
Topologie Algébrique des espaces difféologiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 23 Juin 2014
pour l'obtention du

Doctorat de l'université Lille 1
(spécialité mathématiques pures)

par

Serap Gürer

Compoition du jury

Rapporteurs	Gregory Ginot	Université Paris 6
	Friedrich Wagemann	Université de Nantes 2
Examineurs	David Chataur (Directeur de thèse)	Université Lille 1
	Yves Félix	Université Catholique de Louvain-la-Neuve
	Benoit Fresse	Université Lille 1
	Martintxo Saralegi-Aranguren	Université d'Artois

Remerciements

Je tiens à remercier sincèrement David Chataur, qui, en tant que Directeur de thèse, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de cette thèse, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie Messieurs Gregory Ginot et Friedrich Wagemann qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse. J'ai grandement apprécié le regard critique qu'ils ont porté à mon travail, et toutes les remarques pertinentes qu'ils ont fait.

J'exprime tous mes remerciements à l'ensemble des membres de mon jury : Messieurs Yves Félix, Benoit Fresse, et Martintxo Saralegi-Aranguren.

Je remercie toutes les personnes formidables que j'ai rencontrées par le biais du Laboratoire Painlevé. Merci pour votre support et vos encouragements. Je pense particulièrement à mes amis doctorants et à l'équipe "Topologie". Merci pour m'avoir accompagné et aidé pendant ces dernières années.

J'adresse toute mon affection à ma famille. Malgré mon éloignement depuis de nombreuses années, leur confiance, leur tendresse, leur amour me portent et me guident tous les jours.

Enfin, je remercie Charles, qui a tout fait pour m'aider, qui m'a soutenu et surtout supporté pendant ces années de thèse.

Résumé

L'un des objectifs de cette thèse est de développer et d'étudier des outils classiques de la topologie algébrique dans le cadre différentiel. Parmi ces outils on se penche particulièrement sur les théories homologiques et cohomologiques généralisées. Un autre objectif est de montrer que les espaces différentiels offrent un cadre assez naturel afin d'étudier les espaces singuliers. Parmi ces espaces singuliers, on étudie particulièrement les pseudo-variétés contrôlées à la Thom-Mather.

Dans le premier chapitre, essentiellement de rappels ; on résume et développe quelques bases des espaces différentiels. On définit une nouvelle notion "CW-difféologie" liée à la notion de CW-complexes.

Dans le deuxième chapitre, on met en place les définitions de théories (co)homologiques généralisées dans la catégorie des espaces différentiels. On développe en outre l'homologie singulière, l'homologie cellulaire et la cohomologie de Rham au cadre différentiel. On étudie les pseudo-variétés contrôlées qui sont des espaces singuliers, en différentiel.

Dans le troisième chapitre, on donne deux approches pour définir l'espace tangent d'un espace différentiel pointé. On étudie l'espace tangent d'une pseudo variété contrôlée munie de différentes différentielles.

Abstract

One of the purpose of this thesis is to develop and study classical tools of algebraic topology in the diffeological context. These tools are particularly the generalized homology and cohomology theories. Another purpose is to show that diffeological spaces offer a natural setting to study the singular spaces. In this thesis, we focus on Thom Mather pseudomanifolds.

In the first chapter, which consists mainly of reminders ; we summarize and develop some bases diffeological spaces. We define a new notion of " CW- diffeology " linked to the notion of CW-complexes.

In the second chapter, we set up the definitions of generalized (co)homology theories in the category of diffeological spaces. We also develop the singular homology , cellular homology and de Rham cohomology in framework of diffeology. We study the Thom-Mather pseudomanifolds in diffeology.

In the third chapter, we give two approaches to define tangent space of pointed diffeological spaces. We study the tangent space of Thom-Mather pseudomanifold equipped with different diffeologies.

Table des matières

Remerciements	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
Abstract	viii
1 Espaces difféologiques	8
1.1 Introduction	8
1.2 Définitions et exemples	8
1.2.1 Applications lisses et Catégorie des espaces difféologiques	12
1.2.2 Fibré difféologique	13
1.2.3 D-topologie	14
1.2.4 Le foncteur adjoint de D-Top	15
1.2.5 Variétés et difféologie	17
1.2.5.1 Variétés comme difféologies	17
1.2.5.2 Modélisation locale des variétés	17
1.2.5.3 Variété difféologique	17
1.2.5.4 Variété à coins	18
1.2.5.5 Espaces difféologiques et ensembles simpliciaux	20
1.2.5.6 CW-difféologies	21
2 Théories (Co)homologiques Pour Les Espaces Difféologiques	25
2.1 Théories Homologiques généralisées	26
2.1.1 Homologie des espaces difféologiques H_*^Δ	29
2.1.2 Homologie des CW-difféologies	32
2.2 Théories Cohomologiques Généralisées	34
2.2.1 Formes différentielles sur les espaces difféologiques	37
2.2.1.1 Difféologie fonctionnelle de l'espace de formes	38

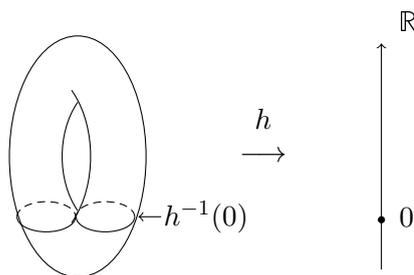
2.2.1.2	Les valeurs d'une forme différentielle	39
2.2.1.3	Le fibré des p-formes d'espaces difféologiques	39
2.2.2	Cohomologie de de Rham	40
2.2.2.1	L'homomorphisme de de Rham	40
2.2.3	Foncteur des formes différentielles difféologiques	44
2.2.3.1	Formes différentielles basiques	46
2.2.3.2	Formes différentielles sur le cône	50
2.2.4	Pseudo-variété contrôlée	50
2.2.4.1	Structure lisse sur la pseudo-variété contrôlée	53
2.2.4.2	Normalisation de pseudo-variété contrôlée	55
2.2.5	Comparaison de deux structures sur les pseudo variétés contrôlées	56
2.2.6	Désingularisations stratifiées difféologiques	60
2.2.7	Formes différentielles d'intersection	63
3	Difféologie et espace singulier II	68
3.1	Espace tangent difféologique	68
3.1.0.1	Espace tangent interne	68
3.1.0.2	Espace tangent externe	70
3.1.1	Espace tangent sur les espaces stratifiés	71
3.1.1.1	Conditions de Whitney	71
3.1.1.2	Fibré tangent stratifié	71
3.1.1.3	Comparaison et exemples	72
A	Extensions de Kan	80
	Bibliographie	83

Table des figures

2.1	Exemple de pseudo-varété contrôlée	51
2.2	Exemple de données de contrôles	52
3.1	Double cône	75

Introduction

La catégorie des variétés différentielles de dimension finie n'est ni stable par intersection, ni par quotient. C'est le cas de la section hyperplane du tore représentée ci-dessous.



Dans le langage catégorique on dit que la catégorie des variétés n'est ni complète ni cocomplète. De même les espaces d'applications entre variétés sortent du cadre standard de la géométrie différentielle, bien que l'on puisse développer des structures différentiables pour ces espaces d'applications, on se retrouve face à un zoo d'espaces de tout type : variétés modelées sur des espaces de Banach, Fréchet, Hilbertien.

Ainsi, depuis les années 1970 plusieurs théories de variétés généralisées ont été proposées afin d'introduire une catégorie complète et cocomplète d'espaces géométriques, pour laquelle les constructions standards de la géométrie différentielle étaient accessibles : espaces tangents, formes différentielles.

A. Stacey [30] a classé certaines de ces approches en trois catégories :

- les approches de mapping-in (Espaces de Chen [3] et des espaces difféologiques de J. Souriau [29]), la structure différentiable est déterminée par des familles d'applications à valeurs dans l'espace en considération,
- les approches de mapping-out (Espaces de Sikorski [27] et Espaces de Smith [28]), ici la structure différentiable est déterminée par des familles d'applications de source l'espace en considération,
- et les approches balancés (Espaces de Frolicher [4]), mélange des deux approches précédentes.

Par exemple, une difféologie sur un ensemble arbitraire X , déclare, pour tout entier n , quelles applications de \mathbb{R}^n vers X sont lisses. Cette idée est structurée par trois axiomes naturels : recouvrements, localité et compatibilité lisse.

Dans cette thèse, on a choisi de traiter le cas des espaces difféologiques pour les raisons suivantes :

- Chaque construction structurelle : homotopie, calcul de Cartan, cohomologie de De Rham, fibrés, etc, adapté à cette catégorie, s'applique à tous les espaces associés : fonctions lisses, formes différentielles, des lacets lisses etc, car ce sont des espaces difféologiques également.
- La difféologie traite simplement et rigoureusement les espaces de dimension infinie sans impliquer aucun outil d'analyse fonctionnelle.

L'un des objectifs de cette thèse est de développer et d'étudier des outils classiques de la topologie algébrique dans ce cadre difféologique. Parmi ces outils on se penche particulièrement sur les théories homologiques et cohomologiques généralisées. Un autre objectif est de montrer que les espaces difféologiques offrent un cadre assez naturel afin d'étudier les espaces singuliers : pseudo-variétés contrôlées à la Thom-Mather.

Eilenberg et Steenrod ont démontré que l'homologie avec coefficients dans un groupe G est caractérisée par une liste d'axiomes (sept) maintenant connus comme les axiomes de Eilenberg-Steenrod. Ils ont montré comment dériver de nombreuses propriétés homologique directement à partir des axiomes. Plus tard, il a été observé qu'il y avait d'autres foncteurs qui satisfaisaient seulement six des axiomes : ces théories sont appelées généralisées. Whitehead a donné un traitement systématique de ces théories homologiques généralisées.

On met en place les définitions de théories (co)homologiques généralisées dans la catégorie *Diff* dans les sections 2.1 et 2.2. On définit une nouvelle notion "CW-difféologie" [1.2.45](#) liée à la notion de CW-complexes. Un CW-complexe se construit par induction, par un procédé d'attachements des variétés à bords avec l'application de collier.

P. Iglesias Zemmour a introduit l'homologie cubique et cohomologie de De Rham dans le cadre difféologique [7]. On développe en outre l'homologie singulière, l'homologie cellulaire et la cohomologie de Rham difféologique. On étudie les pseudo-variétés contrôlées qui sont des espaces singuliers en difféologie.

Organisation de la thèse

Premier chapitre

Dans le premier chapitre, essentiellement de rappels (hormis le concept de CW-difféologies); on résume et développe quelques bases des espaces difféologiques.

J. Souriau [29] a introduit la catégorie des espaces difféologiques \underline{Diff} qui est stable sous les constructions catégoriques et qui contient la catégorie $\underline{Variete}$ comme sous-catégorie pleine. Dans la section 1.1, nous allons résumer quelques notions des espaces difféologiques.

Dans la section 1.2, nous allons développer l'aspect topologique des espaces difféologiques et dans la section suivante nous allons montrer que la D-topologie qui à un espace difféologique associe un espace topologique induit une paire de foncteurs adjoints entre \underline{Diff} et TOP .

Dans la section 1.4 on introduit les relations entre les variétés et difféologie, et à la fin de ce chapitre on donne la définition de CW-difféologie et quelques exemples de CW-difféologie.

Deuxième chapitre

Dans le deuxième chapitre, on introduit et développe les théories (co)homologiques généralisées pour les espaces difféologiques.

Dans la section 2.1 on définit les théories homologiques généralisées sur \underline{Diff} . Dans les sections 2.1.1 et 2.1.2 on introduit l'homologie singulière, l'homologie cellulaire dans le cadre difféologique. On montre dans le théorème 2.1.17 que l'homologie cellulaire d'une CW-difféologie est isomorphe à l'homologie singulière de l'espace topologique avec la D-topologie induite de la CW-difféologie.

Théorème 1. *Soit X un espace CW-difféologique, X_D l'espace topologique avec la D-topologie,*

$$H_*^{CW-d}(X) \rightarrow H_*(X_D)$$

est un isomorphisme.

Ce théorème est connu dans le cas où $X = M$ est une variété lisse.

Dans la section 2.2 on définit les théories cohomologiques généralisées sur \underline{Diff} . Dans les sections 2.2.1 et 2.2.2, on rappelle les formes différentielles difféologiques et la cohomologie de De Rham introduites par Souriau et développées par P. Iglesias Zemmour.

On montre que les théories cohomologiques sur les espaces CW-difféologiques sont uniques à isomorphisme près 2.2.4.

Théorème 2. *Soit $\phi^* : h^* \rightarrow h'^*$ une transformation naturelle de théories de cohomologie généralisées sur Diff vérifiant l'axiome du Bouquet. Si*

$$\phi^q(\mathbb{S}^0, s_0) : h^q(\mathbb{S}^0, s_0) \rightarrow h'^q(\mathbb{S}^0, s_0)$$

est un isomorphisme pour $q > N$ et est un épimorphisme pour $q = N$, alors pour tout espace CW-difféologique (X, x_0) de dimension n

$$\phi^q(X, x_0) : h^q(X, x_0) \rightarrow h'^q(X, x_0).$$

est un isomorphisme pour $q > N + n$ et un épimorphisme pour $q = N + n$.

Dans la section 2.2.3 on compare le foncteur des formes différentielles difféologiques sur la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial $\Omega_{diff} : \underline{Diff} \rightarrow ADGR$ avec le foncteur des formes différentielles sur ce même ensemble simplicial $\Omega_{PL} : sSet \rightarrow ADGR$. Dans le théorème 2.2.18, on montre que pour X un ensemble simplicial

$$H^*(\Omega_{diff}(|X|_D)) \cong H^*(X, \mathbb{R})$$

est un isomorphisme. Dans le théorème 2.2.30, on a le résultat suivant : le complexe des formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur un ensemble simplicial est isomorphe aux formes différentielles difféologiques sur la réalisation de cet ensemble simplicial.

Théorème 3. *Soit X un ensemble simplicial. On a un isomorphisme naturel*

$$\Omega_{\mathcal{C}^\infty}^*(X) \cong \Omega_{diff}^*(|X|_D).$$

Dans la section 2.2.4 on résume quelques bases de pseudo-variétés contrôlées. On munit la pseudo-variété contrôlée de deux difféologies, l'une que l'on appelle la difféologie de Pflaum et l'autre la difféologie quotient. Dans la section 2.2.5 on compare les deux structures difféologiques sur les pseudo-variétés contrôlées.

Dans la section 2.2.6 on définit les désingularisations stratifiées difféologiques.

Dans la section 2.2.7 on rappelle la définition des formes différentielles d'intersection et dans le théorème 2.2.62 on montre que les formes différentielles difféologiques définies sur X^N la normalisation d'une pseudo-variété contrôlée munie de la difféologie quotient sont isomorphes aux formes 0-perverses définies sur la désingularisation de X^N .

Théorème 4. Soit $(X, \mathcal{S}, (T_S, \pi_S, \rho_S)_{S \in \mathcal{S}})$ une pseudovariété contrôlée munie de la difféologie quotient, $\eta : X^N \rightarrow X$ sa normalisation et $\mu : \tilde{X}^N \rightarrow X^N$ la désingularisation difféologique de X^N .

$$\Omega_{diff}^*(X^N) \xrightarrow{\cong} \Omega_0^*(\tilde{X}^N)$$

est un isomorphisme d'algèbre.

Troisième chapitre

On donne deux approches pour définir l'espace tangent d'un espace difféologique pointé, l'un introduit par Hector et l'autre introduit par Wu. On étudie l'espace tangent d'une pseudo variété contrôlée munie de différentes difféologies. On calcule l'espace tangent interne de $[0, 1[$ en 0, l'espace tangent interne du cône et du double cône en son sommet et l'espace tangent interne du parapluie de Whitney en différents points.

Notations

- Soit f une application quelconque, $def(f)$ désignera son ensemble de définition et $Im(f)$ désignera l'ensemble $f(def(f))$.
- On note Ouverts la catégorie dont les objets sont les ouverts de \mathbb{R}^n et dont les morphismes sont les applications lisses.
- On note \mathbf{C}_x le germe des fonctions au point $x \in X$.
- La catégorie des espaces difféologiques pointés est notée par Diff_p.
- On note $TOP(2)$ la catégorie des paires topologiques dont les objets sont toutes les paires topologiques (X, A) où X est un espace topologique et A est un sous-espace et dont les morphismes sont des applications continues $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ telles que $f(A) \subseteq B$.
- On note la catégorie des espaces topologiques pointés par TOP_p .
- On note $TOP'(2)$ la catégorie homotopique dont les objets sont des paires topologiques et dont les morphismes sont les classes d'homotopie des applications continues entre paires topologiques.
- On note AbGr la catégorie des groupes abéliens gradués dont les objets sont les groupes abéliens gradués $G = \{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et dont les morphismes $\varphi : G \rightarrow G'$ sont les suites $\varphi_n : G_n \rightarrow G'_n$ d'homomorphismes.
- La catégorie Plaques_x est la catégorie des plaques centrée en x dont les morphismes sont les triangles :

$$\begin{array}{ccc}
 U & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 V & \longrightarrow & X
 \end{array}$$

Chapitre 1

Espaces difféologiques

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons résumer et développer quelques bases des espaces difféologiques.

J. Souriau [29] a introduit la catégorie des espaces difféologiques \underline{Diff} qui est stable sous les constructions catégoriques et qui contient $\underline{Variete}$ comme sous-catégorie pleine. Dans la section 1.1, nous allons résumer quelques notions des espaces difféologiques.

Dans la section 1.2, nous allons développer l'aspect topologie des espaces difféologiques et dans la section suivante nous allons montrer que la D-topologie induit un foncteur adjoint entre \underline{Diff} et TOP .

Dans la section 1.4 nous allons introduire la relation entre les variétés et difféologie, et à la fin de ce chapitre nous allons donner la définition de l'espace CW-difféologique et quelques exemples des espaces CW-difféologiques.

1.2 Définitions et exemples

Définition 1.2.1. *On appelle domaine de dimension n tout ouvert non vide de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . L'ensemble de tous les domaines de dimension n est noté par $Domains(\mathbb{R}^n)$.*

Définition 1.2.2. Paramétrisation *Une paramétrisation sur un ensemble X notée par $P : U \rightarrow X$ est une application définie sur un domaine à valeurs dans X . Notons l'ensemble de paramétrisations sur X défini sur U par $Param(U, X)$. Définissons*

$Param_n(X) = \cup_{U \in Domains(\mathbb{R}^n)} Param(U, X)$ et

$$Param(X) = \cup_{n \in \mathbb{N}} Param_n(X).$$

Définition 1.2.3. Difféologies et espaces difféologiques Soit X un ensemble non vide, une difféologie de X est un ensemble \mathcal{D} de paramétrisations de X tel que les axiomes suivants sont satisfaits :

1. *Recouvrement* : L'ensemble \mathcal{D} contient toutes les paramétrisations constantes. C'est-à-dire, pour chaque point x de X et pour chaque n , la paramétrisation constante $\mathbf{x} : r \rightarrow x$ définie sur \mathbb{R}^n appartient à \mathcal{D} .
2. *Localité* : Pour chaque paramétrisation $P : U \rightarrow X$, s'il existe un voisinage ouvert V de chaque r dans U telle que $P|_V$ la restriction de P à un sous ouvert V appartient à \mathcal{D} , alors la paramétrisation P appartient à \mathcal{D} .
3. *Compatibilité lisse* : Pour chaque $P : U \rightarrow X$ dans \mathcal{D} , pour chaque domaine V et pour chaque F dans $\mathcal{C}^\infty(V, U)$, la paramétrisation $P \circ F$ appartient à \mathcal{D} .

Un ensemble équipé avec une difféologie est appelé un espace difféologique qui est noté par (X, \mathcal{D}) .

Définition 1.2.4. Plaques d'un espace difféologique Soit X un espace difféologique. Les éléments de la difféologie \mathcal{D} sont appelés les plaques de l'espace difféologique (X, \mathcal{D}) .

Définition 1.2.5. Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est appelée lisse si pour chaque plaque P de X , $f \circ P$ est une plaque de X' . L'ensemble des applications lisses de X vers Y est noté par $\mathcal{D}(X, Y)$.

Définition 1.2.6. Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est appelée difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont lisses. L'ensemble des difféomorphismes de X vers X' est noté par $Diff(X, X')$.

Nous pouvons définir la catégorie des espaces difféologiques que nous allons noter Diff avec toutes les espaces difféologiques et avec les applications lisses.

Exemple 1.2.1. Les variétés ont une structure difféologique naturelle. Soit M une variété de dimension $m < \infty$, les cartes $\varphi^{-1} : \varphi(W) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W \subset M$ engendrent une difféologie qui contient les applications lisses usuelles $P : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, $n \geq 0$.

Exemple 1.2.2. Une difféologie pour le cercle Considérons $S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid \bar{z}z = 1\}$. L'ensemble de paramétrisations $P : U \rightarrow S^1$ satisfaisant la condition suivante est une difféologie.

- Pour chaque r_0 dans U il existe un voisinage ouvert V de r_0 et une paramétrisation lisse $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $P|_V : r \mapsto \exp(2i\phi\varphi(r))$.

L'étude des espaces fonctionnels est délicat. Nous pouvons les traiter avec la difféologie.

Définition 1.2.7. *Difféologies fonctionnelles* : Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques. Soit $\mathcal{C}^\infty(X, X')$ l'ensemble d'applications lisses définies comme dans la définition 1.2.5 de X vers X' . Soit ev l'application évaluation définie par

$$ev : X \times \mathcal{C}^\infty(X, X') \rightarrow X' \quad ev(x, f) = f(x)$$

On appelle difféologie fonctionnelle toutes les difféologies de $\mathcal{C}^\infty(X, X')$ telle que l'application ev soit lisse. Il existe un difféologie grossière sur $\mathcal{C}^\infty(X, X')$ qu'on appelle la difféologie fonctionnelle standard telle que

– Une paramétrisation $P : U \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, X')$ est une plaque pour la difféologie fonctionnelle standard si et seulement si pour chaque plaque $Q : V \rightarrow X$, la paramétrisation $P.Q : (r, s) \mapsto P(r)(Q(s))$ est une plaque de X' .

Remarque 1.2.8. Sauf mention du contraire, les espaces fonctionnels seront munis de la difféologie fonctionnelle dans la suite.

Exemple 1.2.3. On peut munir l'espace des lacets $\mathcal{L}X = \mathcal{C}^\infty(S^1, X)$ de la difféologie fonctionnelle.

Exemple 1.2.4. Considérons les variétés de Fréchet, variétés lisses modelées sur des espaces de Fréchet. Losik [14] a montré que Fréchet la catégorie des variétés de Fréchet se plonge pleinement dans Diff la catégorie des espaces difféologiques. Par exemple, l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^\infty(M, N)$ avec M une variété lisse compact. Cette variété de Fréchet est munie de la difféologie fonctionnelle qui détermine d'une manière unique la structure lisse sur $\mathcal{C}^\infty(M, N)$.

Remarque 1.2.9. Un espace de Chen est un type d'espace difféologique. Les plaques ont pour sources des ensembles convexes (cf, [3]). Stacey [30] a montré qu'il existe une paire de foncteurs adjoints :

$$\underline{Chen} \rightleftarrows \underline{Diff}.$$

Les plaques sur l'espace de lacets sont de type suivant :

$$V \times S^1 \rightarrow X$$

où V est un ensemble convexe.

Proposition 1.2.5. *Restriction de la difféologie fonctionnelle* [7] Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques. Soit $\mathcal{C}^\infty(X, X')$ l'ensemble des applications lisses de X vers X' . Chaque sous ensemble $\mathcal{M} \in \mathcal{C}^\infty(X, X')$ hérite de la difféologie fonctionnelle.

Exemple 1.2.6. Soient X un espace difféologique pointé avec un point de base x . On considère l'espace des lacets pointés $\Omega(X, x) = \mathcal{C}_*^\infty(S^1, X)$ des morphismes lisse pointés $(S^1, 1) \rightarrow (X, x)$ où S^1 est un cercle avec une structure usuelle de variété. Alors $\Omega(X, x)$ est un espace difféologique muni de la difféologie fonctionnelle (sous-difféologie de $\mathcal{L}(X)$).

Proposition 1.2.7. La composition est lisse : [7] Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') et (X'', \mathcal{D}'') des espaces difféologiques. Soient $\mathcal{C}^\infty(X, X')$, $\mathcal{C}^\infty(X', X'')$ et $\mathcal{C}^\infty(X, X'')$ munie de la difféologie fonctionnelle et $\mathcal{C}^\infty(X, X') \times \mathcal{C}^\infty(X', X'')$ muni de la difféologie produit. Alors la composition \circ est lisse

$$\circ : \mathcal{C}^\infty(X, X') \times \mathcal{C}^\infty(X', X'') \rightarrow \mathcal{C}^\infty(X, X'') \quad \text{avec} \quad \circ(f, g) = g \circ f.$$

Définition 1.2.10. Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux difféologies sur un même ensemble X , on dira que \mathcal{D} est plus fine que \mathcal{D}' si :

$$id(X) : (X, \mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}'$$

est lisse ; la difféologie \mathcal{D} contient alors moins de plaques que \mathcal{D}' .

