

Numéro d'ordre : 41304

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

spécialité

MICRO ET NANO TECHNOLOGIES, ACOUSTIQUE ET TÉLÉCOMMUNICATIONS

par

Sébastien DEGRAEVE

## Cristaux phononiques accordables

Thèse préparée à

L'INSTITUT D'ÉLECTRONIQUE, DE MICROÉLECTRONIQUE ET DE  
NANOTECHNOLOGIES

Soutenue le 18 décembre 2013 devant la commission d'examen :

Président	O. BOU MATAR	Professeur des Universités, Université Lille 1
Rapporteurs	A. KHELIF	Chargé de Recherche CNRS, HDR, FEMTO-ST, Besançon
	C. RICHARD	Professeur des Universités, INSA, Lyon
Examineurs	M. DOISY	Thales Underwater Systems, Sophia Antipolis
	B. DUBUS	Directeur de Recherche CNRS, IEMN
	H. LISSEK	Collaborateur scientifique, EPFL, Lausanne
Directrice	A.-C. HLADKY	Directrice de Recherche CNRS, IEMN
Co-encadrant	M. PHAM-THI	Thales Research & Technology France, Palaiseau
Invité	B. MORVAN	Maître de Conférences, HDR, Université du Havre



# Remerciements

Ces travaux ont été menés au sein de l'axe Acoustique du département ISEN de l'IEMN. Je tiens donc à remercier Lionel Buchailot, Directeur de l'IEMN, Pierre Giorgini et Andreas Kaiser, Directeurs successifs de l'ISEN ainsi qu'Anne-Christine Hladky, Responsable de l'axe Acoustique pour leur accueil au sein du laboratoire.

Je remercie Olivier Bou Matar, Professeur des Universités à l'Université Lille 1, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance envers les nombreux membres du jury qui ont bien voulu examiner ce manuscrit :

Abdelkrim Khelif, Chargé de Recherche CNRS (HDR) à l'Institut FEMTO-ST de Besançon, ainsi que Claude Richard, Professeur des Universités à l'INSA de Lyon, qui ont été les rapporteurs de cette thèse ;

Martine Doisy de Thales Underwater Systems à Sophia Antipolis, Bertrand Dubus, Directeur de Recherche CNRS à l'IEMN ainsi qu'Hervé Lissek, Collaborateur scientifique à l'EPFL située à Lausanne pour avoir bien voulu examiner ces travaux ;

Bruno Morvan, Maître de Conférences (HDR) à l'Université du Havre, pour avoir accepté notre invitation.

Enfin je remercie très vivement Anne-Christine Hladky, Directrice de Recherche CNRS à l'IEMN, ainsi que Mai Pham-Thi de Thales Research & Technology France situé à Palaiseau pour l'encadrement de ces travaux.

Les résultats présentés dans ce manuscrit sont aussi le fruit d'une collaboration étroite au sein même du laboratoire. Je tiens donc à remercier Nicolas Côté, Bertrand Dubus, Christian Granger, Gérard Haw, Pascal Mosbah et Jérôme Vasseur pour leur disponibilité.

Je remercie également les autres doctorants avec qui j'ai partagé cette expérience : Abdelmajid Biby, Pierre Meresse et Rémi Rouffaud ; ainsi que Claire Dehondt, notre formidable secrétaire.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis pour leurs encouragements, avec une mention toute particulière pour Mathilde, ma femme que j'aime tant.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>I Les super-réseaux partiellement piézoélectriques</b>	<b>17</b>
<b>1 Les super-réseaux élastique/élastique</b>	<b>19</b>
1.1 Relation de dispersion . . . . .	21
1.2 Positions des bandes interdites . . . . .	23
1.2.1 Fréquences centrales des bandes interdites . . . . .	25
1.2.2 Largeurs des bandes interdites . . . . .	25
1.2.3 Récapitulatif . . . . .	28
<b>2 Effet d'une impédance électrique aux bornes d'une couche piézoélectrique</b>	<b>29</b>
2.1 Effet d'une impédance électrique sur la contrainte . . . . .	31
2.2 Effet d'une impédance électrique sur la vitesse . . . . .	33
2.3 Modes propres dans le sens de la polarisation diélectrique . . . . .	34
2.4 Le barreau piézoélectrique . . . . .	35
2.5 Mesures . . . . .	37
<b>3 Les super-réseaux élastique/piézoélectrique</b>	<b>39</b>
3.1 Relation de dispersion . . . . .	41
3.2 Discussion sur la capacité électrique négative . . . . .	44
3.3 Positions des bandes interdites . . . . .	45
3.4 Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	47
3.5 Mesures . . . . .	48
<b>II Les super-réseaux exclusivement piézoélectriques</b>	<b>53</b>
<b>4 La condition électrique périodique</b>	<b>55</b>
4.1 Le court-circuit . . . . .	57
4.1.1 Relation de dispersion . . . . .	57
4.1.2 Positions des bandes interdites . . . . .	58
4.1.3 Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	59
4.1.4 Incompatibilité des conditions limites . . . . .	61
4.2 L'alternance circuit ouvert/court-circuit . . . . .	62
4.2.1 Relation de dispersion . . . . .	62
4.2.2 Positions des bandes interdites . . . . .	63
4.2.3 Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	65
4.3 Le court-circuit à polarisation diélectrique alternée . . . . .	66
4.3.1 Relation de dispersion . . . . .	66
4.3.2 Positions des bandes interdites . . . . .	68
4.3.3 Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	69

4.4	Vitesse à l'origine . . . . .	70
<b>5</b>	<b>La condition électrique périodique accordable</b>	<b>73</b>
5.1	Relation de dispersion . . . . .	75
5.2	Positions des bandes interdites . . . . .	77
5.3	Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	78
5.4	L'alternance circuit ouvert/capacité électrique . . . . .	80
5.5	L'alternance court-circuit/capacité électrique . . . . .	81
5.6	L'accordabilité des deux bornes . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Les super-réseaux piézoélectrique/piézoélectrique</b>	<b>85</b>
6.1	Relation de dispersion . . . . .	87
6.2	Positions des bandes interdites . . . . .	90
6.3	Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	91
6.4	Effet de la capacité électrique $C_1$ . . . . .	92
6.5	Effet de la capacité électrique $C_2$ . . . . .	93
6.6	L'accordabilité des deux bornes . . . . .	95
<b>III</b>	<b>Les super-réseaux modélisés par séries de Fourier</b>	<b>97</b>
<b>7</b>	<b>La mise à la masse périodique</b>	<b>99</b>
7.1	De l'utilisation de l'analyse de Fourier en milieu périodique . . . . .	101
7.2	Le multicouche . . . . .	102
7.3	Le barreau . . . . .	105
7.4	Le multicouche à polarisation diélectrique alternée . . . . .	107
7.5	Le barreau à polarisation diélectrique alternée . . . . .	108
7.6	Mesures . . . . .	109
<b>8</b>	<b>La mise à la masse périodique accordable</b>	<b>111</b>
8.1	Le multicouche . . . . .	113
8.2	Le barreau . . . . .	115
8.3	L'alternance circuit ouvert/capacité électrique . . . . .	116
8.4	L'alternance court-circuit/capacité électrique . . . . .	117
8.5	L'accordabilité des deux bornes . . . . .	121
8.6	Mesures sur le contrôle borne par borne . . . . .	122
8.7	Mesures sur le contrôle total . . . . .	122
	<b>Conclusion générale</b>	<b>125</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Les cristaux phononiques</b>	<b>135</b>
<b>B</b>	<b>Vitesse dans la plaque et le barreau élastiques</b>	<b>137</b>
<b>C</b>	<b>Les équations constitutives de la piézoélectricité</b>	<b>139</b>
<b>D</b>	<b>Propriétés du PZ29 (Ferroperm)</b>	<b>143</b>

# Nomenclature

$\beta_{33}^S$	Imperméabilité diélectrique à déformation constante
$\beta_{33}^T$	Imperméabilité diélectrique à contrainte constante
$\Delta\omega_n$	Largeur de la n-ième bande interdite
$\ell$	Longueur
$\gamma$	Rapport des impédances acoustiques caractéristiques
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\omega$	Pulsation
$\omega_n''$	Borne (pulsation) de la n-ième bande interdite
$\omega_n'$	Borne (pulsation) de la n-ième bande interdite
$\Phi$	Potential électrique
$\Phi_D$	Flux du déplacement électrique
$\Phi_n$	Coefficient de Fourier du potentiel électrique
$\Phi_{mn}$	Coefficient de Fourier du potentiel électrique pour une polarisation diélectrique alternée
$\rho$	Masse volumique
$\tau$	Tangente
$\theta$	Angle général
$\varepsilon_{33}^S$	Permittivité diélectrique à déformation constante
$\varepsilon_{33}^T$	Permittivité diélectrique à contrainte constante
$\xi$	Fonction d'onde générale
$\xi_n$	Coefficient de Fourier général
$\xi_p$	Fonction d'onde périodique
$A$	Aire d'une surface fermée
$a$	Amplitude d'onde
$b$	Amplitude d'onde
$C$	Capacité électrique ; signal rectangulaire d'amplitude $\pm 1$ et de période $2h$
$C_0$	Capacité électrique bloquée
$C_m$	Coefficient de Fourier d'un signal rectangulaire d'amplitude $\pm 1$ et de période $2h$
$c_{33}$	Constante de rigidité élastique pour une plaque élastique
$c_{33}^D$	Constante de rigidité élastique à déplacement électrique constant

$C_{BF}$	Capacité électrique à basse fréquence
$D, D_0, D_3$	Déplacement électrique
$d_A$	Éléments de surface
$d_n$	Coefficient de Fourier du déplacement électrique
$E, E_3$	Champ électrique
$e_n$	Coefficient de Fourier du champ électrique
$f_n''$	Borne (fréquence) de la n-ième bande interdite
$f_n'$	Borne (fréquence) de la n-ième bande interdite
$f_a$	Fréquence d'antirésonance électrique
$f_r$	Fréquence de résonance électrique
$f_{rm}$	Fréquence de résonance mécanique
$g_{33}$	Constante de déformation piézoélectrique
$h$	Épaisseur
$h', h''$	Délimitations suivant l'axe $z$ d'une surface fermée
$h_{33}$	Constante de contrainte piézoélectrique
$I$	Courant électrique
$i$	Indice courant
$j$	Coefficient imaginaire $j^2 = -1$
$k, \tilde{k}$	Nombre d'onde
$k_t$	Coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique pour une plaque
$k_{33}$	Coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique pour un barreau
$m$	Indice courant
$N$	Nombre de couches dans une période
$n$	Indice courant
$Q_{libre}$	Charge libre
$S$	Aire
$S_3$	Déformation mécanique
$s_{33}$	Constante de compliance élastique pour un barreau élastique
$s_{33}^D$	Constante de compliance élastique à déplacement électrique constant
$s_{33}^E$	Constante de compliance élastique à champ électrique constant
$t$	Tangente ; temps
$T_3$	Contrainte mécanique
$t_n$	Coefficient de Fourier de la contrainte mécanique
$u$	Déplacement
$u_n$	Coefficient de Fourier du déplacement
$V$	Différence de potentiel

$v_b$	Vitesse (des ondes longitudinales) dans un barreau élastique
$v_b^D$	Vitesse (des ondes longitudinales) à déplacement électrique constant dans un barreau piézoélectrique
$v_t$	Vitesse (des ondes longitudinales) dans une plaque élastique
$v_t^D$	Vitesse (des ondes longitudinales) à déplacement électrique constant dans une plaque piézoélectrique
$v_{BF}$	Vitesse (des ondes longitudinales) à basse fréquence
$X$	Déphaseur dans la relation de phase de Bloch-Floquet
$x$	Variable générale
$Y$	Module d'Young
$Z$	Impédance acoustique caractéristique
$z$	Coordonnée cartésienne
$Z_e$	Impédance électrique
$Z_{bl}$	Impédance électrique d'un barreau libre
$Z_{BF}$	Impédance électrique d'un barreau libre à basse fréquence



# Introduction générale

L'un des créateurs de la cristallographie moderne est le minéralogiste français Romé de L'Isle qui proposa au XVIII<sup>e</sup> siècle de classer les cristaux d'après leur forme extérieure. Bien que cette idée était tout à fait saugrenue pour l'époque, il énonce en 1772 dans *Essai de Cristallographie* la loi de constance des angles : "Quelles que soient les dimensions relatives de deux faces déterminées d'un même cristal, elles présentent toujours entre elles le même angle dièdre". L'abbé Haüy se passionne lui aussi pour la minéralogie. Il postule que certains matériaux résultent de l'empilement de petits volumes de matière qu'il nomme *molécules intégrantes*, ce qui fut confirmé en 1840 par son élève Delafosse qui introduira la notion de *maille*.

Ces notions ne furent confirmées que bien plus tard, lorsque Von Laue découvrit la diffraction des rayons X par des cristaux, ce qui lui valut le prix Nobel de physique en 1914. L'année suivante, le prix Nobel de physique fut décerné à Bragg père et fils pour leurs travaux d'analyse des structures cristallines à l'aide des mêmes rayons X. La première moitié du XX<sup>e</sup> siècle fut aussi marquée par Brillouin [1] qui, au cours de ses nombreuses contributions à la mécanique quantique et à la physique de la matière condensée, a développé le concept des *zones de Brillouin*. Cette découverte a posé les fondations pour un traitement mathématique rigoureux des mouvements d'onde dans l'espace du réseau réciproque et a depuis été appliqué à tous les problèmes impliquant une propagation d'onde dans un milieu périodique. Son formalisme donne directement accès aux courbes de dispersion d'une structure périodique, c'est-à-dire la fréquence en fonction du nombre d'onde. Sous certaines conditions, la courbe de dispersion peut présenter des bandes de fréquence où l'onde est évanescence : les *bandes interdites*<sup>1</sup>.

Il faudra attendre les années 1970 pour que se manifeste l'intérêt des structures périodiques en acoustique. On peut citer par exemple les travaux de Solie [2] qui a étudié les filtres à ondes de surface à l'aide de rainures métalliques périodiques, ceux de Narayanamurti *et al.* [3] sur les super-réseaux GaAs/Al<sub>0.5</sub>Ga<sub>0.5</sub>As ou encore ceux de Achenbach et Kitahara [4] sur le calcul des relations de dispersion de matériaux possédant des inclusions sphériques périodiques.

Mais le concept de *cristal phononique* - par extension du *cristal photonique* - ne verra le jour qu'au début des années 1990 quand Liu *et al.* [5] présentent la première étude de la propagation des ondes élastiques dans des structures périodiques tridimensionnelles. Le cristal étudié était alors un réseau de colloïdes sphériques immergés dans l'eau. Peu après suivirent les travaux d'Economou et Sigalas [6], ou encore ceux de Kushwaha *et al.* [7] qui publient un article en 1993 sur les structures de bandes acoustiques d'un cristal phononique bidimensionnel composé de cylindres d'aluminium dans une matrice de nickel. C'est la première fois qu'une équipe présente une *bande interdite absolue*, c'est à dire une bande interdite indépendante de l'angle d'incidence.

La première validation expérimentale d'une bande interdite acoustique est publiée en 1995 par Martinez-Sala *et al.* [8]. L'objet de travail n'était pas prévu à des fins scientifiques puisqu'il s'agit de la sculpture minimaliste de l'artiste Eusebio Sempere exposée dans les jardins de la Juan March Foundation à Madrid présentée en Fig. 1. La sculpture constituée de cylindres d'acier de 2.9 cm de diamètre placés selon un réseau carré de 10 cm de maille fut entourée de microphones, mettant ainsi en évidence une bande interdite directionnelle centrée sur 2 kHz. Lorsque la fréquence considérée se situe dans la bande audible, on parle alors plus volontiers de

---

1. L'annexe A fournit quelques définitions fondamentales ayant trait aux réseaux périodiques.



FIGURE 1 – Sculpture d’Eusebio Sempere, jardins de la Juan March Foundation à Madrid.

cristal *sonique*. C’est cette dépendance entre la longueur d’onde de l’onde se propageant dans le cristal et la fréquence centrale de la bande interdite qui donna l’idée onze années plus tard à Martinez-Sala *et al.* [9] d’arranger périodiquement une forêt afin d’atténuer les basses fréquences.

Ces premiers résultats ont conduit à une croissance considérable de travaux dédiés aux cristaux phononiques, dont les premières applications furent le guidage et le filtrage. Khelif *et al.* [10] ont par exemple présenté en 2003 des calculs et des expériences prouvant l’existence d’une bande interdite absolue dans un réseau bidimensionnel de cylindres d’acier immergés dans de l’eau. Ils montrent ensuite qu’il peut créer une bande passante très fine dans la bande interdite susnommée en créant un défaut localisé dans la structure périodique, c’est-à-dire en retirant un cylindre tel que décrit en Fig. 2a. L’année suivante, Khelif *et al.* [11] publient un article traitant des guides d’onde. Ils reprennent alors leur structure d’acier et mettent en évidence qu’une onde acoustique peut être guidée dans un réseau bidimensionnel en retirant une rangée de cylindres comme sur la Fig. 2b. Le bon accord entre les observations et les mesures est souligné dans l’article. Ils vont même plus loin en montrant que si la largeur du guide d’onde est doublée, des interférences destructives créent une bande interdite à l’intérieur même de la bande passante. Enfin, ils prouvent avec la structure présentée en Fig. 2c que l’onde reste correctement guidée même après s’être heurtée à deux coudes à  $90^\circ$ . D’autres auteurs ayant travaillé sur des guides d’ondes peuvent être cités, tels que Miyashita et Inoue [12], Chandra *et al.* [13] ou encore Olsson III *et al.* [14]. Par suite, d’autres applications ont émergé comme par exemple la possibilité de démultiplexer des ondes acoustiques à l’échelle de la longueur d’onde [15, 16] ou encore la capacité de ces structures à générer des fréquences de résonance à fort coefficient de qualité pour une application télécommunication [17–20].

La réfraction négative est aussi l’une des applications phares des cristaux phononiques. Les premiers travaux sur le sujet datent de 1964 où Veselago [21] introduit le concept de matériau main gauche pour parler d’un matériau ayant simultanément la permittivité diélectrique  $\epsilon$  et la perméabilité magnétique  $\mu$  négatives. Les propriétés d’un tel matériau sont alors inhabituelles et peuvent conduire à un indice de réfraction négatif. Il faudra attendre les travaux de Yang *et al.* [22] pour observer le phénomène dans les cristaux phononiques. En 2008, Sukhovich *et*

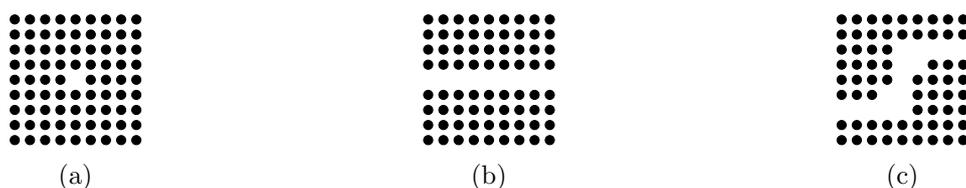


FIGURE 2 – Défaut (2a), guide d’onde droit (2b) et guide d’onde doublement coudé (2c).

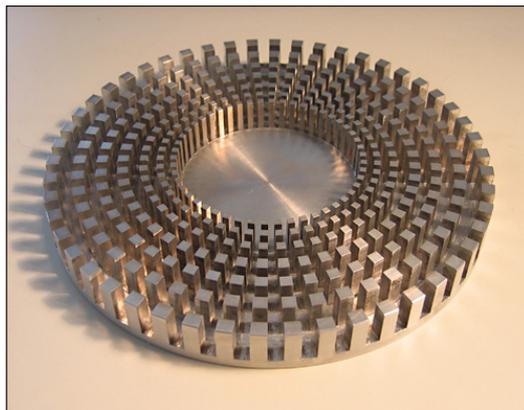


FIGURE 3 – Cape d’inaudibilité annulaire métallique composée de 100 secteurs rigides.

*al.* [23] présentent des résultats expérimentaux prometteurs sur la focalisation d’ultrasons à l’aide d’un cristal phononique bidimensionnel mais les indices du milieu extérieur et du cristal phononique ne sont pas accordés, conduisant à une résolution spatiale au delà de la diffraction limite. Ils publient l’année suivante les premiers résultats sur la super-résolution, c’est à dire que la demi-largeur du lobe central du champ de pression (suivant une coupe parallèle à l’interface) est inférieure à la demi-longueur d’onde [24].

Les bandes interdites peuvent s’obtenir par la périodicité d’une structure (diffraction de Bragg), mais elles peuvent aussi être construites par résonances localisées (résonateurs ancrés dans une structure). L’équipe de Sheng [25] a par exemple présenté en 2000 un métamatériau composé de billes d’acier recouvertes individuellement d’une coque de silicone, lesquelles sont enfin piégées dans une matrice d’époxy. La présence de résonateurs localisés (bille  $\leftrightarrow$  masse, coque  $\leftrightarrow$  ressort) permet de créer une bande interdite basse fréquence avec un matériau de faible épaisseur. Sept ans plus tard, Zhao *et al.* [26] proposent pour l’anéchoïsme les dimensions relatives optimales du noyau en acier par rapport à la coque en silicone. Enfin, Wen *et al.* [27] mettent en évidence par la méthode des éléments finis que la conversion des ondes longitudinales en ondes transversales joue un facteur clé dans l’absorption.

Le développement de ces métamatériaux a conduit à la réalisation de fonctionnalités jusque là impossibles à obtenir comme le *cloaking* acoustique. Sir J. Pendry de l’Imperial College à Londres et ses collaborateurs à Duke University [28, 29] font sensation en 2006 en publiant un article visant à concrétiser un vieux rêve de l’homme : l’invisibilité. Le principe consiste, à l’image des masses qui courbent l’espace-temps, à courber les ondes autour de l’objet à dissimuler. Bien que leur démonstration fut faite dans le domaine de l’électromagnétisme, elle ouvre la voie à la cape d’inaudibilité. Farhat *et al.* [30] présentent par exemple en 2008 le métamatériau illustré en Fig. 3. Celui-ci crée un fluide anisotropique artificiel afin de courber les trajectoires des ondes acoustiques tout en les accélérant pour compenser l’allongement du parcours. Les travaux de Garcia-Chocano *et al.* [31] peuvent aussi être cités. Ils proposent une structure bidimensionnelle non périodique composée de cylindres dont les positions ont été optimisées par une méthode inverse. Malgré une bande de fréquences étroite et une structure ne fonctionnant que dans une direction donnée, les résultats sont prometteurs.

Les applications potentielles des cristaux phononiques et des métamatériaux sont donc très nombreuses et les quelques exemples cités ne sont pas exhaustifs. Mais ces structures souffrent d’un conditionnement dès leur développement : elles sont conçues pour fonctionner dans une gamme de fréquences préétablie. Ce manque d’adaptabilité est souvent dénoncé et limite leurs fonctionnalités. L’accordabilité des bandes interdites est alors devenu un enjeu majeur et a rapidement suscité l’engouement de la communauté scientifique. L’un des premiers travaux sur la question est celui présenté par Goffaux et Vigneron [32] en 2001. Il consiste, comme l’illustre



FIGURE 4 – La première bande interdite est accordée par rotation de barreaux de section carrée.

la Fig. 4, en la rotation de barreaux de section carrée sur eux-même, la maille carrée du réseau bidimensionnel restant inchangée. Les barreaux sont rigides et placés dans une matrice d'air. Dans le même esprit, Yao *et al.* [33] proposent d'insérer un barreau supplémentaire au sein même de la maille carrée où l'optimisation de la position du barreau additionnel permet d'ouvrir la première bande interdite à son maximum.

Peu après, Khelif *et al.* [34] étudièrent un cristal phononique bidimensionnel constitué de tubes en acier immergés dans l'eau. Cette configuration permet d'obtenir une bande passante très fine dans une bande interdite qui s'accorde en ajustant le rayon interne des cylindres creux. Cette étude ouvre alors la voie à Pennec *et al.* [15] qui reprennent le concept et proposent que cette fine bande passante se contrôle par le liquide qui emplit les cylindres. Bien que les simulations avec du mercure et de l'eau produisent une accordabilité de l'ordre de la dizaine de pourcents, cette méthode n'est pas industrialisable.

D'autres voies ont été explorées, comme Baumgartl *et al.* [35] qui proposent de varier les caractéristiques élastiques des matériaux constitutifs par l'application de stimuli externes ou encore Yeh *et al.* [36] qui eurent l'idée d'exploiter des matériaux électrorhéologiques en conjonction avec l'application d'un champ électrique extérieur. Ou encore Huang et Wu [37], puis Jim *et al.* [38] se sont intéressés aux effets de la température sur les modules élastiques. Dans tous ces exemples, les stimuli se doivent d'être importants pour obtenir un effet significatif sur les structures de bandes. Une dernière approche étudiée par Bertoldi et Boyce [39] consiste à appliquer une contrainte sur une structure. Bien que la déformation de celle-ci affecte fortement les bandes interdites, cette solution ne peut pas être retenue puisqu'elle nécessite un contact physique fort.

La communauté scientifique se rend alors compte que pour intéresser les industriels, le contrôle des cristaux phononiques se doit d'être à la fois important, bon marché, réactif (faible temps de réponse), peu énergivore et sans contact afin qu'ils puissent s'implanter au mieux dans un environnement donné. L'utilisation de matériaux actifs validait alors certains de ces critères, élargissant soudainement le champ d'investigation de l'accordabilité. Les travaux de Wang *et al.* [40, 41] reportent par exemple des changements significatifs dans les structures de bandes de cristaux phononiques magnétoélectroélastiques lorsque les couplages entre les phénomènes magnétiques, électriques et élastiques sont pris en compte. D'autres études, telles que celles de Robillard *et al.* [42] en 2009 considèrent l'effet d'un champ magnétique extérieur sur les propriétés du cristal phononique. Ils démontrent que la structure de bande d'un cristal phononique bidimensionnel constitué d'une maille carrée de barreaux de section carrée de Terfenol-D prisonniers d'une matrice de résine époxy peut être contrôlée par application d'un champ magnétique externe. Une étude plus complète a été publiée en 2012 par Bou Matar *et al.* [43].

Les matériaux piézoélectriques sont aussi d'excellents candidats dans le contrôle des structures de bandes. Hou *et al.* sont parmi les premiers à s'intéresser à l'accordabilité des cristaux phononiques par insertion d'éléments piézoélectriques dans une matrice, bien qu'un travail préliminaire fut publié par Mesquida *et al.* [44] en 1998. Ils s'étaient alors basés sur un article qu'ils avaient publié en 2003 [45] où ils démontraient qu'il est possible d'accorder un cristal phononique bidimensionnel suivant l'orientation d'éléments anisotropiques. L'année précédente, Wilm *et al.* [46] présentaient un cristal phononique bidimensionnel composé de quartz et d'époxy (piézocomposite 1-3) où l'application visée était le guidage d'ondes. Hou *et al.* [47] proposent alors en 2004 de reprendre cette structure présentée en Fig. 5 afin d'en étudier son accordabilité. Il s'agit d'un cristal phononique bidimensionnel de maille carrée de côté  $a$  composé de

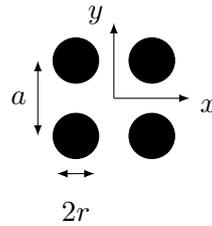


FIGURE 5 – Vue en coupe d'un piézocomposite 1-3 : des barreaux piézoélectriques piégés dans une matrice d'époxy.

barreaux cylindriques piézoélectriques de rayon  $r$  infiniment longs suivant l'axe  $z$  piégés dans une matrice d'époxy. Ils calculent alors les structures de bandes lorsque l'effet piézoélectrique est pris en compte ou non et remarquent que l'effet piézoélectrique joue sur la raideur effective des céramiques, ouvrant plus ou moins les bandes interdites. Il ne s'agit pas d'un contrôle continu des bandes interdites, mais plutôt d'une fonction commutation. Leur article confirme que le facteur de remplissage  $r/a$  doit être important pour obtenir une accordabilité importante, ce qui semble évident puisque la matrice en résine est inerte.

Les cristaux phononiques à base de matériaux piézoélectriques connaissent alors un essor important dès 2005 [48–63]. Citons à titre d'exemple quelques travaux sur les matériaux piézocomposites 1-3. Wang *et al.* [64] ont optimisé de manière théorique le facteur de remplissage ainsi que les proportions du réseau rectangulaire afin d'obtenir une bande interdite la plus importante possible. Oh *et al.* [65] proposent en 2011 d'utiliser un piézocomposite 1-3 composé de barreaux de PZT-5A dans une matrice de silicone afin de créer un guide d'onde actif. Leurs simulations montrent qu'en court-circuitant une rangée de barreaux, l'onde est correctement guidée dans la direction voulue, même en présence de coudes à  $90^\circ$ . Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Khelif *et al.* qui furent exposés plus haut, lorsque sont retirés des cylindres pour créer un guide d'onde. Au même moment, Hsu [66] se base sur les travaux de Hou *et al.* et se rend compte que les bandes interdites peuvent être facilement accordées en court-circuitant ou en laissant en circuit ouvert les barreaux piézoélectriques. Son étude théorique s'appuie sur un piézocomposite 1-3 composé de barreaux de PIN-PMN-PT dans une matrice d'époxy. L'idée est bonne mais l'accordabilité reste faible, dans la mesure où la matrice ne joue aucun rôle dans le contrôle des bandes interdites.

Les structures exclusivement piézoélectriques font alors leur apparition, éludant ainsi la question de la matrice. Ostrovskii *et al.* [67] présentent par exemple les courbes de dispersion des quatre premières PAW (Plate Acoustic Wave) se propageant dans un wafer de niobate de lithium périodiquement polarisé (PPLN) tel qu'illustré en Fig. 6. L'onde, désignée par le vecteur d'onde  $k$  sur la figure, se propage donc perpendiculairement aux domaines de largeur  $d$  dont le sens de polarisation est alterné. Leurs calculs numériques, corroborés par des observations expérimentales, montrent que des bandes interdites apparaissent pour le nombre d'onde  $k = \pi/d$ . L'origine

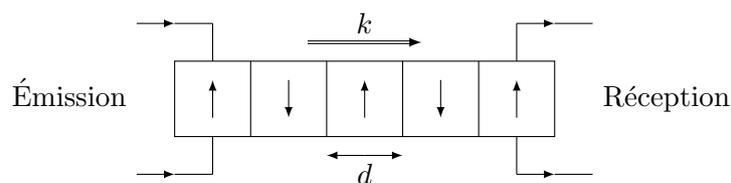


FIGURE 6 – Structure PPLN utilisée par Ostrovskii *et al.* [67]. La largeur de chaque domaine est  $d$ . Les flèches dans les matériaux indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

physique de ces bandes interdites est le caractère périodique de la structure, c'est-à-dire une réflexion de type Bragg liée aux interfaces multidomaines du super-réseau. Ils ajoutent dans leur analyse que la largeur de la bande interdite est d'autant plus importante que le facteur de couplage piézoélectrique est fort. Ces résultats se retrouvent dans ce travail de thèse, qui s'est borné aux structures unidimensionnelles que sont les super-réseaux. À noter que Rupp *et al.* [68] ont proposé un cristal phononique bidimensionnel basé sur un pavage exclusivement piézoélectrique. Ils démontrent numériquement qu'ils peuvent contrôler la propagation d'ondes élastiques en modifiant spatialement la distribution des sens de polarisation diélectrique, ce qui semble très complexe à mettre en œuvre.

Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit furent co-encadrés et cofinancés par Thales Research & Technology France. Ces travaux traitent de l'accordabilité des structures périodiques, et plus particulièrement des cristaux phononiques piézoélectriques, choix justifié par l'expertise pré-existante au sein de l'axe Acoustique du département ISEN de l'IEMN dans ce domaine. Les modèles de simulation par la méthode des éléments finis (code ATILA) se sont révélés des outils indispensables à la mise en place comme à l'interprétation des modèles analytiques, semi-analytiques et des expériences.

Ce manuscrit de thèse s'articule autour de trois parties. La première partie est consacrée aux super-réseaux partiellement piézoélectriques. Elle rappelle dans un premier chapitre les raisonnements fondamentaux sur lesquels repose l'élaboration de la relation de dispersion analytique. Ces notions sont d'une part la continuité des champs aux interfaces, et d'autre part le théorème de Bloch-Floquet qui est la relation inhérente à toute structure périodique. Les bornes des bandes interdites seront par ailleurs étudiées analytiquement. Le second chapitre montrera analytiquement et expérimentalement qu'une impédance électrique connectée aux bornes d'une couche piézoélectrique affecte ses fréquences de résonance propres. Ces premiers résultats, qui reposent sur l'application du théorème de Gauss, s'avèreront une aide précieuse pour le troisième chapitre qui traite du contrôle des bandes interdites dans le cas d'un super-réseau constitué d'une alternance de matériaux élastiques et de matériaux piézoélectriques connectés à des capacités électriques. Les courbes de dispersion analytiques, numériques et expérimentales seront alors présentées et mettront clairement en évidence l'accordabilité des bandes interdites.

La seconde partie du manuscrit, également constituée de trois chapitres, porte sur les super-réseaux exclusivement piézoélectriques. On introduira dès le quatrième chapitre le concept breveté de bandes interdites de charge électrique. Ce sont des bandes interdites de Bragg qui apparaissent lorsqu'une onde est transmise à travers un matériau piézoélectrique homogène court-circuité périodiquement. Le cinquième chapitre bénéficie du formalisme mis en place en première partie du manuscrit pour montrer que les bandes interdites de charge électrique se contrôlent aisément grâce à l'insertion de capacités électriques aux bornes de chacune des couches piézoélectriques. Le sixième chapitre est complémentaire du cinquième puisqu'il s'intéresse aux super-réseaux constitués de l'alternance de matériaux piézoélectriques de nature différente connectés individuellement à des capacités électriques.

On remarquera la quasi-absence de résultats numériques dans la seconde partie à cause de l'incompatibilité entre la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée au potentiel électrique et l'égalité de ce dernier lors d'un court-circuit. La mise à la masse périodique se présente alors comme une solution alternative et nécessite la modélisation des super-réseaux par séries de Fourier, justifiant la troisième et dernière partie de ce document. Le septième chapitre montrera que la mise à la masse périodique permet de vérifier numériquement les résultats du quatrième chapitre et la première mise en évidence expérimentale des bandes interdites de charge électrique sera présentée. Enfin le huitième chapitre montrera, avec des résultats expérimentaux à l'appui, que l'insertion de capacités électriques entre les électrodes et la masse électrique permet d'accorder indépendamment les deux bornes de la première bande interdite. En dernier lieu, l'auteur souhaite avertir le lecteur que l'écriture est très redondante afin de conserver une certaine autonomie d'un chapitre à l'autre.

Première partie

**Les super-réseaux partiellement  
piézoélectriques**



# Chapitre 1

## Les super-réseaux élastique/élastique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Relation de dispersion</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Positions des bandes interdites</b>	<b>23</b>
1.2.1	Fréquences centrales des bandes interdites	25
1.2.2	Largeurs des bandes interdites	25
1.2.3	Récapitulatif	28

---

Ce chapitre introductif a pour but d'explicitier la méthodologie adoptée pour obtenir analytiquement la relation de dispersion d'un super-réseau ainsi que ses bandes interdites. Cette méthodologie sera appliquée tout au long du manuscrit, que ce soit pour les super-réseaux élastique/élastique, élastique/piézoélectrique ou piézoélectrique/piézoélectrique. Le super-réseau qui va être immédiatement étudié est un cas d'école puisqu'il s'agit d'un bicouche élastique/élastique dont la relation de dispersion analytique est aujourd'hui bien connue [69].



## 1.1 Relation de dispersion

Soit présenté en Fig. 1.1 un super-réseau formé de l'empilement successif de deux couches élastiques de nature différente. Les propriétés des matériaux sont indicées par leur numéro ( $i$ ). Chaque couche ( $i$ ), très fine devant les dimensions latérales, a une épaisseur constante  $h_i$ . Le vecteur d'onde est normal aux interfaces d'aire  $S$ , parallèle à l'axe  $z$ . La polarisation des ondes étant parallèle à la direction de propagation  $z$ , le déplacement  $u^{(i)}$  s'écrit dans chaque couche

$$u^{(i)} = a_i \cos k_i z + b_i \sin k_i z \quad (1.1)$$

avec  $a_i$  et  $b_i$  les amplitudes inconnues et  $k_i$  le nombre d'onde longitudinal défini par

$$k_i = \frac{\omega}{v_t^{(i)}} \quad (1.2)$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $v_t^{(i)}$  la vitesse des ondes longitudinales suivant l'axe  $z$  ou 3 donnée par l'Eq. (B.2) :

$$v_t^{(i)} = \sqrt{\frac{c_{33}^{(i)}}{\rho^{(i)}}} \quad (1.3)$$

avec  $c_{33}^{(i)}$  et  $\rho^{(i)}$  respectivement la constante de rigidité élastique et la masse volumique.

La relation de dispersion se déduit des conditions limites du super-réseau. Le nombre de conditions limites dépend du nombre de couches de nature différente dans une période. Le déplacement  $u$  dans une couche nécessite deux conditions limites pour déterminer  $a$  et  $b$ . Dès lors, pour une période constituée de  $N$  couches,  $2N$  équations sont nécessaires pour obtenir la relation de dispersion. Dans le cas présent, quatre conditions limites suffisent pour déterminer  $a_1, b_1, a_2$  et  $b_2$ .

La première se situe à l'interface  $z = 0$ , où la condition de continuité du déplacement impose

$$u^{(1)} \Big|_{z=0} = u^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad (1.4)$$

soit en utilisant l'Eq. (1.1) :

$$a_1 = a_2. \quad (1.5)$$

De même, le vecteur polarisation étant normal aux interfaces, la condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$  se résume à

$$T_3^{(1)} \Big|_{z=0} = T_3^{(2)} \Big|_{z=0}. \quad (1.6)$$

La contrainte donnée par la loi de Hooke (Eq. (B.1)) est

$$T_3^{(i)} = c_{33}^{(i)} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial z} \quad (1.7)$$

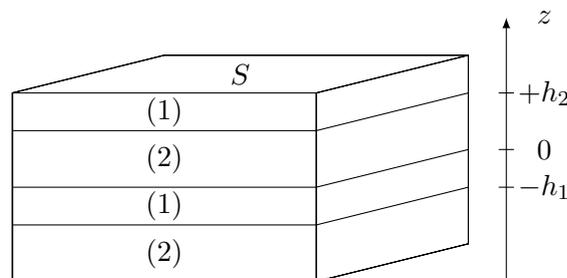


FIGURE 1.1 – Super-réseau constitué alternativement de couches (1) et (2) d'épaisseurs respectives  $h_1$  et  $h_2$ .

et l'Eq. (1.6) devient

$$c_{33}^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = c_{33}^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (1.8)$$

soit

$$c_{33}^{(1)} k_1 b_1 = c_{33}^{(2)} k_2 b_2. \quad (1.9)$$

La relation de phase donnée par l'Eq. (A.1) appliquée au déplacement est

$$u^{(2)} \Big|_{z=h_2} = X u^{(1)} \Big|_{z=-h_1} \quad (1.10)$$

avec

$$X = e^{jk(h_1+h_2)}, \quad (1.11)$$

soit

$$a_2 \cos k_2 h_2 + b_2 \sin k_2 h_2 = X (a_1 \cos k_1 h_1 - b_1 \sin k_1 h_1). \quad (1.12)$$

Cette même relation de phase appliquée à la contrainte s'écrit

$$T_3^{(2)} \Big|_{z=h_2} = X T_3^{(1)} \Big|_{z=-h_1} \quad (1.13)$$

et le report de l'Eq. (1.7) dans l'Eq. (1.13) donne

$$c_{33}^{(2)} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=h_2} = X c_{33}^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-h_1}, \quad (1.14)$$

soit

$$c_{33}^{(2)} k_2 (-a_2 \sin k_2 h_2 + b_2 \cos k_2 h_2) = X c_{33}^{(1)} k_1 (a_1 \sin k_1 h_1 + b_1 \cos k_1 h_1). \quad (1.15)$$

Les quatre Eqs. (1.5), (1.9), (1.12) et (1.15) conduisent au système matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & -1 \\ -X \cos k_1 h_1 & X \sin k_1 h_1 & \cos k_2 h_2 & \sin k_2 h_2 \\ X \gamma \sin k_1 h_1 & X \gamma \cos k_1 h_1 & \sin k_2 h_2 & -\cos k_2 h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

où

$$\gamma = \frac{c_{33}^{(1)} k_1}{c_{33}^{(2)} k_2}. \quad (1.17)$$

Le report des Eqs. (1.2) et (1.3) dans l'Eq. (1.17) montre que  $\gamma$  représente le rapport des impédances acoustiques caractéristiques  $Z^{(i)} = \rho^{(i)} v_t^{(i)}$  des deux couches :

$$\gamma = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}}. \quad (1.18)$$

Une solution non triviale pour les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  nécessite l'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (1.16). Elle conduit à la résolution d'une équation du second degré en  $X$ , dont la partie réelle donne la relation de dispersion du super-réseau :

$$\cos k(h_1 + h_2) = \cos k_1 h_1 \cos k_2 h_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2. \quad (1.19)$$

On peut vérifier que si le super-réseau n'est constitué que d'un seul matériau (*i. e.*  $\gamma = 1$  et  $k = k_1 = k_2$ ), le milieu est non dispersif. La périodicité du réseau est alors fictive, la courbe de

	$Y$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$v_t$ (m/s)
verre	73	.22	2540	5728
acier	215	.31	7800	6181

TABLEAU 1.1 – Propriétés du verre et de l’acier.

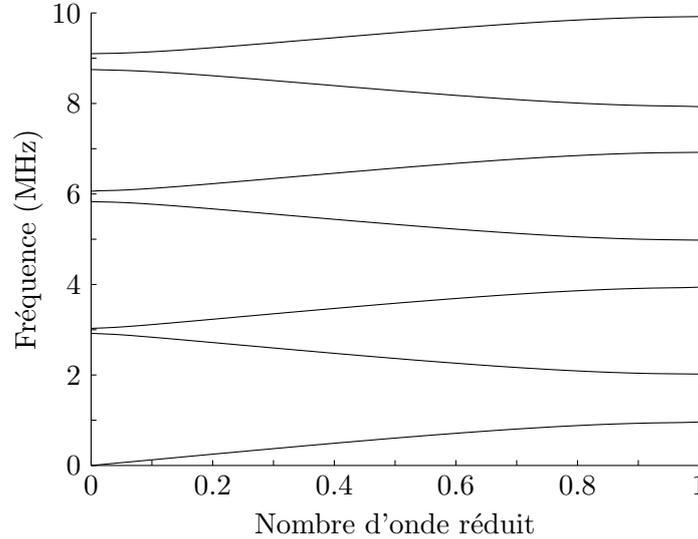


FIGURE 1.2 – Courbe de dispersion d’un super-réseau verre/acier de couches d’épaisseur 1 mm.

dispersion se résume alors à une droite de pente  $v_t$  repliée dans la première zone de Brillouin et l’Eq. (1.19) se simplifie par application des règles trigonométriques.

La méthode pour tracer la courbe de dispersion consiste à fixer  $\omega$  par le biais de l’Eq. (1.2) et à calculer  $k$  pour chacun des  $\omega$ .

On considère à titre d’exemple une alternance de couches de verre (1) et d’acier (2) d’épaisseurs égales  $h_1 = h_2 = 1$  mm. Le module d’Young  $Y$ , le coefficient de Poisson  $\nu$  et la masse volumique  $\rho$  des matériaux constitutifs sont donnés dans le Tab. 1.1. Les vitesses se calculent à partir de l’Eq. (B.2) :

$$v_t^{(i)} = \sqrt{\frac{Y^{(i)} (1 - \nu^{(i)})}{\rho^{(i)} (1 + \nu^{(i)}) (1 - 2\nu^{(i)})}}. \quad (1.20)$$

La Fig. 1.2 montre la courbe de dispersion de ce super-réseau où le nombre réduit désigne la partie réelle de  $k(h_1 + h_2)/\pi$ .

