

N° 41181

UNIVERSITÉ LILLE I : SCIENCES ET TECHNOLOGIES

École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur

**THÈSE**

pour obtenir le grade de  
Docteur de l'Université Lille I : sciences et technologies

**Spécialité: Micro et Nanotechnologies, Acoustique et Télécommunications**  
préparée à l'Institut d'Electronique de Microélectronique et de Nanotechnologie

présentée et soutenue publiquement par:

**Huaqiang SHU**

le 6 novembre 2013

**Algorithmes de poursuite pour l'estimation de canal radio-mobile et performances asymptotiques: applications pour les systèmes OFDM**

**Membres du jury**

<b>Christophe LAOT</b>	Maître de Conférence, HDR, Télécom Bretagne	Rapporteur
<b>Éric GRIVEL</b>	Professeur des Universités, Université Bordeaux 1	Rapporteur
<b>Mohammad Ali KHALIGHI</b>	Maître de Conférence, École Centrale Marseille	Examineur
<b>Laurent CLAVIER</b>	Professeur des Universités, Télécom Lille 1	Examineur
<b>Marion BERBINEAU</b>	Directrice de Recherche, IFSTTAR	Examineur
<b>Guillaume FERRÉ</b>	Maître de Conférence, Université Bordeaux 1	Membre invité
<b>Éric Pierre SIMON</b>	Maître de Conférence, Université Lille 1	Co-Encadrant
<b>Laurent ROS</b>	Maître de Conférence, INP Grenoble	Co-Encadrant
<b>Martine LIÉNARD</b>	Professeur des Universités, Université Lille 1	Directrice de thèse



Cette thèse a été préparée au



Groupe TELICE

Institut d'Électronique, Microélectronique et de Nanotechnologies

1<sup>ère</sup> étage, Bâtiment P3

Cité Scientifique

59655 Villeneuve d'Ascq

☎ 03 20 33 71 29

FAX 03 20 43 67 98

✉ huaqiang.shu@ed.univ-lille1.fr

Site <http://telice.univ-lille1.fr/>



*Je dédie ce travail  
à Kun et mes parents*



« La simplicité est la sophistication  
suprême. »

---

Léonard DE VINCI



# Remerciements

Le travail exposé dans ce mémoire s'est déroulé au groupe Télécommunication, Interférences et Compatibilité Électromagnétique (TELICE) dans l'Institut d'Électronique, Micro-électronique et de Nanotechnologies (IEMN), sous la direction de Mme. Martine LIÉNARD, et sous l'encadrement de MM. Éric SIMON et Laurent ROS. Avant de commencer le sujet, je tiens à exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide pendant cette thèse.

Je tiens à remercier Mme. Martine LIÉNARD, Professeur à l'Université Lille 1, Sciences et Technologies, la directrice du groupe TELICE, qui m'a accueilli dans son groupe.

J'exprime mes sincères remerciements à M. Éric SIMON, Maître de Conférence à l'Université Lille 1, mon co-encadrant qui m'a proposé le sujet de thèse et m'a écouté, guidé et formé avec énormément de patience tout au long de la thèse.

J'adresse mes plus vives reconnaissances à M. Laurent ROS, Maître de Conférence à l'INP Grenoble, mon co-encadrant. C'est lui qui m'a guidé à la bonne piste sur laquelle j'ai pu avancer jusqu'au bout. Sa personnalité encourageante et chaleureuse est un soutien inappréciable pour moi.

Je tiens à remercier aussi MM. Christophe LAOT et Éric GRIVEL, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter au jugement de ce travail et en acceptant d'être les rapporteurs. Je voudrais remercier aussi les membres du jury : M. Laurent CLAVIER (Président du jury), M. Mohammad Ali KHALIGHI, M. Guillaume FERRÉ, Mme. Marion BERBINEAU, pour l'intérêt qu'ils ont tous témoigné à ces travaux.

Merci à tous les collègues du groupe TELICE qui m'ont volontairement aidé tout au long de la thèse. En particulier, je voudrais remercier notre secrétaire, Emmanuelle GILLMANN, qui m'a beaucoup facilité les démarches administratives pendant la thèse.

Enfin, je voudrais dire merci à ma famille, Kun, père et mère, pour m'avoir toujours accompagné, à leur propre manière, si essentielle et efficace pour moi.



# Résumé

L'estimation de canal est une tâche cruciale du récepteur dans les systèmes de communication sans fil, en particulier en cas de mobilité où les paramètres du canal varient avec le temps. Dans cette thèse, un nouvel estimateur de boucle de poursuite d'ordre 3 (RW3-CATL), qui a une structure semblable à la boucle à verrouillage de phase (PLL) avec une faible complexité a été tout d'abord proposé pour estimer l'amplitude complexe du canal dans le cas mono-trajet mono-porteuse. Le lien entre un filtre de Kalman en régime asymptotique basé sur un modèle d'approximation de marche aléatoire (RW3-KF) et l'estimateur proposé est établi. Les expressions des paramètres sous-optimaux et d'EQM correspondante sont données sous forme analytiques en fonction des gains de boucle. Ensuite, les performances asymptotiques du RW3-KF ont été analysées en résolvant les équations de Riccati. L'expression analytique de la variance optimale du bruit d'état qui minimise l'EQM asymptotique a été également déduite.

Pour les systèmes multi-trajet multi-porteuses, tels que les systèmes OFDM, la boucle RW3-CATL est étendue à la structure vectorielle (RW3-LS-CATL). Cette boucle conserve la même structure qu'en mono-trajet mono-porteuse, mais un signal d'erreur vectoriel adéquat est redéfini à partir d'un estimateur LS des amplitudes complexes des trajets, basé sur les pilotes du symbole OFDM courant et sur la connaissance a priori des retards des trajets. Par ailleurs, pour ce scénario, le filtre de Kalman, RW-KF estime conjointement les amplitudes complexes des trajets. Il présente une forte complexité, et nous n'avons pas de formules analytiques pour le régler. Pour réduire la complexité, nous proposons un filtre de dimension réduite, obtenu par une approximation du filtre original à l'aide des identités de Woodbury. Ce filtre revient à estimer l'amplitude complexe de chaque trajet de manière séparée. Le réglage optimal des paramètres est déduit du cas mono-trajet mono-porteuse. Les performances de ce filtre à complexité réduite, obtenues par simulation, sont quasiment les mêmes que celles du filtre de Kalman original.

**Mots clés :** Estimation de canal, Modèle marche-aléatoire, Poursuite, PLL, Filtre de Kalman, OFDM



# Abstract

Channel Estimation is a crucial task of the receiver in wireless communication systems, especially in case of mobility where the channel parameters vary with time. In this thesis, a novel third-order tracking loop estimator (RW3-CATL), which is similar to the phase-locked loop (PLL) with low complexity structure was first proposed to estimate complex amplitude of the channel in the single-path single-carrier scenario. The connection between a steady-state Kalman filter based on a random walk approximation model (RW3-KF) and the proposed estimator is established. The sub-optimal parameters and the corresponding MSE of the RW3-CATL are given in closed-form expressions in function of the tracking loop parameters. The sub-optimal parameters and the corresponding MSE of the RW3-CATL are given in closed-form expressions in function of the tracking loop parameters. Then, the asymptotic performance of the RW3-KF has been analysed by solving the Riccati equations. The closed-form expression of the optimal state noise variance which minimises the asymptotic MSE is also derived.

For multi-carrier multi-path systems such as OFDM systems, the RW3-CATL is extended to a vector loop (RW3-LS-CATL). This loop retains the structure as the RW3-CATL in the single-path single-carrier scenario, but a suitable vector error signal is re-designed from an LS estimator of the path complex amplitudes, based on the current OFDM symbol pilots and the a priori knowledge of the path delays. In this scenario, the Kalman filter, RW-KF, jointly estimates the complex amplitudes of the paths. It has a high complexity, and we do not have closed-form formulas for the parameter setting. To reduce the complexity, we propose a dimension-reduced filter obtained from an approximation of the original Kalman filter by exploiting the Woodbury identities, which deals with the complex amplitude of each path separately. The optimum parameter settings of this filter is deduced from the single-path single-carrier case. The performance of the low complexity filter, obtained by simulation, is almost the same as the original Kalman filter.

**Keywords:** Channel estimation, Random-walk model, Tracking, PLL, Kalman filter, OFDM



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>15</b>
<b>Notations</b>	<b>17</b>
<b>Symboles</b>	<b>21</b>
<b>Sigles</b>	<b>25</b>
<b>Introduction</b>	<b>29</b>
<b>1 Canal de propagation</b>	<b>33</b>
1.1 Caractéristiques du canal physique	33
1.2 Modèle complexe équivalent du canal physique en bande de base	35
1.2.1 Signal de transmission	35
1.2.2 Réponse impulsionnelle du canal	37
1.3 Modèle paramétrique du canal en mobilité	38
1.3.1 Modèle déterministe	39
1.3.2 Modèle aléatoire	40
1.3.3 La variation de l'AC et la fréquence Doppler normalisée $f_d T$	43
1.4 Conclusion	44
<b>2 Boucle de poursuite d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal mono-trajet en modulation mono-porteuse</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction	45
2.2 Boucle de poursuite de l'amplitude complexe	48
2.2.1 Du filtre de Kalman en régime asymptotique à la CATL	48
2.2.2 Caractéristique générale de la CATL	56
2.2.3 Analyse théorique de l'EQM	61
2.3 Paramétrage de la RW3-CATL	66
2.4 Simulation	70
2.4.1 De l'intérêt d'utiliser le modèle RW à l'ordre 3	70
2.4.2 Validation de l'analyse théorique	70
2.4.3 Comparaison avec les estimateurs de Kalman dans la littérature	74
2.4.4 Étude de la sensibilité de la CATL à une mauvaise connaissance des paramètres	76

2.4.5	Performance en terme de TEB	78
2.5	Conclusion	79
<b>3</b>	<b>Filtre de Kalman asymptotique d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal mono-trajet en modulation mono-porteuse</b>	<b>81</b>
3.1	Introduction	81
3.2	RW3-KF en régime asymptotique	82
3.3	Analyse de l'EQM asymptotique	87
3.4	Lien entre le RW3-KF et la RW3-CATL	88
3.5	Résultats pour les RW $p$ -KFs ( $p = 1, 2, 3$ )	89
3.6	Simulation	90
3.6.1	Validation de l'analyse théorique	90
3.6.2	Performance du RW3-KF	90
3.7	Conclusion	93
<b>4</b>	<b>Boucle de poursuite d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal multi-trajet en modulation multi-porteuse OFDM</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction	95
4.2	Transmission OFDM sur le canal multi-trajet	98
4.2.1	Modèle mathématique de l'OFDM	98
4.2.2	Modèle des pilotes	99
4.3	RW3-LS-CATL pour des systèmes OFDM	100
4.3.1	De la structure scalaire à la structure vectorielle	100
4.3.2	Signal d'erreur basé sur les Moindres Carrés	101
4.3.3	Complexité de l'algorithme	104
4.3.4	Caractéristique et paramétrage de la RW3-LS-CATL	105
4.4	Simulation	108
4.5	Conclusion	114
<b>5</b>	<b>Filtre de Kalman asymptotique d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal multi-trajet en modulation multi-porteuse OFDM</b>	<b>115</b>
5.1	Introduction	115
5.2	Modèle espace-état, équations vectorielles du RW3-KF	115
5.3	Analyse du RW3-KF appliqué sur des systèmes OFDM	118
5.3.1	Cas mono-trajet multi-porteuse	118
5.3.2	Cas multi-trajet multi-porteuse avec $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$	120
5.3.3	Cas général multi-trajet multi-porteuse	122
5.4	Complexité de l'algorithme	126
5.5	Analyse numérique et Simulation	127
5.6	Conclusion	129
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Bande équivalente de bruit</b>	<b>139</b>

A.1	Bande équivalente de bruit des CATLs	140
A.2	Bande équivalente de bruit du RW3-KF	141
<b>B</b>	<b>Minimisation de l'EQM asymptotique de RW3-CATL</b>	<b>143</b>
<b>C</b>	<b>Solution de l'équation de Riccati pour RW3-KF</b>	<b>145</b>
<b>D</b>	<b>Justification de (5.33)</b>	<b>149</b>

## Table des figures

1.1	Scénario typique de propagation avec terminal mobile en déplacement	34
1.2	Puissance du signal reçu en fonction de la distance émetteur-récepteur	35
1.3	Chaîne de transmission équivalente en bande de base	36
1.4	Trajets multiples vers le terminal mobile en mouvement	39
1.5	Spectre Doppler de $\alpha$ pour modèle isotrope	42
1.6	La partie réelle des ACs durant 10 symboles OFDM consécutifs	44
2.1	Structure de la RW3-CATL (calculée à partir du KF asymptotique)	53
2.2	Structure variée de la RW3-CATL	53
2.3	Fonction de transfert de la RW3-CATL	58
2.4	Fonctions de transfert de la RW-CATL (2)	63
2.5	Performance des estimateurs de Kalman pour un canal RW3	71
2.6	Performance des estimateurs de Kalman pour un canal RW2	71
2.7	Distribution de l'EQM sur le plan $m - \zeta$	72
2.8	Validation de l'analyse théorique sur l'EQM de la RW3-CATL	73
2.9	Performance de la RW3-CATL en terme d'EQM	75
2.10	Comparaison de l'EQM versus $f_d T$ entre la RW3-CATL et les estimateurs de Kalman, RSB = 20 dB	76
2.11	Caractère transitoire de la RW3-CATL ( $m = 3.19, \zeta = 0.39, \text{RSB} = 20 \text{ dB}, f_d T = 10^{-3}$ )	76
2.12	L'effet de discordance sur la connaissance imparfaite du RSB : EQM versus RSB, RSB' (paramètre utilisé à régler la RW3-CATL) fixé à 15, 20, 25 dB et $f_d T = 10^{-3}$	77
2.13	L'effet de discordance sur la connaissance imparfaite de $f_d$ : EQM versus $f_d T, f_d T'$ (paramètre utilisé à régler la RW3-CATL) décalé de 10%, 20%, 50% de la vraie valeur et RSB = 20 dB	77
2.14	TEB versus RSB pour la modulation en QPSK, $f_d T = 10^{-3}$	78

3.1	Comparaison de l'EQM théorique (3.49) et le résultat de la fonction "dare"	91
3.2	Comparaison de l'EQM versus RSB, $f_d T = 10^{-3}$	91
3.3	Comparaison de l'EQM versus $f_d T$ , RSB =20 dB	92
3.4	Comparaison de l'EQM du RW3-KF et de la RW3-CATL ( $m = 2$ et $\zeta = 0.5$ ), $f_d T = 10^{-3}$	92
3.5	Comparaison du TEB versus RSB avec modulation QPSK, $f_d T = 10^{-3}$	93
4.1	Illustration de la puissance des coefficients de la matrice $\mathbf{H}_{(k)}$	100
4.2	Structure vectorielle de la RW3-LS-CATL	104
4.3	Comparaison de l'EQM versus le nombre de pilotes $N_p$ de la RW3-LS-CATL dans deux types de canal, RSB =20 dB, $f_d T = 0.001$	110
4.4	Comparaison des estimateur en terme d'EQM versus RSB $f_d T = 10^{-3}$ , $N_p=16$	110
4.5	Dégradation de performance en terme d'EQM globale de la RW3-LS-CATL lorsque la mobilité augmente, $N_p=16$ , pour $f_d T = 10^{-3}$ et $f_d T = 10^{-2}$	111
4.6	EQM globale avec interpolation linéaire de la RW3-LS-CATL pour $f_d T = 10^{-2}$ , $N_p=16$	111
4.7	La poursuite des ACs avec la RW3-LS-CATL pour $f_d T = 10^{-2}$ , RSB= 30 dB, $N_p=8$	112
4.8	TEB versus RSB, $f_d T = 10^{-3}$	112
5.1	Structure du RW3-KF approché	125
5.2	Optimisation numérique du RW3-KF	128
5.3	Comparaison des estimateur en terme d'EQM versus RSB $f_d T = 10^{-3}$ , $N_p=16$	129

# Notations

$\mathcal{BF}\{\cdot\}$	Opération de translation en bande de base
$\mathcal{TF}\{\cdot\}$	Transformée de Fourier
$\mathcal{TZ}\{\cdot\}$	Transformée en Z
$h_{\text{HF}}(t)$	Version haute-fréquence d'une fonction temporelle continue $h(t)$
$H_{\text{HF}}(f)$	Version haute-fréquence d'une fonction fréquentielle $H(f)$
$H_{\text{HF}}^+(f)$	Version haute-fréquence d'une fonction fréquentielle $H(f)$ avec des composantes qui contiennent que des fréquences positives
$s(t)$	Signal/fonction continu(e) en temps
$s_I(t)$	Composante en phase d'un signal continu $s(t)$
$s_Q(t)$	Composante en quadrature d'un signal continu $s(t)$
$s_l(t)$	Notation multi-trajet, fonction $s(t)$ définie pour le $l^{\text{ème}}$ trajet
$\Re\{\cdot\}$	Partie réelle d'un nombre complexe
$\Im\{\cdot\}$	Partie imaginaire d'un nombre complexe
$(\cdot)^*$	Opérateur de conjugaison
$(\cdot)^T$	Opérateur de transposition
$(\cdot)^H$	Opérateur de transposition-conjugaison (Hermitien)

$ \cdot $	Module (norme euclidienne) / Déterminant d'une matrice carrée
$\text{sgn}\{\cdot\}$	Fonction signe
$J_0\{\cdot\}$	Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0
$L\{\cdot\}$	Fonction de transfert
$\frac{\partial J}{\partial m}$	Différentielle partielle de la fonction $J$ sur le variable $m$
$\mathbf{U}$	Matrice invariante (en gras)
$\mathbf{K}_{(k)}$	Matrice variante en temps
$\mathbf{U}^{(l)}, \mathbf{K}_{(k)}^{(l)}$	Notations multi-trajets ; Matrices définies pour le $l^{\text{ème}}$ trajet
$\alpha_{(k)}$	Notation mono-trajet, fonction discrète en temps défini pour sa version continue $\alpha(kT_s)$ avec $T_s$ le temps d'échantillonnage
$\alpha_{l(k)}, \boldsymbol{\alpha}_{(k)}$	Notations multi-trajets (pour le cas du canal quasi-invariant durant un temps symbole OFDM), Fonction discrète en temps pour le $k^{\text{ème}}$ symbole OFDM du $l^{\text{ème}}$ trajet ; Vecteur associé au $k^{\text{ème}}$ symbole OFDM
$\alpha_{l(k)}(qT_s), \boldsymbol{\alpha}_{(k)}(qT_s)$	Notations multi-trajets, Fonction discrète en temps pour le $q^{\text{ème}}$ échantillon du $k^{\text{ème}}$ symbole OFDM du $l^{\text{ème}}$ trajet ; Vecteur associé au $q^{\text{ème}}$ échantillon du $k^{\text{ème}}$ symbole OFDM
$\mathbf{K}_{(\infty)}$	Matrice asymptotique
$\text{diag}\{\mathbf{x}_{(k)}\}$	Matrice diagonale avec le vecteur $\mathbf{x}_{(k)}$ sur sa diagonale principale
$\text{blkdiag}\{\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(L_t)}\}$	Notation multi-trajet, Matrice diagonale par bloc avec $\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(L_t)}$ sur sa diagonale principale
$[\mathbf{x}_{(k)}]_n$	$n^{\text{ème}}$ élément du vecteur $\mathbf{x}_{(k)}$
$[\mathbf{H}_{(k)}]_{m,n}$	$m^{\text{ème}}$ élément de la $n^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $\mathbf{H}_{(k)}$

---

$\text{Trace}\{\cdot\}$	Trace (somme des éléments sur la diagonale principale) d'une matrice carrée
$\mathbf{I}_N$	Matrice identité de taille $N \times N$
$E\{\cdot\}$	Espérance
$\otimes$	Produit de Kronecker
$\tilde{\alpha}_{(k)}$	$\alpha_{(k)}$ approché par un modèle donné
$\hat{\alpha}_{(k k)}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k k)}$	Estimation de la variable $\alpha_{(k)}$ et du vecteur $\boldsymbol{\alpha}_{(k)}$
$\hat{\alpha}_{(k k-1)}, \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k k-1)}$	Prédiction de la variable $\alpha_{(k)}$ et du vecteur $\boldsymbol{\alpha}_{(k)}$
$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)}$	Estimation LS du vecteur $\boldsymbol{\alpha}_{(k)}$
$\mathbf{P}_{(k k)}$	Matrice de covariance de l'estimation
$\mathbf{P}_{(k k-1)}$	Matrice de covariance de la prédiction
$\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}$	Vecteur composé des éléments correspondant aux positions pilotes de $\mathbf{x}_{(k)}$
$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)}$	Vecteur obtenu en divisant le signal sur les sous-porteuses pilotes $\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$ par des pilotes $\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}$ élément par élément



# Symboles

$s(t)$	Signal continu émis en bande de base
$r(t)$	Signal continu reçu en bande de base
$h(t, \tau)$	Réponse impulsionnelle du canal physique
$b(t)$	Bruit Blanc additif Gaussien du canal continu
$v(k)$	Version discrète de $b(t)$
$f_0$	Fréquence porteuse
$B_0$	Bande du système
$L_t$	Nombre de trajets
$\rho(t)$	Atténuation de propagation du canal physique
$\theta(t)$	Phase du signal reçu
$\tau(t)$	Retard de transmission
$\alpha(t)$	Amplitude complexe du canal
$\phi_l$	Angle d'arrivée du $l^{\text{ème}}$ trajet
$f_d$	Fréquence Doppler
$T$	Temps d'échantillonnage (mono-porteuse) / Durée du symbole OFDM
$T_s$	Temps d'échantillonnage dans le système OFDM
$v_m$	Vitesse du récepteur

$c$	Célérité de l'onde radio-électrique
$\Gamma_\alpha(f), \Gamma_{\alpha_l}(f)$	Spectre Doppler de $\alpha$ (mono-trajet) et de $\alpha_l$ du $l^{\text{ème}}$ trajet (multi-trajet)
$R_\alpha(\Delta t), R_{\alpha_l}(\Delta t)$	Fonction d'autocorrélation de $\alpha$ (mono-trajet) et de $\alpha_l$ du $l^{\text{ème}}$ trajet (multi-trajet)
$x_{(k)}$	Symbole émis modulé (mono-porteuse)
$y_{(k)}$	Signal discret reçu égalisé par $x_{(n)}$ (mono-porteuse)
$\alpha_{(k)}$	Amplitude complexe (version discrète)
$\delta_{(k)}$	Dérivée d'ordre 1 (approchée) de l'AC continue
$\xi_{(k)}$	Dérivée d'ordre 2 (approchée) de l'AC continue
$w_{(k)}$	Bruit Blanc additif complexe égalisé par $x_{(n)}$
$K_{\text{mod}}$	Facteur de modulation
$\sigma_\alpha^2, \sigma_{\alpha_l}^2$	Variance de $\alpha$ (mono-trajet) et de $\alpha_l$ du $l^{\text{ème}}$ trajet (multi-trajet)
$\sigma_w^2, \sigma_v^2$	Variance du bruit $w_{(k)}$ et $v_{(k)}$
$\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}$	Vecteur de sélection (mono-trajet) et Matrice de sélection (multi-trajet)
$\mathbf{a}_{(k)}, \hat{\mathbf{a}}_{(k)}$	Vecteur d'état (mono-trajet et multi-trajet)
$\mathbf{u}_{(k)}, \hat{\mathbf{u}}_{(k)}$	Vecteur de bruit d'état (mono-trajet et multi-trajet)
$\mathbf{M}, \hat{\mathbf{M}}$	Matrice d'évolution (mono-trajet et multi-trajet)
$\mathbf{U}, \hat{\mathbf{U}}$	Matrice de covariance de bruit d'état (mono-trajet et multi-trajet)
$v_{\epsilon(k)}, \mathbf{v}_{\epsilon(k)}$	Signal d'erreur (mono-trajet et multi-trajet)
$\mathbf{K}_{(k)}, \hat{\mathbf{K}}_{(k)}$	Gain de Kalman (mono-trajet), Gain de Kalman de l'ensemble des trajets (multi-trajet)

$\mathbf{P}_{(k k)}, \dot{\mathbf{P}}_{(k k)}$	Matrice de covariance de l'estimation (mono-trajet), Matrice de covariance de l'ensemble des trajets (multi-trajet)
$\mathbf{P}_{(k k-1)}, \dot{\mathbf{P}}_{(k k-1)}$	Matrice de covariance de la prédiction (mono-trajet), Matrice de covariance de l'ensemble des trajets (multi-trajet)
$\mathbf{v}_c(k), \mathbf{v}_c(k)$	Signal à la sortie du filtre de boucle de la RW-CATL et de la RW-LS-CATL
$\mathbf{v}_{\text{Lag1}}(k), \mathbf{v}_{\text{Lag1}}(k)$	Signal d'intégration numérique d'ordre 1 du filtre de boucle de la RW-CATL et de la RW-LS-CATL
$\mathbf{v}_{\text{Lag2}}(k), \mathbf{v}_{\text{Lag2}}(k)$	Signal d'intégral numérique d'ordre 2 du filtre de boucle de la RW-CATL et de la RW-LS-CATL
$\mu_1, \mu_2, \mu_3$	gains du filtre de boucle de la RW3-CATL et de la RW3-LS-CATL
$m$	Ratio de capacité de la RW3-CATL et de la RW3-LS-CATL
$\zeta$	Facteur d'amortissement de la RW-CATL et de la RW-LS-CATL (d'ordre 2 et 3)
$\omega_n, \omega_c$	Pulsation naturelle de la RW-CATL et de la RW-LS-CATL (d'ordre 2 et 3) et pulsation de coupure de la RW1-CATL et de la RW1-LS-CATL
$f_n, f_c$	Fréquence naturelle de la RW-CATL et de la RW-LS-CATL (d'ordre 2 et 3) et fréquence de coupure de la RW1-CATL et de la RW1-LS-CATL
$\epsilon(k), \mathbf{\epsilon}(k)$	Erreur d'estimation (cas mono-trajet et cas multi-trajet)
$\sigma_{\epsilon w}^2$	Variance d'erreur statique
$\sigma_{\epsilon \alpha}^2$	Variance d'erreur dynamique
$\sigma_c^2$	Variance d'erreur (EQM) globale
$B_L$	Bande équivalente de bruit
$\mathcal{B}$	Facteur de la bande équivalente du bruit

---

$S_\alpha$	Intégration qui contient la DSP de l'AC pour calculer $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$
$\lambda$	Multiplicateur de Lagrange
$N$	Nombre de sous-porteuses OFDM
$N_t$	Nombre d'échantillons pour un symbole OFDM
$N_g$	Nombre d'échantillons pour préfixe cyclique
$N_p$	Nombre de sous-porteuses pilotes
$\check{\tau}_l$	Retard normalisé du $l^{\text{ème}}$ trajet
$\mathbf{H}_{(k)}$	Matrice du canal associée au $k^{\text{ème}}$ symbole OFDM
$\mathbf{x}_{(k)}$	$k^{\text{ème}}$ symbole OFDM émis
$\mathbf{y}_{(k)}$	$k^{\text{ème}}$ symbole OFDM reçu
$\mathbf{w}_{(k)}$	Bruit blanc complexe du canal au $k^{\text{ème}}$ symbole OFDM
$\mathbf{w}_{\text{TL}(k)}$	Bruit de boucle de la RW-LS-CATL au $k^{\text{ème}}$ symbole OFDM
$\sigma_{\text{TL}}^2$	Variance du bruit de boucle de la RW-LS-CATL
$\lambda_{\text{TL}}$	Facteur du bruit de boucle de la RW-LS-CATL
$\sigma_{\text{KF}l}^2$	Variance du bruit de boucle du RW3-KF approché sur le $l^{\text{ème}}$ trajet
$\mathbf{F}$	Matrice de Fourier
$\mathbf{F}_p$	Matrice de Fourier pour les sous-porteuses pilotes

# Sigles

AC	Amplitude complexe
AR $p$	Modèle Auto-Régressif d'ordre $p$
AR1-KF	Filtre de Kalman basé sur le modèle AR d'ordre 1
BCRB	Bayesian Cramer-Rao Bound
BEM	Basis Expansion Model
CATL	Complex-Amplitude Tracking Loop
CFO	Carrier Frequency Offset
CM	Correlation Matching
DA	Data-Aided
DD	Decision-Directed
DPLL	Digital Phase-Locked Loop
DSP	Densité spectrale de puissance
EM	Expectation Maximization
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques
GSM	Global System of Mobile communications
IEP	Interférence Entre Porteuses

---

IES	Interférence Entre Symboles
LMDS	Local Multipoint Distribution Systems
LMMSE	Linear Minimum Mean Square Error
LMS	Least Mean Square
LOS	Line of sight
LPI	Low-Pass Interpolation
LS	Least square
MAV	Minimum Asymptotic Variance
MDL	Minimum Description Length
MIMO	Multiple-Input Multiple-Output
MMSE	Minimum Mean Square Error
NCG	Numerically Controlled Generator
NLOS	No line of sight
OFDM	Othogonal frequency division multiplexing
OFDMA	Othogonal frequency division multiple access
PC	Préfixe Cyclique
PDP	Power Delay Profile
PLL	Phase-Locked Loop
PI	filtre Proportionnel-Intégral
PII	filtre Proportionnel-double-Intégral
RSB	Rapport Signal sur Bruit
$RW_p$	Modèle marche aléatoire d'ordre $p$ ( <i>Random-Walk</i> en anglais)

---

RW3-CATL	Third-order Random-Walk Complex-Amplitude Tracking Loop
RW3-LS-CATL	Third-order Random-Walk Least-Square Complex-Amplitude Tracking Loop (Vectorial)
RW3-KF	Filtre de Kalman basé sur le modèle RW3
TEB	Taux d'Erreur Binaire
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TFDI	Transformée de Fourier Discrète Inverse
US	Uncorrelated Scatters
WiMAX	Worldwide Interoperability for Microwave Access
WSS	Wide Sense Stationary
ZF	Zero Forcing



# Introduction

L'estimation de canal est une tâche fondamentale dans un système de télécommunication sans-fils. Suite à l'augmentation de la mobilité et du débit de transmission, l'estimation de canal joue un rôle de plus en plus important. Nous étudions dans cette thèse des algorithmes d'estimation de canal à faible complexité, appliqués dans une première partie de la thèse aux systèmes mono-porteuse, puis aux systèmes multi-porteuse OFDM dans la deuxième partie de la thèse.

L'OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing* en anglais) est une technique très largement utilisée aujourd'hui, elle a été retenue pour les normes télécommunication sans fil (WiFi, WiMAX, LTE etc.), télécommunication filaires (ADSL, VDSL, Homeplu, etc.), radiodiffusion (DAB, T-DMB, etc.) et télédiffusion (DVB-T, DVB-H, etc.). Le concept de l'OFDM a été publié dans les années 60 mais il fallu attendre les années 80 et les progrès du traitement numérique des signaux pour qu'il soit mis en œuvre en pratique. Le principe de l'OFDM consiste à répartir, sur un grand nombre de sous-porteuses, le signal numérique que l'on veut transmettre. Cela revient à combiner le signal à transmettre sur un grand nombre de systèmes de transmission (des émetteurs, par exemple) indépendants et à des fréquences différentes. Afin que les fréquences des sous-porteuses soient les plus proches possibles et ainsi transmettre le maximum d'information sur une portion de fréquences donnée, les sous porteuses doivent être orthogonales entre elles. Les spectres des différentes sous-porteuses se chevauchent mais grâce à l'orthogonalité, les sous-porteuses n'interfèrent pas entre elles. Cette technique est classiquement utilisée dans les systèmes où le canal de propagation est fortement sélectif en fréquence. En effet, les informations peuvent être réparties sur l'ensemble du spectre.

Pour des systèmes avec une modulation multi-porteuse comme l'OFDM, l'estimation de canal peut être réalisée à l'aide des sous-porteuses pilotes, et ensuite par une interpolation fréquentielle. Les méthodes d'estimation sont principalement classées en deux catégories : les méthodes classiques et les méthodes Bayésiennes. Les méthodes classiques consistent à estimer des paramètres depuis les observations sans exploiter leurs statistiques, comme l'estimateur à maximum de vraisemblance (MLE pour *maximum likelihood estimator* en anglais), l'estimateur des moindres carrés (LSE pour *least square estimator* en anglais) etc. Les méthodes Bayésiennes sont utilisées lorsque des propriétés statistiques du paramètre à estimer sont disponibles, ce qui permet d'augmenter les performances de l'estimation. Les estimateurs bayésiens les plus connus sont l'estimateur MMSE (*minimum mean square error estimator* en anglais) et l'estimateur MAP (*maximum a posteriori* en anglais). L'estimation de canal dans un système OFDM est exécuté soit en fréquence soit de

manière 2D (en fréquence et en temps). L'estimation fréquentielle est une tâche qui exige une mise à jour au rythme du symbole (estimation «en-ligne» ou «poursuite»). L'utilisation d'un LSE en fréquence à l'aide de pilotes répartis sur l'ensemble des sous-porteuses est largement répandue grâce à sa simplicité. Néanmoins, cet estimateur ne permet pas d'exploiter la corrélation temporelle car il estime le canal symbole par symbole indépendamment. Les estimateurs classiques qui exploitent la corrélation temporelle sont le filtre de Wiener ou le filtre de Kalman. Dans cette thèse, nous allons étudier des estimateurs de canal basés sur des filtres de Kalman, ou des versions simplifiées basées sur des filtres à coefficients invariants au cours du temps.

Les filtres de Kalman [1], contrairement aux filtres de Wiener, requièrent la connaissance du modèle de variation des paramètres à estimer. Ces modèles de variation sont appelés modèles espace-état. Le modèle espace-état le plus couramment utilisé dans la littérature est le modèle auto-régressif d'ordre 1 (AR1). Il modélise très bien les variations rapides (Doppler normalisé sur le temps symbole  $> 10^{-2}$ ) [2–4], mais en cas de variation lente ou modérée (Doppler normalisé sur le temps symbole  $< 10^{-2}$ ), ce modèle n'est plus adéquat. Ce problème a été premièrement mis en évidence dans [5] avant de le démontrer analytiquement dans [7] par des collègues du laboratoire Gipsa-lab de Grenoble. Notre travail va donc s'appuyer sur ces résultats de recherche pour proposer des nouveaux modèles plus performants que le modèle AR1 en cas de variation lente à modérée. Notons que le contexte de variation lente à modérée est un contexte très courant, avec donc un grand nombre d'application possibles. De plus, avec le développement de la radio cognitive, des transmissions sont désormais envisagées à des fréquences porteuses bien en dessous des porteuses utilisées dans les standards de communication courants (qui sont au delà du GHz : 3.5 GHz pour le WiMAX, 2.4 pour le LTE par exemple). Les bandes envisagées pour la radio cognitive sont les bandes de la TNT entre 470 MHz et 790 MHz et les bandes aéronautiques entre 960 MHz et 1215 MHz notamment. Or la fréquence Doppler est proportionnelle à la fréquence porteuse. Ainsi, même des fréquences Doppler normalisés faible ( $< 10^{-2}$ ) peuvent correspondre à des vitesses relativement élevées (quelques centaines de km/h) à ces basses fréquences porteuses. Étudier les estimateurs de canal dans ce contexte de Doppler normalisé  $< 10^{-2}$  revêt donc une grande importance.

Donc plutôt que d'utiliser le modèle AR1 pour les filtres de Kalman, nous proposeront d'utiliser un modèle de type marche aléatoire (RW pour *random walk* en anglais), encore appelé modèle Brownien. Ce modèle, dans sa version intégrée d'ordre 2, a été proposé par Gazor dans [9], Driessen [10] et Christiansen [11]. Il a permis de faire le lien entre une boucle à verrouillage de phase (PLL en anglais) et un filtre de Kalman (en mode asymptotique) basé sur un modèle RW d'ordre 2. Rappelons que l'intérêt de la PLL par rapport au filtre de Kalman est sa faible complexité. En effet dans une PLL, les coefficients sont fixes alors que pour le filtre de Kalman les coefficients sont à recalculer à chaque temps symbole avec une inversion matricielle. L'inconvénient de la PLL est une convergence plus lente. Mais dans la pratique des dispositifs d'aide à l'acquisition permettent d'accélérer la convergence naturelle des PLL [12].

La contribution de la thèse est d'étendre ces résultats à l'ordre 3. Dans certains systèmes, lorsque les paramètres à estimer présentent des tendances fortes sur plusieurs temps

symboles, il est recommandé d'augmenter l'ordre des modèles pour mieux estimer ces tendances. Par exemple dans les récepteurs satellites, des filtres de Kalman d'ordre 3 et des PLLs d'ordre 3 sont couramment utilisés pour le problème de l'estimation de phase lorsque la fréquence Doppler varie au cours du temps. Cependant, le réglage des modèles d'ordre 3 est le plus souvent réalisé de manière empirique. Nous proposons dans cette thèse une méthode pour régler les paramètres du modèle d'ordre 3 avec des formules analytiques facilement utilisables, ainsi que des formules de performances théoriques.

Dans un premier temps, nous avons étudié le cas d'un canal mono-trajet pour une modulation mono-porteuse. Dans ce contexte nous avons proposé au chapitre 2 un estimateur à coefficients constant inspiré de la structure de la PLL à l'ordre 3, appelé RW3-CATL, et nous avons fourni l'analyse théorique et les formules analytiques pour régler le paramètre du modèle RW3 de manière sous-optimale.

Au chapitre 3, nous étudions le filtre de Kalman basé sur un modèle espace-état RW d'ordre 3 en mode asymptotique. Nous avons résolu les équations de Riccati pour obtenir des formules analytiques des performances asymptotiques et de réglage du paramètre du modèle RW3 sous-optimal.

Nous avons ensuite étendu nos résultats au contexte plus général d'un canal multi-trajet avec modulation multi-porteuse. Au chapitre 4, nous généralisons les résultats du chapitre 2 à ce contexte, et au chapitre 5 nous généralisons les résultats du chapitre 3 à ce contexte. L'organisation du document a été donnée pour les chapitres 2 à 5, focalisés sur l'estimation de canal. Mais avant cela, nous allons dans le chapitre 1 commencer par rappeler brièvement quelques caractéristiques générales sur les canaux radio-mobiles.

**Publications de l'auteur :** Le chapitre 2 a fait l'objet d'un article en révision pour le journal IET Communication ainsi que d'une conférence ICT 2012, le chapitre 3 a fait l'objet d'une letter acceptée dans IEEE signal processing letter et le chapitre 5 fait l'objet d'un article en soumission dans IEEE Trans. Signal Process.

Ci-dessous la liste des publications acceptées ou soumises réalisées liées à ce travail de thèse :

1. Shu, H. ; Ros, L. ; Simon, E. P., "Third-order complex amplitudes tracking loop for slow fading channel estimation," *19th International Conference on Telecommunications (ICT)*, pp.1-6, 23-25 April 2012, doi : 10.1109/ICTEL.2012.6221221
2. Shu, H. ; Ros, L. ; Simon, E. P., "Third-order Complex Amplitudes Tracking Loop for Slow to Moderate Flat Fading Channel On-Line Estimation", *IET Communication* (article accepté pour publication)
3. Shu, H. ; Simon, E. P. ; Ros, L., "Third-order Kalman Filter : tuning and steady-state performance", *IEEE Signal Processing Letter* , doi : 10.1109/LSP.2013.2277668
4. Shu, H. ; Simon, E. P. ; Ros, L., "Simplified Random-Walk-model-based Kalman filter for Slow to moderate Fading Channel Estimation in OFDM systems" article à soumettre.



# Canal de propagation

## 1.1 Caractéristiques du canal physique

La transmission de l'information sur la voie radio dans les systèmes mobiles s'effectue soit depuis une station de base vers des mobiles (liaison descendante), soit depuis des mobiles vers la station de base (liaison montante). Les conditions de propagation sont très variables et dépendent de l'environnement.

Les mécanismes physiques de base qui se produisent lors d'une transmission sont :

**La réflexion :** elle se produit lorsqu'une onde électromagnétique rencontre des surfaces lisses de très grande dimension par rapport à sa longueur d'onde.

**La diffraction :** elle génère des sources secondaires lorsqu'un obstacle épais et de grande dimension par rapport à sa longueur d'onde obstrue l'onde électromagnétique entre l'émetteur et le récepteur. Dans ce cas, le récepteur peut recevoir le signal même s'il se situe derrière l'obstacle où s'il subit l'effet "shadowing".

**La diffusion ("scattering") :** elle se produit lorsque l'onde rencontre un obstacle dont l'épaisseur est de l'ordre de sa longueur d'onde. Dans ce cas, l'énergie se trouve dispersée dans toutes les directions.

Tout compte fait, le canal radio-mobile est donc un canal fluctuant à trajets multiples. Le signal reçu est ainsi composé par une superposition de versions retardées et atténuées du signal émis. Ces phénomènes typiques de propagation sont illustrés sur la figure 1.1.

Le signal transmis subit les pertes de propagation dues à la distance, les atténuations induites par les obstacles qu'il trouve sur son parcours et les évanouissements (*fading* en anglais) suscités par l'existence de trajets multiples. De ce fait, le signal reçu est une combinaison de plusieurs trajets dont les amplitudes, les déphasages, les décalages Doppler et les retards diffèrent. Le canal radio-mobile est donc un canal fluctuant à trajet multiples. D'une manière générale, le phénomène se traduit par une variation de la puissance du signal mesurée à la réception, en fonction du temps ou de la distance qui sépare l'émetteur du

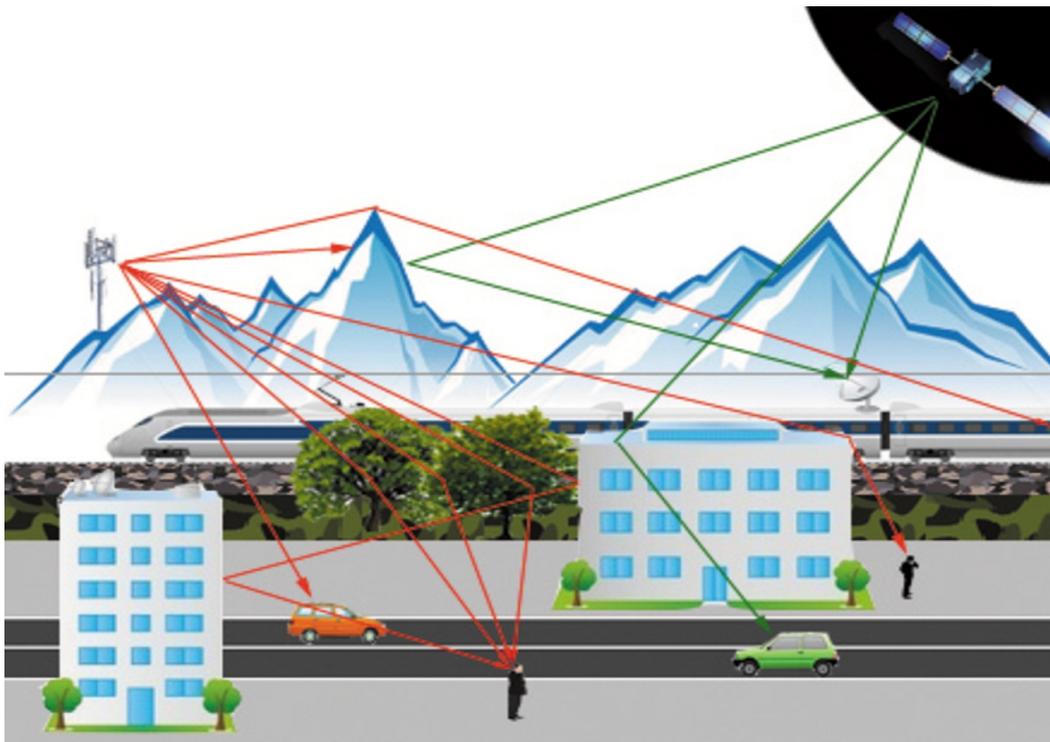


FIGURE 1.1: Scénario typique de propagation avec terminal mobile en déplacement

récepteur. D'après cette définition, il est possible de classer les phénomènes d'évanouissements des canaux radio-mobilières en deux catégories : «évanouissement à long terme » et « évanouissement à court terme » [13].

L'évanouissement à long terme se manifeste lorsque la distance qui sépare l'émetteur du récepteur est importante (de quelques dizaines à quelques milliers de mètres). Il est généralement causé par l'obstruction des ondes par les obstacles (immeubles, forêts, collines, etc.) ou par la forme du terrain. En pratique, cet évanouissement est modélisé d'après des équations qui déterminent «l'affaiblissement de parcours » ("path-loss"). Statistiquement, de nombreuses études le caractérisent comme une variable aléatoire suivant une loi log-normale qui vient apporter une certaine incertitude à l'atténuation.

L'évanouissement à court terme se réfère à l'évolution importante de l'amplitude et de la phase du signal sur une courte période de temps. Cette variation rapide est due aux trajets multiples générés par les divers réflecteurs et diffuseurs de la liaison. Le moindre mouvement du mobile engendrera de très fortes fluctuations d'amplitude de l'enveloppe du signal reçu. Statistiquement, ces fluctuations d'enveloppe à court terme peuvent être caractérisées par une loi de Rayleigh ou de Rice [14]. La première correspond généralement au milieu urbain, quand il n'y a pas une ligne de vue directe (NLOS : no line-of-sight), tandis que la seconde correspond au milieu rural, quand il y a une ligne de vue directe (LOS). La figure 1.2 illustre les différents types d'évanouissement. Dans la suite, nous ne nous intéressons plus qu'au premier cas, évanouissement à court terme, avec une loi de Rayleigh.

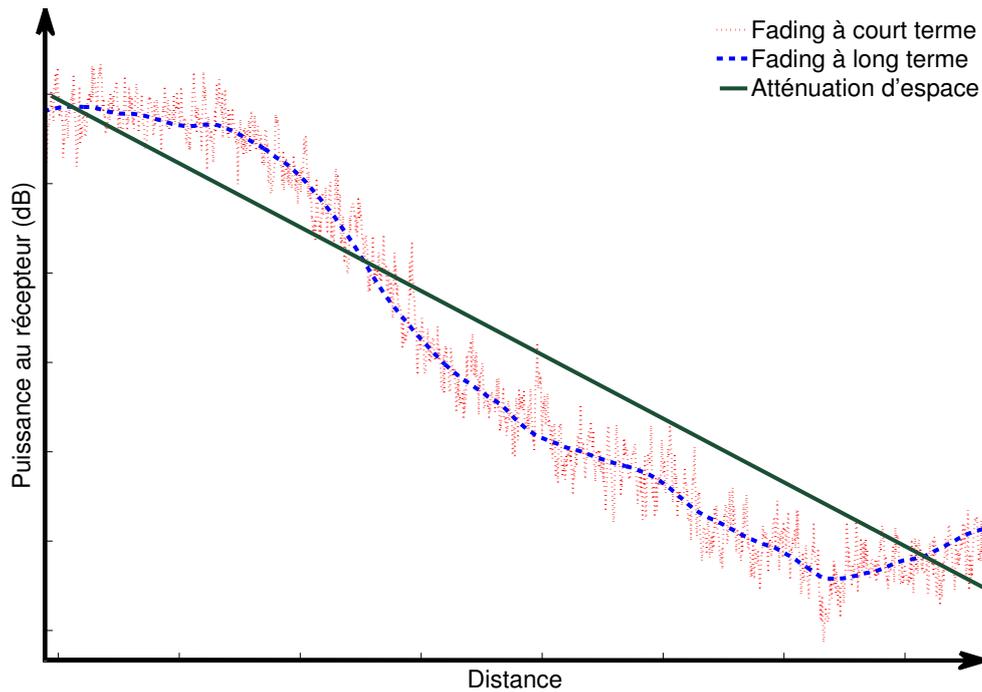


FIGURE 1.2: Puissance du signal reçu en fonction de la distance émetteur-récepteur

## 1.2 Modèle complexe équivalent du canal physique en bande de base

### 1.2.1 Signal de transmission

Nous décrivons maintenant la modélisation mathématique du canal, en le supposant dans un premier temps invariant au cours du temps<sup>1</sup>. En pratique, la transmission, des signaux numériques est réalisée en bande portée. La translation du spectre autour de la porteuse  $f_0$  conduit au signal haute fréquence  $s_{\text{HF}}(t)$ , avec la bande du système  $B_0$  relativement « étroite », soit  $\frac{B_0}{f_0} \ll 1$ . Le signal d'émission en haute fréquence  $s_{\text{HF}}(t)$  s'écrit :

$$s_{\text{HF}}(t) = s_i(t)\cos(2\pi f_0 t) + s_q(t)\cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}), \quad (1.1)$$

avec  $s_i(t)$  (voie en phase "I") et  $s_q(t)$  (voie en quadrature "Q") les messages numériques à transmettre en bande de base.  $s_i(t)$  et  $s_q(t)$  modulent respectivement en phase et en quadrature la porteuse  $\cos(2\pi f_0 t)$  à l'émission.  $s_{\text{HF}}(t)$  peut aussi s'écrire à partir de son enveloppe complexe  $s(t) = s_i(t) + j \cdot s_q(t)$  relative à  $f_0$  comme :

$$s_{\text{HF}}(t) = \Re\{s(t)e^{j2\pi f_0 t}\}. \quad (1.2)$$

Soit  $r_{\text{HF}}(t)$  le signal reçu "Haute Fréquence". Les composantes en quadrature relatives à  $f_0$  de  $r_{\text{HF}}(t)$  s'obtiennent par démodulation et filtrage passe-bas. La porteuse utilisée pour

1. Cette sous-section est largement inspirée par [15].

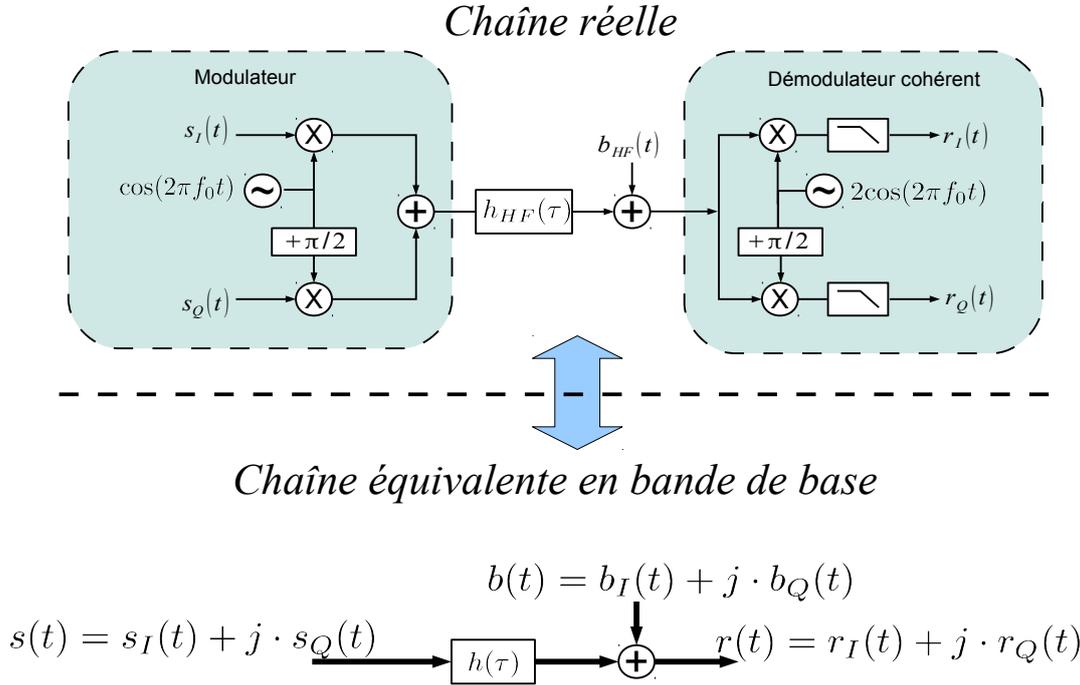


FIGURE 1.3: Chaîne de transmission équivalente en bande de base

la démodulation est la même que celle utilisée à la modulation multipliée par un facteur 2, soit  $2\cos(2\pi f_0 t)$ . Les composantes en quadrature s'écrivent alors :

$$r_I(t) = \mathcal{BF} \{ r_{\text{HF}}(t) \cdot 2\cos(2\pi f_0 t) \}, \quad (1.3)$$

$$r_Q(t) = \mathcal{BF} \left\{ r_{\text{HF}}(t) \cdot 2\cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \right\}, \quad (1.4)$$

où  $\mathcal{BF}\{\cdot\}$  est l'opération de translation en bande de base qui ne conserve que les composantes  $\ll f_0$ . L'enveloppe complexe du signal reçu peut alors s'écrire :

$$r(t) = r_I(t) + j \cdot r_Q(t) = \mathcal{BF} \left\{ r_{\text{HF}}(t) \cdot 2e^{-j2\pi f_0 t} \right\}. \quad (1.5)$$

Le signal reçu en bande portée  $r_{\text{HF}}(t)$  s'exprime comme le filtrage du signal émis par la réponse impulsionnelle du canal de propagation physique  $h_{\text{HF}}(\tau)$  et d'un bruit additif  $b_{\text{HF}}(t)$  :

$$r_{\text{HF}}(t) = (h_{\text{HF}} * s_{\text{HF}})(t) + b_{\text{HF}}(t). \quad (1.6)$$

Le bruit  $b_{\text{HF}}(t)$  est modélisé par un processus aléatoire gaussien centré, il est stationnaire, avec la densité spectrale de puissance (DSP) bilatérale  $\frac{N_0}{2}$  autour de  $f_0$ .

