentées, puis les résultats de l'analyse modale complexe.

3.4.2.1 Analyse des pressions de contact

Tout d'abord, on présente quelques répartitions de pressions issues des simulations (figures 3.18).

Le plateaux de contact ayant une hauteur de $0.1mm$, aucun contact ne se fait en dehors de ceux-ci. Comme on calcule à effort constant ($300N$) et que les plateaux sont les uniques porteurs de contact, ils localisent très fortement le contact et augmentent donc très fortement le maximum des pressions locales de contact. Dans des cas extrêmes, par exemple avec 5 plateaux de longueur $0.2mm$ (figure 3.18a), la pression locale de contact peut dépasser les $10MPa$, alors qu'en l'absence de plateaux de contact ($LTC = 40mm$), la pression locale de contact atteint à peine $1MPa$ en entrée de contact. En augmentant la longueur théorique de contact, les niveaux maximum de pression se réduisent très vite et prennent



(a) 5 plateaux de 0.2 à $2mm$

(b) 5 plateaux de 2 à $6mm$

(c) 20 plateaux de 0.2 à $0.8mm$

(d) 20 plateaux de 0.8 à $1.8mm$

(e) 40 plateaux de 0.2 à $0.8mm$

FIGURE 3.18 – Pression de contact sur le pion en présence de plateaux de contact de longueurs uniformes

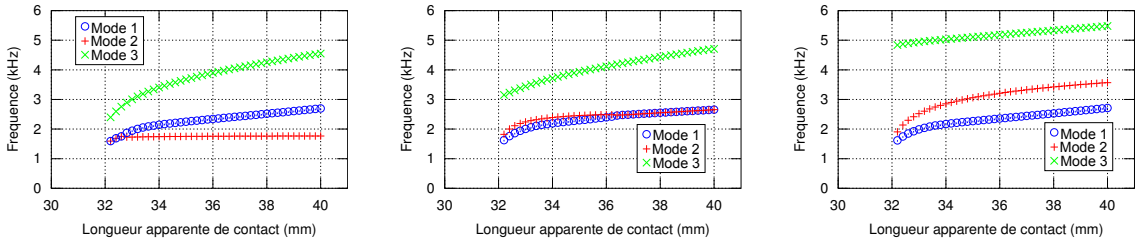
une forme convexe caractéristique qui est aussi composée d'une surpression en sortie de plateau. Avec une LTC supérieure à $5mm$, les pressions de contact passent en dessous de $5MPa$. Notons que la surpression en entrée de plateau est toujours supérieure à celle en sortie de plateau. Plus la LTC tend vers la valeur maximale de $40mm$ (correspondant à une surface sans plateau), et plus le niveau de pression est proche du niveau de pression de référence.

3.4.2.2 Analyse des fréquences propres

3.4.2.3 Résultats avec 5 plateaux équidistants de longueurs uniformes

On commence par s'intéresser à un cas facilement analysable, car comportant peu de plateau. Le premier cas étudié contient uniquement 5 plateaux. La LAC étant apparue comme le paramètre le plus influant en présence de deux plateaux, on commence par analyser les fréquences en fonction de celui-ci. Les figures 3.19 représentent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de la longueur apparente de contact pour les configurations comportant 5 plateaux équidistants et de longueurs uniformes.

En présence de 5 plateaux de contact, les fréquences propres du système évoluent avec la longueur apparente de contact. Plus la LAC est petite et plus les fréquences propres du système tendent vers les

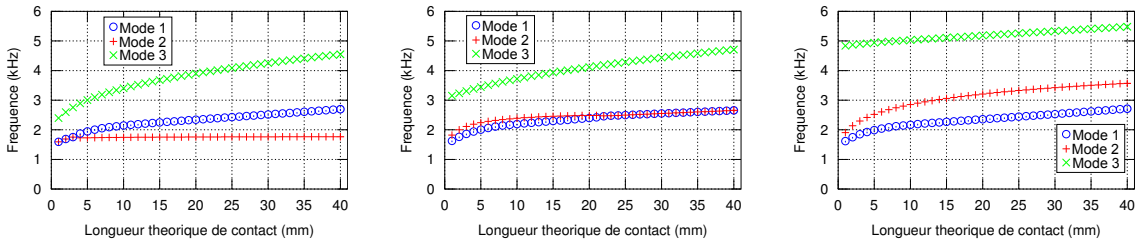


(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux (b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux (c) En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux

FIGURE 3.19 – Évolution des fréquences propres en fonction de la LAC pour les configurations avec 5 plateaux équidistants de longueurs uniformes

fréquences propres sans contact données en entrée dans le modèle semi-analytique. Quand la LAC tend vers la longueur du pion ($40mm$), on retrouve les fréquences propres du cas de référence, à savoir celles d'un contact plan-plan avec des propriétés homogènes.
En prenant en compte le mode de disque à 2 diamètres nodaux (3.19a), pour une LAC supérieure à $33mm$, la fréquence propre 2 reste constante. La déformée modale correspondant à ce mode a une particularité : sa composante en basculement de pion est relativement faible. Les conditions de contact modifient principalement le basculement de pion et les modes dépendant du basculement de pion. En augmentant la LAC, on augmente donc la rigidité en basculement du pion. Une confusion entre les fréquences 1 et 2 apparait lorsque la LAC est inférieure ou égale à $33mm$.
En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux (3.19b), pour une LAC supérieure à $33mm$, la fréquence propre 2 a la plus faible variation et les autres fréquences propres croissent plus rapidement avec la LAC. A partir d'une LAC de $36,2mm$, soit une longueur de plateau de $32,8mm$ (correspondant à $\lambda = 2mm$), une confusion de fréquence entre les modes 1 et 2 apparaît. A partir de cette LAC, la fréquence propre 2 commence à croître avec la fréquence propre 1. Rappelons qu'avec le mode de disque à 3 diamètres nodaux, dans le cas d'un contact plan-plan homogène, il y a toujours une confusion entre les fréquences propres 1 et 2.
En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux (3.19c), toutes les fréquences propres croissent avec la LAC et aucune confusion de mode n'apparaît.

Les figures 3.20 représentent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de la longueur théorique de contact pour les configurations comportant 5 plateaux équidistants et de longueurs uniformes. Dans ce cas, les résultats sont présentés directement en fonction de la LTC mais il est facile de revenir à la longueur de plateau λ ($\lambda = \frac{LTC}{5}$).

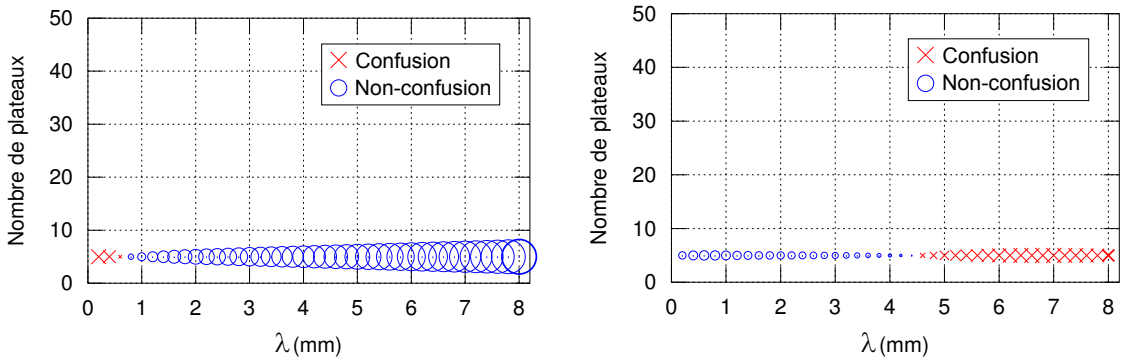


(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux (b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux (c) En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux

FIGURE 3.20 – Évolution des fréquences propres en fonction de la LTC pour les configurations avec 5 plateaux équidistants de longueurs uniformes

L'évolution des fréquences en fonction de la LTC est identique à l'évolution des fréquences en fonction de la LAC. En fait, il est possible de trouver une relation de proportionnalité entre LAC et LTC.
On sait déjà que $LTC = \Sigma\lambda = N_{plat} * \lambda$.
Les plateaux étant équidistants et de longueurs uniformes, on a $LAC = \frac{N_{plat}-1}{N_{plat}} * l_{patin} + \lambda$.
Ainsi, il est possible d'établir la relation : $LTC = N_{plat} * LAC - (N_{plat} - 1) * l_{patin}$.
Cette relation explique les similarités entre les résultats avec la LAC et la LTC.

La prise en compte des modes de disque à 2 et 3 diamètres nodaux a l'avantage de présenter l'apparition d'une confusion. Nous allons nous y intéresser particulièrement dans la suite de nos analyses. Afin de bien visualiser les λ faisant apparaître une confusion de fréquences, la figure 3.21 représente l'état de confusion pour chaque simulation réalisée avec 5 plateaux.



(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux

(b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux

FIGURE 3.21 – Apparition de confusions entre les modes 1 et 2 pour les configurations avec 5 plateaux équidistants de longueurs uniformes

Sur les figures 3.21, un marqueur rond bleu indique une configuration ne montrant pas de confusion de fréquences et une croix rouge indique une confusion entre les fréquences 1 et 2. La taille des marqueurs bleus est fonction de la distance entre les fréquences 1 et 2 (i.e. $abs(f1 - f2)$) alors que la taille des croix rouges est fonction de la valeur absolue de la partie réelle des valeurs propres (i.e. $abs(\Re(f1))$) qui représente l'indice d'instabilité. Remarquons que la taille des marqueurs n'est là que pour donner une information qualitative. En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux (figure 3.21a), des confusions de fréquences apparaissent uniquement pour de très faible LTC. Pour de plus forte LTC, on note un accroissement régulier de la distance entre les fréquences propres 1 et 2. En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux (figure 3.21b), les configurations avec un λ supérieur à $2,4mm$ donnent une confusion de fréquence entre les modes 1 et 2 et que plus la LTC augmente plus le système est fortement instable (i.e. l'indice d'instabilité est grand). Pour une LTC inférieure à $1.5mm$ la distance entre les fréquences 1 et 2 reste constante.

En résumé, il apparaît donc une influence des plateaux et de leur longueur sur les fréquences propres du système. Les fréquences augmentent avec la LTC. En présence d'une LTC faible (inférieure à $3mm$), il y a confusion (entre fréquences 1 et 2) dans la configuration 2d alors qu'en présence d'une LTC supérieure à $20mm$, on retrouve une confusion dans la configuration 3d.

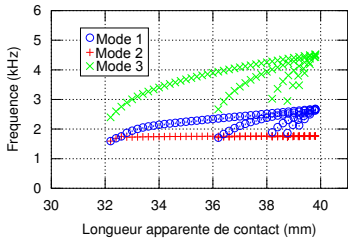
3.4.2.4 Analyse complète : tous plateaux équidistants de longueurs uniformes

Maintenant que nous nous sommes intéressé aux configurations présentant 5 plateaux, nous allons aussi nous intéresser à des configurations comportant 10, 20 et 40 plateaux. Les figures 3.22 représentent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de la longueur apparente de contact pour toutes les configurations comportant des plateaux équidistants et de longueurs uniformes.

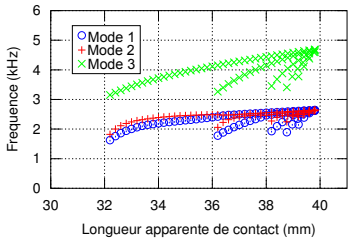
Les résultats diffèrent en fonction du nombre de plateaux. La LAC n'apparait donc pas comme un paramètre permettant de regrouper les simulations avec différents N_{plat}.

Les figures 3.23 représentent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de la longueur théorique de contact pour toutes les configurations comportant des plateaux équidistants et de longueurs uniformes.

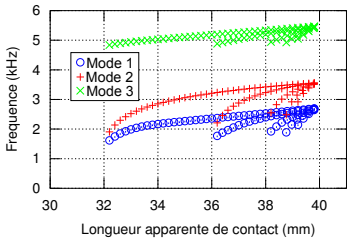
Les résultats montrent que des calculs ayant des LTC identiques et des nombres de plateaux différents donnent les mêmes fréquences. En conséquence, la LTC est un paramètre permettant de comparer les différentes simulations. Il semble y avoir un lien entre la LTC et les raideurs du système (en translations et en basculement).



(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux

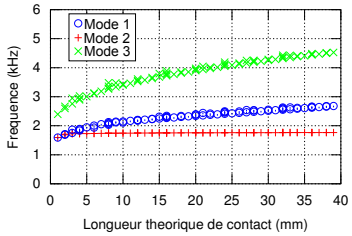


(b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux

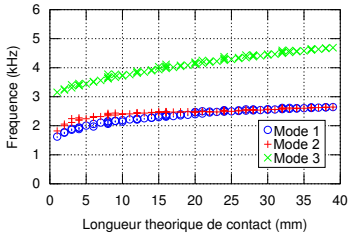


(c) En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux

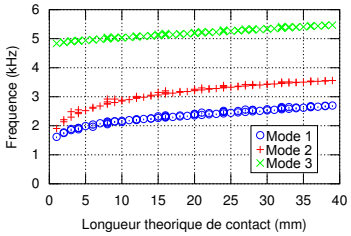
FIGURE 3.22 – Évolution des fréquences propres en fonction de la LAC pour les configurations avec plateaux équidistants de longueurs uniformes



(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux



(b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux



(c) En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux

FIGURE 3.23 – Évolution des fréquences propres en fonction de la LTC pour les configurations avec plateaux équidistants de longueurs uniformes

Afin d'apporter un élément supplémentaire argumentant ce constat, il est possible d'analyser l'apparition de confusion de fréquences entre les modes 1 et 2 pour tout nombre de plateaux équidistants et de longueurs uniformes en prenant en compte des modes de disque à 2 et 3 diamètres nodaux (figures 3.24).

Comme on a la relation de proportionnalité $LTC = N_{plat} * LAC - (N_{plat} - 1) * l_{patin}$ et que nous avons montré une relation liant LTC et fréquences quel que soit N_{plat}, il n'est pas possible d'avoir de relation lien LAC et fréquences pour tous N_{plat}. En effet, la relation lien LTC et LAC dépend du nombre de plateaux. La LTC apparait comme étant le seul paramètre commun pour tous N_{plat}.

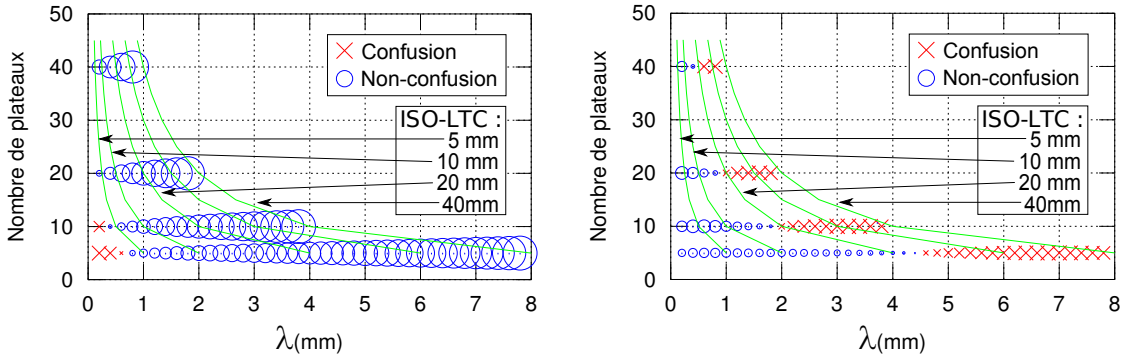
Sur les figures 3.24 est représentée l'apparition de confusions entre les fréquences 1 et 2 pour toutes les simulations réalisées avec des plateaux équidistants et de longueurs uniformes en prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux (figure 3.24a) et un mode de disque à 3 diamètres nodaux (figure 3.24b). Afin de mieux visualiser les configurations ayant des longueurs théoriques de contact équivalentes, les courbes iso-LTC ont été ajoutées.
Sur la figure 3.24a, des confusions de fréquences apparaissent pour de très faibles longueurs théoriques de contact. Seulement des configurations avec 5 et 10 plateaux permettent d'obtenir cette faible LTC et donc cette confusion de fréquences, ce qui n'est pas suffisant pour une généralisation.
Sur la figure 3.24b, il est tout à fait visible que, quel que soit le nombre de plateaux modélisés, l'apparition de la confusion de fréquence est fortement lié à la LTC. Ainsi, pour tout nombre de plateaux, la confusion de fréquences apparaît pour une LTC supérieure à $20mm$. Aussi, dans tous les cas, une LTC supérieure à $30mm$ implique un système profondément instable.

3.4.2.5 Bilan

Dans le cas d'une répartition de plateaux équidistants et de longueurs uniformes, les fréquences propres ne sont pas liées au nombre de plateaux. Elles sont entièrement déterminées par la LTC.

3.4.2.6 Conclusion

Dans cette partie, on s'est intéressé à une répartition de plateaux équidistants et de longueurs uniformes. La hauteur de plateau était fixée à $0.1mm$. Le nombre et la taille des plateaux ont été traités



(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux

(b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux

FIGURE 3.24 – Apparition de confusions entre les modes 1 et 2 pour les configurations avec plateaux équidistants de longueurs uniformes

comme des paramètres.
Comme toujours les propriétés macroscopiques du système (tel que le mode de disque pris en compte en entrée du modèle semi-analytique) reste déterminant. En présence de plus de deux plateaux, la LAC n'apparait plus comme un critère commun à toutes simulations quel que soit le nombre de plateaux. Par contre, il apparait une forte dépendance des fréquences par rapport à la longueur théorique de contact. Quel que soit le niveau de pression, le nombre de plateaux, la longueur des plateaux, la longueur théorique de contact est le critère dominant. Dans le cas d'une répartition équidistante de plateaux de longueurs uniformes, une fois les paramètres macros fixés (ici, le mode de disque pris en compte dans l'AMC), la LTC détermine les propriétés modales du système et ainsi détermine l'apparition de confusion de fréquences ou non. Les raideurs du système sont donc liées à la LTC, ce qui entraîne des fréquences propres identiques à une LTC donnée.

Maintenant qu'une répartition équidistante et uniforme de plateaux a été étudiée, on s'intéressera à une répartition non-uniforme. Ainsi, dans la prochaine partie, on s'intéresse à des répartitions de plateaux toujours équidistantes mais cette fois avec des longueurs de plateaux variables et déterminées aléatoirement.

3.4.3 Répartitions équidistantes de plateaux de longueurs aléatoires

Dans cette partie on considère une répartition de longueur de plateau non-uniforme. Les centres des plateaux sont toujours équidistants et la taille de chaque plateau est indépendante de celle de ses voisins (figure 3.25). Rappelons que la i-ème taille du plateau est notée λ_i. Chaque λ_i est déterminé aléatoirement dans un intervalle dont les bornes sont notées λ^r_{min} et λ^r_{max}. Ainsi, dans cette partie, $\forall i \in [\![1; N_{plat}]\!]$, $\lambda_i = random(\lambda^r_{min}, \lambda^r_{max})$ avec λ^r_{min} et λ^r_{max} fixés.

Dans cette partie, on ne travaille que sur des configurations contenant 5,10 ou 20 plateaux. Les tailles de plateaux sont choisies aléatoirement dans différents ensembles de valeurs. Trois intervalles sont utilisés. Un premier intervalle permet d'obtenir des valeurs très grandes de λ_i : $\forall i, \lambda_i \in [\lambda_{max} * 0.8; \lambda_{max}]$. Dans ce dernier, on obtient ainsi des valeurs comprises entre λ_{max} et 80% de λ_{max}. Ainsi, les longueurs obtenues permettent d'obtenir une grande LTC (proche de la longueur de la garniture). Cet intervalle est nommé intervalle 1.
Le second intervalle permet d'obtenir des longueurs de plateaux variées, c'est à dire $\forall i, \lambda_i \in [0.2; \lambda_{max}]$. Ainsi la LTC est donc complètement aléatoire et elle est comprise entre $0.2 * N_{plat}$ et la longueur de la garniture. Cet intervalle de valeur est nommé intervalle 2.
Le dernier intervalle permet d'obtenir des valeurs très faibles de λ_i : $\forall i, \lambda_i \in [0.2; 2]$ et implique donc une LTC faible. Cet intervalle est nommé intervalle 3.
On rappelle que $\lambda_{max} = \frac{40}{N_{plat}}$.

Les configurations avec 5 et 10 plateaux sont traitées sur les trois intervalles alors que la configuration avec 20 plateaux est traitée sur l'intervalle $[0.2; \frac{40}{N_{plat}} = 2]$ (intervalle 2). Dans le tableau 3.2, les bornes pour chaque intervalle utilisées sont référencées pour les configurations avec 5, 10 et 20 plateaux.

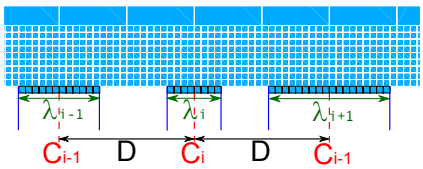


FIGURE 3.25 – Plateaux de contact équidistants et de longueurs non-uniformes

	Intervalle 1		Intervalle 2		Intervalle 3	
N_{plat}	λ^1_{min}	λ^1_{max}	λ^2_{min}	λ^2_{max}	λ^3_{min}	λ^3_{max}
5	6,2	7,8	0,2	7,8	0,2	2
10	3	3,8	0,2	3,8	0,2	2
20	-	-	0,2	1,8	-	-

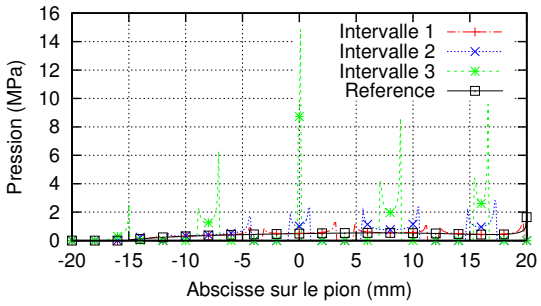
TABLE 3.2 – Bornes des intervalles pour déterminer des longueurs aléatoires de plateaux

Étant donné que l'on introduit un caractère aléatoire dans la modélisation, il est nécessaire de réaliser une étude stochastique pour tirer des conclusions. Dans chaque configuration, 100 tirages sont donc effectués afin de réaliser une étude de type Monté-Carlo.

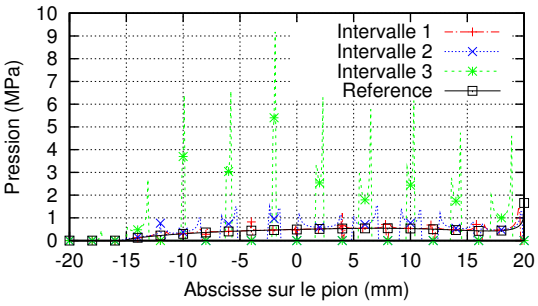
Maintenant que les études présentées dans cette partie ont été introduites, nous allons présenter les résultats. Dans la suite, on ne s'intéresse pas plus aux pressions de contact. Celles-ci sont très similaires aux pressions de contact avec des plateaux équidistants de longueurs uniformes (partie 3.4.2.1).

3.4.3.1 Exemples de pressions de contact

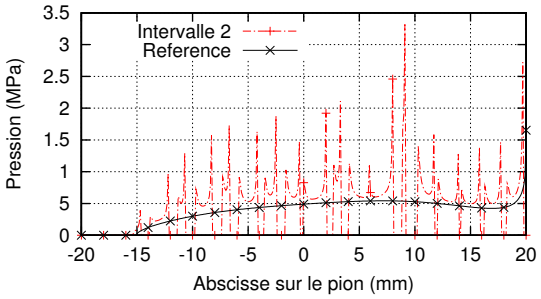
Comme il n'est pas possible de représenter les pressions de contact issues des 100 tirages aléatoires pour chaque nombre de plateaux et chaque intervalle, nous ne présentons qu'une seule pression de contact pour chaque cas. Les figures 3.26 montrent un exemple de pression de contact pour chaque configuration étudiée. La figure 3.26a présente des pressions avec 5 plateaux prit dans les intervalles 1,2 et 3. La figure 3.26b présente des pressions avec 10 plateaux prit dans les intervalles 1,2 et 3. La figure 3.26c présente une pression avec 20 plateaux prit dans les intervalles 2.



(a) Avec 5 plateaux



(b) Avec 10 plateaux



(c) Avec 20 plateaux

FIGURE 3.26 – Exemple de pressions de contact pour chaque nombre de plateaux et chaque intervalle aléatoire

Dans l'intervalle 1, on obtient des plateaux très larges qui localisent le contact quasiment sur l'ensemble de la garniture, et donc des pressions très proches du cas de référence. Dans l'intervalle 3, on obtient des pressions localisées sur de petites zones de portance et donc des maximums de pression très élevés. Dans l'intervalle 2, les tailles des plateaux sont totalement aléatoires et le maximum des pressions aussi.

3.4.3.2 Influence d'une dispersion dans les longueurs de plateaux

On commence par présenter un bilan global de l'impact sur l'apparition de confusion de fréquences pour toutes les simulations réalisées. Puis les fréquences propres seront analysées par un intervalle de longueur aléatoire. On traitera successivement les intervalles 1, l'intervalle 2 et les intervalles 3.

3.4.3.3 Bilan global des résultats

Le tableau 3.3 donne le pourcentage de confusion de fréquences entre les modes 1 et 2 pour toutes les configurations ainsi que les longueurs théoriques de contact minimum et maximum obtenues dans les intervalles aléatoires.

N_{Plat}		Contact plein	5 plateaux			10 plateaux			20 plateaux
Interv. aléa.		(Cas de réf.)	1	2	3	1	2	3	2
L.T.C. (mm)	min	40	32,8	8,6	3,2	34,2	10,8	6,6	15,8
	max		38,8	32	8,6	37,6	30	16,4	29,8
Config. disque	2d	0	0	3	28	0	0	1	0
	3d	100	100	38	9	100	59	1	42
	4d	0	0	0	1	0	0	0	0

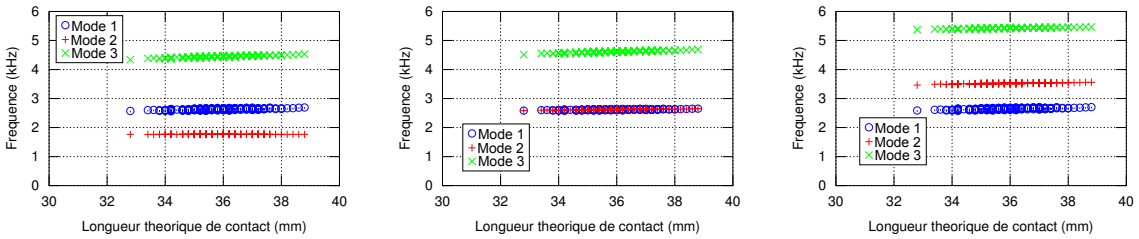
TABLE 3.3 – Pourcentages de confusion de fréquences et LTC minimum et maximum dans chaque configuration

Quel que soit le nombre de plateaux, les intervalles 1 donnent des confusions des LTC proches du cas de référence, c'est à dire que les confusions apparaissent toujours dans la configuration 3d, et jamais dans les autres configurations.
Dans l'intervalle 2 et quel que soit le nombre de plateaux, on obtient des LTC globalement comprises entre 10 et $30mm$. Le pourcentage de confusions dans la configuration 3d décroit fortement et quelques confusions apparaissent dans la configuration 2d en présence de 5 plateaux. Dans les intervalles 3, les LTC sont encore plus faibles et sont comprises entre 6 et $15mm$. Cette fois, il y a très peu de confusions dans la configuration 3d. En présence de 5 plateaux, il y a plus de confusions dans la configuration 2d que dans la configuration 3d.

Lorsque la LTC diminue, les confusions diminuent dans la configuration 3d et d'autres apparaissent dans la configuration 2d. Afin de comprendre les mécanismes menant aux résultats, il est nécessaire d'étudier l'évolution des fréquences propres du système. On commence par analyser les résultats obtenus dans l'intervalle 1.

3.4.3.4 Étude avec des valeurs aléatoires dans l'intervalle 1

Ici, $\forall i, \lambda_i \in [0.8 * \lambda_{max}; \lambda_{max}]$. L'objectif de ces intervalles est de cibler des LTC proches du cas de référence. Les LTC obtenues sont comprises entre 32.8 et $38.8mm$.
Les figures 3.27 montrent les fréquences propres obtenues en fonction de la LTC pour des configurations avec 5 et 10 plateaux de centres équidistants dont les longueurs ont été choisies dans les intervalles 1.