## 1.2 Positions des bandes interdites

Les positions des bandes interdites se calculent à partir de l’Eq. (1.19) quand on se situe soit à la limite de la première zone de Brillouin, soit au centre de la zone de Brillouin, c’est à dire

$$\cos k_1 h_1 \cos k_2 h_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 = \pm 1. \quad (1.21)$$

Les pulsations qui vérifient cette équation sont introduites par l’Eq. (1.2) et leur détermination analytique requiert un changement de variables. L’utilisation des règles trigo-

nométriques

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (1.22)$$

$$\sin x = \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (1.23)$$

et le changement de variables

$$t = \tan \frac{k_1 h_1}{2} \quad (1.24)$$

$$\tau = \tan \frac{k_2 h_2}{2} \quad (1.25)$$

dans l'Eq. (1.21) permet de trouver la  $n$ -ième bande interdite en résolvant

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{2t}{1 + t^2} \frac{2\tau}{1 + \tau^2} = (-1)^n. \quad (1.26)$$

Quand  $n$  est impair, la bande interdite considérée se situe à la limite de la première zone de Brillouin, c'est à dire lorsque

$$k(h_1 + h_2) = \pi \quad (1.27)$$

et la résolution de l'Eq. (1.26) donne

$$\left( t - \frac{\gamma}{\tau} \right) \left( \gamma t - \frac{1}{\tau} \right) = 0. \quad (1.28)$$

Chaque bande interdite impaire possède alors deux bornes dont les pulsations vérifient

$$t = \frac{\gamma}{\tau} \quad (1.29)$$

$$\gamma t = \frac{1}{\tau}. \quad (1.30)$$

De même, quand  $n$  est pair, la bande interdite considérée se situe au centre de la zone de Brillouin ( $k = 0$ ), et la résolution de l'Eq. (1.26) donne

$$(t + \gamma\tau)(\gamma t + \tau) = 0. \quad (1.31)$$

Chaque bande interdite paire possède alors deux bornes dont les pulsations vérifient

$$t = -\gamma\tau \quad (1.32)$$

$$\gamma t = -\tau. \quad (1.33)$$

Finalement, la combinaison des Eqs. (1.29), (1.30), (1.32) et (1.33) conduit à deux équations transcendantes, une pour chaque borne de la  $n$ -ième bande interdite :

$$t = -\gamma(-1)^n \tau^{(-1)^n} \quad (1.34)$$

$$\gamma t = -(-1)^n \tau^{(-1)^n}. \quad (1.35)$$

### 1.2.1 Fréquences centrales des bandes interdites

Les solutions des équations transcendentes (1.34) et (1.35) peuvent être approximées analytiquement en considérant que  $\gamma \approx 1$ , c'est à dire que les impédances caractéristiques des deux milieux sont très proches. La position centrale de la n-ième bande interdite est alors déterminée en résolvant dans un premier temps

$$t = -(-1)^n \tau^{(-1)^n}. \quad (1.36)$$

Les cas pairs et impairs sont résolus indépendamment. Quand  $n$  est impair, l'Eq. (1.36) devient à l'aide des Eqs. (1.24) et (1.25)

$$\frac{\sin \frac{k_1 h_1}{2}}{\cos \frac{k_1 h_1}{2}} = \frac{\cos \frac{k_2 h_2}{2}}{\sin \frac{k_2 h_2}{2}}, \quad (1.37)$$

soit en faisant usage des règles trigonométriques

$$\cos \left( \frac{k_1 h_1}{2} + \frac{k_2 h_2}{2} \right) = 0. \quad (1.38)$$

De même, quand  $n$  est pair, l'Eq. (1.36) devient

$$\frac{\sin \frac{k_1 h_1}{2}}{\cos \frac{k_1 h_1}{2}} = -\frac{\sin \frac{k_2 h_2}{2}}{\cos \frac{k_2 h_2}{2}}, \quad (1.39)$$

soit

$$\sin \left( \frac{k_1 h_1}{2} + \frac{k_2 h_2}{2} \right) = 0. \quad (1.40)$$

La combinaison des Eqs. (1.38) et (1.40) conduit à l'équation générale de la pulsation centrale  $\omega_n$  de la n-ième bande interdite :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\frac{h_1}{v_t^{(1)}} + \frac{h_2}{v_t^{(2)}}}. \quad (1.41)$$

Pour des questions de lisibilité, les vitesses s'écriront désormais sous la forme  $v_i$  à la place de la forme  $v_t^{(i)}$ , et ce jusqu'à la fin de ce chapitre.

### 1.2.2 Largeurs des bandes interdites

Les bornes de la n-ième bande interdite sont  $\omega'_n$  et  $\omega''_n$  et sont de même déterminées de façon analytique. On montrera par la suite que chacune des deux bornes peut être soit la borne inférieure soit la borne supérieure de la bande interdite suivant le signe de  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \omega'_n < \omega''_n & \text{ si } \gamma < 1 \\ \omega'_n > \omega''_n & \text{ si } \gamma > 1. \end{aligned}$$

La Fig. 1.3 reprend l'exemple traité précédemment de l'alternance de couches de verre (1) et d'acier (2) d'épaisseurs égales  $h_1 = h_2 = 1$  mm dont la courbe de dispersion était présentée Fig. 1.2. Etant donné que  $\gamma = .302$ ,

$$(\omega'_n = 2\pi f'_n) < (\omega_n = 2\pi f_n) < (\omega''_n = 2\pi f''_n). \quad (1.42)$$

Les positions des bornes de la n-ième bande interdite sont approximées par un développement limité de Taylor du premier ordre au voisinage de la pulsation centrale  $\omega_n$ . Le calcul est effectué indépendamment pour chacune des deux bornes  $\omega'_n$  et  $\omega''_n$ .

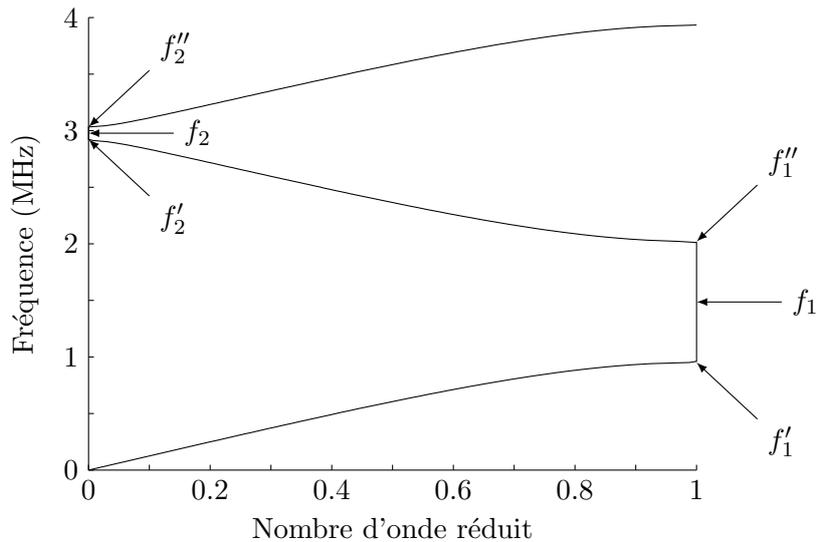


FIGURE 1.3 – Courbe de dispersion d'un super-réseau verre/acier de couches d'épaisseur 1 mm où  $f'_n < f''_n$  puisque  $\gamma < 1$ .

### Première borne (Eq. (1.34))

Soit l'une des deux bornes

$$\omega'_n = \omega_n + \varepsilon'_n. \quad (1.43)$$

L'Eq. (1.34) se réécrit alors

$$\tan \frac{h_1}{2v_1} (\omega_n + \varepsilon'_n) = -\gamma(-1)^n \left( \tan \frac{h_2}{2v_2} (\omega_n + \varepsilon'_n) \right)^{(-1)^n}. \quad (1.44)$$

En remarquant que l'Eq. (1.41) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\omega_n h_2}{2v_2} = \frac{n\pi}{2} - \frac{\omega_n h_1}{2v_1}, \quad (1.45)$$

l'Eq. (1.44) devient

$$\tan \frac{h_1}{2v_1} (\omega_n + \varepsilon'_n) = -\gamma(-1)^n \left( \tan \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{\omega_n h_1}{2v_1} + \frac{h_2 \varepsilon'_n}{2v_2} \right) \right)^{(-1)^n}. \quad (1.46)$$

Lorsque  $n$  est impair, cette équation s'écrit

$$\tan \frac{h_1}{2v_1} (\omega_n + \varepsilon'_n) = \gamma \cotan \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{\omega_n h_1}{2v_1} + \frac{h_2 \varepsilon'_n}{2v_2} \right) \quad (1.47)$$

et l'utilisation de la règle trigonométrique

$$\cotan \left( \frac{n\pi}{2} - \theta \right) = \tan \theta \quad (1.48)$$

donne

$$\tan \frac{h_1}{2v_1} (\omega_n + \varepsilon'_n) = \gamma \tan \left( \frac{\omega_n h_1}{2v_1} - \frac{h_2 \varepsilon'_n}{2v_2} \right). \quad (1.49)$$

De même, lorsque  $n$  est pair, l'Eq. (1.46) s'écrit

$$\tan \frac{h_1}{2v_1} (\omega_n + \varepsilon'_n) = -\gamma \tan \left( \frac{n\pi}{2} - \frac{\omega_n h_1}{2v_1} + \frac{h_2 \varepsilon'_n}{2v_2} \right) \quad (1.50)$$

et l'utilisation de la règle trigonométrique

$$\tan\left(\frac{n\pi}{2} - \theta\right) = -\tan\theta \quad (1.51)$$

donne le même résultat que dans le cas où  $n$  est impair donné par l'Eq. (1.49). Le développement limité du premier ordre au voisinage de  $\omega_n$  de l'Eq. (1.49)

$$\tan\frac{h_1\omega_n}{2v_1} + \frac{h_1\varepsilon'_n}{2v_1\cos^2\frac{h_1\omega_n}{2v_1}} = \gamma\left(\tan\frac{h_1\omega_n}{2v_1} - \frac{h_2\varepsilon'_n}{2v_2\cos^2\frac{h_1\omega_n}{2v_1}}\right) \quad (1.52)$$

se réarrange sous la forme

$$\frac{\varepsilon'_n}{2}\left(\frac{h_1}{v_1} + \gamma\frac{h_2}{v_2}\right) = (\gamma - 1)\cos^2\frac{h_1\omega_n}{2v_1}\tan\frac{h_1\omega_n}{2v_1} \quad (1.53)$$

et l'utilisation de la règle trigonométrique

$$2\sin x \cos x = \sin 2x \quad (1.54)$$

conduit à l'expression de  $\varepsilon'_n$ , quelle que soit la parité de  $n$  :

$$\varepsilon'_n = \frac{\gamma - 1}{\frac{h_1}{v_1} + \gamma\frac{h_2}{v_2}} \sin\frac{n\pi}{1 + \frac{h_2v_1}{h_1v_2}}. \quad (1.55)$$

Le terme

$$\sin\frac{n\pi}{1 + \frac{h_2v_1}{h_1v_2}} \quad (1.56)$$

étant toujours positif quelque soit la valeur du rapport

$$\frac{h_2v_1}{h_1v_2}, \quad (1.57)$$

on voit bien que la position relative de la borne par rapport à la pulsation centrale  $\omega_n$  de la  $n$ -ième bande interdite est

$$\begin{aligned} \varepsilon'_n < 0 & \quad \text{si } \gamma < 1 \\ \varepsilon'_n > 0 & \quad \text{si } \gamma > 1. \end{aligned}$$

### Seconde borne (Eq. (1.35))

La seconde borne  $\omega_n''$  se calcule de la même manière que la première borne. Le report de

$$\omega_n'' = \omega_n + \varepsilon_n'' \quad (1.58)$$

dans l'Eq. (1.35) et l'utilisation de l'Eq. (1.45) donne

$$\gamma \tan\frac{h_1}{2v_1}(\omega_n + \varepsilon_n'') = -(-1)^n \left(\tan\left(\frac{n\pi}{2} - \frac{\omega_n h_1}{2v_1} + \frac{h_2\varepsilon_n''}{2v_2}\right)\right)^{(-1)^n}. \quad (1.59)$$

Les cas où  $n$  est pair ou impair sont traités à l'aide des règles trigonométriques (1.48) et (1.51) et conduisent à l'expression

$$\gamma \tan\frac{h_1}{2v_1}(\omega_n + \varepsilon_n'') = \tan\left(\frac{\omega_n h_1}{2v_1} - \frac{h_2\varepsilon_n''}{2v_2}\right). \quad (1.60)$$

Le développement limité du premier ordre au voisinage de  $\omega_n$

$$\gamma \left( \tan \frac{h_1 \omega_n}{2v_1} + \frac{h_1 \varepsilon_n''}{2v_1 \cos^2 \frac{h_1 \omega_n}{2v_1}} \right) = \tan \frac{h_1 \omega_n}{2v_1} - \frac{h_2 \varepsilon_n''}{2v_2 \cos^2 \frac{h_1 \omega_n}{2v_1}} \quad (1.61)$$

se réarrange sous la forme

$$\frac{\varepsilon_n''}{2} \left( \gamma \frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2} \right) = (1 - \gamma) \cos^2 \frac{h_1 \omega_n}{2v_1} \tan \frac{h_1 \omega_n}{2v_1} \quad (1.62)$$

et donne, à l'aide des règles trigonométriques (1.54), l'expression de  $\varepsilon_n''$

$$\varepsilon_n'' = \frac{1 - \gamma}{\gamma \frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}} \sin \frac{n\pi}{1 + \frac{h_2 v_1}{h_1 v_2}}. \quad (1.63)$$

On note cette fois que la position relative de la borne par rapport à la pulsation centrale  $\omega_n$  de la n-ième bande interdite est

$$\begin{aligned} \varepsilon_n'' > 0 & \quad \text{si } \gamma < 1 \\ \varepsilon_n'' < 0 & \quad \text{si } \gamma > 1. \end{aligned}$$

### 1.2.3 Récapitulatif

L'approximation de la pulsation centrale  $\omega_n$  de la n-ième bande interdite s'écrit, d'après l'Eq. (1.41) :

$$\omega_n = 2\pi f_n = \frac{n\pi}{\frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}}. \quad (1.64)$$

Chaque bande interdite possède deux bornes approximées  $\omega_n'$  et  $\omega_n''$  dont l'une ou l'autre peut être soit la borne inférieure soit la borne supérieure de la bande interdite suivant le signe de  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \omega_n' < \omega_n'' & \quad \text{si } \gamma < 1 \\ \omega_n' > \omega_n'' & \quad \text{si } \gamma > 1. \end{aligned}$$

Les expressions des bornes sont

$$\omega_n' = \omega_n + \frac{\gamma - 1}{\frac{h_1}{v_1} + \gamma \frac{h_2}{v_2}} \sin \frac{n\pi}{1 + \frac{h_2 v_1}{h_1 v_2}} \quad (1.65)$$

$$\omega_n'' = \omega_n + \frac{1 - \gamma}{\gamma \frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}} \sin \frac{n\pi}{1 + \frac{h_2 v_1}{h_1 v_2}}. \quad (1.66)$$

La largeur de la n-ième bande interdite s'écrit donc

$$\Delta\omega_n = |\omega_n' - \omega_n''|, \quad (1.67)$$

soit

$$\Delta\omega_n = \left( \frac{1}{\gamma \frac{h_1}{v_1} + \frac{h_2}{v_2}} + \frac{1}{\frac{h_1}{v_1} + \gamma \frac{h_2}{v_2}} \right) |1 - \gamma| \sin \frac{n\pi}{1 + \frac{h_2 v_1}{h_1 v_2}}. \quad (1.68)$$

La pulsation centrale  $\omega_n$  ainsi que les bornes  $\omega_n'$  et  $\omega_n''$  sont des valeurs approximées. L'erreur d'approximation est nulle pour  $\gamma = 1$  et augmente au fur et à mesure que  $\gamma$  s'éloigne de l'unité. Dans l'exemple traité plus haut, les erreurs sont de l'ordre de quelques pourcents.

## Chapitre 2

# Effet d'une impédance électrique aux bornes d'une couche piézoélectrique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Effet d'une impédance électrique sur la contrainte . . . . .</b>	<b>31</b>
<b>2.2</b>	<b>Effet d'une impédance électrique sur la vitesse . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>2.3</b>	<b>Modes propres dans le sens de la polarisation diélectrique . . . . .</b>	<b>34</b>
<b>2.4</b>	<b>Le barreau piézoélectrique . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>2.5</b>	<b>Mesures . . . . .</b>	<b>37</b>

---

Le chapitre précédent était un chapitre introductif aux super-réseaux, en ce sens qu'étaient présentées des notions élémentaires telle que la méthodologie pour démontrer la relation de dispersion ou encore le moyen d'en extraire les bandes interdites. L'objectif de la thèse étant de montrer comment un cristal phononique peut être accordé grâce à l'utilisation de matériaux piézoélectriques, il semble naturel d'étudier l'influence de telles inclusions dans un super-réseau. Il est en effet nécessaire de comprendre dans un premier temps les phénomènes électro-mécaniques dans une seule couche piézoélectrique avant d'étudier un multicouche constitué alternativement de couches élastiques et de couches piézoélectriques. Les équations générales de la piézoélectricité sont présentées en annexe C.



## 2.1 Effet d'une impédance électrique sur la contrainte

Soit présentée en Fig. 2.1 une couche piézoélectrique d'épaisseur  $h$  dont les interfaces en  $z = 0$  et  $z = h$  disposent d'électrodes d'aire  $S$  permettant de connecter une impédance électrique  $Z_e$ . La polarisation diélectrique est orientée suivant l'axe  $z$  et est indiquée sur la figure par une flèche. Les dimensions latérales étant très grandes devant l'épaisseur  $h$ , les équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel de la plaque données par les Eqs. (C.1) et (C.2) s'appliquent :

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3 \quad (2.1)$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3 \quad (2.2)$$

où  $c_{33}^D$ ,  $h_{33}$  et  $\beta_{33}^S$  sont respectivement la constante de rigidité élastique à déplacement électrique constant, la constante de contrainte piézoélectrique et l'imperméabilité diélectrique à déformation constante. Par définition, le champ électrique est relié au potentiel électrique  $\Phi$  par

$$\vec{E} = - \vec{\text{grad}} \Phi. \quad (2.3)$$

Le champ électrique étant orienté dans le sens de la polarisation diélectrique, la différence de potentiel  $V$  aux bornes de la couche piézoélectrique s'écrit alors

$$V = - \int_0^h E_3 dz. \quad (2.4)$$

Par définition, l'intensité du courant électrique  $I$  dérive du déplacement électrique par la relation

$$I = S \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (2.5)$$

où  $t$  désigne le temps. Le déplacement électrique considéré, *i. e.* dans la direction 3, est supposé monochromatique<sup>1</sup> de pulsation  $\omega$

$$D_3 = D_0 e^{j\omega t}, \quad (2.6)$$

dès lors l'Eq. (2.5) devient

$$I = j\omega S D_3. \quad (2.7)$$

Puisque  $V = Z_e I$ , la combinaison des Eqs. (2.4) et (2.7) donne

$$j\omega Z_e S D_3 = - \int_0^h E_3 dz, \quad (2.8)$$

soit en reportant l'Eq. (2.2) dans l'Eq. (2.8) :

$$j\omega Z_e S D_3 = h_{33} \int_0^h \frac{\partial u}{\partial z} dz - \beta_{33}^S \int_0^h D_3 dz. \quad (2.9)$$

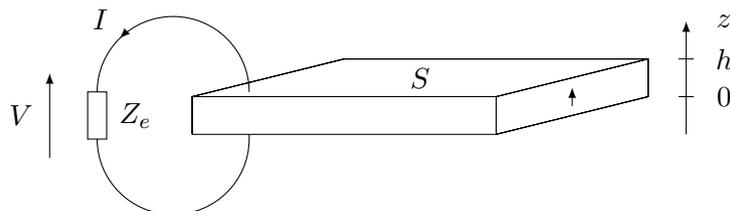


FIGURE 2.1 – Représentation d'une couche piézoélectrique d'épaisseur  $h$  connectée à une impédance électrique  $Z_e$ . La flèche dans le matériau indique le sens de la polarisation diélectrique.

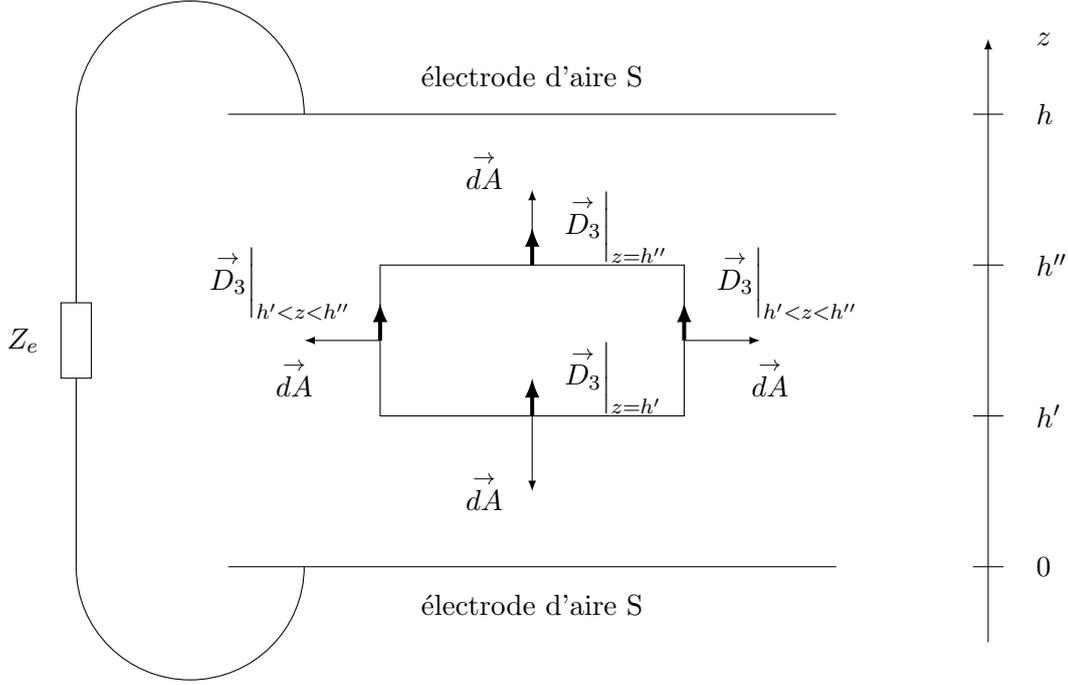


FIGURE 2.2 – Représentation du théorème de Gauss où le flux du déplacement électrique  $\Phi_{D_3}$  traverse une surface fermée d'aire  $A$  dans le cœur de la couche piézoélectrique.

La première intégrale se calcule aisément grâce à l'Eq. (1.1) où l'indice  $i$  n'a pas lieu d'être puisqu'il n'y a qu'une seule couche, soit

$$j\omega Z_e S D_3 = h_{33} \left[ u \right]_{z=0}^{z=h} - \beta_{33}^S \int_0^h D_3 dz. \quad (2.10)$$

La seconde intégrale nécessite de connaître l'allure du déplacement électrique le long de l'axe  $z$ . La réponse vient du théorème de Gauss qui s'écrit sous forme intégrale

$$\Phi_D = \oiint_A \vec{D} \cdot \vec{dA} = Q_{libre} \quad (2.11)$$

avec  $\Phi_D$  le flux du déplacement électrique (à ne pas confondre avec le potentiel électrique  $\Phi$ ) traversant la surface fermée d'aire  $A$  et  $Q_{libre}$  la charge libre contenue dans ce volume. Les matériaux piézoélectriques sont diélectriques, par conséquent  $Q_{libre} = 0$ . La Fig. 2.2 présente la couche piézoélectrique d'épaisseur  $h$  actuellement étudiée où est représentée une surface fermée d'aire  $A$  dans le volume du matériau. Cette surface fermée est limitée suivant l'axe  $z$  par les bornes  $z = h'$  et  $z = h''$ , où  $0 < h' < h'' < h$ . Par convention, les éléments de surface  $dA$  sont orientés vers l'extérieur du volume étudié. La figure montre que le flux à travers les surfaces parallèles à l'axe  $z$  est nul :

$$\oiint_A \vec{D}_3 \Big|_{h' < z < h''} \cdot \vec{dA} = 0. \quad (2.12)$$

Ne reste alors que le flux à travers les surfaces perpendiculaires à l'axe  $z$ . Or tout flux entrant égale le flux sortant car  $Q_{libre} = 0$ , on en déduit donc que le déplacement électrique est constant le long de l'axe de polarisation diélectrique :

$$D_3|_{z=h'} = D_3|_{z=h''}. \quad (2.13)$$

1. Le théorème de Bloch-Floquet utilise traditionnellement la convention temporelle  $-j\omega t$  alors que les électroniciens préfèrent utiliser la convention  $+j\omega t$ . Dans ce manuscrit, les deux conventions ont été utilisées suivant le domaine. Puisqu'elles n'interfèrent pas, il n'y a pas d'incompatibilité.

L'Eq. (2.10) s'écrit alors simplement

$$j\omega Z_e S D_3 = h_{33} \left[ u \right]_{z=0}^{z=h} - \beta_{33}^S D_3 h. \quad (2.14)$$

Jusqu'alors, la condition limite électrique portée par l'impédance  $Z_e$  était accompagnée d'un terme dépendant de la fréquence :  $j\omega$ . Certains auteurs comme Casadei *et al.* [70] utilisent cette propriété pour créer une résonance supplémentaire et obtenir ainsi des bandes interdites par résonances localisées. Notre raisonnement est différent puisque l'objectif est de modifier les propriétés apparentes du matériau piézoélectrique. Le choix de l'impédance électrique se porte donc naturellement sur une capacité  $C$ , annihilant ainsi la dépendance fréquentielle de la condition limite. Le déplacement électrique de l'équation précédente devient

$$D_3 = \frac{h_{33}}{\beta_{33}^S h + \frac{S}{C}} \left[ u \right]_{z=0}^{z=h} \quad (2.15)$$

et son report dans l'Eq. (2.1) conduit à l'expression de la contrainte dans la couche piézoélectrique sous la forme

$$T_3 = c_{33}^D \left( S_3 - k\alpha \left[ u \right]_{z=0}^{z=h} \right) \quad (2.16)$$

avec

$$\alpha = \frac{k_t^2}{kh \left( 1 + \frac{C_0}{C} \right)} \quad (2.17)$$

où  $k_t$  et  $C_0$  sont respectivement le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique et la capacité bloquée donnés par les Eqs. (C.7) et (C.15) :

$$k_t = \sqrt{\frac{h_{33}^2}{c_{33}^D \beta_{33}^S}} \quad (2.18)$$

$$C_0 = \frac{S}{h\beta_{33}^S}. \quad (2.19)$$

Le nombre d'onde  $k$  introduit dans les Eqs. (2.16) et (2.17) s'écrit dans le cas d'une plaque piézoélectrique

$$k = \frac{\omega}{v_t^D} \quad (2.20)$$

où la vitesse  $v_t^D$  est donnée par l'Eq. (C.9).

## 2.2 Effet d'une impédance électrique sur la vitesse

Soit le principe fondamental de la dynamique écrit suivant l'axe  $z$

$$\frac{\partial T_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.21)$$

Le report de l'Eq. (2.16) dérivée selon  $z$  dans l'équation précédente donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\rho}{c_{33}^D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.22)$$

La capacité électrique  $C$  n'a donc aucune influence sur la vitesse de propagation au cœur de la couche piézoélectrique. En effet, le terme  $\rho/c_{33}^D$  a la dimension de l'inverse d'une vitesse au carré et par conséquent la vitesse en présence de la capacité électrique  $C$  est la même que celle sans connexion électrique donnée par l'Eq. (C.9) :

$$v_t^D = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}}. \quad (2.23)$$

## 2.3 Modes propres dans le sens de la polarisation diélectrique

La structure se résume à une couche piézoélectrique d'épaisseur  $h$  située dans un environnement d'impédance mécanique négligeable devant l'impédance caractéristique du matériau. Dès lors les conditions limites sur la contrainte sont

$$T_3|_{z=0} = 0 \quad (2.24)$$

$$T_3|_{z=h} = 0. \quad (2.25)$$

L'utilisation de l'Eq. (2.16), avec  $S_3$  déduit du déplacement

$$u = a \cos kz + b \sin kz \quad (2.26)$$

conduit alors au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} \alpha (\cos kh - 1) & \alpha \sin kh - 1 \\ \alpha (\cos kh - 1) + \sin kh & \alpha \sin kh - \cos kh \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Une solution non triviale pour les coefficients  $a$  et  $b$  nécessite l'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (2.27). Elle conduit aux modes propres en épaisseur de la plaque piézoélectrique chargée par la capacité  $C$  vérifiés par l'équation transcendante

$$2\alpha (\cos kh - 1) + \sin kh = 0. \quad (2.28)$$

L'utilisation de la règle trigonométrique

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \cot \frac{x}{2} \quad (2.29)$$

permet d'écrire l'Eq. (2.28) sous la forme

$$\frac{k_t^2}{1 + \frac{C_0}{C}} = \frac{kh}{2} \cot \frac{kh}{2}, \quad (2.30)$$

soit en vertu de  $k = 2\pi f_{rm}/v_t^D$  :

$$\frac{k_t^2}{1 + \frac{C_0}{C}} = \frac{\pi f_{rm} h}{v_t^D} \cot \frac{\pi f_{rm} h}{v_t^D} \quad (2.31)$$

où  $f_{rm}$  sont les fréquences de résonance mécanique suivant l'épaisseur de la couche. D'après l'Eq. (C.11), cette relation peut s'écrire sous une forme plus condensée :

$$\frac{k_t^2}{1 + \frac{C_0}{C}} = \frac{\pi}{2} \frac{f_{rm}}{f_a} \cot \frac{\pi}{2} \frac{f_{rm}}{f_a}. \quad (2.32)$$

La fréquence  $f_{rm}$  varie avec la valeur de la capacité électrique  $C$  alors que la fréquence  $f_a$  n'est qu'une référence liée aux propriétés intrinsèques du matériau et à sa géométrie.

Si  $C = 0$ , l'Eq. (2.32) s'écrit alors simplement

$$\cos \frac{\pi f_{rm}}{2 f_a} = 0. \quad (2.33)$$

La première fréquence  $f_{rm}$  qui vérifie cette équation est donc  $f_a$ , ce qui est cohérent avec sa définition donnée dans l'annexe C. Si maintenant  $C \rightarrow \infty$ , l'Eq. (2.32) se limite à

$$k_t^2 = \frac{\pi f_{rm}}{2 f_a} \cot \frac{\pi f_{rm}}{2 f_a}. \quad (2.34)$$

Par identification avec l'Eq. (C.13), on constate désormais que la première fréquence  $f_{rm}$  vérifiant cette équation est  $f_r$ , résultat attendu d'après sa définition dans l'annexe C.

On vient donc de démontrer qu'une capacité électrique  $C$  connectée aux bornes d'une couche piézoélectrique permet de faire varier, suivant la valeur de  $C$ , la première fréquence de résonance mécanique  $f_{rm}$  entre la fréquence  $f_r$  ( $C \rightarrow \infty$ ) et la fréquence  $f_a$  ( $C = 0$ ). L'origine physique sur cette accordabilité n'est pas simple et n'est pas due à un changement de vitesse de propagation dans le matériau, comme démontré précédemment.

L'Eq. (C.13) montre que l'accordabilité est limitée par le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique du matériau : plus  $k_t$  est important, plus le matériau est accordable. Lorsque seront étudiés les super-réseaux accordables dans le prochain chapitre, on choisira donc le matériau en conséquence.

Il est à noter que de nos jours on sait concevoir un circuit électronique simulant une capacité électrique négative. Ce circuit électronique couplé au système résonant qu'est l'élément piézoélectrique fait naître le risque d'instabilité du système. En admettant que ces risques soient écartés, l'Eq. (2.17) montre que  $C \rightarrow -C_0$  est la valeur limite de la capacité électrique négative, entraînant  $\alpha$  et les fréquences de résonance propres vers l'infini (la couche semble être infiniment rigide).

## 2.4 Le barreau piézoélectrique

La validation expérimentale est difficile sur une plaque piézoélectrique pour deux raisons. La première est que les modes latéraux perturbent la mesure des fréquences de résonance et d'antirésonance, une erreur importante est donc commise sur ces relevés. La seconde est qu'une couche d'épaisseur inférieure au millimètre nous invite à travailler dans une gamme de fréquence supérieure au MHz, fréquence bien trop élevée pour les équipements de notre laboratoire. Il est, de plus, complexe d'obtenir un collage uniforme sur une grande surface.

Ces raisons nous ont donc conduits à travailler sur un barreau long. Par définition, un barreau présente une longueur très grande devant ses dimensions latérales. Soit présenté en Fig. 2.3 un barreau, ou plus précisément un cylindre de révolution, piézoélectrique de longueur  $\ell$  dont les

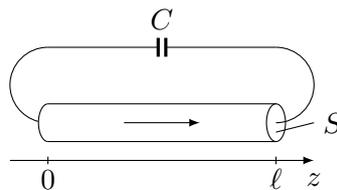


FIGURE 2.3 – Représentation d'un barreau piézoélectrique de longueur  $\ell$  connecté à une capacité électrique  $C$ .

interfaces en  $z = 0$  et  $z = \ell$  disposent d'électrodes d'aire  $S$  permettant de connecter une capacité électrique  $C$ . La polarisation diélectrique est orientée suivant l'axe  $z$  et est indiquée sur la figure par une flèche. Les équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel du barreau données par les Eqs. (C.3) et (C.4) sont

$$S_3 = s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3 \quad (2.35)$$

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3. \quad (2.36)$$

où  $s_{33}^D$ ,  $g_{33}$  et  $\beta_{33}^T$  sont respectivement la constante de compliance élastique à déplacement électrique constant, la constante de déformation piézoélectrique et l'imperméabilité diélectrique à contrainte constante.

La contrainte dans le barreau piézoélectrique s'écrit donc

$$T_3 = \frac{1}{s_{33}^D} \left( S_3 - k\alpha \left[ u \right]_{z=0}^{z=\ell} \right) \quad (2.37)$$

avec

$$\alpha = \frac{k_{33}^2}{k\ell \left( 1 + \frac{C_0}{C} \right)} \quad (2.38)$$

où  $k_{33}$  et  $C_0$  sont respectivement le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique et la capacité bloquée dans le cas d'un barreau polarisé suivant son axe principal donnés par les Eqs. (C.8) et (C.16) :

$$k_{33} = \sqrt{\frac{g_{33}^2}{s_{33}^E \beta_{33}^T}} \quad (2.39)$$

$$C_0 = \frac{S}{\ell \beta_{33}^T} (1 - k_{33}^2). \quad (2.40)$$

Le nombre d'onde  $k$  introduit dans les Eqs. (2.37) et (2.38) s'écrit dans le cas d'un barreau piézoélectrique

$$k = \frac{\omega}{v_b^D} \quad (2.41)$$

où la vitesse  $v_b^D$  est donnée par l'Eq. (C.10).

Les Eqs. (2.37) et (2.38) sont très similaires aux Eqs. (2.16) et (2.17). Dès lors, par analogie avec l'Eq. (2.28), les modes propres suivant la longueur du barreau chargé par la capacité  $C$  se déterminent directement en résolvant l'équation transcendante

$$2\alpha (\cos k\ell - 1) + \sin k\ell = 0 \quad (2.42)$$

où  $\alpha$  est cette fois donné par l'Eq. (2.38). Grâce à l'Eq. (2.29), l'Eq. (2.42) s'écrit sous la forme de l'Eq. (2.32), à savoir

$$\frac{k_{33}^2}{1 + \frac{C_0}{C}} = \frac{\pi}{2} \frac{f_{rm}}{f_a} \cot \frac{\pi}{2} \frac{f_{rm}}{f_a} \quad (2.43)$$

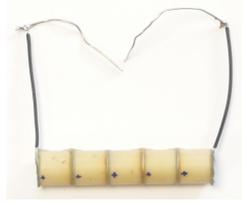
où  $f_{rm}$  sont les fréquences de résonance mécanique suivant la longueur de le barreau et où la fréquence  $f_a$  est donnée par l'Eq. (C.12).

Les valeurs limites de la capacité  $C$  conduisent à des résultats similaires au cas de la plaque. Lorsque  $C$  est nul, la première fréquence propre du barreau correspond simplement à sa fréquence  $f_a$ . De même, lorsque  $C \rightarrow \infty$ , l'Eq. (2.43) devient

$$k_{33}^2 = \frac{\pi}{2} \frac{f_{rm}}{f_a} \cot \frac{\pi}{2} \frac{f_{rm}}{f_a}, \quad (2.44)$$

$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$k_{33}$	$\epsilon_{33}^T$ (F/m)	$s_{33}^D$ (m <sup>2</sup> /N)
7650	.74	$25.7 \cdot 10^{-8}$	$9.05 \cdot 10^{-12}$

TABLEAU 2.1 – Propriétés du NCE56 (Noliac).

FIGURE 2.4 – Cylindre de révolution de longueur  $\ell = 50$  mm et de rayon 5 mm composé de 5 cylindres de 10 mm de NCE56.

où l'identification avec (C.14) montre que la première fréquence  $f_{rm}$  vérifiant cette équation est  $f_r$ .

Ainsi, le barreau et la plaque connectés à une capacité électrique ont rigoureusement le même comportement et sont gérés par des équations très similaires,  $k_t$  apparaissant pour la plaque et  $k_{33}$  apparaissant pour le barreau.

## 2.5 Mesures

Les mesures ont été effectuées sur le cylindre de révolution de longueur  $\ell = 50$  mm et de rayon 5 mm présenté en Fig. 2.4. Il est composé de 5 cylindres de 10 mm qui ont été préalablement polarisés puis collés à la colle époxy standard prise 24 h. Le matériau est du NCE56, un PZT de classe cristalline 6mm de chez Noliac dont les propriétés sont données dans le Tab. 2.1.

La procédure expérimentale pour quantifier la variation de la première fréquence de résonance mécanique  $f_{rm}$  en fonction de la valeur de la capacité électrique  $C$  nécessite dans un premier temps de connaître la capacité bloquée  $C_0$  de l'échantillon. L'Eq. (C.16) donne une valeur théorique de 18.2 pF. D'après [71], l'impédance électrique d'un barreau libre est

$$Z_{bl} = \frac{1}{j\omega} \frac{\ell}{S} \left( \beta_{33}^T + \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} \left( 1 - \frac{\tan k\ell/2}{k\ell/2} \right) \right). \quad (2.45)$$

En basse fréquence (BF),  $k\ell \ll 1$  et l'impédance électrique devient

$$Z_{BF} = \frac{1}{j\omega} \frac{\ell}{S} \beta_{33}^T. \quad (2.46)$$

L'impédance électrique d'un barreau piézoélectrique en basse fréquence se résume donc à une capacité de valeur

$$C_{BF} = \frac{C_0}{1 - k_{33}^2}. \quad (2.47)$$

La capacité  $C_{BF}$  a été mesurée à l'aide d'un impédancemètre HP4276A à une fréquence de 500 Hz et vaut 35.9 pF, d'où une capacité bloquée de 16.8 pF, ce qui est en bon accord avec la théorie. Puis les fréquences  $f_r$  et  $f_a$  ont été mesurées à l'aide d'un analyseur de spectre HP3562A et valent respectivement  $f_r = 27187$  Hz et  $f_a = 37750$  Hz. La mesure de ces fréquences a été faite électriquement, sachant que  $f_r$  et  $f_a$  correspondent respectivement à la première fréquence d'antirésonance/résonance de l'impédance électrique  $Z_{bl}$  donnée par l'Eq. (2.45). Le couplage piézoélectrique quasistatique est déduit de l'Eq. (C.14) et vaut  $k_{33} = .73$ , valeur proche du constructeur.

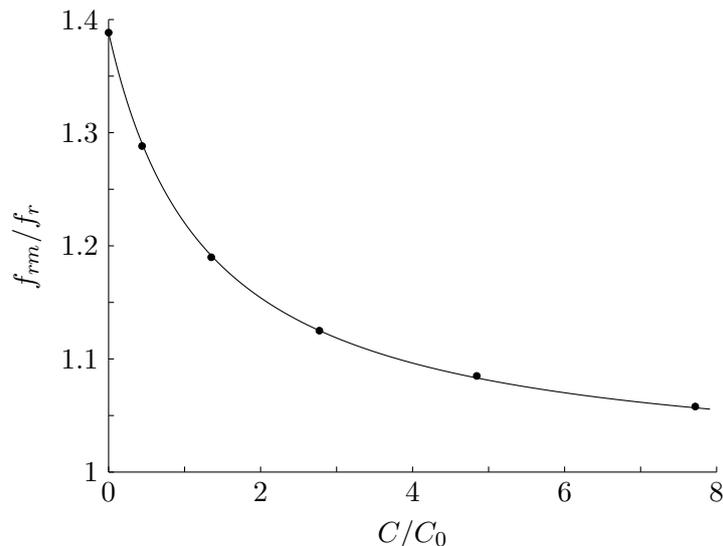


FIGURE 2.5 – Rapport de fréquences  $f_{rm}/f_r$  en fonction du rapport des capacités électriques  $C/C_0$  pour un barreau de NCE56. Calcul analytique (—) et mesures (•) issues du Tab. 2.2.

$C$ (pF)	7.4	22.7	46.6	81.4	13.0
$f_{rm}$ (kHz)	35025	32350	30588	29500	28763

TABLEAU 2.2 – Valeur mesurée de la première fréquence de résonance mécanique  $f_{rm}$  en fonction de la capacité électrique  $C$ .

La Fig. 2.5 illustre le rapport de fréquences  $f_{rm}/f_r$  en fonction du rapport des capacités électriques  $C/C_0$ . La procédure pour tracer cette courbe analytique consiste à utiliser l'Eq. (2.43) sous la forme

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{\frac{k_{33}^2}{\frac{\pi f_{rm}}{2 f_a} \cot \frac{\pi f_{rm}}{2 f_a}} - 1} \quad (2.48)$$

et à calculer  $C/C_0$  pour un certain nombre de valeurs de  $f_{rm}$  comprises entre  $f_r$  et  $f_a$ . Cette courbe analytique est confrontée aux mesures présentées par le Tab. 2.2, montrant un excellent accord. Les coefficients de qualité des fréquences de résonance d'un barreau libre sont très élevés, dès lors il n'a pas été possible d'obtenir des résultats stables avec un circuit électronique simulant une capacité électrique négative.

Ces résultats expérimentaux prouvent que la première fréquence de résonance mécanique  $f_{rm}$  s'accorde entre la fréquence  $f_a$  ( $C = 0$ ) et la fréquence  $f_r$  ( $C \rightarrow \infty$ ) à l'aide d'une capacité électrique connectée aux bornes d'une couche piézoélectrique.

# Chapitre 3

## Les super-réseaux élastique/piézoélectrique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Relation de dispersion</b>	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Discussion sur la capacité électrique négative</b>	<b>44</b>
<b>3.3</b>	<b>Positions des bandes interdites</b>	<b>45</b>
<b>3.4</b>	<b>Le super-réseau composé de barreaux</b>	<b>47</b>
<b>3.5</b>	<b>Mesures</b>	<b>48</b>

---

Le premier chapitre donne une introduction sur les super-réseaux en étudiant la relation de dispersion d'un super-réseau élastique. Le second chapitre examine l'influence d'une capacité électrique aux bornes d'une couche piézoélectrique seule. Ce chapitre propose une combinaison des deux précédents en intégrant dans un super-réseau élastique des couches piézoélectriques connectées à des capacités électriques.