L'équivalent de  $h_{\text{HF}}(\tau)$  en bande de base  $h(\tau)$  est alors défini de façon unique de la manière suivante :

Soient  $H(f)$  et  $H_{\text{HF}}(f)$  respectivement la transformée de Fourier ( $\mathcal{TF}\{\cdot\}$ ) de la réponse impulsionnelle du canal en bande de base  $h(\tau)$  et de celle du canal en bande portée  $h_{\text{HF}}(\tau)$  :

$$\begin{aligned} H(f) &= \mathcal{TF}\{h(\tau)\}, \\ H_{\text{HF}}(f) &= \mathcal{TF}\{h_{\text{HF}}(\tau)\}, \end{aligned}$$

nous définissons  $H_{\text{HF}}^+(f)$  par :

$$H_{\text{HF}}^+(f) = \begin{cases} H_{\text{HF}}(f) & f \geq 0 \\ 0 & f < 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

La réponse en fréquence du filtre en bande de base  $H(f)$  se déduit de celle du filtre en bande portée  $H_{\text{HF}}(f)$  par une translation de  $-f_0$ , en ne considérant que la partie des fréquences positives du filtre, soit :

$$H(f) = H_{\text{HF}}^+(f + f_0). \quad (1.8)$$

Le signal reçu en bande de base  $r(t)$  s'exprime alors par le filtrage du signal émis en bande de base  $s(t)$  par la réponse impulsionnelle du canal en bande de base  $h(\tau)$  :

$$r(t) = (h * s)(t) + b(t), \quad (1.9)$$

où  $b(t) = \mathcal{BF}\{b_{\text{HF}}(t) \cdot 2e^{-j2\pi f_0 t}\}$  est l'enveloppe complexe du bruit réel physique à la bande portée  $b_{\text{HF}}(t)$ . La DSP bilatérale de  $b(t)$  est égale à  $2N_0$  et les deux composantes en quadrature  $b_1(t)$  et  $b_0(t)$  sont indépendantes, gaussiennes, centrées, avec chacune pour DSP bilatérale  $N_0$ .

Cette équation (1.9) donne ainsi une représentation équivalente en bande de base de la transmission en introduisant artificiellement une réponse impulsionnelle de canal complexe et un bruit complexe. La chaîne de communication numérique qui comporte un modulateur, un canal et un démodulateur peut donc être modélisée comme une source de signaux complexes en bande de base, filtrée par la réponse impulsionnelle complexe du canal (illustré sur la figure 1.3). Dans ce modèle équivalent en bande de base, la porteuse n'intervient plus. Le filtrage équivalent en bande de base permet donc de décrire directement la transformation subie par le spectre du signal en restant en bande de base.

### 1.2.2 Réponse impulsionnelle du canal

Comme mentionné précédemment, le signal reçu est composé de plusieurs versions atténuées et retardées du signal émis. Le signal reçu en bande portée s'écrit donc :

$$r_{\text{HF}}(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \rho_l s_{\text{HF}}(t - \tau_l) + b_{\text{HF}}(t), \quad (1.10)$$

où :

- $L_t$  est le nombre de trajets.
- $\tau_l, l = 1 \dots L_t$  sont les retards de propagation associés aux différents trajets.

- $\rho_l, l = 1 \dots L_t$  sont les atténuations de propagation. Ce sont des nombres réels positifs.

En injectant (1.2) dans (1.10), nous obtenons :

$$r_{\text{HF}}(t) = \Re \left\{ \left( \sum_{l=1}^{L_t} \rho_l e^{-j2\pi f_0 \tau_l} s(t - \tau_l) \right) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \right\} + b_{\text{HF}}(t). \quad (1.11)$$

Le canal équivalent en bande de base s'écrit donc, en accord avec l'équation (1.9) :

$$h(\tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l \delta(\tau - \tau_l), \quad (1.12)$$

avec le coefficient  $\alpha_l \stackrel{\text{def}}{=} \rho_l e^{j\theta_l}$  dénommé Amplitude Complexe (AC) du trajet  $l$ , avec un module  $\rho_l$  égal à l'atténuation physique du trajet et une phase  $\theta_l$  traduisant le déphasage de la porteuse dû au retard de propagation de ce trajet :

$$\theta_l = -2\pi f_0 \tau_l. \quad (1.13)$$

Il est important de noter que, dans la pratique, les phases et les retards des trajets sont traités indépendamment malgré la relation linéaire théorique qui les lie dans la modèle idéal. Ce fait est principalement dû au rapport très important entre la fréquence porteuse  $f_0$  et la bande du signal transmis  $B_0$ . En effet l'erreur d'estimation du retard  $\Delta\tau$ , liée à l'inverse de la bande du signal  $\frac{1}{B_0}$  (en pratique,  $\Delta\tau > 0.1 \cdot \frac{1}{B_0}$ ), entraînerait pour la phase déduite une erreur  $\Delta\theta = 2\pi f_0 \Delta\tau$ . Cette erreur sera beaucoup trop grande lorsque  $\frac{f_0}{B_0} \gg 1$  (e.g., pour un système avec une bande  $B_0 = 3\text{MHz}$  et la fréquence porteuse  $f_0 = 3\text{GHz}$ ,  $\Delta\theta > 200\pi$ !).

Le canal de propagation est alors représenté par un filtre à coefficients complexes et un bruit additif. Le filtre est décrit par les variables  $\{\rho_l, \theta_l, \tau_l\}, l = 1 \dots L_t$ . Le signal reçu en bande de base  $r(t)$  peut être réécrit comme :

$$r(t) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l s(t - \tau_l) + b(t). \quad (1.14)$$

### 1.3 Modèle paramétrique du canal en mobilité

Le modèle du canal en bande de base présenté dans la section précédente décrit le caractère statique du canal. Lorsque le terminal mobile se déplace, le modèle du canal devient un filtre évolutif  $h(t, \tau)$  avec les paramètres du canal physique qui varient en fonction du temps :  $\{\rho_l(t), \theta_l(t), \tau_l(t)\}$ . Par conséquent l'AC,  $\alpha_l$ , devient alors :

$$\alpha_l(t) = \rho_l(t) e^{j\theta_l(t)}, \quad (1.15)$$

et le modèle de canal s'écrit :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l(t)). \quad (1.16)$$

### 1.3.1 Modèle déterministe

Pour étudier la variation des paramètres en fonction du temps, le plus simple est de supposer un mouvement uniforme du terminal mobile, avec une vitesse constante  $v_m$  sur la durée du symbole, en associant un angle d'arrivée  $\varphi_l$  par rapport à la direction du déplacement pour chaque trajet. Ce modèle ne décrit pas vraiment la réalité d'une transmission en radio-mobile (le modèle aléatoire, détaillé à la section suivante, est beaucoup plus proche des phénomènes observés). Le modèle déterministe présente surtout l'avantage de donner les ordres de grandeur de variation des paramètres.

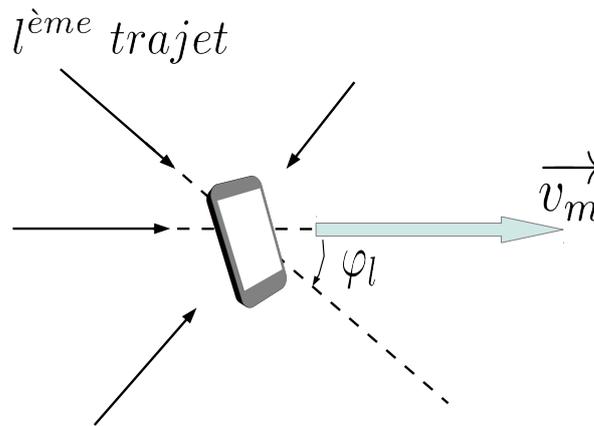


FIGURE 1.4: Trajets multiples vers le terminal mobile en mouvement

En raison du déplacement uniforme, le retard de propagation relatif au  $l^{\text{ème}}$  trajet varie linéairement en fonction du temps comme :

$$\tau_l(t) = \tau_l(0) + \frac{v_m \cos(\varphi_l)}{c} t, \quad (1.17)$$

avec  $c$  la célérité de l'onde radioélectrique. La variation linéaire du retard entraîne un déphasage linéaire de la phase d'après (1.13) :

$$\theta_l(t) = \theta_l(0) - 2\pi f_d \cos(\varphi_l) t, \quad (1.18)$$

avec  $f_d = \frac{v_m}{c} f_0$  la fréquence Doppler maximale.

Utiliser le modèle de déplacement uniforme du mobile comme modèle d'évolution permet de décrire les variations des paramètres de retard et de phase mais ne tient pas compte des variations de l'atténuation d'espace du trajet en champ lointain. Ces variations sont considérées comme négligeables tant que la durée d'étude du mouvement est courte, soit de l'ordre d'une durée symbole, dans ce cas, nous avons  $\rho_l(t) \approx \rho_l$ .

Étudions maintenant les ordres de grandeur des variations du retard  $\tau_l$  et de la phase  $\theta_l(t)$  :

**Retard :** les retards des trajets sont considérés comme fixes devant la durée symbole  $T$  en raison d'une vitesse de déplacement du mobile très faible par rapport à la célérité de l'onde radio-électrique. En effet,  $\frac{v_m \cos(\phi_l)}{c} \ll 1$ . De même, sur la durée symbole  $T$ , les phénomènes d'apparition et de disparition des trajets sont négligeables car ils sont liés à l'effet "shadowing" qui évolue assez lentement par rapport à  $T$ . Ainsi, le nombre de trajets et les retards sont considérés fixes.

**Phase :** les systèmes développés en télécommunications fonctionnent à des fréquences porteuses de plus en plus élevées. De nombreux systèmes de distribution radio large bande de porteuses de 2.3 à 3.5 GHz, se sont développés ces dernières années. De même, des systèmes radio de type LMDS (*Local Multipoint Distribution Systems* en anglais) fonctionnant à des fréquences porteuses supérieures à 10 GHz ont vu le jour. D'une manière générale, la multiplicité des services proposés et la rareté des ressources spectrales font que nous nous orientons vers des systèmes fonctionnant à des fréquences de plus en plus élevées ( $> 10$  GHz). Compte tenu de cette fréquence porteuse élevée, les décalages apportés sur la phase sont non négligeables. À titre d'exemple avec les ordres de grandeur du WiMAX Mobile [16] ( $f_0 = 3.5$  GHz, avec la bande de transmission de 11.2 MHz), pour une vitesse de mobile  $v_m = 300$  km/h, la fréquence Doppler est égale à  $f_d = 972.2$  Hz, ce qui entraîne une variation de la phase de  $36^\circ$  sur une durée symbole (OFDMA) de communication de  $102.9 \mu\text{s}$ .

Il est donc possible de conclure que, pour une émission de plusieurs centaines de symboles sur laquelle est réalisée l'estimation de canal, les retards des trajets pourront toujours être considérés comme fixes (vis-à-vis de la résolution temporelle), en raison d'une vitesse de déplacement du mobile très faible par rapport à la célérité de l'onde radio-électrique. En revanche, compte tenu de la fréquence porteuse élevée, un déplacement infime pourra entraîner des variations non négligeables de phase, et par conséquent des variations non négligeables de l'AC. De ce fait, pour l'estimation du canal, il faudra donc réaliser une première estimation des retards au début de la communication, mais il ne sera pas forcément nécessaire de prévoir une mise à jour de cette estimation. Par contre, un suivi des ACs du canal devra être mis en place. Le modèle dynamique de la réponse impulsionnelle du canal au cours du temps en bande de base devient ainsi :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l). \quad (1.19)$$

Dans ce dernier modèle, nous avons supprimé la dépendance au temps des  $\tau_l$ .

### 1.3.2 Modèle aléatoire

La modélisation la plus classique du canal est de considérer que sa réponse impulsionnelle est stationnaire au sens large (WSS : provient de *Wide Sens Stationary* en anglais) et que les diffuseurs sont non corrélés (US : provient de *Uncorellated Scatterers* en anglais). Ce modèle WSSUS a été introduit par P.A. Bello en 1963 dans l'article [17]. Il caractérise

bien les variations à court terme pour des déplacements de l'ordre de quelques dizaines de longueurs d'onde.

Ce modèle de Bello s'appuie sur quatre fonctions d'autocorrélation à deux paramètres. Ces fonctions sont liées deux à deux par des transformées de Fourier. Nous décrivons maintenant de manière plus précise la modélisation aléatoire appliquée au canal multi-trajets considéré.

### 1.3.2.1 Loi de distribution des amplitudes complexes

Afin d'obtenir la loi des coefficients  $\alpha_l(t)$  associée au trajet  $l$ , il est nécessaire d'introduire la notion de *cluster* (groupe de micro-trajets) associé à un retard  $\tau_l$ . En effet, la zone de réception du terminal mobile comprend souvent des diffuseurs proches transformant un trajet donné en un groupe de micro-trajets ayant des différences de marche très faibles et donc quasiment le même retard  $\tau_l$  mais avec des différences de phases quelconques. Ainsi, le coefficient de chaque trajet  $l$  correspond à la superposition de tous les coefficients des micro-trajets du *cluster*  $l$  [18] :

$$\alpha_l(t) = \rho_l(t) \cdot e^{j\theta_l(t)} = \sum_n \rho_{l,n} \cdot e^{j\theta_{l,n}(t)}, \quad (1.20)$$

où  $\rho_{l,n}$  et  $\theta_{l,n}$  sont respectivement le module et la phase du  $n^{\text{ème}}$  micro-trajet du *cluster*  $l$  ( $\alpha_l(t)$ ).

Lorsqu'un trajet  $l$  correspond à une multitude de micro-trajets incohérents, la densité de probabilité du coefficient correspondant  $\alpha_l(t) = \rho_l(t) \cdot e^{j\theta_l(t)}$  est gaussienne complexe en application du théorème de la limite centrale. Nous en déduisons [14] que :

- les parties réelles et imaginaires de  $\alpha_l(t)$  sont des variables gaussiennes non corrélées de variance  $\sigma_{\alpha_l}^2$ ,
- le module (enveloppe)  $\rho_l$  des coefficients suit alors une loi de Rayleigh donnée par :

$$p(\rho_l) = \begin{cases} \frac{\rho_l^2}{\sigma_{\alpha_l}^2} e^{-\frac{\rho_l^2}{2\sigma_{\alpha_l}^2}} & \text{pour } \rho_l \geq 0, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $2\sigma_{\alpha_l}^2$  est le gain en puissance associé au trajet  $l$ .

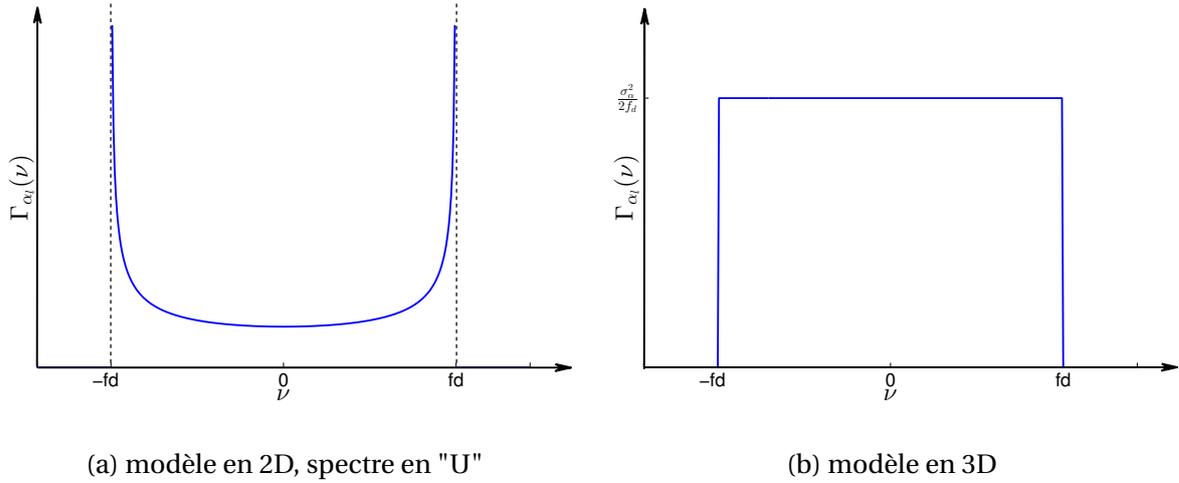
- la phase  $\theta_l(t)$  des coefficients est uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$ .

Lorsque la liaison directe est disponible, l'enveloppe du signal reçu en réponse à une porteuse non modulée suit une loi de Rice au lieu d'une loi de Rayleigh. Cette situation correspond généralement au milieu rural, alors que l'absence de trajet direct est la situation la plus courante dans les milieux urbains.

### 1.3.2.2 Spectre Doppler associé à chaque trajet

Le caractère dynamique de chaque trajet est mesuré par sa fonction d'autocorrélation temporelle :

$$R_{\alpha_l}(\Delta t) = E \{ \alpha_l(t) \alpha_l^*(t - \Delta t) \}. \quad (1.21)$$

FIGURE 1.5: Spectre Doppler de  $\alpha$  pour modèle isotrope

Un spectre Doppler est associé à chaque trajet, et est lié à la fonction d'autocorrélation via la transformée de Fourier<sup>2</sup> :

$$\Gamma_{\alpha_l}(\nu) = \mathcal{F} \mathcal{F}_{\Delta t} \{R_{\alpha_l}(\Delta t)\}.$$

Déterminons maintenant la fonction d'autocorrélation pour le trajet  $l$  pour le cas particulier de l'environnement isotrope. Dans un environnement isotrope<sup>3</sup>, les micro-trajets proviennent de toutes les directions avec une équi-probabilité : l'angle  $\varphi$  a une distribution uniforme sur  $[0, 2\pi]$ , avec  $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ . Il s'en suit, après calcul, que [19] :

$$R_{\alpha_l}(\Delta t) = \sigma_{\alpha_l}^2 J_0(2\pi f_d \Delta t), \quad (1.22)$$

où  $J_0(\cdot)$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0. Le spectre Doppler de  $\alpha$  exprimé en bande de base s'écrit alors :

$$\Gamma_{\alpha_l}(\nu) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha_l}^2}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{f_d}\right)^2}} & \text{pour } |\nu| \leq f_d, \\ 0 & \text{pour } |\nu| > f_d. \end{cases} \quad (1.23)$$

Ce spectre Doppler est appelé spectre de "Jakes", ou spectre de "Clarke-Jakes", ou encore spectre en "U", en raison de sa forme donnée par la figure 1.5a. Le canal introduit donc une modulation "parasite" en amplitude et en phase. La transmission d'une fréquence  $f_0$  à travers un canal soumis au fading de Rayleigh (mono-trajet ou multi-trajets) dans un environnement isotrope correspond en réception à un élargissement en fréquence de  $\pm f_d$  sous forme d'une DSP donnée par (1.23).

2. Notons qu'ici nous utilisons  $\nu$ , mais pas  $f$  pour désigner le domaine dual de  $\Delta t$ , simplement pour distinguer le duo  $f \rightleftharpoons \tau$ . Cette notation est utilisée seulement dans ce chapitre, nous utiliserons  $f$  pour désigner le domaine fréquentiel par défaut dans les chapitres suivants.

3. un milieu est dit isotrope si ses caractéristiques physiques sont invariantes en fonction de la direction

Le raisonnement ci-dessus est fait dans un contexte de mouvement en deux dimensions (2-D). Le spectre de Jakes a partir d'un modèle de diffusion en deux dimensions est utile pour calculer les statistiques du signal reçu dans un scénario d'échelle large, *e.g.* radio-mobile dans un milieu rural. Cependant pour la réception des communications dans un bâtiment (scénario "Indoor"), un modèle de diffusion en trois dimensions (3-D) peut être plus approprié [20]. Le spectre Doppler, dans un champ isotrope dispersé en 3-D, avec un récepteur isotrope, est uniforme sur le support des fréquences Doppler maximales (positive et négative), centrés sur la fréquence porteuse (voir la figure 1.5b). Le spectre Doppler exprimé en bande de base sur chaque trajet s'écrit alors :

$$\Gamma_{\alpha_l(3D)}(\nu) = \begin{cases} \frac{\sigma_{\alpha_l}^2}{2f_d} & \text{pour } |\nu| \leq f_d, \\ 0 & \text{pour } |\nu| > f_d. \end{cases} \quad (1.24)$$

### 1.3.3 La variation de l'AC et la fréquence Doppler normalisée $f_d T$

Comme mentionné précédemment, la fréquence Doppler  $f_d$  est une fonction linéaire de la vitesse du récepteur. Nous allons utiliser la notion de la fréquence Doppler normalisée  $f_d T$  pour indiquer la mobilité du récepteur dans les chapitres suivants de ce mémoire. La valeur de  $f_d T$  dépend de  $f_d$  (qui dépend donc de la fréquence porteuse et la vitesse du récepteur), et aussi de la durée symbole  $T$ . Par exemple, pour un système mono-porteuse fonctionnant sur la radio fréquence du GSM ( $f_0 = 900$  MHz) avec une bande de  $B_0 = 0.2$  MHz, la durée symbole est supposé de  $\frac{1}{B_0} = 5\mu\text{s}$ , une faible vitesse de 10 km/h correspond à  $f_d T = 4.17 \cdot 10^{-5}$ , et une forte vitesse de 500 km/h correspond à  $f_d T = 2.08 \cdot 10^{-3}$ . Néanmoins, la nouvelle génération de télécommunication utilise des fréquences porteuses de plus en plus élevées, de plus, dans des systèmes multi-porteuse, comme des systèmes à modulation OFDM, la durée symbole est beaucoup plus importante que l'inverse de la bande du système pour éviter l'interférence entre symboles (IES), *e.g.*, la bande du WiMAX mobile est de 1.25 MHz (avec 128 sous-porteuses), mais avec la durée d'un symbole OFDM de  $102.9\mu\text{s}$ . Dans ce cas, avec une fréquence porteuse de  $f_0 = 3.5$  GHz, nous avons pour une faible vitesse de 10 km/h,  $f_d T = 3.33 \cdot 10^{-3}$ , et une forte vitesse de 120 km/h correspond à  $f_d T = 0.04$ ! De ce fait, l'étude sur  $f_d T$  entre la gamme  $10^{-3}$  à 0.1 s'avère une tâche de plus en plus intéressante aujourd'hui avec des communications à large bande.

L'ordre de grandeur de  $f_d T$  donne une référence sur la rapidité de variation des ACs du canal. La figure 1.6 montre deux réalisations de la partie réelle de l'AC sur un dizaine de symboles OFDM (chaque symbole comporte 144 échantillons) transmis consécutif pour deux récepteurs, à faible vitesse ( $f_d T = 10^{-3}$ ) et à vitesse élevée ( $f_d T = 0.1$ ). Nous observons que le canal est quasi-invariant dans une durée symbole pour une faible vitesse, l'amplitude de l'AC montre une forte tendance linéaire pendant les symboles consécutifs. En revanche pour une vitesse élevée, le canal varie à l'intérieur d'un symbole OFDM. Dans le cadre de cette thèse, nous nous concentrons sur une gamme de vitesse modérée, *i.e.*  $f_d T \leq 10^{-2}$ .

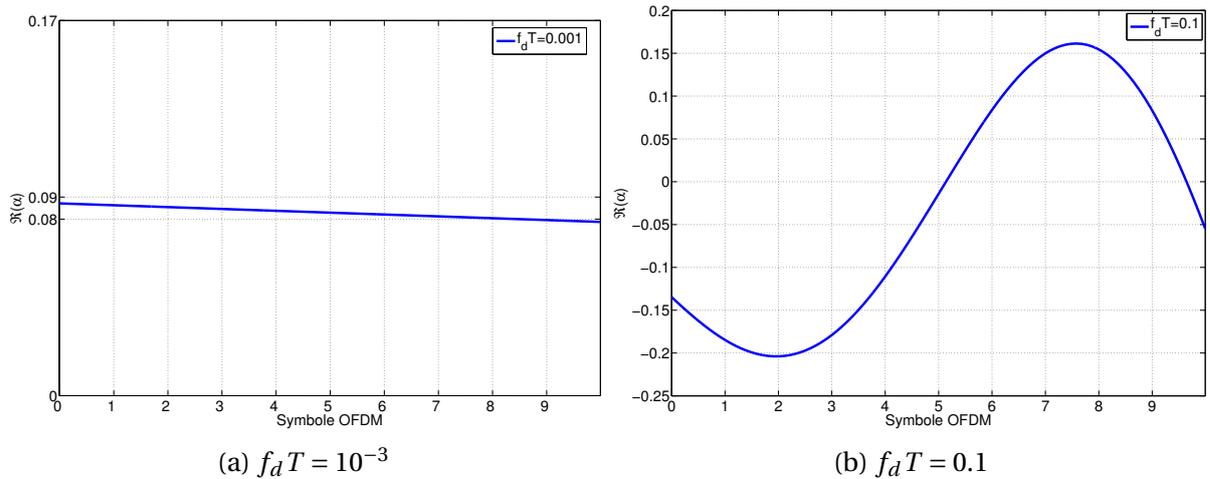


FIGURE 1.6: La partie réelle des ACs durant 10 symboles OFDM consécutifs

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le modèle mathématique du canal de propagation. La réponse impulsionnelle du canal est représentée en bande de base par  $h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l)$ , où les  $\alpha_l(t)$  sont des ACs des trajets. En cas de mobilité, les retards peuvent être considérés comme constants sur la durée d'une transmission, ce qui n'est pas le cas des ACs. Par conséquent, nous supposons qu'une procédure d'acquisition des retards est mise en place, et nous nous intéresserons uniquement à l'estimation et à la poursuite des ACs au moyen d'algorithmes adaptatifs. Les ACs des trajets suivent une loi de Rayleigh pour un scénario en milieu urbain où il n'y a pas de liaison directe (NLOS), ou une loi de Rice où la liaison directe (LOS) est disponible. Leur spectre est décrit par le modèle Clarke-Jakes, qui a une allure en "U" pour le modèle isotrope en deux dimensions, ou une distribution uniforme continue pour le modèle isotrope en 3-D. Dans la suite de ce mémoire, nous allons considérer le canal de type Rayleigh associé à un spectre de Jakes en deux dimensions (les résultats pour le spectre en 3-D seront également donnés après chaque analyse).

# Boucle de poursuite d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal mono-trajet en modulation mono-porteuse

## 2.1 Introduction

Après avoir défini le modèle de canal au chapitre précédent, nous restreignons d'abord l'étude aux algorithmes d'estimation de l'amplitude complexe d'un canal mono-trajet (ou *flat-fading* en anglais), en supposant son retard  $\tau_l$  connu. Nous considérons ainsi dans ce chapitre un canal mono-trajet ( $L_l=1$ ), soit une réponse impulsionnelle  $h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_l} \alpha_l(t) \cdot \delta(\tau - \tau_l) = \alpha_1(t) \cdot \delta(\tau - \tau_1)$ . Pour simplifier les notations, nous supprimons l'indice du trajet sur l'AC et fixons  $\tau_1$  à 0, soit :

$$h(t, \tau) = \alpha(t)\delta(\tau). \quad (2.1)$$

Un grand nombre d'algorithmes d'estimation du canal en mode de poursuite utilise la technique du filtrage de Kalman. Le filtrage de Kalman est optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne minimum (MMSE pour *minimum mean square error* en anglais), sous certaines hypothèses dont nous allons discuter. Cependant, en plus de présenter une certaine complexité pour la mise à jour des coefficients du filtre, le filtrage de Kalman de part sa structure même possède une contrainte importante. Le filtre de Kalman requiert en effet l'utilisation d'un modèle d'état récursif linéaire pour les paramètres à estimer, l'amplitude complexe (AC) pour notre cas particulier. Or nous avons vu au chapitre précédent que les amplitudes complexes d'un canal suivent un modèle de Rayleigh avec un spectre Doppler de Jakes (que l'on appelle aussi modèle de Clarke-Jakes). Le modèle exact de Clarke n'admet pas une telle représentation linéaire, ce qui va nécessiter l'utilisation d'un modèle approché. Notons que le modèle approché le plus répandu dans la littérature est basé sur un modèle auto-régressif (AR), et plus l'ordre du modèle AR est élevé, meilleure est l'approximation du modèle de Clarke. Ainsi, en dépit de la complexité du filtre de Kalman, les performances des algorithmes basés sur le filtrage de Kalman peuvent s'éloigner des

performances optimales si les paramètres du modèle d'approximation ne sont pas correctement réglés. Nous allons maintenant détailler ce point fondamental.

Comme nous l'avons déjà mentionné, le modèle le plus répandu est le modèle AR, et la plupart des algorithmes utilisent l'ordre 1 (AR1) [21], associé avec un critère de "correlation matching" (CM) pour fixer le coefficient du modèle AR1 (qui est égal au coefficient de Bessel,  $J_0(2\pi f_d T)$ , pour une fréquence Doppler normalisée fixée à  $f_d T$ , où  $T$  est la durée d'un symbole). Le filtre de Kalman qui résulte de ce choix, est désigné par AR1<sub>CM</sub>-KF dans cette thèse. Il a été présenté dans plusieurs articles concernant divers systèmes tels que : des systèmes MIMO (*Multiple-Input-Multiple-Output* en anglais) [22, 23], des systèmes OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing* en anglais) [2, 3, 24, 25]. L'estimateur AR1<sub>CM</sub>-KF s'avère très performant pour le cas de très grande mobilité, avec des performances d'estimation quasi-optimales par rapport à la borne inférieure optimale de Cramér-Rao, comme on le voit, par exemple, dans [2–4] (dans ces articles, l'estimateur AR1<sub>CM</sub>-KF est utilisé pour suivre des coefficients du modèle d'expansion de base (BEM, pour *Basis Expansion Model* en anglais) du canal à haute vitesse). Par contre pour des vitesses plus modérées où la variation de canal sur la durée d'un symbole peut être négligée (soit  $f_d T \leq 10^{-2}$ , comme dans [7, 22–28]), l'estimateur AR1<sub>CM</sub>-KF habituellement exploité dans la littérature est loin d'être efficace [26] (les performances sont assez éloignées de la borne de Cramér-Rao). Ces mauvaises performances ont été récemment expliquées analytiquement dans [7]. La raison principale est que le critère CM devient inapproprié pour régler le coefficient du modèle AR1 dans le scénario à évanouissement lent ou modéré (puisque le choix de  $J_0(2\pi f_d T) \approx 1 - \frac{1}{4}(2\pi f_d T)^2$  pour le coefficient AR1 est trop proche de la valeur 1 pour assurer un bon compromis entre la capacité de suivi et de réduction du bruit). Un meilleur réglage du coefficient AR1 peut être obtenu en se concentrant sur la minimisation de la variance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman comme proposé dans [26], c'est-à-dire en utilisant un critère de variance asymptotique minimum sans imposer la contrainte de CM. L'estimateur qui en résulte est désigné par AR1<sub>MAV</sub>-KF dans cette thèse. Notons que l'article [7] établit une formule analytique approchée de l'erreur quadratique moyenne (EQM) de l'AR1<sub>MAV</sub>-KF pour un scénario où la fréquence Doppler et le rapport signal sur bruit (RSB) sont données.

Récemment, [27] a montré analytiquement que les performances en terme d'EQM du filtre de Kalman peuvent encore être améliorées en passant du modèle AR1 à un modèle de marche aléatoire intégré (appelé aussi modèle brownien intégré) pour l'approximation, désigné ici par RW (provient de *Random-Walk* en anglais). Un tel modèle est un modèle d'approximation d'ordre 2 qui prend mieux en compte le fait que, à faible  $f_d T$ , l'amplitude complexe du trajet continue dans une direction donnée au cours de plusieurs symboles à faible  $f_d T$ . L'estimateur de Kalman basé sur ce modèle RW d'ordre 2 est désigné par RW2-KF dans cette thèse. Nous pouvons citer aussi les travaux de Vilà-Valls qui portaient également sur la poursuite de phase (avec en plus le CFO (*carrier frequency offset* en anglais)) avec un filtre de Kalman étendu pour des modèles de variation de phase RW1 et RW2 [29].

Jusqu'ici, toute notre discussion a porté sur des algorithmes qui sont basés sur le filtre de Kalman. L'objectif de notre travail est maintenant de développer des algorithmes adaptatifs moins complexes. Pour cela, nous partirons du filtre de Kalman avec un modèle d'approximation RW, mais que nous considérerons en régime asymptotique (*état stable* ou

*steady state* en anglais), c'est-à-dire que ses coefficients ne varient plus dans le temps et ont atteint leur régime constant. Cette approche nous permettra d'obtenir un filtre linéaire récursif à coefficients constants. En général, ce type d'algorithme adaptatif à coefficient constant converge plus lentement que le filtre de Kalman, mais s'il est bien réglé, il atteint la même performance asymptotique. L'algorithme adaptatif à coefficient constant le plus célèbre est l'algorithme LMS (provient de *Least-Mean-Square* en anglais). Nous devons garder à l'esprit qu'il peut être vu comme une version de filtre de Kalman en régime asymptotique basée sur un modèle d'approximation RW d'ordre 1 [30]. L'algorithme LMS d'ordre 2 a été proposé par [9] dans un contexte d'estimation de canal. Il a été dérivé à partir de la version du filtre de Kalman en régime asymptotique basé sur un modèle RW2. Cependant, l'auteur n'a pas précisé dans son article comment régler les deux coefficients constants du modèle de manière simple en fonction de l'état du canal (Doppler, niveau de bruit). L'article [31] a proposé quand à lui une méthode pour régler ces coefficients. Par ailleurs [28] et [32] ont présenté l'algorithme de poursuite de l'AC des trajets et son optimisation du point de vue d'une PLL (provient de *Phase-Locked Loop* en anglais) d'ordre 2 basée sur un filtre de boucle "proportionnel-intégral (PI)". Les PLLs ont été largement utilisées dans des récepteurs pour la synchronisation, en particulier, nous pouvons citer les travaux de Eynard et Laot sur des algorithmes adaptatifs à base de PLLs dans les communications ASM (Acoustiques Sous-Marines)[34][35][36].

En effet, comme l'ont déjà montré Driessen [10] et Christiansen [11] dans le cas du problème de l'estimation de phase, une PLL d'ordre 2 à filtre PI a la même structure que le KF avec un modèle RW d'ordre 2, dont l'expression du gain est donnée dans [37]. Les algorithmes de [28, 32] sont ici appelés boucle de poursuite de l'amplitude complexe (noté par RW2-CATL dans cette thèse, provenant de *second-order-integrated-random-walk-model-based Complex Amplitude Tracking Loop* en anglais).

Dans ce chapitre nous allons considérer et analyser un estimateur de canal basé sur une boucle de poursuite de l'amplitude complexe d'ordre 3 (RW3-CATL). Cette étude généralise les travaux cités précédemment menés à l'ordre 2, qui ont permis une bonne amélioration des performances par rapport aux algorithmes d'ordre 1, mais sans toutefois atteindre les bornes minimales. L'objectif de ce chapitre est ainsi de répondre aux questions suivantes : pour quelle raison un estimateur de type PLL d'ordre 3 fonctionne de manière identique à un filtre de Kalman d'ordre 3 en mode asymptotique? Quelle est la relation entre les deux? Dans quelle mesure peut-il améliorer, en termes d'EQM asymptotique, les performances d'estimation des filtres de Kalman basés sur des modèles d'ordre 1 ou d'ordre 2 (e.g.  $AR1_{CM}$ -KF,  $AR1_{MAV}$ -KF, ou RW2-KF)? Comment optimiser correctement et de manière simple les coefficients d'une telle CATL d'ordre 3, en supposant un canal de Rayleigh-Jakes et un scénario où les valeurs de  $f_d T$  et de RSB sont connues à la réception? Quelle est alors l'expression analytique de l'EQM d'un tel estimateur de canal? Quelle est la robustesse de cette CATL à une mauvaise connaissance de  $f_d T$  ou du RSB?

## 2.2 Boucle de poursuite de l'amplitude complexe

Nous considérons l'estimation d'un canal de Rayleigh plat (ou mono-trajet) variant lentement dans le temps (2.1). Nous considérons le modèle discret équivalent de la transmission<sup>1</sup>, avec une modulation numérique mono-porteuse :

$$r_{(n)} = \alpha_{(n)} \cdot x_{(n)} + v_{(n)}, \quad (2.2)$$

où  $n$  est l'indice du temps discret;  $\alpha_{(n)} = \alpha(nT)$  est la version échantillonnée à  $T$  de l'AC du canal (2.1);  $x_{(n)} = a_{(n)} + jb_{(n)}$  (avec  $a_{(n)}, b_{(n)} \in \mathbb{R}$ ) est le symbole transmis modulé en phase ( $M$ -PSK) ou en quadrature ( $M$ -QAM). La séquence de symbole transmise est supposée centrée et stationnaire avec une variance normalisée :  $E\{|x_{(n)}|^2\} = \sigma_x^2 = 1$ ; le bruit du canal  $v_{(n)}$  est de type bruit blanc Gaussien additif complexe circulaire, il est centré avec une variance  $\sigma_v^2$ ; l'AC du canal  $\alpha_{(n)}$  est Gaussienne complexe circulaire, elle est centrée avec une variance  $\sigma_\alpha^2$ . Notons que lorsqu'on applique ce modèle sur un système plus avancé, comme par exemple un système avec modulation OFDM, où  $\alpha$  représenterait alors le gain du canal à estimer sur une sous-porteuse [24],  $x_{(n)}$  pourrait être un symbole connu (ou bien un pilote) dans une perspective d'estimation de canal (en mode "Data-Aided").

La fréquence Doppler maximale normalisée du canal est  $f_d T$ . Le canal est supposé avoir un spectre borné de  $f_d T$ , par exemple le spectre de Jakes (1.23) ou le spectre Doppler en 3-D (1.24). L'autocorrelation de l'AC stationnaire  $\alpha$  est donc définie d'après (1.22), pour le retard  $p$  comme :

$$R_\alpha[p] = E\{\alpha_{(n)} \cdot \alpha_{(n-p)}^*\} = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_d T \cdot p). \quad (2.3)$$

Dans ce contexte, nous abordons maintenant l'estimation "en ligne" de  $\alpha_{(n)}$ . La performance de l'estimateur  $\hat{\alpha}_{(n)}$  sera analysée et évaluée par l'erreur quadratique moyenne (EQM) de l'estimation  $\epsilon_{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{(n)} - \hat{\alpha}_{(n)}$ , qui est définie par :

$$\sigma_\epsilon^2 \stackrel{\text{def}}{=} E\{|\epsilon_{(n)}|^2\}. \quad (2.4)$$

### 2.2.1 Du filtre de Kalman en régime asymptotique à la CATL

#### 2.2.1.1 Modèle marche aléatoire intégré d'ordre 3 (RW3) et RW3-KF

De manière similaire à la méthode présentée dans [9], dans le contexte à évanouissement lent ou modéré, nous décrivons dans un premier temps le filtre de Kalman en régime asymptotique (c'est-à-dire lorsque l'EQM de l'estimateur converge asymptotiquement) [38], mais basé ici sur un modèle RW3, soit le RW3-KF. Pour construire un tel filtre de Kalman, on suppose que la variation des AC des trajets  $\alpha_{(n)}$  est approché par  $\tilde{\alpha}_{(n)}$  qui

1. Notons que le modèle utilisé dans ce chapitre est certes simpliste, mais il nous permettra d'une part d'avoir une première analyse simple, et d'autre part il pourra aussi être utile pour des systèmes plus avancés, par exemple pour décrire l'observation et l'estimation des AC d'un canal sélectif en fréquence à la position des sous-porteuses pilotes d'un système OFDM. Un modèle plus complet sera considéré à partir du chapitre 4.

évolue selon un modèle RW3. Le modèle RW3 peut être formulé par les équations de mises à jour à temps discret :

$$\tilde{\alpha}_{(n)} = \tilde{\alpha}_{(n-1)} + \delta_{(n-1)} + \frac{1}{2}\xi_{(n-1)}, \quad (2.5)$$

$$\delta_{(n)} = \delta_{(n-1)} + \xi_{(n-1)}, \quad (2.6)$$

$$\xi_{(n)} = \xi_{(n-1)} + \mathbf{u}_{(n)}, \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{u}_{(n)}$  est un bruit blanc Gaussien additif complexe circulaire, appelé le bruit d'état du modèle. C'est un bruit centré avec une variance  $\sigma_u^2$ . L'équation (2.5) peut être vue comme l'approximation discrète de l'expansion en série de Taylor d'un signal continu. Dans un tel modèle d'approximation, le processus approché de  $\alpha_{(n)}$ , désigné par  $\tilde{\alpha}_{(n)}$ , est mis à jour à chaque période symbole d'un incrément de  $\delta_{(n-1)} + \frac{1}{2}\xi_{(n-1)}$  avec  $\delta_{(n)}$  et  $\xi_{(n)}$  modélisant de manière approchée respectivement la dérivée d'ordre 1 et d'ordre 2 du signal continue.

Nous allons dans un premier temps diviser le signal reçu par le symbole transmis, ce qui donne la nouvelle équation d'observation :

$$y_{(n)} = \alpha_{(n)} + w_{(n)}, \quad (2.8)$$

avec  $y_{(n)} = \frac{r_{(n)}}{x_{(n)}}$  et  $w_{(n)} = \frac{v_{(n)}}{x_{(n)}}$ . Notons que  $w_{(n)}$  reste un bruit blanc additif complexe circulaire, centré mais avec la variance  $\sigma_w^2 = K_{\text{mod}} \cdot \sigma_v^2$  où  $K_{\text{mod}} = E \left\{ \left| \frac{1}{x_{(n)}} \right|^2 \right\}$  est un facteur constant, sa valeur est connue pour une modulation donnée. Pour le cas particulier d'une modulation à énergie constante, par exemple pour  $M$ -PSK, nous avons  $\sigma_w^2 = \sigma_v^2$  et  $K_{\text{mod}} = 1$ .

Ensuite, en réécrivant (2.8) et (2.5)~(2.7) sous forme matricielle, nous obtenons les équations d'espace-état pour concevoir le RW3-KF :

$$y_{(n)} = \mathbf{S}\mathbf{a}_{(n)} + w_{(n)}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{M}\mathbf{a}_{(n-1)} + \mathbf{u}_{(n)}, \quad (2.10)$$

avec :

$$\text{le vecteur de sélection : } \mathbf{S} = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$\text{le vecteur d'état : } \mathbf{a}_{(n)} = [\tilde{\alpha}_{(n)} \quad \delta_{(n)} \quad \xi_{(n)}]^T, \text{ ( on a donc } \tilde{\alpha}_{(n)} = \mathbf{S}\mathbf{a}_{(n)})$$

$$\text{le vecteur du bruit d'état : } \mathbf{u}_{(n)} = [0 \quad 0 \quad \mathbf{u}_{(n)}]^T,$$

$$\text{et la matrice d'évolution : } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les équations du RW3-KF sont alors données par [39][38] :

#### Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(n-1|n-1)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}, \quad (2.12)$$

**Équations de mises à jour**

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)} \mathbf{S}^T}{\mathbf{S} \mathbf{P}_{(n|n-1)} \mathbf{S}^T + \sigma_w^2}, \quad (2.13)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)} v_{\epsilon(n)}, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{(n)} \mathbf{S}) \mathbf{P}_{(n|n-1)}, \quad (2.15)$$

avec :

$$\text{le vecteur de prédiction : } \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{\alpha}_{(n|n-1)} \quad \hat{\delta}_{(n|n-1)} \quad \hat{\xi}_{(n|n-1)}]^T,$$

$$\text{le vecteur d'estimation : } \hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{\alpha}_{(n|n)} \quad \hat{\delta}_{(n|n)} \quad \hat{\xi}_{(n|n)}]^T,$$

$$\text{la matrice de covariance du bruit d'état : } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}_{(n)}$  est le vecteur de gain de Kalman,  $\mathbf{P}_{(n|n-1)}$ ,  $\mathbf{P}_{(n|n)}$  sont respectivement les matrices de covariances (toutes de taille  $3 \times 3$ ) de l'erreur de prédiction et de l'erreur d'estimation. Le signal d'erreur dans (2.14) est défini par :

$$v_{\epsilon(n)} = y(n) - \mathbf{S} \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)}. \quad (2.16)$$

Notons que le calcul de  $v_{\epsilon(n)}$  nécessite la connaissance de  $x_{(n)}$  puisque  $y_{(n)}$  est la version démodulée du signal reçu  $r_{(n)}$ . Deux scénarios différents peuvent alors être envisagés : soit traiter les  $x_{(n)}$  comme des symboles pilotes (*i.e.* connu du récepteur), ou alors utiliser les décisions à la place. Dans ce dernier cas,  $x_{(n)}$  est remplacé par la décision *a priori*  $\hat{x}_{(n|n-1)}$  pour calculer  $y_{(n)} = \frac{r_{(n)}}{\hat{x}_{(n|n-1)}}$ , où  $\hat{x}_{(n|n-1)}$  est déterminé à partir de l'estimation précédente de l'AC. La valeur de  $\hat{x}_{(n|n-1)}$  dépend de la modulation appliquée, par exemple, pour une modulation en QPSK,  $\hat{x}_{(n|n-1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sgn}\{\Re\{\hat{\alpha}_{(n|n-1)}^* \cdot r_{(n)}\}\} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sgn}\{\Im\{\hat{\alpha}_{(n|n-1)}^* \cdot r_{(n)}\}\}$ . Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur la performance de l'estimateur de canal<sup>2</sup>, de ce fait, l'analyse théorique est fournie en supposant que les symboles sont connus (scénario avec pilotes) ou parfaitement décidés, et l'effet de l'erreur de décision (dans le scénario avec décision) sera observé dans la section simulation.

**2.2.1.2 Équations dans le domaine temporel du RW3-KF en régime asymptotique**

Puisque le modèle linéaire (défini par (2.9) et (2.10)) est *observable* et *contrôlable* [40], un régime asymptotique peut être rapidement atteint [38]. Autrement dit,  $\mathbf{K}_{(n)}$  converge vers un vecteur constant lorsque  $n$  est assez grand, *i.e.* :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T. \quad (2.17)$$

---

2. Notons que dans la pratique, cet estimateur de canal peut facilement être couplé avec un détecteur efficace afin d'effectuer une estimation de canal et une décision de manière conjointe, par exemple via la méthode de l'algorithme Espérance-Maximisation (EM) [25]. Dans un autre contexte déjà mentionné, il peut simplement être utilisé pour suivre les gains du canal à des fréquences pilotes dans un système OFDM comme dans l'article [24].

Nous obtenons alors les équations de mises à jour du RW3-KF en régime asymptotique :

$$\hat{\alpha}_{(n|n)} = \hat{\alpha}_{(n-1|n-1)} + \hat{\delta}_{(n-1|n-1)} + \frac{1}{2}\hat{\xi}_{(n-1|n-1)} + k_1 v_{\epsilon(n)}, \quad (2.18)$$

$$\hat{\delta}_{(n|n)} = \hat{\delta}_{(n-1|n-1)} + \hat{\xi}_{(n-1|n-1)} + k_2 v_{\epsilon(n)} \quad (2.19)$$

$$\hat{\xi}_{(n|n)} = \hat{\xi}_{(n-1|n-1)} + k_3 v_{\epsilon(n)}, \quad (2.20)$$

avec  $v_{\epsilon(n)}$  défini par (2.16).

### 2.2.1.3 RW3-KF en tant que RW3-CATL

En observant les équations du RW3-KF en régime asymptotique (2.18) ~ (2.20), nous constatons que  $k_2$  et  $k_3$  sont intégrés dans les termes de dérivation de l'AC dans (2.18), ce qui rend difficile de contrôler directement l'estimateur par réglage des gains de Kalman. Il est cependant intéressant de noter que si l'on étudie ces équations dans le domaine en  $Z$ , les gains peuvent être séparés des variables, et cela nous permet d'analyser l'estimateur en tant que boucle de poursuite sous forme de PLL avec un filtre PII (ou filtre proportionnel-double-intégral). Les expressions de (2.18) (2.19) (2.20) en  $Z$  s'écrivent respectivement

$$\hat{\alpha}(z)(1 - z^{-1}) = \hat{\delta}(z)z^{-1} + \frac{1}{2}\hat{\xi}(z)z^{-1} + k_1 v_{\epsilon}(z), \quad (2.21)$$

$$\hat{\delta}(z)(1 - z^{-1}) = \hat{\xi}(z)z^{-1} + k_2 v_{\epsilon}(z), \quad (2.22)$$

$$\hat{\xi}(z)(1 - z^{-1}) = k_3 v_{\epsilon}(z). \quad (2.23)$$

En remplaçant (2.22) et (2.23) dans (2.21), nous obtenons

$$\hat{\alpha}(z)(1 - z^{-1}) = \left[ k_1 + \frac{(k_2 + \frac{1}{2}k_3)z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{k_3 z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right] v_{\epsilon}(z), \quad (2.24)$$

L'équation montre que l'estimation finale  $\hat{\alpha}$  peut être considérée comme une version filtrée du signal d'erreur  $v_{\epsilon}$ , comme dans une PLL.

Ensuite, définissons :

$$\mu_1 = k_1, \quad (2.25)$$

$$\mu_2 = k_2 + \frac{1}{2}k_3, \quad (2.26)$$

$$\mu_3 = k_3, \quad (2.27)$$

et

$$v_{\text{Lag1}}(z) = \frac{v_{\epsilon}(z)}{1 - z^{-1}}, \quad (2.28)$$

$$v_{\text{Lag2}}(z) = \frac{v_{\epsilon}(z)}{(1 - z^{-1})^2}. \quad (2.29)$$

L'équation (2.24) devient alors :

$$\hat{\alpha}(z)(1 - z^{-1}) = \mu_1 v_{\epsilon}(z) + \mu_2 v_{\text{Lag1}}(z)z^{-1} + \mu_3 v_{\text{Lag2}}(z)z^{-2}, \quad (2.30)$$

ou de manière équivalente dans le domaine temporel discret :

$$\hat{\alpha}_{(n|n)} = \hat{\alpha}_{(n-1|n-1)} + \mu_1 v_{\epsilon(n)} + \mu_2 v_{\text{Lag1}(n-1)} + \mu_3 v_{\text{Lag2}(n-2)}. \quad (2.31)$$

Par ailleurs, depuis (2.14), nous avons :

$$\hat{\alpha}_{(n|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + k_1 v_{\epsilon(n)}. \quad (2.32)$$

En combinant (2.31), (2.32) et (2.25), nous obtenons l'équation de prédiction de l'AC

$$\hat{\alpha}_{(n+1|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n)} + \mu_2 v_{\text{Lag1}(n)} + \mu_3 v_{\text{Lag2}(n-1)}. \quad (2.33)$$

Ces équations, dérivées du RW3-KF en régime asymptotique, peuvent être légèrement réarrangées pour ressembler à une structure de PLL traditionnelle. Nous appelons cette structure boucle de poursuite de l'amplitude complexe d'ordre 3, désignée par RW3-CATL (pour *RW3-Complex-Amplitude-Tracking-Loop* en anglais).