(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux

(b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux

(c) En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux

FIGURE 3.27 – Fréquences propres en fonction de la LTC pour les configurations avec 5 et 10 plateaux de centres équidistants et de longueurs non-uniformes choisies dans les intervalles 1

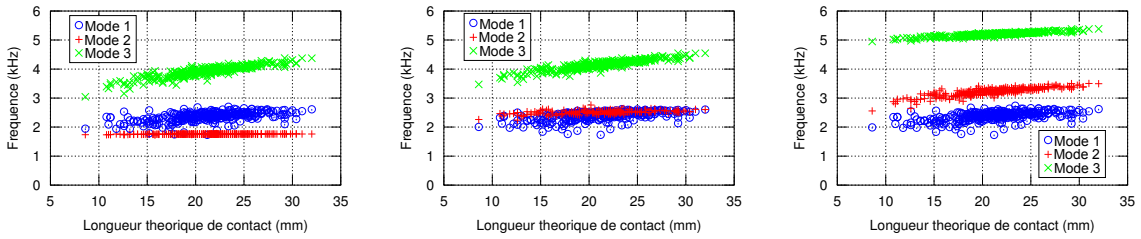
Avec des valeurs aléatoires élevées, très peu de dispersion apparaît dans les fréquences propres. Les résultats sont toujours liés fortement à la LTC. Plus précisément, en prenant en compte des modes de disques à 2 ou 4 diamètres nodaux (figures 3.27a et 3.27c), aucun couplage de mode n'apparaît et en prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux (figure 3.27b), il y à 100% de confusion entre les fréquences 1 et 2 pour des LTC toutes supérieures à $32mm$. Ces résultats sont donc semblables à ceux obtenus avec des plateaux équidistants et de longueurs uniformes et semblables au cas de référence.

3.4.3.5 Étude avec des valeurs aléatoires dans la configuration 2

Dans cette étude, on considère des valeurs aléatoires prises dans le plus grand intervalle permettant de conserver le nombre de plateaux fixés. Ainsi, les λ_i appartiennent à des intervalles bornés par 0.2 et λ_{max} (cf. tableau 3.2).

En prenant des valeurs aléatoires dans les intervalles 2, on voit apparaître une dispersion dans les fréquences propres. En prenant en compte des modes de disque à 2 et 3 diamètres nodaux (figures 3.28a et 3.28b), le mode 2 est peu influencé par la présence de plateaux de longueurs non-uniformes alors que les modes 1 et 3 présentent une certaine dispersion. En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux (figure 3.28c), c'est le mode 3 qui est peu impacté et les modes 1 et 2 qui le sont. Dans tous les cas, le mode 1 (mode de basculement) est toujours impacté, car il est le plus sensible au condition de contact. C'est donc toujours lui qui présente la plus forte dispersion.

En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux (figure 3.28a), dans les simulations avec 5 plateaux, 3% de confusion entre les fréquences 1 et 2 apparaissent. Les cas correspondants à ces confusions de fréquences ont des LTC comprises entre 15 et $22mm$ alors que dans le cas de plateaux de longueurs uniformes, les confusions de fréquences apparaissaient uniquement pour des simulations dont la LTC est inférieure à $5mm$. Pourtant, les fréquences 1 et 2 se rapprochant sous l'effet de la LTC, une forte influence sur la fréquence 1 peut amener les fréquences 1 et 2 à se confondre.
En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux (figure 3.28b), il apparaît 38% de confusion entre les fréquences 1 et 2 pour les configurations avec 5 plateaux, 59% avec 10 plateaux, et 42% avec 20 plateaux. Dans ce cas, on observe un cas où la fréquence propre 1 devient supérieure à la fréquence propre 2. Notons qu'en prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux et pour une longueur de plateau uniforme (figure 3.23b), pour une LTC inférieure à $20mm$, la fréquence propre 1 est inférieure à la fréquence propre 2. Ici, l'effet menant à la dispersion des fréquences peut permettre de créer des confusions avec une LTC inférieure à $20mm$ et peut déconstruire des confusions avec une LTC supérieure à $20mm$. Dans ce cas, il y a un fort potentiel d'influence de la répartition des plateaux.
En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux (figure 3.28c), les fréquences 1 et 2 sont trop éloignées pour que la dispersion des fréquences permette de créer une confusion.



(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux

(b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux

(c) En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux

FIGURE 3.28 – Fréquences propres en fonction de la LTC pour les configurations avec 5, 10 et 20 plateaux de centres équidistants et de longueurs non-uniformes choisies dans les intervalles 2

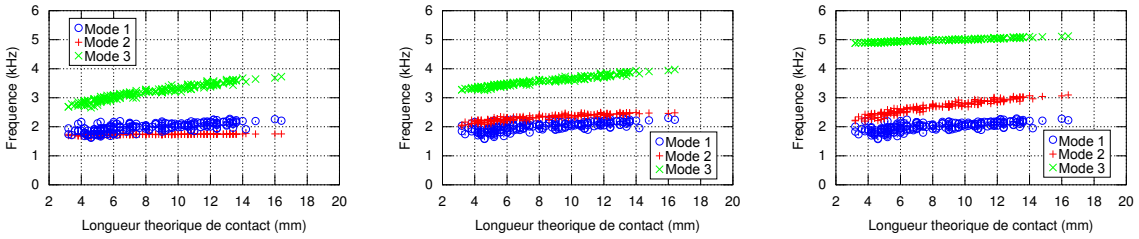
D'une manière plus générale, dans l'intervalle 1, la LTC apparaît comme un paramètre dominant. Avec l'intervalle 2, la LTC n'apparaît plus de manière évidente comme un paramètre prédominant. Un autre paramètre doit influer d'une manière importante sur le système. Nous présenterons plus loin les mécanismes permettant une augmentation ou une diminution des fréquences 1 et 3.

3.4.3.6 Étude avec des valeurs aléatoires dans l'intervalle 3

Dans ce cas, les λ_i sont choisis entre 0.2 et $2mm$. Ces configurations donnent la possibilité d'obtenir des longueurs théoriques de contact réduites. Ainsi, pour les configurations avec 5 plateaux, la LTC sera inférieure à $10mm$ et pour les configurations avec 10 plateaux, la LTC sera inférieure à $20mm$.

Les figures 3.29 présentent les fréquences propres pour les configurations avec 5 et 10 plateaux dont les valeurs aléatoires ont été choisies dans l'intervalle réduit. Dans cette étude, quel que soit le mode de disque pris en compte, la fréquence propre 1 est celle qui affiche la plus grosse dispersion de ses valeurs.

En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux (figure 3.29a), il y a 28% des simulations faisant état de confusion de fréquences lorsque l'on modélise 5 plateaux et seulement 1% avec 10 plateaux. Les confusions de fréquences apparaissent pour des longueurs théoriques de contact allant de $3mm$ à $8mm$. Avec des plateaux de longueurs uniformes, les confusions de fréquences apparaissent pour des LTC inférieures à $5mm$. La LTC rapproche fortement les fréquences 1 et 2 permettant l'apparition de confusions de fréquences pour des LTC supérieures à $5mm$ et supprime des confusions pour des LTC inférieures à $5mm$.
En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux (figure 3.29b), il y a 9% des simulations avec 5 plateaux, et 1% avec 10 plateaux, qui donnent une confusion de fréquences. Avec des longueurs de plateaux uniformes, les confusions de fréquences apparaissent pour une LTC supérieure à $20mm$. Ici, des confusions fréquences apparaissent à partir de $3mm$. Dans ces simulations, les fréquences propres du système sont suffisamment perturbées pour faire apparaître quelques confusions là où il n'y en a pas avec des plateaux de longueurs uniformes.
En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux (figure 3.29c), il y a 1% de confusion de fréquences dans les configurations avec 5 plateaux. Cette confusion apparaît pour une faible LTC ($3mm$). Auparavant, aucun calcul n'avait fait état de confusion de fréquences en prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux. Les fréquences 1 et 2 se rapprochent pour de très faible LTC mais pas suffisamment pour que la dispersion des fréquences créée beaucoup de confusions.



(a) En prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux

(b) En prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux

(c) En prenant en compte un mode de disque à 4 diamètres nodaux

FIGURE 3.29 – Fréquences propres en fonction de la LTC pour les configurations avec 5, 10 et 20 plateaux de centres équidistants et de longueurs non-uniformes choisies dans l'intervalle 3

L'utilisation de tailles de plateaux aléatoires dans l'intervalle 1 introduit une forte dispersion sur la fréquence propre 1. Cette dispersion entraîne l'apparition de confusions à des longueurs théoriques de contact où aucune confusion n'apparaît avec des répartitions de plateaux de longueurs uniformes.

3.4.3.7 Bilan

Dans cette partie, un caractère aléatoire a été introduit dans les simulations avec plateaux de contact. Ce caractère aléatoire est la longueur des plateaux de contact, les centres des plateaux étant restés équidistants.
L'introduction de ce caractère aléatoire a majoritairement impactée sur le mode 1 correspondant au basculement de pion pur. Lorsque les fréquences 1 et 2 sont suffisamment proches, des confusions peuvent apparaître. A l'opposé, lorsqu'il y a une confusion et que la LTC amène le système a être proche de sortir de cette confusion, l'effet de dispersion peut forcer le système à sortir de cette confusion.

Les résultats ont montrés que la fréquence 1 pouvait être augmentée ou diminuée. Le problème à suivre est de comprendre comment les fréquences propres sont impactées par la répartition des plateaux

au delà de la LTC.

3.4.3.8 Analyse de cas particuliers

Dans cette partie, on va analyser les distributions de plateaux dans certains cas. On va s'intéresser à deux situations précises. Afin d'avoir des cas plus simples à analyser, on choisit de travailler sur les configurations avec 5 plateaux.
La figure 3.30 représente les fréquences propres en présence de plateaux de longueurs uniformes dans la configuration 2d au dessus desquelles sont superposées les LTC obtenues avec 5 plateaux non-uniformes dans les intervalles aléatoires 1, 2 et 3. Pour des LTC équivalentes à l'intervalle 2, des plateaux uniformes donnent une fréquence 1 supérieure à la fréquence 2, or les simulations avec 5 plateaux non-uniformes dans cette intervalle montrent 3% de confusions. Les cas correspondants à ces confusions peuvent permettre d'identifier des répartitions faisant décroître la fréquence 1 (fréquence de basculement de pion).
La figure 3.31 représente les fréquences propres en présence de plateaux de longueurs uniformes dans la configuration 3d au dessus desquelles sont superposées les LTC obtenues avec 5 plateaux non-uniformes dans les intervalles aléatoires 1, 2 et 3. Pour des LTC équivalentes à l'intervalle 3, des plateaux uniformes donnent une fréquence 1 inférieure à la fréquence 2, or les simulations avec 5 plateaux non-uniformes dans cette intervalle montrent 9% de confusions. Les cas correspondants à ces confusions peuvent permettre d'identifier des répartitions faisant croître la fréquence 1 (fréquence de basculement de pion).

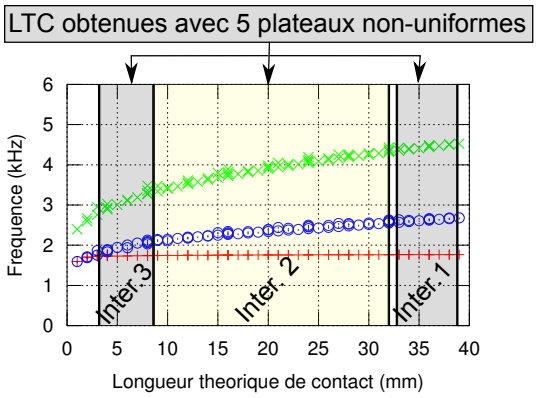


FIGURE 3.30 – Fréquences propres en présence de plateaux uniformes dans la configuration 2d et LTC obtenues avec 5 plateaux non-uniformes dans les intervalles aléatoires 1,2 et 3

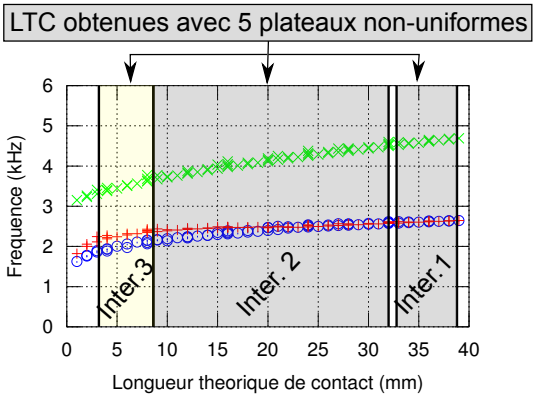


FIGURE 3.31 – Fréquences propres en présence de plateaux uniformes dans la configuration 3d et LTC obtenues avec 5 plateaux non-uniformes dans les intervalles aléatoires 1,2 et 3

On s'intéresse donc à deux mécanismes : celui faisant croître la fréquence propre 1, correspondant au basculement de pion, et celui permettant de la faire décroître.

3.4.3.9 Mécanisme impliquant une augmentation de la fréquence de basculement de pion

Dans la configuration 3d, en présence de plateaux de longueurs uniformes et pour une faible LTC (i.e $5mm$), la fréquence 1 est légèrement inférieure à la fréquence 2. Avec des longueurs aléatoires, il est nécessaire d'avoir un mécanisme faisant croître la fréquence 1 pour impliquer une confusion.
On s'intéresse donc aux simulations avec 5 plateaux de longueurs choisies dans l'intervalle 3 qui présentent 9% de cas instables (soit 9 simulations) dans la configuration 3d contre 0% pour des LTC équivalentes dans le cas uniforme. L'observation des répartitions de plateaux correspondantes peut permettre de comprendre le mécanisme impliquant une augmentation de la fréquence 1.

La figure 3.32 représente la taille de chaque plateau pour les simulations faisant état d'une confusion dans la configuration avec 5 plateaux de longueurs choisies aléatoirement dans l'intervalle 3 en prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux. Les plateaux sont numérotés de 1 à 5 en allant de la sortie de contact vers l'entrée de contact.
Ces répartitions fournissent de fréquences de basculement de pion comprises entre $2032HZ$ et $2250HZ$, alors que, l'ensemble des répartitions dans cette configuration (intervalle 3 et config 3d.) donnent des fréquences comprises entre $1581HZ$ et $2250HZ$. Les répartitions étudiées correspondent bien au maximum de la fréquence de basculement de pion obtenu.

Dans cette configuration, les simulations faisant état d'une confusion, correspondant ici à une augmentation de la fréquence propre de basculement, présentent certaines caractéristiques communes. Tout d'abord, tous présentent des longueurs de plateau supérieures ou égales à $1mm$ en entrée et en sortie de contact (λ_1 et $\lambda_5 \geq 1mm$). Ensuite, tous présentent des plateaux de taille inférieure à $0.6mm$ au centre de la garniture ($\lambda_3 < 0.6mm$).

La figure 3.33 montrent toutes les répartitions, avec 5 plateaux de longueur choisie dans l'intervalle 3, ayant ces caractéristiques ($\lambda_1 \geq 1mm$, $\lambda_3 < 0.6mm$ et $\lambda_5 \geq 1mm$) mais ne présentant aucune confusion de fréquences.
En comparant les configurations avec et sans confusion de fréquences, on note que la différence se fait sur les plateaux numéros 2 et 4 qui sont les plateaux intermédiaires entre centre et sortie de contact et entre centre et entrée de contact. Les simulations ne présentant pas de confusion sont dotées de plateaux intermédiaires plus grands. Ceci implique que le contact est plus répandu vers l'intérieur de la garniture alors que les cas présentant des confusions ont un contact majoritairement porté par les extrémités de la garniture.
Les répartitions vérifiant les critères et ne correspondant pas à une confusion donnent des fréquences de basculement de pion comprises entre $2065Hz$ et $2196Hz$.

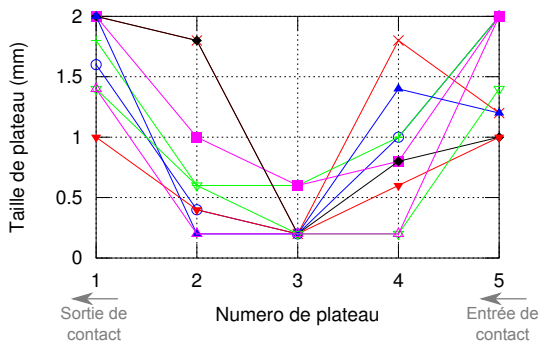


FIGURE 3.32 – Répartitions de longueurs de plateaux pour les cas, avec 5 plateaux dans l'intervalle 3, faisant état d'une confusion de fréquences dans la configuration 3d

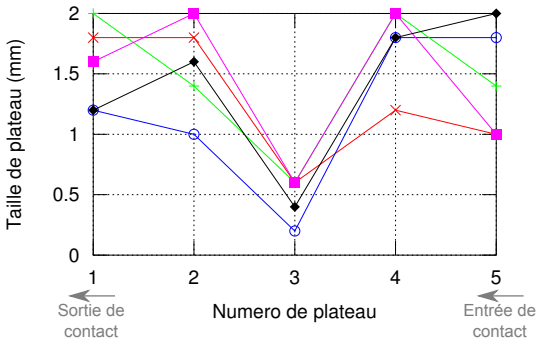


FIGURE 3.33 – Répartitions de longueurs de plateaux pour les cas non-couplant en prenant en compte un mode de disque à 3 diamètres nodaux avec 5 plateaux dans l'intervalle 3 et présentant les mêmes caractéristiques que les cas faisant état d'une confusion de fréquences

En résumé, des plateaux intermédiaires (2 et 4) plus grands entraînent une augmentation de la fréquence propre 1.

3.4.3.10 Mécanisme impliquant une décroissance de la fréquence de basculement de pion

Dans la configuration 2d, en présence de plateaux de longueurs uniformes et pour une LTC moyenne (i.e $20mm$), la fréquence 1 est supérieure à la fréquence 2. Avec des plateaux de longueurs aléatoires, il est nécessaire de faire décroître la fréquence 1 pour créer une confusion de fréquence.
On s'intéresse donc aux simulations avec 5 plateaux dont les longueurs sont déterminées aléatoirement dans l'intervalle 2 qui font état de 3% de confusion (soit 3 simulations) dans la configuration 2d contre 0% pour des LTC équivalentes dans le cas uniforme. L'observation des répartitions de plateaux correspondantes peut permettre de comprendre le mécanisme impliquant une diminution de la fréquence 1.

La figure 3.34 représente la taille de chaque plateau pour les simulations faisant état d'une confusion de fréquences dans la configuration avec 5 plateaux de longueurs choisies aléatoirement dans l'intervalle 2 en prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux. Les plateaux sont numérotés de 1 à 5 en allant de la sortie de contact vers l'entrée de contact.
On note que ces répartitions fournissent de fréquences de basculement de pion comprises entre $1733HZ$ et $1785HZ$, alors que, l'ensemble des répartitions dans cette configuration (intervalle 2 et config 2d.) donnent des fréquences comprises entre $1734HZ$ et $2699HZ$. Les répartitions étudiées correspondent bien au minimum de la fréquence de basculement de pion obtenu.
Dans cette configuration, les simulations faisant état d'une confusion, et donc d'un accroissement de la fréquence propre de basculement, présentent deux caractéristiques communes. Tous présentent des lon-

gueurs de plateaux inférieures ou égales à $1mm$ en entrée de contact($\lambda_5 \leq 1mm$) et des plateaux de taille supérieure à $5mm$ au centre de la garniture ($\lambda_3 > 5mm$).

La figure 3.35 montrent toutes les répartitions de plateaux (des simulations avec 5 plateaux dans l'intervalle 2) ayant les mêmes caractéristiques($\lambda_3 > 5mm$ et $\lambda_5 \leq 1mm$) mais qui ne présentent aucune confusion de fréquences.

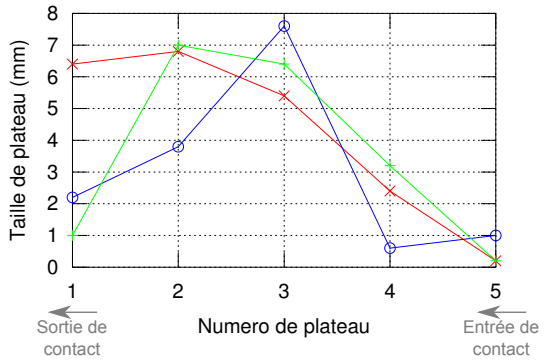


FIGURE 3.34 – Répartitions de longueurs de plateaux pour les cas couplant avec 5 plateaux dans l'intervalle 2 en prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux

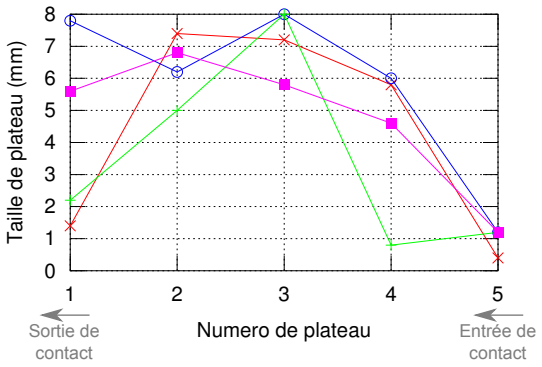


FIGURE 3.35 – Répartitions de longueurs de plateaux pour les cas non-couplant en prenant en compte un mode de disque à 2 diamètres nodaux avec 5 plateaux dans l'intervalle 2 et présentant les mêmes caractéristiques que les cas couplant

Pour chaque simulation présentant une confusion, il est possible d'identifier une simulation sans confusion ayant une répartition de longueurs proches. Une fois de plus, on relève une différence sur les plateaux intermédiaires 2 et 4. Les simulations ne présentant pas de confusion semblent être dotées de plateaux intermédiaires plus grands. Même dans les configurations présentant une confusion, la taille du plateau 2 (voir du plateau 1), situé en direction de la sortie de contact, reste assez importante. La différence est plus marquée sur le plateau 4, situé vers l'entrée de contact. Il existe tout de même un cas sans confusion présentant des plateaux 4 et 5 très petits et un plateau 3 assez grand (courbe verte et marqueur + sur la figure 3.35). Cette répartition se rapproche beaucoup d'une répartition avec confusion (courbe bleue et marqueur rond sur la figure 3.34). L'unique différence entre ces deux courbes se fait sur le plateau 4 : dans le cas avec confusion, il a une taille inférieure à $4mm$ alors que sans confusion, il a une taille de $5mm$. La tendance énoncée est respectée même si elle est faible ici.
Les répartitions sans confusion, et vérifiant les critères, correspondent à des fréquences de basculement de pion comprises entre $1884HZ$ et $2100HZ$. Leur fréquence est légèrement plus haute que dans les cas faisant état de confusion.

Un contact plus localisé au centre de la garniture implique une baisse de la fréquence propre 1 alors qu'un contact plus étendu sur les régions intermédiaires, notamment la 4 située vers l'entrée de contact, implique une augmentation de la fréquence propre 1.

3.4.3.11 Bilan

Nous avons précédemment vu que les fréquences 2 et 3 sont peu affectées par la présence de plateaux de longueurs aléatoires. La fréquence 1 est la plus impactée. En exploitant les simulations contenant 5, il a été possible de mettre au jour des mécanismes permettant d'augmenter ou de diminuer la fréquence 1. Une localisation de contact plus présente au centre de la garniture que sur les bords implique une baisse de la fréquence 1 (fréquence de basculement de pion). A l'inverse, une localisation de contact plus présente sur les bords que sur le centre de la garniture implique une augmentation de la fréquence 1.

3.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, une nouvelle stratégie a été mise en place pour la prise en compte d'un autre type d'hétérogénéité, à savoir les localisations du contact à l'échelle de la garniture, avec la notion de zones

de portance. Dans ce but, une couche finement maillée a été ajoutée à la surface de la garniture de frein. Le maillage du pion et la couche fine ont été liés à l'aide de la méthode de recollement de maillage incompatible. Cette méthode permet d'introduire un caractère multi-échelles au problème. La continuité en déplacement et en contrainte entre les deux maillages a été vérifiée. La qualité des pressions de contact obtenues a aussi été vérifiée en comparaison avec un modèle avec une garniture finement maillée. En utilisant le modèle élément fini avec couche fine au contact, il a été possible de prendre en compte la présence de plateaux de contact qui peuvent se former en surface de la garniture.

Dans la première partie du chapitre, nous nous sommes intéressés à la localisation du contact sur une puis deux zones de portances. Nous avons donc étudié l'influence sur les fréquences propres d'un contact unique puis d'un contact scindé sur l'avant et l'arrière de la garniture. Ainsi, nous avons pu dissocier l'influence de la longueur apparente de contact LAC (distance entre les deux points potentiellement en contact les plus éloignés) et l'influence de longueur théorique de contact LTC (somme des longueurs des zones potentiellement en contact).
Il a été montré que les localisations de contact ont une influence (par l'intermédiaire de zones de portance) sur les fréquences propres du système et sur les confusions de fréquences. En présence d'une unique zone de portance, les effets se conjuguent et une diminution de la LAC, et donc de la LTC, implique une diminution de toutes les fréquences. En présence de deux zones de portance, les influences de la LAC et de la LTC ont été étudiées de manière dissociée. Une diminution de la LAC implique une diminution de la fréquence de basculement de pion. La LTC impacte toutes les fréquences mais de manière plus limitée.

Dans la seconde partie du chapitre, nous avons augmenté le nombre de zones de portance afin de modéliser la présence de plateaux de contact sur la surface de la garniture. D'abord, des plateaux équidistants et de longueurs uniformes, puis, des plateaux de centres équidistants et de longueurs non-uniformes.
Il a pu être montré qu'en présence de nombreux plateaux de contact de longueurs uniformes,la LAC ne varie plus assez pour montrer une sensibilité nette, la LTC pilote la valeur des fréquences propres indépendamment du nombre de plateaux. En présence de plateaux de longueurs aléatoires, lorsque le système est faiblement stable ou faiblement instable, il est possible d'influencer la fréquence de basculement de pion pour faire apparaître, ou disparaître, une confusion de fréquence. Cette influence est due à la répartition des plateau de contact.

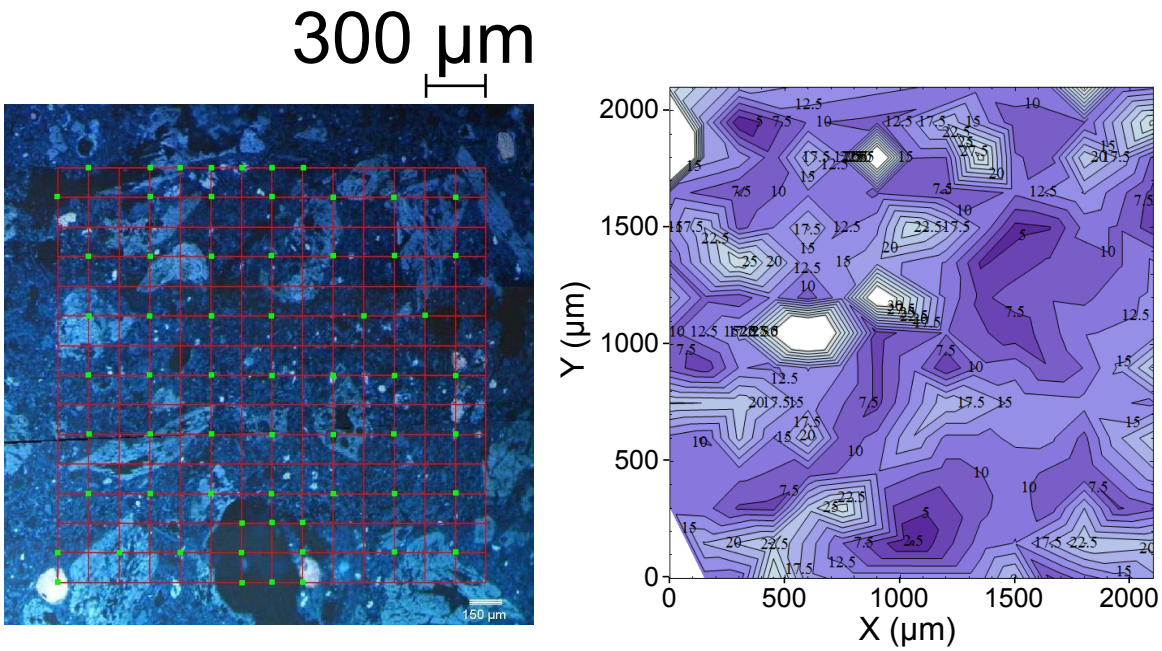
Il est possible de donner une classification de l'influence des paramètres sur les instabilités. Avant tout, les paramètres macroscopiques (tel que le mode de translation de disque) restent les plus importants. En présence d'une ou deux zones de portance, la LAC a une influence majeure par rapport à la LTC. En présence de plus deux zones de portance, la LAC ne suffit plus à rendre compte de l'état du contact interne. La LTC devient alors le paramètre prédominant.

