

# THÈSE

*pour obtenir le grade de*

## DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE 1 - SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Discipline : Mécanique

présentée par

**Tibisay Coromoto ZAMBRANO**

Titre de la thèse

---

### ÉTUDE NUMÉRIQUE DES ÉCOULEMENTS NEWTONIENS ET VISCOÉLASTIQUES DANS LA SORTIE D'UNE CONDUITE COURBÉE 180° AVEC SECTION CARRÉE

---

Soutenu le 11 Septembre 2013

Jury

A. DELACHE	Maitre de conférences, Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique - Université Saint-Etienne Université Jean Monnet de Saint-Etienne	Examineur
A. MEZRHAB	Professeur, Laboratoire de Mécanique et Énergétique, Université Mohamed Premier, Oujda, Maroc	Rapporteur
G. MOMPEAN	Professeur, Laboratoire de Mécanique de Lille, CNRS/UMR 8107, Polytech'Lille, Université de Lille 1	Directeur de thèse
H. NAJI	Professeur, Laboratoire Génie Civil et Géo-Environnement, Université d'Artois / FSA Béthune, Université de Lille Nord de France	Président
A. OUAHSINE	Professeur, Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur
M. OUARZAZI	Professeur, Laboratoire de Mécanique de Lille, Université de Lille 1	Examineur

## Dédicace

À ma mère Maria.

À la mémoire de Heriberto et Colino.

Tibisay Coromoto Zambrano

## Remerciements

Cette recherche a été réalisée au sein du Laboratoire de Mécanique de Lille (LML) de l'Université Lille 1.

Je remercie particulièrement le Professeur G. MOMPEAN, pour sa cordialité, sa disponibilité et pour toutes les connaissances scientifiques qu'il m'a transmises durant cette recherche.

J'adresse également mes remerciements aux Professeures A. MEZRHAB et A. OUAHSINE, de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'aux Professeures H. NAJI et M. OUARZAZI, et à Monsieur A. DELACHE, Maître de conférences, pour avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin, un merci infini à Dieu, à ma mère Maria, à mon mari Oscar, à mon fils Oscar junior, Belkis, Nery, Samuel, Francisco, Jose Manuel, Ragde, Santiago, Anaida, Montilla, Matilde, Oswaldo, Flor, Cuello, Lisbeth, Nelly, Ernestina, Patino, Ivan, Elisabeth, Pia, Alcides, Leidis, Nelson, Julio, José, Raisa, Edgar, Trinidad, Ligia.

Merci également à Mariana, Eli, Francisco, Yuraima, Carola, Tere, Solorzano, Barragan, Zamudio, Zamora, Najj, Bernadette, Nermin, Nicole, Tram, Sylvie, Zaynab, Farah, Françoise, Mohammed, Abdoulaye, Cretel, Kris, Marie, Sandrine et Philippe pour leurs amitiés sincères.

A tous merci beaucoup et que dieu leur donne santé et chance!!!

**Title : Étude numérique des écoulements newtoniens et viscoélastiques dans la sortie d'une conduite courbée 180° avec section carrée**

**Résumé :** Ce travail présente les résultats numériques et une analyse des écoulements des fluides newtoniens et viscoélastiques du type Phan-Thien-Tanner (PTT) dans une conduite courbée de 180° avec section carrée et une région de sortie linéaire. Les équations de Navier-Stokes sont écrites en coordonnées orthogonales généralisées, et résolues en utilisant la méthode des volumes finis. On montre les résultats numériques en termes de lignes de courant, de développement des tourbillons et des profils de vitesses dans la région de sortie, pour trois nombres de Dean (125, 137 et 150) et quatre nombres de Deborah différents (0.1, 0.2, 0.3 et 0.4). Nous avons observé la formation de paires supplémentaires de tourbillons contre-rotatifs et le passage de deux tourbillons à quatre tourbillons et à six tourbillons. Aussi, nous avons mis en évidence les dimensions des tourbillons et l'instant de leur apparition, qui dépendent des nombres de Dean et de Deborah.

**Mots-clés :** Simulation de fluide viscoélastique, Nombre de Dean, Nombre de Deborah, CFD.

**Title : Numerical study of Newtonian and viscoelastic flows in the output region of an 180° curved duct with square cross section**

**Abstract :** This work presents the numerical results and the analysis of the flow behavior of Newtonian and viscoelastic fluids, type Phan-Thien-Tanner (PTT), in an 180° curved duct of square cross section and straight output zone. The Navier-Stokes equations have been written in generalized orthogonal coordinates, and solved using the finite volume method. The numerical results of the streamlines, development of vortex and velocity profiles in the output region are shown, for Dean numbers (125, 137, and 150) and four different Deborah numbers (0.1, 0.2, 0.3, and 0.4). We observed that the formation of supplementary twin counter-rotating vortex and the transitions of two-vortex patterns to four-vortex pattern or six-vortex pattern, as well as the vortex dimensions and the apparition time depend on numbers Dean and Deborah, respectively.

**Keywords :** Viscoelastic Flow Simulation, Dean Number, Deborah Number, CFD.



# Table des matières

Glossaire	xix
<b>1 INTRODUCTION ET MOTIVATION</b>	<b>1</b>
1.1 Objectif du travail . . . . .	2
1.1.1 Plan de la thèse . . . . .	2
1.2 Fluides viscoélastiques . . . . .	4
<b>2 Équations et modélisation des écoulements</b>	<b>13</b>
2.1 Loi de Comportement fondé sur la viscoélasticité linéaire	13
2.2 Modèles non-linéaires . . . . .	14
2.2.1 Équation de conservation de la masse . . . . .	14
2.2.2 Équation de quantité de mouvement . . . . .	15
2.3 Modèle de Maxwell de "Upper-Convection"(UCM) . . . . .	15
2.4 Le modèle d'Oldroyd-B ou modèle de convection de Jeffreys	16
2.5 Modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT) . . . . .	16
2.6 Équations sous forme adimensionnelle . . . . .	19
<b>3 Méthode numérique</b>	<b>27</b>
3.1 Équations en coordonnées orthogonales . . . . .	28
3.2 Discrétisations spatiale et temporelle . . . . .	31
3.2.1 Discrétisation spatiale . . . . .	32
3.2.2 Discrétisation en temps . . . . .	37
3.2.3 Méthode de résolution du système linéaire . . . . .	40
<b>4 Description du problème, data et resultats</b>	<b>43</b>
4.1 Description de la conduite courbée de 180° avec section carrée . . . . .	43
4.2 Conditions de travail . . . . .	44
4.3 Conditions aux limites . . . . .	45
4.4 Méthode de solution . . . . .	46

<b>5</b>	<b>Analyse des résultats</b>	<b>47</b>
5.1	L'écoulement newtonien . . . . .	47
5.2	L'écoulement non-newtonien . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Conclusions et recommandations</b>	<b>153</b>
	Références . . . . .	156

# Table des figures

3.1	Coordonnées orthogonales . . . . .	29
3.2	Présentation schématique des maillages en volumes finis . . . . .	32
4.1	Géométrie 3D . . . . .	44
4.2	Conditions aux limites . . . . .	45
5.1	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 0$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	49
5.2	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 2.84$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	49
5.3	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 9.47$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	50
5.4	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 12.52$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	50
5.5	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 15.82$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	51
5.6	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 19.40$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	51
5.7	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 0$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	52
5.8	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 2.84$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	52
5.9	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 9.47$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	53
5.10	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 12.52$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	53
5.11	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 15.82$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	54
5.12	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 19.40$ , avec $Dn = 125$ . . . . .	54
5.13	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 0$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	55

5.14	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 2.84$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	55
5.15	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 9.47$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	56
5.16	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 12.52$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	56
5.17	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 15.82$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	57
5.18	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 19.40$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	57
5.19	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 0$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	58
5.20	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 2.84$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	58
5.21	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 9.47$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	59
5.22	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 12.52$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	59
5.23	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 15.82$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	60
5.24	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 19.40$ , avec $Dn = 137$ . . . . .	60
5.25	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 0$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	61
5.26	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 2.84$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	61
5.27	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 9.47$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	62
5.28	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 12.52$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	62
5.29	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 15.82$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	63
5.30	Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position $x = 19.40$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	63
5.31	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 0$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	64
5.32	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 2.84$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	64

5.33	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 9.47$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	65
5.34	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 12.52$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	65
5.35	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 15.82$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	66
5.36	Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position $x = 19.40$ , avec $Dn = 150$ . . . . .	66
5.37	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement newtonien avec $Dn = 125$ . . . . .	67
5.38	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement newtonien avec $Dn = 137$ . . . . .	67
5.39	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement newtonien avec $Dn = 150$ . . . . .	67
5.40	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	71
5.41	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	71
5.42	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	72
5.43	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	72
5.44	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	73
5.45	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	73
5.46	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	74
5.47	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	74
5.48	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	75
5.49	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	75
5.50	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	76
5.51	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.1$ . . . . .	76

5.52	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	77
5.53	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	77
5.54	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	78
5.55	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	78
5.56	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	79
5.57	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	79
5.58	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	80
5.59	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	80
5.60	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	81
5.61	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	81
5.62	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	82
5.63	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.2$ . . . . .	82
5.64	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	83
5.65	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	83
5.66	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	84
5.67	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	84
5.68	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	85
5.69	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	85
5.70	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	86

5.71	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	86
5.72	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	87
5.73	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	87
5.74	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	88
5.75	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	88
5.76	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	89
5.77	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	89
5.78	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	90
5.79	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	90
5.80	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	91
5.81	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	91
5.82	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	92
5.83	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	92
5.84	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	93
5.85	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	93
5.86	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	94
5.87	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	94
5.88	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 125$ et $De = 0.1$ .	95
5.89	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 125$ et $De = 0.2$ .	95

5.90	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 125$ et $De = 0.3$ . . . . .	96
5.91	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 125$ et $De = 0.4$ . . . . .	96
5.92	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	98
5.93	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	98
5.94	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	99
5.95	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	99
5.96	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	100
5.97	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	100
5.98	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	101
5.99	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	101
5.100	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	102
5.101	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	102
5.102	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	103
5.103	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.1$ . . . . .	103
5.104	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	104
5.105	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	104
5.106	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	105
5.107	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	105
5.108	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	106

5.109	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	106
5.110	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	107
5.111	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	107
5.112	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	108
5.113	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	108
5.114	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	109
5.115	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.2$ . . . . .	109
5.116	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	110
5.117	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	110
5.118	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	111
5.119	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	111
5.120	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	112
5.121	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	112
5.122	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	113
5.123	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	113
5.124	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	114
5.125	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	114
5.126	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	115
5.127	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.3$ . . . . .	115

5.128	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	116
5.129	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	116
5.130	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	117
5.131	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	117
5.132	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	118
5.133	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	118
5.134	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	119
5.135	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	119
5.136	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	120
5.137	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	120
5.138	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	121
5.139	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 137$ et $De = 0.4$ . . . . .	121
5.140	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 137$ et $De = 0.1$ .	122
5.141	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 137$ et $De = 0.2$ .	122
5.142	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 137$ et $De = 0.3$ .	123
5.143	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 137$ et $De = 0.4$ .	123
5.144	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	125
5.145	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	125
5.146	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	126

5.147	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	126
5.148	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	127
5.149	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	127
5.150	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	128
5.151	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	128
5.152	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	129
5.153	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	129
5.154	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	130
5.155	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.1$ . . . . .	130
5.156	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	131
5.157	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	131
5.158	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	132
5.159	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	132
5.160	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	133
5.161	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	133
5.162	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	134
5.163	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	134
5.164	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	135
5.165	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	135

5.166	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	136
5.167	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.2$ . . . . .	136
5.168	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	137
5.169	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	137
5.170	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	138
5.171	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	138
5.172	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	139
5.173	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	139
5.174	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	140
5.175	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	140
5.176	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	141
5.177	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	141
5.178	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	142
5.179	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.3$ . . . . .	142
5.180	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	143
5.181	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	143
5.182	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	144
5.183	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	144
5.184	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	145

5.185	Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	145
5.186	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 0$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	146
5.187	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 2.84$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	146
5.188	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 9.47$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	147
5.189	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 12.52$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	147
5.190	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 15.82$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	148
5.191	Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position $x = 19.40$ , pour $Dn = 150$ et $De = 0.4$ . . . . .	148
5.192	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 150$ et $De = 0.1$ .	149
5.193	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 150$ et $De = 0.2$ .	149
5.194	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 150$ et $De = 0.3$ .	150
5.195	La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec $Dn = 150$ et $De = 0.4$ .	150



# Glossaire

$\nabla$	.....	nabla.
$\mathbf{u}$	.....	vecteur vitesse.
$\nu$	.....	viscosité cinématique.
$\rho$	.....	densité.
$p$	.....	pression.
$\mathbf{f}$	.....	forces externes.
$\mathbf{g}$	.....	force spécifique gravitationnelle.
$\eta_0$	.....	viscosité.
$\lambda_1$	.....	temps de relaxation.
$\lambda_2$	.....	temps de retard.
$\varepsilon$	.....	lié au comportement élongationnel.
$\eta$	.....	coefficient de viscosité du modèle.
$\lambda$	.....	temps de relaxation.
$\tau$	.....	tenseur viscoélastique.
$\xi$	.....	paramètre constant du modèle PTT.
$\epsilon$ et $\xi$	.....	définissent le comportement non-linéaire.
$Tr_{\tau}$	.....	trace du tenseur de tension.
$Dn$	.....	nombre de Dean.
$De$	.....	nombre de Deborah.
$Re$	.....	nombre de Reynolds.



# Chapitre 1

## INTRODUCTION ET MOTIVATION

Les améliorations technologiques survenues au cours des dernières années ont permis de grandes avancées dans l'étude et la compréhension du comportement des différents types des écoulements complexes.

Elles sont d'une grande importance pour les différents secteurs industriels, par exemple, l'agroalimentaire, la pharmacie, l'automobile, et en particulier pour les huiles lubrifiantes et les procédés de transformation de polymères.

Des exemples importants de ce type d'écoulement sont les matières polymères et élastomères, les gels, différentes huiles minérales, la céramique, les huiles lubrifiantes, le caoutchouc, certaines suspensions et mélanges.

La simulation numérique de tels écoulements dans les processus d'extrusion, d'émulsification, de mise en forme et conversion est souvent très délicate et compliquée, car les problèmes mathématiques sont très difficiles à résoudre.

La simulation numérique des écoulements non-newtoniens du type viscoélastique est un domaine de recherche riche, en raison de la nécessité de comprendre le comportement du fluide viscoélastique dans beaucoup de problèmes d'ingénierie.

Cependant, les simulations numériques sont limitées par l'incompatibilité existante entre les modèles rhéologiques et les performances des ordinateurs, bien que les possibilités actuelles de simulation soient déjà importantes, dû à des améliorations technologiques survenues au cours des dernières années, qui ont permis de grandes avancées dans l'étude et la compréhension du comportement des différents types des écoulements

complexes.

Les fluides viscoélastiques présentent un comportement à la fois visqueux et élastique avec des "effets de mémoires" simultanés, c'est-à-dire qu'ils se souviennent des déformations subies pendant leur transformation.

## 1.1 Objectif du travail

Ce travail traite la simulation numérique en trois dimensions des fluides newtoniens et viscoélastiques dans une conduite courbée de  $180^\circ$  avec une section transversale carrée. Ce travail est une suite des travaux d'Helin et al. (2009) et Boutabba et al. (2009) en mettant l'accent sur les fluides viscoélastiques, puisque ces fluides sont rencontrés dans de nombreuses applications.

Pour décrire et modéliser le comportement d'un écoulement viscoélastique, nous avons utilisé l'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner (1990).

Dans notre étude, le système de coordonnées orthogonales généralisées est adopté pour exprimer les équations constitutives et de conservation. Ensuite, ce système est résolu par la méthode des volumes finis (FVM). Les équations sont intégrées dans un volume de contrôle et transformées en des intégrales de volume et des intégrales de surface.

### 1.1.1 Plan de la thèse

L'ensemble du travail est divisé en six chapitres. Un bref résumé des études réalisées pendant les 50 dernières années figure dans ce chapitre. Cette vue générale montre les travaux antérieures concernant la simulation des écoulements viscoélastiques.

Dans le deuxième chapitre, les équations aux dérivées partielles qui régissent le comportement des écoulements sont énoncées, ainsi que les modèles principaux des écoulements viscoélastiques sont indiqués. Tout d'abord, les équations de conservation de la masse et de conservation de

la quantité de mouvement sont présentées.

Ensuite, les équations constitutives pour les fluides viscoélastiques, selon le modèle de Maxwell de "upper-convection" (UCM), le modèle d'Oldroyd-B et le modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT), sont présentées.

Le troisième chapitre discute de la méthodologie numérique. Premièrement, la transformation des coordonnées est discutée et les équations sont réécrites dans un système de coordonnées orthogonales généralisées. Puis, la technique de génération du maillage est traitée. Ensuite, la discrétisation spatiale des équations de conservation de la masse et de conservation de la quantité de mouvement sont représentées, en insistant sur les composantes discrétisées de la vitesse, de la pression et de la tension. Pour finir, la discrétisation spatiale de l'équation de conservation de la masse, de l'équation de quantité de mouvement et de l'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner (PTT) est décrite.

Dans le quatrième chapitre, la géométrie de la conduite courbée est présentée et les conditions de travail et aux limites sont fixées. Par la suite, le processus de résolution est indiqué selon les étapes suivantes : la géométrie de la conduite est présentée, le maillage tridimensionnel pour la géométrie proposée est élaboré, l'optimisation du maillage est effectuée, les conditions de travail sont établies, les conditions aux limites sont fixées, la discrétisation est effectuée et le système d'équations non linéaires est résolu au moyen d'itérations.

Dans le cinquième chapitre, nous analysons les résultats obtenus des simulations des écoulements newtoniens et viscoélastiques dans la géométrie sélectionnée. A travers les simulations numériques, on a obtenu le développement de vortex pour les nombres de Dean  $Dn = 125$ ,  $Dn = 137$  et  $Dn = 150$  et pour les nombres de Deborah  $De = 0.1$ ,  $De = 0.2$ ,  $De = 0.3$  et  $De = 0.4$  dans la zone de courbure dans la zone de sortie de la conduite. La variation du nombre de Deborah permet d'analyser l'influence de l'élasticité du fluide. On a pu apprécier comment évoluaient les vortex pour un écoulement newtonien et pour un écoulement viscoélastique avec l'utilisation du modèle de PTT.

Dans le sixième chapitre, nous présentons les conclusions et recommandations pour l'écoulement des fluides newtonien et viscoélastique,

considérant que la simulation de l'écoulement du fluide newtonien a été effectuée pour valider le code numérique. Pour le cas du fluide newtonien, les résultats du comportement des lignes de courant, la tendance de la formation de vortex et les profils de vitesses sont comparés selon le nombre de Dean. Pour le fluide viscoélastique, les résultats sont validés en comparant par rapport aux résultats correspondants au fluide newtonien et la variation du nombre de Deborah.

Pour finir, notre principale contribution dans le présent travail se résume en :

- a) La mise en oeuvre de la méthode des volumes finis en coordonnées orthogonales généralisées.
- b) La simulation de l'écoulement d'un fluide viscoélastique avec le modèle PTT.
- c) Le comportement des écoulements dans la zone de sortie d'une conduite courbée.
- d) La transition du modèle à quatre vortex au modèle à six vortex.

## 1.2 Fluides viscoélastiques

La science qui étudie la déformation de l'écoulement en présence de contraintes extérieures s'appelle rhéologie. Pendant plus de trois siècles, les études liées à la rhéologie ont été limitées à l'application de la loi de Newton pour les liquides et pour les solides à la loi de Hooke.

C'est à partir du XIXe siècle, que les chercheurs ont commencé à avoir des doutes sur la validité universelle de ces lois linéaires.

W. Weber (1835) a mené une série d'expériences au cours desquelles il a constaté qu'une charge longitudinale sur des animaux (vers) produit une extension immédiate, suivie d'un allongement pendant un laps de temps, une fois celui-ci écoulé et la charge retirée, il se produit une contraction immédiate, suivie d'une contraction graduelle de la longueur, avant de retrouver son état initial. Ces caractéristiques sont associées à la réponse d'un liquide.

Plus tard, en analysant les études de solides de Maxwell, et celles de Weber sur les liquides, on est arrivé à la dénomination de "Viscoélasticité".

Après Maxwell (1867), vers la fin du vingtième siècle commence à apparaître une série d'études de modèles linéaires et non linéaires pour décrire le comportement d'un fluide viscoélastique.

Au cours des 50 dernières années du XXe siècle, la rhéologie a pris beaucoup d'ampleur avec la recherche de matériaux viscoélastiques, avec l'apparition des modèles émergents qui supposent que le module de rigidité peut varier avec la tension appliquée.

Les chercheurs ont déterminés que la viscosité dépend à la fois du temps et des recherches approfondies sur la thèse qui prouve réellement que les matériaux peuvent montrer un comportement visqueux, élastique ou une combinaison des deux.

Dean (1928) fut un des pionniers dans ce type des recherches, il a étudié l'écoulement d'un fluide newtonien dans une conduite courbée. La définition du nombre de Dean, ( $Dn$ ), est :

$$Dn = \sqrt{\frac{\text{Forces centrifuges} * \text{Forces d'inertie}}{\text{Forces visqueuses}}} \quad (1.1)$$

À la même époque, M. Reiner (1964) a défini le nombre de Deborah, ( $De$ ), qui est un paramètre utilisé pour caractériser ou classer les substances en fonction de leur comportement visqueux, élastique ou viscoélastique.

Par l'importance de son apport, Reiner est considéré comme l'un des fondateurs de la rhéologie. Le nombre de Deborah est défini comme suit :

$$De = \frac{\lambda}{T} \quad (1.2)$$

où  $T$  est le temps caractéristique du processus de déformation auquel est soumise une substance donnée et  $\lambda$  est le temps caractéristique de relaxation de la substance.

Le temps de relaxation est infini pour un solide de Hooke et est nul pour un fluide newtonien. Ainsi nous avons :

- a) Quand  $De < 1$ , la substance a un comportement de type visqueux.
- b) Quand  $De > 1$ , la substance a un comportement élastique.
- c) Quand  $De \approx 1$ , la substance a un comportement viscoélastique.
- d) Quand  $De$  est très faible, la substance est considérée comme un liquide visqueux.
- e) Quand  $De$  est élevé, la substance est considérée comme un solide élastique.

Selon le concept du nombre de Deborah, toutes les substances peuvent s'écouler. Il faut juste attendre le temps nécessaire à l'écoulement. De cette manière un matériau peut se comporter comme un solide de Hooke, si son temps de détente ou de relaxation est très long, ou s'il est soumis à un processus de déformation pendant un temps très court.

Cheng et Akiyama (1970) ont reporté dans un modèle 2D un écoulement laminaire pleinement développé entrant dans un canal courbé rectangulaire. Cheng et al. (1977) ont visualisé de façon expérimentale la configuration de l'écoulement secondaire dans des canaux rectangulaires incurvés, de 25 m de largeur avec un rapport de courbure de 5.

Ghia et Sohkey (1977) et Humphrey et al. (1977) ont étudié l'écoulement développé dans ces simulations, avec un nombre de  $De = 100$ . Ligrani et Niver (1988) ont montré la formation de configurations des écoulements secondaires dans différentes positions angulaires de la section courbée des canaux.

Bird et al. (1977) et Tanner (2000) ont publié d'excellents livres sur l'ingénierie de la rhéologie, et sur les équations constitutives viscoélastiques.

Sugiyama et al. (1983) rapportent la visualisation de l'écoulement

coude à presque 180 degrés des canaux de 20 de largeur. Hwang et Chao (1991) ont étudié des écoulements laminaires pleinement développés dans un conduit courbé carré dans des conditions isothermes.

Gopalakrishna et Jaluria (1992) ont résolu numériquement l'équation régissant les extrudeuses à vis unique avec l'hypothèse du modèle de loi de puissance pour les fluides non-newtoniens.

Oliveira et Pinho (1999) ont présenté une série de solutions analytiques pour le modèle simplifié de Phan-Thien-Tanner (S-PTT) en écoulements en conduits avec transfert de chaleur. Davaa et al. (2001) ont utilisé des méthodes numériques pour résoudre le transfert de chaleur laminaire pleinement développé pour modifier la loi de puissance.

Alves et al. (2001) ont dérivé une solution analytique pour le canal d'état stable et des écoulements dans les tuyaux avec parois fixes. Ils ont utilisé l'équation constitutive du modèle PTT complète avec un coefficient de contrainte linéaire sans viscosité du solvant.

À la fin des années 90, G. Mompean et M. Deville (1997) ont intégré les équations pour des écoulements viscoélastiques d'un fluide Oldroyd-B, en utilisant la méthode des volumes finis, et ils ont développé un algorithme permettant de traiter des écoulements instationnaires en trois dimensions, en utilisant les coordonnées cartésiennes sur maillage décalé et non uniforme.

Pour la formulation, ils ont utilisé les variables primitives : la vitesse, la pression et les contraintes. Ils ont examiné et discrétisé dans l'espace tous les termes d'inertie dans les équations constitutives et de quantité de mouvement. Ils ont ensuite entrepris des études, lors du démarrage de l'écoulement de Couette, sur une forme géométrique à deux dimensions avec une contraction plane et abrupte de 4:1 et sur une géométrie tridimensionnelle avec une forte contraction plane et abrupte de 4:1:4.

S.-C. Xue et al. (1995) ont étudié numériquement, par schéma implicite de volumes finis, des écoulements secondaires de fluides viscoélastiques dans des conduites droites. Dans cette étude, les équations constitutives et de conservation sont écrites en coordonnées orthogonales généralisées et résolues dans un maillage décalé selon la méthode des volumes finis.

Ensuite, S.-C. Xue et al. (1998) ont mené une étude numérique tridimensionnelle des écoulements viscoélastiques sur une géométrie avec une contraction plane et abrupte de 4:1, en utilisant une méthode de volumes finis et des conditions expérimentales, dans toutes les simulations, qui avaient déjà été observées. Les études ont été réalisées avec le modèle de Maxwell de "upper-convection" (UCM), le modèle Phan-Thien-Tanner (PTT) et celui d'Oldroyd-B. En comparant les résultats obtenus dans la simulation numérique avec les données expérimentales, ils ont conclu que ces derniers peuvent être reproduits quantitativement si le liquide est bien caractérisé par un modèle viscoélastique approprié.

G. Mompean (2002) a réalisé une étude de simulation numérique des écoulements newtoniens et des écoulements viscoélastiques passant à travers d'une contraction plane, en utilisant le modèle algébrique pour les extra-contraintes (AESM), dérivé de l'équation différentielle constitutive d'un fluide Oldroyd-B, étendu à un fluide Phan Thien-Tanner.

Cette étude a montré que la formulation algébrique reproduit exactement les composantes des tenseurs des extra-contraintes pour la déformation de cisaillement pure et la déformation de l'écoulement. G. Mompean a effectué des simulations numériques des écoulements viscoélastiques, représentant les équations classiques constitutives d'une forme différentielle en utilisant le modèle algébrique et des extra-contraintes.

En outre, G. Mompean et al. (2003) ont mis en oeuvre une procédure de transformation générale pour les équations différentielles constitutives de modèles de comportement viscoélastique.

Cette procédure a été conçue pour transformer les modèles différentiels d'Oldroyd-B, White-Metzner (WM) et Phan-Thien-Tanner (PTT) en un autre modèle qui présente une équation différentielle à résoudre.

En réalisant les calculs du champ de contraintes selon un modèle d'Oldroyd-B, modèle basé sur le GTP (modèle GTP [Oldb]), sur une géométrie avec une contraction plane abrupte de 4:1, ils ont trouvé que les résultats ont été très bien approchés de ceux obtenus avec le modèle différentiel.

Un autre fait important est l'étude menée par L. Helin (2006), dans

lequel il propose deux nouveaux développements de modèles algébriques pour les fluides viscoélastiques explicites pour reproduire les propriétés du modèle d'Oldroyd-B. Ces modèles ont été testés sur une forme géométrique à deux dimensions avec une contraction plane abrupte de 4:1, des écoulements autour d'un cylindre et dans une conduite courbée à 180°.

Helin (2006) a effectué la simulation numérique en utilisant un code de volumes finis, écrit en coordonnées orthogonales généralisées, concluant que les modèles simplifiés algébriques reproduisaient les propriétés du modèle différentiel d'Oldroyd-B avec une réduction significative de l'effort de calcul.

L. Thais et al. (2006) ont mené une étude comparative de la simulation numérique des écoulements viscoélastiques sur un canal courbé à 180° et sur une géométrie plane avec une forte contraction plane abrupte de 4:1, en utilisant les équations constitutives du modèle différentielle d'Oldroyd-B et de deux modèles algébriques explicites (modèles AES), conçus pour simplifier les équations constitutives.

Pour les deux géométries, ils ont constaté que les prédictions des nouveaux modèles AES sont compatibles avec le modèle d'Oldroyd-B, jusqu'au nombre de Deborah de l'ordre de 0.5, avec l'obtention d'une réduction significative de l'effort de calcul.

K. Hossam (2008) a simulé numériquement le comportement d'un fluide viscoélastique incompressible, passant à travers d'un cylindre infini. Pour cela, il a représenté les équations régissant l'écoulement dans le système de coordonnées orthogonales généralisées et il a utilisé la méthode des volumes finis pour discrétiser.

À partir de l'équation constitutive de l'écoulement viscoélastique, il a utilisé le modèle simplifié de Phan-Thien-Tanner (S-PTT) et il a appliqué le schéma quadratique QUICK pour traiter les termes de la convection. Afin de stabiliser les calculs, il a utilisé la formulation de la répartition des efforts élastiques visqueux ("Elastic Viscous Split Stress" : EVSS) pour la décomposition du tenseur des contraintes.

Hossam (2008) a validé le code développé dans un fluide newtonien, puis il l'a appliqué pour prédire le comportement de l'écoulement vis-

coélastique avec nombres de Reynolds inférieurs à 200 ( $Re \leq 200$ ) et nombres de Deborah jusqu'à 0.25.

Récemment, M. Boutabaa et al. (2009) ont mené une étude en trois dimensions des tourbillons de Dean dans le développement des écoulements newtoniens et viscoélastiques, passant par une conduite courbée avec section carrée.

Pour la représentation des effets viscoélastiques, ils ont utilisé le modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT). La méthode numérique appliquée utilise une discrétisation de volumes finis avec un maillage décalée et les équations sont écrites en coordonnées orthogonales généralisées.

Les simulations numériques produites pour les trois différents nombres de Dean (125, 137 et 150) ont montré clairement la présence de deux cellules stables de Dean et le développement d'un ensemble de quatre cellules dans la région courbée, lorsque les forces centrifuges deviennent significatives.

La comparaison entre des écoulements newtoniens et PTT montre que la transition des cellules jumelles vers les quatre cellules est prévisible pour le fluide viscoélastique.

L. Helin et al. (2009) ont également effectué des simulations numériques tridimensionnelles de l'écoulement viscoélastique de Dean pour un fluide modifié Phan-Thien-Tanner, passant à travers d'un canal courbé en forme de "U" avec une section carrée.

Des écoulements de Dean ont été étudiés selon la gamme du nombres de Reynolds entre 485 et 580, ce qui correspond à la gamme du nombres de Dean entre 125 et 150, dans laquelle ils ont obtenu des solutions stables. Des simulations numériques ont montré la présence de deux cellules stables de Dean et le développement de deux tourbillons supplémentaires. Aussi, L. Helin et al. (2009) ont examiné l'influence de l'élasticité du paramètre de déformation et de l'épaisseur du liquide viscoélastique.

Enfin, G. Mompean et L. Thais (2009) ont étudié des simulations numériques bidimensionnelles et tridimensionnelles des écoulements viscoélastiques dans des géométries complexes en utilisant la méthode des

volumes finis en coordonnées orthogonales.

L'algorithme de Navier-Stokes a été conçu pour les maillages orthogonales généralisées en deux dimensions et pour une description cartésienne le long de la courbure.

Les équations de conservation ont été écrites selon des variables primitives de la pression et de vitesse, à l'aide de longueurs curvilignes physiques et des vitesses contravariantes, telles qu'elles ont été exprimées par S.B. Pope (1978).

La discrétisation spatiale a été faite avec la méthode des volumes finis, en prenant la pression au centre des volumes de contrôle et les composantes de la vitesse dans le centre des faces des cellules. Les termes d'advection conservatives ont été discrétisés avec un schéma quadratique QUICK et les termes d'advection supplémentaires, induits par la courbure des coordonnées ont été traités de manière explicite comme coordonnées des volumes intégraux évalués dans les centres des cellules.

Cette discrétisation produit une matrice symétrique et définie positive pour la pression. Afin de modéliser l'écoulement viscoélastique, G. Mompean et L. Thais (2009) ont utilisé l'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner (PTT).

Dans le présent travail on a étudié la simulation numérique tridimensionnelle des écoulements newtoniens et viscoélastiques (PTT) dans une conduite courbée de  $180^\circ$ , avec section carrée et une région de sortie linéaire, similaire à la géométrie de Bara et al. (1992), Helin (2006), Boutabaa et al. (2009) et Helin et al. (2009). Les équations qui régissent le comportement des écoulements sont résolues par la méthode des volumes finis. On a observé la formation de paires supplémentaires de tourbillons contre-rotatifs et les transitions des modèles de deux tourbillons au modèle de quatre tourbillons et au modèle de six tourbillons.



## Chapitre 2

# Équations et modélisation des écoulements

En classant qualitativement les comportements des matériaux, selon le nombre de Deborah, dans un diagramme de déformation en fonction du nombre de ( $De$ ), on peut distinguer trois zones :

- Une zone à faible nombre de Deborah correspondant à un comportement visqueux.
- Une autre zone avec des nombres de Deborah élevés correspondant à un comportement purement élastique.
- Et une zone intermédiaire, correspondant à un comportement visco-élastique.

Les matériaux viscoélastiques présentent un comportement tel que, pour des faibles déformations, alors qu'ils sont proches de l'équilibre, font que la relation entre la tension et la déformation soit linéaire, et se trouve dans la zone appelée "viscoélasticité linéaire".

Dans le cas des déformations plus importantes, la relation entre la tension et la déformation n'est plus linéaire et donne la zone de visco-élasticité non-linéaire.

### 2.1 Loi de Comportement fondé sur la viscoélasticité linéaire

Le développement de la théorie mathématique de la viscoélasticité linéaire est basé sur le principe que la réponse (déformation) à tout moment est linéairement proportionnelle à sa force motrice (tension).

De sorte que, si la déformation et la vitesse de déformation sont infinitésimales, la relation tension-déformation, dépendant du temps, peut

être décrite par des équations différentielles à coefficients constants, faisant qu'on a un comportement viscoélastique linéaire.

$$\tau = - \int_{-\infty}^t G(t - t') \dot{\gamma}(t') dt' \quad (2.1)$$

ou :

$$\tau = + \int_{-\infty}^t M(t - t') \gamma(t, t') dt' \quad (2.2)$$

où  $G(t - t')$  est le module de relaxation,  $t$  est le temps actuel,  $t'$  est un instant antérieur quelconque du processus,  $M(t - t') = \frac{\partial G(t-t')}{\partial t'}$  est une fonction à mémoire,  $\dot{\gamma} = \sqrt{2Tr[D]}$  est le taux d'effort et est fini à  $t = -\infty$ ; et  $D$  est le taux de tenseur de déformation.

Les intégrales consistent en le produit de deux fonctions : la première fonction de la nature du fluide (les paramètres matériels apparaissent dans  $G(t - t')$  ou  $M(t - t')$ ) et la seconde fonction de la nature de l'écoulement (la cinématique est décrit par  $\gamma(t, t')$  ou  $\dot{\gamma}(t')$ ).

## 2.2 Modèles non-linéaires

Les équations fondamentales qui régissent le comportement des écoulements sont les équations de conservation de la masse et l'équation de quantité de mouvement ou de Navier-Stokes.

### 2.2.1 Équation de conservation de la masse

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}) = 0 \quad (2.3)$$

où  $\mathbf{u}$  est le vecteur de vitesse.

### 2.2.2 Équation de quantité de mouvement

Les équations de Navier Stokes ou quantité de mouvement régissant le comportement de l'écoulement s'écrivent vectoriellement comme :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla \mathbf{p}}{\rho} + \mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (2.4)$$

où  $\rho$  est la densité,  $\mathbf{p}$  est la pression,  $\mathbf{f}$  sont les forces externes (dans ce cas, ce domaine est représenté par la force spécifique gravitationnelle  $\mathbf{g}$ ),  $\nu$  est la viscosité cinématique, et  $\mathbf{u}$  est le vecteur vitesse.

### 2.3 Modèle de Maxwell de "Upper-Convection"(UCM)

Selon Bird et al. (1987), Maxwell (1967) semble avoir été le premier à proposer une équation qui combine les équations du modèle solide (Hooke) et le modèle de liquide (Newton), en l'équation pour les fluides viscoélastiques, avec des propriétés de solides et de liquides.

À partir du modèle original de Maxwell, en remplaçant la dérivée du tenseur de tension par la dérivée convective  $\tau'$ , on obtient le modèle de Maxwell "Upper-Convected".

Basé sur le modèle proposé par Maxwell par des fluides ayant un comportement élastique et visqueux, Bird et al. (1987) ont présenté un'autre manière de décrire le modèle en utilisant l'équation suivante :

$$\tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\eta_p D \quad (2.5)$$

où  $\tau$  est le tenseur viscoélastique,  $\lambda$  est le temps de relaxation de l'écoulement,  $\eta_p$  est la viscosité polymérique et  $D$  est le tenseur de déformation.

## 2.4 Le modèle d'Oldroyd-B ou modèle de convection de Jeffreys

L'équation du modèle d'Oldroyd-B s'écrit comme suit :

$$\tau + \lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} = 2\eta_0 D + 2\lambda\eta_N \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.6)$$

où  $\eta_0$  est la viscosité total et  $\eta_N$  est la viscosité du solvant newtonien.

L'équation du modèle d'Oldroyd-B peut être écrite aussi comme suit :

$$\tau + \lambda_1 \tau_{(1)} = -\eta_0 (\gamma_{(1)} + \lambda_2 \gamma_{(2)}) \quad (2.7)$$

Cette équation constitutive contient trois paramètres :  $\eta_0$  la viscosité total,  $\lambda_1$  le temps de relaxation et  $\lambda_2$  le temps de retardation ; avec :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \gamma_{(t)} \quad (2.8)$$

Le modèle d'Oldroyd-B est l'un des modèles les plus fréquemment utilisés pour l'analyse des fluides viscoélastiques. Il appartient à la famille plus large des modèles appelés modèles de Jeffrey.

## 2.5 Modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT)

Parmi les modèles non-linéaires, on trouve le modèle de Phan-Thien et Tanner (1977), qui est basé sur la théorie microstructurelle du fluide. Ce modèle est connu sous le nom PTT.

Dans la littérature, la fonction  $Y$  du modèle PTT est habituellement considérée comme fonction linéaire :

$$Y(Tr(\tau)) = 1 + \frac{\varepsilon \lambda Tr(\tau)}{\eta_{m0}} \quad (2.9)$$

ou exponentielle :

$$Y(Tr(\tau)) = \exp\left[\frac{\varepsilon \lambda Tr(\tau)}{\eta_{m0}}\right] \quad (2.10)$$

En général :

$$Y(Tr(\tau_i))\tau_i + \lambda\tau + \frac{\xi}{2}\lambda_i\{\dot{\gamma} \cdot \tau_i + \tau_i \cdot \dot{\gamma}\} = -\dot{\gamma}\eta_i \quad (2.11)$$

où  $\varepsilon$  est une constante liée au comportement élongationnel du matériel,  $\lambda$  est le temps de relaxation de l'écoulement,  $\eta_{m0}$  est la viscosité moléculaire initiale,  $\tau = \sum_i \tau_i$  est le tenseur viscoélastique,  $Tr(\tau)$  est la trace du tenseur de tension,  $\xi$  est un paramètre constant du modèle PTT,  $\dot{\gamma}(t')$  est une fonction que décrit la cinématique de l'écoulement,  $\eta_{m0}$  est le coefficient de viscosité du modèle PTT et  $(\cdot)$  est le produit scalaire.

Les deux paramètres constants  $\varepsilon$  et  $\xi$  définissent le comportement non-linéaire ; alors  $Y(Tr(\tau))$  est une fonction des tensions normales du fluide.

Tanner (2000) fait remarquer que  $\xi$  est le paramètre de glissement de Phan-Thien Tanner, et est considéré comme la viscosité linéaire. Il contrôle la quantité de glissement entre les chaînes polymériques du fluide et peut être estimé par des tests viscométriques. C'est donc un paramètre qui est déterminé à partir d'un rhéomètre.

Pour un matériau avec un temps de relaxation, l'équation constitutive du modèle PTT peut être exprimée comme suit :

$$\tau + \xi(D\tau - \tau D^T) + \frac{Y\tau}{\lambda} = 2GD \quad (2.12)$$

En écrivant l'équation constitutive différentielle précédente sous la forme proposée par Phan-Thien Tanner (1977), on peut écrire :

$$\lambda \left[ \frac{D\tau}{Dt} - L\tau - \tau L^T \right] + Y\tau = 2\eta_m D \quad (2.13)$$

où  $\frac{D\tau}{Dt}$  est la dérivée objective,  $L$  est la matrice,  $L^T$  est sa transposée et  $\eta_m$  est la viscosité moléculaire, qu'est définie comme :

$$\eta_m = \eta_{m0}\mu \quad (2.14)$$

et :

$$\eta_{m0} = \beta\eta_0 \quad (2.15)$$

L'équation réécrite comme equation de transport et remplaçant les valeurs de  $\eta_m$  et  $\eta_{m0}$ , est la suivante :

$$\lambda \left[ \frac{D\tau}{Dt} \right] = 2\mu\beta\eta_0 D + \lambda(L\tau + \tau L^T) - Y\tau \quad (2.16)$$

En général :

$$Y(Tr(\tau_i))\tau_i + \lambda_i\tau_i + \frac{\xi_i}{2}\lambda_i\{\dot{\gamma} \cdot \tau_i + \tau_i \cdot \dot{\gamma}\} = -\dot{\gamma}\eta_i \quad (2.17)$$

où  $\eta_i$ ,  $\lambda_i$ ,  $\xi_i$  et  $\varepsilon_i$  sont des constantes ; avec :

Selon les valeurs des constantes  $\varepsilon$ ,  $\beta$  et  $\xi$  l'équation précédente sera modifiée et rebaptisée, car elle répondra à une autre équation constitutive d'un modèle, et en fonction de cela, les équations constitutives seront celles indiquées au tableau 1.

Tableau 1.

$\epsilon$	$\beta$	$\xi$	Viscosité	Modèle
$A$	$1$	$C$	$\eta_m = \eta_{m0} = \eta_0$	Phan-Thien-Tanner (PTT)
$0$	$0 < \beta < 1$	$0$	$\eta_m = \eta_{m0}$	Oldroyd-B
$0$	$1$	$0$	$\eta_m = \eta_{m0} = \eta_0$	Upper-Convected Maxwell (UCM)

où  $A$  et  $C$  sont valeurs quelconques positives.

Alors, la fonction  $Y$  du modèle PTT considérée comme fonction linéaire peut s'écrire :

$$Y(Tr(\tau)) = 1 + \frac{\varepsilon_i \lambda_i Tr(\tau_i)}{\eta_{m0i}} \quad (2.18)$$

ou sous forme exponentielle :

$$Y(Tr(\tau)) = \exp\left[\frac{\varepsilon_i \lambda_i Tr(\tau_i)}{\eta_{m0i}}\right] \quad (2.19)$$

Enfin, le tenseur du gradient de la vitesse effective,  $\nabla u$ , est exprimée comme suite :

$$\nabla u = L + \xi D \quad (2.20)$$

## 2.6 Équations sous forme adimensionnelle

Pour mettre l'équation de conservation de la masse, l'équation de quantité de mouvement et l'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner sous une forme adimensionnelle, on a utilisé les variables adimensionnelles, la dimension caractéristique de la conduite, la vitesse du fluide et les nombres sans dimensions, à savoir : nombre de Reynolds, nombre de

Dean et nombre de Deborah.

Dans l'hydrodynamique des fluides isothermes, l'écoulement d'un fluide s'écrit sous les formes :

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \mathbf{f} + \operatorname{div} \sigma, \quad (2.21)$$

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.22)$$

où  $\rho$  est la densité de masse,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x) \in \mathbb{R}^N$  est la vitesse,  $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$  est une dérivée partielle,  $\mathbf{f}$  est le vecteur force et  $\sigma$  est le tenseur des contraintes (tenseur symétrique). De plus, nous pouvons décomposer  $\sigma$  de la manière suivante :

$$\sigma = \tau - p\mathbf{I} \quad (2.23)$$

où  $\tau$  désigne la partie tangentielle du tenseur, alors que  $p\mathbf{I}$  est la partie normale,  $p$  est la pression et  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité (ses composantes  $\delta_{ij}$  sont les symboles de Kronecker).

En remplaçant  $\sigma$  par sa valeur, le comportement d'un fluide viscoélastique est donnée par l'équation de quantité de mouvement :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p = \mathbf{f} + \operatorname{div} \tau. \quad (2.24)$$

Si on suppose, en plus, que le fluide est incompressible, alors :

$$\partial_t \rho = 0 \quad (2.25)$$

et :

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla \rho \cdot \mathbf{u} = \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \quad (2.26)$$

Alors la équation (2.21) s'écrit comme :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.27)$$

Il existe de nombreux modèles différentiels, permettant de modéliser le comportement de fluides viscoélastiques. Des considérations physiques permettent d'obtenir une équation de la forme :

$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + f(\tau)\tau = 2\eta D[\mathbf{u}] \quad (2.28)$$

avec :

$$D[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (2.29)$$

où  $\eta$  et  $\lambda$  sont deux nombres positives qui correspondent respectivement à la viscosité totale du fluide et au temps de relaxation relatif aux propriétés rhéologiques du fluide (lié au nombre de Déborah),  $D[\mathbf{u}]$  est le tenseur de déformation qui représente la partie symétrique de  $\nabla \mathbf{u}$ .

La dérivée objective, c'est-à-dire indépendante du repère choisi, est donnée par :

$$\frac{D\tau}{Dt} = \frac{d\tau}{dt} + \tau W[\mathbf{u}] - W[\mathbf{u}]\tau - a(D[\mathbf{u}]\tau + \tau D[\mathbf{u}]) \quad (2.30)$$

avec :

$$\frac{d\tau}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right) \tau \quad (2.31)$$

et :

$$W[\mathbf{u}] = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} - \nabla^T\mathbf{u}) \quad (2.32)$$

où  $W[\mathbf{u}]$  est le tenseur des taux de rotation qui représente la partie antisymétrique de  $\nabla\mathbf{u}$ ,  $a$  est un paramètre réel vérifiant  $a \in [-1, 1]$ , et  $\frac{d\tau}{dt}$  est la dérivée totale (ou dite aussi particulaire) qui tient compte de la variation temporelle de  $\mathbf{x}$ .

En général, nous décomposons la contrainte  $\tau$  en deux parties, une newtonienne ( $\tau_s$ ) qui correspond au solvant, on retrouve en effet un tenseur dépendant linéairement du tenseur des taux de déformations, et une polymérique ( $\tau_p$ ) ou partie purement élastique de la contrainte. Puis, nous écrivons :

$$\tau = \tau_s + \tau_p = 2\eta_s D[\mathbf{u}] + \left( \left( \xi_s - 2\frac{\eta_s}{N} \right) \text{div}\mathbf{u} \right) \mathbf{I} + \tau_p \quad (2.33)$$

où  $N$  est la dimension de l'espace physique,  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité,  $\xi_s$  est la viscosité dite de groupe,  $\eta_s = \eta - \eta_p$  est la viscosité du solvant.

Dans le cas d'un fluide viscoélastique non stationnaire incompressible nous supposons que  $\xi_s = 0$ , alors :

$$\tau = 2\eta_s D[\mathbf{u}] + \tau_p \quad (2.34)$$

On obtient :

$$\rho \left( \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) + \nabla p - \eta_s \Delta\mathbf{u} - \text{div}\tau_p = \mathbf{f} \quad (2.35)$$

On introduit un paramètre  $r$  qui décrit la proportion relative des comportements purement visqueux et purement élastiques, écrit comme :

$$r = \frac{\eta_p}{\eta} \quad (2.36)$$

Alors le système s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\eta(1-r)\Delta\mathbf{u} + \rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) + \nabla p - \operatorname{div}\tau_p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \lambda\frac{D\tau_p}{Dt} + f(\tau_p)\tau_p = 2\eta_p\mathbf{D}[\mathbf{u}] \end{array} \right. \quad (2.37)$$

Ce système peut être écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\eta(1-r)\Delta\mathbf{u} + \rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) + \nabla p - \operatorname{div}\tau_p = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \lambda\left(\frac{\partial\tau_p}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\tau_p + g_a(\nabla\mathbf{u}, \tau_p)\right) + f(\tau_p)\tau_p = 2\eta_r\mathbf{D}[\mathbf{u}] \end{array} \right. \quad (2.38)$$

où :

$$g_a(\nabla\mathbf{u}, \tau_p) = \tau_p W[\mathbf{u}] - W[\mathbf{u}]\tau_p - a(\mathbf{D}[\mathbf{u}]\tau_p + \tau_p\mathbf{D}[\mathbf{u}]) \quad (2.39)$$

Pour faciliter la lecture du système, notons  $\tau$  au lieu de  $\tau_p$ , alors le fluide viscoélastique non stationnaire incompressible vérifie le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\eta(1-r)\Delta\mathbf{u} + \rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) + \nabla p - \operatorname{div}\tau = \mathbf{f}, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \lambda\left(\frac{\partial\tau}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\tau + g_a(\nabla\mathbf{u}, \tau)\right) + f(\tau)\tau = 2\eta_r\mathbf{D}[\mathbf{u}] \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Lorsque le paramètre  $r$  est pris égal à 1, diverses formes du modèle de Maxwell généralisé sont retrouvées. Et si en plus,  $f = 1$ , il s'agit du modèle de Maxwell classique. Le cas de  $r = 0$  correspond au modèle newtonien. Le modèle d'Oldroyd-B correspond au cas où  $f$  est l'identité et

$0 < r < 1$ .

Si on choisit une forme linéarisée de  $f$ , des lois de Phan-Thien-Tanner sont obtenues. La forme standard de  $f$  dans le cas de PTT est donné par :

$$f(\tau) = 1 + \frac{\kappa\lambda}{\eta} \text{Tr}(\tau) \quad (2.41)$$

où  $\kappa$  est une constante liée au comportement élongationnel du matériel.

Afin d'éclaircir la méthode mathématique, on suppose que  $\mathbf{x}^*$ ,  $\mathbf{u}^*$ ,  $p^*$ ,  $t^*$ ,  $\tau^*$ ,  $\rho^*$  et  $f^*$  sont tous avec dimension, donc notre système s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\eta(1-r)\Delta^*\mathbf{u}^* + \rho^* \left( \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) + \nabla^* p^* - \text{div}^* \tau^* = \mathbf{f}^*, \\ \text{div}^* \mathbf{u}^* = 0, \\ \lambda \left[ \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \tau^* + g_a(\nabla^* \mathbf{u}^*, \tau^*) \right] + f(\tau^*) \tau^* = 2\eta r D^*[\mathbf{u}^*]. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Considérons maintenant des quantités physiques sans dimension, en posant :

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{L}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{U}, \quad p = \frac{p^* L}{U\eta}, \quad t = \frac{t^* L}{U}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad \tau = \frac{\tau^* L}{U\eta}, \quad \mathbf{f} = \frac{\mathbf{f}^* L^2}{U\eta}$$

où  $U$  et  $L$  sont respectivement une vitesse et une longueur caractéristiques du fluide.

Pour la première équation :

$$-\eta(1-r) \frac{U}{L^2} \Delta \mathbf{u} + \frac{\rho_0 \rho L U}{\eta} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \frac{U\eta}{L^2} \nabla p - \frac{U\eta}{L^2} \text{div} \tau = \frac{U\eta}{L^2} \mathbf{f} \quad (2.43)$$

On prend, pour faciliter le calcul,  $\rho = 1$  (déjà  $\rho$  est un nombre sans dimension). Puis, on multiplie l'équation par  $\frac{L^2}{U\eta}$ . Définissons ensuite le

nombre sans dimension, dit le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 L U}{\eta} \quad (2.44)$$

Alors :

$$-(1-r)\Delta \mathbf{u} + \text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \text{div} \tau = \mathbf{f} \quad (2.45)$$

Pour la troisième équation :

$$\lambda \left[ \frac{U^2 \eta}{L^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{U^2 \eta}{L^2} (u \cdot \nabla) \tau + \frac{U^2 \eta}{L^2} g_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) \right] + \frac{U \eta}{L} f \left( \frac{U \eta}{L} \tau \right) \tau = 2 \eta r \frac{U}{L} \text{D}[\mathbf{u}] \quad (2.46)$$

Divisons par  $\frac{U \eta}{L}$  :

$$\frac{\lambda U}{L} \left[ \frac{\partial \tau}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \tau + g_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) \right] + f \left( \frac{U \eta}{L} \tau \right) \tau = 2r \text{D}[\mathbf{u}] \quad (2.47)$$

Puis, prenons le nombre sans dimension, dit le nombre de Deborah :

$$\text{De} = \frac{\lambda U}{L} \quad (2.48)$$

Alors :

$$\text{De} \left[ \frac{\partial \tau}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \tau + g_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) \right] + f \left( \frac{U \eta}{L} \tau \right) \tau = 2r \text{D}[\mathbf{u}] \quad (2.49)$$

Par suite, le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1-r)\Delta \mathbf{u} + \text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \text{div} \tau = \mathbf{f}, \\ \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \text{De} \left[ \frac{\partial \tau}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \tau + g_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) \right] + f \left( \frac{U \eta}{L} \tau \right) \tau = 2rD[\mathbf{u}] \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Si on veut préciser le système PTT, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -(1-r)\Delta \mathbf{u} + \text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \text{div} \tau = \mathbf{f}, \\ \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \text{De} \left[ \frac{\partial \tau}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \tau + g_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) \right] + [1 + \kappa \text{De} \text{Tr}(\tau)] \tau = 2rD[\mathbf{u}] \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Si  $\kappa = 0$ , on obtient le modèle Oldroyd-B.