#### 2.2.1.4 Équations et structure de la RW3-CATL

Nous pouvons maintenant facilement rassembler les équations de la RW3-CATL :  
**signal d'erreur :**

$$v_{\epsilon(n)} = y(n) - \hat{\alpha}_{(n|n-1)}, \quad (2.34)$$

**Filtre de boucle :**

$$v_{\text{Lag1}(n)} = v_{\text{Lag1}(n-1)} + v_{\epsilon(n)}, \quad (2.35)$$

$$v_{\text{Lag2}(n)} = v_{\text{Lag2}(n-1)} + v_{\text{Lag1}(n)}, \quad (2.36)$$

$$v_c(n) = \mu_1 v_{\epsilon(n)} + \mu_2 v_{\text{Lag1}(n)} + \mu_3 v_{\text{Lag2}(n-1)}, \quad (2.37)$$

**Générateur à commande numérique :**

$$\hat{\alpha}_{(n+1|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + v_c(n), \quad (2.38)$$

**Estimation finale :**

$$\hat{\alpha}_{(n|n)} = \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + \mu_1 v_{\epsilon(n)}. \quad (2.39)$$

Nous rappelons que (2.34) provient de (2.16), (2.39) est obtenue depuis (2.32) en utilisant (2.25), (2.35) et (2.36) résultent respectivement de (2.28) et (2.29), et finalement (2.37) et (2.38) sont dérivées à partir de (2.33) en utilisant (2.39).

La structure de la RW3-CATL est illustrée sur la figure 2.1. Elle est basée sur les équations (2.34) ~ (2.38) en temps discret.

Comme dans une PLL numérique (DPLL pour *digital-PLL* en anglais) d'ordre 3, la RW3-CATL est composée d'un détecteur d'erreur, d'un filtre de boucle d'ordre 3 et d'un générateur à commande numérique. Le détecteur d'erreur compare tout d'abord le signal reçu avec un signal de référence qui est égal à la prédiction précédente de l'AC,  $\hat{\alpha}_{(n|n-1)}$ ,

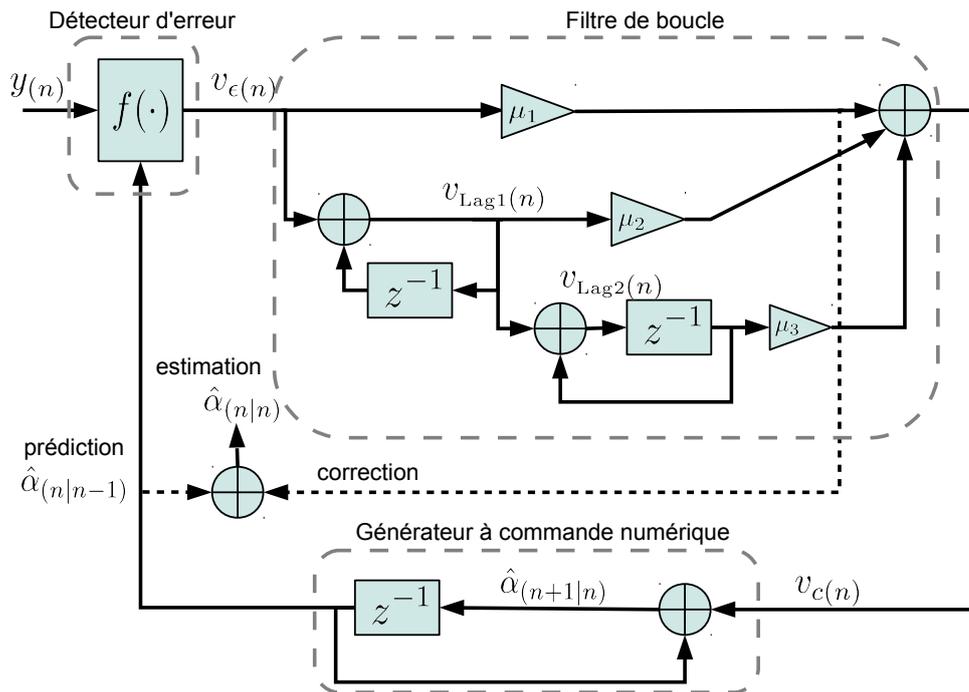


FIGURE 2.1: Structure de la RW3-CATL (calculée à partir du KF asymptotique)

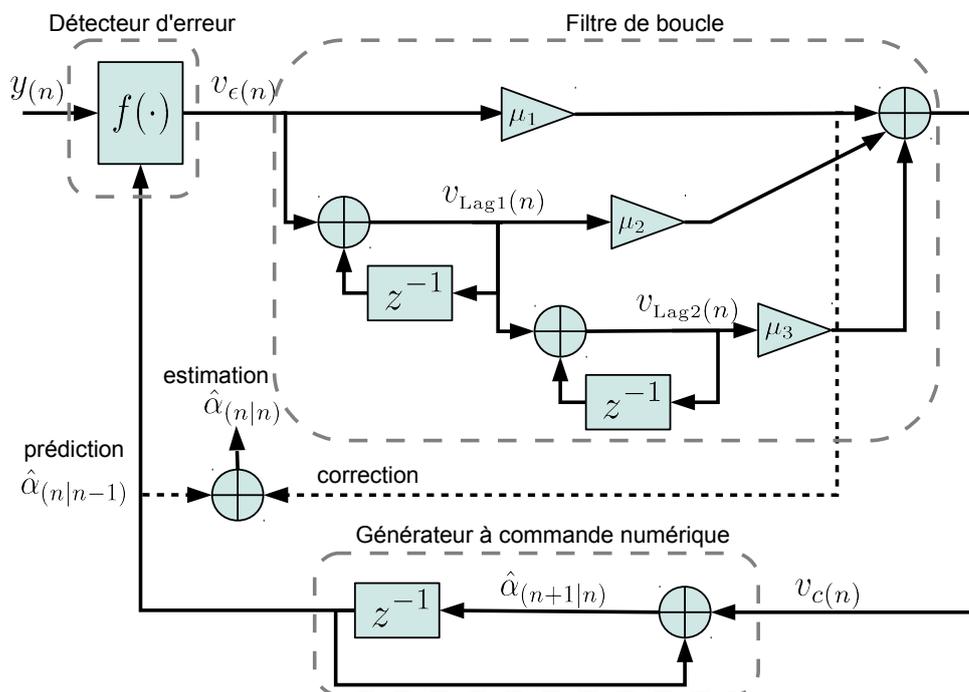


FIGURE 2.2: Structure équivalente de la RW3-CATL (inspirée de la DPLL d'ordre 3)

pour produire un signal d'erreur  $v_{e(n)}$ . Ce signal d'erreur est ensuite délivré dans le filtre proportionnel-double-intégral  $F_{PII}(z) = \mu_1 + \frac{\mu_2}{1-z^{-1}} + \frac{\mu_3 z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$  qui est contrôlé par les trois coefficients de filtre  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$ . Comme les gains de Kalman en régime asymptotique ont des valeurs positives réelles (cela peut être prouvé par la résolution des équations Riccati, voir le chapitre 3 et l'annexe C), les coefficients du filtre de boucle sont également positifs réels. Les signaux  $v_{\text{Lag1}(n)}$ ,  $v_{\text{Lag2}(n)}$  définis dans (2.35) et (2.36) sont respectivement les intégrations numériques (ou accumulations) d'ordre 1 et d'ordre 2 du signal d'erreur  $v_{e(n)}$ . La sortie du filtre de boucle  $v_{c(n)}$  est utilisée comme une commande sur le générateur à commande numérique (NCG, provient de *Numerically-Controlled Generator* en anglais) afin de générer la prochaine prédiction  $\hat{\alpha}_{(n+1|n)}$  à partir de la précédente  $\hat{\alpha}_{(n|n-1)}$ , selon (2.38). Cependant, contrairement à la DPLL classique, la sortie finale de la CATL n'est pas la prédiction (ou l'estimation *a priori*), mais l'estimation finale (c'est-à-dire l'estimation *a posteriori*) de l'AC, selon l'équation (2.39), comme dans le principe du filtre de Kalman. Ainsi, une branche de correction supplémentaire est rajoutée, illustrée par la ligne en pointillés sur la figure 2.1 (de même sur la figure 2.2).

Notons que, grâce à l'intégration d'ordre 2 dans  $v_{\text{Lag2}(n)}$ , cette boucle numérique d'ordre 3 ne présente pas d'erreur asymptotique en cas de variation d'ordre 2 de l'AC. En d'autres termes, la RW3-CATL permet de caractériser la variation du paramètre de canal (l'AC) en tenant compte de sa pente et sa courbure, alors que les boucles d'ordre 2 considèrent seulement la pente. Lorsque  $\mu_2 = 0$  et  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , la boucle d'ordre 3 réduit à une boucle d'ordre 2 (RW2-CATL) [32] et d'ordre 1 (RW1-CATL) respectivement.

### 2.2.1.5 Lien avec les boucles d'ordre 3 de la littérature

La figure 2.1 représente la structure de la RW3-CATL obtenue à partir d'une structure de filtre de Kalman. Cependant, nous aurions pu adopter une autre démarche pour obtenir la CATL : nous aurions pu partir directement de la DPLL d'ordre 3 de la littérature [41] au lieu de partir du RW3-KF asymptotique. Nous aurions alors obtenu une structure sensiblement différente, représentée sur la figure 2.2. La différence entre les deux structures se situe au niveau du filtre de boucle avec la présence du bloc de retard qui n'est pas situé au même endroit pour calculer  $v_{\text{Lag2}(n)}$ . C'est cette approche DPLL que nous avons suivi pour calculer la CATL dans [42].

Cependant, notons que pour calculer les coefficients optimaux, nous utiliserons dans la suite non pas directement la fonction de transfert de la CATL mais une approximation de cette dernière qui consiste à prendre la fonction de transfert de la boucle analogique d'ordre 3 (voir section suivante). Les paramètres de la boucle analogique d'ordre 3 sont  $\omega_n$ ,  $\zeta$  et  $m$ . Il est préférable d'utiliser ces paramètres plutôt que ceux de la boucle numérique  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  car  $\omega_n$ ,  $\zeta$  et  $m$  ont un sens physique qui sera détaillé par la suite. Or, la fonction de transfert de la boucle analogique est la même dans l'approximation basse fréquence pour ces deux structures, et donc le calcul des paramètres  $\omega_n$ ,  $\zeta$ ,  $m$  optimaux aussi. Seul le passage des paramètres de boucle analogique aux paramètres de boucle numérique sera différent pour les deux structures (approche KF ou approche DPLL).

Dans la suite, nous continuons avec l'approche KF pour la CATL.

### 2.2.1.6 Complexité : le filtre de Kalman versus la RW3-CATL

La RW3-CATL est un filtre invariant dans le temps, elle n'a donc pas besoin de mettre à jour ses coefficients. Au contraire, le RW3-KF doit mettre à jour ses coefficients (le gain de Kalman ainsi que les variances d'erreur) à chaque période symbole.

Nous pouvons évaluer la complexité d'un algorithme en comptant le nombre de multiplications scalaires (l'opération additive est beaucoup plus rapide que l'opération multiplicative, elle influence peu la complexité et donc n'est pas prise en compte) dans les équations itératives pour chaque symbole émis. Pour le filtre de Kalman, il s'agit des équations (2.11) ~ (2.15), alors pour la CATL, il s'agit des équations (2.34) ~ (2.38). Notons que les algorithmes de l'AR1-KF (CM et MAV) et du RW2-KF utilisent les mêmes équations du filtre de Kalman, sauf que la définition des coefficients des équations d'espace-état sont définies différemment :

Pour les filtres de Kalman d'ordre 1,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{U}$  sont des scalaires :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 1, \\ \mathbf{M} &= \begin{cases} J_0(2\pi f_d T) & \text{pour AR1}_{CM}\text{-KF[5]} \\ \sqrt{1 - 4\sqrt[3]{(\pi f_d T)^4 \sigma_w^2}} & \text{pour AR1}_{MAV}\text{-KF[7]} \end{cases}, \\ \mathbf{U} &= \sigma_a^2(1 - \mathbf{M}^2). \end{aligned}$$

Pour le RW2-KF[27] :

$$\mathbf{S} = [1 \ 0], \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix}.$$

Le nombre de calculs multiplicatifs scalaires est fourni dans la table (2.2). Nous constatons que la complexité des RW-CATLs est plus faible par rapport à celle des filtres de Kalman avec le même ordre de modèle. Cet avantage sera largement accentué et deviendra évident dans le cas de la transmission multi-trajet à modulation multi-porteuse (*c.f.* le chapitre 4 et le chapitre 5).

AR1-KF	RW2-KF	RW3-KF	RW1-CATL	RW2-CATL	RW3-CATL
12	13	28	6	8	10

TABLE 2.1: Nombre de multiplications scalaires par itération

## 2.2.2 Caractéristique générale de la CATL

### 2.2.2.1 Fonction de transfert en boucle fermée

Nous calculons tout d'abord la fonction de transfert de la RW3-CATL. En combinant (2.8) et (2.16), le signal d'erreur s'écrit :

$$v_{\epsilon(n)} = \alpha_{(n)} - \hat{\alpha}_{(n|n-1)} + w_{(n)}, \quad (2.40)$$

de telle sorte qu'il est une combinaison de l'erreur de la prédiction  $(\alpha_{(n)} - \hat{\alpha}_{(n|n-1)})$  et du bruit du canal. Puis en combinant (2.39) et (2.40), nous obtenons l'équation qui relie le signal d'erreur  $v_{\epsilon(n)}$  et l'erreur d'estimation  $(\alpha_{(n)} - \hat{\alpha}_{(n|n)})$  :

$$v_{\epsilon(n)} = \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot (\alpha_{(n)} - \hat{\alpha}_{(n|n)}) + \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot w_{(n)}. \quad (2.41)$$

Nous appliquons la transformée en Z ( $\mathcal{FZ}$ ) sur (2.41) :

$$v_{\epsilon}(z) = \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot (\alpha(z) - \hat{\alpha}(z)) + \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot w(z). \quad (2.42)$$

En combinant (2.28)(2.29)(2.30), nous obtenons :

$$\hat{\alpha}(z)(1 - z^{-1}) = \left[ \mu_1 + \frac{\mu_2 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{\mu_3 \cdot z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right] \cdot v_{\epsilon}(z). \quad (2.43)$$

La substitution de  $v_{\epsilon}(z)$  par (2.42) donne alors :

$$\hat{\alpha}(z) = L(z) \cdot \alpha(z) + L(z) \cdot w(z), \quad (2.44)$$

où  $L(z)$  est la fonction de transfert en Z pour la RW3-CATL définie par :

$$\begin{aligned} L(z) &= \frac{F(z)}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1}) + F(z)} \\ &= \frac{[(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1})^3 + [(\mu_1 - \mu_2 + \mu_3)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - 2\mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]} \end{aligned} \quad (2.45)$$

avec

$$F(z) = \mu_1 + \frac{\mu_2 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{\mu_3 \cdot z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2}. \quad (2.46)$$

Afin de pouvoir comparer avec une PLL analogique classique d'ordre 3 [43], nous allons réécrire  $L(z)$  en fonction de la pulsation naturelle  $\omega_n = 2\pi f_n$ , du facteur d'amortissement  $\zeta$  et du ratio de capacité  $m$  :

$$L(z) = \frac{(m+2)\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1})^2 + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 \cdot (1 - z^{-1}) + m\zeta(\omega_n T)^3}{(1 - z^{-1})^3 + (m+2)\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1})^2 + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 \cdot (1 - z^{-1}) + m\zeta(\omega_n T)^3} \quad (2.47)$$

où

$$(m+2) \cdot \zeta \omega_n T = \frac{\mu_1 - \mu_2 + \mu_3}{1 - \mu_1}, \quad (2.48)$$

$$(1 + 2m\zeta^2) \cdot (\omega_n T)^2 = \frac{\mu_2 - 2\mu_3}{1 - \mu_1}, \quad (2.49)$$

$$m\zeta \cdot (\omega_n T)^3 = \frac{\mu_3}{1 - \mu_1}. \quad (2.50)$$

Le ratio de capacité  $m$  est un paramètre supplémentaire de la PLL analogique d'ordre 3 par rapport à la PLL d'ordre 2 qui permet de régler la réponse temporelle [44]. En comparant (2.57) et (2.47),  $(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  pourront être exprimés en fonction de  $(\omega_n, \zeta, m)$  :

$$\mu_1 = \frac{(m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}, \quad (2.51)$$

$$\mu_2 = \frac{(1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + 2m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}, \quad (2.52)$$

$$\mu_3 = \frac{m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}. \quad (2.53)$$

Nous pouvons réécrire  $L(z)$  dans le domaine fréquentiel, en utilisant  $z = e^{pT}$ , avec  $p = j\omega = j2\pi f$ . En supposant une réaction lente de la boucle pendant une durée symbole  $T$  (*i.e.*  $\omega_n T \ll 1$ ), la fonction de transfert de cette boucle numérique est équivalente à la fonction de transfert habituelle d'une boucle PLL analogique passe-bas d'ordre 3 (approximation  $z^{-1} \approx 1 - pT$ ) ([43], équations (2)(4)) donnée par :

$$L(e^{pT}) \approx \frac{(m+2)\zeta\omega_n \cdot p^2 + (1+2m\zeta^2)\omega_n^2 \cdot p + m\zeta\omega_n^3}{p^3 + (m+2)\zeta\omega_n \cdot p^2 + (1+2m\zeta^2)\omega_n^2 \cdot p + m\zeta\omega_n^3}. \quad (2.54)$$

La figure 2.3 représente les courbes en amplitude-fréquence des fonction de transfert en boucle fermée de la RW3-CATL et de la PLL analogique d'ordre 3, respectivement données par (2.47) et (2.54), avec différentes valeurs de paramètres  $m, \zeta, f_n$ . Elle montre aussi que dans le domaine des basses fréquences ( $fT \ll 1$ ) et pour des boucles à réaction lente ( $\omega_n T \ll 1$ ), les deux courbes des fonctions de transfert sont superposées, cela signifie que la version analogique donne une très bonne approximation en basses fréquences de la fonction de transfert de la RW3-CATL.

### Fonction de transfert de la CATL issue de la DPLL classique

D'après la figure 2.2, nous constatons que pour la structure de la CATL issue de la DPLL classique, les équations de la boucle dans le temps (2.34) ~ (2.39) sont les mêmes que pour la CATL issue du KF asymptotique, sauf pour (2.37). Dans ce cas,  $v_{c(n)}$  est donné par :

$$v_{c(n)} = \mu_1 v_{\epsilon(n)} + \mu_2 v_{\text{Lag}^1(n)} + \mu_3 v_{\text{Lag}^2(n)}, \quad (2.55)$$

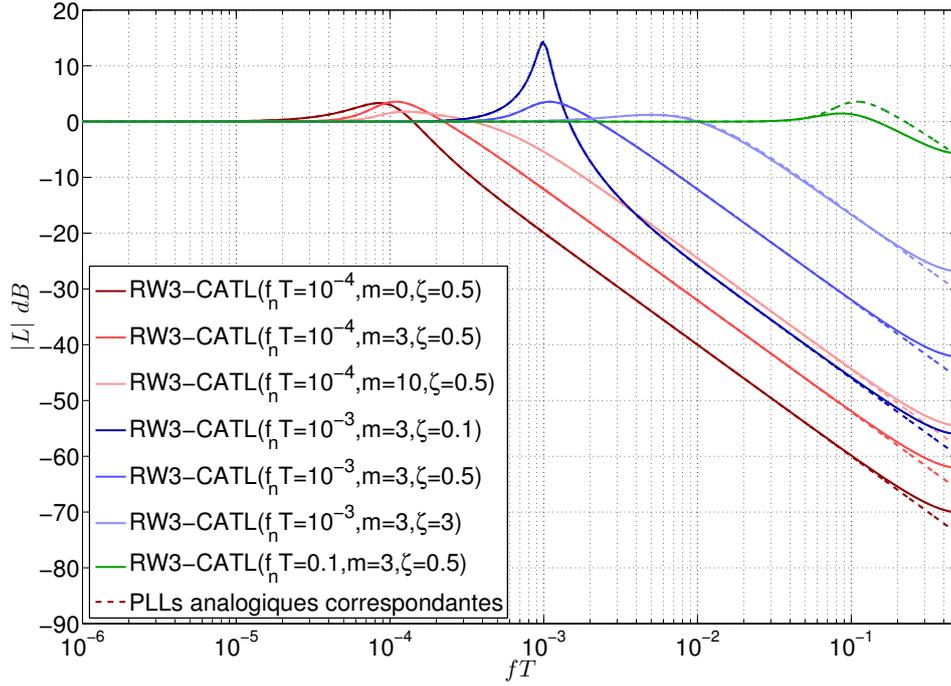


FIGURE 2.3: Fonctions de transfert  $L$  de la RW3-CATL données par (2.47) (courbes pleines) et celles de PLL analogique d'ordre 3 données par (2.54) (courbes pointillées) pour différentes valeurs de paramètres ( $m, \zeta, f_n$ ) en fonction de  $fT$

par conséquent (2.46) devient donc :

$$F(z) = \mu_1 + \frac{\mu_2 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{\mu_3 \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}. \quad (2.56)$$

La fonction de transfert est donc légèrement modifiée :

$$L(z) = \frac{[(\mu_1 - \mu_2)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - \mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1})^3 + [(\mu_1 - \mu_2)(1 - z^{-1})^2 + (\mu_2 - \mu_3)(1 - z^{-1}) + \mu_3]} \quad (2.57)$$

Notons que cette boucle a toujours une fonction de transfert d'ordre 3, ainsi nous pouvons de toutes façons faire le lien entre (2.57) et (2.47), mais avec les coefficients redéfinis suivant :

$$(m+2) \cdot \zeta \omega_n T = \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \mu_1}, \quad (2.58)$$

$$(1 + 2m\zeta^2) \cdot (\omega_n T)^2 = \frac{\mu_2 - \mu_3}{1 - \mu_1}, \quad (2.59)$$

$$m\zeta \cdot (\omega_n T)^3 = \frac{\mu_3}{1 - \mu_1}. \quad (2.60)$$

or,

$$\mu_1 = \frac{(m+2)\zeta\omega_n T + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m+2)\zeta\omega_n T + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}, \quad (2.61)$$

$$\mu_2 = \frac{(1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m + 2)\zeta\omega_n T + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}, \quad (2.62)$$

$$\mu_3 = \frac{m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m + 2)\zeta\omega_n T + (1 + 2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}. \quad (2.63)$$

Notons que seulement  $\mu_2$  est légèrement modifié en comparant avec les coefficients de la RW3-CATL issue du KF asymptotique.

### Cas particuliers pour les modèles RW2 et RW1

En mettant  $\mu_3$  à 0, nous obtenons la boucle d'ordre 2 [32], (2.46) devient

$$F(z) = \mu_1 + \frac{\mu_2 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}, \quad (2.64)$$

par conséquent la fonction de transfert de RW2-CATL est donnée par :

$$L(z) = \frac{[(\mu_1 - \mu_2)(1 - z^{-1}) + \mu_2]}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1})^2 + [(\mu_1 - \mu_2)(1 - z^{-1}) + \mu_2]} \quad (2.65)$$

En définissant :

$$2\zeta \cdot (\omega_n T) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \mu_1}, \quad (2.66)$$

$$(\omega_n T)^2 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{1 - \mu_1}, \quad (2.67)$$

nous avons :

$$\mu_1 = \frac{2\zeta\omega_n T + (\omega_n T)^2}{1 + 2\zeta\omega_n T + (\omega_n T)^2}, \quad (2.68)$$

$$\mu_2 = \frac{(\omega_n T)^2}{1 + 2\zeta\omega_n T + (\omega_n T)^2}, \quad (2.69)$$

et nous retrouvons la fonction de transfert standard d'une DPLL d'ordre 2 :

$$L(z) = \frac{2\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1}) + (\omega_n T)^2}{(1 - z^{-1})^2 + 2\zeta\omega_n T \cdot (1 - z^{-1}) + (\omega_n T)^2}. \quad (2.70)$$

Avec la même hypothèse que nous avons posé précédemment, soit  $\omega_n T \ll 1$ , nous concluons aussi que la PLL analogique d'ordre 2 donne une bonne approximation de la fonction de transfert de la RW2-CATL.

Lorsque  $\mu_2 = 0$  et  $\mu_3 = 0$ , la boucle devient une structure d'ordre 1, par conséquent  $F(z) = \mu_1$  et nous obtenons la fonction de transfert de la RW1-CATL :

$$L(z) = \frac{\mu_1}{(1 - \mu_1)(1 - z^{-1}) + \mu_1} \quad (2.71)$$

En définissant  $\omega_c T = \frac{\mu_1}{(1-\mu_1)}$  comme la fréquence de coupure de boucle d'ordre 1, nous avons :

$$\mu_1 = \frac{\omega_c T}{1 + \omega_c T}, \quad (2.72)$$

et

$$L(z) = \frac{\omega_c T}{(1 - z^{-1}) + \omega_c T}. \quad (2.73)$$

Avec l'hypothèse  $f_c T \ll 1$ , nous retrouvons que la PLL analogique d'ordre 1 donne une bonne approximation de la fonction de transfert de la RW1-CATL.

### 2.2.2.2 Stabilité

Pour qu'un système linéaire et invariant dans le temps causal soit stable, il faut que ses pôles, *i.e.* toutes les racines du polynôme dénominateur soient à l'intérieur du cercle unité. Autrement dit, il faut que le cercle unité appartienne à la région de convergence. Compte tenu de la complexité de la fonction de transfert d'ordre 3, nous avons recours à la méthode Jury-Marden simplifiée [45].

Le polynôme d'ordre 3 au dénominateur de  $L(z)$  dans (2.57) est  $D(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ , avec  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \mu_1 + \mu_2 - 3$ ,  $a_2 = 3 - 2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3$ ,  $a_3 = \mu_1 - 1$ . Les critères de stabilité sont donc données par :

$$\begin{aligned} D(1) &> 0, \\ D(-1) &< 0, \\ a_0 &> |a_3|, \\ |c_0| &> |c_2|, \end{aligned}$$

avec

$$c_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Après quelques manipulations, nous obtenons les conditions de stabilité de la RW3-CATL, c'est à dire que le système est stable si et seulement si :

$$0 < \mu_1 < 2, \quad (2.74)$$

$$4\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 < 8, \quad (2.75)$$

$$0 < \mu_3 < \mu_1 \mu_2. \quad (2.76)$$

Pour la boucle d'ordre 2, la critère de Schur-Cohn [46] pourrait être appliqué au lieu de la méthode Jury-Marden. Le polynôme d'ordre 2 au dénominateur de  $L(z)$  dans (2.65) est  $D(z) = a_0 z^2 + a_1 z + 1$  avec  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \mu_1 + \mu_2 - 2$ ,  $a_2 = 1 - \mu_1$ . Les conditions de stabilité sont données par :

$$\begin{aligned} |a_0| &< 1, \\ -1 &< \frac{a_1}{1 + a_0} < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la RW2-CATL est stable si et seulement si :

$$0 < \mu_1 < 2, \quad (2.77)$$

$$0 < \mu_2 < 4 - 2\mu_1. \quad (2.78)$$

Et dans le cas RW1-CATL où  $L(z)$  est donné par (2.73), il suffit que (2.77) soit vérifiée.

### 2.2.3 Analyse théorique de l'EQM

À partir de (2.44), nous savons que l'erreur d'estimation est de moyenne nulle, ainsi la RW3-CATL est un estimateur non biaisé. En utilisant la définition  $\epsilon(z) = \alpha(z) - \hat{\alpha}(z)$ , (2.44) pourrait être réécrit comme :

$$\epsilon(z) = (1 - L(z)) \cdot \alpha(z) - L(z) \cdot w(z). \quad (2.79)$$

La variance de l'erreur d'estimation est donc composée de deux parties. L'une provient de la variation du paramètre  $\alpha$ , et l'autre du bruit de boucle  $w$  :

$$\sigma_\epsilon^2 = E\{\epsilon_{(n)} \cdot \epsilon_{(n)}^*\} = \sigma_{\epsilon\alpha}^2 + \sigma_{\epsilon w}^2. \quad (2.80)$$

La composante  $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$  (la variance de l'erreur dynamique) résulte du filtrage passe-haut  $(1 - L(z))$  du signal d'entrée  $\alpha_{(n)}$ , nous avons donc :

$$\sigma_{\epsilon\alpha}^2 = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot |1 - L(e^{j2\pi fT})|^2 df, \quad (2.81)$$

où  $\Gamma_\alpha(f)$  est la densité spectrale de puissance (DSP) de  $\alpha$  donnée par (1.23). Alors que la composante  $\sigma_{\epsilon w}^2$  (la variance de l'erreur statique) résulte du filtrage passe-bas  $L(z)$  du bruit de boucle  $w_{(n)}$  :

$$\sigma_{\epsilon w}^2 = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_w(f) \cdot |L(e^{j2\pi fT})|^2 df. \quad (2.82)$$

#### 2.2.3.1 Variance d'erreur statique $\sigma_{\epsilon w}^2$

Étant donné que le bruit est supposé blanc, la DSP du bruit  $\Gamma_w(f) = \sigma_w^2 T$  est constante sur toute la largeur de bande du système. De ce fait, (2.82) devient :

$$\sigma_{\epsilon w}^2 = \sigma_w^2 \cdot T \underbrace{\int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} |L(e^{j2\pi fT})|^2 df}_{B_L}, \quad (2.83)$$

où  $B_L$  est la bande équivalente de bruit de la boucle (bilatérale normalisée).  $B_L$  peut être calculée (*i.e.* calcul de l'intégrale complexe bilatérale) à l'aide de la méthode présentée dans [47]. Pour un système d'ordre 3, on obtient une expression algébrique exacte de  $B_L$  qui est une fonction d'ordre 6 de  $(\omega_n T)^6$  (voir l'annexe A). Or, avec la condition  $f_n T \ll 1$

dans le cas variation lente, les termes d'ordres élevés de  $\omega_n T$  sont négligeables. Ainsi  $B_L$  peut être approchée par :

$$B_L \approx 2\pi f_n T \cdot \underbrace{\frac{(2m^3\zeta^4 + 12m^2\zeta^4 + 8m\zeta^4 + 6m\zeta^2 + 4\zeta^2 + 1)}{4m^2\zeta^3 + 8m\zeta^3 + 4\zeta}}_{\mathcal{B}}. \quad (2.84)$$

La bande équivalente de bruit, et donc la variance d'erreur statique, augmentent de manière linéaire avec la fréquence naturelle de la boucle  $f_n$  (pour des valeurs fixés de  $m$  et  $\zeta$ ).

### Cas particuliers pour les modèles RW2 et RW1

La bande équivalente de bruit peut être calculée de la même façon pour les modèles RW2 et RW1. En combinant (2.68)(2.69) et (A.9), nous obtenons la bande équivalente de bruit de la RW2-CATL :

$$\begin{aligned} B_L^{(RW2)} &= \frac{(8\zeta^2 + 2)(\omega_n T) + 6\zeta(\omega_n T)^2 + (\omega_n T)^3}{8\zeta + (8\zeta^2 + 4)(\omega_n T) + 6\zeta(\omega_n T)^2 + (\omega_n T)^3} \\ &\approx 2\pi f_n T \cdot \left(\zeta + \frac{1}{4\zeta}\right), \end{aligned} \quad (2.85)$$

où l'approximation est toujours obtenue avec l'hypothèse  $f_n T \ll 1$ .

Pour l'ordre 1, en combinant (2.72) et (A.10), nous obtenons la bande équivalente de bruit de la RW1-CATL :

$$B_L^{(RW1)} = \frac{2\pi f_c T}{2\pi f_c T + 2} \approx \pi f_c T, \quad (2.86)$$

où l'approximation est obtenue avec l'hypothèse  $f_c T \ll 1$ .

### 2.2.3.2 Variance d'erreur dynamique $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$

L'expression de  $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$  est donnée par (2.81) sous forme d'intégrale. Le but est de trouver une expression analytique qui pourrait l'approcher sous l'hypothèse générale  $f_d \leq f_n \ll 1/T$ . Considérons d'abord le module au carré du filtre passe-haut  $1 - L$ . Depuis (2.54), nous avons

$$\begin{aligned} &|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2 && \text{(pour } |f| \ll 1/T) \\ &= f^6 / \{m^2\zeta^2 f_n^6 + [(m+2)^2\zeta^2 - 2(1+2m\zeta^2)]f_n^2 f^4 + \\ & \quad [(1+2m\zeta^2)^2 - 2(m^2+2m)\zeta^2]f_n^4 f^2 + f^6\}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Nous avons tracé en rouge l'amplitude de  $|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2$  en fonction de  $fT$  pour  $f_n T = 10^{-3}$  pour différentes valeurs de  $m$  sur la figure 2.4a. Nous avons considéré ensuite différentes valeurs de  $\zeta$  sur la figure 2.4b. Notons que pour obtenir une expression analytique du calcul de l'intégrale, il est nécessaire de simplifier l'expression de  $|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2$ .

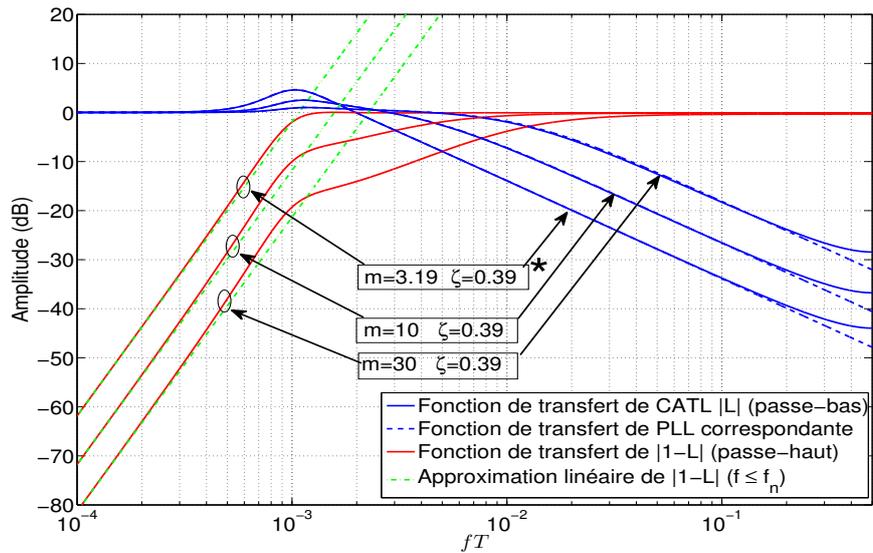
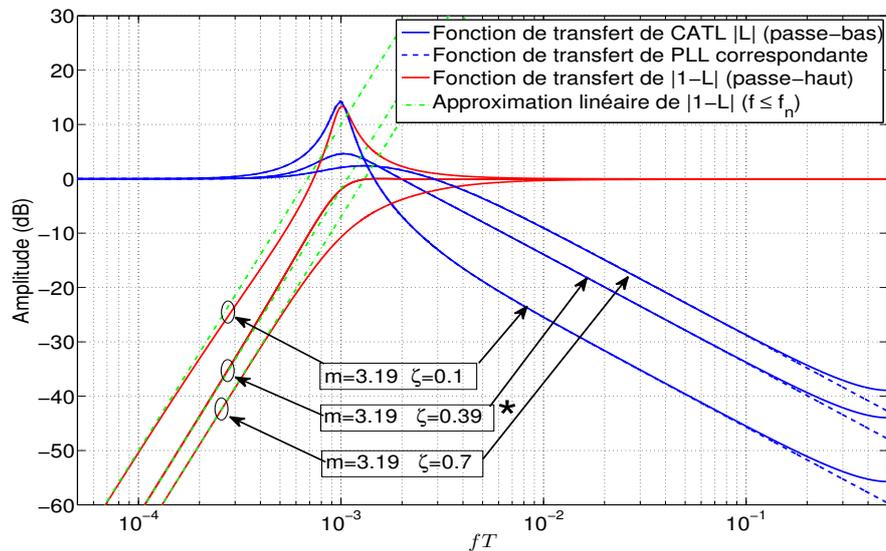
(a)  $m$  varié(b)  $\zeta$  varié

FIGURE 2.4: Fonctions de transfert  $|L|$  de la RW3-CATL données par (2.47) (courbes pleines bleues) et celles de la PLL analogique d'ordre 3 données par (2.54) (courbes bleues pointillées) en fonction de  $fT$ , avec la fréquence naturelle fixée à  $f_n T = 10^{-3}$ , mais en faisant varier les paramètres ( $m$  en (a) et  $\zeta$  en (b)). Les courbes pleines rouges représentent les fonctions de transfert passe-haut  $|1-L|$  correspondantes et les lignes vertes en traits mixtes sont l'approximation linéaire défini par (2.92), les paramètres marqués d'une étoile ( $\star$ ) sont ceux qui satisfont la contrainte (2.93)

À cet effet, nous considérons l'asymptote du logarithme de l'amplitude en fonction de la fréquence. Aux basses fréquences, *i.e.*  $f \ll f_n$ , nous obtenons  $f_n^2 f^4 \ll f_n^6$  et  $f^6 \ll f_n^6$ , ce

qui donne :

$$m^2\zeta^2 f_n^6 + [(m+2)^2\zeta^2 - 2(1+2m\zeta^2)]f_n^2 f^4 + [(1+2m\zeta^2)^2 - 2(m^2+2m)\zeta^2]f_n^4 f^2 + f^6 \approx (m\zeta)^2 f_n^6. \quad (2.88)$$

Aux fréquences élevées, i.e.  $f \gg f_n$ , nous avons :

$$m^2\zeta^2 f_n^6 + [(m+2)^2\zeta^2 - 2(1+2m\zeta^2)]f_n^2 f^4 + [(1+2m\zeta^2)^2 - 2(m^2+2m)\zeta^2]f_n^4 f^2 + f^6 \approx f^6. \quad (2.89)$$

Pour résumer, nous avons :

$$|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2 \approx \begin{cases} \frac{f^6}{(m\zeta)^2 f_n^6} & \text{si } f \ll f_n, \\ 1 & \text{si } f \gg f_n. \end{cases} \quad (2.90)$$

et pour le cas  $f = f_n$ , nous avons :

$$|1 - L(e^{j2\pi f_n T})|^2 \approx \frac{f_n^6}{(m\zeta)^2 f_n^6 + [m^2(4\zeta^2 - 1) + 4]f_n^6}. \quad (2.91)$$

Les asymptotes de l'amplitude de (2.90) sont mises en évidence sur la figure 2.4. Notons que le cas où  $f \gg f_n$  n'intervient pas pour le calcul de l'intégrale (2.81), car pour le modèle de Rayleigh-Jakes, le spectre de l'AC  $\Gamma_\alpha$  est borné, i.e.  $|f| \leq f_d$ , et pour une bonne poursuite de  $\alpha$ , nous supposons que  $f_n$  est supérieur ou égale à  $f_d$ . Nous utilisons donc l'asymptote basse fréquence pour l'approximation, ce qui donne :

$$|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2 \approx \frac{f^6}{(m\zeta)^2 f_n^6} \quad \text{pour } f \leq f_n. \quad (2.92)$$

Et pour obtenir une approximation acceptable autour de  $f_n$ , nous imposons que la fonction  $|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2$  croise l'asymptote basse fréquence à  $f = f_n$ , ce qui donne la contrainte suivante (voir (2.91)) :

$$m^2(4\zeta^2 - 1) + 4 = 0. \quad (2.93)$$

Nous constatons sur la figure 2.4 que l'approximation linéaire est bonne, surtout lorsque la contrainte est appliquée.

Ainsi, la variance d'erreur dynamique  $\sigma_{e\alpha}^2$  devient :

$$\sigma_{e\alpha}^2 \approx \frac{\int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) f^6 df}{(m\zeta)^2 f_n^6} = \frac{S_\alpha}{(m\zeta)^2 (f_n T)^6}, \quad (2.94)$$

avec

$$S_\alpha = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) (f T)^6 df. \quad (2.95)$$

On voit donc que la variance dynamique décroît de manière inversement proportionnelle à la puissance 6 de la fréquence de boucle  $f_n$  (pour  $m$  et  $\zeta$  fixés), quelque-soit le spectre Doppler  $\Gamma_\alpha(f)$ . L'influence du spectre de Doppler n'apparaît que dans la constante multiplicative, qui prends une valeur particulière  $S_\alpha$  pour un spectre Doppler donné.

En remplaçant  $\Gamma_\alpha(f)$  par (1.23) ou (1.24), nous retrouvons la variance d'erreur dynamique. Pour le spectre de Jakes, avec l'hypothèse  $f \leq f_n$ , un changement de variable ( $\frac{f}{f_d} = \cos\theta$ ) nous permet d'obtenir une solution analytique exacte de l'intégrale (2.95), nous avons donc :

$$\begin{aligned} S_{\alpha(2D)} &= \int_{-f_d}^{+f_d} \frac{(fT)^6 \cdot \sigma_\alpha^2}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} df \\ &= (f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos^6\theta}{\pi} d\theta \\ &= \frac{5}{16} (f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2, \end{aligned} \quad (2.96)$$

ce qui donne :

$$\sigma_{\varepsilon\alpha(2D)}^2 = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{(m\zeta)^2} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^6 \cdot \sigma_\alpha^2. \quad (2.97)$$

Pour le spectre de Doppler en 3-D, nous avons :

$$\begin{aligned} S_{\alpha(3D)} &= \int_{-f_d}^{+f_d} \frac{(fT)^6 \cdot \sigma_\alpha^2}{2f_d} df \\ &= \frac{1}{7} (f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2, \end{aligned} \quad (2.98)$$

qui conduit à :

$$\sigma_{\varepsilon\alpha(3D)}^2 = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{(m\zeta)^2} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^6 \cdot \sigma_\alpha^2. \quad (2.99)$$

### Cas particuliers pour des modèles RW2 et RW1

Pour la RW2-CATL, en utilisant (2.70) et l'approximation  $1 - z^{-1} \approx j2\pi fT$ , nous avons :

$$|1 - L(e^{j2\pi fT})|^2 \approx \frac{f^4}{f_n^4 + f^2 f_n^2 \cdot (4\zeta^2 - 1)}. \quad (2.100)$$

Nous définissons la contrainte pour RW2 :

$$4\zeta^2 - 1 = 0, \quad (2.101)$$

ce qui donne  $\zeta = 0.5$  directement. La variance d'erreur dynamique s'écrit alors :

$$\sigma_{\varepsilon\alpha}^2 \approx \frac{S_\alpha^{(RW2)}}{(f_n T)^4}, \quad (2.102)$$

avec  $S_\alpha^{(RW2)} = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot (fT)^4 df$ . Pour le spectre de Jakes, nous avons :

$$\sigma_{\epsilon\alpha(2D)}^2 \approx \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^4 \cdot \sigma_\alpha^2. \quad (2.103)$$

Pour le spectre de Doppler en 3-D, nous avons :

$$\sigma_{\epsilon\alpha(3D)}^2 \approx \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^4 \cdot \sigma_\alpha^2. \quad (2.104)$$

Considérons maintenant la RW1-CATL ;

$$|1 - L(e^{j2\pi fT})|^2 = \frac{f^2}{f^2 + f_c^2} \approx \left(\frac{f}{f_c}\right)^2, \quad (2.105)$$

avec  $f \ll f_c$ . Nous avons alors :

$$\sigma_{\epsilon\alpha}^2 \approx \frac{S_\alpha^{(RW1)}}{(f_c T)^2}, \quad (2.106)$$

où  $S_\alpha^{(RW1)} = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot (fT)^2 df$ . Pour le spectre de Jakes, nous avons :

$$\sigma_{\epsilon\alpha(2D)}^2 \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f_d}{f_c}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2. \quad (2.107)$$

Pour le spectre de Doppler en 3-D, nous avons :

$$\sigma_{\epsilon\alpha(3D)}^2 \approx \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{f_d}{f_c}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2. \quad (2.108)$$

## 2.3 Paramétrage de la RW3-CATL

Le critère d'optimisation pour calculer les paramètres de la RW3-CATL,  $(m, \zeta, f_n)$ , est le critère de l'erreur d'estimation quadratique moyenne (EQM) minimale  $\sigma_\epsilon^2$  (2.80). Il faut donc effectuer une optimisation sur les trois paramètres  $(m, \zeta, f_n)$ . Une solution analytique à ce problème peut être obtenue si nous imposons la contrainte (2.93), mais cela conduit alors à une solution sous-optimale. Cette minimisation avec contrainte est résolue par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Dans la section 2.4, nous vérifierons que la solution sous-optimale donne des performances très proche de celle de la solution optimale (qui seront obtenue par optimisation numérique sous Matlab).

En combinant (2.83) et (2.94), nous avons maintenant l'expression de l'EQM de la RW3-CATL :

$$\sigma_\epsilon^2(m, \zeta, f_n) = \frac{S_\alpha}{(m\zeta)^2 (f_n T)^6} + \sigma_w^2 \cdot 2\pi f_n T \mathcal{B}(m, \zeta). \quad (2.109)$$

Pour l'optimisation de (2.109) sur  $m$ ,  $\zeta$  et  $f_n$  avec la contrainte (2.93), la fonction auxiliaire à minimiser est donnée par :

$$J = \frac{S_\alpha}{(m\zeta)^2 (f_n T)^6} + \sigma_w^2 \cdot 2\pi f_n T \mathcal{B}(m, \zeta) + \lambda \cdot [m^2(4\zeta^2 - 1) + 4], \quad (2.110)$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange. Le calcul détaillé est développé dans l'annexe B. Nous présentons ici les résultats :  $m$  est la solution de l'équation :

$$m^{11} + 2m^{10} - 16m^9 - 12m^8 + 112m^7 - 176m^6 - 512m^5 + \dots \\ 448m^4 + 1024m^3 + 1024m^2 - 3072 = 0, \quad (2.111)$$

ce qui donne  $m_{ss-opt} \approx 3.19$ . On peut alors calculer  $\zeta$  avec la contrainte (2.93), ce qui donne  $\zeta_{ss-opt} \approx 0.39$ . La fréquence naturelle sous-optimale  $f_n$ , qui dépend de  $f_d$  et du RSB =  $\frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_w^2}$ , est donnée par :

$$f_{n \text{ ss-opt}} = \frac{1}{T} \left( \frac{S_\alpha Q}{2C_1} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad (2.112)$$

avec  $C_1 = 2\pi\sigma_w^2$  et

$$Q = \frac{1}{m^3 \zeta^4 \mathcal{D}_m + \zeta^3 \mathcal{D}_\zeta}, \quad (2.113)$$

où  $\mathcal{D}_m$  (donné par (B.5)),  $\mathcal{D}_\zeta$  (donné par (B.6)) sont des termes en fonction de  $m$  et de  $\zeta$ , définis dans l'annexe B. Notons que la fréquence naturelle sous-optimale varie en fonction de la racine septième du RSB.

Enfin, l'EQM sous-optimale de la RW3-CATL avec ce choix de paramètres est :

$$\sigma_{\epsilon \text{ min}}^2 = C \cdot C_1^{\frac{6}{7}} \cdot (S_\alpha)^{\frac{1}{7}}, \quad (2.114)$$

avec

$$C = \frac{1}{(m\zeta)^2} \cdot \left(\frac{2}{Q}\right)^{\frac{6}{7}} + \mathcal{B} \cdot \left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{1}{7}}. \quad (2.115)$$

En utilisant (2.96) et (2.98), nous obtenons respectivement la valeur sous-optimale de  $f_n$  et l'EQM minimale pour les spectres Doppler en 2-D et en 3-D (*c.f.* la table 2.2).

### Cas particuliers pour des modèles RW2 et RW1

Pour RW2-CATL, il n'y a que deux paramètres à régler, ( $\zeta, f_n$ ). Nous avons fixé la valeur de  $\zeta_{ss-opt} = 0.5$  dans la section précédente, il ne reste donc que l'optimisation de  $f_n$  à faire. En combinant (2.83) (avec  $B_L$  donné par (2.85)) et (2.102), nous avons l'EQM globale de la RW2-CATL :

$$\sigma_\epsilon^2(f_n) = \sigma_w^2 \cdot B_L^{(RW2)} + \frac{S_\alpha^{(RW2)}}{(f_n T)^4} \\ = C_1 \cdot f_n T + \frac{S_\alpha^{(RW2)}}{(f_n T)^4}. \quad (2.116)$$

En imposant  $\frac{\partial \sigma_{\epsilon}^2}{\partial f_n} = 0$ , nous obtenons :

$$f_n \text{ ss-opt} = \frac{1}{T} \left( \frac{4S_{\alpha}^{(RW2)}}{C_1} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad (2.117)$$

et l'EQM minimale pour RW2-CATL :

$$\sigma_{\epsilon \text{ min}}^2 = \frac{5}{4} \cdot C_1^{\frac{4}{5}} \cdot (4S_{\alpha}^{(RW2)})^{\frac{1}{5}}. \quad (2.118)$$

En utilisant (2.96) et (2.98), nous obtenons la valeur sous-optimale de  $f_n$  et l'EQM minimale pour le spectre de Jakes en 2-D et en 3-D, respectivement.

La RW1-CATL est contrôlée seulement par la fréquence de coupure  $f_c$ . En combinant (2.83) (avec  $B_L$  donné par (2.86)) et (2.106), nous avons l'EQM globale de la RW1-CATL :

$$\begin{aligned} \sigma_{\epsilon}^2(f_c) &= \sigma_w^2 \cdot B_L^{(RW1)} + \frac{S_{\alpha}^{(RW1)}}{(f_c T)^2} \\ &= \frac{1}{2} C_1 \cdot f_c T + \frac{S_{\alpha}^{(RW1)}}{(f_c T)^2}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

En imposant  $\frac{\partial \sigma_{\epsilon}^2}{\partial f_c} = 0$ , nous obtenons :

$$f_c \text{ ss-opt} = \frac{1}{T} \left( \frac{4S_{\alpha}^{(RW1)}}{C_1} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.120)$$

et l'EQM minimale pour RW1-CATL :

$$\sigma_{\epsilon \text{ min}}^2 = \frac{3}{4} \cdot C_1^{\frac{2}{3}} \cdot (4S_{\alpha}^{(RW1)})^{\frac{1}{3}}. \quad (2.121)$$

En utilisant (2.96) et (2.98), nous obtenons la valeur sous-optimale de  $f_c$  et l'EQM minimale pour le spectre de Jakes en 2-D et en 3-D, respectivement.

Les résultats du paramétrage sont résumés dans la table 2.2 (les calculs pour RW1 et RW2 sont fournis dans [6, 8, 32, 33]).