### 3.1 Relation de dispersion

On considère en Fig. 3.1 le cas où les couches (1) sont simplement élastiques, sous-entendu non piézoélectriques, et les couches (2) sont piézoélectriques. Les interfaces disposent d'électrodes d'aire  $S$  permettant de connecter une capacité électrique  $C$  aux bornes de chaque couche piézoélectrique. La polarisation des ondes étant parallèle à la direction de propagation  $z$ , le déplacement  $u^{(i)}$  s'écrit dans chaque couche

$$u^{(i)} = a_i \cos k_i z + b_i \sin k_i z \quad (3.1)$$

avec  $a_i$  et  $b_i$  les amplitudes inconnues et  $k_i$  le nombre d'onde longitudinal. La vitesse des ondes longitudinales dépendant à la fois des matériaux et des géométries, les nombres d'onde s'écrivent respectivement dans les couches (1) et (2)

$$k_1 = \frac{\omega}{v_t^{(1)}} \quad (3.2)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_t^D} \quad (3.3)$$

où les vitesses  $v_t^{(1)}$  et  $v_t^D$  sont données par les Eqs. (B.2) et (C.9). La relation de dispersion se déduit des conditions limites du super-réseau. Elle sont au nombre de quatre pour déterminer  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$ . La condition de continuité du déplacement en  $z = 0$  est donnée par l'Eq. (1.5) et la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée au déplacement est donnée par l'Eq. (1.12). Restent alors à déterminer la condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$  et la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée à la contrainte.

La contrainte dans les couches élastiques se déduit de la loi de Hooke donnée par l'Eq. (B.1) :

$$T_3^{(1)} = c_{33}^{(1)} S_3^{(1)}. \quad (3.4)$$

Dans les couches piézoélectriques, la contrainte se déduit des équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel d'une plaque données par les Eqs. (C.1) et (C.2) :

$$T_3^{(2)} = c_{33}^D S_3^{(2)} - h_{33} D_3 \quad (3.5)$$

$$E_3 = -h_{33} S_3^{(2)} + \beta_{33}^S D_3. \quad (3.6)$$

Dès lors, si une capacité externe  $C$  est connectée entre les électrodes situées sur les surfaces de la couche piézoélectrique, la différence de potentiel  $V$  entre les électrodes est fonction du courant  $I$  traversant  $C$  et s'écrit en accord avec l'Eq. (2.3)

$$V = \frac{I}{jC\omega} = - \int_0^{h_2} E_3 dz, \quad (3.7)$$

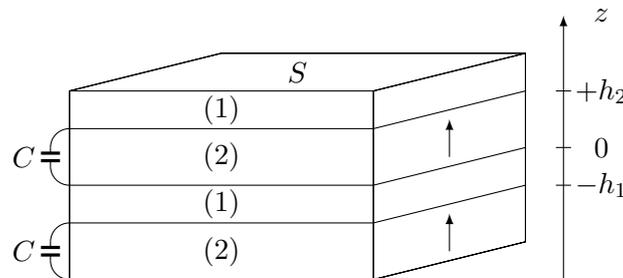


FIGURE 3.1 – Super-réseau constitué alternativement de couches élastiques (1) et piézoélectriques (2) d'épaisseurs respectives  $h_1$  et  $h_2$ . Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

soit en faisant usage de l'Eq. (2.7) :

$$V = \frac{SD_3}{C} = - \int_0^{h_2} E_3 dz. \quad (3.8)$$

Suivant le même cheminement que le chapitre précédent, le report de l'Eq. (3.6) dans l'Eq. (3.8), l'intégration suivant l'épaisseur de la couche  $h_2$  et l'application du théorème de Gauss qui se résume dans le cas unidimensionnel à

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad (3.9)$$

c'est-à-dire que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de chaque couche, conduisant à l'expression du déplacement électrique

$$D_3 = \frac{h_{33}}{\beta_{33}^S h_2 + \frac{C}{S}} \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h_2} \quad (3.10)$$

qui est à son tour reporté dans l'Eq. (3.5), exprimant ainsi la contrainte dans les couches piézoélectriques sous la forme

$$T_3^{(2)} = c_{33}^D \left( S_3^{(2)} - k_2 \alpha \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h_2} \right) \quad (3.11)$$

avec

$$\alpha = \frac{k_t^2}{k_2 h_2 \left( 1 + \frac{C_0}{C} \right)} \quad (3.12)$$

où  $k_t$  et  $C_0$  sont respectivement le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique et la capacité bloquée donnés par les Eqs. (C.7) et (C.15).

La condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$  donnée par l'Eq. (1.6) s'écrit à l'aide des Eqs. (3.4) et (3.11)

$$c_{33}^{(1)} S_3^{(1)} \Big|_{z=0} = c_{33}^D \left( S_3^{(2)} \Big|_{z=0} - k_2 \alpha \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h_2} \right), \quad (3.13)$$

soit en utilisant l'Eq. (3.1) :

$$c_{33}^{(1)} k_1 b_1 = c_{33}^D k_2 (b_2 - \alpha (a_2 (\cos k_2 h_2 - 1) + b_2 \sin k_2 h_2)). \quad (3.14)$$

De même, le report des Eqs. (3.4) et (3.11) dans la relation de phase de Bloch-Floquet (1.13) s'écrit

$$c_{33}^D \left( S_3^{(2)} \Big|_{z=h_2} - k_2 \alpha \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h_2} \right) = X c_{33}^{(1)} S_3^{(1)} \Big|_{z=-h_1}, \quad (3.15)$$

soit à l'aide de l'Eq. (3.1) :

$$c_{33}^D k_2 (-a_2 \sin k_2 h_2 + b_2 \cos k_2 h_2 - \alpha (a_2 (\cos k_2 h_2 - 1) + b_2 \sin k_2 h_2)) \\ = X c_{33}^{(1)} k_1 (a_1 \sin k_1 h_1 + b_1 \cos k_1 h_1). \quad (3.16)$$

Les quatre conditions (1.5), (1.12), (3.14) et (3.16) conduisent au système matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha (\cos k_2 h_2 - 1) & \alpha \sin k_2 h_2 - 1 \\ -X \cos k_1 h_1 & X \sin k_1 h_1 & \cos k_2 h_2 & \sin k_2 h_2 \\ X \gamma \sin k_1 h_1 & X \gamma \cos k_1 h_1 & \alpha (\cos k_2 h_2 - 1) + \sin k_2 h_2 & \alpha \sin k_2 h_2 - \cos k_2 h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

$Y$ (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$v_t$ (m/s)
310	.27	3940	9915

TABLEAU 3.1 – Propriétés de l'alumine.

avec

$$\gamma = \frac{c_{33}^{(1)} k_1}{c_{33}^D k_2}. \quad (3.18)$$

Comme dans le chapitre concernant les super-réseaux élastique/élastique, le report des Eqs. (3.2), (3.3), (1.3) et (C.9) dans l'Eq. (3.18) montre que  $\gamma$  représente le rapport des impédances acoustiques caractéristiques  $Z^{(1)} = \rho^{(1)} v_t^{(1)}$  et  $Z^{(2)} = \rho^{(2)} v_t^D$  des deux couches :

$$\gamma = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}}. \quad (3.19)$$

Ce système matriciel est cohérent avec celui des super-réseaux élastique/élastique donné par l'Eq. (1.16) : d'après l'Eq. (3.12), si le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique  $k_t$  est nul,  $\alpha = 0$  et la couche (2) est simplement élastique.

L'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (3.17) et l'utilisation de l'Eq. (1.11) conduisent à la relation de dispersion

$$\cos k(h_1 + h_2) = \left[ \cos k_1 h_1 \cos k_2 h_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 + \alpha \left( \frac{\sin k_1 h_1}{\gamma} (1 - \cos k_2 h_2) - \cos k_1 h_1 \sin k_2 h_2 \right) \right] \times \frac{1}{1 - \alpha \sin k_2 h_2}. \quad (3.20)$$

L'effet de la capacité électrique  $C$  peut se montrer par l'étude du courant qui la traverse. Ce courant n'existe que si le circuit électrique est fermé. Considérons dans un premier temps la Fig. 3.1 sans les capacités électriques  $C$ . Que les couches élastiques (1) soient électriquement conductrices ou non, le circuit électrique est ouvert et le courant le traversant est nul. On en déduit donc par la relation (2.7) que le déplacement électrique est nul. Dès lors, l'Eq. (3.5) se limite à

$$T_3^{(2)} = c_{33}^D S_3^{(2)}. \quad (3.21)$$

La contrainte s'écrit sous la même forme qu'un matériau simplement élastique et l'effet piézoélectrique n'est pas pris en compte. Cela revient à annuler  $\alpha$  dans la relation de dispersion (3.20). Le deuxième cas limite est le court-circuit, c'est à dire lorsque  $C \rightarrow \infty$ . Des boucles locales sont créées et un courant électrique peut circuler : l'effet piézoélectrique est pris en compte. Cet effet est évidemment d'autant plus fort que le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique est important. On en déduit donc que pour avoir une accordabilité importante, il est nécessaire d'avoir un coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique fort. Ceci est mis en exergue dans le coefficient  $\alpha$ . Enfin, le cas intermédiaire est une capacité positive. Son action se traduit par une réduction du couplage piézoélectrique effectif. On comprend alors aisément qu'un circuit électrique simulant une capacité négative produise l'effet inverse.

La Fig. 3.2 présente l'exemple d'un super-réseau composé d'une alternance de couches d'alumine (1) et de PZ29 (2) (PZT de classe cristalline 6mm de chez Ferroperm), d'épaisseurs  $h_1 = h_2 = 1$  mm, dont les propriétés sont respectivement données dans le Tab. 3.1 et l'annexe D. Les termes  $Y$ ,  $\nu$  et  $\rho$  désignent respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et la masse volumique. Les vitesses dans l'alumine et dans le PZ29 sont respectivement calculées à partir des Eqs. (B.2) et (C.9). La figure présente les courbes de dispersion du super-réseau en circuit ouvert ( $C = 0$ ) et en court-circuit ( $C \rightarrow \infty$ ) calculées analytiquement et numériquement

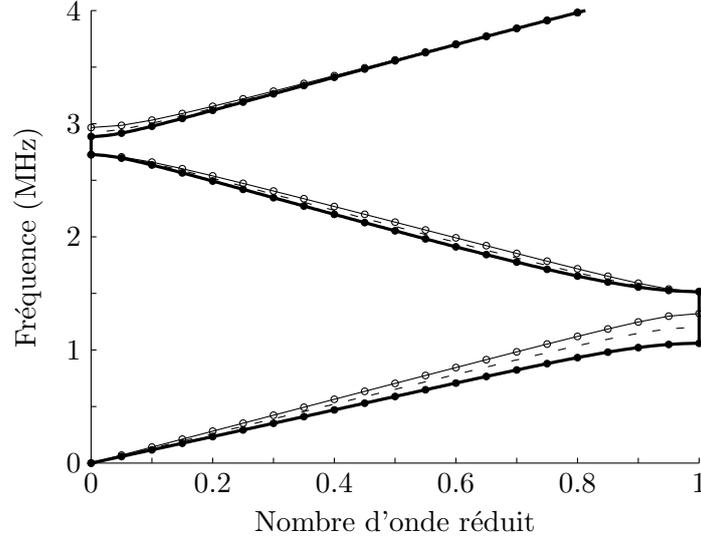


FIGURE 3.2 – Courbe de dispersion d’un super-réseau alumine/PZ29 de couches d’épaisseur 1 mm. Les couches piézoélectriques sont en circuit ouvert (calcul analytique (—), calcul numérique ( $\circ$ )), en court-circuit (calcul analytique (—), calcul numérique ( $\bullet$ )) ou connectées à une capacité électrique de valeur  $C_0$  (- - -).

par ATILA, montrant un très bon accord. ATILA est un code de résolution par la méthode des éléments finis où les courbes de dispersion d’une structure périodique peuvent être calculées en appliquant des relations de phase aux extrémités d’une maille élémentaire.

On remarque qu’une des bornes de la bande interdite est invariable, que ce soit pour les bandes interdites au bord ou au centre de la première zone de Brillouin. C’est tout à fait logique puisqu’une seule couche du bicouche est accordée, en l’occurrence la couche (2), alors que la couche passive (1) est invariable. Les valeurs des bornes sont déterminées analytiquement plus loin. La troisième courbe, qui se place naturellement entre le cas des couches en circuit ouvert et le cas des couches court-circuitées, correspond au cas où la capacité électrique  $C = C_0$ . À ce jour, ATILA ne permet pas de calculer une courbe de dispersion pour une impédance donnée.

### 3.2 Discussion sur la capacité électrique négative

Soit présentées en Fig. 3.3a les courbes de dispersion correspondant à un super-réseau composé d’une alternance de couches de verre (1) -dont les propriétés sont données dans le Tab. 1.1- et de PZ29 (2) et en Fig. 3.3b les courbes de dispersion correspondant à un super-réseau composé d’une alternance de couches d’alumine (1) et de PZ29 (2). Dans les deux cas, l’épaisseur des couches est  $h_1 = h_2 = 1$  mm. Les courbes présentées correspondent dans les deux cas aux couches piézoélectriques en circuit ouvert (—), court-circuitées (—), connectées à une capacité électrique de valeur  $C_0$  (- - -) ou de valeur  $-3/4 C_0$  (---). Sur les deux figures, la courbe de dispersion correspondant aux couches piézoélectriques shuntées par la capacité électrique  $C = C_0$  se place entre le cas des couches en circuit ouvert et le cas des couches court-circuitées, et naturellement lorsque la capacité électrique est négative, la borne variable se situe à l’extérieur de cet intervalle. L’effet est cependant tout à fait différent suivant le super-réseau.

Sur la Fig. 3.3a, la première bande interdite s’élargit au fur et à mesure que la valeur de la capacité électrique diminue ( $C \rightarrow \infty$ ,  $C = C_0$  puis  $C = 0$ ), il est donc normal qu’une capacité électrique négative élargisse encore la première bande interdite. Le rapport d’impédance  $\gamma$  donné

par l'Eq. (3.18) vaut ici

$$\gamma = \frac{c_{33}^{(1)} k_1}{c_{33}^D k_2} = .49. \quad (3.22)$$

Or, nous avons vu dans le chapitre 2 que plus la valeur de la capacité électrique diminue, plus la rigidité apparente de la couche piézoélectrique  $c_{33}^D$  augmente. Dès lors, tout se passe comme si  $\gamma$  diminuait, s'éloignant ainsi de l'unité et élargissant la première bande interdite. La borne inférieure reste quant à elle fixe.

Les choses se passent différemment sur la Fig. 3.3b. Le rapport d'impédance  $\gamma$  vaut cette fois 1.31. Lorsque la valeur de la capacité électrique diminue, la largeur de la première bande interdite diminue. Il existe donc une capacité négative pour laquelle la première bande interdite n'existe plus. Si la valeur de cette capacité électrique diminue encore, elle ouvre alors la première bande interdite de l'autre côté de la borne fixe. La borne supérieure reste quant à elle fixe.

### 3.3 Positions des bandes interdites

Les positions des bandes interdites se calculent à partir de l'Eq. (3.20) quand on se situe soit à la limite de la première zone de Brillouin, soit au centre de la zone de Brillouin, c'est à dire

$$\left[ \cos k_1 h_1 \cos k_2 h_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 + \alpha \left( \frac{\sin k_1 h_1}{\gamma} (1 - \cos k_2 h_2) - \cos k_1 h_1 \sin k_2 h_2 \right) \right] \times \frac{1}{1 - \alpha \sin k_2 h_2} = \pm 1. \quad (3.23)$$

Comme dans le chapitre concernant les super-réseaux élastique/élastique, la  $n$ -ième bande interdite est trouvée en effectuant le changement de variables donné par les Eqs. (1.24) et (1.25) dans l'Eq. (3.23) :

$$\left[ \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{2t}{1 + t^2} \frac{2\tau}{1 + \tau^2} + 2\alpha \left( \frac{t}{\gamma(1 + t^2)} \left( 1 - \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \right) - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \frac{\tau}{1 + \tau^2} \right) \right] \times \frac{1}{1 - \frac{2\alpha\tau}{1 + \tau^2}} = (-1)^n. \quad (3.24)$$

Quand  $n$  est impair, la bande interdite considérée se situe à la limite de la première zone de Brillouin, c'est à dire lorsque

$$k(h_1 + h_2) = \pi \quad (3.25)$$

et la résolution de l'Eq. (3.24) conduit à

$$\underbrace{(t\tau - \gamma)}_{\text{Borne fixe}} \underbrace{(\gamma t\tau - 1 + 2\alpha\tau)}_{\text{Borne variable}} = 0. \quad (3.26)$$

De même, quand  $n$  est pair, la bande interdite considérée se situe au centre de la zone de Brillouin ( $k = 0$ ), et la résolution de l'Eq. (3.24) donne

$$\underbrace{(\gamma t + \tau)}_{\text{Borne fixe}} \underbrace{(\gamma\tau + t - 2\alpha\tau)}_{\text{Borne variable}} = 0. \quad (3.27)$$

On constate donc que chaque bande interdite, qu'elle soit impaire ou paire, possède une borne fixe et une borne variable. Leurs positions relatives dépendent du rapport des impédances acoustiques caractéristiques  $\gamma$  et du coefficient  $\alpha$ .

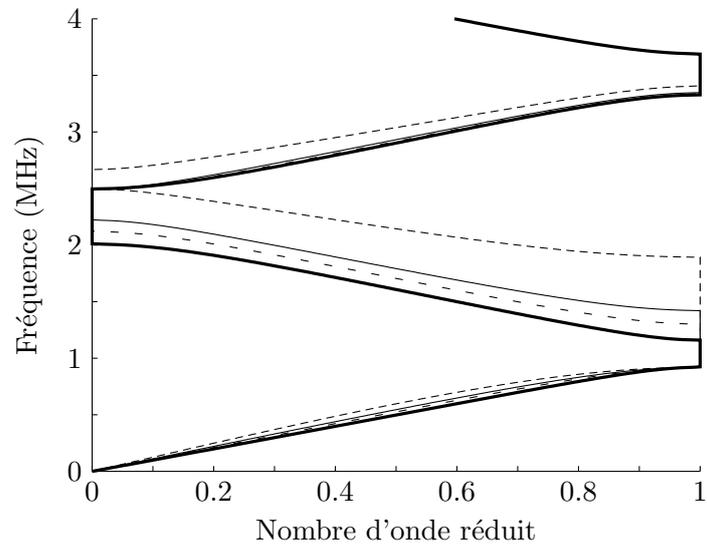
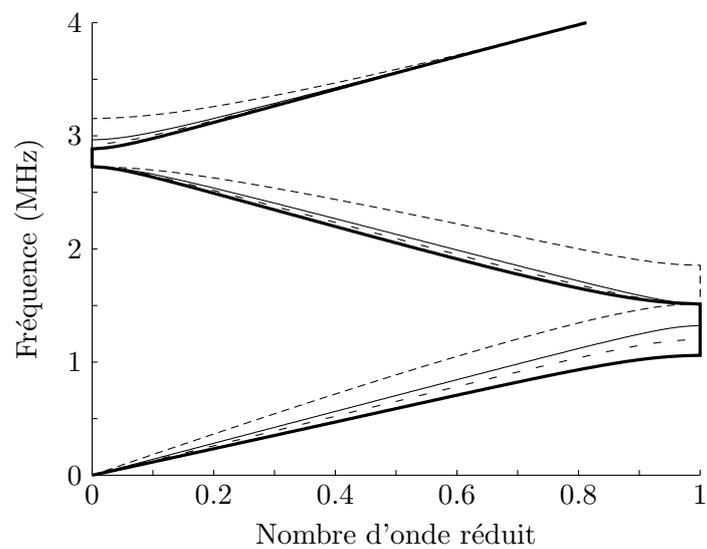
(a) verre/PZ29 :  $\gamma = .49$ (b) alumine/PZ29 :  $\gamma = 1.31$ 

FIGURE 3.3 – Courbe de dispersion d'un super-réseau verre/PZ29 (3.3a) ou alumine/PZ29 (3.3b) de couches d'épaisseur 1 mm. Les couches piézoélectriques sont en circuit ouvert (—) ou en court-circuit (—), connectées à une capacité électrique de valeur  $C_0$  (- - -) ou de valeur  $\frac{3}{4}C_0$  (- - -).

### 3.4 Le super-réseau composé de barreaux

Comme expliqué dans le chapitre concernant l'effet d'une impédance électrique aux bornes d'une couche piézoélectrique, la mesure sur des multicouches présente des difficultés qui sont les perturbations liées aux modes latéraux sur les relevés de fréquences et la limitation fréquentielle des équipements de notre laboratoire. Sur un super-réseau piézoélectrique, il faut en plus que les épaisseurs des électrodes demeurent négligeables devant les épaisseurs des couches.

Les expériences ont donc été menées sur le super-réseau composé de barreaux longs présenté en Fig. 3.4. Cette section se propose d'adapter le modèle développé pour les multicouches aux super-réseaux composés de barreaux. Dès lors, les nombres d'onde s'écrivent respectivement dans les couches (1) et (2)

$$k_1 = \frac{\omega}{v_b^{(1)}} \quad (3.28)$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_b^D} \quad (3.29)$$

avec les vitesses  $v_b^{(1)}$  et  $v_b^D$  données par les Eqs. (B.4) et (C.10). La contrainte dans les couches élastiques se déduit de la loi de Hooke donnée par l'Eq. (B.3) :

$$T_3^{(1)} = \frac{S_3^{(1)}}{s_{33}^{(1)}}. \quad (3.30)$$

Les équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel du barreau données par les Eqs. (C.3) et (C.4) sont

$$S_3^{(2)} = s_{33}^D T_3^{(2)} + g_{33} D_3 \quad (3.31)$$

$$E_3 = -g_{33} T_3^{(2)} + \beta_{33}^T D_3. \quad (3.32)$$

La contrainte dans les couches piézoélectriques se décline directement de l'Eq. (2.37) :

$$T_3^{(2)} = \frac{1}{s_{33}^D} \left( S_3^{(2)} - k_2 \alpha \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=\ell_2} \right) \quad (3.33)$$

avec  $\alpha$  donné par l'Eq. (2.38) :

$$\alpha = \frac{k_{33}^2}{k_2 \ell_2 \left( 1 + \frac{C_0}{C} \right)}. \quad (3.34)$$

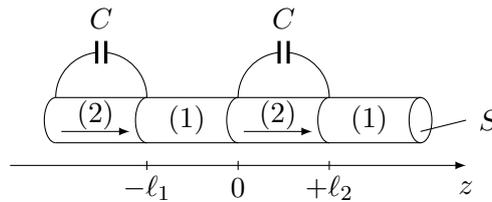


FIGURE 3.4 – Super-réseau constitué alternativement de barreaux élastiques (1) et piézoélectriques (2) de longueurs respectives  $\ell_1$  et  $\ell_2$ . Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

La relation de dispersion dans le cas d'une alternance de barreaux élastique/piézoélectrique est donc la même que dans le cas d'une alternance de plaques élastique/piézoélectrique donnée par l'Eq. (3.20) :

$$\cos k(\ell_1 + \ell_2) = \left[ \cos k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2 + \alpha \left( \frac{\sin k_1 \ell_1}{\gamma} (1 - \cos k_2 \ell_2) - \cos k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2 \right) \right] \times \frac{1}{1 - \alpha \sin k_2 \ell_2}. \quad (3.35)$$

où cette fois  $\alpha$  est donné par l'Eq. (3.34) et où le rapport des impédances acoustiques caractéristiques  $\gamma$  est

$$\gamma = \frac{s_{33}^D k_1}{s_{33}^{(1)} k_2} = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}} \quad (3.36)$$

avec  $Z^{(1)} = \rho^{(1)} v_b^{(1)}$  et  $Z^{(2)} = \rho^{(2)} v_b^D$ .

La comparaison des relations de dispersion (3.20) et (3.35) montre qu'il n'y a qu'une adaptation des coefficients entre les deux équations : les épaisseurs  $h_1$   $h_2$  deviennent les longueurs  $\ell_1$   $\ell_2$ , le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique  $k_t$  devient  $k_{33}$ , la capacité bloquée s'écrit différemment suivant la géométrie et le rapport des impédances acoustiques caractéristiques s'écrit à partir des constantes de compliance élastiques  $s_{33}$  à la place des constantes de rigidité élastiques  $c_{33}$ .

Les bandes interdites se déterminent toujours en résolvant les équations transcendantes (3.26) et (3.27), mais avec cette fois  $\alpha$  donné par l'Eq. (3.34), le rapport d'impédance donné par l'Eq. (3.36) et les changements de variables suivants :

$$t = \tan \frac{k_1 \ell_1}{2} \quad (3.37)$$

$$\tau = \tan \frac{k_2 \ell_2}{2}. \quad (3.38)$$

### 3.5 Mesures

La mesure de la transmission à travers un super-réseau fini nécessite quelques précautions. Les références [72, 73] indiquent qu'afin d'éviter l'apparition d'une résonance parasite dans les bandes interdites, il faut d'une part que le nombre d'éléments composant le super-réseau soit impair et d'autre part que les éléments les plus denses se situent aux extrémités. Le caractère fini de la structure fait alors apparaître des résonances dues aux modes en demi-longueurs d'onde dans les bandes passantes de la transmission.

Le modèle a été validé expérimentalement sur le super-réseau composé d'une alternance de barreaux d'alumine et de NCE56 décrit en Fig. 3.5. L'alumine étant plus dense que le NCE56, il constitue les premier et dernier barreaux de la structure. Comme préconisé, l'ensemble du super-réseau est constitué d'un nombre impair de couches : 5.5 périodes.

Le banc de contrainte présenté en Fig. 3.6 est composé de deux transducteurs (émission et réception) Panametrics V101 0.5 MHz  $\varnothing 1''$  qui sont connectés à un générateur d'impulsions/récepteur Panametrics modèle 5800, lui même connecté et synchronisé à un oscilloscope Lecroy 312A. Entre les deux transducteurs se situe le super-réseau mesuré. Le banc dispose d'une vis de précontrainte mécanique afin d'assurer le contact entre les transducteurs et le super-réseau.

La fréquence des impulsions a été réglée de telle sorte que le signal transmis est très atténué lors de la nouvelle impulsion. Dès lors, la réponse impulsionnelle du signal transmis n'est pas affectée par le fenêtrage rectangulaire qui lui est appliqué afin de l'enregistrer. Le rapport signal/bruit de cette mesure a été sensiblement augmenté par moyennage. De même, l'amplitude du signal a été réglée à la limite de la fenêtre d'acquisition, bénéficiant ainsi de la dynamique

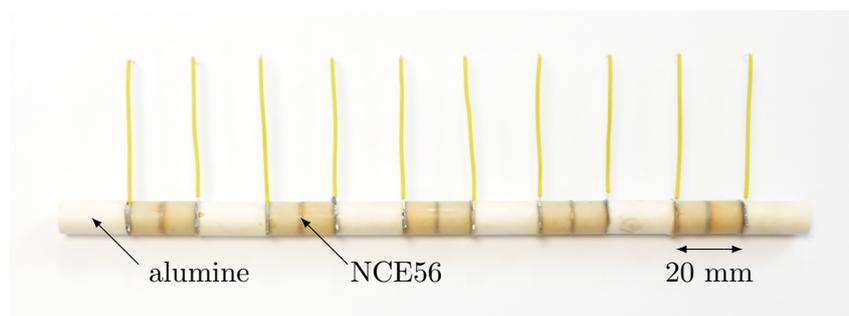


FIGURE 3.5 – Super-réseau composé d'une alternance de barreaux d'alumine/NCE56 de rayon 5 mm. Le pas du réseau est de 40 mm. Les condensateurs électriques (non visibles sur la photo) sont connectés à des électrodes en laiton d'épaisseur 25  $\mu\text{m}$ .

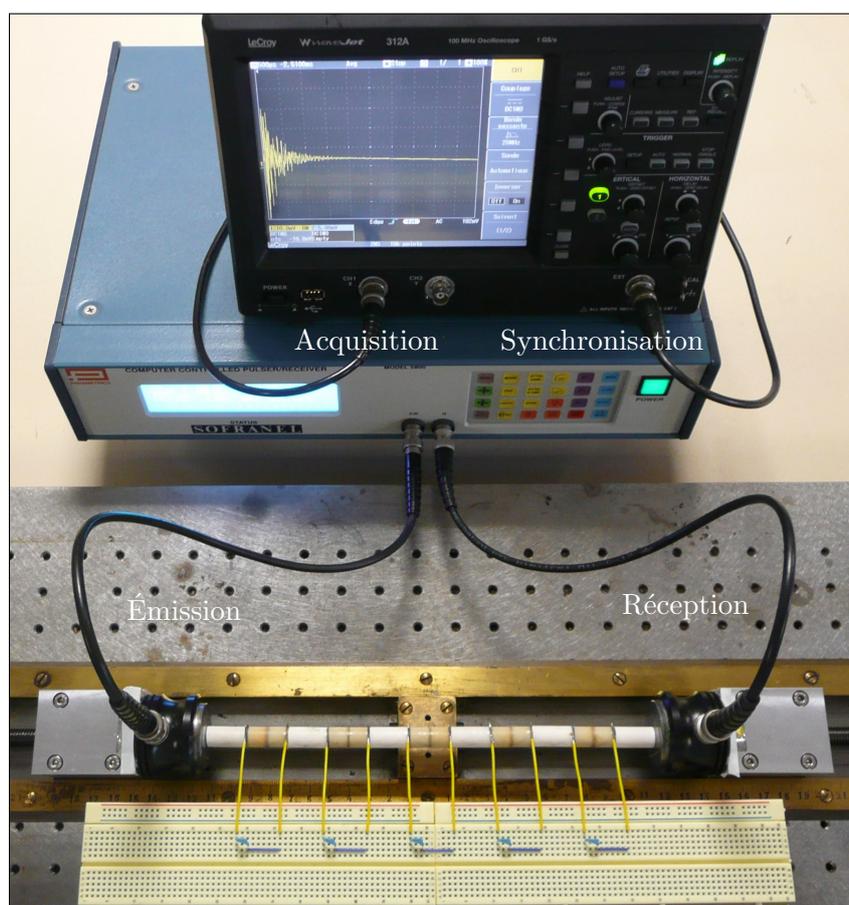


FIGURE 3.6 – Banc de contrainte utilisé pour relever la réponse impulsionnelle du signal transmis à travers le super-réseau. Les condensateurs électriques sont visibles en bas de la photo, sur la platine d'expérimentation.

maximale de l'oscilloscope. La transmission est finalement déduite de la réponse impulsionnelle par transformée de Fourier rapide (FFT).

La Fig. 3.7 présente l'évolution de la transmission expérimentale pour plusieurs valeurs de capacités électriques connectées aux couches piézoélectriques ( $C = 0, 22 \text{ pF}, 47 \text{ pF}, 100 \text{ pF}, 220 \text{ pF}$  et  $C \rightarrow \infty$ ). Ces courbes sont comparées aux courbes de dispersion analytiques (dont les axes ont été inversés par rapport au début du manuscrit) calculées par l'Eq. (3.35) pour lesdites valeurs des capacités électriques.

Si l'on se concentre dans un premier temps sur les courbes de transmission expérimentales, on remarque bien les résonances liées aux modes en demi-longueurs d'ondes. Lorsque la bande interdite est étroite comme c'est le cas sur la Fig. 3.7a, il est alors très difficile de la discerner. L'utilisation d'un gel couplant entre le super-réseau et les transducteurs réduit le facteur de qualité de ces résonances mais la dynamique du signal transmis est affectée. La quantité de gel fait donc l'objet d'un compromis.

L'accord entre les courbes de transmission expérimentales et les courbes de dispersion analytiques est tout à fait correct. Le rapport d'impédance  $\gamma$  donné par l'Eq. (3.36) étant supérieur à l'unité, la borne supérieure de la première bande interdite est fixe alors que la borne inférieure s'accorde avec la valeur de la capacité électrique, comme le prévoyait la Fig. 3.3b. La profondeur de la bande interdite s'agrandit au fur et à mesure que la bande interdite s'élargit, passant ainsi de quelques dB sur la Fig. 3.7a à près de 40 dB sur la Fig. 3.7f, seuil de bruit de l'oscilloscope.

Ces mesures prouvent ainsi qu'il est très facile d'accorder un super-réseau élastique/piézoélectrique en connectant un condensateur électrique aux bornes de chaque couche piézoélectrique et en faisant varier sa valeur. La limitation de cette accordabilité se résume à la valeur du coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique.

Il n'y avait ici aucun intérêt à tester le super-réseau avec un circuit électronique simulant une capacité électrique négative puisque celui-ci aurait fermé la bande interdite. Quand bien même on aurait voulu valider le concept, la réduction de la bande interdite aurait été si faible qu'on aurait eu peine à la percevoir à cause des modes en demi-longueurs d'onde dans les bandes passantes.

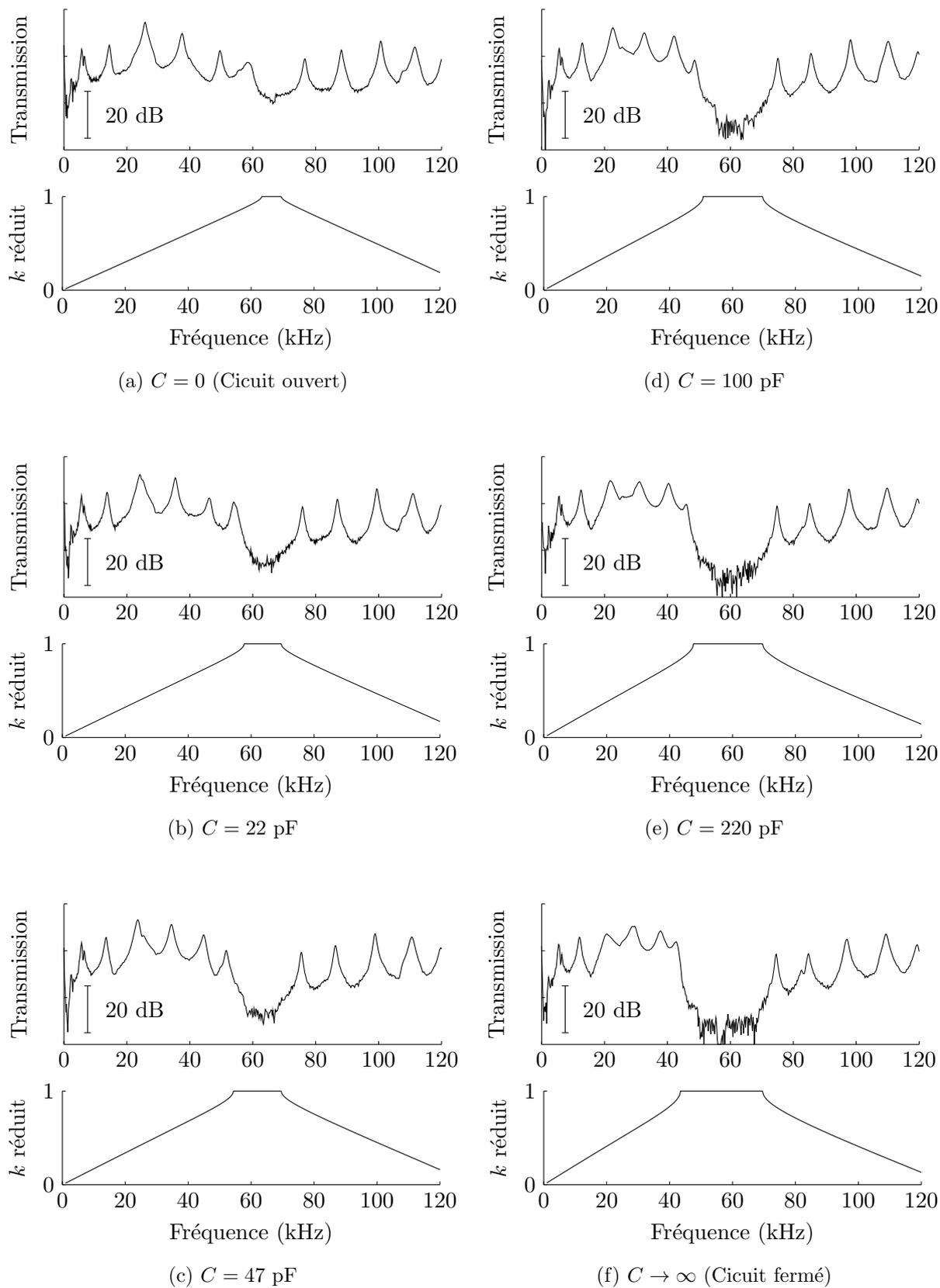


FIGURE 3.7 – Courbe de transmission expérimentale (courbe supérieure) comparée à la courbe de dispersion analytique (courbe inférieure) calculée pour plusieurs capacités électriques connectées aux bornes des barreaux piézoélectriques.



Deuxième partie

Les super-réseaux exclusivement  
piézoélectriques



# Chapitre 4

## La condition électrique périodique

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Le court-circuit</b> . . . . .	<b>57</b>
4.1.1	Relation de dispersion . . . . .	57
4.1.2	Positions des bandes interdites . . . . .	58
4.1.3	Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	59
4.1.4	Incompatibilité des conditions limites . . . . .	61
<b>4.2</b>	<b>L'alternance circuit ouvert/court-circuit</b> . . . . .	<b>62</b>
4.2.1	Relation de dispersion . . . . .	62
4.2.2	Positions des bandes interdites . . . . .	63
4.2.3	Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	65
<b>4.3</b>	<b>Le court-circuit à polarisation diélectrique alternée</b> . . . . .	<b>66</b>
4.3.1	Relation de dispersion . . . . .	66
4.3.2	Positions des bandes interdites . . . . .	68
4.3.3	Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	69
<b>4.4</b>	<b>Vitesse à l'origine</b> . . . . .	<b>70</b>

---

La première partie du manuscrit a exploré le comportement des super-réseaux partiellement piézoélectriques et l'accordabilité des bandes interdites a été prouvée. Cette seconde partie entre dans le vif du sujet car à partir de maintenant les super-réseaux seront exclusivement piézoélectriques, ce qui leur confère des propriétés tout à fait intéressantes. Ce chapitre répond à la question suivante : que se passe-t-il si une condition électrique périodique est appliquée à un matériau piézoélectrique homogène ?

Les modèles analytiques seront développés dans le cas de multicouches, puis les résultats seront transposés au cas des super-réseaux composés de barreaux. Nous avons vu précédemment que les largeurs des bandes interdites sont fortement dépendantes du coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique. Celui-ci étant plus important dans les barreaux que dans les plaques, il a été jugé préférable d'illustrer les courbes de dispersion des super-réseaux composés de barreaux. Les phénomènes ainsi mis en valeur facilitent les comparaisons entre les configurations.



## 4.1 Le court-circuit

### 4.1.1 Relation de dispersion

Soit un multicouche piézoélectrique composé d'un seul matériau présenté Fig. 4.1. Chaque couche, d'interfaces d'aire  $S$  et d'épaisseur  $h$ , est court-circuitée. Contrairement aux cas précédents, une seule couche forme la maille élémentaire de ce réseau, donc deux conditions limites suffiront pour déterminer la relation de dispersion.

Le déplacement dans chaque couche s'écrit

$$u = a \cos \tilde{k}z + b \sin \tilde{k}z \quad (4.1)$$

avec  $a$  et  $b$  les amplitudes inconnues et  $\tilde{k}$  le nombre d'onde longitudinal défini par

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{v_t^D} \quad (4.2)$$

où  $v_t^D$  est la vitesse des ondes longitudinales à déplacement électrique constant suivant l'axe  $z$  donnée par l'Eq. (C.9). Les conditions de continuité sur le déplacement et la contrainte étant satisfaites quelle que soit la fréquence (même matériau), la relation de dispersion est uniquement déterminée par la relation de phase de Bloch-Floquet.

La relation de phase appliquée au déplacement est

$$u|_{z=h} = Xu|_{z=0} \quad (4.3)$$

avec

$$X = e^{jkh}, \quad (4.4)$$

soit

$$a \cos \tilde{k}h + b \sin \tilde{k}h = Xa. \quad (4.5)$$

Il s'agit d'un multicouche, les équations de la piézoélectricité qui nous intéressent sont donc celles réduites au cas unidimensionnel d'une plaque données par les Eqs. (C.1) et (C.2) :

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3 \quad (4.6)$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3. \quad (4.7)$$

La différence de potentiel aux bornes de chaque couche court-circuitée est nulle, de fait d'après l'Eq. (2.3) :

$$\int_0^h E_3 dz = 0. \quad (4.8)$$

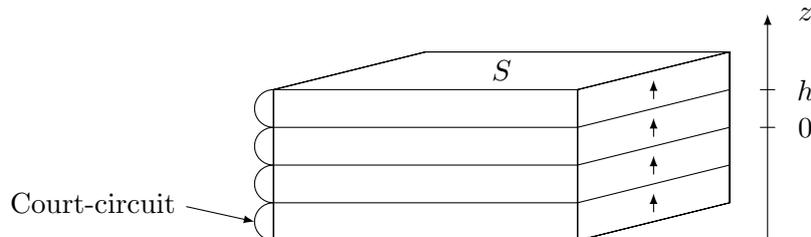


FIGURE 4.1 – Super-réseau constitué de couches piézoélectriques identiques d'épaisseur  $h$  court-circuitées. Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

Le report de l'Eq. (4.7) dans l'Eq. (4.8), l'intégration suivant l'épaisseur de la couche  $h$  et l'application du théorème de Gauss qui se résume dans le cas unidimensionnel à

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad (4.9)$$

c'est-à-dire que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de chaque couche, conduisant à l'expression du déplacement électrique

$$D_3 = \frac{h_{33}}{\beta_{33}^S h} \left[ u \right]_{z=0}^{z=h}. \quad (4.10)$$

Le report de ce résultat dans l'Eq. (4.6) donne la contrainte sous la forme

$$T_3 = c_{33}^D \left( S_3 - \frac{k_t^2}{h} \left[ u \right]_{z=0}^{z=h} \right) \quad (4.11)$$

où  $k_t$  est le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique donné par l'Eq. (C.7).

La relation de phase appliquée à la contrainte est

$$T_3|_{z=h} = XT_3|_{z=0} \quad (4.12)$$

soit en faisant usage de l'Eq. (4.1) :

$$\begin{aligned} -a \sin \tilde{k}h + b \cos \tilde{k}h - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \left( a \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b \sin \tilde{k}h \right) \\ = X \left( b - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \left( a \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b \sin \tilde{k}h \right) \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Les deux conditions limites (4.5) et (4.13) permettent de construire le système matriciel

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{k}h - X & \sin \tilde{k}h \\ (1 - X) \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + \sin \tilde{k}h & (1 - X) \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h + X - \cos \tilde{k}h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

où l'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (4.14) conduit à la relation de dispersion

$$\cos kh = \frac{\cos \tilde{k}h - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h}{1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h}. \quad (4.15)$$

On peut vérifier immédiatement que le super réseau n'est pas dispersif si le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique  $k_t$  est nul. Dans ce cas,

$$\cos kh = \cos \tilde{k}h \quad (4.16)$$

et le nombre d'onde du réseau  $k$  équivaut au nombre d'onde  $\tilde{k}$  dans une couche seule :  $k = \tilde{k}$ .