## Chapitre 3

# Méthode numérique

La solution d'un système d'équations différentielles, obtenue par les équations de Navier-Stokes, est un problème mathématique complexe. Pour sa résolution, des méthodes numériques sont utilisées.

L'utilisation de méthodes numériques, pour la résolution des systèmes d'équations différentielles, réside dans son application à des situations générales donc leur capacité à résoudre des équations dans n'importe quel type de géométrie est un aspect fondamental.

Comme il n'y a pas de solution analytique du modèle mathématique pour la géométrie complexe, avec les méthodes numériques on arrive à obtenir des solutions approximatives dans des circonstances différentes. Donc le problème devient un modèle discret.

Dans les méthodes numériques traditionnelles la construction d'un maillage sur le domaine physique de l'étude est nécessaire. Ces dernières années, la méthode des volumes finis, initialement développée pour les maillages structurés, a été adaptée aux maillages non structurés pour des géométries complexes.

La méthode des volumes finis consiste à délimiter les faces du volume par les plans moyens des éléments, de sorte que le volume intérieur soit un volume inférieur à la somme des parties de tous les éléments qui le délimitent.

Les surfaces du volume fini sont parcourues par un écoulement qui peut être représenté par une intégration de points discrets, qui appartiennent au domaine des équations discrètes à étudier.

En général, les volumes finis se déforment en fonction de la géométrie, parce que leurs faces sont orthogonales entre elles ; par conséquent, les équations discrétisées pour chaque volume fini doivent prendre en compte des termes supplémentaires.

### 3.1 Équations en coordonnées orthogonales

Les systèmes de coordonnées les plus couramment utilisés dans les opérations différentielles sont les coordonnées rectangulaires, cylindriques et sphériques.

P. Moon et S.D. Spencer (1961) ont présenté une vaste compilation pour d'autres systèmes de coordonnées. Toutefois, par le système de coordonnées orthogonales, les trois systèmes susmentionnés peuvent être ajustés à ce nouveau système.

J.F. Dijksman et E.P.W. Savenije (1985), qui ont d'abord travaillé avec le système de coordonnées orthogonales, ont synthétisé tous les opérations dans des tableaux.

S.B. Pope (1978) a établi une méthode utilisant des coordonnées orthogonales généralisées, pour obtenir une notation dans laquelle il y a un compromis entre la simplicité de la notation cartésienne dans la forme des tenseurs et des tenseurs généraux.

Les équations peuvent être exprimées en coordonnées orthogonales généralisées, à travers des termes des composantes physiques des tenseurs.

La figure 3.1 montre, par simplicité, un système tridimensionnel de coordonnées orthogonales généralisées où les coordonnées orthogonales,  $\gamma_2$  sont représentées en fonction des coordonnées cartésiennes  $x$ .

Les distances dans le système de coordonnées orthogonales généralisées sont liées au système cartésien en utilisant le tenseur métrique  $g_{ij}$ , lequel est diagonal et est exprimé comme s'indique en l'équation (3.1).

$$g_{ij} = \sum_l \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x_j} \quad (3.1)$$

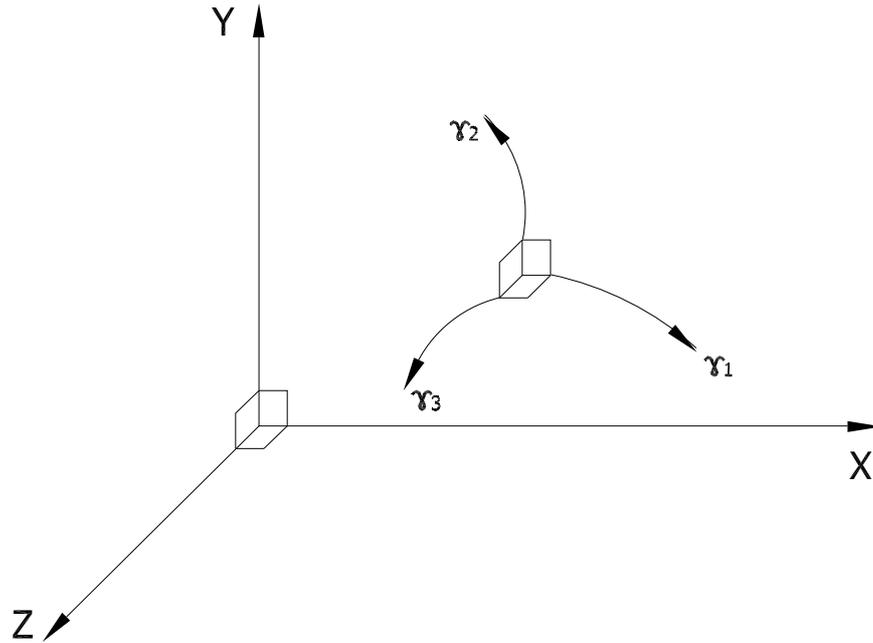


FIGURE 3.1 – Coordonnées orthogonales

Les facteurs d'échelle sont définis comme la racine carrée des éléments diagonaux de ce tenseur métrique, alors s'écrivent usuellement comme :

$$h_i \equiv (g_{ij})^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

Les composantes physiques d'un vecteur contravariant sont donnés :

$$A(i) \equiv h_i A^i \quad (3.3)$$

L'équation ci-dessus représente les composantes du vecteur dans la direction des lignes de coordonnées, mesurées en relation avec le système cartésien. L'avantage d'exprimer les équations de transport en tant que composantes physiques covariantes ou contravariantes, se basent sur le fait que les vecteurs conservent les mêmes dimensions dans toutes les directions et toutes les positions, et que ne nécessitent aucun changement supplémentaire dû à l'expansion du système de coordonnées. Les équations de transport dans le système orthogonal généralisé peuvent être obtenues par des transformations géométriques.

Pope (1978) utilise une procédure pour transformer ces équations sous cartésienne, directement dans le système orthogonal général, où les transformations sont obtenues à l'aide de tenseurs généraux et en impliquant des dérivés  $\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}$ , l'opérateur de la divergence  $\nabla(i)$  et les termes des variations de coordonnées  $H_{ij}$ , où :

$$\nabla(i) \equiv h_i |h| \frac{\partial}{\partial x^{(i)}} \frac{|h|}{h_i}$$

et

$$H_i(j) = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} \ln h_i \quad (3.4)$$

Dans l'équation (3.4)  $|h|$  est le produit du facteurs d'échelle et représente la relation de volume entre les systèmes de coordonnées. Le terme de variation de coordonnées,  $H_{ij}$ , représente l'inverse du rayon de courbure de la ligne de coordonnées  $i$  et  $j$ .

Par ailleurs, les symboles de Christoffel sont exprimés en fonction des termes de variation de coordonnées :

$$\{_{ij}^k\} = g^{kl}(ij, l)$$

ou

$$\{_{ij}^k\} = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) \quad (3.5)$$

Les équations de continuité et de quantité de mouvement en coordonnées orthogonales généralisées, transformées par Pope (1978) et Helin (2006), sont données par :

$$\sum_i \nabla(i) U(i) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \rho U_j}{\partial t} + \sum_i \nabla(i) [\rho U_i U_j - \tau_{ij} - 2\eta D_{ij}] = -\frac{\partial p}{\partial \gamma_j} -$$

$$\sum_i H_j^i [\rho U_i U_j - \tau_{ij} - 2\eta D_{ij}] + \sum_i H_i^j [\rho U_i U_i + \tau_{ii} - 2\eta D_{ii}] \quad (3.7)$$

### 3.2 Discrétisations spatiale et temporelle

La formulation en volumes finis est aujourd'hui largement utilisée en mécanique des fluides numérique. Comme indiqué plus haut, cette formule s'applique à des maillages structurés et non structurés, et la forme des volumes élémentaires peut être très variée. Sa souplesse et sa simplicité conceptuelle expliquent son adoption et son utilisation dans différents programmes commerciaux.

Dans cette méthode, on part généralement d'une discrétisation préliminaire du domaine de calcul en éléments, des triangles ou des quadrilatères, à partir desquels on construit de nouveaux maillages.

Dans chacun de ces volumes est faite, sous forme intégrale, la discrétisation des équations exprimant les lois de conservation et qui, par application du théorème de la divergence, sont simplifiées considérablement. Les expressions qui en résultent établissent dans chaque cellule la conservation exacte des propriétés pertinentes de l'écoulement.

Les termes des équations sont remplacés par des approximations du type différences finies, obtenant des équations algébriques qui sont résolues par un processus itératif.

Dans notre étude, la méthode utilisée pour résoudre le système d'équations en coordonnées orthogonales est la méthode des volumes finis, les équations sont intégrées dans un volume de contrôle et, en utilisant le théorème de Gauss, les équations sont transformées d'intégrales de volume en intégrales de surface. Ceci est :

$$\int_{u^p} \nabla \cdot u \, du = \int_{s^p} u \cdot n \, ds \quad (3.8)$$

Le  $n$  est le vecteur normal de la surface, qui appartient au volume de contrôle  $V$ , et le terme de  $(\int u \cdot n \, ds)$  représente l'écoulement massique qui passe à travers la surface. On utilise le théorème de Gauss parce que l'écoulement est orthogonal au volume de contrôle. L'emplacement des variables peut être observé dans la figure 3.2.

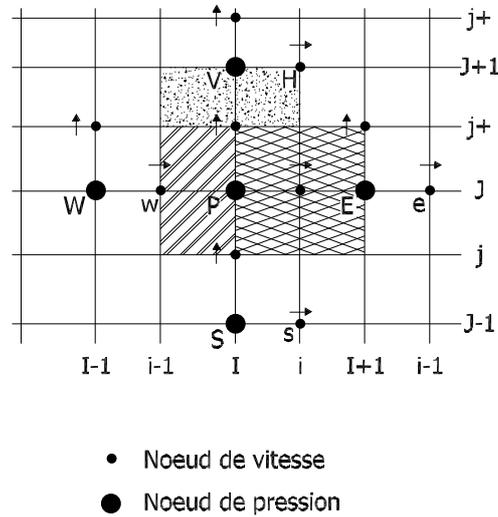


FIGURE 3.2 – Présentation schématique des maillages en volumes finis

Les vitesses sont évaluées dans les centres des faces du volume de contrôle, et les pressions, ainsi que les tensions normales, sont calculées dans les coins de la maille de pression.

### 3.2.1 Discrétisation spatiale

L'équation de conservation de la masse.

L'équation de conservation de la masse est donnée par :

$$\sum_j \nabla \cdot {}^{(j)} U_j = 0 \quad (3.9)$$

En intégrant l'équation précédente de conservation de la masse dans un volume de contrôle, où la valeur de  $d\gamma_{p(i,k+1)}^1$  représente la taille physique de la frontière dans le volume de contrôle qui est centré sur les noeuds de pression  $v^{pression}$ .

$$U_{2(i,k+1)} d\gamma_{p(i,k+1)}^1 - U_{2(i,k)} d\gamma_{p(i,k)}^1 + U_{1(i+1,k)} d\gamma_{p(i+1,k)}^2 - U_{1(i,k)} d\gamma_{p(i,k)}^2 = 0 \quad (3.10)$$

L'équation de quantité de mouvement.

L'équation de quantité de mouvement est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho U_j}{\partial t} + \sum_i \nabla(i) [\rho U_i U_j - \tau_{ij} - 2\eta D_{ij}] &= -\frac{\partial p}{\partial \gamma_j} \\ - \sum_i H_j^i [\rho U_i U_j - \tau_{ij} - 2\eta D_{ij}] + \sum_i H_i^j [\rho U_i U_i + \tau_{ii} - 2\eta D_{ii}] & \quad (3.11) \end{aligned}$$

En intégrant de façon analogue, on obtient cette équation, où  $d\gamma_{u1(i,k)}^2$  est la longueur physique de la frontière du volume de contrôle  $\nu^U$ , où sont centrés les noeuds de vitesse. En utilisant le théorème de Gauss, comme le montre Helin (2006), l'équation du mouvement devient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho U_1}{\partial t}\right) v^{U_1} + \overbrace{\{U_1 U_1 - \tau_{11} - 2\eta_s D_{11}\}} d\gamma_{U_1(i+1,k)}^2 - \\ \overbrace{\{U_1 U_1 - \tau_{11} - 2\eta_s D_{11}\}} d\gamma_{U_1(i,k)}^2 + \overbrace{\{U_1 U_2 - \tau_{12} - 2\eta_s D_{12}\}} d\gamma_{U_1(i,k+1)}^1 - \\ \overbrace{\{U_1 U_2 - \tau_{12} - 2\eta_s D_{12}\}} d\gamma_{U_1(i,k)}^1 = \left[ \frac{2(P_{(i,k)} - P_{(i-1,k)})}{d\gamma_{U_1(i,k)}^1 + d\gamma_{U_1(i,k+1)}^1} \right] U^{U_1} + \\ \overbrace{[H_2^1(U_2 U_2 - \tau_{22} - 2\eta_s D_{22}) - H_1^2(U_2 U_1 - \tau_{21} - 2\eta_s D_{21})]} U^{U_1} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir les conditions de la forme  $(U_n U_n - \tau_{nn} - 2\eta_s D_{nn})$   $(U_n U_{n+1} - \tau_{nn+1} - 2\eta_s D_{nn+1})$  et  $(U_n U_{n-1} - \tau_{nn-1} - 2\eta_s D_{nn-1})$ ; et les termes de l'advection  $U_i, U_j$  sont obtenus en utilisant la méthode de "Quadratic upstream the interpolation convective kinematics" ou aussi appelé "QUICK" utilisée par Léonard (1978).

En appliquant la méthode de QUICK, les termes d'advection de l'équation 3.12 sont exprimés par les quatre points cardinaux de volume de contrôle. C'est-à-dire :

\* Côté Nord : Le terme d'advection est :

$$U_1 U_2 = \frac{1}{2} \{U_2(i, k+1) + U_2(i-1, k+1)\} \left[ \frac{1}{2} (U_1(i, k) + U_1(i, k-1)) + \frac{1}{8} \{2U_1(i, k_p-1) - U_1(i, k_p-2) - U_1(i, k_p)\} \right] \quad (3.13)$$

$k_p = k+1$	si $\left\{ \frac{1}{2} (U_2(i, k+1) + U_2(i, k)) \right\}$ est inférieur à zéro
$k_p = k$	dans le cas contraire

Le terme de tension est :

$$\begin{aligned} \tau_{12} + 2\eta_s D_{12} = \tau_{12} + 2\eta_s & \left[ \frac{U_2(i, k+1) - U_2(i-1, k+1)}{d\gamma_{U_1(i, k+1)}^1} + \right. \\ & \left. \frac{U_1(i, k+1) - U_1(i, k)}{d\gamma_{U_2(i, k+1)}^2} - \right. \\ & \left. H_2^1 f s u_1(i, k+1) \frac{U_2(i, k+1) + U_2(i-1, k+1)}{2} - \right. \\ & \left. H_1^2 f s u_1(i, k+1) \frac{U_1(i, k+1) + U_1(i, k)}{2} \right] \quad (3.14) \end{aligned}$$

où  $H_1^2 f s u_1(i, k)$  est le facteur d'étirement calculé dans le centre de la face du volume de contrôle.

\* Côté Sud : Le terme d'advection est :

$$U_1 U_2 = \frac{1}{2} \{U_2(i, k) + U_2(i-1, k)\} \left[ \frac{1}{2} (U_1(i, k-1) + U_1(i, k-2)) + \frac{1}{8} (2U_1(i, k_p-2) - U_1(i, k_p-3) - U_1(i, k_p-1)) \right] \quad (3.15)$$

$k_p = k$	si $\frac{1}{2}\{U_2(i, k) + U_2(i, k - 1)\}$ est inférieur à zéro
$k_p = k - 1$	dans le cas contraire

Le terme de tension est :

$$\begin{aligned} \tau_{12} + 2\eta_s D_{12} = & \tau_{12}(i, k) + 2\eta_s \left[ \frac{U_2(i, k) - U_2(i - 1, k)}{d\gamma_{U_1(i, k)}^1} + \right. \\ & \frac{U_1(i, k) - U_1(i, k - 1)}{d\gamma_{U_2(i, k)}^2} - H_2^1 f s u_1(i, k) \frac{U_2(i, k) + U_2(i - 1, k)}{2} - \\ & \left. H_1^2 f s u_1(i, k) \frac{U_1(i, k) + U_1(i, k - 1)}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

\* Côté Est : Le terme d'advection est :

$$\begin{aligned} U_1 U_1 = & \frac{1}{2} \{U_1(i, k) + U_1(i + 1, k)\} \left[ \frac{1}{2} (U_1(i, k) + U_1(i + 1, k)) + \right. \\ & \left. \frac{1}{8} (2U_1(i_p, k) - U_1(i_p - 1, k) - U_1(i_p + 1, k)) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$i_p = i + 1$	si $\frac{1}{2}(U_1(i, k) + U_1(i + 1, k))$ est inférieur à zéro
$i(p) = i$	dans le cas contraire

Le terme de tension est :

$$\begin{aligned} \tau_{11} + 2\eta_s D_{11} = & \tau_{11}(i, k) + 2\eta_s \left[ \frac{U_1(i + 1, k) - U_1(i, k)}{d\gamma_{U_2(i, k+1)}^1} + \right. \\ & \left. H_1^2 p(i, k) \frac{U_2(i, k + 1) + U_2(i, k)}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

En outre, le terme de la tension demeure que  $\tau_{11} = \tau_{11} + 2D_{\eta_{11}}$  et  $H_1^2 P(i, k)$  est le facteur d'étirement, calculé sur le noeud de pression, situé au contour du volume de contrôle.

\* Côté Ouest : Le terme d'advection est :

$$U_1 U_1 = \frac{1}{2} \{U_1(i, k) + U_1(i-1, k)\} \left[ \frac{1}{2} (U_1(i, k) + U_1(i-1, k)) + \frac{1}{8} (2U_1(i_p - 1, k) - U_1(i_p - 2, k) - U_1(i_p, k)) \right] \quad (3.19)$$

$i_p = i - 1$	si $\left\{ \frac{1}{2} (U_1(i, k) + U_1(i-1, k)) \right\}$ est inférieur à zéro
$i_p = i$	dans le cas contraire

Le terme de tension est :

$$\tau_{11} + 2\eta_s D_{11} = \tau_{11}(i, k) + 2\eta_s \left[ \frac{U_1(i, k) - U_1(i-1, k)}{d\gamma_{U_2(i-1, k+1)}^1} + H_1^2 p(i-1, k) \frac{U_2(i-1, k+1) + U_2(i-1, k)}{2} \right] \quad (3.20)$$

\* La courbure du volume de contrôle : Les termes d'advection sont :

$$U_2 U_2 = \left[ \frac{1}{4} (U_2(i, k) + U_2(i, k+1) + U_2(i-1, k+1) + U_2(i-1, k)) \right]^2 \quad (3.21)$$

$$U_2 U_1 = \frac{1}{4} [U_2(i, k) + U_2(i, k+1) + U_2(i-1, k+1) + U_2(i-1, k)] U_1(i, k) \quad (3.22)$$

Les termes de tension sont  $\tau_{22}$  et  $\tau_{21}$ , ou :

$$\begin{aligned} \tau_{22} + 2\eta_s D_{22} = & \tau_{22}(i, k) \\ & + 2\eta_s \left[ \frac{U_2(i, k+1) - U_2(i-1, k+1) + U_2(i, k) - U_2(i-1, k)}{d\gamma_{U_1(i, k+1)}^1 + d\gamma_{U_1(i, k)}^1} \right. \\ & \left. + H_2^1 c u_1(i, k) U_1(i, k) \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

et :

$$\begin{aligned}
\tau_{21} + 2\eta_s D_{21} = & \tau_{21}(i, k) + 2\eta_s \left\{ \left[ \frac{U_1(i, k+1) - U_1(i, k)}{d\gamma_{U_2(i, k)}^2 + d\gamma_{U_2(i, k+1)}^2} \right] \right. \\
& + \left[ \frac{U_2(i, k+1) - U_2(i-1, k+1) + U_2(i, k) - U_2(i-1, k)}{d\gamma_{U_1(i, k+1)}^1 + d\gamma_{U_1(i, k)}^1} \right] \\
& - H_2^1 c u_1(i, k) \frac{1}{4} [U_2(i, k) + U_2(i, k+1) + U_2(i-1, k+1) + U_2(i-1, k)] \\
& \left. - H_1^2 c u_1(i, k) U_1(i, k) \right\} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

où  $H_2^1 c u_1(i, k)$  et  $H_2^1 c u_1(i, k)$  sont des facteurs d'étirement calculés dans le volume de contrôle.

### 3.2.2 Discrétisation en temps

Pour la discrétisation en temps on utilise la méthode mise au point par Mompean et Deville (1997), où la méthode s'applique aux équations de conservation de la masse, et l'équation de conservation de mouvement ; le terme de gradient de pression et les conditions aux limites sont évalués dans le passage du temps  $n+1$  et les modalités de diffusion, les termes sources et les termes d'advection dans l'équation de conservation de mouvement sont évalués sur le pas de temps précédent c'est-à-dire  $n$ . Cette procédure est basée sur la méthode utilisée par Harlow et Welch (1965).

L'équation de conservation de la masse.

$$\sum_i \nabla_{(i)} \cdot (\mathbf{U}_i^{(n+1)}) = 0 \tag{3.25}$$

L'équation de quantité de mouvement.

De manière analogue, l'équation de mouvement est :

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}}{\Delta t} + \left[ \sum_i \nabla \cdot (i) (U_i U_j - \tau_{ij} - 2\eta_s D_{ij}) + \sum_i H_j^i (U_i U_j - \tau_{ij} - 2\eta_s D_{ij}) \right. \\ \left. - \sum_i H_i^j (U_i U_j - \tau_{ii} - 2\eta_s D_{ii}) \right]^{(n)} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial \zeta_i} \end{aligned} \quad (3.26)$$

L'équation ci-dessus peut être écrite sous forme plus simplifiée, Helin (2006) :

$$U_i^{(n+1)} = \Delta t \left\{ B_{U_i}^{(n)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{(n+1)}}{\partial \zeta_i} \right\} \quad (3.27)$$

sachant que  $n$  est le pas du temps actuel  $t$  et  $n + 1$  est le pas du temps suivant  $t + \Delta t$ .

La solution du système montre la pression dans le pas du temps  $n + 1$ , et le champ de vitesse par le biais des relations  $U_1$  et  $U_2$ .

À la vitesse 1, on a :

$$U_1^{(n+1)}(i, k) = \Delta t \left\{ Z_{U_i}^{(n)}(i, k) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{2(P_{(i,k)}^{(n+1)} - P_{(i-1,k)}^{(n+1)})}{d\gamma_{U_1(i,k)}^1 + d\gamma_{U_1(i,k+1)}^1} \right) \right\} \quad (3.28)$$

et pour la vitesse 2 :

$$U_2^{(n+1)}(i, k) = \Delta t \left\{ Z_{U_2}^{(n)}(i, k) - \frac{1}{\rho} \left( \frac{2(P_{(i,k)}^{(n+1)} - P_{(i,k-1)}^{(n+1)})}{d\gamma_{U_2(i,k)}^2 + d\gamma_{U_2(i,k+1)}^2} \right) \right\} \quad (3.29)$$

avec :

$$\begin{aligned}
Z_{U_1}(i, k) &= \frac{U_1(i, k)}{\Delta t} - \frac{1}{U U^1} [(U_1 U_1 - \tau_{11} - 2\eta_s D_{11}) d\gamma_{U_1(i+1, k)}^2 \\
&- (U_1 U_1 - \tau_{11} - 2\eta_s D_{11}) d\gamma_{U_1(i, k)}^2 + (U_1 U_2 - \tau_{12} - 2\eta_s D_{12}) d\gamma_{U_1(i, k+1)}^1 \\
&- (U_1 U_2 - \tau_{12} - 2\eta_s D_{12}) d\gamma_{U_1(i, k)}^1] + \\
H_2^1(U_2^2 U_2^2 - \tau_{22} - 2\eta_s D_{22}) &- H_1^2(U_2^2 U_1^1 - \tau_{21} - 2\eta_s D_{21}), \quad (3.30)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
Z_{U_2}(i, k) &= \frac{U_2(i, k)}{\Delta t} - \frac{1}{U U^2} [(U_2 U_1 - \tau_{21} - 2\eta_s D_{21}) d\gamma_{U_2(i+1, k)}^2 \\
&- (U_2 U_1 - \tau_{21} - 2\eta_s D_{21}) d\gamma_{U_2(i, k)}^2 + (U_2 U_2 - \tau_{22} - 2\eta_s D_{22}) d\gamma_{U_2(i, k+1)}^2 \\
&- (U_2 U_2 - \tau_{22} - 2\eta_s D_{22}) d\gamma_{U_2(i, k)}^2] + \\
H_1^2(U_1^1 U_1^1 - \tau_{11} - 2\eta_s D_{11}) &- H_2^1(U_1^1 U_2^2 - \tau_{12} - 2\eta_s D_{12}) \quad (3.31)
\end{aligned}$$

En substituant les valeurs de  $U_1^{(n+1)}$  et  $U_2^{(n+1)}$  dans l'équation de conservation de la masse, on obtient l'équation de Poisson pour la pression.

$$C_1 P_{(i-1, k)}^{(n+1)} + C_2 P_{(i+1, k)}^{(n+1)} + C_3 P_{(i, k+1)}^{(n+1)} + C_4 P_{(i, k)}^{(n+1)} - C_5 P_{(i, k)}^{(n+1)} = Q_p^{(n)} \quad (3.32)$$

où les valeurs de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  sont :

$$C_1 = \frac{2d\gamma_P^2(i, k)}{d\gamma_{U_1(i, k)}^2 + d\gamma_{U_1(i, k+1)}^2} \quad (3.33)$$

$$C_2 = \frac{2d\gamma_P^2(i+1,k)}{d\gamma_{U_1(i+1,k)}^2 + d\gamma_{U_1(i+1,k)}^2} \quad (3.34)$$

$$C_3 = \frac{2d\gamma_P^2(i,k+1)}{d\gamma_{U_2(i+1,k+1)}^2 + d\gamma_{U_2(i+1,k)}^2} \quad (3.35)$$

$$C_4 = \frac{2d\gamma_P^2(i,k)}{d\gamma_{U_2(i+1,k)}^2 + d\gamma_{U_2(i+1,k-1)}^2} \quad (3.36)$$

$$C_5 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad (3.37)$$

et aussi la valeur de  $Q_P$  est :

$$\begin{aligned} Q_p^{(n)} &= d\gamma_{P(i+1,k)}^2 Z_{U_1}(i+1, k) - d\gamma_{P(i,k)}^2 Z_{U_1}(i, k) \\ &+ d\gamma_{P(i,k+1)}^1 Z_{U_2}(i, k+1) - d\gamma_{P(i,k)}^1 Z_{U_2}(i, k) \end{aligned} \quad (3.38)$$

L'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner (PTT).

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{(n+1)} &= \tau_{ij}^{(n)} + \Delta t \left[ \frac{1}{\lambda} (2\eta_1 D_{ij} - f(\tau_{ii}) \tau_{ii}) \right]^{(n)} \\ &+ \Delta t \left[ - \sum_{k=1}^3 \nabla \cdot (k) (V_k \tau_{ij}) + \sum_{k=1}^3 L_{ik} \tau_{kj} \right. \\ &+ \sum_{k=1}^3 L_{jk} \tau_{ki} + \sum_{k=1}^3 H_k^i V_k \tau_{kj} - \sum_{k=1}^3 H_i^k V_i \tau_{kj} \\ &\left. + \sum_{k=1}^3 H_k^j V_k \tau_{ik} - \sum_{k=1}^3 H_j^k V_j \tau_{ik} \right]^{(n, n-1)} \end{aligned} \quad (3.39)$$

### 3.2.3 Méthode de résolution du système linéaire

La méthodologie de solution consiste à résoudre à chaque pas de temps le système linéaire de type :

$$CP^{(n+1)} = Q^{(n)} \quad (3.40)$$

Pour cela, nous avons utilisé la méthode du Cholesky, qui permet de stocker en mémoire l'information de la matrice  $C$ . En réalité seulement la moitié de la bande de la matrice est stockée.

En outre, la décomposition de la matrice  $C$  est réalisée une seule fois au début du calcul, car cette matrice dépend seulement des données du maillage.

La matrice  $C$  est une matrice définie positive et symétrique, et est décomposée en :

$$C = L * L^T \quad (3.41)$$

où la matrice  $L$  est une matrice triangulaire inférieure, et  $L^T$  est sa matrice transposée.

Il est important de noter qu'à chaque pas de temps, on résout :

$$Lx = Q^{(n)} \quad (3.42)$$

et puis :

$$L^T * P^{(n+1)} = x \quad (3.43)$$

Qui constituent un algorithme de descent et un autre algorithme de remonté.



## Chapitre 4

# Description du problème, data et resultats

Dans ce chapitre, nous présentons les caractéristiques de l'étude effectuée. Dans notre cas, nous étudions des écoulements newtoniens et non-newtoniens, la géométrie utilisée est similaire à celle de Helin (2006), avec une modification de la géométrie ; ce qui nous permet de voir l'écoulement de tourbillons au niveau de la conduite courbée et au niveau de la conduite rectangulaire à la sortie.

### 4.1 Description de la conduite courbée de 180° avec section carrée

Dans notre étude, on simule le comportement de l'écoulement d'un fluide dans une conduite courbée de 180° avec une section carrée et une région de sortie linéaire par injection d'un fluide incompressible et sans effet de gravité. La géométrie de Helin (2006) est modifiée, ce qui permet l'union de la zone courbée avec la section du canal de sortie rectangulaire, comme le montre la Figure 4.1.

La configuration de la géométrie en trois dimensions du canal courbé, avec section carrée, à travers lequel passent des écoulements est la suivante :

- a) Une conduite rectangulaire d'entrée, avec une longueur de 5 et une hauteur de 1.
- b) Une conduite courbée du 180°, avec un rayon intérieur de 14,5 et un rayon extérieur de 15,5.
- c) Une conduite rectangulaire de sortie, avec une longueur de 65 et une hauteur de 1.

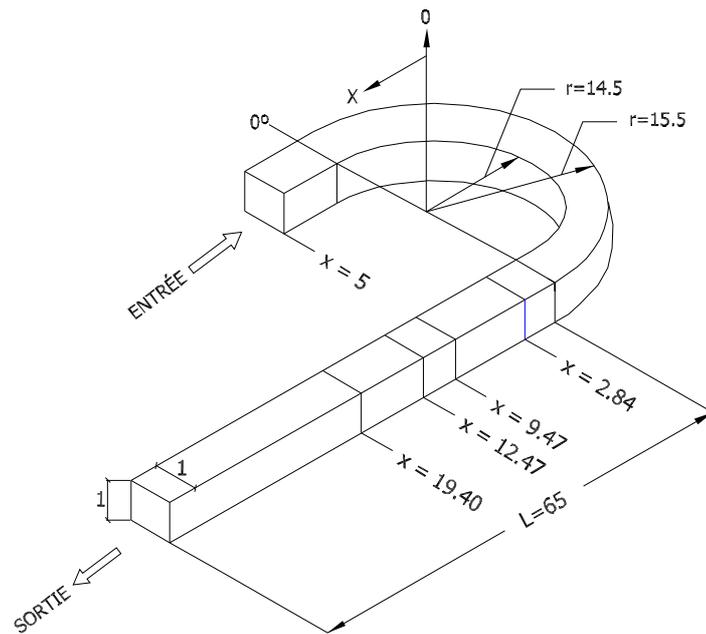


FIGURE 4.1 – Géométrie 3D

Pour cette géométrie, un maillage en coordonnées cartésiennes est utilisé pour chacune des deux conduites rectangulaires et un maillage en coordonnées polaires dans la partie courbée du canal. On utilise ici le système de coordonnées orthogonales décrit dans le chapitre précédent.

$(x_1, x_2) = (\gamma_1, \gamma_2)$  pour le canal d'entrée

$(x_1, x_2) = (\gamma_2 \sin \gamma_1, \gamma_2 \cos \gamma_1)$  pour le canal courbé.

$(x_1, x_2) = (-\gamma_1, \gamma_2)$  pour le canal de sortie.

## 4.2 Conditions de travail

Tableau 2.

Densité	1.000 ( $kg/m^3$ )
Viscosité dynamique	0.1000E-02 ( $kg/(m * s)$ )
Viscosité cinématique	0.1000E-02 ( $m^2/s$ )

### 4.3 Conditions aux limites

Ont été fixées les conditions aux limites suivantes :

a) Contour 1 : la vitesse initiale, la pression et la température d'entrée ont été imposée pour l'air. La vitesse initiale du débit est obtenue à partir du nombre de Reynolds fixé, lequel est montré dans le tableau 3 pour des nombres de Dean  $Dn = 125$ ,  $Dn = 137$  et  $Dn = 150$ . Pour les valeurs des nombres de Deborah  $De = 0.1$ ,  $De = 0.2$ ,  $De = 0.3$  et  $De = 0.4$ , nous avons obtenu des valeurs différentes de  $\lambda$ , comme on peut voir dans le tableau 4.

b) Contours 2, 3, 4, 5, 6, 7 : adhérence aux parois ( $V = 0$ ).

c) Contour 8 : la pression imposée à la sortie est égale à la pression atmosphérique.

La figure 4.2 montre les conditions aux limites.

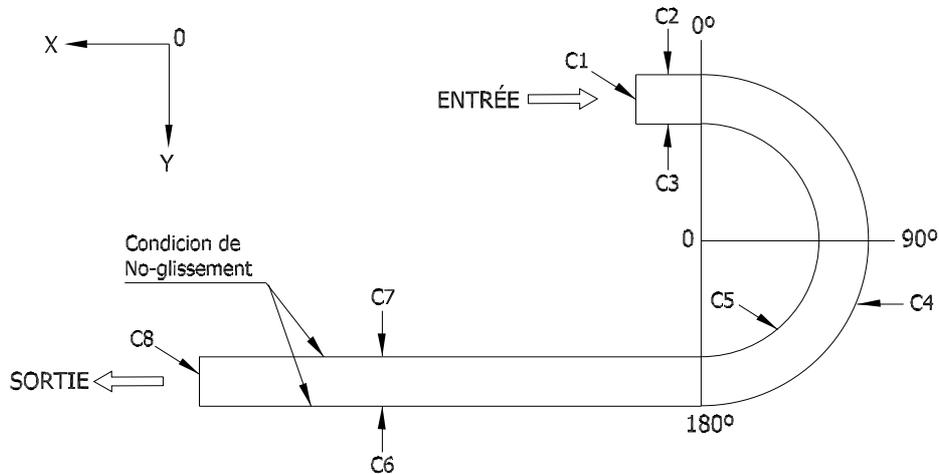


FIGURE 4.2 – Conditions aux limites

Tableau 3.

	$Dn = 125$	$Dn = 137$	$Dn = 150$
$Re$	485.77	532.41	582.90

Tableau 4.

	$Dn = 125$	$Dn = 137$	$Dn = 150$
$De = 0.1$	$\lambda = 0.0208368$	$\lambda = 0.0190111$	$\lambda = 0.0173648$
$De = 0.2$	$\lambda = 0.0416724$	$\lambda = 0.0380811$	$\lambda = 0.03472831$
$De = 0.3$	$\lambda = 0.0625068$	$\lambda = 0.05703110$	$\lambda = 0.05209185$
$De = 0.4$	$\lambda = 0.08334307$	$\lambda = 0.0760423$	$\lambda = 0.06945601$

#### 4.4 Méthode de solution

La procédure de résolution est organisée comme suit : tout d'abord, nous avons développé le maillage tridimensionnel de la géométrie proposée. Deuxièmement, nous avons établi des conditions de travail, nous avons fixé les conditions aux limites et nous avons procédé à la discrétisation. Enfin, on a résolu le système d'équations linéaires à l'aide d'itérations. Les valeurs obtenues à chaque itération sont utilisées comme condition initiale de l'étape suivante. Puis, les résultats ont été analysés, étudiant la présence des paires de vortex contre-rotatifs. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 5

# Analyse des résultats

Avec les simulations numériques réalisées, nous avons obtenu le développement de tourbillons pour des valeurs de nombres de Dean  $Dn = 125, 137$  et  $150$ , dans le secteur d'entrée de la conduite, dans la courbure de la conduite et dans la zone de sortie de la conduite. Nous avons pu apprécier comment évoluait l'écoulement tourbillonnaire des écoulements newtoniens et viscoélastiques en utilisant le modèle de PTT, avec quatre nombres de Deborah différents  $De = 0.1, De = 0.2, De = 0.3$  et  $De = 0.4$ .

### 5.1 L'écoulement newtonien

Pour le fluide newtonien, avec  $Dn = 125$ , l'écoulement maintient la configuration de deux vortex contre-rotatifs le long de la zone droite de sortie du canal. Ceci est dû au fait que pour  $Dn = 125$  les forces centrifuges ne sont pas suffisamment grandes pour causer la formation d'une paire de vortex additionnels. Dans les figures 5.1 à 5.6, nous représentons les lignes de courant et la tendance de la formation de tourbillons pour  $Dn = 125$  à différentes positions de la conduite. Il est clair que la taille des tourbillons diminue progressivement.

En ce qui concerne les profils de vitesses, pour  $Dn = 125$  nous avons noté que des tourbillons avec la plus grande vitesse se trouvent à la sortie de la zone courbée de la conduite, puis la vitesse de la paire de tourbillons baisse graduellement dans le canal rectangulaire de sortie, au fur et à mesure que la taille des tourbillons diminue (figures 5.7 à 5.12).

À  $Dn = 137$ , vu que les effets visqueux ne peuvent pas conserver plus la structure de deux vortex, puisque les forces centrifuges sont tellement

fortes, la paire de vortex additionnels commence à se former. Cette paire de vortex est présente seulement au début de la zone de sortie du canal, pour ensuite disparaître. À partir de là, le modèle de deux vortex contre-rotatifs se maintient. Les figures 5.13 à 5.18 montrent les lignes de courant et les structures des tourbillons pour  $Dn = 137$ .

Pour  $Dn = 137$ , la plus haute vitesse du modèle de deux vortex contre-rotatifs est observée à la sortie de la zone courbée de la conduite, mais inférieure au cas antérieur, alors qu'à cet endroit-là la vitesse de la paire de vortex additionnels est minimale. Tout de suite après qui revient le nouveau modèle de deux vortex la vitesse diminue progressivement le long de la zone droite de sortie de la conduite (figures 5.19 à 5.24).

À  $Dn = 150$ , les forces centrifuges sont encore plus fortes, donc la transition du modèle de deux vortex contre-rotatifs au modèle de quatre vortex se produit avec une plus grande rapidité. En outre, se produit la présence de deux nouvelles vortex contre-rotatifs, qui a modifié le modèle de quatre cellules à six cellules. Ensuite, ce modèle se dissipe rapidement. Les figures 5.25 à 5.30 montrent les lignes de courant et la tendance de la formation de tourbillons pour  $Dn = 150$ .

Pour  $Dn = 150$ , à la sortie de la zone courbée est appréciée la grande vitesse du modèle initial de deux vortex, mais inférieure aux deux cas précédents ; aussi la vitesse de la paire de vortex additionnels est faible. Ensuite qui le modèle de quatre vortex est transformé au modèle de six vortex, nous avons observé que chaque paire de vortex contre-rotatifs ont maintenue différentes vitesses. Quand ce modèle se dissipe, la vitesse diminue promptement (figures 5.31 à 5.36).

Dans les figures 5.37 à 5.39 nous présentons les graphiques  $du/dx$  via à vis de  $x$  de l'écoulement newtonien, elles montrent qu'à la sortie de la zone courbée de la conduite  $du/dx$  atteignent sa valeur maximale, puis de un vertigineux accroissement. Tout de suite descendre abruptement jusqu'à une valeur proche de  $du/dx = 0$ . Plus tard, arrive une perturbation et ensuite se maintient pratiquement constante, autour de  $du/dx = 0$ , jusqu'à la sortie de la conduite.

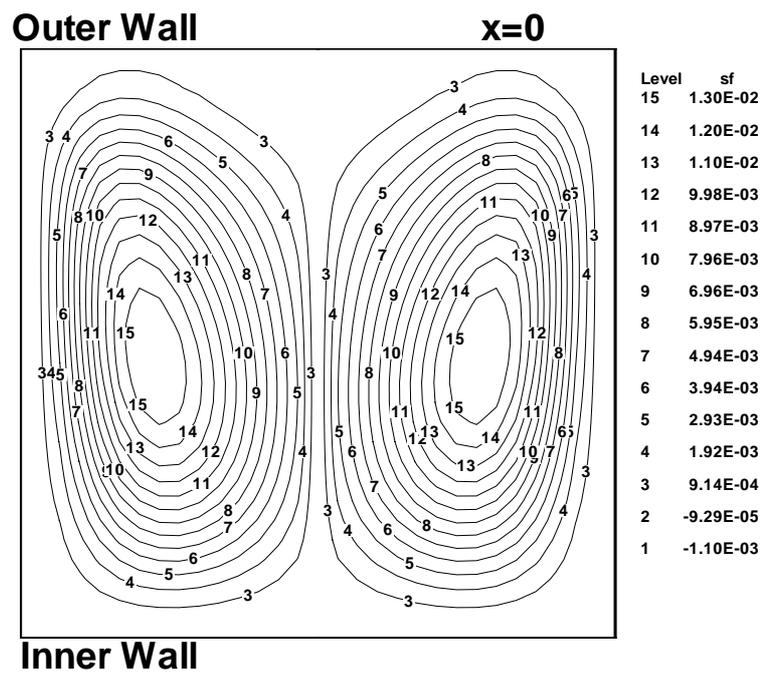


FIGURE 5.1 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 0$ , avec  $Dn = 125$

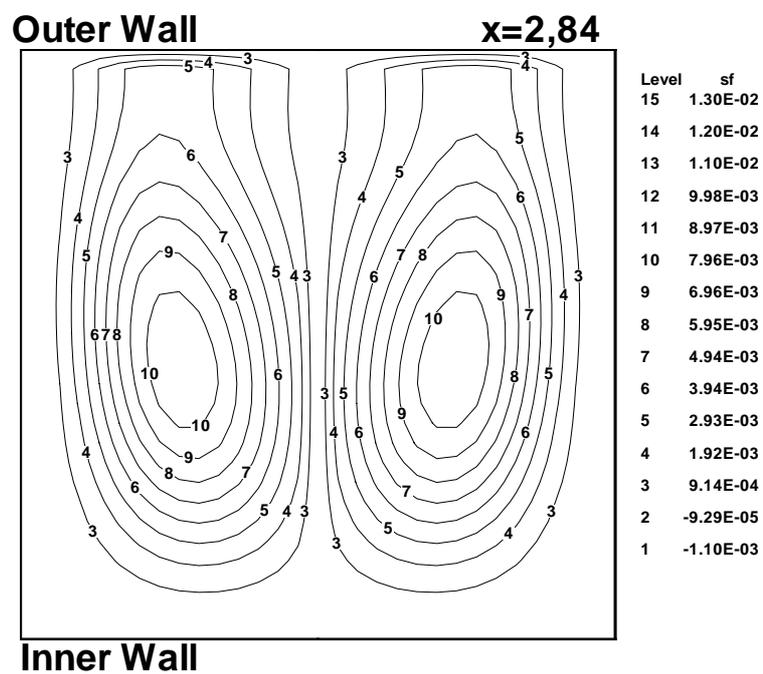


FIGURE 5.2 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 2.84$ , avec  $Dn = 125$

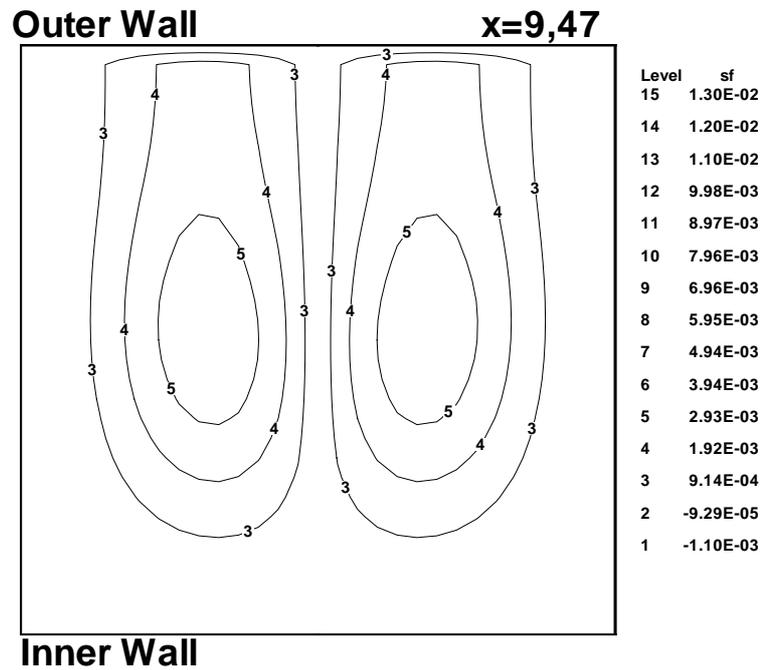


FIGURE 5.3 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 9.47$ , avec  $Dn = 125$

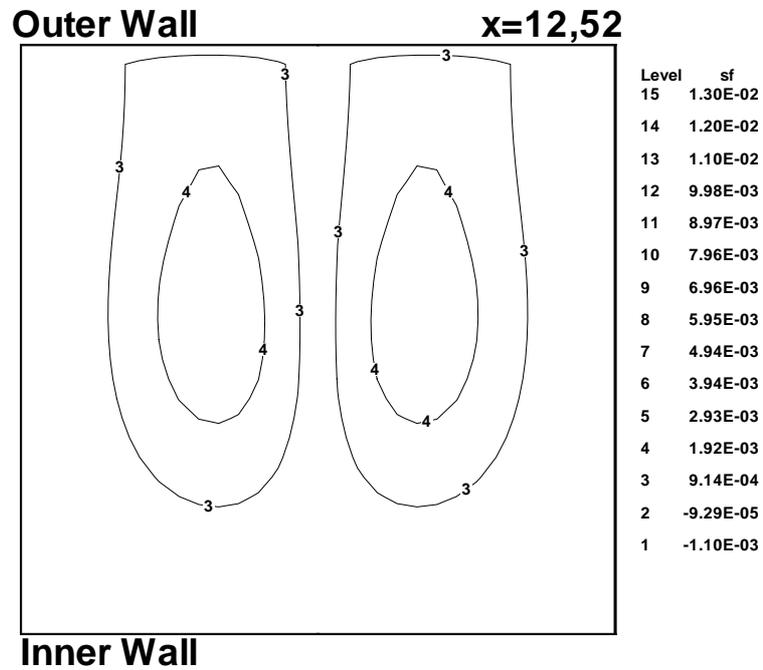


FIGURE 5.4 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 12.52$ , avec  $Dn = 125$

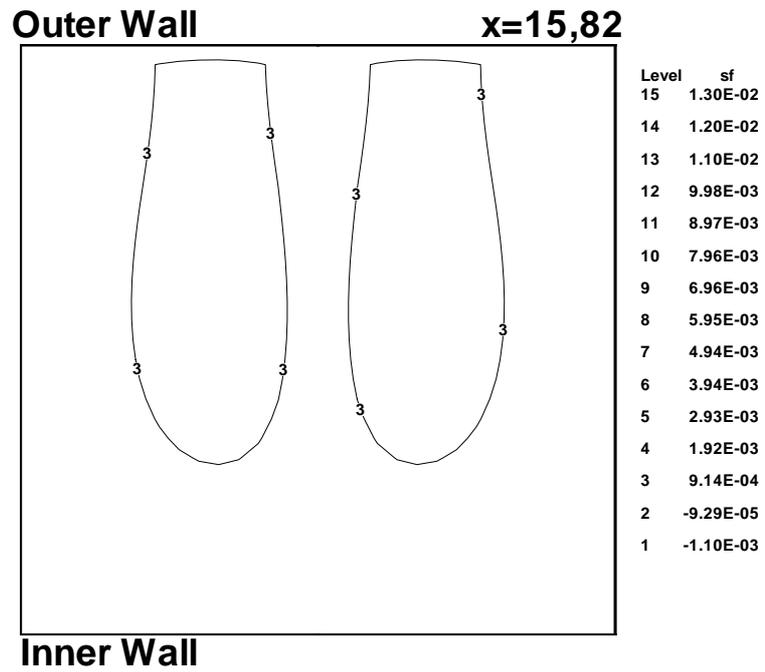


FIGURE 5.5 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 15.82$ , avec  $Dn = 125$

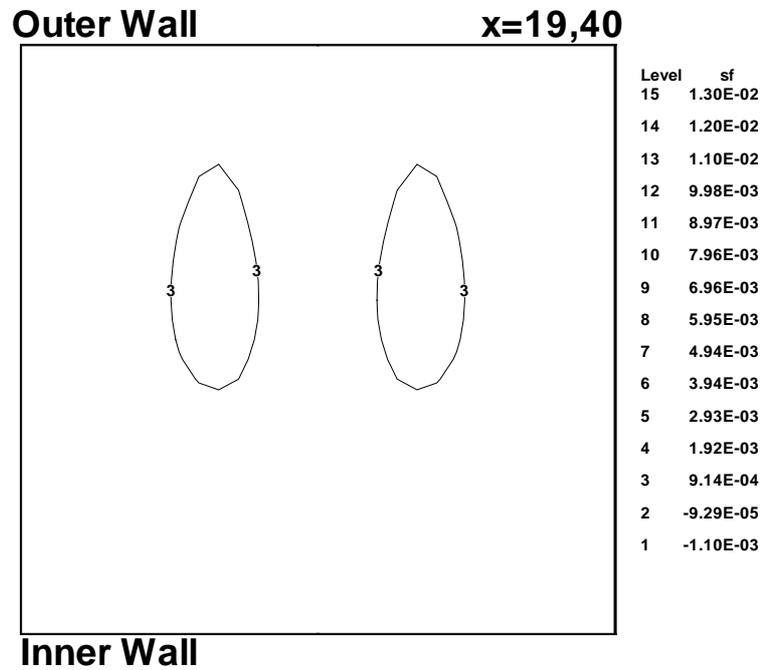


FIGURE 5.6 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 19.40$ , avec  $Dn = 125$

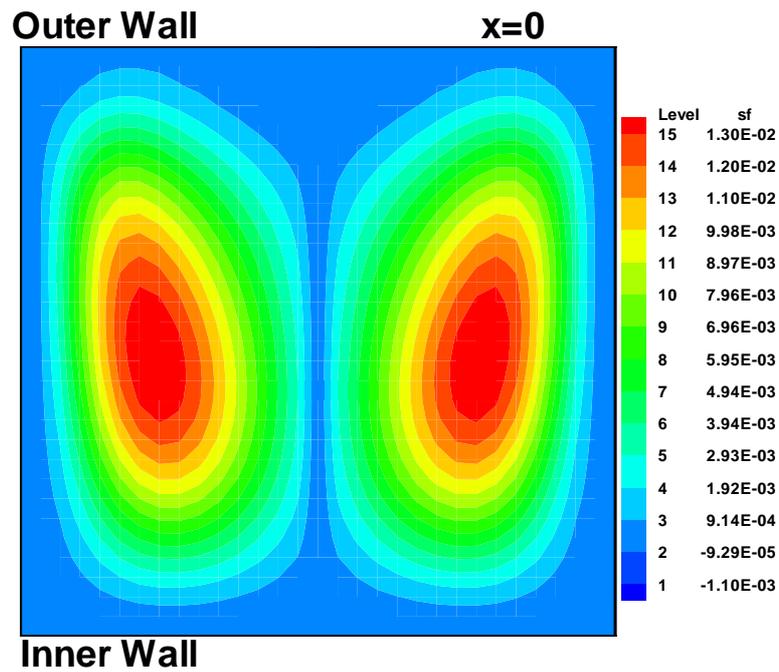


FIGURE 5.7 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 0$ , avec  $Dn = 125$

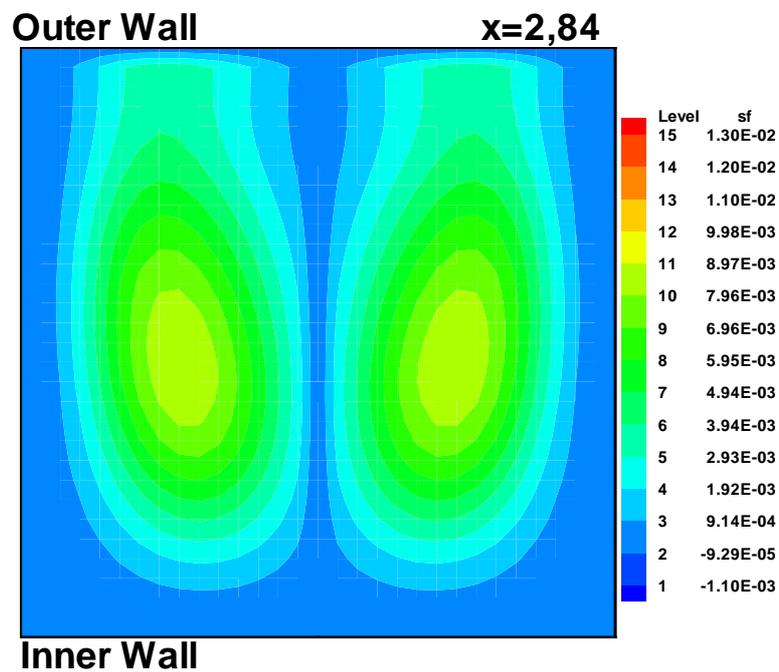


FIGURE 5.8 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 2.84$ , avec  $Dn = 125$

