

Université Lille 1
Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal-
LAGIS UMR CNRS 8219
Ecole Doctorale SPI 072

Thèse de Doctorat
Spécialité « Automatique et Informatique Industrielle »

par

Assia HAKEM

**Méthode de Projection des Données
pour le Diagnostic des Systèmes
Linéaires et Bilinéaires**

Thèse soutenue le 27 Juin 2014 devant le jury composé de :

Pr. Mustapha OULADSINE Université Aix Marseille (Rapporteur)
Pr. Houcine CHAFOUK ESIGELEC Rouen (Rapporteur)
Pr. Didier MAQUIN Université de Lorraine (Examineur)
Dr. Laurent BAKO Ecole Centrale de Lyon (Examineur)
Pr. Vincent COCQUEMPOT Université Lille 1 (Directeur)
Dr. Midzodzi KOMI PEKPE Université Lille 1 (Co-encadrant)

À mes parents...

REMERCIEMENTS

JE tiens à remercier toutes les personnes que j'ai rencontrées durant ces années de thèse.

JE remercie plus particulièrement Pr. Vincent COCQUEMPOT et Dr. Midzodzi KOMI PEKPE pour m'avoir encadré. Je les remercie pour leur pédagogie, leur soutiens et pour toutes les discussions instructives et fructueuses que nous avons eues durant toute la durée de ce travail de recherche.

Mes remerciements vont également à Pr. Mustapha OULADSINE et Pr. Houcine CHAFOUK qui m'ont fait l'honneur de rapporter mon travail. Qu'ils soient assurés de ma profonde reconnaissance. Je remercie également Pr. Didier MAQUIN et Dr. Laurent BAKO d'accepter d'être examinateurs de cette thèse.

La présente thèse a pu commencer grâce à une bourse franco-algérienne, qui m'a été allouée par le programme PROFAS A, auquel j'adresse ma profonde reconnaissance.

Pendant les années de thèse, j'ai beaucoup apprécié l'ambiance amicale qui règne au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (LAGIS), je tiens à remercier tous ses membres et plus particulièrement Pr. Abdelouahab Aitouche, Dr. Aziz NAKRACHI et Pr. Maan EL BADAOUI EL NAJJAR et ceux des équipes Systèmes Tolérantes aux Fautes (STF) et Méthodes et Outils pour la Conception Intégrée de Systèmes (MOCIS). Je remercie également les secrétaires, notamment Madame Marcelle DESFROMONT pour sa gentillesse.

Merci aussi aux doctorants ainsi qu'aux post-doctorants du LAGIS avec qui j'ai pu partager les joies et les difficultés de la vie de thésard, en particulier : Dr. Kamel Bouibed, Dr. Mohand Djeziri Arab, Ziad Imam, Zineddine Megatta, Xian Zhang, Mohamad Ali, Othman Lakhel, Severus Constantin Olteanu, Dr. Youcef Touati, Dr. Samir Benmoussa, Aymen Gdouda, Djidula Moutchon, Dr. Nizar Chatti.

Cette thèse a également bénéficié du soutien total de mes parents. Je pense aujourd'hui avec beaucoup de tendresse à mes parents, à la confiance qu'ils m'accordent. Je veux les remercier de tout mon cœur, sans leur soutien, tout ceci n'aurait jamais pu aboutir et je leur serai éternellement reconnaissant d'avoir su me donner les moyens d'arriver jusqu'ici.

Merci aussi à tous les anonymes qui auraient certainement mérité d'être cités.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	viii
INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
1 LES MÉTHODES DE DÉTECTION ET DE LOCALISATION DE DÉFAUTS	5
1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES DE SURVEILLANCE	6
1.2 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES MÉTHODES DE GÉNÉRATION D'INDICATEURS DE DÉFAUTS	7
1.2.1 Les méthodes utilisant un modèle comportemental	7
1.2.2 Les méthodes n'utilisant pas de modèle comportemental connu a priori	13
1.3 MÉTHODES DE GÉNÉRATION D'INDICATEURS DE DÉFAUTS PAR PROJECTION	17
1.3.1 L'espace de parité	17
1.3.2 L'Analyse en Composantes Principales	25
CONCLUSION	28
2 MPD POUR LE DIAGNOSTIC DES DÉFAUTS CAPTEURS ET ACTIONNEURS DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES	29
INTRODUCTION	30
2.1 PROBLÉMATIQUE	30
2.2 DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS	30
2.2.1 Génération du résidu	31
2.2.2 Analyse du résidu	33
2.2.3 Réglage de la MPD pour la détection de défauts capteurs	36
2.3 ESTIMATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS	38
2.4 DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES D'ACTIONNEURS	42
2.4.1 Inversion gauche du système linéaire	42
2.4.2 Illustration de l'algorithme Massey-Sain	43
2.4.3 Génération du résidu	44
2.4.4 Analyse du résidu	48
2.4.5 Réglage de la MPD pour la détection de défauts actionneurs	51
2.5 ESTIMATION DES DÉFAUTS MULTIPLES D'ACTIONNEURS	54
2.6 EXEMPLE D'APPLICATION : DIAGNOSTIC DE DÉFAUTS CAPTEURS ET ACTIONNEURS D'UN AVION	59
2.6.1 Détection, localisation et estimation des défauts capteurs	60
2.6.2 Détection, localisation et estimation des défauts actionneurs	66
CONCLUSION	70
3 MPD POUR LA DÉTECTION ET LA LOCALISATION DES DÉFAUTS CAPTEURS DANS LES SYSTÈMES BILINÉAIRES	75
3.1 PROBLÉMATIQUE	76

3.2	DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS	77
3.2.1	Génération du résidu	77
3.2.2	Analyse du résidu	83
3.3	CRITÈRE POUR LE CALCUL DU RÉSIDU MPD	86
3.4	EXEMPLE D'ILLUSTRATION	88
3.4.1	Génération des entrées et des sorties du système avec des défauts capteurs .	89
3.4.2	Génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts capteurs	89
3.4.3	Comparaison entre les résidus dans le cas sans défaut	90
	CONCLUSION	91
4	MPD POUR LE DIAGNOSTIC DES DÉFAUTS INTERNES : DÉTECTION ET RECONNAISSANCE DE MODES DE FONCTIONNEMENT	97
	INTRODUCTION	98
4.1	PROBLÉMATIQUE	98
4.2	ESTIMATION DE L'INSTANT DE COMMUTATION	99
4.2.1	Estimation de l'instant de commutation entre des modes linéaires	99
4.2.2	Estimation de l'instant de commutation entre des modes bilinéaires	106
4.3	RECONNAISSANCE DU MODE ACTIF	119
4.3.1	Reconnaissance du mode actif linéaire	119
4.3.2	Reconnaissance du mode actif bilinéaire	123
4.4	EXEMPLES D'ILLUSTRATION	128
4.4.1	Systèmes à commutations avec des modes linéaires	128
4.4.2	Systèmes à commutations avec des modes bilinéaires discernables et d'autres non discernables	135
	CONCLUSION	138
	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	141
A	OUTILS MATHÉMATIQUES	145
A.1	Produit de Kronecker	145
A.2	Combinatoire	145
A.3	Espace des lignes d'une matrice	145
A.4	Espace des colonnes d'une matrice	145
A.5	Espace nul ou noyau d'une matrice	146
A.6	Rang et nullité d'une matrice	146
A.7	Théorème du rang	146
A.8	Matrice de projection à gauche de l'espace des colonnes d'une matrice . . .	146
A.9	Matrice de projection à droite de l'espace des lignes d'une matrice	146
A.10	Norme de la matrice de projection à droite	147
B	CALCUL DES PUISSANCES D'UNE MATRICE A CARRÉE STABLE	147
C	PREUVES DES ÉQUATIONS	148
C.1	Preuve de l'équation (2.7)	148
C.2	Preuve de l'équation (2.64)	149
C.3	Preuve de l'équation (3.2)	150
D	CONSTRUCTION DES VECTEURS D'ENTRÉES	153
D.1	Construction du vecteur $\tilde{u}_{k,i}$	153
D.2	Construction du vecteur $\tilde{u}_{k,i_1+1:i}$	154
E	NOTATION MATRICIELLE	154
	BIBLIOGRAPHIE	155

LISTE DES FIGURES

1.1	Principe de la détection et de la localisation de défauts	6
1.2	Forme de calcul (ou externe) du résidu	6
1.3	Forme d'évaluation (ou interne) du résidu	6
1.4	Génération de résidus par estimation paramétrique	8
1.5	Génération de résidu utilisant un estimateur de sortie	10
1.6	DOS pour la détection et la localisation de défauts capteurs	13
1.7	GOS pour la détection et la localisation de défauts capteurs	14
1.8	Illustration de la méthode de reconnaissance des formes pour le diagnostic .	16
1.9	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en l'absence de défaut	19
1.10	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en présence de défauts détectables	20
1.11	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en présence d'un dé- faut non détectable	20
1.12	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en l'absence de défauts	22
1.13	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en présence de défauts détectables	23
1.14	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP dans le cas des défauts non détectables	23
1.15	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'ACP en l'absence de défauts	27
1.16	Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'ACP en présence de dé- fauts détectables	27
2.1	Diagramme de génération de résidu par la MPD pour la détection et la loca- lisation de défauts capteurs	32
2.2	Illustration dans le cas déterministe du résidu de la MPD en l'absence de défaut	34
2.3	Illustration dans le cas déterministe de la MPD et avec défauts capteurs dé- tectables : le résidu est non nul	35
2.4	Illustration dans le cas déterministe d'un défaut capteur non détectable . . .	35
2.5	Illustration du critère $J(p)$	38
2.6	Diagramme de génération de résidu par la MPD pour l'estimation de défauts capteurs	40
2.7	Représentation de l'inversion d'un système dynamique S : le système inverse est S_I , son "entrée" est y_k et sa "sortie" u_k	42
2.8	Diagramme de génération de résidu par la MPD pour la détection et la loca- lisation de défauts actionneurs	45
2.9	Illustration dans le cas déterministe de la MPD et sans défaut capteur : le résidu est nul	48
2.10	Illustration dans le cas déterministe de la MPD et avec défauts actionneurs détectables : le résidu est non nul	49

2.11	Illustration dans le cas déterministe de la MPD et des défauts actionneurs non détectables : le résidu est nul	50
2.12	Le critère $J(p, q)$ pour chaque valeur de q	53
2.13	La zone minimale du critère $J(p, q)$	54
2.14	Comparaison des entrées réelles et reconstruites en utilisant le système inversé et $v = 1$	55
2.15	Une zone de la comparaison des entrées réelles et reconstruites en utilisant le système inversé et $v = 1$	55
2.16	Les entrées du système u_k	56
2.17	Les sorties du système y_k	56
2.18	Les résidus de détection et de localisation des défauts actionneurs	56
2.19	Diagramme de génération de résidu par la MPD pour l'estimation de défauts actionneurs	58
2.20	Critère à minimiser $J(p)$	60
2.21	Les entrées constantes du système u_k	61
2.22	Les entrées de type créneau du système u_k	61
2.23	Les entrées bruitées du système u_k	62
2.24	Les sorties correspondantes aux entrées constantes y_k	62
2.25	Les sorties correspondantes aux entrées de type créneau y_k	63
2.26	Les sorties correspondantes aux entrées bruitées y_k	63
2.27	Résidus dans le cas des entrées constantes $\epsilon_{s, k}$	64
2.28	Résidus dans le cas des entrées de type créneau $\epsilon_{s, k}$	64
2.29	Résidus dans le cas des entrées bruitées $\epsilon_{s, k}$	64
2.30	Estimateurs dans le cas des entrées constantes $\hat{f}_{s, k}$	65
2.31	Estimateurs dans le cas des entrées de type créneau $\hat{f}_{s, k}$	65
2.32	Estimateurs dans le cas des entrées bruitées $\hat{f}_{s, k}$	66
2.33	Les entrées constantes du système u_k	67
2.34	Les sorties correspondantes aux entrées constantes y_k	67
2.35	Les entrées de type créneau du système u_k	68
2.36	Les sorties correspondantes aux entrées de type créneau y_k	68
2.37	Les entrées bruitées du système u_k	69
2.38	Les sorties correspondantes aux entrées bruitées y_k	69
2.39	Résidus dans le cas des entrées constantes $\epsilon_{a, k}$	70
2.40	Projection de la matrice des défauts sur l'orthogonal des sorties dans le cas des entrées constantes $F_{a, k} \Pi_{Y_k^a}$	70
2.41	Résidus dans le cas des entrées de type créneau $\epsilon_{a, k}$	71
2.42	Projection de la matrice des défauts sur l'orthogonal des sorties dans le cas des entrées de type créneau $F_{a, k} \Pi_{Y_k^a}$	71
2.43	Résidus dans le cas des entrées bruitées $\epsilon_{a, k}$	72
2.44	Estimateurs dans le cas des entrées constantes $\hat{f}_{a, k}$	72
2.45	Estimateurs dans le cas des entrées de type créneau $\hat{f}_{a, k}$	72
2.46	Estimateurs dans le cas des entrées bruitées $\hat{f}_{a, k}$	73
3.1	Illustration de la MPD en l'absence de défauts capteurs	84
3.2	Illustration dans le cas déterministe du résidu de la MPD en présence de défauts détectables	85
3.3	Illustration dans le cas déterministe d'un défaut capteur non détectable	85
3.4	Les entrées constantes du système u_k	89
3.5	Les sorties correspondantes aux entrées constantes y_k	90
3.6	Les entrées de type créneau u_k	90

3.7	Les sorties correspondantes aux entrées de type créneau y_k	91
3.8	Les entrées bruitées u_k	91
3.9	Les sorties correspondantes aux entrées bruitées y_k	92
3.10	Les entrées fortement bruitées u_k	92
3.11	Les sorties correspondantes aux entrées fortement bruitées y_k	93
3.12	Résidus dans le cas des entrées constantes $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$	93
3.13	Résidus dans le cas des entrées de type créneau $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$	94
3.14	Résidus dans le cas des entrées bruitées $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$	94
3.15	Résidus dans le cas des entrées fortement bruitées $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$	94
3.16	Résidus dans le cas des entrées constantes	95
3.17	Résidus dans le cas des entrées bruitées	95
3.18	Résidus dans le cas des entrées fortement bruitées	95
4.1	Décomposition de la fenêtre temporelle de calcul en 3 parties	101
4.2	Détectabilité de la commutation entre deux modes discernables	106
4.3	Détectabilité de la commutation entre deux modes non discernables	106
4.4	Diagramme de génération de résidu par la MPD pour la reconnaissance du mode actif	120
4.5	Système à commutations	128
4.6	Les entrées du système u_k	129
4.7	Les sorties du système y_k	130
4.8	L'estimation des instants de commutations $\epsilon_{s, k}$	130
4.9	La reconnaissance du premier mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(1), k}$	131
4.10	La reconnaissance du deuxième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(2), k}$	131
4.11	La reconnaissance du troisième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(3), k}$	132
4.12	Les entrées du système u_k	133
4.13	Les sorties du système y_k	133
4.14	L'estimation des instants de commutation $\epsilon_{s, k}$	134
4.15	La reconnaissance du premier mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(1), k}$	134
4.16	La reconnaissance du deuxième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(2), k}$	135
4.17	La reconnaissance du troisième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(3), k}$	135
4.18	Les entrées du système u_k	137
4.19	Les sorties du système y_k	137
4.20	L'estimation des instants de commutations $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$	138
4.21	La reconnaissance du premier mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(1), k}^{\otimes}$	138
4.22	La reconnaissance du deuxième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(2), k}^{\otimes}$	139
4.23	La reconnaissance du troisième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(3), k}^{\otimes}$	139

INTRODUCTION GÉNÉRALE

CADRE ET CONTEXTE DE LA THÈSE

En vue d'améliorer la sûreté de fonctionnement (sécurité, disponibilité, fiabilité, maintenabilité) et les performances des systèmes industriels, il est indispensable de mettre en place des méthodes de surveillance, ou diagnostic, destinées à détecter, localiser et estimer les défauts survenant sur les composants (capteurs, actionneurs et composants internes). Ces méthodes ont pour objectif de donner à chaque instant l'état de santé du système de manière à mettre en place des procédures de commandes tolérantes aux fautes, des actions correctives et d'aider à la maintenance.

Dans ce contexte beaucoup de méthodes à base de modèles analytiques, comportementaux sont développées pour le diagnostic des systèmes dynamiques. L'idée est d'utiliser les équations du modèle afin de générer des indicateurs de défauts nommés résidus [20]. Le résidu quantifie la cohérence entre le comportement du système réel et celui de son modèle nominal. Ces méthodes nécessitent une connaissance précise de la structure et des paramètres du modèle. Or, il est souvent très difficile d'avoir cette connaissance précise sur des systèmes industriels. Plusieurs raisons à cela. Les systèmes industriels sont souvent complexes, avec de nombreux composants en interaction. La modélisation et l'identification paramétrique requièrent des méthodes complexes. Ceci nécessite du personnel très qualifié, et impose de pouvoir réaliser des tests, en général spécifiques, qui ne peuvent être réalisés en exploitation. Modéliser un système et identifier les paramètres du modèle est donc un travail coûteux pour les industriels. De plus, même si des modèles peuvent être obtenus pour certaines classes de systèmes technologiques couramment utilisés (moteurs électriques ou thermiques par exemple), les valeurs de paramètres ne seront pas identiques pour deux systèmes sortis de la même chaîne de fabrication. Un "même" composant ou sous-système se retrouvera dans de nombreuses installations industrielles mais n'aura pas tout à fait les mêmes caractéristiques. Ceci est appelé *l'effet parc* dans [12]. Les paramètres du modèle doivent donc être systématiquement ré-identifiés, pour chaque système considéré. Par ailleurs, au cours de son cycle de vie, un système technologique se dégrade. Les paramètres du modèle initial évoluent donc au cours du temps. Ceux-ci doivent donc être identifiés continûment ou au moins régulièrement.

Des techniques robustes de diagnostic ont été développées pour s'affranchir des incertitudes sur la valeur des paramètres. Cependant, ces techniques ont leurs limites. Il n'est en général pas possible d'assurer la robustesse à tous les paramètres ; des hypothèses doivent être faites sur les paramètres incertains considérés (incertitudes structurées) et sur les plages d'incertitudes de ces paramètres (incertitudes bornées).

D'autres méthodes de diagnostic ne nécessitent pas l'utilisation d'un modèle analytique. Ces méthodes à base de données utilisent exclusivement les mesures recueillies sur les systèmes. Cependant, la plupart de ces méthodes sont dédiées aux systèmes statiques ou aux systèmes dynamiques linéaires.

OBJECTIFS DE LA THÈSE

L'objectif du présent travail est de proposer une méthode de surveillance ne nécessitant pas une connaissance précise des paramètres du modèle et qui soit utilisable sans une étape préalable d'identification paramétrique. Cette méthode doit être applicable en ligne, ce qui entraîne des contraintes en terme de complexité de calcul. La méthode que nous proposons (appelée dans ce mémoire MPD pour Méthode par Projection des Données) est dérivée des techniques des sous-espaces qui ont été proposées pour la détection et la localisation des défauts capteurs dans des systèmes dynamiques linéaires [95]. Les objectifs de ce travail de thèse sont de proposer, formaliser et discuter la MPD pour la détection, la localisation et l'identification des défauts capteurs, actionneurs et internes, pour les systèmes de structure linéaire ou bilinéaire.

CONTRIBUTIONS

Les principales contributions de cette thèse sont :

- La proposition d'une méthode basée sur les données (MPD) pour la surveillance des systèmes dynamiques sans utilisation des paramètres du modèle analytique.
- L'estimation de défauts capteurs, ceci constitue une extension directe de la méthode proposée dans [95].
- La détection, la localisation et l'estimation de défauts actionneurs pour des systèmes de structure linéaire.
- La proposition de critères pour le réglage de la méthode MPD.
- La détection et la localisation de défauts capteurs pour des systèmes de structure bilinéaire.
- La réduction de la complexité de calcul des résidus pour les systèmes bilinéaires.
- L'estimation de l'instant de commutation et la reconnaissance du mode actif pour un système à plusieurs modes (modes normaux ou modes défaillants, représentant des défauts internes).
- La caractérisation de la discernabilité entre des modes linéaires et entre des modes bilinéaires.

Les travaux présentés dans cette thèse ont été publiés dans les références suivantes :

Conférences internationales

A. Hakem, V. Cocquempot, K.M. Pekpe, "Data-projection Method for Actuator Fault Detection and Estimation", 10th IEEE International Conference on Control and Automation (IEEE ICCA 2013), Hangzhou, China, 12-14 June 2013.

A. Hakem, K.M. Pekpe, V. Cocquempot, "A Parameter-free Method for Sensor Fault Detection and Isolation in Bilinear Systems", 9th UKACC (United Kingdom Automatic Control Council) International Conference on Control, Cardiff, UK, 03-05 September 2012.

A. Hakem, M.K Pekpe, V. Cocquempot, "On Mode Discernibility and Switching Detectability for Linear Switching Systems using a Data-based Projection Method", 23rd Chinese Control and Decision Conference, IEEE CCDC, Mianyang, China in 23-25 May 2011.

A. Hakem, K.M. Pekpe, V. Cocquempot, "Sensor fault diagnosis for bilinear systems using data-based residuals" , 50th IEEE Conference on Decision and Control and European

Control, CDC-ECC'11, Orlando, USA, 12-15 December 2011.

A. Hakem, K.M. Pekpe, V. Cocquempot, "Parameter-free method for switching time estimation and current mode recognition", IEEE Conference on Control and Fault-Tolerant Systems, Systol'10, Nice, France, 6-8 october 2010.

Chapitres

A. Hakem, K.M. Pekpe, V. Cocquempot, "Fault detection and isolation for switching systems using a parameter-free method", in Diagnostics and Prognostics of Engineering Systems : Methods and Techniques, ISBN13 : 9781466620957, September 2012.

T. Boukhobza, F. Hamelin, B. Marx, G. Mourot, A.M. Nagy, J. Ragot, D.E.C. Belkhiat, K. Guelton, D. Jabri, N. Manamanni, S. Martinez, N. Messai, V. Cocquempot, **A. Hakem**, K.M. Pekpe, T. Zouari, M. Defoort, M. Djemai et J. Van Gorp, In Supervision, surveillance et sûreté de fonctionnement des grands systèmes, Nada Matta, Yves Vandenboomgaerde, Jean Arlat eds., Chapitre 6, Diagnostic des systèmes à modes multiples de fonctionnement, pp. 115-154. ISBN 978-2-7462-3840-4, Traité Information, Commande, Communication, IC2, Hermès Science Publications, Edition Lavoisier, Paris, Avril 2012.

T. Boukhobza, F. Hamelin, B. Marx, G. Mourot, A.M. Nagy, J. Ragot, D.E.C. Belkhiat, K. Guelton, D. Jabri, N. Manamanni, S. Martinez, N. Messai, V. Cocquempot, **A. Hakem**, K.M. Pekpe, T. Zouari, M. Defoort, M. Djemai et J. Van Gorp, In Supervision, surveillance et sûreté de fonctionnement des grands systèmes, Nada Matta, Yves Vandenboomgaerde, Jean Arlat eds., Chapter 6, Diagnosis of Systems with Multiple Operating Modes, pp. 75-113. Wiley Edition, August 2012.

Conférences nationales

A. Hakem, K.M. Pekpe, V. Cocquempot, "Détection de commutations et reconnaissance du mode de fonctionnement sans utilisation explicite des paramètres". 4^{èmes} Journées Doctorales / Journées Nationales MACS 9-10 juin 2011. Marseille - France.

Workshop

A. Hakem, M.K Pekpe, V. Cocquempot, "Parameter-free method for switching time estimation and current mode recognition", Groupement d'intérêt scientifique Surveillance, sûreté et sécurité des grands systèmes, GIS 3SGS'10, Reims, France, 29-30 septembre, 2010.

ORGANISATION DU MÉMOIRE

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres qui se présentent comme suit :

Dans le chapitre 1, des généralités sur les méthodes de surveillance sont rappelées. Ensuite, quelques méthodes de génération d'indicateurs de défauts sont présentées. Parmi ces méthodes, deux méthodes de diagnostic sont présentées en détails : l'espace de parité et l'analyse en composantes principales. Le choix de ces deux méthodes plutôt que d'autres réside dans le point commun entre ces méthodes et la méthode proposée : les deux méthodes sont basées sur une projection des données dans des espaces particuliers.

Dans le chapitre 2, la Méthode par Projection des Données (MPD) pour la génération d'indicateurs de défauts est décrite afin de détecter et localiser les défauts capteurs dans des systèmes linéaires. L'avantage de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas la connaissance des valeurs des paramètres du modèle linéaire, mais uniquement les données d'entrée et de sortie sur une fenêtre temporelle. Un critère de réglage pour déterminer cette fenêtre temporelle est proposé. Cette méthode de génération de résidus est ensuite étendue pour la détection et la localisation des défauts actionneurs dans les systèmes inversibles en entrée. Puis, cette méthode de génération de résidus est adaptée pour l'estimation des défauts capteurs et actionneurs en utilisant des données hors-ligne disponibles. Enfin, des résultats de simulations sur un cas d'étude, le modèle d'un système aéronautique, sont présentés afin d'illustrer la méthode proposée.

Dans le troisième chapitre, la MPD est étendue aux systèmes bilinéaires, pour la détection et la localisation des défauts capteurs. Cette méthode de génération de résidus est modifiée pour remédier au problème de complexité de calculs. Enfin, un exemple est présenté afin d'illustrer la méthode proposée pour la détection et la localisation de défauts capteurs.

Dans le chapitre 4, la MPD est étendue pour le diagnostic des défauts internes (correspondants à des changements des valeurs des paramètres du modèle, supposées ici inconnues). Chaque défaut est représenté sous la forme d'un mode de fonctionnement. L'apparition du défaut produit donc une commutation du mode de fonctionnement normal, au mode défaillant correspondant. La surveillance des défauts internes revient à détecter les transitions, estimer les instants de commutations et reconnaître le mode actif d'un système à commutations. Ce système à commutations est constitué d'un mode de fonctionnement linéaire/bilinéaire normal et plusieurs modes défaillants. Enfin, des résultats de simulations sur un exemple académique, sont présentés afin d'illustrer la méthode proposée pour l'estimation de l'instant de commutation (instant d'apparition du défaut interne) et la reconnaissance du mode actif (identification du défaut interne).

La conclusion générale reprend les principaux résultats de cette thèse et précise quelques directions de recherche pour compléter ces travaux.

LES MÉTHODES DE DÉTECTION ET DE LOCALISATION DE DÉFAUTS

SOMMAIRE

1.1	GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES DE SURVEILLANCE	6
1.2	ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES MÉTHODES DE GÉNÉRATION D'INDICATEURS DE DÉFAUTS	7
1.2.1	Les méthodes utilisant un modèle comportemental	7
1.2.2	Les méthodes n'utilisant pas de modèle comportemental connu a priori . . .	13
1.3	MÉTHODES DE GÉNÉRATION D'INDICATEURS DE DÉFAUTS PAR PROJECTION	17
1.3.1	L'espace de parité	17
1.3.2	L'Analyse en Composantes Principales	25
	CONCLUSION	28

Dans la littérature on trouve différentes classifications des méthodes de détection et de localisation de défauts. La plus classique, est de considérer deux grandes catégories de méthodes : les méthodes utilisant uniquement les données et les méthodes utilisant un modèle comportemental.

- Parmi les méthodes de la première classe, on peut citer les techniques de traitement de signal, l'analyse vibratoire et la reconnaissance des formes.
- La deuxième classe de méthodes est elle même divisée en deux sous-classes suivant qu'un modèle comportemental est disponible a priori ou non :
 - les méthodes utilisant un modèle analytique connu a priori issu d'une description physique sous forme d'une fonction de transfert, représentation dans l'espace d'état, d'un graphe (modèle structurel) ou Bond-Graph.
 - les méthodes utilisant un modèle analytique déterminé par les données via les techniques d'identification, ce modèle peut être aussi déterminé implicitement sous forme d'axes principaux de l'ACP ou par des modèles des techniques d'apprentissage comme les réseaux de neurones.

Dans ce chapitre nous choisissons de détailler les méthodes qui se rapprochent de la méthode que nous proposerons dans la suite de cette thèse, à savoir la méthode de l'Espace de Parité (EP) et l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Ces deux méthodes utilisent une projection des données dans un espace spécifique pour générer des indicateurs de défaut appelés résidus.

1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES MÉTHODES DE SURVEILLANCE

Ces méthodes font habituellement intervenir un *générateur de résidus* avec une stratégie d'*analyse de résidus* afin de fournir une *décision* sur la présence de défauts, comme illustré par la figure 1.1.

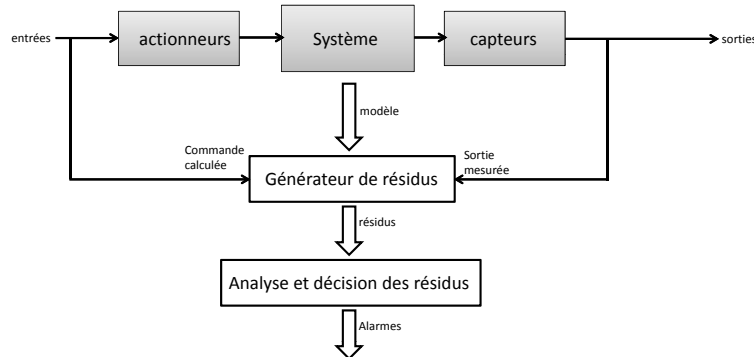


FIGURE 1.1 – Principe de la détection et de la localisation de défauts

L'objectif du module de *génération de résidus* est de fournir un ensemble d'indicateurs révélateurs de la présence de défauts. Pour la génération de résidus, les signaux de commande envoyés aux actionneurs, les mesures issues des capteurs et le modèle analytique du système (dans le cas des méthodes avec modèle) sont utilisés. L'expression du résidu en fonction de ces grandeurs est appelée *forme de calcul* (Fig. 1.2).

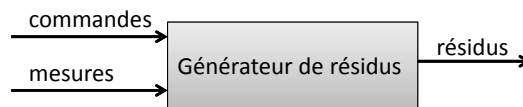


FIGURE 1.2 – Forme de calcul (ou externe) du résidu

En régime de fonctionnement normal, certaines caractéristiques (moyenne, variance, fréquence, ...) ont une valeur spécifique et s'en écartant dès qu'un défaut apparaît. Classiquement, le résidu est de moyenne nulle en l'absence de défaut et non nulle lors de l'apparition de celui-ci. A cause des bruits, des perturbations liées à l'environnement et des erreurs de modélisation, un résidu n'est jamais parfaitement nul en fonctionnement non défaillant. La relation liant le résidu à ces différentes grandeurs et expliquant la valeur du résidu est appelée *forme d'évaluation* (Fig. 1.3).

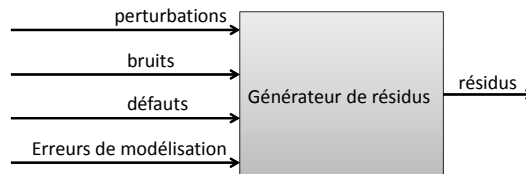


FIGURE 1.3 – Forme d'évaluation (ou interne) du résidu

Afin de limiter les fausses alarmes et les non détections, les résidus doivent être robustes ou faiblement affectés par les perturbations et les erreurs de modélisation. On a finalement recours à une méthode d'*analyse des résidus et de décision* qui a pour objet de traduire l'évolution temporelle d'un résidu en une décision booléenne. Cette décision indique si le signal est révélateur de l'apparition d'un défaut. On parle alors de la *détection* de défauts. Chaque résidu peut être sensible à un seul défaut, à tous les défauts, ou à un certain nombre de défauts. La *localisation* des défauts consiste à déterminer le(s) composant(s) en défaut. Le lecteur désireux d'en apprendre d'avantage sur les méthodes de décision peut se référer

à [5] et [7]. L'évaluation des résidus peut être booléenne ou non booléenne, l'évaluation non booléenne consiste à attribuer un *facteur de croyance* à un ensemble d'hypothèses de défaillances [67]. La combinaison des informations peut alors être effectuée à l'aide de la théorie de l'évidence [106] ou en utilisant des fonctions floues. Cette décision peut également faire appel à la reconnaissance de formes ([32], [142]). D'un point de vue pratique, la logique de décision à seuils joue un rôle important car la plupart des méthodes citées se ramène, à terme, à un seuillage. Si le seuil choisi est constant, les entrées inconnues et perturbations qui excitent le système perturbent la décision. Si le seuil est choisi trop petit, on observe beaucoup de fausses alarmes et s'il est trop grand, les défauts de faible amplitude ne sont pas détectés. Il est donc intéressant d'utiliser des seuils adaptatifs qui évoluent en fonction du point de fonctionnement du processus surveillé ([35], [22], [29]).

Dans ce qui suit, nous présentons les différentes méthodes utilisées en diagnostic des systèmes physiques. Le domaine est très vaste, des choix arbitraires ont été faits dans ces deux sous-sections. Le but n'est donc pas de faire une synthèse exhaustive de l'existant, mais de faire un tour d'horizon rapide et de montrer la richesse des possibilités qui s'offrent au concepteur du système de diagnostic.

L'idée est de donner les grands principes et faire référence aux principaux travaux. Le lecteur souhaitant avoir des précisions sur ces méthodes pourra se référer aux articles de synthèse ([113], [112] et [114]) ou ouvrages ([56], [55] et [94]) et aux références citées dans ces travaux.

1.2 ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES MÉTHODES DE GÉNÉRATION D'INDICATEURS DE DÉFAUTS

1.2.1 Les méthodes utilisant un modèle comportemental

Le principe de ces méthodes est de comparer le comportement du système en fonctionnement avec le comportement d'un modèle de référence. L'idée est d'utiliser les équations du modèle afin de générer des *résidus* [20] qui quantifient la cohérence entre le comportement du système et celui de son modèle. L'apparition d'un défaut se traduit par le changement de comportement du résidu : saut de moyenne, variance,...

Un modèle est une formalisation mathématique d'un système physique qui permet de représenter les liens (ou relation de contraintes), existants entre des quantités (ou variables) du système. Les modèles utilisés peuvent être de nature et de complexité différentes. Ils peuvent être : à temps continu ou à temps discret, qualitatifs, structurels ou analytiques, linéaires ou non linéaires, représentant le bon fonctionnement ou tenant compte des défaillances.

Classiquement, en Automatique, des modèles dits de bon fonctionnement sont utilisés. Ils caractérisent le comportement normal du système, c'est à dire lorsqu'aucune défaillance n'est présente. En surveillance, par contre, il est parfois nécessaire de compléter le modèle afin de caractériser le comportement défaillant du système. Trois niveaux de connaissance peuvent être considérés [23] :

- Le niveau 1 est le niveau de connaissance le plus élémentaire. Il consiste à indiquer les équations décrivant le composant qui sont influencées directement par la défaillance, c'est à dire, les équations du modèle (contraintes) qui ne sont probablement plus valides en cas de défaillances.

- Le niveau 2 de connaissance est plus précis car il consiste à décrire, grâce à des variables supplémentaires (appelée variables de défaillance) comment sont modifiées les équations de fonctionnement normal lorsqu'une défaillance survient. Les défaillances peuvent être additives ou multiplicatives suivant la manière dont les variables de défaillance influencent les équations du modèle.
- Le niveau 3 de connaissance consiste à modéliser l'évolution dynamique de la défaillance.

Des équations supplémentaires liant les variables de défaillance sont ajoutées au modèle de bon fonctionnement. Pour obtenir ce modèle, soit une connaissance fine des phénomènes physiques est nécessaire, soit des données expérimentales du processus défectueux doivent pouvoir être utilisées.

1.2.1.1 Estimation paramétrique

Les *paramètres* sont des constantes physiques du système (inertie, caractéristiques géométrique du système, coefficients aérodynamiques, masse, coefficient de viscosité, ...) ou une agrégation de plusieurs paramètres physiques, cette agrégation, n'a dans ce cas, pas nécessairement de signification physique. Ces paramètres ne sont pas toujours mesurables et sont susceptibles de varier au cours du cycle de vie du système.

Les méthodes d'estimation paramétrique consistent à estimer les paramètres caractérisant le fonctionnement réel (*du système*). Pour détecter la présence de défauts identifiables [117] affectant les paramètres du système, il faut comparer les paramètres estimés et les paramètres théoriques (Fig. 1.4).

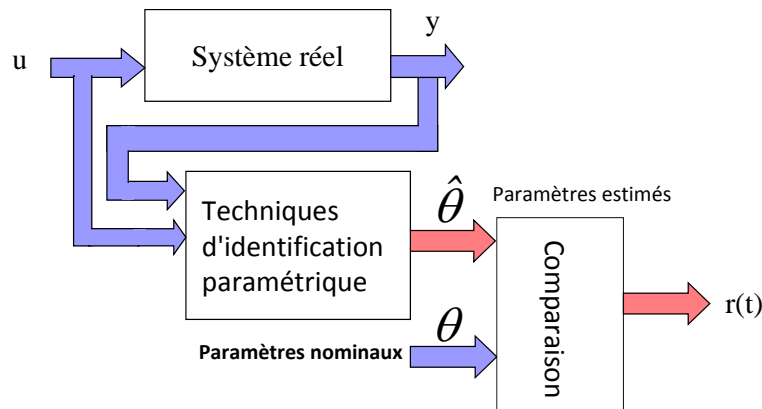


FIGURE 1.4 – Génération de résidus par estimation paramétrique

Il existe plusieurs méthodes d'estimation des paramètres [125], comme l'estimation Bayésienne [116], l'estimation au sens du maximum de vraisemblance ou l'estimation au sens des moindres carrés [51].

Isermann a décrit dans [55] la procédure générale pour la détection des défauts en 5 étapes :

1. établir des relations entrée-sortie qui modélisent mathématiquement le système :

$$\underline{y}(t) = \mathcal{F}(\underline{u}(t), \underline{\theta}) \quad (1.1)$$

où $\underline{y}(t)$ (resp. $\underline{u}(t)$) peut inclure des dérivées temporelles successives des sorties mesurées $y(t)$ (resp. des entrées $u(t)$).

Une manière de simplifier (1.1) est de linéariser la dynamique non linéaire et d'agréger ensuite ses dérivées temporelles pour obtenir un modèle linéaire en les paramètres,

$$\underline{y}(t) = \mathcal{F}(\underline{u}(t)).\underline{\theta} \quad (1.2)$$

2. déterminer la relation entre les paramètres physiques \underline{p} et les paramètres du modèle $\underline{\theta}$:

$$\underline{\theta} = \mathcal{G}(\underline{p}) \quad (1.3)$$

3. estimer les paramètres $\hat{\underline{\theta}}$ du modèle comportemental à l'aide de l'équation (1.1) et des mesures disponibles :

$$\hat{\underline{\theta}} = \mathcal{H}(\underline{y}(1), \dots, \underline{y}(t), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(t)) \quad (1.4)$$

Un certain nombre de méthodes utilisables pour l'estimation de paramètres sont décrites dans [108] et [36].

Si le modèle est linéaire en les paramètres (1.2), alors l'estimation $\hat{\underline{\theta}}$ peut être obtenue en ligne par moindres carrés récursifs [41]. Un problème à ne pas négliger dans cette procédure est le calcul des dérivées temporelles successives des mesures bruitées. Dans le cas général non linéaire, des méthodes d'optimisation non convexes sont requises, ce qui implique une charge de calcul plus importante et une convergence non garantie vers une solution optimale [55]. D'autres types d'approches, comme les méthodes de sous-espaces ([6], [96]), ont également été étudiées.

4. estimer les paramètres physiques $\hat{\underline{p}}$ du système par inversion exacte ou approchée (moindres carrés, pseudo inverse) de l'équation (1.3) :

$$\hat{\underline{p}} = \mathcal{G}^{-1}(\hat{\underline{\theta}}) \quad (1.5)$$

5. générer des résidus en comparant les paramètres estimés $\hat{\underline{p}}$ aux valeurs nominales ($\underline{\theta}^0$, \underline{p}^0) ou à des valeurs jugées acceptables pour les différents paramètres physiques, soit à partir des paramètres physiques, soit à partir des paramètres du modèle :

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= \underline{\theta}^0 - \hat{\underline{\theta}}(t) \\ \text{ou} \\ \underline{r}(t) &= \underline{p}^0 - \hat{\underline{p}}(t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Si les valeurs nominales sont inconnues ou incertaines, les résidus peuvent être calculés comme la différence entre l'estimation courante $\hat{\underline{p}}(t)$ et sa valeur antérieure $\hat{\underline{p}}(t - t_h)$, où t_h est un horizon temporel prédéfini. On aura par exemple :

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= \hat{\underline{\theta}}(t) - \hat{\underline{\theta}}(t - t_h) \\ \text{ou} \\ \underline{r}(t) &= \hat{\underline{p}}(t) - \hat{\underline{p}}(t - t_h) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ce dernier cas suppose que les paramètres restent constants dans des conditions de fonctionnement nominales.

Il est possible de remplacer une valeur nominale unique par un ensemble de valeurs admissibles pour la comparaison ([66], [98]). Dans ce contexte, un ensemble d'estimations des paramètres est déterminé (approximativement par des unions d'intervalles,

des ellipsoïdes ou encore des zonotopes), et le diagnostic peut s'effectuer en vérifiant que l'intersection entre cet ensemble estimé et l'ensemble de valeurs admissibles est vide, ce qui indique la présence ou non d'un défaut ([17], [53], [101]).

L'estimation paramétrique a l'avantage d'apporter de l'information sur l'amplitude des déviations. Toutefois, un des inconvénients majeurs de la méthode réside dans la nécessité d'avoir un système physique excité en permanence. Ceci pose des problèmes pratiques dans le cas de procédés dangereux ou fonctionnant en mode stationnaire. De plus, les relations entre les paramètres mathématiques et physiques ne sont pas toujours inversibles, ce qui complique la tâche du diagnostic basé sur les résidus.

1.2.1.2 Estimation d'état

Les méthodes d'estimation d'état sont destinées à déterminer une estimation du vecteur d'état $x(t)$ d'un système à partir des entrées et des sorties. Le résidu est l'erreur d'estimation de la sortie ([8], [62]). Les estimateurs d'état sont classés ici en fonction de la manière dont ils incorporent l'incertitude et les bruits de mesure ou de modèle : le cas déterministe, le cas stochastique ou le cas des approches à erreur bornée. Ces cas présentent des analogies dans leur formulation et peuvent être schématisées par la figure 1.5.

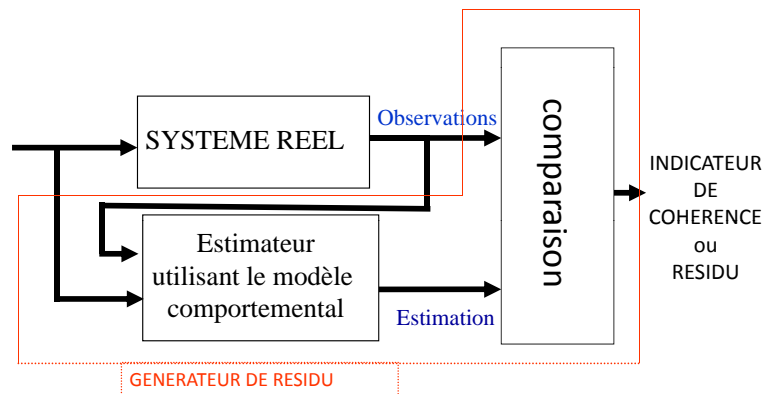


FIGURE 1.5 – Génération de résidu utilisant un estimateur de sortie

1.2.1.2.1 Approche déterministe Les *observateurs* peuvent être, soit d'*ordre plein* s'ils estiment l'intégralité du vecteur d'état et dans ce cas, le système doit être complètement observable, soit d'*ordre réduit* s'ils estiment une partie du vecteur d'état et dans ce cas, l'observabilité du système n'a pas besoin d'être totale pour générer des résidus exploitables.

Un observateur de *Luenberger* [76] reconstruit les variables d'état dans un contexte déterministe. Les méthodes de détection et de localisation de défauts à base d'observateurs sont très utilisées ([93], [39], [37]). Considérons tout d'abord un modèle d'état linéaire déterministe :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

et l'observateur d'état complet associé :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

L'erreur d'estimation de l'état $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ satisfait :

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) \quad (1.10)$$

et $e_x(t)$ tend asymptotiquement vers zéro si le modèle est correct et si L a été choisi pour rendre $A - LC$ stable, ce qui est toujours réalisable si la paire (C, A) est observable. Considérons maintenant un vecteur de défauts $f(t)$ pouvant varier dans le temps qui agit sur l'état de manière additive :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_f f(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.11)$$

L'équation (1.10) devient alors :

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) + E_f f(t) \quad (1.12)$$

L'erreur d'estimation est donc sensible aux défauts, et l'erreur d'estimation de la sortie $e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ peut donc être utilisée comme résidu. Dans le domaine fréquentiel, on peut écrire $\bar{e}_y(s) = C(sI_n - A + LC)^{-1}E_f \bar{f}(s)$. Si $\bar{f}(s) \notin \text{null}(C(sI_n - A + LC)^{-1}E_f)$ (i.e. $\bar{e}_y(s) \neq 0$), alors le résidu est sensible à $f(t)$.

Lorsque le système est non linéaire, de nombreux auteurs ont proposé de linéariser autour d'un point de fonctionnement ou de décomposer le système en plusieurs sous-systèmes linéaires [134], [90].

Dans le cas où la non linéarité est forte, un observateur non linéaire doit être utilisé [39]. Aucune structure générale ne s'est dégagée et le réglage de ces méthodes non linéaires reste complexe. Les principaux résultats concernent les *observateurs adaptatifs* ([1], [19], [123], [74], [138]) et les *observateurs grand gain* ([44], [16], [10]). Une nouvelle forme d'observateur non linéaire a été proposée ([4], [3]), dont le réglage nécessite la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Son application au diagnostic reste toutefois à étudier. Les *observateurs à mode glissant* sont également très en vogue, car ils permettent notamment d'estimer directement l'amplitude des défauts qui ont rompu la convergence vers la surface de glissement ([33], [111], [61]). Les méthodes multi-modèles sont également très étudiées afin de contourner les non linéarités et de réduire la complexité. Cette approche suppose que le modèle non linéaire du système peut être réécrit ou approché par une interpolation de modèles linéaires locaux. Cette représentation, dite de Takagi-Sugeno, peut être obtenue analytiquement ou par identification [110]. Une fois le multi-modèle obtenu, un ensemble d'observateurs linéaires peut être synthétisé ([52], [45]).

1.2.1.2.2 Approche stochastique Un exemple d'approche stochastique est le filtrage de *Kalman* [64] qui est un algorithme récursif d'estimation d'état avec un minimum d'erreur d'estimation. Dans le filtrage de Kalman les propriétés statistiques des bruits d'état et de mesure sont explicitement prises en compte ainsi que les matrices du système, il est aussi supposé que les bruits suivent une distribution gaussienne et que leur premier et deuxième moments statistiques sont connus. En l'absence de défaut, si le filtre de Kalman a été réglé correctement, son innovation est un bruit blanc de moyenne nulle et de covariance connue. Ces propriétés statistiques changent en présence d'un défaut. L'innovation peut donc être utilisée comme un résidu, dont l'évolution est surveillable par des tests statistiques sur la moyenne ou la variance. Ce principe a été introduit dans [80] et largement exploité dans [7], [91] et [141].

Cependant, quand la structure du modèle diffère même légèrement de celle du système, le filtre perd son optimalité et dans de nombreux cas, peut diverger.

L'utilisation du filtre de Kalman pour la résolution de problèmes de détection ne doit être

envisagée que si le modèle est connu avec beaucoup de précision.

L'extension aux systèmes non linéaires est réalisée la plupart du temps par linéarisation du modèle autour de l'estimation courante dans le cadre du filtre de *Kalman étendu* (Extended Kalman Filter - EKF) [18]. Contrairement à l'EKF, le *filtre de kalman parfumé* (Unscented Kalman Filter - UKF) ne linéarise pas le modèle [63] et prédit le comportement du système en évaluant le modèle non linéaire sur un ensemble de points formant grossièrement une distribution gaussienne [25], [122]. A partir d'idées similaires, les méthodes de Monte Carlo séquentielles telles que le filtrage particulaire (Particle Filtering - PF) sont tout à fait à même de gérer les non linéarités et les distributions non gaussiennes pour l'estimation d'état, avec toutefois une charge de calcul importante [137], [2]. Les filtres particuliers sont de plus en plus sollicités pour aborder des problèmes de diagnostic ([71], [115], [120]).

1.2.1.2.3 Approche ensembliste Les méthodes présentées jusqu'ici soit n'intègrent pas explicitement d'hypothèse sur les incertitudes, soit les considèrent comme suivant une distribution probabiliste, généralement gaussienne. Une autre possibilité consiste à les représenter sous forme de bornes d'erreurs acceptables ou attendues. Ce type d'approche à erreur bornée peut être utilisé pour les modèles linéaires et non linéaires. L'analyse par intervalles permet de prédire l'évolution d'un ensemble de valeurs possibles pour le vecteur d'état ([60], [100]). Les éléments de cette prédiction ensembliste qui sont incohérents avec les mesures sont alors éliminés, et le diagnostic s'effectue en vérifiant si l'ensemble résultant est vide ([98], [99]).

1.2.1.3 Relations de redondance

On distingue ici deux types de redondance : la redondance physique (ou matérielle) et la redondance analytique.

1.2.1.3.1 Redondance matérielle Le moyen le plus direct pour obtenir une information fiable sur une même variable est de disposer de plusieurs capteurs la mesurant simultanément. Une redondance à trois permettra notamment d'isoler un capteur défaillant. La redondance physique souffre d'un désavantage majeur : doubler ou tripler le nombre de capteurs revient à augmenter considérablement le coût et à affronter des problèmes d'encombrement liés à l'installation et à la maintenance de ces capteurs. L'ajout de capteurs supplémentaires permettra aussi d'avoir des informations additionnelles à mettre à profit dans le cadre de la redondance analytique.

1.2.1.3.2 Redondance analytique Cette redondance fait appel à des modèles analytiques représentatifs des relations de causalité et aux autres contraintes existantes entre les signaux présents dans le système. Les mesures obtenues des différents capteurs peuvent alors être reliées par ces modèles. Un modèle analytique est une représentation mathématique des lois d'évolution des variables physiques du système. Les procédés ainsi modélisés ne suivent pas toujours une telle représentation idéale. Ceci est dû à la présence d'incertitudes sur les paramètres du modèle, des modifications structurelles du système, des non-linéarités et l'effet des perturbations et des bruits de mesure.

Le cas linéaire a été très largement étudié dans la littérature (voir par exemple [20]). L'équation d'entrée-sortie fait alors apparaître les matrices d'observabilité et de commandabilité (comme nous le verrons par la suite). En projetant cette équation dans l'espace supplémentaire à l'espace engendré par la matrice d'observabilité, on obtient l'ensemble de Relations de Redondance Analytique (RRA). Cet espace dans lequel les équations sont projetées est appelé *Espace de Parité*.

Le cas des modèles polynomiaux a été traité dans [24], [40]. Les expressions analytiques des RRA peuvent être obtenues en utilisant des algorithmes d'élimination formelle comme les bases de Groebner [26], la théorie de l'élimination [30] ou les ensembles caractéristiques [102].

Dans le cas où les systèmes ne sont pas polynomiaux, il n'existe à l'heure actuelle pas de méthode générale permettant de générer les RRA par une procédure automatique.

Nous décrivons plus en détails la génération de résidus de parité, dans le cas linéaire, dans la section 1.3.1.

1.2.1.4 Structuration des résidus

Pour une *bonne détection*, les indicateurs de défauts (résidus) doivent être robustes aux perturbations et aux entrées inconnues. Pour une *bonne localisation*, les résidus doivent être sensibles à un ensemble de défauts et robustes à d'autres, cette procédure est appelée *structuration* (ou *découplage*). Deux types de bancs de générateurs de résidus sont classiquement utilisés : *Dedicated Residual Generator Scheme* (DRGS) et *Generalized Residual Generator Scheme* (GRGS). Quand la méthode de génération de résidus utilise des observateurs, les terminologies précédentes deviennent *Dedicated Observer Scheme* (DOS) et *Generalized Observer Scheme* (GOS). Un DOS est un banc d'observateurs chacun excité par une seule mesure (ou une seule entrée) et donc sensible à un seul défaut. Dans le cas du GOS, les observateurs sont excités par toutes les sorties (ou entrées) sauf une, et sont donc sensibles à tous les défauts sauf un. Ces deux schémas sont illustrés [21] par les figures 1.6 et 1.7.

DOS : Dedicated observer scheme

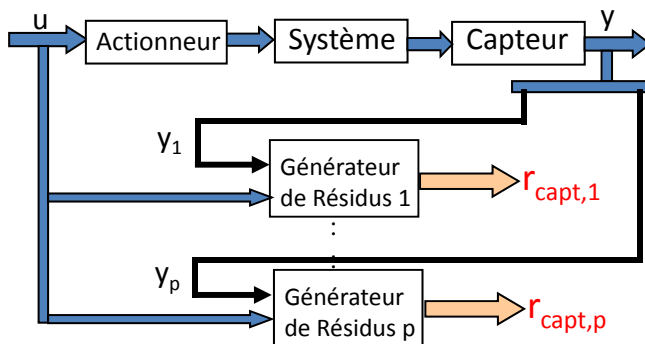


Table des signatures

	$f_{\text{capt},1}$	$f_{\text{capt},2}$		$f_{\text{capt},p}$
$r_{\text{capt},1}$	1	0		0
$r_{\text{capt},2}$	0	1	\ddots	
		\ddots	\ddots	0
$r_{\text{capt},p}$	0		0	1

FIGURE 1.6 – DOS pour la détection et la localisation de défauts capteurs

Le schéma MMAE (Multiple Model Adaptive Estimation) ([34], [45]) est un ensemble de filtres utilisant des modèles supposés de comportements sains ou défaillants, organisés en DOS ou GOS et surveillés indépendamment. La nature stochastique des innovations des filtres rend possible le calcul d'une probabilité pour chaque modèle, et renseigne donc sur le niveau de confiance à accorder à la localisation des défauts. Le schéma IMM (Interacting Multiple Model) ([139], [11], [103], [48]) intègre en plus de cela le calcul de la probabilité de passage d'un modèle à l'autre via une chaîne de Markov, et réalise également une fusion des estimations pour fournir une estimation de l'état réel aussi fiable que possible.

1.2.2 Les méthodes n'utilisant pas de modèle comportemental connu a priori

Quand aucun modèle dynamique n'est disponible a priori, les connaissances sur le système se résument aux mesures acquises en temps réel complétées par un éventuel histo-

GOS : Generalized observer scheme

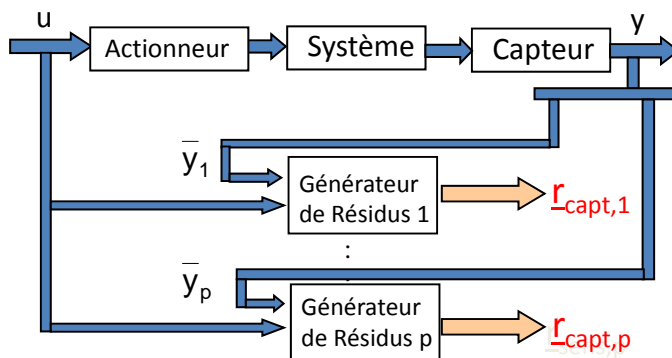


FIGURE 1.7 – GOS pour la détection et la localisation de défauts capteurs

Table des signatures

	$f_{\text{capt},1}$	$f_{\text{capt},2}$		$f_{\text{capt},p}$
$r_{\text{capt},1}$	0	1		1
$r_{\text{capt},2}$	1	0	\ddots	
		\ddots	\ddots	1
$r_{\text{capt},p}$	1		1	0

rique du fonctionnement du processus. En faisant l'hypothèse d'une structure de modèle, un modèle analytique peut être identifié. Les techniques de génération de résidus précédemment décrites dans la section 1.2.1 peuvent alors être utilisées. Nous présentons dans cette section d'autres méthodes de détection et de localisation de défauts utilisant exclusivement les données disponibles.

1.2.2.1 Seuillage de quantités mesurées

Des variables mesurées sont comparées avec des valeurs limites constantes ou adaptatives (évoluant en fonction du point de fonctionnement). Un premier niveau indique la présence probable d'un défaut alors qu'un second niveau peut en caractériser la gravité. Le franchissement d'un seuil révèle la présence d'une anomalie. Effectivement, le résultat d'une telle méthode peut être remis en question si la grandeur testée est proche du seuil ; à cause du bruit de mesures, celle-ci peut être considérée comme fautive alors qu'elle ne l'est pas et inversement. La logique floue associée au seuillage permet, outre la gestion de l'imprécision, d'obtenir une représentation unifiée de la connaissance, et ainsi de fusionner les informations décrites à l'aide de grandeurs numériques, qualitatives ou logiques [89].

1.2.2.2 Analyse fréquentielle

Une première approche du traitement du signal repose sur l'analyse fréquentielle [121] (transformée de Fourier par exemple). Elle est bien évidemment très utilisée pour la détection de phénomènes périodiques comme en analyse vibratoire. Le contenu spectral des signaux est utilisé depuis de nombreuses années pour détecter des défauts dans les machines électriques tels que les ruptures de barres au rotor des machines asynchrones, la dégradation des roulements, les décentrages, les courts-circuits dans les bobinages. L'analyse du spectre des signaux issus des capteurs permet de déterminer l'état de l'installation. Les signaux sont tout d'abord analysés en état normal de fonctionnement. Ensuite, toute déviation des caractéristiques fréquentielles d'un signal est reliée à une situation de défaillance [104]. Cette approche possède l'avantage d'être relativement simple à mettre en pratique, mais l'inconvénient d'être assez sensible aux bruits de mesure quand ceux-ci coïncident avec la zone fréquentielle d'intérêt. De plus, un échantillonnage fréquent est nécessaire pour permettre de reconstituer le signal de départ tout en minimisant la perte de fréquence [69].

1.2.2.3 Réseaux de neurones artificiels

Quand la connaissance sur le système à surveiller n'est pas suffisante et que le développement d'un modèle de connaissance du système est impossible, l'utilisation d'un modèle dit *boîte noire* peut être envisagée pour le diagnostic. Les réseaux de neurones artificiels sont en fait un système informatique constitué d'un nombre de processeurs élémentaires (ou nœuds) inter-connectés entre eux qui traite de façon dynamique l'information qui lui arrive à partir des signaux extérieurs. De manière générale, l'utilisation des réseaux de neurones artificiels se fait en deux phases. La *synthèse du réseau* comprend plusieurs étapes : le choix du type de réseau, du type de neurones, du nombre de couches, des méthodes d'apprentissage. L'apprentissage permet alors, sur la base de l'optimisation d'un critère, de reproduire le comportement du système à modéliser. Il consiste en la recherche d'un jeu de paramètres (les poids) et peut s'effectuer de deux manières : supervisée (le réseau utilise les données d'entrée et de sortie du système à modéliser) et non supervisée (seules les données d'entrée du système sont fournies et l'apprentissage s'effectue par comparaison entre des exemples). Quand les résultats d'apprentissage obtenus par les réseaux de neurones artificiels sont jugés satisfaisants, il peuvent être utilisés pour la généralisation. Il s'agit ici de la deuxième phase où de nouveaux exemples qui n'ont pas été utilisés pendant l'apprentissage sont présentés par des réseaux de neurones artificiels pour juger sa capacité à prédire les comportements du système modélisé. Leur faible sensibilité aux bruits de mesure, leur capacité à résoudre des problèmes non linéaires et multi-variables, à stocker la connaissance de manière compacte, à apprendre en ligne et en temps réel, sont autant de propriétés qui les rendent attrayants pour cette utilisation [135].

1.2.2.4 Systèmes d'inférence floue

Les systèmes d'inférence floue (SIF) dont les bases relèvent de la théorie des ensembles flous [133] sont devenus très populaires. La structure de base d'un SIF est constituée de :

- Un univers de discours qui contient les fonctions d'appartenance des variables d'entrée et de sortie à des classes. Ces fonctions peuvent avoir différentes formes, les plus usuelles étant les formes triangulaires, trapézoïdales, et gaussiennes.
- Une base de connaissances qui regroupe les règles liant les variables d'entrée et de sortie sous la forme "Si ... Alors ...",
- Un mécanisme de raisonnement.

Du fait que les tâches de surveillance reposent sur des quantités heuristiques difficiles à formaliser dans un modèle mathématique, les SIF possèdent les avantages suivants :

- La corrélation entre des variables très différentes.
- Des observations qualitatives (par exemple : couleur, bruit) peuvent contribuer comme données sur le système.
- Des intuitions, liées à des statistiques (par exemple : tel appareil pose plus de problèmes que tel autre ...) difficilement quantifiables mais parfois très efficaces [54].

1.2.2.5 Reconnaissance de formes

La Reconnaissance de Formes (la RdF) se base sur la définition d'algorithmes permettant de classer des objets ou des formes en les comparant à des formes types. Ses applications interviennent dans de nombreux domaines tels que la reconnaissance vocale, la reconnaissance de caractères, l'automatisation industrielle, le diagnostic médical et la classification de documents.

De manière générale, on distingue les types de RdF suivants :

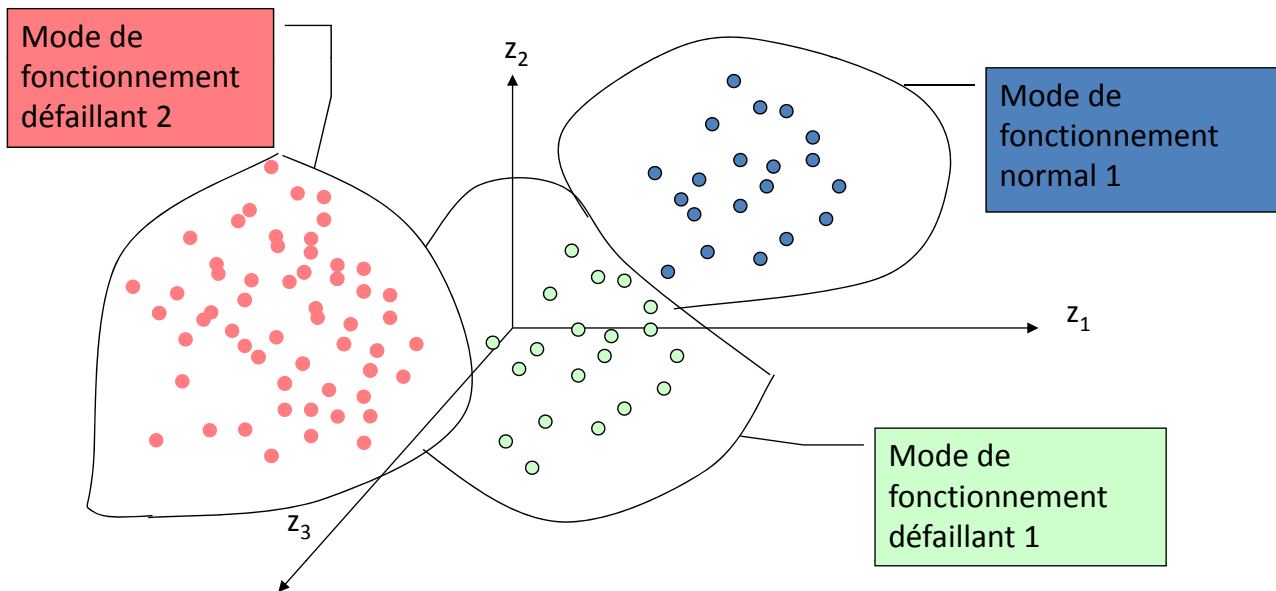


FIGURE 1.8 – Illustration de la méthode de reconnaissance des formes pour le diagnostic

- La RdF structurelle qui se base sur une représentation des formes à l'aide de grammaires,
- La RdF statistique qui s'appuie sur une représentation purement numérique des formes.

Le fonctionnement d'un système de surveillance par RdF se déroule en trois phases :

- Une phase d'analyse qui consiste à déterminer et à réduire l'espace de représentation des données et à définir l'espace de décision permettant de spécifier l'ensemble des classes possibles.
- Une phase de choix d'une méthode de décision permettant de définir une règle de décision qui a pour fonction de classer les nouvelles observations dans les différentes classes de l'ensemble d'apprentissage.
- Une phase d'exploitation qui détermine, en appliquant la règle de décision, le mode de fonctionnement du système en fonction de chaque nouvelle observation recueillie sur le processus [13].

1.2.2.6 L'Analyse en Composantes Principales

La technique d'Analyse en Composantes Principales (ACP) produit une représentation de dimensions réduites tout en préservant la structure de corrélation entre les variables du processus.

L'ACP est une méthode adaptée à la détection et à la localisation de défauts si aucun modèle n'est disponible, puisque cette technique est basée sur l'utilisation uniquement des mesures des entrées et sorties [47].

La partie de la représentation réduite obtenue par l'ACP est déterminée à partir des valeurs singulières dominantes de la matrice des données entrée-sortie, et la partie complémentaire qui correspond aux bruits est déterminée à partir des valeurs singulières négligeables de la matrice de données entrée-sortie.

Nous décrivons plus en détails la technique de l'ACP dans la section 1.3.2.

1.3 MÉTHODES DE GÉNÉRATION D'INDICATEURS DE DÉFAUTS PAR PROJECTION

Dans cette section nous choisissons de détailler les méthodes qui se rapprochent de la méthode MPD que nous proposerons dans la suite de cette thèse, à savoir la méthode de l'Espace de Parité (EP) et l'Analyse en Composantes Principales (ACP). Ces deux méthodes utilisent une projection dans un espace spécifique pour générer les indicateurs de défaut (résidus).

1.3.1 L'espace de parité

Le terme *parité* a d'abord été utilisé dans le cadre des systèmes logiques numériques pour détecter des erreurs de transmission en effectuant des *contrôles de parité*. Dans les mots binaires un bit dit de parité est calculé à partir des bits de données et permet de vérifier la cohérence du mot transmis.

Dans le domaine du diagnostic, l'Espace de Parité (EP) a une signification similaire au sens de la génération d'un indicateur de présence de défaut (ou erreur) dans les composants du système, indicateur reflétant la cohérence des données manipulées entre elles. L'EP est l'une des techniques de diagnostic à base de modèle explicite les plus connues [20]. Cette méthode est basée sur l'utilisation des outils de l'algèbre linéaire, notamment les projections matricielles pour générer un résidu de moyenne nulle en l'absence de défauts et de moyenne non nulle dans le cas contraire. Ces projections sont réalisées orthogonalement à la matrice d'observabilité de manière à annuler l'influence de l'état sur la sortie. En l'absence de défaut le résidu ne reflète que l'action des bruits aléatoires. Si un défaut affecte le système et si sa direction n'est pas colinéaire à celle de la matrice d'observabilité, alors son influence se traduira par un changement de la moyenne du résidu. Une technique de détection de saut de moyenne peut être utilisée pour détecter le défaut puis une structuration du résidu est réalisée afin de localiser le défaut.

Le vecteur de parité généralisé caractérise toutes les relations existantes entre les entrées et les sorties du système. Son expression a été d'abord établie dans le cas des systèmes statiques [97] puis généralisée au cas des systèmes dynamiques [20]. Elle a été définie aussi pour la classe des systèmes représentés par des équations différentielles polynomiales [102], [77], [24].

Dans cette section, nous nous intéresserons uniquement à la méthode de l'EP pour la détection et la localisation de défauts capteurs.

1.3.1.1 Formulation du problème

Considérons le système linéaire dynamique à temps discret (S) décrit par :

$$(S) : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v_k \\ y_k = Cx_k + Du_k + f_{s,k} + w_k \end{cases} \quad (1.13)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ sont les matrices du système et les vecteurs $u_k \in \mathbb{R}^m$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ sont respectivement les entrées, l'état et les sorties du système à l'instant k . L'état (respectivement les sorties) du système est affecté par un bruit coloré centré $v_k \in \mathbb{R}^n$ (respectivement $w_k \in \mathbb{R}^\ell$). Le vecteur $f_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$ est le vecteur de défauts capteurs.

Objectif Etant donné le système (S) décrit par l'équation (1.13) l'objectif est la détection et la localisation de défauts capteurs sous les hypothèses données ci-dessous.

Hypothèses Dans toute la suite de cette section, on fait les hypothèses suivantes :

1. les matrices A, B, C, D sont *connues*,
2. on dispose des mesures des entrées et des sorties du système u_k et y_k à tout instant k ,
3. l'état du système x_k est *inconnu*.

1.3.1.2 Génération du résidu de parité

Nous commencerons cette sous-section par la présentation du résidu de l'EP dans deux cas différents : lors d'une *redondance matérielle* et lors d'une *redondance analytique* puis nous analyserons ses propriétés.

Cas 1 : Redondance matérielle *Hypothèse* : Dans ce cas, il est supposé que la matrice C est de plein rang en colonnes ou régulière, ce qui implique que le nombre de capteurs est supérieur ou égal à l'ordre du système ($\ell \geq n$).

Définition 1.1 Soit la matrice $\bar{\Pi}_A$ qui projette l'espace des colonnes d'une matrice sur le complément orthogonal de l'espace des colonnes (voir les annexes A.8 et A.4) de la matrice $A \in \mathbb{R}^{a \times b}$. Cet espace complémentaire n'est pas identiquement nul si A est de plein rang en colonnes. On a

$$\bar{\Pi}_A = I_a - A(A^T A)^{-1} A^T \quad (1.14)$$

avec :

$$\dim(\bar{\Pi}_A) = \text{nombre de colonnes}(A) - \text{rang}(A) \quad (1.15)$$

Pour obtenir la relation de parité, il suffit de multiplier la sortie à gauche par la matrice de projection $\bar{\Pi}_C$, puis mettre les termes qui dépendent des défauts et les termes inconnus comme l'état et le bruit à droite de l'équation d'où la forme d'évaluation du vecteur parité (1.16),

$$\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}} = \bar{\Pi}_C(f_{s, k} + w_k) \quad (1.16)$$

et mettre les termes connus à gauche de l'équation d'où la forme de calcul du vecteur parité (1.17).

$$\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}} = \bar{\Pi}_C(y_k - Du_k) \quad (1.17)$$

Analyse de la sensibilité du résidu aux défauts

1. Aucun défaut n'est présent ($f_{s, k} = 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}$ est donnée par la relation suivante :

$$E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = \bar{\Pi}_C E[w_k] \quad (1.18)$$

Comme le système est affecté par un bruit centré w_k , l'espérance mathématique (1.18) du résidu $E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ devient :

$$E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = 0 \quad (1.19)$$

A partir de l'expression (1.19), on voit que l'espérance mathématique du résidu $E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ est nulle en l'absence de défauts. Ceci est illustré par la figure 1.9.