Définition 1.2.11. Somme difféologique Soit $\{X_i\}$ une famille des espaces difféologiques. Notons \mathcal{D}_i les difféologies respectives de X_i . Il existe une difféologie la plus fine sur $X = \coprod X_i$ telle que pour chaque $i \in J$, l'injection naturelle $j : X \rightarrow \coprod X_i$ soit lisse. Cette difféologie est appelée la somme difféologique de la famille $\{\mathcal{D}_i\}_{i \in J}$. La paramétrisation $P : U \mapsto \coprod X_i$ est une plaque pour la somme difféologique si et seulement si pour chaque $r \in U$ il existe un voisinage ouvert V de r et un $i \in J$ telle que $P|_V$ soit une plaque de X_i .

Définition 1.2.12. Sous-difféologie Soit A un sous-ensemble d'un espace difféologique X , la sous-difféologie induite par X sur A contient les plaques de X qui prennent valeurs dans A .

Définition 1.2.13. Familles génératrices Soit X un ensemble. Choisissons un ensemble \mathcal{F} de paramétrisations de X , $\mathcal{F} \subset \text{Param}(X)$. Il existe une difféologie la plus fine contenant \mathcal{F} . Cette difféologie est appelée la difféologie engendrée par \mathcal{F} et notée par $\langle \mathcal{F} \rangle$.

Critère de génération Soit X un ensemble et \mathcal{F} une famille de paramétrisations de X . La famille des plaques de difféologie engendrée par \mathcal{F} a la propriété suivante :

- Une paramétrisation $P : U \rightarrow X$ est une plaque pour la difféologie $\langle \mathcal{F} \rangle$ engendrée par \mathcal{F} si et seulement si pour chaque point r dans U , il existe un voisinage ouvert V de r telle que soit $P|_V$ soit une paramétrisation constante, soit il existe une paramétrisation $F : W \rightarrow X$ appartenant à \mathcal{F} et une paramétrisation lisse $Q : V \rightarrow W$ telle que $P|_V = F \circ Q$.

Définition 1.2.14. Difféologie initiale *Étant donné une famille d'espaces difféologiques $\{(Y_i, \mathcal{D}(Y_i)) \mid i \in I\}$ et des applications $f_i : X \rightarrow Y_i$ d'un ensemble X , nous définissons la difféologie initiale sur X par rapport aux applications f_i comme la difféologie engendrée par les paramétrisations $P : U_P \rightarrow X$ telles que $f_i \circ P \in \mathcal{D}(Y_i)$ pour chaque i dans I .*

Définition 1.2.15. Difféologie finale *Étant donné une famille d'espaces difféologiques $\{(X_i, \mathcal{D}(X_i)) \mid i \in I\}$ et des applications $f_i : X_i \rightarrow Y$ vers l'ensemble Y , nous définissons la difféologie finale sur Y par rapport aux applications f_i comme la difféologie engendrée par les paramétrisations $f_i \circ P \in \mathcal{D}(Y_i) \forall i \in I$ et pour chaque plaque P de X_i .*

1.2.1 Applications lisses et Catégorie des espaces difféologiques

Dans la catégorie des variétés différentielles, nous avons les immersions et les submersions et dans la catégorie des espaces difféologiques nous avons les inductions et les subductions.

Définition 1.2.16. Pullbacks des difféologies *Soient X un ensemble, (X', \mathcal{D}') un espace difféologique. Soit $f : X \rightarrow X'$ une application. Il existe une difféologie la plus grossière de X telle que l'application f soit lisse. Cette difféologie est appelée le pullback de la difféologie \mathcal{D}' par f et notée par $f^*(\mathcal{D}')$.*

$$f^*(\mathcal{D}') = \{P \in \text{Param}(X) \mid f \circ P \in \mathcal{D}'\}$$

Définition 1.2.17. Induction *Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques. Une application $f : X \rightarrow X'$ est dite une induction si et seulement si*

- f est injective,
- La difféologie \mathcal{D} de X est le pullback par f de la difféologie \mathcal{D}' de X' , $f^*(\mathcal{D}') = \mathcal{D}$.

Critère de l'induction *Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques. Une application $f : X \rightarrow X'$ est dite induction si et seulement si*

- f est une injection lisse,
- Pour chaque plaque P de X à valeur dans $f(X)$, la paramétrisation $f^{-1} \circ P \in \mathcal{D}$.

Définition 1.2.18. Pushforward des difféologies *Soient (X, \mathcal{D}) un espace difféologique et X' un ensemble et soit $f : X \rightarrow X'$ une application. Il existe une difféologie de X' telle que f soit lisse. Cette difféologie est appelée le pushforward de la difféologie \mathcal{D} de X et notée par $f_*(\mathcal{D})$. Une paramétrisation $P : U \rightarrow X'$ est une plaque pour $f_*(\mathcal{D})$ si et seulement si :*

♠ *Pour chaque $r \in U$ il existe un voisinage ouvert V de r tel que soit $P|_V$ soit une paramétrisation constante, soit il existe une plaque $Q : V \rightarrow X$ telle que $P|_V = f \circ Q$.*

Définition 1.2.19. Subduction Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques et $f : X \rightarrow X'$ une application. L'application f est appelée subduction si

- f est surjective,
- La difféologie \mathcal{D}' de X' est le pushforward de la difféologie \mathcal{D} de X , $f_*(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$.

Critère de la subduction Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques. Une application $f : X \rightarrow X'$ est dite subduction si et seulement si :

- f est une surjection lisse,
- Pour chaque plaque $P : U \rightarrow X'$, pour chaque $r \in U$ il existe un voisinage ouvert V de r et une plaque $Q : V \rightarrow X$ telle que $P|_V = f \circ Q$.

Définition 1.2.20. Difféologie quotient Soit X un espace difféologique muni d'une relation d'équivalence \sim . Notons $Y = X/\sim$ l'ensemble quotient et classe : $X \rightarrow Y$ la projection. On définit difféologie quotient sur Y comme la difféologie dont les plaques sont les paramétrisations $P : U \rightarrow Y$ telles que pour tout $u \in U$, il existe un voisinage ouvert $V \subseteq U$ de u et une plaque $Q : V \rightarrow X$ telle que $P|_V = \text{classe} \circ Q$. C'est-à-dire la difféologie de Q est le pushforward de difféologie \mathcal{D} par la projection $\text{class} : X \rightarrow Y$. Cette difféologie est appelée difféologie quotient.

Exemple 1.2.8. Soit $S^1 \hookrightarrow S^2$. L'espace S^2/S^1 est muni de la difféologie quotient.

1.2.2 Fibré difféologique

Les fibrés difféologiques sont analogues aux fibrés mais ils ne sont plus localement triviaux. Dans [7] le fibré difféologique est défini deux façons équivalentes, en utilisant la trivialité locale le long de plaques et les groupoides.

Définition 1.2.21. On appellera fibration difféologique un triplet $\xi = (X, B, p)$ où X et B sont des espaces difféologiques et $p : X \rightarrow B$ application lisse. L'espace difféologique X est appelé espace total de la fibration, B est la base et p la projection. L'image réciproque $X_b = p^{-1}(b)$ est appelée la fibre au point b .

On dit que la fibration ξ vérifie la propriété de trivialité locale si :

- il existe un espace difféologique F appelé fibre type, tel que pour toute plaque $P : \Omega \rightarrow B$ de la base, l'image réciproque $P^*(\xi)$ de ξ soit localement triviale, de fibre type F , au dessus de Ω .

C'est à dire, en notant $P^*(X)$ l'espace total de $P^*(\xi)$:

$$P^*(X) = \{(r, x) \in \Omega \times X \mid P(r) = p(x)\},$$

pour tout point $r \in \Omega$, il existe un voisinage V de r et un difféomorphisme $\Psi : P^*(X) | V \rightarrow V \times F$ qui se projette sur l'identité de V .

La deuxième définition de fibré difféologique utilise les groupoïdes et [7] 8.9 montre que les deux définitions sont équivalentes.

Définition 1.2.22. Soit X et B deux espaces difféologiques et $\pi : X \rightarrow B$ une surjection lisse. Définissons

$$\text{Obj}(\mathbf{K}) = B \quad \forall b, b' \in B, \text{Mor}_{\mathbf{K}}(b, b') = \text{Diff}(X_b, X_{b'})$$

où $X_b = \pi^{-1}(b)$ est muni de la sous-difféologie. Définissons sur

$$\text{Mor}(\mathbf{K}) = \bigcup_{b, b' \in B} \text{Mor}_{\mathbf{K}}(b, b')$$

la multiplication $f \cdot g = f \circ g$ pour chaque $f \in \text{Mor}_{\mathbf{K}}(b, b')$ et $g \in \text{Mor}_{\mathbf{K}}(b', b'')$. Alors \mathbf{K} est un groupoïde et l'application de source et de but est données par

$$\text{src}(f) = \pi(\text{def}(f)) \text{ et } \text{trg}(f) = \pi(\text{val}(f))$$

Le groupoïde \mathbf{K} est équipé avec la difféologie fonctionnelle.

π est appelée une fibration difféologique si et seulement si $\chi : \text{Mor}(\mathbf{K}) \rightarrow B \times B$ est une subduction. Une application lisse $\pi : X \rightarrow B$ est une fibration si et seulement s'il existe un espace difféologique F tel que le pullback de π par chaque plaque P de B est localement trivial avec le fibre F . π est appelé localement trivial le long des plaques.

Remarque 1.2.23. Si l'espace de base de fibration difféologique est une variété alors la fibration difféologique est localement triviale. En plus, si la fibre F est aussi une variété la fibration difféologique est un fibré dans la catégorie des variétés.

1.2.3 D-topologie

Nous pouvons associer à tous les espaces difféologiques la topologie suivante :

Définition 1.2.24. D-topologie Soit (X, \mathcal{D}) un espace difféologique. La topologie la plus fine sur X telle que tous les plaques soient continues est appelée D -topologie. Un sous-ensemble A de X est D -ouvert c'est-à-dire ouvert pour le D -topologie si et seulement si pour tout n et pour toute n -plaque P de X , le pullback $P^{-1}(A)$ est ouvert dans \mathbb{R}^n .

Théorème 1.2.25. [7] Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques, – toutes les applications lisses de X vers X' sont continues pour la D -topologie,

– tous les difféomorphismes de X vers X' sont des homéomorphismes pour les D -topologie.

En associant à un espace difféologique son espace D -topologique sous-jacent, nous obtenons un foncteur fidèle entre la catégorie \underline{Diff} et la catégorie TOP noté par

$$D - Top : \underline{Diff} \rightarrow TOP.$$

Définition 1.2.26. Applications locales lisses Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques et A un sous-ensemble de X . Une application $f : A \rightarrow X'$ est appelée application locale lisse de X vers X' définie sur A , si pour toute plaque P de X , la paramétrisation $f \circ P$ définie sur $P^{-1}(A)$ est une plaque de X' . Cette condition implique que A est ouvert pour la D – topologie.

Définition 1.2.27. Difféomorphismes locaux Soient (X, \mathcal{D}) et (X', \mathcal{D}') deux espaces difféologiques et $A \subset X$. $f : A \rightarrow X'$ est un difféomorphisme local de X vers X' défini sur A si f est injective et f et $f^{-1} : f(A) \rightarrow X$ sont des applications locales lisses. C'est-à-dire que A et $f(A)$ sont des D – ouvert et $f|_A$ est un difféomorphisme de A vers $f(A)$ où A et $f(A)$ sont équipés avec la sous-difféologie.

1.2.4 Le foncteur adjoint de D -Top

Théorème 1.2.28. *Le foncteur*

$$\begin{aligned} D - Top : \underline{Diff} &\rightarrow TOP \\ (X, \mathcal{D}) &\mapsto (X, D - topologie) \end{aligned}$$

admet un foncteur adjoint.

Ce foncteur préserve les colimites et les coproduits. Nous allons construire le foncteur adjoint de $D - Top$.

$$\begin{aligned} D^! : TOP &\rightarrow \underline{Diff} \\ X &\mapsto C^0(U, X) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & TOP & \\ & \uparrow & \searrow \\ \underline{Ouverts} & \longrightarrow & \underline{Diff} \end{array}$$

Pour démontrer les lemmes suivants, on utilise les extensions de Kan (Appendice A).

Lemme 1.2.29. *Le foncteur $\underline{Ouvrts} \rightarrow \underline{Diff}$ est dense.*

Lemme 1.2.30. $\text{Colim}_{U \xrightarrow{\text{diff}} X} U = X$

Preuve. Considérons $\coprod_{F \in \mathcal{F}} \text{def}(F) = \{(F, r) \mid F \in \mathcal{F} \text{ et } r \in \text{def}(F)\}$. On va montrer que $\phi : \coprod_{F \in \mathcal{F}} \text{dom}(F) \rightarrow X$ est une subduction. Soit $Q : \mathcal{O} \rightarrow \coprod_{F \in \mathcal{F}} \text{def}(F)$ une plaque. Par la définition de la somme difféologie, pour chaque $r \in \mathcal{O}$ il existe un voisinage ouvert V de r et un élément $F : U \rightarrow X$ de \mathcal{F} telle que $Q|_V$ soit une paramétrisation lisse dans U . $\phi \circ Q|_V = F \circ Q|_V$. Comme F est une plaque de X et Q est une paramétrisation lisse, $F \circ Q|_V$ est une plaque de X . Alors $\phi \circ Q$ est localement plaque de X donc $\phi \circ Q$ est une plaque de X . Donc ϕ est lisse.

Maintenant, soit $P : \mathcal{O} \rightarrow X$ une plaque et $r \in \mathcal{O}$. Comme \mathcal{F} est une famille génératrice de X , il existe un voisinage ouvert de r et un élément $F : U \rightarrow X$ de \mathcal{F} et la paramétrisation lisse $Q : V \rightarrow U$ telle que $P|_V = F \circ Q$. $\tilde{Q} : r \rightarrow (F, Q(r))$ défini sur V est une plaque de $\coprod_{F \in \mathcal{F}} \text{dom}(F)$ et $P|_V = \phi \circ \tilde{Q}$. Donc P relève localement au long de ϕ . Donc ϕ est une subduction.

Comme ϕ est une subduction, $X = \coprod U_i / \sim = \text{colim}_{U \rightarrow X} U$ □

Lemme 1.2.31. $\phi : U \rightarrow X$ est lisse si et seulement si ϕ est une plaque.

Preuve. Soit $\phi : U \rightarrow X$ une application lisse. Par l'axiome de compatibilité lisse de la définition de difféologie la composition $\phi \circ 1_U$ est une plaque de X où 1_U est l'identité de U . Maintenant pour chaque paramétrisation F dans U , encore par l'axiome 3 la paramétrisation $\phi \circ F$ est une plaque de X . Donc ϕ est lisse par la propriété des applications lisses. (Voir, e.g. [7]) □

Preuve de 1.2.28. Le foncteur $\underline{Ouvrts} \rightarrow \underline{TOP}$ est un plongement plein. Comme $\underline{Ouvrts} \rightarrow \underline{Diff}$ est dense, nous avons une extension de Kan à gauche $\underline{TOP} \rightarrow \underline{Diff}$, par conséquent cette extension est le foncteur adjoint de $D - \underline{Top}$. □

Remarque 1.2.32. *Soit (M, \mathcal{D}) est un espace difféologique dont la difféologie engendrée par les plaques $\mathcal{C}^\infty(U, M)$ et appliquons le foncteur $D - \underline{Top}$ à (M, \mathcal{D}) :*

$$D - \text{top} : (M, \mathcal{D}) \rightarrow M$$

Et si on applique le foncteur D^1 sur l'espace topologique M , on obtient un espace difféologique $D^1(M)$ dont la difféologie engendrée par les plaques continues $\mathcal{C}^0(U, M)$. Il existe une bijection ensembliste qui est une application difféologique :

$$(M, \mathcal{D}) \rightarrow D^1(M)$$

mais cela n'est pas un isomorphisme difféologique.

Exemple 1.2.9. *Considérons la sphère exotique $(S^7, \theta_i)_{i=1, \dots, 28}$ ([17]). On peut la munir de 28 structures difféologiques différentes \mathcal{D}_{θ_i} . Il existe une bijection continue*

$$(S^7, \theta_i) \rightarrow D^1(S^7).$$

Par contre, ils sont pas équivalents au sens de la difféologie. Les espaces difféologiques $(D^1(S^7), \mathcal{D}_{\theta_i})$ ne sont pas isomorphes en tant qu'espaces difféologiques.

1.2.5 Variétés et difféologie

1.2.5.1 Variétés comme difféologies

Soit M un espace difféologique, M est une variété de dimension n si et seulement si M est localement difféomorphe à \mathbb{R}^n . C'est-à-dire, pour chaque point $m \in M$, il existe un difféomorphisme local $F : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow M$ et un point $r \in U$ tel que $F(r) = m$. La catégorie *Variete* forme une sous-catégorie de la catégorie *Diff* [7].

1.2.5.2 Modélisation locale des variétés

Nous pouvons reformuler la définition précédente en utilisant des familles génératrices.

Proposition 1.2.10. [7] *Soit M un espace difféologique.*

1) *Chaque famille \mathcal{A} de difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^n vers M telle que*

$$\bigcup_{F \in \mathcal{A}} \text{val}(F) = M$$

est une famille génératrice de la difféologie de M .

2) *L'espace difféologique M est une variété de dimension n si et seulement s'il existe une famille génératrice \mathcal{A} de M constituée de difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^n vers M .*

1.2.5.3 Variété difféologique

Définition 1.2.33. Variété difféologique *Soit E un espace vectoriel difféologique ([7] 3.1) et X un espace difféologique. L'espace difféologique X est appelé une variété difféologique modélée sur E si X est localement difféomorphe à E pour tout point.*

Définition 1.2.34. Espace difféologique modelé *Un espace difféologique est modelé sur une famille d'espaces difféologiques \mathcal{M} , si X est localement difféologique à un membre de \mathcal{M} , pour tout point. Précisément, pour chaque $x \in X$ il existe un voisinage D -ouvert $\mathcal{O} \subset X$ de x , un espace $A \in \mathcal{M}$, un sous-ensemble D -ouvert $\mathcal{V} \subset A$ et un difféomorphisme local $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{O}$. Donc pour chaque plaque $P : U \rightarrow X$ et pour chaque $r \in U$, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de r et une plaque $Q : V \rightarrow A$ pour un $A \in \mathcal{M}$ et un difféomorphisme local ϕ de A dans X telle que $\phi \circ Q = P|_V$.*

1.2.5.4 Variété à coins

Définition 1.2.35. *Soit M un espace topologique paracompact et séparé. Une carte à coins de dimension n pour $n \geq 1$ est une paire (U, ϕ) où U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_k^n = \mathbb{R}^{n-k} \times [0, \infty[^k$ et $\phi : U \rightarrow M$ est un homéomorphisme avec un ensemble ouvert non-vide $\phi(U)$.*

Soient $(U, \phi), (V, \psi)$ des cartes à coins de dimension n sur M . On dit que les cartes $(U, \phi), (V, \psi)$ sont compatibles si

$$\psi^{-1} \circ \phi : \phi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\phi(U) \cap \psi(V))$$

est un difféomorphisme entre les sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

Un atlas à coins de dimension n sur M est un system $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ de cartes à coins de dimension n qui sont deux à deux compatibles, et $M = \cup_i U_i$. Un tel atlas est appelé maximal si il n'est pas un sous-ensemble propre d'un autre atlas.

Une variété à coins M est un espace topologique paracompact séparé muni d'un atlas à coins [8].

Définition 1.2.36. Applications réelles lisses de \mathbb{R}_k^n *Soit M une n -variété à coins. Une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée lisse si pour chaque carte (U, ϕ) sur X , $f \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lisse entre sous-ensembles de \mathbb{R}^n et \mathbb{R} .*

Définition 1.2.37. Difféomorphismes locaux de \mathbb{R}_k^n *Une application $f : A \rightarrow \mathbb{R}_k^n$ avec $A \subset \mathbb{R}_k^n$ est un difféomorphisme local si et seulement si A est ouvert, f est injective, $f(A \cap \partial \mathbb{R}_k^n) \subset \partial \mathbb{R}_k^n$ et pour chaque $x \in A$ il existe une boule ouverte $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ centrée en x et un difféomorphisme local $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que f et F coïncident sur $\mathcal{B} \cap \mathbb{R}_k^n$.*

Difféologie de \mathbb{R}_k^n

Les éléments de \mathbb{R}_k^n sont des points $x = (r, t) \in \mathbb{R}^n$ tels que $r \in \mathbb{R}^{n-k}$ et $t \in [0, +\infty[^k$. L'ensemble \mathbb{R}_k^n est muni de la sous-difféologie qui est induite par la difféologie de \mathbb{R}^n ,

consistant en toutes les paramétrisations lisses $P : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $P_n(r) \geq 0$ $r \in U$ pour tout $n \in \{n - k + 1, \dots, n\}$ P_n étant nième coordonnée de $P(r)$.

Théorème 1.2.38. *Tout espace différentiable modélisé sur \mathbb{R}_k^n dont la D -difféologie est séparé et paracompacte est une variété à coins et réciproquement.*

Preuve. Supposons que M est une variété à coins, on va montrer que M est un espace différentiable modélisé sur \mathbb{R}_k^n . On munit M des plaques lisses. On montre que $\mathcal{D} = \{F : U \rightarrow M \mid F \text{ est lisse}\}$ est une difféologie modélée sur \mathbb{R}_k^n .

Une application $F : U \rightarrow M$ des variétés à coins est lisse si pour toute carte de (V, ψ) de M ,

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & M \\ \uparrow & & \uparrow \psi \\ F^{-1}(V) & \xrightarrow{F|_{F^{-1}(V)}} & V \end{array}$$

($F^{-1}(V)$ est un ouvert de \mathbb{R}_k^n et V est un ouvert de \mathbb{R}_k^n)

L'application $F|_{F^{-1}(V)}$ est lisse où la définition de l'application lisse entre sous ensemble de \mathbb{R}_k^n et \mathbb{R}_k^m est donnée dans la Définition 1.2.5. On a que $F|_{F^{-1}(V)}$ est lisse s'il existe un ouvert $V \subseteq V'$ de \mathbb{R}_k^m tel que

$$\begin{array}{ccc} F^{-1}(V) & \xrightarrow{F|_{F^{-1}(V)}} & V \\ & \searrow \tilde{F} & \downarrow \\ & & V' \end{array}$$

Donc chaque carte est lisse pour la difféologie de M . C'est à dire que M est un espace différentiable modélisé sur \mathbb{R}_k^n .

Maintenant, supposons que M est un espace différentiable modélisé sur \mathbb{R}_k^n . Soit \mathcal{A} l'ensemble de tous les difféomorphismes locaux de \mathbb{R}_k^n vers M et soit M muni de la D -topologie. Donc les éléments de \mathcal{A} sont des homéomorphismes locaux. Soient $F : U \rightarrow M$ et $F' : U' \rightarrow M$ deux éléments de \mathcal{A} . Supposons que $F(U) \cap F'(U')$ est ouvert et non-vide. Donc $F^{-1}(F(U) \cap F'(U'))$ et $F'^{-1}(F(U) \cap F'(U'))$ sont des ouverts. Les applications $F'^{-1} \circ F|_{F^{-1}(F(U) \cap F'(U'))}$ et $F^{-1} \circ F'|_{F'^{-1}(F(U) \cap F'(U'))}$ sont des difféomorphismes pour la sous-difféologie de \mathbb{R}_k^n qui sont des restrictions des applications lisses. Par conséquent, l'ensemble \mathcal{A} donne à M une structure de variété lisse à coins.

□

1.2.5.5 Espaces difféologiques et ensembles simpliciaux

Définition 1.2.39. $\Delta^n = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ et } 0 \leq t_i \leq 1 \forall i\}$ est appelé n – simplexe standard.

Δ^n est une variété à coins donc c'est un espace difféologique modélisé sur \mathbb{R}_k^n .

Définition 1.2.40. La catégorie simpliciale Δ est la catégorie des ensembles totalement ordonnés $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et des application croissantes.

Définition 1.2.41. Un ensemble simplicial est un foncteur contravariant $X : \Delta \rightarrow \underline{Set}$.

Définition 1.2.42. Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. Un morphisme simplicial $f : X \rightarrow Y$ est une transformation naturelle entre ces deux foncteurs.

Définition 1.2.43. La catégorie $\underline{EnsSimp}$ est la catégorie des ensembles simpliciaux et des morphismes simpliciaux.

$\{Diff(\Delta^n, X)\}_n$ est un ensemble simplicial. Les applications faces et dégénérescences sont lisses.