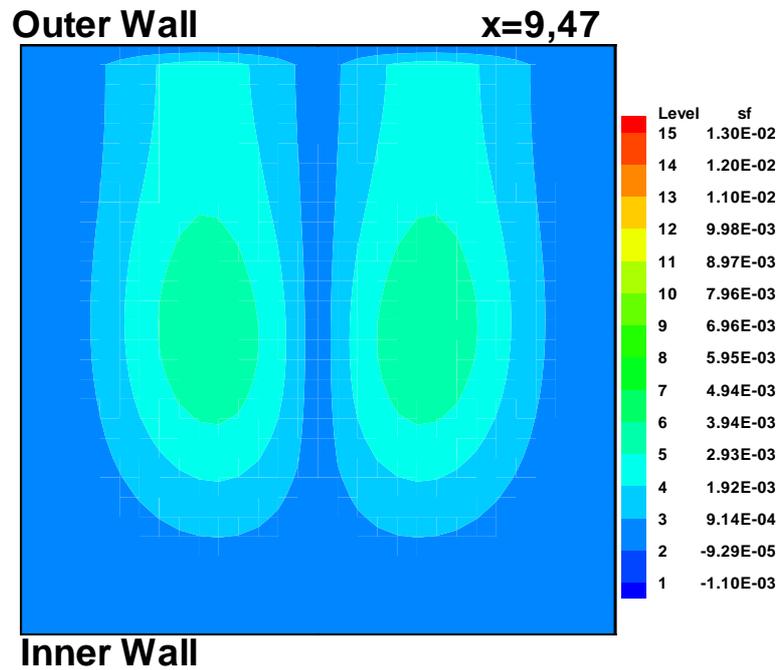


FIGURE 5.9 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 9.47$ , avec  $Dn = 125$

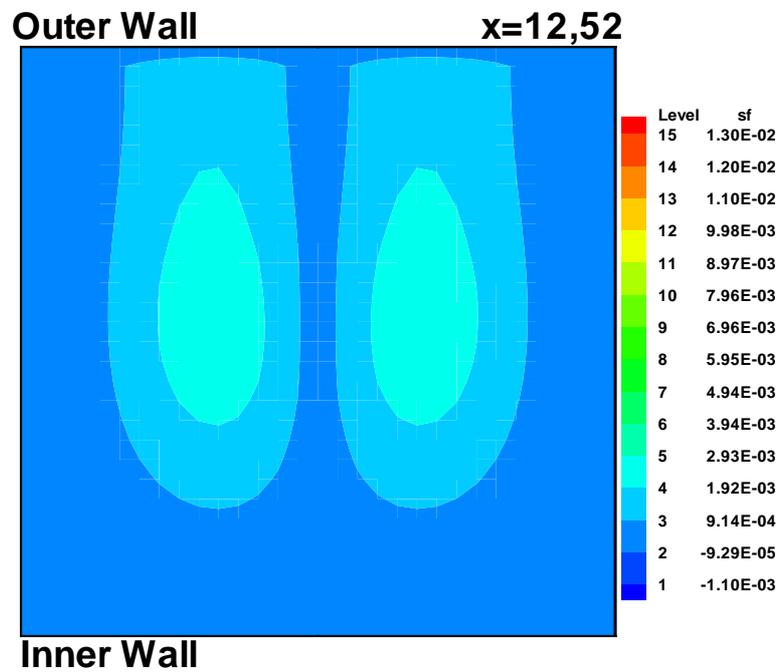


FIGURE 5.10 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 12.52$ , avec  $Dn = 125$

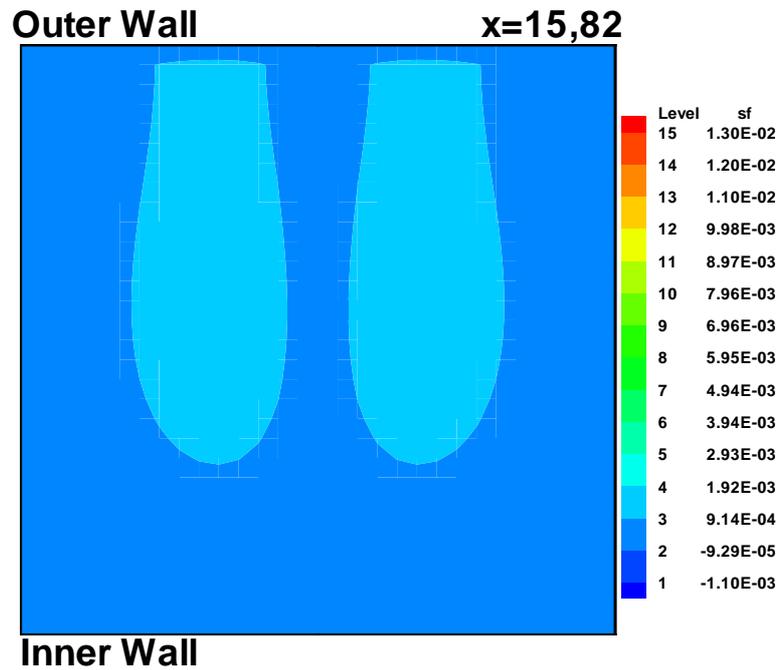


FIGURE 5.11 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 15.82$ , avec  $Dn = 125$

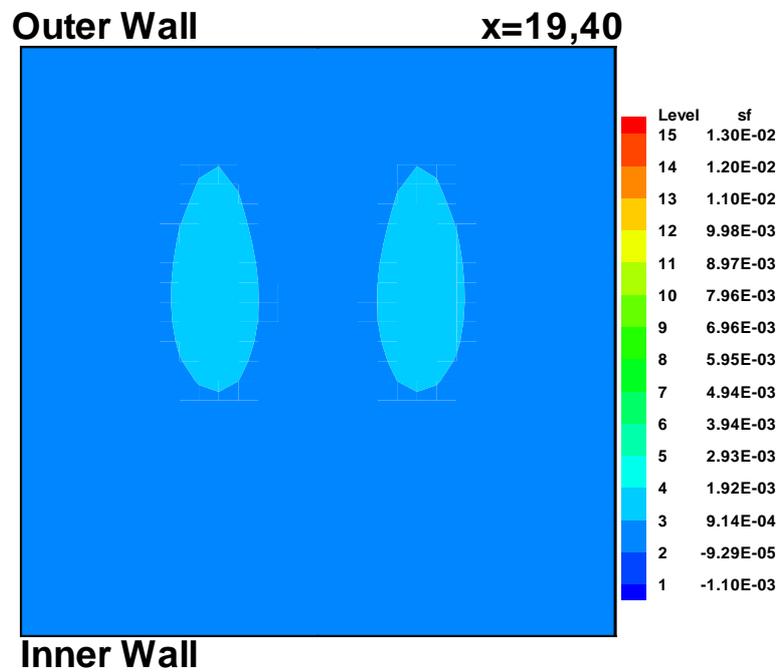


FIGURE 5.12 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 19.40$ , avec  $Dn = 125$

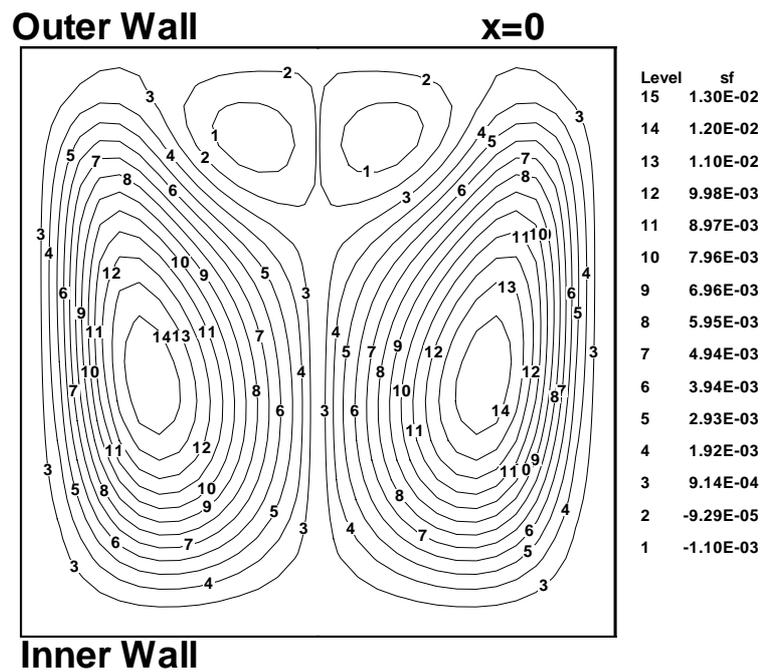


FIGURE 5.13 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 0$ , avec  $Dn = 137$

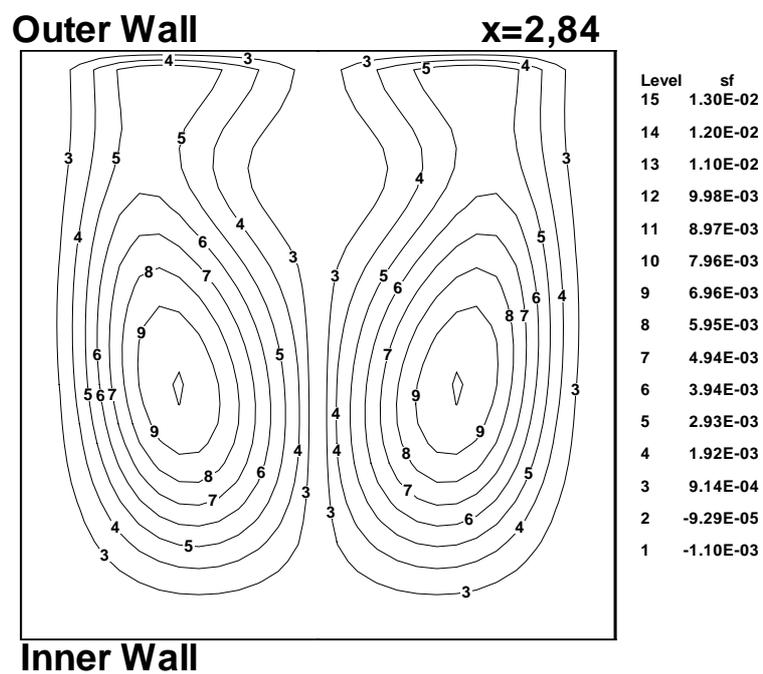


FIGURE 5.14 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 2.84$ , avec  $Dn = 137$

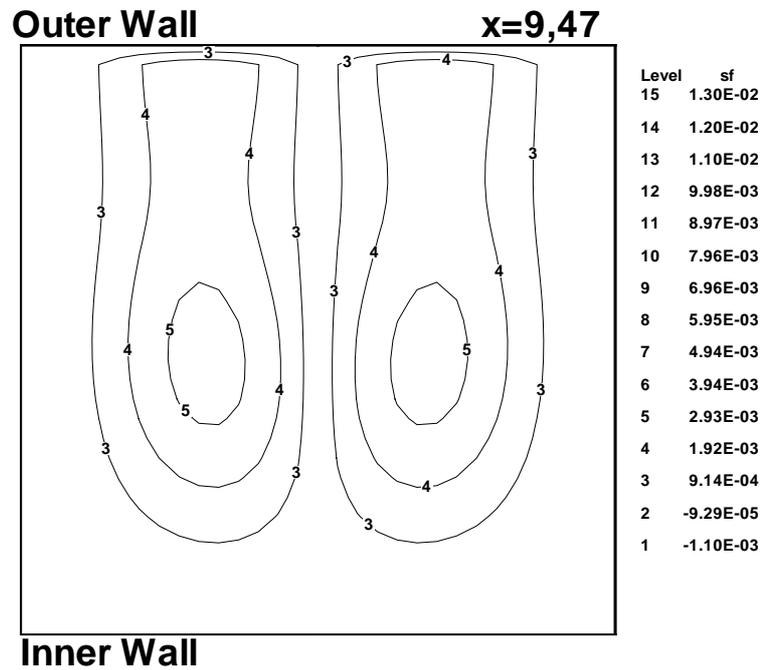


FIGURE 5.15 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 9.47$ , avec  $Dn = 137$

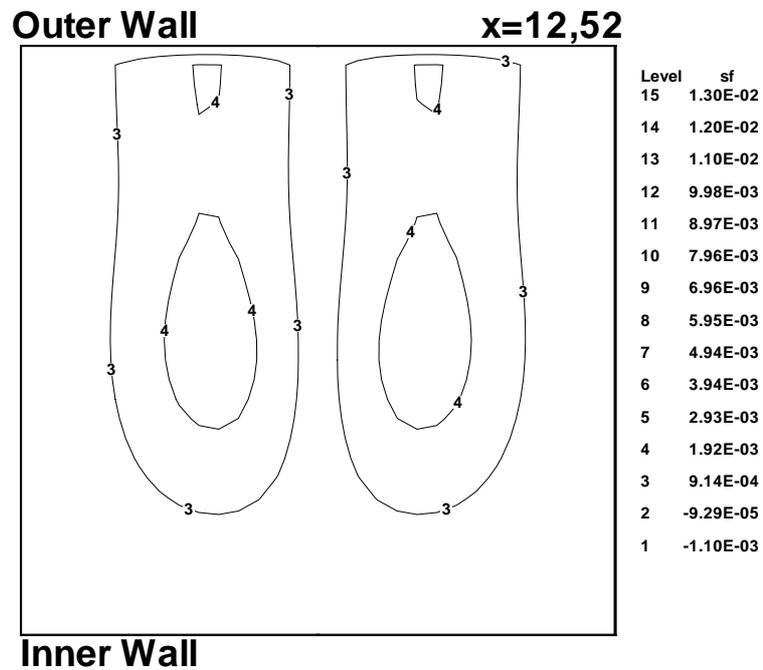
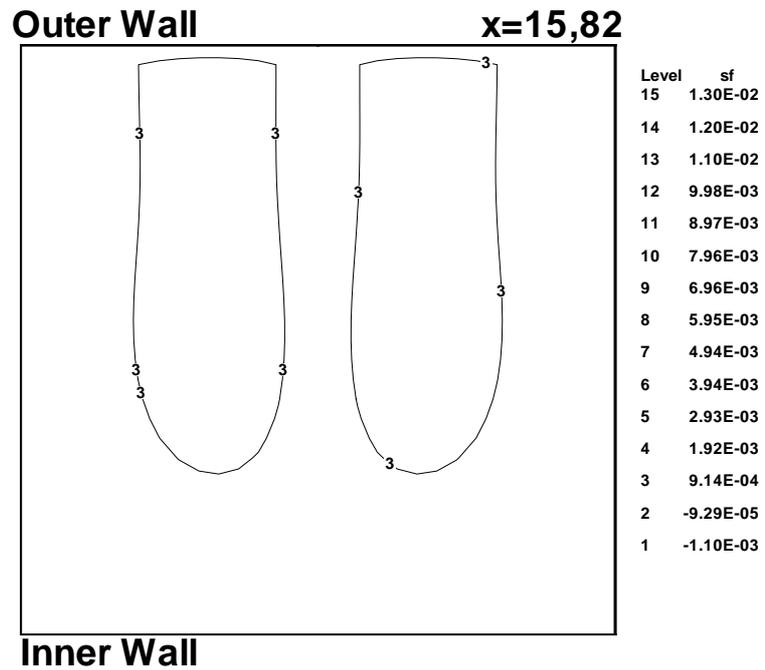
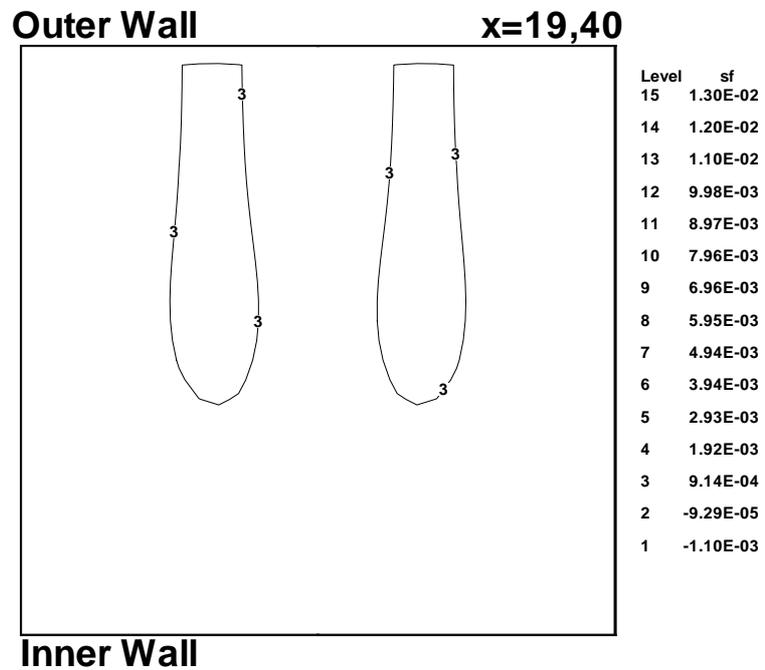


FIGURE 5.16 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 12.52$ , avec  $Dn = 137$

FIGURE 5.17 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 15.82$ , avec  $Dn = 137$ FIGURE 5.18 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 19.40$ , avec  $Dn = 137$

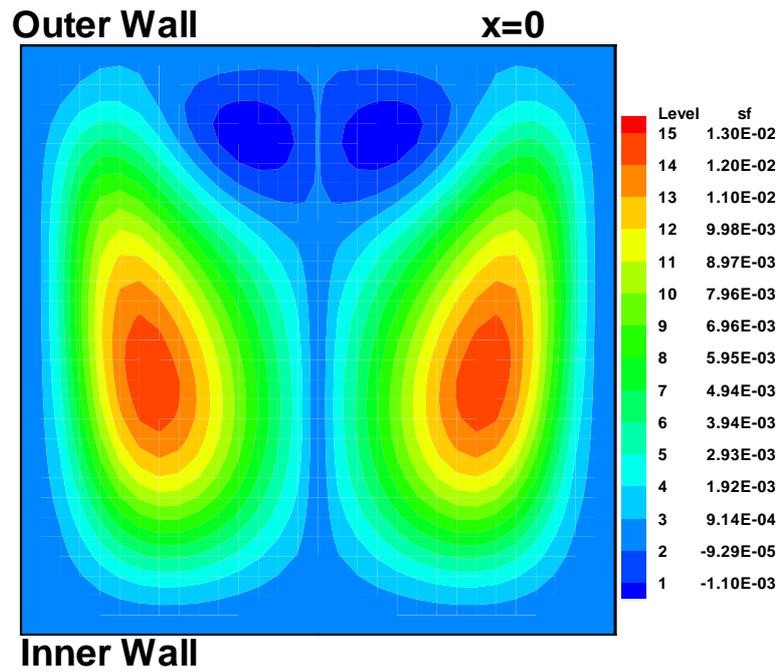


FIGURE 5.19 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 0$ , avec  $Dn = 137$

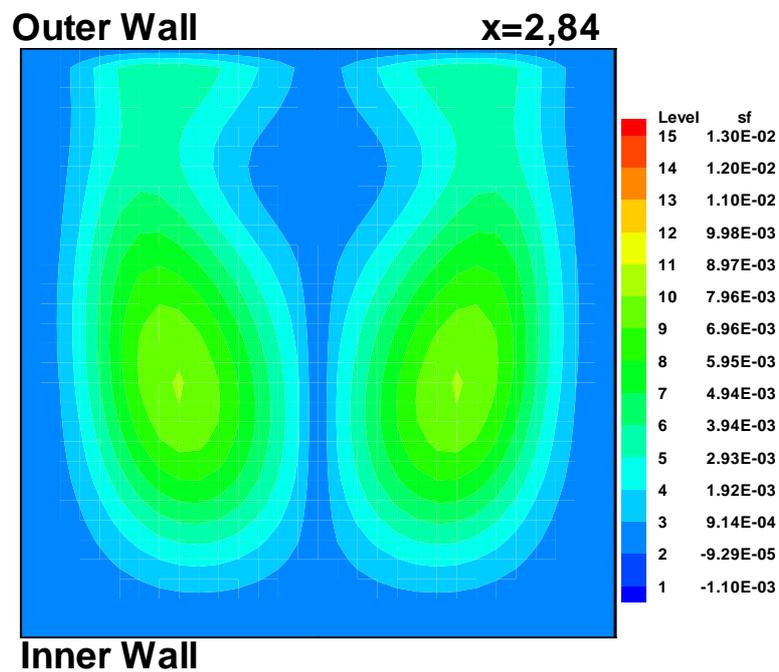


FIGURE 5.20 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 2.84$ , avec  $Dn = 137$

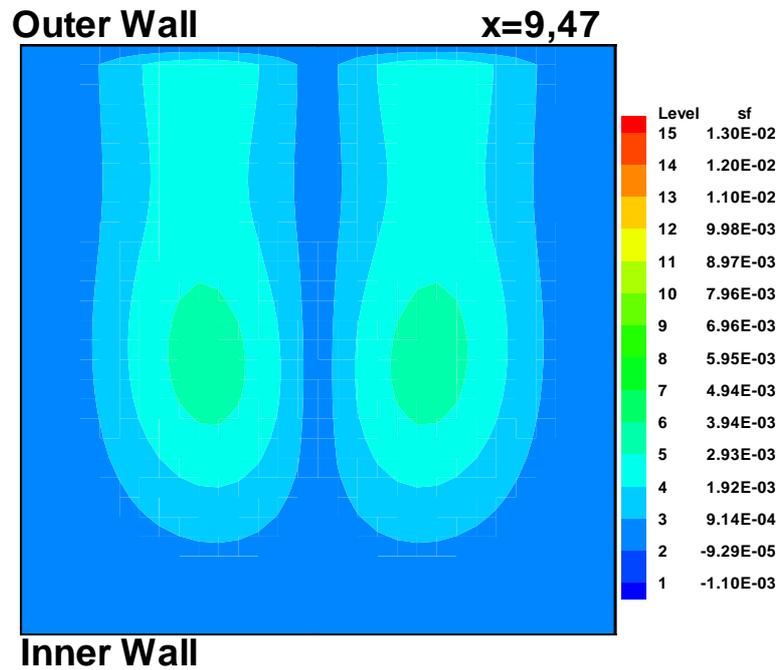


FIGURE 5.21 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 9.47$ , avec  $Dn = 137$

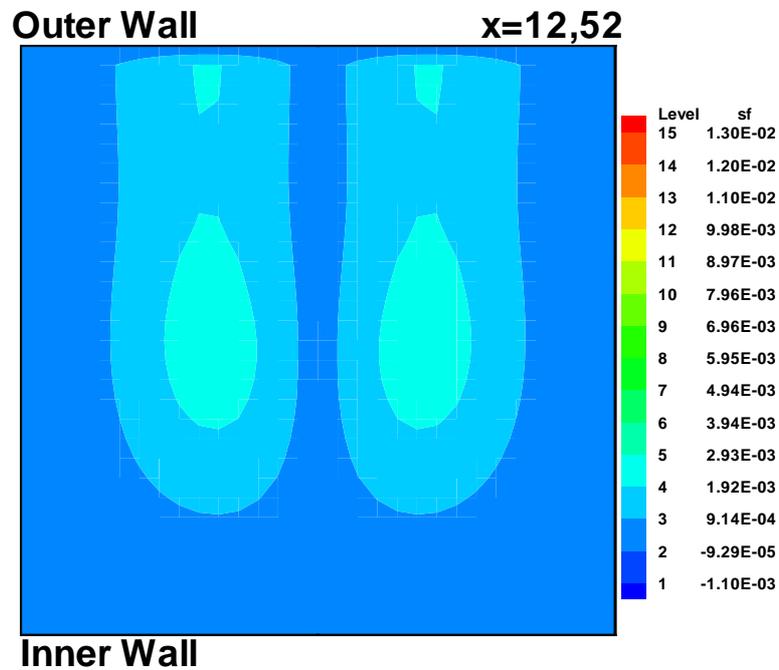


FIGURE 5.22 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 12.52$ , avec  $Dn = 137$

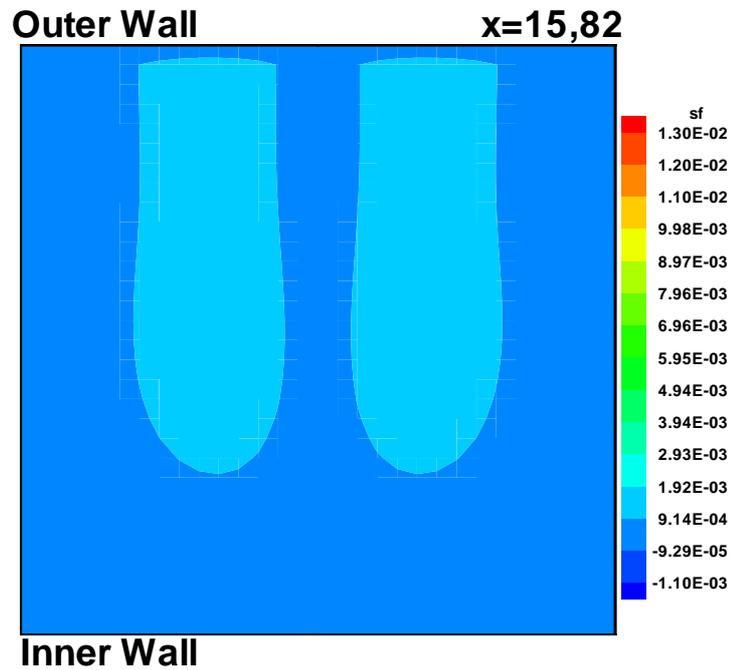


FIGURE 5.23 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 15.82$ , avec  $Dn = 137$

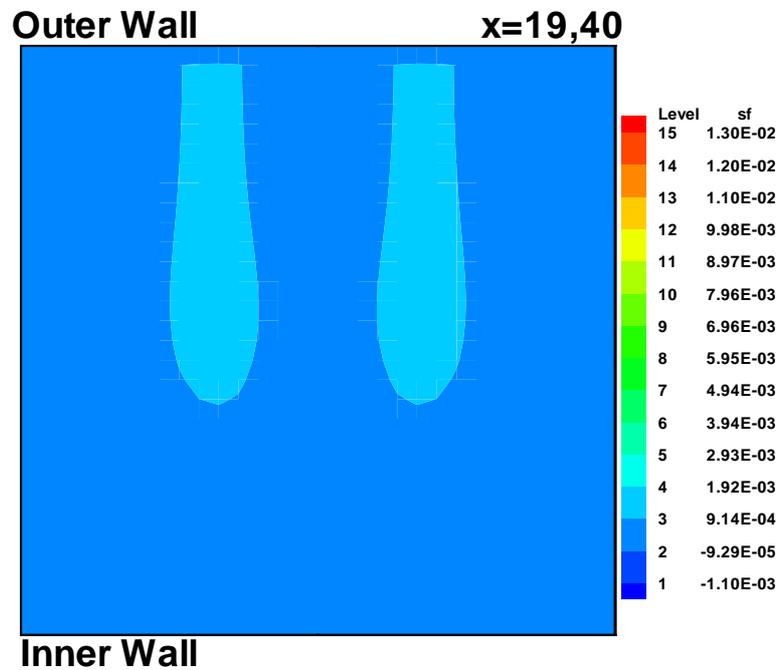
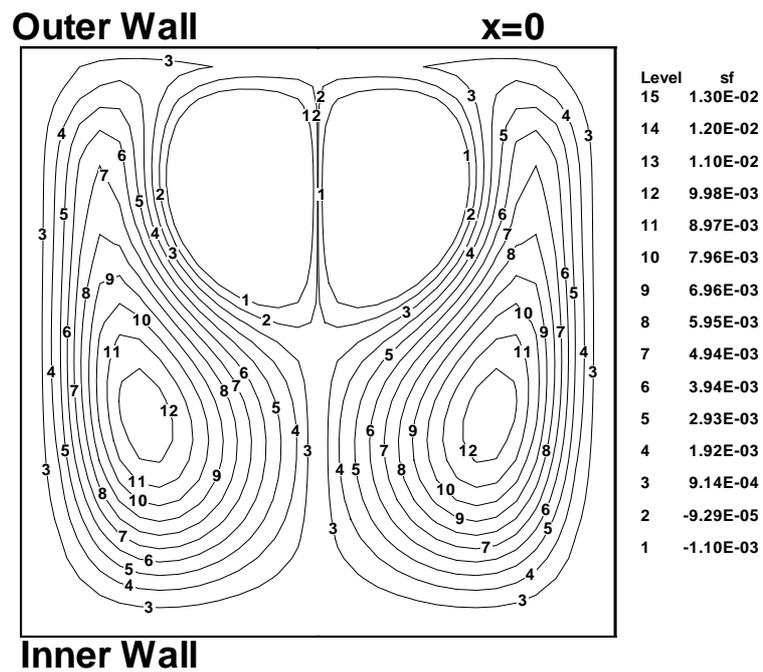
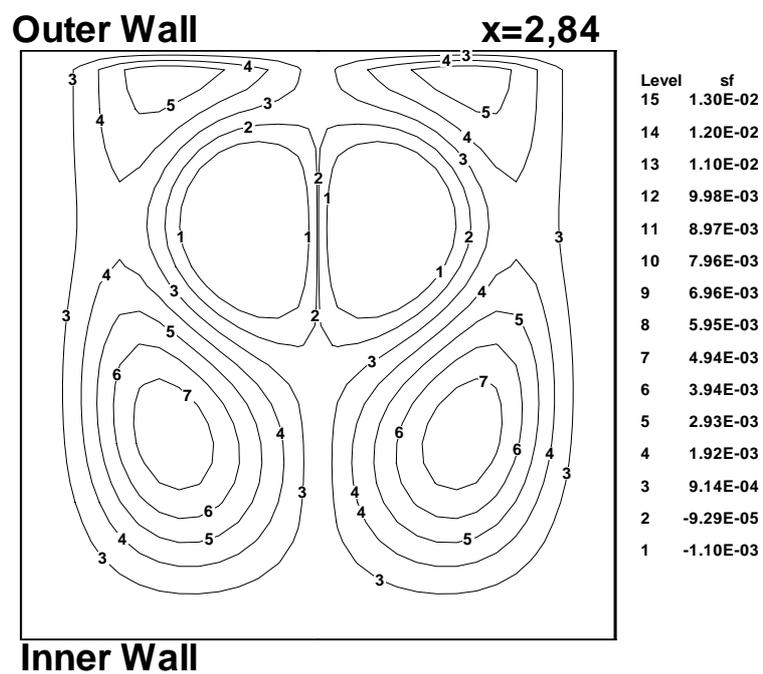


FIGURE 5.24 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 19.40$ , avec  $Dn = 137$

FIGURE 5.25 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 0$ , avec  $Dn = 150$ FIGURE 5.26 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 2.84$ , avec  $Dn = 150$

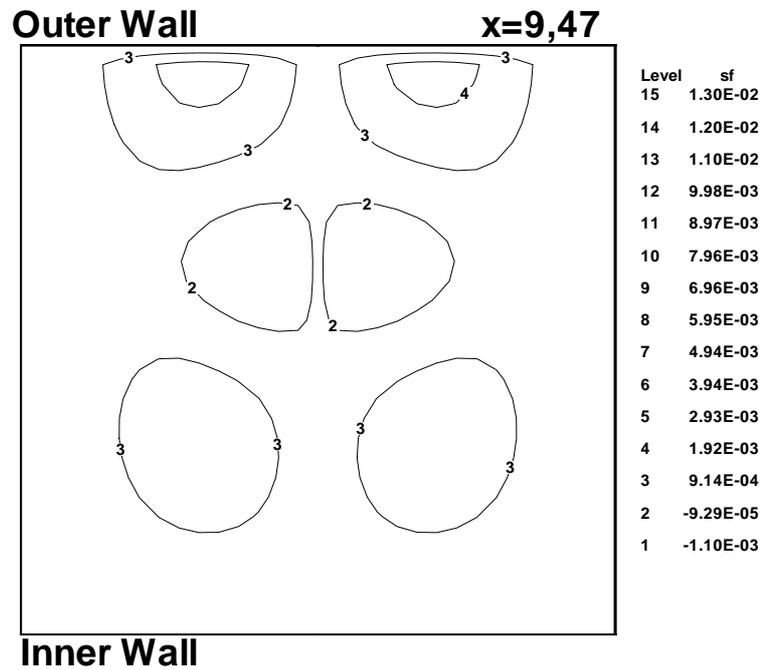


FIGURE 5.27 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 9.47$ , avec  $Dn = 150$

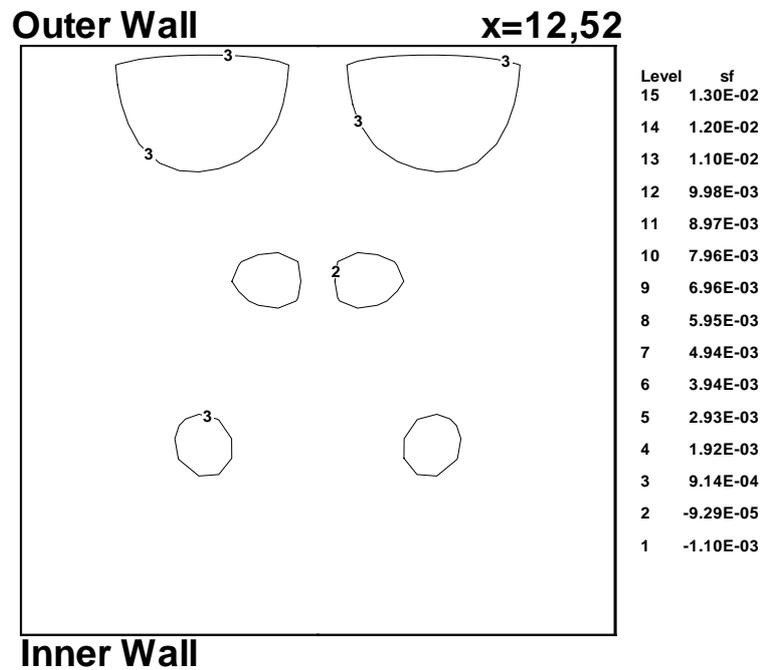


FIGURE 5.28 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 12.52$ , avec  $Dn = 150$

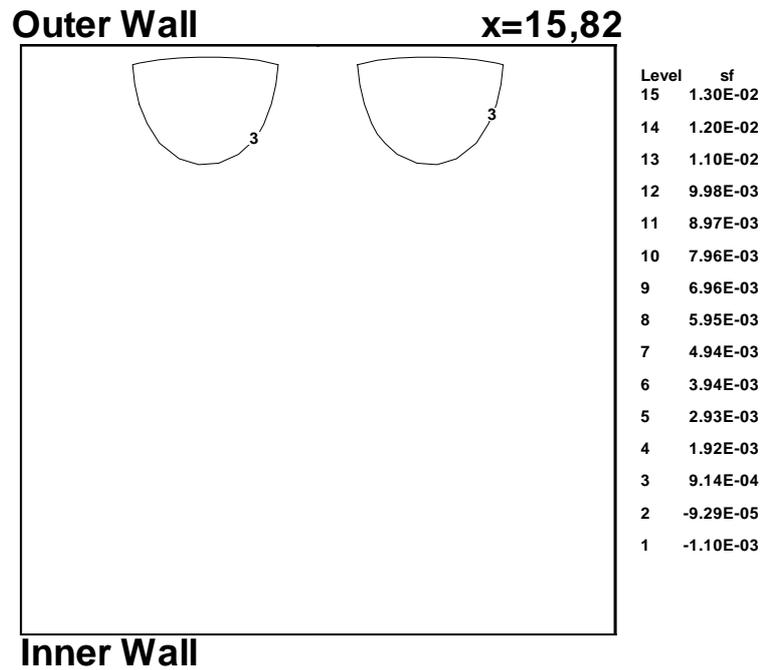


FIGURE 5.29 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 15.82$ , avec  $Dn = 150$

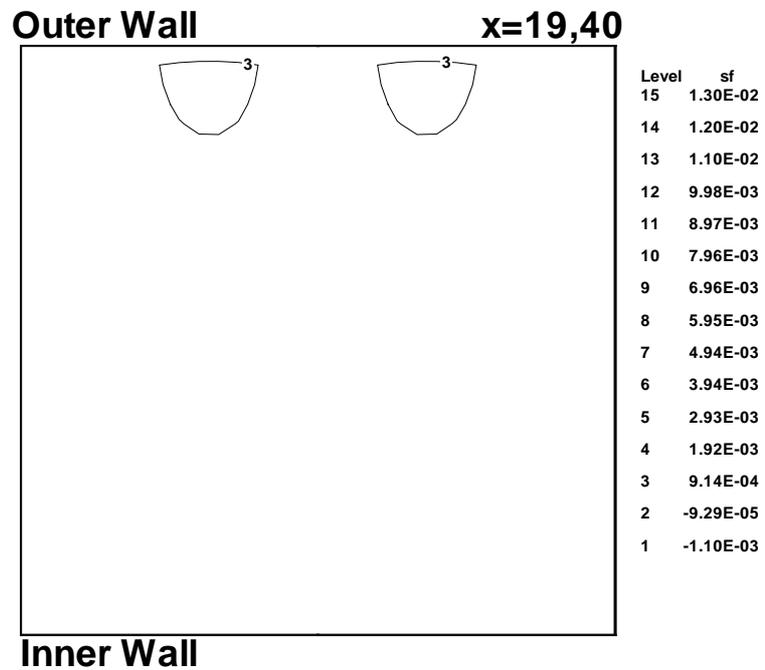


FIGURE 5.30 – Lignes de courant de l'écoulement newtonien à la position  $x = 19.40$ , avec  $Dn = 150$

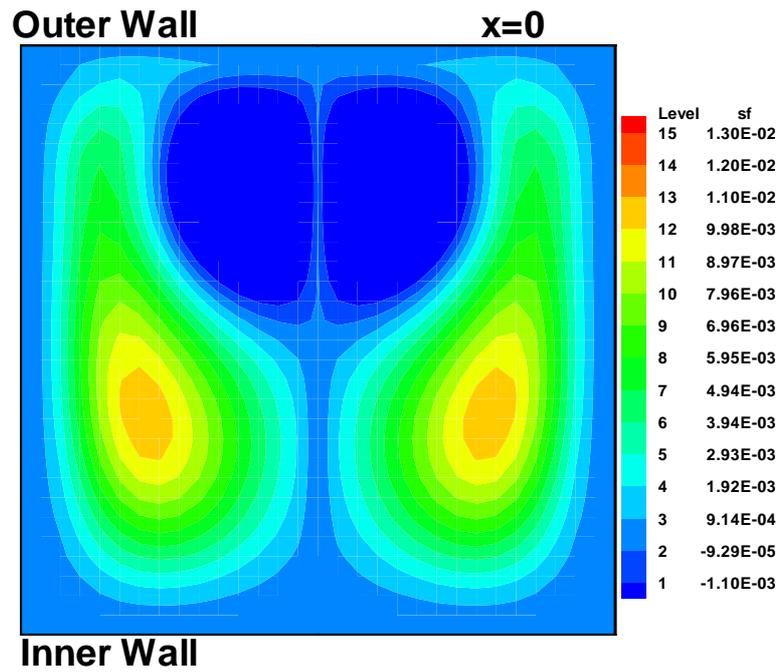


FIGURE 5.31 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 0$ , avec  $Dn = 150$

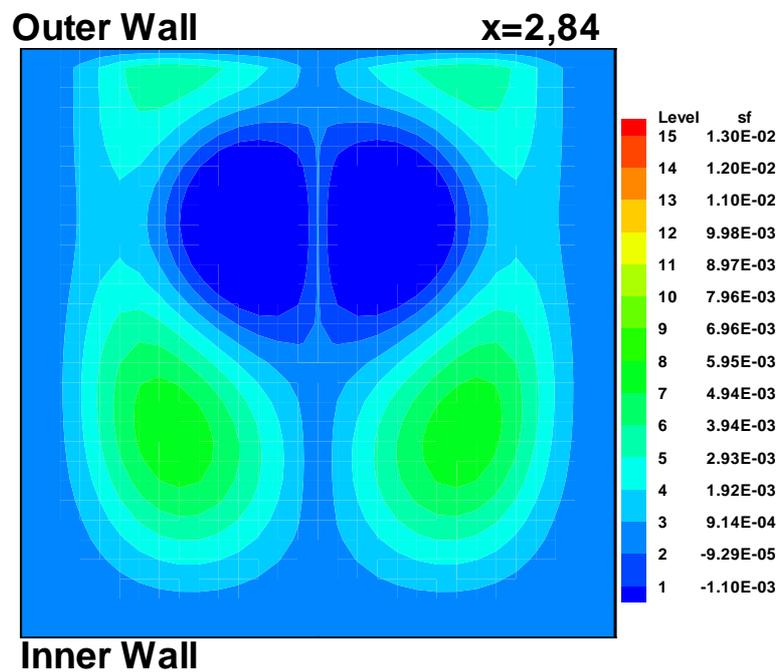


FIGURE 5.32 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 2.84$ , avec  $Dn = 150$

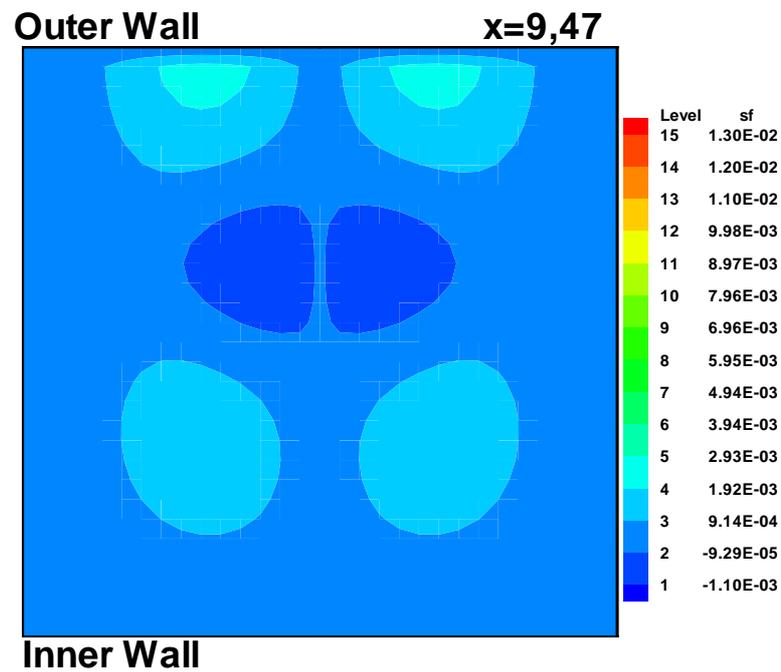


FIGURE 5.33 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 9.47$ , avec  $Dn = 150$

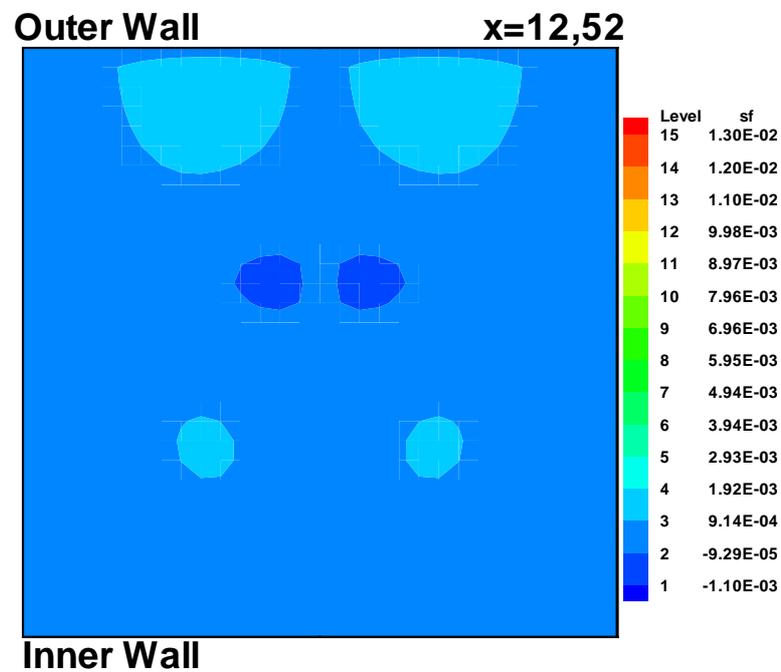


FIGURE 5.34 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 12.52$ , avec  $Dn = 150$

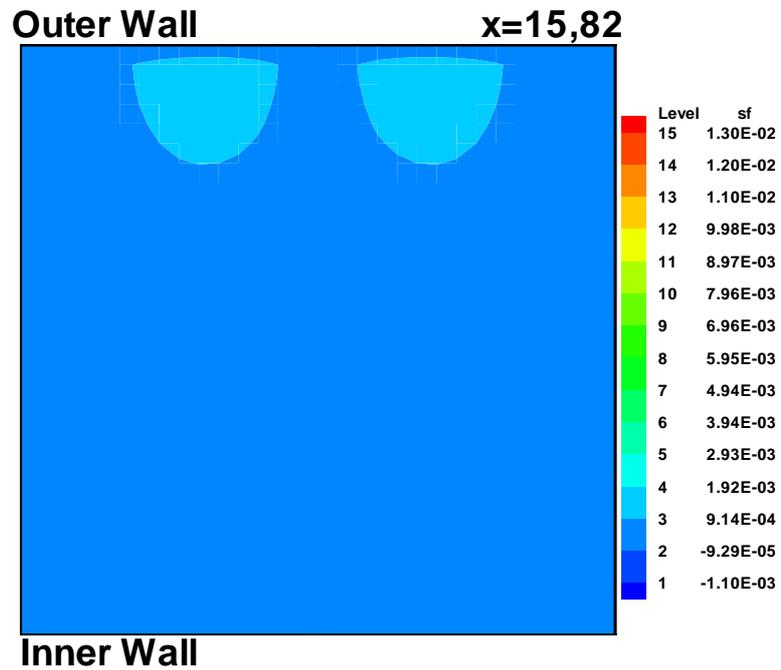


FIGURE 5.35 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 15.82$ , avec  $Dn = 150$

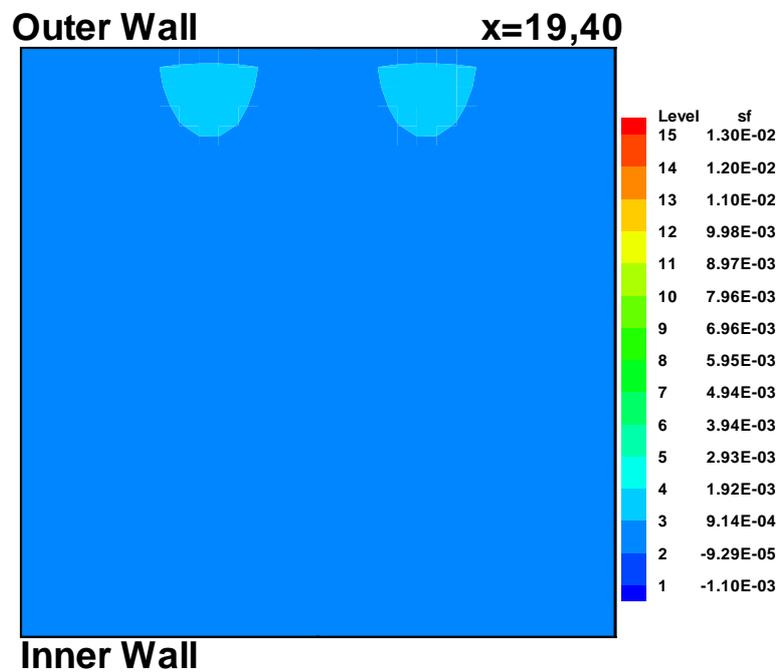


FIGURE 5.36 – Les profils de vitesses de l'écoulement newtonien à la position  $x = 19.40$ , avec  $Dn = 150$

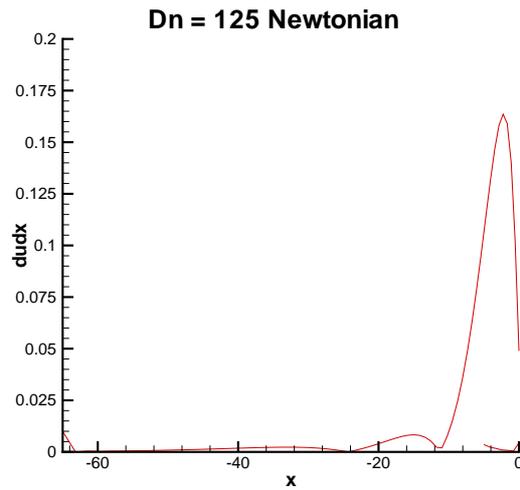


FIGURE 5.37 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement newtonien avec  $Dn = 125$

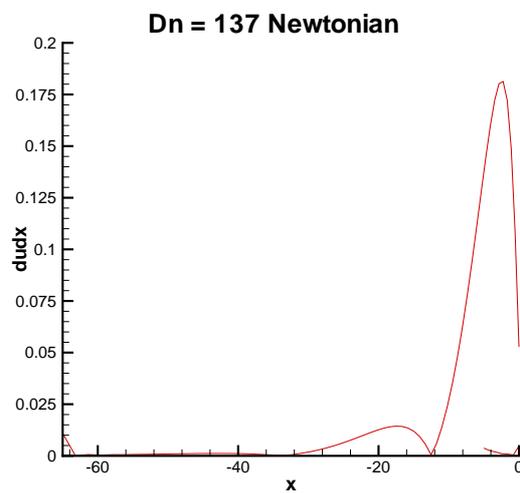


FIGURE 5.38 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement newtonien avec  $Dn = 137$

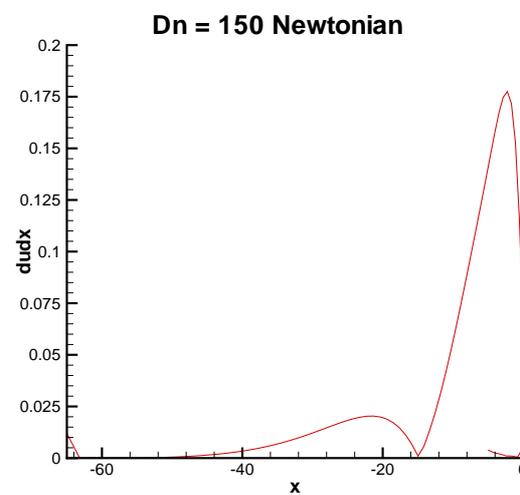


FIGURE 5.39 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement newtonien avec  $Dn = 150$

Pour le fluide newtonien, dans tous les cas, la forme de la structure de vortex est déformée dans tout le secteur de sortie du canal, et la tendance de la formation de tourbillons à la sortie de la zone de courbure de la conduite ressemble à celle obtenue pour Bara et al. (1992), Boutabaa et al. (2009) et Helin et al. (2009). Par conséquent, tous les résultats pour l'écoulement du fluide newtonien dans ce domaine sont validés avec les résultats obtenus précédemment par les auteurs cités ci-dessus.

Le tableau suivant indique la quantité des vortex observés pour des nombres de Dean et les différentes distances dans le canal de sortie, pour le le fluide newtonien.

Tableau 5.

	$Dn = 125$	$Dn = 137$	$Dn = 150$
$x = 0$	2	4	4
$x = 2.84$	2	2	6
$x = 9.47$	2	2	6
$x = 12.52$	2	2	6
$x = 15.82$	2	2	2
$x = 19.40$	2	2	2

## 5.2 L'écoulement non-newtonien

Pour l'analyse de l'écoulement du fluide non-newtonien (modèle de Phan-Thien-Tanner) nous avons pris un nombre de Deborah du  $De = 0.1$ ,  $0.2$ ,  $0.3$  et  $0.4$ , tandis que Boutabaa et al. (2009) ont pris un nombre de Deborah de  $De = 0.3$ .

Pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$ , est observée une structure de tourbillon similaire comme dans le cas newtonien avec  $Dn = 125$ . En fait une paire de vortex contre-rotatifs est maintenue le long de la zone de sortie du canal (figures 5.40 à 5.46). Même se passe en les profils de vitesses, où

le comportement est similaire au cas newtonien aussi avec  $Dn = 125$  (figures 5.47 à 5.51).

Pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$ , nous avons noté qu'à la sortie de la zone courbée apparaît une nouvelle paire de vortex contre-rotatifs qui modifié la configuration de deux vortex a quatre vortex et ensuite elle a changé a six vortex, avec la brève apparition de autres deux vortex. Les configurations de quatre et six vortex désappariert rapidement. Les paires de vortex contre-rotatifs se dissipent tout le long du canal de sortie (figures 5.52 à 5.57).

Au sujet des profils de vitesses pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$ , la grande vitesse de la configuration initiale de deux vortex est observée à la sortie de la zone courbée. En outre, la vitesse de la première paire de vortex additionnels est minimale et les configurations de deux vortex, quatre vortex et six vortex ont différentes vitesses le long de la zone droite du canal (figures 5.58 à 5.63).

Pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$ , la configuration de quatre vortex contre-rotatifs est maintenue en grande partie sur la longueur de la section du canal de sortie, et après revient à un nouveau modèle de deux vortex. Aussi arrive la brève apparition de la configuration de six vortex (figures 5.64 à 5.69).

En les profils de vitesses pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$  nous observons que initialement tous les modèles de vortex ont différentes vitesses, mais lorsque le modèle de six vortex devienne à un nouveau modèle de quatre vortex, les vitesses des quatre vortex contre-rotatifs sont pareilles. Aussi, la grande vitesse du deux vortex contre-rotatifs est observée à la sortie de la zone courbée de la conduite (figures 5.70 à 5.75).

Pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$ , le modèle de formation de quatre vortex contre-rotatifs et sa reconversions au modèle de deux vortex contre-rotatifs est similaire au observé dans le cas antérieur, alors que le modèle de six vortex est mieux apprécié (figures 5.76 à 5.81). Le comportement des profils de vitesses pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$  est similaire al cas antérieur (figures 5.82 à 5.87).

En ce qui concerne aux graphiques  $du/dx$  via à vis de  $x$  pour l'écoule-

ment non-newtonien avec  $Dn = 125$  et  $De = 0.1, 0.2, 0.3$  et  $0.4$  (figures 5.88 à 5.91), nous observons qu'à la sortie de la zone courbée du canal  $du/dx$  arrive à sa valeur maximale, laquelle est toujours plus petite en comparaison avec tous les cas newtonien. Cette valeur diminue avec l'augmentation du nombre de Deborah. Puis  $du/dx$  décroît jusqu'à atteindre une valeur pratiquement constante, autour de  $du/dx = 0$ . À la sortie du canal droite une petite perturbation est présentée.