#### 4.1.2 Positions des bandes interdites

Les positions des bandes interdites se calculent à partir de l'Eq. (4.15) quand on se situe soit à la limite de la première zone de Brillouin, soit au centre de la zone de Brillouin, c'est à dire

$$\frac{\cos \tilde{k}h - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h}{1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h} = \pm 1. \quad (4.17)$$

L'analyse de cette équation donne une borne de bande interdite impaire évidente, il suffit en effet que

$$\cos \tilde{k}h = -1. \quad (4.18)$$

La première fréquence qui vérifie cette équation n'est autre que  $f_a$  qui est donnée par l'Eq. (C.11). Les positions des autres bandes interdites se déterminent avec la même méthodologie que celle utilisée dans la première partie du manuscrit. L'utilisation des règles trigonométriques

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (4.19)$$

$$\sin x = \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (4.20)$$

et le changement de variable

$$t = \tan \frac{\tilde{k}h}{2} \quad (4.21)$$

dans l'Eq. (4.15) permet de trouver la n-ième bande interdite en résolvant

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \frac{2t}{1 + t^2} = (-1)^n. \quad (4.22)$$

Quand  $n$  est impair, la bande interdite considérée se situe à la limite de la première zone de Brillouin, c'est à dire lorsque

$$kh = \pi \quad (4.23)$$

et la résolution de l'Eq. (4.22) conduit à l'équation transcendante

$$\tan \frac{\tilde{k}h}{2} = \frac{\tilde{k}h}{2k_t^2}. \quad (4.24)$$

La première fréquence vérifiant l'Eq. (4.24) est  $f_r$  qui est donnée par l'Eq. (C.13). La première bande interdite est donc finalement délimitée par les fréquences  $f_r$  et  $f_a$ .

Quand  $n$  est pair, la bande interdite considérée se situe au centre de la zone de Brillouin ( $k = 0$ ), et la résolution de l'Eq. (4.22) donne la solution dégénérée  $t = 0$ , soit

$$\frac{\tilde{k}h}{2} = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.25)$$

Il n'y a donc dans ce cas pas de bande interdite. La première fréquence vérifiant cette équation est  $2f_a$ .

### 4.1.3 Le super-réseau composé de barreaux

Considérons une structure identique, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 4.2. Moyennant l'utilisation des équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel d'un barreau données par les Eqs. (C.3) et (C.4), la relation de dispersion s'écrit alors

$$\cos k\ell = \frac{\cos \tilde{k}\ell - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} \sin \tilde{k}\ell}{1 - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} \sin \tilde{k}\ell} \quad (4.26)$$

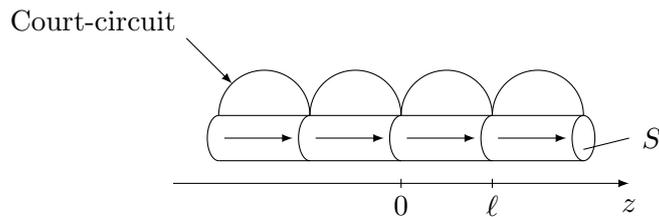


FIGURE 4.2 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  court-circuités. Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

avec  $k_{33}$  le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique pour un barreau donné par l'Eq. (C.8) et  $\tilde{k}$  défini cette fois par

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{v_b^D} \quad (4.27)$$

où la vitesse  $v_b^D$  est donnée par l'Eq. (C.10). Les positions des bandes interdites se déterminent alors en résolvant

$$\cos \tilde{k}\ell = -1 \quad (4.28)$$

$$\tan \frac{\tilde{k}\ell}{2} = \frac{\tilde{k}\ell}{2k_{33}^2}. \quad (4.29)$$

Les premières fréquences vérifiant ces équations sont à nouveau respectivement  $f_a$  et  $f_r$  données cette fois par les Eqs. (C.12) et (C.14).

La Fig. 4.3 présente la courbe de dispersion d'un multicouche piézoélectrique composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm dont les caractéristiques sont données en annexe D. Le nombre d'onde réduit désigne la partie réelle de  $k\ell/\pi$ . On constate un phénomène jusqu'alors inconnu : bien que la structure ne soit construite qu'à partir d'un seul matériau, ce super réseau présente des bandes interdites uniquement grâce à la périodicité du court-circuit électrique. Il s'agit donc de bandes interdites de Bragg issues d'un matériau homogène que l'on décide de breveter et de nommer *bandes interdites de charge électrique*.

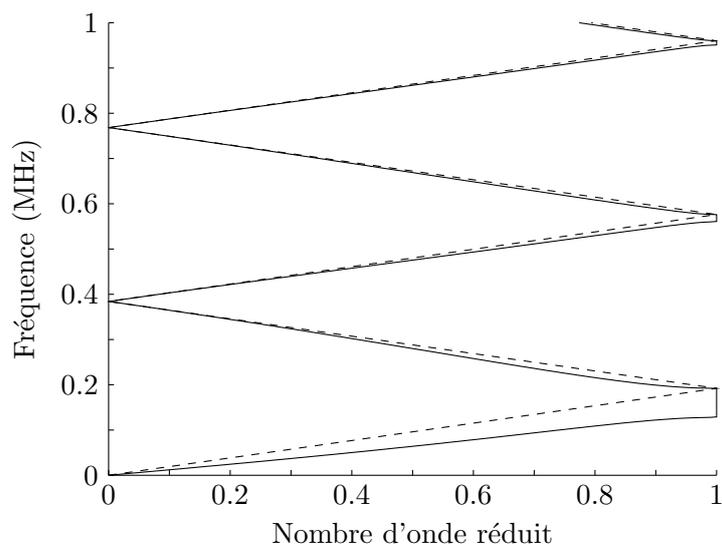


FIGURE 4.3 – Courbe de dispersion analytique illustrant une condition limite électrique périodique sur un empilement de barreaux (—) et empilement non connecté (- - -).

Le théorème de Gauss donne l'origine de ces bandes interdites. L'interconnexion des électrodes autorise le déplacement de charges libres entre elles et le déplacement électrique est dès lors discontinu à l'endroit des électrodes.

Que ce soit pour des plaques ou des barreaux, la première bande interdite se situe entre les fréquences  $f_r$  et  $f_a$ . Cet écart est caractéristique du coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique donné par les Eqs. (C.13) et (C.14) suivant la géométrie considérée. Pour maximiser la largeur de la première bande interdite, il faut donc que ce coefficient soit le plus fort possible : les monocristaux sont donc de bons candidats.

Enfin, ces bandes interdites donnent un nouveau souffle aux cristaux phononiques accordables. Les électrodes étant infiniment fines devant l'épaisseur des couches piézoélectriques, elles sont acoustiquement transparentes et l'accordabilité des bandes interdites devient élémentaire : il suffit de choisir l'épaisseur du matériau court-circuité pour viser la fréquence désirée et de ne pas connecter les électrodes intermédiaires.

#### 4.1.4 Incompatibilité des conditions limites

La Fig. 4.3 ne présente pas la courbe de dispersion calculée par éléments finis car celle-ci ne peut être obtenue pour la configuration du court-circuit. En effet, le calcul de la courbe de dispersion par le code ATILA repose sur l'application de relations de phase sur tous les champs d'une maille élémentaire. Il y a alors une incompatibilité manifeste entre les conditions limites. Il suffit pour s'en convaincre d'écrire la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée au potentiel électrique  $\Phi$  :

$$\Phi|_{z=\ell} = \Phi|_{z=0} e^{jkl}. \quad (4.30)$$

Or, le court-circuit impose l'égalité des potentiels électriques :

$$\Phi|_{z=\ell} = \Phi|_{z=0}. \quad (4.31)$$

Une solution alternative permettant un calcul par éléments finis consiste non plus à court-circuiter des éléments de longueur  $\ell$ , mais à imposer un potentiel électrique nul en  $z = 0, \ell, 2\ell, \dots$  comme indiqué sur la Fig. 4.4. La relation de phase de Bloch-Floquet appliquée au potentiel électrique  $\Phi$  devient alors

$$0 = 0 e^{jkl}, \quad (4.32)$$

condition compatible avec celle du court-circuit donnée par l'Eq. (4.31). Bien que les deux structures 4.2 et 4.4 soient électriquement équivalentes, l'approche pour déterminer la relation de dispersion sur la structure 4.4 est très différente : elle nécessite de périodiser les champs et de les décomposer en séries de Fourier, ce qui sera établi au chapitre 7. Les relations de dispersion analytiques ne sont alors plus obtenues par périodisation du court-circuit mais par périodisation du potentiel électrique. Cette méthode ainsi que les résultats sont exposés en troisième partie du manuscrit.

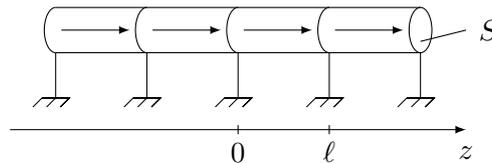


FIGURE 4.4 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique.

## 4.2 L'alternance circuit ouvert/court-circuit

### 4.2.1 Relation de dispersion

Comme dans la section précédente, le multicouche piézoélectrique présenté Fig. 4.5 est composé d'un seul matériau. Toutes les couches présentent la même épaisseur  $h$ . Une couche sur deux est court-circuitée : les couches (1) sont en circuit ouvert et les couches (2) sont en court-circuit, l'étude est donc menée sur deux couches et quatre équations seront nécessaires pour obtenir la relation de dispersion.

Le déplacement dans chaque couche ( $i$ ) s'écrit

$$u^{(i)} = a_i \cos \tilde{k}z + b_i \sin \tilde{k}z \quad (4.33)$$

avec  $a_i$  et  $b_i$  les amplitudes inconnues et  $\tilde{k}$  donné par l'Eq. (4.2).

La condition de continuité du déplacement en  $z = 0$  s'écrit

$$u^{(1)} \Big|_{z=0} = u^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad (4.34)$$

soit en utilisant l'Eq. (4.33) :

$$a_1 = a_2. \quad (4.35)$$

La relation de phase appliquée au déplacement est

$$u^{(2)} \Big|_{z=h} = X u^{(1)} \Big|_{z=-h} \quad (4.36)$$

avec

$$X = e^{j2kh}, \quad (4.37)$$

soit

$$a_2 \cos \tilde{k}h + b_2 \sin \tilde{k}h = X (a_1 \cos \tilde{k}h - b_1 \sin \tilde{k}h). \quad (4.38)$$

La contrainte  $T_3^{(i)}$  dans chaque couche ( $i$ ) s'écrit comme précédemment

$$T_3^{(i)} = c_{33}^D S_3^{(i)} - h_{33} D_3^{(i)} \quad (4.39)$$

$$E_3^{(i)} = -h_{33} S_3^{(i)} + \beta_{33}^S D_3^{(i)}, \quad (4.40)$$

les constantes  $c_{33}^D$  et  $h_{33}$  et  $\beta_{33}^S$  n'ayant pas d'exposant ( $i$ ) car les deux couches sont constituées du même matériau.

L'étude de la contrainte dans la couche (2) est faite de prime abord car elle est semblable au cas où toutes les couches sont court-circuitées. La différence de potentiel aux bornes de chaque couche court-circuitée est nulle :

$$\int_0^h E_3^{(2)} dz = 0. \quad (4.41)$$

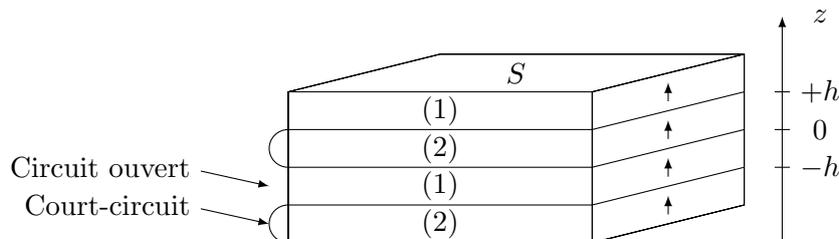


FIGURE 4.5 – Super-réseau constitué de couches piézoélectriques identiques d'épaisseur  $h$  alternativement en circuit ouvert (1) et court-circuitées (2).

La contrainte est obtenue en appliquant cette condition limite aux Eqs. (4.39) et (4.40), soit

$$T_3^{(2)} = c_{33}^D \left( S_3^{(2)} - \frac{k_t^2}{h} \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h} \right). \quad (4.42)$$

La contrainte dans les couches (1) s'écrit différemment puisque chaque élément est en circuit ouvert. L'intensité du courant électrique est *de facto* nulle, et s'appuyant sur l'Eq. (2.5), on en déduit que le déplacement électrique est nul :

$$D_3^{(1)} = 0. \quad (4.43)$$

Dès lors, la contrainte  $T_3^{(1)}$  s'écrit sous la forme d'un matériau non piézoélectrique :

$$T_3^{(1)} = c_{33}^D S_3^{(1)}. \quad (4.44)$$

La condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$  s'écrit

$$T_3^{(1)} \Big|_{z=0} = T_3^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad (4.45)$$

soit

$$b_1 = b_2 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \left( a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right). \quad (4.46)$$

Enfin, la relation de phase appliquée à la contrainte s'écrit

$$T_3^{(2)} \Big|_{z=h} = X T_3^{(1)} \Big|_{z=-h}, \quad (4.47)$$

soit en utilisant les Eqs. (4.33), (4.42) et (4.44) :

$$-a_2 \sin \tilde{k}h + b_2 \cos \tilde{k}h - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \left( a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right) = X \left( a_1 \sin \tilde{k}h + b_1 \cos \tilde{k}h \right). \quad (4.48)$$

Les quatre Eqs. (4.35), (4.38), (4.46) et (4.48) conduisent au système matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) & \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h - 1 \\ -X \cos \tilde{k}h & X \sin \tilde{k}h & \cos \tilde{k}h & \sin \tilde{k}h \\ X \sin \tilde{k}h & X \cos \tilde{k}h & \sin \tilde{k}h + \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) & \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h - \cos \tilde{k}h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

où l'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (4.49) donne la relation de dispersion

$$\cos 2\tilde{k}h = \frac{\cos 2\tilde{k}h + \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h \left( 1 - 2 \cos \tilde{k}h \right)}{1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h}. \quad (4.50)$$

#### 4.2.2 Positions des bandes interdites

En reprenant le changement de variable (4.21), l'Eq. (4.50) se réécrit

$$\frac{\left( \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 - \left( \frac{2t}{1+t^2} \right)^2 + \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \frac{2t}{1+t^2} \left( 1 - 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)}{1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \frac{2t}{1+t^2}} = (-1)^n. \quad (4.51)$$

Lorsque  $n$  est impair, la bande interdite considérée se situe au bord de la première zone de Brillouin et l'Eq. (4.51) devient

$$(t^2 - 1) \left( t^2 - 1 + 2 \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} t \right) = 0. \quad (4.52)$$

Étudions à présent les solutions de cette équation en commençant par

$$t^2 - 1 = 0 \quad (4.53)$$

qui se réécrit sous la forme

$$\cos^2 \frac{\tilde{k}h}{2} = \frac{1}{2}. \quad (4.54)$$

La première fréquence vérifiant cette équation est  $f_a$  qui correspond à la fréquence d'antirésonance électrique d'un matériau d'épaisseur  $2h$ . De même, l'équation

$$t^2 - 1 + 2 \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} t = 0 \quad (4.55)$$

se réécrit, à l'aide de la règle trigonométrique

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad (4.56)$$

sous la forme

$$k_t^2 = \tilde{k}h \cot \tilde{k}h. \quad (4.57)$$

La première fréquence vérifiant cette équation est  $f_r$  qui correspond à la fréquence de résonance électrique d'un matériau d'épaisseur  $2h$ . La première bande interdite est donc finalement délimitée par les fréquences  $f_r$  et  $f_a$  correspondant à un matériau d'épaisseur  $2h$ .

Lorsque  $n$  est pair, la bande interdite considérée se situe au centre de la zone de Brillouin et l'Eq. (4.51) devient

$$t^2 \left( 1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} t \right) = 0. \quad (4.58)$$

La première fréquence vérifiant l'équation

$$t^2 = 0 \quad (4.59)$$

est  $2f_a$  avec  $f_a$  correspondant à un matériau d'épaisseur  $2h$ . Quant à l'équation

$$1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} t = 0, \quad (4.60)$$

elle se réécrit sous la forme

$$k_t^2 = \tilde{k}h \cot \frac{\tilde{k}h}{2}. \quad (4.61)$$

La première fréquence vérifiant cette équation ne correspond à aucune fréquence particulière. On retiendra donc simplement que ce super-réseau ouvre des bandes interdites en  $k = 0$ , ce qui n'était pas le cas pour les super-réseaux court-circuités où il n'y avait qu'un repliement de bande.

### 4.2.3 Le super-réseau composé de barreaux

Considérons une structure identique, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 4.6. La relation de dispersion s'écrit alors

$$\cos 2k\ell = \frac{\cos 2\tilde{k}\ell + \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} \sin \tilde{k}\ell (1 - 2 \cos \tilde{k}\ell)}{1 - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} \sin \tilde{k}\ell} \quad (4.62)$$

avec  $k_{33}$  et  $\tilde{k}$  donnés par les Eqs. (C.8) et (4.27). Les positions des bandes interdites impaires se déterminent en résolvant

$$(t^2 - 1) \left( t^2 - 1 + 2 \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} t \right) = 0 \quad (4.63)$$

alors que les positions des bandes interdites paires se déterminent avec

$$t^2 \left( 1 - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} t \right) = 0 \quad (4.64)$$

où

$$t = \tan \frac{\tilde{k}\ell}{2}. \quad (4.65)$$

La Fig. 4.7 illustre à titre d'exemple la courbe de dispersion d'un multicouche piézoélectrique composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm alternativement en circuit ouvert et court-circuités. Le pas du réseau étant désormais  $2\ell$ , le nombre d'onde réduit désigne cette fois la partie réelle de  $2k\ell/\pi$ . La comparaison avec la Fig. 4.3 montre que les bandes interdites impaires se situent aux mêmes fréquences, au rapport deux près puisque la maille élémentaire est  $h$  dans le cas du court-circuit et  $2h$  dans le cas présent. Il en est de même pour les bornes supérieures des bandes interdites paires, la différence est que des bandes interdites s'ouvrent dans le cas présent.

Contrairement à la structure précédente, il n'y a pas d'incompatibilité sur les conditions limites électriques. Si la maille élémentaire est définie sur la Fig. 4.6 de  $z = -\ell$  à  $z = +\ell$ , la relation de phase de Bloch-Floquet impose de fait une condition limite entre ces deux bornes. Le court-circuit impose l'équipotentialité entre les bornes  $z = 0$  et  $z = +\ell$  et aucune condition électrique n'est imposée entre les bornes  $z = -\ell$  et  $z = 0$ . La Fig. 4.7 illustre donc la courbe de dispersion calculée par éléments finis et on ne peut alors que constater l'excellent accord entre les modèles analytique et numérique (ATILA).

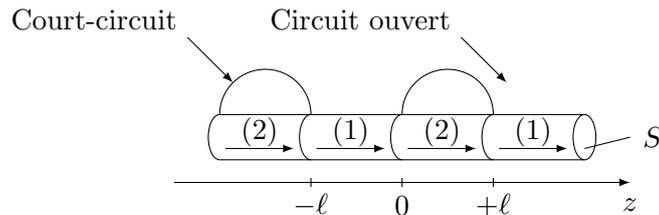


FIGURE 4.6 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  alternativement en circuit ouvert (1) et court-circuités (2).

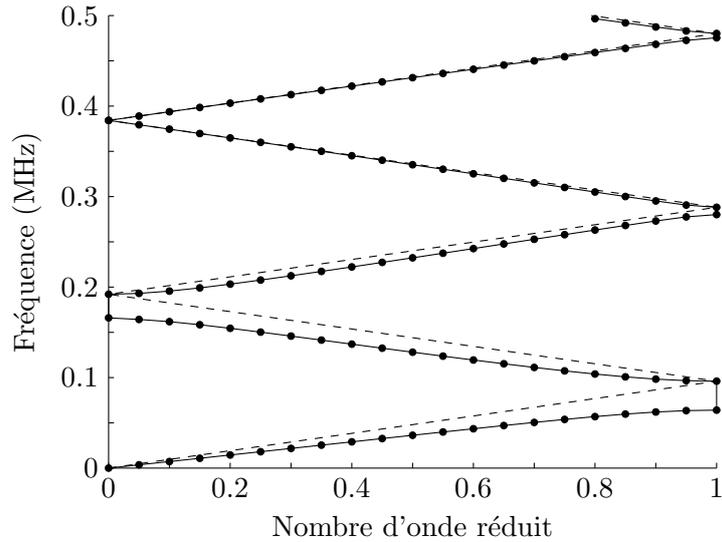


FIGURE 4.7 – Courbe de dispersion illustrant l’alternance circuit ouvert/court-circuit sur un empilement de barreaux. Calcul analytique (—), calcul numérique (•) et empilement non connecté (---).

### 4.3 Le court-circuit à polarisation diélectrique alternée

#### 4.3.1 Relation de dispersion

Jusqu’alors la polarisation diélectrique était toujours orientée dans le sens des  $z$  croissants. Cette section s’intéresse à l’alternance de cette polarisation diélectrique en plus de la condition électrique périodique. Le multicouche illustré en Fig. 4.8 est composé d’un seul matériau et toutes les couches présentent la même épaisseur  $h$ . La polarisation diélectrique dans les couches (1) et (2) est respectivement orientée dans le sens des  $z$  croissants et décroissants. Chaque bicouche (1)(2) est court-circuitée, l’étude est donc menée sur deux couches et quatre équations seront nécessaires pour obtenir la relation de dispersion.

Le déplacement dans chaque couche ( $i$ ) s’écrit sous la forme de l’Eq. (4.33), les amplitudes inconnues sont donc  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$ . La condition de continuité du déplacement en  $z = 0$  ainsi que la relation de phase appliquée au déplacement sont déjà données respectivement par les Eqs. (4.35) et (4.38). La condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$  ainsi que la relation de phase appliquée à la contrainte sont issues des équations de la piézoélectricité (4.39) et (4.40).

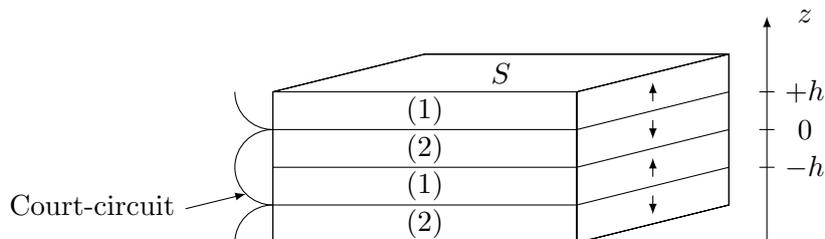


FIGURE 4.8 – Super-réseau constitué de couches piézoélectriques identiques d’épaisseur  $h$  court-circuitées par paires avec alternance de la polarisation diélectrique.

Le théorème de Gauss montre que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de la période  $] -h, +h[$  puisqu'aucune électrode n'est connectée en  $z = 0$ . Les Eqs. (4.39) et (4.40) sont écrites suivant une orientation locale dans le sens de la polarisation diélectrique statique. Afin d'être cohérent entre deux couches successives, il est nécessaire de réécrire les équations dans un même système d'axes. Ceci revient à inverser les signes du champ et du déplacement électriques dans la couche (2). La contrainte et la déformation ne sont pas affectées par l'inversion d'orientation.

La différence de potentiel aux bornes du bicouche court-circuité est nulle :

$$\int_{-h}^0 E_3^{(1)} dz - \int_0^h E_3^{(2)} dz = 0, \quad (4.66)$$

soit en reportant l'Eq. (4.40) dans l'Eq. (4.66) :

$$-h_{33} \int_{-h}^0 S_3^{(1)} dz + \beta_{33}^S \int_{-h}^0 D_3^{(1)} dz + h_{33} \int_0^h S_3^{(2)} dz - \beta_{33}^S \int_0^h D_3^{(2)} dz = 0. \quad (4.67)$$

On vient de voir que la relation entre les déplacements électriques des couches (1) et (2) est

$$D_3^{(1)} = -D_3^{(2)}, \quad (4.68)$$

conduisant à l'expression du déplacement électrique

$$D_3^{(1)} = -\frac{h_{33}}{2h\beta_{33}^S} \left( \left[ u^{(1)} \right]_{z=0}^{z=-h} + \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h} \right). \quad (4.69)$$

Le report de ce résultat dans l'Eq. (4.39) donne la contrainte dans la couche (1)

$$T_3^{(1)} = c_{33}^D \left( S_3^{(1)} + \frac{k_t^2}{2h} \left( \left[ u^{(1)} \right]_{z=0}^{z=-h} + \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h} \right) \right). \quad (4.70)$$

D'après l'Eq. (4.68), seul le signe du déplacement électrique est modifié, d'où la contrainte dans la couche (2)

$$T_3^{(2)} = c_{33}^D \left( S_3^{(2)} - \frac{k_t^2}{2h} \left( \left[ u^{(1)} \right]_{z=0}^{z=-h} + \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h} \right) \right). \quad (4.71)$$

L'Eq. (4.45) donne la condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$ , soit

$$\begin{aligned} b_1 + \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} \left( a_1 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) - b_1 \sin \tilde{k}h + a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right) \\ = b_2 - \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} \left( a_1 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) - b_1 \sin \tilde{k}h + a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Quant à la relation de phase appliquée à la contrainte donnée par l'Eq. (4.47), elle s'écrit

$$\begin{aligned} -a_2 \sin \tilde{k}h + b_2 \cos \tilde{k}h - \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} \left( a_1 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) - b_1 \sin \tilde{k}h + a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right) \\ = X \left( a_1 \sin \tilde{k}h + b_1 \cos \tilde{k}h + \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} \left( a_1 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) - b_1 \sin \tilde{k}h + a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right) \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Les quatre Eqs. (4.35), (4.38), (4.72) et (4.73) conduisent au système matriciel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} (\cos \tilde{k}h - 1) & 1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h \\ -X \cos \tilde{k}h & X \sin \tilde{k}h \\ (1+X) \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} (\cos \tilde{k}h - 1) + X \sin \tilde{k}h & X \cos \tilde{k}h - (1+X) \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h \\ -1 & 0 \\ \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} (\cos \tilde{k}h - 1) & \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h - 1 \\ \cos \tilde{k}h & \sin \tilde{k}h \\ (1+X) \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} (\cos \tilde{k}h - 1) + \sin \tilde{k}h & (1+X) \frac{k_t^2}{2\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h - \cos \tilde{k}h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

où l'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (4.74) donne la relation de dispersion

$$\cos 2kh = \frac{\cos 2\tilde{k}h + \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h (2 - 3 \cos \tilde{k}h)}{1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \sin \tilde{k}h (2 - \cos \tilde{k}h)}. \quad (4.75)$$

### 4.3.2 Positions des bandes interdites

En reprenant le changement de variable (4.21), l'Eq. (4.75) se réécrit

$$\frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \frac{2t}{1+t^2} \left(2 - 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{1 - \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} \frac{2t}{1+t^2} \left(2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = (-1)^n. \quad (4.76)$$

Lorsque  $n$  est impair, la bande interdite considérée se situe au bord de la première zone de Brillouin et l'Eq. (4.76) s'écrit comme l'Eq. (4.52) :

$$(t^2 - 1) \left( t^2 - 1 + 2 \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} t \right) = 0. \quad (4.77)$$

Les fréquences vérifiant cette équation sont donc détaillées dans la section traitant l'alternance circuit ouvert/court-circuit : la première bande interdite est délimitée par les fréquences  $f_r$  et  $f_a$  correspondant à un matériau d'épaisseur  $2h$ . Lorsque  $n$  est pair, la bande interdite considérée se situe au centre de la zone de Brillouin et l'Eq. (4.76) devient

$$t^2 \left( 1 - 2 \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} t \right) = 0. \quad (4.78)$$

Cette équation est légèrement différente de l'Eq. (4.58) puisque l'équation

$$1 - 2 \frac{k_t^2}{\tilde{k}h} t = 0 \quad (4.79)$$

se réécrit sous la forme

$$k_t^2 = \frac{\tilde{k}h}{2} \cot \frac{\tilde{k}h}{2}. \quad (4.80)$$

La première fréquence vérifiant cette équation est  $2f_r$  qui correspond au double de la fréquence de résonance électrique d'un matériau d'épaisseur  $2h$ . On retiendra donc que ce super-réseau ouvre des bandes interdites en  $k = 0$  plus larges que dans le cas du super-réseau circuit ouvert/court-circuit.

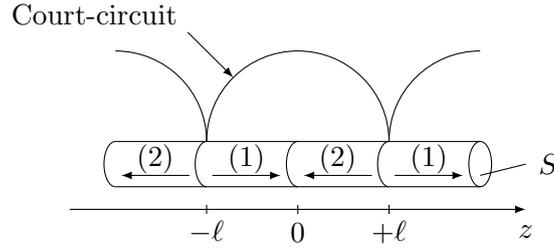


FIGURE 4.9 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  court-circuités par paires avec alternance de la polarisation diélectrique.

### 4.3.3 Le super-réseau composé de barreaux

Considérons une structure identique, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 4.9. La relation de dispersion s'écrit alors

$$\cos 2k\ell = \frac{\cos 2\tilde{k}\ell + \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} \sin \tilde{k}\ell (2 - 3 \cos \tilde{k}\ell)}{1 - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} \sin \tilde{k}\ell (2 - \cos \tilde{k}\ell)} \quad (4.81)$$

avec  $k_{33}$  et  $\tilde{k}$  donnés par les Eqs. (C.8) et (4.27). Les positions des bandes interdites impaires se déterminent en résolvant

$$(t^2 - 1) \left( t^2 - 1 + 2 \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} t \right) = 0 \quad (4.82)$$

alors que les positions des bandes interdites paires se déterminent avec

$$t^2 \left( 1 - 2 \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell} t \right) = 0 \quad (4.83)$$

où

$$t = \tan \frac{\tilde{k}\ell}{2}. \quad (4.84)$$

Soit présentée en Fig. 4.10 la courbe de dispersion d'un multicouche piézoélectrique composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm court-circuités par paires avec alternance de la polarisation diélectrique. Le nombre d'onde réduit désigne derechef la partie réelle de  $2k\ell/\pi$ . Cette structure présente une incompatibilité sur les conditions limites électriques et le calcul par éléments finis ne peut pas être effectué dans l'état. Si la maille élémentaire est définie sur la Fig. 4.9 de  $z = -\ell$  à  $z = +\ell$ , la relation de phase de Bloch-Floquet impose alors une condition limite incompatible avec l'équipotentialité imposée par le court-circuit. La troisième partie du manuscrit propose une approche différente permettant de calculer numériquement la courbe de dispersion par une mise à la masse périodique.

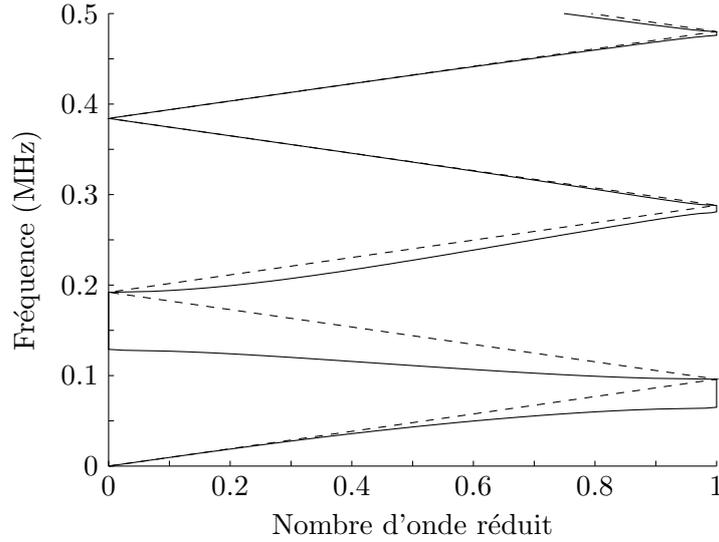


FIGURE 4.10 – Courbe de dispersion analytique illustrant un empilement de barreaux court-circuités par paires avec alternance de la polarisation diélectrique (—) et empilement non connecté (---).

#### 4.4 Vitesse à l'origine

On observe sur les Figs. 4.3, 4.7 et 4.10 que la tangente à l'origine est différente suivant la configuration du super-réseau. Cette section propose donc de déterminer la vitesse apparente à basse fréquence  $v_{BF}$  - ou vitesse à l'origine - pour chacune des trois configurations illustrées en Figs 4.2, 4.6 et 4.9. La vitesse de référence correspond à celle du super-réseau non connecté  $v_b^D$  qui est donnée par l'Eq. (C.10), soit  $v_b^D = 3842$  m/s pour un barreau de PZ29. Cette droite est tracée sur lesdites figures (---).

Considérons dans un premier temps le cas du court-circuit. Le développement limité du premier ordre au voisinage de l'origine de l'Eq. (4.26) s'écrit

$$1 - \frac{k^2 \ell^2}{2} = \frac{1 - \frac{\tilde{k}^2 \ell^2}{2} - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k} \ell} \tilde{k} \ell}{1 - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k} \ell} \tilde{k} \ell}, \quad (4.85)$$

soit après simplification :

$$k^2 = \frac{\tilde{k}^2}{1 - k_{33}^2}. \quad (4.86)$$

Le report de l'Eq. (4.27) dans cette relation donne la vitesse à l'origine

$$v_{BF} = v_b^D \sqrt{1 - k_{33}^2}, \quad (4.87)$$

soit  $v_{BF} = .63 v_b^D = 2428$  m/s pour un barreau de PZ29. Les cas limites de cette équation sont cohérents :

$$\begin{aligned} \text{si } k_{33} = 0 &\Rightarrow v_{BF} = v_b^D \\ \text{si } k_{33} \rightarrow 1 &\Rightarrow v_{BF} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement court-circuités voit donc sa vitesse à basse fréquence  $v_{BF}$  varier suivant la connexion électrique (voir Fig. 4.3).

Intéressons nous maintenant à l'alternance circuit ouvert/court-circuit. Le développement limité du premier ordre au voisinage de l'origine de l'Eq. (4.62) s'écrit

$$1 - 2k^2\ell^2 = \frac{1 - 2\tilde{k}^2\ell^2 + \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell}\tilde{k}\ell\left(1 - 2\left(1 - \frac{\tilde{k}^2\ell^2}{2}\right)\right)}{1 - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell}\tilde{k}\ell}, \quad (4.88)$$

soit après simplification :

$$k^2 = \tilde{k}^2 \frac{k_{33}^2/2 - 1}{k_{33}^2 - 1}. \quad (4.89)$$

Le report de l'Eq. (4.27) dans cette relation donne la vitesse à l'origine

$$v_{BF} = v_b^D \sqrt{\frac{k_{33}^2 - 1}{k_{33}^2/2 - 1}}, \quad (4.90)$$

soit  $v_{BF} = .76 v_b^D = 2903$  m/s pour un barreau de PZ29. Comme précédemment, les cas limites de cette équation sont cohérents. Le super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  alternativement en circuit ouvert/court-circuit affecte donc la vitesse à basse fréquence dans des proportions plus faibles que le super-réseau tout court-circuité (voir Fig. 4.7).

Enfin, étudions la configuration du court-circuit à polarisation diélectrique alternée. Le développement limité du premier ordre au voisinage de l'origine de l'Eq. (4.81) s'écrit

$$1 - 2k^2\ell^2 = \frac{1 - 2\tilde{k}^2\ell^2 + \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell}\tilde{k}\ell\left(2 - 3\left(1 - \frac{\tilde{k}^2\ell^2}{2}\right)\right)}{1 - \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell}\tilde{k}\ell\left(2 - \left(1 - \frac{\tilde{k}^2\ell^2}{2}\right)\right)}, \quad (4.91)$$

soit après simplification :

$$k = \tilde{k}. \quad (4.92)$$

Le super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  court-circuités par paires avec alternance de la polarisation diélectrique n'affecte donc pas la vitesse à basse fréquence (voir Fig. 4.10).

Cette résultats collatéraux ne contribuent en rien à l'accordabilité des cristaux phononiques, mais représentent tout de même un nouveau champ d'investigation. Le contrôle de la vitesse effective d'une onde élastique dans un solide signifie entre autres le contrôle de l'impédance acoustique caractéristique du matériau considéré. Cette contribution est tout à fait significative lorsque l'application visée est l'adaptation d'impédance acoustique contrôlable électriquement.



# Chapitre 5

## La condition électrique périodique accordable

### Sommaire

---

5.1	Relation de dispersion . . . . .	75
5.2	Positions des bandes interdites . . . . .	77
5.3	Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	78
5.4	L'alternance circuit ouvert/capacité électrique . . . . .	80
5.5	L'alternance court-circuit/capacité électrique . . . . .	81
5.6	L'accordabilité des deux bornes . . . . .	83

---

Le chapitre concernant la condition électrique périodique vient de mettre en valeur les bandes interdites de charge électrique. Ce sont des bandes interdites de Bragg qui apparaissent lorsqu'une onde se propage à travers un matériau piézoélectrique homogène court-circuité périodiquement. L'accordabilité de ces bandes interdites est à présent étudiée en utilisant le même principe que dans le chapitre traitant les super-réseaux élastique/piézoélectrique : les court-circuits du chapitre précédent sont remplacés par des capacités électriques.



## 5.1 Relation de dispersion

La première structure étudiée dans ce chapitre est présentée en Fig. 5.1. Il s'agit, à l'instar du chapitre traitant de la condition électrique périodique, d'un multicouche composé d'un seul matériau. La polarisation diélectrique dans chaque couche est orientée dans le sens des  $z$  croissants. Chaque couche (i) d'interfaces d'aire  $S$  et d'épaisseur  $h$  est connectée à une capacité électrique  $C_i$ . La polarisation des ondes étant parallèle à la direction de propagation  $z$ , le déplacement  $u^{(i)}$  s'écrit dans chaque couche

$$u^{(i)} = a_i \cos \tilde{k}z + b_i \sin \tilde{k}z \quad (5.1)$$

avec  $a_i$  et  $b_i$  les amplitudes inconnues et  $\tilde{k}$  le nombre d'onde longitudinal défini par

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{v_t^D} \quad (5.2)$$

où  $\omega$  est la pulsation et  $v_t^D$  la vitesse des ondes longitudinales à déplacement électrique constant suivant l'axe  $z$  ou 3 donnée par l'Eq. (C.9).

La relation de dispersion se déduit des conditions limites du super-réseau. La maille élémentaire étant constituée de deux couches, quatre conditions limites sont nécessaires pour déterminer  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$ . La condition de continuité du déplacement en  $z = 0$  impose

$$u^{(1)} \Big|_{z=0} = u^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad (5.3)$$

soit en utilisant l'Eq. (5.1) :

$$a_1 = a_2 \quad (5.4)$$

et la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée au déplacement impose

$$u^{(2)} \Big|_{z=h} = X u^{(1)} \Big|_{z=-h} \quad (5.5)$$

avec

$$X = e^{j2kh}, \quad (5.6)$$

soit

$$a_2 \cos \tilde{k}h + b_2 \sin \tilde{k}h = X (a_1 \cos \tilde{k}h - b_1 \sin \tilde{k}h). \quad (5.7)$$

Restent maintenant à déterminer la condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$  et la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée à la contrainte. La contrainte  $T_3^{(i)}$  se déduit des équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel d'une plaque données par les Eqs. (C.1) et (C.2) :

$$T_3^{(i)} = c_{33}^D S_3^{(i)} - h_{33} D_3^{(i)} \quad (5.8)$$

$$E_3^{(i)} = -h_{33} S_3^{(i)} + \beta_{33}^S D_3^{(i)}, \quad (5.9)$$

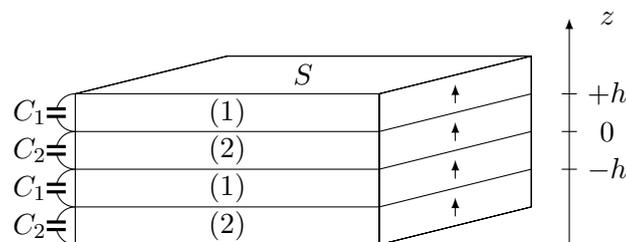


FIGURE 5.1 – Super-réseau constitué de couches piézoélectriques identiques d'épaisseur  $h$  alternativement connectées à une capacité électrique  $C_1$  (couches 1) et  $C_2$  (couches 2). Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

les constantes  $c_{33}^D$  et  $h_{33}$  et  $\beta_{33}^S$  n'ayant pas d'exposant ( $i$ ) car les deux couches sont constituées du même matériau.

Si une capacité externe  $C_i$  est connectée entre les électrodes situées sur les surfaces de la couche piézoélectrique, la différence de potentiel  $V_i$  entre les électrodes est fonction du courant  $I_i$  traversant  $C_i$  et s'écrit en accord avec l'Eq. (2.3)

$$V_1 = \frac{I_1}{jC_1\omega} = - \int_{-h}^0 E_3^{(1)} dz \quad (5.10)$$

$$V_2 = \frac{I_2}{jC_2\omega} = - \int_0^h E_3^{(2)} dz, \quad (5.11)$$

soit en faisant usage de l'Eq. (2.7) :

$$\frac{SD_3^{(1)}}{C_1} = - \int_{-h}^0 E_3^{(1)} dz \quad (5.12)$$

$$\frac{SD_3^{(2)}}{C_2} = - \int_0^h E_3^{(2)} dz. \quad (5.13)$$

L'Eq. (5.9) est alors reportée dans les Eqs. (5.12) et (5.13), puis intégrée suivant l'épaisseur des couches (1) et (2). L'application du théorème de Gauss qui se résume dans le cas unidimensionnel à

$$\frac{\partial D_3^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad (5.14)$$

c'est-à-dire que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de chaque couche, conduit aux expressions du déplacement électrique

$$\frac{SD_3^{(1)}}{C_1} = h_{33} \left[ u^{(1)} \right]_{z=-h}^{z=0} - \beta_{33}^S D_3^{(1)} h \quad (5.15)$$

$$\frac{SD_3^{(2)}}{C_2} = h_{33} \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h} - \beta_{33}^S D_3^{(2)} h. \quad (5.16)$$

Ceci donne  $D_3^{(i)}$  en fonction des coefficients  $a_i$  et  $b_i$ . Le report de ces résultats dans l'Eq. (5.8) permet d'exprimer la contrainte dans les couches piézoélectriques sous la forme

$$T_3^{(1)} = c_{33}^D \left( S_3^{(1)} - \tilde{k}\alpha^{(1)} \left[ u^{(1)} \right]_{z=-h}^{z=0} \right) \quad (5.17)$$

$$T_3^{(2)} = c_{33}^D \left( S_3^{(2)} - \tilde{k}\alpha^{(2)} \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h} \right) \quad (5.18)$$

avec

$$\alpha^{(i)} = \frac{k_t^2}{\tilde{k}h \left( 1 + \frac{C_0}{C_i} \right)} \quad (5.19)$$

où  $k_t$  et  $C_0$  sont respectivement le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique et la capacité bloquée donnés par les Eqs. (C.7) et (C.15).

La condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$

$$T_3^{(1)} \Big|_{z=0} = T_3^{(2)} \Big|_{z=0} \quad (5.20)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} c_{33}^D \tilde{k} \left( b_1 - \alpha^{(1)} \left( a_1 \left( 1 - \cos \tilde{k}h \right) + b_1 \sin \tilde{k}h \right) \right) \\ = c_{33}^D \tilde{k} \left( b_2 - \alpha^{(2)} \left( a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right) \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

De même, le report des Eqs. (5.17) et (5.18) dans la relation de phase de Bloch-Floquet

$$T_3^{(2)} \Big|_{z=-h} = XT_3^{(1)} \Big|_{z=h} \quad (5.22)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} c_{33}^D \tilde{k} \left( -a_2 \sin \tilde{k}h + b_2 \cos \tilde{k}h - \alpha^{(2)} \left( a_2 \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + b_2 \sin \tilde{k}h \right) \right) \\ = X c_{33}^D \tilde{k} \left( a_1 \sin \tilde{k}h + b_1 \cos \tilde{k}h - \alpha^{(1)} \left( a_1 \left( 1 - \cos \tilde{k}h \right) + b_1 \sin \tilde{k}h \right) \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Le système matriciel suivant est construit à partir des quatre conditions limites (5.4), (5.7), (5.21) et (5.23) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^{(1)} \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) & 1 - \alpha^{(1)} \sin \tilde{k}h \\ -X \cos \tilde{k}h & X \sin \tilde{k}h \\ X \left( \sin \tilde{k}h + \alpha^{(1)} \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) \right) & X \left( \cos \tilde{k}h - \alpha^{(1)} \sin \tilde{k}h \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \alpha^{(2)} \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) & \alpha^{(2)} \sin \tilde{k}h - 1 \\ \cos \tilde{k}h & \sin \tilde{k}h \\ \alpha^{(2)} \left( \cos \tilde{k}h - 1 \right) + \sin \tilde{k}h & \alpha^{(2)} \sin \tilde{k}h - \cos \tilde{k}h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

où l'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (5.24) conduit à la relation de dispersion

$$\cos 2kh = \frac{\cos 2\tilde{k}h + (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \sin \tilde{k}h \left( 1 - 2 \cos \tilde{k}h \right) + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \sin^2 \tilde{k}h}{1 - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \sin \tilde{k}h + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \sin^2 \tilde{k}h}. \quad (5.25)$$

Cette relation de dispersion est discutée plus loin, dans le cas d'un empilement de barreaux.