Chapitre 4

Prise en compte d'hétérogénéité dans une couche fine au contact

4.1 Contexte

Comme il a été présenté dans les parties 1.3.2.3 et 1.3.2.1, les matériaux de friction utilisé dans le domaine du freinage ont déjà été présentés comme étant hautement hétérogènes aussi bien dans leur composition que dans leurs propriétés. Cette hétérogénéité se manifeste aussi sur la surface de contact. La figure 4.1 présente la surface d'une garniture qui a fait l'objet de mesure de dureté par nano-indentation. A l'aide de la dureté locale du matériau, il est possible d'obtenir une cartographie du module d'Young local en surface de la garniture. Celle-ci est représentée sur la figure 4.1b. Les matériaux étant très hétérogènes dans leur composition, ils présentent par conséquent des propriétés locales très fortement hétérogènes à l'échelle mésoscopique.



(a) Surface observée

(b) Module d'Young obtenu (GPa)

FIGURE 4.1 – Cartographie du modules d'Young en surface d'une garniture de frein

L'hétérogénéité présentée ici se situe à une échelle proche de l'échelle microscopique. Des études ont permis de caractériser les propriétés hétérogènes du matériau à des échelles supérieures. Dans [Naidoo Ramasami et al., 2013], Naidoo Ramasami & al. ont caractérisés les propriétés de différents matériaux de friction à l'aide d'essais de compression sous différentes charges et à l'aide de mesure ultrason à haute-fréquence. La figure 4.2 présente les mesures de module d'Young dans la direction normale. Les résultats montrent une dispersion de valeurs de module d'Young sur des échantillons de dimension de 15x15x11mm^3. Ainsi, même à une échelle supérieure à l'échelle microscopique, les

matériaux présentent une forte hétérogénéité sur la surface de la garniture.

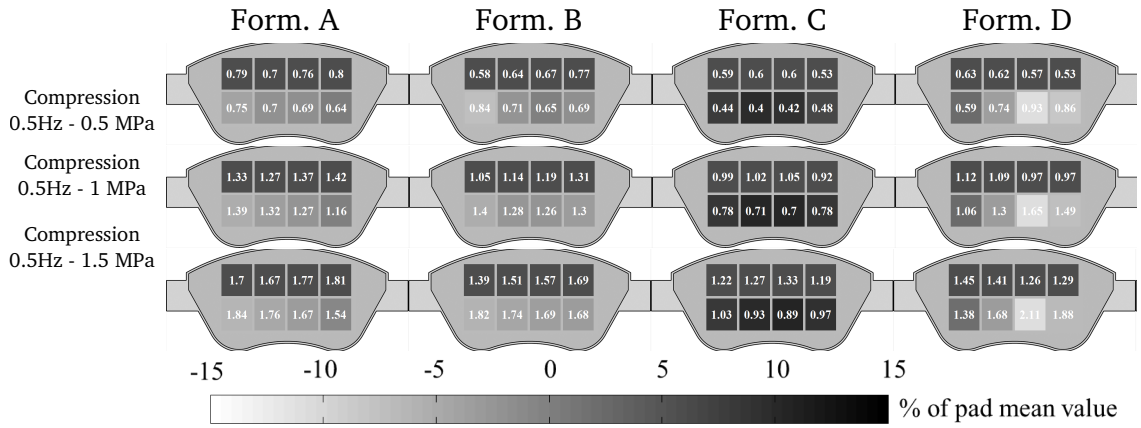


FIGURE 4.2 – Distribution de modules d'Young dans la direction normale au contact sur différentes formulations par compression sous différentes charges et par ultrason [Naidoo Ramasami et al., 2013]

Les propriétés hétérogènes des matériaux découlent de leur composition. Certaines études expérimentales ont montrées que la formulation du matériau modifiait son comportement vibratoire.
Dans [Mortelette et al., 2009], Mortelette & al. ont montrés, à l'aide des essais sur tribomètre, que la composition et la quantité de fibre introduite dans le matériau de friction modifie les occurrences de crissement et les fréquences excitées lors d'une succession de freinage. Les fibres ont, par exemple, un impact sur le comportement vibratoire du matériau, et donc sur le crissement.

Dans ce chapitre, l'objectif est d'introduire des propriétés hétérogènes sur une surface plane de garniture. Les hétérogénéités prises en compte se situent à une échelle intermédiaire entre échelle microscopique et macroscopique. En conséquence, la taille des hétérogénéités sera comprise entre $0.1mm$ et quelques millimètres. Une évolution du modèle élément fini, présentée dans les précédents chapitres, est utilisée afin d'intégrer des hétérogénéités. Nous proposons deux modèles permettant de prendre en compte des hétérogénéités à la surface de la garniture au contact, via des raideurs de contact hétérogènes et via des modules d'Young hétérogènes, seront exploités. Des études sur les dimensions des hétérogénéités et sur leur répartition seront réalisées.

4.2 Introduction d'hétérogénéités aléatoires

On s'intéressera ici à la modélisation et à l'impact d'hétérogénéités en prenant en compte des répartitions de propriétés aléatoires. Le choix est fait de ne pas utiliser de méthode homogénéisant les propriétés hétérogènes dans le matériau. L'objectif est de répercuter l'hétérogénéité sur les pressions de contact. Les propriétés hétérogènes sont donc intégrées de manière explicite dans le modèle. Deux approches sont proposées. La première concerne la modélisation d'une hétérogénéité uniquement sur la surface de contact de la garniture. La seconde prend en compte la modélisation d'une hétérogénéité dans une épaisseur de matériau proche de la surface de contact.

4.2.1 Modèle à raideurs de contact aléatoires

L'objectif de ce modèle est de permettre de prendre en compte une hétérogénéité de surface au contact afin d'influer sur la distribution de pression.

4.2.1.1 Méthodologie développée

4.2.1.1.a Le modèle numérique

La méthode de pénalisation (section 1.2.2.1) utilise un coefficient de pénalisation permettant de résoudre le contact de manière approchée. Un coefficient de pénalisation élevé permet d'obtenir une solution proche de la solution exacte, avec une très faible pénétration des premiers corps, alors qu'un coefficient de pénalisation faible permet une pénétration, et donc une solution approchée. Le modèle présenté ici

permet d'introduire des hétérogénéités en exploitant une variabilité du coefficient de pénalisation.

L'idée est de définir plusieurs zones de contact sur la garniture et de leur affecter des valeurs de pénalisation différentes. Ces zones de contact sont appelées patchs (figure 4.3). Le modèle avec couche fine au contact présenté précédemment possède 400 éléments linéiques sur la zone de contact potentielle. Il est donc possible de définir au maximum 200 patchs. Afin de ne pas affecter deux raideurs de contact sur un même noeud, il est nécessaire que les patchs soient disjoints.

Dans les travaux réalisés, on définit un nombre de patchs N variable. De cette manière, il est ainsi possible de prendre en compte des hétérogénéités de tailles différentes et de voir l'influence de cette taille sur le problème. Les différents nombres de patchs et les tailles des hétérogénéités associées sont présentées dans le tableau 4.1.

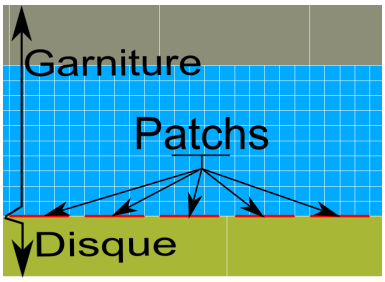


FIGURE 4.3 – Patchs sur la surface de contact

nombre de patchs N	Taille associée
200	0.2 mm
80	0.5 mm
40	1 mm
20	2 mm
4	10 mm

TABLE 4.1 – Nombre de patch et taille d'hétérogénéité associée

4.2.1.1.b Stratégie de calcul

Le modèle présenté ci-dessus dépend de valeurs aléatoires. Il n'est donc pas possible d'avoir des résultats de manière exhaustive. Afin de pouvoir dégager une tendance, il est nécessaire de réitérer les calculs un certain nombre de fois. Les calculs se dérouleront donc sous forme de tirage de type Monte-Carlo. Chaque calcul fait donc l'objet de 100 tirages aléatoires de valeurs. Pour chaque configuration, il y a donc 100 résolutions d'équilibre quasi-statiques sous conditions de glissement.

4.2.1.1.c Calcul des valeurs aléatoires

Cette partie se déroule en deux étapes :
- Déterminer les valeurs aléatoires qui apparaîtront dans les calculs.
- Affecter les valeurs aux patchs précédemment définis.

Le choix a été fait de travailler sur des répartitions gaussiennes des valeurs. En effet la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ offre des valeurs centrées sur l'espérance μ et permet de contrôler la répartition des valeurs via l'écart-type σ.
La loi normale suit une densité de probabilité φ donnée par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times exp\Big(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

où μ est l'espérance et σ l'écart type.

Afin d'obtenir une répartition symétrique de valeurs la plus proche possible d'une distribution gaussienne, il est nécessaire de développer une méthode permettant de calculer les valeurs aléatoires. La stratégie choisie consiste à définir les valeurs qui apparaîtront dans les calculs et ensuite de déterminer le nombre de fois où elles apparaîtront en se référant à la loi normale.

Sachant que, dans le cas de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la probabilité d'avoir une valeur entre $\mu - 3\sigma$ et $\mu + 3\sigma$ est proche de 100 % :

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \simeq 0.9974$$

On choisit de travailler sur l'intervalle $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$. Celui-ci est alors découpé en N_{si} sous-intervalles réguliers. Dans les calculs, on a choisit d'imposer $N_{si} = \lfloor N/5 \rfloor$.
On note x_i la valeur centrale de chaque sous-intervalle. La probabilité d'obtenir la valeur x_i est assimilée à

celle d'être dans le sous-intervalle contenant cette valeur. La probabilité d'être dans chaque sous-intervalle est déterminé de la manière suivante :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., N_{si}\}, \qquad P_i = P(x_i - \frac{\Delta val}{2} \leq X \leq x_i + \frac{\Delta val}{2}) = \int_{(\frac{x_i - \frac{\Delta val}{2}) - \mu}{\sigma}}^{(\frac{x_i + \frac{\Delta val}{2}) - \mu}{\sigma}} \varphi(t)dt$$

avec $\Delta val = \frac{(\mu+3\sigma)-(\mu-3\sigma)}{N_{si}} = \frac{6\sigma}{N_{si}}$.

La figure 4.4 illustre un exemple de découpage de l'intervalle $[\mu-3\sigma; \mu+3\sigma]$ en $N_{si} = 6$ sous-intervalles avec la probabilité d'une valeur dans les sous-intervalles.

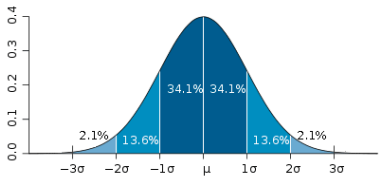


FIGURE 4.4 – Probabilité d'obtenir une valeur aléatoire dans 6 sous-intervalles en suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Connaissant la probabilité d'obtenir chaque valeur x_i, il est maintenant possible de déterminer le nombre de fois où cette valeur apparaîtra dans les calculs : $N_i^{iter} = P_i * N$.

Sachant que l'on a choisi de travailler sur l'intervalle $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ et que l'algorithme est sujet à des erreurs d'arrondi, il est presque sûr d'obtenir $\sum P_i < 1$. De ce fait, il est aussi presque sûr d'avoir $\sum N_i^{iter} < N$. Sachant cela, le processus est réitéré pour déterminer autant de valeur qu'il en manque, c'est à dire jusqu'à obtenir $\sum N_i^{iter} = N$ valeurs. La figure 4.5 donne un exemple d'ensemble de valeurs à distribuer et le nombre d'apparition de ces valeurs.

Maintenant que les N valeurs qui apparaîtront dans le calcul sont connues, il est nécessaire de les distribuer aléatoirement sur l'ensemble des patchs.
Les patchs sont numérotés de 1 à N. Pour chaque valeur i déterminée suivant la loi normale, un entier j est déterminé à l'aide d'un "random" entre 1 et N. Puis le patch correspondant à la valeur j est testé :

- Si le $j$ème patch n'a pas encore de valeur affectée, la valeur i est affectée au $j$ème patch.
- Si une valeur est déjà affectée à ce patch, j est incrémenté de 1 et le patch correspondant est traité de la même manière que précédemment.
- Si j devient supérieur à N, j reçoit la valeur 1 est le même traitement est effectué.

Une fois le processus terminé, chaque patch se voit attribuer une valeur aléatoire. La figure 4.6 donne un exemple d'échantillon de valeur suivant une loi normale distribuée sur un ensemble de 100 patchs. La valeur centrée de la loi ($\mu = 3GN/m$) est calquée sur le cas homogène.

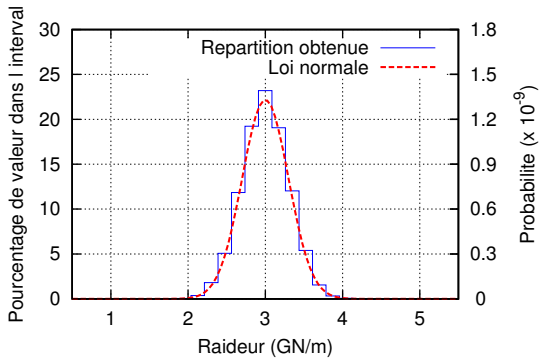


FIGURE 4.5 – Exemple de répartition de valeurs obtenues ($N = 20000$, $\mu = 3GN/m$ et $\sigma = 0.3GN/m$)

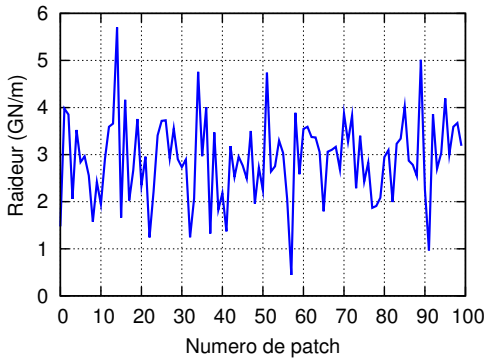


FIGURE 4.6 – Valeurs de raideur de contact affectées aux patchs ($N = 100$, $\mu = 3GN/m$ et $\sigma = 0.9GN/m$)

écart-type	raideur minimum	raideur maximum
0.05 GN/m	2.85 GN/m	3.15 GN/m
0.1 GN/m	2.7 GN/m	3.3 GN/m
0.2 GN/m	2.4 GN/m	3.6 GN/m
0.3 GN/m	2.1 GN/m	3.9 GN/m
0.6 GN/m	1.2 GN/m	5.8 GN/m
0.9 GN/m	0.3 GN/m	5.7 GN/m

TABLE 4.2 – Ecart-types utilisées dans les simulations

4.2.1.2 Configurations et jeux de paramètres exploités

Pour ce type d'hétérogénéité, différentes configurations ont été testées. Ainsi, deux paramètres principaux ont été exploités.
Le premier paramètre est la taille des hétérogénéités. Le second est la dispersion des valeurs des raideurs de contact. L'utilisation d'une loi normale de contact permet de fixer la valeur moyenne des raideurs via l'espérance de la loi normale, et de choisir la dispersion des valeurs en utilisant l'écart-type de la loi normale.

Taille des hétérogénéités : Les différentes tailles d'hétérogénéités qui sont exploitées dans les calculs ont déjà été listées dans le tableau 4.1. Il sera possible de considérer des tailles d'hétérogénéités de surfaces de 10, 2, 1, 0.5 et 0.2mm.

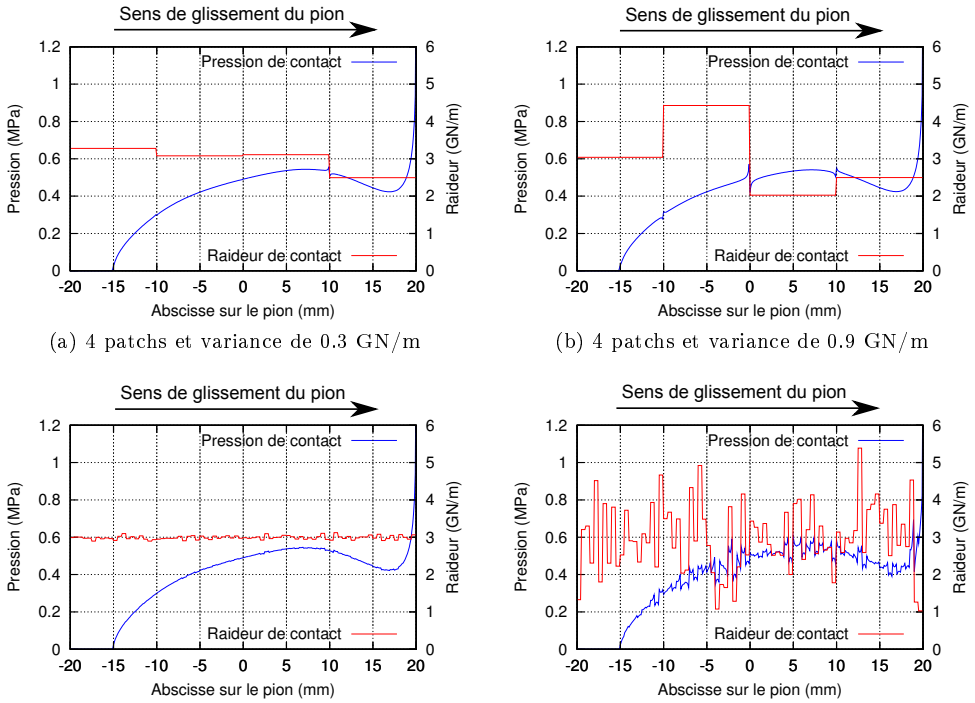
Dispersion des hétérogénéités : Les valeurs des écarts-types utilisées, et les valeurs minimales et maximales obtenues des raideurs de contact utilisées, sont présentées dans le tableau 4.2. Les dispersions permettent de balayer les cas en partant d'une faible dispersion, où les valeurs des raideurs restent proches de l'espérance, à une forte dispersion, où les raideurs peuvent aller d'une valeur quasi-nulle à une valeur triple de l'espérance.
On balaye toutes les combinaisons en croisant tailles de patchs et écarts-types.

4.2.1.3 Répartitions de pressions obtenues

Dans cette partie, on présente quelques exemples de répartitions de pressions obtenues sous condition de contact frottant. Étant donné que chaque calcul est répété 100 fois avec des distributions aléatoires différentes, il est impossible de représenter toutes les répartitions de pressions obtenues. Les figures 4.7 représentent les raideurs de contact et les pressions de contact dans quatre configurations différentes. Pour chaque configuration présentée, une simulation a été choisie aléatoirement parmi les 100 tirages aléatoires réalisés.

La figure 4.7a représente un cas comprenant uniquement 4 patchs, soit des hétérogénéités de 10 mm de longueur, et une variance de 0.3 GN/m. Dans ce cas, il est possible de remarquer deux points. Une faible variation de raideur de contact n'implique presque aucun impact sur la pression de contact. Un saut de pression de contact implique aussi un saut dans les pressions de contact. Ce saut de pression s'accompagne d'une légère surpression à l'extrémité du patch ayant la raideur la plus élevée et d'une légère sous-pression à l'extrémité du patch ayant la raideur la plus faible.
La figue 4.7b représente aussi un cas contenant 4 patchs (hétérogénéités de 10 mm de longueur) avec une variance de 0.9 GN/m. Cette variance correspond au maximum exploité. Lorsque la raideur de contact est plus faible que celle du patch voisin, la pression de contact est légèrement inférieure à celle du patch voisin. Il est aussi possible de constater que plus le saut de raideur est élevé, plus la surpression et la sous-pression sont importantes.
La figure 4.7c représente un cas comprenant 80 patchs, soit des hétérogénéités de 0.5 mm de longueur, et une variance de 0.05 GN/m. Celui-ci, ayant une faible variance, implique une faible variation de la pression de contact comparé au cas homogène.
La figure 4.7d représente un cas comprenant 80 patchs (hétérogénéités de 0.5 mm de longueur) et une variance de 0.9 GN/m. Il introduit donc une forte hétérogénéité dans le modèle à travers une perturbation de la pression de contact tout en conservant globalement la distribution du champ de pression.

La prochaine étape est d'observer l'impact de ces distributions de pressions sur les fréquences propres du modèle sous conditions de contact.



(a) 4 patchs et variance de 0.3 GN/m

(b) 4 patchs et variance de 0.9 GN/m

(c) 80 patchs et variance de 0.05 GN/m

(d) 80 patchs et variance de 0.9 GN/m

FIGURE 4.7 – Exemples de répartitions de pressions

4.2.1.4 Impact sur les fréquences propres et sur le couplage de mode

Les distributions de pressions, obtenues avec différentes répartitions et tailles d'hétérogénéités, sont injectées dans le modèle semi-analytique afin d'étudier leur impact sur le comportement modal du système.

4.2.1.5 Analyse modale dans les configurations 2d, 3d et 4d

Dans le cas de référence (avec raideurs de contact homogènes), les configurations 2d et 4d sont stables et la configuration 3d est instable.
En intégrant des raideurs de contact hétérogènes, quelque soit la taille des hétérogénéités, la dispersion des valeurs ou le mode de disque pris en compte, la stabilité du système n'est pas impactée. Dans les configruations 2d et 4d, le système reste stable dans 100% des simulations, et dans la configuration 3d, le système reste instable dans 100% des simulations. Les fréquences propres sous condition de contact sont déplacées de quelques Hertz.

Ce type d'hétérogénéité, même avec des tailles et des répartitions de raideurs de contact extrêmes, ne perturbe pas le système. Il peut être intéressant de voir comment ces hétérogénéités influent dans le cas d'un système à la limite de la stabilité. Nous utilisons les paramètres liées au disque dans le modèle semi-analytique afin de placer le système dans une telle situation.

4.2.1.6 Impact des paramètres de disque sur l'analyse modale dans le cas de référence

L'avantage du modèle semi-analytique est de pouvoir considérer certaines données d'entrée (Masse modale, Fréquences propres ...) comme étant des variables. Dans les études à venir, il sera nécessaire de placer le système dans une configuration à la limite de la stabilité. Dans le modèle semi-analytique, les paramètres liés au disque seront adaptés en ce sens.

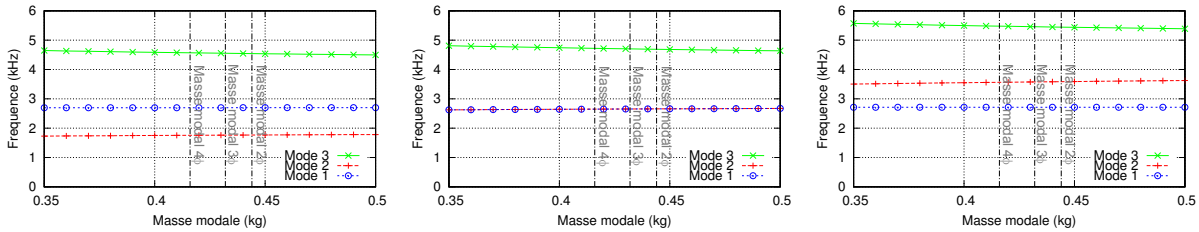
Précédemment, l'analyse modale a été réalisée sur les configurations de disque prédéfinies dans la partie 2.2.3.1. Les résultats ont été résumés dans le tableau 2.4. Dans ce qui va suivre, on considère les propriétés du disque (masse modale généralisée et raideur équivalente en translation du disque sous condition de montage sans contact) comme des paramètres de l'analyse modale. Il sera utile de voir l'influence de la configuration du disque afin de pouvoir rechercher des paramètres de disque permettant d'amener le système à la limite de la stabilité.

4.2.1.6.a Impact de la masse modale du disque

A partir de la géométrie du disque, trois modes de disque ont été exploités :

- Un mode à 2 diamètres nodaux avec une masse équivalente de 444 g et une fréquence propre en translation à 1935 Hz
- Un mode à 3 diamètres nodaux avec une masse équivalente de 432 g et une fréquence propre en translation à 2970 Hz
- Un mode à 4 diamètres nodaux avec une masse équivalente de 416 g et une fréquence propre et translation à 4750 Hz

Dans cette section, l'impact de la masse modale est étudié pour chaque fréquence propre de disque. Les figures 4.8 représentent les fréquences propres dans le cas homogène de référence.



(a) Fréquence de translation de disque (F_d) à 1935 Hz (b) Fréquence de translation de disque (F_d) à 2970 Hz (c) Fréquence de translation de disque (F_d) à 4750 Hz

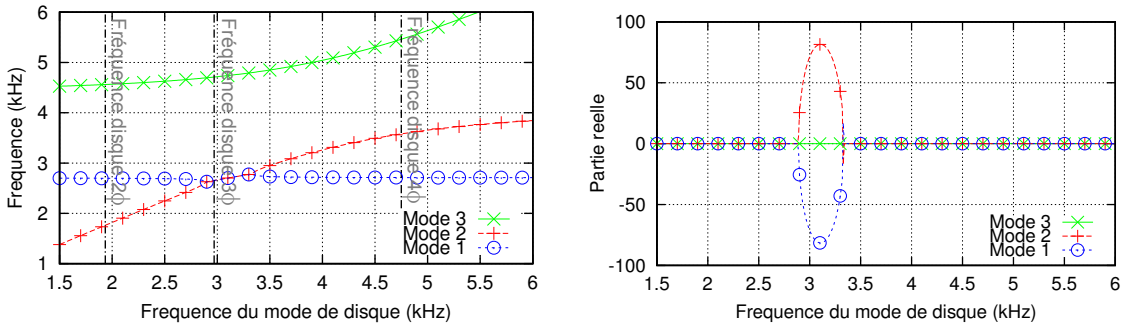
FIGURE 4.8 – Impact de la masse modale équivalente de disque sur le cas homogène de référence à différentes fréquences de translation de disque (F_d)

Sachant que les configurations de disque définis dans la partie 2.2.3.1 ont des masses modales comprises entre 0.45 et $0.41kg$, les figures 4.8 montrent que cette dernière impacte peu. Le mode le plus influencé est le mode 3. Ainsi, pour une masse modale généralisée comprise entre 0.4 et $0.45kg$, le mode 3 varie de 50 à $60Hz$ dans chacun des trois cas présentés sur les courbes. Les déformées modales ne sont pas bouleversées. Il existe une petite variation de l'amplitude de chacune de leurs composantes, mais les modes restent du même type.

Il est possible de considérer une masse modale équivalente constante pour prendre en compte différents modes de disque sans trop d'erreur. La masse modale sera fixée à $430g$ pour tous les calculs à venir.

4.2.1.6.b Impact de la fréquence de translation du disque

Dans cette section, la masse modale sera supposée constante et égale à 430 g. La fréquence de translation de disque, donnée en entrée de l'analyse modale, est considérée comme le paramètre à étudier. Les figures 4.9 représentent l'évolution des fréquences propres du modèle (figure 4.9a) et des parties réelles des fréquences propres (figure 4.9b) sous condition de contact en fonction de la fréquence propre de translation donnée en entrée du modèle analytique.



(a) Fréquences propres du système (b) Parties réelles des fréquences propres du système

FIGURE 4.9 – Impact de la fréquence de translation du disque hors contact sur les fréquences propres dans le cas homogène de référence

La fréquence propre de translation de disque apparaît comme étant un paramètre très influant sur les modes 2 et 3 (dont la déformée contient une composante en translation de disque non nulle). Par contre, la fréquence 1, correspondant au mode de basculement pur de pion, est peu impactée.

Dans cette étude, on retrouve l'inversion d'ordre des fréquences 1 et 2 selon la fréquence de translation de disque. De plus, une zone de confusion est identifiée.
Avec une fréquence de translation de disque inférieure à $2800Hz$, la fréquence propre associée au mode 1 est supérieure à la fréquence propre associée au mode 2. Avec une fréquence de translation de disque supérieure à $3400Hz$, cette fois, la fréquence du mode 2 est supérieure à celle du mode 1.
La confusion est effective pour une fréquence de translation de disque comprise entre $2890Hz$ et $3330Hz$. $2890Hz$ et $3330Hz$ apparaissent comme des limites de domaine de stabilité. Pour des fréquences de disque proches de $2890Hz$ et $3330Hz$, le système est dit faiblement stable ou faiblement instable (figure 4.9b).

4.2.1.6.c Conclusion sur l'impact des paramètres liés au disque dans l'analyse modale

Dans les précédents chapitres, les deux paramètres liés au mode de disque pris en compte ont été déterminés via l'étude d'une géométrie de disque qui avait été utilisé pour des essais expérimentaux réalisés par Duboc. Dans ce chapitre, ces paramètres peuvent être considérés comme des variables indépendantes qu'il est possible de modifier dans les calculs. Dans cette étude, il apparaît que la masse modale généralisée influe peu sur le résultat final de l'analyse modale. Il apparaît aussi que la fréquence propre de translation de disque permet de définir une zone d'instabilité entre 2890 Hz et 3330Hz.
D'autre part, le choix de la fréquence propre de translation de disque (en considérant une masse modale équivalente constante fixée à 430 g) permet de choisir de travailler sur une configuration proche ou non de la confusion entre la fréquence 1 et la fréquence 2.