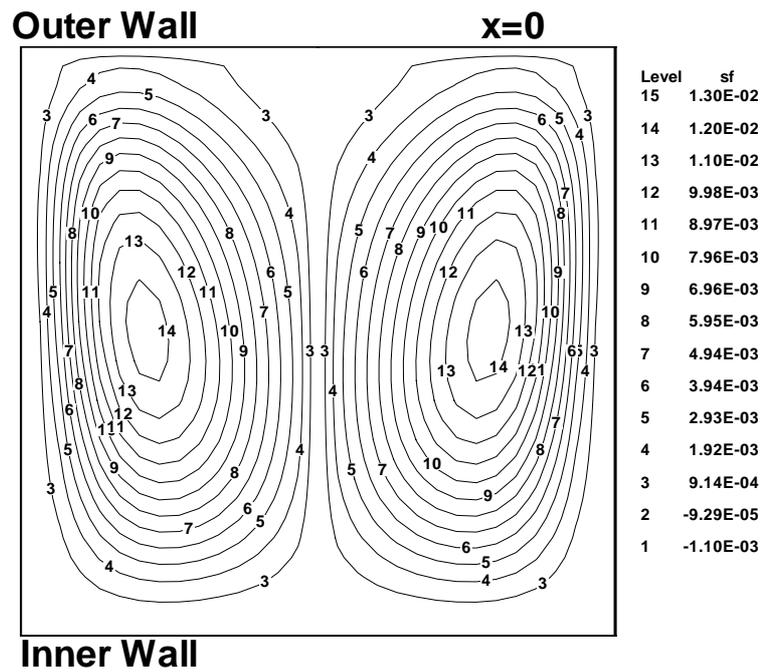


FIGURE 5.40 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

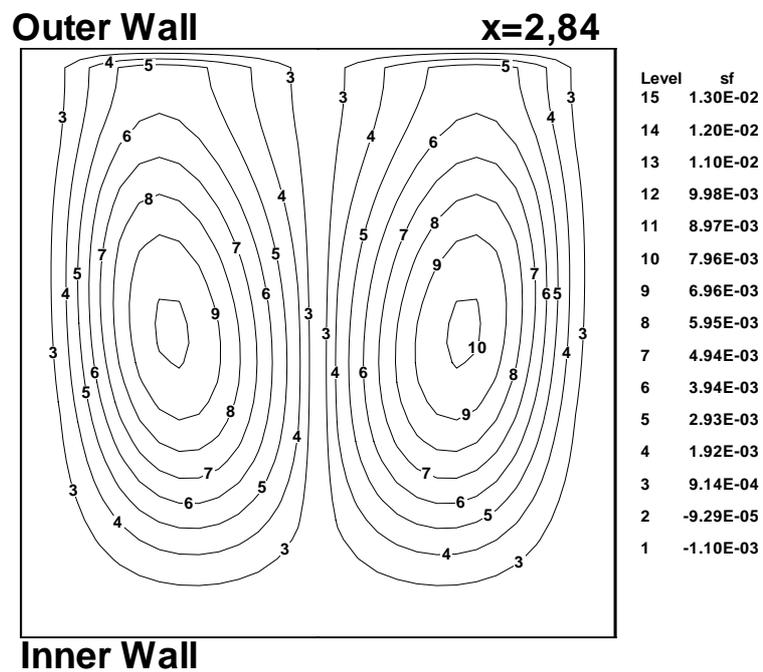


FIGURE 5.41 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

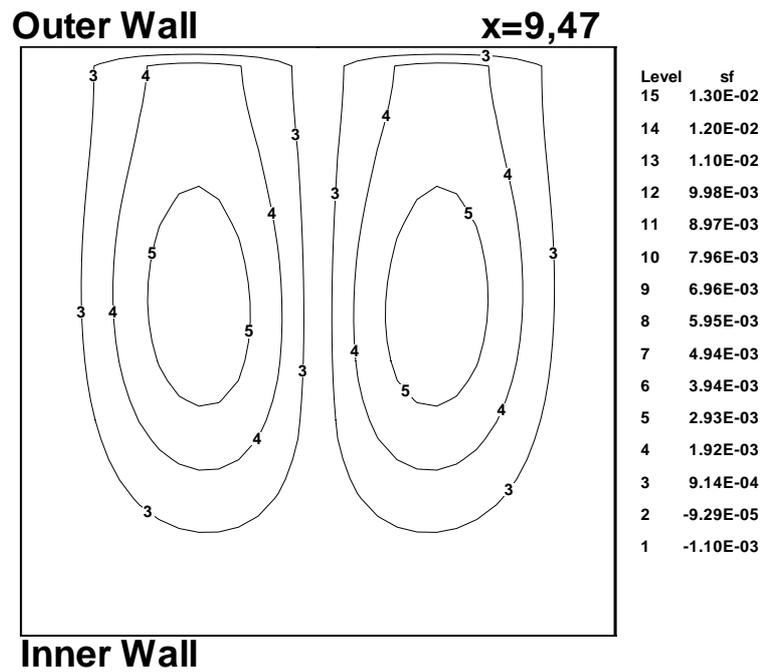


FIGURE 5.42 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

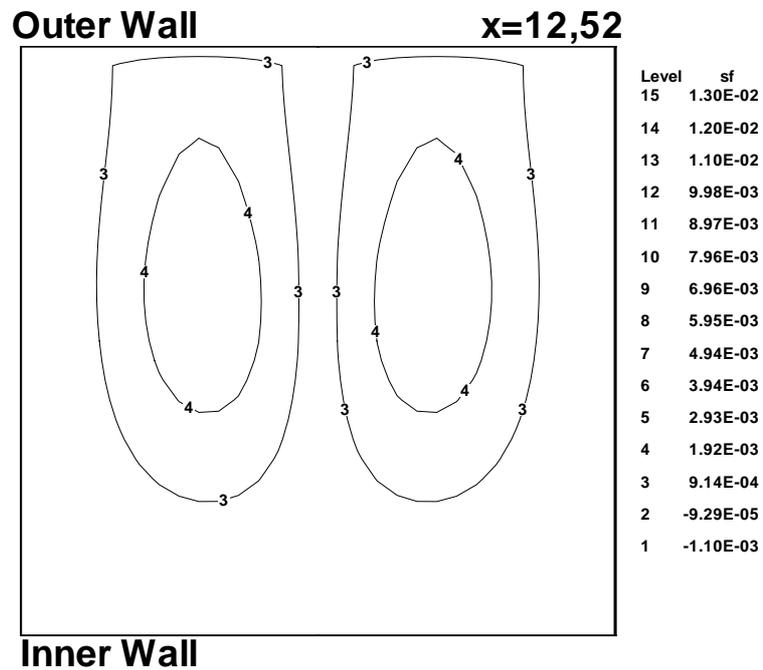


FIGURE 5.43 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

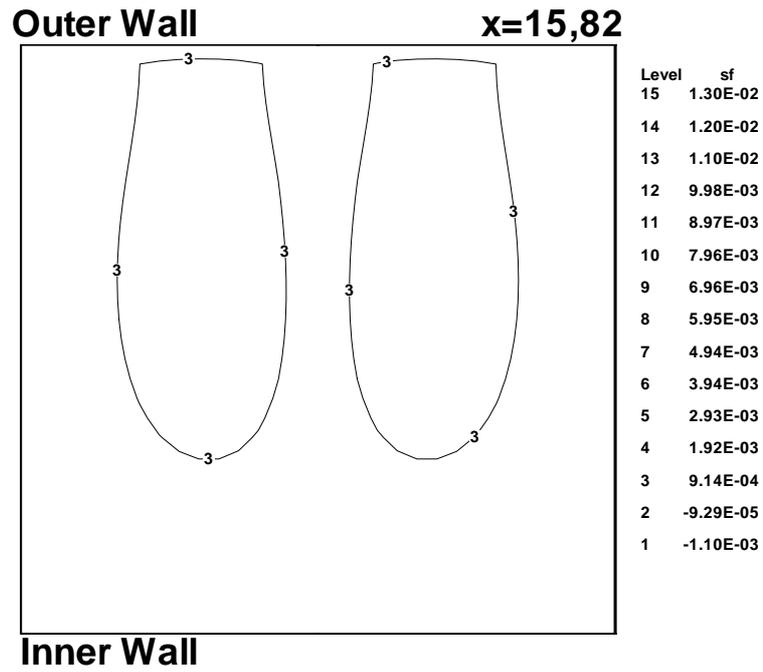


FIGURE 5.44 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

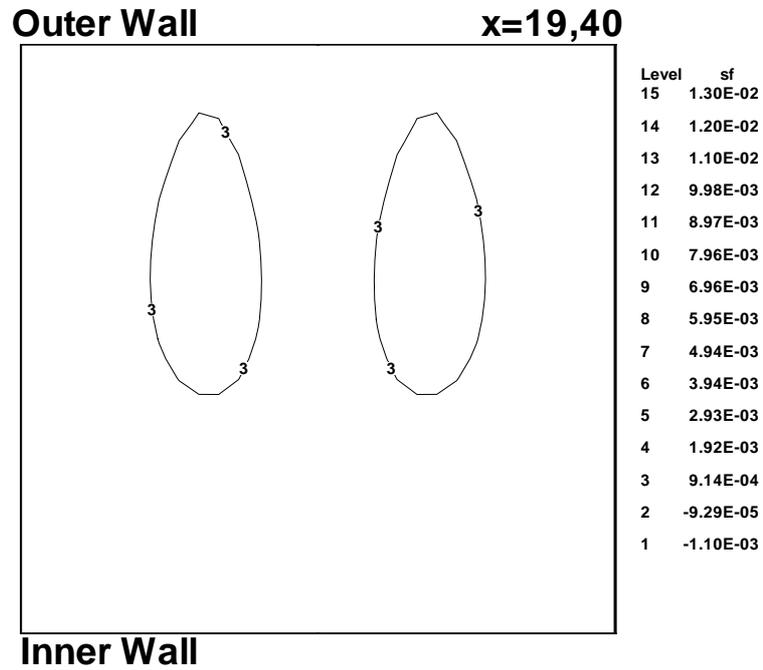


FIGURE 5.45 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

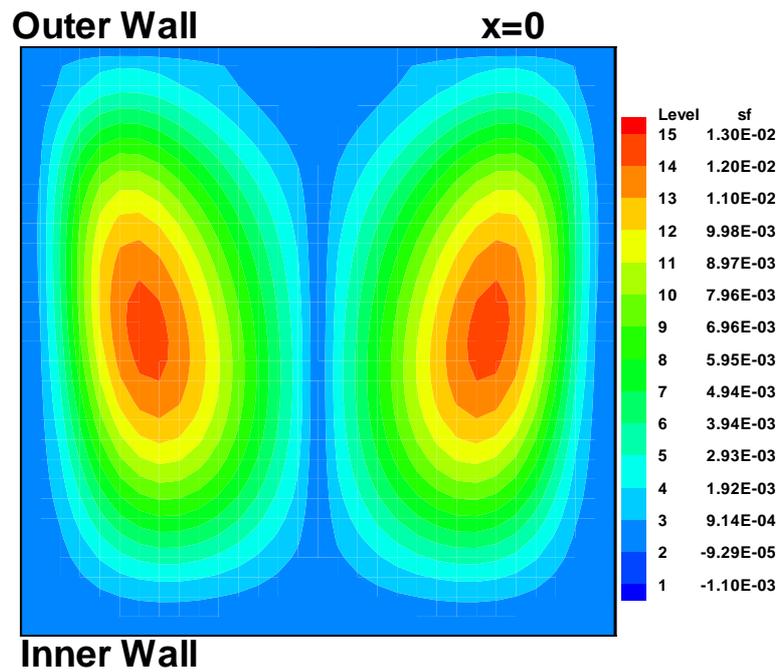


FIGURE 5.46 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

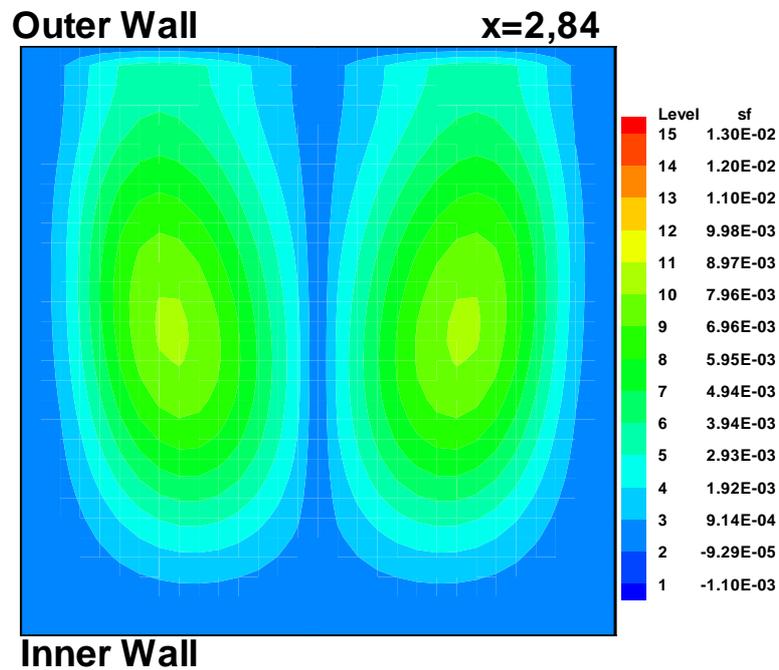


FIGURE 5.47 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

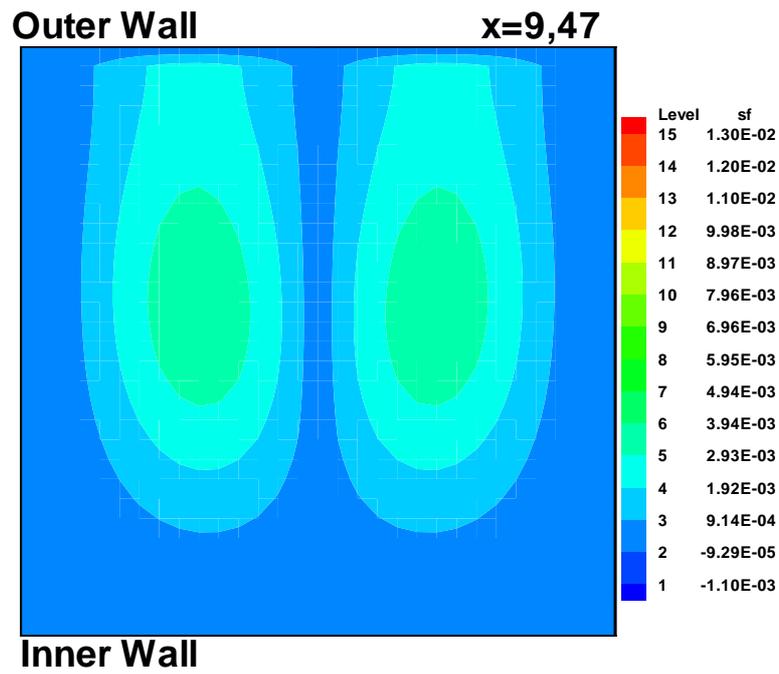


FIGURE 5.48 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

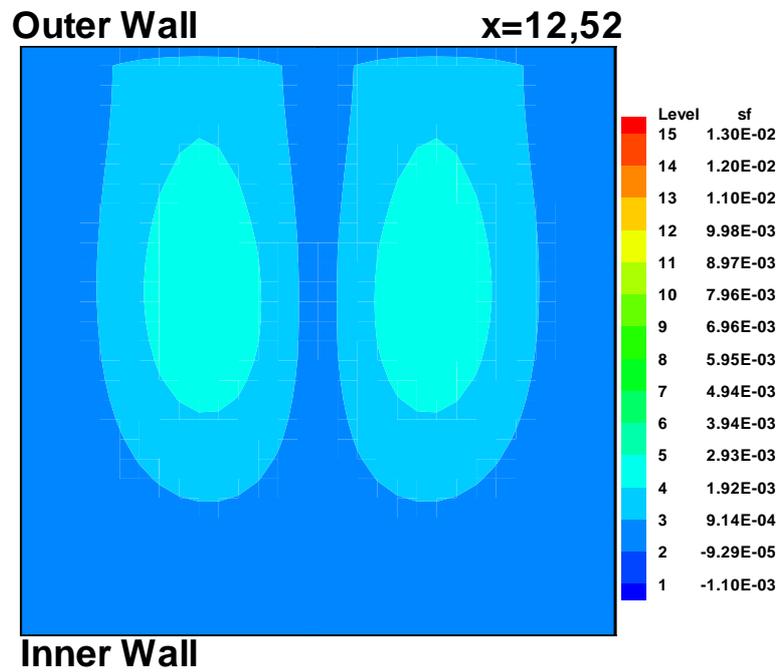


FIGURE 5.49 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

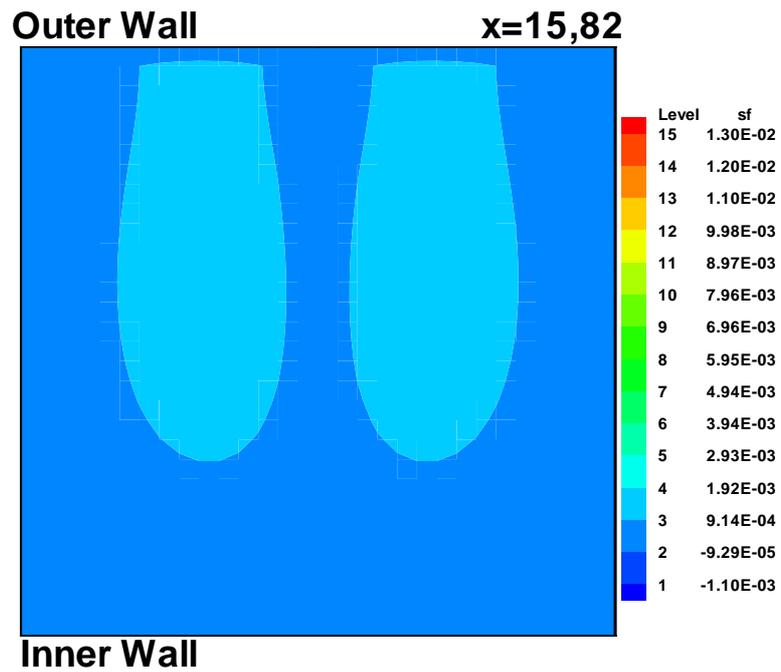


FIGURE 5.50 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

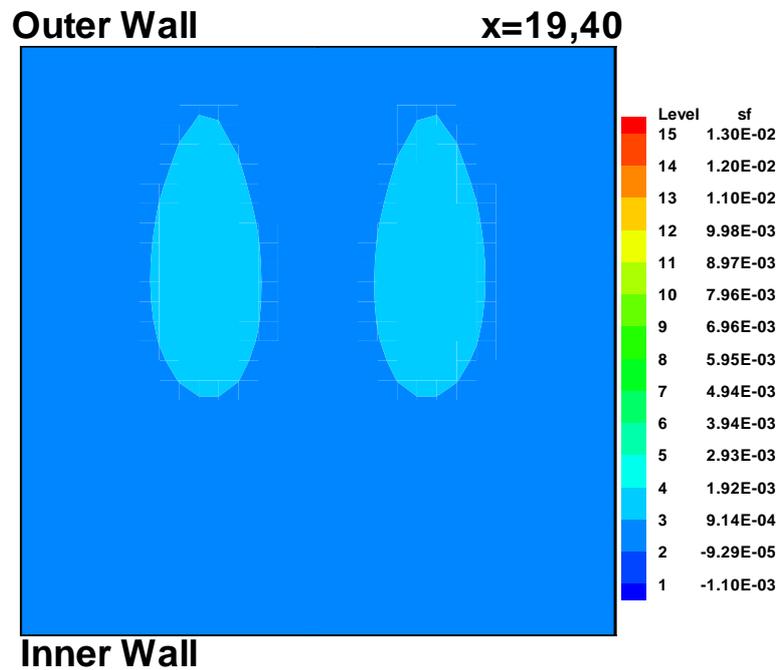


FIGURE 5.51 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

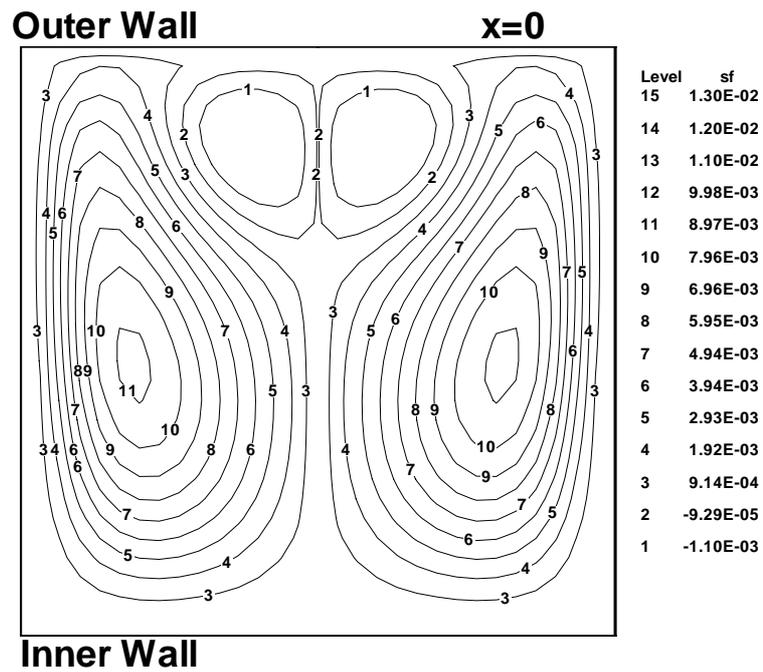


FIGURE 5.52 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

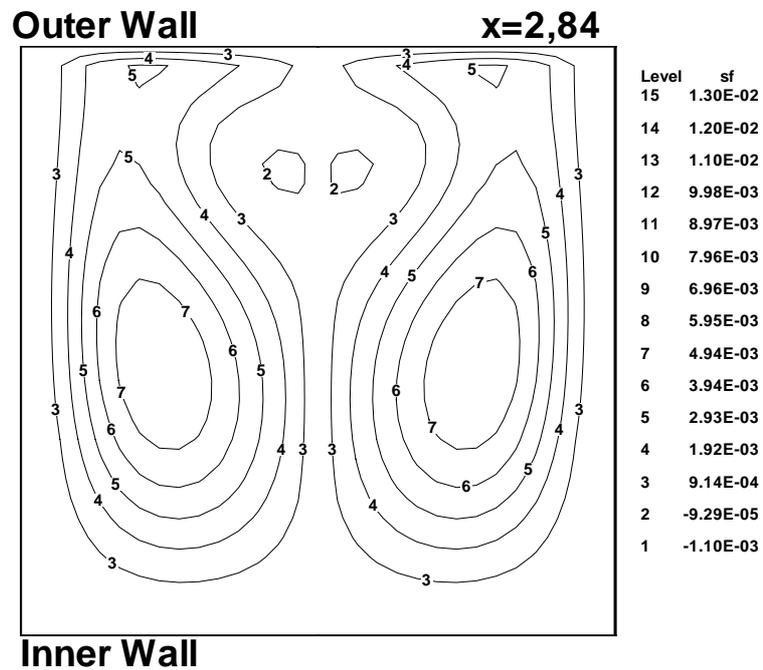


FIGURE 5.53 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

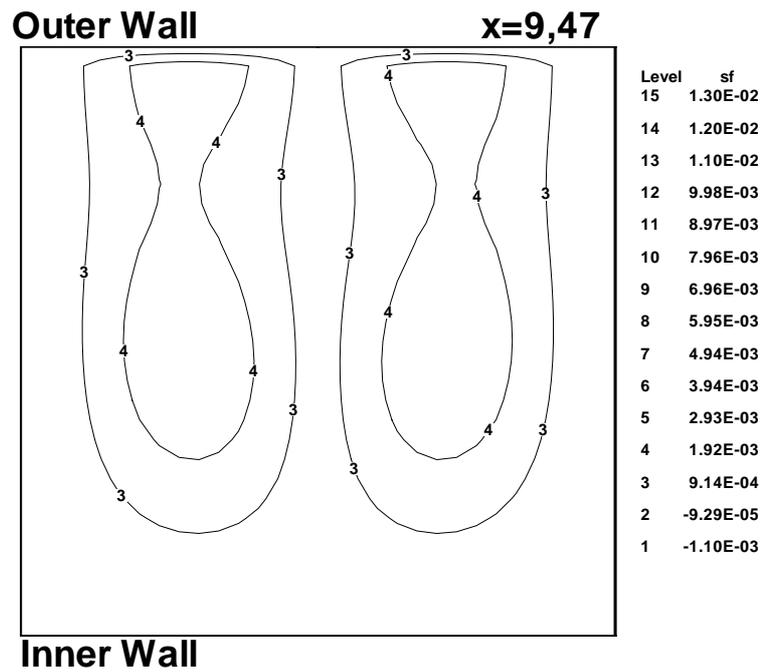


FIGURE 5.54 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

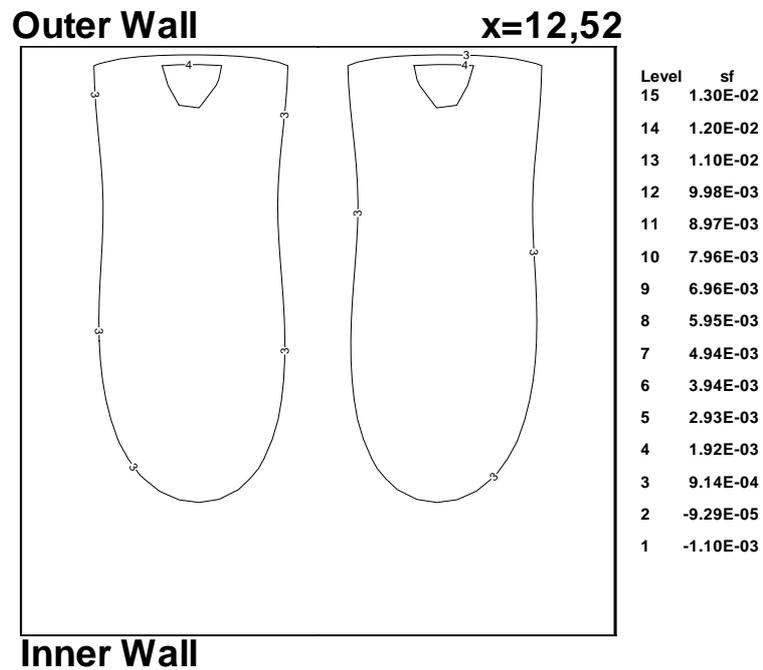


FIGURE 5.55 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

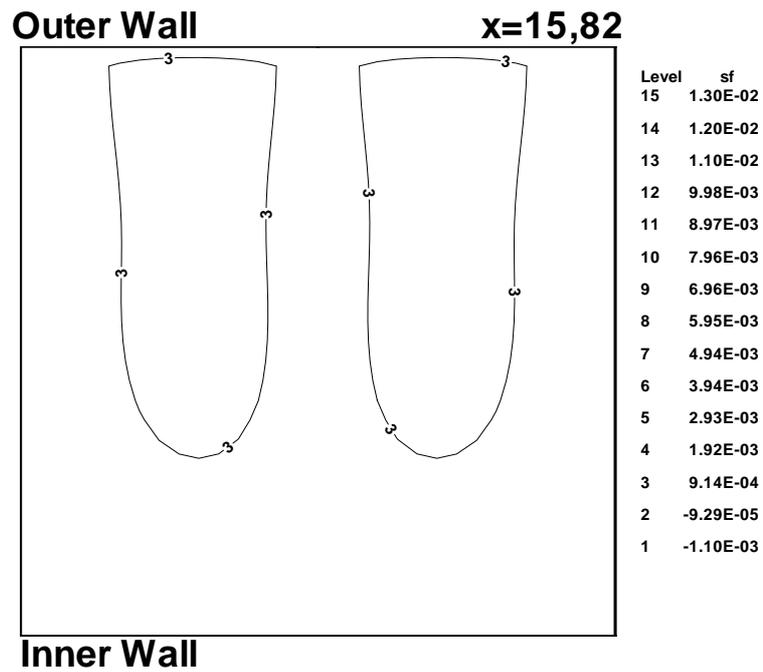


FIGURE 5.56 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

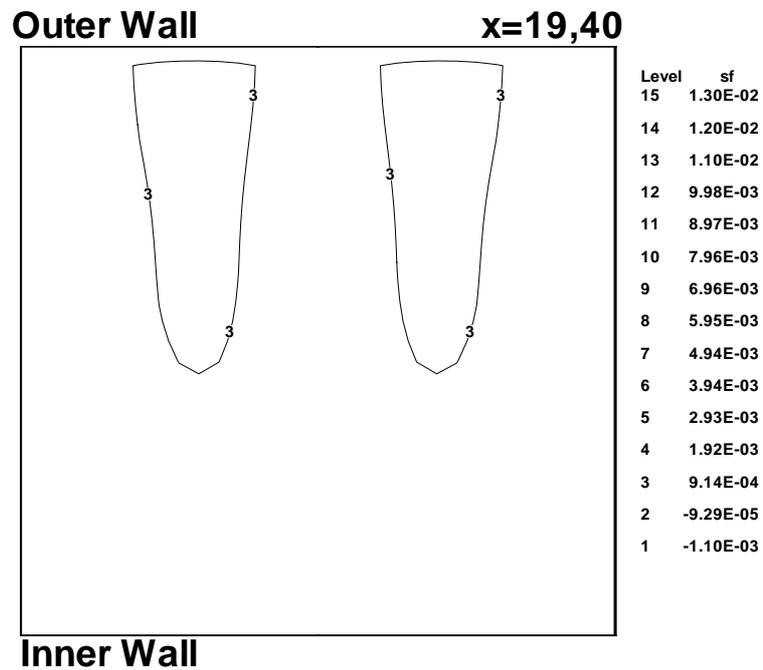


FIGURE 5.57 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

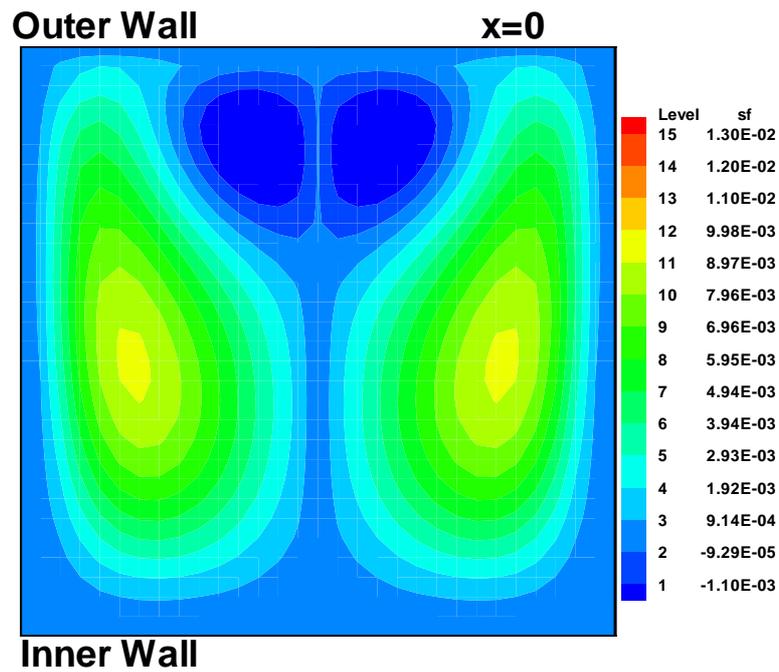


FIGURE 5.58 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

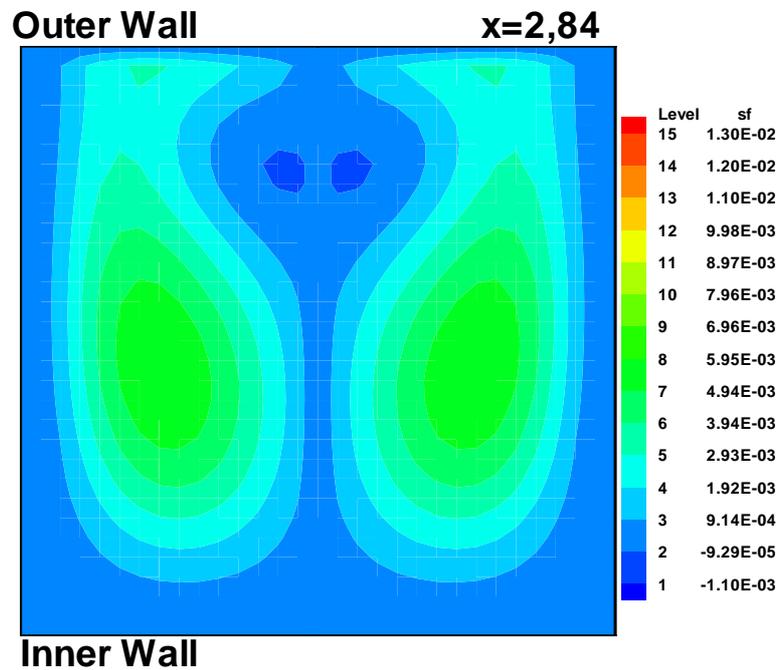


FIGURE 5.59 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

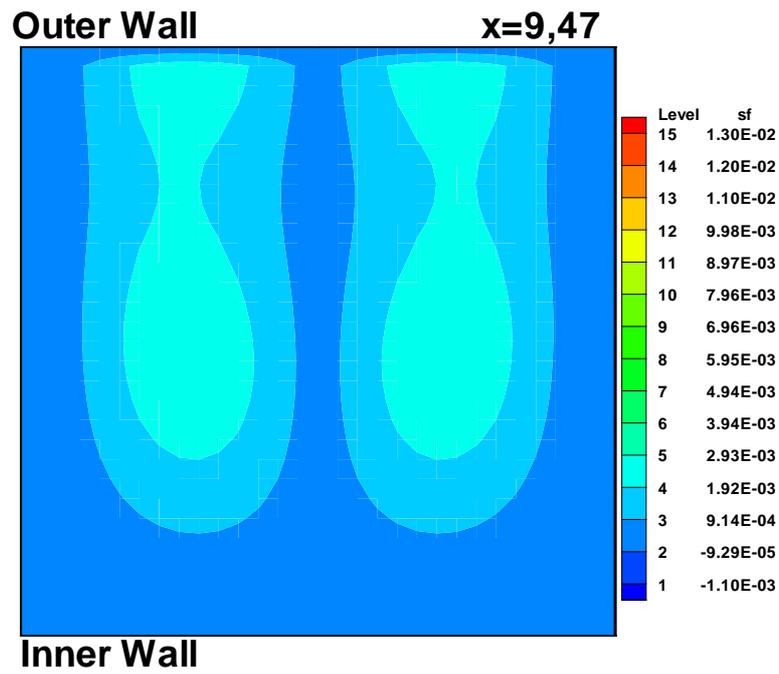


FIGURE 5.60 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

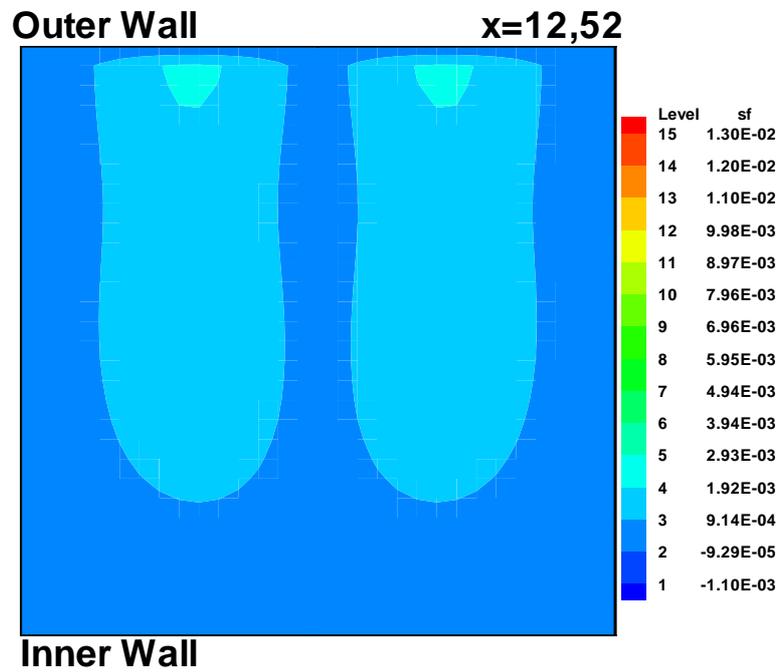


FIGURE 5.61 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

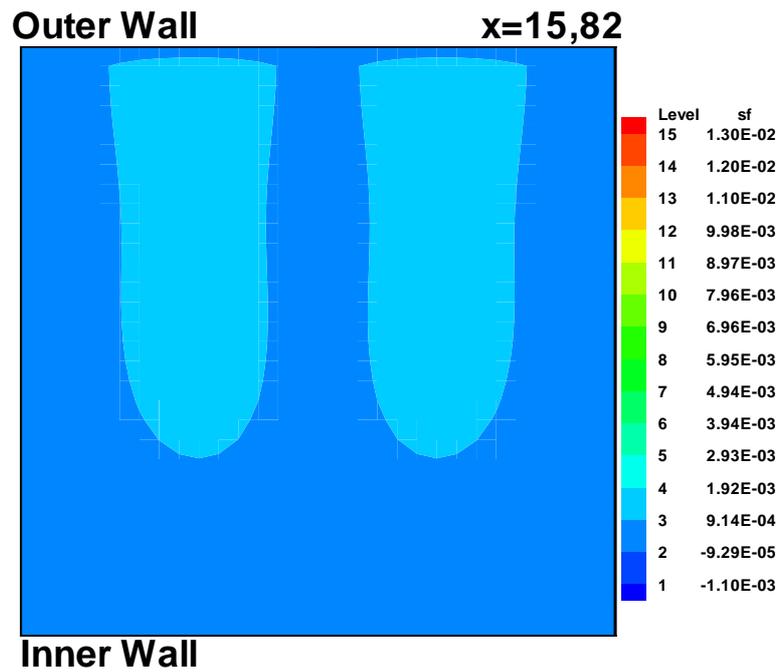


FIGURE 5.62 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

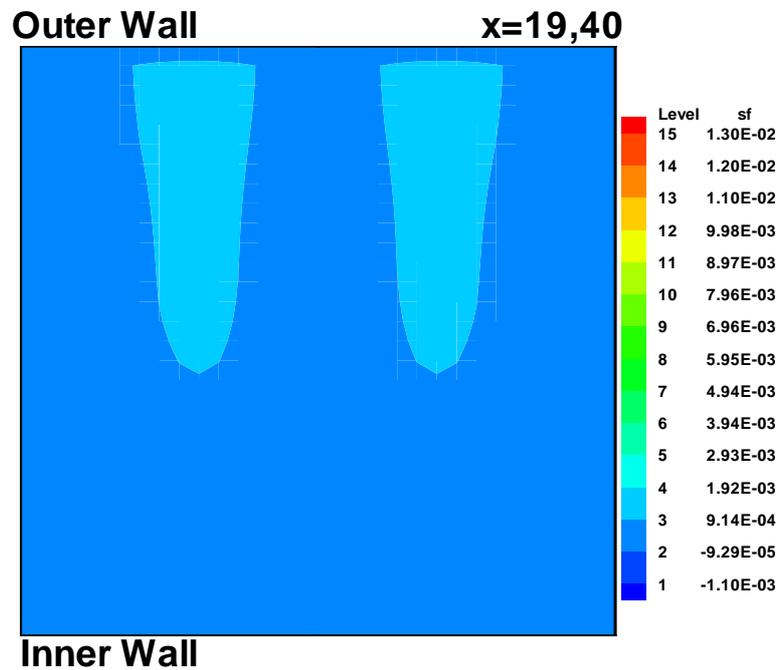


FIGURE 5.63 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

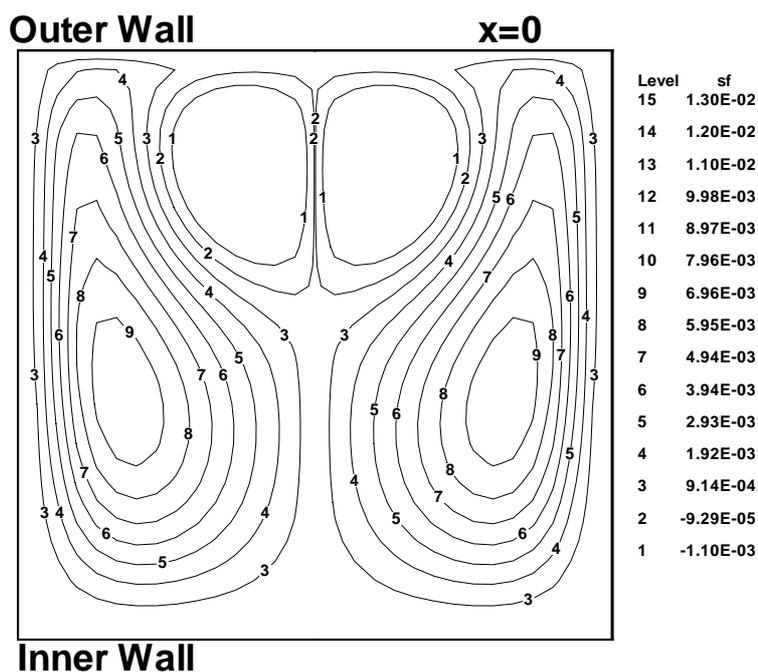


FIGURE 5.64 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

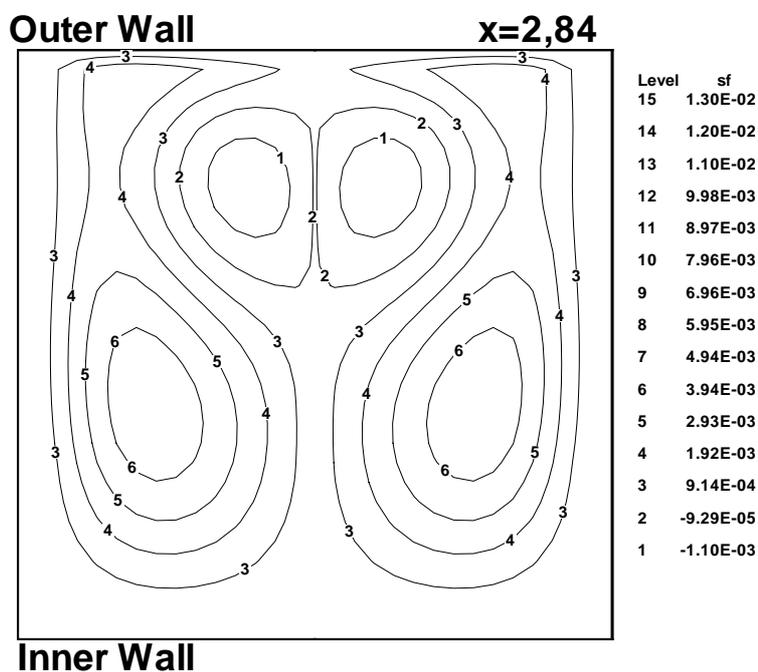


FIGURE 5.65 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

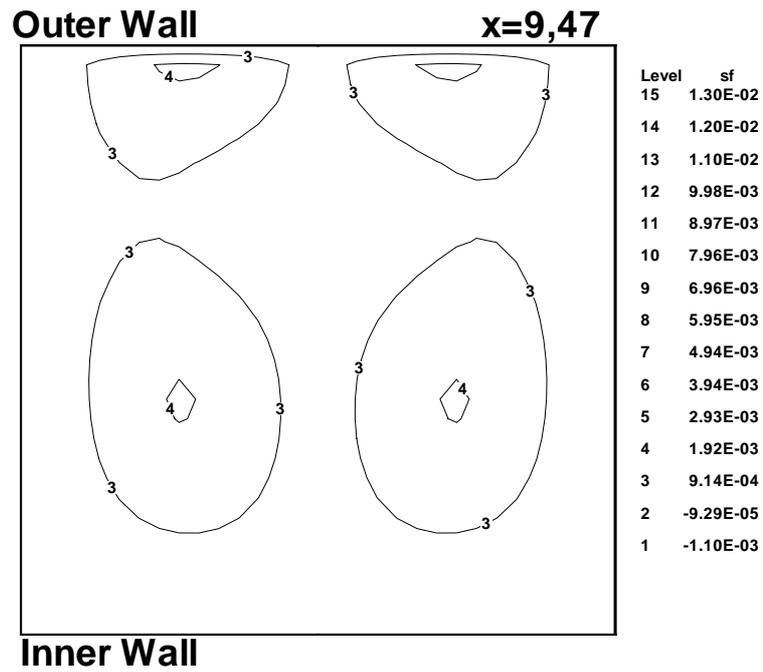


FIGURE 5.66 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

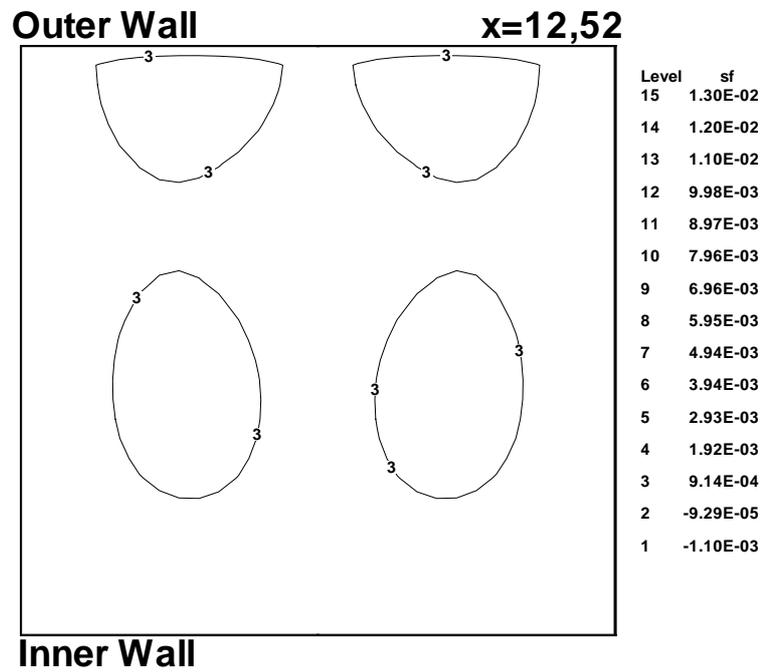


FIGURE 5.67 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

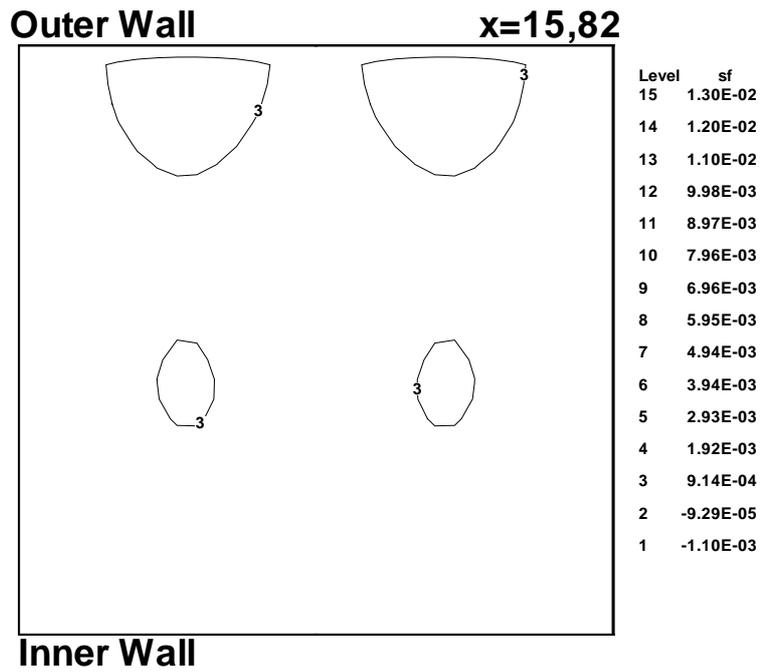


FIGURE 5.68 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

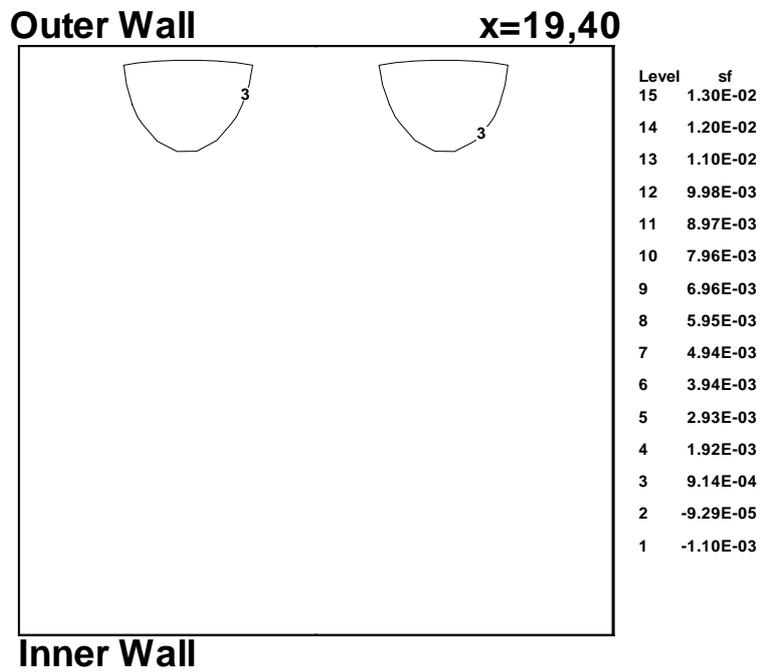


FIGURE 5.69 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

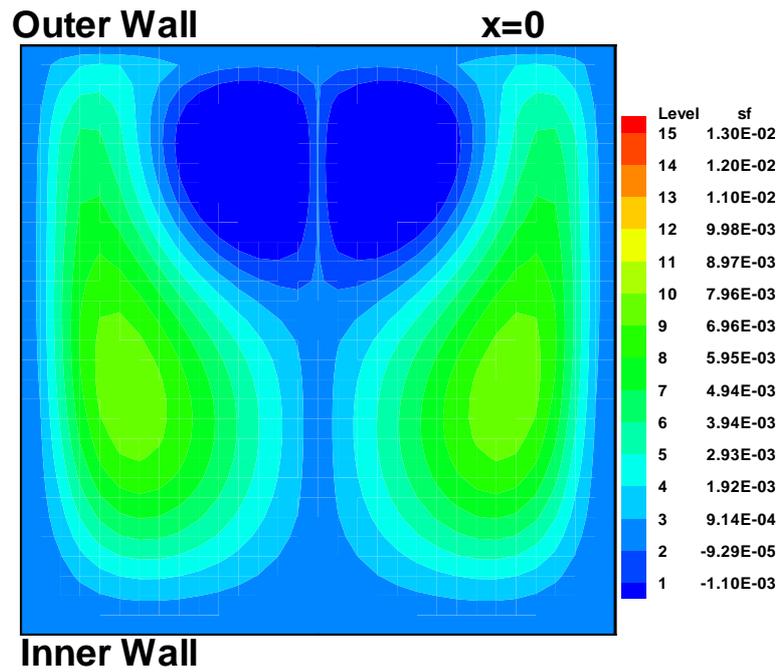


FIGURE 5.70 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

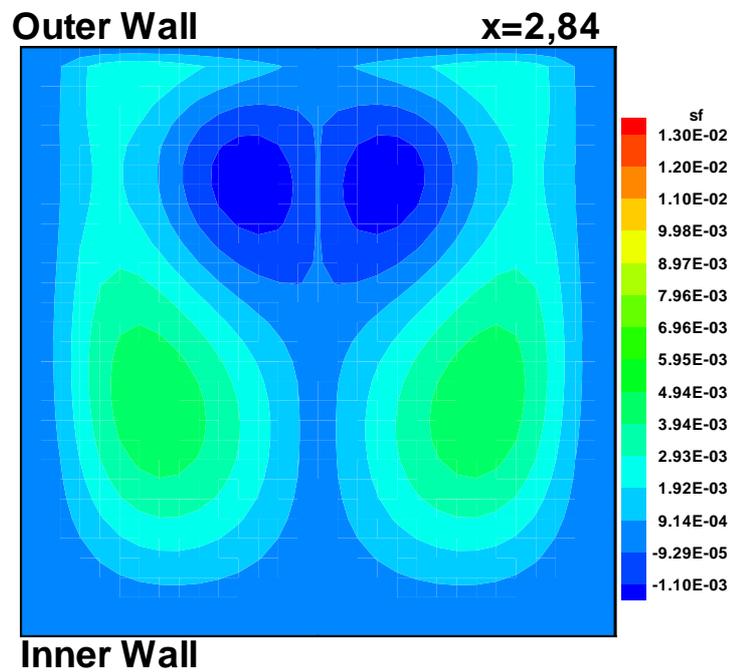


FIGURE 5.71 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

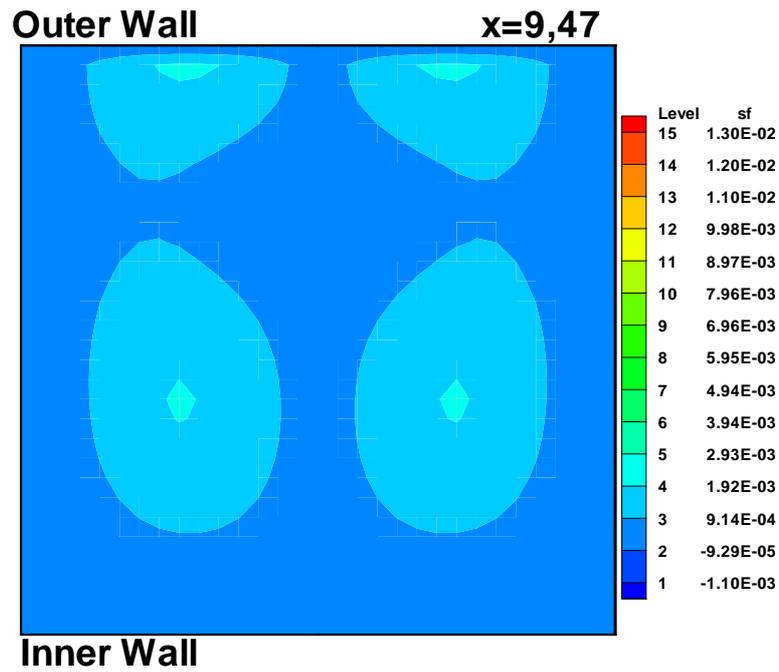


FIGURE 5.72 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

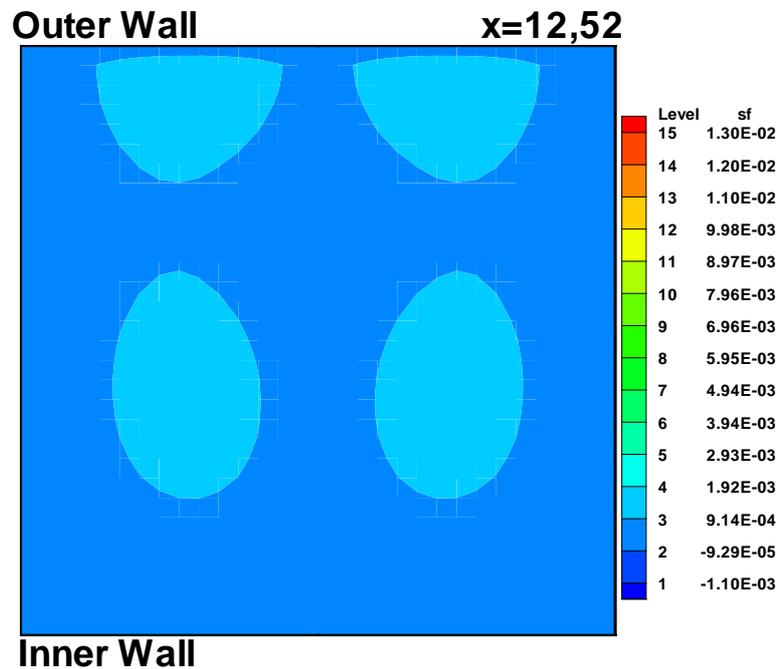


FIGURE 5.73 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

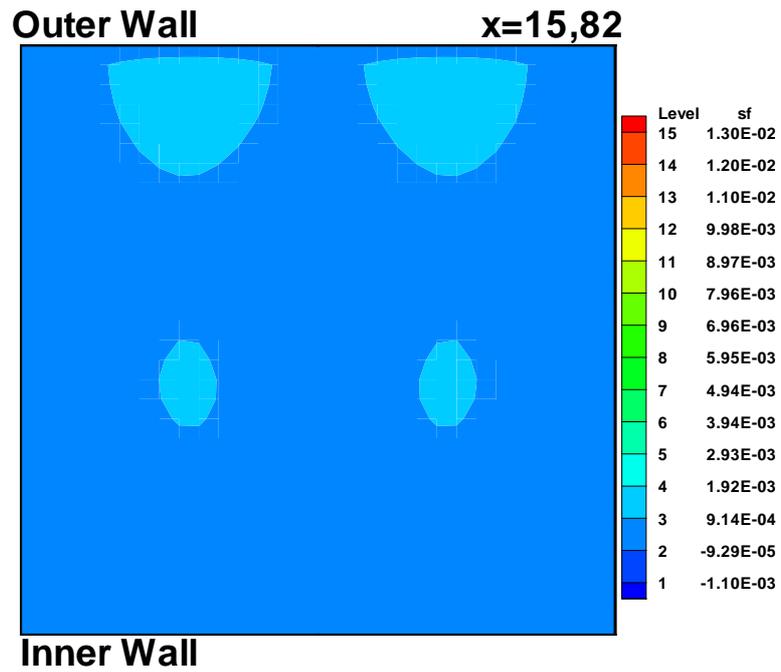


FIGURE 5.74 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

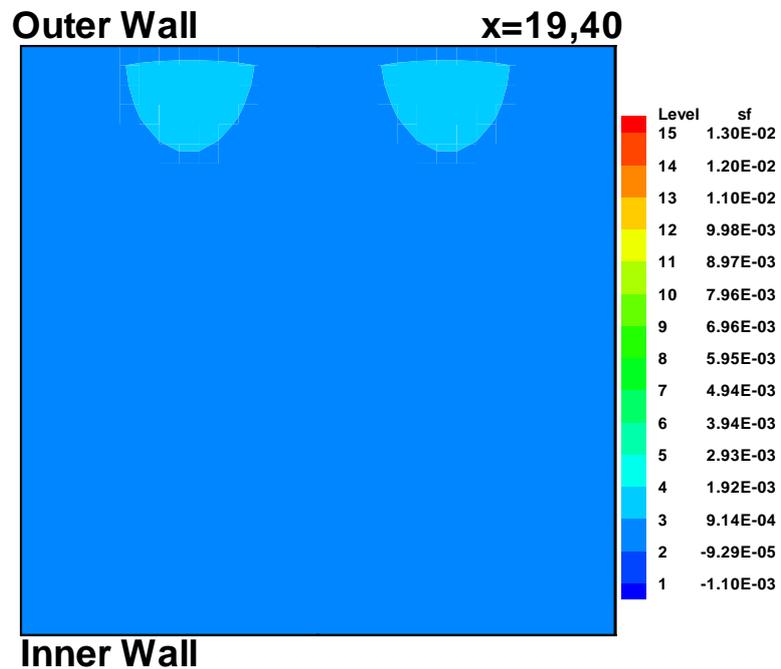


FIGURE 5.75 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

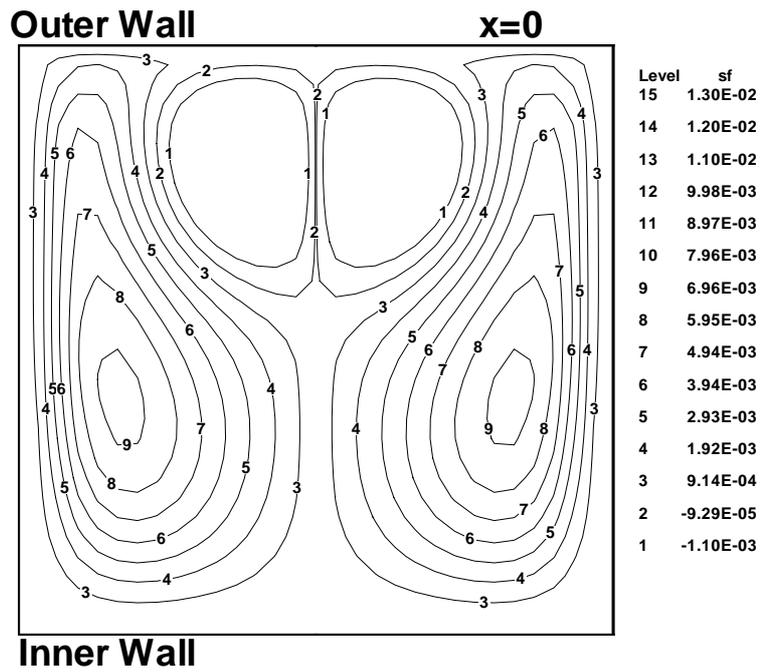


FIGURE 5.76 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

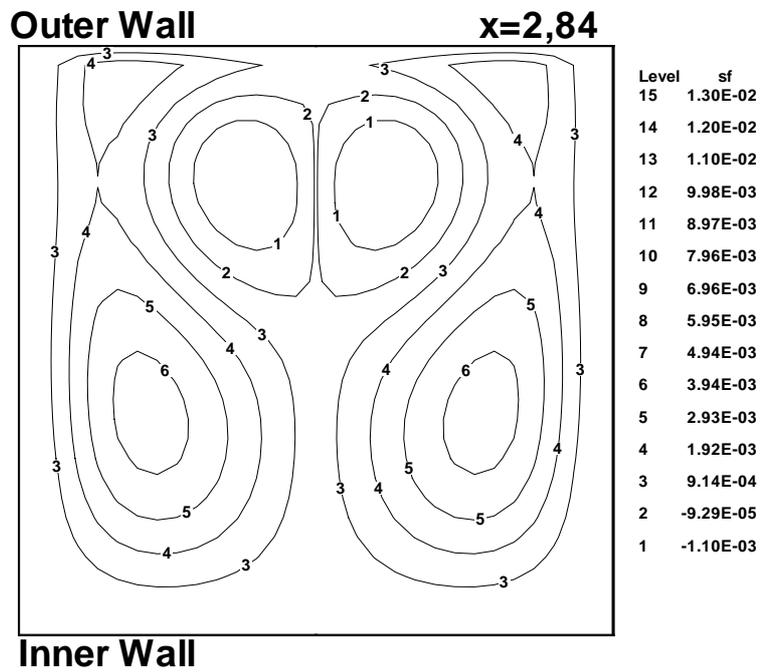


FIGURE 5.77 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

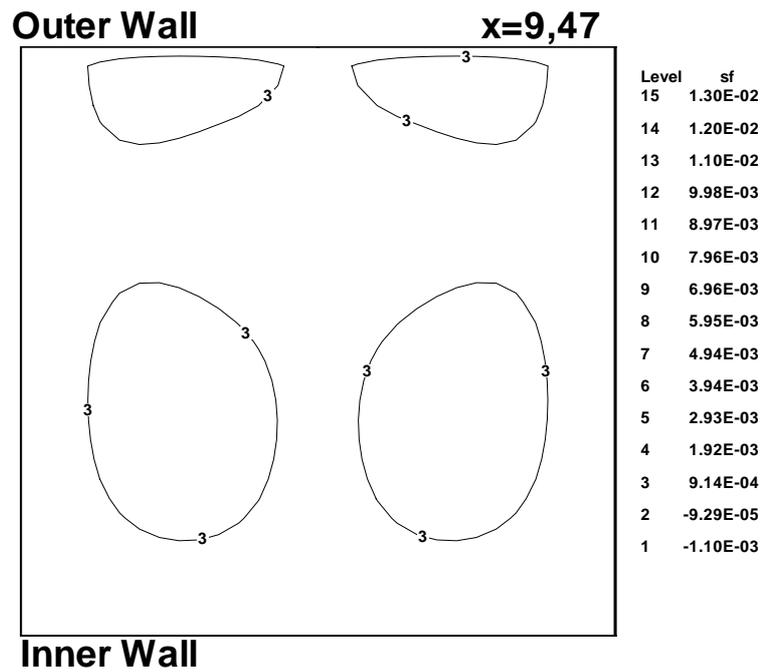


FIGURE 5.78 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

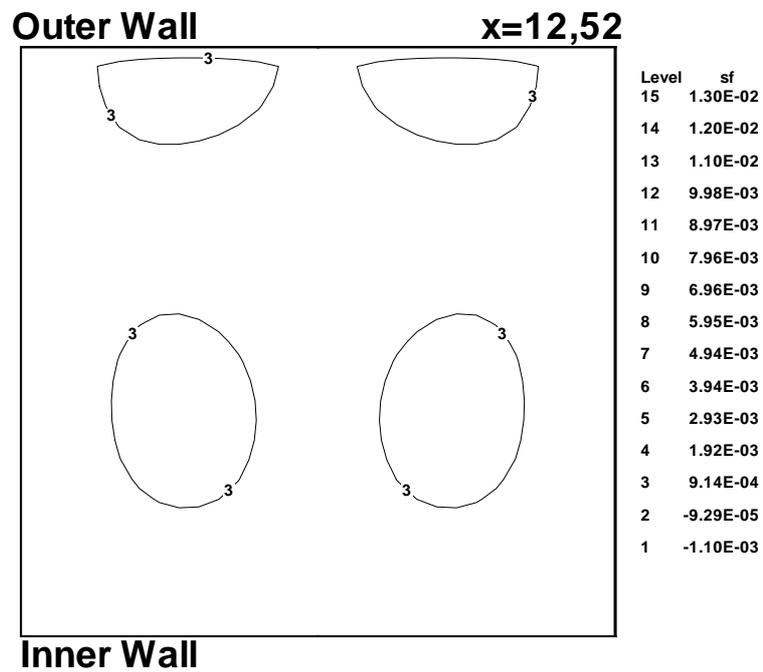


FIGURE 5.79 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

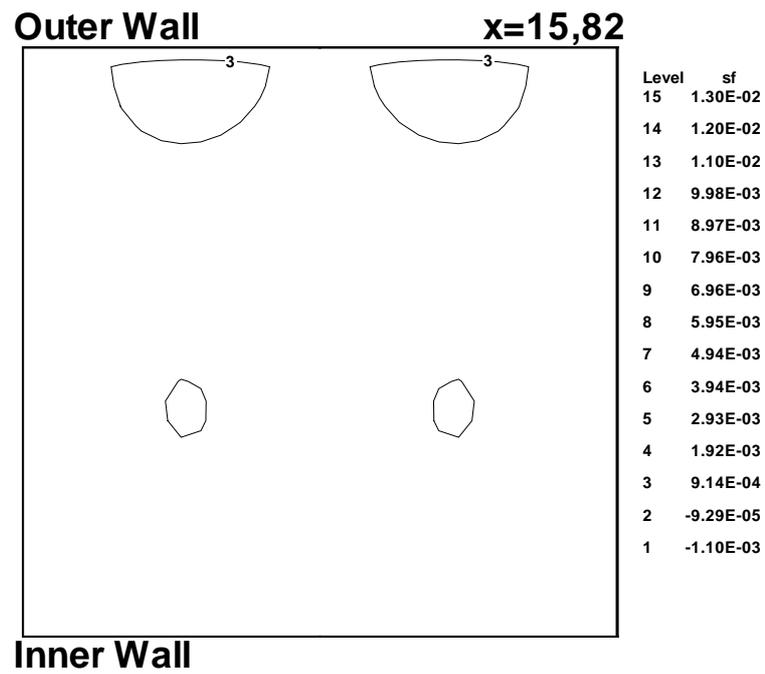


FIGURE 5.80 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

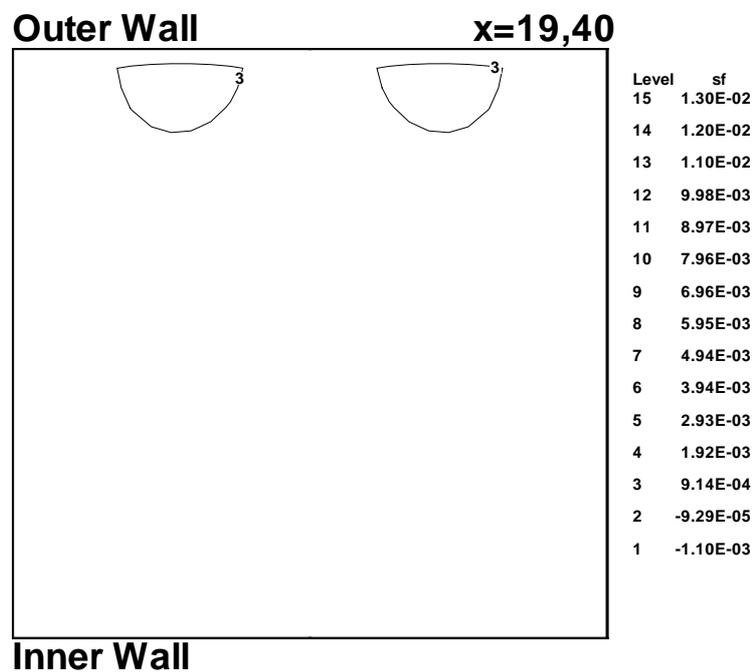


FIGURE 5.81 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

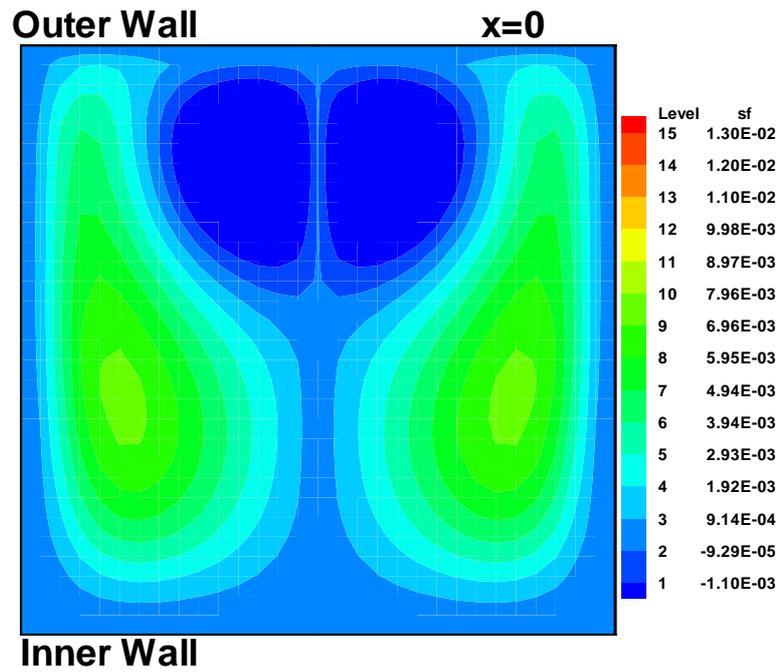


FIGURE 5.82 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

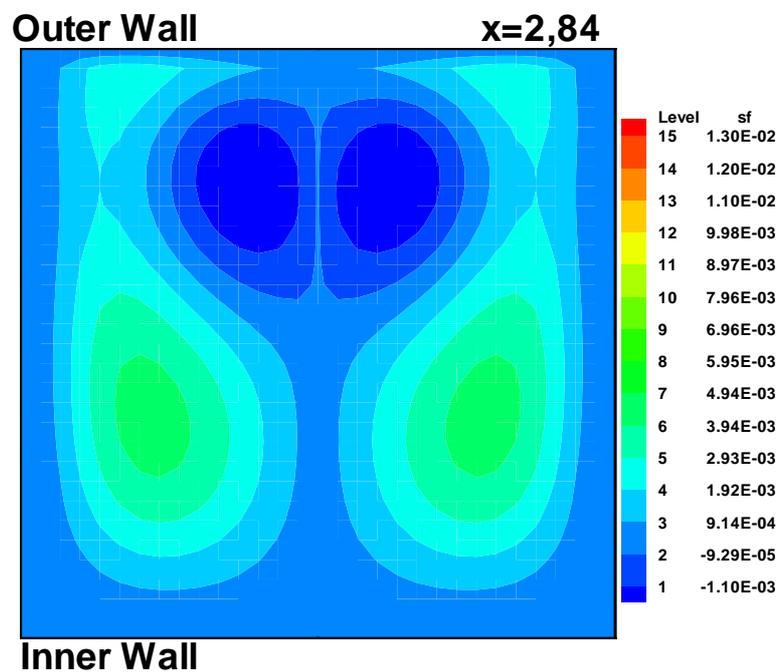


FIGURE 5.83 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

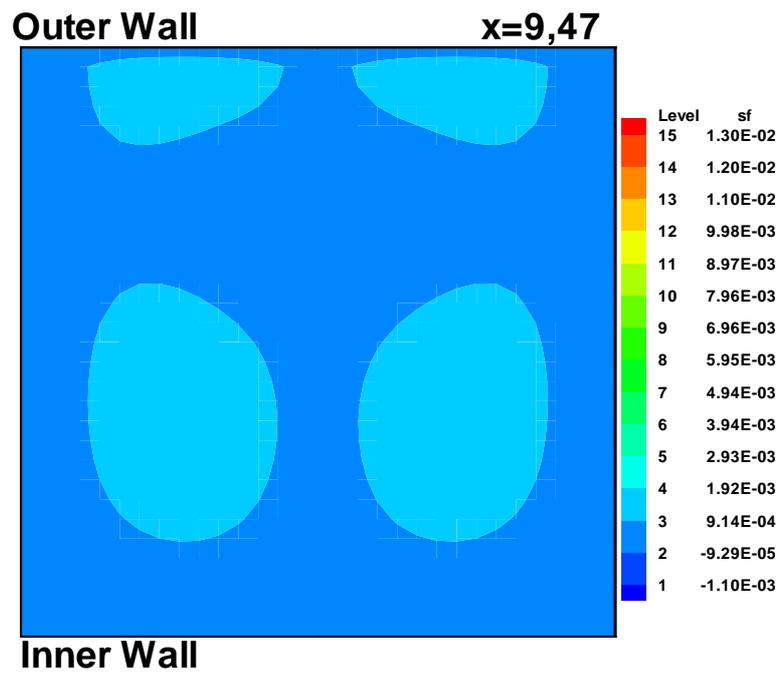


FIGURE 5.84 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

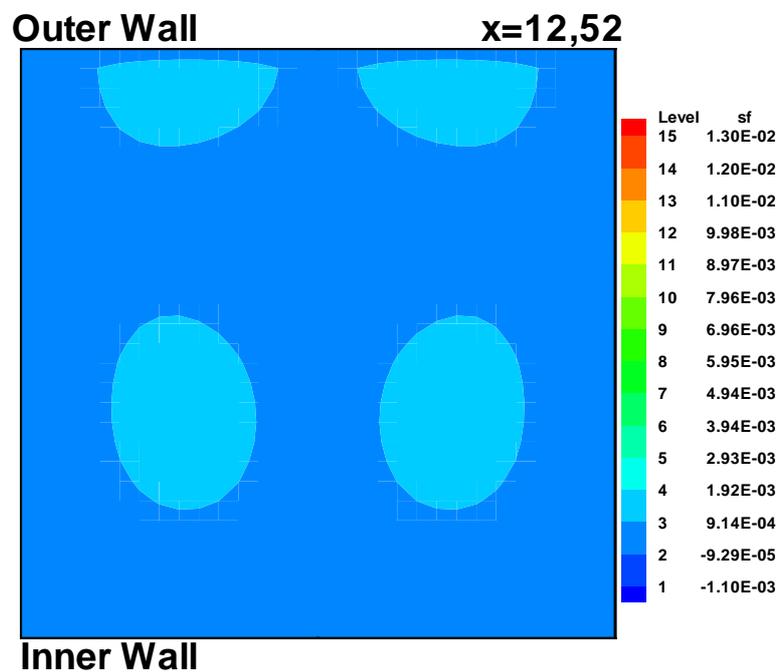


FIGURE 5.85 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

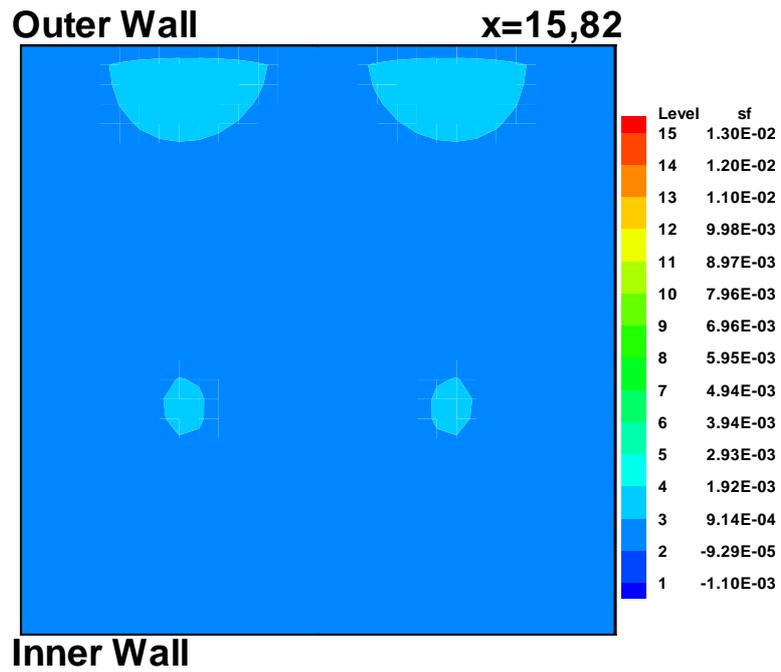


FIGURE 5.86 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

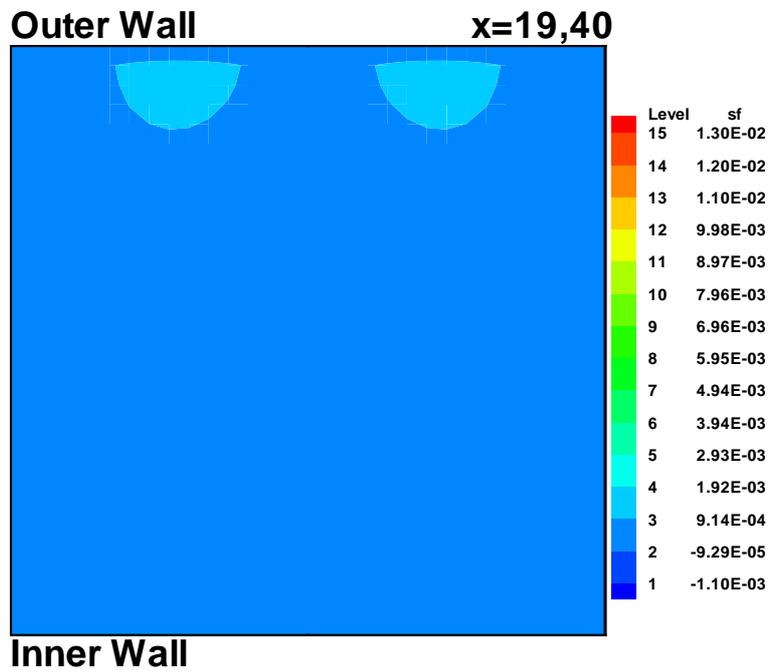


FIGURE 5.87 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

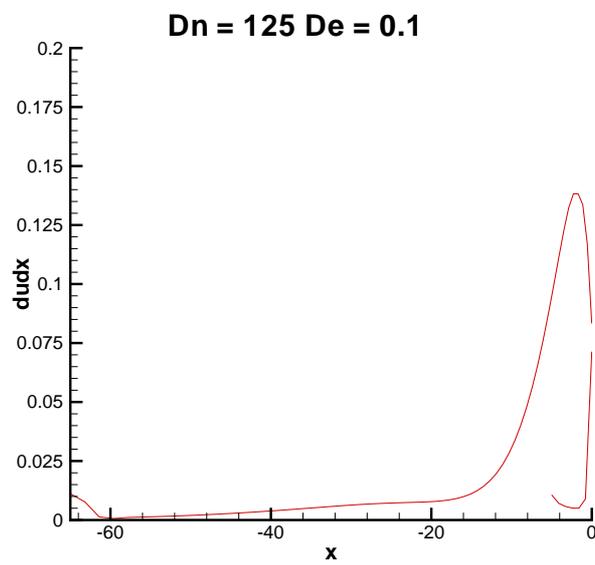


FIGURE 5.88 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$

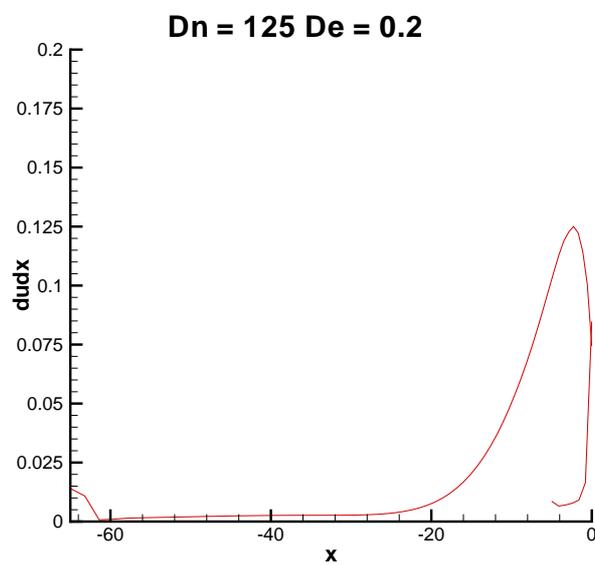


FIGURE 5.89 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 125$  et  $De = 0.2$

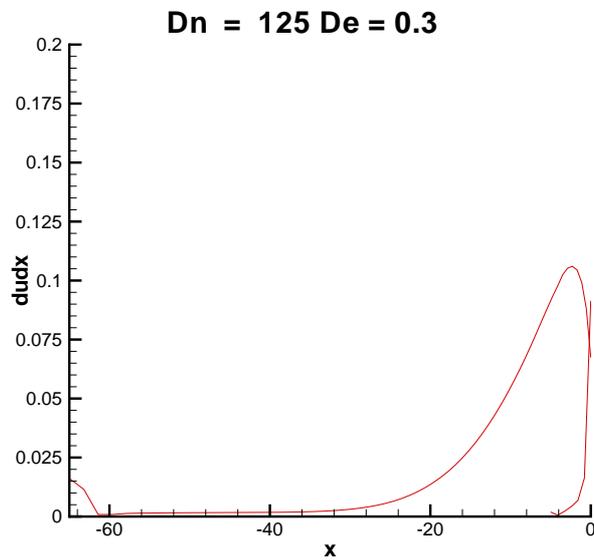


FIGURE 5.90 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 125$  et  $De = 0.3$

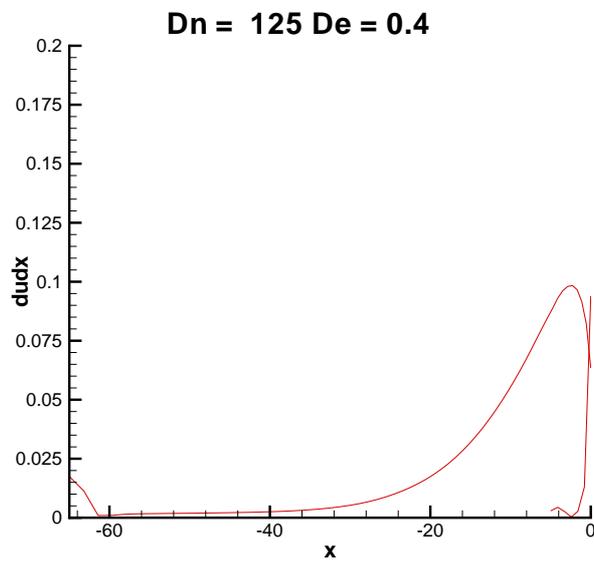


FIGURE 5.91 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 125$  et  $De = 0.4$

Pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$ , la structure de quatre vortex a été appréciée uniquement à la sortie de la zone courbée. En revanche, sur le canal de sortie a été observée la paire de vortex contre-rotatifs (figures 5.92 à 5.97). La structure originale de deux vortex a la plus grande vitesse, mais inférieure que pour  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$ , et les vortex supplémentaires ont une vitesse faible. La vitesse de la structure finale de deux vortex baisse progressivement dans le canal de sortie, au fur et à mesure que la taille des tourbillons se reduire (figures 5.98 à 5.103).

Pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$ , la formation du quatre vortex contre-rotatifs se produit dans la première partie du canal de sortie, puis se dissipe. Aussi arrive la brève apparition de la configuration de six vortex (figures 5.104 à 5.109).

Les vitesses des modèles de deux, quatre et six vortex sont différentes pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$ , jusqu'à la formation de un nouvel modèle de quatre vortex où les vitesses des modèles de deux et quatre vortex sont pareilles. À la sortie de la zone courbée de la conduite, la grande vitesse du modèle de deux vortex est observée (figures 5.110 à 5.115).

Pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$ , la formation de tourbillons est similaire à celle observée dans le cas précédent. Mais il y a la formation naissante d'une nouvelle paire de tourbillons (figures 5.116 à 5.121). Aussi, en c'est cas, les profils de vitesses sont similaires au cas précédent (figures 5.122 à 5.127).

Pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$ , nous apprécions plus clairement la formation de la paire de tourbillons supplémentaires, modifiant le modèle de quatre cellules à six cellules, de même que dans le cas d'un fluide newtonien pour  $Dn = 150$  (figures 5.128 à 5.133). Cependant, ceux tourbillons ont une vitesse faible, tandis que les tourbillons qui sont provoqués pour la déformation de la paire de tourbillons originale ont une vitesse supérieure (figures 5.134 à 5.139).

Les graphiques  $du/dx$  via à vis de  $x$ , pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 137$  et  $De = 0.1, 0.2, 0.3$  et  $0.4$  (figures 5.140 à 5.143), montrent que la valeur maximale de  $du/dx$  est supérieure que pour le cas antérieur avec  $Dn = 125$ , alors que sa diminution est prolongée. Aussi, à la sortie du canal une petite perturbation est présentée.