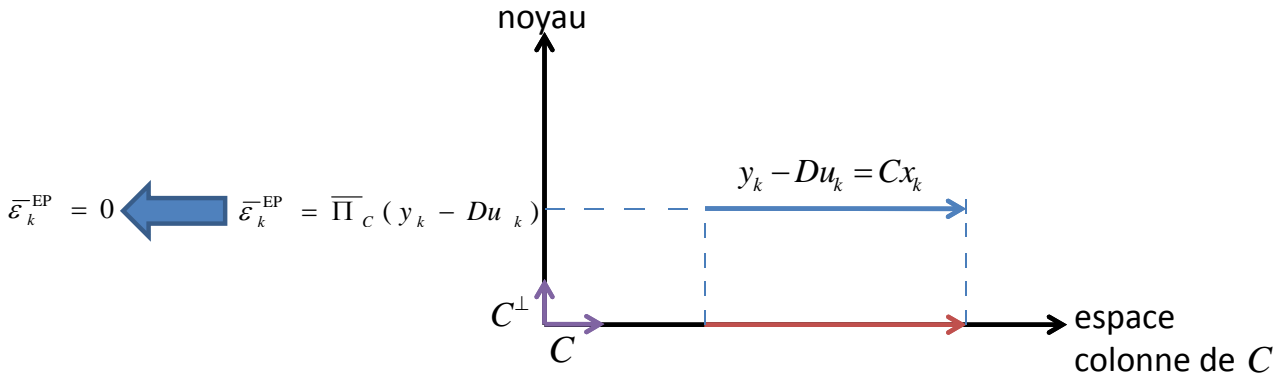
Sans défaut (cas 1 : redondance matérielle)

FIGURE 1.9 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en l'absence de défaut

2. En présence d'un défaut capteur ($f_{s,k} \neq 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}$ est donnée par la relation suivante :

$$E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = E[\bar{\Pi}_C f_{s,k}] + E[\bar{\Pi}_C w_k] \quad (1.20)$$

(a) Défauts capteurs détectables :

Comme le système est affecté par un bruit centré w_k ($E[\bar{\Pi}_C w_k] = 0$), l'espérance mathématique (1.20) du résidu $E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ devient :

$$E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = E[\bar{\Pi}_C f_{s,k}] \quad (1.21)$$

A partir de l'expression (1.21), on voit que la forme d'évaluation de l'espérance mathématique du résidu $E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ dépend des défauts capteurs.

Proposition 1.1 Une condition nécessaire et suffisante de détectabilité des défauts capteurs est :

$$f_{s,k}^T \notin \text{span}(C^T) \quad (1.22)$$

Démonstration. – Condition suffisante :

Si $f_{s,k}^T \notin \text{span}(C^T)$ alors $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$:

$f_{s,k} \neq C\mathcal{X}$, par la suite en considérant le cas particulier $\mathcal{X} = -x_k$ on a $f_{s,k} \neq -Cx_k$, ce qui peut être écrit comme $f_{s,k} + Cx_k \neq 0$. Par conséquent, $\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}} \neq 0$ pour un espace orthogonal à C non identiquement nul.

– Condition nécessaire :

Si $E[\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}] \neq 0$, sachant que $\bar{\Pi}_C Cx_k = 0$,

alors $\bar{\Pi}_C f_{s,k} \neq 0$, ce qui implique que $f_{s,k}^T \notin \text{span}(C^T)$.

La Figure 1.10 illustre le cas d'un défaut capteur détectable.

□

(b) Défauts capteurs non détectables :

Si $f_{s,k}^T \in \text{span}(C^T)$ alors $\bar{\Pi}_C f_{s,k} = 0$, ce qui implique que le résidu $\bar{\epsilon}_k^{\text{EP}}$ est nul (c-à-d le résidu est insensible aux défauts capteurs) malgré la présence du défaut

Influence de défauts détectables (cas 1 : redondance matérielle)

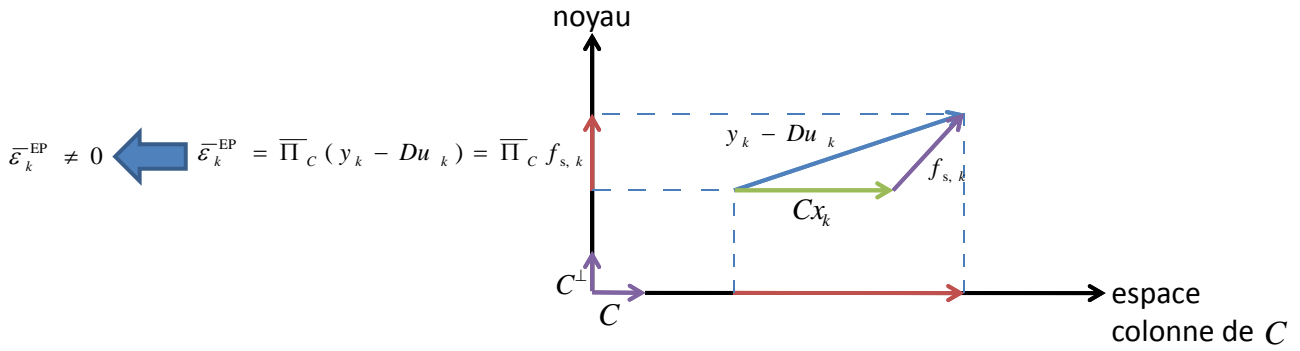


FIGURE 1.10 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en présence de défauts détectables

capteur qui disparaît par projection sur $\bar{\Pi}_C$, d'où la condition (1.22). Ceci est illustré par la figure 1.11.

Influence de défauts non détectables (cas 1 : redondance matérielle)

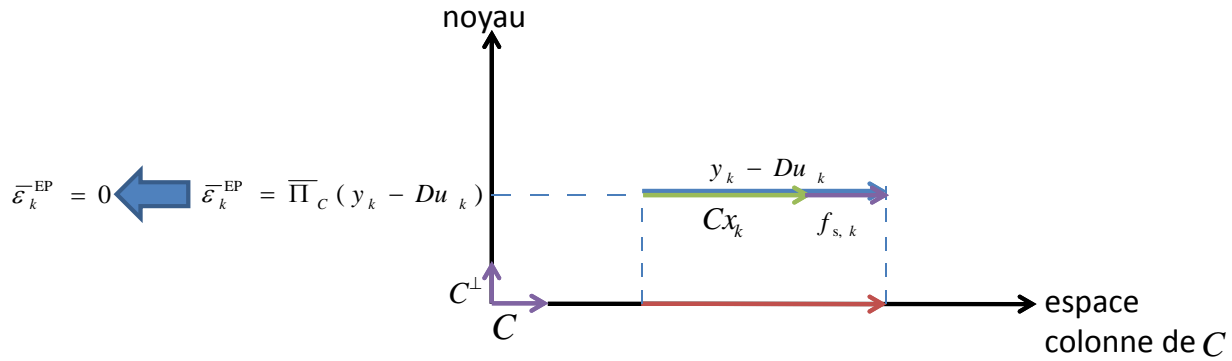


FIGURE 1.11 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en présence d'un défaut non détectable

Cas 2 : Redondance analytique Afin de présenter la procédure d'obtention du vecteur de parité, on suppose au départ que le vecteur de défauts capteurs $f_{s,k}$ et les vecteurs de bruits v_k, w_k sont nuls.

Pour construire le vecteur de parité à partir du système (1.13), on écrit l'expression de la sortie du système à l'instant $k - r + 1$:

$$y_{k-r+1} = Cx_{k-r+1} + Du_{k-r+1} \quad (1.23)$$

puis à l'instant suivant

$$y_{k-r+2} = Cx_{k-r+2} + Du_{k-r+2} = CAx_{k-r+1} + CBu_{k-r+1} + Du_{k-r+2} \quad (1.24)$$

On répète cette procédure $r - 2$ fois et on concatène ces sorties selon les lignes, on obtient la forme compacte suivante :

$$\tilde{y}_{k,r} = \mathcal{O}_r x_{k-r+1} + M_r \tilde{u}_{k,r} \quad (1.25)$$

$$\text{telle que } \mathcal{O}_r = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times n}, M_r = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{r-2}B & CA^{r-3}B & CA^{r-4}B & \cdots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times mr},$$

$$\tilde{y}_{k,r} = \begin{bmatrix} y_{k-r+1} \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times 1}, \tilde{u}_{k,r} = \begin{bmatrix} u_{k-r+1} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr \times 1},$$

En prenant en compte les défauts et les bruits, l'expression (1.25) devient comme suit :

$$\tilde{y}_{k,r} = \mathcal{O}_r x_{k-r+1} + M_r \tilde{u}_{k,r} + M_r^v \tilde{v}_{k,r} + \tilde{f}_{s,k,r} + \tilde{w}_{k,r} \quad (1.26)$$

$$\text{telle que } M_r^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CA & C & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{r-2} & CA^{r-3} & CA^{r-4} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times mr},$$

$$\tilde{f}_{s,k,r} = \begin{bmatrix} f_{s,k-r+1} \\ \vdots \\ f_{s,k-1} \\ f_{s,k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times 1}, \tilde{w}_{k,r} = \begin{bmatrix} w_{k-r+1} \\ \vdots \\ w_{k-1} \\ w_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell r \times 1}, \tilde{v}_{k,r} = \begin{bmatrix} v_{k-r+1} \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mr \times 1}.$$

On montre ([82], [83]) que l'entier r doit respecter la double inégalité suivante :

$$\frac{\text{rang}(\mathcal{O}_0)}{\text{rang}(C)} + 1 \leq r \leq \text{rang}(\mathcal{O}_0) - \text{rang}(C) + 2 \quad (1.27)$$

où \mathcal{O}_0 est la matrice d'observabilité de la paire (C, A) . Si le système est observable et les lignes de la matrice C sont linéairement indépendantes, alors la condition (1.27) devient :

$$\frac{n}{\ell} + 1 \leq r \leq n - \ell + 2 \quad (1.28)$$

En projetant l'équation (1.26) à gauche par l'orthogonal de \mathcal{O}_r noté $\bar{\Pi}_{\mathcal{O}_r} = I_{\ell r} - \mathcal{O}_r(\mathcal{O}_r^T \mathcal{O}_r)^{-1} \mathcal{O}_r^T$ (voir les annexes A.8 et A.4) et nommé *matrice de parité* afin d'annuler l'influence de l'état, puis en mettant les termes qui dépendent des défauts et les termes inconnus comme l'état et le bruit à droite de l'équation, on obtient la forme calcul du vecteur parité (1.29) :

$$\tilde{e}_k^{\text{EP}} = \bar{\Pi}_{\mathcal{O}_r} (\tilde{y}_{k,r} - M_r \tilde{u}_{k,r}) \quad (1.29)$$

puis en mettant les termes connus à gauche de l'équation, on obtient la forme d'évaluation du vecteur parité (1.30) :

$$\tilde{e}_k^{\text{EP}} = \bar{\Pi}_{\mathcal{O}_r} (M_r^v \tilde{v}_{k,r} + \tilde{f}_{s,k,r} + \tilde{w}_{k,r}) \quad (1.30)$$

Analyse de la sensibilité du résidu aux défauts

1. Aucun défaut n'est présent ($f_{s, k} = 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\tilde{\epsilon}_k$ est donnée par la relation suivante :

$$E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} M_r^v \tilde{v}_{k, r}] + E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \tilde{w}_{k, r}] \quad (1.31)$$

Comme le système est affecté par un bruit centré w_k et v_k , l'espérance mathématique (1.31) du résidu $E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ devient :

$$E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = 0 \quad (1.32)$$

A partir de l'expression (1.32), on voit que l'espérance mathématique du résidu $E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ est nulle en l'absence de défauts. Ceci est illustré par la figure 1.12.

Sans défaut (cas 2 : redondance analytique)

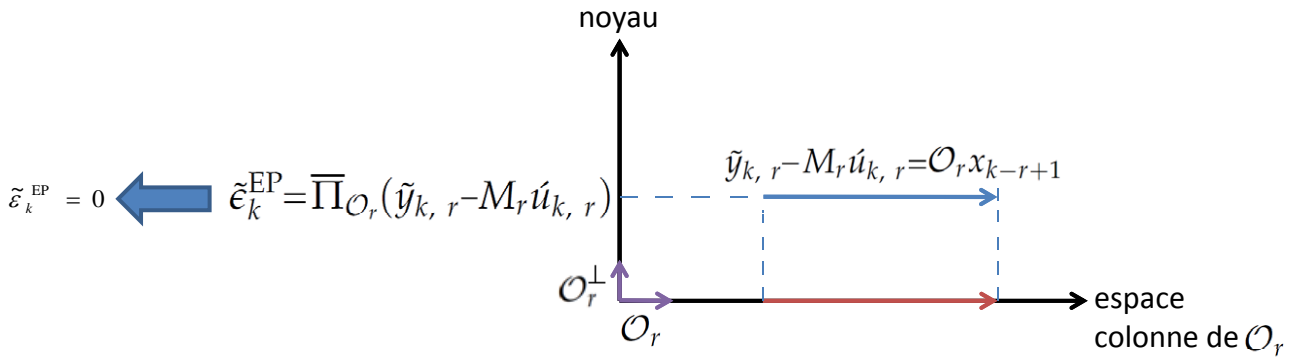


FIGURE 1.12 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en l'absence de défauts

2. En présence d'un défaut capteur ($f_{s, k} \neq 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\tilde{\epsilon}_k$ est donnée par la relation suivante :

$$E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} M_r^v \tilde{v}_{k, r}] + E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \tilde{f}_{s, k, r}] + E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \tilde{w}_{k, r}] \quad (1.33)$$

- (a) Défauts capteurs détectables :

Comme le système est affecté par des bruits centrés w_k et v_k ($E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \tilde{w}_{k, r}] = 0$ et $E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} M_r^v \tilde{v}_{k, r}] = 0$), l'espérance mathématique (1.33) du résidu $E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ devient :

$$E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}] = E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \tilde{f}_{s, k, r}] \quad (1.34)$$

A partir de l'expression (1.34), on voit que la forme d'évaluation de l'espérance mathématique du résidu $E[\tilde{\epsilon}_k^{\text{EP}}]$ dépend des défauts capteurs.

Proposition 1.2 Une condition nécessaire et suffisante de détectabilité des défauts capteurs est :

$$\text{span}(\tilde{f}_{s, k, r}^T) \not\subseteq \text{span}(\mathcal{O}_r^T) \quad (1.35)$$

Démonstration. – Condition suffisante :

Si $\tilde{f}_{s, k, r}^T \notin \text{span}(\mathcal{O}_r^T)$ alors $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$:

$\tilde{f}_{s, k, r} \neq \mathcal{O}_r \mathcal{X}$, par la suite en considérant le cas particulier $\mathcal{X} = -x_{k-r+1}$ on a $\tilde{f}_{s, k, r} \neq -\mathcal{O}_r x_{k-r+1}$, ce qui peut être écrit comme $\tilde{f}_{s, k, r} + \mathcal{O}_r x_{k-r+1} \neq 0$. Par conséquent, $\tilde{\varepsilon}_k^{\text{EP}} \neq 0$ pour un espace orthogonal à \mathcal{O}_r non identiquement nul.

– Condition nécessaire :

Si $E[\tilde{\varepsilon}_k^{\text{EP}}] \neq 0$, sachant que $\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \mathcal{O}_r x_k = 0$,

alors $\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \tilde{f}_{s, k, r} \neq 0$, ce qui implique que $\tilde{f}_{s, k, r}^T \notin \text{span}(\mathcal{O}_r^T)$.

La Figure 1.13 illustre le cas d'un défaut capteur détectable.

Influence de défauts détectables (cas 2 : redondance analytique)

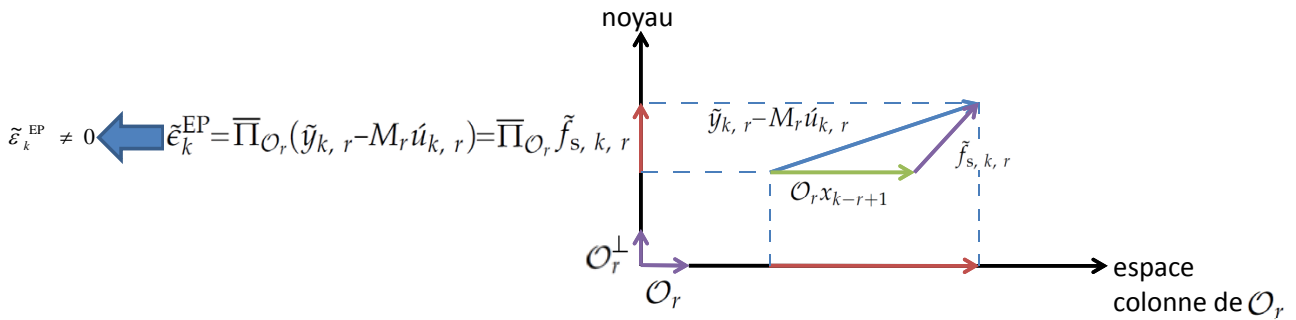


FIGURE 1.13 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP en présence de défauts détectables

□

(b) Défauts capteurs non détectables :

Si $\text{span}(\tilde{f}_{s, k, r}^T) \in \text{span}(\mathcal{O}_r^T)$ alors à partir de (1.34) on a $E[\tilde{\varepsilon}_k^{\text{EP}}] = E[\overline{\Pi}_{\mathcal{O}_r} \tilde{f}_{s, k, r}] = 0$.

Ce qui implique que le résidu n'est pas sensible au défaut capteur. Cette situation est illustrée par la figure 1.14.

Influence de défauts non détectables (cas 2 : redondance analytique)

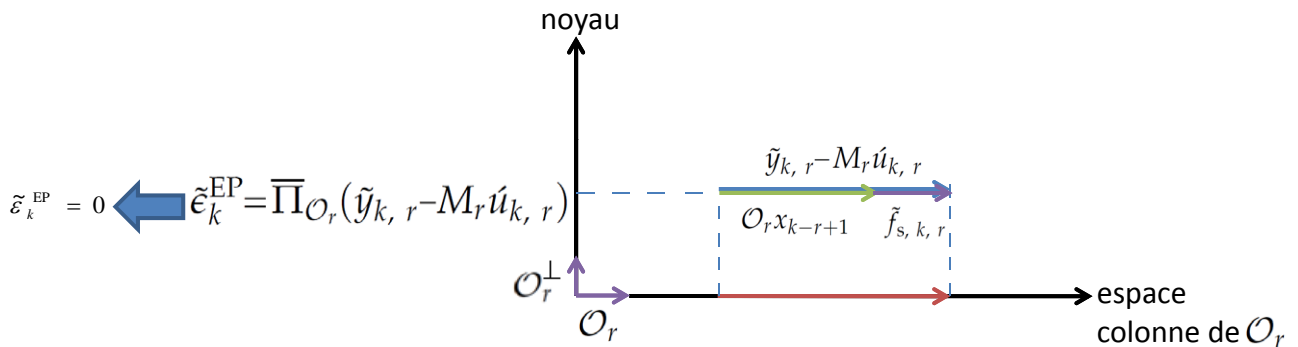


FIGURE 1.14 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'EP dans le cas des défauts non détectables

1.3.1.3 Robustesse de la méthode

L'EP est basé sur l'utilisation d'un modèle mathématique du système surveillé. Ce modèle, obtenu en général par identification, comporte des incertitudes dues aux bruits

de mesures ou aux dynamiques non modélisées. Cette incertitude de modélisation peut entraîner des fausses alarmes ou au contraire masquer les défauts qui peuvent affecter le système. Il est alors important d'annuler ou au moins d'atténuer l'influence des incertitudes de modélisation dans la méthode de détection afin de la rendre robuste.

Nous allons poser dans cette partie le problème de robustesse de l'EP et analyser les solutions proposées dans la littérature.

En tenant compte des erreurs de modélisation et des perturbations, l'équation (1.13) devient :

$$\begin{cases} x_{k+1} = (A + \Delta A)x_k + (B + \Delta B)u_k + \tilde{B}\eta_k + v_k \\ y_k = (C + \Delta C)x_k + (D + \Delta D)u_k + \tilde{D}\eta_k + \tilde{\zeta}_k + w_k \end{cases} \quad (1.36)$$

où A, B, C et D sont les matrices obtenues lors de la modélisation, $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ et ΔD les incertitudes liées à ces matrices, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times \check{r}}$, $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{\ell \times \check{r}}$ représentent les matrices d'influence des perturbations, $\eta_k \in \mathbb{R}^{\check{r}}$ représente des perturbations déterministes (entrées inconnues), w_k et v_k sont des bruits colorés, $\tilde{\zeta}_k$ représente les défauts affectant les capteurs.

L'objectif est de générer un résidu sensible aux perturbations déterministes (entrées inconnues) et insensible aux incertitudes de modélisation ($\Delta A, \Delta B, \Delta C$ et ΔD) et aux perturbations η_k .

En tenant compte des incertitudes de modélisation et des perturbations, l'équation de parité devient :

$$\tilde{y}_{k,r} - \tilde{M}_r \tilde{u}_{k,r} = \tilde{O}_r x_{k-r+1} + \tilde{M}_r^v \tilde{v}_{k,r} + \tilde{M}_r^\eta \tilde{\eta}_{k,r} + \tilde{\zeta}_{k,r} + \tilde{w}_{k,r} \quad (1.37)$$

avec $\tilde{M}_r^\eta =$

$$\begin{bmatrix} \tilde{D} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (C + \Delta C)\tilde{B} & \tilde{D} & 0 & \dots & 0 \\ (C + \Delta C)(A + \Delta A)\tilde{B} & (C + \Delta C)\tilde{B} & \tilde{D} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (C + \Delta C)(A + \Delta A)^{r-2}\tilde{B} & (C + \Delta C)(A + \Delta A)^{r-3}\tilde{B} & (C + \Delta C)(A + \Delta A)^{r-4}\tilde{B} & \dots & \tilde{D} \end{bmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^{\ell r \times r\check{r}}$,

$\tilde{\eta}_{k,r}$ est construit comme $\tilde{u}_{k,r}$ et $\tilde{\zeta}_{k,r}$ est construit comme $\tilde{w}_{k,r}$.

Où les matrices $\tilde{M}_r, \tilde{M}_r^v, \tilde{M}_r^\eta, \tilde{O}_r$ dépendent de A, B, C et D et de leurs incertitudes $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ et ΔD .

Les méthodes proposées dans la littérature supposent connues les directions des perturbations (i.e. la matrice \tilde{M}_r^η) et déterminent une matrice de parité orthogonale à la fois à \tilde{O}_r et à \tilde{M}_r^η . On parle alors de découplage total ou parfait. Cela suppose que la matrice $[\tilde{O}_r | \tilde{M}_r^\eta]$ est de plein rang en colonne ($\Rightarrow \check{r} < \ell$ et $\check{r}r + n < \ell r$).

Les formes de calcul et d'évaluation du résidu de parité sont données par :

$$\bar{\Pi}_{[\tilde{O}_r | \tilde{M}_r^\eta]} (\tilde{y}_{k,r} - \tilde{M}_r \tilde{u}_{k,r}) = \bar{\Pi}_{[\tilde{O}_r | \tilde{M}_r^\eta]} \tilde{M}_r^v \tilde{v}_{k,r} + \bar{\Pi}_{[\tilde{O}_r | \tilde{M}_r^\eta]} \tilde{\zeta}_{k,r} + \bar{\Pi}_{[\tilde{O}_r | \tilde{M}_r^\eta]} \tilde{w}_{k,r} \quad (1.38)$$

Il n'est généralement pas possible de trouver une matrice non identiquement nulle $\bar{\Pi}_{[\tilde{O}_r | \tilde{M}_r^\eta]}$ pour s'affranchir totalement de l'influence des perturbations et incertitudes paramétriques. Des méthodes approchées, permettant de maximiser l'influence des défauts et minimiser l'influence des perturbations et incertitudes, sont alors proposées [140].

1.3.1.4 Relations de redondance analytiques pour les systèmes non linéaires

La conception de relations de redondance analytique lorsque les fonctions non linéaires du modèle sont polynomiales en l'état ou en les entrées est décrite dans [109] et [107] en utilisant la théorie de l'élimination. Une extension aux systèmes affines en l'état est présentée dans [43] et aux systèmes affines en la commande dans [70], toutes deux à base de géométrie différentielle [58].

1.3.2 L'Analyse en Composantes Principales

1.3.2.1 Formulation du problème

Objectifs Etant donné le système linéaire discret (S) décrit par l'équation (1.13) l'objectif est la détection et la localisation de défauts capteurs sous les hypothèses données ci-dessous.

Hypothèses

1. les matrices A, B, C, D sont *inconnues*,
2. on dispose des entrées et des sorties du système u_k et y_k à chaque instant k ,
3. l'état du système x_k est inconnu.

1.3.2.2 Diagnostic de défauts

Le principe de cette approche est d'utiliser l'analyse en composantes principales pour modéliser le comportement du processus en fonctionnement normal, les défauts sont alors détectés en comparant le comportement observé et celui donné par le modèle ACP.

La matrice des données $\tilde{\Gamma}_k$ est donnée par :

$$\tilde{\Gamma}_k = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{y_k, j} \\ \tilde{\Gamma}_{u_k, j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(\ell q + m q) \times j} \quad (1.39)$$

avec $\tilde{\Gamma}_{y_k, j} = [\tilde{y}_{k-j+1, q} \quad \tilde{y}_{k-j+2, q} \quad \cdots \quad \tilde{y}_{k, q}] \in \mathbb{R}^{\ell q \times j}$ et $\tilde{\Gamma}_{u_k, j} = [\tilde{u}_{k-j+1, q} \quad \tilde{u}_{k-j+2, q} \quad \cdots \quad \tilde{u}_{k, q}] \in \mathbb{R}^{m q \times j}$.

$$\text{où } \tilde{u}_{k, q} = \begin{bmatrix} u_{k-q+1} \\ \vdots \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m q \times 1} \text{ et } \tilde{y}_{k, q} = \begin{bmatrix} y_{k-q+1} \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell q \times 1}.$$

Soit $\hat{\Phi}_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{j} \tilde{\Gamma}_k \tilde{\Gamma}_k^T$ la matrice de covariance de $\tilde{\Gamma}$ qui peut se décomposer en valeurs singulières :

$$\hat{\Phi}_{\tilde{\Gamma}} = \frac{1}{j} \tilde{\Gamma}_k \tilde{\Gamma}_k^T = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T \quad (1.40)$$

telle que \mathbf{U} est une matrice carrée unitaire :

$$\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = I_{n_x + n_r \times n_x + n_r} \quad (1.41)$$

et \mathbf{S} est une matrice diagonale contenant les valeurs propres (les valeurs singulières) de la matrice $\hat{\Phi}_{\tilde{\Gamma}}$.

En imposant $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}} & P \end{pmatrix}$ telle que $\tilde{\mathcal{O}}$ représente les vecteurs propres principaux, et P représente les autres vecteurs propres non-corrélés (cela n'implique pas qu'ils sont indépendants) correspondants aux n_r valeurs singulières négligeables de la matrice de covariance $\hat{\Phi}_{\tilde{\Gamma}}$ de $\tilde{\Gamma}_k$ alors l'équation (1.40) peut être ré-écrite sous la forme suivante :

$$\hat{\Phi}_{\tilde{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}}^T \\ P^T \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

où les n_x plus grandes valeurs singulières et dominantes notées S_x sont attribuées au modèle, et les autres n_r valeurs singulières négligeables notées S_r sont supposées appartenir à l'espace des résidus.

Le système réel d'ordre n doit être bien représenté dans la nouvelle base qui est formée par les n_x vecteurs propres principaux. De ce fait, la détermination de l'ordre n_x du nouveau système doit être précise, car si on choisit un ordre inférieur à l'ordre du système ($n_x < n$) on perd la contribution de certaines dynamiques du système réel, et si on choisit un ordre supérieur à l'ordre du système ($n_x > n$) on bruite le modèle du système. Malheureusement la détermination de cet ordre n'est pas une tâche facile. L'utilisation du critère d'Akaike (voir [72] et [118]) peut donner des résultats satisfaisants dans certains cas. Puisque \mathbf{U} est une matrice carrée unitaire alors on a les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{U}^T &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}} & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}}^T \\ P^T \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{O}}^T + PP^T = I_{n_x+n_r \times n_x+n_r} \\ \mathbf{U}^T\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}}^T \\ P^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}} & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}} & \tilde{\mathcal{O}}^T P \\ P^T\tilde{\mathcal{O}} & P^T P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_x \times n_x} & \mathbf{0}_{n_x \times n_r} \\ \mathbf{0}_{n_r \times n_x} & I_{n_r \times n_r} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Alors les matrices $\tilde{\mathcal{O}}$ et P vérifient les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{O}}^T + PP^T &= I_{n_x+n_r \times n_x+n_r} \\ \tilde{\mathcal{O}}^T\tilde{\mathcal{O}} &= I_{n_x \times n_x} \\ \tilde{\mathcal{O}}^T P &= \mathbf{0}_{n_x \times n_r} \\ P^T\tilde{\mathcal{O}} &= \mathbf{0}_{n_r \times n_x} \\ P^T P &= I_{n_r \times n_r} \end{aligned} \quad (1.44)$$

La matrice des données $\tilde{\Gamma}_k$ est scindée en deux parties, celle qui correspond au modèle est notée $\tilde{\Gamma}_{\text{model}, k}$ et elle est obtenue par projection sur l'espace observable déterminé par les colonnes de $\tilde{\mathcal{O}}$, et celle qui correspond au bruit est notée $\tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k}$ et elle représente le bruit et les perturbations :

$$\tilde{\Gamma}_k = \tilde{\Gamma}_{\text{model}, k} + \tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k} = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{x}_k + P\tilde{\epsilon}_k^{\text{ACP}} \quad (1.45)$$

telle que $\tilde{\Gamma}_{\text{model}, k}$ et $\tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k}$ sont définies comme suit :

$$\tilde{\Gamma}_{\text{model}, k} = \tilde{\mathcal{O}}\tilde{x}_k \quad (1.46)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k} = P\tilde{\epsilon}_k^{\text{ACP}} \quad (1.47)$$

Par conséquent, les matrices $\tilde{\Gamma}_{\text{model}, k}$ et $\tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k}$ définies dans les équations (1.46) et (1.47) sont obtenues par :

$$\tilde{\Gamma}_{\text{model}, k} = \tilde{O}\tilde{O}^T\tilde{\Gamma}_k = \tilde{O}\tilde{x}_k \quad (1.48)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k} = PP^T\tilde{\Gamma}_k = P\tilde{\epsilon}_k^{\text{ACP}} \quad (1.49)$$

Le premier terme $\tilde{\Gamma}_{\text{model}, k}$ est obtenu par projection des données entrée-sortie sur l'espace observable déterminé par les colonnes de la matrice \tilde{O} . La matrice $\tilde{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x \times j}$ est appelée par abus de langage "état", elle représente les coordonnées de $\tilde{\Gamma}_{\text{model}, k}$ sur cet espace. Il est évident d'après l'équation (1.48) que l'état est déterminé par :

$$\tilde{x}_k = \tilde{O}^T\tilde{\Gamma}_k \quad (1.50)$$

Le deuxième terme $\tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k}$ représente l'influence du bruit, les coordonnées de ce bruit $\tilde{\epsilon}_k^{\text{ACP}}$ se trouvent dans un espace orthogonal aux colonnes de la matrice \tilde{O} . D'après la troisième et la quatrième contrainte de (1.44), l'espace orthogonal aux colonnes de la matrice \tilde{O} correspond à P^T qui est l'espace ligne de la matrice P . Alors la matrice de résidus $\tilde{\epsilon}_k^{\text{ACP}}$ est déterminée à chaque instant en utilisant l'expression (1.51).

$$\tilde{\epsilon}_k^{\text{ACP}} = P^T\tilde{\Gamma}_k \quad (1.51)$$

Ce résidu admet une forme d'évaluation donnée par :

$$\tilde{\epsilon}_k^{\text{ACP}} = P^T\tilde{\Gamma}_{\text{residual}, k} \quad (1.52)$$

Le comportement du résidu en présence de défaut détectable et en l'absence de défaut est illustré dans les figures 1.15 et 1.16.

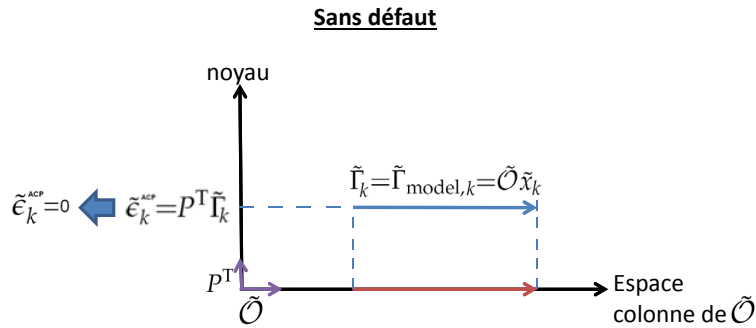


FIGURE 1.15 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'ACP en l'absence de défauts

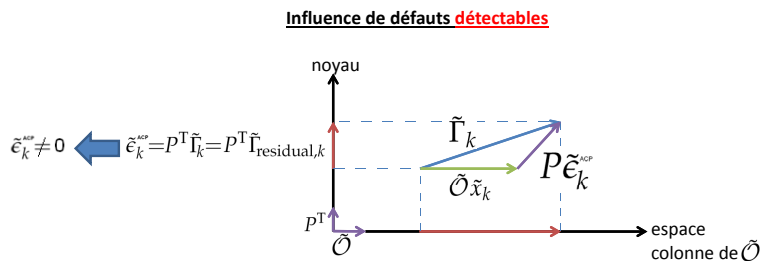


FIGURE 1.16 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de l'ACP en présence de défauts détectables

1.3.2.3 Extension de l'ACP pour les systèmes non linéaires

L'extension au cas non linéaire a été examinée à l'aide de *l'astuce noyau* (kernel trick) [68], ou par le biais d'autres types de décomposition comme l'analyse en composantes indépendantes [73]. Une approche similaire porte le nom de régression PLS (Partial Least squares) [119].

Dans l'article [105], l'ACP a été combinée avec les méthodes à noyau afin de l'étendre dans le cas non linéaire statique (dite en terminologie anglaise KPCA). Dans cette extension les axes principaux sont calculés dans l'espace des fonctions de grande dimension. L'idée principale du KPCA est premièrement de transformer l'espace des données en espace des fonctions en utilisant la transformation non linéaire, et après de calculer les axes principaux dans cet espace de fonctions.

Dans les méthodes à noyau, la motivation derrière la représentation des données dans un espace de dimension supérieure, est de convertir les limites de décision non linéaire dans l'espace de départ (l'espace d'entrée dans la terminologie des méthodes à noyau) vers des limites de décision linéaire dans l'espace transformé (l'espace de caractéristique dans la terminologie des méthodes à noyau) via une fonction noyau non linéaire appropriée.

1.3.2.4 Limites de la méthode

La détermination de la dimension de l'état est une étape critique dans l'ACP. La méthode de l'ACP détermine la représentation des données la plus précise dans un espace de dimension réduite et projette ces données dans les directions de variance maximale. Toutefois, les directions de variance maximale peuvent être inutiles pour la classification. De plus, lors de la mise en commun des données, il est possible d'éliminer des directions qui sont essentielles.

Bien que l'ACP permette la détection de défaut, elle n'est pas aussi bien adaptée pour l'estimation du défaut, car elle ne tient pas compte de l'information entre les classes.

CONCLUSION

Ce chapitre s'est focalisé sur des méthodes de détection et de localisation de défauts présentes dans la littérature. Un focus particulier a été fait sur les méthodes de l'espace de parité et de l'ACP qui génèrent les résidus pour la détection de défaut, par projection des données dans un sous-espace particulier. Le chapitre suivant propose une méthode générique dite Méthode de Projection des Données (MPD) pour la détection, la localisation et l'estimation des défauts.

MPD POUR LE DIAGNOSTIC DES DÉFAUTS CAPTEURS ET ACTIONNEURS DANS LES SYSTÈMES LINÉAIRES

SOMMAIRE

INTRODUCTION	30
2.1 PROBLÉMATIQUE	30
2.2 DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS	30
2.2.1 Génération du résidu	31
2.2.2 Analyse du résidu	33
2.2.3 Réglage de la MPD pour la détection de défauts capteurs	36
2.3 ESTIMATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS	38
2.4 DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES D'ACTIONNEURS	42
2.4.1 Inversion gauche du système linéaire	42
2.4.2 Illustration de l'algorithme Massey-Sain	43
2.4.3 Génération du résidu	44
2.4.4 Analyse du résidu	48
2.4.5 Réglage de la MPD pour la détection de défauts actionneurs	51
2.5 ESTIMATION DES DÉFAUTS MULTIPLES D'ACTIONNEURS	54
2.6 EXEMPLE D'APPLICATION : DIAGNOSTIC DE DÉFAUTS CAPTEURS ET ACTIONNEURS D'UN AVION	59
2.6.1 Détection, localisation et estimation des défauts capteurs	60
2.6.2 Détection, localisation et estimation des défauts actionneurs	66
CONCLUSION	70

Le chapitre précédent s'est focalisé sur les différentes méthodes de diagnostic des systèmes. Or la plupart des méthodes ne sont pas adaptées au diagnostic d'un parc de systèmes de même type utilisés dans des applications différentes. Dans ce chapitre, nous proposons une méthode générique dite Méthode de Projection des Données (MPD) pour la détection, la localisation et l'estimation des défauts. Cette méthode permettra le diagnostic des défauts capteurs et actionneurs sans que la connaissance des paramètres du modèle sous-jacent soit nécessaire. Pour le diagnostic de défauts capteurs, elle s'appuie sur la projection d'une matrice des sorties sur l'espace orthogonal d'une matrice des entrées convenablement construite. Dans le cas de défauts actionneurs, sous l'hypothèse d'inversibilité

du système, on démontre que le problème de diagnostic est dual du problème de diagnostic de défauts capteurs.

Les avantages de la méthode proposée sont les suivants :

- Seule la structure du modèle (supposée linéaire ici) est connue, l'estimation des paramètres ou de l'état du système n'est pas nécessaire.
- Aucune connaissance préalable sur l'évolution dynamique du défaut n'est nécessaire.
- Les défauts de capteurs ou d'actionneurs, défauts simples, multiples ou simultanés peuvent être considérés.
- La procédure de localisation du défaut est directement accomplie par la construction de résidus structurés.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2.1, le système à diagnostiquer, les objectifs et hypothèses sont décrits. Dans la section 2.2, la MPD est détaillée pour la détection et la localisation des défauts multiples de capteurs. Dans la section 2.3, la MPD est adaptée pour l'estimation des défauts multiples de capteurs. Dans la section 2.4 l'inversibilité des systèmes linéaires est rappelée, ensuite la MPD est détaillée pour la détection et la localisation des défauts multiples d'actionneurs. Dans la section 2.5, la MPD est adaptée pour l'estimation des défauts multiples d'actionneurs. Dans la dernière section, un modèle dynamique linéarisé d'un atterrissage et décollage d'un avion dans le plan vertical est présenté afin d'illustrer l'efficacité de la MPD.

2.1 PROBLÉMATIQUE

Considérons le système linéaire dynamique à temps discret (S) décrit par :

$$(S) : \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + B(u_k + f_{a,k}) \\ y_k = Cx_k + D(u_k + f_{a,k}) + f_{s,k} + w_k \end{cases} \quad (2.1)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ sont les matrices du système et les vecteurs $u_k \in \mathbb{R}^m$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ sont respectivement les entrées, l'état et les sorties du système. Les sorties du système sont affectées par un bruit coloré centré $w_k \in \mathbb{R}^\ell$. Les vecteurs $f_{s,k} \in \mathbb{R}^\ell$ et $f_{a,k} \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement le vecteur de défauts capteurs et actionneurs.

Objectifs et hypothèses

Etant donné le système (S) décrit par l'équation (2.1) l'objectif est la détection, la localisation et l'estimation de défauts multiples de capteurs ou d'actionneurs sous les hypothèses suivantes.

1. les matrices A , B , C , D sont *inconnues*,
2. le système est supposé stable, ce qui implique que les valeurs propres (inconnues) de la matrice A sont toutes dans le cercle unité,
3. les seules informations dont on dispose sont les mesures des entrées et des sorties du système : u_k et y_k à chaque instant k .

2.2 DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS

Dans cette section, la Méthode de Projection des Données (MPD) est décrite pour détecter et localiser les défauts capteurs. Cette méthode projette une matrice des sorties du

système sur l'espace orthogonal d'une matrice des entrées convenablement construite afin de générer un résidu sensible aux défauts.

Nous supposons ici qu'il n'y a pas de défauts actionneurs ce qui implique que le vecteur $f_{a, k}$ est nul.

2.2.1 Génération du résidu

Soit $\bar{u}_{k, i} = (u_{k-i}^T \quad u_{k-i+1}^T \quad \dots \quad u_k^T)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$.

Construisons la matrice d'entrée U_k^s telle que :

$$U_k^s = [\bar{u}_{k-L+1, i} \quad \bar{u}_{k-L+2, i} \quad \dots \quad \bar{u}_{k, i}] \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times L} \quad (2.2)$$

Soit la matrice de sortie

$$Y_k^s = [y_{k-L+1} \quad \dots \quad y_{k-1} \quad y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (2.3)$$

La matrice de projection sur le complément orthogonal à l'espace des lignes de la matrice U_k^s est donnée selon (4.104) (voir les annexes A.9 et A.3) par :

$$\Pi_{U_k^s} = I_L - U_k^{sT} (U_k^s U_k^{sT})^{-1} U_k^s \quad (2.4)$$

On suppose que les entiers i et L respectent la condition $L > m(i+1)$ pour que $\dim \text{span}(\Pi_{U_k^s}^T) > 0$ (i.e. voir équation (4.105) dans l'annexe A.9). Les matrices W_k et $F_{s, k}$ sont construites comme la matrice Y_k^s en utilisant w_k et $f_{s, k}$ au lieu de y_k .

Soit Z^L le vecteur suivant : $Z^L = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

Proposition 2.1 *Le résidu $\epsilon_{s, k}$ dont la forme de calcul est donnée par :*

$$\epsilon_{s, k} = Y_k^s \Pi_{U_k^s} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell} \quad (2.5)$$

a la forme d'évaluation suivante

$$\epsilon_{s, k} = F_{s, k} \Pi_{U_k^s} Z^L + W_k \Pi_{U_k^s} Z^L + \delta_k^i \quad (2.6)$$

où $\delta_k^i = CA^i [x_{k-L+1-i} \dots x_{k-i}] \Pi_{U_k^s} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$.

Le système étant stable, pour i suffisamment grand δ_k^i est négligeable.

Afin d'illustrer la construction du résidu $\epsilon_{s, k}$, une représentation graphique est proposée (voir la figure 2.1). Celle-ci s'avérera surtout utile pour représenter les résidus d'estimation de défauts, d'estimation de commutation et de reconnaissance du mode actif (voir chapitre 4), dont les expressions sont plus complexes.

La signification des symboles graphiques est donnée dans le tableau 2.1.

Remarque 2.1 *Selon l'équation (2.5), il est clair qu'aucun des paramètres du système (S) n'est nécessaire pour calculer le résidu $\epsilon_{s, k}$, et seulement la matrice des entrées (U_k^s) et la matrice des sorties (Y_k^s) sont utilisées.*

Les paramètres du système (S) sont utilisés dans la démonstration ci-dessous uniquement pour démontrer l'expression de la forme d'évaluation du résidu.

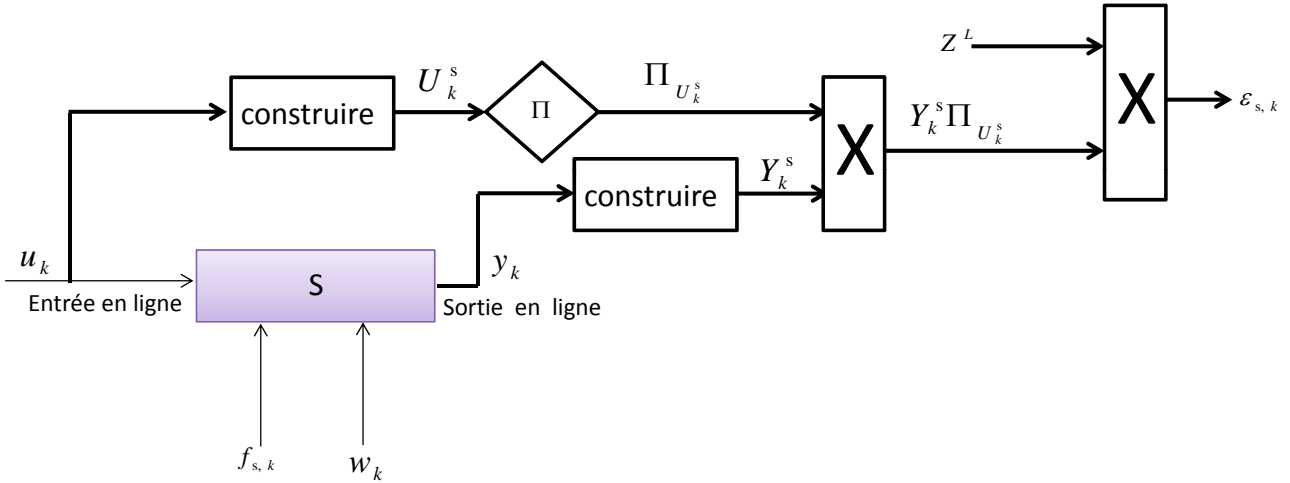


FIGURE 2.1 – Diagramme de génération de résidu par la MPD pour la détection et la localisation de défauts capteurs

Démonstration. Par des substitutions répétées de l'équation (2.1), on obtient l'expression suivante (voir la preuve par récurrence en annexe C.1) :

$$y_k = CA^i x_{k-i} + H_i \bar{u}_{k,i} + f_{s,k} + w_k \quad (2.7)$$

où H_i , la matrice des paramètres de Markov d'ordre i , est donnée par :

$$H_i = [CA^{i-1}B | \dots | CB | D] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} \quad (2.8)$$

avec $\bar{u}_{k,i} = (u_{k-i}^T \ u_{k-i+1}^T \ \dots \ u_k^T)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$.

En concaténant l'équation (2.7) selon les colonnes sur une fenêtre de taille L , tel que l'entier L respecte la condition $L > m(i+1)$, on a :

$$Y_k^s = CA^i [x_{k-L+1-i} \ \dots \ x_{k-i}] + H_i U_k^s + F_{s,k} + W_k \quad (2.9)$$

Les matrices d'entrée et de sortie U_k^s et Y_k^s sont définies par :

$$U_k^s = [\bar{u}_{k-L+1,i} \ \bar{u}_{k-L+2,i} \ \dots \ \bar{u}_{k,i}] \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times L} \quad (2.10)$$

$$Y_k^s = [y_{k-L+1} \ \dots \ y_{k-1} \ y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (2.11)$$

Les matrices W_k et $F_{s,k}$ sont construites comme la matrice Y_k^s en utilisant w_k et $f_{s,k}$ au lieu de y_k .

Le résidu est obtenu en multipliant l'équation (2.9) à droite par $\Pi_{U_k^s} Z^L$ où la matrice de projection à droite $\Pi_{U_k^s}$ de l'espace des lignes de la matrice U_k^s est donnée selon (4.104) (voir annexe A.9) par :

$$\Pi_{U_k^s} = I_L - U_k^{sT} (U_k^s U_k^{sT})^{-1} U_k^s \quad (2.12)$$

Le vecteur Z^L est un vecteur de sélection de la dernière colonne donné par : $Z^L = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

La forme de calcul du résidu est donnée par l'expression suivante :

$$\epsilon_{s,k} = Y_k^s \Pi_{U_k^s} Z^L \quad (2.13)$$

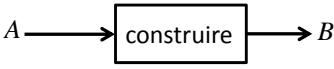

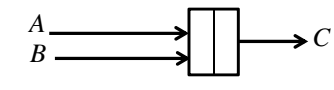
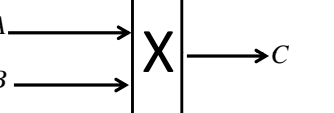
Les signes schématiques	Les significations
	B est construite à partir de A
	$B = \Pi_A$
	$C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ Concaténation de A et B selon les colonnes
	$C = BA$

TABLE 2.1 – Signification des symboles graphiques

Sa forme d'évaluation est donnée par :

$$\epsilon_{s, k} = \underbrace{H_i U_k^s \Pi_{U_k^s} Z^L}_{=0} + F_{s, k} \Pi_{U_k^s} Z^L + W_k \Pi_{U_k^s} Z^L + \delta_k^i \quad (2.14)$$

où $\delta_k^i = CA^i [x_{k-L+1-i} \cdots x_{k-i}] \Pi_{U_k^s} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$

$$\epsilon_{s, k} = F_{s, k} \Pi_{U_k^s} Z^L + W_k \Pi_{U_k^s} Z^L + \delta_k^i \quad (2.15)$$

Sous l'hypothèse de la stabilité du système (2.1), ce qui est équivalent à dire que les valeurs propres de la matrice A sont à l'intérieur du cercle unité, on a (voir annexe B pour la preuve de la limite (2.16)) :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A^i = 0 \quad (2.16)$$

Par conséquent, δ_k^i dans l'équation (2.15) est négligeable pour i suffisamment grand. La forme d'évaluation (2.15) du résidu peut être approximée par :

$$\epsilon_{s, k} \cong F_{s, k} \Pi_{U_k^s} Z^L + W_k \Pi_{U_k^s} Z^L \quad (2.17)$$

□

2.2.2 Analyse du résidu

2.2.2.1 Analyse de la sensibilité du résidu aux défauts capteurs

Dans ce qui suit, nous allons étudier le comportement du résidu en présence et en l'absence du défaut.

1. *Aucun défaut capteur n'est présent* ($f_{s, k} = 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\epsilon_{s, k}$ est donnée par la relation suivante :

$$E[\epsilon_{s, k}] \cong E[W_k \Pi_{U_k^s} Z^L] \quad (2.18)$$

Comme les sorties du système sont affectées par un bruit centré w_k , l'espérance mathématique (2.18) du résidu $E[\epsilon_{s, k}]$ devient :

$$E[\epsilon_{s, k}] \simeq 0 \quad (2.19)$$

A partir de l'expression (2.19), on voit que l'espérance mathématique du résidu $E[\epsilon_{s, k}]$ est nulle en l'absence de défauts capteurs. Ceci est illustré par la figure 2.2.

Sans défauts capteurs

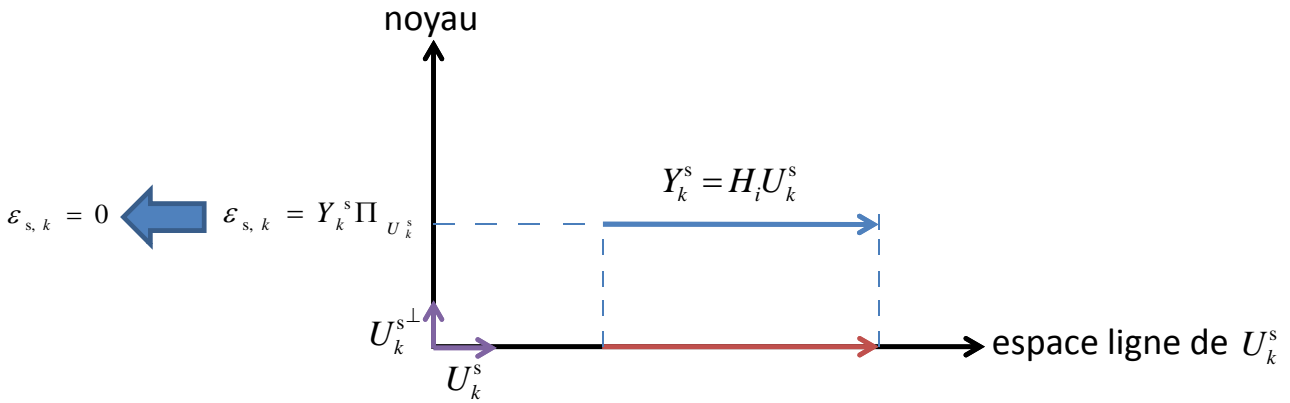


FIGURE 2.2 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de la MPD en l'absence de défaut

2. En présence d'un défaut capteur ($f_{s, k} \neq 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\epsilon_{s, k}$ est donnée par la relation suivante :

$$E[\epsilon_{s, k}] \cong E[F_{s, k} \Pi_{U_k^s} Z^L] + E[W_k \Pi_{U_k^s} Z^L] \quad (2.20)$$

(a) Défauts capteurs détectables

Une condition de détectabilité de défauts capteurs est donnée dans la proposition suivante

Proposition 2.2 Si les entrées ne sont pas identiquement nulles, une condition nécessaire et suffisante de détectabilité des défauts capteurs qui apparaissent à l'instant k est :

$$\text{span}(F_{s, k}) \not\subset \text{span}(U_k^s) \quad (2.21)$$

Démonstration. – Condition suffisante :

Si $\text{span}(F_{s, k}) \not\subset \text{span}(U_k^s)$ alors $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} : F_{s, k} \neq \mathcal{X} U_k^s$, par la suite en considérant le cas particulier $\mathcal{X} = -H_i$ on a $F_{s, k} \neq -H_i U_k^s$, ce qui peut être écrit comme $F_{s, k} + H_i U_k^s \neq 0$. Par conséquent on a $\epsilon_{s, k} \neq 0$.

– Condition nécessaire :

Si $E[\epsilon_{s, k}] \neq 0$, sachant que $H_i U_k^s \Pi_{U_k^s} = 0$, alors $F_{s, k} \Pi_{U_k^s} \neq 0$, ce qui implique que $\text{span}(F_{s, k}) \not\subset \text{span}(U_k^s)$.

La figure 2.3 illustre le cas d'un défaut capteur détectable.

□

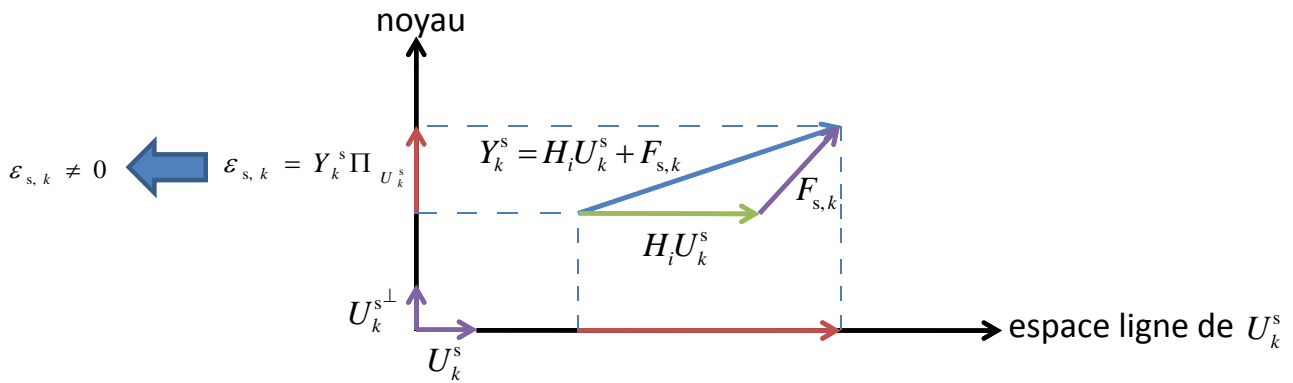
Influence du défaut capteur détectable

FIGURE 2.3 – Illustration dans le cas déterministe de la MPD et avec défauts capteurs détectables : le résidu est non nul

Comme les sorties du système sont affectées par un bruit centré w_k ($E[W_k \Pi_{U_k^s} Z^L] = 0$), l'espérance mathématique du résidu $E[\epsilon_{s,k}]$ (2.20) devient :

$$E[\epsilon_{s,k}] \simeq F_{s,k} \Pi_{U_k^s} Z^L \quad (2.22)$$

A partir de l'expression (2.22), on voit que la forme d'évaluation de l'espérance mathématique du résidu $E[\epsilon_{s,k}]$ dépend des défauts capteurs.

(b) *Défauts capteurs non détectables*

Si $\text{span}(F_{s,k}) \subset \text{span}(U_k^s)$ alors $F_{s,k} \Pi_{U_k^s} = 0$, ce qui implique que le résidu $\epsilon_{s,k}$ est nul (c-à-d le résidu est insensible aux défauts capteurs) malgré la présence du défaut capteur qui disparaît par projection sur $\Pi_{U_k^s}$, d'où la condition (2.21). Ceci est illustré par la figure 2.4.

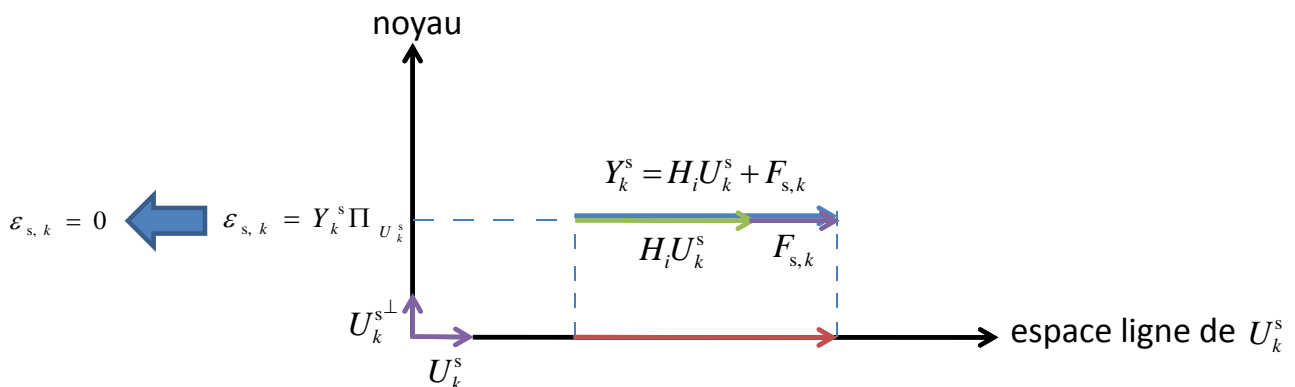
Influence du défaut capteur non détectable

FIGURE 2.4 – Illustration dans le cas déterministe d'un défaut capteur non détectable

2.2.2.2 Localisation des défauts capteurs

Après avoir détecté un défaut capteur, il faut en rechercher sa cause. Dans le cas d'un défaut de capteurs cela revient à identifier le ou les capteurs défectueux. Comme nous allons le démontrer dans la suite, le vecteur résidu $\epsilon_{s,k}$ est structuré par construction, il suffit de considérer ses composantes une à une pour localiser le(s) capteur(s) en défaut.

Remarque 2.2 Soit une matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$, soient les entiers $p \in \{1, 2, \dots, a\}$ et $q \in \{1, 2, \dots, b\}$.

1. L'élément de \mathcal{A} qui se trouve sur la ligne p et la colonne q est noté par $\mathcal{A}(p, q)$.
2. Le $q^{\text{ème}}$ vecteur colonne de \mathcal{A} est noté par $\mathcal{A}(:, q)$.
3. Le $p^{\text{ème}}$ vecteur ligne de \mathcal{A} est noté par $\mathcal{A}(p, :)$.

La condition (2.21) étant vérifiée, si à l'instant k un défaut affecte le capteur j ($j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$), c'est à dire toutes les composantes de $f_{s, k}$ sont nulles à l'exception de la $j^{\text{ème}}$ composante, son effet ne se voit que sur la $j^{\text{ème}}$ composante de $\epsilon_{s, k}$ comme le montre l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
 E[\epsilon_{s, k}] &\simeq E[F_{s, k} \Pi_{U_k^s} Z^L] \simeq \begin{bmatrix} E[F_{s, k}(1, :) \Pi_{U_k^s}(:, L)] \\ \vdots \\ E[F_{s, k}(j, :) \Pi_{U_k^s}(:, L)] \\ \vdots \\ E[F_{s, k}(\ell, :) \Pi_{U_k^s}(:, L)] \end{bmatrix} \\
 &\simeq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E[F_{s, k}(j, :) \Pi_{U_k^s}(:, L)] \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_{s, k}(j, L) \Pi_{U_k^s}(L, L) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Pour localiser les défauts capteurs, il suffit de considérer les composantes une à une : si un capteur est en défaut à un instant k alors la composante correspondante de $E[\epsilon_{s, k}]$ ne sera pas nulle.

2.2.3 Réglage de la MPD pour la détection de défauts capteurs

Considérons le système linéaire dynamique à temps discret dans le cas sans défaut décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k^* \\ y_k^* = Cx_k + Du_k^* + w_k \end{cases} \tag{2.24}$$

L'indice i permet de négliger l'influence de l'état passé. Afin de trouver un bon compromis entre la faible sensibilité aux termes négligés et une complexité raisonnable pour le calcul de l'orthogonal en ligne, cet indice sera déterminé en utilisant un critère $J(p)$ qui minimise l'erreur d'approximation entre le modèle de référence du système et le modèle implicite utilisé dans la projection. L'entier i doit être déterminé dans une phase préliminaire exécutée hors ligne dans le cas sans défaut en utilisant un signal d'excitation persistant tel une SBPA (Séquence Binaire Pseudo Aléatoire).

Soit $\bar{u}_{k, p}^* = \left(u_{k-p}^{*, T} \quad u_{k-p+1}^{*, T} \quad \dots \quad u_k^{*, T} \right)^T \in \mathbb{R}^{m(p+1) \times 1}$,

Construisons la matrice d'entrée $U_k^{s, *} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{k-L+1, p}^* & \bar{u}_{k-L+2, p}^* & \dots & \bar{u}_{k, p}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(p+1) \times L}$ et la matrice de sortie $Y_k^{s, *} = \begin{bmatrix} y_{k-L+1}^* & \dots & y_{k-1}^* & y_k^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times L}$.

Proposition 2.3 Soit le critère $J(p)$:

$$J(p) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| Y_k^{s,*} \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2^2 \quad (2.25)$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme-2, les entiers p et L respectent la condition $L > m(p+1)$, r représente la taille de la fenêtre permettant de calculer la variance.

Soit \mathcal{X}_1 une constante positive choisie arbitrairement petite.

Il existe p_0 tel que $\forall p > p_0$, le critère $J(p)$ défini par l'équation (2.25) vérifie l'inégalité suivante :

$$J(p) \leq \text{var}(W_k) + \mathcal{X}_1 \quad (2.26)$$

où $\text{var}(\cdot)$ désigne la variance : $\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \|W_k\|_2^2 = \text{var}(W_k)$.

L'entier i est choisi dans l'intervalle $[p_0, p_x[$, où p_x est la valeur maximale de p acceptable pour supporter la charge de calcul (dépend de la capacité de calcul du calculateur).

Remarque 2.3 Si $\text{span}(CA^p [x_{k-L+1-p} \cdots x_{k-p}]) \subset \text{span}(U_k^{s,*}) \Rightarrow$

$CA^p [x_{k-L+1-p} \cdots x_{k-p}] \Pi_{U_k^{s,*}} = 0$ alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $J(p)$ est proche de zéro. Afin de régler la MPD dans ce cas, on peut déterminer i en maximisant la sensibilité du résidu aux défauts, c'est à dire en maximisant le critère $J(p) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| F_k^s \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2^2$ pour les différentes possibilités de défauts F_k^s afin de garantir la sensibilité du résidu à toute direction de défaut capteur.

Démonstration. D'après les expressions du résidu (2.5) et (2.6) données dans la proposition 2.3, le critère $J(p)$ donné par (2.25) s'écrit :

$$J(p) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| W_k \Pi_{U_k^{s,*}} + CA^p [x_{k-L+1-p} \cdots x_{k-p}] \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2^2 \quad (2.27)$$

D'après les propriétés de la norme-2 et à partir d'un certain rang p_0 , on a :

$$J(p) \leq \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| W_k \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2^2 + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| CA^p [x_{k-L+1-p} \cdots x_{k-p}] \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2^2 \quad (2.28)$$

où $\left\| W_k \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2 \leq \|W_k\|_2 \underbrace{\left\| \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2}_{=1} \Rightarrow \left\| W_k \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2 \leq \|W_k\|_2$.

Soit

$$J(p) \leq \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \|W_k\|_2^2 + \mathcal{X} \quad (2.29)$$

Sous l'hypothèse de la stabilité, la quantité $\mathcal{X} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| CA^p [x_{k-L+1-p} \cdots x_{k-p}] \Pi_{U_k^{s,*}} \right\|_2^2$ décroît et tend vers 0 quand p augmente (pour plus de détails, voir annexe B). Il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{X} < \mathcal{X}_1$ où \mathcal{X}_1 est une constante fixée.

L'expression du critère (2.29) peut être écrite comme énoncé dans la proposition 2.3 par l'expression (2.26).

□

Un exemple de système à entrée unique et sortie unique (Single Input Single Output (SISO)) est donné à titre illustratif pour expliquer la manière dont on choisit l'entier i . Considérons la figure 2.5 représentant un critère J . Le comportement du critère $J(p)$, dans ce cas de figure (voir figure 2.5) (sans généralisation de ce comportement à tous les systèmes non linéaires), est globalement décroissant en fonction de l'entier p . Par conséquent, la valeur de i permettant de négliger l'influence de l'état initial doit être choisie dans l'intervalle $[p_0, p_x]$.

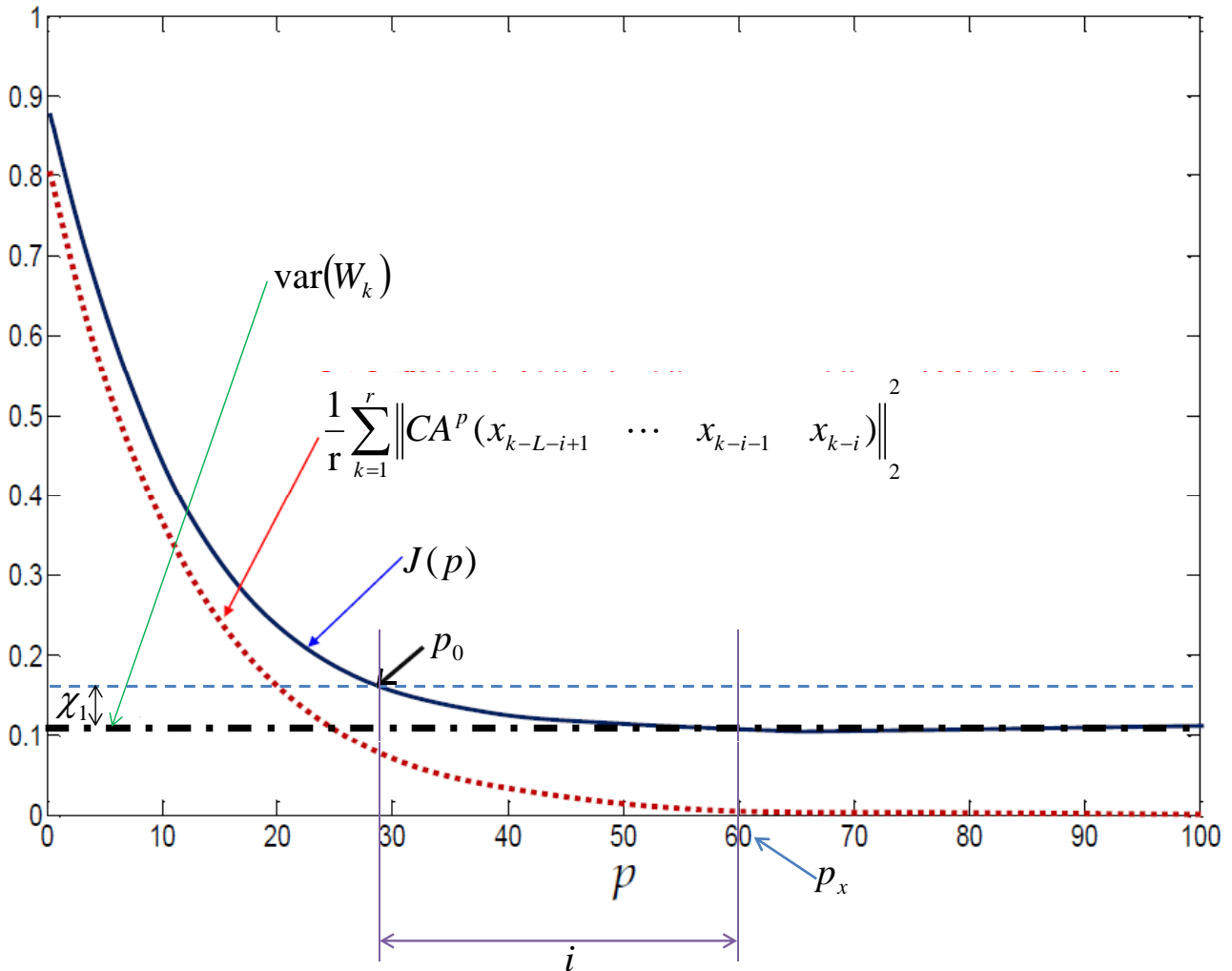


FIGURE 2.5 – Illustration du critère $J(p)$

2.3 ESTIMATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS

Afin d'obtenir des informations supplémentaires sur le défaut telle l'amplitude et l'évolution temporelle du défaut (*estimation du défaut*), des données hors ligne, recueillies en fonctionnement sain sans défaut peuvent être utilisées. L'estimation du défaut peut être utile pour la commande tolérante aux défauts (accommodation). Nous supposons toujours qu'il n'y a pas de défauts actionneurs ce qui implique que le vecteur $f_{a, k}$ est nul. Nous supposons ici le cas déterministe.

Soit le vecteur $\bar{u}_{k, i} = (u_{k-i}^T \ u_{k-i+1}^T \ \cdots \ u_k^T)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$ construit par des entrées collectées **en ligne**.