Spectre	RW1-CATL			RW2-CATL			RW3-CATL		
	Jakes	3D	Jakes	3D	Jakes	3D	Jakes	3D	
$S_\alpha$	$\frac{1}{2}(f_d T)^2 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{1}{3}(f_d T)^2 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{3}{8}(f_d T)^4 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{1}{5}(f_d T)^4 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{5}{16}(f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{1}{7}(f_d T)^6 \cdot \sigma_\alpha^2$			
$\sigma_{\epsilon w}^2$	$\pi f_c T$		$2\pi f_n T \cdot (\zeta + \frac{1}{4\zeta})$		$2\pi f_n T \cdot \mathcal{B}(m, \zeta)$				
$\sigma_{\epsilon \alpha}^2$	$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{f_d}{f_c}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{f_d}{f_c}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{3}{8} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^4 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^4 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{5}{16} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^6 \cdot \sigma_\alpha^2$	$\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{f_d}{f_n}\right)^6 \cdot \sigma_\alpha^2$			
Paramètres									
sous-	$f_c T = \left(\frac{2(f_d T)^2 \sigma_\alpha^2}{C_1}\right)^{\frac{1}{3}}$	$f_c T = \left(4 \frac{(f_d T)^2 \sigma_\alpha^2}{3C_1}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 0.5$	$m = 3.19$	$m = 3.19$			
optimaux			$f_n T = \left(\frac{3(f_d T)^4 \sigma_\alpha^2}{2C_1}\right)^{\frac{1}{5}}$	$f_n T = \left(\frac{4(f_d T)^4 \sigma_\alpha^2}{5C_1}\right)^{\frac{1}{5}}$	$\zeta = 0.39$	$\zeta = 0.39$	$f_n T = \left(\frac{5(f_d T)^6 \sigma_\alpha^2 Q}{14C_1}\right)^{\frac{1}{7}}$		
$\sigma_{\epsilon \min}^2$	$\frac{3}{4}(C_1 f_d T)^{\frac{2}{3}} (2\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{3}{4}(C_1 f_d T)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{4\sigma_\alpha^2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{5}{4}(C_1 f_d T)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{3\sigma_\alpha^2}{2}\right)^{\frac{1}{5}}$	$\frac{5}{4}(C_1 f_d T)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{4\sigma_\alpha^2}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$	$C(C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \left(\frac{5\sigma_\alpha^2}{16}\right)^{\frac{1}{7}}$	$C(C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \left(\frac{\sigma_\alpha^2}{7}\right)^{\frac{1}{7}}$			

N.B. :  $C_1 = 2\pi\sigma_w^2$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $C$  et  $Q$  sont des termes en fonction de  $m$  et  $\zeta$ , données par (2.84), (2.115) et (2.113) respectivement.

TABLE 2.2: Les expressions analytiques d'EQM et le Paramétrage des RW-CATLs

## 2.4 Simulation

### 2.4.1 De l'intérêt d'utiliser le modèle RW à l'ordre 3

Avant de valider notre étude, nous allons dans un premier temps montrer l'intérêt potentiel d'utiliser un modèle d'ordre 3 par rapport aux modèles d'ordres inférieurs. Pour cela, nous générons d'abord deux canaux directement issus d'un modèle à marche aléatoire intégrée : un canal généré à partir d'un modèle RW2 (avec  $\sigma_u^2 = 10^{-9}$ ) et un canal généré à partir d'un modèle RW3 (avec  $\sigma_u^2 = 10^{-12}$ ). Dans toute la suite de la section simulation, le canal sera généré à partir d'un modèle de Rayleigh-Jakes en accord avec nos hypothèses de travail, mais nous pensons qu'il est aussi intéressant de montrer l'impact de l'ordre du modèle des KF avec un canal de type RW. La figure 2.5 montre le cas du canal RW3. Les performances d'estimation en terme d'EQM sont affichées pour les RW1-KF, RW2-KF et RW3-KF. Le paramètre des modèles RW des KF ( $\sigma_u^2$ ) est réglé ici par optimisation numérique de manière à avoir la variance d'estimation la plus faible. Nous montrons ensuite sur la figure 2.6 les résultats de simulation avec cette fois-ci le canal généré par un modèle RW2. Comme on pouvait s'y attendre, il apparait que les performances sont meilleures lorsqu'on utilise le bon modèle pour le KF, c'est à dire celui qui correspond au canal généré. Cependant, la perte de performances lorsqu'on utilise un modèle RW3 à la réception pour un canal RW2 est beaucoup plus faible que lorsqu'on utilise un modèle RW2 pour un canal RW3. Ainsi, lorsqu'on ne connaît pas l'ordre du modèle du canal, il est préférable d'utiliser à la réception le modèle RW d'ordre 3 plutôt que l'ordre 2, surtout si le canal en question présente des courbures dans ces variations.

Dans les sections suivantes, les performances de la RW3-CATL en termes d'EQM et de TEB (Taux d'erreur binaire) sont évaluées par simulations avec un canal de type Rayleigh-Jakes, et sont comparées avec celles d'algorithmes de référence basés sur le filtre de Kalman. Pour toutes les simulations, la fonction d'autocorrélation du canal est le modèle de Clarke-Jakes (avec le spectre en 2-D), comme indiqué dans la chapitre 1. A part pour la figure 2.14, tous les résultats sont obtenus en mode "Data-aided" (*i.e.* avec les symboles pilotes connus à la réception).

### 2.4.2 Validation de l'analyse théorique

Dans la section précédente, nous avons présentés une méthode pour résoudre la minimisation qui conduit à une solution sous-optimale. Il reste à vérifier que l'EQM obtenue avec ces paramètres sous-optimaux est proche de celle obtenue avec les paramètres optimaux. Nous rappelons que la solution optimale est obtenue sans tenir compte de la contrainte (2.93) alors que la solution sous-optimale est obtenue avec la contrainte. Notons que la solution optimale ne peut être trouvée que par optimisation numérique, ce que nous allons maintenant détailler.

Pour commencer, nous définissons une plage de valeurs pour  $m$  et  $\zeta$  qui correspond aux valeurs typiquement rencontrées en pratiques pour ces paramètres lorsque l'on règle des DPLL, ce qui donne la grille de valeurs suivantes :  $\{0 < m \leq 20, 0.05 < \zeta < 0.5\}$ . Pour chaque nœud de cette grille, nous exécutons une optimisation numérique unidimensionnelle afin

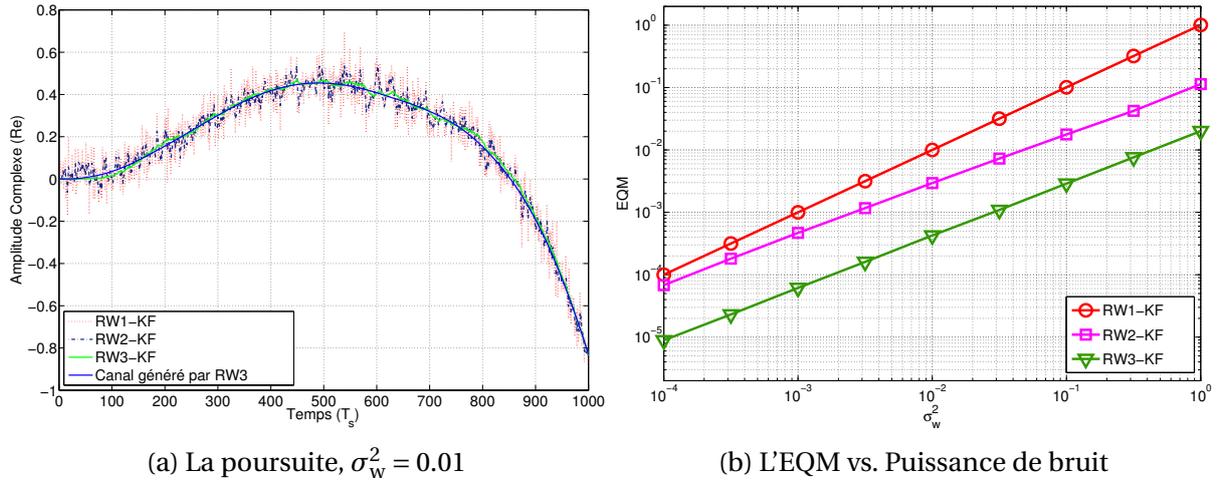


FIGURE 2.5: Performance des filtres de Kalman basés sur des modèles RW de l'ordres différents, le canal est généré par un processus RW3 avec  $\sigma_u^2 = 10^{-12}$

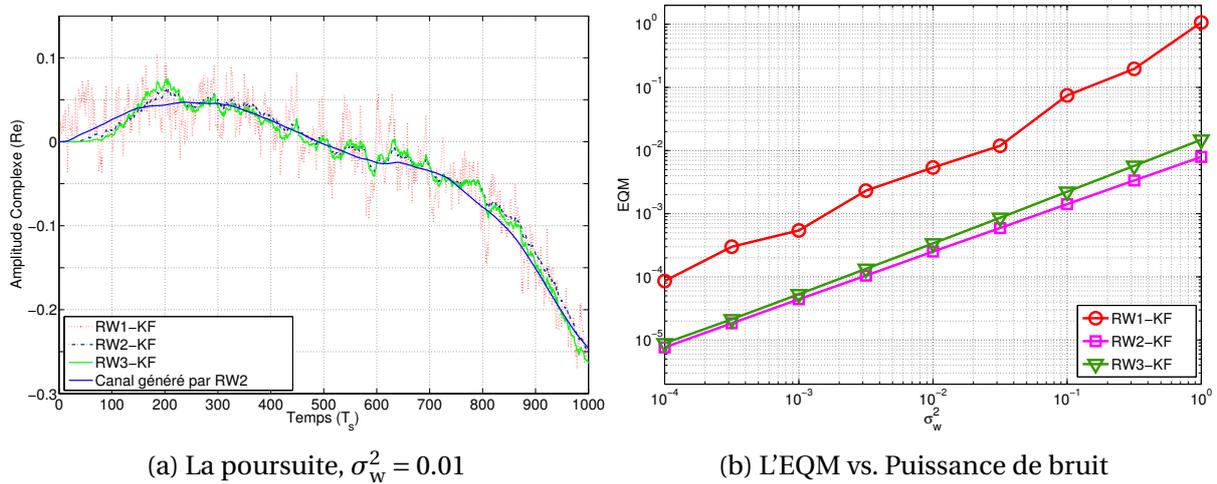
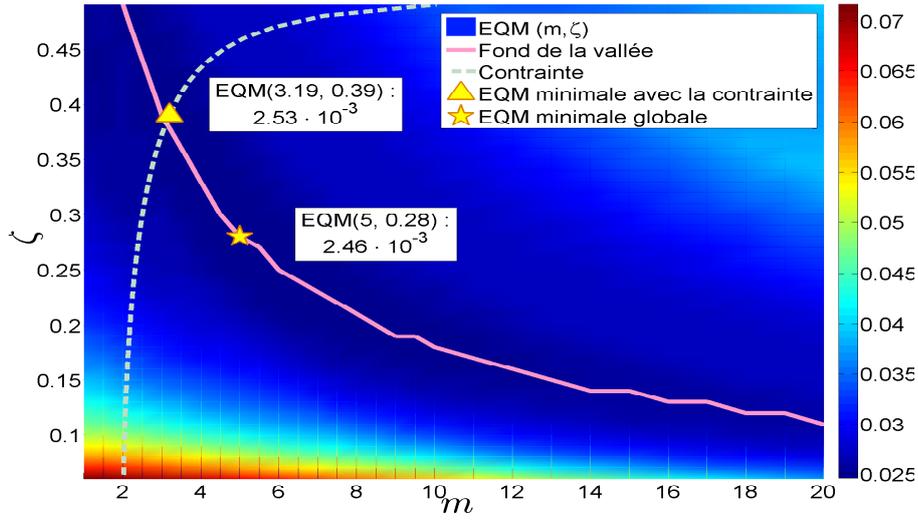
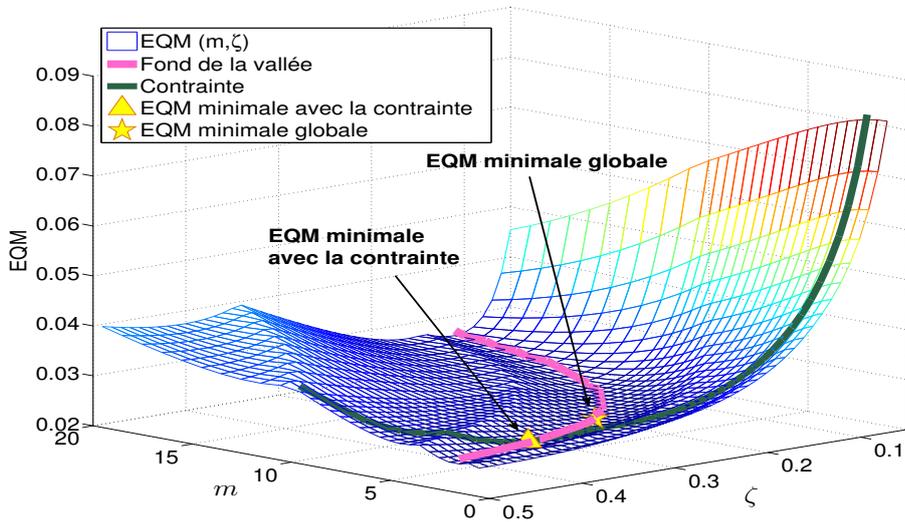


FIGURE 2.6: Performance des filtres de Kalman basés sur des modèles RW d'ordres différents, le canal est généré par un processus RW2 avec  $\sigma_u^2 = 10^{-9}$

de trouver la valeur de  $f_n$  qui minimise l'EQM, et nous gardons cette valeur minimale pour ce nœud. Comme  $f_n$  dépend du RSB et de la fréquence Doppler  $f_d$ , cette procédure de calcul numérique devra être répétée pour différentes valeurs de RSB et de  $f_d$ . La figure 2.7 montre l'EQM en fonction de  $m, \zeta$ , calculée pour RSB = 0 dB et  $f_d T = 10^{-3}$ . Il est à noter qu'il existe une zone correspondant à une vallée dans laquelle se situent les EQMs les plus basses. Pour obtenir l'ensemble des paramètres optimaux, il reste à rechercher l'EQM minimale à l'aide d'une recherche numérique. L'EQM minimale est représentée sur la figure 2.7 par une étoile. Cette EQM minimale correspond au minimum global de la figure. L'EQM sous-optimale est également indiquée (triangle). Nous rappelons que les paramètres sous-optimaux sont  $m = 3.19$ ,  $\zeta = 0.39$ , et pour le scénario donné,  $f_n/f_d = 2.0$  ( $f_n$  est calculée avec l'équation (2.112)). Notons que la position du point sous-optimal est située exacte-



(a) Vision en 2-D

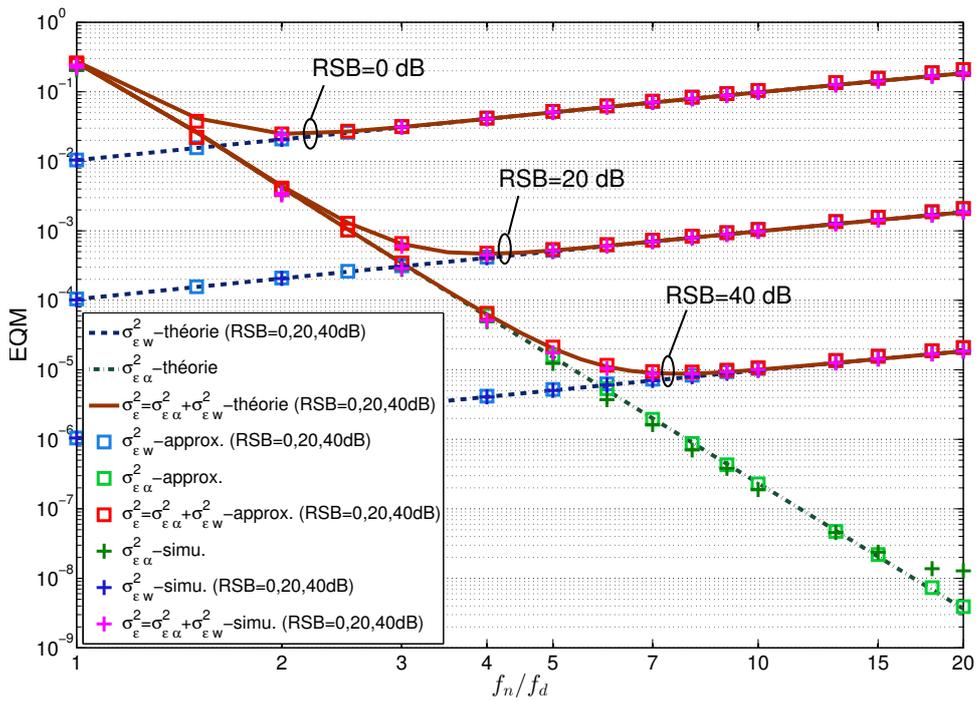


(b) Vision en 3-D

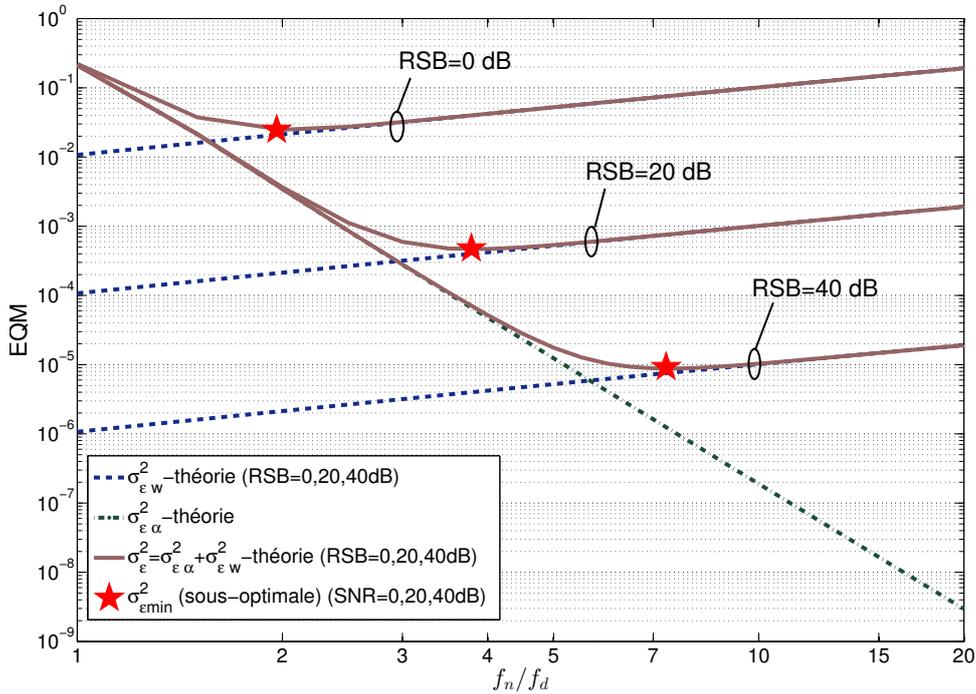
FIGURE 2.7: Distribution de l'EQM sur le plan  $m - \zeta$ 

ment sur l'intersection du fond de la vallée et de la courbe de la contrainte. La valeur de l'EQM minimale donnée par les paramètres sous-optimaux  $2.53 \times 10^{-3}$  est très proche de celle de l'EQM globale  $2.46 \times 10^{-3}$ , ce qui valide notre solution sous-optimale.

Sur la figure 2.8a, nous comparons l'EQM théorique et celle obtenue par simulation en fonction de  $f_n$  pour  $f_d T = 10^{-3}$ , et RSB = 0, 20, 40 dB. Les paramètres sous-optimaux ( $m = 3, 19$ ,  $\zeta = 0, 39$ ) sont utilisés. Les variances d'erreur dynamiques et statiques (droites pointillées)  $\sigma_{e\alpha}^2$  et  $\sigma_{ew}^2$  sont obtenues respectivement par les intégrations numériques de (2.81) et de (2.82). La somme de ces deux variance est l'EQM globale (courbes pleines). Les EQMs calculées par les formules approchée ((2.83) associé à (2.84) pour la variance d'erreur statique et (2.97) pour la variance d'erreur dynamique) sont également tracées



(a) l'EQM théorique et de simulation de la RW3-CATL versus  $f_n/f_d$  ( $m = 3.19, \zeta = 0.39, \text{RSB} = 0, 20, 40 \text{ dB}, f_d T = 10^{-3}$ )



(b) Optimisation du paramétrage de la RW3-CATL

FIGURE 2.8: Validation de l'analyse théorique sur l'EQM de la RW3-CATL

(points carrés). Nous observons que l'EQM approchée et l'EQM théorique correspondent très bien. Nous constatons en même temps que la composante  $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$  domine l'EQM globale  $\sigma_{\epsilon}^2$  pour les basses fréquences, alors que  $\sigma_{\epsilon w}^2$  devient la composante principale lorsque  $f_n$  est élevée. Cela peut être expliqué par (2.97) et (2.84) car  $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$  est inversement proportionnel à  $f_n^6$ , alors que  $\sigma_{\epsilon w}^2$  est proportionnel à  $f_n$ .

L'EQM obtenue par la simulation a été également tracée. La variance de l'erreur dynamique  $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$  est obtenue en forçant le bruit  $w_{(n)}$  à zéro, tandis que la variance de l'erreur statique  $\sigma_{\epsilon w}^2$  a été obtenue en maintenant  $\alpha$  à une valeur constante. Nous constatons que toutes les courbes de simulation sont très proches des valeurs théoriques et approchées, ce qui valide notre analyse théorique et nos approximations. Par conséquent, les fréquences naturelles sous-optimales obtenues par la simulation correspondent aussi très bien aux valeurs théoriques (tel que  $f_n/f_d$  (2D) = 2, 3.8, 7.3, respectivement pour RSB = 0, 20, 40 dB, illustré par la figure 2.8b).

### 2.4.3 Comparaison avec les estimateurs de Kalman dans la littérature

Sur la figure 2.9, nous comparons l'EQM asymptotique de la RW3-CATL avec celles de l'AR1<sub>CM</sub>-KF [22–25], de l'AR1<sub>MAV</sub>-KF [26][7] et du RW2-KF [27] en utilisant la simulation Monte-Carlo pour  $f_d T = 10^{-4}$  et  $f_d T = 10^{-3}$ . Les résultats du RW3-KF ne sont pas présentés ici car les performances du RW3-KF en mode asymptotique sont équivalentes à celles de la RW3-CATL avec les paramètres correctement réglés (section 2.2.1). Notons que la RW3-CATL suppose la même connaissance *a priori* que celle requise pour le filtre de Kalman (le modèle de Clarke-Jakes, la variance du bruit et la fréquence Doppler), ce qui rend la comparaison légitime. Nous traçons aussi la borne Cramer-Rao bayésienne (BCRB) comme référence [7][48]. Nous observons que la performance de l'AR1-KF en terme d'EQM asymptotique est très pauvre. Ce résultat corrobore les travaux cités dans l'introduction, qui soulignent que l'AR1-KF est performant pour une grande mobilité ( $f_d T \gg 10^{-2}$ ), mais qu'il s'éloigne fortement des performances optimales pour  $f_d T \leq 10^{-2}$ , comme le prouve [7]. Comme prévu, le RW2-KF fonctionne mieux que l'AR1<sub>CM</sub>-KF et l'AR1<sub>MAV</sub>-KF. Enfin, l'EQM asymptotique de la RW3-CATL avec les paramètres proprement choisis est le plus proche de la BCRB. Ce résultat montre qu'il est préférable d'utiliser un algorithme basé sur une CATL d'ordre 3 avec ses paramètres bien choisis, plutôt qu'un filtre de Kalman lorsque ce dernier n'est basée que sur un modèle d'ordre 1 ou d'ordre 2.

La figure 2.10 montre maintenant l'EQM des différents estimateurs en fonction de  $f_d T$ . Nous constatons que le gain en performance de la RW3-CATL est plus grand pour des valeurs de  $f_d T$  faibles. Lorsque  $f_d T$  augmente, les EQMs de l'AR1<sub>MAV</sub>-KF, du RW2-KF et de la RW3-CATL semblent converger vers celle de l'AR1<sub>CM</sub>-KF, qui reste invariant pour cette gamme de  $f_d T$ .

D'après (2.114), l'EQM asymptotique théorique de la RW3-CATL est proportionnelle à la puissance  $\frac{6}{7}$  de la variance du bruit  $\sigma_w^2$  (notons que  $\text{RSB} = \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_w^2}$  avec ici  $\sigma_\alpha^2 = 1$  et  $\sigma_w^2 < 1$ ), par rapport aux puissances  $\frac{4}{5}$  et  $\frac{2}{3}$  pour le RW2-KF [27] et l'AR1<sub>MAV</sub>-KF [7] respectivement. Ceci est validé par les deux figures 2.9 et 2.10.

La figure 2.11 montre des résultats en régime transitoire pour la CATL. La CATL étant

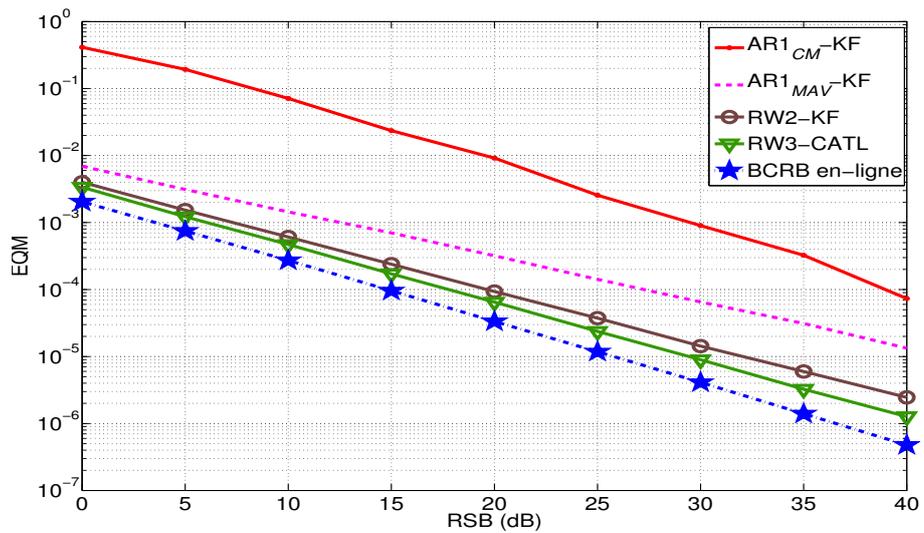
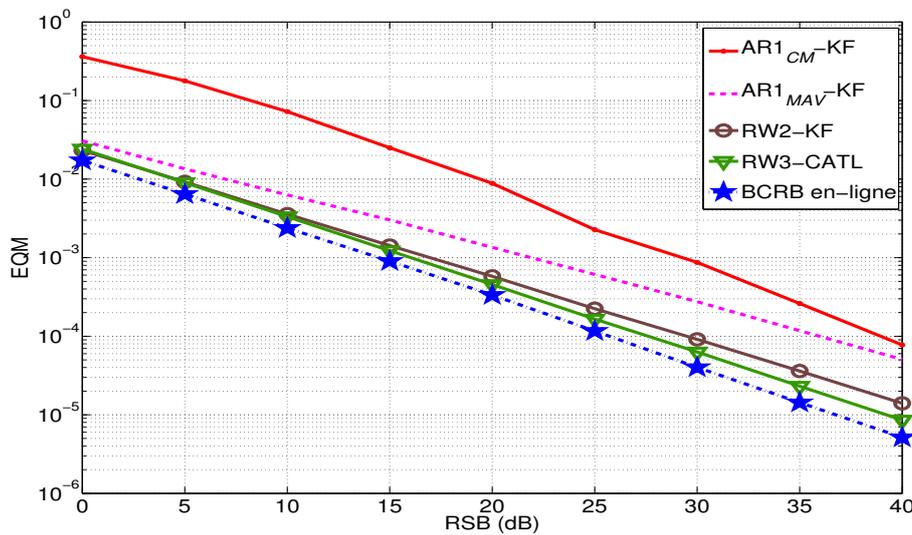
(a)  $f_d T = 10^{-4}$ (b)  $f_d T = 10^{-3}$ 

FIGURE 2.9: Comparaison de l'EQM versus RSB entre la RW3-CATL et les estimateurs de Kalman

un filtre statique, c'est-à-dire que ses coefficients sont constants, on s'attend donc à ce que la période d'accrochage soit plus lente que pour le KF, ce qui est aussi le cas pour toutes les DPLL. Cependant, après avoir accroché la vraie AC, la RW3-CATL présente une meilleure performance que les autres estimateurs.

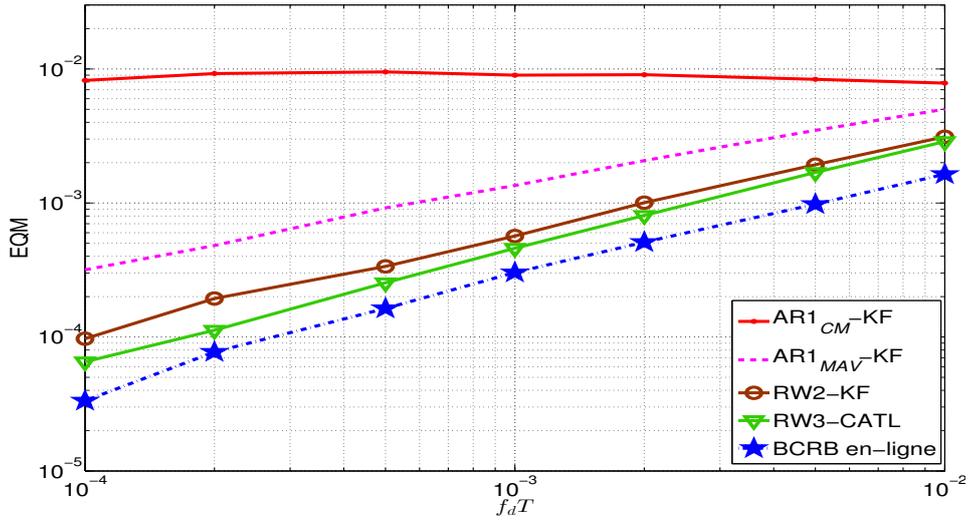


FIGURE 2.10: Comparaison de l'EQM versus  $f_d T$  entre la RW3-CATL et les estimateurs de Kalman, RSB = 20 dB

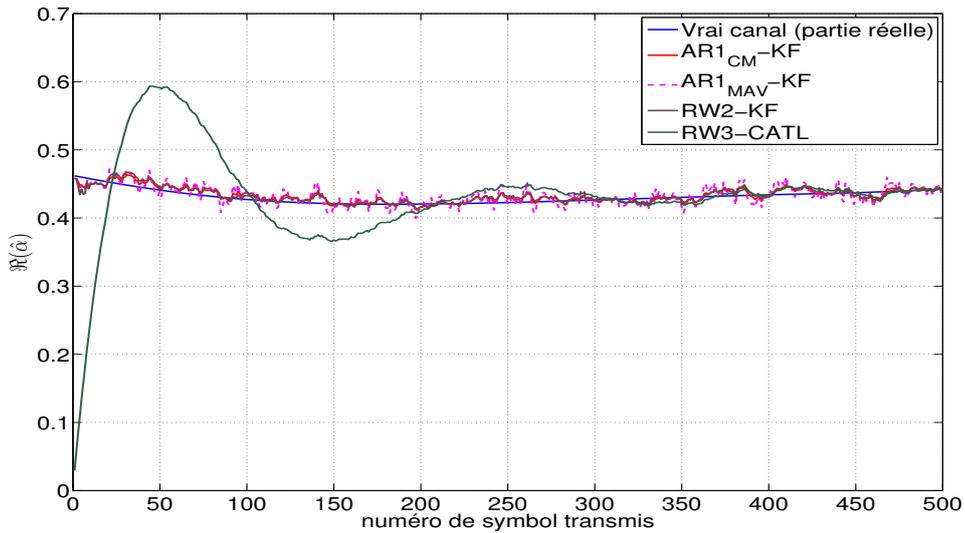


FIGURE 2.11: Caractère transitoire de la RW3-CATL ( $m = 3.19, \zeta = 0.39, \text{RSB} = 20 \text{ dB}, f_d T = 10^{-3}$ )

#### 2.4.4 Étude de la sensibilité de la CATL à une mauvaise connaissance des paramètres

Selon l'analyse de la section 2.3, la connaissance du RSB et de  $f_d$  est requise pour calculer le paramètre  $f_n$  de la RW3-CATL. En effet (2.109) montre que  $f_d$  et le RSB sont les deux facteurs clés qui influent directement sur l'EQM de l'estimation. Dans cette section, nous décrivons la sensibilité à une connaissance imparfaite du RSB et de  $f_d$  afin de tester la robustesse de la RW3-CATL. La notation  $\text{RSB}'$  et  $f_d'$  désignent les valeurs de RSB et  $f_d$  utilisées pour régler la RW3-CATL (mais pas nécessairement les valeurs correctes). La

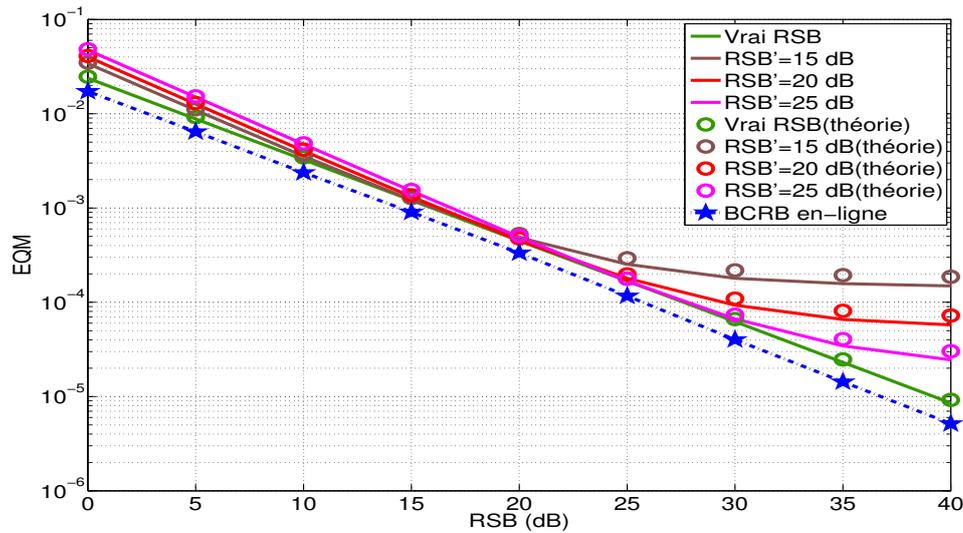


FIGURE 2.12: L'effet de discordance sur la connaissance imparfaite du RSB : EQM versus RSB,  $RSB'$  (paramètre utilisé à régler la RW3-CATL) fixé à 15, 20, 25 dB et  $f_d T = 10^{-3}$

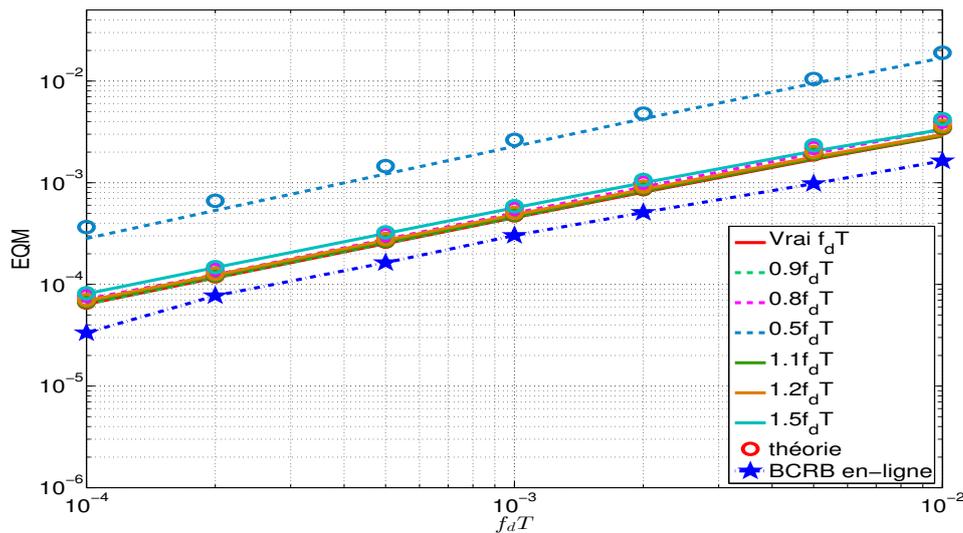
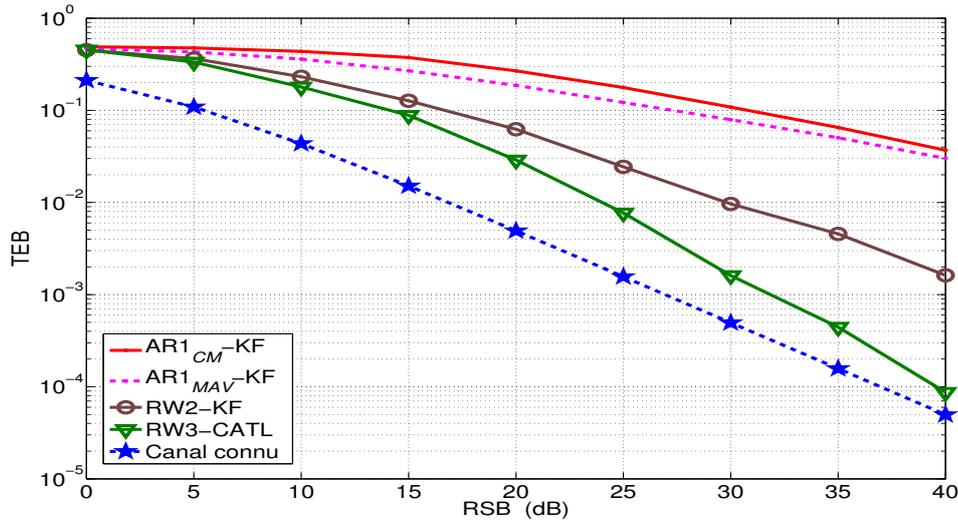


FIGURE 2.13: L'effet de discordance sur la connaissance imparfaite de  $f_d$  : EQM versus  $f_d T$ ,  $f_d T'$  (paramètre utilisé à régler la RW3-CATL) décalé de 10%, 20%, 50% de la vraie valeur et  $RSB = 20$  dB

figure 2.12 montre l'EQM en fonction du vrai RSB pour  $RSB' = 15$  dB, 20 dB, 25 dB et une connaissance parfaite de  $f_d T = 10^{-3}$  (i.e.  $f_d' = f_d$ ), ainsi que les résultats théoriques correspondants. Nous constatons que la surestimation ainsi que la sous-estimation du RSB entraînent une dégradation des performances en terme d'EQM, mais la sous-estimation montre une influence plus sévère. La figure 2.13 montre les résultats d'EQM en appliquant différentes valeurs de  $f_d'$  (telles que  $\frac{f_d' - f_d}{f_d} = \pm 10\%$ ,  $\pm 20\%$ ,  $\pm 50\%$ ) et avec un RSB fixé à 20 dB. Les valeurs théoriques correspondantes sont aussi tracées sur la figure. Nous consta-

FIGURE 2.14: TEB versus RSB pour la modulation en QPSK,  $f_d T = 10^{-3}$ 

tons que le RW3-CATL est robuste à une sur-estimation de  $f_d$ . Par contre, même une faible sous-estimation de  $f_d$  entraîne une forte dégradation des performances.

### 2.4.5 Performance en terme de TEB

Une simulation de TEB est effectuée afin d'évaluer l'impact de l'estimateur RW3-CATL sur la qualité de la communication. Les symboles transmis sont modulés en QPSK. La trame de données est composée de 200 symboles pilotes suivi par 1800 symboles inconnus. Dans ce contexte, l'estimation de canal est en mode semi-aveugle (alternativement par les pilotes et les décisions). Notons que la décision *a priori*  $\hat{x}_{(n|n-1)}$  est utilisée pour calculer le signal d'erreur (2.16) (expliqué dans le paragraphe 2.2.1.1), mais la décision finale est calculée par :  $\hat{x}_{(n)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sgn}\{\Re(\hat{a}_{(n)}^* \cdot r_{(n)})\} + j \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sgn}\{\Im(\hat{a}_{(n)}^* \cdot r_{(n)})\}$ . La figure 2.14 montre que le TEB de la RW3-CATL est la plus proche du TEB obtenu avec une connaissance parfaite du canal pour tous les RSBs, tandis que les TEBs des autres estimateurs s'éloignent de cette courbe idéale lorsque le RSB augmente<sup>3</sup>. Nous remarquons aussi que l'estimateur de Kalman classique basée sur les modèles AR1 conduit à une mauvaise performance du TEB en raison de l'inadéquation de ce modèle, et que ce TEB peut être considérablement réduit en utilisant les estimateurs basés sur le modèle de *marche-aléatoire-intégré* (RW2-KF et RW3-CATL). L'estimateur d'ordre 3 fonctionne même beaucoup mieux que celui de l'ordre 2.

3. Notons que le TEB ne coïncide pas exactement avec le TEB obtenu pour un canal connu, ce qui peut paraître surprenant, étant donnée la performance en EQM de l'estimateur de canal pour des symboles connus. Cela s'explique par l'utilisation des décisions pour obtenir le TEB. En effet, une fausse décision entrainera une erreur de signe sur le canal et à la suite une propagation d'erreurs de décisions. Ce problème n'est pas lié aux performances de l'estimation de canal, mais à l'utilisation des décisions. Cela ne se produira plus, par exemple, en OFDM au chapitre 4, où l'estimation sera uniquement basée sur des pilotes.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un estimateur d'amplitude complexe (AC) du trajet sur des canaux plats et à évanouissement lent à modéré a été proposé et analysé. L'estimateur proposé est basé sur une boucle de poursuite d'ordre 3, dont on a prouvé l'équivalence avec un filtre de Kalman en régime asymptotique basé sur un modèle de marche-aléatoire (RW) du même ordre. Le lien entre un filtre de Kalman asymptotique basé sur un modèle RW et l'estimateur proposé sous forme d'une PLL est établi. L'analyse complète de l'EQM théorique a été donnée. Une formule analytique de l'EQM asymptotique en fonction de la fréquence Doppler et du RSB est obtenue. Nous avons démontré que, en fixant le ratio de capacité  $m$  à 3,19, le facteur d'amortissement  $\zeta$  à 0,39, et avec une fréquence naturelle  $f_n$  calculée par l'expression trouvée en fonction de la fréquence Doppler et du RSB, il est possible d'obtenir des performances quasi optimales en termes d'EQM asymptotique. Les résultats de simulation (EQM et TEB) montrent que, avec ces paramètres bien choisis, l'algorithme proposé surpasse les filtres de Kalman de la littérature (basés sur des modèles d'ordre 1 et d'ordre 2), à condition que la mobilité reste modérée (*i.e.*  $f_d T < 10^{-2}$ ), ce qui représente quand même un scénario très commun. Les résultats de simulation montrent aussi la robustesse de la RW3-CATL à une mauvaise connaissance des paramètres, où l'information de la mobilité (en termes de  $f_d$ ) ou de la puissance du bruit de fond (en termes de RSB) est déformée. En outre, l'algorithme proposé est une technique de calcul moins exigeante que les algorithmes basés sur le filtre de Kalman, car il ne nécessite pas de recalculer les coefficients à chaque temps symbole. Le cas simple d'un canal à évanouissement plat (ou mono-trajet) a été examiné dans ce chapitre, mais les résultats peuvent être généralisés à des systèmes plus complexes, tels que les systèmes OFDM sans fil, ce qui fera l'objet des chapitres 4 et 5.

Notons que les résultats théoriques sur les performances asymptotiques de la boucle d'ordre 3 présentés dans ce chapitre sont originaux, ils ont été publiés dans la conférence "ICT 2012" [42] (sans l'optimisation analytique obtenue par les multiplicateurs Lagrange) et l'analyse complète a été acceptée pour publication dans la revue "IET-Communications".



# Filtre de Kalman asymptotique d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal mono-trajet en modulation mono-porteuse

## 3.1 Introduction

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre précédant, le filtre de Kalman est couramment utilisé pour suivre des paramètres variables dans le temps. Les applications du filtre de Kalman couvrent une vaste gamme d'utilisation, comme les systèmes GPS [49], les systèmes GSM [50], les systèmes multi-porteuses [2], les systèmes MIMO [22], etc. L'utilisation du filtre de Kalman exige une représentation d'espace-état récurrente linéaire des paramètres à estimer (cf. section 2.1). Le modèle espace-état le plus utilisé, notamment pour des problèmes d'estimation de canal, est le modèle AR1 associé au critère "correlation matching" (CM) pour le scénario forte mobilité [2][3], ou le modèle AR1 associé au critère "minimum asymptotic variance" (MAV) pour le scénario faible mobilité [7]. Toutefois, lorsque les paramètres à estimer varient lentement, l'utilisation de modèles d'ordre 2 ou supérieur est plus appropriée que l'utilisation d'un modèle d'ordre 1. Par exemple dans un récepteur satellite, les filtres de Kalman ainsi que les DPLLs d'ordre 3 sont souvent utilisés pour traiter le problème de la poursuite de phase en présence d'un décalage de fréquence Doppler variant dans le temps [49]. Cependant, le paramétrage et les performances de ces estimateurs sont le plus souvent obtenus à partir de simulations ou de résultats empiriques.

Nous allons proposer dans ce chapitre des résultats analytiques sur la mise au point optimale et le fonctionnement en régime asymptotique du RW3-KF. Ces résultats s'appuieront, en partie seulement, sur les résultats concernant la variance asymptotique d'estimation de la boucle d'ordre 3 (RW3-CATL) présentée au chapitre précédent, vu le lien très proche entre le RW3-KF en mode asymptotique et la RW3-CATL. Mais dans le RW3-KF, nous ne disposons que d'un seul paramètre à optimiser, la variance du bruit d'état, contre 3 paramètres dans la RW3-CATL. Notre contribution nouvelle dans ce chapitre sera la ré-

solution approximative des équations dites de Riccati du RW3-KF, afin de faire le lien entre les 3 éléments du gain asymptotique de Kalman, et la variance du bruit d'état.

### 3.2 RW3-KF en régime asymptotique

Commençons par rappeler les équations du modèle espace-état RW3 et du filtre de Kalman correspondant (le modèle espace-état RW3 (2.9) ainsi que le filtre de Kalman sont décrits en détail au chapitre 2) :

$$y_{(n)} = \mathbf{S} \mathbf{a}_{(n)} + w_{(n)}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{a}_{(n)} = \mathbf{M} \mathbf{a}_{(n-1)} + \mathbf{u}_{(n)}, \quad (3.2)$$

avec

$$\text{le vecteur de sélection : } \mathbf{S} = [1 \ 0 \ 0],$$

$$\text{le vecteur d'état : } \mathbf{a}_{(n)} = [\tilde{\alpha}_{(n)} \ \delta_{(n)} \ \xi_{(n)}]^T,$$

$$\text{le vecteur du bruit d'état : } \mathbf{u}_{(n)} = [0 \ 0 \ u_{(n)}]^T,$$

$$\text{et la matrice d'évolution : } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$w_{(n)}$  est un bruit blanc Gaussien additif complexe circulaire, il est centré avec une variance de  $\sigma_w^2$  supposée connue.

#### Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} = \mathbf{M} \hat{\mathbf{a}}_{(n-1|n-1)}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{M} \mathbf{P}_{(n-1|n-1)} \mathbf{M}^T + \mathbf{U}, \quad (3.4)$$

#### Équations de mises à jour

$$\mathbf{K}_{(n)} = \frac{\mathbf{P}_{(n|n-1)} \mathbf{S}^T}{\mathbf{S} \mathbf{P}_{(n|n-1)} \mathbf{S}^T + \sigma_w^2}, \quad (3.5)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} = \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} + \mathbf{K}_{(n)} v_{\epsilon(n)}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{(n)} \mathbf{S}) \mathbf{P}_{(n|n-1)}, \quad (3.7)$$

avec :

$$\text{le vecteur de prédiction : } \hat{\mathbf{a}}_{(n|n-1)} \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{\alpha}_{(n|n-1)} \ \hat{\delta}_{(n|n-1)} \ \hat{\xi}_{(n|n-1)}]^T,$$

$$\text{le vecteur d'estimation : } \hat{\mathbf{a}}_{(n|n)} \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{\alpha}_{(n|n)} \ \hat{\delta}_{(n|n)} \ \hat{\xi}_{(n|n)}]^T,$$

$$\text{la matrice de covariance du bruit d'état : } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}_{(n)}$  est le vecteur de gain de Kalman,  $\mathbf{P}_{(n|n-1)}$ ,  $\mathbf{P}_{(n|n)}$  sont respectivement les matrices de covariances (toutes de taille  $3 \times 3$ ) de l'erreur de prédiction et de l'erreur d'estimation. Le signal d'erreur est défini comme (2.16) dans le chapitre précédent.

En régime asymptotique, la matrice de covariance de l'estimation  $\mathbf{P}_{(n|n)}$  et de la prédiction  $\mathbf{P}_{(n|n-1)}$  convergent et peuvent être notées :

$$\mathbf{P}_{(n|n)} = \mathbf{P}_{(n+1|n+1)} = \mathbf{P}_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{P}_{(n|n-1)} = \mathbf{P}_{(n+1|n)} = \mathbf{P}'_{(\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{21} & P'_{22} & P'_{23} \\ P'_{31} & P'_{32} & P'_{33} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Notons que les éléments de ces deux matrices asymptotiques sont réels. En effet, d'après les équations de prédiction et de mise à jour et en tenant compte du fait que  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{M}$  sont des matrices réelles, si nous choisissons au départ une matrice initiale  $\mathbf{P}_{(-1|-1)}$  à valeurs réelles, alors les matrices asymptotiques seront aussi à valeurs réelles. Or, le filtre de Kalman converge vers une solution unique, quelque soient les valeurs initiales. Donc même en choisissant une matrice initiale à valeurs complexes (en dehors de la diagonale principale), le KF convergerait vers la même solution réelle. Pour les calculs suivants, nous utiliserons le fait que les matrices  $\mathbf{P}_{(\infty)}$  et  $\mathbf{P}'_{(\infty)}$  sont à valeurs réelles. Nous retrouvons aussi le gain de Kalman asymptotique qui est déjà défini dans l'équation (2.17) comme :

$$\mathbf{K}_{(n)} = \mathbf{K}_{(n+1)} = \mathbf{K}_{(\infty)} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]^T. \quad (3.10)$$

avec ses éléments donnés par :

$$k_1 = \frac{P'_{11}}{P'_{11} + \sigma_w^2}, \quad (3.11)$$

$$k_2 = \frac{P'_{21}}{P'_{11} + \sigma_w^2}, \quad (3.12)$$

$$k_3 = \frac{P'_{31}}{P'_{11} + \sigma_w^2}. \quad (3.13)$$

A partir de (3.7) et de (3.4), nous avons respectivement :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - k_1)P'_{11} & (1 - k_1)P'_{12} & (1 - k_1)P'_{13} \\ P'_{21} - k_2P'_{11} & P'_{22} - k_2P'_{12} & P'_{23} - k_2P'_{13} \\ P'_{31} - k_3P'_{11} & P'_{32} - k_3P'_{12} & P'_{33} - k_3P'_{13} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

$$\begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} & P'_{13} \\ P'_{21} & P'_{22} & P'_{23} \\ P'_{31} & P'_{32} & P'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_I & P_{II} & P_{13} + P_{23} + \frac{1}{2}P_{33} \\ P_{III} & P_{IV} & P_{23} + P_{33} \\ P_{31} + P_{32} + \frac{1}{2}P_{33} & P_{32} + P_{33} & P_{33} + \sigma_u^2 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

avec :

$$\begin{aligned}
P_I &= P_{11} + P_{21} + \frac{1}{2}P_{31} + P_{12} + P_{22} + \frac{1}{2}P_{32} + \frac{1}{2}P_{13} + \frac{1}{2}P_{23} + \frac{1}{4}P_{33}, \\
P_{II} &= P_{12} + P_{22} + \frac{1}{2}P_{32} + P_{13} + P_{23} + \frac{1}{2}P_{33}, \\
P_{III} &= P_{21} + P_{31} + P_{22} + P_{32} + \frac{1}{2}P_{23} + \frac{1}{2}P_{33}, \\
P_{IV} &= P_{22} + P_{23} + P_{32} + P_{33}.
\end{aligned}$$

Les équations (3.11)~(3.15) composent les équations de Riccati.