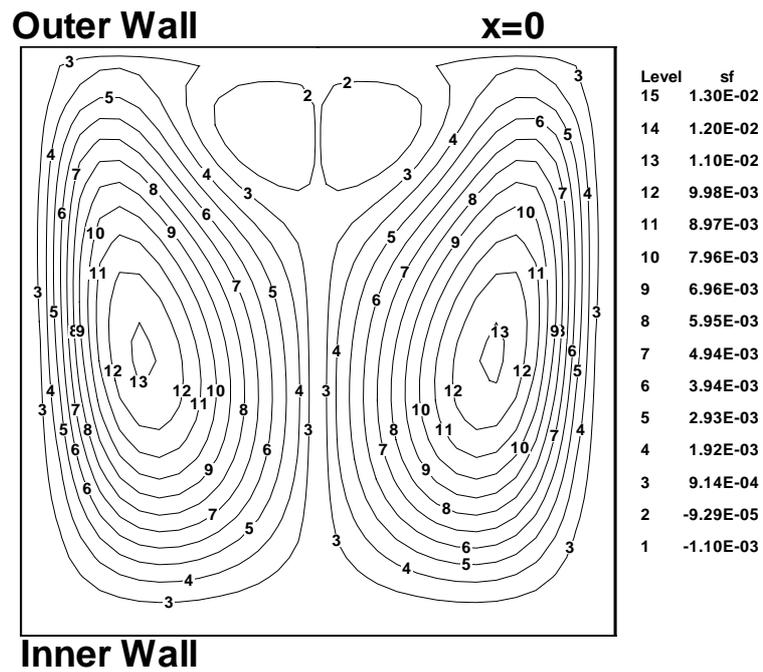


FIGURE 5.92 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

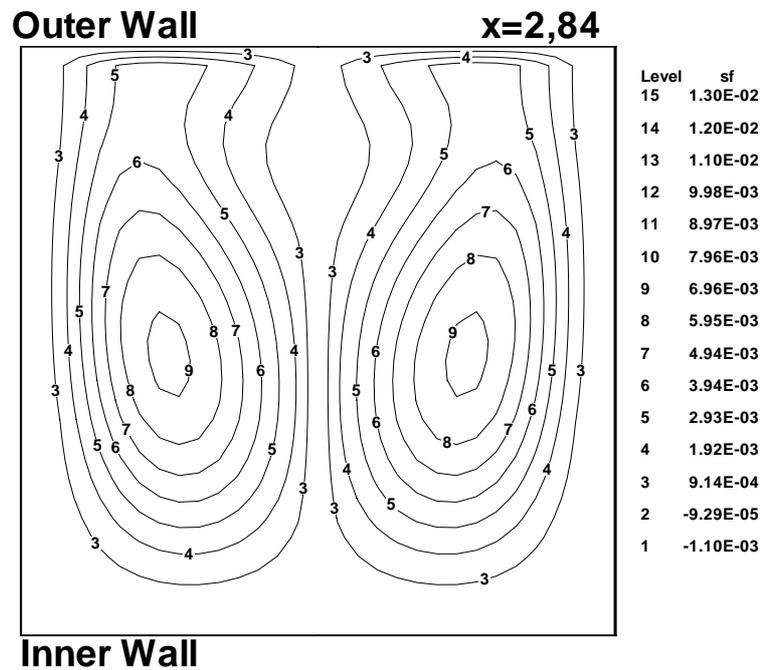


FIGURE 5.93 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

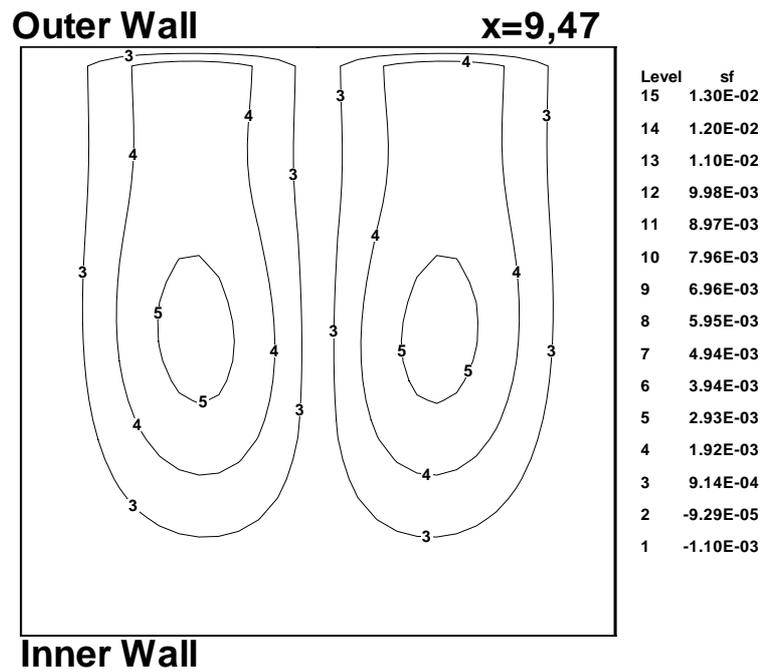


FIGURE 5.94 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

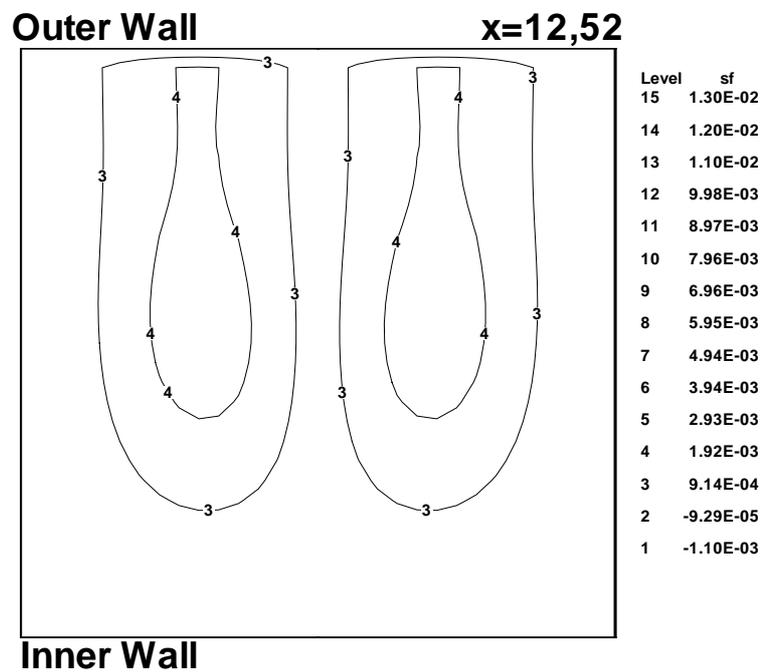


FIGURE 5.95 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

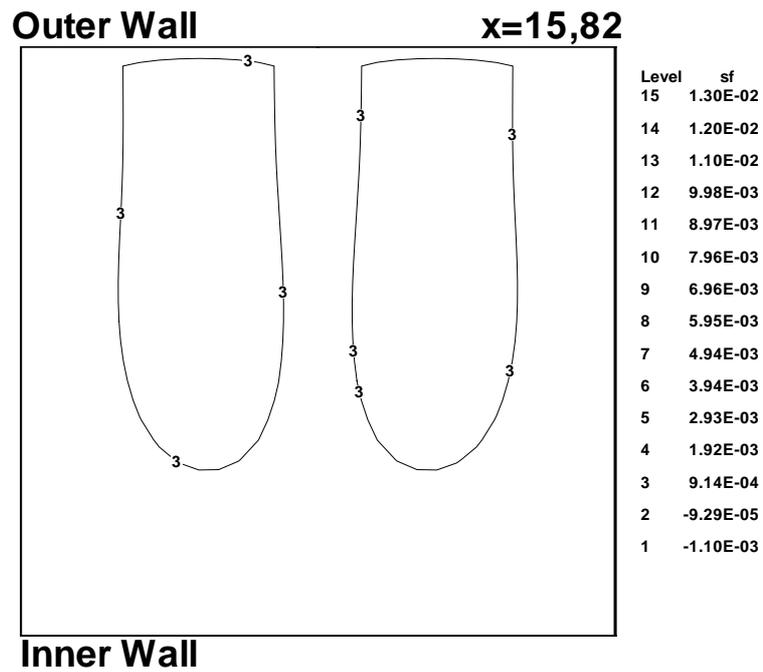


FIGURE 5.96 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

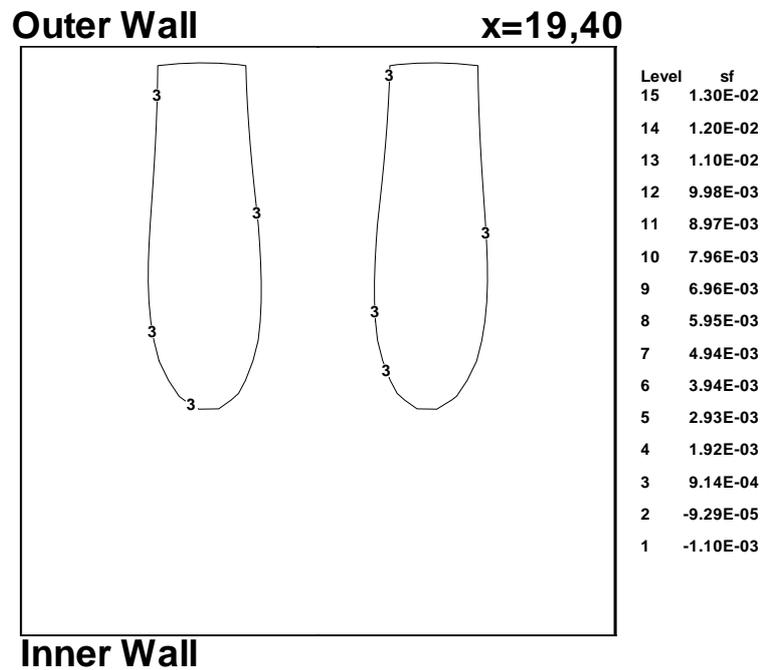


FIGURE 5.97 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

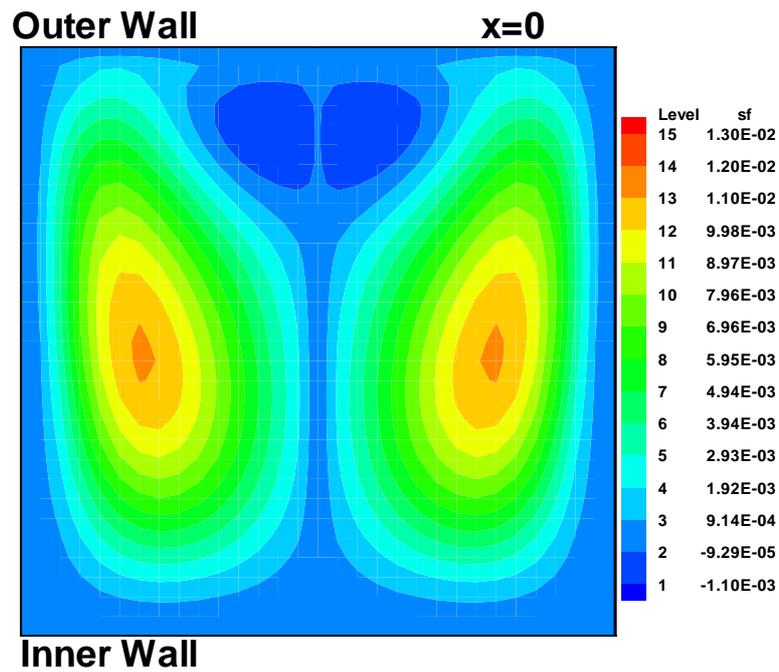


FIGURE 5.98 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

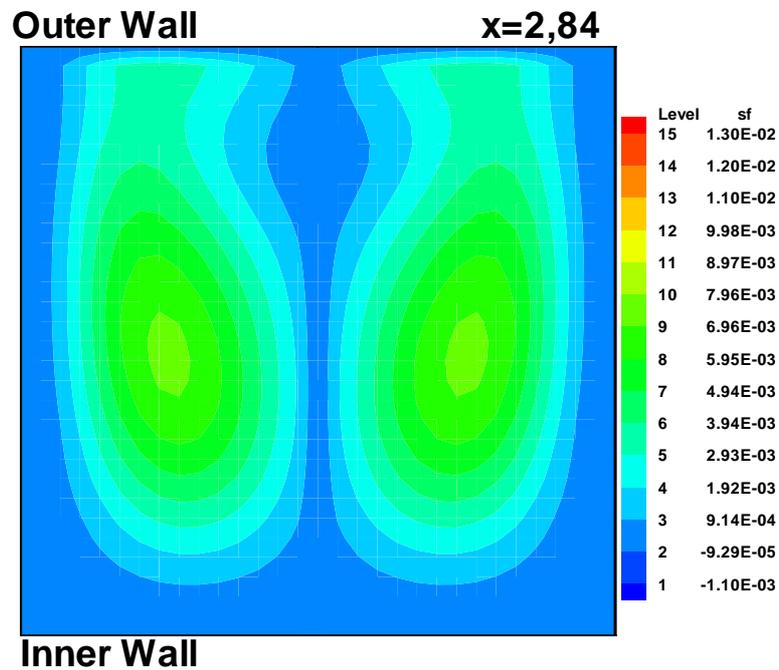


FIGURE 5.99 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

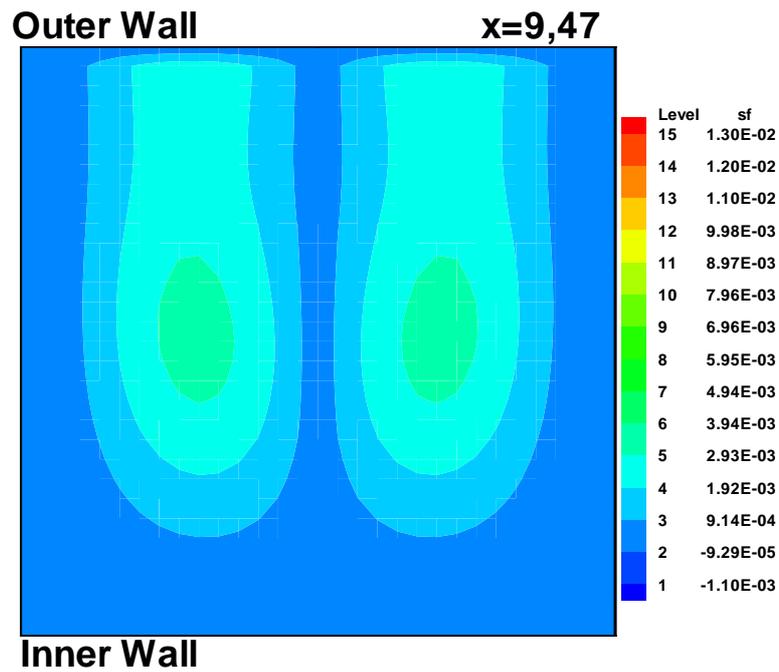


FIGURE 5.100 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

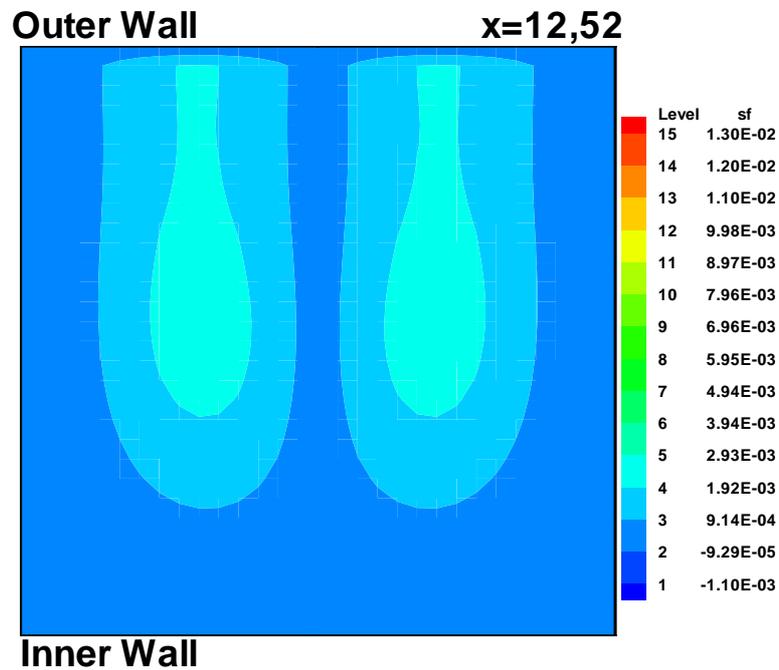


FIGURE 5.101 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

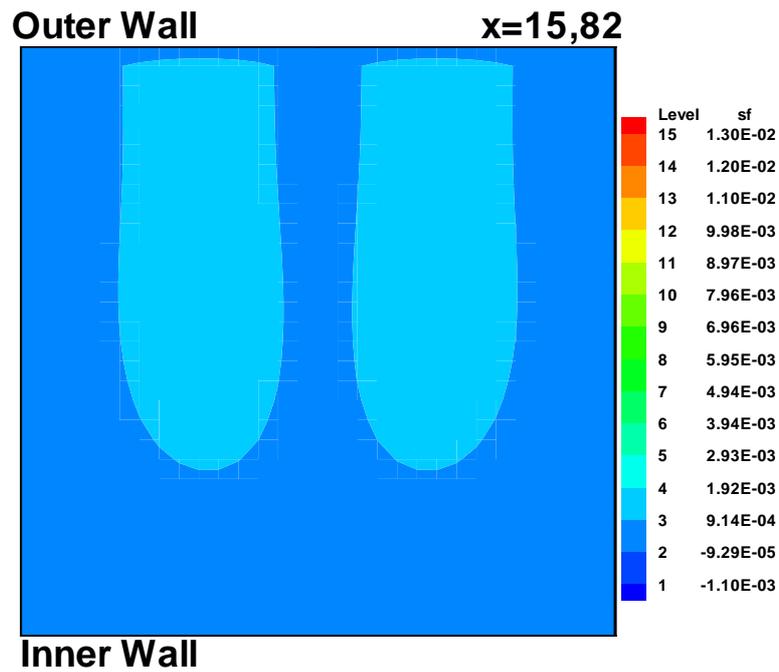


FIGURE 5.102 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

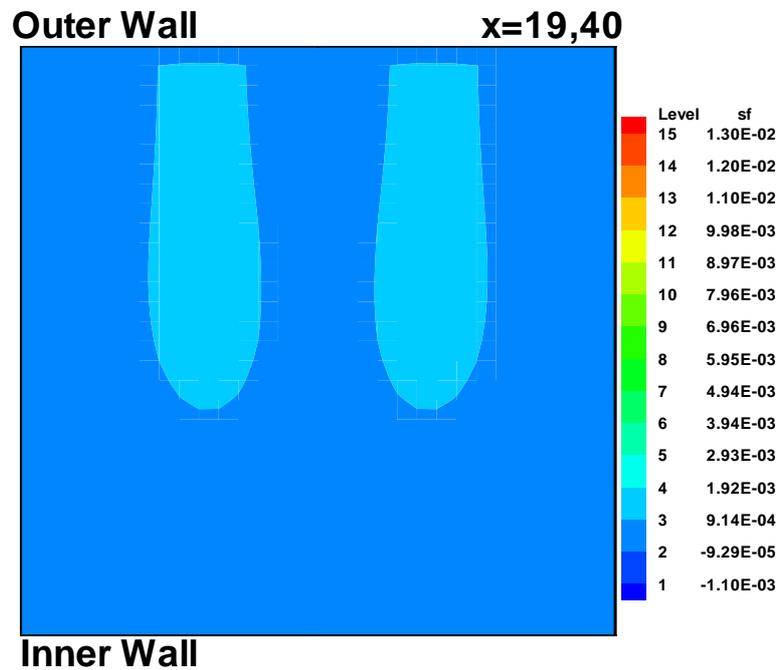


FIGURE 5.103 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

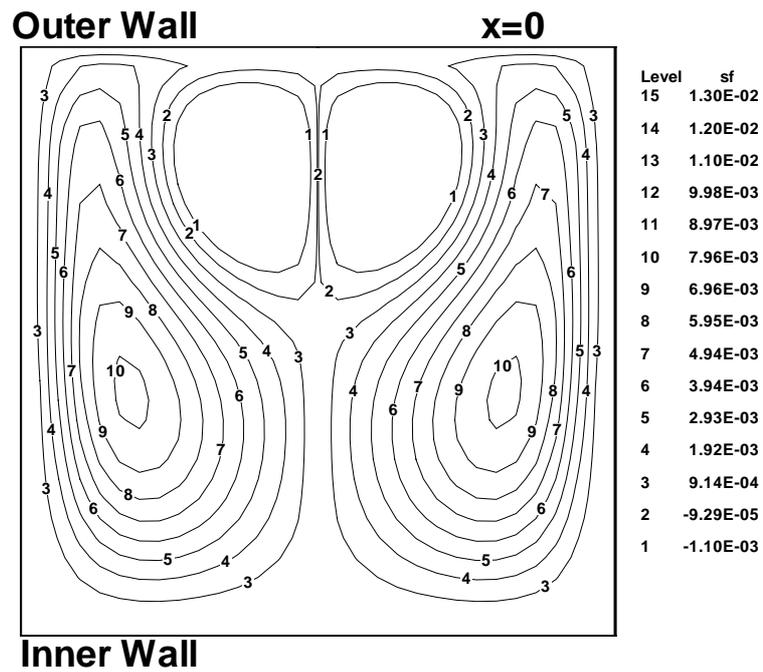


FIGURE 5.104 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

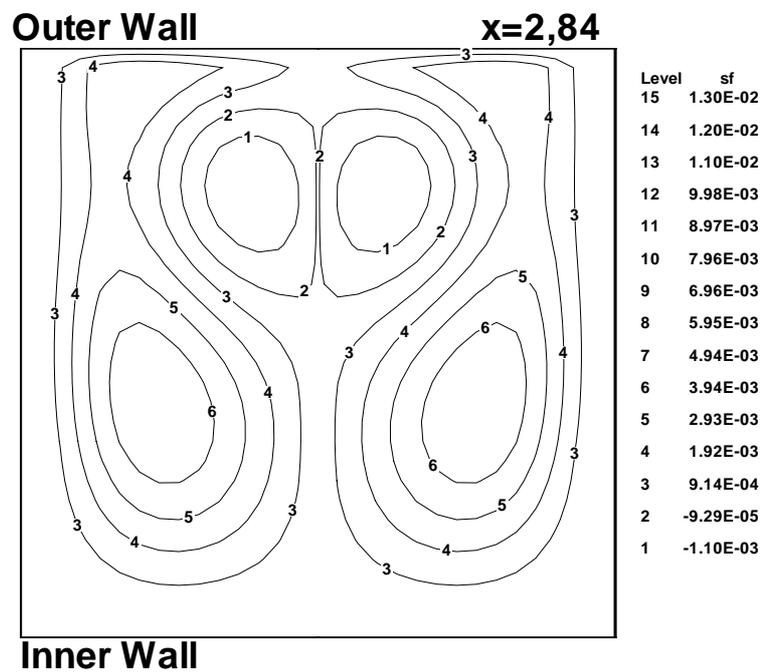


FIGURE 5.105 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

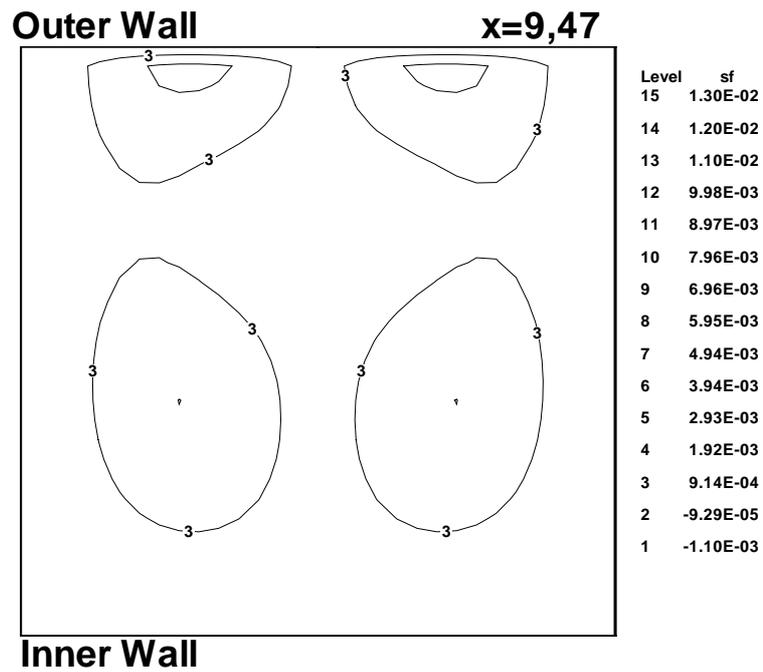


FIGURE 5.106 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

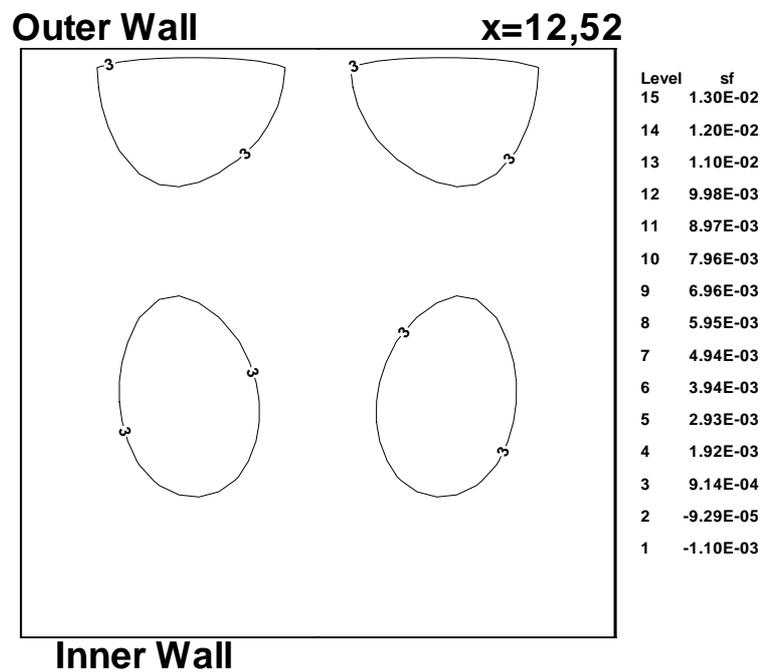


FIGURE 5.107 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

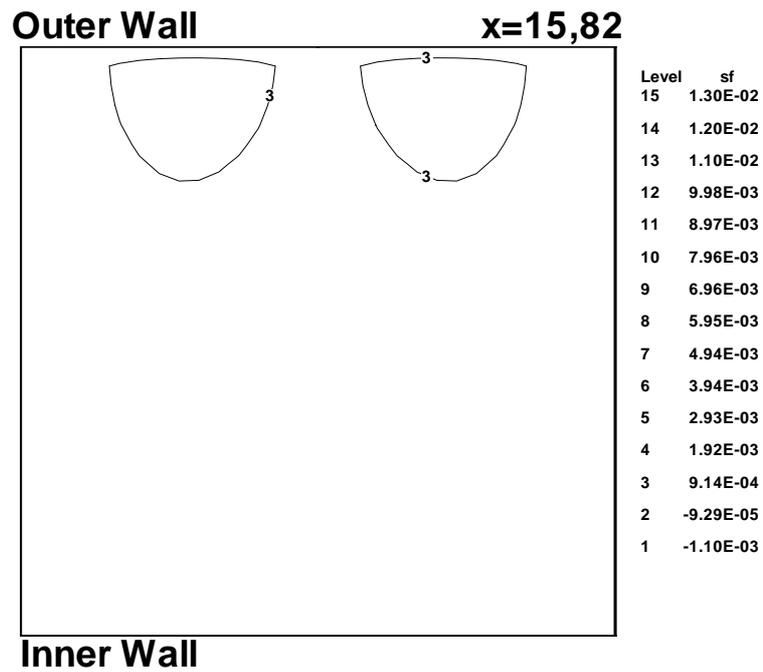


FIGURE 5.108 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

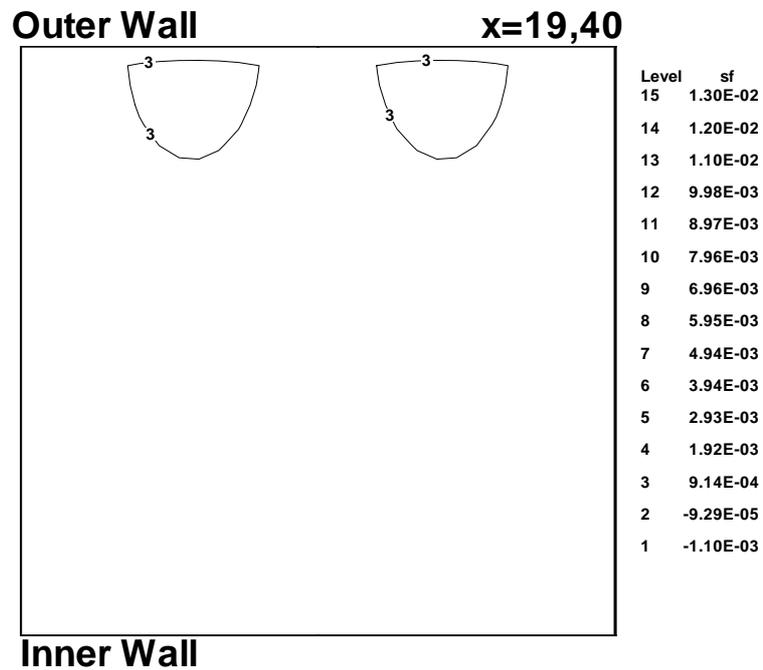


FIGURE 5.109 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

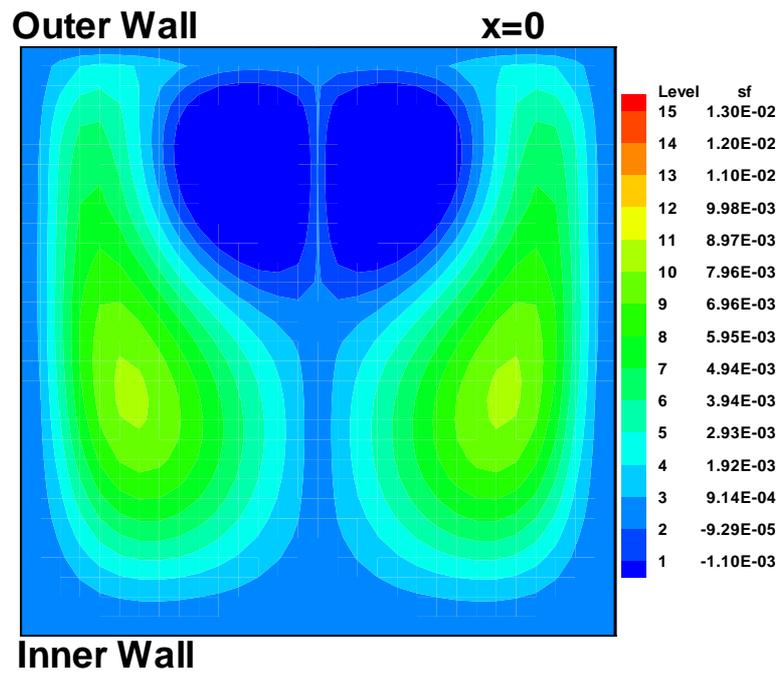


FIGURE 5.110 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

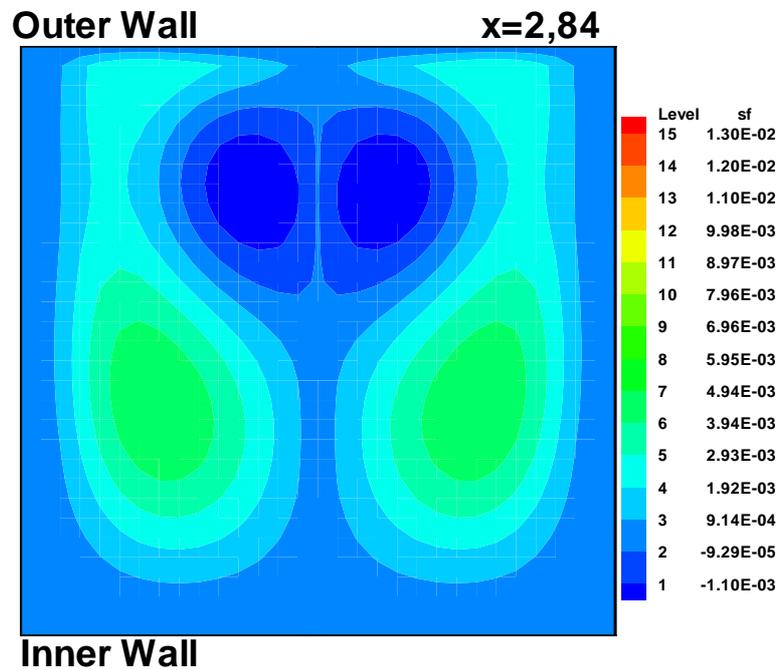


FIGURE 5.111 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

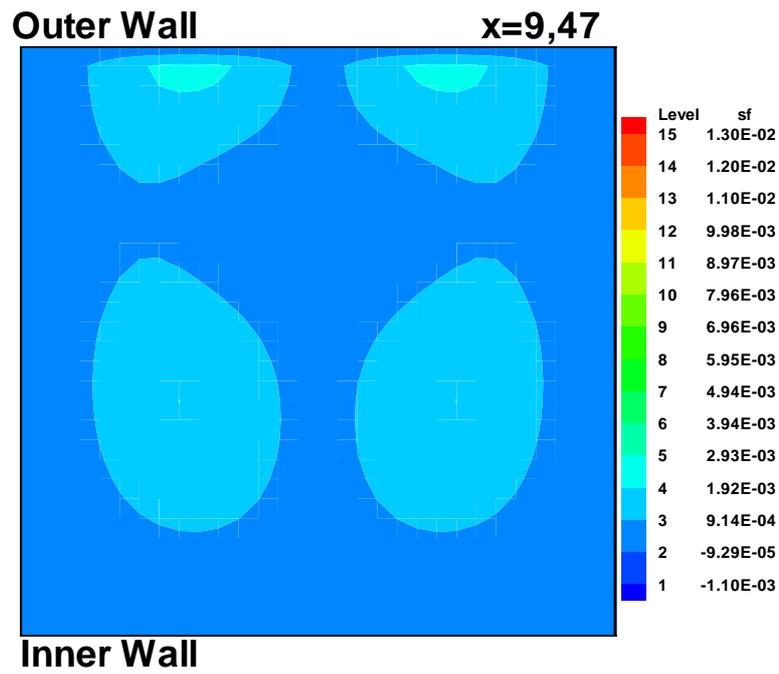


FIGURE 5.112 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

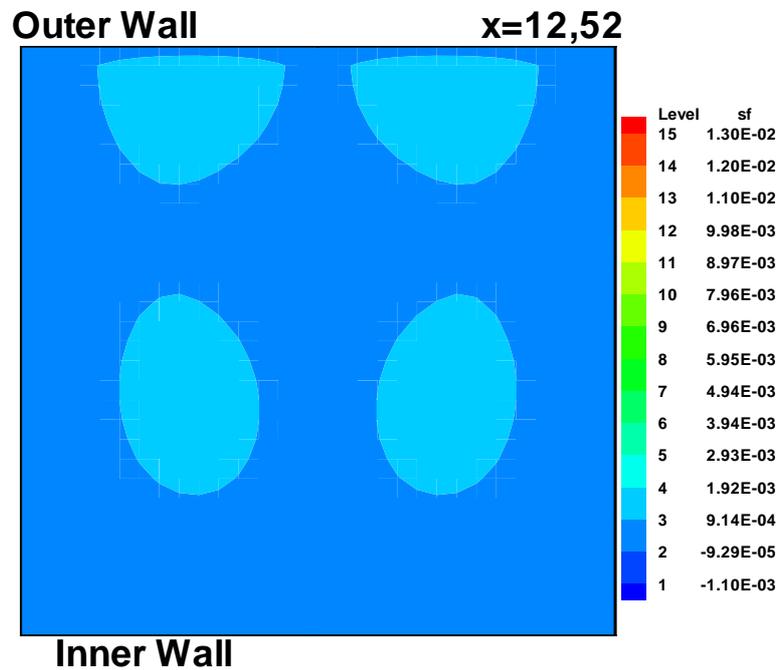


FIGURE 5.113 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

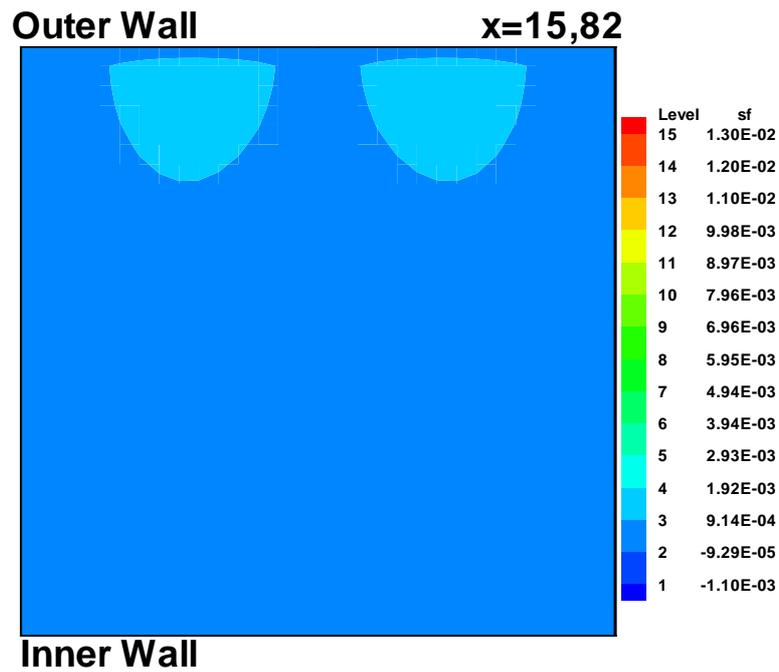


FIGURE 5.114 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

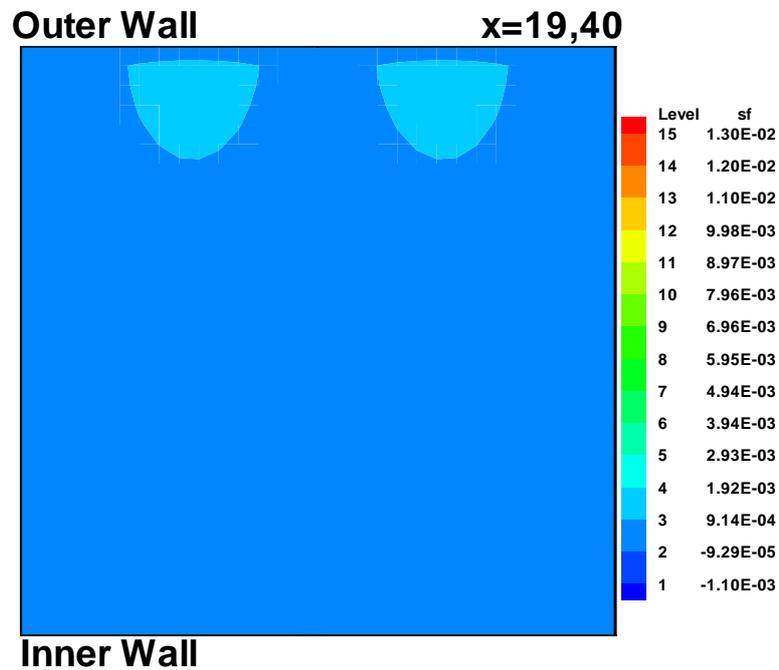


FIGURE 5.115 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

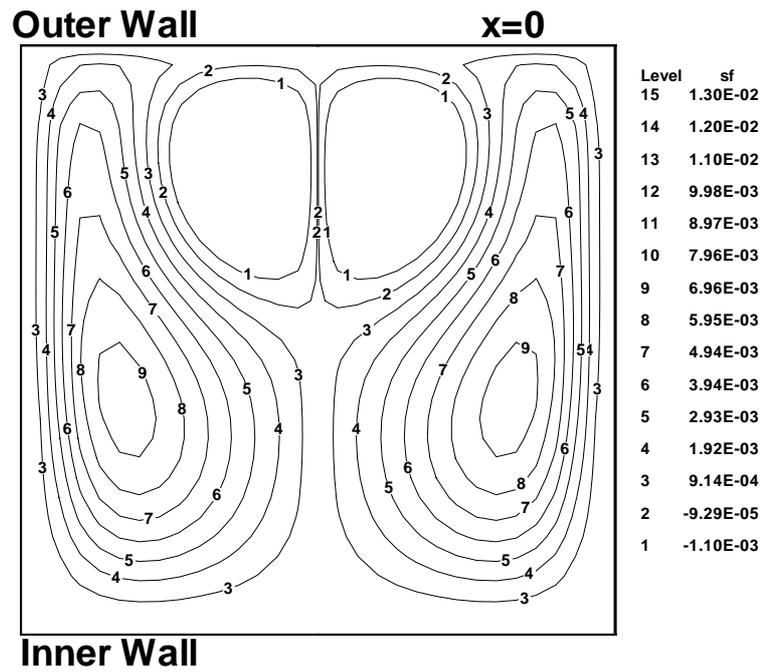


FIGURE 5.116 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

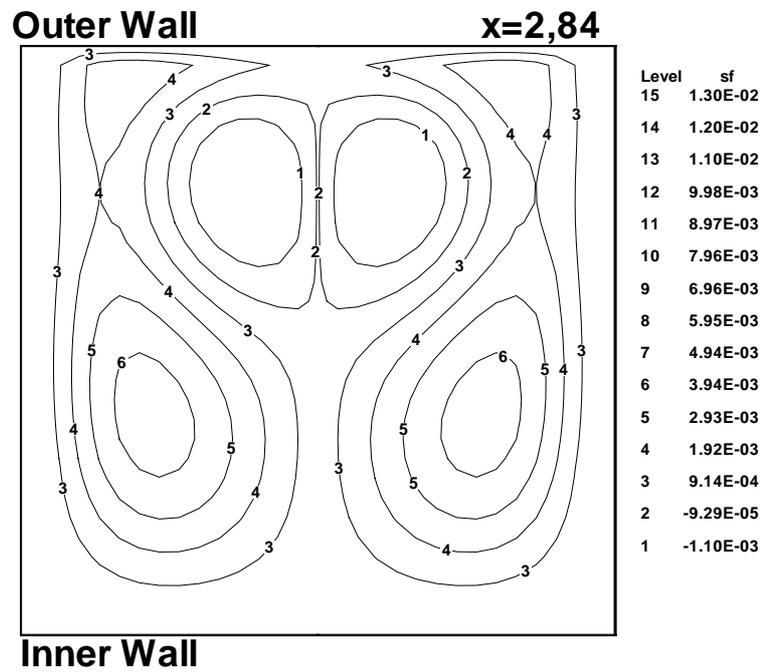


FIGURE 5.117 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

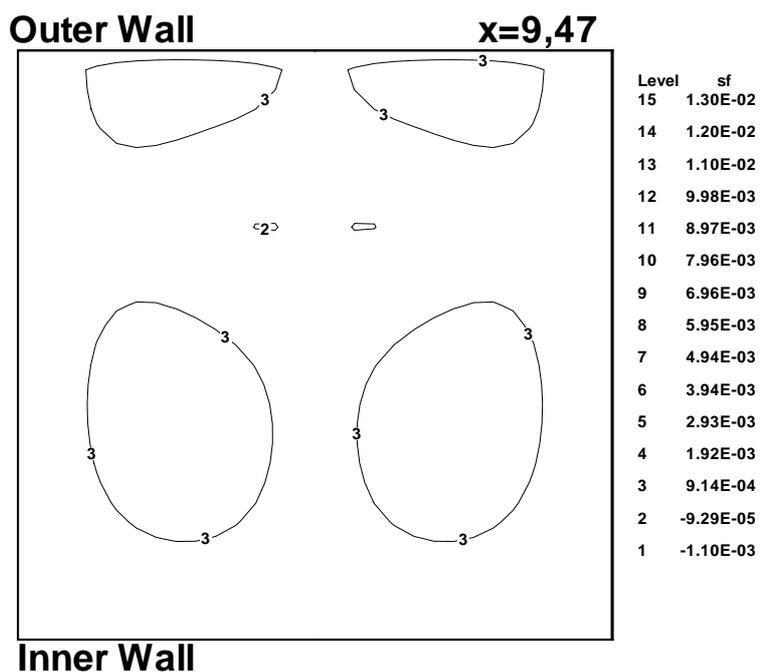


FIGURE 5.118 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

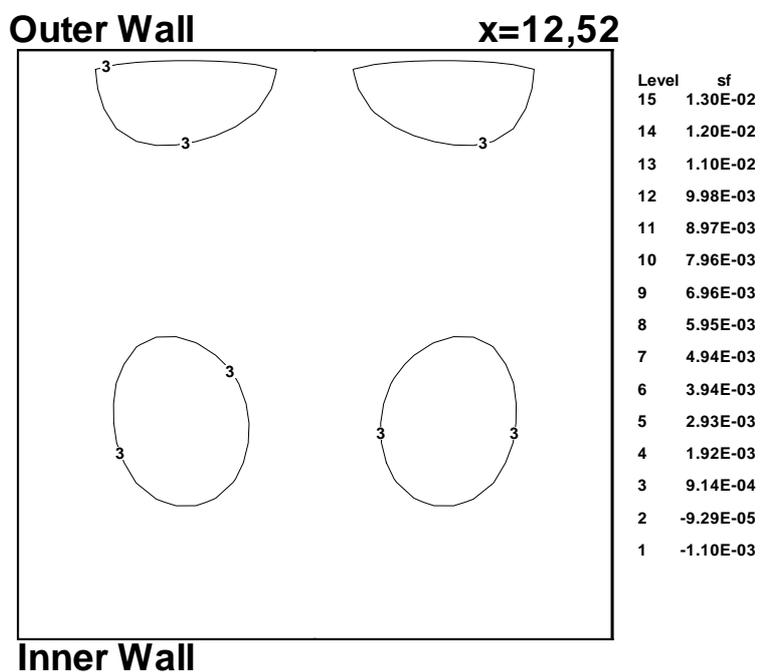


FIGURE 5.119 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

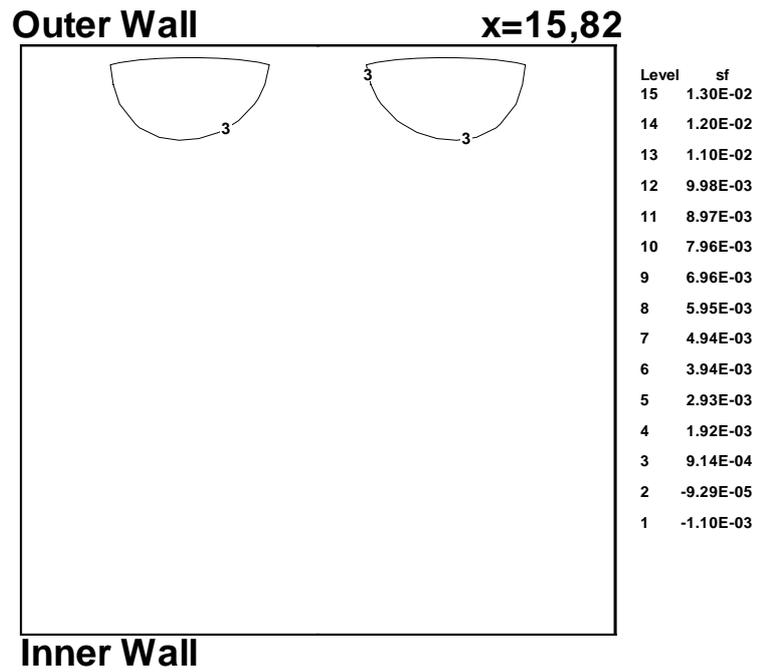


FIGURE 5.120 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

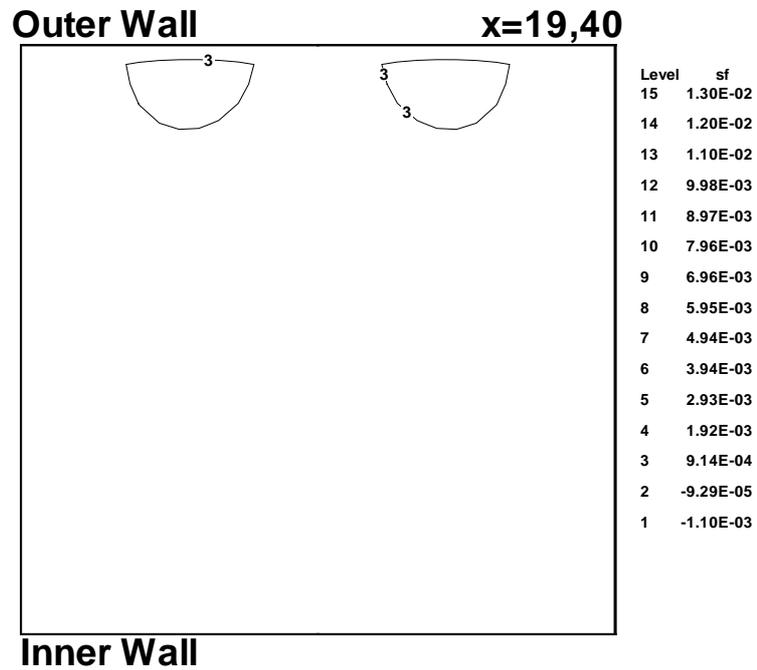


FIGURE 5.121 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

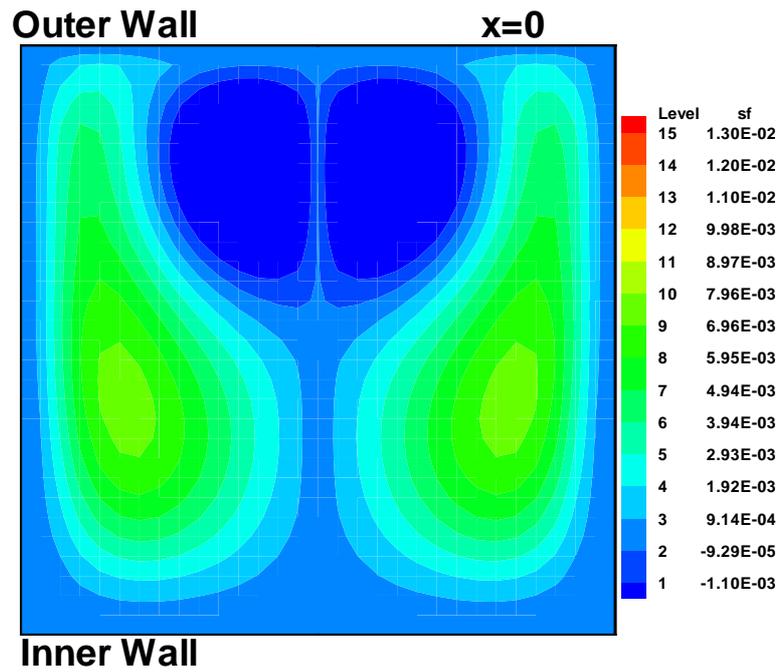


FIGURE 5.122 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

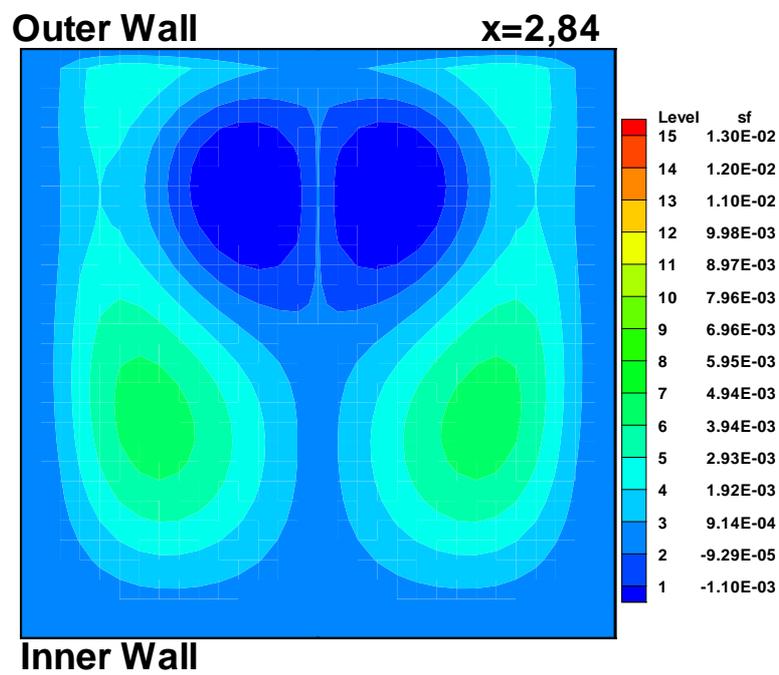


FIGURE 5.123 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

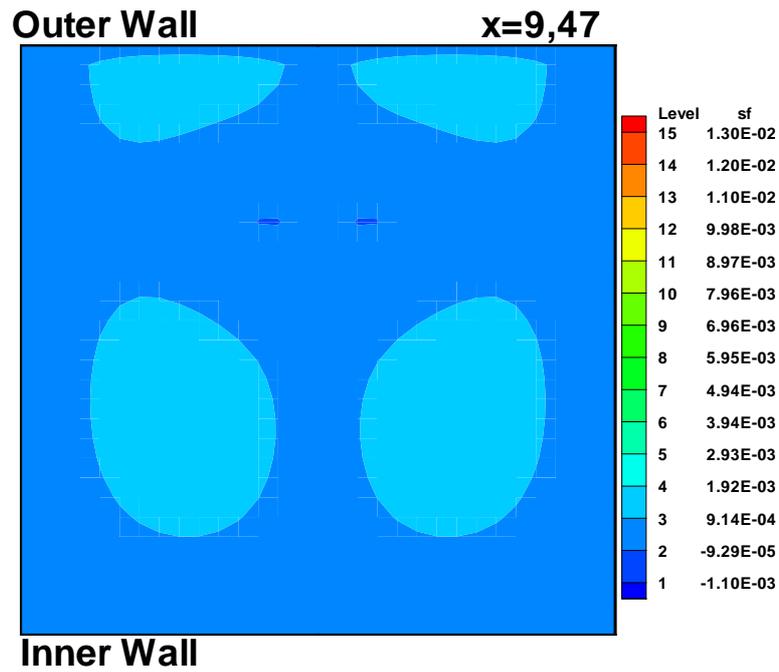


FIGURE 5.124 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

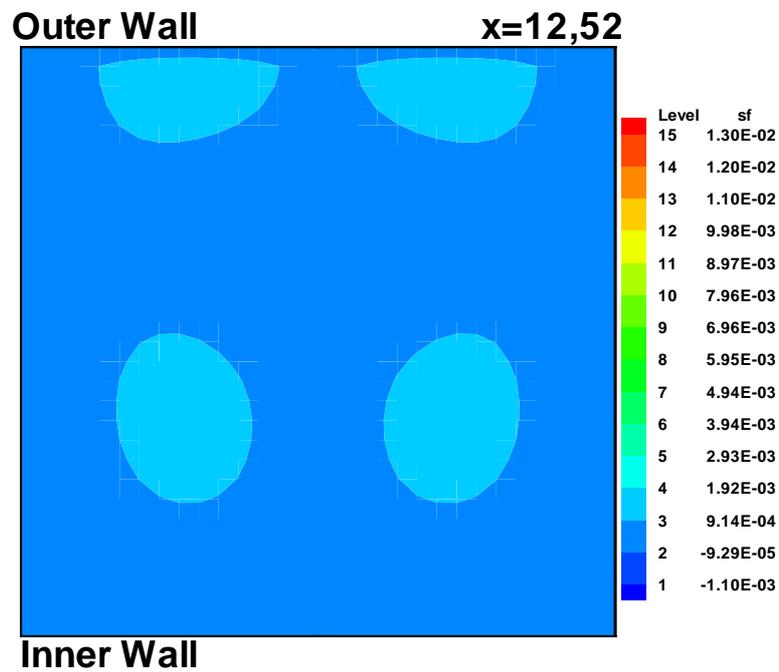


FIGURE 5.125 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

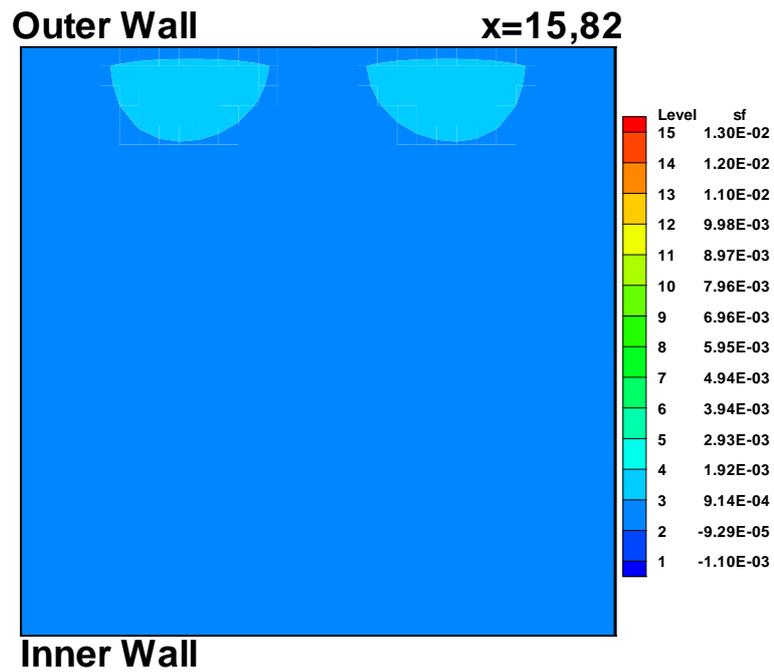


FIGURE 5.126 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

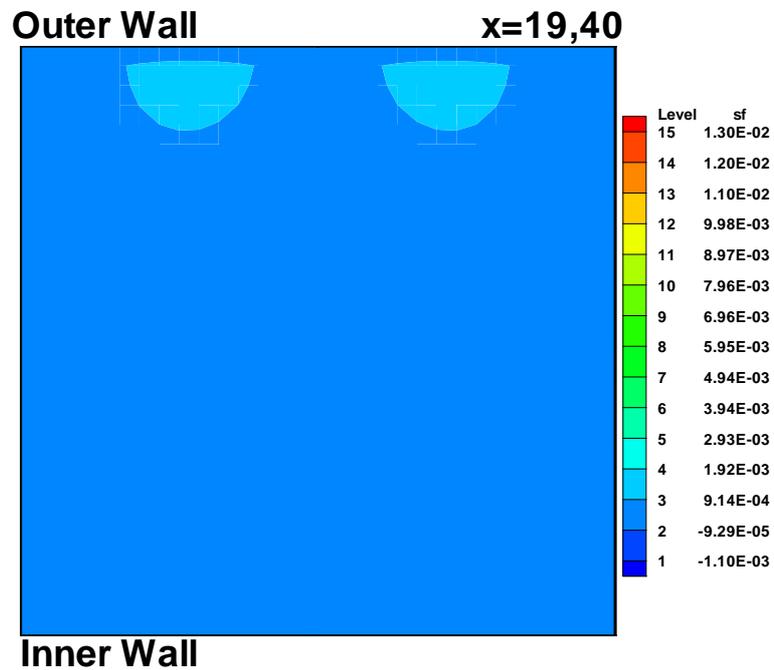


FIGURE 5.127 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

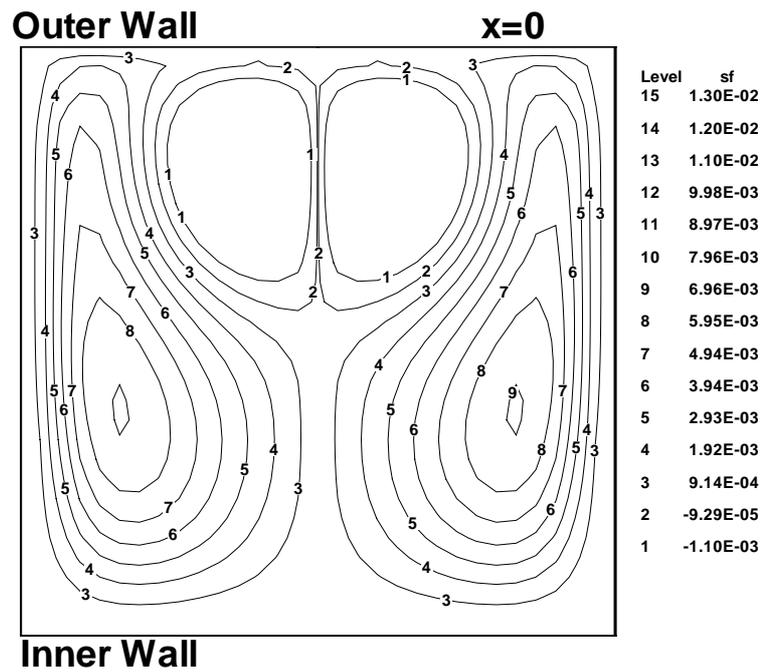


FIGURE 5.128 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

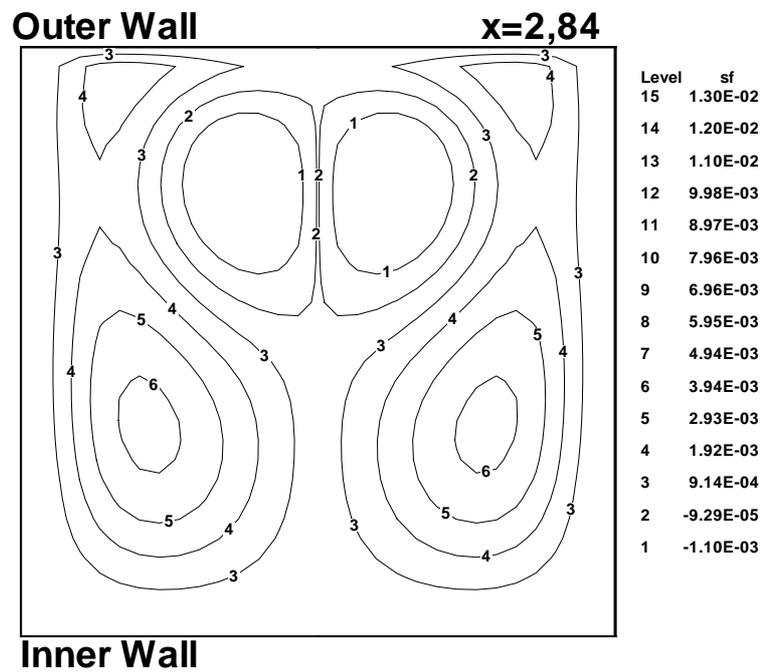


FIGURE 5.129 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

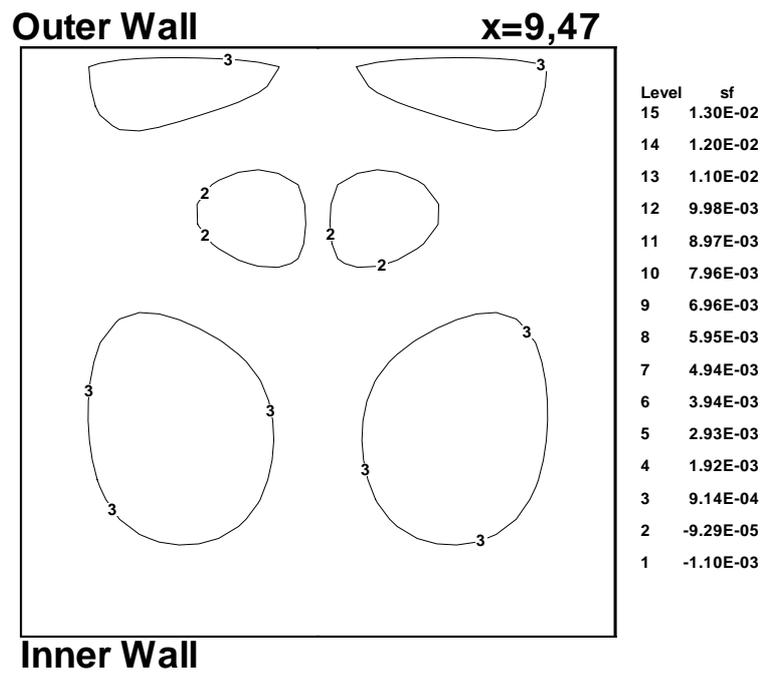


FIGURE 5.130 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

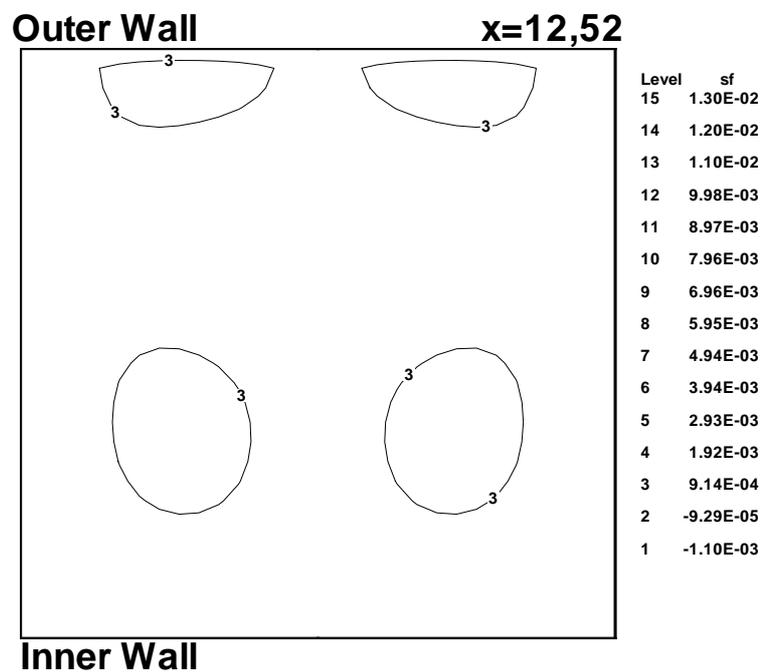


FIGURE 5.131 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

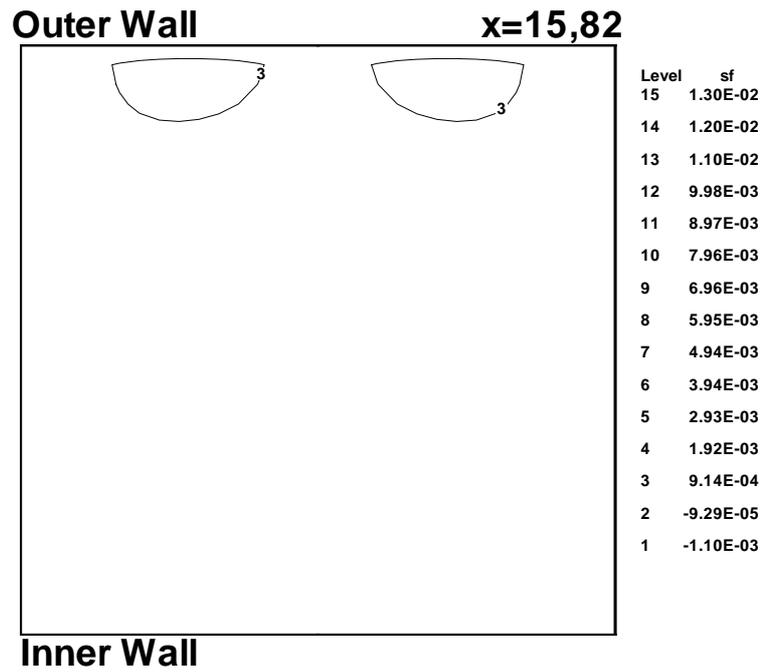


FIGURE 5.132 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

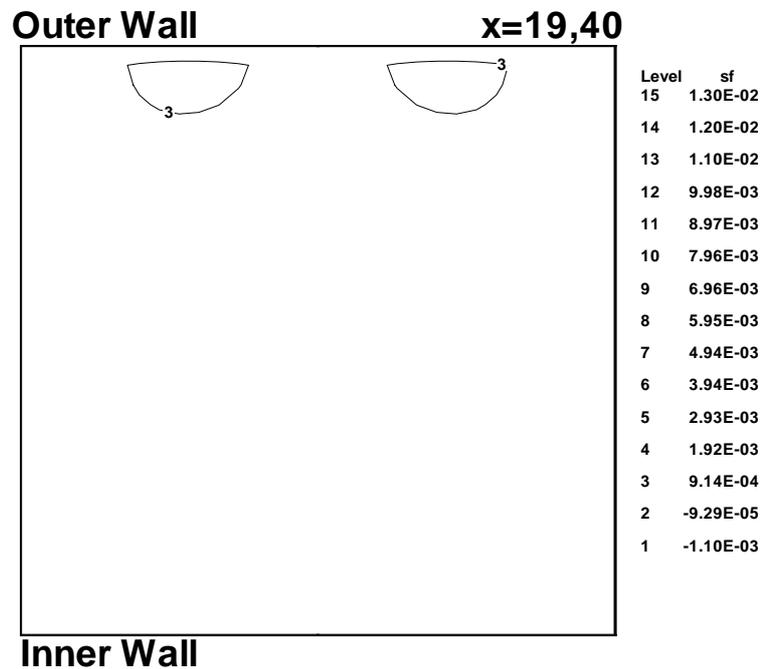


FIGURE 5.133 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

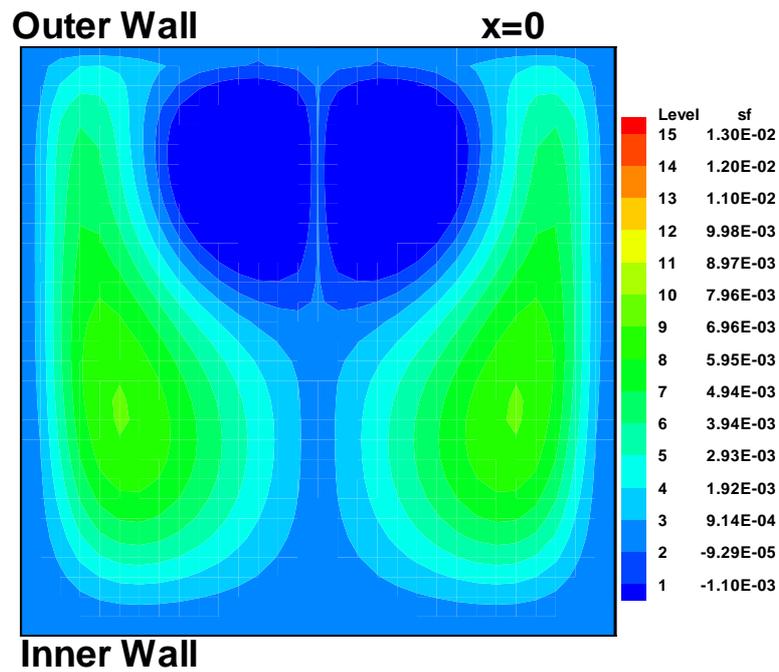


FIGURE 5.134 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

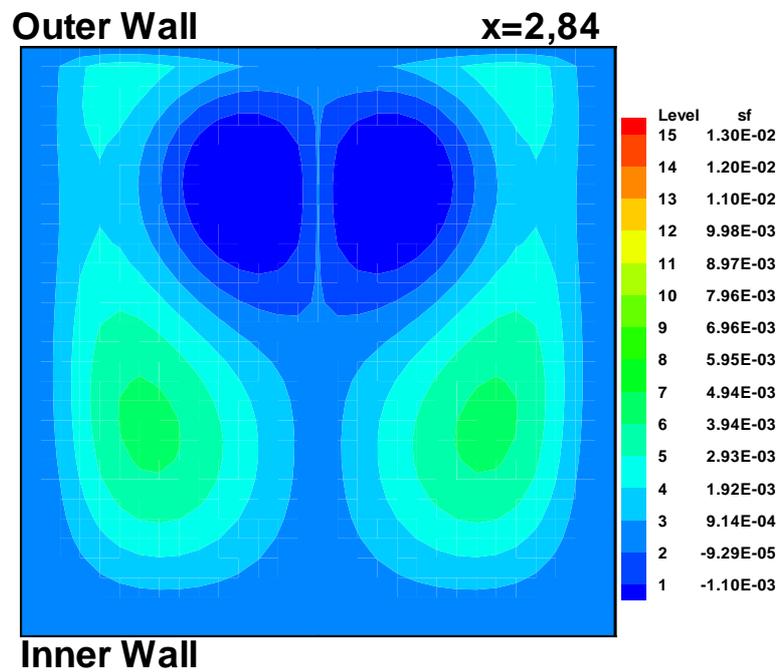


FIGURE 5.135 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

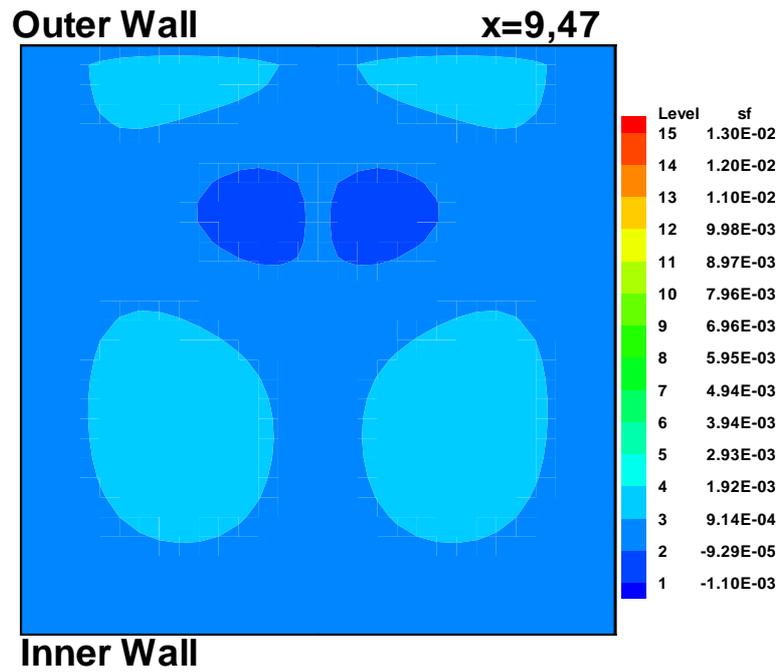


FIGURE 5.136 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

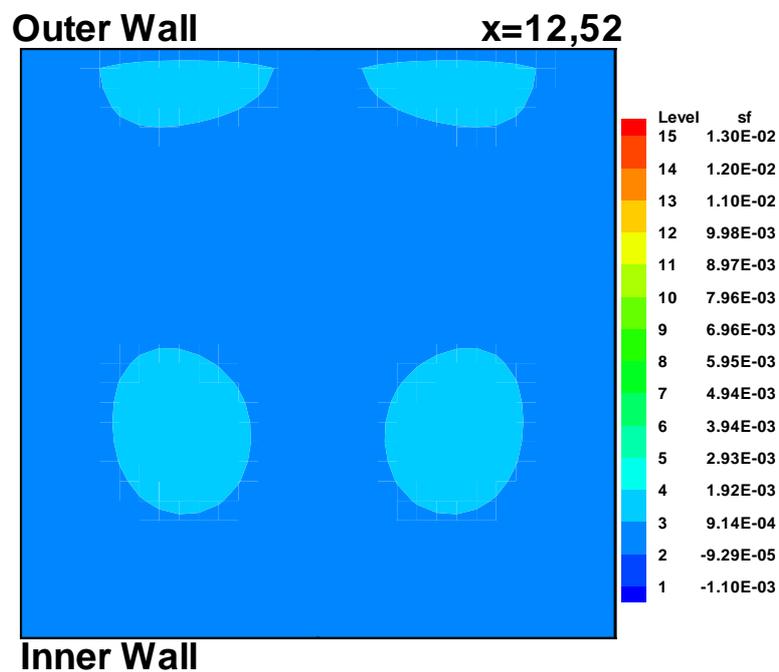


FIGURE 5.137 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

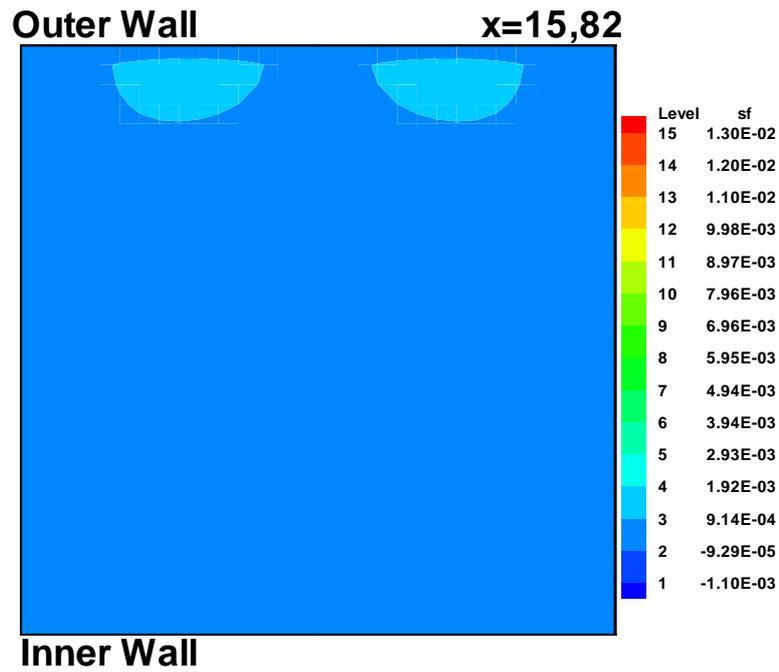


FIGURE 5.138 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

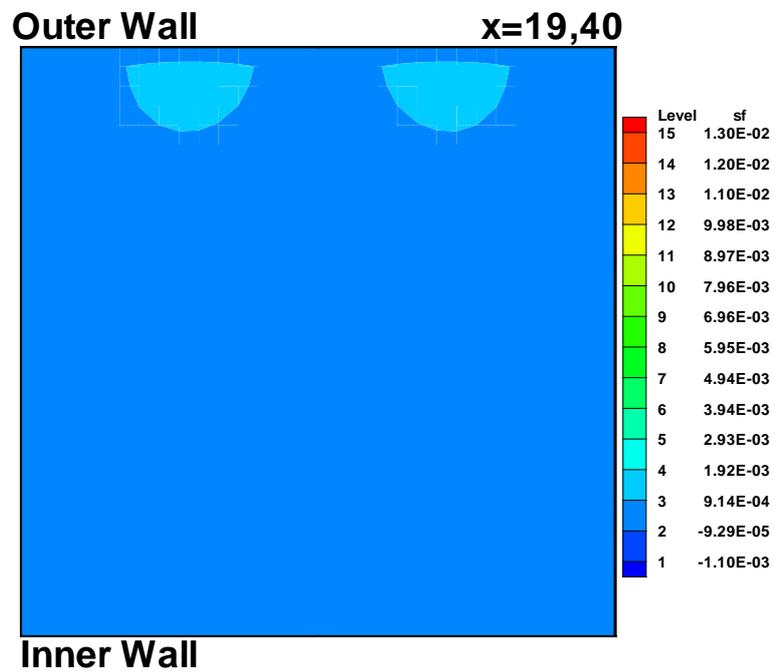


FIGURE 5.139 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

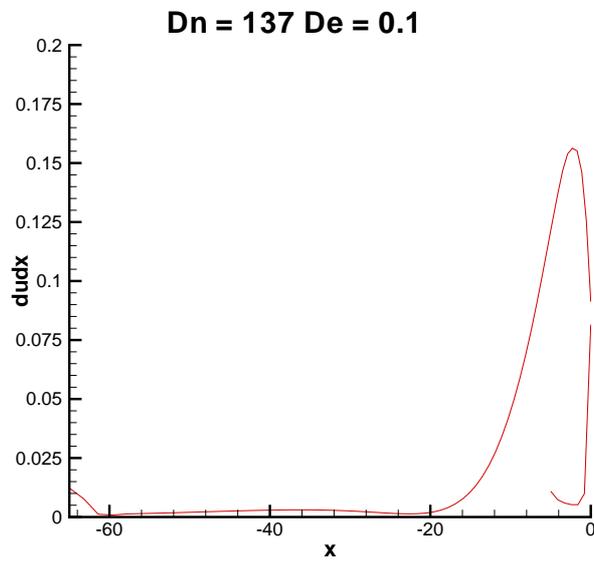


FIGURE 5.140 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 137$  et  $De = 0.1$

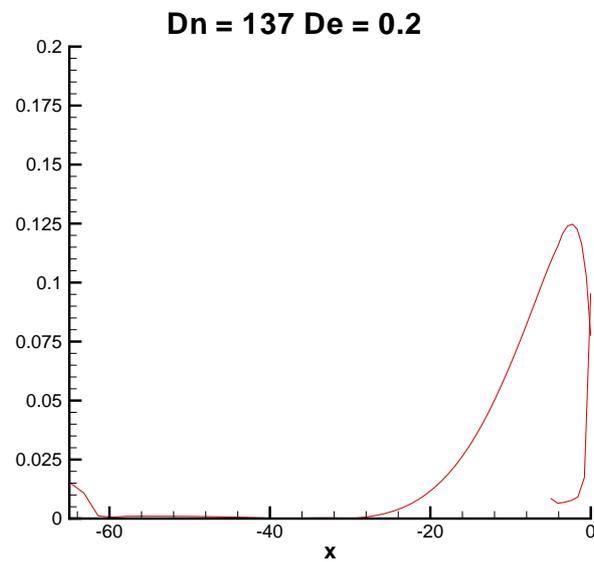


FIGURE 5.141 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 137$  et  $De = 0.2$

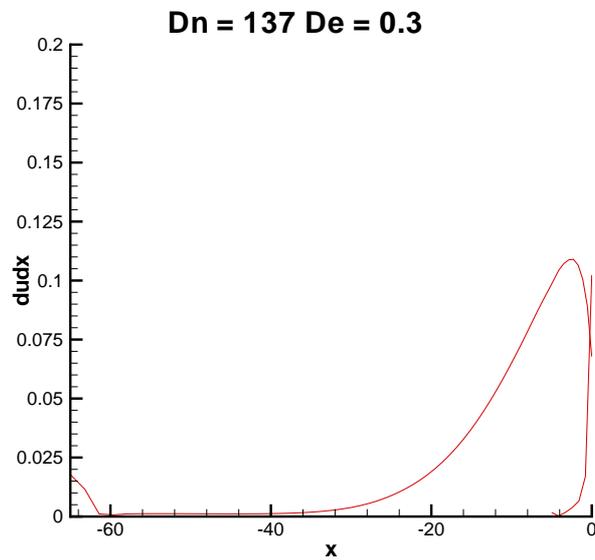


FIGURE 5.142 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 137$  et  $De = 0.3$

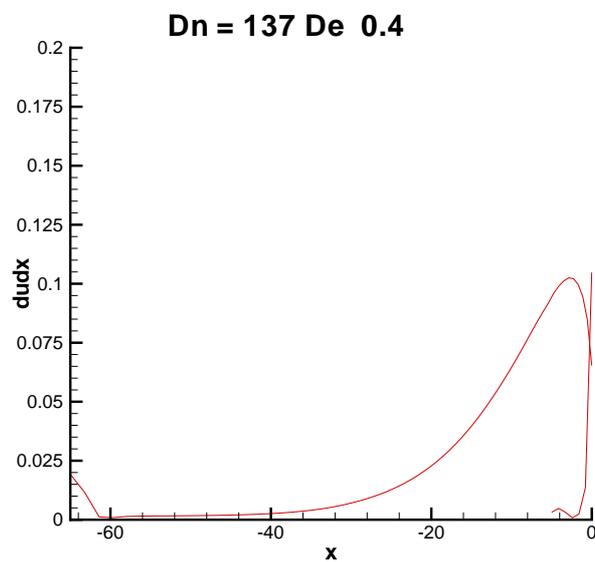


FIGURE 5.143 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 137$  et  $De = 0.4$

Les figures 5.144 à 5.191 montrent la tendance de la formation des paires de vortex contre-rotatifs et les profils de vitesses pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$ ,  $De = 0.2$ ,  $De = 0.3$  et  $De = 0.4$ .