Définition 1.2.44. On définit le foncteur \underline{Sing}

$$\underline{Sing} : \underline{Diff} \longrightarrow \underline{EnsSimp}$$

qui est la donnée

- d'une fonction qui associe à tout objet de \underline{Diff} un objet de $\underline{EnsSimp}$ tel que $\underline{Sing}(X) = Diff(\Delta^n, X)$,
 - une fonction qui associe à toute application difféologique $f : X \rightarrow Y$ la transformation naturelle $\underline{Sing}(f) : \underline{Sing}(X) \rightarrow \underline{Sing}(Y)$, donnée par $\phi \mapsto f \circ \phi$,
- qui respectent les identités et la composition :
- pour tout objet $X \in \underline{Diff}$, $\underline{Sing}(Id_X) = Id_{\underline{Sing}(X)}$,
 - Pour tout $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z \in \underline{Diff}$, $\underline{Sing}(f \circ g) = \underline{Sing}(f) \circ \underline{Sing}(g)$.

Nous allons montrer que ce foncteur possède un foncteur adjoint $|_D$.

$$\begin{array}{ccc} \underline{EnsSimp} & & \\ \downarrow |_D & \searrow || & \\ \underline{Diff} & \longrightarrow & TOP \end{array}$$

Le foncteur $|| : \underline{EnsSimp} \rightarrow TOP$ est le foncteur de réalisation usuel. Ce foncteur préserve tous les colimites donc c'est un foncteur continu. L'objet géométrique cosimplicial standard dans TOP est un objet cosimplicial dans \underline{Diff} . Donc nous avons le foncteur adjoint $|_D : \underline{EnsSimp} \rightarrow \underline{Diff}$

1.2.5.6 CW-difféologies

Définition 1.2.45. Une structure CW-difféologique sur un espace difféologique X est donnée par une suite croissante de sous espaces de X

$$X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^i \subset \dots$$

satisfaisant les conditions suivantes :

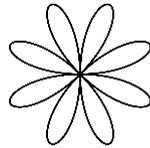
1. X^0 est un ensemble discret dont les points sont les 0-cellules.
2. Pour $n \geq 0$, X^n est obtenu inductivement de X^{n-1} en recollant successivement une collection de variétés lisses à bord de dimension n avec une application de collier $\mathbf{c} : \partial M^n \times [0, \epsilon) \rightarrow V$ où V est un voisinage ouvert de ∂M^n via $f_\alpha : \partial M^n \rightarrow X^{n-1}$. Donc X^n est l'espace quotient de $X^{n-1} \amalg M_\alpha^n$ de X^{n-1} avec une collection de variétés lisses à bord M_α^n par la relation $x \sim f_\alpha(x)$. Le sous-ensemble X^n de X est appelé n -squellette.
3. Un espace CW-difféologique est dit fini si le nombre de variétés lisses attachées est fini.

Remarque 1.2.46. Un CW-complexe ordinaire avec la structure difféologique est un cas particulier des espaces CW-difféologiques avec des attachements des D_α^n .

Exemple 1.2.11. Un bouquet de sphères a une structures de CW-difféologie.

$$\vee_\alpha S_\alpha^n = \cdot \cup_{f_\alpha} D_\alpha^n$$

où $f_\alpha : S_\alpha^n \rightarrow \cdot$ est l'application d'attachement. Le bouquet de sphères est muni de la difféologie quotient obtenue par $\pi : \cdot \cup D_\alpha^n \rightarrow \cdot \cup_{f_\alpha} D_\alpha^n$ comme la difféologie pushforward de $\cdot \cup D_\alpha^n$.



Exemple 1.2.12. Stratifold Paramétré [11] Nous allons tout d'abord définir l'espace différentiel et le stratifold.

Définition 1.2.47. Espace différentiel Un espace différentiel est une paire (X, \mathbf{C}) où X est un espace topologique et $\mathbf{C} \subset \mathcal{C}^0(X)$ est une algèbre des fonctions continues telle que

- (1) \mathbf{C} est localement détectable, c'est-à-dire une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est dans \mathbf{C} si et seulement si pour chaque $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x et $g \in \mathbf{C}$ tel que $f|_U = g|_U$.

(2) Pour chaque $f_1, f_2, \dots, f_k \in \mathbf{C}$ et $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse,

$$x \mapsto g(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

est dans \mathbf{C} .

Remarque 1.2.48. On peut construire d'un espace différentiel (X, \mathbf{C}) des nouveaux espaces difféologiques. Par exemple, si $Y \subset X$ est un sous-espace, on définit $\mathbf{C}(Y)$ qui contient les fonctions $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in Y$, il existe une fonction $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dans \mathbf{C} telle que $f|_V = g|_V$, pour un voisinage ouvert V de x dans Y .

Définition 1.2.49. Soit (X, \mathbf{C}) un espace différentiel et $x \in X$. L'espace vectoriel de dérivations au point x est appelé l'espace tangent de X et noté par $T_x X$.

Définition 1.2.50. Stratifold Soit (S, \mathbf{C}) un espace différentiel et nous définissons la sous-espace $S^i := \{x \in S \mid \dim T_x S = i\}$. Une stratifold de dimension k est un espace différentiel (S, \mathbf{C}) où S est un espace localement compact, séparé, avec une base dénombrable et la squelette Σ^i est un sous-espace fermé et satisfait

- $(S^i, \mathbf{C}(S^i))$ est une variété lisse,
- Pour chaque $x \in S^i$, la restriction définit une bijection

$$i^* : \mathbf{C}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^\infty(S^i)_x$$

- $\dim T_x S \leq k$ pour chaque $x \in S$,
- Pour chaque $x \in S$ et voisinage ouvert $U \subset S$ il existe une fonction plateau dans \mathbf{C} .

Exemple 1.2.13. Soit M une variété lisse compacte de dimension k . Considérons le cône ouvert sur M , $\text{cone}^\circ M = M \times [0, 1)/(M \times \{0\})$. Nous définissons l'algèbre $\mathbf{C} \subset C^0(\text{cone}^\circ M)$ contenant toutes les fonctions dans $C^0(\text{cone}^\circ M)$ qui sont constantes sur un voisinage ouvert U de sommet de cône et toutes les fonctions dont leur restriction à $M \times (0, 1)$ sont dans $C^\infty(M \times (0, 1))$. $(\text{cone}^\circ M, \mathbf{C})$ est un espace différentiel. $\text{cone}^\circ M$ est un espace séparé, avec une base dénombrable et localement compact.

Nous allons décrire la stratification. Pour x qui n'est pas le sommet du cône, \mathbf{C}_x l'ensemble des germes des fonctions lisses sur $M \times (0, 1)$ et $T_x(\text{cone}^\circ M) = T_x(M \times (0, 1))$ qui implique $\dim T_x(\text{cone}^\circ M) = k + 1$. Pour x le sommet du cône \mathbf{C}_x contient seulement de germes de fonctions constantes et $\dim T_x(\text{cone}^\circ M) = 0$. Par conséquent, nous avons deux strates non-vides : $M \times (0, 1)$ et le sommet du cône.

Il reste à montrer l'existence de fonctions bosses. Pour les points en dehors du sommet l'existence d'une fonction bosse découle de l'existence de fonction bosse sur $M \times (0, 1)$. Pour le sommet nous allons noter que tous les voisinages ouverts du sommet contiennent un voisinage ouvert de la forme $M \times [0, \epsilon)/(M \times \{0\})$ pour un $\epsilon > 0$. Choisissons une

fonction lisse $\eta : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ qui vaut 1 près de 0 et 0 pour $t \geq \epsilon$. À l'aide de η nous pouvons définir une fonction bosse

$$\rho([x, t]) := \eta(t).$$

Définition 1.2.51. *Une stratifold paramétrée est construite inductivement en attachant des variétés à bord. Soit (S, \mathbf{C}) une stratifold et W une variété lisse à bord de dimension k avec un collier $\mathbf{c} : \partial W \times [0, \epsilon) \rightarrow V$ où V est un voisinage ouvert de ∂W . Nous supposons que $k > n$. Soit $f : \partial W \rightarrow S$ une application d'attachement propre. Alors nous définissons un nouvel espace S' en attachant W à S par f :*

$$S' := W \cup_f S.$$

Sur cet espace nous avons l'algèbre \mathbf{C}' qui contient les fonctions $g : S' \rightarrow \mathbb{R}$ dont la restriction à S est dans \mathbf{C} et dont la restriction à l'intérieur $\overset{\circ}{W} := X - \partial W$ est lisse et telle que pour un $\delta < \epsilon$ nous avons $g(x, t) = gf(x)$ pour chaque $x \in \partial W$ et $t < \epsilon$. Nous appliquons cette construction inductivement à une suite finie de variétés lisses à bords de dimension i compactes munies d'applications collier et d'applications d'attachements $f_i : \partial W_i \rightarrow S^{i-1}$ où S^{i-1} est construit de $(W_0, f_0), \dots, (W_{i-1}, f_{i-1})$.

Une stratifold paramétrée est un espace CW -difféologique. La difféologie de stratifold paramétrée est la difféologie pushforward de $S \cup W$ par $\pi : S \cup W \rightarrow S \cup_f W$.

Chapitre 2

Théories (Co)homologiques Pour Les Espaces Difféologiques

Dans ce chapitre, nous allons introduire et développer les théories (co)homologiques généralisées pour les espaces difféologiques.

Dans la section 2.1 on définit les théories homologiques généralisées sur \underline{Diff} . Dans les sections 2.1.1 et 2.1.2 on introduit l'homologie singulière, et l'homologie cellulaire dans le cadre difféologique.

Dans la section 2.2 on définit les théories cohomologiques généralisées sur \underline{Diff} . Également dans cette section, on rappelle les formes différentielles difféologiques et la cohomologie de De Rham introduites par Souriau et développées par P. Iglesias Zemmour. On montre que les théories cohomologiques sur les espaces CW-difféologiques sont uniques à isomorphisme près, Théorème 2.2.4.

Dans la section 2.2.3 on compare le foncteur $\Omega_{\underline{Diff}} : \underline{Diff} \rightarrow ADGR$ des formes différentielles difféologiques sur la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial avec le foncteur $\Omega_{PL} : sSet \rightarrow ADGR$ des formes différentielles sur ce même ensemble simplicial.

Dans la section 2.2.4, on résume quelques bases de pseudo-variétés contrôlées. On munit la pseudo-variété contrôlée de deux différentes difféologies, l'une que l'on appelle la difféologie de Pflaum et l'autre la difféologie quotient. Dans la section 2.2.5 on compare les deux structures difféologiques sur les pseudo-variétés contrôlées.

Dans la section 2.2.6, on définit les désingularisations stratifiées difféologiques.

Dans la section 2.2.7, on rappelle la définition des formes différentielles d'intersection et on montre que les formes différentielles difféologiques définies sur X^N , la normalisation

d'une pseudo-variété contrôlée munie de la difféologie quotient est isomorphe aux formes 0-perverses définies sur la désingularisation de X^N , Théorème 2.2.62.

2.1 Théories Homologiques généralisées

Eilenberg et Steenrod [24] ont démontré que l'homologie à coefficients dans G est caractérisée sur la catégorie des complexes simpliciaux finis par sept axiomes appelés "axiomes d'Eilenberg-Steenrod". Plus tard, Atiyah, Hirzebruch et G.W. Whitehead ont observé qu'il y avait d'autres foncteurs qui satisfont seulement à six axiomes (sauf l'axiome de dimension). Whitehead [34] a donné la description de ces théories homologiques généralisées.

Définition 2.1.1. Soient $(X, A), (Y, B)$ dans $TOP(2)$. On définit le foncteur de restriction $R : TOP(2) \rightarrow TOP(2)$ par

$$R(X, A) = (A, \emptyset), \quad R(f) = f|_A.$$

Également pour la catégorie homotopique

$$R(X, A) = (A, \emptyset), \quad R([f]) = [f|_A].$$

Définition 2.1.2. Soit (X, x_0) un objet dans TOP_p , on définit le foncteur de suspension $S : Top_p \rightarrow Top_p$ tel que $S(X, x_0) = (SX, *)$ et $S(f) = 1_{S^1} \wedge f$.

Définition 2.1.3. Une théorie homologique non-réduite H_* est une suite de foncteurs covariants de la catégorie des paires d'espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens gradués

$$H_n : TOP(2) \rightarrow \underline{AbGr}$$

notés

$$(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$$

$$((X, A) \rightarrow (Y, B)) \mapsto (H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B))$$

avec des transformations naturelles

$$\partial_n : H_n \rightarrow H_{n-1} \circ R, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

vérifiant, pour tout $(X, A) \in TOP(2)$, que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) & \xrightarrow{\partial_p(X,A)} & H_{p-1}(A) \\ f_* \downarrow & & \downarrow (f|_A)_* \\ H_p(Y, B) & \xrightarrow{\partial_p(Y,B)} & H_{p-1}(B) \end{array}$$

commute, et $\{H_n\}$ et $\{\partial_n\}$ satisfont aux axiomes suivants :

- **Invariance homotopique** Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors ils induisent le même homomorphisme $f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$.
- **Excision** Soient (X, A) une paire et U un sous-ensemble ouvert de X tel que $\bar{U} \subset \text{int}(A)$, alors l'inclusion $i : (X - U, A - U) \hookrightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme $i_* : H_n(X - U, A - U) \rightarrow H_n(X, A)$.
- **Suite Exacte Longue** Pour chaque paire $(X, A) \in \text{TOP}(2)$, la suite

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X,A)} H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} \dots$$

est exacte, où $i : (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$ et $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ sont des inclusions.

Autrement dit, une théorie homologique généralisée satisfait aux axiomes d'Eilenberg-Steenrod [24], sauf l'axiome de dimension.

Définition 2.1.4. Une théorie homologique réduite est une suite de foncteurs entre la catégorie des espaces topologiques pointés et la catégorie des groupes abéliens gradués

$$h_n : \text{TOP}_p \rightarrow \underline{\text{AbGr}}$$

avec des transformations naturelles $\partial_n : h_n \rightarrow h_{n+1} \circ S$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- **Invariance homotopique** Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors ils induisent le même homomorphisme $f_* = g_* : h_*(X, x_0) \rightarrow h_*(Y, f(x_0))$.
- **Suite Exacte Longue** Pour chaque paire pointée (X, A, x_0) avec les inclusions $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ et $j : (X, x_0) \rightarrow (X \cup CA, *)$, la suite

$$h_n(A, x_0) \rightarrow h_n(X, x_0) \rightarrow h_n(X \cup CA, *)$$

est exacte.

Il existe deux autres axiomes que l'on va souvent imposer sur une théorie homologique réduite. L'axiome du Bouquet est utile pour faire des déductions sur les CW-complexes et l'axiome d'équivalence homotopie faible pour faire des déductions sur les espaces qui ne sont pas des CW-complexes.

- **Axiome de Bouquet** Pour chaque collection $\{(X_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ des espaces pointés, les inclusions $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\beta \in A} X_\beta$ induisent un isomorphisme

$$\{i_{\alpha*}\} : \bigoplus_{\alpha \in A} h_n(X_\alpha) \rightarrow h_n(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- **Axiome d'équivalence d'homotopie faible** Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie faible alors $f_* : h_n(X, x_0) \rightarrow h_n(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in X$.

Il existe une bijection entre les théories homologiques non-réduites et les théories homologiques réduites [31].

Remarque 2.1.5. L'axiomatisation permet d'unifier des homologies introduites dans des domaines différents, et cela donne à chacune de ces homologies la possibilité d'être étudiée avec des méthodes beaucoup plus générales, et souvent plus puissantes.

Exemple 2.1.1. L'homologie singulière définie sur TOP et l'homologie cellulaire définie sur la sous-catégorie de TOP formée par les CW-complexes sont des exemples de théories homologiques ordinaires.

Définition 2.1.6. Théorie homologique généralisée sur \underline{Diff}_p Une théorie homologique difféologique est une suite de foncteurs covariants de la catégorie des espaces difféologiques pointés vers la catégorie des groupes abéliens

$$H_n : \underline{Diff}_p \rightarrow \underline{AbGr}$$

avec une famille de transformations naturelles qui satisfait aux axiomes suivantes ;

- **Invariance homotopique** Si $f, g : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors ils induisent le même homomorphisme $f_* = g_* : H_*(X, x_0) \rightarrow H_*(Y, f(x_0))$.
- **Suite Exacte Longue** Pour chaque paire pointée (X, A, x_0) avec les inclusions $i : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ et $j : (X, x_0) \rightarrow (X \cup CA, *)$, la suite

$$H_n(A, x_0) \rightarrow H_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X \cup CA, *)$$

est exacte.

- **Axiome du Bouquet** Pour chaque collection $\{(X_\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ des espaces difféologiques pointés, les inclusions $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\beta \in A} X_\beta$ induisent un isomorphisme

$$\{i_{\alpha*}\} : \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha) \rightarrow H_n(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- **Axiome d'équivalence d'homotopie faible** Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie faible, alors $f_* : H_n(X, x_0) \rightarrow H_n(Y, f(x_0))$ est un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in X$.

2.1.1 Homologie des espaces difféologiques H_*^Δ

Nous allons définir l'homologie singulière dans le cadre difféologique.

Définition 2.1.7. Soit Δ^\bullet un simplexe standard et X un espace difféologique. Notons par $\text{Diff}(\Delta^\bullet, X)$ les applications lisses de Δ^\bullet vers X . Cet ensemble est muni de la difféologie fonctionnelle. On définit l'ensemble des p -chaînes singulières difféologiques à coefficients dans \mathbb{Z} comme le groupe abélien libre engendré par $\text{Diff}(\Delta^p, X)$.

$$C_p^\Delta(X) := \mathbb{Z}\langle \text{Diff}(\Delta^p, X) \rangle.$$

On définit un homomorphisme de bord sur les chaînes singulières difféologique qui satisfait la condition homologique $\partial \circ \partial = 0$.

Définition 2.1.8. Soit $\partial_n(\sigma) : C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$ l'homomorphisme défini par

$$\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

pour un $\sigma \in \text{Diff}(\Delta^n, X)$.

On obtient $[v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ en omettant la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $[v_0, \dots, v_n]$.

Lemme 2.1.9. La composition $C_n^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^\Delta(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}^\Delta(X)$ est nulle.

Preuve. On a $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$

$$\begin{aligned} \partial_{n-1}\partial_n(\sigma) &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j \sigma | [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \\ &+ \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} \sigma | [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n] \end{aligned}$$

Les deux sommes s'annulent car la deuxième somme est de signe opposé à la première à cause du changement de i et j . \square

On a la suite

$$\dots C_{n+1}^\Delta \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n^\Delta \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}^\Delta \longrightarrow \dots C_1^\Delta \xrightarrow{\partial_1} C_0^\Delta \xrightarrow{\partial_0} 0$$

avec $\partial_n \partial_{n+1} = 0$ pour chaque n . Donc $C_*^\Delta(X)$ est un complexe de chaînes.

Définition 2.1.10. Définissons $Z_n(X) = \ker\{\partial : C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)\} \subset C_n^\Delta(X)$ et $B_n(X) = \text{im}\{\partial_{n+1} : C_{n+1}^\Delta(X) \rightarrow C_n^\Delta(X)\} \subset C_n^\Delta(X)$.

Le n ième groupe d'homologie singulière difféologique d'un espace difféologique X est le quotient

$$H_n^\Delta(X) = Z_n(X)/B_n(X).$$

Remarque 2.1.11. $C_*^\Delta(-)$ est fonctoriel par rapport aux morphismes d'espaces difféologiques. Les applications faces et dégénérescences sont lisses.

Théorème 2.1.12. $H_*^\Delta(-)$ est une théorie homologique.

Preuve. On va d'abord montrer l'invariance homotopique. Soient X et Y deux espaces difféologiques et $f, g : X \rightarrow Y \in \mathcal{D}(X, Y)$ deux applications lisses. Comme la catégorie \underline{Diff} est une catégorie cartésienne, f et g est homotopes, si et seulement s'il existe une application lisse $F : X \times I \rightarrow Y$ telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. (cf. [7])

Etant donné une homotopie $F : X \times I \rightarrow Y$ de f à g , on définit un opérateur prisme $P : C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n+1}^\Delta(Y)$ par

$$P(\sigma) = \sum_i (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$$

où $F \circ (\sigma \times \mathbb{1})$ est la composition $\Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$. On va montrer que cet opérateur prisme satisfait la relation

$$\partial P = g_\# - f_\# - P\partial$$

On calcule

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n] \end{aligned}$$

Les termes avec $i = j$ dans les deux sommes s'annulent sauf $F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \mid [\hat{v}_0, w_0, \dots, w_n]$ qui est $g \circ \sigma = g_\#(\sigma)$ et $-F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, \dots, v_n, \hat{w}_n]$ qui est $-f \circ \sigma = -f_\#(\sigma)$.

La somme des termes avec $i \neq j$ est égale à $-P\partial(\sigma)$ car

$$\partial P(\sigma) = \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]$$

$$+ \sum_{i>j} (-1)^{i-1} (-1)^j + 1F \circ (\sigma \times \mathbb{1}) \mid [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$$

Si $\alpha \in C_n^\Delta(X)$ est un cycle, on a $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha) = \partial(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$ car $\partial\alpha = 0$. Donc $g_\#(\alpha) - f_\#(\alpha)$ est un bord. Par conséquent $g_\#(\alpha)$ et $f_\#(\alpha)$ déterminent la même classe d'homologie, c'est à dire g_* et f_* sont égaux sur la classe d'homologie de α .

L'axiome d'excision et l'axiome de dimension sont satisfait et on les montre de la même façon que pour les espaces topologiques.

□

Théorème 2.1.13. *Soit M une variété. Alors*

$$H_*^\Delta(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H_*(M, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme où i est induit par le foncteur $\underline{Diff} \rightarrow TOP$.

Pour la preuve, on va utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.1.14. [1] *Soit M une variété lisse. Supposons que P est un énoncé pour les ouverts de M qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *P est vraie pour U un ouvert de M qui est difféomorphe à un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n .*
2. *Si P est vraie pour U, V et $U \cap V$, alors $P(U \cup V)$ est vraie.*
3. *Soit $U = \sqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ disjoint. Si pour tout $\alpha \in A$, $P(U_\alpha)$ est vraie, alors P est vraie pour U .*

Alors $P(M)$ est vrai.

Preuve. Q est l'énoncé suivante :

$$H_*^\Delta(-, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H_*(-, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

1. Soit $\mathcal{U} = \sqcup_{\alpha} U_\alpha$ une union disjointe d'ouverts difféomorphes à \mathbb{R}^n

$$i : H_*^\Delta(\mathcal{U}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

2. Si i est un isomorphisme pour les ouverts U, V et $U \cap V$. On a un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_*^\Delta(U \cap V) & \longrightarrow & H_*^\Delta(U) \oplus H_*^\Delta(V) & \longrightarrow & H_*^\Delta(U \cup V) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i \\
 \dots & \longrightarrow & H_*(U \cap V) & \longrightarrow & H_*(U) \oplus H_*(V) & \longrightarrow & H_*(U \cup V) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Donc $H_*^\Delta(U \cup V) \rightarrow H_*(U \cup V)$ est un isomorphisme.

3. Si $H_*^\Delta(U_\alpha, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H_*(U_\alpha, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour chaque α avec $U_1 \subset U_2 \cdots \subset U = \lim U_\alpha$. Alors

$$H_*^\Delta(U, \mathbb{Z}) = H_*^\Delta(\lim U_\alpha, \mathbb{Z}) = \lim H_*^\Delta(U_\alpha, \mathbb{Z}).$$

Donc $H_*^\Delta(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} H_*(M, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme. \square

2.1.2 Homologie des CW-difféologies

La théorie homologique cellulaire difféologique est une suite de foncteurs $H_n^{CW-d} : \underline{CWSpH} \rightarrow \underline{AbGr}$ avec la suite de transformations naturelles ∂^{CW-d} qui satisfont les axiomes d'une théorie homologique.

Remarque 2.1.15. Pour définir l'homologie cellulaire difféologique, on se restreint à \underline{CWSpH} une sous-catégorie de \underline{CWDiff} formée par des CW-difféologies avec des attachements des disques.

Définition 2.1.16. Soit X un espace CW-difféologique. On définit un complexe de chaînes $(C_n(X), d)$ où $C_n(X) = H_n(X^n, X^{n-1})$. L'application bord est définie $d_n = j_{n-1} \circ \partial_n$ où $\partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ et $j_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H^n(X^n)$. La composition $d_{n+1} \circ d_n$ est nulle. Donc $(C_n(X), d)$ forme un complexe de chaînes appelé complexe de chaînes cellulaires, dont l'homologie est appelée l'homologie cellulaire difféologique et notée $H_n^{CW-d}(X)$.

Théorème 2.1.17. Soit X un espace CW-sphérique, X_D l'espace topologique avec la D -topologie,

$$H_*^{CW-d}(X) \rightarrow H_*(X_D)$$

est un isomorphisme naturelle.

Preuve. Si X est une variété, par le théorème 2.1.13, il existe un isomorphisme $\eta_X : H_*^{CW-d}(X) \rightarrow H_*(X)$. On va montrer que

$$\eta_Y : H_*^{CW-d}(Y) \rightarrow H_*(Y)$$

est un isomorphisme où $Y = X \amalg_f D^{n+1}$. Notons que H^{CW-d} et H satisfont l'axiome d'excision.