Nous avons déjà obtenu la fonction de transfert pour la RW3-CATL (2.57). La démarche pour obtenir la fonction de transfert pour le RW3-KF est similaire (en utilisant (2.25)(2.26)(2.27)), nous présentons donc ici juste le résultat :

$$L(z) = \frac{(k_1 - k_2 + \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1})^2 + (k_2 - \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1}) + k_3}{(1 - k_1)(1 - z^{-1})^3 + (k_1 - k_2 + \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1})^2 + (k_2 - \frac{k_3}{2})(1 - z^{-1}) + k_3}. \quad (3.16)$$

avec

$$k_1 = \frac{(m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}, \quad (3.17)$$

$$k_2 = \frac{(1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + \frac{3}{2}m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}, \quad (3.18)$$

$$k_3 = \frac{m\zeta(\omega_n T)^3}{1 + (m+2)\zeta\omega_n T + (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2 + m\zeta(\omega_n T)^3}. \quad (3.19)$$

Avec la même hypothèse d'une boucle à réaction lente  $\omega_n T \ll 1$ , nous déduisons que :

$$0 < k_3 \ll k_2 \ll k_1 < 1. \quad (3.20)$$

Nous cherchons maintenant à trouver la relation entre les gains de Kalman asymptotiques  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  et la variance du bruit d'état  $\sigma_u^2$ , afin de minimiser l'erreur d'estimation  $\sigma_c^2$  en fonction de  $\sigma_u^2$ . En résolvant le système d'équations (3.11)~(3.15), nous trouvons les

expressions des éléments de  $\mathbf{P}'_{(\infty)}$  en fonction de  $k_1$   $k_2$   $k_3$  et  $\sigma_u^2$  :

$$P'_{13} = P'_{31} = \frac{\sigma_u^2}{k_3}, \quad (3.21)$$

$$P'_{12} = P'_{21} = \frac{k_2}{k_3^2} \sigma_u^2 \quad (3.22)$$

$$P'_{23} = P'_{32} = \frac{2k_1 + k_2}{2k_3} \sigma_u^2 \quad (3.23)$$

$$P'_{33} = \left(1 + \frac{k_2}{k_3}\right) \sigma_u^2 \quad (3.24)$$

$$P'_{22} = \frac{4k_1 k_2 + 4k_2^2 + k_3(10k_1 + 7k_2 + 2k_3 - 4)}{4k_3^2} \sigma_u^2 \quad (3.25)$$

$$P'_{11} = \frac{8k_2 + k_3(6k_1 + 3k_2 + k_3)}{2k_3^2(2k_1 + 2k_2 + k_3)} \sigma_u^2, \quad (3.26)$$

Une relation entre  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  peut aussi être obtenue :

$$k_2^2 = 2k_1 k_3. \quad (3.27)$$

Le détail de ces calculs est fourni dans l'annexe C.

Par la suite, nous faisons l'hypothèse  $P'_{11} \ll \sigma_w^2$ , ce qui signifie que le gain de Kalman est faible ( $k_1 \ll 1$ ), selon (3.11) (ceci est valable car c'est le fait que l'EQM de l'estimation ( $P_{11}$ ) ou de la prédiction ( $P'_{11} = \frac{1}{1-k_1} P_{11}$ ) est très inférieur à la puissance du bruit, au moins pour les bas RSBs; en fait cela est vrai jusqu'à RSB=40 dB, vérifié par la simulation). En combinant (3.13) et (3.21), nous avons :

$$k_3 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{P'_{11} + \sigma_w^2}} \approx \frac{\sigma_u}{\sigma_w}. \quad (3.28)$$

Depuis (3.11), nous avons :

$$k_1 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{P'_{11} + \sigma_w^2}} \approx \frac{P'_{11}}{\sigma_w^2}. \quad (3.29)$$

Et en associant (3.29)(3.28) et (3.27), nous avons :

$$k_2 = \sqrt{2k_1 k_3} \approx \sqrt{\frac{2P'_{11} \sigma_u}{\sigma_w^3}}. \quad (3.30)$$

En appliquant l'approximation (3.20) sur (3.26), nous obtenons :

$$P'_{11} \approx \frac{2k_2}{k_1 k_3^2} \sigma_u^2. \quad (3.31)$$

En injectant (3.29)(3.30)(3.28) dans (3.31), nous obtenons :

$$P'_{11} \approx 2\sigma_u^{\frac{1}{3}}\sigma_w^{\frac{5}{3}} = 2\sigma_w^2\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.32)$$

Et finalement, en utilisant (3.32), nous obtenons :

$$k_1 \approx 2\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.33)$$

$$k_2 \approx 2\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{k_1^2}{2}, \quad (3.34)$$

$$k_3 \approx \frac{\sigma_u}{\sigma_w} = \frac{k_1^3}{8}. \quad (3.35)$$

Les 3 relations précédentes, déduites de la résolution des équations de Riccati (avec les approximations de variation lente), nous permettent finalement de prévoir les valeurs des 3 éléments du gain de Kalman asymptotique ( $k_1, k_2, k_3$ ) en fonction du paramètre de réglage du filtre de Kalman RW3-KF, qui est la variance du bruit d'état,  $\sigma_u^2$ . De plus, les relations imposées qui en découlent entre les éléments  $k_1, k_2$  et  $k_3$  ont pour conséquence de fixer les paramètres  $m$  et  $\zeta$  de la fonction de transfert d'ordre 3 du filtre de Kalman en régime asymptotique (3.16), comme nous allons le préciser dans la suite.

Notons qu'avec l'approximation :

$$0 < k_3 \ll k_2 \ll k_1 \ll 1, \quad (3.36)$$

la fonction de transfert exacte (3.16) peut être simplifiée :

$$L(z) \approx \frac{k_1(1-z^{-1})^2 + k_2(1-z^{-1}) + k_3}{(1-z^{-1})^3 + k_1(1-z^{-1})^2 + k_2(1-z^{-1}) + k_3}. \quad (3.37)$$

En comparant (3.37) et (2.54), nous obtenons :

$$k_1 \approx (m+2)\zeta\omega_n T, \quad (3.38)$$

$$k_2 \approx (1+2m\zeta^2)(\omega_n T)^2, \quad (3.39)$$

$$k_3 \approx m\zeta(\omega_n T)^3. \quad (3.40)$$

En substituant  $k_2$  et  $k_3$  dans (3.34)(3.35), on obtient :

$$2(1+2m\zeta^2) = (m+2)^2\zeta^2, \quad (3.41)$$

$$8m = (m+2)^3\zeta^2, \quad (3.42)$$

ce qui donne  $m = 2, \zeta = 0.5$ . Notons que ce couple  $(m, \zeta)$  imposé du fait de l'utilisation d'un seul degré de liberté (la variance  $\sigma_u^2$ ) est différent de celui retenu pour la RW3-CATL, mais nous verrons que les performances résultantes sont très similaires. La pulsation naturelle  $\omega_n T$  est réglée comme  $\frac{k_1}{2}$ , ou finalement  $\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Ainsi, nous pouvons conclure que le RW3-KF en régime asymptotique est équivalent à la CATL (ou DPLL) d'ordre 3 avec les paramètres fixes suivants ( $m = 2, \zeta = 0.5$ ). Cette conclusion généralise au troisième ordre le lien entre la DPLL et le KF établie pour la deuxième ordre dans [10][37].

### 3.3 Analyse de l'EQM asymptotique

Nous partons des expressions (2.79) et (2.80) pour calculer la variance de l'erreur statique  $\sigma_{\epsilon_w}^2$  et la variance de l'erreur dynamique  $\sigma_{\epsilon\alpha}^2$ .

La démarche est la même que celle présentée dans le chapitre précédent. La variance de l'erreur statique est donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma_{\epsilon_w}^2 &= \sigma_w^2 \cdot T \underbrace{\int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} |L(e^{j2\pi f T})|^2 df}_{B_L} \\ &= \frac{\frac{5}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 - \frac{5}{8}k_1^3 - \frac{5}{64}k_1^4}{3 - \frac{9}{8}k_1^2 - \frac{9}{32}k_1^3 - \frac{3}{64}k_1^4} \sigma_w^2 \\ &\approx \frac{5}{3} k_3^{\frac{1}{3}} \sigma_w^2,\end{aligned}\tag{3.43}$$

où le calcul de la bande équivalente de bruit est développé dans l'annexe A. La variance d'erreur dynamique est donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma_{\epsilon\alpha}^2 &= \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot |1 - L(e^{j2\pi f T})|^2 df \\ &\approx \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot \frac{(2\pi f T)^6}{k_3^2} df \\ &= \frac{(2\pi)^6}{k_3^2} S_\alpha,\end{aligned}\tag{3.44}$$

où  $S_\alpha = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot (fT)^6 df$  est le terme qui comporte la DSP de  $\alpha$ . Ici, nous avons appliqué les approximations suivantes :  $e^{-j2\pi f T} \approx 1 - j2\pi f T$ ,  $2\pi f_d T \ll k_3^{\frac{1}{3}} \approx \omega_n T \ll 1$  pour calculer  $|1 - L(e^{j2\pi f T})|^2$  dans le contexte de variation lente.

L'EQM globale est ainsi donnée par la somme de (3.43) et (3.44). Après avoir remplacé  $k_3$  par (3.35), la minimisation peut être obtenue en imposant la dérivée partielle de  $\sigma_\epsilon^2$  sur  $\sigma_u$  égale à 0, ce qui donne :

$$\sigma_{u \text{ opt}}^2 = \left[ (2\pi)^{36} \cdot \left( \frac{18}{5} \cdot S_\alpha \right)^6 \cdot \sigma_w^2 \right]^{\frac{1}{7}},\tag{3.45}$$

et l'EQM minimale correspondante :

$$\sigma_{\epsilon \text{ min}}^2 = 7 \cdot \left( \frac{5}{9} \pi \cdot \sigma_w^2 \right)^{\frac{6}{7}} \cdot S_\alpha^{\frac{1}{7}}.\tag{3.46}$$

**Application : estimation du canal Rayleigh**

Nous allons maintenant appliquer les formules précédemment obtenues avec le spectre Doppler de Jakes et le spectre Doppler en 3-D :

$$\sigma_{u_{\text{opt}(2D)}}^2 = \left[ \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^6 \cdot \sigma_w^2 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}}, \quad (3.47)$$

$$\sigma_{u_{\text{opt}(3D)}}^2 = \left[ \left( \frac{18}{35} \right)^6 \cdot (\sigma_\alpha^2)^6 \cdot \sigma_w^2 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}}. \quad (3.48)$$

Les EQM minimales correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{e_{\text{min}(2D)}}^2 &= \frac{35}{16} \cdot \left( \frac{16}{9} \pi f_d T \cdot \sigma_w^2 \right)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}} \\ &= 1.98 \cdot (C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{e_{\text{min}(3D)}}^2 &= \left( \frac{35}{9} \pi f_d T \cdot \sigma_w^2 \right)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}} \\ &= 1.77 \cdot (C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

avec  $C_1 = 2\pi\sigma_w^2$ .

**3.4 Lien entre le RW3-KF et la RW3-CATL**

Si on utilise (3.40) et (3.35) pour établir le lien entre le paramétrage du RW3-KF et de la RW3-CATL, nous trouverons en fixant  $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$  la fréquence naturelle de la boucle RW3-KF :

$$f_n = \frac{1}{2\pi T} \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.51)$$

En injectant (3.45) dans (3.51), nous avons :

$$f_{n_{\text{ss-opt}}} = \left( \frac{18}{5} \cdot \frac{S_\alpha}{C_1} \right)^{\frac{1}{7}} = 1.2 \left( \frac{S_\alpha}{C_1} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (3.52)$$

Notons que pour la RW3-CATL, d'après (2.112),  $\left(\frac{Q}{2}\right)^{\frac{1}{7}} = 1.17$  avec  $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$ , au lieu du coefficient 1.2 dans (3.52). Nous concluons donc que le RW3-KF et la RW3-CATL ( $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$ ) ont quasiment la même fonction de transfert et la même fréquence naturelle (avec

des approximations (3.29) ~ (3.36), étant donné les approximations faites pour établir la fonction de transfert approchée (3.37)).

En comparant (3.49)(3.50) avec les EQMs minimales obtenues pour la RW3-CATL dans la table 2.2, nous vérifions qu'elles sont identiques aux approximations près, car avec  $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$ , nous avons  $C = 2.46$ , donc pour le spectre Doppler de Jakes,  $\sigma_{\epsilon \min(2D)}^2 = 2.08 \cdot (C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}}$ , et pour le spectre Doppler en 3-D,  $\sigma_{\epsilon \min(3D)}^2 = 1.86 \cdot (C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}}$ , qui sont quasi identiques à celles du RW3-KF. Cette similitude est aussi validée et illustrée par la simulation dans la section suivante.

Notons même que avec les paramètres optimaux (sous contrainte) retenus pour la RW3-CATL au chapitre précédent, les variances d'estimation sont légèrement inférieures que celles du RW3-KF. Dans ce cas, avec  $m_{ss-opt} = 3.19$  et  $\zeta_{ss-opt} = 0.39$ ,  $C = 2.25$ , et nous avons  $\sigma_{\epsilon \min(2D)}^2 = 1.9 \cdot (C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}}$  pour le spectre Doppler de Jakes, et  $\sigma_{\epsilon \min(3D)}^2 = 1.71 \cdot (C_1 f_d T)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}}$  pour le spectre Doppler en 3-D.

### 3.5 Résultats pour les RW $p$ -KFs ( $p = 1, 2, 3$ )

Les analyses pour les RW-KFs aux ordres inférieurs sont présentées dans [6, 8] pour l'ordre 1 et dans [27] pour l'ordre 2. Nous synthétisons dans la table 3.1 ces résultats analytiques d'optimisation des RW $p$ -KFs ( $p = 1, 2, 3$ ).

	RW1	RW2	RW3
$\mathbf{K}_{(\infty)}$	$\frac{\sigma_u}{\sigma_w}$	$\left[ \left( 2 \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right]^T$	$\left[ 2 \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{1}{3}} \quad 2 \left( \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right]^T$
$\sigma_{\epsilon \alpha}^2$	$2 \cdot (\pi f_d T)^2 \cdot \frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} \cdot \sigma_\alpha^2$	$6 \cdot (\pi f_d T)^4 \cdot \frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} \cdot \sigma_\alpha^2$	$20 \cdot (\pi f_d T)^6 \cdot \frac{\sigma_w^2}{\sigma_u^2} \cdot \sigma_\alpha^2$
$\sigma_{\epsilon w}^2$	$\frac{\sigma_u \sigma_w}{2}$	$\frac{3}{4} \cdot (2\sigma_u)^{\frac{1}{2}} \sigma_w^{\frac{3}{2}}$	$\frac{5}{3} \sigma_u^{\frac{1}{3}} \sigma_w^{\frac{5}{3}}$
$\sigma_{u \text{ opt}}^2$	$4 \cdot [(\pi f_d T)^4 \sigma_\alpha^4 \sigma_w^2]^{\frac{1}{3}}$	$[2^{18} (\pi f_d T)^{16} \sigma_\alpha^8 \sigma_w^2]^{\frac{1}{5}}$	$[3^{12} \cdot 2^{18} (\pi f_d T)^{36} \sigma_\alpha^{12} \sigma_w^2]^{\frac{1}{7}}$
$\sigma_{\epsilon \min}^2$	$\frac{3}{2} \cdot (\pi f_d T \cdot \sigma_w^2)^{\frac{2}{3}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{15}{8} \cdot (\sqrt{2} \pi f_d T \cdot \sigma_w^2)^{\frac{4}{5}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{5}}$	$\frac{35}{16} \cdot (\frac{16}{9} \pi f_d T \cdot \sigma_w^2)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_\alpha^2)^{\frac{1}{7}}$

TABLE 3.1: Expressions analytiques pour RW $p$ -KF en régime asymptotique ([6] [8] pour  $p = 1$ , et [27] [69] pour  $p = 2, 3$  respectivement)

## 3.6 Simulation

### 3.6.1 Validation de l'analyse théorique

En injectant (3.5) et (3.7) dans (3.4) et en utilisant (3.8)(3.9)(3.10) pour la régime asymptotique, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}'_{(\infty)} &= \mathbf{M}(\mathbf{P}'_{(\infty)} - \mathbf{K}_{(\infty)}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)})\mathbf{M}^T + \mathbf{U} \\
 &= \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{K}_{(\infty)}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U} \\
 &= \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T - \mathbf{M}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{S}^T + \sigma_w^2)^{-1}\mathbf{S}\mathbf{P}'_{(\infty)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}.
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Nous pouvons vérifier la véracité de notre analyse théorique avec *Matlab*<sup>TM</sup>, en utilisant la fonction "DARE" (provient de *discrete-time algebraic Riccati equations* en anglais) de la *Control System Toolbox*<sup>TM</sup>.

La fonction se présente comme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}'_{(\infty)} & \mathbf{E} & \mathbf{G} \end{bmatrix} = \text{dare}(\mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{U}, \sigma_w^2),$$

avec  $\mathbf{G} = \mathbf{K}_{(\infty)}\mathbf{M}^T$  la matrice de gain asymptotique de Kalman,  $\mathbf{E}$  le vecteur composé des valeurs propres de la boucle fermée. Cette fonction sert à trouver la solution unique de la DARE (3.53) qui stabilise ce système en temps discret. Notons que l'élément  $P'_{11}$  de la matrice  $\mathbf{P}'_{(\infty)}$  est l'EQM asymptotique de la prédiction de l'AC. En utilisant  $P_{11} = (1 - k_1)P'_{11}$ , nous retrouvons l'EQM asymptotique de l'estimation  $\hat{\alpha}$ .

Une comparaison entre l'EQM calculée par l'analyse (3.49) et par l'outil *Matlab*<sup>TM</sup> est illustrée sur la figure 3.1. Pour calculer l'EQM théorique, (3.47) est appliquée pour trouver  $\sigma_u^2$  optimal. Nous constatons que pour  $f_d T < 10^{-2}$ , les résultats sont bien accordés.

### 3.6.2 Performance du RW3-KF

Les performances en terme d'EQM et de TEB du RW3-KF sont étudiées en réalisant des simulations Monte-Carlo sur un canal de Rayleigh à évanouissement lent. La figure 3.2 montre l'EQM du AR1<sub>CM</sub>-KF [2][22][3], du AR1<sub>MAV</sub>-KF[7] et du RW3-KF en fonction du RSB, pour  $f_d T = 10^{-3}$ . La courbe de l'EQM théorique ainsi que la BCRB en ligne sont tracées comme références. La figure 3.3 présente l'EQM des estimateurs en fonction de  $f_d T$  avec un RSB fixé à 20 dB. Des figures 3.2 et 3.3, nous constatons que la courbe théorique et la courbe de simulation du RW3-KF s'accordent bien. L'EQM du RW3-KF varie proportionnellement à la puissance  $\frac{6}{7}$  de la variance du bruit du canal  $\sigma_w^2$  (donc inversement proportionnelle au RSB), et aussi varie proportionnellement à la puissance  $\frac{6}{7}$  de la fréquence Doppler  $f_d T$ .

Nous constatons aussi que, en comparant avec l'AR1<sub>CM</sub>-KF et l'AR1<sub>MAV</sub>-KF, que le RW3-KF a beaucoup amélioré la performance asymptotique, ce qui signifie que même si le critère *MAV* est un meilleur choix pour calculer la coefficient de l'AR1 dans le cas de variation lente ou modérée, il est encore loin de la borne inférieure. Ceci est dû à la perte de l'information dynamique avec un filtrage d'ordre 1. En revanche, le modèle RW3 approxime

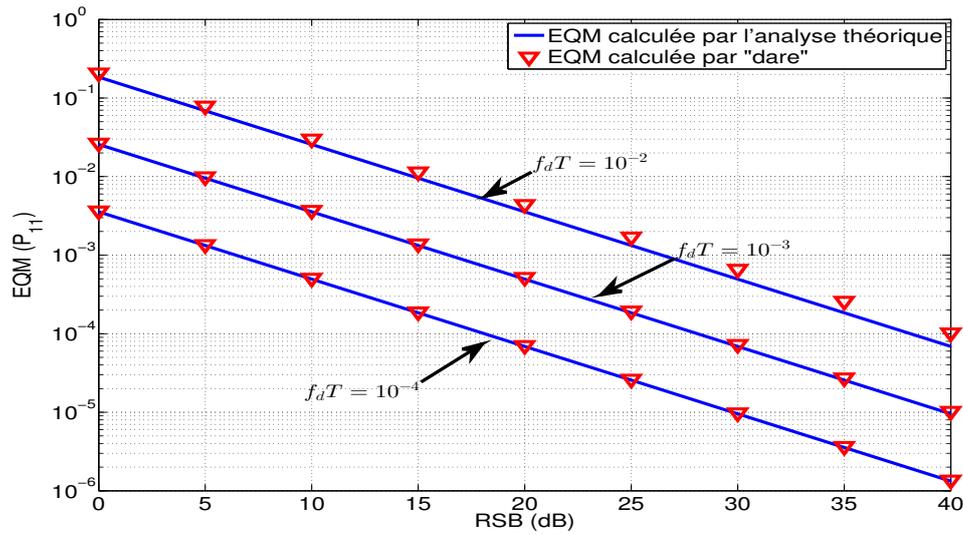
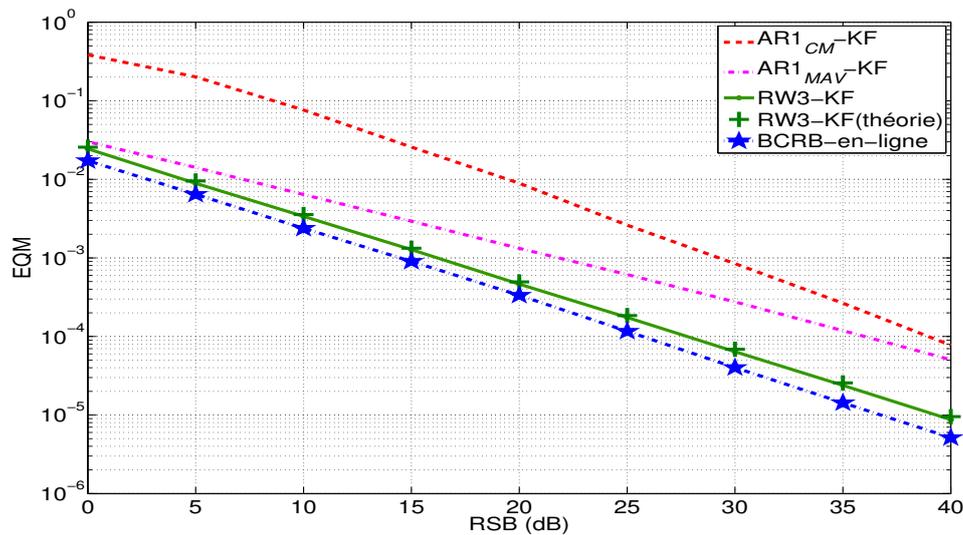


FIGURE 3.1: Comparaison de l'EQM théorique (3.49) et le résultat de la fonction "dare"

FIGURE 3.2: Comparaison de l'EQM versus RSB,  $f_d T = 10^{-3}$ 

mieux le vrai canal que le modèle AR1. Ainsi, l'EQM du RW3-KF est bien plus proche de la BCRB en ligne.

L'analyse théorique dans la section 3.3 montre que le RW3-KF est quasi-équivalent à la boucle RW3-CATL réglée avec  $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$ . Sur la figure 3.4, nous illustrons cette similitude en comparant les résultats théoriques (les points cercles et les points croix) du RW3-KF et de la RW3-CATL. Les résultats simulés (les deux courbes) valident cette similitude et sont bien en accord avec les valeurs théoriques.

Pour la simulation de TEB, nous utilisons des symboles transmis modulés en QPSK. L'estimation est en mode semi-aveugle, c'est-à-dire que le bloc de données se compose de 20 symboles pilotes suivis par 180 symboles inconnus (pour lesquels le KF fonctionne

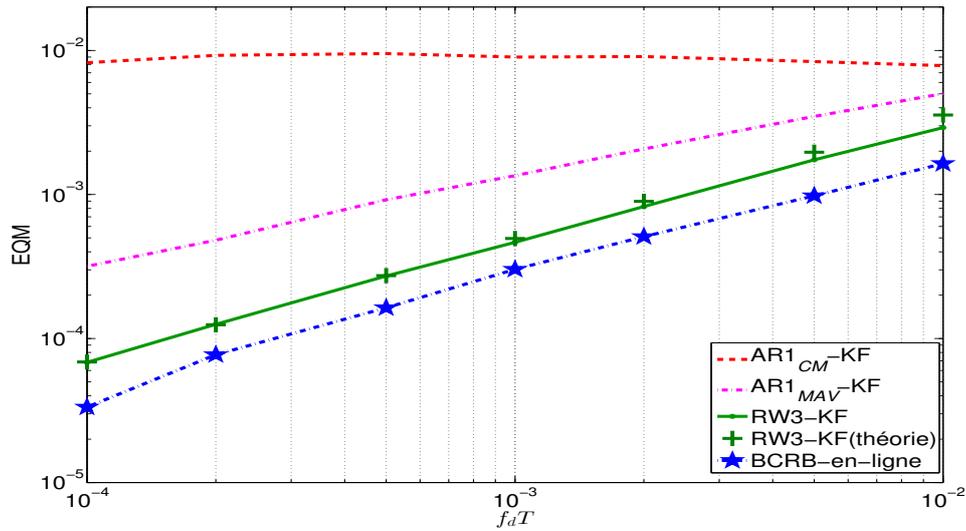


FIGURE 3.3: Comparaison de l'EQM versus  $f_d T$ , RSB = 20 dB

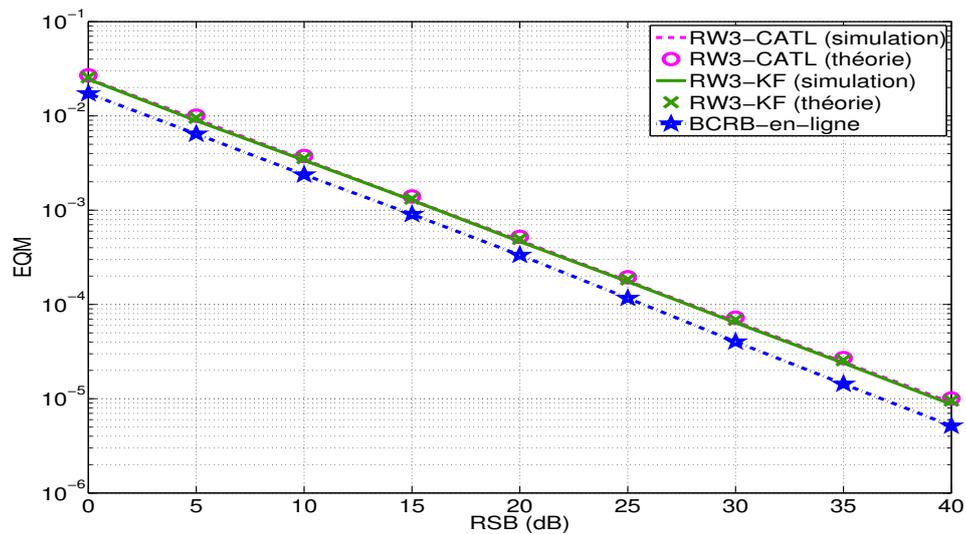


FIGURE 3.4: Comparaison de l'EQM du RW3-KF et de la RW3-CATL ( $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$ ),  $f_d T = 10^{-3}$

en mode "decision-directed"). La figure 3.5 montre le résultat de la simulation, où nous pouvons observer qu'avec la valeur optimale de  $\sigma_{u_{opt}}^2$ , le RW3-KF atteint une performance proche de celle obtenue avec un canal parfaitement connu<sup>1</sup>.

1. Ces performances de TEB à l'aide des décisions semblent meilleures que celles obtenues avec la RW3-CATL (voir la figure 2.14 et le footnote 3 dans le chapitre 2), peut-être en raison de la convergence du RW3-KF qui peut être plus rapide que celle de la boucle RW3-CATL, ce qui lui permet de raccrocher plus vite en cas d'erreur de décision.

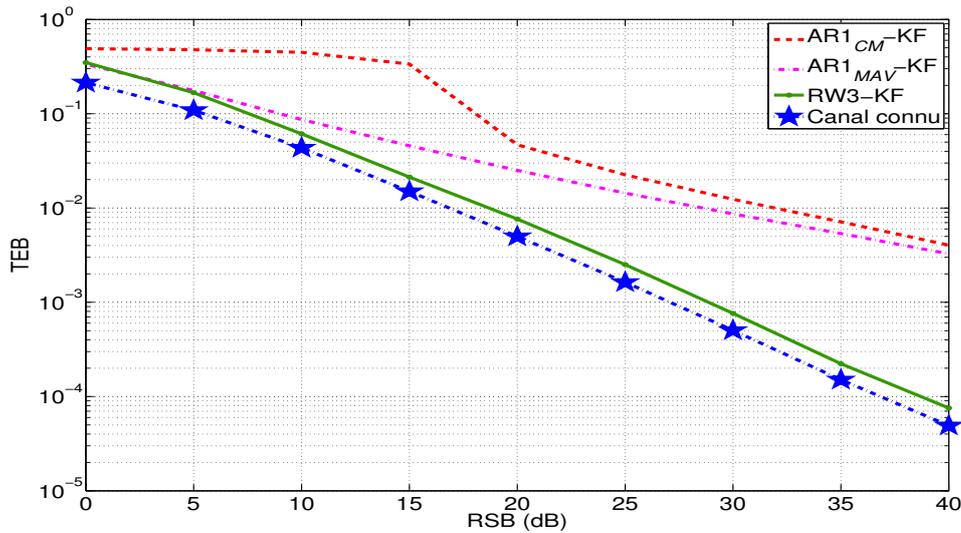


FIGURE 3.5: Comparaison du TEB versus RSB avec modulation QPSK,  $f_d T = 10^{-3}$

### 3.7 Conclusion

Pour conclure, nous avons discuté dans ce chapitre des performances asymptotiques du filtre de Kalman basé sur un modèle RW3 pour des problèmes d'estimation d'un paramètre scalaire, où une application sur l'estimation d'un canal de type Rayleigh-Jakes a également été introduite. Les formules explicites du paramètre optimal du modèle RW3,  $\sigma_{u_{\text{opt}}}^2$  (la variance du bruit d'état), et de l'EQM asymptotique du RW3-KF ont été données. Un lien entre le RW3-KF asymptotique et la DPLL d'ordre 3 classique a également été établi. Nous concluons que le RW3-KF est quasi-équivalent en régime asymptotique à une boucle RW3-CATL réglée avec  $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$ , ceci est bien validé par la simulation. Rappelons cependant que le RW3-KF a une rapidité de convergence beaucoup plus grande que la boucle RW3-CATL, comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Nous concluons également que, pour les estimateurs basés sur le filtre de Kalman, un modèle de marche aléatoire d'ordre 3 (RW3) bien réglé est plus adéquat que le modèle AR1 dans le contexte de variation lente ou modérée. Ceci confirme les résultats qui avaient été obtenus au chapitre précédent avec la boucle d'ordre 3. Les performances obtenues avec ce modèle RW3 sont alors très proches de la borne inférieure de Cramér-Rao.

Notons que les résultats théoriques présentés dans ce chapitre sur les performances asymptotiques du filtre de Kalman d'ordre 3 avec la résolution approximative (cas de variations lentes) des équations de Riccati sont originaux, ils ont été acceptés pour publication dans le journal IEEE Signal Processing Letter [69]. Ces formules analytiques de performances asymptotiques du filtre de Kalman d'ordre 3 peuvent bien sûr être utilisées ou adaptées à d'autres contextes que l'estimation de canal radio-mobile, du moment que nous disposons d'un modèle statistique du paramètre à poursuivre (Spectre Doppler).



# Boucle de poursuite d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal multi-trajet en modulation multi-porteuse OFDM

## 4.1 Introduction

La modulation OFDM (provient de *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* en anglais) est une technique efficace pour atténuer les effets de canal sélectif en fréquence dans des systèmes de communication sans fil. Avec cette technique, un canal sélectif en fréquence large bande est divisé en plusieurs sous-canaux "plats" à bande étroite qui sont sans interférence entre symboles (IES) et sans interférence (en supposant que les variations des ACs du canal sont négligeables pendant la durée d'un symbole OFDM  $T$ ) entre porteuses (IEP). Pour la détection cohérente des symboles de donnée, l'estimation fiable des gains de chaque sous-canal est cruciale pour un système OFDM. Nous allons faire dans cette introduction un rapide état de l'art sur les techniques utilisées pour l'estimation de canal en OFDM [32], et préciser notre démarche.

La plupart des méthodes classiques d'estimation de canal fonctionnent symbole OFDM par symbole OFDM [51][52][53] en n'exploitant que la corrélation fréquentielle du canal, *i.e.* la corrélation entre les sous-canaux mais pas la corrélation temporelle. En général, ces méthodes consistent à estimer la fonction de transfert du canal (c'est-à-dire la  $\mathcal{TF}$  de la réponse impulsionnelle du canal, ou autrement appelée la réponse en fréquence du canal) uniquement aux sous-porteuses pilotes, puis à interpoler cette fonction de transfert aux autres sous-porteuses [51]. L'estimation de la fonction de transfert du canal aux fréquences pilotes peut se fonder sur le critère des moindres carré (LS), ou pour une meilleure performance [52] sur le critère de l'erreur quadratique moyenne linéaire minimum (LMMSE pour *linear minimum mean-squared-error* en anglais). Dans [53], la méthode d'interpolation passe-bas a montré de meilleurs résultats que toutes les techniques d'interpolation utilisées pour l'estimation de canal.

Bien que les méthodes classiques peuvent fonctionner avec un canal variant dans le

temps, l'information de la corrélation temporelle n'est pas exploitée. Pourtant, Hijazi et Ros ont montré dans [54], à travers une analyse de la borne inférieure de Cramér-Rao Bayésienne (BCRB) en ligne, le gain important en performance qui peut être obtenu lorsque les algorithmes prennent en compte, en plus du symbole OFDM courant, les symboles OFDM précédents pour réaliser l'estimation de canal. Certains travaux ont porté sur la dynamique du processus temporel de fading pour obtenir une meilleure estimation de canal. Une structure basée sur le filtre de Kalman a été proposée dans [24]. Elle consiste à utiliser le filtre de Kalman pour estimer chaque sous-canal (en exploitant la corrélation temporelle) et un combineur linéaire (au sens MMSE) pour affiner l'estimation de chaque sous-canal (en exploitant la corrélation fréquentielle). Cependant, la complexité de la structure proposée augmente avec le nombre de sous-porteuses. Par ailleurs, seule une partie des sous-porteuses peuvent être utilisées comme pilotes dans la pratique pour calculer le filtre de Kalman par sous-porteuse, et la fonction de transfert sur toutes les sous-porteuses est alors obtenue par interpolation fréquentielle passe-bas. D'autres travaux qui utilisent le filtre de Kalman en exploitant la corrélation temporelle et fréquentielle pour l'estimation de canal dans des systèmes OFDM sont basés sur des hypothèses supplémentaires ou différentes approches. En supposant que le profil puissance-retard du canal soit disponible, un estimateur de Kalman de type data-aided (DA), (dérivé du cadre de l'algorithme EM (provient de *Expectation-Maximization* en anglais)) est introduit dans [25] pour suivre la réponse impulsionnelle du canal à temps discret (*i.e.* dans le domaine temporel). Et une approche de faible complexité basée sur la décomposition des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation du canal pour réduire les paramètres est proposée dans [55] (*i.e.* dans le domaine fréquentiel). Il s'agit de poursuivre les coefficients de canal dans le sous-espace propre dominant, avant de procéder à l'interpolation des valeurs propres pour calculer la réponse fréquentielle de canal.

Avec la même idée de réduire la dimension du sous-espace signal, nous nous concentrons dans la suite sur les estimateurs paramétriques [56][57]. Comme nous l'avons introduit dans le chapitre 1, un canal de propagation multi-trajet peut être modélisé par ses paramètres physiques, les retards et les ACs des trajets multiples. Ce genre d'estimateur consiste à estimer directement ces paramètres physiques [57][58][59][2], plutôt qu'une version échantillonnée de la réponse impulsionnelle. En outre, dans les canaux radio sans fil, les ACs montrent une forte variation temporelle dès que la fréquence Doppler augmente, alors que les retards peuvent être considérés comme quasi-constant sur un grand nombre de symboles OFDM consécutifs (*c.f.* 1.3.3). Dans ce cas, on peut prévoir une procédure d'acquisition pour ces retards basée sur un préambule. Par exemple dans [57], l'acquisition comprend la détection du nombre de trajets basée sur le principe MDL (description Longueur maximale) et l'acquisition initiale des retards des trajets multiples à l'aide de la méthode ESPRIT (Estimation of Signal Parameters by Rotational Invariance Techniques). Avec ces estimations des paramètres physiques du canal, un estimateur MMSE est dérivé pour estimer la réponse en fréquence du canal, avec une grande amélioration de performance par rapport à des méthodes non paramétriques. Cependant, l'estimateur optimal de Wiener montre une forte complexité et exige la connaissance des statistiques d'ordre 2 du canal. Dans [58], le sous-espace des retards (supposés invariants pendant plusieurs symboles) et les variations rapides des ACs sont estimés séparément par les algorithmes de

poursuite de sous-espace. Dans [59][2], les problèmes d'estimation des ACs des trajets et de la réduction de l'IEP (Interférence Entre Porteuse) ont été traités pour le canal de Rayleigh-Jakes avec une forte mobilité (l'étalement Doppler normalisé  $f_d T \geq 10^{-2}$ ). En s'appuyant sur une modélisation polynomiale de la variation (processus Jakes) des ACs, une estimation polynomiale sur chaque bloc de symboles OFDM est réalisée dans [59], et un filtre de Kalman basé sur le modèle Auto-régressif (AR) pour la variation des coefficients polynomiales est introduit dans [2].

Dans cette partie du mémoire, nous abordons l'estimation d'un canal multi-trajet avec modulation OFDM dans un contexte de variation faible à modérée ( $f_d T \leq 10^{-2}$ ). Nous considérons donc maintenant le canal à  $L_t$  trajets vu au chapitre 1 :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_t} \alpha_l(t) \cdot \delta(\tau - \tau_l), \quad (4.1)$$

avec  $\alpha_l(t)$  l'AC du  $l^{\text{ème}}$  trajet. Rappelons que la RW3-CATL du chapitre 2 a été développé pour estimer l'AC d'un canal mono-trajet en considérant une modulation mono-porteuse. Nous allons étendre ici les résultats du chapitre 2 à la modulation multi-porteuse OFDM et au canal multi-trajet. Nous supposons qu'une phase d'acquisition des retards des trajets est préalablement réalisée. Les  $\tau_l$  seront donc considérés comme parfaitement estimés dans la suite de la thèse, et nous nous concentrerons sur la poursuite des ACs des trajets (ce cadre d'estimation paramétrique de canal avec connaissance des retards est également considéré dans [57][59][2]). L'objectif de ce chapitre est multiple :

- Obtenir un algorithme d'estimation simplifiée par rapport aux estimateurs de Kalman, qui peut atteindre quasiment la même performance en terme d'EQM asymptotique.
- Développer, cette fois pour le cas multi-trajet et multi-porteuse, la formule analytique pour l'EQM minimale et pour les paramètres de la boucle en fonction des paramètres du canal (l'étalement Doppler, les retards et les énergies des trajets (PDP ou *power-delay profile* en anglais), RSB), en supposant un canal de Rayleigh.
- Comparer et montrer l'avantage d'utiliser une boucle d'ordre 3 avec des paramètres bien réglés, versus des estimateur d'ordre 1 et d'ordre 2 pour le canal de Rayleigh avec variation lente.

Rappelons que la structure de la RW3-CATL est inspirée par le principe de "prédiction-correction" du filtre de Kalman [38], et par une DPLL d'ordre 3 [41][12]. Cette boucle est entraînée par le signal d'erreur qui est mis à jour à raison de la durée symbole  $T$ . Dans le cas mono-porteuse et mono-trajet, le signal d'erreur est généré simplement par une comparaison scalaire du signal reçu et de la prédiction obtenue à l'instant précédent. Alors que dans le cas multi-porteuse et multi-trajet, la prédiction précédente des ACs sera générée par un estimateur des moindres carrés (LS), basée sur des sous-porteuses pilotes. La boucle avec ce signal d'erreur particulier est désigné par RW3-LS-CATL. Une analyse théorique de la RW3-LS-CATL est fournie dans la suite.

## 4.2 Transmission OFDM sur le canal multi-trajet

### 4.2.1 Modèle mathématique de l'OFDM

La modulation OFDM utilise un multiplexage des sous-débits à l'aide de  $N$  sous-porteuses complexes orthogonales, réparties dans la bande  $B$ , et espacées de  $\Delta f = \frac{B}{N}$ . L'obtention d'un symbole OFDM à partir de  $N$  symboles de l'ensemble des voies est généralement présentée (et réalisée) au moyen d'une TFDI (Transformée de Fourier discrète inverse) de taille  $N$ , suivie de l'ajout d'un préfixe cyclique (PC) de durée  $T_g$  au début de chaque symbole pour éviter les interférences entre symboles (IES). Ensuite, après la mise en forme analogique, le signal est émis dans le canal. Au récepteur, dans un premier temps, un filtre de réception qui est adapté à celui de l'émetteur est appliqué. Puis le signal est échantillonné au rythme  $\frac{1}{T_s}$ , le préfixe cyclique est supprimé. Enfin la TFD (Transformée de Fourier discrète) est appliquée pour démoduler le signal.

Considérons un système OFDM avec un préfixe cyclique de longueur  $N_g$ . La durée symbole est donc  $T = N_t T_s$  avec  $N_t = N + N_g$ . Le signal radio-fréquence est transmis dans un canal à  $L_t$  trajets. Posons le vecteur  $\mathbf{x}_{(k)}$  le  $k^{\text{ème}}$  symbole OFDM transmis, avec ses  $N$  éléments  $[\mathbf{x}_{(k)}]_n = a_{k,n} + j b_{k,n}$  ( $n = 1 \cdots N$ ,  $a_{k,n}, b_{k,n} \in \mathbb{R}$ ) étant des sous-symboles modulés en phase ( $M$ -PSK) ou en quadrature ( $M$ -QAM) transmis sur la sous-porteuse à la fréquence  $\frac{n-N/2}{NT}$ . Les sous-symboles sont supposés centrés et stationnaires avec une variance normalisée :

$$\mathbb{E} \left\{ \left| [\mathbf{x}_{(k)}]_n \right|^2 \right\} = \sigma_x^2 = 1.$$

L'équation de transmission d'un symbole OFDM s'écrit :

$$\mathbf{y}_{(k)} = \mathbf{H}_{(k)} \mathbf{x}_{(k)} + \mathbf{w}_{(k)}, \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{y}_{(k)}$  est le  $k^{\text{ème}}$  symbole OFDM reçu de taille  $N \times 1$  ;  $\mathbf{w}_{(k)}$  est le vecteur de bruit du canal de taille  $N \times 1$ , il est de type bruit blanc Gaussien additif complexe circulaire, centré, de matrice de covariance  $\sigma_w^2 \mathbf{I}_N$ .  $\mathbf{H}_{(k)}$  est une matrice de taille  $N \times N$ , avec ses éléments décrits par [60] :

$$[\mathbf{H}_{(k)}]_{m,n} = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{L_t} \left[ e^{-j2\pi \left( \frac{n-1}{N} - \frac{1}{2} \right) \check{\tau}_l} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_{l(k)}(qT_s) e^{-j2\pi \frac{n-m}{N} q} \right]. \quad (4.3)$$

Dans cette équation,  $m$  et  $n$  sont des indices de la matrice,  $m = 1, \dots, N$ ;  $n = 1, \dots, N$ ;  $q$  est l'indice d'échantillon en temps,  $\alpha_{l(k)}(qT_s)$  est l'AC du  $k^{\text{ème}}$  symbole OFDM (notons que dans les cas mono-porteuse, le canal est échantillonné au rythme  $\frac{1}{T}$ , alors que dans les systèmes OFDM, le canal est échantillonné au rythme  $\frac{1}{T_s}$ , qui est  $N$  fois plus rapide qu'avant) du  $l^{\text{ème}}$  trajet défini comme :

$$\alpha_{l(k)}(qT_s) = \alpha_l((kN_t + q)T_s) = \alpha_l(kT + qT_s), \quad (4.4)$$

avec  $\alpha_l(t)$  l'AC du  $l^{\text{ème}}$  trajet, il a une variance de  $\sigma_{\alpha_l}^2$  (avec l'énergie du canal normalisée, soit  $\sum_{l=1}^{L_t} \sigma_{\alpha_l}^2 = 1$ ) ;  $\check{\tau}_l$  est le retard du  $l^{\text{ème}}$  trajet, normalisé par  $T_s$  (Notons même que  $\check{\tau}_l$

est défini par  $\frac{\check{\tau}_l}{T_s}$ , il n'est pas nécessairement un entier, mais  $\check{\tau}_l < N_g$  pour éviter l'IES). En cas de variation lente des ACs,  $\alpha_l$  reste quasi-invariant pendant la durée symbole  $T$  (nous poserons  $\alpha_{l(k)} = \alpha_{l(k)}(\frac{N_t}{2} T_s)$ ), alors :

$$\frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} \alpha_{l(k)}(qT_s) e^{-j2\pi \frac{n-m}{N} q} = \alpha_{l(k)} \cdot \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{N-1} e^{-j2\pi \frac{n-m}{N} q} = \begin{cases} \alpha_{l(k)} & \text{pour } n = m, \\ 0 & \text{pour } n \neq m, \end{cases} \quad (4.5)$$

suite à l'orthogonalité entre les sous-porteuses. L'équation (4.3) peut alors être simplifiée :

$$[\mathbf{H}_{(k)}]_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{L_t} \left[ \alpha_{(k)l} \cdot e^{-j2\pi(\frac{n-1}{N} - \frac{1}{2})\check{\tau}_l} \right] & \text{pour } n = m, \\ 0 & \text{pour } n \neq m. \end{cases} \quad (4.6)$$

$\mathbf{H}_{(k)}$  est ainsi une matrice diagonale, illustrée sur la figure 4.1. En réécrivant  $\mathbf{H}_{(k)}$  sous forme matricielle, nous avons :

$$\mathbf{H}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}_{(k)}\}, \quad (4.7)$$

avec  $\boldsymbol{\alpha}_{(k)} = [\alpha_{1(k)}, \dots, \alpha_{L_t(k)}]^T$  et  $\mathbf{F}$  la matrice de Fourier de taille  $N \times L_t$  qui dépend de la distribution des retards des trajets. Les éléments de  $\mathbf{F}$  sont définis par :

$$[\mathbf{F}]_{n,l} = e^{-j2\pi(\frac{n-1}{N} - \frac{1}{2})\check{\tau}_l}. \quad (4.8)$$

Comme l'objectif est l'estimation de  $\boldsymbol{\alpha}_{(k)}$ , nous réécrivons le signal  $\mathbf{y}_{(k)}$  comme :

$$\mathbf{y}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{x}_{(k)}\} \mathbf{F}\boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \mathbf{w}_{(k)}. \quad (4.9)$$

Rappelons que l'algorithme basé sur la RW-CATL peut être employé (de manière alors sous-optimale) si on n'a pas de connaissance *a priori* pour la variation des ACs. Cependant, nous fournissons dans la suite l'analyse théorique basée sur le modèle de Rayleigh-Jakes, qui impose que les ACs des  $L_t$  trajets  $\alpha_{l(k)}$  soient des processus complexes circulaires indépendants à bande étroite, de type Gaussien centré stationnaire au sens large (WSS), avec les coefficients de corrélation pour un retard  $p$  définis comme :

$$R_{\alpha_l}[p] = E \{ \alpha_{l(k)} \cdot \alpha_{l(k-p)}^* \} = \sigma_{\alpha_l}^2 J_0(2\pi f_d T \cdot p).$$

### 4.2.2 Modèle des pilotes

L'estimation du canal est réalisée à partir des sous-porteuses pilotes sur lesquelles on transmet des symboles pilotes, qui sont parfaitement connus au récepteur. Supposons que  $N_p$  sous-porteuses pilotes sont uniformément insérées dans les  $N$  sous-porteuses aux positions  $\mathcal{P} = \{n_p | n_p = (p-1)L_f + 1, p = 1, \dots, N_p\}$  avec  $L_f$  la distance entre deux pilotes adjacents. Le signal reçu sur les sous-porteuses pilotes s'écrit :

$$\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} = \mathbf{X}_{(k)} \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}, \quad (4.10)$$

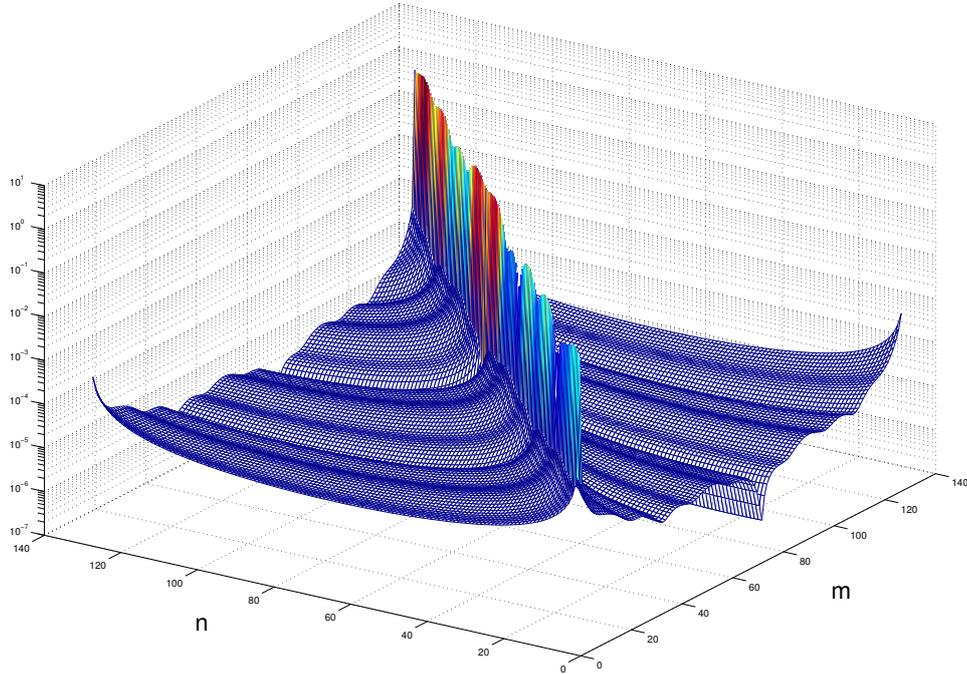


FIGURE 4.1: Illustration de la puissance des coefficients de la matrice  $\mathbf{H}(k)$ ,  $20 \lg |[\mathbf{H}(k)]_{m,n}|$ , avec  $N = 128$ ,  $f_d T = 10^{-3}$  pour un canal GSM (avec le PDP donné par la table 4.1).

où  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} = [\mathbf{y}(k)]_{n_0} \quad [\mathbf{y}(k)]_{n_1} \quad \cdots \quad [\mathbf{y}(k)]_{n_{N_p-1}}]^T$  et  $\mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)} = [\mathbf{w}(k)]_{n_0} \quad [\mathbf{w}(k)]_{n_1} \quad \cdots \quad [\mathbf{w}(k)]_{n_{N_p-1}}]^T$  avec  $n_p \in \mathcal{P}$  sont des vecteurs de taille  $N_p \times 1$ , et la matrice  $\mathbf{X}(k)$  de taille  $N_p \times L_t$  est définie par

$$\mathbf{X}(k) = \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}, \quad (4.11)$$

qui peut être calculée pour chaque symbole OFDM depuis le vecteur (de taille  $N_p \times 1$ ) des sous-symboles de pilote  $\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)} = [\mathbf{x}(k)]_{n_0} \quad [\mathbf{x}(k)]_{n_1} \quad \cdots \quad [\mathbf{x}(k)]_{n_{N_p-1}}]^T$  avec  $n_p \in \mathcal{P}$  et les retards via la matrice de Fourier de taille  $N_p \times L_t$  avec ses éléments définis comme :

$$[\mathbf{F}_{\mathbf{p}}]_{n_p, l} = e^{-j2\pi(\frac{n_p-1}{N} - \frac{1}{2})\tilde{\tau}_l}, \quad n_p \in \mathcal{P}, \quad l = 1 \cdots L_t. \quad (4.12)$$

### 4.3 RW3-LS-CATL pour des systèmes OFDM

L'algorithme proposé est constitué d'une structure et d'un signal d'erreur spécifique. Nous allons d'abord discuter de la structure, avant de présenter le signal d'erreur utilisé.