4.2.1.7 Analyse modale dans des configurations faiblement stables

Dans cette partie, on souhaite travailler sur un système faiblement stable/instable. Pour cela, on va exploiter l'étude réalisée dans la partie 4.2.1.6. Ainsi, le modèle semi-analytique est utilisé avec les propriétés de disque suivantes :

- une masse modale équivalente M fixée à $430g$.
- une fréquence de translation de disque variable comprise entre 2885 et $2900Hz$. Ce qui permet d'englober la fréquence à laquelle le modèle homogène passe de stable à instable (soit $2890Hz$).

Les résultats sont analysés suivant deux paramètres : en fonction de la taille d'hétérogénéité, et en fonction de la dispersion de valeur.

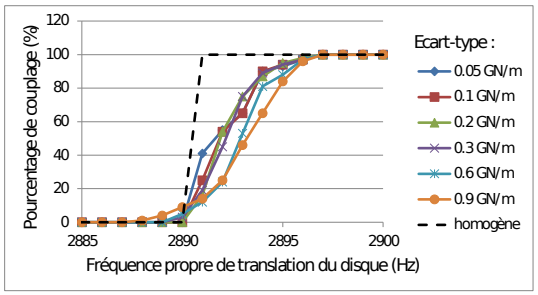
4.2.1.7.a Impact de la dispersion des valeurs

Dans cette section, les résultats seront analysés de la manière suivante : pour une taille d'hétérogénéités fixée (10, 2, 1, 0.5 et $0.2mm$), les courbes avec différentes variances (De $0.05GN/m$ à $0.9GN/m$) seront comparées.
Les figures 4.10 représentent l'évolution du pourcentage de cas laissant apparaître des modes couplés en fonction de la fréquence propre de translation de disque donnée en entrée du modèle semi-analytique.

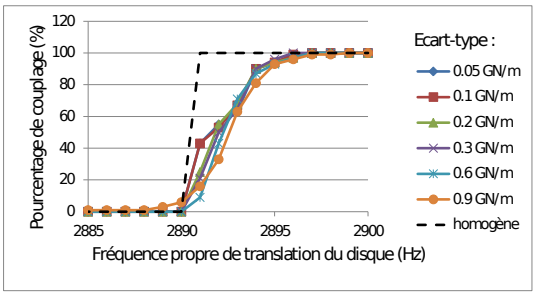
Tout d'abord, si dans le cas homogène le système passe de stable à instable à partir de $2890Hz$, cela n'est plus vrai dès que l'on introduit une dispersion des raideurs de contact. Dans tous les cas, le pourcentage de calcul affichant un couplage augmente progressivement à partir de $2890Hz$. Il y a donc existence d'un intervalle dans lequel il est possible d'obtenir sur un calcul stable ou un calcul instable avec des jeux de paramètres (f_d, variance et taille d'hétérogénéités) égaux.

A taille d'hétérogénéités fixée, la variance choisie, et donc la dispersion des raideurs de contact, a un très faible impact. Le seul cas qui se différencie légèrement se trouve pour une taille d'hétérogénéités fixée à $0.2mm$. Dans ce cas, une forte variance déplace la zone mêlant des cas stables et instables de 1 à $2Hz$. Une dérive de la zone de $2Hz$ est négligeable et elle peut être considérée comme nulle.

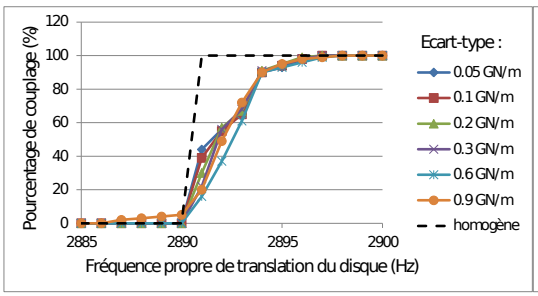
En résumé, à taille d'hétérogénéités fixée, la dispersion des raideurs de contact n'a pas d'impact clair et identifié. De plus, cet impact se résume à une influence sur quelques Hertz. Elle est donc très réduite voir inexistante à l'échelle du système.



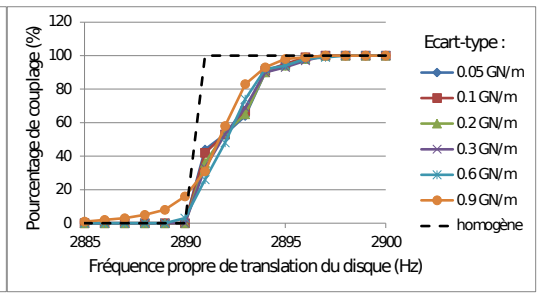
(a) Taille d'hétérogénéités fixée : $10mm$



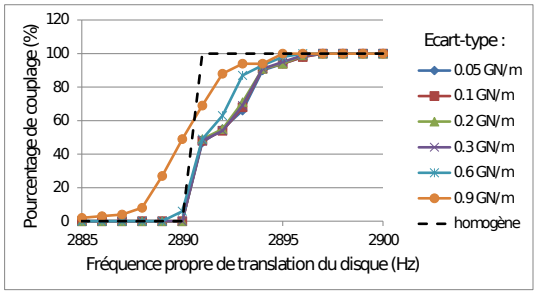
(b) Taille d'hétérogénéités fixée : $2mm$



(c) Taille d'hétérogénéités fixée : $1mm$



(d) Taille d'hétérogénéités fixée : $0.5mm$



(e) Taille d'hétérogénéités fixée : $0.2mm$

FIGURE 4.10 – Impact de la dispersion des raideurs de contact sur la confusion de fréquences dans des cas proches de la confusion de fréquences

4.2.1.7.b Impact de la taille d'hétérogénéité

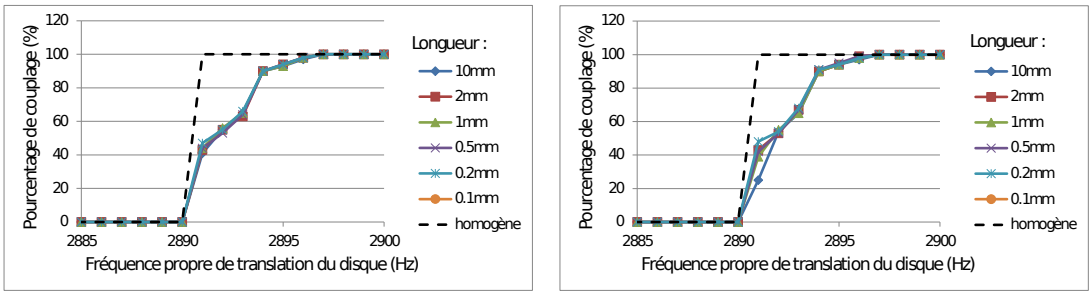
Dans cette section, les résultats seront analysés de la manière suivante : pour une variance fixée (de 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.6 et $0.9GN/m$), les courbes avec différentes tailles d'hétérogénéités (de 0.2 à $10mm$) seront comparées.
Les figures 4.11 représentent l'évolution du pourcentage de cas laissant apparaître un mode-couplé en fonction de la fréquence propre de translation de disque donnée en entrée du modèle semi-analytique.

Dans cette étude, certaines tendances apparaissent plus clairement. Tout d'abord, pour de faible variance, la taille des hétérogénéités n'influe absolument pas sur le pourcentage de cas instable obtenu.
Par contre, pour des calculs avec une forte dispersion des raideurs de contact, la taille des hétérogénéités impacte directement sur la zone mêlant calculs stables et instables. Plus la taille d'hétérogénéités est grande, plus cette zone se déplace vers les basses fréquences.

Pour résumer, uniquement pour de fortes dispersions des valeurs des raideurs, la taille d'hétérogénéités a un faible impact sur les résultats. Cet impact se limite à un déplacement de 1 à 5 Hertz de la zone mêlant cas stables et instables, ce qui est très faible comparé à l'échelle des fréquences propres du système.

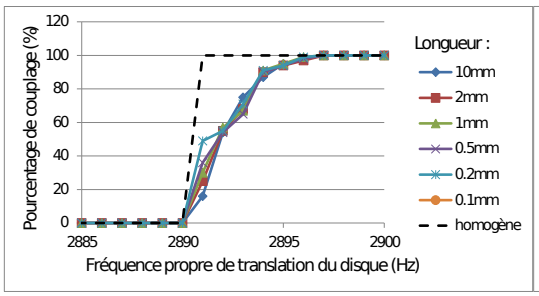
4.2.1.8 Bilan sur l'hétérogénéité aléatoire des raideurs en surface

Un modèle permettant d'introduire des hétérogénéités sur la surface de contact a été présenté. Celui-ci exploite le coefficient de pénalisation associé à la méthode de résolution de contact. Au travers d'un

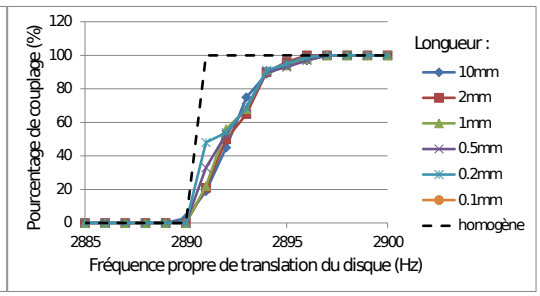


(a) Variance fixée : $0.05GN/m$

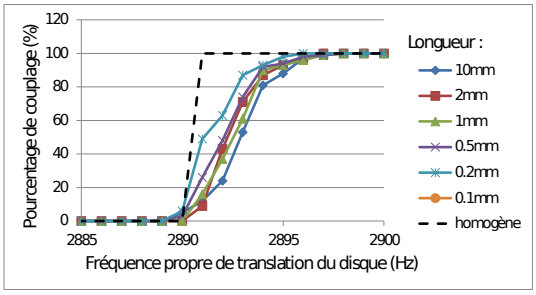
(b) Variance fixée : $0.1GN/m$



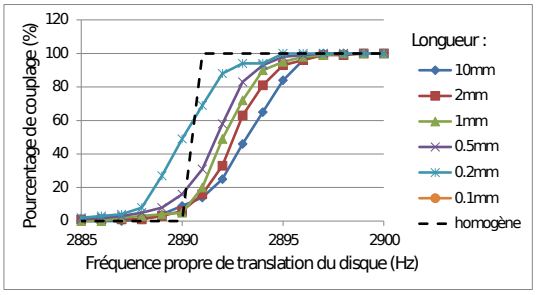
(c) Variance fixée : $0.2GN/m$



(d) Variance fixée : $0.3GN/m$



(e) Variance fixée : $0.6GN/m$



(f) Variance fixée : $0.9GN/m$

FIGURE 4.11 – Impact de la taille des hétérogénéités sur la confusion de fréquences dans des cas proches de la confusion de fréquences

modèle E.F. avec couche fine au contact, il a permis de prendre en compte des hétérogénéités allant de 200 microns à plusieurs millimètres.

Il a été vérifié que le modèle introduisait bien une hétérogénéité dans les pressions de contact. Plus la dispersion des raideurs locales de contact est faible et plus la pression est proche du cas homogène. De plus, il est apparu des discontinuités de pression (surpression et sous-pression) entre les patchs de la surface de contact ayant des raideurs de contact trop différentes.

Les résultats montrent que ce type d'hétérogénéités n'impacte pas la stabilité dans les configurations de mode de disque 2d, 3d et 4d. Même en se plaçant volontairement dans des cas faiblement stables/instables, l'influence de l'hétérogénéité s'est avérée très réduite.

Avant de poursuivre, il est nécessaire de faire quelques remarques. Nous nous sommes intéressés ici à des raideurs locales de contact suivant une distribution gaussienne. Il a été pris en compte des répartitions de propriétés sur 4 patchs. 4 valeurs ne suffisent pas pour échantillonner une loi gaussienne. En conséquence, les résultats dans ces configurations ne suivent donc pas une loi gaussienne au sens propre du terme.
Il faut aussi noter que la prise en compte des hétérogénéités à la surface utilise le coefficient de la méthode de pénalisation. Elle s'appuie sur l'erreur due à la méthode de résolution de contact par pénalisation en utilisant un mauvais coefficient. Il ne s'agit donc pas d'une méthode exacte et physique, mais uniquement d'un moyen d'obtenir une pression de contact irrégulière afin de simuler l'hétérogénéité du contact.

La prise en compte d'une hétérogénéité uniquement sur la surface de contact ne suffit pas à perturber la stabilité du système. La prochaine étape sera donc la prise en compte d'une hétérogénéité dans l'intégralité de la couche fine, c'est à dire sur une épaisseur de 1 mm.

4.2.2 Modèle avec couche de matériaux hétérogène aléatoire au contact

L'objectif de ce modèle est de rendre possible la prise en compte d'une hétérogénéité dans la couche fine au contact. Ici, il ne s'agit pas uniquement d'intégrer l'hétérogénéité sur la surface de contact, mais de manière volumique dans l'épaisseur de la couche fine au contact.

4.2.2.1 Méthodologie développée

4.2.2.1.a Le modèle numérique

L'idée principale de la stratégie est de répartir aléatoirement un module d'Young dans la couche fine au contact. Afin de pouvoir créer des hétérogénéités de tailles variables sans trop de difficultés, le système de patchs précédemment utilisé est adapté. Des regroupements géométriques de mailles sont réalisés et numérotés. Chaque regroupement correspond à un patch qui se verra affecter d'un module d'Young propre.

La figure (4.12) présente une illustration des patchs qui sont créés. Sur celle-ci, des patchs de $0.2mm$ de hauteur et $0.2mm$ de largeur sont représentés. La couche fine au contact, contenant au total 4000 éléments, permet de créer un maximum de 4000 patchs avec un module d'Young différent. Ainsi, avec ce modèle, il est possible de créer des hétérogénéités d'une largeur minimale de 100 microns, ce qui est inférieure à la taille d'hétérogénéité atteinte grâce au modèle avec raideurs de contact variables.
Il sera possible de prendre en compte des patchs de différentes hauteurs et de largeurs. Les dimensions des patchs, et le nombre de patchs correspondant, sont présentés dans le tableau 4.3.

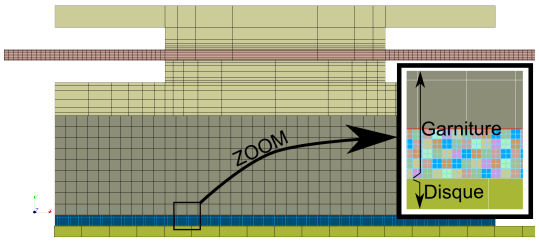


FIGURE 4.12 – Exemple de patchs réalisables : (hauteur: $0.2mm$ * largeur :$0.2mm$)

Hauteur de patch (mm)	Largeur de patch (mm) 0,1	0,2	0,5	1	2	10
0,1	4000	2000	800	400	200	40
0,2	2000	1000	400	200	100	20
0,5	800	400	160	80	40	8
1	400	200	80	40	20	4

TABLE 4.3 – Nombres de patchs en fonction de leurs dimensions

4.2.2.1.b Stratégie de calcul

Avec ce modèle, on conserve la même stratégie de calcul que dans le précédant. Chaque calcul fera l'objet de 100 tirages aléatoires.

4.2.2.1.c Calcul des valeurs aléatoires

Le calcul des valeurs aléatoires se fait de la même manière que précédemment. Une répartition des valeurs suivant une loi normale sera utilisée. L'unique différence réside dans la répartition des valeurs qui ne se fait plus dans une liste de patchs mais dans une matrice.
Les valeurs obtenues par tirage aléatoire seront réparties aléatoirement sur la hauteur et sur la longueur.

4.2.2.2 Configurations et jeux de paramètres exploités

Les différentes configurations et jeux de paramètres testés sont présentés dans cette partie. Tout d'abord la dispersion des valeurs est un paramètre qui sera exploité. Le second paramètre qui sera exploité est la dimension (ou taille) des hétérogénéités.

Le tableau 4.4 représente les dimensions de patchs qui ont été exploitées dans les calculs. Sur le tableau sont représentés les études avec largeur de patch en fonction de la hauteur des patchs (lignes jaunes-a,b,c), les études avec hauteur de patch fixée et en fonction de la largueur des patchs (lignes rouges-a,b) et l'étude avec patchs carrés, c'est à dire de hauteur égale à la largeur.

Dispersion des hétérogénéités : Comme lors de l'exploitation du modèle avec raideurs de contact variable, l'espérance est fixée à une valeur moyenne de $3GPa$. Différentes variances sont balayées afin de partir d'un cas proche du cas homogène et d'arriver jusqu'à un cas prenant en compte une variance maximum pour laquelle les valeurs peuvent aller d'un module d'Young quasi-nul à trois fois l'espérance (de $3GPa$). Les valeurs des espérances exploitées dans les calculs sont rassemblées dans le tableau 4.5.

Dimensions des hétérogénéités : Les hétérogénéités ont des dimensions surfaciques (étant donné que l'on travaille sur un modèle en 2 dimensions). La largeur minimum correspond à la taille d'une maille, soit $0.1mm$, et la largeur maximum est de $10mm$. Concernant la hauteur, le minimum correspond toujours à la hauteur d'une maille, soit $0.1mm$, et le maximum correspond cette fois-ci à la hauteur de la couche fine au contact, soit $1mm$.

Hauteur de patch (mm)	Largeur de patch (mm) 0,1	0,2	0,5	1	2	10
0,1	4000	2000	800	400	200	40
0,2	2000	1000		200		20
0,5	800		160	80		8
1	400	200	80	40	20	4

Etudes à hauteur de patch variable
Etudes à largeur de patch variable
Etudes à surface de patch variable

TABLE 4.4 – Nombres et dimensions des patchs utilisés dans les simulations

écart-type	Module minimum	Module maximum
0.05 GPa	2.85 GPa	3.15 GPa
0.1 GPa	2.7 GPa	3.3 GPa
0.3 GPa	2.1 GPa	3.9 GPa
0.6 GPa	1.2 GPa	5.8 GPa
0.9 GPa	0.3 GPa	5.7 GPa

TABLE 4.5 – Écarts-types utilisés dans les simulations

La partie suivante présente les résultats des différentes études réalisées. Tout d'abord, des exemples de distributions de pressions sont présentés. Puis l'impact sur les propriétés modales du système est présenté pour chaque étude géométrique.

4.2.2.3 Répartitions de pressions obtenues

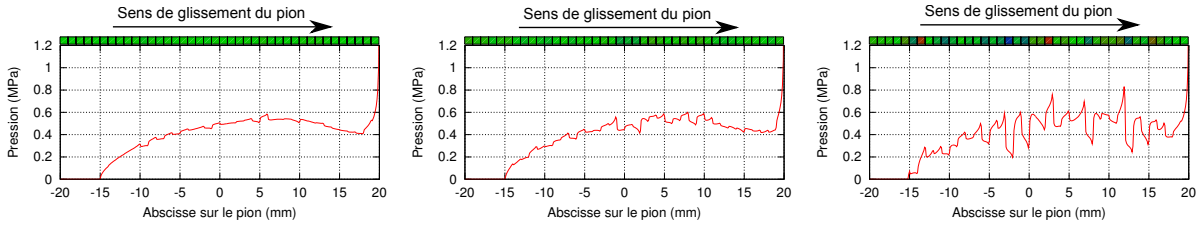
Dans cette partie, quelques distributions de pressions issues du calcul éléments finis sont présentées. Une fois de plus, étant donné le grand nombre de simulations réalisées, il serait inexploitable de montrer une courbe de pression pour chaque cas. Seul les cas les plus représentatifs seront donc illustrés. Tout d'abord, l'impact de la variance sur la pression de contact sera observé suivi de l'impact de la longueur des patchs et de l'impact de la hauteur des patchs.
Chaque courbe de pression est présentée avec la distribution de valeur de module associée. Les distributions sont illustrées à l'aide de couleurs. Pour l'ensemble des cas, une légende commune est utilisée. Afin de ne pas remettre la même légende à chaque calcul, elle est présentée sur la figure 4.13.

FIGURE 4.13 – Échelles des modules dans la couche fine

4.2.2.3.a Impact de la dispersion des valeurs

Sur les figures 4.14 sont représentées des exemples de pressions de contact obtenus pour des patchs de longueur et de hauteur $1mm$ pour différentes variances ($0.1GPa$, $0.3GPa$ et $0.9GPa$).

Ces figures montrent que le choix de la variance impacte bien sur la pression de contact. Avec une faible variance (figure 4.14a), les valeurs de module sont peu dispersées et proches de la valeur moyenne correspondant au cas homogène. En conséquence, la pression de contact est aussi proche de celle du cas homogène. En augmentant la variance (figures 4.14b et 4.14c), la dispersion des valeurs est accrue et la pression de contact est de plus en plus modifiée.

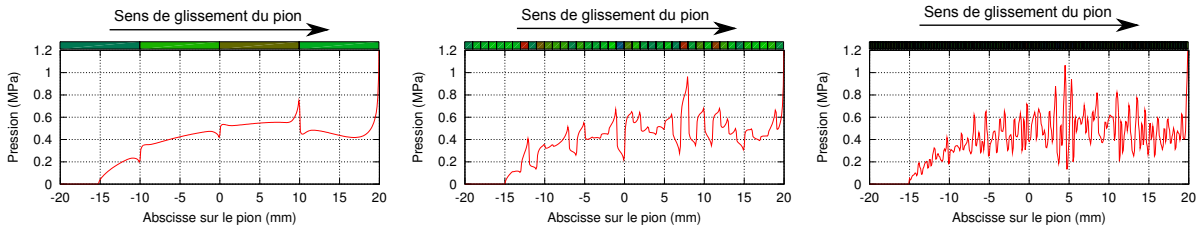


(a) Variance de 0.1 GPa (b) Variance de 0.3 GPa (c) Variance de 0.9 GPa

FIGURE 4.14 – Exemples de répartitions de pressions pour des patchs de longueur et de hauteur $1mm$

4.2.2.3.b Impact de la longueur des patchs

Les figures 4.15 représentent des pressions de contact pour des simulations avec une variance fixe de $0.9GPa$ et des patchs de hauteur $1mm$ et de différentes longueurs ($10mm$, $1mm$ et $0.2mm$). La hauteur des patchs correspond à la hauteur de la couche mince et permet ainsi d'intégrer qu'une seule hétérogénéité dans l'épaisseur.



(a) Longueur 10 mm (b) Longueur 1 mm (c) Longueur 0.2 mm

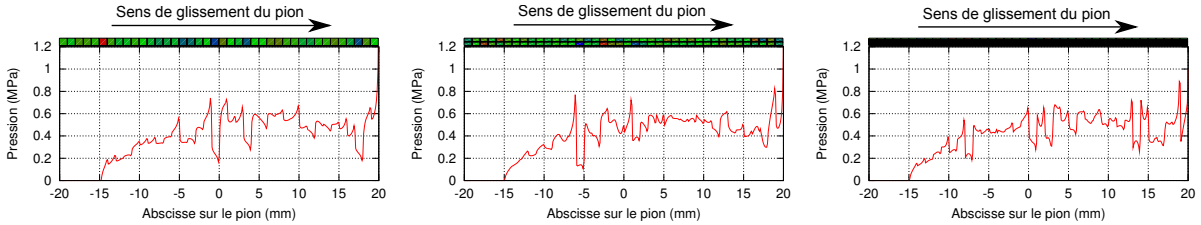
FIGURE 4.15 – Exemples de répartitions de pressions pour des patchs de hauteur $1mm$ et de variance $0.9GPa$

Dans ce cas, l'analyse est simple puisque l'hétérogénéité se situe uniquement sur la première couche de matériau en contact. De plus, cette couche est d'une épaisseur non-négligeable ($1mm$). Un patch avec un module plus élevé permet d'obtenir une pression plus forte avec des surpressions en entrée et parfois en sortie de contact sur le patch. Les surpressions et sous-pressions aux frontières d'un patch sont fortement liées à la valeur du module sur le patch voisin. Si le patch voisin à une valeur de module fortement plus faible, alors une forte surpression apparaît sur le bord du patch. Si, au contraire, le patch voisin à une valeur de module plus élevée, alors une légère sous-pression apparaîtra sur le bord du patch. Dans le cas où les valeurs de module sont voisines, alors la surpression et la sous-pression seront réduites.
En réduisant la longueur des patchs (figures 4.15b et 4.15c), l'irrégularité des pressions de contact est accrue. Avec des patchs de largeur moyenne (comme sur la figure 4.15b), la pression au centre d'un patch est fortement liée à la valeur du module sur ce patch. Comme précédemment, les pressions locales de contact au frontière des patchs sont toujours liées à leur voisinage. De plus, l'impact d'un module élevé varie selon sa position sur la garniture. Typiquement, un module élevé sur l'avant de la garniture impactera plus qu'un module élevé sur l'arrière de la garniture. Cette observation n'est valable que pour un faible nombre de patchs et ne peut se généraliser en présence d'un très grand nombre de patchs.
Des patchs très courts (figure 4.15c) impliquent une très forte irrégularité de pression de contact.

4.2.2.3.c Impact de la hauteur des patchs

Les figures 4.16 représentent des pressions de contact pour des simulations avec une variance fixe de $0.9GPa$ et des patchs de longueur $1mm$ et de différentes hauteurs ($0.2mm$, $0.5mm$ et $1mm$). Ces courbes permettent d'observer l'influence de l'accumulation d'hétérogénéité dans l'épaisseur sur la pression de contact.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul patch sur l'épaisseur, les hétérogénéités impactent fortement sur la pression de contact en face. Lorsque deux patchs sont accumulés sur l'épaisseur, le plus proche de la surface de contact est celui qui impacte le plus. Les patchs des couches supérieures impactent eux aussi mais au



(a) Hauteur 1 mm (b) Hauteur 0.5 mm (c) Hauteur 0.2 mm

FIGURE 4.16 – Exemples de répartitions de pressions pour différentes hauteurs de patchs de longueur $1mm$ et de variance $0.9GPa$

second ordre. En augmentant le nombre de patchs sur l'épaisseur, il devient difficile de distinguer une influence de la première couche de patch et la moyenne des valeurs sur la hauteur semble plus influente.

4.2.2.3.d Conclusion

En conclusion, l'introduction de valeurs de module d'Young hétérogènes impacte bien sur les pressions de contact. Bien que cet impact soit difficile à quantifier ou à qualifier, la méthode permet d'obtenir des distributions de pressions plus ou moins irrégulières. La partie suivante porte sur l'influence de ces distributions de pressions sur les fréquences propres du système.

4.2.2.4 Impact sur les fréquences propres et sur le couplage de mode

4.2.2.5 Analyse modale dans les configurations 2d, 3d et 4d

Quelle que soit la variance appliquée à la loi gaussienne et la géométrie des patchs, aucune influence sur la confusion de fréquences n'est observée. Les configurations avec des modes de disque à 2 et 4 diamètres nodaux restent toujours stables et les configurations avec un mode de disque à 3 diamètres nodaux restent toujours instables.

En prenant en compte les modes de disque à 2,3 et 4 diamètres nodaux, les résultats sont comparables à ceux avec pénalisation variable (cf. section 4.2.1.5). En conséquence, comme dans l'étude précédente, celle-ci va être réalisée sur un système à la limite de la stabilité afin de travailler sur des situations faiblement stables ou faiblement instables.

4.2.2.6 Analyse modale dans des configurations faiblement stable

Afin de raisonner sur une configuration à la limite de la stabilité, on exploite une fois de plus l'étude réalisée dans la section 4.2.1.6. Les propriétés du disque utilisées dans le modèle semi-analytique sont les suivantes :

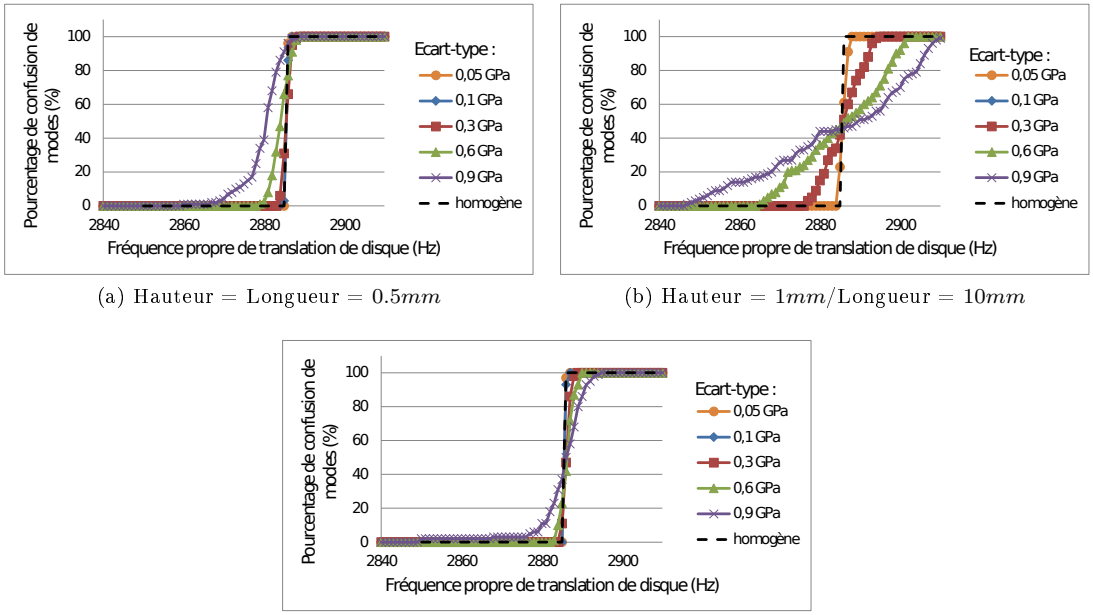
- une masse modale équivalente M fixée à 430 g.
- une fréquence de translation de disque variable comprise entre 2850 et $2900Hz$. Ce qui permet d'englober la fréquence à laquelle le modèle homogène passe de stable à instable (soit $2885Hz$).