Construisons la matrice d'entrée $U_{k-L+1:k}^s$ constituée par des entrées collectées **en ligne** telle que :

$$U_{k-L+1:k}^s = [\bar{u}_{k-L+1, i} \ \cdots \ \bar{u}_{k-1, i} \ \bar{u}_{k, i}] \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times L} \quad (2.30)$$

Soit la matrice de sortie constituée par des sorties collectées **en ligne**

$$Y_{k-L+1:k}^s = [y_{k-L+1} \ \cdots \ y_{k-1} \ y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (2.31)$$

Soit le vecteur $\bar{u}_p^* = \left(u_{p-i}^{*T} \ u_{p-i+1}^{*T} \ \cdots \ u_p^{*T} \right)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$ construit par des entrées collectées **hors ligne**, tel que $p \in \{1, 2, \dots, L\}$.

Construisons la matrice d'entrée $U_{1:L}^{s,*}$ constituée par des entrées collectées **hors ligne** en fonctionnement non défaillant tel que :

$$U_{1:L}^{s,*} = [\bar{u}_{i+1}^* \ \cdots \ \bar{u}_p^* \ \cdots \ \bar{u}_{i+L}^*] \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times L} \quad (2.32)$$

où $U_{1:L}^{s,*}$ doit être de plein rang en ligne (ce qui implique que les entrées utilisées hors ligne sont des excitations persistantes).

Soit la matrice de sortie constituée par des sorties collectées **hors ligne** en fonctionnement non défaillant

$$Y_{1:L}^{s,*} = [y_1^* \ \cdots \ y_L^*] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (2.33)$$

Considérons \bar{Y}_k^s et \bar{U}_k^s les matrices construites par un mélange de données entrée-sortie collectées **en ligne** et **hors ligne** :

$$\bar{U}_k^s = [U_{1:L}^{s,*} | U_{k-L+1:k}^s] \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 2L} \quad (2.34)$$

$$\bar{Y}_k^s = [Y_{1:L}^{s,*} | Y_{k-L+1:k}^s] \in \mathbb{R}^{\ell \times 2L} \quad (2.35)$$

Soit la matrice $\Gamma_{\bar{U}_k^s}$, construite comme suit :

$$\Gamma_{\bar{U}_k^s} = \begin{bmatrix} \Gamma_k^s \\ I_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L \times L} \quad (2.36)$$

où $I_L \in \mathbb{R}^{L \times L}$ est la matrice identité et la matrice Γ_k^s est telle que :

$$\bar{U}_k^s \Gamma_{\bar{U}_k^s} = 0 \quad (2.37)$$

Il existe des méthodes d'optimisation permettant de trouver un Γ_k^s optimal.

Il est à noter que l'entier L respecte la condition $L > m(i+1)$.

Soit $Z^L = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

Proposition 2.4 *L'estimateur $\hat{f}_{s,k}$ est donné par :*

$$\hat{f}_{s,k} = \bar{\epsilon}_{s,k} Z^L \quad (2.38)$$

où le terme $\bar{\epsilon}_{s,k}$ est donné par :

$$\bar{\epsilon}_{s,k} = \bar{Y}_k^s \Gamma_{\bar{U}_k^s} \quad (2.39)$$

L'estimation du défaut est possible si la matrice $U_{1:L}^{s,*}$ des données d'entrée collectées hors ligne en mode sain est de plein rang en ligne.

L'estimation du défaut capteur est représentée graphiquement par la figure 2.6.

Données entrée-sortie collectées hors-ligne dans le cas sans défaut

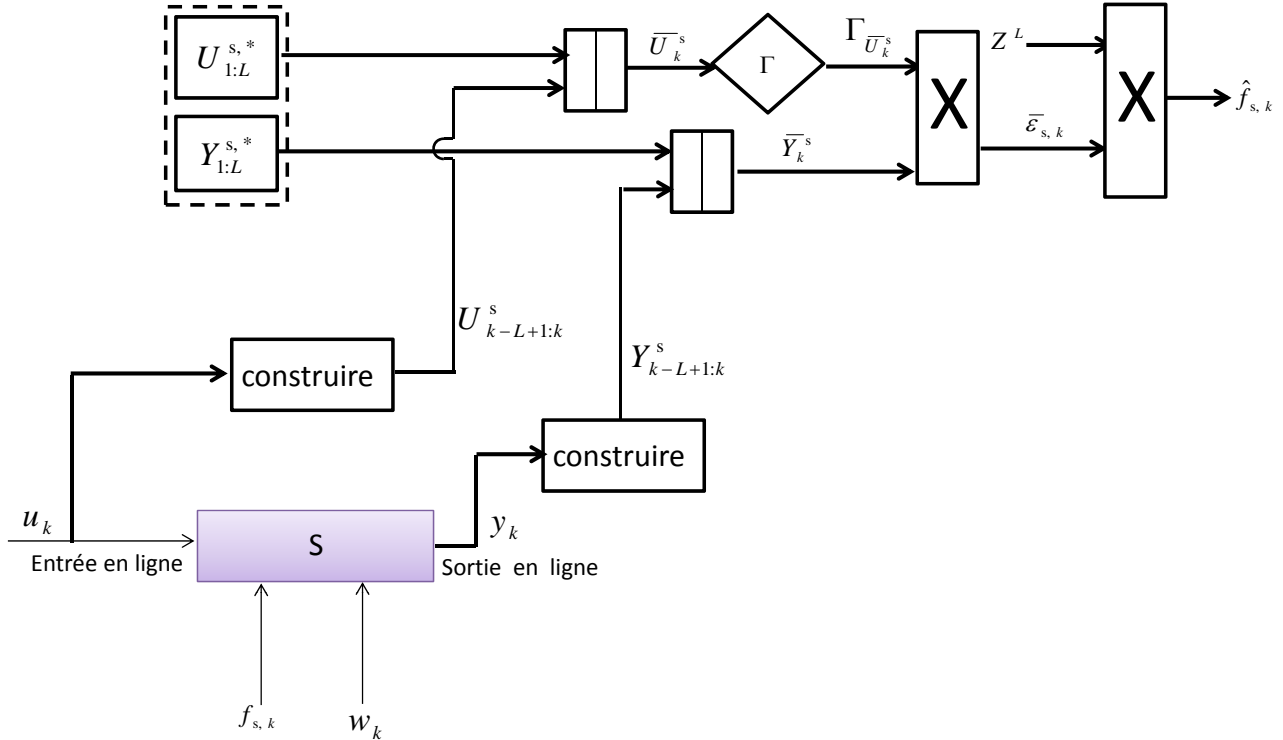


FIGURE 2.6 – Diagramme de génération de résidu par la MPD pour l'estimation de défauts capteurs

La signification des symboles graphiques est donnée dans le tableau 2.2.

Démonstration. L'idée principale pour effectuer l'estimation des défauts capteurs est d'imposer une structure particulière à l'espace nul $\Gamma \bar{U}_k^s$ de la matrice \bar{U}_k^s :

$$\Gamma \bar{U}_k^s = \begin{bmatrix} \Gamma_k^s \\ I_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L \times L} \quad (2.40)$$

où I_L est la matrice $L \times L$ d'identité, la matrice Γ_k^s peut être obtenue comme suit :

$$\bar{U}_k^s \Gamma \bar{U}_k^s = 0 \quad (2.41)$$

avec $\bar{U}_k^s = [U_{1:L}^{s,*} | U_{k-L+1:k}^s]$, $U_{1:L}^{s,*} = [\bar{u}_{i+1}^* \cdots \bar{u}_p^* \cdots \bar{u}_{i+L}^*]$ et $U_{k-L+1:k}^s = [\bar{u}_{k-L+1} \cdots \bar{u}_{k-1} \bar{u}_k]$.

La forme d'évaluation du résidu $\bar{\epsilon}_{s,k}$ est étudiée dans deux cas : sans et avec défaut.

Soit $\delta_k^i = CA^i [x_1 \cdots x_L | x_{k-L+1-i} \cdots x_{k-i}] \Gamma \bar{U}_k^s$.

– Cas sans défaut : Selon l'équation (2.41) et l'annexe B, on a

$$\bar{\epsilon}_{s,k} = \bar{Y}_k^s \Gamma \bar{U}_k^s = H_i \bar{U}_k^s \Gamma \bar{U}_k^s + \delta_k^i \cong 0 \quad (2.42)$$

Les signes schématiques	Les significations
$A \longrightarrow \boxed{\text{construire}} \longrightarrow B$	B est construite à partir de A
$A \longrightarrow \diamond \Gamma \longrightarrow B$	$B = \Gamma_A$
$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} \\ \end{matrix}} \longrightarrow C$	$C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ Concaténation de A et B selon les colonnes
$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \longrightarrow \boxed{X} \longrightarrow C$	$C = BA$

TABLE 2.2 – Signification des symboles graphiques

– Cas avec défauts de capteurs :

Dans ce cas, on suppose que les défauts capteurs se produisent dans la fenêtre de temps $[k - L + 1, k]$. La matrice de défaut $F_{s, k-L+1:k}$ est construite comme la matrice $Y_{k-L+1:k}^s$ où

$$F_{s, k-L+1:k} = \begin{bmatrix} f_{s, k-L+1} & \cdots & f_{s, k-1} & f_{s, k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (2.43)$$

La forme d'évaluation du résidu est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{s, k} &= \bar{Y}_k^s \Gamma_{\bar{U}_k^s} = (H_i \bar{U}_k^s + \begin{bmatrix} 0_{\ell \times L} & F_{s, k-L+1:k} \end{bmatrix}) \Gamma_{\bar{U}_k^s} + \delta_k^i \\ &= H_i \bar{U}_k^s \Gamma_{\bar{U}_k^s} + \begin{bmatrix} 0_{\ell \times L} & F_{s, k-L+1:k} \end{bmatrix} \Gamma_{\bar{U}_k^s} + \delta_k^i \end{aligned} \quad (2.44)$$

L'équation (2.44) devient :

$$\bar{\epsilon}_{s, k} = \begin{bmatrix} 0_{\ell \times L} & F_{s, k-L+1:k} \end{bmatrix} \Gamma_{\bar{U}_k^s} + \delta_k^i \quad (2.45)$$

Sous l'hypothèse de la stabilité et selon l'annexe B, l'équation (2.45) est approximée comme suit :

$$\bar{\epsilon}_{s, k} \cong \begin{bmatrix} 0_{\ell \times L} & F_{s, k-L+1:k} \end{bmatrix} \Gamma_{\bar{U}_k^s} \quad (2.46)$$

En substituant l'expression (2.40) de $\Gamma_{\bar{U}_k^s}$ dans l'équation (2.46) alors on obtient la forme d'évaluation suivante :

$$\bar{\epsilon}_{s, k} \cong \begin{bmatrix} 0_{\ell \times L} & F_{s, k-L+1:k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_k^s \\ I_L \end{bmatrix} \cong F_{s, k-L+1:k} + (0_{\ell \times L} \Gamma_k^s) \cong F_{s, k-L+1:k} \quad (2.47)$$

Selon l'expression explicite (2.43) de $F_{s, k-L+1:k}$, on peut obtenir $f_{s, k}$ en sélectionnant la dernière colonne de $F_{s, k-L+1:k}$. Ceci est réalisé en multipliant l'expression (2.47) par le vecteur de sélection Z^L , d'où l'estimateur (2.38) de défauts capteurs donné dans la proposition $\hat{f}_{s, k} = \bar{Y}_k^s \Gamma_{\bar{U}_k^s} Z^L$.

2.4 DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES D'ACTIONNEURS

Dans cette section, la méthode basée sur la projection des données d'entrée-sortie proposée dans la section précédente est adaptée pour détecter et localiser les défauts multiples d'actionneur, l'idée est d'utiliser l'inverse gauche du système. Le problème de détection et d'isolation de défauts actionneurs devient alors pour les systèmes inversibles le problème dual de la détection et la localisation de défauts capteurs. Pour des raisons de simplicité, nous traiterons le cas déterministe, la généralisation au cas bruité étant directe.

Nous supposons qu'il n'y a pas de défauts capteurs ce qui implique que le vecteur $f_{s, k}$ est nul.

2.4.1 Inversion gauche du système linéaire

Dans cette section l'inversion gauche des systèmes linéaires est rappelée. Cela nous permettra de considérer des défauts actionneurs comme des défauts capteurs dans le système dual.

Définition 2.1 *Le système (2.1) a un inverse à gauche si l'entrée u_k peut être déterminée de façon*

$$\text{unique à partir de } \bar{y}_{k, v} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1) \times 1}.$$

Dans le but de présenter les conditions d'inversion, on utilise l'algorithme de Massey-Sain [78].

une inversion peut être illustrée comme dans la figure 2.7.

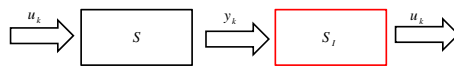


FIGURE 2.7 – Représentation de l'inversion d'un système dynamique S : le système inverse est S_i , son "entrée" est y_k et sa "sortie" u_k

Soit la matrice de Toeplitz

$$M_v = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{v-1}B & CA^{v-2}B & CA^{v-3}B & \dots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1) \times m(v+1)} \text{ et la matrice d'observa-}$$

$$\text{bilité } \mathcal{O}_v = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1) \times n}.$$

Théorème 2.1 [78] *Soit le système (2.1) dans lequel le nombre de sorties est supérieur au nombre d'entrées ($\ell \geq m$) et l'ordre du système est supérieur au nombre d'entrée ($n \geq m$). Ce système*

a un inverse avec un retard v si et seulement s'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times \ell(v+1)}$ telle que $KM_v = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m \times mv} \end{bmatrix}$ et le système inverse est donné par :

$$S_I : \begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}\bar{y}_{k,v} \\ u_k = \bar{C}x_k + \bar{D}\bar{y}_{k,v} \end{cases} \quad (2.48)$$

Avec $\bar{A} = A - BK\mathcal{O}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{B} = BK \in \mathbb{R}^{n \times \ell(v+1)}$, $\bar{C} = -K\mathcal{O}_v \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\bar{D} = K \in \mathbb{R}^{m \times \ell(v+1)}$, telle que \bar{A} est supposée avoir des valeurs propres à l'intérieur du cercle unité.

Démonstration. Par substitution de l'état dans l'équation de sortie du système (2.1), l'expression de la sortie en fonction de l'entrée et l'état est donnée par :

$$\begin{aligned} y_k &= Cx_k + Du_k \\ y_{k+1} &= Cx_{k+1} + Du_{k+1} = CAx_k + CBu_k + Du_{k+1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

En répétant cette procédure v fois et en concaténant selon les lignes les sorties sur un horizon de taille $v+1$, on obtient :

$$\bar{y}_{k,v} = \mathcal{O}_v x_k + M_v \bar{u}_{k,v} \quad (2.50)$$

$$\text{où } \bar{u}_{k,v} = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(v+1) \times 1} \text{ et } \bar{y}_{k,v} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1) \times 1}.$$

S'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times \ell(v+1)}$ telle que : $KM_v = \begin{bmatrix} I_m & 0_{m \times mv} \end{bmatrix} \Rightarrow K\bar{y}_{k,v} = K\mathcal{O}_v x_k + u_k$.

On en déduit l'entrée du système :

$$u_k = -K\mathcal{O}_v x_k + K\bar{y}_{k,v} \quad (2.51)$$

En substituant l'entrée u_k de (2.51) dans l'expression d'état (2.1), on obtient :

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k = Ax_k - BK\mathcal{O}_v x_k + BK\bar{y}_{k,v} = (A - BK\mathcal{O}_v)x_k + BK\bar{y}_{k,v} \quad (2.52)$$

Les équations (2.51) et (2.52) constituent le modèle d'espace d'état du système inverse. \square

2.4.2 Illustration de l'algorithme Massey-Sain

Soit le système suivant

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_k \end{aligned} \quad (2.53)$$

Vérifions la condition d'inversibilité du système (2.53).

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rang}(M_0) = 1 \quad (2.54)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rang}(M_1) = 3 \quad (2.55)$$

Puisqu'il existe $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ tel que $KM_1 = [I_2 \ | \ 0_2]$, donc le système (2.53) est inversible avec un retard $v = 1$.

Finalement l'inverse gauche du système est donné par :

$$x_{k+1} = (A - BK \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix})x_k + BK \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

$$u_k = -K \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} x_k + K \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

2.4.3 Génération du résidu

Considérons le système (2.48) avec des défauts actionneurs où les entrées sont affectées par un bruit coloré centré v_k , le système inverse résultant devient :

$$S_I : \begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}\bar{y}_{k,v} \\ u_k = \bar{C}x_k + \bar{D}\bar{y}_{k,v} - f_{a,k} + v_k \end{cases} \quad (2.58)$$

Les défauts actionneurs sont ainsi traités comme des défauts capteurs sur le système initial (2.1). La proposition ci-dessous donne l'expression du résidu correspondant.

Soient les matrices d'entrée et de sortie U_k^a et Y_k^a

$$U_k^a = [u_{k-L+1} \dots u_k] \in \mathbb{R}^{m \times L} \quad (2.59)$$

$$Y_k^a = \begin{bmatrix} y_{k-L+1-i} & \cdots & y_{k-i-1} & y_{k-i} \\ y_{k-L-i+2} & \cdots & y_{k-i} & y_{k-i+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1-i+v} & \cdots & y_{k-i+v-1} & y_{k-i+v} \\ y_{k-L-i+2} & \cdots & y_{k-i} & y_{k-i+1} \\ y_{k-L-i+3} & \cdots & y_{k-i+1} & y_{k-i+2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L-i+1+v} & \cdots & y_{k-i+v} & y_{k-i+1+v} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1} & \cdots & y_{k-1} & y_k \\ y_{k-L+2} & \cdots & y_k & y_{k+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1+v} & \cdots & y_{k+v-1} & y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1)(i+1) \times L} \quad (2.60)$$

La matrice de projection à droite de l'espace des lignes de la matrice Y_k^a est donnée selon (4.104) (voir annexe A.9) par :

$$\Pi_{Y_k^a} = I_L - Y_k^{aT} (Y_k^a Y_k^{aT})^{-1} Y_k^a \quad (2.61)$$

où l'entier L respecte la condition $L > \ell(v+1)(i+1)$ pour que $\dim \text{span}(\Pi_{Y_k^a}^T) > 0$ (i.e. voir expression (4.105) en annexe A.9). La matrice $F_{a,k}$ est construite comme la matrice U_k^a en utilisant $f_{a,k}$ au lieu de u_k .

Soit Z^L le vecteur suivant $Z^L = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

Proposition 2.5 *Le résidu $\epsilon_{a,k}$ dont la forme de calcul est donnée par :*

$$\epsilon_{a,k} = U_k^a \Pi_{Y_k^a} Z^L \in \mathbb{R}^m \quad (2.62)$$

à la forme d'évaluation suivante

$$\epsilon_{a,k} = -F_{a,k} \Pi_{Y_k^a} Z^L + V_k \Pi_{Y_k^a} Z^L + \delta_k^i \quad (2.63)$$

où $\delta_k^i = \bar{C} \bar{A}^i [x_{k-L+1-i} \ \dots \ x_{k-i}] \Pi_{Y_k^a} Z^L \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

Le système étant supposé stable pour i suffisamment grand, δ_k^i est négligeable.

La détection et la localisation de défauts actionneurs sont représentées graphiquement dans la figure 2.8.

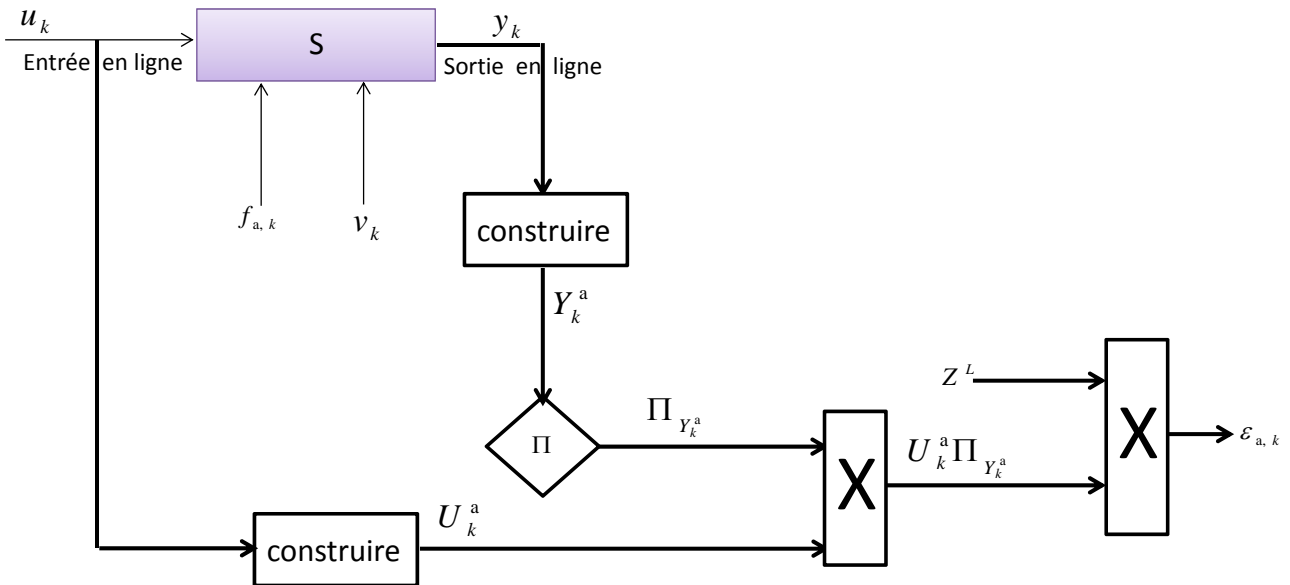


FIGURE 2.8 – Diagramme de génération de résidu par la MPD pour la détection et la localisation de défauts actionneurs

La signification des symboles graphiques est donnée dans le tableau 2.3.

Remarque 2.4 *Selon l'équation (2.62), il est clair qu'aucun des paramètres du système (S_I) n'est nécessaire pour calculer le résidu $\epsilon_{a,k}$, et seulement les données entrées (U_k^a) et sorties (Y_k^a) sont utilisées. Les paramètres du système (S_I) seront utilisés par la suite pour montrer les propriétés du résidu $\epsilon_{a,k}$.*

Démonstration. Par des substitutions répétées de l'équation (2.58), on obtient l'expression suivante :

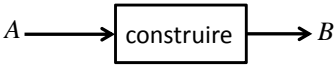
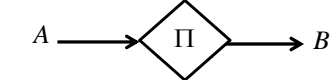
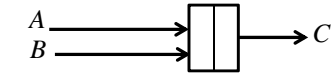
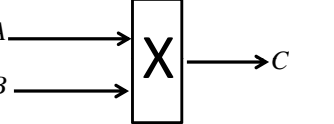
Les signes schématiques	Les significations
	B est construite à partir de A
	$B = \Pi_A$
	$C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ Concaténation de A et B selon les colonnes
	$C = BA$

TABLE 2.3 – Signification des symboles graphiques

$$u_k = \bar{C}\bar{A}^i x_{k-i} + \bar{H}_i \begin{bmatrix} \bar{y}_{k-i, v} \\ \vdots \\ \bar{y}_{k-1, v} \\ \bar{y}_{k, v} \end{bmatrix} - f_{a, k} + v_k \quad (2.64)$$

où la matrice des paramètres de Markov d'ordre i est donnée par :

$$\bar{H}_i = [\bar{C}\bar{A}^{i-1}\bar{B} | \dots | \bar{C}\bar{B} | \bar{D}] \in \mathbb{R}^{m \times \ell(v+1)(i+1)} \quad (2.65)$$

avec $\bar{y}_{k, v} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1) \times 1}$.

En concaténant l'équation (2.64) selon les colonnes sur une fenêtre de temps de taille L on obtient :

$$U_k^a = \bar{C}\bar{A}^i [x_{k-L+1-i} \dots x_{k-i}] + \bar{H}_i Y_k^a - F_{a, k} + V_k \quad (2.66)$$

Les matrices d'entrée et de sortie U_k^a et Y_k^a sont définies par :

$$U_k^a = [u_{k-L+1} \dots u_k] \in \mathbb{R}^{m \times L} \quad (2.67)$$

$$Y_k^a = \begin{bmatrix} y_{k-L+1-i} & \cdots & y_{k-i-1} & y_{k-i} \\ y_{k-L-i+2} & \cdots & y_{k-i} & y_{k-i+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1-i+v} & \cdots & y_{k-i+v-1} & y_{k-i+v} \\ y_{k-L-i+2} & \cdots & y_{k-i} & y_{k-i+1} \\ y_{k-L-i+3} & \cdots & y_{k-i+1} & y_{k-i+2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L-i+1+v} & \cdots & y_{k-i+v} & y_{k-i+1+v} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1} & \cdots & y_{k-1} & y_k \\ y_{k-L+2} & \cdots & y_k & y_{k+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1+v} & \cdots & y_{k+v-1} & y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1)(i+1) \times L} \quad (2.68)$$

La matrice $F_{a,k}$ (resp. V_k) est construite comme la matrice U_k^a en utilisant $f_{a,k}$ (resp. v_k) au lieu de u_k .

Le résidu est obtenu en multipliant l'équation (2.66) à droite par $\Pi_{Y_k^a} Z^L$ où la matrice de projection à droite $\Pi_{Y_k^a}$ de l'espace des lignes de la matrice Y_k^a est donnée selon (4.104) (voir annexe A.9) par :

$$\Pi_{Y_k^a} = I_L - Y_k^{aT} (Y_k^a Y_k^{aT})^{-1} Y_k^a \quad (2.69)$$

tel que l'entier L respecte la condition $L > \ell(v+1)(i+1)$ pour que $\dim \text{span}(\Pi_{Y_k^a}^T) > 0$ (i.e. (4.105)).

Le vecteur Z^L est un vecteur de sélection de la dernière colonne donné par : $Z^L = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

La forme de calcul du résidu est donnée par l'expression suivante :

$$\epsilon_{a,k} = U_k^a \Pi_{Y_k^a} Z^L \quad (2.70)$$

La forme d'évaluation du résidu est donnée par :

$$\epsilon_{a,k} = \underbrace{\bar{H}_i Y_k^a \Pi_{Y_k^a} Z^L}_{=0} - F_{a,k} \Pi_{Y_k^a} Z^L + V_k \Pi_{Y_k^a} Z^L + \delta_k^i \quad (2.71)$$

où $\delta_k^i = \bar{C} \bar{A}^i [x_{k-L+1-i} \cdots x_{k-i}] \Pi_{Y_k^a} Z^L \in \mathbb{R}^{m \times 1}$.

$$\epsilon_{a,k} = -F_{a,k} \Pi_{Y_k^a} Z^L + V_k \Pi_{Y_k^a} Z^L + \delta_k^i \quad (2.72)$$

Sous l'hypothèse de la stabilité du système (2.48), ce qui est équivalent à dire que les valeurs propres de la matrice \bar{A}^i sont à l'intérieur du cercle unité. On a (voir annexe B pour la preuve) :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{A}^i = 0 \quad (2.73)$$

Par conséquent, δ_k^i dans l'équation (2.64) est négligeable pour i suffisamment grand.

La forme d'évaluation (2.72) du résidu peut être approximée par :

$$\epsilon_{a, k} \cong -F_{a, k} \Pi_{Y_k^a} Z^L + V_k \Pi_{Y_k^a} Z^L \tag{2.74}$$

□

2.4.4 Analyse du résidu

2.4.4.1 Analyse de la sensibilité du résidu aux défauts actionneurs

Dans ce qui suit, nous allons étudier le comportement du résidu en présence et en l'absence du défaut.

1. *Aucun défaut actionneur n'est présent* ($f_{a, k} = 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\epsilon_{a, k}$ est nulle.

$$E[\epsilon_{a, k}] \cong 0 \tag{2.75}$$

A partir de l'expression (2.75), on voit que l'espérance mathématique du résidu $E[\epsilon_{a, k}]$ est nulle en l'absence de défauts actionneurs. Ceci est illustré par la figure 2.9.

Sans défaut actionneurs

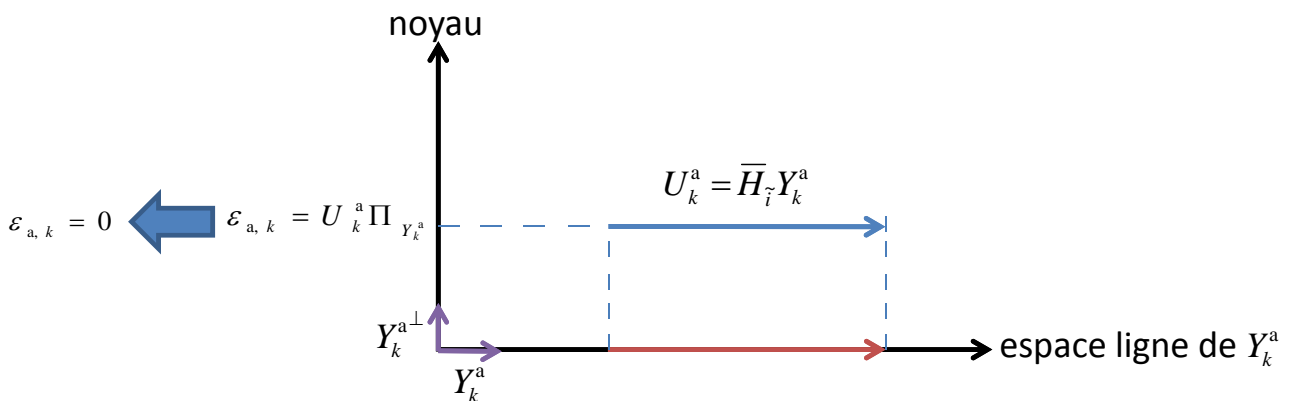


FIGURE 2.9 – Illustration dans le cas déterministe de la MPD et sans défaut capteur : le résidu est nul

2. *En présence d'un défaut actionneur* ($f_{a, k} \neq 0$) :

Le résidu $\epsilon_{a, k}$ est donné par la relation suivante :

$$\epsilon_{a, k} \cong -F_{a, k} \Pi_{Y_k^a} Z^L + V_k \Pi_{Y_k^a} Z^L \tag{2.76}$$

- (a) *Défauts actionneurs détectables*

Une condition de détectabilité de défauts actionneurs est donnée dans la proposition suivante

Proposition 2.6 Une condition nécessaire et suffisante de détectabilité des défauts actionneurs qui apparaissent à l'instant k est :

$$\text{span}(F_{a, k}) \not\subset \text{span}(Y_k^a) \tag{2.77}$$

Démonstration. – *Condition suffisante :*

Si $\text{span}(F_{a,k}) \not\subset \text{span}(Y_k^a)$ alors $\forall X \in \mathbb{R}^{m \times \ell(v+1)(i+1)} : F_{a,k} \neq XY_k^a$, par la suite en considérant le cas particulier $X = \bar{H}_i$ on a $F_{a,k} \neq \bar{H}_i Y_k^a$, ce qui peut être écrit comme $-F_{a,k} + \bar{H}_i Y_k^a \neq 0$. Par conséquent, $\epsilon_{a,k} \neq 0$ pour un espace orthogonal à Y_k^a .

– *Condition nécessaire :*

Si $E[\epsilon_{a,k}] \neq 0$, sachant que $\bar{H}_i Y_k^a \Pi_{Y_k^a} = 0$, alors $F_{a,k} \Pi_{Y_k^a} \neq 0$, ce qui implique que $\text{span}(F_{a,k}) \not\subset \text{span}(Y_k^a)$.

La figure 2.10 illustre le cas d'un défaut actionneur détectable.

□

A partir de l'expression (2.76), on voit que la forme d'évaluation du résidu $\epsilon_{a,k}$ dépend des défauts actionneurs, le résidu $\epsilon_{a,k}$ est alors sensible aux défauts actionneurs. Ceci est illustré par la figure 2.10.

Influence du défaut actionneur détectable

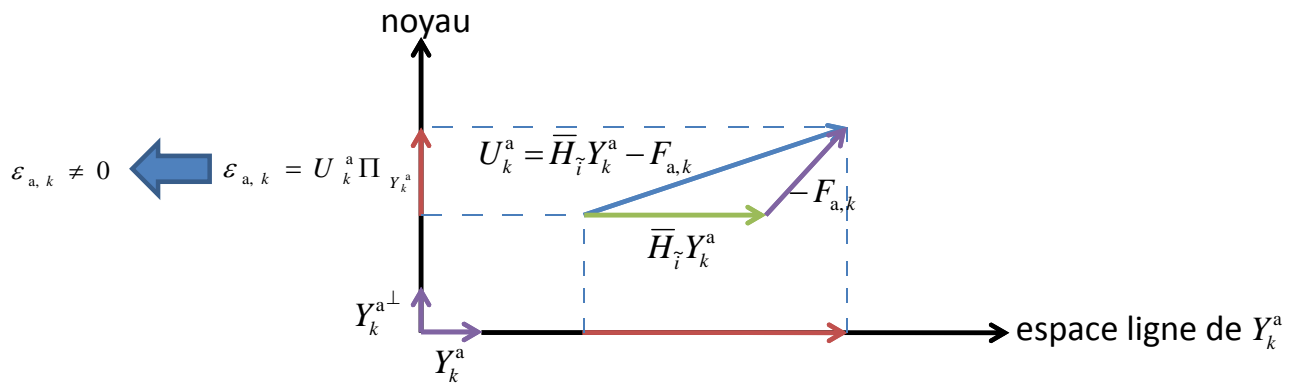


FIGURE 2.10 – Illustration dans le cas déterministe de la MPD et avec défauts actionneurs détectables : le résidu est non nul

(b) Défauts actionneurs non détectables

Si $\text{span}(F_{a,k}) \subset \text{span}(Y_k^a)$ alors $F_{a,k} \Pi_{Y_k^a} = 0$, ce qui implique que le résidu $\epsilon_{a,k}$ est nul (c-à-d le résidu est insensible aux défauts actionneurs) malgré la présence du défaut actionneur qui disparaît par projection sur $\Pi_{Y_k^a}$, d'où la condition (2.77). Ceci est illustré par la figure 2.11.

2.4.4.2 Localisation des défauts actionneurs

Après avoir détecté un défaut actionneur, il faut en rechercher sa cause. Dans le cas d'un défaut d'actionneur cela revient à identifier le ou les actionneurs défectueux. Comme nous allons le démontrer dans la suite, le vecteur résidu $\epsilon_{a,k}$ est structuré par construction, il suffit de considérer ses composantes une à une pour localiser l' (les) actionneur(s) en défaut.

La condition (2.77) étant vérifiée, si à l'instant k un défaut affecte l'actionneur $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ son effet ne se voit que sur la $j^{\text{ème}}$ composante de $\epsilon_{a,k}$ comme le montre l'expression suivante.

Influence du défaut actionneurs non détectable

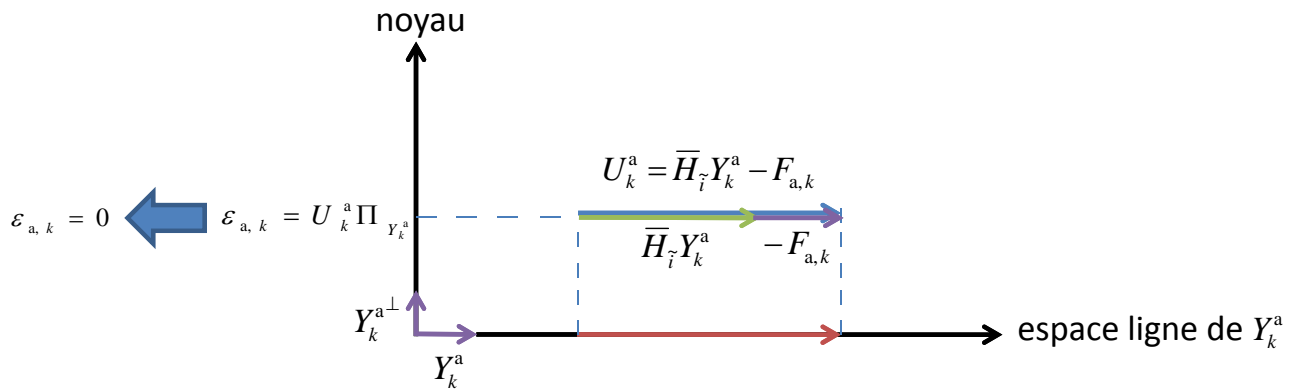


FIGURE 2.11 – Illustration dans le cas déterministe de la MPD et des défauts actionneurs non détectables : le résidu est nul

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{a,k} &\simeq -F_{a,k} \Pi_{Y_k^a} Z^L + V_k \Pi_{Y_k^a} Z^L \\
 &\simeq \begin{bmatrix} -F_{a,k}(1, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) + V_k(1, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) \\ \vdots \\ -F_{a,k}(j, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) + V_k(j, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) + \\ \vdots \\ -F_{a,k}(m, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) + V_k(m, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -F_{a,k}(j, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) + V_k(j, :) \Pi_{Y_k^a}(:, L) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -F_{a,k}(j, L) \Pi_{Y_k^a}(L, L) + V_k(j, L) \Pi_{Y_k^a}(L, L) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

Pour localiser les défauts actionneurs, il suffit de considérer les composantes une à une : si un actionneur est en défaut à un instant k alors la composante correspondante de $\epsilon_{a,k}$ ne sera pas nulle.

Remarque 2.5 Calcul de la matrice de projection à droite :

Pour le calcul du résidu, on a besoin de calculer $\Pi_{Y_k^a}$ qui est la matrice de projection à droite de l'espace des lignes de la matrice Y_k^a .

On peut remarquer que la matrice Y_k^a a plusieurs lignes redondantes. Il est clair qu'en supprimant ces lignes redondantes on ne perd aucune information, mais la complexité de calcul de

la méthode diminue de façon considérable, alors la matrice Y_k^a devient simplifiée comme suit :

$$\begin{bmatrix} y_{k-L+1-i} & \cdots & y_{k-i-1} & y_{k-i} \\ y_{k-L-i+2} & \cdots & y_{k-i} & y_{k-i+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1+v} & \cdots & y_{k+v-1} & y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+i+1) \times L}.$$

Dans le tableau ci-après, on fait un parallèle entre les méthodes de génération de résidus pour la détection de défauts capteurs et actionneurs.

défauts capteurs	défauts actionneurs
A	$\bar{A} = A - BK\mathcal{O}_v$
B	$\bar{B} = BK$
C	$\bar{C} = -K\mathcal{O}_v$
D	$\bar{D} = K$
$f_{s, k}$	$-f_{a, k}$
y_k	u_k
u_k	y_k
Condition de stabilité sur A	Condition de stabilité sur \bar{A}
Y_k^s	Y_k^a
U_k^s	U_k^a
$L > m(i+1)$	$L > \ell(v+i+1)$
H_i	\bar{H}_i
$\epsilon_{s, k} = Y_k^s \Pi U_k^s Z^L$	$\epsilon_{a, k} = U_k^a \Pi Y_k^a Z^L$

2.4.5 Réglage de la MPD pour la détection de défauts actionneurs

L'indice v permet de trouver un inverse du système et l'indice i permet de négliger l'influence de l'état passé. Afin de trouver un bon compromis entre une faible sensibilité aux termes négligés, une sensibilité élevée aux défauts actionneurs et une complexité raisonnable pour le calcul de l'orthogonal en ligne, ces indices seront déterminés en utilisant un critère $J(p, q)$ qui minimise l'erreur d'approximation entre le modèle de référence du système et le modèle implicite utilisé dans la projection. Les entiers i et v doivent être déterminés dans une phase préliminaire exécutée hors ligne en utilisant un signal d'excitation persistant tel une SBPA (Séquence Binaire Pseudo Aléatoire).

Construisons la matrice d'entrée $U_k^a = [u_{k-L+1} \dots u_k] \in \mathbb{R}^{m \times L}$ et la matrice de sortie

$$Y_k^a = \begin{bmatrix} y_{k-L+1-p} & \cdots & y_{k-p-1} & y_{k-p} \\ y_{k-L-p+2} & \cdots & y_{k-p} & y_{k-p+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1+q} & \cdots & y_{k+q-1} & y_{k+q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(q+p+1) \times L}.$$

L'indice q représente le retard qui permet d'inverser le système.

Proposition 2.7 Soit le critère $J(p, q)$:

$$J(p, q) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| U_k^{a,*} \Pi Y_k^{a,*} \right\|_2^2 \quad (2.79)$$

où les entiers p, q et L respectent la condition $L > \ell(q+p+1)$, r représente la taille de la fenêtre permettant de calculer la variance.

Soit \mathcal{X}_1 une constante positive choisie arbitrairement petite.

Les matrices $U_k^{a,*}$ et $Y_k^{a,*}$ qui apparaissent dans le numérateur de (2.79) sont construites dans le cas sans défaut.

Il existe p_0 tel que $\forall p > p_0$ où le critère $J(p, q)$ défini par l'équation (2.79) vérifie l'inégalité suivante :

$$J(p, q) \leq \text{var}(V_k) + \mathcal{X}_1 \quad (2.80)$$

L'entier i est choisi dans l'intervalle $[p_0, p_x[$, où p_x est la valeur maximale de p acceptable pour supporter la charge de calcul (dépend de la capacité de calcul du calculateur). L'entier v est la valeur de q associée à i .

Remarque 2.6 Si $\text{span}(\bar{C}\bar{A}^p [x_{k-L+1-p} \cdots x_{k-p}]) \subset \text{span}(Y_k^{a,*}) \Rightarrow$

$\bar{C}\bar{A}^p [x_{k-L+1-p} \cdots x_{k-p}] \Pi_{Y_k^{a,*}} = 0$ alors $\forall (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $J(p, q)$ est proche de zéro. Dans ce cas on peut, comme pour le cas des défauts capteurs, déterminer i et v en maximisant la sensibilité du résidu aux défauts, c'est à dire en maximisant le critère suivant :

$$J(p, q) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| F_k^a \Pi_{Y_k^a} \right\|_2^2 \quad (2.81)$$

Le calcul du critère nécessite de disposer de données de sortie du système comportant des défauts actionneurs.

Exemple 2.1 L'exemple d'un système (2.1) d'ordre 2 est traité afin d'expliquer la manière dont on choisit les entiers i et v .

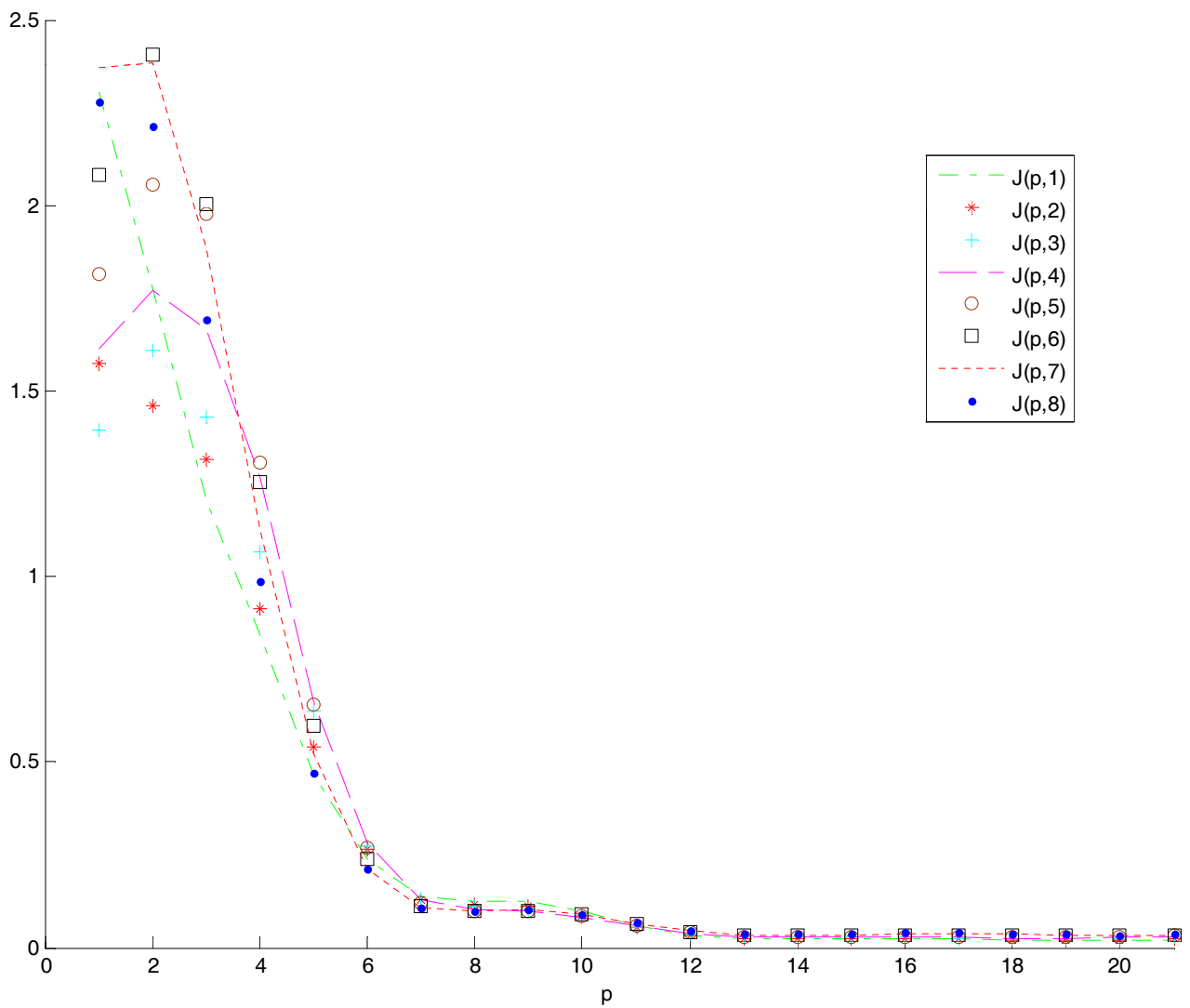
$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Afin de faciliter l'identification des paramètres de réglage i et v , le critère est tracé dans la figure 2.12.

Afin de mieux identifier les paramètres de réglage, la zone minimale du critère représenté dans la figure 2.12 est agrandie dans la figure 2.13.

Les valeurs $i = 19$ et $v = 1$ permettent de négliger l'influence de l'état initial et d'inverser le système.

Les figures 2.14 et 2.15 montrent la ressemblance des entrées réelles et reconstruites en utilisant le système inversé avec $v = 1$ et alimenté par les sorties.

FIGURE 2.12 – Le critère $J(p, q)$ pour chaque valeur de q

Les entrées et les sorties du système et les résidus pour la détection et la localisation de défauts actionneurs sont représentés dans les figures 2.16, 2.17 et 2.18.

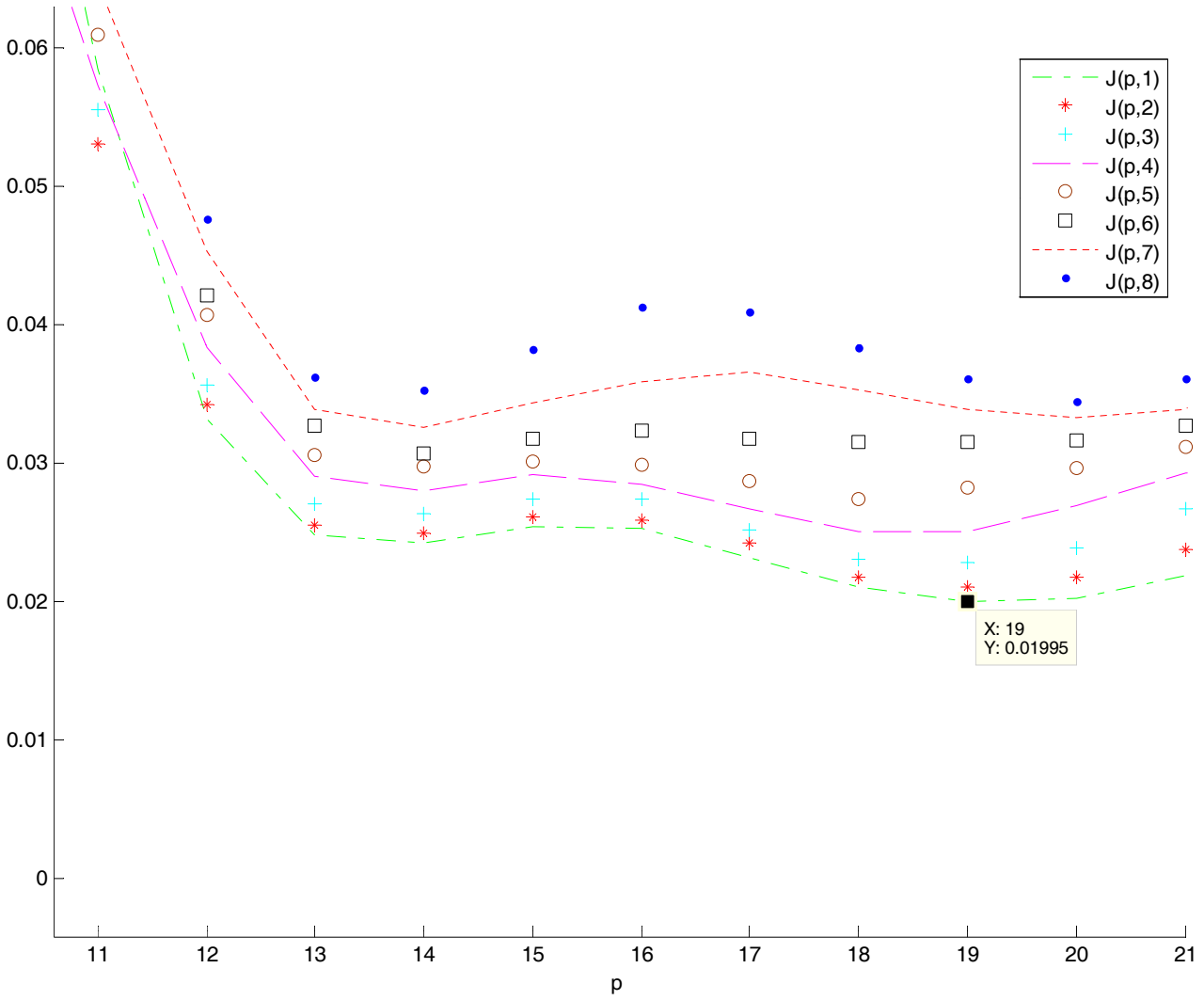


FIGURE 2.13 – La zone minimale du critère $J(p, q)$

2.5 ESTIMATION DES DÉFAUTS MULTIPLES D'ACTIONNEURS

Afin d'obtenir des informations supplémentaires sur le défaut telle l'amplitude et l'évolution temporelle du défaut (*estimation du défaut*), on propose d'utiliser en plus des données d'entrée-sortie recueillies en ligne, des données hors ligne recueillies en fonctionnement sain sans défaut. Nous supposons ici qu'il n'y a pas de défauts capteur ce qui implique que le vecteur $f_{s, k}$ est nul.

Soit le vecteur $\bar{u}_{k, i} = (u_{k-i}^T \ u_{k-i+1}^T \ \dots \ u_k^T)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$ construit par des entrées collectées **en ligne**.

Soient les matrices d'entrée et de sortie $U_{k-L+1:k}^a$ et $Y_{k-L+1:k}^a$:

$$U_{k-L+1:k}^a = [u_{k-L+1} \ \dots \ u_{k-1} \ u_k] \in \mathbb{R}^{m \times L} \quad (2.82)$$

$$Y_{k-L+1:k}^a = \begin{bmatrix} y_{k-L+1-i} & \dots & y_{k-i-1} & y_{k-i} \\ y_{k-L-i+2} & \dots & y_{k-i} & y_{k-i+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1+v} & \dots & y_{k+v-1} & y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+i+1) \times L} \quad (2.83)$$

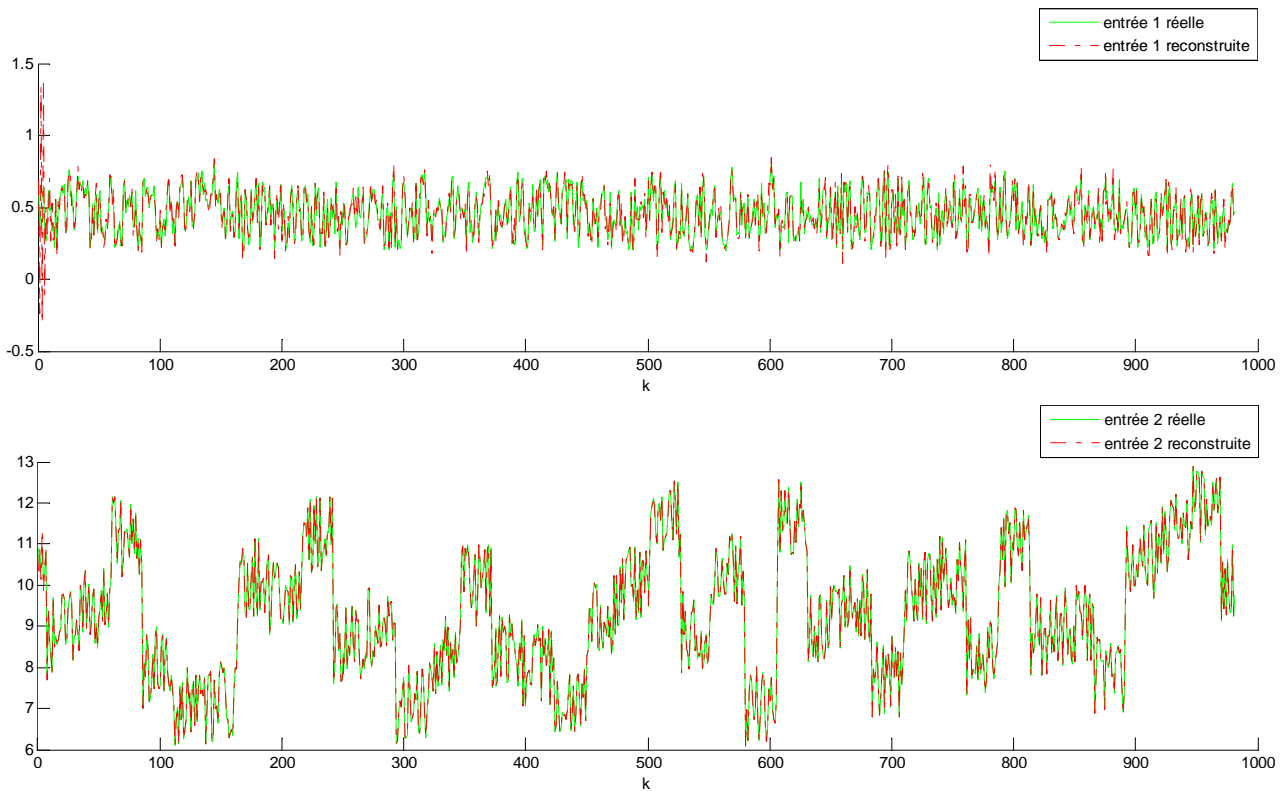


FIGURE 2.14 – Comparaison des entrées réelles et reconstruites en utilisant le système inversé et $v = 1$

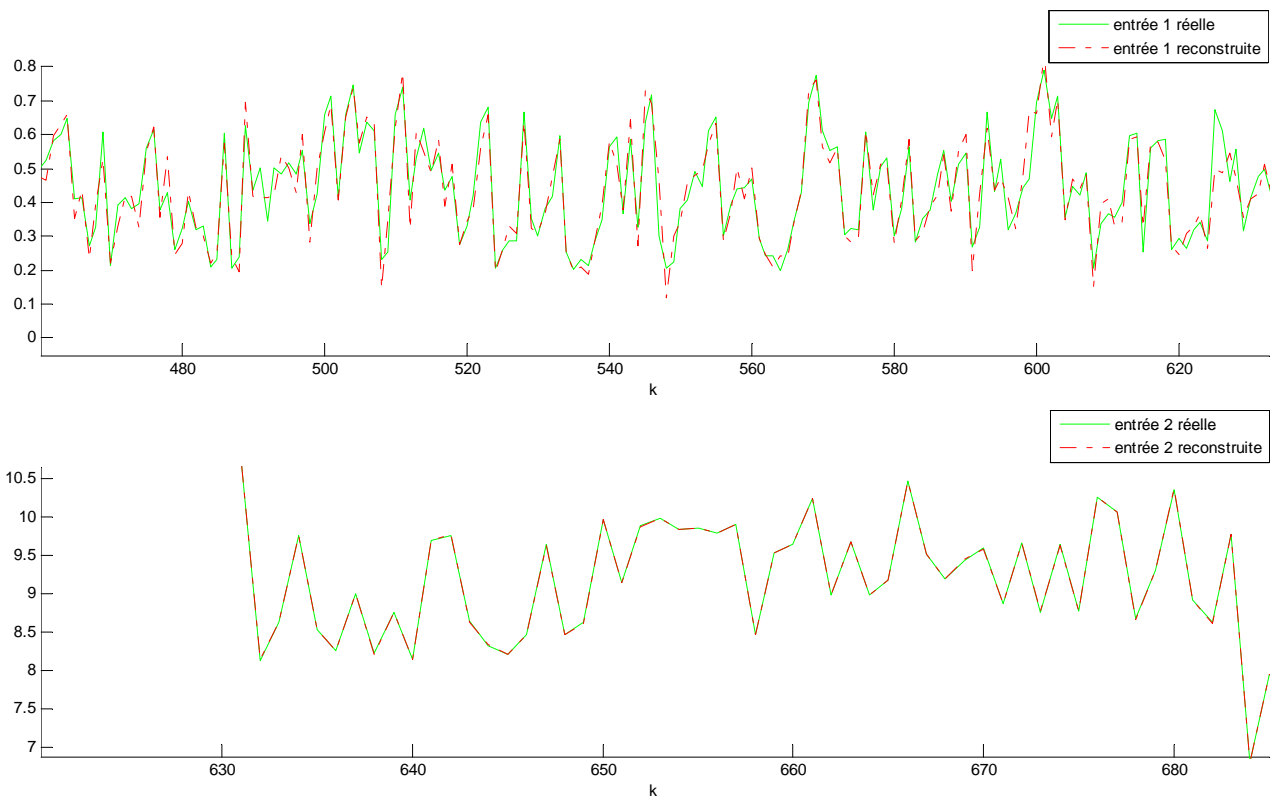


FIGURE 2.15 – Une zone de la comparaison des entrées réelles et reconstruites en utilisant le système inversé et $v = 1$

Construisons la matrice d'entrée $U_{1:L}^{a,*}$ constituée par des entrées collectées **hors ligne** telle que :

$$U_{1:L}^{a,*} = [u_1^* \dots u_L^*] \in \mathbb{R}^{m \times L} \quad (2.84)$$

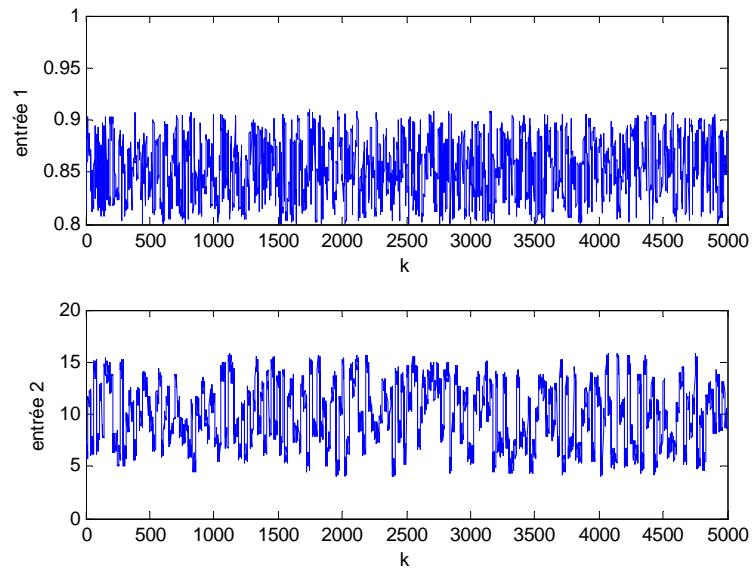


FIGURE 2.16 – Les entrées du système u_k

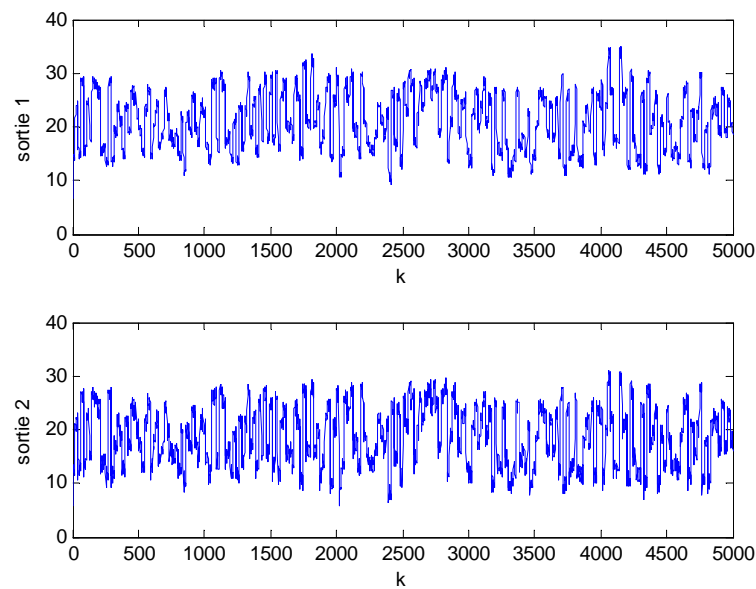


FIGURE 2.17 – Les sorties du système y_k

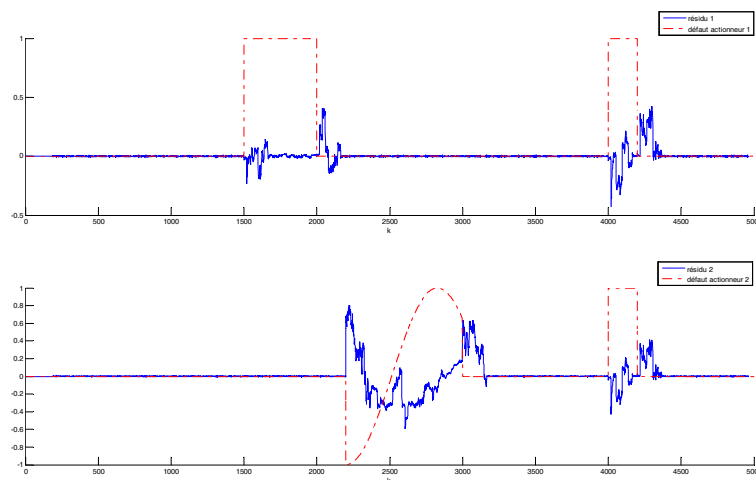


FIGURE 2.18 – Les résidus de détection et de localisation des défauts actionneurs

Soit la matrice de sortie constituée par des sorties collectées **hors ligne**

$$Y_{1:L}^{a,*} = \begin{bmatrix} y_1^* & \cdots & y_{L-1}^* & y_L^* \\ y_2^* & \cdots & y_L^* & y_{L+1}^* \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ y_{k-L+1+v}^* & \cdots & y_{L+i+v-1}^* & y_{L+i+v}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+i+1) \times L} \quad (2.85)$$

où $Y_{1:L}^{a,*}$ doit être de plein rang en ligne.

Soient \bar{Y}_k^a et \bar{U}_k^a les matrices construites par un mélange des données entrée-sortie collectées **en ligne** et **hors ligne** :

$$\bar{U}_k^a = [U_{1:L}^{a,*} | U_{k-L+1:k}^a] \in \mathbb{R}^{m \times 2L} \quad (2.86)$$

$$\bar{Y}_k^a = [Y_{1:L}^{a,*} | Y_{k-L+1:k}^a] \in \mathbb{R}^{\ell(v+i+1) \times 2L} \quad (2.87)$$

Soit la matrice $\Gamma_{\bar{Y}_k^a}$, construite comme suit :

$$\Gamma_{\bar{Y}_k^a} = \begin{bmatrix} \Gamma_k^a \\ I_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L \times L} \quad (2.88)$$

où $I_L \in \mathbb{R}^{L \times L}$ est la matrice identité, la matrice Γ_k^a est définie telle qu'on a :

$$\bar{Y}_k^a \Gamma_{\bar{Y}_k^a} = 0 \quad (2.89)$$

tel que l'entier L respecte la condition $L > \ell(v+i+1)$.

Soit $Z^L = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

Proposition 2.8 L'estimateur $\hat{f}_{a,k}$ est donné par :

$$\hat{f}_{a,k} = -\bar{\epsilon}_{a,k} Z^L \quad (2.90)$$

où le terme $\bar{\epsilon}_{a,k}$ est donné par :

$$\bar{\epsilon}_{a,k} = \bar{U}_k^a \Gamma_{\bar{Y}_k^a} \in \mathbb{R}^{m \times L} \quad (2.91)$$

L'estimation du défaut est possible si la matrice $Y_{1:L}^{a,*}$ est de plein rang en ligne.

L'estimation de défauts actionneurs est représentée graphiquement dans la figure 2.19.

La signification des symboles graphiques est donnée dans le tableau 2.4.

Démonstration. L'idée principale pour effectuer l'estimation des défauts actionneurs est d'imposer une structure particulière à la matrice $\Gamma_{\bar{Y}_k^a}$:

$$\Gamma_{\bar{Y}_k^a} = \begin{bmatrix} \Gamma_k^a \\ I_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2L \times L} \quad (2.92)$$

où la matrice Γ_k^a est telle que :

$$\bar{Y}_k^a \Gamma_{\bar{Y}_k^a} = 0 \quad (2.93)$$

Afin de montrer que le résidu peut être utilisé comme un estimateur des défauts multiples d'actionneurs, la forme d'évaluation du résidu $\bar{\epsilon}_{a,k}$ est étudiée dans deux cas : sans et avec défaut.

Soit $\delta_k^i = \bar{C} \bar{A}^i [x_1 \cdots x_L | x_{k-L+1-i} \cdots x_{k-i}] \Gamma_{\bar{Y}_k^a}$.

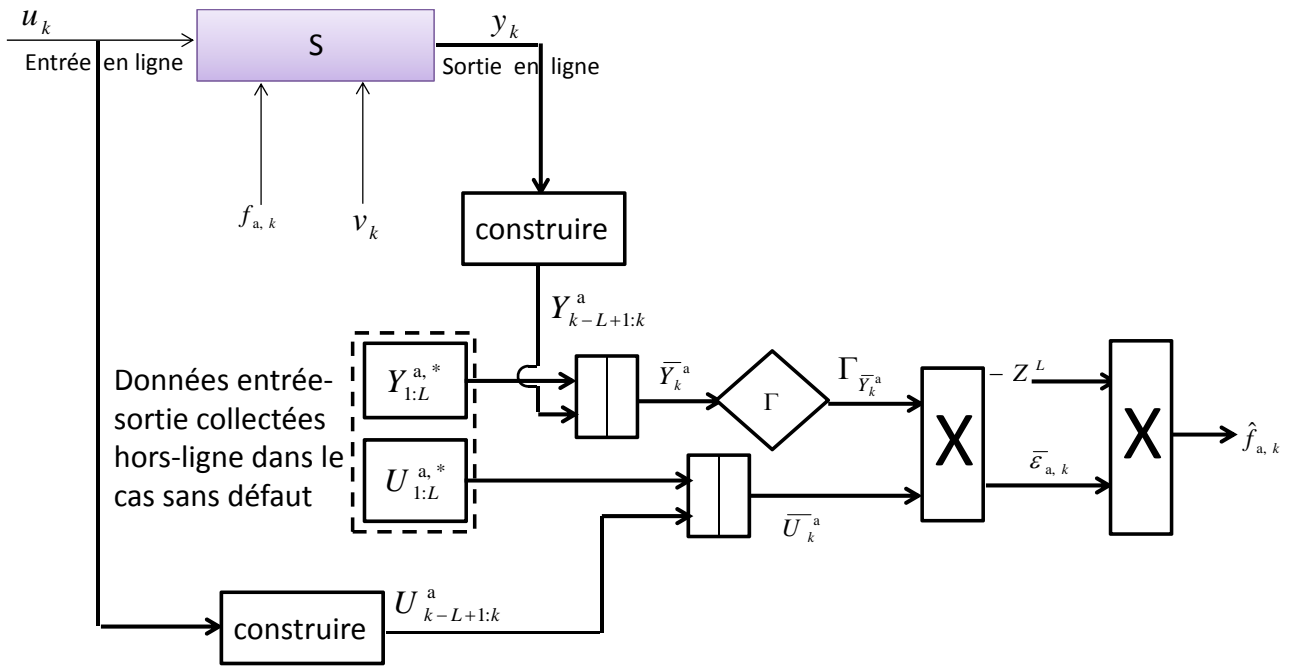


FIGURE 2.19 – Diagramme de génération de résidu par la MPD pour l'estimation de défauts actionneurs

– Cas sans défaut : Selon l'expression (2.93) et l'annexe B, on a

$$\bar{\epsilon}_{a,k} = \bar{U}_k^a \Gamma_{\bar{Y}_k^a} = \bar{H}_i \bar{Y}_k^a \Gamma_{\bar{Y}_k^a} + \delta_k^i \cong 0 \quad (2.94)$$

– Cas avec défauts multiples d'actionneurs :

Dans ce cas on suppose que le défaut actionneur se produit dans la fenêtre de temps $[k-L+1, k]$. La matrice de défaut $F_{a,k-L+1:k}$ est construite comme la matrice $U_{k-L+1:k}^a$, où

$$F_{a,k-L+1:k} = [f_{a,k-L+1} \ \cdots \ f_{a,k-1} \ f_{a,k}] \in \mathbb{R}^{m \times L} \quad (2.95)$$

La forme d'évaluation du résidu est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{a,k} &= \bar{U}_k^a \Gamma_{\bar{Y}_k^a} = (\bar{H}_i \bar{Y}_k^a - [0_{\ell \times L} | F_{a,k-L+1:k}]) \Gamma_{\bar{Y}_k^a} + \delta_k^i \\ &= \bar{H}_i \bar{Y}_k^a \Gamma_{\bar{Y}_k^a} - [0_{\ell \times L} | F_{a,k-L+1:k}] \Gamma_{\bar{Y}_k^a} + \delta_k^i \end{aligned} \quad (2.96)$$

L'équation (2.96) devient :

$$\bar{\epsilon}_{a,k} = - [0_{\ell \times L} | F_{a,k-L+1:k}] \Gamma_{\bar{Y}_k^a} + \delta_k^i \quad (2.97)$$

Sous l'hypothèse de la stabilité et selon l'annexe B, l'équation (2.97) est approximée comme suit :

$$\bar{\epsilon}_{a,k} \cong - [0_{\ell \times L} | F_{a,k-L+1:k}] \Gamma_{\bar{Y}_k^a} \quad (2.98)$$

En substituant l'expression (2.92) de $\Gamma_{\bar{Y}_k^a}$ dans l'équation (2.98), on obtient la forme d'évaluation suivante :

$$\bar{\epsilon}_{a,k} \cong - [0_{\ell \times L} | F_{a,k-L+1:k}] \begin{bmatrix} \Gamma_k^a \\ I_L \end{bmatrix} \cong -F_{a,k-L+1:k} + (0_{\ell \times L} \Gamma_k^a) \cong -F_{a,k-L+1:k} \quad (2.99)$$

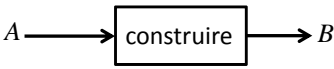

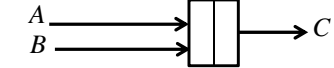
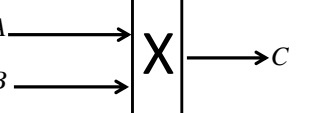
Les signes schématiques	Les significations
	B est construite à partir de A
	$B = \Gamma_A$
	$C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ Concaténation de A et B selon les colonnes
	$C = BA$

TABLE 2.4 – Signification des symboles graphiques

Selon l'expression (2.95) de $F_{a, k-L+1:k}$, on peut obtenir $f_{a, k}$ en sélectionnant la dernière colonne de $F_{a, k-L+1:k}$. Ceci est réalisé en multipliant l'expression (2.99) par le vecteur de sélection Z^L , d'où l'estimateur (2.90) de défauts capteurs donné dans la proposition.