## 5.2 Positions des bandes interdites

Les positions des bandes interdites se calculent à partir de l'Eq. (5.25) quand on se situe soit à la limite de la première zone de Brillouin, soit au centre de la zone de Brillouin, c'est à dire

$$\frac{\cos 2\tilde{k}h + (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \sin \tilde{k}h \left( 1 - 2 \cos \tilde{k}h \right) + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \sin^2 \tilde{k}h}{1 - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \sin \tilde{k}h + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \sin^2 \tilde{k}h} = \pm 1. \quad (5.26)$$

L'utilisation des règles trigonométriques

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (5.27)$$

$$\sin x = \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (5.28)$$

et le changement de variable

$$t = \tan \frac{\tilde{k}h}{2} \quad (5.29)$$

dans l'Eq. (5.26) permet de trouver la  $n$ -ième bande interdite en résolvant

$$\frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \frac{2t}{1+t^2} \left(1 - 2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}{1 - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \frac{2t}{1+t^2} + \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2} = (-1)^n. \quad (5.30)$$

Quand  $n$  est impair, la bande interdite considérée se situe à la limite de la première zone de Brillouin, c'est à dire lorsque

$$2kh = \pi \quad (5.31)$$

et la résolution de l'Eq. (5.30) conduit à

$$\left(t^2 + 2\alpha^{(1)}t - 1\right) \left(t^2 + 2\alpha^{(2)}t - 1\right) = 0. \quad (5.32)$$

On remarque alors que les deux capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$  qui se situent respectivement dans  $\alpha^{(1)}$  et  $\alpha^{(2)}$  accordent indépendamment les deux bornes des bandes interdites impaires. Lorsque  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$ , les solutions sont dégénérées et il y a repliement de la courbe de dispersion. Si maintenant  $\alpha^{(1)} = 0$  et  $\alpha^{(2)} = k_t^2/\tilde{k}h$ , on retrouve bien l'Eq. (4.52) qui correspond à l'alternance circuit ouvert/court-circuit.

Quand  $n$  est pair, la bande interdite considérée se situe au centre de la zone de Brillouin ( $k = 0$ ), et la résolution de l'Eq. (5.30) donne

$$t \left(t \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right) - 1\right) = 0. \quad (5.33)$$

Cette fois, une seule borne est accordable par les capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$ . La borne fixe est  $t = 0$ , soit

$$\sin \frac{\tilde{k}h}{2} = 0. \quad (5.34)$$

La fréquence vérifiant cette équation est  $2f_a$  où la fréquence  $f_a$  est donnée par l'Eq. (C.11). La cohérence de l'Eq. (5.33) est à nouveau vérifiée avec la situation de l'alternance circuit ouvert/court-circuit où  $\alpha^{(1)} = 0$  et  $\alpha^{(2)} = k_t^2/\tilde{k}h$ , menant à l'Eq. (4.58).

### 5.3 Le super-réseau composé de barreaux

Considérons une structure identique, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 5.2. Moyennant

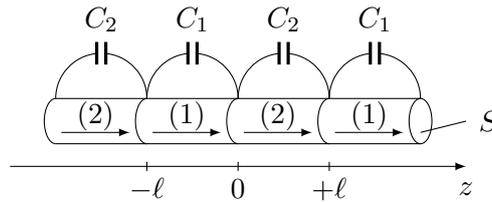


FIGURE 5.2 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  alternativement connectés à une capacité électrique  $C_1$  (couches 1) et  $C_2$  (couches 2). Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

l'utilisation des équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel d'un barreau données par les Eqs. (C.3) et (C.4), la relation de dispersion s'écrit alors

$$\cos 2k\ell = \frac{\cos 2\tilde{k}\ell + (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \sin \tilde{k}\ell \left(1 - 2 \cos \tilde{k}\ell\right) + \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \sin^2 \tilde{k}\ell}{1 - (\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) \sin \tilde{k}\ell + \alpha^{(1)}\alpha^{(2)} \sin^2 \tilde{k}\ell}. \quad (5.35)$$

avec

$$\alpha^{(i)} = \frac{k_{33}^2}{\tilde{k}\ell \left(1 + \frac{C_0}{C_i}\right)} \quad (5.36)$$

où  $\tilde{k}$  est défini cette fois par

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{v_b^D} \quad (5.37)$$

avec la vitesse  $v_b^D$  donnée par l'Eq. (C.10) et où  $k_{33}$  et  $C_0$  sont respectivement le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique et la capacité bloquée donnés par les Eqs. (C.8) et (C.16).

Par analogie avec le multicouche, la position des bandes interdites impaires est définie par

$$\left(t^2 + 2\alpha^{(1)}t - 1\right) \left(t^2 + 2\alpha^{(2)}t - 1\right) = 0 \quad (5.38)$$

et la position des bandes interdites paires par

$$t \left(t \left(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}\right) - 1\right) = 0 \quad (5.39)$$

où cette fois  $\alpha^{(i)}$  est donné par l'Eq. (5.36) et où

$$t = \tan \frac{\tilde{k}\ell}{2}. \quad (5.40)$$

L'analyse des Eqs. (5.38) et (5.39) montre que les deux capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$  accordent indépendamment les deux bornes des bandes interdites impaires, contrairement aux bandes interdites paires où une seule des deux bornes est accordable. La suite propose donc une étude qualitative de l'accordabilité de la première bande interdite impaire en faisant tendre l'une des deux capacités électriques vers zéro ou vers l'infini. L'indépendance des deux bornes permettra ensuite de combiner les résultats des différents cas limites.

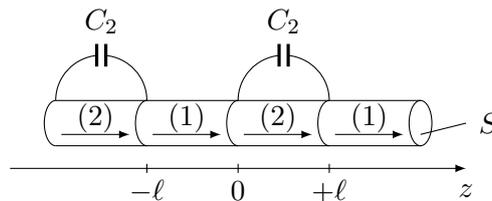


FIGURE 5.3 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  alternativement en circuit ouvert (couches 1) et connectés à une capacité électrique  $C_2$  (couches 2). Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

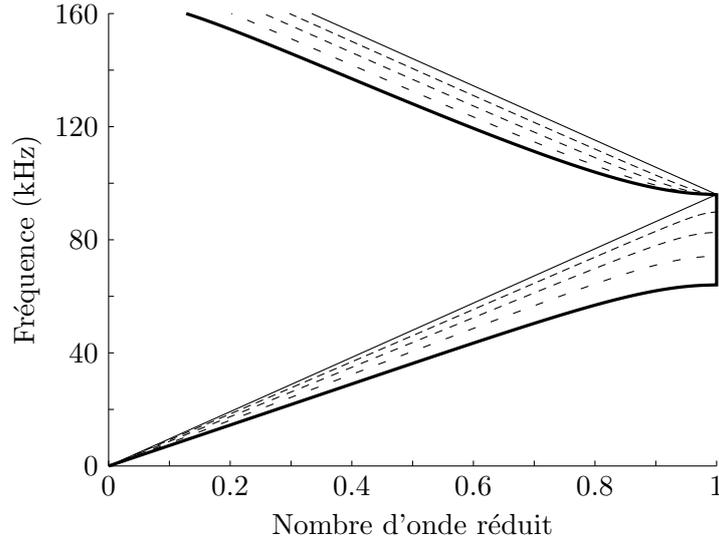


FIGURE 5.4 – Courbes de dispersion tracées avec l’Eq. (5.35) correspondant à la Fig. 5.3 où  $C_1 = 0$  et où  $C_2$  prend plusieurs valeurs :  $C_2 = 0$  (—),  $C_2 = 1/3 C_0$  (---),  $C_2 = C_0$  (- - -),  $C_2 = 3C_0$  (- - -) et  $C_2 \rightarrow \infty$  (—).

## 5.4 L’alternance circuit ouvert/capacité électrique

Soit présenté en Fig. 5.3 un super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  alternativement en circuit ouvert ( $C_1 = 0$ , couches 1) et connectées à une capacité électrique  $C_2$  (couches 2). La position des bandes interdites impaires donnée par l’Eq. (5.32) devient alors

$$(t^2 - 1) \left( t^2 + 2\alpha^{(2)}t - 1 \right) = 0. \quad (5.41)$$

La Fig. 5.4 illustre les courbes de dispersion de ce super-réseau composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm dans différentes configurations. Le PZ29 est un PZT de classe cristalline 6mm de chez Ferroperm dont les propriétés sont données dans l’annexe D. Le pas du réseau est  $2\ell$ , le nombre d’onde réduit désigne donc la partie réelle de  $2k\ell/\pi$ . Lorsque  $C_2 = 0$ , les deux couches sont en circuit ouvert et l’effet piézoélectrique ne joue aucun rôle dans la propagation de l’onde acoustique. La périodicité du réseau est alors fictive et la courbe de dispersion (—) se résume à une droite de pente  $v_b^D$  repliée dans la première zone de Brillouin. Dans le cas où  $C_2 \rightarrow \infty$ , la position des bandes interdites impaires donnée par l’Eq. (5.41) devient

$$(t^2 - 1) \left( t^2 + 2\frac{k_t^2}{kh}t - 1 \right) = 0. \quad (5.42)$$

Les couches (2) sont alors en court-circuit et la courbe de dispersion (—) est identique à celle du cas circuit ouvert/court-circuit tracée en Fig. 4.7. On peut donc conclure que l’alternance circuit ouvert/capacité électrique conduit à la borne supérieure fixe et la borne inférieure mobile. De fait, il est naturel que lorsque la capacité électrique  $C_2$  prend une valeur comprise entre 0 et  $\infty$ , la borne mobile de la courbe de dispersion se situe entre ces deux cas limites.

La Fig. 5.5 présente la courbe de dispersion quand  $C_2 = -1/4 C_0$  (---) comparée à la courbe correspondant à l’alternance circuit ouvert/court-circuit (—). L’analyse des courbes de dispersion de la Fig. 5.4 permettrait de prédire la position de la courbe tracée avec une capacité électrique négative en nous concentrant sur la borne inférieure : on constate qu’au fur et à mesure que la valeur de  $C_2$  diminue ( $C_2 \rightarrow \infty$ ,  $C_2 = 3C_0$ ,  $C_2 = C_0$ ,  $C_2 = 1/3 C_0$  puis  $C_2 = 0$ ), la fréquence correspondante augmente et ferme la bande interdite. Naturellement, lorsque la valeur  $C_2$  devient négative sur la Fig. 5.5, la fréquence correspondant à la borne mobile continue

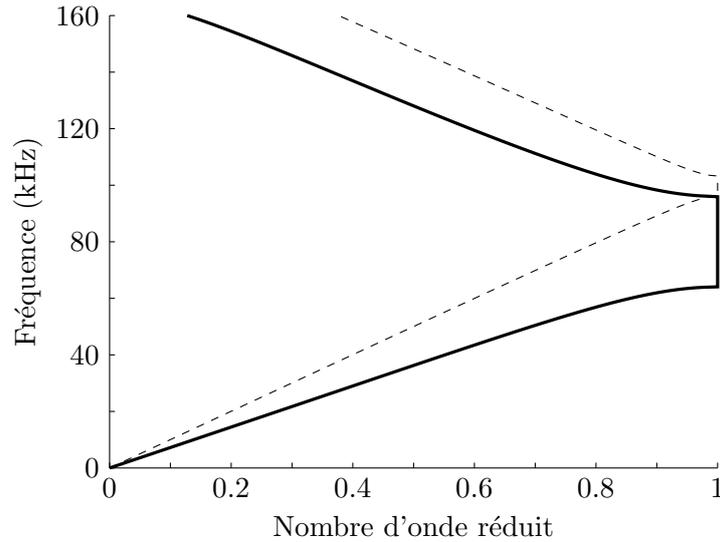


FIGURE 5.5 – Courbes de dispersion tracées avec l’Eq. (5.35) correspondant à la Fig. 5.3 où  $C_1 = 0$  et où  $C_2$  prend les valeurs  $C_2 = -1/4 C_0$  (---) et  $C_2 \rightarrow \infty$  (—).

d’augmenter, ouvrant ainsi la bande interdite au dessus de la borne fixe. Le chapitre 2 traitant de l’effet d’une impédance électrique aux bornes d’une couche piézoélectrique montre que  $C \rightarrow -C_0$  est la valeur limite de cette capacité électrique.

## 5.5 L’alternance court-circuit/capacité électrique

Soit présenté en Fig. 5.6 un super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  alternativement en court-circuit ( $C_2 \rightarrow \infty$ , couches 2) et connectées à une capacité électrique  $C_1$  (couches 1). La position des bandes interdites impaires donnée par l’Eq. (5.32) devient alors

$$\left(t^2 + 2\alpha^{(1)}t - 1\right) \left(t^2 + 2\frac{k_t^2}{kh}t - 1\right) = 0. \quad (5.43)$$

La Fig. 5.7 illustre les courbes de dispersion de ce super-réseau composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm dans différentes configurations. Le pas du réseau est encore  $2\ell$ , le nombre d’onde réduit désigne donc à nouveau la partie réelle de  $2k\ell/\pi$ . Dans le cas où  $C_1 = 0$ , les couches (1) sont en circuit ouvert et la courbe de dispersion (—) est identique à celle du cas circuit ouvert/court-circuit tracée en Fig. 4.7. Lorsque maintenant  $C_1 \rightarrow \infty$ , la position des

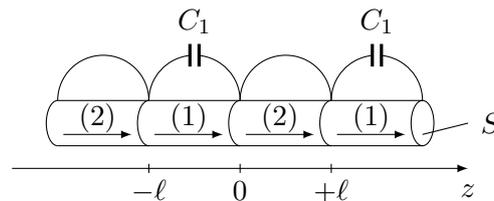


FIGURE 5.6 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  alternativement en court-circuit (couches 2) et connectés à une capacité électrique  $C_1$  (couches 1). Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

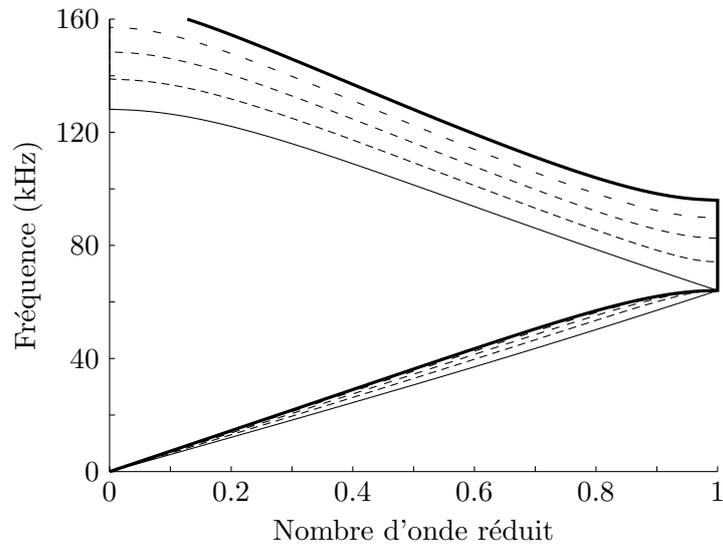


FIGURE 5.7 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (5.35) correspondant à la Fig. 5.6 où  $C_2 \rightarrow \infty$  et où  $C_1$  prend plusieurs valeurs :  $C_1 = 0$  (—),  $C_1 = 1/3 C_0$  (- - -),  $C_1 = C_0$  (- · -),  $C_1 = 3C_0$  (· · ·) et  $C_1 \rightarrow \infty$  (—).

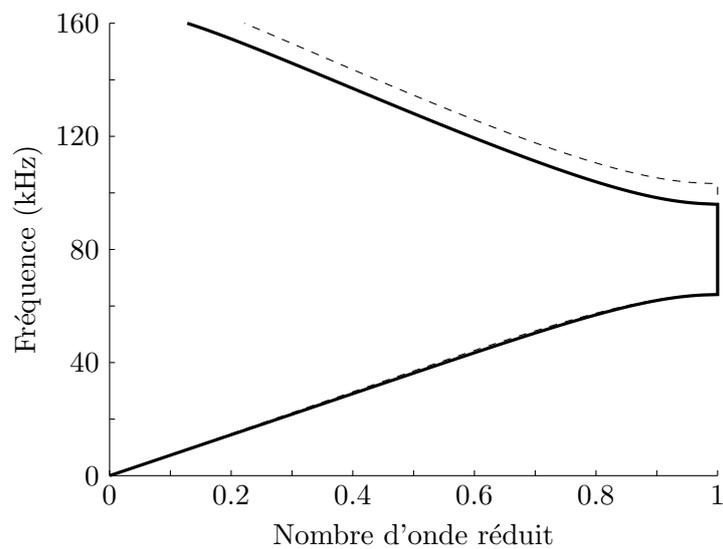


FIGURE 5.8 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (5.35) correspondant à la Fig. 5.6 où  $C_2 \rightarrow \infty$  et où  $C_1$  prend les valeurs  $C_1 = 0$  (—) et  $C_1 = -1/4 C_0$  (- - -).

bandes interdites impaires donnée par l'Eq. (5.43) devient

$$\left(t^2 + 2\frac{k_t^2}{kh}t - 1\right) = 0. \quad (5.44)$$

Les couches (1) sont alors en court-circuit et la courbe de dispersion résultante (—) est la même que celle du cas où tout est court-circuité illustrée en Fig. 4.3 sauf qu'elle présente un repliement lié aux zones de Brillouin qui sont deux fois trop grandes dans ce cas-ci. On peut donc conclure que l'alternance court-circuit/capacité électrique conduit à la borne inférieure fixe et la borne supérieure mobile. De fait, lorsque la capacité électrique  $C_1$  prend une valeur comprise entre 0 et  $\infty$ , la borne mobile de la courbe de dispersion se situe entre ces deux cas limites.

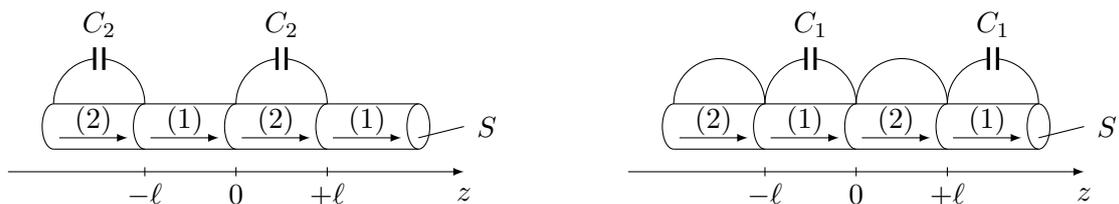
La Fig. 5.8 présente la courbe de dispersion quand  $C_2 = -1/4 C_0$  (---) comparée à la courbe correspondant à l'alternance circuit ouvert/court-circuit (—). Comme dans l'étude de l'alternance circuit ouvert/capacité électrique, l'analyse des courbes de dispersion de la Fig. 5.7 permettait de prédire la position de la courbe tracée avec une capacité électrique négative en nous concentrant sur la borne supérieure : on constate qu'au fur et à mesure que la valeur de  $C_1$  diminue ( $C_1 \rightarrow \infty$ ,  $C_1 = 3C_0$ ,  $C_1 = C_0$ ,  $C_1 = 1/3 C_0$  puis  $C_1 = 0$ ), la fréquence correspondante augmente et la bande interdite s'ouvre. Naturellement, lorsque  $C_1$  prend une valeur négative sur la Fig. 5.5, la fréquence correspondant à la borne mobile continue d'augmenter, ouvrant davantage la bande interdite. Une capacité électrique négative donne donc l'occasion l'élargir la bande interdite par la borne supérieure.

## 5.6 L'accordabilité des deux bornes

Nous venons donc de voir dans les deux sections précédentes que l'on peut fixer l'une des deux bornes de la première bande interdite en imposant soit un court-circuit, soit un circuit ouvert et accorder l'autre borne par la valeur de la capacité électrique. La Fig. 5.9 récapitule de façon graphique ces conclusions. D'une part, lors d'une alternance circuit ouvert/capacité électrique présentée en Fig. 5.9a, la borne inférieure est accordée par la capacité électrique  $C_2$ . D'autre part, lors d'une alternance court-circuit/capacité électrique présentée en Fig. 5.9b, la borne supérieure est accordée par la capacité électrique  $C_1$ . La Fig. 5.9c présente la structure permettant un contrôle total des limites de la bande interdite en combinant les propriétés de chacun des deux super-réseaux 5.9a et 5.9b : les capacités électriques  $C_1$  ou  $C_2$  accordent alors respectivement les bornes inférieure et supérieure.

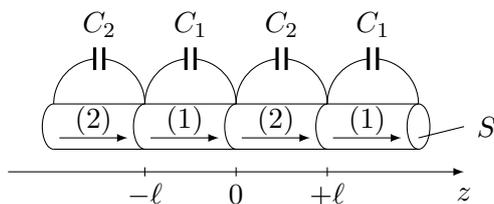
La Fig. 5.10 illustre la courbe de dispersion du super-réseau présenté en Fig. 5.9c où  $C_1 = 1/3 C_0$  et  $C_2 = 3C_0$  (---) comparée à la courbe correspondant à l'alternance circuit ouvert/court-circuit (—). Les bornes de la bande interdite correspondent bien à une combinaison des bornes mobiles présentées en Fig. 5.4 et 5.7.

Bien que l'usage de capacités électriques permette un fort contrôle des bandes interdites, des limitations liées aux propriétés intrinsèques du super-réseau apparaissent. L'accordabilité de la borne supérieure de la première bande interdite est limitée par la stabilité du système lors de l'introduction d'éléments actifs tels que des capacités électriques négatives. Le chapitre 2 traitant de l'effet d'une impédance électrique aux bornes d'une couche piézoélectrique indique que  $C \rightarrow -C_0$  est la valeur limite d'une capacité électrique négative. De nos jours, on est encore très éloigné de cette valeur lors d'une validation expérimentale.



(a) Contrôle de la borne inférieure.

(b) Contrôle de la borne supérieure.



(c) Contrôle des deux bornes.

FIGURE 5.9 – Les capacités électriques  $C_2$  et  $C_1$  accordent respectivement et indépendamment les bornes inférieure et supérieure de la première bande interdite.

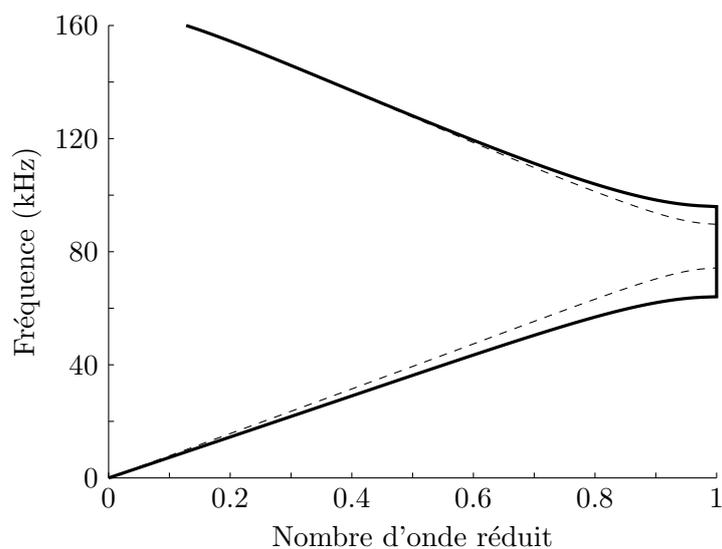


FIGURE 5.10 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (5.35) correspondant à la Fig. 5.2 où  $C_1 = 0, C_2 \rightarrow \infty$  (—) et où  $C_1 = 1/3 C_0, C_2 = 3C_0$  (---).

# Chapitre 6

## Les super-réseaux piézoélectrique/piézoélectrique

### Sommaire

---

6.1	Relation de dispersion . . . . .	87
6.2	Positions des bandes interdites . . . . .	90
6.3	Le super-réseau composé de barreaux . . . . .	91
6.4	Effet de la capacité électrique $C_1$ . . . . .	92
6.5	Effet de la capacité électrique $C_2$ . . . . .	93
6.6	L'accordabilité des deux bornes . . . . .	95

---

Les deux chapitres précédents ont traité de la condition électrique périodique. Le chapitre 4 introduit les bandes interdites de charge électrique et le chapitre 5 propose une solution pour les contrôler par le biais de capacités électriques connectées aux bornes de chacune des couches du super-réseau. Maintenant lorsque le super-réseau exclusivement piézoélectrique est composé de plusieurs matériaux, les bandes interdites sont des bandes interdites de Bragg au sens classique du terme, c'est-à-dire qu'elles découlent d'une rupture d'impédance périodique. Bien qu'elles ne soient pas des bandes interdites de charge électrique à proprement parler puisque plusieurs matériaux sont en jeu, ce chapitre va montrer qu'elles peuvent aussi être contrôlées par des capacités électriques. La démarche est donc tout à fait similaire à celle du chapitre 5.



## 6.1 Relation de dispersion

La configuration où les couches (1) et (2) sont constituées de matériaux piézoélectriques différents est présentée Fig. 6.1. La polarisation diélectrique dans chaque couche est orientée dans le sens des  $z$  croissants. Les interfaces disposent d'électrodes d'aire  $S$  permettant d'y connecter une capacité électrique  $C_i$  aux bornes de chaque couche ( $i$ ). La polarisation des ondes étant parallèle à la direction de propagation  $z$ , le déplacement  $u^{(i)}$  s'écrit dans chaque couche

$$u^{(i)} = a_i \cos k_i z + b_i \sin k_i z \quad (6.1)$$

avec  $a_i$  et  $b_i$  les amplitudes inconnues et  $k_i$  le nombre d'onde longitudinal défini par

$$k_i = \frac{\omega}{v_t^{D(i)}} \quad (6.2)$$

avec  $\omega$  la pulsation et  $v_t^{D(i)}$  la vitesse des ondes longitudinales à déplacement électrique constant suivant l'axe  $z$  ou 3 donnée par l'Eq. (C.9).

La relation de dispersion se déduit des conditions limites du super-réseau. La maille élémentaire étant constituée de deux couches, quatre conditions limites sont nécessaires pour déterminer  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  et  $b_2$ . La condition de continuité du déplacement en  $z = 0$  impose

$$u^{(1)} \Big|_{z=0} = u^{(2)} \Big|_{z=0}, \quad (6.3)$$

soit en utilisant l'Eq. (6.1) :

$$a_1 = a_2 \quad (6.4)$$

et la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée au déplacement impose

$$u^{(2)} \Big|_{z=h_2} = X u^{(1)} \Big|_{z=-h_1} \quad (6.5)$$

avec

$$X = e^{jk(h_1+h_2)}, \quad (6.6)$$

soit

$$a_2 \cos k_2 h_2 + b_2 \sin k_2 h_2 = X (a_1 \cos k_1 h_1 - b_1 \sin k_1 h_1). \quad (6.7)$$

Restent maintenant à déterminer la condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$  et la relation de phase de Bloch-Floquet appliquée à la contrainte. La contrainte  $T_3^{(i)}$  se déduit des

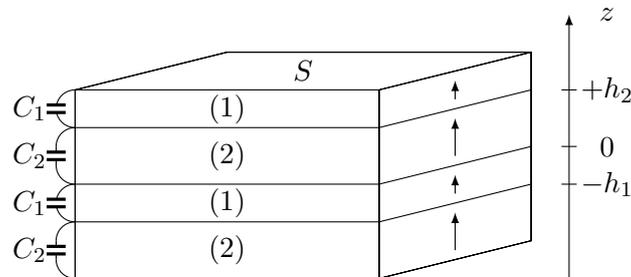


FIGURE 6.1 – Super-réseau constitué alternativement de couches piézoélectriques (1) et (2) d'épaisseurs respectives  $h_1$  et  $h_2$  où sont respectivement connectées aux électrodes d'aire  $S$  des capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$ . Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel d'une plaque données par les Eqs. (C.1) et (C.2) :

$$T_3^{(i)} = c_{33}^{D(i)} S_3^{(i)} - h_{33}^{(i)} D_3^{(i)} \quad (6.8)$$

$$E_3^{(i)} = -h_{33}^{(i)} S_3^{(i)} + \beta_{33}^{S(i)} D_3^{(i)}. \quad (6.9)$$

Contrairement au chapitre précédent, les constantes  $c_{33}^{D(i)}$ ,  $h_{33}^{(i)}$  et  $\beta_{33}^{S(i)}$  sont désormais pourvues d'un exposant ( $i$ ) car les deux couches sont constituées d'un matériau différent.

Si une capacité externe  $C_i$  est connectée entre les électrodes situées sur les surfaces de la couche piézoélectrique, la différence de potentiel  $V_i$  entre les électrodes est fonction du courant  $I_i$  traversant  $C_i$  et s'écrit en accord avec l'Eq. (2.3)

$$V_1 = \frac{I_1}{jC_1\omega} = - \int_{-h_1}^0 E_3^{(1)} dz \quad (6.10)$$

$$V_2 = \frac{I_2}{jC_2\omega} = - \int_0^{h_2} E_3^{(2)} dz, \quad (6.11)$$

soit en faisant usage de l'Eq. (2.7) :

$$\frac{SD_3^{(1)}}{C_1} = - \int_{-h_1}^0 E_3^{(1)} dz \quad (6.12)$$

$$\frac{SD_3^{(2)}}{C_2} = - \int_0^{h_2} E_3^{(2)} dz. \quad (6.13)$$

L'Eq. (6.9) est alors reportée dans les Eqs. (6.12) et (6.13), puis intégrée suivant l'épaisseur des couches (1) et (2). L'application du théorème de Gauss qui se résume dans le cas unidimensionnel à

$$\frac{\partial D_3^{(i)}}{\partial z} = 0, \quad (6.14)$$

c'est-à-dire que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de chaque couche, conduit aux expressions du déplacement électrique

$$\frac{SD_3^{(1)}}{C_1} = h_{33}^{(1)} \left[ u^{(1)} \right]_{z=-h_1}^{z=0} - \beta_{33}^{S(1)} D_3^{(1)} h_1 \quad (6.15)$$

$$\frac{SD_3^{(2)}}{C_2} = h_{33}^{(2)} \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h_2} - \beta_{33}^{S(2)} D_3^{(2)} h_2. \quad (6.16)$$

Le report de ces résultats dans l'Eq. (6.8) permet d'exprimer la contrainte dans les couches piézoélectriques sous la forme

$$T_3^{(1)} = c_{33}^{D(1)} \left( S_3^{(1)} - k_1 \alpha^{(1)} \left[ u^{(1)} \right]_{z=-h_1}^{z=0} \right) \quad (6.17)$$

$$T_3^{(2)} = c_{33}^{D(2)} \left( S_3^{(2)} - k_2 \alpha^{(2)} \left[ u^{(2)} \right]_{z=0}^{z=h_2} \right) \quad (6.18)$$

avec

$$\alpha^{(i)} = \frac{k_t^{(i)2}}{k_i h_i \left( 1 + \frac{C_0^{(i)}}{C_i} \right)} \quad (6.19)$$

où  $k_t^{(i)}$  et  $C_0^{(i)}$  sont respectivement le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique et la capacité bloquée de la couche ( $i$ ) donnés par les Eqs. (C.7) et (C.15).

La condition de continuité de la contrainte en  $z = 0$

$$T_3^{(1)} \Big|_{z=0} = T_3^{(2)} \Big|_{z=0} \quad (6.20)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} c_{33}^{D(1)} k_1 \left( b_1 - \alpha^{(1)} (a_1 (1 - \cos k_1 h_1) + b_1 \sin k_1 h_1) \right) \\ = c_{33}^{D(2)} k_2 \left( b_2 - \alpha^{(2)} (a_2 (\cos k_2 h_2 - 1) + b_2 \sin k_2 h_2) \right). \end{aligned} \quad (6.21)$$

De même, le report des Eqs. (6.17) et (6.18) dans la relation de phase de Bloch-Floquet

$$T_3^{(2)} \Big|_{z=-h_1} = X T_3^{(1)} \Big|_{z=h_2} \quad (6.22)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} c_{33}^{D(2)} k_2 \left( -a_2 \sin k_2 h_2 + b_2 \cos k_2 h_2 - \alpha^{(2)} (a_2 (\cos k_2 h_2 - 1) + b_2 \sin k_2 h_2) \right) \\ = X c_{33}^{D(1)} k_1 \left( a_1 \sin k_1 h_1 + b_1 \cos k_1 h_1 - \alpha^{(1)} (a_1 (1 - \cos k_1 h_1) + b_1 \sin k_1 h_1) \right). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Le système matriciel suivant est construit à partir des quatre conditions limites (6.4), (6.7), (6.21) et (6.23) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^{(1)} \gamma (\cos k_1 h_1 - 1) & \gamma (1 - \alpha^{(1)} \sin k_1 h_1) \\ -X \cos k_1 h_1 & X \sin k_1 h_1 \\ X \gamma (\sin k_1 h_1 + \alpha^{(1)} (\cos k_1 h_1 - 1)) & X \gamma (\cos k_1 h_1 - \alpha^{(1)} \sin k_1 h_1) \\ -1 & 0 \\ \alpha^{(2)} (\cos k_2 h_2 - 1) & \alpha^{(2)} \sin k_2 h_2 - 1 \\ \cos k_2 h_2 & \sin k_2 h_2 \\ \alpha^{(2)} (\cos k_2 h_2 - 1) + \sin k_2 h_2 & \alpha^{(2)} \sin k_2 h_2 - \cos k_2 h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

où

$$\gamma = \frac{c_{33}^{D(1)} k_1}{c_{33}^{D(2)} k_2}. \quad (6.25)$$

Le report des Eqs. (6.2) et (C.9) dans l'Eq. (6.25) montre que  $\gamma$  représente le rapport des impédances acoustiques caractéristiques  $Z^{(i)} = \rho^{(i)} v_t^{D(i)}$  des deux couches :

$$\gamma = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}}. \quad (6.26)$$

L'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (6.24) conduit à la relation de dispersion

$$\begin{aligned} \cos k(h_1 + h_2) = & \left[ \cos k_1 h_1 \cos k_2 h_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 \right. \\ & + \alpha^{(1)} \left( \gamma \sin k_2 h_2 (1 - \cos k_1 h_1) - \sin k_1 h_1 \cos k_2 h_2 \right) \\ & + \alpha^{(2)} \left( \frac{1}{\gamma} \sin k_1 h_1 (1 - \cos k_2 h_2) - \sin k_2 h_2 \cos k_1 h_1 \right) \\ & \left. + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 \right] \times \frac{1}{(1 - \alpha^{(1)} \sin k_1 h_1) (1 - \alpha^{(2)} \sin k_2 h_2)}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Cette relation de dispersion est discutée plus loin, dans le cas d'un empilement de barreaux.

## 6.2 Positions des bandes interdites

Les positions des bandes interdites se calculent à partir de l'Eq. (6.27) quand on se situe soit à la limite de la première zone de Brillouin, soit au centre de la zone de Brillouin, c'est à dire

$$\begin{aligned} & \left[ \cos k_1 h_1 \cos k_2 h_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 \right. \\ & + \alpha^{(1)} \left( \gamma \sin k_2 h_2 (1 - \cos k_1 h_1) - \sin k_1 h_1 \cos k_2 h_2 \right) \\ & + \alpha^{(2)} \left( \frac{1}{\gamma} \sin k_1 h_1 (1 - \cos k_2 h_2) - \sin k_2 h_2 \cos k_1 h_1 \right) \\ & \left. + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2 \right] \times \frac{1}{(1 - \alpha^{(1)} \sin k_1 h_1) (1 - \alpha^{(2)} \sin k_2 h_2)} = \pm 1. \end{aligned} \quad (6.28)$$

L'utilisation des règles trigonométriques

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (6.29)$$

$$\sin x = \frac{2 \tan x/2}{1 + \tan^2 x/2} \quad (6.30)$$

et le changement de variables

$$t = \tan \frac{k_1 h_1}{2} \quad (6.31)$$

$$\tau = \tan \frac{k_2 h_2}{2} \quad (6.32)$$

dans l'Eq. (6.28) permet de trouver la n-ième bande interdite en résolvant

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{2t}{1 + t^2} \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \right. \\ & + 2\alpha^{(1)} \left( \frac{\gamma\tau}{1 + \tau^2} \left( 1 - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) - \frac{t}{1 + t^2} \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \right) \\ & + 2\alpha^{(2)} \left( \frac{t}{\gamma(1 + t^2)} \left( 1 - \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2} \right) - \frac{\tau}{1 + \tau^2} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right) \\ & \left. + 4\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \frac{t}{1 + t^2} \frac{\tau}{1 + \tau^2} \right] \times \frac{1}{\left( 1 - \alpha^{(1)} \frac{2t}{1 + t^2} \right) \left( 1 - \alpha^{(2)} \frac{2\tau}{1 + \tau^2} \right)} = (-1)^n. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Quand  $n$  est impair, la bande interdite considérée se situe à la limite de la première zone de Brillouin, c'est à dire lorsque

$$k(h_1 + h_2) = \pi \quad (6.34)$$

et la résolution de l'Eq. (6.33) conduit à

$$\left( t\tau - \gamma + 2\alpha^{(1)}t \right) \left( \gamma t\tau - 1 + 2\alpha^{(2)}\tau \right) = 0. \quad (6.35)$$

On remarque alors que, à l'instar du chapitre précédent, les deux capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$  qui se situent respectivement dans  $\alpha^{(1)}$  et  $\alpha^{(2)}$  accordent indépendamment les deux bornes des bandes interdites impaires. Lorsque les matériaux sont identiques, c'est-à-dire que  $\gamma = 1$ ,  $k_t^{(1)} = k_t^{(2)}$ ,  $k_1 = k_2$ ,  $h_1 = h_2$  et  $C_0^{(1)} = C_0^{(2)}$ , on retrouve bien l'Eq. (5.32). De même, quand les matériaux ne sont pas piézoélectriques, *i. e.*  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$ , la cohérence avec l'Eq. (1.28) correspondant à un super-réseau strictement élastique est bien vérifiée.

Quand  $n$  est pair, la bande interdite considérée se situe au centre de la zone de Brillouin ( $k = 0$ ), et la résolution de l'Eq. (6.33) donne

$$(\gamma t + \tau) \left( \gamma \tau + t - 2 \left( \gamma \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \right) t \tau \right) = 0. \quad (6.36)$$

Dans ce cas, une seule borne est accordable par les capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$ . La cohérence de cette équation peut être vérifiée de la même manière que pour les bandes interdites impaires, avec cette fois les Eqs. (5.33) et (1.31).

### 6.3 Le super-réseau composé de barreaux

Considérons une structure identique, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 6.2. Moyennant l'utilisation des équations de la piézoélectricité réduites au cas unidimensionnel d'un barreau données par les Eqs. (C.3) et (C.4), la relation de dispersion s'écrit alors

$$\begin{aligned} \cos k(\ell_1 + \ell_2) = & \left[ \cos k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) \sin k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2 \right. \\ & + \alpha^{(1)} \left( \gamma \sin k_2 \ell_2 (1 - \cos k_1 \ell_1) - \sin k_1 \ell_1 \cos k_2 \ell_2 \right) \\ & + \alpha^{(2)} \left( \frac{1}{\gamma} \sin k_1 \ell_1 (1 - \cos k_2 \ell_2) - \sin k_2 \ell_2 \cos k_1 \ell_1 \right) \\ & \left. + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \sin k_1 \ell_1 \sin k_2 \ell_2 \right] \times \frac{1}{(1 - \alpha^{(1)} \sin k_1 \ell_1) (1 - \alpha^{(2)} \sin k_2 \ell_2)}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

avec

$$\alpha^{(i)} = \frac{k_{33}^{(i)2}}{k_i \ell_i \left( 1 + \frac{C_0^{(i)}}{C_i} \right)} \quad (6.38)$$

où  $k_i$  est défini cette fois par

$$k_i = \frac{\omega}{v_b^{D(i)}} \quad (6.39)$$

avec la vitesse  $v_b^D$  donnée par l'Eq. (C.10) et où  $k_{33}$  et  $C_0$  sont respectivement le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique et la capacité bloquée donnés par les Eqs. (C.8) et (C.16).

Par analogie avec le multicouche, la position des bandes interdites impaires est définie par

$$\left( t\tau - \gamma + 2\alpha^{(1)}t \right) \left( \gamma t\tau - 1 + 2\alpha^{(2)}\tau \right) = 0 \quad (6.40)$$

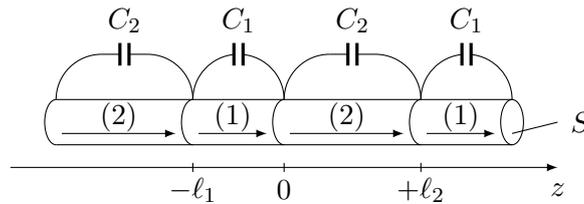


FIGURE 6.2 – Super-réseau constitué alternativement de barreaux piézoélectriques (1) et (2) de longueurs respectives  $\ell_1$  et  $\ell_2$  où sont respectivement connectées aux électrodes d'aire  $S$  des capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$ . Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

et la position des bandes interdites paires par

$$(\gamma t + \tau) \left( \gamma \tau + t - 2 \left( \gamma \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} \right) t \tau \right) = 0 \quad (6.41)$$

où cette fois  $\alpha^{(i)}$  est donné par l'Eq. (6.38) et où

$$t = \tan \frac{k_1 \ell_1}{2} \quad (6.42)$$

$$\tau = \tan \frac{k_2 \ell_2}{2}. \quad (6.43)$$

L'analyse des Eqs. (6.40) et (6.41) montre que les deux capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$  accordent indépendamment les deux bornes des bandes interdites impaires, contrairement aux bandes interdites paires où une seule des deux bornes est accordable. La suite propose donc une étude qualitative de l'accordabilité de la première bande interdite impaire.

La démarche est similaire à celle utilisée dans le chapitre 5 à un détail près : les matériaux sont identiques dans le chapitre précédent alors qu'ils sont ici de nature différente. Une interrogation se pose alors : à quelle capacité électrique est associée chacune des deux bornes ? La réponse vient du chapitre 1 traitant des super-réseaux élastique/élastique. On y trouve à la fin du chapitre deux pulsations  $\omega'_n$  et  $\omega''_n$  qui sont les bornes approximées de la n-ième bande interdite. Ces bornes ont été respectivement calculées par les Eqs. (1.34) et (1.35) qui sont

$$t = -\gamma(-1)^n \tau^{(-1)^n} \quad (6.44)$$

$$\gamma t = -(-1)^n \tau^{(-1)^n}, \quad (6.45)$$

soit pour la première bande interdite ( $n = 1$ ) :

$$t\tau - \gamma = 0 \quad (6.46)$$

$$\gamma t\tau - 1 = 0. \quad (6.47)$$

Ce sont bien les deux équations constitutives de l'Eq. (6.40) dans le cas où les matériaux ne sont pas piézoélectriques, *i. e.*  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = 0$ . On en conclut que  $\alpha^{(1)}$  et  $\alpha^{(2)}$  contrôlent respectivement les bornes  $\omega'_n$  et  $\omega''_n$ .