Les résultats sont analysés suivant deux paramètres : en fonction de la dispersion de valeur et en fonction de la géométrie des patchs. Pour ce type d'hétérogénéité, trois études de géométrie sont réalisées. Elles sont représentées dans le tableau 4.4. Une première permettra de tester l'influence de la longueur des hétérogénéités, une seconde traitera de l'influence de la hauteur et la dernière étude portera sur la dimension générale des hétérogénéités en utilisant des patchs carrés.

Avant de présenter les résultats, on définit la zone "limite de stabilité". Dans chaque étude stochastique (à taille et variance fixées), il existe une zone dans laquelle il est possible d'obtenir à la fois des cas stables et à la fois des cas instables. Cette zone est plus ou moins large selon les paramètres de l'étude et elle apporte une information sur l'influence du jeu de paramètre utilisé. En conséquence, la zone "limite de stabilité" est définie comme étant l'ensemble des fréquences comprises entre la première fréquence de translation de disque où le système est 100% stable et la dernière fréquence de translation de disque où le système est 100% instable. Dans un cas homogène, la zone "limite de stabilité" se réduit à une unique fréquence connue.

4.2.2.6.a Impact de la dispersion des valeurs

Tout d'abord, on s'intéresse à l'impact de la dispersion des valeurs du module d'Young. Les graphiques 4.17 présentent l'impact de l'écart type dans différentes configurations géométriques de patchs. La figure 4.17a traite de patchs carrés de dimension $1x1mm^2$. La figure 4.17b présente une configuration avec un patch sur la hauteur et 4 patchs sur la largeur soit une longueur de $10mm$. La figure 4.17c présente une configuration avec 200 patchs dans l'épaisseur et 40 dans la longueur, soit une hauteur de patch de $0.2mm$ et une largeur de $1mm$. Ces configurations ont été choisies arbitrairement puisque toutes les configurations étudiées présentent la même tendance.



(a) Hauteur = Longueur = $0.5mm$

(b) Hauteur = $1mm$/Longueur = $10mm$

(c) Hauteur = $0.2mm$/Longueur = $1mm$

FIGURE 4.17 – Impact de la dispersion des modules d'Young sur la confusion de fréquences dans des cas proches de la confusion de fréquences

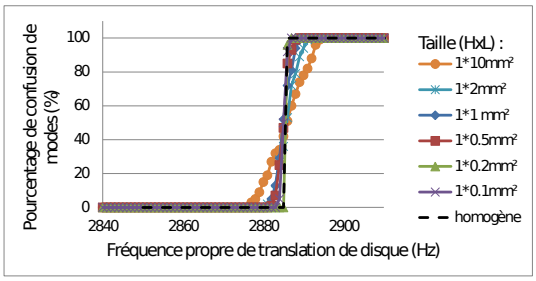
Quelles que soit les dimensions des patchs, la dispersion des valeurs a toujours un impact similaire. Un faible écart-type donne des résultats similaires aux matériaux homogènes, ce qui peut s'expliquer simplement par des valeurs de module plus proche de la valeur moyenne et donc des pressions de contact plus proches du cas homogène (cf. figure 4.14). Alors qu'un fort écart-type exacerbe le comportement propre à la géométrie des patchs. On observe différents comportements. La zone "limite de stabilité" peut être décalée vers les basses ou hautes fréquences (e.g. figure 4.17a), ou peut s'étaler vers les basses et hautes fréquences en même temps (e.g. figure 4.17b). Ces comportements seront étudiés dans les parties suivantes.

Puisque la variance ne modifie pas les tendances et ne fait que les exacerber, seuls les cas avec de très grands écarts-types seront traités dans les prochaines études.

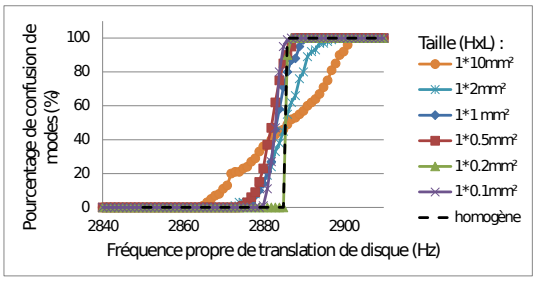
4.2.2.6.b Impact de la longueur des patchs

Les figures 4.18 présentent l'évolution du pourcentage de mode lock-in en fonction de la fréquence de translation de disque pour différents écarts-types. Ainsi, on présente les résultats pour des écarts-types de $0.3GPa$ (figure 4.18a), $0.6GPa$ (figure 4.18b) et $0.9GPa$ (figure 4.18c).

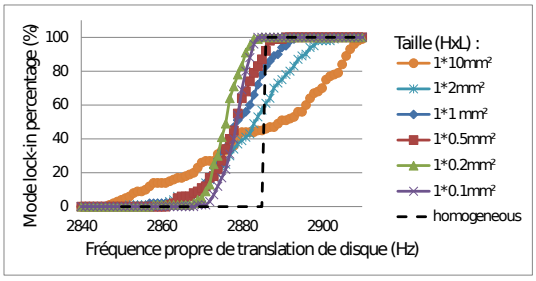
Des patchs de petites tailles réduisent la taille de la zone "limite de stabilité". Plus les patchs sont allongés et plus la zone "limite de stabilité" est large. Ainsi, pour un écart-type de $0.9GPa$, la zone "limite de stabilité" passe de $10Hz$ (pour une longueur de $0.1mm$) à $70Hz$ (pour une longueur de $10mm$). Avec de larges plateaux, la zone "limite de stabilité" est élargie. La dernière fréquence où 100% des tirages sont stables est décalée vers des fréquences plus basses et la première fréquence où 100% des cas sont instables est décalée vers des fréquences plus hautes. Ainsi, la fréquence moyenne de la zone "limite de stabilité" reste quasi-constante quel que soit la longueur des patchs. Une autre conséquence, plus les patchs sont courts, plus la zone "limite de stabilité" est petite et, donc, plus la pente de la courbe devient verticale



(a) Ecart-type = $0.3GPa$



(b) Ecart-type = $0.6GPa$



(c) Ecart-type = $0.9GPa$

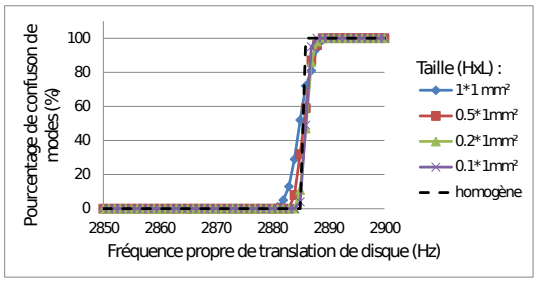
FIGURE 4.18 – Impact de la longueur des hétérogénéités sur la confusion de fréquences dans des cas proches de la confusion de fréquences (hauteur des patchs = $1mm$)

et semblable au cas homogène avec uniquement un décalage de la courbe vers les basses-fréquences.

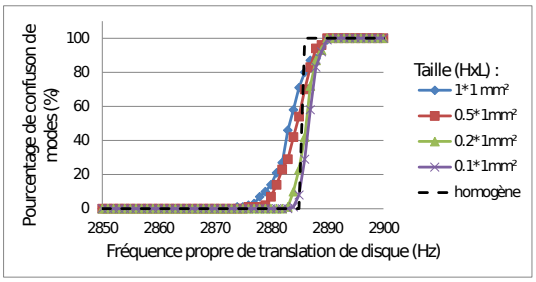
4.2.2.6.c Impact de la hauteur des patchs

Les figures 4.19 montrent l'évolution du pourcentage de mode lock-in en fonction de la fréquence de translation de disque pour différent écart-type. Les configurations présentées ont des patchs de $1mm$ de longueur. Ce choix permet de ne pas raisonner avec des patchs ni trop longs ni trop courts afin de ne pas orienter les résultats. Les résultats sont présentés pour des écarts-types de $0.3GPa$ (figure 4.19a), $0.6GPa$ (figure 4.19b) et $0.9GPa$ (figure 4.19c).

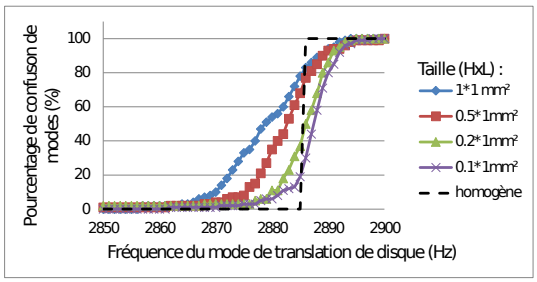
Dans ce cas, avec un écart-type inférieur ou égal à $0.3GPa$ (figure 4.19a), les résultats sont identiques au cas homogène quel que soit la hauteur des patchs. Avec un écart-type supérieur à $0.3GPa$, on observe une augmentation de la zone "limite de stabilité". Dans cette étude, la dernière fréquence de disque, où 100% des tirages sont stables, est décalée vers des fréquences plus basses lorsque l'on augmente la hauteur des patchs et, à la différence de l'étude précédente, la première fréquence de disque, où 100% des tirages sont instables, reste identique quel que soit la hauteur des patchs. Ainsi, la valeur moyenne de la zone "limite de stabilité" est décalée vers des fréquences plus basses lorsque la hauteur des patchs augmente. Avec un écart-type de $0.9GPa$ (figure 4.19c) et des patchs d'une hauteur de $0.1mm$, il possible d'observer que la pente de la courbe se rapproche d'une pente verticale similaire aux cas homogènes.



(a) Ecart-type = $0.3GPa$



(b) Ecart-type = $0.6GPa$

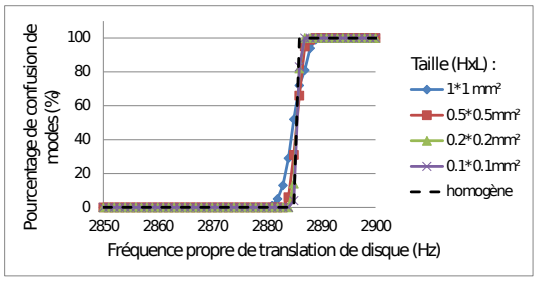


(c) Ecart-type = $0.9GPa$

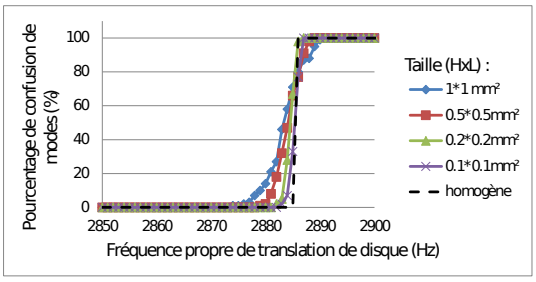
FIGURE 4.19 – Impact de la hauteur des hétérogénéités sur la confusion de fréquences dans des cas proches de la confusion de fréquences (longueur des patchs = $1mm$)

4.2.2.6.d Impact de la dimension des patchs (configurations carrés)

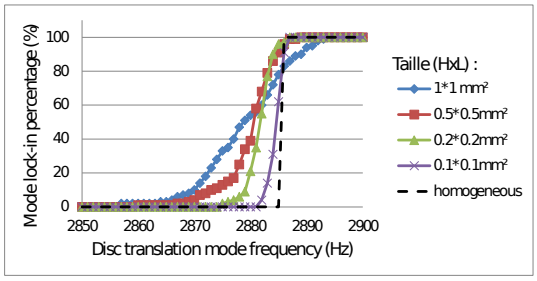
Cette dernière étude porte sur des considérations générales de dimension de patchs. Les patchs sont de forme carrée. Le coté des patchs va de $1mm$ à $0.1mm$. Les figures 4.20 rassemblent les résultats de cette étude.



(a) Ecart-type = $0.3GPa$



(b) Ecart-type = $0.6GPa$



(c) Ecart-type = $0.9GPa$

FIGURE 4.20 – Pourcentage de confusion de fréquences en fonction de la fréquence du mode de translation du disque (Hauteur = Longueur)

Cette étude englobe les cas précédents. Avec un écart-type inférieur ou égal à $0.3GPa$, les résultats sont identiques au cas homogène. Avec un écart-type plus élevé, la dimension des patchs impacte sur la taille de la zone "limite de stabilité" et sur sa valeur centrale. Avec des patchs de $1mm$ par $1mm$,

la zone "limite de stabilité" s'étale et se décale vers des fréquences plus basses. Il est possible de faire une remarque plus importante. Lorsque l'on réduit la dimension générale des hétérogénéités, quel que soit la variance, on se rapproche très fortement du comportement d'un matériau homogène. Des patchs de petites tailles impliquent des propriétés matériaux moyennes plus proches du cas homogène, qui se répercute de la même manière sur les fréquences propres et donc sur la stabilité du système.

4.2.2.6.e Conclusion

En réduisant l'écart-type, donc en réduisant la dispersion des valeurs de modules, le système se rapproche fortement du cas homogène. Avec une forte dispersion, la longueur et la hauteur des hétérogénéités impactent légèrement sur les résultats. Plus les hétérogénéités sont de dimensions réduites et plus le comportement du système se rapproche du cas homogène. A l'opposé, plus les hétérogénéités sont longues ou hautes et plus la répartition aléatoire des propriétés du matériau peut modifier la stabilité du système. La longueur des patchs a montré un impact sensible, mais ceci est lié au fait qu'il a été possible de modéliser des longueurs supérieures à $1mm$, correspondant à la hauteur maximum des hétérogénéités. A des dimensions comparables, la hauteur et la longueur semblent avoir une ampleur d'impact équivalente.

4.2.2.7 Bilan sur l'hétérogénéité aléatoire des matériaux dans le volume

Le modèle avec couche fine au contact a permis d'intégrer une hétérogénéité des propriétés du matériau dans le volume de la couche fine. Dans cette partie, l'hétérogénéité porte sur le module d'Young. Différentes dispersions de modules et différentes dimensions (longueur et hauteur) ont été modélisées. Ainsi, des dimensions d'hétérogénéité allant de $1mm$ de hauteur et $10mm$ de largeur à $0.1mm$ de hauteur et $0.1mm$ de largeur ont été pris en compte.

L'impact sur la pression de contact a ensuite été étudié. Cette approche a permis d'intégrer une irrégularité sur les pressions de contact. La caractérisation de l'influence de la longueur et de la hauteur des plateaux a révélée une complexité ne permettant pas de tirer de conclusion simple sur l'impact sur les pressions de contact. Toutefois, certaines tendances ont pu être dégagées (telle que l'apparition de surpressions ou sous-pressions en entrée et sortie aux frontières des patchs).

Aucun impact sur les modes de disque 2d,3d et 4d n'est observé. En plaçant le système dans des situations à la limite entre stabilité et instabilité, une influence est observée même si elle reste confinée. L'augmentation de la dispersion des modules et l'augmentation de la taille de hétérogénéités aboutissent à un faible élargissement de la zone limite de stabilité. Ceci implique que de grandes hétérogénéités ou une forte dispersion des modules rend la prédiction de la stabilité du système de plus en plus incertaine.

Comme lors de la prise en compte de raideurs locales de contact hétérogènes, la prise en compte de la loi gaussienne, ainsi que son utilisation sur 4 patchs, reste discutable.

Après la prise en compte de propriétés hétérogènes aléatoires, la prochaine partie du chapitre est consacrée à l'apparition d'une organisation dans les propriétés locales du matériau.

4.3 Introduction d'hétérogénéités "organisées"

La précédente partie a montrée que l'introduction d'une hétérogénéité aléatoire impacte peu sur le comportement vibratoire du modèle. Lors des mesures de modules réalisés par Naidoo Ramassami & al. [?], des répartitions organisées de module d'Young sont apparues (modules plus faibles en entrée de contact, au centre de la garniture ou en sortie de contact). Si les hétérogénéités aléatoires impactent peu, il est possible que des répartitions organisées aient un impact plus fort sur les propriétés vibratoires du système. Cette partie est donc consacrée à la prise en compte de telles répartitions d'hétérogénéités.

4.3.1 Méthodologie

Dans cette partie, on s'intéressera à des organisations simples des hétérogénéités. Sachant que les propriétés matériaux, en surface de la garniture, impactent peu sur les résultats, le choix est fait de travailler uniquement sur les propriétés matériaux dans le volume de la couche fine. Ainsi, l'hétérogénéité portera sur le module d'Young.
Le système de distribution d'hétérogénéité sur un ensemble de patch est réutilisé. Seules des distributions propriétés matériaux sur la longueur de la garniture seront étudiées. Afin de ne pas dépendre de la

distribution des modules sur l'épaisseur et de maximiser l'impact des hétérogénéités (en s'éloignant du cas homogène), la hauteur des patchs est égale à la hauteur de la couche fine. Ainsi, les patchs conserveront une hauteur de $1mm$ et différentes longueurs de patchs seront exploitées.
Afin d'obtenir des résultats comparables avec le reste des études deux hypothèses seront respectées :

- La moyenne des valeurs des modules attribuées est égale à la valeur correspondante au matériau homogène, c'est à dire $E = 3GPa$.
- La valeur maximale est $10MPa$.

Afin d'étudier l'impact d'un gradient de propriété entre l'entrée et la sortie de contact dans une premier temps et d'un gradient de propriété entre les bords de la garniture et son centre, deux types de distribution simple sont étudiés : une distribution linéaire des propriétés et une distribution parabolique.

4.3.1.1 Distribution linéaire

Dans un premier temps, la méthode utilisée pour déterminer les modules est présentée. Puis, ce sont les jeux de données utilisées pour l'étude paramétrique qui sont présentés.

4.3.1.1.a Calcul des modules

Une distribution linéaire (figure 4.21) implique que les propriétés soient régies par une répartition suivant l'équation $y(x) = ax + b$, où x est l'abscisse, y la valeur du module en x et a et b sont des coefficients à déterminer.

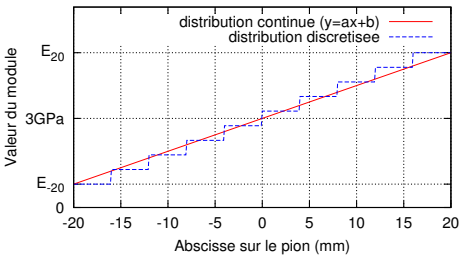


FIGURE 4.21 – Distribution linéaire de module d'Young

Dans le but de déterminer les valeurs, les coefficients a et b de l'équation sont calculés. La moyenne des valeurs étant nulle et en utilisant la symétrie de la courbe, on obtient aisément : $b = E_{moy} = 3GPa$. Le coefficient directeur de la droite s'obtient aussi facilement. Ainsi, $a = \frac{E_{20}-E_{-20}}{x_{max}-x_{min}} = \frac{E_{20}-E_{-20}}{0.04}$.

Ainsi, les valeurs des modules sont données par l'équation $y = \frac{E_{20}-E_{-20}}{0.04} * x + 3e9$.
En vue de quantifier chaque distribution à l'aide d'un seul paramètre, on définit α comme étant la variation entre l'arrière et l'avant de la garniture, c'est à dire $\alpha = E_{20} - E_{-20}$. D'où :

$$y = \frac{\alpha}{0.04} * x + 3e9. \tag{4.1}$$

Afin de déterminer des valeurs pour chaque patch, α est choisi et les valeurs discrètes au centre de chaque patch sont déterminées.

4.3.1.1.b Jeux de paramètres

Différentes longueurs de patch sont testées. Ainsi, des hétérogénéités de longueur 0.1, 1, 4 et $8mm$ sont prises en compte. Celles-ci correspondent à des configurations comportant 400, 40, 10 et 5 patchs respectivement.

Pour chaque longueur, α varie de $-5,999$ à $5,999GPa$ par pas de 0.1, ce qui donne lieu à 120 simulations. Le choix de ces bornes permet de balayer un maximum de configuration linéaire allant d'une configuration avec des modules quasi-nuls en entrée de contact et très élevés en sortie pour $\alpha = -5,999GPa$ et une configuration inversée, c'est à dire avec des modules quasi-nuls en sortie de contact et très élevés en entrée, pour $\alpha = 5,999GPa$.

4.3.1.2 Distribution parabolique

Comme précédemment, on commence par présenter comment sont obtenues les valeurs avant de donner les jeux de paramètres qui seront utilisés dans l'étude paramétrique.

4.3.1.2.a Calcul des modules

La seconde distribution qui sera exploitée est une distribution parabolique. Elle est représentée sur la figure 4.22. L'équation générale de cette parabole est donnée par $y = ax^2 + b$. où a et b sont les coefficients à déterminer.

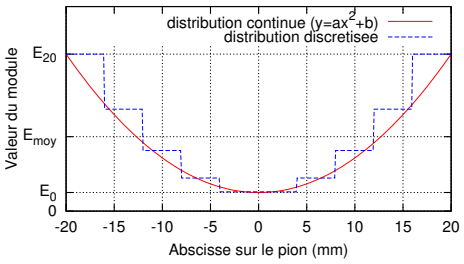


FIGURE 4.22 – Distribution parabolique de module d'Young

Comme précédemment, on définit un paramètre permettant de synthétiser les propriétés de la courbe. Ainsi, on définit $\alpha = E_{20} - E_0$. Pour cette distribution, le calcul des valeurs se fait en deux étapes, une première étape de calcul de valeur approchée et une étape de correction.

Pour la première étape il est nécessaire de connaître le coefficient a, b sera quant à lui supposé nul. En supposant que $E_0 = 0$, alors $E_{20} = y(20) = \alpha$. En exploitant ces valeurs, on obtient que $\alpha = a * (0.02)^2$. Ce qui implique que $a = \frac{\alpha}{0.02^2} = \frac{\alpha}{4e-4}$. Ainsi, les valeurs discrètes sur les patchs sont déterminées en utilisant l'équation suivante :

$$y = \frac{\alpha}{4e-4} * x^2 \tag{4.2}$$

Dans la seconde étape, le coefficient b est utilisé pour corriger les valeurs afin d'obtenir une moyenne de $3GPa$. La moyenne des valeurs obtenues est notée β.
L'erreur commise sur la moyenne est donnée par $3e9 - \beta$. Ainsi, pour obtenir la moyenne souhaitée, $b = 3e9 - \beta$ est ajouté à chaque valeur.
On obtient ainsi l'équation des distributions paraboliques :

$$y = \frac{\alpha}{4e-4} * x^2 + 3e9 - \beta. \tag{4.3}$$

Le choix d'une stratégie en deux étapes se base sur la non-linéarité de la distribution. En effet, il aurait été possible de déterminer la moyenne sur la fonction continue mais étant donné la nom linéarité de la courbe, la moyenne des valeurs discrètes ne correspond plus à celle souhaitée. Il est donc plus intéressant de déterminer des valeurs discrètes suivant une distribution parabolique et d'ajuster la moyenne par la suite.

4.3.1.2.b Jeux de paramètres

Comme pour les distributions linéaires, des longueurs de patchs de 0.1, 1, 4 et $8mm$ sont prises en compte.

Pour les distributions paraboliques, il est nécessaire de déterminer α_{min} et α_{max} pour chaque taille de patch. Les α_{min} et α_{max} pour chaque taille sont représentés sur le tableau 4.6.

Maintenant que les configurations étudiées ont été présentées, la prochaine partie concerne la présentation et l'analyse des résultats.

4.3.2 Impact de répartitions d'hétérogénéités "organisées"

Dans cette section, les résultats obtenues avec des distributions linéaires et paraboliques d'hétérogénéités sont présentés.

Dimension des patchs (mm^2)	Nombre de patchs	α_{min} (GPa)	α_{max} (GPa)	Nombre de calculs
1x0.1	400	-4,5	8,9	135
1x1	40	-4,5	8,5	135
1x4	10	-5	7,5	126
1x8	5	-5,9	5,9	119

TABLE 4.6 – Jeux de paramètres pour chaque configuration étudiée

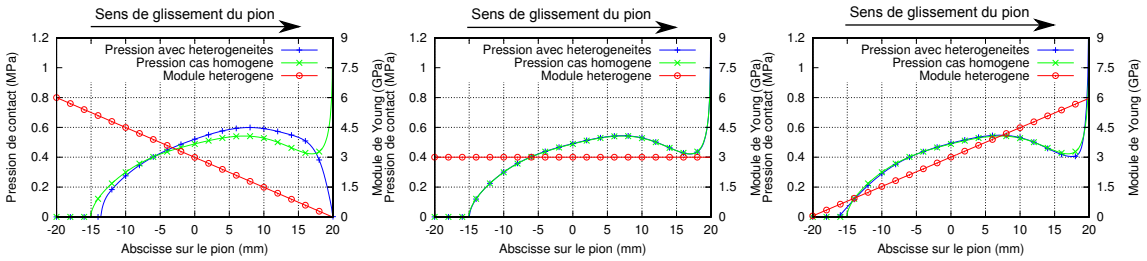
4.3.2.1 Répartitions linéaires du module d'Young

Dans cette partie, on s'intéresse aux résultats obtenus lorsque les propriétés hétérogènes suivent une répartition linéaire.
Les pressions de contact seront analysées en premier lieu avant d'analyser l'impact sur les fréquences propres du système.

4.3.2.1.a Analyse des pressions de contact

Le cas le plus simple à analyser correspond à des patchs d'une longueur de $0.1mm$. Il est donc présenté en premier, suivi des autres longueurs de pion.

Longueur $0.1mm$:
Les figures 4.23 montrent les pressions de contact obtenues dans des cas extrêmes utilisant des répartitions d'hétérogénéités linéaires appliquées sur des hétérogénéités de $0.1mm$ de longueur. A chaque fois, elles sont représentées avec la répartition de module correspondante, ainsi que les pressions de contact dans le cas homogène qui fait référence.



(a) $\alpha = -5.999GPa$ (b) $\alpha = 0GPa$ (c) $\alpha = 5.999GPa$

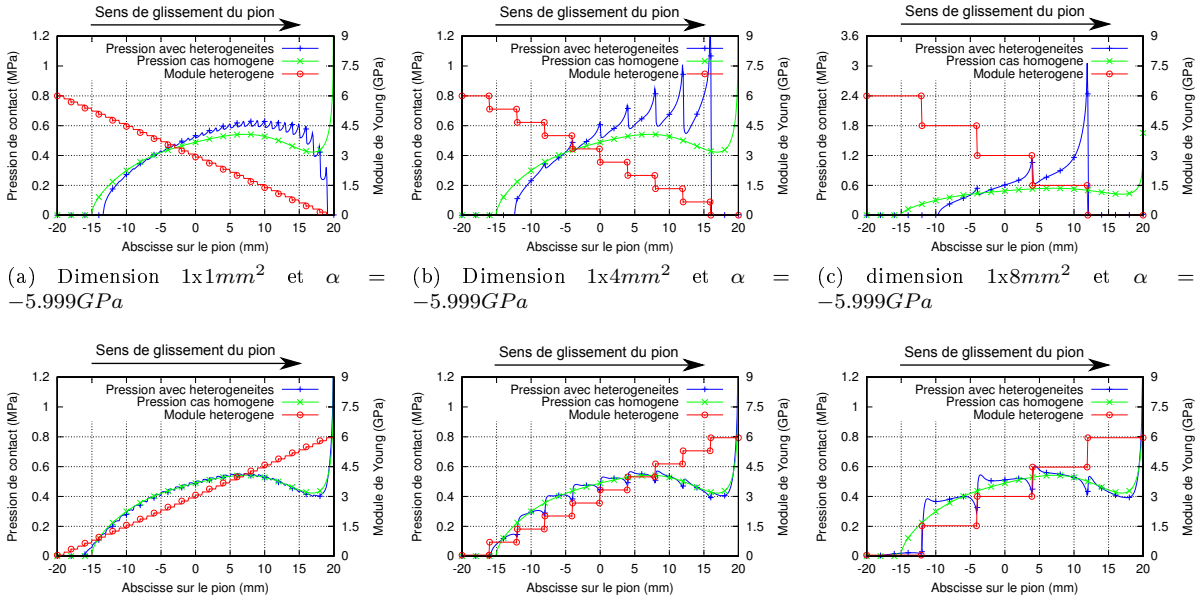
FIGURE 4.23 – Pression de contact pour des répartitions d'hétérogénéités linéaires de dimension 1x0.1mm^2

Lors de l'utilisation d'une répartition de modules croissante (α positif), les pressions de contact sont très peu perturbées (figure 4.23c). α positif implique un module plus élevé en entrée de contact et un module plus faible en sortie de contact. Une telle répartition de module ne change globalement pas la distribution de pressions.
En utilisant une répartition de module constante ($\alpha = 0$, figure 4.23b) on retrouve bien les pressions de contact obtenues dans le cas homogène.
En utilisant une répartition de module décroissante (α négatif), il y a bien un impact sur les pressions de contact. Plus les modules sont faibles en entrée de contact, plus la surpression disparaît. Dans le cas extrême où $\alpha = -5.999GPa$, la surpression en entrée de contact disparaît. Cela est due à un module quasi-nul ($E = 0.01GPa$) en entrée de contact. De plus, ce type de répartition augmente le décollement si bien que le contact se reporte essentiellement sur le centre de la garniture.