Nous observons que le modèle final de quatre vortex se dissipe plus promptement avec l'augmentation du nombre de Deborah, mais en comparaison avec tous les cas précédentes cet modèle se maintient par beaucoup de temps. Tous les vortex de cet modèle ont la même vitesse.

La formation de la paire de tourbillons supplémentaires, qui modifiant le modèle de quatre cellules à six cellules, se maintient plus temps le long de la zone de sortie du canal, alors que les vortex toujours ont une vitesse fiable; et arrive rapidement à plus petit nombre de Deborah. En effet, la configuration de six vortex contre-rotatifs est appréciée dès nombre de Deborah  $De = 0.1$ , situation que ne arrivé pas avant.

La plus haut vitesse du modèle initial de deux vortex est observée à la sortie de la zone courbée de la conduite, mis elle diminue avec l'augmentation du nombre de Deborah.

En fin, les figures N° 5.192 à N° 5.195 présentent les graphiques  $du/dx$  via à vis de  $x$  de l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$ ,  $0.2$ ,  $0.3$  et  $0.4$ , dans elles nous apprécions que la valeur maximale de  $du/dx$  se atteindre aussi à la sortie de la zone courbée de la conduite. Cette valeur est supérieure que pour tous les cas de l'écoulements non-newtoniens. La décroître de la valeur maximale de  $du/dx$  se produire doucement et a la sortie de la conduite une petite perturbation est présentée.