Dans le tableau ci-après, on fait un parallèle entre les méthodes de génération de résidus pour l'estimation de défauts capteurs et actionneurs.

défauts capteurs	défauts actionneurs
$\widehat{f}_{s, k}$	$-\widehat{f}_{a, k}$
$\bar{\epsilon}_{s, k} = \bar{Y}_k^s \Pi \bar{U}_k^s$	$\bar{\epsilon}_{a, k} = \bar{U}_k^a \Pi \bar{Y}_k^a$
$U_{k-L+1:k}^s$	$U_{k-L+1:k}^a$
$Y_{k-L+1:k}^s$	$Y_{k-L+1:k}^a$
$U_{1:L}^{s,*}$	$U_{1:L}^{a,*}$
$Y_{1:L}^{s,*}$	$Y_{1:L}^{a,*}$
\bar{U}_k^s	\bar{U}_k^a
\bar{Y}_k^s	\bar{Y}_k^a

□

2.6 EXEMPLE D'APPLICATION : DIAGNOSTIC DE DÉFAUTS CAPTEURS ET ACTIONNEURS D'UN AVION

On considère un modèle dynamique linéarisé et discrétisé (avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.27$ sec) [136] de l'atterrissage et du décollage vertical d'un avion. Soit $x_k = [V_h \ V_v \ q \ \theta]^T$ (V_h : vitesse horizontale (nœuds), V_v : vitesse verticale (nœuds), q : vitesse angulaire du tangage ($^\circ$ /sec), θ : angle du tangage ($^\circ$)), $u_k = [\delta_c \ \delta_\ell]^T$ (δ_c : commande du tangage collective, δ_ℓ : commande du tangage cyclique longitudinale). Les

paramètres du modèle sont utilisés pour simuler le système et générer les sorties pour des entrées données, ces paramètres sont donnés par :

$$A = \begin{bmatrix} -1.6859 & -0.2019 & 0.0711 & 1.3591 \\ 14.0848 & 1.7412 & 1.4994 & -6.594 \\ 7.0449 & 0.7117 & -0.1333 & -5.2049 \\ 0 & 0 & 0.27 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.1194 & 0.0475 \\ 0.957 & -2.0499 \\ 1.4904 & 1.2123 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0.$$

Le modèle d'avion utilisé est stable puisque les valeurs propres sont à l'intérieur du cercle unité, ce qui vérifie l'hypothèse principale de la méthode proposée.

Ces paramètres sont utilisés uniquement pour générer les données entrées et sorties et ne seront pas utilisées pour la détection, la localisation et l'estimation des défauts.

2.6.1 Détection, localisation et estimation des défauts capteurs

2.6.1.1 Réglage de la MPD pour le diagnostic des défauts capteurs

Le critère $J(p)$ est calculé et tracé dans la figure 2.20.

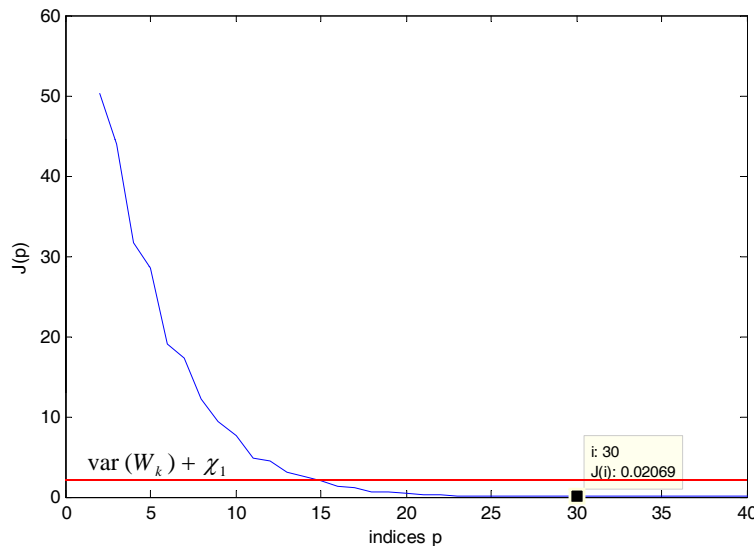


FIGURE 2.20 – Critère à minimiser $J(p)$

$J(p)$ est une fonction décroissante de p comme on peut le voir sur la figure 2.20. Deux parties peuvent être distinguées :

- Lorsque $p \leq p_0$, la fonction $J(p)$ décroît rapidement lorsque p augmente.
- Pour $p > p_0$, la fonction $J(p)$ varie légèrement.

L'entier $p_0 = 21$ représente la valeur minimale de p permettant de négliger la contribution de la condition initiale du système. i doit être choisi supérieur ou égal à cette valeur.

Par ailleurs, le choix de i conditionne le choix de L qui fixe la dimension du noyau à droite de la matrice de Hankel des entrées étendues. Or, le calcul de ce noyau étant effectué en ligne, il est important de conserver des dimensions raisonnables ($p_x = 40$). Ainsi, les paramètres de réglage sont choisis : $i = 30$ et $L = 152$.

2.6.1.2 Génération des entrées et des sorties du système avec des défauts capteurs

Les figures 2.21, 2.22 et 2.23 représentent les entrées constantes, de type créneau et bruitées d'un système d'avion. Le premier type d'entrées est le mieux adapté à un tel système, les deux autres entrées sont traitées pour illustrer le comportement du résidu dans ces cas de figures.

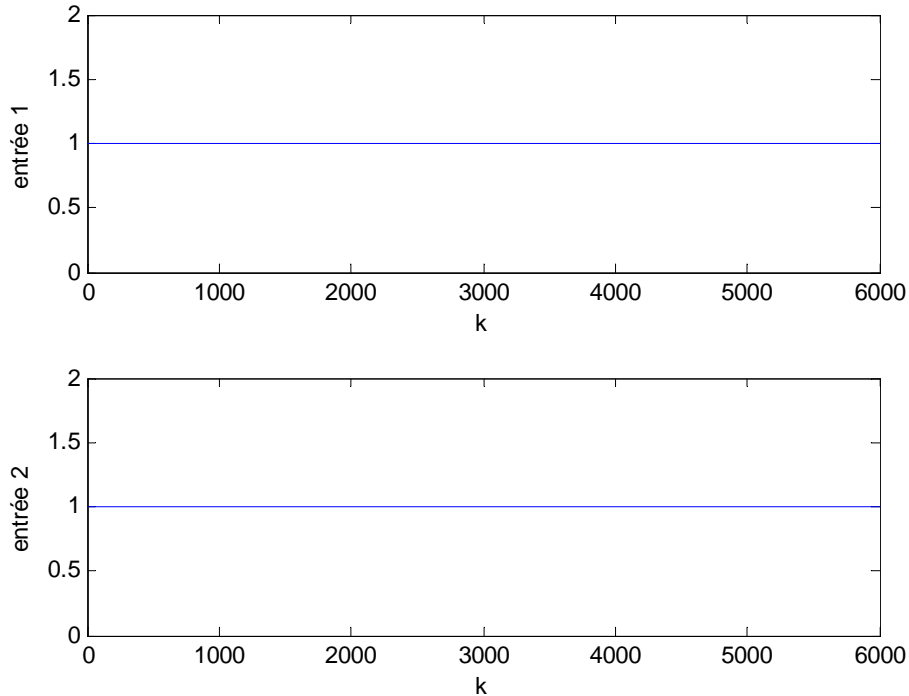


FIGURE 2.21 – Les entrées constantes du système u_k

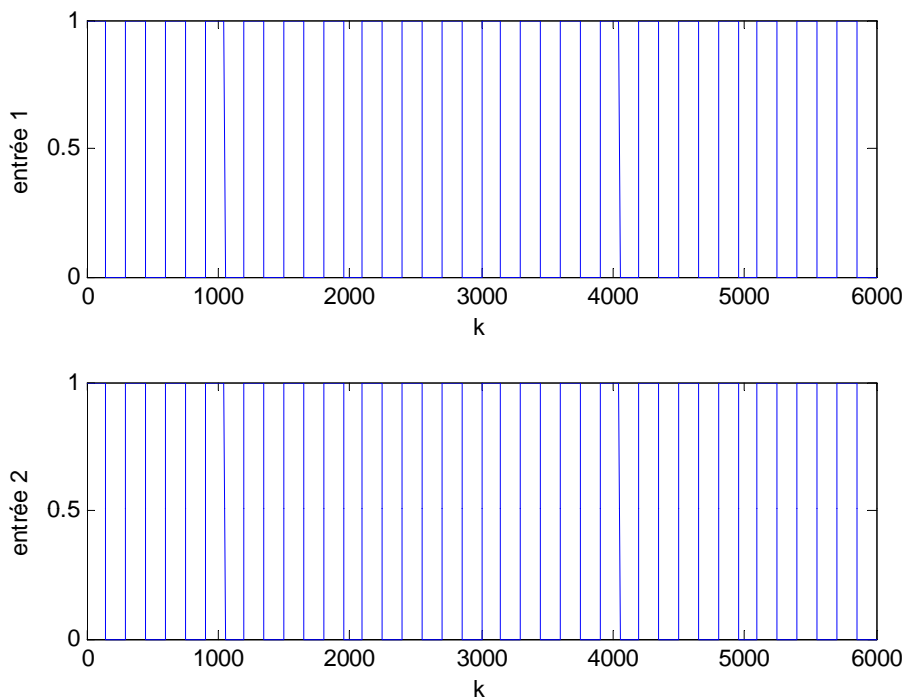


FIGURE 2.22 – Les entrées de type créneau du système u_k

Les figures 2.24, 2.25 et 2.26 représentent les sorties correspondantes aux entrées constantes, de type créneau et bruitées. Ces sorties sont générées après avoir intégré des défauts capteurs additifs, multiples, constants et variants dans le temps (voir la table 2.5).

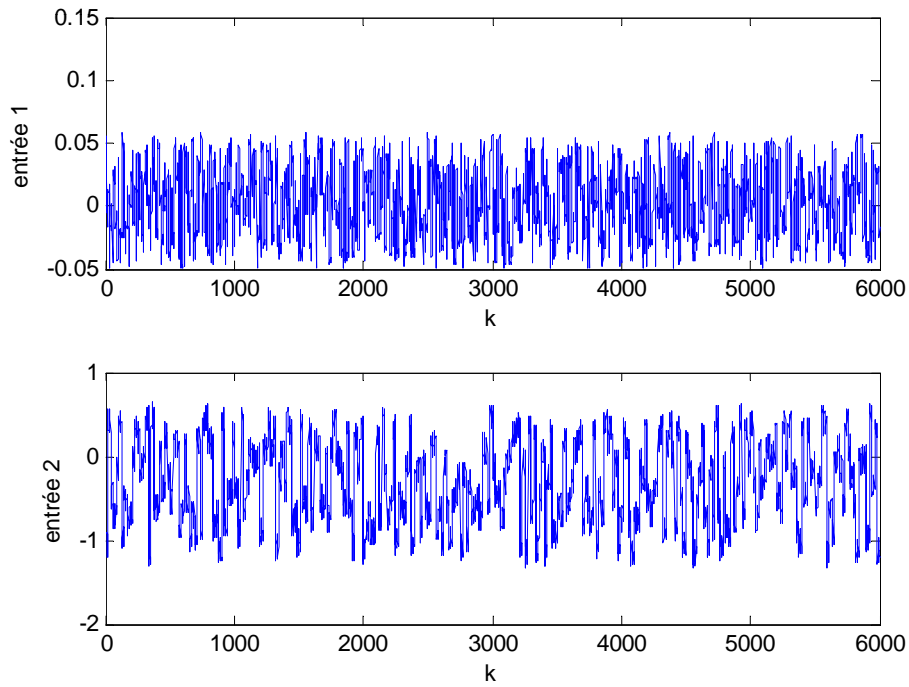


FIGURE 2.23 – Les entrées bruitées du système u_k

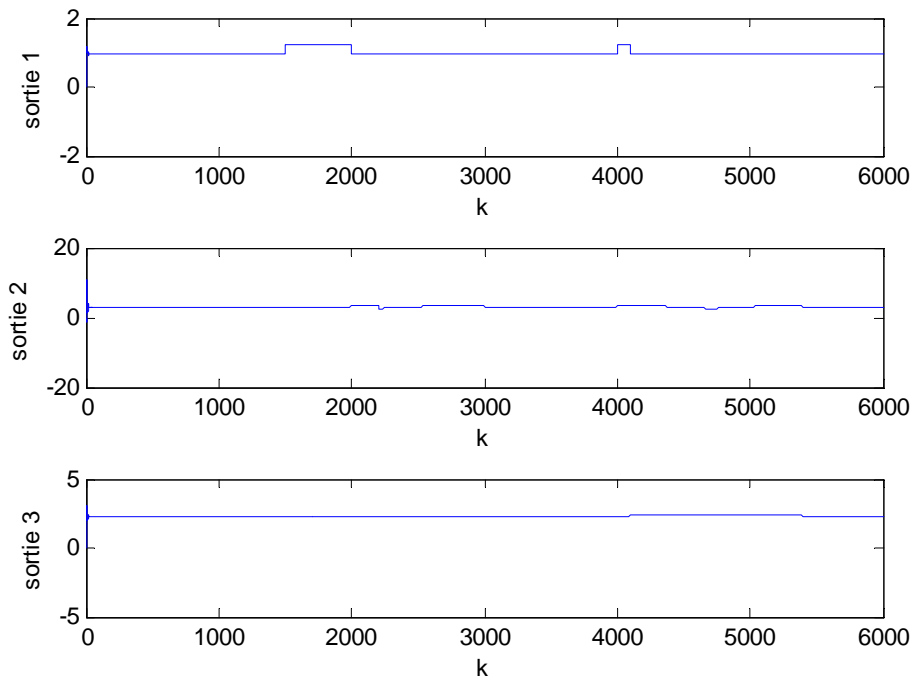
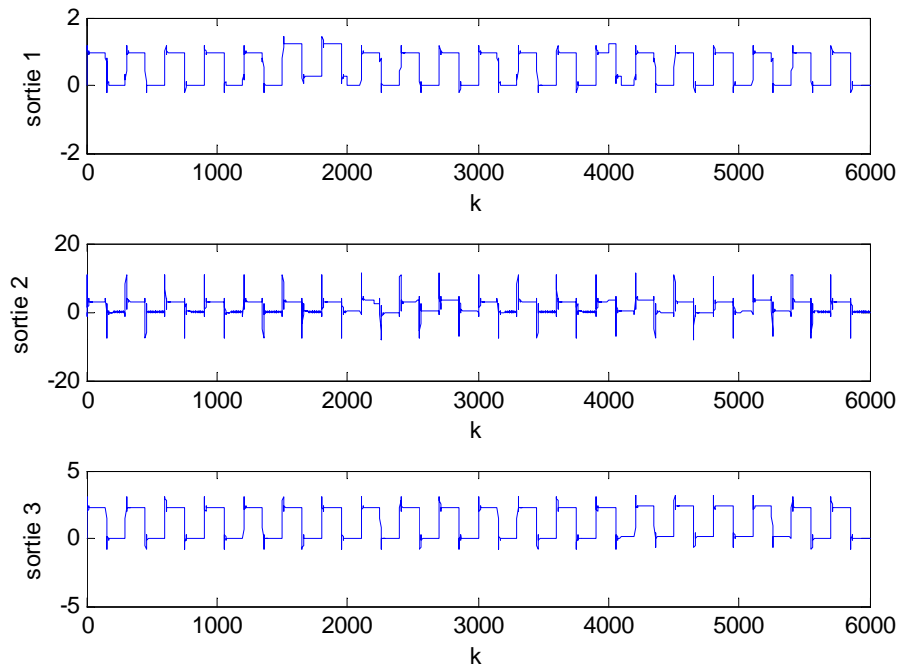
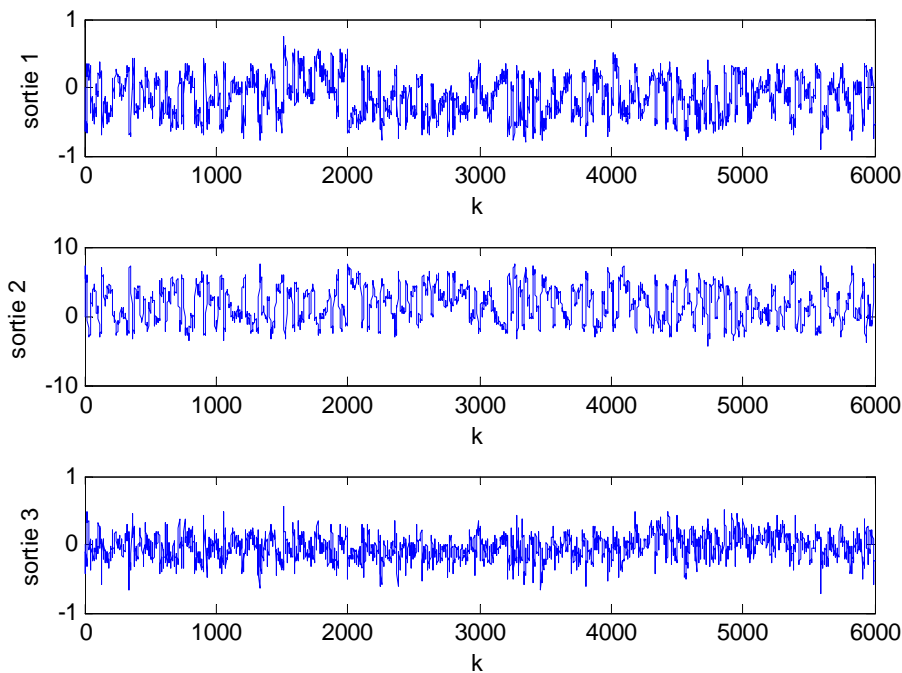


FIGURE 2.24 – Les sorties correspondantes aux entrées constantes y_k

k	$[1500, 2000[$	$[2000, 3000[$	$[4000, 4100[$	$[4100, 5400[$
défauts capteurs	capteur 1	capteur 2	capteurs 1, 2 et 3	capteurs 2 et 3

TABLE 2.5 – Défauts capteurs simulés

Ces données entrée-sortie collectées en ligne sont les seules données utilisées pour appliquer la méthode proposée. Les paramètres du modèle ne sont pas utilisés pour la détection des défauts.

FIGURE 2.25 – Les sorties correspondantes aux entrées de type créneau y_k FIGURE 2.26 – Les sorties correspondantes aux entrées bruitées y_k

2.6.1.3 Génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts capteurs

Les évolutions des résidus et des défauts pour les 3 types d'entrée sont représentées par les figures 2.27, 2.28 et 2.29.

Ces figures montrent que les résidus obtenus sont *sensibles* aux défauts *multiples*, *constants* et *variant dans le temps*, ces derniers peuvent être facilement détectés par une technique de décision appropriée. La *localisation* du défaut est immédiate grâce à la *structuration intrinsèque* du résidu.

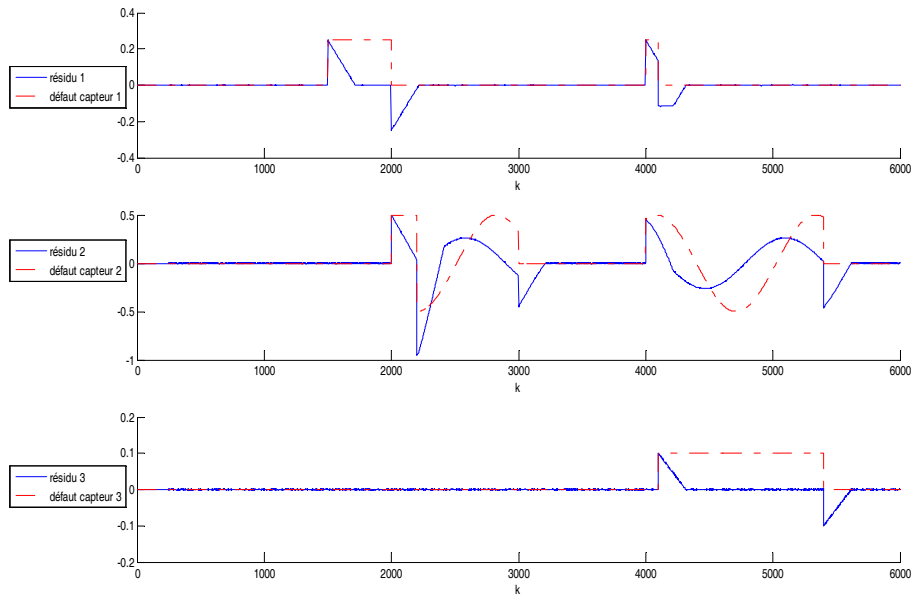


FIGURE 2.27 – Résidus dans le cas des entrées constantes $\epsilon_{s, k}$

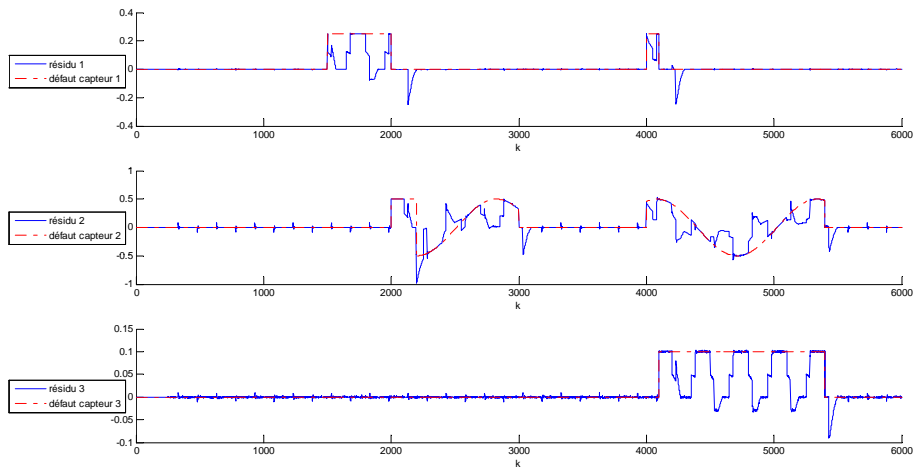


FIGURE 2.28 – Résidus dans le cas des entrées de type créneau $\epsilon_{s, k}$

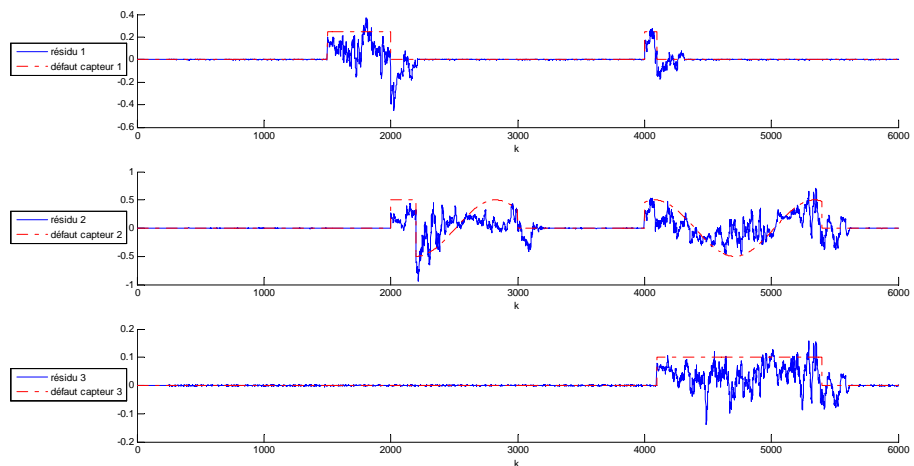


FIGURE 2.29 – Résidus dans le cas des entrées bruitées $\epsilon_{s, k}$

On peut remarquer dans la figure 2.27 que le résidu est sensible aux défauts même si les entrées ne sont pas persistantes. Dans le cas des défauts constants, seuls les instants d'apparition et de disparition du défaut sont détectés. Mais si les défauts sont variants dans le temps alors le résidu est sensible au défaut durant toute la présence du défaut.

2.6.1.4 Génération de résidus pour l'estimation de défauts capteurs

Les estimations des défauts pour les 3 types d'entrée sont représentées par les figures 2.30, 2.31 et 2.32.

Ces estimateurs utilisent en plus des données entrée-sortie collectées en ligne (voir la sous-section 2.6.1.2), des données entrée-sortie collectées hors ligne qui respectent les conditions d'estimabilité (voir la proposition 2.4).

Ces figures montrent que les estimateurs obtenus peuvent reconstruire des défauts *multiples, constants et variant dans le temps*, ces derniers peuvent être facilement améliorés par une technique de filtrage appropriée. La *localisation* du défaut est immédiate grâce à la structuration *intrinsèque* de l'estimateur.

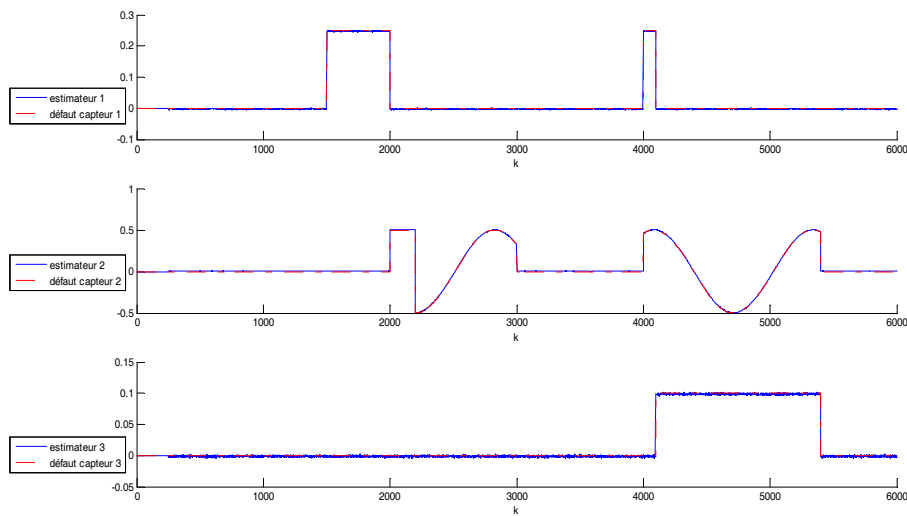


FIGURE 2.30 – Estimateurs dans le cas des entrées constantes $\hat{f}_{s, k}$

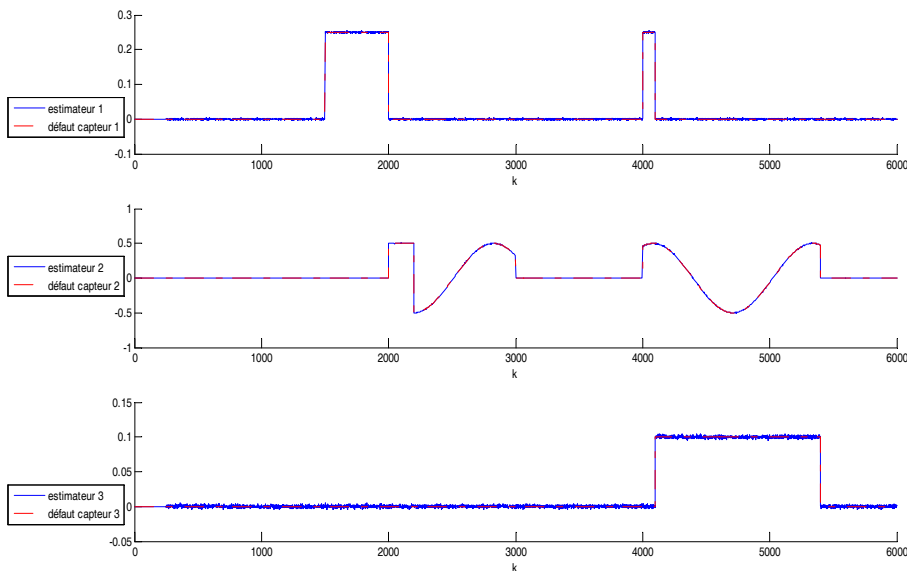


FIGURE 2.31 – Estimateurs dans le cas des entrées de type créneau $\hat{f}_{s, k}$

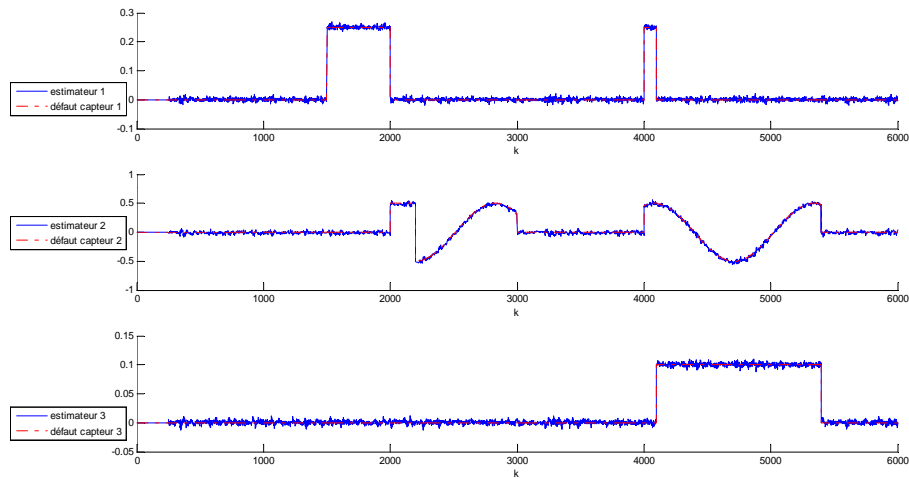


FIGURE 2.32 – Estimateurs dans le cas des entrées bruitées $\hat{f}_{s, k}$

2.6.2 Détection, localisation et estimation des défauts actionneurs

2.6.2.1 Génération des entrées et des sorties du système avec des défauts actionneurs

On prend $i = 7$, $v = 8$ et $L = 128$.

Les figures 2.33, 2.35 et 2.37 représentent les entrées constantes, de type créneau et bruitées d'un système d'avion. Le premier type d'entrées est le mieux adapté à un tel système, mais les deux autres types d'entrées sont traités pour illustrer le comportement du résidu dans ces cas de figures.

Les figures 2.34, 2.36 et 2.38 représentent les sorties correspondantes aux entrées constantes, de type créneau et bruitées. Ces sorties sont générées après avoir intégré des défauts actionneurs additifs, multiples, constants et variants dans le temps (voir la table 2.6).

k	[1500, 2000[[2200, 3000[[4000, 4200[
défauts actionneurs	actionneur 1	actionneur 2	actionneurs 1 et 2

TABLE 2.6 – Défauts actionneurs simulés

Ces données entrée-sortie collectées en ligne sont les seules données utilisées pour appliquer la méthode proposée. Les paramètres du modèle ne sont pas utilisés pour la détection des défauts capteurs.

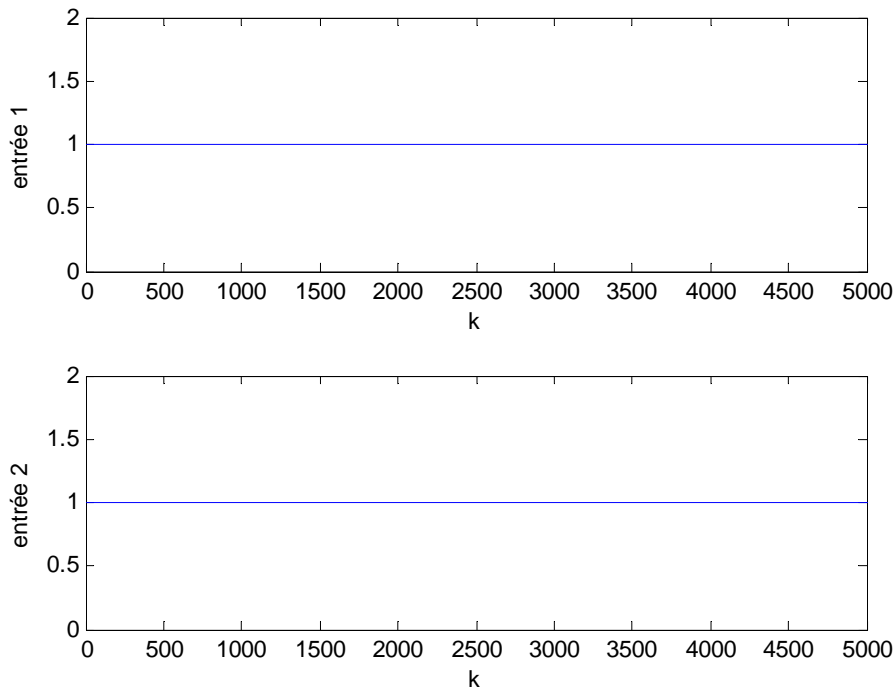
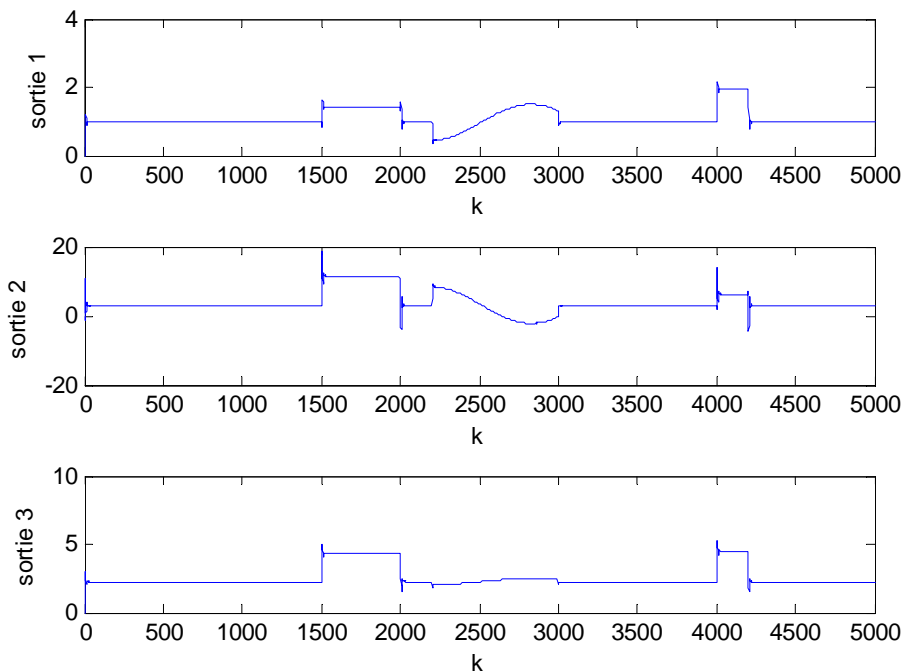
2.6.2.2 Génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts actionneurs

Les évolutions des résidus et des défauts pour les 3 types d'entrée sont représentées par les figures 2.39, 2.41 et 2.43.

Ces résidus sont générés en utilisant seulement les données entrée-sortie collectées en ligne qui sont représentées dans la sous-section 2.6.2.1.

Ces figures montrent que les résidus obtenus sont *sensibles* aux défauts *multiples, constants et variant dans le temps*, ces derniers peuvent être facilement détectés par une technique de décision appropriée. La *localisation* du défaut est immédiate grâce à la structuration *intrinsèque* du résidu.

Dans ce cas de figure 2.39, un défaut actionneur constant qui apparaît à l'instant $k = 1500$ et un défaut actionneur variant dans le temps qui apparaît à l'instant $k = 2200$ n'ont pas été détectés. Afin de chercher l'origine de cette *non détection* de défaut, une projection

FIGURE 2.33 – Les entrées constantes du système u_k FIGURE 2.34 – Les sorties correspondantes aux entrées constantes y_k

de la matrice des défauts sur l'orthogonal des sorties est calculée et représentée dans la figure 2.40.

Selon la figure 2.40, on peut voir que la non détection est expliquée par le fait que la condition de la détectabilité des défauts n'est pas vérifiée : $\text{span}(F_{a, k}) \not\subset \text{span}(Y_k^a)$ (voir l'expression (2.77) de la proposition 2.6).

Dans ce cas de figure, un défaut actionneur constant qui apparaît à l'instant $k = 1500$ et un défaut actionneur variant dans le temps qui apparaît à l'instant $k = 2200$ n'ont pas été détectés. Afin de chercher l'origine de cette *non détection* de défaut, une projection de la matrice des défauts sur l'orthogonal des sorties est calculée et représentée dans la figure 2.42.

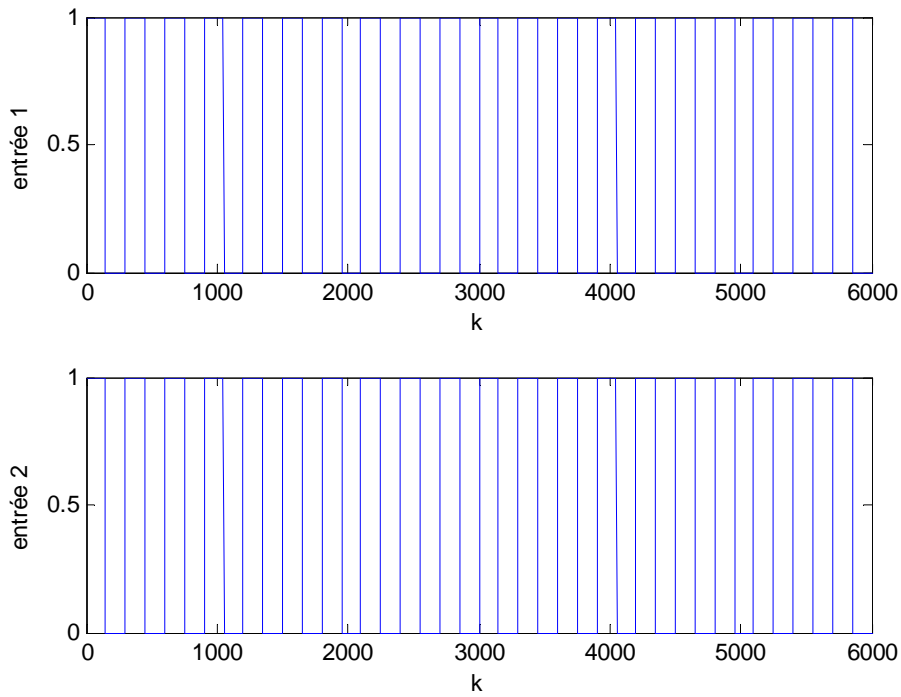


FIGURE 2.35 – Les entrées de type créneau du système u_k

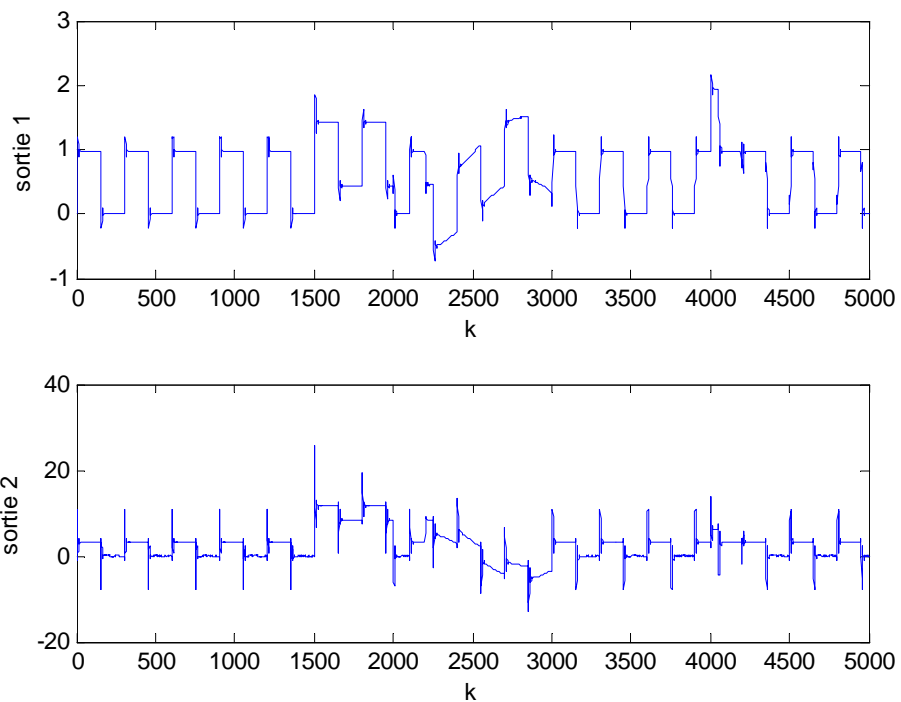
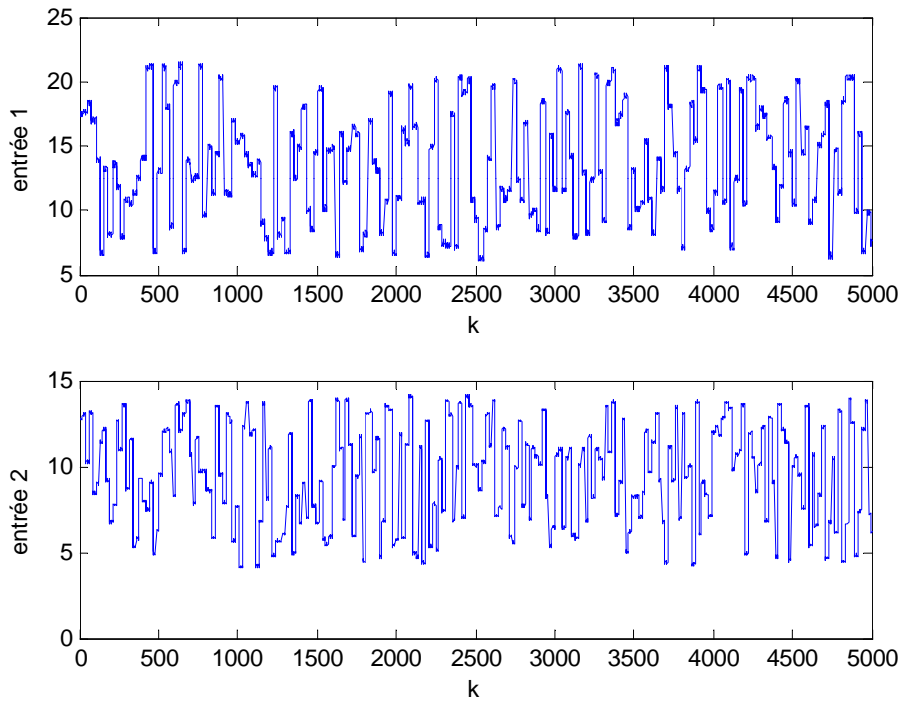
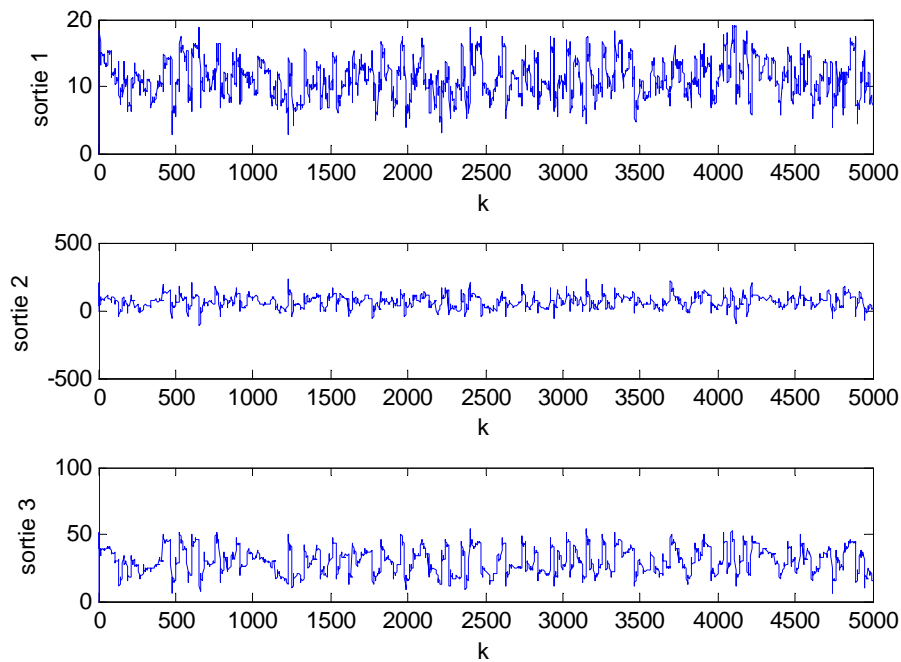


FIGURE 2.36 – Les sorties correspondantes aux entrées de type créneau y_k

Selon la figure 2.42, on peut voir que la non détection est expliquée par le fait que la condition de la détectabilité des défauts n'est pas vérifiée : $\text{span}(F_{a, k}) \subset \text{span}(Y_k^a)$ (voir l'expression (2.77) de la proposition 2.6).

Dans le cas des entrées bruitées, le problème de la non détection des défauts n'est pas présent.

FIGURE 2.37 – Les entrées bruitées du système u_k FIGURE 2.38 – Les sorties correspondantes aux entrées bruitées y_k

2.6.2.3 Génération de résidus pour l'estimation de défauts actionneurs

Les estimations des défauts pour les 3 types d'entrée sont représentées par les figures 2.44, 2.45 et 2.46.

Ces estimateurs sont générés en utilisant en plus des données entrée-sortie collectées en ligne (voir la sous-section 2.6.2.1), des données entrée-sortie collectées hors ligne qui respectent les conditions d'estimabilité (voir la proposition 2.8).

Ces figures montrent que les estimateurs obtenus peuvent reconstruire des défauts multiples, constants et variant dans le temps, ces derniers peuvent être facilement améliorés

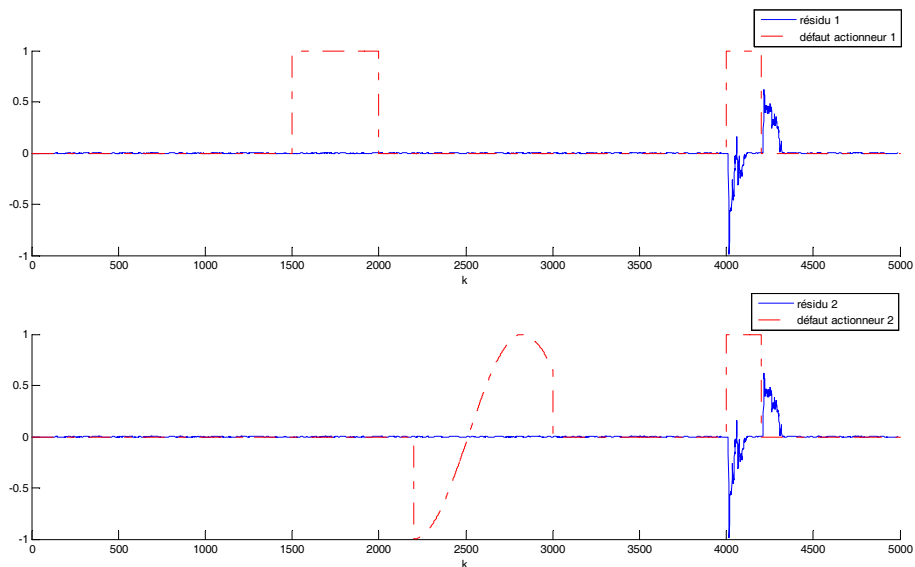


FIGURE 2.39 – Résidus dans le cas des entrées constantes $\epsilon_{a, k}$

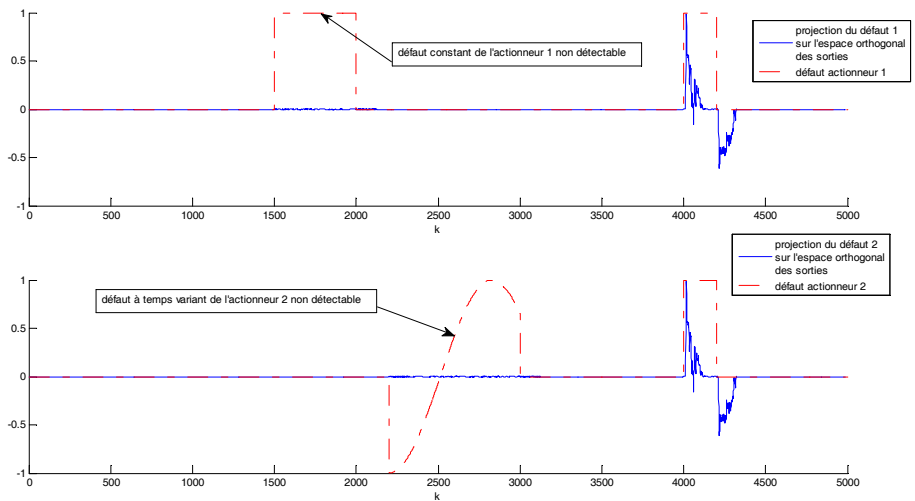


FIGURE 2.40 – Projection de la matrice des défauts sur l'orthogonal des sorties dans le cas des entrées constantes $F_{a, k} \Pi_k^a$

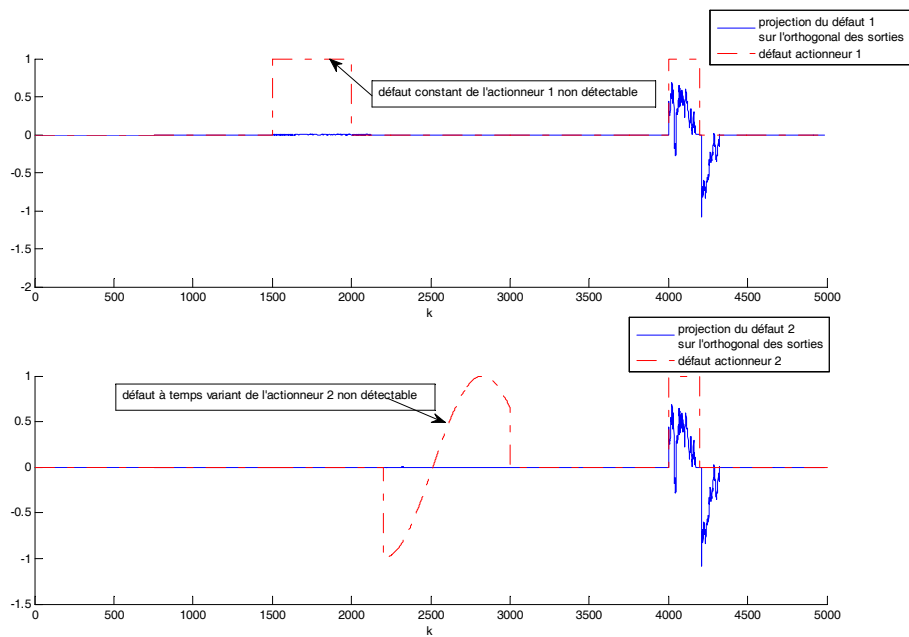
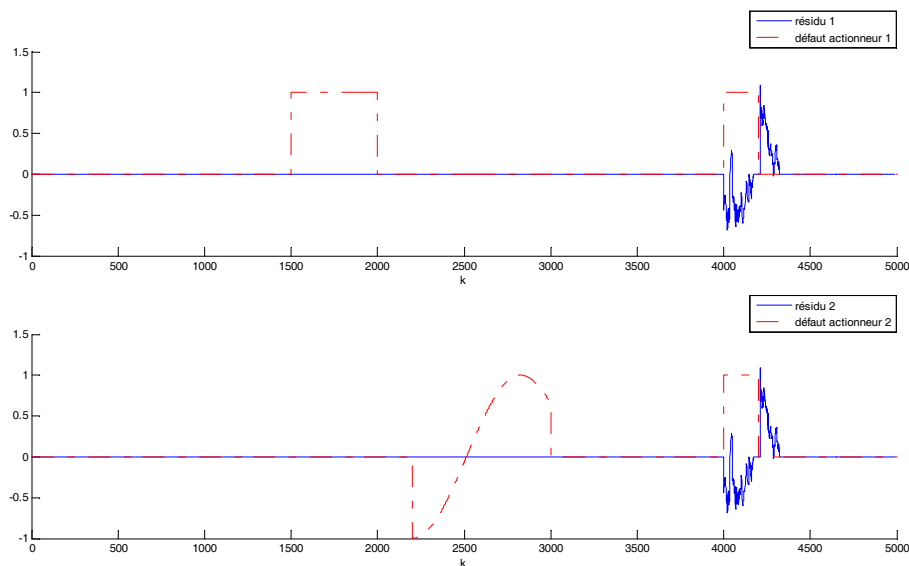
par une technique de filtrage appropriée. La *localisation* du défaut est immédiate grâce à la structuration *intrinsèque* de l'estimateur.

Le problème de la non détection des défauts rencontré lors du calcul des résidu générés dans la sous section 2.6.2.2 n'est pas présent en intégrant des données hors ligne.

CONCLUSION

Dans ce chapitre on a proposé une Méthode de Projection des Données (MPD) pour la détection, la localisation et l'estimation des défauts des défauts capteurs et actionneurs pour des systèmes de structure linéaire. Pour le diagnostic de défauts capteurs, elle s'appuie sur la projection d'une matrice des sorties sur l'espace orthogonal d'une matrice des entrées convenablement construite. Dans le cas de défauts actionneurs, sous l'hypothèse d'inversibilité du système, on démontre que le problème de diagnostic est dual du problème de diagnostic de défauts capteurs.

Les avantages de la méthode proposée sont les suivants :

FIGURE 2.41 – Résidus dans le cas des entrées de type créneau $\epsilon_{a, k}$ FIGURE 2.42 – Projection de la matrice des défauts sur l'orthogonal des sorties dans le cas des entrées de type créneau $F_{a, k} \Pi_{Y_k^a}$

- Seule la structure du modèle (supposée linéaire ici) est connue, l'estimation des paramètres ou de l'état du système n'est pas nécessaire.
- Aucune connaissance préalable sur l'évolution dynamique du défaut n'est nécessaire.
- Les défauts de capteurs ou d'actionneurs, défauts simples, multiples ou simultanés peuvent être considérés.
- La procédure de localisation du défaut est directement accomplie par la construction de résidus structurés.
- Seules les données d'entrée-sortie collectées en ligne sont utilisées pour la détection et la localisation des défauts.
- Seules des données d'entrée-sortie collectées hors ligne sur le cas sans défaut et les données d'entrée-sortie collectées en ligne sont utilisées pour l'estimation des défauts.

Dans ce chapitre, les systèmes de structure linéaire ont été considérés, or la plupart des systèmes sont non linéaires. Le chapitre suivant vise à étendre cette méthode à une classe des systèmes non linéaires à savoir les systèmes bilinéaires.

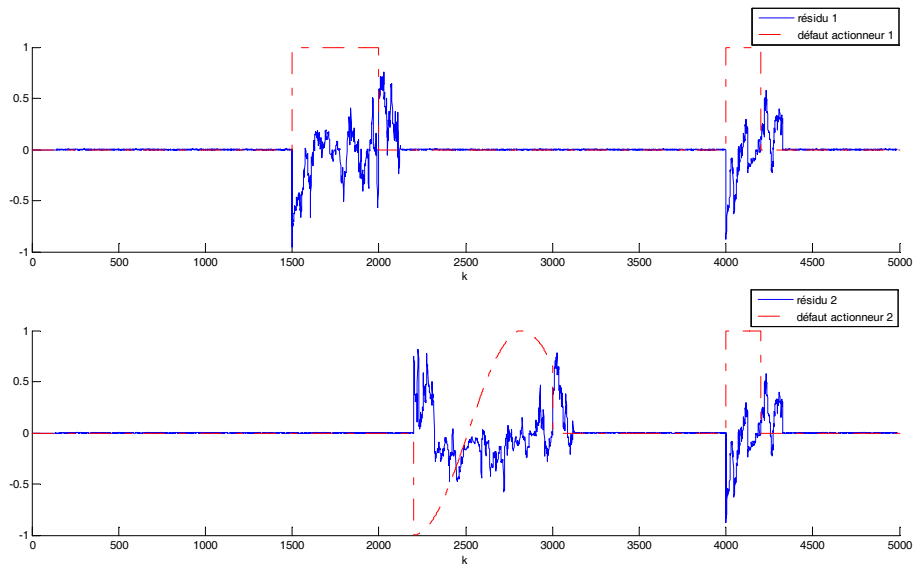


FIGURE 2.43 – Résidus dans le cas des entrées bruitées $\epsilon_{a, k}$

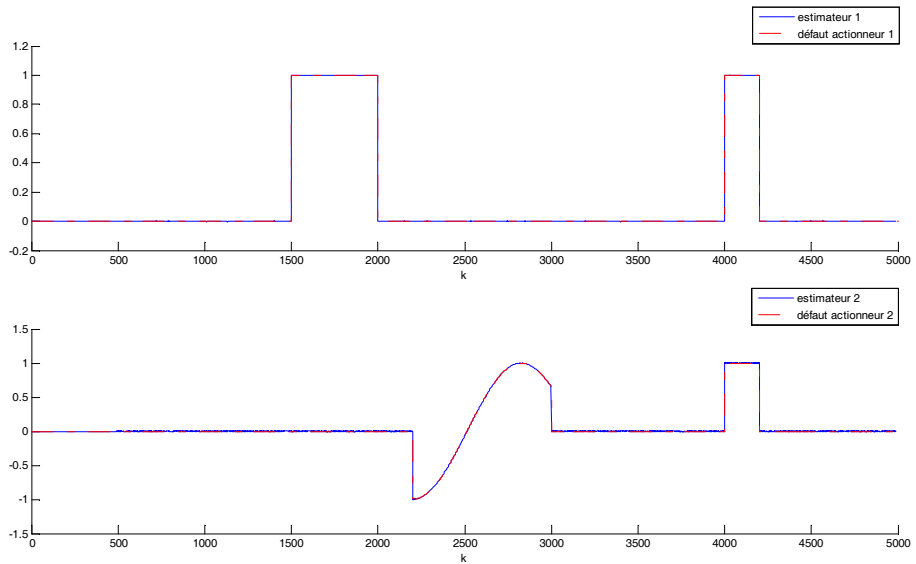


FIGURE 2.44 – Estimateurs dans le cas des entrées constantes $\hat{f}_{a, k}$

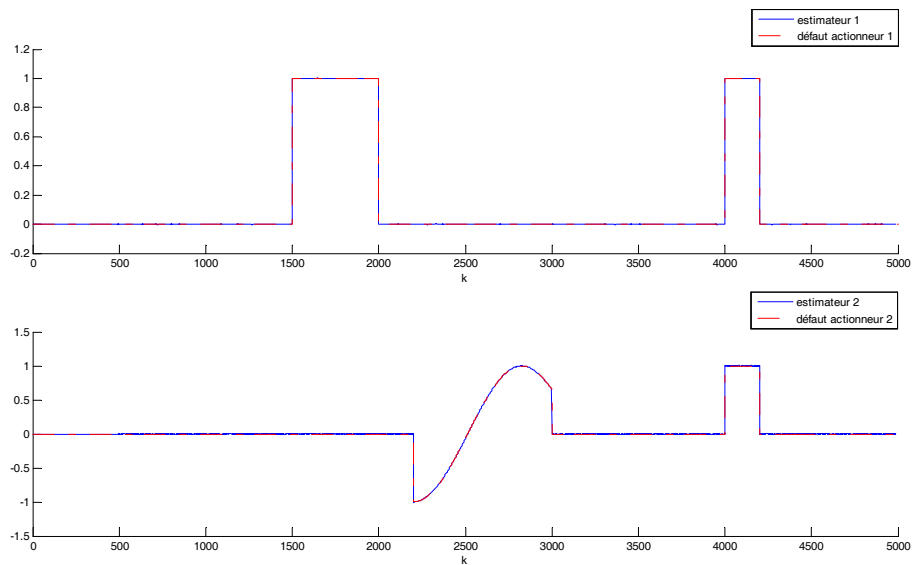


FIGURE 2.45 – Estimateurs dans le cas des entrées de type créneau $\hat{f}_{a, k}$

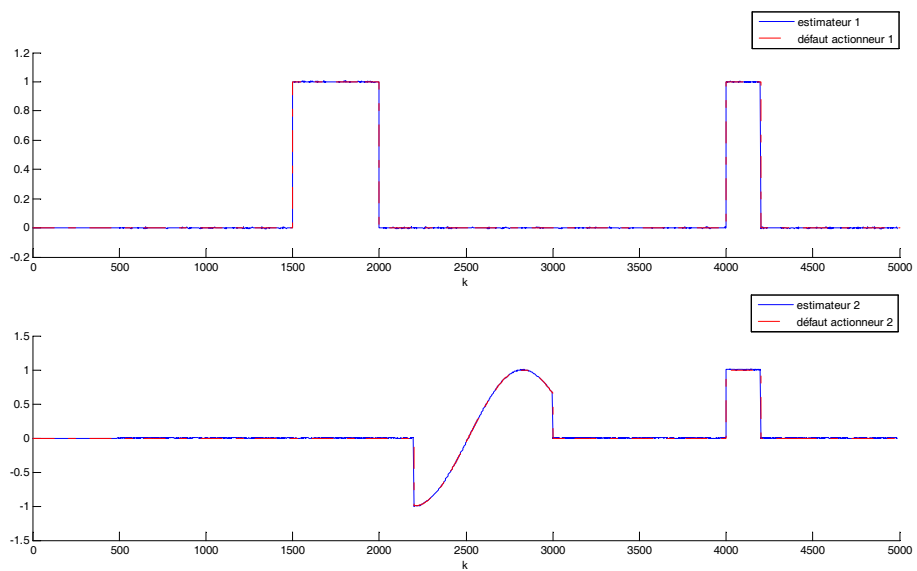


FIGURE 2.46 – Estimateurs dans le cas des entrées bruitées $\hat{f}_{a, k}$

MPD POUR LA DÉTECTION ET LA LOCALISATION DES DÉFAUTS CAPTEURS DANS LES SYSTÈMES BILINÉAIRES

SOMMAIRE

3.1	PROBLÉMATIQUE	76
3.2	DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS	77
3.2.1	Génération du résidu	77
3.2.2	Analyse du résidu	83
3.3	CRITÈRE POUR LE CALCUL DU RÉSIDU MPD	86
3.4	EXEMPLE D'ILLUSTRATION	88
3.4.1	Génération des entrées et des sorties du système avec des défauts capteurs .	89
3.4.2	Génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts capteurs	89
3.4.3	Comparaison entre les résidus dans le cas sans défaut	90
	CONCLUSION	91

Les systèmes bilinéaires représentent une classe particulière de systèmes non linéaires qui a été étudiée à partir des années 1960. Cette classe représente une généralisation des systèmes linéaires [88].

Les motivations incitant à l'étude de tels systèmes sont nombreuses. Ces systèmes non linéaires, proches des systèmes linéaires, sont parmi les plus simples à étudier. De nombreux processus industriels, biologiques ou économiques admettent des modèles mathématiques bilinéaires ([84], [92], [87], [88], [86]), tels les systèmes écologiques, nucléaires, hydrauliques et échangeurs thermiques ([131], [130], [15], [85]). Par ailleurs, l'approximation d'un système non linéaire autour d'un point de fonctionnement est plus précise en considérant une approximation bilinéaire (bilinéarisation) qu'une linéarisation. Enfin, certaines techniques de commande (gain variable par exemple) d'un système linéaire peuvent le rendre bilinéaire en boucle fermée et améliorer certaines de ses performances. Un système non linéaire peut être approché par un système bilinéaire, en utilisant une somme finie de la série de Volterra ([15], [57], [28], [50]). Des conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un système dynamique bilinéaire équivalent d'un système non linéaire contrôlé, où son contrôle apparaît linéairement, sont établies dans [75]. L'étude des propriétés de ces systèmes a fait l'objet de nombreux travaux ([15], [59], [14], [27], [31], [65]). Les problèmes de détection de défauts pour les systèmes bilinéaires ont été largement étudiés ([132], [128], [127], [9], [129], [124], [79]). Un certain nombre d'approches à base d'observateurs

représentent une extension des approches à base d'observateurs linéaires. Il existe deux approches principales pour la conception des observateurs bilinéaires. La première approche [38] utilise la méthode de Lyapunov. La deuxième approche est basée sur l'utilisation de techniques développées pour les observateurs linéaires à entrées inconnues ([124], [130], [126]). L'idée de base est de traiter les termes non linéaires comme des perturbations et découpler leurs effets des résidus ou d'erreur de l'estimation d'état en utilisant un observateur à entrée inconnue. Cela permet d'éviter la complexité de la conception des observateurs bilinéaires ([15], [59], [14], [27], [31], [65]). Bien que le système soit bilinéaire, l'observateur pour estimer l'état est effectivement linéaire. Cette approche a été étudiée par [46] pour les systèmes bilinéaires sans considérer des entrées inconnues et elle a été ensuite étendue par [42] pour les systèmes bilinéaires avec des entrées inconnues. En dehors de l'étude menée par [9] qui utilise la méthode de Lyapunov, la plupart des autres études [49] sur des systèmes bilinéaires sont basées sur les extensions des observateurs à entrée inconnue développés dans [42].

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la méthode de génération de résidus par projection des données développée dans le chapitre précédent pour les systèmes linéaires, aux systèmes bilinéaires, pour la détection et la localisation des défauts capteurs. Dans un deuxième temps, cette méthode de génération de résidu est adaptée pour remédier au problème de complexité de calculs. Enfin, des résultats de simulation d'un exemple académique sont présentés.

Les avantages de la méthode proposée sont les suivants :

- Seule la structure du modèle (bilinéaire) est connue, l'estimation des paramètres ou de l'état du système n'est pas nécessaire.
- Aucune connaissance préalable sur l'évolution dynamique du défaut n'est nécessaire.
- Des défauts simples, multiples ou simultanés peuvent être envisagés.
- La procédure de localisation du défaut est directement accomplie par la construction de résidus structurés.
- Seules les données entrée-sortie collectées en ligne sont utilisées pour la détection et la localisation des défauts.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 3.1, le système à diagnostiquer est décrit. Dans la section 3.2, la MPD est détaillée pour la détection et la localisation des défauts multiples de capteurs. Dans la section 3.3, un critère de réduction de calcul est proposé pour pouvoir implémenter plus facilement la MPD en ligne. Dans la section 3.4, un exemple académique est présenté pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.

3.1 PROBLÉMATIQUE

Considérons le système dynamique bilinéaire à temps discret décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + G(x_k \otimes u_k) + Bu_k \\ y_k = Cx_k + f_{s, k} + w_k \end{cases} \quad (3.1)$$

où \otimes représente le produit de Kronecker (voir annexe A.1), $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times nm}$. Les vecteurs $u_k \in \mathbb{R}^m$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ sont respectivement les entrées, l'état et les sorties du système. Les sorties du système sont affectées par un bruit coloré centré $w_k \in \mathbb{R}^\ell$ et le vecteur $f_{s, k} \in \mathbb{R}^\ell$ est le vecteur de défauts capteurs.

Remarque 3.1 *La différence entre les systèmes dynamiques linéaires et bilinéaires vient de l'existence de la matrice G dans le cas bilinéaire alors que cette matrice est nulle dans les systèmes dynamiques linéaires.*

Objectifs et hypothèses

Etant donné le système décrit par les équations (3.1) l'objectif est la détection et la localisation de défauts multiples de capteurs sous les hypothèses suivantes.

1. les matrices A, B, C, D, G sont *inconnues*,
2. la matrice d'état A et les sous-matrices $G_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de $G = [G_1|G_2|\dots|G_m]$ pour $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ sont stables,
3. les seules informations dont on dispose sont les mesures u_k et y_k des entrées et des sorties du système.

3.2 DÉTECTION ET LOCALISATION DE DÉFAUTS MULTIPLES DE CAPTEURS

Dans cette section, la Méthode de Projection des Données (MPD) est étendue aux systèmes de type (3.1) pour détecter et localiser les défauts capteurs. Cette méthode projette une matrice de sorties du système sur une matrice des entrées convenablement construite.