En conséquence, pour des hétérogénéités d'une longueur de $0.1mm$, seules des valeurs négatives de α ont une chance d'impacter sur les fréquences propres du système.

Longueurs supérieures à $0.1mm$:
Les figures 4.24 représentent les pressions de contact obtenues dans des cas extrêmes utilisant des répar-

titions d'hétérogénéités linéaires appliqués sur des hétérogénéités de 1 et 4 de longueur, respectivement.



(a) Dimension 1x1mm^2 et $\alpha = -5.999GPa$ (b) Dimension 1x4mm^2 et $\alpha = -5.999GPa$ (c) dimension 1x8mm^2 et $\alpha = -5.999GPa$

(d) Dimension 1x1mm^2 et $\alpha = 5.999GPa$ (e) Dimension 1x4mm^2 et $\alpha = 5.999GPa$ (f) dimension 1x8mm^2 et $\alpha = 5.999GPa$

FIGURE 4.24 – Pression de contact pour des répartitions d'hétérogénéités linéaires de dimension 1x1mm^2, 1x4mm^2 et 1x8mm^2.

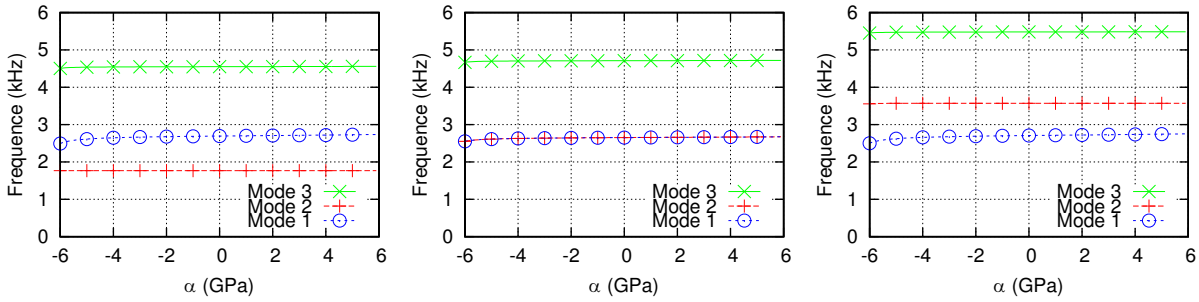
Plus la longueur des hétérogénéités est grande et plus les hétérogénéités perturbent les pressions de contact.
Dans le cas 1x1mm^2 et $\alpha = 5.999GPa$ (figure 4.24d), les pressions de contact sont légèrement perturbées. Si le profil global des pressions reste le même, il apparaît tout de même de légères oscillations. La création de petit volume homogène (correspondant aux patchs) d'une taille différente de celle des mailles du maillage fait naître ces petites oscillations de la pression. Ce phénomène, dû à la déformation non-uniforme du matériau entre chaque patch, est identique à celui rencontré dans l'utilisation de répartitions aléatoires d'hétérogénéités.
Pour 1x1mm^2 et $\alpha = -5.999GPa$ (figure 4.24a), la surpression en entrée de contact est encore absente. A cela s'ajoute de légère surpression en entrée de chaque patch. En effet, l'augmentation des modules dans le sens inverse du frottement fait que les contraintes s'accumulent à l'avant des patchs et font apparaître ces surpressions.
En augmentant la taille des patchs, les perturbations sont accrues. Dans le cas 1x4mm^2 et $\alpha = -5.999GPa$ (figure 4.24a), les surpressions deviennent très importantes et peuvent dépasser $1.2GPa$ alors que, dans le cas homogène, la surpression atteint à peine les $1GPa$. Le décollement en sortie de contact est encore légèrement accru.
Lorsque α est négatif, les déformations sont dues à une déformation du matériau entraînant une accumulation de contraintes en entrée de chaque patch et, par conséquent, des surpressions en entrée de chaque patch.

Lorsque la taille des patchs est différente de la taille de maille dans la couche fine et que α est non-nul, il y a toujours des conséquences sur les pressions de contact qui peuvent modifier le comportement vibratoire du système.

4.3.2.1.b Analyse vibratoire

On commence par s'intéresser aux hétérogénéités d'une longueur de $0.1mm$ qui sont celles ayant les distributions de pressions les moins perturbées.

Les figures 4.25 montrent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de α pour des hétérogénéités d'une longueur de $0.1mm$.

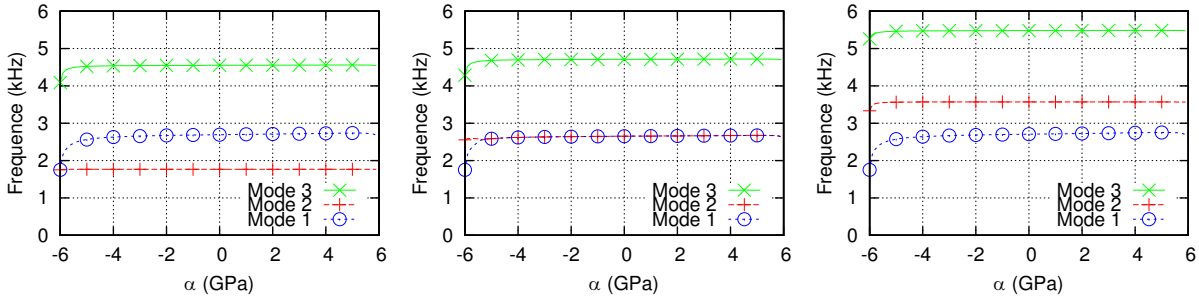


(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

FIGURE 4.25 – Evolution des fréquences propres en fonction de α pour des répartitions d'hétérogénéités linéaires de dimension 1x0.1mm^2.

L'utilisation d'une répartition linéaire de module, avec des hétérogénéités de $1x0.1mm^2$, impacte très peu sur les résultats quel que soit le coefficient α.
Les figures 4.26 montrent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de α lors de l'utilisation de répartitions paraboliques pour des hétérogénéités d'une longueur de $8mm$. Le tableau 4.7 donne la variation de la fréquence de basculement pion entre α_{min} et α_{max} dans chaque configuration et dimension d'hétérogénéité.
Dans les configurations 2d et 4d (figures 4.25a et 4.25c, resp.), la fréquence de mode de basculement de pion décroit lorsque $\alpha < 0$ décroit. Elle reste constante pour α positif. Elle a une variation maximum de $250Hz$. Les autres fréquences restent toujours quasi-constantes (variation max de $30Hz$). La décroissance du mode de basculement est due à la disparition progressive de la surpression en entrée de contact.
Dans la configuration 3d (figure 4.25b), la fréquence 1 reste constante et confondue avec la fréquence 2. Elles varient (ensemble) au maximum de 120 Hz. La répartition de module n'influence pas suffisamment le système pour sortir de la confusion et bloque donc l'évolution de la fréquence 1.

Des hétérogénéités de $0.1mm$ de longueur n'influence donc pas suffisamment le système. L'utilisation d'hétérogénéités plus longues modifie plus fortement les pressions de contact pouvant avoir une influence plus forte sur les propriétés vibratoires. Les figures 4.26 montrent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de α pour des hétérogénéités d'une longueur de $8mm$.



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

FIGURE 4.26 – Évolution des fréquences propres en fonction de α pour des répartitions d'hétérogénéités linéaires de dimension 1x8mm^2.

Dans le cas d'hétérogénéités très longues, l'évolution des fréquences propres en fonction de α reste très faible. Les propriétés vibratoires restent donc proche du cas homogène. Seules des valeurs de α inférieures à $-5GPa$ impliquent une forte évolution des fréquences propres. Afin d'avoir un orde de grandeur des variations maximums de fréquences, on les analyse sur les patchs de dimension 1x8mm^2. La fréquence 1 (de basculement de pion) varie d'environ $1kHz$ dans toutes les configurations (2d,3d et 4d). La fréquence 2 ne varie quasiment pas dans la configuration 2d ($15Hz$), elle varie légèrement dans la configuration 3d ($120Hz$). Sa plus grosse variation se trouve dans la configuration 4d ($230Hz$) dans laquelle la variation est semblable à celle de la fréquence 3. Dans les configurations 2d et 3d, la fréquence 3 varie au maximum de $450Hz$.
Dans la configuration 2d (figure 4.26a), cela va jusqu'à amener une confusion entre les modes 1 et 2 lorsque

dimension	config. 2d	config. 3d	config. 4d
1x0.1mm^2	242Hz	122Hz	250Hz
1x1mm^2	300Hz	202Hz	308Hz
1x4mm^2	562Hz	481Hz	566Hz
1x8mm^2	984Hz	920Hz	1001Hz

TABLE 4.7 – Variation de fréquence 1 (basculement de pion) en utilisant différentes répartitions de propriétés organisées linéairement pour chaque dimension de d'hétérogénéité et chaque configuration d'AMC

α est proche de $-6GPa$. Cette confusion n'apparait que pour une hétérogénéité de $8mm$ de longueur.
Dans la configuration 3d (figure 4.26b), le système sort de la confusion à partir de $\alpha = -5GPa$.
Les répartitions amenant à des modifications du comportement vibratoire présentent de très faible module sur une grande partie de l'entrée de contact induisant des surpressions reportées de quelques millimètres vers le centre de la garniture.

Quel que soit la dimension des hétérogénéités, l'influence reste très faible. Il faut des valeurs de α très élevées en valeur absolue pour observer une influence. Malheureusement les répartitions correspondantes à ces valeurs sont très peu crédibles car il est peu probable d'obtenir de telles répartitions sur des matériaux de friction réels.

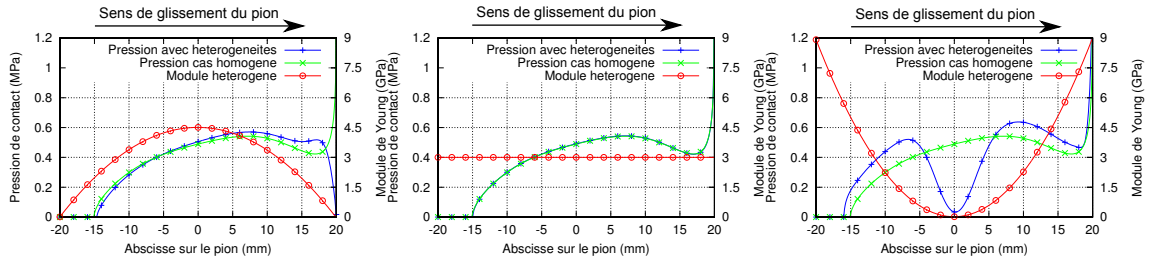
4.3.2.2 Répartitions paraboliques du module de Young

Dans cette partie les résultats des simulations exploitant une répartition parabolique des propriétés hétérogènes sont présentés. Tout d'abord, l'impact sur les pressions de contact sera analysé, suivi de l'analyse de l'impact sur les propriétés vibratoires sous condition de contact glissant.

4.3.2.2.a Analyse des pressions de contact

Le cas le plus simple à présenter est celui pour lequel de hétérogénéités de $0.1mm$ de longueur ont été exploitées. Il sera donc présenté en premier suivi des autres configurations.

Longueur $0.1mm$:
Les figures 4.27 montrent des distributions de pression dans des cas extrêmes.



(a) $\alpha = -4.5GPa$ (b) $\alpha = 0GPa$ (c) $\alpha = 8.9GPa$

FIGURE 4.27 – Pression de contact pour des répartitions d'hétérogénéités paraboliques de dimension $1x0.1mm^2$

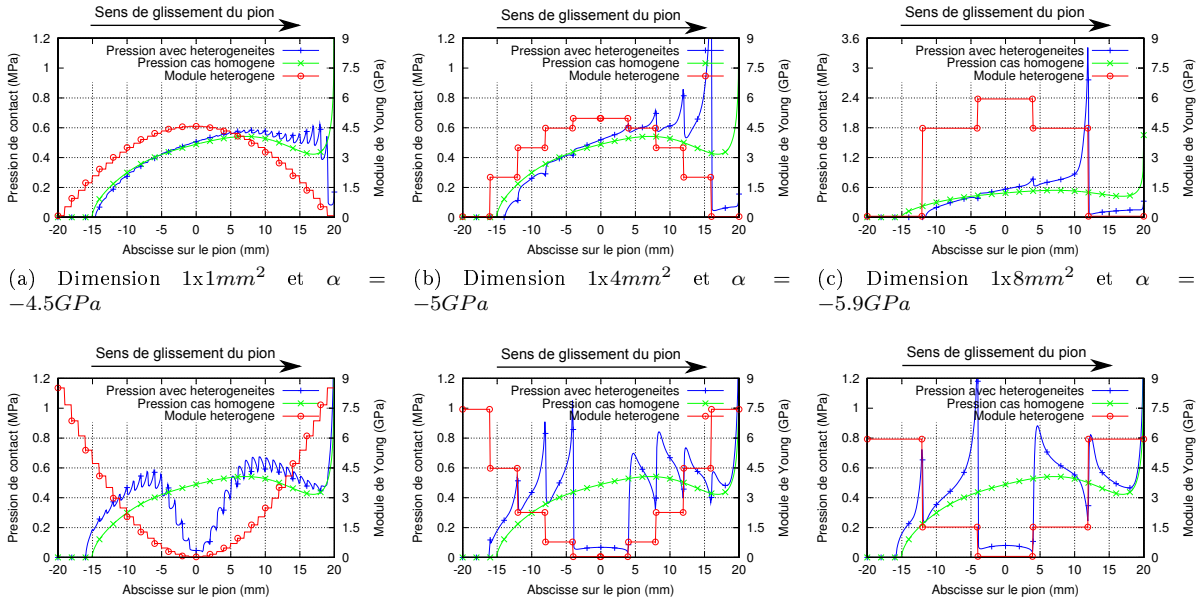
Pour $\alpha = -4.5GPa$, c'est à dire qu'il y a des modules très faibles sur les bords du pion et plus élevés au centre de la garniture, la répartition est très fortement concave. En conséquence, il n'y a pas de surpression qui se forme en entrée de contact. Les pressions de contact en sortie de contact et le décollement ne sont globalement pas impactés.
Avec une répartition constante ($\alpha = 0$), on retrouve une fois de plus les résultats obtenus dans le cas homogène.
Lorsque α est positif, le module est plus faible au centre de la garniture que sur les extérieurs. En conséquence, la pression de contact au centre de la garniture est diminuée et accrue aux alentours du centre. Dans le cas extrême où $\alpha = 8.9GPa$ (figure 4.27c), la pression de contact est quasi nulle au centre de la

garniture et augmente sur ses bords. De plus le décollement de la garniture est quelque peu réduit.

En utilisant une répartition de module d'Young parabolique, si α est différent de zéro, les pressions de contact sont perturbées et peuvent modifier le comportement vibratoire du système.

Longueurs supérieures à $0.1mm$:

Les figures 4.28 représentent les pressions de contact obtenues dans des cas extrêmes utilisant des répartitions d'hétérogénéités paraboliques appliqués sur des hétérogénéités de 1 et $4mm$ de longueur, respectivement.



(a) Dimension 1x1mm^2 et $\alpha = -4.5GPa$ (b) Dimension 1x4mm^2 et $\alpha = -5GPa$ (c) Dimension 1x8mm^2 et $\alpha = -5.9GPa$

(d) Dimension 1x1mm^2 et $\alpha = 8.5GPa$ (e) Dimension 1x4mm^2 et $\alpha = 7.5GPa$ (f) Dimension 1x8mm^2 et $\alpha = 5.9GPa$

FIGURE 4.28 – Pression de contact pour des répartitions d'hétérogénéités paraboliques de dimension 1x1mm^2, 1x4mm^2 et 1x8mm^2.

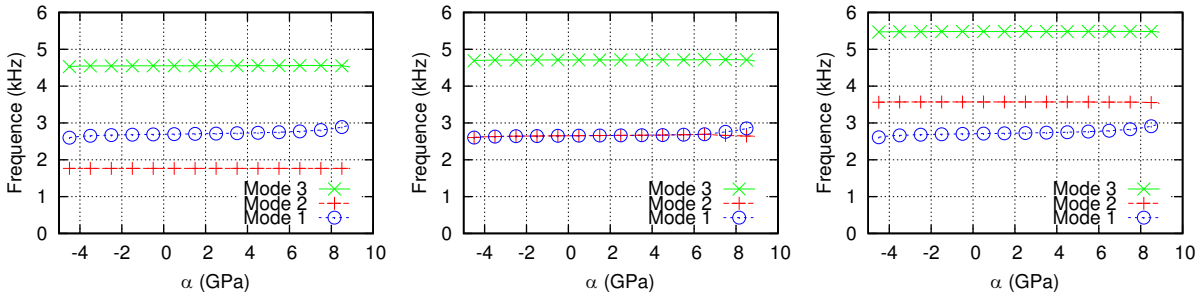
Des hétérogénéités de tailles différentes de la taille des mailles dans la couche fine introduit toujours des oscillations de la pression de contact. Les mécanismes faisant naître ces oscillations, qui ont déjà pu être observés auparavant, sont toujours identiques. Lorsque le module croit dans le sens opposé du glissement (de l'arrière de la garniture vers l'avant), des surpressions apparaissent en entrée de patch. Lorsque qu'elle décroit dans le sens opposé de glissement, des sous-pressions apparaissent en arrière du patch.

Dans tous les cas, les pressions sont modifiées. Plus les patchs sont grands, plus les perturbations sont importantes.

4.3.2.2.b Analyse vibratoire

Une fois de plus, on commence par analyser l'impact des répartitions sur de courtes hétérogénéités ($0.1mm$). Les figures 4.29 montrent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de α lors de l'utilisation de répartitions paraboliques pour des hétérogénéités d'une longueur de $0.1mm$.

Cette fois encore, l'utilisation d'hétérogénéités distribuées de manière organisée ne bouleverse pas le comportement vibratoire du système. Les fréquences 2 et 3 restent constantes (delta max de $40Hz$) et les fréquences 1 ont des variations comprises entre 310 et $370Hz$. Dans les configurations 2d et 4d, cela n'implique pas de nouvelle confusion. Dans la configuration 3d, le système sort de la confusion pour α supérieur à $7GPa$, c'est à dire, pour des configurations où les modules d'Young sont élevées aux extrémités de la garniture et faible au centre. Le renforcement du contact aux extrémités de garniture en dépit du centre entraîne une augmentation de la stabilité du pion en basculement se traduisant par une



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

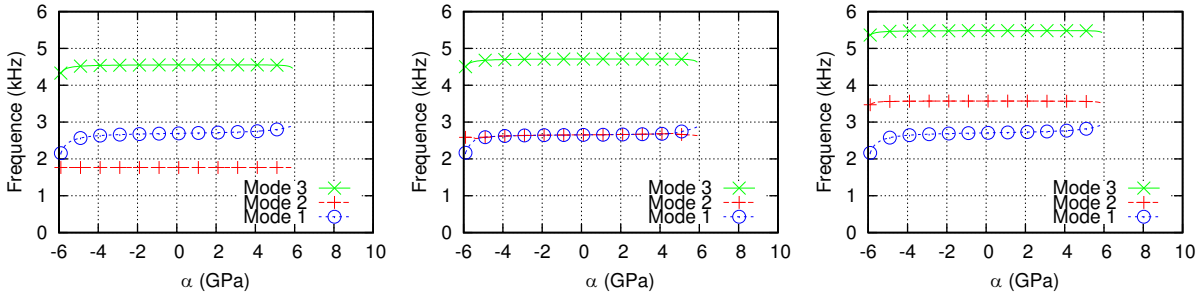
FIGURE 4.29 – Evolution des fréquences propres en fonction de α pour des répartitions d'hétérogénéités paraboliques de dimension 1x0.1mm^2.

dimension	config. 2d	config. 3d	config. 4d
1x0.1mm^2	348Hz	312Hz	370Hz
1x1mm^2	362Hz	318Hz	381Hz
1x4mm^2	580Hz	514Hz	602Hz
1x8mm^2	748Hz	707Hz	766Hz

TABLE 4.8 – Variation de fréquence 1 (basculement de pion) en utilisant différentes répartitions de propriétés organisées linéairement pour chaque dimension de d'hétérogénéité et chaque configuration d'AMC

augmentation de la fréquence 1.

L'impact reste très faible pour de courtes hétérogénéités. Les prochains résultats concernent les hétérogénéités ayant une longueur supérieure à la taille de maille de la couche fine au contact. Les figures 4.30 montrent l'évolution des fréquences propres du système en fonction de α lors de l'utilisation de répartitions paraboliques pour des hétérogénéités d'une longueur de $8mm$. Le tableau 4.8 donne la variation de la fréquence de basculement pion entre α_{min} et α_{max} dans chaque configuration et dimension d'hétérogénéité.



(a) Configuration 2d (b) Configuration 3d (c) Configuration 4d

FIGURE 4.30 – Evolution des fréquences propres en fonction de α pour des répartitions d'hétérogénéités paraboliques de dimension 1x8mm^2.

Dans tous les cas, la répartition des modules a un impact limité. Même en utilisant des hétérogénéités de $8mm$ de longueur, il y a très peu d'évolution. Lorsque α est supérieur à $5GPa$, l'impact reste le même. Le comportement est uniquement modifié lorsque α est fortement négatif, c'est à dire que le module d'Young est élevé au centre de la garniture et faible aux extrémités. Dans ce cas, la fréquence de basculement sort de la confusion et varie au maximum de 760Hz alors que les autres fréquences affichent une variation maximum comprise entre 100 et 250Hz selon la configuration étudiée.

Finalement, même les répartitions paraboliques ne modifient pas fortement le comportement vibratoire du système. Avec des valeurs extrêmes de α, il est tout de même possible de faire apparaître ou disparaître des confusions de fréquences.

4.3.3 Bilan sur les hétérogénéités linéaires et paraboliques

Des stratégies ont été élaborées afin de prendre en compte des répartitions hétérogènes organisées de modules d'Young. Ainsi, il a été possible de prendre en compte des répartitions linéaires et paraboliques de module d'Young respectant toujours deux conditions : une moyenne égale aux propriétés homogènes de la garniture et des valeurs toujours supérieures à $0.01GPa$. Ces répartitions ont été exploitées sur des patchs de différentes longueurs (0.1, 1, 4 et $8mm$) mais de hauteur toujours égale à $1mm$, soit la hauteur de la couche fine.

Lorsque ces hétérogénéités sont courtes (0.1mm), les répartitions ont peu d'impact sur les pressions de contact. Lorsque leur longueur est différente de la taille de la couche fine au contact et α est différent de 0, des oscillations apparaissent. Ces oscillations sont en fait des surpressions et sous-pressions aux extrémités des patchs.

Les perturbations induites par la variation du module en surface de la garniture influencent très peu les propriétés vibratoires. Seules les configurations avec des valeurs extrêmement faibles de α (i.e. $\alpha \leq -5GPa$ pour les distributions linéaires et $\|\alpha\| \geq -5GPa$ pour les distributions paraboliques) peuvent avoir un impact conséquent sur le mode de basculement de pion (mode 1) et faire naître ou disparaître une confusion de fréquence.

4.4 Conclusions du chapitre

L'objectif de ce chapitre était l'introduction dans la modélisation d'une hétérogénéité dans le matériau de friction afin d'étudier l'influence d'un matériau hétérogène sur les instabilités vibratoires au contact. Dans ce but, le modèle avec couche fine au contact a été utilisé afin d'introduire deux types d'hétérogénéité dans le matériau de friction : une première en surface du matériau, via une raideur de contact hétérogène, et l'autre dans le volume, via une dispersion hétérogène de module d'Young. Ce modèle a permis de déterminer des distributions de pression de contact irrégulières, dues aux hétérogénéités. Les pressions de contact sont ensuite être injectées dans le modèle semi-analytique afin de réaliser l'analyse modale complexe et ainsi déterminer les fréquences propres du système et les confusions de fréquences. Les impacts sur les pressions de contact et l'apparition de mode lock-in ont ainsi été étudiés. Des études paramétriques sur les hétérogénéités ont été réalisées.

Les deux types d'hétérogénéités introduits portent sur la raideur de contact et sur le module d'Young. La méthode de résolution de contact par pénalisation a été utilisée (à la place du Lagrangien augmenté qui a été utilisé dans tous les autres cas) afin d'intégrer une hétérogénéité de la raideur de contact. L'introduction des hétérogénéités s'appuie sur la création de regroupements de mailles, appelés patchs, dans la couche fine. Afin de déterminer les valeurs associées aux hétérogénéités, une loi gaussienne a été utilisée.

En introduisant des hétérogénéités déterminées aléatoirement, la tendance générale des distributions de pression reste très proche du cas homogène. Selon la taille des patchs et la dispersion des valeurs, les pressions de contact peuvent être perturbées par l'apparition de surpression et de sous-pression due au gradient de propriétés entre les patchs.
Cette perturbation des pressions de contact n'est cependant pas suffisante pour impacter sur les fréquences propres du système en prenant en compte des modes de disque 2d,3d et 4d. Le changement de comportement vibratoire avec l'introduction des hétérogénéités matériaux intervient lorsque deux fréquences propres du système sont très proches. Toutefois, l'impact de ce type d'hétérogénéité reste très limité.
En effet, ceci s'explique par les variations de pressions induites par des propriétés aléatoires qui ne jouent pas un rôle important sur le comportement vibratoire du système. En d'autres termes, les propriétés élastiques locales n'ont pas réellement d'impact sur le comportement global du système.

Après avoir étudié l'influence d'hétérogénéités aléatoires, des distributions organisées (linéaires et paraboliques) de module d'Young ont été intégrées afin d'étudier l'influence de propriétés plus raides à l'avant, au centre ou à l'arrière de la garniture. L'étude de leur impact a été à réduit à un unique paramètre (α) correspondant à la différence des valeurs maximum et minimum, et dont le signe donne le sens de la répartition. Ces distributions organisées ont un impact plus notable puisqu'elles peuvent modifier les comportements vibratoires dans les configurations classiques 2d, 3d et 4d, notamment pour des valeurs de $\|\alpha\|$ grandes se rapprochant alors des cas de "plateaux" traités dans le chapitre précédent.

Conclusions et perspectives

Le problème de contact frottant d'une garniture de frein sur un disque est généralement traité numériquement en considérant des surfaces planes et des propriétés matériaux relatives à un comportement homogène des matériaux. D'un point de vue expérimental, l'influence des hétérogénéités de surface ou de matériau a pu être constatée aussi bien sur des freins échelle 1 que sur des systèmes spécifiques à échelle réduite pour l'étude du crissement. Ces hétérogénéités sont cependant très peu, voire pas du tout, prises en compte dans les modélisations. C'est l'objectif principal de ce travail : le développement d'une modélisation numérique d'un dispositif expérimental simplifié en prenant en compte différents types d'irrégularités, ou hétérogénéités, de la surface du disque. Celles-ci ont été classées par taille : défaut de forme du disque ou ondulation (chapitre 2), zones de portances sur la surface de la garniture (chapitre 3), puis propriétés hétérogènes, aléatoires ou organisées, en proche surface du matériau de friction (chapitre 4).
Afin d'intégrer ces hétérogénéités, un modèle EF simple a permis d'étudier la cinématique d'un pion frottant sur un disque, sur la base d'un dispositif expérimental développé au laboratoire. Un modèle avec une couche finement maillée au contact a été utilisé afin de prendre en compte des non-planéités de la surface de la garniture et des propriétés hétérogènes de matériau de friction. Un modèle semi-analytique discret, contenant un nombre de degrés de liberté réduit, a permis d'étudier l'impact des conditions de contact, issues des hétérogénéités, sur les propriétés vibratoires du système et notamment sur les instabilités vibratoires. Une analyse modale complexe est menée afin d'étudier les configurations où une confusion de fréquences, propice au crissement, est obtenue. Ce modèle ne possède que 3 degrés de liberté (translation de disque, translation et basculement de pion), ce qui permet de se focaliser sur les principaux modes impliqués dans les instabilités vibratoires et de réduire les temps de calcul.
A l'aide de cette stratégie exploitant un modèle élément fini et un modèle dynamique discret, il a été possible de faire varier un nombre important de paramètres et d'analyser leur influence sur les cas de couplage modal. Une analyse complémentaire sur les localisations du flux de chaleur dissipé par frottement a également été menée.