#### 4.3.1 De la structure scalaire à la structure vectorielle

Dans le chapitre 2, nous avons introduit la boucle RW3-CATL qui sert à poursuivre l'AC d'un canal mono-trajet, les signaux de cette boucle sont tous scalaires. Dans un système

OFDM avec un canal à trajets multiples, le signal reçu  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$ , ainsi que les ACs du canal  $\boldsymbol{\alpha}_{(k)}$  sont tous vectoriels. Sans toucher le principe de la boucle, nous passons dans un première temps la boucle scalaire à une structure vectorielle. Reformulons les équations de la boucle (2.34) ~ (2.39) comme :

**signal d'erreur :**

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\epsilon}(k)} = f \left\{ \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}; \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} \right\}, \quad (4.13)$$

**Filtre de boucle :**

$$\mathbf{v}_{\text{Lag1}(k)} = \mathbf{v}_{\text{Lag1}(k-1)} + \mathbf{v}_{\boldsymbol{\epsilon}(k)}, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{v}_{\text{Lag2}(k)} = \mathbf{v}_{\text{Lag2}(k-1)} + \mathbf{v}_{\text{Lag1}(k)}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{c}(k)} = \mu_1 \mathbf{v}_{\boldsymbol{\epsilon}(k)} + \mu_2 \mathbf{v}_{\text{Lag1}(k)} + \mu_3 \mathbf{v}_{\text{Lag2}(k-1)}, \quad (4.16)$$

**Générateur à commande numérique :**

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k+1|k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} + \mathbf{v}_{\mathbf{c}(k)}, \quad (4.17)$$

**Estimation finale :**

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} + \mu_1 \mathbf{v}_{\boldsymbol{\epsilon}(k)}. \quad (4.18)$$

Notons que les coefficients du filtre de boucle restent trois scalaires positifs réels. Dans (4.13), nous utilisons la notation  $f\{\cdot\}$  pour indiquer que plusieurs signaux d'erreurs sont possibles (*c.f.* [28]), et qu'il nous faudra en choisir un bien adéquat avec notre modèle complet. Avant d'indiquer notre choix pour le signal d'erreur, considérons le cas d'école le plus simple, où le vecteur d'observation  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}}$  est de la même taille que le vecteur de l'AC  $\boldsymbol{\alpha}$ , soit  $N_p = L_t$ , et supposons que  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} = N_p \mathbf{I}_{L_t}$ , c'est-à-dire qu'on puisse isoler la contribution de chaque trajet par simple filtre adapté (sorte d'«orthogonalité» entre les versions d'une même sous-porteuse retardées par les différents trajets). Nous pourrions alors définir la fonction  $f\{\cdot\}$  tout simplement par une soustraction vectorielle, *i.e.*  $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\epsilon}(k)} = \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}$  avec  $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} = \mathbf{X}_{(k)}^{-1} \cdot \mathbf{y}_{\mathbf{p}}$  le symbole reçu égalisé, de sorte que la boucle soit en effet une juxtaposition de  $L_t$  RW3-CATLs qui fonctionnent parallèlement. Dans ce scénario favorable de distribution des trajets, la performance d'estimation de cette boucle vectorielle pour le cas multi-porteuse multi-trajet serait donc exactement la même que celle de la RW3-CATL pour le scénario mono-porteuse mono-trajet. Mais dans le cas général où  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \neq N_p \mathbf{I}_{L_t}$  (et aussi où  $N_p \neq L_t$ ), les divers éléments du symbole reçu égalisé  $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)}$  dépendront non pas d'un seul trajet mais de l'ensemble des trajets, et nous allons adopter une autre définition du signal d'erreur dans le paragraphe suivant, afin de mieux tenir compte du modèle complet.

### 4.3.2 Signal d'erreur basé sur les Moindres Carrés

Nous allons dans ce paragraphe présenter le détecteur d'erreur vectoriel choisi pour (4.13). Inspiré par les boucles à verrouillages de phase (PLL), un bon candidat parmi plusieurs possibilités [28] est un signal d'erreur vectoriel co-linéaire (en absence de bruit) au

vecteur d'erreur de prédiction,  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{Pred}(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{(k)} - \boldsymbol{\alpha}_{(k|k-1)}$ . Cela permettra d'obtenir un détecteur linéaire ne présentant aucune interférence entre trajets. Voyons dans la suite comment nous pouvons obtenir un tel détecteur.

Pour un symbole OFDM, la distance quadratique (ou l'erreur quadratique) entre le signal reçu (les sous-symboles de pilote bruités) et son estimation (calculée à partir de l'estimation de canal de manière quelconque  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}$ , qui est basée uniquement sur le  $k^{\text{ème}}$  symbole OFDM) est donnée par :

$$S(\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}) = \mathbf{d}_{(k)}^H \cdot \mathbf{d}_{(k)}, \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{d}_{(k)}$  est la différence vectorielle définie par :

$$\mathbf{d}_{(k)} = \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} - \mathbf{X}_{(k)} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}. \quad (4.20)$$

**Remarque :** Il ne faut pas confondre la notation  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}$  et  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}$ .  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}$  correspond à l'estimation de  $\boldsymbol{\alpha}_{(k)}$  lorsque celle-ci est réalisée uniquement sur le symbole OFDM courant (d'indice  $k$ ), alors que  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}$  correspond à l'estimation de  $\boldsymbol{\alpha}_{(k)}$  réalisée sur le symbole OFDM courant (d'indice  $k$ ) et sur les symboles OFDM passés (d'indice 0 à  $k-1$ ).  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}$  sera utilisé comme référence pour produire le signal d'erreur de la boucle, alors que  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}$  est la sortie de la boucle.

Il y a plusieurs façons de calculer  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}$ . Nous utiliserons ici la méthode des moindres carrés (LS) et nous noterons alors  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)}$ . L'estimation LS basé sur l'observation  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$  est calculée comme [28, 32] :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = \mathbf{G}_{(k)}^H \cdot \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} \quad (4.21)$$

avec

$$\mathbf{G}_{(k)} = \left( \mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{X}_{(k)} \right)^{-1} \mathbf{X}_{(k)}^H, \quad (4.22)$$

et rappelons que  $\mathbf{X}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}$ . Notons que l'estimation LS impose la condition  $N_p \geq L_t$  afin de réaliser la pseudo-inverse de (4.22) (sinon la matrice  $\mathbf{X}_{(k)}^H \mathbf{X}_{(k)}$  sera non inversible). Cependant, un estimateur MMSE permet d'effectuer l'inverse matricielle dans (4.22) pour  $N_p < L_t$ . En plus, notons que l'inverse matricielle peut être exécutée hors-ligne, étant donné que les symboles pilotes sont fixés au long d'une transmission. Ainsi, la matrice  $\mathbf{G}_{(k)}$  ne dépend plus du temps, c'est-à-dire qu'elle peut être pré-calculée avant de lancer la boucle, et ainsi sans augmenter la complexité de l'algorithme. Nous pouvons aussi simplifier  $\mathbf{G}_{(k)}$  (avec l'hypothèse  $\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}^H \mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)} = 1$ ) comme :

$$\mathbf{G}_{(k)} = \left( \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \right)^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\}. \quad (4.23)$$

Depuis (4.21)(4.22)(4.10), nous obtenons :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \mathbf{w}_{\text{TL}(k)}, \quad (4.24)$$

où  $\mathbf{w}_{\text{TL}(k)}$  est l'erreur d'estimation LS, il est un vecteur complexe Gaussien centré, de dimension  $L_t \times 1$ .

Après l'estimation LS, nous pouvons définir maintenant le signal d'erreur du  $k^{\text{ème}}$  symbole OFDM comme la différence entre l'estimation LS  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)}$  et la prédiction de la boucle  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}$ , soit :

$$\mathbf{v}_{\varepsilon(k)} = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} = \mathbf{G}^{(k)} \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}. \quad (4.25)$$

En utilisant (4.24), le signal d'erreur peut être réécrit comme :

$$\mathbf{v}_{\varepsilon(k)} = \boldsymbol{\alpha}^{(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)} + \mathbf{w}_{\text{TL}(k)}. \quad (4.26)$$

où  $\boldsymbol{\alpha}^{(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}$  est l'erreur de la prédiction. On voit donc que le signal d'erreur vectoriel retenu a bien la propriété désirée de co-linéarité (en absence de bruit) avec l'erreur de prédiction (voir (4.26)). Cela permettra que chacune des  $L_t$  composantes, associée à un trajet parmi  $L_t$ , soit traitée de manière indépendante et autonome des autres composantes, par la branche associée de la boucle RW3-LS-CATL. La boucle vectorielle RW3-LS-CATL aura ainsi un fonctionnement simple, équivalent dans chaque branche à celui de la boucle scalaire RW3-CATL établie pour le problème mono-porteuse mono-trajet. Néanmoins les performances ne seront pas forcément toujours équivalentes, car dans la branche traitant un trajet  $l$  donné, la composante du bruit de boucle correspondante dépendra généralement des autres trajets, comme nous allons le voir.

Notons que l'erreur d'estimation LS  $\mathbf{w}_{\text{TL}(k)}$  sera injecté ensuite dans la boucle, donc nous l'appelons aussi le bruit de boucle ("TL" pour *tracking loop* en anglais). Depuis (4.21), (4.22) et (4.10), le bruit de boucle peut être réécrit comme :

$$\mathbf{w}_{\text{TL}(k)} = \mathbf{G}^{(k)} \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}. \quad (4.27)$$

La matrice de covariance du bruit de boucle est donc calculée par :

$$E \left\{ \mathbf{w}_{\text{TL}(k)} \cdot \mathbf{w}_{\text{TL}(k)}^H \right\} = \sigma_w^2 \cdot \left( \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \right)^{-1}. \quad (4.28)$$

La variance moyenne par trajet est donc calculée par :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{TL}}^2 &= \frac{1}{L_t} \cdot \sigma_w^2 \cdot \text{Trace} \left\{ \left( \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \right)^{-1} \right\} \\ &= \lambda_{\text{TL}} \cdot \frac{\sigma_w^2}{N_p}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

avec le facteur  $\lambda_{\text{TL}}$  normalisé défini comme :

$$\lambda_{\text{TL}} = \frac{N_p}{L_t} \cdot \text{Trace} \left\{ \left( \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \right)^{-1} \right\}. \quad (4.30)$$

Notons que la valeur de  $\text{Trace} \left\{ \left( \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \right)^{-1} \right\}$  dépend du PDP du canal, il vaut au minimum  $\frac{L_t}{N_p}$  (soit  $\lambda_{\text{TL}}=1$ ) si et seulement si les colonnes de  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}$  sont orthogonales (cela n'est pas souvent le cas en pratique).

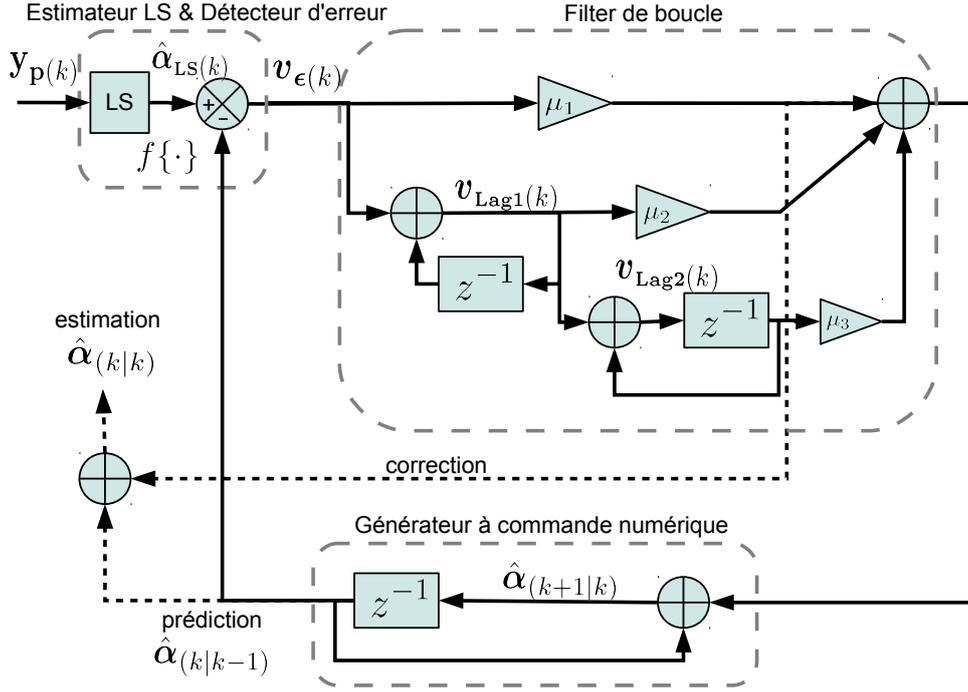


FIGURE 4.2: Structure vectorielle de la RW3-LS-CATL

Une telle RW3-CATL associée à un estimateur LS est désignée par RW3-LS-CATL dans cette thèse. La structure vectorielle de RW3-LS-CATL est montrée sur la figure 4.2. Notons que si l'on enlève les branches de  $\mu_2$  et de  $\mu_3$  (soit  $\mu_2 = \mu_3 = 0$ ), la boucle de LS-CATL revient à un filtre passe-bas de l'estimateur LS  $\hat{\alpha}_{\text{LS}}(k)$  (en combinant (4.16)~(4.18)) :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}(k|k) &= \hat{\alpha}(k-1|k-1) + \mu_1 \cdot (\alpha(k) - \hat{\alpha}(k-1|k-1) + \mathbf{w}_{\text{TL}}(k)) \\ &= (1 - \mu_1) \cdot \hat{\alpha}(k-1|k-1) + \mu_1 \cdot \hat{\alpha}_{\text{LS}}(k).\end{aligned}\quad (4.31)$$

En fait, cette équation revient à l'algorithme LMS avec  $\mu_1$  le pas d'adaptation de l'algorithme [9].

### 4.3.3 Complexité de l'algorithme

La complexité de l'algorithme d'estimation basé sur la RW3-LS-CATL n'est calculée qu'en comptant seulement le nombre de multiplications dans les équations itératives pour chaque symbole OFDM, il s'agit des équations de boucle (4.13) ~ (4.18) avec (4.13) définie par (4.25). Notons que les matrices  $\mathbf{G}(k)$  (de taille  $L_t \times N_p$ ) et  $\mathbf{X}(k)$  (de taille  $N_p \times L_t$ ) sont supposées invariantes, elles sont donc pré-calculées avec une complexité négligeable lorsque le nombre de symboles OFDM est important.

Nous avons donc, pour (4.25),  $N_p \times L_t$  multiplications ; pour (4.16),  $3 \times L_t$  multiplications ( $2 \times L_t$  et  $L_t$  multiplications pour RW2-LS-CATL et RW1-LS-CATL respectivement). La complexité des RW-LS-CATLs est donc de l'ordre de  $N_p$  ( $O(N_p)$ ).

#### 4.3.4 Caractéristique et paramétrage de la RW3-LS-CATL

Étudions maintenant la fonction de transfert de la RW3-LS-CATL. Nous pouvons appliquer la même démarche que dans le chapitre 2 puisque la structure de la RW3-LS-CATL est semblable à celle de la RW3-CATL, sauf que tous les signaux dans la boucle sont maintenant des vecteurs de taille  $L_t \times 1$ . En effet, (2.40) ~ (2.44) peuvent être retrouvées sous forme vectorielles. L'équation (2.40) a été remplacée par (4.26). Et puis, en combinant (4.18) et (4.26), nous retrouvons (2.41) et sa version dans le domaine de la  $\mathcal{FZ}$  (2.42) comme :

$$\mathbf{v}_{\epsilon}(k) = \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}(k) - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}) + \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot \mathbf{w}_{\text{TL}}(k) \quad (4.32)$$

et

$$\mathbf{v}_{\epsilon}(z) = \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot (\boldsymbol{\alpha}(z) - \hat{\boldsymbol{\alpha}}(z)) + \frac{1}{1 - \mu_1} \cdot \mathbf{w}_{\text{TL}}(z). \quad (4.33)$$

Ensuite, après la  $\mathcal{FZ}$  de (4.14)(4.14) et de la combinaison de (4.16)(4.17), nous avons :

$$\mathbf{v}_{\text{Lag1}}(z) = \frac{\mathbf{v}_{\epsilon}(z)}{1 - z^{-1}}, \quad (4.34)$$

$$\mathbf{v}_{\text{Lag2}}(z) = \frac{\mathbf{v}_{\epsilon}(z)}{(1 - z^{-1})^2}, \quad (4.35)$$

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(z)(1 - z^{-1}) = \mu_1 \mathbf{v}_{\epsilon}(z) + \mu_2 \mathbf{v}_{\text{Lag1}}(z)z^{-1} + \mu_3 \mathbf{v}_{\text{Lag2}}(z)z^{-2}. \quad (4.36)$$

En injectant (4.34)(4.35) dans (4.36), nous retrouvons (2.43) comme :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(z)(1 - z^{-1}) = \left[ \mu_1 + \frac{\mu_2 \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}} + \frac{\mu_3 \cdot z^{-2}}{(1 - z^{-1})^2} \right] \cdot \mathbf{v}_{\epsilon}(z). \quad (4.37)$$

Enfin, en combinant (4.33) et (4.37), l'équation (2.44) est retrouvée comme :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}(z) = L(z) \cdot \boldsymbol{\alpha}(z) + L(z) \cdot \mathbf{w}_{\text{TL}}(z), \quad (4.38)$$

avec  $L(z)$  ayant exactement la même expression de (2.45). Par conséquent, les équations (2.47) ~ (2.54) qui font le passage à la PLL analogique ainsi que les conditions de stabilité (2.74)~(2.76) sont également retrouvées pour la RW3-LS-CATL.

Pour calculer l'EQM globale de cet estimateur vectoriel, nous appliquons de nouveau la méthode présentée dans le chapitre 2, soit la division de la variance d'erreur en deux parties, la partie statique et la partie dynamique, puis le calcul séparé des 2 parties.

La variance d'erreur statique est définie comme :

$$\sigma_{\epsilon w}^2 = \int_{-\frac{1}{2T_u}}^{+\frac{1}{2T_u}} \Gamma_w(f) \cdot |L(e^{j2\pi f T})|^2 df, \quad (4.39)$$

avec maintenant  $\Gamma_w(f) = \sigma_{\text{TL}}^2 \cdot T$  la DSP moyenne du bruit de boucle de chaque trajet.

La variance d'erreur dynamique est définie comme :

$$\sigma_{e\alpha}^2 = \int_{-\frac{1}{2T_u}}^{+\frac{1}{2T_u}} \Gamma_\alpha(f) \cdot |1 - L(e^{j2\pi f T})|^2 df, \quad (4.40)$$

où  $\Gamma_\alpha(f)$  est la DSP moyenne de l'AC de chaque trajet, donnée par :

$$\Gamma_\alpha(f) = \begin{cases} \frac{\frac{\sigma_\alpha^2}{L_t}}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}} & \text{pour } |f| \leq f_d, \\ 0 & \text{pour } |f| > f_d, \end{cases} \quad (4.41)$$

pour le spectre Doppler de Jakes.

Nous retrouvons facilement donc, la variance d'erreur statique de la RW3-LS-CATL :

$$\sigma_{eW}^2 = \sigma_{tL}^2 \cdot B_L, \quad (4.42)$$

avec  $B_L$  la même bande équivalente de bruit que la RW3-CATL donnée par (2.84). La variance d'erreur dynamique est retrouvée avec la contrainte (2.93) comme :

$$\sigma_{e\alpha}^2 \approx \frac{S_\alpha}{(m\zeta)^2 (f_n T)^6}, \quad (4.43)$$

où  $S_\alpha = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot (fT)^6 df$ .

Après avoir appliqué la même démarche que pour le paramétrage de la RW3-CATL, nous retrouvons les paramètres sous-optimaux pour la RW3-LS-CATL comme :

$$\begin{aligned} m_{\text{ss-opt}} &= 3.19, \\ \zeta_{\text{ss-opt}} &= 0.39, \\ f_{n \text{ ss-opt}} &= \frac{1}{T} \left( \frac{S_\alpha Q}{4\pi\sigma_{tL}^2} \right)^{\frac{1}{7}}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

avec  $Q$  défini par (2.113). L'EQM minimale est donc retrouvée comme :

$$\sigma_{e \text{ min}}^2 = C \cdot (2\pi\sigma_{tL}^2)^{\frac{6}{7}} \cdot (S_\alpha)^{\frac{1}{7}}, \quad (4.45)$$

avec  $C$  donné par (2.115). De nouveau, en utilisant (4.41), nous obtenons la valeur sous-optimale de  $f_n$  et l'EQM minimale pour le spectre Doppler de Jakes. La fréquence sous-optimale est donc :

$$f_n = \frac{1}{T} \left( \frac{(5f_d T)^6 \frac{\sigma_\alpha^2}{L_t} Q}{32C_1} \right)^{\frac{1}{7}}, \quad (4.46)$$

et l'EQM minimale (valeur moyenne par trajet) :

$$\sigma_{e \text{ min}}^2 = C \cdot (C_1 \cdot f_d T)^{\frac{6}{7}} \cdot \left( \frac{5}{16} \cdot \frac{\sigma_\alpha^2}{L_t} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (4.47)$$

$C_1 = 2\pi\sigma_{\text{TL}}^2$ ,  $C$  et  $Q$  sont des termes en fonction de  $m$  et  $\zeta$ , données par (2.115) et (2.113) respectivement. Nous retrouverons en effet tous les résultats dans la table 2.2, mais en remplaçant  $\sigma_w^2$  et  $\sigma_\alpha^2$  par  $\sigma_{\text{TL}}^2$  et  $\frac{\sigma_\alpha^2}{L_t}$  respectivement.

Rappelons que  $\sigma_{\text{TL}}^2 = \lambda_{\text{TL}} \cdot \frac{\sigma_\alpha^2}{N_p}$ , nous constatons donc que l'EQM globale de la RW3-LS-CATL est celle de la RW3-CATL dans le cas mono-porteuse mono-trajet multiplié par un facteur  $(\frac{\lambda_{\text{TL}}}{N_p})^{\frac{6}{7}} (\frac{1}{L_t})^{\frac{1}{7}}$ , le minimum de ce facteur est obtenu dans le cas où les  $L_t$  trajets sont " orthogonaux " l'un l'autre, soit  $\lambda_{\text{TL}} = 1$ . Néanmoins, en pratique, les trajets ne sont pas parfaitement isolés, *i.e.*  $\lambda_{\text{TL}} > 1$ , il s'en suit donc une amplification du bruit de boucle, due à une sorte d'interférence entre les trajets qu'il a fallu annuler.

### Cas particuliers pour des modèles RW2 et RW1

Comme la RW3-LS-CATL, les boucles d'ordre 2 et d'ordre 1 peuvent être étendues aux structures vectorielles de la même manière. Nous fournissons sans développer les résultats de paramétrage.

Pour la RW2-LS-CATL, les paramètres sous-optimaux sont :

$$\begin{aligned} \zeta_{\text{ss-opt}} &= 0.5, \\ f_{n \text{ ss-opt}} &= \frac{1}{T} \left( \frac{2S_\alpha}{\pi\sigma_{\text{TL}}^2} \right)^{\frac{1}{5}}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

avec  $S_\alpha^{(RW2)} = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot (fT)^4 df$ . Et l'EQM globale minimale de RW2-LS-CATL est donc :

$$\sigma_{\epsilon \text{ min}}^2 = \frac{5}{4} \cdot (2\pi\sigma_{\text{TL}}^2 T)^{\frac{4}{5}} \cdot (4S_\alpha^{(RW2)})^{\frac{1}{5}}. \quad (4.49)$$

De même, la fréquence de coupure sous-optimale de la RW1-LS-CATL est

$$f_{c \text{ ss-opt}} = \frac{1}{T} \left( \frac{2S_\alpha}{\pi\sigma_{\text{TL}}^2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (4.50)$$

avec  $S_\alpha^{(RW1)} = \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} \Gamma_\alpha(f) \cdot (fT)^2 df$ . L'EQM globale minimale de RW1-LS-CATL est donc :

$$\sigma_{\epsilon \text{ min}}^2 = \frac{3}{4} \cdot (2\pi\sigma_{\text{TL}}^2 T)^{\frac{2}{3}} \cdot (4S_\alpha^{(RW1)})^{\frac{1}{3}}. \quad (4.51)$$

Les résultats pour le spectre de Jakes peuvent être obtenus directement en utilisant (4.41) pour calculer  $S_\alpha$ , et nous trouverons les expressions dans la table 2.2, en remplaçant  $\sigma_w^2$  et  $\sigma_\alpha^2$  par  $\sigma_{\text{TL}}^2$  et  $\frac{\sigma_\alpha^2}{L_t}$  respectivement. Ces formules pour le cas du spectre de Jakes et les ordres 1 et 2 correspondent à celles obtenues dans l'article [33].

## 4.4 Simulation

Dans cette partie, nous vérifions nos analyses par la simulation et nous testons la performance de la RW3-LS-CATL en terme d'EQM et de TEB. Dans un premier temps, nous donnons les valeurs optimales des boucles pour différents RSB et nombre de pilotes en utilisant deux types de canal (PDP) : le canal GSM [61] et le canal WiMAX mobile (Vehicular A) [62]. Ils sont tous les deux composés de 6 trajets dont les paramètres sont résumés dans la table 4.1. L'énergie des deux canaux est normalisée, *i.e.*  $\sum_{l=1}^{L_t} \sigma_{\alpha_l}^2 = 1$ . La bande du système OFDM est de  $1/T_s = 2$  MHz.

Canal	Paramètre	Numéro de trajet (Tap)					
		1	2	3	4	5	6
GSM	$\tau_l$ (ns)	0	200	500	1600	2300	5000
	$\sigma_{\alpha_l}^2$ (dB)	-7.219	-4.219	-6.219	-10.219	-12.219	-14.219
WiMAX mobile	$\tau_l$ (ns)	0	310	710	1090	1730	2510
	$\sigma_{\alpha_l}^2$ (dB)	-3.1425	-4.1425	-12.1425	-13.1425	-18.1425	-23.1425

TABLE 4.1: PDP des canaux du réseau mobile

Pour un canal donné, nous pouvons tout d'abord calculer le facteur  $\lambda_{\text{TL}}$  (4.30) qui décide la variance du bruit de boucle. La table 4.2 donne les valeurs de  $\lambda_{\text{TL}}$  en fonction du nombre de pilotes pour les deux types de canal.

Nombre de pilotes	6	8	16	32	64	128
$\lambda_{\text{TL}}$ (GSM)	13.271	3.703	2.804	2.736	2.725	2.722
$\lambda_{\text{TL}}$ (WiMAX mobile)	2.445	1.711	1.559	1.535	1.529	1.528

TABLE 4.2: La valeur de  $\lambda_{\text{TL}}$  en fonction du nombre de pilotes

Les résultats des fréquences naturelles (ou la fréquence de coupure pour la RW1-LS-CATL) sous-optimales des boucles sont calculées avec (4.44)(4.48)(4.50) et résumées dans les tables 4.3 et 4.4. Nous constatons que, les fréquences naturelles optimales augmentent avec le nombre de pilotes, et aussi de manière proportionnelle au RSB. Plus grand est l'ordre de la boucle, plus faible (lente) est l'augmentation de la fréquence naturelle optimale en fonction du nombre de pilotes et du RSB.

Les simulations dans la suite utilisent par défaut le canal GSM. Mais notre travail pourra s'appliquer à tous types de canal à trajets multiples sélectif en fréquence et en temps (variation lente en temps). Nous illustrons tous d'abord la simulation d'EQM de la RW3-LS-CATL

Nombre de pilotes		6	8	16	32	64	128
GSM	RW1 $\left(\frac{f_c}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	13.25	22.55	31.16	39.59	49.95	62.95
	RW2 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	4.45	6.12	7.43	8.58	9.87	11.34
	RW3 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	2.61	3.27	3.76	4.17	4.60	5.08
WiMAX mobile	RW1 $\left(\frac{f_c}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	23.52	29.16	37.90	48.00	60.55	76.31
	RW2 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	6.28	7.14	8.36	9.63	11.07	12.72
	RW3 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	3.33	3.66	4.09	4.53	5.00	5.52

TABLE 4.3: Les fréquences naturelles (ou fréquences coupures) sous-optimales en fonction du nombre de pilotes (RSB = 20 dB)

RSB (dB)		0	5	10	15	20	25	30	35	40
GSM	RW1 $\left(\frac{f_c}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	6.7	9.9	14.5	21.2	31.2	45.7	67.1	98.5	145
	RW2 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	3.0	3.7	4.7	5.9	7.4	9.4	11.8	14.8	18.7
	RW3 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	1.9	2.3	2.7	3.2	3.8	4.4	5.2	6.2	7.3
WiMAX mobile	RW1 $\left(\frac{f_c}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	8.2	12.0	17.6	25.8	37.9	55.6	81.7	120	176
	RW2 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	3.3	4.2	5.3	6.6	8.4	10.5	13.3	16.7	21
	RW3 $\left(\frac{f_n}{f_d}\right)_{\text{ss-opt}}$	2.1	2.5	2.9	3.5	4.1	4.8	5.7	6.8	7.9

TABLE 4.4: Les fréquences naturelles (ou fréquences coupures) optimales en fonction du RSB ( $N_p = 16$ )

en fonction du nombre de pilotes, illustrée sur la figure 4.3. Les valeurs théoriques sont calculées par (4.45). Nous remarquons que l'EQM baisse avec l'augmentation du nombre de pilotes, le canal WiMAX correspond à un  $\lambda_{\text{TL}}$  plus petit, avec lequel la RW3-LS-CATL engendre donc une EQM plus faible. Les résultats de la simulation sont bien accordés avec les valeurs théoriques.

La figure 4.4 montre la performance de la RW3-LS-CATL en terme d'EQM, en comparant avec les RW-LS-CATLs d'ordre 2 et d'ordre 1, et aussi avec les estimateurs de Kalman (AR1-KF et RW3-KF). Nous constatons que, similairement à la RW3-CATL, l'EQM asymptotique théorique de la RW3-LS-CATL est proportionnelle à la puissance  $\frac{6}{7}$  du RSB, contre des puissances  $\frac{4}{5}$  et  $\frac{2}{3}$  pour la RW2-LS-CATL et la RW1-LS-CATL respectivement. Notons aussi que la RW3-LS-CATL atteint pratiquement la performance d'un RW3-KF (l'analyse de

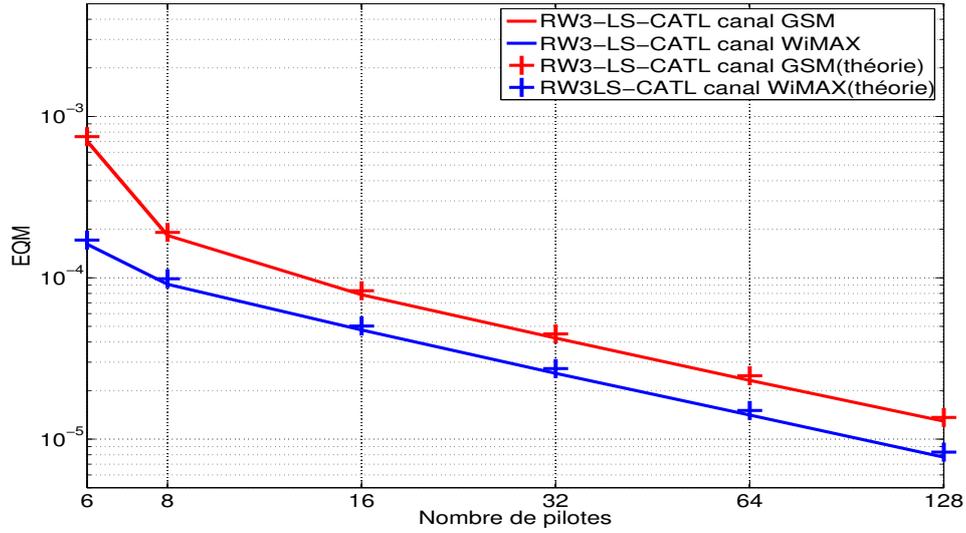


FIGURE 4.3: Comparaison de l'EQM versus le nombre de pilotes  $N_p$  de la RW3-LS-CATL dans deux types de canal,  $RSB = 20$  dB,  $f_d T = 0.001$

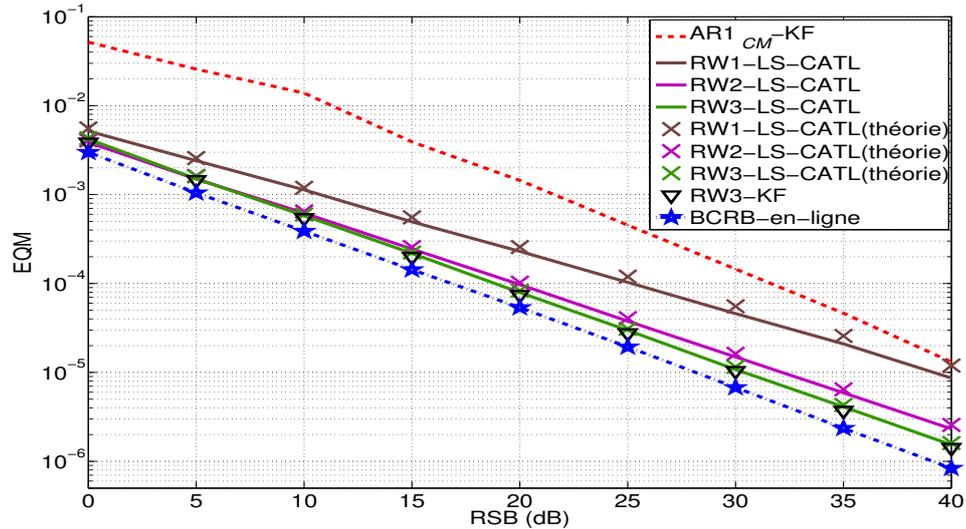


FIGURE 4.4: Comparaison des estimateur en terme d'EQM versus RSB  $f_d T = 10^{-3}$ ,  $N_p = 16$

la performance du RW3-KF pour multi-porteuses sera donnée dans le chapitre suivant), et très proche de la BCRB.

L'EQM simulée montrée sur la figure 4.4 n'est calculée que sur les échantillons au milieu des symboles OFDM, car  $\alpha_{l(k)}(qT_s)$  est considéré invariant durant le symbole OFDM dans le cas d'une variation lente ( $f_d T < 10^{-2}$ ). La formule pour calculer l'EQM empirique par simulation est donnée par :

$$EQM = \frac{1}{L_t N_{\text{OFDM}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{OFDM}}} \left\{ \left[ \hat{\alpha}_{(k|k)} - \alpha_{(k)} \left( \frac{N_t}{2} T_s \right) \right]^H \cdot \left[ \hat{\alpha}_{(k|k)} - \alpha_{(k)} \left( \frac{N_t}{2} T_s \right) \right] \right\}, \quad (4.52)$$

avec  $N_{\text{OFDM}}$  le nombre de symboles OFDM simulés. La performance en terme d'EQM en

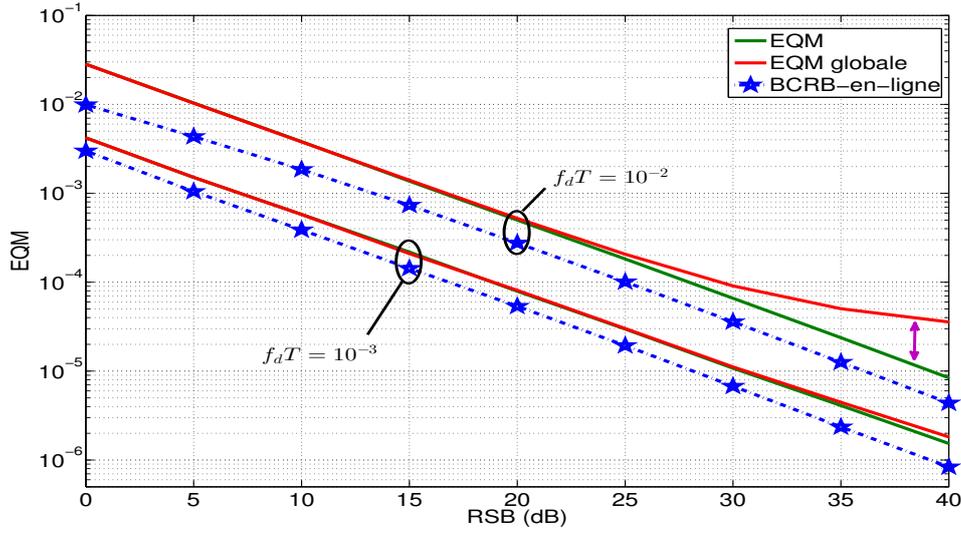


FIGURE 4.5: Dégradation de performance en terme d'EQM globale de la RW3-LS-CATL lorsque la mobilité augmente,  $N_p=16$ , pour  $f_d T = 10^{-3}$  et  $f_d T = 10^{-2}$

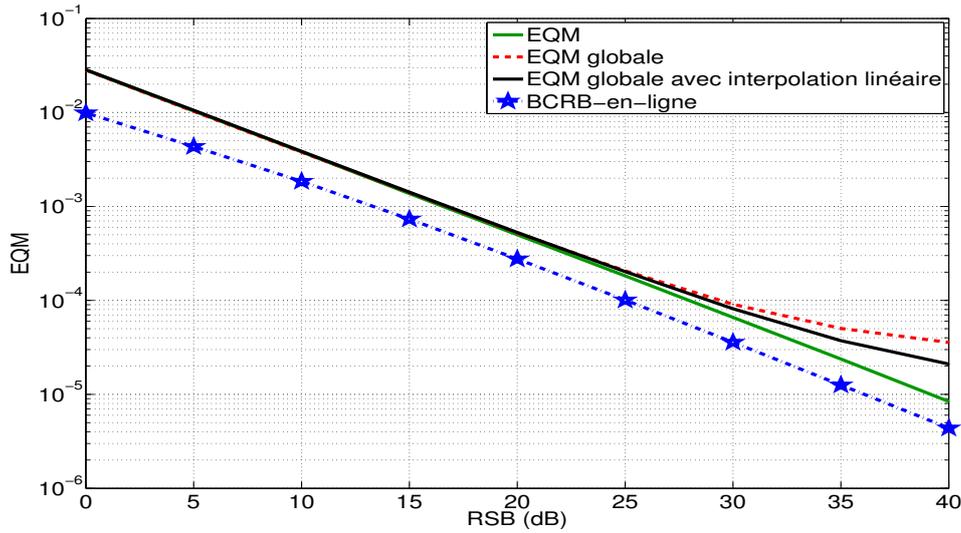


FIGURE 4.6: EQM globale avec interpolation linéaire de la RW3-LS-CATL pour  $f_d T = 10^{-2}$ ,  $N_p=16$

considérant tous les échantillons dans le symbole OFDM (nous donnons alors la même valeur d'estimation d'AC pour tous les échantillons d'un symbole OFDM), dit EQM globale, est calculée de manière empirique par :

$$\text{EQM}_{\text{global}} = \frac{1}{L_t N_{\text{OFDM}} N_t} \sum_{k=1}^{N_{\text{OFDM}}} \sum_{q=1}^{N_t} \left\{ \left[ \hat{\alpha}_{(k|k)} - \alpha_{(k)}(qT_s) \right]^H \cdot \left[ \hat{\alpha}_{(k|k)} - \alpha_{(k)}(qT_s) \right] \right\}. \quad (4.53)$$

Lorsque la mobilité du récepteur augmente,  $f_d T$  augmente, par conséquent  $\alpha_{l(k)}(qT_s)$  ne peut plus être considéré comme une constante pendant la durée symbole,  $\mathbf{H}_{(k)}$  n'est plus

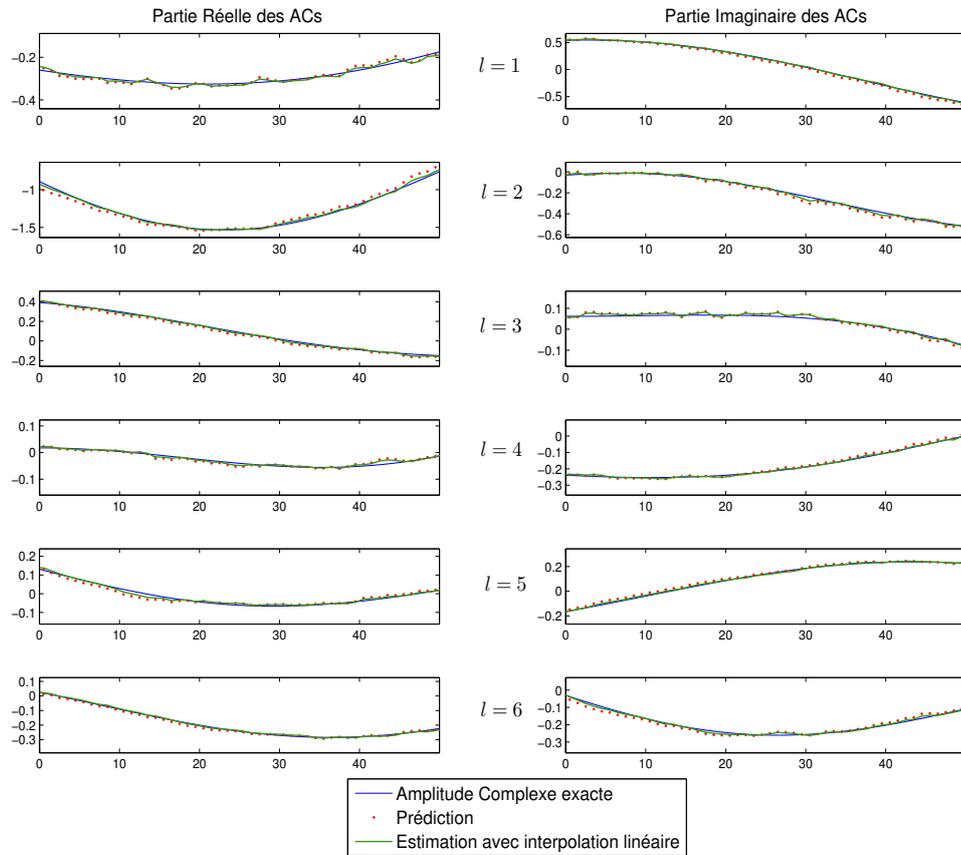


FIGURE 4.7: La poursuite des ACs avec la RW3-LS-CATL pour  $f_d T = 10^{-2}$ , RSB= 30 dB,  $N_p=8$

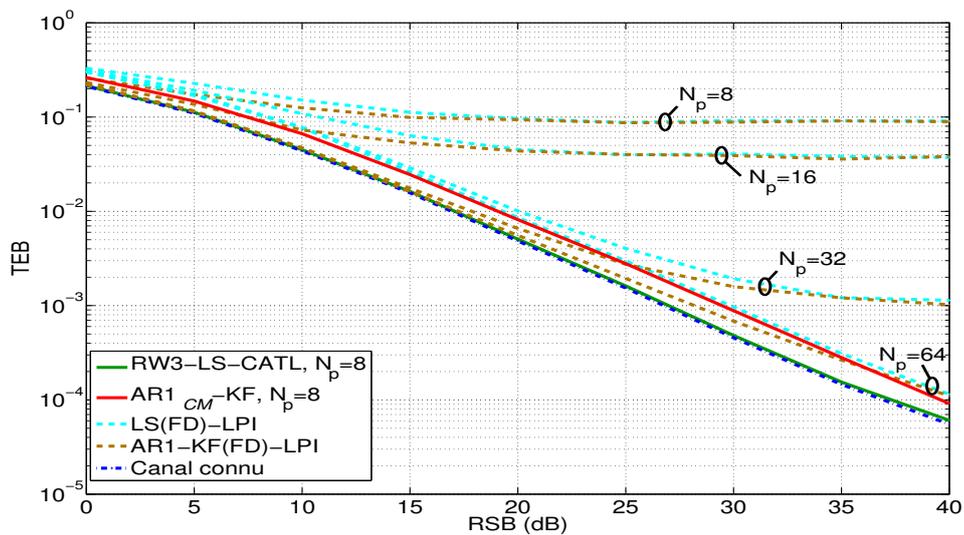


FIGURE 4.8: TEB versus RSB pour  $f_d T = 10^{-3}$ , les sous-porteuses sont modulées en QPSK

exactement une matrice à diagonale dominante. Dans ce cas, la performance d'estimation en terme d'EQM globale est dégradée par rapport à l'EQM calculée en milieu de symboles. Ceci est illustré par la figure 4.5, elle montre qu'il n'y a pratiquement pas de différence entre l'EQM et l'EQM globale pour  $f_d T = 10^{-3}$ . Lorsque  $f_d T$  (ou la mobilité) augmente, la dégradation de performance en terme d'EQM globale de la RW3-LS-CATL devient évidente, d'autant plus élevée que le RSB est grand. Nous constatons que la divergence apparaît à partir de RSB = 25 dB pour  $f_d T = 10^{-2}$ .

Cette dégradation peut être diminuée par des techniques d'interpolation [60][63], nous montrons ici un résultat de l'interpolation linéaire. L'EQM globale avec interpolation linéaire est calculée par :

$$\text{EQM}_{\text{global}}^{\text{interp}} = \frac{1}{L_t N_{\text{OFDM}} N_t} \sum_{k=1}^{N_{\text{OFDM}}} \sum_{q=1}^{N_t} \left\{ [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}(qT_s) - \boldsymbol{\alpha}_{(k)}(qT_s)]^H \cdot [\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}(qT_s) - \boldsymbol{\alpha}_{(k)}(qT_s)] \right\}. \quad (4.54)$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)}(qT_s) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k-1|k-1)} + \frac{q}{N_t} (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k-1|k-1)})$  pour  $q \in [1, N_t]$ . La figure 4.6 montre que l'EQM globale est améliorée aux RSBs élevés lorsqu'une interpolation linéaire est appliquée.

Une illustration de la poursuite des ACs (partie réelle et partie imaginaire pour 50 symboles OFDM consécutifs) est donnée par la figure 4.7 pour  $f_d T = 10^{-2}$ . Les courbes d'estimation ont été interpolées de manière linéaire. Nous constatons que le canal estimé est proche du vrai canal.

La figure 4.8 montre le TEB versus le RSB des estimateurs. Pour la RW3-LS-CATL, nous avons complété la boucle par un égaliseur fréquentiel Zero-forcing (ZF), *i.e.*,  $\hat{\mathbf{x}}_{(k)} = \hat{\mathbf{H}}_{(k)}^{-1} \mathbf{y}_{(k)}$  avec  $\hat{\mathbf{H}}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{F} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k)}\}$ . Nous avons aussi tracé les courbes des algorithmes conventionnels dans le domaine fréquentiel [51–53], qui sont basés sur le modèle d'observation :  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} = \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{h}_{\mathbf{p}(k)} + \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}$ , avec  $\mathbf{h}_{\mathbf{p}(k)} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\alpha}_{(k)}$ . Le premier algorithme conventionnel, désigné ici par LS(FD)-LPI, exploite le critère LS pour estimer les éléments diagonaux de la matrice du canal aux fréquences des sous-porteuses pilotes :  $\hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{p}(k)} = \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\}^{-1} \mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$ , puis pour obtenir la matrice du canal complète  $\hat{\mathbf{H}}_{(k)}$  (matrice diagonale contenant sur sa diagonale la réponse en fréquence complète du canal), on exécute une interpolation passe-bas (LPI pour *low-pass interpolation* en anglais) en utilisant la fonction "interp" avec *Matlab*<sup>TM</sup>. Pour le deuxième algorithme conventionnel, désigné par AR1-KF(FD)-LPI (*c.f.* [32]), après estimation LS des éléments diagonaux de la matrice du canal aux positions des pilotes, nous appliquons un filtrage temporel de type AR1<sub>CM</sub>-KF pour affiner/poursuivre l'estimation du canal à chacune des fréquences pilotes, avant de procéder à l'interpolation fréquentielle passe-bas (identique à l'interpolation de l'algorithme LS(FD)-LPI). Il est à noter que ces 2 méthodes conventionnelles ne supposent pas la connaissance des retards des trajets, contrairement aux méthodes paramétriques d'estimation que nous avons développé. Nous constatons que, avec 8 pilotes, les performances des algorithmes conventionnels sont plus faibles que les autres méthodes, qui exploitent la connaissance des retards, tout en utilisant un filtrage temporel. Lorsqu'on augmente le nombre de pilotes, elles se rapprochent de celles obtenues avec le canal connu. De plus, les performances de la

RW3-LS-CATL en terme du TEB sont meilleures que celles du  $AR1_{CM}$ -KF et des estimateurs conventionnels, et atteignent pratiquement celles obtenues avec le canal connu.

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étendu la RW3-CATL à la RW3-LS-CATL, qui est capable de poursuivre les ACs du canal multi-trajet dans des systèmes OFDM. Cet estimateur est basé sur une structure de boucle vectorielle, associé à un estimateur LS qui fournit dans un premier temps une référence pour générer le signal d'erreur. La RW3-LS-CATL exploite la corrélation temporelle du canal de manière simple, par rapport aux algorithmes basés sur le filtre de Kalman et un modèle AR. De plus, l'algorithme de la RW3-LS-CATL est moins complexe car il n'a pas besoin de calculer un inverse matriciel à chaque itération, qui est pourtant inévitable pour le filtre de Kalman. La RW3-LS-CATL atteint aussi pratiquement la performance du RW3-KF en terme d'EQM.

Nous avons aussi donné les formules analytiques pour optimiser les RW-LS-CATLs et pour les EQM minimales correspondantes, qui sont ensuite validées par les simulations. Les impacts du type de canal (différentes valeurs de  $\lambda_{TL}$ ) sur le paramétrage des RW-LS-CATLs et sur des performance en termes d'EQM sont aussi illustrés dans la simulation. La dégradation en fonction de la mobilité de la RW3-LS-CATL est analysée.

Notons que les résultats de ce chapitre sur les performances asymptotiques d'une boucle de poursuite d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal multi-trajet en modulation mono-porteuse sont originaux. Cependant, l'idée principale est inspirée par la RW2-LS-CATL, qui est présentée (désignée par Or2-LS-CATL) dans [28, 32, 33], et nous avons ici établi de nouveaux résultats pour les boucles d'ordre 3 au lieu de 2.