Enfin, il est indiqué en toute fin du chapitre 1 que le signe du rapport d'impédances  $\gamma$  renseigne sur la position relative des bornes approximées  $\omega'_n$  et  $\omega''_n$  de la n-ième bande interdite :

$$\begin{aligned} \omega'_n < \omega''_n & \text{ si } \gamma < 1 \\ \omega'_n > \omega''_n & \text{ si } \gamma > 1, \end{aligned}$$

on en déduit que

$\alpha^{(1)}$  et  $\alpha^{(2)}$  contrôlent respectivement les bornes inférieure et supérieure si  $\gamma < 1$

$\alpha^{(1)}$  et  $\alpha^{(2)}$  contrôlent respectivement les bornes supérieure et inférieure si  $\gamma > 1$ .

Une étude qualitative va maintenant être menée en examinant le comportement de chacune des deux bornes sous l'action des capacités électriques.

## 6.4 Effet de la capacité électrique $C_1$

Soit présenté en Fig. 6.3 un super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques (1) et (2) respectivement connectés à une capacité électrique  $C_1$  et en circuit ouvert ( $C_2 = 0$ ). La position des bandes interdites impaires donnée par l'Eq. (6.40) devient alors

$$\left( t\tau - \gamma + 2\alpha^{(1)}t \right) (\gamma t\tau - 1) = 0. \quad (6.48)$$

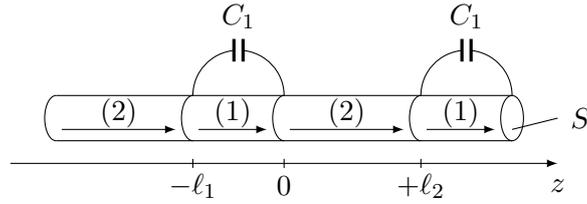


FIGURE 6.3 – Super-réseau constitué alternativement de barreaux piézoélectriques (1) et (2) de longueurs respectives  $\ell_1$  et  $\ell_2$ , respectivement connectés à une capacité électrique  $C_1$  et en circuit ouvert. Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$k_{33}$	$v_b^D$ (m/s)	$Z$ (MRa)
Matériau (1) : PMN-34.5PT	8060	.62	3366	27.1
Matériau (2) : PVDF	1760	.11	882	1.6

TABLEAU 6.1 – Propriétés des matériaux (1) et (2).

La Fig. 6.4 illustre les courbes de dispersion de ce super-réseau composé d'une alternance de barreaux de PMN-34.5PT (1) et de PVDF (2) de longueurs respectives  $\ell_1 = 1$  cm et  $\ell_2 = 1.5$  cm dont les propriétés sont données dans le Tab. 6.1. Le pas du réseau est  $\ell_1 + \ell_2$ , le nombre d'onde réduit désigne donc la partie réelle de  $k(\ell_1 + \ell_2)/\pi$ . Ces matériaux ont été choisis pour leur rapport d'impédance très important :

$$\gamma = \frac{Z^{(1)}}{Z^{(2)}} = \frac{\rho^{(1)}v_b^{D(1)}}{\rho^{(2)}v_b^{D(2)}} = 17. \quad (6.49)$$

Celui-ci étant supérieur à l'unité, la capacité électrique  $C_1$  contrôle donc la borne supérieure de la première bande interdite, ce qui est constaté sur la Fig. 6.4 qui illustre différentes configurations. L'analyse de la borne supérieure montre qu'au fur et à mesure que la valeur de la capacité électrique  $C_1$  augmente ( $C_1 = -1/3 C_0$ ,  $C_1 = 0$ ,  $C_1 = C_0$  puis  $C_1 \rightarrow \infty$ ), sa fréquence correspondante diminue. Ceci est tout à fait en accord avec les conclusions du chapitre 2 indiquant qu'une capacité électrique assouplit artificiellement un matériau.

## 6.5 Effet de la capacité électrique $C_2$

Soit présenté en Fig. 6.5 un super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques (1) et (2) respectivement en circuit ouvert ( $C_1 = 0$ ) et connectés à une capacité électrique  $C_2$ . La position des bandes interdites impaires donnée par l'Eq. (6.40) devient alors

$$(t\tau - \gamma) \left( \gamma t\tau - 1 + 2\alpha^{(2)}\tau \right) = 0. \quad (6.50)$$

La Fig. 6.6 illustre les courbes de dispersion de ce super-réseau composé de barreaux dont les matériaux constitutifs et les longueurs sont les mêmes que le super-réseau présenté en Fig. 6.3. Les seules différences entre les Figs. 6.3 et 6.6 sont donc les valeurs des capacités électriques. Le rapport d'impédances  $\gamma$  étant supérieur à l'unité, la capacité électrique  $C_2$  contrôle donc la borne inférieure de la première bande interdite, ce qui est constaté sur la Fig. 6.6. L'analyse de cette borne montre qu'au fur et à mesure que la valeur de la capacité électrique  $C_2$  augmente ( $C_2 = -1/3 C_0$ ,  $C_2 = 0$ ,  $C_2 = C_0$  puis  $C_2 \rightarrow \infty$ ), sa fréquence correspondante diminue, ce qui est d'ailleurs cohérent avec le chapitre 2. Il faut noter que si le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique était plus fort, cette fréquence diminuerait davantage sous l'action de la capacité électrique  $C_2$ .

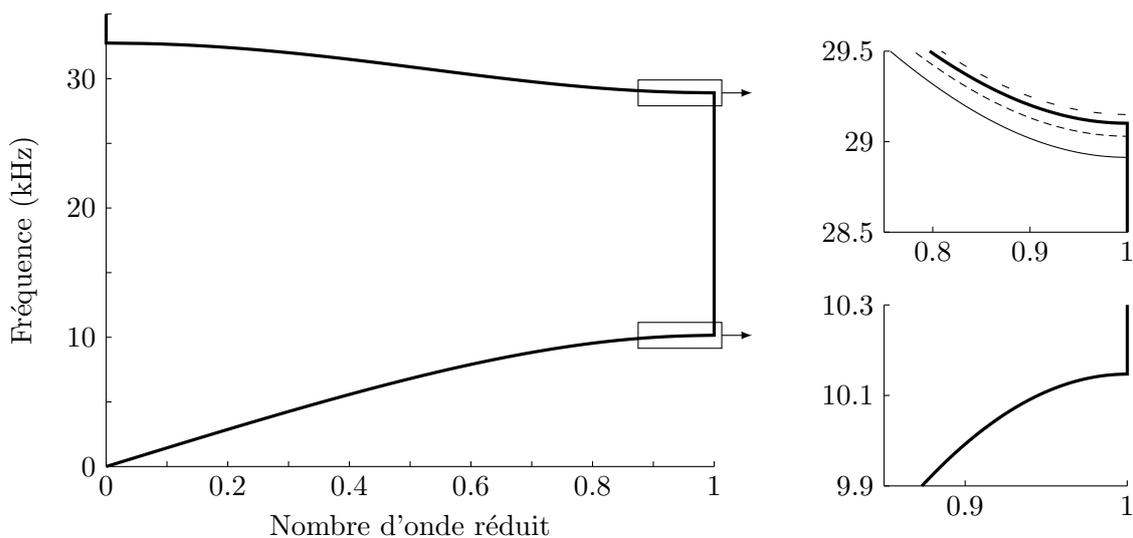


FIGURE 6.4 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (6.37) correspondant à la Fig. 6.3 où  $C_2 = 0$  et où  $C_1$  prend plusieurs valeurs :  $C_1 = -1/3 C_0$  (- - -),  $C_1 = 0$  (—),  $C_1 = C_0$  (---) et  $C_1 \rightarrow \infty$  (—). L'accordabilité étant très limitée (1%), les bornes ont été zoomées.

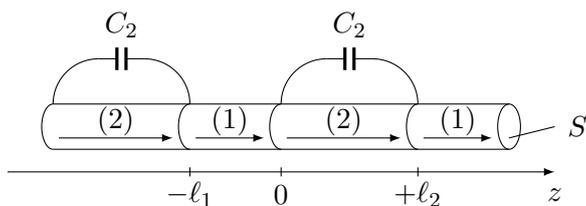


FIGURE 6.5 – Super-réseau constitué alternativement de barreaux piézoélectriques (1) et (2) de longueurs respectives  $l_1$  et  $l_2$ , respectivement en circuit ouvert et connectés à une capacité électrique  $C_2$ . Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

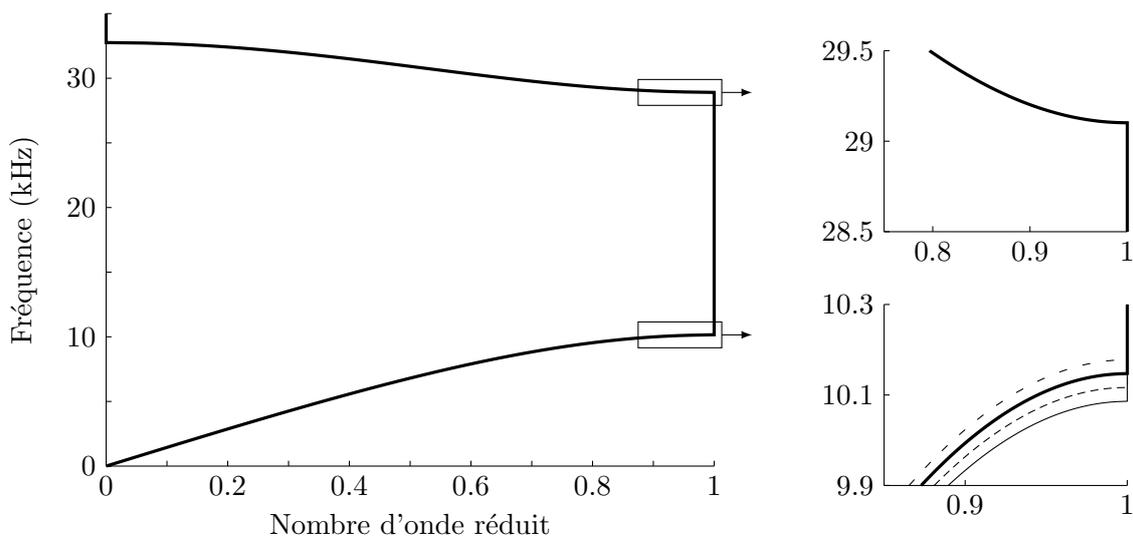


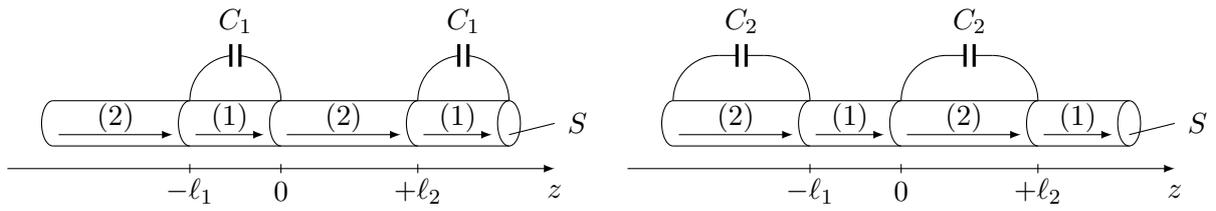
FIGURE 6.6 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (6.37) correspondant à la Fig. 6.5 où  $C_1 = 0$  et où  $C_2$  prend plusieurs valeurs :  $C_2 = -1/3 C_0$  (- - -),  $C_2 = 0$  (—),  $C_2 = C_0$  (---) et  $C_2 \rightarrow \infty$  (—). L'accordabilité étant très limitée (1%), les bornes ont été zoomées.

## 6.6 L'accordabilité des deux bornes

Nous venons donc de voir dans les deux sections précédentes que l'on peut accorder indépendamment les deux bornes de la première bande interdite. La Fig. 6.7 récapitule de façon graphique ces conclusions. D'une part, lors d'une alternance capacité électrique  $C_1$ /circuit ouvert présentée en Fig. 6.7a, la capacité électrique  $C_1$  accorde la borne inférieure si  $\gamma < 1$  ou supérieure si  $\gamma > 1$ . D'autre part, lors d'une alternance circuit ouvert/capacité électrique  $C_2$  présentée en Fig. 6.7b, la capacité électrique  $C_2$  accorde la borne supérieure si  $\gamma < 1$  ou inférieure si  $\gamma > 1$ . La Fig. 6.7c présente la structure permettant un contrôle total des limites de la bande interdite en combinant les propriétés de chacun des deux super-réseaux 6.7a et 6.7b : les capacités électriques  $C_1$  ou  $C_2$  accordent alors indépendamment les deux bornes.

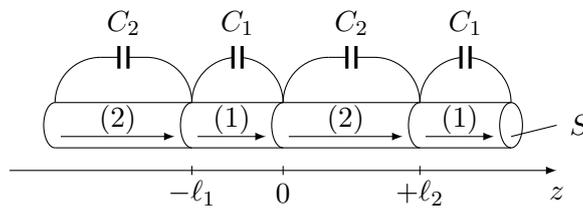
La Fig. 6.8 illustre la courbe de dispersion du super-réseau présenté en Fig. 6.7c où  $C_1 = -1/3 C_0$  et  $C_2 = C_0$  (---) comparée à la courbe lorsqu'aucune capacité électrique n'est connectée (—). Les bornes de la bande interdite correspondent bien à une combinaison des bornes mobiles présentées en Fig. 6.4 et 6.6, élargissant ainsi légèrement la bande interdite.

L'intérêt d'une structure telle que présentée dans ce chapitre est donc maintenant clair. Si on la compare à celle du chapitre précédent, on peut noter qu'elles sont complémentaires. Le super-réseau constitué de matériaux identiques permet, par le biais d'une condition électrique périodique, d'ouvrir ou non des bandes interdites : les bandes interdites de charge électrique. Celles-ci sont très intéressantes en ce sens que le super-réseau conserve la possibilité de ne pas posséder de bandes interdites (dans le cas où  $C_1 = C_2 = 0$ ). En contrepartie, la largeur maximale des bandes interdites est tributaire du couplage piézoélectrique quasistatique qui doit être très fort pour obtenir une largeur importante. Les choses se passent autrement lorsque les matériaux constitutifs sont de nature différente : les bandes interdites existent avant même qu'il y ait insertion des capacités électriques. Si le rapport d'impédances  $\gamma$  est important - ce qui est le cas dans l'exemple traité avec  $\gamma = 17$  - la largeur de la première bande interdite est alors elle aussi très importante. Certaines applications requièrent une bande interdite large mais ne nécessitent pas une accordabilité importante des bornes. Un léger contrôle peut en effet suffire à un recalage précis de la bande interdite. C'est pourquoi l'exemple utilise des couplages piézoélectriques quasistatiques de seulement 11% et 62%, ce qui est peu par rapport aux PZT classiques qui sont de l'ordre de 70-80%. La complémentarité est donc là : soit une étroite bande interdite faible mais une accordabilité importante (chapitre 5), soit une bande interdite large mais une accordabilité restreinte (chapitre actuel).



(a) La capacité électrique  $C_1$  contrôle la borne inférieure si  $\gamma < 1$  ou supérieure si  $\gamma > 1$ .

(b) La capacité électrique  $C_2$  contrôle la borne supérieure si  $\gamma < 1$  ou inférieure si  $\gamma > 1$ .



(c) Contrôle des deux bornes.

FIGURE 6.7 – Les capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$  accordent indépendamment les bornes de la première bande interdite suivant le signe du rapport d'impédance  $\gamma$ .

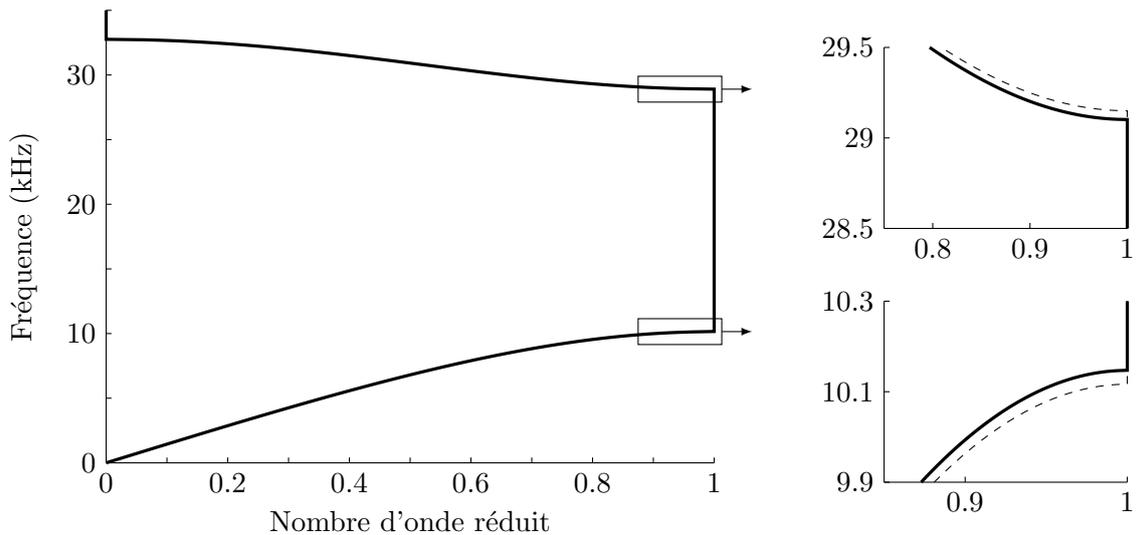


FIGURE 6.8 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (6.37) correspondant à la Fig. 6.2 où  $C_1 = C_2 = 0$  (—) et où  $C_1 = -1/3 C_0$ ,  $C_2 = C_0$  (---). L'accordabilité étant très limitée (1%), les bornes ont été zoomées.

Troisième partie

**Les super-réseaux modélisés par  
séries de Fourier**



# Chapitre 7

## La mise à la masse périodique

### Sommaire

---

7.1	De l'utilisation de l'analyse de Fourier en milieu périodique . . . . .	101
7.2	Le multicouche . . . . .	102
7.3	Le barreau . . . . .	105
7.4	Le multicouche à polarisation diélectrique alternée . . . . .	107
7.5	Le barreau à polarisation diélectrique alternée . . . . .	108
7.6	Mesures . . . . .	109

---

Cette troisième partie a été développée pour deux raisons. La première est que le modèle de la condition électrique périodique tel que décrit dans le chapitre 4 ne peut pas être validé par éléments finis. En effet, le calcul de la courbe de dispersion par le code ATILA repose sur l'application de relations de phase sur tous les champs d'une maille élémentaire. Il y a alors une incompatibilité manifeste entre les conditions limites du potentiel électrique lorsqu'il y a un court-circuit. Une mise à la masse périodique est une solution alternative : d'une part, cette configuration vérifie la relation de phase de Bloch-Floquet et d'autre part elle est tout à fait équivalente à un court-circuit puisqu'elle assure une différence de potentiel nulle. La seconde raison qui justifie cette partie est que les courbes de transmission expérimentales sont beaucoup moins bruitées lorsque les électrodes sont connectées à la masse, comparativement à un simple court-circuit. Il était alors nécessaire de montrer qu'il y a équivalence entre les deux modèles.



## 7.1 De l'utilisation de l'analyse de Fourier en milieu périodique

Considérons un super-réseau  $h$ -périodique. La relation de phase de Bloch-Floquet impose pour toute fonction d'onde  $\xi(z)$  de nombre d'onde  $k$  :

$$\xi(z + h) = \xi(z) e^{jkh}. \quad (7.1)$$

On note ainsi que bien que la structure soit  $h$ -périodique, la fonction  $\xi(z)$  ne l'est pas nécessairement. Or, l'analyse de Fourier nécessite de travailler sur des fonctions périodiques. Une fonction périodique  $\xi_p(z)$  peut alors être construite sous la forme

$$\xi_p(z) = \xi(z) e^{-jkz}. \quad (7.2)$$

Pour montrer que cette fonction est  $h$ -périodique, il suffit de la réécrire en  $z + h$  :

$$\xi_p(z + h) = \xi(z + h) e^{-jk(z+h)} \quad (7.3)$$

et d'y reporter l'Eq. (7.1) :

$$\xi_p(z + h) = \xi(z) e^{jkh} e^{-jk(z+h)} = \xi_p(z). \quad (7.4)$$

La fonction  $\xi_p$  étant périodique, elle peut alors être développée en une série de Fourier sous la forme

$$\xi_p(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{jk_0 n z} \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (7.5)$$

avec  $k_0 = 2\pi/h$  et où  $\xi_n$  sont les coefficients de Fourier de la série qui s'écrivent

$$\xi_n = \frac{1}{h} \int_0^h \xi_p e^{-jk_0 n z} dz, \quad (7.6)$$

soit en reportant l'Eq. (7.2) :

$$\xi_n = \frac{1}{h} \int_0^h \xi e^{-j(k_0 n + k)z} dz. \quad (7.7)$$

Le report de l'Eq. (7.2) dans l'Eq. (7.5) donne finalement

$$\xi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{j(k_0 n + k)z}. \quad (7.8)$$

Ainsi, même si la fonction  $\xi(z)$  n'est pas périodique mais respecte le théorème de Bloch-Floquet, elle peut être développée sous la forme d'une série de Fourier. Dans la suite, afin de simplifier les expressions des équations, les fonctions seront désignées par une lettre en omettant le  $z$  (*i. e.*  $\xi(z)$  devient  $\xi$ ).

## 7.2 Le multicouche

La Fig. 7.1 présente un super-réseau constitué de couches piézoélectriques de propriétés identiques et d'épaisseur  $h$  séparées par des électrodes d'aire  $S$  connectées périodiquement à la masse électrique en  $z = 0, h, 2h, \dots$ . Les couches sont toutes polarisées dans le sens des  $z$  croissants. Puisqu'il s'agit d'un multicouche, les équations de la piézoélectricité qui nous intéressent sont celles réduites au cas unidimensionnel d'une plaque données par les Eqs. (C.1) et (C.2) :

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3 \quad (7.9)$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3. \quad (7.10)$$

avec le champ électrique  $E_3$  qui dérive du potentiel électrique  $\Phi$  :

$$E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (7.11)$$

et la déformation  $S_3$  qui dérive du déplacement  $u$  :

$$S_3 = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (7.12)$$

Le déplacement  $u$  est une fonction d'onde : il vérifie donc par définition la relation de phase de Bloch-Floquet et peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier, en vertu de l'Eq. (7.8) :

$$u = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n e^{j(k_0 n + k)z} \quad (7.13)$$

avec  $k_0 = 2\pi/h$  et  $k$  le nombre d'onde longitudinal s'écrivant pour une plaque piézoélectrique

$$k = \frac{\omega}{v_t^D} \quad (7.14)$$

où  $v_t^D$  est la vitesse des ondes longitudinales à déplacement électrique constant suivant l'axe  $z$  ou 3 donnée par l'Eq. (C.9).

La différence de potentiel aux bornes de chaque couche est nulle, de fait d'après l'Eq. (2.3) :

$$\int_0^h E_3 dz = 0. \quad (7.15)$$

Le report de l'Eq. (7.10) dans l'Eq. (7.15), l'intégration suivant l'épaisseur de la couche  $h$  et l'application du théorème de Gauss qui se résume dans le cas unidimensionnel à

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad (7.16)$$

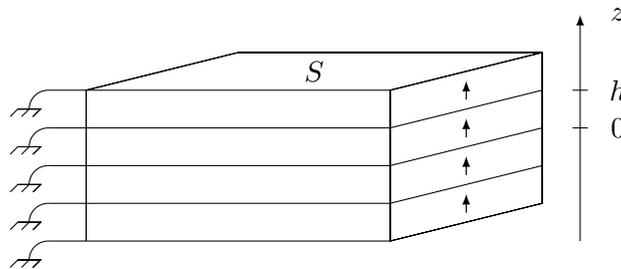


FIGURE 7.1 – Super-réseau constitué de couches piézoélectriques identiques d'épaisseur  $h$  périodiquement connectées à la masse électrique. Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

c'est-à-dire que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de chaque couche, conduisant à l'expression du déplacement électrique

$$D_3 = \frac{h_{33}}{\beta_{33}^S h} u|_{z=0} \left( e^{jkh} - 1 \right). \quad (7.17)$$

Un raisonnement identique dans la couche suivante  $]h, 2h[$  conduit au déplacement électrique

$$D_3 = \frac{h_{33}}{\beta_{33}^S h} u|_{z=h} \left( e^{jkh} - 1 \right). \quad (7.18)$$

Le rapport des Eqs. (7.17) et (7.18) montre que le déplacement électrique vérifie la relation de phase de Bloch-Floquet :

$$D_3|_{z \in ]h, 2h[} = D_3|_{z \in ]0, h[} e^{jkh} \quad (7.19)$$

et peut alors s'écrire sous la forme d'une série de Fourier, en vertu de l'Eq. (7.8) :

$$D_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{j(k_0 n + k)z}. \quad (7.20)$$

Le déplacement électrique est donc constant par morceaux et discontinu au niveau des électrodes à cause de la présence de charges électriques libres.

La contrainte  $T_3$  est une fonction d'onde : elle vérifie donc par définition la relation de phase de Bloch-Floquet et peut s'écrire sous la forme d'une série de Fourier, en vertu de l'Eq. (7.8) :

$$T_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n e^{j(k_0 n + k)z}. \quad (7.21)$$

On vient de montrer que la contrainte ainsi que le déplacement électrique vérifient la relation de phase de Bloch-Floquet. Dès lors, l'Eq. (7.9) impose à la déformation de respecter la relation de phase, qui s'écrit d'après l'Eq. (7.12) :

$$S_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j(k_0 n + k) u_n e^{j(k_0 n + k)z}. \quad (7.22)$$

Le report des Eqs. (7.20), (7.21) et (7.22) dans l'Eq. (7.9) conduit à l'expression des coefficients  $t_n$  :

$$t_n = j c_{33}^D (k_0 n + k) u_n - h_{33} d_n. \quad (7.23)$$

Enfin, puisque la déformation ainsi que le déplacement électrique vérifient la relation de phase de Bloch-Floquet, l'Eq. (7.10) impose au champ électrique de respecter cette relation de phase. Il s'écrit donc, en vertu de l'Eq. (7.8) :

$$E_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n e^{j(k_0 n + k)z}. \quad (7.24)$$

L'utilisation de l'Eq. (7.11) permet d'obtenir le potentiel électrique qui prend aussi la forme d'une série de Fourier :

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n e^{j(k_0 n + k)z} \quad (7.25)$$

où

$$\Phi_n = -\frac{e_n}{j(k_0 n + k)}. \quad (7.26)$$

Le point de départ pour trouver la relation de dispersion est l'application du théorème de Gauss :  $D_3$  est constant sur l'intervalle  $]0, h[$ . L'expression du déplacement électrique est donnée par l'Eq. (7.20) et ses coefficients  $d_n$  sont alors obtenus à l'aide de l'Eq. (7.7) :

$$d_n = \frac{D_3}{h} \int_0^h e^{-j(k_0n+k)z} dz, \quad (7.27)$$

soit :

$$d_n = D_3 e^{-j(k_0n+k)h/2} \operatorname{sinc} \frac{(k_0n+k)h}{2} \quad (7.28)$$

où  $\operatorname{sinc}$  désigne le sinus cardinal. L'expression du déplacement électrique étant maintenant connue, elle est utilisée pour déterminer les autres champs à partir du principe fondamental de la dynamique qui s'écrit suivant l'axe  $z$

$$\frac{\partial T_3}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7.29)$$

où le report des Eqs. (7.13) et (7.21) dans celle-ci conduit à

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (j(k_0n+k) (jc_{33}^D(k_0n+k)u_n - h_{33}d_n) + \rho\omega^2 u_n) e^{j(k_0n+k)z} = 0. \quad (7.30)$$

Cette équation doit être valable quelque soit  $z$ , soit

$$j(k_0n+k) (jc_{33}^D(k_0n+k)u_n - h_{33}d_n) + \rho\omega^2 u_n = 0. \quad (7.31)$$

Elle donne alors les coefficients  $u_n$  en fonction des coefficients  $d_n$  sous la forme

$$u_n = \frac{j h_{33} d_n (k_0n+k)}{\rho\omega^2 - c_{33}^D(k_0n+k)^2}. \quad (7.32)$$

La relation de dispersion va maintenant s'établir en combinant cette expression à une seconde construite à partir des Eqs. (7.20), (7.22) et (7.24) reportées dans l'Eq. (7.10), conduisant ainsi à une relation entre les coefficients  $u_n$ ,  $d_n$  et  $\Phi_n$  :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (j(k_0n+k) (h_{33}u_n - \Phi_n) - \beta_{33}^S d_n) e^{j(k_0n+k)z} = 0. \quad (7.33)$$

À nouveau, cette équation doit être valable quelque soit  $z$ , d'où

$$j(k_0n+k) (h_{33}u_n - \Phi_n) - \beta_{33}^S d_n = 0. \quad (7.34)$$

Finalement, le report de l'Eq. (7.32) dans l'Eq. (7.34) conduit à l'expression des coefficients  $\Phi_n$  en fonction des coefficients  $d_n$  donnés par l'Eq. (7.28) :

$$\Phi_n = -\frac{d_n}{j(k_0n+k)} \left( \frac{h_{33}^2 (k_0n+k)^2}{\rho\omega^2 - c_{33}^D(k_0n+k)^2} + \beta_{33}^S \right). \quad (7.35)$$

Le potentiel électrique  $\Phi$  est nul sur les électrodes qui sont connectées à la masse. En considérant l'électrode située en  $z = 0$ , le potentiel électrique s'écrit d'après l'Eq. (7.25)

$$\Phi|_{z=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n = 0. \quad (7.36)$$

Cette condition est la relation de dispersion. La méthodologie pour obtenir la courbe de dispersion consiste à tracer  $\Phi|_{z=0}$  en fonction de la fréquence pour un nombre d'onde  $k$  donné. Lorsque cette somme est nulle, c'est-à-dire qu'elle coupe l'axe des abscisses, la fréquence est relevée. L'opération est répétée pour plusieurs nombres d'onde compris entre 0 et  $k_0/2$ . L'ensemble de ces relevés forme la courbe de dispersion. Un exemple est traité dans le cas d'un super-réseau composé de barreaux.

### 7.3 Le barreau

Considérons une structure similaire, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 7.2. Les équations de la piézoélectricité qui nous intéressent sont maintenant celles réduites au cas unidimensionnel du barreau données par les Eqs. (C.3) et (C.4) :

$$S_3 = s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3 \quad (7.37)$$

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3. \quad (7.38)$$

Les Eqs (7.13), (7.20), (7.22), (7.24) et (7.25) demeurent valables où cette fois  $k_0 = 2\pi/\ell$  et où le nombre d'onde longitudinal  $k$  s'écrit dans le cas d'un barreau piézoélectrique

$$k = \frac{\omega}{v_b^D} \quad (7.39)$$

avec  $v_b^D$  la vitesse des ondes longitudinales à déplacement électrique constant suivant l'axe  $z$  ou 3 donnée par l'Eq. (C.10). À l'aide de l'Eq (7.37), l'expression de la contrainte sous la forme d'une série de Fourier s'écrit en vertu de l'Eq. (7.8)

$$T_3 = \frac{1}{s_{33}^D} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (j(k_0 n + k) u_n - g_{33} d_n) e^{j(k_0 n + k)z}. \quad (7.40)$$

Par analogie avec l'Eq. (7.28), l'application du théorème de Gauss conduit aux coefficients  $d_n$  :

$$d_n = D_3 e^{-j(k_0 n + k)\ell/2} \operatorname{sinc} \frac{(k_0 n + k)\ell}{2}. \quad (7.41)$$

Les autres champs s'écrivent à partir du principe fondamental de la dynamique donné par l'Eq. (7.29) où le report des Eqs. (7.13) et (7.40) dans celle-ci conduit à

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{j(k_0 n + k)}{s_{33}^D} (j(k_0 n + k) u_n - g_{33} d_n) + \rho \omega^2 u_n \right) e^{j(k_0 n + k)z} = 0. \quad (7.42)$$

Cette équation doit être valable quelque soit  $z$ , soit

$$\frac{j(k_0 n + k)}{s_{33}^D} (j(k_0 n + k) u_n - g_{33} d_n) + \rho \omega^2 u_n = 0. \quad (7.43)$$

Elle donne alors les coefficients  $u_n$  en fonction des coefficients  $d_n$  sous la forme

$$u_n = \frac{j g_{33} d_n (k_0 n + k)}{s_{33}^D \rho \omega^2 - (k_0 n + k)^2}. \quad (7.44)$$

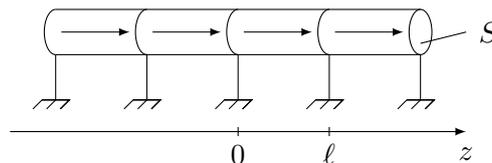


FIGURE 7.2 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique. Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

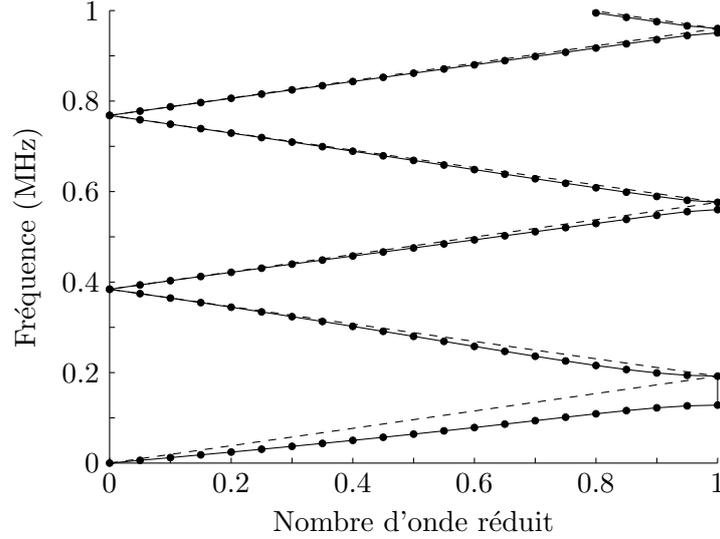


FIGURE 7.3 – Courbe de dispersion illustrant une référence de potentiel périodique sur un empilement de barreaux. Calcul semi-analytique par l'Eq. (7.48) (—), calcul numérique (•) et empilement non connecté (---).

La relation de dispersion va maintenant s'établir en combinant cette expression à une seconde construite à partir des Eqs. (7.20), (7.24) et (7.40) reportées dans l'Eq. (7.38) :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( j(k_0n + k) \left( \frac{g_{33}}{s_{33}^D} u_n - \Phi_n \right) - \left( \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} + \beta_{33}^T \right) d_n \right) e^{j(k_0n+k)z} = 0. \quad (7.45)$$

À nouveau, cette équation doit être valable quelque soit  $z$ , d'où

$$j(k_0n + k) \left( \frac{g_{33}}{s_{33}^D} u_n - \Phi_n \right) - \left( \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} + \beta_{33}^T \right) d_n = 0. \quad (7.46)$$

Finalement, le report de l'Eq. (7.44) dans l'Eq. (7.46) conduit à l'expression des coefficients  $\Phi_n$  en fonction des coefficients  $d_n$  donnés par l'Eq. (7.41) :

$$\Phi_n = -\frac{d_n}{j(k_0n + k)} \left( \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} \left( 1 + \frac{(k_0n + k)^2}{s_{33}^D \rho \omega^2 - (k_0n + k)^2} \right) + \beta_{33}^T \right). \quad (7.47)$$

Le potentiel électrique  $\Phi$  est maintenant connu sur l'ensemble du super-réseau. D'après la Fig. 7.2, celui-ci est nul sur les électrodes du fait de leur connexion à la masse électrique, c'est-à-dire pour  $x = 0, h, 2h, \dots$ . Cette condition mène à la résolution de la relation de dispersion qui s'écrit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n = 0. \quad (7.48)$$

La courbe de dispersion se trace alors en déduisant  $\omega$  pour  $k$  donné. La Fig. 7.3 présente celle d'un super-réseau piézoélectrique composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm dont les caractéristiques sont données en annexe D. Le nombre d'onde réduit désigne la partie réelle de  $k\ell/\pi$ . On ne peut alors que constater l'excellent accord entre la solution semi-analytique calculée par l'Eq. (7.48) et la solution numérique calculée par ATILA. De plus, la Fig. 7.3 est rigoureusement identique à la Fig. 4.3, validant ainsi par éléments finis le modèle de la condition électrique périodique traitant le court-circuit présenté en section 4.1.

## 7.4 Le multicouche à polarisation diélectrique alternée

Le multicouche illustré en Fig. 7.4 est composé d'un seul matériau et toutes les couches présentent la même épaisseur  $h$ . La polarisation diélectrique dans les couches (1) et (2) est respectivement orientée dans le sens des  $z$  croissants et décroissants. Les électrodes d'aire  $S$  connectées périodiquement à la masse électrique sont situées en  $z = 0, 2h, 4h, \dots$

Le théorème de Gauss montre que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de la période  $]0, 2h[$  puisqu'aucune électrode n'est connectée en  $z = h$ . Les Eqs. (7.9) et (7.10) sont écrites suivant une orientation locale dans le sens de la polarisation diélectrique statique. Afin d'être cohérent entre deux couches successives, il est nécessaire de réécrire les équations dans un même système d'axes. Ceci revient à inverser les signes du champ et du déplacement électriques dans la couche (2). La contrainte et la déformation ne sont pas affectées par l'inversion d'orientation. Les coefficients  $d_n$  du déplacement électrique donné par l'Eq. (7.20) sont alors obtenus à l'aide de l'Eq. (7.7) :

$$d_n = \frac{D_3}{2h} \left( \int_0^h e^{-j(k_0n+k)z} dz - \int_h^{2h} e^{-j(k_0n+k)z} dz \right) \quad (7.49)$$

avec  $k_0 = \pi/h$  et où  $k$  est donné par l'Eq. (7.14), soit :

$$d_n = \frac{2jD_3 e^{-j(k_0n+k)h}}{(k_0n+k)h} \sin^2 \frac{(k_0n+k)h}{2}. \quad (7.50)$$

Dans le cas où la polarisation diélectrique est continue, le champ électrique s'écrit sous la forme de l'Eq. (7.24) où les coefficients de Fourier du champ électrique se déduisent des Eqs. (7.26) et (7.35) :

$$e_n = d_n \left( \frac{h_{33}^2 (k_0n+k)^2}{\rho\omega^2 - c_{33}^D (k_0n+k)^2} + \beta_{33}^S \right) \quad (7.51)$$

avec les coefficients  $d_n$  donnés par l'Eq. (7.28). Lorsque la polarisation diélectrique est alternée, on vient de voir que le signe du champ électrique est alternativement positif ou négatif. Le champ électrique s'écrit donc sous la forme

$$E_3 = C \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n e^{j(k_0n+k)z} \quad (7.52)$$

avec  $C$  un signal rectangulaire d'amplitude  $\pm 1$  et de période  $2h$  qui s'écrit

$$C = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{jk_0mz} \quad (7.53)$$

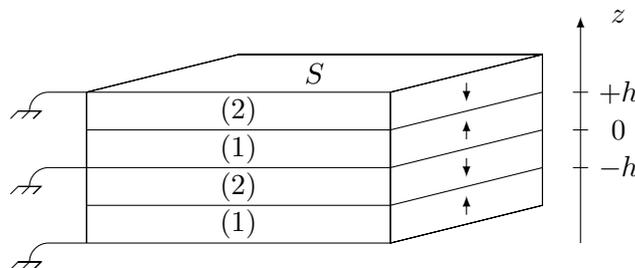


FIGURE 7.4 – Super-réseau constitué de couches piézoélectriques identiques d'épaisseur  $h$  périodiquement connectées à la masse électrique avec alternance de la polarisation diélectrique. Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

avec les coefficients  $C_m$  :

$$C_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ \frac{(-1)^m - 1}{j\pi m} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.54)$$

Les coefficients  $d_n$  utilisés dans l'Eq. (7.51) ne sont plus donnés par l'Eq. (7.28) mais sont maintenant donnés par l'Eq. (7.50). Le potentiel électrique se déduit du champ électrique à partir de l'Eq. (7.11) :

$$\Phi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_{mn} e^{j(k+k_0n+k_0m)z} \quad (7.55)$$

avec les coefficients  $\Phi_{mn}$  :

$$\Phi_{mn} = -\frac{e_n C_m}{j(k + k_0n + k_0m)}. \quad (7.56)$$

La relation de dispersion se détermine de la même manière que dans le cas de la polarisation diélectrique continue :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_{mn} = 0. \quad (7.57)$$

Un exemple sera traité dans le cas d'un super-réseau composé de barreaux.

## 7.5 Le barreau à polarisation diélectrique alternée

Considérons une structure similaire, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 7.4. Par analogie avec l'Eq. (7.49), les coefficients  $d_n$  du déplacement électrique s'écrivent

$$d_n = \frac{D_3}{2\ell} \left( \int_0^\ell e^{-j(k_0n+k)z} dz - \int_\ell^{2\ell} e^{-j(k_0n+k)z} dz \right) \quad (7.58)$$

avec  $k_0 = \pi/\ell$  et où  $k$  est donné par l'Eq. (7.39), soit :

$$d_n = \frac{2jD_3 e^{-j(k_0n+k)\ell}}{(k_0n+k)\ell} \sin^2 \frac{(k_0n+k)\ell}{2}. \quad (7.59)$$

Le champ électrique s'écrit sous la forme de l'Eq. (7.52) avec les coefficients  $e_n$  déduits des Eqs. (7.26) et (7.47) :

$$e_n = d_n \left( \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} \left( 1 + \frac{(k_0n+k)^2}{s_{33}^D \rho \omega^2 - (k_0n+k)^2} \right) + \beta_{33}^T \right) \quad (7.60)$$

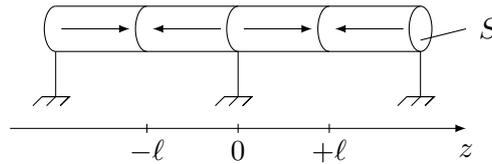


FIGURE 7.5 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique avec alternance de la polarisation diélectrique. Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

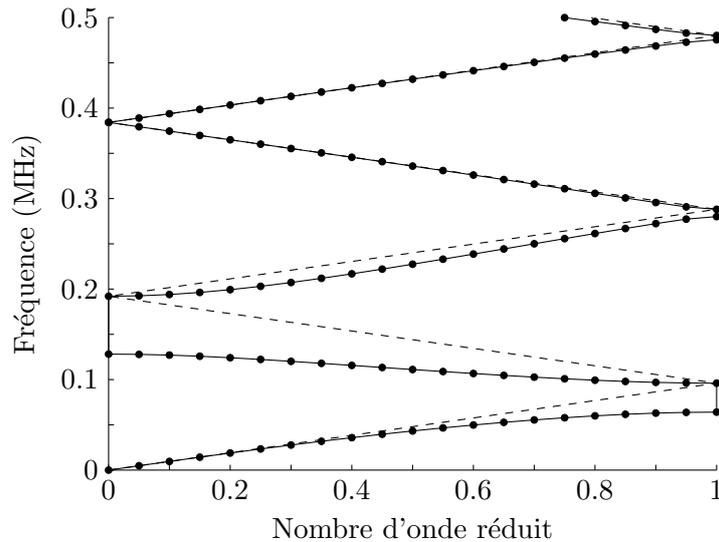


FIGURE 7.6 – Courbe de dispersion illustrant une référence de potentiel périodique sur un empilement de barreaux avec alternance de la polarisation diélectrique. Calcul semi-analytique par l’Eq. (7.61) (—), calcul numérique (•) et empilement non connecté (---).

avec les coefficients  $d_n$  donnés par l’Eq. (7.59). Enfin, la relation de dispersion est la même que dans le cas d’une alternance de plaques donnée par l’Eq. (7.57), c’est à dire

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_{mn} = 0 \quad (7.61)$$

avec  $\Phi_{mn}$  donné par l’Eq. (7.56) où cette fois  $e_n$  est donné par l’Eq. (7.60). La courbe de dispersion se trace alors en déduisant  $\omega$  pour  $k$  donné. La Fig. 7.6 présente celle d’un super-réseau piézoélectrique composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm dont les caractéristiques sont données en annexe D. Le nombre d’onde réduit désigne la partie réelle de  $2k\ell/\pi$ . On ne peut alors que constater l’excellent accord entre la solution semi-analytique calculée par l’Eq. (7.61) et la solution numérique calculée par ATILA. De plus, la Fig. 7.6 est rigoureusement identique à la Fig. 4.10, validant ainsi par éléments finis le modèle de la condition électrique périodique traitant le court-circuit présenté en section 4.3.