Les résultats obtenus peuvent être résumés en quelques conclusions majeures.
On note globalement une forte influence du champ de pression sur la dynamique du système (que ce soit au passage d'une ondulation de disque, à travers les zones de portance sur la surface de la garniture, ou en présence d'hétérogénéités de matériau) mais aussi sur la localisation du flux de chaleur dissipé par frottement.
A travers les études menées, il est possible de proposer une classification des paramètres influant sur les propriétés vibratoires :

- L'analyse vibratoire étant d'abord un problème de structure, il est normal que les paramètres du système soient les plus influents (géométries, masses...). Ils déterminent principalement les propriétés vibratoires du système et la position relative des fréquences entre elles.
- Le second paramètre le plus influant est l'ondulation de la surface du disque, celle-ci conduisant à de fortes variations des champs de pression et des fortes variations de fréquences propres du système au cours de la rotation du disque (ondulation non régulière sur le périmètre).
- Les zones de portance sur la garniture, ou plateaux de contact, ont une influence plus faible mais néanmoins sensible. Différents paramètres géométriques de cette "portance" ont été proposés tels que la longueur apparente de contact (distance entre les deux points potentiellement en contact les plus éloignés) et la longueur théorique de contact (somme des longueurs des zones potentiellement en contact). La longueur apparente de contact n'influe que sur le mode de basculement alors que la longueur théorique de contact modifie également les modes de translation de pion.
- Les paramètres les moins influents sont les raideurs de contact et les propriétés hétérogènes du matériau de friction. Ces derniers n'ont qu'un faible impact sur les fréquences propres, sauf dans des conditions bien particulières (très forte hétérogénéité ou système à la limite de la stabilité). Cette dernière remarque est toutefois conditionnée par les distributions de propriétés utilisées (Gaussienne ou organisée de manière continue) qui conservent des valeurs centrées sur la valeur homogénéisée,

ce qui n'est pas forcément représentatif de la réalité du matériau.

Les paramètres qui viennent d'être cités peuvent tous être associés à une longueur caractéristique. Le système se situe à l'échelle la plus grande (centimétrique au moins). L'ondulation a pour longueur caractéristique le diamètre de la bande de frottement du pion. Les plateaux de contact ont une longueur caractéristique de l'ordre du millimètre. Les hétérogénéités de matériaux ont une longueur caractéristique de l'ordre de la centaine de micron. Il semble donc apparaître une échelle critique sous laquelle les paramètres ont très peu d'influence. La longueur caractéristique des propriétés considérées en proche surface semble inférieure à cette limite, dans la limite des hypothèses de distribution formulées.

Un autre résultat concerne les pressions de contact qui ont logiquement une influence sur les résultats, mais ce qui n'est pas le cas des surpressions locales.
L'utilisation de raideurs locales de contact non-linéaires dans le calcul des fréquences propres n'a pas montré non plus une influence conséquente sur les fréquences, en comparaison à des raideurs constantes, tout au moins là encore dans la limite des hypothèses formulées.

Suite à ce travail, il est possible de proposer quelques perspectives.
Il serait intéressant de considérer un comportement plus réaliste du matériau. L'intégration de loi de comportement plus réaliste serait une première étape. La seconde étape serait d'étudier le problème complet en 3 dimensions pour une meilleure représentativité du problème.
D'autres types de distribution des hétérogénéités locales pourraient être explorés, en se basant sur des données expérimentales par exemple, afin de guider les choix.
De manière complémentaire aux analyses effectuées ici, une résolution thermo-mécanique du problème permettrait d'intégrer les localisations de dissipation de flux de chaleur, de déterminer les déformations correspondantes et de les inclure dans la résolution dynamique.
Enfin, un modèle évolutif serait aussi une perspective possible. Des lois d'usure influant sur l'évolution des surfaces en contact pourraient être ajoutés en ce sens.

Appendices

Annexe A

Etude des méthodes de résolution de contact

Un cas-test réalisé pour la validation de Code-Aster est repris pour étudier les différentes méthodes de résolution de contact disponible. Un patin rigide frottant sur une surface plane est soumis à une pression latérale et à une force de rappel (figure A.1). Ce cas-test a les avantages de fournir une solution analytique. De plus, ce cas-test est assez proche du système pion-disque qui a été présenté précédemment.

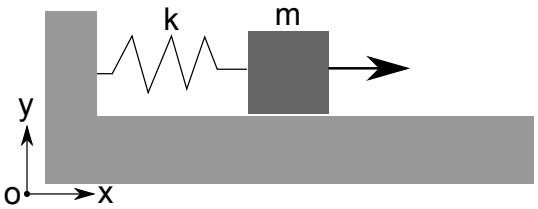


FIGURE A.1 – Patin rigide frottant sur une surface soumis à une pression latérale et une force de rappel

Masse	7.10^3 kg
Raideur du ressort	24.10^3 N/m
Coefficient de Coulomb	0.3
Pesanteur	10 $m.s^2$
Pression latérale	2.10^5 Pa
Module de Young du patin	$2.1.10^{11}$ Pa
Module de Young du massif	1.10^{11} Pa
Coefficient de poisson	0

TABLE A.1 – Propriétés du cas-test

Dans le calcul de la solution analytique, un frottement est pris en compte et l'encastrement est supposé totalement rigide. On ne s'intéresse qu'aux deux positions extrémales du système. C'est à dire aux deux premiers moments ou la vitesse de glissement s'annule et s'apprête à changer de sens.
Le principe fondamentale de la dynamique nous donne l'équation du mouvement :

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} + \mathbf{R} + \mathbf{P_L} = m\mathbf{a}$$

où $\mathbf{T}$ est la tension du ressort, $\mathbf{P}$ le poids du patin, $\mathbf{R}$ est la réaction du support et $\mathbf{P_L}$ la pression latérale imposée.
La réaction s'opposant au mouvement, si $\dot{\mathbf{x}} > 0$, alors $R_t < 0$ et si $\dot{\mathbf{x}} < 0$, alors $R_t > 0$.
On détermine donc la solution en deux étapes.

Si $\dot{\mathbf{x}} > 0$,

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = P_L - R_t & \text{sur (Ox)} \\ R_n + P = 0 & \text{sur (Oy)} \end{cases}$$

en prenant en compte les conditions aux limites $\begin{cases} x(0) = 0, \\ \dot{x}(0) = 0, \end{cases}$

La projection de l'équation du mouvement suivant (Oy) nous donne la relation suivante : $R_t = \mu R_n = -\mu P$.
La projection de l'équation du mouvement suivant (Ox) nous donne la solution complète : $x(t) = \frac{P_L - \mu P}{k}(1 - cos(\omega t))$
où $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Donc le premier extremum se trouve à $x(\frac{\pi}{\omega}) = 2\frac{P_L - \mu P}{k}$.

Si $\dot{\mathbf{x}} < 0$,

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = P_L + R_t & \text{sur (Ox)} \\ R_n + P = 0 & \text{sur (Oy)} \end{cases}$$

en prenant en compte les conditions au limite $\begin{cases} x(\frac{\pi}{\omega}) = 2\frac{P_L - \mu P}{k}, \\ \dot{x}(\frac{\pi}{\omega}) = 0, \end{cases}$

La projection de l'équation du mouvement suivant (Oy) nous donne la relation : $R_t = \mu R_n = -\mu P$. La projection de l'équation du mouvement suivant (Ox) nous donne la solution complète : $x(t) = \frac{P_L + \mu P}{k} - \frac{P_L - 3\mu P}{k} cos(\omega t)$.
Donc le second extremum se trouve à $x(\frac{2\pi}{\omega}) = \frac{4\mu P}{k}$.

Les différentes méthodes numériques de résolution de contact disponibles sous Code-Aster sont testées. Dans les cas impliquant les méthodes de pénalisation, les valeurs de pénalisation utilisées sont $E_n = 2.1E11$ et $E_t = 2.1E8$.
Les erreurs relatives à la solution de référence pour chaque calcul sont présentées dans le tableau A.2.

Méthode de résolution	erreur à $t = \frac{\pi}{\omega}$	erreur à $t = \frac{2\pi}{\omega}$	temps de calculs
Lagrangien	-0.5%	3.6%	$103s$
Pénalisation pure	-0.5%	3.6%	$98s$
Méthode continue (Lagrangien augmenté)	-0.5%	3.6%	$146s$
Lagrangien et Pénalisation (resp. normal et tangentiel)	-0.5%	3.6%	$84s$

TABLE A.2 – Résultats du cas-test

Dans d'autres études, il serait aisé de déterminer quelle méthode de résolution donne les résultats les plus fiables mais, dans ce cas d'étude, les résultats obtenus sont très proches (voir même quasi-identique). Le critère retenu pour le choix de la méthode est donc le temps de calcul. La méthode exploitant un Lagrangien pour la résolution du contact et une pénalisation pour la résolution du frottement fournit de meilleurs performances en terme de temps de calcul. De plus, elle a l'avantage de ne présenter aucune pénétration au contact. On choisit d'utiliser cette méthode dans le modèle.

Annexe B

Évolution des vecteurs propres au passage d'une défectuosité structurelle

B.1 Analyse modale complexe avec raideur de contact non-linéaire : cas de référence

Cette annexe présente l'évolution des fréquences propres et des vecteurs propres lors du passage de l'ondulation de disque de référence ($l = 200mm$ et $H = 50\mu m$) dans les configurations 2d, 3d et 4d (figures B.1, B.2 et B.3 respectivement).

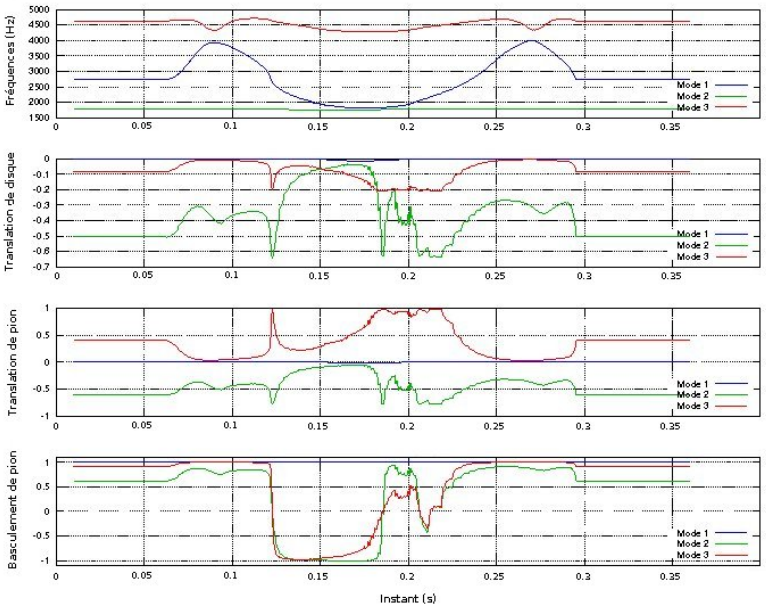


FIGURE B.1 – Fréquences propres et composantes des vecteurs propres : Configuration 2d

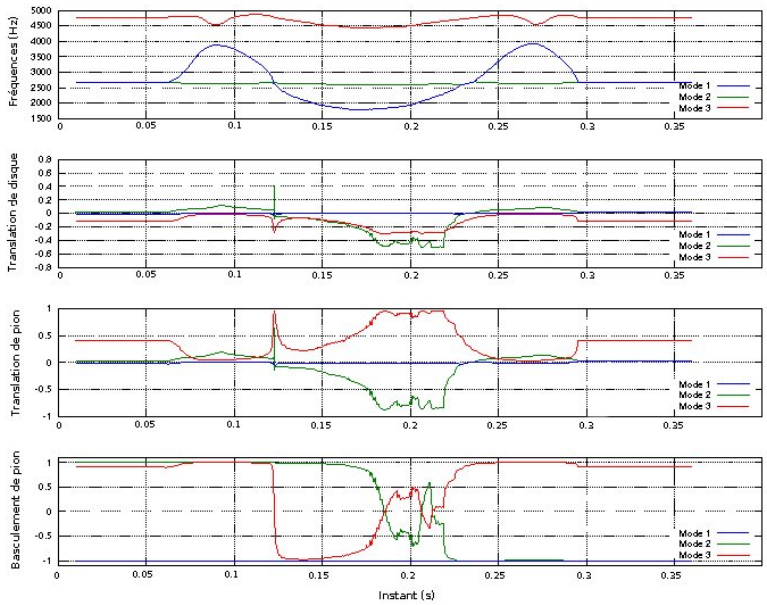


FIGURE B.2 – Fréquences propres et composantes des vecteurs propres : Configuration 3d

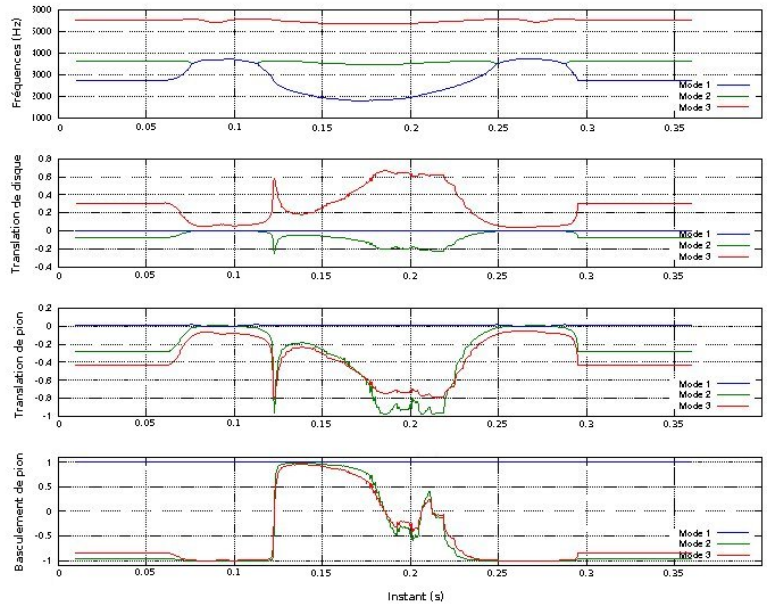


FIGURE B.3 – Fréquences propres et composantes des vecteurs propres : Configuration 4d

Annexe C

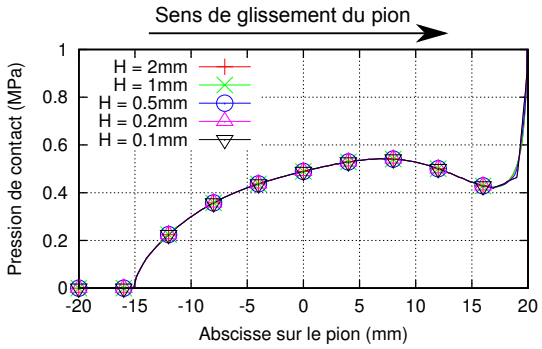
Étude de l'épaisseur et de la taille de maille de la couche fine

Le cas de référence choisit dans la partie précédente n'est pas l'unique choix possible. Ainsi, dans le modèle développé, il est possible de prendre en compte n'importe quelle épaisseur de couche fine et n'importe quelle taille de maille dans cette couche fine. La seule réelle contrainte étant le nombre d'élément dans la couche fine. En effet, un nombre d'élément trop élevé associé à une couche fine trop épaisse entraînerait des temps de calculs conséquents et limiterait l'intérêt de ce modèle.

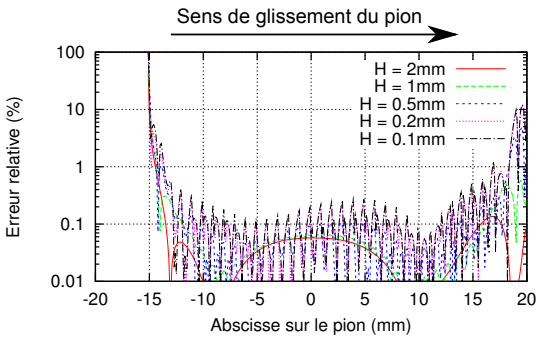
En conséquence, une première étude à était menée sur l'impact de l'épaisseur de la couche fine et une seconde sur l'impact du maillage (plus précisément de la taille de maille) dans la couche fine sur les résultats obtenus dans le cas de propriétés homogènes.

C.1 Impact de l'épaisseur de la couche fine

Différentes épaisseurs sont testées. Ainsi, des couches d'épaisseur H de 2, 1, 0.5, 0.2 et $0.1mm$ sont modélisées. Dans la couche fine, une taille de maille fixe de $0.1mm$ est utilisée.
La figure C.1a représente les répartitions de pressions de contact obtenues avec les différentes épaisseurs de couche fine. Globalement, les répartitions de pressions sont très proches et les erreurs relatives moyennes (résultats comparés à un maillage finement maillé ($0.1mm$)) sont toutes inférieures à 1% . La figure C.1b représente l'erreur relative sur la pression de contact par rapport au résultat obtenu sur un maillage totalement fin ($0.1mm$). Les couches avec des épaisseurs de 0.1, $0.2mm$ et $0.5mm$ donnent des pressions de contact avec une erreur apparaissant périodiquement. La période de l'erreur est égale à la taille de maille de la partie supérieure de la garniture. L'épaisseur est donc insuffisante pour que le recollement des maillages incompatibles puisse donner un résultat fiable. Les épaisseurs de 1 et $2mm$ donnent un résultat plus lissé et sans erreurs périodiques.



(a) Pression de contact sur la garniture



(b) Erreur relative sur la pression de contact par rapport à une garniture maillée finement ($0.1mm$)

FIGURE C.1 – Pression de contact et erreur relative pour différentes épaisseur de la couche fine au contact

Le choix de l'épaisseur dans l'exploitation du modèle est alors justifié par les temps de calcul pour un

équilibre quasi-statique (figure C.1). Entre ces deux épaisseurs, les temps de calculs varient du simple au double. Etant donné le rapport $\frac{\text{qualité des résultats}}{\text{temps de calcul}}$, le choix d'une couche épaisse de $1mm$ est fait.

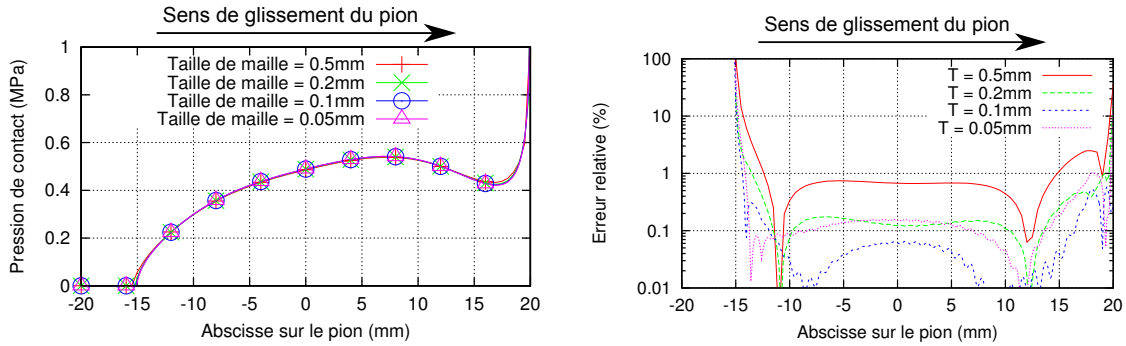
Épaisseur	Temps	Erreur relative moyenne
2 mm	8 min 32	0.22 %
1 mm	4 min 24	0.43 %
0.5 mm	2 min 52	0.63 %
0.2 mm	1 min 57	0.87 %
0.1 mm	1 min 30	0.9 %

TABLE C.1 – Temps de calcul et erreur relative moyenne en fonction de l'épaisseur de la couche fine au contact

C.2 Impact de la taille de maille

Suite à la précédente étude, une épaisseur de couche fine a été déterminée pour une taille de maille fixée. Cette partie se dédie à déterminer les tailles de maille exploitables dans les études avec hétérogénéités. Dans ce cas, si la qualité des résultats et le temps de calcul restent des critères de choix, le choix de la taille de maille la plus petite est à présent un critère de plus permettant de départager des résultats équivalents. En effet, plus la taille de maille choisie sera petite, plus il sera possible d'intégrer dans le modèle des hétérogénéités de petite taille.

Des simulations avec des tailles de maille T de 0.5, 0.2, 0.1 et $0.05mm$ ont été réalisées.
Les figures C.2 représentent les répartitions de pressions de contact obtenues avec les différentes tailles de maille utilisées dans la couche fine. Cette fois encore, globalement, les répartitions de pressions sont très proches (figure C.2a) avec des erreurs relatives moyennes inférieures à 3 %. En analysant l'erreur relative sur la pression de contact par rapport à une garniture maillé finement (figure C.2b), il est possible de remarquer que toutes les configurations donnent des résultats acceptables en terme de qualité. Une taille de maille de $0.5mm$ donne un résultat quelques peu différents (erreur relative moyenne de 3% contre moins de 1% pour les autres) mais ce résultat reste tout à fait acceptable compte tenu des erreurs déjà commises lors de la construction du maillage du système pion-disque. Les critères influençant notre choix sont le temps de calculs opposé à la taille de maille la plus petite possible.



(a) Pression de contact sur l'ensemble de la garniture

(b) Erreur relative sur la pression de contact par rapport à une garniture maillée finement ($0.1mm$)

FIGURE C.2 – Pression de contact et erreur relative pour différentes tailles de maille dans la couche fine au contact

Les temps de calculs sont présentés sur le tableau C.2. Une taille de maille de $0.05mm$ donne un temps de calcul supérieur à 1 heure pour un équilibre statique. Ce temps de calcul est inacceptable étant donné la nécessité de répétabilité des calculs. Des tailles de maille de 0.5 et $0.2mm$ donnent des temps de calculs tout à fait honorables mais ne permet d'intégrer que des hétérogénéités de taille supérieure à $200\mu m$. En conséquence, la taille de maille de $0.1mm$ dans la couche fine au contact est choisie pour réaliser l'ensemble des calculs lors des prises en compte d'hétérogénéités.

Taille de maille	Temps	Erreur relative moyenne
0.5 mm	13 s	2.96 %
0.2 mm	38 s	0.54 %
0.1 mm	4 min 24	0.43 %
0.05 mm	1 h 06 min	0.82 %

TABLE C.2 – Temps de calcul en fonction des tailles de maille de la couche fine

Bibliographie

[Abbas, 2013] Abbas, M. (2013).
Eléments de contact dérivés d'une formulation hybride continue, Documentation de référence R5.03.52.
Code Aster.

[Abdellaoui et al., 2002] Abdellaoui, M., Jai, A. E., and Shillor, M. (2002).
Cellular automata model for a contact problem.
Mathematical and Computer Modelling, 36(9–10) :1099 – 1114.

[Abubakar and Ouyang, 2006] Abubakar, A. and Ouyang, H. (2006).
Complex eigenvalue analysis and dynamic transient analysis in predicting disc brake squeal.
International Journal of Vehicle Noise and Vibration, 2(2) :143–155.

[Adams, 1995] Adams, G. G. (1995).
Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of friction.
Journal of Applied Mechanics, 62 :867–872.

[Adams, 1998] Adams, G. G. (1998).
Steady sliding of two elastic half-spaces with friction reduction due to interface stick-slip.
Journal of Applied Mechanics, 65 :470–475.

[Adams, 1999] Adams, G. G. (1999).
Radiation of body waves induced by the sliding of an elastic half-space against a rigid surface.
Journal of Applied Mechanics, 67 :1–5.

[Akay, 2002] Akay, A. (2002).
Acoustics of friction.
The Journal of the Acoustical Society of America, 111(4) :1525–1548.

[Alart, 1997] Alart, P. (1997).
Méthode de newton généralisée en mécanique du contact.
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 76(1) :83 – 108.

[Alart and Curnier, 1991] Alart, P. and Curnier, A. (1991).
A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solution methods.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 92(3) :353 – 375.

[Aronov et al., 1984] Aronov, V., D'Souza, A., Kalpakjian, S., and Sharper, I. (1984).
Interaction among friction, wear and system stiffness - part 1 : Effect of normal load and system stiffness ; part 2 : Vibrations induced by dry friction ; part 3 : Wear model.
Journal of lubrication technique, 106 :54–69.

[Baba et al., 2001] Baba, H., Wada, T., and Takagi, T. (2001).
Study on reduction of brake squeal caused by in-plane vibration of rotor.
In *SAE Paper 2001-01-3158*.

[Babuska and Melenk, 1996] Babuska, I. and Melenk, J. M. (1996).
The partition of unity method.
International Journal of Numerical Methods in Engineering, 40 :727–758.

[Bae and Wickert, 2000] Bae, J. and Wickert, J. (2000).
Free vibration of coupled disk-hat structures.
Journal of Sound and Vibration, 235(1) :117 – 132.

[Baillet et al., 2005] Baillet, L., Linck, V., D'Errico, S., Laulagnet, B., and Berthier, Y. (2005).
Finite element simulation of dynamic instabilities in frictional sliding contact.
Journal of Tribology, 127(3) :652–657.

[Baillet and Sassi, 2002] Baillet, L. and Sassi, T. (2002).
Méthode d'éléments finis avec hybridisation frontière pour les problèmes de contact avec frottementfinite element method with lagrange multipliers for contact problems with friction.
Comptes Rendus Mathematique, 334(10) :917 – 922.

[Basford and Twiss, 1958] Basford, P. and Twiss, S. (1958).
Properties of friction materials. 1 : experiments on variables affecting noise.
ASME Journal of Applied Mechanics, 80 :402–406.

[Behrendt et al., 2011] Behrendt, J., Weiss, C., and Hoffmann, N. (2011).
A numerical study on stick–slip motion of a brake pad in steady sliding.
Journal of Sound and Vibration, 330(4) :636 – 651.

[Belytschko et al., 2001] Belytschko, T., Moës, N., Usui, S., and Parimi, C. (2001).
Arbitrary discontinuities in finite elements.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50(4) :993–1013.

[Ben Dhia, 1998] Ben Dhia, H. (1998).
Multiscale mechanical problems : the arlequin method.
Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Series IIB Mechanics Physics Astronomy, 326(12) :899–904.

[Ben Dhia and Zarroug, 2001] Ben Dhia, H. and Zarroug, M. (2001).
Eléments hybrides de contact frottant.
In *5ème Colloque national en calcul des structures*, volume I, pages 253–260.

[Bensoussan et al., 1978] Bensoussan, A., Lions, J., and Papanicolaou, G. (1978).
Asymptotic Analysis for Periodic Structures.
ALMS Chelsea Publishing.

[Berthier, 1988] Berthier, Y. (1988).
Mécanismes et tribologie.
PhD thesis, Thèse INSA de Lyon-Université Claude Bernard.

[Berthier, 1996] Berthier, Y. (1996).
Maurice godet's third body approach.
Tribology, 32 :21–30.

[Berthier, 2001] Berthier, Y. (2001).
Background on friction and wear, chapter 8.2, pages 676–699.
Lemaître Handbook of Materials Behavior Models.

[Bornert et al., 2001a] Bornert, M., Bretheau, T., and Gilormini, P. (2001a).
Homogénéisation en mécanique des matériaux, T.2 : Comportements non linéaires et problèmes ouverts.
Série Alliages Métalliques. Hermès Sciences Publications.

[Bornert et al., 2001b] Bornert, M., Bretheau, T., and Gilormini, P. (2001b).
Homogénéisation en mécanique des matériaux, T.2 : matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques.
Hermès Sciences Publications.

[Brandt, 1977] Brandt, A. (1977).
Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems.
Mathematics of Computation, 31(138) :333–390.

[Brommundt, 1995] Brommundt, E. (1995).
Ein reibschwinger mit selbsterregung ohne fallende reibkennlinie.
ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 75(12) :811–820.

[Broyden, 1990] Broyden, C. (1990).
Lemke's method—a recursive approach.
Linear Algebra and its Applications, 136(0) :257 – 272.

[Bulthé, 2006] Bulthé, A. (2006).
Caractérisation expérimentale du contact frottant disque garniture sous sollicitations sévères de freinage. Prise en compte des interactions tribologie, thermique et physico-chimie.
PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.

[Bush and Gibson, 1987] Bush, A. and Gibson, R. (1987).
The elastic contact of a rough surface.
Wear, 35 :87–111.