On a le push-out suivant

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{i} & D^{n+1} \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \amalg_f D^{n+1} \end{array}$$

On prend des ouverts $U = X \amalg_f C^{n+1}$ et $V = M^{n+1}$ où $C = S^n \times [0, 1]$. Comme V et $U \cap V$ sont des variétés, η_V et $\eta_{U \cap V}$ sont des isomorphismes. On va montrer que η_U est un isomorphisme aussi.

On restreint le diagramme à U

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{i} & U \cap V \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & U \end{array}$$

Nous avons une application de collier telle que la restriction à S^n soit l'identité. On obtient le push-out suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{id} & S^n \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \end{array}$$

Donc η_U est un isomorphisme aussi.

On a la suite exacte longue

$$\dots H_*^{CW-d}(X) \rightarrow H_*^{CW-d}(X \amalg_f D^{n+1}) \rightarrow H_*^{CW-d}(S^{n+1}) \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_*^{CW-d}(X) & \longrightarrow & H_*^{CW-d}(X \amalg_f D^{n+1}) & \longrightarrow & H_*^{CW-d}(S^{n+1}) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong \\ \dots & \longrightarrow & H_*(X) & \longrightarrow & H_*(X \amalg_f D^{n+1}) & \longrightarrow & H_*(S^{n+1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Par le Théorème 2.1.13 la première et la troisième flèches verticales sont des isomorphismes et par le lemme des cinq, on a l'isomorphisme entre $H_*^{CW-d}(X \amalg_f D^{n+1})$ et $H_*(X \amalg_f D^{n+1})$. \square

2.2 Théories Cohomologiques Généralisées

La notion duale de théorie homologique est la théorie cohomologique.

Définition 2.2.1. Une théorie cohomologique généralisée H^* est une suite de foncteurs contravariants de la catégorie $\underline{Diff}(2)$ des paires des espaces difféologiques vers la catégorie de groupes abéliens gradués :

$$H^n : \underline{Diff}(2) \rightarrow \underline{AbGr}$$

avec une suite de transformations naturelles $\{\delta_{p-1} : H^{n-1} \circ R \rightarrow H^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ où R est le foncteur de restriction défini dans la Définition 2.1.1 telle que pour tout $(X, A) \in \underline{Diff}(2)$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^p(B) & \xrightarrow{\delta_p(Y,B)} & H^{p+1}(Y, B) \\ (f|B)^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^p(A) & \xrightarrow{\delta_p(X,A)} & H^{p+1}(X, A) \end{array}$$

commute et $\{H^n\}$ et $\{\delta_n\}$ satisfont les axiomes suivants :

- **Invariance Homotopique** Les applications homotopiques f_0 et f_1 entre les paires d'espaces induisent le même homomorphisme $H^n(f_0) = H^n(f_1)$
- **Suite Exacte** Pour chaque paire (X, A) , la suite

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta} H^n(X, A) \rightarrow H^n(X, \emptyset) \rightarrow H^n(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta} \dots$$

est exacte.

- **Excision** Soit (X, A) une paire et $U \subset A$ tel que $\bar{U} \subset A^\circ$. Alors l'inclusion $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induit un isomorphisme $H^n(X, A) \cong H^n(X \setminus U, A \setminus U)$.
- **Axiome du Bouquet** Pour toute collection $\{(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ d'espaces difféologiques pointés, les inclusions $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\beta \in A} X_\beta$ induisent un isomorphisme

$$\{i_\alpha^*\} : H^q(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} H^q(X_\alpha)$$

Théorème 2.2.2. $H_\Delta^*(_, \mathbb{Z})$ est une théorie cohomologique.

Démonstration. La preuve de ce théorème est similaire au cas des espaces topologiques. □

Proposition 2.2.1. Soit (X, x_0) un espace CW-difféologique et $X^0 \subset \dots \subset X^n \subset \dots \subset X$ une suite de sous-complexes avec $\bigcup_{n \geq 0} X^n = X$, les inclusions $j_n^m : X^n \rightarrow X^m$, et les

inclusions $i_n : X^n \rightarrow X$ pour $n \geq m$. Alors $\{h^q(X^n), j_n^{m*}, \mathbb{N}\}$ est un système inverse pour tout $q \in \mathbb{Z}$, et si h^* satisfait l'axiome du Bouquet alors il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow \lim^1 h^{q-1}(X^n) \rightarrow h^q(X) \xrightarrow{\{i_n^*\}} \lim^0 h^q(X^n).$$

Preuve. Nous construisons le "téléscope infini"

$$X' = \cup_{k \geq 0} [k, k+1] \times X^k$$

Pour chaque n , soit $X'_n = \cup_{k=0}^n [k, k+1] \times X^k \subset X'$. Donc X' est aussi un espace CW-difféologique. Nous posons

$$A = \cup_{k \geq 0; k \text{ impair}} [k, k+1] \times X^k \subset X',$$

$$B = \cup_{k \geq 0; k \text{ pair}} [k, k+1] \times X^k \subset X'$$

tels que

- i) $A \cup B = X'$
- ii) $A \cap B = \cup_{k \geq 0} \{k\} \times X^k \cong \cup_{k \geq 0} X^k$
- iii) $\cup_{k \geq 0; k \text{ impair}} \{k\} \times X^k \subset A$ est une rétraction par déformation,
- iv) $\cup_{k \geq 0; k \text{ pair}} \{k\} \times X^k \subset B$ est une rétraction par déformation.

Les axiomes d'une théorie cohomologique implique Mayer-Vietoris, y compris dans le cadre difféologique. Considérons la triade $(X'; A, B)$ à laquelle nous allons appliquer la suite de Mayer-Vietoris :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & h^{q-1}(A) \oplus h^{q-1}(B) & \xrightarrow{\alpha} & h^{q-1}(A \cap B) & \xrightarrow{\Delta'} & \dots \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ & & \prod_{n \geq 0} h^{q-1}(X^n) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_{n \geq 0} h^{q-1}(X^n) & \longrightarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} h^q(X') & \xrightarrow{\beta} & h^q(A) \oplus h^q(B) & \xrightarrow{\alpha} & h^q(A \cap B) & \longrightarrow & \dots \\ r^* \downarrow \cong & \searrow \beta' & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ h^q(X) & \xrightarrow[\{i_n^*\}]{} & \prod_{n \geq 0} h^q(X^n) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_{n \geq 0} h^q(X^n) & & \end{array}$$

où α' est donné par

$$[\alpha'(f)](n) = (-1)^{n+1} \{f(n) - j_n^{n+1*} f(n+1)\}$$

où $f \in \prod_{k \geq 0} h^q(X^k)$ et

$$[\beta'(x)](n) = k_n^* i_n^*(x)$$

où $x \in h^q(X')$. Donc $\alpha' = -\delta$ et nous obtenons la suite exacte suivante

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{coker } \alpha' & \longrightarrow & h^q(X) & \xrightarrow{\{i_n^*\}} & \text{ker } \alpha' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \cong & & & & \downarrow \cong \\
 & & \text{lim}^1 h^{q-1} & & & & \text{lim}^0 h^q(X^n)
 \end{array}$$

□

Remarque 2.2.3. En cohomologie $\{i_n^*\} : h^q(X) \rightarrow \text{lim}^0 h^q(X^n)$ est un isomorphisme si et seulement si $\text{lim}^1 h^{q-1}(X^n) = 0$.

Théorème 2.2.4. Soit $\phi^* : h^* \rightarrow h'^*$ une transformation naturelle de théories de cohomologie généralisées sur Diff. Si

$$\phi^q(\mathbb{S}^0, s_0) : h^q(\mathbb{S}^0, s_0) \rightarrow h'^q(\mathbb{S}^0, s_0)$$

est un isomorphisme pour $q > N$ et est un épimorphisme pour $q = N$, alors pour tout espace CW-difféologique (X, x_0) de dimension n

$$\phi^q(X, x_0) : h^q(X, x_0) \rightarrow h'^q(X, x_0).$$

est un isomorphisme pour $q > N + n$ et un épimorphisme pour $q = N + n$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{array}{ccc}
 h^{n+q}(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\cong} & h^q(\mathbb{S}^0) \\
 \phi^{n+q}(\mathbb{S}^n) \downarrow & & \downarrow \phi^q(\mathbb{S}^0) \\
 h'^{n+q}(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\cong} & h'^q(\mathbb{S}^0)
 \end{array}$$

Par hypothèse si $\phi^q(\mathbb{S}^0)$ est un isomorphisme pour $q > N$ et un épimorphisme pour $q = N$ alors $\phi^{n+q}(\mathbb{S}^n)$ est un isomorphisme pour $q > n + N$ et un épimorphisme pour $q = n + N$. Les théories cohomologiques généralisée h^* et h'^* satisfont l'axiome du Bouquet et par la naturalité de ϕ , nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 h^{n+q}(\bigvee_{\alpha \in A} \mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\alpha \in A} h^{n+q}(\mathbb{S}^0) \\
 \phi^{n+q}(\bigvee_{\alpha \in A} \mathbb{S}^n) \downarrow & & \downarrow \prod_{\alpha \in A} \phi^{n+q}(\mathbb{S}^0) \\
 h'^{n+q}(\bigvee_{\alpha \in A} \mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\cong} & \prod_{\alpha \in A} h'^{n+q}(\mathbb{S}^0)
 \end{array}$$

où les isomorphismes proviennent de l'axiome du bouquet. Donc $\phi^{n+q}(\bigvee_{\alpha \in A} \mathbb{S}^n)$ est aussi un isomorphisme pour $q > n + N$ et un épimorphisme pour $q = n + N$. Par récurrence, nous supposons que $\phi^q(X^{m-1})$ est un isomorphisme pour $q > n + N$ et un épimorphisme pour $q = n + N$ pour un $m \geq n$.

Soit M_α une variété à bord. Notons $\tilde{M}_\alpha = M_\alpha / \partial M_\alpha$. Pour tout espace CW-difféologique X , nous avons $X^m / X^{m-1} \cong \bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha$ et nous obtenons un diagramme commutatif comme suit

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & h^{q-1}(X^{m-1}) & \longrightarrow & h^q(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \phi^{q-1}(X^{m-1}) & & \downarrow \phi^q(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha) & & \\ \dots & \longrightarrow & h'^{q-1}(X^{m-1}) & \longrightarrow & h'^q(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Par l'axiome du Bouquet, $\bigoplus h_n(M_\alpha) \rightarrow h_n(\bigvee_\alpha M_\alpha)$ est un isomorphisme. Par l'excision, $h^q(\tilde{M}_\alpha) \rightarrow h'^q(\tilde{M}_\alpha)$ est un isomorphisme.

$$\begin{array}{ccccccc} h^q(X^m) & \longrightarrow & h^q(X^{m-1}) & \longrightarrow & h^{q+1}(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha) & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \phi^q(X^m) & & \downarrow \phi^q(X^{m-1}) & & \downarrow \phi^{q+1}(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha) & & \\ h'^q(X^m) & \longrightarrow & h'^q(X^{m-1}) & \longrightarrow & h'^{q+1}(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Par hypothèse, pour $q > n + N$ $\phi^q(X^{m-1})$ et $\phi^{q-1}(X^{m-1})$ sont des isomorphismes et $\phi^q(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha)$ est un isomorphisme. Par le Lemme des cinq, $\phi^q(X^m)$ est un isomorphisme.

Pour $q = n + N$, par hypothèse $\phi^q(X^{m-1})$ est un isomorphisme, $\phi^q(X^{m-1})$ un épimorphisme et $\phi^q(\bigvee_{\alpha \in J_m} \tilde{M}_\alpha)$ est un épimorphisme, alors $\phi^q(X^m)$ est un épimorphisme.

Comme les théories cohomologiques généralisées h^* et h'^* satisfont l'axiome du Bouquet par la proposition 3.1

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \lim^1 h^{q-1}(X^n) & \longrightarrow & h^q(X) & \xrightarrow{\{i_n^*\}} & \lim^0 h^q(X^n) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \lim^1(\phi^q(X^n)) & & \downarrow \phi^q(X) & & \downarrow \lim^0 \phi^q(X^n) \\ 0 & \longrightarrow & \lim^1 h'^{q-1}(X^n) & \longrightarrow & h'^q(X) & \xrightarrow{\{i_n^*\}} & \lim^0 h'^q(X^n) \longrightarrow 0 \end{array}$$

On conclut que si $\phi^q(X^m)$ est un isomorphisme pour $q > n + N$ alors $\lim^1(\phi^q(X^m))$ et $\lim^0(\phi^q(X^m))$ sont des isomorphismes pour $q > n + N$. \square

2.2.1 Formes différentielles sur les espaces difféologiques

Les formes différentielles et la cohomologie de de Rham ont été introduites par Souriau [29] et développées par Zemmour dans [7].

Définition 2.2.5. Formes différentielles sur les espaces difféologiques On appelle k -forme différentielle sur l'espace difféologique X une application α qui associe à chaque plaque P de X une k -forme lisse $\alpha(P)$ définie sur le domaine de P telle que pour chaque reparamétrisation lisse F sur le domaine de P :

$$\alpha(P \circ F) = F^*(\alpha(P))$$

Plus précisément, α est une k -forme si et seulement si :

- Pour tout n et pour chaque n -plaque $P : U \rightarrow X$, $\alpha(P) \in \mathcal{C}^\infty(U, \wedge^k(\mathbb{R}^n))$.
- Pour m -domaine V , pour toute paramétrisation lisse $F : V \rightarrow U$, $v \in V$ et k vecteurs $\xi_1 \dots \xi_k \in \mathbb{R}^m$

$$\alpha(P \circ F)(v)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha(p)(F(v))(D(F)(v)(\xi_1), \dots, D(F)(v)(\xi_k)).$$

La condition $\alpha(P \circ F) = F^*(\alpha(P))$ sera appelée la condition de compatibilité lisse. L'espace de toutes les k -formes différentielle de X est noté par $\Omega_{diff}^k(X)$.

L'ensemble de formes différentielles forme un espace vectoriel réel et nous pouvons le munir de la difféologie fonctionnelle.

2.2.1.1 Difféologie fonctionnelle de l'espace de formes

L'ensemble $\Omega_{diff}^k(X)$ de toutes les k -formes différentielles de l'espace difféologique X est un espace vectoriel. Pour toute $\alpha, \alpha' \in \Omega_{diff}^k(X)$, pour tout s nombre réel, et pour chaque plaque P de X

$$\begin{cases} (\alpha + \alpha')(P) = \alpha(P) + \alpha'(P) \\ (s \times \alpha)(P) = s \times \alpha(P) \end{cases}$$

L'ensemble des paramétrisations $\phi : V \rightarrow \Omega_{diff}^k(X)$ défini par la condition suivante est une difféologie de l'espace vectoriel :

★ Pour chaque plaque $P : U \rightarrow X$, l'application $[(s, r) \mapsto \phi(s)(P)(r)]$ définie de $V \times U$ sur $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ est lisse.

Les opérations addition et multiplication par un scalaire sont lisse. Donc $\Omega_{diff}(X)$ est un espace vectoriel difféologique. (cf. [7] 6.29)

Définition 2.2.6. (Produit extérieur) Soient X un espace difféologique, $\alpha \in \Omega_{diff}^k(X)$ et $\beta \in \Omega_{diff}^l(X)$ deux formes différentielles. Le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ est la $(k+l)$ -forme

définie sur X par

$$\alpha \wedge \beta(P) = \alpha(P) \wedge \beta(P) \text{ pour toute plaque } P \text{ de } X.$$

2.2.1.2 Les valeurs d'une forme différentielle

Les deux formes différentielles $\alpha, \beta \in \Omega_{diff}^p(X)$ ont la même valeur si et seulement si pour chaque plaque centrée en x , i.e. $0 \mapsto x$, nous avons $\alpha(P)(0) = \beta(P)(0)$.

Avoir la même valeur en x est une relation d'équivalence et notée par \sim_x et la classe de α avec cette relation est appelée la valeur de α en x et notée par α_x . L'ensemble de toutes les valeurs en x est défini par

$$\Lambda_x^p(X) = \Omega_{diff}^p(X) / \sim_x = \{\alpha_x \mid \alpha \in \Omega_{diff}^p(X)\}$$

La valeur de α en x est nulle si et seulement si pour chaque plaque centrée en x , $\alpha(p)(0) = 0$.

Les deux p -formes α et β ont la même valeur en x si et seulement si leur différence en ce point est nulle.

$$\alpha_x = \beta_x \Leftrightarrow (\alpha - \beta)_x = 0_x$$

$$\Lambda_x^p(x) = \Omega^p(X) / \{\alpha \in \Omega^p(X) \mid \alpha_x = 0_x\}$$

2.2.1.3 Le fibré des p -formes d'espaces difféologiques

Le fibré des p -formes de X est l'union des $\Lambda_x^p(X)$:

$$\Lambda^p(X) = \coprod_{x \in X} \Lambda_x^p(X) = \{(x, \alpha_x) \mid \alpha_x \in \Lambda_x^p(X)\}$$

Le fibré des p -formes est muni de la pushforward difféologie de $X \times \Omega^p(X)$ par la projection

$$\mathbf{p} : X \times \Omega_{diff}^p(X) \rightarrow \Lambda^p(X)$$

telle que $\mathbf{p}(x, \alpha) = (x, \alpha_x)$

Définition 2.2.7. L'espace $\Lambda^1(X)$ est appelé l'espace cotangent de l'espace difféologique X .

Définition 2.2.8. Pour chaque plaque $Q \times A : U \rightarrow X \times \Omega_{diff}^p(X)$, définissons

$$Taut(Q \times A) = [r \mapsto A(r)(Q(r))] \in \Omega_{diff}^p(U).$$

Ainsi, $Taut$ est une p -forme de $X \times \Omega_{diff}^p(X)$ telle que

$$\forall \alpha \in \Omega^p(X), \quad Taut |_{X \times \{\alpha\}} = \alpha$$

Nous appellerons cette p -forme la p -forme tautologique de $X \times \Omega_{diff}^p(X)$.

De plus, il existe une p -forme sur $\Lambda^p(X)$ telle que

$$Taut = \mathbf{p}^*(Liouv) \text{ où } Liouv \in \Omega_{diff}^p(\Lambda^p(X)).$$

qui est appelée la p -forme de Liouville de $\Lambda^p(X)$.

2.2.2 Cohomologie de de Rham

Soit X un espace difféologique. La dérivée extérieure $d : \Omega^n(U) \rightarrow \Omega^{n+1}(U)$ définie sur un ouvert de \mathbb{R}^k induit une dérivée extérieure $d : \Omega_{diff}^n(X) \rightarrow \Omega_{diff}^{n+1}(X)$ qui satisfait $d \circ d = 0$. L'espace des p -cocycles est défini comme le noyau de d dans $\Omega^p(X)$ et l'espace des p -cobord comme l'image de l'opérateur de d dans $\Omega_{diff}^p(X)$

$$\begin{aligned} Z_{dR}^p(X) &= \ker[d : \Omega_{diff}^p(X) \rightarrow \Omega_{diff}^{p+1}(X)] \\ B_{dR}^p(X) &= d(\Omega_{diff}^{p-1}(X)) \subset Z_{dR}^p(X). \end{aligned}$$

Les groupes de cohomologie de de Rham difféologique sont définis

$$H_{diffdR}^p(X) = \frac{Z_{dR}^p(X)}{B_{dR}^p(X)}$$

Définition 2.2.9. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application lisse entre deux espaces difféologiques. Alors f induit un morphisme d'algèbres différentielles graduées $f^* : \Omega_{diff}^*(Y) \rightarrow \Omega_{diff}^*(X)$ qui définit un foncteur $\Omega_{diff}^* : \underline{Diff} \rightarrow \underline{ADGR}$.

2.2.2.1 L'homomorphisme de de Rham

Soit X un espace difféologique. Soit p un entier positif et $\alpha \in \Omega_{diff}^p(X)$. L'intégration de α sur des p -chaînes définit une p -cochaîne pour la cohomologie singulière réduite.

$$\forall c \in C_p^\Delta(X), f_\alpha(c) = \int_c \alpha, \text{ et } f_\alpha \in C_\Delta^p(X, \mathbb{R}).$$

Cela définit un homomorphisme

$$\Psi : \Omega_{diff}^p(X) \rightarrow \text{Hom}(C_p^\Delta(X), \mathbb{R})$$

Soit α une $p-1$ forme et σ un p -simplexe singulière difféologique sur X . Par le Théorème de Stokes , on obtient

$$\begin{aligned} \Psi(d\alpha)(\sigma) &= \int_{\sigma} d\alpha = \int_{\Delta_p} \sigma^*(d\alpha) = \int_{\sigma_p} d(\sigma^*\alpha) = \int_{\partial\Delta_p} \sigma^*\alpha = \\ &= \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} F_i^* \sigma^* \alpha = \sum_i (-1)^i \int_{\Delta_{p-1}} (\sigma \circ F_i)^* \alpha = \sum_i (-1)^i \int_{\sigma \circ F_i} \alpha \\ &= \int_{\partial\sigma} \alpha = \Psi(\alpha)(\partial\sigma) = \delta(\Psi(\alpha))(\sigma), \end{aligned}$$

où

$$\delta : Hom(C_{p-1}^{\Delta}(X), \mathbb{R}) \rightarrow Hom(C_p^{\Delta}(X), \mathbb{R})$$

$$\Psi^* \in L(H_{dR}^p(X), H^p(X)) \quad \Psi^* : class(\alpha) \mapsto class(c \mapsto \int_c \alpha)$$

Le théorème de de Rham dit que Ψ^* est un isomorphisme pour toute variété lisse.

Remarque 2.2.10. Dans [7] Théorème 6.69, l'auteur a donné la version difféologique de Théorème de Stokes sur les chaînes cubiques. Pour les chaînes simplexes, la preuve est faite de façon similaire.

Théorème 2.2.11. Soit M une variété. Alors

$$H_{diffdR}^*(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{i} H_{sing}^*(M, \mathbb{R})$$

est un isomorphisme où i est induit par le foncteur $\underline{Diff} \rightarrow TOP$.

Preuve. Les formes différentielles difféologiques sur une variété coïncident avec les formes différentielles. Supposons que U et V sont deux sous-ensembles de M tels que $M = U \cup V$. Considérons la suite

$$0 \longrightarrow \Omega^p(U \cup V) \longrightarrow \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) \longrightarrow \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0$$

$$(\omega, \tau) \longrightarrow \tau - \omega$$

On va montrer que cette suite est exacte. On va seulement démontrer l'exactitude de la dernière flèche. Considérons $M = \mathbb{R}^1$. Soit f une fonction \mathcal{C}^{∞} sur $U \cap V$. On va écrire f comme la différence d'une fonction sur U et d'une fonction sur V . Soit $\{\rho_U, \rho_V\}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\{U, V\}$. Comme $(\rho_U f) - (-\rho_V f) = f$, on montre que $\Omega^0(U) \oplus \Omega^0(V) \rightarrow \Omega^0(\mathbb{R}^1)$ est surjectif. Pour une variété M , si $\omega \in \Omega^q(U \cap V)$ alors $(-\rho_V \omega, \rho_U \omega) \in \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V)$ est envoyé sur ω . On a le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega^p(U \cup V) & \longrightarrow & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) & \longrightarrow & \Omega^p(U \cap V) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Delta^p(U \cup V) & \longrightarrow & \Delta^p(U) \oplus \Delta^p(V) & \longrightarrow & \Delta^p(U \cap V) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

de suites exactes. Il y a un diagramme associé

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & H_{dR}^p(U \cup V) & \longrightarrow & H_{dR}^p(U) \oplus H_{dR}^p(V) & \longrightarrow & H_{dR}^p(U \cap V) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \longrightarrow & H^p(U \cup V) & \longrightarrow & H^p(U) \oplus H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U \cap V) \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Par le lemme 2.1.14, on montre alors que i est un isomorphisme. \square

Remarque 2.2.12. Ce théorème n'est pas vrai pour tous les espaces. Dans [6] l'auteur montre ce qu'il advient du théorème de de Rham pour ces espaces. Par exemple, le tore irrationnel \mathbf{T}_α : quotient du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ par la pente irrationnelle $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ [19], le premier groupe de cohomologie de de Rham $H_{diffdR}^1(\mathbf{T}_\alpha)$ est égal à \mathbb{R} alors que son groupe de cohomologie singulière $H_{sing}^1(\mathbf{T}_\alpha)$, identifié par l'homomorphisme de Hurewicz au groupe $\text{Hom}(\pi(\mathbf{T}_\alpha), \mathbb{R})$, est égal à \mathbb{R}^2 , et donc $H_{diffdR}^1(\mathbf{T}_\alpha) \neq H_{sing}^1(\mathbf{T}_\alpha)$.

Lemme 2.2.13. Le foncteur $H_{diffdR}^*(-, \mathbb{R})$ satisfait l'axiome du Bouquet.