## 7.6 Mesures

Le modèle du super-réseau à polarisation diélectrique alternée a été validé expérimentalement sur l’empilement décrit en Fig. 7.7. Il est composé de 14 barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm, soit 7 périodes. Lorsqu’une électrode sur deux est connectée à la masse électrique, on obtient alors la configuration illustrée sur la Fig. 7.5. La mesure a été effectuée sur le banc de contrainte présenté en Fig. 3.6.

La Fig. 7.8 illustre la courbe de transmission expérimentale lorsqu’une électrode sur deux est connectée à la masse électrique (—) et lorsqu’aucune électrode n’est connectée (---). Celles-ci sont comparées aux courbes de dispersion semi-analytiques tracées à partir de l’Eq. (7.61) où le nombre d’onde réduit désigne la partie réelle de  $2k\ell/\pi$ . Les axes ont été inversés par rapport à la Fig. 7.6 afin de faciliter la comparaison. D’une part, on remarque bien que la bande interdite est créée par la connection périodique à la masse électrique; et d’autre part, que celle-ci est correctement positionnée. Cette mesure représente la première mise en évidence expérimentale des bandes interdites de charge électrique.



FIGURE 7.7 – Super-réseau composé de barreaux de PZ29 de rayon 5 mm avec alternance de la polarisation diélectrique. Le pas du réseau est de 20 mm.

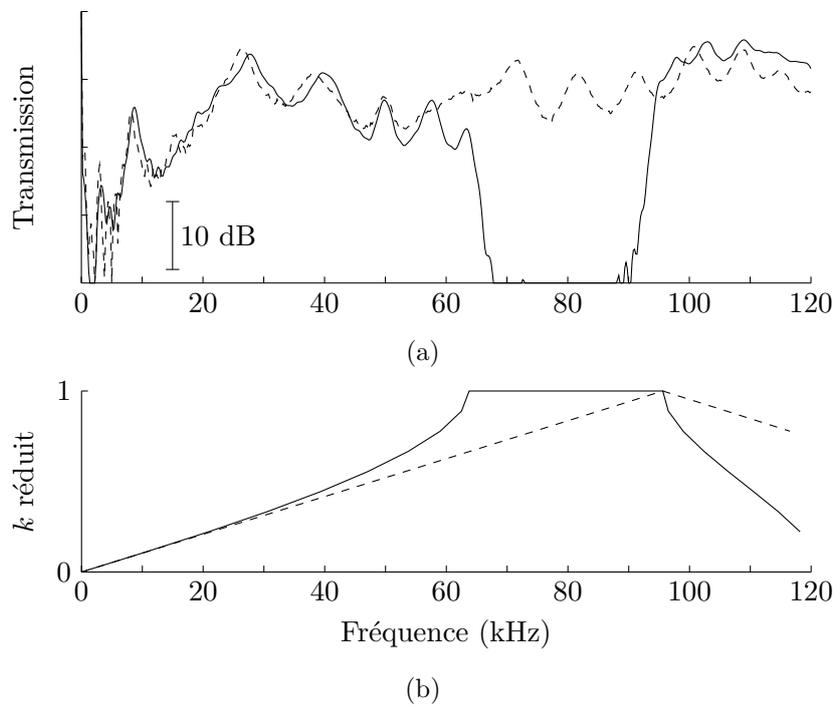


FIGURE 7.8 – Courbes de transmission expérimentales (7.8a) comparées aux courbes de dispersion semi-analytiques (7.8b) calculées par l'Eq. (7.61). Les électrodes sont connectées dans la configuration de la Fig. 7.5 (—) ou aucune électrode n'est connectée à la masse électrique (---).

# Chapitre 8

## La mise à la masse périodique accordable

### Sommaire

---

8.1	Le multicouche . . . . .	113
8.2	Le barreau . . . . .	115
8.3	L'alternance circuit ouvert/capacité électrique . . . . .	116
8.4	L'alternance court-circuit/capacité électrique . . . . .	117
8.5	L'accordabilité des deux bornes . . . . .	121
8.6	Mesures sur le contrôle borne par borne . . . . .	122
8.7	Mesures sur le contrôle total . . . . .	122

---

Le chapitre précédent vient de montrer comment est obtenue l'équation de dispersion lorsque les champs sont décrits par des séries de Fourier. L'équivalence a été établie entre le court-circuit périodique (chapitre 4) et la mise à la masse périodique (chapitre 7), conduisant dans les deux cas à des bandes interdites de charge électrique. Ce chapitre va maintenant montrer, avec des résultats expérimentaux à l'appui, comment accorder ces bandes interdites par insertion de capacités électriques entre les électrodes et la masse électrique.



## 8.1 Le multicouche

La Fig. 8.1 présente un super-réseau constitué de couches piézoélectriques de propriétés identiques et d'épaisseur  $h$  séparées par des électrodes d'aire  $S$  connectées périodiquement à la masse électrique via une capacité électrique  $C_1$  en  $z = 0, 2h, \dots$  et via une capacité électrique  $C_2$  en  $z = h, 3h, \dots$ . Les couches sont toutes polarisées dans le sens des  $z$  croissants. Puisqu'il s'agit d'un multicouche, les équations de la piézoélectricité qui nous intéressent sont celles réduites au cas unidimensionnel d'une plaque données par les Eqs. (C.1) et (C.2) :

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3 \quad (8.1)$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3. \quad (8.2)$$

avec le champ électrique  $E_3$  qui dérive du potentiel électrique  $\Phi$  :

$$E_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (8.3)$$

et la déformation  $S_3$  qui dérive du déplacement  $u$  :

$$S_3 = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (8.4)$$

Le chapitre précédent montre que les déplacement et potentiel électriques peuvent s'écrire sous la forme d'une série de Fourier dont la forme générale est donnée par l'Eq. (7.8) :

$$D_3 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{j(k_0 n + k)z} \quad (8.5)$$

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n e^{j(k_0 n + k)z} \quad (8.6)$$

avec  $k_0 = \pi/h$  et  $k$  le nombre d'onde longitudinal s'écrivant pour une plaque piézoélectrique

$$k = \frac{\omega}{v_t^D} \quad (8.7)$$

où  $v_t^D$  est la vitesse des ondes longitudinales à déplacement électrique constant suivant l'axe  $z$  ou 3 donnée par l'Eq. (C.9).

Le point de départ pour trouver la relation de dispersion est l'application du théorème de Gauss qui se résume dans le cas unidimensionnel à

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad (8.8)$$

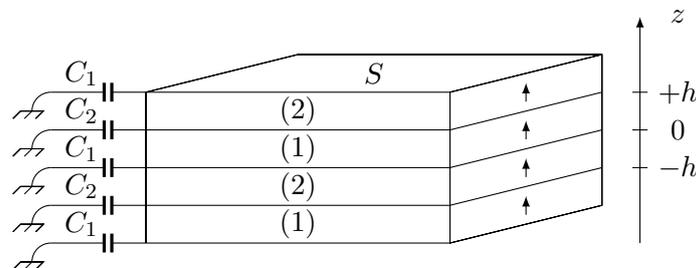


FIGURE 8.1 – Super-réseau constitué de couches piézoélectriques identiques d'épaisseur  $h$  périodiquement connectées à la masse électrique via une capacité électrique  $C_1$  ou  $C_2$ . Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

c'est-à-dire que le déplacement électrique est constant à l'intérieur de chaque couche<sup>1</sup>. Les courants traversant les capacités  $C_1$  et  $C_2$  sont différents, ce qui implique que les amplitudes des déplacements électriques  $D_3^{(1)}$  et  $D_3^{(2)}$  dans les couches (1) et (2) ne sont pas identiques. L'expression du déplacement électrique est donnée par l'Eq. (8.5) et ses coefficients  $d_n$  sont alors obtenus à l'aide de l'Eq. (7.7) :

$$d_n = \underbrace{\frac{D_3^{(1)}}{2h} \int_0^h e^{-j(k_0n+k)z} dz}_{d_n^{(1)} D_3^{(1)}} + \underbrace{\frac{D_3^{(2)}}{2h} \int_h^{2h} e^{-j(k_0n+k)z} dz}_{d_n^{(2)} D_3^{(2)}}, \quad (8.9)$$

soit :

$$d_n^{(1)} = \frac{1}{2} e^{-j(k_0n+k)h/2} \operatorname{sinc} \frac{(k_0n+k)h}{2} \quad (8.10)$$

$$d_n^{(2)} = \frac{1}{2} e^{-j(k_0n+k)3h/2} \operatorname{sinc} \frac{(k_0n+k)h}{2}. \quad (8.11)$$

Les coefficients  $\Phi_n$  se déterminent en reportant l'Eq. (8.9) dans l'Eq. (7.35) :

$$\Phi_n = \Phi_n^{(1)} D_3^{(1)} + \Phi_n^{(2)} D_3^{(2)} \quad (8.12)$$

avec

$$\Phi_n^{(i)} = -\frac{d_n^{(i)}}{j(k_0n+k)} \left( \frac{h_{33}^2 (k_0n+k)^2}{\rho\omega^2 - c_{33}^D (k_0n+k)^2} + \beta_{33}^S \right) \quad (8.13)$$

où les coefficients  $d_n^{(i)}$  sont donnés par les Eqs. (8.10) et (8.11).

Le potentiel électrique est fonction du courant  $I_i$  traversant  $C_i$ , il s'écrit donc

$$\begin{cases} \Phi|_{z=0} = \frac{I_1}{jC_1\omega} \\ \Phi|_{z=h} = \frac{I_2}{jC_2\omega} \end{cases} \quad (8.14)$$

L'utilisation des Eqs. (2.7) et (8.6) permet alors d'écrire, à l'aide de la loi des nœuds en  $z = 0$  et en  $z = h$

$$\begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n = \frac{S}{C_1} \left( D_3^{(2)} e^{-j2kh} - D_3^{(1)} \right) \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n e^{j(k_0n+k)h} = \frac{S}{C_2} \left( D_3^{(1)} - D_3^{(2)} \right). \end{cases} \quad (8.15)$$

Le système d'équations (8.15) s'écrit sous forme matricielle à l'aide de l'Eq. (8.12)

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(1)} + \frac{S}{C_1} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(2)} - \frac{S}{C_1} e^{-j2kh} \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(1)} e^{j(k_0n+k)h} - \frac{S}{C_2} & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(2)} e^{j(k_0n+k)h} + \frac{S}{C_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_3^{(1)} \\ D_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

---

1. Il ne faut en revanche pas perdre de vue que le déplacement électrique est discontinu sur l'ensemble du super-réseau dès lors qu'une densité surfacique de charges apparaît sur les électrodes, par exemple quand elles sont connectées à une référence de potentiel.

Une solution non triviale pour les constantes  $D_3^{(1)}$  et  $D_3^{(2)}$  nécessite l'annulation du déterminant de la matrice de l'Eq. (8.16), conduisant ainsi à la relation de dispersion qui s'écrit

$$\left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(1)} + \frac{S}{C_1} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(2)} e^{j(k_0 n + k)h} + \frac{S}{C_2} \right) - \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(2)} - \frac{S}{C_1} e^{-j2kh} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(1)} e^{j(k_0 n + k)h} - \frac{S}{C_2} \right) = 0. \quad (8.17)$$

Comme dans le chapitre précédent, la méthodologie pour obtenir la courbe de dispersion consiste à tracer ce déterminant en fonction de la fréquence pour un nombre d'onde  $k$  donné. Lorsque le déterminant est nul, c'est-à-dire qu'il coupe l'axe des abscisses, la fréquence est relevée. L'opération est répétée pour plusieurs nombres d'onde compris entre 0 et  $k_0/2$ . L'ensemble de ces relevés forme la courbe de dispersion. Un exemple est traité dans le cas d'un super-réseau composé de barreaux.

## 8.2 Le barreau

Considérons une structure similaire, non plus composée d'un empilement de couches identiques mais d'un empilement de barreaux identiques tel que décrit en Fig. 8.2. Les équations de la piézoélectricité qui nous intéressent sont maintenant celles réduites au cas unidimensionnel du barreau données par les Eqs. (C.3) et (C.4) :

$$S_3 = s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3 \quad (8.18)$$

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3. \quad (8.19)$$

Les Eqs (8.5) et (8.6) demeurent valables où cette fois  $k_0 = \pi/\ell$  et où le nombre d'onde longitudinal  $k$  s'écrit dans le cas d'un barreau piézoélectrique

$$k = \frac{\omega}{v_b^D} \quad (8.20)$$

avec  $v_b^D$  la vitesse des ondes longitudinales à déplacement électrique constant suivant l'axe  $z$  ou 3 donnée par l'Eq. (C.10). Par analogie avec l'Eq. (8.9), l'application du théorème de Gauss conduit aux coefficients  $d_n$  :

$$d_n = \underbrace{\frac{D_3^{(1)}}{2\ell} \int_0^\ell e^{-j(k_0 n + k)z} dz}_{d_n^{(1)} D_3^{(1)}} + \underbrace{\frac{D_3^{(2)}}{2\ell} \int_\ell^{2\ell} e^{-j(k_0 n + k)z} dz}_{d_n^{(2)} D_3^{(2)}}, \quad (8.21)$$

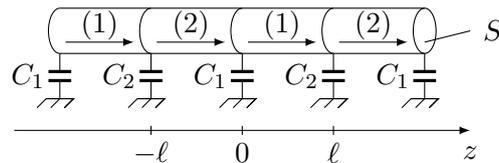


FIGURE 8.2 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique via une capacité électrique  $C_1$  ou  $C_2$ . Les flèches indiquent le sens de la polarisation diélectrique.

soit :

$$d_n^{(1)} = \frac{1}{2} e^{-j(k_0 n + k)\ell/2} \operatorname{sinc} \frac{(k_0 n + k)\ell}{2} \quad (8.22)$$

$$d_n^{(2)} = \frac{1}{2} e^{-j(k_0 n + k)3\ell/2} \operatorname{sinc} \frac{(k_0 n + k)\ell}{2}. \quad (8.23)$$

Les coefficients  $\Phi_n$  se déterminent en reportant l'Eq. (8.21) dans l'Eq. (7.47) :

$$\Phi_n = \Phi_n^{(1)} D_3^{(1)} + \Phi_n^{(2)} D_3^{(2)} \quad (8.24)$$

avec

$$\Phi_n^{(i)} = -\frac{d_n^{(i)}}{j(k_0 n + k)} \left( \frac{g_{33}^2}{s_{33}^D} \left( 1 + \frac{(k_0 n + k)^2}{s_{33}^D \rho \omega^2 - (k_0 n + k)^2} \right) + \beta_{33}^T \right). \quad (8.25)$$

où les coefficients  $d_n^{(i)}$  sont donnés par les Eqs. (8.22) et (8.23). Enfin, la relation de dispersion est semblable à celle dans le cas d'une alternance de plaques donnée par l'Eq. (8.17), c'est à dire

$$\left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(1)} + \frac{S}{C_1} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(2)} e^{j(k_0 n + k)\ell} + \frac{S}{C_2} \right) - \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(2)} - \frac{S}{C_1} e^{-j2k\ell} \right) \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(1)} e^{j(k_0 n + k)\ell} - \frac{S}{C_2} \right) = 0. \quad (8.26)$$

avec les coefficients  $\Phi_n^{(i)}$  donnés par l'Eq. (8.25).

Les positions théoriques des bandes interdites n'ont pas été calculées mais on verra dans les sections suivantes que les deux capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$  accordent indépendamment les deux bornes la première bande interdite. Il en va de la cohérence avec les chapitres précédents, en particulier avec le chapitre 5 traitant de la condition électrique périodique accordable. La suite propose donc, à l'instar du chapitre 5, une étude qualitative de l'accordabilité de la première bande interdite impaire en faisant tendre l'une des deux capacités électriques vers zéro ou vers l'infini. L'indépendance des deux bornes permettra ensuite de combiner les résultats des différents cas limites.

### 8.3 L'alternance circuit ouvert/capacité électrique

Soit présenté en Fig. 8.3 un super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique via une capacité électrique  $C_2$ . La capacité électrique  $C_1$  présente sur la Fig. 8.2 est remplacée par un circuit ouvert.

La Fig. 8.4 illustre les courbes de dispersion de ce super-réseau composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm dans différentes configurations. Les propriétés du PZ29 sont données dans l'annexe D. Le pas du réseau est  $2\ell$ , le nombre d'onde réduit désigne donc la partie réelle

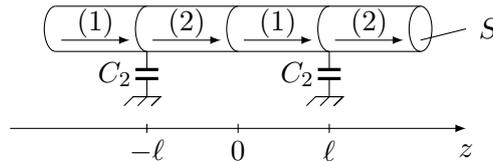


FIGURE 8.3 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique via une capacité électrique  $C_2$ . La capacité électrique  $C_1$  présente sur la Fig. 8.2 est remplacée par un circuit ouvert.

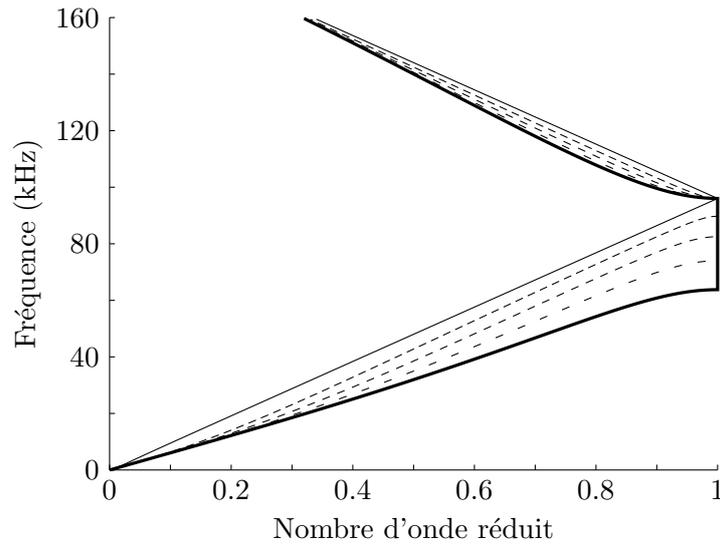


FIGURE 8.4 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (8.26) correspondant à la Fig. 8.3 où  $C_1 = 0$  et où  $C_2$  prend plusieurs valeurs :  $C_2 = 0$  (—),  $C_2 = \frac{2}{3} C_0$  (---),  $C_2 = C_0$  (- - -),  $C_2 = 6C_0$  (· · ·) et  $C_2 \rightarrow \infty$  (—).

de  $2k\ell/\pi$ . Lorsque  $C_2 = 0$ , les couches sont en circuit ouvert et l'effet piézoélectrique ne joue aucun rôle dans la propagation de l'onde acoustique. La périodicité du réseau est alors fictive et la courbe de dispersion (—) se résume à une droite de pente  $v_b^D$  repliée dans la première zone de Brillouin. Dans le cas où  $C_2 \rightarrow \infty$ , les couches sont alors en court-circuit et la courbe de dispersion (—) est semblable à celle du tout court-circuit tracée en Fig. 7.3, au rapport 2 de la période près. On peut donc conclure que l'alternance circuit ouvert/capacité électrique conduit à la borne supérieure fixe et la borne inférieure mobile. De fait, il est naturel que lorsque la capacité électrique  $C_2$  prend une valeur comprise entre 0 et  $\infty$ , la borne mobile de la courbe de dispersion se situe entre ces deux cas limites. Les capacités électriques proposées pour l'illustration sont référencées par rapport à la capacité bloquée  $C_0$  qui est calculée à partir de l'Eq. (C.16).

La Fig. 8.5 présente la courbe de dispersion quand  $C_2 = -\frac{1}{2} C_0$  (---) comparée à la courbe correspondant à l'alternance circuit ouvert/court-circuit (—). L'analyse des courbes de dispersion de la Fig. 8.4 permettrait de prédire la position de la courbe tracée avec une capacité électrique négative en nous concentrant sur la borne inférieure : on constate qu'au fur et à mesure que la valeur de  $C_2$  diminue ( $C_2 \rightarrow \infty$ ,  $C_2 = 6C_0$ ,  $C_2 = 2C_0$ ,  $C_2 = \frac{2}{3} C_0$  puis  $C_2 = 0$ ), la fréquence correspondante augmente et ferme la bande interdite. Naturellement, lorsque la valeur  $C_2$  devient négative sur la Fig. 8.5, la fréquence correspondant à la borne mobile continue d'augmenter, ouvrant ainsi la bande interdite au dessus de la borne fixe. Le chapitre 2 traitant de l'effet d'une impédance électrique aux bornes d'une couche piézoélectrique montre que  $C \rightarrow -C_0$  est la valeur limite de cette capacité électrique.

## 8.4 L'alternance court-circuit/capacité électrique

Soit présenté en Fig. 8.6 un super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique via une capacité électrique  $C_1$ . La capacité électrique  $C_2$  présente sur la Fig. 8.2 est remplacée par un court-circuit.

La Fig. 8.7 illustre les courbes de dispersion de ce super-réseau composé de barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm dans différentes configurations. Le pas du réseau est encore  $2\ell$ , le nombre d'onde réduit désigne donc à nouveau la partie réelle de  $2k\ell/\pi$ . Dans le cas où  $C_1 = 0$ , les couches sont alors en court-circuit sur une période  $2\ell$  et la courbe de dispersion (—) est semblable à

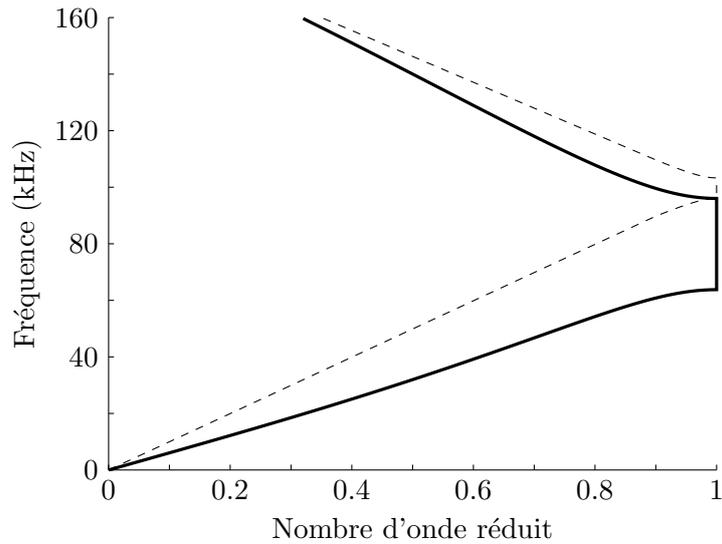


FIGURE 8.5 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (8.26) correspondant à la Fig. 8.3 où  $C_1 = 0$  et où  $C_2$  prend les valeurs  $C_2 = -1/2 C_0$  (---) et  $C_2 \rightarrow \infty$  (—).

celle du tout court-circuit tracée en Fig. 7.3, au rapport 2 de la période près. Lorsque maintenant  $C_1 \rightarrow \infty$ , les couches sont alors en court-circuit sur une période  $\ell$  et la courbe de dispersion (—) est à nouveau semblable à celle du tout court-circuit tracée en Fig. 7.3. La différence est qu'elle présente un repliement lié aux zones de Brillouin qui sont deux fois trop grandes dans ce cas-ci. On peut donc conclure que l'alternance court-circuit/capacité électrique conduit à la borne inférieure fixe et la borne supérieure mobile. De fait, lorsque la capacité électrique  $C_1$  prend une valeur comprise entre 0 et  $\infty$ , la borne mobile de la courbe de dispersion se situe entre ces deux cas limites.

La Fig. 8.8 présente la courbe de dispersion quand  $C_2 = -1/2 C_0$  (---) comparée à la courbe correspondant à l'alternance circuit ouvert/court-circuit (—). Comme dans l'étude de l'alternance circuit ouvert/capacité électrique, l'analyse des courbes de dispersion de la Fig. 8.7 permettait de prédire la position de la courbe tracée avec une capacité électrique négative en nous concentrant sur la borne supérieure : on constate qu'au fur et à mesure que la valeur de  $C_1$  diminue ( $C_1 \rightarrow \infty$ ,  $C_1 = 6C_0$ ,  $C_1 = 2C_0$ ,  $C_1 = 2/3 C_0$  puis  $C_1 = 0$ ), la fréquence correspondante augmente et la bande interdite s'ouvre. Naturellement, lorsque  $C_1$  prend une valeur négative sur la Fig. 8.8, la fréquence correspondant à la borne mobile continue d'augmenter, ouvrant davantage la bande interdite. Une capacité électrique négative donne donc l'occasion l'élargir la bande interdite par la borne supérieure.

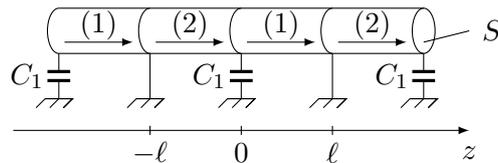


FIGURE 8.6 – Super-réseau constitué de barreaux piézoélectriques identiques de longueur  $\ell$  périodiquement connectés à la masse électrique via une capacité électrique  $C_1$ . La capacité électrique  $C_2$  présente sur la Fig. 8.2 est remplacée par un court-circuit.

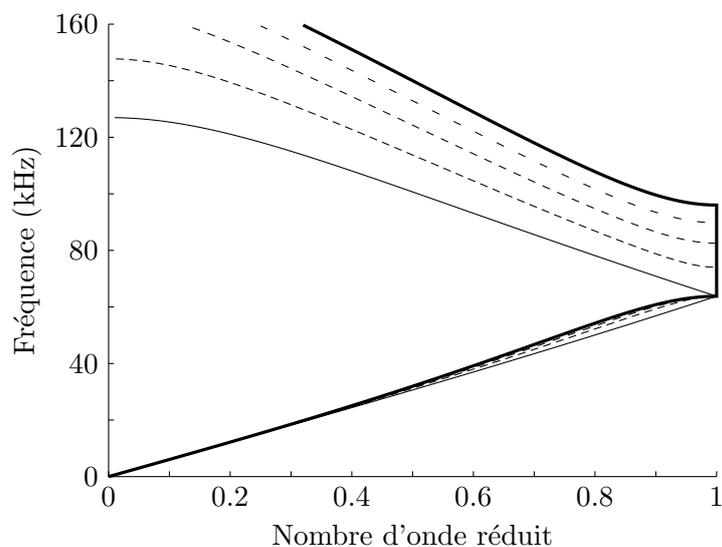


FIGURE 8.7 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (8.26) correspondant à la Fig. 8.6 où  $C_2 \rightarrow \infty$  et où  $C_1$  prend plusieurs valeurs :  $C_1 = 0$  (—),  $C_1 = \frac{2}{3} C_0$  (- - -),  $C_1 = 2C_0$  (---),  $C_1 = 6C_0$  (· · ·) et  $C_1 \rightarrow \infty$  (—).

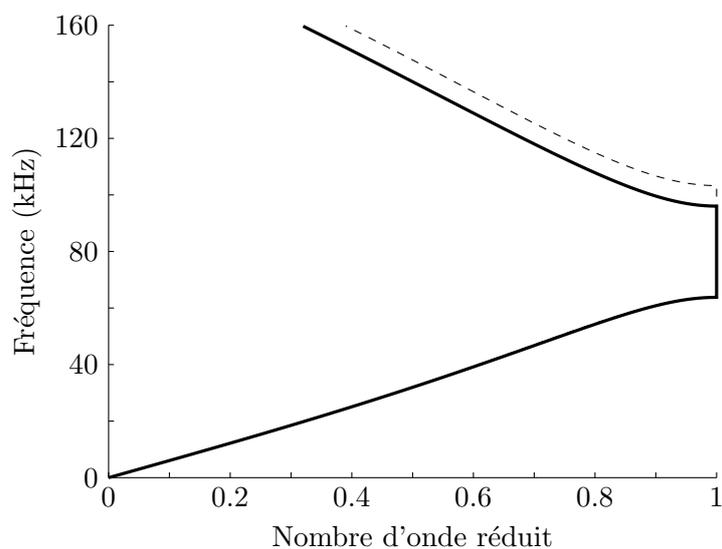


FIGURE 8.8 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (8.26) correspondant à la Fig. 8.6 où  $C_2 \rightarrow \infty$  et où  $C_1$  prend les valeurs  $C_1 = 0$  (—) et  $C_1 = -\frac{1}{2} C_0$  (- - -).

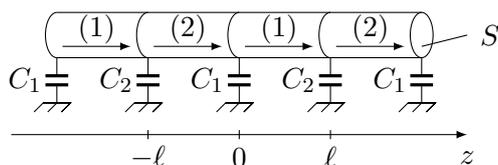
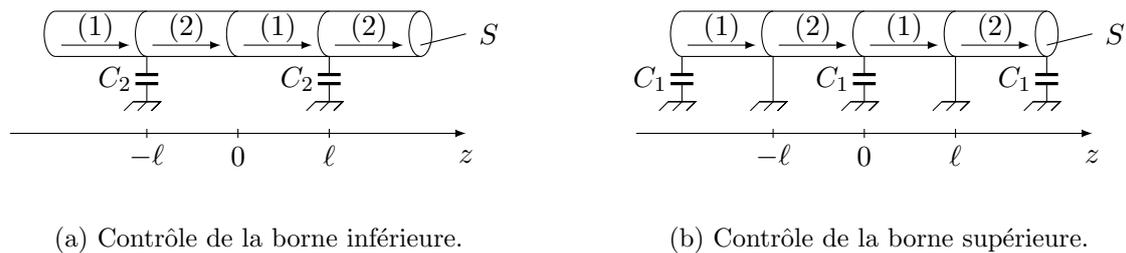


FIGURE 8.9 – Les capacités électriques  $C_2$  et  $C_1$  accordent respectivement et indépendamment les bornes inférieure et supérieure de la première bande interdite.

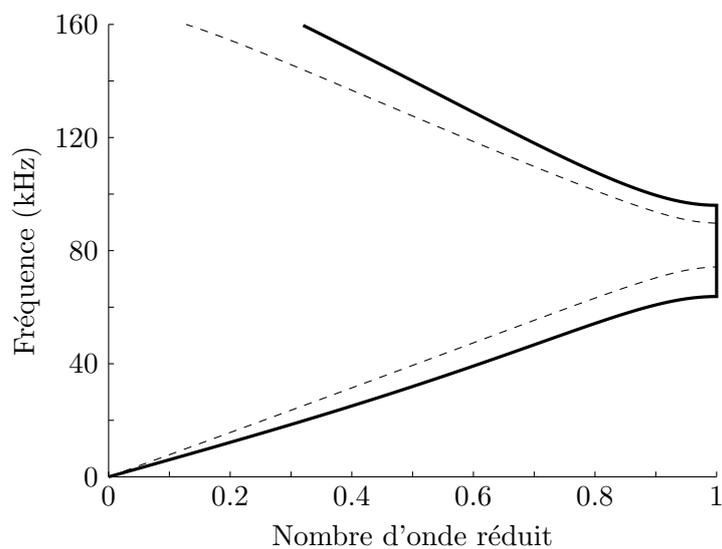


FIGURE 8.10 – Courbes de dispersion tracées avec l'Eq. (8.26) correspondant à la Fig. 8.2 où  $C_1 = 0$ ,  $C_2 \rightarrow \infty$  (—) et où  $C_1 = \frac{2}{3}C_0$ ,  $C_2 = 6C_0$  (---).

## 8.5 L'accordabilité des deux bornes

Nous venons de voir dans les deux sections précédentes que l'on peut fixer l'une des deux bornes de la première bande interdite en imposant soit un court-circuit, soit un circuit ouvert et accorder l'autre borne par la valeur de la capacité électrique. La Fig. 8.9 récapitule de façon graphique ces conclusions. D'une part, lors d'une alternance circuit ouvert/capacité électrique présentée en Fig. 8.9a, la borne inférieure est accordée par la capacité électrique  $C_2$ . D'autre part, lors d'une alternance court-circuit/capacité électrique présentée en Fig. 8.9b, la borne supérieure est accordée par la capacité électrique  $C_1$ . La Fig. 8.9c présente la structure permettant un contrôle total des limites de la bande interdite en combinant les propriétés de chacun des deux super-réseaux 8.9a et 8.9b : les capacités électriques  $C_1$  ou  $C_2$  accordent alors respectivement les bornes inférieure et supérieure.

La Fig. 8.10 illustre la courbe de dispersion du super-réseau présenté en Fig. 8.9c où  $C_1 = 2/3C_0$  et  $C_2 = 6C_0$  (---) comparée à la courbe correspondant à l'alternance circuit ouvert/court-circuit (—). Les bornes de la bande interdite correspondent bien à une combinaison des bornes mobiles présentées en Fig. 8.4 et 8.7.

Les trois structures 8.9a, 8.9b et 8.9c ressemblent fortement à celle présentées en Figs. 5.9a, 5.9b et 5.9c. Dans le chapitre actuel, les capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$  sont connectées à la masse alors que dans le chapitre 5, elles court-circuitent des éléments. Ces ressemblances se retrouvent dans les courbes de dispersion 8.4 et 8.7 qui sont très similaires aux courbes 5.4 et 5.7. Les conclusions sont identiques. Établir des équivalences entre ces deux types de super-réseau fera l'objet de recherches futures.

Les sections suivantes présentent les résultats expérimentaux dans le cas d'un super-réseau à polarisation diélectrique alternée. Bien que le modèle n'ait pas été développé pour cette configuration, les raisons qui motivent cette structure sont chronologiques puisque ce super-réseau a été fabriqué en début de thèse à des fins exploratoires. Les mesures étaient alors excellentes et un brevet où figurent ces mesures a été déposé conjointement par Thales et le CNRS. Le manque de temps fait qu'un second super-réseau n'a pu être fabriqué, mais on verra dans les sections suivantes que les résultats sont très similaires.

## 8.6 Mesures sur le contrôle borne par borne

La validation expérimentale de la mise à la masse périodique accordable a été effectuée sur l'empilement décrit en Fig. 7.7. Il est composé de 14 barreaux de PZ29 de longueur  $\ell = 1$  cm, soit 7 périodes. Les condensateurs électriques (non visibles sur la photo) sont connectés à des électrodes en laiton d'épaisseur  $50 \mu\text{m}$ . Les mesures ont été effectuées sur le banc de contrainte présenté en Fig. 3.6.

Soient présentées en Fig. 8.11a les courbes de transmission expérimentales correspondant au schéma 8.11b tracées pour différentes valeurs de capacités électriques dont les valeurs ont été choisies lors de l'expérience de manière à obtenir visuellement un écart constant entre les courbes. Bien que le modèle décrit dans la section précédente ne corresponde pas à l'expérience à cause du sens des polarisations diélectriques, les effets observés sont identiques. La comparaison des courbes de transmission présentées en Fig. 8.11a avec les courbes de dispersion présentées en Fig. 8.4 montre bien que plus la valeur de la capacité électrique  $C_2$  est faible, plus la bande interdite se referme par la borne inférieure. La borne supérieure reste quant à elle immobile.

Il en est de même pour les courbes de transmission expérimentales présentées en Fig. 8.12a. Elles correspondent au schéma 8.12b où les capacités électriques utilisées pour les mesures sont listées où à nouveau les valeurs ont été choisies lors de l'expérience de manière à obtenir visuellement un écart constant entre les courbes. La comparaison des courbes de transmission présentées en Fig. 8.12a avec les courbes de dispersion présentées en Fig. 8.7 conduit au résultat attendu : plus la valeur de la capacité électrique  $C_1$  est importante, plus la bande interdite se referme par la borne supérieure et c'est cette fois la borne inférieure qui est immobile.

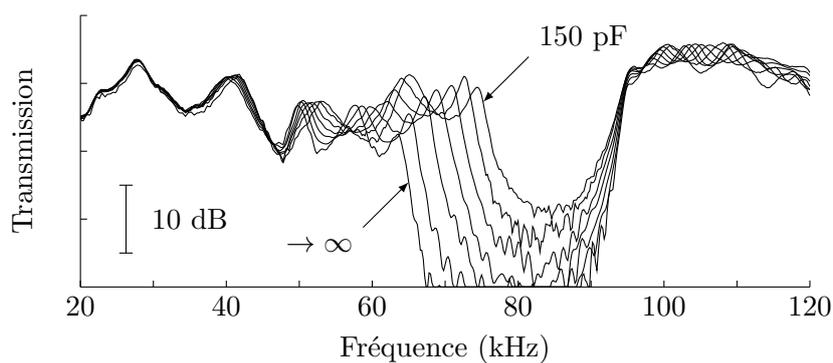
Une comparaison chiffrée peut être effectuée en estimant la valeur de la capacité bloquée  $C_0$  à partir de l'Eq. (C.16). Pour une longueur et un diamètre  $\ell = \varnothing = 1$  cm de PZ29, celle-ci vaut  $74 \text{ pF}$ . D'après les Figs. 8.4 et 8.7, lorsque  $C_1$  ou  $C_2$  vaut  $2C_0$ , la largeur de la bande interdite est réduite d'environ la moitié : c'est effectivement ce qui est constaté sur les Figs 8.11a et 8.12a lorsque les capacités électriques  $C_1$  ou  $C_2$  prennent la valeur  $150 \text{ pF}$ .

## 8.7 Mesures sur le contrôle total

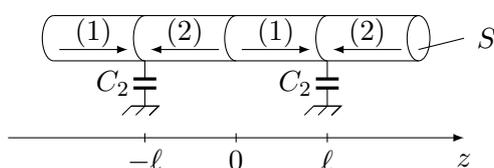
L'indépendance des deux bornes de la bande interdite autorise alors la combinaison des résultats obtenus avec chacune des configurations 8.11b et 8.12b. La Fig. 8.13a présente les courbes de transmission expérimentales correspondant au schéma 8.13b où les couples de capacités électriques ( $C_1, C_2$ ) ont été choisis grâce aux mesures de la section précédente de manière à obtenir la fréquence centrale de la bande interdite fixe. Par comparaison avec les courbes de dispersion présentées en Fig. 8.10, on note bien que plus les capacités électriques  $C_1$  ou  $C_2$  prennent des valeurs proches, plus la bande interdite se referme sur la fréquence centrale de celle-ci. Enfin, la Fig. 8.14a présente les courbes de transmission expérimentales correspondant au schéma 8.14b où les couples de capacités électriques ( $C_1, C_2$ ) ont été choisis grâce aux mesures de la section précédente de manière à obtenir la largeur de la bande interdite fixe. On obtient alors une bande interdite glissante.

Nous venons donc de montrer expérimentalement que les deux bornes de la bande interdite se contrôlent indépendamment par les capacités électriques  $C_1$  et  $C_2$ . Les effets observés sont tout à fait en accord avec les prédictions. Une comparaison chiffrée des valeurs des capacités électriques pourra être effectuée dès lors que le modèle de la mise à la masse périodique accordable à polarisation alternée sera développé.

Le super-réseau n'a pas été testé avec un circuit électronique simulant une capacité électrique négative par manque de temps. Il faut en effet d'une part concevoir plusieurs circuits identiques et d'autre part espérer que le système soit stable.

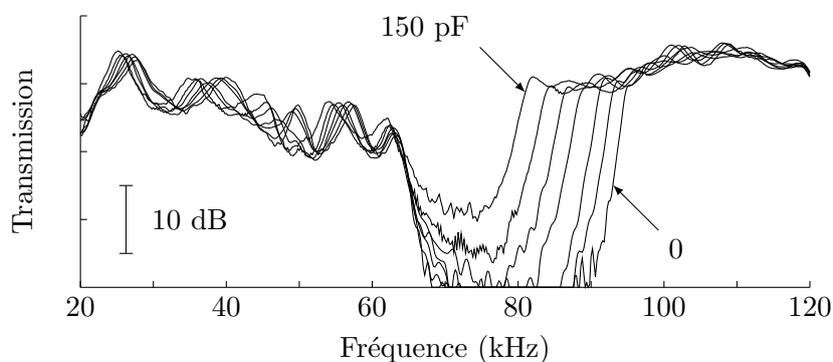


(a)

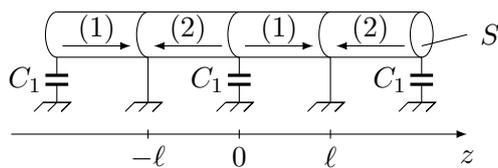


(b)

FIGURE 8.11 – Courbes de transmission expérimentales 8.11a correspondant au schéma 8.11b où  $C_2 = 150, 220, 330, 470, 800, 2200$  pF et  $\rightarrow \infty$ .

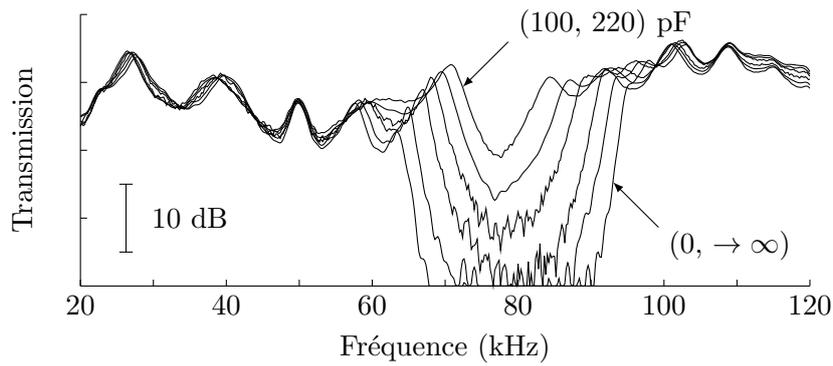


(a)

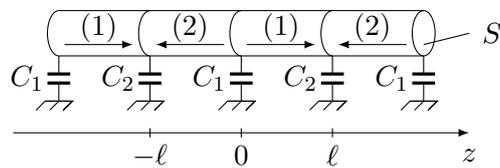


(b)

FIGURE 8.12 – Courbes de transmission expérimentales 8.12a correspondant au schéma 8.12b où  $C_1 = 0, 10, 22, 47, 68, 100$  et  $150$  pF.

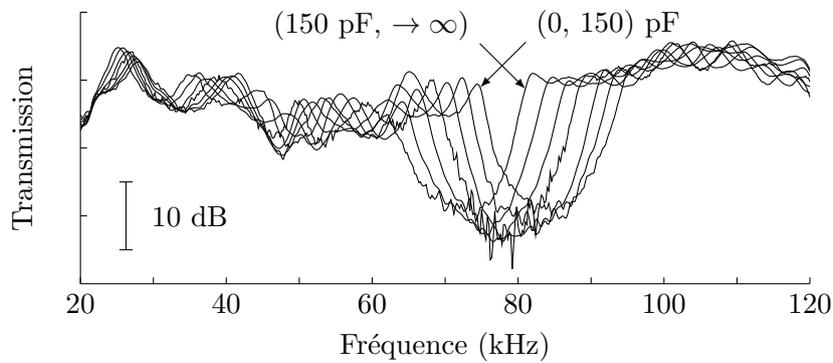


(a)

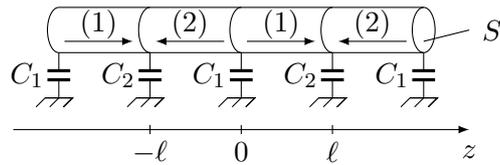


(b)

FIGURE 8.13 – Courbes de transmission expérimentales 8.13a correspondant au schéma 8.13b où  $(C_1, C_2) = (0, \rightarrow \infty), (10, 2200), (22, 800), (47, 470), (68, 330), (100, 220)$  pF.