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser les résultats de cette étude pour en déduire les performances asymptotiques et le réglage optimal du filtre de Kalman RW3-KF dans le cas OFDM à trajets multiples, et aussi montrer la similitude entre le RW3-KF et la RW3-LS-CATL.

# Filtre de Kalman asymptotique d'ordre 3 pour l'estimation d'un canal multi-trajet en modulation multi-porteuse OFDM

## 5.1 Introduction

Dans le chapitre 3, nous avons introduit le RW3-KF dans le cas mono-porteuse mono-trajet (scalaire) et nous avons fourni des formules analytiques pour le réglage du paramètre du modèle RW3. Rappelons que ce paramètre est la variance du bruit d'état, notée  $\sigma_u^2$ . Nous avons calculé les performances asymptotiques en terme d'EQM du RW3-KF, et nous avons calculé la valeur de  $\sigma_u^2$  de manière à minimiser cette EQM. Nous avons ainsi pu obtenir une formule analytique pour régler le paramètre du modèle RW3 (3.45).

Nous allons ici étendre ce travail au cas multi-trajet multi-porteuse en cherchant à appliquer les résultats du chapitre 3. La principale difficulté réside dans le fait de trouver un traitement séparé pour chaque trajet, pour pouvoir utiliser la formule du chapitre 3. Dans la section 5.2 nous rappelons les équations fondamentales du RW3-KF dans le cas du modèle complet multi-trajet multi-porteuse. Dans la section 5.3, nous commençons notre analyse par un cas simple, le cas mono-trajet multi-porteuse, qui nous permet de faire un lien direct avec le chapitre 3, puis le cas multi-trajet est introduit dans les sections suivantes. Enfin la section simulation valide nos analyses théoriques et nos hypothèses.

## 5.2 Modèle espace-état, équations vectorielles du RW3-KF

Le modèle mathématique du système OFDM avec un canal à trajets multiples a déjà été présenté dans le chapitre 4. Nous rappelons simplement l'équation du signal reçu après suppression du préfixe cyclique et application de la  $\mathcal{TF}$  :

$$\mathbf{y}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{x}_{(k)}\} \mathbf{F} \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \mathbf{w}_{(k)}. \quad (5.1)$$

L'estimation de canal avec le RW3-KF est aussi réalisée à l'aide de  $N_p$  pilotes répartis de manière uniforme sur les  $N$  sous-porteuses. En sélectionnant uniquement les sous-porteuses pilotes, on obtient (voir (4.10)) :

$$\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)} = \mathbf{X}_{(k)} \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \mathbf{w}_{\mathbf{p}(k)}, \quad (5.2)$$

avec  $\mathbf{X}_{(k)} = \text{diag}\{\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}\} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}$  et  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}$  une matrice de taille  $N_p \times L_t$  définie par (4.12). De la même manière qu'au chapitre 4, nous sortons les pilotes du signal reçu, mais ici en divisant chaque sous-porteuse par le symbole pilote correspondant. On obtient alors :

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \boldsymbol{\alpha}_{(k)} + \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}(k)}, \quad (5.3)$$

où  $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)}$  et  $\tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}(k)}$  sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned} \left[ \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} \right]_p &= \frac{[\mathbf{y}_{(k)}]_{n_p}}{[\mathbf{x}_{(k)}]_{n_p}}, & n_p = pL_f, \quad p = 0, \dots, N_p - 1, \\ \left[ \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}(k)} \right]_p &= \frac{[\mathbf{w}_{(k)}]_{n_p}}{[\mathbf{x}_{(k)}]_{n_p}}, & n_p = pL_f, \quad p = 0, \dots, N_p - 1. \end{aligned}$$

Notons que  $\tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}}$  a une même matrice de covariance que celle de  $\mathbf{w}_{\mathbf{p}}$  étant donné que les pilotes  $\mathbf{x}_{\mathbf{p}(k)}$  sont des symboles QPSK.

Nous appliquons ensuite un modèle d'évolution RW3 (défini au chapitre 3) pour chaque trajet, ce qui donne :

$$\dot{\mathbf{a}}_{(k)} = \dot{\mathbf{M}} \dot{\mathbf{a}}_{(k-1)} + \dot{\mathbf{u}}_{(k)}, \quad (5.4)$$

avec :

$$\text{le vecteur d'état : } \dot{\mathbf{a}}_{(k)} = \left[ \mathbf{a}_{1(k)}^T \quad \mathbf{a}_{2(k)}^T \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{L_t(k)}^T \right]^T, \quad \mathbf{a}_{l(k)} = [\tilde{\alpha}_{l(k)} \quad \delta_{l(k)} \quad \xi_{l(k)}]^T$$

$$\text{le vecteur du bruit d'état : } \dot{\mathbf{u}}_{(k)} = \left[ \mathbf{u}_{1(k)}^T \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{L_t(k)}^T \right]^T, \quad \mathbf{u}_{l(k)} = [0 \quad 0 \quad u_{(k)}]^T,$$

et la matrice d'évolution :  $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{I}_{L_t} \otimes \mathbf{M}$  est une matrice bloc-diagonale avec

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ les matrices sur sa diagonale principale : } \dot{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \mathbf{M} \end{bmatrix}.$$

Notons que nous utilisons le signe « $\otimes$ » pour indiquer les matrices (ou vecteurs) correspondant au cas multi-trajet. Le signe  $\otimes$  est le produit de Kronecker. Les équations (5.3) et (5.4) composent donc le modèle espace-état du RW3-KF pour estimer un canal à trajets multiples en modulation multi-porteuse.

Si on exprime le modèle d'observation (5.3) en fonction du vecteur d'état :

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} = \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} \mathbf{a}_{(k)} + \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}(k)}, \quad (5.5)$$

avec  $\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}}$  est une matrice de taille  $N_p \times 3L_t$  définie comme  $\dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{F}_{\mathbf{p}} \dot{\mathbf{S}}$ , où  $\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{I}_{L_t} \otimes \mathbf{S}$  avec  $\mathbf{S} = [1 \quad 0 \quad 0]$ , on obtient le modèle complet (5.4) et (5.5). Notons que  $\boldsymbol{\alpha}_{(k)} = \dot{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{a}}_{(k)}$ .

Avec ce modèle complet, les équations du RW3-KF sont :

### Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} = \mathring{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}}_{(k-1|k-1)}, \quad (5.6)$$

$$\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} = \mathring{\mathbf{M}}\mathring{\mathbf{P}}_{(k-1|k-1)}\mathring{\mathbf{M}}^T + \mathring{\mathbf{U}}, \quad (5.7)$$

### Équations de mise à jour

$$\mathring{\mathbf{K}}_{(k)} = \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}\mathring{\mathbf{F}}_s^H \left( \mathring{\mathbf{F}}_s\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}\mathring{\mathbf{F}}_s^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_p} \right)^{-1}, \quad (5.8)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k)} = \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} + \mathring{\mathbf{K}}_{(k)}(\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} - \mathring{\mathbf{F}}_s\hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)}), \quad (5.9)$$

$$\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k)} = (\mathbf{I}_{3L_t} - \mathring{\mathbf{K}}_{(k)}\mathring{\mathbf{F}}_s)\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}, \quad (5.10)$$

avec :

le vecteur de prédiction :  $\hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} = \left[ \hat{\mathbf{a}}_{1(k|k-1)}^T \quad \hat{\mathbf{a}}_{2(k|k-1)}^T \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{a}}_{L_t(k|k-1)}^T \right]^T$ ,

avec  $\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k-1)} = \left[ \hat{\alpha}_{l(k|k-1)} \quad \hat{\delta}_{l(k|k-1)} \quad \hat{\xi}_{l(k|k-1)} \right]^T$  le vecteur de prédiction du  $l^{\text{ème}}$  trajet, pour  $l \in [1, L_t]$ ,

le vecteur d'estimation :  $\hat{\mathbf{a}}_{(k|k)} = \left[ \hat{\mathbf{a}}_{1(k|k)}^T \quad \hat{\mathbf{a}}_{2(k|k)}^T \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{a}}_{L_t(k|k)}^T \right]^T$

avec  $\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k)} = \left[ \hat{\alpha}_{l(k|k)} \quad \hat{\delta}_{l(k|k)} \quad \hat{\xi}_{l(k|k)} \right]^T$  le vecteur d'estimation du  $l^{\text{ème}}$  trajet, pour  $l \in [1, L_t]$ ,

la matrice de covariance du bruit d'état :  $\mathring{\mathbf{U}} = \text{blkdiag}\{\mathbf{U}^{(1)} \dots \mathbf{U}^{(L_t)}\}$

$$\text{avec } \mathbf{U}^{(l)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{u_l}^2 \end{bmatrix},$$

$\mathring{\mathbf{K}}_{(k)}$  est la matrice du gain de Kalman de dimension  $3L_t \times N_p$ ,  $\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k)}$  et  $\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}$  sont respectivement les matrices de covariance d'erreur d'estimation et de prédiction, de dimension  $3L_t \times 3L_t$ .

Dans la suite, nous allons d'abord étudier le cas mono-trajet multi-porteuse à la section 5.3.1 avant d'arriver au cas multi-trajet multi-porteuse à la section 5.3.2. En effet, le cas mono-trajet multi-porteuse est intéressant car il est directement relié au cas mono-trajet mono-porteuse. Nous pourrions donc utiliser les résultats du chapitre 3 pour obtenir des formules analytiques de réglage des paramètres et de performance. Nous verrons ensuite que le cas multi-trajet multi-porteuse est plus problématique, puisqu'il ne permet pas d'obtenir des formules analytiques. Les paramètres seront alors réglés de manière numérique. Pour contourner ce problème, nous proposerons à la section 5.3.3 une approche alternative consistant en une simplification du RW3-KF exact, pour laquelle nous pouvons obtenir les formules analytiques de performance et réglage des paramètres. Nous montrons dans la section 5.5 que les performances obtenues avec cette méthode alternative à complexité réduite sont quasiment les mêmes que celles obtenues avec le RW3-KF exact optimisé par le réglage numérique.

## 5.3 Analyse du RW3-KF appliqué sur des systèmes OFDM

### 5.3.1 Cas mono-trajet multi-porteuse

Nous commençons par le cas d'un système OFDM à  $N_p$  sous-porteuses pilotes pour une transmission dans un canal mono-trajet, soit  $L_t = 1$ ,  $\tau = 0$  et  $\alpha_1(t) = \alpha(t)$  ((2.1) pour la réponse impulsionnelle en mono-trajet). Dans ce cas, la matrice  $\mathbf{F}_p$  devient un vecteur de "1" de  $N_p$  éléments. En particulier ici,  $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p$  est un simple scalaire qui vaut :

$$\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p. \quad (5.11)$$

Depuis les équations espace-état du RW3 (5.4)(5.5), nous retrouvons directement les équations du RW3-KF (5.6) ~ (5.10), mais de dimensions réduites :

#### Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} = \mathbf{M} \hat{\mathbf{a}}_{(k-1|k-1)}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k-1)} = \mathbf{M} \mathbf{P}_{(k-1|k-1)} \mathbf{M}^T + \mathbf{U}, \quad (5.13)$$

#### Équations de mise à jour

$$\mathbf{K}_{(k)} = \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{F}_s^H \left( \mathbf{F}_s \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{F}_s^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_p} \right)^{-1}, \quad (5.14)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k)} = \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} + \mathbf{K}_{(k)} (\tilde{\mathbf{y}}_{p(k)} - \mathbf{F}_s \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)}), \quad (5.15)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(k)} \mathbf{F}_s) \mathbf{P}_{(k|k-1)}, \quad (5.16)$$

avec  $\mathbf{F}_s = \mathbf{F}_p \mathbf{S}$ . Notons que les notations  $\hat{\mathbf{a}}_{(k|k)}$ ,  $\hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{P}_{(k|k)}$ ,  $\mathbf{P}_{(k|k-1)}$  ont les mêmes définitions que celles utilisée dans les équations (2.11) ~ (2.15), avec  $\alpha_{(k)} = \alpha_{1(k)}$ . Le gain de Kalman  $\mathbf{K}_{(k)}$  est une matrice de taille  $3 \times N_p$  (à distinguer de  $\mathbf{K}_{(k)}$  (2.13) dans le cas mono-porteuse du chapitre 3 qui est un vecteur de taille  $3 \times 1$ ).

Nous allons maintenant faire une manipulation sur la formule du gain de Kalman à l'aide de la formule de Woodbury pour faire apparaitre un terme de dimension  $3 \times 1$  que l'on pourra rapprocher du gain de Kalman du chapitre 3, ce qui nous permettra d'utiliser ensuite directement les résultats du chapitre 3.

En appliquant l'identité de Woodbury [64](p.1348, eq.(A.51))  $(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{A}^H + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} [\mathbf{I} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A} + \sigma^2 \mathbf{B}^{-1})^{-1} \mathbf{A}^H]$  sur (5.14), le gain de Kalman peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(k)} &= \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{F}_s^H \left( \mathbf{F}_s \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{F}_s^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_p} \right)^{-1} \\ &= \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{F}_s^H \frac{1}{\sigma_w^2} \left[ \mathbf{I}_{N_p} - \mathbf{F}_s (\mathbf{F}_s^H \mathbf{F}_s + \sigma_w^2 \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{-1})^{-1} \mathbf{F}_s^H \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{P}_{(k|k-1)} (\mathbf{F}_p \mathbf{S})^H \left[ \mathbf{I}_{N_p} - \mathbf{F}_p \mathbf{S} \left( (\mathbf{F}_p \mathbf{S})^H (\mathbf{F}_p \mathbf{S}) + \sigma_w^2 \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} (\mathbf{F}_p \mathbf{S})^H \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{S}^H \left[ \mathbf{F}_p^H - N_p \mathbf{S} (N_p \mathbf{S}^H \mathbf{S} + \sigma_w^2 \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{-1})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{F}_p^H \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{S}^H \left[ \mathbf{F}_p^H - \mathbf{S}(\mathbf{S}^H \mathbf{S} + \frac{\sigma_w^2}{N_p} \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{-1})^{-1} \mathbf{S}^H \mathbf{F}_p^H \right] \\
&= \frac{1}{N_p} \frac{N_p}{\sigma_w^2} \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{S}^H \left[ 1 - \mathbf{S}(\mathbf{S}^H \mathbf{S} + \frac{\sigma_w^2}{N_p} \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{-1})^{-1} \mathbf{S}^H \right] \mathbf{F}_p^H \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{N_p} \frac{\mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{S}^H}{\mathbf{S} \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{S}^H + \frac{\sigma_w^2}{N_p}} \mathbf{F}_p^H \\
&= \mathbf{K}_{e(k)} \cdot \frac{\mathbf{F}_p^H}{N_p}, \tag{5.17}
\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{K}_{e(k)}$  le gain de Kalman équivalent, de dimension  $3 \times 1$  défini par :

$$\mathbf{K}_{e(k)} = \frac{\mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{S}^H}{\mathbf{S} \mathbf{P}_{(k|k-1)} \mathbf{S}^H + \frac{\sigma_w^2}{N_p}}. \tag{5.18}$$

Notons que l'étape (\*) est l'utilisation inverse de l'identité de Woodbury.  $\mathbf{K}_{e(k)}$  correspond au gain de Kalman du chapitre 3 (3.5) mais avec une variance de bruit divisée par  $N_p$ . Il est normal que la variance de bruit qui intervient dans le gain de Kalman soit divisée par  $N_p$  car nous avons  $N_p$  observations (avec des bruits indépendants et centrés) au lieu d'une seule observation dans le cas mono-porteuse.

Nous allons maintenant nous intéresser au signal d'erreur, toujours dans le but de faire le lien avec le chapitre 3. Si on remplace  $\mathbf{K}_{(k)}$  par (5.17) dans (5.15), on peut réécrire (5.15) avec un nouveau signal d'erreur :

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k)} = \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} + \mathbf{K}_{e(k)} \cdot v_{e(k)}, \tag{5.19}$$

avec

$$v_{e(k)} = \frac{\mathbf{F}_p^H}{N_p} \cdot \left( \tilde{\mathbf{y}}_{p(k)} - \mathbf{F}_s \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} \right) = \frac{1}{N_p} \sum_{p=0}^{N_p-1} \left( \tilde{y}_{(k)}[n_p] - \hat{a}_{(k|k-1)} \right). \tag{5.20}$$

Nous obtenons donc un signal d'erreur scalaire qui correspond à la moyenne des signaux d'erreurs sur les  $N_p$  observations (on rappelle que  $\mathbf{F}_p$  est ici un vecteur de  $N_p \times 1$ ). Le signal d'erreur lié à une porteuse donnée est bien similaire à celui utilisé pour le cas mono-porteuse (équation (2.16)).

Nous insérons ensuite (5.17) dans (5.16), et nous obtenons :

$$\mathbf{P}_{(k|k)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{e(k)} \mathbf{S}) \mathbf{P}_{(k|k-1)}, \tag{5.21}$$

en utilisant  $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p$ . (5.21) est donc identique à (3.7) du chapitre 3, ce qui nous permet de conclure que le cas mono-trajet multi-porteuse peut se ramener au cas mono-trajet mono-porteuse, en divisant la variance du bruit par le nombre d'observation et en considérant le signal d'erreur scalaire formé par la moyenne des signaux d'erreurs sur les observations. Nous appliquons donc directement les résultats du chapitre 3, ce qui nous donne

l'expression de  $\sigma_{u \text{ opt}}^2$  :

$$\sigma_{u \text{ opt}}^2 = \left[ \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot \frac{\sigma_w^2}{N_p} (\sigma_a^2)^6 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}}, \quad (5.22)$$

et l'EQM minimale correspondante :

$$\sigma_{e \text{ min}}^2 = \frac{35}{16} \cdot \left( \frac{16\pi}{9} \cdot \frac{\sigma_w^2}{N_p} f_d T \right)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_a^2)^{\frac{1}{7}}. \quad (5.23)$$

### 5.3.2 Cas multi-trajet multi-porteuse avec $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$

Étudions maintenant le cas du canal à trajets multiples mais en supposant dans cette section que l'on a :

$$\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}. \quad (5.24)$$

En général, cette propriété n'est pas vraie pour un canal paramétrique donné, mais elle se vérifie si l'on considère un modèle de canal très particulier tel que les  $L_t$  retards  $\tau_l$  sont des multiples entiers de période d'échantillonnage  $T_s$ , ou autrement dit, que les retards normalisés  $\check{\tau}_l$  sont des nombres entiers. On rappelle en effet que nous utilisons un modèle paramétrique de canal dans cette thèse. Il utilise les vrais retards physiques des trajets (valeurs des retards peuvent être des réels positifs) <sup>1</sup>. Nous verrons qu'avec la propriété  $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$ , nous arriverons encore à faire le lien avec le cas mono-trajet mono-porteuse du chapitre 3, ce qui va nous permettre d'obtenir des formules analytiques pour le réglage et les performances. Le cas où cette propriété n'est plus vraie, qui correspond donc au cas général, est traité dans la section suivante.

En multi-trajet multi-porteuse, les équations de Kalman sont données par (5.6) à (5.10). Nous appliquons l'identité de Woodbury sur (5.8) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_{(k)} &= \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{F}}_s^H \left( \hat{\mathbf{F}}_s \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{F}}_s^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_p} \right)^{-1} \\ &= \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{F}}_s^H \frac{1}{\sigma_w^2} \left[ \mathbf{I}_{N_p} - \hat{\mathbf{F}}_s \left( \hat{\mathbf{F}}_s^H \hat{\mathbf{F}}_s + \sigma_w^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} \hat{\mathbf{F}}_s^H \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}})^H \left[ \mathbf{I}_{N_p} - \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}} \left( (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}})^H (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}}) + \sigma_w^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}})^H \right] \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{\sigma_w^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left[ \mathbf{F}_p^H - N_p \hat{\mathbf{S}} (N_p \hat{\mathbf{S}}^H \hat{\mathbf{S}} + \sigma_w^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1})^{-1} \hat{\mathbf{S}}^H \mathbf{F}_p^H \right] \\ &= \frac{1}{\sigma_w^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left[ \mathbf{F}_p^H - \hat{\mathbf{S}} \left( \hat{\mathbf{S}}^H \hat{\mathbf{S}} + \frac{\sigma_w^2}{N_p} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} \hat{\mathbf{S}}^H \mathbf{F}_p^H \right] \end{aligned}$$

1. Notons qu'un modèle de canal discret équivalent [65] correspondrait à une version filtrée (à bande limitée) et échantillonnée du canal physique : les "retards" obtenus seraient alors nécessairement des multiples de la période d'échantillonnage, mais le nombre de "trajets"  $L'_t$  serait généralement supérieur au nombre de trajets physiques  $L_t$ , à cause des opérations filtrage à bande limitée (ou interpolation en sinus cardinal) et échantillonnage. De plus, les amplitudes complexes de ces "trajets" ne seraient pas non-corrélées.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N_p} \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{S}}^H \cdot \frac{N_p}{\sigma_w^2} \left[ \mathbf{I}_{L_t} - \mathring{\mathbf{S}} (\mathring{\mathbf{S}}^H \mathring{\mathbf{S}} + \frac{\sigma_w^2}{N_p} \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1})^{-1} \mathring{\mathbf{S}}^H \right] \mathbf{F}_p^H \\
&= \frac{1}{N_p} \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{S}}^H \left( \mathring{\mathbf{S}} \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{S}}^H + \frac{\sigma_w^2}{N_p} \mathbf{I}_{L_t} \right)^{-1} \mathbf{F}_p^H \\
&= \mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} \cdot \frac{\mathbf{F}_p^H}{N_p},
\end{aligned} \tag{5.25}$$

avec  $\mathbf{K}_{\mathbf{e}(k)}$  le gain de Kalman équivalent défini par :

$$\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} = \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{S}}^H \left( \mathring{\mathbf{S}} \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{S}}^H + \frac{\sigma_w^2}{N_p} \mathbf{I}_{L_t} \right)^{-1}. \tag{5.26}$$

Notons que dans l'étape (\*), la condition  $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$  est exploitée, et que la matrice  $\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)}$  est de taille  $3L_t \times L_t$ . Définissons ensuite le signal d'erreur suivant :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{e}(k)} = \frac{\mathbf{F}_p^H}{N_p} \cdot \left( \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} - \mathbf{F}_s \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} \right), \tag{5.27}$$

Ce signal d'erreur est un vecteur de taille  $L_t \times 1$ . Chaque élément de ce vecteur correspond au signal d'erreur du trajet correspondant. La multiplication du signal  $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)}$  par  $\mathbf{F}_p^H/N_p$  revient à calculer l'estimateur des ACs des trajets au sens des moindres carrés tels que utilisé notamment pour obtenir le signal d'erreur de la RW3-LS-CATL au chapitre précédent.

Les équations (5.9) et (5.10) peuvent alors se réécrire comme :

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k)} = \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} + \mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} \cdot \mathbf{v}_{\mathbf{e}(k)}, \tag{5.28}$$

$$\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k)} = (\mathbf{I}_{3L_t} - \mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} \mathring{\mathbf{S}}) \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}. \tag{5.29}$$

En effet, en utilisant (5.25) et (5.27), l'équation (5.9) revient à (5.28). De même, (5.10) revient à (5.29). Puisque les trajets sont indépendants, les matrices covariance de l'estimation  $\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k)}$  et de la prédiction  $\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}$  sont sous forme bloc-diagonales comme :

$$\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(k|k)}^{(1)} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \mathbf{P}_{(k|k)}^{(L_t)} \end{bmatrix}, \quad \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(1)} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(L_t)} \end{bmatrix},$$

avec  $\mathbf{P}_{(k|k)}^{(l)}$  et  $\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)}$  respectivement la matrice asymptotique d'erreur de l'estimation et de la prédiction du  $l^{\text{ème}}$  trajet :

$$\mathbf{P}_{(k|k)}^{(l)} = \begin{bmatrix} P_{11(k|k)}^{(l)} & \cdots & P_{13(k|k)}^{(l)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{31(k|k)}^{(l)} & \cdots & P_{33(k|k)}^{(l)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)} = \begin{bmatrix} P_{11(k|k-1)}^{(l)} & \cdots & P_{13(k|k-1)}^{(l)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{31(k|k-1)}^{(l)} & \cdots & P_{33(k|k-1)}^{(l)} \end{bmatrix}.$$

Nous avons alors  $\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)}$  aussi une matrice bloc-diagonale d'après (5.26) :

$$\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{e}(k)}^{(1)} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{K}_{\mathbf{e}(k)}^{(L_t)} \end{bmatrix},$$

avec  $\mathbf{K}_{\mathbf{e}(k)}^{(l)}$  le vecteur de gain de Kalman du  $l^{\text{ème}}$  trajet :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{e}(k)}^{(l)} = \frac{\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)} \mathbf{S}^T}{\mathbf{S} \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)} \mathbf{S}^T + \frac{\sigma_w^2}{N_p}}.$$

Nous obtenons ainsi  $\mathbf{P}_{(k|k)}^{(l)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{\mathbf{e}(k)}^{(l)} \mathbf{S}) \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)}$  pour un seul trajet  $l$ . Grâce à cette structure bloc diagonale, le RW3-KF traite les différents trajets de manière indépendante. Nous pourrions ainsi appliquer les formules du cas mono-trajet du chapitre 3 pour chaque trajet. Nous obtenons ainsi les formules pour la variance optimale du bruit d'état et l'EQM minimale d'un seul trajet comme :

$$\sigma_{u_l \text{ opt}}^2 = \left[ \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot \frac{\sigma_w^2}{N_p} (\sigma_{\alpha_l}^2)^6 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}}, \quad (5.30)$$

$$\sigma_{\varepsilon_l \text{ min}}^2 = \frac{35}{16} \cdot \left( \frac{16\pi}{9} \cdot \frac{\sigma_w^2}{N_p} f_d T \right)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_{\alpha_l}^2)^{\frac{1}{7}}. \quad (5.31)$$

L'EQM moyenne minimale par trajet est donc obtenue comme :

$$\sigma_{\varepsilon \text{ min}}^2 = \frac{1}{L_t} \sum_{l=1}^{L_t} \sigma_{\varepsilon_l \text{ min}}^2. \quad (5.32)$$

### 5.3.3 Cas général multi-trajet multi-porteuse

#### 5.3.3.1 Au sujet du RW3-KF exact

Nous rappelons que les équations générales du RW3-KF exact pour le modèle complet multi-trajet multi-porteuse sont donnés par (5.6)~(5.10).

Dans le cas général, la propriété  $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$  n'est pas vérifiée, comme discuté à la section précédente. Les éléments de la matrice sont donnés par  $[\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p]_{l,l'} = \sum_{k=1}^{N_p} e^{j2\pi(\frac{k-1}{N}-\frac{1}{2})(\tau_l-\tau_{l'})}$ , on retrouve la valeur  $N_p$  sur les éléments diagonaux, mais les éléments non-diagonaux ne sont généralement pas nuls.

L'équation (5.25) obtenue à partir de (5.8) n'est plus valable, elle est maintenant remplacée par<sup>2</sup> :

$$\mathring{\mathbf{K}}_{(k)} = \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{F}}_s^H \left( \mathring{\mathbf{F}}_s \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{F}}_s^H + \sigma_w^2 \mathbf{I}_{N_p} \right)^{-1}$$

2. Ici, nous avons utilisé non seulement l'identité de Woodbury donnée par la section 5.3.1, mais aussi la deuxième transformation de l'identité de Woodbury [64](p.1348, eq.(A.52)) :  $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^H \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{B}^H (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^H + \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}$ , le détail de la déduction est fourni dans l'annexe D.

$$= \mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} \cdot (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H, \quad (5.33)$$

avec  $\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)}$  une matrice de dimension  $3L_t \times L_t$  définie par :

$$\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} = \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{S}}^H \left( \mathring{\mathbf{S}} \mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \mathring{\mathbf{S}}^H + (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \sigma_w^2 \right)^{-1}. \quad (5.34)$$

L'équation de filtrage (5.9) peut à nouveau être exprimée par (5.28), en remplaçant le signal d'erreur (5.27) par :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{e}(k)} = (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \cdot \left( \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} - \mathbf{F}_{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} \right). \quad (5.35)$$

A cause de la présence de  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}}$  dans le terme à inverser dans (5.34), le gain de Kalman équivalent  $\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)}$  n'est plus sous forme bloc diagonale. Par conséquent, les  $L_t$  trajets ne seront plus traités de manière strictement indépendante par le RW3-KF comme c'était le cas à la section 5.3.2, et nous ne pourrions plus théoriquement adopter les formules analytiques du chapitre 3 pour calculer les  $\sigma_{u_l}^2$  optimaux.

Les valeurs optimales de  $\sigma_{u_l}^2$  seront alors réglées numériquement pour obtenir les performances du RW3-KF dans la section simulation 5.5.

### 5.3.3.2 Approches alternatives : RW3-KF approché et formules analytiques

Une approche alternative au RW3-KF exact peut être facilement obtenue en procédant à une approximation consistant à considérer que  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}}$  est diagonale, alors qu'elle ne l'est pas. Autrement dit, l'approche simplifiée résultante, appelée RW3-KF approché, impose de traiter indépendamment les  $L_t$  trajets contrairement à la solution exacte. Ceci nous permettra de revenir aux solutions de la section 5.3.2, et d'avoir pour chaque trajet, un réglage des  $\sigma_{u_l}^2$  analytiques. Dans la section simulation, nous testerons les performances de la solution approchée et de la solution exacte réglée numériquement.

Nous résumons ci-dessous la méthode approximative : Au lieu de partir directement de  $\tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)}$ , nous allons partir de  $\hat{\mathbf{a}}_{\text{ls}(k)}$  apparaissant dans le vecteur d'erreur (5.35), et qui est calculé par :

$$\hat{\mathbf{a}}_{\text{ls}(k)} = (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \tilde{\mathbf{y}}_{\mathbf{p}(k)} \quad (5.36)$$

Notons que même si ce  $\hat{\mathbf{a}}_{\text{ls}(k)}$  est obtenu de manière différente de celui de la section 4.3.2, le résultat est exactement le même (c'est la raison pour laquelle nous lui avons donné le même nom). En effet, dans la section 4.3.2 nous avons calculé l'estimateur des moindres carrés des ACs directement à partir de  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$ , alors qu'ici nous avons d'abord divisé  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}(k)}$  par les symboles pilotes puis l'estimateur des moindres carrés des ACs est apparu naturellement au travers de la matrice de Gain de Kalman (5.33). Le résultat est le même tant que les pilotes sont des symboles QPSK ce qui est en général le cas. En effet, le calcul de la section 4.3.2 revient à multiplier par le complexe conjugué des pilotes, alors qu'ici nous divisons par les pilotes. Ces deux opérations sont équivalentes pour des modulations à amplitude constante.

Ensuite nous calculons les  $L_t$  signaux d'erreurs des trajets :

$$\mathbf{v}_{e(k)} = (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} - \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{(k|k-1)}). \quad (5.37)$$

Pour chaque trajet, nous rappelons le modèle espace-état comme :

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}l(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{l(k)} + \mathbf{w}_{\text{KF}l(k)}, \quad (5.38)$$

$$\mathbf{a}_{l(k)} = \mathbf{M}\mathbf{a}_{l(k-1)} + \mathbf{u}_{l(k)}, \quad (5.39)$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}l(k)}$  le  $l^{\text{ème}}$  élément de  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)}$  et  $\mathbf{w}_{\text{KF}l(k)} = \left[ (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \tilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{p}(k)} \right]_l$  défini comme le bruit de boucle sur le  $l^{\text{ème}}$  trajet avec une variance  $\sigma_{\text{KF}l}^2 = \sigma_{\mathbf{w}}^2 \cdot \left[ (\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}})^{-1} \right]_{l,l}$ . Notons que si les puissances des trajets sont identiques et si  $\mathbf{F}_{\mathbf{p}}^H \mathbf{F}_{\mathbf{p}} = N_p \mathbf{I}_{L_t}$ , nous retrouvons  $\sigma_{\text{KF}l}^2 = \sigma_{\text{TL}}^2$  ( $\sigma_{\text{TL}}^2$  est définie par (4.29)). Puis nous appliquons les équations du RW3-KF *indépendamment* pour chaque trajet :

#### Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k-1)} = \mathbf{M}\hat{\mathbf{a}}_{l(k-1|k-1)}, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)} = \mathbf{M}\mathbf{P}_{(k-1|k-1)}^{(l)}\mathbf{M}^T + \mathbf{U}^{(l)}, \quad (5.41)$$

#### Équations de mise à jour

$$\mathbf{K}_{(k)}^{(l)} = \frac{\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)} \mathbf{S}^T}{\mathbf{S}\mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)} \mathbf{S}^T + \sigma_{\text{KF}l}^2}, \quad (5.42)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k)} = \hat{\mathbf{a}}_{l(k|k-1)} + \mathbf{K}_{(k)}^{(l)} (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}l(k)} - \mathbf{S}\hat{\mathbf{a}}_{l(k|k-1)}), \quad (5.43)$$

$$\mathbf{P}_{(k|k)}^{(l)} = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{K}_{(k)}^{(l)} \mathbf{S}) \mathbf{P}_{(k|k-1)}^{(l)}, \quad (5.44)$$

Nous obtenons ainsi la formule pour régler la variance du bruit d'état d'un seule trajet :

$$\sigma_{u_l \text{ approx}}^2 = \left[ \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot \sigma_{\text{KF}l}^2 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}} \cdot \sigma_{\alpha_l}^2, \quad (5.45)$$

avec la formule approchée de l'EQM minimale par trajet :

$$\sigma_{e_l \text{ approx}}^2 = \frac{35}{16} \cdot \left( \frac{16\pi}{9} \cdot \sigma_{\text{KF}l}^2 \cdot f_d T \right)^{\frac{6}{7}} \cdot (\sigma_{\alpha_l}^2)^{\frac{1}{7}}. \quad (5.46)$$

Les équations globales du RW3-KF approché sont donc :

#### Équations de prédiction

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} = \mathring{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}}_{(k-1|k-1)}, \quad (5.47)$$

$$\mathring{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} = \mathring{\mathbf{M}}\mathring{\mathbf{P}}_{(k-1|k-1)}\mathring{\mathbf{M}}^T + \mathring{\mathbf{U}}, \quad (5.48)$$

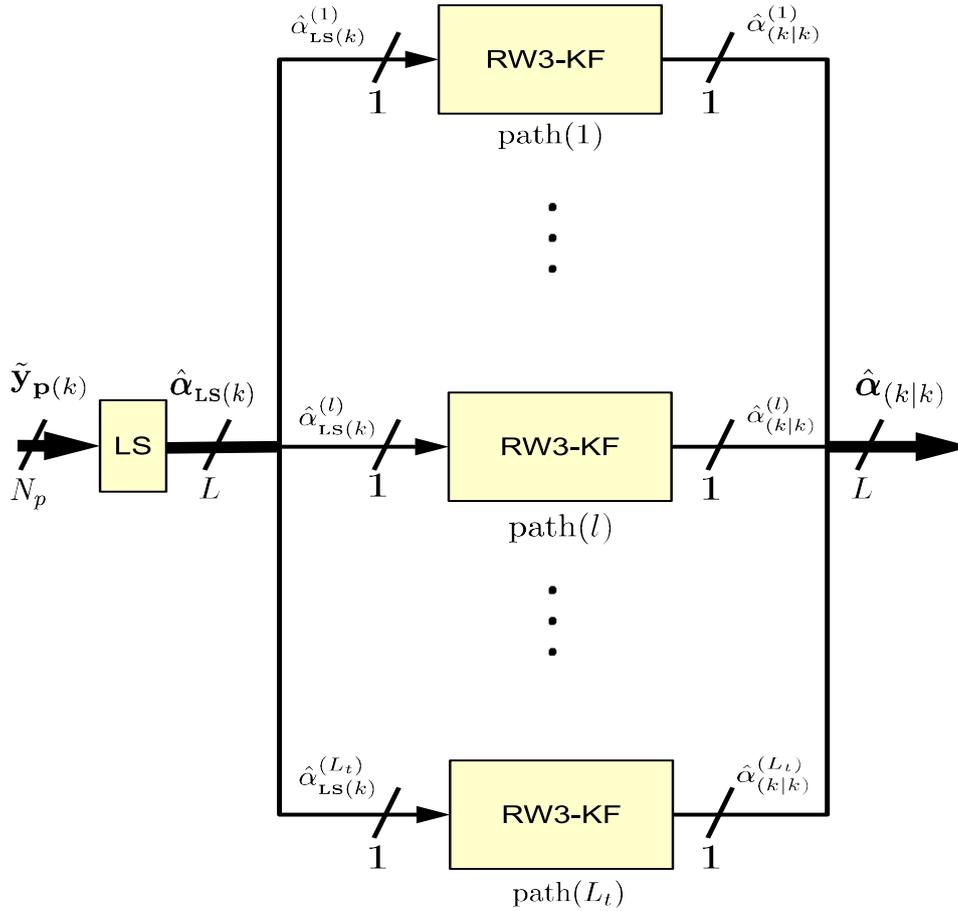


FIGURE 5.1: Structure du RW3-KF approché

**Équations de mise à jour**

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} = \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left( \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H + \text{diag}\{\{\sigma_{\text{KF}1}^2, \dots, \sigma_{\text{KF}L_t}^2\}\} \right)^{-1}, \quad (5.49)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{(k|k)} = \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)} + \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} (\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{LS}(k)} - \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{a}}_{(k|k-1)}), \quad (5.50)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{(k|k)} = (\mathbf{I}_{3L_t} - \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} \hat{\mathbf{S}}) \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}. \quad (5.51)$$

La structure du RW3-KF approché est illustrée dans la figure 5.1. L'EQM minimale globale est la valeur moyenne de tous les trajets. Si tous les trajets ont la même puissance, *i.e.*,  $\sigma_{\alpha_l}^2 = \frac{\sigma_{\alpha}^2}{L_t}$ , en utilisant  $\sum_{l=1}^{L_t} \sigma_{\text{KF}l}^2 = \sigma_w^2 \cdot \text{Trace}\{(\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1}\} = L_t \cdot \sigma_{\text{TL}}^2$ , l'EQM moyenne minimale approchée par trajet est donc obtenue comme :

$$\sigma_{c \text{ approx}}^2 = \frac{1}{L_t} \sum_{l=1}^{L_t} \sigma_{c_l \text{ approx}}^2 = \frac{35}{16} \cdot \left( \frac{16\pi}{9} \cdot \sigma_{\text{TL}}^2 \cdot f_d T \right)^{\frac{6}{7}} \cdot \left( \frac{\sigma_{\alpha}^2}{L_t} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad (5.52)$$

**Remarque :**

- Le RW3-KF approché consiste finalement à appliquer préalablement à l'observation l'estimateur LS des ACs des trajets, puis d'appliquer sur chacune des  $L_t$  branches

résultantes (ou ACs estimés) un filtre de Kalman tel que dérivé pour le cas mono-trajet aux chapitre 2 et 3. Les résultats pour les ordres inférieurs peut être obtenus à l'instar du RW3-KF en exploitant la table 3.1.

- Nous pouvons ainsi faire aussi le lien avec les résultats de la RW3-LS-CATL : Pour le RW3-KF, même si nous calculons l'EQM séparément pour chaque trajet avec le bruit de boucle des trajets  $\sigma_{\text{KF}}^2$ , nous retrouvons une formule quasi-identique à celle de la RW3-LS-CATL pour l'EQM moyenne en supposant les trajets ont la même puissance.

## 5.4 Complexité de l'algorithme

Dans cette section, nous évaluons la complexité des algorithmes en multi-trajet multi-porteuse en terme du nombre de multiplications complexes. Dans les table 5.1 et 5.2, nous avons calculé séparément le nombre de multiplications complexes par itération pour le RW3-KF (5.6)~(5.10) et pour sa version approchée (5.40)~(5.44).

Opération	Équation	Multiplications
$\mathring{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}}_{(k-1 k-1)}$	(5.6)	$L_t \times \frac{1}{4}$
$\mathring{\mathbf{M}}\mathring{\mathbf{P}}_{(k-1 k-1)}\mathring{\mathbf{M}}^T$	(5.7)	$4L_t^2 \times \frac{1}{4}$
$\mathbf{A}_1 = \mathring{\mathbf{P}}_{(k k-1)}\mathring{\mathbf{F}}_s^H$	(5.8)	$3N_p \times L_t^2$
$\mathbf{A}_2 = \mathring{\mathbf{F}}_s\mathbf{A}_1$	(5.8)	$N_p^2 \times L_t$
$\mathbf{A}_3 = \left(\mathbf{A}_2 + \sigma_w^2\mathbf{I}_{N_p}\right)^{-1}$	(5.8)	$N_p^3$
$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3$	(5.8)	$3L_t \times N_p^2$
$\mathbf{v}_{\epsilon(k)} = \tilde{\mathbf{y}}_p(k) - \mathring{\mathbf{F}}_s\hat{\mathbf{a}}_{(k k-1)}$	(5.9)	$(L_t + 1) \times N_p$
$\mathring{\mathbf{K}}_{(k)}\mathbf{v}_{\epsilon(k)}$	(5.9)	$3L_t \times N_p$
$\mathring{\mathbf{K}}_{(k)}\mathbf{A}_1^H$	(5.10)	$9L_t^2 \times N_p$

TABLE 5.1: Nombre de multiplications complexes du RW3-KF par itération

Notons que pour les premières deux opérations,  $\mathring{\mathbf{M}}$  est une matrice réelle et creuse, le nombre de multiplications complexes est donc égale à un quart de celui de multiplications scalaires. Notons aussi que les symboles pilotes sont supposés connu et invariants pendant une transmission, donc les opérations d'égalisation ne sont pas prises en compte pour calculer la complexité.

En sommant les nombres de multiplications, nous avons au totale  $N_p^3 + 4L_t N_p^2 + (3L_t^2 + 13L_t + 1)N_p + L_t^2 + \frac{L_t}{4}$  multiplications pour le RW3-KF, et  $12L_t^3 + 4L_t^2 + (\frac{5}{4} + N_p)L_t + N_p$  multiplications pour le RW3-KF approché. Nous constatons que, dans le cas  $N_p = L_t$  les complexités des deux filtres de Kalman sont proches, la complexité du RW3-KF approché est plus faible grâce a la matrice de sélection  $\mathring{\mathbf{S}}$ , qui a des éléments qui sont soit 1 soit 0, donc il n'y

Opération	Équation	Multiplications
$\mathring{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}}_{(k-1 k-1)}$	(5.47)	$L_t \times \frac{1}{4}$
$\mathring{\mathbf{M}}\mathring{\mathbf{P}}_{(k-1 k-1)}\mathring{\mathbf{M}}^T$	(5.48)	$4L_t^2 \times \frac{1}{4}$
$\mathbf{A}_1 = \mathring{\mathbf{P}}_{(k k-1)}\mathring{\mathbf{S}}^H$	(5.49)	0
$\mathbf{A}_2 = \mathbf{S}\mathbf{A}_1$	(5.49)	0
$\mathbf{A}_3 = \left(\mathbf{A}_2 + \text{diag}\{\{\sigma_{\text{KF}1}^2, \dots, \sigma_{\text{KF}L_t}^2\}\}\right)^{-1}$	(5.49)	$L_t$
$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_3$	(5.49)	$3L_t^3$
$\mathbf{v}_{\epsilon(k)} = \mathbf{y}_{\text{KF}(k)} - \mathring{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{a}}_{(k k-1)}$	(5.50)	$(L_t + 1) \times N_p$
$\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)}\mathbf{v}_{\epsilon(k)}$	(5.50)	$3L_t^2$
$\mathring{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)}\mathbf{A}_1^H$	(5.51)	$9L_t^3$

TABLE 5.2: Nombre de multiplications complexes du RW3-KF approché par itération

a pas de multiplication pour les productions qui contiennent  $\mathring{\mathbf{S}}$ . Lorsque  $N_p > L_t$ , la complexité de RW3-KF a beaucoup augmenté dû à l'inversion matricielle, elle est de l'ordre de  $N_p^3$  ( $O(N_p^3)$ ). En revanche, la complexité du RW3-KF approché ne dépend plus du nombre de pilotes, elle est donc de l'ordre de  $L_t^3$  ( $O(L_t^3)$ ). Dans ce cas, on voit que le RW3-KF approché est une méthode à complexité bien réduite comparativement à la méthode exacte RW3-KF.

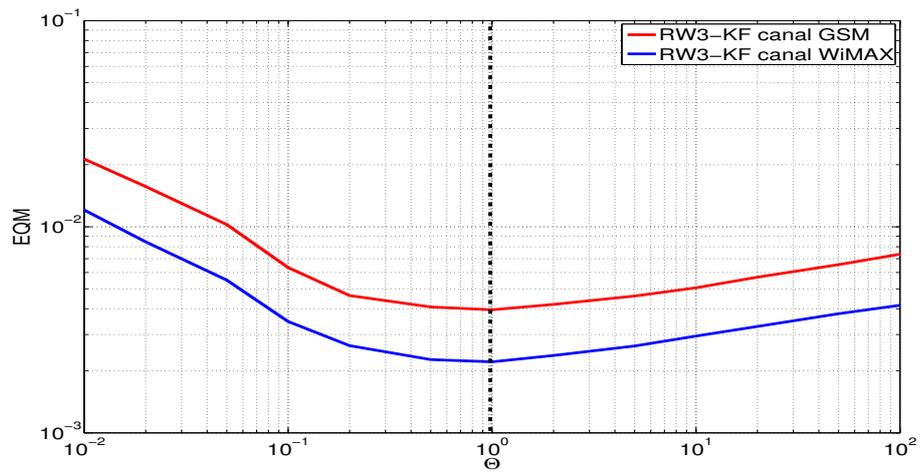
Dans 4.3.3, nous avons donné la complexité de la RW3-LS-CATL, qui est égale à  $(3 + N_p) \times L_t$ , nous constatons que la RW3-LS-CATL est l'algorithme le plus simple parmi les trois, qui a une complexité seulement de l'ordre de  $N_p$  ( $O(N_p)$ ).

## 5.5 Analyse numérique et Simulation

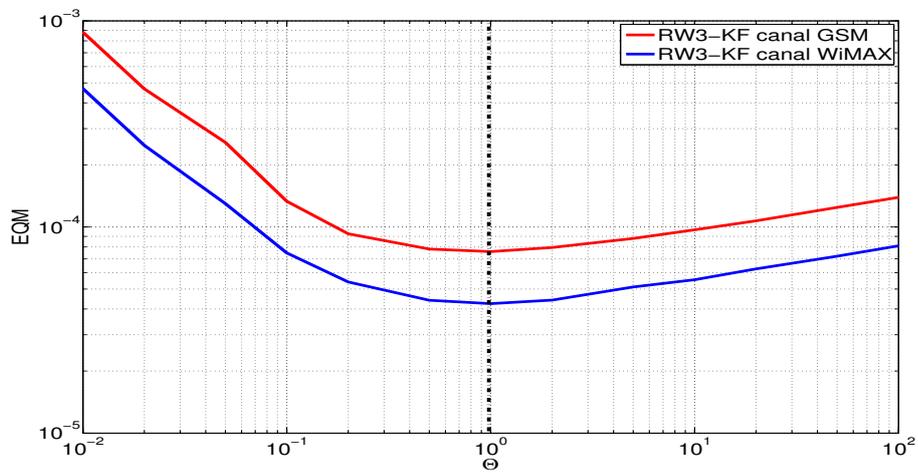
Dans cette section, les paramètres des simulations sont les mêmes que ceux de la section simulation 4.4 du chapitre 4. Nous testerons nos algorithmes avec le canal GSM et le canal WiMAX mobile définis dans le tableau 4.1. Nous utilisons  $N = 128$  sous-porteuses avec  $N_p = 16$  pilotes.

Dans un premier temps, nous allons détailler la méthode utilisée pour régler numériquement le RW3-KF. Régler le RW3-KF signifie trouver les bonnes valeurs des  $L_t$  paramètres du modèle RW3  $\sigma_{u_l}^2$ . Il faudrait donc faire une optimisation multi-dimensionnelle, ce qui est toujours délicat. Pour ramener cette optimisation à une dimension, nous partons pour  $\sigma_{u_l}^2$  des valeurs données par la méthode approchée. Puis nous appliquons le même paramètre  $\Theta$  sur ces valeurs en le faisant varier sur une grille de valeurs. Pour cela, nous multiplions  $\sigma_{u_l}^2$  (5.45) par le coefficient  $\Theta$  avec  $\Theta \in [10^{-2}, 10^2]$ , soit :

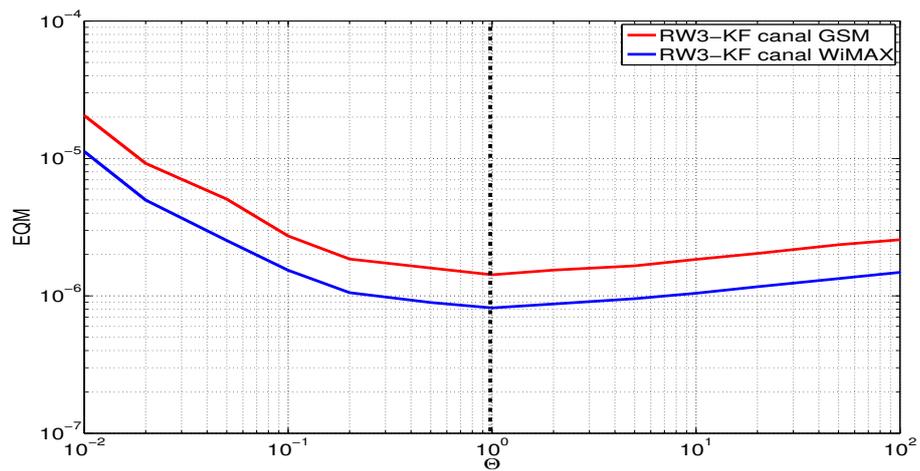
$$\sigma_{u_l}^2 = \Theta \cdot \left[ \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot (\sigma_{\alpha_l}^2)^6 \cdot \sigma_{\text{KF}l}^2 \cdot (2\pi f_d T)^{36} \right]^{\frac{1}{7}}. \quad (5.53)$$



(a) RSB = 0 dB



(b) RSB = 20 dB



(c) RSB = 40 dB

FIGURE 5.2: Optimisation numérique du RW3-KF

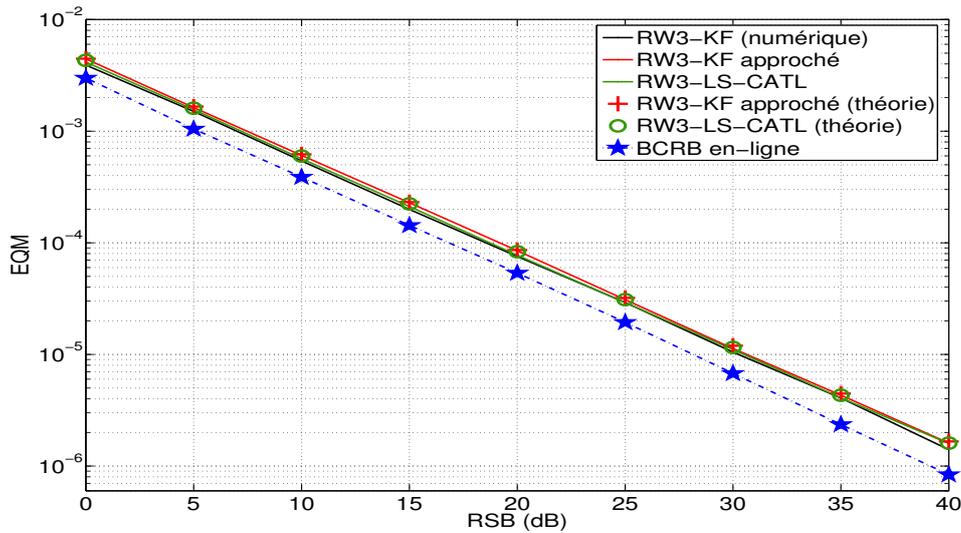


FIGURE 5.3: Comparaison des estimateur en terme d'EQM versus RSB  $f_d T = 10^{-3}$ ,  $N_p=16$

Les résultats de cette optimisation sont montrés sur la figure 5.2. Notons que cette méthode ne permet pas forcément d'obtenir les résultats optimaux, car pour cela il aurait fallu faire l'optimisation sur les  $L_t$  dimensions, ce qui était difficile à faire en pratique. Les résultats montrent une cuvette, ce qui est intéressant pour le réglage car cela signifie que si l'on s'éloigne des valeurs de l'optimisation numérique tout en restant dans la cuvette, les performances de la RW3-KF seront très proches de celles obtenues avec les bonnes valeurs. Aussi, notons que si l'on choisit  $\Theta = 1$ , c'est à dire que l'on utilise pour le RW3-KF exact les formules analytiques de réglages dérivées pour le RW3-KF approché, nous obtenons une MSE proche du minimum délivrée par l'optimisation numérique.