3.2.1 Génération du résidu

Par des substitutions répétées de l'équation (3.1), on obtient l'expression suivante dont la preuve par récurrence est donnée en annexe C.3 :

$$y_k = CA^i x_{k-i} + H_i \bar{u}_{k,i} + \tilde{H}_i \tilde{u}_{k,i} + \overline{\overline{H}}_i^k(x_{k-i}) \bar{u}_{k,i} + \tilde{\tilde{H}}_i^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k,i} + f_{s,k} + w_k \quad (3.2)$$

Les termes qui construisent l'expression de la sortie dans (3.2) sont définis ci-après :

1. La matrice des paramètres de Markov H_i de degré i est donnée par :

$$H_i = [CA^{i-1}B | \dots | CB | D] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} \quad (3.3)$$

2. Le vecteur des entrées $\bar{u}_{k,i}$ construit par les entrées collectées en ligne sur une fenêtre de temps de taille i est donné par :

$$\bar{u}_{k,i} = (u_{k-i}^T \ u_{k-i+1}^T \ \dots \ u_k^T)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1} \quad (3.4)$$

3. Le vecteur des entrées $\tilde{u}_{k,i} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_i \times 1}$ où $\mathcal{M}_i = \sum_{\alpha=0}^{i-2} m^{i-\alpha} C_i^{i-\alpha}$, ce vecteur est construit avec toutes les combinaisons possibles d'entrées sur une fenêtre temporelle de taille i (il y a \mathcal{K}_i^i combinaisons possibles, où $\mathcal{K}_i^\beta = \sum_{\alpha=2}^{\beta} C_i^\alpha$ avec $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$, et on note

$\mathcal{K}_i^\beta = \mathcal{K}_i$ quand $\beta = i$), est donné par :

$$\tilde{u}_{k,i} = \left[\begin{array}{c} \text{les combinaisons de 2 termes} \\ \underbrace{\left(\underline{\Xi}_{a=2}^i u_{k-a} \otimes \left(\underline{\Xi}_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right)} \\ \text{les combinaisons de 3 termes} \\ \underbrace{\left(\underline{\Xi}_{b=3}^i u_{k-b} \otimes \left(\underline{\Xi}_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\underline{\Xi}_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right)} \\ \vdots \\ \text{les combinaisons de } q \text{ termes} \\ \left(\underline{\Xi}_{p=q}^i u_{k-p} \otimes \left(\underline{\Xi}_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\underline{\Xi}_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\underline{\Xi}_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right) \\ \vdots \\ \text{la combinaison de } i \text{ termes} \\ \underbrace{u_{k-i} \otimes \cdots \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1}} \end{array} \right] \quad (3.5)$$

où l'opérateur de concaténation Ξ des entrées en vecteur colonne est défini par

$$\underline{\Xi}_{p=q}^r u_{k-p} = \begin{bmatrix} u_{k-q} \\ u_{k-q-1} \\ \vdots \\ u_{k-r+1} \\ u_{k-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r-q+1 \times 1} \text{ et le produit de Kronecker par bloc pour les}$$

$$\text{entrées est défini par } \left(\underline{\Xi}_{p=q}^s u_{k-p} \otimes \left(\underline{\Xi}_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \right) \right) = \begin{bmatrix} u_{k-q} \\ u_{k-q-1} \\ \vdots \\ u_{k-s+1} \\ u_{k-s} \end{bmatrix} \otimes \left(\begin{bmatrix} \underline{\Xi}_{r=q-1}^{q-1} u_{k-r} \\ \underline{\Xi}_{r=q-1}^q u_{k-r} \\ \vdots \\ \underline{\Xi}_{r=q-1}^{s-2} u_{k-r} \\ \underline{\Xi}_{r=q-1}^{s-1} u_{k-r} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} u_{k-q} \otimes \underline{\Xi}_{r=q-1}^{q-1} u_{k-r} \\ u_{k-q-1} \otimes \underline{\Xi}_{r=q-1}^q u_{k-r} \\ \vdots \\ u_{k-s+1} \otimes \underline{\Xi}_{r=q-1}^{s-2} u_{k-r} \\ u_{k-s} \otimes \underline{\Xi}_{r=q-1}^{s-1} u_{k-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{k-q} \otimes u_{k-q+1} \\ u_{k-q-1} \otimes \begin{bmatrix} u_{k-q+1} \\ u_{k-q} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ u_{k-s+1} \otimes \begin{bmatrix} u_{k-q+1} \\ u_{k-q} \\ \vdots \\ u_{k-s+2} \end{bmatrix} \\ u_{k-s} \otimes \begin{bmatrix} u_{k-q+1} \\ u_{k-q} \\ \vdots \\ u_{k-s+1} \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\text{où } u_c \otimes \begin{bmatrix} u_a \\ u_{a+1} \\ \vdots \\ u_{b-1} \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_c \otimes u_a \\ u_c \otimes u_{a+1} \\ \vdots \\ u_c \otimes u_{b-1} \\ u_c \otimes u_b \end{bmatrix}.$$

Exemple 3.1 Le vecteur $\tilde{u}_{k,3}$ est donné par : $\tilde{u}_{k,3} = \begin{bmatrix} u_{k-2} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1} \end{bmatrix}$.

Une autre explication sur la construction de $\tilde{u}_{k,i}$ peut être trouvée en annexe D.1.

4. La matrice \tilde{H}_i est donnée par :

$$\tilde{H}_i = [C\bar{V}_{1,i}(B \otimes I) | C\bar{V}_{2,i}(B \otimes I) | \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i,i}(B \otimes I)] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i} \quad (3.6)$$

$$\text{où } \bar{V}_{p,i} = A^{\rho_1(p)} G^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-2} (A \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &\leq i-1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Exemple 3.2 La matrice \tilde{H}_3 est donnée par :

$$\tilde{H}_3 = [CG(B \otimes I_m) | CG(A \otimes I_m)(B \otimes I_m) | CAG(B \otimes I_m) | CG(G \otimes I_m)(B \otimes I_{m^2})].$$

5. La matrice $\overline{\overline{H}}_i^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\overline{\overline{H}}_i^k(x_{k-i}) = [CA^{i-1}G(x_{k-i} \otimes I_m) | \cdots | CAG(A \otimes I_m)^{i-2}(x_{k-i} \otimes I_m) | CG(A \otimes I_m)^{i-1}(x_{k-i} \otimes I_m) | 0_{\ell \times m}] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} \quad (3.8)$$

6. La matrice $\tilde{\tilde{H}}_i^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\tilde{\tilde{H}}_i^k(x_{k-i}) = [C\tilde{V}_{1,i}(x_{k-i} \otimes I) | C\tilde{V}_{2,i}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i,i}(x_{k-i} \otimes I)] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i} \quad (3.9)$$

$$\text{où } \tilde{V}_{p,i} = A^{\rho_1(p)} G^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-1} (A \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &= i \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Exemple 3.3 La matrice \tilde{H}_3^k est donnée par :

$$\tilde{H}_3^k(x_{k-3}) = \begin{bmatrix} CG(G \otimes I_m)(A \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | CG(A \otimes I_m)(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | \\ CAG(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | CG(G \otimes I_m)(G \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^3}) \end{bmatrix}.$$

Après avoir explicité l'expression de la sortie (3.2), on va faire disparaître l'influence de l'état et réduire la taille des matrices utilisées pour le calcul du résidu, et cela en introduisant la matrice δ_k^{i, i_1} qui contient les termes qui seront négligés dans la suite :

$$\delta_k^{i, i_1} = CA^i x_{k-i} + \overline{H}_i^k(x_{k-i}) \bar{u}_{k, i} + \tilde{H}_i^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k, i} + \tilde{H}_i^{i_1} \tilde{u}_{k, i}^{i_1} \quad (3.11)$$

L'entier i_1 est introduit ($i_1 < i$) pour réduire la complexité de calcul. On montre par la suite que certains termes de (3.2), dépendant uniquement des entrées (indépendants de l'état), peuvent être négligés. Ces termes sont regroupés dans $\tilde{H}_i^{i_1} \tilde{u}_{k, i}^{i_1}$.

Pour $i_1 < i$, l'expression de y_k donnée par l'équation (3.2) peut être ré-écrite comme suit :

$$\begin{aligned} y_k &= H_i \bar{u}_{k, i} + \tilde{H}_{i_1} \tilde{u}_{k, i_1} + f_{s, k} + w_k + \delta_k^{i, i_1} \\ &= \begin{bmatrix} H_i | \tilde{H}_{i_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{k, i} \\ \tilde{u}_{k, i_1} \end{bmatrix} + f_{s, k} + w_k + \delta_k^{i, i_1} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Les nouveaux termes qui apparaissent dans l'expression de la sortie dans (3.12) sont définis ci-après :

$$1. \tilde{u}_{k, i_1} = \left[\begin{array}{c} \text{les combinaisons de 2 termes} \\ \overbrace{\sum_{a=2}^{i_1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right)} \\ \text{les combinaisons de 3 termes} \\ \overbrace{\sum_{b=3}^{i_1} u_{k-b} \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right)} \\ \vdots \\ \text{les combinaisons de } q \text{ termes} \\ \overbrace{\left(\sum_{p=q}^{i_1} u_{k-p} \otimes \left(\sum_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right)} \\ \vdots \\ \text{la combinaison de } i_1 \text{ termes} \\ \overbrace{u_{k-i_1} \otimes \cdots \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_{i_1} \times 1}.$$

Exemple 3.4 Pour $i = 3$ et $i_1 = 2$, le vecteur $\tilde{u}_{k, 2}$ est donné par : $\tilde{u}_{k, 2} = u_{k-2} \otimes u_{k-1}$.

$$\begin{aligned} 2. \tilde{H}_{i_1}^k(x_{k-i}) &= \left[C\tilde{V}_{1, i}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{C}_i^2, i}(x_{k-i} \otimes I) | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^2+1, i}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | \right. \\ &C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^2+\mathcal{C}_i^3, i}(x_{k-i} \otimes I) | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^3+1, i}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^3+\mathcal{C}_i^4, i}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | \\ &\left. C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^{i-1}+1, i}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^{i-1}+\mathcal{C}_i^i, i}(x_{k-i} \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_{i_1}}. \end{aligned}$$

Exemple 3.5 Pour $i = 3$ et $i_1 = 2$, la matrice $\tilde{H}_2^k(x_{k-3})$ est donnée par :

$$\tilde{H}_2^k(x_{k-3}) = CG(G \otimes I_m)(A \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^2}).$$

$$3. \tilde{u}_{k,i}^{i_1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \text{les combinaisons de 2 termes} \\ \underbrace{\sum_{a=i_1+1}^i u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right)} \\ \text{les combinaisons de 3 termes} \\ \underbrace{\sum_{b=i_1+1}^i u_{k-b} \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right)} \\ \vdots \\ \text{les combinaisons de } q \text{ termes} \\ \left(\sum_{p=i_1+1}^i u_{k-p} \otimes \left(\sum_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right) \\ \vdots \\ \text{les combinaisons de } i_1 \text{ termes} \\ \left(\sum_{p=i_1+1}^i u_{k-p} \otimes \left(\sum_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right) \\ \text{les combinaisons de } i_1+1 \text{ termes} \\ \left(\sum_{p=i_1+1}^i u_{k-p} \otimes \left(\sum_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right) \\ \text{les combinaisons de } i_1+2 \text{ termes} \\ \left(\sum_{p=i_1+2}^i u_{k-p} \otimes \left(\sum_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right) \\ \text{les combinaisons de } i_1+3 \text{ termes} \\ \left(\sum_{p=i_1+3}^i u_{k-p} \otimes \left(\sum_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right) \\ \vdots \\ \text{les combinaisons de } i \text{ termes} \\ \underbrace{u_{k-i} \otimes \cdots \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i_1} \times 1}. \end{array}$$

Le nombre des combinaisons qui construisent $\tilde{u}_{k,i}^{i_1}$ est $\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i_1}$.

Exemple 3.6 Pour $i = 3$ et $i_1 = 2$, le vecteur $\tilde{u}_{k,3}^2$ est donné par : $\tilde{u}_{k,3}^2 =$

$$\begin{bmatrix} u_{k-3} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1} \end{bmatrix}.$$

$$4. \tilde{H}_{i_1+1:i}^k(x_{k-i}) = \left[C\tilde{V}_{\mathcal{C}_{i_1+1,i}^2}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^2}(x_{k-i} \otimes I) | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^2+\mathcal{C}_{i_1+1,i}^3}(x_{k-i} \otimes I) \right. \\ \left. | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^3}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1-1}+\mathcal{C}_{i_1+1,i}^{i_1}}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | \right. \\ \left. C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1}}(x_{k-i} \otimes I) | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1+1}}(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | C\tilde{V}_{\mathcal{K}_i}(x_{k-i} \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i_1}}.$$

Exemple 3.7 Pour $i = 3$ et $i_1 = 2$, la matrice $\tilde{H}_{3:3}^k(x_{k-3})$ est donnée par :

$$\tilde{H}_{3:3}^k(x_{k-3}) = \left[CG(A \otimes I_m)(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | \right. \\ \left. CAG(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | CG(G \otimes I_m)(G \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^3}) \right].$$

$$5. \tilde{H}_{i_1} = \left[C\bar{V}_{1,i}(B \otimes I) | \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{C}_{i_1,i}^2}(B \otimes I) | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^2+1,i}(B \otimes I) | \cdots | \right. \\ \left. C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^2+\mathcal{C}_{i_1,i}^3}(B \otimes I) | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^3+1,i}(B \otimes I) | \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^3+\mathcal{C}_{i_1,i}^4}(B \otimes I) | \cdots | \right. \\ \left. C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1-1+1,i}}(B \otimes I) | \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1-1+\mathcal{C}_{i_1,i}^{i_1}}}(B \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_{i_1}}.$$

Exemple 3.8 Pour $i = 3$ et $i_1 = 2$, la matrice \tilde{H}_2 est donnée par : $\tilde{H}_2 = CG(B \otimes I_m)$.

$$6. \tilde{H}_{i_1+1:i} = \left[C\bar{V}_{\mathcal{C}_{i_1+1,i}^2}(B \otimes I) | \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^2}(B \otimes I) | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^2+\mathcal{C}_{i_1+1,i}^3}(B \otimes I) | \right. \\ \left. \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^3}(B \otimes I) | \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1-1}+\mathcal{C}_{i_1+1,i}^{i_1}}(B \otimes I) | \cdots | \right. \\ \left. C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1}}(B \otimes I) | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i^{i_1+1}}(B \otimes I) | \cdots | C\bar{V}_{\mathcal{K}_i}(B \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i_1}}.$$

Exemple 3.9 Pour $i = 3$ et $i_1 = 2$, la matrice \tilde{H}_3^2 est donnée par :

$$\tilde{H}_{3:3}^k = \left[CG(A \otimes I_m)(B \otimes I_m) | CAG(B \otimes I_m) | CG(G \otimes I_m)(B \otimes I_{m^2}) \right].$$

Remarque 3.2 Les contraintes sur les deux entiers i_1 et i sont

1. $i_1 < i$,
2. i apparaît dans les termes avec $\bar{u}_{k,i} \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$, i est choisi suffisamment grand pour être en mesure de négliger la contribution de l'état initial.
3. i_1 apparaît dans les termes avec $\tilde{u}_{k,i_1} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_{i_1} \times 1}$, i_1 est choisi pas trop grand pour être en mesure de calculer le résidu (contrainte de complexité).

Par concaténation de l'expression (3.12) selon les colonnes sur une fenêtre temporelle de taille L qui respecte la condition $L > m(i+1) + \mathcal{M}_{i_1}$ pour que $\dim \text{span}(\Pi_{\underline{U}_k^s}^T) > 0$ (i.e. voir expression (4.105) de l'annexe A.9), on obtient la relation matricielle d'entrée-sortie suivante :

$$Y_k^s = \left[H_i | \tilde{H}_{i_1} \right] \underline{U}_k^s + F_{s,k} + W_k + \Delta_k^{i,i_1} \quad (3.13)$$

Les matrices d'entrée-sortie \underline{U}_k^s et Y_k^s sont définies par :

$$\underline{U}_k^s = \begin{bmatrix} \bar{u}_{k-L+1, i} & \cdots & \bar{u}_{k-1, i} & \bar{u}_{k, i} \\ \tilde{u}_{k-L+1, i_1} & \cdots & \tilde{u}_{k-1, i_1} & \tilde{u}_{k, i_1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(i+1)+\mathcal{M}_{i_1} \times L} \quad (3.14)$$

$$Y_k^s = [y_{k-L+1} \quad \cdots \quad y_{k-1} \quad y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (3.15)$$

Avec une matrice qui contient les termes qui seront négligés dans la suite

$$\Delta_k^{i, i_1} = \left[\delta_{k-L+1}^{i, i_1} | \cdots | \delta_{k-1}^{i, i_1} | \delta_k^{i, i_1} \right].$$

Les matrices de défauts capteurs $F_{s, k}$ et de bruits de mesures W_k sont construites comme la matrice Y_k^s dans l'expression (3.15) en utilisant f_s et w respectivement au lieu de y .

Le résidu basé sur la projection des données pour la détection et la localisation des défauts multiples de capteurs est obtenu en multipliant l'équation (3.13) à droite par $\Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L$. Le résidu est alors donné par l'expression suivante :

$$\epsilon_{s, k}^{\otimes} = Y_k^s \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L = \underbrace{[H_i | \tilde{H}_{i_1}] \underline{U}_k^s \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L}_{=0} + F_{s, k} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L + W_k \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L + \Delta_k^{i, i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L.$$

Deux formes importantes pour ce résidu, la forme de calcul et la forme d'évaluation sont données dans la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Le résidu $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$ dont la forme de calcul est donnée par :*

$$\epsilon_{s, k}^{\otimes} = Y_k^s \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell} \quad (3.16)$$

à la forme d'évaluation suivante

$$\epsilon_{s, k}^{\otimes} = F_{s, k} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L + W_k \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L + \Delta_k^{i, i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L \quad (3.17)$$

3.2.2 Analyse du résidu

3.2.2.1 Analyse de la sensibilité du résidu aux défauts capteurs

1. Aucun défaut capteur n'est présent ($f_{s, k} = 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$ est donnée par la relation suivante :

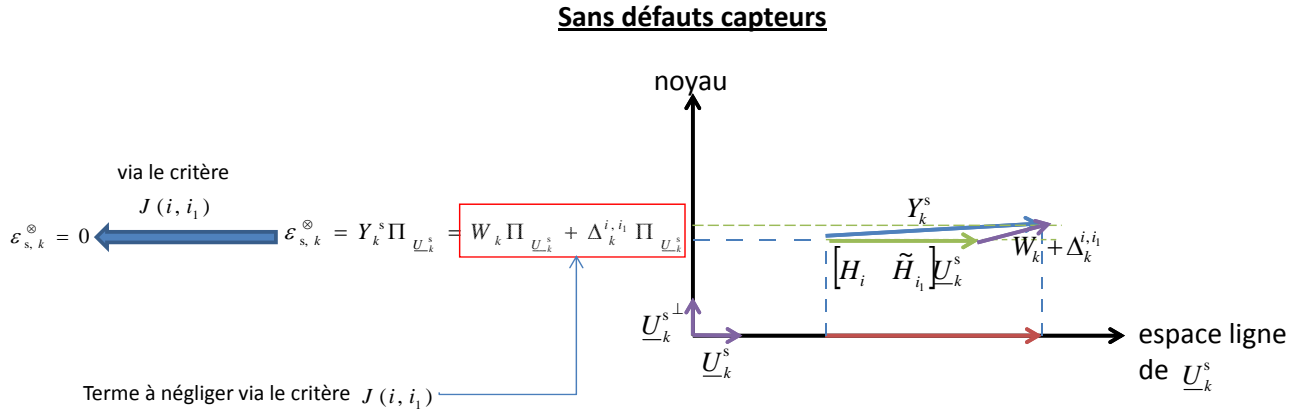
$$E[\epsilon_{s, k}^{\otimes}] = E[W_k \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L] + E[\Delta_k^{i, i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L] \quad (3.18)$$

Comme le système est affecté par un bruit centré w_k , l'espérance mathématique (3.18) du résidu $E[\epsilon_{s, k}^{\otimes}]$ devient :

$$E[\epsilon_{s, k}^{\otimes}] = E[\Delta_k^{i, i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L] \cong 0 \quad (3.19)$$

Comme Δ_k^{i, i_1} est une matrice déterministe, on a :

$E[\epsilon_{s, k}^{\otimes}] = \Delta_k^{i, i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L$, où $\Delta_k^{i, i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L$ est négligeable pour i et i_1 judicieusement choisis. Ceci est illustré par la figure 3.1.



2. En présence d'un défaut capteur ($f_{s,k} \neq 0$) :

L'espérance mathématique du résidu $\epsilon_{s,k}^{\otimes}$ est donnée par la relation suivante :

$$E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}] = F_{s,k} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L + \Delta_k^{i,i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L \quad (3.20)$$

(a) Défauts capteurs détectables :

La proposition suivante donne la condition de détectabilité du défaut.

Proposition 3.2 *Si les entrées ne sont pas identiquement nulles, une condition nécessaire et suffisante de détectabilité des défauts capteurs qui apparaissent à l'instant k est :*

$$\text{span}(F_{s,k}) \not\subset \text{span}(\underline{U}_k^s) \quad (3.21)$$

Démonstration. – Condition suffisante :

Si $\text{span}(F_{s,k}) \not\subset \text{span}(\underline{U}_k^s)$ alors $\forall \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1) + \mathcal{M}_{i_1}} : F_{s,k} \neq \mathcal{X} \underline{U}_k^s$, par la suite en considérant le cas particulier $\mathcal{X} = - [H_i | \tilde{H}_{i_1}]$ on a $F_{s,k} \neq - [H_i | \tilde{H}_{i_1}] \underline{U}_k^s$, ce qui peut être écrit comme $F_{s,k} + [H_i | \tilde{H}_{i_1}] \underline{U}_k^s \neq 0$. Par conséquent, $\epsilon_{s,k}^{\otimes} \neq 0$ pour un espace orthogonal à \underline{U}_k^s non identiquement nul.

– Condition nécessaire :

Si $E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}] \neq 0$, sachant que $[H_i | \tilde{H}_{i_1}] \underline{U}_k^s \Pi_{\underline{U}_k^s} = 0$, alors $F_{s,k} \Pi_{\underline{U}_k^s} \neq 0$, ce qui implique que $\text{span}(F_{s,k}) \not\subset \text{span}(\underline{U}_k^s)$. □

A partir de l'expression (3.20), on voit que la forme d'évaluation de l'espérance mathématique du résidu $E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}]$ dépend des défauts capteurs.

(b) Défauts capteurs non détectables :

Si $\text{span}(F_{s,k}) \subset \text{span}(\underline{U}_k^s)$ alors $F_{s,k} \Pi_{\underline{U}_k^s} = 0$, ce qui implique que le résidu $\epsilon_{s,k}^{\otimes}$ a la même expression d'évaluation que l'expression (3.19) (c-à-d la forme d'évaluation du résidu lors de l'absence du défaut capteur) malgré la présence du défaut capteur qui disparaît par projection sur $\Pi_{\underline{U}_k^s}$, d'où la condition (3.21). Ceci est illustré par la figure 3.3.

Influence du défaut capteur détectable

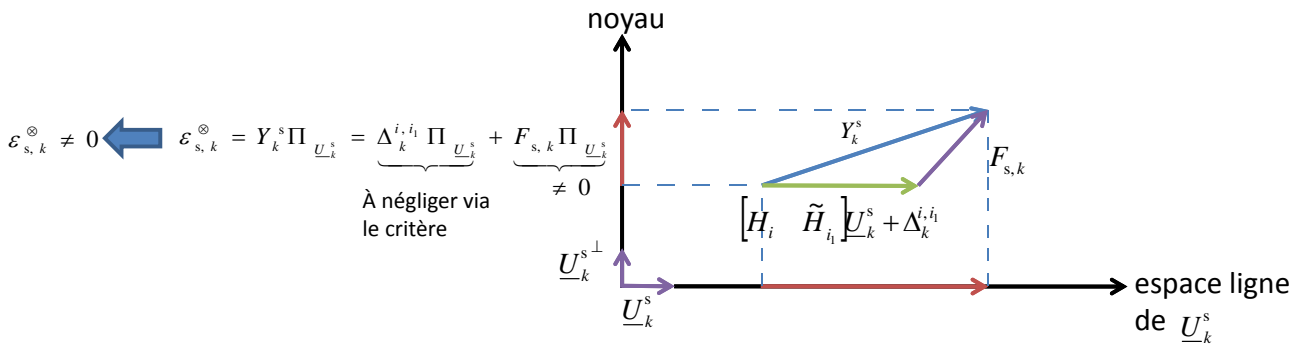


FIGURE 3.2 – Illustration dans le cas déterministe du résidu de la MPD en présence de défauts détectables

Influence du défaut capteurs non détectables

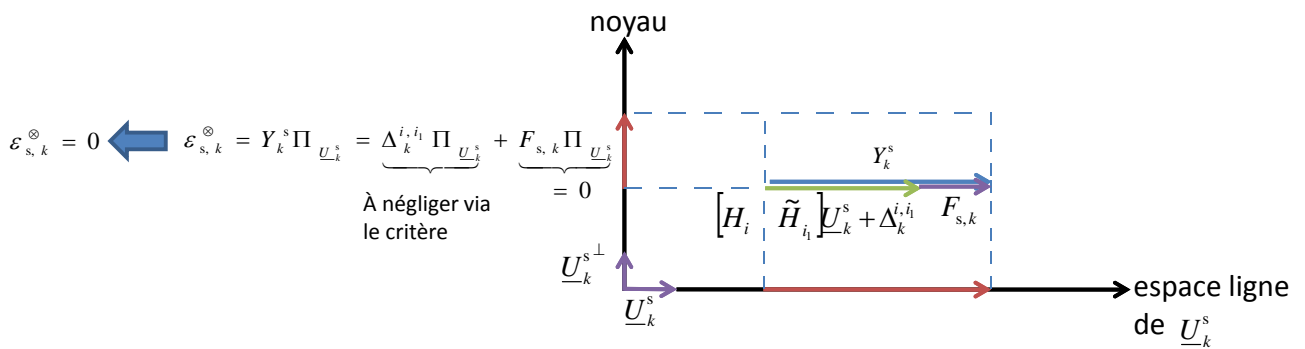


FIGURE 3.3 – Illustration dans le cas déterministe d'un défaut capteur non détectable

3.2.2.2 Localisation des défauts capteurs

Après avoir détecté un défaut capteur, il faut en rechercher sa cause. Dans le cas d'un défaut de capteurs cela revient à identifier le ou les capteurs défectueux. Comme nous allons le démontrer dans la suite, le vecteur résidu $\epsilon_{s,k}^{\otimes}$ est structuré par construction, il suffit de considérer ses composantes une à une pour localiser le(s) capteur(s) en défaut.

La condition (3.21) étant vérifiée, si à l'instant k un défaut affecte le capteur $r \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ son effet ne se voit que sur la $r^{\text{ème}}$ composante de $\epsilon_{s,k}^{\otimes}$ comme le montre l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
 E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}] &= F_{s,k} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L + \Delta_k^{i, i_1} \Pi_{\underline{U}_k^s} Z^L = \begin{bmatrix} F_{s,k}(1, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) + \Delta_k^{i, i_1}(1, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \\ \vdots \\ F_{s,k}(r, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) + \Delta_k^{i, i_1}(r, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \\ \vdots \\ F_{s,k}(\ell, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) + \Delta_k^{i, i_1}(\ell, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Delta_k^{i, i_1}(1, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \\ \vdots \\ \Delta_k^{i, i_1}(r-1, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \\ F_{s,k}(r, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) + \Delta_k^{i, i_1}(r, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \\ \Delta_k^{i, i_1}(r+1, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \\ \vdots \\ \Delta_k^{i, i_1}(\ell, :) \Pi_{\underline{U}_k^s}(:, L) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Pour localiser les défauts capteurs, il suffit de considérer les composantes une à une : si un capteur est en défaut à un instant k alors la composante correspondante de $E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}]$ est non nulle.

3.3 CRITÈRE POUR LE CALCUL DU RÉSIDU MPD

Dans la sous-section précédente, un résidu à base de données a été proposé pour la détection et la localisation des défauts multiples de capteurs pour les systèmes bilinéaires. Il est à noter que la forme de calcul du résidu $\epsilon_{s,k}^{\otimes}$ dépend uniquement des sorties Y_k^s et des entrées via la matrice de projection $\Pi_{\underline{U}_k^s}$. Les paramètres du modèle (3.2) ne sont pas utilisés pour calculer le résidu.

Les termes qui dépendent de l'état sont éliminés sous l'hypothèse de la stabilité des parties linéaire et bilinéaire sur une fenêtre de calcul suffisamment grande. La dimension des matrices de projection est réduite en choisissant convenablement les indices i et i_1 .

L'approximation du terme donné par l'équation (3.11) : $\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ i_1 \rightarrow i}} \delta_k^{i, i_1} = 0$ est démontrée dans ce qui suit dans 4 étapes séparées, résumées dans (3.23).

$$\left. \begin{aligned}
 1. \lim_{i \rightarrow \infty} CA^i x_{k-i} &= 0 \\
 2. \lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\overline{H}}_i^k(x_{k-i}) \overline{u}_{k,i}^* &= 0 \\
 3. \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{H}_i^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k,i}^* &= 0 \\
 4. \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ i_1 \rightarrow i}} \tilde{H}_{i_1+1:i} \tilde{u}_{k, i_1+1:i}^* &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ i_1 \rightarrow i}} \delta_k^{i, i_1} = 0 \tag{3.23}$$

1. $\lim_{i \rightarrow \infty} CA^i x_{k-i} = 0$:

Si la partie linéaire du système est stable, alors A^i tend vers zéro quand i est suffisamment grand (voir annexe B). Par conséquent,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} CA^i x_{k-i} = 0 \quad (3.24)$$

2. $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\overline{H}}_i^k(x_{k-i}) \overline{u}_{k,i}^* = 0$:
 $\forall j \in \{1, 2, \dots, i\}$, en utilisant une norme multiplicative alors on a

$$\begin{aligned} 0 &< \|A^{i-j} G(A \otimes I_m)^{j-1}\| < \|A^{i-j}\| \|G\| \|(A \otimes I_m)^{j-1}\| \\ \Rightarrow 0 &< \|A^{i-j} G(A \otimes I_m)^{j-1}\| < \|A\|^{i-j} \|G\| \|(A \otimes I_m)\|^{j-1} \\ \Rightarrow 0 &< \|A^{i-j} G(A \otimes I_m)^{j-1}\| < \max(\|A\|, \|G\|, \|(A \otimes I_m)\|)^i. \end{aligned}$$

Comme A est stable on a $A \otimes I_m$ stable aussi, et comme on a supposé $G_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stable, où G_r représente la $r^{\text{ème}}$ sous-matrice de $G = [G_1 | G_2 | \dots | G_m]$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} (\max(\|A\|, \|G\|, \|A \otimes I_m\|))^i &= 0. \\ \text{Par conséquent } \lim_{i \rightarrow \infty} \|A^{i-j} G(A \otimes I_m)^{j-1}\| &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, à partir de (3.8) on a :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\overline{H}}_i^k(x_{k-i}) \overline{u}_{k,i}^* = 0 \quad (3.25)$$

3. $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{H}_i^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k,i}^* = 0$:

$\forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, en utilisant une norme multiplicative on a

$$\begin{aligned} 0 &< \|\tilde{V}_{p,i}\| < \|A^{\rho_1(p)}\| \|G^{\rho_2(p)}\| \prod_{j=1}^{i-1} \|(A \otimes I_{m^j})^{\rho_{2j+1}(p)}\| \|(G \otimes I_{m^j})^{\rho_{2j+2}(p)}\| \\ \Rightarrow 0 &< \|\tilde{V}_{p,i}\| < \|A\|^{\rho_1(p)} \|G\|^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-1} \|(A \otimes I_{m^j})\|^{\rho_{2j+1}(p)} \|(G \otimes I_{m^j})\|^{\rho_{2j+2}(p)} \\ \Rightarrow 0 &< \|\tilde{V}_{p,i}\| < \max(\|A\|, \|G\|, \|(A \otimes I_m)\|, \|(G \otimes I_m)\|, \dots, \|(A \otimes I_{m^{i-1}})\|, \|(G \otimes I_{m^{i-1}})\|)^i \end{aligned}$$

A partir de l'équation (3.10), la puissance du maximum est i .

Comme A , $A \otimes I_m$, \dots et $A \otimes I_{m^{i-1}}$ sont stables et les sous matrices carrées de G , $G \otimes I_m$, \dots et $G \otimes I_{m^{i-1}}$ sont stables, on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max(\|A\|, \|G\|, \|(A \otimes I_m)\|, \|(G \otimes I_m)\|, \dots, \|(A \otimes I_{m^{i-1}})\|, \|(G \otimes I_{m^{i-1}})\|)^i = 0.$$

Par la suite $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\tilde{V}_{p,i}\| = 0$.

Par conséquent, à partir de (3.9) on aura l'approximation suivante :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{H}_i^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k,i}^* = 0 \quad (3.26)$$

4. $\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ i_1 \rightarrow i}} \tilde{H}_{i_1+1:i}^k \tilde{u}_{k, i_1+1:i}^* = 0$:

Un choix optimum des deux indices i_1 et i pour réaliser l'approximation $\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ i_1 \rightarrow i}} \tilde{H}_{i_1+1:i}^k \tilde{u}_{k, i_1+1:i}^* = 0$ est proposé sur la base de la minimisation d'un critère $J(p, q)$.

Soient les matrices d'entrée-sortie \underline{U}_k^s et Y_k^s construites dans le cas non défaillant, définies par :

$$\underline{U}_k^{s,*} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{k-L+1,p}^* & \cdots & \bar{u}_{k-1,p}^* & \bar{u}_{k,p}^* \\ \tilde{u}_{k-L+1,q}^* & \cdots & \tilde{u}_{k-1,q}^* & \tilde{u}_{k,q}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(p+1)+M_q \times L} \quad (3.27)$$

$$Y_k^{s,*} = [y_{k-L+1}^* \quad \cdots \quad y_{k-1}^* \quad y_k^*] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (3.28)$$

Proposition 3.3 Soit le critère $J(p, q)$:

$$J(p, q) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left\| Y_k^{s,*} \Pi_{\underline{U}_k^{s,*}} \right\|_2^2 \quad (3.29)$$

les entiers p, q et L respectent la condition $L > m(p+1) + M_q$, r représente la taille de la fenêtre permettant de calculer la variance.

Soit \mathcal{X}_1 une constante positive choisie arbitrairement petite.

Il existe p_0 et q_0 tel que $\forall p > p_0$ et $\forall q > q_0$, le critère $J(p, q)$ défini par l'équation (3.29) vérifie l'inégalité suivante :

$$J(p, q) \leq \text{var}(W_k) + \mathcal{X}_1 \quad (3.30)$$

où $\text{var}(\cdot)$ désigne la variance : $\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \|W_k\|_2^2 = \text{var}(W_k)$.

Les entiers i et i_1 sont choisis dans les intervalles $[p_0, p_x[$ et $[q_0, q_x[$ respectivement, où p_x et q_x sont les valeurs maximales de p et q acceptables pour supporter la charge de calcul (dépend de la capacité de calcul du calculateur).

La preuve de la proposition 3.3 suis la même démarche que celle de la proposition 2.7. Par soucis de concision, cette preuve est omise.

Remarque 3.3 Tout les résultats du chapitre 2 peut être retrouvés à partir des résultats du chapitre 3 en mettant $G = 0$.

3.4 EXEMPLE D'ILLUSTRATION

Soit un système bilinéaire, avec les matrices A, B, C, D, G suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.3 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.3 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & .26 & 0.45 \\ 0.37 & 0.5 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ -0.3 & 0.26 \\ 0.35 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0.63 & 0.40 & 0.63 & 0.40 & 0.63 & 0.40 & 0.63 & 0.40 \\ -0.4 & 0.5 & -0.4 & 0.5 & -0.4 & 0.5 & -0.4 & 0.5 \\ 0.6 & 0.45 & 0.6 & 0.45 & 0.6 & 0.45 & 0.6 & 0.45 \\ 0.5 & -0.35 & 0.5 & -0.35 & 0.5 & -0.35 & 0.5 & -0.35 \end{bmatrix}.$$

3.4.1 Génération des entrées et des sorties du système avec des défauts capteurs

Les figures 3.4, 3.6, 3.8 et 3.10 représentent les entrées constantes, de type créneau, bruitées et fortement bruitées.

Les figures 3.5, 3.7, 3.9 et 3.11 représentent les sorties correspondantes aux entrées constantes, de type créneau, bruitées et fortement bruitées. Ces sorties sont générées après avoir intégré des défauts capteurs additifs, multiples, constants et variants dans le temps (voir la table 3.1).

k	[1500, 2000[[2200, 2500[[4000, 4100[[4100, 4300[
défauts capteurs	capteur 1	capteurs 2 et 3	capteurs 1 et 2	capteur 2

TABLE 3.1 – Défauts capteurs simulés

Ces données entrée-sortie collectées en ligne sont les seules données utilisées pour appliquer la méthode proposée. Les paramètres du modèle ne sont pas utilisés pour la détection des défauts capteurs.

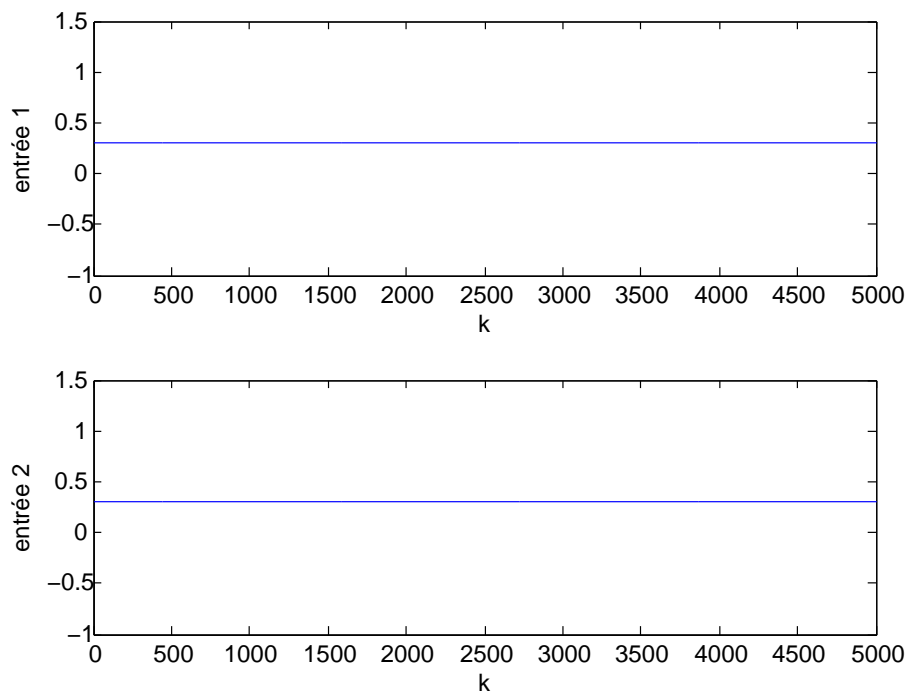


FIGURE 3.4 – Les entrées constantes du système u_k

3.4.2 Génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts capteurs

On prend $i = 30$, $i_1 = 6$ et $L = 911$.

Les évolutions des résidus et des défauts pour les 4 types d'entrée sont représentées sur les figures 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15.

Ces figures montrent que les résidus obtenus sont *sensibles* aux défauts *multiples, constants et variant dans le temps*, ces derniers peuvent être facilement détectés par une

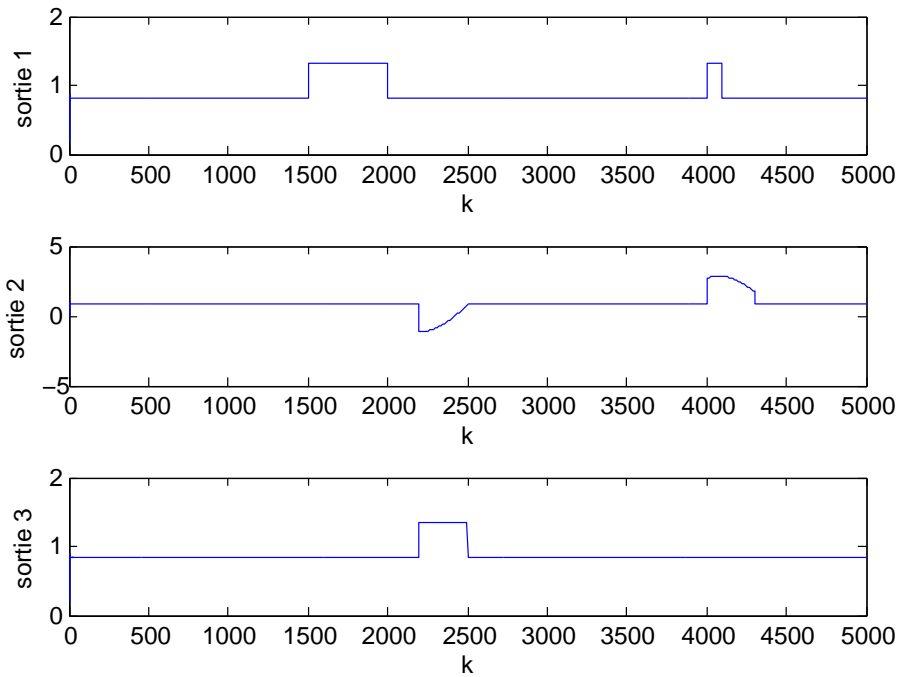


FIGURE 3.5 – Les sorties correspondantes aux entrées constantes y_k

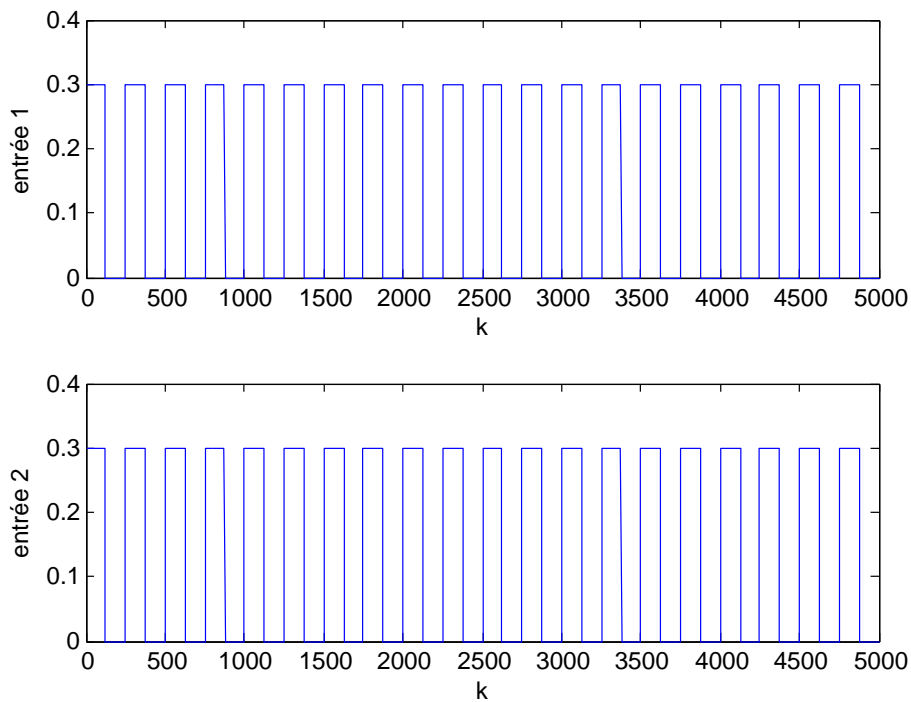


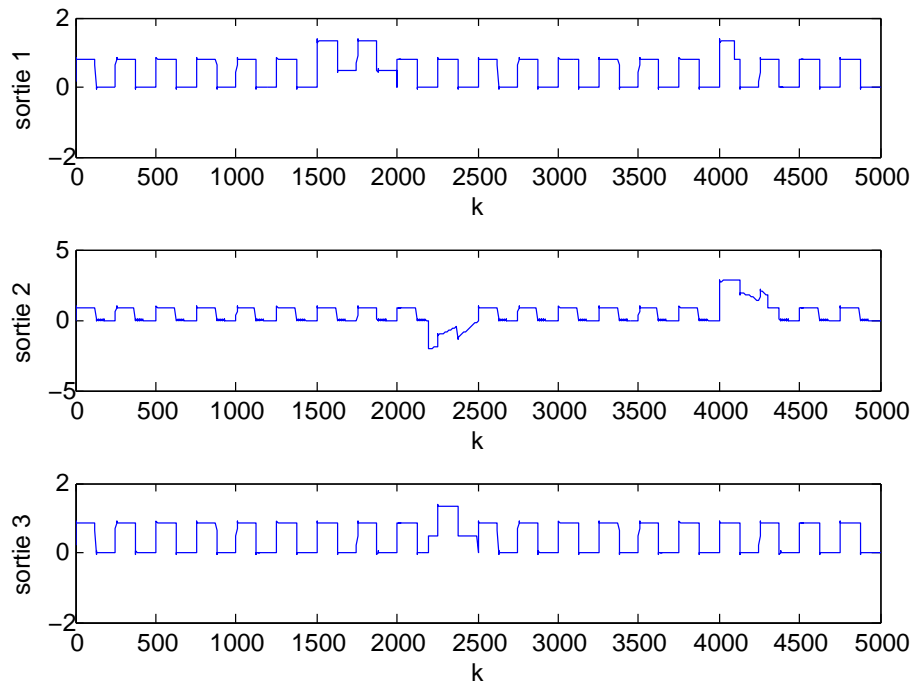
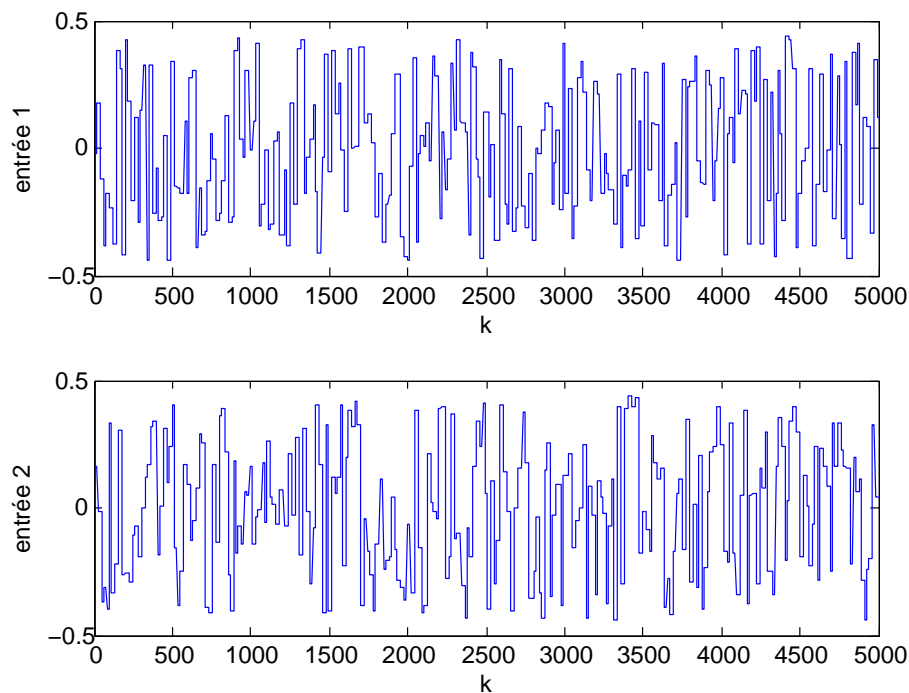
FIGURE 3.6 – Les entrées de type créneau u_k

technique de décision appropriée. La *localisation* du défaut est immédiate grâce à la structuration *intrinsèque* du résidu.

On peut remarquer dans la figure 3.12 que le résidu ainsi généré est sensible aux défauts même si les entrées ne sont pas persistantes.

3.4.3 Comparaison entre les résidus dans le cas sans défaut

Les évolutions des résidus générés dans le cas sans défaut sous l'hypothèse de structure linéaire et bilinéaire pour 3 types d'entrée sont représentées sur les figures 3.16, 3.17 et 3.18.

FIGURE 3.7 – Les sorties correspondantes aux entrées de type créneau y_k FIGURE 3.8 – Les entrées bruitées u_k

D'après ces figures, on remarque que les résidus calculés avec une structure de modèle correspondant à la structure du système est plus proche de zéro.

CONCLUSION

La méthode par projection des données a été étendue dans ce chapitre pour la détection et la localisation des défauts multiples de capteurs pour des systèmes bilinéaires. Afin de réduire la complexité des calculs, un critère adapté aux systèmes bilinéaires est proposé pour maximiser la sensibilité aux défauts capteurs et minimiser la sensibilité aux termes

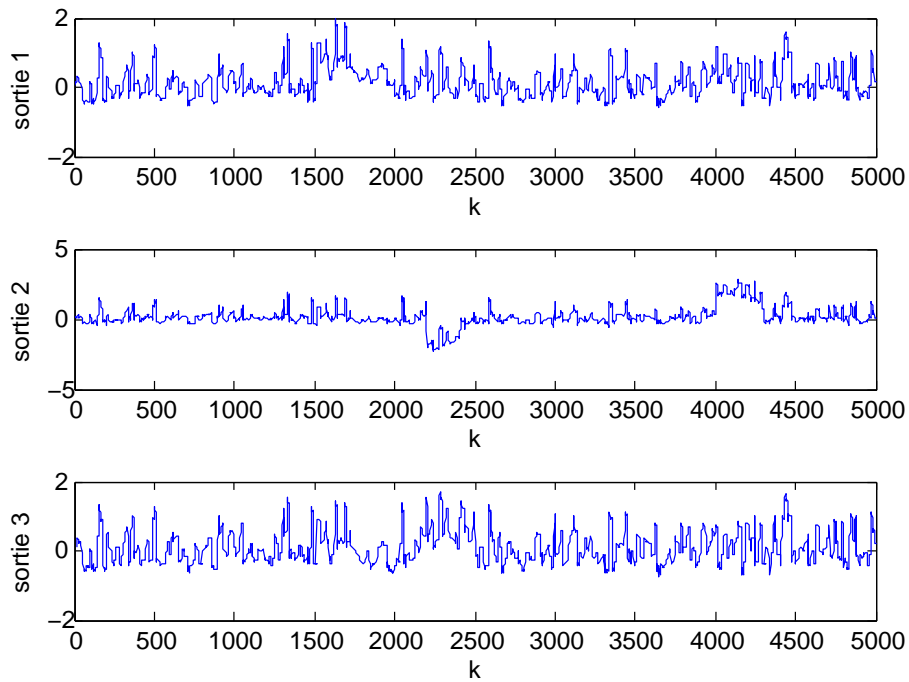


FIGURE 3.9 – Les sorties correspondantes aux entrées bruitées y_k

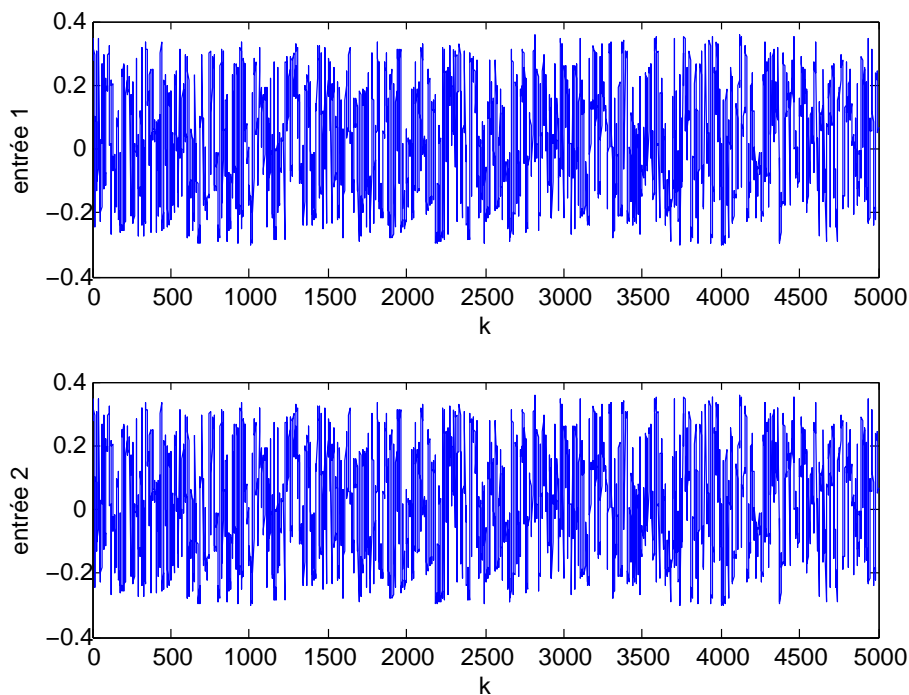
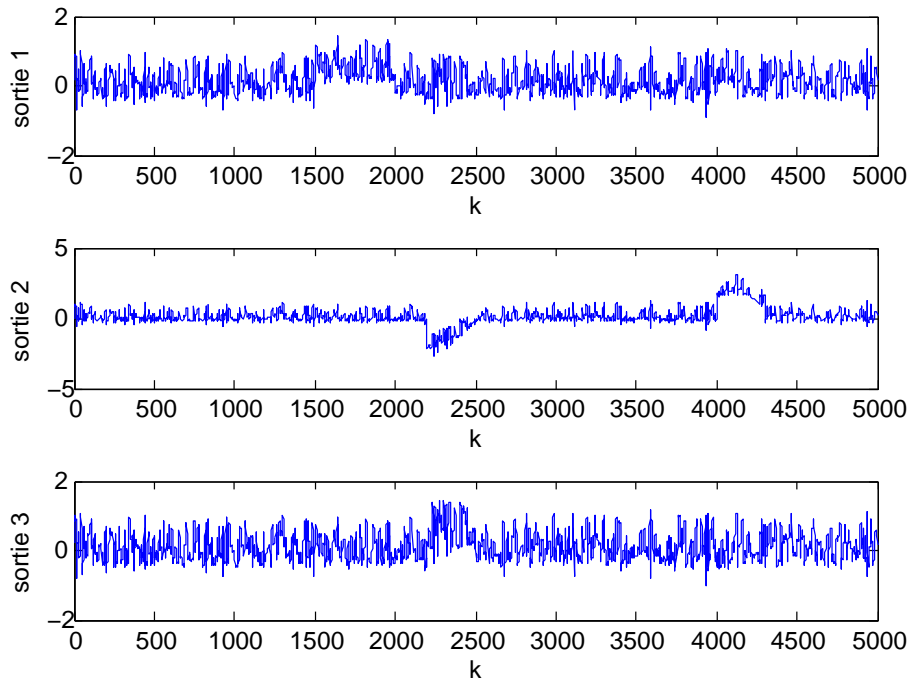
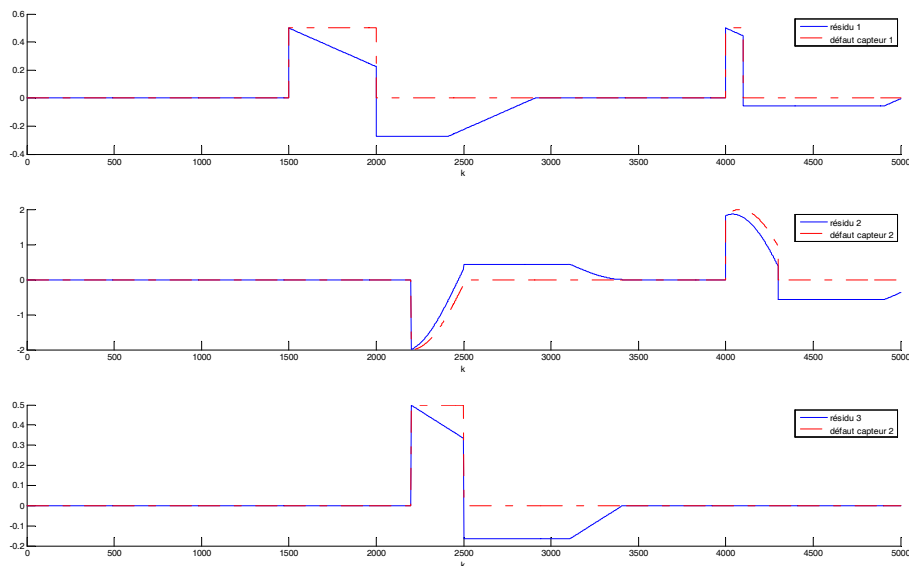


FIGURE 3.10 – Les entrées fortement bruitées u_k

négligés.

Les avantages de la méthode proposée sont les suivants :

- Seule la structure du modèle (bilinéaire) est connue, l'estimation des paramètres ou de l'état du système n'est pas nécessaire.
- Aucune connaissance préalable sur l'évolution dynamique du défaut n'est nécessaire.
- Des défauts simples, multiples ou simultanés peuvent être envisagés.
- La procédure de localisation du défaut est directement accomplie par la construction de résidus structurés.

FIGURE 3.11 – Les sorties correspondantes aux entrées fortement bruitées y_k FIGURE 3.12 – Résidus dans le cas des entrées constantes $e_{s,k}^{\otimes}$

- Seules les données d'entrée-sortie collectées en ligne sont utilisées pour la détection et la localisation des défauts.

La méthode proposée dans ce chapitre est bien adaptée au diagnostic d'un parc de systèmes bilinéaires possédant des valeurs de paramètres différents, ou aux systèmes bilinéaires à paramètres difficilement identifiables. Dans les chapitres 2 et 3, on s'est focalisé sur le diagnostic des défauts capteurs et actionneurs. Le chapitre suivant vise à étendre la méthode MPD au diagnostic des défauts internes.

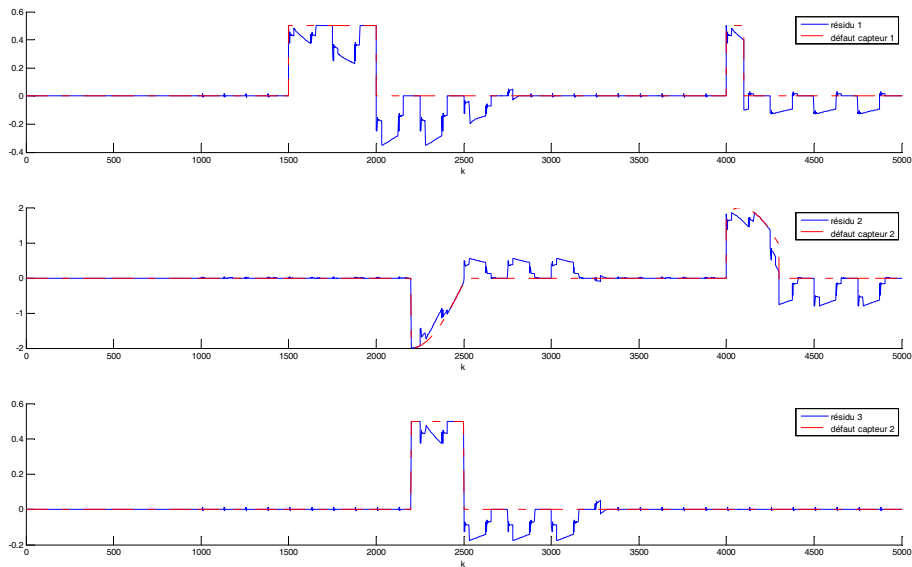


FIGURE 3.13 – Résidus dans le cas des entrées de type créneau $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$

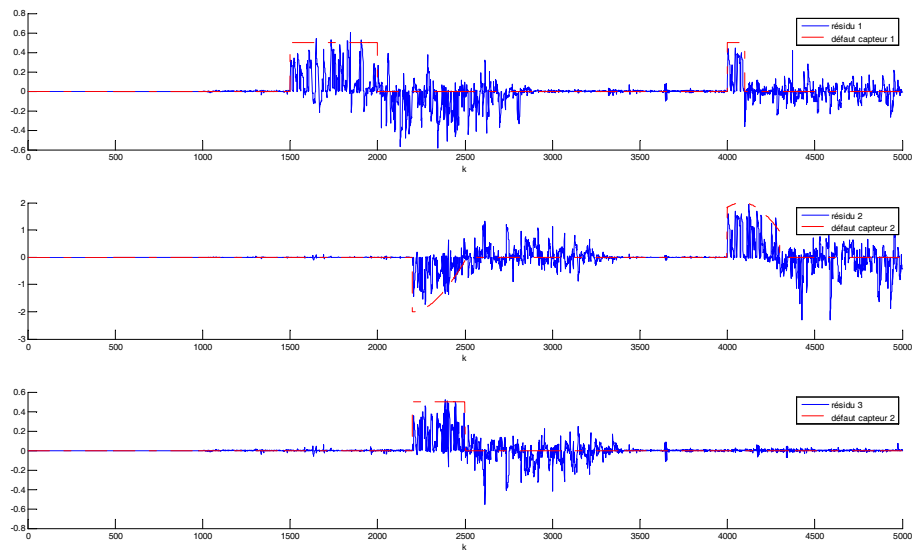


FIGURE 3.14 – Résidus dans le cas des entrées bruitées $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$

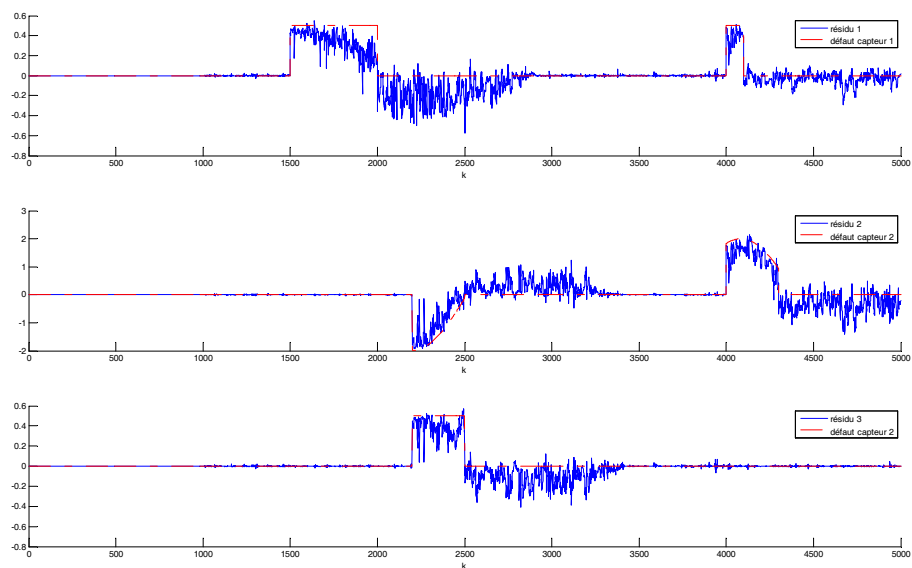


FIGURE 3.15 – Résidus dans le cas des entrées fortement bruitées $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$

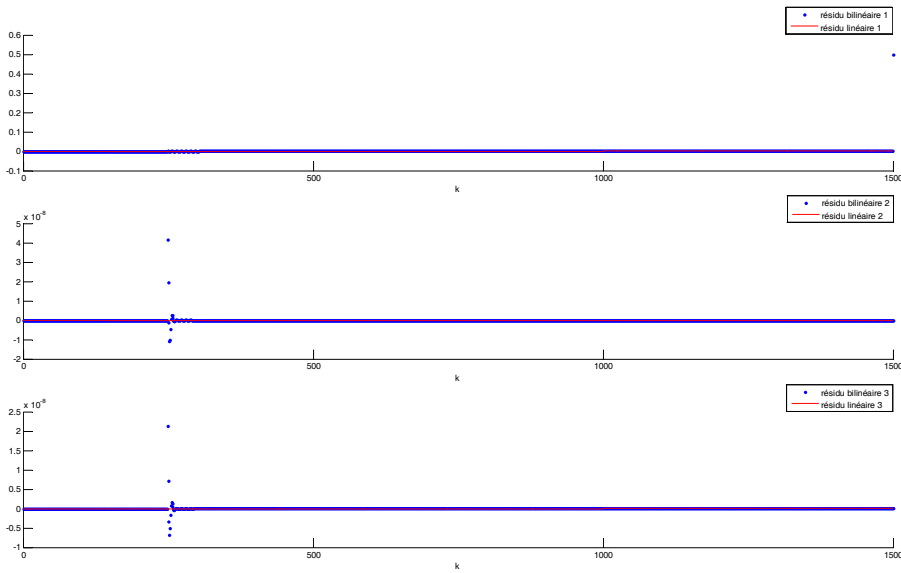


FIGURE 3.16 – Résidus dans le cas des entrées constantes

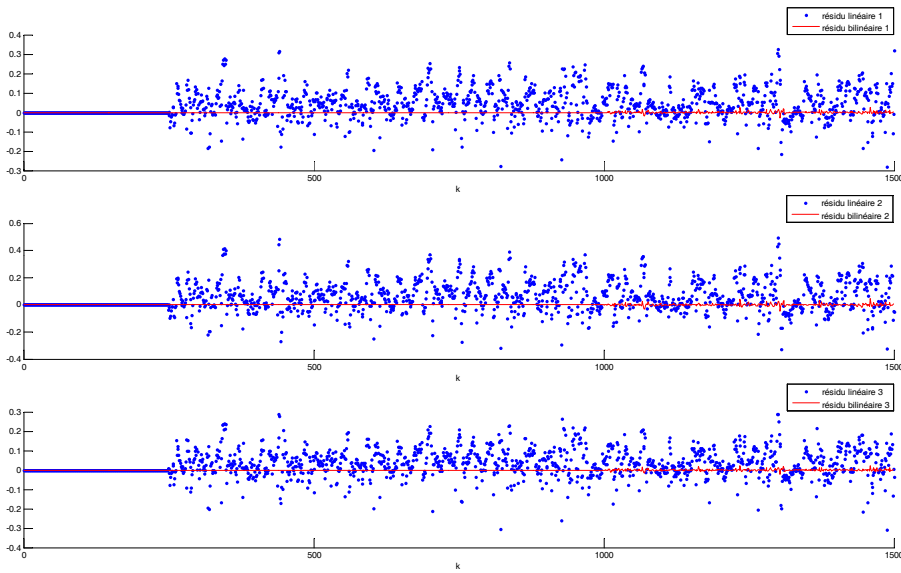


FIGURE 3.17 – Résidus dans le cas des entrées bruitées

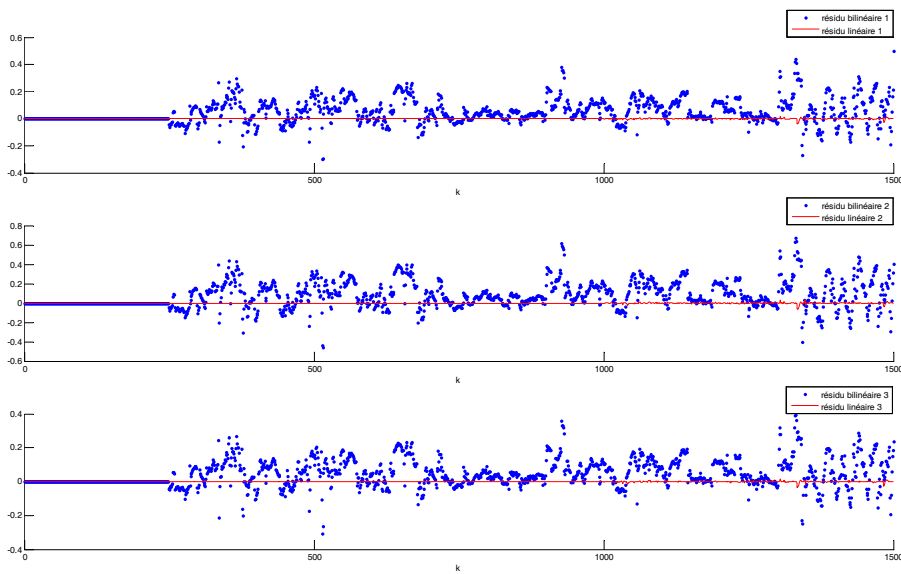


FIGURE 3.18 – Résidus dans le cas des entrées fortement bruitées

MPD POUR LE DIAGNOSTIC DES DÉFAUTS INTERNES : DÉTECTION ET RECONNAISSANCE DE MODES DE FONCTIONNEMENT

SOMMAIRE

INTRODUCTION	98
4.1 PROBLÉMATIQUE	98
4.2 ESTIMATION DE L'INSTANT DE COMMUTATION	99
4.2.1 Estimation de l'instant de commutation entre des modes linéaires	99
4.2.2 Estimation de l'instant de commutation entre des modes bilinéaires	106
4.3 RECONNAISSANCE DU MODE ACTIF	119
4.3.1 Reconnaissance du mode actif linéaire	119
4.3.2 Reconnaissance du mode actif bilinéaire	123
4.4 EXEMPLES D'ILLUSTRATION	128
4.4.1 Systèmes à commutations avec des modes linéaires	128
4.4.2 Systèmes à commutations avec des modes bilinéaires discernables et d'autres non discernables	135
CONCLUSION	138

Les chapitres 2 et 3 ont été consacrés au diagnostic des défauts capteurs et actionneurs. Or, les composants internes du système peuvent être affectés par des défauts. L'objectif de ce chapitre est d'étendre la MPD pour la détection et l'identification des défauts internes. Ces défauts internes produisent des dynamiques différentes qui représentent des modes de fonctionnement défaillant. La détection de défauts internes revient alors à détecter la commutation et l'identification du défaut à reconnaître le mode actif après la commutation. L'extension de la méthode MPD dans ce chapitre ne se limite donc pas à la détection et l'identification de défauts internes, mais peut être vue plus généralement comme un problème de détection de commutation et de reconnaissance du mode actif dans un système à commutations.

Les contributions principales de ce chapitre sont :

- l'estimation des instants de commutation entre des modes linéaires ou bilinéaires,
- la reconnaissance du mode actif linéaire ou bilinéaire,
- la caractérisation de la discernabilité et de la détectabilité entre des modes linéaires ou bilinéaires.

Les avantages de la méthode proposée sont les suivants :

- Seule la structure du modèle (linéaire ou bilinéaire) est connue, l'estimation des paramètres ou de l'état du système n'est pas nécessaire.
- Seules les données d'entrée-sortie collectées en ligne sont utilisées pour l'estimation de l'instant de commutation.
- Seules les données d'entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne sont utilisées pour la reconnaissance du mode actif.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans la section 2, le système à commutations avec des modes bilinéaires est décrit. Dans la section 3 la MPD est utilisée via les données d'entrée-sortie collectées en ligne afin de détecter l'instant de commutation dans le cas des modes linéaires et bilinéaires. Dans la section 4 la MPD est utilisée via les données d'entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne afin de reconnaître le mode actif dans le cas des modes linéaires et bilinéaires. Enfin, deux exemples sont présentés pour montrer l'efficacité de la méthode proposée.