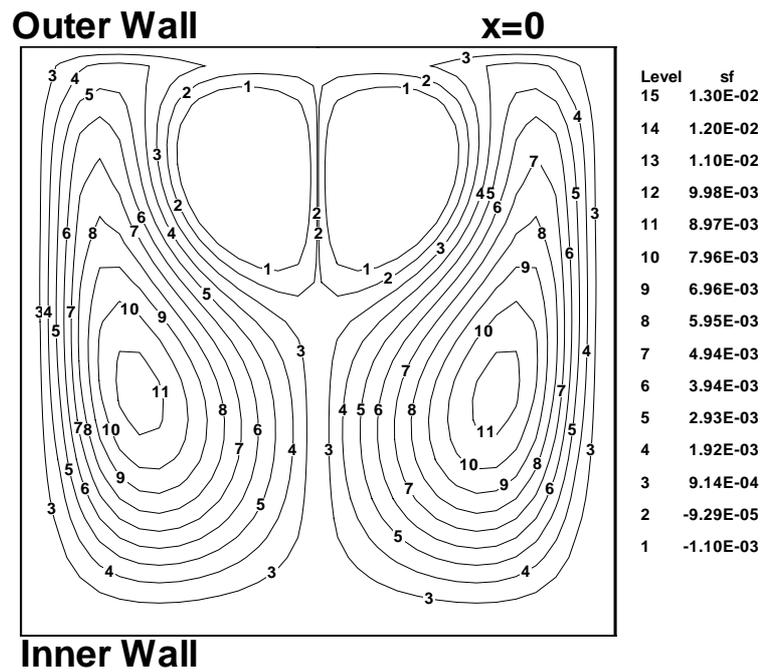


FIGURE 5.144 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

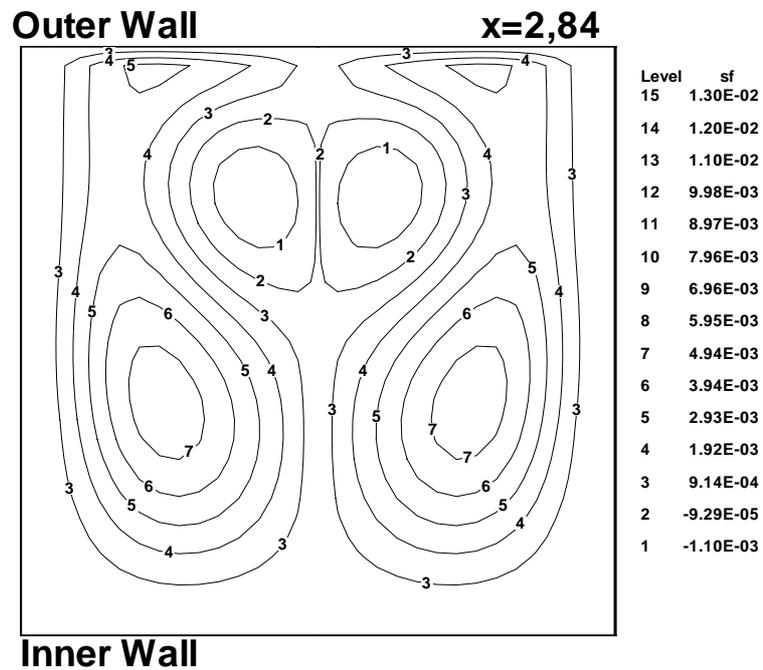


FIGURE 5.145 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

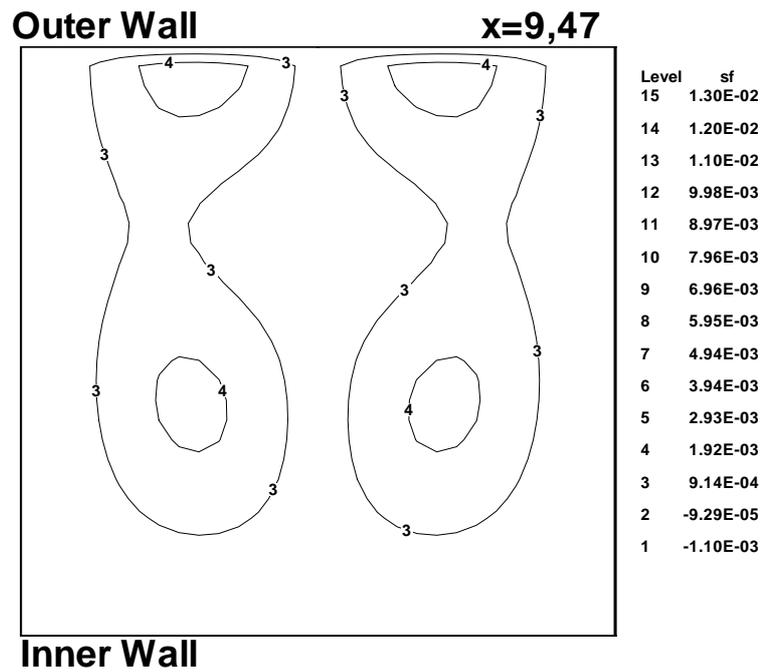


FIGURE 5.146 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

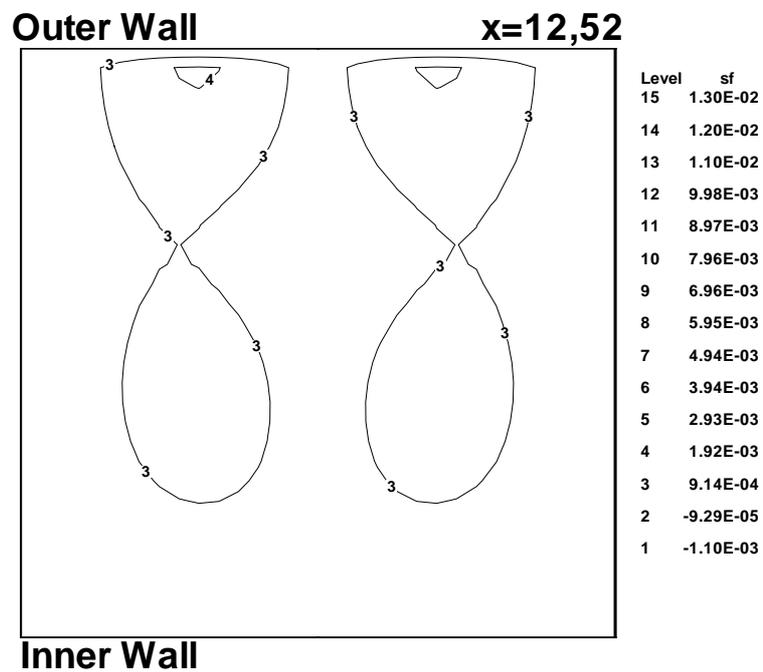


FIGURE 5.147 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

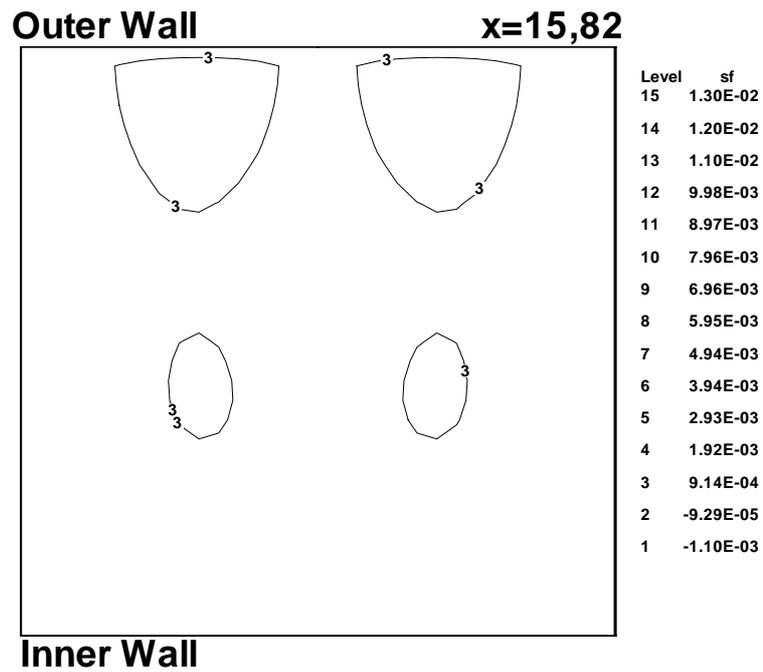


FIGURE 5.148 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

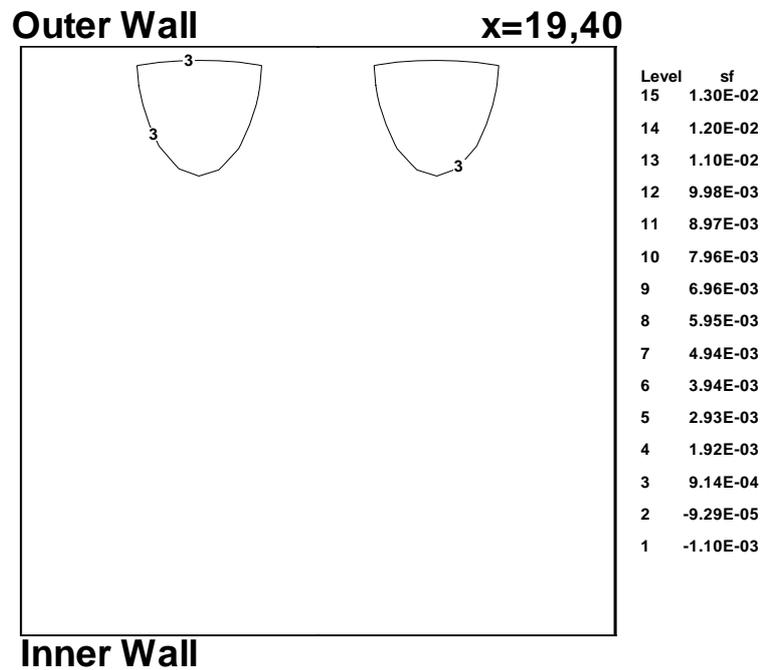


FIGURE 5.149 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

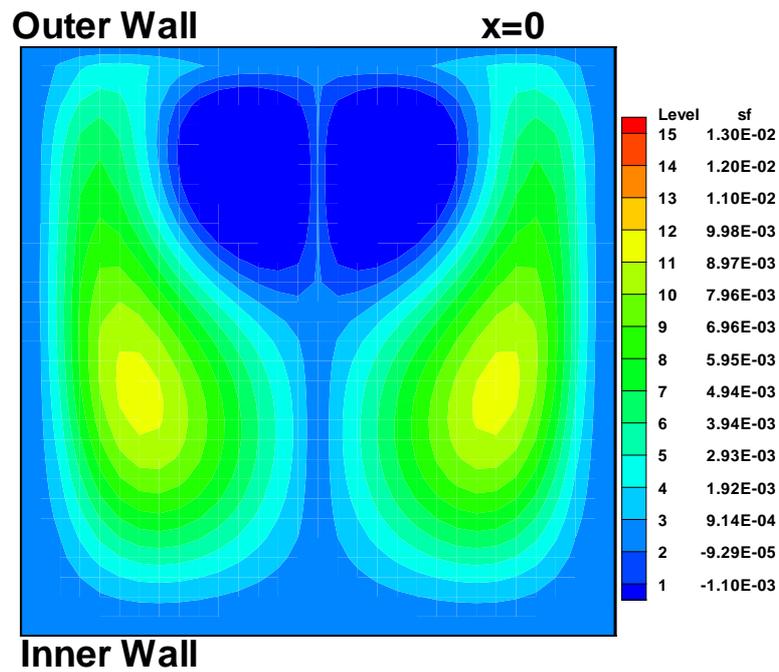


FIGURE 5.150 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

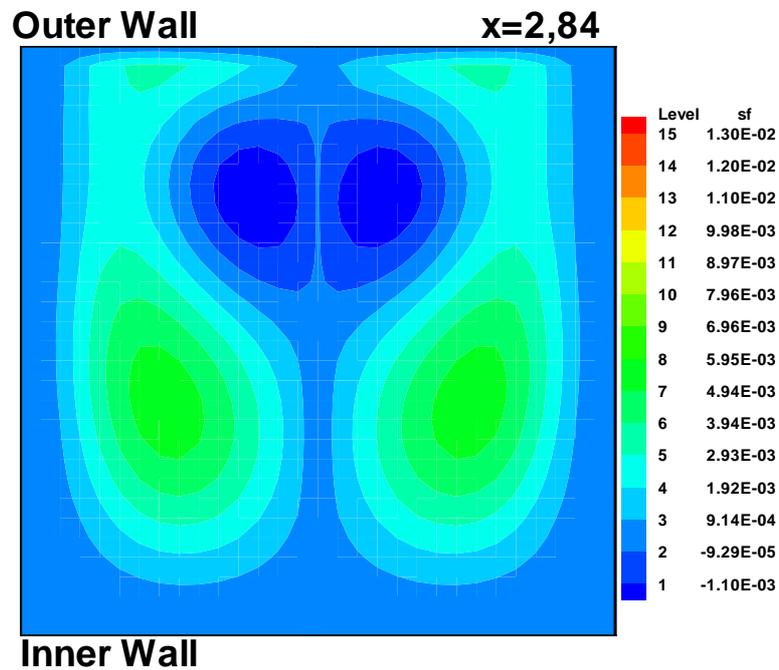


FIGURE 5.151 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

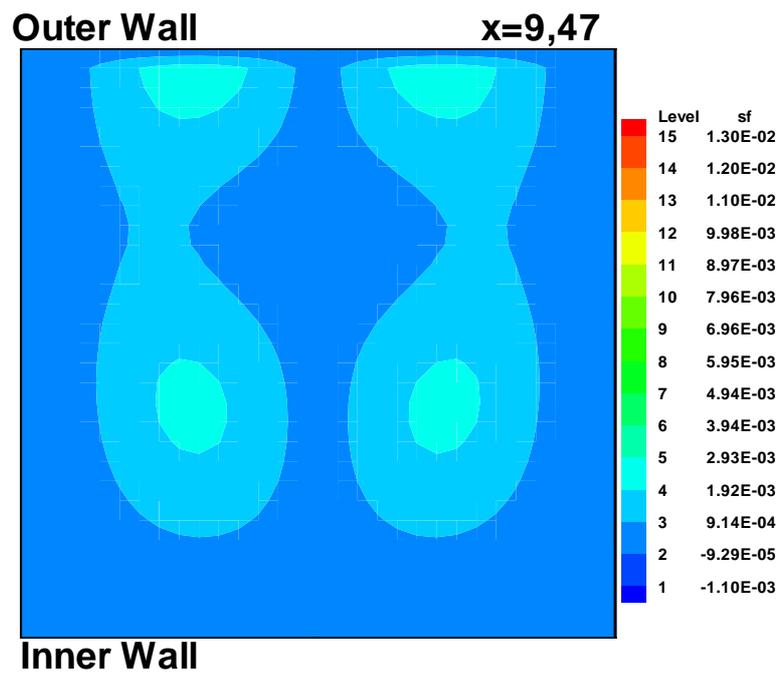


FIGURE 5.152 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

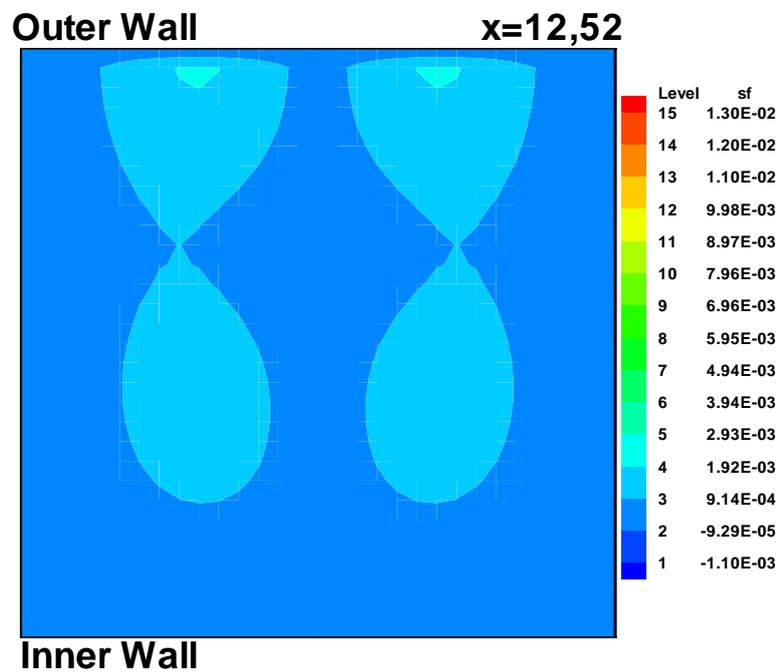


FIGURE 5.153 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

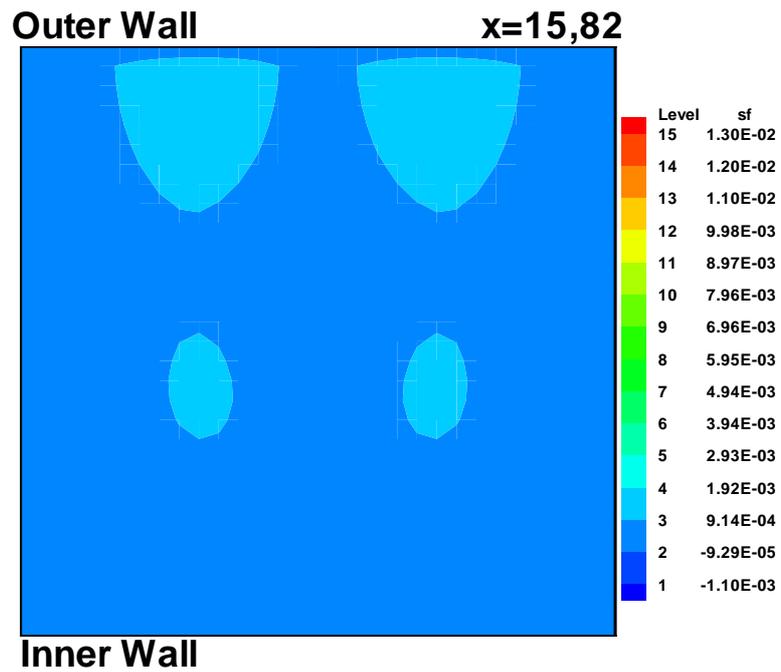


FIGURE 5.154 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

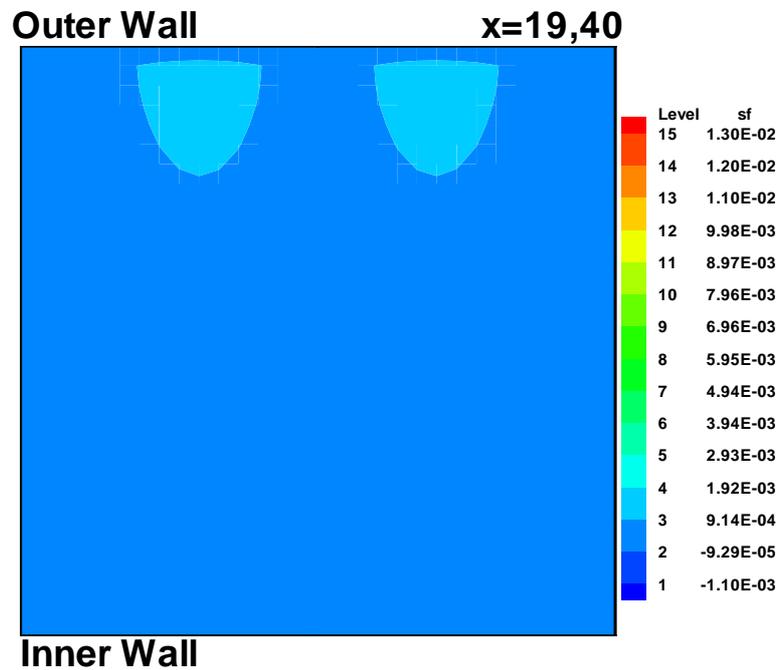


FIGURE 5.155 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

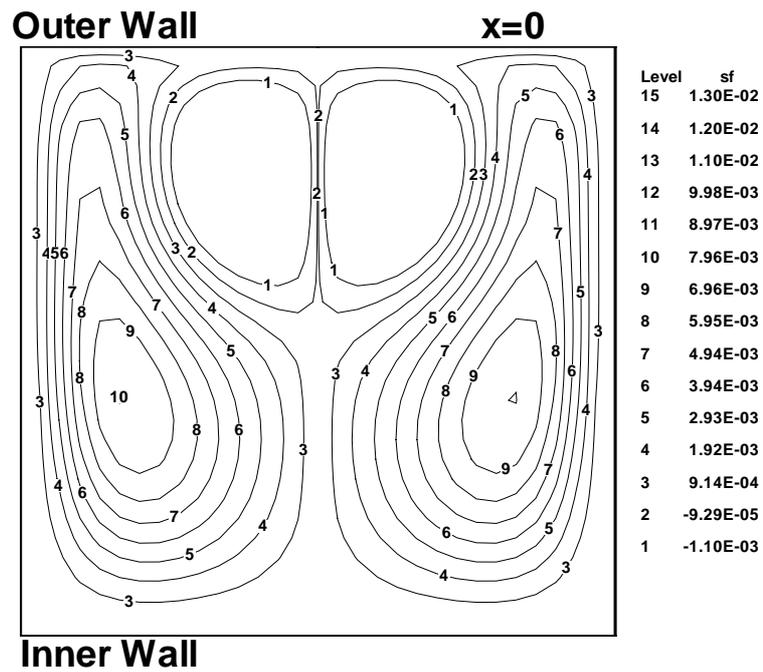


FIGURE 5.156 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

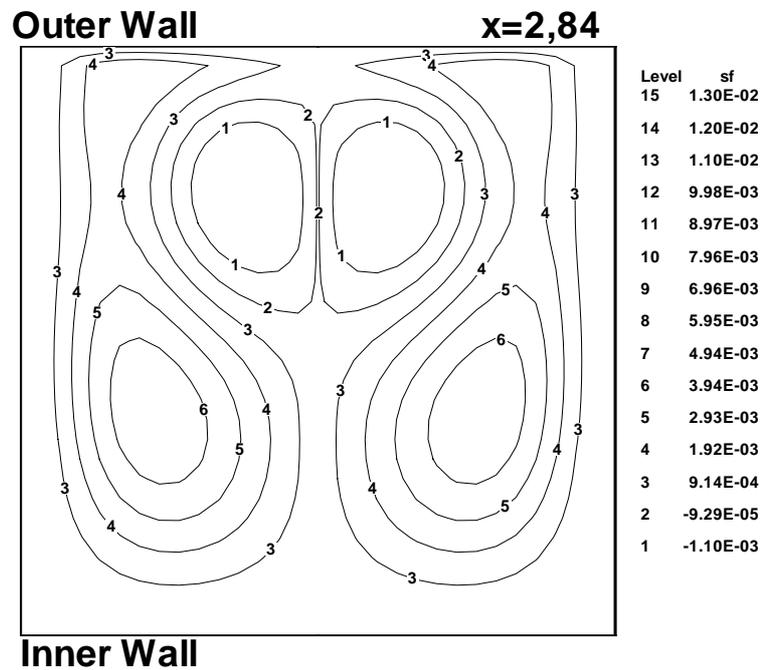


FIGURE 5.157 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

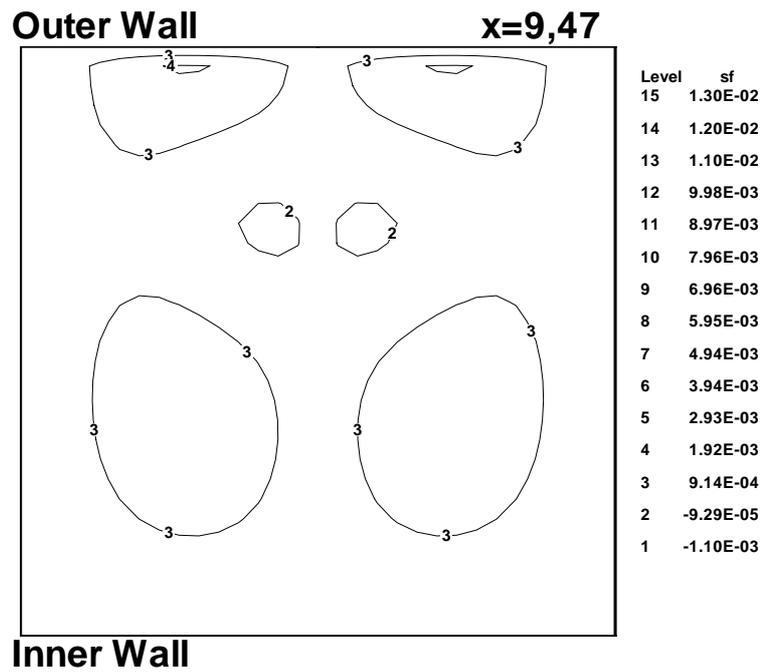


FIGURE 5.158 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

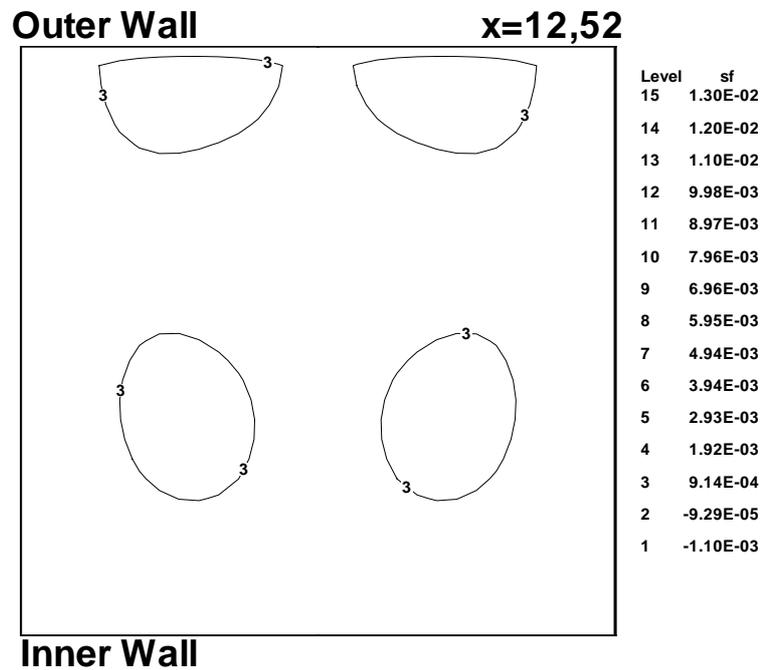


FIGURE 5.159 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

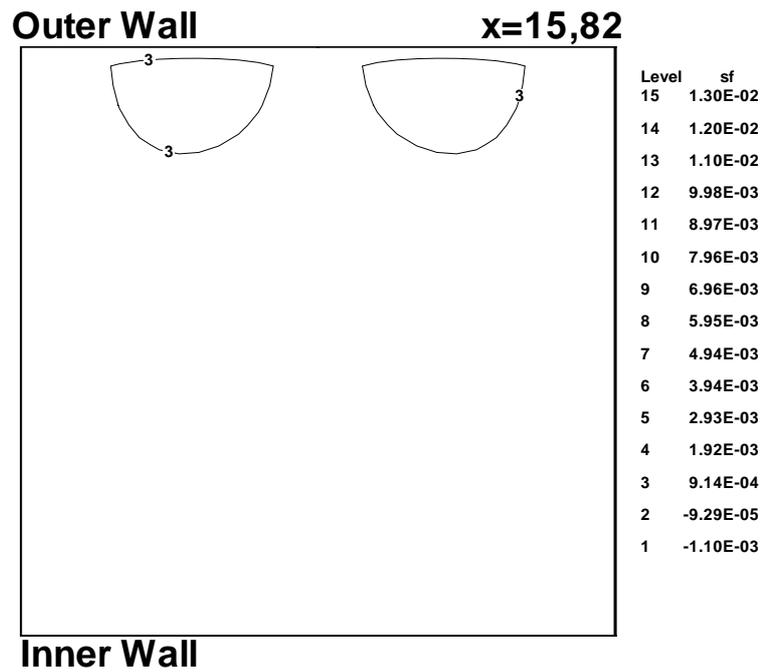


FIGURE 5.160 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

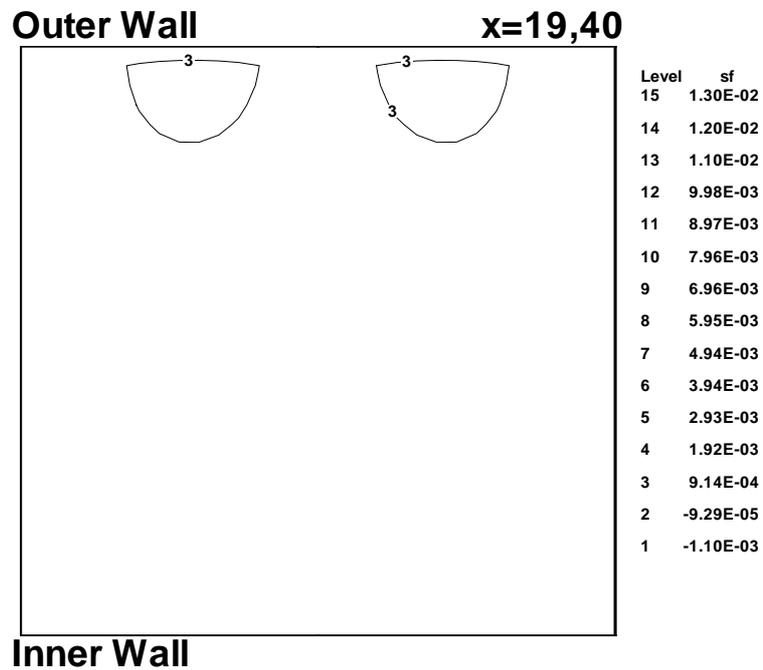


FIGURE 5.161 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

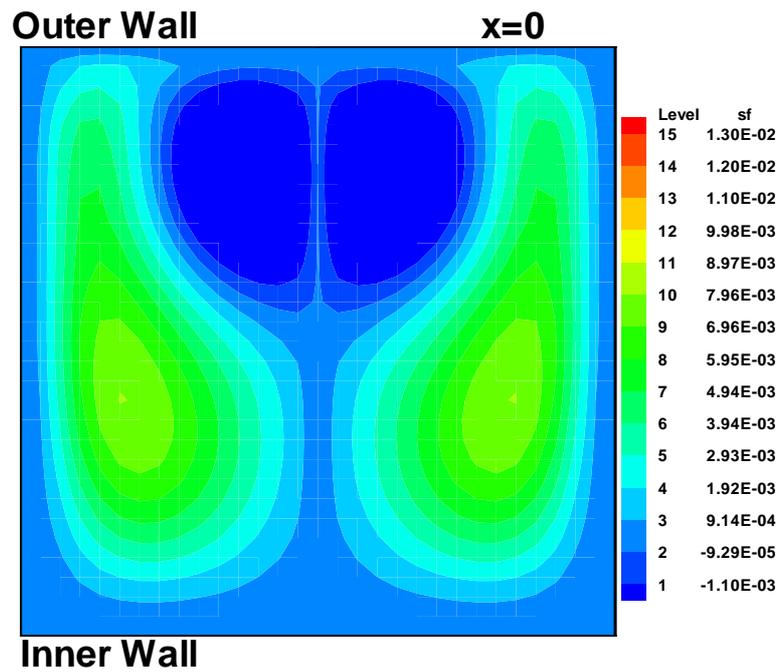


FIGURE 5.162 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

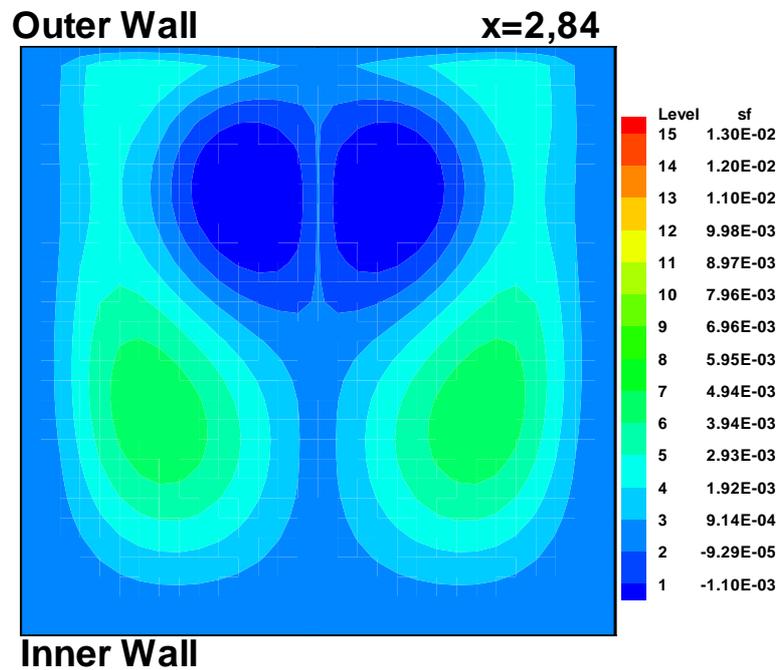


FIGURE 5.163 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

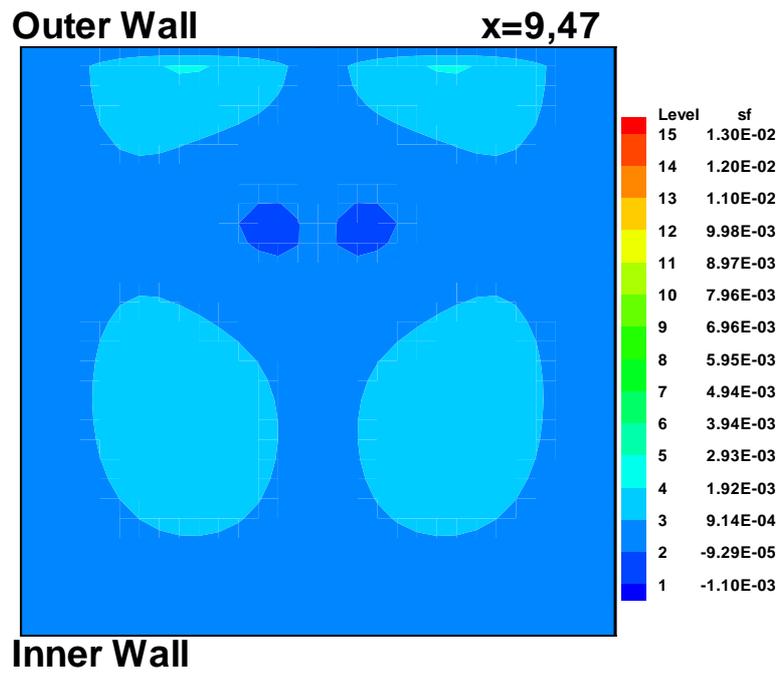


FIGURE 5.164 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

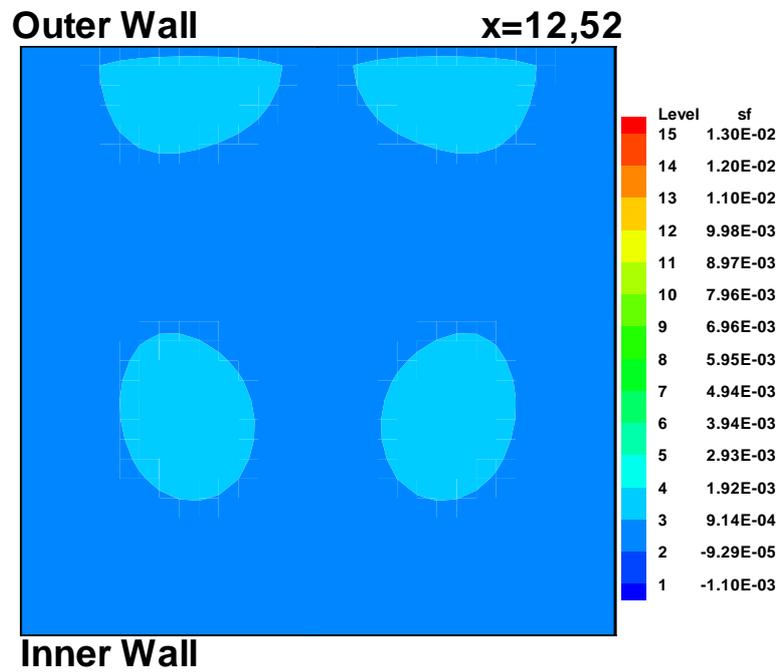


FIGURE 5.165 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

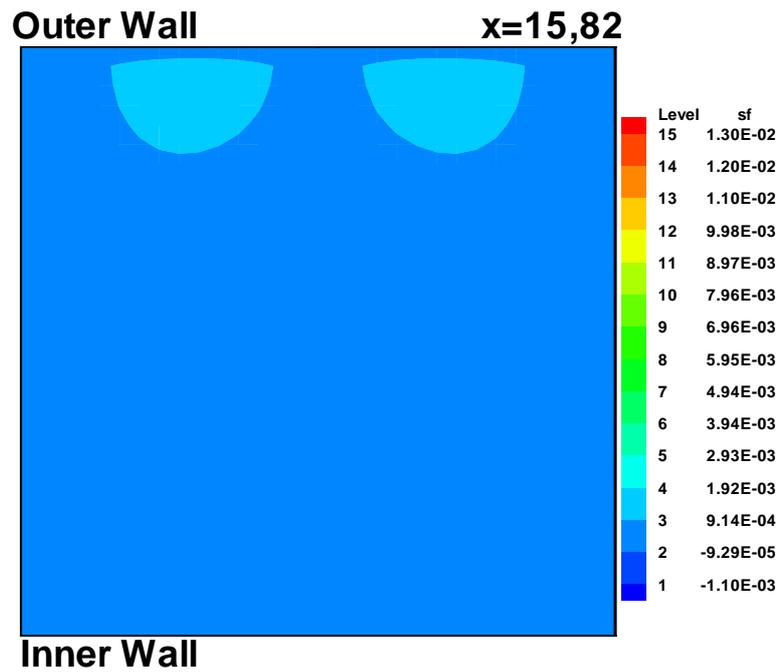


FIGURE 5.166 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

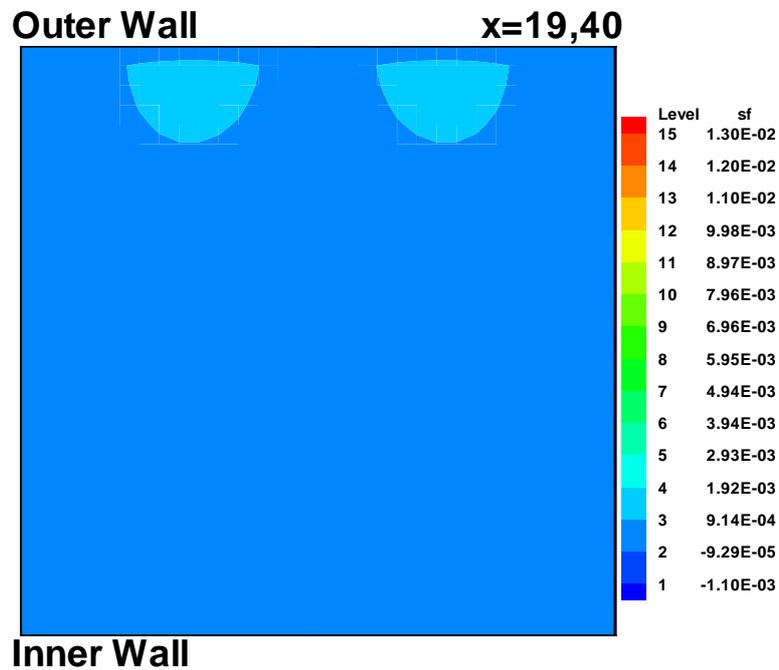


FIGURE 5.167 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

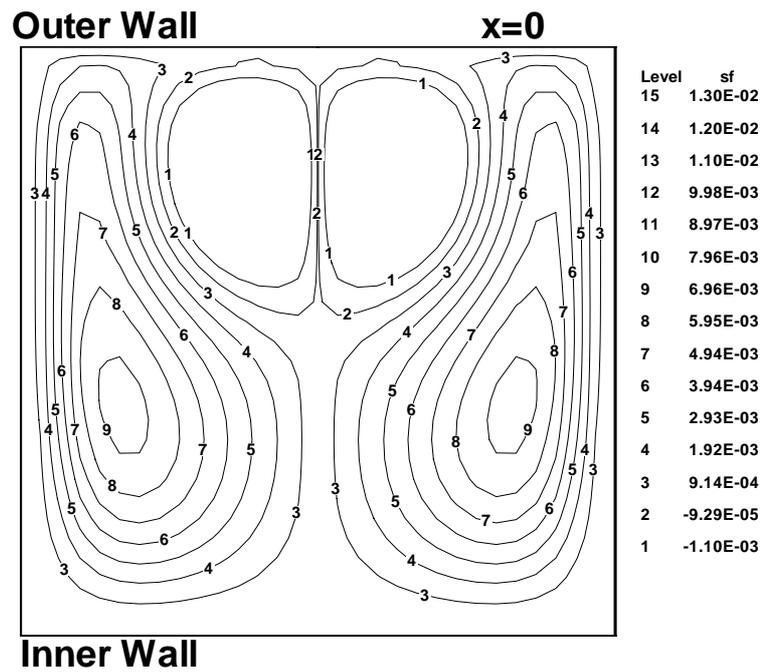


FIGURE 5.168 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

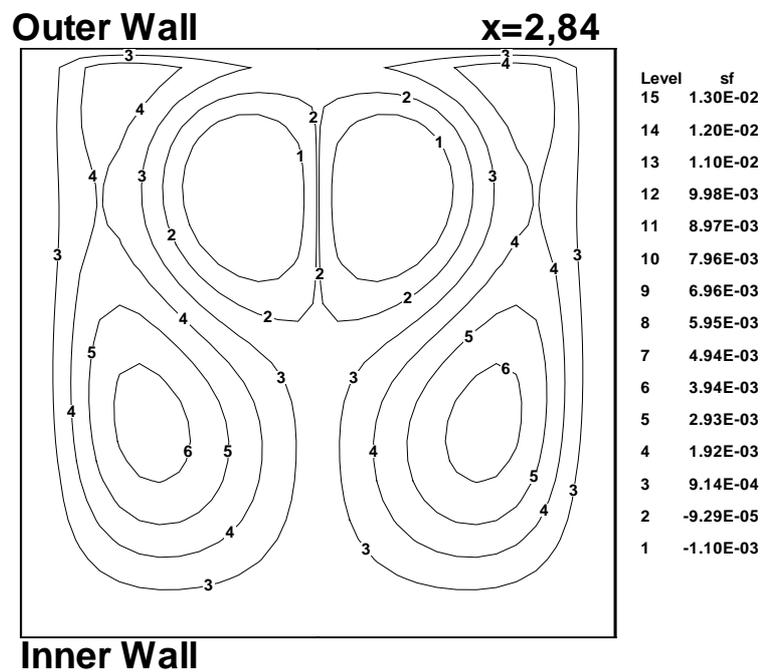


FIGURE 5.169 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

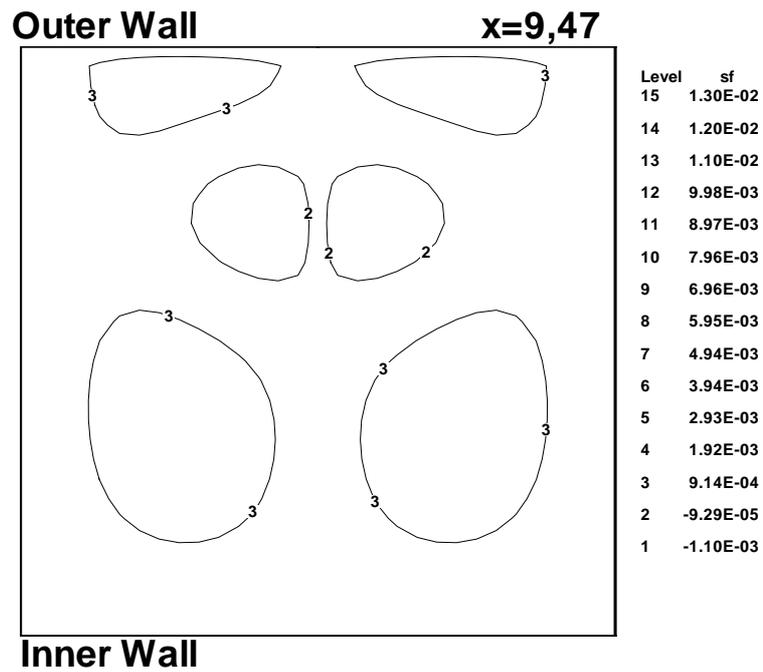


FIGURE 5.170 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

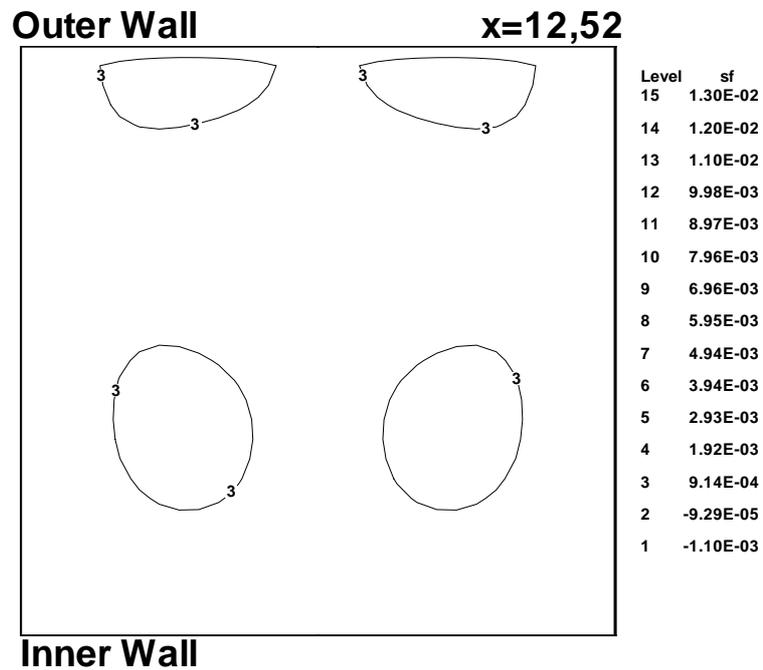


FIGURE 5.171 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

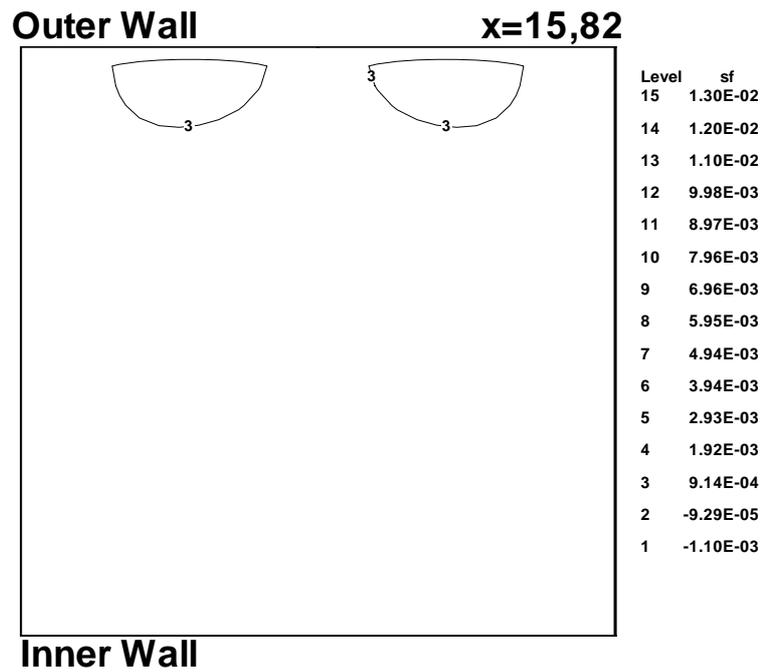


FIGURE 5.172 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

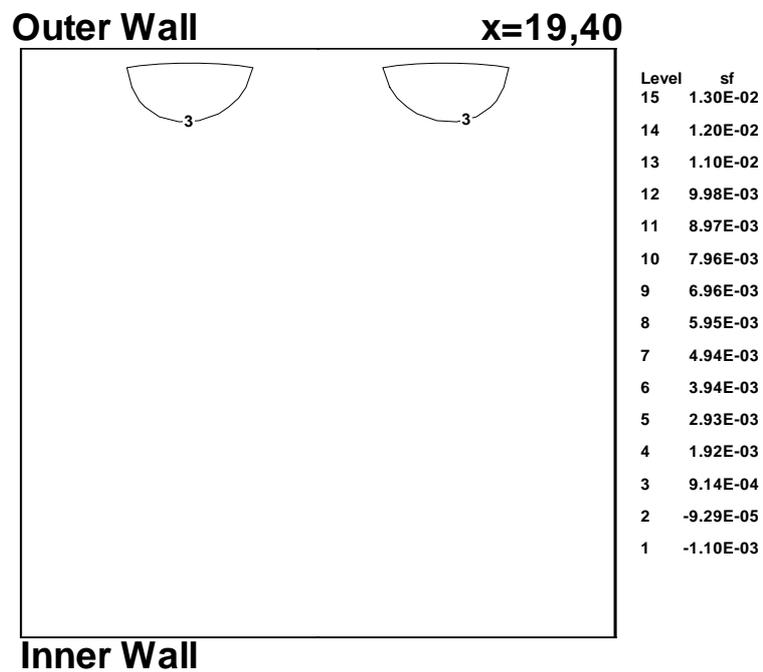


FIGURE 5.173 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

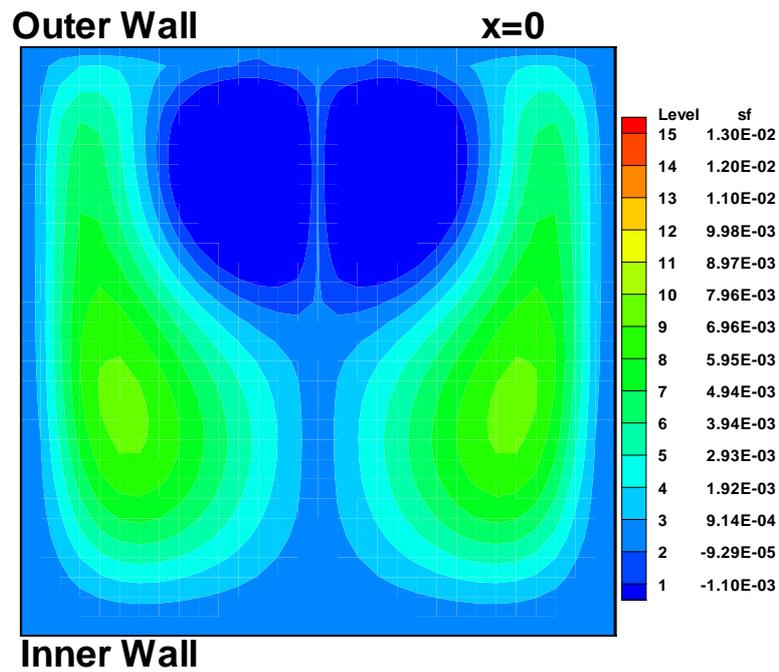


FIGURE 5.174 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

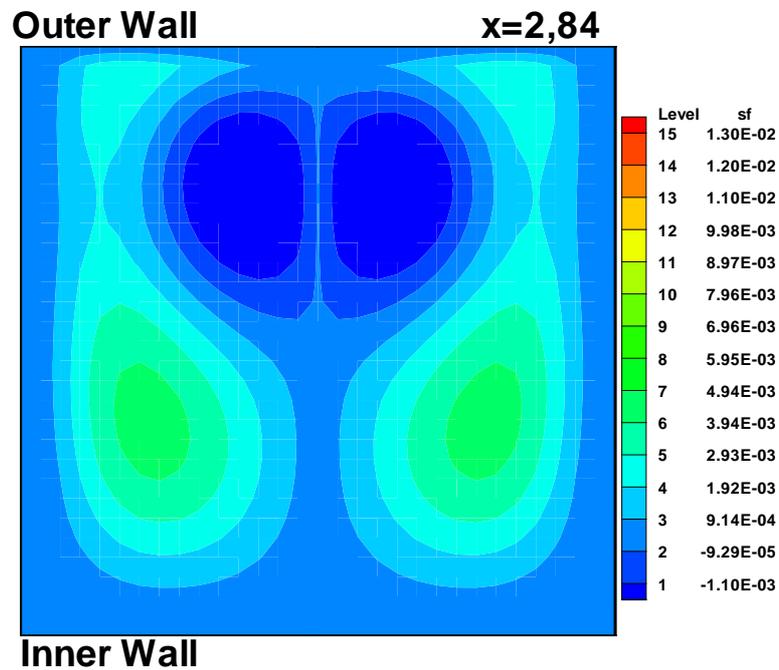


FIGURE 5.175 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

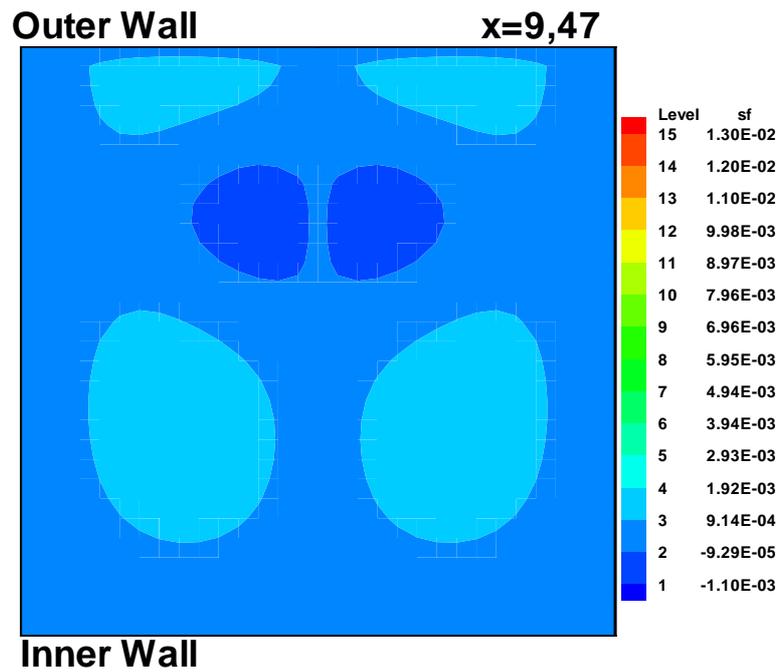


FIGURE 5.176 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

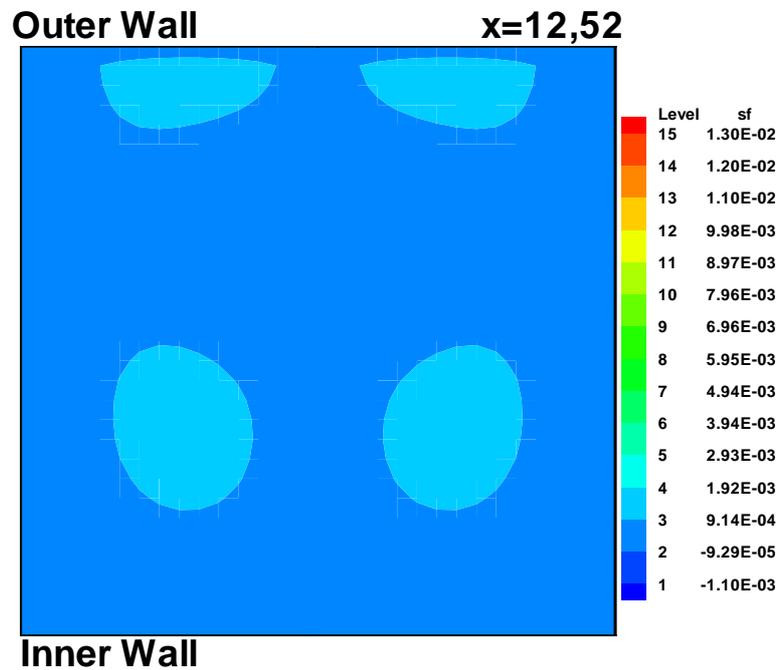


FIGURE 5.177 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

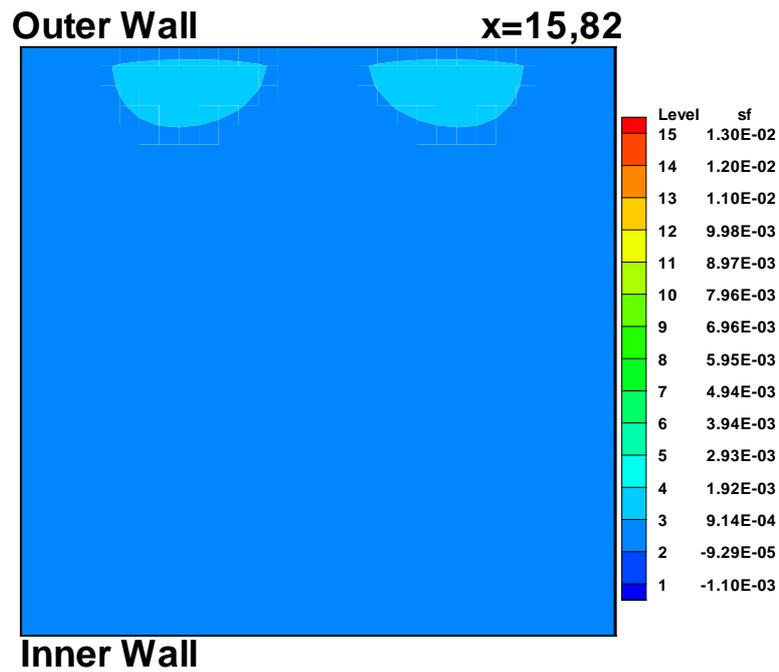


FIGURE 5.178 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

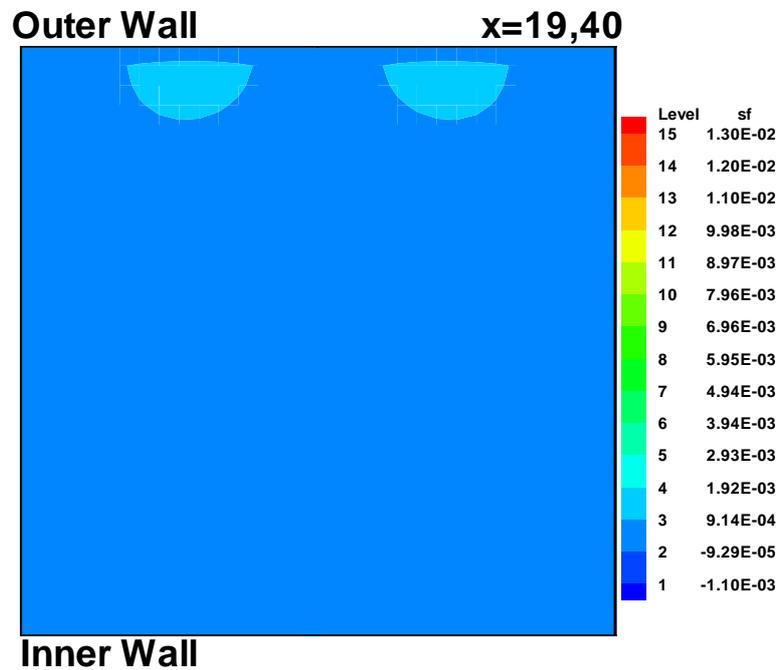


FIGURE 5.179 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

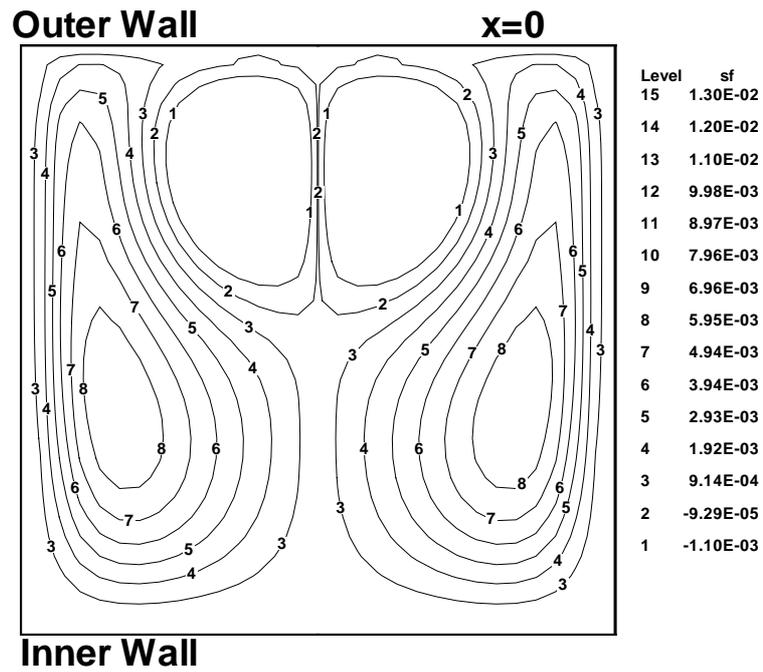


FIGURE 5.180 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

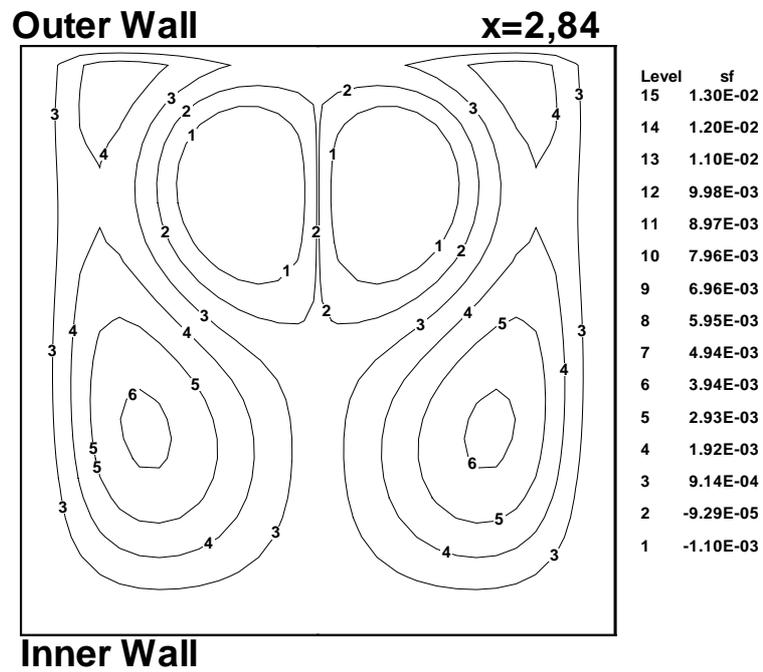


FIGURE 5.181 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

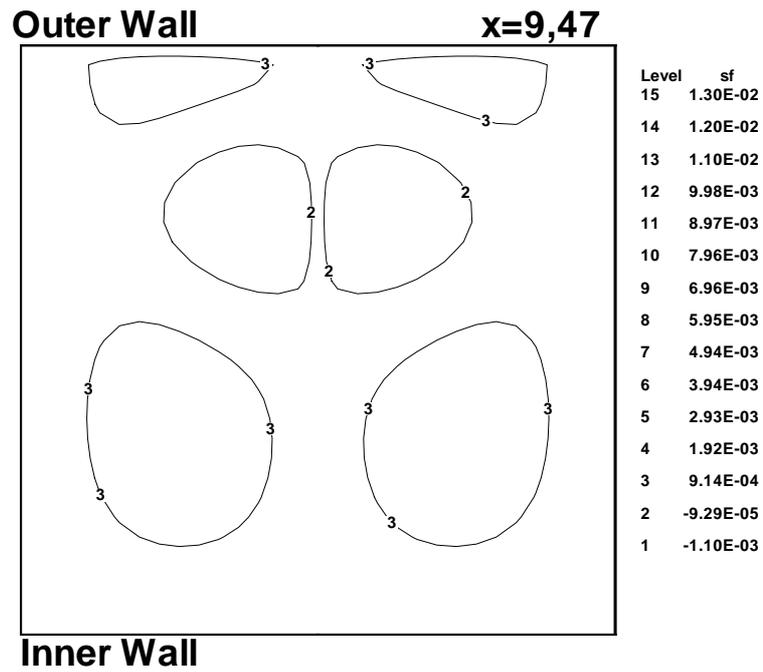


FIGURE 5.182 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

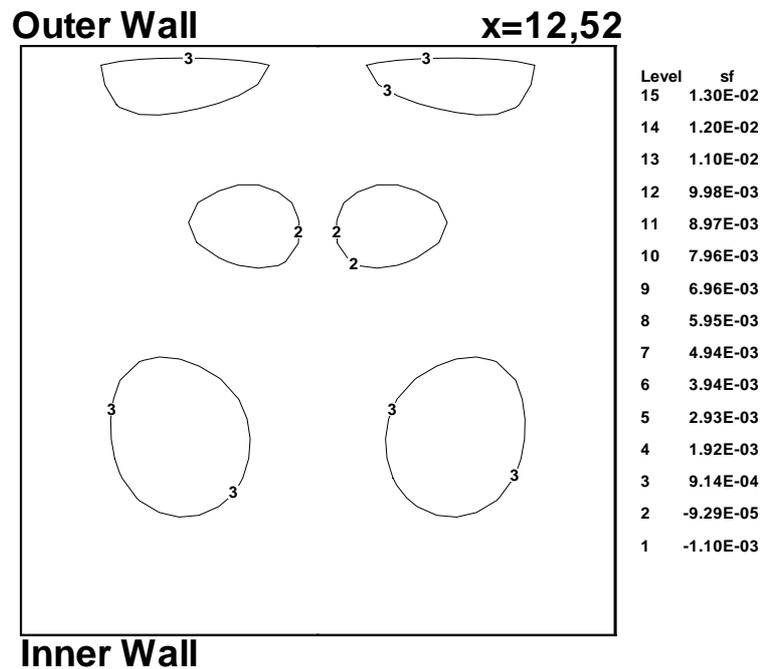


FIGURE 5.183 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

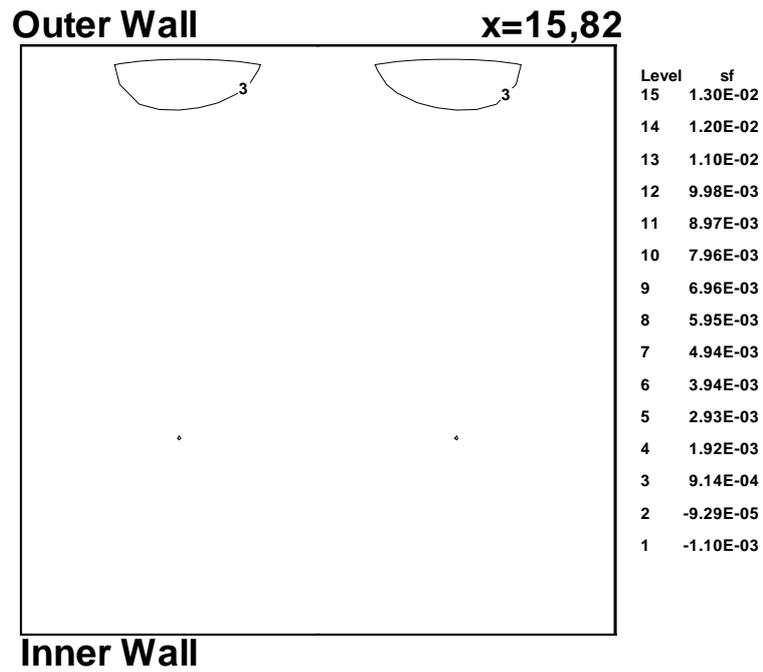


FIGURE 5.184 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

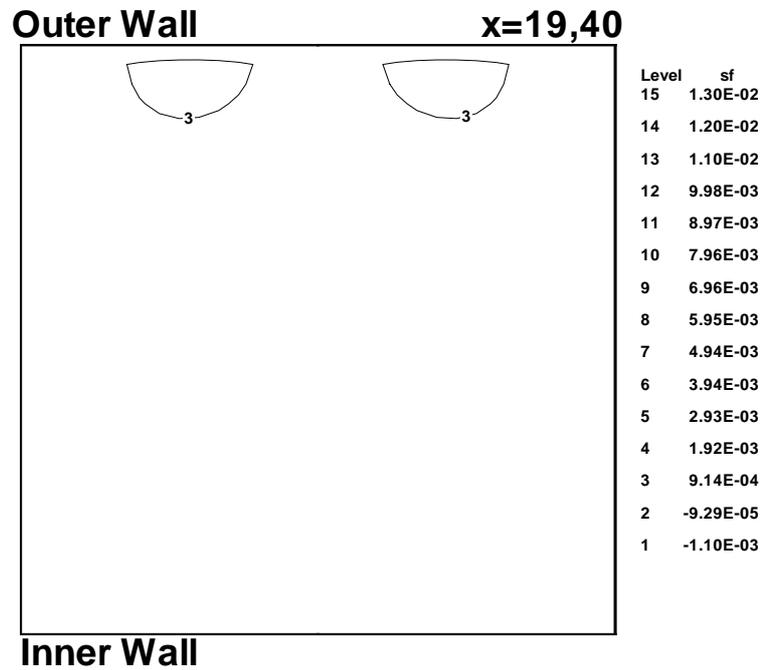


FIGURE 5.185 – Lignes de courant de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

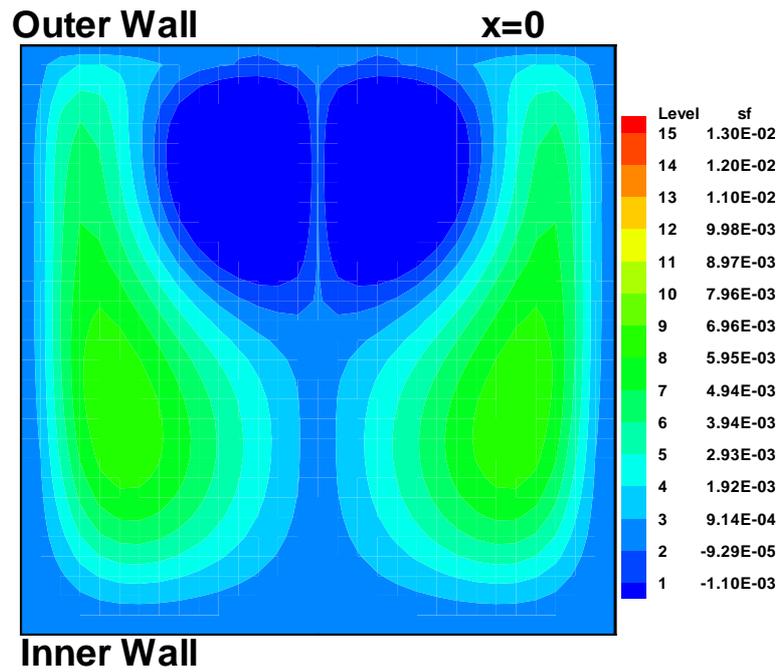


FIGURE 5.186 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 0$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

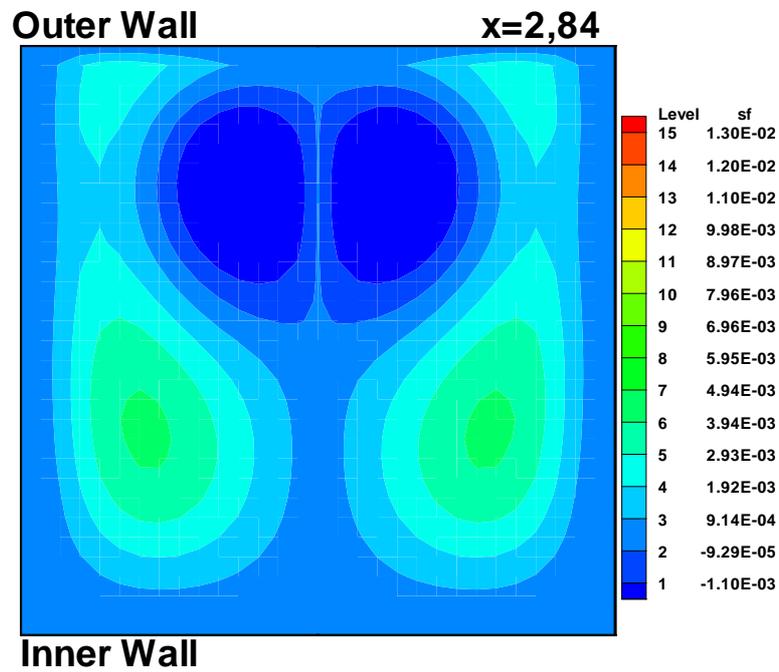


FIGURE 5.187 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 2.84$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

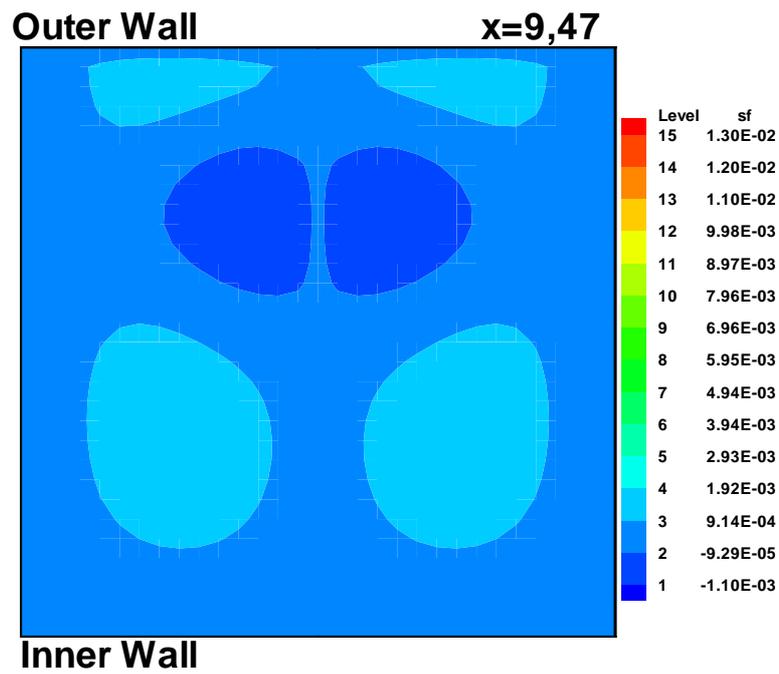


FIGURE 5.188 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 9.47$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

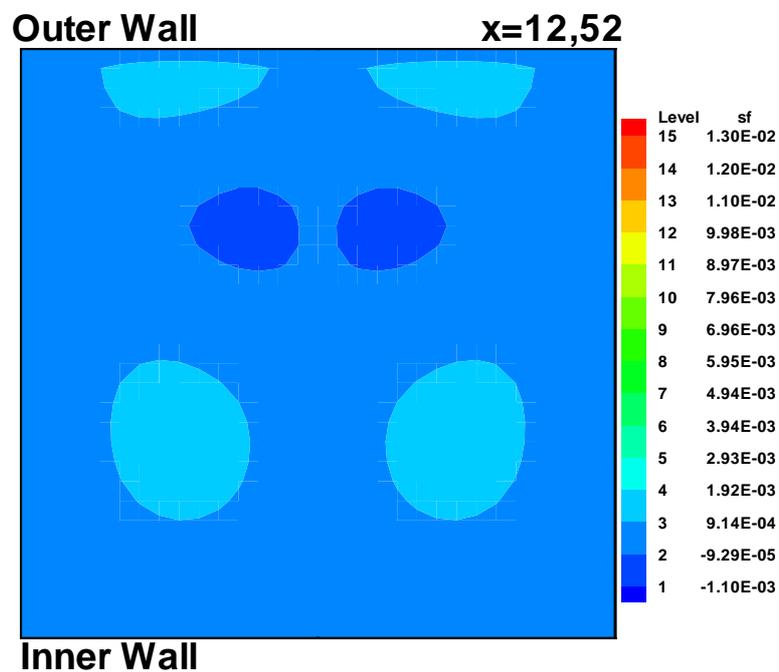


FIGURE 5.189 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 12.52$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

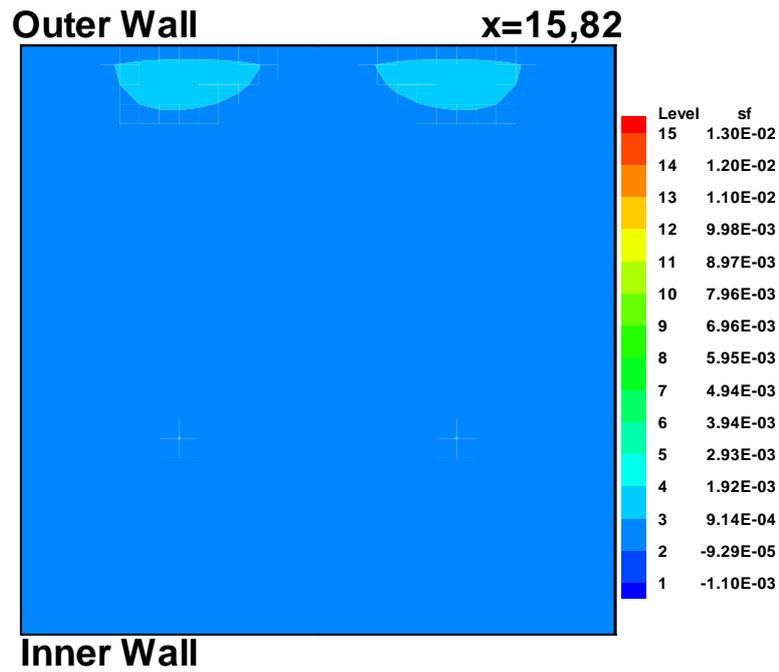


FIGURE 5.190 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 15.82$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

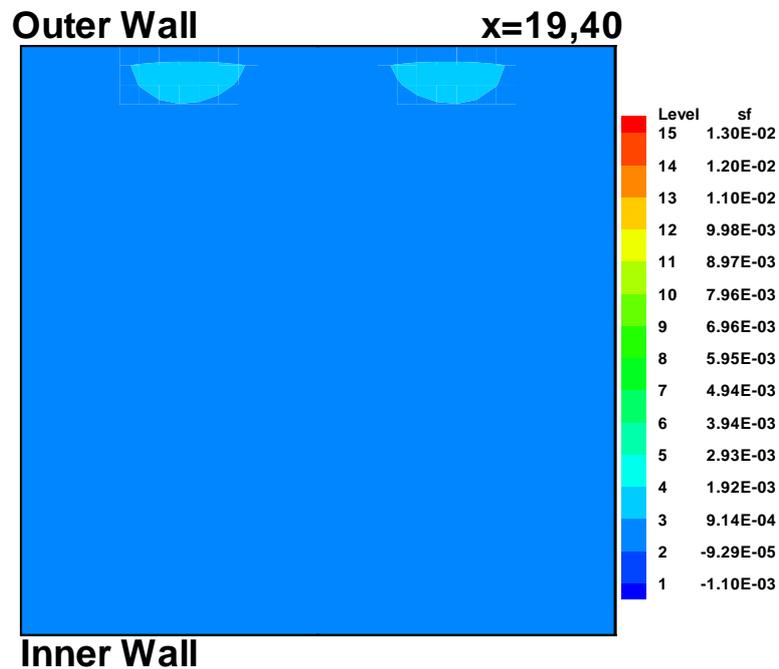


FIGURE 5.191 – Les profils de vitesses de l'écoulement non-newtonien à la position  $x = 19.40$ , pour  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

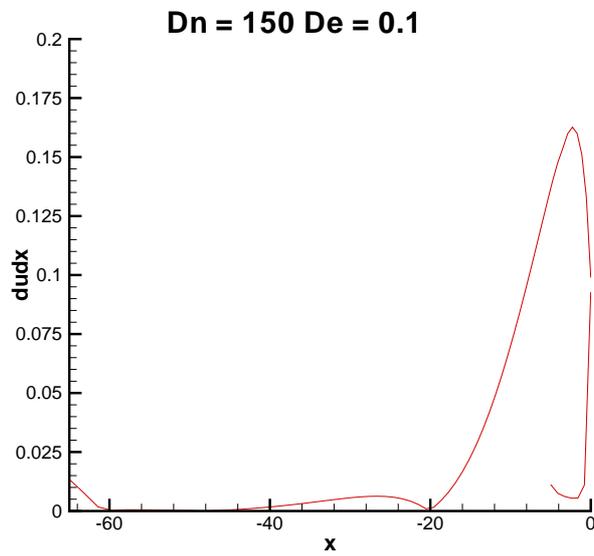


FIGURE 5.192 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 150$  et  $De = 0.1$

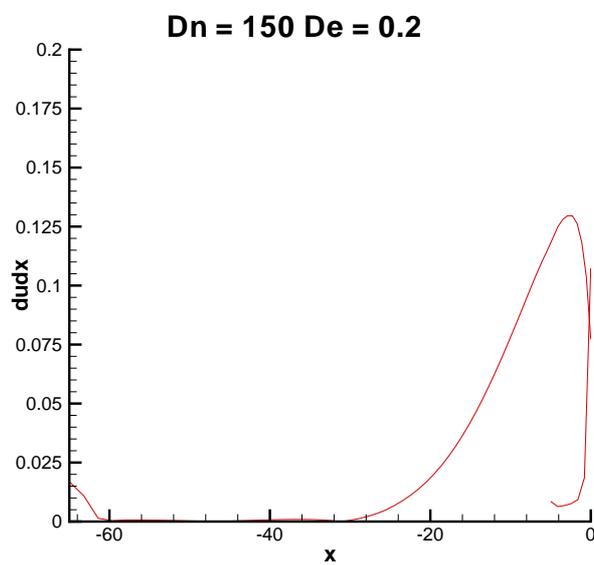


FIGURE 5.193 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 150$  et  $De = 0.2$

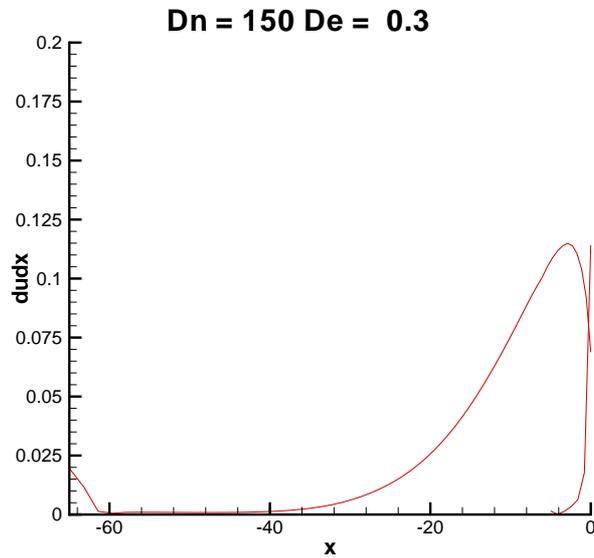


FIGURE 5.194 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 150$  et  $De = 0.3$

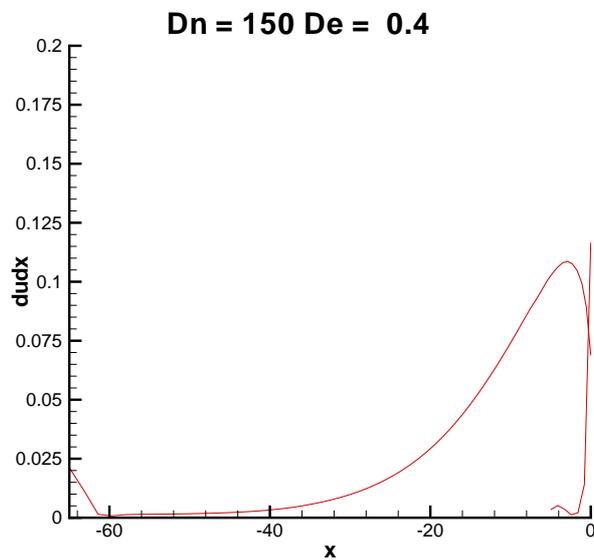


FIGURE 5.195 – La dérivée de la vitesse en fonction du déplacement pour l'écoulement non-newtonien avec  $Dn = 150$  et  $De = 0.4$

Pour le fluide viscoélastique, dans tous les cas étudiés, la transition du modèle de deux vortex au modèle de quatre vortex se produit à la sortie de la zone de courbure du canal et la déformation de la structure des tourbillons se produit dans la zone de sortie du canal.

Nous avons observé qu'au fur et à mesure qu'augmente le nombre de Dean les deux vortex additionnels restent davantage plus de temps dans la zone de sortie du canal, pour ensuite disparaître. A la fin de cette zone de sortie les deux vortex additionnels apparaissent de nouveau, pour ensuite disparaître rapidement ; cette situation n'arrive pas avec le fluide newtonien.

Aussi, nous avons apprécié que par le cas du nombre de Deborah  $De = 0.3$ , avec la augmentation de longueur de la zone de sortie a 65, la tendance de la formation de vortex s'est maintenue la même que pour la conduite originale.

Les tableaux 6, 7, 8 et 9 indiquent la quantité des vortex observés pour des nombres de Deborah  $De = 0.1$ ,  $De = 0.2$ ,  $De = 0.3$  et  $De = 0.4$ , respectivement, avec des nombres de Dean  $Dn = 125$ ,  $Dn = 137$  et  $Dn = 150$ , et les différentes distances dans le canal de sortie, pour le le fluide viscoélastique.

Tableau 6.

$De = 0.1$	$Dn = 125$	$Dn = 137$	$Dn = 150$
$x = 0$	2	4	4
$x = 2.84$	2	2	6
$x = 9.47$	2	2	4
$x = 12.52$	2	2	4
$x = 15.82$	2	2	4
$x = 19.40$	2	2	2

Tableau 7.

$De = 0.2$	$Dn = 125$	$Dn = 137$	$Dn = 150$
$x = 0$	4	4	4
$x = 2.84$	6	4	4
$x = 9.47$	2	4	6
$x = 12.52$	2	4	4
$x = 15.82$	2	2	2
$x = 19.40$	2	2	2

Tableau 8.

$De = 0.3$	$Dn = 125$	$Dn = 137$	$Dn = 150$
$x = 0$	4	4	4
$x = 2.84$	4	6	6
$x = 9.47$	4	6	6
$x = 12.52$	4	4	4
$x = 15.82$	4	2	2
$x = 19.40$	2	2	2

Tableau 9.

$De = 0.4$	$Dn = 125$	$Dn = 137$	$Dn = 150$
$x = 0$	4	4	4
$x = 2.84$	6	6	6
$x = 9.47$	4	6	6
$x = 12.52$	4	4	6
$x = 15.82$	4	2	2
$x = 19.40$	2	2	2

## Chapitre 6

# Conclusions et recommandations

L'écoulement tridimensionnel des fluides newtoniens et viscoélastiques (Phan-Thien-Tanner) au travers d'une conduite courbée de  $180^\circ$  de section transversale carrée est simulé numériquement.

La configuration de la géométrie est similaire à la géométrie de Bara et al. (1992), Helin (2006), Boutabaa et al. (2009) et Helin et al. (2009), mais modifiée avec une région d'entrée linéaire de 5 et avec une plus grande région de sortie linéaire de 65.

Les équations cartésiennes qui régissent le comportement des écoulements sont transformées en coordonnées orthogonales généralisées et résolues par une méthode numérique : la méthode des volumes finis.

La vitesse initiale, la pression et la température ont été imposées à l'entrée pour l'air. Puis, il n'y a pas d'effet de gravité sur le fluide et les conditions d'adhérence sont imposées sur les parois ( $V = 0$ ). Finalement, la pression à la sortie de la conduite a été fixée égale à la pression atmosphérique.

La gamme du nombre de Dean étudiée est limitée aux valeurs  $Dn = 125$ ,  $Dn = 137$  et  $Dn = 150$ , et les valeurs du nombre de Deborah sont égales à  $De = 0.1$ ,  $De = 0.2$ ,  $De = 0.3$  et  $De = 0.4$ .

Préalablement, nous sommes parties d'une discrétisation spatiale préliminaire de la géométrie en quadrilatères, à partir desquels nous avons construit de nouveaux maillages de cellules, où une nouvelle discrétisation spatiale est faite, sous forme intégrale, qui permet de résoudre des équations simplifiées par un processus itératif.

Pour la discrétisation temporelle, nous avons appliqué la méthode mise au point par Mompean et Deville (1997) qui est une adaptation de l'algorithme "Marker and Cell".