Preuve. Soit X un espace CW-difféologique tel que

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots \subset X$$

avec $\cup_{n \geq 0} X_n = X$. L'inclusion $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow X$ induit un homomorphisme

$$i_\alpha^* : \Omega_{diff}(X) \rightarrow \Omega_{diff}(X_\alpha)$$

Notons $\prod_\alpha \Omega_{diff}(X_\alpha)$ le produit direct de $\Omega_{diff}(X_\alpha)$, et $\Omega_{diff}(X) = \prod_\alpha \Omega_{diff}^*(X_\alpha) / \sim$ pour $* > 0$ où la relation d'équivalence est l'identité, et pour $* = 0$, on pose $\Omega_{diff}^0(X) = \{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow \mathbb{R} \mid f_\alpha(pt) = f_{\alpha'}(pt)\}$. Nous obtenons un homomorphisme

$$i^* : \Omega_{diff}(X) \rightarrow \prod_\alpha \Omega_{diff}(X_\alpha)$$

donné par

$$(i^*\Phi)_\alpha = i_\alpha^*\Phi, \quad \Phi \in \Omega_{diff}(X).$$

Or i^* est un isomorphisme. Par conséquent i^* induit un isomorphisme en cohomologie réduite

$$i^* : H_{diffdR}^*(X) \rightarrow \prod_\alpha H_{diffdR}^*(X_\alpha) \quad \text{pour } * > 0.$$

\square

Théorème 2.2.14. *Soit X un espace CW-difféologique*

$$H_{diffdR}^*(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{i} H_{sing}^*(X, \mathbb{R}).$$

est un isomorphisme.

Preuve. Si Y est une variété, par le Théorème 2.2.11 il existe un isomorphisme $H_{dR}^*(Y, \mathbb{R}) \rightarrow H_{sing}^*(Y, \mathbb{R})$. On va montrer que $H_{diffdR}^*(Y \amalg_f M^{n+1}) \rightarrow H_{sing}^*(Y \amalg_f M^{n+1})$ est un isomorphisme si M est une variété. On a le push-out suivant

$$\begin{array}{ccc} \partial M^{n+1} \hookrightarrow & M^{n+1} \\ \downarrow f & \downarrow \\ X & \longrightarrow Y \amalg_f M^{n+1} \end{array}$$

On prend des ouverts $U = Y \amalg_f C^{n+1}$ et $V = M^{n+1}$ où $C^{n+1} = \partial M^{n+1} \times [0, 1[$. Comme V et $U \cap V$ sont des variétés, i_V et $i_{U \cap V}$ sont des isomorphismes. On va montrer que i_U est un isomorphisme aussi.

On restreint le diagramme à U

$$\begin{array}{ccc} \partial M^{n+1} \hookrightarrow & U \cap V \\ \downarrow f & \downarrow \\ Y & \longrightarrow U \end{array}$$

Nous avons une application de collier telle que la restriction à ∂M^{n+1} soit l'identité.

On obtient le push-out suivant :

$$\begin{array}{ccc} \partial M^{n+1} & \xrightarrow{id} & \partial M^{n+1} \\ \downarrow f & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Donc i_U est un isomorphisme aussi.

On a la suite exacte longue

$$\cdots \rightarrow H_{diffdR}^*(Y) \rightarrow H_{diffdR}^*(Y \amalg_f M^{n+1}) \rightarrow H_{diffdR}^*(\partial M^{n+2}) \rightarrow \cdots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & H_{diffdR}^*(Y) & \longrightarrow & H_{diffdR}^*(Y \amalg_f M^{n+1}) & \longrightarrow & H_{diffdR}^*(\partial M^{n+2}) \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow \cong & & \downarrow & & \downarrow \cong \\
\dots & \longrightarrow & H_{sing}^*(Y) & \longrightarrow & H_{sing}^*(Y \amalg_f M^{n+1}) & \longrightarrow & H_{sing}^*(\partial M^{n+2}) \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Par le Théorème 2.2.11 la première et la troisième flèches verticales sont des isomorphismes et par le lemme des cinq on a un isomorphisme entre $H_{diffdR}^*(Y \amalg_f M^{n+1})$ et $H_{sing}^*(Y \amalg_f M^{n+1})$. Par induction i_X est un isomorphisme pour X un espace CW-difféologique de dimension finie.

Maintenant dans le cas où X est de dimension infinie, H_{dR}^* satisfait l'axiome du Bouquet et nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
\varprojlim H_{diffdR}^*(X^m) & \longrightarrow & H_{diffdR}^*(X) \\
\downarrow & & \downarrow i \\
\varprojlim H_{sing}^*(X^m) & \longrightarrow & H_{sing}^*(X)
\end{array}$$

Alors $H_{diffdR}^*(X) \rightarrow H_{sing}^*(X)$ est un isomorphisme.

□

2.2.3 Foncteur des formes différentielles difféologiques

Nous allons comparer le foncteur des formes différentielles difféologiques sur la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial $\Omega_{diff} : \underline{Diff} \rightarrow ADGR$ avec le foncteur des formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur ce même ensemble simplicial $\Omega_{\mathcal{C}^\infty} : sSet \rightarrow ADGR$.

Définition 2.2.15. [37] *L'algèbre des formes différentielles polynomiales Ω_{PL}^* est une \mathbb{R} -algèbre différentielle graduée commutative simpliciale donnée par*

$$(\Omega(\Delta_n), d) = \Omega_{PL}^n = (\Lambda(t_0, \dots, t_n; y_0, \dots, y_n) / J_n, d)$$

où $\deg(t_i) = 0$ et $dt_i = y_i$ pour chaque i et J_n est l'idéal engendré par $\{1 - \sum t_i, \sum y_j\}$. Les applications faces et dégénérescences sont les morphismes définis comme suit

$$\partial_i : \Omega_{PL}^{n+1} \rightarrow \Omega_{PL}^n : t_k \rightarrow \begin{cases} t_k & k < i \\ 0 & k = i \\ t_{k-1} & k > i \end{cases}$$

$$s_i : \Omega_{PL}^n \rightarrow \Omega_{PL}^{n+1} : t_k \rightarrow \begin{cases} t_k & k < i \\ t_k + t_{k+1} & k = i \\ t_{k+1} & k > i \end{cases}$$

Définition 2.2.16. On a un foncteur $\Omega_{PL} : sSet \rightarrow ADGR$ défini par $\Omega_{PL}^*(K) = sSet(K, \Omega_{PL}^*)$.

Définition 2.2.17. Un objet simplicial A dans une catégorie \mathcal{C} est appelé extensible si pour chaque $n \geq 1$ et $i \in \{0, \dots, n\}$ la condition suivante est satisfaite

$$\partial_i \Phi_j = \partial_{j-1} \Phi_i, i < j,$$

où $\Phi_i \in A_{n-1}$, $i \in I$, alors il existe un élément $\Phi \in A_n$ tel que $\Phi_i = \partial_i \Phi$, $i \in I$.

Proposition 2.2.2. (i) $(\Omega_{PL})_0 = \mathbb{R}$

(ii) $H((\Omega_{PL})_n) = \mathbb{R}, n \geq 0$

(iii) Chaque Ω_{PL}^p est extensible.

(cf. [37])

Proposition 2.2.3. Soit $\theta : D \rightarrow E$ un morphisme de complexes de cochaines simpliciaux. Supposons que

(i) $H(D_n) \rightarrow H(E_n)$ est un isomorphisme pour $n \geq 0$

(ii) D et E sont extensibles

Alors pour chaque ensemble simplicial K

$$H(\theta(K)) : H(D(K)) \rightarrow H(E(K))$$

est un isomorphisme. (cf. [37])

Théorème 2.2.18. Soit X un ensemble simplicial. On a un isomorphisme naturel

$$H^*(\Omega_{diff}(|X|_D)) \cong H^*(X, \mathbb{R}).$$

Preuve. Soit X un ensemble simplicial. Nous allons construire une transformation naturelle

$$\Omega_{PL}(X) \rightarrow \Omega_{diff}(|X|_D)$$

entre Ω_{PL} le foncteur des formes différentielles simpliciales sur un ensemble simplicial et Ω_{diff} le foncteur des formes différentielles difféologique sur la réalisation géométrique de ce même ensemble simplicial.

Une forme différentielle simpliciale est la donnée pour chaque n -simplexe de X d'une forme différentielle compatible aux restrictions de faces et aux dégénérescences. La réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est $X = \coprod \Delta_n / \sim$.

Donc pour se donner une transformation naturelle entre ces foncteurs, il suffit de se donner une application compatible qui est définie sur les simplexes.

$$\Omega(\Delta_n) \rightarrow \Omega_{diff}(|\Delta_n|_D)$$

Alors nous avons un quasi isomorphisme. Comme Ω_{PL} et Ω_{diff} sont extensibles par la Proposition 2.2.2, par la Proposition 2.2.3 nous avons l'isomorphisme

$$H^*(X) \rightarrow H^*(\Omega_{diff}(|X|_D)).$$

□

2.2.3.1 Formes différentielles basiques

Soient G un groupe de Lie avec l'algèbre de Lie \mathfrak{g} , la multiplication $\mu : G \times G \rightarrow G$ et pour chaque $g \in G$, notons $\mu_g, \mu^g : G \rightarrow G$ les translations à gauche et à droite.

Soit $l : G \times M \rightarrow M$ une action à gauche de groupe de Lie G sur une variété lisse M . Nous considérons les fonctions partielles $l_g : M \rightarrow M$ pour $g \in G$ et $l^x : G \rightarrow M$ pour $x \in M$ et la fonction de champ de vecteurs fondamental $\zeta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ donnée par $\zeta_X(x) = T_e(l^x)X$.

Définition 2.2.19. [16] Une forme différentielle $\varphi \in \Omega^p(M)$ est appelée G -invariante si $(l_g)^*\varphi = \varphi$ pour chaque $g \in G$ et horizontale si le produit intérieur $i_{\zeta_X}\varphi = 0$ pour chaque $X \in \mathfrak{g}$. Nous désignons par $\Omega_{hor}^p(M)^G$ l'espace de toutes les p -formes horizontales G -invariantes sur M .

Définition 2.2.20. Soit M une variété riemannienne complète et soit G un groupe de Lie qui agit à gauche isométriquement. Une sous variété lisse fermée connexe Σ de M est appelée une section pour la G -action si elle rencontre toutes les G -orbites orthogonalement. Nous demandons que $G.\Sigma = M$ et que pour chaque $x \in \Sigma$ et $X \in \mathfrak{g}$, le champ de vecteurs fondamental $\zeta_X(x)$ est orthogonal à $T_x\Sigma$.

Définition 2.2.21. $N_G(\Sigma) := \{g \in G | g.\Sigma = \Sigma\}$ et $Z_G(\Sigma) := \{g \in G | g.s = s, \forall s \in \Sigma\}$ alors le quotient $W(\Sigma) := N_G(\Sigma)/Z_G(\Sigma)$ devient un groupe discret qui agit proprement sur Σ . Il est appelé le groupe de Weyl généralisé de la section Σ .

Définition 2.2.22. Soit G un groupe de Lie compact et $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation orthogonale dans un espace vectoriel réel de dimension finie V qui admet une section

Σ . Alors la section s'avère être un sous-espace linéaire et la représentation est appelée une représentation polaire.

Théorème 2.2.23. Soit G un groupe de réflexion fini et soient f_1, \dots, f_n des polynômes algébriquement indépendantes qui engendrent $\mathbb{R}[\Sigma]^G$ l'anneau des polynômes G -invariants. Alors chaque p -forme différentielle G -invariante dans $\Omega^p(\Sigma)^G$ peut être écrite comme une somme

$$\sum_{i_1 < \dots < i_p} a_{i_1 \dots i_p} df_{i_1} \dots df_{i_p}$$

où $a_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma)^G$.

(cf. [16], Lemme 3.3)

Théorème 2.2.24. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation polaire d'un groupe de Lie compact G avec section Σ et groupe de Weyl généralisé $W = W(\Sigma)$. L'algèbre $\mathbb{R}[V]^G$ des polynômes invariants sur V est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{R}[\Sigma]^W$ des polynômes W -invariants sur Σ par la restriction $f \mapsto f|_\Sigma$. (cf. [16], Théorème 3.6)

Théorème 2.2.25. Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation polaire d'un groupe de Lie compact G avec la section Σ et un groupe de Weyl généralisé $W = W(\Sigma)$. Supposons que $W = W(\Sigma)$ est engendré par réflexions. Alors le pullback des formes différentielles à Σ induit un isomorphisme

$$\Omega_{hor}^p(V)^G \xrightarrow{\cong} \Omega^p(\Sigma)^{W(\Sigma)}.$$

(cf. [16], Théorème 3.7)

Schwarz a démontré dans [26] le théorème suivant :

Théorème 2.2.26. Si G est un groupe de Lie compact alors l'homomorphisme pullback

$$f^* : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})^G$$

est surjectif sur l'espace des fonctions lisses G -invariantes.

Dans la suite, on traite les formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur les ensembles simpliciaux.

La représentation $\rho : \Sigma_2 \rightarrow GL(V)$ est une représentation orthogonale, \mathbb{R}^n rencontre chaque orbite de manière orthogonale. Par conséquent, c'est une représentation polaire.

Proposition 2.2.4. $\Sigma_2^{\times k}$ agit orthogonalement sur \mathbb{R}^n . L'homomorphisme

$$f^* : \mathbb{R}[\mathbb{R}^n] \rightarrow \mathbb{R}[V]^G$$

est surjectif.

Preuve.

$$\Sigma_2^{\times k} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm x_1 \\ \vdots \\ \pm x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et soit

$$\rho: \Sigma_2 \longrightarrow GL(V)$$

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \pm 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

une représentation dans un espace vectoriel V de dimension finie.

Par le Théorème de Hilbert [18], l'algèbre des polynômes G -invariants $\mathbb{R}[V]^G$ sur V est de type fini. Donc il existe des polynômes homogènes G -invariants $f_1 \dots f_n$ sur V tels que chaque polynôme invariant $h \in \mathbb{R}[V]^G$ est de la forme $h = q(f_1, \dots, f_n)$ pour chaque polynôme $q \in \mathbb{R}[\mathbb{R}^n]$. Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, cela implique que l'homomorphisme pullback $f^* : \mathbb{R}[\mathbb{R}^n] \rightarrow \mathbb{R}[V]^G$ est surjectif.

$$f = (f_1, \dots, f_n) : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2, \dots, x_k^2, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

□

Corollaire 2.2.27. *Une application $f : \mathbb{R}^{n-k} \times [0, 1]^k \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse pour la sous-difféologie induite par \mathbb{R}^n si et seulement s'il existe un sur-ensemble W de $\mathbb{R}^{n-k} \times [0, 1]^k$ et une application lisse $F : W \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F|_{\mathbb{R}^{n-k} \times [0, 1]^k} = f$.*

Preuve. Si f est la restriction d'une application lisse, elle est lisse.

Soit f_i un coordonnée de f . Notons par $x = (r, t)$ un point de \mathbb{R}^n où $x \in \mathbb{R}^{n-k}$ et $t \in \mathbb{R}^k$. Si f_i est lisse pour la sous-difféologie alors $\phi_i : (r, t) \mapsto f_i(r, t_1^2, t_2^2, \dots, t_k^2)$ définie sur \mathbb{R}^n est lisse. La fonction ϕ_i est paire en variable t , $\phi_i(r, t_1, \dots, t_k) = \phi_i(r, -t_1, \dots, -t_k)$.

D'après le théorème 1 de [35], il existe une application lisse $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que $\phi_i(r, t) = F_i(r, t^2)$. Alors $f_i(r, t) = F_i(r, t)$ pour chaque $r \in \mathbb{R}^{n-k}$ et $t \in [0, 1]^k$. \square

Théorème 2.2.28. *L'application*

$$\rho^* : \Omega_{diff}^p(V) \rightarrow \Omega_{diff}^p(\mathbb{R}^n)^{(\Sigma_2)^{\times k}}$$

est surjectif.

Preuve. Soit $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ un plongement.

L'application $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2, \dots, x_k^2, x_{k+1}, \dots, x_n)$ est une application polynomiale et prend ses valeurs dans V . Soient $\{f_i\}_{i=1}^n$ les fonctions coordonnées de f . L'ensemble minimal de générateurs homogènes de l'algèbre $\mathbb{R}[\mathbb{R}^n]^{\Sigma_2^{\times k}}$ des polynômes $\Sigma_2^{\times k}$ -invariants sur \mathbb{R}^n est noté par f_1, \dots, f_n .

Soit $\omega \in \Omega_{dR}^p(\mathbb{R}^n)^{(\Sigma_2)^{\times k}}$, par le Théorème 2.2.23, nous pouvons écrire ω comme suit :

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \omega_{j_1 \dots j_p} df_{j_1} \wedge \dots \wedge df_{j_p}$$

où $\omega_{j_1 \dots j_p} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)^{(\Sigma_2)^{\times k}}$. Par le Théorème 2.2.24, l'algèbre $\mathbb{R}[V]$ des polynômes sur V est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{R}[\mathbb{R}^n]^{\Sigma_2^{\times k}}$ des polynômes $\Sigma_2^{\times k}$ -invariants sur \mathbb{R}^n par ρ^* . Choisissons $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n \in \mathbb{R}[V]$ avec $\tilde{f}_i \circ \rho = f_i$. Nous utilisons le théorème de Schwarz [26] pour trouver $h_{i_1 \dots i_p} \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$ avec $h_{i_1 \dots i_p} \circ f = \omega_{i_1 \dots i_p}$.

$$\tilde{\omega} = \sum_{j_1 < \dots < j_p} (h_{j_1 \dots j_p} \circ \tilde{f}) d\tilde{f}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\tilde{f}_{j_p}$$

qui est dans $\Omega^p(V)$ et satisfait $\rho^* \tilde{\omega} = \omega$.

$$\Omega_{diff}^p(V) \twoheadrightarrow \Omega_{diff}^p(\mathbb{R}^n)^{\Sigma_2^{\times k}}.$$

\square

Définition 2.2.29. *Soit X un ensemble simplicial et Δ^k un simplexe standard. Une p -forme différentielle \mathcal{C}^∞ sur Δ^k est une p -forme différentielle \mathcal{C}^∞ qui est définie sur un voisinage ouvert de Δ^k . On définit $\Omega_{\mathcal{C}^\infty}^p(X)$ l'algèbre des cochaînes simpliciales des p -formes différentielles \mathcal{C}^∞ sur le simplexe standard Δ^n .*

Théorème 2.2.30. *Soit X un ensemble simplicial. On a un isomorphisme naturel*

$$\Omega_{\mathcal{C}^\infty}^*(X) \cong \Omega_{diff}^*(|X|_D).$$

Démonstration. Soit X un ensemble simplicial. Par définition $\Omega_{diff}^*(\Delta_n) = \Omega_{C^\infty}(X)$. Le simplex standard Δ^n est une variété à coins. On raisonne localement autour de chaque k -face. Soit $\omega \in \Omega_{diff}^*(\mathbb{R}^{n-k} \times [0, 1]^k)$. Soit $\tilde{\omega} \in \Omega_{dR}^*(\mathbb{R}^n)^{(\Sigma_2)^{\times k}}$. Par le théorème 2.2.28

$$\rho^* : \Omega_{diff}^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Omega_{diff}^p(\mathbb{R}^n)^{(\Sigma_2)^{\times k}}$$

est surjectif. Il existe une forme différentielle $\bar{\omega} \in \Omega_{diff}^*(\mathbb{R}^n)$ telle que $\tilde{\omega} = \rho^*\bar{\omega}$. La forme différentielle ω est la restriction de $\bar{\omega}$. Comme c'est surjectif autour de chaque k -face, on obtient la surjectivité sur tout le simplexe en recollant avec une partition de l'unité. \square

Remarque 2.2.31. Pour X ensemble simplicial. On a montré

$$\Omega_{PL}^*(X) \hookrightarrow \Omega_{C^\infty}^*(X) \cong \Omega_{diff}^*(|X|_D).$$

2.2.3.2 Formes différentielles sur le cône

Proposition 2.2.5. Formes différentielles sur les quotients Soient X, X' deux espaces difféologiques. Soit $\pi : X \rightarrow X'$ une subduction et α une k -forme différentielle sur X . La k -forme α est le pullback de la k -forme β définie sur X' , $\alpha = \pi^*(\beta)$, si et seulement si pour toutes les paires de plaques P et Q de X tels que $\pi \circ P = \pi \circ Q$, $\alpha(P) = \alpha(Q)$. Nous disons également que β est le push-forward de α par π . Les formes différentielles de X satisfaisant cette propriété sont appelées les formes basiques.

Considérons une variété lisse M . Notons cM le cône de base M , obtenu comme le quotient $cM = [0, 1] \times M / \sim$ où nous avons identifié $\{0\} \times M$ à un point noté $\{s\}$.

Définition 2.2.32. Formes différentielles sur le cône Comme $\pi : M \rightarrow cM$ est une subduction, par la Proposition 2.2.5 les formes différentielles sur cM correspondent aux formes basiques sur M .

2.2.4 Pseudo-variété contrôlée

Définition 2.2.33. (Pseudo-variété) Un couple $\mathcal{X} := (\mathcal{X}, \mathcal{S})$ est appelé pseudo-variété si et seulement si :

- \mathcal{X} est un espace séparé, localement compact, admettant une base dénombrable d'ouverts ;
- \mathcal{S} est une partition localement finie de \mathcal{X} en sous-espaces (les strates de \mathcal{X}) qui sont des variétés lisses dans la topologie induite et satisfont les conditions suivantes :
 - Si $R, S \in \mathcal{S}$ et $R \cap \bar{S} \neq \emptyset$ alors $R \subseteq \bar{S}$ (noté par $R \leq S$) ;

- Si \mathcal{X} est de dimension $n \in \mathbb{N}$, alors \mathcal{X} n'a pas de strate de dimension $n - 1$ et l'union de toutes les n -strates est un ouvert dense dans \mathcal{X} (si \mathcal{X}_k est le k -squelette de \mathcal{X} , c'est-à-dire l'union des strates de dimension $\leq k$ alors $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n$, $\mathcal{X}_{n-1} - \mathcal{X}_{n-2} = \emptyset$ et $\mathcal{X} - \mathcal{X}_{n-2}$ est ouvert dense dans \mathcal{C}).

Définition 2.2.34. (Pseudo-variété contrôlée) Une pseudo-variété contrôlée est une pseudo-variété munie d'une famille des données de contrôle :

- $(T_S, \pi_S, \rho_S)_{S \in \mathcal{S}}$ (un tube pour S dans \mathcal{X}) est une famille des données de contrôle qui satisfait les condition suivantes :
 - $\pi_S : T_S \rightarrow S$ est une rétraction continue d'un voisinage ouvert T_S de S dans \mathcal{X} telle que pour chaque strate $R \geq S$ la restriction $\pi_S | T_S \cap R : T_S \cap R \rightarrow S$ soit lisse ;
 - $\rho_S : T_S \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ est une application continue telle que $\rho^{-1}(0) = S$ et pour chaque strate $R \geq S$, la restriction $\rho_S | T_S \cap R : T_S \cap R \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ soit lisse ;
 - Pour chaque paire $R > S$ de strates , pour chaque $x \in T_S \cap T_R \cap \pi_R^{-1}(T_S)$ nous avons

$$\pi_S \pi_R(x) = \pi_S(x),$$

$$\rho_S \pi_R(x) = \rho_S(x);$$

- Pour chaque paire $R > S$ de strates, la restriction

$$(\pi_S, \rho_S) | T_S \cap R \rightarrow S \times \mathbb{R}^{>0}$$

est une submersion (en particulier $\pi_S | T_S \cap R \rightarrow S$ est une submersion où $T_S \cap R$ est une variété) ;

L'ensemble $\mathcal{X}_{reg} := \mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n-2}$ est appelé la partie régulière et $\mathcal{X}_{sing} := \mathcal{X}_{n-2}$ la partie singulière.

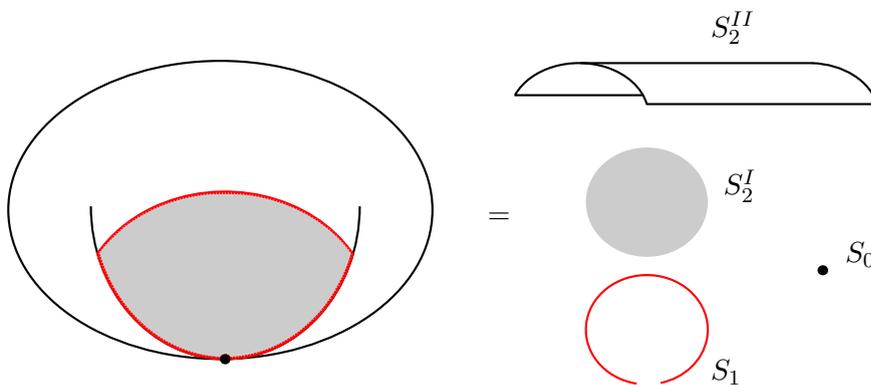


FIGURE 2.1: Exemple de pseudo-varété contrôlée

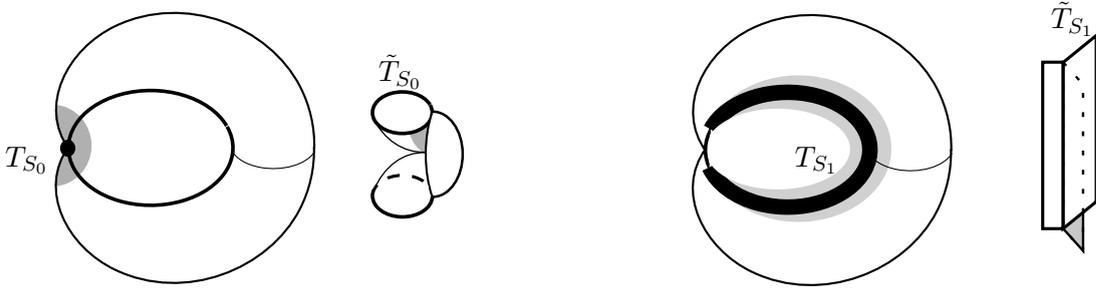


FIGURE 2.2: Exemple de données de contrôles

Par le lemme suivant, nous pouvons supposer une bonne séparation des voisinages tubulaires.