4.1 PROBLÉMATIQUE

Considérons le système dynamique à commutations avec des modes bilinéaires et à temps discret décrit par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_q x_k + G_q(x_k \otimes u_k) + B_q u_k \\ y_k = C_q x_k + D_q u_k + w_k \\ (x_0, q_0) \in \text{Init} \\ q, q^+, q^- \in \mathcal{Q} \end{cases} \quad (4.1)$$

$A_q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_q \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_q \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, $D_q \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$, $G_q \in \mathbb{R}^{n \times nm}$ sont les matrices constantes du système et les vecteurs $u_k \in \mathbb{R}^m$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $y_k \in \mathbb{R}^\ell$ sont respectivement les entrées, l'état et les sorties du système. Les sorties du système sont affectées par un bruit coloré centré $w_k \in \mathbb{R}^\ell$. $q_k \in \mathcal{Q}$ est l'indice du mode courant et Init est l'ensemble des états initiaux (x_0, q_0) du système à commutations, les indices du mode avant et après commutation sont notés par q^- et q^+ .

Ce système est constitué de modes de fonctionnement normaux ou défailants qui caractérisent les défauts internes.

1. L'ensemble \mathcal{Q} est l'ensemble des états discrets.
2. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ est la relation de transition de l'état discret suite à un événement "normal" (spontané ou contrôlé) ou "anormal" (défaut interne).
3. $\mathcal{R} = \cup_{q_1, q_2 \in \mathcal{Q}} \mathcal{R}_{q_1, q_2} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ est la fonction de ré-initialisation de l'état continu lors de la commutation, cette fonction spécifie comment le nouvel état continu x_τ est lié à l'état antérieur $x_{\tau-1}$. Cette fonction est définie comme :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_q x_k + G_q(x_k \otimes u_k) + B_q u_k \text{ s'il n'y a pas de commutation} \\ (x_{\tau-1}, x_\tau) \in \mathcal{R}_{q^-, q^+} \text{ s'il y a une commutation} \end{cases}$$

Objectifs et hypothèses

Etant donné le système à commutations décrit par l'équation (4.1), l'objectif est l'estimation de l'instant de commutation et la reconnaissance du mode actif sous les hypothèses suivantes.

1. Les matrices A_q, B_q, C_q, D_q, G_q sont toutes *inconnues*,

2. les matrices d'état A_q et les sous-matrices $G_{q,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de $G_q = [G_{q,1} | G_{q,2} | \dots | G_{q,m}]$ pour $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ sont stables quelque soit q ,
3. le système reste *suffisamment longtemps* dans un mode de fonctionnement,
4. les seules informations dont on dispose sont les mesures u_k et y_k des entrées et des sorties du système,
5. chaque défaut interne (supposé constant) produit une dynamique différente qui correspond à un mode de fonctionnement $q \in \mathcal{Q}$.

Afin de simplifier les démonstrations mathématiques, les défauts capteurs ou actionneurs ne sont pas considérés.

4.2 ESTIMATION DE L'INSTANT DE COMMUTATION

Afin d'utiliser la MPD pour la détection de commutations, nous considérons dans un premier temps les systèmes à commutations avec des modes linéaires en fixant dans le système (4.1) $G_q = 0_{n \times nm}$. Le système à commutations avec des modes linéaires résultant est donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_q x_k + B_q u_k \\ y_k = C_q x_k + D_q u_k + w_k \\ (x_0, q_0) \in \text{Init} \\ q, q^+, q^- \in \mathcal{Q} \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2.1 Estimation de l'instant de commutation entre des modes linéaires

Dans cette section, la Méthode de Projection des Données (MPD) est utilisée pour détecter la commutation d'un mode *linéaire* vers un autre mode linéaire. Il sera démontré que la commutation peut être détectée sous une *condition de détectabilité*.

4.2.1.1 Génération du résidu

Soit $\bar{u}_{k,i} = (u_{k-i}^T \ u_{k-i+1}^T \ \dots \ u_k^T)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$.

Afin de faciliter la compréhension de la preuve, les matrices d'entrée et de sortie U_k^s et Y_k^s sont notées maintenant $U_{k-L+1:k}$ et $Y_{k-L+1:k}$ telle que :

$$U_{k-L+1:k} = [\bar{u}_{k-L+1,i} \ \bar{u}_{k-L+2,i} \ \dots \ \bar{u}_{k,i}] \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times L} \quad (4.3)$$

et

$$Y_{k-L+1:k} = [y_{k-L+1} \ \dots \ y_{k-1} \ y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (4.4)$$

La matrice d'entrées diagonale par bloc $\check{U} \in \mathbb{R}^{mi(i+1) \times i}$ est définie comme suit :

$$\check{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau,i} & 0_{m(i+1) \times 1} & \dots & \dots & 0_{m(i+1) \times 1} \\ 0_{m(i+1) \times 1} & \bar{u}_{\tau+1,i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{m(i+1) \times 1} \\ 0_{m(i+1) \times 1} & \dots & \dots & 0_{m(i+1) \times 1} & \bar{u}_{\tau+i-1,i} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

La matrice de projection dans l'espace orthogonal à droite de la matrice $U_{k-L+1:k}$ est donnée selon (4.104) (voir annexe A.9) par :

$$\Pi_{U_{k-L+1:k}} = I_L - U_{k-L+1:k}^T (U_{k-L+1:k} U_{k-L+1:k}^T)^{-1} U_{k-L+1:k} \quad (4.6)$$

On suppose que les entiers i et L respectent la condition $L > m(i+1)$ pour que $\dim \text{span}(\Pi_{U_{k-L+1:k}}^T) > 0$ (i.e. voir équation (4.105) dans l'annexe A.9). La matrice W_k est construite comme la matrice $Y_{k-L+1:k}$ en utilisant w_k au lieu de y_k .

$$\text{Soit } Z^L = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}.$$

La matrice des paramètres de Markov définie par

$\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, j} = [H_{(q^-, q^+), i, j} | H_{(q^+), j}] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)}$ pour $j \in \{1, 2, \dots, i\}$, avec les deux matrices $H_{(q^-, q^+), i, j} \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i-j)}$ et $H_{(q^+), j} \in \mathbb{R}^{\ell \times m(j+1)}$ construites comme suit :

$$H_{(q^-, q^+), i, j} = C_{q^+} A_{q^+}^j \left[A_{q^-}^{i-j-1} B_{q^-} | A_{q^-}^{i-j-2} B_{q^-} | \dots | A_{q^-} B_{q^-} | B_{q^-} \right] \quad (4.7)$$

$$H_{(q^+), j} = [C_{q^+} A_{q^+}^{j-1} B_{q^+} | C_{q^+} A_{q^+}^{j-2} B_{q^+} | \dots | C_{q^+} A_{q^+} B_{q^+} | C_{q^+} B_{q^+} | D_{q^+}] \quad (4.8)$$

Proposition 4.1 *Le générateur des résidus $\epsilon_{s, k}$ donné par l'expression (2.5) est calculé en utilisant des données d'entrée-sortie collectées en ligne ($U_{k-L+1:k}$, $Y_{k-L+1:k}$). La forme de calcul du résidu (2.5) est :*

$$\epsilon_{s, k} = Y_{k-L+1:k} \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L \in \mathbb{R}^\ell \quad (4.9)$$

La forme d'évaluation peut être réécrite sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_{s, k} = & \left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} | \dots | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} \right. \\ & \left. \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i} \right] \left[0_{m(i+1) \times \tau + L - k - 1} | \check{U} | 0_{m(i+1) \times k - \tau - i + 1} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L \\ & + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) \left[0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} | U_{\tau+i:k} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L + W_k \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L + \delta_k^i \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\text{où } \delta_k^i = \left[C_{q^-} A_{q^-}^i x_{k-L+1-i} | \dots | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-2-i} | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-1-i} \right]$$

$$C_{q^+} A_{q^+} A_{q^-}^{i-1} x_{\tau-i} | C_{q^+} A_{q^+}^2 A_{q^-}^{i-2} x_{\tau-i+1} | \dots | C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} A_{q^-} x_{\tau-2} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau-1} |$$

$$C_{q^+} A_{q^+}^i x_\tau | \dots | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}.$$

Les modes étant stables, pour i suffisamment grand δ_k^i est négligeable.

Si le système (4.2) passe du mode q^- au mode q^+ (avec $q^- \neq q^+$) à l'instant de commutation τ tel que $\tau \in [k-L-i-1, k]$, alors : $E[\epsilon_{s, k}] \neq 0$.

Démonstration. La première étape de la preuve est de déterminer les expressions de la sortie sur la fenêtre temporelle $[k-L-i+1, k]$ qui contient l'instant de la commutation $\tau \in [k-L-i+1, k]$. La sortie y_t s'exprime différemment, suivant que $t < \tau$, $\tau \leq t \leq \tau+i-1$ et $t > \tau+i-1$ comme détaillé dans la figure 4.1.

1. Expression de la sortie $y_t = y_t^1$ pour $t < \tau$

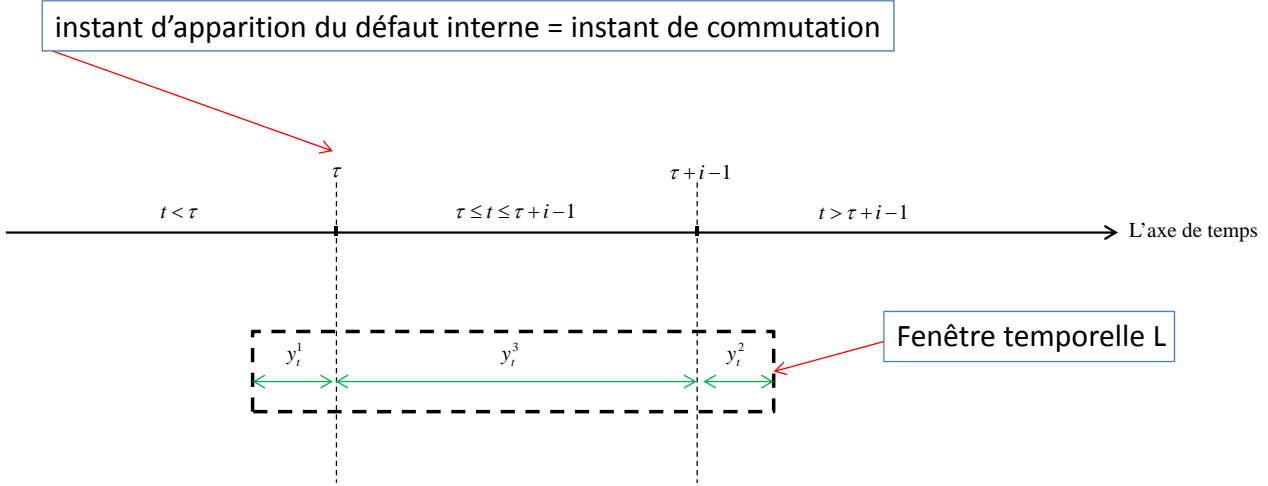


FIGURE 4.1 – Décomposition de la fenêtre temporelle de calcul en 3 parties

$$y_t^1 = C_{q^-} A_{q^-}^i x_{t-i} + \sum_{j=0}^{i-1} C_{q^-} A_{q^-}^j B_{q^-} u_{t-1-j} + D_{q^-} + w_t \quad (4.11)$$

$$= C_{q^-} A_{q^-}^i x_{t-i} + H_{(q^-), i} \bar{u}_{t, i} + w_t$$

2. Expression de la sortie $y_t = y_t^2$ pour $t > \tau + i - 1$

$$y_t^2 = C_{q^+} A_{q^+}^i x_{t-i} + \sum_{j=0}^{i-1} C_{q^+} A_{q^+}^j B_{q^+} u_{t-1-j} + D_{q^+} + w_t \quad (4.12)$$

$$= C_{q^+} A_{q^+}^i x_{t-i} + H_{(q^+), i} \bar{u}_{t, i} + w_t$$

3. Expression de la sortie $y_t = y_t^3$ pour $\tau \leq t \leq \tau + i - 1$

$$y_t^3 = C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1} x_{t-i} + \sum_{j=0}^{i-t+\tau-2} C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^j B_{q^-} u_{\tau-2-j} + \sum_{j=0}^{t-\tau} C_{q^+} A_{q^+}^j B_{q^+} u_{t-j-1} + D_{q^+} + w_t \quad (4.13)$$

$$= C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1} x_{t-i} + \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} \bar{u}_{t, i} + w_t$$

où $\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} = [H_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} | H_{(q^+), t-\tau+1}] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)}$,

avec les deux matrices $H_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i-t+\tau-1)}$ et $H_{(q^+), t-\tau+1} \in \mathbb{R}^{\ell \times m(t-\tau+2)}$ construites comme suit :

$$H_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} = C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} \left[A_{q^-}^{i-t+\tau-2} B_{q^-} | A_{q^-}^{i-t+\tau-3} B_{q^-} | \dots | A_{q^-} B_{q^-} | B_{q^-} \right] \quad (4.14)$$

$$H_{(q^+), t-\tau+1} = [C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau} B_{q^+} | C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau-1} B_{q^+} | \dots | C_{q^+} A_{q^+} B_{q^+} | C_{q^+} B_{q^+} | D_{q^+}] \quad (4.15)$$

Construisons maintenant la matrice $Y_k^s = Y_{k-L+1:k}$
 $= [y_{k-L+1}^1 \cdots y_{\tau-2}^1 y_{\tau-1}^1 y_{\tau}^3 \cdots y_{\tau+i-2}^3 y_{\tau+i-1}^3 y_{\tau+i}^2 \cdots y_{k-1}^2 y_k^2] \in \mathbb{R}^{\ell \times L}$ en utilisant les expressions précédentes dans les 3 cas possibles.

$$\begin{aligned}
 Y_{k-L+1:k} &= [C_{q^-} A_{q^-}^i x_{k-L+1-i} | \cdots | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-2-i} | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-1-i} | \\
 &C_{q^+} A_{q^+} A_{q^-}^{i-1} x_{\tau-i} | C_{q^+} A_{q^+}^2 A_{q^-}^{i-2} x_{\tau-i+1} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} A_{q^-} x_{\tau-2} | \\
 &C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i}] \\
 &+ H_{(q^-), i} [U_{k-L+1:\tau-1} | 0_{m(i+1) \times k-\tau+1}] \\
 &+ [\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} | \cdots | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} | \\
 &\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i}] [0_{m(i+1) \times \tau+L-k-1} | \check{U} | 0_{m(i+1) \times k-\tau-i+1}] \\
 &+ H_{(q^+), i} [0_{m(i+1) \times L-k+\tau+i-1} | U_{\tau+i:k}] + W_k
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

où $\check{U} \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times i}$ est définie comme suit :

$$\check{U} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau, i} & 0_{m(i+1) \times 1} & \cdots & \cdots & 0_{m(i+1) \times 1} \\ 0_{m(i+1) \times 1} & \bar{u}_{\tau+1, i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{m(i+1) \times 1} \\ 0_{m(i+1) \times 1} & \cdots & \cdots & 0_{m(i+1) \times 1} & \bar{u}_{\tau+i-1, i} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Afin de faire apparaître la matrice $U_{(q^-, q_k), k-L+1:k}$, on ajoute et on soustrait le terme $H_{(q^-), i} [0_{m(i+1) \times \tau-k+L-1} | U_{\tau:k}]$ de l'équation (4.16). Par la suite une expression équivalente de la matrice des sorties $Y_{k-L+1:k}$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 Y_{k-L+1:k} &= [C_{q^-} A_{q^-}^i x_{k-L+1-i} | \cdots | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-2-i} | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-1-i} | \\
 &C_{q^+} A_{q^+} A_{q^-}^{i-1} x_{\tau-i} | C_{q^+} A_{q^+}^2 A_{q^-}^{i-2} x_{\tau-i+1} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} A_{q^-} x_{\tau-2} | \\
 &C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i}] \\
 &+ H_{(q^-), i} U_{k-L+1:k} + [\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} | \\
 &\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} | \cdots | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} | \\
 &\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i}] [0_{m(i+1) \times \tau+L-k-1} | \check{U} | 0_{m(i+1) \times k-\tau-i+1}] \\
 &+ (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) [0_{m(i+1) \times L-k+\tau+i-1} | U_{\tau+i:k}] + W_k
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

En projetant l'équation (4.18) à droite par $\Pi_{U_{k-L+1:k}}$ et en sélectionnant la dernière colonne, la forme d'évaluation du résidu est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{s, k} = & \left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} | \cdots | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} | \right. \\ & \left. \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i} \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} | \check{U} | 0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L \\ & + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) [0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} | U_{\tau+i:k}] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L + W_k \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L + \delta_k^i \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\text{où } \delta_k^i = \left[C_{q^-} A_{q^-}^i x_{k-L+1-i} | \cdots | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-2-i} | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-1-i} | \right.$$

$$C_{q^+} A_{q^+} A_{q^+}^{i-1} x_{\tau-i} | C_{q^+} A_{q^+}^2 A_{q^+}^{i-2} x_{\tau-i+1} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} A_{q^+} x_{\tau-2} |$$

$$\left. C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}.$$

La contribution de l'état initial peut être négligée pour les raisons suivantes (voir annexe B pour plus de détails) :

1. Pour $t < \tau$ et $t > \tau + i - 1$:

Sous l'hypothèse de la stabilité de A_{q^-} et A_{q^+} , la contribution de l'état initial peut être négligée pour i suffisamment grand :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} C_{q^-} A_{q^-}^i x_{t-i} = 0 \text{ et } \lim_{i \rightarrow \infty} C_{q^+} A_{q^+}^i x_{t-i} = 0.$$

2. Pour $\tau \leq t \leq \tau + i - 1$:

L'état est multiplié par un terme de forme générale

$A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1}$ comme le montre l'équation (4.13) où la somme des puissances est toujours égale à i , où $\|\cdot\|$ représente une norme multiplicative, on a donc :

$$\left\| A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1} \right\| < \left\| A_{q^+}^{t-\tau+1} \right\| \left\| A_{q^-}^{i-t+\tau-1} \right\|, \text{ et on a aussi}$$

$$\left\| A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1} \right\| < (\max(\left\| A_{q^+} \right\|, \left\| A_{q^-} \right\|))^i.$$

Pour $i \rightarrow \infty$: le terme $(\max(\left\| A_{q^+} \right\|, \left\| A_{q^-} \right\|))^i$ est négligeable,

par conséquent $\lim_{i \rightarrow \infty} C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1} x_{t-i} = 0$.

En négligeant la contribution de l'état initial, l'expression (4.19) devient :

$$\begin{aligned} \epsilon_{s, k} \cong & \left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} | \cdots | \right. \\ & \left. \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i} \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} | \check{U} | \right. \\ & \left. 0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L \\ & + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) [0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} | U_{\tau+i:k}] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L + W_k \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sachant que l'espérance mathématique des termes liés au bruit est nulle, l'espérance mathématique du résidu $\epsilon_{s, k}$ devient :

$$\begin{aligned}
 E[\epsilon_s, k] &\cong \left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} \mid \cdots \mid \right. \\
 &\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i} \left. \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} \mid \check{U} \mid \right. \\
 &0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \left. \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^{L+} \\
 &(H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) \left[0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} \mid U_{\tau+i:k} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} Z^L
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

□

4.2.1.2 Analyse du résidu

Une condition de détectabilité de commutation (détectabilité de défauts internes) est donnée dans la proposition suivante

Proposition 4.2 *Si les entrées ne sont pas identiquement nulles, une condition nécessaire et suffisante de détectabilité de défauts internes qui apparaissent à l'instant τ est :*

$$\begin{aligned}
 &\text{span} \left(\left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} \mid \right. \right. \\
 &\cdots \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i} \left. \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} \mid \right. \\
 &\check{U} \mid 0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \left. \right] + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) \left[0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} \mid \right. \\
 &U_{\tau+i:k} \left. \right) \not\subset \text{span}(U_{k-L+1:k})
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Démonstration. – *Condition suffisante :*

$$\begin{aligned}
 &\text{Si } \text{span} \left(\left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} \mid \right. \right. \\
 &\cdots \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i} \left. \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} \mid \right. \\
 &\check{U} \mid 0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \left. \right] + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) \left[0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} \mid \right. \\
 &U_{\tau+i:k} \left. \right) \not\subset \text{span}(U_{k-L+1:k})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{alors } \forall \mathcal{X} : \text{ on a } \left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2} - H_{(q^-), i} \mid \right. \\
 &\cdots \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1} - H_{(q^-), i} \mid \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i} - H_{(q^-), i} \left. \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} \mid \right. \\
 &\check{U} \mid 0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \left. \right] + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) \left[0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} \mid \right.
 \end{aligned}$$

$U_{\tau+i:k} \left. \right] \neq \mathcal{X} U_{k-L+1:k}$. Par conséquent on a $\epsilon_s, k \neq 0$.

– *Condition nécessaire :*

Si $E[\epsilon_s, k] \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
& \left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1 - H_{(q^-), i}} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2 - H_{(q^-), i}} | \cdots | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1 - H_{(q^-), i}} | \right. \\
& \left. \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i - H_{(q^-), i}} \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} | \check{U} | 0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \right] \\
& + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) \left[0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} | U_{\tau+i:k} \right] \Pi_{U_{k-L+1:k}} \neq 0, \text{ ce qui implique que} \\
& \text{span} \left(\left[\mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 1 - H_{(q^-), i}} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, 2 - H_{(q^-), i}} | \cdots | \right. \right. \\
& \left. \left. \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i-1 - H_{(q^-), i}} | \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, i - H_{(q^-), i}} \right] \left[0_{mi(i+1) \times \tau + L - k - 1} | \check{U} | \right. \right. \\
& \left. \left. 0_{mi(i+1) \times k - \tau - i + 1} \right] + (H_{(q^+), i} - H_{(q^-), i}) \left[0_{m(i+1) \times L - k + \tau + i - 1} | U_{\tau+i:k} \right] \right) \not\subset \text{span}(U_{k-L+1:k}).
\end{aligned}$$

Par conséquent, sous les conditions précédentes la commutation est détectée si l'espérance mathématique du résidu $E[\epsilon_s, k]$ (4.21) est non nulle. \square

Nous spécifions maintenant deux cas particuliers qui peuvent respecter la condition précédente (4.22) :

1. $H_{q^-} \neq H_{q^+}$
ou
2. $H_{q^-} = H_{q^+}$ et $\exists r \in \{1, 2, \dots, i\} : \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, r} \neq H_{(q^-), i}$. Cette condition est équivalente à l'existence d'une matrice non singulière $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $\Psi \neq I_n$, telle que
$$\begin{cases} A_{q^+} = \Psi^{-1} A_{q^-} \Psi \\ B_{q^+} = \Psi^{-1} B_{q^-} \\ C_{q^+} = C_{q^-} \Psi \\ D_{q^+} = D_{q^-} \end{cases} .$$

La première condition implique que les modes q^- et q^+ ont différents paramètres de Markov, en d'autres termes ces deux modes sont *discernables*.

Définition 4.1 Condition de discernabilité entre les modes linéaires

Deux modes (m_1, m_2) sont discernables quelque soit l'entrée dans un intervalle de temps $[0, T]$ (T est un entier positif), si pour tout état initial et pour la même entrée appliquée sur les modes m_1 et m_2 , les sorties générées des modes m_1 et m_2 sont différentes. Deux modes m_1 et m_2 sont discernables si leurs réalisations minimales représentées dans une même base sont différentes, ce qui implique que tous les paramètres de Markov des deux modes ne sont pas les mêmes $H_{(m_1), i} \neq H_{(m_2), i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

L'égalité des paramètres de Markov implique qu'il existe une matrice non singulière

$$\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ telle que } \begin{cases} A_{m_2} = \Psi^{-1} A_{m_1} \Psi \\ B_{m_2} = \Psi^{-1} B_{m_1} \\ C_{m_2} = C_{m_1} \Psi \\ D_{m_2} = D_{m_1} \end{cases} .$$

Cette première condition est nécessaire pour la détectabilité de commutation durant le régime permanent (Fig. 4.2).

Une autre condition nécessaire et suffisante de la discernabilité par les résidus de parité a été définie dans [81].

La deuxième condition exprime que la transition entre deux modes non discernables est transitoirement détectable. Ceci est dû au changement de dynamique produit suite à la commutation (Fig. 4.3).

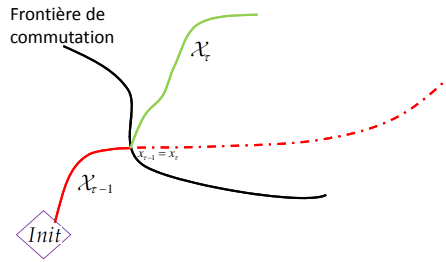


FIGURE 4.2 – Détectabilité de la commutation entre deux modes discernables

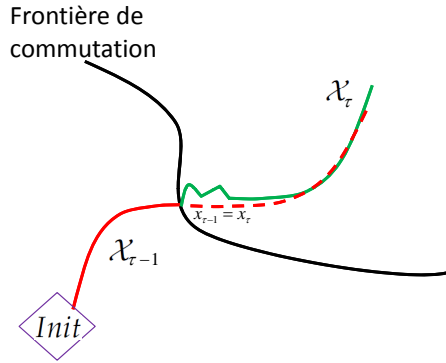


FIGURE 4.3 – Détectabilité de la commutation entre deux modes non discernables

4.2.2 Estimation de l'instant de commutation entre des modes bilinéaires

Dans cette section, la MPD est utilisée pour détecter la commutation d'un mode *bilinéaire* vers un autre mode bilinéaire. Il sera démontré que la commutation peut être détectée sous une *condition de détectabilité*.

Remarque 4.1 Dans l'étude du cas bilinéaire de ce chapitre, l'indice i_1 mentionné dans le chapitre 3 est volontairement omis dans les expressions mathématiques pour des raisons de simplicité, mais il est pris en compte dans l'exemple de simulation.

4.2.2.1 Génération du résidu

Soient les termes qui seront utilisés dans la prochaine proposition :

1. La matrice des paramètres de Markov $H_{(q), i}$ de degré i est donnée par :

$$H_{(q), i} = \left[C_q A_q^{i-1} B_q \mid \cdots \mid C_q B_q \mid D_q \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} \quad (4.23)$$

2. La matrice $\overline{\overline{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\overline{\overline{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i}) = C_q \left[A_q^{i-1} G_q(x_{k-i} \otimes I_m) \mid \cdots \mid A_q G_q(A_q \otimes I_m)^{i-2}(x_{k-i} \otimes I_m) \mid G_q(A_q \otimes I_m)^{i-1}(x_{k-i} \otimes I_m) \mid 0_{\ell \times m} \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} \quad (4.24)$$

3. La matrice $\tilde{\tilde{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\tilde{\tilde{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i}) = C_q \left[\tilde{V}_{1, i}^q(x_{k-i} \otimes I) \mid \tilde{V}_{2, i}^q(x_{k-i} \otimes I) \mid \cdots \mid \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i}^q(x_{k-i} \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i} \quad (4.25)$$

$$\text{où } \tilde{V}_{p,i}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-1} (A_q \otimes I_{mj})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{mj})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &= i \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.26)$$

4. Le vecteur des entrées $\bar{u}_{k,i}$ construit par les entrées collectées en ligne sur une fenêtre de temps de taille i est donné par :

$$\bar{u}_{k,i} = \left(u_{k-i}^T \quad u_{k-i+1}^T \quad \dots \quad u_k^T \right)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1} \quad (4.27)$$

5. Le vecteur triangulaire des entrées $\tilde{u}_{k,i}$ est donné par :

$$\tilde{u}_{k,i} = \left[\begin{array}{c} \text{les combinaisons de 2 termes} \\ \overbrace{\sum_{a=2}^i u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right)} \\ \text{les combinaisons de 3 termes} \\ \overbrace{\sum_{b=3}^i u_{k-b} \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right)} \\ \vdots \\ \text{les combinaisons de } q \text{ termes} \\ \overbrace{\left(\sum_{p=q}^i u_{k-p} \otimes \left(\sum_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \dots \otimes \left(\sum_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\sum_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \dots \right) \right)} \\ \vdots \\ \text{la combinaison de } i \text{ termes} \\ \underbrace{u_{k-i} \otimes \dots \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_i \times 1} \quad (4.28)$$

6. La matrice $\tilde{H}_{(q),i}$ est donnée par :

$$\tilde{H}_{(q),i} = \left[C_q \bar{V}_{1,i}^q (B_q \otimes I) \mid C_q \bar{V}_{2,i}^q (B_q \otimes I) \mid \dots \mid C_q \bar{V}_{\mathcal{K}_i,i}^q (B_q \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i} \quad (4.29)$$

$$\text{où } \bar{V}_{p,i}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-2} (A_q \otimes I_{mj})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{mj})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &\leq i - 1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.30)$$

7. Afin de faciliter la compréhension de la preuve, les matrices d'entrée et de sortie \underline{U}_k^s et \underline{Y}_k^s sont notées maintenant $\underline{U}_{k-L+1:k}$ et $\underline{Y}_{k-L+1:k}$ telle que :

$$\underline{U}_{k-L+1:k} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{k-L+1, i} & \cdots & \bar{u}_{k-1, i} & \bar{u}_{k, i} \\ \tilde{u}_{k-L+1, i} & \cdots & \tilde{u}_{k-1, i} & \tilde{u}_{k, i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times L} \quad (4.31)$$

Soit la matrice de sortie

$$Y_{k-L+1:k} = [y_{k-L+1} \quad \cdots \quad y_{k-1} \quad y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times L} \quad (4.32)$$

8. La matrice d'entrées diagonale par bloc $\check{U} \in \mathbb{R}^{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times i(i+1)}$ est définie comme suit :

$$\check{U} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau, i} \\ \tilde{u}_{\tau, i} \end{bmatrix} & 0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times 1} & \cdots & \cdots & 0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times 1} \\ 0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times 1} & \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau+1, i} \\ \tilde{u}_{\tau+1, i} \end{bmatrix} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times 1} \\ 0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times 1} & \cdots & \cdots & 0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times 1} & \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau+i-1, i} \\ \tilde{u}_{\tau+i-1, i} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

9. La matrice de projection dans l'espace orthogonal à droite de la matrice $\underline{U}_{k-L+1:k}$ est donnée selon (4.104) (voir annexe A.9) par :

$$\Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} = I_L - \underline{U}_{k-L+1:k}^T (\underline{U}_{k-L+1:k} \underline{U}_{k-L+1:k}^T)^{-1} \underline{U}_{k-L+1:k} \quad (4.34)$$

On suppose que les entiers i et L respectent la condition $L > m(i+1) + \mathcal{M}_i$ pour que $\dim \text{span}(\Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}}^T) > 0$ (i.e. voir équation (4.105) dans l'annexe A.9). La matrice W_k est construite comme la matrice $Y_{k-L+1:k}$ en utilisant w_k au lieu de y_k .

10. Soit $Z^L = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

11. $\wp_{(q), i} = [H_{(q), i} | \tilde{H}_{(q), i}]$ où $H_{(q), i} = [C_q A_q^{i-1} B_q | \cdots | C_q B_q | D_q] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)}$ et $\tilde{H}_{(q), i} = C_q [\bar{V}_{1, i}^q (B_q \otimes I) | \bar{V}_{2, i}^q (B_q \otimes I) | \cdots | \bar{V}_{\mathcal{K}_i, i}^q (B_q \otimes I)] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i}$.

$$\text{avec } \bar{V}_{p, i}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-2} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &\leq i-1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.35)$$

12. $\wp_{(q^-, q^+), i, j} = [H_{(q^-, q^+), i, j} | H_{(q^+), j} | \tilde{H}_{(q^-, q^+), i, j}]$.

Telle que $H_{(q^-, q^+), i, j}, H_{(q^+), j}$ et $\tilde{H}_{(q^-, q^+), i, j}$ sont données par :

$$H_{(q^-, q^+), i, j} = C_{q^+} A_{q^+}^j [A_{q^-}^{i-j-1} B_{q^-} | A_{q^-}^{i-j-2} B_{q^-} | \cdots | A_{q^-} B_{q^-} | B_{q^-}].$$

$$H_{(q^+), j} = [C_{q^+} A_{q^+}^{j-1} B_{q^+} | C_{q^+} A_{q^+}^{j-2} B_{q^+} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+} B_{q^+} | C_{q^+} B_{q^+} | D_{q^+}].$$

$$\tilde{H}_{(q^-, q^+), i, j} = C_{q^+} \left[A_{q^+}^j \bar{V}_{\mathcal{K}_i, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | A_{q^+}^j \bar{V}_{\mathcal{K}_{i-1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \cdots | \right.$$

$$A_{q^+}^j \bar{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j+1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j}, j}^{q^+} \bar{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$\tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j-1}, j}^{q^+} \bar{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j-1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \cdots | \tilde{V}_{\mathcal{K}_{j+1}, j}^{q^+} \bar{V}_{\mathcal{K}_{j+1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$\left. \bar{V}_{\mathcal{K}_j, j}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) | \bar{V}_{\mathcal{K}_{j-1}, j}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) | \cdots | \bar{V}_{1, j}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) \right];$$

$$\text{avec } \bar{V}_{p, r}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{r-2} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_r\} : \sum_{j=1}^{2r} \rho_j(p) &\leq r-1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, r\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\tilde{V}_{p, r}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{r-1} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_r\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_r\} : \sum_{j=1}^{2r} \rho_j(p) &= r \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$13. \bar{\bar{H}}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1}^t(x_{t-i}) = C_{q^+} \left[A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-2} G_{q^-} (x_{t-i} \otimes I_m) | \right.$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-3} G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m) (x_{t-i} \otimes I_m) | \cdots |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-} G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-2} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau} G_{q^+} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau-1} G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m) (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) | \cdots |$$

$$A_{q^+} G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m)^{t-\tau-1} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m)^{t-\tau} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) | 0_{\ell \times m} \left. \right]$$

$$14. \tilde{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1}^t(x_{t-i}) = C_{q^+} \left[A_{q^+}^{t-\tau+1} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) | \right.$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} \tilde{V}_{\mathcal{K}_{i-1}, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) | \cdots |$$

$$\begin{aligned}
 & A_{q\tau}^{t-\tau+1} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} + 1, i-t+\tau-1}^{q-} (x_{t-i} \otimes I) | \\
 & \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}, t-\tau+1}^{q+} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}, i-t+\tau-1}^{q-} (x_{t-i} \otimes I) | \\
 & \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} - 1, t-\tau+1}^{q+} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} - 1, i-t+\tau-1}^{q-} (x_{t-i} \otimes I) | \cdots | \\
 & \tilde{V}_{1, t-\tau+1}^{q+} \tilde{V}_{1, i-t+\tau-1}^{q-} (x_{t-i} \otimes I) \Big]
 \end{aligned}$$

Proposition 4.3 *Le générateur des résidus $\epsilon_{s,k}^{\otimes}$ donné par l'expression (3.16) est calculé en utilisant des données d'entrée-sortie collectées en ligne ($\underline{U}_{k-L+1:k}$, $Y_{k-L+1:k}$). La forme de calcul du résidu (3.16) est :*

$$\epsilon_{s,k}^{\otimes} = Y_{k-L+1:k} \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L \in \mathbb{R}^\ell \quad (4.38)$$

La forme d'évaluation peut être réécrite sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{s,k}^{\otimes} = & \left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-, i) | \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-, i) | \cdots | \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-, i) | \right. \\
 & \left. \wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-, i) \right] \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times \tau + L - k - 1} | \check{U} | 0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times k - \tau - i + 1} \right] \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L \\
 & + (\wp(q^+), i - \wp(q^-, i)) \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times L - k + \tau + i - 1} | \underline{U}_{\tau+i:k} \right] \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L \\
 & + W_k \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L + \delta_k^i
 \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\text{où } \delta_k^i = \left(\left[C_{q^-} A_{q^-}^i x_{k-L+1-i} | \cdots | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-2-i} | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-1-i} | \right. \right.$$

$$\left. C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} x_{\tau-i} | C_{q^+} A_{q^+}^2 A_{q^+}^{i-2} x_{\tau-i+1} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} A_{q^+} x_{\tau-2} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau-1} | \right.$$

$$\left. C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i} \right] +$$

$$\left[\overline{\overline{H}}_{(q^-), i}^{k-L+1} (x_{k-L+1-i}) \overline{\overline{u}}_{k-L+1, i} | \overline{\overline{H}}_{(q^-), i}^{k-L+2} (x_{k-L+2-i}) \overline{\overline{u}}_{k-L+2, i} | \cdots | \overline{\overline{H}}_{(q^-), i}^{\tau-1} (x_{\tau-1-i}) \overline{\overline{u}}_{\tau-1, i} | \right.$$

$$\overline{\overline{H}}_{(q^-, q^+), 1}^{\tau} (x_{\tau-i}) \overline{\overline{u}}_{\tau, i} | \overline{\overline{H}}_{(q^-, q^+), 2}^{\tau+1} (x_{\tau+1-i}) \overline{\overline{u}}_{\tau+1, i} | \cdots | \overline{\overline{H}}_{(q^-, q^+), i}^{\tau+i-1} (x_{\tau-1-i}) \overline{\overline{u}}_{\tau+i-1, i} | \left. \right]$$

$$\overline{\overline{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i} (x_{\tau}) \overline{\overline{u}}_{\tau+i, i} | \overline{\overline{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i+1} (x_{\tau+1}) \overline{\overline{u}}_{\tau+i+1, i} | \cdots | \overline{\overline{H}}_{(q^+), i}^k (x_{k-i}) \overline{\overline{u}}_{k, i} \Big] +$$

$$\left[\tilde{\tilde{H}}_{(q^-), i}^{k-L+1} (x_{k-L+1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{k-L+1, i} | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-), i}^{k-L+2} (x_{k-L+2-i}) \tilde{\tilde{u}}_{k-L+2, i} | \cdots | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-), i}^{\tau-1} (x_{\tau-1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau-1, i} | \right.$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{(q^-, q^+), 1}^{\tau} (x_{\tau-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau, i} | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-, q^+), 2}^{\tau+1} (x_{\tau+1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+1, i} | \cdots | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-, q^+), i}^{\tau+i-1} (x_{\tau-1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+i-1, i} | \left. \right]$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i} (x_{\tau}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+i, i} | \tilde{\tilde{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i+1} (x_{\tau+1}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+i+1, i} | \cdots | \tilde{\tilde{H}}_{(q^+), i}^k (x_{k-i}) \tilde{\tilde{u}}_{k, i} \Big] \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}.$$

Les modes étant stables, pour i suffisamment grand δ_k^i est négligeable.

Si le système (4.1) commute du mode q^- au mode q^+ (avec $q^- \neq q^+$) à l'instant τ où $\tau \in [k-L-i-1, k]$, alors : $E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}] \neq 0$.

Démonstration. La première étape de la preuve est de déterminer les expressions de la sortie sur la fenêtre temporelle $[k-L-i+1, k]$ qui contient l'instant de la commutation $\tau \in [k-L-i+1, k]$. La sortie y_t s'exprime différemment, suivant que $t < \tau$,

$\tau \leq t \leq \tau + i - 1$ et $t > \tau + i - 1$ comme détaillé dans la figure 4.1.

Soit le vecteur $\tilde{u}_{t,i}^{(p)}$ qui désigne la $p^{\text{ème}}$ combinaison du vecteur $\tilde{u}_{t,i}$.

1. Expression de la sortie $y_t = y_t^1$ pour $t < \tau$

$$\begin{aligned}
y_t^1 &= C_{q^-} A_{q^-}^i x_{t-i} + C_{q^-} \sum_{j=0}^{i-1} A_{q^-}^j B_{q^-} u_{t-j-1} + C_{q^-} \sum_{j=0}^{i-1} A_{q^-}^j G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-j-1} (x_{t-i} \otimes I_m) u_{t-j-1} \\
&+ C_{q^-} \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \bar{V}_{p,i}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) \tilde{u}_{t,i}^{(p)} + C_{q^-} \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \tilde{V}_{p,i}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) \tilde{u}_{t,i}^{(p)} + D_{q^-} u_t + w_t \\
&= C_{q^-} A_{q^-}^i x_{t-i} + H_{(q^-),i} \bar{u}_{t,i} + \tilde{H}_{(q^-),i} \tilde{u}_{t,i} + \bar{\bar{H}}_{(q^-),i}^t (x_{t-i}) \bar{u}_{t,i} + \tilde{\tilde{H}}_{(q^-),i}^t (x_{t-i}) \tilde{u}_{t,i} + w_t
\end{aligned} \tag{4.40}$$

2. Expression de la sortie $y_t = y_t^2$ pour $t > \tau + i - 1$

$$\begin{aligned}
y_t^2 &= C_{q^+} A_{q^+}^i x_{t-i} + C_{q^+} \sum_{j=0}^{i-1} A_{q^+}^j B_{q^+} u_{t-j-1} + C_{q^+} \sum_{j=0}^{i-1} A_{q^+}^j G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m)^{i-j-1} (x_{t-i} \otimes I_m) u_{t-j-1} \\
&+ C_{q^+} \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \bar{V}_{p,i}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) \tilde{u}_{t,i}^{(p)} + C_{q^+} \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \tilde{V}_{p,i}^{q^+} (x_{t-i} \otimes I) \tilde{u}_{t,i}^{(p)} + D_{q^+} u_t + w_t \\
&= C_{q^+} A_{q^+}^i x_{t-i} + H_{(q^+),i} \bar{u}_{t,i} + \tilde{H}_{(q^+),i} \tilde{u}_{t,i} + \bar{\bar{H}}_{(q^+),i}^t (x_{t-i}) \bar{u}_{t,i} + \tilde{\tilde{H}}_{(q^+),i}^t (x_{t-i}) \tilde{u}_{t,i} + w_t
\end{aligned} \tag{4.41}$$

3. Expression de la sortie $y_t = y_t^3$ pour $\tau \leq t \leq \tau + i - 1$

$$\begin{aligned}
y_t^3 &= C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1} x_{t-i} + C_{q^+} \sum_{j=0}^{t-\tau} A_{q^+}^j B_{q^+} u_{t-j-1} \\
&+ C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} \sum_{j=t-\tau+1}^{i-1} A_{q^-}^{j-t+\tau-1} B_{q^-} u_{t-j-1} + D_{q^+} u_t \\
&+ C_{q^+} \sum_{j=0}^{t-\tau} A_{q^+}^j G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m)^{t-\tau-j} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) u_{t-j-1} \\
&+ C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} \sum_{j=t-\tau+1}^{i-1} A_{q^-}^{j-t+\tau-1} G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-j-1} (x_{t-i} \otimes I_m) u_{t-j-1} \\
&+ C_{q^+} \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_{i-\tau+1}} \bar{V}_{p, t-\tau+1}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) \tilde{u}_{t, i}^{(p)} + C_{q^+} \sum_{p=\mathcal{K}_{i-\tau+1}+1}^{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}} \tilde{V}_{p, t-\tau+1}^{q^+} \bar{V}_{p, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) \tilde{u}_{t, i}^{(p)} \\
&+ C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} \sum_{p=\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}+1}^{\mathcal{K}_i} \bar{V}_{p, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) \tilde{u}_{t, i}^{(p)} \\
&+ C_{q^+} \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}} \tilde{V}_{p, t-\tau+1}^{q^+} \tilde{V}_{p, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) \tilde{u}_{t, i}^{(p)} \\
&+ C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} \sum_{p=\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}+1}^{\mathcal{K}_i} \tilde{V}_{p, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) \tilde{u}_{t, i}^{(p)} + w_t \\
&= C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-1} x_{t-i} + \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} \bar{u}_{t, i} \\
&+ \tilde{H}_{(q^-, q^+), t-\tau+1} \tilde{u}_{t, i} + \bar{\bar{H}}_{(q^-, q^+), t-\tau+1} (x_{t-i}) \bar{u}_{t, i} + \tilde{H}_{(q^-, q^+), t-\tau+1}^t (x_{t-i}) \tilde{u}_{t, i} + w_t
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Les termes qui apparaissent dans l'expression (4.42) sont explicités ci-après :

1. La matrice $\bar{\bar{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i}) &= C_q \left[A_q^{i-1} G_q (x_{k-i} \otimes I_m) | \cdots | A_q G_q (A_q \otimes I_m)^{i-2} (x_{k-i} \otimes I_m) | \right. \\
&\left. G_q (A_q \otimes I_m)^{i-1} (x_{k-i} \otimes I_m) | 0_{\ell \times m} \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

2. La matrice $\tilde{H}_{(q), i}^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\tilde{H}_{(q), i}^k(x_{k-i}) = C_q \left[\tilde{V}_{1, i}^q(x_{k-i} \otimes I) | \tilde{V}_{2, i}^q(x_{k-i} \otimes I) | \cdots | \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i}^q(x_{k-i} \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i} \tag{4.44}$$

$$\text{où } \tilde{V}_{p, i}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-1} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &= i \\
\forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$3. \mathcal{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} = [H_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} | H_{(q^+), t-\tau+1}].$$

où $H_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1}$ et $H_{(q^+), t-\tau+1}$ sont données par :

$$H_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} = C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau+1} [A_{q^-}^{i-t+\tau-2} B_{q^-} | A_{q^-}^{i-t+\tau-3} B_{q^-} | \cdots | A_{q^-} B_{q^-} | B_{q^-}].$$

$$H_{(q^+), j} = [C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau} B_{q^+} | C_{q^+} A_{q^+}^{t-\tau-1} B_{q^+} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+} B_{q^+} | C_{q^+} B_{q^+} | D_{q^+}].$$

$$4. \tilde{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1} = C_{q^+} [A_{q^+}^{t-\tau+1} \bar{V}_{\mathcal{K}_i, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} \bar{V}_{\mathcal{K}_{i-1}, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \cdots | A_{q^+}^{t-\tau+1} \bar{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} + 1, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$\tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}, t-\tau+1}^{q^+} \bar{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$\tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} - 1, t-\tau+1}^{q^+} \bar{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} - 1, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \cdots |$$

$$\tilde{V}_{\mathcal{K}_{t-\tau+1} + 1, t-\tau+1}^{q^+} \bar{V}_{\mathcal{K}_{t-\tau+1} + 1, i-t+\tau-1}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$\bar{V}_{\mathcal{K}_{t-\tau+1}, t-\tau+1}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) | \bar{V}_{\mathcal{K}_{t-\tau+1} - 1, t-\tau+1}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) | \cdots | \bar{V}_{1, t-\tau+1}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I)].$$

$$5. \bar{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1}^t(x_{t-i}) = C_{q^+} [A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-2} G_{q^-} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-}^{i-t+\tau-3} G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m) (x_{t-i} \otimes I_m) | \cdots |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} A_{q^-} G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) | A_{q^+}^{t-\tau+1} G_{q^-} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-2} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau} G_{q^+} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau-1} G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m) (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) | \cdots |$$

$$A_{q^+} G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m)^{t-\tau-1} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) |$$

$$G_{q^+} (A_{q^+} \otimes I_m)^{t-\tau} (A_{q^-} \otimes I_m)^{i-t+\tau-1} (x_{t-i} \otimes I_m) | 0_{\ell \times m}].$$

$$6. \tilde{H}_{(q^-, q^+), i, t-\tau+1}^t(x_{t-i}) = C_{q^+} [A_{q^+}^{t-\tau+1} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} \tilde{V}_{\mathcal{K}_{i-1}, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) | \cdots |$$

$$A_{q^+}^{t-\tau+1} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} + 1, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) |$$

$$\tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}, t-\tau+1}^{q^+} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1}, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) |$$

$$\tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} - 1, t-\tau+1}^{q^+} \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-t+\tau-1} - 1, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I) | \cdots | \tilde{V}_{1, t-\tau+1}^{q^+} \tilde{V}_{1, i-t+\tau-1}^{q^-} (x_{t-i} \otimes I)].$$

$$7. \bar{V}_{p, r}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{r-2} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_r\} & : \sum_{j=1}^{2r} \rho_j(p) \leq r - 1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, r\} & : \rho_{2j}(p) \in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$8. \tilde{V}_{p,r}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{r-1} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_r\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_r\} & : \sum_{j=1}^{2r} \rho_j(p) = r \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} & : \rho_{2j}(p) \in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.47)$$

9.

$$\bar{u}_{k,i} = \left(u_{k-i}^T \quad u_{k-i+1}^T \quad \dots \quad u_k^T \right)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1} \quad (4.48)$$

La matrice

$Y_{k-L+1:k} = \left[y_{k-L+1}^1 \quad \dots \quad y_{\tau-2}^1 \quad y_{\tau-1}^1 \quad y_{\tau}^3 \quad \dots \quad y_{\tau+i-2}^3 \quad y_{\tau+i-1}^3 \quad y_{\tau+i}^2 \quad \dots \quad y_{k-1}^2 \quad y_k^2 \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times L}$ pourra être construite comme suit.

$$\begin{aligned} Y_{k-L+1:k} & = \wp_{(q^-), i} \left[\underline{U}_{k-L+1:\tau-1} | \mathbf{0}_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times k-\tau+1} \right] \\ & + \left[\wp_{(q^-, q^+), i, 1} | \wp_{(q^-, q^+), i, 2} | \dots | \wp_{(q^-, q^+), i, i-1} | \right. \\ & \left. \wp_{(q^-, q^+), i, i} \right] \left[\mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times \tau+L-k-1} | \check{U} | \mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times k-\tau-i+1} \right] \\ & + \wp_{(q^+), i} \left[\mathbf{0}_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times L-k+\tau+i-1} | \underline{U}_{\tau+i:k} \right] + W_k + \delta_k^i \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\text{Avec } \delta_k^i = \left[C_{q^-} A_{q^-}^i x_{k-L+1-i} | \dots | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-2-i} | C_{q^-} A_{q^-}^i x_{\tau-1-i} | \right.$$

$$C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} x_{\tau-i} | C_{q^+} A_{q^+}^2 A_{q^-}^{i-2} x_{\tau-i+1} | \dots | C_{q^+} A_{q^+}^{i-1} A_{q^-} x_{\tau-2} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau-1} |$$

$$C_{q^+} A_{q^+}^i x_{\tau} | \dots | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i-1} | C_{q^+} A_{q^+}^i x_{k-i} \left. \right] +$$

$$\left[\overline{\overline{H}}_{(q^-), i}^{k-L+1} (x_{k-L+1-i}) \bar{u}_{k-L+1, i} | \overline{\overline{H}}_{(q^-), i}^{k-L+2} (x_{k-L+2-i}) \bar{u}_{k-L+2, i} | \dots | \overline{\overline{H}}_{(q^-), i}^{\tau-1} (x_{\tau-1-i}) \bar{u}_{\tau-1, i} | \right.$$

$$\overline{\overline{H}}_{(q^-, q^+), 1}^{\tau} (x_{\tau-i}) \bar{u}_{\tau, i} | \overline{\overline{H}}_{(q^-, q^+), 2}^{\tau+1} (x_{\tau+1-i}) \bar{u}_{\tau+1, i} | \dots | \overline{\overline{H}}_{(q^-, q^+), i}^{\tau+i-1} (x_{\tau-1-i}) \bar{u}_{\tau+i-1, i} |$$

$$\overline{\overline{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i} (x_{\tau}) \bar{u}_{\tau+i, i} | \overline{\overline{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i+1} (x_{\tau+1-i}) \bar{u}_{\tau+i+1, i} | \dots | \overline{\overline{H}}_{(q^+), i}^k (x_{k-i}) \bar{u}_{k, i} \left. \right] +$$

$$\left[\tilde{\tilde{H}}_{(q^-), i}^{k-L+1} (x_{k-L+1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{k-L+1, i} | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-), i}^{k-L+2} (x_{k-L+2-i}) \tilde{\tilde{u}}_{k-L+2, i} | \dots | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-), i}^{\tau-1} (x_{\tau-1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau-1, i} | \right.$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{(q^-, q^+), 1}^{\tau} (x_{\tau-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau, i} | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-, q^+), 2}^{\tau+1} (x_{\tau+1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+1, i} | \dots | \tilde{\tilde{H}}_{(q^-, q^+), i}^{\tau+i-1} (x_{\tau-1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+i-1, i} |$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i} (x_{\tau}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+i, i} | \tilde{\tilde{H}}_{(q^+), i}^{\tau+i+1} (x_{\tau+1-i}) \tilde{\tilde{u}}_{\tau+i+1, i} | \dots | \tilde{\tilde{H}}_{(q^+), i}^k (x_{k-i}) \tilde{\tilde{u}}_{k, i} \left. \right].$$

$$\text{où } \wp_{(q^-, q^+), i, j} = \left[H_{(q^-, q^+), i, j} | H_{(q^+), j} | \tilde{H}_{(q^-, q^+), i, j} \right].$$

où $H_{(q^-, q^+), i, j}$, $H_{(q^+), j}$ et $\tilde{H}_{(q^-, q^+), i, j}$ sont données par :

$$H_{(q^-, q^+), i, j} = C_{q^+} A_{q^+}^j \left[A_{q^-}^{i-j-1} B_{q^-} | A_{q^-}^{i-j-2} B_{q^-} | \cdots | A_{q^-} B_{q^-} | B_{q^-} \right].$$

$$H_{(q^+), j} = [C_{q^+} A_{q^+}^{j-1} B_{q^+} | C_{q^+} A_{q^+}^{j-2} B_{q^+} | \cdots | C_{q^+} A_{q^+} B_{q^+} | C_{q^+} B_{q^+} | D_{q^+}].$$

$$\tilde{H}_{(q^-, q^+), i, j} = C_{q^+} \left[A_{q^+}^j \overline{V}_{\mathcal{K}_i, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | A_{q^+}^j \overline{V}_{\mathcal{K}_{i-1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \cdots | \right.$$

$$A_{q^+}^j \overline{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j+1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j}, j}^{q^+} \overline{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$\tilde{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j-1}, j}^{q^+} \overline{V}_{\mathcal{K}_i - \mathcal{K}_{i-j-1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) | \cdots | \tilde{V}_{\mathcal{K}_{j+1}, j}^{q^+} \overline{V}_{\mathcal{K}_{j+1}, i-j}^{q^-} (B_{q^-} \otimes I) |$$

$$\left. \overline{V}_{\mathcal{K}_j, j}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) | \overline{V}_{\mathcal{K}_{j-1}, j}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) | \cdots | \overline{V}_{1, j}^{q^+} (B_{q^+} \otimes I) \right];$$

où $\wp_{(q), i} = [H_{(q), i} | \tilde{H}_{(q), i}]$ où $H_{(q), i} = [C_q A_q^{i-1} B_q | \cdots | C_q B_q | D_q] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)}$ et $\tilde{H}_{(q), i} = C_q [\overline{V}_{1, i}^q (B_q \otimes I) | \overline{V}_{2, i}^q (B_q \otimes I) | \cdots | \overline{V}_{\mathcal{K}_i, i}^q (B_q \otimes I)] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i}$;

avec $\check{U} \in \mathbb{R}^{(m(i+1) + \mathcal{M}_i) i \times i(i+1)}$ est définie comme suit :

$$\check{U} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau, i} \\ \tilde{u}_{\tau, i} \end{bmatrix} & \mathbf{0}_{m(i+1) + \mathcal{M}_i \times 1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{m(i+1) + \mathcal{M}_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{m(i+1) + \mathcal{M}_i \times 1} & \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau+1, i} \\ \tilde{u}_{\tau+1, i} \end{bmatrix} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{m(i+1) + \mathcal{M}_i \times 1} \\ \mathbf{0}_{m(i+1) + \mathcal{M}_i \times 1} & \cdots & \cdots & \mathbf{0}_{m(i+1) + \mathcal{M}_i \times 1} & \begin{bmatrix} \bar{u}_{\tau+i-1, i} \\ \tilde{u}_{\tau+i-1, i} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Afin de faire apparaître la matrice $\underline{U}_{k-L+1:k}$, on ajoute et on soustrait le terme

$\wp_{(q^-), i} [\mathbf{0}_{(m(i+1) + \mathcal{M}_i) i \times \tau - k + L - 1} | \underline{U}_{\tau:k}]$ de l'équation (4.49). Alors l'expression équivalente de la matrice de sortie résultante $Y_{k-L+1:k}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} Y_{k-L+1:k} &= \wp_{(q^-), i} \underline{U}_{k-L+1:k} + \\ & \left[\wp_{(q^-, q^+), i, 1} - \wp_{(q^-), i} | \wp_{(q^-, q^+), i, 2} - \wp_{(q^-), i} | \cdots | \wp_{(q^-, q^+), i, i-1} - \wp_{(q^-), i} | \right. \\ & \left. \wp_{(q^-, q^+), i, i} - \wp_{(q^-), i} \right] \left[\mathbf{0}_{(m(i+1) + \mathcal{M}_i) i \times \tau + L - k - 1} | \check{U} | \mathbf{0}_{(m(i+1) + \mathcal{M}_i) i \times k - \tau - i + 1} \right] \\ & + (\wp_{(q^+), i} - \wp_{(q^-), i}) [\mathbf{0}_{(m(i+1) + \mathcal{M}_i) i \times L - k + \tau + i - 1} | \underline{U}_{\tau+i:k}] + W_k + \tilde{\delta}_k^i \end{aligned} \quad (4.51)$$

En projetant l'équation (4.51) à droite sur $\Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}}$ et en sélectionnant la dernière colonne, la forme d'évaluation du résidu est donnée par :

$$\begin{aligned} \epsilon_{s,k}^{\otimes} &= \left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-, q^+), i \mid \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-, q^+), i \mid \cdots \mid \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-, q^+), i \mid \right. \\ &\left. \wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-, q^+), i \right] \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times \tau + L - k - 1} \mid \check{U} \mid 0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times k - \tau - i + 1} \right] \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L \\ &+ (\wp(q^+), i - \wp(q^-, q^+), i) [0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i) \times L - k + \tau + i - 1} \mid \underline{U}_{\tau+i:k}] \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L + W_k \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L + \delta_k^i \end{aligned} \quad (4.52)$$

où $\delta_k^i = \tilde{\delta}_k^i \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L$ La contribution de l'état initial peut être négligée ($\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_k^i = 0$) pour les raisons suivantes (voir chapitre 3 et annexe B pour plus de détails) :

1. *Première approximation :*

Sous l'hypothèse de stabilité de A_{q^-} (respectivement A_{q^+}) la contribution de l'état peut être négligée où $\lim_{i \rightarrow \infty} C_{q^-} A_{q^-}^i x_{t-i} = 0$ (respectivement $\lim_{i \rightarrow \infty} C_{q^+} A_{q^+}^i x_{t-i} = 0$).

2. *Deuxième approximation :*

$\forall j \in \{1, 2, \dots, i\}$, en utilisant une norme multiplicative alors on a

$$\begin{aligned} 0 &< \left\| A_q^{i-j} G_q (A_q \otimes I_m)^{j-1} \right\| < \left\| A_q^{i-j} \right\| \left\| G_q \right\| \left\| (A_q \otimes I_m)^{j-1} \right\| \\ \Rightarrow 0 &< \left\| A_q^{i-j} G_q (A_q \otimes I_m)^{j-1} \right\| < \left\| A_q \right\|^{i-j} \left\| G_q \right\| \left\| (A_q \otimes I_m) \right\|^{j-1} \\ \Rightarrow 0 &< \left\| A_q^{i-j} G_q (A_q \otimes I_m)^{j-1} \right\| < \max(\left\| A_q \right\|, \left\| G_q \right\|_2, \left\| (A_q \otimes I_m) \right\|)^i. \end{aligned}$$

Comme A_q est stable on a $A_q \otimes I_m$ stable aussi, et comme on a supposé $G_{(q), r} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ stable, où $G_{(q), r}$ représente la $r^{\text{ème}}$ sous-matrice de

$G_q = [G_{(q), 1} \mid G_{(q), 2} \mid \cdots \mid G_{(q), m}]$, on a :

$\lim_{i \rightarrow \infty} (\max(\left\| A_q \right\|, \left\| G_q \right\|, \left\| A \otimes I_m \right\|))^i = 0$.

Par conséquent $\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| A_q^{i-j} G_q (A_q \otimes I_m)^{j-1} \right\| = 0$.

Par conséquent, on aura l'approximation suivante :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\overline{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i}) \bar{u}_{k,i} = 0 \quad (4.53)$$

3. *Troisième approximation :*

$\forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, en utilisant une norme multiplicative alors on a

$$\begin{aligned} 0 &< \left\| \tilde{V}_{p,i}^q \right\| < \left\| A_q^{\rho_1(p)} \right\| \left\| G_q^{\rho_2(p)} \right\| \prod_{j=1}^{i-1} \left\| (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} \right\| \left\| (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)} \right\| \\ \Rightarrow 0 &< \left\| \tilde{V}_{p,i}^q \right\| < \left\| A_q \right\|^{\rho_1(p)} \left\| G_q \right\|^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-1} \left\| (A_q \otimes I_{m_j}) \right\|^{\rho_{2j+1}(p)} \left\| (G \otimes I_{m_j}) \right\|^{\rho_{2j+2}(p)} \\ \Rightarrow 0 &< \left\| \tilde{V}_{p,i}^q \right\| < \max(\left\| A_q \right\|, \left\| G_q \right\|, \left\| (A_q \otimes I_m) \right\|, \left\| (G_q \otimes I_m) \right\|, \dots, \left\| (A_q \otimes I_{m^{i-1}}) \right\|, \left\| (G_q \otimes I_{m^{i-1}}) \right\|)^i. \end{aligned}$$

La puissance du maximum est i .

Comme $A_q, A_q \otimes I_m, \dots$ et $A_q \otimes I_{m^{i-1}}$ sont stables et les sous matrices carrées de $G_q, G_q \otimes I_m, \dots$ et $G_q \otimes I_{m^{i-1}}$ sont stables, on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \max(\|A_q\|, \|G_q\|, \|(A_q \otimes I_m)\|, \|(G_q \otimes I_m)\|, \dots, \|(A_q \otimes I_{m^{i-1}})\|, \|(G_q \otimes I_{m^{i-1}})\|)^i = 0.$$

Par la suite $\lim_{i \rightarrow \infty} \|\tilde{V}_{p,i}^q\| = 0$.

Par conséquent, on aura l'approximation suivante :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{H}_{(q),i}^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k,i} = 0 \quad (4.54)$$

Sachant que l'espérance mathématique des termes liés au bruit est nulle, l'espérance mathématique du résidu $\epsilon_{s,k}^\otimes$ devient :

$$\begin{aligned} E \left[\epsilon_{s,k}^\otimes \right] &\cong \left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-), i \mid \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-), i \mid \dots \mid \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-), i \mid \right. \\ &\wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-), i \left. \right] \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times \tau + L - k - 1} \mid \check{U} \mid 0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times k - \tau - i + 1} \right] \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L \\ &+ (\wp(q^+), i - \wp(q^-), i) \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times L - k + \tau + i - 1} \mid \underline{U}_{\tau+i:k} \right] \Pi_{\underline{U}_{k-L+1:k}} Z^L \end{aligned} \quad (4.55)$$

□

4.2.2.2 Analyse du résidu

Une condition de détectabilité de commutation (détectabilité de défauts internes) est donnée dans la proposition suivante

Proposition 4.4 *Si les entrées ne sont pas identiquement nulles, une condition nécessaire et suffisante de détectabilité de défauts internes qui apparaissent à l'instant τ est :*

$$\begin{aligned} &\text{span} \left(\left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-), i \mid \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-), i \mid \dots \mid \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-), i \mid \right. \right. \\ &\left. \left. \wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-), i \right] \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times \tau + L - k - 1} \mid \check{U} \mid 0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times k - \tau - i + 1} \right] \right. \\ &\left. + (\wp(q^+), i - \wp(q^-), i) \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times L - k + \tau + i - 1} \mid \underline{U}_{\tau+i:k} \right] \right) \not\subseteq \text{span}(\underline{U}_{k-L+1:k}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Démonstration. – *Condition suffisante :*

$$\begin{aligned} &\text{Si } \text{span} \left(\left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-), i \mid \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-), i \mid \dots \mid \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-), i \mid \right. \right. \\ &\left. \left. \wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-), i \right] \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times \tau + L - k - 1} \mid \check{U} \mid 0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times k - \tau - i + 1} \right] \right. \\ &\left. + (\wp(q^+), i - \wp(q^-), i) \left[0_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times L - k + \tau + i - 1} \mid \underline{U}_{\tau+i:k} \right] \right) \not\subseteq \text{span}(\underline{U}_{k-L+1:k}) \end{aligned}$$

alors $\forall \mathcal{X}$: on a

$$\left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-), i \mid \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-), i \mid \dots \mid \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-), i \mid \right.$$

$$\begin{aligned} & \wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-, i) \left[\mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times \tau+L-k-1} | \check{\mathbf{U}} | \mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times k-\tau-i+1} \right] \\ & + (\wp(q^+), i - \wp(q^-), i) \left[\mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times L-k+\tau+i-1} | \underline{\mathbf{U}}_{\tau+i:k} \right] \neq \mathcal{X} \underline{\mathbf{U}}_{k-L+1:k}. \end{aligned}$$

Par conséquent on a $\epsilon_{s,k}^{\otimes} \neq 0$.

– *Condition nécessaire :*

Si $E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}] \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} & \left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-, i) | \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-, i) | \cdots | \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-, i) | \right. \\ & \left. \wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-, i) \right] \left[\mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times \tau+L-k-1} | \check{\mathbf{U}} | \mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times k-\tau-i+1} \right] \\ & + (\wp(q^+), i - \wp(q^-), i) \left[\mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times L-k+\tau+i-1} | \underline{\mathbf{U}}_{\tau+i:k} \right] \Pi_{\underline{\mathbf{U}}_{k-L+1:k}} \neq 0, \text{ ce} \\ & \text{qui implique que } \text{span} \left(\left[\wp(q^-, q^+), i, 1 - \wp(q^-, i) | \wp(q^-, q^+), i, 2 - \wp(q^-, i) | \cdots | \right. \right. \\ & \left. \left. \wp(q^-, q^+), i, i-1 - \wp(q^-, i) | \wp(q^-, q^+), i, i - \wp(q^-, i) \right] \left[\mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times \tau+L-k-1} | \check{\mathbf{U}} | \right. \right. \\ & \left. \left. \mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times k-\tau-i+1} \right] \right. \\ & \left. + (\wp(q^+), i - \wp(q^-), i) \left[\mathbf{0}_{(m(i+1)+\mathcal{M}_i)i \times L-k+\tau+i-1} | \underline{\mathbf{U}}_{\tau+i:k} \right] \right) \not\subset \text{span}(\underline{\mathbf{U}}_{k-L+1:k}). \end{aligned}$$

Par conséquent, sous les conditions précédentes la commutation est détectée si l'espérance mathématique du résidu $E[\epsilon_{s,k}^{\otimes}]$ (4.55) est non nulle, sinon il n'y a aucune commutation ou la commutation n'est pas détectable. □

Nous spécifions maintenant deux cas particuliers qui peuvent respecter la condition précédente (4.56) :

1. $\wp_{q^-} \neq \wp_{q^+}$.
ou
2. $\wp_{q^-} = \wp_{q^+}$ et $\exists r \in \{1, 2, \dots, i\} : \wp(q^-, q^+), i, r \neq \wp(q^-), i$. Cette condition est équivalente à l'existence d'une matrice non singulière $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $\Psi \neq I_n$, telle que

$$\begin{cases} A_{q^+} = \Psi^{-1} A_{q^-} \Psi \\ B_{q^+} = \Psi^{-1} B_{q^-} \\ G_{q^+} = \Psi^{-1} G_{q^-} (\Psi \otimes I_m) \\ C_{q^+} = C_{q^-} \Psi \\ D_{q^+} = D_{q^-} \end{cases} .$$

La première condition implique que les modes q^- et q^+ ont différents paramètres de Markov, en d'autres termes ces deux modes sont discernables.

Définition 4.2 *Condition de discernabilité entre les modes bilinéaires*

Deux modes (m_1, m_2) sont discernables dans l'intervalle de temps $[0, T]$ (T est un entier positif), si pour tout état initial et pour la même entrée appliquée sur les modes m_1 et m_2 , les sorties générées des modes m_1 et m_2 sont différentes. Deux modes m_1 et m_2 sont discernables si leurs réalisations minimales représentées dans une même base sont différentes, ce qui implique que tous les paramètres de Markov des deux modes ne sont pas les mêmes $\forall i \in \mathbb{N} : \wp(m_1), i \neq \wp(m_2), i$.

L'égalité des paramètres de Markov implique qu'il existe une matrice non singulière $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que

$$\begin{cases} A_{m_2} = \Psi^{-1} A_{m_1} \Psi \\ B_{m_2} = \Psi^{-1} B_{m_1} \\ G_{m_2} = \Psi^{-1} G_{m_1} (\Psi \otimes I_m) \\ C_{m_2} = C_{m_1} \Psi \\ D_{m_2} = D_{m_1} \end{cases} .$$

Cette première condition est nécessaire pour la détectabilité de commutation durant le régime permanent (Fig. 4.2).

La *deuxième condition* exprime que la transition entre deux modes non discernables est transitoirement détectable. Ceci est dû au changement de dynamique produit suite à la commutation (Fig. 4.3).

4.3 RECONNAISSANCE DU MODE ACTIF

Afin d'utiliser la MPD pour la reconnaissance du mode actif, qui revient à identifier les défauts internes, nous considérons dans un premier temps les systèmes à commutations avec des modes linéaires en fixant dans le système (4.1) $G_q = 0_{n \times nm}$.

4.3.1 Reconnaissance du mode actif linéaire

Dans cette section, la MPD est utilisée pour reconnaître le mode *linéaire* actif. Il sera démontré que le mode peut être reconnu sous une *condition de discernabilité*.

4.3.1.1 Génération du résidu

Soit $\bar{u}_k, i = (u_{k-i}^T \ u_{k-i+1}^T \ \dots \ u_k^T)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1}$.