Les résultats obtenus pour des écoulements newtoniens et viscoélastiques sont validés en comparant les lignes de courant et la formation des vortex avec des résultats disponibles dans la littérature.

Simultanément, l'analyse s'étend à toute la géométrie en comparant les résultats obtenus à différents nombres de Dean et Deborah. A travers les résultats obtenus, nous pouvons émettre les conclusions suivantes :

1.- Les études réalisées des écoulements dans une conduite courbée de  $180^\circ$  de section carrée, avec la réduction de la longueur du canal d'entrée à 5 et avec l'extension du canal de sortie linéaire à 65, ont prouvé que la tendance de la formation des paires de vortex contre-rotatifs est semblable à celle obtenue par Boutabaa et al. (2009) et Helin et al. (2009), pour la conduite originale.

2.- Les simulations faites montrent l'influence des forces d'inertie et des forces centrifuges dans le développement de l'écoulement principal, et montrent la présence de zones instationnaires de l'écoulement tout au long du canal de sortie.

3.- Cette étude confirme que dans les deux cas (fluides newtoniens et non-newtoniens) le nombre des vortex dépend du nombre de Dean. Nous avons vérifié que pour le cas du fluide viscoélastique, le passage du modèle de deux vortex à quatre vortex apparaît et disparaît plus tôt que pour le fluide newtonien. En fait, pour  $Dn = 150$ , nous avons observé l'apparition de tourbillons supplémentaires, plus rapidement qu'à  $Dn = 137$  et  $Dn = 125$ . Ceci confirme les résultats obtenus par Bara et al. (1992), Boutabaa et al. (2009) et Helin et al. (2009), qui ont montré l'évolution du modèle de quatre cellules jusqu'à la sortie de la conduite courbée.

4.- L'étude a montré que, tant pour le fluide newtonien que pour le fluide non-newtonien, le nombre de vortex, leurs dimensions et le moment de leur apparition dépendent du nombre de Dean et du nombre de Deborah.

5.- Nous avons observé aussi, que pour le cas d'un fluide viscoélastique, la formation des paires supplémentaires de tourbillons et la transition du modèle de quatre tourbillons au modèle de six tourbillons se produit plus rapidement quand le nombre de Deborah est plus élevé.

6.- Les quatre tourbillons demeurent dans la partie initiale du canal de sortie, sauf pour le cas d'un fluide newtonien avec  $Dn = 125$ , et également pour le cas d'un fluide viscoélastique avec  $Dn = 125$  et  $De = 0.1$ . En outre, une déformation de la structure des tourbillons se produit dans la dernière zone.

7.- En fluides newtoniens, les six tourbillons se forment à  $Dn = 150$ , alors qu'en fluides non-newtoniens, les six tourbillons se forment par tous les nombres de Dean. Pour le nombre de Deborah, les six tourbillons se forment à partir du  $De = 0.2$  avec  $Dn = 125$  et  $Dn = 137$ , et à partir du  $De = 0.1$  avec  $Dn = 150$ . Dans tous les cas avec  $De = 0.3$  et  $De = 0.4$  les six tourbillons apparaissent. Aussi, la déformation de la structure des tourbillons dans la dernière zone se produit.

8.- L'évolution de  $du/dx$  en fonction de  $x$  montre qu'à la fin de la conduite, l'accélération devient quasiment nulle, car les tourbillons se dissipent.

Comme perspectives, il serait judicieux d'étudier plus en détail la formation des tourbillons dans la section de sortie pour des écoulements newtoniens et non-newtoniens. Ceci permettra d'étudier l'influence de la longueur du canal de sortie en fonction de l'augmentation des nombres de Dean et de Deborah.



# Bibliographie

- [1] W.R.Dean, *Fluid motion in a curved channel*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A containing papers of a Mathematical and Physical Character **121**(787), pp. 402-420, 1928.
- [2] R.Aris, *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, Dover Publications Inc., New York, 1962.
- [3] S.A.Berger, L.Talbot and L-S.Yao, *Flow in curved pipes*, Annu. Rev. Fluid Mech. **15**, pp. 461-512, 1983.
- [4] H.G.Cuming, *The secondary Flow in curved pipes report*, No. 2880 London, February 1952.
- [5] H.Ito, *Theory on laminar flow through curved pipes of elliptic and rectangular cross section*, Rep Inst High Speed Mech **1**, Tohoku Univ., Sendai, Japan, pp. 1-16, 1951.
- [6] A.Bhunia and C.L.Chen, *Flow Characteristics in a Curved Rectangular Channel With Variable Cross-Sectional Area*, J. Fluids Eng. **131**(9), 2009.
- [7] D.B.Breswster, P.Grosberg, A.H.Nissan, *The stability of viscous flow between horizontal concentric cylinders*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A **251**, pp. 76-91, 1959.
- [8] M.D.Kelleher, D.L.Flentie, R.J.Mckee, *Experimental study of secondary flow in a curved rectangular channel*, Trans ASME I : J. Fluids Eng. **102**(1), pp. 92-96, 1980.

- [9] P.M.Ligrani, R.D Niver, *Flow visualization of Dean vortices in a curved Channel with 40 to 1 aspect ratio*, Phys. Fluids **31**(12), pp. 3605-3417, 1988.
- [10] B.Leonard, *A stable accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation*, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 19, pp. 59-98, 1979.
- [11] J.Magnaudet, M. Rivero, and J. Fabre, *Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. , Part 1 steady straining flow*. J. Fluid. Mech., 284, pp. 97-135, 1995.
- [12] Y.Soh, *Developing fluid flow in a curved duct of square cross-section and its fully developed dual solution*, J. Fluid Mech. **188**, pp. 337-361, 1988.
- [13] B.Joseph, E.P Smith, R.J Alder, *Numerical treatment of laminar flow in helically coiled tubes of square cross section , Part I, stationary helically coiled tubes AIChE J. , 21*, pp. 965-974, 1975.
- [14] B.Bara, K.Nandakumar, J.H.Masliyah, *An experimental and numerical study of the Dean problem : flow development towards two-dimensional multiple solutions*, J. Fluid Mech. **244**, pp. 339-376, 1992.
- [15] H.Fellouah, A.Castelain, A.Ould El Moctar, H.Peerhossaini, *A numerical study of Dean instability in non-Newtonians fluids*, J. Fluids Eng. **128**, pp. 34-41, 2006.
- [16] W.Jitchote and A.M Robertson, *Flow of second order fluids in curves pipes*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **90**, pp. 91-116, 2000.
- [17] H.G. Sharman, A.Prakash, *Flow of a second-order fluid in a curved pipe*, department of mathematics, University de Roorkee, Roorkee) (19th congress on theoretical and applied mechanics, India, 1974. **546**, pp. 546-557, Vol. 8, N° 5, 1974.

- [18] P.J. Bowen, A. R. Davis and K. Walters, *On viscoelastic effects in swirling flows*, J. Non-Newtonian Fluid Mech **38**, pp. 113-126 (1991).
- [19] A.M.Robertson and S.J. Muller, *Flow of oldroyd-B fluids in curves pipes of circular and annular cross-section*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **31**, N°1, pp. 1-20, 1996.
- [20] R.H.Thomas and K.Walters *On the flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe under a pressure gradient*, J.Fluid Mech. **16**, pp. 228-242, 1963.
- [21] V.B. Sarin, *The steady laminar flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of vaying elliptic cross section*, Math Comput Modelling. **6**,N°3 pp. 109-121, 1997.
- [22] Y. Chen, H. Chen, J.Zhang, B. Zhang, *Viscoelastic flow in a curve channel :A similarity solution for the Oldroyd -B Fluid*, J. Appl. Math . Phys. **41**, 1990.
- [23] Cheng, K. Chen, J.Zhang, B. Zhang, *Viscoelastic flow in a curve channel :A similarity solution for the Oldroyd -B Fluid*, J. Appl. Math . Phys. **41**, 1990.
- [24] S.-C.Xue, N.Phan-Thien, R.I.Tanner, *Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **59**, pp. 191-213, 1995.
- [25] U.A.Al-Mubaiyedh, R.Sureshkumar, B.Khomami, *Energetic effects on the stability of viscoelastic dean flow*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **95**, pp. 277-293, 2000.
- [26] L.Thais, L.Helin, G.Mompeam, *Numerical simulation of viscoelastic flows with Oldroyd-B constitutive equation and novel algebraic stress model*, Newtonian Fluid Mech. **140**, pp. 145-158, 2006.

- [27] N.Phan-Thien, R.Zheng, *Viscoelastic flow in a curved channel : A similarity solutions for Oldroyd-B Fluid*, J. Appl. Math . Phys. **41**, pp. 766-781, 1990.
- [28] M.K.Zhang, X.R.Shen, J.F.Ma, B.Z.Zhang, *Flow of Oldroyd-B fluid in rotating curved square ducts*, J. Hydrodyn. **19**, pp. 36, 2007.
- [29] L.Helin, L.Thais, G.Mompean, *Numerical simulation of viscoelastic Dean vortices in a curve duct*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **156**, pp. 84-94, 2009.
- [30] M.Boutabaa, L.Helin, G.Mompean, L.Thais, *Numerical study of Dean vortices in developing Newtonian and viscoelastic flows through a curved duct of square cross-section*, CR Mecanique **337**, pp. 40-47, 2009.
- [31] M.Norouzi, M.H.Kayhani, M.R.H.Nobari, M.Karimi-Demneh, *Convective heat transfer of viscoelastic flow in a curved duct*, World Academy of Science, Engineering and Technology **56**, pp. 327, 2009.
- [32] S.B.Pope, *The calculation of turbulent recirculating flows in general orthogonal coordinates*, J. Comp. Phys. **26**, pp. 197-217, 1978.
- [33] V.S.Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere Publishing Corporation, New York. 1980.
- [34] D.Rajagopalan, R.C Amstrong, R.A.Brown, *Finit element methods for calculation of steady, viscoelatic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity*, J, Non-Newtonia Fluid Mech **36**, pp. 159-192, 1990.
- [35] F.H.Harlow, J.E.Welch, *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*, Phys. Fluids **8**, pp. 2182-2189, 1965.

- [36] K.Hossam, *Numerical prediction of a viscoelastic fluid flow a non-confined cylinder*, Thèses, 2008.
- [37] G.Mompeam and L.Thais, *Finite volume numerical simulation of viscoelastic flows in general orthogonal coordinates*, Math. Comput. Simul. **72**, pp.253-279, 1997.
- [38] G.Mompeam and M.Deville, *Unsteady finite volume numerical simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. **72**, pp. 253 - 279, 1997.