Lemme 2.2.35. *En rétrécissant les tubes, nous pouvons supposer que*

- Si $S, R \in \mathcal{S}$ et $T_S \cap R \neq \emptyset$, alors $R \geq S$;
- Si $S, R \in \mathcal{S}$ et $T_S \cap T_R \neq \emptyset$, alors R et S sont comparables ($R < S$ ou $R = S$ ou $R > S$).

Tous les sous-ensembles d'une pseudo-variété contrôlée héritent d'une structure de pseudo-variété contrôlée et toutes les variétés lisses ont une structure naturelle de pseudo-variété contrôlée également.

Définition 2.2.36. *La profondeur d'une strate S de \mathcal{X} , notée $\text{prof}_{\mathcal{X}}(S)$ est le plus grand entier p pour lequel il existe une suite de strate $S_0 < S_1 < \dots < S_p = S$.*

La profondeur de \mathcal{X} est $\text{prof}(\mathcal{X}) = \sup\{\text{prof}_{\mathcal{X}}(S) \mid S \in \mathcal{S}\}$.

Exemple 2.2.6. *Soit $(L, \mathcal{S}, \{T_S, \pi_S, \rho_S\}_{S \in \mathcal{S}})$ une pseudo-variété contrôlée compacte. Considérons le cône ouvert*

$$\text{con}^\circ L := \frac{L \times [0, +\infty[}{L \times \{0\}}$$

L'ensemble des strates est donné par $\{S \times]0, +\infty[\}_{S \in \mathcal{S}}$ et le sommet qui est l'unique 0-strate. Les données de contrôle pour la strate $\{S \times]0, +\infty[\}_{S \in \mathcal{S}}$ sont données par

$$(T_S \times]0, +\infty[, \pi_S \times \text{id}_{]0, +\infty[, \rho_S \times 0)$$

et celles pour le sommet :

$$\left(\frac{L \times [0, \epsilon[}{L \times \{0\}}, \pi_{\text{sommet}}, \rho_{\text{sommet}} \right)$$

où π_{sommet} écroute le voisinage sur le sommet et ρ_{sommet} est la distance du sommet.

2.2.4.1 Structure lisse sur la pseudo-variété contrôlée

On suit la terminologie de M.J. Pflaum pour la structure lisse de pseudo-variété contrôlée. (Voir e.g. [21] p. 26)

Définition 2.2.37. (*Carte singulière*) Soit $\mathcal{X} = (\mathcal{X}, \mathcal{S}, \{(T_S, \pi_S, \rho_S)\}_{S \in \mathcal{S}})$ est une pseudo-variété contrôlée. Une carte singulière (U, ψ) où U est un sous-ensemble de \mathcal{X} et $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait les conditions suivantes :

- $\psi(U)$ est localement fermé dans \mathbb{R}^n ,
- $\psi : U \rightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme,
- Pour chaque strate S ,

$$\psi|_{S \cap U} : S \cap U \rightarrow \psi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme sur une sous-variété de \mathbb{R}^n

- Il existe un voisinage tubulaire de $\psi(S \cap U)$ que nous allons noter $(T^\psi, \pi^\psi, \rho^\psi)$, tel que

$$\pi^\psi \circ \psi = \psi \circ \pi_S|_U$$

$$\rho^\psi \circ \psi = \rho_S|_U.$$

Deux cartes singulières $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont dites compatibles si pour chaque $x \in U \cap V$ il existe un voisinage ouvert W de x dans $U \cap V$, un entier $N > \max(n, m)$ et un difféomorphisme $\mathbf{f} : W_1 \rightarrow W_2$ entre les voisinages ouverts $W_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\iota_m^N \circ \phi|_W = \mathbf{f} \circ \iota_n^N \circ \psi|_W$$

où ι_m^N est le plongement canonique pour $N \geq m$ de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^N .

L'atlas singulier sur X est la famille (U_i, ψ_i) de cartes singulières compatibles sur X tel que $\cup_i U_i = X$.

Définition 2.2.38. (*Structure lisse*) En combinant toutes les cartes de tous les atlas dans une classe d'équivalence fixée nous obtenons un atlas maximal qui contient tous les autres atlas de la classe équivalence comme sous-ensembles. L'atlas maximal des cartes singulières est appelé la structure lisse sur la pseudo-variété contrôlée.

Définition 2.2.39. (*Application lisse*) Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux pseudo-variétés contrôlées $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \{(T_S, \pi_S, \rho_S)\}_{S \in \mathcal{S}})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{J}, \{(T_R, \pi_R, \rho_R)\}_{R \in \mathcal{J}})$ est lisse si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque carte singulière $\psi : U \rightarrow O \subset \mathbb{R}^n$ autour de x et $\phi : U' \rightarrow O' \subset \mathbb{R}^m$ autour de $f(x)$, il existe un voisinage ouvert $U_x \subset U$ avec $f(U_x) \subset U'$ et une application lisse $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ telle que

$$\phi \circ f|_{U_x} = \mathbf{f} \circ \psi|_{U_x}.$$

Définition 2.2.40. (Morphisme de pseudo-variété) Un morphisme entre deux pseudo-variétés $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{J})$ est une application continue $f : X \rightarrow Y$ qui préserve la partie régulière et envoie différemment les strates de \mathcal{S} sur les strates de \mathcal{J} .

Définition 2.2.41. (Morphisme contrôlé) Un morphisme entre deux pseudo-variétés contrôlées $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \{(T_S, \pi_S, \rho_S)\}_{S \in \mathcal{S}})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{J}, \{(T_R, \pi_R, \rho_R)\}_{R \in \mathcal{J}})$ est une application continue $f : X \rightarrow Y$ qui est un morphisme de pseudo-variétés tel que

- Pour chaque composante connexe S_0 d'une strate S , nous avons $f(T_{S_0}) \subset R_{S_0}$ où $T_{S_0} := \pi^{-1}(S_0)$ et R_{S_0} est la strate de Y avec $f(S_0) \subset R_{S_0}$
- Pour chaque $x \in T_{S_0}$ les conditions suivantes sont satisfaites

$$f \circ \pi_S(x) = \pi_{R_S} \circ f(x),$$

$$\rho_S(x) = \rho_{R_S} \circ f(x).$$

Définition 2.2.42. (Isomorphisme contrôlé) Un isomorphisme contrôlé entre deux pseudo-variétés contrôlées $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \{(T_S, \pi_S, \rho_S)\}_{S \in \mathcal{S}})$ et $(\mathcal{Y}, \mathcal{J}, \{(T_R, \pi_R, \rho_R)\}_{R \in \mathcal{J}})$ est un homéomorphisme $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre les espaces topologiques sous-jacents qui envoie difféomorphiquement les strates de \mathcal{X} sur les strates de \mathcal{Y} et qui satisfait les relations de compatibilités suivantes :

Si $S \in \mathcal{S}$ est envoyé par Φ sur $R \in \mathcal{J}$, alors il existe un voisinage ouvert $U \subseteq T_S$ pour S dans X tel que $\forall x \in U$:

- $f \circ \pi_S(x) = \pi_R \circ f(x)$,
- $\rho_S(x) = \rho_R \circ f(x)$.

Théorème 2.2.43. Si \mathcal{X} est une pseudo-variété contrôlée, alors pour chaque strate S de \mathcal{X} et pour chaque $x \in S$ il existe un voisinage ouvert U de x dans \mathcal{X} , une pseudo-variété contrôlée compact L de dimension $\dim \mathcal{X} - \dim S - 1$ et un isomorphisme contrôlé :

$$\begin{aligned} U &\xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{\dim S} \times \text{con}^\circ L \\ x &\mapsto (0, \text{sommet}) \\ U \cap S &\mapsto \mathbb{R}^{\dim S} \times \text{sommet} \end{aligned}$$

(cf. [21] Théorème 3.9.2 et Corollaire 3.9.3)

Définition 2.2.44. La pseudo-variété contrôlée L définie dans le Théorème 2.2.42 est appelée entrelacs.

Définition 2.2.45. Une pseudo-variété contrôlée est appelée pseudo-variété normale si tous ses entrelacs sont connexes.

Théorème 2.2.46. *Soient X une pseudo-variété contrôlée et \mathcal{D} l'ensemble de toutes les paramétrisations $P : U \rightarrow X$ qui sont lisses selon la définition 2.2.39 où U est considéré comme une pseudo-variété contrôlée. Alors \mathcal{D} est une difféologie sur X pour laquelle un atlas de X est une famille génératrice.*

Preuve. – (Condition de recouvrement) Soit $x \in X$ et $\mathbf{x} : r \rightarrow x$ une paramétrisation constante. Soit ψ une carte telle que $\psi^{-1}(t) = x$. Comme ψ^{-1} est injectif, \mathbf{x} peut être relevée par la paramétrisation constante $r \mapsto t$. Comme les paramétrisations constantes des domaines sont lisses, \mathcal{D} contient toutes les paramétrisations constantes.

– (Condition de localité) Soit $P : V \rightarrow X$ une paramétrisation qui satisfait localement la définition 2.2.39. Pour chaque $r \in V$, il existe un voisinage ouvert W de r tel que $P|_W$ est une paramétrisation lisse d'après la Définition 2.2.39 :

Pour chaque carte ψ de W et pour chaque carte ϕ de X

$$\phi \circ P|_W = \mathbf{f} \circ \psi|_W$$

Les cartes des domaines sont des homéomorphismes locaux et nous pouvons les remplacer par l'inclusion $j_W : W \hookrightarrow V$ et $\psi^{-1} \circ (P|_W) = \mathbf{f} \circ j_W$ est lisse. C'est la condition locale. Par conséquent si P appartient localement à \mathcal{D} alors elle appartient à \mathcal{D} .

– (Condition de compatibilité lisse) Soit $P : V \rightarrow X$ une paramétrisation. P appartient à \mathcal{D} si et seulement si pour chaque carte $\psi : U \rightarrow O \subset \mathbb{R}^n$, $\psi \circ (P|_W)$ est lisse.

Soit $Q : V \rightarrow W$ une paramétrisation lisse et $\psi : U \rightarrow O \subset \mathbb{R}^n$ une carte. Comme Q est lisse, $\psi \circ (P|_W) \circ Q$ est lisse également. Donc si P appartient à \mathcal{D} et Q est lisse, alors $P \circ Q$ est lisse.

□

Définition 2.2.47. *Une pseudo-variété difféologique est une pseudo-variété contrôlée munie d'une structure difféologique par le Théorème 2.2.46.*

Définition 2.2.48. *Nous appelons la difféologie engendrée par les paramétrisations définies dans le théorème 2.2.46 la difféologie de Pflaum. Un espace X avec la difféologie de Pflaum sera noté par X_{Pfl} .*

2.2.4.2 Normalisation de pseudo-variété contrôlée

Nous allons construire la normalisation d'une pseudo-variété contrôlée. Nous utilisons la définition de [20].

Définition 2.2.49. *Une normalisation d'une pseudo-variété contrôlée est un morphisme propre et surjectif*

$$\eta : X^N \rightarrow X$$

d'une pseudo-variété normale X^N sur X , avec une famille de normalisations de entrelacs $\{\eta_L : L^N \rightarrow L\}_L$ telle que

- 1) La restriction $\eta : (X^N - X_{sing}) \rightarrow (X - X_{sing})$ est un isomorphisme,
- 2) Pour chaque point singulier z de X^N , il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U \times \text{con}^\circ(L)^N & \xrightarrow{\varphi^N} & X^N \\ \eta_0 \downarrow & & \downarrow \eta \\ U \times \text{con}^\circ L & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

où

- a) φ est une carte de $\eta(z)$,
- b) $\text{con}^\circ(L)^N = \sqcup_j \text{con}^\circ(K_j)$ où K_1, \dots, K_m sont les composantes connexes de L^N ,
- c) φ^N est un plongement et $\text{Im}(\varphi^N) = \eta^{-1}(\text{Im}(\varphi))$,
- d) $\eta_0(u, [p, r]_j) = (u, [\eta_L(p), r])$ où $[p, r]_j \in \text{con}^\circ(K_j)$.

X^N est appelé un normalisé de X .

2.2.5 Comparaison de deux structures sur les pseudo variétés contrôlées

Définition 2.2.50. Nous pouvons munir une pseudo-variété contrôlée de la difféologie quotient qui est la difféologie pushforward de \tilde{X} par la projection $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ où \tilde{X} est la désingularisation difféologique de X 2.2.54. La pseudo-variété contrôlée munie de la difféologie quotient est notée par X_Q .

Proposition 2.2.7. L'application identité

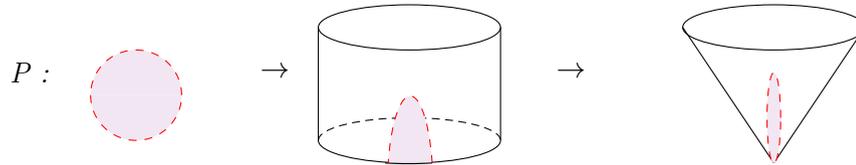
$$i : X_{Pfl} \rightarrow X_Q$$

est lisse.

Preuve. Soit P une plaque de X_{Pfl} . La composition $i \circ P$ est une plaque de X_Q . \square

Remarque 2.2.51. L'application i n'est pas un isomorphisme difféologique. En effet si son inverse existait, ce serait l'application identité $X_Q \rightarrow X_{Pfl}$. Mais ce n'est pas un morphisme difféologique.

Exemple 2.2.8. La plaque suivante



est une plaque pour la difféologie quotient sur le cône, mais pas pour la difféologie de Pflaum.

Lemme 2.2.52. *Étant donné une fibration difféologique $F \rightarrow E \rightarrow B$ où B est une variété lisse et un recouvrement \mathcal{U} de B , il existe une suite spectrale E_r qui converge vers la cohomologie de l'espace total $H_{dR}^*(E)$ avec*

$$E_2^{p,q} = H_{dR}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q)$$

où \mathcal{H}^q est le préfaisceau localement constant $\mathcal{H}^q(\mathcal{U}) = H_{dR}^q(\pi^{-1}U)$ sur \mathcal{U} . Si B est simplement connexe et $H_{dR}^q(F)$ est de dimension finie, alors

$$E_2^{p,q} = H_{dR}^p(B) \otimes H_{dR}^q(F).$$

(Cf. [23] Théorème 14.18)

Preuve. Soit $\pi : E \rightarrow B$ une fibration difféologique sur la variété B , par la définition 1.2.22 π est localement trivial.

Étant donné un bon recouvrement \mathcal{U} de B , $\pi^{-1}\mathcal{U}$ est un recouvrement de E . Formons un double complexe

$$K^{p,q} = C^p(\pi^{-1}\mathcal{U}, \Omega^q) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p})$$

dont le terme E_1 est donné par

$$E_1^{p,q} = H_d^{p,q}(K) = \prod_{\alpha_0 < \dots < \alpha_p} H^q(\pi^{-1}U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}) = C^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q)$$

où \mathcal{H}^q est le préfaisceau $\mathcal{H}^q(U) = H^q(\pi^{-1}U)$ sur B . \mathcal{H} est un pré-faisceau localement constant sur \mathcal{U} avec $H^q(F)$ comme groupe, car \mathcal{U} est un bon recouvrement.

Le terme E_2 est

$$E_2^{p,q} = H_{\Delta}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}^q).$$

Par le Théorème 14.14 de [23] la suite spectrale de K converge vers $H_D^*(K)$ l'homologie du complexe total associé à K qui est égal à $H^*(E)$ car $\pi^{-1}\mathcal{U}$ est un recouvrement de E .

Dans le cas où B est simplement connexe et $H^q(F)$ est de dimension finie, les Théorèmes 13.2 et 13.4 nous donnent que \mathcal{H} est le préfaisceau constant $\mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}$ contenant $h^q(F)$ copies de \mathbb{R} où $h^q(\mathbb{R}) = \dim H^q(F)$.

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}, \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}) = H^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \otimes H^q(F) = H^p(M) \otimes H^q(F).$$

□

Nous utilisons un théorème inspiré par un théorème de King [10].

Théorème 2.2.53. *Soit X une pseudo-variété contrôlée de dimension n . Nous pouvons la munir de deux difféologies X_{Pfl} et X_Q . Soient $H_{diffdR}(\cdot)_{Pfl}$ et $H_{diffdR}(\cdot)_Q$ les deux foncteurs de Diff dans la catégorie de groupes abéliens de cohomologie par rapport à ces deux structures et*

$$\eta : H_{diffdR}^*(X_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*(X_{Pfl})$$

la transformation naturelle induite par l'application i de Proposition 2.2.7. Alors les flèches $H_{diffdR}^*(X_Q) \xrightarrow{\cong} H_{diffdR}^*(X_{Pfl}) \xrightarrow{\cong} H^*((X_{Pfl})_D, \mathbb{R})$ sont des isomorphismes.

Preuve. Soit X une pseudo-variété contrôlée et S la strate de plus petite dimension de X . Par induction sur la profondeur de la stratification,

$$H_{diffdR}^*((X - S)_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*((X - S)_{Pfl}) \rightarrow H^*((X - S)_{Pfl})_D, \mathbb{R})$$

sont des isomorphismes. X est localement trivial avec des cônes comme fibres et s'écrit $(X - S) \cup U_S$. Il existe une pseudo-variété compacte *Lien* de dimension $\dim X - \dim S - 1$ et une fibration localement triviale $con^\circ \text{Lien} \rightarrow U_S \rightarrow S$ (voir théorème 2.2.43) et il existe un isomorphisme contrôlé $V \rightarrow \mathbb{R}^{\dim S} \times con^\circ \text{Lien}$ où V est un voisinage de $x \in S$.

Par induction sur la profondeur,

$$H_{diffdR}^*(con^\circ \text{Lien})_Q \rightarrow H_{diffdR}^*(con^\circ \text{Lien})_{Pfl} \rightarrow H^*((con^\circ \text{Lien})_{Pfl})_D, \mathbb{R})$$

sont des isomorphismes .

Nous avons une fibration $con^\circ Lien \rightarrow U_S \rightarrow S$.

$$\begin{array}{ccc}
 (con^\circ Lien)_{Pfl} & \xrightarrow{i} & (con^\circ Lien)_Q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 U_{Pfl} & \xrightarrow{j} & U_Q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S_{Pfl} & \xrightarrow{k} & S_Q
 \end{array}$$

Comme S est une variété lisse, k induit un isomorphisme $H_{diffdR}^*(S_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*(S_{Pfl})$. Nous avons des isomorphismes $H_{diffdR}^*((con^\circ Lien)_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*((con^\circ Lien)_{Pfl}) \rightarrow H^*((con^\circ Lien)_{Pfl})_D, \mathbb{R}$. Par le Lemme 2.2.52, nous obtenons un isomorphisme $H_{diffdR}^*(U_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*(U_{Pfl})$.

Nous allons montrer que les flèches $H_{diffdR}^*((\partial U)_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*((\partial U_S)_{Pfl}) \rightarrow H^*((\partial U_S)_{Pfl})_D, \mathbb{R}$ sont des isomorphismes. Nous utilisons la fibration difféologique $Lien \rightarrow \partial U_S \rightarrow S$.

$$\begin{array}{ccc}
 (Lien)_{Pfl} & \longrightarrow & (Lien)_Q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\partial U)_{Pfl} & \longrightarrow & (\partial U)_Q \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S_{Pfl} & \longrightarrow & S_Q
 \end{array}$$

$H_{diffdR}^*((Lien)_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*((Lien)_{Pfl}) \rightarrow H^*((Lien)_{Pfl})_D, \mathbb{R}$ est un isomorphisme. Par le lemme 2.2.52, nous obtenons un isomorphisme $H_{diffdR}^*((\partial U)_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*((\partial U)_{Pfl}) \rightarrow H^*((\partial U)_{Pfl})_D, \mathbb{R}$.

Nous allons montrer que la suite Mayer-Vietoris est exacte.

$$0 \rightarrow \Omega^*(X) \xrightarrow{\alpha} \Omega^*(U_S) \oplus \Omega^*(X - S) \xrightarrow{\beta} \Omega^*(\partial U_S) \rightarrow 0.$$

Il faut montrer la surjectivité de β . Soit $\omega \in \Omega^*(\partial U_S)$. Par le Théorème 4.1 de [22], nous choisissons une partition de l'unité contrôlée $\{\psi_{U_S}, \psi_{X-S}\}$ sub-ordonnée au recouvrement $\{U_S, X - S\}$ de X . Les formes $\psi_{U_S} \upharpoonright_{\partial U_S} \omega$ et $\psi_{X-S} \upharpoonright_{\partial U_S} \omega$ appartiennent à $\Omega^*(\partial U_S)$. Alors $\beta : (\omega_{U_S}, -\omega_{X-S}) \rightarrow X$.

La comparaison de suites exactes

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{diffdR}^*(X_Q) & \longrightarrow & H_{diffdR}((X-S)_Q) \oplus H_{diffdR}((U_S)_Q) & \longrightarrow & H_{diffdR}^*((\partial U_S)_Q) \\
 \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H_{diffdR}^*(X_{Pfl}) & \longrightarrow & H_{diffdR}((X-S)_{Pfl}) \oplus H_{diffdR}((U_S)_{Pfl}) & \longrightarrow & H_{diffdR}^*((\partial U_S)_{Pfl}) \\
 \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H^*((X_{Pfl})_D, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H(((X-S)_{Pfl})_D, \mathbb{R}) \oplus H(((U_S)_{Pfl})_D, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^*((\partial U_S)_{Pfl})_D, \mathbb{R})
 \end{array}$$

montre que

$$H_{diffdR}^*(X_Q) \rightarrow H_{diffdR}^*(X_{Pfl}) \rightarrow H^*((X_{Pfl})_D, \mathbb{R})$$

sont des isomorphismes. □

2.2.6 Désingularisations stratifiées difféologiques

Nous allons construire un foncteur qui envoie la pseudo-variété contrôlée X sur un espace difféologique \tilde{X} appelé son dépliage difféologique élémentaire. Cet espace difféologique est la résolution difféologique des singularités. On adapte la notion de désingularisations des pseudo-variétés contrôlées [25] au cadre difféologique qui est liée à la résolution des singularités de Verona [33].

Définition 2.2.54. *Un dépliage difféologique d'une pseudo-variété difféologique X est un espace difféologique \tilde{X} avec une application continue et propre $\tilde{X} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ telle que*

- (1) *La restriction $\mathcal{L}^{-1}(X_{reg}) \xrightarrow{\mathcal{L}} X_{reg}$ est un revêtement trivial lisse ;*
- (2) *Pour chaque $z \in \mathcal{L}^{-1}(X_{sing})$, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 U \times L \times [0, \infty[& \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{X} \\
 \downarrow c & & \downarrow \mathcal{L} \\
 U \times con^\circ(L) & \xrightarrow{\alpha} & X
 \end{array}$$

où L est un entrelacs (cf. ci-dessus, page 49 la définition d'un entrelacs).

- (U, α) est une carte singulière ;
- $c(u, l, t) = (u, [l, t])$;
- $\tilde{\alpha}$ est un difféomorphisme sur $\mathcal{L}^{-1}(Im(\alpha))$.

Une pseudo-variété difféologique est dépliable si elle possède d'un tel dépliage. Un morphisme $f : X \rightarrow X'$ entre variétés difféologiques dépliables est dépliable s'il existe une

application lisse $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$ entre leurs dépliages telle que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X}' \\ \mathcal{L} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les dépliages, soit commutatif .

Définition 2.2.55. *Un dépliage difféologique élémentaire est un dépliage difféologique $\tilde{X} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ tel que la préimage de la partie régulière $\mathcal{L}^{-1}(\mathcal{X}_{reg}) = \mathcal{X}_{reg,0}$ soit un revêtement trivial lisse, où $\mathcal{X}_{reg,0}$ est connexe.*

Construction de dépliage difféologique élémentaire

Soit \mathcal{S}_0 l'ensemble des strates minimales de X , et $U_S := \rho^{-1}(1)$. Le dépliage difféologique élémentaire \tilde{X} est obtenu par la somme amalgamée d'une copie $(X \setminus \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} S)$ et d'une copie de $(\bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} U_S \times [0, \infty])$ le long de F_S . C'est-à-dire, \tilde{X} est obtenu comme quotient de l'espace

$$\left((X \setminus \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} S) \times \{+1\} \right) \cup \left(\bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} U_S \times [0, \infty] \right)$$

par la relation d'équivalence \mathcal{R}

$$(z, j) \mathcal{R} (c, t) \text{ si } t = j \text{ et } z = F_X[c, t]$$

où $F_S : U_S \times [0, \infty[\rightarrow T_S$ est l'application qui, à chaque classe $[c, t]$ associe $\phi^{-1}(x, [y, t])$ où (ϕ, U) est une carte de \mathcal{X} .