Soit les deux matrices d'entrées collectées en ligne et hors ligne : $U_{k-\frac{l}{2}+1:k}$ et $U_{(\gamma), 1:\frac{l}{2}}^*$

$$U_{k-\frac{l}{2}+1:k} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{k-\frac{l}{2}+1, i} & \bar{u}_{k-\frac{l}{2}+2, i} & \dots & \bar{u}_{k, i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times \frac{l}{2}} \quad (4.57)$$

$$U_{(\gamma), 1:\frac{l}{2}}^* = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1, i}^* & \bar{u}_{2, i}^* & \dots & \bar{u}_{\frac{l}{2}, i}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times \frac{l}{2}} \quad (4.58)$$

Soit les deux matrices de sorties collectées en ligne et hors ligne : $Y_{k-\frac{l}{2}+1:k}$ et $Y_{(\gamma), 1:\frac{l}{2}}^*$

$$Y_{k-\frac{l}{2}+1:k} = \begin{bmatrix} y_{k-\frac{l}{2}+1} & \dots & y_{k-1} & y_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \frac{l}{2}} \quad (4.59)$$

$$Y_{(\gamma), 1:\frac{l}{2}}^* = \begin{bmatrix} y_1^* & \dots & y_{\frac{l}{2}-1}^* & y_{\frac{l}{2}}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \frac{l}{2}} \quad (4.60)$$

Les matrices d'entrée-sortie résultantes sont données par :

$$U_{(\gamma, q), k-\frac{l}{2}+1:k} = \left[U_{(\gamma), 1:\frac{l}{2}}^* | U_{k-\frac{l}{2}+1:k} \right] \quad \text{et} \quad Y_{(\gamma, q), k-\frac{l}{2}+1:k} = \left[Y_{(\gamma), 1:\frac{l}{2}}^* | Y_{k-\frac{l}{2}+1:k} \right] \quad (4.61)$$

La proposition suivante présente le générateur des résidus pour la reconnaissance du mode actif.

Proposition 4.5 *Le résidu $\bar{\bar{e}}_{(\gamma), k}$ dont la forme de calcul est donnée par :*

$$\bar{\bar{e}}_{(\gamma), k} = Y_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} \Pi U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} \quad (4.62)$$

a la forme d'évaluation suivante

$$\bar{\bar{e}}_{(\gamma), k} = (H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} \mid U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \Pi U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} Z^L + \delta_k^i \quad (4.63)$$

avec $\delta_k^i = [C_\gamma A_\gamma^i x_1 \mid \dots \mid C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}} \mid C_q A_q^i x_{k-\frac{L}{2}+1-i} \mid C_q A_q^i x_{k-i}] \Pi U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}$.

Les modes étant stables, pour i suffisamment grand δ_k^i est négligeable.

Si un mode $\gamma \in \{1, 2, \dots, d\}$ est actif alors $E[\bar{\bar{e}}_{(\gamma), k}] = 0$.

La génération des résidus pour la reconnaissance du mode actif est représentée graphiquement sur la figure 4.4.

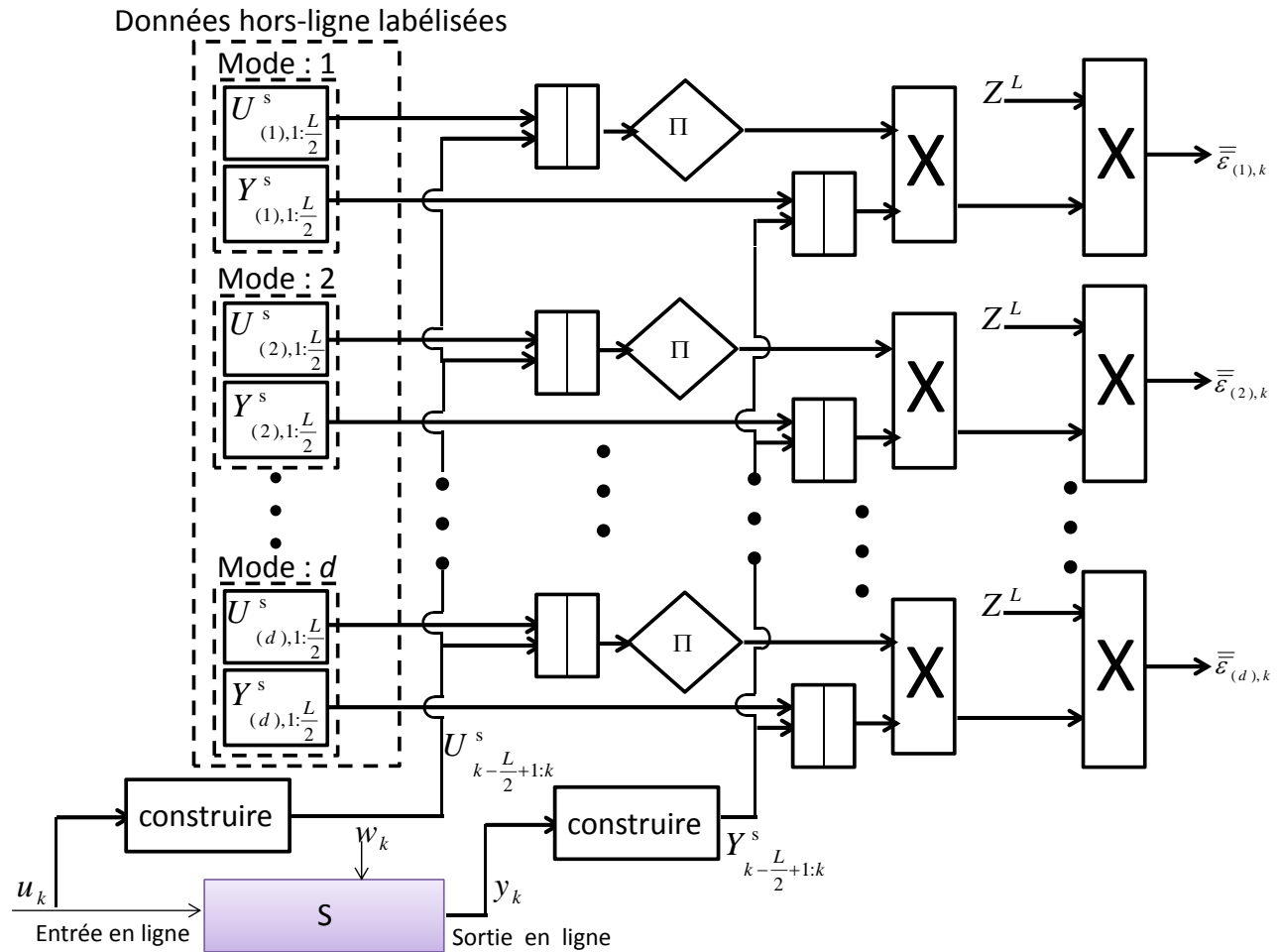


FIGURE 4.4 – Diagramme de génération de résidu par la MPD pour la reconnaissance du mode actif

La signification des symboles graphiques est donnée dans le tableau 4.1.

Démonstration. Si un mode q est actif sur une fenêtre de temps

$[k - L - i + 1, k]$, alors la matrice de la sortie du système

$Y_{k-L+1:k} = [y_{k-L+1} \dots y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times L}$ est donnée par :

$$Y_{k-L+1:k} = C_q A_q^i [x_{k-L+1-i} \mid \dots \mid x_{k-i}] + H_{(q), i} U_{k-L+1:k} + W_k \quad (4.64)$$

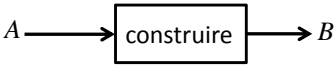

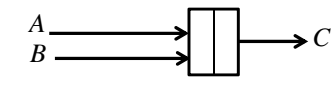
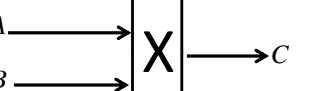
Les signes schématiques	Les significations
	B est construite à partir de A
	$B = \Pi_A$
	$C = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ Concaténation de A et B selon les colonnes
	$C = BA$

TABLE 4.1 – Signification des symboles graphiques

En remplaçant les premières $\frac{L}{2}$ colonnes de la matrice $U_{k-L+1:k}$ (respectivement $Y_{k-L+1:k}$) par la matrice d'entrée $U_{(\gamma), 1:\frac{L}{2}}^*$ (respectivement la matrice de sortie $Y_{(\gamma), 1:\frac{L}{2}}^*$) construite avec des données d'entrée-sortie collectées hors ligne en fonctionnement sans défaut dans le mode γ ($\gamma \in \{1, 2, \dots, d\}$). Les matrices d'entrée-sortie résultantes sont données par les équations (4.61). A partir de l'équation (4.64), l'expression générale de $Y_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}$ devient :

$$Y_{(\gamma, q_k), k-\frac{L}{2}+1:k} = \left[C_\gamma A_\gamma^i x_1 \mid \dots \mid C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}} \mid C_q A_q^i x_{k-\frac{L}{2}+1-i} \mid \dots \mid C_q A_q^i x_{k-i} \right] \quad (4.65)$$

$$+ H_{(\gamma), i} \left[U_{(\gamma), 1:\frac{L}{2}}^* \mid 0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} \right] + H_{(q), i} \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} \mid U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] + W_k$$

Afin de faire apparaître la matrice $U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}$, on ajoute et on soustrait le terme $H_{(\gamma), i} \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} \mid U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]$ de l'équation (4.65) :

$$Y_{(\gamma, q_k), k-\frac{L}{2}+1:k} = \left[C_\gamma A_\gamma^i x_1 \mid \dots \mid C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}} \mid C_q A_q^i x_{k-\frac{L}{2}+1-i} \mid \dots \mid C_q A_q^i x_{k-i} \right] \quad (4.66)$$

$$+ H_{(\gamma), i} U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} + (H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} \mid U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] + W_k$$

En multipliant l'équation (4.66) à droite par $\Pi_{U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}}$, et en sélectionnant la dernière colonne, la forme d'évaluation du résidu proposé est donnée par :

$$\bar{\epsilon}_{(\gamma), k} = (H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} \mid U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \Pi_{U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L + \delta_k^i \quad (4.67)$$

$$\text{avec } \delta_k^i = \left[C_\gamma A_\gamma^i x_1 \mid \dots \mid C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}} \mid C_q A_q^i x_{k-\frac{L}{2}+1-i} \mid C_q A_q^i x_{k-i} \right] \Pi_{U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}.$$

Sous l'hypothèse de la stabilité des modes, ce qui est équivalent à dire que les valeurs propres des matrices A_γ et A_q sont à l'intérieur du cercle unité, on a (voir annexe B pour la preuve des limites (4.68)) :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_\gamma^i = 0 \text{ et } \lim_{i \rightarrow \infty} A_q^i = 0 \quad (4.68)$$

Par conséquent, δ_k^i dans l'équation (4.67) devient négligeable pour i suffisamment grand. La forme d'évaluation (4.67) du résidu peut être approximée par :

$$\bar{\bar{e}}_{(\gamma), k} \cong (H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} | U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \Pi_{U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L \quad (4.69)$$

Si le mode actif est $q = \gamma$ où $H_{(q), i} = H_{(\gamma), i}$, alors

$$E[\bar{\bar{e}}_{(\gamma), k}] = E[W_k \Pi_{U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L] \cong 0.$$

□

4.3.1.2 Analyse du résidu

Une condition de discernabilité de mode (identifiabilité de défauts internes) est donnée dans la proposition suivante

Proposition 4.6 *Si les entrées ne sont pas identiquement nulles, une condition nécessaire et suffisante d'identifiabilité de défauts internes est :*

$$\text{span}((H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} | U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]) \not\subset \text{span}(U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}) \quad (4.70)$$

Démonstration. – *Condition suffisante :*

$$\text{Si } \text{span}((H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} | U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]) \not\subset \text{span}(U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k})$$

alors $\forall \mathcal{X}$: on a

$$(H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} | U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \neq \mathcal{X} U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}. \text{ Par conséquent on a } \epsilon_{s, k} \neq 0.$$

– *Condition nécessaire :*

Si $E[\epsilon_{s, k}] \neq 0$, alors

$$(H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} | U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \Pi_{U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} \neq 0, \text{ ce qui implique que}$$

$$\text{span}((H_{(q), i} - H_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} | U_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]) \not\subset \text{span}(U_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}).$$

Par conséquent, sous la condition précédente le mode est reconnu si l'espérance mathématique du résidu $E[\bar{\bar{e}}_{(\gamma), k}]$ (4.69) est non nulle pour toutes les entrées.

□

Nous spécifions maintenant un cas particulier qui peut respecter la condition précédente (4.70) :

A partir de l'équation (4.69), il est possible de conclure que le mode actif ne peut pas être reconnu quelque soit l'entrée quand $H_{(q), i} = H_{(\gamma), i}$ ce qui représente la condition de discernabilité entre deux modes. Cela implique que les modes m_1 et m_2 ne sont pas discernables pour toutes les entrées si $H_{(m_1), i} = H_{(m_2), i}$.

4.3.2 Reconnaissance du mode actif bilinéaire

Dans cette section, la MPD est utilisée pour reconnaître le mode *bilinéaire* actif. Il sera démontré que le mode peut être reconnu sous une *condition de discernabilité*.

Remarque 4.2 Dans l'étude du cas bilinéaire de ce chapitre, l'indice i_1 mentionné dans le chapitre 3 est volontairement omis dans les expressions mathématiques pour des raisons de simplicité, mais il est pris en compte dans l'exemple de simulation.

4.3.2.1 Génération du résidu

Les termes utilisés dans la proposition suivante sont donnés ci-après.

1. La matrice des paramètres de Markov $H_{(q), i}$ de degré i est donnée par :

$$H_{(q), i} = \left[C_q A_q^{i-1} B_q \mid \cdots \mid C_q B_q \mid D_q \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} \quad (4.71)$$

2. La matrice $\overline{\overline{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\overline{\overline{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i}) = C_q \left[A_q^{i-1} G_q(x_{k-i} \otimes I_m) \mid \cdots \mid A_q G_q (A_q \otimes I_m)^{i-2} (x_{k-i} \otimes I_m) \mid G_q (A_q \otimes I_m)^{i-1} (x_{k-i} \otimes I_m) \mid 0_{\ell \times m} \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)} \quad (4.72)$$

3. La matrice $\tilde{\tilde{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i})$ dépendante de l'état est donnée par :

$$\tilde{\tilde{H}}_{(q), i}^k(x_{k-i}) = C_q \left[\tilde{V}_{1, i}^q(x_{k-i} \otimes I) \mid \tilde{V}_{2, i}^q(x_{k-i} \otimes I) \mid \cdots \mid \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i}^q(x_{k-i} \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i} \quad (4.73)$$

$$\text{où } \tilde{V}_{p, i}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-1} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &= i \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.74)$$

4. Le vecteur des entrées $\bar{u}_{k, i}$ construit par les entrées collectées en ligne sur une fenêtre de temps de taille i est donné par :

$$\bar{u}_{k, i} = \left(u_{k-i}^T \quad u_{k-i+1}^T \quad \cdots \quad u_k^T \right)^T \in \mathbb{R}^{m(i+1) \times 1} \quad (4.75)$$

5. Le vecteur triangulaire des entrées $\tilde{u}_{k, i}$ est donné par :

$$\tilde{u}_{k,i} = \left[\begin{array}{c} \text{les combinaisons de 2 termes} \\ \overbrace{\left(\bigotimes_{a=2}^i u_{k-a} \otimes \left(\bigotimes_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right)} \\ \text{les combinaisons de 3 termes} \\ \overbrace{\left(\bigotimes_{b=3}^i u_{k-b} \otimes \left(\bigotimes_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\bigotimes_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right)} \\ \vdots \\ \text{les combinaisons de } q \text{ termes} \\ \left(\bigotimes_{p=q}^i u_{k-p} \otimes \left(\bigotimes_{r=q-1}^{p-1} u_{k-r} \otimes \cdots \otimes \left(\bigotimes_{a=2}^{b-1} u_{k-a} \otimes \left(\bigotimes_{c=1}^{a-1} u_{k-c} \right) \right) \right) \cdots \right) \\ \vdots \\ \text{la combinaison de } i \text{ termes} \\ u_{k-i} \otimes \cdots \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_i \times 1} \quad (4.76)$$

6. La matrice $\tilde{H}_{(q),i}$ est donnée par :

$$\tilde{H}_{(q),i} = \left[C_q \bar{V}_{1,i}^q (B_q \otimes I) | C_q \bar{V}_{2,i}^q (B_q \otimes I) | \cdots | C_q \bar{V}_{\mathcal{K}_i,i}^q (B_q \otimes I) \right] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i} \quad (4.77)$$

$$\text{où } \bar{V}_{p,i}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-2} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &\leq i-1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.78)$$

7. Soit les deux matrices d'entrées collectées en ligne et hors ligne : $\underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k}$ et $\underline{U}_{(\gamma),1:\frac{L}{2}}^*$

$$\underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{k-\frac{L}{2}+1,i} & \cdots & \bar{u}_{k-1,i} & \bar{u}_{k,i} \\ \tilde{u}_{k-\frac{L}{2}+1,i} & \cdots & \tilde{u}_{k-1,i} & \tilde{u}_{k,i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} \quad (4.79)$$

$$\underline{U}_{(\gamma),1:\frac{L}{2}}^* = \begin{bmatrix} \bar{u}_{1,i}^* & \cdots & \bar{u}_{\frac{L}{2}-1,i}^* & \bar{u}_{\frac{L}{2},i}^* \\ \tilde{u}_{1,i}^* & \cdots & \tilde{u}_{\frac{L}{2}-1,i}^* & \tilde{u}_{\frac{L}{2},i}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} \quad (4.80)$$

8. Soit les deux matrices de sorties collectées en ligne et hors ligne : $Y_{k-\frac{L}{2}+1:k}$ et $Y_{(\gamma),1:\frac{L}{2}}^*$

$$Y_{k-\frac{L}{2}+1:k} = \begin{bmatrix} y_{k-\frac{L}{2}+1} & \cdots & y_{k-1} & y_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \frac{L}{2}} \quad (4.81)$$

$$Y_{(\gamma),1:\frac{L}{2}}^* = \begin{bmatrix} y_1^* & \cdots & y_{\frac{L}{2}-1}^* & y_{\frac{L}{2}}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times \frac{L}{2}} \quad (4.82)$$

9. Les matrices d'entrée-sortie résultantes sont données par :

$$\underline{U}_{(\gamma,q),k-\frac{L}{2}+1:k} = \left[\underline{U}_{(\gamma),1:\frac{L}{2}}^* | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \text{ et } Y_{(\gamma,q),k-\frac{L}{2}+1:k} = \left[Y_{(\gamma),1:\frac{L}{2}}^* | Y_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \quad (4.83)$$

10. La matrice de projection dans l'espace orthogonal à droite de la matrice $\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}$ est donnée selon (4.104) (voir annexe A.9) par :

$$\Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} = I_L - \underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}^T (\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} \underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}^T)^{-1} \underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} \quad (4.84)$$

On suppose que les entiers i et L respectent la condition $L > m(i+1) + \mathcal{M}_i$ pour que $\dim \text{span}(\Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}}^T) > 0$ (i.e. voir équation (4.105) dans l'annexe A.9). Les matrices W_k et $F_{s, k}$ sont construites comme la matrice $Y_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}$ en utilisant w_k et $f_{s, k}$ au lieu de y_k .

11. Soit $Z^L = (0 \ \dots \ 0 \ 1)^T \in \mathbb{R}^{L \times 1}$.

12. $\wp_{(q), i} = [H_{(q), i} | \tilde{H}_{(q), i}]$ où $H_{(q), i} = [C_q A_q^{i-1} B_q | \dots | C_q B_q | D_q] \in \mathbb{R}^{\ell \times m(i+1)}$ et $\tilde{H}_{(q), i} = C_q [\bar{V}_{1, i}^q (B_q \otimes I) | \bar{V}_{2, i}^q (B_q \otimes I) | \dots | \bar{V}_{\mathcal{K}_i, i}^q (B_q \otimes I)] \in \mathbb{R}^{\ell \times \mathcal{M}_i}$.

$$\text{avec } \bar{V}_{p, i}^q = A_q^{\rho_1(p)} G_q^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-2} (A_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G_q \otimes I_{m_j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &\leq i-1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.85)$$

La proposition suivante présente le générateur des résidus pour la reconnaissance du mode actif.

Proposition 4.7 *Le résidu $\bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes}$ dont la forme de calcul est donnée par :*

$$\forall \gamma \in \{1, 2, \dots, d\} : \bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes} = Y_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L \quad (4.86)$$

a la forme d'évaluation suivante

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes} &= (\wp_{(q), i} - \wp_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | U_{k-\frac{L}{2}+1:k}^s \right] \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L + \\ &W_k \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L + \delta_k^i \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\text{où } \delta_k^i = \left([C_\gamma A_\gamma^i x_1 | \dots | C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}-1} | C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}} | C_q A_q^i x_{k-\frac{L}{2}+1-i} | \dots | C_q A_q^i x_{k-i-1} | C_q A_q^i x_{k-i}] + \right.$$

$$\left. \left[\bar{H}_{(\gamma), i}^1(x_1) \bar{u}_{1, i}^* | \bar{H}_{(\gamma), i}^2(x_2) \bar{u}_{2, i}^* | \dots | \bar{H}_{(\gamma), i}^{\frac{L}{2}}(x_{\frac{L}{2}}) \bar{u}_{\frac{L}{2}, i}^* \right] \right.$$

$$\left. \bar{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+1-i}(x_{k-\frac{L}{2}+1-i}) \bar{u}_{k-\frac{L}{2}+1-i, i} | \bar{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+2-i}(x_{k-\frac{L}{2}+2-i}) \bar{u}_{k-\frac{L}{2}+2-i, i} | \dots | \bar{H}_{(q), i}^k(x_{k-i}) \bar{u}_{k, i} \right] +$$

$$\left[\tilde{H}_{(\gamma), i}^1(x_1) \tilde{u}_{1, i}^* | \tilde{H}_{(\gamma), i}^2(x_2) \tilde{u}_{2, i}^* | \dots | \tilde{H}_{(\gamma), i}^{\frac{L}{2}}(x_{\frac{L}{2}}) \tilde{u}_{\frac{L}{2}, i}^* \right]$$

$$\left. \tilde{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+1-i}(x_{k-\frac{L}{2}+1-i}) \tilde{u}_{k-\frac{L}{2}+1-i, i} | \tilde{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+2-i}(x_{k-\frac{L}{2}+2-i}) \tilde{u}_{k-\frac{L}{2}+2-i, i} | \dots \right]$$

$$\tilde{H}_{(q), i}^k(x_{k-i}\tilde{u}_{k, i}) \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L \in \mathbb{R}^{\ell \times 1}.$$

Les modes étant stables, pour i suffisamment grand δ_k^i est négligeable.

Si un mode $\gamma \in \{1, 2, \dots, d\}$ est actif alors $E[\bar{\epsilon}_{(\gamma), k}^{\otimes}] = 0$.

Démonstration. Si un mode q est actif sur la fenêtre de temps

$[k-L-i+1, k]$, alors la matrice de sortie du système

$Y_{k-\frac{L}{2}+1:k} = [y_{k-\frac{L}{2}+1} \dots y_k] \in \mathbb{R}^{\ell \times \frac{L}{2}}$ est donnée par l'équation (3.13). Indépendamment de la différence entre i_1 et i et en introduisant l'indice q , l'équation (3.13) devient :

$$Y_{k-\frac{L}{2}+1:k} = \wp_{(q), i} \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} + W_{k-\frac{L}{2}+1:k} + \bar{\delta}_k^i \quad (4.88)$$

$$\text{où } \bar{\delta}_k^i = C_q \left[A_q^i x_{k-\frac{L}{2}+1-i} | \dots | A_q^i x_{k-i-1} | A_q^i x_{k-i} \right] +$$

$$\left[\bar{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+1-i}(x_{k-\frac{L}{2}+1-i}) \bar{u}_{k-\frac{L}{2}+1-i, i} | \bar{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+2-i}(x_{k-\frac{L}{2}+2-i}) \bar{u}_{k-\frac{L}{2}+2-i, i} | \dots | \bar{H}_{(q), i}^k(x_{k-i}) \bar{u}_{k, i} \right] +$$

$$\left[\tilde{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+1-i}(x_{k-\frac{L}{2}+1-i}) \tilde{u}_{k-\frac{L}{2}+1-i, i} | \tilde{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+2-i}(x_{k-\frac{L}{2}+2-i}) \tilde{u}_{k-\frac{L}{2}+2-i, i} | \dots | \tilde{H}_{(q), i}^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k, i} \right];$$

telle que $\wp_{(q), i} = [H_{(q), i} | \tilde{H}_{(q), i}]$.

En concaténant la matrice $\underline{U}_{k-k-\frac{L}{2}+1:k+1:k}$ (respectivement $Y_{k-k-\frac{L}{2}+1:k+1:k}$) avec la matrice d'entrée $\underline{U}_{(\gamma), 1:\frac{L}{2}}$ (respectivement la matrice de sortie $Y_{(\gamma), 1:\frac{L}{2}}$) construite par les données collectées hors ligne en fonctionnement sans défaut du mode γ ($\gamma \in \{1, 2, \dots, d\}$).

A partir de l'équation (4.88), l'expression générale de $Y_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}$ devient :

$$Y_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} = \wp_{(\gamma), i} \left[\underline{U}_{(\gamma), 1:\frac{L}{2}}^* | 0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} \right] + \wp_{(q), i} \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] + W_k + \tilde{\delta}_k^i \quad (4.89)$$

$$\text{où } \tilde{\delta}_k^i = \left[C_\gamma A_\gamma^i x_1 | \dots | C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}-1} | C_\gamma A_\gamma^i x_{\frac{L}{2}} | C_q A_q^i x_{k-\frac{L}{2}+1-i} | \dots | C_q A_q^i x_{k-i-1} | C_q A_q^i x_{k-i} \right] +$$

$$\left[\bar{H}_{(\gamma), i}^1(x_1) \bar{u}_{1, i}^* | \bar{H}_{(\gamma), i}^2(x_2) \bar{u}_{2, i}^* | \dots | \bar{H}_{(\gamma), i}^{\frac{L}{2}}(x_{\frac{L}{2}}) \bar{u}_{\frac{L}{2}, i}^* | \right.$$

$$\left. \bar{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+1-i}(x_{k-\frac{L}{2}+1-i}) \bar{u}_{k-\frac{L}{2}+1-i, i} | \bar{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+2-i}(x_{k-\frac{L}{2}+2-i}) \bar{u}_{k-\frac{L}{2}+2-i, i} | \dots | \bar{H}_{(q), i}^k(x_{k-i}) \bar{u}_{k, i} \right] +$$

$$\left[\tilde{H}_{(\gamma), i}^1(x_1) \tilde{u}_{1, i}^* | \tilde{H}_{(\gamma), i}^2(x_2) \tilde{u}_{2, i}^* | \dots | \tilde{H}_{(\gamma), i}^{\frac{L}{2}}(x_{\frac{L}{2}}) \tilde{u}_{\frac{L}{2}, i}^* | \right.$$

$$\left. \tilde{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+1-i}(x_{k-\frac{L}{2}+1-i}) \tilde{u}_{k-\frac{L}{2}+1-i, i} | \tilde{H}_{(q), i}^{k-\frac{L}{2}+2-i}(x_{k-\frac{L}{2}+2-i}) \tilde{u}_{k-\frac{L}{2}+2-i, i} | \dots | \tilde{H}_{(q), i}^k(x_{k-i}) \tilde{u}_{k, i} \right].$$

Afin de faire apparaître la matrice $\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}$, on ajoute et on soustrait $H_{(\gamma), i} \left[0_{m(i+1) \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]$ de l'équation (4.89) :

$$Y_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} = \wp_{(\gamma), i} \underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k} + (\wp_{(q), i} - \wp_{(\gamma), i}) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] + W_k + \tilde{\delta}_k^i \quad (4.90)$$

En multipliant l'équation (4.90) à droite par $\Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}}$, et en sélectionnant la dernière colonne, la forme d'évaluation du résidu MPD proposé est donnée par :

$$\bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes} = (\wp(q), i - \wp(\gamma), i) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L + \quad (4.91)$$

$$W_k \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L + \delta_k^i$$

$$\text{où } \delta_k^i = \tilde{\delta}_k^i \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L.$$

Si le mode actif est $q = \gamma$ où $\wp(q), i = \wp(\gamma), i$,

alors $E[\bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes}] = E[W_k \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} Z^L] \cong 0$, par conséquent le mode courant q est reconnu comme étant γ (i.e. $q = \gamma$). □

4.3.2.2 Analyse du résidu

Une condition de discernabilité de mode (identifiabilité de défauts internes) est donnée dans la proposition suivante

Proposition 4.8 *Si les entrées ne sont pas identiquement nulles, une condition nécessaire et suffisante d'identifiabilité de défauts internes est :*

$$\text{span}((\wp(q), i - \wp(\gamma), i) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]) \not\subset \text{span}(\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}) \quad (4.92)$$

Démonstration. – *Condition suffisante :*

$$\text{Si } \text{span}((\wp(q), i - \wp(\gamma), i) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]) \not\subset \text{span}(\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k})$$

alors $\forall \mathcal{X}$: on a

$$(\wp(q), i - \wp(\gamma), i) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \neq \mathcal{X} \underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}. \text{ Par conséquent on a } \bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes} \neq 0.$$

– *Condition nécessaire :*

Si $E[\bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes}] \neq 0$, alors

$$(\wp(q), i - \wp(\gamma), i) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right] \Pi_{\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}} \neq 0, \text{ ce qui implique que}$$

$$\text{span}((\wp(q), i - \wp(\gamma), i) \left[0_{m(i+1)+\mathcal{M}_i \times \frac{L}{2}} | \underline{U}_{k-\frac{L}{2}+1:k} \right]) \not\subset \text{span}(\underline{U}_{(\gamma, q), k-\frac{L}{2}+1:k}).$$

Par conséquent, sous la condition précédente le mode est reconnu si l'espérance mathématique du résidu $E[\bar{\bar{\epsilon}}_{(\gamma), k}^{\otimes}]$ (4.91) est non nulle. □

Nous spécifions maintenant un cas particulier qui respecte la condition précédente (4.92) :

A partir de l'équation (4.91), il est possible de conclure que le mode actif ne peut pas être reconnu quelque soit l'entrée quand $\wp(q), i = \wp(\gamma), i$ et $q \neq \gamma$ ce qui représente la condition de discernabilité entre deux modes. Cela implique que les modes m_1 et m_2 ne sont pas discernables pour tout les entrées si $\wp(m_1), i = \wp(m_2), i$.

4.4 EXEMPLES D'ILLUSTRATION

4.4.1 Systèmes à commutations avec des modes linéaires

Considérons un système à 3 modes de fonctionnement ($q \in \{1, 2, 3\}$), où le mode 1 est un mode de fonctionnement linéaire normal et les deux autres modes peuvent par exemple représenter des modes de défaillance dus à des défauts internes (Fig. 4.5).

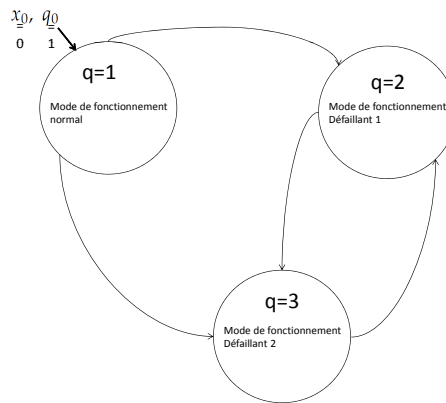


FIGURE 4.5 – Système à commutations

La séquence des commutations est donnée dans le tableau 4.2.

k	$[0, 1500[$	$[1500, 2500[$	$[2500, 4000[$
numéro de mode	1	3	2

TABLE 4.2 – Séquence de commutations simulée

Les 3 modes sont stables. Les valeurs numériques des paramètres de ces modes sont données ci-après. Ces paramètres seront utilisés pour générer en simulation les sorties du système, mais ils ne seront pas utilisés pour le calcul des résidus.

Deux exemples sont décrits ci-après. Dans le premier, tous les modes linéaires sont discernables, tandis que dans le second, les modes 2 et 3 sont non discernables.

4.4.1.1 Exemple avec des modes discernables

Les paramètres du mode 1 sont donnés par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres du mode 2 sont donnés par :

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 1.2 & 1.2 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.8 & 0.8 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres du mode 3 sont donnés par :

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.7 \\ 0.9 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, D_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Ces paramètres ont été choisis de tel sorte que les 3 modes soient discernables (i.e. ils ont différents paramètres de Markov).

4.4.1.1.1 Réglage de la MPD La première étape de la MPD est de régler les paramètres i et L .

Les entiers i et L ($i = 15$ et $L = 68$) pour les 3 modes sont choisis en calculant le critère donné par (2.25).

4.4.1.1.2 Génération des entrées et des sorties Les figures 4.6 et 4.7 représentent les entrées et les sorties du système qui sont les seules données utilisées pour calculer les résidus d'estimation des instants de commutation et de reconnaissance du mode actif en ligne.

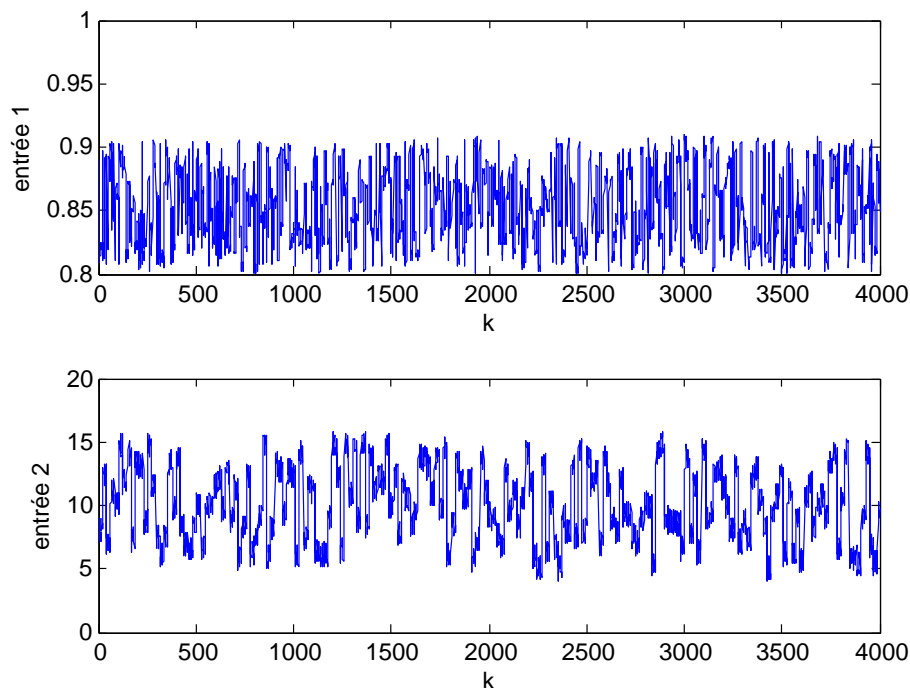


FIGURE 4.6 – Les entrées du système u_k

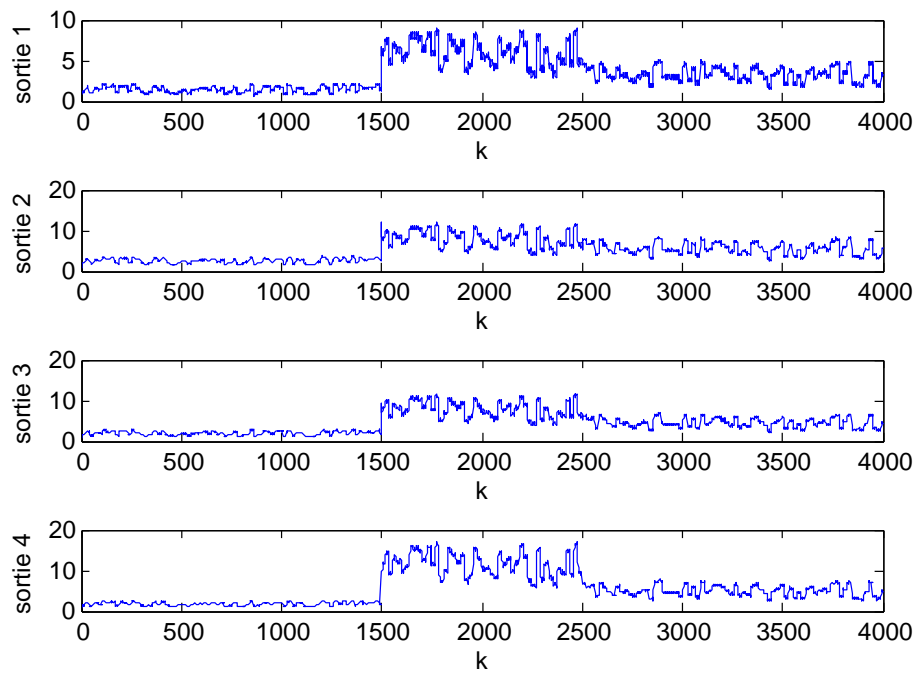


FIGURE 4.7 – Les sorties du système y_k

4.4.1.1.3 Estimation des instants de commutation Les instants de commutation $\tau = 1500$ et $\tau = 2500$ ont été bien estimés par les résidus comme le montre la figure 4.8. Tout les résidus sont sensibles à ces deux commutations.

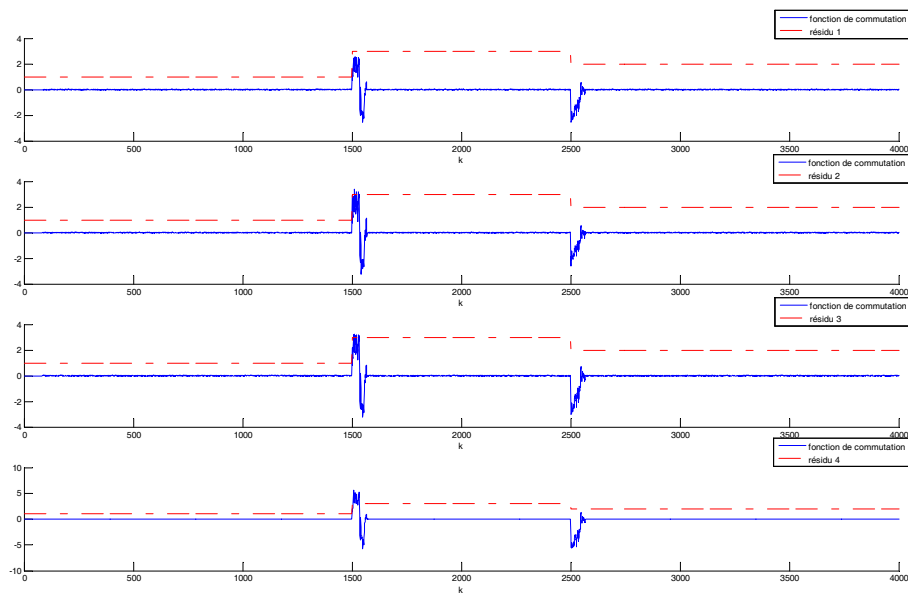
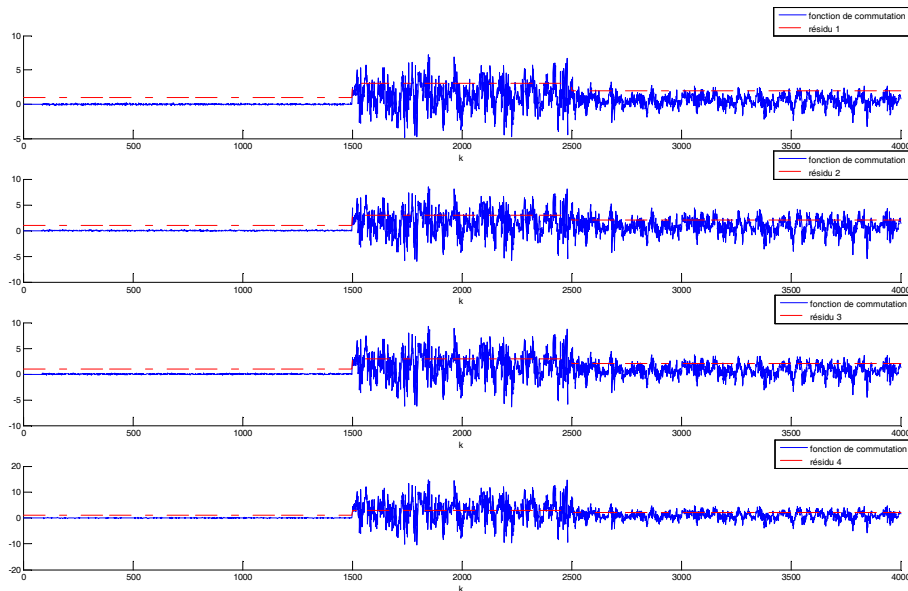
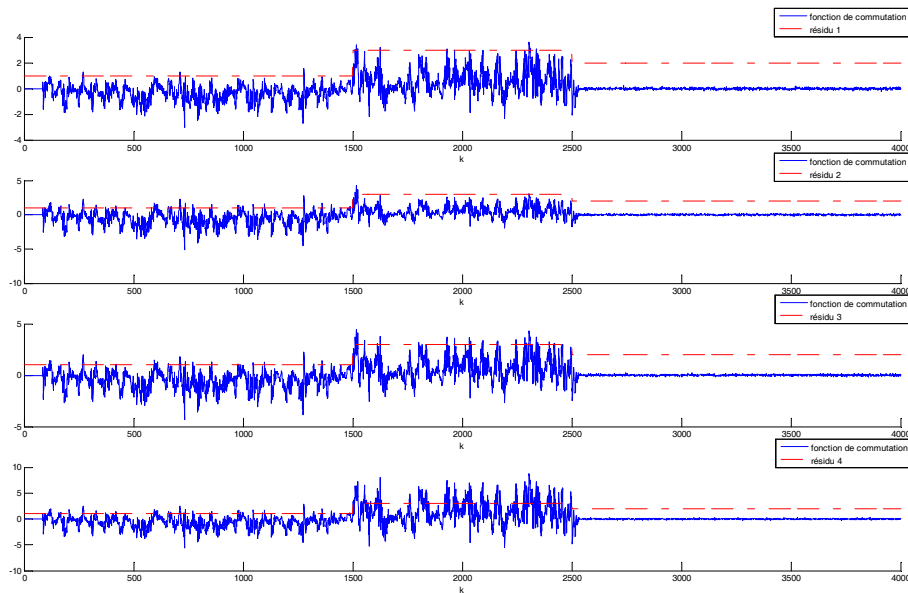


FIGURE 4.8 – L'estimation des instants de commutations $\epsilon_{s, k}$

4.4.1.1.4 Reconnaissance du mode actif Le résidu $\bar{\bar{e}}_{(1), k}$ est calculé en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne du mode 1. Les composantes du résidu calculé permettent la reconnaissance du mode 1 comme le montre la figure 4.9.

Le résidu $\bar{\bar{e}}_{(2), k}$ est calculé en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne du mode 2. Les composantes du résidu calculé permettent la reconnaissance du mode 2 comme le montre la figure 4.10.

Le résidu $\bar{\bar{e}}_{(3), k}$ est calculé en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne du mode 3. Les composantes du résidu calculé permettent la reconnaissance du mode 3 comme le montre la figure 4.11.

FIGURE 4.9 – La reconnaissance du premier mode $\bar{\bar{e}}_{(1), k}$ FIGURE 4.10 – La reconnaissance du deuxième mode $\bar{\bar{e}}_{(2), k}$

4.4.1.2 Exemple avec des modes non discernables

Les paramètres du mode 1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.0792 & 1.9072 & 0.9395 & 0.5389 \\ -0.1542 & -0.3322 & -0.2895 & -0.2139 \\ -0.3538 & -0.7776 & -0.3280 & -0.2391 \\ -0.6090 & -1.4554 & -0.8149 & -0.1190 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} -0.1152 & -0.1152 \\ 0.1152 & 0.1152 \\ 0.0419 & 0.0419 \\ 0.1859 & 0.1859 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & -0.2 & 0.5 \\ -0.2 & 0.4 & -0.9 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 1.5 & 1.5 \\ 0.6 & 0.6 \\ -0.6 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

Les paramètres du mode 2 :

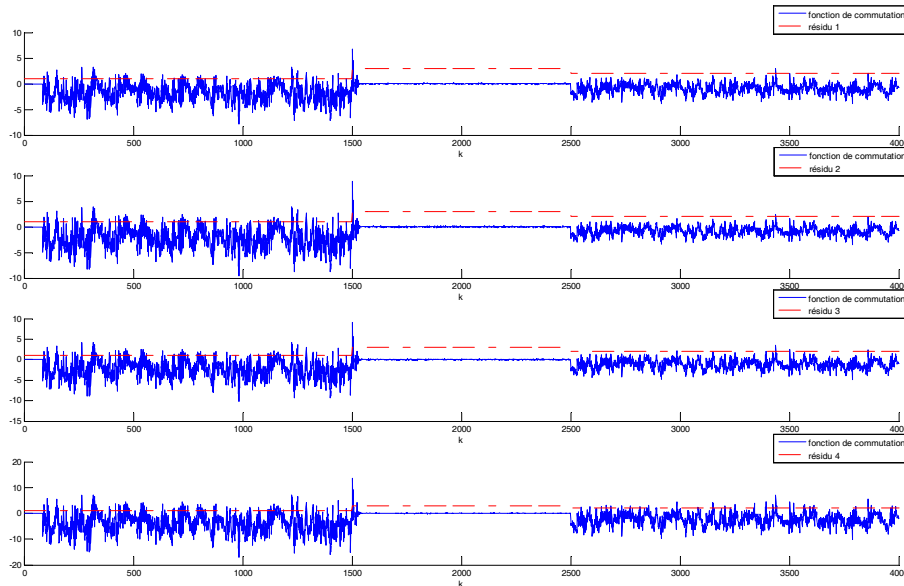


FIGURE 4.11 – La reconnaissance du troisième mode $\bar{\epsilon}_{(3), k}$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.5669 & 0.9342 & 0.6730 & 0.3711 \\ -0.1919 & -0.2092 & -0.3230 & -0.1961 \\ -0.1630 & -0.5192 & -0.0584 & -0.1918 \\ -0.1653 & -0.7682 & -0.5872 & 0.1007 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.1054 & 0.1054 \\ 0.0321 & 0.0321 \\ -0.0577 & -0.0577 \\ -0.0363 & -0.0363 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.6 & 0.3 \\ 1.5 & 2.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.9 & 0 & -0.6 & 1.5 \\ -0.6 & 1.2 & -2.7 & 0.3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 1.5 & 1.5 \\ 0.6 & 0.6 \\ -0.6 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

Les paramètres du mode 3 :

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3.1682 & -5.0342 & 1.2697 & -2.7353 \\ 1.0859 & 1.8972 & -0.4467 & 0.8729 \\ 2.0977 & 2.9268 & -0.3946 & 1.6441 \\ 2.2298 & 3.2131 & -0.8241 & 2.0657 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} -0.0418 & -0.0418 \\ 0.0234 & 0.0234 \\ 0.0264 & 0.0264 \\ 0.0241 & 0.0241 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 6 & 8.4 & -1.5 & 4.5 \\ 13.2 & 20.4 & 3.3 & 6.9 \\ -3.9 & 8.7 & -10.5 & -0.6 \\ -3.3 & 7.8 & 3.9 & -12.6 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 1.5 & 1.5 \\ 0.6 & 0.6 \\ -0.6 & -0.6 \end{pmatrix}.$$

Les modes 2 et 3 ne sont pas discernables (i.e. ils ont les mêmes paramètres de Markov).

La matrice Ψ qui permet de passer du mode 2 au mode 3 est $\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4.1.2.1 Réglage de la MPD La première étape de la MPD est de régler les paramètres i et L .

Les entiers i et L ($i = 20$ et $L = 88$) pour les 3 modes sont choisis en calculant le critère donné par (2.25).

4.4.1.2.2 Génération des entrées et des sorties Les figures 4.12 et 4.13 représentent les entrées et les sorties du système qui sont les seules données utilisées pour calculer les résidus d'estimation des instants de commutation et de reconnaissance du mode actif en ligne.

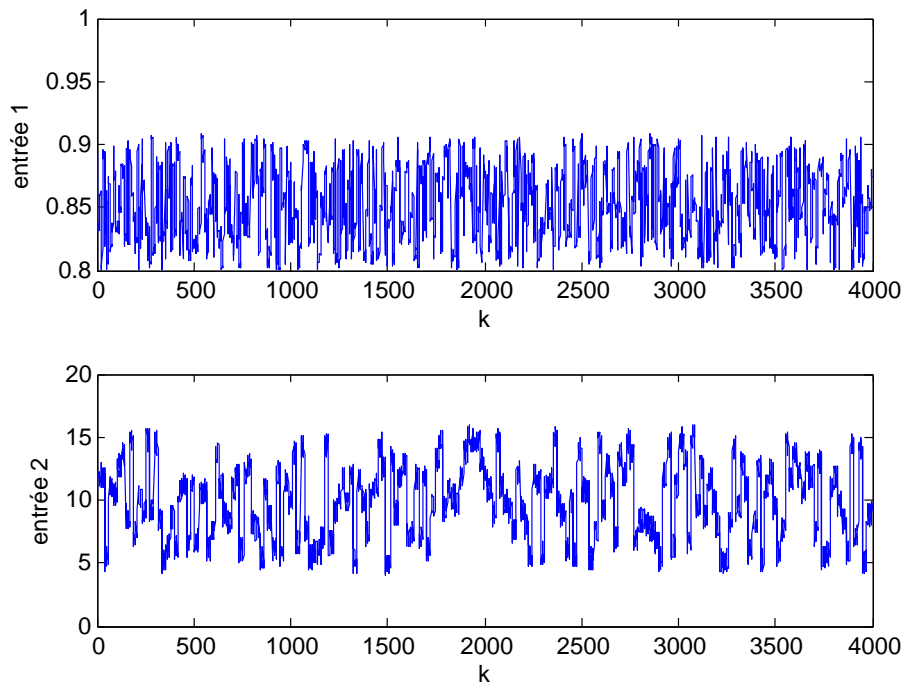


FIGURE 4.12 – Les entrées du système u_k

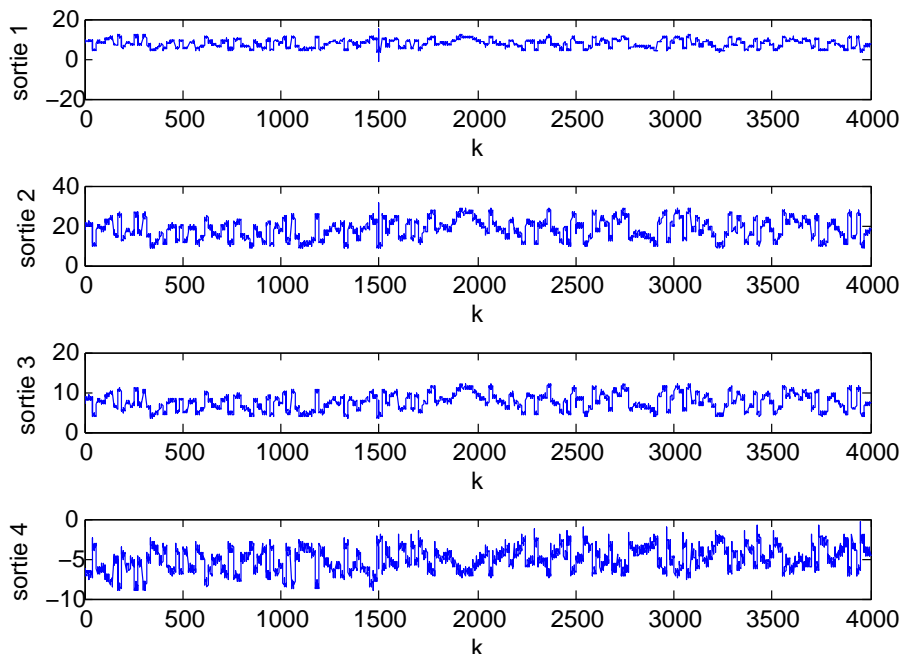


FIGURE 4.13 – Les sorties du système y_k

4.4.1.2.3 Estimation des instants de commutation L'instant de commutation $\tau = 1500$ a été bien estimé par les résidus comme le montre la figure 4.14. Tout les résidus sont sensibles à cette commutation. La deuxième transition $\tau = 2500$ est détectée par les 3 dernières composantes du résidu mais la première composante n'est pas sensible à cette

134

deuxième transition. La non sensibilité de la première composante à la deuxième transition est due à la non satisfaction de la condition de sensibilité du résidu à la transition.

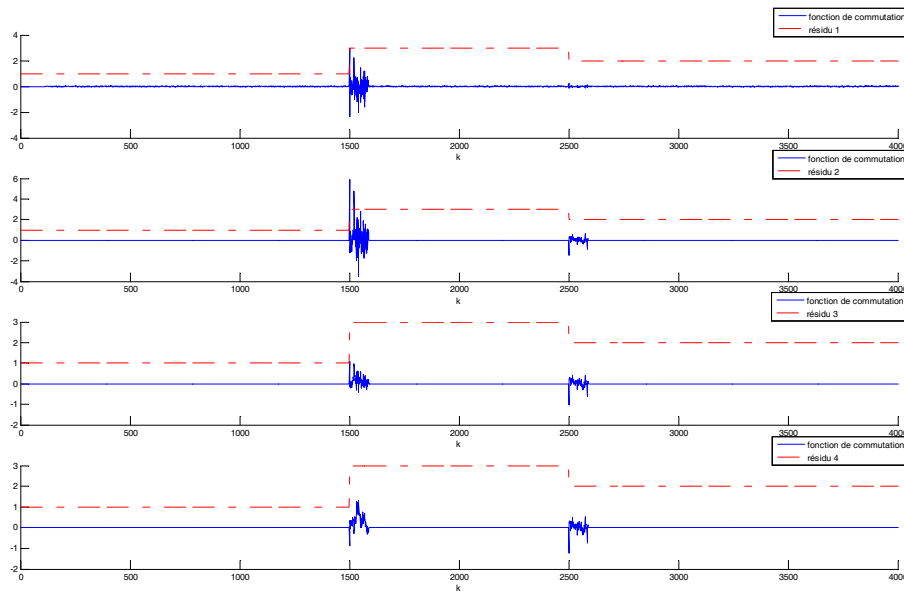


FIGURE 4.14 – L'estimation des instants de commutation $\epsilon_{s, k}$

4.4.1.2.4 Reconnaissance du mode actif Le résidu $\bar{\epsilon}_{(1), k}$ est calculé en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne du mode 1. Les composantes du résidu calculé permettent la reconnaissance du mode 1 comme le montre la figure 4.15.

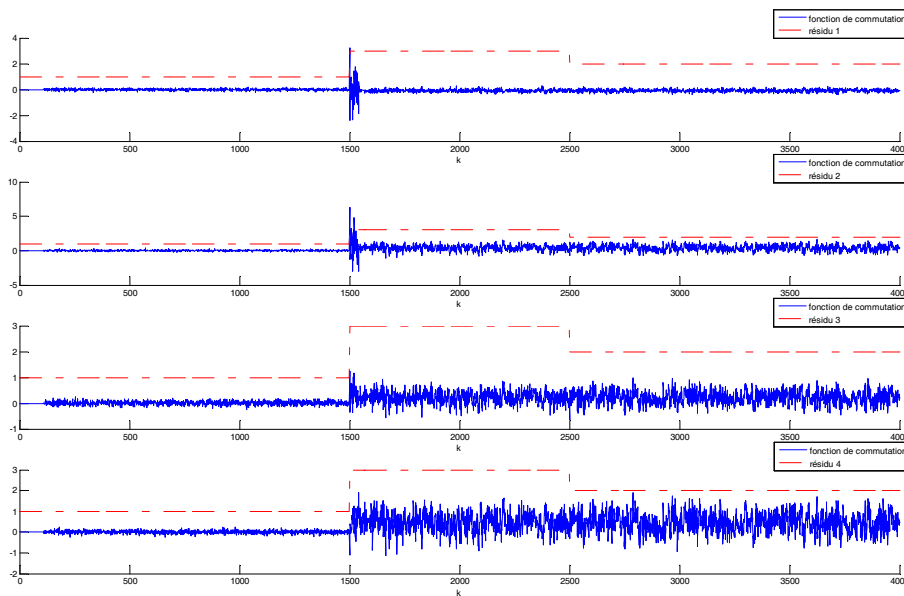
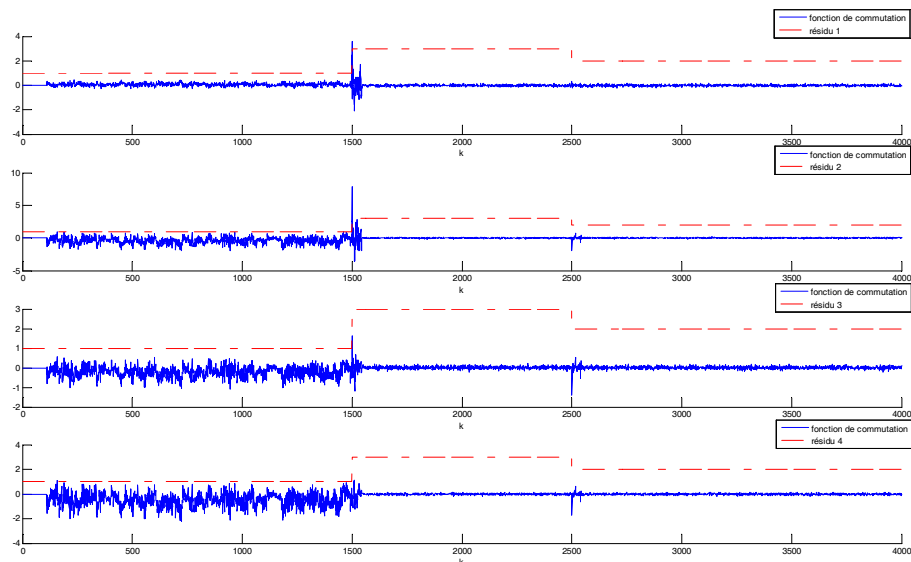
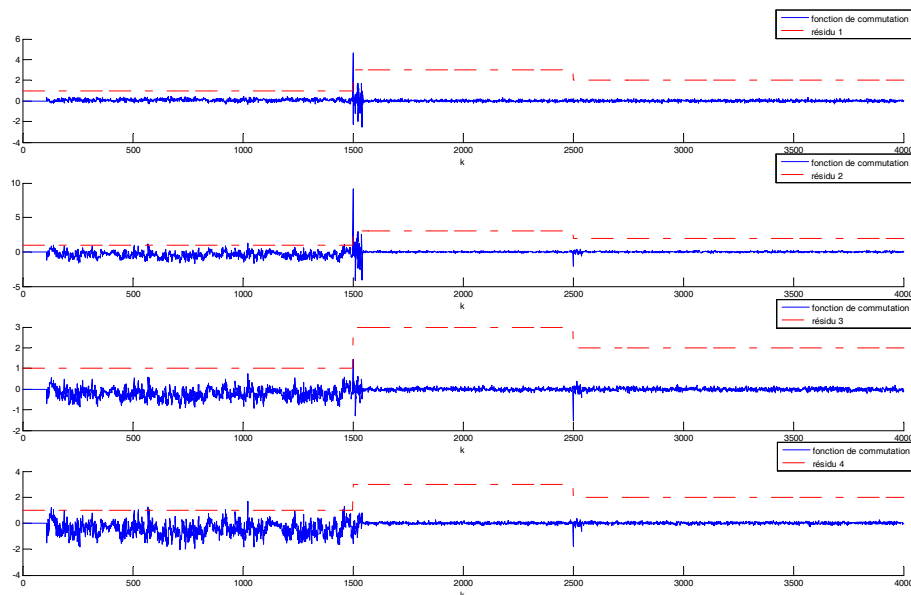


FIGURE 4.15 – La reconnaissance du premier mode $\bar{\epsilon}_{(1), k}$

Les résidus $\bar{\epsilon}_{(2), k}$ et $\bar{\epsilon}_{(3), k}$ sont calculés en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne du mode 2 et 3 respectivement. Les deux résidus ne peuvent pas être utilisés pour distinguer le mode 2 du mode 3 comme le montrent les figures 4.16 et 4.17, tout ce qu'on peut dire est que le mode 1 n'est pas actif et un des deux modes 2 ou 3 est actif. Cette non distinction des modes 2 et 3 est due à la non satisfaction de la condition de discernabilité.

FIGURE 4.16 – La reconnaissance du deuxième mode $\bar{\bar{e}}_{(2), k}$ FIGURE 4.17 – La reconnaissance du troisième mode $\bar{\bar{e}}_{(3), k}$

4.4.2 Systèmes à commutations avec des modes bilinéaires discernables et d'autres non discernables

Considérons un système à 3 modes de fonctionnement ($q \in \{1, 2, 3\}$), où le mode 1 est un mode de fonctionnement bilinéaire normal et les deux autres modes peuvent représenter par exemple des modes de défaillance bilinéaires dus aux défauts internes (Fig. 4.5).

La séquence des commutations est donnée dans le tableau 4.2.

Les 3 modes sont stables et le mode 2 n'est pas discernable du mode 3 (i.e. les deux modes ont les mêmes paramètres de Markov).

Les valeurs numériques des paramètres de ces modes sont données dans ci-après mais elles ne seront pas utilisées pour le calcul des résidus MPD.

Les paramètres du mode 1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1.0792 & 1.9072 & 0.9395 & 0.5389 \\ -0.1542 & -0.3322 & -0.2895 & -0.2139 \\ -0.3538 & -0.7776 & -0.3280 & -0.2391 \\ -0.6090 & -1.4554 & -0.8149 & -0.1190 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} -0.1152 & -0.1152 \\ 0.1152 & 0.1152 \\ 0.0419 & 0.0419 \\ 0.1859 & 0.1859 \end{pmatrix},$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 & -0.02 & 0.01 & 0 & -0.06 & 0 \\ -0.01 & -0.05 & -0.02 & 0 & 0.02 & 0.02 & 0.06 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0.04 & 0 & -0.03 & 0 & 0.04 & -0.05 \\ 0.5 & 0.02 & 0.01 & -0.03 & -0.05 & -0.02 & -0.05 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, D_1 = 1.2 * \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

Les paramètres du mode 2 :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.5669 & 0.9342 & 0.6730 & 0.3711 \\ -0.1919 & -0.2092 & -0.3230 & -0.1961 \\ -0.1630 & -0.5192 & -0.0584 & -0.1918 \\ -0.1653 & -0.7682 & -0.5872 & 0.1007 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.1054 & 0.1054 \\ 0.0321 & 0.0321 \\ -0.0577 & -0.0577 \\ -0.0363 & -0.0363 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 & -0.04 & 0.02 & 0 & -0.05 & 0 \\ -0.02 & -0.01 & -0.04 & 0 & 0.04 & 0.04 & 0.05 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0.02 & 0 & -0.03 & 0 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & 0.04 & 0.02 & -0.01 & -0.01 & -0.04 & -0.01 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.6 & 0.3 \\ 1.5 & 2.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 \\ 1.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

La matrice Ψ qui permet le passage du mode 2 au 3 est $\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -9 & 1 \end{pmatrix}$.

4.4.2.1 Réglage de la méthode

La première étape de la MPD est de régler les paramètres i , i_1 et L .

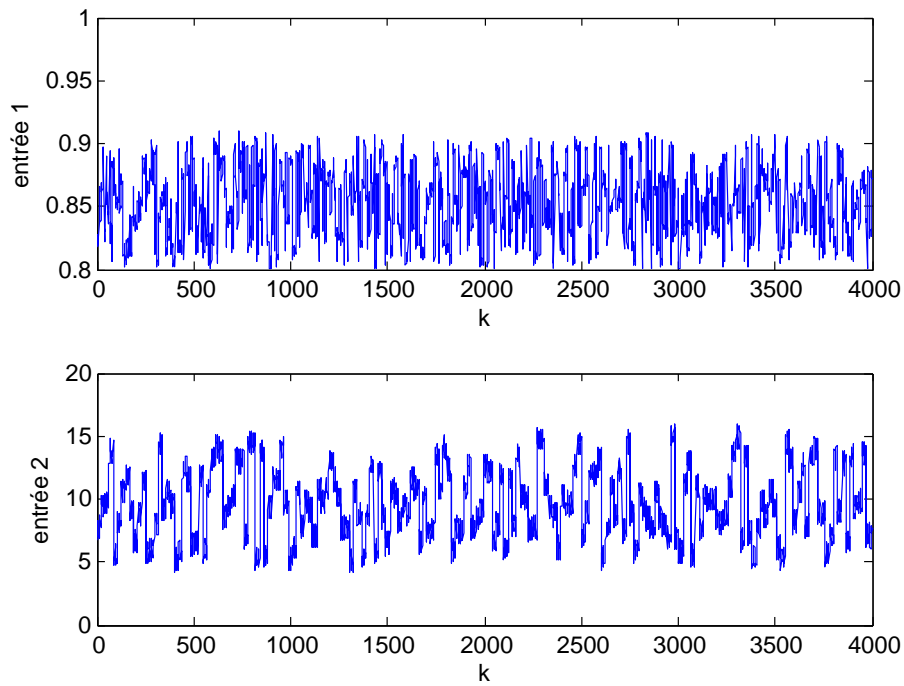
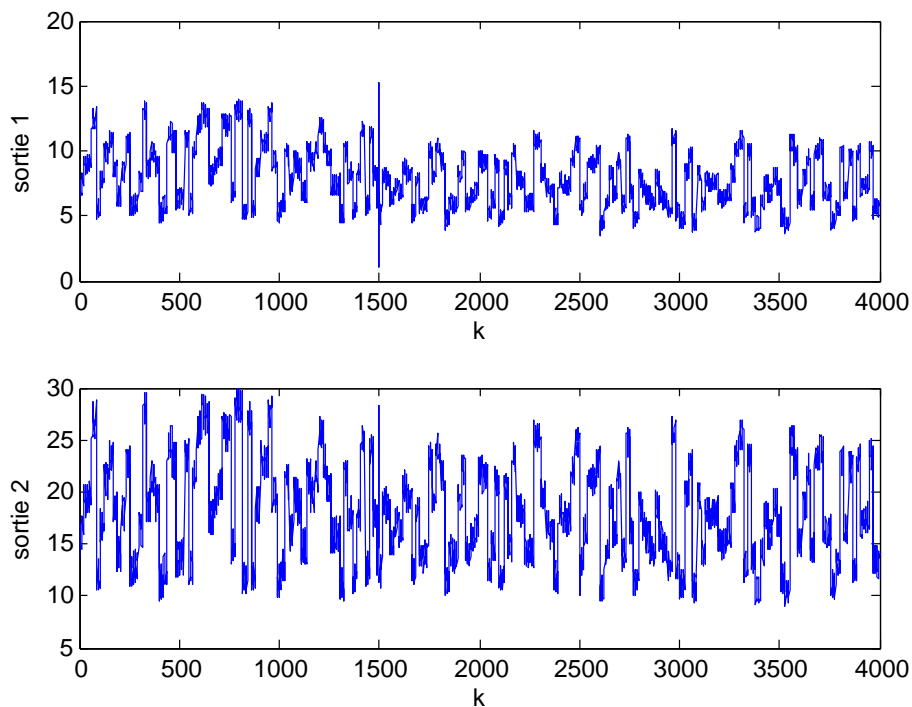
Les entiers i , i_1 et L pour les 3 modes sont donnés par $i = 13$, $i_1 = 3$ et $L = 112$.

4.4.2.2 Génération des entrées et des sorties

Les figures 4.18 et 4.19 représentent les entrées et les sorties du système qui sont les seules données utilisées pour calculer les résidus d'estimation des instants de commutation et de reconnaissance du mode actif.

4.4.2.3 Estimation des instants de commutation

L'instant de commutation $\tau = 1500$ a été bien estimé par les résidus comme le montre la figure 4.20. Tout les résidus permettent la détection de cette commutation. La deuxième transition $\tau = 2500$ est détectée avec un amplitude faible par rapport à la détection de la première transition.

FIGURE 4.18 – Les entrées du système u_k FIGURE 4.19 – Les sorties du système y_k

4.4.2.4 Reconnaissance du mode actif

Le résidu $\bar{\bar{e}}_{(1),k}^{\otimes}$ est calculé en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne du mode 1. Les composantes du résidu calculé permettent la reconnaissance du mode 1 comme le montre la figure 4.21.

Les résidus $\bar{\bar{e}}_{(2),k}$ et $\bar{\bar{e}}_{(3),k}$ sont calculés en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne du mode 2 et 3 respectivement. Les composantes de ces deux résidus ne peuvent pas être utilisés pour distinguer le mode 2 du mode 3 comme le montrent les figures 4.22 et 4.23, tout ce qu'on peut dire est que le mode 1 n'est pas actif et un des deux

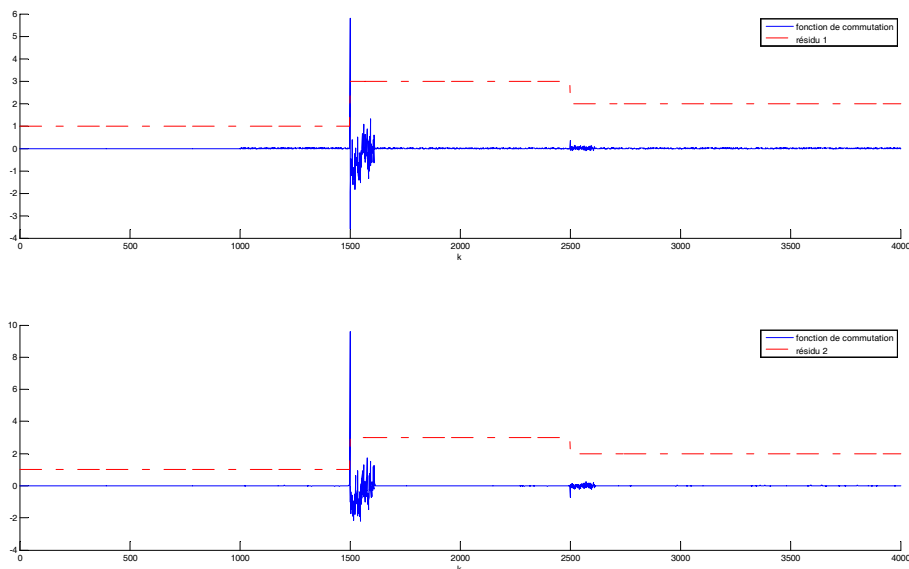


FIGURE 4.20 – L'estimation des instants de commutations $\epsilon_{s, k}^{\otimes}$

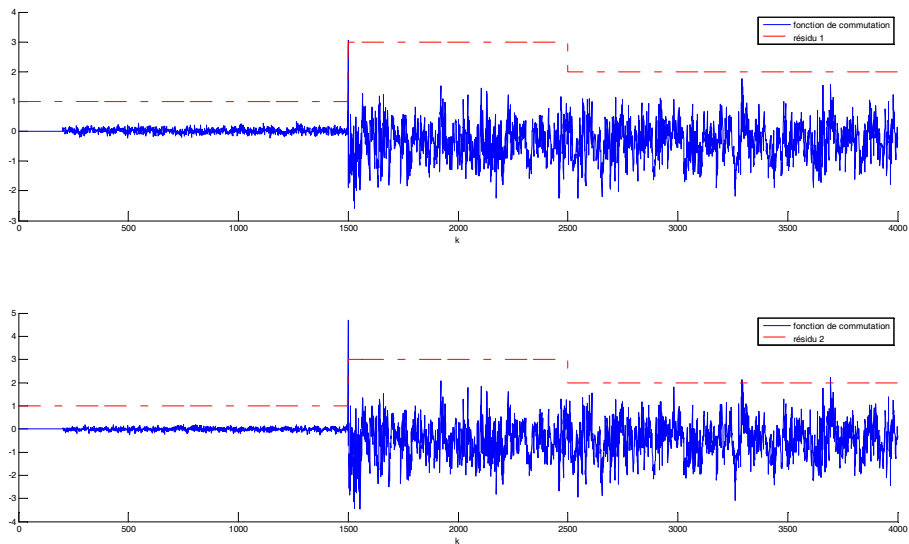


FIGURE 4.21 – La reconnaissance du premier mode $\bar{\epsilon}_{(1), k}^{\otimes}$

modes 2 ou 3 est actif. Cette non distinction des modes 2 et 3 est due à la non satisfaction de la condition de discernabilité.