(a)



(b)

FIGURE 8.14 – Courbes de transmission expérimentales 8.14a correspondant au schéma 8.14b où  $(C_1, C_2) = (150, \rightarrow \infty), (100, 2200), (68, 800), (47, 470), (22, 330), (10, 220), (0, 150)$  pF.

# Conclusion générale

Les travaux entrepris au cours de cette thèse ont été consacrés à l'accordabilité des cristaux phononiques. L'étude s'est en particulier intéressée aux super-réseaux piézoélectriques, se plaçant ainsi au confluent de l'acoustique et de l'électricité. Les deux premières parties du manuscrit se sont solidement appuyées sur le premier chapitre qui propose une méthodologie pour obtenir analytiquement la relation de dispersion d'un super-réseau grâce aux conditions limites qui sont d'une part la continuité du déplacement et de la contrainte mécaniques, et d'autre part l'application de la relation de phase de Bloch-Floquet. La démonstration s'est effectuée sur l'exemple élémentaire d'un bicouche élastique/élastique où l'expression de la relation de dispersion menant aux bandes interdites de Bragg fait office de référence. Par ailleurs, une démarche originale utilisant des changements de variables pour approximer avec une bonne précision les positions des bandes interdites a été exposée. Cette méthode atteint toutefois des limites lorsque le rapport d'impédances inter-couches est important. Ces outils ont par la suite montré tout leur intérêt dans l'appréhension du contrôle des bandes interdites.

Le postulat de départ de la thèse était que le couplage électro-mécanique peut, sous certaines conditions qu'il fallait établir, altérer une onde élastique se propageant dans un matériau piézoélectrique. Le deuxième chapitre a en effet montré que la connexion d'un circuit électrique aux bornes d'une couche piézoélectrique modifie ses fréquences de résonance, exhibant ainsi la potentialité de contrôler les bandes interdites d'un super-réseau. Il a notamment mis en évidence l'intérêt d'un couplage piézoélectrique quasistatique fort pour maximiser l'accordabilité des bandes interdites. Le choix s'est finalement porté sur des capacités électriques pour des raisons d'indépendance fréquentielle du contrôle et cette théorie a été validée expérimentalement. L'insertion de tels éléments dans une structure élastique périodique a montré tout son intérêt dans le troisième chapitre où l'accordabilité des bandes interdites a pour la première fois été abordée. Le super-réseau étudié était alors composé d'une alternance d'éléments élastiques et d'éléments piézoélectriques connectés individuellement à une capacité électrique. L'application du théorème de Gauss - qui a été décrit en détails dans le deuxième chapitre - a joué un rôle déterminant dans l'élaboration de la relation de dispersion et l'obtention des expressions analytiques des positions des bandes interdites. On retiendra qu'avec une structure partiellement piézoélectrique une seule des deux bornes des bandes interdites peut être contrôlée. Cette borne se détermine grâce au rapport d'impédances inter-couches. Ces résultats ont été corroborés par des calculs par éléments finis et des mesures de transmission.

La seconde partie du manuscrit est déterminante puisqu'elle introduit dès le quatrième chapitre le concept breveté de bandes interdites de charge électrique. Ce sont des bandes interdites de Bragg qui apparaissent lorsqu'une onde se propage à travers un matériau piézoélectrique homogène court-circuité périodiquement. Trois structures ont été abordées : le court-circuit, l'alternance circuit ouvert/court-circuit et le court-circuit à polarisation diélectrique alternée. La relation de dispersion ainsi que les positions des bandes interdites de chacune de ces structures ont été obtenues, montrant ainsi des qualités qui leur sont propres. Deux des trois structures n'ont pas pu être validées par éléments finis du fait de l'incompatibilité entre la relation de Bloch-Floquet qui impose un déphasage du potentiel électrique et le court-circuit qui impose une différence de potentiel nulle, justifiant pleinement la troisième partie du manuscrit qui propose une solution alternative par séries de Fourier.

À ce stade, les potentialités qu'offre la condition électrique périodique suscite alors l'intérêt quant à l'accordabilité des bandes interdites. Le pas est allègrement franchi dans le cinquième chapitre où les super-réseaux constitués d'une alternance d'éléments piézoélectriques connectés individuellement à une capacité électrique différente sont étudiés. Les relations de dispersion ainsi que les positions des bandes interdites sont démontrées. Une étude détaillée de la première bande interdite a alors mis en exergue l'accordabilité indépendante des deux bornes. Ces bandes interdites de charge électrique sont très intéressantes en ce sens que le super-réseau conserve la possibilité de ne pas posséder de bandes interdites. En contrepartie, la largeur maximale des bandes interdites est tributaire du couplage piézoélectrique quasistatique qui doit être très fort pour obtenir une largeur importante. Le concept est ensuite étendu dans le sixième chapitre aux super-réseaux alternant des couches constituées de matériaux piézoélectriques différents, également connectées individuellement à une capacité électrique différente. Cette structure ne présente pas de différences fondamentales avec celle du chapitre précédent, mais présente l'avantage d'obtenir des bandes interdites très larges. En effet, contrairement aux empilements périodiques homogènes, des bandes interdites de Bragg au sens classique du terme existent avant même d'insérer les capacités électriques. Certaines applications requièrent une bande interdite large mais ne nécessitent pas une accordabilité importante des bornes, un léger contrôle pouvant en effet suffire à un recalage précis.

La troisième et dernière partie de ces travaux s'inscrit dans une démarche tout à fait différente puisqu'elle concerne la modélisation des super-réseaux par séries de Fourier. Le quatrième chapitre avait en effet soulevé l'incompatibilité des conditions limites lors d'un court-circuit : la mise à la masse périodique se présentait alors comme la solution. Sur un second aspect, il avait été remarqué que les courbes de transmission expérimentales sont beaucoup moins bruitées lorsque les électrodes sont connectées à la masse, comparativement à un simple court-circuit. Dans ce cadre, le septième chapitre fournit les relations de dispersion semi-analytiques des super-réseaux équivalents au court-circuit et au court-circuit à polarisation diélectrique alternée, validant au passage numériquement les modèles du quatrième chapitre. Des mesures de transmission ont été réalisées avec succès, représentant ainsi la première mise en évidence expérimentale des bandes interdites de charge électrique. Fort de ces résultats, le modèle de la mise à la masse périodique accordable a été développé dans le huitième chapitre. Des capacités électriques sont alors insérées entre les électrodes et la masse électrique, conduisant ainsi à des résultats similaires au cinquième chapitre. La relation de dispersion semi-analytique est obtenue et l'étude détaillée de la première bande interdite conclut à nouveau que les deux bornes sont indépendamment accordables. Les courbes de transmission expérimentales abondent également dans ce sens, les capacités électriques accordant tantôt la borne inférieure, tantôt la borne supérieure avec une facilité déconcertante et dans des proportions impressionnantes comparativement à ce qui se faisait jusqu'alors.

Ces travaux ouvrent de nombreuses perspectives dont la première serait le développement du modèle de la mise à la masse périodique accordable à polarisation diélectrique alternée. Ce modèle par séries de Fourier, sans difficulté particulière dans son élaboration, s'écrit en combinant les équations obtenues dans les septième et huitième chapitres. De même, des similitudes avaient été remarquées entre les courbes de dispersion du super-réseau périodiquement court-circuité par une capacité électrique et celles du super-réseau périodiquement connecté à la masse par une capacité électrique. Des équivalences pourraient alors être établies entre les deux types de structures. Enfin, il s'avèrerait intéressant de fabriquer et tester expérimentalement un nouveau super-réseau, mais cette fois à polarisation diélectrique continue, en vue d'une validation sans équivoque des différents modèles.

Pour une confrontation directe entre la théorie et les expériences, d'autres perspectives consisteraient à développer des modèles de super-réseaux finis de façon à prédire analytiquement les fréquences de résonances dues aux modes en demi-longueurs d'onde dans les bandes passantes de la transmission. Les références [72, 73] indiquent en effet que le nombre de périodes d'un

super-réseau fini divise l'espace des nombres d'onde  $k$ . Le relevé des fréquences de résonances permettrait alors de tracer directement la courbe de dispersion. Ce traitement rigoureux des mesures de transmissions expérimentales par relevés des fréquences de résonances permet surtout de déduire précisément les bornes des bandes interdites, au lieu de les estimer grossièrement à partir d'un relevé de l'amplitude. Dans ce cas, les comparaisons chiffrées entre les valeurs des capacités électriques auraient réellement un sens. Des mesures de transmissions expérimentales en présence de capacités électriques négatives pourraient alors être effectuées, à condition de construire autant de circuits électroniques que de capacités électriques négatives simulées et de maîtriser les problèmes de stabilité inhérents aux capacités électriques négatives.

La fin du quatrième chapitre présente très succinctement l'un des résultats collatéraux de cette thèse, puisqu'inattendu : le contrôle électrique de la vitesse effective à basse fréquence. Cette observation ne contribue certes en rien à l'accordabilité des cristaux phononiques, mais représente tout de même un nouveau champ d'investigation. Le contrôle de la vitesse effective d'une onde élastique dans un solide signifie entre autres le contrôle de l'impédance acoustique caractéristique du matériau considéré. Cette contribution est tout à fait significative lorsque l'application visée est l'adaptation d'impédance acoustique contrôlable électriquement.

Les modèles développés au cours de cette thèse sont généralisables à tout super-réseau constitué d'un nombre quelconque de couches par maille élémentaire, élastiques ou piézoélectriques, et d'épaisseurs quelconques. Cette généralisation s'étend aux impédances électriques périodiquement connectées aux bornes des couches ou périodiquement connectées entre les électrodes et la masse électrique, étendant les fonctionnalités des structures présentées. Le choix de l'impédance électrique s'est porté durant cette thèse sur une capacité électrique pour des raisons d'indépendance fréquentielle du contrôle des bandes interdites, mais il n'y a aucune contre-indication à utiliser par exemple un circuit composé d'une résistance et d'une inductance électriques en série. L'effet attendu est cependant différent, puisqu'à la place de jouer sur des bandes interdites existantes, une résonance localisée par couplage du circuit électrique avec le matériau piézoélectrique peut créer une bande interdite d'hybridation. Généralement, ce type de bande interdite n'est pas très large mais présente néanmoins l'avantage d'être produite à basse fréquence.

L'ultime perspective de ces travaux au potentiel prometteur est évidemment l'extension de ces modèles à des structures bi- ou tridimensionnelles. Dans un premier temps, une étude numérique pourrait être envisagée sur un pavage bidimensionnel exclusivement piézoélectrique. L'orientation de la polarisation diélectrique des éléments pourrait être différente suivant les domaines, donnant à ce cristal phononique la possibilité de réagir différemment suivant l'angle de l'onde incidente. Une bande interdite absolue pourrait être mise en exergue au même titre que toutes les fonctionnalités présentées dans l'introduction générale, telles que le guidage, le filtrage ou encore le démultiplexage d'ondes élastiques.



# Bibliographie

- [1] L. BRILLOUIN : *Wave Propagation in Periodic Structures*. McGraw-Hill, 1946.
- [2] L. P. SOLIE : Surface acoustic wave reflective dot array (rda). *Appl. Phys. Lett.*, 28, 8, 420-422, 1976.
- [3] V. NARAYANAMURTI, H. L. STORMER, M. A. CHIN, A. C. GOSSARD et W. WIEGMANN : Selective transmission of high-frequency phonons by a superlattice : The "dielectric" phonon filter. *Phys. Rev. Lett.*, 43, 27, 2012-2016, 1979.
- [4] J. D. ACHENBACH et M. KITAHARA : Harmonic waves in a solid with a periodic distribution of spherical cavities. *J. Acoust. Soc. Am.*, 81, 3, 595-598, 1987.
- [5] J. LIU, L. YE, D. A. WEITZ et P. SHENG : Novel acoustic excitations in suspensions of hard-sphere colloids. *Phys. Rev. Lett.*, 65, 2602, 1990.
- [6] E. N. ECONOMOU et M. SIGALAS : Stop bands for elastic waves in periodic composite materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 95, 1734, 1994.
- [7] M. S. KUSHWAHA, P. HALEVI, L. DOBRZYNSKI et B. DJAFARI-ROUHANI : Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, 71, 13, 2022-2025, 1993.
- [8] R. MARTINEZ-SALA, J. SANCHO, J. V. SANCHEZ, V. GOMEZ, J. LLINARES et F. MESEGUER : Sound attenuation by sculpture. *Nature*, 378, 241, 1995.
- [9] R. MARTINEZ-SALA, C. RUBIO, L. GARCIA-RAFFI, J. V. SANCHEZ-PEREZ, E. A. SANCHEZ-PEREZ et J. LLINARES : Control of noise by trees arranged like sonic crystals. *J. Sound and Vibration*, 291, 100-106, 2006.
- [10] A. KHELIF, A. CHOUJAA, B. DJAFARI-ROUHANI, M. WILM, S. BALLANDRAS et V. LAUDE : Trapping and guiding of acoustic waves by defect modes in a full-band-gap ultrasonic crystal. *Phys. Rev. B*, 68, 214301, 2003.
- [11] A. KHELIF, A. CHOUJAA, S. BENCHABANE, B. DJAFARI-ROUHANI et V. LAUDE : Guiding and bending of acoustic waves in highly confined phononic crystal waveguides. *Appl. Phys. Lett.*, 84, 22, 2004.
- [12] T. MIYASHITA et C. INOUE : Numerical investigations of transmission and waveguide properties of sonic crystals by finite-difference time-domain method. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 40, 3488-3492, 2001.
- [13] H. CHANDRA, P. A. DEYMIER et J. O. VASSEUR : Elastic wave propagation along waveguides in three-dimensional phononic crystals. *Phys. Rev. B*, 70, 054302, 2004.
- [14] R. H. Olsson III, I. F. EL-KADY, M. F. SU, M. R. TUCK et J. F. FLEMING : Microfabricated vhf acoustic crystals and waveguides. *Sensors and Actuators A*, 145-146, 87-93, 2008.

- [15] Y. PENNEC, B. DJAFARI-ROUHANI, J. O. VASSEUR, A. KHELIF et P. A. DEYMIER : Tunable filtering and demultiplexing in phononic crystals with hollow cylinders. *Phys. Rev. E*, 69, 046608, 2004.
- [16] R.H. Olsson III et I.F. EL-KADY : Microfabricated phononic crystal devices and applications. *Meas. Sci. Technol.*, 20, 012002, 2009.
- [17] I. EL-KADY, R.H. Olsson III et J.G. FLEMING : Phononic band-gap crystals for radio frequency communications. *Appl. Phys. Lett.*, 92, 233504, 2008.
- [18] S. MOHAMMADI, A.A. EFTEKHAR, W.D. HUNT et A. ADIBI : High-q micro-mechanical resonators in a two-dimensional phononic crystal slab. *App. Phys. Lett.*, 94, 051906, 2009.
- [19] T.-T.WU, W.-S. WANG, J.-H. SUN, J.-C. HSU et Yung-Yu CHEN : Utilization of phononic-crystal reflective gratings in a layered surface acoustic wave device. *App. Phys. Lett.*, 94, 101913, 2009.
- [20] M.F. SU, R.H. Olsson III, Z.C. LESEMAN et I. EL-KADY : Realization of a phononic crystal operating at gigahertz frequencies. *Appl. Phys. Lett.*, 96, 053111, 2010.
- [21] V. G. VESELAGO : The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . *Usp. Fiz. Nauk*, 92, 517-526, 1964.
- [22] S.YANG, J. H. PAGE, Z. LIU, M. L. COWAN, C. T. CHAN et P. SHENG : Focusing of sound in a 3d phononic crystal. *Phys. Rev. Lett.*, 93, 024301, 2004.
- [23] A. SUKHOVICH, L. JING et J. PAGE : Negative refraction and focusing of ultrasound in two-dimensional phononic crystals. *Phys. Rev. B*, 77, 014301, 2008.
- [24] A. SUKHOVICH, B. MERHEB, K. MURALIDHARAN, J. O. VASSEUR, Y. PENNEC, P. A. DEYMIER et J. PAGE : Experimental and theoretical evidence for subwavelength imaging in phononic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 102, 154301, 2009.
- [25] Z. LIU, X. ZHANG, Y. MAO, Y. Y. ZHU, Z. YANG, C. T. CHAN et P. SHENG : Locally resonant sonic materials. *Science*, 289, 1734, 2000.
- [26] H. ZHAO, Y. LIU, J. WEN, D. YU et X. WEN : Tri-component phononic crystals for underwater anechoic coatings. *Phys. Lett. A*, 367, 224-232, 2007.
- [27] J. WEN, H. ZHAO, L. LV, B. YUAN, G. WANG et X. WEN : Effects of locally resonant modes on underwater sound absorption in viscoelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.*, 130(3), 1201-1208, 2011.
- [28] J. B. PENDRY, D. SCHURIG et D. R. SMITH : Controlling electromagnetic fields. *Science*, 312, 5781, 1780-1782, 2006.
- [29] D. SCHURIG, J. J. MOCK, B. J. JUSTICE, S. A. CUMMER, J. B. PENDRY, A. F. STARR et D. R. SMITH : Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies. *Science*, 314, 5801, 977-980, 2006.
- [30] M. FARHAT, S. ENOCH, S. GUENNEAU et A. B. MOVCHAN : Broadband cylindrical acoustic cloak for linear surface waves in a fluid. *Phys. Rev. Lett.*, 101, 134501, 2008.
- [31] V. M. GARCIA-CHOCANO, L. SANCHIS, A. DIAZ-RUBIO, J. MARTINEZ-PASTOR et F. CERVERA : Acoustic cloak for airborne sound by inverse design. *Appl. Phys. Lett.*, 99, 074102, 2011.

- [32] C. GOFFAUX et J.-P. VIGNERON : Theoretical study of a tunable phononic band gap system. *Phys. Rev. B*, 64, 075118, 2001.
- [33] Y. YAO, Z. HOU et Y. LIU : The two-dimensional phononic band gaps tuned by the position of the additional rod. *Phys. Lett. A*, 362, 494-499, 2007.
- [34] A. KHELIF, P. A. DEYMIER, B. DJAFARI-ROUHANI, J. O. VASSEUR et L. DOBRZYNSKI3 : Two-dimensional phononic crystal with tunable narrow pass band : Application to a waveguide with selective frequency. *J. Appl. Phys.*, 94, 1308, 2003.
- [35] J. BAUMGARTL, M. ZVYAGOLSKAYA et C. BECHINGER : Tailoring of phononic band structures in colloidal crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 99, 205503, 2007.
- [36] J.-Y. YEH : Control analysis of the tunable phononic crystal with electrorheological material. *Physica B*, 400, 137, 2007.
- [37] Z.-G. HUANG et T.-T. WU : Temperature effect on the bandgaps of surface and bulk acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, 52, 3, 2005.
- [38] K.L. JIM, C.W. LEUNG, S.T. LAU, S.H. CHOY et H.L.W. CHAN : Thermal tuning of phononic bandstructure in ferroelectric ceramic/epoxy phononic crystal. *App. Phys. Lett.*, 94, 193501, 2009.
- [39] K. BERTOLDI et M. C. BOYCE : Mechanically triggered transformations of phononic band gaps in periodic elastomeric structures. *Phys. Rev. B*, 77, 052105, 2008.
- [40] Y.-Z. WANG, F.-M. LI, W.-H. HUANG, X. JIANG, Y.-S. WANG et K. KISHIMOTO : Wave band gaps in two-dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystals. *Int. J. Solids Struct.*, 45, 4203-4210, 2008.
- [41] Y.-Z. WANG, F.-M. LI, K. KISHIMOTO, Y.-S. WANG et W.-H. HUANG : Elastic wave band gaps in magnetoelastoelectronic phononic crystals. *Wave Motion*, 46, 47-56, 2009.
- [42] J.-F. ROBILLARD, O. BOU MATAR, J. O. VASSEUR, P. A. DEYMIER, M. STIPPINGER, A.-C. HLADKY-HENNION, Y. PENNEC et B. DJAFARI-ROUHANI : Tunable magnetoelastic phononic crystals. *App. Phys. Lett.*, 95, 124104, 2009.
- [43] O. BOU MATAR, J.-F. ROBILLARD, J. O. VASSEUR, A.-C. HLADKY-HENNION, P. A. DEYMIER, P. PERNOD et V. PREOBRAZHENSKY : Band gap tunability of magneto-elastic phononic crystals. *J. Appl. Phys.*, 111, 054901, 2012.
- [44] A. A. MESQUIDA, J. A. OTERO et R. R. RAMOS : Wave propagation in layered piezoelectric structures. *J. Appl. Phys.*, 83, 4652-4659, 1998.
- [45] Z. HOU, X. FU et Y. LIU : Acoustic wave in a two-dimensional composite medium with anisotropic inclusions. *Phys. Lett. A*, 317, 127, 2003.
- [46] M. WILM, S. BALLANDRAS, V. LAUDE et T. PASTUREAUD : A full 3d plane-wave-expansion model for 1-3 piezoelectric composite structures. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112, 943, 2002.
- [47] Z. HOU, F. WU et Y. LIU : Phononic crystals containing piezoelectric material. *Solid State Communications*, 130, 745-749, 2004.
- [48] V. LAUDE, M. WILM, S. BENCHABANE et A. KHELIF : Full band gap for surface acoustic waves in a piezoelectric phononic crystal. *Phys. Rev. E*, 71, 036607, 2005.

- [49] T. T. WU, Z. C. HSU et Z. G. HUANG : Band gaps and the electromechanical coupling coefficient of a surface acoustic wave in a two-dimensional piezoelectric phononic crystal. *Phys. Rev. B*, 71, 064303, 2005.
- [50] W. Y. ZHANG, Z. X. LIU et Z. L. WANG : Band structures and transmission spectra of piezoelectric superlattices. *Phys. Rev. B*, 71, 195114, 2005.
- [51] F. M. LI et Y. S. WANG : Study on wave localization in disordered periodic layered piezoelectric composite structures. *Int. J. Solids Struct.*, 42, 6457, 2005.
- [52] F. M. LI et Y. S. WANG : Study on localization of plane elastic waves in disordered periodic 2-2 piezoelectric composite structures. *J. Sound Vib.*, 296, 2006.
- [53] S. BENCHABANE, A. KHELIF, J.-Y. RAUCH, L. ROBERT et V. LAUDE : Evidence for complete surface wave band gap in a piezoelectric phononic crystal. *Phys. Rev. E*, 73, 065601(R), 2006.
- [54] J. C. HSU et T. T. WU : Bleustein-gulyaev-shimizu surface acoustic waves in two-dimensional piezoelectric phononic crystals. *IEEE T. Ultrason. Ferr.*, 53, 1169, 2006.
- [55] F. M. LI, M. Q. XU et Y. S. WANG : Frequency-dependent localization length of sh-wave in randomly disordered piezoelectric phononic crystals. *Solid State Commun.*, 141, 296, 2007.
- [56] J. O. VASSEUR, A.-C. HLADKY-HENNION, B. DJAFARI-ROUHANI, F. DUVAL, B. DUBUS, Y. PENNEC et P.A. DEYMIER : Waveguiding in two-dimensional piezoelectric phononic crystal plates. *J. Appl. Phys.*, 101, 114904, 2007.
- [57] X. Y. ZOU, Q. CHEN et J. C. CHENG : The band gaps of plate-mode waves in one-dimensional piezoelectric composite plates : Polarizations and boundary conditions. *IEEE T. Ultrason. Ferr.*, 54, 1430, 2007.
- [58] P. D. SESION, E. L. ALBUQUERQUE, C. CHESMAN et V. N. FREIRE : Acoustic phonon transmission spectra in piezoelectric ain/gan fibonacci phononic crystals. *Eur. Phys. J. B*, 58, 379, 2007.
- [59] Y. Z. WANG, F. M. LI, W. H. HUANG et Y. S. WANG : Effects of inclusion shapes on the band gaps in two-dimensional piezoelectric phononic crystals. *J. Phys. : Condens. Matter*, 19, 496204, 2007.
- [60] J. S. YANG, Z. G. CHEN, Y. T. HU, S. N. JIANG et S. H. GUO : Propagation of thickness-twist waves in a multi-sectioned piezoelectric plate of 6 mm crystals. *Archive of Appl. Mech.*, 77, 689-696, 2007.
- [61] E. COURJON, N. COURJAL, W. DANIAU, G. LENGAINNE, L. GAUTHIER-MANUEL, et S. BALLANDRAS : Lamb wave transducers built on periodically poled z-cut  $LiNbO_3$  wafers. *J. Appl. Phys.*, 102, 114107, 2007.
- [62] M. Y. YANG, L. C. WU et J. Y. TSENG : Phonon-polariton in two-dimensional piezoelectric phononic crystals. *Phys. Lett. A*, 372, 4730-4735, 2008.
- [63] S. GONELLA, A. C ; TO et W. K. LIU : Interplay between phononic bandgaps and piezoelectric microstructures for energy harvesting. *J. Mech. Phys. Sol.*, 57, 621-633, 2009.
- [64] Y. WANG, F. LI, Y. WANG, K. KISHIMOTO et W. HUANG : Tuning of band gaps for a two-dimensional piezoelectric phononic crystal with a rectangular lattice. *Acta Mech. Sin.*, 25, 65-71, 2009.

- [65] J. H. OH, I. K. LEE, P. S. MA et Y. Y. KIM : Active wave-guiding of piezoelectric phononic crystals. *Appl. Phys. Lett.*, 99,083505, 2011.
- [66] J. C. HSU : Tunable frequency gaps in piezoelectric phononic crystal slabs. *Proceedings of Symposium on Ultrasonic Electronics*, 32, 319-320, 2011.
- [67] I. V. OSTROVSKII, V. A. KLYMKO et A. B. NADTOCHIY : Plate wave stop-band in periodically poled lithium niobate. *J. Acoust. Soc. Am. Express Lett.*, 125, EL129, 2009.
- [68] C. J. RUPP, M. L. DUNN et Kurt MAUTE : Switchable phononic wave filtering, guiding, harvesting, and actuating in polarization-patterned piezoelectric solids. *Appl. Phys. Lett.*, 96, 111902, 2010.
- [69] M. S. KUSHWAHA : Classical band structure of periodic elastic composites. *International Journal of Modern Physics B*, 10, 9, 977-1094, 1996.
- [70] F. CASADEI, T. DELPERO, A. BERGAMINI, P. ERMANNI et M. RUZZENE : Piezoelectric resonator arrays for tunable acoustic waveguides and metamaterials. *J. Appl. Phys.*, 112, 064902, 2012.
- [71] O. B. WILSON : *Introduction to Theory and Design of Sonar Transducers*. Peninsula Publishing, 1988.
- [72] A.-C. HLADKY-HENNION, G. ALLAN et M. de BILLY : Localized modes in a one-dimensional diatomic chain of coupled spheres. *J. Appl. Phys.*, 98,054909, 2005.
- [73] A.-C. HLADKY-HENNION et M. de BILLY : Experimental validation of band gaps and localization in a one-dimensional diatomic phononic crystal. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(5), 2594-2600, 2007.
- [74] L. E. KINSLER, A. R. FREY, A. B. COPPENS et J. V. SANDERS : *Fundamentals of Acoustics*. 3rd Ed. Wiley, 1982.
- [75] B. A. AULD : *Acoustic Fields and Waves in Solids*. Vol. I. Wiley, 1973.
- [76] W. P. MASON : *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*. D. Van Nostrand Co, 1950.
- [77] W. P. MASON : *Crystal Physics of Interaction Processes*. Academic Press, 1966.
- [78] D. A. BERLINCOURT, D. R. CURRAN et H. JAFFE : *Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers*. Chapitre 3 dans "Physical Acoustics", Vol. 1A. W. P. Mason, Ed. Academic Press, 1964.
- [79] J. F. NYE : *Physical Properties of Crystals*. Oxford, 1957.
- [80] W. G. CADY : *Piezoelectricity*. Vols. I et II. Dover, 1964.
- [81] J. GRINDLAY : *An Introduction to the Phenomenological Theory of Ferroelectricity*. Pergamon Press Ltd. Oxford, 1970.



## Annexe A

# Les cristaux phononiques

Les cristaux phononiques sont l'équivalent élastique des cristaux photoniques et consistent en un arrangement périodique mono-, bi- ou tridimensionnel. Lorsque l'arrangement est mono-dimensionnel, les cristaux phononiques se font appeler *super-réseaux*.

Soit présenté en Fig. A.1 un super-réseau formé de l'empilement successif de deux couches élastiques sans pertes, de nature différente. Les propriétés des matériaux sont indicées par leur numéro ( $i$ ). Chaque couche ( $i$ ), très fine devant les dimensions latérales, a une épaisseur constante  $h_i$ . Le vecteur d'onde est normal aux interfaces d'aire  $S$ , parallèle à l'axe  $z$ .

En posant  $h = h_1 + h_2$ , ce super-réseau devient  $h$ -périodique et la relation de phase de Bloch-Floquet impose pour toute fonction d'onde  $\xi(z)$  de nombre d'onde  $k$  :

$$\xi(z + h) = \xi(z) e^{ikh}. \quad (\text{A.1})$$

Brillouin [1] démontre que la périodicité spatiale entraîne une périodicité dans l'espace des nombres d'ondes  $k$ . Ce super-réseau étant  $h$ -périodique, il est dans ce cas  $2\pi/h$  périodique dans l'espace des nombres d'onde. Enfin, l'espace des nombres d'ondes est symétrique par rapport à  $k = 0$  et l'espace  $]-\pi/h, \pi/h[$  s'appelle la *première zone de Brillouin*.

Soit présenté en Fig. A.2 la courbe de dispersion correspondant au super-réseau illustré en Fig. A.1. Une courbe de dispersion témoigne du caractère dispersif d'un milieu. Si le milieu est non dispersif, la courbe de dispersion se résume alors à une droite dont la pente correspond à la vitesse de phase. L'ensemble de l'information étant contenue dans  $]0, \pi/h[$ , la droite est alors repliée dans la première zone de Brillouin. La périodicité est fictive et n'affecte aucunement la propagation de l'onde élastique.

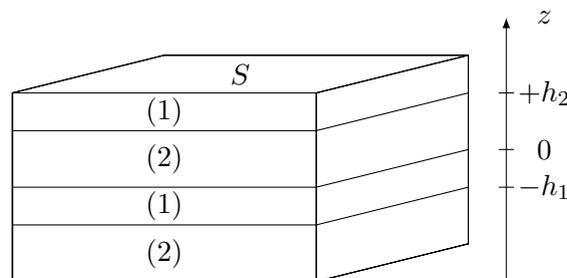


FIGURE A.1 – Super-réseau constitué alternativement de couches (1) et (2) d'épaisseurs respectives  $h_1$  et  $h_2$ .

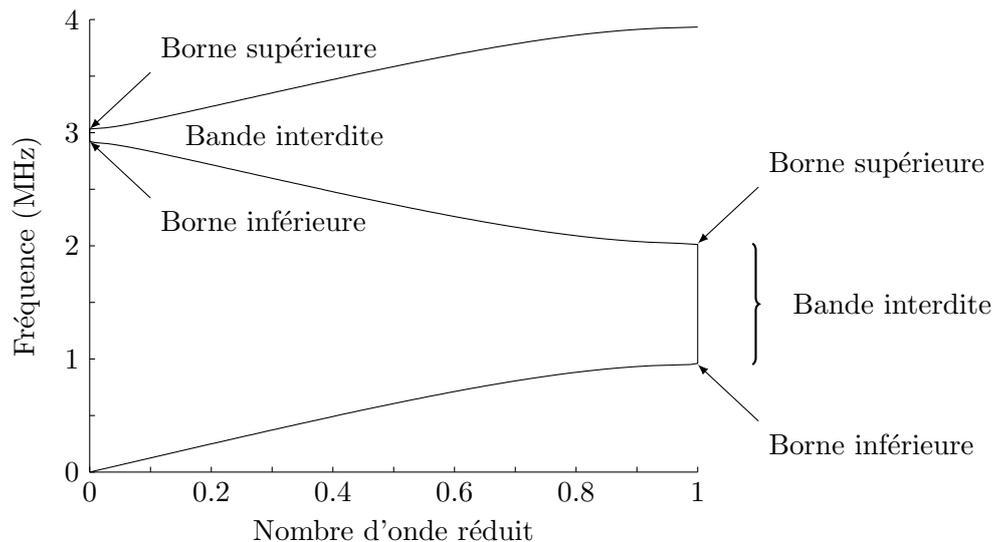


FIGURE A.2 – Courbe de dispersion où le nombre réduit désigne la partie réelle de  $kh/\pi$ .

Sous certaines conditions, la courbe de dispersion peut présenter des bandes passantes et des bandes interdites. Dans une bande passante, la pulsation  $\omega$  est associée à un nombre d'onde  $k$  réel et se propage sans atténuation. Dans une bande interdite, la pulsation  $\omega$  est associée à un nombre d'onde  $k$  complexe. La valeur de la partie réelle image de la propagation de l'onde correspond au bord de la première zone de Brillouin, soit  $k = \pi/h$  pour une bande interdite impaire ou  $k = 0$  pour une bande interdite paire. La partie imaginaire est image de l'atténuation de l'onde : l'onde est évanescence dans le milieu. Enfin, chaque bande interdite est délimitée par une borne fréquentielle inférieure et une borne fréquentielle supérieure.

## Annexe B

# Vitesse dans la plaque et le barreau

La vitesse des ondes élastiques dans un solide dépend non seulement du matériau considéré, mais aussi de sa géométrie [74–76]. Soit présenté en Fig. B.1a une plaque dont la normale est orientée suivant l'axe  $z$  ou 3. Les dimensions latérales étant beaucoup plus grandes que l'épaisseur  $h$ , les conditions limites élastiques sont telles que les déformations perpendiculaires à la direction de propagation sont nulles et la loi de Hooke s'écrit simplement

$$T_3 = c_{33}S_3 \quad (\text{B.1})$$

où  $T_3$ ,  $S_3$  et  $c_{33}$  sont respectivement -suivant l'axe  $z$ - la contrainte mécanique, la déformation mécanique et la constante de rigidité élastique. Dès lors, la vitesse des ondes planes longitudinales -ou ondes de compression- s'écrit

$$v_t = \sqrt{\frac{c_{33}}{\rho}} = \sqrt{\frac{Y(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (\text{B.2})$$

où l'indice  $t$  indique que la vitesse est dans la direction de l'épaisseur (*thickness*) et où  $\rho$ ,  $Y$  et  $\nu$  sont respectivement la masse volumique, le module d'Young et le coefficient de Poisson.

Une autre géométrie élémentaire est le barreau dont les dimensions latérales sont beaucoup plus petites que la longueur  $\ell$  présentée en Fig. B.1b. Dans ce cas, il y a une contraction latérale lors de la propagation suivant l'axe  $z$  et les ondes sont extensionnelles. La loi de Hooke s'écrit donc simplement

$$T_3 = \frac{S_3}{s_{33}} \quad (\text{B.3})$$

avec  $s_{33}$  la constante de compliance élastique suivant l'axe  $z$ . La vitesse des ondes planes longitudinales s'écrit alors

$$v_b = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (\text{B.4})$$

où l'indice  $b$  se réfère au barreau.

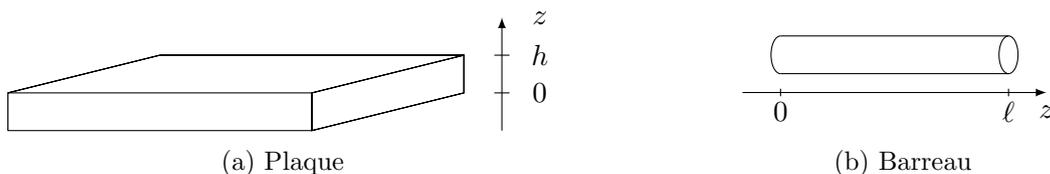


FIGURE B.1 – Représentations d'une plaque d'épaisseur  $h$  et d'un barreau de longueur  $\ell$  orientés suivant l'axe  $z$ .



## Annexe C

# Les équations constitutives de la piézoélectricité

Les équations de la piézoélectricité utilisées dans ce manuscrit sont linéaires et ignorent les pertes internes. De même, les effets du champ magnétique sont négligeables dans la plupart des matériaux piézoélectriques et les effets pyroélectriques ne sont pas considérés [71]. Les ouvrages classiques [75–81] donnent des précisions sur ces équations.

Les deux géométries rencontrées dans ce manuscrit sont unidimensionnelles : la plaque présentée en Fig. C.1a où les dimensions latérales sont beaucoup plus grandes que l'épaisseur  $h$  et le barreau présenté en Fig. C.1b où les dimensions latérales sont beaucoup plus petites que la longueur  $\ell$ .

Les équations de la piézoélectricité s'écrivent dans le cas d'une plaque

$$T_3 = c_{33}^D S_3 - h_{33} D_3 \quad (\text{C.1})$$

$$E_3 = -h_{33} S_3 + \beta_{33}^S D_3 \quad (\text{C.2})$$

où  $T_3$ ,  $S_3$ ,  $E_3$  et  $D_3$  sont respectivement -suivant l'axe  $z$ - la contrainte et la déformation mécaniques, le champ et le déplacement électriques. Ces équations sont unidimensionnelles, par conséquent  $c_{33}^D$ ,  $h_{33}$  et  $\beta_{33}^S$  sont des constantes qui sont respectivement la constante de rigidité élastique à déplacement électrique constant, la constante de contrainte piézoélectrique et l'imperméabilité diélectrique à déformation mécanique constante.

Dans le cas d'un barreau, les équations de la piézoélectricité s'écrivent

$$S_3 = s_{33}^D T_3 + g_{33} D_3 \quad (\text{C.3})$$

$$E_3 = -g_{33} T_3 + \beta_{33}^T D_3 \quad (\text{C.4})$$

où  $s_{33}^D$ ,  $g_{33}$  et  $\beta_{33}^T$  sont respectivement la constante de compliance élastique à déplacement électrique constant, la constante de déformation piézoélectrique et l'imperméabilité diélectrique à contrainte mécanique constante.

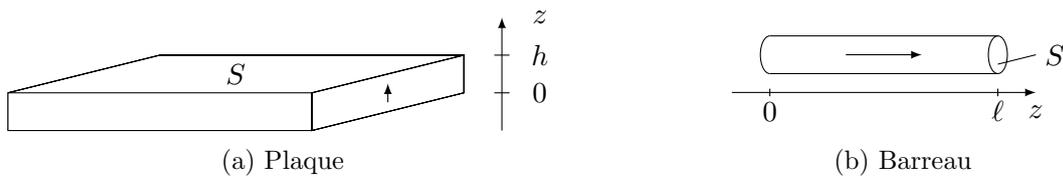


FIGURE C.1 – Représentations d'une plaque piézoélectrique d'épaisseur  $h$  et d'un barreau piézoélectrique de longueur  $\ell$  orientés suivant l'axe  $z$ . La flèche indique le sens de la polarisation diélectrique qui traverse la surface  $S$ .

Les effets piézoélectriques se manifestent par le coefficient de couplage piézoélectrique quasi-statique défini par le ratio de l'énergie mécanique emmagasinée en réponse à l'énergie électrique appliquée et *vice versa* :

$$k = \sqrt{\frac{\text{Énergie mécanique emmagasinée}}{\text{Énergie électrique appliquée}}} \quad (\text{C.5})$$

$$k = \sqrt{\frac{\text{Énergie électrique emmagasinée}}{\text{Énergie mécanique appliquée}}}. \quad (\text{C.6})$$

Le coefficient de couplage piézoélectrique quasistatique s'écrit dans le cas d'une plaque

$$k_t^2 = \frac{h_{33}^2}{c_{33}^D \beta_{33}^S} = \frac{h_{33}^2 \varepsilon_{33}^S}{c_{33}^D} \quad (\text{C.7})$$

où l'indice  $t$  indique que la vitesse est dans la direction de l'épaisseur (*thickness*) et dans le cas d'un barreau

$$k_{33}^2 = \frac{g_{33}^2}{s_{33}^E \beta_{33}^T} = \frac{g_{33}^2 \varepsilon_{33}^T}{s_{33}^E}. \quad (\text{C.8})$$

$\varepsilon_{33}^S$  et  $\varepsilon_{33}^T$  sont la permittivité diélectrique respectivement à déformation et à contrainte mécaniques constantes. La vitesse des ondes planes longitudinales à déplacement électrique constant suivant la direction  $z$  s'écrit pour une plaque

$$v_t^D = \sqrt{\frac{c_{33}^D}{\rho}} \quad (\text{C.9})$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique et pour un barreau

$$v_b^D = \frac{1}{\sqrt{\rho s_{33}^D}} \quad (\text{C.10})$$

où l'indice  $b$  se rapporte au barreau.

Par définition, on appelle  $f_a$  la fréquence de résonance mécanique correspondant au premier mode en demi-longueur d'onde lorsque les électrodes sont en circuit ouvert. Dans une plaque d'épaisseur  $h$ ,  $f_a$  s'écrit

$$f_a = \frac{v_t^D}{2h}. \quad (\text{C.11})$$

alors que dans un barreau de longueur  $\ell$ ,  $f_a$  s'écrit

$$f_a = \frac{v_b^D}{2\ell}. \quad (\text{C.12})$$

L'indice  $a$  indique simplement que  $f_a$  est aussi la fréquence d'antirésonance électrique.

Par définition, on appelle  $f_r$  la fréquence de résonance mécanique correspondant au premier mode en demi-longueur d'onde lorsque les électrodes sont en court-circuit. La définition dans le cas d'une plaque est donnée sous la forme de l'équation transcendante

$$k_t^2 = \frac{\pi f_r}{2 f_a} \cot \frac{\pi f_r}{2 f_a} \quad (\text{C.13})$$

et dans le cas d'un barreau sous la forme de l'équation transcendante

$$k_{33}^2 = \frac{\pi f_r}{2 f_a} \cot \frac{\pi f_r}{2 f_a}. \quad (\text{C.14})$$

Enfin, si les électrodes d'aire  $S$  d'un élément piézoélectrique sont mécaniquement encastrées durant une excitation électrique, l'impédance électrique se résume à une capacité bloquée de valeur

$$C_0 = \frac{S}{h} \varepsilon_{33}^S \quad (\text{C.15})$$

dans le cas d'une plaque et

$$C_0 = \frac{S}{\ell} \varepsilon_{33}^T (1 - k_{33}^2) \quad (\text{C.16})$$

dans le cas d'un barreau.



## Annexe D

# Propriétés du PZ29 (Ferroperm)

Le PZ29 est un PZT très souple de classe cristalline 6mm fabriqué par Ferroperm.

K33 = 0.778      K31 = -0.377      K15 = 0.604      SIG = 0.338      KP = -0.656  
RHO = 7450.

S11E = 1.700E-11 , S12E = -5.740E-12 , S13E = -7.220E-12  
S33E = 2.300E-11 , S44E = 4.750E-11

S11D = 1.458E-11 , S12D = -8.162E-12 , S13D = -9.642E-12  
S33D = 9.095E-12 , S44D = 3.017E-11

C11E = 9.806E+10 , C12E = 5.555E+10 , C13E = 4.822E+10  
C33E = 7.416E+10 , C44E = 2.105E+10

C11D = 1.081E+11 , C12D = 6.561E+10 , C13D = 5.828E+10  
C33D = 1.185E+11 , C44D = 3.315E+10

D33 = 5.750E-10 , D31 = -2.400E-10 , D15 = 5.000E-10  
G33 = 2.418E-02 , G31 = -1.009E-02 , G15 = 3.467E-02  
E33 = 19.2 , E31 = -9.14 , E15 = 10.5  
H33 = 2.311E+09 , H31 = -1.101E+09 , H15 = 1.149E+09

E11T = 1.442E-08 , E33T = 2.378E-08      B11T = 6.933E+07 , B33T = 4.206E+07  
E11S = 9.160E-09 , E33S = 8.300E-09      B11S = 1.092E+08 , B33S = 1.205E+08