Nous avons la projection naturelle $\mathcal{L} : \tilde{X} \rightarrow X$ définie par

$$\mathcal{L}(u) = \begin{cases} z, & \text{si } u = (z, j) \in (X \setminus \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} S) \times \{-1, +1\} \\ F_S[c, t], & \text{si } u = (c, t) \in U_S \times [0, \infty[, S \in \mathcal{S}_0 \end{cases}$$

Nous appellerons $\mathcal{L} : \tilde{X} \rightarrow X$ le dépliage élémentaire de X .

Théorème 2.2.56. *Une pseudo-variété est une pseudo-variété contrôlée si et seulement si elle est dépliable.*

Nous allons faire la preuve de ce théorème séparément en deux parties comme dans [32].

Proposition 2.2.9. *Une pseudo-variété contrôlée est dépliable.*

Preuve. Pour une strate singulière $S \in \mathcal{X}_{sing}$ et un voisinage tubulaire $T_S \xrightarrow{\pi_S} S$, fixons un atlas $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$.

- Dépliage d'une carte : Pour toutes les cartes $(U, \alpha) \in \mathcal{U}$, le dépliage de $\pi_S^{-1}(U)$ est de la forme :

$$U \times L \times [0, \infty[\xrightarrow{c} U \times \text{con}^\circ L \xrightarrow{\alpha} \pi_S^{-1}(U)$$

- Dépliage d'un tube : Définissons un tube

$$\tilde{T}_S = \frac{\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times L \times [0, \infty[}{\sim}$$

$$(u, l, t) \sim (u, g_{\alpha\beta}(u)(l), t) \quad \forall \alpha, \beta \quad \forall u \in U_\alpha \cap U_\beta$$

où $g_{\alpha\beta}(u)$ est un difféomorphisme de L pour tout $u \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Cette opération définit un fibré

$$\tilde{T}_S \xrightarrow{\tilde{\pi}_S} S \quad \tilde{\pi}_S([u, l, t]) = u$$

de fibre $F = L \times [0, \infty[$. Comme les cocycliques sont lisses, \tilde{T}_S est une variété lisse. Maintenant définissons

$$\tilde{T}_S \xrightarrow{\mathcal{L}} T_S \quad \mathcal{L}([u, l, t]) = \alpha(u, [l, t]) \quad \forall x \in U_\alpha \quad \forall \alpha$$

Pour montrer que \mathcal{L} est un dépliage de T_S , nous avons besoin de montrer que $\tilde{\alpha}$ dans le diagramme suivant est lisse.

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times L \times [0, \infty[& \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{T}_S \\ c \downarrow & & \downarrow \mathcal{L} \\ U \times \text{con}^\circ L & \longrightarrow & T_S \end{array}$$

\tilde{T}_S est muni de la difféologie de quotient et

$$\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times L \times [0, \infty[\xrightarrow{\pi} \frac{\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times L \times [0, \infty[}{\sim} = \tilde{T}_S$$

est une subduction. Par le critère de subduction, elle est lisse. La restriction $\pi|_{U_\alpha \times L \times [0, \infty[} = \tilde{\alpha}$ est lisse.

- Dépliage de \mathcal{X} entier : Nous savons que

$$\mathcal{L}^{-1}(T_S - S) = T_0$$

a une composante connexe qui est un fibré lisse sur S , de fibre $F = L \times [0, \infty[$. En faisant ces opérations pour toutes les strates singulières, nous obtenons un dépliage de \mathcal{X} .

□

Proposition 2.2.10. *Une pseudo-variété dépliable est une pseudo-variété contrôlée.*

Preuve. Soit $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ un dépliage difféologique de la pseudo-variété \mathcal{X} . Rappelons que $\mathcal{L}^{-1}(X_{reg})$ est un revêtement trivial lisse de \mathcal{X}_{reg} , i.e. la réunion disjointe de copies de \mathcal{X}_{reg} qui sont difféomorphes. Choisissons une d'entre elles $R_0 \simeq \mathcal{X}_{reg}$ telle que R_0 soit un espace difféologique, de bord $\partial(\overline{R_0}) = \mathcal{L}^{-1}(S)$. Prenons l'application

$$\mathcal{L}^{-1}(S) \times [0, \infty[\xrightarrow{\Gamma} \overline{R_0}$$

qui est un plongement lisse telle que $Im(\Gamma)$ soit ouvert dans $\overline{R_0}$ et $\Gamma(x, 0) = x$ pour $x \in \mathcal{L}^{-1}(S)$.

Définissons $T_S = \mathcal{L}(Im(\Gamma))$ avec

$$T_S \xrightarrow{\pi_S} S \quad \pi_S(\mathcal{L}(\Gamma(z, r))) = \mathcal{L}(z)$$

qui satisfont les données de contrôle de la définition 2.2.34 pour \mathcal{X} . □

Lemme 2.2.57. *Soient X et X' deux pseudo-variétés difféologiques dépliables. Pour chaque paire de dépliages difféologiques $\tilde{X} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $\tilde{X}' \xrightarrow{\mathcal{L}'} X'$ et une application difféologique $X \xrightarrow{f} X'$, il existe une application difféologique $\tilde{X} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{X}'$ telle que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X}' \\ \mathcal{L} \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

soit commutatif. Nous appelons \tilde{f} le relèvement de f .

2.2.7 Formes différentielles d'intersection

L'homologie d'intersection a été développée dans [15] par Goresky et Mac-Pherson qui ont montré que c'est un bon outil pour étudier les espaces singuliers. La définition géométrique originale est comme suit : Considérons une pseudo-variété X avec une stratification fixée et son complexe $C_\bullet(X, \mathbb{R})$ de chaînes ; si S est une strate de X et ξ est une i -chaîne en position générale, alors leur intersection aurait la dimension $\leq i + codS - dimX$. Ainsi on peut attribuer à chaque codimension de strate un entier $\mathbf{p}(codS)$. Alors la chaîne ξ est \mathbf{p} -perverse si pour chaque strate S

$$dim(|\xi| \cap S) \leq i + codS - dimX + \mathbf{p}(codS)$$

la perversité mesure à quel point une chaîne est libre pour intersecter la partie singulière de la pseudo-variété. Cela nous amène la définition de l'homologie d'intersection comme l'homologie du complexe $I_{\mathbf{p}}C_{\bullet}(X; \mathbb{R})$ des chaînes \mathbf{p} -perverses sur X .

Le complexe $I_p\Omega^*$ des formes différentielles d'intersection est un sous-complexe du complexe de de Rham de la partie régulière de pseudo-variété contrôlée avec une fonction de perversité qui calcule la cohomologie d'intersection par rapport à cette perversité fixée.

Le complexe $I_p\Omega^*(A)$ des formes différentielles satisfaisant certaines conditions de contrôle relativement à la perversité \mathbf{p} a été introduit dans [2] (et attribué à Goresky et MacPherson). Dans [9] les auteurs ont établi un quasi-isomorphisme entre le complexe $I_p\Omega^*(X)$ et le complexe de chaînes singulières d'intersection défini par King [10].

Tout d'abord, on rappelle la définition de perversité qui est une fonction à valeurs entières pour contrôler les (co)chaînes définies sur tout X .

Définition 2.2.58. Une perversité associée à X est une fonction $\mathbf{p} : \{0, \dots, \dim X\} \rightarrow \mathbb{Z}^{\geq 0}$ telle que $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$ et $\mathbf{p}(k) \leq \mathbf{p}(k+1) \leq \mathbf{p}(k) + 1$; le domaine de \mathbf{p} est l'ensemble de toutes les codimensions de strates de X .

On décrit la perversité pour le complexe $I_{\mathbf{p}}\Omega^*$:

Définition 2.2.59. Soient M et B des variétés lisses. Une fibration différentiable $\pi : M \rightarrow B$ induit une filtration

$$\wedge_{\leq 0}^k TM^* \subseteq \wedge_{\leq 1}^k TM^* \subseteq \dots \subseteq \wedge_{\leq \dim M - \dim B}^k TM^* = \wedge^k TM^*$$

où $\wedge_{\leq p}^k TM^* := \bigoplus_{j=0 \dots p} \wedge^j (\ker(d\pi))^* \otimes \wedge^{k-j} (\pi^*TB)^*$.

En utilisant le produit intérieur \bullet , nous définissons $\wedge_{\leq p}^k TM^*$ comme suit

$$\wedge_{\leq p}^k TM^* = \{\omega \in \wedge^k TM^* \mid \forall \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p \in \sec(\ker d\pi) \nu_0 \bullet \nu_1 \bullet \dots \bullet \nu_p \bullet \omega = 0\}$$

Définition 2.2.60. Soit $\pi : M \rightarrow B$ une submersion entre deux variétés lisses; une j -forme différentielle $\omega \in \Omega^j(M)$ a la perversité $p \in \{0, \dots, \dim M - \dim B\}$ par rapport à π si pour chaque $(p+1)$ -uplet de champs de vecteurs $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_p$ tangent aux fibrés de π , nous avons

$$\nu_0 \bullet \nu_1 \bullet \dots \bullet \nu_p \bullet \omega = 0.$$

Définition 2.2.61. Soit $(X, \mathcal{S}, \{T_S, \pi_S, \rho_S\}_{S \in \mathcal{S}})$ une pseudo-variété contrôlée de dimension n , soit p une perversité fixée pour X et soit $j \in \{0, \dots, n\}$; une j -forme différentielle $\omega \in \Omega^j(X_{reg})$ est appelée \mathbf{p} -perverse si et seulement si $\forall S \in \mathcal{S}$ et $\forall x \in S$ il existe un voisinage ouvert U de x dans T_S tel que ω a la perversité \mathbf{p} par rapport à la submersion

$\pi_S : U \cap X_{reg} \rightarrow S$. Le complexe des j -formes différentielles relatives à la perversité p est défini par

$$I_p \Omega^j(X) := \{\omega \in \Omega^j(X_{reg}) \mid \omega, d\omega \text{ sont } p\text{-pervers pour } X\}.$$

Théorème 2.2.62. Soit $(X, \mathcal{S}, (T_S, \pi_S, \rho_S)_{S \in \mathcal{S}})$ une pseudovariété contrôlée munie de la difféologie quotient, $\eta : X^N \rightarrow X$ sa normalisation et $\mu : \tilde{X}^N \rightarrow X^N$ la désingularisation difféologique de X^N .

$$\Omega_{diff}^*(X^N) \xrightarrow{\cong} I_0 \Omega^*(\tilde{X}^N)$$

est un isomorphisme d'algèbre.

Preuve. Supposons que S soit la seule strate singulière de X^N et soit T_S le voisinage ouvert de S dans $X^N = (X^N - S) \sqcup_{\partial T_S} T_S$. Il existe une série d'inclusions

$$\begin{array}{ccc} \partial T_S & \longrightarrow & T_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ (X^N - S) & \longrightarrow & X^N \end{array}$$

En appliquant le foncteur Ω_{diff}^* , nous obtenons l'isomorphisme suivant

$$\Omega_{diff}^*(X^N) \rightarrow \Omega_{diff}^*(X^N - S) \oplus_{\partial T_S} \Omega_{diff}^*(T_S)$$

$\Omega^*(X^N - S) \oplus_{\partial T_S} \Omega_{diff}^*(T_S) \rightarrow I_0 \Omega^*(X^N - S) \oplus_{\partial T_S} I_0 \Omega^*(T_S)$. Il suffit de montrer l'isomorphisme sur T_S , $\mu^* : \Omega_{diff}^*(T_S) \rightarrow I_0 \Omega^*(T_S)$.

$$\begin{array}{ccc} L \times [0, 1[& \longrightarrow & con^\circ L \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T}_S & \longrightarrow & T_S \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & & S \end{array}$$

$\tilde{T}_S \rightarrow T_S$ est un fibré lisse avec le fibre $L \times [0, 1[$. Soit U un ouvert de \tilde{T}_S et V un ouvert de S , localement $U = V \times L \times [0, 1[$. Nous utilisons des coordonnées locales x_i sur $L \times [0, 1[$ et y_j pour V . Soit $\omega = \sum f_{IJ} dx_I \wedge dy_J \in I_0 \Omega(\tilde{T}_S)$. Les produits intérieurs, $X \bullet \omega = 0$ et $X \bullet d\omega = 0$ pour tous les champs verticaux X .

Soit $I \neq \emptyset$. Soit $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ dual à dx_i . Alors $0 = X \bullet \omega(\frac{\partial}{\partial x_{I-i}}, \frac{\partial}{\partial x_J})$.

Donc $\omega = \sum f_J dy_J$. Nous allons montrer que f_J ne dépend pas de L en utilisant $X \bullet d\omega = 0$

$$d\omega = \sum \frac{\partial f_J}{\partial x_i} dx_i \wedge dy_J + \sum \frac{\partial f_J}{\partial y_j} dy_j \wedge dy^J$$

$\frac{\partial f_J}{\partial x_i}$ doit s'annuler. f_J dépend seulement des coordonnées y_J , par conséquent μ^* est surjective.

□

Chapitre 3

Difféologie et espace singulier II

Dans ce chapitre, on donne deux approches pour définir l'espace tangent d'un espace difféologique pointé, l'un introduit par Hector et l'autre introduit par Wu. On étudie l'espace tangent de pseudo-variété contrôlée munie des différentes difféologies. On calcule l'espace tangent interne de $[0, 1[$ en 0, l'espace tangent interne d'un cône et d'un double cône en son sommet et l'espace tangent interne du Parapluie de Whitney en différents points.

3.1 Espace tangent difféologique

L'espace tangent et le foncteur tangent ont été introduits par Hector [5]. La construction suivante est donnée dans [5] et [13] comme suit :

3.1.0.1 Espace tangent interne

Soit X un espace difféologique et $x \in X$. Nous voulons construire un espace vectoriel $T_x X$ et des applications linéaires $j_P : T_0 U_P \rightarrow T_x X$ pour chaque plaque P centrée en x . Les applications j_P seront interprétées comme différentielles des plaques. Le choix de plaque P et d'une application lisse h nous donne une reparamétrisation comme suit :

$$\begin{array}{ccc} U_Q & \xrightarrow{h} & U_P \\ & \searrow^{Q=P \circ h} & \swarrow_P \\ & & X \end{array}$$

Les différentielles satisfont la loi de la dérivation d'une composée. C'est à dire que le diagramme de différentielles suivant doit commuter :

$$\begin{array}{ccc} TU_Q & \xrightarrow{d_0h} & TU_P \\ & \searrow j_Q & \swarrow j_P \\ & T_x X & \end{array}$$

Autrement dit $j_P \circ h = j_P \circ d_0h$.

Définition 3.1.1. (Espace tangent) Notons E_P l'espace tangent T_0U_P . Soit la somme directe

$$E_x := \bigoplus_{P \in \mathcal{D}} E_P$$

munie de la difféologie finale par rapport aux injections :

$$\iota_P : E_P \rightarrow E_x$$

Définissons un sous-espace vectoriel de E_x comme suit :

$$\hat{E}_x := \langle \iota_Q(v) - (\iota_P \circ d_0h)(v) \mid Q = P \circ h \text{ et } v \in T_0U_Q \rangle$$

L'espace quotient

$$T_x(X) := E_x / \hat{E}_x$$

est l'espace tangent de X au point x qui est un espace vectoriel.

Par construction, l'espace tangent avec la famille $(j_P)_{P \in \mathcal{D}}$ est une colimite dans la catégorie des espaces vectoriels. Par conséquent, nous avons une propriété universelle.

Lemme 3.1.2. Propriété universelle Supposons que F est un espace vectoriel avec une famille d'applications linéaires $(k_P)_{P \in \mathcal{D}}$ telles que $k_P : E_P \rightarrow F$ et que tous les triangles

$$\begin{array}{ccc} E_Q & \xrightarrow{d_0h} & E_P \\ & \searrow k_P \circ d_0h & \swarrow k_P \\ & F & \end{array}$$

commutent. Alors il existe une unique application linéaire $k : T_x X \rightarrow F$ telle que pour chaque $P \in \mathcal{D}$ le triangle

$$\begin{array}{ccc} & E_P & \\ j_P \swarrow & & \searrow k_P \\ T_x X & \xrightarrow{k} & F \end{array}$$

commute.

Nous allons construire un nouvel espace difféologique, le fibré tangent de X . L'ensemble sous-jacent est l'union des espaces tangent aux points $x \in X$ et la difféologie est engendrée par les différentielles des plaques.

Définition 3.1.3. Fibré tangent Soit TX la réunion disjointe de tous les espaces tangent de X

$$TX := \bigcup_{x \in X} T_x X.$$

Définition 3.1.4. Soit P une plaque, pour chaque point $u \in U_P$, l'application h est définie comme suit

$$\begin{aligned} h : U_P &\rightarrow U_P - u = \{x - u \in \mathbb{R}^n \mid x \in U_P\} \\ y &\mapsto y - u \end{aligned}$$

Définissons l'application linéaire

$$d_u P := j_Q \circ d_u h : T_u U_P \rightarrow T_{P(u)} X$$

où $Q = P \circ h^{-1}$ est une plaque centrée en $P(u)$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} dP : TU_P &\rightarrow TX \\ v &\mapsto d_u P(v) \end{aligned}$$

$\forall v \in T_u U_P$. Pour $u = 0$, l'application h est l'identité, donc cette définition est valable pour les plaques centrées en $x = P(0)$ avec $j_P = d_0 P$.

Définition 3.1.5. Les applications dP où $P \in \mathcal{D}$ engendrent une difféologie \mathcal{D}_{TX} sur l'ensemble TX . L'espace difféologique (TX, \mathcal{D}_{TX}) est le fibré tangent à l'espace difféologique (X, \mathcal{D}) .

Lemme 3.1.6. La projection $\pi : TX \rightarrow X$ est une application lisse.

3.1.0.2 Espace tangent externe

La construction suivante est due à E. Wu [36].

Définition 3.1.7. Soit X un espace difféologique et $x \in X$. Un vecteur tangent externe de X en x est une application \mathbb{R} -linéaire :

$$F : \text{Diff}(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

qui vérifie la règle de Leibniz :

$$F(fg) = F(f)g(x) + f(x)F(g).$$

Définition 3.1.8. Soit (X, x) un espace difféologique pointé. L'espace tangent externe $\hat{T}_x(X)$ est l'ensemble de tous les vecteurs tangents externes de X en x . L'espace tangent externe \hat{T} est un espace vectoriel réel.

Définition 3.1.9. Le fibré tangent de X est défini par $\hat{T}X = \coprod_{x \in X} \hat{T}_x X$.

3.1.1 Espace tangent sur les espaces stratifiés

Nous allons introduire d'abord les conditions de Whitney. Ces conditions imposent des restrictions sur les comportements à la limite des espaces tangent d'une strate en approchant le bord d'une strate.

3.1.1.1 Conditions de Whitney

Soit M une variété et R et S deux sous-variétés de M . La paire (R, S) satisfait les conditions de Whitney (A) si et seulement si :

(A) Soit $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points $y_k \in S$ convergents vers x telle que la suite des espaces tangents $T_{y_k} S$ converge, dans la Grassmannienne des sous-espaces de TM de dimension $\dim S$, vers $\tau \in T_x M$. Alors $T_x R \subset \tau$.

Nous dirons que (R, S) satisfait la condition de Whitney (B) en x par rapport à la carte lisse $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de M autour de x si et seulement si :

(B) Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de points $x_k \in R \cap U$, $y_k \in S \cap U$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

(B1) $x_k \neq y_k$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x$.

(B2) La suite des droites connectant $\overline{\mathbf{x}(x_k)\mathbf{x}(y_k)} \in \mathbb{R}^n$ converge vers une droite l dans l'espace projectif.

(B3) La suite des espaces tangents $T_{y_k} S$ converge vers un sous-espace $\tau \subset T_x M$ dans la Grassmannienne.

Alors $(T_x X)^{-1}(l) \subset \tau$.

3.1.1.2 Fibré tangent stratifié

Nous allons construire le fibré tangent pour les pseudo-variétés contrôlées. La condition de Whitney nous garantit que le fibré tangent est aussi une pseudo-variété contrôlée.

Définition 3.1.10. [21] Soit $(X, \mathcal{S}, \{T_S, \pi_S, \rho_S\}_{S \in \mathcal{S}})$ une pseudo-variété contrôlée. Le fibré tangent est donné par

$$TX = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} T_S.$$

Définition 3.1.11. Soient $U \subset X$ un ouvert et $\mathbf{x} : U \rightarrow O \subset \mathbb{R}^n$ une carte singulière. Définissons

$$d\mathbf{x} : TU \rightarrow TO \subset \mathbb{R}^{2n}$$

avec

$$(d\mathbf{x})|_{TS \cap TU} = T(\mathbf{x}|_{S \cap U})$$

pour toutes les strates S .

Définition 3.1.12. TX est muni de la topologie grossière pour laquelle $TU \subset TX$ soit ouvert et les applications $d\mathbf{x}$ sont continues.

Lemme 3.1.13. La projection

$$\begin{aligned} \pi = \pi_{TX} : TX &\longrightarrow X \\ TS \ni v &\longmapsto \pi(v) \end{aligned}$$

est une application continue qui est différentiable sur toutes les TS .

3.1.1.3 Comparaison et exemples

Nous allons parler des méthodes pour calculer les espaces tangent difféologiques. [36]

Soit (X, x) un espace difféologique pointé. Nous allons appeler \mathcal{A}_x , un ensemble d'objets de $\underline{Plaques}_x$, l'ensemble des *générateurs locaux* de X en x , si pour tous les objets $V \rightarrow X$ dans $\underline{Plaques}_x$, il existe un voisinage ouvert W de 0 dans V , un objet $U \rightarrow X$ dans \mathcal{A}_x et une application lisse $W \rightarrow U$ qui envoie $0 \mapsto 0$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} W & \hookrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

Alors $\cup_{x \in X} \mathcal{A}_x$ engendre la difféologie de X d'après le critère d'engendrement.

Lemme 3.1.14. [36] Soit (X, \mathcal{D}) un espace difféologique, et supposons que $\hat{\mathcal{A}}_x$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{Plaques}_x$ qui contient l'ensemble des générateurs locaux \mathcal{A}_x de X en x et soit F la composition des foncteurs

$$F : \hat{\mathcal{A}}_x \hookrightarrow \underline{Plaques}_x \rightarrow \underline{Ouverts} \rightarrow \text{Vect}_{\mathbb{R}}$$

alors il existe une application surjective

$$\text{colim}(F) \rightarrow T_x X.$$

Si un espace difféologique est muni de la difféologie Pflaum, nous pouvons comparer les deux définitions de l'espace tangent.

Proposition 3.1.1. *Soit X une pseudo-variété stratifiée munie de la difféologie Pflaum et $x \in X$. Alors chaque vecteur tangent interne $v \in T_x X$ induit un vecteur tangent externe*

$$\partial : Diff(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Réciproquement, si $\delta : Diff(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est un vecteur tangent externe, alors il existe un unique vecteur tangent interne $v \in T_x X$ si et seulement si δ s'annule sur un idéal

$$J_U = \{f_x \in Diff(X, \mathbb{R}) \mid f|_U = 0\}$$

où U est un voisinage ouvert de x .

Preuve. Toutes les plaques $P : U \rightarrow X$ avec $P(0) = x$ induisent une dérivation $\partial : Diff(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ par $\partial(f) = d_0(f \circ P)$.

Réciproquement, si $\delta : Diff(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une dérivation qui s'annule en

$$J_U = \{f \in Diff(X, \mathbb{R}) \mid f|_U = 0\}$$

où U est un voisinage ouvert de x . Alors δ induit une dérivation

$$\bar{\delta} : Diff(X, \mathbb{R})/J_U \rightarrow \mathbb{R}$$

$Diff(X, \mathbb{R})/J_U$ est isomorphe au germe de fonctions noté $Germe(X, x)$ qui est la catégorie dont les objets sont des applications lisses de X vers \mathbb{R} telles que leurs restrictions à U soient égales et dont les morphismes sont les triangles

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & f(X) = V \subset \mathbb{R} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & g(X) = W \subset \mathbb{R} \end{array}$$

Il existe un foncteur

$$\begin{array}{ccc} G : Germe(X, x) & \longrightarrow & Vect_{\mathbb{R}} \\ (X \rightarrow V) & \mapsto & T_{f(x)}V \\ \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & f(X) = V \subset \mathbb{R} \\ & \searrow & \downarrow \\ & & g(X) = W \subset \mathbb{R} \end{array} & \mapsto & (f^* : T_{f(x)}V \rightarrow T_{g(x)}W) \end{array}$$

Notons E_f l'espace tangent $T_{f(x)}\mathbb{R}$.

$$E_x := \bigoplus_{f \in \text{Germe}(X,x)} E_f$$

$$\iota_f : E_f \rightarrow E_x$$

La colimite de foncteur G est l'espace tangent interne $T_x X$. □

L'espace tangent change selon la difféologie que l'on met sur un espace.