La figure 5.3 montre les résultats théoriques et de simulation pour le RW3-KF exact et le RW3-KF approché. Le RW3-KF approché est réglé avec les valeurs de  $\sigma_{u_i}^2$  données par (5.45). Nous observons que les simulations de la méthode approchée confirment bien les résultats théoriques donnés par la formule (5.52). De plus, le RW3-KF approché présente des performances très proches de la RW3-LS-CATL et du RW3-KF réglé numériquement, ce qui valide l'intérêt de notre méthode approchée : ses paramètres peuvent être réglés de manière analytique, tout en présentant une plus faible complexité. On vérifie aussi la similitude entre le RW3-KF et la RW3-LS-CATL.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé théoriquement le fonctionnement du RW3-KF et ses performances asymptotiques. Pour cela, nous sommes parti du cas simple mono-trajet multi-porteuse, ce qui nous a permis de faire le lien avec les résultats du chapitre 3 obtenus pour le cas mono-trajet mono-porteuse. Nous avons ensuite étendu notre analyse au cas multi-trajet multi-porteuse. Nous avons pu obtenir des résultats analytiques en faisant l'hypothèse  $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$ , hypothèse vérifiée uniquement dans le cas d'un "ca-

nal discret" (retards physiques du canal multiples de la période d'échantillonnage). Pour le cas plus général d'un canal paramétrique, nous avons eu recours à une approximation du RW3-KF en une méthode approchée pour laquelle nous avons obtenu des formules analytiques approchées de performance et de réglage des paramètres. Les résultats de simulation confirment les résultats théoriques et valident notre méthode approchée qui présente des performances similaires à la méthode RW3-KF exacte, avec une complexité réduite.

# Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons d'abord proposé un algorithme pour l'estimation de canal à faible complexité, que nous avons nommé la boucle RW3-CATL (pour *random walk of order 3 - complex amplitude tracking loop* en anglais). Notre algorithme est inspiré de la structure d'une PLL (*phase locked loop* en anglais) d'ordre 3 et appliqué à la poursuite des amplitudes complexes (CA pour *complex amplitude* en anglais) des trajets du canal. Cet estimateur à coefficients constant a été introduit dans un premier temps depuis les équations d'un filtre de Kalman, nommé RW3-KF, basé sur un modèle de marche aléatoire d'ordre 3 (RW3 pour *random walk model of order 3* en anglais) dans le cas d'un canal mono-trajet pour une modulation mono-porteuse. Nous avons démontré que, en fixant le ratio de capacité  $m$  à 3,19, le facteur d'amortissement  $\zeta$  à 0,39, et avec une fréquence naturelle  $f_n$  calculée par l'expression trouvée en fonction de la fréquence Doppler et du RSB, il est possible d'obtenir des performances quasi optimales en termes d'EQM asymptotique.

Ensuite, dans le chapitre 3, nous avons étudié le RW3-KF en mode asymptotique. Le paramètre optimal du RW3-KF, la variance de bruit d'état qui est le seul paramètre à régler, a été trouvé en résolvant les équations de Riccati. Fort de ces résultats, nous avons pu conclure que le RW3-KF est en fait quasi-équivalent en régime asymptotique à une boucle RW3-CATL réglée avec  $m = 2$  et  $\zeta = 0.5$ . Ces résultats généralisent à l'ordre 3 les résultats établis dans les années 1990 pour l'ordre 2 [10][11] sur l'équivalence entre PLL numérique et filtre de Kalman, obtenue pour certaines valeurs des paramètres de boucle de la PLL, et un choix approprié du modèle d'évolution utilisé dans le filtre de Kalman. Ainsi, le lien entre le RW3-CATL et le RW3-KF a été établi malgré le fait que le filtre de Kalman RW3-KF est contrôlée par un seul paramètre alors que la boucle RW3-CATL est contrôlée par ses 3 paramètres de boucle.

Les résultats des simulations Monte-Carlo montrent que les estimateurs d'ordre 3 ont bien surpassé (en terme EQM asymptotique et TEB) les estimateurs conventionnels aux ordres inférieurs, pour le problème d'estimation d'un canal de Rayleigh à fréquence Doppler normalisée faible ou modérée. De plus, les EQMs asymptotiques de la RW3-CATL et du RW3-KF sont déjà très proches de la borne de Cramer-Rao bayésienne (BCRB).

Nous avons ensuite étendu nos résultats au contexte plus général d'un canal multi-trajet avec modulation multi-porteuse OFDM. Pour cela, la boucle RW3-CATL originale a été légèrement modifiée sous forme vectorielle pour s'adapter à ce contexte. Un estimateur au sens des moindres carrés (LS pour *least-square* en anglais) a été rajouté pour réaliser une estimation préliminaire. La boucle vectorielle est alors désignée par RW3-LS-CATL. Les résultats du chapitre 2 ont été généralisés dans le cas multi-trajet multi-porteuse. Nous

avons donné les formules analytiques pour optimiser les RW-LS-CATLs (d'ordre 3, 2 et 1) et pour les EQMs minimales correspondantes, qui sont ensuite validées par les simulations. Le RW3-KF est aussi appliqué à ce contexte au dernière chapitre. Nous sommes parti du cas mono-trajet multi-porteuse, ce qui nous a permis de faire le lien avec les résultats du chapitre 3. Nous avons pu étendre des résultats analytiques dans un canal idéal discret *i.e.* où les retards entre les trajets sont supposés des multiples entiers de la période d'échantillonnage, permettant de vérifier l'hypothèse  $\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p = N_p \mathbf{I}_{L_t}$  peut être vérifiée. Pour le cas plus général d'un canal paramétrique (les trajets ne sont pas des entiers de la période d'échantillonnage), nous avons eu recours à une approximation pour obtenir un algorithme approché ainsi que les formules analytiques associées. Les simulations ont validés ces deux estimateurs d'ordre 3 dans le contexte général, ils présentent des performances très proches de la borne inférieure et bien meilleurs que les estimateurs conventionnels aux ordres inférieurs.

Fort de ces résultats, nous pouvons envisager de nombreuses perspectives à ce travail :

**Application MIMO :** Aujourd'hui, tous les standards de communications en cours de développement depuis quelques années reposent sur deux technologies clés : l'OFDM et le MIMO (Multiple-Input Multiple-Output). Ces techniques sont aujourd'hui implémentées dans les standards 3G et 4G. La première possibilité d'approfondir nos travaux est donc d'étendre les études vers le scénario MIMO-OFDM à partir des résultat des chapitres 4 et 5.

**Estimation Conjointe :** Comme de nombreux de travaux ont été réalisés pour la synchronisation (Estimation conjointe avec le CFO) [3, 65–67], nous pouvons facilement généraliser ces travaux qui sont basés sur un filtre de Kalman avec modèles AR1, en utilisant le modèle RW $p$ , dans le scénario mobilité faible à modérée.

**Robuste estimation avec le filtre  $H_\infty$  [67, 68] :** Dans le cas où les statistiques du bruit sont inconnus et qu'il existe de l'incertitude dans le modèle d'espace-état, par exemple, même si les performances des estimateurs proposés dans cette thèse avec un modèle RW3 ont été bien améliorées par rapport au modèle AR1 pour la mobilité faible à modérée, nous ne pouvons pas affirmer que la vraie variation de l'AC suit un modèle RW3. Le filtre  $H_\infty$  est une méthode très connue dans le domaine du contrôle, qui est récemment de plus en plus utilisée dans le traitement du signal. Grâce à sa résistance à l'incertitude du modèle, dans la perspective de notre travail, nous pouvons étudier cette méthode et comparer sa performance au niveau de la précision d'estimation.

# Bibliographie

- [1] KALMAN R. E. « A new approach to linear filtering and prediction problems ». Dans : *Journal of basic Engineering* vol. 82.n° 1 (1960), p. 35–45 (cf. p. 30).
- [2] HIJAZI H. et ROS L. « Joint data QR-detection and Kalman estimation for OFDM time-varying Rayleigh channel complex gains ». Dans : *IEEE Trans. Commun.* vol. 58.n° 1 (Jan. 2010), p. 170–178. ISSN : 0090-6778. DOI : 10 . 1109 / TCOMM . 2010 . 01 . 080296 (cf. p. 30, 46, 81, 90, 96, 97).
- [3] SIMON E.P., ROS L., HIJAZI H. et GHOGHO M. « Joint Carrier Frequency Offset and Channel Estimation for OFDM Systems via the EM Algorithm in the Presence of Very High Mobility ». Dans : *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 60.n° 2 (Feb. 2012), p. 754–765. ISSN : 1053-587X. DOI : 10 . 1109 / TSP . 2011 . 2174053 (cf. p. 30, 46, 81, 90, 132).
- [4] TUGNAIT J.K., S. He. et KIM H. « Doubly Selective Channel Estimation Using Exponential Basis Models and Subblock Tracking ». Dans : *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 58.n° 3 (2010), p. 1275–1289. ISSN : 1053-587X. DOI : 10 . 1109 / TSP . 2009 . 2036047 (cf. p. 30, 46).
- [5] BADDOUR K.E. et BEAULIEU N.C. « Autoregressive modeling for fading channel simulation ». Dans : *IEEE Trans. Wireless Commun.* vol. 4.n° 4 (July 2005), p. 1650–1662. ISSN : 1536-1276. DOI : 10 . 1109 / TWC . 2005 . 850327 (cf. p. 30, 55).
- [6] ROS L., GHANDOUR-HAIDAR S. et BROSSIER J.-M. « Sur l'utilisation des filtres du premier ordre pour l'estimation d'un canal radio-mobile de Rayleigh à évanouissement plat ». Dans : *XXIIIème colloque GRETSI (GRETSI 2011), Bordeaux : France.* 2011 (cf. p. 68, 89).
- [7] GHANDOUR-HAIDAR S., ROS L. et BROSSIER J.-M. « On the use of first-order autoregressive modeling for Rayleigh flat fading channel estimation with Kalman filter ». Dans : *ELSEVIER Signal Processing* vol. 92.n° 2 (2012), p. 601 –606. ISSN : 0165-1684. DOI : 10 . 1016 / j . sigpro . 2011 . 08 . 014 (cf. p. 30, 46, 55, 74, 81, 90).
- [8] GERZAGUET R., ROS L. et BROSSIER J.-M. « Self-adaptive stochastic rayleigh flat fading channel estimation ». Dans : *IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP).* 2013 (cf. p. 68, 89).

- [9] GAZOR S. « Prediction in LMS-type adaptive algorithms for smoothly time varying environments ». Dans : *Signal Processing, IEEE Transactions on* vol. 47.n° 6 (1999), p. 1735–1739. ISSN : 1053-587X. DOI : 10.1109/78.765152 (cf. p. 30, 47, 48, 104).
- [10] DRIESSEN P.F. « DPLL bit synchronizer with rapid acquisition using adaptive Kalman filtering techniques ». Dans : *IEEE Trans. Commun.* vol. 42.n° 9 (1994), p. 2673–2675. ISSN : 0090-6778. DOI : 10.1109/26.317406 (cf. p. 30, 47, 86, 131).
- [11] CHRISTIANSEN G.S. « Modeling of PRML timing loop as a Kalman filter ». Dans : *IEEE Global Telecommunications Conference GLOBECOM*. T. 2. 1994, 1157–1161 vol.2. DOI : 10.1109/GLOCOM.1994.512839 (cf. p. 30, 47, 131).
- [12] MENGALI U. et D'ANDREA A.N. *Synchronization Techniques for Digital Receivers*. PLENUM PRESS, 1997 (cf. p. 30, 97).
- [13] RAPPAPORT T.S. *Wireless Communications, Principles and Practice*. Prentice-Hall PTR, 1999 (cf. p. 34).
- [14] PROAKIS J.G. *Digital Communications*. McGraw-Hill, third edition, 1995 (cf. p. 34, 41).
- [15] ROS L. « Egalisation et synchronisation en communications numériques ». Dans : *Cours troisième année ENSERG* (2004) (cf. p. 35).
- [16] *Mobile WiMAX PHY Layer (RF) Operation and Measurement (Application note)*. Agilent Technologies (cf. p. 40).
- [17] BELLO P.A. « Characterization of randomly time-variant linear channels ». Dans : *IEEE transactions on communications and systems* vol. 11(4) (1963), p. 360–393 (cf. p. 40).
- [18] ROS L. « Réception multi-capteur pour un terminal radio-mobile dans un système d'accès multiple à répartition par codes. Application au mode TDD de l'UMTS ». Thèse de doct. Institut Polytechnique de Grenoble, 2001 (cf. p. 41).
- [19] CLARKE R.H. « A statistical theory of mobile radio reception ». Dans : *Bell System Technical Journal* vol. 47 (Jul. 1968), p. 957–1000 (cf. p. 42).
- [20] CLARKE R.H. et KHOO Wee Lin. « 3-D mobile radio channel statistics ». Dans : *IEEE Trans. Veh. Technol.* vol. 46.n° 3 (1997), p. 798–799. ISSN : 0018-9545. DOI : 10.1109/25.618205 (cf. p. 43).
- [21] WANG H. et CHANG P. « On verifying the first-order Markovian assumption for a Rayleigh fading channel model ». Dans : *IEEE Trans. veh. Technol.* vol. 45 (1996), p. 353–357 (cf. p. 46).
- [22] KOMNINAKIS C., FRAGOULI C., SAYED A.H. et WESEL R.D. « Multi-input multi-output fading channel tracking and equalization using Kalman estimation ». Dans : *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 50.n° 5 (May 2002), p. 1065–1076. ISSN : 1053-587X. DOI : 10.1109/78.995063 (cf. p. 46, 74, 81, 90).
- [23] LIU Z., MA X. et GIANNAKIS G.B. « Space-time coding and Kalman filtering for time-selective fading channels ». Dans : *IEEE Trans. Commun.* vol. 50.n° 2 (Feb. 2002), p. 183–186. ISSN : 0090-6778. DOI : 10.1109/26.983312 (cf. p. 46, 74).

- [24] CHEN W. et ZHANG Ruifeng. « Kalman-filter channel estimator for OFDM systems in time and frequency-selective fading environment ». Dans : *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. T. 4. May 2004, iv-377–iv-380 vol.4. DOI : 10.1109/ICASSP.2004.1326842 (cf. p. 46, 48, 50, 74, 96).
- [25] AL-NAFFOURI T.Y. « An EM-Based Forward-Backward Kalman Filter for the Estimation of Time-Variant Channels in OFDM ». Dans : *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 55.n° 7 (2007), p. 3924–3930. ISSN : 1053-587X. DOI : 10.1109/TSP.2007.894271 (cf. p. 46, 50, 74, 96).
- [26] BARBIERI A., PIEMONTESE A. et COLAVOLPE G. « On the ARMA approximation for fading channels described by the Clarke model with applications to Kalman-based receivers ». Dans : *IEEE Trans. Wireless Commun.* vol. 8.n° 2 (2009), p. 535–540. ISSN : 1536-1276. DOI : 10.1109/TWC.2009.070188 (cf. p. 46, 74).
- [27] ROS L. et SIMON E.-P. « Second-order modeling for Rayleigh flat fading channel estimation with Kalman Filter ». Dans : *17th International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*. 2011, p. 1–6. DOI : 10.1109/ICDSP.2011.6004912 (cf. p. 46, 55, 74, 89).
- [28] ROS L., HIJAZI H. et SIMON E.P. « Paths complex gain tracking algorithms for OFDM receiver in slowly-varying channels ». Dans : *4th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP)*. Mar. 2010, p. 1–6. DOI : 10.1109/ISCCSP.2010.5463490 (cf. p. 46, 47, 101, 102, 114).
- [29] VILÀ-VALLS J. « Estimation dynamique non-linéaire de canaux de transmission pour récepteurs satellites mobiles ». Thèse de doct. Instut Polytechnique de Grenoble, Mars, 2010 (cf. p. 46).
- [30] LINDBOM L., STERNAD M. et AHLEN A. « Tracking of time-varying mobile radio channels .1. The Wiener LMS algorithm ». Dans : *Communications, IEEE Transactions on* vol. 49.n° 12 (2001), p. 2207–2217. ISSN : 0090-6778. DOI : 10.1109/26.974267 (cf. p. 47).
- [31] XUE Y. et ZHU X. « Second-order LMS based wireless channel tracking : implementation under imperfect carrier synchronization ». Dans : *ELSEVIER Signal Processing* vol. 83.n° 1 (jan. 2003), p. 199–212. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V18-46X8XWT-2/1/ae5a2149e61587f517f0d1af729576b6> (cf. p. 47).
- [32] ROS L., HIJAZI H. et SIMON E.P. *Complex amplitudes tracking loop for multipath slow fading channel estimation in OFDM systems*. Rap. tech. Research Report of the Gipsalab laboratory, April 2012 (cf. p. 47, 54, 59, 68, 95, 102, 113, 114).
- [33] ROS L., HIJAZI H. et SIMON E.P. « Complex amplitudes tracking loop for multipath channel estimation in OFDM systems under slow to moderate fading ». Dans : *ELSEVIER Signal Processing* vol. 97.n° 1 (2014), p. 134–145 (cf. p. 68, 107, 114).
- [34] EYNARD G. « Techniques de synchronisation pour les communications acoustiques sous-marines ». Thèse de doct. l'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE, Dec. 2008 (cf. p. 47).

- [35] EYNARD G. et LAOT C. « Extended linear phase detector characteristic of a software PLL ». Dans : *3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing (ISCCSP)*. 2008, p. 62–67. DOI : 10 . 1109 / ISCCSP . 2008 . 4537193 (cf. p. 47).
- [36] EYNARD G. et LAOT C. « Blind Doppler compensation scheme for single carrier digital underwater communications ». Dans : *OCEANS*. 2008, p. 1–5. DOI : 10 . 1109 / OCEANS . 2008 . 5152066 (cf. p. 47).
- [37] PATAPOUTIAN A. « On phase-locked loops and Kalman filters ». Dans : *IEEE Trans. Commun.* vol. 47.n° 5 (May, 1999), p. 670–672. ISSN : 0090-6778. DOI : 10 . 1109 / 26 . 768758 (cf. p. 47, 86).
- [38] KAY S. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Prentice Hall PTR, April, 1993 (cf. p. 48–50, 97).
- [39] BROWN R. G. et HWANG P. Y. C. *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering (Second Edition)*. John Wiley et Sons Inc., 1992 (cf. p. 49).
- [40] CHUI C.K. et CHEN G. *Kalman Filtering : with Real-Time Applications (4th edition)*. Springer, 2008 (cf. p. 50).
- [41] LINDSEY W.C. et CHIE C. « A survey of digital phase-locked loops ». Dans : *Proceedings of the IEEE* vol. 69.n° 4 (1981), p. 410–431. ISSN : 0018-9219. DOI : 10 . 1109 / PROC . 1981 . 11986 (cf. p. 54, 97).
- [42] SHU H., ROS L. et SIMON E. P. « Third-order complex amplitudes tracking loop for slow fading channel estimation ». Dans : *19th International Conference on Telecommunications (ICT)*. April, 2012, p. 1–6. DOI : 10 . 1109 / ICTEL . 2012 . 6221221 (cf. p. 54, 79).
- [43] SHAN C., CHEN Z., ZHU L. et LI Y. « Design and Implementation of Bandwidth Adaptable Third-Order All Digital Phase-Locked Loops ». Dans : *6th International Conference on Wireless Communications Networking and Mobile Computing (WiCOM)*. 2010, p. 1–4. DOI : 10 . 1109 / WICOM . 2010 . 5600598 (cf. p. 56, 57).
- [44] HU S. *Principle of Automatic Control (4th edition)*. Beijing : Science Press, 2001 (cf. p. 57).
- [45] ANTONIOU A. *Digital Signal Processing*. McGraw-Hill, 2005 (cf. p. 60).
- [46] PORAT B. *A course in digital signal processing*. Wiley, 1997 (cf. p. 60).
- [47] WINKELSTEIN R. « Closed form evaluation of symmetric two-sided complex integrals ». Dans : *TDA Progress Report* (1981) (cf. p. 61, 139).
- [48] HIJAZI H. et ROS L. « Bayesian Cramera-Rao Bounds for complex gain parameters estimation of slowly varying Rayleigh channel in OFDM systems ». Dans : *ELSEVIER Signal Processing* vol. 89.n° 1 (2009), p. 111 –115. ISSN : 0165-1684. DOI : 10 . 1016 / j . sigpro . 2008 . 07 . 017 (cf. p. 74).
- [49] KAPLAN E. et HEGARTY C. *Understanding GPS : Principles and Applications, Second Edition*. Artech House Publishers, 2005. ISBN : 9781580538954 (cf. p. 81).

- [50] ABEIDA H., BROSSIER J.-M., ROS L. et VILA-VALLS J. « An EM Algorithm for Path Delay and Complex Gain Estimation of Slowly Varying Fading Channel for CPM Signals ». Dans : *Global Telecommunications Conference, 2009. GLOBECOM 2009. IEEE*. Dec. 2009, p. 1–6. DOI : 10.1109/GLocom.2009.5425719 (cf. p. 81).
- [51] ZHAO Y. et HUANG A. « A novel channel estimation method for OFDM mobile communication systems based on pilot signals and transform-domain processing ». Dans : *IEEE 47th Vehicular Technology Conference, 1997*. T. 3. 1997, 2089–2093 vol.3. DOI : 10.1109/VETEC.1997.605966 (cf. p. 95, 113).
- [52] HSIEH M.-H. et WEI C.-H. « Channel estimation for OFDM systems based on comb-type pilot arrangement in frequency selective fading channels ». Dans : *IEEE Trans. Consum. Electron.* vol. 44.n° 1 (1998), p. 217–225. ISSN : 0098-3063. DOI : 10.1109/30.663750 (cf. p. 95, 113).
- [53] COLERI S., ERGEN M., PURI A. et BAHAI A. « Channel estimation techniques based on pilot arrangement in OFDM systems ». Dans : *IEEE Trans. Broadcast.* vol. 48.n° 3 (2002), p. 223–229. ISSN : 0018-9316. DOI : 10.1109/TBC.2002.804034 (cf. p. 95, 113).
- [54] HIJAZI H. et ROS L. « Analytical Analysis of Bayesian Cramer-Rao Bound for Dynamical Rayleigh Channel Complex Gains Estimation in OFDM System ». Dans : *IEEE Trans. Signal Process.* vol. 57.n° 5 (2009), p. 1889–1900. ISSN : 1053-587X. DOI : 10.1109/TSP.2009.2014264 (cf. p. 96).
- [55] SOHAIL M.S. et AL-NAFFOURI T.Y. « An EM based frequency domain channel estimation algorithm for multi-access OFDM systems ». Dans : *ELSEVIER Signal Processing* vol. 90.n° 5 (2010), p. 1562–1572. ISSN : 0165-1684. DOI : 10.1016/j.sigpro.2009.10.026. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168409004630> (cf. p. 96).
- [56] CHEN N., ZHANG J. et ZHANG P. « Improved Channel Estimation Based on Parametric Channel Approximation Modeling for OFDM Systems ». Dans : *IEEE Trans. Broadcast.* vol. 54.n° 2 (2008), p. 217–225. ISSN : 0018-9316. DOI : 10.1109/TBC.2007.914655 (cf. p. 96).
- [57] YANG B., LETAIEF K. B., CHENG R.S. et CAO Z. « Channel estimation for OFDM transmission in multipath fading channels based on parametric channel modeling ». Dans : *IEEE Trans. Commun.* vol. 49.n° 3 (2001), p. 467–479. ISSN : 0090-6778. DOI : 10.1109/26.911454 (cf. p. 96, 97).
- [58] SIMEONE O., BAR-NESS Y. et SPAGNOLINI U. « Pilot-based channel estimation for OFDM systems by tracking the delay-subspace ». Dans : *IEEE Trans. Wireless Commun.* vol. 3.n° 1 (2004), p. 315–325. ISSN : 1536-1276. DOI : 10.1109/TWC.2003.819022 (cf. p. 96).
- [59] HIJAZI H. et ROS L. « Polynomial Estimation of Time-Varying Multipath Gains With Intercarrier Interference Mitigation in OFDM Systems ». Dans : *IEEE Trans. Veh. Technol.* vol. 58.n° 1 (2009), p. 140–151. ISSN : 0018-9545. DOI : 10.1109/TVT.2008.923653 (cf. p. 96, 97).

- [60] HIJAZI H. « Estimation de canal radio-mobile à évolution rapide dans les systèmes à modulation OFDM ». Thèse de doct. Instut Polytechnique de Grenoble, Nov. 2008 (cf. p. 98, 113).
- [61] *European Digital Cellular Telecommunication System (Phase 2), Radio Transmission and Reception, GSM 05.05, vers. 4.6.0*. Sophia Antipolis, France (cf. p. 108).
- [62] *WiMAX Forum Mobile Release 1.0 Channel Model v1.0.0*. WiMAX Forum (cf. p. 108).
- [63] HIJAZI H. et ROS L. « Rayleigh Time-varying Channel Complex Gains Estimation and ICI Cancellation in OFDM Systems ». Dans : *Eur. Trans. Telecommun.*, 20 vol. 8 (2009), p. 782–796 (cf. p. 113).
- [64] VAN TREES H.-L. *Optimum Array Processing : Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory*. John Wiley & Sons, Inc., 2002 (cf. p. 118, 122).
- [65] SIMON E.P., ROS L., HIJAZI H., FANG J., GAILLOT D.P. et BERBINEAU M. « Joint Carrier Frequency Offset and Fast Time-Varying Channel Estimation for MIMO-OFDM Systems ». Dans : *IEEE Trans. Veh. Technol.* vol. 60.n° 3 (2011), p. 955–965. ISSN : 0018-9545. DOI : 10.1109/TVT.2011.2104970 (cf. p. 120, 132).
- [66] FANG J., SIMON E.P., BERBINEAU M. et LIÉNARD M. « Joint channel and phase noise estimation in OFDM systems at very high speeds ». Dans : *AEU-Int. J. Electron. Commun.* vol. 67.n° 4 (2013), p. 295–300 (cf. p. 132).
- [67] POVEDA H. « Techniques d'Estimation de Canal et de Décalage de Fréquence Porteuse pour Systèmes Sans-fil Multiporteuses en Liaison Montante ». Thèse de doct. Université de Bordeaux, 2011 (cf. p. 132).
- [68] POVEDA H., GRIVEL E., FERRÉ G. et CHRISTOV N. « Kalman vs  $H_\infty$  filter in terms of convergence and accuracy : Application to carrier frequency offset estimation ». Dans : *Proceedings of the 20th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. 2012, p. 121–125 (cf. p. 132).
- [69] SHU H., SIMON E.P. et ROS L. « Third-order Kalman Filter : tuning and steady-state performance ». Dans : *Signal Processing Letters, IEEE* (2013). ISSN : 1070-9908. DOI : 10.1109/LSP.2013.2277668 (cf. p. 89, 93).

## Bande équivalente de bruit

La bande équivalente de bruit est définie par :

$$B_L = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{+\frac{1}{2T}} |L(e^{j2\pi fT})|^2 df. \quad (\text{A.1})$$

En utilisant le résultat de [47], l'intégration complexe bilatérale sous la forme de (A.1) peut être évaluée par la résolution d'un système d'équations (matrice) sous forme analytique. Les éléments des matrices sont des coefficients du numérateur et du dénominateur de l'intégrande. Sachant que la fonction de transfert d'un système d'ordre 3 s'écrit :

$$L(z) = \frac{b_0 z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}, \quad (\text{A.2})$$

l'équation matricielle correspondante est alors donnée par :

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_0 + a_2 & a_1 + a_3 & a_0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 B_L \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \\ 2(b_0 b_1 + b_1 b_2 + b_2 b_3) \\ 2(b_0 b_2 + b_1 b_3) \\ 2b_0 b_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Pour un système d'ordre 2, la fonction de transfert est sous la forme :

$$L(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}, \quad (\text{A.4})$$

et l'équation matricielle correspondante est :

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 + a_2 & a_1 + a_3 \\ a_2 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 B_L \\ M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 \\ 2(b_0 b_1 + b_1 b_2) \\ 2b_0 b_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Pour un système d'ordre 1, nous avons la fonction de transfert :

$$L(z) = \frac{b_0 z + b_1}{a_0 z + a_1}, \quad (\text{A.6})$$

et l'équation matricielle correspondante est :

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 B_L \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0^2 + b_1^2 \\ 2b_0 b_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

## A.1 Bande équivalente de bruit des CATLs

Pour la RW3-CATL, depuis (2.57), nous avons  $b_0 = \mu_1$ ,  $b_1 = -2\mu_1 + \mu_2$ ,  $b_2 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3$ ,  $b_3 = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \mu_1 + \mu_2 - 3$ ,  $a_2 = 3 - 2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3$ ,  $a_3 = \mu_1 - 1$ . En combinant avec (2.51)(2.52)(2.53), la bande équivalente de bruit de RW3-CATL est :

$$B_L = \frac{A(\omega_n T)^6 + B(\omega_n T)^5 + C(\omega_n T)^4 + D(\omega_n T)^3 + E(\omega_n T)^2 + F(\omega_n T)}{A(\omega_n T)^6 + B(\omega_n T)^5 + C(\omega_n T)^4 + G(\omega_n T)^3 + H(\omega_n T)^2 + I(\omega_n T) + J}, \quad (\text{A.8})$$

où :

$$\begin{aligned} A &= m^3 \zeta^3, \\ B &= 8m^3 \zeta^4 + 4m^2 \zeta^2, \\ C &= 20m^3 \zeta^5 + 5m^3 \zeta^3 + 30m^2 \zeta^3 + 5m\zeta, \\ D &= 16m^3 \zeta^6 + 22m^3 \zeta^4 + 68m^2 \zeta^4 + 16m^2 \zeta^2 + 34m\zeta^2 + 2, \\ E &= 24m^3 \zeta^5 + 4m^3 \zeta^3 + 48m^2 \zeta^5 + 56m^2 \zeta^3 + 64m\zeta^3 + 14m\zeta + 12\zeta, \\ F &= 8m^3 \zeta^4 + 48m^2 \zeta^4 + 32m\zeta^4 + 24m\zeta^2 + 16\zeta^2 + 4, \\ G &= 16m^3 \zeta^6 + 22m^3 \zeta^4 + 68m^2 \zeta^4 + 18m^2 \zeta^2 + 34m\zeta^2 + 2, \\ H &= 24m^3 \zeta^5 + 4m^3 \zeta^3 + 48m^2 \zeta^5 + 68m^2 \zeta^3 + 64m\zeta^3 + 20m\zeta + 12\zeta, \\ I &= 8m^3 \zeta^4 + 64m^2 \zeta^4 + 8m^2 \zeta^2 + 32m\zeta^4 + 56m\zeta^2 + 16\zeta^2 + 8, \\ J &= 16m^2 \zeta^3 + 32m\zeta^3 + 16\zeta. \end{aligned}$$

Pour la RW2-CATL, depuis (2.65), nous avons  $b_0 = \mu_1$ ,  $b_1 = -\mu_1 + \mu_2$ ,  $b_2 = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \mu_1 + \mu_2 - 2$ ,  $a_2 = 1 - \mu_1$ .

$$B_L^{(RW2)} = \frac{2\mu_1^2 + 2\mu_2 - 3\mu_1\mu_2}{\mu_1(4 - 2\mu_1 - \mu_2)} \quad (\text{A.9})$$

En combinant avec (2.68)(2.69), nous retrouvons (2.85).

Pour la RW1-CATL, depuis (2.71), nous avons  $b_0 = \mu_1$ ,  $b_1 = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \mu_1 - 1$ .

$$B_L^{(RW1)} = \frac{\mu_1}{2 - \mu_1} \quad (\text{A.10})$$

En combinant avec (2.72), nous retrouvons (2.86).

## A.2 Bande équivalente de bruit du RW3-KF

Depuis (3.16) et (A.2), nous avons pour la RW3-KF :  $b_0 = k_1$ ,  $b_1 = -2k_1 + k_2 + \frac{1}{2}k_3$ ,  $b_2 = k_1 - k_2 + \frac{1}{2}k_3$ ,  $b_3 = 0$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = k_1 + k_2 + \frac{1}{2}k_3 - 3$ ,  $a_2 = 3 - 2k_1 - k_2 - \frac{1}{2}k_3$ ,  $a_3 = k_1 - 1$ . En résolvant le système d'équations (A.3), nous obtenons :

$$B_L = \frac{4k_1^2 k_2 + 6k_1^2 k_3 + 6k_1 k_2^2 - 11k_1 k_2 k_3 - 5k_1 k_3^2 - 4k_1 k_3 + 4k_2^2 + 8k_2 k_3 + 4k_3^2}{-4k_1^2 k_2 - 6k_1^2 k_3 - 2k_1 k_2^2 - 5k_1 k_2 k_3 + 8k_1 k_2 - 3k_1 k_3^2 + 16k_1 k_3 + 2k_2 k_3 + 2k_3^2 - 8k_3}. \quad (\text{A.11})$$

En remplaçant  $k_2, k_3$  par (3.34) et (3.35), nous obtenons :

$$B_L = \frac{\frac{5}{2}k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 - \frac{5}{8}k_1^3 - \frac{5}{64}k_1^4}{3 - \frac{9}{8}k_1^2 - \frac{9}{32}k_1^3 - \frac{3}{64}k_1^4}. \quad (\text{A.12})$$



## Minimisation de l'EQM asymptotique de la boucle RW3-CATL avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Nous appliquons la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour minimiser (2.109) avec la contrainte (2.93). Sachant la fonction auxiliaire, le problème revient à résoudre le système d'équations suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial f_n} = 2\pi\sigma_w^2 T \mathcal{B} - 6 \frac{S_\alpha}{(m\zeta)^2 f_n^7} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial m} = 2\pi\sigma_w^2 T f_n \mathcal{D}_m - 2 \frac{S_\alpha}{\zeta^2 f_n^6 m^3} + 2\lambda(4\zeta^2 - 1)m = 0, \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial \zeta} = 2\pi\sigma_w^2 T f_n \mathcal{D}_\zeta - 2 \frac{S_\alpha}{m^2 f_n^6 \zeta^3} + 8\lambda m^2 \zeta = 0, \end{array} \right. \quad (\text{B.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2(4\zeta^2 - 1) + 4 = 0, \end{array} \right. \quad (\text{B.4})$$

avec :

$$\mathcal{D}_m = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial m} = \frac{m^4 \zeta^5 + 4m^3 \zeta^5 + 8m^2 \zeta^5 + 8m \zeta^3 - m\zeta + 2\zeta}{2m^4 \zeta^4 + 8m^3 \zeta^4 + 8m^2 \zeta^4 + 4m^2 \zeta^2 + 8m \zeta^2 + 2}, \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\zeta &= \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \zeta} \\ &= \frac{2m^5 \zeta^6 + 16m^4 \zeta^6 + 32m^3 \zeta^6 + 16m^2 \zeta^6 + 20m^2 \zeta^4 - 3m^2 \zeta^2 + 16m \zeta^4 + 4\zeta^2 - 1}{4m^4 \zeta^6 + 16m^3 \zeta^6 + 16m^2 \zeta^6 + 8m^2 \zeta^4 + 16m \zeta^4 + 4\zeta^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Puisque  $m$  et  $\zeta$  sont des paramètres positifs réels, depuis (B.4) nous avons :

$$\zeta = \frac{\sqrt{(m^2 - 4)}}{2m}, \quad (\text{B.7})$$

où on en déduit que  $m > 2$ . En remplaçant tous les  $\zeta$  dans les équations (B.1), le système d'équations devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \mathcal{B}' T - \frac{6S_\alpha}{(f_n T)^7 \cdot \frac{m^2-4}{4}} = 0, \\ C_1 \mathcal{D}'_m f_n T - \frac{2S_\alpha}{(f_n T)^6 \cdot \frac{m(m^2-4)}{4}} - \frac{8\lambda}{m} = 0, \\ C_1 \mathcal{D}'_\zeta f_n T \cdot \frac{\sqrt{(m^2-4)}}{2m} - \frac{2S_\alpha}{(f_n T)^6 \cdot \frac{m^2-4}{4}} + 2\lambda(m^2-4) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(B.8)} \\ \text{(B.9)} \\ \text{(B.10)} \end{array}$$

avec  $C_1 = 2\pi\sigma_w^2$ .  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{D}'_m$  et  $\mathcal{D}'_\zeta$  sont obtenus depuis  $\mathcal{B}$  (2.84),  $\mathcal{D}_m$  (B.5) et  $\mathcal{D}_\zeta$  (B.6) dans lesquelles  $\zeta$  est substitué par (B.7). Ensuite, en combinant (B.9) et (B.10),  $\lambda$  et  $f_n$  pourraient être exprimés comme des fonctions de  $m$  :

$$\lambda = \frac{1}{8} C_1 \mathcal{D}'_m f_n T m - \frac{S_\alpha}{(f_n T)^6 \cdot (m^2-4)}, \quad \text{(B.11)}$$

$$f_n = \left( \frac{8S_\alpha m^3}{C_1 (m^2-4) \left[ \mathcal{D}'_m m^2 (m^2-4) + 2\mathcal{D}'_\zeta \sqrt{(m^2-4)} \right]} \right)^{\frac{1}{7}}. \quad \text{(B.12)}$$

Finalement, en injectant (B.12) dans (B.8) avec quelques manipulations, le système d'équations revient à (2.111), une équation qui comporte 11 racines que nous pouvons calculer à l'aide de Matlab. Nous constatons que la valeur de  $m$  ne dépend ni de  $C_1$  ni de  $S_\alpha$ . La condition pour  $m$  (positif réel et  $m > 2$ ) rend une solution unique, soit  $m = 3.19$ . Nous obtenons alors  $\zeta = 0.39$  par (B.7), et également  $f_n$  par (B.12).

## Solution de l'équation de Riccati pour RW3-KF

Les équations de Riccati (3.11)~(3.15) donnent le lien entre le gain de Kalman  $\mathbf{K}_{(\infty)}$ , la matrice de covariance de l'estimation  $\mathbf{P}_{(\infty)}$  et la matrice de covariance de la prédiction  $\mathbf{P}'_{(\infty)}$  en régime asymptotique. En résolvant ce système d'équations, nous pouvons trouver la relation entre le gain de Kalman  $\mathbf{K}_{(\infty)}$  et la variance du bruit d'état  $\sigma_u^2$ .

Depuis (3.7), nous avons

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-k_1)P'_{11} & (1-k_1)P'_{12} & (1-k_1)P'_{13} \\ P'_{21} - k_2P'_{11} & P'_{22} - k_2P'_{12} & P'_{23} - k_2P'_{13} \\ P'_{31} - k_3P'_{11} & P'_{32} - k_3P'_{12} & P'_{33} - k_3P'_{13} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

En utilisant la symétrie de  $\mathbf{P}_{(\infty)}$  et  $\mathbf{P}'_{(\infty)}$ , nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-k_1)P'_{11} & (1-k_1)P'_{12} & (1-k_1)P'_{13} \\ P'_{12} - k_2P'_{11} & P'_{22} - k_2P'_{12} & P'_{23} - k_2P'_{13} \\ P'_{13} - k_3P'_{11} & P'_{23} - k_3P'_{12} & P'_{33} - k_3P'_{13} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

et les équations suivante depuis (3.15) :

$$P'_{11} = P_{11} + 2P_{12} + P_{13} + P_{22} + P_{23} + \frac{1}{4}P_{33} \quad (\text{C.3})$$

$$P'_{12} = P_{12} + P_{22} + \frac{3}{2}P_{23} + P_{13} + \frac{1}{2}P_{33} \quad (\text{C.4})$$

$$P'_{22} = P_{22} + 2P_{23} + P_{33} \quad (\text{C.5})$$

$$P'_{13} = P_{13} + P_{23} + \frac{1}{2}P_{33} \quad (\text{C.6})$$

$$P'_{23} = P_{23} + P_{33} \quad (\text{C.7})$$

$$P'_{33} = P_{33} + \sigma_u^2. \quad (\text{C.8})$$

Numérotons maintenant les 9 équations de (C.2) comme la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{6} \\ \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{8} \\ \textcircled{5} & \textcircled{7} & \textcircled{9} \end{bmatrix}.$$

Substituons  $P_{23}$  par  $\textcircled{8}$  dans (C.7), nous avons :

$$P'_{23} = P'_{23} - k_2 P'_{13} + P_{33} \Rightarrow k_2 P'_{13} = P_{33}. \quad (\text{C.9})$$

Puis substituons  $P_{13}$ ,  $P_{23}$  par  $\textcircled{6}$ ,  $\textcircled{8}$  dans (C.6), ce qui donne :

$$\begin{aligned} P'_{13} &= P'_{13} - k_1 P'_{13} + P'_{23} - k_2 P'_{13} + \frac{1}{2} P_{33} \\ \stackrel{(\text{C.9})}{\implies} k_1 P'_{13} &= P'_{23} - \frac{1}{2} k_2 P'_{13} \Rightarrow P'_{23} = (k_1 + \frac{1}{2} k_2) P'_{13}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

En combinant  $\textcircled{9}$  et (C.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} P'_{33} &= P_{33} + \sigma_u^2 = P'_{33} - k_3 P'_{13} + \sigma_u^2 \\ \implies P'_{13} &= \frac{\sigma_u^2}{k_3}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Ensuite, substituons  $P'_{13}$  par (C.11) dans (C.9), nous obtenons :

$$P_{33} = \frac{k_2}{k_3} \sigma_u^2 \quad (\text{C.12})$$

ce qui donne :

$$P'_{33} = P_{33} + \sigma_u^2 = (1 + \frac{k_2}{k_3}) \sigma_u^2. \quad (\text{C.13})$$

Substituons  $P_{23}$  par  $\textcircled{7}$  dans (C.7), nous avons :

$$P'_{23} = P'_{23} - k_3 P'_{12} + P_{33} \Rightarrow k_3 P'_{12} = P_{33}. \quad (\text{C.14})$$

Combinant  $\textcircled{9}$  et (C.14) donne :

$$P'_{12} = \frac{1}{k_3} P'_{33} - P'_{13}, \quad (\text{C.15})$$

et puis utiliser (C.11), (C.13) conduit à :

$$P'_{12} = \frac{k_2}{k_3^2} \sigma_u^2. \quad (\text{C.16})$$

La combinaison de (C.10) et (C.11) nous donne :

$$P'_{23} = (k_1 + \frac{k_2}{2})P'_{13} = \frac{2k_1 + k_2}{2k_3}\sigma_u^2. \quad (C.17)$$

Nous déduisons en substituant  $P_{22}, P_{32}, P_{23}, P_{33}$  par ④, ⑦, ⑧, ⑨ dans (C.5) (nous avons divisé ici le terme  $2P_{23}$  dans (C.5) comme  $P_{23} + P_{32}$ , avec  $P_{32}$  identique à  $P_{23}$ , mais qui sera ensuite substitué by ⑦) que :

$$\begin{aligned} P'_{22} &= P'_{22} - k_2 P'_{12} + P'_{23} - k_3 P'_{12} + P'_{23} - k_2 P'_{13} + P'_{33} - k_3 P'_{13} \\ \implies P'_{12} &= \frac{2P'_{23} + P'_{33}}{k_2 + k_3} - P'_{13}. \end{aligned} \quad (C.18)$$

Ensuite, utilisons  $P'_{33} = (k_2 + k_3)P'_{13}$  (obtenu en combinant (C.11) et (C.13)) et nous obtenons :

$$P'_{12} = \frac{2P'_{23}}{k_2 + k_3} \stackrel{(C.17)}{=} \frac{2k_1 + k_2}{k_2 + k_3} P'_{13}. \quad (C.19)$$

Depuis (C.9) et (C.14), nous avons  $\frac{k_2}{k_3} = \frac{P'_{12}}{P'_{13}}$ , et puis depuis (C.19), nous obtenons :

$$\frac{k_2}{k_3} = \frac{2k_1 + k_2}{k_2 + k_3}. \quad (C.20)$$

Cela nous permet de trouver une relation simple entre  $k_1, k_3$  et  $k_2$  :

$$k_2^2 = 2k_1 k_3. \quad (C.21)$$

Ensuite, nous cherchons  $P'_{22}$  en fonction de  $k_1, k_2, k_3$  et  $\sigma_u^2$ . Depuis (C.4) et en utilisant ②, nous avons :

$$P'_{12} = P'_{12} - k_1 P'_{12} + P_{13} + P_{22} + \frac{3}{2}P_{23} + \frac{1}{2}P_{33}. \quad (C.22)$$

En substituant  $P_{22}, P_{13}, P_{23}, P_{33}$  par ④, ⑥, ⑧, ⑨ respectivement dans (C.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} P'_{22} &= (k_1 + k_2)P'_{12} - (1 - k_1)P'_{13} - \frac{3}{2}(P'_{23} - k_3 P'_{12}) - \frac{1}{2}(P'_{33} - k_3 P'_{13}) \\ &\stackrel{(C-11, 13, 16, 17)}{=} \frac{4k_1 k_2 + 4k_2^2 + k_3(10k_1 + 7k_2 + 2k_3 - 4)}{4k_3^2} \sigma_u^2. \end{aligned} \quad (C.23)$$

Et enfin, en réécrivant (C.3) sans considérer la symétrie de la matrice de covariance, nous obtenons :

$$P'_{11} = P_{11} + P_{21} + P_{12} + \frac{1}{2}(P_{31} + P_{13}) + \frac{1}{2}(P_{32} + P_{23}) + P_{22} + \frac{1}{4}P_{33} \quad (C.24)$$

Substituant  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{21}$ ,  $P_{22}$ ,  $P_{31}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{32}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{33}$  par ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ⑨ respectivement dans (C.24) donne :

$$\begin{aligned}
P'_{11} &= (1 - k_1)P'_{11} + P'_{12} - k_2P'_{11} + (1 - k_1)P'_{12} + \frac{1}{2} \left( P'_{13} - k_3P'_{11} + (1 - k_1)P'_{13} \right) + \frac{1}{2} (P'_{32} - k_3P'_{12} \\
&\quad + P'_{23} - k_2P'_{13}) + P'_{22} - k_2P'_{12} + \frac{1}{4} (P'_{33} - k_3P'_{13}) \\
\Rightarrow (k_1 + k_2 + \frac{1}{2}k_3)P'_{11} &= (2 - k_1 - k_2 - \frac{1}{2}k_3) \left( P'_{12} + \frac{P'_{13}}{2} \right) + P'_{23} + P'_{22} + \frac{1}{4}P'_{33} \\
\Rightarrow P'_{11} &= \frac{1}{k_1 + k_2 + \frac{1}{2}k_3} \left( 2P'_{12} + P'_{13} + P'_{23} + P'_{22} + \frac{1}{4}P'_{33} \right) - P'_{12} - \frac{1}{2}P'_{13}. \tag{C.25}
\end{aligned}$$

Notons qu'ici nous avons utilisé la formule originale de  $P'_{11}$  sans considérer la symétrie pour obtenir directement une solution simple (sinon nous pouvons de toute façons utiliser la symétrie à la première étape de (C.25), et nous trouverons finalement le même résultat mais les étapes intermédiaires sont un peu plus compliquées). En substituant (C.11), (C.13), (C.16), (C.17), (C.23) pour  $P'_{13}$ ,  $P'_{33}$ ,  $P'_{12}$ ,  $P'_{23}$ ,  $P'_{22}$  respectivement dans (C.25), nous trouvons finalement :

$$\begin{aligned}
P'_{11} &= \left( \frac{1}{k_1 + k_2 + \frac{1}{2}k_3} \cdot \frac{4k_1k_2 + 8k_2 + 4k_2^2 + k_3(14k_1 + 10k_2 + 3k_3)}{4k_3^2} - \frac{k_2 + \frac{1}{2}k_3}{k_3^2} \right) \sigma_u^2 \\
&= \frac{8k_2 + k_3(6k_1 + 3k_2 + k_3)}{2k_3^2(2k_1 + 2k_2 + k_3)} \sigma_u^2 \\
&\approx \frac{2k_2}{k_1k_3^2} \sigma_u^2. \tag{C.26}
\end{aligned}$$

Ici, nous avons utilisé la condition (3.36) pour l'approximation. Dans ce cas,  $2k_1 + 2k_2 + k_3 \approx 2k_1$  et  $8k_2 + k_3(6k_1 + 3k_2 + k_3) \approx 8k_2$ .

En résolvant les équations de Riccati, nous retrouvons donc les expressions des éléments de la matrice  $\mathbf{P}'_{(\infty)}$  en fonction des gains de Kalman et la variance du bruit d'état (3.21)~(3.26), nous obtenons aussi une relation entre les trois éléments du gain de Kalman (3.27) dans le chapitre 3.

## Justification de (5.33)

Nous ré-écrivons le gain de Kalman depuis (5.8) avec l'identité de Woodbury comme :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{K}}_{(k)} &= \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{F}}_s^H \left( \hat{\mathbf{F}}_s \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{F}}_s^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{N_p} \right)^{-1} \\
&= \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{F}}_s^H \frac{1}{\sigma^2} \left[ \mathbf{I}_{N_p} - \hat{\mathbf{F}}_s \left( \hat{\mathbf{F}}_s^H \hat{\mathbf{F}}_s + \sigma^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} \hat{\mathbf{F}}_s^H \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}})^H \left[ \mathbf{I}_{N_p} - \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}} \left( (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}})^H (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}}) + \sigma^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} (\mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}})^H \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left[ \mathbf{F}_p^H - \mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}} \left( \hat{\mathbf{S}}^H \mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}} + \sigma^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} \hat{\mathbf{S}}^H \mathbf{F}_p^H \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left[ \mathbf{I}_{L_t} - \mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}} \left( \hat{\mathbf{S}}^H \mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{S}} + \sigma^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1} \right)^{-1} \hat{\mathbf{S}}^H \right] \mathbf{F}_p^H. \tag{D.1}
\end{aligned}$$

Posons  $\mathbf{A} = \mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p$ ,  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{S}}^H$ ,  $\mathbf{C} = \sigma^2 \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)}^{-1}$ , nous continuons la déduction :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{K}}_{(k)} &= \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left[ \mathbf{I}_{L_t} - \mathbf{A} \mathbf{B}^H (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^H + \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B} \right] \mathbf{F}_p^H \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left[ \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{B}^H (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^H + \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A} \right] \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}_p^H \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H (\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^H \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}_p^H \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left( (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} + \frac{1}{\sigma^2} \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \right)^{-1} (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \\
&= \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left( (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma^2 + \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \right)^{-1} (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H \\
&= \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} \cdot (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \mathbf{F}_p^H, \tag{D.2}
\end{aligned}$$

avec  $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)}$  défini par :

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{e}(k)} = \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \left( (\mathbf{F}_p^H \mathbf{F}_p)^{-1} \sigma^2 + \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{P}}_{(k|k-1)} \hat{\mathbf{S}}^H \right)^{-1}. \tag{D.3}$$

Notons que l'étape (\*) est l'utilisation inverse de la deuxième transformation de l'identité de Woodbury :  $(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^H \mathbf{C} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{B}^H (\mathbf{B} \mathbf{A} \mathbf{B}^H + \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{A}$ .