CONCLUSION

La méthode par projection des données a été étendue dans ce chapitre pour la détection et l'identification des défauts internes. Ces défauts internes entraînent des dynamiques différentes qui correspondent à des modes de fonctionnement défaillant, le problème de diagnostic se ramène alors à un problème d'estimation des instants de commutations et de reconnaissance de mode actif. La stratégie suivie est de considérer le système à défauts internes comme étant un système à commutations avec un mode de fonctionnement normal et plusieurs modes de fonctionnement défaillant.

Un système à commutations avec des modes linéaires ou bilinéaires a été considéré.

Les avantages de la méthode proposée sont les suivants :

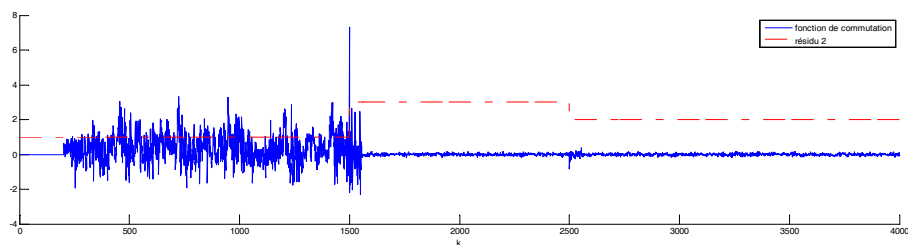
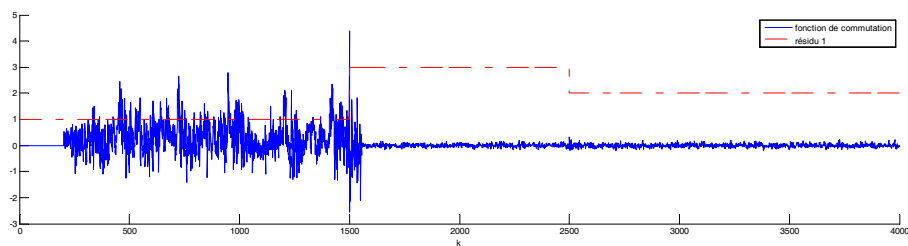


FIGURE 4.22 – La reconnaissance du deuxième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(2), k}^{\otimes}$

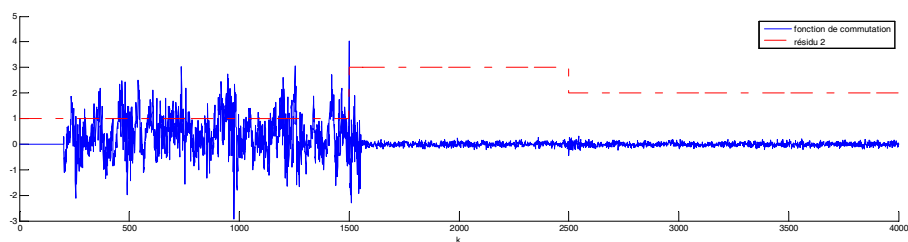
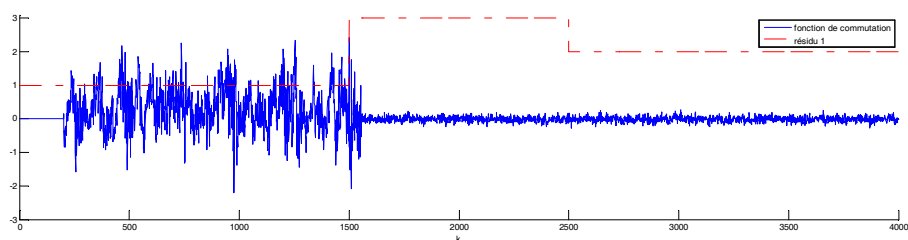


FIGURE 4.23 – La reconnaissance du troisième mode $\bar{\bar{\epsilon}}_{(3), k}^{\otimes}$

- Seule la structure (linéaire ou bilinéaire) des modes est connue, l'estimation des paramètres ou de l'état du système n'est pas nécessaire.
- Seules les données d'entrée-sortie collectées en ligne sont utilisées pour l'estimation de l'instant de commutation.
- Seules les données d'entrée-sortie collectées en ligne et hors ligne sont utilisées pour la reconnaissance du mode actif.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la détection, la localisation et l'estimation de défauts (capteurs, actionneurs et défauts internes) dans les systèmes modélisés sous forme d'état linéaire et bilinéaire.

SYNTHÈSE

La méthode que nous proposons, (appelée MPD pour Méthode par Projection des Données), nécessite de connaître la structure du modèle comportemental mais ne nécessite pas de connaître les valeurs des paramètres de ce modèle. Les résidus sont générés par des techniques de projection matricielle en utilisant **uniquement** les données d'entrées et de sorties mesurées.

Cette méthode peut être directement implantée sur des applications de même type sans que les paramètres de chaque système soient identifiés. Cette méthode pourrait donc être très utile pour tester des systèmes en fin de chaîne de fabrication ou pour être implantée sur un parc (groupe) de machines identiques. Elle pourrait être aussi utile pour des systèmes à paramètres difficilement identifiables.

Que le modèle soit linéaire ou bilinéaire, pour les défauts capteurs, actionneurs et internes, la méthode de génération de résidu est décrite par les quatre points suivants :

1. L'obtention d'une expression d'une matrice \mathcal{S} (constituée des mesures \mathcal{Y} pour la surveillance des défauts capteurs, des entrées \mathcal{U} pour la surveillance des défauts actionneurs) sur une fenêtre temporelle de taille L (les indices temporels sont volontairement omis pour présenter simplement l'expression) de la forme générale

$$\mathcal{S} = \overline{\mathcal{H}}\mathcal{X}_0 + \mathcal{H}E + \mathcal{F} + \mathcal{W} \quad (4.93)$$

- Le terme $\overline{\mathcal{H}}\mathcal{X}_0$ dépend des paramètres et d'un ensemble d'états sur la fenêtre L .
 - Le terme $\mathcal{H}E$ dépend des entrées \mathcal{U} pour la surveillance des défauts capteurs, des sorties \mathcal{Y} pour la surveillance des défauts actionneurs sur la fenêtre considérée, \mathcal{H} dépend des paramètres du modèle.
 - Le terme \mathcal{F} dépend des défauts.
 - Le terme \mathcal{W} dépend des bruits d'état et de mesure.
2. Par un choix judicieux de la fenêtre temporelle,
 - le terme $\overline{\mathcal{H}}\mathcal{X}_0$ est très petit (sous des hypothèses de stabilité) pour une fenêtre de calcul suffisamment grande ($\overline{\mathcal{H}}\mathcal{X}_0 = \Delta$),
 - on peut trouver une matrice Π_E , telle que $E\Pi_E = 0$.
 3. La multiplication de l'équation (4.93), à droite par Π_E donne l'expression de la forme de calcul et d'évaluation du résidu

$$\epsilon = \mathcal{S}\Pi_E = \mathcal{F}\Pi_E + \mathcal{W}\Pi_E + \Delta \quad (4.94)$$

4. La valeur moyenne de ϵ sur une fenêtre temporelle glissante est utilisée pour la décision.

Un point très important de la méthode est la détermination de la taille L de la fenêtre de calcul. Nous avons proposé un critère pour chaque cas de figure étudié.

L'essentiel de la thèse a été consacré à l'obtention de l'expression de \mathcal{S} (4.93) et à prouver la sensibilité du résidu aux défauts pour différents cas de figure : systèmes linéaires et bilinéaires, défauts capteurs, actionneurs et défauts internes.

Le diagnostic des défauts actionneurs est un problème dual du diagnostic des défauts capteurs sous une condition d'inversibilité du système.

Pour la détection et la localisation du défaut, le résidu est calculé en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne. Pour l'estimation du défaut, le résidu est calculé en utilisant des données entrée-sortie collectées en ligne et des données hors ligne disponibles du système non défaillant.

Sous des conditions de détectabilité de défauts que nous avons exprimées, les résidus générés sont structurés par rapport aux défauts capteurs et actionneurs ce qui rend immédiate la localisation de ces défauts.

Sous des conditions d'estimabilité de défauts que nous avons exprimées, les résidus permettent d'estimer les défauts capteurs et actionneurs.

Les défauts internes (supposés abrupts et invariants, c'est-à-dire correspondant à un biais constant sur les paramètres) entraînent des dynamiques différentes qui correspondent à des modes de fonctionnement défaillant. Le problème de diagnostic se ramène alors à un problème d'estimation des instants de commutation et de reconnaissance du mode actif à chaque instant.

Que le mode soit linéaire ou bilinéaire, pour les systèmes à commutations, la condition de discernabilité entre deux modes $m1$ et $m2$ est de la forme générale suivante

$$\mathcal{H}_{m1} \neq \mathcal{H}_{m2} \quad (4.95)$$

La matrice \mathcal{H}_{m1} (resp. \mathcal{H}_{m2}) est constituée des paramètres de Markov du mode $m1$ (resp. $m2$).

Si la condition de discernabilité est satisfaite alors le mode actif est reconnaissable et la commutation est détectable. Dans le cas contraire, le mode actif n'est pas reconnaissable, par contre la commutation peut être détectable. Dans ce deuxième cas, la condition de détectabilité est de la forme générale suivante :

$$\mathcal{H}_{m1, m2} \neq \mathcal{H}_{m1} \quad (4.96)$$

Le terme $\mathcal{H}_{m1, m2}$ est constituée des paramètres de Markov des modes $m1$ et $m2$. La condition (4.96) exprime que la transition entre deux modes non discernables est transitoirement détectable. Ceci est dû au changement de dynamique produit suite à la commutation.

Des exemples physiques et académiques ont été traités tout au long de la thèse afin d'illustrer, sur des simulations, les différentes applications de la méthode proposée.

PERSPECTIVES

Plusieurs perspectives sont envisagées pour faire suite à ce travail de thèse :

- La méthode par projection des données a été proposée pour les systèmes linéaires et bilinéaires. Nous envisageons d'étendre cette technique à d'autres systèmes non linéaires (Voltera, Hammerstein).
- Pour le diagnostic des défauts actionneurs, nous supposons que le système est linéaire. Nous envisageons d'étendre la méthode aux systèmes bilinéaires.
- Le calcul des résidus ne nécessite pas la connaissance des paramètres, par contre, ces paramètres sont supposés constants. Des variations au cours du temps de ces paramètres vont entraîner des changements sur les résidus. Une étude de sensibilité des résidus à ces variations paramétriques faibles, évoluant lentement doit être menée. La procédure de décision pourra ainsi être adaptée pour tolérer celles-ci.
- Le critère choisi pour déterminer la taille de fenêtre de calcul du résidu ne tient pas compte de la sensibilité aux défauts. Une piste de recherche serait de considérer cette sensibilité. Cependant, le calcul d'un tel critère nécessitera d'utiliser des données du système défaillant.
- La méthode a été proposée pour des modèles de structure linéaire et bilinéaire. Il serait intéressant de comparer les performances de la surveillance (taux de fausse alarmes et de non détection, délai de détection, erreur d'estimation du défaut) suivant que le résidu est calculé en utilisant un modèle de structure identique ou non à la structure du système.
- Nous envisageons aussi d'appliquer la méthode sur des données réelles afin de montrer l'applicabilité et les performances de la méthode pour des applications industrielles.

ANNEXES

A OUTILS MATHÉMATIQUES

A.1 Produit de Kronecker

Soient \mathcal{A} une matrice de taille $a \times b$ et \mathcal{B} une matrice de taille $p \times q$. Leur produit de Kronecker $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{ap \times bq}$ est donné par : $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}\mathcal{B} & \cdots & \mathcal{A}_{1b}\mathcal{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_{a1}\mathcal{B} & \cdots & \mathcal{A}_{ab}\mathcal{B} \end{pmatrix}$.

Quelques propriétés du produit de Kronecker sont :

- $(R_1 \otimes R_2)(R_3 \otimes R_4) = (R_1 R_3) \otimes (R_2 R_4)$.
 - $(R_1 \otimes R_2) = (R_1 \otimes I)R_2$, tel que pour cette propriété R_1 est un vecteur colonne.
- Où R_1, R_2, R_3, R_4 sont des matrices avec des dimensions appropriées.

A.2 Combinatoire

Soit $\mathcal{K}_i = \sum_{\alpha=0}^{i-2} \mathcal{C}_i^{i-\alpha}$ où $\mathcal{C}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Les propriétés suivantes sont rappelées :

1. $i + 2\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_{i+1}$.
2. $\mathcal{C}_{a+1}^{b+1} = \mathcal{C}_a^{b+1} + \mathcal{C}_a^b$.

A.3 Espace des lignes d'une matrice

Nous considérons une matrice $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_j] \in \mathbb{R}^{a \times b}$, où $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \{1, 2, \dots, a\}} \in \mathbb{R}^{1 \times b}$ représente la collection des a lignes de la matrice \mathcal{A} . L'espace des lignes de \mathcal{A} noté par $\text{span}(\mathcal{A})$ est défini par :

$$\begin{aligned} \text{span}(\mathcal{A}) &\equiv \text{span}[\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_a] \\ &\equiv \{\mathcal{Y} \in \mathbb{R}_{1 \times b} \mid \mathcal{Y} = \mathcal{X}\mathcal{A}, \text{ pour } \mathcal{X} \in \mathbb{R}_{1 \times a}\} \end{aligned} \quad (4.97)$$

A.4 Espace des colonnes d'une matrice

Nous considérons une matrice $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_j] \in \mathbb{R}^{a \times b}$, où $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \{1, 2, \dots, b\}} \in \mathbb{R}^{a \times 1}$ représente l'ensemble des b colonnes de la matrice \mathcal{A} . L'espace des colonnes de \mathcal{A} noté par $\text{span}(\mathcal{A}^T)$ est défini par :

$$\begin{aligned} \text{span}(\mathcal{A}^T) &\equiv \text{span}[\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_b] \\ &\equiv \{\mathcal{Y} \in \mathbb{R}_{a \times 1} \mid \mathcal{Y} = \mathcal{A}\mathcal{X}, \text{ pour } \mathcal{X} \in \mathbb{R}_{b \times 1}\} \end{aligned} \quad (4.98)$$

A.5 Espace nul ou noyau d'une matrice

Nous considérons une matrice $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_j] \in \mathbb{R}^{a \times b}$, où $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \{1, 2, \dots, b\}} \in \mathbb{R}^{a \times 1}$ représente l'ensemble des b colonnes de la matrice \mathcal{A} . L'espace nul de \mathcal{A} noté par $\text{null}(\mathcal{A})$ est défini par :

$$\begin{aligned} \text{null}(\mathcal{A}) &\equiv \text{null} [\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_b] \\ &\equiv \{\mathcal{X} \in \mathbb{R}_{b \times 1} \mid \mathcal{A}\mathcal{X} = 0\} \end{aligned} \quad (4.99)$$

A.6 Rang et nullité d'une matrice

Nous considérons une matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$. Le rang de la matrice \mathcal{A} est la dimension de son espace des colonnes ou la dimension de son espace des lignes. La nullité de la matrice \mathcal{A} est la dimension de son noyau.

$$\begin{aligned} \text{rang}(\mathcal{A}) &\equiv \dim(\text{span}(\mathcal{A}^T)) = \dim(\text{span}(\mathcal{A})) \\ \text{et} & \\ \text{nullité}(\mathcal{A}) &\equiv \dim(\text{null}(\mathcal{A})) \end{aligned} \quad (4.100)$$

A.7 Théorème du rang

Nous considérons une matrice $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_j] \in \mathbb{R}^{a \times b}$, où $\{\mathcal{A}_j\}_{j \in \{1, 2, \dots, b\}} \in \mathbb{R}^{a \times 1}$ représente l'ensemble des b colonnes de la matrice \mathcal{A} . Le théorème du rang est donnée par l'équation suivante :

$$\text{rang}(\mathcal{A}) + \dim(\text{null}(\mathcal{A})) = b \quad (4.101)$$

A.8 Matrice de projection à gauche de l'espace des colonnes d'une matrice

La matrice $\bar{\Pi}_{\mathcal{A}}$ projette l'espace des colonnes d'une matrice sur le complément orthogonal à l'espace des colonnes de la matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$.

$$\bar{\Pi}_{\mathcal{A}} = I_a - \mathcal{A}(\mathcal{A}^T \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T \quad (4.102)$$

et on a :

$$\dim(\bar{\Pi}_{\mathcal{A}}) = \text{nombre de lignes}(\mathcal{A}) - \text{rang}(\mathcal{A}) \quad (4.103)$$

D'après l'équation (4.103), $\dim(\bar{\Pi}_{\mathcal{A}}) > 1$ si $\text{nombre de lignes}(\mathcal{A}) > \text{rang}(\mathcal{A})$. Pour garantir pour tout \mathcal{A} que $\dim(\bar{\Pi}_{\mathcal{A}}) > 1$, il suffit d'imposer : $\text{nombre de lignes}(\mathcal{A}) > \text{nombre de colonnes}(\mathcal{A}) > \text{rang}(\mathcal{A})$.

A.9 Matrice de projection à droite de l'espace des lignes d'une matrice

La matrice $\Pi_{\mathcal{A}}$ projette l'espace des lignes d'une matrice sur le complément orthogonal à l'espace des lignes de la matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$.

$$\Pi_{\mathcal{A}} = I_b - \mathcal{A}^T(\mathcal{A}\mathcal{A}^T)^{-1} \mathcal{A} \quad (4.104)$$

et on a :

$$\dim \text{span}(\Pi_{\mathcal{A}}^T) = \text{nombre de colonnes}(\mathcal{A}) - \text{rang}(\mathcal{A}) \quad (4.105)$$

D'après l'équation (4.105), $\dim \text{span}(\Pi_{\mathcal{A}}^T) > 1$ si $\text{nombre de colonnes}(\mathcal{A}) > \text{rang}(\mathcal{A})$. Pour garantir pour tout \mathcal{A} que $\dim \text{span}(\Pi_{\mathcal{A}}^T) > 1$, il suffit d'imposer : $\text{nombre de colonnes}(\mathcal{A}) > \text{nombre de lignes}(\mathcal{A}) > \text{rang}(\mathcal{A})$.

A.10 Norme de la matrice de projection à droite

Soient un vecteur $z \in \mathbb{R}^{L \times 1}$ et une matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$, tels que $z = \Pi_{\mathcal{A}}z + (I_L - \Pi_{\mathcal{A}})z$.

Si $z \in \text{null}(I_L - \Pi_{\mathcal{A}})$ alors $\|\Pi_{\mathcal{A}}\|_2 = \max_{z \neq 0} \frac{\|\Pi_{\mathcal{A}}z\|_2}{\|z\|_2} = 1$.

B CALCUL DES PUISSANCES D'UNE MATRICE A CARRÉE STABLE

1. Pour toute matrice quelconque $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, il existe une matrice régulière de transformation \mathcal{P} telle que

$$A = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{J} \mathcal{P} \quad (4.106)$$

avec $\mathcal{J} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de Jordan.

2. La matrice de Jordan \mathcal{J} à q valeurs propres distinctes est définie par :

$$\mathcal{J} = \text{diag}\{\mathcal{J}_{r_1}(\lambda_1), \dots, \mathcal{J}_{r_q}(\lambda_q)\} \quad (4.107)$$

où λ_j est la valeur propre de la matrice \mathcal{J}_{r_j} de multiplicité r_j pour $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ et

$$\mathcal{J}_{r_j}(\lambda_j) = \lambda_j I_{r_j} + \mathcal{N}_{r_j} \quad (4.108)$$

avec $\mathcal{N}_{r_j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_j \times r_j}$ est une matrice telle que

$$\mathcal{N}_{r_j}^h = \overbrace{\mathcal{N}_{r_j} \mathcal{N}_{r_j} \dots \mathcal{N}_{r_j}}^h = \begin{bmatrix} 0_{1 \times h} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0_{h \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_j \times r_j} \text{ pour } 0 \leq h < r_j,$$

il est à remarquer que $\mathcal{N}_{r_j}^h = 0_{r_j \times r_j}$ pour $h \geq r_j$.

3. A partir de (4.106), la puissance d'ordre p est donnée par :

$$A^p = \mathcal{P}^{-1} \mathcal{J}^p \mathcal{P} \quad (4.109)$$

4. A partir de (4.107), il est alors évident que l'on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{J}^p = \text{diag}\{\mathcal{J}_{r_1}^p(\lambda_1), \dots, \mathcal{J}_{r_q}^p(\lambda_q)\} \quad (4.110)$$

A partir de (4.108), le terme $\mathcal{J}_{r_j}^p(\lambda_j)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ est donné par :

$$\mathcal{J}_{r_j}^p(\lambda_j) = (\lambda_j I_{r_j} + \mathcal{N}_{r_j})^p = \sum_{g=0}^p C_p^g \lambda_j^{p-g} \mathcal{N}_{r_j}^g \quad (4.111)$$

Puisque la matrice \mathcal{N}_{r_j} est nilpotente alors il existe un entier h_0 appelé le degré de nilpotence tel que l'équation (4.111) devient :

$$\mathcal{J}_{r_j}^p(\lambda_j) = \sum_{g=0}^{\min(p, r_j-1)} C_p^g \lambda_j^{p-g} \mathcal{N}_{r_j}^g \quad (4.112)$$

5. Si la matrice A est stable alors la matrice de Jordan correspondante \mathcal{J} est aussi stable.

Si p est suffisamment grand ($p \gg h_0 - 1$), sachant que pour $g > h_0$ on a $\mathcal{N}_{r_j}^g = 0$, alors

$$\mathcal{J}_{r_j}^p(\lambda_j) = \sum_{g=0}^{h_0-1} C_p^g \lambda_j^{p-g} \mathcal{N}_{r_j}^g \quad (4.113)$$

Si la matrice \mathcal{J} est stable alors la matrice $\mathcal{J}_{r_j}(\lambda_j)$ est stable aussi, par conséquent $|\lambda_j| < 1$. par conséquent λ_j^{p-g} tend vers zéro pour un entier p suffisamment grand. A partir de (4.112), on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{J}_{r_j}^p(\lambda_j) = 0 \Leftrightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{J}^p = 0 \quad (4.114)$$

Si la matrice A est stable alors la matrice \mathcal{J} est stable aussi. Dans ce cas, à partir de (4.114) et (4.109) on a :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} A^p = 0 \quad (4.115)$$

C PREUVES DES ÉQUATIONS

C.1 Preuve de l'équation (2.7)

L'expression à prouver est donnée par (2.7) pour $\forall i \geq 0$:

$$y_k = CA^i x_{k-i} + H_i \bar{u}_{k,i} + f_{s,k} + w_k \quad (4.116)$$

1. Etape initiale

A partir de (2.7), l'expression de la sortie pour $i = 0$ est $y_k = Cx_k + Du_k + f_{s,k} + w_k$, qui représente l'expression de la sortie de (2.1).

A partir de (2.7), l'expression de la sortie pour $i = 1$ est $y_k = CAx_{k-1} + CBu_{k-1} + Du_k + f_{s,k} + w_k$, qui représente l'expression de la sortie en substituant une seule fois l'état x_k dans la sortie donnée dans (2.1).

A partir de (2.7), l'expression de la sortie pour $i = 2$ est $y_k = CA^2x_{k-2} + CABu_{k-2} + CBu_{k-1} + Du_k + f_{s, k} + w_k$, qui représente l'expression de la sortie en substituant deux fois l'état x_k et x_{k-1} dans la sortie donnée dans (2.1).

2. Etape de récurrence

Supposons que l'expression de la sortie (2.7) est vérifiée pour i , prouvons qu'elle est vérifiée pour $i + 1$, tel que l'expression (2.7) pour $i + 1$ peut être obtenue en remplaçant i par $i + 1$:

$$y_k = CA^{i+1}x_{k-i-1} + H_{i+1}\bar{u}_{k, i+1} + f_{s, k} + w_k \quad (4.117)$$

A partir de l'expression de l'état dans (2.1), l'état à $k - i$ peut être écrit comme $x_{k-i} = Ax_{k-i-1} + Bu_{k-i-1}$. En substituant x_{k-i} dans (2.7), l'expression (4.117) peut être facilement obtenue.

C.2 Preuve de l'équation (2.64)

L'expression à prouver est donnée par (2.64) pour $\forall i \geq 0$:

$$u_k = \bar{C}\bar{A}^i x_{k-i} + \bar{H}_i \begin{bmatrix} \bar{y}_{k-i, v} \\ \vdots \\ \bar{y}_{k-1, v} \\ \bar{y}_{k, v} \end{bmatrix} - f_{a, k} \quad (4.118)$$

$$\text{où } \bar{y}_{k, v} = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell(v+1) \times 1}.$$

1. Etape initiale

A partir de (2.64), l'expression de l'entrée pour $i = 0$ est $u_k = \bar{C}x_k + \bar{D}\bar{y}_{k, v} - f_{a, k}$, qui représente l'expression de l'entrée dans (2.48).

A partir de (2.64), l'expression de l'entrée pour $i = 1$ est $u_k = \bar{C}\bar{A}x_{k-1} + \bar{H}_1 \begin{bmatrix} \bar{y}_{k-1, v} \\ \bar{y}_{k, v} \end{bmatrix} - f_{a, k}$, qui représente l'expression de l'entrée en substituant une seule fois l'état x_k dans l'entrée donnée dans (2.48).

A partir de (2.64), l'expression de l'entrée dans $i = 2$ est $u_k = \bar{C}\bar{A}^2x_{k-2} + \bar{H}_2 \begin{bmatrix} \bar{y}_{k-2, v} \\ \bar{y}_{k-1, v} \\ \bar{y}_{k, v} \end{bmatrix} - f_{a, k}$, qui représente l'expression de l'entrée en substituant deux fois l'état x_k et x_{k-1} dans l'entrée donnée dans (2.48).

2. Etape de récurrence

Supposons que l'expression de l'entrée (2.64) est vérifiée pour i , prouvons qu'elle est vérifiée pour $i + 1$, tel que l'expression (2.64) pour $i + 1$ peut être obtenue en remplaçant i par $i + 1$:

$$u_k = \bar{C}\bar{A}^{i+1}x_{k-i-1} + \bar{H}_{i+1} \begin{bmatrix} \bar{y}_{k-i-1, v} \\ \vdots \\ \bar{y}_{k-1, v} \\ \bar{y}_{k, v} \end{bmatrix} - f_{a, k} \quad (4.119)$$

A partir de l'expression de l'état dans (2.48), l'état à $k - i$ peut être écrit comme $x_{k-i} = \bar{A}x_{k-i-1} + \bar{B}\bar{y}_{k-i-1, v}$. En substituant x_{k-i} dans (2.64), l'expression (4.119) peut être facilement obtenue.

C.3 Preuve de l'équation (3.2)

L'expression (3.2) pourra être écrite différemment comme suit :

$$\begin{aligned} y_k &= CA^i x_{k-i} + C \sum_{s=1}^i A^{s-1} G(A \otimes I_m)^{i-s} (x_{k-i} \otimes I_m) u_{k-s} + C(Du_k + \sum_{s=1}^i A^{s-1} B u_{k-s}) \\ &+ C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \tilde{V}_{p, i} (x_{k-i} \otimes I) \tilde{u}_{k, i}^{(p)} + C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \bar{V}_{p, i} (B \otimes I) \tilde{u}_{k, i}^{(p)} + f_{s, k} + w_k \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$\text{où } \tilde{V}_{p, i} = A^{\rho_1(p)} G^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-1} (A \otimes I_{m^j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G \otimes I_{m^j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &= i \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\text{où } \bar{V}_{p, i} = A^{\rho_1(p)} G^{\rho_2(p)} \prod_{j=1}^{i-2} (A \otimes I_{m^j})^{\rho_{2j+1}(p)} (G \otimes I_{m^j})^{\rho_{2j+2}(p)}.$$

Pour chaque $p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\}$, les puissances $\rho_1(p), \rho_2(p), \dots, \rho_{2i}(p)$ respectent les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_i\} : \sum_{j=1}^{2i} \rho_j(p) &\leq i - 1 \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \rho_{2j}(p) &\in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (4.122)$$

Les expressions à démontrer sont données par (4.120), (4.121) et (4.122) pour $\forall i \geq 0$.

1. Etape initiale

L'expression de la sortie donnée par l'équation (3.1) est illustrée pour $i = 1, i = 2$ et $i = 3$.

A partir de l'expression de mesure de l'équation (3.1)

$$y_k = Cx_k + Du_k + f_{s, k} + w_k \quad (4.123)$$

– Pour $i = 1$, la sortie est obtenue en substituant l'état x_k dans y_k (4.123) :

$$y_k = CAx_{k-1} + CG(x_{k-1} \otimes I)u_{k-1} + CBu_{k-1} + Du_k + f_{s, k} + w_k \quad (4.124)$$

– Pour $i = 2$, la sortie est obtenue en substituant l'état x_{k-1} dans y_k (4.124) :

$$\begin{aligned}
y_k &= CA^2x_{k-2} + [CAG(x_{k-2} \otimes I_m) | CG(A \otimes I_m)(x_{k-2} \otimes I_m) | 0_{\ell \times m}] \begin{bmatrix} u_{k-2} \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} \\
&+ [CAB | CB | D] \begin{bmatrix} u_{k-2} \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} + CG(G \otimes I_m)(x_{k-2} \otimes I_{m^2})(u_{k-2} \otimes u_{k-1}) \\
&+ CG(B \otimes I_m)(u_{k-2} \otimes u_{k-1}) + f_{s, k} + w_k
\end{aligned} \tag{4.125}$$

– Pour $i = 3$, la sortie est obtenue en substituant l'état x_{k-2} dans y_k (4.125) :

$$\begin{aligned}
y_k &= CA^3x_{k-3} + [CA^2G(x_{k-3} \otimes I_m) | CAG(A \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_m) | \\
&CG(A \otimes I_m)^2(x_{k-3} \otimes I_m) | 0_{\ell \times m}] \begin{bmatrix} u_{k-3} \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} + [CA^2B | CAB | CB | D] \begin{bmatrix} u_{k-3} \\ u_{k-2} \\ u_{k-1} \\ u_k \end{bmatrix} \\
&+ [CG(G \otimes I_m)(A \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | \\
&CG(A \otimes I_m)(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | \\
&CAG(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | CG(G \otimes I_m)(G \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^3})] \begin{bmatrix} u_{k-2} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1} \end{bmatrix} \\
&+ [CG(B \otimes I_m) | CG(A \otimes I_m)(B \otimes I_m) | CAG(B \otimes I_m) | \\
&CG(G \otimes I_m)(B \otimes I_{m^2})] \begin{bmatrix} u_{k-2} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1} \end{bmatrix} + f_{s, k} + w_k
\end{aligned} \tag{4.126}$$

Il est à noter que pour $i = 3$:

– Le vecteur $\tilde{u}_{k, 3}$ est donné par : $\tilde{u}_{k, 3} = \begin{bmatrix} u_{k-2} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-1} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \\ u_{k-3} \otimes u_{k-2} \otimes u_{k-1} \end{bmatrix}$.

– La matrice \tilde{H}_3 est donnée par :

$$\tilde{H}_3 = [CG(B \otimes I_m) | CG(A \otimes I_m)(B \otimes I_m) | CAG(B \otimes I_m) | CG(G \otimes I_m)(B \otimes I_{m^2})].$$

– La matrice $\tilde{\tilde{H}}_3$ est donnée par :

$$\tilde{\tilde{H}}_3 = [CG(G \otimes I_m)(A \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | CG(A \otimes I_m)(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | \\ CAG(G \otimes I_m)(x_{k-3} \otimes I_{m^2}) | CG(G \otimes I_m)(G \otimes I_{m^2})(x_{k-3} \otimes I_{m^3})].$$

La justesse de l'expression de sortie donnée par (3.2) a été vérifiée pour $i = 1$, $i = 2$ et $i = 3$.

2. Etape de récurrence

Supposons que les expressions (4.120), (4.121) et (4.122) sont vérifiées pour i , démontrons maintenant qu'elles sont aussi vérifiées pour $i + 1$:

$$\begin{aligned}
y_k &= CA^{i+1}x_{k-i-1} + C \sum_{s=1}^{i+1} A^{s-1}G(A \otimes I_m)^{i+1-s}(x_{k-i-1} \otimes I_m)u_{k-s} \\
&+ C(Du_k + \sum_{s=1}^{i+1} A^{s-1}Bu_{k-s}) + C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_{i+1}} \tilde{V}_{p, i+1}(x_{k-i-1} \otimes I)\tilde{u}_{k, i}^{(p)} \\
&+ C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_{i+1}} \bar{V}_{p, i+1}(B \otimes I)\tilde{u}_{k, i}^{(p)} + f_{s, k} + w_k
\end{aligned} \tag{4.127}$$

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_{i+1}\} : \sum_{j=1}^{2(i+1)} \rho_j(p) = i + 1 \tag{4.128}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, i + 1\} : \rho_{2j}(p) \in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N}$$

$$\forall p \in \{1, 2, \dots, \mathcal{K}_{i+1}\} : \sum_{j=1}^{2(i+1)} \rho_j(p) \leq i \tag{4.129}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, i + 1\} : \rho_{2j}(p) \in \{0, 1\} \text{ et } \rho_{2j-1}(p) \in \mathbb{N}$$

En utilisant l'équation (3.1), on remplace $x_{k-i} = Ax_{k-i-1} + G(x_{k-i-1} \otimes u_{k-i-1}) + Bu_{k-i-1}$ dans l'expression (4.120) de y_k à i , on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
y_k &= CA^{i+1}x_{k-i-1} + CA^iG(x_{k-i-1} \otimes I_m)u_{k-i-1} + CA^iBu_{k-i-1} + C(Du_k + \\
&\sum_{s=1}^i A^{s-1}Bu_{k-s}) + C \sum_{s=1}^i A^{s-1}G(A \otimes I_m)^{i-s+1}(x_{k-i-1} \otimes I_m)u_{k-s} \\
&+ C \sum_{s=1}^i A^{s-1}G(A \otimes I_m)^{i-s}(G \otimes I_m)(x_{k-i-1} \otimes I_m^2)(u_{k-i-1} \otimes u_{k-s}) + \\
&C \sum_{s=1}^i A^{s-1}G(A \otimes I_m)^{i-s}(B \otimes I_m)(u_{k-i-1} \otimes u_{k-s}) + \\
&C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \bar{V}_{p, i}(B \otimes I)\tilde{u}_{k, i}^{(p)} + C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \tilde{V}_{p, i}(A \otimes I)(x_{k-i-1} \otimes I)\tilde{u}_{k, i}^{(p)} \\
&+ C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \tilde{V}_{p, i}(G \otimes I)(x_{k-i-1} \otimes I)(u_{k-i-1} \otimes \tilde{u}_{k, i}^{(p)}) \\
&+ C \sum_{p=1}^{\mathcal{K}_i} \tilde{V}_{p, i}(B \otimes I)(u_{k-i-1} \otimes \tilde{u}_{k, i}^{(p)}) + f_{s, k} + w_k
\end{aligned} \tag{4.130}$$

En identifiant les expressions (4.127) et (4.130), on peut déduire :

$$(a) C \sum_{s=1}^{i+1} A^{s-1} G(A \otimes I_m)^{i+1-s} (x_{k-i-1} \otimes I_m) u_{k-s} = CA^i G(x_{k-i-1} \otimes I_m) u_{k-i-1} +$$

$$C \sum_{s=1}^i A^{s-1} G(A \otimes I_m)^{i-s+1} (x_{k-i-1} \otimes I_m) u_{k-s}$$

$$(b) C(Du_k + \sum_{s=1}^{i+1} A^{s-1} Bu_{k-s}) = CA^i Bu_{k-i-1} + C(Du_k + \sum_{s=1}^i A^{s-1} Bu_{k-s})$$

$$(c) [\tilde{V}_{1, i+1} | \cdots | \tilde{V}_{\mathcal{K}_{i+1}-1, i+1} | \tilde{V}_{\mathcal{K}_{i+1}, i+1}] = [G(A \otimes I_m)^{i-1} (G \otimes I_m) |$$

$$A^1 G(A \otimes I_m)^{i-2} (G \otimes I_m) | \cdots | A^{i-1} G(A \otimes I_m)^{i-i} (G \otimes I_m) | \tilde{V}_{1, i} (A \otimes I_m) |$$

$$\tilde{V}_{2, i} (A \otimes I_m) | \cdots | \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i} (A \otimes I_m) | \tilde{V}_{1, i} (G \otimes I_m) | \tilde{V}_{2, i} (G \otimes I_m) | \cdots | \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i} (G \otimes I_m)]$$

$$(d) [\bar{V}_{1, i+1} | \cdots | \bar{V}_{\mathcal{K}_{i+1}-1, i+1} | \bar{V}_{\mathcal{K}_{i+1}, i+1}] = [G(A \otimes I_m)^{i-1} | A^1 G(A \otimes I_m)^{i-2} | \cdots |$$

$$A^{i-1} G(A \otimes I_m)^{i-i} | \bar{V}_{1, i} | \bar{V}_{2, i} | \cdots | \bar{V}_{\mathcal{K}_i, i} | \tilde{V}_{1, i} | \tilde{V}_{2, i} | \cdots | \tilde{V}_{\mathcal{K}_i, i}]$$

Il est simple de prouver que les expressions (4.127), (4.128) et (4.129) sont vérifiées.

D CONSTRUCTION DES VECTEURS D'ENTRÉES

D.1 Construction du vecteur $\tilde{u}_{k, i}$

$$\text{Le vecteur } \tilde{u}_{k, i} = \begin{bmatrix} u_{k-2} \otimes u_{k-1} \\ \vdots \\ \bigotimes_{j=1}^i u_{k-\beta_j} \\ \vdots \\ \bigotimes_{j=i}^1 u_{k-j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}_i \times 1} \text{ est construit avec toutes les combinaisons}$$

possibles d'entrées dans une fenêtre temporelle de taille i (il y a $\mathcal{K}_i = \sum_{\alpha=0}^{i-2} \mathcal{C}_i^{i-\alpha}$ combinaisons

possibles où $\mathcal{C}_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$), avec $\mathcal{M}_i = \sum_{\alpha=0}^{i-2} m^{i-\alpha} \mathcal{C}_i^{i-\alpha}$, $\bigotimes_{j=1}^i u_{k-\beta_j} = u_{k-\beta_1} \otimes u_{k-\beta_2} \otimes u_{k-\beta_3} \otimes \cdots \otimes u_{k-\beta_{i-1}} \otimes u_{k-\beta_i}$ et

$$\text{pour } j \in \{1, 2, \dots, i\}, \beta_j \in \mathbb{N} = \begin{cases} [2, 3, \dots, i] & \text{si } j = 1 \\ [1, 2, \dots, \beta_1 - 1] & \text{si } j = 2 \\ [0, 1, \dots, \beta_{j-1} - 1] & \text{si } 3 \leq j \leq i \end{cases} \quad (4.131)$$

Il est à remarquer que $\forall i \geq 2$ et $\forall j \in \{1, 2, \dots, i\} : \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_i$.
Si $\beta_j \leq 0$ alors le terme $\otimes u_{k-\beta_j}$ doit être omis.

D.2 Construction du vecteur $\tilde{u}_{k, i_1+1:i}$

$$\text{Le vecteur } \tilde{u}_{k, i_1+1:i} = \begin{bmatrix} u_{k-i_1-1} \otimes u_{k-1} \\ \vdots \\ \bigotimes_{j=1}^i u_{k-\beta_j} \\ \vdots \\ \bigotimes_{j=i}^1 u_{k-j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{i_1}) \times 1} \text{ est similaire à } \tilde{u}_{k, i} \text{ en retirant}$$

les combinaisons avec $\beta_1 < i_1 + 1$. En d'autres termes, $\tilde{u}_{k, i_1+1:i}$ est construit comme dans l'équation (4.132).

$$\text{pour } j \in \{1, 2, \dots, i\}, \beta_j \in \mathbb{N} = \begin{cases} [i_1 + 1, 3, \dots, i] & \text{si } j = 1 \\ [1, 2, \dots, \beta_1 - 1] & \text{si } j = 2 \\ [0, 1, \dots, \beta_{j-1} - 1] & \text{si } 3 \leq j \leq i \end{cases} \quad (4.132)$$

Il est à remarquer que $\forall i \geq 2$ et $\forall 1 \leq j \leq i : \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_i$.
Si $\beta_j \leq 0$ alors le terme $\otimes u_{k-\beta_j}$ doit être omis.

E NOTATION MATRICIELLE

Soit une matrice $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{a \times b}$, soient les entiers $p \in \{1, 2, \dots, a\}$ et $q \in \{1, 2, \dots, b\}$.

1. L'élément de \mathcal{A} qui se trouve sur la ligne p et la colonne q est noté par $\mathcal{A}(p, q)$.
2. Le $q^{\text{ème}}$ vecteur colonne de \mathcal{A} est noté par $\mathcal{A}(:, q)$.
3. Le $p^{\text{ème}}$ vecteur ligne de \mathcal{A} est noté par $\mathcal{A}(p, :)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. Adjallah, D. Maquin, and J. Ragot. Nonlinear observer-based fault detection. In *Proceedings of the 3rd IEEE Conference on Control Applications*, 1994. (Cité page 11.)
- [2] C. Andrieu, A. Doucet, S. S. Singh, and V. B. Tadic. Particle methods for change detection. *Proceedings of the IEEE system identification and control*, 92(3) :423–438, 2004. (Cité page 12.)
- [3] V. Andrieu. Exponential convergence of nonlinear luenberger observers. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control*, Atlanta, USA, 2010. (Cité page 11.)
- [4] V. Andrieu and L. Praly. On the existence of a kazantzis-kravaris/luenberger observer. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(2) :432–456, 2006. (Cité page 11.)
- [5] M. Basseville. Detecting changes in signals and systems-a survey. *Automatica*, 24(3) :309–326, 1988. (Cité page 7.)
- [6] M. Basseville, M. Abdelghani, and A. Benveniste. Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring. *Automatica*, 36(1) :101–109, 2000. (Cité page 9.)
- [7] M. Basseville and I. V. Nikiforov. *Detection of Abrupt Changes : Theory and Application*. Prentice Hall, New Jersey, 1993. (Cité pages 7 et 11.)
- [8] R. V. Beard. Failure accommodation in linear systems through self-organization. Technical report, Technical Report MVT-71-1, Aeronautics Astronautics, Man Vehicle Laboratory, MIT, Cambridge, 1971. (Cité page 10.)
- [9] S. M. Bennett, R. J. Patton, S. Daley, and D. A. Newton. Model based intermittent fault tolerance in an induction motor drive. In *Proceedings of IMACS Multiconference : CESA '96*, pages 678–683, Lille, France, 1996. (Cité pages 75 et 76.)
- [10] G. Besançon. High-gain observation with disturbance attenuation and application to robust fault detection. *Automatica*, 39(6) :1095–1102, 2003. (Cité page 11.)
- [11] H. A. P. Blom and Y. Bar-Shalom. The interacting multiple model algorithm for systems with markovian switching coefficients. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(8) :780–783, 1988. (Cité page 13.)
- [12] T. Boukhobza, F. Hamelin, B. Marx, G. Mourot, A.M. Nagy, J. Ragot, D.E.C. Belkhiat, K. Guelton, D. Jabri, N. Manamanni, S. Martinez, N. Messai, V. Cocquempot, A. Hakem, K.M. Pekpe, T. Zouari, M. Defoort, M. Djemai, and J. Van Gorp. *Supervision, surveillance et sûreté de fonctionnement des grands systèmes*, chapter Apprentissage multi-tâches pour le diagnostic d'un par de machines, pages 155–180. *Traité Information, Commande, Communication, IC2*, Hermès Science Publications, Paris, lavoisier edition, Avril 2012. (Cité page 1.)

- [13] E. Boutleux. *Diagnostic et suivi d'évolution de l'état d'un système par reconnaissance des formes floues : Application au modèle du réseau téléphonique français*. PhD thesis, Université Technologie de Compiègne, 1996. (Cité page 16.)
- [14] R. W. Brockett. On the algebraic structure theory of bilinear systems. *Academic*, pages 153–168, 1972. (Cité pages 75 et 76.)
- [15] C. Bruni, G. Dipillo, and G. Koch. Bilinear systems : An appealing class of nearly linear systems in theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(4) :334–348, August 1974. (Cité pages 75 et 76.)
- [16] E. Busvelle and J. P. Gauthier. High-gain and non-high-gain observers for nonlinear systems. *Contemporary Trends in Nonlinear Geometric Control Theory*, pages 257–286, 2002. (Cité page 11.)
- [17] S. M. Castillo, E. R. Gelso, and J. Armengol. Constraint satisfaction techniques under uncertain conditions for fault diagnosis in nonlinear dynamic systems. In *Proceedings of the 16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1216–1221, Ajaccio, France, 2008. (Cité page 10.)
- [18] C. T. Chang and J. W. Chen. Implementation issues concerning the ekf-based fault diagnosis techniques. *Chemical Engineering Science*, 2861-2882(18) :50, 1995. (Cité page 12.)
- [19] W. Chen, M. Saif, and Y. Soh. A variable structure adaptive observer approach for actuator fault detection and diagnosis in uncertain nonlinear systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 4, pages 2674–2678, Chicago, USA, 2000. (Cité page 11.)
- [20] E. Chow and A. Willsky. Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(7) :603–614, 1984. (Cité pages 1, 7, 12 et 17.)
- [21] R. N. Clark. Instrument fault detection. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 3 :456–465, 1978. (Cité page 13.)
- [22] R. N. Clark. *Fault diagnosis in dynamic systems : Theory and application*, chapter state estimation schemes for instrument fault detection. Prentice Hall, 1989. (Cité page 7.)
- [23] V. Cocquempot. Contribution à la surveillance des systèmes industriels complexes. In *Habilitation à Diriger des Recherches, Laboratoire d'Automatique et de Génie Informatique et Signal*, Lille, France, 10 novembre 2004. (Cité page 7.)
- [24] G. Comtet-Varga. *Surveillance des systèmes non-linéaires : Application à la machine asynchrone*. PhD thesis, l'université des sciences et Technologies de Lille, Lille, France, 2 Décembre 1997. (Cité pages 13 et 17.)
- [25] L. Cork and R. Walker. Sensor fault detection for uavs using a nonlinear dynamic model and the imm-ukf algorithm. In *Proceedings of the Conference on Information, Decision and Control*, pages 230–235, Adelaide, Australia, 2007. (Cité page 12.)
- [26] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms : An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Springer, 1992. (Cité page 13.)

- [27] P. D'Allessandro, A. Isidori, and A. Ruberti. Realization and structure theory of bilinear dynamical systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 12 :517–535, 1974. (Cité pages 75 et 76.)
- [28] U. B. Desai. Realization of bilinear stochastic systems. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 31(2) :189–192, February 1986. (Cité page 75.)
- [29] X. Ding and P. M. Frank. Frequency domain approach and threshold selector for robust model-based fault detection and isolation. In *IFAC/IMACS Symposium SAFE-PROCESS'91*, Baden-Baden, Germany, September 10-13 1991. (Cité page 7.)
- [30] S. Diop. Elimination in control theory. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 4(1) :17–32, 1991. (Cité page 13.)
- [31] H. T. Dorissen. Canonical forms for bilinear systems. *System & Control Letters*, 13(2) :153–160, 1989. (Cité pages 75 et 76.)
- [32] B. Dubuisson. *Diagnostic et reconnaissance de formes*. Hermès, Paris, 1990. (Cité page 7.)
- [33] C. Edwards, S. K. Spurgeon, and R. J. Patton. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4) :541–553, 2000. (Cité page 11.)
- [34] P. K. Eide and P. S. Maybeck. An mmae failure detection system for the f-16. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(3) :1125–1136, 1996. (Cité page 13.)
- [35] A. Emami-Naeini, M. M. Akhter, and S. M. Rock. Effect of model uncertainty on failure detection. the threshold selector. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(12) :1106–1115, 1988. (Cité page 7.)
- [36] E. Walter and L. Pronzato. *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997. (Cité page 9.)
- [37] P. M. Frank and X. Ding. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of Process Control*, 7(6) :403–424, 1997. (Cité page 10.)
- [38] Y. Funahashi. Stable state estimator for bilinear systems. *International Journal Control*, 29(2) :181–188, 1976. (Cité page 76.)
- [39] E. Alcorta Garcia and P. M. Frank. Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis : a survey. *Control Engineering Practice*, 5(5) :663–670, 1997. (Cité pages 10 et 11.)
- [40] C. Guernez-Jean. *Surveillance des Systèmes à Modèles Polynomiaux : Génération de Résidus et Étude de Sensibilité*. PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, France, 1998. (Cité page 13.)
- [41] F. Gustafsson. *Adaptive Filtering and Change Detection*. Wiley London, 2001. (Cité page 9.)
- [42] A. Hac. Design of disturbance decoupled observer for bilinear systems. *Journal of Dynamic Systems, measurements and Control - Transactions of the ASME*, 114(4) :556–562, 1992. (Cité page 76.)

- [43] H. Hammouri, P. Kabore, and M. Kinnaert. A geometric approach to fault detection and isolation for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(9) :1451–1455, 2001. (Cité page 25.)
- [44] H. Hammouri, M. Kinnaert, and E. H. El Yaagoubi. Observer-based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(10) :1879–1884, 1999. (Cité page 11.)
- [45] P. D. Hanlon and P. S. Maybeck. Multiple-model adaptive estimation using a residual correlation kalman filter bank. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 36(2) :393–406, 2000. (Cité pages 11 et 13.)
- [46] A. Hara and K. Furuta. Minimal order state observers for bilinear systems. *International Journal Control*, 24(5) :705–718, 1976. (Cité page 76.)
- [47] M. F. Harkat. *Détection et localisation de défauts par analyse en composantes principales*. PhD thesis, L’Institut National Polytechnique de Lorraine, France, Juin 2003. (Cité page 16.)
- [48] A. Hocine, D. Maquin, and J. Ragot. Finite memory observer for switching systems : application to diagnosis. In *Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005. (Cité page 13.)
- [49] M. Hou and A. C. Pugh. Observing state in bilinear systems : a uio approach. In *Proceedings of the IFAC Sympo. on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes : SAFEPROCESS’97*, pages 783–788, Pergamon 1998, Univ. of Hull, UK, 1997. (Cité page 76.)
- [50] C. S. Hsu, U. B. Desai, and C. A. Crawley. *Applied. Digital Control*, chapter Realization and approximation of discrete bilinear systems, pages 171–187. North-Holland, Amsterdam : Elsevier Science, 1985. (Cité page 75.)
- [51] I. A. Ibragimov and R. Z. Has’minskii. *Statistical estimation. Asymptotic Theory*. Springer-Verlag, 1981. (Cité page 8.)
- [52] A. Ichtev, J. Hellendoorn, and R. Babuska. Fault detection and isolation using multiple takagi-sugeno fuzzy models. In *Proceedings of the 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, volume 3, pages 1498–1502, Melbourne, Australia, 2001. (Cité page 11.)
- [53] A. Ingimundarson, J. M. Bravo, V. Puig, T. Alamo, and P. Guerra. Robust fault detection using zonotope-based set-membership consistency test. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23(4) :311–330, 2009. (Cité page 10.)
- [54] R. Isermann. On fuzzy logic applications for automatic control, supervision and fault diagnosis. *IEEE transactions on systems, man and cybernetics*, 28(2), March 1998. (Cité page 15.)
- [55] R. Isermann. *Fault-diagnosis systems : An Introduction from Fault Detection to Fault Tolerance*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006. (Cité pages 7, 8 et 9.)
- [56] R. Isermann and M. Münchhof. *Identification of Dynamic Systems : An Introduction with Applications (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing)*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011. (Cité page 7.)

- [57] A. Isidori. Direct construction of minimal bilinear realizations from nonlinear input-output maps. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(6) :626–631, 1973. (Cité page 75.)
- [58] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, New York, 1995. (Cité page 25.)
- [59] A. Isidori and A. Ruberti. *Realization Theory of Bilinear Systems*. 1973. (Cité pages 75 et 76.)
- [60] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter. *Applied Interval Analysis*. Springer, London, 2001. (Cité page 12.)
- [61] B. Jiang, M. Staroswiecki, and V. Cocquempot. Fault estimation in nonlinear uncertain systems using robust/sliding-mode observers. *IEEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 151(1) :29–37, 2004. (Cité page 11.)
- [62] H. L. Jones. Failure detection in linear systems. Technical report, Dept. Aeronautics Astronautics, MIT, Cambridge, MA, 1973. (Cité page 10.)
- [63] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE*, 92(3) :401–422, 2004. (Cité page 12.)
- [64] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1) :35–45, 1960. (Cité page 11.)
- [65] A. Y. Khapalov and R. R. Mohler. Reachable sets and controllability of bilinear time-invariant systems : a qualitative approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(9) :1342–1346, 1996. (Cité pages 75 et 76.)
- [66] M. Kieffer and E. Walter. Guaranteed estimation of the parameters of nonlinear continuous-time models : contributions of interval analysis. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 25(3) :191–207, 2011. (Cité page 9.)
- [67] M. A. Kramer. Malfunction diagnosis using quantitative models with non-boolean reasoning in expert systems. *AIChE Journal*, 33 :130–140, 1987. (Cité page 7.)
- [68] J. M. Lee, C. K. Yoo, S. W. Choi, P. A. Vanrolleghem, and I. B. Lee. Nonlinear process monitoring using kernel principal component analysis. *Chemical Engineering Science*, 59(1) :223–234, 2004. (Cité page 28.)
- [69] S. Lesecq, S. Petropol, and A. Barreau. Asynchronous motor parametric faults diagnosis using wavelet analysis. In *IEEE Sdemped Conference*, Goriza, Italie, 2001. (Cité page 14.)
- [70] M. L. Leuschen, I. D. Walker, and J. R. Cavallaro. Fault residual generation via nonlinear analytical redundancy. *IEEE Transaction On Control Systems Technology*, 13(3) :452–458, 2005. (Cité page 25.)
- [71] P. Li and V. Kadiramanathan. Particle filtering based likelihood ratio approach to fault diagnosis in nonlinear stochastic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C : Applications and Reviews*, 31(3) :337–343, 2001. (Cité page 12.)
- [72] W. Li and S. J. Qin. Consistent dynamic pca based on errors-in-variables subspace identification. *Journal of Process Control*, 11(6) :661–678, December 2001. (Cité page 26.)

- [73] W. Li, H. H. Yue, S. Valle-Cervantes, and S. J. Qin. Recursive pca for adaptive process monitoring. *Journal of Process Control*, 10(5) :471–486, 2000. (Cité page 28.)
- [74] Z. Li and B. Dahhou. An observers based fault isolation approach for nonlinear dynamic systems. In *In Proceedings of the 2nd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*, Marrakech, Morocco, 2006. (Cité page 11.)
- [75] I. Lo. Global bilinearization of systems with control appearing linearly. *SIAM Journal on Control*, 13 :879–884, 1975. (Cité page 75.)
- [76] D. G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2) :190–197, 1966. (Cité page 10.)
- [77] D. Maquin. Diagnostic à base de modèles des systèmes technologiques. Habilitation ? diriger des recherches, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 18 Novembre 1997. (Cité page 17.)
- [78] J. L. Massey and M. K. Sain. Inverses of linear sequential circuits. *IEEE Transactions Computers*, 17 :330–337, 1968. (Cité page 42.)
- [79] C. Mechmeche and S. Nowakowski. Residual generator sythesis for bilinear systems with unknown inputs. In *Pmc. of the IFAC Sympo. on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Pmcesses : SAFEPROCESS'91*, pages 765–770, Pergamon, Univ. of Hull, UK, 1997. (Cité page 75.)
- [80] R. K. Mehra and J. Peschon. An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamic systems. *Automatica*, 7(5) :637–640, 1971. (Cité page 11.)
- [81] T. El Mezyani. *Méthodologie de surveillance des syst ?mes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Universitaire de Lille, Lille, France, 2005. (Cité page 105.)
- [82] L. A. Mironovski. Functional diagnosis of linear dynamic systems. *Automation and Remote Control*, 40 :1198–1205, 1979. (Cité page 21.)
- [83] L. A. Mironovski. Functional diagnosis of dynamic system - a survey. *Automation and Remote Control*, 41 :1122–1142, 1980. (Cité page 21.)
- [84] R. R. Mohler. Bilinear control processes. In *Academic Press, Inc. New York, USA*, 1973. (Cité page 75.)
- [85] R. R. Mohler. Nonlinear systems, application to bilinear control. In *vol. 2, Prentice-Hall : Englewood Cliffs, NJ, USA*, 1990. (Cité page 75.)
- [86] R. R. Mohler. Nonlinear systems-v.2 : Applications to bilinear systems. In *Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, USA*, 1991. (Cité page 75.)
- [87] R. R. Mohler and P. A. Frick. Bilinear demographic control processes. *International Journal of Policy Analysis Information Systems*, 2 :57–70, 1979. (Cité page 75.)
- [88] R. R. Mohler and W. J. Kolodziej. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 10(10) :683–688, October 1980. (Cité page 75.)
- [89] J. Montmain. *Interprétation qualitative de simulation pour le diagnostic en ligne de procédé continu*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1992. (Cité page 14.)

- [90] F. Nejjari, V. Puig, L. Giancristofaro, and S. Koehler. Extended luenberger observer-based fault detection for an activated sludge process. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, pages 9725–9730, Seoul, Korea, 2008. (Cité page 11.)
- [91] R. Nikoukhah. Innovations generation in the presence of unknown inputs : application to robust failure detection. *Automatica*, 30(12) :1851–1867, 1994. (Cité page 11.)
- [92] G. Oster. *Bilinear Models in Ecology*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1978. (Cité page 75.)
- [93] R. J. Patton and J. Chen. Observer-based fault detection and isolation : roburobust and applications. *Control Engineering Practice*, 5(5) :671–682, 1997. (Cité page 10.)
- [94] R. J. Patton, P. M. Frank, and R. N. Clark. *Fault Diagnosis in dynamic Systems, Theory and Applications*. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1989. (Cité page 7.)
- [95] K. M. Pekpe. *Identification par les techniques des sous-espaces - Application au diagnostic*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, Lorraine, France, 2004. (Cité page 2.)
- [96] K. M. Pekpe, G. Mourot, and J. Ragot. Subspace method for sensor fault detection and isolation : application to grinding circuit monitoring. In *Proceedings of the 11th IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing*, pages 47–52, Nancy, France, 2006. (Cité page 9.)
- [97] J. E. Potter and M. C. Suman. Thresholdless redundancy management with arrays of skewed instruments. *Integrity in Electronic Flight Control Systems, AGARDOGRAPH-224*, 15 :11–25, 1977. (Cité page 17.)
- [98] V. Puig. Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches : application to real case studies. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 20(4) :619–635, 2010. (Cité pages 9 et 12.)
- [99] V. Puig, J. Quevedo, T. Escobet, F. Nejjari, and S. de las Heras. Passive robust fault detection of dynamic processes using interval models. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(5) :1083–1089, 2008. (Cité page 12.)
- [100] T. Raïssi, G. Videau, and A. Zolghadri. Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3) :518–527, 2010. (Cité page 12.)
- [101] V. Reppa and A. Tzes. Fault detection and diagnosis based on parameter set estimation. *IET Control Theory and Applications*, 5(1) :69–83, 2011. (Cité page 10.)
- [102] J. Ritt. *Differential algebra*. American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 1950. (Cité pages 13 et 17.)
- [103] J. Ru and R. Li. Interacting multiple model algorithm with maximum likelihood estimation for fdi. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Intelligent Control*, pages 661–666, 2003. (Cité page 13.)
- [104] D. Sauter and F. Hamelin. Frequency domain optimization for robust fault detection and isolation in dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :878–882, 1999. (Cité page 14.)

- [105] B. Schölkopf, A. J. Smola, and K. Möller. Nonlinear component analysis as a kernel eigenvalue problem. *Neural Computation*, 10(5) :1299–1399, 1998. (Cité page 28.)
- [106] G. Shafer. A mathematical theory of evidence. Technical report, Princeton University Press, Princeton, New-jersey, USA, 1976. (Cité page 7.)
- [107] A. Shumsky. Redundancy relations for fault diagnosis in nonlinear uncertain systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 17(4) :477–489, 2007. (Cité page 25.)
- [108] S. Simani, C. Fantuzzi, and R. J. Patton. *Model-based Fault Diagnosis in Dynamic Systems Using Identification Techniques*. Springer-Verlag, London, 2003. (Cité page 9.)
- [109] M. Staroswiecki and G. Comtet-Varga. Analytical redundancy relations for fault detection and isolation in algebraic dynamic systems. *Automatica*, 37(5) :687–699, 2001. (Cité page 25.)
- [110] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 :116–132, 1985. (Cité page 11.)
- [111] C. P. Tan and C. Edwards. Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator sensor faults. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(5) :443–463, 2003. (Cité page 11.)
- [112] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, and S. N. Kavuri. A review of process fault detection and diagnosis. part ii : Qualitative models and search strategies. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :313–326, 2003. (Cité page 7.)
- [113] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin, and S. N. Kavuri. A review of process fault detection and diagnosis. part i : Quantitative model-based methods. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :293–311, 2003. (Cité page 7.)
- [114] V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin, and S. N. Kavuri. A review of process fault detection and diagnosis. part iii : Process history based methods. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :327–346, 2003. (Cité page 7.)
- [115] V. Verma, G. Gordon, R. Simmons, and S. Thrun. Real-time fault diagnosis. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 11(2) :56–66, 2004. (Cité page 12.)
- [116] J. Villemonteix, E. Vazquez, and E. Walter. Bayesian optimization for parameter identification on a small simulation budget. In *Proceedings of the 15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID*, Saint-Malo France, 2009. (Cité page 8.)
- [117] E. Walter and L. Pronzato. On the identifiability and distinguishability of nonlinear parametric models. *Mathematics and Computers in Simulation*, 42 :125–134, 1996. (Cité page 8.)
- [118] J. Wang and S. J. Qin. A new subspace identification approach based on principal component analysis. *Journal of Process Control*, 12(8) :841–855, 2002. (Cité page 26.)
- [119] X. Wang, U. Kruger, and B. Lennox. Recursive partial least squares algorithms for monitoring complex industrial processes. *Control Engineering Practice*, 11(6) :613–632, 2003. (Cité page 28.)

- [120] X. Wang and V. L. Syrmos. Interacting multiple particle filters for fault diagnosis of non-linear stochastic systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 4274–4279, Seattle, USA, 2008. (Cité page 12.)
- [121] S. M. Williams and R. G. Hoft. Adaptive frequency domain control of ppm switched power line conditioner. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 6 :665–670, 1991. (Cité page 14.)
- [122] K. Xiong, C. W. Chan, and H. Y. Zhang. Unscented kalman filter for fault detection. In *In Proceedings of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005. (Cité page 12.)
- [123] A. Xu and Q. Zhang. Nonlinear system fault diagnosis based on adaptive estimation. *Automatica*, 40(7) :1181–1193, 2004. (Cité page 11.)
- [124] H. L. Yang and M. Saif. State observation, failure detection and isolation (fdi) in bilinear systems. *International Journal Control*, 67(6) :901–920, 1997. (Cité pages 75 et 76.)
- [125] V. A. Yatsenko and P. C. Knopov. Parameter estimation of almost periodic signal via controllable bilinear observations. *Aut. Remote Contr.*, 3 :65–70, 1992. (Cité page 8.)
- [126] D. Yu and D. N. Shields. A bilinear fault detection observer. *Automatica*, 32(11) :1597–1602, 1996. (Cité page 76.)
- [127] D. Yu and D. N. Shields. A bilinear fault detection observer and its application to hydraulic drive system. *International Journal of Control*, 64(6) :1023–1047, 1996. (Cité page 75.)
- [128] D. L. Yu and D. N. Shields. A fault detection methods for a nonlinear system and its application to a hydraulic test rig. In *Preprints of the IFAC Sympo. on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes : SAFEPROCESS'94*, volume 1, pages 305–310, Espoo, Finland, 1994. (Cité page 75.)
- [129] D. L. Yu and D. N. Shields. A bilinear fault detection filter. *International Journal Control*, 68 :417–430, 1997. (Cité page 75.)
- [130] D. L. Yu, D. N. Shields, and S. Daley. A bilinear fault-detection observer and its application to a hydraulic drive system. *International Journal of Control*, 64(6) :1023–1047, 1996. (Cité pages 75 et 76.)
- [131] D. L. Yu, D. N. Shields, and J. L. Mahtani. Fault detection for bilinear systems with application to a hydraulic system. In *Proceedings of The Third IEEE Conference on Control Applications*, pages 1379–1384, Glasgow, Scotland, 1994. (Cité page 75.)
- [132] D. L. Yu, D. N. Shields, and J. L. Mahtani. A nonlinear fault detection method for a hydraulic system. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Control, Pergri-nus Press*, number 389, pages 1318–1322, Warwick, UK, 1994. (Cité page 75.)
- [133] L. Zadeh. fuzzy sets. *Information and Control*, 8 :338–353, 1965. (Cité page 15.)
- [134] M. Zeitz. The extended luenberger observer for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 9(2) :149–156, 1987. (Cité page 11.)

- [135] M. Zemoury. *Contribution à la surveillance des systèmes de production à l'aide des réseaux de neurones dynamiques : Application à la e-maintenance*. PhD thesis, université de Franche-Comté, France, 2003. (Cité page 15.)
- [136] K. Zhang, B. Jiang, and V. Cocquempot. Adaptive observer-based fast fault estimation. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 6(3) :320–326, June 2008. (Cité page 59.)
- [137] Q. Zhang, F. Campillo, F. Cerou, and F. Legland. Nonlinear system fault detection and isolation based on bootstrap particle filters. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 3821–3826, Seville, Spain, 2005. (Cité page 12.)
- [138] X. Zhang, M. M. Polycarpou, and T. Parisini. Fault diagnosis of a class of nonlinear uncertain systems with lipschitz nonlinearities using adaptive estimation. *Automatica*, 46(2) :290–299, 2010. (Cité page 11.)
- [139] Y. Zhang and X. R. Li. Detection and diagnosis of sensor and actuator failures using imm estimator. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 34(4) :1293–1313, 1998. (Cité page 13.)
- [140] H. Zhengang, L. Weihua, and S. L. Shah. Robust fault diagnosis in the presence of process uncertainties. In *15th International Foundation of Automatic Control (IFAC) World Congress*, Barcelona, Spain, July 2002. (Cité page 24.)
- [141] A. Zolghadri. An algorithm for real-time failure detection in kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(10) :1537–1539, 1996. (Cité page 11.)
- [142] G. Zwingelstein. *Diagnostic des défaillances : théorie et pratique pour les systèmes industriels*. Hermès, Paris, 1995. (Cité page 7.)

Titre Méthode de Projection des Données pour le Diagnostic des Systèmes Linéaires et Bilinéaires

Résumé Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à la détection, la localisation et l'estimation de défauts (défauts de capteurs, d'actionneurs et défauts internes) dans les systèmes modélisés sous forme d'état linéaire et bilinéaire. La méthode que nous proposons, appelée MPD pour Méthode par Projection des Données, nécessite de connaître la structure du modèle comportemental mais ne nécessite pas de connaître les valeurs des paramètres de ce modèle. Les indicateurs de défauts (résidus) sont générés par des techniques de projection matricielle en utilisant uniquement les données d'entrées et de sorties mesurées. Les défauts internes, supposés abrupts et invariants, entraînent des dynamiques différentes qui correspondent à des modes de fonctionnement défaillant. Le problème de diagnostic se ramène alors à un problème d'estimation des instants de commutation et de reconnaissance du mode actif à chaque instant. Les propriétés de détectabilité de commutation (détectabilité du défaut) et de discernabilité entre modes (identifiabilité du défaut) sont caractérisées et discutées. Cette méthode peut être directement implantée sur des applications de même type sans que les paramètres de chaque système soient identifiés. Cette méthode pourrait donc être très utile pour tester des systèmes en fin de chaîne de fabrication ou pour être implantée sur un parc (groupe) de machines identiques. Elle pourrait être aussi utile pour des systèmes à paramètres difficilement identifiables.

Mots-clés Les méthodes à base de données, les systèmes bilinéaires, les systèmes à commutations, la détection et la localisation de défaut, l'estimation de défaut

Title Data-Projection Method for Diagnosis of Linear and Bilinear systems

Abstract In this thesis we are interested in detecting, isolating and estimating faults (sensors, actuators and internal faults) in systems modeled as linear and bilinear state form. The method we propose, called MPD for Data Projection Method, requires knowledge of the structure of the behavioral model but does not need to know the values of model parameters. Faults indicators (residuals) are generated by matrix projection techniques using only input and output measured data. Internal faults, assumed abrupt and invariants, lead to different dynamics corresponding to faulty operational modes. The diagnosis problem then reduces to a problem of estimation of switching times and recognition of active mode at each time instant. Properties of switching detectability (fault detectability) and discernability between modes (fault identifiability) are characterized and discussed. This method can be directly implemented on applications of the same type without identifying parameters of each system. This method could be very useful for testing systems at the end of the production line or to be implanted on a park (group) of identical machines. It could also be useful for systems with parameters not easily identifiable.

Keywords Data-based methods, bilinear systems, switching systems, fault detection and isolation, fault estimation