Proposition 3.1.2. *Nous avons une flèche entre l'espace tangent difféologique Pflaum et avec les autres difféologies*

$$TX_{Pfl} \rightarrow TX_Q.$$

Exemple 3.1.3. *L'espace tangent de $[0, 1[$ en (0) . l'intervalle $[0, 1[$ est un espace difféologique dont la difféologie est induite par la difféologie de \mathbb{R} .*

La famille génératrice de $[0, 1[$ en (0) est $\{P_1 : \mathbb{R}^0 \rightarrow [0, 1[, P_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1[\}$. Nous avons $E_1 = \mathbb{R}^0$ et $E_2 = \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^0 & \xrightarrow{d_0 h} & \mathbb{R} \\ \swarrow \iota_1 & & \searrow \iota_2 \\ & \mathbb{R}^0 \oplus \mathbb{R} & \end{array}$$

$$\hat{E}_x = \langle \iota_i(v) - (\iota_j d_0 h_{i,j})(v) \mid P_i = P_j \circ h, v \in T_0 U_i \rangle$$

Soit $v \in \mathbb{R}^0$, $\iota_1(v) - \iota_2 d_0 h(v) = 0$. Par conséquent $T_0[0, 1[= \frac{E_x}{\hat{E}_x} = \frac{\mathbb{R}^0 \oplus \mathbb{R}}{\mathbb{R}^0} = \mathbb{R}$.

Exemple 3.1.4. *L'espace tangent en (0) sur le cône $X_C = C \times [0, 1]/C \times \{0\}$. La famille génératrice de la difféologie quotient de cône est $\{P_1 : \mathbb{R}^0 \rightarrow X_C, P_2 : \mathbb{R} \rightarrow X_C, P_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow X_C\}$. on a $E_1 = \mathbb{R}^0$, $E_2 = \mathbb{R}$ et $E_3 = \mathbb{R}^2$. L'ouvert de P_2 est inclus dans l'ouvert de P_3 . La direction de vecteur tangent du E_2 et une direction de vecteur tangent générateur de E_3 sont identiques.*

$$E_x = \mathbb{R}^0 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$$

$$\hat{E}_x = \langle \iota_i(v) - (\iota_j d_0 h_{i,j})(v) \mid P_i = P_j \circ h, v \in T_0 U_i \rangle$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^0 & \xrightarrow{d_0 h_{1,2}} & \mathbb{R} & \xrightarrow{d_0 h_{2,3}} & \mathbb{R}^2 \\ \swarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 & & \swarrow \iota_3 \\ & & \mathbb{R}^0 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 & & \end{array}$$

Soit $v \in \mathbb{R}^0$, $\iota_1(v) - \iota_2 d_0 h_{1,2}(v) = 0$ car $d_0 h_{1,2}(v) = 0$.

Soit $w \in \mathbb{R}$, $\iota_2(w) - \iota_3 d_0 h_{2,3}(w) = \mathbb{R}$. Donc $\hat{E}_x = \mathbb{R}$.

$$T_0 X_C = \frac{E_x}{\hat{E}_x} = \frac{\mathbb{R}^0 \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2}{\mathbb{R}} \cong \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{R}}$$

Nous avons $T_0 X_C \cong \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$.

Exemple 3.1.5. Soit $X_{dC} = \{(x, y, z) \in [-1, 1]^3, x^2 + y^2 = z^2\}$ le double cône avec la structure induite par \mathbb{R}^3 . C'est une pseudo-variété difféologique.

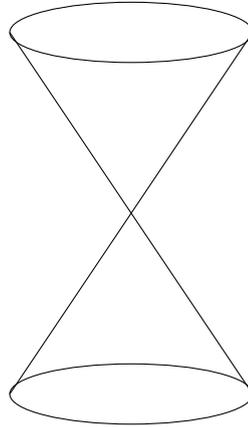
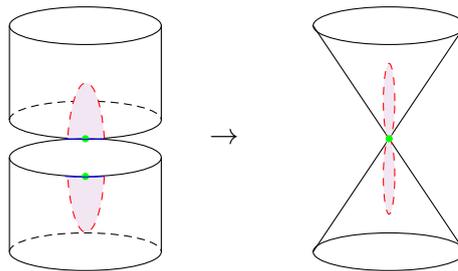
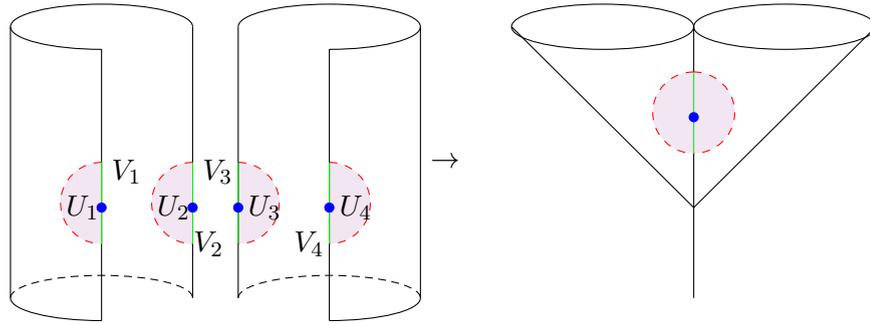


FIGURE 3.1: Double cône

L'ensemble des strates est donné par $\{X \times]0, 1[\}, \{X \times]-1, 0[\}$ et le sommet. Les données de contrôle sont données par $(T_X X \times [0, 1[, \pi_X \times id_{[0,1[} , \rho_X \times 0)$, $(T_X X \times]-1, 0[, \pi_X \times id_{]-1,0[} , \rho_X \times 0)$ et $(\frac{X \times]-1, 0[}{X \times \{0\}} , \pi_{\text{sommet}} , \rho_{\text{sommet}})$.

La désingularisation de double cône est comme suit : La famille génératrice est $\{P_1 : \mathbb{R} \rightarrow X_{dC}, P_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow X_{dC}, Q_1 : \mathbb{R} \rightarrow X_{dC}, Q_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow X_{dC}\}$. Les ouverts de plaques P_1 et Q_1 sont inclus dans les ouverts de plaques de P_2 et Q_2 . Une direction de vecteur tangent de





$T_0U_{Q_1}$ et $T_0U_{Q_2}$ est identique.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{d_0h_{3,4}} & \mathbb{R}^2 \\ \swarrow \iota_3 & & \searrow \iota_4 \\ & \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 & \end{array}$$

Une direction de dans les espaces tangent $T_0U_{Q_1}$ et $T_0U_{Q_2}$ sont identiques. Nous avons $\hat{E}_x = \mathbb{R}^2$.

$$T_0X_{dC} = \frac{\mathbb{R}^{\oplus 2} \oplus \mathbb{R}^{2\oplus 2}}{\mathbb{R}^2} \cong \frac{\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2}{\mathbb{R}^2} \cong \mathbb{R}^2$$

Exemple 3.1.6. (Parapluie de Whitney)

Le parapluie de Whitney, noté X_{Wumb} , est l'ensemble de zéros du polynôme $x^2 - y^2z$ i.e.

$$X_{Wumb} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2z\}$$

L'ensemble des strates est donné par $S_0 = \{0\}$, $S_1 = \{(0, 0, z) \mid z < 0\}$, $S_2 = \{(0, 0, z) \mid z > 0\}$ et $S_3 = \{(x, y, z) \in X_{Wumb} \mid y \neq 0\}$.

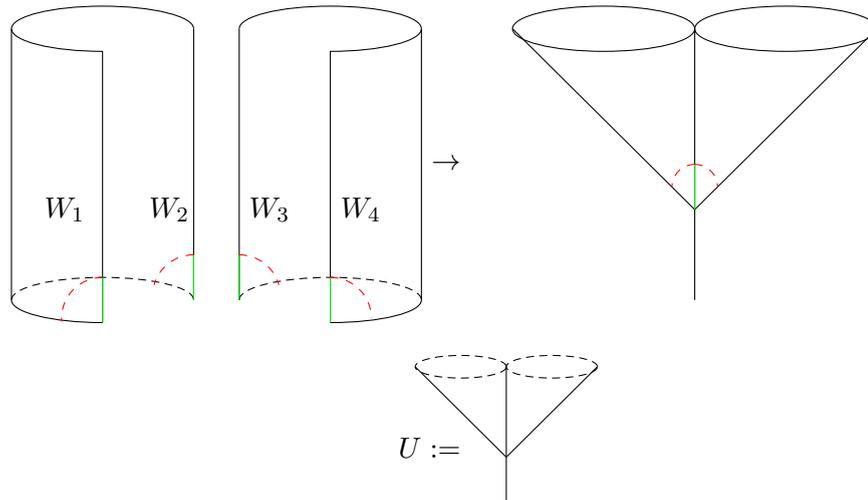
$$\mathcal{X}_0 = S_0 \subset \mathcal{X}_1 = S_1 \cup S_2 \subset \mathcal{X}_2 = S_3$$

La famille de données de contrôle $\{T_{S_i}, \pi_{S_i}, \rho_{S_i}\}$ donne une structure difféologique où T_{S_i} est un voisinage ouvert de S_i dans X_{Wumb} , π_{S_i} est une rétraction continue de π_{S_i} sur S_i et $\rho_{S_i} : T_{S_i} \rightarrow [0, \infty[$ est une application continue telle que $S_i = \rho_{S_i}^{-1}(0)$.

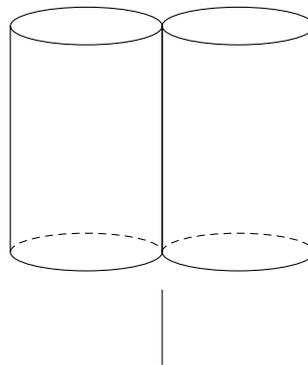
- Espace tangent de X_{Wumb} en $z \in S_2$: La famille génératrice de \mathcal{D}_{Wumb} est $\{P_i : V_i \rightarrow X_{dC}, Q_i : U_i \rightarrow X_{dC}\}_{i \in \{1,2,3,4\}}$ où $V_i \subset \mathbb{R}$ et $U_i \subset \mathbb{R}^2$. $E_x = \mathbb{R}^{\oplus 4} \oplus \mathbb{R}^{2\oplus 4}$.

$$T_zX_{dC} = \frac{\mathbb{R}^{\oplus 4} \oplus \mathbb{R}^{2\oplus 4}}{\mathbb{R}^3} \cong \frac{\mathbb{R}^{2\oplus 4}}{\mathbb{R}^3} \cong \mathbb{R}^5.$$

- L'espace tangent de X_{dC} en 0 : La famille génératrice de \mathcal{D}_{Wumb} est $\{P_1 : \mathbb{R}^0 \rightarrow X_{Wumb}, P_2 : \mathbb{R} \rightarrow X_{Wumb}, P_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow X_{Wumb}, P_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow X_{Wumb}\}$. On a $E_1 = T_0\mathbb{R}^0$,



$$L = \text{two circles} \sqcup \cdot = S^1 \vee S^1 \sqcup \{pt\}$$



$E_2 : T_0\mathbb{R}$, $E_3 = T_0\mathbb{R}^2$ et $E_4 = T_0\mathbb{R}^2$.

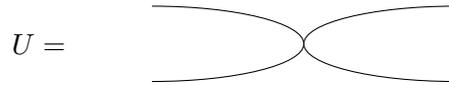
$$T_0X_{WUmb} = \frac{E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \oplus E_4}{\sim} = E_3 \oplus_{E_2} E_4 \cong \mathbb{R}^3.$$

Exemple 3.1.7. (*Désingularisation du parapluie de Whitney*) Nous prenons un ouvert U autour de point $(0, 0, 0)$:

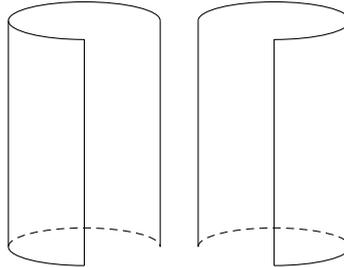
$$\begin{array}{ccc} U \times L \times [0, \infty[& \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{X}_{Wumb} \\ \downarrow c & & \downarrow \mathcal{L} \\ U \times \text{con}^\circ L & \xrightarrow{\alpha} & X_{Wumb} \end{array}$$

Nous obtenons

Nous répétons cette opération encore une fois car la profondeur de X_{Wumb} est égale à 2. Dans ce cas là ; Et L contient quatre points. Nous obtenons un espace difféologique



comme suit :



Lemme 3.1.15. [21] Si $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte singulière, chaque forme différentielle $\omega \in \Omega^p(U)$ a une représentation sous la forme

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \dots i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} d\mathbf{x}^{i_1} \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^{i_k}$$

où les fonctions \mathbf{x}^i , $i = 1, \dots, n$ désignent les coordonnées de la carte singulière \mathbf{x} .

Preuve. Choisissons un voisinage ouvert $O \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{x}(U)$, tel que $\mathbf{x}(U)$ soit fermé dans O .

$\mathcal{C}^\infty(O) \rightarrow \Omega^1(U)$, $f \mapsto df|_U$ inclut une dérivation sur $\mathcal{C}^\infty(U)$. Par conséquent, il induit une application surjective $\Omega^1_{\mathbb{R}^n}(O) \rightarrow \Omega^1(U)$. Chaque forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(O)$ a une représentation de la forme $\alpha = \sum_{i=1}^n f_i d\pi_i$ où $f_i \in \mathcal{C}^\infty(O)$ pour chaque i , et π_i sont des fonction de coordonnées sur \mathbb{R}^n . \square

Remarque 3.1.16. L'ensemble des sections $\text{Sec}(\pi)$ est muni de la difféologie fonctionnelle.

Proposition 3.1.8. Soit X une pseudo-variété difféologique, $\Lambda^p(X)$ le fibré des p -formes sur X et $\pi : \Lambda^p(X) \rightarrow X$ la projection canonique. Une section lisse de π est une application $\sigma : X \rightarrow \Lambda^p(X)$ telle que $\pi \circ \sigma = 1_X$. Notons l'ensemble des sections de π

$$\text{Sec}(\pi) = \{\sigma \in \mathcal{C}^\infty(X, \Lambda^p(X)) \mid \pi \circ \sigma = 1_X\}$$

L'application χ définie par

$$\chi : \text{Sec}(\pi) \rightarrow \Omega^p(X)$$

avec $\chi(\sigma) = \sigma^*(\text{Liouv})$ est lisse et bijective.

Preuve. Étant donné une carte singulière sur X ,

$$\psi : U \rightarrow \psi(U) \subset O \subset \mathbb{R}^n$$

telle que $\psi(U)$ soit fermé dans O . Notons l'ensemble des sections lisses sur O , $\sigma_O : O \rightarrow \Lambda^p \mathbb{R}^n$ par $\text{Sec}_0(\pi)$. Comme $\sigma : X \rightarrow \Lambda^k(X)$ est lisse, nous avons

$$\sigma|_U = \sigma^k T^* \psi \circ \alpha \circ \psi$$

où $\alpha \in \Omega^p(O)$. Il existe une bijection $\Omega^p(O) \rightarrow \Omega^p(U)$. Par conséquent l'application χ est bijective. \square

Annexe A

Extensions de Kan

Dans cette partie, on se fixe deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}' , et un foncteur $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$. La référence est [12].

Définition A.0.17. Une extension de Kan à gauche, le long de P , d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un couple (F', α) , où $F' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur et $\alpha : F \rightarrow F' \circ P$ une transformation naturelle,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \\ P \downarrow & \searrow F & \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{F'} & \mathcal{D} \end{array}$$

satisfaisant à la propriété universelle suivante : pour tout couple (G, β) , où $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur et $\beta : F \rightarrow G \circ P$ une transformation naturelle, il existe une unique transformation naturelle $\gamma : F' \rightarrow G$ telle que $\beta = (\gamma * P)\alpha$.

$$\begin{array}{ccc} F & & \\ \alpha \downarrow & \searrow \beta & \\ F \circ P & \xrightarrow{\gamma * P} & G \circ P \end{array}$$

En particulier, une extension de Kan à gauche de F est unique à isomorphisme unique près : si (F', α) et (F'', α') sont deux extensions de Kan à gauche de F , il existe un isomorphisme unique de foncteurs $\gamma : F' \rightarrow F''$ tel que $\alpha' = (\gamma * P)\alpha$.

Définition A.0.18. On rappelle que pour tout objet c' de \mathcal{C}' , on note $P \downarrow c'$, la catégorie dont les objets sont les couples $(c, g : P(c) \rightarrow c_0)$, où c est un objet de \mathcal{C} et g une flèche

de \mathcal{C}' , un morphisme de (c_0, g_0) vers (c_1, g_1) étant une flèche $f : c_0 \rightarrow c_1$ de \mathcal{C} telle que $g_0 = g_1 P(f)$.

$$\begin{array}{ccc} P(c_0) & \xrightarrow{P(f)} & P(c_1) \\ & \searrow^{g_0} & \swarrow_{g_1} \\ & c' & \end{array}$$

On a un foncteur d'oubli évident :

$$U_{\mathcal{C}'} = U_{P, \mathcal{C}'} : \mathcal{C}/\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}, \quad (c, g) \mapsto c.$$

Proposition A.0.9. *Si pour tout objet c' de \mathcal{C}' , la colimite*

$$\lim_{\rightarrow} F U_{\mathcal{C}'} = \lim_{\rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}'} F | (\mathcal{C}/\mathcal{C}') = \lim_{\rightarrow (c, P(c) \rightarrow c')} F(c)$$

existe dans \mathcal{D} , alors le foncteur F admet une extension de Kan à gauche le long de P , (F', α) , définie par

$$F'(c') = \lim_{\rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{C}'} F | (\mathcal{C}/\mathcal{C}') = \lim_{\rightarrow (c, P(c) \rightarrow c')} F(c), \quad c' \in \text{Ob}(\mathcal{C}'),$$

la flèche $\alpha_c : F(c) \rightarrow F'P(c)$, pour c objet de \mathcal{C} , étant le morphisme canonique correspondant à l'objet $(c, 1_{P(c)})$ de $\mathcal{C}/P(c)$.

Définition A.0.19. *Une extension de Kan à gauche absolue, le long de P , d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un couple (F', α) tel que pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, le couple $(H \circ F', H * \alpha)$ soit une extension de Kan à gauche, le long de P , de $H \circ F$. En particulier, une extension de Kan à gauche absolue est une extension de Kan à gauche, et si (F', α) est une extension de Kan à gauche absolue de F , pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, le couple $(H \circ F', H * \alpha)$ est une extension de Kan à gauche absolue de $H \circ F$.*

Définition A.0.20. *On rappelle qu'on dit qu'un foncteur $G : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{D}$ admet une colimite absolue si pour tout foncteur $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, le foncteur $H \circ G$ admet une colimite, et si de plus le morphisme canonique $\lim_{\rightarrow} H \circ G \rightarrow H(\lim_{\rightarrow} G)$ est un isomorphisme. La notion de limite absolue se définit de façon duale.*

Proposition A.0.10. *Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) F admet une extension de Kan à gauche absolue le long de P ;
- b) pour tout objet c' de \mathcal{C}' , le foncteur $F | (\mathcal{C}/\mathcal{C}') : \mathcal{C}/\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$, composé du foncteur d'oubli $U_{\mathcal{C}'} : \mathcal{C}/\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ suivi du foncteur F , admet une colimite absolue.

Remarque A.0.21. *Une extension de Kan à gauche absolue est une extension de Kan à gauche point par point, et une extension de Kan à gauche point par point est une extension de Kan à gauche.*

Définition A.0.22. *La notion d'extension de Kan à droite (resp. d'extension de Kan à droite absolue) d'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est définie de façon duale. Pour qu'une telle extension existe, il suffit que pour tout objet c' de \mathcal{C}' , le foncteur $F \downarrow (c' \backslash \mathcal{C}')$ admette une limite (resp. une limite absolue) dans \mathcal{D} , où $c' \backslash \mathcal{C} = c' \downarrow P$ est la catégorie opposée de la catégorie $P^\circ \downarrow c'$, le foncteur $P^\circ : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathcal{C}'^\circ$ étant le foncteur entre les catégories opposées déduit de P .*

Bibliographie

- [1] Glen E. Bredon. Topology and geometry. *Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics*, 185, 1993.
- [2] Brylinski. Equivariant intersection cohomology. *Cont. Math.*, 139 :5–32, 1984.
- [3] K.T. Chen. Iterated path integrals. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83 :831–879, 1977.
- [4] A. Frolicher. Smooth structures. *Lecture notes in Maths, Springer*, 962 :69–81, 1982.
- [5] G. Hector. Géométrie et topologie des espaces difféologiques. *Analysis and Geometry in Foliated Manifolds, Proceedings of the VII International Colloquium on Differential Geometry, Spain*, pages 55–80, 1995.
- [6] Patrick Iglesias-Zemmour. Bi-complexe cohomologique des espaces différentiables. Fevrier 1991.
- [7] Patrick Iglesias-Zemmour. Diffeology. *Mathematical surveys and monographs*, 185, 2013.
- [8] Dominic Joyce. On manifolds with corners. *arXiv :0871704v4*, 2009.
- [9] M. Saralegi J.P. Brasselet, G. Hector. Theoreme de de rham pour les varietes stratifies. *Ann. Global Anal. Geom.*, 9(3) :211–243, 1991.
- [10] Henry C. King. Topological invariance of intersection homology without sheaves. *Topology and its applications*, 20 :149–160, 1985.
- [11] Matthias Kreck. Differential algebraic topology from stratifold to exotic spheres. *Graduate Studies in Mathematics*, 110, 2010.
- [12] Saunders Mac Lane. Categories for the working mathematicians second edition. *Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics*, 5, 2003.
- [13] Martin Laubinger. Diffeological spaces. *Proyecciones Journal of Mathematics*, 25 (2) :151–178, 2006.

-
- [14] M.V. Losik. Fréchet manifolds as diffeological spaces. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, (5) :36–42, 1992.
- [15] R. MacPherson M. Goresky. Intersection homology. *Topology*, 19 :135–162, 1992.
- [16] Peter W. Michor. Basic differential forms for actions of lie groups. *arXiv*, 1994.
- [17] John Milnor. Classification of $(n-1)$ -connected $2n$ -dimensional manifolds and the discovery of exotic spheres. *Ann. of Math. Stud., Princeton Univ. Press, Princeton*, 145 :57–64, 2000.
- [18] M. Nagata. On the 14-th problem of hilbert. *Amer. J. Math.*, pages 766–772, 1959.
- [19] P. Iglesias-Zemmour P. Donato. Cohomologie des formes dans les espaces difféologiques. *Preirage CPT87/P.86, CPT-CNRS, Luminy, F. Marseille*, pages 57–64, 1986.
- [20] G. Padilla. On normal stratified pseudomanifolds. *Extracta Mathematicae*, 18(2) : 223–234, 2003.
- [21] M.J. Pflaum. Analytic and geometric study of stratified spaces. *Springer-Verlag, Lecture notes in Mathematics*, 1768, 2001.
- [22] Guido Pollini. Intersection differential forms. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 113, 2005.
- [23] Loring W. Tu Raoul Bott. Differential forms in algebraic topology. *Springer-Verlag, Graduate texts in Mathematics*, 1982.
- [24] N.E. Steenrod S. Eilenberg. Foundations of algebraic topology. *Princeton University Press, Princeton, N.J.*, 1952.
- [25] M. Saralegi. Homological properties of stratified spaces. *Illinois J. math.*, 38(1) : 47–70, 1994.
- [26] G.W. Schwarz. Smooth functions under the action of a compact lie group. *Topology*, 14 :63–68, 1975.
- [27] R. Sikorski. Differential modules. *Coloq. Math.*, pages 45–79, 1971/72.
- [28] J.W. Smith. The de rham theorem for general spaces. *Tohoku Math. J.*, 18(2) : 115–137, 1966.
- [29] J.M. Souriau. Groupe différentiel. *Lecture Notes in Mathematics*, 836 :91–128, 1980.
- [30] A. Stacey. Comparative smootheology. *Theory Appl. Categ.*, 25(4) :64–117, 2011.

-
- [31] Robert M. Switzer. Algebraic topology-homotopy and homology. *Springer -Verlag*, 1975.
- [32] G. Padilla T. Guardia. On the functorality of stratified desingularisations. *ArXiv :0806.0174v2*, 2008.
- [33] A. Verona. Mapping structures and triangulability. *Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics*, 1102, 1984.
- [34] G.W. Whitehead. Generalized homology theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 102 : 227–283, 1962.
- [35] Hassler Whitney. Differentiable even functions. *Duke Math. Journal*, pages 159–160, 1943.
- [36] Enxin Wu. A homotopy theory for diffeological sapces. 2012.
- [37] Jean-Claude Thomas Yves Felix, Stephen Halperin. Rational homotopy. *Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics*, 2000.