[Bush et al., 1979] Bush, A., Gibson, R., and Keogh, G. (1979).
Strongly anisotropic rough surfaces.
Journal of Lubrification Technology, 101 :15–20.

[Bush et al., 1992] Bush, A., Gibson, R., and Thomas, T. (1992).
The elastic contact of a rough surface.
Wear, 153 :53–64.

[Busseta, 2009] Busseta, P. (2009).
Modélisation et résolution du problème de contact mécanique.
PhD thesis, Université Du Québec à Chucoudmi.

[Busseta et al., 2009] Busseta, P., Marceau, D., and Ponthot, J.-P. (2009).
Résolution du problème de contact mécanique frottant : méthode du lagrangien augmenté adapté.
In *9ème Colloque National en Calcul des Structures.*

[Chabrand et al., 1998] Chabrand, P., Dubois, F., and Raous, M. (1998).
Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction.
Mathematical and Computer Modelling, 28(4–8) :97 – 108.

[Chang et al., 1987] Chang, W., Etsion, I., and Bogy, D. (1987).
An elastic-plastic model for the contact of rough.
J. of Tribology, 109 :257–263.

[Chaudhary and Bathe, 1986] Chaudhary, A. B. and Bathe, K.-J. (1986).
A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction.
Computers &amp ; Structures, 24(6) :855 – 873.

[Comninou and Dundurs, 1978] Comninou, M. and Dundurs, J. (1978).
Elastic interface waves and sliding between two solids.
Journal of Applied Mechanics, 45(2) :325–330.

[De Saxce and Feng, 1998] De Saxce, G. and Feng, Z.-Q. (1998).
The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms.
Mathematical and Computer Modelling, 28(4–8) :225 – 245.
Recent Advances in Contact Mechanics.

[Desplanques et al., 2005] Desplanques, Y., Roussette, O., Degallaix, G., Dauphin, J.-Y., and Avoine, J. (2005).
Caractérisation du troisième corps en freinage ferroviaire à haute énergie.
In *Les progrès en tribologie par l'ingénierie des matériaux et des surfaces, PPUR.*

[Dhia and Rateau, 2005] Dhia, H. B. and Rateau, G. (2005).
The arlequin method as a flexible engineering design tool.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 62(11) :1442–1462.

[Dmitriev et al., 2006] Dmitriev, A., Popov, V., and Psakhie, S. (2006).
Simulation of surface topography with the method of movable cellular automata.
Tribology International, 39(5) :444 – 449.
Development of Surface Topography in Friction Processes.

[Dmitriev et al., 2010] Dmitriev, A., Schargott, M., and Popov, V. (2010).
Direct modelling of surface topography development in a micro-contact with the movable cellular automata method.
Wear, 268(7–8) :877 – 885.

[Dolbow et al., 2000] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2000).
Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method.
Finite Elements in Analysis and Design, 36(3–4) :235 – 260.
Robert J. Melosh Medal Competition, Duke University, Durham NC, USA, March 1999.

[D'Souza and Dweib, 1990] D'Souza, A. and Dweib, A. (1990).
Self-excited vibrations induced by dry friction, part 2 : Stability and limit-cycle analysis.
Journal of Sound and Vibration, 137(2) :177 – 190.

[Duboc, 2013] Duboc, M. (2013).
Etude multi-échelle du crissement : dispositif expérimental et éléments de compréhension.
PhD thesis, Université de Lille 1.

[Duboc et al., 2010a] Duboc, M., Brunel, J.-F., and Dufrénoy, P. (2010a).
Influence of contact conditions and pad geometry on disc brake squeal noise.
In *17e colloque Vibrations Chocs & bruit.*

[Duboc et al., 2010b] Duboc, M., Magnier, V., Brunel, J.-F., Dufrénoy, P., Rejdych, G., and Chancelier, T. (2010b).
Influence of contact conditions and pad geometry on disc brake squeal noise.
In *6th European Conference on Braking JEF 2010*, page 8.

[Dufrénoy, 1995] Dufrénoy, P. (1995).
Etude du comoprtement thermomécanique des disques de frein vis-à-vis des risques de défaillance.
PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille.

[Durand et al., 2011] Durand, J., Yastrebov, V., Proudhon, H., and Cailletaud, G. (2011).
Analyse du contact entre surfaces rugueuses par la méthode des éléments finis et par un nouveau modèle numérique.
In *10e colloque national en calcul des structures*, page 8 p., Giens, France.
Titre du résumé joint : Approches numériques du contact entre une surface rugueuse et un plan rigide.

[Earles and Badi, 1984] Earles, S. and Badi, M. (1984).
Oscillatory instabilities generated in a double-pin and disc undamped system : A mechanism of disc-cbrake squeal.
Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, 198(1) :43–50.

[Earles and Lee, 1976] Earles, S. and Lee, C. (1976).
Instabilities arising from the frictional interaction of a pin-disc system resulting in noise generation.
Transactions of the American Society of Mechanical Engineers Journal of Engineering for Industry, 98(1) :81–86.

[EDF R&D, 2013] EDF R&D (2013).
Code_aster, http ://www.code-aster.org.

[Eriksson and Jacobson, 2002] Eriksson, M.and Bergman, F. and Jacobson, S. (2002).
On the nature of tribological contact in automotive brakes.
Wear, 252(1–2) :26 – 36.

[Eriksson, 2000] Eriksson, M. (2000).
Friction and contact phenomena of disc brakes related to squeal.
PhD thesis, Uppsala university of science and technology.

[Eriksson et al., 1999] Eriksson, M., Bergman, F., and Jacobson, S. (1999).
Surface characterisation of brake pads after running under silent and squealing conditions.
Wear, 232(2) :163 – 167.

[Eriksson and Jacobson, 2000] Eriksson, M. and Jacobson, S. (2000).
Tribological surfaces of organic brake pads.
Tribology International, 33(12) :817 – 827.

[Eriksson et al., 2001] Eriksson, M., Lord, J., and Jacobson, S. (2001).
Wear and contact conditions of brake pads : dynamical in situ studies of pad on glass.
Wear, 249(3–4) :272 – 278.
Proceedings of the ninth Nordic Symposium on Tribology.

[Fackeldey and Krause, 2007] Fackeldey, K. and Krause, R. H. (2007).
Solving frictional contact problems with multigrid efficency.
In eds., S., editor, *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI*, volume 55, pages 547–554.

[Feng, 1995] Feng, Z.-Q. (1995).
2d or 3d frictional contact algorithms and applications in a large deformation context.
Communications in Numerical Methods in Engineering, 11(5) :409–416.

[Fieldhouse and Newcomb, 1996] Fieldhouse, J. and Newcomb, T. (1996).
Double pulsed holography used to investigate noisy brakes.
Optics and Lasers in Engineering, 25(6) :455 – 494.
Optical Diagnostics in the Automotive Industry.

[Fieldhouse, 1991] Fieldhouse, J. D. (1991).
An investigation into disc brake noise using holographic interferometry.
UNPUBLISHED.

[Fillot et al., 2004] Fillot, N., Biolan, A.-I., Iordanoff, I., and Berthier, Y. (2004).
Le rôle des particules adhésives dans l'usure d'un contact sec.
In *Journées Francophones de Tribologie*, France.

[Fillot et al., 2005] Fillot, N., Iordanoff, I., and Berthier, Y. (2005).
Simulation of wear through mass balance in a dry contact.
Journal of Tribology-transactions of The Asme, 127.

[Fish and Belsky, 1995a] Fish, J. and Belsky, V. (1995a).
Multi-grid method for periodic heterogeneous media part 2 : Multiscale modeling and quality control in multidimensional case.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 126(1–2) :17 – 38.

[Fish and Belsky, 1995b] Fish, J. and Belsky, V. (1995b).

Multigrid method for periodic heterogeneous media part 1 : Convergence studies for one-dimensional case.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 126(1–2) :1 – 16.

[Fortin, 2000] Fortin, J. (2000).
Simulation numérique de la dynamique des systèmes multicorps appliquée aux milieux granulaires.
PhD thesis, Thèse Université Sc. et Techn. de Lille.

[François et al., 2006] François, M., Desplanques, Y., and Degallaix, G. (2006).
Méthodologie d'observation in situ des surfaces frottantes en freinage ferroviaire.
In *Tribologie dans les transports : De l'analyse à l'échelle du contact à la fiabilité des systèmes mécaniques.*

[Fritz et al., 2007] Fritz, G., Sinou, J.-J., Duffal, J., and Jézéquel, L. (2007).
Effects of damping on brake squeal coalescence patterns – application on a finite element model.
Mechanics Research Communications, 34(2) :181 – 190.

[Gandin et al., 1999] Gandin, C.-A., Desbiolles, J.-L., Rappaz, M., and Thévoz, P. (1999).
A Three-Dimensional Cellular Automaton - Finite Element Model for the Prediction of Solidification Grain Structures.
Met. Mater. Trans., 30A :3153–65.

[Godet, 1984] Godet, M. (1984).
The third-body approach : A mechanical view of wear.
Wear, 100(1–3) :437 – 452.

[Godfrey, 1967] Godfrey, V. (1967).
Vibration reduces metal to metal contact and causes an apparent reduction in friction.
ASLE Transactions, 10 :183–192.

[Graf and Ostermeyer, 2011] Graf, M. and Ostermeyer, G.-P. (2011).
Instabilities in the sliding of continua with surface inertias : An initiation mechanism for brake noise.
Journal of Sound and Vibration, 330(22) :5269 – 5279.

[Greenwood and Williamson, 1966] Greenwood, J. A. and Williamson, J. B. P. (1966).
Contact of nominally flat surfaces.
Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 295(1442) :300–319.

[Guan and Jiang, 1998] Guan, D. and Jiang, D. (1998).
A study on disc brake squeal using finite element methods.
In *SAE Paper 980597.*

[Guillemot et al., 2007] Guillemot, G., Gandin, C.-A., and Bellet, M. (2007).
Interaction between single grain solidification and macrosegregation : Application of a cellular automaton—finite element model.
Journal of Crystal Growth, 303(1) :58 – 68.
Proceedings of the Fifth Workshop on Modeling in Crystal Growth.

[Gunawardena et al., 1991] Gunawardena, A. D., Jain, S., and Snyder, L. (1991).
Modified iterative methods for consistent linear systems.
Linear Algebra and its Applications, 154–156(0) :123 – 143.

[Gurunath and Bijwe, 2007] Gurunath, P. and Bijwe, J. (2007).
Friction and wear studies on brake-pad materials based on newly developed resin.
Wear, 263(7–12) :1212 – 1219.
16th International Conference on Wear of Materials.

[Hauret, 2004] Hauret, P. (2004).
Méthodes numériques pour la dynamique des strctures non-linéaires incompressibles à deux échelles.
PhD thesis, Ecole polytechnique.

[Heinstein and Laursen, 1999] Heinstein, M. and Laursen, T. (1999).
An algorithm for the matrix-free solution of quasistatic frictional contact problems.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 44(9) :1205–1226.

[Hetzler and Willner, 2012] Hetzler, H. and Willner, K. (2012).
On the influence of contact tribology on brake squeal.
Tribology International, 46(1) :237 – 246.
37th Leeds-Lyon Symposium on Tribology Special issue : Tribology for Sustainability : Economic, Environmental, and Quality of Life.

[Heussaff et al., 2012] Heussaff, A., Dubar, L., Tison, T., Watremez, M., and Nunes, R. (2012).
A methodology for the modelling of the variability of brake lining surfaces.

Wear, 289(0) :145 – 159.

[Hilber et al., 1977] Hilber, H. M., Hughes, T. J. R., and Taylor, R. L. (1977).
Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics.
Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 5(3) :283–292.

[Hoffmann et al., 2002] Hoffmann, N., Fischer, F., Allgaier, R., and Gaul, L. (2002).
A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations.
Mechanics Research Communications, 29(4) :197 – 205.

[Hu and Nagy, 1997] Hu, Y. and Nagy, L. (1997).
Brake squeal analysis using nonlinear transient finite element method.
In *SAE Paper 971510*.

[Hughes, 1995] Hughes, T. J. (1995).
Multiscale phenomena : Green's functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 127(1–4) :387 – 401.

[Hughes et al., 1998] Hughes, T. J., Feijóo, G. R., Mazzei, L., and Quincy, J.-B. (1998).
The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 166(1–2) :3 – 24.
Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics.

[Ibrahimbegović and Markovič, 2003] Ibrahimbegović, A. and Markovič, D. (2003).
Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192(28–30) :3089 – 3107.
Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures.

[Jarvis and Mills, 1964] Jarvis, R. and Mills, B. (1964).
Vibrations induced by friction.
Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 178(32) :847–866.

[Larson and Målqvist, 2007] Larson, M. G. and Målqvist, A. (2007).
Adaptive variational multiscale methods based on a posteriori error estimation : Energy norm estimates for elliptic problems.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(21–24) :2313 – 2324.

[Lebon et al., 2007] Lebon, F., Raous, M., and Rosu, I. (2007).
Multigrid methods for unilateral contact problems with friction.
In *IUTAM Symposium on Computational Methods in Contact Mechanics*, volume 3 of *IUTAM Book-series (closed)*, pages 1–16. Springer Netherlands.

[Li, 2003] Li, W. (2003).
The convergence of the modified gauss–seidel methods for consistent linear systems.
Journal of Computational and Applied Mathematics, 154(1) :97 – 105.

[Liles, 1989] Liles, G.-D. (1989).
Analysis of disc brake squeal using finite element methods.
In *SAE Paper 891150*, page 8.

[Linck, 2005] Linck, V. (2005).
Modélisation numérique temporelle d'un contact frottant. Mise en evidence d'instabilités locales de contact - Conséquences tribologiques.
PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon (INSA).

[Lyapunov, 1992] Lyapunov, A. M. (1992).
The general problem of the stability of motion.
International Journal of Control, 55(3) :531–534.

[Magnier et al., 2011] Magnier, V., Brunel, J., Duboc, M., and Dufrenoy, P. (2011).
Influence of heterogeneous contact between disc and pad on the brake squeal noise.
In *SAE Paper 2011*.

[Markovic and Ibrahimbegovic, 2004] Markovic, D. and Ibrahimbegovic, A. (2004).
On micro–macro interface conditions for micro scale based fem for inelastic behavior of heterogeneous materials.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(48–51) :5503 – 5523.
Advances in Computational Plasticity.

[Massi et al., 2007] Massi, F., Baillet, L., Giannini, O., and Sestieri, A. (2007).
Brake squeal : Linear and nonlinear numerical approaches.

Mechanical Systems and Signal Processing, 21(6) :2374 – 2393.

[Melenk and Babuška, 1996] Melenk, J. and Babuška, I. (1996).
The partition of unity finite element method : Basic theory and applications.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139(1–4) :289 – 314.

[Meziane et al., 2007] Meziane, A., D'Errico, S., Baillet, L., and Laulagnet, B. (2007).
Instabilities generated by friction in a pad–disc system during the braking process.
Tribology International, 40(7) :1127 – 1136.

[Moirot et al., 2003] Moirot, F., Nguyen, Q.-S., and Oueslati, A. (2003).
An example of stick–slip and stick–slip–separation waves.
European Journal of Mechanics - A/Solids, 22(1) :107 – 118.

[Mortelette et al., 2009] Mortelette, L., brunel, J., Boidin, X., Desplanques, Y., Dufrénoy, P., and Smeets, L. (2009).
Impact of minerl fibers on brake squeal occurences.
In *SAE Technical Paper 2009-01-3050*.

[Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999).
A finite element method for crack growth without remeshing.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46(1) :131–150.

[Mueller and Ostermeyer, 2007] Mueller, M. and Ostermeyer, G. (2007).
Cellular automata method for macroscopic surface and friction dynamics in brake systems.
Tribology International, 40(6) :942 – 952.
Numerical Simulation Methods in Tribology : possibilities and limitations.

[Mueller and Ostermeyer, 2008] Mueller, M. and Ostermeyer, G.-P. (2008).
A cellular automaton model for tribological problems.
In *Cellular Automata*, volume 5191 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 92–99. Springer Berlin-Heidelberg.
10.1007/978-3-540-79992-4-12.

[Nagy et al., 1994] Nagy, L., Cheng, J., and Hu, Y. (1994).
A new method development to predict squeal occurrence.
In *SAE Paper 942258*.

[Naidoo Ramasami et al., 2013] Naidoo Ramasami, D., Rejdych, G., Chancelier, T., and Pasquet, T. (2013).
Underlining stiffness distribution of brake pad friction materials using static and dynamic measurement techniques.
In *Eurobrake2013*.

[Nguyen, 2009] Nguyen, V.-D. (2009).
Modélisation par la Méthode des Eléments Discrets des phénomènes thermomécaniques dans les interfaces de contact.
PhD thesis, Université de Picardie Jules Vernes.

[Nishiwaki et al., 2009] Nishiwaki, M., Fujioka, Y.and Abe, K., Yanagihara, H., Stankovic, I., Nagasawa, Y., and Wakamatsu, S. (2009).
A study on friction materials for brake squeal reduction by molecular dynamics.
In *IMECHE-Conference Braking 2009*, page 119–138. Chandos Publishing.

[North, 1972] North, M. R. (1972).
Disc brake squeal - a theoretical model.
Technical report, Motor Industry Research Association (MIRA), Motor Industry Research Association.

[Oden and Martins, 1985] Oden, J. and Martins, J. (1985).
Models and computational methods for dynamic friction phenomena.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 52(1–3) :527 – 634.

[Oden and Zohdi, 1997] Oden, J. and Zohdi, T. I. (1997).
Analysis and adaptive modeling of highly heterogeneous elastic structures.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 148(3–4) :367 – 391.

[Oden and Vemaganti, 1999] Oden, J. T. and Vemaganti, K. (1999).
Adaptive modeling of composite structures : Modeling error estimation.
Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, 1 :1–16.

[Osterle et al., 2007] Osterle, W., Klob, H., Urban, I., and Dmitriev, A. (2007).
Towards a better understanding of brake friction materials.
Wear, 263(7–12) :1189 – 1201.
16th International Conference on Wear of Materials.

[Ostermeyer, 2010] Ostermeyer, G. (2010).
Dynamic friction laws and their impact on friction induced vibrations.
In *SAE Technical Paper 2010-01-1717*.

[Ostermeyer and Müller, 2006] Ostermeyer, G. and Müller, M. (2006).
Dynamic interaction of friction and surface topography in brake systems.
Tribology International, 39(5) :370 – 380.
Development of Surface Topography in Friction Processes.

[Ostermeyer and Bode, 2010] Ostermeyer, G.-P. and Bode, K. (2010).
On the dynamic adaptation of the friction layer in the low-frequency range.
In *6th European Conference on Braking, Lille, France*.

[Ostermeyer et al., 2008] Ostermeyer, G.-P., Muller, M., and Barton, D.-C. (2008).
New insights into the tribology of brake systems.
In *Institution of Mechanical Engineers - Part D : Journal of Automobile Engineering*, volume 222, pages 1167–1200.

[Oura et al., 2009a] Oura, Y., Kurita, Y., and Matsumura, Y. (2009a).
Influence of dynamic stiffness in contact region on disk brake squeal.
Journal of Environment and Engineering, 4 :234–244.

[Oura et al., 2009b] Oura, Y., Kurita, Y., Matsumura, Y., and Tamura, T. (2009b).
Surface contact analysis model of disk brake squeal.
Journal of Environment and Engineering, 4 :222–233.

[Ouyang et al., 2005] Ouyang, H., Yao, Z. H., Yuan, M. W., Li, L., and AbuBakar, A. R. (2005).
Numerical analysis of car disc brake squeal considering thermal effects.
International Journal of Vehicle Noise and Vibration, 1 :207–231.
10.1007/978-3-540-75999-7_199.

[Papadopoulos and Taylor, 1993] Papadopoulos, P. and Taylor, R. (1993).
A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems.
Computers &amp ; Structures, 46(6) :1107 – 1118.

[Passieux, 2008] Passieux, J.-C. (2008).
Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et en espace.
PhD thesis, ENS de Cachan.

[Pei et al., 2005] Pei, L., Hyun, S., Molinari, J., and Robbins, M. O. (2005).
Finite element modeling of elasto-plastic contact between rough surfaces.
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53(11) :2385 – 2409.

[Popp et al., 2002] Popp, K., Rudolph, M., Kroger, M., and Lindner, M. (2002).
Mechanisms to generate and to avoid friction induced vibrations.
VDI-Bericht, 1736.

[Rateau, 2003] Rateau, G. (2003).
Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées.
PhD thesis, Ecole Centrale Paris.

[Renouf and Alart, 2005] Renouf, M. and Alart, P. (2005).
Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(18–20) :2019 – 2041.

[Rhee et al., 1989] Rhee, S., Tsang, P., and Wang, Y. (1989).
Friction-induced noise and vibration of disc brakes.
Wear, 133(1) :39 – 45.

[Richard, 2008] Richard, D. (2008).
Thermique des contacts avec troisième corps solide : modélisation et compréhension des phénomènes de frottement et diffusion de la chaleur par la méthode des éléments discrets.
PhD thesis, Inst. Nat. des Sc. Appl. de Lyon.

[Roussette, 2005] Roussette, O. (2005).
Etude tribologique de couples de matériaux sous sollicitations de freinage très sévères. Application à un frein ferroviaire à performances améliorées.
PhD thesis, Ecole Centrale de Lille.

[Roussette et al., 2003] Roussette, O., Desplanques, Y., and Degallaix, G. (2003).
Thermal representativity of tribological reduced-scale testing.
Comptes Rendus Mecanique, 331(5) :343–349.

[Roussette et al., 2001] Roussette, O., Desplanques, Y., Degallaix, G., Minet, M., and Gallo, Y. (2001).
Comportement tribologique en freinage à haute énergie de garnitures en matériaux organiques.
In *Coll. JFT 2001 "Tribologie des materiaux organiques français"*.

[Rusli and Okuma, 2007] Rusli, M. and Okuma, M. (2007).
Effect of surface topography on mode-coupling model of dry contact sliding systems.
Journal of Sound and Vibration, 308(3–5) :721 – 734.
Vibro-Impact Systems.

[Sanchez−Hubert and Sanchez−Palencia, 1978] Sanchez−Hubert, J. and Sanchez−Palencia, E. (1978).
Sur certains problèmes physiques d'homogénéisation donnant lieu à des phénomènes de relaxation.
C. R. Acad. Sci. Paris I, 286 :903–6.

[Sanchez−Hubert and Sanchez−Palencia, 1992] Sanchez−Hubert, J. and Sanchez−Palencia, E. (1992).
Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation : application à la mécanique des milieux continus.
Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris.

[Sanchez−Palencia, 1980] Sanchez−Palencia, E. (1980).
Non-Homogeneous Media and Vibration Theory.
Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin.

[Schargott and Popov, 2006] Schargott, M. and Popov, V. (2006).
Diffusion as a model of formation and development of surface topography.
Tribology International, 39(5) :431 – 436.
Development of Surface Topography in Friction Processes.

[Schargott et al., 2008] Schargott, M., Popov, V., Dmitriev, A., and Psakhie, S. (2008).
Development of surface topography for the rail–wheel contact.
Wear, 265(9–10) :1542 – 1548.
Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems - CM2006.

[Schmieg and Vielsack, 1998] Schmieg, H. and Vielsack, P. (1998).
Modellbildung und experimentelle untersuchungen zum bremsenquietschen.
ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 78 :709–710.

[Shi et al., 2001] Shi, T., Chang, W., Dessouki, O., Jayasundera, A., and Warzecha, T. (2001).
Advances in complex eigenvalue analysis for brake noise.
In *SAE Paper 2001-01-1603*.

[Shin et al., 2002] Shin, K., Brennan, M., Oh, J.-E., and Harris, C. (2002).
Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model.
Journal of Sound and Vibration, 254(5) :837 – 848.

[Signorini, 1933] Signorini, S. (1933).
Sopra akune questioni di elastostatica.
Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze.

[Simo and Laursen, 1992] Simo, J. and Laursen, T. (1992).
An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction.
Computers & Structures, 42(1) :97 – 116.

[Sinclair and Mainville, 1955] Sinclair, D. and Mainville, N. (1955).
Frictional vibrations.
ASME Journal of Applied Mechanics, 77 :207–213.

[Sinou and Lees, 2007] Sinou, J. and Lees, A. (2007).
A non-linear study of a cracked rotor.
European Journal of Mechanics ASolids, 26(1) :152–170.

[Sinou and Jézéquel, 2007] Sinou, J.-J. and Jézéquel, L. (2007).
The influence of damping on the limit cycles for a self-exciting mechanism.
Journal of Sound and Vibration, 304(3–5) :875 – 893.

[Sinou et al., 2006] Sinou, J.-J., Thouverez, F., and Jezequel, L. (2006).
Stability analysis and non-linear behaviour of structural systems using the complex non-linear modal analysis (cnlma).
Computers &amp ; Structures, 84(29–30) :1891 – 1905.

[Spurr, 1961] Spurr, R. (1961).
A theory of brake squeal.
Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1 :33–44.

[Stoneley, 1924] Stoneley, R. (1924).
Elastic waves at the surface of separation of two solids.
Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 106(738) :416–428.

[Stránský and Jirásek, 2012] Stránský, J. and Jirásek, M. (2012).
Open source fem-dem coupling.
In *18th International Conference Engineering Mechanics 2012*, number 18, pages p.1937–1951.

[Strouboulis et al., 2000] Strouboulis, T., Babuška, I., and Copps, K. (2000).
The design and analysis of the generalized finite element method.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181(1–3) :43 – 69.

[Sukumar et al., 2001] Sukumar, N., Chopp, D., Moës, N., and Belytschko, T. (2001).
Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(46–47) :6183 – 6200.

[Sukumar et al., 2000] Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., and Belytschko, T. (2000).
Extended finite element method for three-dimensional crack modelling.
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 48(11) :1549–1570.

[Söderberg and Andersson, 2009] Söderberg, A. and Andersson, S. (2009).
Simulation of wear and contact pressure distribution at the pad-to-rotor interface in a disc brake using general purpose finite element analysis software.
Wear, 267(12) :2243 – 2251.
NORDTRIB 2008.

[Tardieu et al., 2008] Tardieu, N., Youbissi, F., and Chamberland, E. (2008).
A preconditioned projected conjugate gradient for the solution of unilateral problems.
Comptes Rendus Mécanique, 336(11-12) :840–845.

[Tolstoi, 1967] Tolstoi, D. (1967).
Significance of the normal degree of freedom and natural normal vibrations in contact friction.
Wear, 10(3) :199 – 213.

[Tolstoi et al., 1971] Tolstoi, D. M., Borisova, G. A., and Grigorova, S. R. (1971).
Role of intrinsic contact oscillations in normal direction during friction.
Nature of the Friction of Solids, page 116.

[Torkhani and Ben Dhia, 2007] Torkhani, M. and Ben Dhia, H. (2007).
Analyses multi-échelles et usure des structures minces en contact.
In *8 e Colloque National en Calcul des Structures*, volume 1, pages 341–347.

[Vermot des Roches et al., 2008] Vermot des Roches, G., Balmès, E., and Lemaire, R. (2008).
Time simulation of squeal phenomena in realistic brake models.
In *ISMA*.

[von Wagner et al., 2007] von Wagner, U., Hochlenert, D., and Hagedorn, P. (2007).
Minimal models for disk brake squeal.
Journal of Sound and Vibration, 302(3) :527 – 539.

[von Wagner et al., 2003] von Wagner, U., Jearsiripongkul, T., Vomstein, T., Chakraborty, G., and Hagedorn, P. (2003).
Brake squeal : Modeling and experiments.
Technical Report 1749, VDI-Report.

[Wahlström et al., 2011] Wahlström, J., Söderberg, A., and Olofsson, U. (2011).
A cellular automaton approach to numerically simulate the contact situation in disc brakes.
Tribology Letters, 42(3) :253–262.

[Weimar, 2001] Weimar, J. R. (2001).
Coupling microscopic and macroscopic cellular automata.
Parallel Computing, 27(5) :601 – 611.
Cellular automata : From modeling to applications.

[Whitehouse and Archard, 1970] Whitehouse, D. J. and Archard, J. F. (1970).
The properties of random surfaces of significance in their contact.
Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 316(1524) :97–121.

[Yang and Afeneh, 2004] Yang, M. and Afeneh, A.-H. (2004).
Investigation of mounted disc brake in-plane and out-of-plane modes in brake squeal study.
In for Experimental Mechanics, S., editor, *Proceedings of the 22nd Int. Modal Analysis Conference (CD-ROM)*.

[Zhao et al., 2000] Zhao, Y., Maietta, D., and Chang, L. (2000).
An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformations to fully plastic flow.
J. of Tribology, 122 :86–93.

[Zohdi et al., 1996] Zohdi, T. I., Oden, J., and Rodin, G. J. (1996).
Hierarchical modeling of heterogeneous bodies.
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 138(1–4) :273 – 298.